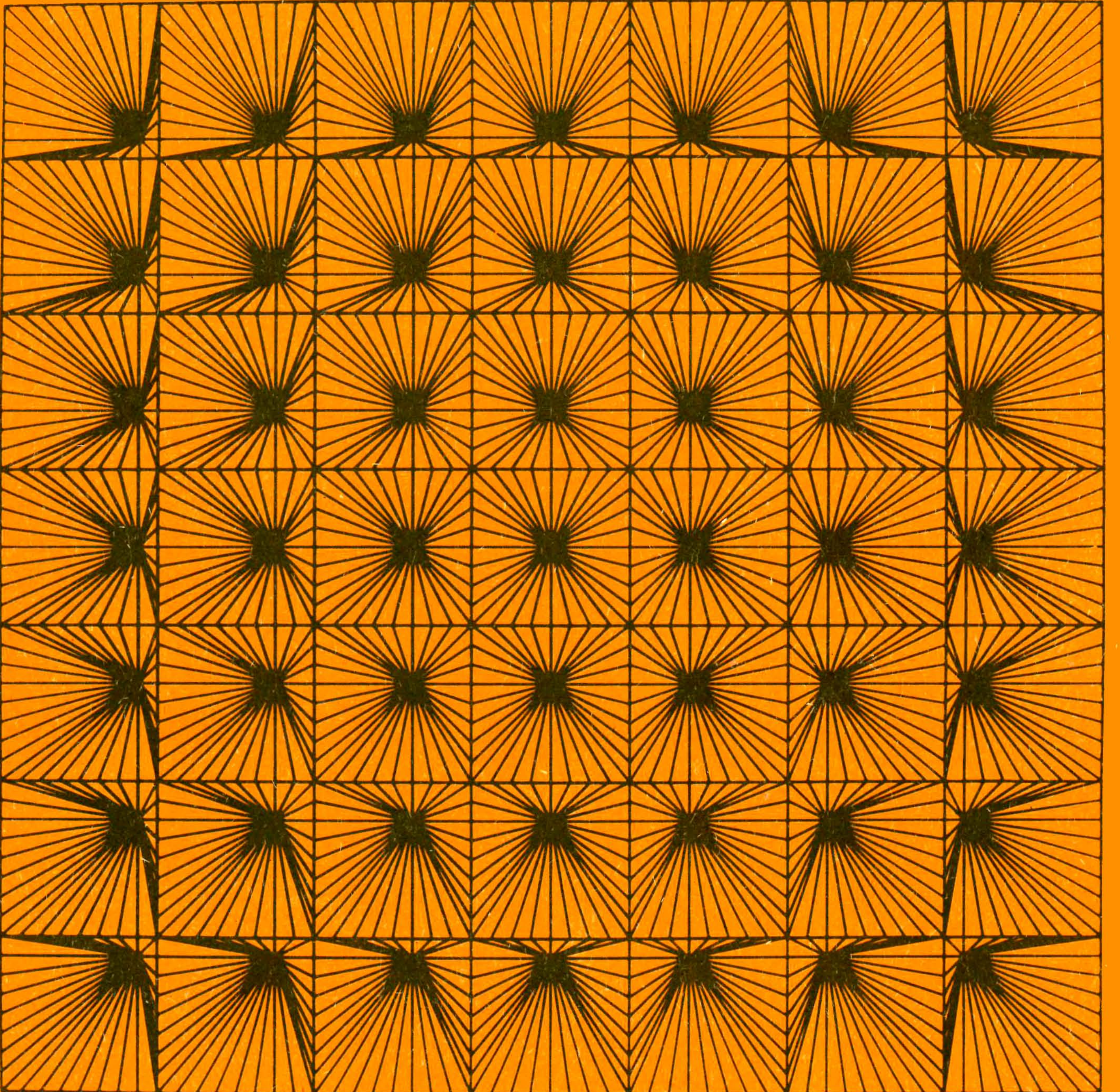
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
16. Jahrgang 1982
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Hochschulbildstelle Potsdam (S. 26), A. Herrmann, Berlin (S. 27); Zentralbild (S. 30); aus: Infeld, *Wen die Götter lieben*, Wien (S. 32); Haus der JP Rostock (S. 42); Ondrej Zimka, Prag (S. 48)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelbild: Autor: H. Bartnig, gestaltet von H. Fahr, Berlin

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 11. Dezember 1981

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

*bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Tangentialebenen an regelmäßige Polyeder

Bevor wir unsere Aufgabenstellung formulieren, möchten wir einige Begriffe und Sachverhalte bereitstellen.

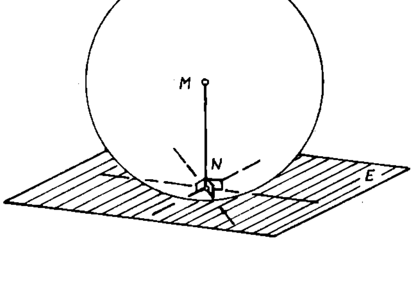
1. *Regelmäßige Polyeder* sind konvexe Körper mit kongruenten n-Ecken als Seitenflächen. Da die Summe der Größe der Innenwinkel derjenigen n-Ecke, die in einer Ecke des regelmäßigen Polyeders zusammenstoßen, kleiner als 360° sein muß, kann es nur die folgenden Arten regelmäßiger Polyeder geben:

n-Eck	Anzahl der Seitenflächen an einer Körperecke	e	f	k	Bezeichnung des Körpers
Gleichs. Dreieck	3	4	4	6	regelm. Tetraeder
gleichs. Dreieck	4	6	8	12	Oktaeder
gleichs. Dreieck	5	12	20	30	Ikosaeder
Quadrat	3	8	6	12	Hexaeder (Würfel)
regelm. Fünfeck	3	20	12	30	Pentagondodekaeder

In dieser Tabelle bedeuten e – Anzahl der Ecken, f – Anzahl der Seitenflächen und k – Anzahl der Kanten des Polyeders. (Nach der Eulerschen Polyederformel gilt $e+f=k+2$.) Jeder dieser Körper besitzt eine Umkugel, d. h. eine Kugel, die durch seine Ecken geht. Außerdem haben sie eine Inkugel, d. h., es gibt eine Kugel, die alle Seitenflächen berührt. Diese Berührungspunkte sind aus Symmetriegründen die Mittelpunkte der n-Ecke.

Berührt eine Ebene ε eine Kugel (mit dem Mittelpunkt M) im Punkt N, dann ist die Verbindungsgerade MN senkrecht zu ε (kurz $MN \perp \varepsilon$; und dies heißt, daß jede Gerade in ε, die durch N geht, senkrecht zu MN ist – siehe Bild 1). Man nennt ε eine *Tangentialebene*.

Bild 1



In Analogie zu diesem Sachverhalt legen wir nun an ein regelmäßiges Polyeder mit dem Mittelpunkt M (d. i. der Mittelpunkt seiner Umkugel) jeweils durch den Mittelpunkt N einer Kante $\overline{AB}$ die Ebene ε, für die $MN \perp \varepsilon$. Da die Abstände $|AM|$ und $|BM|$ gleich sind, ist $MN \perp AB$, und damit liegt $\overline{AB}$ ganz in ε. Folglich liegt das regelmäßige Polyeder ganz auf einer Seite von ε.

Die Gesamtheit aller so festgelegten Tangentialebenen eines regelmäßigen Polyeders begrenzt ein konvexes Polyeder. Von Interesse ist nun, welche Polyeder auf diese Weise entstehen.

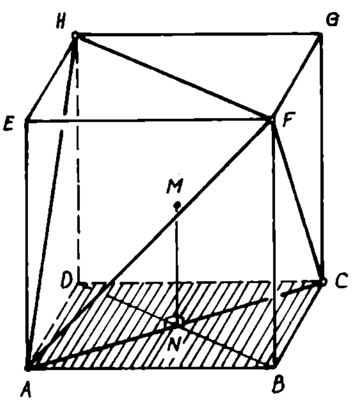
2. Wir beginnen mit dem *regelmäßigen Tetraeder*

Der hohe Grad an Regelmäßigkeit läßt vermuten, daß ein regelmäßiges Polyeder entsteht. Da $k=6$ ist, müßte der entstehende Körper ein 6-Flächner sein. Diesen Bedingungen genügt nur der Würfel.

Geht man von irgendeinem Schrägbild eines regelmäßigen Tetraeders aus, so erscheint diese Vermutung auf den ersten Blick fragwürdig. Doch sie ist richtig und läßt sich recht einfach wie folgt beweisen.

Wir gehen von einem Würfel $ABCDEFGH$ mit dem Mittelpunkt M aus. Die Punkte A, C, F und H bilden ein regelmäßiges Tetraeder (Bild 2), denn seine Kanten sind Flächendiagonalen des Würfels und damit gleich lang. Der Mittelpunkt dieses Tetraeders fällt mit dem Mittelpunkt M des Würfels zusammen, da beide Körper die gleiche Umkugel besitzen. Die Fußpunkte der Lote von M auf die Seitenflächen des Würfels sind bekanntlich die Mittelpunkte der Seitenflächen. Damit bilden die Seitenflächen des Würfels die Tangentialebenen des regelmäßigen Tetraeders $ACFH$ durch die Mitten seiner Kanten, d. h., bezüglich des *regelmäßigen Tetraeders $ACFH$ bilden die betrachteten Tangentialebenen einen Würfel.* Da alle regelmäßigen Tetraeder einander ähnlich sind, gilt diese Aussage auch für jeden dieser Körper.

Bild 2



3. Bilden die Tangentialebenen durch die Mitten der Kanten auch für die übrigen vier regelmäßigen Polyeder wieder Polyeder dieser Art?

Bei oberflächlicher Betrachtung der vielen Regelmäßigkeiten dieser Körper könnte man geneigt sein, eine positive Antwort zu erwarten. Doch bei Ikosaeder und Pentagondodekaeder müßte wegen $k=30$ ein 30-Flächner vorliegen; ein derartiges regelmäßiges Polyeder gibt es jedoch nicht.

Zur Klärung des Sachverhalts betrachten wir eingehend, wie die neuen Seitenflächen entstehen. Durch die Kanten eines regelmäßigen n-Ecks ($n=3$, 4 oder 5), das eine Seitenfläche eines regelmäßigen Polyeders ist, gehen n Tangentialebenen, die sich in einem Punkt S schneiden.

Denn auf Grund der gleichen Neigung dieser Ebenen bezüglich der betrachteten Seitenfläche entsteht eine gerade Pyramide (siehe Bild 3 für $n=4$ und Bild 4 für $n=3$).

Eine *Seitenfläche* des Körpers der aus den Tangentialebenen gebildet wird, setzt sich demnach aus zwei kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit gemeinsamer Basis zusammen, *ist* also *stets ein Rhombus* (siehe Bild 3 und 4).

Damit wird deutlich, wie oberflächlich eigentlich unser Hinweis auf die große Regelmäßigkeit der zugrundeliegenden Körper mitsamt ihren betrachteten Tangentialebenen und die damit ausgesprochenen Erwartungen waren.

Eine erneute Bestätigung des Resultats für ein regelmäßiges Tetraeder ergibt jetzt der Nachweis, daß hier die Diagonalen des Rhombus gleich lang sind, d. h. bezüglich des Bildes 4, daß $|SN|=|A_1N|$ gilt. (Dabei ist N der Mittelpunkt der Kante $\overline{A_1A_2}$.) Da der Punkt S, der Mittelpunkt T des gleichseitigen Dreiecks $A_1A_2A_3$ und die Ecke A_4 zusammen mit dem Mittelpunkt M des Tetraeders

Bild 3

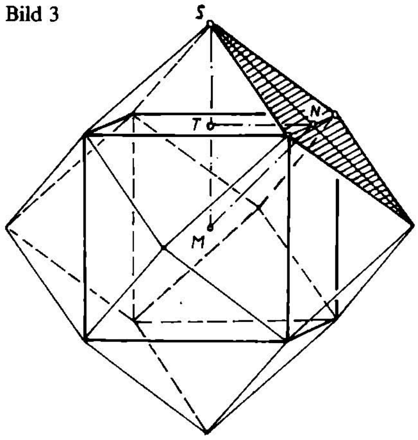
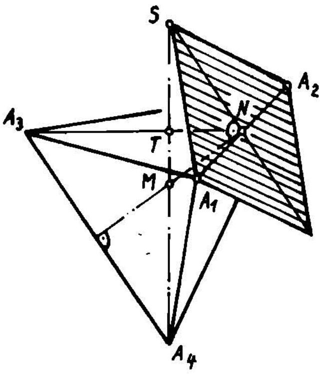


Bild 4



auf einer Geraden liegen und die Gerade A_3N durch T geht, liegen A_3, A_4, N, S und M in einer gemeinsamen Ebene. Außerdem ist $MN \perp A_3A_4$ und $MN \perp SN$, da die Ebene durch S, A_1, A_2 nach Voraussetzung senkrecht zu MN ist.
Folglich gilt $A_3A_4 \parallel SN$. Ferner ist $|A_3T|:|TN| = 2:1$ (Teilverhältnis der Seitenhalbierenden!) und damit nach dem Strahlensatz schließlich $|SN| = \frac{1}{2}|A_3A_4| = \frac{1}{2}|A_1A_2|$, was zu zeigen war.

4. Liegt ein *Würfel* unseren Betrachtungen zugrunde, so gilt $|ST| = |TM|$, da sich seine Seitenflächen rechtwinklig schneiden und demzufolge $|\sphericalangle\, SNT| = 45° = |\sphericalangle\, MNT|$ gilt (Bild 3). Damit ist $|SN| = \sqrt{|ST|^2 + |TN|^2}$ $= \sqrt{2\left(\frac{1}{2}|A_1A_2|\right)^2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}|A_1A_2|\right)$.
Hier liegen also *echte* Rhomben vor.

Beim Würfel bilden die betrachteten Tangentialebenen einen Körper, der von 12 kongruenten Rhomben begrenzt wird, wobei die Diagonalenlängen dieser Rhomben im Verhältnis $1:\sqrt{2}$ stehen. Ein derartiges Polyeder heißt *Rhombendodekaeder*.
Ein Schrägriß dieses Körpers läßt sich leicht zeichnen, wenn man vom Würfel ausgeht und $|ST| = |TM|$ für die Konstruktion der neuen Körperecken nutzt. [Beim Schrägriß empfehlen wir den Verzerrungswinkel $\alpha = 22{,}5°$ sowie das Verzerrungsverhältnis $q = \frac{1}{4}$ für die Tiefenlinien (Bild 3)].

Diese Körperform kommt in der Natur als Kristallform vor; so kristallisiert der Halbedelstein *Granat* häufig in dieser Form. Die Körperform hat auch Verwendung in der Technik gefunden. Es zeigt sich, daß sie ein geeignetes Modell zum Zuschnitt des Materials bei der Herstellung hohlkugelförmiger Gegenstände wie Ballons, Flüssigkeitsbehälter ist.

5. Als nächstes wäre zu klären, welches Polyeder die betrachteten Tangentialebenen bei einem *Oktaeder* bilden. Hier verhilft uns eine Betrachtung rasch zum Ziel, die wir bezüglich des regelmäßigen Tetraeders unter 2. angestellt haben. Wir gehen vom *Rhombendodekaeder* aus, das aus dem Würfel entstanden ist (Bild 3), und betrachten jetzt die Diagonalen der Rhomben, die nicht Würfelkanten sind. Diese bilden ein Oktaeder (Bild 5). Es ist sofort einzusehen, daß die Seitenflächen des Rhombendodekaeders die Tangentialebenen durch die Kantenmitten dieses Oktaeders darstellen.

Bild 5

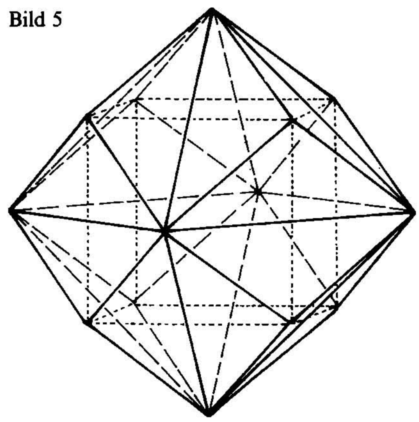
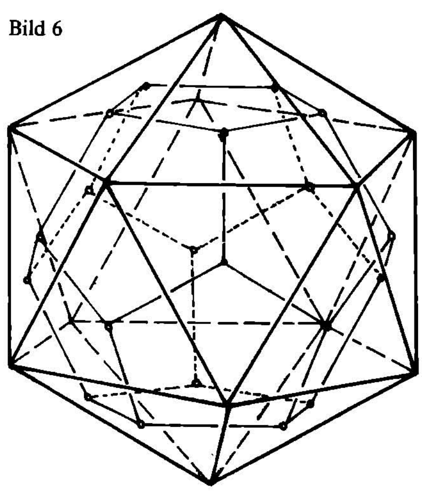
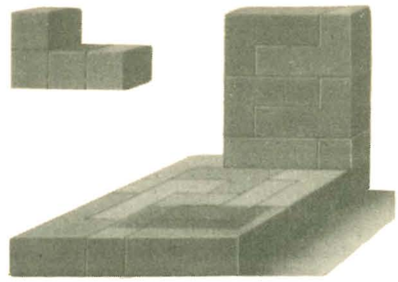


Bild 6



Beim *Ikosaeder* (Bild 6) entsteht wegen $k = 30$ ein Polyeder, das von 30 kongruenten Rhomben begrenzt wird; auch hier ist genau eine Diagonale in jedem Rhombus eine Körperkante des Ikosaeders. Die anderen Diagonalen der Rhomben bilden ein *Pentagondodekaeder*. Also entsteht aus den Tangentialebenen durch die Kantenmitten eines Pentagondodekaeders ein gleiches Polyeder wie bezüglich des Ikosaeders.



Aufgaben

▲1▲ Um das Wievielfache vergrößert sich das Volumen, wenn man von einem regelmäßigen Polyeder zu dem Körper übergeht, der von den Tangentialebenen durch die Kantenmitten gebildet wird? Dieser Faktor ist gleich $|SM|:|TM|$. (Warum?)

▲2▲ Man kann bezüglich der regelmäßigen Polyeder Tangentialebenen durch die Polyederecken betrachten und wiederum nach den Körpern fragen, die dabei entstehen. Diese Aufgabe ist leicht zu beantworten, wenn man die Polyeder untersucht, die von den Mitten der Seitenflächen der regelmäßigen Polyeder gebildet werden. (Siehe dazu auch Bild 6 bezüglich des Ikosaeders.)

E. Quaisser

Prof. Dr. Hans Kaiser, ▶
Päd. Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam

Eine Aufgabe von Prof. Dr.
Hans Kaiser

Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam

Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans Kaiser wurde am 31.5.1926 in Nägelstedt/Thüringen geboren. Das Abitur legte er in Erfurt ab. Nach der Kriegsgefangenschaft studierte er Mathematik und Physik zunächst von 1946 bis 1948 in Jena, von 1948 bis 1951 in Berlin. Dabei wurde er besonders nachhaltig beeinflußt von Kurt Schröder, Erhard Schmidt und Karl Schröter. 1956 folgte die Promotion, 1967 schließlich habilitierte sich Prof. Kaiser mit einer Arbeit zur *Löwnerschen Differentialgleichung.*

Er war bis 1964 an der Humboldt-Universität in Berlin tätig. Seit dieser Zeit arbeitet er an der Pädagogischen Hochschule *Karl Liebknecht* Potsdam.

Prof. Kaiser ist in den Jahren seiner wissenschaftlichen Tätigkeit in außerordentlich vielfältiger Weise wirksam geworden. Lehrbücher zu angewandten Problemen, die Redaktion von übersetzter Literatur, Lehrmittel sowie Hochschulfilme sind Ausweis und Ergebnis seiner Arbeit.

Unter seiner Leitung hat sich der Wissenschaftsbereich *Angewandte Mathematik* profiliert. Sowohl Aufgaben der Lehre als auch der Forschung konnten mit beachtlichem Erfolg gelöst werden.

In der Lehrveranstaltung *Numerik* werden u.a. Regeln zur Ermittlung oberer Schranken für die Nullstellen eines Polynoms
$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$
betrachtet.

Nach der Regel von *Lagrange und Maclaurin* erhält man z.B., daß $L=3$ eine obere Schranke für die Nullstellen des Polynoms
$P(x)=x^5+x^4-4x^3-3x^2-2x-4$
ist.

Die Ermittlung einer solchen Schranke ist aber häufig auch ohne Kenntnis entsprechender Regeln möglich. Damit ergibt sich unsere Aufgabe.

Aufgabe

▲2207▲ Man beweise, daß für kein $x>3$ die Gleichung
$P(x)=x^5+x^4-4x^3-3x^2-2x-4=0$
gelten kann.

Mathematik-Computergrafik-Informatik

Wissenschaft und Technik durchdringen in zunehmendem Maße eine immer größer werdende Anzahl von Bereichen der menschlichen Gesellschaft. Neben der Vergrößerung ihres Einflusses ist eine Eroberung neuer Gebiete zu beobachten. So erleben wir in der wissenschaftlich-technischen Revolution ein neu- und einzigartiges Wechselspiel zwischen der Ausweitung des Erkenntnis- und Wissensstandes der Grundlagenforschung einerseits und dessen immer schnellere und umfassendere Nutzbarmachung in einem immer komplexer werdenden Produktionsprozeß andererseits. Technische Wissenschaften und Technik schlechthin haben neuartige Kenntnisse und Fertigkeiten zutage gefördert, die Neuerungen in kurzer Frist massenwirksam werden lassen, welche im täglichen Leben vieler Menschen nicht mehr wegzudenken sind. Als Beispiel sei auf chemische Produkte und elektronische Geräte verwiesen, mit denen jeder täglich vielfach umgeht. Mathematische Strukturen und Denkweisen spielen dabei ebenso eine entscheidende Rolle wie in zunehmendem Maße Rechner aller Art mit den zu ihrer Nutzung erforderlichen Programmen.

So gesehen wundert es uns nicht, daß diese Entwicklung eine Entsprechung in der Kunst findet. Wir wollen uns mit diesem Artikel auf die darstellende Kunst beschränken und den Berliner Maler und Grafiker *Horst Bartnig* (siehe Bild 1) vorstellen. Er versucht in seinen Arbeiten Lageverhältnisse von Elementarformen und mathematische Gesetzmäßigkeiten zuletzt als Computergrafiken ins Sinnlich-Wahrnehmbare zu übersetzen und so auf diese Weise das Zusammenspiel der Elemente und die Struktur von komplexeren Systemen erlebbar zu machen. Damit bietet er eine Möglichkeit an, die Wirkungsweise komplizierter Objekte und Geräte zu erahnen oder gar zu erkennen und sich daher nicht von ihnen wegen ihrer Undurchsichtigkeit oder des Unverständnisses ihres Aufbaus erdrükken zu lassen. Hingewiesen werden soll jedoch gesondert auf die Wirkungen, die er mathematischen Gebilden und rechentechnischen Realisierungen abgewinnt. Auch für unsere alltägliche Arbeit als Mathematiker und Programmierer wirken seine Grafiken anregend und belebend.

Nach einer ersten Begegnung im Jahre 1977 mit seinen Arbeiten auf einer Ausstellung des *Zentralen Akademie-Archivs* in Berlin über mathematische Formen in der Kunst entwickelte sich sehr bald eine fruchtbare Zusammenarbeit mit Mathematikern unseres Institutes, die bei einer solchen Kunstrichtung unerläßlich erscheint, aber auch eine Bereicherung für beide Seiten darstellt. Es ist schon erstaunlich, wie selbst durch eine bewußte Darstellung mathematischer Figuren und Gesetzmäßigkeiten mit möglichst elementaren geometrischen Formen und in ebenso einfachen Lageverhältnissen eine derartige Vielfalt an optischen Wirkungen zu erzielen ist.

Für den Grafiker waren anfangs vor allem die Aussagen eines Mathematikers zu kombinatorischen Problemen von Interesse. Ihm ging es darum, aus der Vielzahl möglicher Kombinationen deckungsgleiche Elemente auszusondern. So wurden z.B. bei den „Tausendvierundvierzig Variationen“

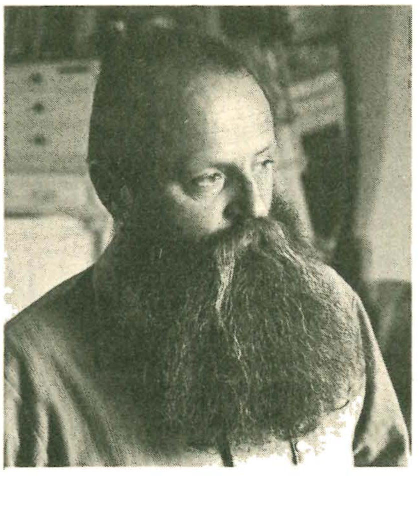


Bild 1
Horst Bartnig, Mitglied des Verbandes der Künstler der DDR, wurde 1938 in Militsch geboren. Nach einer Malerlehre besuchte er von 1954 bis 1957 die *Fachschule für angewandte Kunst* in Magdeburg. Bartnig beteiligte sich mit Arbeiten an der VIII. Kunstausstellung der DDR, an der Akademie-Ausstellung zum 200. Geburtstag von C. F. Gauß und an der Einstein-Mappe

(Bild 2 und 3) alle diejenigen Sechzehner-Gruppierungen ausgesondert, die sich durch Drehungen in Deckung bringen ließen. Rechner-Programme und die Rechenanlage selbst halfen dabei entscheidend, Ordnung und Übersicht in die Vielzahl der Möglichkeiten zu bringen. Ein weiterer Schritt war die Einbeziehung eines Zufallszahlengenerators und die zufällige Erzeugung von Anordnungen. Schließlich wurde ein mit einem Grafik-Softwarepaket über den Rechner steuerbares Zeichengerät in die Zusammenarbeit einbezogen. Dabei folgte der Ideenskizze des Künstlers mit dem darzustellenden Bildungsgesetz die Erstellung eines Programms, das mit Hilfe eines schon in der Programmbibliothek vorhandenen Softwarepaketes bei einem Rechnerlauf eine Folge von Steuersymbolen erzeugt, die auf einem Magnetband oder einem Lochstreifen zwischengespeichert werden. Dabei wurde auch eine Optimierung von Leerfahrten auf dem Zeichengerät bei der Programmierung berücksichtigt. Die Zeit, die der Zentralprozessor des Rechners für die Erstellung des Steuerstreifens für eine Zeichnung benötigt, beträgt für die Computerzeichnungen aller abgebildeten Grafiken 43 s. Für H. Bartnig stellt die Beobachtung der Entstehung des Bildes auf dem Zeichentisch ein ihn inspirierendes Erlebnis dar. Nach der Fertigstellung der Computerzeichnung überprüft er die Vorlage und nimmt danach die grafische Reproduktion vor.

Wie ordnen sich nun die Arbeiten von H. Bartnig im Umfeld der bildenden Künste ein? Dazu zitieren wir eine Darstellung von G. Ziller aus seinem Artikel *Prozeß als Kunstwerk* aus Sächsische Neueste Nachrichten vom 22. 9. 80:

„Die Arbeiten des Berliners Horst Bartnig stehen unverwechselbar in der Tradition des Konstruktivismus, der 1913 mit Kasimir Malewitschs ‚Schwarzem Quadrat' seinen kunstphilosophischen Urknall erlebte. ...

Durch Kriegswirren hindurch hielten einige Künstler dem Konstruktivismus und damit der Faszination rational-ästhetischer Flächen- und Raumordnungen die Treue. Genannt seien nur der nach Amerika emigrierte Bauhauslehrer *Josef Albers* und der Dresdner *Hermann Glöckner*.

Inzwischen hatte der in Frankreich lebende gebürtige Ungar *Victor Vasarely* (siehe Titelblatt Heft 1/82) die Grundlagen der auf Konstruktivismus basierenden Op-Art gelegt. ...

Aus dem Bewußtsein einer zunehmend rational komplexen Gesellschaft drang immer mehr Gedankengut exakter Grundlagenwissenschaft auch in die bildenden Künste ein. Plötzlich wurden innere Strukturanalysen optischer Wirkungen und umgekehrt die optischen Auswirkungen exakten mathematischen Denkens interessant. Von diesen Ufern stießen in den sechziger und siebziger Jahren neue Kräfte zu einem neuartig ver-

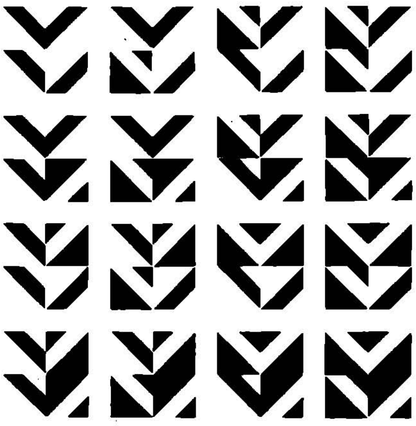


Bild 2
Tausendvierundvierzig Variationen, 70 Blätter, Linolschnitt, gelb auf weißem Grund (1975 bis 1979). Unser Foto zeigt davon Blatt 27.
„In Zusammenarbeit mit Physikern bzw. Mathematikern habe ich (H. Bartnig) von den vielen Variationen die herausgenommen, die sich in Drehungen wiederholen. Von 256 blieben 70 übrig. Auf jedem Blatt ist eine Variante von diesen 70 zu sehen, der Ablauf erfolgt von positiv bis negativ."

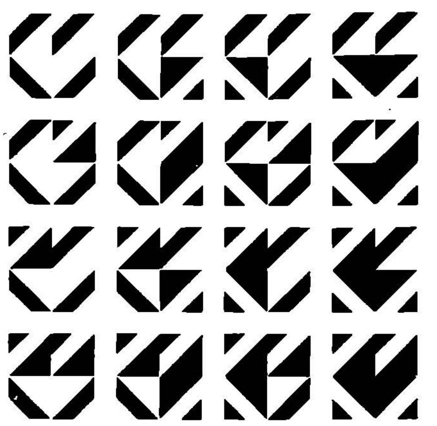


Bild 3
Blatt 9 der 70 Blätter (siehe links)

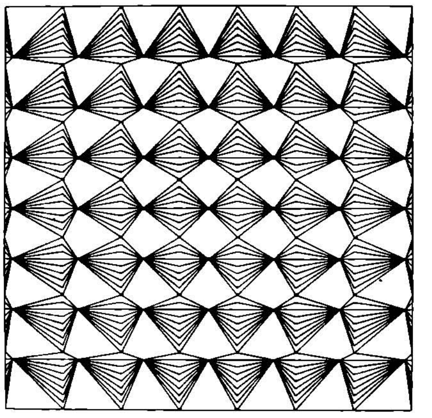
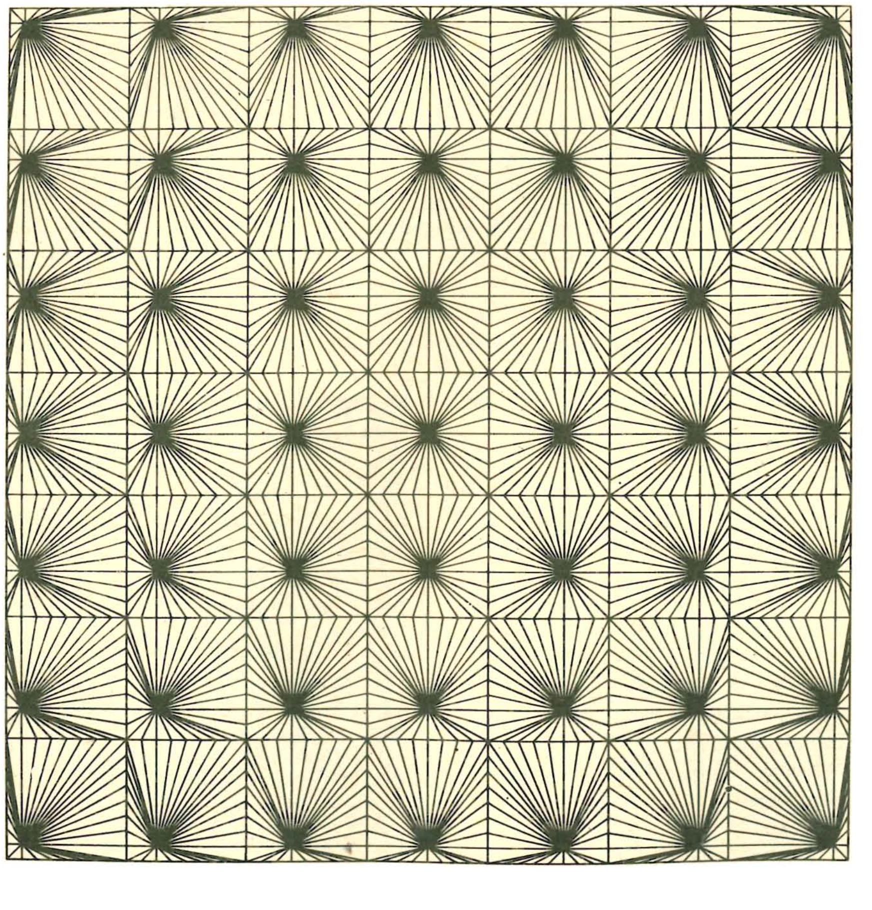


Bild 5
Computergrafik 1

Bild 4
Computergrafik 4



standenen Konstruktivismus. Flächen und Räume wurden immer ausgeklügelteren mathematischen Programmen unterzogen."

Immer mehr Grafiker und Programmierer bedienten und bedienen sich jetzt digitaler Zeichengeräte und grafischer Displays.

H. Bartnig nutzt jedoch ganz bewußt nicht die heute zur Verfügung stehenden technischen Möglichkeiten der Rechentechnik ebensowenig wie die Vielfalt mathematischer Gesetzmäßigkeiten aus. Er beschränkt sich in mehrerer Hinsicht, um zu zeigen, wie vielfältig eine Kombination von Einfachem sein kann und wie ausdrucksstark. Alle abgebildeten Grafiken befassen sich z. B. mit dem Quadrat und seiner Auflösung entweder durch Dreiecke und Trapeze oder durch Linien von einem Knotenpunkt zu Randpunkten des Quadrates. Dabei werden die Grundquadrate wiederum in Quadrate zerlegt, z. B. bei den „Tausendvierundvierzig Variationen" und bei den „Computergrafiken 5 und 6" in 4 Teilquadrate. Letztere untergliedern sich bei allen 6 Computergrafiken erneut, und zwar in ein Netz von 64 Quadraten. Auf der anderen Seite werden die Grundquadrate auch wieder zu größeren Quadraten zusammengefaßt, einmal zu 16 und bei den zuletzt genannten zu 49 Elementen. Durch diese Zergliederung bzw. Zusammensetzung von Elementarformen kann H. Bartnig nun Gesetzmäßigkeiten optisch erlebbar machen. So werden bei einer Wanderung in einem Blatt der „Tausendvierundvierzig Variationen" vom Ausgangselement in der linken oberen Ecke bis zum Zielelement unten rechts je nach dem Weg auf verschiedene Weise die Teilflächen entgegengesetzt eingefärbt.

Bei den „Computergrafiken 1 bis 6" wandern dagegen die Zentren in ganz bestimmter Weise über die Knoten des genannten Netzes von Quadraten hinweg. Mit diesen Gesetzmäßigkeiten erreicht Bartnig einerseits Spannungen, andererseits aber auch Zusammenhang und Geschlossenheit und weckt Neugier und Interesse.

Uns beeindruckt immer wieder, wie der Grafiker es versteht, geometrische Figuren und rechentechnische Möglichkeiten nicht nur sichtbar, sondern erlebbar zu machen. Ihre Aussagen bereichern die Betrachtung gegenüber derjenigen mit „nur" mathematischem Sachverstand. Horst Bartnig beschränkt sich bewußt auf ebene Darstellungen und elementare geometrische Formen sowie auf einfache Beziehungen und Verhältnisse. Diese Durchsichtigkeit seiner Grafiken und die trotzdem erzielte Wirkungsvielfalt regen zum eignen Gestalten an, zum Ausprobieren von optischen und ästhetischen Wirkungen des Zusammenspiels solcher Elementarformen und der Struktur ihrer Anordnungen. Sollten Leser dieser Zeitschrift in dieser Hinsicht aktiv werden, so wäre neben dem Bekanntwerden mit einem Künstler ein noch höherer Zweck dieses Artikels erreicht worden. Wichtig für die Ausstrahlung der Bartnigschen Blätter ist ihre Anordnung in Serien. Durch sie gelangt das Zusammenspiel der Formen und Strukturen zu voller Entfaltung. Durch den Versuch, rational gedachte Zusammenhänge darzustellen und erlebbar zu machen, stellen seine Arbeiten eine Möglichkeit dar, auch von der Seite der Mathematik, der Computergrafik und der Informatik her in einem schöpferischen Prozeß immer neue Seiten menschlicher Möglichkeiten zu erkennen und zu begreifen und sich in unserer realen und technisierten Welt besser zurechtzufinden.

M. Fischer/M. Grabow

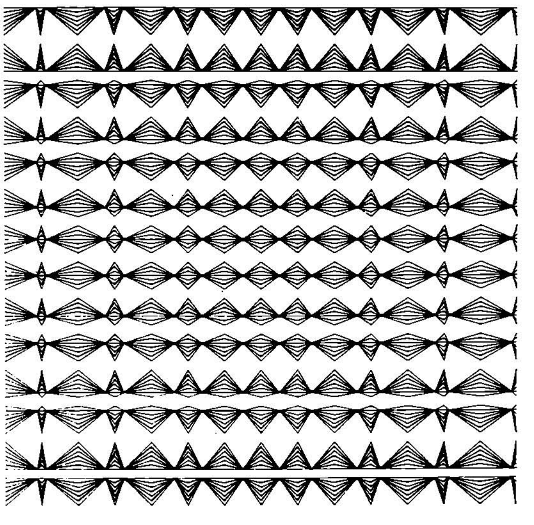
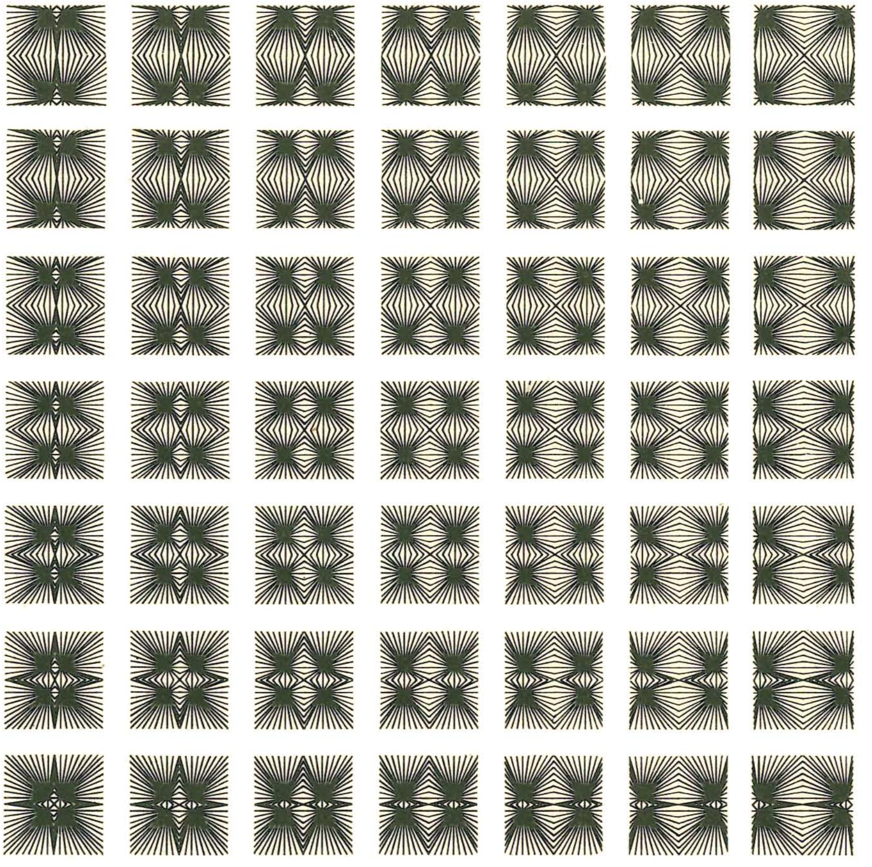


Bild 6
Original-Computerzeichnung für Computergrafik 5 (nur waagerechte Strukturen)

Bild 8
(Titelblatt dieser alpha)
Computergrafik 2
Es wurden Computergrafiken des Künstlers verwendet, ausgeführt im Siebdruck bzw. als Strichätzung

Bild 7
Computergrafik 6



Spezialklasse für Mathematik, Physik und Technik der TH Karl-Marx-Stadt

Unsere Spezialklasse, die bereits 1964 gegründet wurde, ist eine der vier an den Sektionen für Mathematik der Universitäten und Hochschulen der DDR bestehenden Einrichtungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Schüler. Sie dient somit zugleich der Entwicklung des eigenen wissenschaftlichen Nachwuchses in den mathematischen, physikalischen und technischen Fachdisziplinen.

In einer zweijährigen Ausbildung, die mit dem Erwerb des Abiturs abschließt, werden durch die Anwendung hochschulgemäßer Formen des Lehrens und Lernens die besten Voraussetzungen dafür geschaffen, daß unsere Absolventen im späteren Fachstudium sowohl in der gesellschaftlichen als auch fachlichen Arbeit hohe Maßstäbe setzen.

Die Bildungs- und Erziehungsziele der erweiterten Oberschule stellen auch für uns die Grundlage der Ausbildung in allen Fächern dar. So unterscheidet sich unser Stundenplan von dem der EOS lediglich darin, daß in Mathematik wöchentlich acht und in Physik vier Stunden unterrichtet werden.

Eine wichtige Voraussetzung für eine hohe Intensität des Unterrichts, der in der Regel von Hochschulangehörigen, d. h. wissenschaftlichen Mitarbeitern, Lehrern im Hochschuldienst, Oberassistenten oder Dozenten, erteilt wird, ist die niedrige Klassenfrequenz (15 Schüler pro Klasse).

Alle Spezialklassenschüler, die nicht aus Karl-Marx-Stadt kommen, wohnen mietfrei in schönen Zweimannzimmern des Studentenwohnheimes der Sektion Mathematik. Man hilft sich gegenseitig beim Lernen und Knobeln, treibt gemeinsam Sport und besucht kulturelle Einrichtungen der Stadt.

Nützlich ist diese Zusammenarbeit der Besten auch für die erfolgreiche Lösung der schwierigen Aufgaben aus den Korrespondenzzirkeln oder Arbeitsgemeinschaften für Mathematik. Man spornt sich gegenseitig an, holt sich Rat (manchmal auch in der umfangreichen Sektionsbibliothek oder bei den unterrichtenden wissenschaftlichen Mitarbeitern) und entdeckt stets neue, ungelöste Probleme.

Der beliebteste Ausgleich zur anstrengenden Lernarbeit und zu den Verpflichtungen, die sich aus dem Arbeitsprogramm der FDJ-Gruppe ergeben, ist bei uns seit Jahren – sowohl bei den Mädchen als auch Jungen – das Schachspiel.

Leider ist die Freizeit viel zu knapp, da wir unseren Spezialklassenschülern, die in der Regel aus den Bezirken Karl-Marx-Stadt, Dresden und Gera kommen, den Übergang vom gewohnten Zuhause zum studentischen Internatsleben erleichtern möchten, indem sie wöchentlich am Freitagnachmittag nach Hause fahren können. Das bedeutet aber, daß der gesamte obligatorische Unterricht, die Arbeitsgemeinschaften oder die FDJ-Versammlungen an fünf Tagen absolviert werden müssen.

Dennoch bewältigen unsere Schüler ihre Gesamtaufgaben gut und sind mit dieser Regelung, wie mit der Spezialklasse überhaupt, sehr zufrieden. Beinahe alle der bisher 250 Absolventen unserer Spezialklassen versichern uns, z. B. auch während der regelmäßig stattfindenden Wiedersehenstreffen einzelner Jahrgänge, daß der Spezialklassenbesuch ihre Persönlichkeitsentwicklung entscheidend beeinflußt hat.

Die Absolventen der ersten Jahrgänge sind heute bereits erfolgreiche Wissenschaftler oder Leiter, wie z. B. an unserer Sektion Dozent Dr. sc. nat. Georg Heinig oder Dr. Hans-Jürgen Fischer, ehemaliger IMO-Preisträger.

Jüngere Absolventen, wie z. B. Thomas Maiwald, mehrfacher Preisträger auf DDR-Olympiaden, oder Lutz Dietrich, der 1979 auf der IMO einen 2. Preis errang, sind als Beststudenten an ihren Bildungseinrichtungen bekannt.

Thomas Maiwald leitet erfolgreich einen studentischen Forschungszirkel an der Sektion Automatisierungstechnik.

Lutz Dietrich studiert, wie sein Klassenkamerad Ralf Fritzsch, in der Sowjetunion (Lutz Physik in Moskau und Ralf Mathematik in Leningrad).

Unsere gegenwärtig an der Spezialklasse studierenden erfolgreichsten Schüler sind Detlef Horbach (Klasse 12) und Bodo Heise (Klasse 11), die über den obligatorischen Unterricht hinausgehend innerhalb der Bestenförderung durch Wissenschaftler unserer Sektion besonders betreut werden.

Erwähnenswert ist auch, daß im Rahmen der wissenschaftlich-praktischen Arbeit naturwissenschaftliche Praktika in Mathematik, Physik und Chemie durchgeführt werden, die auf hohem Niveau stehen und die technischen Möglichkeiten, die eine modern ausgestattete Hochschule bieten kann, ausnutzen. Zum Beispiel stehen im Mittelpunkt des mathematischen Praktikums eine Einführung in die Programmierung und die selbständige Realisierung der von den Schülern zu einem mathematischen Problem erarbeiteten Programme auf dem Kleinrechner.

Die Spezialklassen wirken darüber hinaus in enger Zusammenarbeit mit der EOS *Dr. Theodor Neubauer* in Karl-Marx-Stadt und der LPG Pflanzenproduktion in Großwaltersdorf, um die verbindlichen Lehrpläne für erweiterte Oberschulen in jeder Weise zu erfüllen.

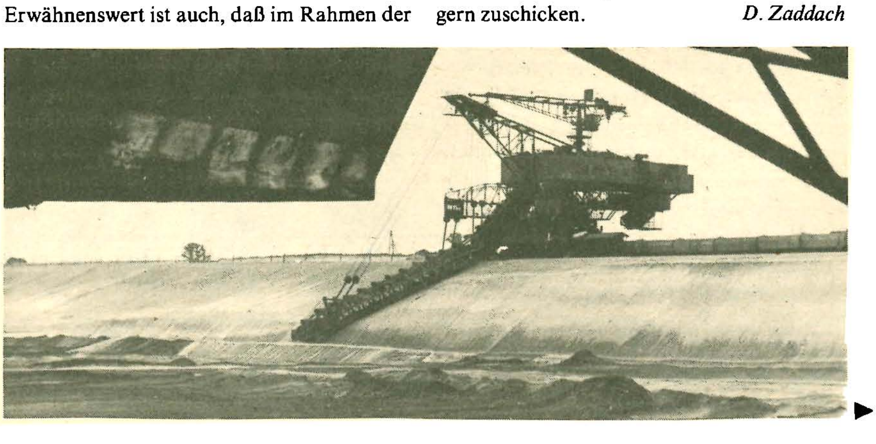
Dabei beweisen die Spezialklassenschüler auch in der vormilitärischen Ausbildung und während der Produktionseinsätze, daß sie Ausgezeichnetes zu leisten imstande sind.

Für die Aufnahme in die Spezialklasse können sich Schüler der Klasse 10 bewerben. Jährlich werden zwei Klassen aufgenommen. Dabei werden solche Schüler ausgewählt, die sich durch sehr gute schulische Leistungen, besonders auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet, durch vorbildliche Verhaltensweise und durch gesellschaftliche Aktivität auszeichnen.

Günstige Voraussetzungen besitzen natürlich diejenigen Schüler, die seit Jahren erfolgreich an den Mathematikolympiaden oder den Messen der Meister von morgen oder anderen wissenschaftlich-technischen Leistungsvergleichen, nicht zuletzt aber auch am *alpha*-Wettbewerb teilgenommen haben.

Die Bewerbungen erfolgen in der Regel über die Schulen, sie können aber auch direkt an uns gerichtet werden. Im letzten Fall bemühen wir uns um die notwendige Zustimmung der Volksbildungsorgane.

Weiteres über die Spezialklasse, z. B. über die finanzielle Unterstützung der Schüler oder Besonderheiten bei der Förderung und Betreuung von ehemaligen Schülern, die ihren Ehrendienst bei der NVA leisten, können die Leser der *alpha* dem Informationsblatt entnehmen, das wir jedem Leser auf Wunsch gern zuschicken. *D. Zaddach*



▶

Geometrische Idee vom Strumpfband

Gespräch mit Prof. Dr. Horst Schumann, Direktor der Sektion Mathematik der KMU Leipzig

Frage: In der Geschichte der Mathematik half nicht selten auch der Zufall dem blitzartigen Aufleuchten einer Idee nach, die zu einer neuen Hypothese oder Theorie weiterentwickelt wurde. Gibt es dafür unter den Leipziger Mathematikern Beispiele?

Prof. Schumann: Der Name eines von vielen profilierten Leipziger Mathematikern, August Ferdinand Möbius (1790 bis 1868) ist mit dem mathematischen Begriff „Möbiussches Band" verknüpft. Möbius hatte seine Frau beim Nähen beobachtet, als sie ein Strumpfband aus Versehen verdreht zusammennähte. Dabei ist ihm die Idee für eine bedeutende Bereicherung der Geometrie gekommen. Er hatte das erste Beispiel einer sogenannten nicht orientierbaren Fläche vor sich. Das Band hat nur eine Seite, im Gegensatz zu der landläufigen Vorstellung, daß eine Fläche immer zwei Seiten haben muß (z. B. „obere" und „untere" Seite, mathematisch „positive" und „negative" Seite). Der mathematische Flächenbegriff wurde dadurch klarer erfaßbar. Auch heute geschieht der Riemenantrieb bestimmter Maschinen in Form des Möbiusschen Bandes, was eine gleichmäßige Abnutzung des Riemens gewährleistet.
So wie *Möbiussches Band* zeugen auch andere Begriffe – wie *Mollweidische Formeln* oder *Höldersche Ungleichung* – von bleibenden mathematischen Erkenntnissen, mit denen Leipziger Gelehrte weltweite Wirksamkeit erlangten.

Frage: Welche Rolle spielt heute der Zufall bei der Ausarbeitung einer neuen Theorie?

Prof. Schumann: Sicher wird heute und auch in Zukunft manche neue Idee durch einen Zufall gewonnen, doch ist die Erfassung und Deutung in der Regel nur auf der Grundlage eines bereits vorhandenen ausgeprägten geistigen Potentials möglich. Heute dominiert in der Wissenschaft beim Suchen nach neuartigen theoretischen und experimentellen Lösungswegen das zielstrebige und hartnäckige Vordringen in unbekannte Erkenntnisbereiche, wobei der Drang, ein für die Gesellschaft nutzbares Resultat zu erzielen, eine ausschlaggebende Rolle spielt.

Frage: Auf welchen Gebieten hat sich die heutige Generation der Leipziger Mathematiker einen Namen gemacht?

Prof. Schumann: Die mathematische Forschung an der Leipziger Universität hat besonders auf dem Gebiet der Analysis große Traditionen. Daß diese fortgeführt wurden und besonders in den letzten 10 bis 15 Jahren viele stark beachtete Ergebnisse erzielt werden konnten, ist das wesentliche Verdienst der seit 1969 auf dem Gebiet der Analysis arbeitenden drei Forschungskollektive der Sektion. So entwickelte sich die Sektion Mathematik der KMU Leipzig zu einem der führenden Zentren der Analysis.

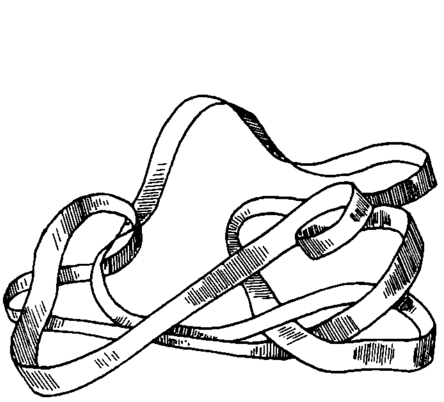
Frage: Wohl in keiner anderen Wissenschaft gibt es so unumstößliche Gesetze, Theorien wie in der Mathematik, die über Jahrhunderte ihre Richtigkeit beweisen. Wandlungen gab es hinsichtlich des gesellschaftlichen Auftrags in Forschung und Lehre. Was vermag die Sektion Mathematik heute, was den Mathematikern vergangener Zeiten noch nicht möglich war?

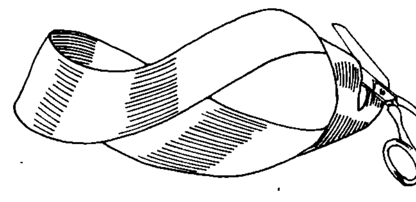
Prof. Schumann: Seit über 500 Jahren werden an der Leipziger Universität mathematische Vorlesungen gehalten, doch erst in den letzten 35 Jahren werden die Plätze in den Hörsälen des *Mathematischen Instituts* auch von Studenten belegt, denen die Brechung des Bildungsprivilegs den Weg dahin ermöglichte. Heute kommen mehr als die Hälfte unserer Studenten aus Arbeiter- und Bauernfamilien. Erwähnenswert ist auch, daß Oberschüler bisweilen in die Hörsäle kommen, denn seit 1974 gibt es im Bezirk Leipzig eine *Mathematische Schülergesellschaft* (MSG, siehe *alpha* 3/81) mit mehr als 20 Zirkeln, in denen sich aller 14 Tage etwa 200 Schüler aus den Klassen 6 bis 12 treffen und unter Anleitung von Assistenten und Studenten der Sektion mit Begeisterung arbeiten. Wir beginnen also schon beizeiten, Talente zu fördern. Eines der herausragendsten Kennzeichen der Mathematik heute ist ihre gesellschaftliche Wirksamkeit, ihre zielgerichtete Anwendung in der Volkswirtschaft. Das betrifft sowohl die direkte Nutzung mathematischer Methoden und Ergebnisse in den verschiedensten Zweigen der Industrie, der Planung und Leitung als auch die verstärkte Zusammenarbeit mit Forschungsgruppen an naturwissenschaftlichen Sektionen. Wir erfüllen zur Zeit Forschungsverträge, die wir mit Kombinaten der Braunkohle-, chemischen und metallurgischen Industrie abgeschlossen haben.

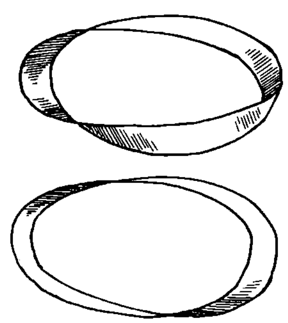
Frage: Was hat sich dabei besonders bewährt?

Prof. Schumann: Die Praxis stellt zunehmend komplizierte Aufgaben. Die Bildung einer Applikationsgruppe vor vier Jahren an unserer Sektion trägt dazu bei, unmittelbar solche Aufgaben zu lösen, die vom Vertragspartner an die Sektion herangetragen werden oder Forschungsergebnisse für die Anwendung aufzubereiten. So wurde z. B. für das Stahlwerk Unterwellenborn ein Vorhersagemodell für das Verhalten der Stahlschmelze entwickelt, das ermöglicht, Energiekosten und Nacharbeit einzusparen.
Nicht zuletzt haben diese Ergebnisse der Sektion Mathematik dazu beigetragen, den ersten Kongreß der Mathematiker der DDR an die Karl-Marx-Universität Leipzig zu vergeben.

Text zu dem Bild auf Seite 30:
Für die Förderriesen eines Tagebaus ist ein Böschungswinkel notwendig, der Standsicherheit wie maximale Förderleistung garantiert. Die Leipziger Mathematiker fanden dafür eine optimale Variante.







Évariste Galois

nach der Erinnerung
gezeichnet von seinem Bruder Alfred Galois im Jahre 1848

Der französische Mathematiker *Évariste Galois*, der ein glühender Republikaner war, wurde im Alter von knapp 21 Jahren in einem von der reaktionären monarchistischen Polizei inszenierten Duell getötet. Die letzten Ergebnisse seines sehr kurzen, aber äußerst fruchtbaren mathematischen Schaffens legte er in einem Brief an seinen Freund Auguste Chevalier dar, den er in der Nacht vor seinem Tode schrieb (siehe Faksimile).

Galois gilt als Mitbegründer der modernen Algebra. Es gelang ihm, einen genauen und vollständigen Überblick über alle durch Radikale[1] auflösbaren Gleichungen $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ beliebigen Grades[2] zu geben, und zwar durch eine geniale Verbindung der von ihm geschaffenen Gruppentheorie[3] mit der Gleichungslehre. In dieser nach ihm benannten Galois-Theorie[4] wird jeder Gleichung eine Permutationsgruppe[5] zugeordnet, deren Struktur dann darüber Auskunft gibt, ob sich die Lösungen der Gleichung durch Radikale darstellen lassen oder nicht. So sind die algebraischen Gleichungen bis einschließlich zum 4. Grad stets durch Radikale auflösbar – denkt etwa an die Lösungsformel der quadratischen Gleichung oder an die Cardanische Lösungsformel für Gleichungen 3. Grades –, während dies für Gleichungen höheren Grades allgemein nicht mehr der Fall ist.

Auf der Grundlage der Galois-Theorie ist die Algebra auch in der Lage, erschöpfend Auskunft darüber zu geben, ob eine geometrische Konstruktionsaufgabe nur mit Zirkel und Lineal lösbar ist. Es konnte nachgewiesen werden, daß die drei berühmten Probleme der klassischen griechischen Mathematik, einen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln (Quadratur des Kreises), einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu zerlegen (Dreiteilung des Winkels) und die Kantenlänge eines Würfels zu bestimmen, der den doppelten Rauminhalt eines gegebenen Würfels hat (Verdopplung des Würfels), mit Zirkel und Lineal unlösbar sind.

Die Figur unseres Zahlenrätsels stellt – in richtigem Zusammenhang gesehen – eine auf der Galois-Theorie beruhende notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit einer geometrischen Konstruktionsaufgabe mit Zirkel und Lineal dar. Es gilt nämlich der folgende *Satz:*

Eine geometrische Konstruktionsaufgabe ist genau dann mit Zirkel und Lineal lösbar, wenn bei irgendeiner (der Aufgabe angemessenen) Wahl des Koordinatensystems zu den Körpern K und Λ ein Körperturm $K=\Lambda_0\subseteq\Lambda_1\subseteq\ldots\subseteq\Lambda_l=\Omega$ mit $\Lambda\subseteq\Omega$ existiert, bei dem jeder Teilschritt höchstens vom Grade 2 ist. $K=P(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots)$ als Grundkörper ergibt sich dabei aus dem Körper P der rationalen Zahlen durch Adjunktion der Koordinaten der bei der Konstruktion vorgegebenen Punkte (a_1, b_1), (a_2, b_2), …, und $\Lambda=K(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots)$ entsteht aus K durch Adjunktion der Koordinaten der bei der Konstruktion gesuchten Punkte (α_1, β_1), (α_2, β_2), ….

Auf weitere Begriffserklärungen sei hier verzichtet, denn ihr merkt sicher, liebe Freunde, daß das Verständnis und die Beherrschung der Galois-Theorie ein tiefgehendes Studium der Mathematik, insbesondere der abstrakten Algebra, erfordern.

Derjenige von euch, der später einmal ein Mathematikstudium an einer unserer Universitäten oder Hochschulen aufnehmen will, wird sich dann gründlich mit der modernen Algebra beschäftigen können und auch die mathematisch exzellente Galois-Theorie begreifen lernen. *R. Mildner*

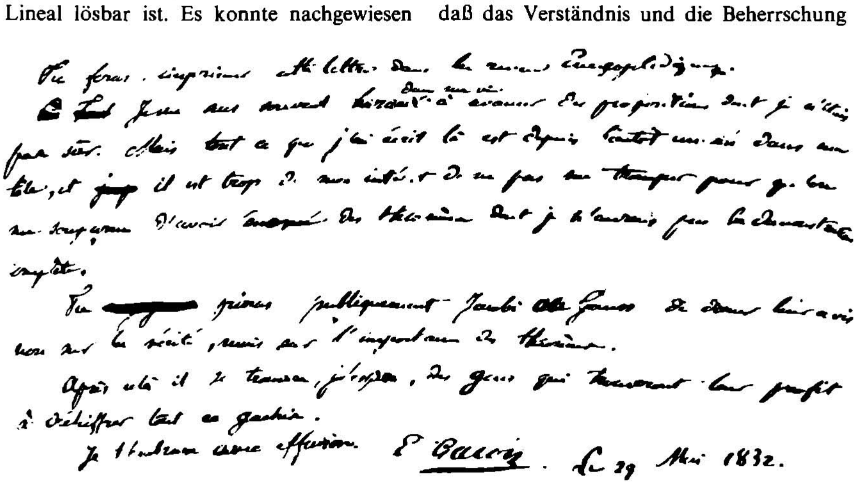
[1]Unter einem Radikal versteht man einen Ausdruck, der durch Ineinanderschachtelung von Wurzeln mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet wird, z. B. $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$.

[2]Die Koeffizienten a_i, $i=0, 1, 2, \ldots, n$, können dabei einem beliebigen Körper K entstammen. Dabei ist ein Körper – grob gesprochen – eine Menge von Elementen, die bezüglich zweier Operationen (etwa Addition und Multiplikation) und ihrer Umkehrungen (etwa Subtraktion und Division) abgeschlossen ist. Denkt dabei etwa an die Menge der rationalen, reellen oder komplexen Zahlen, die jeweils bezüglich der Addition und Multiplikation Körper bilden!

[3]Eine Gruppe ist – grob gesprochen – eine Menge von Elementen, die bezüglich einer in ihr erklärten Operation (etwa Multiplikation) und deren Umkehrung (etwa Division) abgeschlossen ist. So bilden etwa die reellen Zahlen bezüglich der Addition eine (additive) Gruppe und (sofern man jetzt die 0 ausschließt) bezüglich der Multiplikation eine (multiplikative) Gruppe. Beides zusammen macht schließlich die Körpereigenschaft der reellen Zahlen aus.

[4]Die Galois-Theorie befaßt sich über die Untersuchung der Auflösbarkeit von algebraischen Gleichungen hinaus mit gruppentheoretischen Strukturuntersuchungen von Körpern.

[5]Gruppe, deren Elemente Permutationen von n Elementen sind, wobei die Gruppenoperation die Hintereinanderausführung von Permutationen ist.



Der Schlußteil des Briefes, den Galois in der Nacht vor dem Duell an Chevalier schrieb. Die Übersetzung lautet (siehe nebenan):

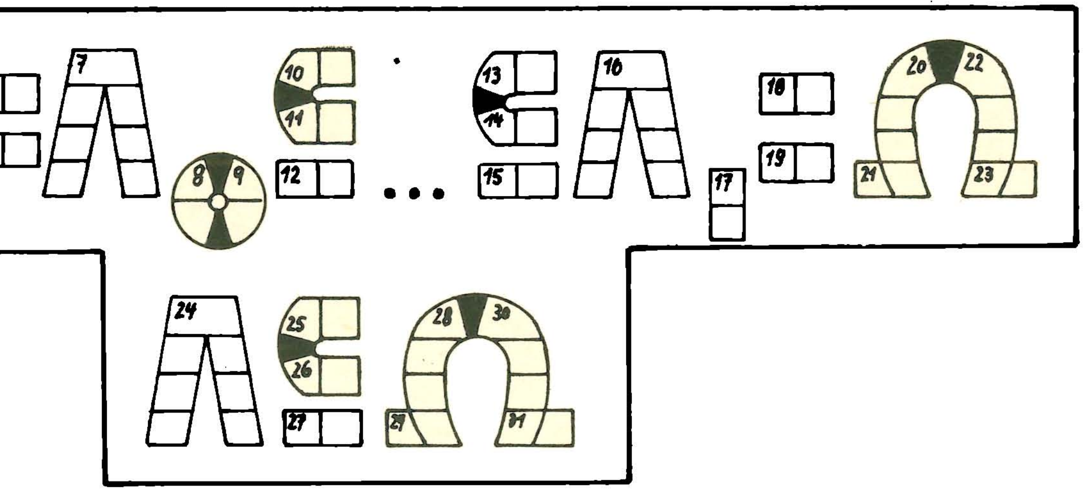
Lasse diesen Brief in der *Revue encyclopédique* abdrucken. Ich habe in meinem Leben oft gewagt, Behauptungen aufzustellen, deren ich nicht gewiß war; aber alles, was ich hier niedergeschrieben habe, ist seit fast einem Jahr in meinem Kopfe, und es liegt sehr in meinem Interesse, mich nicht dem Verdacht auszusetzen, daß ich Lehrsätze verkünde, für die ich nicht den vollständigen Beweis habe.

Richte an *Jacobi* oder *Gauß* die öffentliche Bitte, ihr Urteil abzugeben – nicht über die Wahrheit, sondern über die Wichtigkeit dieser Theoreme.

Dann werden sich hoffentlich Leute finden, die es für lohnend halten werden, diesen ganzen Wirrwarr zu entziffern.

Je t'embrasse avec effusion. E. Galois.

Zahlenrätsel



Waagerecht:

2. dividiert man das Dreifache der gesuchten Zahl durch 2 und subtrahiert davon 60, so erhält man 15,
5. arithmetisches Mittel der Zahlen 12, 33, 35, 37, 39 und 60,
6. natürliche Zahl n mit $9^2+n^2=15^2$,
10. Seitenlänge (in cm) eines gleichseitigen Dreiecks mit dem Flächeninhalt $A=25\sqrt{3}\,\text{cm}^2$,
11. neuntes Glied der arithmetischen Folge (a_n) mit dem Anfangsglied $a_1=-10$ und der Differenz $d=5$,
12. Fermatsche Primzahl,
13. größte Lösung der Gleichung $x^4-148x^2+576=0$,
14. Anzahl der Permutationen von 4 verschiedenen Elementen,
15. Mersennesche Primzahl,
18. eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2-13x+22=0$,
19. größter gemeinsamer Teiler der Zahlen 210 und 126,
21. zweistellige Primzahl p, $p<70$, bei der die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern 50 beträgt,
23. natürliche Zahl n mit $\binom{n}{3}=286$,
25. Anzahl der Diagonalen in einem regelmäßigen 8-Eck,
26. Anzahl der nichttrivialen natürlichen Teiler von 144,
27. Wert von $a=\sin\frac{\pi}{2}+\ln e^2+\left[\log_{0,5}\left(\frac{1}{64}\right)\right]^2$,
29. Anstieg der Geraden $36x-2y+2=0$,
31. Lösung der Gleichung $\frac{x-2}{x-20}=\frac{x+1}{x-19}$,

Senkrecht:

1. kleinste gerade natürliche Zahl, die durch 13 und 97 teilbar ist,
8. Primzahl p mit $70<p<100$, deren Querprodukt eine gerade und durch 9 teilbare Zahl ist,
9. eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3-11x^2+8x+20=0$,
17. Primzahl p mit $p\equiv 2 \pmod{57}$,
20. Wert der Funktion $y=f(x)=x^4+3x^3+2x^2+1$ an der Stelle $x=6$,
22. eine vierte Wurzel aus der gesuchten Zahl ist 7,
28. siebentes Glied der geometrischen Folge (a_n) mit dem Anfangsglied $a_1=2$ und dem Quotienten $q=3$,
30. kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen 154 und 286,

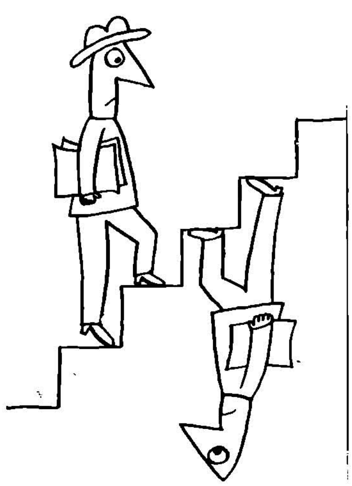
Schräg links nach unten:

3. Basiszahl des Dezimalsystems,
7. Geburtsjahr des französischen Mathematikers Jean d'Alembert,
16. Geburtsjahr des genialen deutschen Mathematikers Carl Friedrich Gauß,
24. Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 130,

Schräg rechts nach unten:

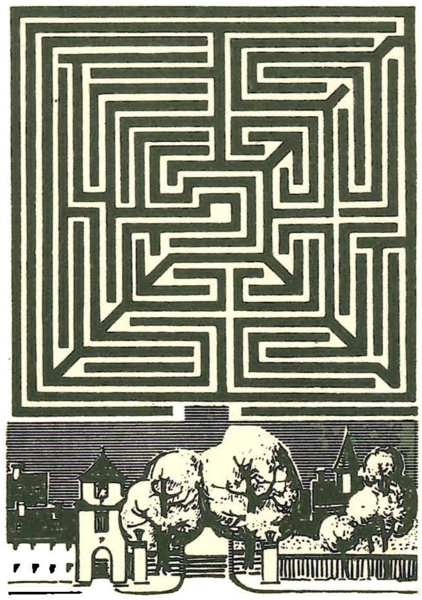
4. ungerade Permutation der Ziffern 0, 1, 2,
7. Geburtsjahr des französischen Mathematikers Joseph-Louis Lagrange,
16. Geburtsjahr des norwegischen Mathematikers Niels Henrik Abel,
24. Zweierpotenz.

Bei richtiger Lösung ergeben die Ziffern der im folgenden angegebenen Kästchen die Lebensdaten des genialen französischen Mathematikers Évariste Galois:
1, 2. 3, 4. 7, 8, 10, 12–15, 16. 17. 21, 24, 27, 30



Touristische Attraktion

Dieser Irrgarten (Größe 0,25 ha) wurde im Jahre 1732 auf Veranlassung des Barons *Nicolaus, Leopold von Ende* durch einen französischen Gartenbaufachmann angelegt. Im Jahre 1945 ging der Park in die Hände des Rates der Gemeinde Altjeßnitz (Kreis Bitterfeld) über.



Interessanterweise weist der Irrgarten, mitten im Park gelegen, keine Sackgasse auf. Unter den ca. 2 m hohen Taxushecken befinden sich künstliche Bewässerungsanlagen, die auch bei trockener Witterung das Begießen der dicht geschlossenen Sträucherreihen erübrigen. Jährlich besuchen viele tausend Schaulustige das unter der Schirmherrschaft der *Staatlichen Schlösser und Gärten Wörlitz* stehende Naturdenkmal. Es gehört schon Geschick dazu, um in weniger als 10 Minuten die im Zentrum gelegene, erhöht angelegte, Plattform, von der man den Irrgarten überblicken kann, zu erreichen.

J. Lehmann/U. Passon

Ungleichungen mit mehreren Variablen, deren Summe konstant ist

Viele wichtige Aufgaben aus der Ökonomie und aus anderen Anwendungsgebieten der Mathematik führen auf das Lösen von Ungleichungen mit mehreren Variablen. Wir wollen uns in diesem Artikel anhand einfachster Aufgaben mit wichtigen Gedanken vertraut machen, die euch helfen werden, mit Ungleichungen sicher umzugehen.

Aufgaben über die Verteilung von Mehl auf drei Tüten

In den ersten Aufgaben geht es um Zahlentripel $[a; b; c]$, für die $a+b+c=1$ gilt. Im letzten Teil behandeln wir dann die zeichnerische Darstellung solcher Tripel in einer Ebene.

▲1▲ In drei Tüten befindet sich insgesamt 1 kg Mehl. Außerdem ist bekannt, daß die erste Tüte nicht mehr Mehl enthält als die zweite und die zweite nicht mehr als die dritte.

a) Kann die dritte Tüte genau $\frac{2}{5}$ kg Mehl enthalten?
b) Kann die dritte Tüte genau $\frac{1}{5}$ kg Mehl enthalten?
c) Wieviel Mehl muß die dritte Tüte mindestens enthalten?
d) Wieviel Mehl kann die dritte Tüte höchstens enthalten?

Lösung: a) Ja. Beispiel: Das Mehl sei wie folgt verteilt:

1. Tüte: $\frac{3}{10}$ kg, 2. Tüte: $\frac{3}{10}$ kg, 3. Tüte: $\frac{2}{5}$ kg.

Damit sind alle Bedingungen erfüllt: $\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=1$, in der ersten Tüte ist nicht mehr Mehl als in der zweiten $\left(\frac{3}{10}\leqq\frac{3}{10}\right)$, und in der zweiten Tüte ist nicht mehr Mehl als in der dritten $\left(\frac{3}{10}\leqq\frac{2}{5}\right)$.

b) Nein. Beweis: Wir nehmen an, daß sich in der dritten Tüte genau $\frac{1}{5}$ kg Mehl befindet. Dann enthält die zweite Tüte nicht mehr als $\frac{1}{5}$ kg und die erste Tüte auch nicht. In diesem Fall befinden sich aber in allen drei Tüten zusammen nicht mehr als $\frac{3}{5}$ kg Mehl, was der Aufgabenstellung widerspricht. Folglich ist unsere Annahme $\left(\frac{1}{5}\text{ kg Mehl in der dritten Tüte}\right)$ falsch.

c) In der dritten Tüte muß mindestens $\frac{1}{3}$ kg Mehl enthalten sein. Beweis: Wir zeigen zunächst, daß in der dritten Tüte nicht weniger als $\frac{1}{3}$ kg Mehl sein kann. Dazu nehmen wir das Gegenteil an: Es sei in der dritten Tüte weniger als $\frac{1}{3}$ kg Mehl enthalten. Dann befinden sich auch in der 2. und in der 1. Tüte weniger als $\frac{1}{3}$ kg. Das bedeutet aber, daß in allen drei Tüten zusammen weniger als 1 kg Mehl enthalten ist – im Widerspruch zur Aufgabenstellung. Folglich befindet sich in der dritten Tüte nicht weniger als $\frac{1}{3}$ kg Mehl.

Nun zeigen wir, daß die dritte Tüte *genau* $\frac{1}{3}$ kg Mehl enthalten *kann:* Wenn man in jede der drei Tüten genau $\frac{1}{3}$ kg schüttet, dann ist dies insgesamt 1 kg. In der 1. Tüte befindet sich nicht mehr als in der zweiten und in dieser nicht mehr als in der dritten.

d) Die dritte Tüte kann höchstens 1 kg Mehl enthalten.

Beweis: Mehr als 1 kg kann es nach Aufgabenstellung nicht sein, aber 1 kg erhält man, wenn in der ersten und in der zweiten Tüte überhaupt kein Mehl ist.

Die folgenden zwei Aufgaben sind von genau demselben Typ wie die Aufgabe ▲1▲. Schreibt ihre Lösungen auf, indem ihr unsere Lösungen der Aufgabe ▲1▲ als Muster benutzt!

▲2▲ Es gelten dieselben Bedingungen wie in Aufgabe ▲1▲.

Beantworte folgende Fragen!

a) Kann die zweite Tüte genau $\frac{2}{5}$ kg Mehl enthalten?
b) Kann die zweite Tüte genau $\frac{3}{5}$ kg Mehl enthalten?

Beweise folgende Aussagen!

c) Die zweite Tüte enthält höchstens $\frac{1}{2}$ kg Mehl.
d) In der zweiten Tüte können 0 kg Mehl enthalten sein.

▲3▲ Es gelten dieselben Bedingungen wie in Aufgabe 1.

Beantworte folgende Fragen!

a) Kann die erste Tüte genau $\frac{13}{37}$ kg Mehl enthalten?
b) Kann die erste Tüte genau $\frac{12}{37}$ kg Mehl enthalten?
c) Wieviel Mehl befindet sich höchstens in der ersten Tüte?
d) Wieviel Mehl befindet sich mindestens in der ersten Tüte?

Statt Mehl: Zahlen und Winkelgrößen

Wir wenden uns nochmals der Aufgabe ▲1▲ zu. Man kann sie auch anders formulieren:

▲4▲ Für Zahlen a, b, c ist bekannt: $a+b+c=1$ und $0\leqq a\leqq b\leqq c$.

a) Kann $c=\frac{2}{5}$ sein?
b) Kann $c=\frac{1}{5}$ sein?
c) Finde den kleinstmöglichen Wert (das Minimum) von c!
d) Finde den größtmöglichen Wert (das Maximum) von c!

Die *Lösung* der Aufgabe 4 kann man wie folgt aufschreiben:

a) c kann gleich $\frac{2}{5}$ sein. Zum Beispiel ist für $c=\frac{2}{5}$, $a=\frac{3}{10}$, $b=\frac{3}{10}$, $a+b+c=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=1$ und $a\leqq b\leqq c\left(\frac{3}{10}\leqq\frac{3}{10}\leqq\frac{2}{5}\right)$.

b) $c=\frac{1}{5}$ ist nicht möglich: Wenn $c=\frac{1}{5}$, so ist $b\leqq\frac{1}{5}$, $a\leqq\frac{1}{5}$ und damit $a+b+c\leqq\frac{3}{5}<1$ – im Widerspruch zur Aufgabenstellung.

c) Der kleinstmögliche Wert von c ist $\frac{1}{3}$.

Wir zeigen zunächst, daß $c\geqq\frac{1}{3}$ gilt. Nehmen wir das Gegenteil an $\left(c<\frac{1}{3}\right)$, so ist $b<\frac{1}{3}$ und $a<\frac{1}{3}$ und somit $a+b+c<1$, was unmöglich ist. Folglich ist $c\geqq\frac{1}{3}$. Für $a=b=c=\frac{1}{3}$ sind alle Bedingungen erfüllt.

d) Der größtmögliche Wert von c ist 1.

▲5▲ Formuliere Aufgabe 2 in der Art von Aufgabe 4! Löse sie so, wie es für Aufgabe 4 dargestellt wurde!

Löst jetzt die folgenden Aufgaben, die den Aufgaben 4 und 5 ähnlich sind!

▲6▲ Für Zahlen a_1, a_2, a_3 gelte $a_1+a_2+a_3=1$ und $0\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3$.

a) Bestimme das Maximum von $2a_1+3a_2$!
b) Bestimme das Minimum von $2a_1+3a_2$!

▲7▲ a) Kann der größte Innenwinkel in einem Dreieck 50° betragen?
b) Kann der zweitgrößte Innenwinkel in einem Dreieck 88° betragen?
c) Kann der kleinste Innenwinkel in einem Dreieck 66° betragen?

▲8▲ Welches ist der kleinste Wert, den der größte Innenwinkel in einem Dreieck annehmen kann?

▲9▲ In drei Tüten befindet sich insgesamt 1 kg Mehl, wobei in der ersten Tüte halb soviel Mehl ist wie in der zweiten und in der zweiten nicht mehr als in der dritten.
Wieviel Mehl kann sich in der zweiten Tüte höchstens befinden?

▲10▲ Fünf Geraden liegen so in einer Ebene, daß keine zwei von ihnen parallel sind.
Zeige, daß es unter diesen Geraden mindestens zwei gibt, deren Schnittwinkel nicht kleiner als 36° ist!
Hinweis: Wähle einen beliebigen Punkt in der Ebene, und zeichne durch ihn Parallelen zu den gegebenen Geraden!

▲11▲ Beweise, daß es in einem konvexen Fünfeck nicht mehr als drei spitze Innenwinkel geben kann!

▲12▲ Für Zahlen a, b, c, d gelte $a+b+c+d=4$ und $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$.
a) Zeige, daß $c \leqq 2$ gilt!
b) Zeige, daß $\frac{8}{3}$ das Maximum von $b+c$ ist!
c) Bestimme das Minimum von $a+d$!

▲13▲ Für Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 gelte $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$ und $0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq a_5$.
a) Zeige, daß $a_3 \leqq \frac{1}{3}$ gilt!
b) Bestimme das Maximum von $a_2+a_3+a_4$!
c) Bestimme das Minimum von a_1+a_5!

Aufgaben über das gleichseitige Dreieck

▲14▲ Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck. Bestimme die Menge aller seiner inneren Punkte, die
a) von der Seite $\overline{AB}$ nicht weiter entfernt sind als von der Seite $\overline{BC}$;
b) von der Seite $\overline{BC}$ nicht weiter entfernt sind als von der Seite $\overline{AC}$;
c) gleichzeitig die Bedingungen a) und b) erfüllen!
Die *Lösung* zu Teilaufgabe a) ist durch die Schraffur in Bild 1a angegeben, die zu b) durch die Schraffur in Bild 1b usw. Die Aufgabe 14c) hängt eng mit der Aufgabe 1 zusammen. Um dies zu verdeutlichen, lösen wir die folgende Aufgabe.

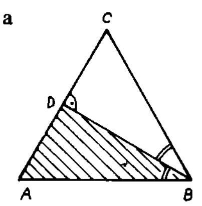
Bild 1a


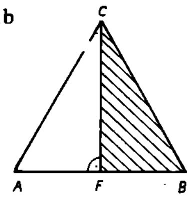
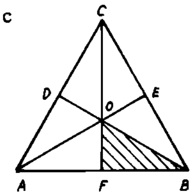
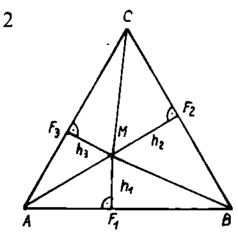
Bild 1b


Bild 1c


▲15▲ Beweise, daß die Summe der Abstände eines beliebigen inneren Punktes eines gleichseitigen Dreiecks ABC von den Seiten des Dreiecks gleich der Länge der Höhe h dieses Dreieck ist!

Lösung: Von einem beliebigen inneren Punkt M des Dreiecks ABC fällen wir die Lote auf die Dreieckseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$.
Die Fußpunkte dieser Lote bezeichnen wir mit F_1, F_2 bzw. F_3 und die Längen der Strecken $\overline{MF_1}$, $\overline{MF_2}$ bzw. $\overline{MF_3}$ mit h_1, h_2 bzw. h_3 (vgl. Bild 2). h_1, h_2 und h_3 sind dann die Abstände zu den einzelnen Seiten des Dreiecks ABC, und wir haben die Gültigkeit der Gleichung $h_1+h_2+h_3=h$ zu zeigen.

Bild 2


Dazu verbinden wir M mit den Eckpunkten A, B und C des Dreiecks. Für die Flächeninhalte der so erhaltenen Teildreiecke gilt

$$A_{ABM}+A_{BCM}+A_{ACM}=A_{ABC}$$

bzw. (mit $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=a$)

$$\frac{ah_1}{2}+\frac{ah_2}{2}+\frac{ah_3}{2}=\frac{ah}{2},$$

woraus unmittelbar folgt

$$h_1+h_2+h_3=h.$$

Ergänzung zu Aufgabe 15: Die in dieser Aufgabe formulierte Behauptung gilt nicht nur für innere Punkte des Dreiecks, sondern auch für Punkte auf den Dreieckseiten einschließlich der Eckpunkte. (Ein Punkt auf einer Dreieckseite habe zu dieser Seite den Abstand Null.) Zeigt dies selbständig!

Es sei nun ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Höhe $h=1$ gegeben. Beim Lösen der Aufgabe 15 erkannten wir, daß jedem inneren Punkt des Dreiecks ABC drei Zahlen h_1, h_2, h_3 entsprechen, deren Summe 1 ist. Denkt selbst über den Beweis der „umgekehrten“ Aussage nach: Wenn drei Zahlen h_1, h_2, h_3 gegeben sind, so daß gilt $h_1 \geqq 0$, $h_2 \geqq 0$, $h_3 \geqq 0$, $h_1+h_2+h_3=1$, dann kann man im Innern oder auf den Seiten des Dreiecks ABC einen Punkt M finden, dessen Abstand zu $\overline{AB}$ gleich h_1 zu $\overline{BC}$ gleich h_2 und zu $\overline{AC}$ gleich h_3 ist.
Natürlich genügt es, für M die ersten beiden Bedingungen zu stellen, denn der Abstand von M zur dritten Dreieckseite ist gemäß Aufgabe 15 gleich $1-h_1-h_2=h_3$.
Somit ist es uns gelungen, Tripel nichtnegativer Zahlen $[h_1; h_2; h_3]$ mit $h_1+h_2+h_3=1$ geometrisch darzustellen. Wir werden auch vom Punkt $[h_1; h_2; h_3]$ sprechen. Die Zahlen h_1, h_2, h_3 werden auch *baryzentrische Koordinaten* der Punkte eines gleichseitigen Dreiecks genannt.

Geometrische Veranschaulichung der ersten Aufgaben

Ab jetzt setzen wir voraus, daß die Höhe des jeweils auftretenden Dreiecks ABC gleich 1 ist.
Sehen wir uns noch einmal Bild 1c zur Aufgabe 14 an. Durch die Schraffur werden die Punkte $[h_1; h_2; h_3]$ hervorgehoben, für die $h_1 \leqq h_2$ und $h_2 \leqq h_3$ gilt. Auf vielen Fragen, die in den ersten Aufgaben gestellt worden sind, kann man mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten sehr leicht antworten. Nehmen wir beispielsweise Aufgabe 4:
Mit den veränderten Bezeichnungen $a=h_1$, $b=h_2$, $c=h_3$ müssen wir die Bedingungen der Aufgabe in der Form $0 \leqq h_1 \leqq h_2 \leqq h_3$, $h_1+h_2+h_3=1$ schreiben.
Frage 4c) kann man jetzt so formulieren:
Welcher Punkt des Dreiecks BOF liegt der Seite $\overline{AC}$ am nächsten?
Frage 4d): Welcher Punkt des Dreiecks BOF ist von der Seite $\overline{AC}$ am weitesten entfernt?

▲16▲ Formuliere die Fragen c) und d) von Aufgabe 2 in der Sprache der Geometrie!

▲17▲ Bestimme im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC bzw. auf seinen Seiten Punkte $[h_1; h_2; h_3]$, für die dilt

a) $h_1=\frac{1}{4}$,

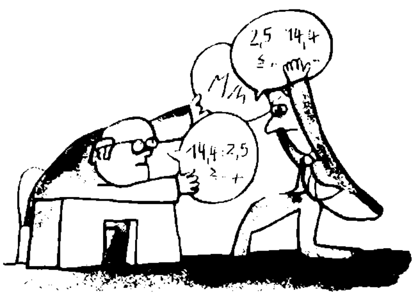
b) $h_1+h_2=\frac{1}{2}$,

c) $h_1+h_2 \leqq \frac{3}{5}$!

Die geometrische Darstellung zeigt uns anschaulich, warum die Extremwerte der Variablen in den ersten Aufgaben dann erreicht werden, wenn bei den Ungleichungen die Gleichheit eintritt.

W. Gutenmacher/C. P. Helmholz

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1982

Mathematik

Ma 5 ■ 2208 Andrea, Beate, Carola und Doris sind Freundinnen. Ihre Nachnamen lauten (in anderer Reihenfolge) Mayer, Schulz, Lehmann und Becker. Jedes dieser vier Mädchen gehört genau einer der Klassen 5a, 5b, 6a, 6b der gleichen Schule an.
Von ihnen ist folgendes bekannt:
a) Doris und das Mädchen mit dem Nachnamen Schulz sind Schülerinnen zweier Parallelklassen derselben Klassenstufe.
b) Andrea und das Mädchen mit dem Nachnamen Mayer sind Schülerinnen der Klassenstufe 5.
c) Doris und das Mädchen mit dem Nachnamen Mayer gehören den Klassen 5a oder 6a an.
d) Carola und das Mädchen mit dem Nachnamen Lehmann gehören den Klassen 5b oder 6b an.
Wie heißt jede dieser vier Freundinnen mit Vor- und Nachnamen?
Welcher Klasse gehört jede von ihnen an?
Schülerin Dörte Conert, Hosena

Ma 5 ■ 2209 Uwe kam mit dem Zeugnisheft nach Hause. Die Mutter fragte gespannt: „Nun, wieviel Einsen sind es diesmal?“ Uwe antwortete: „Zähle zur Zahl der Einsen vier hinzu, multipliziere danach mit 4, dann erhälst du 4 mehr als 44!“ Die Mutter hatte es gleich heraus. Schaffst du es auch?

Ma 5 ■ 2210 Es sind alle fünfstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, für die jeweils das Produkt aus der Zahl, die von den ersten beiden Ziffern gebildet wird, und der Zahl, die von den letzten drei Ziffern gebildet wird, 1111 beträgt. *Sch.*

Ma 5 ■ 2211 Die Schüler einer Klasse unterhielten sich über ihre Ferienerlebnisse. Dabei stellte sich folgendes heraus:
a) Genau 13 Schüler dieser Klasse verbrachten ihre Ferien schon einmal an der Ostsee.
b) Genau 15 Schüler dieser Klasse verbrachten ihre Ferien schon einmal im Harz.
c) Genau 6 Schüler dieser Klasse verbrachten ihre Ferien schon sowohl an der Ostsee als auch im Harz.
d) Genau 4 Schüler dieser Klasse waren während ihrer Ferien weder an der Ostsee noch im Harz.
Wieviel Schüler gehören dieser Klasse an, wenn es außer den unter a) bis d) genannten Schülern keinen weiteren Schüler gibt, der dieser Klasse angehört?
Schülerin Una Gehrmann, Groß-Glienicke

Ma 5 ■ 2212 Otto, der 11 Jahre alt ist, sagte zu seinem Freund Emil: „Meine Schwester Inge ist siebenmal so alt wie mein Bruder Axel. Wenn man die Zahl, die das Lebensalter meiner Schwester angibt, mit 6 multipliziert, zum erhaltenen Produkt 2 addiert und diese Summe dann noch durch 4 dividiert, so erhält man als Ergebnis genau die Zahl, die mein Lebensalter angibt.“ Wie alt sind die Geschwister von Otto?
Schülerin Carsta Patzschke, Böhlitz

Ma 5 ■ 2213 Gesucht sind alle durch 3 teilbaren zweistelligen natürlichen Zahlen, die bei Division durch 5 und durch 2 jeweils den Rest 1 lassen.
Schülerin Kathrin Wagner, Antonsthal

Ma 6 ■ 2214 In einer Klasse mit 29 Schülern soll von jedem Schüler ein Unkostenbeitrag in Höhe von 6 Mark für eine Wanderung eingesammelt werden. Einige Schüler haben schon 4 M eingezahlt; ebenso viele Schüler haben noch kein Geld mitgebracht. Vier Schüler haben bisher jeder 3 M, die restlichen Schüler jeder 2 M eingezahlt. Wieviel Geld muß insgesamt noch eingesammelt werden? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

30	150		
	Thies Luther, 2600 Güstrow, Werderstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	20	Ma 7 ■ 1369
	Prädikat:	10	
	Lösung:		

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1981/82 läuft von Heft 5/1981 bis Heft 2/82. Zwischen dem 1. und 10. September 1982 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/82 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1981/82 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Ma 6 ■ 2215 Ralf und Rita haben jeder einen Würfel aus je 27 kleineren, gleich großen Würfel zusammengesetzt. Ralf hat danach längs einer Kante des großen Würfels alle drei kleinen Würfel entfernt. Rita hingegen hat von jeder Ecke des großen Würfels je genau einen kleineren Würfel entfernt. So entstanden zwei unterschiedliche Restkörper. Ralf behauptete, daß bei seinem Restkörper jetzt insgesamt weniger kleine Quadratflächen die Oberfläche bilden als bei dem Restkörper von Rita. Hat Ralf recht? Die Antwort ist zu begründen! Fertige eine Skizze beider Restkörper an!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2216 Gib alle dreistelligen geraden natürlichen Zahlen an, die sich mit Hilfe der Ziffern 0, 3, 6 darstellen lassen. Jede dieser Ziffern darf auch mehr als einmal vorkommen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 6 ■ 2217 Gegeben sind folgende sechs Zahlenfolgen:

(1)	4, 7, 10, 13, a, 19
(2)	1, 2, b, 8, 16, 32
(3)	1, 4, 8, c, 19, 26
(4)	d, 6, 10, 18, 34, 66
(5)	1, 2, 6, 24, 120, e
(6)	1, f, 13, 40, 121, 364

Finde heraus, auf Grund welcher Vorschrift jede dieser Zahlenfolgen gebildet wurde und mit welchen natürlichen Zahlen die vorkommenden Variablen a, b, c, d, e, f belegt werden müßten! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 6 ■ 2218 Peter hat mehr als 400, aber weniger als 600 Nüsse. Zählt er sie zu je 11 ab, so bleiben 3 übrig. Zählt er sie jedoch zu je 13 ab, so bleiben 11 übrig. Wieviel Nüsse hat Peter?

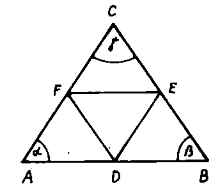
Ma 7 ■ 2219 In der Gleichung $\overline{aa}^2=\overline{bbcc}$, die eine zweistellige und eine vierstellige natürliche Zahl in dekadischer Darstellung enthält, sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen. *Sch.*

Ma 7 ■ 2220 Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 85mal so groß wie die Summe dieser Zahlen.
Um welche Zahlen handelt es sich? *Sch.*

Ma 7 ■ 2221 Zeichne ein Dreieck ABC mit den Innenwinkelgrößen $\sphericalangle\, CAB=\alpha=70°$ und $\sphericalangle\, CBA=\beta=60°$! Konstruiere den Umkreis k dieses Dreiecks; sein Mittelpunkt sei M! Zeichne die Geraden AM und BM! Die Gerade AM schneide BC in D; die Gerade BM schneide AC in E. Führe den Nachweis, daß das Dreieck DMB gleichschenklig ist!

Nach „Quant"

Ma 7 ■ 2222 In dem abgebildeten Dreieck ABC mit den Innenwinkeln α, β und γ wurden die Mittelpunkte E, F und G der Dreiecksseiten miteinander verbunden. Es ist die Größe jedes Innenwinkels des Dreiecks DEF zu ermitteln. Die Antwort ist zu begründen! *Fr.*



Ma 8 ■ 2223 Es sind alle Primzahlen p der Form $p=4x^4+1$ $(x\in N)$ zu bestimmen.

Schülerin Vera Wilhelm, Leipzig, Kl. 9

Ma 8 ■ 2224 Es ist nachzuweisen, daß es eine einzige dreistellige natürliche Zahl gibt, die fünfmal so groß ist wie das Produkt aus den drei Zahlen, die ihre Grundziffern darstellen. *Thomas Bienetz, Schwepnitz*

Ma 8 ■ 2225 Das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer natürlichen Zahl ist größer als 3000, aber kleiner als 4000. Welche natürlichen Zahlen erfüllen diese Bedingungen? *Sch.*

Ma 8 ■ 2226 Beweise, daß die Mittelpunkte der Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks und der Fußpunkt einer der Dreieckshöhen Eckpunkte eines gleichschenkligen Trapezes sind! *Sch.*

Ma 9 ■ 2227 Es ist nachzuweisen, daß die Ungleichung $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ für alle natürlichen Zahlen $n\geqq 2$ gilt! *Sch.*

Ma 9 ■ 2228 Es ist zu beweisen, daß das Produkt aus den drei Zahlen eines pythagoreischen Zahlentripels stets durch die Summe aus diesen drei Zahlen teilbar ist.

Schüler Guido Vollbeding, Haldensleben, Kl. 9

Ma 9 ■ 2229 Peter stellte an einem Tag in einem Jahr, das kein Schaltjahr war, fest: „Der Quotient aus der Anzahl der verflossenen Tage des Jahres und der vor uns liegenden ist um 1 größer als eine Primzahl. Dabei rechne ich den heutigen schon zu den verflossenen."
Es ist das Datum anzugeben, an dem Peter dies sagte.

Andreas Fittke, Berlin (z. Zt. NVA)

Ma 9 ■ 2230 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Die Länge von $\overline{AB}$ wollen wir mit a, die Länge von $\overline{BC}$ mit b bezeichnen. Auf $\overline{BC}$ liege ein Punkt E, so daß die Länge von $\overline{BE}$ gleich $\frac{3}{4}b$ beträgt. Der Mittelpunkt von $\overline{AD}$ sei mit F bezeichnet; der Schnittpunkt von $\overline{BD}$ mit $\overline{FE}$ sei G. Es ist der Flächeninhalt des Vierecks $ECDG$ in Abhängigkeit von a und b zu berechnen.

Schülerin Uta Boldt, Burg Stargard, Kl. 9

Ma 10/12 ■ 2231 Man ermittle die Lösungsmenge der Gleichung

$$3^x+4^x=5^x$$

im Bereich der reellen Zahlen!

Le Anh Dung, SR Vietnam, z. Zt. Weimar

Ma 10/12 ■ 2232 Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x, y die folgende Ungleichung eine wahre Aussage wird!

$$x^2+y^2+1\geqq x+y+xy$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Dr. W. Moldenhauer, Eisenach (nach einer Aufgabe aus Lapok, Budapest)

Ma 10/12 ■ 2233 Es sei n eine natürliche Zahl. Man beweise, daß dann für alle positiven reellen Zahlen a und b gilt:

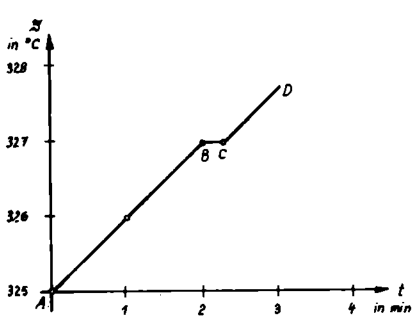
$$\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}\leqq\frac{2}{a+b}!$$

Schüler Torsten Eidner, Zeulenroda, Kl. 10

Ma 10/12 ■ 2234 Es ist ein Winkel der Größe 54° nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal zu konstruieren. Die Konstruktion ist zu begründen.

Physik

Ph 6 ■ 116 Das folgende Temperatur-Zeit-Diagramm ist beim Erwärmen von Blei aufgenommen worden. Erkläre dieses Diagramm,



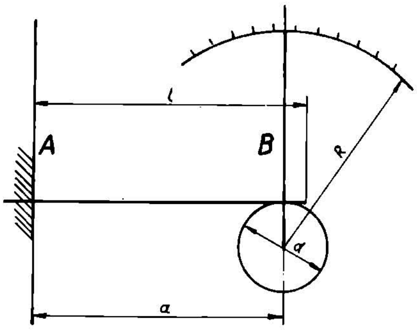
und beantworte die folgenden Fragen!

a) Was zeigt der Bereich von A bis B?
b) Welcher Zustand ist in B erreicht?
c) Welcher Vorgang liegt im Bereich von B bis C vor?
d) Was zeigt der Bereich von C bis D?

Ph 7 ■ 117 Ein quaderförmiger Ponton schwimmt im Wasser und hat ein Gewicht von 3,5 Mp (34,335 kN). Seine Grundfläche hat die Maße 2,5 m mal 4,5 m. Wie weit taucht der Ponton in das Wasser hinein?

Ph 8 ■ 118 100 Kilometer Wolframdraht für Glühlampen haben eine Masse von 250 g. Die Dichte von Wolfram beträgt $19{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Welchen Durchmesser hat demzufolge der Draht? (in mm) *Karl Eichhorn, Steinach*

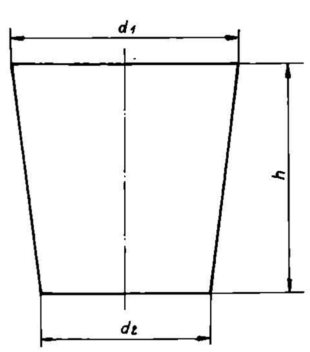
Ph 9 ■ 119 Bei einem Schulversuch zur Demonstration der Ausdehnung fester Körper bei Erwärmung wird ein Stück Vierkantstahl waagerecht an einem Ende fest eingespannt, während das andere Ende auf einer waagerecht gelagerten Rolle aufliegt. An der Rolle ist ein Zeiger senkrecht zur Rollenachse befestigt. Das Stahlstück sei 1,30 m lang, wobei 10 cm für die Einspannung benötigt werden. Die Auflagelänge, d. h. der Abstand: Einspannstelle-Auflagestelle, sei $a=1$ m. Die Rolle habe einen Durchmesser von 10 mm. Der Zeiger sei 20 cm lang. Das Stahlstück werde von $\vartheta_1=20\,°C$ auf $\vartheta_2=70\,°C$ erwärmt.



Wie lang ist der Kreisbogen, den die Spitze des Zeigers infolge der durch die Ausdehnung des Stahlstückes hervorgerufenen Drehung der Rolle auf einer Seite zurücklegt?
Für die Lösung der Aufgabe ist die Länge a zwischen Einspannstelle A und Auflagepunkt B maßgebend. Das Differenzstück $\Delta l = l - a$ trägt nicht zur Drehung der Rolle bei.

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 10/12 ■ 120 Ein Flugzeug der Abteilung Agrarflug wird zum Düngerstreuen aus der Luft eingesetzt. Zum Füllen des Düngerbunkers wird ein Kübel benutzt, der die Form eines geraden Kreiskegelstumpfes hat. Die Abmessungen betragen:
$d_1=75$ cm, $d_2=40$ cm, $h=85$ cm.



Welche Tragkraft muß der zum Beladen des Flugzeuges eingesetzte fahrbare Kran mindestens haben, wenn der Kübel eine Eigenmasse von $m_k=60$ kg hat und die Dichte des Düngemittels $\varsigma=2200\,\frac{kg}{m^3}$ beträgt? Der Kübel wird stets bis zum Rand gefüllt.

Ing. A. Körner, Leipzig

Chemie

Ch 7 ■ 93 100 g Wassergas, welches aus 50% Wasserstoff und 40% Kohlenmonoxid besteht, wird verbrannt. Der Rest sind andere Gase, die in der Rechnung vernachlässigt werden sollen.
Wie groß ist die Masse der entstehenden Verbrennungsprodukte des Wasserstoff- und Kohlenmonoxidanteils?

Ch 8 ■ 94 Aus 2,3 g Braunstein entstehen durch Umsetzung mit Salzsäure 580 ml Chlorgas von 17 °C und 757 Torr.
Wieviel Prozent Mangan(IV)-oxid enthält der Braunstein?

Projekt Chemiebetrieb

„Na, das hat mir noch gefehlt, ich habe die Reinigungsanlagen vergessen."

Ch 9 ■ 95 In einer Zellstoffabrik fallen täglich 150 t Ablauge mit 2% Glukose an. Wir nehmen an, daß die Glukose durch Gärung verlustlos in Äthanol umgewandelt wird. Welche Menge Äthanol entsteht aus einer Tagesmenge Ablauge?

Ch 10/12 ■ 96 Ein Schachtofen produziert in drei Schichten (24 Stunden) 8 t Branntkalk. Die benötigte Wärmeenergie beträgt 180000 kcal je 100 kg Branntkalk.

a) Welche Menge Kalkstein muß dem Ofen zugeführt werden?
b) Wieviel Kubikmeter Kohlendioxid entstehen dabei?
c) Wie groß ist die benötigte Brennstoffmenge? $\left(\text{Heizwert der Braunkohlenbriketts} \approx 4\,500\,\frac{kcal}{kg}\right)$ ▶

M. W. Keldysch

Eines der modernen Forschungsschiffe der Sowjetunion (1980 in der Briefmarkenserie „Forschungsschiffe der UdSSR") trägt den Namen *Akademiemitglied Mstislav Keldysch.* Eine weitere Briefmarke wurde diesem bedeutenden Mathematiker 1981 in der SU gewidmet. M. W. Keldysch (10. 2. 1911 bis 24. 6. 1978) gehört zu den bedeutendsten Vertretern jener schon seit dem 19. Jahrhundert für Rußland charakteristischen engen Verbindung der Mathematik mit ihren Anwendungen in Physik und Technik. Er wurde in Riga geboren, studierte in Moskau und war dort ab 1932 als Hochschullehrer an der Lomonossow-Universität tätig. Außerdem arbeitete er in verschiedenen Instituten der *Sowjetischen Akademie der Wissenschaften,* deren ordentliches Mitglied er 1946 wurde und deren Präsident er von 1961 bis 1975 war. Keldysch beschäftigte sich mit verschiedenen Gebieten der Mathematik, u. a. Differentialgleichungen, Potentialtheorie, Theorie der konformen Abbildungen, und ihren Anwendungen in der Mechanik, Aerodynamik, Schwingungstheorie. Seine hohen Verdienste um die Entwicklung der sowjetischen Flugzeugtechnik wie auch um die Ausbildung des wissenschaftlichen Nachwuchses und die Wissenschaftsorganisation wurden durch zahlreiche hohe Auszeichnungen (u. a. Leninpreis 1957, zweimal Staatspreis, Ziolkowski-Orden) gewürdigt. Keldysch war auch Ehrenmitglied zahlreicher ausländischer Akademien und ein guter Freund und Helfer der Mathematiker der DDR. Übrigens ist auch seine Schwester Ljudmila (geb. 1904) eine namhafte Professorin der Mathematik.

P. Schreiber

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir wollen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vorstellen, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 2/1980 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:
Ma 6 ■ 1971 Von Rostock-Kapuzenhof aus machen Passagierschiffe Hafenrundfahrten mit Ausflüglern und Touristen. An einer solchen Fahrt nehmen insgesamt 75 Fahrgäste teil, und zwar fünfmal soviel Kinder wie Frauen. Die Anzahl der mitfahrenden Frauen und Kinder ist insgesamt viermal so groß wie die der Männer. Wieviel Kinder, Frauen bzw. Männer nehmen an dieser Hafenrundfahrt teil?
Im Heft 5/1980 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:
Angenommen, an der Hafenrundfahrt nehmen n Männer teil; dann nehmen noch $4 \cdot n$ Frauen und Kinder daran teil, und es gilt $n+4n=75$, $5n=75$, $n=15$. An der Hafenrundfahrt nehmen also 15 Männer teil. Angenommen, unter den Fahrgästen sind x Frauen, also $5 \cdot x$ Kinder; dann gilt $x+5x=60$, $6x=60$, $x=10$. An der Hafenrundfahrt nehmen 10 Frauen und 50 Kinder teil.

Wir stellen nun die Lösung von *Christian Kunze* aus Meißen vor, der Schüler der Klasse 6c der Willi-Anker-Oberschule ist. Christian löste diese Aufgabe wie folgt:
Angenommen, an der Hafenrundfahrt nehmen k Kinder, f Frauen und m Männer teil; dann gilt

$$k+f+m=75, \quad (1)$$
$$k=5f, \quad (2)$$
$$m=\frac{1}{4}\cdot(k+f). \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt

$$m=\frac{1}{4}\cdot(5f+f)=\frac{1}{4}\cdot 6f=\frac{3}{2}\cdot f. \quad (4)$$

Aus (1), (2) und (4) folgt

$$5f+f+\frac{3}{2}f=75,\ \frac{15}{2}f=75,$$

$f=10$ und somit $k=5\cdot 10=50$ und $m=75-10-50=15$.
An der Hafenrundfahrt nehmen 50 Kinder, 10 Frauen und 15 Männer teil.

Wir stellen nun die Lösung von *Andreas Möller* aus Heßles vor, der Schüler der Klasse 6a der POS „Thomas Müntzer" in Fambach ist. Andreas löste diese Aufgabe wie folgt:
Ich stelle eine Tabelle auf:

Anzahl der Frauen	Kinder	Männer	Personen
n	$5\cdot n$	$6n:4$	75
2	10	3	$15<75$
4	20	6	$30<75$
6	30	9	$45<75$
8	40	12	$60<75$
10	50	15	$75=75$

An der Hafenrundfahrt beteiligen sich 10 Frauen, 50 Kinder und 15 Männer.

Olympiade-Kryptogramm

Die Buchstaben in dem Wort OLYMPIADE sind so durch die Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

0 · 0 = O
00 · 00 = OLO
000 · 000 = OLYLO
0000 · 0000 = OLYMYLO
00000 · 00000 = OLYMPMYLO
000000 · 000000 = OLYMPIPMYLO
0000000 · 0000000 = OLYMPIAIPMYLO
00000000 · 00000000 = OLYMPIADAIPMYLO
000000000 · 000000000 = OLYMPIADEDAIPMYLO

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

XXII. Internationale Mathematik-Olympiade

Washington
(8. bis 20. Juli 1981)

Aufgaben

1. Es sei P ein Punkt innerhalb eines gegebenen Dreieckes ABC. D, E, F seien die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden BC, CA bzw. AB. Bestimme alle P, so daß

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PD}}+\frac{\overline{CA}}{\overline{PE}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{PF}}$$

am kleinsten ist!

2. Es sei $1 \leqq r \leqq n$. Wir betrachten alle r-elementigen Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$. Aus jeder dieser Teilmenge wählt man das kleinste Element aus. Es sei $F(n, r)$ das arithmetische Mittel dieser ausgewählten Zahlen. Man zeige, daß

$$F(n, r)=\frac{n+1}{r+1} \text{ ist.}$$

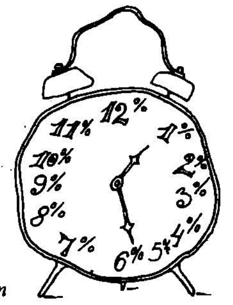
3. Es seien m, n natürliche Zahlen mit $1 \leqq m \leqq 1981$ und $1 \leqq n \leqq 1981$. Es gelte: $(n^2-mn-m^2)^2=1$.
Man bestimme den maximalen Wert von m^2+n^2.

4. a) Für welche Werte von $n>2$ gibt es n aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen, so daß die größte dieser Zahlen ein Teiler des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der übrigen $n-1$ Zahlen ist?
b) Für welche Werte von $n>2$ gibt es genau eine Folge mit dieser Eigenschaft?

5. Drei kongruente Kreise gehen durch einen gemeinsamen Punkt 0 und liegen innerhalb eines gegebenen Dreiecks. Jeder Kreis berührt jeweils zwei Seiten des Dreiecks.
Man zeige, daß der Inkreis-, der Umkreismittelpunkt und der Punkt 0 auf einer Geraden liegen.

6. Die Funktion $f(x, y)$ erfüllt die Bedingungen
(1) $f(o, y)=y+1$
(2) $f(x+1, 0)=f(x, 1)$
(3) $f(x+1, y+1)=f(x, f(x+1, y))$
für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x, y.
Man bestimme $f(4, 1981)$.

In freien Stunden · alpha-heiter

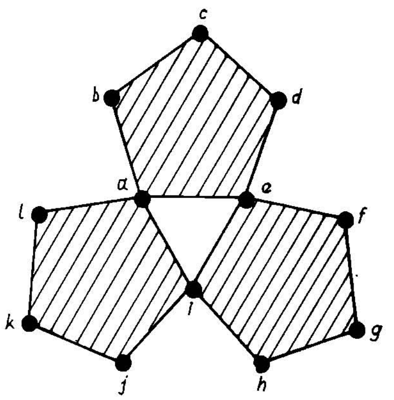


Jez, Jugoslawien

Magische Figur

Ersetze die Buchstaben a bis l durch die Zahlen 1, 2, 3, ..., 12, so, daß die Summe der Zahlen in jedem Fünfeck zunächst 28, dann 31, 34 und 37 beträgt!

Dirigent Jindřich Pěnčik, Praha



Mathematische Grüße

$19-\sqrt{81}=1^9\cdot(8+2)$
$1-9-8-1=-19+\sqrt{8:2}$
$1+(9\cdot 8)+1=1\cdot 9\cdot 8+2$
$(1+9)\cdot(8+1)=(1\cdot 9)\cdot(8+2)$
$19+\sqrt[8]{1}=1+\sqrt{9}+(8\cdot 2)$

Wir fordern zur Mitarbeit auf: Die Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., 20 sind mit Hilfe der in der Jahreszahl 1982 vorhandenen Grundziffern und unter Verwendung verschiedener Rechenoperationen darzustellen. Folgende Bedingungen sollen gelten:
(1) Jede der in der Jahreszahl darzustellenden Grundziffern tritt bei der jeweils darzustellenden natürlichen Zahl genau einmal auf.
(2) Als Rechenoperationen sind zugelassen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Radizieren. Es dürfen Klammern gesetzt werden.
Beispiele:
$0=1+\sqrt{9}-\sqrt{8\cdot 2}$; $1=(1+\sqrt{9}):\sqrt{8\cdot 2}$;
$\ldots 4=1^9\cdot\sqrt{8\cdot 2}$;
$\ldots 20=(1+9)\cdot\sqrt{8:2}$

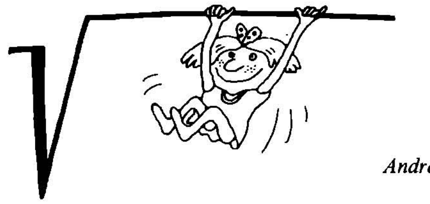
Dr. M. Krebs, PH Dresden/Rainer Bauer, EOS E. Weinert, Mittweida (Kl. 11)

Mathematische Begriffe gesucht

Bei einem Kongreß entdecken vier der Teilnehmer, daß sich aus den Buchstaben ihres Namens und Heimatortes durch Umstellen jeweils mathematische Begriffe aus ein und demselben Stoffkomplex ergeben. Welche Begriffe sind das?
(Es ist jeder Buchstabe so oft zu verwenden, wie er auftritt.)

Ernst Geit	Aken	Philip Keerer	Wien
Kurt Sis	Steinach	Sven Renk	Eiche

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin



Andreas J. Mueller

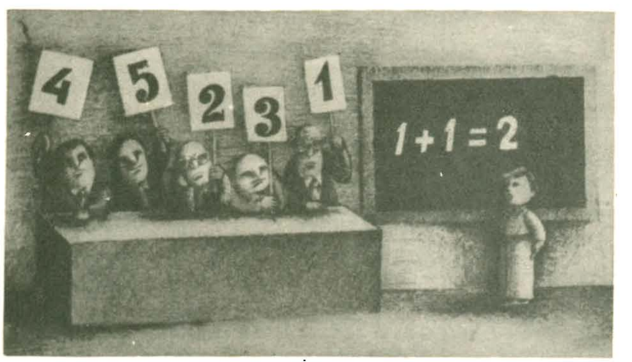
Kryptogramme

In die horizontalen und vertikalen Reihen der Kryptogramme sind so Ziffern einzusetzen, daß sinnvolle Aufgaben entstehen. Hierbei bedeuten gleiche Ziffern auch gleiche Variable.

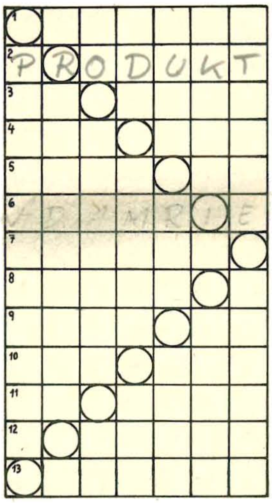
EINS	DREI	VIER
VIER	DREI	VIER
FÜNF	VIER	EINS
ZEHN	ZEHN	EINS
(S<R)	(D<V)	ZEHN

Schülerin Jarmila Pěnčikova, Praha

Rodoj Geordow, Gabrowo (Bulgarien)



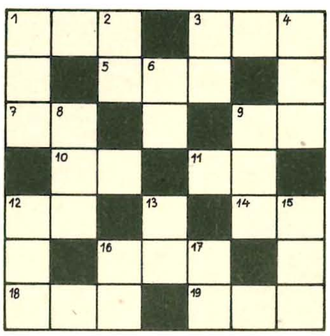
Füllrätsel



In die waagerechten Reihen der Figur sind Wörter folgender Bedeutung einzutragen:
1. Zusammenstellung von Werten; 2. Ergebnis einer Multiplikation; 3. deutscher Mathematiker (1646 bis 1716, Begründer der Infinitesimalrechnung); 4. eine Winkelfunktion; 5. ist z. B. a in $f(x)=f(x+a)$; 6. eine Bewegung; 7. tschechischer Mathematiker (1781 bis 1848), vervollständigte u. a. die Infinitesimalrechnung; 8. dreigliedrige Zahlengröße (Plural!); 9. Kurve, die jede Dreiecksseite in genau einem Punkt berührt; 10. wird z. B. durch m in der linearen Funktion $y=mx$ gebildet; 11. kürzeste Verbindung zweier Punkte; 12. Teil von Größenangaben; 13. ein Kegelschnitt.
Die Buchstaben in den Kreisfeldern – von oben nach unten gelesen – ergeben ein Gebiet der Mathematik, das sich mit Dreiecksmessung und -berechnung befaßt.

Ing. D. Völzke, Greifswald

Kreuzzahlrätsel

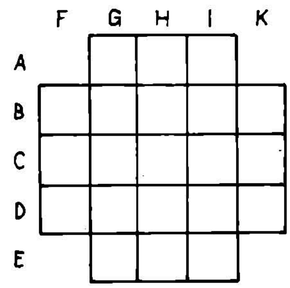


Waagerecht:
1. die Quersumme dieser Zahl ist gleich $s2$)
2. das Quadrat von $w7$)
5. das Querprodukt von $s15$)
7. die 3. Potenz der Quadratwurzel aus der Quersumme von $w10$)
9. die Spiegelzahl von $s2$)
10. die Zahl ist gleich dem Quadrat ihrer Quersumme
11. die Hälfte von $w19$)
12. eine Primzahl
14. eine Quadratzahl
16. die Zahl ist gleich dem Querprodukt von $w3$)
18. eine Kubikzahl
19. diese Zahl ist das Achtfache ihres Querproduktes

Senkrecht:
1. das Doppelte von $w18$)
2. eine Primzahl
3. die Quersumme dieser Zahl ist gleich $s2$)
4. das Querprodukt dieser Zahl ist gleich $w10$)
6. die Quersumme dieser Zahl ist gleich der Quersumme von $w19$)
8. eine Primzahl
9. die 3. Potenz der Quersumme von $s16$)
12. diese Zahl ist gleich dem Querprodukt von $s8$)
13. der Nachfolger von $w10$)
15. die Summe aus der ersten und dritten Stelle ist gleich dem Doppelten der zweiten Stelle
16. die Spiegelzahl von $s17$)
17. eine Primzahl

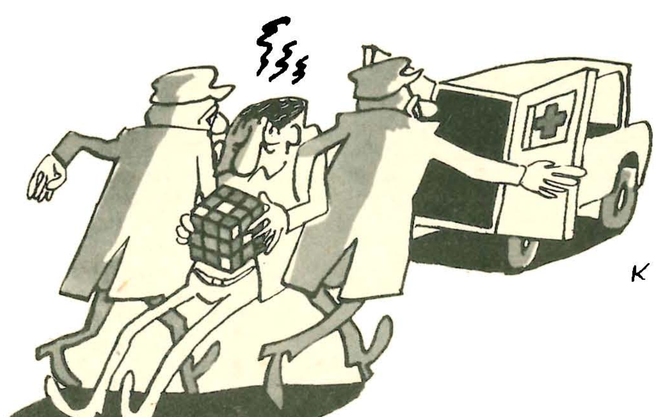
Ing. H. Decker, Köln

Magisches Kreuz



Dieses magische Kreuz ist mit 5 Kreuzen und 10 Kreisen so auszufüllen, daß gilt:
(1) Jedes Seitenfeld (*BF–DF*; *EG–EI*; *DK–BK*; *AG–AI*) soll 1 Kreuz und 2 Kreise enthalten.
(2) In jeder Zeile (*FB–KF*; *CF–CK*; *DF–DK*) und in jeder Spalte (*AG–EG*; *AH–EH*; *AI–EI*) sollen sich auch 1 Kreuz und 2 Kreise befinden.

Schülerin Claudia Popien, Karl-Marx-OS, Magdeburg (Kl. 9)



Viktor Kubal

**ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT**

Aus dem Haus der Jungen Pioniere Rostock berichtet

Die Mitglieder der Arbeitsgemeinschaft *Junge Mathematiker* der Klassenstufe 6 treffen sich seit über einem Jahr regelmäßig im Haus der Pioniere in Rostock. Beim Knobeln ist ihnen die Schülerzeitschrift *alpha* ein wertvoller Freund und Helfer. Der Leiter dieser Arbeitsgemeinschaft, Oberlehrer Rainer Rösel, Fachlehrer für Mathematik, regte die teilnehmenden Schüler an, selbst interessante Aufgaben auszudenken und uns zuzustellen. Aus der Fülle der bei uns eingegangenen Aufgaben wählten wir einige aus, die wir allen *alpha*-Lesern vorstellen möchten. Sie stammen aus der Feder der Schüler Heiner Ruser, Anne Ruser, Ines Andrews, Meike Wenzel, Oliver Eidam, Annegret Passargus.

Die Redaktion dankt allen Schülern dieser Arbeitsgemeinschaft, auch denen, deren Aufgaben wir nicht veröffentlicht haben, und wünscht ihnen viele frohe Stunden beim Knobeln und in der Freizeitbeschäftigung mit der Mathematik.

Aufgaben

▲1▲ In einer Kiste befinden sich genau 15 rote, 17 gelbe, 12 blaue, 16 weiße und 19 schwarze Kugeln.
Wie viele Kugeln muß man im Dunkeln nacheinander aus der Kiste herausnehmen, um mit Gewißheit zwei Kugeln einer jeden Farbe zu erhalten?

▲2▲ Einer Schulklasse gehören 31 Schüler an. Sie sitzen in vier Bankreihen hintereinander. In der ersten Bankreihe sitzen halb so viele Schüler wie in der zweiten Bankreihe. In der zweiten Bankreihe sitzen zwei Schüler mehr als in der dritten Bankreihe. In der dritten und vierten Bankreihe sitzen gleich viel Schüler.
Wie viele Schüler sitzen in jeder der vier Bankreihen?

▲3▲ Anett geht noch in den Kindergarten; ihre Schwester Brigitte besucht bereits die Schule. Der Schulweg von Brigitte führt am Kindergarten von Anett vorbei. Eines Morgens macht sich Anett bereits vor Brigitte auf den Weg zum Kindergarten. Nachdem Anett den dritten Teil ihres Weges zurückgelegt hat, wird sie von Brigitte, deren mittlere Geschwindigkeit $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt, eingeholt. Für den restlichen Weg bis zum Kindergarten, den sie zusammen im langsameren Tempo von Anett zurücklegen, benötigen sie noch 10 Minuten. Bis zur Schule verbleiben für Brigitte dann noch 400 Meter Fußweg; das ist gleich dem vierten Teil ihres Schulweges.
a) Nach wieviel Minuten hat Brigitte ihre Schwester Anett eingeholt?
b) Wieviel Minuten benötigt Anett für den Weg zum Kindergarten?

▲4▲ Zu einer Schulklasse gehören mehr als 21, aber weniger als 29 Schüler. An einer Klassenarbeit im Fach Mathematik konnten zwei Schüler wegen Erkrankung nicht teilnehmen. Die Note 1 erhielten fünf Schüler weniger als es Schüler waren, die die Note 2 erhielten. Die Note 4 erhielten halb soviel Schüler wie die Note 3. Kein Schüler erhielt die Note 5. Die Note 3 erhielt der vierte Teil derjenigen Schüler, die diese Klassenarbeit mitgeschrieben hatten.
Wie viele Schüler erhielten jeweils die Noten von 1 bis 4?

▲5▲ Dirk kaufte 13 Ansichtskarten, und zwar einige zu 20 Pf und einige zu 40 Pf das Stück. Er bezahlte dafür insgesamt 2,80 M.
Wie viele Ansichtskarten zu 20 Pf bzw. zu 40 Pf das Stück hat Dirk gekauft?

▲6▲ Die Summe aus vier Summanden, von denen der nächstfolgende stets immer dreimal so groß wie der vorhergehende, ist gleich der Summe aus den Quadraten der natürlichen Zahlen von 3 bis 9.
Wie lauten diese vier Summanden?

▲7▲ Eine Strecke $\overline{AE}$ ist 42 cm lang. Auf dieser Strecke sind drei innere Punkte B, C, D so festgelegt, daß $\overline{AB}$ doppelt so lang wie $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ dreimal so lang wie $\overline{AB}$, aber nur halb so lang wie $\overline{DE}$ ist.
Welche Länge hat jede der Teilstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$?

▲8▲ Multipliziert man das Quadrat einer dreistelligen natürlichen Zahl a mit einer zweistelligen natürlichen Zahl b, so erhält man als Produkt 1980.
Wie lauten die Zahlen a und b?

▲9▲ Sechs Schüler gingen Pilze sammeln; sie erzielten folgende Ergebnisse: Peter fand doppelt soviel Pilze wie Heiner. Anja fand drei Pilze weniger als Heiner. Birgit überbot den dreifachen Pilzertrag von Andreas um drei Pilze. Andreas brachte es nur auf halb soviel Pilze wie Heiner. Otto fand genau sieben Pilze. Zusammen fanden diese sechs Schüler fünf Pilze weniger als das Zehnfache der Anzahl dieser Kinder.
Wieviel Pilze fand jeder von ihnen?

▲10▲ Christine geht einkaufen. Sie hat dafür von der Mutter einen bestimmten Geldbetrag erhalten, von dem sie beim Fleischer den dritten Teil, im Milchladen den sechsten Teil ausgibt. Im Blumengeschäft muß sie halb soviel Geld wie beim Fleischer bezahlen. Beim Bäcker gibt Christine halb soviel Geld aus wie im Blumengeschäft. Im Gemüseladen gibt sie soviel Geld aus wie sie beim Bäcker und im Milchladen zusammen ausgibt.
Welchen Teil des von der Mutter erhaltenen Geldes bringt Christine wieder mit nach Hause?

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. Beweisen Sie die folgende Aussage! Zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und b, für die

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = b^2$$

gilt.

2. Gegeben sei eine Länge r_1. Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $\overline{CD} < \overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BC}$, in dem ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und ein zweiter Kreis k_2 so liegen, daß sie einander von außen berühren und daß k_1 die Seiten AD, AB und BC berührt, k_2 die Seiten BC, CD und AD berührt! Begründen und beschreiben Sie die Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften gibt!

3. A. Ermitteln Sie alle Paare $(x;\ y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist!

$$x \cdot \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 2 \cdot \log_y(5 - \sqrt{24}), \qquad (1)$$

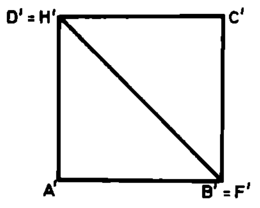
$$y - x = 2 \qquad (2)$$

3. B. Beweisen Sie, daß für keine natürliche Zahl n die Zahl

$$625 + 4 \cdot (9^{2n})$$

eine Primzahl sein kann!

4. Ein ebenflächig begrenzter Körper mit genau 6 Ecken A, B, C, D, F, H soll den im Bild dargestellten Grundriß haben. ($A'B'C'D'$ ist dabei ein Quadrat von gegebener Seitenlänge a.) Die Punkte A, B, C, D sollen in der Grundrißebene liegen, die Punkte F und H im Abstand a über B bzw. D.



Jede Kante des Körpers soll im Bild sichtbar dargestellt sein (entweder als Strecke oder, wenn sie senkrecht zur Grundrißebene verläuft, als Punkt), auch wenn sie etwa von oben betrachtet durch andere Flächen verdeckt wird.
Stellen Sie zwei Körper, die diese Forderungen erfüllen und voneinander verschiedene Volumina haben, in schräger Parallelprojektion $\left(\alpha = 60°,\ q = \frac{1}{2}\right)$ dar! Ermitteln Sie für jeden der beiden dargestellten Körper sein Volumen!

5. Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, daß

$$x_1 = 5$$

und für alle $n = 1, 2, \ldots, 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n}$$

gelten soll.
Beweisen Sie, daß (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, \ldots, 1000$ die Ungleichung

$$4 \leqq x_n \leqq 5$$

gilt!

6. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen c, für die das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$y > x^2 - 2x + c, \qquad (1)$$

$$y < x + c, \qquad (2)$$

$$y < -2x + 1. \qquad (3)$$

Olympiadeklassen 11/12

1. In einem beliebigen Dreieck ABC seien D, E, F die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des Dreiecks mit den Dreieckseiten.
Man beweise: Sind I der Flächeninhalt des Dreiecks ABC und I_1 der Flächeninhalt des Dreiecks DEF, so gilt $I_1 \leqq \frac{I}{4}$.

2. In einem Fischgeschäft stehen für die Aufbewahrung lebender Karpfen drei Wasserbehälter zur Verfügung. Zum Verkaufsbeginn sind in jedem dieser drei Behälter genau 20 Karpfen. Am Verkaufsende sind noch insgesamt 3 Karpfen vorhanden. Die verkauften Karpfen wurden einzeln nacheinander entnommen. Ein Tausch eines Karpfens von einem Behälter in einen anderen fand nicht statt; neue Karpfen waren während des Verkaufs nicht hinzugekommen.
Berechnen Sie auf 3 Dezimalen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist!
Hinweis: Die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit p ist folgendermaßen definiert: Es sei A die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme von 57 Karpfen aus den drei Behältern. Ferner sei G die Anzahl aller derjenigen unter diesen Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist. Dabei gelten zwei mögliche Reihenfolgen der Entnahme genau dann als gleich, wenn sie für jedes $i = 1, 2, \ldots, 57$ in der Angabe übereinstimmen, aus welchem Behälter die i-te Entnahme eines Karpfens erfolgte. Mit diesen Bezeichnungen ist $p = \frac{G}{A}$.

3. Gegeben sei eine reelle Zahl $a \neq 0$ mit $|a| \neq 1$. Man ermittle alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\frac{(x^4+1)(x^4+6x^2+1)}{x^2(x^2-1)^2} = \frac{(a^4+1)(a^4+6a^2+1)}{a^2(a^2-1)^2}.$$

4. Es sei $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$a_1 = 1 \text{ und}$$

$$a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gilt.
Man ermittle alle diejenigen Glieder dieser Folge, die ganzzahlig sind.

5. Für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}. \qquad (1)$$

Man ermittle einen geschlossenen Ausdruck für $f(n)$ (d. h. einen Ausdruck, der $f(n)$ in Abhängigkeit von n so darstellt, daß zu seiner Bildung nicht wie in (1) eine von n abhängende Anzahl von Rechenoperationen verlangt wird).
Hinweis: Ist x eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnet $[x]$ diejenige ganze Zahl, für die $[x] \leqq x < [x] + 1$ gilt.

Von den nachstehenden Aufgaben 6. A und 6. B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

6. A. Eine Strecke AB von 10 m Länge soll auf folgende Weise durch „wiederholtes Halbieren" in 10 näherungsweise gleich lange Strecken zerlegt werden:
(1) Zunächst wählt man beliebige Punkte $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \ldots, P_9^{(0)}$ auf der Strecke AB und definiert $P_0^{(0)} = A$ und $P_{10}^{(0)} = B$.
(2) Liegen nun für eine natürliche Zahl n bereits als „n-te Näherung" Punkte $P_0^{(n)}$, $P_1^{(n)}, \ldots, P_{10}^{(n)}$ vor, so definiert man $P_0^{(n+1)} = A$, $P_{10}^{(n+1)} = B$ sowie für $j = 1, 2, \ldots, 9$ $P_j^{(n+1)}$ als Mittelpunkt der Strecke $P_{j-1}^{(n+1)} P_{j+2}^{(n)}$.

Es seien $Q_1, Q_2, \ldots, Q_9$ die Punkte auf AB die AB in 10 genau gleich lange Teilstrecken zerlegen, für die also
$\overline{AQ_1}=\overline{Q_1Q_2}=\ldots=\overline{Q_8Q_9}=\overline{Q_9B}=1$ m
gilt.
Beweisen Sie, daß eine natürliche Zahl N so existiert, daß für jede Wahl der Punkte $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}, \ldots, P_9^{(0)}$ auf AB gilt:
Bei der „N-ten Näherung" weicht jeder der Punkte $P_j^{(N)}$ $(j=1, 2, \ldots, 9)$ um weniger als 1 mm von der Lage des Punktes Q_j ab, d. h., es gilt
$$\overline{P_j^{(N)}Q_j}<1 \text{ mm}.$$

6. B. Ist $T=ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichne s die Summe aller Kantenlängen von T. Dabei sei in dieser Aufgabe jede (in Zentimeter zu messende) Kantenlänge nur durch ihre Maßzahl angegeben. Man untersuche, ob es unter allen Tetraedern T mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) eines gibt, für das s einen größten Wert annimmt. Trifft das zu, so ermittle man diesen größten Wert von s. Die geforderten Eigenschaften sind:

(1) $\sphericalangle BDC=\sphericalangle CDA=\sphericalangle ADB=90°$.

(2) Sämtliche Kantenlängen von T sind nicht kleiner als $\frac{1}{6}$.

(3) Das Volumen von T ist gleich $\frac{1}{6}$.

Lösungen

Olympiadeklasse 10

1. Zum Beweis kann die Methode der vollständigen Induktion herangezogen werden. Für $n=2$ gilt wegen $3^2+4^2=5^2$ die Aussage mit $a_1=3$, $a_2=4$, $b=5$. Sei nun k eine natürliche Zahl, so daß die Aussage für $n=k$ gilt, d. h., es gebe von Null verschiedene natürliche Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_k, d$ mit $d>1$ und

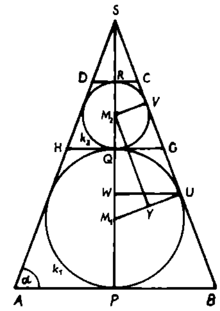
(1) $c_1^2+c_2^2+\ldots+c_k^2=d^2$.

(Wir können jedenfalls $k=2$ setzen.) Aus dieser Gleichung folgerten z. B. Matthias Hübner (Bezirk Leipzig) und Karin Gröger (Berlin) durch Multiplikation mit 2^2 die Beziehung
$$(2c_1)^2+(2c_2)^2+\ldots+(2c_k)^2$$
$$=(2d)^2=(d^2+1)^2-(d^2-1)^2.$$
Setzt man $a_1=2c_1, \ldots, a_k=2c_k, a_{k+1}=d^2-1$, $b=d^2+1$, so erhält man von Null verschiedene Zahlen $a_1, \ldots, a_{k+1}, b$ mit $b>1$ und der Eigenschaft $a_1^2+\ldots+a_{k+1}^2=b^2$, d. h., die Aussage gilt auch für $n=k+1$.
Durch den Beweis für $n=2$ und den Schluß von $n=k$ auf $n=k+1$ ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen n, die ≥ 2 sind, bewiesen.
Varianten und Bemerkungen: Für die Aufgabe ersannen die Schüler vielfältige Lösungsvarianten, von denen im folgenden noch einige angegeben seien. Vollständige Induktion wurde oft verwendet, und es ist erfreulich, wie gut viele Schüler (der Olympiadeklasse 10) schon mit dieser Methode vertraut sind. Mehrfach wurde dabei die Ungeradheit der auftretenden Zahlen b ausgenutzt. So folgert z. B. Oliver Geupel (Bezirk Dresden) aus (1) für $d=2p+1$ $(p\in N, p\neq 0)$ und somit $d^2=4s+1$ $(s=p^2+p)$ die Beziehung
$$c_1^2+\ldots+c_k^2+(2s)^2=(2s+1)^2$$
und erhält mit $a_1=c_1, \ldots, a_k=c_k, a_{k+1}=2s$, $b=2s+1$ die Aussage für $n=k+1$ sowie gleichzeitig, daß b wieder ungerade ist. Dieser letzte Nachweis fehlte gelegentlich, wenn Schüler denselben Gedanken verfolgten. (Übrigens kann man analog auch einen Beweis mit geradzahligen b führen.)
Jörg Wenzel (Bezirk Gera) gab die Folge der hier auftretenden $a_1, a_2, \ldots$ rekursiv an:
$a_1=3, a_2=4,$
$$a_i=\frac{(a_{i-1}+1)^2-1}{2} \text{ für } i=3, 4, \ldots, n$$
(es ist $a_i\in N$, $a_i\neq 0$), $b=a_n+1$.
Andere Schüler nannten – unabhängig von der vollständigen Induktion – explizite Lösungen, so Henry Mittel (Bezirk Suhl):
$a_1=(n-1)c^2-1, a_2=\ldots=a_n=2c,$
$b=(n-1)c^2+1$ mit $c>1$. Setzt man $c=1$, wie z. B. Jens Rammhold (Bezirk Potsdam), so muß man zwar den Fall $n=2$ (wegen $a_1=0$) extra behandeln, hat aber alle anderen Fälle in der simplen Gleichung
$(n-2)^2+(n-1)\cdot 2^2=n^2$ erfaßt.
Einfach ist auch der Gedanke (für $n>2$) von Andreas-Maik Wolf (Bezirk Erfurt):
$$(k+1)^2=k^2+(2k+1)\cdot 1^2$$
$$=k^2+2^2+(2k-3)\cdot 1^2$$
liefert die Lösung für $n=2k+2\geq 4$ bzw. $n=2k-1\geq 3$, d. h. für alle geraden bzw. ungeraden n, die größer als 2 sind.
Als verbreiteter Mangel in den Bearbeitungen ist zu erwähnen, daß Induktionsvoraussetzung oder -behauptung nicht vollständig oder nicht sauber als Existenzaussagen formuliert waren. Das führte zu Beweislücken, für welche etwa der erwähnte fehlende Nachweis der Ungeradheit von b als typisches Beispiel gelten kann.
Die Bewertung hatte folgendes Ergebnis:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	18	9	7	5	11	8	39

Dr. K.-D. Drews, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

2. I. Angenommen, ein Trapez $ABCD$ mit den Kreisen k_i (Mittelpunkte M_i, Radien r_i, $i=1, 2$) habe die geforderten Eigenschaften. Gilt $AD\|BC$, so ist $ABCD$ wegen $\overline{AD}=\overline{BC}$ ein Parallelogramm im Widerspruch zu $\overline{AB}>\overline{CD}$. Also gilt $AB\|CD$, und das Trapez ist wegen $\overline{AD}=\overline{BC}$ gleichschenklig. Da k_1 und k_2 die Schenkel AD, BC berühren, deren Verlängerungen über D bzw. C hinaus sich in S schneiden, liegen M_1 und M_2 auf der Winkelhalbierenden m des $\sphericalangle ASB$, die gleichzeitig Mittelsenkrechte von AB und CD ist. Ferner liegt auch Q (der Berührungspunkt von k_1 und k_2) auf m. Die Parallele zu AB durch Q ist somit die gemeinsame innere Tangente von k_1 und k_2, die AD in H und BC in G schneidet. Das Trapez $HGCD$, dessen Seiten von k_2 berührt werden, geht durch eine Streckung mit dem Zentrum S in das Trapez $ABGH$ über, dessen Seiten von k_1 berührt werden. Es sei $x=r_2:r_1$, $a=\overline{AB}$, $b=\overline{HG}$, $c=\overline{DC}$. Es ist $x=\overline{DC}:\overline{HG}=\overline{HG}:\overline{AB}$, also $b=ax$, $c=bx=ax^2$. U und V seien die Berührungspunkte von k_1 bzw. k_2 mit BC.



Es gilt
$a=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{BU}+\overline{UG}+\overline{GV}+\overline{VC}$
$=\overline{BP}+\overline{QG}+\overline{QG}+\overline{CR}$ (nach dem Satz über die Gleichheit der Tangentenabschnitte)
$=\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2}=\frac{a}{2}(1+2x+x^2)$. Diese Gleichung wird wegen $x>0$ nur von $x=\sqrt{2}-1$ erfüllt. Also kann ein Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen genügen, wenn
$r_2=r_1(\sqrt{2}-1)$ gilt. (1)
Weitere Möglichkeiten:
1. Sei W der Fußpunkt des Lotes von U auf m. Es gilt $\Delta M_1UW\sim\Delta M_1M_2Y$ und hieraus folgt $r_1:r_2=\overline{M_1M_2}:\overline{M_1Y}=\frac{(r_1+r_2)}{(r_1-r_2)}$.
Dies führt ebenfalls auf (1).
2. Es ist $\Delta BM_1P\cong\Delta BM_1U\sim\Delta M_1GU\cong$ $\cong\Delta M_1GQ\sim\Delta GM_2Q\cong\Delta GM_2V\sim\Delta M_2CV\cong$ $\cong\Delta M_2CR$. Hier kann man z. B. der Reihe nach $\overline{GU}=\overline{GQ}=\overline{VG}$ und $\overline{CV}$ durch r_1 und $\frac{1}{2}a=\overline{BP}=\overline{BU}$ ausdrücken. Man erhält aus $\overline{BC}=a$ eine Gleichung zwischen r_1 und a, die auf $a=2r_1\sqrt{1+\sqrt{2}}$ führt.
3. *Matthias Hübner* (Bezirk Leipzig) geht folgenden Weg:
Es ist $\Delta BM_1P\cong\Delta BM_1U$ und somit
$$\frac{\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)}=\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{2r_1}{a} \quad (2).$$
Weiter ist $a=\overline{BC}=\overline{BG}+\overline{GC}=\frac{2r_1}{\sin\alpha}+\frac{2r_2}{\sin\alpha}$ (3).
Aus (2) und (3) folgt $r_2=r_1\cos\alpha$ (4). Im Dreieck M_1YM_2 ist
$$\cos\alpha=\frac{\overline{M_1Y}}{\overline{M_1M_2}}=\frac{(r_1-r_2)}{(r_1+r_2)}=\frac{(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)}$$
nach (4). Hieraus folgt $\cos\alpha=\sqrt{2}-1$.
Dieser Winkel wird dann konstruiert.
II. Konstruktionsbeschreibung

(1) Aus r_1 konstruiere man $r_2=r_1(\sqrt{2}-1)$.

(2) Man konstruiere die sich von außen in Q berührenden Kreise k_i (Mittelpunkte M_i, Radien r_i, $i=1, 2$).

(3) Man konstruiere die beiden äußeren Tangenten t und t' von k_1, k_2.

(4) Die Gerade durch M_1 und M_2 schneide die Kreise k_1, k_2 zusätzlich in R und P. Man errichte die Senkrechten auf dieser Geraden in R und P. Diese schneiden t und t' in A, D und B, C.

$ABCD$ ist das gesuchte Trapez.

III. Beweist, daß jedes so konstruierte Trapez den Bedingungen der Aufgabe genügt: Nach Konstruktion ist $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{AD}=\overline{BC}$. Die Kreise k_1, k_2 haben die vorgeschriebenen Berührungen mit den Seiten. Wegen $r_2<r_1$ ist $\overline{CD}<\overline{AB}$. Wie in I. kann man herleiten, daß mit $x=r_2:r_1$ die Gleichung $\overline{BC}=\frac{a}{2}(1+2x+x^2)$ gilt. Da nach Konstruktionsschritt (1) $r_2=r_1(\sqrt{2}-1)$ ist, erfüllt x die Gleichung $x^2+2x+1=2$, und es folgt $\overline{BC}=a=\overline{AB}$.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist eindeutig ausführbar.

(2) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, und (3) und (4) sind es anschließend auch. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften.

Bemerkungen: Die Aufgabe erscheint angemessen. Der Nachweis der Parallelität von AB und CD fehlte häufig. Viele Schüler versuchten, den Zusammenhang $r_2=f(r_1)$ (oder ähnlich geeigneter Größen) zu beschreiben, ohne ihn explizit angeben zu können. Damit ist eine Aussage über die Konstruierbarkeit nur schwer zu gewinnen. Gleiches muß zu den Versuchen gesagt werden, die größere Gleichungssysteme bis zu 6 Unbekannten, darunter nichtlineare oder Gleichungen höherer Ordnung, erhielten, ohne die Wurzeln bestimmen zu können. Die Schritte III. und IV. fehlten häufig, wie überhaupt einige Beweise recht oberflächlich geführt wurden.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	52	18	4	0	2	11	3	6	1

$\varnothing=1{,}6$

Dr. W. Moldenhauer, Pädagogische Hochschule Dr. Theodor Neubauer, Erfurt/Mühlhausen

3. A. Angenommen, ein Paar $(x;\ y)$ reeller Zahlen mit $y>0$ und $y\neq 1$ erfülle (1) und (2). Wegen $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-\sqrt{24}$ folgt dann
$x^2\cdot\log_y(\sqrt{3}-\sqrt{2})=4\cdot\log_y(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.
Da $\sqrt{3}\neq\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}-\sqrt{2}\neq 1$ ist, ist $\log_y(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ definiert und ungleich Null. Daraus folgt

$$x^2=4.$$

Wegen (2) und $y>0$ ist $x=y-2>-2$, also muß $x=2$ sein.
Nach (2) ergibt sich $y=4$.
Folglich kann nur das Paar $(x;\ y)=(2;\ 4)$ das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.
Wegen $2\cdot\log_4(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=2\cdot\log_4(5-\sqrt{24})$ und $4-2=2$ erfüllt es diese beiden Gleichungen tatsächlich.
Daher ist genau das Paar (2; 4) das gesuchte.

Bemerkungen: Die Aufgabe besitzt einen angemessenen Schwierigkeitsgrad. Der häufigste Fehler bestand darin, daß Exponenten bei gleichen Potenzen verglichen wurden, ohne die Basen 0 und 1 auszuschließen, bzw. daß in Produkten die Möglichkeit, daß ein Faktor den Wert 0 annimmt, nicht ausgeschlossen wurde.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	5	2	11	2	7	16	35

Dr. Ingeborg Bartsch, Institut für Lehrerbildung Jacques Duclos, Rostock

3. B. Der Versuch, eine Produktdarstellung mit Hilfe binomischer Formeln zu erreichen, führt auf folgendes:
Für jede natürliche Zahl n gilt
$625+4\cdot(9^{2n})=5^4+4\cdot 3^{4n}$,
$=(5^2+2\cdot 3^{2n})^2-4\cdot 5^2\cdot 3^{2n}$,
$=(5^2+2\cdot 3^{2n}+2\cdot 5\cdot 3^n)(5^2+2\cdot 3^{2n}-2\cdot 5\cdot 3^n)$,
$=[(5+3^n)^2+3^{2n}]\cdot[(5-3^n)^2+3^{2n}]$.
Es bleibt zu zeigen, daß beide Faktoren größer als 1 sind.
Es gilt jedoch
$(5+3^n)^2+3^{2n}\geqq(5+3^0)^2>1$ und
$5\neq 3^n$, also $(5-3^n)^2>0$,
$(5-3^n)^2+3^{2n}>0+3^0=1$,
womit auch dieser Teil der Lösung erbracht ist: Die Zahl $625+4\cdot(9^{2n})$ ist in zwei ganzzahlige Faktoren, die beide größer als 1 sind, zerlegbar und ist somit keine Primzahl.

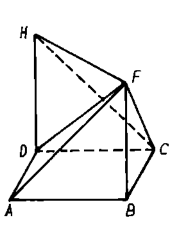
Bemerkungen: Von den teilnehmenden 98 Schülern entschieden sich 19, also etwa ein Fünftel, für diese Wahlaufgabe. Zur Lösung der Aufgabe war eine durchaus nicht unmittelbar ins Auge springende Idee für die Zerlegung des Terms $625+4\cdot 9^{2n}$ nötig. Versuche, eine natürliche Zahl zu finden, die als Faktor in allen Zahlen $625+4\cdot 9^{2n}$ – bzw. in allen, für die n größer als ein gewisses $n_0>0$ ist – enthalten ist, schlugen fehl. Nur 5 der 19 Schüler fanden die in der Lösung angegebene Zerlegung.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	10	4	0	0	0	1	4

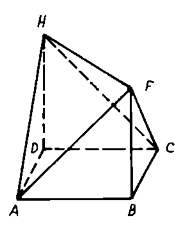
Dr. Monika Noack, Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen, Berlin

4. Lösung des Schülers *Andrei Josiek* (EOS *Clara Zetkin* Eisenhüttenstadt, bearbeitet):
Der Körper I (siehe Bild) erfüllt die Bedingungen der Aufgabenstellung, da er genau sechs Ecken (A, B, C, D, F, H) und den angegebenen Grundriß besitzt. Letzteres folgt aus der Lage von AF über AB, von HF und DF über BD, von FC über BC, von HC über CD, sowie der Lage von F über B und der von

I



II



H über D. Damit wird jede Kante entweder auf eine der Seiten des Quadrates $ABCD$, auf dessen Diagonale BD oder – bei senkrechter Lage zur Grundrißebene – als Punkt auf A, B, C oder D im Grundriß abgebildet. Nach Konstruktion liegt F (bzw. H) im Abstand a über B (bzw. D). Der Körper I ist auch – wie gefordert – ebenflächig begrenzt, da alle Seitenflächen Dreiecke sind und die Fläche $ABCD$ nach Voraussetzung eben ist. Analoge Betrachtungen zeigen, daß auch der Körper II den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Es ist noch zu zeigen, daß die Körper I und II unterschiedliches Volumen haben, und es sind diese Volumina zu berechnen. Ergänzt man den Körper I durch die Pyramide $AFDH$, so erhält man offensichtlich den Körper II, damit unterscheiden sich die Volumina V_I und V_{II} der Körper um das Volumen V_P der Pyramide $AFDH$ (und sind damit auch unterschiedlich).

$$V_{II}=V_I+V_P \qquad (1)$$

Den Körper I kann man sich aus den drei Pyramiden $ABDF$, $DBCF$ und $DCHF$ zusammengesetzt denken. Ergänzt man den Körper I zu einem Würfel mit der Kantenlänge a, so erkennt man, daß für jede dieser Pyramiden als Grundfläche eine halbe Seitenfläche des Würfels und als Höhe die Kantenlänge a gewählt werden kann. Das gilt auch für die Pyramide $AFDH$ (mit der Grundfläche ADH). Damit gilt

$$V_P=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a,$$

$$V_P=\frac{1}{6}a^3. \qquad (2)$$

Daher folgt

$$V_I=\frac{1}{2}a^3$$

und mit (1)

$$V_{II}=\frac{2}{3}a^3.$$

Bemerkungen: Die vorstehende Lösung unterschied sich von den anderen durch die Sorgfalt der Begründung und die *Ökonomie* der Berechnung. Der Schüler erhielt für diese Lösung ein *Diplom für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe.* Insgesamt lösten etwa 60% der Schüler diese Aufgabe richtig. Dabei wurden auch noch andere Körper als die Körper I und II gewählt. Etwa 30% der Schüler fanden allerdings nur einen solchen Körper und gaben als zweiten fälschlicherweise einen mit sieben Eckpunkten an. Der siebente Eckpunkt war zumeist der Schnittpunkt der Strecken DF und HB. Bei einer so sorgfältigen Darstellung wie unserer obigen hätte dieser Fehler erkannt werden müssen!
Fehler bei der Ausführung der schrägen Parallelprojektion waren gering

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	3	–	5	26	7	16	41

Dr. H.-J. Sprengel, Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht Potsdam

5. Die endliche Folge $\{x_1, \ldots, x_{1000}\}$ ist induktiv vorgegeben, indem das erste Glied und jedes weitere Glied mit Hilfe des vorhergehenden angegeben wird:

$x_1=5$ und $x_{n+1}=\frac{x_n^2+16}{2x_n}$

$(n=1, \ldots, 999)$.

Diese Vorgabe in der Aufgabe setzte stillschweigend voraus, daß stets $x_n \neq 0$ ist.

Zum Beweis der Behauptung

$4 \leqq x_n \leqq 5$ für alle $n=1, \ldots, 1000$

bietet sich damit die Methode der vollständigen Induktion an, wobei dann diese Ungleichung sogar für jede natürliche Zahl n bewiesen werden kann.

a) Beweis von $x_n \geqq 4$. Wir zeigen die Verschärfung $x_n>4$. Für $n=1$ gilt diese Behauptung wegen $x_1=5>4$. Es sei jetzt $x_k>4$. Dann ergibt sich für das folgende Glied x_{k+1} ebenfalls

$$x_{k+1}=\frac{x_k^2+16}{2x_k}=\frac{(x_k-4)^2}{2x_k}+4>4.$$

Demnach gilt $x_n>4$ für alle natürlichen Zahlen.

b) Beweis von $x_n \leqq 5$.

Aus $x_n>4$ folgt $x_n^2+16<2x_n^2$ und damit weiter $x_{n+1}=\frac{x_n^2+16}{2x_n}<x_n$, d. h.,

die Folge x_n ist streng monoton fallend.

Wegen $x_1=5$ gilt dann sogar $x_n<5$ für alle natürlichen Zahlen $n>1$.

Bemerkungen: Fast alle Teilnehmer haben induktive Schlußweisen benutzt, wenn auch mit recht unterschiedlich ausgeprägten Darstellungsweisen. (Hier hatten einige Frühstarter Schwierigkeiten. Die Methode der vollständigen Induktion ist erst Unterrichtsgegenstand der 11. Klasse.) Durch Teile mit indirekter Beweisführung haben dabei einige Schüler die logische Struktur ihres Beweises unnötig verkompliziert.

Fehler traten bei der Behandlung von Ungleichungen auf. (So wurden z. B. Ungleichungen ohne nähere Untersuchungen dividiert; oder es wurde durch x_n dividiert, ohne vorher zu zeigen, daß $x_n>0$ ist.)

In einzelnen Beweisteilen wurden zum Teil recht interessante Ansätze vorgelegt. Für den Schluß aus $4 \leqq x_k \leqq 5$ auf $4 \leqq x_{k+1} \leqq 5$ wurden unter anderem

$$x_k=4+a \text{ und } x_k=5-b$$
$$\text{mit } 0 \leqq a, b \leqq 1$$

gesetzt oder folgende Umformungen benutzt

$$-1 \leqq x_k \leqq 0, (x_k-5)^2 \leqq 1,$$
$$\frac{x_k^2+16}{2x_k} \leqq 5-\frac{4}{x_k}<5.$$

Schließlich sei bemerkt, daß sich aus dem bekannten Vergleich des arithmetischen und geometrischen Mittels ergibt

$$\frac{x_n^2+16}{2x_n} \geqq \frac{2\sqrt{x_n^2 \cdot 16}}{2x_n}=4;$$

daraus ergibt sich dann leicht $x_n \geqq 4$ für alle n.

Die Aufgabe war für die Teilnehmer leicht; das unterstreicht der folgende Ergebnisspiegel:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	–	1	4	4	3	9	18	59

Dr. sc. E. Quaisser, Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht Potsdam

6. (nach einem Vorschlag der Aufgabenkommission)

Angenommen, für ein reelles c habe das System (1), (2), (3) eine Lösung (x, y). Dann ergibt sich aus (1) und (3) die Beziehung $x^2-2x+c<-2x+1$, d. h. $c<1-x^2$ und somit $c<1$. Eine Lösung kann daher höchstens für $c<1$ existieren. Umgekehrt hat das System (1), (2), (3) für jedes c mit $c<1$ eine Lösung, z. B. eine mit $y=c$. Für diesen Wert von y ist es nämlich äquivalent zu

$$x^2-2x<0, \tag{4}$$
$$0<x, \tag{5}$$
$$c<-2x+1; \tag{6}$$

(4) und (5) sind äquivalent mit den Ungleichungen

$$0<x<2, \tag{7}$$

und (6) ist äquivalent mit

$$x<\frac{1-c}{2}. \tag{8}$$

Wegen $c<1$ gilt $\frac{1-c}{2}>0$, und demnach sind (7) und (8) durch reelle x erfüllbar.

Das System (1), (2), (3) hat folglich genau für alle reellen Zahlen c, die kleiner als 1 sind, eine Lösung.

Bemerkungen: Einen solchen rein analytischen Weg versuchten nur wenige Schüler. Überwiegend wurde ein Lösungsweg beschritten, bei dem man die Funktionen

$$y=x^2-2x+c, \tag{1'}$$
$$y=x+c, \tag{2'}$$
$$y=-2x+1 \tag{3'}$$

graphisch darstellt und die Lösungsmenge des Ungleichungssystems (1), (2), (3) als Menge aller Punkte mit den Koordinaten (x, y) erhält, die sowohl oberhalb der Parabel (1') als auch unterhalb der Geraden (2') und unterhalb der Geraden (3') liegen. Hierbei wurde jedoch oft die Anschauung zu stark benutzt, so daß die gezogenen Folgerungen nicht immer schlüssig waren. Insbesondere fehlte vielfach eine saubere Behandlung des Falles $c=1$, denn die anschauliche Feststellung, daß dann die Gerade (3') Tangente der Parabel (1') ist, bedarf natürlich einer Begründung. Die Bewertung ergab folgende Punkteverteilung:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	5	4	12	9	11	26	11	20

Dr. K.-D. Drews, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Ungleichungen

Teil II

Fortsetzung aus Heft 1/82

Klasse 8

▲1▲ Gegeben ist die Ungleichung $3x+4<15$ mit $x \in R$. Nenne rationale Zahlen, die nach dem Einsetzen für x die gegebene Ungleichung

a) zu einer wahren Aussage,

b) zu einer falschen Aussage werden lassen!

▲2▲ Ein Vater ist viermal so alt wie sein Sohn. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter des Vaters und das seines Sohnes (in ganzen Zahlen) angeben, so erhält man als Summe eine Zahl, die größer als 50, aber kleiner als 60 ist. Ermittle das Lebensalter von Vater und Sohn!

▲3▲ Von den natürlichen Zahlen p und q ist bekannt, daß $0<p<q$ gilt.

a) Ordne die Zahlen $1, \frac{p}{q}, \frac{q}{p}$ der Größe nach! Beginne mit der kleinsten Zahl!

b) Stelle fest, welche der beiden Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ näher an 1 liegt!

▲4▲ Welcher der beiden Brüche

$$\frac{5678901234}{6789012345} \text{ und } \frac{5678901235}{6789012347}$$

ist der größere von beiden?

Klasse 9

▲1▲ Stellen Sie ohne Berechnung der Wurzeln oder Nachschlagen in einer Zahlentafel fest, welche der beiden reellen Zahlen $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ und $\sqrt{3}+\sqrt{19}$ die größere von beiden ist!

▲2▲ Lösen Sie das folgende lineare Ungleichungssystem!

$$\left|\begin{array}{l} 3x-4<x \\ 8-7x<25 \end{array}\right| \quad x \in P \text{ (Menge der reellen Zahlen)}$$

▲3▲ Es ist zu untersuchen, ob die Ungleichung $5^{10}+6^{10}<7^{10}$ eine wahre Aussage darstellt!

Klasse 10

▲1▲ Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, welche die Ungleichung

$\frac{1}{2} \cdot \lg(2x-1)+\lg\sqrt{x-9}>1$ erfüllen!

▲2▲ Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen x stets $|\sin x+\cos x| \leqq \sqrt{2}$ gilt!

▲3▲ Es ist zu beweisen, daß für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c die Ungleichung $a+b+c \geqq 2 \cdot \sqrt{c(a+b)}$ gilt!

▲4▲ Beweisen Sie, daß $6>\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ gilt!

J. Lehmann/Th. Scholl

Lösungen

Lösungen zu: Ungleichungen
Teil I und Teil II

(Klasse 1 bis 7, siehe Heft 1/82 und Klasse 8 bis 10, siehe S. 46)

Klasse 1

▲1▲ $a=0, 1, 2$; wenn $a=0$, so $a<3$; wenn $a=1$, so $a<3$, wenn $a=2$, so $a<3$.

▲2▲ $a=0, 1, 2, 3$

▲3▲ $u=0, 1, 2, 3$

▲4▲ $62<69$, denn $2<9$

Klasse 2

▲1▲ $7<11$, denn $7+4=11$

▲2▲ x liegt zwischen 48 und 53, also $x=49, 50, 51, 52$

▲3▲ $3\cdot 4<5\cdot 4$, denn $3<5$

▲4▲ $y=0, 1, 2$

Klasse 3

▲1▲ $700<900$, denn $7\cdot 100<9\cdot 100$, weil $7<9$

▲2▲ x liegt zwischen 5897 und 5903, also $x=5898, 5899, 5900, 5901, 5902$

▲3▲ $75<386<392<397<857$

▲4▲ $x=59, 60, 61$

Klasse 4

▲1▲ $70000>40000$, denn $7\cdot 10000>4\cdot 10000$, weil $7>4$

▲2▲ $a=60000, 70000$

▲3▲ $x_1=10001$ und $x_2=99999$

▲4▲ $(0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 1), (2; 0)$

Klasse 5

▲1▲ $\frac{1}{9}<\frac{4}{9}<\frac{5}{9}<\frac{10}{9}$, denn $1<4<5<10$

▲2▲ a) Aus $2<3$ folgt $2+5<3+5$, also $7<8$

b) Aus $9>6$ folgt $9\cdot 11>6\cdot 11$, also $99>66$

▲3▲ a) $x=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

b) $z=0, 1, 2, 3, 4$

c) $d=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

d) $a=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$

e) $x=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

▲4▲ $4\cdot 3<4^3$, denn $12<4\cdot 4\cdot 4=64$

▲5▲ Es existieren genau drei Zahlentripel (a, b, c); sie lauten $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$ und $(1, 2, 5)$.

Klasse 6

▲1▲ a) Aus $\frac{3}{5}<\frac{x}{5}<\frac{8}{5}$ folgt $3<x<8$, also $L=\{4, 5, 6, 7\}$

b) $\frac{162}{198}<\frac{99\cdot x}{198}<\frac{176}{198}$, also $162<99\cdot x<176$, also $L=\emptyset$

c) $3x<20$ und $12<5x$, also $1\leqq x\leqq 6$ und $x\geqq 3$, also $L=\{3, 4, 5, 6\}$

▲2▲ a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right):2=\frac{5}{8}$;

$\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right):2=\frac{9}{16}$; $\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\right):2=\frac{11}{16}$

b) Wegen $\frac{225}{63}<x$ und $x<\frac{168}{63}$ existiert keine gebrochene Zahl x, die diese Ungleichung erfüllt.

c) $\frac{27}{4}>x>\frac{6}{4}$,

also $x=\frac{7}{4}$ oder $x=\frac{8}{4}$ oder $x=\frac{11}{4}$

▲3▲ a) $1{,}83+0{,}5>1{,}14+1{,}17$, denn $2{,}33>2{,}31$

b) $\frac{3}{2}+\frac{4}{3}<\frac{36}{12}$, denn $\frac{17}{6}<\frac{18}{6}$

c) $2\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}<\frac{27}{5}-\frac{22}{7}$, denn $\frac{31}{20}<\frac{79}{35}$, weil $31\cdot 35<20\cdot 79$

▲4▲ Aus der Dreiecksungleichung folgt $e<a+b$ und $e<c+d$, also $2e<a+b+c+d$ bzw. $f<a+d$ und $f<b+c$, also $2f<a+b+c+d$ und somit $2e+2f<2a+2b+2c+2d$, also auch $e+f<a+b+c+d$.

Klasse 7

▲1▲ Aus $a<b$ folgt $\frac{a}{b}<1$. Aus $\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b$ folgt $\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}$. Daraus folgt weiter $\frac{h_b}{h_a}<1$, also $h_b<h_a$. Analog dazu gilt $h_c<h_b$, also auch $h_c<h_b<h_a$ und somit $h_a>h_b>h_c$.

▲2▲ Aus $3\cdot\frac{70}{100}+x\cdot\frac{12}{100}<(3+x)\cdot\frac{30}{100}$ und $3\cdot\frac{70}{100}+x\cdot\frac{12}{100}>(3+x)\cdot\frac{20}{100}$ folgt $210+12x<90+30x$ und $210+12x>60+20x$, also $120<18x$ und $150>8x$, also $x>\frac{20}{3}$ und $x<\frac{75}{4}$, also $\frac{20}{3}<x<\frac{75}{4}$. Es müssen mehr als $6\frac{2}{3}$ Liter, aber weniger als $18\frac{3}{4}$ Liter 12%iger Säure zugesetzt werden.

▲3▲ Aus $a<b$ folgt $a+ab<b+ab$, also $a(b+1)<b(a+1)$, also $\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1}$.

▲4▲ a) $x<0$, b) $x>8$ oder $x<-8$, c) $-14<x<10$, d) $x>0$ oder $x<-2$

Klasse 8

▲1▲ a) $3x<11$, also $x<\frac{11}{3}$; alle rationalen Zahlen kleiner als $\frac{11}{3}$ lassen nach dem Einsetzen für x die gegebene Ungleichung zu einer wahren Aussage werden.

b) Alle rationalen Zahlen größer als $\frac{11}{3}$ lassen die gegebene Ungleichung zu einer falschen Aussage werden.

▲2▲ Der Sohn sei x Jahre, der Vater also $4x$ Jahre alt; dann gilt $50<x+4x<60$, also $50<5x<60$, also $10<x<12$, also $x=11$. Der Sohn ist 11 Jahre, der Vater 44 Jahre alt.

▲3▲ a) Aus $p<q$ folgt nach Division durch p bzw. q zunächst

$1<\frac{q}{p}$ und $\frac{p}{q}<1$. Daraus folgt $\frac{p}{q}<1<\frac{q}{p}$.

b) Man bildet $\frac{q}{p}-1=\frac{q-p}{p}$ und $1-\frac{p}{q}=\frac{q-p}{1}$.

Da $p<q$ und somit $\frac{1}{q}<\frac{1}{p}$ ist, gilt $\frac{q-p}{q}<\frac{q-p}{p}$.

Also liegt $\frac{p}{q}$ näher an 1 als $\frac{q}{p}$.

▲4▲ Setzt man $\frac{5678901234}{6789012345}=\frac{x}{y}$, so gilt $\frac{5678901235}{6789012347}=\frac{x+1}{y+2}$ und weiter

$\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+2}=\frac{xy+2x-xy-y}{y(y+2)}=\frac{2x-y}{y(y+2)}$.

Da $2x>y$ ist, folgt $2x-y>0$ und wegen $y>0$ somit $\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+2}>0$.

Es gilt also $\frac{5678901234}{6789012345}>\frac{5678901235}{6789012347}$.

Klasse 9

▲1▲ Es gilt $\sqrt{57}>\sqrt{49}=7$.
Also ist $4\cdot 70=280<253+20\cdot 7$
$<253+20\sqrt{57}+4\cdot 57$
und somit
$(2\sqrt{70})^2<(5+2\sqrt{57})^2$, $2\sqrt{70}<5+2\sqrt{57}$,
$7+2\sqrt{70}+10<3+2\sqrt{57}+19$ und damit
$(\sqrt{7}+\sqrt{10})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{19})^2$,
also $\sqrt{7}+\sqrt{10}<\sqrt{3}+\sqrt{19}$.

▲2▲ Aus $3x-4<x$ folgt $L_1=\{x<2;\ x\in P\}$; aus $8-7x<25$ folgt $L_2=\{x>-\frac{17}{7};\ x\in P\}$. Daraus folgt weiter $L=L_1\cap L_2=\{-\frac{17}{7}<x<2;\ x\in P\}$.

▲3▲ Aus $5^3+6^3=125+216=341$ und $7^3=343$ folgt $5^3+6^3<7^3$. Durch äquivalentes Umformen erhalten wir daraus $\frac{5^3}{7^3}+\frac{6^3}{7^3}<1$, $\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{6}{7}\right)^3<1$.

Wegen $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}<\left(\frac{5}{7}\right)^3$ und $\left(\frac{6}{7}\right)^{10}<\left(\frac{6}{7}\right)^3$

gilt somit $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}+\left(\frac{6}{7}\right)^{10}<1$,

also $5^{10}+6^{10}<7^{10}$. Die Aussage ist wahr.

Klasse 10

▲1▲ Nach der Definition der Wurzel und des Logarithmus existiert die linke Seite der Ungleichung nur, wenn $2x-1>0$ und $x-9>0$ gilt. Dies ist genau für $x>9$ der Fall. Nun gilt

$\frac{1}{2}\cdot\lg(2x-1)+\frac{1}{2}\cdot\lg(x-9)>1$,

$\lg(2x-1)+\lg(x-9)>2$,
$\lg(2x-1)(x-9)>\lg 100$,
$(2x-1)(x-9)>100$, $2x^2-19x-91>0$,
$x^2-\frac{19}{2}\cdot x-\frac{19}{2}>0$, $(x-13)(x+3{,}5)>0$.

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
a) $x-13>0$ und $x+3{,}5>0$, $x>13$ und $x>-3{,}5$ also $L_1=\{x>13;\ x\in P\}$
b) $x-13<0$ und $x+3{,}5<0$, $x<13$ und $x<-3{,}5$, also $L_2=\{x<-3{,}5;\ x\in P\}$.
Wegen $x>9$ ist nur $x>13$ Lösung der gegebenen Ungleichung.

▲2▲ Aus $|\sin x+\cos x|\leqq\sqrt{2}$ folgt $(|\sin x+\cos x|)^2\leqq 2$.
Nun gilt $(\sin x+\cos x)^2=$
$\sin^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x$
$=1+2\cdot\sin x\cdot\cos x=1+\sin 2x$. Daraus folgt weiter $1+\sin 2x\leqq 2$, also $\sin 2x\leqq 1$. Weil $-1\leqq\sin x\leqq 1$ für alle reellen x gilt, wird die Ungleichung erfüllt.

▲3▲ Durch Quadrieren erhalten wir
$(a+b+c)^2\geqq 4c(a+b)$
$(a+b)^2+2c(a+b)+c^2\geqq 4c(a+b)$,
$(a+b)^2-2c(a+b)^2+c^2\geqq 0$
$(a+b+c)^2\geqq 0$.

▲4▲ Aus $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ folgt $\frac{3+2\sqrt{2}}{9-8}=3+2\sqrt{2}$,
also $6<3+2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}<3$, denn $8<9$

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. H. Kaiser, S. 23

▲2207▲ Aus $x>3$ folgt $x^2>9$ und $x^5=x^2\cdot x^3>9x^3$. Dann gilt

$$x^5-4x^3>5x^3>0. \quad (1)$$

Außerdem folgt aus $x^2>9$, daß

$$x^4=x^2\cdot x^2>9x^2$$
$$=3x^2+2x^2+4x^2 \text{ und damit}$$
$$x^4>3x^2+2x+4, \text{ d. h.}$$
$$x^4-3x^2-2x-4>0. \quad (2)$$

Addiert man die gleichsinnigen Ungleichungen (1) und (2), so erhält man

$$x>3\Rightarrow P(x)>0.$$

Folglich kann für $x>3$ nicht $P(x)=0$ gelten.

Lösung zum Zahlenrätsel, S. 33

Waagerecht: 2. 50, 5. 36, 6. 12, 10. 10, 11. 30, 12. 17, 13. 12, 14. 24, 15. 31, 18. 11, 19. 42, 21. 17, 23. 13, 25. 20, 26. 13, 27. 39, 29. 18, 31. 29
Senkrecht: 1. 2522, 8. 89, 9. 10, 17. 59, 20. 2017, 22. 2401, 28. 1458, 30. 2002
Schräg links nach unten: 3. 10, 7. 1717, 16. 1777, 24. 8515
Schräg rechts nach unten: 4. 021, 7. 1736, 16. 1802, 24. 8192
Lösungswort (Lebensdaten von Évariste Galois): 25. 10. 1811 bis 31. 5. 1832

Lösung zu: Olympiade-Kryptogramm, S. 39

Angenommen, es gäbe eine Lösung dieses Gleichungssystems, dann kann 0 nur 1 sein. Das folgt aus Gleichung (1) $0\cdot 0=0$ und den Bedingungen der Aufgabe. Durch Einsetzen von $0=1$ in die Gleichungen (1) bis (9) ergibt sich die Lösung:

$$
\begin{aligned}
1\cdot 1 &= 1\\
11\cdot 11 &= 121\\
111\cdot 111 &= 12321\\
1111\cdot 1111 &= 1234321\\
11111\cdot 11111 &= 123454321\\
111111\cdot 111111 &= 12345654321\\
1111111\cdot 1111111 &= 1234567654321\\
11111111\cdot 11111111 &= 123456787654321\\
111111111\cdot 111111111 &= 12345678987654321
\end{aligned}
$$

Lösung zu: Geometrische Plaudereien, IV. Umschlagseite

▲1▲ 1. *b, c, d*; 2. *a, c, d*
▲2▲ 1. *a* und *b*; 2. *a* und *c*; 3. *a, c* und *d*
▲3▲ a) 9 Quadrate bzw. 11 Quadrate
b) Diese Figur ist ein Quadrat, dessen Seiten aus 4 Hölzchen bestehen.
▲4▲ a) 4 Symmetrieachsen;
b) 1 Symmetrieachse;
c) 2 Symmetrieachsen;
d) unendlich viele Symmetrieachsen;
e) 2 Symmetrieachsen;
f) keine Symmetrieachse;
g) 4 Symmetrieachsen;
h) 2 Symmetrieachsen;

▲5▲

Bedeutung	Anzahl der Symmetrieachsen
a) Einfahrt verboten	2
b) Einbahnstraße	1
c) Parkverbot	2
d) Fahrverbot für mehrspurige Kraftfahrzeuge	1
e) Flugbetrieb	1
f) Warnkreuz am Bahnübergang	2
g) Wartepflicht bei Gegenverkehr	keine
h) Sackgasse	1

▲6▲ a) Netz einer Pyramide;
b) kein Netz eines Körpers;
c) Netz eines Quaders;
d) Netz eines Würfels;
e) kein Netz eines Körpers;
f) Netz eines dreiseitigen Prismas
▲7▲ *b, c*
▲8▲ $\overline{NO}\cong\overline{KJ}$; $\overline{CD}\cong\overline{AB}$; $\overline{FE}\cong\overline{LM}$;
▲10▲ a) EHE; b) HEIDE; c) EI; d) EID; e) ECKE; f) BEIDE

Lösung zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Mathematische Begriffe gesucht

Kreistangente; Peripheriewinkel; Kreisausschnitt; Sehnenviereck

Kryptogramme

$2635+4627+1031=8293$
$1086+1086+7680=9852$
$1827+1827+2803+2803=9260$

Magische Figur

Summe	28			31			34			37		
a	2	2	2	5	5	5	8	8	8	10	11	11
b	8	7	4	7	1	1	5	1	1	4	1	1
c	12	4	9	3	9	12	3	6	12	3	6	9

Magisches Kreuz

	X	O	O	
O			X	O
O	O			X
X		O		O
	O	X	O	

Füllrätsel

1. Tabelle, 2. Produkt, 3. Leibniz, 4. Tangens, 5. Periode, 6. Drehung, 7. Bolzano, 8. Trinome, 9. Inkreis, 10. Anstieg, 11. Strecke, 12. Einheit, 13. Ellipse
Lösungswort: Trigonometrie

Kreuzzahlrätsel

^{1}4	8	^{2}1	■	^{3}7	2	^{4}9
3	■	^{5}3	^{6}3	6	■	9
^{7}2	^{8}7	■	8	■	^{9}3	1
■	^{10}8	1	■	^{11}6	4	■
^{12}3	7	■	^{13}8	■	^{14}3	^{15}6
9	■	^{16}1	2	^{17}6	■	7
^{18}2	1	6	■	^{19}1	2	8

alpha-Wettbewerb Abzeichen in Gold

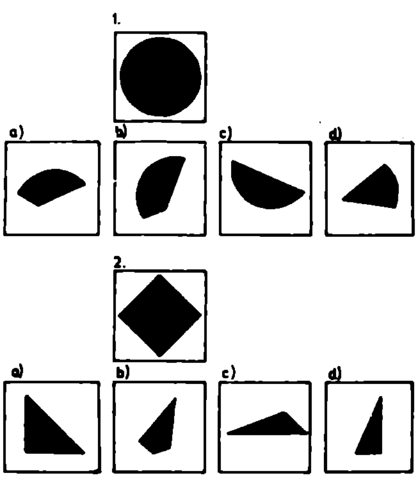
Für dreijährige Teilnahme (Fortsetzung)

Carsten Karl, Aken; Cathrin Münster, Anklam; Kathrin Wagner, Antonsthal; Sylvia Köttig, Apolda; Tino Viertel, Auerbach; Anka Sommer, Augsdorf; Uwe Schröder, Bad Brambach; Solveig vander Velde, Ines Wagner, Ralph Voigt, Jens Humpisch, Jan Reichenbach, Sven Stoeßer, alle Bad Gottleuba; Steffen Weber, Uta Bittorf, Joachim Krug, alle Tiefenort; Kathrin Gädke, Torgelow; Ralf Gössinger, Ray Langlotz, Ole Glänzer, alle Unterbreizbach; Uwe Landgraf, Vacha; Dirk Wenzlaff, Heike Schulz, beide Vitte; Gisbert Thiere, Wallhausen; Regina Frindt, Udo Michallik, Irene Michallik, Susanne Anschütz, alle Waren; Margret Boettcher, Thomas Harz, Stefan Thäter, Dirk Lehmann, alle Weimar; Barbara Schütze, Weißenfels; Steffen Konietzky, Weißwasser; Annett Seidel, Agnes Jorzick, beide Wismar; Thomas Peuker, Jörg Angelmann, Karsten Busse, alle Wittenberg; Irene Zoll, Wittenberge; Thomas Pribus, Wolfgang Behrend, beide Wittstock; Maik Weiss, Kerstin Jung, beide Wöbbelin; Claudia Bock, Wolfen; Astrid Keller, Wolgast; Udo Riedel, Zeitz; Erika Schreiber, Kerstin Barthelmes, beide Zella-Mehlis; Birgit Erdmann, Heide Hilse, Ralph Paulsen, Annegret Linke, alle Zittau; Romi Riedel, Zollschwitz; Mathias Goltzsche, Zschopau; Elke Goraus, Zwickau; Hella Gössel, Sönke Maeß, beide Bad Doberan; Kerstin Messerschmidt, Heiko Stein, beide Bad Liebenstein; Ute Baumberg, Sybille Kerner, beide Bad Salzungen; Raik Langlotz, Bärenklau; Kirsten Hantke, Bautzen; Annette Pietsch, Berga; Ines Vinzelberg, Bergwitz; Christiane Mayer, Oliver Wenzel, Bernhard Napiontek, Reinhard Wegener, Rainer Krenzke, Norbert Dorn, Cathrin Voigt, Carmen Voigt, Jens Prochno, Michaela und Steffen Padelt, Cornelia Wolf, Beate und Stefan Müller, Steffen Meißner, Thomas Honigmann, Grit Weber, Tom Pfeifer, Hans-Jörg Wieser, alle Berlin; Jörg Leine, Berlstedt; Marlies Reschke, Karen Sourell, beide Bernau; Joachim Riedel, Oliver Haase, beide Bestensee; Helge Dürschke, Bitterfeld; Jens Steiner, Bliederstedt; Susanne Sternberg, Borne; Marlis Schröder, Brandenburg; Klaus Asmus, Kati Riedel, Mario Bachmann, Ulrike Langer, Lutz Reum, Jens Füssel, alle Breitungen; Dirk Hampicke, Buchwäldchen; Heidrun Boldt, Burg Stargard; Thomas Bartmuß, Burow; Olaf Nitzsche, Callenberg; Bernd Schütze, Camin; Christian Sitz, Calau; Ramona Blank, Angelika Jung, Jörg Rubelowski, alle Clingen; Matthias Winkler, Cossebaude; Anne Ruprecht, Silke Riedel, Jens Hoffmann, Tina Thümmel, Manfred Ertelt, alle Coswig; Andreas Stenzel, Barbara Konzack, Anke Richter, Iris Forth, Thomas Lindershausen, Jens Leberwurst, Tino Seidler, alle Cottbus; Jürgen Baum, Creuzburg; Jörg Uhlig, Crimmitschau; Uwe Martin, Crossen; Bert Kühne, Jens Fuchs, Jörg Lorenz, alle Dahme; Ralf-Torsten Scheel, Dahmen; Katrin Möller, Damgarten; Volker Schmidt, Norbert Klawuhn, beide Demmin; Ute Fehrmann, Deutschenbora; Katrin Mädler, Dessau; Gabriele Kruse, Dingelstädt; Kornelia Tolkemit, Dobbertin; Evelyn Scharf, Döbeln; Antje Remke, Döberitz; Carola Schwerdtner, Heiko Scholz, Heiko Merwitz, alle Dohna; Michael Beetz, Dreetz; Ralf Lagua, Dreileben; René Pratsch, Martin Jäger, Stefan Mattausch, Klaus Dieter Pursche, Michael Nitsche, Iris Wislicenus, Oliver Geupel, Peter Förster, Sylvia Günther, Sabine Mönnig, Helmut und Carsten Schreiber, Michael Gehre, Rolf Dach, Thomas Hübner, Carola Matthes, Annegret Wustmann, alle Dresden; Steffen Patzschke, Droyßig; Kathrin Wegner-Repke, Bert Minske, Norma Koenig, alle Eberswalde; Sven Weißbach, Ehrenfriedersdorf; Thomas König, Ehrenhain; Monika Glaß, Holger Fey, Winnie Günther, Ulf Arnold, Jana Schwabe, Bolko Schumann, alle Eisenach; Olaf Leschnik, Anke Edler, Mario Thiel, alle Eisleben; Jens Kühne, Ellrich; Bertram Siebenkäs, Martina Helms, beide Erfurt; Thomas Nicklisch, Falkenberg; Heike Morgner, Falkenstein; Andreas Möller, Silke Weisheit, Astrid Abt, Manuela Mäder, Uwe Weyh, Annette Spangenberg, Finowfurt; Hans Schröer, Bernd Müller, beide Finsterwalde; Roland Leffler, Claudia Nielebock, Susanne Herrmann, Ilka Forbrig, Beate Rothamel, alle Floh; Roberto Hubein, Forst; Jan Seyfarth, Frankfurt; Heike Voigt, Frauenhain; Henry Kost, Freiberg; Frank Ribbe, Katrin Pommer, Martina Haeckert, alle Friedeburg; Jördis Drunk, Jens Lull, beide Friedland; Henry Mäder, Frohburg; Michaela Köhler, Susann Laue, beide Gerbstedt; Torsten Pfützenreuter, Gerterode; Ansgar Heise, Görlitz; Jens Penzler, Görsbach; Karola Suppe, Gotha; Karsten Sonnemann, Grabow; Sigurd Werner, Mathias Schleif, beide Gransee; Signe Orawski, Kathrin Weiß, Andreas Kersten, Annette Grunert, alle Gräfenhainichen; Dirk Langehr, Annette Surkus, beide Greifswald; Thomas Rauschenbach, Grochwitz; Ronald Herzog, Rainer Mielke, beide Gr. Bademeusel; Martina Mager, Großharthau; Katrin Weiß, Großröhrsdorf; Katrin Kießling, Boris Friedrich, beide Großschönau; Ramiro Viertel, Grünbach; Thorsten Hannusch, Peter Meusel, Uta Riedel, alle Guben; Herbert Süßlohn, Erik Opelt, beide Güstrow; Olaf Zill, Hainichen; Katrin Strathaus, Dirk Lichtblau, beide Halberstadt; Guido Vollbeding, Haldensleben; Henning Salz, Gudrun Schleiff, beide Halle; Karsten Müller, Jörg Oehlschläger, Thomas Höche, Holger Rößner, alle Halle-Neustadt; Annett Hochmuth, Karsten Dressel, beide Hammerbrücke; Ulrich Möhrke, Uta Schumann, Ina Lenz, Jutta Schumann, alle Havelberg; Robert Siegel, Hecklingen; Uta Reck, Heiligenstadt; Viola Mettner, Hennigsdorf; Falk Hartmann, Hermannsdorf; Stefan Huth, Herzberg; Mario Laufer, Heyerode; Katrin Döbel, Hohenleipisch; Annett Neubert, Carsten Leibnitz, beide Hohenstein; Heike Rose, Holzdorf; Kai Schröder, Holzengel; Henry Möller, Peter Hermann, beide Hoyerswerda; Claudia Docter, Ilsenburg; Elke Schumann, Jahnishausen; Christian Engel, Jarmen; Katrin Tschirpke, Ulrich Scheler, Christian Dietrich, Michael Mannstadt, alle Jena; Heike Bahls, Kandelin; Susanne Ritzke, Traute Ziegler, beide Karbow; Ingolf Knopf, Andreas Israel, Uwe Lippmann, Annegret Schotte, Riko und Steffen Richter, Andreas Richter, Frank Ernst, Sebastian Horbach, Hildegard Geisler, alle Karl-Marx-Stadt; Matthias Schneider, Kemmlitz; Michael Fiedler, Udo Streller, beide Kleinmachnow; Anke Drewitz, Klosterfelde; Beate Hübel, Helge Müller, beide Königsee; Friedhelm Reichert, Heiko Witte, beide Königs Wusterhausen; Dorit Wernicke, Köthen; Thoralf Blättermann, Könnern; Karsten Schmidt, Kolochau; Andreas Blaudzun, Krakow; Gert Künzelmann, Krina; Astrid Montag, Küllstedt; Kirsten Flohr, Torsten Büttner, Cathrin Ziemens, alle Laage; Steffen Heyde, Latdorf; Matthias Polle, Lauter; Diana Dreger, Legde; Jens-Uwe Lange, Gerald Nachtweih, Dietmar Schröter, Michael Herrmann, Michael Klaus, Andre Weber, alle Leinefelde; Ralf Laue, Petra Gollewsky, Johanna Düwel, Bianka Schulze, Sylvia Richter, Steffen Brumme, Thomas Kluge, Cornelia Zinke, Matthias Hübner, Stephan, Klemens und Thomas Rebbelmund, alle Leipzig; Ute Ukat, Leuna; Peter Groß, Lichtentanne; Lars Lange, Frank Klingenhöfer, beide Limlingerode; Christoph Kürner, Linz (Österreich); Bärbel Krieg, Marion Friedrich, Birgit Müller, Peter Remmert, Katrin Busch, Beate Lindig, Sabine Gottschling, Susann Neumeister, Torsten Matysik, Kerstin Klee, alle Lobenstein; Elke Springer, Glen Stachowski, Stefan Benada, alle Löbau; Simone Springwald, Heike Kühne, Stefan Brünner, alle Löderburg; Rene Schuster, Jürgen Hempel, Andrea Busch, Jörg Kerl, Silke Wiedewilt, alle Lössau; Ulf Brandes, Lüblow; Rainer Gerlach, Lübs; Christiane Höfer, Lugau; Ekkehard Ludwig, Lühmannsdorf; Jan Fuhge, Frank Wunderling, Peter Zienicke, Gaby Brandt, Susanne Wolf, alle Magdeburg; Achim Beinroth, Mansfeld; Lutz Thieme, Wolfram Hoppe, beide Marienberg; Martin Müller, Marlow; Lutz Büttner, Martinroda; Simone Brundgräber, Marxwalde; Joachim Kleinert, Meiningen; Thomas Baumann, Meißen; Andreas Strecker, Mario Steller, beide Merseburg; Gitta Knorre, Micheln; Beate Bozek, Mildenberg; Utz-Eckart Henze, Milow; Ramona Linß, Kerstin Roßmann, Petra Klein, Katrin Bischoff, alle Mittelstille; Tilo Grüneberger, Nerchau; Gunnar Mörke, Neubrandenburg; Arndt Kritzner, Steffen Göldner, Hans-Dieter Büchler, Anja Voß, alle Neustadt; Udo Heinß, Neustrelitz; Frank Schmidtchen, Niedercrinitz; Annett Ludwig, Niederorla; Silke Riechen, Niederseidewitz; Steffen Göbel, Niederwiesa; Torsten Linß, Nordhausen; Matthias Drochner, Nossen; Astrid Hecker, Oberbösa; Frank Jäger, Oberschönau; Veit Wonneberger, Ohorn; Lutz Urban, Oppeln; Joern Grell, Oranienburg; Roland Pommer, Oschatz; Steffen Zielinski, Osternienburg; Gerlinde Lehmann, Pahrenz; Aike Hinrichs, Tibor Leitz, beide Parchim; Hellmut Schenk, Pirna; Andreas Denecke, Poggendorf; Heike Neumann, Henning Schulz, beide Potsdam; René Zimmer, Premnitz; Annett Braßel, Probstzella; Wieland Handke, Pulsnitz; Petra Richwien, Monika Müller, beide Quitzöbel; Klaus-Peter Lindner, Stephan Weise, Ingolf Pitz, alle Rockwitz; Jens Papperitz, Carsten Rabeneck, Ingo Bandemer, Bettina Beurich, Kathrin Prescher, Enrico Handke, alle Radebeul; Dietrich Zwicker, Rastenberg; Irma Goßmann, Rheinsberg (Rentnerin); Anja Meuser, Jens Neubert, beide Ribnitz; Axel Kaminski, Frank Müller, beide Riesa; Heike Morgenstern, Röblingen; Beate Wichmann, Rodewitz; Uwe Gers, Rosenow; Thomas Holzerland, Kristin Saß, Andres Wiebke, Annett Seliger, alle Rostock; Sylvia Kirchner, Katrin Anton, Silke Luther, alle Roßdorf; Frank Schröter, Rotta; Andreas Gahabka, Ruhla; Sabine Wilk, Ruhland; Uwe Schwerk, Ruthen; Maren Pantzke, Bärbel Hössel, Jens Sommermann, alle Saalfeld; Marian Klima, Jana Musch, Sonja Marx, alle Saßnitz; Andrea Weidensdörfer, Sayda; Annette Schubert, Schalkau; Jörg Jahnel, Schkölen; Sven Hader, Schlotheim; Dirk Köpnick, Schladitz; Torsten Häfner, André Mau, Beate Malsch, Saskia Hellwig, alle Schmalkalden; Kurt Schulze, Schernberg; Petra Vater, Frank Sauber, Antje Klinder, Regina Schalle, Kornelia Heyer, Jana Radau, alle Schorssow; Ralf Stentzel, Jan Dehnel, beide Schwarzenberg; Evi Binder, Schwaz (Österreich); Uta Möbius, Schwerin; Delia Wolfert, Söllichau; Frank Vollborth, Ralf Gretsch, beide Sondershausen; Heiko Granzow, Spremberg; Mike Selig, Stauchitz; Andrea Neuber, Beate Nothnagel, Silke Recknagel, Heike Zimmermann, Michael Holland-Moritz, Angela Müller, Rene Bieber, Peter Luck, Jaqueline Häfner, Katrin Möller, Katarina Eckstein, Silke Holland-Moritz, Sabine Recknagel, Gabriele Reum, Katrin Gensler, Sigrid Szegunis, Michael Zeiske, Jens Wilhelm, Petra Zimmermann, alle Steinbach-Hallenberg; Math.-Club der Dr.-S.-Allende-OS, Stralsund; Heike Fehringer, Helmut Sauerbrei, beide Suhl; Torsten Schliephake, Stendal; Winfried Ulbrich, Babette Müller, beide Schmalkalden; Maik und Tobias Schönherr, Schmölln; Maik Kühne, Schwepnitz; Antje Kurtz, Schönebeck; Olaf Putensen, Thomas Fittkau, Matthias Herrmann, alle Schwerin; Ralph Huck, Sebnitz; Andrea Rosenau, Siegersleben; Susanne Krieger, Arlette Wetzel, beide Sömmerda; Heidi Böttger, Lydia Balzer, beide Sondershausen; Angelika Frank, Sponholz; Bernd Urbank, Spremberg; Torsten Roßnick, Stendal; Ines Voigt, Stülpe; Kerstin Mey, Suhl; Armin Singer, Teichwolframsdorf; Michael Frenz, Silvia Reinwarth, beide Teltow; Steffi Herrmann, Tiefenort; Grit Rosin, Töplitz; Wolfram Fischer, Torgau; Andrea Bähr, Torgelow; Andreas Beleites, Trebnitz; Dorothea Bornschein, Tröglitz; Ralf Krüger, Uebigau; Kerstin Schmidt, Silvia Schwierske, Christine Fladung, Christine Becker, Lars Brückner, Ingo Blaurock, Mario Blaurock, Mike Herrmann, Mike Hindermann, Ullrich Kallenbach, Steffen Lämmerhirt, Frank Landsiedel, Jörg Raßbach, Jan Schneider, Holger Zapf, Christine Demny, Kristin Günther, Petra Guth, Marion Herbig, Christine Hermes, Silke Hoferichter, Regina Leineweber, Antje Meister, Doreen Siebert, Christiane Schmidt, Sabine Ullmann, Olaf Schaub, Mario Fischer, Dirk Ißbrücker, Thomas Matern, Wiebke Fleischhauer, Bettina Landsiedel, alle Vacha; Petra und Ute Borchers, Uwe und Ralf Dittmar, Edith Kirwitzke, Kerstin Nicolovius, Uta Michallik, alle Waren; Britta Bernhardt, Warin; Michael Fries, Wasserthaleben; Jan Herrmann, Wechselburg; Astrid Liebergesell, Weimar; Guntram Opitz, Weinböhla; Diana Ammann, Weißenborn; Steffen Schröder, Birgit Kons, beide Weißwasser; Ramona Strickbrodt, Westerengel; Jürgen Jahns, Wilsleben; Gundel Müller, Wimmelburg; Klaus Michel, Wismar; Hans Gühring, Steffen Pietz, Kerstin Blüthner, alle Wittenberg; Andrea Hartwig, Ronald Reschke, Mario Bobzin, alle Wittstock; Astrid Merx, Wischershausen; Ralph Bock, Wolfen; Antje Grosa, Wolferstedt; Elke Eix, Cornelia Escher, beide Wolgast; Volker Richter, Wutha; Maik Schülermann, Zarrentin; Petra Schläwicke, Zehdenick; Antje Fiebig, Zeithain; Pier Bierbach, Anka Bönisch, Steffen Wunderlich, alle Zeitz; Andrea Schmidt, Grit Keiner, beide Zella-Mehlis; Jürgen Teßmann, Zerbst; Birgit Gawlik, Ronald Peschel, Andreas Seidel, Steffi Spatzier, alle Zittau; Harald Hempel, Zschoppach; Maik Drößler, Marion Nenczak, Kerstin Kowaczek, Rüdiger Rabe, alle Zschornewitz; Sven Moldenhauer, Deutschenbora; Bernd Walter, Adorf

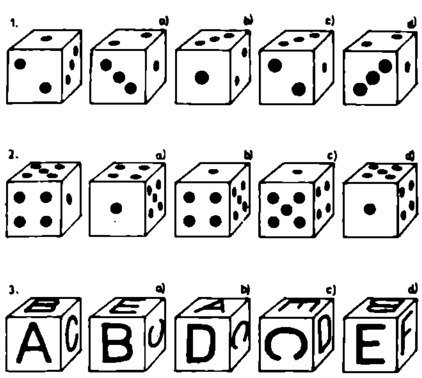
Speziell für Klasse 5/6

Geometrische Plaudereien

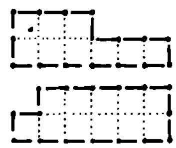
▲1▲ Gib jeweils an, aus welchen der drei Figuren man die Ausgangsfigur zusammensetzen kann!



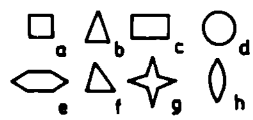
▲2▲ Welcher der Würfel a bis d in Bild 2 geht durch Drehung in den Ausgangswürfel 1, 2 bzw. 3 über?



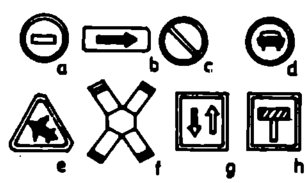
▲3▲ Der Umfang der beiden Figuren wird durch 16 Hölzchen gebildet.
a) Bestimme die Anzahl der eingeschlossenen Quadrate, deren Seitenlänge mit der Länge eines Hölzchens übereinstimmt!
b) Lege aus den 16 Hölzchen eine Figur mit der größtmöglichen Anzahl von Quadraten, deren Seitenlänge mit der Länge eines Hölzchens übereinstimmt!



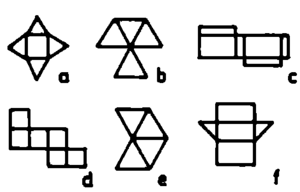
▲4▲ Zeichne, falls möglich, in jede der angegebenen Figuren alle Symmetrieachsen ein!



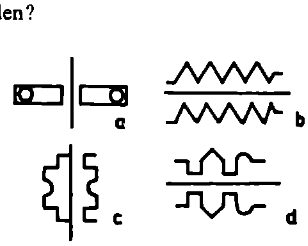
▲5▲ a) Welche Bedeutung haben die einzelnen Verkehrszeichen?
b) Wieviel Symmetrieachsen hat jedes dieser Zeichen?
Zeichne sie ein!



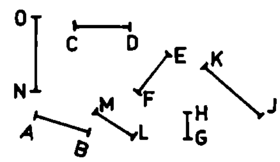
▲6▲ a) Welche der im Bild gezeichneten Figuren sind Netze von Körpern?
b) Benenne die Körper, zu denen Netze gezeichnet sind!



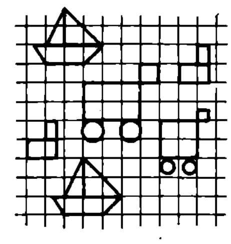
▲7▲ Jedes Beispiel in Bild 7 zeigt eine Gerade und zwei Figuren $F1$ und $F2$. Bei welchem Beispiel ist $F2$ nicht das Bild von $F1$ bei einer Spiegelung an der gezeichneten Geraden?



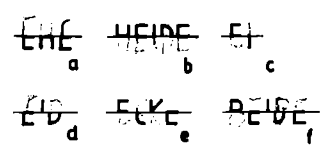
▲8▲ Versuche, nach Augenmaß zueinander kongruente Strecken zu finden!



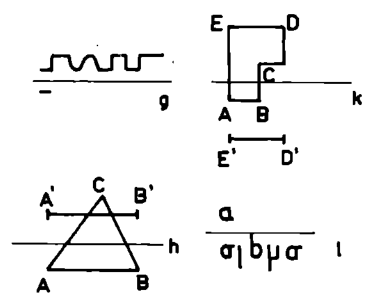
▲9▲ Welche der Figuren sind durch Verschiebungen auseinander hervorgegangen?



▲10▲ Welches Wort erhältst du, wenn du spiegelst?



▲11▲ Vollende, so daß jeweils das Spiegelbild der gezeichneten Figur entsteht!



L. Flade/H. Knopf

Das verunglückte Rechteck

Ein Rechteck fuhr mit dem Quadrat
auf einem schnellen Motorrad.
Doch kamen beide nicht sehr weit!
Zu hoch war die Geschwindigkeit.
Woran sie beide nicht gedacht,
in einer Kurve hat's gekracht.
Sie rammten eine Häuserwand,
an der man sie verunglückt fand.
Nun waren beide Invalid:
ein Rhombus und ein Rhomboid.

Ehrenfried Winkler
(aus: Sächsisches Tageblatt)