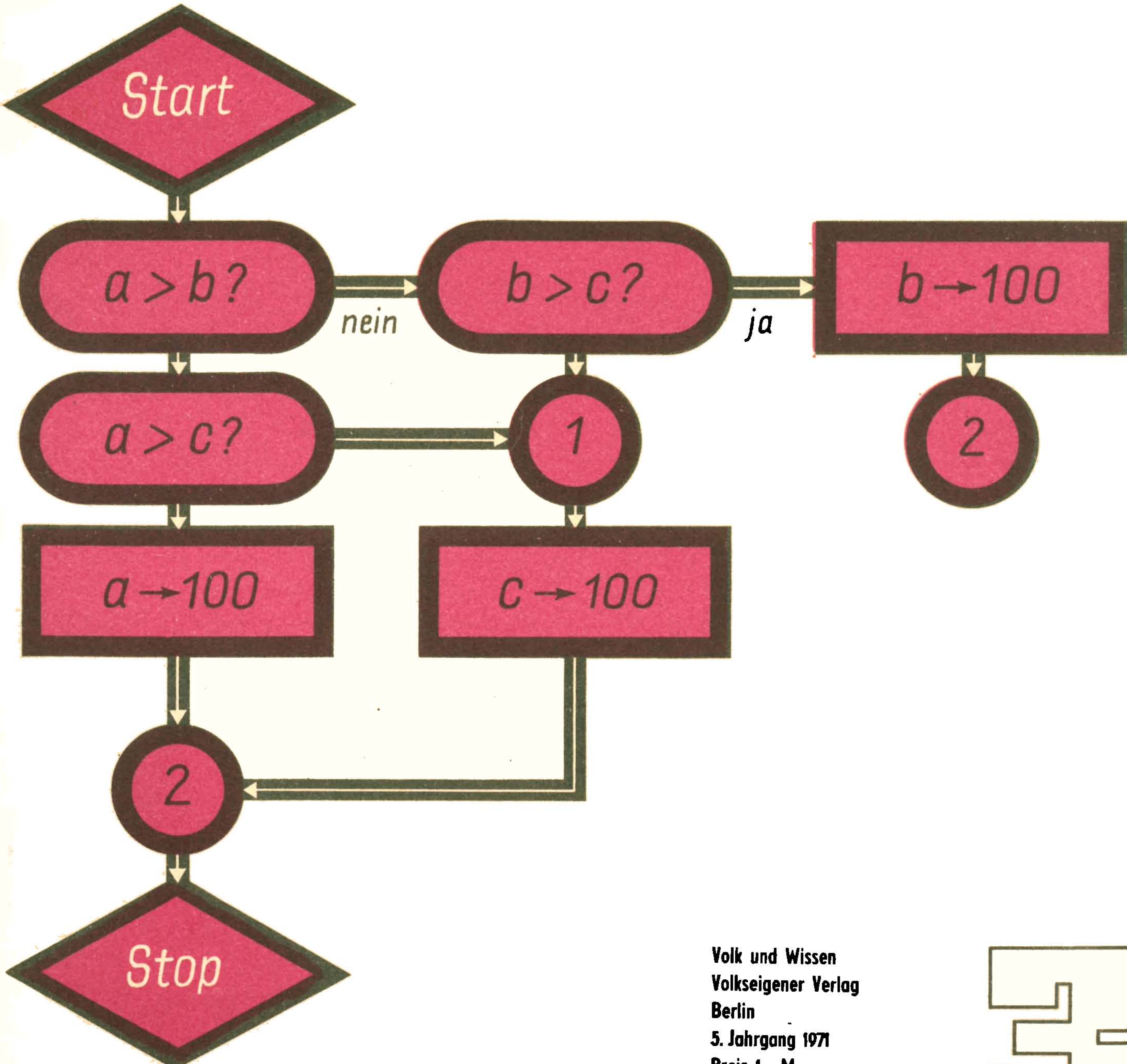
Mathematische Schülerzeitschrift

# alpha





Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
5. Jahrgang 1971
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059


3

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import BmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: L. Berger, Žilinä (S. 52); Urania Heft 2/71 (S. 52); J. Lehmann, Leipzig (S. 55, 60, 65);
Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes des Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 17. März 1971

# alpha
## Mathematische Schülerzeitschrift

## Inhalt

Dieses Heft wurde zu Ehren der XIII. Internationalen Mathematikolympiade in der ČSSR (Juli 1971) gestaltet.



* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

# Über die Ramseyschen Zahlen

Jiří Sedláček

Wir beginnen mit einer einfachen Aufgabe. Sechs Schüler haben vereinbart, einander in den Ferien über zwei Themen zu schreiben. Jeder Schüler wird also jedem der fünf anderen Schüler schreiben, und jedes Paar hat sich auf ein Thema festgelegt. Wir sollen nun beweisen, daß es mindestens drei Schüler gibt, die untereinander über das gleiche Thema schreiben.

Wir erleichtern uns die Lösung durch eine geometrische Veranschaulichung. Jedem der 6 Schüler können wir einen Punkt in der Ebene zuordnen. Es ist gleichgültig, wie wir die Punkte in der Ebene auswählen, jedoch ist es zweckmäßig, wenn von diesen 6 Punkten keine drei auf einer Geraden liegen.
Auch wenn die Lage der einzelnen Punkte insgesamt beliebig ist, wollen wir sie uns so vorstellen, daß sie die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks bilden. Wenn ein Paar der Freunde über das erste Thema schreibt, wird das in der Figur so dargestellt, daß wir die zugehörigen zwei Punkte durch eine rote Linie (Sehne) verbinden. Wenn ein Paar über das zweite Thema schreibt, werden die beiden Punkte durch eine blaue Linie verbunden. Nun wäre zu beweisen, daß in dieser rot-blauen Figur immer wenigstens ein Dreieck existiert, dessen Seiten von gleichfarbigen Strecken gebildet werden. (Hier in der Zeitschrift ersetzen wir in den Figuren eine rote Strecke durch eine ausgezogene Linie, während wir eine blaue Strecke gestrichelt darstellen.)
Nun können wir an die Lösung der Aufgabe herangehen. Wir führen den Beweis indirekt, setzen also voraus, daß die oben angeführte Aussage falsch ist. Dann wäre es möglich, eine rotblaue Figur so zu zeichnen, daß es dabei weder ein rotgezeichnetes noch ein blaugezeichnetes Dreieck gibt.
Was folgt daraus? In der Figur gibt es insgesamt 15 Strecken, denn es liegt ein Sechseck mit allen Diagonalen vor. Zeichnet euch als Überlegungsfigur ein solches Sechseck, zunächst einfarbig. In der mehrfarbig gezeichneten Figur müssen dann wenigstens 8 Strecken gleichfarbig dargestellt sein (die übrigen Strecken haben dann alle die gleiche andere Farbe). Ohne daß wir damit die Allgemeinheit der Überlegungen einschränken, können wir voraussetzen, daß die erste Farbe rot sein soll. Es läßt sich nun beweisen, daß es wenigstens einen Punkt $A$ gibt, von dem mindestens drei rote Strecken ausgehen. Wäre diese Aussage falsch, dann dürften von jedem der sechs Punkte höchstens zwei rote Strecken ausgehen und die Figur hätte folglich höchstens $(6 \cdot 2) : 2 = 6$ rote Strecken. Das ist aber ein Widerspruch zur Feststellung, daß es wenigstens 8 rote Strecken geben muß.
Wir tragen nun die drei roten Strecken, die vom Punkt $A$ ausgehen sollen, in die Figur ein und bezeichnen die Endpunkte dieser Strecken der Reihe nach mit $B$, $C$, $D$ (siehe Figur 1). Die Strecke $\overline{BC}$ kann nicht rot sein, sonst würde damit ein rotes Dreieck $ABC$ entstehen; also ist $\overline{BC}$ eine blaue Strecke. Auch die Strecke $\overline{CD}$ ist blau darzustellen (entsprechend einer ähnlichen Überlegung). Welche Farbe gehört zur Strecke $\overline{BD}$? Falls rot, dann gäbe es ein rotes Dreieck $ABD$; falls blau, dann wäre das Dreieck $BCD$ blau. Diese Überlegung führt also auf einen Widerspruch, daher muß die zugehörige Annahme falsch sein. Damit ist nun die ganze Aufgabe gelöst.

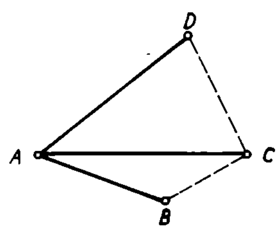



Bild 1

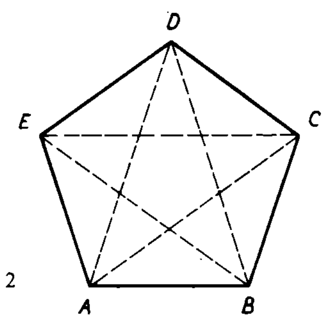



Bild 2

Wir wollen jetzt noch eine Variante zu dieser Aufgabenstellung betrachten. Hätten sich 7, 8 oder eine noch größere Anzahl von Schülern verabredet, dann würden wir aus diesen einfach eine Gruppe von 6 Schülern auswählen und durch eine Überlegung, wie wir sie schon kennen, könnten wir beweisen, daß es wenigstens drei Schüler gibt, die einander zum gleichen Thema schreiben. Ein solcher Beweis gelingt aber nicht, wenn es sich nur um fünf Schüler handelt. Dies zeigt uns Figur 2; wir erkennen dabei ein Fünfeck $ABCDE$ mit seinen Diagonalen. Wenn die Freunde einander so schreiben, wie die voll- bzw. gestricheltgezeichneten Linien anzeigen, erkennen wir, daß es keine Gruppe von drei Schülern gibt, die einander zum gleichen Thema schreiben. Geometrisch gesprochen: In der Figur 2 gibt es kein Dreieck mit den Eckpunkten $A$, $B$, $C$, $D$ oder $E$, in dem alle drei Seiten des Dreiecks die gleiche Farbe besitzen.
Wer die Aufgaben der IMO verfolgt, wird sich möglicherweise erinnern, daß bei diesem Wettbewerb vor einigen Jahren eine etwas kompliziertere Aufgabe gestellt wurde. Dabei korrespondierten 17 Wissenschaftler zu drei Themen und es sollte bewiesen werden,

daß man dann wenigstens eine Gruppe von drei Wissenschaftlern finden kann, die einander zum gleichen Thema schreiben.*

Bei den Figuren, die wir hier benutzt haben, war es unwesentlich, wie die Punkte in der Ebene festgelegt waren; wir hätten auch die Punkte durch Kurven verbinden können, anstatt der tatsächlich benutzten Strecken. Das Gebilde, das wir für unsere Überlegungen verwendet haben, wird in der Mathematik Graph genannt. Wir wollen in diesem Zusammenhang für diesen Begriff keine genaue Definition geben und stellen daher nur fest, daß ein Graph aus zwei Arten von Elementen besteht: aus *Knoten*, die wir als Punkte in der Ebene darstellen, und aus *Kanten*, die als Strecken oder als Kurven dargestellt werden. Eine Kante verbindet immer zwei verschiedene Knoten. Wenn wir sagen, daß ein Graph vollständig ist, dann ist jedes Paar von Punkten durch genau eine Kante verbunden.

Die ursprüngliche Aufgabe können wir nun von einem höheren Standpunkt aus betrachten. Es seien $a$, $b$ zwei gegebene natürliche Zahlen; dann bezeichnen wir mit $n = R(a, b)$ die kleinste natürliche Zahl $n$ mit folgender Eigenschaft: jeder vollständige Graph mit $n$ Knoten, dessen Kanten entweder rot- oder blaugefärbt sind, enthält unter den $n$ Knoten $a$ Knoten, die nur durch rote Kanten, oder $b$ Knoten, die nur durch blaue Kanten verbunden sind.

Wir können hier nicht beweisen, daß eine solche Zahl $R(a,b)$ immer existiert. Der Beweis ist kompliziert und in der Fachliteratur zu finden. Diese Zahlen $R(a, b)$ werden manchmal *Ramseysche Zahlen* genannt (nach dem englischen Mathematiker F. P. Ramsey, der sich schon 1929 mit ähnlichen, aber weitaus allgemeineren Fragestellungen beschäftigte).

Wir hatten zu Beginn des Beitrags den Sachverhalt einer Aufgabe erläutert und können daraus erkennen, daß $R(3, 3) = 6$. Ihr könnt euch vorstellen, daß für alle Paare $a, b$ die Beziehung $R(a, b) = R(b, a)$ gilt. Das Studium der Ramseyschen Zahlen ist schwierig und es ist bisher keine Formel bekannt, mit der man diese Zahlen im allgemeinen Fall einfach darstellen könnte. Es wurden nur Ungleichungen gefunden, die für Ramseysche Zahlen gelten und die eine ungefähre Bestimmung ihres numerischen Wertes gestatten. Die ungarischen Mathematiker Erdös und Szekeres führten 1935 die folgende Ungleichung an:

$$R(a, b) \leqq R(a-1, b) + R(a, b-1).$$

Wer mit Formeln aus der Kombinatorik vertraut ist, kann aus der eben angeführten Beziehung folgende herleiten:

$$R(a, b) \leqq \binom{a+b-2}{a-1}.$$

Auch die Beschränkung auf den Fall $a = b$ vereinfacht das Studium der Ramseyschen Zahlen nur unwesentlich. Durch Einsetzen in die eben angegebene Beziehung erhalten wir

$$R(a, a) \leqq \binom{2a-2}{a-1}.$$

Diese Ungleichung wurde 1963 durch C. Frasnay verbessert; seine Ungleichung lautet

$$R(a, a) \leqq \frac{8}{9}\binom{2a-2}{a-1}.$$

Selbstverständlich können wir die Ramseyschen Zahlen auch für drei, vier oder mehr Farben definieren. Das Studium der Zahlen $R(a, b, c)$, $R(a, b, c, d)$ usf. ist freilich noch komplizierter.


Seit dem Jahr 1936, als der ungarische Mathematiker *D. König* in Leipzig sein bekanntes Buch „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" veröffentlichte, ist die Graphentheorie sowohl in die Breite als auch in die Tiefe gewachsen. Es entstanden neben Hunderten von wissenschaftlichen Arbeiten auch einige gute Lehrbücher, doch eine leichtfaßliche Einführung in diese Disziplin, die die Mathematikstudenten und die an der Graphentheorie interessierten Studenten und Wissenschaftler anderer Fachgebiete lesen können, fehlt noch immer. Ich denke hier vor allem an Physiker, Chemiker, Elektro-Ingenieure, aber auch an Ökonomen, Soziologen, Linguisten und Wissenschaftler anderer verwandter Gebiete. Das vorliegende Buch möge als ein Versuch in dieser Richtung gewertet werden. Es setzt neben einer guten Kenntnis der Schulmathematik freilich auch noch eine gewisse Fähigkeit zum abstrakten Denken voraus. Meiner Ansicht nach sind auch Schüler der höheren Klassen in der Lage, allein oder in Arbeitsgemeinschaften den Stoff durchzuarbeiten und zu verstehen.

Trotz der Elementarfassung und des geringen Umfangs des Buches war ich bestrebt, möglichst viele jener Probleme zu streifen, die in letzter Zeit in der Theorie der Graphen behandelt wurden. Jiří Sedláček

* Aufgabe 4, VI. IMO – UdSSR 1964

Jeder von 17 Wissenschaftlern steht im Briefwechsel mit allen anderen. Sie behandeln in ihrem Briefwechsel nur drei Themen, und je zwei Wissenschaftler behandeln ein und nur ein Thema. Zu beweisen ist, daß es mindestens drei Wissenschaftler gibt, die untereinander ein und dasselbe Thema behandeln.

# Eine Aufgabe von Doc. Jan Vyšín

*Karls-Universität Praha*

▲693 Diesmal legen wir euch keine bestimmte Aufgabe oder kein Problem vor; wir verlangen etwas mehr. Wir beschreiben euch eine mathematische Situation und eure Aufgabe ist folgende:
Ihr bildet zuerst im Rahmen dieser Situation einige Probleme, die ihr dann löst. Es ist klar, daß wir in diesem Falle von euch mehr Phantasie und Erfindungsgabe verlangen als zum Lösen einer der üblichen mathematischen Aufgabe nötig ist. Aber wir bieten euch mehr an: Eure Arbeit wird interessanter sein, ihr werdet dabei mehr Freiheit haben und was das Wichtigste ist: Ihr werdet eine große Kunst kennen lernen; das ist die Kunst, Fragen zu stellen.
Wie ihr vielleicht wißt, ist es manchmal schwieriger, Aufgaben zu stellen – natürlich interessante, einen wertvollen Kern enthaltende Aufgaben – als dieselben zu lösen. Deshalb sind heutzutage die sogenannten *Problemsituationen* in den Mittelpunkt des Interesses aller schöpferischen Mathematiker und Mathematiklehrer getreten.
Unsere Problemsituation kann folgendermaßen beschrieben werden: In einer gegebenen Ebene (oder auf einer Geraden oder im Raum) ist eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ gegeben. Wir setzen voraus, daß die Menge $\mathfrak{M}$ mindestens zwei Punkte enthält und daß die Entfernung zwischen je zwei ihrer Punkte eine gewisse positive Zahl $\delta$ übertrifft. Wir sollen die Menge $\mathfrak{M}$ in mindestens zwei elementfremde nicht leere Untermengen zerlegen. Solche Zerlegungen sind geometrisch charakterisiert, z. B. kann die Menge $\mathfrak{M}$ durch Geraden, Kreislinien, Ebenen oder Kugelflächen zerlegt werden.
Erinnert euch an die XII. Internationale Mathematikolympiade! Unter den Wettbewerbsaufgaben befand sich auch eine Aufgabe über das Zerlegen gewisser Zahlmengen in zwei arithmetisch charakterisierte Untermengen. (Siehe *alpha* 5/70, S. 112, Aufg. 4) Es war also eine Aufgabe, deren Thematik eine arithmetische Analogie unserer geometrischen Problemsituation war. Es handelte sich um die Zerlegung einer aus sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen bestehenden Menge in zwei Teilmengen derart, daß die Produkte aller Zahlen jeder von diesen Teilmengen einander gleich waren.

Die gegebene geometrische Situation bietet uns sofort die erste Frage: Kann die Punktmenge $\mathfrak{M}$ auch unendlich sein? Es ist klar, daß jede endliche Punktmenge die Grundbedingung erfüllt: Ist nämlich $\delta_0$ die kleinste der Entfernungen aller Punktepaare der Menge $\mathfrak{M}$, so genügt es, $\delta \frac{1}{2}\delta_0$ zu wählen, um die Forderung zu erfüllen.
Nehmen wir an, daß die Menge $\mathfrak{M}$ (in einer Ebene $\varrho$) unendlich ist, jedoch die vorgeschriebene „Abstandsbedingung“ erfüllt. Konstruieren wir in $\varrho$ ein Quadratnetz, dessen Quadrate die Seitenlänge $\frac{1}{4}\delta\sqrt{2}$ haben. Die größte in jedem einzelnen Netzquadrat enthaltene Strecke hat die Länge

$$d=\left(\frac{1}{4}\delta\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=\frac{1}{2}\delta.$$

Deshalb liegt in jedem Netzquadrat (seine Grenze eingeschlossen) höchstens ein einziger Punkt der Menge $\mathfrak{M}$. Die Figur 1 zeigt eine gebrochene Spirallinie, die einmal durch das Innere jedes Netzquadrats geht. Dadurch ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung einer gewissen Menge der Netzquadrate und der Menge $\mathfrak{N}$ aller natürlichen Zahlen gegeben. Das bedeutet: Ist die Menge $\mathfrak{M}$ unendlich, so ist sie abzählbar, d. h. man kann eine umkehrbar eindeutige Abbildung auf die Menge aller natürlichen Zahlen finden; die Fig. 1 zeigt, wie eine solche Menge $\mathfrak{M}$ konstruierbar ist.

▲1▲ Die Menge $\mathfrak{M}$ ist endlich. Es sind zwei konzentrische Kreislinien $k_1$, $k_2$ zu konstruieren, so daß folgende Forderungen erfüllt werden:
a) weder $k_1$ noch $k_2$ enthält einen Punkt der Menge $\mathfrak{M}$.
b) das Innere des Kreises $k_1$, das Innere des Kreisringes ($k_1$, $k_2$) und das Äußere des Kreises $k_2$ enthalten dieselbe Punktanzahl der Menge $\mathfrak{M}$.
Die Aufgabe ist natürlich dann und nur dann lösbar, wenn die Anzahl aller Elemente der Menge $\mathfrak{M}$ durch 3 teilbar ist. Auf dem Bild 2 ist $\mathfrak{M}=\{A_1, A_2, \ldots, A_9\}$. Den Punkt $S$ (d. h. den gemeinsamen Mittelpunkt der Kreislinien $k_1$, $k_2$) wählen wir derart, daß er auf keiner Symmetrieachse irgendwelcher Strecken $\overline{A_iA_k}$ $(i \neq k)$ liegt. Dann sind nämlich alle Entfernungen $\overline{SA_i}$ voneinander verschieden. Wählen wir die Bezeichnung der Punkte $A_i$ so, daß

$$\overline{SA_1}<\overline{SA_2}<\overline{SA_3}<\ldots<\overline{SA_9}$$

ist; dann genügt es, die Radien der Kreise $k_1$, $k_2$ folgendermaßen zu wählen:

$$SA_3<r_1<SA_4<r_2<SA_7.$$

Wenn wir die Forderung a) auslassen und gleichzeitig jedes Gebilde durch seine Berandung ergänzen, so ist die Aufgabe auch in dem Falle lösbar, wenn die Punktanzahl der Menge $\mathfrak{M}$ kein Vielfaches von 3 ist.

▲2▲ Die in der Ebene $\varrho$ liegende Punktmenge ist unendlich, aber b abzählbar; z. B. die Menge der Ecken sämtlicher Netzquadrate eines bestimmten Netzes (Fig. 3). Die Menge $\mathfrak{M}$ ist in zwei Teilmengen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ zu zerlegen, so daß jede von ihnen in einer abgeschlossenen Halbebene $\varrho_1$, $\varrho_2$ liegt; die Grenzlinien dieser Halbebenen sollen zwei verschiedene Parallelen von maximaler Entfernung sein.
So liegt z. B. auf dem Bild 3 im Innern des Ebenenstreifens kein Punkt der Menge $\mathfrak{M}$; die Grenzen beider Halbebenen sind die Verbindungslinien der Punkte (0; 0), (2; 1) und (1; 1), (3; 2). Ihre Entfernung (Breite des Streifens) ist $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0{,}477$ und für die gegebene Richtung der Grenzlinien kann sie nicht vergrößert werden.

▲3▲ Die Menge $\mathfrak{M}$ ist endlich und umfaßt eine gerade Punktanzahl $2n$ $(n \geq 2)$. Die Menge $\mathfrak{M}$ ist in zwei Teilmengen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ zu zerlegen, deren jede $n$ Punkte enthält und deren jede in einem Quadrat liegt. Die beiden Quadrate sollen parallele Seiten haben und punktfremd sein (Fig. 4, wo $n=5$ ist).
Wir bestimmen eine Gerade $s$ derart, daß sie zu keiner Verbindungslinie irgendeines Punktpaares der Menge $\mathfrak{M}$ parallel ist. Wir projizieren sämtliche Punkte der Menge $\mathfrak{M}$ mit Projektionsrichtung ($s$) auf eine zu $s$ senkrechte Gerade $q$. So erhalten wir $2n$ verschiedene Punkte der Geraden $q$, die eine Menge $\mathfrak{M}'$ bilden. Diese Menge $\mathfrak{M}'$ zerlegen wir durch eine Gerade $p$ der Richtung ($s$) in zwei Teile (jeder Teil mit $n$ Punkten). Die Konstruktion beider gesuchten Quadrate (siehe Fig. 4) liegt jetzt auf der Hand.

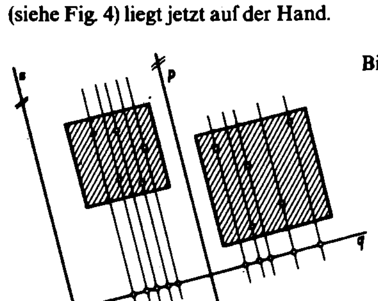
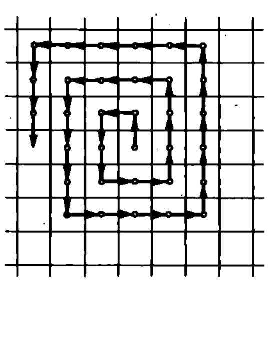
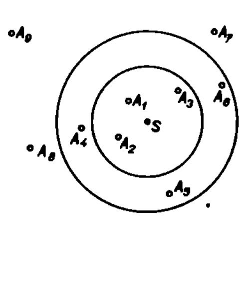


Bild 4





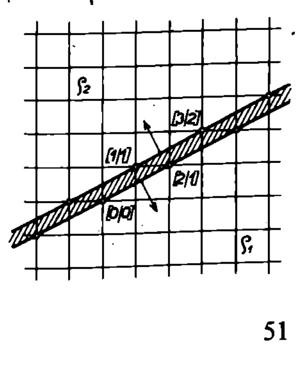




Bild 1 Bild 2 Bild 3

# Vorschau auf die XIII. IMO

## ČSSR 1971

**Aus dem Programm der XIII. IMO**

| | |
|---|---|
| 8. bis 10. Juli | – Sitzungen der Jury |
| 10. Juli | – Ankunft der Delegationen in Bratislava |
| 11. Juli | – Gemeinsame Fahrt nach Žilinà, dem Austragungsort der XIII. IMO |
| 12. Juli | – Besichtigung von Žilinà und Umgebung |
| 13. Juli | – 1. Klausur |
| 14. Juli | – 2. Klausur |
| 15. bis 17. Juli | – Exkursion und Ausflüge der Delegationen<br>Korrektur der Arbeiten durch die Jury |
| 18. Juli | – Rückfahrt nach Bratislava |
| 19. Juli | – Feierlicher Abschluß der XIII. IMO |
| 20. Juli | – Besichtigung von Bratislava |
| 21. Juli | – Rückreise der Delegationen |

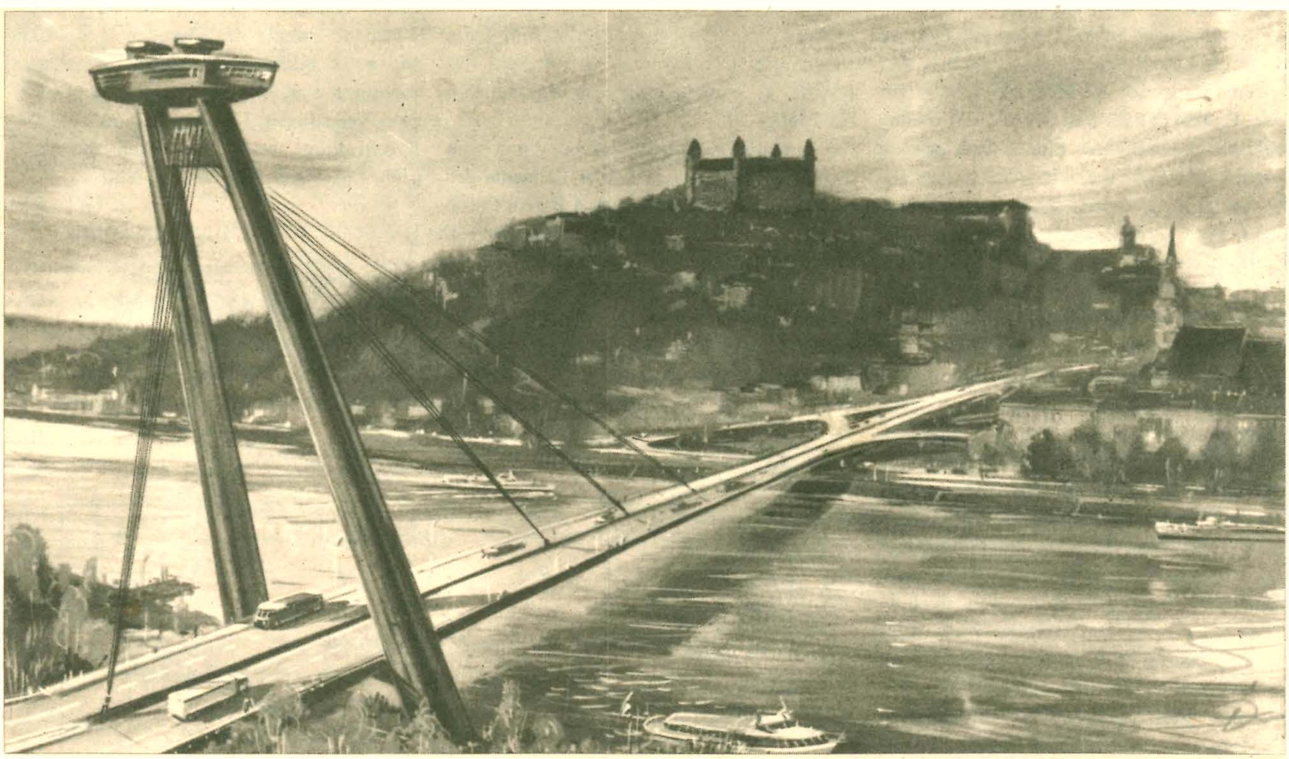
**Bratislava** – Hauptstadt des tschechoslowakischen Landesteiles Slowakei (SSR), an der Donau gelegen, 300 000 Einwohner, Kultur-, Wirtschafts- und Verkehrsmittelpunkt, über der Altstadt mit dem gotischen St.-Martins-Dom und weltlichen Bauten der Schloßberg, Comenius-Universität, zahlreiche Hochschulen (pädagogische, technische, ökonomische, für bildende Künste, für Musik) und Fachschulen (elektrotechnische, chemische), Sitz der *Slowakischen Akademie der Wissenschaften*, Rundfunkstation, Fernsehturm (Höhe 171 m), Bahnknotenpunkt, größter Binnenhafen der ČSSR (Ölhafen), Erdölkombinat, Nahrungs- und Genußmittelindustrie, Maschinenbau, Textilien; gegründet im Jahre 907.

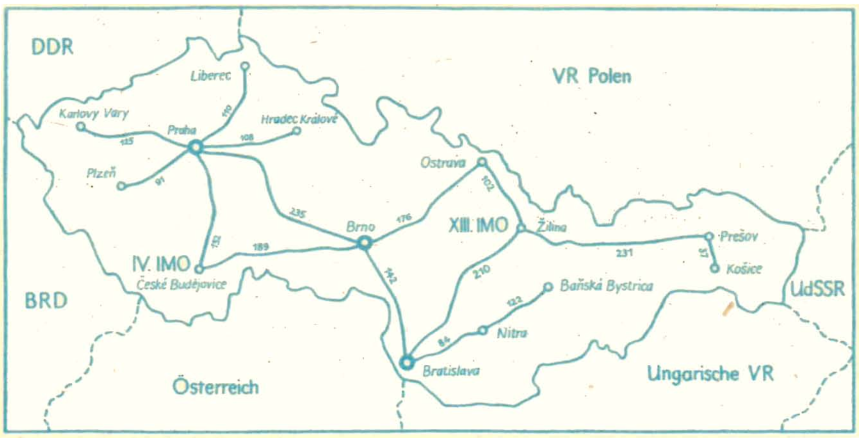
**Žilinà** – Bezirkshauptstadt, 34 000 Einwohner, liegt in einer malerischen Berglandschaft am längsten Fluß der SSR, dem Váh, nordwestlich dem Gebirge: Malá Fatra; Bahnknotenpunkt (Praha – Ostrava – Košice, Bratislava, Rajec), chemische, Textil-, Bekleidungs-, Holz-, Papierindustrie, gegründet im 10. Jahrhundert, noch heute können wir Bauwerke aus dem 13. Jh. bewundern.

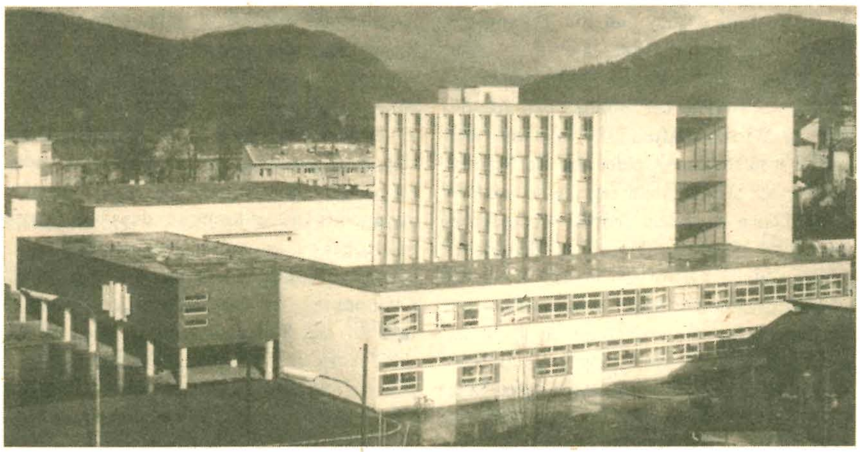
Neben zwei Gymnasien (entspricht unserer EOS), einer *Fachschule für Ökonomie* und einer *Oberfachschule für Bauwesen* befindet sich in Žilinà die *Hochschule für Verkehrswesen* der ČSSR (mit 3 Fakultäten).
Reizvoll ist die Umgebung von Žilinà, welche durch ihre Naturschönheiten berühmt ist: Vrátna-Tal, Hohe Tatra, Höhlen von Demänová.

Im Jahre 1962 wurde die IV. IMO in der ČSSR durchgeführt. Die Teilnehmer erhielten das in der Abbildung gezeigte Abzeichen.


Donaubrücke in Bratislava (Entwurf eines Kollektivs der Slowakischen TH in Bratislava) – Kabelbrücke mit nur einem 80 m hohen, schräggestelltem Pylon (griech.: Torbau) in seinem Oberteil ein Café und eine Aussichtsplattform. Die moderne Brücke, 1971 wird sie eingeweiht, bildet einen interessanten Kontrast zu den historischen Bauten der slowakischen Hauptstadt. Länge 432 m, zwei Fahrbahnen je 8,5 m breit, Masse: 7 600 t, Stahlbaukonstruktion, verschweißt aus vormontierten Sektionen.





Žilinà, Studentenheim der Hochschule für Verkehrswesen – Unterkunft der Mannschaften
Žilinà, Oberfachschule für Bauwesen – Ort des Wettbewerbs

Ruinen der Burg Strečno

*Wir stellen vor:* Bohus Sivač, Zwolen, erfolgreichster IMO-Teilnehmer der ČSSR. (1965 bis 1968) Unser Foto: Bereits mit 13 Jahren nahm Bohus an der VII. IMO (Berlin) teil und schaffte einen 3. Preis.

**Zur Geschichte der Mathematikolympiaden in der ČSSR**

Im Schuljahr 1970/71 wird in der ČSSR bereits der 20. Jahrgang der Mathematikolympiade (MO) durchgeführt. Die Veranstaltung mathematischer Wettbewerbe für Schüler von erweiterten Oberschulen war in der Tschechoslowakei aber schon viel früher eine Tradition. Dies hängt vor allem mit der Tätigkeit der „Gesellschaft der tschechoslowakischen Mathematiker und Physiker" (JČMF) zusammen, die 1862 gegründet wurde.

Bereits ab 1872 veröffentlichte diese Gesellschaft in ihren Zeitschriften mathematische und physikalische Aufgaben* für Oberschüler, wobei als Ansporn Preise für die richtige Lösung ausgeschrieben wurden. Diese Tradition wurde später von der Zeitschrift „Rozhledy matematicko-fyzikalní" weitergeführt, für deren Inhalt die Gesellschaft JČMF verantwortlich ist. Der Lösungswettbewerb dieser Zeitschrift ist freilich zunächst nur für ihre Leser bestimmt, wobei viele von ihnen keine Möglichkeit haben, sich bei Schwierigkeiten beraten zu können. Ein für Schüler bestimmter mathematischer Wettbewerb sollte aber gleichzeitig dazu beitragen, daß die Teilnehmer ihre mathematischen Kenntnisse durch eine planmäßige Arbeit festigen und erweitern können, was durch den Wettbewerb der Zeitschrift nicht erreicht werden konnte.

Im Ausland gab es in dieser Hinsicht bereits ein Modell: die Mathematikolympiaden in der Sowjetunion sowie Wettbewerbe ähnlicher Art in anderen Ländern. In den Schuljahren 1949 bis 1951 wurden in den mährischen Bezirken Olomouc und Ostrava erstmalig Mathematikwettbewerbe veranstaltet, in der Slowakei dann im Schuljahr 1950/51. Durch den führenden böhmischen Mathematiker Prof. Eduard Čech wurde 1951 vorgeschlagen, eine Vorbereitungskommission für MO zu beauftragen, die erforderlichen organisatorischen Maßnahmen mit dem Ministerium für Schulwesen und mit der damaligen Jugendorganisation zu beraten. Diese Vorbereitungskommission arbeitete ein Statut für MO aus, das vom Ministerium für Schulwesen im Dezember 1951 bestätigt wurde. Damit war der Start zum ersten Jahrgang der MO freigegeben.

Neben dem genannten Ministerium und dem Jugendverband waren das Mathematische Institut der Akademie der Wissenschaften der ČSSR sowie die Gesellschaft JČMF Träger der MO. Auch in den Bezirken und Kreisen wurden nun entsprechende Kommissionen für MO gegründet, ferner wurde an jeder Schule ein Fachlehrer für Mathematik als *Referent für MO* berufen.* *Jiři Mída, Praha*

* Zur Organisation der MO siehe: „Mathematikolympiaden in der ČSSR" *alpha* 2/1970

# Wirklichkeit und Täuschung

### Bilder sind manchmal trügerisch

Welche Bedeutung hat ein Bild bei mathematischen Überlegungen? Es ist ein sehr wertvolles Hilfsmittel, das unser Vorgehen anschaulicher macht und unserem Gedächtnis nachhilft. Wenn wir ohne Abbildung arbeiten, ähnelten wir Schachspielern, die eine Partie „blind“ spielen – ohne Figuren und ohne das Schachbrett anzusehen. Solche Schachspieler gibt es, und ich zweifle nicht daran, daß manche der erfahrenen Leser geometrische Schulaufgaben lösen können, ohne vorher eine Skizze gezeichnet zu haben; das setzt jedoch Übung und ein gutes Vorstellungsvermögen voraus. Die Bedeutung eines Bildes darf andererseits nicht überschätzt werden. Gerade seine Anschaulichkeit kann uns manchmal zu ganz falschen Schlußfolgerungen verführen. Außerdem können wir niemals ganz sicher sein, bei der Zeichnung keine Ungenauigkeit begangen zu haben, die das ganze Ergebnis negativ beeinflussen könnte. Auch der beste Zeichner kann ohne mathematische Überlegungen nicht beweisen, daß drei Gerade, die sich in seiner Zeichnung schneiden, wirklich einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Selbst wenn man aufs sorgfältigste gearbeitet hat, kann man niemals ausschließen, daß Folgerungen, die sich scheinbar aus der fertigen Zeichnung ergeben, durch zufällige Ungenauigkeiten der Zeichnung hervorgerufen sein könnten.

Übrigens kann sich der Leser selbst davon überzeugen, daß Mißtrauen zu einem gezeichneten Bild manchmal sehr berechtigt ist. Wir wollen das an einem Beispiel zeigen, das in der Schule einen Prüfstein genauen Zeichnens bildet, am sogenannten Feuerbachschen Neun-Punkte-Kreis.

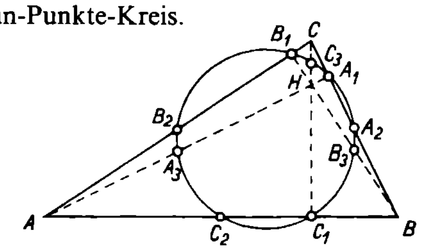



Bild 1

Bild 1 zeigt ein Dreieck $ABC$. Drei Gerade $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, die in der Abbildung gestrichelt sind, stellen die Höhen dieses Dreiecks dar. Jeder Leser weiß aus der Schule, daß sich diese drei Höhen in einem Punkt schneiden ($H$ in Bild 1). Der Punkt $A_2$ ist die Mitte der Seite $\overline{BC}$, der Punkt $B_2$ die Mitte der Seite $\overline{CA}$ und der Punkt $C_2$ die der Seite $\overline{AB}$. Der Punkt $A_3$ halbiert die Strecke $\overline{AH}$, der Punkt $B_3$ die Strecke $\overline{BH}$ und der Punkt $C_3$ die Strecke $\overline{CH}$. Nun wollen wir uns jene neun Punkte, die wir mit $A_1$, $B_1$, $C_1$, $A_2$, $B_2$, $C_2$, $A_3$, $B_3$, $C_3$ bezeichnet haben, näher ansehen. Die Zeichnung legt uns den Gedanken nahe, daß alle neun Punkte auf einem Kreis liegen – oder nur auf einer einem Kreis sehr „ähnlichen“ Kurve. Wir verraten gleich, daß die aus dem Bild abgelesene Vermutung über den Kreis diesmal richtig ist. Die konstruierten Punkte liegen wirklich auf der Peripherie des Kreises, wovon man sich durch einen genauen mathematischen Beweis überzeugen könnte (der Beweis ist jedoch einigermaßen schwierig, weshalb wir ihn weglassen).

### Was sind optische Täuschungen?

Das Beispiel des Feuerbachschen Kreises zeigt, wie wichtig es für einen Mathematiker ist, sich mit den verschiedenen Fallstricken bekannt zu machen, die Vorstellungs- oder Anschauungskraft auslegen können. Ein Mathematiker verläßt sich niemals auf Auskünfte, die sich aus mehr oder weniger unvollkommenen Bildern ergeben und nimmt sie nur als (wenn auch manchmal sehr wertvolle) Anregungen hin, um alles von neuem und gründlich zu überlegen. Ein Bild, das zeigt, daß unser Auge und unsere Vorstellung nicht immer als verläßliche Richtschnur dienen und daß manchmal das Gegenteil von dem wahr ist, was man übereilt erwarten würde, nennt man (nicht ganz zutreffend) eine *optische Täuschung*. Die Lehre von den *optischen Täuschungen* wurde gründlich und bis in einzelne Details ausgearbeitet. Betrachten wir jene optische Täuschungen näher, die eine direkte Beziehung zur Mathematik und ihrer Anwendung haben. Zunächst müssen wir uns jedoch einige Begriffe eines etwas entlegeneren Gebiets klarmachen.

Aus dem Physikunterricht wissen wir noch, daß das Auge einem photographischen Apparat ähnlich ist. Das Objekt des Apparats vertritt hier die Augenlinse, die lichtempfindliche photographische Platte die Netzhaut. Auch ein gesundes Auge weist eine Reihe optischer Fehler auf, mit denen sich die geometrische und die medizinische Optik befassen. Der deutsche Physiker *Helmholtz* äußerte über die Mängel des Menschenauges sogar folgendes: Wenn sich ein Optiker unterstehen würde, ihm ein Instrument mit solchen Mängeln, wie sie ein Auge hat, zu verkaufen, würde er sich für berechtigt halten, die Qualität seiner Arbeit scharf zu tadeln und ihm das Instrument unter

Protest zurückzugeben. Das ist freilich ein wenig übertrieben. Wir haben keinen Grund, unser Auge so abfällig zu beurteilen. Gäbe es keine optischen Täuschungen, so wären wir z. B. um alle Schätze der Malkunst gebracht und könnten weder Filmvorstellungen noch Fernsehprogramme verfolgen. Man lese nur, was 1774 *Leonhard Euler* schrieb:
„Wenn wir gewöhnt wären, über Dinge nur nach der Wirklichkeit zu urteilen, könnte für uns die Malkunst überhaupt nicht existieren, und es wäre um uns so bestellt, als seien wir blind. Der Maler würde vergebens alle seine Kunst aufs Farbenmischen verwenden. Wir würden sagen: Hier, auf dieser Platte, ist ein roter Fleck, hier ein blauer, dort sind einige weiße und hier einige schwarze Linien. Alle befinden sich in derselben Ebene, man sieht ihnen keinen Entfernungsunterschied an. Man könnte keinen einzigen Gegenstand abbilden. Alles auf dem Bild käme uns wie eine Schrift auf dem Papier vor. Bei aller Vollkommenheit wären wir arm daran, denn wir wären jedes Vergnügens verlustig, das uns die so angenehme und nützliche Malkunst bringt."
Optische Täuschungen sind manchmal schwierig zu erklären, ist doch z. B. schon das Schätzen von Entfernungen und Längen ein komplizierter Prozeß, bei dem Erfahrung und Übung eine bedeutende Rolle spielen. Meistens geht es nicht um eine durch Augenfehler verursachte Täuschung, sondern um einen Trugschluß auf Grund unrichtiger Deutungen. Wir sollten daher eigentlich besser von Trugschlüssen als von optischen Täuschungen sprechen; aber der Name „optische Täuschung" ist bereits eingebürgert.

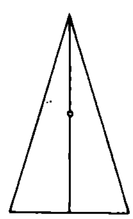
**Falsches Schätzen von Länge und Entfernung**

Die Entfernung von Gegenständen beurteilt man oft nach der jeweiligen „Ermüdung" des Auges, das die betreffende Strecke durchlaufen muß. Daher erscheint uns eine senkrechte, auf eine Tafel gezeichnete Strecke länger als eine in Wirklichkeit gleich lange waagerechte. Wenn man versucht, ohne Lineal auf der Tafel ein Quadrat mit waagerechter Grundlinie zu zeichnen, und dann das Bild mit einem Lineal nachprüft, so fällt das Quadrat gewöhnlich verkürzt aus.
Einige Druckbuchstaben hält man unwillkürlich für symmetrisch zu einer horizontalen Achse.
Der Zeichner der Buchstaben B, H, S oder der Ziffer 8 rechnete mit dieser optischen Täuschung und hat daher den oberen und unteren Teil dieser Buchstaben ungleich groß entworfen. Der Leser wird diese kleine Asymmetrie kaum wahrnehmen, nur wenn der Druckfehlerteufel die Buchstaben zufällig auf den Kopf stellt, wird man von der Asymmetrie überrascht:

B H S 8    8 S H B

Mit fünfzehnjährigen Schülern machte ein Lehrer folgenden Versuch: Er gab ihnen auf, die Länge und die Breite des Schulkatheders, das sie alle Tage vor Augen hatten, zu schätzen und das Ergebnis aufzuschreiben. Bei der Auswertung der Resultate stellte es sich heraus, daß die Schüler die Länge (horizontal gemessen) im großen ganzen richtig abschätzten, während sie die Höhe (in vertikaler Richtung) fast alle überschätzten.
Mit solchen Schätzfehlern muß auch ein Bildhauer bei der Wahl der Dimensionen von Statuen rechnen, die in verschiedener Höhe angebracht werden und trotzdem natürlich wirken sollen.
Ein anderer Irrtum beim Längenschätzen kann dadurch verursacht werden, daß man statt der Länge unwillkürlich die Flächengröße abschätzt. Wenn man mit Hilfe eines Lineals die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks (Bild 2) halbiert, ist man überrascht, da der Halbierungspunkt (scheinbar) zu hoch angebracht ist. In der unteren Bildhälfte sieht man nämlich eine größere Fläche als in der oberen.

Bild 2



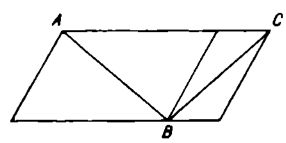
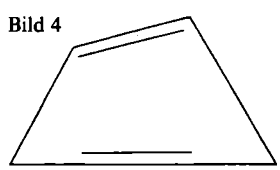



Bild 3

Mit Hilfe des Lineals kann man sich überzeugen, daß in Bild 3 die Strecke $\overline{AB}$ nicht länger ist als $\overline{BC}$. Hier beurteilt man unwillkürlich wieder die Fläche der Rhomben, deren Diagonalen durch die zu schätzenden Strecken dargestellt werden.

Bild 4



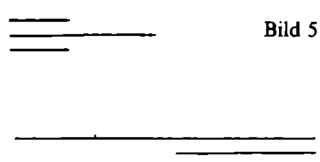


Bild 5

Eine weitere Täuschung, die zu einer unrichtigen Wertung der Größe oder Länge führt, wird dadurch hervorgerufen, daß man diese unwillkürlich mit einer anderen Größe oder Länge vergleicht.
In Bild 4 ist ein ungleichseitiges Viereck gezeichnet; im Inneren sieht man unweit von den Seiten zwei Strecken. Man soll entscheiden, welche von den Strecken kürzer ist.
In Bild 5 beurteilt man die Länge der mittleren Strecke danach, ob sie zwischen kürzeren oder längeren Strecken liegt. Dieselbe Strecke scheint in der oberen Hälfte des Bildes länger als in der unteren.

In Bild 6 kann man sich durch Nachmessen überzeugen, daß die beiden mittleren Kreise denselben Durchmesser haben, obwohl sie auf den ersten Blick verschieden groß erscheinen. Diesen Längen- und Größenkontrasten begegnet man übrigens auch im Alltagsleben. Wenn man in einem engen Treppenhaus Männer trifft, die ein Klavier tragen, scheint das Instrument riesengroß. Auf einer weitläufigen Bühne kommt es uns viel kleiner vor. Einen Autobus, der täglich durch unseren Ort fährt, halten wir nicht für sehr geräumig; wir sind jedoch von seiner Größe überrascht, wenn wir ihn in der Reparaturwerkstätte sehen.

Bild 6

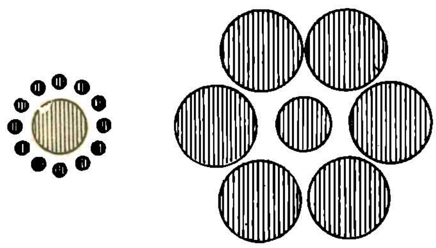


Bild 7

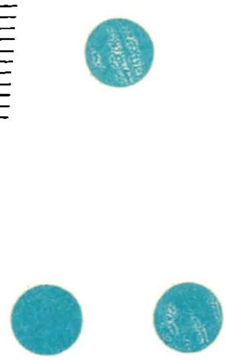


Bild 8

Bild 7 erinnert an zwei gleich hohe Papierstöße, der linke ist mehr, der rechte weniger zur Seite verschoben. Man soll entscheiden, welche Strecken länger sind – die im linken oder die im rechten Teil des Bildes. Das scheinbare Ergebnis trügt, die Strecken sind in Wirklichkeit gleich lang. Eine interessante Illusion entsteht, wenn weiße und schwarze Farbe miteinander kontrastieren. In Bild 8 sieht man gleich große schwarze Kreise, die in den Scheitelpunkten eines (nicht gezeichneten) gleichschenkligen Dreiecks angebracht sind. Man soll abschätzen, wie viele solche Kreise in den freien Raum zwischen den zwei unteren Kreisen und dem oberen Kreis noch hineinpassen. Man ist nicht sicher, ob es vier oder fünf Kreise sein werden. Das gemessene Resultat ist überraschend: Es gibt gerade Platz für drei solche Kreise. Wie ist diese Täuschung zu erklären? Es geht um die sogenannte Irradiation (Hinüberstrahlen), unter deren Einfluß dem Auge die schwarzen Gegenstände kleiner erscheinen als eine gleich große weiße Fläche.

**Merkwürdiges von Parallelen und Senkrechten**

Leicht verschätzt man sich bei parallelen oder bei aufeinander senkrecht stehenden Geraden und bei der Größe von Winkeln. Die *Zöllnerschen Parallelen* (Bild 9) erwecken bei flüchtigem Blick den Eindruck auseinanderlaufender Linien. In Bild 10 scheinen die Parallelen gekrümmt zu sein, in Bild 11 kommt uns das Quadrat unter dem Einfluß der konzentrischen Kreise ein wenig deformiert vor. Zwei Parallelen schneiden in Bild 12 eine Gerade; ist es wirklich eine Gerade, oder ist ihr unterer „Teil" ein wenig verschoben? Der Winkel, den die Gerade in Bild 12 mit den Parallelen einschließt, beträgt ungefähr 15°. Wenn man ein ähnliches Bild für einen Winkel von 45° oder darüber konstruiert, entsteht die Täuschung nicht.

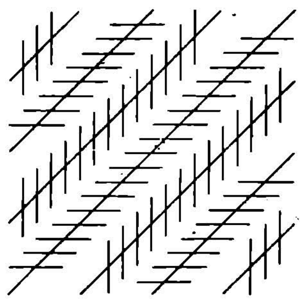


Bild 9

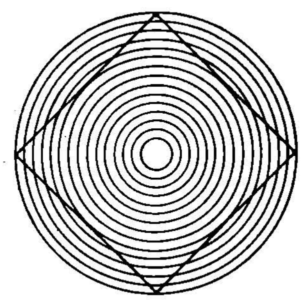
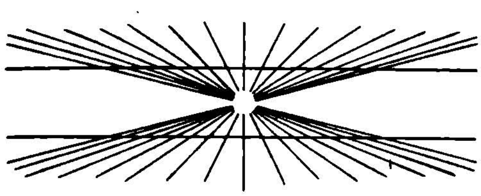


Bild 11

Bild 10



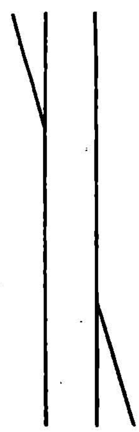


Bild 12

In den letzten vier Fällen kam die Täuschung dadurch zustande, daß unsere Aufmerksamkeit durch einige Einzelheiten der Abbildung abgelenkt wurde. Auf gemusterten Textilien mit vielen winzigen Details entdeckte man durch Zufall eine Reihe optischer Täuschungen. Jeder dürfte bemerkt haben, daß z. B. ein Tischtuch mit kleinen, aber ausgeprägten Mustern manchmal sogar unangenehm wirkt (volkstümlich sagt man, daß einem „die Augen übergehen"). Diese Eigenschaften von Mustern und Ornamenten müssen die Gestalter und Produzenten von Textilwaren berücksichtigen, wenn sie ihre Kunden zufriedenstellen wollen.

*Jiří Sedláček, aus:*
*„Keine Angst vor Mathematik", leicht gekürzt*


**Übungsaufgaben aus Mathematiklehrbüchern der ČSSR**

5 ▲ 704 Der Spielplatz der Schule hat Rechteckform. Berechne den Umfang des Platzes in Metern, wenn ein Schüler festgestellt hat, daß der Platz 140 Schritte lang und 90 Schritte breit ist, wobei die Schrittlänge des Schülers 65 cm beträgt.

5 ▲ 705 Eine Pioniergruppe erhielt den Auftrag, 85 Bilder zum Fach Erdkunde mit den Abmessungen 7,5 dm und 6 dm für die Länge und Breite am Rand mit Leinenband einzufassen. Berechne, wieviel Meter Leinenband dazu benötigt werden (runde das Ergebnis auf Meter).

6 ▲ 706 Berechne den Preis, der für das Ausheben einer Kalkgrube zu bezahlen ist, die 4,3 m lang, 2,9 m breit und 20 dm tief sein soll; für 1 $m^3$ Ausheben sind 14,60 Kčs zu bezahlen (runde den Rauminhalt auf $m^3$).

6 ▲ 707 Ein Tourist benutzte für seine Reisestrecke von 313 km die Eisenbahn, den Autobus und wanderte auch eine Teilstrecke. Mit dem Autobus fuhr er um 205 km weniger als mit dem Zug, seine Wanderstrecke war um 36 km kürzer als seine Fahrstrecke mit dem Autobus. Berechne, wieviel km die Bahnfahrt, die Autobusfahrt und die Wanderstrecke beträgt.

▲6 ▲ 708 Um einen See führt ein Weg von 2000 m Länge. Von einer Stelle aus fuhr ein Junge auf dem Rad mit einer Geschwindigkeit von $350 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$ auf diesem Weg. Ein anderer Junge lief von der gleichen Stelle auf diesem Weg in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit von $150 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$. Berechne, nach wieviel Minuten die Jungen sich begegnen und welche Strecke jeder dabei zurückgelegt hat.

6 ▲ 709 Von einer Papiermaschine wird in 8 Minuten ein 200 m langes Papierband erzeugt. Berechne die Länge des Papierbandes, das von der Maschine a) in 15 Minuten, b) in 8 Stunden erzeugt wird.

7 ▲ 710 Zeichne eine Gerade $g$ und einen nicht auf $g$ liegenden Punkt $P$; zeichne ferner ein beliebiges stumpfwinkliges Dreieck $ABC$ mit dem stumpfen Winkel beim Eckpunkt $B$. Konstruiere ein zum Dreieck $ABC$ ähnliches Dreieck $A'B'C'$ derart, daß die Seite $\overline{A'B'}$ auf der Geraden $g$ liegt und der Eckpunkt $C'$ mit $P$ zusammenfällt.

7 ▲ 711 Der große Zeiger einer Uhr ist 12 cm lang. Berechne den von der Spitze des großen Zeigers zurückgelegten Weg, wenn

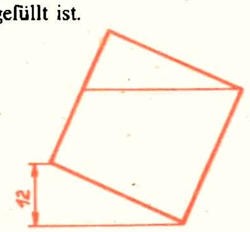
a) eine Stunde, b) $\frac{1}{4}$ Stunde, c) 5 Minuten,

d) 35 Minuten vergangen sind.

7 ▲ 712 Berechne die Entfernung der Orte $A$ und $B$, die beide auf dem Äquator liegen. Der Halbmesser des Äquators beträgt 6375 km. Ort $A$ liegt bei 12° östlicher Länge, Ort $B$ bei 139° östlicher Länge.

8 ▲ 713 Ein Stahlblock von Würfelform hat die Kantenlänge 8 cm. Von diesem Stahlblock wird ein kegelförmiger Hohlraum herausgedreht. Die Grundfläche des Kegels ist kreisförmig mit einem Durchmesser von 6 cm, sie liegt in einer Würfelfläche; die Spitze des Kegels fällt mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Würfelfläche zusammen. Die Dichte des Stahls beträgt $7{,}8 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Berechne die Masse des abgedrehten Stahls.

8 ▲ 714 Ein eiserner Wasserbehälter ist würfelförmig mit der Kantenlänge 1 m. Durch eine Unterlage längs einer Kante hat der Behälter eine Schrägstellung, so daß die gegenüberliegende Kante um 12 cm tiefer liegt. Berechne die Wassermenge in $dm^3$, die sich im Behälter befindet, wenn dieser bis zum Rand gefüllt ist.




8 ▲ 715

$$\left[\left(1+\frac{1+\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}{1-\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{a^2}{x^2}}\right]+\frac{a^2-x^2}{a-x}$$

Bestimme, für welche Werte von $a$, $x$ der vorstehende Term sinnvoll ist und vereinfache ihn.

*Auswahl und Übersetzung: O. Langer*

## Literatur aus der ČSSR in deutscher Sprache

Kolman, Arnost, Prof. Dr., und Prof. Dr. Ottokar Zich

### Unterhaltsame Logik

*Etwa 130 S. mit etwa 6 Abb., kartoniert*
*Etwa 5,90 M · BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft Leipzig*

Nach kurzer, leichtverständlicher Einführung in die Aussagenlogik, die nur geringe Voraussetzungen an mathematischen Kenntnissen erfordert und für Schüler der mittleren und oberen Klassen geeignet ist, regen viele interessante Aufgaben den Leser zur intensiven Mitarbeit an (ab Klasse 8).

Sedláček, Jiří, Prof. Dr.

### Einführung in die Graphentheorie

*171 S. mit 73 Abb., kartoniert, 6.40 M*
*BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig*

Inhalt: Vorbetrachtungen · Ungerichtete Graphen · gerichtete Graphen · Historische Anmerkungen

Das Buch gibt eine für Schüler verständliche Einführung in die Graphentheorie, deren Anwendungsmöglichkeiten auf verschiedensten Gebieten mehr und mehr zunehmen (ab Klasse 9).

Vyšín, Jan

### Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben

*Etwa 192 S. mit etwa 41 Abb., kartoniert, etwa 5.90 M · BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig*

Eine moderne Behandlung mathematischer Aufgaben bis zur Lösung. Es werden keine Rezepte gegeben, sondern Anregungen zu systematischer Arbeit und methodischem Vorgehen. (ab Klasse 9).

Sedláček, Jiří, Prof. Dr.

### Keine Angst vor Mathematik

*167 Seiten, 71 Bilder, 12 cm mal 19 cm, Halbgewebeeinband, 4,80 M*

*VEB Fachbuchverlag Leipzig*

Der Autor dieses international erfolgreichen Buches geht vom mathematischen Spiel aus und führt den Leser in kurzweiliger Weise zur Anwendung der Mathematik im Verkehrswesen, in der Technik, in Naturwissenschaften und im täglichen Leben.

Autorenkollektiv

### Aufgaben von Mathematikolympiaden in der UdSSR und in der ČSSR

***292 Seiten, 16,8 cm mal 22,5 cm, 1965, Pappeinband, Bestell-Nr. 002 106, 8,20 M***
***Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin***

Der Autor *R. Zelinka* (†) hat den 9. Jahrgang (1961) der Mathematikolympiade in der ČSSR zusammengestellt: Aufgaben der ersten bis dritten Stufe (Klasse 11, 10, 9, 8), dazu ausführliche Lösungen.

# Mit würdigen Initiativen zu Ehren des VIII. Parteitages ins zweite Vierteljahrhundert der FDJ

VIII PARTEITAG

IX. PARLAMENT

1967 stellte der VII. Parteitag der SED die begeisternde Aufgabe der Schaffung des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus in unserer Republik. Damals waren wir, *Gabriele Schütze, Gabriele Veit* und *Detlef Tänzer*, noch Schüler der 8. Klasse, und keiner von uns hat geahnt, wie stark die Beschlüsse dieses Parteitages in unser persönliches Leben eingreifen und unsere Entwicklung beeinflussen würden.

Damals verstanden wir zwar, daß Mathematik und Naturwissenschaften wichtige Grundlagen für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt sind, woraus sich die Notwendigkeit eines hohen mathematischen Bildungsniveaus besonders der jungen Generation ableitet, aber wir hatten noch nicht erfaßt, daß diese Aufgabe auch ganz direkt an uns gerichtet war, daß sie uns neue, beherztere Zielstellungen und mehr Mut und Beharrlichkeit bei ihrer Verwirklichung abverlangen würde. Um das große Bildungsprogramm unseres Staates, welches besonders die rasche Zunahme von Mathematikern, Physikern, Chemikern und von Lehrern dieser Disziplinen vorsieht, mit verwirklichen zu helfen, wurde an der Karl-Marx-Universität in Leipzig im Studienjahr 1969/70 ein Vorkurs eingerichtet. Diesen Vorkurs konnten Schüler besuchen, welche die 10. Klasse erfolgreich abgeschlossen hatten und beabsichtigten, Diplom-Lehrer für Physik und Mathematik zu werden. Schon in einem Jahr erreicht man die Hochschulreife, wodurch es möglich ist, unserem Staat ein Jahr früher als gewöhnlich hochqualifizierte Lehrkräfte zur Verfügung zu stellen.

Wir gehörten zu den 30 Studenten des ersten Jahrganges dieses Vorkurses. In zwei Seminargruppen bereiteten sich 20 Mädchen und 10 Jungen auf das Studium der Physik und Mathematik vor. Wie es sein muß, so beschränkte sich unsere Vorbereitung keineswegs auf die Ausbildung – hier lag der Schwerpunkt naturgemäß auf den Fächern Mathematik, Physik und Staatsbürgerkunde –, sondern wir bemühten uns um die Entwicklung unserer ganzen Persönlichkeit und unseres Kollektivs. Dazu gehörten ein reges kulturelles Leben ebenso wie die Diskussion über politische Probleme und Ereignisse, angestrengte Studienarbeit ebenso wie unser Winterlager im Februar 1970. Den Abschluß und gleichzeitig den Höhepunkt des Studienjahres bildete eine Reise in die Sowjetunion.

Seit September 1970 studieren wir an der Sektion Physik der Karl-Marx-Universität und bemühen uns, die uns gebotenen Möglichkeiten so zu nutzen, daß wir auf unseren künftigen Beruf als sozialistische Lehrer für Mathematik und Physik gut vorbereitet sind.

Unser Dank gilt der Partei der Arbeiterklasse, die uns durch ihre kluge und weitsichtige Politik eine solche Perspektive eröffnet hat und uns alle Möglichkeiten bietet, unsere Begabungen und Fähigkeiten zum Wohle unserer Republik zu entfalten.

### Sinnvolle Bewährung im Jugendobjekt

Seit 1966 werden an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Schüler der Erweiterten Oberschulen auf ihr künftiges Studium in einem Zirkelsystem vorbereitet. Diese Zirkel wurden der FDJ-Grundorganisation der Sektion als Jugendobjekt übergeben.

In diesen Zirkeln soll vor allem das Interesse an mathematischen Problemen und Arbeitsweisen über die Möglichkeiten der Oberschule hinaus gefördert werden und dem Schüler ein kleiner Einblick in Mittel und Methoden, die die Grundlage der modernen Mathematik bilden, gegeben werden. Für die Studenten bedeutet die Leitung der Zirkel eine große Bewährungsprobe. Und das nicht nur, weil es eine zusätzliche Belastung im ohnehin alle Kräfte fordernden Studium ist, sondern weil sie neben fachlichen Qualitäten auch bestimmte Eigenschaften als Leiter und Propagandist erwerben müssen. So zeugt es von ihrem Verantwortungsbewußtsein, wenn sie in Zirkeldiskussionen auch auf die Rolle der Mathematik in der sozialistischen Gesellschaft eingehen. Der große Zustrom von Zuhörern zeigt, daß die Jugend den Zirkelbesuch als effektive Form der Studienvorbereitung buchen.

### Wissenschaftler und Forschungsstudenten helfen

Am 8. Oktober 1970 wurde an der Humboldt-Universität zu Berlin in der Sektion Mathematik die

*Mathematische Schülergesellschaft (MSG)*

1. Gabriele Schütze

Bis zum 8. Schuljahr besuchte ich die 24. OS in Leipzig, nahm dort am Mathematikzirkel teil und gab Förderunterricht für schwächere Schüler. Die Vorbereitungsklasse der EOS „Richard Wagner" schloß ich im 10. Schuljahr mit dem Prädikat „gut" ab und konnte auf Grund meiner guten Leistungen in Physik und Mathematik zum Vorkurs delegiert werden. Dort hatte ich gute Voraussetzungen für meine weitere allseitige Entwicklung; 1971 wurde ich Kandidat der SED.

2. Detlef Tänzer

Schon als Schüler der 22. OS hatte ich den Wunsch, einmal Lehrer für Mathematik zu werden. Nach zweijährigem Besuch der EOS „Karl Marx" kam ich zum Vorkurs und konnte dort meine Leistungen noch verbessern, so daß ich am Ende das Prädikat „sehr gut" erhielt. Seit Beginn des Studiums bin ich Sekretär unserer FDJ-Gruppe.

3. Gabriele Veit

Ich besuchte bis zur 8. Klasse die 22. OS in Leipzig, nahm am Mathematikzirkel, am Mathematiklager und an Mathematikolympiaden teil. In der Vorbereitungsklasse der EOS „Richard Wagner" konnte ich sehr gute Leistungen erreichen und zum Vorkurs delegiert werden. Seit Februar 1971 bin ich Kandidat der SED.

1

2

3

gegründet. Ihr gehören etwa 200 Berliner Mädchen und Jungen an. Es sind die besten *Jungen Mathematiker* aus den Klassenstufen 7 bis 12 der Hauptstadt der DDR.

Die MSG entspricht in der Struktur den in einzelnen Bezirken unserer Republik bestehenden Bezirksklubs *Junger Mathematiker*. Die fachliche Betreuung erfolgt durch Wissenschaftler und Forschungsstudenten der Sektion Mathematik.

Die Gründung der MSG ist ein bedeutender Schritt zur Verwirklichung der vom VII. Parteitag und dem VII. Pädagogischen Kongreß gestellten Bildungsaufgaben. Ich glaube, es hat jeder erkannt, welche große Rolle die Mathematik beim umfassenden Aufbau des Sozialismus spielt; die Weiterentwicklung der Mathematik ist eine der wichtigsten Voraussetzungen für die Meisterung der wissenschaftlich-technischen Revolution. Damit ein Schüler von heute den Aufgaben der Zukunft gewachsen ist, ist es notwendig, daß er sich ein umfangreiches und anwendungsbereites Wissen erwirbt. In der MSG erhalten mathematisch begabte und interessierte Schüler eine systematische Förderung. Sie werden mit den fachlichen Grundlagen der Mathematik, mit ihren Arbeitsmethoden und Hilfsmitteln vertraut gemacht und sollen die Fähigkeit erwerben, mathematische Probleme selbständig zu erkennen und zu lösen.

*Aus dem Arbeitsprogramm:* Lösen und Diskutieren von Aufgaben – Möglichkeit der Nutzung des Lesesaales der Sektion Mathematik – spezielle Förderung der besten Teilnehmer durch Wissenschaftler – mehrtägige Lehrgänge in den Ferien.

Die Mitgliedschaft in der MSG ist für jeden Schüler eine hohe Auszeichnung. Wir wissen aber auch, daß sie gleichzeitig die gesellschaftliche Verpflichtung bedeutet, sich ein umfangreiches Wissen anzueignen, um durch Höchstleistungen unserer Republik für die vielseitigen Bildungsmöglichkeiten zu danken, die sie uns bietet.

*stud. math. Ingrid Schiemann, Berlin*

**Mitgliedsausweise für die Teilnehmer der Kreisklubs Neubrandenburg**

- Die Mitgliedschaft in Kreisklub *Junger Mathematiker* gilt als Auszeichnung.
- Die Mitglieder gehören zu den talentiertesten *Jungen Mathematikern* des Kreises. Sie haben die Voraussetzungen, einmal gute Mathematiker zu werden und die technische Revolution zu meistern.
- Die Mitgliedschaft soll dazu beitragen, das selbständige Denken und die schöpferische Arbeit weiter zu entwickeln.
- Durch Gemeinschaftsarbeit werden die eigenen Interessen mit denen der Gesellschaft in Übereinstimmung gebracht. Jedes Mitglied ist bemüht, hohe Leistungen nicht nur für sich und seine Schule zu erzielen, sondern damit auch zur Stärkung unserer Deutschen Demokratischen Republik beizutragen. Die Erfüllung dieser Aufgaben ist für jedes Mitglied gesellschaftlicher Auftrag.
- Neben den Veranstaltungen erhält jedes Mitglied Aufträge zur Bearbeitung, die termingemäß an den Mentor zur Begutachtung zu übergeben sind.
- Nach jeder Kreisolympiade wird, den gezeigten Leistungen entsprechend, die Mitgliedschaft neu festgelegt.
- Jedes Mitglied beteiligt sich laufend am *alpha*-Wettbewerb.

**Hohe Auszeichnung für Mathe-LVZ**

Die *Mathe-LVZ* wird seit 1962 als Sonderausgabe der Leipziger Volkszeitung (LVZ), dem Organ der Bezirksleitung der SED, jeweils am 13. Dezember jedes Jahres (Geburtstag der Pionierorganisation „Ernst Thälmann") herausgegeben. Ihre Thematik wird der gesellschaftlichen Praxis entnommen: Mit Zirkel und Rechenstab · Mathe-international · Mathe-Olympiaden · Mathe-heiter Mathe-Rechenvorteile · Mathe-unterhaltsam Mathe und Sport · Mathe Aeronautik/Astronautik · Mathe und Bauwesen.

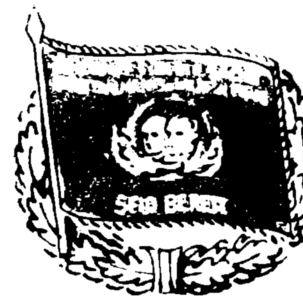
Die 10. Ausgabe erscheint am 13. Dezember 1971 unter dem Motto: Mathe-Verkehrswesen / Verkehrserziehung. Über 600000 Exemplare der *Mathe-LVZ* gingen bisher in alle Teile unserer Republik.

Das Kollektiv der *Mathe-LVZ* wurde am 25. Jahrestag der FDJ vom Zentralrat der FDJ in Anerkennung und Würdigung besonderer Verdienste mit der Medaille

*Für hervorragende Leistungen*
*bei der sozialistischen Erziehung*
*in der*
*Pionierorganisation „Ernst Thälmann"*
*in Gold*

ausgezeichnet.

Dem Kollektiv gehören an:
Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Chefredakteur *alpha* und Lehrer an der 29. OS Leipzig, Mathematikfachlehrer W. Unze, Leipzig – beide Redaktionsmitglieder *alpha* –, die LVZ-Redakteure Hanna Günther und Jutta Rosche und Studienrat Th. Scholl, Berlin, als Gutachter (Leiter der Aufgabengruppe 5 bis 7 der Schülerzeitschrift *alpha*).



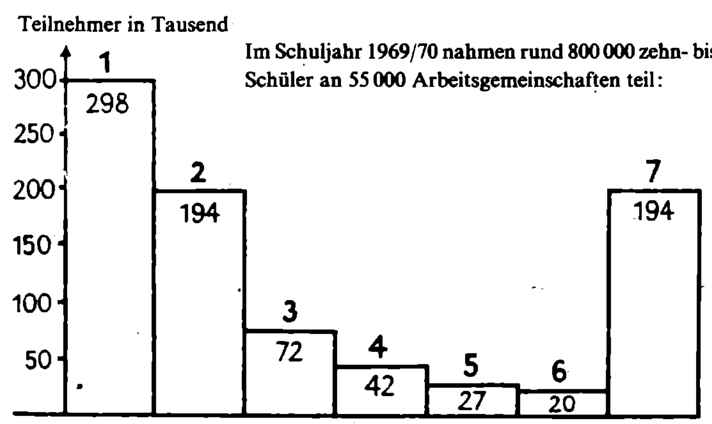

Das Leben und die Tätigkeit der Kinder außerhalb des Unterrichts ist den vielseitigen Interessen der Schüler aller Altersgruppen entsprechend zu gestalten. Unter einer vielseitig gestalteten ganztägigen Erziehung verstehen wir, das geistige Leben inhaltsreich zu organisieren. Sie muß dem Anspruchsniveau der gewachsenen Reife unserer heutigen Schuljugend entsprechen. Unsere Mädchen und Jungen sollen forschen, knobeln, singen, tanzen, spielen und aktiv Sport treiben.

*M. Honecker, VII. Pädagogischer Kongreß*

Es gilt, den Kindern und Jugendlichen zu helfen, Neigungen und Gewohnheiten auszubilden, um die arbeitsfreie Zeit – soziale Errungenschaften unserer sozialistischen Entwicklung – selbständig und schöpferisch zur Bereicherung der eigenen Persönlichkeit zu nutzen.

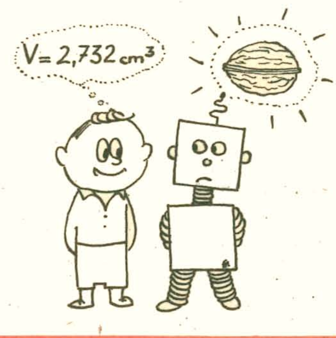
*Aus dem Referat des Ersten Sekretärs des ZK der SED und Vorsitzenden des Staatsrates der DDR, Walter Ulbricht, auf dem VII. Päd. Kongreß*

Im Schuljahr 1969/70 nahmen rund 800000 zehn- bis vierzehnjährige Schüler an 55000 Arbeitsgemeinschaften teil:




Fachrichtungen:
1. Sport
2. Künstlerische AGs
3. Mathematik – Naturwissenschaften
4. Technik
5. Gesellschaftswissenschaften
6. Sprachen
7. sonstige AGs

# Wer löst mit?
# alpha – Wettbewerb




*Letzter Einsendetermin: 8. September 1971*

5 ▲ 716 Es sind alle natürlichen Zahlen $n$ zu bestimmen, die die Gleichung $(n-2)\cdot(n+1)=10$ erfüllen. *T.*

5 ▲ 717 In dem Schema

$$\begin{array}{r} xyy \\ +yxy \\ +yyx \\ \hline \underline{yyy0} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Wieviele Lösungen besitzt diese Aufgabe? *Sch.*

W 5 ■ 718 Aus 16 Stäbchen von je 1 cm Länge läßt sich ein Quadrat legen, dessen Flächeninhalt 16 cm² beträgt. Durch Umlegen von nicht mehr als der Hälfte der Stäbchen läßt sich der Flächeninhalt der so entstandenen Figur auf 7 cm² verkleinern.

a) Zeichne eine entsprechende Figur!

b) Aus 400 Stäbchen von je 1 cm Länge läßt sich ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 10 000 cm² legen. Durch Umlegen von nicht mehr als die Hälfte der Stäbchen soll der Flächeninhalt der entstehenden Figur möglichst klein gemacht werden. Um wieviel cm² verkleinert sich in diesem Fall der Flächeninhalt?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

W 5 ■ 719 Fünf Mädchen, die sämtlich älter als 10 Jahre sind, wurden nach ihrem Lebensalter (in ganzen Zahlen) gefragt; jedes dieser Mädchen machte dazu eine wahre Aussage:

a) Doris ist weder die jüngste noch die älteste von uns.

b) Carmen ist 14 Jahre alt.

c) Barbara ist jünger als Carmen, aber älter als Doris.

d) Barbara und Carmen sind beide jünger als Evelin.

e) Evelin ist 5 Jahre älter als Angelika.

Wie alt ist jedes der fünf Mädchen, wenn ihre Lebensalter paarweise verschieden sind?

*Yvonne Kruber, EOS Sebnitz, Kl. 9/II*

* 5 * 720 Es sind alle geordneten Paare $(m, n)$ natürlicher Zahlen zu bestimmen, die die Gleichung $(m+1)\cdot(2n-1)=6$ erfüllen! *T.*

* 5 * 721 Welche natürlichen Zahlen $a, b, c, d, e, f, g, h, x$ erfüllen zugleich die folgenden neun Gleichungen?

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $x+3=a$, | (6) | $e \cdot 8=f$, |
| (2) | $a-2=b$, | (7) | $f:4=g$, |
| (3) | $b+8=c$, | (8) | $g \cdot 13\,644=h$, |
| (4) | $c+1=d$, | (9) | $h-32\,354=22\,222$ |
| (5) | $d:5=e$, | | |

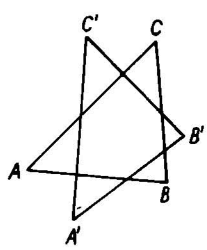
*Astrid Rösel, OS 1, Teterow, Kl. 4*

* 5 * 722 Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen 6 cm und 9 cm. Jede Seite dieses Rechtecks soll um dieselbe Strecke so verlängert werden, daß ein Rechteck mit dem Flächeninhalt von 304 cm² entsteht. Um wieviel Zentimeter muß jede Seite des Rechtecks verlängert werden?

*E. Naumann, Fachlehrer für Mathematik, 90 Karl-Marx-Stadt, Schloßoberschule*

6 ▲ 723 Beweise, daß jede sechsstellige natürliche Zahl, die aus zwei verschiedenen Grundziffern gebildet wird, von denen jede genau dreimal vorkommt, stets durch 3 teilbar ist! *Yvonne Kruber, EOS Sebnitz, Kl. 9/II*

6 ▲ 724 Das Dreieck $A'B'C'$ sei das Bild des Dreiecks $ABC$, das durch Drehung des





## Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
**Redaktion alpha,**
**7027 Leipzig, Postfach 14.**

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben, mit * versehen, gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe oder die entsprechenden in Heft 1/71, 2/71, 3/71 veröffentlichten Aufgaben der Kreis-, Bezirks- bzw. DDR-Olympiade einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 gekennzeichnet sind oder veröffentlichte Olympiadeaufgaben 11/12.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm), denn jede Aufgabe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder das Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 70/71 läuft von Heft 5/70 bis Heft 3/71. Zwischen dem 1. und 10. Oktober 1971 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/70 bis 3/71 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/71 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/70 bis 3/71 erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1970/71 einsenden, erhalten das *alpha-Abzeichen in Gold* (und die Urkunden zurück).

Redaktion *alpha*

Dreiecks $ABC$ um den Punkt $D$ als Drehzentrum und um den Winkel $\sphericalangle ADA' = \varphi$ als Drehwinkel entstanden ist. Es sind das Drehzentrum $D$ und der Drehwinkel $\varphi$ durch Konstruktion zu bestimmen!

*Volker Zillmann, Dresden*

W 6 ■ 725 Es sind alle natürlichen Zahlen zu ermitteln, die durch 3, 5, 7 und 11, aber nicht durch 2 teilbar und kleiner als 10000 sind. *Yvonne Kruber, EOS Sebnitz, Kl. 9/II*

W 6 ■ 726 Es ist zu beweisen, daß in einem rechtwinkligen Dreieck dem kleineren der beiden spitzen Winkel auch die kleinere der beiden Katheten gegenüberliegt. *T.*

* 6 * 727 Zeichne ein Rechteck $ABCD$, in dem die Seite $\overline{AB}$ größer ist als die Seite $\overline{BC}$! Verbinde die Mitte $E$ der Seite $\overline{CD}$ mit den Eckpunkten $A$ und $B$ des Rechtecks! Konstruiere nun unter alleiniger Benutzung von Lineal und Bleistift die Seitenhalbierenden des Dreiecks $ABE$ und begründe diese Konstruktion!

*Yvonne Kruber, EOS Sebnitz, Kl. 9/II*

* 6 * 728 Jemand bildet die Summe aus sechs natürlichen Zahlen. Von den Summanden weiß man nur, daß jeder nachfolgende Summand um 7 größer ist als das Doppelte seines Vorgängers. Beweise, daß die so gebildete Summe durch 21 teilbar ist!

StR. H.-J. Kerber, Neustrelitz

* 6 * 729 An einem internationalen Leichtathletik-Wettkampf in der Volksrepublik Polen beteiligten sich mehr als 180, aber weniger als 220 Sportler. Die Anzahl der teilnehmenden Sportler des Gastgeberlandes war um 8 kleiner als die Hälfte der Anzahl aller teilnehmenden aktiven Sportler. Die Anzahl der sowjetischen Sportler war um 3 größer als ein Viertel, die Anzahl der Aktiven aus der DDR war um 5 größer als ein Achtel der Anzahl aller Teilnehmer. Aus der ČSSR beteiligten sich dreimal so viel Sportler wie aus Ungarn. Wieviel Sportler starteten insgesamt? Wieviel Sportler entsandte jedes der beteiligten Länder?

*Jörg Schubert, POS Pfaffroda, Kl. 5a*

7 ▲ 730 Es ist zu beweisen, daß für alle Dreiecke $ABC$, die den gleichen Winkel $\sphericalangle BAC = \alpha$ und den gleichen Inkreisradius $\varrho$ besitzen, die Summe $b+c-a$ konstant ist! (Es seien $a$, $b$ und $c$ die Längen der Seiten eines solchen Dreiecks.) *T.*

7 ▲ 731 Aus dem nachstehenden Stundenplanausschnitt ist zu ermitteln, welche Unterrichtsfächer die vier Lehrkräfte Herr Reichelt, Frau Helmert, Fräulein Fischer und Herr Walter unterrichten, wenn folgendes bekannt ist:

a) Jede Lehrkraft unterrichtet in genau zwei verschiedenen Fächern.

b) Jede Lehrkraft unterrichtet beide Fächer in beiden Klassen.

c) Fräulein Fischer unterrichtet in den Klassen 5a und 5b am Dienstag nur in den ersten beiden Stunden.

d) Herr Reichelt hat als Fernstudent dienstags seinen Studientag.

e) Frau Helmert unterrichtet montags nur zwei Stunden in der Klasse 5b, die übrige Zeit ist sie im Schulhort eingesetzt.

f) Für den Russischlehrer beginnt die Lehrtätigkeit montags erst von der dritten Stunde an.

Montag

| Klasse 5a | Klasse 5b | |
|---|---|---|
| Deutsch | Geographie | 1. Stunde |
| Geschichte | Deutsch | 2. Stunde |
| Sport | Russisch | 3. Stunde |
| Geographie | Zeichnen | 4. Stunde |
| Russisch | Mathematik | 5. Stunde |
| Zeichnen | Biologie | 6. Stunde |

Dienstag

| Klasse 5a | Klasse 5b | |
|---|---|---|
| Russisch | Deutsch | 1. Stunde |
| Mathematik | Russisch | 2. Stunde |
| Mathematik | Sport | 3. Stunde |
| Deutsch | Mathematik | 4. Stunde |
| Biologie | Deutsch | 5. Stunde |
| Sport | — | 6. Stunde |

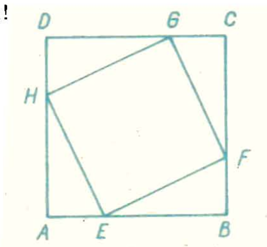
*Biologiefachlehrer K.-H. Schubert*
*Pfaffroda (Krs. Olbernhau)*

W 7 ■ 732 Volkers Vater hat ein neues Auto. Volker studiert die vierstellige Autonummer und sagt zu seinem Freund: „Das Produkt aus der ersten und zweiten Stelle ist gleich dem Neunfachen des Produkts aus der dritten und vierten Stelle. Dividiert man die Summe aus der ersten und zweiten Stelle durch die Summe aus der dritten und vierten Stelle, so erhält man das gleiche wie bei Division der Summe aus der ersten und dritten Stelle durch die Summe aus der zweiten und vierten Stelle". Der Freund antwortete: „Wenn unter den vier Ziffern keine Null und unter den beiden mittleren Ziffern keine 1 und keine 7 ist, kann ich dir die Autonummer nennen!" Wie heißt sie?

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

W 7 ■ 733 Einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $ABC$ mit den Katheten $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ sind Rechtecke so einzuzeichnen, daß jeweils ein Eckpunkt eines solchen Rechtecks auf der Hypotenuse und zwei Rechteckseiten auf den Katheten des Dreiecks $ABC$ liegen. Es ist nachzuweisen, daß alle diese Rechtecke den gleichen Umfang besitzen!

* 7 * 734 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB} = a$. Die Eckpunkte eines weiteren Quadrates $EFGH$ liegen sämtlich auf den vier Seiten des Quadrates $ABCD$. Es ist nachzuweisen, daß der Flächeninhalt des Quadrates $EFGH$ genau dann am kleinsten ist, wenn seine Eckpunkte mit den Seitenmitten des Quadrates $ABCD$ zusammenfallen! *T.*




* 7 * 735 Der Name eines bedeutenden Mathematikers schreibt sich mit fünf Buchstaben. Den Buchstaben $A, B, C, \ldots, Y, Z$ des Alphabets seien in dieser Reihenfolge die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 25, 26$ zugeordnet. Setzt man für die Buchstaben des Namens die ihnen zugeordneten Zahlen ein, so beträgt die Summe der

a) dem ersten und zweiten Buchstaben zugeordneten Zahlen 26,

b) dem ersten und dritten Buchstaben zugeordneten Zahlen 17,

c) dem ersten und vierten Buchstaben zugeordneten Zahlen 10,

d) dem ersten und fünften Buchstaben zugeordneten Zahlen 23,

e) allen fünf Buchstaben zugeordneten Zahlen 61.

Wie lautet der Name dieses bedeutenden Mathematikers?

*Mathematikfachlehrer E. Naumann, Karl-Marx-Stadt, Schloßoberschule*

* 7 * 736 Einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $ABC$ mit den Katheten $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ sind Rechtecke so einzuzeichnen, daß jeweils ein Eckpunkt eines solchen Rechtecks auf der Hypotenuse und zwei Rechteckseiten auf den Katheten des Dreiecks $ABC$ liegen. Es ist nachzuweisen, daß von allen diesen Rechtecken das unter ihnen enthaltene Quadrat den größten Flächeninhalt besitzt! *T.*

8 ▲ 737 Es sind alle rationalen Zahlen $x$ anzugeben, für die die Gleichung

$[2x-5]=3$ erfüllt ist.

*Bemerkung:* Ist $z$ eine rationale Zahl, so versteht man unter $[z]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als $z$ ist. Es gilt also z. B. $[8,7]=8$; $[4]=4$; $\left[-2\frac{1}{4}\right]=-3$.

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

W 8 ■ 738 Das Produkt aus zwei zweistelligen natürlichen Zahlen sei gleich einer natürlichen Zahl, in deren Darstellung (im dekadischen System) nur die Grundziffern 5 vorkommen. Wie lauten diese beiden zweistelligen Zahlen? *S. H.*

W 8 ■ 739 Einem regelmäßigen Sechseck mit der Seitenlänge $a$ sei ein Kreis umbeschrieben, und einem Quadrat mit der gleichen Seitenlänge sei ebenfalls ein Kreis umbeschrieben. Wie verhalten sich die Flächeninhalte dieser beiden Kreise zueinander?

*Harry Reimann, 9. Oberschule, Berlin, Kl. 8*

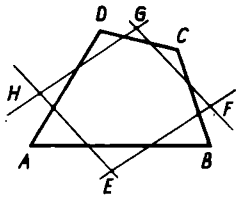
* 8 * 740 Es sind alle geordneten Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen $m$ und $n$ mit $m>2$ und $n>2$ zu bestimmen, für die die Gleichung

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$ erfüllt ist. *T.*

* 8 * 741 Es sind alle Rechtecke $ABCD$ anzugeben, deren Seitenlängen $\overline{AB}=a$ cm und $\overline{BC}=b$ cm ganzzahlig sind und bei denen die Maßzahl des Flächeninhalts (in cm$^2$) gleich der Maßzahl des Umfangs (in cm) ist.

*Egbert Lindner, 2. Oberschule, Dresden, Kl. 9*

* 8 * 742 Jede der vier Seiten eines konvexen Vierecks $ABCD$ sei in drei gleiche Teile geteilt. Durch die Teilpunkte seien – wie aus der Zeichnung ersichtlich – vier Geraden gezeichnet, die sich in den Punkten $E$, $F$, $G$ und $H$ schneiden. Es ist zu beweisen, daß das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm ist. *Sch.*




* 8 * 743 Es sind alle natürlichen Zahlen $a$ zu ermitteln, für die die Zahl $13a+1$ gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

*Dipl.-Hütteneng. Kurt Oertel, Zschornewitz*

9 ▲ 744 Es ist zu beweisen, daß für jedes Dreieck $ABC$ mit den Seitenlängen $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, in dem der Winkel $\sphericalangle BCA=\gamma$ spitzwinklig ist, die Ungleichung

$c^2<a^2+b^2$ erfüllt ist. *T.*

W 9 ■ 745 Vor einem Wettkampf zwischen sechs Sportlern, deren Namen wir zur Abkürzung mit $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ und $F$ bezeichnen, wurden die folgenden drei Voraussagen über das Ergebnis des Wettkampfes gemacht, wobei jeweils die Sportler in der Reihenfolge der von ihnen belegten Plätze (beginnend mit dem 1. Platz) angegeben wurden:

1. $A, B, C, D, E, F$;
2. $A, C, B, F, E, D$;
3. $C, E, F, A, D, B$.

Nach dem Abschluß des Wettkampfes zeigte sich, daß in der ersten Voraussage genau drei Plätze richtig angegeben waren, daß aber in keinem Falle zwei in der Voraussage benachbarte Plätze richtig waren. Bei der zweiten Voraussage stimmte kein einziger der angegebenen Plätze. Bei der dritten Voraussage war nur ein Platz richtig angegeben.

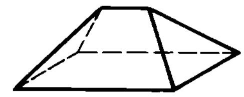
Es ist zu ermitteln, welchen Platz jeder der sechs Sportler belegt hatte.

*Dozent L. M. Lopowok, Woroschilowgrad, UdSSR*

W 9 ■ 746 Gegeben sei ein regelmäßiges Sechseck $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ mit der Seitenlänge $a$. Es ist ein weiteres regelmäßiges Sechseck $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ zu konstruieren, dessen Flächeninhalt dreimal so groß wie der Flächeninhalt des gegebenen Sechsecks ist. Die Konstruktion ist zu begründen.

*Schüler Rainer Zerck, Wismar*

* 9 * 747 Ein Walmdach (vgl. die Abb.) hat eine rechteckige Grundfläche mit den Seitenlängen $a=10$ m und $b=7$ m; seine Höhe beträgt $h=3{,}80$ m. Alle Seitenflächen des Daches haben die gleiche Neigung, sie bilden also jeweils einen gleichgroßen Winkel mit der Grundfläche.



Es sind die Länge des Dachfirstes, die Längen der Seitenkanten des Daches und das Volumen des von dem Dach und seiner Grundfläche begrenzten Raumteils zu berechnen.

*Michael Schnelle, OS II, Calau, Kl. 7*

* 9 * 748 Es sei $p$ eine Primzahl, die größer als 3 und gleich der Summe von drei Primzahlen $p_1$, $p_2$, $p_3$ ist, von denen jede ebenfalls größer als 3 ist.

Es ist zu beweisen, daß man dann stets aus den drei Primzahlen $p_1$, $p_2$, $p_3$ zwei Primzahlen, die wir mit $q$ und $r$ bezeichnen wollen, so auswählen kann, daß die Differenzen

$p-q$, $p-r$, $q-r$

sämtlich durch 6 teilbar sind.

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

* 9 * 749 Es ist zu beweisen, daß für jede natürliche Zahl $n$, die nicht durch 3 teilbar ist, die Zahl

$z=n^{12}-n^8-n^4+1$

durch 9 teilbar ist.

*Schüler Dietmar Wegner, OS Dardesheim*

* 9 * 750 Es ist zu beweisen, daß die Summe von drei oder mehr als drei aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen niemals eine Primzahl ist.

*Henry Reuter, OS Flößberg, Kl. 9*

10/12 ▲ 751 In den Leningrader Ishorsk-Werken werden Kugelspeicher aus Stahl gebaut, die einen äußeren Durchmesser von 16 m und eine Wandstärke von 42 mm haben.

a) Wie groß ist die Masse eines solchen Kugelspeichers? (Dichte des Stahls 7,86 g · cm$^{-3}$)

b) Welchen Wert erhält man für die Masse des Kugelspeichers, wenn man statt der genauen Formel für das Volumen einer Hohlkugel zur schnelleren Berechnung die folgende Näherungsformel benutzt:

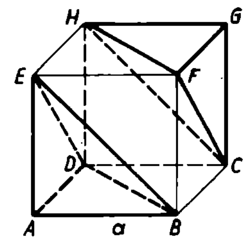
$V=4\pi r^2 s$,

wobei $r$ der äußere Radius der Hohlkugel und $s$ die Wandstärke ist? Wie groß sind der absolute und der relative Fehler? *L.*

W 10/12 ■ 752 Welche paarweise voneinander verschiedenen Primzahlen $x$, $y$ und $z$ erfüllen die Gleichung $x^2+xy+z=82$? *Sch.*

W 10/12 ■ 753 Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit der Kantenlänge $a$ und mit der Grundfläche $ABCD$. Ferner liege $E$ senkrecht über $A$, $F$ senkrecht über $B$, $G$ senkrecht über $C$ und $H$ senkrecht über $D$ (vgl. die Abb.). Von diesem Würfel seien zwei Pyramiden, die durch die Kanten $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{DE}$ bzw. durch die Kanten $\overline{GC}$, $\overline{GF}$, $\overline{GH}$, $\overline{CF}$, $\overline{CH}$, $\overline{FH}$ begrenzt sind, abgeschnitten. Es soll das Volumen des Restkörpers berechnet werden.

*Ulrike Weise, EOS „Friedrich Engels", Karl-Marx-Stadt, Kl. 11*




* 10/12 * 754 Es seien $f$, $g$, $h$ drei Funktionen mit

$$f(x)=x^2+x+1, \quad (1)$$
$$g(x)=3x-5, \quad (2)$$
$$h(x)=x+1, \quad (3)$$

die für alle reellen Zahlen $x$ definiert sind. Ferner seien $x_1$ und $x_2$ zwei reelle Zahlen, für die die Gleichung

$$f\{g[h(x)]\}=f(2x) \quad \text{erfüllt ist.} \quad (4)$$

Es ist zu beweisen, daß dann

$$\{g[h(x_1)]+h(x_1)+x_1\}\{g[h(x_2)] + h(x_2)+x_2\}=0 \quad \text{gilt.} \quad (5)$$

*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

* 10/12 * 755 Wir untersuchen alle Gleichungssysteme der Form

$$y=ax+b, \quad (1)$$
$$y=cx+d, \quad (2)$$

wobei die Koeffizienten $a$, $b$, $c$, $d$ natürliche Zahlen darstellen, die kleiner als 10 sind. (Diese Koeffizienten können also gleich 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 sein.)

1. Wieviel verschiedene Gleichungssysteme dieser Art gibt es?
2. Wieviele dieser Gleichungssysteme haben

a) genau eine reelle Lösung,

b) keine reelle Lösung,

c) unendlich viele reelle Lösungen?

*Bemerkung:* Wir wollen zwei solche Gleichungssysteme als verschieden ansehen, wenn sie sich in mindestens einem der Koeffizienten $a$, $b$, $c$, $d$ unterscheiden. *L.*

* 10/12 * 756 Es ist zu beweisen, daß für alle Winkel $\alpha$ mit $0° \leqq \alpha < 30°$ die Gleichung

$\tan\alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \tan 3\alpha$
$=\tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan\alpha$ erfüllt ist.

*Schüler Ulli Klaus, Erfurt*

* 10/12 * 757 Es ist zu beweisen, daß es zu jeder von Null verschiedenen natürlichen Zahl $n$ eine natürliche Zahl $z$ gibt, die die Form

$z=222\ldots2000\ldots0$

hat und durch $n$ teilbar ist.

(Die Zahl $z$ hat also in dekadischer Darstellung zunächst $p$ Grundziffern, die gleich 2 sind, und dann $q$ Grundziffern, die gleich 0 sind, wobei $p$ und $q$ natürliche Zahlen mit $p \geqq 1$, $q \geqq 1$ sind.) *S. H.*

# Harald Englisch übersetzt Aufgaben aus der ČSSR

Als Schüler der 4. Klasse nahm ich zum ersten Mal an einer Kreisolympiade teil. Ein 3. Platz (bei ca. 120 Teilnehmern der Stadt Leipzig) war ein schöner Erfolg und gab mir den Ansporn, mich kontinuierlich mit der Mathematik zu beschäftigen. Anfangs ließen mir mein Vater und der Bezirkszirkel *Junger Mathematiker* die größte Förderung zuteil werden. Später kam das Selbststudium als eine wichtige Hilfe dazu. Ich bin ein regelmäßiger Leser von *alpha*. Früher beteiligte ich mich auch am *alpha*-Wettbewerb. Im Jahre 1968 wurde ich in meiner Klassenstufe Sieger (mit 32 Antwortkarten). Heute interessieren mich die Beiträge und schwierige Probleme wie Aufgaben von Internationalen Olympiaden. In Vorbereitung auf ein Mathematikstudium – ich besuche jetzt die 11. Klasse – beschäftige ich mich besonders mit der *Linearen Algebra* und der *Analysis*. Die Erfolge meiner Arbeit sind die Ergebnisse bei Mathematikolympiaden. Als die schönsten möchte ich die 3. Preise bei der DDR-Olympiade in Klassenstufe 10 als Schüler der 7. Klasse und Klassenstufe 11 als Schüler der 10. Klasse bezeichnen.

Im Sommer 1970 besuchte ich mit meinen Eltern die ČSSR. Da mich die Olympiadebewegung in diesem Land interessierte, fragte ich im erstbesten Geschäft nach entsprechender Literatur. Ich hatte Glück. Beim Blättern stellte ich fest, daß das mir Angebotene genau das Richtige war. Der nächste Schritt war das Übersetzen. Zugegeben, ich hatte davor einige Angst, obwohl ich mich vorher schon an sowjetisches Material herangewagt habe. Aber beim Tschechischen lag die Sache auch anders: Vor dem Besuch der ČSSR kannte ich kein Wort dieser Sprache, und inzwischen lernte ich nur: „Bitte, danke, guten Tag, wo ist....?"

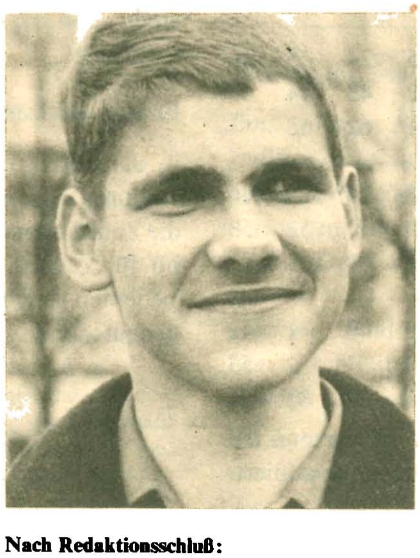
In Leipzig habe ich mir ein Wörterbuch besorgt und mich an die Arbeit gemacht. Zuerst schlug ich jedes Wort nach. Natürlich fand ich nicht von jedem Begriff die Übersetzung. Später suchte ich nur noch die wichtigsten Wörter heraus, nutzte die Verwandschaft des Tschechischen mit dem Russischen und konzentrierte mich auf mathematische Zeichen. Da ging die Arbeit viel schneller von der Hand. Und wenn ich doch einmal eine Aufgabe nicht verstand, versuchte ich, mir diese an Hand der Lösung zu rekonstruieren.

Ich erzählte im Bezirkszirkel von meiner Arbeit. Da meinte der Leiter des Bezirkskabinetts für außerunterrichtliche Tätigkeit, Herr *Hanowski*, daß diese Aufgaben allen zugänglich gemacht werden müßten.

Mein Freund *Arnulf Möbius*, auch ein langjähriger, erfolgreicher Olympiadeteilnehmer, übernahm die Korrektur. Die Mutter eines ehemaligen Olympioniken erklärte sich bereit, die Übersetzung auf Maschine zu schreiben. Es entstanden 150 Abzüge (Ormig). Nun können sich alle Mitglieder des Bezirksklubs durch unsere Arbeit weiterbilden.

Als Kostprobe möchte ich den *alpha*-Lesern einige Aufgaben vorstellen.

*Harald Englisch, EOS Karl Marx, Leipzig, Klasse 11*



**Nach Redaktionsschluß:**

Anläßlich der Siegerehrung zur *X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR* erhielt Harald Englisch einen 2. Preis in Olympiadeklasse 12 (EOS) und wurde damit Kandidat zur XIII. Internationalen Mathematikolympiade. Weitere Kandidaten sind: Wolfgang Burmeister (Dresden), Thomas Jentzsch (Halle), Reinhard Wobst (Karl-Marx-Stadt, ehem. Dresden), Rainer Siegmund-Schultze (Berlin), Stefan Ladmann (Leipzig), Hans-Jürgen Fischer (Karl-Marx-Stadt), Gerhard Spens (Erfurt), Arnulf Möbius (Halle, ehem. Leipzig), Ludwig Schäfer (Erfurt), Olaf Böhme (Dresden).

**Aufgaben aus Mathematik-Olympiaden der ČSSR**

▪ 1 ▪ Zerlege die natürlichen Zahlen von 1 bis 12 in 4 Gruppen zu je 3 Zahlen, wobei die Summe der 3 Zahlen jeder Gruppe nicht größer als 20 sein soll. Beweise, daß in solch einer Zerlegung die Gruppe $\{5, 6, 7\}$ nicht auftreten kann.

▪ 2 ▪ Gegeben ist der Viertelkreis $SBC$ mit dem Radius $r=\overline{SB}=\overline{SC}$. $A$ sei der Punkt auf dem Bogen $\widehat{BC}$, für den $\sphericalangle BSA=60^\circ$ gilt, $X$ sei ein beliebiger Punkt der Strecke $\overline{SC}$.

a) Bestimme den Flächeninhalt $P$ des Gebietes, das von den Strecken $\overline{AX}$ und $\overline{BX}$ und vom Bogen $\widehat{AB}$ begrenzt wird, mit Hilfe der Länge $x=\overline{SX}$.

b) Für welche $x$ ist $P$ halb so groß wie der Flächeninhalt des Viertelkreises? Den wievielten Teil von der Länge des Bogens $\widehat{BC}$ nimmt $x$ in diesem Falle ein?

▪ 3 ▪ Konstruiere das rechtwinklige Dreieck $ABC$ mit der Hypotenuse $c=\overline{AB}$, wenn ferner die Länge der Seitenhalbierenden $s_c$ und der Winkel $\omega$ gegeben sind. Dabei ist $\omega$ der Winkel zwischen $s_c$ und der Winkelhalbierenden $w_\gamma$.

▪ 4 ▪ Bestimme für die Funktion

$$y=\sqrt{x\,\frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}-\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}+\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}}$$

den maximalen Definitionsbereich und stelle sie dort graphisch dar.

▪ 5 ▪ a) Bestimme die kleinste natürliche Zahl $N$, die genau 15 Teiler hat.

b) Bestimme alle Zahlen kleiner als $N$, die mehr als 15 Teiler haben.

▪ 6 ▪ Gegeben ist im Raum die Gerade $p$ und eine Ebene $\pi$ senkrecht zu $p$. Auf $p$ sind 2 Punkte $A$ und $B$ gegeben, die auf der gleichen Seite von $\pi$ liegen. In $\pi$ ist eine Gerade $q$ gegeben. Bestimme den geometrischen Ort aller Höhenschnittpunkte der Dreiecke $ABX$, wobei $X$ auf der Geraden $q$ wandert.

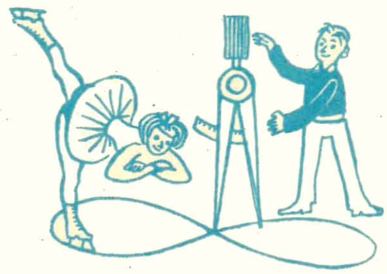
▪ 7 ▪ Gegeben sind die nichtnegativen Zahlen $c_1, c_2, c_3$ und die positiven Zahlen $d_1, d_2, d_3$ mit $d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$. Zeige, daß dann gilt

$$(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3)\left(\frac{c_1}{d_1}+\frac{c_2}{d_2}+\frac{c_3}{d_3}\right) \leqq (c_1+c_2+c_3)^2\,\frac{(d_1+d_3)^2}{4d_1d_3} \qquad (1)$$

*Hinweis:* Zeige zuerst, daß

$$\frac{d_2}{d_1+d_3}+\frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_3}} \leqq 1. \qquad (2)$$

# In freien Stunden alpha heiter



**Denk dir eine Zahl**

Fordere deinen Freund auf, sich eine beliebige Zahl kleiner als 64 zu denken und anzugeben, in welcher dieser sechs Querspalten sie vorkommt:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 |
| 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 |
| 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 6 | 7 | 10 | 11 | 14 | 15 | 18 | 19 | 22 |
| 23 | 26 | 27 | 30 | 31 | 34 | 35 | 38 | 39 | 42 | 43 |
| 46 | 47 | 50 | 51 | 54 | 55 | 58 | 59 | 62 | 63 | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 7 | 12 | 13 | 14 | 15 | 20 | 21 | 22 |
| 23 | 28 | 29 | 30 | 31 | 36 | 37 | 38 | 39 | 44 | 45 |
| 46 | 47 | 52 | 53 | 54 | 55 | 60 | 61 | 62 | 63 | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
| 46 | 47 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 |
| 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
| 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 |
| 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | |

Die gedachte Zahl findet man leicht, indem man die ersten Zahlen in den angegebenen Querspalten addiert. Wie ist das möglich?

**Die bunten Würfel des Major MacMahon**

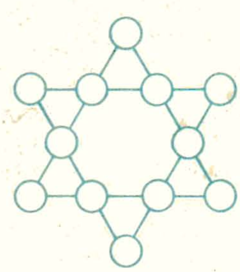
Das Spiel besteht aus dreißig gleichgroßen Würfeln, deren Flächen in sechs Farben gehalten sind: Jeder Würfel hat eine weiße, blaue, grüne, gelbe, rote und schwarze Fläche. Dabei unterscheiden sich je zwei dieser Würfel durch die gegenseitige Lage der farbigen Flächen voneinander. (Das Spiel enthält deshalb ausgerechnet dreißig Würfel, weil die sechs Farben gerade auf dreißigfache Weise so auf die Würfelflächen verteilt werden können, daß je zwei Farbanordnungen voneinander verschieden sind.)

Mit den dreißig Würfeln des *MacMahon* lassen sich verschiedene Spiele verabreden; auf das bekannteste wollen wir hier eingehen:
Von den dreißig Würfeln wählt man einen beliebigen, den man *Muster* nennt. Von den 29 übrigen soll man 8 auswählen und sie zu einem großen Würfel zusammenstellen, der die gleiche Farbverteilung wie das Muster hat. Wenn man weiter nichts verlangt, ist die Aufgabe verhältnismäßig leicht. *MacMahon* fügte jedoch einige andere Forderungen für die Zusammenstellung des Würfels aus acht Einzelwürfeln hinzu. Er verlangt z. B., daß im „großen“ Würfel nur Würfel mit gleichfarbigen Flächen aneinanderstoßen sollen. Wenn z. B. ein Einzelwürfel eine weiße Deckfläche hat und man darauf einen weiteren stellt, muß die Grundfläche dieses Würfels wiederum weiß sein.

**Ersetze Buchstaben durch Zahlen**

In der untenstehenden Aufgabe sind die Buchstaben so durch Zahlen zu ersetzen, daß in der Summe für *e* die Zahl 2 oder 4 oder 6 gesetzt werden kann. Überlege, ob für *e* auch 8 möglich ist. Bei jeder Teilaufgabe bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen, *a*, *b*, *c*, *d*, bedeuten vier verschiedene Zahlen.

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & c & d \\ & & b & c & d \\ & & & c & d \\ + & & & & d \\ \hline & e & e & e & e \end{array}$$

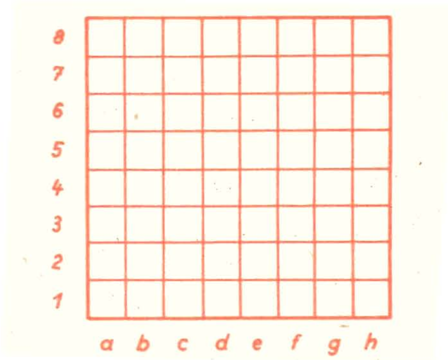


**Der Zahlenstern**

Ein sechseckiger Stern enthält 12 Kreise. Ordne die Zahlen 1 bis 12 so in die Kreise ein, daß die Summe der Zahlen für jede Seite (4 Kreise) 26 beträgt! Zeige ferner, daß es möglich ist, die Zahlen so einzuordnen, daß außerdem die Summe der Zahlen an den 6 Eckfeldern 26 beträgt!

**Damen auf dem Schachbrett**

Auf ein Schachbrett sind vier Damesteine so zu stellen, daß sie alle nichtbesetzten Felder mit Ausnahme von a1, a2, b1, b2 decken. Auf das Brett sind fünf Damesteine so aufzustellen, daß sie alle nicht besetzten Felder decken.
Wieviel Züge kann man auf einem leeren Schachbrett mit einem Damestein ausführen? (Der Damestein kann sich bei jedem Zuge beliebig weit vor oder zurück, parallel zu den Seiten des Brettes oder zu den beiden Diagonalen des Brettes bewegen.)




**Die Zahl 3 fünfmal verwendet**

Die Zahlen 11 und 57 sollen nur mit Hilfe der Zahl 3 und beliebigen Rechenzeichen sowie mit der Bedingung dargestellt werden, daß die Zahl 3 genau fünfmal verwendet wird.

**Kryptarithmetik**

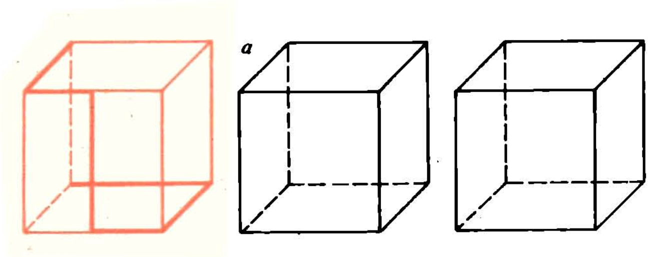
Ergänze die fehlenden Ziffern, an deren Stelle Sterne gesetzt sind!

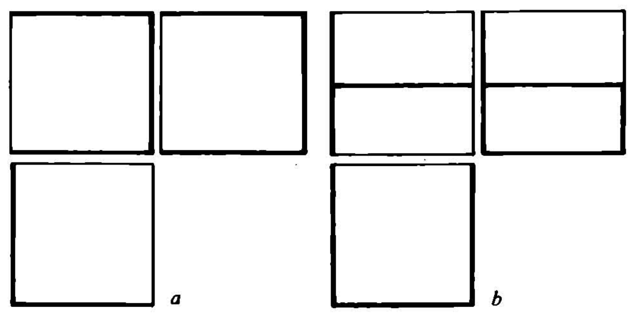
$$\begin{array}{r} 1\,*\,*\,\cdot\,*\,* \\ \hline *\,*\,*\,1\phantom{\,*\,*} \\ *\,*\,*\,1\phantom{\,*\,*\,*} \\ \hline *\,*\,*\,1\,*\phantom{\,*} \end{array}$$

Die auf beiden Seiten (S. 66/67) gestellten Probleme wurden entnommen aus:
333 her a zábavy pro pionýry (Verlag Mladá franta); Magazín hadanky a křížovky (Verlag Orbis), Keine Angst vor Mathematik (SNTI-Verlag technischer Literatur / VEB Fachbuchverlag); Zentrale Mathe-AG Liberec; rozhledy (mathematische Schülerzeitschrift der ČSSR)

**Aufgepaßt**

Wir wollen überprüfen, wie es um unser räumliches Vorstellungsvermögen steht: In einen Würfel ist der Verlauf eines Drahtes in räumlich gebrochener Linie eingezeichnet.




In a und b ist der gleiche Würfel im Grund-, Auf- und Kreuzriß gezeichnet. Das Bild des Verlaufs je eines Drahtes ist dargestellt. Zeichne in die beiden Würfel den Verlauf der Drähte in räumlich gebrochener Linie ein!

**Wer hat die Scheibe eingeschlagen?**

*Emil, Johann, Karl* und *Rudolf* haben auf dem Hof Fußball gespielt und eine Fensterscheibe eingeschlagen. Als der Fall untersucht wurde, sagten sie folgendermaßen aus:
*Emil:* „Das Fenster hat Karl oder Rudolf eingeschlagen."
*Johann:* „Rudolf hat es getan."
*Karl:* „Ich habe das Fenster nicht eingeschlagen."
*Rudolf:* „Ich auch nicht."
Ihr Lehrer, der die Jungen gut kannte, sagte: „Drei von ihnen sprechen immer die Wahrheit."
Wer hat also das Fenster eingeschlagen?

# Lösungen

**Lösung zu der Aufgabe 4 der IV. Internationalen Physikolympiade** (Heft 1/71)

Bei einem sphärischen Hohlspiegel kreuzen sich die reflektierten Strahlen eines Parallelstrahlbündels nicht alle im Brennpunkt. Damit ergibt sich eine Skizze für den Sachverhalt entsprechend Bild. (Siehe S. 72, Mitte)

Die Brennweite des sphärischen Hohlspiegels mit dem Brennpunkt $F$ beträgt

$$FM = FO = \frac{R}{2}.$$

Weil das Dreieck $CMD$ gleichschenklig und die Strecke $DM = R$ ist, folgt

$$\cos i = \frac{R}{2\,CM}, \text{ also } CM = \frac{R}{2\cos i}.$$

Weiterhin gilt für die Strecke $CF$:

$CF = CM - FM$, also

$$CF = \frac{R}{2\cos i} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos i} - 1\right). \qquad (1)$$

Für das rechtwinklige Dreieck $CEF$ gilt:

$$\tan 2i = \frac{x}{CF}, \text{ also } x = CF \cdot \tan 2i.$$

In Verbindung mit Gleichung (1) folgt für die Strecke $x$:

$$x = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos i} - 1\right)\tan 2i. \qquad (2)$$

Für das rechtwinklige Dreieck $DAM$ gilt:

$$\sin i = \frac{a}{R}. \qquad (3)$$

Aus der Gleichung $\cos^2 i + \sin^2 i = 1$ folgt dann:

$$\cos i = \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}$$

für Winkelfunktionen des doppelten Winkel

$$\tan 2i = \frac{\sin 2i}{\cos 2i} = \frac{2\sin i \cos i}{1 - 2\sin^2 i}.$$

Dann folgt in Verbindung mit den Gleichungen (3) und (4):

$$\tan 2i = \frac{2a\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}}{R\left(1 - \frac{2a^2}{R^2}\right)} \qquad (5)$$

Daraus folgt für die Strecke $x$ in Verbindung mit den Gleichungen (2), (4) und (5):

$$x = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}} - 1\right)\frac{2a\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}}{R\left(1 - \frac{2a^2}{R^2}\right)},$$

$$x = \frac{a}{1 - \frac{2a^2}{R^2}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}\right).$$

Es gelten folgende Näherungen:

$$1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} \approx 1 - \left(1 - \frac{a^2}{2R^2}\right) \approx \frac{a^2}{2R^2} \text{ und weil}$$

$\frac{a^2}{R^2} \ll 1$ ist $1 - \frac{2a^2}{R^2} \approx 1$.

Daraus folgt für die Strecke $x$:

$$x \approx a\frac{a^2}{2R^2} \approx \frac{a^3}{2R^2}.$$

Für die Größe des Empfängers ergibt sich damit angenähert:

$$x \approx \frac{25^3}{2 \cdot 200^2}\text{ cm} \approx 2\text{ mm}.$$

Aus der Berechnung des Verhältnisses der Spiegelflächen zueinander ergibt sich die Lösung für den zweiten Teil der Aufgabe. Dabei wird in jedem der beiden Fälle berücksichtigt, daß auf den Strahlungsempfänger die Energie vom ganzen Spiegel, das heißt von der Kreisfläche von Halbmesser $a$, trifft. Aus der vorhergehenden Berechnung ergibt sich

$$a = \sqrt[3]{2R^2 x}.$$

Die Wirkungsfläche des Spiegels ist proportional zu $a^2$, das bedeutet

$$a^2 = \sqrt[3]{4R^4 x^2}.$$

Eine Verringerung des Empfängerradius auf ein Achtel ergibt

$$a_1{}^2 = \sqrt[3]{4R^4\left(\frac{x}{8}\right)^2}.$$

Damit wird das Flächenverhältnis

$$\frac{F}{F_1} = \frac{a^2}{a_1{}^2} = \sqrt[3]{8^2} : 1 = 4 : 1.$$

Die vom Empfänger aufgenommene Strahlung verringert sich um ein Viertel, wenn seine Ausmaße auf ein Achtel reduziert werden.

---

W 5 ■ 592 Nach dem Umstellen der Bücher befinden sich in jedem Regal genau 40 Bücher. Da dabei dem ersten Regal zwei Bücher entnommen wurden, befanden sich dort zuvor 42 Bücher. Dem zweiten Regal wurden zwei Bücher hinzugefügt und drei Bücher entnommen, in ihm befanden sich demnach 41 Bücher. Im dritten Regal befanden sich 37 Bücher.

W 5 ■ 593 Wir nehmen an, im vergangenen Jahr beteiligten sich $n$ Schüler am Wettbewerb; dann nahmen $(28-n)$ Schüler nicht daran teil. Gegenwärtig beteiligen sich $(n+6)$ Schüler am Wettbewerb. Die Gleichung $n+6 = 28-n$ wird nur für $n = 11$ erfüllt, denn $11+6 = 28-11$. Also nahmen im vergangenen Jahr 11 Schüler dieser Klasse am *alpha*-Wettbewerb teil und in diesem Jahr $11+6 = 17$ Schüler.

* 5 * 594 Nehmen wir an, ein Schüler habe $a$ 5-Pfennigstücke, $b$ 10-Pfennigstücke, $c$ 20-Pfennigstücke und $d$ 50-Pfennigstücke gespart, dann gilt $5a + 10b + 20c + 50d = 200$ bzw.

$a + 2b + 4c + 10d = 40$. Dabei sind $a, b, c$ und $d$ natürliche Zahlen größer als 0 und kleiner als 4. Da $2b$, $4c$, $10d$ sämtlich gerade Zahlen sind, und die Summe 40 ebenfalls eine gerade Zahl ist, muß auch $a$ eine gerade Zahl sein, also $a = 2$. Wir erhalten somit

$$2 + 2b + 4c + 10d = 40,$$
$$2b + 4c + 10d = 38,$$
$$b + 2c + 5d = 19.$$

Diese Gleichung besitzt unter den gegebenen Bedingungen genau zwei Lösungen, nämlich $b_1 = 2$, $c_1 = 1$, $d_1 = 3$ und $b_2 = 3$, $c_2 = 3$, $d_2 = 2$. Da es sich um drei Schüler handelt, aber nur die beiden Möglichkeiten

$2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 3 \cdot 50 = 200$ und

$2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 50 = 200$ bestehen,

trifft Regines Behauptung zu.

W 6 ■ 597 Es sei $n$ die Anzahl der Ringe, die ein Schütze höchstens erreichen kann, dann entfallen auf Monika $\frac{4}{5}n$ Ringe, auf Bärbel $\left(\frac{4}{5}n + 4\right)$ Ringe, auf Margit $\left(\frac{4}{5}n + 2\right)$ Ringe. Zusammen erreichten die drei Mädchen also $\left(\frac{12}{5}n + 6\right)$ Ringe. Die Gleichung $\frac{12}{5}n + 6 = \frac{5}{2}n$ hat die Lösung $n = 60$.

Ein Schütze konnte 60 Ringe erreichen. Bärbel erreichte 52, Margit 50, Monika 48 Ringe.

W 6 ■ 598 Da die von $A$ gemachte Aussage falsch ist, hat $A$ verschiedenfarbige Kugeln in der Hand. Da $A$ höchstens zwei Kugeln erhielt, besitzt er genau eine weiße und eine schwarze Kugel. Da die Aussage von $C$ falsch ist, hat $C$ genau eine Kugel, und zwar entweder eine weiße oder eine schwarze erhalten. Im ersten Falle müßte dann $B$ je eine weiße und schwarze Kugel besitzen. Da aber die Aussage von $B$ falsch ist, kann dieser Fall nicht eintreten. Daher trifft der zweite Fall zu, und $B$ erhielt zwei weiße Kugeln. Demnach erhielten

$A$ eine weiße und eine schwarze Kugel,
$B$ zwei weiße Kugeln,
$C$ eine schwarze Kugel.

* 6 * 599 Das Produkt $RPRP$ läßt sich darstellen durch $100 \cdot RP + RP = 101 \cdot RP$. Demnach gilt $P^2 \cdot PQP = 101 \cdot RP$, das heißt $PQP$ muß durch 101 teilbar sein. Aus $n \cdot 101 = PQP$ und $0 < n < 9$ folgt

$PQP = 101$ für $n = 1$, also $Q = 0$ und $R = 0$ (entfällt);

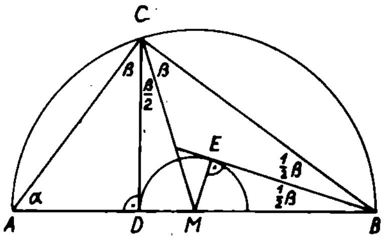
$PQP = 202$ für $n = 2$, also $Q = 0$ und $RP = 8$ (nicht möglich); usw. Nur $n = 4$ erfüllt die gestellten Bedingungen, und wir erhalten $PQP = 404$ und $RP = 64$, also $R = 6$.

Probe: $4 \cdot 404 \cdot 4 = 6464$.

W 7 ■ 602 Es seien $x$, $y$ und $z$ die gesuchten natürlichen Zahlen. Dann gilt $x + y + z = s$ und $xs + ys + zs = s(x + y + z) = s^2$. Daraus folgt $240 + 270 + 390 = s^2$ bzw. $s^2 = 900$ und damit $s = 30$. Aus $xs = 30x = 240$ folgt $x = 8$, aus $xy = 30y = 270$ folgt $y = 9$ und aus $zs = 30z = 390$ folgt $z = 13$. Die gesuchten Zahlen lauten somit 8, 9 und 13.

W 7 ■ 603 Es sei $\overline{BC}=\overline{AD}=b$; dann gilt $A_1=\frac{b}{2}(x+y)$, $A_2=\frac{b}{2}[(a-x)+(a-y)]$
$=\frac{b}{2}(2a-x-y)$, also
$A_1 : A_2=(x+y) : (2a-x-y)=2 : 3$.
Daraus folgt
$3x+3y=4a-2x-2y$,
$5x+5y=4a$,
$x+y=\frac{4}{5}a$.

* 7 * 604 Nach dem Satz des Thales gilt $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$ und damit auch $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB=\beta$. Im rechtwinkligen Dreieck $ADC$ gilt $\sphericalangle ACD=90^\circ-\alpha=\beta$.
Aus $\overline{MD}=\overline{ME}$, $\overline{MB}=\overline{MC}$, $\sphericalangle CDM=\sphericalangle BEM=90^\circ$ folgt $\triangle DMC\cong\triangle MBE$ und damit $\sphericalangle MBE=\sphericalangle DCM=\frac{1}{2}\beta$.




Aus $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ACD+\sphericalangle DCM+\sphericalangle MCA$
$=\beta+\frac{1}{2}\beta+\beta=90^\circ$ folgt $\beta=36^\circ$ und somit $\alpha=54^\circ$.
Es wurden auch die Lösungen (*alpha*-Wettbewerb) anerkannt, bei denen die Einsender den Höhenfußpunkt $F$ näher an $A$ als an $B$ wählten, d. Red.

W 8 ■ 607 Es seien $x$ und $y$ zwei zweistellige natürliche Zahlen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Dann ist ihre Summe $x+y$ das Quadrat einer natürlichen Zahl, und es gilt

$$\frac{1}{5}x=\frac{6}{25}y, \text{ also } x:y=6:5,$$

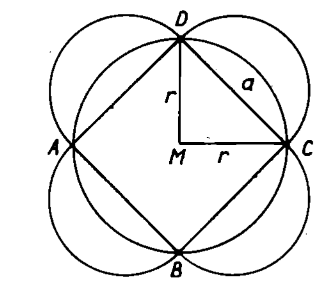
d. h., $x=6k$ und $y=5k$, wobei $k$ eine natürliche Zahl ist.
Daraus folgt $x+y=11k$.
Nach Voraussetzung ist $11k$ eine Quadratzahl; das ist aber nur dann möglich, wenn $k$ gleich einer der Zahlen 11, $11\cdot 4$, $11\cdot 9$, ..., $11\cdot n^2$, ... ist. Für $k=11$ erhalten wir $x=66$ und $y=55$, also zwei zweistellige Zahlen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen; denn es gilt

$$x+y=66+55=121=11^2$$

und $\frac{1}{5}x=\frac{66}{5}$, $\frac{6}{25}y=\frac{6\cdot 55}{25}=\frac{66}{5}$.
Für $k=11\cdot 4=44$ erhalten wir $x=264$ und $y=220$; diese Zahlen erfüllen nicht mehr die Bedingungen der Aufgabe, da sie bereits dreistellig sind. Entsprechendes gilt für $k=11\cdot n^2$ mit $n>2$.
Es gibt also genau ein geordnetes Paar von natürlichen Zahlen, das die gestellten Bedingungen erfüllt, nämlich (66, 55).

W 8 ■ 608 Für $a=1$ erhalten wir $f(a)=a^a(100-a^a)=99$; für $a=2$ erhalten wir $f(a)=2^2(100-2^2)=4(100-4)=384$; also Zahlen, die nicht vierstellig sind.
Für $a=3$ erhalten wir $f(a)=3^3(100-3^3)=27(100-27)=1971$. Diese Zahl ist vierstellig und erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.
Für $a>3$ erhalten wir $a^a\geqq 4^4=256$, also $100-a^a\leqq 100-256<0$,
d. h., $f(a)<0$, also keine weiteren Lösungen.
Es gibt also genau eine vierstellige Zahl, die die obigen Bedingungen erfüllt, nämlich die Zahl 1971.

* 8 * 609 a) Es seien $M$ der Mittelpunkt und $r$ der Radius des Kreises $k$, $a$ die Länge der Seiten des Quadrats $ABCD$. Dann gilt, da das Dreieck $MCD$ rechtwinklig ist, nach dem Satz des Pythagoras
$r^2+r^2=a^2$, also $r^2=\frac{a^2}{2}$ (vgl. d. Abb.)




Der Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ ist gleich $A_1=a^2$. Der Flächeninhalt des Kreises $k$ ist gleich $A_2=\pi r^2=\frac{\pi}{2}a^2$. Der Flächeninhalt eines jeden Halbkreises über einer Quadratseite ist gleich $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}a^2$, also die Summe dieser vier Flächeninhalte gleich $A_3=\frac{\pi}{2}a^2$.
Wir erhalten daher die Summe der Flächeninhalte der vier von den Punkten $A$, $B$, $C$, $D$ begrenzten Segmente des Kreises $k$, indem wir von dem Flächeninhalt des Kreises $k$ den Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ subtrahieren:

$$A_2-A_1=\frac{\pi}{2}a^2-a^2.$$

Die Summe der Flächeninhalte der vier „Mondsicheln" ist daher

$$A_3-(A_2-A_1)=\frac{\pi}{2}a^2-\left(\frac{\pi}{2}a^2-a^2\right)=a^2,$$

d. h., die Summe der Flächeninhalte der vier „Mondsicheln" ist *gleich* dem Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$.
b) Damit haben wir gleichzeitig diese Summe, die gleich $a^2$ ist, durch die Seitenlänge $a$ des Quadrats $ABCD$ ausgedrückt.

W 9 ■ 612 Wir formen die gegebene Zahl zunächst so um, daß der Nenner des ersten Summanden rational wird (durch Erweiterung mit $5+\sqrt{2}$) und erhalten dann weiter

$$z=\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}-\frac{10}{23}\sqrt{2}=\frac{(5+\sqrt{2})^2}{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})}-\frac{10}{23}\sqrt{2}$$
$$=\frac{25+10\sqrt{2}+2}{25-2}-\frac{10\sqrt{2}}{23}$$
$$=\frac{25+10\sqrt{2}+2-10\sqrt{2}}{23}=\frac{27}{23},$$

d. h., die Zahl $z$ ist rational, weil sie sich als Quotient der ganzen Zahlen 27 und 23 darstellen läßt.

W 9 ■ 613 Es sei $a$ die Länge der Würfelkante; dann ist der Radius der einbeschriebenen Kugel gleich $\varrho=\frac{a}{2}$, also ihr Rauminhalt gleich $V_1=\frac{4}{3}\pi\varrho^3=\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8}=\frac{\pi}{6}a^3$.
Ferner ist der Radius der *umbeschriebenen* Kugel gleich der halben Länge der Körperdiagonale des Würfels, also gleich $r=\frac{a}{2}\sqrt{3}$.
Daher ist der Rauminhalt gleich

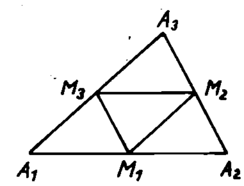
$$V_2=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8}3\sqrt{3}=\frac{\pi}{2}a^3\sqrt{3}.$$

Die Rauminhalte der beiden Kugeln verhalten sich daher wie

$$V_1 : V_2=\left(\frac{\pi}{6}a^3\right) : \left(\frac{\pi}{2}a^3\sqrt{3}\right)$$
$$\frac{1}{3} : \sqrt{3}=1 : (3\sqrt{3})\approx 1 : 5{,}196.$$

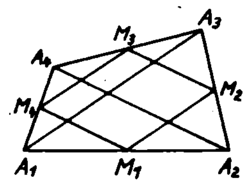
Der Rauminhalt der umbeschriebenen Kugel ist also etwas mehr als fünfmal so groß wie der Rauminhalt der einbeschriebenen Kugel.

* 9 * 614 a) Aus $\overline{A_1M_1} : \overline{M_1A_2}=\overline{A_1M_3} : \overline{M_3A_3}=1 : 1$ folgt $\overline{M_1M_3} \parallel \overline{A_2A_2}$ und weiter $\overline{M_1M_3} : \overline{A_2A_3}=1 : 2$, also $\overline{M_1M_3}=\overline{A_2M_2}=\overline{M_2A_3}$ (vgl. Abb. 1).
Analog erhalten wir $\overline{M_1M_2}=\overline{A_1M_3}=\overline{M_3A_3}$ und $\overline{M_2M_3}=\overline{A_1M_1}=\overline{M_1A_2}$.




Da die Punkte $M_1$, $M_2$, $M_3$ gegeben sind, läßt sich das Dreieck $M_3M_2A_3$ aus den drei Seiten $\overline{M_3M_2}$, $\overline{M_2A_3}=\overline{M_1M_3}$ und $\overline{A_3M_3}=\overline{M_1M_2}$ konstruieren. Durch Verlängerung der Strecke $\overline{A_3M_3}$ über $M_3$ hinaus um sich selbst erhalten wir den Punkt $A_1$ und analog durch Verlängerung der Strecke $\overline{A_3M_2}$ über $M_2$ hinaus um sich selbst den Punkt $A_2$. Damit haben wir das gesuchte Dreieck $A_1A_2A_3$ konstruiert und gleichzeitig festgestellt, daß es genau ein Dreieck mit den verlangten Eigenschaften gibt.
b) Aus $\overline{A_1M_1} : \overline{M_1A_2}=\overline{A_1M_4} : \overline{M_4A_4}=1 : 1$ folgt $M_1M_4 \parallel A_2A_4$ (vgl. Abb. 2). Analog erhalten wir $M_2M_3 \parallel A_2A_4$ und $M_1M_2 \parallel M_3M_4 \parallel A_1A_3$. Das gesuchte Viereck existiert also nur dann, wenn die gegebenen Seitenmitten $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ Eckpunkte eines Parallelogramms sind.
Zur Konstruktion des gesuchten Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ können wir jetzt den Punkt $A_1$ beliebig annehmen, jedoch so, daß er zwi-

schen den parallelen Geraden $M_1M_2$ und $M_3M_4$ liegt und von der Geraden $M_1M_4$ einen kleineren Abstand als diese Gerade von der Geraden $M_2M_3$ hat. (Sonst könnten nämlich die Punkte $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ nicht die Seitenmitten des gesuchten Vierecks sein.) Jetzt verlängern wir die Strecke $\overline{A_1M_1}$ über $M_1$ hinaus um sich selbst bis zum Punkt $A_2$ und die Strecke $\overline{A_1M_4}$ über $M_4$ hinaus bis zum Punkt $A_4$. Die Verbindungsgeraden $A_2M_2$ und $A_4M_3$ schneiden sich im Punkt $A_3$. Dann ist $A_1A_2A_3A_4$ ein Viereck mit den verlangten Eigenschaften. Denn es gilt
$M_1M_4 \parallel A_2A_4 \parallel M_2M_3$ und daher
$\overline{M_2M_3} : \overline{A_2A_4} = \overline{M_1M_4} : \overline{A_2A_4} = 1 : 2$.

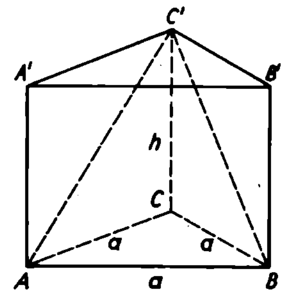



Also sind $M_2$ und $M_3$ die Mittelpunkte der Seiten $\overline{A_2A_3}$ bzw. $\overline{A_3A_4}$. Ferner sind nach Konstruktion $M_1$ und $M_4$ die Mittelpunkte der Seiten $\overline{A_1A_2}$ bzw. $\overline{A_4A_1}$. Das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ hat daher die verlangten Eigenschaften.
Nun konnten wir den Punkt $A_1$ beliebig (mit den obigen Einschränkungen) annehmen. Die Aufgabe b) hat daher im Gegensatz zur Aufgabe a) unendlich viele Lösungen.

W 10/12 ■ 616 a) Wir erhalten bei Anwendung der Näherungsformel für das Volumen des pyramidenstumpfförmigen Teils des Zeltes
$$V_1' = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 h_1 = 2{,}725^2 \cdot 1{,}7\ \mathrm{m}^3 \approx 12{,}62\ \mathrm{m}^3.$$
Ferner beträgt das Volumen der aufgesetzten Pyramide
$$V_2 = \frac{b^2 h_2}{3} = \frac{2{,}15^2 \cdot 0{,}5}{3}\ \mathrm{m}^3 \approx 0{,}77\ \mathrm{m}^3.$$
Für das Volumen des Zeltes erhalten wir daher den Näherungswert
$$V' = V_1' + V_2 \approx 13{,}39\ \mathrm{m}^3.$$
b) Bei Anwendung der genauen Formel erhalten wir für das Volumen des pyramidenstumpfförmigen Teils des Zeltes
$$V_1 = \frac{h_1}{3}(a^2 + ab + b^2)$$
$$= \frac{1{,}7}{3}(3{,}3^2 + 3{,}3 \cdot 2{,}15 + 2{,}15^2)\ \mathrm{m}^3$$
$$= \frac{1{,}7 \cdot 22{,}61}{3}\ \mathrm{m}^3 \approx 12{,}81\ \mathrm{m}^3,$$
also für das Volumen des Zeltes
$$V = V_1 + V_2 \approx (12{,}81 + 0{,}77)\ \mathrm{m}^3 \approx 13{,}58\ \mathrm{m}^3.$$
Der absolute Fehler beträgt also bei der Anwendung der Näherungsformel
$$V - V' \approx (13{,}58 - 13{,}39)\ \mathrm{m}^3 \approx 0{,}19\ \mathrm{m}^3.$$
Daraus erhalten wir den relativen Fehler
$$\frac{V - V'}{V} \approx \frac{0{,}19}{13{,}58} \approx 0{,}014, \text{ d. s. } 1{,}4\,\%.$$
Der bei der Anwendung der Näherungsformel entstandene Fehler ist also verhältnismäßig klein und kann bei derartigen praktischen Berechnungen vernachlässigt werden.

W 10/12 ■ 617 Wegen (2) ist $k \neq 0$. Durch Multiplikation mit $k^2$ erhalten wir aus (2)
$$kx + 5k^2y = 2k^2. \quad (3)$$
Ferner folgt aus (1)
$$-kx + 3y = -18, \quad (4)$$
also durch Addition von (3) und (4)
$$y(5k^2+3) = 2k^2 - 18, \quad y = \frac{2(k^2-9)}{5k^2+3} \quad (5)$$
Ferner erhalten wir aus (2)
$$x = k(2 - 5y) = k\left(2 - \frac{10(k^2-9)}{5k^2+3}\right) = \frac{96k}{5k^2+3} \quad (6)$$
Wegen $5k^2+3>0$ gilt $y<0$ genau dann, wenn $k^2<9$, also $-3<k<3$ ist, also für ganzzahlige $k$ nur in den Fällen $k=-2, -1, 0, 1, 2$.
Andererseits gilt wegen (6) $x<0$ nur für $k<0$. Daher hat das gegebene Gleichungssystem negative rationale Lösungen nur für $k=-2$ und $k=-1$.

* 10 * 618 Da die Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ gleichseitig und einander kongruent sind, gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$. Wegen $\overline{CC'} = h$ folgt ferner nach dem Satz des Pythagoras $\overline{AC'}^2 = \overline{BC'}^2 = a^2 + h^2$ (vgl. d. Abb.).

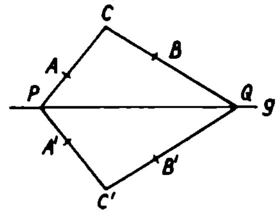



Gilt nun $\sphericalangle AC'B = 45°$, so folgt aus der Anwendung des Kosinussatzes in dem Dreieck $ABC'$
$$a^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{BC'}^2 - 2\,\overline{AC'} \cdot \overline{BC'} \cdot \cos 45° \quad (1)$$
$$a^2 = (a^2+h^2) + (a^2+h^2) - 2(a^2+h^2)\frac{1}{2}\sqrt{2},$$
$$a^2 = (a^2+h^2)(2-\sqrt{2}).$$
Hieraus erhalten wir, indem wir durch $a^2$ dividieren,
$$1 = \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)(2-\sqrt{2}), \quad (2)$$
$$1 + \frac{h^2}{a^2} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}. \text{ Daraus folgt}$$
$$\frac{h^2}{a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ also } \frac{h}{a} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}. \quad (3)$$
Andererseits folgt auch, wie man durch den Rückschluß von (3) auf (1) leicht bestätigt, aus $h : a = 1 : \sqrt[4]{2}$ $\sphericalangle AC'B = 45°$.
Es gilt also $\sphericalangle AC'B = 45°$ genau dann, wenn
$$h : a = 1 : \sqrt[4]{2} \approx 1 : 1{,}189.$$

5 ▲ 621 Die Lösung ist der abgebildeten Tabelle zu entnehmen.

| Name | Anzahl der Murmeln | Lösung |
|---|---|---|
| Klaus | $x+9$ | 23 |
| Karin | $x+7$ | 21 |
| Ute | $x+3$ | 17 |
| Horst | $x$ | 14 |
| Sabine | $x+8$ | 22 |
| insges. | $5x+27=97$  $5x=70$ | $x=14$ |

5 ▲ 622 Wir zeichnen die Verbindungsgerade der Punkte $A$ und $C$; sie schneidet die Symmetrieachse $g$ im Punkte $P$. Dann zeichnen wir die Gerade durch die Punkte $P$ und $A'$. Die nun zu zeichnende Verbindungsgerade der Punkte $B$ und $C$ schneidet die Symmetrieachse $g$ im Punkte $Q$. Der Schnittpunkt der Geraden $PA'$ mit der zu ziehenden Geraden $QB'$ ist der gesuchte Bildpunkt $C'$.




W 5 ■ 623 Aus $44 - 12 = 32$ folgt, daß im zweiten Falle der Verteilung 32 Äpfel mehr als im ersten Falle verteilt worden wären. Da dann jeder Schüler $6 - 4 = 2$ Äpfel mehr erhalten hätte, gilt $32 : 2 = 16$, das heißt, es beteiligten sich 16 Schüler an der Apfelernte. Aus $16 \cdot 4 + 44 = 108$ oder $16 \cdot 6 + 12 = 108$ folgt, daß sich 108 Äpfel in dem Korbe befanden.

W 5 ■ 624 Am Theaterbesuch beteiligten sich insgesamt 144 Schüler, denn $29 + 115 = 144$. In jedem der drei Busse saßen 48 Schüler, denn $144 : 3 = 48$. Es sei $x$ die Anzahl der Mädchen, die im ersten Bus fuhren, dann saßen in diesem Bus $15 \cdot x$ Jungen, also $x + 15x = 16x$ Schüler. Aus $16x = 48$ folgt $x = 3$. Im ersten Bus saßen demnach 3 Mädchen und 45 Jungen. Es sei $y$ die Anzahl der Mädchen, die mit dem zweiten Bus reisten, dann saßen in diesem Bus $y + 20$ Jungen, also insgesamt $2y + 20$ Schüler. Aus $2y + 20 = 48$ folgt $y = 14$. Im zweiten Bus fuhren 14 Mädchen und 34 Jungen. Aus $29 - 3 - 14 = 12$ und $115 - 45 - 34 = 36$ folgt, daß mit dem dritten Bus 12 Mädchen und 36 Jungen reisten.

* 5 * 625 Der Übersicht halber fertigen wir uns eine Tabelle an.

| | Sorte A | Sorte B | Sorte C | Preis |
|---|---|---|---|---|
| Elke | 5 | | 30 | 3,50 M |
| Doris | 8 | 20 | | 5,20 M |
| Helga | 7 | 20 | 30 | 6,30 M |
| insges.: | 20 | 40 | 60 | 15,00 M |

Elke und Doris kauften zusammen
13 Stück der Sorte A, 20 Stück der Sorte B, 30 Stück der Sorte C für 8,70 M.
Helga hingegen erwarb
7 Stück der Sorte A, 20 Stück der Sorte B, 30 Stück der Sorte C für 6,30 M.
Demnach kosten sechs Briefmarken der Sorte A ($8{,}70 - 6{,}30 = 2{,}40$) genau 2,40 M, also eine Briefmarke 0,40 M.
Aus $3{,}50 - 2{,}00 = 1{,}50$ und $150 : 30 = 5$ folgt, daß jede Briefmarke der Sorte C 0,05 M kostete. Aus $5{,}20 - 3{,}20 = 2{,}00$ und $200 : 20 = 10$ folgt, daß jede Briefmarke der Sorte B 0,10 M kostete.

6▲626 Die möglichen Fälle der unterschiedlichen Preise der bestellten Artikel sind in der abgebildeten Tabelle zusammengestellt.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Preis in M | 12,— | 12,— | 12,— | 12,— | 12,— | 12,— | 14,— |
| je Artikel | 14,— | 14,— | 14,— | 14,— | 16,— | 16,— | 16,— |
| | 16,—. | 18,— | 20,— | 22,— | 18,— | 20,— | 18,— |
| | 42,— | 44,— | 46,— | 48,— | 46,— | 48,— | 48,— |
| Leihgebühr | 7,10 | 5,10 | 3,10 | 1,10 | 3,10 | 1,10 | 1,10 |
| Gesamtbetrag | 49,10 | 49,10 | 49,10 | 49,10 | 49,10 | 49,10 | 49,10 |

Da für jeden der drei Mietbehälter die gleiche Leihgebühr erhoben wurde, muß der Gesamtbetrag für Leihgebühren durch 3 teilbar sein; das trifft aber nur für 5,10 M zu. Die Einzelpreise der Artikel lauten also 12,— M, 14,— M, 18,— M. Die Leihgebühr für einen Mietbehälter beträgt 1,70 M.

6▲627 Jens habe $x$ kubanische Briefmarken gesammelt; an Hand des Aufgabentextes läßt sich folgende Tabelle aufstellen:

| Länder | Anzahl der Marken | Lösung |
|---|---|---|
| Kuba | $x$ | 18 Briefmarken |
| Rumänien | $3x$ | 54 |
| Sowjetunion | $4 \cdot 3x = 12x$ | 216 |
| Polen | $x+3x+9=4x+9$ | 81 |
| DDR | $x+3x+12x+4x+9=20x+9$ | 369 |
| Ungarn | $12x:2-9=6x-9$ | 99 |
| insgesamt | $46x+9=837$ | 837 |
| | $46x=828$ | |
| | $x=18$ | |

W 6 ■ 628 Uwe habe sich die Zahl $x$ gemerkt, und $n$ sei das berechnete Endergebnis. Auf Grund der Anweisungen hat er folgende Rechenoperation auszuführen:

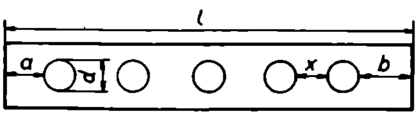
$$[(x \cdot 5+2) \cdot 4+3] \cdot 5=n,$$
$$(5x+2) \cdot 20+15=n,$$
$$100x+40+15=n,$$
$$100x+55=n.$$

Die gemerkte Zahl $x$ erhält man, wenn man die letzten beiden Ziffern (55) im errechneten Ergebnis $n$ wegläßt.

Beispiel: $n=1\,755$, $x=17$.

W 6 ■ 629 Es sei $n$ die Anzahl der Bohrlöcher; sie besitzen untereinander $n-1$ Abstände. Aus der nachfolgenden Abbildung läßt sich die Struktur der allgemeingültigen Gleichung für die Länge $x$ des Abstandes zweier benachbarter Bohrlöcher leicht bestätigen.

$$x=\frac{l-(a+b+n \cdot d)}{n-1}$$




Zahlenbeispiel:

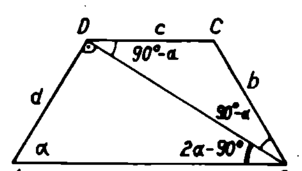
$$x=\frac{310-(10{,}2+22+5 \cdot 35)}{5-1}\,\text{mm},$$
$$x=25{,}7\,\text{mm}.$$

Der Abstand zweier benachbarter Bohrlöcher beträgt 25,7 mm.

* 6 * 630 Aus dem 5. Satz des Aufgabentextes folgt: Herr Müller ist weder Sportlehrer noch Mathematiklehrer, also Geschichtslehrer.

Aus dem 6. Satz folgt: Herr Müller heißt mit Vornamen Klaus und wohnt in Demmin. Herr Palm heißt weder Klaus noch Kurt, also Otto. Herr Palm ist nicht Mathematiklehrer, also Sportlehrer. Damit ist Herr Schulz Mathematiklehrer, er hat den Vornamen Kurt und wohnt in Anklam. Deshalb ist Herr Palm in Neustrelitz wohnhaft.

7▲631 In dem abgebildeten Trapez $ABCD$ sei $AB \parallel CD$, $b=d$ und $a>c$. Aus diesen Voraussetzungen folgt, daß Winkel $\sphericalangle BCD$ größer als 90° ist. Deshalb kann nur das Dreieck $ABD$ rechtwinklig sein, und es gilt $\sphericalangle ADB=90°$. Wegen $\sphericalangle BCD>90°$ kann das Dreieck $DBC$ nur dann gleichschenklig sein, wenn $\sphericalangle BDC = \sphericalangle DBC$ gilt. Es sei $\sphericalangle BAD=\alpha$, dann ist $\sphericalangle ADC=180°-\alpha$ und $\sphericalangle CDB=180°-\alpha-90° =90°-\alpha$, also auch $\sphericalangle DBC=90°-\alpha$. Aus $\sphericalangle ABC=\alpha$ und $\sphericalangle ABD=\sphericalangle ABC-\sphericalangle DBC$ folgt $\sphericalangle ABD=\alpha-(90°-\alpha)=2\alpha-90°$.



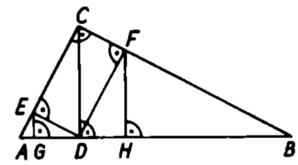

Für die Winkelsumme des Dreiecks $ABD$ gilt demnach

$\alpha+2\alpha-90°+90°=180°$, also $\alpha=60°$. Damit ergeben sich die Trapezwinkel zu $\alpha=\beta=60°$ und $\gamma=\delta=120°$. Da das rechtwinklige Dreieck $ABD$ die spitzen Winkel 30° und 60° besitzt, gilt ferner $\overline{AB}=2 \cdot \overline{AD}$.

Für die Trapezseiten ergibt sich somit $a:b:c:d=2:1:1:1$.

7▲632 Es sei $\overline{AB}=c$; wegen $\sphericalangle CAB=60°$ gilt $\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{c}{2}$. Für das Dreieck $ADC$ gilt wegen $\sphericalangle CAD=60°$, ferner $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{c}{4}$.

$\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD}=c-\frac{c}{4}=\frac{3c}{4}$.




Wegen $\overline{EC}=\overline{DF}$ gilt $\overline{DH}=\frac{1}{2}\overline{EC}$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{8}\right)=\frac{3c}{16}$. Daraus folgt:

$\overline{HB}=\overline{DB}-\overline{DH}=\frac{3}{4}c-\frac{3c}{16}=\frac{9}{16}c$: $\overline{AE}+\overline{AH}$ $=\frac{c}{8}+\frac{c}{4}+\frac{3c}{16}=\frac{9}{16}c$, also $\overline{HB}=\overline{AE}+\overline{AH}$.

W 7 ■ 633 Der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $AED$ und $EBF$ und des Rechtecks $CDEF$; deshalb gilt

$$\frac{ab}{2}=\frac{y(b-x)}{2}+\frac{x(a-y)}{2}+xy, \text{ bzw.}$$
$$ab=y(b-x)+x(a-y)+2xy.$$

Durch weiteres Umformen der Gleichung erhalten wir

$$ab=by-xy+ax-xy+2xy,$$
$$ab=ax+by.$$

W 7 ■ 634 Wir lösen die Aufgabe mit Hilfe einer Fallunterscheidung.

1) Angenommen in Antwort a) seien alle drei Vornamen richtig; dann sind nur in den Antworten c) und e) jeweils alle Vornamen falsch. Das widerspricht der Voraussetzung, also ist diese Annahme falsch.

2) Angenommen in Antwort b) seien alle drei Vornamen richtig; dann sind nur in den Antworten c) und e) jeweils alle Vornamen falsch. Das widerspricht der Voraussetzung, also ist diese Annahme falsch.

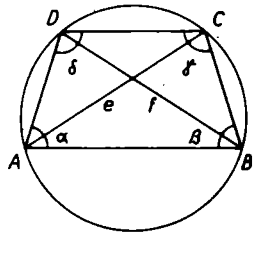
3) Angenommen in Antwort c) seien alle drei Vornamen richtig; dann sind in den Antworten a), b), d), g) jeweils alle Vornamen falsch. Das widerspricht der Voraussetzung, also ist diese Annahme falsch.

4) Angenommen in Antwort d) seien alle drei Vornamen richtig; dann treffen alle Voraussetzungen zu. In Antwort a) ist ein Vorname, in den Antworten b) und e) sind zwei Vornamen, in den Antworten c), f), g) sind drei Vornamen falsch. Die Vornamen der drei Schüler, die einen ersten Preis erhielten, lauten Steffen, Jörg und Udo.

Die noch durchzuführenden weiteren Fallunterscheidungen führen ebenfalls zu Widersprüchen.

* 7 * 635 In der Abbildung sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit den Diagonalen $\overline{AC}=e$, $\overline{BD}=f$ und es gelte $e=f$. Die sich einander gegenüberliegenden Winkel eines Sehnenvierecks ergänzen sich zu 180°, also $\alpha+\gamma =\beta+\delta=180°$. Peripheriewinkel, die zu gleich-

langen Sehnen eines Kreises gehören, sind entweder kongruent, oder sie ergänzen sich zu 180°. Wegen $e=f$ gilt deshalb entweder $\alpha=\beta$ oder $\alpha+\beta=180°$.




Im *1. Fall* ($\alpha=\beta$) folgt dann aus $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$

$\gamma=$ und $\alpha+\delta=180°$.

Daher gilt $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, d. h., das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez. Wegen $\alpha=\beta$ ist dieses Trapez gleichschenklig.

Im *2. Fall* ($\alpha+\beta=180°$) folgt aus $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$

$\beta=\gamma$ und $\alpha+\beta=180°$.

Daher gilt $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$, d. h., das Viereck $BCDA$ ist ein Trapez. Wegen $\beta=\gamma$ ist dieses Trapez gleichschenklig.

In jedem Fall ist daher das Viereck $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez, w.z.b.w.

8 ▲ 636 1. Angenommen, es gäbe ein geordnetes Paar $(a,b)$ natürlicher Zahlen, so daß die Gleichung (1) erfüllt ist. Dann würde gelten $a \neq 3$, $b \neq 0$ und

$$b^2(a^2-3a+1+3a-9)=36,$$
$$b^2(a^2-8)=36. \qquad (3)$$

Da nach Voraussetzung $a$ und $b$ natürliche Zahlen sind, muß $b^2$ ein Teiler von 36 sein; daher ist $b$ gleich 1, 2, 3 oder 6.

Nun erhalten wir aus (3) für

$b=1 \quad a^2-8=36$, also $a^2=44$,
$b=2 \quad a^2-8=9$, also $a^2=17$,
$b=3 \quad a^2-8=4$, also $a^2=12$,
$b=6 \quad a^2-8=1$, also $a^2=9$.

Für $b=1$, 2 oder 3 ist also $a$ keine natürliche Zahl; für $b=6$ erhalten wir $a=3$, was der Voraussetzung $a \neq 3$ widerspricht.

Daher hat die Gleichung (1) keine Lösung, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

2. Angenommen, das geordnete Paar $(a,b)$ natürlicher Zahlen sei eine Lösung der Gleichung (2). Dann gilt $b \neq 0$ und

$$b^2(a^2+3a+1-3a-9)=36,$$
$$b^2(a^2-8)=36.$$

Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung (3) überein und hat, wie oben gezeigt wurde, nur die Lösung $a=3$, $b=6$.

Daher hat auch die Gleichung (2) nur eine Lösung, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht, nämlich das geordnete Paar (3, 6).

W 8 ■ 637 Wir bezeichnen mit $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ die Anzahl der 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7. Plätze, die unsere Mannschaft erhielt. Dann gilt, da unsere Mannschaft insgesamt 102 Punkte erhielt,

$$y=7x_1+6x_2+5x_3+4x_4+3x_5+2x_6+x_7=102 \qquad (1)$$

und, da in 20 Disziplinen gekämpft wurde,

$$z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=20. \qquad (2)$$

Ferner gilt nach Voraussetzung

$$x_6=0<x_7<x_3<x_5<x_4=x_2<x_1. \qquad (3)$$

Daraus folgt

$$x_6=0,\ x_7 \geqq 1,\ x_3 \geqq 2,\ x_5 \geqq 3,$$
$$x_4=x_2 \geqq 4,\ x_1 \geqq 5. \qquad (4)$$

Würde nun in (4) jeweils das Gleichheitszeichen gelten, so wäre

$y=7\cdot 5+6\cdot 4+5\cdot 2+4\cdot 4+3\cdot 3+2\cdot 0+1=95$, also wegen (1) um 7 Einheiten zu klein, und

$z=5+4+2+4+3+0+1=19$, also wegen (2) um 1 Einheit zu klein.

Daher muß eine der Zahlen $x_i$ um 1 erhöht werden; das kann aber nur für $x_1$ zutreffen, da $y$ um 7 Einheiten zu klein ist.

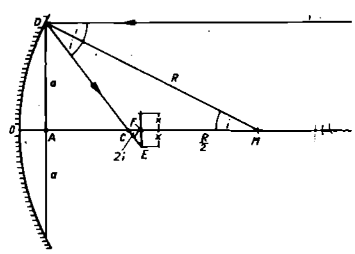
Wir erhalten also

$x_1=6$, $x_2=4$, $x_3=2$, $x_4=4$, $x_5=3$, $x_6=0$, $x_7=1$.

Die Mannschaft der DDR erkämpfte also in Stockholm sechs 1. Plätze, vier 2. Plätze, zwei 3. Plätze, vier 4. Plätze, drei 5. Plätze und einen 7. Platz.

Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß die Gleichungen (1) und (2) sowie die Ungleichungen (3), also alle Bedingungen der Aufgabe, erfüllt sind.

Abb. zu S. 68 (Physik-Olympiade)



**Lösungen zu alpha-heiter**

**Denk dir eine Zahl**

Wenn man alle Zahlen, die in der Tabelle vorkommen, in das Zweiersystem überführt, sieht man, daß die an der Spitze jeder Tabelle angeführten Zahlen der Reihe nach folgende sind:

$2^0$, $2^1$, $2^2$, $2^3$, $2^4$ und $2^5$. In der ersten Tabelle kommen gerade die Zahlen vor, die im Zweiersystem das Glied $2^0$ enthalten, in der zweiten Tabelle gerade diejenigen mit dem Glied $2^1$ usw.; in der letzten, sechsten Tabelle, sind gerade jene Zahlen, die das Glied $2^5$ enthalten. Es genügt also, die ersten Zahlen der betreffenden Tabellen zu addieren, um die gedachte Zahl festzustellen.

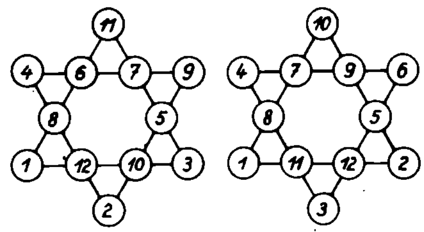
*Beispiel:* Unser Freund mag sich die Zahl 39 gedacht haben. Diese Zahl findet man in der ersten, zweiten, dritten und sechsten Tabelle. Man addiert also $1+2+4+32=39$. Man sieht, daß die Summe $1+2+4+32$ oder $2^0+2^1+2^2+2^5$ oder $1\cdot 2^5+0\cdot 2^3+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0$ die Niederschrift der Zahl 39 im Zweiersystem ist.

**Ersetze Buchstaben durch Zahlen**

| | | |
|---|---|---|
| 1573 | 3681 | 5819 |
| 573 | 681 | 819 |
| 73 | 81 | 19 |
| 3 | 1 | 9 |
| 2222 | 4444 | 6666 |

Für die Zahl 8 (8888) gibt es entsprechend den gestellten Bedingungen keine Lösung. Dagegen würde für $a=d=7$, $b=9$, $c=2$ das Ergebnis $e=8$ möglich.

**Der Zahlenstern**




**Damen auf dem Schachbrett**

Die Damesteine stellt man z. B. auf die Felder c6, e3, f8, h5. Die Aufgabe hat mehrere Lösungen. Man kann die Damesteine z. B. auf die Felder d6, e5, f4, g8, h7 stellen.

Mit den Damesteinen können im ganzen 1456 Züge gemacht werden.

**Die Zahl 3 fünfmal verwendet**

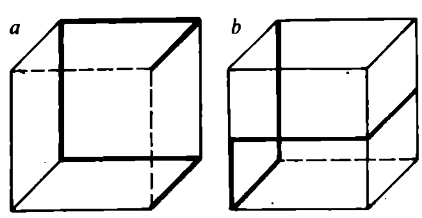
$11=3\cdot 3+3-\frac{3}{3}$; $\quad 57=3^3+3^3+3$

Es sind noch andere Lösungen möglich.

**Kryptarithmetik**

| | |
|---|---|
| 189 · 99 | 143 · 77 |
| 1701 | 1001 |
| 1701 | 1001 |
| 18711 | 11011 |

**Aufgepaßt**




**Wer hat die Scheibe eingeschlagen?**

Emil wird als Übeltäter von Karl und Rudolf, Johann wieder von Karl und Rudolf und Karl von Emil und Rudolf angegeben. Keiner dieser drei Jungen kann also der Täter sein, denn nach der Erklärung des Lehrers muß der Schuldige von den drei Verhörten genannt werden. Rudolf wurde von Emil, Johann und Karl, d. h. von drei Jungen beschuldigt. Er hat also die Fensterscheibe eingeschlagen.

# Leser schreiben an alpha

Auf Initiative einiger Schüler und der Fachlehrer für Mathematik und Physik wurde an unserer Schule eine Wandzeitung der *Jungen Mathematiker und Physiker* eingerichtet. Die Schüler, welche sich am aktivsten bei der Lösung der Aufgaben zeigen, werden mit Buchprämien ausgezeichnet. Ich finde, das sollten alle Schulen tun.
*Jörg Vetter, W.-Pieck-EOS, Großenhain*

Wir sind Schüler der Klasse 4. Im Mathematikzirkel unserer Schule haben wir im Kollektiv die Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 5 gelöst. Anbei folgt der Stoß der Lösungen.
*Judith Klinkert, A.-Diesterweg-OS, Nordhausen*

Ich finde, man sollte öfter Olympiadeteilnehmer vorstellen und von ihnen eine Aufgabe veröffentlichen. *M. Pokrandt, Cottbus*

Mein Sohn (18 Jahre) und ich (als Vater) finden Ihre Zeitschrift sehr anregend. Schade, daß es in meiner Jugend keine solche Zeitschrift gab. *K. Kühn, Berlin*

Ich schlage vor, die Lösungen der Aufgaben der Kreis-, Bezirks- und DDR-Olympiade in Heft 4 zu veröffentlichen. Damit ist eine gute Vorbereitung auf die nächste Olympiade gewährleistet. *Claus Scheffler, Zittau (Kl.6)*

Wir haben hier einen *alpha-Club Junger Mathematiker* an der Schule. Er umfaßt 16 Mitglieder und besteht bereits zwei Jahre. Dank unserer Arbeit und Eurer Hilfe, nämlich der *alpha*-Zeitschrift, haben wir auf der letzten Kreisolympiade sehr gut abgeschnitten. *Michael Gehrmann, POS Guevezow, Kr. Demmin*

Eifrigster ausländischer Teilnehmer ist István Mátrai aus Szombathely (Ungarische VR). Er beschäftigt sich mit sechs Sprachen. *alpha* hilft nicht nur zur Erweiterung seiner mathematischen, sondern auch seiner sprachlichen Kenntnisse, d. Red.

Als ich die Zeitschrift das erste Mal bekam, hatte ich mich nicht viel für sie interessiert. Wenn man aber mit *alpha* richtig arbeitet, kann man sehr viel lernen.
*Monika Modebeck, Torgelow (Kl. 6)*

*alpha* gefällt mir sehr gut. Ich würde sie jedem Mathematikinteressierten empfehlen. Sie eignet sich sehr gut zum Selbststudium und stellt eine gute Vorbereitung und Ergänzung zu den Mathematikolympiaden dar.
*Joachim Jaensch, Mittweida*

Man könnte in *alpha* technische und physikalische Probleme von der mathematischen Seite her betrachten.
*Hans-Gert Gräbe, Erfurt (Kl. 9)*

So mühelos manche der eingereichten Lösungen auch erscheinen mögen, sie haben angestrengtes Denken, Fleiß, Ausdauer, einigen Ehrgeiz und Zeit verlangt. Für einen nicht mehr jungen Laien, dem im Beruf manches abverlangt wird, ist es ein echtes Opfer, an diesem Wettbewerb teilzunehmen. Es wird aber gern gebracht, besonders dann, wenn man des Verständnisses für diese Art der Freizeitgestaltung innerhalb der Familie gewiß sein kann.
*K. Heym, PGH Ausbau, Bad Liebenstein*

Seit der 6. Klasse besuche ich in unserem Pionierhaus „Juri Gagarin" einen Mathematikzirkel, der für die Besten im Fach Mathematik im Bezirk Karl-Marx-Stadt gegründet wurde. Dort arbeiten wir auch mit *alpha* und beteiligen uns am Wettbewerb. Den Mitgestaltern der *alpha* möchte ich meinen Dank aussprechen und sagen: „Weiter so!"
*Sabine Klemer, Karl-Marx-Stadt (Kl. 7)*

Wenn auch Ihre Aufgaben nicht immer leicht sind, so bemühe ich mich, sie doch zu lösen. Die regelmäßige Beschäftigung mit Ihrer Zeitschrift hat mir auch geholfen, im Mathematikunterricht gute Leistungen zu erreichen. Gefallen hat mir die EDV-Serie. Ich kann mir somit schon ein Bild von meinem künftigen Beruf als Facharbeiter für EDV machen.
*Rolf Becker, Erfurt (Kl. 10)*

Bitte mehr Artikel ab Klasse 5!
*B. Kühmstädt, Erfurt (Kl. 6)*

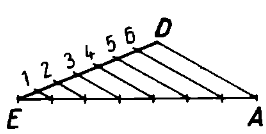
Mich würde interessieren, wie einzelne Arbeitsgemeinschaften arbeiten, wie sie sich auf Olympiaden vorbereiten. Sicher könnten andere AGs sich neue Anregungen von erfolgreichen AGs holen oder mit ihnen in Erfahrungsaustausch treten.
*Sabine Dittrich, Bernsbach (Kl. 10)*

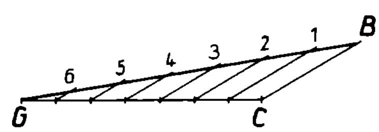
Fragt mehr junge Leute, die sich mit Mathematik beschäftigen, wie sie ihre Zeit einteilen, wie sie an Aufgaben herangehen, wie sie sich individuell und im Kollektiv mathematisch weiterbilden!
*Klaus Schönefeld, Weimar (Kl. 12)*

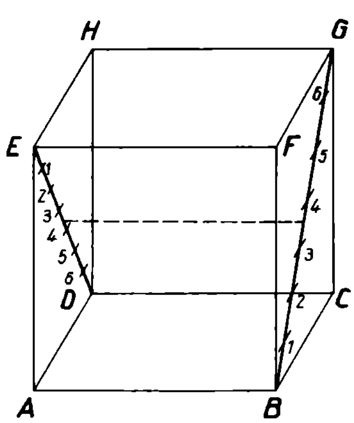
Es macht mir einfach Freude, Aufgaben aus *alpha* zu lösen. Durch diese Zeitschrift habe ich mich so richtig für die Mathematik begeistert. *Norbert Littig, Lichtenberg*

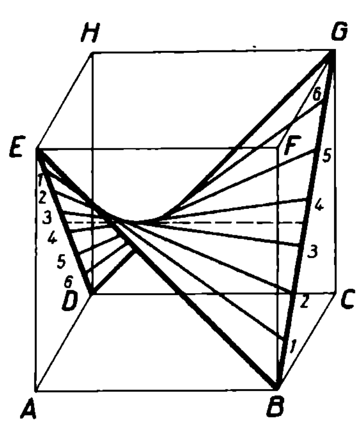
Um den Wettbewerb weiter zu popularisieren, tragen die Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb ihr Abzeichen, das sie von der Redaktion erhielten.
*OS Fredersdorf, Kreis Belzig*

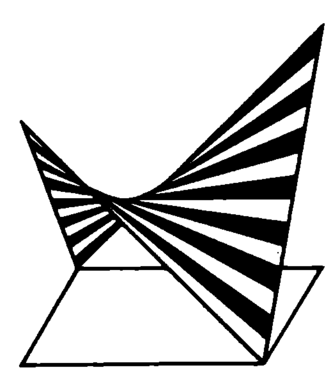
## Mit Zirkel und Zeichendreieck



Kurzer Abriß der

# Geschichte der Mathematik

der Tschechoslowakei

Lange vor der Gründung eines selbständigen Staates (1918) wirkten tschechische und slowakische Gelehrte auf dem heutigen Gebiet der ČSSR und trugen zur Entwicklung der mathematischen Wissenschaften bei. Zum besseren Verständnis für ihre fachliche und politische Tätigkeit wollen wir uns zunächst an einige geschichtliche Ereignisse erinnern.

Als erstes Zeichen einer beginnenden wissenschaftlichen Tätigkeit kann man die Gründung der Prager Karls-Universität (älteste Universität in Mitteleuropa) im Jahr 1348 ansehen. An ihr wirkten neben tschechischen und deutschen Wissenschaftlern zeitweilig auch weitere ausländische Gelehrte. Es bestanden von Anfang an vielfältige Beziehungen zu anderen Universitäten und Ländern. Ähnliche ökonomische Bedingungen beiderseits des Erzgebirges brachten auch etwa die gleiche wirtschaftliche und kulturelle Entwicklung der Bewohner in Böhmen und Sachsen hervor. Auch die älteste Technische Hochschule Mitteleuropas entstand in Prag; sie ging 1718 aus einer militärtechnischen Lehranstalt hervor. Unter der Leitung von Gerstner, einem international anerkannten Ingenieur, wurde sie 1815 eine selbständige Höhere Technische Lehranstalt und führte ab 1864 die Bezeichnung Polytechnisches Institut; ihr Statut wurde das Muster für alle Höheren Technischen Lehranstalten in Österreich-Ungarn. Große Bedeutung für die Entwicklung der angewandten Mathematik hatten auch die Bergbauakademie in Přibram (Böhmen) und Štiavnica (Slowakei), an der zeitweilig auch Christian Doppler wirkte.

Für die Entwicklung der Mathematik auf dem Gebiet der ČSSR haben neben einzelnen Gelehrten besonders auch Vereinigungen eine große Bedeutung erlangt. An erster Stelle ist hier die Böhmische Gelehrte Gesellschaft zu nennen, die 1784 gegründet wurde und später die Bezeichnung Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften führte. Sie errang international bald einen sehr guten Ruf, und zu ihren ausländischen Mitgliedern zählte u. a. Cauchy. Für die Entwicklung der Schulmathematik erlangte die 1862 gegründete Gesellschaft der böhmischen Mathematiker entscheidende Bedeutung; bei ihrer Gründung führte sie zunächst die Bezeichnung „Verein für freie Vorträge aus der Mathematik und Physik". Wegen ihrer wissenschaftlichen Zielsetzung fand sie jedoch bald die Unterstützung von Hochschullehrern; ihre Entwicklung wurde besonders gefördert durch die sich rasch vergrößernde Bibliothek, die umfangreiche Sammlung ausländischer Zeitschriften und die Herausgabe eigener Zeitschriften und Bücher, darunter der Zeitschrift für Schüler *Rozhledy matematicko-fyzikalni* (Mathematisch-physikalische Umschau). Nach Gründung der selbständigen Republik wurde die heutige Bezeichnung „Gesellschaft der tschechoslowakischen Mathematiker und Physiker" (JČMF) eingeführt.

Durch die Teilung des Prager Polytechnischen Instituts (1869) und die Teilung der Prager Universität (1882) in selbständige tschechische und deutsche Hochschulen sowie die Gründung der Böhmischen Akademie der Wissenschaften (1891), konnte sich zunächst in Böhmen, später auch in Mähren und in der Slowakei ein reges wissenschaftliches Leben entfalten. Jedoch verhinderten die reaktionären Verhältnisse in Österreich-Ungarn, daß sich fortschrittliche Ideen im allgemeinbildenden Schulwesen durchsetzen konnten. Wirklich durchgreifende Reformen wurden erst nach 1948 möglich, als die Entwicklung der ČSR zum sozialistischen Staat gesichert war. Nach diesem geschichtlichen Überblick wollen wir etwas näher auf zwei Persönlichkeiten eingehen: Rudolf Skuherský (1828 bis 1863) und Juraj Hronec (1881 bis 1959).

*R. Skuherský* wurde in Opočno (Ostböhmen) als Sohn eines Arztes geboren. Nach dem Besuch des Gymnasiums studierte er an der Ständischen Realschule in Prag, die dem Polytechnischen Institut angegliedert war. Sein Mathematiklehrer war *Doppler*, der ihn maßgeblich für sein späteres Wirken beeinflußte. *Skuherský* studierte nach einer Unterbrechung am Polytechnikum in Wien weiter und wurde dort Assistent am Lehrstuhl für Darstellende Geometrie. Er wurde 1852 zum ersten Professor für Darstellende Geometrie am Polytechnischen Institut in Prag berufen. Seine wissenschaftlichen Arbeiten behandelten die Theorie der Projektionsarten (u. a. die orthogonale Parallelperspektive und die orthogonale Projektion auf zwei Ebenen, die keinen rechten Winkel miteinander einschließen); sie entsprachen seiner Absicht, besonders anschauliche Arten der Parallelprojektion zu verwenden. *Skuherský* war aber nicht nur ein hervorragender akademischer Lehrer, sondern zeigte auch ein gutes Verständnis für die gesellschaftliche Entwicklung seiner Zeit. Durch seine Bemühungen, z. B. um die Einführung der tschechischen Sprache beim Unterricht am Polytechnischen Institut, wurde er zum Vorkämpfer des fortschrittlichen tschechischen Bürgertums, das er außerdem seit 1862 als Abgeordneter des Böhmischen Landtages bis zu seinem frühen Tode vertrat.

*J. Hronec* wurde 1881 in Gočovo (Ostslowakei) geboren, er stammte aus einer Kleinbauernfamilie. Durch die Unterstützung seiner Brüder konnte er das Gymnasium in Rožňava besuchen und studierte anschließend Mathematik an der Universität Clausenburg bei Prof. *Schlesinger*, der ebenfalls aus der Slowakei stammte und ihn für die Theorie der Differentialgleichungen interessierte. *Hronec* arbeitete dann sein ganzes Leben auf diesem Gebiet und widmete ihm den größeren Teil seiner mehr als 30 wissenschaftlichen Arbeiten und Bücher. Er war auch praktisch-pädagogisch tätig und zwar von 1906 bis 1922 am Gymnasium in Kežmarok (Slowakei). Während dieser Zeit war er mehrfach zu Studienaufenthalten im Ausland und promovierte 1912 in Gießen. Er wurde 1923 an die Karls-Universität nach Prag und 1924 als Professor an die TH Brno berufen. 1938 wurde er der erste Rektor der neugegründeten TH Košice, die bald darauf nach Bratislava verlegt wurde.

Er hatte erkannt, daß eine schnellere kulturelle Entwicklung in der Slowakei sich auf eine fruchtbare Zusammenarbeit mit Böhmen und Mähren, aber noch mehr auf die Durchsetzung demokratischer Reformen stützen mußte. Er förderte nach 1945 besonders die Tätigkeit der Slowakischen Akademie der Wissenschaften und den Ausbau der Hochschulen in der Slowakei. Er war Träger hoher staatlicher Orden und vieler Auszeichnungen. In seiner Persönlichkeit verschmolzen Wissenschaftlichkeit und gute organisatorische Fähigkeiten auf wissenschaftlichem, pädagogischem und kulturellem Gebiet zu einer großartigen Einheit.

*O. Langer*

* Quellen: 100 let Jednoty ČMF, Verlag SPN, Praha 1962; Zeitschrift: Matematika ve škole, Jahrgang 14, H. 14; Matematicko-fyzikalný časopis SAV, Jahrgang X, H. 2.

**IMO-Spiegel**

I. IMO: SR Rumänien (Sinaia*)
II. IMO: SR Rumänien (Sinaia)
III. IMO: Ungarische VR (Vesprem)
IV. IMO: ČSSR (Budějovice)
V. IMO: VR Polen (Wroclaw)
VI. IMO: UdSSR (Moskau)
VII. IMO: DDR (Berlin)
VIII. IMO: VR Bulgarien (Sofia)
IX. IMO: SFR Jugoslawien (Cetinje)
X. IMO: UdSSR (Moskau)
XI. IMO: SR Rumänien (Bukarest)
XII. IMO: Ungarische VR (Keszthely)
XIII. IMO: ČSSR (Žilina)

* Austragungsort der beiden Klausuren

# Rückblick auf die XII. IMO

**Teilnehmer stellen Aufgaben für *alpha***

▲694 Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = 90°$. Die in bezug auf die Gerade $AB$ zu der Geraden $AC$ symmetrisch liegende Gerade möge die Gerade $BD$ im Punkt $E$ schneiden. Es ist zu untersuchen, ob der Punkt $D$ stets der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks $ACE$ ist.

Prof. Dr. J. Surányi, Vizepräsident der Jury der XII. IMO, Vizepräsident der Mathematischen Gesellschaft János Bolyai u. Chefredakteur der ungarischen Schülerzeitschrift *Középiskola Matematikai Lapok*

▲695 Es seien in der Ebene vier Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ gegeben, die paarweise voneinander verschieden sind. Durch jeden dieser Punkte ist je eine Gerade $g_1$, $g_2$, $g_3$, $g_4$ so zu ziehen, daß die Schnittpunkte dieser Geraden Eckpunkte eines Quadrats sind. Die Konstruktion ist nur mit dem Zirkel und dem Lineal auszuführen.

Prof. C. Ottescu, stellv. Delegationsleiter der rumänischen Mannschaft, Sekretär der Mathem. Gesellschaft der SR Rumänien

▲696 Gegeben sei ein rechteckiges Schema, das in $m$ Zeilen und $n$ Spalten $m \cdot n$ Felder enthält, wobei $m$ und $n$ natürliche Zahlen mit $m \geqq 2$ und $n \geqq 2$ sind. In die Felder dieses Schemas sollen reelle Zahlen so eingetragen werden, daß in jedem Teilrechteck dieses Schemas die Summe zweier Zahlen, die sich in den gegenüberliegenden Ecken eines solchen Rechtecks befinden, jeweils gleich sind. (Unter einem Teilrechteck verstehen wir dabei auch das rechteckige Schema selbst.)
Wieviel Zahlen des rechteckigen Schemas muß man mindestens kennen, um aus ihnen alle anderen Zahlen des Schemas eindeutig bestimmen zu können?

Arkadij Klimow, Arsamas (UdSSR), Träger eines 1. Preises der XII. IMO

▲697 Man beweise, daß für drei beliebige positive reelle Zahlen die folgende Behauptung stets zutrifft:
Ist das Produkt dieser drei Zahlen gleich 1 und die Summe dieser drei Zahlen größer als die Summe ihrer reziproken Werte, so ist genau eine dieser drei Zahlen größer als 1.

Aus der Landesolympiade 1970 der UdSSR, überreicht durch J. S. Petrakow, Fachberater der Abteilung pädagogische Hochschulbildung im Min. für Volksbildung der UdSSR

▲698 Die Menge $E$ aller Punkte der Ebene sei so in drei paarweise elementefremde Teilmengen $A$, $B$, $C$ (Klassen) zerlegt, daß jeder Punkt von $E$ genau einer dieser Klassen $A$, $B$ oder $C$ angehört. Ferner sei $a$ eine positive reelle Zahl.
Man beweise, daß es dann stets mindestens zwei Punkte von $E$ gibt, die voneinander den Abstand $a$ haben und der gleichen Klasse angehören.
Man verallgemeinere und beweise diese Aussage auf den Fall, daß die Menge $R$ aller Punkte des dreidimensionalen Raums in vier Klassen $A$, $B$, $C$, $D$ zerlegt ist.

Virginie Stoinova Hristova, Russe; Mitglied der bulgarischen Mannschaft

▲699 In einem Saal mögen sich genau $n$ Personen befinden, wobei $n$ eine natürliche Zahl mit $n \geqq 2$ ist. Von diesen Personen seien einige miteinander bekannt und andere nicht miteinander bekannt. Dabei setzen wir voraus: Wenn $A$ mit $B$ bekannt ist, so ist auch $B$ mit $A$ bekannt.
Man beweise, daß es unter den $n$ Personen mindestens zwei Personen gibt, die unter den übrigen Personen in dem Saal die gleiche Anzahl von Bekannten haben.
*Bemerkung:* Die Anzahl der Bekannten, die eine Person unter den übrigen Personen in dem Saal hat, kann auch gleich Null sein.

Helena Husova, Praha; Mitglied der tschechoslowakischen Mannschaft

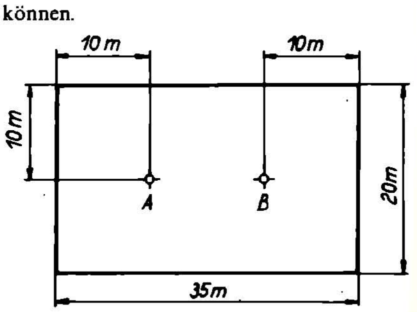
▲700 Es seien $\alpha, \beta, \gamma$ die Größen der Winkel eines Dreiecks. Es ist zu beweisen, daß dann stets die folgenden beiden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{3}{2}, \qquad (1)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqq \frac{3}{4}. \qquad (2)$$

Angelika Rindler, Spital; Mitglied der österreichischen Mannschaft

▲701 Ein Farmer hat zwei Ziegen, die eine Wiese von rechteckiger Form mit den Seitenlängen 35 m und 20 m abgrasen sollen. Auf der Wiese befinden sich zwei Pfähle $A$ und $B$, deren Abstand von den beiden nächstgelegenen Rechteckseiten jeweils 10 m beträgt (vgl. die Abb.). Jeder der Pfähle besitzt einen Ring, durch den ein Strick geführt werden kann. Da die beiden Ziegen sehr streitsüchtig sind, sollen sie so an diesem Strick angebunden werden, daß sie niemals zusammentreffen, aber die gesamte Wiese abgrasen können.




Wie müssen die beiden Ziegen an diesem Strick angebunden und wie lang muß dieser Strick gewählt werden?

Bernard Silverman, London; Träger eines 1. Preises der XII. IMO

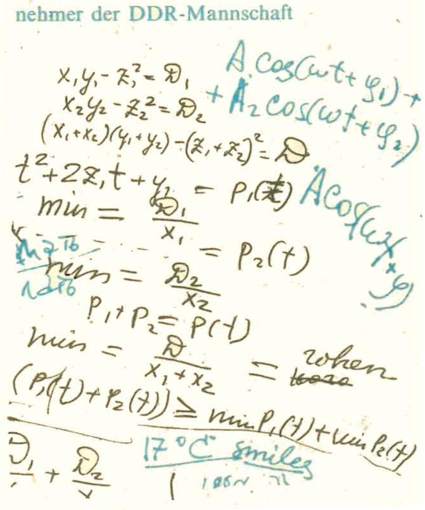
▲702 Von zwei verschiedenen Punkten $A$ und $B$ eines Weges, der neben einer Eisenbahnstrecke verläuft, brechen zwei Schüler zur gleichen Zeit auf und gehen einander entgegen. Zu dem Zeitpunkt, in dem der erste Schüler in dem Punkt $A$ startet, erreicht ihn die Lokomotive eines Eisenbahnzuges, der in Richtung $B$ fährt, und hat ihn nach genau 10 s mit dem letzten Wagen überholt. Nach genau weiteren 6 min erreicht die Lokomotive dieses Zuges den zweiten Schüler; nach genau weiteren 9 s passiert der letzte Wagen dieses Zuges diesen Schüler.
Nach welcher Zeit, gerechnet von dem Start ab, werden sich die beiden Schüler begegnen? Dabei wird vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeiten des Zuges und die der beiden Schüler konstant sind.

Ary Van Tooren, Den Haag; Delegationsleiter der niederländischen Mannschaft; Redakteur der niederländischen Zeitschrift „Pythagoras"

▲703 Wieviel verschiedene vierstellige natürliche Zahlen (in dekadischer Darstellung) gibt es, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
1. Alle Ziffern jeder dieser Zahlen sind paarweise voneinander verschieden;
2. die Quersumme jeder dieser Zahlen ist nicht größer als 22;
3. die größte Ziffer steht jeweils an der ersten Stelle, die zweitgrößte an der letzten Stelle der Zahl.

Urshinzerendin Sanshimjatow/Gombaschawin Nazagdorsh, Delegationsleiter/stellvertr. Delegationsleiter der mongolischen Mannschaft, Mongolische Staatliche Universität Ulan Bator

*Zeichen der Freundschaft:* Diskussion zu der Lösung einer IMO-Aufgabe mit Aufzeichnungen sowjetischer, schwedischer und Teilnehmer der DDR-Mannschaft



# Literatur

## Bücher von heute sind morgen Taten

H. Mucke
**Anaglyphen – Raumzeichnungen**
*92 Seiten mit 63 Abbildungen und im Anhang 18 farbige Tafeln mit 59 Anaglyphen sowie 1 Brille. 16,5 cm mal 23,0 cm. 1970. In Halbleinen. 21,00 M*
*BSB B. G. Teubner, Leipzig*

H. Mielke
**transpress-Lexikon der Raumfahrt**
*367 Seiten, 1 200 Stichwörter, zahlr. Bildmaterial und Übersichten, 15,0 cm mal 22,0 cm. 1970. Halbleinen. 18,50 M*
*transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin*

*H. Körth und E. Förster*
**Wirtschaftsmathematik für die Berufsbildung**
*3. neubearbeitete Auflage, 360 Seiten mit zahlreichen Abb., 14,2 cm mal 21,8 cm. 1970. Pappeinband. 10,25 M*
*Verlag Die Wirtschaft, Berlin*

N. W. Efinow
**Grundzüge der projektiven Geometrie**
Übersetzung aus dem Russischen
*212 Seiten, 71 Abbildungen. 1970. Pappeinband. 9,80 M*
*VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin*

E. Bürger/G. Wittmar
**Was ist, was soll Datenverarbeitung**
*etwa 176 Seiten, etwa 50 Zeichnungen, 12,5 cm mal 20,0 cm. Pappeinband. Etwa 5,80 M*
*Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin*

Autorenkollektiv
**Allgemeine Statistik**
*532 Seiten, 100 Abbildungen, 135 Tabellen. Ganzleinen. 17,00 M*

G. Herfurth
**Umgang mit Zufallsgrößen**
**Teil I: Fehler- und Ausgleichsrechnung**
*131 Seiten mit 62 Abbildungen, 14,2 cm mal 20,0 cm. 1969. In Halbleinen 15,50 M*

**Teil II: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik**
*139 Seiten mit 65 Abbildungen, 14,2 cm mal 20,0 cm. 1969. In Halbleinen 16,50 M*
*BSB B. G. Teubner, Leipzig*

R. Göttner
**Was ist – was soll Operationsforschung**
*344 Seiten, zahlreiche Bilder und Tabellen, 12,4 cm mal 19,5 cm. 1970. Pappeinband, zellophaniert. 6,80 M*
*Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin*

W. Schütz
**Michail W. Lomonossow**
Biographien hervorragender Naturwissenschaftler
*94 Seiten mit 7 Abbildungen. 1971. Kartonniert. Etwa 5,35 M*
*BSB B. G. Teubner, Leipzig*

N. W. Efinow
**Über die Grundlagen der Geometrie**
Übersetzung aus dem Russischen
*236 Seiten, 86 Abbildungen. 9,80 M*
*VEB Verlag der Wissenschaften, Berlin*

Autorenkollektiv
**Plakat und Wandzeitung**
Schriften zur Kunsterziehung, Band 24
*128 Seiten, zahlr. Abb., Bestell-Nr. 172 107 1970. Pappband. 11,30 M*
*Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin*

W. Göhler
**Höhere Mathematik – Formeln und Hinweise**
kleiner Wissensspeicher
*105 Seiten. 1970. Kartoniert. 6,50 M*
*VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig*

Autorenkollektiv
**Was willst Du werden?**
Berufe mit Zukunft
*384 Seiten, Darstellung von 22 Grundberufen. 1970. 5,50 M*
*Verlag Neues Leben, Berlin*
Das Buch gibt Antwort auf die Frage, welche Ausbildungsberufe ein Schulabgänger wählen kann. Der Herausgeber hat den vierzehn Grundberufen sehr große Aufmerksamkeit geschenkt. Wichtige Berufe einzelner Industriezweige und Einrichtungen werden ausführlich beschrieben. Am Schluß des Buches wird ein Überblick über sämtliche Ausbildungsberufe der DDR gegeben (also auch über solche, die im vorderen Teil des Buches nicht beschrieben werden).

**Allgemeine Statistik Aufgabensammlung mit ausführlichen Lösungswegen**
*etwa 176 Seiten, 12 Abb., 164 Tabellen. Broschur. Etwa 6,80 M*
*Verlag Die Wirtschaft, Berlin*

F. Holtmann
**Mathematik**
**Band I: Arithmetik**
*357 Seiten, 108 Bilder, 12,0 cm mal 19,0 cm. 1969. Pappeinband. 6,80 M*

**Band II: Geometrie**
*514 Seiten, 442 Bilder, 12,0 cm mal 19,0 cm. 1969. Pappeinband. 10,80 M*
*VEB Fachbuchverlag, Leipzig*

Gäbler
**Mathematik und Leben**
**Band III: Differentialrechnung – Integralrechnung – Analytische Geometrie**
*469 Seiten, zahlr. Abb., 17,0 cm mal 22,0 cm. 1969. 20,00 M*
*VEB Fachbuchverlag, Leipzig*

V. Mangold/Knopp
**Einführung in die höhere Mathematik, Band I**
*564 Seiten, 116 Abb., Format 15,5 mal 23,0 cm. 1970. Leinen. 22,— M*
*S. Hirsel Verlag, Leipzig*

Autorenkollektiv, Leitung D. Stempel
**Begriffe der Netzplantechnik**
*101 Seiten, 11,0 cm mal 18,3 cm. 1970. 6,50 M*
*Verlag Die Wirtschaft, Berlin*

G. Schmidt
**Kompendium der Physik**
*332 Seiten, 165 Abb., 7 Tabellen, 14,2 cm mal 21,0 cm. 1970. Leinen flexibel.*
*VEB Gustav Fischer Verlag, Jena 17,80 M*

L. N. Landau
**Algorithmierung im Unterricht**
*424 Seiten, zahlr. Abb., 15,0 cm mal 22,0 cm. 1969. In Halbleinen.*
*Bestell-Nr. 242 512-1 16,00 M*
*Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin*