Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
12. Jahrgang 1978
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 25. April 1978

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

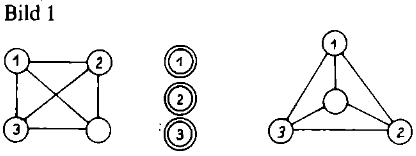
Kombinatorische Betrachtungen bei Schiebe-Spielen

Zur Behandlung der Permutation

Teil I

In Abwandlung der käuflichen Schiebefax-Spiele legen wir als „Spielfeld" einen Graphen zugrunde und spielen darauf gewisse Ein-Personen-Spiele. So seien etwa in dem nebenstehenden Spielfeld (Figur 1) auf die numerierten Felder 1, 2, 3 die 3 Spielsteine 1, 2, 3 in Übereinstimmung der Zahlen gesetzt. Ein Spielstein wird nun im ersten Zug längs einer der angegebenen Linien auf das freie Feld gezogen. Dann erfolgt der nächste Zug, indem wieder ein Spielstein auf das nach dem ersten Zug entstandene freie Feld gezogen wird.

Bild 1



Dieser zweite Zug soll dabei nicht sofort wieder den ersten Zug rückgängig machen. Man spiele in gleicher Weise weiter, bis das unnumerierte Feld erstmalig freigezogen werden kann. Damit sei eine Spielrunde abgeschlossen. Wir sehen, daß zu einer solchen minimalen Spielrunde 3 Züge erforderlich sind. Als Ergebnis einer Spielrunde hat sich aus der Ausgangsstellung, in der die Spielsteinnummern mit den Feldernummern übereinstimmen, eine neue Endstellung ergeben, in der die Feldnummer 1 mit dem Spielstein i, die Feldnummer 2 mit dem Spielstein j, die Feldnummer 3 mit dem Spielstein k besetzt ist. Eine erspielte Stellung ist also durch eine Abbildung $1 \to i$, $2 \to j$, $3 \to k$ gekennzeichnet – jeder Feldnummer wird die Spielsteinnummer, durch die das Feld belegt ist, zugeordnet.

Es handelt sich dabei um eine eineindeutige Abbildung, weil zwei verschiedenen Zahlen stets immer zwei verschiedene Zahlen entsprechen. Jede solche Abbildung P:

$\{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$

bedeutet eine Umordnung der Zahlen 1, 2, 3, daher heißen diese *Permutationen* (permutare, lat. = vertauschen).

(Auch die Abbildungen, die jede Spielsteinposition unverändert läßt, zählt man zu den Permutationen; sie heißt die *identische Permutation.*)

Interessierende Fragen sind dann beispielsweise:

1. Welche verschiedenen Endstellungen kann man aus der Ausgangsstellung durch Minimalrunden erreichen?
2. Wieviel und welche Minimalrunden muß man spielen, um eine vorgeschriebene Endstellung zu erreichen?

Zur Beantwortung dieser Fragen schauen wir uns zunächst ein Spielprotokoll an:

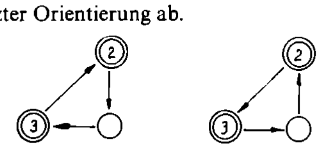
Ausgangs-stellung	1. Zug	2. Zug	3. Zug
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	freies Feld 2	2. Feld 3	3. Feld 2
End-stellung	Bemerkungen		
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	unveränderte Position 1		

Das gleiche Ergebnis könnte man auch noch gemäß dem folgenden Protokoll erhalten.

Ausgangs-stellung	1. Zug	2. Zug	3. Zug
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	freies Feld 3	3. Feld 2	2. Feld 3
End-stellung	Bemerkung		
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	unveränderte Position 1		

Diese beiden Runden unterscheiden sich für uns nur unwesentlich, denn beide bewegen die gleichen Steine (und zwar in die gleiche Endstellung), sie laufen eigentlich nur in entgegengesetzter Orientierung ab.

Bild 2



Eine wesentliche Feststellung ist hingegen, daß in der Minimalrunde genau ein Spielstein seine Position unverändert lassen muß. Eine Runde, in der alle 3 Spielsteine bewegt würden, müßte nämlich mehr als 3 Züge aufweisen, weil schon 3 Züge auf das Bewegen der drei Steine entfallen und noch mindestens einer zum Freiziehen des unnumerierten Feldes benötigt wird. Durch eine Minimalrunde vertauschen zwei Spielsteine gerade ihre Plätze!

Permutationen $P = \downarrow\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\i&j&k&\dots&x\end{pmatrix}$ der Menge $1, 2, 3, \dots, n$, wo genau zwei Zahlen ihre Plätze vertauschen und alle übrigen unveränderte Positionen behalten, heißen *Transpositionen.*

Feststellung 1

In dem Schiebespiel des Bildes 1 wird durch eine Minimalrunde, bestehend aus 3 Zügen, aus der identischen Permutation $\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ eine Transposition als Endstellung erspielt, und jede Transposition ist durch eine Minimalrunde erspielbar.

Zur abkürzenden Angabe von Transpositionen innerhalb der Permutationen bedient man sich der folgenden Bezeichnungsweise (ij), d. h. i geht in j und j in i über und alles andere bleibt unverändert. Um die durch Permutationen vermittelten Abbildungen anschaulich verfolgen zu können, benutzt man zu ihrer Darstellung verschiedene Diagramme.

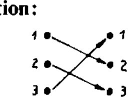
Es sind etwa folgende Typen zweckmäßig: *Leiterdiagramme, Zyklendiagramme, Kartendiagramme.*

Im Leiterdiagramm stellt man zwei Exemplare der zu permutierenden Menge einander gegenüber und zieht von den Punkten des ersten Exemplars Pfeile zu den zugehörigen Bildpunkten. Ein Pfeil bedeutet hier also kurzschriftlich „geht über in"! Die Eineindeutigkeit der Zuordnung ist gleichwertig mit der Tatsache, daß in keinem Punkt zwei Pfeile einmünden. Insgesamt hat ein Leiterdiagramm einer Permutation folgende charakteristische Besonderheiten:

1. Von jedem Punkt des ersten Exemplars geht genau ein Pfeil aus.
2. In jeden Punkt des zweiten Exemplars mündet genau ein Pfeil ein.

Beispiel für ein Leiterdiagramm einer Permutation:

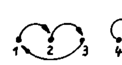
$P = \downarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$ Bild 3



Das Zyklendiagramm einer Permutation folgt dem gleichen Bildungsgesetz der Leiterdiagramme, nur daß sich alles in einem einzigen Exemplar der zu permutierenden Menge abspielt.

Beispiel für ein Zyklendiagramm einer Permutation:

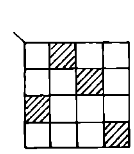
$P = \downarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$ Bild 4



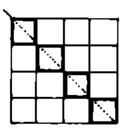
Im Kartendiagramm einer Permutation markiert man in einer quadratischen „Karte" mit $n \cdot n$ Feldern fortschreitend von oben nach unten in jeder Zeile dasjenige Feld der Nummer, in die die Zeilennummer übergeht.

Beispiel für ein Kartendiagramm einer Permutation:

$P = \downarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$ Bild 5



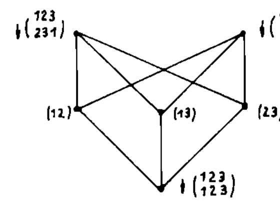
Die Eineindeutigkeit findet hier durch die Tatsache ihren Ausdruck, daß in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Feld markiert ist. (Zur besonderen Hervorhebung des Tabelleneingangs setzen wir ein Schwänzchen an die obere linke Ecke.)
An diesen drei Diagrammformen kann man gewisse Eigenschaften von Permutationen leicht ablesen. So beantworten sich folgende Fragen sofort:
Welche Elemente der zu permutierenden Menge sind bei der betrachteten Permutation P *Fixpunkte* (d. h., sie behalten ihren Platz)? Wie erkennt man Transpositionen an ihren Diagrammen? Man sieht, daß hierbei für das Kartendiagramm die sogenannte *Hauptdiagonale*, das sind die Felder, die in Verlängerung des Markierungsschwänzchens liegen, von Wichtigkeit ist.

Bild 6 

In der Tabelle 1 haben wir in den drei ersten Spalten alle möglichen Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$ und ihre Zyklendiagramme und Kartendiagramme *aufgelistet*. (Die beiden letzten Spalten der Tabelle sind dann, wie sich noch zeigen wird, für den Spielverlauf bedeutungsvoll.) Bei der ersten Permutation ist die gesamte Hauptdiagonale besetzt. Jeder Punkt (= Element) von $\{1, 2, 3\}$ ist Fixpunkt. Die drei folgenden Permutationen sind alle Transpositionen der Menge $\{1, 2, 3\}$. Diese Permutationen haben bezüglich der Hauptdiagonale einen spiegelsymmetrischen Aufbau. Die beiden restlichen Permutationen sind selbst keine Transpositionen, sie gehen aber aus einer Transposition durch eine nochmalige Transposition hervor.
Damit ergibt sich also die

Feststellung 2

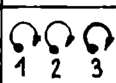
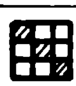
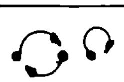
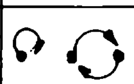
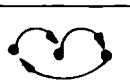
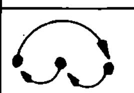
In dem Schiebespiel des Bildes 1 kann durch Minimalrunden, bestehend aus 3 Zügen, aus der identischen Permutation $\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ jede Permutation P der Menge $\{1, 2, 3\}$ erspielt werden. Die drei möglichen Transpositionen erhält man als Endstellung nach einer der möglichen Minimalrunden. Die restlichen zwei Permutationen erhält man nach zwei möglichen Minimalrunden.
Die Übergangsmöglichkeiten einer Spielendstellung in eine andere Spielendstellung kann man zweckmäßig durch einen Graphen veranschaulichen. Das ist in Bild 7 ausgeführt. Eine Verbindungslinie bedeutet dann also jeweils „Minimalrunde".

Bild 7 

Wie kann man an dem Übergangsgraphen ablesen, durch welche Spielanweisung man in zwei Minimalrunden von der Ausgangsstellung $\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ zu der Endstellung $\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ gelangen kann? Der Graph sagt unmittelbar, daß man eine beliebige erste Spielrunde ausführen kann. Er sagt auch aus, wie man etwa in der ersten Runde zu spielen hat. Will man sich beispielsweise die Endstellung $(12) = \downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ in der ersten Runde erspielen, so hat man den Spielstein 3 unverändert zu lassen. Wie muß man nun aber mit der Stellung $(12) = \downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ weiterspielen, um in der nächsten Runde die gewünschte Endstellung $\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ zu erreichen? Man sieht, daß der Spielstein 1 schon an seinem gewünschten Platz steht. Man hat also diesen in der zweiten Spielrunde unverändert zu lassen, d. h., man führe noch die Transposition (23) aus.
Zur bequemen unmittelbaren Ablesemöglichkeit der auszuführenden Umstellungen schreiben wir beide Transpositionen in Form eines Produkts auf: (23) (12).
Die zuerst auszuführende Transposition steht dabei als rechter Faktor. Das ist die bei der Zusammensetzung von Abbildungen übliche Anordnung der Faktoren. Anstelle der Zusammensetzung von Abbildungen spricht man auch von dem *Produkt* von Abbildungen und in dem Spezialfall der Permutationen von dem *Produkt der Permutationen.*
Wir erläutern diese wichtige Begriffsbildung noch ein wenig. Es bezeichne γ_n die Menge aller Permutationen der Menge der ersten n natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Durch die Zusammensetzung oder Produktbildung von je zwei Permutationen $P, Q \in \gamma_n$ ist wieder eine Permutation

$$Q \circ P \in \gamma_n \text{ bestimmt.}$$

Es ist dabei $Q \circ P$ diejenige Permutation von $\{1, 2, \ldots, n\}$, die die Zahl i in die Zahl $Q(P(i))$ überführt.

Permutation	Zyklendiagramm	Kartendiagramm	Produkt von Transpositionen minimaler Faktorenanzahl	Anzahl der Fixpunkte
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$			–	3
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$			(12)	1
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$			(13)	1
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$			(23)	1
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$			(13) (12) = (23) (13) = (12) (23)	0
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$			(12) (13) = (23) (12) = (13) (23)	0

Produkttafel für (γ_3°)

•	(1)	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(1)	(1)	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	(1)	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	(1)	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	(1)	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	(1)
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	(1)	(123)

•		Q	
		⋮	
P	....	$P \cdot Q$	

Für die anschauliche Verfolgung der Zusammensetzung von Permutationen eignet sich besonders das Leiterdiagramm.

Beispiel für die Produktbildung von Permutationen:

$P=\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad Q=\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\quad Q\circ P?$

Also ist $Q\circ P=\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$

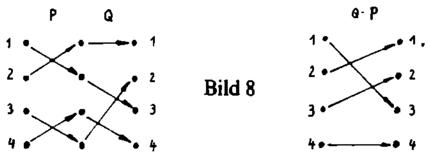


Bild 8

Es bestehen sowohl Ähnlichkeiten als auch Unterschiede zwischen der Produktbildung von Permutationen und der Produktbildung bei Zahlen. Die Gemeinsamkeit findet sich in der Gültigkeit des Assoziativgesetzes, der Existenz eines Einselementes und der Existenz von inversen Elementen. Ein wesentlicher Unterschied kommt darin zum Ausdruck, daß bei den Permutationen nicht allgemein die Kommutativität gilt. Berechnet man z. B. für die oben angegebenen P, Q noch das Produkt $P\circ Q$ mit umgekehrter Reihenfolge der Faktoren, so ergibt sich

$$P\circ Q=\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\neq Q\circ P$$

Assoziativgesetz der Produktbildung von Permutationen:

In γ_n, der Menge aller Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, gilt hinsichtlich der Produktbildung $\circ$ für je drei Permutationen $P, Q, R\in\gamma_n$

$$P\circ(Q\circ R)=(P\circ Q)\circ R.$$

Der Beweis dazu ist einfach! Wir bezeichnen mit S und T die beiden Permutationen $Q\circ R$ bzw. $P\circ Q$. Dann ist

$P\circ S=T\circ R$ zu zeigen.

Es sei $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$. Man bestimmt $(P\circ S)(i)$ und $(T\circ R)(i)$. Es ist

$(P\circ S)(i)=P(S(i))=P(Q(R(i)))$ und

$(T\circ R)(i)=T(R(i))=P(Q(R(i)))$,

d. h. $P\circ S=T\circ R$.

Existenz eines *Einselementes:*

In γ_n gibt es für die Produktbildung $\circ$ genau eine Permutation I, so daß für alle $P\in\gamma_n$ gilt

$$P\circ I=I\circ P=P.$$

Dieses I ist die identische Permutation

$$I=\downarrow\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\1&2&\ldots&n\end{pmatrix},$$

wo jedes Element von $\{1, 2, \ldots, n\}$ Fixpunkt ist.

Die Begründung ist wieder einfach. I hat offenbar die Eigenschaft, daß es bei der Produktbildung von links und rechts P überhaupt nicht verändert. Es muß dann zur vollen Bestätigung der Aussage noch gezeigt werden, daß nur I diese Eigenschaft haben kann. Es sei J eine Permutation aus γ_n, für die stets

$$P\circ J=J\circ P=P$$

für alle $P\in\gamma_n$ gilt.

Dann gilt dies speziell auch für $I\in\gamma_n$, d. h. es ist

$$I\circ J=J\circ I=I$$

und zum anderen auch

$$J\circ I=I\circ J=J,$$

da I jede andere Permutation unverändert läßt. Also ergibt sich $I=J$.

Existenz der *Inversen*

In γ_n gibt es für die Produktbildung $\circ$ zu jeder Permutation $P\in\gamma_n$ genau eine Permutation – die sogenannte inverse Permutation P^{-1} zu P, so daß

$$P\circ P^{-1}=P^{-1}\circ P=I$$

gilt. Die Bestätigung ist auch wieder einfach.

Die zu $P=\downarrow\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots & n\\i & j & & x\end{pmatrix}$ inverse Permutation ist $P^{-1}=\uparrow\begin{pmatrix}i & j & \ldots & x\\1 & 2 & \ldots & n\end{pmatrix}$. Aus dem Leiter- und Zyklendiagramm ergibt sie sich gerade durch Umkehrung aller Pfeile, aus dem Kartendiagramm ergibt sie sich durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen. Im Bereich der von Null verschiedenen reellen Zahlen gibt es nur die beiden Zahlen $+1$ und -1, die bezüglich der Multiplikation zu sich selbst invers sind. Bei den Permutationen gibt es außer I noch die Transpositionen und auch noch weitere Permutationen, die zu sich selbst invers sind.

Feststellung 3

In dem Schiebespiel des Bildes 1 ist die Überführung der identischen Permutation $\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ durch die Aufeinanderfolge von Minimalrunden, bestehend aus 3 Zügen, gleichbedeutend mit der Darstellung von Permutationen als Produkte von Transpositionen mit minimaler Faktorenzahl (vgl. Tabelle 1).

Aus der Tabelle 1 kann man sich leicht die Produkttafel für die Permutationen aus γ_3 zusammenstellen. Als eine bequeme Abkürzung der Bezeichnung der Permutationen verwenden wir dabei für alle Permutationen die Zyklenschreibweise (vgl. Zyklendiagramm!)

$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3),\ \downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)$

und für die identische Permutation

$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1).$

Beispiel für die Berechnung eines Produktes unter Benutzung der Transpositionsdarstellung:

a) $(1\ 2)(123)=(12)(12)(23)=(12)^2(23)=(23)$.

b) $(123)(132)=(13)(12)(12)(13)$

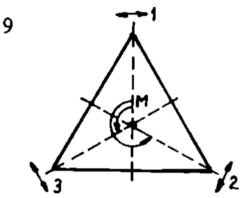
$=(13)(12)^2(13)=(13)^2=(1)$

(Also ist

$(123)^{-1}\quad=(132),\ (132)^{-1}=(123)$).

Wir erörtern nun noch einen Zusammenhang unseres Schiebespiels mit geometrischen Abbildungen. In dem Schiebespiel, wo unsere numerierten Felder die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind, bedeutet eine Minimalrunde eine Spiegelung an einer Mittellinie und die Hintereinanderfolge zweier Minimalrunden eine gewisse Drehung um den Dreiecksmittelpunkt. Wir haben damit folgende Entsprechung zwischen den Permutationen aus γ_3 und den sogenannten 6 Deckbewegungen eines gleichseitigen Dreiecks.

Bild 9



Deckbewegung	Permutation
Drehung D_1 um 0°	(1)
Drehung D_2 um 120°	(132)
Drehung D_3 um 240°	(123)
Spiegelung S_1	(23)
Spiegelung S_2	(13)
Spiegelung S_3	(12)

Der obigen Produkttafel für die Permutationen entspricht demzufolge eine Produkttafel für die Deckbewegungen eines gleichseitigen Dreiecks.

$\circ$	D_1	D_2	D_3	S_1	S_2	S_3
D_1	D_1	D_2	D_3	S_1	S_2	S_3
D_2	D_2	D_3	D_1	S_2	S_3	S_1
D_3	D_3	D_1	D_2	S_3	S_1	S_2
S_1	S_1	S_3	S_2	D_1	D_3	D_2
S_2	S_2	S_1	S_3	D_2	D_1	D_3
S_3	S_3	S_2	S_1	D_3	D_2	D_1

Produkttafel der Dreiecksdeckbewegungen

Für die Zusammensetzung der Deckbewegungen kann man aus deren Produkttafel somit ablesen:

Das Produkt zweier Drehungen ist wieder eine Drehung. Das Produkt von zwei Spiegelungen ist eine Drehung. Das Produkt von einer Drehung und einer Spiegelung ist eine Spiegelung. Noch mehr kann man aus der Produkttafel ablesen!

Die beiden oberen $3\cdot3$ Quadrate und die beiden unteren $3\cdot3$ Quadrate weisen unter Fortlassung der Buchstaben D und S folgende Anordnung auf:

```
1 2 3        1 3 2
2 3 1  bzw.  2 1 3
3 1 2        3 2 1.
```

In jeder Zeile und jeder Spalte steht hier wieder eine Anordnung – eine Permutation – der natürlichen Zahlen 1, 2, 3. Formal müßte man eigentlich zwischen Permutation $P = \downarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & j & \dots & x \end{pmatrix}$ und ihrer Ergebniszeile $i\,j \dots x$ unterscheiden. Beide legen sich aber gegenseitig eindeutig fest, so daß man vielfach zwischen Permutation (Abbildung) und Anordnung (Ergebniszeile) doch keinen Unterschied macht.

Solche Anordnungen in $n \times n$ Quadraten, wo in jeder Zeile und jeder Spalte jede der Zahlen 1, 2, ..., n genau einmal auftritt, nennt man *lateinische* Quadrate

(vgl. hierzu etwa das Buch: Kombinatorik, Deutscher Verlag der Wissenschaften (1969); 3. Aufl. (1973), des Verfassers).

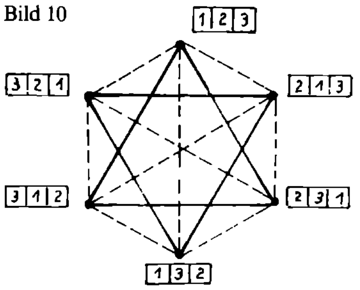
Wenn man bei einem lateinischen Quadrat Zeilen untereinander beliebig vertauscht, so entsteht immer wieder ein lateinisches Quadrat.

(Ein Gleiches gilt hinsichtlich der Spaltenvertauschung.) Ein lateinisches Quadrat der Ordnung n, d. h. mit $n \times n$ Feldern, bestimmt eine Menge $P, Q, \dots, Z$ von n Permutationen aus γ_n. (Jede Zeile des lateinischen Quadrates ist Ergebniszeile einer entsprechenden Permutation.) Eine Zeilenvertauschung im lateinischen Quadrat ändert nichts an der (ungeordneten) Menge der Permutationen. Welche n-elementigen Teilmengen aus γ_n kommen für die Bildung von lateinischen Quadraten der Ordnung n in Frage? Der Leser wird selbst mühelos die nachstehende Feststellung begründen können.

n Permutationen aus γ_n ergeben genau dann ein lateinisches Quadrat, wenn die Kartendiagramme dieser n Permutationen eine Überdeckung der $n \times n$ Felder bilden.

Eine beachtenswerte Bemerkung sei noch gemacht. Je zwei Kartendiagramme einer solchen Überdeckung sind dann notwendig *disjunkt*, d. h. sie überdecken kein Feld zweifach. (Denn jedes Kartendiagramm überdeckt n Felder, es müssen aber insgesamt n^2 Felder überdeckt werden!)

Bild 10



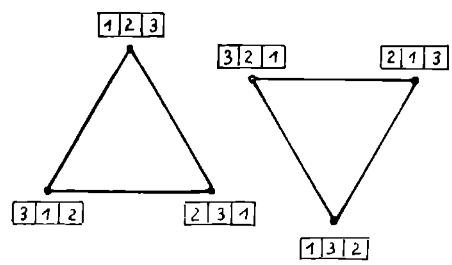
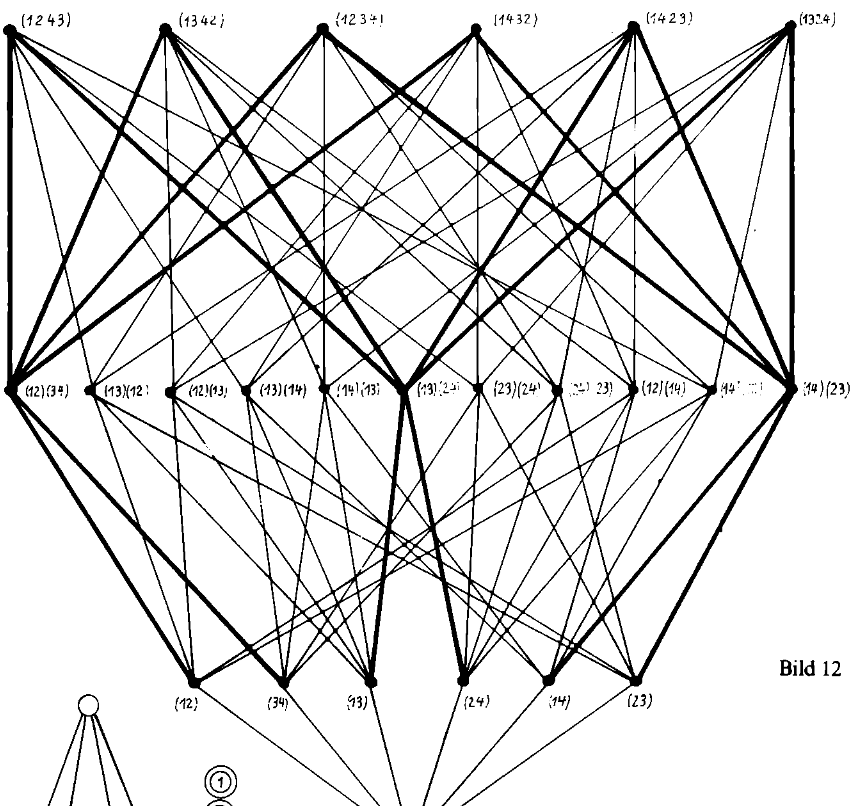


Bild 12



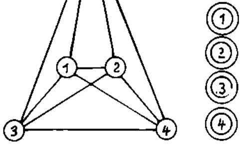


Bild 11

Für γ_3 zeigt Bild 10 den Disjunktheitsgraph. Zwei Permutationen sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie disjunkte Kartendiagramme haben.

In dem ersten Teil der Figur bedeuten die gestrichelten Kanten, daß die Permutationen keine disjunkte Kartendiagramme haben. Der gestrichelte Teilgraph ist also der Überschneidungsgraph der Permutationen in γ_3. Dieser Teilgraph ist hier mit dem in Bild 7 gezeigten Graphen gleichwertig. Aus dem Disjunktengraph folgt:

Es gibt nur zwei Klassen von lateinischen Quadraten der Ordnung 3. Dabei gehören zwei lateinische Quadrate genau dann zu ein und derselben Klasse, wenn sie sich durch Vertauschung von Zeilen ineinander überführen lassen.

Nun betrachten wir noch ein Schiebespiel, das auf 4er Permutationen führt.

Es gilt entsprechend folgende

Feststellung 4

In dem Schiebespiel des Bildes 11 wird durch eine Minimalrunde, bestehend aus 3 Zügen, aus der identischen Permutation $\downarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ eine Transposition als Endstellung erspielt, und jede Transposition aus γ_4 ist durch eine Minimalrunde erspielbar.

Eine Aufeinanderfolge von Minimalrunden ergibt auch hier alle möglichen Permutationen aus γ_4. (Hierzu vgl. man die Tabelle 2 und den Überführungsgraphen in Bild 12.)

J. Flachsmeyer

Die Tabelle 2 und Aufgaben zu diesem Beitrag veröffentlichen wir in Heft 5/78 (d. Red.).

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Kurt-R. Biermann

Akademie der Wissenschaften der DDR
Leiter der A.-v.-Humboldt-Forschungsstelle

▲1764▲ *Gauß* hat gelegentlich seine Aufzeichnungen verschlüsselt. So gab er in einer Aufstellung den Tag, an dem er den akademischen Grad eines Doktors erhielt, d. h. den 16. 7. 1799, durch die Zahl 8113 wieder. Das früheste Datum in jener Liste wird durch die Zahl 5343 kenntlich gemacht. Das war der Tag, an dem *Gauß* mit seinen Primzahlabzählungen begann; er war damals noch nicht 15 Jahre alt.

Welches Datum entspricht der Zahl 5343?

Wir konstruieren unendlich viele irrationale Punkte

In den folgenden Betrachtungen wollen wir von der Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen (die wir mit den gebrochenen Zahlen identifizieren können) ausgehen.

An einige Eigenschaften dieser Zahlen wollen wir uns zuerst erinnern:

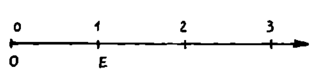
– Die nichtnegativen rationalen Zahlen liegen überall dicht, d. h., zwischen zwei beliebigen gebrochenen (nichtnegativen rationalen) Zahlen liegt stets eine weitere gebrochene (nichtnegative rationale) Zahl.

– Die Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen läßt sich so auf die Punkte eines Strahles abbilden, daß jeder Zahl genau ein Punkt des Strahles zugeordnet wird, wobei zwei voneinander verschiedenen nichtnegativen rationalen Zahlen zwei voneinander verschiedene Punkte entsprechen.

Auf die zuletzt genannte Eigenschaft wollen wir noch einmal kurz eingehen.

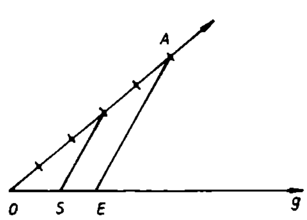
Hierzu betrachten wir einen Strahl g mit dem Anfangspunkt 0 und wählen auf ihm eine Einheitsstrecke $\bar{e} = \overline{0E}$. Durch n-maliges Abtragen der Einheitsstrecke von 0 aus gelingt es, jeder natürlichen Zahl n genau einen Punkt des Strahles zuzuordnen (Bild 1). Wie finden wir den Punkt, der z. B. der rationalen Zahl $\frac{3}{5}$ zugeordnet werden soll?

Bild 1



Wir konstruieren einen beliebigen von 0 ausgehenden weiteren Strahl h, wobei wir nur verlangen, daß er nicht in die durch 0 und E bestimmte Gerade fällt (Bild 2).

Bild 2



Dann wählen wir uns eine Strecke beliebiger Länge und tragen sie von 0 aus auf unserem zweiten Strahl fünfmal ab. Wir erhalten eine Strecke $\overline{0A}$. Jetzt verbinden wir A mit E und ziehen durch den dritten Teilpunkt die Parallele zu $\overline{EA}$, sie schneide $\overline{0E}$ in S. Diesen Punkt ordnen wir der Zahl $\frac{3}{5}$ zu. Aus dem beschriebenen Verfahren kann man entnehmen, wie für eine beliebige nichtnegative rationale Zahl $\frac{m}{n}$ der ihr zuzuordnende Punkt auf unserem Strahl zu finden ist.

Ist P der Punkt, der der nichtnegativen Zahl $\frac{m}{n}$ entspricht, so ist die Zahl $\frac{m}{n}$ gleichzeitig die Maßzahl der Strecke $\overline{0P}$ in bezug auf die gewählte Einheitsstrecke $\bar{e}$.

Die den rationalen Zahlen zugeordneten Punkte wollen wir rationale Punkte unseres Strahles nennen.

Daß die nichtnegativen rationalen Zahlen überall dicht liegen, besagt geometrisch, daß zwischen zwei rationalen Punkten (und ist ihr Abstand voneinander auch noch so klein) immer noch ein weiterer rationaler Punkt liegt.

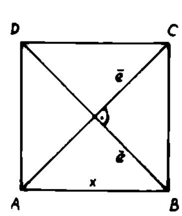
Vertrauen wir unserer Anschauung, so kämen wir zu dem Schluß, daß wir bei unserer Zuordnung alle Punkte des Strahles verbraucht haben, jede Strecke hätte dann eine rationale Maßzahl. Im Unterricht der 7. Klasse wird nun aber eine Strecke konstruiert, die keine rationale Maßzahl haben kann.

Zu dieser Strecke kommt man auf folgendem Wege:

Man konstruiert ein Quadrat $ABCD$, dessen Diagonalen die Maßzahl 2 haben (Bild 3). Wenn x die Maßzahl der Quadratseite $\overline{AB}$ bezeichnet, so muß für den Flächeninhalt des Quadrates gelten:

$$x^2 = 4\frac{1 \cdot 1}{2} = 2.$$

Bild 3



Wir wollen jetzt beweisen, daß x keine rationale Zahl sein kann, daß also die Strecke $\overline{AB}$ keine rationale Maßzahl besitzt. Hierzu nehmen wir an, daß x doch eine rationale Zahl ist. Weil wir dann $x = \frac{m}{n}$, m, n natürliche Zahlen, $n \neq 0$, setzen können, folgt $\frac{m^2}{n^2} = 2$ oder $m^2 = 2n^2$.

Wir benutzen jetzt, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig in Primfaktoren zerlegen läßt. So ist z. B. $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

Wenn eine beliebige natürliche Zahl p vorgelegt wird, so kann man sie daher stets in der Form $p = 2^k p'$ darstellen, wobei p' eine ungerade Zahl bezeichnet. (In unserem Beispiel ist $168 = 2^3 \cdot 21$.) Denken wir uns jetzt von den Zahlen m und n die Zweierpotenzen abgespalten. Es sei also $m = 2^k m'$, $n = 2^l n'$, wobei m', n' ungerade natürliche Zahlen bezeichnen. Dann erhalten wir

$$m^2 = 2^k 2^k m'^2 = 2^{2k} m'^2$$
$$n^2 = 2^l 2^l n'^2 = 2^{2l} n'^2$$
$$2n^2 = 2 \cdot 2^{2l} n'^2 = 2^{2l+1} n'^2.$$

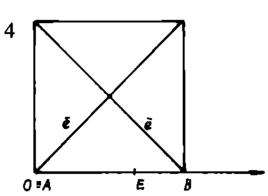
Aus unserer Annahme, daß $m^2 = 2n^2$ gilt, würde also folgen, daß ein und dieselbe natürliche Zahl N (nämlich $N = 2^{2k} m'^2$ und $N = 2^{l+1} n'^2$) den Faktor 2 einmal in gerader, zum anderen in ungerader Anzahl enthält. Dqs ist wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren nicht möglich.

Wir haben also bewiesen:

1. Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist.
2. Die Strecke $\overline{AB}$ des Quadrates $ABCD$ kann keine rationale Maßzahl haben.

Tragen wir jetzt die Strecke $\overline{AB}$ auf unserem Zahlenstrahl von 0 aus ab, so kann ihr Endpunkt nicht mit einem rationalen Punkt unseres Strahles zusammenfallen (Bild 4). Obwohl die rationalen Punkte auf unserem Strahl dicht liegen, blieb Platz für einen nichtrationalen (irrationalen) Punkt. Nach diesem Ergebnis wird man fragen, ob es wohl noch mehr irrationale Punkte auf unserem Strahl gibt, und, was damit gleichbedeutend ist, ob man noch mehr Strecken finden kann, die keine rationale Maßzahl haben.

Bild 4



Wir wollen jetzt beweisen:

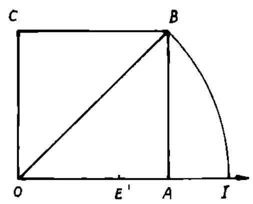
Zu jeder Strecke mit rationaler Maßzahl kann eine Strecke gefunden werden, die keine rationale Maßzahl hat, wobei zwei voneinander verschiedene Strecken mit rationalen Maßzahlen zwei voneinander verschiedenen Strecken entsprechen, die keine rationale Maßzahl besitzen.

Hierzu betrachten wir wieder unseren Strahl, auf dem wir uns alle rationalen Punkte eingezeichnet denken, dabei bezeichne $\overline{0E'} = \bar{e}'$ unsere Einheitsstrecke.

Wir greifen jetzt einen beliebigen rationalen Punkt A heraus, über $\overline{0A}$ konstruieren wir das Quadrat $0ABC$ (Bild 5). Nun zeigen wir:

Wie wir auch den rationalen Punkt A wählen, stets kann der Strecke $\overline{0B}$ keine rationale Maßzahl zugeordnet werden, tragen wir sie also von 0 aus auf unserem Strahl $0E'$ ab, so muß ihr Endpunkt einen irrationalen Punkt I treffen. Zum Beweis nehmen wir an, die Strecke $0B$ hat doch eine rationale Maßzahl, dann können wir sie als rationales Vielfaches der Strecke $\overline{0E'} = \bar{e}'$ darstellen.

Bild 5



Wir können also schreiben $\overline{0B} = \frac{c}{d}\bar{e}'$, c, d natürliche Zahlen, $d \neq 0$. Weil nach Voraussetzung A ein rationaler Punkt ist, gilt auch $\overline{0A} = \frac{p}{q}\bar{e}'$, p, q natürliche Zahlen, $q \neq 0$. Dann ist aber auch $\overline{0A} = \frac{pd}{qd}\bar{e}'$, $\overline{0B} = \frac{cq}{dq}\bar{e}'$.

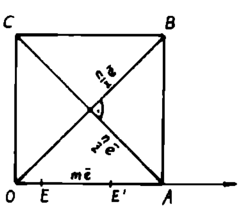
Wir teilen jetzt die Strecke $\overline{0E'}$ in qd. Teile und wähle

$$\bar{e} = \overline{0E} = \frac{1}{qd}\overline{0E'} \text{ als neue Einheit.}$$

Dann ist $\overline{0A} = \frac{pd}{qd}\bar{e}' = pd\bar{e}$, $\overline{0B} = \frac{cq}{dq}\bar{e}' = cq\bar{e}$.

In bezug auf unsere neue Einheit $\overline{0E} = \bar{e}$ haben unsere Strecken $\overline{0A}$ und $\overline{0B}$ dann sogar natürliche Maßzahlen.

Bild 6



Wir können daher $pd = m$, $cq = n$ setzen (Bild 6). Für den Flächeninhalt unseres Quadrates muß dann

$$m^2 = 4 \cdot \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}}{2}, \text{ also } m^2 = \frac{n^2}{2}$$

oder $\frac{m^2}{n^2} = 2$ gelten.

Aus unserer Annahme, daß die Strecke $\overline{0B}$ eine rationale Maßzahl hat, kommen wir zu dem Schluß, daß es eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ gibt, deren Quadrat 2 ist.

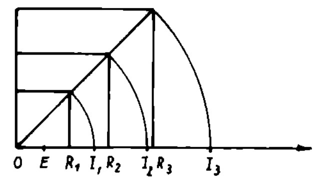
Wir haben aber schon bewiesen, daß es eine rationale Zahl mit dieser Eigenschaft nicht geben kann. Unsere Annahme, daß die Strecke $\overline{0B}$ eine rationale Maßzahl hat, ist also falsch.

Damit haben wir gefunden:

Es gibt unendlich viele Strecken, die keine rationale Maßzahl haben.

Für die Punkte unseres Strahles bedeutet das: Auf dem Strahl gibt es unendlich viele irrationale Punkte. In Bild 7 sind für drei rationale Punkte R_1, R_2, R_3 die ihnen entsprechenden irrationalen Punkte I_1, I_2, I_3 eingezeichnet. Hat man also nur die Menge der rationalen Zahlen zur Verfügung, so haben unendlich viele Strecken keine Maßzahl.

Bild 7



Das ist einer der Gründe, warum der Bereich der rationalen Zahlen zu einem ihn umfassenden Bereich erweitert wird. Diesen neuen Bereich, den man in der 9. Klasse näher kennenlernt, bezeichnet man als den Bereich der reellen Zahlen. Über diesen Bereich R soll hier nur gesagt werden:

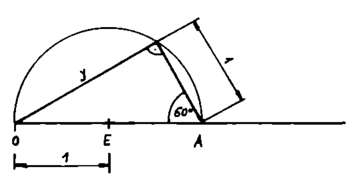
Legt man eine Einheitsstrecke zugrunde, dann kann jeder Strecke genau eine nichtnegative Zahl aus R (ihre Maßzahl) zugeordnet werden, wobei zwei voneinander verschiedenen Strecken verschiedene Zahlen entsprechen, und umgekehrt entspricht jeder nichtnegativen Zahl aus R genau eine Strecke, deren Maßzahl gerade diese Zahl ist. Aus unserem oben erhaltenen Ergebnis können wir folgern, daß dieser Bereich unendlich viele nichtrationale (irrationale) Zahlen besitzen muß.

Jetzt erhebt sich die Frage:

Haben wir bei unserem Verfahren alle irrationalen Punkte erfaßt, oder gibt es Strecken, denen zusätzlich zu den von uns gefundenen keine rationale Maßzahl zugeordnet werden kann? Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, löse der Leser folgende Aufgabe:

Zeichne einem Halbkreis mit dem Radius Eins ein rechtwinkliges Dreieck ein, dessen eine Kathete die Maßzahl Eins hat (Bild 8).

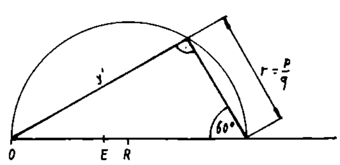
Bild 8



a) Beweise, daß die Maßzahl y der Kathete $\overline{0B}$ keine rationale Zahl sein kann!

Hinweis: Nimm an, daß y doch rational ist, $y = \frac{m}{n}$, m, n von Null verschiedene natürliche Zahlen! Dann muß (wegen $y^2 = 3$) $m^2 = 3n^2$ sein. Spalte von den Zahlen m und n die Dreierpotenzen ab, und zeige, daß die zuletzt aufgestellte Gleichung nicht durch natürliche Zahlen erfüllt werden kann!

Bild 9



Betrachte jetzt einen beliebigen Halbkreis mit der einzigen Bedingung, daß sein Radius eine rationale Maßzahl r hat! Zeichne ihm ein rechtwinkliges Dreieck ein, dessen eine Kathete die Maßzahl r hat (Bild 9)! Beweise, daß die Maßzahl y' der anderen Kathete irrational ist!

Lösungsskizze: Angenommen $y' = \frac{m'}{n'}$, m', n' von Null verschiedene natürliche Zahlen. Dann folgt

$$\left(\frac{m'}{n'}\right)^2 = 3\left(\frac{p}{q}\right)^2, \; (m, q)^2 = 3(pn')^2.$$

Daß die letzte Gleichung nicht durch natürliche Zahlen erfüllt werden kann, hast du schon gezeigt.

Der Leser hat hiermit gefunden, daß auch auf diesem Wege unendlich viele Strecken erhalten werden können, die keine rationale Maßzahl besitzen. Nun könnte es aber sein, daß die im ersten Verfahren erhaltenen unendlich vielen irrationalen Punkte unserer Zahlengeraden mit den unendlich vielen irrationalen Punkten, die das zweite Verfahren liefert, übereinstimmen. Daher wollen wir beweisen: Jede Strecke mit einer irrationalen Maßzahl, die uns das erste Verfahren liefert, ist von jeder Strecke mit irrationaler Maßzahl, die das zweite Verfahren ergibt, verschieden!

Wir bezeichnen die Menge der im ersten Verfahren konstruierten Strecken, die keine rationale Maßzahl haben, mit $\mathfrak{A}$, die Menge der Strecken, die nach dem zweiten Verfahren keine rationale Maßzahl haben, mit $\mathfrak{B}$.

Jetzt nehmen wir an, daß $\overline{0A}$ eine Strecke ist, die sowohl zur Menge $\mathfrak{A}$ als auch zur Menge $\mathfrak{B}$ gehört, j bezeichnet ihre Maßzahl. Dann muß auf Grund unserer Konstruktionsverfahren

$$j^2 = 2r^2 \text{ und } j^2 = 3r'^2 \text{ gelten,}$$

wobei r, r' von Null verschiedene rationale Zahlen bezeichnet. Daraus folgt

$$2r^2 = 3r'^2.$$

Nun setzen wir $r = \frac{p}{q}$, $r' = \frac{s}{t}$, p, q, s, t von Null verschiedene natürliche Zahlen. Dann folgt

$2\frac{p^2}{q^2} = 3\frac{s^2}{t^2}$, also $2(pt)^2 = 3(sq)^2$, oder, wenn wir $pt = m$, $sq = n$ setzen,

$$2m^2 = 3n^2. \qquad (*)$$

Nun spalten wir von m und n die Zweier- und Dreierpotenzen ab, $m = 2^j 3^k m'$, $n = 2^c 3^d n'$.

Jetzt setze der Leser die für m und n erhaltenen Ausdrücke in (*) ein und weise nach, daß es keine von Null verschiedenen natürlichen Zahlen m und n geben kann, die die Gleichung (*) erfüllen. Die Annahme, daß es eine Strecke mit irrationaler Maßzahl gibt, die sowohl zur Menge $\mathfrak{A}$ als auch zur Menge $\mathfrak{B}$ gehört, ist damit zum Widerspruch geführt.

Ob die Maßzahlen der Strecken, die zu den Mengen $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ gehören, jetzt alle irrationale Zahlen erschöpfen?

Wir werden zeigen, daß man durch einfache Konstruktionsverfahren wieder zu unendlich vielen irrationalen Zahlen kommen kann, dann wieder zu unendlich vielen irrationalen Zahlen und wieder und noch einmal und das so oft wir wollen.

Dann werden wir beweisen, daß auch nicht zwei von allen diesen irrationalen Zahlen gleich sind!

Betrachten wir noch einmal die bei unserem ersten Verfahren zuerst gefundene irrationale Zahl x. Dann ist jede Zahl $rx=x'$, r rational, $r\neq 0$, irrational.

Denn aus der Annahme, daß rx rational ist, also $rx=\frac{m}{n}$, folgt, daß $x=\frac{m}{nr}$ rational ist, und das widerspricht unserer Voraussetzung über x.

Ist $r_1\neq r_2$, so ist auch $r_1x\neq r_2x$, denn wäre $r_1x=r_2x$, so erhielten wir $(r_1-r_2)x=0$. Weil $x\neq 0$ ist, muß $r_1-r_2=0$ sein, also $r_1=r_2$ entgegen unserer Annahme.

Denken wir also in rx für r alle von Null verschiedenen rationalen Zahlen eingesetzt, so erhalten wir unendlich viele irrationale Zahlen. Für $r>0$ sind das gerade die Zahlen, die unser erstes Verfahren lieferte (siehe Bild 7).

Bezeichnet y die beim zweiten Verfahren zuerst konstruierte irrationale Zahl, so ist auch jede Zahl $y'=ry$, r rational, $r\neq 0$, irrational, und das sind wieder unendlich viele. Für $r>0$ erhalten wir die beim zweiten Verfahren konstruierten Zahlen (siehe Bild 8 und 9).

Wir wissen schon, daß die Beziehung $r_1x=r_2y$ dann und nur dann gelten kann, wenn $r_1=r_2=0$ ist (denn im anderen Falle gäbe es eine Strecke, die sowohl zur Menge $\mathfrak{A}$ als auch zur Menge $\mathfrak{B}$ gehört). Ausgehend von diesen Zahlen konstruieren wir jetzt leicht weitere irrationale Zahlen. Wählen wir z. B. eine von Null verschiedene rationale Zahl a_1 und betrachten alle Zahlen a_1+rx, $r\neq 0$, r rational, so ist jede dieser Zahlen irrational. Denn aus der Annahme, daß $a_1+rx=r'$ rational ist, folgt, daß $x=\frac{r'-a_1}{r}$ rational ist.

Beweise: Wenn $r_1\neq r_2$, r_1, r_2 rational, so ist $a_1+r_1x\neq a_1+r_2x$.

Denken wir also in a_1+rx für r alle von Null verschiedenen rationalen Zahlen eingesetzt, so erhalten wir wieder unendlich viele irrationale Zahlen, und jede dieser Zahlen ist verschieden von jeder der Zahlen rx!

Gäbe es nämlich von Null verschiedene rationale Zahlen r_1, r_2, so daß $a_1+r_1x=r_2x$ ist, so würde $a_1=(r_2-r_1)x$ folgen. Weil $a_1\neq 0$ und $x\neq 0$ ist, muß dann $r_2\neq r_1$, also $x=\frac{a_1}{r_2-r_1}$ sein. Weil nach Voraussetzung x irrational ist, kann die letzte Beziehung nicht gelten.

Wählen wir jetzt eine von Null und a_1 verschiedene rationale Zahl a_2 und denken in a_2+rx für r alle von Null verschiedenen rationalen Zahlen eingesetzt, so bekommen wir wieder unendlich viele irrationale Zahlen, und jede dieser irrationalen Zahlen ist verschieden von jeder der zuvor konstruierten unendlich vielen irrationalen Zahlen a_1+rx! Der Leser beweise die zuletzt aufgestellte Behauptung.

Wählen wir jetzt eine von Null und a_1 und a_2 verschiedene rationale Zahl a_3, so erhalten wir wieder, wenn wir in a_3+rx, $r\neq 0$, r rational, alle rationalen Zahlen eingesetzt denken, unendlich viele irrationale Zahlen, die von den bisher konstruierten verschieden sind. So kann man fortfahren.

Ausgehend von unserer beim zweiten Verfahren zuerst konstruierten irrationalen Zahl y kann man ebenso unendlich viele irrationale Zahlen a_1+ry ($a_1\neq 0$, $r\neq 0$, a_1; r rational, a_1 fest gewählt), dann unendlich viele irrationale Zahlen a_2+ry ($a_1\neq a_2$, $a_2\neq 0$, $r\neq 0$, a_2; r rational, a_2 fest gewählt) konstruieren und so fort. Dabei ist jede der Zahlen $a_\nu+r_\nu y$ von jeder der Zahlen $a_\mu+r_\mu x$ verschieden!

Denn aus der Annahme, daß es von Null verschiedene rationale Zahlen a_1, a_2, r_1, r_2 gibt, für die $a_1+r_1x=a_2+r_2y$ ist, folgt

$a_1-a_2=r_2y-r_1x$,

$(a_1-a_2)^2=r_2{}^2y^2+r_1{}^2x^2-2r_2r_1yx$.

Beachten wir, daß $x^2=2$ und $y^2=3$ ist, so folgt $yx=b$, b rational, und hieraus

$$yx\cdot x=bx,\ y=\frac{b}{2}x.$$

Nun ist $\frac{b}{2}x=x'$ eine auf Grund des ersten Verfahrens gewonnene irrationale Zahl. Wir haben aber schon bewiesen, daß jede beim ersten Verfahren konstruierte irrationale Zahl verschieden von jeder beim zweiten Verfahren erhaltenen irrationalen Zahl ist. Die Beziehung $y=x'$ liefert uns daher den gewünschten Widerspruch.

Daß es uns gelingen könnte, so viele irrationale Punkte auf dem Zahlenstrahl zu finden, hätte der Leser am Anfang unserer Betrachtungen wohl nicht vermutet. Das bisherige Ergebnis übersteigt ja auch unser anschauliches Vorstellungsvermögen. Greifen wir aber eine einzelne irrationale Zahl aus den von uns entdeckten heraus, so können wir den ihr entsprechenden irrationalen Punkt auf der Zahlengeraden leicht finden. (Konstruiere die zu $\frac{1}{3}+2x$, $3+\frac{3}{5}y$ gehörigen irrationalen Punkte!) Stellen wir uns jetzt die Frage, ob die durch unsere Konstruktionen gefundenen irrationalen Punkte des Zahlenstrahles alle irrationalen Punkte erfassen, so werden wir nach den bisherigen Ergebnissen gewiß mit der Antwort zögern.

Wir können tatsächlich, ausgehend von einem ähnlichen Verfahren, das zu den Zahlen x und y führte, eine weitere irrationale Zahl z finden und mit deren Hilfe sofort wieder unendlich viele irrationalen Zahlen konstruieren, die von allen bisher gefundenen verschieden sind. Der Leser versuche es!

Doch wie wir auch unsere weiteren Konstruktionsverfahren anlegen, eine irrationale Zahl erfassen wir bei diesem Vorgehen sicher nicht, es ist die uns aus der Schule bekannte irrationale Zahl π. Diese Behauptung wollen wir abschließend diskutieren.

Wir wissen schon, daß wir jede Strecke mit der irrationalen Maßzahl $a+bx$ bzw. $a+by$ (oder auch $a+bz$) konstruieren können, und zu dieser Konstruktion reichen die Zeichenhilfsmittel Zirkel und Lineal aus.

Wäre nun π eine irrationale Zahl, die unsere bisherigen Konstruktionsverfahren liefern, so gäbe es rationale Zahlen a_1 und b_1 oder a_1' und b_1' oder a_1'' und b_1'', so daß entweder $\pi=a_1+b_1x$ oder $\pi=a_1'+b_1'x$ (oder auch $\pi=a_1''+b_1''z$) ist. Nehmen wir an, daß die erste Beziehung gelte. Dann könnten wir, wieder nur unter Benutzung von Zirkel und Lineal, ein Rechteck konstruieren, daß den Flächeninhalt $\pi=a_1+b_1x$ hat (siehe Bild 10). Durch eine einfache Konstruktion (siehe Bild 11) gelänge es, ein dem Rechteck *ABCD* flächengleiches Quadrat *DEFG* zu konstruieren, und wieder kämen wir mit den Zeichenhilfsmitteln Zirkel und Lineal aus.

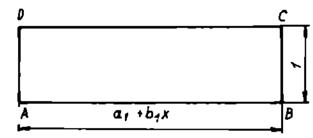


Bild 10

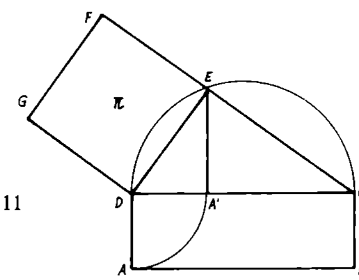


Bild 11

Unter der Annahme, daß die Strecke mit der nichtrationalen Maßzahl π eine der bereits oben erhaltenen Strecken ist, die keine rationale Maßzahl besitzen, kommen wir zu dem Ergebnis:

Man kann allein mit Benutzung der Zeichengeräte Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des Einheitskreises ist.

Der erst mit den Anfangsgründen der Mathematik vertraute Junge Mathematiker wird sich an diesem Ergebnis nicht stoßen. Daher sollen hier einige Worte zu dem berühmten mathematischen Problem, auf das wir hier gestoßen sind, gesagt werden.

Fast 2000 Jahre hindurch hat man sich um die Lösung folgender Aufgabe bemüht:

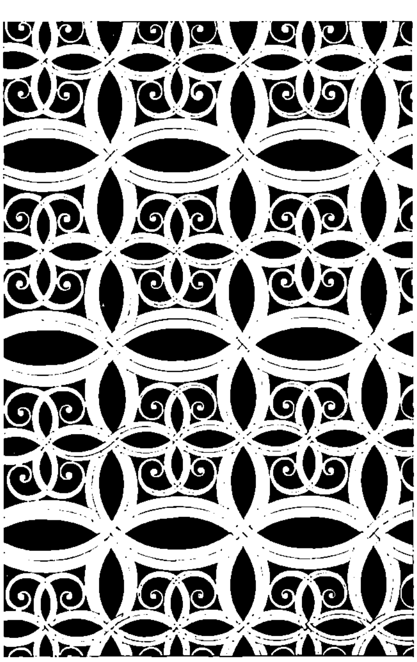
Zeichne nur unter Benutzung der Hilfsmittel Zirkel und Lineal ein Quadrat, das denselben Flächeninhalt hat wie der Einheitskreis!

Es handelt sich hier um das sogenannte Problem der „Quadratur des Kreises". So manch

einer hat diese Aufgabe zu lösen versucht, doch alle Bemühungen waren vergeblich. Selbst in der Umgangssprache fand dieses Problem seinen Niederschlag. So sagt man oft von einem, der sich ein nicht erreichbares Ziel gestellt hat: Der will die Quadratur des Kreises finden! Erst am Ende des vorigen Jahrhunderts konnte der Mathematiker Lindemann (1852 bis 1939) einen sehr allgemeinen Satz über die Zahl π beweisen, der als Spezialfall das folgende Ergebnis enthält:
Es ist nicht möglich, nur unter Benutzung von Zirkel und Lineal ein Quadrat zu konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des Einheitskreises ist.
Nun zurück zu unserer Fragestellung:
Aus der Annahme, daß die irrationale Zahl π Maßzahl einer Strecke unserer oben konstruierten Strecken ist, folgt, daß wir, ausgehend von der Einheitsstrecke, nur unter Benutzung von Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren können, dessen Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des Einheitskreises ist. Weil das aber nicht möglich ist, muß unsere Annahme falsch sein. Unsere Konstruktionsverfahren lieferten uns zwar unendlich viele irrationale Punkte auf unserem Zahlenstrahl, die Menge aller irrationalen Punkte haben wir aber nicht erschöpft. Durch die Untersuchungen von Georg Cantor (1845 bis 1918), dem Begründer der Mengenlehre, wurde deutlich, daß die oben konstruierte Teilmenge von irrationalen Zahlen im Vergleich zur Menge aller irrationalen Zahlen „arm" ist.

Gisela Vetter

Ornament *R. Boyd, New York*



Ein rationalisiertes Sieb zum Feststellen von Primzahlen
Teil I

1. Das Sieb des Eratosthenes

In dem vielseitigen Werk von C. F. Gauß nimmt die Zahlentheorie einen hervorragenden Platz ein, in deren Rahmen er die Verteilung der Primzahlen zu einem Hauptproblem erklärte. Im Unterricht kommt dies ziemlich kurz weg. Wenn die Primzahlen eingeführt werden, erfolgt ein Hinweis auf Eratosthenes (um 200 v. d. Z. in Alexandria), der durch sein „Sieb" eine Methode zur Feststellung aller Primzahlen im Zahlenraum bis R (R eine natürliche Zahl) angab.
Welche Schritte muß man gehen, um nach diesem „Sieb des Eratosthenes" im Zahlenraum, sagen wir bis $R=100$, die Primzahlen von den Faktor-Zahlen (oder kurz F-Zahlen) abzusondern, d. h., von solchen Zahlen, die man als Produkt zweier oder mehrerer Prim-Faktoren auffassen kann und die landläufig als „teilbare Zahlen" bezeichnet werden?

1. Man schreibt die natürlichen Zahlen des Zahlenraumes bis $R=100$ nach der Größe geordnet nieder: 1 2 3 ... 100.
2. Man streicht alle Vielfachen von 2, also 4 6 ... 100.
3. Man streicht alle Vielfachen der nächstgrößeren stehengebliebenen Zahl, nämlich der 3, soweit sie noch nicht gestrichen sind, also: 9 15 21 ... 99.
4. Man streicht alle Vielfachen der nunmehr nächstgrößeren stehengebliebenen Zahl, nämlich der 5, soweit sie noch nicht gestrichen sind, also: 25 35 55 65 85 95.
5. Mit der nunmehr nächstgrößeren stehengebliebenen Zahl verfahren wir entsprechend, nämlich mit der Zahl 7; also streichen wir: 49 77 91.

Fühlten wir uns jetzt versucht, diese Prozedur an der nunmehr nächstgrößeren stehengebliebenen Zahl, nämlich 11, vorzunehmen, so müßten wir zu unserer Überraschung feststellen, daß alle ihre Vielfachen im Zahlenraum bis $R=100$ (22 33 44 ... 99) bereits gestrichen sind, und zwar als Vielfache der kleineren Zahlen 2 3 5 und 7 (vergl. Tafel 1!). Jede in Tafel 1 gestrichene Zahl ist eine F-Zahl; unter ihr ist der kleinste ihrer Primfaktoren angegeben, als dessen Vielfaches die Zahl gestrichen wurde (z. B. wurde $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ als Vielfaches von 2 gestrichen). Jede stehengebliebene Zahl (außer 1, auf deren Sonderstellung hier nicht eingegangen wird), ist eine Primzahl, nämlich:
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97,
fünfundzwanzig an der Zahl.

An Hand des Siebvorganges nach Eratosthenes machen wir uns einige Zahlenbeziehungen bewußt und fassen einige Begriffe genauer:

1. Die Menge der natürlichen Zahlen zerfällt in Primzahlen (hier als p-Zahlen bezeichnet) und Faktorenzahlen (hier als F-Zahlen bezeichnet).
2. Was im Sieb des Eratosthenes als „streichen" bezeichnet wird, heißt hier „löschen". Indem man eine Zahl löscht, weist man ihren Charakter als Vielfaches einer Primzahl p und damit als F-Zahl nach. Die betreffende Primzahl p heißt dann „Löschzahl".
3. Hiernach bezeichnen wir in dem oben angeführten Beispiel die Zahlen 2 3 5 und 7 als Löschzahlen für den Zahlenraum bis $R=100$. Löschzahlen sind immer Primzahlen. Wir sehen nun genauer an, wo die löschende Wirkung jeder einzelnen Primzahl p beginnt:

Löschzahl p	2	3	5	7
Kleinste durch p gelöschte Zahl (p^2!)	4	9	25	49

Die kleinste Zahl, bei der die löschende Wirkung einer Primzahl p wirksam wird, ist ihre zweite Potenz, also p^2. (1)
Zum Beweis betrachten wir ein Vielfaches px von p mit $px < p^2$. Aus $px < p^2$ folgt jedoch $x < p$, und px wurde bereits gelöscht als Vielfaches von x, falls x eine Primzahl ist, bzw. als Vielfaches seines kleinsten Primfaktors, falls x keine Primzahl ist. Daraus erklärt sich, daß bei der Anwendung des Siebverfahrens auf den Zahlenraum bis 100 die Zahl 11 als Löschzahl nicht mehr auftritt, denn ihre löschende Wirkung beginnt nach (1) erst bei $11^2 = 121$.
Aus (1) folgt auch:
Die Löschzahlen im Zahlenraum bis R sind genau diejenigen Primzahlen, die nicht größer sind als $\sqrt{R}$. (2)
Beweis: Die löschende Wirkung einer Primzahl $p > \sqrt{R}$ beginnt nach (1) erst bei $p^2 > R$.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
			2		2		2	3	2		2		2	3	2		2		2
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
3	2		2	5	2	3	2		2		2	3	2	5	2		2	3	2
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
	2		2	3	2		2	7	2	3	2		2	5	2	3	2		2
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
	2	3	2	5	2		2	3	2		2		2	3	2	7	2		2
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
3	2		2	5	2	3	2		2	7	2	3	2	5	2		2	3	2

Tafel 1: Der Zahlenraum bis $R = 100$ nach dem Streichvorgang laut „Sieb des Eratosthenes"

2. Die Rolle der natürlichen Zahl 6

Die Feststellung von Primzahlen nach dem Siebverfahren wird um so komplizierter, je größer wir R wählen. Dies ist hauptsächlich darauf zurückzuführen, daß die Anzahl der Löschzahlen immer größer wird. Waren es bei $R = 100$ vier (2 3 5 7), so sind es bei $R = 1000$ schon 11 (2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31) und bei $R = 10000$ fünfundzwanzig (... 97).

Die nachfolgende Aussage (3) ermöglicht uns, bei den weiteren Untersuchungen die Löschzahlen 2 und 3 aus dem Spiele zu lassen und von vornherein aus dem Sieb zu werfen. Es gilt:

Jede Primzahl $p \geqq 5$ ist auf dem Zahlenstrahl einem n-fachen der natürlichen Zahl 6 benachbart (n eine natürliche Zahl). (3)

Beweis: Eine Primzahl sei $p \geqq 5$. Wo sie auf dem Zahlenstrahl liegt, bietet er folgendes Bild: ... $p-1$ p $p+1$ ...

Unter drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen befindet sich genau eine, die ein Vielfaches von 3 ist. Da p als Primzahl nicht durch 3 teilbar ist, kommt hierfür entweder $p-1$ oder $p+1$ in Frage. Als Primzahl ist p eine ungerade Zahl, ihre Nachbarzahlen $p-1$ und $p+1$ müssen demnach gerade Zahlen sein. Eine von ihnen ist, wie oben bewiesen, ein Vielfaches von 3; dieses ist demnach auch Vielfaches von 6, womit unsere Behauptung (3) bewiesen ist.

Da bei unseren weiteren Untersuchungen die Vielfachen von 6 eine gewichtige Rolle spielen werden, so geben wir ihnen eine Bezeichnung, nämlich *S-Zahlen (Symbol S)*.

Ihre Strukturformel lautet ganz einfach $S = 6n$ (n eine natürliche Zahl). (4)

Hier könnte die Frage aufgeworfen werden, ob eigentlich $p-1$ oder $p+1$ die S-Zahl ist. Nun kann das bald die eine, bald die andere sein, niemals beide zugleich. Angenommen, $p-1$ sei S-Zahl: dann gilt $p-1=6n$ und $p=6n+1$. Hier ist die Primzahl p um eine Einheit größer als die benachbarte S-Zahl, liegt also oberhalb von ihr und wird deshalb mit p_0 bezeichnet. Ihre Strukturformel lautet $p_0 = 6n+1$. (5)

Entsprechend läßt sich für die unterhalb der S-Zahl gelegene Primzahl herleiten: $p_u = 6n-1$. (6)

Die genaue Antwort auf die gestellte Frage haben wir eigentlich noch nicht gegeben, mindestens noch nicht begründet. Hierfür genügt ein Blick auf den Zahlenstrahl, am besten im Zahlenraum bis $R = 20$. Hier sind allen S-Zahlen nach unten und nach oben Primzahlen angelagert (... 5 6 7 ... 11 12 13 ... 17 18 19). An der Gruppierung ... 11 12 13 ... z. B. ersehen wir, daß sich für die Primzahl $p = 11$ die benachbarte S-Zahl durch $p+1$, für die Primzahl $p = 13$ durch $p-1$ darstellen läßt.

Hätten die Menschen in einem Entwicklungsstadium, wo sie noch nicht über die Zahl 20 hinaussahen, bereits „Primzahlforschung" betrieben, so wären sie in Versuchung gekommen, unseren Satz (3) umzukehren: Ist eine Zahl einer S-Zahl benachbart, dann ist sie eine Primzahl. Bei Weiterschreiten auf dem Zahlenstrahl hätte aber die Gruppierung ... 23 24 25 ... diese Umkehrung widerlegt. Dabei ist der S-Zahl 24 immerhin noch eine Primzahl benachbart; die S-Zahl 120 hat aber sowohl nach unten als auch nach oben als Nachbarn nur F-Zahlen.

Wir können also von unserem Satz (3) keine Umkehrung bilden, können aber seine Aussage noch treffender für unseren Zweck formulieren:

Nur bei Nachbarzahlen der S-Zahlen besteht die Möglichkeit (M), daß sie sich als Primzahlen erweisen. (7)

Diese Nachbarzahlen bezeichnen wir als *M*-Zahlen, und zwar als *Mu*-Zahlen, wenn sie unterhalb der S-Zahl liegen, als *Mo*-Zahlen, wenn sie oberhalb liegen.

Ordnet man die natürlichen Zahlen so an, wie dies in Tafel 2 für den Zahlenraum bis $R = 102$ vorgenommen worden ist, daß nämlich je sechs der Größe nach untereinander gesetzt werden, so enthält die erste waagerecht liegende Säule nur sämtliche *Mo*-Zahlen (*Mo*-Säule), die fünfte sämtliche *Mu*-Zahlen (*Mu*-Säule) und die sechste nur sämtliche S-Zahlen (S-Säule). Aber auch die zweite, die dritte und die vierte Säule sind in Hinsicht auf die Teilbarkeit durch 3 ähnliche Kategorien (g_u-Säule, D-Säule, g_o-Säule).

3. Die sechs Restklassen der natürlichen Zahlen bei Division durch 6

Wie aus den Erläuterungen zu Tafel 2 ersichtlich, zerfällt die Menge der natürlichen Zahlen in Hinsicht auf ihre Teilbarkeit durch 6 in sechs Kategorien, die man *Restklassen* nennt, da alle Zahlen einer solchen Restklasse bei Division durch 6 denselben Rest lassen. Zahlen aus der Restklasse „0" sind demnach die durch 6 teilbaren Zahlen, d. h. Zahlen der Gestalt $6n$ (n natürliche Zahl), wir nannten sie S-Zahlen.

Wir wissen schon, daß Primzahlen $\geqq 5$ nur unter den Nachbarn von S-Zahlen zu finden sind, d. h. bei Division durch 6 den Rest 1 (*Mo*-Zahlen) oder den Rest 5 (*Mu*-Zahlen) lassen. Sie haben die Gestalt $6n+1$ bzw. $6n+5$ (n natürliche Zahl). Die D-Zahlen sind solche der Form $6n+3$, d. h. ungerade, durch 3 teilbare Zahlen; ihre Nachbarzahlen g_u bzw. g_o sind dann gerade Zahlen der Gestalt $6n+2$ bzw. $6n+4$ (n natürliche Zahl).

Um rasch bestimmen zu können, welcher Restklasse eine natürliche Zahl angehört, kann man folgenden Satz benutzen:

Eine Zahl läßt bei Division durch 3 denselben Rest wie ihre Quersumme. (8)

F. Franke

(Fortsetzung und Schluß in Heft 5/78; d. Red.)

Tafel 2: Die sechs Restklassen der natürlichen Zahlen im Zahlenraum bis $R = 102$ bei Division durch 6, in waagerecht liegende Säulen gruppiert

Mo	(1)	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97
g_u	2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98
D	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99
g_o	4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100
Mu	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101
S	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102

Gute Grundkenntnisse gefragt

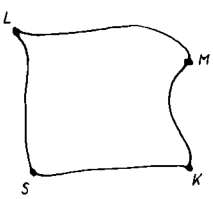
Klasse 5

▲1▲ Versuche, bei den folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen für die Variablen solche Zahlen einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen!

a) $x+x=0$ d) $0:a>0$
b) $y+0=y$ e) $r-0=r$
c) $z\cdot 0=0$ f) $x\cdot x>x$

Untersuche jeweils, ob es auch mehrere Lösungen gibt!

▲2▲ Von Lichtendorf nach Kummersbach kann man mit dem Autobus über Müllerwitz oder über Siebenberg fahren. In beiden Fällen muß man umsteigen. Über Müllerwitz sind es 35 km, über Siebenberg 29 km. Hans möchte möglichst schnell von Lichtendorf nach Kummersbach kommen.



Könntest du ihm empfehlen, welche Buslinie er wählen soll?

▲3▲ Zeichne Rechtecke mit den folgenden Abmessungen der Seiten a und b; bestimme ihren Umfang und ihren Flächeninhalt!

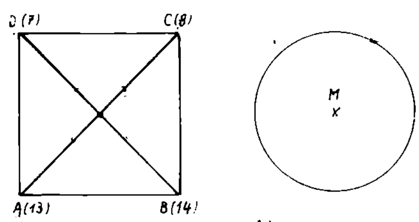
a (in cm)	5	5	5	11	10
b (in cm)	1	3	5	1	2
a (in cm)	8	6	12	36	18
b (in cm)	4	6	3	1	3

Entscheide dann, ob Steffen recht hat, wenn er behauptet:

a) „Zwei Rechtecke mit gleichem Umfang haben stets den gleichen Flächeninhalt."
b) „Zwei Rechtecke mit gleichem Flächeninhalt haben stets den gleichen Umfang."
c) „Vergrößert man den Umfang eines Rechtecks, so wächst stets auch sein Flächeninhalt."
d) „Vergrößert man den Flächeninhalt eines Rechtecks, so wächst stets auch sein Umfang."
e) „Jedes Rechteck mit einem Flächeninhalt von $36\,\mathrm{cm}^2$ hat einen Umfang von mindestens 24 cm."
f) „Zu jedem Rechteck läßt sich ein zweites angeben, das den gleichen Flächeninhalt, aber einen größeren Umfang als das erste besitzt."

▲4▲ a) Welcher der Dezimalbrüche 3,8; 3,7; 4,1; 4,3 liegt am dichtesten bei 4?
b) Kannst du einen Dezimalbruch nennen, der noch näher bei 4 liegt als die gegebenen?

▲5▲ Überlege! Wie groß kannst du jeweils den Drehwinkel wählen, damit die Figur bei Drehung um M wieder auf sich selbst abgebildet wird?



a) b)

Überprüfe deine Antwort mit Transparentpapier!

▲6▲ Gegeben sei eine Gerade g. Zeichne eine Strecke (einen Strahl, eine Gerade, einen Kreis, ein Dreieck), die mit ihrem Spiegelbild bezüglich g

a) keinen Punkt,
b) nur einen Punkt,
c) mehr als einen Punkt und
d) alle Punkte gemeinsam hat! Versuche jeweils alle Fälle zu finden!

Klasse 6

▲1▲ Von zwei natürlichen Zahlen weiß man, daß mindestens eine von ihnen durch 4 teilbar ist.
Ist ihr Produkt (ihre Summe) auch durch 4 teilbar?

▲2▲ a) Versuche 30 so in zwei Summanden zu zerlegen, daß
- jeder durch 5 teilbar ist;
- genau einer durch 5 teilbar ist;
- keiner durch 5 teilbar ist!

b) Zerlege 49 so in zwei Summanden, daß
- beide gerade sind;
- genau einer gerade ist;
- keiner gerade ist!

c) Sind solche Zerlegungen immer möglich gewesen?

▲3▲ Versuche, für die folgenden Gleichungen Lösungen anzugeben (für die Variablen sind nur natürliche Zahlen zugelassen):

a) $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$; e) $\frac{a}{4}+\frac{7}{8}=\frac{1}{2}$;
b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$; f) $\frac{3}{2}+\frac{y}{4}=\frac{10}{5}$;
c) $\frac{4}{5}+\frac{x}{10}=\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{2}+\frac{z}{4}=\frac{2}{3}$;
d) $\frac{3}{5}+\frac{x}{y}=\frac{9}{10}$; h) $\frac{2}{3}+\frac{z}{9}=\frac{6}{9}$.

▲4▲ Bestimme die Flächeninhalte der Rechtecke R_1 bis R_3, für deren Seiten a und b folgende Meßwerte gefunden wurden!

	R_1	R_2	R_3
a	9 m	1,8 dm	35,5 cm
b	47 m	3,7 dm	8 cm

Runde die Ergebnisse sinnvoll!

▲5▲ Fülle folgende Tabelle aus!

a	b	$a\cdot b$	$a\cdot b<a$	$a\cdot b>a$
$\frac{1}{2}$		5	nein	ja
3		ja		
$\frac{3}{5}$			nein	nein
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$			
5	$\frac{5}{4}$			

▲6▲ Welche Aussagen sind wahr? Welche sind falsch?

a) Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180°.
b) Scheitelwinkel sind kongruent.
c) Nebenwinkel sind nicht kongruent.
d) Es gibt kongruente Nebenwinkel.
e) Wenn zwei Winkel kongruent sind, dann sind es Nebenwinkel.
f) Wenn zwei Winkel kongruent sind, dann sind es Scheitelwinkel.
g) Wenn zwei Winkel nicht gleich groß sind, dann sind es keine Scheitelwinkel.
h) Wenn zwei Winkel nicht gleich groß sind, sind es Nebenwinkel.

Klasse 7

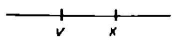
▲1▲ Überprüfe durch Überschlag, ob das folgende Ergebnis richtig sein kann (Rechenstabgenauigkeit):

a) $14{,}3\cdot 435=622$
b) $338:192=1{,}98$
c) $0{,}645:0{,}405=15{,}9$

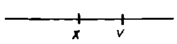
▲2▲ Welche der folgenden Aussagen sind falsch?

a) $|-13|=+13$ d) $-|-13|=+13$
b) $|-20|<+17$ e) $|-12|>-12$
c) $|-23|>-27$ f) $-|-1{,}7|=-1{,}7$

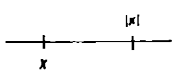
▲3▲ a) Wo liegt $|x|$?



b) Wo liegt 0?



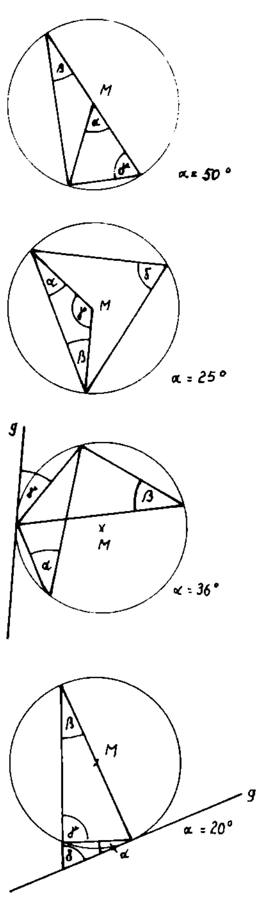
c) Wo liegt $-x$?



▲4▲ Fülle folgende Tabelle aus!

a	b	$a+b$	$a+b<a$	$a+b>a$
+3		+10	nein	ja
+1,2	−2			
+1,9			nein	nein
−7	−1,5			
−9,3	+10			

▲5▲ In den Teilfiguren der Abb. ist jeweils die Größe des Winkels α vorgegeben. Die Größe der übrigen gekennzeichneten Winkel ist zu bestimmen (mit Begründung), ohne sie zu messen.
(Die Gerade g sei jeweils Tangente an den betreffenden Kreis.)



Wann denkt es sich am besten?

Festgestellt wurde, daß sich Kopfarbeit am besten im Sitzen verrichten läßt. Im Stehen ist es unbequemer, wenn auch Ausnahmen die Regel beweisen. *Gogol*, *Hemingway* und *Balzac* arbeiteten des öfteren am Stehpult. Am wenigsten ist dafür Liegen geeignet. Sogar für passives Nachdenken ist diese Haltung nicht die beste.

Der russische Physiologe Prof. *Nikolai Wwedenski* von der Petersburger Universität formulierte die Hauptprinzipien für die Aufrechterhaltung einer großen Arbeitsfähigkeit und schöpferischen Aktivität des Gehirns wie folgt: Man soll sich allmählich in die geistige Tätigkeit hineinfinden, rhythmisch, folgerichtig und systematisch arbeiten, unbedingt richtige Erholung einlegen und sich der gesellschaftlichen Bedeutung der ausgeführten Arbeit bewußt sein.

Die Produktivität verschiedener Arten von Denkarbeit hat man graphisch dargestellt. Die Kurven sind freilich nur als annähernde Orientierungspunkte zu verstehen. Die größte Produktivität ist dienstags und mittwochs festgestellt worden, was für die meisten Beschäftigten gilt. In verschiedenen Ländern erhielt man z. B. bei der Untersuchung verschiedener Gruppen von Beschäftigten etwa gleiche Angaben über den biologischen Zyklus innerhalb von 24 Stunden. Laut Angaben tschechoslowakischer Forscher steigt die Arbeitsproduktivität zwischen 9 bis 10 und 11 bis 13 Uhr. In dieser Zeitspanne ist man am frischsten und arbeitsfähigsten. Dieselben Wissenschaftler nennen noch eine günstige Zeitspanne: von 16 bis 18 Uhr. Dann verringern sich schon Produktivität und Nutzeffekt der Tätigkeit. Die ungünstigste Zeit ist von 1 bis 3 Uhr nachts.

Nächtliche Kopfarbeit ist also nicht zu empfehlen.

Man sollte auch immer daran denken, alle zwei Stunden vom Schreibtisch weg eine Pause von 10 bis 15 Minuten einzulegen. „Ausruhen, ehe man ermüdet", rät der sowjetische Wissenschaftler Prof. W. *Lukjanow*.

Mit Problemen der Denktätigkeit beschäftigen sich heute nicht nur Physiologen, Psychologen und Hygieniker. In dieses noch nicht restlos erforschte Gebiet sind auch Designer, Funktechniker und Konstrukteure „eingedrungen". Sie entwickeln Gegenstände, welche die schöpferische Tätigkeit stimulieren: einen handlichen und haltbaren Füllfederhalter; Tinte in Farbtönen, die das Auge nicht ermüden; einen Tisch, an den man sich immer gern setzt. Und bloß keine Hast. Hast ist letztlich nichts anderes als eine Abart der Faulheit.

Aus: Sowjetskaja Moldawija

Ferienkalender für das Schuljahr 1978/79

Herbstferien:
Erster Ferientag: 14. Oktober 1978,
erster Unterrichtstag: 23. Oktober 1978

Ferien zum Jahreswechsel:
Erster Ferientag: 22. Dezember 1978,
erster Unterrichtstag: 3. Januar 1979

Winterferien:
Erster Ferientag: 3. Februar 1979,
erster Unterrichtstag: 26. Februar 1979

Unterrichtsfreie Tage:
14. April 1979, 28. April 1979,
30. April 1979

Frühjahrsferien:
Erster Ferientag: 12. Mai 1979,
erster Unterrichtstag: 21. Mai 1979

Unterrichtsfreie Tage:
31. Mai 1979, 1. Juni 1979,
2. Juni 1979

Sommerferien:
Erster Ferientag: 7. Juli 1979
erster Unterrichtstag: 3. September 1979

Die Staatsbank leistet Ersatz

Anfragen von Lesern beschäftigen sich häufig mit der Ersatzfähigkeit eines beschädigten Geldzeichens.

Die Staatsbank der DDR leistet Ersatz, wenn die Echtheit, die Gültigkeit und die Werthöhe des Geldzeichens festgestellt werden kann.
Bei Vorlage einer ganzen Banknote sowie der Vorlage von Teilen einer Banknote, die insgesamt nicht kleiner als drei Fünftel der ganzen Banknote sein dürfen, wird Ersatz in voller Werthöhe geleistet.
Werden nur Teile einer Banknote vorgelegt, die insgesamt ein Halb bis drei Fünftel der ganzen Banknote betragen, so wird der halbe Wert erstattet.
Für den Ersatz einer Banknote müssen als Mindestanforderungen der Echtheit je eine vollständige Angabe über den Nominalwert sowie Serien- und Nummernbezeichnung erkennbar sein.
Für eine abgenutzte oder beschädigte Münze wird Ersatz in voller Werthöhe geleistet.

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade) Aufgaben

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): 6. Oktober 1978

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab 6. Oktober 1978 veröffentlicht.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

1. Gerda, Peter und Renate sehen auf dem Tisch einen Teller mit Haselnüssen stehen. Sie wissen nicht, wieviel Nüsse es sind. Gerda meint: „Wenn man fünfmal nacheinander 19 Nüsse vom Teller wegnimmt, bleiben noch mehr als 5 Nüsse auf dem Teller zurück." Renate meint: „Wollte man aber fünfmal nacheinander 20 Nüsse von dem Teller wegnehmen, so würden die Nüsse dafür nicht ausreichen." Peter sagt: „Eine von euch beiden hat bestimmt recht." Nach dem Auszählen wurde festgestellt, daß Peter sich geirrt hatte. Wieviel Nüsse lagen insgesamt auf dem Teller?

2. Marie-Luise hat einen außen rot angestrichenen Würfel aus naturfarbenem Holz. Der Würfel hat 3 cm Kantenlänge. Marie-Luise denkt sich diesen Würfel in kleine Würfel von 1 cm Kantenlänge zerlegt.
a) Wie viele derartige kleine Würfel würden aus dem roten Würfel insgesamt entstehen?
Wie viele von den kleinen Würfeln hätten
b) drei rot angestrichene Seitenflächen,
c) zwei rot angestrichene Seitenflächen,
d) eine rot angestrichene Seitenfläche,
e) keine rot angestrichene Seitenfläche?
Als Lösung genügt die Angabe der in a) bis e) erfragten Anzahlen.
Eine Begründung wird nicht verlangt.

3. In die freien Felder des abgebildeten Rechtecks sind Zahlen so einzutragen, daß sie von links nach rechts gelesen und von oben nach unten gelesen immer kleiner werden und daß für jede Zeile und jede Spalte gilt: Alle Differenzen, die man in einer Zeile bzw. Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, sind für diese Zeile bzw. Spalte gleich.

	31		
	26	20	
			8

Gib ferner für jede Zeile und jede Spalte diese Differenz an!
Der Lösungsweg ist zu beschreiben.

4. Auf einem Parkplatz stehen insgesamt 60 Personenkraftwagen der Typen „Trabant", „Wartburg", „Škoda" und „Wolga".
Die Anzahl der Wagen vom Typ „Trabant" ist doppelt so groß wie die Anzahl der Wagen der drei anderen Typen zusammengenommen. Außerdem gilt: Es stehen dreimal soviel Wagen vom Typ „Wartburg" wie von den Typen „Škoda" und „Wolga" zusammen auf dem Parkplatz und drei Wagen mehr vom Typ „Škoda" als vom Typ „Wolga".
Wieviel PKW jeden Typs stehen auf diesem Parkplatz?

Olympiadeklasse 6

1. In einem Stadtbezirk Leipzigs wurden 260 große Wohnungen renoviert. Bei einem Zehntel dieser Wohnungen hat jede Wohnung 55 m^2 Wohnfläche; bei einem Viertel der 260 Wohnungen hat jede Wohnung 67 m^2 Wohnfläche; jede andere der 260 Wohnungen hat 80 m^2 Wohnfläche.
Berechne die gesamte Wohnfläche dieser 260 renovierten Wohnungen!

2. Eine Zahl z soll in der Gestalt $z = *3*60$ geschrieben werden, wobei jeder Stern (*) so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen ist, daß z die beiden folgenden Eigenschaften hat:
(1) $60000 < z < 100000$,
(2) z ist durch 9 teilbar.
Ermittle alle Zahlen z, die diesen Bedingungen genügen!

3. Fred, Gerd, Hans und Ingo sind Schüler der Klassen 6a, 6b, 7a, 7b, und zwar ist in jeder dieser Klassen einer der vier Schüler. In einem Gespräch, an dem nur Fred und die beiden Schüler der 7. Klasse beteiligt waren, stellt Hans fest, daß drei der vier Schüler nur je eine der Zeitschriften „alpha" und „technikus" lesen, nämlich Fred, Gerd und der Schüler der 6a. Der Schüler der 7b dagegen liest sowohl den „technikus" als auch die Zeitschrift „alpha".
Zu welcher Klasse gehört nach diesen Angaben jeder der vier Schüler, und welcher Schüler liest die beiden Zeitschriften „alpha" und „technikus"?

4. Drei Pioniere einer Schule, Klaus, Silvia und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen dort einen ersten, einen zweiten bzw. einen dritten Preis. Als später Rainer nach dem Abschneiden seiner Mitschüler gefragt wurde, sagte er: „Ich glaube, Silvia errang keinen ersten Preis, Klaus bekam keinen zweiten Preis, den erhielt nämlich Frank." Wie sich anschließend herausstellte, war unter den drei Aussagen Rainers genau eine wahr, die anderen beiden waren dagegen falsch.
Welcher von den drei genannten Pionieren erhielt den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

Olympiadeklasse 7

1. Vier Schüler, Ernst, Franz, Karl und Martin, deren Familiennamen (möglicherweise in anderer Reihenfolge) Altmann, Müller, Neubert und Tauber lauten, trafen sich auf einer Geburtstagsfeier. Jeder von ihnen brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit. Außerdem ist bekannt:
(1) Martin hatte Rosen, Altmann einen Kugelschreiber, Müller ein Buch und Karl eine Schachtel Pralinen mitgebracht.
(2) Als erster verabschiedete sich im Verlaufe des Abends Martin, als zweiter Neubert, danach Ernst und zuletzt Müller.
Wie heißen diese Schüler mit Vor- und Familiennamen?

2. Berechne

$$a = 1{,}25 : \frac{13}{12} \cdot \frac{91}{60},$$
$$b = 2{,}225 - \frac{5}{9} - \frac{5}{6},$$
$$c = \frac{32}{15} : \frac{14}{15} + 6\left(\frac{45}{56} - 0{,}375\right),$$
$$d = c - \frac{b}{a}$$

ohne Verwendung von Näherungswerten!

3. Wie alt ist Margit jetzt, wenn ihre Mutter jetzt 30 Jahre, ihre Großmutter jetzt 62 Jahre alt ist und nach einigen Jahren die Mutter

viermal sowie gleichzeitig die Großmutter achtmal so alt wie Margit sein werden?
(Es werden jeweils nur volle Lebensjahre berücksichtigt.)

4. Ermittle die kleinste Primzahl, die bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1 läßt!

Olympiadeklasse 8

1. Die FDJler Arnim, Bertram, Christian, Dieter, Ernst und Fritz waren Teilnehmer an einem 400-m-Lauf. Keine zwei von ihnen liefen zur gleichen Zeit durchs Ziel.
Vorher waren folgende drei Voraussagen über das Ergebnis des Wettkampfes gemacht worden (jeder Teilnehmer wird mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet):

Platz	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1. Voraussage	A	B	C	D	E	F
2. Voraussage	A	C	B	F	E	D
3. Voraussage	C	E	F	A	D	B

Nach Abschluß des Laufes zeigte sich, daß in der ersten Voraussage für genau drei Läufer die von ihnen erreichten Plätze richtig angegeben waren. Keine zwei dieser drei Plätze waren zueinander benachbart. Bei der zweiten Voraussage war für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben. Bei der dritten Voraussage war für einen Platz derjenige Läufer richtig angegeben, der diesen Platz erreichte.
Gib alle Möglichkeiten für die von den Läufern unter diesen Bedingungen erreichten Platzreihenfolgen an!

2. Über das Ergebnis einer Klassenarbeit ist folgendes bekannt:
Es nahmen daran mehr als 20 und weniger als 40 Schüler teil. Das arithmetische Mittel aller Zensuren, die die Schüler in dieser Klassenarbeit erreichten, betrug 2,3125. Kein Schüler erhielt bei dieser Arbeit die Note „5“. Die Anzahl der „Zweien“ war eine ungerade Zahl und größer als 12. Die Anzahl der „Dreien“ war genau so groß wie die der „Zweien“.
a) Ermittle die Anzahl der Schüler, die an dieser Klassenarbeit teilnahmen!
b) Wie viele von ihnen erhielten hierbei die Note „1“?

3. Gegeben sei eine dreiseitige Pyramide *ABCS*, deren Grundfläche *ABC* ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 4 cm bildet und deren Spitze *S* so gelegen ist, daß das Lot von *S* auf die Ebene durch *A*, *B*, *C* den Schwerpunkt *F* der Grundfläche als Fußpunkt besitzt und daß *FS* die Länge 6 cm hat. Diese Pyramide ist in einer Zweitafelprojektion darzustellen. Dabei wird gefordert, daß die Seitenfläche *ABS* in der Grundrißtafel liegt. Zu konstruieren ist die Abbildung nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus den gegebenen Streckenlängen 4 cm, 6 cm.
(Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.)
(*Hinweis:* Man kann z. B. die geforderte Abbildung aus einer anderen Darstellung gewinnen, in der das gleichseitige Dreieck *ABC* in der Grundrißtafel liegt.)

4. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck *ABC* mit der Hypotenuse *AB*, dessen Innenwinkel $\sphericalangle CAB$ die Größe 60° hat.
Fälle von *C* das Lot *CD* auf *AB*, danach von *D* die Lote *DE* und *DF* auf *AC* bzw. *BC* sowie von *F* das Lot *FH* auf *AB*!
Weise nach, daß $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AE}$ ist!

Olympiadeklasse 9

1. Aus einer quadratischen Papptafel von 8 dm Seitenlänge sollen 9 Würfelnetze, die nicht kongruent zueinander zu sein brauchen, ausgeschnitten werden. Aus jedem dieser Würfelnetze soll ein Würfel von 1 dm³ Rauminhalt gefaltet werden können. Zeigen Sie an einem Beispiel, daß es möglich ist, 9 derartige Netze auf einer solchen Tafel einzuzeichnen! Es genügt eine solche Zeichnung; Beschreibung und Begründung werden nicht verlangt.

2. Es seien *a* und *b* rationale Zahlen, für die folgendes gilt:
Vermindert man *a* um 10%, so erhält man 297. Vergrößert man *b* um 10%, so erhält man 297.
Wieviel Prozent von *a* beträgt dann *b*? (Angabe des Prozentsatzes auf zwei Dezimalstellen gerundet.)

3. In einem Zirkel Junger Mathematiker versuchen die Teilnehmer, folgende Aufgabe zu lösen:
Die Zahl 30 soll dargestellt werden, indem dazu genau eine einziffrige Zahl genau neunmal benutzt wird, wobei noch die Zeichen der Grundrechenoperationen und Klammern erlaubt sind und die Potenzschreibweise zulässig ist.
Zeigen Sie, daß das für jede der einziffrigen Zahlen 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 und 9 möglich ist! (Es genügt jeweils die Angabe eines Beispiels.)

4. Gegeben seien zwei Punkte A_0 und A_1. Ihr Abstand voneinander werde mit *a* bezeichnet. Man konstruiere die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge 3*a* unter alleiniger Benutzung eines Zirkels!

Olympiadeklasse 10

1. Das Bild zeigt vier zueinander paralleler Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, bei denen eine einheitliche Länge *a* für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ als Abstand zwischen g_i und g_{i+1} auftritt, und weitere vier zu den g_i senkrechte Geraden h_1, h_2, h_3, h_4, bei denen *a* für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ auch der Abstand zwischen h_i und h_{i+1} ist. Ferner zeigt das Bild eine Numerierung der entstehenden Schnittpunkte.

	h_1	h_2	h_3	h_4
g_1	1	2	3	4
g_2	5	6	7	8
g_3	9	10	11	12
g_4	13	14	15	16

a) Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Quadrate, die nur numerierte Punkte als Ecken und nur auf Geraden g_i oder h_i liegende Strecken als Seiten besitzen.
b) Man untersuche, ob es möglich ist, alle 16 numerierten Punkte so unter Verwendung der Farben Rot, Blau, Grün, Gelb zu färben (jeden numerierten Punkt mit genau einer dieser Farben), daß für die Ecken jedes in (*a*) genannten Quadrates alle vier Farben auftreten.

2. In einem Mathematikzirkel werden Aussagen zur Diskussion gestellt, die mit den Worten beginnen: „Wenn *a* und *b* zwei von 0 verschiedene reelle Zahlen sind, für die $a > b$ und $|a| < |b|$ gilt, dann ...“
Antje stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... ist *a* negativ.“ Bernd stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... sind *a* und *b* negativ.“ Cornelia stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... ist *b* negativ.“ Doris stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... braucht weder *a* noch *b* negativ zu sein.“
Man untersuche für jede dieser vier zur Diskussion gestellten Aussagen, ob sie wahr ist.

3. Klaus erfindet für Schüler der ersten Klasse folgendes Spiel:
Auf 30 Kärtchen sind die Zahlen von 1 bis 10 so aufgeschrieben, daß auf jedem Kärtchen genau eine Zahl steht und daß jede der Zahlen 1 bis 10 dabei genau dreimal vorkommt. Eine ausreichende Anzahl unbeschriebener Kärtchen wird in Reserve gehalten. Die 30 beschriebenen Kärtchen werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Der erste Spieler zieht zwei davon. Tragen beide die gleiche Zahl, so hat er ein „Paar“ und darf es aus dem Spiel herausnehmen und behalten. Sind die beiden Zahlen voneinander verschieden, so werden diese beiden Karten ebenfalls aus dem Spiel herausgenommen; dafür wird auf eine der Reservekarten die (positive) Differenz der beiden Karten geschrieben und diese Reservekarte unter die übrigen noch im Spiel befindlichen gemischt.
Dann verfährt der zweite und anschließend jeder weitere Spieler ebenso, solange sich noch mindestens 2 Kärtchen im Spiel befinden. Ist jedoch (nach dem Herausnehmen eines „Paares“ oder nach dem Hinzufügen einer Reservekarte) die Anzahl der im Spiel befindlichen Kärtchen kleiner als 2, so ist das Spiel beendet. (Der Spieler, der dann die meisten „Paare“ besitzt, hat gewonnen.)

Beweisen Sie, daß das Spiel stets damit enden muß, daß sich noch genau eine Karte im Spiel befindet!

4. Da sei ein Dreieck ABC
mit rechtem Winkel $\sphericalangle ACB$.
Der Inkreisradius sei ϱ.
(Man nennt ihn nun mal gerne so.)
Dann möge man das c noch kennen.
(Man kann's auch Hypotenusenlänge nennen.)
Nun gilt es, nur mit diesen Stücken
den Flächeninhalt auszudrücken.
Man muß sich nach Gesetzen richten,
(doch braucht man nicht dabei zu dichten.)

Olympiadeklassen 11/12

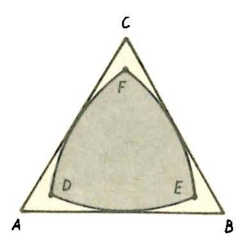
1. Bei der Mathematikolympiade treffen sich drei Schüler. „Ist euch schon aufgefallen", fragt einer von ihnen, ein Mädchen, „daß wir Lang, Dick und Dünn heißen und daß auch genau einer von uns außergewöhnlich lang, genau ein anderer beachtlich dick und der dritte erschreckend dünn ist?"
„Ja, tatsächlich", entgegnet darauf ein anderer, der dünne Schüler, „aber bei keinem von uns stimmen Name und die den jeweiligen Schüler charakterisierende Eigenschaft überein." „Da hast du völlig recht!" stimmt ihm der Schüler namens Lang zu.
Wie heißt hiernach der lange Schüler, wie der dicke und wie der dünne Schüler, wenn darüber hinaus vorausgesetzt wird, daß das Mädchen, das gefragt hat, nicht dick ist? Welche der charakterisierenden Eigenschaften und welchen Namen hat das Mädchen?

2. Man beweise, daß für jede natürliche Zahl $n > 5$ gilt:
Jedes Quadrat läßt sich in n Teilquadrate zerlegen. [Erklärung: Sind $Q, T_1, \ldots, T_n$ Quadrate (als Flächen, einschließlich ihrer Randpunkte betrachtet), so liegt genau dann eine Zerlegung von Q in $T_1, \ldots, T_n$ als Teilquadrate vor, wenn
(1) Q die Vereinigungsmenge der Mengen $T_1, \ldots, T_n$ ist und
(2) für $i \neq j$ der Durchschnitt von T_i mit T_j stets entweder keine Punkte oder nur solche Punkte enthält, die sowohl für T_i als auch für T_j Randpunkte sind.]

3. Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssstem erfüllen:

$$x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x} = 3,$$
$$y = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} = 3.$$

4. Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks. Um jeden der Eckpunkte dieses Dreiecks werde derjenige Kreis konstruiert, der die gegenüberliegende Seite berührt. Je zwei dieser Kreise haben im Innern des Dreiecks genau einen Schnittpunkt. Je zwei dieser drei Schnittpunkte lassen sich durch einen Bogen eines der konstruierten Kreise miteinander verbinden, wobei jeder



dieser Bögen innerhalb der Dreiecksfläche liegt. Die drei Kreisbögen schließen ein Flächenstück ein. Man drücke den Inhalt dieses (schraffierten) Flächenstücks in der Form $z \cdot a^2$ aus (wobei man die Zahl z mit einer durch die Zahlentafel ermöglichten Genauigkeit angebe).

Ein Taschenbuch aus dem Kinderbuchverlag Berlin

Aus der Geschichte der Rechentechnik

136 Seiten, zahlreiche farbige Abb., von R. Platzer Preis 3,00 M
Für Leser von 10 Jahren an
Bestell-Nr. 629 771 9

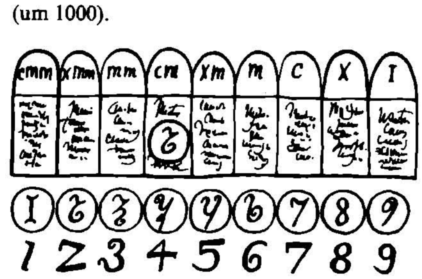
Aus dem Inhalt: Von den Anfängen der Rechenkunst – Wie die Mathematik Einzug hielt – Das älteste Rechengerät war die Hand – Auf dem Kerbholz stand die Summe – Womit die Bauern sich beim Rechnen halfen – Vom Rechnen in den Städten – Was ein Rechenknecht zu leisten hatte – Vom Zahlenschreiben – Arabische Ziffern aus Indien – Mit Maschinen wird es leichter – Der perfekte Rechenautomat – Lochkartentechnik – heute noch gebraucht – Was Elektroenergie und Elektronik vermögen – Aufbau und Arbeitsweise des Digitalrechners – Ein Traum wird Wirklichkeit

Leseprobe:

Kopfrechnen war die wichtigste Rechenart

Neben dem Rechnen mit dem Abakus galt das Kopfrechnen als wichtigste Rechenart. Hilfsmittel des Kopfrechnens war das Einmaleins, das in Rom schon die Kinder lernen mußten. Nach der Fähigkeit im Kopfrechnen wurde zum Beispiel die Klugheit eines Mannes eingeschätzt. Deshalb gaben sich die Römer gegenseitig knifflige Denkaufgaben auf, deren Lösung Wendigkeit beim Rechnen voraussetzte. Beliebt waren vor allem Mischungsaufgaben mit bekannten und unbekannten Mengen. Eine solche Aufgabe ist die von der Rinderherdenrechnung:
„Auf den Fluren weiden Rinder vierfach in Herden geteilt, jede Herde anders gefärbt.
Die erste ist milchweiß, die andere rabenschwarz, die dritte braun und die vierte scheckig.
Weiße Rinder weiden 12 insgesamt.
Die braunen Rinder sind den weißen gleich an der Zahl weniger dem vierten Teil der schwarzen Rinder.
Die Menge der schwarzen ist gleich dem dritten Teil der weißen, doppelt genommen.
Die scheckigen Rinder ergeben an Zahl die Hälfte der weißen, vermehrt um sämtliche schwarzen.
Sage mir genau die Zahl der Rinder, die du weiden siehst! Sage mir auch, wieviel es gibt von jeder Farbe!"
Die Lösung hieß: insgesamt 44 Rinder, davon 12 weiße, 10 braune, 8 schwarze und 14 scheckige.
Aus alten Überlieferungen wissen wir, daß zur Entwicklung mathematischen Könnens in den Ländern des Nordens vieles von den Römern übernommen wurde.

Abakus aus der Klosterschule von Laon (um 1000).



Zauberzahlen – Zahlenzauber

$$\begin{array}{r} \underline{77^2} \\ 49 \\ 4949 \\ \underline{49} \\ 5929 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{666^2} \\ 36 \\ 3636 \\ 363636 \\ 3636 \\ \underline{36} \\ 443556 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \underline{5555^2} \\ 25 \\ 2525 \\ 252525 \\ 25252525 \\ 252525 \\ 2525 \\ \underline{25} \\ 30836025 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 37 = 111 \\ 6 \cdot 37 = 222 \\ 9 \cdot 37 = 333 \\ \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \cdot 9 + 7 = 88 \\ 98 \cdot 9 + 6 = 888 \\ 987 \cdot 9 + 5 = 8888 \\ \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \cdot 8 + 1 = 9 \\ 12 \cdot 8 + 2 = 98 \\ 123 \cdot 8 + 3 = 987 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \cdot 42 = 21 \cdot 24 \\ 102 \cdot 402 = 201 \cdot 204 \\ 1002 \cdot 4002 = 2001 \cdot 2004 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 24 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 + 4 \\ 369 = 3 \cdot 69 + 36 \cdot 9 - 3 \cdot 6 \cdot 9 \\ 1352 = 13 \cdot 52 + 13 \cdot 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1^2 = 1 \\ 11^2 = 121 \\ 111^2 = 12321 \\ 1111^2 = 1234321 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ (1+1)^2 = 1 + 2 + 1 \\ (1+1+1)^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1 \\ (1+1+1+1)^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12345679 \cdot 9 = 111111111 \\ 12345679 \cdot 18 = 222222222 \\ 12345679 \cdot 27 = 333333333 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 143 \cdot 7 \cdot 111 = 111111 \\ 143 \cdot 7 \cdot 222 = 222222 \\ 143 \cdot 7 \cdot 333 = 333333 \end{array}$$

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{2+4}, \frac{4}{2+4+6}, \frac{5}{2+4+6+8}, \frac{6}{2+4+6+8+10}, \ldots$$

$$\frac{2}{3}, \frac{2+4}{3+5}, \frac{2+4+6}{3+5+7}, \frac{2+4+6+8}{3+5+7+9}, \frac{2+4+6+8+10}{3+5+7+9+11}, \ldots$$

$$\begin{array}{rcl} A^B & = & A \\ AA^B & = & ABA \\ AAA^B & = & ABCBA \\ AAAA^B & = & ABCDCBA \\ AAAAA^B & = & ABCDEDCBA \\ AAAAAA^B & = & ABCDEFEDCBA \end{array}$$

Die Buchstaben sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß das Potenzieren zu einem richtigen Ergebnis führt. (Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.)

Aufgaben aus Freundesland

20 Olympiadeaufgaben aus der Ungarischen Volksrepublik

▲1▲ Ein Schüler einer 8. Klasse arbeitete in Vorbereitung auf die nächste Mathematikschulolympiade eine bestimmte Anzahl von Mathematikaufgaben durch. Bei der Aufgabenkontrolle stellte sich heraus, daß die Anzahl der gelösten Aufgaben um 22 größer war als die Anzahl der nicht gelösten Aufgaben. Wenn man zur Anzahl der gelösten Aufgaben die dreifache Anzahl der nicht gelösten Aufgaben addiert, so erhält man eine natürliche Zahl, die kleiner als 60 ist. Addiert man dagegen zur Anzahl der gelösten Aufgaben den dritten Teil der Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so erhält man eine natürliche Zahl, die größer als 30 ist.
Wie viele Aufgaben hat dieser Schüler durchgearbeitet und wie viele davon gelöst?

▲2▲ Ein Schachmeister spielte gleichzeitig (simultan) gegen mehrere Schachspieler. In der ersten Stunde gewann er sieben Zwölftel aller Spiele; danach gewann er noch 80% der restlichen Spiele. In der ersten Stunde gewann er 12 Spiele mehr als in der Zeit danach.
Wie viele Schachpartien wurden insgesamt gespielt?

▲3▲ Die Gemeinden A und B und die Stadt C liegen in dieser Reihenfolge an einer Landstraße. Von B aus fährt ein Pferdefuhrwerk morgens um 6 Uhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach C. Am gleichen Tag fährt von A aus ein Radfahrer um 7 Uhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach C.
Wie viele Kilometer sind B und C voneinander entfernt, wenn die Entfernung zwischen den Gemeinden A und B genau 5 km beträgt und der Radfahrer in C 20 Minuten früher ankommt als das Pferdefuhrwerk? Zu welcher Uhrzeit und in welcher Entfernung von C überholt der Radfahrer das Pferdefuhrwerk?

▲4▲ Ein Schüler zeichnete ein Viereck an die Wandtafel. Hans behauptete, es sei ein Quadrat. Fritz meinte, es sei ein Trapez. Maria hielt das Viereck für einen Rhombus. Eva nannte das Viereck ein Parallelogramm. Der Lehrer stellte nach gründlicher Untersuchung des Vierecks fest, daß genau drei der vier Behauptungen richtig, genau eine falsch war.
Was für ein spezielles Viereck hat dieser Schüler an die Wandtafel gezeichnet?

▲5▲ Gegeben seien in einer Ebene drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte A, B und S. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, dessen Eckpunkte A und B mit den gegebenen Punkten A und B zusammenfallen und dessen drei Höhen sich im gegebenen Punkt S schneiden.

▲6▲ Die Diagonale $\overline{AC}$ eines gleichschenkligen Trapezes $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ halbiert den Winkel $\sphericalangle BAD$. Es ist zu beweisen, daß die Länge eines Schenkels dieses Trapezes gleich der Länge einer der beiden parallelen Seiten ist.

▲7▲ Andreas, Fritz und Hans spielen zusammen mit Murmeln. Zu Beginn des Spiels betrug das Verhältnis der Anzahlen ihrer Murmeln 2 : 3 : 5, nach Beendigung des Spiels hingegen 1 : 2 : 5. (Es ist stets die gleiche Reihenfolge zugrunde gelegt.) Einer der drei Jungen hatte zum Schluß zwei Murmeln an die anderen verloren.
Wie heißt dieser Junge mit Vornamen? Wie viele Murmeln gewannen bzw. verloren die beiden anderen Jungen im Verlaufe des Spieles?

▲8▲ An einem Handballturnier nahmen 12 Mannschaften teil. Jede dieser Mannschaften mußte gegen jede andere genau einmal spielen. Nachdem 54 Spiele ausgetragen waren, hatte jede Mannschaft noch gleich viele Spiele zu bestreiten. Wie oft mußte jede Mannschaft noch antreten?

▲9▲ Es ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ zu konstruieren, dessen eine Kathete 2 cm länger ist als dessen andere und in dem die Länge der Strecke zwischen dem Mittelpunkt M der Hypotenuse und dem Eckpunkt C genau 5 cm beträgt.

▲10▲ Zeichne ein stumpfwinkliges Dreieck ABC mit dem stumpfen Winkel $\sphericalangle CAB$, halbiere die Winkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle CBA$! Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden sei S. Ziehe durch S die Parallele zu AB! Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit AC sei D, mit BC sei E. Es ist zu beweisen, daß die Länge der Strecke $\overline{DE}$ gleich der Summe aus den Längen der Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ ist.

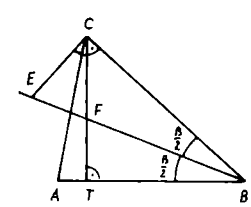
▲11▲ 18% der Ersparnisse von Albert ergeben denselben Geldbetrag wie 45% der Ersparnisse von Jürgen. Wenn Albert soviel Geld ausgibt, wie der vierte Teil der Ersparnisse von Jürgen ausmacht, dann verbleiben ihm noch 292,50 M von seinen Ersparnissen. Wieviel Mark hatte jeder dieser beiden Schüler gespart?

▲12▲ Eine Straßenbaubrigade erhielt den Auftrag, eine bestimmte Länge eines Fußgängerweges mit Zementplatten auszulegen. Hätte diese Brigade bei gleichbleibender Arbeitsintensität stündlich 20 m der vorgesehenen Weglänge mit Platten ausgelegt, dann wäre die Arbeit um 14 Uhr beendet worden. Werden stündlich nur 12 m Weglänge geschafft, wird die Arbeit erst um 18 Uhr beendet. Der Fußgängerweg wurde um 16 Uhr fertig.
Wieviel Meter Fußgängerweg wurden stündlich mit Platten ausgelegt?

▲13▲ In einem Ferienlager verbrachten insgesamt 138 Jungpioniere und Thälmann-Pioniere ihre Sommerferien. Eines Tages machten die Kinder einen Ausflug. Daran nahmen neunmal soviel Thälmann-Pioniere wie Jungpioniere teil. Im Lager verblieben zehnmal soviel Jungpioniere wie Thälmann-Pioniere.
Wieviel Jungpioniere und wieviel Thälmann-Pioniere nahmen nicht an diesem Ausflug teil?

▲14▲ Einem Kreis mit einem Durchmesser von 6 cm ist ein Rechteck einzubeschreiben, dessen Ecken auf der Peripherie des Kreises liegen und bei dem das Verhältnis der Längen der Seiten 3 : 4 beträgt.

▲15▲ In dem abgebildeten Dreieck ABC halbiert die Gerade BE den Winkel $\sphericalangle ABC$. Die Strecke $\overline{CT}$ ist die zur Seite $\overline{AB}$ gehörende Höhe.
Die Gerade CE steht senkrecht auf BC.
Es ist zu beweisen, daß das Dreieck EFC gleichschenklig ist.



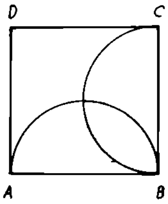
▲16▲ Wenn man die beiden Zahlen 313 und 390 durch die gleiche zweistellige natürliche Zahl dividiert, so erhält man den gleichen Rest.
Wie heißt der Divisor?

▲17▲ Ein Jagdkollektiv erlegte während einer Jagd Fasane, Hasen und Rebhühner. Die Anzahl der geschossenen Fasane verhält sich zur Anzahl der erlegten Hasen wie 7 : 15. Die Anzahl der erlegten Hasen verhält sich zur Anzahl der geschossenen Rebhühner wie 3 : 2. Die insgesamt erlegten Tiere hatten zusammen 186 Beine mehr als Köpfe.
Wie viele Fasane, Hasen bzw. Rebhühner wurden von diesem Jagdkollektiv erlegt?

▲18▲ Schüler machten einen Ausflug. Die Wanderstrecke ging zunächst bergauf; dabei wurde eine durchschnittliche Geschwindig-

keit von $3\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht. Die gleiche Weglänge wie bergauf ging es ins Tal hinunter mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $6\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der Rest des Weges bis zum Ziel verlief in einer Ebene mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Wie weit war das Wanderziel vom Ausgangspunkt entfernt, wenn für Hin- und Rückweg insgesamt sechs Stunden benötigt wurden und auf dem Rückweg die gleichen Durchschnittsgeschwindigkeiten erreicht wurden?

▲19▲ Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ dar. Über den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ wurden Halbkreise konstruiert. Es ist zu berechnen, wieviel Prozent des Flächeninhalts des Quadrats der Flächeninhalt des Kreisbogenzweiecks (grau) beträgt!



▲20▲ Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit $\overline{AB}$ länger als $\overline{CD}$.
Es ist die Länge der Seite $\overline{CD}$ zu berechnen, wenn $\overline{AB} = 10$ cm gilt und die Verbindungsstrecke zwischen den Mittelpunkten der Diagonalen des Trapezes 3,5 cm lang ist.

Lösungen

▲1▲ Angenommen, der Schüler hat n Aufgaben gelöst, also $(n-22)$ Aufgaben nicht gelöst; dann gilt

$$n+3(n-22)<60 \text{ und } n+\frac{1}{3}(n-22)>30,$$
$$n+3n-66\ <60 \text{ und } n+\frac{1}{3}n-\frac{22}{3}>30,$$
$$4n<126 \text{ und } \frac{4}{3}n>\frac{112}{3},$$
$$n<31\frac{1}{2} \text{ und } n>28,$$
$$n\leqq 31 \text{ und } n\geqq 29.$$

Daraus folgt $n=29$ oder $n=30$ oder $n=31$, also $n-22=7$ oder $n-22=8$ oder $n-22=9$. Von diesen Zahlen ist nur 9 ein Vielfaches von 3. Deshalb existiert genau eine Lösung, nämlich $n=31$. Der Schüler hat 40 Mathematikaufgaben bearbeitet; davon hat er 31 Aufgaben gelöst, 9 Aufgaben nicht gelöst.

▲2▲ Angenommen, der Schachmeister hatte insgesamt n Spiele auszutragen. In der ersten Stunde gewann er $\frac{7}{12}\cdot n$ Spiele; in der Zeit danach gewann er noch $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{12}\cdot n$ Spiele.
Nun gilt

$$\frac{7}{12}\cdot n=\frac{1}{3}\cdot n+12,$$
$$7n=4n+144,$$
$$3n=144,$$
$$n=\ 48.$$

Insgesamt wurden 48 Schachpartien gespielt.

▲3▲ $v_r=15\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $s_r=x$ km, $t_r=\frac{x}{15}$ h;
$v_f=10\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $s_f=(x-5)$ km, $t_f=\frac{x-5}{10}$ h.
Nun gilt

$$\frac{x-5}{10}=\frac{x}{15}+\frac{4}{3},$$
$$3(x-5)=2x+40,$$
$$x=55.$$

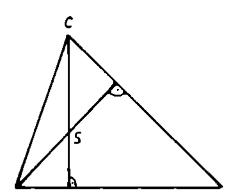
Also $\overline{AC}=55$ km und $\overline{BC}=50$ km.
Ferner gilt

$$s_r-5=s_f,$$
$$v_r\cdot t_r-5=v_f\cdot t_f,$$
$$15t_r-5=10(t_r+1),$$
$$5t_r=15, \text{ also } t_r=3.$$

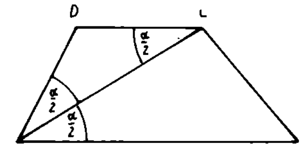
Nach 3 Stunden überholte der Radfahrer das Pferdefuhrwerk.
$s=v\cdot t=15\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 3\text{ h}=45$ km.
Der Radfahrer überholte das Pferdefuhrwerk 10 km vom Ort C entfernt.

▲4▲ Ein Rhombus ist zugleich ein Trapez bzw. ein Parallelogramm, aber kein Quadrat. Folglich handelt es sich bei dem Viereck um einen Rhombus.

▲5▲ Wir verbinden A mit B, zeichnen durch S die Senkrechte zu AB, ihr Schnittpunkt mit AB sei D. Wir zeichnen die Gerade AS. Wir zeichnen durch B die Senkrechte zu AS, ihr Schnittpunkt mit der Geraden DS ist der Punkt C. Wir verbinden A mit C.



▲6▲ Es gilt $\sphericalangle DAC=\sphericalangle BAC=\frac{1}{2}\alpha$ nach Voraussetzung. Ferner gilt $\sphericalangle DCA=\sphericalangle BAC$ $=\frac{1}{2}\alpha$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Daraus folgt $\sphericalangle DAC=\sphericalangle DCA$ $=\frac{1}{2}\alpha$. Somit gilt auch $\overline{AD}=\overline{CD}$.



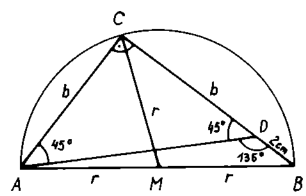
▲7▲ Angenommen, zu Beginn des Spieles hatten Andreas $2n$, Fritz $3n$ und Hans $5n$ Murmeln; das sind insgesamt $10n$ Murmeln. Angenommen, am Ende des Spieles hatten diese Jungen m, $2m$ und $5m$, also insgesamt $8m$ Murmeln. Aus $10n=8m$ folgt $n=4$ und $m=5$, da m und n natürliche Zahlen sein müssen. Daraus ergibt sich folgende Verteilung:

	Anzahl der Murmeln von Andreas	Fritz	Hans
Spielbeginn	8	12	20
Spielende	5	10	25

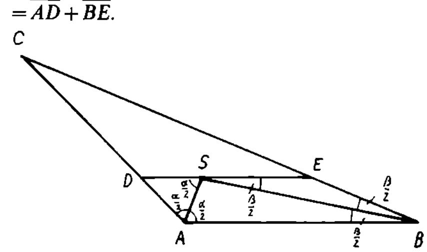
Während des Spiels hat Fritz zwei, Andreas drei Murmeln an Hans verloren.

▲8▲ Insgesamt waren $\frac{12\cdot 11}{2}=66$ Spiele auszutragen. Aus $66-54=12$ folgt, daß noch 12 Spiele stattfinden müssen.
Somit hatte jede der 12 Mannschaften noch genau ein Spiel zu bestreiten.

▲9▲ Wegen $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}=5$ cm gilt $\overline{AB}=10$ cm. Wir konstruieren zunächst das Teildreieck ABD aus $\overline{AB}=10$ cm, $\overline{BD}=2$ cm und Winkel $\sphericalangle ADB=135°$ (siehe abgebildete Planfigur). Der Thaleskreis über $\overline{AB}$ als Durchmesser schneidet BD in C.



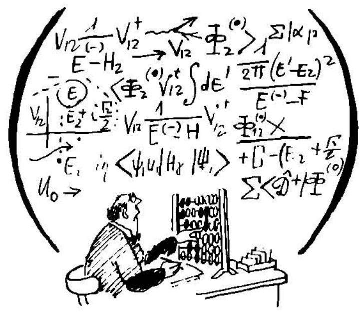
▲10▲ Nach Voraussetzung gilt $\sphericalangle DAS$ $=\sphericalangle BAS=\frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle EBS=\sphericalangle ABS=\frac{1}{2}\beta$.
Ferner gilt $\sphericalangle DSA=\sphericalangle BAS=\frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle ESB$ $=\sphericalangle ABS=\frac{1}{2}\beta$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Daraus folgt $\sphericalangle DAS$ $=\sphericalangle DSA$ und $\sphericalangle ESB=\sphericalangle EBS$. Folglich gilt $\overline{AD}=\overline{DS}$ und $\overline{BE}=\overline{SE}$, also $\overline{DE}=\overline{DS}+\overline{SE}$ $=\overline{AD}+\overline{BE}$.



▲11▲ Angenommen, Albert hat a Mark und Jürgen b Mark gespart; dann gilt $\frac{18}{100}\cdot a=\frac{45}{100}\cdot b$, also $a=\frac{5}{2}\cdot b$. Aus $a-\frac{1}{4}b$ $=292{,}5$ erhalten wir durch Einsetzen $\frac{5}{2}b-\frac{1}{4}b=292{,}5$, also $b=130$ und somit $a=325$
Albert hat 325 M, Jürgen 130 M gespart.

Fortsetzung auf Seite 96

In freien Stunden alpha heiter



Kombinationsspiel

Für dieses Spiel benötigt man nur Papier und Bleistift. Es geht darum, durch „Raten“ oder „Kombinieren“ eine Zahl zu bestimmen, die der Gegenspieler verdeckt notiert hat. Je nach dem gewünschten Schwierigkeitsgrad kann man drei- bis sechsstellige Zahlen verwenden. Es ist auch jede höhere Stellenzahl möglich, aber dann dauert das Spiel zu lange. Als Ziffern verwendet man entweder die Ziffern 1 bis 9 oder eine Teilmenge davon. Der Gegenspieler gibt bei jeder Entscheidung eine Bewertung. Wurde nur die richtige Ziffer getroffen, dann soll das durch einen senkrechten Strich markiert werden; stimmen Ziffer und Spalte überein, dann notiert er ein Pluszeichen. Am Beispiel:
Es wurde vereinbart, eine vierstellige Zahl und die Ziffern 1 bis 5 zu verwenden. Es wird folgendes Schema vorbereitet:

1	2	3	4	/ / /
4	3	2	1	/ / /
3	4	1	2	+ + +
3	1	4	2	+ / /
3	4	1	5	

Wir nehmen an, daß Spieler A die Zahl 3415 verdeckt notiert hat. B beginnt mit 1234 und trägt diese Zahl ein. Er erhält von A die Information: | | |. Daraus ersieht er, daß drei der vier Ziffern richtig sind, jedoch keine in der richtigen Spalte steht. B vertauscht nun und notiert 4321. Er bekommt von A die Information: | | |. Sein nächster Versuch sei 3412 mit der Bewertung: + + +. Um herauszufinden welche Ziffern in den richtigen Spalten standen, vertauscht B die 4 mit der 1. Er notiert 3142 und erhält die Information: + | |.
Daraus läßt sich nun schon eindeutig folgern, daß 4 und 1 die richtigen Ziffern in den richtigen Spalten waren und entweder die 3 oder die 2 durch 5 ersetzt werden muß. Wählt man für 2 die 5, ist man am Ziel, sonst ist mindestens ein weiterer Schritt notwendig. Nun kommt der andere Spieler an die Reihe.

Das Spiel wird wesentlich erschwert, wenn man mehr als 5 Ziffern zuläßt. Sieger ist, wer weniger Versuche benötigt.

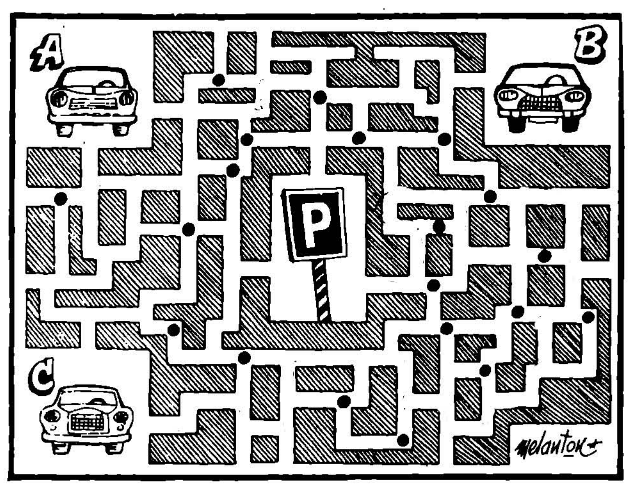
nach Lutz Kleber, Dresden
bearbeitet von OL H. Pätzold, Waren

Gradlinig

Alle Akten im Regal
schwärmten für das Lineal.
Und der Grund für so was Dummes:
Es tat niemals etwas Krummes!

Im Eiltempo

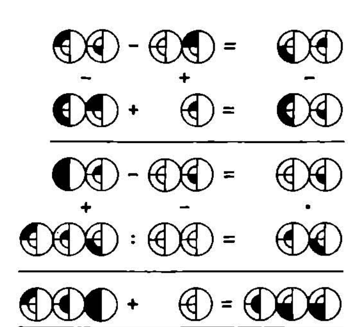
Welcher Wagen erreicht den Parkplatz?



aus: Troll 20/77

Kryptarithmetik

Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Ziffern!



Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben sind 17 Begriffe zu bilden. Die Anfangsbuchstaben nacheinander gelesen ergeben einen Begriff, durch den z. B. jedem geordneten Paar $[x, y]$ reeller Zahlen genau ein Punkt der Ebene zugeordnet werden kann.

an – che – di – di – dif – el – ex – fe – flä – fol – form – ge – gel – gen – ger – gra – in – ke – kreis – la – lip – lung – mal – man – na – nach – nor – nung – on – on – or – ord – ra – renz – satz – se – spie – stieg – tan – te – te – te – tel – ti – ti – trans – trem – us – wert – yard.

1. Rotationskörper
2. wird durch das Relationszeichen „$<$" bzw. „$>$" festgelegt
3. y-Achse
4. Halbmesser
5. Ergebnis der Subtraktion
6. höhere Rechenart
7. hat jede natürliche Zahl
8. wird z. B. durch m in der linearen Funktion $y = mx$ gebildet
9. Gerade, die einen Kreis berührt
10. Optimale Lösung
11. Wie nennt man die quadratische Gleichung: $x^2 + px + q = o$
12. beweisbare Aussage
13. engl. und nordamerik. Längenmaß (0,914 m)
14. eine Bewegung
15. Verschiebung
16. Kegelschnitt
17. Oberfläche, ohne Deck- und Grundfläche

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

Erster Schultag: „Nun Lieschen, wie alt bist du?"

aus: Pythagoras 1/74, Niederlande

Welcher Beruf?

INGE RUBIN, AUE
IMRE VURGU, SINGEN u. ESSEN
E. U. LING-HEUSCH, (1301) CHORIN
P. HEYSE, GORKI
EVA M. RASCHIG-BESSEN, (50) ERFURT
UTE I. STAMM-KINDT, ATHEN
PEER FABRII-CHARTE, KARTHAGO
CHE DARK, REIMS
C. O. GOTE, (8601) LEHN
BEN RICH, ZAUE

Lehrer D. Knape, Jessen

Tauschen und Schütteln

Vom Wort FREIZEIT ausgehend sind neue Begriffe zu bilden, indem jeweils drei Buchstaben entnommen und dafür drei neue eingesetzt werden. Durch Schütteln ergibt sich dann das zu suchende Wort. Das gefundene Wort ist jeweils Ausgangspunkt für das nächste. 1. Primzahl; 2. Vieleck (Mehrzahl); 3. Viereck; 4. Bürgermeister und Naturforscher in Magdeburg (1602 bis 1686); 5. Vieleck (Mehrzahl); 6. Primzahl; 7. Primzahl; 8. aus einer Vielzahl Ausgewähltes; 9. ausgezeichneter Punkt bestimmter geometrischer Gebilde; 10. orientierte Figur (Mehrzahl); 11. Seitenbezeichnung bestimmter Dreiecke.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Wie heißt der Wissenschaftler?

di – e – ein – er – fisch – ge – go – gra – in – le – ler – me – nicht – no – o – o – ramm – ran – rönt – sau – stell – ster – stoff – tal – thi – u – xid – zeit

Aus vorstehenden Silben sind Wörter mit folgender Bedeutung zu bilden:

1. Bei der Behandlung des chemischen Gleichgewichts auftretende Größe, 2. Methode der Kristalluntersuchung, 3. Gruppe von Elementen, 4. Klasse organischer Verbindung, 5. Element, 6. Küpenfarbstoff, 7. Wissenschaftler der DDR, entwickelte ein Verfahren zur Verkokung von Braunkohle (Nationalpreis 1951), 8. anorganische Verbindung.

Die ersten und die letzten Buchstaben, beide von oben nach unten gelesen, ergeben den Namen eines englischen Physikers.

Prof. Dr. W. Renneberg †

Spruchweisheit

Wann ist die Freude am größten?
Wenn du das Gewünschte erreichst.

Thales von Milet

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade) Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. In einer Ebene ε sind eine Gerade g und zwei Kreise k_1 und k_2 gegeben.
Konstruieren Sie ein Quadrat $ABCD$, dessen Eckpunkte A und C auf g liegen, dessen Eckpunkt B auf k_1 und dessen Eckpunkt D auf k_2 liegt! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!
Stellen Sie fest, für welche Lagemöglichkeiten der gegebenen g, k_1, k_2 ein solches Quadrat existiert und für welche von diesen Lagemöglichkeiten es dann sogar eindeutig bestimmt ist!

2. Man ermittle alle rationalen Zahlen x, für die die Zahl
$$z = x^2 + x + 6$$
das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

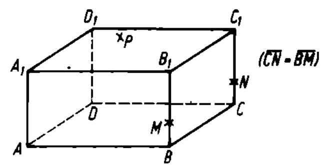
Von den nachstehenden Aufgaben 3A und 3B ist genau eine auszuwählen und zu lösen!

3A. Sind $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ natürliche Zahlen mit $0 \leqq a_i \leqq 3$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) und gilt
$z = a_n \cdot 4^n + a_{n-1} \cdot 4^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 4 + a_0$,
so sagt man, z sei im 4-adischen System durch die Ziffern $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ dargestellt, und schreibt kurz
$z = [a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0]_4$. Ist dabei $a_n \neq 0$, so heißt die (auf genau eine Weise derart darstellbare) Zahl z (im 4-adischen System) $(n+1)$stellig.
Wir bilden nun jeweils zu einer natürlichen Zahl $z \neq 0$, nachdem sie in dieser Weise dargestellt ist, die Zahl
$z' = a_n^2 + a_{n-1}^2 + \ldots + a_1^2 + a_0^2$.
Dieses Verfahren kann dann wiederholt werden; aus der Zahl z' erhält man, nachdem sie im 4-adischen System dargestellt wurde, in der angegebenen Weise die Zahl z'', aus dieser ebenso z''' usw. (Als Beispiel sei das Verfahren an der Zahl $z = 54$ erläutert:
Es ist $z = 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 2 = [312]_4$,
d. h. die Ziffern dieser Zahl sind 3, 1, 2. Also ist
$z' = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14 = 3 \cdot 4 + 2 = [32]_4$,
$z'' = 3^2 + 2^2 \quad = 13 = 3 \cdot 4 + 1 = [31]_4$
usw.
Bezeichnet man jeweils die Anwendung des Verfahrens durch einen Pfeil und läßt bei Darstellung im 4-adischen System die Klammern [ ] und die Angabe der Basis 4 fort, so kann man abgekürzt schreiben:
$$312 \to 32 \to 31 \text{ usw.)}$$

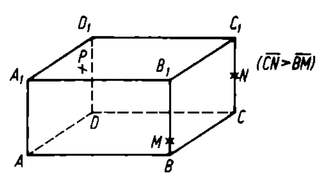
a) Beweisen Sie, daß für jede natürliche, im 4-adischen System dreistellige Zahl z die Zahl z' kleiner als z ist!
b) Beweisen Sie, daß man aus jeder natürlichen Zahl $z \neq 0$ bei genügend häufiger Wiederholung des oben angegebenen Verfahrens die Zahl 1 erhält!

3B. Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt ist dreimal ein Quader $ABCDA_1B_1C_1D_1$ in schräger Parallelprojektion dargestellt. Auf BB_1 liegt ein Punkt M, auf CC_1 ein Punkt N und im Innern der Rechtecksfläche $A_1B_1C_1D_1$ ein Punkt P.

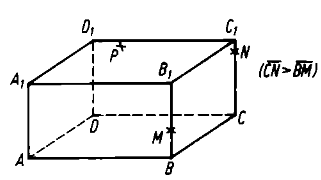
1. Fall



2. Fall



3. Fall



Konstruieren Sie auf dem beigefügten Arbeitsblatt (in der verwendeten perspektivischen Darstellung) für die angegebenen drei Lagen dieser Punkte jeweils die Schnittfigur, die sich als Schnitt des Quaders mit der Ebene ε durch M, N, P ergibt!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

4. Gegeben seien zwei von einem Punkt C ausgehende Strahlen s und t, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Ermitteln Sie die Menge der Umkreismittelpunkte aller derjenigen Dreiecke ABC, deren Ecken A und B auf s bzw. t liegen!

5. Beweisen Sie, daß der Term
$$\frac{\lg(5\sqrt{2} - 7)}{\lg(3 - 2\sqrt{2})}$$
eine reelle Zahl definiert und daß diese rational ist!

6. Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems
$$x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2},$$
$$x^2 + y^2 = 6.$$

Olympiadeklasse 11/12

1. Sind f und g im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktionen, so seien Zahlen $d_1(f, g)$ und $d_2(f, g)$ wie folgt definiert:
$d_1(f, g) = \max |f(x) - g(x)|, \qquad x \in \{-1, 1\}$
$d_2(f, g)$ ist der in Flächeneinheiten eines rechtwinkligen Koordinatensystems ausgedrückte Inhalt derjenigen Fläche, die durch die Bilder der Funktionen f und g sowie die beiden Geraden $x = -1$ und $x = 1$ begrenzt wird. (Dabei werde der Inhalt jeder Teilfläche, unabhängig von ihrem Umlaufsinn, als positiv aufgefaßt.)
Es seien nun f_n ($n = 1, 2, \ldots$) und h die im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ durch $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (1-x)x^{k-1}$ und $h(x) = 1$ definierten Funktionen.
a) Man ermittle $\lim_{n\to\infty} d_1(f_n, h)$, falls dieser Grenzwert existiert.
b) Man ermittle $\lim_{n\to\infty} d_2(f_n, h)$, falls dieser Grenzwert existiert.

2. Es seien g und h die in der (zweielementigen) Menge $\{1, -1\}$ als Definitionsbereich durch $g(1) = \;\; 1, g(-1) = -1$: (1)
$h(1) = -1, h(-1) = \;\; 1$
definierten Funktion. (2)
Ferner seien $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ Funktionen, von denen einige gleich g und die übrigen gleich h sind.
Für diese Funktionen möge gelten:
$f_1(1) = -1, f_6(1) = f_7(1) = 1$: (3)
$f_3(f_4(1)) = -1$: (4)
$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(f_6(f_7(1))))))) = -1.$ (5)
Man beweise, daß in allen Fällen, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, die Anzahl derjenigen f_i, die gleich g sind, die gleiche ist, und gebe diese Anzahl an.

3. a) Man gebe alle Möglichkeiten an, ein gegebenes Dreieck D in drei Dreiecke D_1, D_2, D_3 zu zerlegen. Die Zerlegungen sind danach zu unterscheiden, ob Eckpunkte der Teildreiecke im Innern oder auf dem Rand von vorkommenden Dreiecken oder Strecken liegen.
b) Man beweise: Ist ein Dreieck D in drei zueinander ähnliche Dreiecke D_1, D_2, D_3 zerlegbar, so ist es gleichschenklig oder rechtwinklig.

4. Definition: Es sei mit $d(X, Y)$ der Abstand zweier Punkte X, Y einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Eine reelle Zahl d heißt Durchmesser von $\mathfrak{M}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je zwei Punkte X, Y aus $\mathfrak{M}$ gilt $d(X, Y) \leqq d$.

(2) Es gibt Punkte P, Q aus $\mathfrak{M}$, für die $d(P, Q) = d$ ist.

Aufgabe: Man beweise:

a) Wenn eine Kreisfläche mit dem Durchmesser d von einem beliebigen Streckenzug, der die Kreislinie genau in einem Punkt M und einem Punkt N schneidet, in zwei Teile zerlegt wird, dann hat eine dieser Teilflächen (jeweils einschließlich ihres Randes verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.

b) Wenn ein Kugelkörper mit dem Durchmesser d von einer ebenen Schnittfläche ε_1 in zwei Teilkörper und danach einer dieser Teilkörper durch eine ebene Schnittfläche ε_2 wieder in zwei Teilkörper zerlegt wird, dann hat bei jeder derartigen Zerlegung eines Kugelkörpers in drei Teilkörper wenigstens einer dieser Teilkörper (jeweils einschließlich seiner Begrenzungsflächen verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.

5. Es sei $f_1, f_2, \ldots$ eine Folge von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, und zwar durch

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48},$$
$$f_{k+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_k(x)} \text{ für } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Man ermittle für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ alle reellen Zahlen x, die Lösung der Gleichung

$$f_n(x) = 2x \quad \text{sind.}$$

Von den nachstehenden Aufgaben 6A und 6B ist genau eine auszuwählen und zu lösen!

6A. Es sei n eine positive ganze Zahl. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sei ein n-Tupel reeller Zahlen mit $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$.

Man untersuche, ob es zu diesen gegebenen $a_1, \ldots, a_n$ eine reelle Zahl x derart gibt, daß die Zahl

$$z = |x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n|$$

möglichst klein ist.

Gibt es ein derartiges x, so bestimme man alle reellen Zahlen x mit dieser Eigenschaft und gebe den zugehörigen minimalen Wert von z an.

6B. a) Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geqq 2$. Es sei u der Umkreis eines regelmäßigen $2n$-Ecks $A_0 A_1 \ldots a_{2n-1}$. Eine Menge aus drei Ecken A_i, A_j, A_k dieses $2n$-Ecks heiße „einseitig", wenn es auf der Kreislinie u einen Halbkreisbogen h einschließlich seiner beiden Endpunkte gibt, der A_i, A_j und A_k enthält.

Man ermittle die Wahrscheinlichkeit w_n dafür, daß eine willkürlich gewählte Menge $M = \{A_i, A_j, A_k\}$ aus drei Ecken „einseitig" ist.

b) Man ermittle den Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} w_n$, falls er existiert.

Hinweis: Ist m_n die Anzahl aller Mengen, die man aus je drei Ecken A_i, A_j, A_k des $2n$-Ecks bilden kann, und ist g_n die Anzahl aller „einseitigen" unter ihnen, so ist die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit definiert als

$$w_n = \frac{g_n}{m_n}.$$

Lösungen

Lösungen zu Heft 1/78, Fortsetzung:

Ph 9 ■34 Geg.: $g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

1 min $\triangleq$ 120 Tropfen

Ges.: h (Höhe der Dachrinne)

Die Fallzeit des ersten Tropfens sei t Sekunden, dann ist die Fallzeit des nächsten Tropfens $\left(t - \frac{1}{2}\right)$ Sekunden, da bei 120 Tropfen in der Minute nach jeder halben Sekunde der nächste Tropfen fallen muß.

Um die Höhe h zu berechnen, gelten die beiden Formeln

$$h = \frac{g}{2} \cdot t^2 \text{ für den ersten Tropfen,} \qquad (1)$$

$$\frac{h}{4} = \frac{g}{2} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

für den nächsten Tropfen. Folglich gilt:

$$4 \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$4 \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$4t^2 - 4t + 1 = t^2$$

$$t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{1}{3} = 0.$$

Dann ist

$$t_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}}$$

$$t_1 = 1\,[\text{s}] \qquad (2)$$

$$t_2 = \frac{1}{3} \text{ (entfällt, da es nicht}$$

den Bedingungen der Aufgabe entspricht)

(2) wird nun in (1) eingesetzt

$$h = \frac{g}{2} t^2$$

$$h = \frac{9{,}81\,\text{m}}{2 \cdot \text{s}^2} \cdot 1\,\text{s}^2$$

$$h \approx 5\,\text{m}$$

Damit befindet sich die Dachrinne in rund 5 m Höhe.

Ph 10/12 ■35

Geg.: a) $l = 2{,}55$ m

$d_1 = 10{,}08$ m

$g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (Fallbeschleunigung)

$\alpha = 15°$ (Auslenkungswinkel)

b) $i = 116$; $v = 3{,}87\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ges.: a) v (Bahngeschwindigkeit)

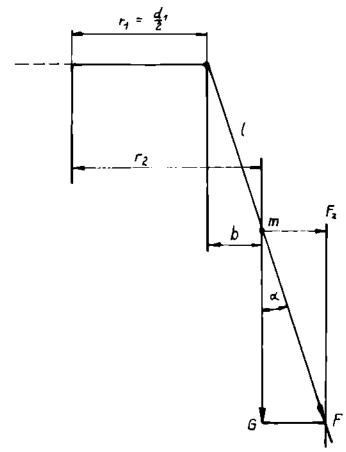
b) n_1 (Drehzahl des Antriebsmotors)

a) Die Berechnung der Geschwindigkeit der Sitze erfolgt mit Hilfe der Formel für die Zentrifugalkraft F_z

$$F_z = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$v^2 = \frac{F_z \cdot r}{m}. \qquad (1)$$

Nun ist (s. Skizze) $\tan \alpha = \frac{F_z}{G}$.



$$F_z = \tan \alpha \cdot G. \qquad (2)$$

Die Gewichtskraft G ist aber $G = m \cdot g$. Dies in (2) eingesetzt, ergibt

$$F_z = \tan \alpha \cdot m \cdot g. \qquad (3)$$

Weiterhin muß noch der Bahnradius r berechnet werden. In der Skizze ist das r_2. Man findet (s. Skizze)

$$r_2 = r_1 + b \qquad b = l \cdot \sin \alpha$$

$$r_2 = r_1 + l \cdot \sin \alpha.$$

Also $r_2 = r = r_1 + l \cdot \sin \alpha$. (4)

Durch Einsetzen von (4) und (3) in (1) ergibt sich

$$v^2 = \frac{\tan \alpha \cdot m \cdot g \cdot (r_1 + l \cdot \sin \alpha)}{m}$$

$$v^2 = \tan \alpha \cdot g \cdot (r_1 + l \cdot \sin \alpha)$$

$$v^2 = 0{,}2679 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5{,}04 + 2{,}55 \cdot 0{,}2588)\,\text{m}$$

$$v^2 \approx 14{,}98\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$v = \sqrt{14{,}98}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v \approx 3{,}87\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Die Bahngeschwindigkeit der Sitze beträgt $3{,}87\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Laut Anmerkung gilt $i = n_1 : n_2$, dabei ist n_1 die Motordrehzahl (Antrieb) und n_2 die Karusselldrehzahl (Abtrieb). Dann ist

$$n_1 = i \cdot n_2 \qquad (5)$$

Die Drehzahl n_2 des Karussells findet man aus der Formel für die Drehzahl

$$v = d \cdot \pi \cdot n_2$$

$$n_2 = \frac{v}{d \cdot \pi}.$$

Nun ist nach (4) $d = 2r = 2(r_1 + l \cdot \sin \alpha)$, also

$$n_2 = \frac{v}{2(r_1 + l \cdot \sin \alpha) \cdot \pi}.$$

Nun wird n_2 in (5) eingesetzt, dann ergibt sich

$$n_1 = \frac{i \cdot v}{2(r_1 + l \cdot \sin \alpha) \cdot \pi}$$

$$n_1=\frac{116\cdot 3{,}87\,\mathrm{m}}{2(5{,}04+2{,}55\cdot 0{,}3588)\,\mathrm{m}\cdot 3{,}14\,\mathrm{s}}$$

$$n_1\approx 12\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$n_1=\frac{12\cdot 60}{\mathrm{min}}=720\,\frac{1}{\mathrm{min}}.$$

Die Drehzahl des Antriebsmotors beträgt $720\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$.

Ch 7 ■25 a) $3{,}4\,\mathrm{g}$ m

$2Fe + O_2 \rightarrow 2FeO$

$112\,\mathrm{g}$ $144\,\mathrm{g}$

$$\frac{3{,}4\,\mathrm{g}}{112\,\mathrm{g}}=\frac{m}{144\,\mathrm{g}}$$

$$m=\frac{3{,}4\,\mathrm{g}\cdot 144\,\mathrm{g}}{112\,\mathrm{g}}=4{,}37\,\mathrm{g}$$

Aus 3,4 g Eisen entstehen 4,37 g Eisen(II)-Oxid

b) $3{,}4\,\mathrm{g}$ m

$3Fe + 2O_2 \rightarrow Fe_3O_4$

$168\,\mathrm{g}$ $232\,\mathrm{g}$

$$m=\frac{3{,}4\,\mathrm{g}\cdot 232\,\mathrm{g}}{168\,\mathrm{g}}=4{,}68\,\mathrm{g}$$

Aus 3,4 g Eisen entstehen 4,68 g Eisen(II,III)-Oxid

c) $3{,}4\,\mathrm{g}$ m

$4Fe + 3O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3$

$224\,\mathrm{g}$ $320\,\mathrm{g}$

$$m=\frac{3{,}4\,\mathrm{g}\cdot 320\,\mathrm{g}}{224\,\mathrm{g}}=4{,}87\,\mathrm{g}$$

Aus 3,4 g Eisen entstehen 4,87 g Eisen(III)-Oxid.

Masse Eisen(II)-Oxid in g

Masse Eisen in g

Aus 5 g Eisen entstehen 6,4 g Eisen(II)-Oxid.

Aus 8 g Eisen entstehen 10,3 g Eisen(II)-Oxid.

Aus 9,5 g Eisen entstehen 12,3 g Eisen(II)-Oxid.

Ch 8 ■26

a) $2{,}4\,\mathrm{kg}$ m

$Ca(OH)_2 + CO_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O$

$74\,\mathrm{g}$ $44\,\mathrm{g}$

$$m=\frac{2{,}4\,\mathrm{kg}\cdot 44\,\mathrm{g}}{74\,\mathrm{g}}=1{,}45\,\mathrm{kg}$$

10 kg Kalkmörtel müssen 1,45 kg Kohlendioxid aufnehmen.

b) $2{,}4\,\mathrm{kg}$ V

$Ca(OH)_2 + CO_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O$

$74\,\mathrm{g}$ $22{,}4\,\mathrm{l}$

$$V=\frac{2{,}4\,\mathrm{kg}\cdot 22{,}4\,\mathrm{l}}{74\,\mathrm{g}}\approx 725\,\mathrm{l}$$

1,45 kg entsprechen 725 l Kohlendioxid.

c) $2{,}4\,\mathrm{kg}$ m

$Ca(OH)_2 + CO_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O$

$74\,\mathrm{g}$ $18\,\mathrm{g}$

$$m=\frac{2{,}4\,\mathrm{kg}\cdot 18\,\mathrm{g}}{74\,\mathrm{g}}=0{,}584\,\mathrm{kg}$$

Es entstehen dabei 0,584 kg Wasser.

d) $0{,}7\,\mathrm{g}$ V

$CaCO_3 + 2HCl \rightarrow CaCl_2 + H_2O + CO_2$

$100\,\mathrm{g}$ $22{,}4\,\mathrm{l}$

$$V=\frac{0{,}7\,\mathrm{g}\cdot 22{,}4\,\mathrm{l}}{100\,\mathrm{g}}=155{,}7\,\mathrm{ml}$$

$$\frac{v\cdot p}{T}=\frac{v_0\cdot p_0}{T_0}$$

$$V=\frac{v_0\cdot p_0\cdot T}{T_0\cdot p}$$

$V_0=155{,}7\,\mathrm{ml}$

$p_0=760\,\mathrm{Torr}$

$T_0=0\,^\circ\mathrm{C}=273\,^\circ\mathrm{K}$

$$V=\frac{155{,}7\,\mathrm{ml}\cdot 760\,\mathrm{Torr}\cdot 291\,^\circ\mathrm{K}}{273\,^\circ\mathrm{K}\cdot 745\,\mathrm{Torr}}$$

$V=169{,}3\,\mathrm{ml}$

Aus 0,7 g Kalziumkarbonat entstehen 169,3 ml trockenes Kohlendioxid bei 18 °C und 745 Torr.

Ch 9 ■27

a) $2C_2H_4 + O_2 \rightarrow 2CH_3CHO$

$2CH_3CHO + O_2 \rightarrow 2CH_3COOH$

$50\,\mathrm{g}$ m

C_2H_4 CH_3COOH

$28\,\mathrm{g}$ $60\,\mathrm{g}$

$$m=\frac{50\,\mathrm{g}\cdot 60\,\mathrm{g}}{28\,\mathrm{g}}=107\,\mathrm{g}$$

Aus 50 g Äthen entstehen 107 g Äthansäure

b) $50\,\mathrm{g}$ m

$C_2H_5OH + O_2 \rightarrow CH_3COOH + H_2O$

$46\,\mathrm{g}$ $60\,\mathrm{g}$

$$m=\frac{50\,\mathrm{g}\cdot 60\,\mathrm{g}}{46\,\mathrm{g}}=65\,\mathrm{g}$$

Aus 50 g Äthanol entstehen 65 g Äthansäure.

→ Variante a) liefert größere Ausbeute.

Ch 10/12 ■28

I $4FeS_2 + 11O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3 + 8SO_2$

II $8SO_2 + 4O_2 \rightarrow 8SO_3$

III $8SO_3 + 8H_2O \rightarrow 8H_2SO_4$

$4FeS_2$ $8H_2SO_4$

FeS_2 $2H_2SO_4$

100 t Eisenkies enthalten 85 t reines Eisendisulfid. 8 t Eisenkies enthalten x t reines Eisendisulfid,

$$x=\frac{85\,\mathrm{t}\cdot 8\,\mathrm{t}}{100\,\mathrm{t}}=6{,}8\,\mathrm{t}$$

d. h., 6,8 t Eisendisulfid können zu Schwefelsäure umgesetzt werden.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,

Heft 2/78:

Ma 5 ■1736 Aus $63:3=21$ folgt, daß Joachim am ersten Tag nach Erhalt des Buches 21 Seiten durchlas. Aus $21\cdot 9=189$ folgt, daß das Buch 189 Seiten umfaßt.

Ma 5 ■1737 Angenommen, an den Leichtathletikwettbewerben waren n Frauen und somit $(n+526)$ Männer beteiligt; dann gilt

$$n+(n+526)=1314,$$
$$2n=788,$$
$$n=394.$$

Somit nahmen 394 weibliche und 920 männliche Leichtathleten an den Olympischen Sommerspielen 1976 in Montreal teil.

Ma 5 ■1738 Beide Freunde kauften zusammen drei Stück Streuselkuchen und drei Schweineohren. Sie hatten zusammen 1,29 M zu zahlen. Folglich kosten ein Stück Streuselkuchen und ein Schweineohr zusammen $1{,}29\,\mathrm{M}:3=0{,}43\,\mathrm{M}$. Da Mario für ein Stück Streuselkuchen und zwei Schweineohren 0,61 M zu zahlen hatte, kostet ein Schweineohr $0{,}61\,\mathrm{M}-0{,}43\,\mathrm{M}=0{,}18\,\mathrm{M}$. Somit beträgt der Preis für ein Stück Streuselkuchen $0{,}43\,\mathrm{M}-0{,}18\,\mathrm{M}=0{,}25\,\mathrm{M}$.

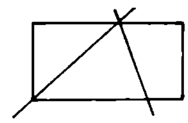
Ma 5 ■1739 Es sei n die gesuchte natürliche Zahl; dann gilt

$$2\cdot n+14=8\cdot(n-8),$$
$$2n+14=8n-64,$$
$$78=6n,$$
$$n=13.$$

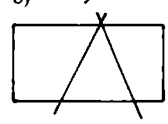
Die gesuchte natürliche Zahl lautet 13.

Ma 5 ■1740

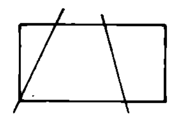
a)



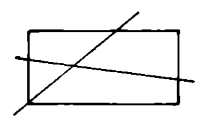
b)



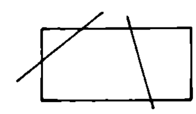
oder



c)



d)



Ma 5 ■1741 Angenommen, an den Sparer wurden n 100-Mark-Scheine ausgezahlt; dann erhielt er noch $2n$ 50-Mark-Scheine und $(2n+1)$ 20-Mark-Scheine. Nun gilt

$$100\cdot n+50\cdot 2n+20\cdot(2n+1)=500,$$
$$200\cdot n+20\cdot(2n+1)=500,$$
$$10\cdot n+(2n+1)=25,$$
$$12n=24,$$
$$n=2.$$

Der Sparer erhielt somit zwei 100-Mark-Scheine, vier 50-Mark-Scheine und fünf 20-Mark-Scheine ausgezahlt.

Ma 6 ■1742 Wegen $1+0=1$ und $9+9=18$ gilt für die Quersumme q der gesuchten zweistelligen natürlichen Zahlen $1\leqq q\leqq 18$. Es kommen also nur die Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 als Quersumme in Frage. Die folgende Tabelle enthält alle möglichen zu untersuchenden Fälle:

q	z	q	z	q	z
2	11	7	16	13	49
2	20	7	25	13	58
3	12	7	34	13	67
3	21	7	43	13	76
3	30	7	52	13	85
5	14	7	61	13	94
5	23	7	70	17	89
5	32	11	29	17	98
5	41	11	38		
5	50	11	47		
		11	56		
		11	65		
		11	74		
		11	83		
		11	92		

Wegen $2 \cdot 10=20$, $3 \cdot 4=12$, $3 \cdot 7=21$, $3 \cdot 10=30$, $5 \cdot 10=50$, $7 \cdot 10=70$ erfüllen nur die Zahlen 12, 20, 21, 30, 50, 70 die gestellten Bedingungen.

Ma 6 ▪1743 Es seien α', β', γ' die Außenwinkel des Dreiecks ABC; dann gilt $\alpha'=\gamma'-29°$ und $\beta'=\gamma'-49°$.
Die Summe der Größen der Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 360°. Somit gilt

$$\begin{aligned}\alpha'+\beta'+\gamma'&=360°,\\(\gamma'-29°)+(\gamma'-49°)+\gamma'&=360°,\\3\gamma'-78°&=360°,\\3\gamma'&=438°,\\\gamma'&=146°.\end{aligned}$$

Ferner gilt $\gamma'=180°-\gamma'=180°-146°=34°$,

$$\begin{aligned}\alpha&=180°-\alpha'=180°-(\gamma'-29°)\\&=180°-(146°-29°)=63°,\\\beta&=180°-\beta'=180°-(\gamma'-49°)\\&=180°-(146°-49°)=83°.\end{aligned}$$

Die Innenwinkel des Dreiecks ABC haben die folgenden Größen:
$\alpha=63°$; $\beta=83°$; $\gamma=34°$.

Ma 6 ▪1744 Angenommen, die ursprüngliche Fallhöhe betrug x Meter; nach dem ersten Aufprall sprang der Ball um $\frac{1}{3}\cdot x$ Meter, nach dem zweiten um $\frac{1}{9}\cdot x$ Meter wieder hoch. Nun gilt

$$\begin{aligned}\frac{x}{3}-\frac{x}{9}&=1\\\frac{2}{9}\cdot x&=1,\\x&=\frac{9}{2}=4{,}5.\end{aligned}$$

Frank ließ den Ball aus einer Höhe von 4,5 m fallen.

Ma 6 ▪1745 a) Aus $x(x+y)=41=1\cdot 41$ folgt $x=1$ oder $x=41$, da 41 Primzahl ist. Für $x=1$ erhalten wir $y=40$. Für $x=41$ erhalten wir $x+y=1$, was nicht möglich ist.
b) Aus $x(x-y)=41=1\cdot 41$ folgt $x=1$ oder $x=41$. Für $x=1$ erhalten wir $x-y=1-y=41$, was nicht möglich ist. Für $x=41$ erhalten wir $y=40$.
c) Aus $x(y-x)=41=1\cdot 41$ folgt $x=1$ oder $x=41$. Für $x=1$ erhalten wir $y=42$. Für $x=41$ erhalten wir $y=42$. Folgende vier Zahlenpaare erfüllen die gegebenen Gleichungen:
(1; 40), (41; 40), (1; 42), (41; 42).
Es gilt
a) $1\cdot(1+40)=41$;
b) $41\cdot(41-40)=41$;
c) $41\cdot(42-41)=41$.

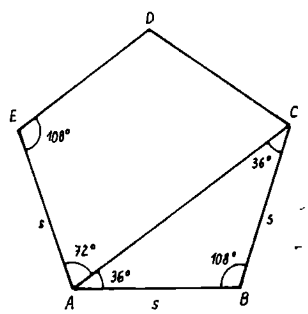
Ma 6 ▪1746 Angenommen, die Enkeltochter sei n Jahre alt; dann ist ihre Großmutter $12n$ Jahre alt, und es gilt

$$\begin{aligned}n+12n&=65,\\13n&=65,\\n&=\frac{65}{13},\\n&=5.\end{aligned}$$

Die Großmutter ist somit 60 Jahre, ihre Enkeltochter 5 Jahre alt.

Ma 7 ▪1747 Angenommen, es wurde die Diagonale $\overline{AC}$ gezeichnet. Wegen $\overline{AB}=\overline{BC}=s$ gilt $\sphericalangle ACB=\sphericalangle CAB$. Die Winkelsumme eines n-Ecks beträgt $(n-2)\cdot 180°$. Die Größe des Winkels ABC beträgt somit $\frac{1}{5}\cdot(5-2)\cdot 180°=108°$. Daraus folgt

$\sphericalangle ACB=\sphericalangle CAB=\frac{1}{2}\cdot(180°-108°)=36°$, und somit $\sphericalangle EAC=108°-36°=72°$. Die entgegengesetzt liegenden Winkel $\sphericalangle EAC=72°$ und $\sphericalangle AED=108°$ ergänzen sich zu 180°. Folglich gilt $AC \parallel ED$, d. h., die Diagonale $\overline{AC}$ verläuft parallel zur Fünfeckseite $\overline{DE}$.



Ma 7 ▪1748 Angenommen, Hans hat x Flaschen Limonade und y Flaschen Cola, also $(25-x-y)$ Flaschen Bier eingekauft, dann gilt

$$\begin{aligned}0{,}21x+0{,}35y+0{,}48\cdot(25-x-y)&=7{,}61,\\21x+35y+48\cdot(25-x-y)&=761,\\21x+35y+1200-48x-48y&=761,\\27x+13y&=439,\\27x&=432+7-13y,\\x&=16-\frac{13y-7}{27}.\end{aligned}$$

Nun müssen x und y natürliche Zahlen sein mit $1\leqq x$, $y\leqq 23$. Nur für $y=13$ und somit für $x=10$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Hans hat somit 10 Flaschen Limonade, 13 Flaschen Cola und 2 Flaschen Bier eingekauft.

Ma 7 ▪1749 Die den drei Ziffern entsprechenden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien n, $n+1$, $n+2$. Dann lautet die Quersumme der gegebenen dreistelligen Zahl $3n+3=3\cdot(n+1)$. Wegen $n+2\leqq 9$, also $n\leqq 7$, und wegen $9\mid 3\cdot(n+1)$ gilt $n=2$ oder $n=5$. Die zunächst zu untersuchenden Zahlen lauten somit
234, 243, 324, 342, 423, 432 bzw.
567, 576, 657, 675, 756, 765.
Nun gilt
$234=9\cdot 26$; $567=9\cdot 63$;
$243=9\cdot 27$; $576=9\cdot 64$;
$324=9\cdot 36$; $657=9\cdot 73$;
$342=9\cdot 38$; $675=9\cdot 75$;
$423=9\cdot 47$; $756=9\cdot 84$;
$432=9\cdot 48$; $765=9\cdot 85$.
Nur die Faktoren 47 und 73 sind Primzahlen. Diese Aufgabe besitzt zwei Lösungen. Die Zahlen 423 und 657 erfüllen die gestellten Bedingungen.

Ma 7 ▪1750 Jede vierstellige natürliche Zahl läßt sich in der Form $z=1000a+100b+10c+d$ darstellen. Ferner gilt $a+c=b+d$ bzw. $d=a+c-b$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}z&=100a+100b+10c+a+c-b,\\z&=1001a+99b+11c,\\z&=11\cdot(91a+9b+c).\end{aligned}$$

Somit ist z durch 11 teilbar.

Ma 8 ▪1751 In $u^2-1=(u-1)(u+1)$ sind beide Faktoren geradzahlig. Da von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen genau eine durch 4 teilbar ist, ist u^2-1 durch 8 teilbar. Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $u-1$, u und $u+1$ ist genau eine durch 3 teilbar. Da das nach Voraussetzung u nicht ist, muß es entweder $u-1$ oder $u+1$ sein. Damit ist auch u^2-1 durch 3 teilbar.
Wenn die Zahl u^2-1 durch 8 und durch 3 teilbar ist, so ist sie durch 24 teilbar, w. z. b. w.

Ma 8 ▪1752 Die Fassungsvermögen der drei Behälter seien a, b und c (in Litern). Dann gilt

$$a+b+c=170 \quad (1)$$
$$a-b=\frac{2}{9}a \quad (2)$$
$$a-(b+c)=10. \quad (3)$$

Nach äquivalenten Umformungen der Gleichungen (2) und (3) erhalten wir:

$$a+b+c=170 \quad (1)$$
$$b=\frac{7}{9}a \quad (2)$$
$$a-b-10=c. \quad (3)$$

Setzt man (2) in (3) ein, so erhält man die Gleichung

$$a-\frac{7}{9}a-10=c \text{ bzw.}$$
$$\frac{2}{9}a-10=c. \quad (4)$$

Setzt man (2) und (4) in (1) ein, so erhält man die Gleichung

$$a+\frac{7}{9}a+\frac{2}{9}a-10=170 \quad (5)$$
$$2a=180$$
$$a=90.$$

Daraus folgt durch Einsetzen in (2) $b=70$ und durch Einsetzen in (3) $c=10$. Die Behälter haben ein Fassungsvermögen von 90 Litern, 70 Litern bzw. 10 Litern.

Probe: 1. Die Summe der Fassungsvermögen beträgt 170 Liter.
2. Wenn man den Inhalt des ersten in den zweiten Behälter umfüllt, so bleiben von 90 Litern noch 20 Liter zurück, das ist $\frac{20}{90}$ bzw. $\frac{2}{9}$ des Inhalts.
3. Der Inhalt der letzten beiden Behälter beträgt 80 Liter. Füllt man diesen in den ersten Behälter, so fehlen noch 10 Liter, um ihn vollständig zu füllen.

Fortsetzung von Seite 89

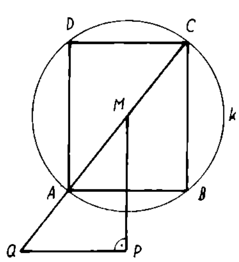
▲12▲ Angenommen, bis 14 Uhr sind x Stunden verstrichen; dann gilt $20x = 12(x+4)$, also $x=6$. Aus $6\,\text{h}\cdot 20\frac{\text{m}}{\text{h}} = 120\,\text{m}$ folgt, daß der ganze mit Platten auszulegende Weg 120 m lang ist. Die Arbeit wurde aber erst in 8 Stunden geschafft (um 16 Uhr beendet); folglich legte diese Brigade pro Stunde 15 m des Weges mit Platten aus.

▲13▲ Angenommen, am Ausflug beteiligten sich x Jungpioniere, also $9x$ Thälmann-Pioniere. Im Lager verblieben y Thälmann-Pioniere, also $10y$ Jungpioniere. Nun gilt

$$x+9x+y+10y=138,$$
$$10x+11y=138,$$
$$10x=140-2-10y-y,$$
$$x=14-y-\frac{y+2}{10}.$$

Nur für $y=8$ und damit für $x=5$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Im Lager waren somit 8 Thälmann-Pioniere und 80 Jungpioniere verblieben, die nicht am Ausflug teilnahmen.

▲14▲ Wir zeichnen einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r=\frac{d}{2}=3$ cm.



Wir legen einen Punkt P fest, der 4 cm von M entfernt ist und verbinden P mit M. In P tragen wir an PM einen rechten Winkel an. Auf dem freien Schenkel dieses Rechten tragen wir eine Strecke von 3 cm von P bis Q ab. Wir zeichnen die Gerade QM, sie schneidet den Kreis k in den Punkten A und C. Die Parallele zu MP durch C schneidet k in B. Die Parallele zu BC durch A schneidet k in D.

▲15▲ Im rechtwinkligen Dreieck TBF gilt $\sphericalangle TFB=90^\circ-\frac{\beta}{2}$. Ferner gilt $\sphericalangle TFB = \sphericalangle EFC=90^\circ-\frac{\beta}{2}$ als Scheitelwinkel. Im rechtwinkligen Dreieck EBC gilt $\sphericalangle CEB = 90^\circ-\frac{\beta}{2}$. Daraus folgt $\sphericalangle CEF = \sphericalangle EFC$. Somit gilt auch $\overline{CE}=\overline{CF}$, d. h. Dreieck EFC ist gleichschenklig.

▲16▲ Aus $\frac{390}{x}=m+r$ und $\frac{313}{x}=n+r$ folgt durch Subtraktion $\frac{390}{x}-\frac{313}{x}=m-n$ bzw $\frac{77}{x}=m-n$. Nur bei $x=1$ oder $x=7$ oder $x=11$ wird $m-n$ ganzzahlig. Von diesen drei Zahlen ist aber nur 11 eine zweistellige natürliche Zahl. Der Divisor heißt somit 11, und es gilt
$390:11=35+\frac{5}{11}$ und $313:11=28+\frac{5}{11}$.

▲17▲ Es seien f, h und r die Anzahlen der erlegten Fasane, Hasen und Rebhühner. Aus $f:h=7:15$ und $h:r=3:2$ folgt $f:h:r=7:15:10$. Es sind somit insgesamt $7n+15n+10n=32n$ Tiere; sie haben insgesamt $(32n+186)$ Beine. Nun gilt

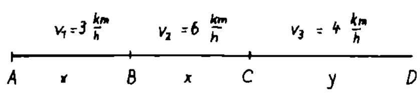
$$2\cdot 7n+4\cdot 15n+2\cdot 10n=32n+186,$$
$$62n=186,$$

also $n=3$.
Es wurden 21 Fasane, 45 Hasen und 30 Rebhühner erlegt.

▲18▲ Wegen $t=\frac{s}{v}$ gilt

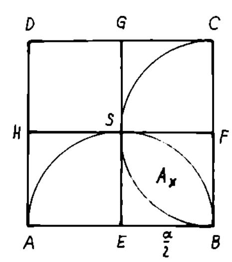
$$\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=3,$$
$$4x+2x+3y=36,$$
$$6x+3y=36,$$
$$2x+y=12.$$

Das Ausflugsziel war 12 km von der Schule entfernt.



▲19▲ Wir verbinden die Mittelpunkte E und G bzw. F und H der Seiten des Quadrates $ABCD$; die Verbindungsstrecken schneiden sich in S. Es sei $\overline{AB}=a$, also $\overline{EB}=\frac{a}{2}$. Dann gilt $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2-A_x$, wobei A_x der Flächeninhalt des Kreisbogenzweiecks ist. Daraus folgt weiter

$$A_x=\frac{1}{8}\pi a^2-\frac{1}{4}a^2=a^2\cdot\left(\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{4}\right).$$



Wir erhalten somit

$$A_x : A_q=\frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{2}\pi-1\right):a^2\approx 0{,}14.$$

Der Flächeninhalt des Kreisbogenzweiecks beträgt rund 14% des Flächeninhalts des Quadrates $ABCD$.

▲20▲ Nach dem Strahlensatz gilt
$\overline{EM_1}:\overline{CD}=\overline{AE}:\overline{AD}$ und $\overline{EM_2}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{DA}$ bzw.
$x:b=1:2$ und $(x+3{,}5):10=1:2$,
$x=\frac{1}{2}\cdot b$ und $x=\frac{3}{2}$.
Daraus folgt $\frac{1}{2}b=\frac{3}{2}$, also $b=3$.
Die Seite $\overline{CD}$ des Trapezes $ABCD$ ist 3 cm lang.

Lösungen zu: alpha-heiter 4/78

Im Eiltempo
Wagen C erreicht den Parkplatz.

Kryptarithmetik

86	−	34	=	52	
−		+		−	
14	+	2	=	16	
72	−	36	=	36	
+		−		·	
825	:	33	=	25	
897	+	3	=	900	

Silbenrätsel

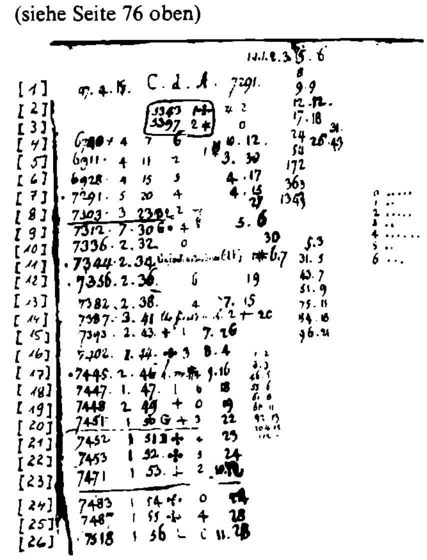
1. Kreiskegel	11. Normalform
2. Ordnung	12. Satz
3. Ordinate	13. Yard
4. Radius	14. Spiegelung
5. Differenz	15. Translation
6. Integration	16. Ellipse
7. Nachfolger	17. Mantelfläche
8. Anstieg	
9. Tangente	
10. Extremwert	Koordinatensystem

Welcher Beruf?
Bauingenieur; Vermessungsingenieur; Hochschulingènieur; Geophysiker; Vermessungsfacharbeiter; Mathematikstudentin; Kartographiefacharbeiter; Markscheider; Technologe; Bauzeichner.

Tauschen und Schütteln
1. DREIZEHN, 2. DREIECKE, 3. RECHTECK, 4. GUERICKE, 5. NEUNECKE, 6. NEUNZEHN, 7. SIEBZEHN, 8. BEISPIEL, 9. SCHEITEL, 10. STRAHLEN, 11. SCHENKEL.

Wie heißt der Wissenschaftler?
1. Einstellzeit, 2. röntgenografisch, 3. Nichtmetalle, 4. Ester, 5. Sauerstoff, 6. Thioindigo, 7. Rammler, 8. Uranoxid – Ernest Rutherford

Aufzeichnungen des 14jährigen C. F. Gauß (siehe Seite 76 oben)



Ein Flächen-belegungsspiel

Dieses Spiel läßt sich in vielen Arten ausführen. Wir beschreiben eine mögliche Variante für ein rechteckiges Spielfeld. Auf das Spielfeld legen zwei Spieler A und B abwechselnd gewisse geometrische Figuren (wie z. B. Kreise, Rechtecke u. ä.). Die Position der gelegten Figuren darf nicht mehr geändert werden. Beim Legen der Figuren ist darauf zu achten, daß sie sich nicht überlappen. Wir nehmen an, daß ausreichend Figuren vorhanden sind, um das Spielfeld völlig zu überdecken. Damit ist klar, daß nach einer gewissen Zahl von Zügen das Spielfeld bedeckt ist, so daß keine andere Figur mehr Platz hat. Sieger soll derjenige Spieler sein, der die letzte Figur legen konnte. Gibt es hier einen Spieler, der sein en Sieg erzwingen kann? Hat die Form der Figuren Einfluß auf die Gewinnmöglichkeiten?

Wir untersuchen zunächst den Fall, daß A und B Dominosteine auf das Spielfeld legen. Es handelt sich also nur um eine Sorte von Figuren, nämlich Rechtecke. Wenn der erste Spieler A seinen ersten Dominostein so auf den Schnittpunkt S der Diagonalen des Spielbretts legt, daß eine Drehung des Bretts um den Punkt S um 180° den Stein mit sich zur Deckung bringt, so kann A gewinnen (Bild 1). A braucht dann, um auf einen Zug von B antworten zu können, in Gedanken das Brett um 180° zu drehen und seinen Stein auf die Stelle zu legen, auf die der von B zuletzt gelegte Stein gedreht wurde (Bild 2).

Wir wollen uns davon überzeugen, daß der Antwortzug von A auf diese Weise stets möglich ist, d. h. daß der entsprechende Platz noch nicht von gelegten Steinen überlappt wird. Zunächst halten wir fest, daß jedem Dominostein genau eine um 180° bezüglich S gedrehte Lage entspricht, und umgekehrt entspricht einer in Gedanken erhaltenen Lage eines gedrehten Steines genau ein Dominostein.

Der erste Antwortzug von A auf einen von B gelegten Dominostein ist auf jeden Fall möglich, da A seinen ersten Stein so legte, daß er durch Drehung um 180° (bezüglich S) in sich übergeht. Wenn B noch Platz für einen zweiten Dominostein findet, so muß auch der um 180° (bezüglich S) gedrehte Platz, den A belegen möchte, noch frei sein. Denn wäre dieser Platz durch einen Dominostein versperrt, so müßte sich auf dem um 180° (bezüglich S) gedrehten Spielfeld bereits ein Dominostein befinden. Folglich kann in diesem Fall B gar keinen Stein gelegt haben. Wir können mit dieser Argumentation fortfahren und zeigen so, daß jeder Zug von B durch A beantwortet werden kann. Da nach einer gewissen Zahl von Zügen keine Steine mehr auf das Brett passen, muß das Spiel für A siegreich enden, denn nach einem Antwortzug von A wird B keinen Stein mehr setzen können und verliert demzufolge.

Nach diesen Überlegungen ist es einfach, auch andere Figuren zuzulassen. Wesentlich ist, daß der erste Stein so auf den Mittelpunkt des Spielfeldes gelegt werden muß, daß er bei Drehung des Spielfeldes um 180° (bezüglich S) in sich übergeht. Das ist natürlich eine Forderung an die Form der Figur. Dreiecke oder L-förmige Figuren u. ä. scheiden damit im Sinn unserer Strategie als Belegungsfiguren aus, Kreise (Münzen) sind zugelassen (Bild 3). Es ist sogar möglich, verschieden große Kreise zu legen oder auch Kreise und Rechtecke usw. gemeinsam zu benutzen. Treten verschiedene Figuren auf, so läßt sich unsere Taktik sicher anwenden, wenn A und B von jeder Sorte gleich viele Steine haben. Ausgenommen ist die Figur, die A zuerst legt, weil A hier eventuell eine Figur mehr benötigt. Natürlich müssen auch hier wieder so viele Steine vorhanden sein, daß das Brett völlig bedeckt werden kann. Die Einschränkung, daß A und B von jeder Sorte gleich viele Steine haben, wobei der erste von A gelegte Stein ausgenommen ist, entfällt jedoch, wenn von jeder Sorte so viele Steine vorhanden sind, daß das Brett mit ihnen allein völlig bedeckt werden kann. Auch die Form des Bretts kann variiert werden (Bild 4).

Bild 1

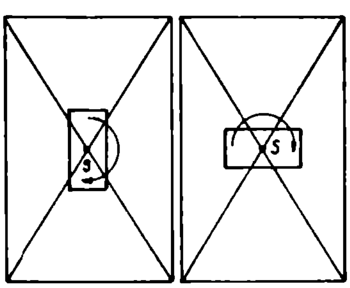


Bild 2

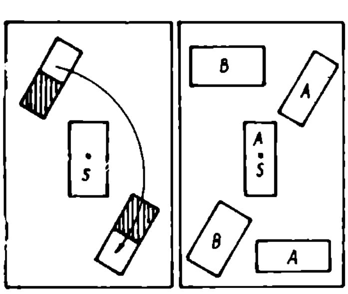


Bild 3

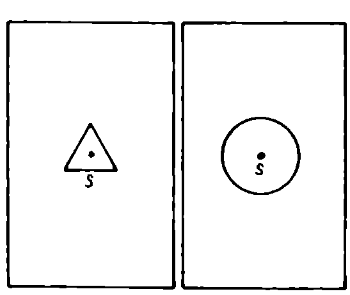
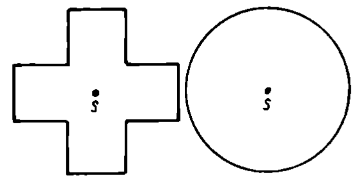
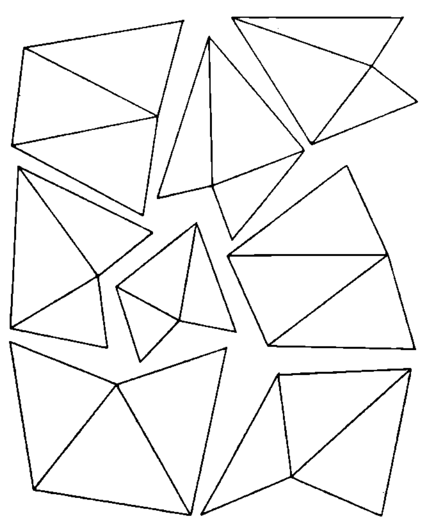


Bild 4



Alle Spiele, die wir bisher untersucht haben, besaßen eine Gewinnstrategie für jeweils einen Spieler. Diese Strategie basierte auf einer paarweisen Anordnung des Spielablaufs. Damit ist genauer folgendes gemeint: Wenn ein Spieler X einen Zug ausführte, so antwortete der andere Spieler Y mit einem genau festgelegten Gegenzug, der das Spiel in eine für Y günstige Situation brachte, aus der schließlich zwangsläufig sein Sieg hervorging. Zug und Gegenzug bildeten ein Paar. In unserem eben beschriebenen Spiel sind Zug und Gegenzug durch den Platz und den um 180° gedrehten Platz bestimmt, in Lewthwaites Spiel durch den gleichen Dominostein festgelegt usw. Mitunter, wie bei diesem Spiel, ist erst nach dem ersten Zug eine paarweise Anordnung des Spielablaufs möglich.

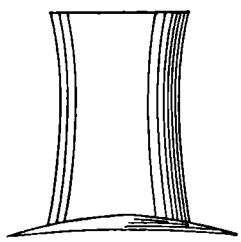
R. Thiele



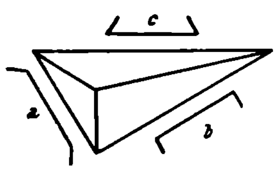
Man findet die Mantelflächen von 8 dreiseitigen Pyramiden gezeichnet. Aus den Pyramiden (von denen jede verwendet werden muß) läßt sich ein regelmäßiges Tetraeder zusammensetzen.

Aus der ungarischen Schülerzeitschrift Lapok 1/78

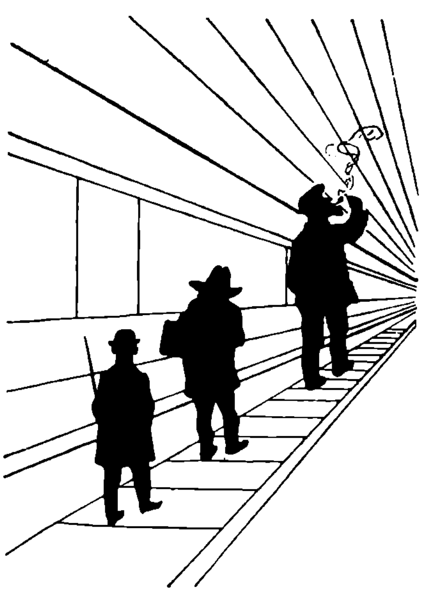
Optische Täuschungen



1. Ist der Zylinder ebenso hoch wie breit?



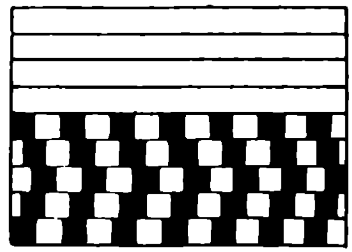
2. Vergleiche die Länge der drei Strecken *a*, *b* und *c*!



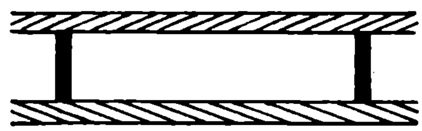
3. Diese Männer sind doch nicht gleich groß!

3388SSXXZZ

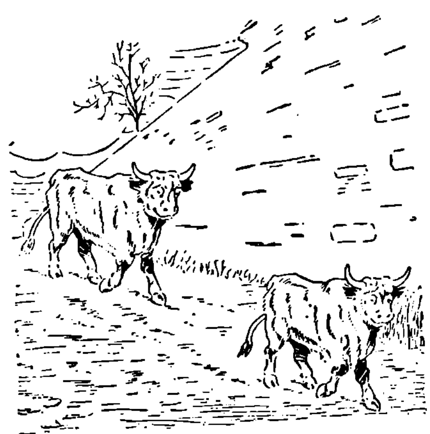
4. Sind die Lettern gleich hoch oder nicht?



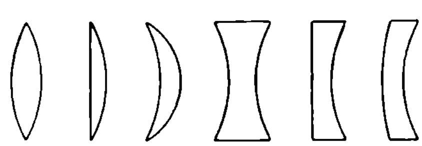
5. Der untere Teil scheint verdruckt und verworfen! Ist das so?
(Nein! Es sind nur abwechselnd weiße und schwarze Quadrate zwischen parallelen Linien vorhanden.)



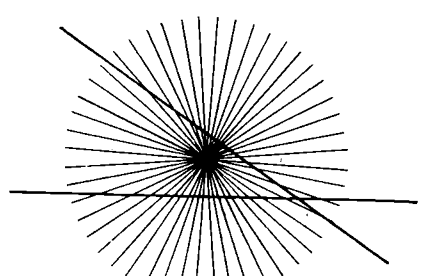
6. Konvergieren diese Balken oder sind sie parallel?



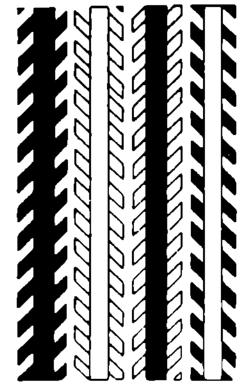
7. Welcher der beiden Ochsen ist größer?



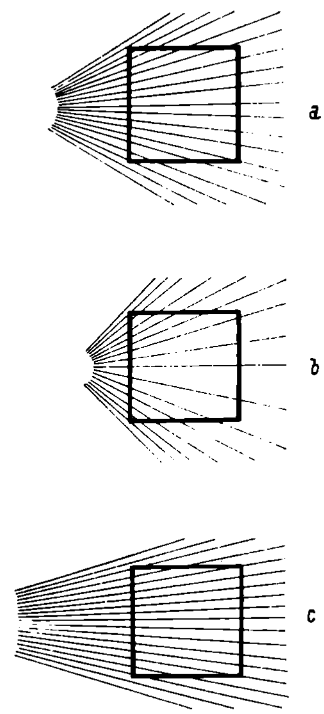
8. Werden die Linsen von links nach rechts größer oder nicht?



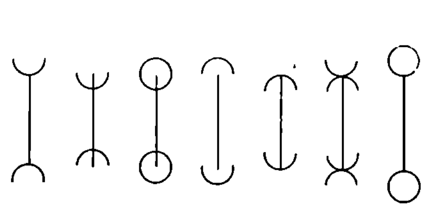
9. Verbogen oder nicht?



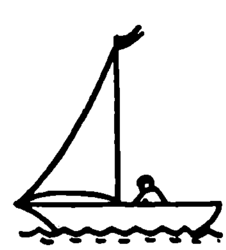
10. Sind die Balken parallel oder nicht?



11. Quadrat oder nicht, das ist hier die Frage!



12. Vergleiche die Längen der Hauptlinien!



13. Vergleiche Masthöhe und Bootslänge!