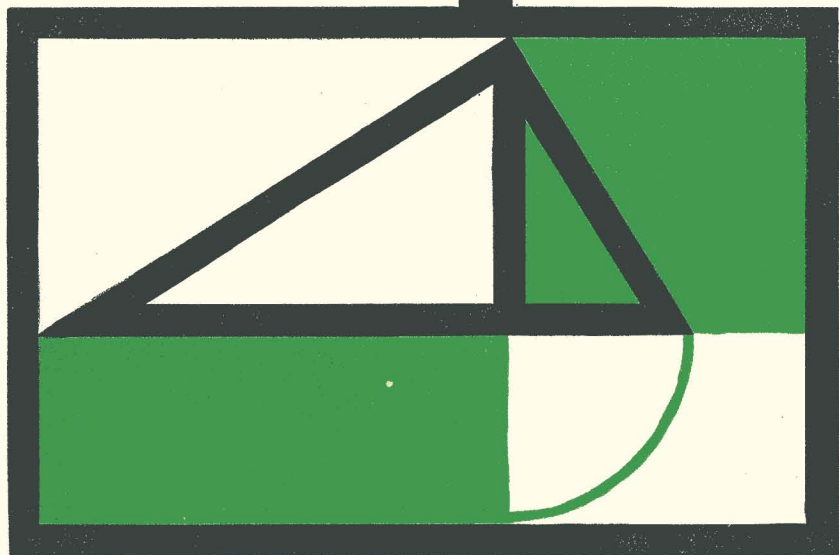


**Mathematische
Schüler-
zeitschrift**

alpha



**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin**

**2. Jahrgang 1968
Preis 0,50
Index 31059**

3



Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968
Heft 3

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. L. Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. E. Hammeister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); OL K. Krüger (Bad Döberan); StR J. Lehmann (Leipzig); OL H. Lohse (Leipzig); NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); OL H. Pätzold (Waren); Prof. Dr. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröder (Dresden); StR G. Schulze (Herzberg/Elster); OL H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); D. Uhlich (Erfurt); Dr. W. Walsch (Halle)

Aufgabenrunde:

NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); OL Th. Scholl (Berlin); OL H. Schulze (Leipzig); Kl. 5 und 6; W. Träger (Döbeln); Kl. 7 und 8; StR G. Schulze (Herzberg/Elster); Kl. 9 und 10

Gutachtergruppe:

NPT H. Kästner; R. Hofmann; OL H. Schulze (alle Leipzig)

Redaktion:

StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Kedaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postcheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 68, 83); W. Schulze, JW Berlin (S. 68 unten); Höhne-Pohl, Dresden (S. 75); Foto Zimmert, Rostock (S. 81); Vignetten: H.-J. Jordan, Leipzig

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluss 2. 2. 1968

Inhalt

- 65 Berufsbild: Facharbeiter für Datenverarbeitung (8)*
Christa Papendorf, Leiter der Abtl. Berufsausbildung
VVB Maschinelles Rechnen, Berlin
- 69 Elementare Zahlenfolgen, 1. Teil (6)
Oberlehrer Heinz Lohse, Institut für Psychologie
Karl-Marx-Universität Leipzig
- 72 Nichts Einfacheres als ein Quadrat! 3. Teil (8)
H. Wieseemann, Institut für Mathematik
Pädagogische Hochschule Potsdam
- 75 Eine Aufgabe von
NPT Prof. Dr. phil. habil. Hans Reichardt (9)
Humboldt-Universität zu Berlin
- 76 Die Aufgabenkommission des Zentralen Komitees
der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR (5)
Prof. Dr. H. Karl
Pädagogische Hochschule Potsdam
- 77 Wer löst mit? (5)
alpha-Wettbewerb
- 80 Junge Mathematiker erlebten Jahrestagung in
Rostock (5)
Oberstudienrat H. Titze
Ministerium für Volksbildung, Berlin
- 82 VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
Aufgaben der DDR-Olympiade
Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der
DDR
- 83 Preisträger der VII. OJM (5)
- 84 Wir lösen ein Zahlenrätsel (5)
Oberlehrer Th. Scholl
Ministerium für Volksbildung, Berlin
- 86 Eine Knobelgeschichte, 1. Teil (5)
W. Träger, Schloßbergoberschule, Döbeln
- 87 Lösungen (5)
- 94 In freien Stunden: *alpha*-heiter (5)
Oberlehrer H. Pätzold, OS Waren/Müritz

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet



In diesem Beitrag soll euch ein neuer Beruf vorgestellt werden, der in den kommenden Jahren eine immer größere Bedeutung erlangen wird. Rechentechnik und Datenverarbeitung — jeder von euch wird sich schon dafür interessiert haben. In den nächsten Heften werden euch neben weiteren Berufsbildern auch Begriffe erläutert sowie mathematische Voraussetzungen für den Einsatz an Datenverarbeitungsanlagen aufgezeigt — soweit ihr sie bereits verstehen könnt.

Der *Facharbeiter für Datenverarbeitung* wird für vier Spezialisierungsrichtungen ausgebildet. Dabei ist eine 1 $\frac{1}{2}$ -jährige Ausbildung im Grundberuf — für alle vier Spezialisierungsrichtungen nach einem gemeinsamen Lehrplan — vorgesehen, auf die eine halbjährige spezielle Ausbildung aufbaut. Nach zwei Jahren ist die Ausbildung zum Facharbeiter mit einer Spezialisierungsrichtung abgeschlossen. Entsprechend den zur Zeit vorgesehenen Einsatzgebieten und Tätigkeitsbereichen des Facharbeiters sind dabei folgende Spezialisierungsrichtungen geschaffen worden:

1. Programmierung und Bedienung schalttafelgesteuerter Maschinen,
2. Programmierung elektronischer Datenverarbeitungsanlagen,
3. Organisation der maschinellen Datenverarbeitung,
4. Operativer Rechenbetrieb.

Diese neue Form der Ausbildung — nach einer für mehrere Tätigkeiten gleichen Ausbildung im Grundberuf die speziellen Kenntnisse gesondert zu vermitteln — setzt sich in vielen Berufen der Volkswirtschaft durch. Sie hat u. a. den Vorteil, daß der Facharbeiter sich, wenn es beispielsweise durch Umstellung im Betrieb notwendig wird, schnell für eine zweite Tätigkeit qualifizieren kann. Aufbauend auf der Ausbildung im Grundberuf sind nur die Kenntnisse und Fertigkeiten der halbjährigen speziellen Ausbildung nachzuholen. Für welche Tätigkeiten ist der *Facharbeiter für Datenverarbeitung* vorgesehen? Die Tätigkeiten können selbstverständlich nicht in allen Einzelheiten geschildert werden. Es soll hier versucht werden, einige typische Einsatzgebiete zu nennen und zu charakterisieren. Dabei ist notwendig, nach den angegebenen Spezialisierungsrichtungen zu unterscheiden.¹⁾

1. Zu den schalttafelgesteuerten Maschinen gehören Großmaschinen der Lochkartentechnik, wie beispielsweise Tabelliermaschinen* und Kartendoppler*. Der *Facharbeiter für Datenverarbeitung* soll als Programmierer und Bedienungskraft derartiger Maschinen eingesetzt werden. Dazu gehört u. a. die Erarbeitung der entsprechenden Programmunterlagen, technologischer Arbeitsanweisungen und das Stecken der Programmtafel. Als Bedienungskraft muß der Facharbeiter die Maschine einrichten und den Maschinenlauf kontrollieren, um Fehler und deren Ursachen zu erkennen und auf der Grundlage innerbetrieblicher Festlegungen zu beseitigen.

2. Um elektronische Datenverarbeitungsanlagen einsetzen und ihre Leistungsfähigkeit voll ausnutzen zu können, ist eine große Zahl von hochqualifizierten Programmierern notwendig. Dabei sind Kenntnisse notwendig, die ein Fach- oder Hochschulstudium voraussetzen.²⁾

¹⁾ Die Ziffern entsprechen den auf S. 65 genannten Spezialisierungsrichtungen.

²⁾ Über diese Ausbildung wird in den folgenden Heften ausführlich berichtet.

* Begriffserläuterungen, siehe am Ende dieses Beitrages.

Daneben fallen aber auch eine Reihe von Aufgaben an, für die die notwendigen Kenntnisse und Fertigkeiten über eine Berufsausbildung vermittelt werden können. Der *Facharbeiter für Datenverarbeitung* mit einer speziellen Ausbildung in Programmierung arbeitet dabei als *Programmierassistent* unter Anleitung von Mathematikern, Ingenieuren für Programmierung o. ä. Zu seinen Aufgaben gehören beispielsweise das Erarbeiten einfacher Programme, das Zusammenstellen von Programmteilen und Unterprogrammen, Erarbeitung von Testbeispielen, das Zeichnen von Datenfluß- und Programmablaufplänen. Vom *Programmierassistenten* wird erwartet, daß er die ihm übertragenen Aufgaben selbständig löst. Deshalb ist für ihn eine gründliche theoretische Ausbildung in den Grundlagen der Programmierung und eine umfangreiche mathematische Ausbildung vorgesehen (vgl. Ausbildungsinhalt).

3. Die volle Ausnutzung der Möglichkeiten elektronischer Datenverarbeitungsanlagen erfordert in den Betrieben, vor allem in den Methoden der Planung und Leitung von Betrieben, neue Formen der Organisation des betrieblichen Ablaufes. Dazu gehören Untersuchungen über die Zweckmäßigkeit verwendeter Belege, ihres Durchlaufes durch die einzelnen Abteilungen, über den Anfall der Daten u. a. m. Hier wird der *Facharbeiter für Datenverarbeitung* als *Organisationsassistent* mitarbeiten bei der Erfassung von Primärdaten*, bei der Neu- und Umgestaltung von Belegen und Schlüsseln und der Erarbeitung von Organisationsprojekten.

4. Alle diese Vorarbeiten in der Organisation und Programmierung sind notwendig. Aber zu den wichtigen und verantwortlichen Aufgaben in einer Rechenstation oder einem -betrieb gehört die Bedienung der Anlagen und der peripheren Geräte*). In der letzten Spezialisierungsrichtung werden die *Facharbeiter* ausgebildet, die direkt an den Anlagen arbeiten bzw. ihren Einsatz unmittelbar vorbereiten. Dazu gehört einmal die Tätigkeit des *Maschinenführers* (auch *Operateur*) und zum anderen *Facharbeiter*, denen die Planung der Maschinenkapazität und ihre Auslastung obliegt.

Eine Stunde Rechenzeit an einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage kostet viel Geld (in Abhängigkeit von der Größe der Anlage zwischen 600 M und 1000 M). Daher muß jede Minute Rechenzeit ausgenutzt werden und darf nicht durch falsches oder unachtsames Arbeiten verloren gehen. An den *Facharbeiter* müssen deshalb hohe Anforderungen hinsichtlich seiner Zuverlässigkeit, seines Verantwortungsbewußtseins und seiner Gewissenhaftigkeit gestellt werden.

Welche praktischen Fertigkeiten braucht ein Facharbeiter für Datenverarbeitung?

In der Regel³⁾ wird der Lehrling in den 1 $\frac{1}{2}$ Jahren der Ausbildung im Grundberuf zwei Tage pro Woche im Ausbildungsbetrieb sein. Hier lernt er, die Maschinen zu bedienen und zu programmieren. Da die eingesetzten Maschinen und Anlagen unterschiedlich sind, kann die Programmierung nicht für alle Lehrlinge in der Schule gemeinsam durchgeführt werden. Dabei lassen sich zwei Hauptabschnitte herausstellen:

- die Ausbildung an Maschinen der Lochkartentechnik,
- die Ausbildung für Bedienung und Programmierung einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage.

Zum ersten Abschnitt gehört z. B. die Bedienung von Loch-, Prüf- und Sortiermaschinen* und die Bedienung und Programmierung des Dopplers*. Außerdem lernt der Lehrling die Handhabung von Tischrechenmaschinen.

Bei der Programmierung elektronischer Datenverarbeitungsanlagen spielt eine wesentliche Rolle, die Richtigkeit des Programms an Hand von Beispielen zu testen. Dazu müssen teilweise umfangreiche Testrechnungen durchgeführt werden. Dabei werden Tischrechenmaschinen benutzt.

In der Ausbildung zu den Spezialisierungsrichtungen werden auf diesen Kenntnissen aufbauend spezielle Stoffgebiete behandelt. Die Ausbildung ist eng verbunden mit

³⁾ Die Organisation hängt vom Ausbildungsbetrieb ab. Die Stunden und Tage können auch anders verteilt werden.

einem Einsatz des Lehrlings an seinem künftigen Arbeitsplatz. So kann er Erfahrungen z. B. an der speziellen Anlage sammeln. Deshalb wird der Unterricht in der Praxis überwiegen.

Nur in den Spezialisierungsrichtungen (2) und (3) wird außerdem noch berufstheoretischer Unterricht beispielsweise in Mathematik — u. a. Einführung in die Lösung von Differentialgleichungen — und zu speziellen Problemen der Programmierung durchgeführt.

Welche theoretischen Kenntnisse benötigt ein Facharbeiter für Datenverarbeitung?

Die Tätigkeiten des Facharbeiters erfordern umfangreiche theoretische Kenntnisse in der Programmierung, vom technischen Aufbau der Maschinen und Anlagen und über die mathematischen und ökonomischen Grundlagen der Datenverarbeitungsprozesse. Der Lehrplan stellt hohe Anforderungen an den Lehrling. Er verlangt konzentriertes und systematisches Lernen während der gesamten Ausbildungszeit. Hier sollen nur einige Beispiele herausgegriffen werden, um euch zu zeigen, wie vielseitig die Ausbildung erfolgt.

Im Grundberuf sind 1164 Stunden berufstheoretischer Unterricht vorgesehen, davon allein 352 Stunden Mathematik! Der Mathematikunterricht wird mit dem Ziel durchgeführt, den Lehrling mit einigen mathematischen Methoden und Verfahren vertraut zu machen, die für die Anwendung der elektronischen Datenverarbeitungsanlagen zur Lösung ökonomischer, mathematischer oder technischer Probleme erforderlich sind. Im Mittelpunkt des Mathematikunterrichtes steht der Begriff des Algorithmus⁴⁾. Damit eng verknüpft sind Fragen der Formulierungsmöglichkeiten von Algorithmen und damit die Behandlung einer Formulierungssprache — ALGOL —. Derartige Formulierungssprachen werden bereits weitgehend als Programmierungssprachen⁵⁾ verwendet. Weiter spielen Probleme der numerischen Mathematik eine große Rolle — beispielsweise Fragen der Genauigkeit und Fehlerabschätzung. Unter diesen Gesichtspunkten werden behandelt: Zahlenbereich und spezielle Zahlensysteme, also u. a. auch die Darstellung im Dualsystem; Grundlagen der Kombinatorik, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, einige typische Operationen, lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme, Matrizen und Determinanten, lineare Optimierung, Polynome und ganzzahlige Funktionen sowie Einführung in die Differential- und Integralrechnung. Das ist nur ein Unterrichtsfach.

Andere Beispiele: In einigen Lehrgängen werden ökonomische Grundlagen der Datenverarbeitung behandelt. So lernen die Lehrlinge den Begriff des Modells* kennen.

Die Schüler der 10. Klasse wissen bereits, daß Modelle bei Betrachtungen naturwissenschaftlicher Probleme eine bedeutende Rolle spielen. Sie werden sich sicher sofort an das Bohrsche oder Rutherford'sche Atommodell und ihre Bedeutung für die Entwicklung der Atomphysik erinnern. Im Fach Maschinenkunde werden die mechanischen, elektrischen und elektronischen Bauelemente der Maschinen und Anlagen und ihr Zusammenwirken behandelt. Wie kann beispielsweise in den verschiedenen Anlagen die Zahlendarstellung technisch realisiert werden? Wichtig ist, daß ihr die physikalischen Gesetze, die auch in der polytechnischen Oberschule vermittelt werden, auch wirklich anwenden könnt. In der Tabelliermaschine spielen Zahnräder, Hebel, Nockenwelle und elektromechanische Relais eine wesentliche Rolle. Man begreift ihre Funktionen schnell, wenn man ihre Wirkungsweise kennt. Beim Programmieren der Tabelliermaschine müssen die einzelnen Bauteile richtig angesprochen werden. So muß man wissen, was bedeutet Ruhe- und Arbeitsstellung beim Relais, wann fließt ein elektrischer Strom, wann wird die Stromzufuhr unterbrochen und viele andere Gesetzmäßig-

⁴⁾ In weiteren Beiträgen werdet ihr diesen Begriff und Beispiele von Algorithmen aus eurem Unterrichtsstoff kennenlernen.

⁵⁾ Weitere Programmierungssprachen sind z. B. COBOL oder FORTRAN

keiten. Die Ausbildung, die bereits durchgeführt wurde, hat gezeigt, daß viele Schüler zwar die Gesetze kennen, aber wenn sie diese anwenden, aus ihnen Schlußfolgerungen ziehen sollen, dann geraten sie in Schwierigkeiten. Versucht deshalb ständig, euer Wissen in der Praxis zu überprüfen!

Wer kann diesen Beruf erlernen?

Voraussetzung zum Erlernen dieses Berufes ist der Abschluß der 10. Klasse mit sehr guten bis guten Leistungen in den Fächern Mathematik und Physik. Außerdem wird vom künftigen Facharbeiter erwartet, daß er gewissenhaft und zuverlässig arbeitet und in der Lage ist, seine eigene Arbeit kritisch einzuschätzen. Die Maschinen und Anlagen weisen jeden auch noch so kleinen Fehler unnachsichtig aus, sei es durch falsche Ergebnisse oder durch Unterbrechung des Maschinenlaufs. Es kommt häufig vor, daß Maschinenprogramme immer wieder überarbeitet werden müssen, bevor sie einwandfrei laufen. Deshalb sollte nur derjenige diesen Beruf ergreifen, der nicht bei jedem Fehlschlag in seiner Arbeit die Lust verliert, sondern mit gleicher Konzentration und Willenskraft seine Arbeit bis zum Erfolg führt. Einsatzbereitschaft, Zähigkeit und Freude an der Arbeit sind gerade bei diesem Beruf eine sehr wichtige Voraussetzung.

Wer bildet aus?

Da die Ausbildung den Einsatz qualifizierter Fachkräfte erfordert und eine Reihe materieller Voraussetzungen geschaffen werden müssen, werden in immer stärkerem Maße in den Bezirksstädten Ausbildungsgemeinschaften gebildet. Das bedeutet, daß sich mehrere Rechenbetriebe zusammenschließen, um gemeinsam die Ausbildung durchzuführen.

Wer sich für diesen Beruf interessiert, kann sich einmal in den Bezirksstädten unserer Republik an die VEB *Maschinelles Rechnen* wenden, zum anderen können die *Ämter für Arbeit und Berufsausbildung* darüber Auskunft geben, von welchen Betrieben die Ausbildung durchgeführt wird.

Ch. Papendorf

Begriffserklärungen

Doppler — Maschine, die von vorhandenen Lochkarten Duplikate vollständig oder z. T. herstellt und diese mit den Originalkarten vergleicht.

Lochmaschine — Maschine zum Stanzen von Ziffern in eine Lochkarte.

Modell — wichtige Methode, betriebliche oder volkswirtschaftliche Probleme mit Hilfe elektronischer Datenverarbeitungsanlagen zu lösen.

Primärdaten — neu erfaßte Daten.

periphere Geräte — Aggregate einer Datenverarbeitungsanlage, die nicht zur Zentraleinheit gehören, d. h., die nicht unmittelbar an dem Datenverarbeitungsprozeß beteiligt sind, z. B. Schreibmaschine, Fernschreiber, Lochkartenstanzer, Magnetbandspeicher u. a.

Sortiermaschine — Maschine zum Sortieren von Lochkarten nach bestimmten Begriffen, z. B. alle Lochkarten, die in der Spalte 3 eine 8 haben, werden aussortiert.

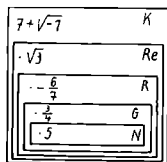
Tabelliermaschine — gesteuertes System der Informationsverarbeitung, das der Auswertung von Lochkarten dient.



VII. OJM: Wettbewerbsatmosphäre (Bild oben); Auszeichnung der Besten durch W. Engst, Sekretär des Zentralrats der FDJ und Vorsitzender der Pionierorganisation „Ernst Thälmann“ und OStR G. Stöhr, Ministerium für Volksbildung (rechts)

Elementare Zahlenfolgen

1. Teil



$N \subset G \subset R \subset Re \subset K$

Abb. 1

Zahlenfolgen sind euch schon vielerorts begegnet, in der Schule und auch außerhalb. Denkt nur zurück an die Stunden, in denen ihr das kleine Einmalrechen behandelt habt! Da gab es manches zu lernen:

die „Zweierreihe“ 2; 4; 6; 8; 10; usw., (f_1)
die „Fünferreihe“ 5; 10; 15; 20; 25; usw.,
die „Sechserreihe“ 6; 12; 18; 24; 30; usw.
und all die übrigen.

Das sind einfache *Zahlenfolgen*. Der Name „Reihe“ ist hier eigentlich fehl am Platze, der Unterschied zwischen „Folge“ und „Reihe“ soll uns heute aber noch nicht beschäftigen. Oder betrachtet einmal den Blendenring einer wertvollen Kamera! Auch dort findet ihr eine Zahlenfolge, nämlich

$$2; 2,8; 4; 5,6; 8; 16; 22. \quad (f_2)$$

Weitere Beispiele für Zahlenfolgen sind:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \text{ usw.} \quad (f_3)$$

$$1; 4; 9; 16; 25; \text{ usw.} \quad (f_4)$$

$$7; 4; 1; -2; -5; -8. \quad (f_5)$$

$$-2; -4; -8; +16; -32; +64; -128; +256; -512. \quad (f_6)$$

Die einzelnen Bestandteile einer Folge heißen *Glieder*. Je nachdem, ob die Folge aus endlich vielen Gliedern besteht oder nicht, sprechen wir von *endlichen* oder *unendlichen* Zahlenfolgen.

Die „Zweierreihe“ oder — wie wir besser sagen wollen — die Folge der geraden Zahlen lerntet ihr in den untersten Klassen nur zwischen 2 und 20 kennen, also

$$2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20. \quad (f_7)$$

Hier ist 20 das letzte Glied der Folge; es liegt eine *endliche* Folge von zehn Gliedern vor.

Lassen wir die Folge 2; 4; 6; 8; 10; ... jedoch immer weiterlaufen, so daß sie kein letztes Glied hat, dann haben wir es mit einer *unendlichen* Folge zu tun. Die drei Punkte sollen hier — ähnlich wie das „usw.“ — andeuten, daß die Folge kein Ende hat.

Die Darstellung einer Zahlenfolge durch Angabe einiger Anfangsglieder birgt aber eine

Gefahr in sich. Wir nehmen an, daß die Folge
 $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5};$ usw. ihre Fortsetzung

findet mit $\frac{1}{6}; \frac{1}{7}; 8; 9; 10;$ usw., aber garantieren kann uns das niemand. Sie könnte auch so weitergehen: $\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1;$
 2
 $1;$ usw. oder so: $\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5};$ usw.
oder auf irgendeine andere Weise.

Wir ersehen daraus, daß eine unendliche Zahlenfolge durch Angabe einiger Anfangsglieder niemals eindeutig bestimmt ist. Ja, man kann sogar beweisen, daß es stets unendlich viele Möglichkeiten gibt, endlich viele vorgegebene Glieder zu einer unendlichen Folge fortzusetzen. Wir müssen uns deshalb nach besseren, d. h., eindeutigen Darstellungsarten für Zahlenfolgen umsehen. Eine besonders einfache Zahlenfolge ist

$$1; 2; 3; 4; 5; \dots$$

Das ist die Folge der *natürlichen Zahlen* (ohne die Null).

Diese Folge finden wir eigentlich in jeder anderen Zahlenfolge wieder, denn jede Zahlenfolge hat

ein 1.; ein 2.; ein 3.; ...; allgemein ein k -tes Glied. Die Glieder selbst werden meist mit $a_1; a_2; a_3 \dots$ bezeichnet, das 1. Glied also mit a_1 , das 2. Glied mit a_2 , das k -te Glied mit a_k .

Das 2. Glied der Folge f_1 z. B. ist $a_2 = 4$, das 3. Glied $a_3 = 6$, das k -te Glied $a_k = 2k$.

Das k -te Glied einer Folge nennt man auch deren *allgemeines Glied*, es gestattet — sofern es angebar ist —, die gesamte Folge durch einen einfachen analytischen Ausdruck zu repräsentieren. Dabei setzt man stillschweigend voraus, daß k stets die Folge der natürlichen Zahlen 1; 2; 3; 4; 5; ... durchläuft. Das allgemeine Glied der Folge $f_4 = 1; 4; 9; 16; 25; \dots$ lautet, um ein weiteres Beispiel anzuführen, $a_k = k^2$.

Man kann den Zusammenhang zwischen der Gliednummer k (natürliche Zahl) und den Gliedern a_k (beliebige reelle Zahl) der Folge in einer Wertetabelle zum Ausdruck bringen. Es gilt für (unendliche) Folgen allgemein

Glied-Nr.	1	2	3	4	...	k	...	mit $k \in \{1; 2; \dots\}$
Glied	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_k	...	mit $a_k \in \mathbb{R}$
und speziell für die Folge der geraden Zahlen:	1	2	3	4	...	k	...	
	2	4	6	8	...	$2k$...	

Folgen stellen somit eine Menge von geordneten Zahlenpaaren $[k; a_k]$ dar, deren 1. Partner der Menge der natürlichen Zahlen entstammt und deren 2. Partner eine reelle Zahl ist. Aber nicht nur das. Es besteht eine eindeutige Abbildung von der Menge der k auf die Menge der a_k , das heißt, jedem k ist genau ein a_k zugeordnet.

Eindeutige Abbildungen sind aber nichts anderes als Funktionen.

Wir können also sagen: *Zahlenfolgen sind eine spezielle Klasse von Funktionen.* Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist immer eine Menge natürlicher Zahlen, und zwar die Menge $\{1; 2; 3; \dots\}$ für unendliche Folgen und die Menge $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ für endliche Folgen. Dabei ist a_n das letzte Glied der endlichen Folge. Bei der aus 6 Gliedern bestehenden Folge f_6 z. B. ist $a_6 = -8$. Jetzt fällt es uns gewiß nicht schwer, die exakte Definition des Begriffs „Zahlenfolge“ zu verstehen: *Definition: Zahlenfolgen sind Funktionen, deren Definitionsbereich die Menge $\{1; 2; 3; \dots\}$ oder $\{1; 2; \dots; n\}$ natürlicher Zahlen ist und deren Wertevorrat aus reellen Zahlen besteht.*

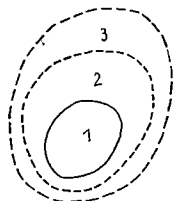


Abb. 2
3 Menge aller Abbildungen
2 Menge aller Funktionen
1 Menge aller Zahlenfolgen

Abbildung = Teilmenge der Menge aller geordneten Paare

Funktion = eindeutige Abbildung (Jedem $a \in A$ ist genau ein $b \in B$ zugeordnet)

Unendliche Zahlenfolge = eindeutige Abbildung mit $N \setminus \{0\}$ als Defin.-Bereich (Jedem $k \in N \setminus \{0\} = \{1; 2; \dots\}$ ist genau ein $a_k \in \mathbb{R}$ zugeordnet)

Ist das allgemeine Glied bekannt, so kann man schreiben:

$$a_k = f(k) \text{ mit } k \in \{1; 2; 3; \dots\} \text{ für unendliche Folgen;}$$

$$\text{mit } k \in \{1; 2; 3; \dots; n\} \text{ für endliche Folgen.}$$

Die symbolische Schreibweise $a_k = f(k)$ für Zahlenfolgen nennt man analytische oder unabhängige Darstellung (independent, lat. unabhängig. Jedes Glied der Folge kann unabhängig von den anderen bestimmt werden.) Als analytische Darstellung ist uns diese Schreibweise ja von den Funktionen her gut bekannt. Nur wird bei Funktionen die unabhängige Variable meist mit x , die abhängige Variable mit y bezeichnet.

$y = 2x$ ist die analytische Darstellung einer linearen Funktion. Läßt man als Definitionsbereich die Menge aller reellen Zahlen zu, so erhalten wir als Bild eine Gerade (Abb. 3).

$a_k = 2k$ dagegen ist die analytische oder unabhängige Darstellung der Folge der geraden Zahlen. Die unabhängige Variable k kann nur ganzzahlige positive Werte annehmen. Infolgedessen ist die graphische Darstellung der Folge $a_k = 2k$ keine Gerade, sondern eine diskrete Folge einzelner Punkte; der Mathematiker sagt dazu: *diskrete Punktfolge* (Abb. 4). Diskrete Punktfolgen als Bilder von Zahlenfolgen verlaufen überdies nicht nur im I. oder (und) IV. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, während Funktionen in allen vier Quadranten verlaufen können.

Wir sollten uns bei dieser Gegenüberstellung aber stets bewußt sein, daß eben auch $a_k = 2k$ eine Funktion ist. Wir wollen für einige weitere Zahlenfolgen unabhängige und graphische Darstellungen angeben.

(f₄) Folge der Quadratzahlen. Independent Darstellung:

$$a_k = k^2 \text{ mit } k \in \{1; 2; \dots\} \text{ (Abb. 5)}$$

(f₅) 7; 4; 1; -2; -5; -8. Independent Darstellung:

$$a_k = -3k + 10 \text{ mit } k \in \{1; 2; \dots; 6\} \text{ (Abb. 6).}$$

Wir haben vier wichtige Darstellungsarten von Zahlenfolgen kennengelernt: die unabhängige oder analytische Darstellung $a_k = f(k)$, die tabellarische (Darstellung durch eine Wertetabelle), die graphische und die verbale, d. h., die Darstellung einer Folge durch Wortbeschreibung. „Folge der Quadratzahlen“ (exakter: „Folge der Quadrate der natürlichen Zahlen ohne die Null“) ist die verbale Darstellung der Folge 1; 4; 9; 16; 25; ...; k^2 ; ...

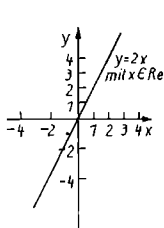


Abb. 3

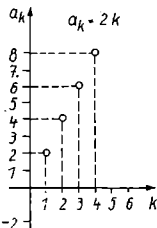


Abb. 4

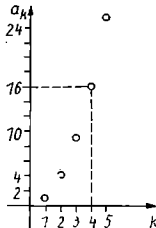


Abb. 5

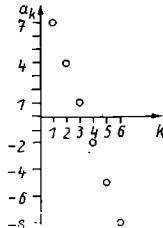


Abb. 6

Die unabhängige Darstellung ist dabei die wichtigste, weil mit ihr das Bildungsgesetz einer Zahlenfolge in den meisten Fällen knapp, prägnant und eindeutig zum Ausdruck gebracht werden kann. Es gibt allerdings auch Zahlenfolgen, für die eine unabhängige Darstellung überhaupt nicht angebar ist (Beisp.: Folge der Primzahlen), andere, für die eine weitere Darstellungsart, die rekursive Darstellung, einfacher und zweckmäßiger ist. Darauf kommen wir im zweiten Teil zurück.

H. Lohse

Aufgaben

223 Eine der folgenden Aussagen ist falsch. Welche?

- a) Jede Folge ist eine Menge geordneter Paare.
 b) Jede Funktion ist eine eindeutige Abbildung.

- c) Jede Folge ist eine eindeutige Abbildung.
 d) Jede Funktion ist eine Folge.
 e) Jede Folge ist eine Funktion.
 Begründe deine Entscheidung!

224 Schreibe die Menge $f_6 = -2; +4; -8; +16; -32; +64; -128; +256; -512$ als Menge geordneter Paare auf!

225 Versuche, für folgende Anfangsglieder einer unendlichen Folge ein einfaches Bildungsgesetz in unabhängiger Darstellung zu finden:

$$\frac{9}{5}; \frac{4}{3}; 1; 0; -\frac{1}{3}; -\frac{4}{5}; \dots$$

226 Gib alle dir bekannten Darstellungsarten der Folge f_6 an!

227 Welche der vier graphischen Darstellungen (Abb. 7) kann nicht die Darstellung einer Folge sein?

Begründe deine Antwort!

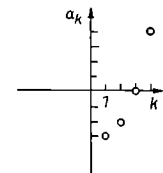
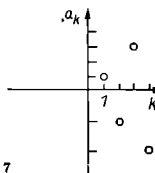
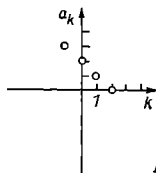
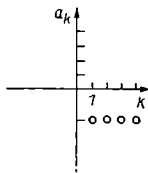


Abb. 7

Sehr geehrter Herr Chefredakteur!

Ihre mathematische Schülerzeitschrift *alpha* feierte im Januar den ersten Geburtstag. Das ist mir ein willkommener Anlaß, Ihnen und Ihren Mitarbeitern für diese lehrreiche Zeitschrift zu danken. — Alle sechs Hefte des Jahrganges 1967 liegen vor mir — zerlesen, etwas schnuddelig, mit vielen Randbemerkungen versehen. Man sieht ihnen an, daß damit gearbeitet wurde.

Mein Schulweg besteht aus mindestens $1\frac{1}{2}$ Stunden Straßenbahnfahrt täglich. Diese nutze ich oft zu mathematischen Überlegungen und Knobeleyen, denn dafür genügt der engste Raum und — meine *alpha*. Natürlich schüttle ich nicht in der Straßenbahn jede Lösung aus dem Ärmel. Mein Interesse

für die Mathematik läßt sich bis zum Einmaleins zurück verfolgen, aber, daß es ein so tätiges Einmaleins wurde, verdanke ich zu einem guten Teil Ihrer *alpha*. Nicht nur die Wettbewerbsaufgaben habe ich regelmäßig eingesandt, sondern ich beschäftigte mich auch eingehend mit all den anderen Aufgaben meiner Klassenstufe.

Ich freue mich ganz besonders über die Vielseitigkeit der Zeitschrift und lese alle Beiträge mit großem Interesse. Und welcher Schüler informiert sich nicht gern über Aufgaben, Lösungen und Ergebnisse der Mathematikolympiaden? Nun warte ich schon mit Ungeduld auf jedes der Hefte des zweiten Jahrgangs.

Arnulf Möbius, Kl. 9 VR der
 Erw. Leibnizschule, Leipzig

Nichts Einfacheres als ein Quadrat!

(trotzdem erst für Schüler ab Klasse 8)

3. Teil

(4) Das Problem der Quadratverdoppelung schien uns so einfach, und doch sind wir bisher immer wieder gescheitert. Sollte es uns wie J. F. Böttger gehen, der Gold machen wollte und das Porzellan fand? Aus dem Material, das Böttger zur Verfügung stand, konnte kein Gold entstehen! Sollte es möglich sein, daß es gar keine rationale Zahl gibt, deren 2. Potenz gleich 2 ist? Eine derart ungewöhnliche Vermutung kann man aber nicht einfach hinnehmen; man muß versuchen, sie zu beweisen!

Behauptung: Es gibt keine rationale Zahl, deren 2. Potenz gleich 2 ist.
Der Beweis erfordert eure ganze Aufmerksamkeit.

Beweis: Wir fragen uns zuerst, wodurch rationale Zahlen charakterisiert werden können. Die rationalen Zahlen wurden eingeführt, damit jede Divisionsaufgabe mit gebrochenen Zahlen lösbar ist. Also kann jede positive rationale Zahl als Verhältnis zweier natürlicher Zahlen ausgedrückt werden und umgekehrt, jedes solche Verhältnis drückt eine positive rationale Zahl aus. (Die Division durch 0 ist natürlich ausgeschlossen.)

Wir müßten also zeigen, daß es kein Verhältnis natürlicher Zahlen gibt, dessen 2. Potenz 2 ist. Dazu stellen wir uns vor, daß uns jemand sagt: „Es gibt doch eine solche rationale Zahl!“ Wir widerlegen ihn, indem wir antworten: „Wenn Du recht hättest, wenn es also eine rationale Zahl d gäbe, für die $d^2 = 2$ gilt, dann würde folgendes gelten: d müßte sich als Verhältnis $\frac{m}{n}$ natürlicher Zahlen m und n ausdrücken lassen, es wäre also

$$d^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2, \text{ also auch}$$

$$m^2 = 2 \cdot n^2 \text{ oder}$$

$m \cdot m = 2 \cdot n \cdot n$, d. h., links und rechts vom Gleichheitszeichen müßten dieselben Zahlen stehen. Wenn wir uns diese nun in Primfaktoren zerlegt denken (zum Beispiel $(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)$), so sieht

man, daß rechts eine *ungerade* Anzahl von Primzahlen, links aber eine *gerade* Anzahl von Primzahlen steht, also kann diese Gleichung nicht stimmen! Kurz gesagt: Wenn Du recht hättest, dann ergäbe sich ein Widerspruch; also hast Du unrecht!“ (Genau genommen ist es wichtig, daß die Primfaktorenzerlegung bis auf die Reihenfolge der Faktoren nur auf *eine* Weise möglich ist.)

Hier haben wir eine kleine Atempause verdient. Wir schauen zurück:

* Ausgangsfrage war: Wie muß man eine Quadratsseite vergrößern, damit sich die Quadratfläche verdoppelt?

* Wir formulierten die Frage um: Wie muß man eine Quadratsseite vergrößern, damit sich die Quadratdiagonale ergibt?

* Wir formulierten ein zweites Mal um: welche rationale Zahl hat 2 als 2. Potenz?

* Nach vielen vergeblichen Lösungsversuchen tauchte eine ungewöhnliche Vermutung auf: vielleicht gibt es eine solche rationale Zahl gar nicht?

* Wir bewiesen, daß es tatsächlich keine rationale Zahl gibt, die 2 als 2. Potenz hat.

Ist euch klar, daß wir etwas ganz Großartiges entdeckt haben? Wir haben einen *Unmöglichkeitensbeweis* geführt! Wir wissen jetzt, daß das Problem der Quadratverdoppelung unter Zuhilfenahme der rationalen Zahlen nicht gelöst werden kann.

Verwechselt das bitte nicht mit Unfähigkeit! Unsere Erkenntnis besteht *nicht* darin, daß wir bis jetzt noch nicht wissen, wie das Problem der Quadratverdoppelung mit Hilfe der rationalen Zahlen gelöst wird. Wir wissen vielmehr, daß es mit Hilfe der rationalen Zahlen bestimmt nicht gelöst werden kann; wir haben wirklich eine neue Erkenntnis gewonnen!

Da zur Zeit unserer Geschichte aus Delphi im antiken Griechenland nur rationale Zahlen bekannt waren, sieht man jetzt, wie ge-

schickt sich das Orakel von Delphi aus der Affäre gezogen hatte. „Wer das unlösbare Problem löst, soll den Esel bekommen!“ Das Orakel hat also niemandem den Esel zugesprochen.

Es wird euch gewiß interessieren, daß noch im alten Griechenland unsere „nagelneue“ Erkenntnis gefunden wurde. Es wird berichtet, daß wahrscheinlich Pythagoras höchstpersönlich diese Entdeckung machte.

Aufgabe 13: Beweise, daß es keine rationale Zahl gibt, deren 2. Potenz gleich 3 ist!

es ständig arbeiten würde, auch wenn kein Wasser da wäre. Ein *perpetuum mobile* 1. Art widerspricht dem Satz von der Erhaltung der Energie und ist daher physikalisch unmöglich.

In der Kriminalistik ist ein Alibi der Beweis dafür, daß eine ganz bestimmte Person zu einer ganz bestimmten Zeit *nicht* an einem ganz bestimmten Ort war. Ein Alibi ist also ein Unmöglichkeitsbeweis, nämlich der Beweis, daß die betreffende Person unmöglich der unmittelbare Täter gewesen sein konnte.

Aufgabe 16: Sammle weitere Beispiele von Unmöglichkeitsbeweisen! Frage eventuell deinen Mathematiklehrer!

Aufgabe 14: Wieso klappt derselbe Beweis für die 2. Potenz 4 nicht? Es gibt natürlich eine rationale Zahl, deren 2. Potenz 4 ist, nämlich die Zahl 2. An welcher Stelle des Beweises geht der Beweis deswegen nicht weiter?

Aufgabe 17: Führe ganz ähnliche Überlegungen wie wir bei folgendem Problem durch: Wie ist die Kante eines Würfels zu vergrößern, damit das Würfelvolumen sich verdoppelt?

Aufgabe 15: Verallgemeinere! Für welche 2. Potenz ist der benutzte Beweisgedanke brauchbar?

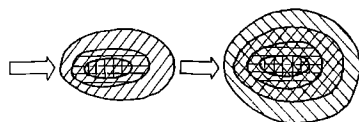
Ich will euch noch zwei Beispiele für Unmöglichkeitsbeweise angeben.

Aus dem Physikunterricht wißt ihr, daß es kein sogenanntes „*perpetuum mobile* 1. Art“ geben kann. Ein *perpetuum mobile* 1. Art ist eine Maschine, die ständig Energie abgibt, ohne daß ständig die entsprechende Energie in sie hineingesteckt wird. Ein Benzinmotor wäre ein *perpetuum mobile* 1. Art, wenn er ohne Benzin laufen würde. Ein Wasserkraftwerk wäre ein *perpetuum mobile* 1. Art, wenn

(5) Im letzten Teil unserer gemeinsamen Überlegungen wollen wir zwei Konsequenzen aus der neuen Erkenntnis ziehen, die auch für euren Mathematikunterricht von großer Bedeutung sind. Die erste und wichtigste Konsequenz besteht darin, daß wir unzufrieden

sind mit der schwachen Leistung der rationalen Zahlen. Sie leisten zwar mehr als die natürlichen und die gebrochenen Zahlen, denn mit ihnen kann man unbeschränkt addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (außer durch 0). Sie haben uns beim Problem des Wurzelziehens aber verlassen. Also ist es notwendig, eine neue Art von Zahlen zu erfinden, die die Leistungen der rationalen Zahlen erbringen, darüber hinaus aber noch mehr können. Einige von euch kennen solche Zahlen bereits; man nennt sie *reelle* Zahlen.

Die Zahl, die wir mit $\sqrt{2}$ bezeichnet haben, ist zum Beispiel eine reelle Zahl. Da die reellen Zahlen die Leistungen der rationalen Zahlen übernehmen, können wir das Lehrbuchbild vervollständigen (siehe Figur 8):



Bereich der rationalen Zahlen

Bereich der reellen Zahlen

Figur 8

Zahlen, die durch $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ und andere bezeichnet werden, sind Beispiele für solche reellen Zahlen, die nicht rational sind. Man nennt sie irrationale Zahlen. Viele von euch kennen noch andere irrationale Zahlen. Ich gebe einige Beispiele an: Zahlen, die durch $\log_2 5$, $\lg 2$, $\sin 20^\circ$ bezeichnet werden. Ich mache euch aber darauf aufmerksam, daß ich euch nicht gesagt habe, was eine reelle Zahl ist. Ich habe immer nur angegeben, wodurch sie bezeichnet werden.

Nun möchte ich euch eine zweite Schlußfolgerung aus unserer Erkenntnis erläutern, daß die Quadratverdoppelung allein mit rationalen Zahlen unmöglich ist. Vielleicht sind bei früheren Überlegungen einige kluge Köpfe schon auf den Einfall gekommen, die Länge der Quadratdiagonale bei vorgegebener Einheits-Seitenlänge zu messen. Ihr werdet $s = 1$ dm sehr genau gezeichnet haben, das Quadrat peinlich sorgfältig dazu konstruiert und die Diagonale schließlich eingezeichnet haben. Jetzt kann man doch die Länge der Diagonale

sehr genau in Dezimtern ablesen: Das über der Diagonalen errichtete Quadrat hat dann tatsächlich einen Flächeninhalt, der vom doppelten Flächeninhalt des Ausgangsquadrates so wenig abweicht, daß es durch Nachmessen nicht mehr festgestellt werden kann. Das stimmt sogar. Für jedes gezeichnete Quadrat kann ein doppelt so großes Quadrat gezeichnet werden, ohne daß durch Messen und Zeichnen Fehler festgestellt werden können. Die Quadratverdoppelung ist für jede genaue Zeichnung auf dem Papier möglich.

Aber: meßt ihr die Diagonale und setzt in $d^2 = 2$ ein, so stimmt es nie!

Also: die Quadratverdoppelung ist für gezeichnete Quadrate möglich, aber für das mathematische Quadrat nicht!

Was ihr hieraus lernen sollt, ist vor allem dies: man muß unterscheiden zwischen einem gezeichneten Quadrat und dem mathematischen Quadrat. Ein Quadrat, wie es der Mathematiker untersucht, kann man weder zeichnen noch hören oder riechen oder anfassen. Ein gezeichnetes Quadrat gibt uns eine Vorstellung von dem eigentlichen mathematischen Untersuchungsobjekt; ein gezeichnetes Quadrat ist aber nicht das Untersuchungsobjekt selbst. Es dient nur zu seiner Veranschaulichung. Die Modelle von Pyramiden, Kugeln usw., die euch euer Mathematiklehrer zeigt, sind nicht die mathematischen Körper selbst, sondern nur Veranschaulichungen der mathematischen Körper, eben Modelle davon. Das Gleiche trifft auf alle Zeichnungen im Heft oder an der Wandtafel zu. Deswegen habe ich vorhin auch immer so vorsichtig gesagt „ $\sqrt{2}$ bezeichnet eine reelle Zahl“; das Zeichen „ $\sqrt{2}$ “ ist nämlich nicht eine reelle Zahl selbst, sondern nur ein Name dafür. Es besteht hier der gleiche Unterschied wie zwischen eurem Namen „Fritz Müller“ und dem Menschen, der diesen Namen hat. Es ist auch der gleiche Unterschied wie zwischen Ziffer und Zahl; eine Ziffer ist ein Name einer Zahl.

Ich glaube, über diese letzten Sätze müßt ihr noch einmal nachdenken. Es ist auch gut, wenn ihr über dieses schwierige Problem mit eurem Mathematiklehrer sprecht.

„Nichts Einfacheres als ein Quadrat!“ ist unsere Überschrift gewesen. Es sieht ganz so aus, als ob man auch bei der Untersuchung scheinbar einfacher Dinge eine ganze Menge lernen kann. Ich hoffe, es hat wenigstens einem von euch Spaß gemacht; dann wirkt er ansteckend!

H. Wieseemann

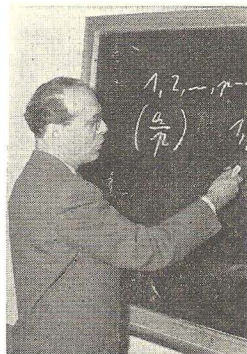
Eine Aufgabe von

NPT Prof. Dr. phil. habil. Hans Reichardt*

Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik

* Professor mit Lehrstuhl, ordentliches Mitglied der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher *Leopoldina* Halle, Direktor am Institut für Reine Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

- 9 260a Eine Stoppuhr besitze zwei Sekundenzeiger, die verschiedene Drehpunkte (Mittelpunkte) haben. Wenn die beiden Sekundenzeiger laufen, so mögen die durch die Zeiger verlaufenden Geraden einander schneiden. Welche Kurve beschreiben die Schnittpunkte dieser Geraden bei einem vollen Umlauf der Sekundenzeiger?
- 10 260b Bei welchen Stellungen des Stundenzeigers und des Minutenzeigers einer Uhr geht wieder eine mögliche Stellung hervor, wenn man die beiden Zeigerstellungen miteinander vertauscht?



Prof. Dr. Reichardt gehört zu den aktiven Förderern der außerschulischen Arbeit im Fach Mathematik. Unsere Bilder zeigen ihn und seine aufmerksamen Zuhörer bei der Vorbereitung auf die DDR-Olympiade im Jahre 1963.

Die Aufgabenkommission des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Das Zentrale Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR steht unter der Leitung von Prof. Dr. W. Engel (Universität Rostock). Entsprechend den verschiedenen Aufgaben ist es in ein Organisationskomitee (Leiter OStR H. Titze), die Aufgabenkommission und die Jury (Leiter Dr. H. Bausch) untergliedert.

Die Aufgabenkommission ist das Herzstück des Komitees, weil die in jedem Jahr ablaufenden Olympiaden in allen vier Stufen (Schule, Kreis, Bezirk, DDR) als wichtigste Voraussetzung die Bereitstellung eines den spezifischen Anforderungen dieses Wettbewerbs genügenden Aufgabematerials erfordern. Sie wurde 1964 im Auftrage der Mathematischen Gesellschaft der DDR gegründet und steht unter der gemeinsamen Leitung von Prof. Dr. H. Karl (Pädagogische Hochschule Potsdam) und Prof. Dr. U. Pirl (Humboldt-Universität zu Berlin). Die Aufgabenkommission untergliedert sich nach den beteiligten Klassenstufen in vier Arbeitsgruppen:

Klassenstufe 5/6

StR J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig (als Leiter)
OL K. Fuhrmann, Leipzig · OL H. Schulze, Leipzig

Klassenstufe 7/8

StR D. Michels, Rostock (als Leiter)
OL K. Krüger, Bad Doberan · P. Polster, Dresden

Klassenstufe 9/10

StR. G. Schulze, Herzberg (als Leiter)
K. Belerlein, Potsdam
OSTR K.-H. Lehmann, V. L. d. V., Berlin ·
G.-O. Schulze, Luckenwalde

Klassenstufe 11/12

NPT OStR Dr. E. Lüders, Berlin (als Leiter)
OL H. Bode, Gotha · M. Rehm, Berlin ·
Dipl.-Ing. M. Walter, Meiningen

Alle Mitglieder der Aufgabenkommission senden, meist über das ganze Jahr verteilt, Aufgabenvorschläge für das jeweils bevorstehende Olympiadejahr an den Sekretär des Zentralen Komitees, OStR H. Titze ein. Diese werden nach Vervielfältigung an alle Mitglieder der Kommission weitergeleitet. Im Herbst jedes Jahres tritt die Kommission zu einer mehrtägigen Beratung zusammen und wählt aus dem vorliegenden Material die Aufgaben für alle Stufen der im Herbst des folgenden Jahres beginnenden Olympiade aus. Dadurch ist ein genügender zeitlicher Vorlauf für die notwendigen Überarbeitungen geschaffen.

Schon bei der Auswahl der Aufgaben auf der Jahrestagung sind die verschiedensten Gesichtspunkte zu berücksichtigen. So kommt es u. a. darauf an, Aufgaben aus den wichtigsten mathematischen Sachgebieten in angemessener Weise für die jeweiligen Klassenstufen vorzusehen, eine Zusammenstellung zu gewährleisten, die in geeigneter Art aus leichten, mittleren und schwierigen Aufgaben gemischt ist, eine Steigerung der Anforderungen in den zeitlich späteren Stufen zu planen, Punktzahlen entsprechend dem Schwierigkeitsgrad festzulegen. Als günstig hat sich erwiesen, stets die konstante Gesamtzahl von 40 Punkten zu vergeben, da hierbei genügend Spielraum vorhanden ist, um die Aufgaben nach ihrem Schwierigkeitsgrad zu differenzieren.

Besondere Sorgfalt wird stets auf die Formulierung der Lösungen verwendet. Auch sie müssen mehreren Forderungen genügen, die nicht immer leicht zu vereinen sind. Zunächst müssen sie natürlich mathematisch vollkommen einwandfrei sein. Sodann sollen sie den Korrektoren eine brauchbare Handhabe zur Selbstverständigung über den mathematischen Gehalt der Aufgaben bieten, indem sie, soweit möglich, Lösungswege enthalten, die auch von Schülern der entsprechenden Klassenstufe gefunden werden können. Außerdem ist es vorteilhaft, wenn sie möglichst unmittelbar und zügig zum Ergebnis gelangen, also umständliche und langatmige Wege vermeiden. Die vom Sekretär des ZKOJM aus den eingereichten Materialien hergestellte Erstfassung wird einem Gutachterkreis (Prof. Dr. Engel, Prof. Dr. Karl, Dr. Geise, Dr. Stammler und den Vorsitzenden der vier Aufgabengruppen) zugestellt. Nach Eingang der Gutachten fertigt der Sekretär gemeinsam mit dem Leiter der jeweiligen Aufgabengruppe eine vorläufige Endfassung an, die in einer Schlußredaktion durch Prof. Dr. Pirl, OStR K.-H. Lehmann (Berlin) und OStR Titze die endgültige Form erhält. Aus allem geht hervor, daß das Netz der von der Aufgabenkommission zu leistenden Arbeiten umfangreich, vielseitig und verantwortungsvoll ist. Die Kommission bemüht sich, durch hohe Qualität der veröffentlichten Aufgaben und Lösungen zur Verbesserung des Mathematikunterrichts beizutragen.

H. Karl

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

(Zur Vorbereitung auf die Schulstufe
der VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR)
letzter Einsendetermin 15. September 1968

5 230 Drei Fluggäste aus der DDR fliegen mit der TU von Prag nach Kairo. Ihre Namen sind Baumann, Eichler und Hahn. Einer von ihnen ist Elektriker, einer Monteur und einer Ingenieur. Keiner von ihnen hat gleichzeitig zwei der Berufe. Aus ihrer Unterhaltung entnehmen wir folgendes:

- Zwei Fluggäste, und zwar Herr Baumann und der Ingenieur, sollen in Bombay eine von der DDR gelieferte Anlage aufbauen helfen.
- Zwei Fluggäste, und zwar Herr Hahn und der Elektriker, kommen aus Berlin, während der dritte aus Dresden kommt.
- Herr Eichler ist jünger als der Monteur.
- Herr Hahn ist älter als der Ingenieur. Wie heißt der Ingenieur, wie der Elektriker und wie der Monteur?

231 In einem volkseigenen Betrieb wurden von Anfang Januar bis Ende Juni desselben Jahres von einem bestimmten Maschinenteil täglich 12 Stück hergestellt. Durch den sozialistischen Wettbewerb gelang es, vom 1. Juli ab täglich 2 Stück mehr zu produzieren.

- Wieviel Maschinenteile dieser Art werden nunmehr monatlich — 26 Arbeitstage — angefertigt?
- Wieviel Teile können dadurch bis zum Jahresende über den Plan, der 12 Stück pro Tag vorsieht, hinaus produziert werden?

232 Aus 36 gleichgroßen Quadraten soll durch Aneinanderlegen ein Rechteck gebildet werden.

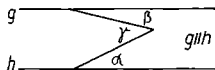
- Wieviel Lösungsmöglichkeiten gibt es? (Bei jeder Lösung sollen sämtliche Quadrate verwendet werden).
- Welches der möglichen Rechtecke hat den kleinsten Umfang?

W(5)233 Inge wird von Ellen gefragt, wie in ihrer Klasse die letzte Mathematikarbeit ausgefallen sei. Verschmitzt entgegnet Inge: „Nun, denke nach! Der dritte Teil der Anzahl unserer 36 Schüler erhielt die Note ‚Zwei“

oder ‚Vier‘; dabei war die Anzahl der ‚Zweien‘ doppelt so groß wie die der ‚Vieren‘. Die Anzahl der ‚Einsen‘ hingegen war dreimal so groß wie die der ‚Fünfen‘. Die Note ‚Drei‘ kam mehr als doppelt so oft, aber weniger als dreimal so oft vor, wie die Note ‚Eins‘.“ Ermittle die Zensurenverteilung!

W(5)234 Eine zweistellige natürliche Zahl hat die Quersumme 13. Vertauscht man ihre Ziffern, so erhält man eine Zahl, die um 27 kleiner ist als die ursprüngliche. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?

235 Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur. Die Winkel α und β seien bekannt. Berechne die Größe des Winkels γ !



236 Fritz gibt Heinz folgendes Rätsel auf: „In einer Klasse können 26 Schüler radfahren und 12 Schüler schwimmen. Jeder Schüler kann mindestens eins von beiden. Multipliziert man die Schülerzahl mit 5, so ist die Quersumme dieses Produkts doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar. Wieviel Schüler besuchen unsere Klasse?“

237 In einer Möbelfabrik wurde im Laufe eines Jahres die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert. Die Jahresproduktion betrug 1920 Tische. Wieviel Tische wurden im Juni und wieviel im Dezember hergestellt?

W(6)238 Uwe verliert beim ersten Spiel zwei mehr als ein Drittel seiner Murmeln. Beim zweiten Spiel verliert er drei mehr als ein Viertel der ihm verbliebenen Murmeln. Nach diesen beiden Spielen hat Uwe noch 21 Murmeln, die er seinem Bruder Heinz schenkt. Wieviel Murmeln besaß Uwe vor dem ersten Spiel?

W(6)239 Mehrere LPG hatten sich zu einer Kooperationsgemeinschaft zusammengeschlossen; sie stellten sich das Ziel, an jedem Tag genau 56 ha Weizen abzuernten. Durch gute Arbeitsorganisation wurden jedoch täglich 64 ha geschafft; so wurde die Ernte vorfristig beendet. Am Ende des zweiten Tages vor dem gestellten Plantermin hatte die Kooperationsgemeinschaft nur noch Weizen von 40 ha zu ernten. In wieviel Tagen sollte die Weizenernte ursprünglich beendet sein?

- 7 240** Ein Zirkel Junger Mathematiker beschäftigt sich damit, Aufgaben für die Knobelecke zusammenzustellen. Folgende Aufgabe wurde vorgeschlagen:

$$\begin{array}{r} \text{DREI} \\ + \text{EINS} \\ \hline \text{VIER} \end{array}$$

Die Buchstaben sollen durch Ziffern ersetzt werden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Es stellte sich heraus, daß es keine Lösung dieser Aufgabe geben kann. Begründe das!

241 In einer 7. Klasse erhielt zum Abschluß des Schuljahres im Fach Mathematik kein Schüler die Zensur „5“, jeder neunte Schüler erhielt die Zensur „1“, jeder dritte die Zensur „2“ und jeder sechste die Zensur „4“.

Über die Schülerzahl n ist bekannt:

$$20 < n < 40.$$

Wieviel Schüler erhielten die Zensur „3“?

242 Bei geometrischen Übungen im Freien hat Brigitte die Aufgabe, einen im Gelände vorgegebenen Winkel von 80° auf ein anderes Geländestück zu übertragen. Als Hilfsmittel stehen ihr einige Fluchtstäbe und eine 20 m lange Schnur zur Verfügung. Gib zwei verschiedene Lösungswege an, die Brigitte hat.

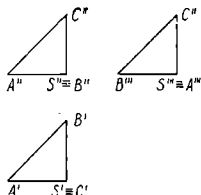
W(7)243 Ein Parallelogramm $ABCD$ wird durch seine Diagonalen AC und BD , die sich im Punkt M schneiden, in vier Teildreiecke ABM , BCM , CDM und DAM zerlegt. Beweise, daß diese Teildreiecke untereinander flächengleich sind!

W(7)244 Es seien a , b , c , und d vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Beweise, daß die Summe aus den Produkten ab , ac , ad , bc , bd und cd stets eine ungerade natürliche Zahl ist!

- 8 245** In der Zahl *378* sind an die Stelle der beiden Sterne Ziffern zu setzen, so daß die entstehende Zahl durch 72 teilbar ist.

246 Peter ist im Ferienlager. Er will für seine Gruppe Brause zu 21 Pf je Flasche einkaufen und nimmt dazu leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (30 Pf für jede leere Flasche) möchte er möglichst viele Flaschen Brause kaufen. Für jede Flasche müssen erneut 30 Pf Pfand hinterlegt werden. Es stellt sich heraus, daß er 6 Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück. Wieviel leere Flaschen hatte Peter mitgebracht? (Es gibt nicht nur eine Lösung.)

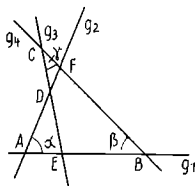
247 a) Gib einen Körper an, der den abgebildeten Grund-, Auf- und Kreuzriß besitzt (siehe Abb.!) (Sämtliche Risse sind rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke.)



b) Zeichne das Netz dieses Körpers und stelle ein Körpermodell her!

W(8)248 In der untenstehenden Abbildung schneiden sich die vier Geraden g_1 , g_2 , g_3 und g_4 in den Punkten A , B , C , D , E und F . Die Größen der Winkel $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle EBF$ und $\sphericalangle FCD$ seien α , β bzw. γ .

Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle FDE$!



W(8)249 Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen multiplizieren wir die erste mit der zweiten und die zweite mit der dritten. Beweise, daß dann die Summe der beiden Produkte gleich dem doppelten Quadrat der zweiten Zahl ist!

250 Es ist der folgende Satz zu beweisen: Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe

der Quadrate der Längen der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der Längen der Parallelseiten.

251 Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.

Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:

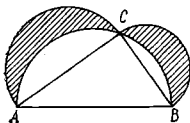
1. Anna hat den Ball.
2. Brigitte hat den Ball nicht.
3. Claudia hat die Schere nicht.

Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

252 In einer Abteilung eines Werkes soll ein neues zeitsparendes Arbeitsverfahren eingeführt werden. Wenn 4 Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten, erhöht sich die Produktion um 20 Prozent. Wenn 60 Prozent der Arbeiter der Abteilung dieses Verfahren anwenden, kann die Produktion auf das Zweieinhalbfache gesteigert werden.

- a) Wieviel Arbeiter hat die Abteilung?
- b) Auf wieviel Prozent würde sich die Produktion erhöhen, wenn alle Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten würden? Alle Arbeiter der Abteilung führen die gleiche Tätigkeit aus.

W(9)253 Zeichnet man über den Katheten \overline{AC} und \overline{BC} und über der Hypotenuse \overline{AB} eines rechtwinkligen Dreiecks ABC die Halbkreise (s. untenstehende Figur), so ist der Flächeninhalt des Dreiecks gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden „Möndchen“ (schraffiert). Beweise diesen Satz!



Diese Aufgabe ist unter der Bezeichnung *Möndchen des Hippokrates* bekannt, der als Möndchen eine zwischen zwei Kreisen liegende Fläche bezeichnete. (Wer darüber mehr erfahren will, dem raten wir, sich in W. Lietzmann: *Der pythagoreische Lehrsatz*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, zu informieren.)

W(9)254 Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten \overline{AB} und \overline{CD} , wenn die folgenden Maße gegeben sind:

$\overline{AB} = 8 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 6 \text{ cm}$ und $\overline{DA} = 4 \text{ cm}$!

(Erleichtere Dir die Lösung dieser Konstruktionsaufgabe, indem Du sie in Analyse, Konstruktion mit Beschreibung, Beweis der Konstruktion und Diskussion gliederst!)

255 Ein konvexes Viereck wird durch seine Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt. Man beweise, daß das Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn die vier Dreiecke paarweise flächengleich sind.

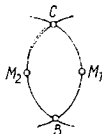
256 Finde eine zweistellige Zahl, die gleich der Summe aus der Zahl an ihrer Zehnerstelle und dem Quadrat an der Einerstelle ist! Weise nach, daß es nur eine solche Zahl gibt!

257 Vier Personen haben die Vornamen Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich. Die Familiennamen dieser Personen lauten Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich. Ferner wissen wir folgendes:

- a) keine der vier Personen hat den gleichen Vor- und Zunamen.
- b) Conrad hat nicht den Familiennamen Arnold.
- c) Der Zuname von Bernhard stimmt mit dem Vornamen der Person überein, deren Familiennamen mit dem Vornamen der Person übereinstimmt, die den Zunamen Dietrich hat.

Welche Vor- und Zunamen haben die einzelnen Personen?

W(10/12)258 Der Flächeninhalt A der in der Abbildung dargestellten Figur soll berechnet werden. Dabei sind M_1 und M_2 die Mittelpunkte zweier Kreise mit dem Radius a , die sich in B und C schneiden.



W(10/12)259 Beweise, daß von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen

1. die Summe stets durch 3,
2. das Produkt stets durch 6 teilbar ist!

Die vorliegenden Aufgaben zur Vorbereitung der Schulolympiade 1988 stellten folgende Mitglieder der Aufgabenkommission zusammen: Prof. Dr. U. Pirl, OStR Dr. R. Lüders, StR G. Schulze, StR D. Michels, OStR H. Schulze, StR J. Lehmann (siehe Beitrag S. 76).

Junge Mathematiker erlebten Jahrestagung in Rostock

Während der *V. Wissenschaftlichen Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR* in Rostock fand erstmalig gleichzeitig ein Ferienlehrgang Junger Mathematiker statt. An diesem Lehrgang nahmen 41 Schülerinnen und Schüler aus allen Bezirken der Republik teil. Sie hatten sich in den vergangenen Jahren durch hohe Leistungen bei den mathematischen Wettbewerben ausgezeichnet und zum Teil wiederholt Preise errungen. Der Lehrgang sollte den Teilnehmern Gelegenheit geben, einmal die Atmosphäre einer wissenschaftlichen Tagung kennenzulernen. Außerdem sollten sie auf die künftigen Wettbewerbe vorbereitet werden. In enger Zusammenarbeit zwischen der Mathematischen Gesellschaft der DDR und dem Ministerium für Volksbildung wurde den Jugendlichen ein reichhaltiges Programm geboten.

Sie konnten an der feierlichen Eröffnung der Jahrestagung teilnehmen und wurden dort mit viel Beifall begrüßt. Aus dem Veranstaltungsprogramm der Jahrestagung waren außer dem Eröffnungsvortrag (Prof. Dr. U. Pirl: *60 Jahre Theorie der schichten konformen Abbildungen*), ein Vortrag über *logische Schulung im Mathematikunterricht* (Prof. Dr. K. Härtig), der *Hilbert-Vormittag* zum 25. Todestag von David Hilbert (Vortragende: Prof. Dr. H. Grell, Prof. Dr. K. Schröder, Prof. Dr. G. Asser), ein Vortrag *zum 50. Todestag Georg Cantors* (Prof. Dr. K. Härtig) und das Kolloquium über die *Aufgaben der Mathematik bei der Anwendung der elektronischen Datenverarbeitung und der Operationsforschung in der Volkswirtschaft* für die Lehrgangsteilnehmer ausgewählt worden. Diese Veranstaltungen sollten den Jugendlichen vor allem einen Einblick in einige wichtige und interessante Probleme geben. Es war von vornherein klar, daß manches dabei notwendigerweise unverständlich bleiben mußte, da es für einen anderen Hörerkreis gedacht war. Trotzdem haben unsere Jungen Mathematiker, wie Gespräche ergaben, manche Anregung gewonnen, die sich bestimmt günstig auf ihre weitere Beschäftigung mit der Mathematik auswirken wird. Einige spezifisch für den Lehrgang organisierte Veranstaltungen befaßten sich zwar hauptsächlich mit dem Lösen von Wettbewerbsaufgaben aus verschiedenen Disziplinen (z. B. Geometrie, Algebra, Zahlentheorie, Kombinatorik usw.), doch wurde auch dabei stets ein Einblick in die zugehörigen Theorien gegeben. Für diese Veranstaltungen hatten sich mit Prof. Dr. Pirl, Dr. Bausch, Frau Dr. Frank, Dr. Förste und Dr. Zacharias Mathematiker zur Verfügung gestellt, die schon seit vielen Jahren mit großer Aktivität bei der Ausbildung unseres mathematischen Nachwuchses und insbesondere bei den Olympiaden Junger Mathematiker mitwirken.

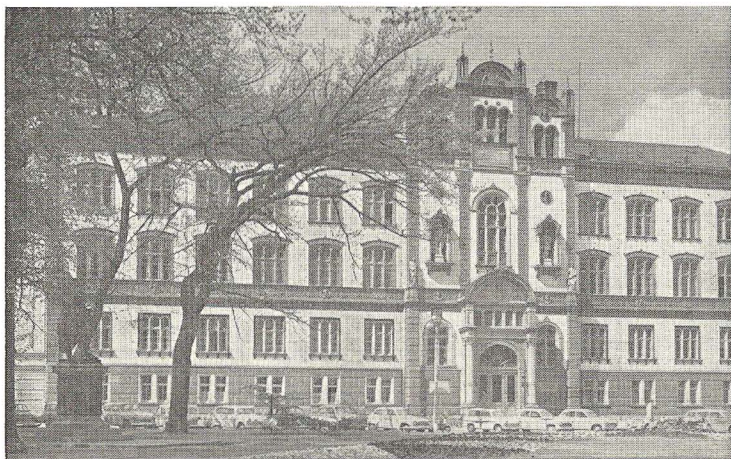
Die Lehrgangsteilnehmer nahmen regen Anteil an wichtigen Ereignissen unseres gesellschaftlichen Lebens. In einem Seminar wurde lebhaft über den Entwurf der neuen sozialistischen Verfassung unserer Republik diskutiert. Den Jugendlichen wurde bewußt, daß die vielfältige Förderung, die ihnen seit Jahren in unserer sozialistischen Republik zuteil wird und zu der auch dieser Ferienlehrgang gehörte, schon ein Stück Verfassungswirklichkeit darstellt. Mit großer Empörung nahmen die Teilnehmer Kenntnis von der von westdeutschen Kreisen angezettelten Provokation gegen unsere Rennrodlerinnen in Grenoble. Ein Protesttelegramm wurde nach Grenoble gesandt und

von einem Mitglied der FDJ-Leitung des Lehrgangs vor der Mitgliederversammlung der Mathematischen Gesellschaft verlesen.

Ein gemeinsamer Theaterbesuch machte unsere Jugendlichen mit dem viel diskutierten Stück von Peter Weiß „Die Ermordung des Jean-Paul Marat“ bekannt. Schließlich erhielten wir die Möglichkeit, die *Warnow-Werft* in Warnemünde zu besichtigen. Besonders Eindruck hinterließ dabei die gewaltige Kabelkrananlage. Zum Abschluß des Lehrgangs wurde dann noch ein Ausflug nach Warnemünde unternommen, der mit einer Rundfahrt durch den Rostocker Überseehafen und einem kleinen Abstecher auf die Ostsee ausklang.

Der Lehrgang hat nach Ansicht aller Teilnehmer und Betreuer die gestellten Ziele erreicht. Von den Jungen Mathematikern wurde der Wunsch geäußert, ähnliche Lehrgänge auch in den nächsten Jahren durchzuführen. Es bleibt uns noch übrig, für die vorbildliche Betreuung allen Beteiligten unseren herzlichen Dank auszusprechen.

H. Titze



Hauptgebäude der Universität Rostock

Vom 12. bis 17. Februar 1968 fand in der Universität Rostock die *V. Wissenschaftliche Jahrestagung der MGdDDR* statt. An dem wissenschaftlichen Programm, das sich aus Übersichtsvorträgen, Kurzvorträgen über spezielle Probleme und öffentlichen Diskussionen über allgemeininteressierende Fragen zusammensetzte, nahmen mehr als 900 Besucher teil. Bei der Zusammenstellung der Übersichtsvorträge wurde berücksichtigt, daß sich die MGdDDR nicht nur die Pflege der traditionellen Gebiete der Mathematik zum Ziele setzt, sondern sich auch mit den Anwendungen befaßt. Dazu gehören Rechentechnik und Datenverarbeitung, Optimierungs- und Programmierungsfragen in der Ökonomie sowie das gesamte Gebiet der Mechanik. Außerdem wurde durch Auswahl einiger allgemeiner Themen an die Interessen der Lehrer gedacht. Die etwa 280 Referate verteilten sich auf die 14 Sektionen Algebra und Zahlentheorie, Algebraische Geometrie, Analysis, Biometrie, Kybernetik, Logik, Mathematische Physik, Mechanik, Numerische Mathematik und Rechentechnik, Strömungslehre, Unterricht und Ausbildung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Wirtschaftsmathematik. Im Frühjahr 1969 findet die *VI. Jahrestagung der MGdDDR* in Magdeburg statt.

Aufgaben der VII. OJM

10 1. Welchen Rest läßt eine natürliche Zahl a bei Division durch 73, wenn die Zahlen $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind?

2. Für einen Körper, der die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche und kongruenten Seitenflächen hat, soll ein quaderförmiger Behälter von möglichst kleinem Volumen angefertigt werden. Der pyramidenförmige Körper soll dabei so hineingelegt werden, daß er entweder mit seiner Grundfläche oder mit einer seiner Seitenflächen eine der Innenflächen des Behälters berührt. Es sei h die Höhe des pyramidenförmigen Körpers und a die Seitenlänge seiner Grundfläche.

Untersuchen Sie, für welche dieser beiden Lagen der Behälter ein geringeres Volumen benötigt! Dabei sind zweckmäßigerweise die Fälle $h \leq \frac{a}{2}$ zu unterscheiden.

3. Beweisen Sie folgende Behauptung: Wenn a, b, c die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind, dann hat die Gleichung $b^2 x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ (1) keine reellen Lösungen.

4. Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Länge seiner Hypotenuse und der Summe der Sinus seiner spitzen Winkel! Welche Werte kann die Sinussumme annehmen?

5. Drei Werkhallen (symbolisiert durch die Punkte W_1, W_2, W_3) eines größeren Betriebes und eine Bahnstation (symbolisiert durch den Punkt B) liegen in einem ebenen Gelände. W_1, W_2, W_3 liegen nicht auf derselben Geraden. Die Werkhallen sind miteinander durch 3 geradlinige Straßen (symbolisiert durch die Strecken $W_1 W_2, W_2 W_3$ und $W_3 W_1$) verbunden. Für die Strecken gilt: $W_2 W_3 < W_3 W_1 < W_1 W_2$. Die Bahnstation hat von den 3 Straßen gleichen Abstand. Sie ist ferner durch geradlinige Zubringerstraßen (symbolisiert durch die Strecken BW_1, BW_2 und BW_3) mit den drei Werkhallen verbunden. Ein Autobus soll von der Bahnstation aus erst zu allen drei Werkhallen fahren und dann zur Bahnstation zurückkehren, wobei er ausschließlich die oben angegebenen Wege benutzen kann.

Ermitteln Sie unter diesen Bedingungen die kürzeste Fahrroute für den Bus!

6. Man gebe alle reellen x an, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

11/12 1. Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4) , für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$x_1 + a x_2 + x_3 = b \quad (1)$$

$$x_2 + a x_3 + x_4 = b \quad (2)$$

$$x_3 + a x_1 + x_1 = b \quad (3)$$

$$x_1 + a x_1 + x_2 = b \quad (4)$$

Dabei sind a und b reelle Zahlen (Fallunterscheidung!).

2. Welche von allen Ebenen, die eine und dieselbe Körperdiagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a enthalten, schneiden aus dem Würfel eine Schnittfigur kleinsten Flächeninhaltes heraus? Berechnen Sie den Flächeninhalt solch einer Schnittfigur!

3. Geben Sie alle Funktionen $y = f(x)$ an, die jeweils in größtmöglichem Definitionsbereich (innerhalb des Bereichs der reellen Zahlen) der Gleichung

$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = b x$$

genügen, wobei b eine beliebige reelle Zahl, n eine beliebige ungerade natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $|a| \neq 1$ ist!

4. Sechzehn im Dezimalsystem geschriebene natürliche Zahlen mögen eine geometrische Folge bilden, von der die ersten fünf Glieder neunstellig, fünf weitere Glieder zehnstellig, vier Glieder elfstellig und zwei Glieder zwölfstellig sind.

Man beweise, daß es genau eine Folge mit diesen Eigenschaften gibt!

5. Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ die Ungleichung

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x > 0$$

erfüllt ist.

6. Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Ein Dreieck ist genau dann gleichschenkelig, wenn mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleichlang sind.

VII. OJM

Vom 15. bis 19. April 1968 fand in der Jugendhochschule „Wilhelm Pieck“ in Berlin-Bogensee die DDR-Stufe der VII. OJM statt. An ihr nahmen 192 Jungen und 19 Mädchen aus Oberschulen, erweiterten Oberschulen und Berufsschulen teil. Rund 100 Wissenschaftler, Lehrer und Mathematikstudenten waren als Koordinatoren, Korrektoren, Leitungsglieder, Delegationsleiter oder Betreuer tätig.

Preisträger der VII. OJM

Erste Preise

wurden vergeben an:

Gudrun Fröbel
Spezialschule VEB C. Zeiss, Jena,
(Olympiadeklasse 10),
Schülerin einer 9. Klasse

Wolfgang Burmeister
EOS Dresden-Süd,
(Olympiadeklasse 11),
Schüler einer 9. Klasse

Ulrich Zähle
Arbeiter- und Bauernfakultät
Halle, (Olympiadeklasse 12)



Zweite Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Gerhard Noack, OS Kolkwitz (Bez. Cottbus); Wolfgang Birken, EOS „Friedrich Engels“, Neubrandenburg (aus Kl. 9); Klaus Bernhard, EOS „Otto v. Guericke“, Magdeburg; Peter Oswald, EOS Dresden-Süd; Rainer Nitsche, EOS „Ernst Heckel“, Merseburg; Werner Ley, EOS „Georg Agricola“, Glauchau; Siegfried Krüger, OS Werbelow (Bez. Neubrandenburg).

In Olympiadeklasse 11 an: Jürgen Bechstein, Goethe-EOS, Ilmenau; Stefan Heinrich, Spezialklasse Humboldt-Universität zu Berlin; Bernd Martin, Spezialklasse EOS „H. Hertz“, Berlin; Jürgen Gärtner BBS Rafena-Werke, Radeberg (Bez. Dresden).

In Olympiadeklasse 12 an: Hans-Görg Roos, Spezialklasse TH Magdeburg; Bernd Goldschmidt, Spezialklasse M.-Luther-Univ.-Halle.

Dritte Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Jürgen Scheffer, OS Liebenwerda (aus Kl. 8); Roland Spannaus, 66. OS Dresden; Ludwig Hoy, EOS „Prof. Dr. Max Schneider“, Lichtenstein; Achim Nötzold, Artur-Becker-Schule Leuterbach; (Bezirk K.-M.-St.) Traugott Schulmeiß, EOS Köthen; Dietrich Neukirchner, EOS „Bertolt Brecht“, Schwarzenberg; Udo Waltenberger, EOS Pöbnek; Hannes Handorf, Goethe-EOS, Schwerin; Joachim Voigt, (aus Kl. 9); Tord Riemann, beide Spezialklasse EOS „H. Hertz“ Berlin; Norbert Boy, Kaufm. BS Demmin.

In Olympiadeklasse 11 an: Klaus-Detlef Kürsten, ABF Halle; Konrad Paßkönig, EOS Lauchhammer; Andreas Felgenhauer, EOS Zerbst (aus Kl. 10); Gottfried Jetschke, EOS „Prof. Dr. Max Schneider“, Lichtenstein.

In Olympiadeklasse 12 an: Christoph Bandt, EOS Greifswald; Joachim Fritz, EOS Cottbus; Alexander Neumann, EOS „Romain Rolland“, Dresden; Hans-Georg Witt, EOS Greifswald; Uwe Köhler, Spezialkl. TH Karl-Marx-Stadt; Lutz Höne, BBS Weimar-Werk.

Diplome für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe erhielten: Ingrid Schiemann, EOS Cottbus; Hans-Görg Roos, Spezialklasse TH Magdeburg.

Anerkennungsurkunden für sehr gute Leistungen erhielten: Klasse 10 — Christoph Kreher, ZOS Beutha; Volkmar Olbrich, EOS „Otto v. Guericke“, Magdeburg; Martin Horatschek, EOS „Thomas Müntzer“, Halle; Ulrich Semmler, EOS „Friedrich Engels“, Karl-Marx-Stadt; Heidi Sieler, EOS Hermsdorf; Wolfgang Weise, EOS „Ernst Schneller“, Burgstädt; Ludwig Paditz, EOS „Ernst Schneller“, Meißen; Detlev Schultz, EOS „Kopernikus“, Neubrandenburg; Martin Pusack, EOS Demmin (aus Kl. 9); Hans-Gerd Leopold, EOS „J. R. Becher“, Jena; Klaus Bothe, EOS „H. Hertz“, Berlin; Renate Uhlmann, BBS TPW Thalheim; Renate Messerschmidt, Allg. BS Staßfurt; — Kl. 11 — Klaus Neumann, EOS „Ernst Schneller“, Meißen; Ulrich Imme, EOS Ilmenau; Eberhard Schmidt, ABF Halle; Joachim Loose, EOS Kleinmachnow; Eberhard Richter, EOS Schleusingen; Veronika Eberhardt, EOS „Ernst Abbe“, Erfurt; Johann-Peter Sommer, Goethe-EOS Ilmenau; Manfred Krzikalla, Spezialschule Frankfurt/O. (aus Kl. 10); Hermann Haase, EOS „Friedrich Engels“, Neubrandenburg (aus Kl. 9); Thomas Schulmeister, EOS „H. Hertz“, Berlin; Ingolf Slota, EOS „H. Hertz“, Berlin; Heinrich Herzog, BBS BMK Erfurt; Jürgen Vogel, BBS Elbtalwerk Dresden — Klasse 12 — Ludwig Arent, EOS „Friedrich Engels“, Neubrandenburg; Gerd Franke, EOS „Artur Becker“, Suhl; Fred Nowack, Humboldt-EOS, Erfurt; Gerhard Walter, EOS Meinungen; Klaus Haberland, ABF Halle; Bernd Dörfel, ABF Halle; Wolfgang Kleinig, ABF Halle; Gerhard Schmidt, EOS „Helmholtz“, Leipzig; Wilfried Dames EOS „H. Hertz“, Berlin; Peter Türk, BBS TRO, Berlin.

Wir lösen ein Zahlenrätsel

$$\begin{array}{r}
 \square\square\square\square : \square\square = \square\square \\
 - \quad \quad \quad \times \quad \quad \quad + \\
 \square\square\square + \square\square = \square\square\square \\
 \hline
 \square\square\square - \square\square\square = \square\square\square
 \end{array}$$

In den meisten Illustrierten finden wir in den Rätselleken neben Kreuzwort- und Silbenrätseln mitunter auch Zahlenrätsel abgedruckt. Eine Umfrage bei Schülern ergab, daß sich die meisten der Befragten nicht so recht an die Lösung eines Zahlenrätsels heranwagen, weil sie oft nicht wissen, wie sie systematisch vorgehen haben, um zum Ziel zu gelangen. Wir wollen uns einige einfache Zahlenrätsel anschauen und gemeinsam versuchen, sie zu lösen. Betrachten wir ein erstes Beispiel.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\
 \quad \quad \quad : \quad \quad \quad - \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Jedes Kästchen bedeutet eine Ziffer, gleich markierte Kästchen immer gleiche Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind Zahlen zu finden, die die waagerechten und die senkrechten Rechenaufgaben richtig lösen.

Wir wollen aus drucktechnischen Gründen die Kästchen durch kleine Buchstaben ersetzen. Wir schaffen uns ferner einen Rahmen, indem wir die Spalten mit *A*, *B* und *C* und die Zeilen mit I, II und III bezeichnen. Unsere Aufgabe erhält dann die folgende Form:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
I	<i>abc</i>	<i>— dd</i>	<i>= aef</i>
	:	<i>—</i>	<i>—</i>
II	<i>f</i>	<i>· ab</i>	<i>= ge</i>
III	<i>cf</i>	<i>+ fc</i>	<i>= efa</i>

Nun haben wir folgendes zu beachten:

1. *abc* bedeutet in diesem Fall eine dreistellige natürliche Zahl; *a* ist die Ziffer an der Hundertstelle, *b* die Ziffer an der Zehnerstelle und *c* die Ziffer an der Einerstelle. Entsprechendes gilt für die anderen verwendeten Symbole.

2. Für *a* könnte eine der Ziffern von 1 bis 9 stehen; die Ziffer 0 scheidet aus, da wir in diesem Fall keine dreistellige natürliche Zahl erhalten.

3. In unserem Rahmen sind genau sechs Aufgaben enthalten; wir wollen sie nochmals getrennt aufschreiben:

A) $abc : f = cf$; I) $abc - dd = aef$;
 B) $dd - ab = fc$; II) $f \cdot ab = ge$;
 C) $aef - ge = efa$; III) $cf + fc = efa$.

Bevor wir versuchen, durch systematisches Probieren und unter Nutzung unserer Kenntnisse über das Rechnen mit natürlichen Zahlen recht schnell zur Lösung dieser Aufgabe zu kommen, seien zunächst einige Hinweise gegeben. Es gibt bei solchen Zahlenrätseln oft einige sogenannte „Schlüsselzahlen“; das sind zum Beispiel die Ziffern 0, 1 und 9. Wir konzentrieren uns zunächst darauf, diese Schlüsselzahlen herauszufinden:

Wenn in einer Aufgabe der Minuend und der Subtrahend auf die gleiche Ziffer enden, so muß die Differenz auf die Ziffer 0 enden. Aus $gd - ad = fh$ folgt $h = 0$.

Bei der Addition zweier zweistelliger Zahlen kann höchstens ein Hunderter entstehen. Aus $ad + fg = cib$ folgt $c = 1$. Wird zu einer dreistelligen Zahl eine zweistellige addiert, erhöht sich der Hunderter — wenn überhaupt — höchstens um 1.

Aus $abc + de = cfg$ folgt $c = a + 1$.

Aus $gad + bc = gaf$ folgt $b = 9$ und

$d + c \geq 10$.

Nach diesen kurzen Hinweisen wollen wir nun unsere erste Aufgabe lösen.

Aus Aufgabe III) erkennen wir folgendes:

Es sollen zwei zweistellige Zahlen addiert werden; die Summe ist eine dreistellige Zahl. Die Ziffer an der Hundertstelle der Summe muß eine 1 sein, denn $99 + 99 = 198 < 200$. Also ist $e = 1$.

Aus Aufgabe C) können wir folgendes ablesen:

$$afe - ge = efa \text{ oder } efa + ge = afe;$$

für $e = 1$ erhalten wir dann $1fa + g1 = af1$.

Zu einer dreistelligen Zahl ist eine zweistellige Zahl zu addieren. Die Ziffer der Hundertersstelle der Summe ist verschieden von e , also ungleich 1; sie kann aber nur um 1 größer sein, als die Ziffer der Hundertersstelle des ersten Summanden $1/a$.

Also ist $a = 2$.

Aus Aufgabe C) erkennen wir weiterhin folgendes:

$ae f - ge = efa$ wird für $e = 1$ und $a = 2$ zu $2ef - g1 = efa$; aus $f - 1 = 2$ folgt $f = 3$.

Setzen wir in Aufgabe C) für f nun die Ziffer 3 ein, so erhalten wir $213 - g1 = 132$; daraus folgt dann $g = 8$.

Aufgabe II) lautet nun unter Verwendung der bereits gefundenen Ziffern $3 \cdot 2b = 81$, also gilt $b = 7$.

Nun lösen wir Aufgabe III);

aus $c3 + 3c = 132$ folgt $c = 9$.

Aus Aufgabe B) finden wir schließlich $d = 6$; denn er gilt $dd - 27 = 39$ oder $dd = 39 + 27 = 66$.

Wir notieren nochmals die vollständige Lösung der Aufgabe; überzeugt euch durch Proben von der Richtigkeit unserer Lösung.

$$\begin{array}{r} 279 - 66 = 213 \\ : \quad - \quad - \\ 3 \cdot 27 = 81 \\ \hline 93 + 39 = 132 \end{array}$$

Vor dem Lösen einer ähnlichen Aufgabe ist es zweckmäßig, neben das durch Kästchen oder Buchstaben gegebene Zahlenrätsel ein „Leerschema“ zu notieren. Dort wird dann jede gefundene Ziffer sofort eingetragen, und wir behalten besser die Übersicht. Das „Leerschema“ für die gemeinsam gelöste Aufgabe könnte wie folgt aussehen:

$$\begin{array}{r} \square \square \square - \square \square = \square \square \square \\ : \quad - \quad - \\ \square \cdot \square \square = \square \square \\ \hline \square \square + \square \square = \square \square \square \end{array}$$

Beim Lösen eines zweiten Zahlenrätsels können wir uns sicher schon kürzer fassen, da ihr aufmerksam mitgearbeitet habt und jetzt schon „alte Hasen“ seid.

	A	B	C
I	$abc - bc = aee$		
	:	+	-
II	$b \cdot fc = fgg$		
III	$gg + ffh = fic$		

Aus Zeile I folgt: $e = 0$.

Aus Spalte B folgt: $f = 1$.

Aus Spalte C folgt: $a = 3$.

Aus Spalte B folgt: $b = 9$.

Aus Spalte A folgt: $g = 4$.

Aus Spalte C folgt: $i = 5$ und $c = 6$.

Aus Spalte B folgt: $h = 2$.

Lösung: $396 - 96 = 300$

$$\begin{array}{r} : \quad + \quad - \\ 9 \cdot 16 = 144 \\ \hline 44 + 112 = 156 \end{array}$$

Th. Scholl

In diesem Beitrag wurden zwei Aufgaben aus dem Artikel Zahlenrätsel und Zahlenkongruenzen von E. Walter, Greifswald, aus „Informationen für die Arbeitsgemeinschaften und Kurse der DDR“, Nr. 2 — 1963 entnommen.

Aufgaben

Zum Abschluß wollen wir euch zwei Zahlenrätsel aufgeben, an denen ihr eure Kräfte selbst messen könnt. Die Lösungen veröffentlichen wir in der nächsten Ausgabe unserer Zeitschrift.

$$\begin{array}{r} 228 \quad aba - cd = efa \\ : \quad + \quad - \\ \hline ea \cdot c = fg \\ ae + cc = hf \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 229 \quad abb - ccd = eae \\ : \quad + \quad - \\ \hline ce \cdot ca = cfd \\ eb + cdg = cgc \end{array}$$

Wir hoffen, daß euch das Lösen der Zahlenrätsel Spaß gemacht hat und ihr künftig selbständig ähnliche Aufgaben aus Illustrierten zu lösen versucht.



H. F. Schmidt

Kein Ärger mit der Algebra

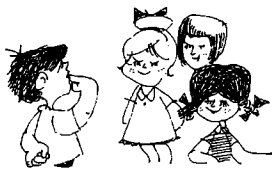
Mathematische Schülerbücherei, Band 35
127 Seiten, 35 Abbildungen
Einband: Halbleinen mit Folie, 5,20 M
Kinderbuchverlag, Berlin 1968

Zwei Freunde, die sich für technische Probleme interessieren, wollen eine Wasseruhr bauen. Sehr bald merken sie, daß sie dabei ohne ein Mindestmaß mathematischer Berechnungen nicht auskommen. Sie müssen sich mit den Grundlagen der Gleichungslehre auseinandersetzen. Dabei entdecken sie, daß die Mathematik Bedeutung für alle Bereiche des Lebens besitzt.

Dieses unterhaltsame mathematische Kinderbuch, geeignet ab Klasse 7, empfehlen wir unseren Lesern, die Redaktion.

Eine Knobelgeschichte

1. Teil



In einem Zirkel Junger Mathematiker wird u. a. die folgende Knobelaufgabe behandelt:

- Drei Mädchen mit den Vornamen **Annette**, **Beate** und **Christa** haben die Zunamen *Schwarz*, *Unsinn* und *Weiß*. Nur die drei Mädchen wissen voneinander, welchen Zunamen jede einzelne von ihnen trägt.
- Sie beantworten, wenn sie mit ihren Vornamen angesprochen werden, bereitwillig Fragen, wobei *Weiß* stets die Wahrheit sagt, *Schwarz* stets lügt und *Unsinn* sich bei jeder Frage aussucht, ob sie wahrheitsgemäß oder falsch antwortet.
- Ein Junge, der feststellen will, welche Vor- und Zunamen bei diesen drei Mädchen zusammengehören, richtet an sie die beiden folgenden Fragen und erhält die angegebenen Antworten:



Erste Frage,	A	B	C
gerichtet an Annette: „Wie heißt Beate mit Nachnamen?“	Antwort von Annette: „Weiß.“		

Zweite Frage, gerichtet an Beate: „Welchen Nachnamen trägst du?“	Antwort von Beate: „Unsinn.“
--	---------------------------------

- d) Mit welcher weiteren Frage und deren Beantwortung kann der Junge die Nachnamen der drei Mädchen ihren Personen zuordnen?

In kurzer Zeit ist diese Knobelaufgabe gelöst. Mit der Bemerkung, daß die Mädchen dem Jungen ungeschickt geantwortet hätten, stellt der Zirkelleiter die folgende Hausaufgabe:

a') wie a b') wie b c')

Als an die Mädchen zu richtende Fragen sind nur Fragen der folgenden beiden Typen zugelassen:

Typ 1: Frage an X: „Welchen Nachnamen trägst du?“

Typ 2: Frage an X: „Welchen Nachnamen trägt Y?“

Dabei sind jeweils für X und Y die Vornamen Annette, Beate und Christa einzusetzen, jedoch darf für X und Y nie der gleiche Vorname eingesetzt werden.

d') Wie müssen Annette, Beate und Christa antworten, um ihre Zunamen nicht zu verraten? (Es genügt die Angabe eines Antwortschemas.)

Die Antwort erfahrt ihr, liebe Leser, im 2. Teil, Heft 4/68!

W. Träger

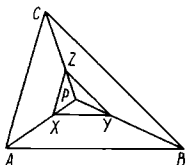
Lösungen

Fortsetzung: Als Mathematiklehrer in Tansania (6/67)

7b. $\triangle ABQ \sim \triangle BQP$; beide Dreiecke sind rechtwinklig, und sie haben den Winkel $\angle AQB$ gemeinsam. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt $\overline{AQ} : \overline{BQ} = \overline{BQ} : \overline{QP}$. Aus $\overline{BQ} = 3$ cm und $\overline{QP} = 1$ cm folgt dann $\overline{AQ} = 9$ cm, also $\overline{AP} = 8$ cm. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{AB}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{BQ}^2$, also $\overline{AB} = \sqrt{81 - 9}$ cm = $\sqrt{72}$ cm = $6\sqrt{2}$ cm $\approx 8,49$ cm.

8. Konstruktion des Dreiecks:

Es ist die Strecke $c = 6$ cm von A bis B zu zeichnen; im Punkt A ist der Winkel $\alpha = 48^\circ$ an \overline{AB} , im Punkte B der Winkel $\beta = 56^\circ$ an \overline{BA} anzutragen; die freien Schenkel der angelegten Winkel schneiden sich im Punkte C bzw. C' . Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABC'$ sind kongruent. Wir beschränken uns deshalb nur auf das Dreieck $\triangle ABC$.



Fortführung der Aufgabe: Im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$ legen wir einen Punkt P fest und verbinden ihn mit den Eckpunkten des konstruierten Dreiecks. Danach dritteln wir die Strecken \overline{AP} , \overline{BP} und \overline{CP} ; die Teilungspunkte seien in dieser Reihenfolge die Punkte X , Y und Z . Verbinden wir nacheinander die Punkte X , Y und Z , so erhalten wir das Dreieck $\triangle XYZ$. Es gelten folgende Proportionen auf Grund der durchgeführten Konstruktion:

$$\overline{PX} : \overline{PA} = \overline{XY} : \overline{AB} = 1 : 3,$$

$$\overline{PY} : \overline{PB} = \overline{YZ} : \overline{BC} = 1 : 3,$$

$$\overline{PZ} : \overline{PC} = \overline{XZ} : \overline{AC} = 1 : 3.$$

Folglich sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle XYZ$ einander ähnlich. Ähnliche Dreiecke besitzen aber einander entsprechende kongruente Winkel.

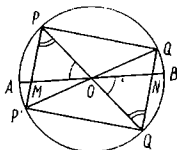
9. Das Polynom $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b$ ist sowohl durch $x - 2$ als auch durch $x + 1$ teilbar. Daraus folgt $f(2) = 0$ und $f(-1) = 0$, also

$$f(2) = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 2a + b = 0, \text{ d. h.,} \\ 2a + b = 4, f(-1) = -2 - 5 - a + b = 0, \\ \text{d. h., } a - b = -7.$$

Daraus ergibt sich

$$3a = -3, \text{ also } a = -1 \text{ und } b = 6.$$

10. Es seien P' bzw. Q' die zweiten Schnittpunkte der Geraden \overline{PM} bzw. \overline{QN} mit dem Kreis. Dann liegen die Punkte P, O und Q' auf einer Geraden und ebenfalls die Punkte Q, O und P' auf einer Geraden weil $\sphericalangle Q'QP' = \sphericalangle QPP' = 90^\circ$ ist.



Aus $\overline{OP} = \overline{OQ'}$, $\sphericalangle MOP = \sphericalangle NOQ'$,

$\sphericalangle OPM = \sphericalangle OQ'N$ folgt dann

$\triangle OPM \cong \triangle OQ'N$, also $\overline{OM} = \overline{ON}$, w. z. b. w.

11. Die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien $n - 1, n, n + 1$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$(n - 1 + n + n + 1)^2 = (n - 1)^2 + n^2 \\ + (n + 1)^2 + 484, \\ 9n^2 = n^2 - 2n + 1 \\ + n^2 + n^2 + 2n + 1 + 484, \\ 6n^2 = 486, \\ n^2 = 81.$$

Daraus folgt, da n eine natürliche Zahl ist, $n = 9$. Die gesuchten Zahlen sind daher 8, 9 und 10.

Tatsächlich erhält man

$$(8 + 9 + 10)^2 = 27^2 = 729, \\ 8^2 + 9^2 + 10^2 = 245 \text{ und} \\ 729 = 245 + 484.$$

12. Eintafelprojektion (Auf die Zeichnung wird aus Platzgründen verzichtet, d. Red.) 167b Da die Bedingung (1) für die quadratische Form $E x^2 + 2F x y + G y^2$ nicht erfüllt ist, gilt $4F^2 - 4EG < 0$, also

$$EG - F^2 > 0. \quad (3)$$

Insbesondere ist stets $E \neq 0$. Die Diskriminanten der beiden anderen quadratischen Formen stimmen überein, wie man durch Ausmultiplizieren bestätigt. Wir betrachten die Diskriminante

$D = (EN - GL)^2 - 4(EM - FL)(FN - GM)$ der zweiten quadratischen Form. Im Falle $F = 0$ ist

$$D = (EN - GL)^2 + 4EGM^2.$$

Wegen (3) ist $EG > 0$ und folglich ist stets $D \geq 0$. Im Falle $F \neq 0$ setzen wir

$$M' = M - \frac{FL}{E} \text{ und erhalten}$$

$$D = (EN - GL)^2 \\ - 4EM' \left(FN - G \left(M' + \frac{FL}{E} \right) \right).$$

$$= (EN - GL)^2 - 4EM'FN + 4EGM'^2 + 4GFLM'$$

Um die Bedingung (3) verwenden zu können, addieren und subtrahieren wir $4F^2M'^2$.

$$D = (EN - GL)^2 - 4(EN - GL)FM' + 4F^2M'^2 + 4(EG - F^2)M'^2 = (EN - GL - 2FM')^2 + 4(EG - F^2)M'^2$$

Jetzt erkennen wir wieder, daß die rechte Seite nichtnegativ ist, und die Behauptung ist bewiesen.

168 Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. W. Renneberg

a) Relativgeschwindigkeit $v_r = v_2 - v_1$;

$$t = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{v_r}$$

b) Weg von W_1 $s_1 = t v_1$,

Weg von W_2 $s_2 = t v_2$; $l \approx s_2$.

c) l hängt nur von der Geschwindigkeitsdifferenz v_r ab, l von der Geschwindigkeit v_2 und von v_r .

d) $l_{\min} = t v_2 + l$.

e) (1) t wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$, l wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$.

l_{\min} wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$.

(2) t wird $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$, l wird $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$.

l_{\min} wird $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$.

Angenommen $v_2' = n v_2$ ($n > 1$). Dann ist

$$t' = \frac{e}{n v_2' - v_1} = \frac{e}{n v_2 - v_1} (e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4).$$

$$l' = \frac{n v_2 e}{n v_2 - v_1} = \frac{v_2 e}{v_2 - \frac{v_1}{n}} < \frac{v_2 e}{v_2 - v_1} = l$$

(3) t und l bleiben unverändert,

l_{\min} wird $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$.

Zahlenfälle:

f) (1) $t = \frac{0,050}{10} \text{ h} = 0,005 \text{ h} = 18 \text{ s}$

(2) $l = \frac{18}{3600} \cdot 50 \text{ km} = 0,250 \text{ km}$

g) (1) $t = \frac{0,100}{20} \text{ h} = 0,005 \text{ h} = 18 \text{ s}$

(2) $l = \frac{18}{3600} \cdot 80 \text{ km} = 0,400 \text{ km}$

(3) $l_{\min} = \frac{18}{3600} \cdot 70 \text{ km} + 0,400 \text{ km} = 0,350 \text{ km} + 0,400 \text{ km} = 0,750 \text{ km}$

h) (1) $t = \frac{0,100}{10} \text{ h} = 0,010 \text{ h} = 36 \text{ s}$

(2) $l = \frac{36}{3600} \cdot 75 \text{ km} = 0,750 \text{ km}$

(3) $l_{\min} = \frac{36}{3600} \cdot 70 \text{ km} + 0,750 \text{ km} = 0,700 \text{ km} + 0,750 \text{ km} = 1,450 \text{ km}; 1,450 \text{ km} > 1 \text{ km}.$

i) Der „Wartburg“ darf nicht überholen.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb 1/68

169 Aus $235 - 185 = 50$ und $50 : 2 = 25$ folgt, daß die Tasche 25 M und die Kamera 210 M kostet, denn $25 + 185 = 210$.

170 $21 \cdot 12 \cdot 25 = 21 \cdot (3 \cdot 4) \cdot 25 = (21 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 25) = 63 \cdot 100 = 6300$.

171 Aus $2550 : 3 = 850$ und $2125 : 5 = 425$ und $850 : 425 = 2$ folgt, daß die Geschwindigkeit des Düsenflugzeuges doppelt so groß wie die des Propellerflugzeuges ist.

W(5)172 Aus $20 \cdot 10 = 200$ und $200 : (20 - 15) = 200 : 5 = 40$ folgt, daß jedes Klassenzimmer mit 40 Stühlen ausgestattet ist. Aus $20 \cdot 40 + 60 = 860$ folgt, daß die Schule 860 Stühle besitzt.

W(5)173 Aus $1200 : 12 = 100$ und $1200 : 20 = 60$ und $1200 : 30 = 40$ folgt, daß die erste Buchbinderei täglich 100, die zweite 60 und die dritte 40 Bücher einbinden kann. Aus $1200 : (100 + 60 + 40) = 6$ folgt, daß der Auftrag von den drei Werkstätten gemeinsam in sechs Tagen ausgeführt werden kann.

174 Die kleinste natürliche Zahl, die durch die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 teilbar ist, ist das k. g. V. dieser Zahlen, die Zahl 60. Alle Vielfachen der Zahl 60 sind zugleich Vielfache der Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6. Die Vielfachen von 60 haben die Form $60 \cdot n$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$. Addieren wir zu diesen Vielfachen die Zahl 1, so lassen sie bei Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils den Rest 1. Diese Zahlen haben dann die Form $60 \cdot n + 1$ für $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Die kleinste dieser Zahlen, die durch 7 teilbar ist, ist die Zahl 301. Addiert man zu 301 Vielfache von 420 (k. g. V. der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 und 7), so erhält man weitere Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen. Solche Zahlen sind z. B.: 721, 1141, 1561, usw.

175 Zwischen zwei benachbarten Zahlen der Zehnerfolge 10, 20, 30, ... liegen jeweils neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, vier

davon sind gerade, fünf ungerade Zahlen. Die geraden Zahlen sind durch 2 teilbar, also, da sie größer als 2 sind, keine Primzahlen. Unter den ungeraden Zahlen endet eine auf die Ziffer 5. Diese Zahl ist durch 5 teilbar, also, da sie größer als 5 ist, ist sie ebenfalls keine Primzahl. Folglich können zwischen zwei benachbarten Zahlen der Zehnerfolge höchstens 4 Primzahlen auftreten.

176 Alle Zahlen, die die Preise der einzelnen Rechnungsposten ausdrücken, sind stets durch 3 teilbar; deshalb muß die Zahl, die den Gesamtpreis angibt, durch 3 teilbar sein. Das trifft für den Preis von 230 Pf (Quersumme 5) nicht zu, also muß dem Verkäufer ein Rechenfehler unterlaufen sein.

W(6)177 Es gilt der Satz: Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist stets größer als die dritte Seite. Aus $a + b = 8$ folgt $c < 8$; der Umfang $a + b + c = 8 + c$ soll durch 3 teilbar sein, das trifft zu für $c = 7$, $c = 4$. Für $c = 1$ wäre $b + c < a$ ($3 + 1 < 5$), was nicht möglich ist. Es gibt genau zwei Dreiecke, die den gestellten Bedingungen genügen:

a	b	c	U
5 cm	3 cm	7 cm	15 cm
5 cm	3 cm	4 cm	12 cm

W(6)178 Wir bezeichnen die Maßzahlen der Sprunghöhen der Schüler durch den Anfangsbuchstaben ihres Vornamens; dann gilt:

- a) $J > G$, b) $H + U = J + G$,
c) $U + G > H + J$.

Aus b) und c) folgt $G > H$, also $J > G > H$. Da von diesen drei Jungen Heinz die kleinste Sprunghöhe erzielte, muß Uwe die größte Höhe erreicht haben; im anderen Fall würde die Gleichung b) nicht erfüllt werden. Es gilt also $H < G < J < U$. Heinz erzielte die kleinste Sprunghöhe, ihm folgen mit zunehmenden Sprunghöhen Gerd, Jochen, Uwe.

179 Nehmen wir an, der Vater sei x Jahre alt, dann gilt:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 &= 134, \\ \frac{7}{4}x &= 133, \\ x &= 76. \end{aligned}$$

Der Vater ist also 76 Jahre alt. ($76 + 38 + 19 + 1 = 134$)

180 Nehmen wir an, die ursprünglich vorgesehene Zeit zur Fertigung eines Werkstückes betrage x Minuten; dann gilt:

$$10x = 12(x - 2), \text{ also } x = 12.$$

Es war die Zeit von 12 Minuten zur Herstellung eines Werkstückes geplant worden.

181 Bezeichnet man die erste der drei Zahlen mit x , so ist die zweite gleich $x + 9$ und die dritte gleich $x - 19$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} x + (x + 9) + (x - 19) &= 185, \\ 3x &= 195, \\ x &= 65. \end{aligned}$$

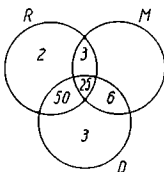
Die erste Zahl ist also 65, die zweite 74, die dritte 46; ihre Summe beträgt 185.

W(7)182 Es sei $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck, und es seien $\overline{BE} = \overline{CE} = \frac{a}{2}$, $\overline{CD} = h_c$, $\overline{AE} = s_a$. Da zwei Seiten und der rechte Winkel gegeben sind, ist das Teildreieck CDE konstruierbar. Danach läßt sich wegen $\overline{AE} = s_a$ auch der Punkt A konstruieren. Man zeichnet zunächst die Strecke $\overline{CD} = h_c$ und errichtet auf ihr in D die Senkrechte. Der Kreis um C mit dem Radius a schneidet diese Senkrechte in den Punkten B und B' . Man halbiert die Strecken CB bzw. CB' und erhält die Mittelpunkte E bzw. E' . Dann schlägt man um E bzw. E' den Kreis mit dem Radius s_a , der die Gerade DB in A_1 und A_2 bzw. in A_3 und A_4 schneidet. Die Dreiecke A_1BC , A_2BC , $A_3B'C$, $A_4B'C$ sind die gesuchten Dreiecke, jedoch nur, wenn die Punkte A_1 , B , C usw. im positiven Sinne durchlaufen werden. Das Dreieck ist konstruierbar, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$h_c \leq a; \quad \frac{1}{2} h_c \leq s_a.$$

In den Fällen $h_c = a$ bzw. $\frac{1}{2} h_c = s_a$ erhält man jeweils nur einen Schnittpunkt; für $h_c = a$ wird das Dreieck rechtwinklig.

183 Wir wollen die Lösung mit Hilfe eines Diagramms erläutern. Der Kreis R umfasse alle Schüler, die ihre Leistungen im Fach



Russisch verbesserten; der Kreis M enthalte alle diejenigen, die im Fach Mathematik bessere Noten erzielten; das Gleiche gilt für den Kreis D bezogen auf das Fach Deutsch. Genau 94 Schüler konnten ihre Leistungen verbessern.

Aus $94 - (25 + 50 + 6 + 3 + 3 + 2) = 94 - 89 = 5$ folgt, daß genau 5 Schüler nur im Fach Mathematik eine Leistungssteigerung erreichten. Ferner folgt aus $25 + 6 + 3 + 5 = 39$, daß insgesamt 39 Schüler im Fach Mathematik eine bessere Note erhielten.

184 Man erhält

$$a = 1 \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdots \frac{99}{99} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{100}$$

$$b = 1 \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{7}{7} \cdots \frac{99}{99} \cdot \frac{1}{101} = \frac{1}{101}$$

Ferner gilt

$$a - b = \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = \frac{101 - 100}{100 \cdot 101} \\ = \frac{1}{100 \cdot 101} = \frac{1}{10100};$$

daher ist $a > b$.

185 Die Entfernung vom Ort A bis zum Treffpunkt sei gleich x km. Dann beträgt die Entfernung von Ort B bis zum Treffpunkt $\frac{7}{5}x$ km, und es gilt

$$x + \frac{7}{5}x = 36, \\ \frac{12}{5}x = 36, \\ x = 15.$$

Die Entfernung des Treffpunktes vom dem Ort A beträgt also 15 km.

W(8)186 Angenommen, es befanden sich in dem Magen des Huhns x 10-Pfennigstücke und y 5-Pfennigstücke, dann befanden sich dort $z = 17 - x - y$ 1-Pfennigstücke. Wir erhalten die Gleichung:

$$10x + 5y + 1 \cdot (17 - x - y) = 34, \\ 9x + 4y = 17.$$

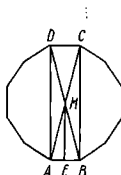
Daraus folgt, weil 17 nicht durch 4 teilbar ist, $x > 0$ und ferner $x < 2$. Daher ist

$$x = 1 \text{ und} \\ 9 + 4y = 17 \\ 4y = 8, y = 2. \text{ Endlich erhält man} \\ z = 17 - x - y = 17 - 1 - 2 = 14.$$

Im Magen des Huhnes befanden sich also ein 10-Pfennigstück, zwei 5-Pfennigstücke und vierzehn 1-Pfennigstücke.

W(8)187 Es sei A der Flächeninhalt des Zwölfecks. Ferner sei M der Mittelpunkt des Umkreises des Zwölfecks. Dann ist der Flä-

cheninhalt I des Dreiecks MAB gleich $\frac{A}{12}$; denn wir können das Zwölfeck in 12 einander kongruente Dreiecke zerlegen, die ihre Spitze in M haben. Nun gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$



$$F = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot 2\overline{ME} = 4 \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{ME}}{2} \\ = 4I = 4 \cdot \frac{A}{12} = \frac{A}{3};$$

der Flächeninhalt der mittleren Teilfigur (des Rechtecks $ABCD$) ist also weder größer noch kleiner als der Flächeninhalt einer der beiden äußeren Teilfiguren. Alle drei Teilfiguren haben den gleichen Flächeninhalt, nämlich $\frac{A}{3}$.

188 Aus der ersten Gleichung folgt

$$(x + y)(x - y) = a, \quad (1)$$

$$\text{also wegen } x - y = b \quad (2)$$

$$(x + y)b = a \quad (3)$$

1. Es sei $b \neq 0$. Dann folgt aus (3)

$$x + y = \frac{a}{b} \quad (4)$$

und wegen (2)

$$2x = b + \frac{a}{b}, \text{ d. h., } x = \frac{b^2 + a}{2b},$$

$$2y = \frac{a}{b} - b, \text{ d. h., } y = \frac{a - b^2}{2b}.$$

2. Es sei $b = 0$. Dann hat wegen (3) das System nur dann eine Lösung, wenn auch $a = 0$ ist. In diesem Falle erhält man aus (2) $x = t$, $y = t$, wobei t eine beliebige reelle Zahl ist.

189 Es seien s der Weg, $t = 16s$ die Zeit bis zur Erreichung der Geschwindigkeit

$$v = 80 \text{ km/h} = \frac{80000}{3600} \text{ m/s} = \frac{200}{9} \text{ m/s}$$

und b die Beschleunigung. Dann gilt:

$$v = bt, \text{ also } b = \frac{v}{t} = \frac{200}{9 \cdot 16} \text{ m/s}^2 = \frac{100}{72} \text{ m/s}^2.$$

Ferner erhält man

$$s = \frac{b}{2} \cdot t^2 = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{200}{2 \cdot 9} \cdot 16 \text{ m} = \frac{1600}{9} \text{ m} \approx 177,8 \text{ m}.$$

Der *Moskwitsch* hat also bis zur Erreichung der Geschwindigkeit von 80 km/h 177,8 m zurückgelegt.

b) Sind t_1 die Zeit und s_1 der Weg bis zur Erreichung der Geschwindigkeit $v_1 = 120 \text{ km/h} = \frac{100}{3} \text{ m/s}$, so gilt analog wie oben:

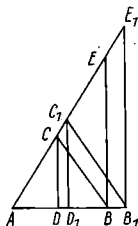
$$t_1 = \frac{v_1}{b} = \frac{100}{3} \cdot \frac{72}{100} \text{ s} = 24 \text{ s}$$

und $s_1 = \frac{v_1}{2} \cdot t_1 = \frac{300}{2 \cdot 9} \cdot 24 \text{ m} = 400 \text{ m}$.

Der *Moskwitsch* erreicht also die Höchstgeschwindigkeit, nachdem er 400 m in 24 s zurückgelegt hat.

W(9)190 Man konstruiert ein beliebiges gleichseitiges Dreieck AB_1C_1 mit der Höhe $h_1 = C_1D_1$ und verlängert die Seite $\overline{AC_1}$ über C_1 hinaus bis E_1 so, daß $C_1\overline{E_1} = h_1$ ist. Ferner bestimmt man auf dieser Verlängerung den Punkt E so, daß $\overline{AE} = a + h = 7,5 \text{ cm}$ beträgt.

$(C_1\overline{E_1} = C_1D_1; \angle AB_1E_1 \approx 86^\circ)$



Dann zieht man durch E die Parallele zu E_1B_1 , die die Gerade AB_1 in B schneidet. Endlich zieht man durch B die Parallele zu B_1C_1 , die die Gerade AC_1 in C schneidet. Dann ist ABC das verlangte gleichseitige Dreieck.

Aus der Konstruktion folgt nämlich $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$, also $\triangle ABC$ gleichseitig. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CDE und $C_1D_1E_1$ folgt $CD = CE$, d. h., $AC + CD = 7,5 \text{ cm}$.

W(9)191 Es sei x das Alter des Vaters; dann ist $62 - x$ das Alter des Sohnes. Ferner gilt

$$x - 3 = 3(62 - x - 3), \text{ also}$$

$$x - 3 = 177 - 3x,$$

$$4x = 180, \quad x = 45.$$

Der *Vater* ist also 45 Jahre alt, der *Sohn* ist

17 Jahre alt. Ferner sei y das Alter der älteren Tochter; dann gilt

$$17 - 5 = 2(y - 5), \text{ also } 12 = 2y - 10, \\ y = 11.$$

Die *ältere Tochter* ist also 11 Jahre alt.

Ist z das Alter der Mutter, so gilt

$$z + 4 = 3(11 + 4), \text{ also } z = 41.$$

Die *Mutter* ist also 41 Jahre alt.

Ist t das Alter der jüngeren Tochter, so gilt $17 + 1 = 3(t + 1)$, also $18 = 3t + 3$, $t = 5$.

Die *jüngere Tochter* ist also 5 Jahre alt.

Das Alter des *Großvaters* beträgt

$$2(17 + 11 + 5) = 2 \cdot 33 = 66 \text{ Jahre}.$$

Das Alter der *Großmutter* beträgt

$$248 - (66 + 45 + 41 + 33) = 248 - 185 \\ = 63 \text{ Jahre}.$$

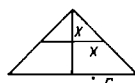
192 Es sei $V = \frac{r^3 \cdot \pi}{3}$ das Volumen des gegebenen Kegels. Ferner sei x die Höhe des abgeschnittenen Kegels; dann ist sein Grundkreisradius gleich x und sein Volumen $V_1 = \frac{x^3 \cdot \pi}{3}$. Nun ist $\frac{V - V_1}{V_1} = \frac{7}{1}$, also

$$\frac{V - V_1}{V_1} = 8. \text{ Daraus folgt}$$

$$\frac{r^3 - x^3}{x^3} = 8, \text{ also } x = \frac{r}{2}. \text{ Der Abstand der Schnitt-$$

ebene von der Grundfläche beträgt daher

$$\text{ebenfalls } \frac{r}{2} = 3 \text{ cm}.$$



193 a) Für alle reellen Zahlen a und b gilt

$$(a - b)^2 \geq 0, \quad (1)$$

$$\text{also } a^2 - 2ab + b^2 \geq 0, \quad (2)$$

$$\text{d. h., } a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab, \quad (3)$$

$$\text{mithin } \frac{(a + b)^2}{4} \geq ab. \quad (4)$$

Hieraus folgt für alle nicht negativen reellen Zahlen a und b

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ was zu beweisen war. } (5)$$

Es soll nun die Frage beantwortet werden, wie man auf diesen Gedankengang bei der Beweisführung kommt. Wegen $a \geq 0$ und $b \geq 0$ ergibt sich nämlich aus der Behauptung (5) durch Quadrieren

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \geq ab \text{ und weiter}$$

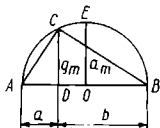
$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

$$(a - b)^2 \geq 0. \quad (6)$$

Nun ist die Ungleichung (6) für alle reellen Zahlen a und b erfüllt. Man geht daher von der Ungleichung (1) aus und beweist, daß dann auch für alle nicht negativen reellen Zahlen a und b die Ungleichung (5) erfüllt ist.

b) Zur Konstruktion der Strecke $g_m = \sqrt{ab}$ benutzt man den Höhensatz. In der untenstehenden Figur wurde über der Strecke $AB = a + b$ der Halbkreis konstruiert.



Wegen $\overline{CD} = g_m$ gilt dann

$$g_m^2 = ab, \quad (1)$$

$$g_m = \sqrt{ab} \quad (2)$$

$$\text{und } a_m = \frac{a+b}{2}. \quad (3)$$

Nun ist stets

$$g_m \leq a_m, \quad (4)$$

weil jede zu OE parallel verlaufende Halbschne \overline{CD} kleiner als der Radius ist und, falls sie mit OE zusammenfällt, gleich dem Radius ist.

Aus (2), (3) und (4) folgt nun

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \text{ w. z. b. w.}$$

W(10/12)194 Bezeichnet man mit x die kleinere der beiden Zahlen, so ist $x + b$ die größere Zahl. Man erhält

$$x(x+6) = 91,$$

$x^2 + 6x - 91 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, nämlich

$$x_1 = -3 + \sqrt{9 + 91} = -3 + \sqrt{100}$$

$$= -3 + 10 = 7,$$

$$x_2 = -3 - 10 = -13.$$

Die Aufgabe hat daher ebenfalls zwei Lösungen; im ersten Fall sind es die Zahlen 7 und 13, deren Produkt gleich 91 ist, im letzteren Fall sind es die Zahlen -13 und -7, deren Produkt ebenfalls gleich 91 ist.

W(10/12)195 Wir bezeichnen zur Abkürzung die Aussagen von Klaus mit k_1, k_2, k_3 , die von Horst mit h_1, h_2, h_3 und die von Günter mit g_1, g_2, g_3 . Dann gibt es auf Grund der obigen Voraussetzung nur drei Fälle:

a) k_1, k_2, k_3 sind wahr;

b) h_1, h_2, h_3 sind wahr;

c) g_1, g_2, g_3 sind wahr.

Im Fall a) folgt aus k_3 , daß auch alle Aussagen von Horst wahr sind. Das ergibt aber

einen Widerspruch, da h_1 und h_2 nicht gleichzeitig wahr sein können. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

Im Fall b) folgt aus h_3 , daß auch alle Aussagen von Günter wahr sind. Das ergibt aber einen Widerspruch, da g_1 und h_2 nicht gleichzeitig wahr sein können; denn es führt nur ein Weg in die Stadt. Dieser Fall kann also auch nicht eintreten.

Im Fall c) folgt aus g_2 , daß alle Aussagen von Klaus falsch sind. Ferner folgt, daß h_1 wahr, h_2 falsch und h_3 wahr ist. Es ergibt sich kein Widerspruch. Daher führt der Weg c in die Stadt; denn alle Aussagen von Günter sind wahr.

Lösungen zu Aufgaben aus dem

18. Jahreswettbewerb der USA 1967 (1/68)

- | | |
|------------------------------|-----------------------------------|
| 1. c) 6; | 5. b) $\sqrt{50}$; |
| 2. d) $2xy + \frac{2}{xy}$; | 6. a) $ r_1 + r_2 > 4\sqrt{2}$; |
| 3. b) $\frac{s^2}{6}$; | 7. b) $20 < p < 30$; |
| 4. c) $\frac{2}{e}$; | 8. a) $r + r'd$; |
| | 9. a) 33; |
| | 10. c) 13.36 Uhr. |

Lösungen zu: Notwendig oder hinreichend

(2/68)

1. Die Aussage 1.2 wahr; streicht man bei 1.1 „notwendig“ und bei 1.4 „hinreichend“, erhält man zusätzlich wahre Aussagen.

2. Wahre Aussagen sind: 2.1; 2.2; 2.4; 2.6. Die Frage hätte lauten können: Wieviel Fahrten mindestens sind hinreichend? Wieviel Fahrten höchstens sind notwendig? Wieviel Fahrten sind zugleich notwendig und hinreichend?

3.1 Die Gleichseitigkeit eines Dreiecks ist hinreichend für seine Gleichschenkligkeit.

Dafür, daß ein Dreieck gleichschenklig ist, ist hinreichend, daß es gleichseitig ist.

Dafür, daß ein Dreieck gleichseitig ist, ist notwendig, daß es gleichschenklig ist.

3.2 Die Teilbarkeit einer Summe durch eine Zahl ist notwendig für die Teilbarkeit jedes ihrer Summanden durch diese Zahl. Die Teilbarkeit jedes Summanden einer Summe durch eine Zahl ist hinreichend für die Teilbarkeit der Summe dieser Zahl.

3.3/3.4 Dafür, daß in ein und demselben Kreis die Zentriwinkel gleich groß sind, ist notwendig und hinreichend, daß die zugehörigen Bogen gleich groß sind.

4.1 Wenn ein Parallelogramm ein Quadrat ist, so beträgt ein Innenwinkel des Parallelogramms 90° .

4.2 Wenn ein Innenwinkel eines Parallelogramms 90° beträgt, so ist dieses Parallelogramm ein Rechteck.

4.3 Wenn a ungerade ist, so ist $a^2 - 36 \neq 0$.

4.4 Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, so sind sie (auch) ähnlich.

5.1 hinreichend (nicht notwendig), 5.2 notwendig und hinreichend, 5.3 notwendig (nicht hinreichend), 5.4 weder notwendig, noch hinreichend

Lösungen alpha-heiter 2/68

a) $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$;
 b) $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 100 - 5 + (5 + 5 + 5) : 5 = 8$ — Man vergesse nicht, daß Null auch eine Ziffer ist! — 3 und

$4 - x + \frac{x}{12} = 91$, also $x = 84$; die Großmutter ist 84 Jahre, der Urenkel 7 Jahre (84 Monate) alt. — 1. Meter, 2. Achse, 3. Tonne, 4. Höhe, 5. Einer, 6. Monat, 7. Alpha, 8. Tafel, 9. Index, 10. Kegel (oder Kugel); MATHEMATIK — Newton, Thales, Gauß, Euler, Vieta.

Lösung der Aufgaben: Chemieanlagenbauer (2/68):

208 Die Maßzahl der Austauschfläche des Kondensators A sei a ; dann ist die Maßzahl der Austauschfläche des Kondensators B gleich $a + 4$. Wir entnehmen der nachstehenden Tabelle, daß die Variable a nur mit der Zahl 2 belegt werden darf.

a	$a + 4$	$a \cdot (a + 4)$
1	5	5
2	6	12
3	7	21
4	8	32
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

Der Kondens. A besitzt eine 2 m^2 große, der Kondens. B eine 6 m^2 große Austauschfläche.

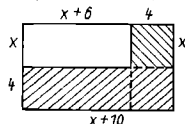
209 Aus $280 - 50 = 230$ und $230 : 2 = 115$ und $115 + 50 = 165$ folgt, daß der erste Gießler 165 Stück, der zweite 115 Stück herstellt.

W(5)210 Die Gesamtfläche für die Maschinen und die sie bedienenden Arbeiter beträgt 166 m^2 ; die Gesamtfläche für die Lagerung und Bereitstellung der Werkstücke beträgt 86 m^2 ; die Bodenfläche der Werkstatt beträgt 396 m^2 . Für die Transportwege verbleiben dann 144 m^2 Fläche. Aus $144 : 48 = 3$ folgt, daß die Transportwege bei günstiger Platzaufteilung durchgehend 3 m breit angelegt werden können.

211 Aus $8 \cdot x = 40 \cdot 5$ folgt $x = 25$; auf das Ventil drückt eine Kraft von 25 kp .

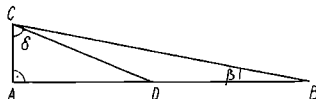
212 Der nachstehenden Zeichnung entnehmen wir folgendes:

$$4 \cdot (x + 10) + 4 \cdot x = 72; x = 4.$$



Das rechteckige Blech ist 10 cm lang und 4 cm breit.

W(6)213 Es ist zunächst das rechtwinklige Dreieck ABC aus $\overline{AB} = 250 \text{ m}$, $\beta = 11,3^\circ$ zu konstruieren. Danach ist in C an \overline{CA} der Winkel $\delta = 90^\circ - 22,6^\circ = 67,4^\circ$ anzutragen; der



freie Schenkel dieses angetragenen Winkels schneidet die Strecke AB im Punkte D . Bei einer maßstäblichen Zeichnung erhalten wir folgendes Ergebnis: $\overline{AC} = 50 \text{ m}$, $\overline{DB} = 130 \text{ m}$. Der Schornstein ist 50 m hoch; um den Schornstein unter dem doppelten Erhebungswinkel zu erblicken, muß sich der Beobachter dem Fußpunkt des Schornsteines um 130 m nähern.

214 Aus $100\% \hat{=} 18 \text{ kg}$ folgt $1\% \hat{=} 0,18 \text{ kg}$.

$0,18 \cdot 0,9$	$= 0,1620,$
$0,18 \cdot 2$	$= 0,3600,$
$0,18 \cdot 0,2$	$= 0,0360,$
$0,18 \cdot 0,015$	$= 0,0027,$
$0,18 \cdot 0,005$	$= 0,0009$
$0,18 \cdot 96,88$	$= 17,4384.$

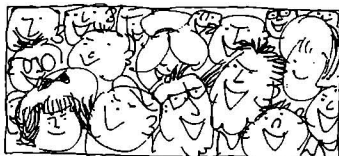
In 18 kg dieses Stahles sind enthalten:
 $0,162 \text{ kg}$ Kohlenstoff, $0,36 \text{ kg}$ Silizium, $0,036 \text{ kg}$ Mangan, $0,0027 \text{ kg}$ Phosphor, $0,0009 \text{ kg}$ Schwefel und $17,4384 \text{ kg}$ Eisen.

alpha-Wettbewerb

Am 1. Mai 1968 lagen 3800 Lösungen zu Aufgaben des Wettbewerbs Heft 1/68 vor. Das ist ein schönes Zeichen von Freude an der Beschäftigung mit mathematischen Problemen und vor allem von Fleiß.

Die Redaktion weist nochmals darauf hin, daß nur Lösungen zu Wettbewerbsaufgaben (gekennzeichnet durch ein W) korrigiert und bewertet werden, jede Lösung auf ein gesondertes Blatt (Format $A 4$) zu schreiben ist, die formale Angabe des Endergebnisses (zu einer W -Aufgabe) nicht als Lösung bewertet wird, zur schnellen und einwandfreien Auswertung notwendig ist, alle in der Ausschreibung geforderten Daten am Kopf der Lösung vollständig einzutragen. (Postleitzahl nicht vergessen!)

In freien Stunden alpha heiter



Das Arithmomachiaspiel

Das Spiel, mit dem wir den Leser bekannt machen wollen, zeichnet sich durch besondere Einfachheit aus, denn man braucht dazu keinerlei Hilfsmittel. Das bedeutet freilich nicht, daß die *Arithmomachia* (auch als *Nim* — oder *Fan-Tan*-Spiel bekannt) mathematisch nicht interessant wäre — im Gegenteil.

Wir wollen zunächst die einfachste und gefälligste Spielweise für den Fall anführen, daß sich nur zwei Spieler, *A* und *B*, mit der *Arithmomachia* unterhalten. Spieler *A* wählt eine beliebige Zahl von 1, 2, 3, ..., 10, Spieler *B* tut dasselbe und addiert seine Zahl zu der von *A* genannten; dann fährt Spieler *A* ebenso fort. Auf diese Weise lösen beide einander ab; zu dem zuletzt erreichten Ergebnis addieren sie stets nach Belieben eine der Zahlen 1, 2, 3, ..., 10. Gewonnen hat, wer als erster die im voraus festgesetzte Zahl *T* (z. B. $T = 100$) erreicht.

Wie soll man vorgehen, um sich den Sieg zu sichern?

Die Lösung findet der Leser in dem unten abgebildeten Buch (VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1968, 167 Seiten, 71 Bilder, Preis: 4,80 M). *Mathematische Spiele — Wirklichkeit und Täuschung — Unterhaltung mit Zahlen — Vielecke — Geometrie ohne Lineal — Mathematische Paradoxa und Rätsel — Keine Angst vor Textaufgaben* — das sind die Zwischen-Überschriften in diesem lebendigen mathem. Jugendbuch. (Autor: Jiří Sedláček).



Gute Unterhaltung beim Lesen wünscht

J. Lehmann, Leipzig

Ein mathematisches Gesellschaftsspiel

Im *Dresdener Klub Junger Mathematiker* wurde folgendes Gesellschaftsspiel erfunden, mit dem wir unsere Kenntnisse über die Mengenoperationen festigen und üben wollten: Zunächst wurden vier Teilmengen des Klubs definiert durch die Festlegung

- R = Menge aller Klubmitglieder, in deren Vorname ein R vorkommt.
- I = Menge aller Klubmitglieder, in deren Vorname ein I vorkommt.
- N = Menge aller Klubmitglieder, in deren Vorname ein N vorkommt.
- T = Menge aller Klubmitglieder, in deren Vorname ein T vorkommt.

$$\begin{array}{l} R \cap I, N \cup T, \bar{N}, T \setminus I \\ N \cup (R \setminus I), [R \cup (I \cap N)] \setminus T, R \cup \bar{T} \\ \overline{I \cup (R \cap T)}, I \cup (R \cap \bar{T}), (I \cap R) \cap (N \cup T) \end{array}$$

Nun prüfte jeder Teilnehmer in allen zehn Fällen, ob er selbst zu den beschriebenen Mengen gehörte oder nicht, und bezeichnete das auf einem Zettel jeweils mit + oder —. Die Ausdrücke waren so ausgewählt, daß jeder genau 5mal + und 5mal — zu schreiben hatte; z. B. gehörte Thomas die Folge — + + + — — — + + —, Gerlinde die Folge + + — — + — + —. Wer das beste Ergebnis hatte — es war Evelin, die als einzige fehlerfrei über die Runden kam — konnte einen kleinen Preis gewinnen. Einen Preis erhielten auch noch Thomas, Cunna und Steffen, die nur einen Fehler machten.

Man kann das Spiel noch ein wenig fortsetzen, indem man die erhaltenen Folgen nicht mit + und —, sondern mit *L* und *O* schreibt, als Dualzahl auffaßt und noch in eine Dezimalzahl verwandelt. Sieger ist dann, wer am schnellsten seine Kennzahl findet.

Viel Spaß beim Spielen und Lösen wünscht Euch

Dr. F. Anacker, Dresden

Schnell noch etwas zum Knobeln: *Wie könnte ein Klubmitglied heißen, der als letztes Zeichen ein + zu schreiben hatte?*

a l p h a
 + m a t h e
 h e i t e r

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, ungleiche Buchstaben ungleiche Ziffern. Setze die Ziffern 0, 1, ..., 7, 8 so ein, daß eine wahre Aussage entsteht.

Wieviele Lösungen sind möglich?

Kryptogramme

1. $\sqrt{\text{ALPHA}} = \text{HHA}$

2. $\text{PPP} \cdot \text{PPP} = \text{ALPHA}$

3. $\begin{cases} (\text{XY})^Y = \text{ALPHA} \\ \text{X} + \text{Y} = \text{A} \end{cases}$

4. $(\text{AX})^3 = \text{ALPHA}$

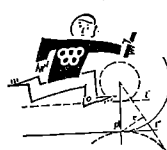
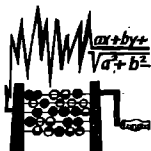
5.
$$\begin{array}{r} \text{Auu} \cdot \text{Auu} \\ \hline \text{Auu} \\ \text{uAu} \\ \hline \text{AuuA} \\ \hline \text{ALPHA} \end{array}$$

In Aufgabe 5 kommt kein weiteres A vor!
 Versuche selbst, mit dem Wort ALPHA ähnliche Aufgaben zu bilden!

Viel Spaß wünscht

Ing. H. Decker, Köln

▼ Vignetten aus der mathematischen Jugendzeitschrift „rozhledy“, CSSR



Herr Flunkrich

Herr *Flunkrich* wird nach der Postleitzahl seines Wohnortes gefragt. Er macht über diese Zahl die folgenden Aussagen:

1. Der Nachfolger der Zahl ist nicht durch 3 teilbar.
2. Die Zahl läßt bei der Division durch 5 einen anderen Rest als bei der Division durch 7.
3. Die Zahl ist größer als 800.
4. Der Vorgänger der Zahl ist nicht durch 8 teilbar.
5. Der Rest bei der Division der Zahl durch 7 ist kleiner als 3.
6. Der Rest bei der Division der Zahl durch 5 ist größer als 3. Nun wissen wir, daß alle Aussagen des Herrn *Flunkrich* falsch sind. Wie lautet die Postleitzahl seines Wohnortes?

Dr. R. Lüders, Berlin

Lösung

Da alle Aussagen des Herrn *Flunkrich* falsch sind, ergibt die Zahl wegen (1) bei der Division durch 3 den Rest 2 und wegen (2) bei der Division durch 5 denselben Rest wie bei der Division durch 7. Dieser Rest ist wegen (5) größer oder gleich 3 und wegen (6) kleiner oder gleich 3, also gleich 3.

Wegen (4) läßt die Zahl bei der Division durch 8 den Rest 1. Ferner ist wegen (3) die Zahl nicht größer als 800.

Nun gibt es wegen $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840 > 800$ höchstens eine natürliche Zahl $a \leq 800$, die bei der Division durch 3 den Rest 2, (7) bei der Division durch 5 den Rest 3, (8) bei der Division durch 7 den Rest 3, (9) bei der Division durch 8 den Rest 1 läßt. (10) Wegen (10) ist a eine der Zahlen

$$9, 17, 25, 33, \dots, 793$$

und wegen (9) eine der Zahlen

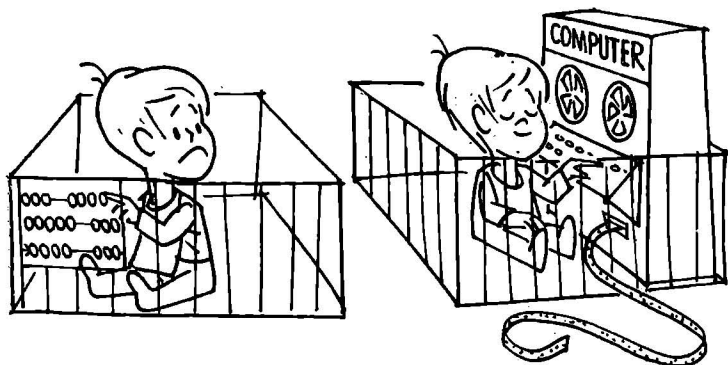
$$17, 17 + 8 \cdot 7 = 73, 17 + 2 \cdot 56, \dots, 17 + 13 \cdot 56,$$

also wegen (8) eine der Zahlen

$$73, 73 + 8 \cdot 7 \cdot 5 = 73 + 280 = 353, 73 + 2 \cdot 280 = 633,$$

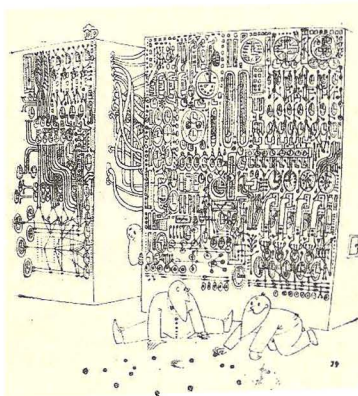
also ist wegen (7) $a = 353$.

Die Postleitzahl des Herrn *Flunkrich* ist 353; er wohnt in Havelberg.



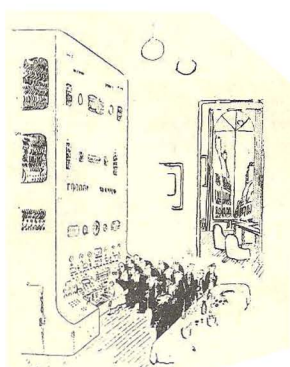
Selbstgefällig!

Zeichnung: Gösta Lerch, aus: „Für Dich“

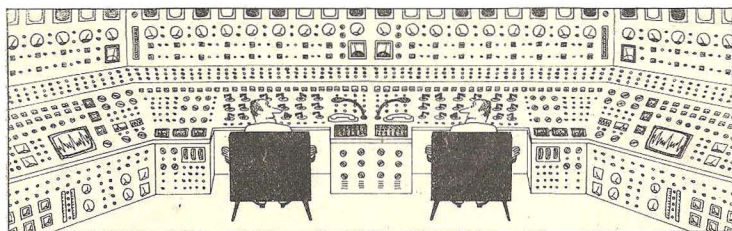


Kybernetiker während der Frühstückspause

Aus: „Im siebenten Himmel“ von Vladimir Fuka,
Artia-Verlag, Prag



Ich bin eine Rechenmaschine IBM u. X 124. Für meine Konstruktion wurden 3 Jahre, 5 Monate und 14 Tage und für die Montage in diesem Büro 6 Monate, 27 Tage und 17 Stunden benötigt. Leider wird diese Firma morgen um 6 Uhr 22 bankrott sein.
Aus: „L'EXPRESS“, Paris



Wollen wir zur Abwechslung mal die Plätze tauschen?

Zeichnung: Harri Parschau, aus: „Eulenspiegel“

Sprachkenntnisse vorausgesetzt

Diese und andere interessante Mathematikbücher erhaltet Ihr in jeder Buchhandlung mit Fremdsprachensortiment.



ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ
СТЕКЛОВ

G. I. Ignazius

Wladimir Andrejewitsch Steklow

In diesem Heft werden die Leser mit dem Leben des Mathematikers W. A. Steklow (9. 1. 1864 bis 30. 5. 1926) und seinen Schülern — meist auch bekannten sowjetischen Wissenschaftlern — vertraut gemacht. Das Bändchen eignet sich hervorragend für Übersetzungsübungen aus dem Russischen.

Moskau 1967. 212 Seiten. Illustriert. Broschur 3,45 Mark.
Bestellnummer VII A — 1808. In russischer Sprache



E. Beckenbach und R. Bellman

Einführung in die Ungleichungen

Die Autoren, bekannte amerikanische Mathematiker, haben das minimale Material über Ungleichungen zusammengestellt und in lebendiger Form auf elementarem Niveau dargelegt. Das Buch befaßt sich mit den prinzipiellen theoretischen Grundlagen und enthält interessante Aufgaben. Aus dem Englischen. Moskau 1965. 168 Seiten. 44 Abbildungen. Broschur 2,35 M. Bestellnummer VII A — 1485. In russischer Sprache.



МЕЖДУНАРОДНЫЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ОЛИМПИАДЫ

E. Morosowa und J. Petrakow

Internationale Mathematikolympiaden

Das vorliegende Buch bringt sämtliche Aufgaben und Lösungen der I. bis VII. Internationalen Mathematikolympiade sowie weitere 100 Aufgaben und Lösungen aus nationalen Olympiaden sozialistischer Länder. Auf 25 Seiten sind in einer Dokumentation Ablauf, Erfolge usf. der Internationalen Olympiaden dargelegt.

Moskau 1967. 174 Seiten. Kunststofffrücken 1,65 Mark
Bestellnummer VII A — 1937. In russischer Sprache.



J. Saporina

Kybernetik in uns

Die sowjetische Autorin führt den Leser in anschaulicher und unterhaltsamer Art in einige Grundprobleme kybernetischer Vorgänge im Menschen ein. Die Broschüre, humorvoll illustriert, eignet sich hervorragend für Übersetzungsübungen.

Moskau o. J. 316 Seiten. Broschur 4,50 Mark
Bestellnummer En 1221. In englischer Sprache.

Hagen Jakubaschk

DAS GROSSE ELEKTRONIK- BASTELBUCH

Diese 3. Auflage des Elektronikbastelbuches ist um vieles erweitert und verbessert worden. Enthielt es erst 100 Schaltungsbeispiele, konnten diese auf 140 erweitert werden. Das Buch bietet dem Interessenten teilweise völlig neue Schaltungen, darunter auch Thyristorschaltungen, und Varianten zu neuen Schaltungen. Breiten Raum darin nehmen auch Kybernetik und die Proportionalsteuerung ein. Das umfangreiche Stichwörterverzeichnis, das um 200 Begriffe erweitert wurde, ermöglicht ein schnelles Auffinden des gesuchten Problems.

Das Elektronikbastelbuch ist das populäre Standardwerk für alle an der Elektronik und ihren speziellen Teilgebieten Interessierten. Es vermittelt Grundkenntnisse und führt die Leser — Bastler, Mitglieder der GST, Modellbauer, Angehörige der Nachrichteneinheiten der bewaffneten Organe — bis zur Eigenkonstruktion elektronischer Geräte.

3. Auflage, 312 Seiten, mit Abbildungen, Halbleinen, cellophanisiert, 10,80 M.



**Deutscher
Militärverlag
Berlin**