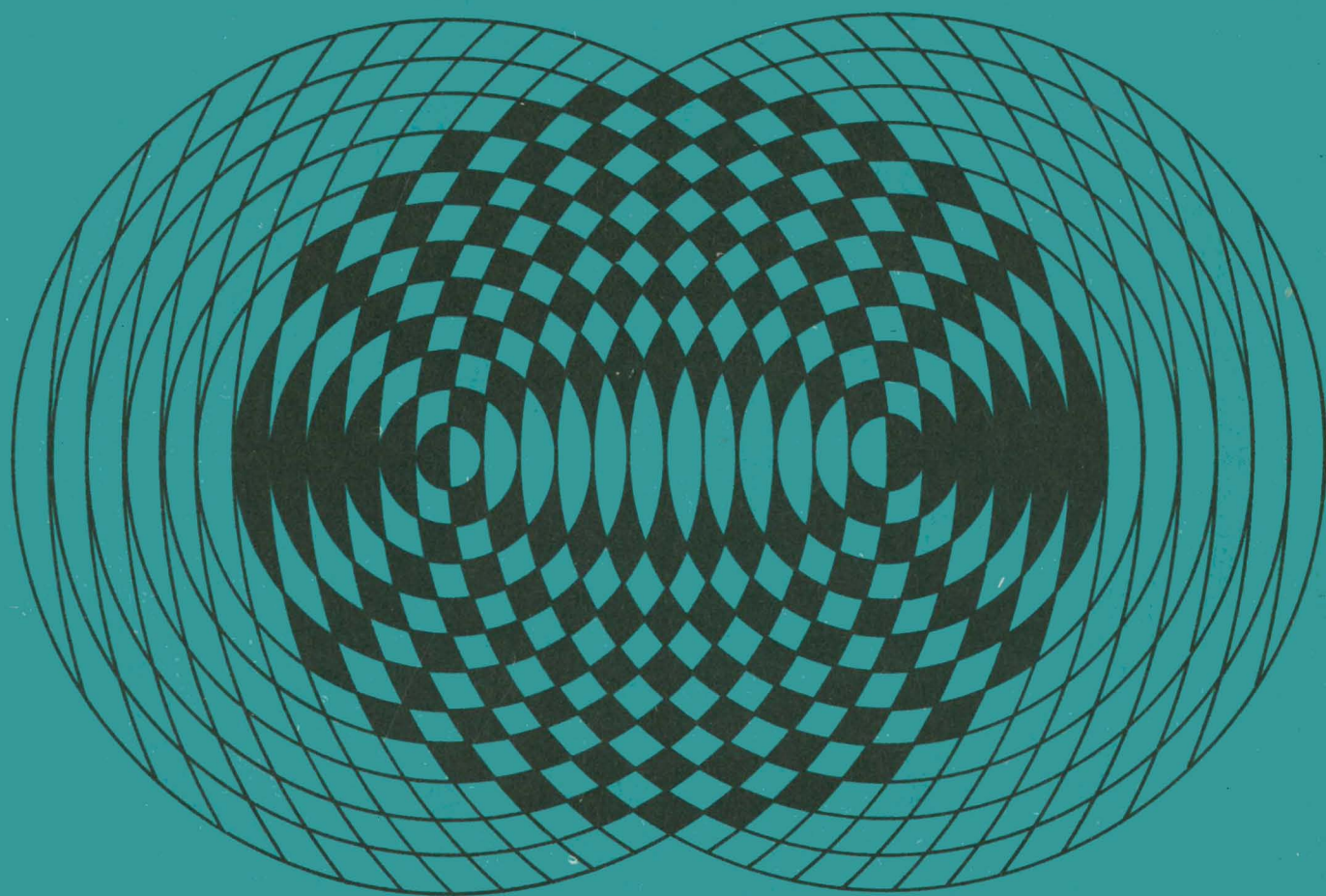


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
10. Jahrgang 1976
Preis 0,50 M
Index 31059

3

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); Dozent
Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil.
E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann
(Berlin); Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig);
Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig);
Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des
Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Leh-
mann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leip-
zig); Oberlehrer Dozent Dr. H. Lohse (Leip-
zig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr.
R. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold
(Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl
(Berlin); Dozent Dr. E. Schröder (Dresden);
Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster);
Oberlehrer Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr.
W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln);
Prof. Dr. habil. W. Walsch (Halle);

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik
und Westberlin erfolgt über den Buchhandel;
für das sozialistische Ausland über das
jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für
alle übrigen Länder über: Buchexport Volks-
eigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Titelblatt nach der österreichischen
mathematischen Zeitschrift für junge Mathe-
matiker π ; Eigenfoto (S. 51); J. Lehmann,
Leipzig (S. 55); **Vignetten:** K.-H. Guckuk,
Leipzig; Ch. Pollmer, Dresden; Jerzy Flisak
(VR Polen); Josef Kaczmarczyk (VR Polen);
Gabbert, Berlin; J. Freiberg, Leipzig (S. 59);
Pullwit, LVZ Leipzig (IV. U.-Seite)
Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:

INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb
Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 23. Februar 1976

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 49 **Kombinatorik und binomischer Satz [9]***
Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau
- 51 **Eine Aufgabe von Prof. Dr. Leopold Schmetterer [9]**
Institut für Statistik an der Universität Wien
- 52 **Mit Bewegung geht es besser**
Dr. E. Quaisser, Sektion Mathematik der Päd. Hochschule *Karl Liebknecht*, Potsdam
- 53 **Konstruktionen in einer begrenzten Zeichenebene [7]**
StR Th. Scholl, Ministerium für Volksbildung, Berlin
- 54 **Rückblick auf die XVII. Internationale Mathematikolympiade
1975, VR Bulgarien [10]**
Teilnehmerländer stellen Aufgaben für *alpha*
- 54 **Mathematikolympiaden in Österreich [8]**
Mag. Th. Mühlgassner (Eisenstadt)/Mag. W. Ratzinger (Linz)
- 55 **Herleitung der Fläche unter der Parabel ohne Integralrechnung [9]**
Dipl.-Ing. M. Wilde, Leipzig
- 56 **Mathematik in der Pädagogischen Hochschule „Wolfgang Ratke“,
Köthen [7]**
Dr. W. Jungk, Sektion Mathematik, PH Köthen
- 57 ***alpha*-Spielmagazin [5]**
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig
- 59 **Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [7]**
Spezialistenlager *Junger Mathematiker* des Bezirks Leipzig
FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 60 **Mathematik und Sport [5] *alpha*-Wandzeitung**
Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden
- 62 **Berufsbild: Diplom-Ingenieur für Landtechnik [8]**
Prof. Dr. sc. nat. H. Bausch/Diplomgewerbelehrer E. Schneider, Ingenieurhoch-
schule Berlin-Wartenberg
- 63 **Bei Freunden in Kuba zu Gast [9]**
Dr. W. Jungk, Päd. Hochschule *Wolfgang Ratke*, Köthen
- 64 **In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]**
StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig/OL H. Pätzold, Waren/Müritz
- 66 **Lösungen [5]**
- 72 **Übung macht den Meister [9]**
Aufgaben zu Potenzen, Wurzeln, Logarithmen
- IV. **Umschlag-Seite: Im Zeichen des IX. Parteitages
625 Millionen Mark für das Lernen [5]**
J. Golde, Ministerium für Volksbildung, Berlin

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Kombinatorik und binomischer Satz

Teil 1

1. Man erzählt sich, daß zu Beginn unseres Jahrhunderts zehn Schüler, die gerade das Gymnasium in *Sankt Petersburg* absolviert hatten, beschlossen, dieses Ereignis in einem der besten Restaurants auf dem *Newski* zu feiern. In diesem Restaurant bestellten sie ein vorzügliches Abendessen. Sie stritten sich aber plötzlich darum, wo jeder sitzen sollte. Einer wollte unbedingt mit dem Gesicht zur Bühne sitzen, auf der eine bekannte Sängerin auftrat; ein anderer wollte nicht am Durchgang sitzen; dem dritten gefiel der Platz in der Ecke nicht. Außerdem wollte jeder einen bestimmten linken und rechten Nachbarn haben.

„Was ist los, Herrschaften?“, wollte der auf diesen Lärm herbeigekommene Wirt wissen. Die jungen Leute erklärten es ihm. „Sie können sich also nicht einigen, wie Sie sitzen wollen“, lachte der Wirt, „nehmen Sie doch jeweils diejenigen Plätze ein, an denen Sie sich gerade befinden. Morgen nehmen Sie dann dieselben zehn Plätze in einer anderen Reihenfolge ein, übermorgen wieder in einer anderen usw. Wenn Sie alle Möglichkeiten der Sitzreihenfolge ausprobiert haben, dann erhält jeder von Ihnen für sein ganzes Leben eine Blanco-Karte (kostenlose Karte) für mein Restaurant.“

Es war für die jungen Leute natürlich verlockend, ihre Eltern nicht um Geld bitten zu müssen und trotzdem täglich in einem der besten Petersburger Restaurants unentgeltlich essen zu können. Von nun an trafen sie sich regelmäßig jeden Tag auf dem *Newski*. Manchmal kamen sie auch zum Mittagessen. Eine kostenlose Bewirtung ergab sich jedoch nicht. Das lag aber nicht daran, daß der Wirt sein Versprechen nicht einhielt.

Man kann aus den zwei Buchstaben *A* und *B* zwei „Wörter“ mit je zwei Buchstaben bilden: *AB* und *BA*. Allgemein gibt es für die Anordnung von zwei Elementen genau zwei Möglichkeiten. Wir können auch noch ein drittes Element *C* vor dieses Paar *AB* stellen. Dann erhalten wir *CAB*; man kann auch *C* zwischen das Paar stellen, dann ergibt sich *ACB*; schließlich kann sich *C* auch hinter dem Paar befinden, so daß wir *ABC* erhalten. Dasselbe kann man auch mit dem Paar *BA* durchführen. Wir erhalten *CBA*, *BCA* bzw. *BAC*.

Für drei Elemente existieren also $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten der Anordnung. Aus drei Elementen kann man sechs „Permutationen“ bilden – sogenannte Vereinigungen, die sich voneinander in der Anordnung ihrer Elemente unterscheiden.

Die Anzahl der Permutationen von k Elementen bezeichnet man mit P_k , d. h.

$$P_2 = 2$$

$$P_3 = 2 \cdot 3 = 6$$

Es seien k Dinge (Elemente) gegeben, von denen wir alle möglichen P_k Permutationen bilden. Nehmen wir eine davon:

$$a_1; a_2; a_3; \dots; a_k$$

Nun fügen wir noch das $(k+1)$ -te Element hinzu. Dieses Element läßt sich

1) vor dem ersten Element a_1 ;

2) vor dem zweiten Element a_2 ;

...

k) vor dem k -ten Element a_k ;

$k+1$) nach allen gegebenen k -Elementen anordnen.

Es gibt also für das $(k+1)$ -te Element genau $k+1$ Möglichkeiten, d. h., die Anzahl der Permutationen aus $(k+1)$ Elementen ist

$$P_{k+1} = P_k \cdot (k+1)$$

P_2 und P_3 haben wir unmittelbar berechnet. Jetzt wollen wir unsere Überlegungen fortsetzen und dabei aus Symmetriegründen jeweils den Faktor 1 ergänzen:

$$P_2 = 1 \cdot 2, P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,$$

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, \dots,$$

$$P_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k,$$

$$P_{k+1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \cdot (k+1)$$

Definition: Das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer gegebenen natürlichen Zahl k nennt man Fakultät der Zahl k und bezeichnet es mit „ $k!$ “.

Beispiele:

$$P_2 = 1 \cdot 2 = 2! = 2,$$

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6,$$

$$P_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k! \quad (1)$$

Berechnen wir einmal die Anzahl der Permutationen von zehn Elementen:

$$P_{10} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \\ = 10! = 3\,628\,800$$

Wenn wir unter dieser Anzahl Tage verstehen, so entspricht das Ergebnis einer Zeit von fast 10 000 Jahren.

...Wenn unsere zehn jungen Leute täglich sogar dreimal im Restaurant am *Newski*

essen würden, könnten sie den Wirt immer noch nicht dazu bringen, sein Versprechen über die kostenlose Bewirtung einzuhalten.

2. Die Permutationen unterscheiden sich also voneinander durch die Anordnung ihrer Elemente. Zur Berechnung der Anzahl der Permutationen benutzen wir das Prinzip der vollständigen Induktion. Dazu mußten wir 1) die Anzahl der Permutationen von zwei (oder drei) Elementen unmittelbar berechnen;

2a) die Gesetzmäßigkeit der Veränderung der Anzahl der Permutationen durch das Hinzufügen von noch einem Element berücksichtigen (Vergößerung der Anzahl der Elemente um 1);

2b) diese Gesetzmäßigkeit beweisen.

Manchmal wird diese Gesetzmäßigkeit, von der unter 2) gesprochen wurde, vorausgesetzt oder als zu beweisende Hypothese gegeben.

Aufgaben

▲ 1 ▲ Zur Wiederholung des Prinzips der vollständigen Induktion überprüfe die folgenden Hypothesen:

$$a) 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k-1) = k^2$$

$$b) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$c) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

▲ 2 ▲ Berechne:

$$a) \frac{10!}{3!}$$

$$b) \frac{P_8 - P_7}{P_6}$$

$$c) \frac{11}{6!} + \frac{43}{7!}$$

▲ 3 ▲ Bestimme die Summe der Quersummen aller fünfstelligen Zahlen, die aus den Ziffern 1, 4, 6, 7 und 8 (ohne Wiederholung) bestehen!

▲ 4 ▲ Wieviel verschiedene fünfstellige Zahlen kann man aus den Ziffern 2, 4, 6, 8 und 0 (ohne Wiederholung) bilden?

3. Musteraufgabe 1:

Es seien 26 Zettel mit verschiedenen Buchstaben

$$A, B, C, \dots, Z$$

(ohne Wiederholung) gegeben. Wieviel verschiedene vierstellige Wörter lassen sich aus ihnen bilden?

Selbstverständlich besitzen hier viele dieser „Wörter“ keinen Sinn, z. B. *KLMN*. Wir wollen aber trotzdem die Anzahl aller möglichen Wörter berechnen.

Lösung: Für die Lösung dieser Aufgabe bereiten wir eine Tafel für ein vierstelliges Wort vor:

— — — —

Für den ersten Buchstaben gibt es offenbar 26 Möglichkeiten. Damit erhalten wir genau 26 einstellige Wörter. Für die 2. Stelle kann man jetzt einen der verbleibenden 25 Buchstaben auswählen. Auf diese Art und Weise bekommen wir 25 mit *A* beginnende zweistellige Wörter, ebenfalls 25 mit *B* beginnende usw. Das ergibt insgesamt $26 \cdot 25$ zweistellige Wörter.

Für die Auswahl des dritten Buchstabens verbleiben noch 24 Möglichkeiten (da wir ja die ersten beiden Buchstaben dafür nicht mehr verwenden können). Wir erhalten also $26 \cdot 25 \cdot 24$ Möglichkeiten für die dreistelligen Wörter. Die gesuchten vierstelligen Wörter ergeben schließlich die folgende Anzahl:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$$

Darunter befinden sich z. B. auch diese Wörter:

DORA DORN NORD NORM

Die ersten beiden Wörter unterscheiden sich nur in einem Buchstaben; das zweite und dritte Wort nur in der Reihenfolge der Buchstaben; das dritte und vierte Wort wieder in einem Buchstaben. Allgemein können sich verschiedene Wörter voneinander durch die Wahl der Buchstaben oder durch die Reihenfolge ihrer Anordnung unterscheiden.

Definition: Vereinigungen, die sich durch die Wahl der Elemente oder durch die Reihenfolge ihrer Anordnung unterscheiden, heißen Variationen.

(Wir behandeln hier die Variationen ohne Wiederholungen. Ein Element darf nur einmal auftreten.)

Die Anzahl aller Variationen bezeichnen wir mit dem Buchstaben V und entsprechenden Indizes. Wie weiter oben bereits gezeigt wurde, ist die Anzahl der Variationen von 26 Elementen zu je 4 gleich:

$$V_{26}^4 = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$$

Manchmal sagt man auch: Variationen von 26 Elementen zur 4. Klasse, allg.: von n Elementen zur k -ten Klasse.

Aufgaben

▲ 5 ▲ Formuliere eine Regel dafür, wie die Anzahl der Variationen von n Elementen zu je k (dabei ist natürlich $k \leq n$) zu berechnen ist! Schreibe die entsprechende Formel auf!

▲ 6 ▲ Berechne:

a) V_{10}^3 b) V_{12}^2 c) V_7^7

▲ 7 ▲ Wieviel verschiedene vierstellige Zahlen lassen sich aus den folgenden Ziffern bilden?

a) 3, 4, 5, 6 b) 2, 3, 4, 5, 6

c) 1, 2, 3, 4, 5, 6

d) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ohne Wiederholung)

Zum Aufschreiben der Anzahl der Variationen ist es manchmal günstig, die Schreibweise der Fakultät zu benutzen, z. B.

$$V_{26}^4 = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot (22 \cdot 21 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 21 \cdot 22}$$

$$= \frac{26!}{22!} \text{ oder in allgemeiner Form:}$$

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (2)$$

▲ 8 ▲ Berechne:

a) $\frac{V_{13}^3 + V_{13}^4}{V_{13}^3}$ b) $\frac{V_{10}^k \cdot P_{10-k}}{P_9}$

▲ 9 ▲ Löse die folgenden Gleichungen:

a) $V_x^2 = 90$ b) $V_y^2 = 42$ c) $V_x^3 = 56 \cdot x$

4. Musteraufgabe 2:

Wieviel verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 (ohne Wiederholung) bilden?

Um auf diese Frage antworten zu können, schreiben wir die verlangten dreistelligen Zahlen wie folgt auf:

123	124	579
231	241	795
312	412	
132		
213		
321		

In der ersten Spalte stehen alle dreistelligen Zahlen, die aus den ersten drei angegebenen Ziffern bestehen, in den folgenden Spalten die entsprechenden Zahlen aus den anderen Ziffern. Es ist selbstverständlich, daß in jeder Spalte genau sechs verschiedene dreistellige Zahlen stehen, die aus ein und denselben Ziffern bestehen, aber in unterschiedlicher Reihenfolge geschrieben sind.

Erkläre, weshalb es genau sechs Zahlen pro Spalte gibt!

Lösung: Unsere dreistelligen Zahlen unterscheiden sich voneinander entweder durch die Ziffern Auswahl (in den verschiedenen Spalten) oder durch die Reihenfolge ihrer Anordnung (in ein und derselben Spalte). Für die Antwort auf diese Fragestellung ist es erforderlich, die Anzahl der Variationen aus 7 Elementen zu je 3 zu bestimmen:

$$V_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$$

Musteraufgabe 3:

Wieviel verschiedene Produkte lassen sich aus drei Faktoren bilden, wenn man die sieben in der Musteraufgabe 2 angegebenen Ziffern benutzt?

(Produkte sollen verschieden heißen, wenn sie sich nicht nur in der Reihenfolge der Anordnung ihrer Faktoren unterscheiden.)

Lösung: Es gibt genau soviel voneinander verschiedene Produkte, wie es Spalten gibt, d. h. um soviel weniger, wie es verschiedene dreistellige Zahlen in jeder der Spalten gibt. Die Antwort auf diese Aufgabenstellung erhalten wir durch Division:

$$\frac{V_7^3}{P_3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{210}{6} = 35$$

Definition: Vereinigungen, die sich nur durch die Auswahl der Elemente unterscheiden, heißen Kombinationen.

Die Anzahl aller Kombinationen bezeichnet man mit dem Buchstaben C und entsprechenden Indizes. Wie wir sahen, ist die Anzahl aller möglichen Kombinationen aus 7 Elementen zu je 3 gleich:

$$C_7^3 = \frac{V_7^3}{P_3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \quad \text{oder}$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$$

C_7^3 wird gelesen als „Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholungen von 7 Elementen zu je 3 (oder zur 3. Klasse)“. Dieser Term

ist identisch mit dem Binominalkoeffizienten $C_7^3 \equiv \binom{7}{3}$. Manchmal braucht man auch $\binom{8}{8} = 1$.

Aufgaben

▲ 10 ▲ Formuliere eine Regel dafür, wie man die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zu je k berechnet (natürlich mit $k \leq n$), und schreibe die entsprechende Formel auf!

▲ 11 ▲ Berechne:

a) C_{10}^4 b) C_8^3 c) C_8^5

▲ 12 ▲ Löse die folgenden Gleichungen!

a) $C_x^2 = 21$ b) $5 \cdot C_x^3 = C_{x+2}^4$ c) $C_x^4 = \frac{15 V_x^2}{4}$

▲ 13 ▲ Eine FDJ-Gruppe hat 20 Mitglieder. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür, daß drei von ihnen in die Gruppenleitung gewählt werden?

▲ 14 ▲ In einer Sportsektion gibt es 10 gute Volleyballspieler. Auf wieviel Möglichkeiten läßt sich aus ihnen eine Mannschaft (mit 6 Spielern) zusammenstellen?

▲ 15 ▲ Es ist leicht zu überprüfen, daß $C_5^2 = C_5^3$. Überprüfe, ob auch $C_{12}^7 = C_{12}^5$ und $C_{10}^2 = C_{10}^8$ gelten! Formuliere die analoge Eigenschaft in allgemeiner Form!

5. Musteraufgabe 4:

In einer Moskauer Schule beschlossen 20 Absolventen, sich an der Mechanisch-Mathematischen Fakultät der Lomonossow-Universität zu bewerben. Nach dem Ablegen der Aufnahmeprüfung wurde eine Liste mit den Namen der zum Studium Zugelassenen ausgehängt. Auf dieser Liste befanden sich 13 Namen von diesen 20 Absolventen.

Wieviel verschiedene Listen mit 13 Namen lassen sich aus den 20 Absolventen dieser Moskauer Schule bilden?

Lösung: Zwei verschiedene Listen der Aufgenommenen müssen sich voneinander mindestens durch einen Namen unterscheiden, d. h., es gibt soviel verschiedene Listen, soviel verschiedene Kombinationen es aus 20 Elementen zu je 13 gibt, nämlich C_{20}^{13} .

Auf der Liste der Abgelehnten standen natürlich die Namen der anderen 7 Absolventen dieser Schule. Sie bekamen ihre Bewerbungsunterlagen zurück. Es ist klar, daß es mit diesen Abgelehnten soviel verschiedene Listen gibt, soviel es Kombinationen aus 20 Elementen zu je 7 gibt, nämlich C_{20}^7 .

Jeder Name der 20 Absolventen muß entweder in der Liste der Aufgenommenen oder in der Liste der Abgelehnten erscheinen. Jeder Liste der Aufgenommenen entspricht genau eine Liste der Abgelehnten und umgekehrt.

Die Menge X (der verschiedenen Listen der Aufgenommenen) und die Menge Y (der verschiedenen Listen der Abgelehnten) stehen in einer eindeutigen Zuordnung zueinander. Jedem Element der ersten Menge entspricht genau ein Element der zweiten Menge und um-

gekehrt. Daraus folgt, daß diese beiden Mengen eine gleiche Anzahl von Elementen enthalten, d. h.

$$C_{20}^{13} = C_{20}^7.$$

Wenn sich an der Universität n Absolventen bewerben würden, von denen k angenommen und die übrigen $n-k$ abgelehnt würden, so könnten wir unsere Überlegungen wortwörtlich wiederholen und als Schlußfolgerung gewinnen, daß

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (3)$$

Es ist noch anzumerken, daß wir diese Ergebnisse ohne Berechnungen, nur auf der Grundlage von logischen Überlegungen erhalten haben. Dieses Resultat kann man aber auch unmittelbar aus der Formel für die Anzahl der Kombinationen erhalten (unter Verwendung der Fakultät):

$$C_{20}^{13} = \frac{V_{20}^{13}}{P_{13}} = \frac{20!}{13! (20-13)!} = \frac{20!}{13! 7!}$$

$$C_{20}^7 = \frac{V_{20}^7}{P_7} = \frac{20!}{7! (20-7)!} = \frac{20!}{13! 7!}$$

Aufgaben

▲ 16 ▲ Unter Verwendung der Fakultät ist herzuleiten, daß

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

▲ 17 ▲ Überprüfe die folgenden Gleichungen!

$$a) C_3^2 + C_2^2 = C_3^3 \quad b) C_p^k + C_p^{k-1} = C_{p+1}^k$$

▲ 18 ▲ Löse die Gleichungssysteme!

$$a) C_x^{x+1} : C_x^x : C_x^{x-1} = 5 : 5 : 3$$

$$b) \begin{cases} V_x^x : V_x^{x-1} = 8 \\ C_x^x : C_x^{x-1} = 1,6 \end{cases} \quad c) \begin{cases} V_x^x : V_x^{x-1} = 10 \\ C_x^{x-1} : C_x^x = 0,6 \end{cases}$$

▲ 19 ▲ In einer Hochschule hat ein Lehrstuhl für Mathematik 9 Mitarbeiter. Wieviel Möglichkeiten gibt es für das Aufstellen eines Konsultationsplanes für 9 Tage, wenn jeder Mitarbeiter genau eine Konsultation abhalten soll und wenn an jedem Tage nur ein Mitarbeiter eine Konsultation durchführt?

▲ 20 ▲ Eine FDJ-Leitung hat 9 Mitglieder. Wieviel Möglichkeiten gibt es dafür, aus dieser Leitung eine dreiköpfige Delegation für einen Besuch im Patenbetrieb zusammenzustellen?

▲ 21 ▲ Die 9 Mitglieder einer Gewerkschaftsleitung müssen einen Vorsitzenden, einen Sekretär und einen Kassierer wählen. Wieviel Möglichkeiten gibt es dafür?

▲ 22 ▲ Wieviel Möglichkeiten gibt es dafür, daß 3 Soldaten und ein Unteroffizier zum Dienst eingeteilt werden, wenn dafür 15 Soldaten und 4 Unteroffiziere zur Verfügung stehen?

6. Musteraufgabe 5:

Die Basketballspieler einer Sportgemeinschaft trainierten im Winter unregelmäßig. Manchmal kamen alle 9 Spieler zusammen, manchmal nur 2 oder 3. Der Trainer wollte berechnen, wieviel verschiedene Möglich-

keiten es für die Anwesenheit von verschiedenen Mannschaften in der Turnhalle gibt.

„Heute ist noch keiner erschienen. Das ist eine Möglichkeit. Vielleicht kommt einmal ein Spieler allein. Dann kann er nur das Werfen des Balles ins Netz üben und nicht spielen. Für diesen Fall gibt es bei 9 Spielern also 9 Möglichkeiten.“ Der Trainer notierte sich: $1 + 9 = 10$

„Es können auch 2 Spieler kommen“, überlegte er weiter. „Gestern kamen Arthur und Bernd, vorgestern Bernd und Claus. Das sind wieder verschiedene Mannschaften.“

Der Trainer rechnete und rechnete und gab es schließlich auf. Wieviel verschiedene Mannschaften von Basketballspielern können sich in der Turnhalle befinden? (Die Mannschaften nennen wir dann voneinander verschieden, wenn sie sich in der Anzahl der Spieler oder in den Spielern selbst unterscheiden.)

Lösung: Um die Anzahl der verschiedenen Mannschaften zu berechnen, teilen wir sie nach der Anzahl der anwesenden Spieler in Gruppen ein:

Möglichkeiten

- | | |
|--|----------------|
| 1) Es war kein Spieler anwesend | 1 |
| 2) Es kam 1 Spieler von den 9 Spielern | 9 oder C_9^1 |
| 3) Es kamen 2 von den 9 Spielern | C_9^2 |
| ... | |
| 9) Es kamen 8 von den 9 Spielern | C_9^8 |
| 10) Es kamen alle 9 Spieler | 1 |

Die Gesamtzahl der Möglichkeiten erhalten wir durch Addition:

$$C_9^0 + C_9^1 + C_9^2 + C_9^3 + C_9^4 + C_9^5 + C_9^6 + C_9^7 + C_9^8 + C_9^9$$

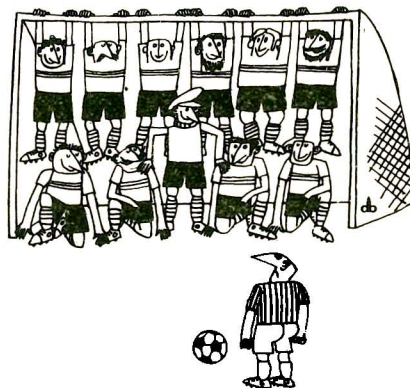
Dieser Ausdruck läßt sich unter Benutzung des Summenzeichens auch kürzer schreiben:

$$\sum_{k=0}^9 C_9^k$$

Hierbei wird über k in den Grenzen von 0 bis 9 summiert.

A. Halameisär

(Fortsetzung in Heft 4/76, d. Red.)



Eine Aufgabe von Prof. Dr.

Leopold Schmetterer

Universität Wien



▲ 1534 ▲ Der Entdecker einer (außerordentlich ergiebigen) Wasserquelle stellt diese auch anderen zur Verfügung, behält sich jedoch das Recht vor, die Wasserentnahme im Einklang mit der folgenden Vorschrift zu reglementieren: Jeder neu hinzukommende Nutznießer darf (etwa pro Tag) niemals mehr Wasser entnehmen, als sämtliche bisher schon zugelassenen Verbraucher im Mittel pro Tag bekommen. Man überlege sich:

a) Der Entdecker hat sich auf diese Weise das Recht gesichert, mindestens so viel Wasser zu entnehmen, wie jeder andere schon partizipierende oder neu hinzukommende Verbraucher.

b) Immer, wenn ein weiterer Benützer hinzukommt, bleibt die im Mittel entnommene Wassermenge gleich, oder nimmt sogar ab. (Wenn also die Anzahl der Benützer über alle Grenzen wächst, strebt die im Mittel entnommene Wassermenge einem Grenzwert zu.)

c) Der Entdecker hat sich durch die eben getroffene Regelung das Recht vorbehalten, gewisse Benützer zu benachteiligen. Es kann sich z. B. im Einklang mit dieser Regelung folgende Situation ergeben:

Im allgemeinen erhält jeder Benützer mindestens 10 l, aber bei stets anwachsender Verbraucherzahl gibt es immer wieder Benützer, die nur wenig mehr als 1 l erhalten. (Statt 10 l und 1 l kann man allgemein b l und a l mit $b > a$ wählen.)

Mit Bewegung geht es besser

Bei der XIV. Bezirksolympiade *Junger Mathematiker* (1975) wurde für die Klassenstufe 11/12 folgende Aufgabe gestellt:

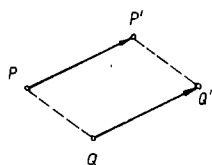
Es seien in der Ebene fünf Punkte F, G, H, I, K gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen. Man begründe und beschreibe die Konstruktion eines Fünfecks $ABCDE$, für das F, G, H, I, K in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DE, EA des Fünfecks sind. Man untersuche, ob ein solches Fünfeck $ABCDE$ durch die gegebenen Punkte F, G, H, I, K eindeutig bestimmt ist. Dabei wird nicht vorgeschrieben, daß das Fünfeck $ABCDE$ konvex, nicht konvex oder überschlagen ist; es soll auch zugelassen sein, daß Ecken miteinander zusammenfallen oder Seiten teilweise oder in der Verlängerung voneinander liegen.

Ihr werdet mit gewissem Recht gleich einwenden, daß die Behandlung von Olympiadaufgaben dieser obersten Stufe hier eigentlich fehl am Platze ist. Euer Einwand mag noch berechtigter erscheinen, wenn man berücksichtigt, daß gerade diese Geometriaufgaben den Teilnehmern erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Nun, gerade hier werden wir sehen, daß mit euren Schulkenntnissen über Bewegungen (in der Ebene) übersichtlich und einfach die Lösung der Konstruktionsaufgabe erarbeitet, begründet und beschrieben werden kann. Dabei können wir die Aufgabenstellung sogar noch etwas allgemeiner fassen, indem wir die Voraussetzung „... von denen keine drei auf derselben Geraden liegen“ weglassen.

Zunächst wollen wir einige Kenntnisse über Bewegungen wiederholen, vertiefen und erweitern.

Wenn ihr euch die zeichnerische Darstellung einer *Verschiebung* vor Augen haltet, so ist euch folgendes klar:

Bild 1



(1) Eine (eindeutig umkehrbare) Abbildung der Punkte der Ebene auf sich ist genau dann eine Verschiebung, wenn für je zwei Punkte P und Q

und ihre Bilder P' und Q' die gerichteten Strecken $\overrightarrow{PP'}$ und $\overrightarrow{QQ'}$ gleiche Länge und gleiche Orientierung besitzen. (Demnach bilden $PQQ'P'$ ein Parallelogramm, falls P, P' und Q nicht auf ein und derselben Geraden liegen; Bild 1.) Zu zwei Punkten A und B gibt es also eine und nur eine Verschiebung, die A in B abbildet. Diese Verschiebung soll hier kurz mit V_{AB} bezeichnet werden.

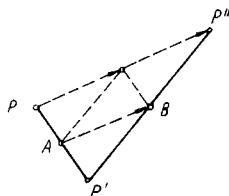
Ferner kennt ihr *Drehungen*, speziell *Drehungen um 180°* (wobei es in diesem Fall auf die Drehrichtung nicht ankommt!). Diese speziellen Drehungen werden auch *Punktspiegelungen* genannt. Diese Bezeichnung ist recht treffend, denn sie besitzen – wie euch bekannt ist – folgende Eigenschaft.

(2) Eine Spiegelung an einem Punkt A ist diejenige (eindeutig umkehrbare) Abbildung der Ebenenpunkte auf sich, bei der A in sich übergeht und für jeden Punkt $P \neq A$ und sein Bild P' der Punkt A Mittelpunkt von PP' ist.

Die Spiegelung am Punkt A wollen wir hier kurz mit S_A bezeichnen. Wir führen nun zwei Punktspiegelungen nacheinander aus. Die Schreibweise $S_A S_B$ soll heißen, daß zuerst die Abbildung S_A und danach die Abbildung S_B ausgeführt wird. Mit der Nacheinanderausführung von speziellen Bewegungen habt ihr euch bereits an verschiedenen Stellen des Mathematikunterrichts befaßt. Wir wollen untersuchen, welche Bewegung wir in unserem Falle erhalten.

Bei der Nacheinanderausführung $S_A S_B$ betrachten wir einen beliebigen Punkt P . Das Bild von P sei P'' .

Bild 2



Auf Grund der Beschreibung der Punktspiegelung (siehe (2)) und an Hand des Bildes 2 könnt ihr leicht erkennen, daß die gerichtete Strecke $\overrightarrow{PP''}$ doppelt so lang wie die gerichtete Strecke $\overrightarrow{AB}$ ist und beide gleiche Orientierung haben. Da dies für jeden Punkt P der Fall ist (überlegt euch das auch für den speziellen Fall, daß P auf der Verbindungsgeraden von A und B liegt!), ergibt sich jetzt nach der Beschreibung (1) für Verschiebungen der

(3) Satz: Das Resultat der Nacheinanderausführung $S_A S_B$ zweier Punktspiegelungen ist gleich dem Doppelten der Verschiebung V_{AB} .

Zusatzaufgabe 1: Welche Beziehung besteht zwischen $S_A S_B$ und $S_B S_A$?

Nun zeigen wir noch den

(4) Satz: Die Nacheinanderausführung $(S_A S_B) S_C$ dreier Spiegelungen an Punkten A, B, C (ergibt die) Spiegelung an demjenigen Punkt D , der das Bild von A bei der Verschiebung V_{BC} ist.

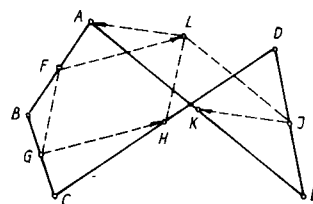
Beweis: Bei der Verschiebung V_{BC} geht A in einen Punkt D über, und es sind dann die Verschiebungen V_{BC} und V_{AD} gleich. Aus dieser Gleichheit folgt nach dem Satz (3), daß $S_B S_C = S_A S_D$ ist. Führen wir vor der Bewegung $S_B S_C$ erst noch die Bewegung S_A aus, so erhalten wir $S_A (S_B S_C) = S_A (S_A S_D)$. Bei der Nacheinanderausführung von Bewegungen kommt es zwar auf ihre Reihenfolge, aber nicht auf die Reihenfolge ihrer Zusammenfassung an. Ein Beispiel dafür gibt die Zusatzaufgabe 1. (Man sagt dafür auch kurz, daß für die Nacheinanderausführung von Bewegungen das *assoziative* Gesetz gilt.) In unserem Falle ist also $S_A (S_B S_C) = (S_A S_B) S_C$ und $S_A (S_A S_D) = (S_A S_A) S_D$. (Deshalb kann man statt $(S_A S_B) S_C$ einfach $S_A S_B S_C$ schreiben.) Da die Nacheinanderausführung einer Punktspiegelung mit sich selbst die identische Abbildung ist, gilt nun $(S_A S_B) S_C = S_D$, w. z. b. w. Wir können uns nun ganz der eigentlichen Aufgabe zuwenden.

Gibt es zu Punkten F, G, H, I, K solche Punkte A, B, C, D, E , die der Aufgabenstellung genügen, so ist B das Bild von A bei der Spiegelung an F und entsprechend so weiter und schließlich A das Bild von E bei der Spiegelung an K . Dann geht A bei der Nacheinanderausführung $S_F S_G S_H S_I S_K$ in sich über. Umgekehrt folgt aus der Existenz eines Punktes A mit dieser Eigenschaft, daß es eindeutig bestimmte Punkte B, C, D, E gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Als B ist nämlich das Bild von A bei der Spiegelung an F zu wählen, und Entsprechendes gilt für C, D und E .

Nun ist noch zu klären, ob und welche Punkte bei der zusammengesetzten Bewegung $S_F S_G S_H S_I S_K$ festbleiben. Nach dem Satz (4) ist $S_F S_G S_H$ die Spiegelung an einem Punkt L , und damit ist – wiederum nach (4) – $S_F S_G S_H S_I S_K = S_L S_I S_K$ die Spiegelung an einem Punkt M . Bei einer Punktspiegelung S_M ist nun bekannt, daß der Punkt M und nur dieser fest bleibt.

Unsere bewegungsgeometrischen Überlegungen ergeben also in überraschend einfacher und übersichtlicher Weise:

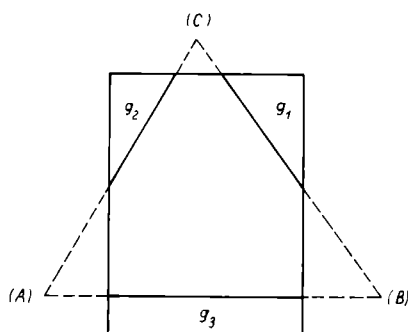
Bild 3



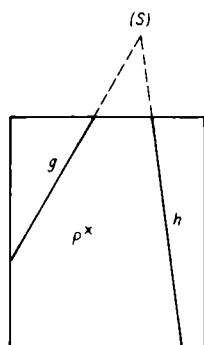
Die vorgelegte Konstruktionsaufgabe besitzt stets eine und nur eine Lösung. Diese kann wie folgt beschrieben werden (siehe Bild 3): Durch die Verschiebung V_{GH} geht der Punkt F in einen Punkt L über. Dann wird L um V_{IK} in einen Punkt A verschoben. Die übrigen Punkte B, C, D, E werden schrittweise dadurch gewonnen, daß A an F , dann B an G ,

Konstruktionen in einer begrenzten Zeichenebene

1. Die Abbildung stellt die Umriss eines Zeichenblattes dar, in das drei Geraden g_1 , g_2 und g_3 , die paarweise verschiedene Richtung haben, eingezeichnet sind. Die Schnittpunkte A , B und C dieser Geraden liegen außerhalb des Zeichenblattes. Es ist der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$, deren Endpunkte unzugänglich sind, zu konstruieren. Dabei ist die Konstruktion nur auf dem gegebenen Zeichenblatt auszuführen.



2. Gegeben seien zwei Geraden g und h , deren unzugänglicher Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt und ein Punkt P , der zwischen diesen Geraden liegt. Es ist die Gerade PS zu konstruieren.

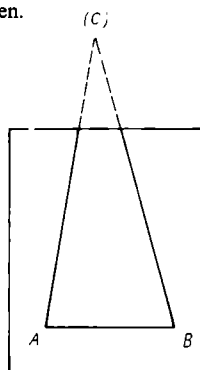


C an H und schließlich D an I gespiegelt wird. (Alle diese Konstruktionsschritte sind einfach mit dem Lineal und Zirkel, ja sogar einfach mit Lineal und Zeichendreieck ausführbar.)

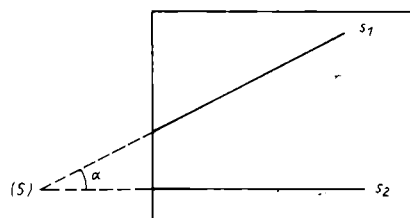
Zusatzaufgabe 2: Untersuche die völlig analoge Aufgabenstellung bezüglich vierer Punkte!

E. Quaisser

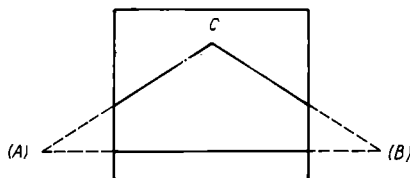
3. Gegeben sei ein Dreieck ABC , dessen Eckpunkt C unzugänglich ist. Es ist die Senkrechte zur Geraden AB durch C zu konstruieren.



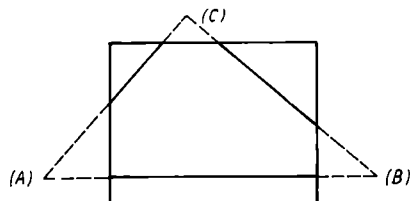
4. Gegeben sei ein Winkel α mit den Schenkeln s_1 und s_2 und dem unzugänglichen Scheitel S . Es ist die Halbierungslinie des Winkels α zu konstruieren.



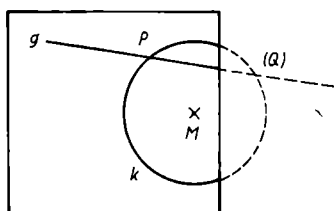
5. Gegeben sei ein Dreieck ABC , dessen Eckpunkte A und B beide unzugänglich sind. Es ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ durch Konstruktion zu bestimmen.



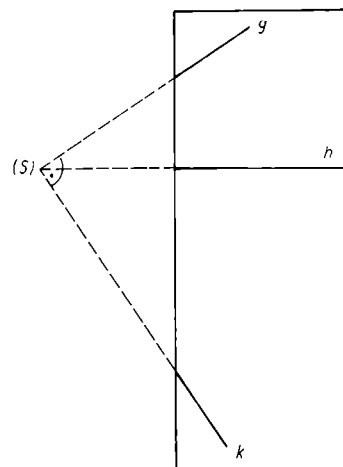
6. Gegeben sei ein Dreieck ABC , dessen Eckpunkte sämtlich unzugänglich sind. Es ist der Inkreis dieses Dreiecks zu konstruieren.



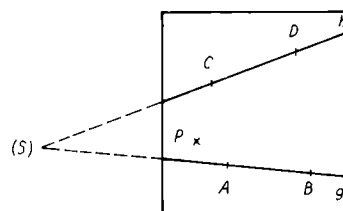
7. Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und eine Gerade g , die den Kreis k in dem Punkt P und in dem unzugänglichen Punkt Q schneidet. Es ist eine Sekante zu konstruieren, die durch den Punkt Q geht.



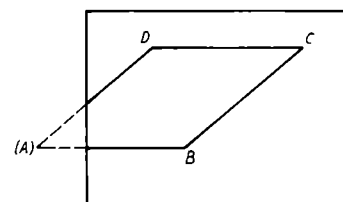
8. Gegeben seien zwei Geraden g und h , deren Schnittpunkt S außerhalb der Zeichenebene liegt. Es ist eine dritte Gerade k so zu konstruieren, daß sie durch den Punkt S geht und senkrecht auf der Geraden g steht.



9. Auf einem rechteckigen Zeichenblatt seien zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gegeben, die auf den Geraden g bzw. h liegen. Die Geraden g und h schneiden einander in einem Punkt S , der außerhalb des Zeichenblattes liegt. Ferner sei auf dem Zeichenblatt ein Punkt P gegeben, der innerhalb des durch die Geraden g und h bestimmten Winkels liegt. Es ist eine Strecke zu zeichnen, die auf der Verbindungsgeraden des Punktes P mit dem Schnittpunkt S von g und h liegt.



10. Gegeben sind drei Punkte B , C und D , die in einer rechteckigen Zeichenfläche liegen. Diese drei Punkte sind Eckpunkte eines Parallelogramms $ABCD$, dessen vierter Eckpunkt A außerhalb der Zeichenfläche liegt.



Es ist eine Strecke zu konstruieren, die auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAD$ mit dem unzugänglichen Punkt A liegt.

Th. Scholl

Rückblick auf die XVII. IMO

Es ist nun schon zu einer guten Tradition geworden, daß die DDR-Mannschaft während der IMO von jeder teilnehmenden Mannschaft eine Aufgabe für unsere *alpha*-Leser erhält. Wir danken *Uwe Quasthoff* (Teiln. der XVII. IMO) und *Wolfgang Burmeister* (TU Dresden) für die Bearbeitung der gestellten Probleme.

Volksrepublik Bulgarien

Man finde im Innern eines spitzwinkligen Dreiecks den Punkt M , für den der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ maximal wird, wobei A', B', C' die Fußpunkte der Lote von M auf die Dreiecksseiten sind.

Deutsche Demokratische Republik

$Q(x)$ bezeichne die Quersumme der Zahl x , und n sei eine durch 9 teilbare Zahl mit weniger als 10 Milliarden Ziffern.

Man zeige, daß $Q(Q(Q(n))) = 9$ ist.

Republik Frankreich

Man zeige, daß für positive Zahlen a, b, c folgende Ungleichung gilt:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b).$$

Republik Griechenland

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC und ein Winkel ϕ . H sei der auf AB gelegene Höhenfußpunkt des Dreiecks. Man konstruiere Punkt I und K auf BC bzw. AC , so daß $\overline{IH} = \overline{IK}$ und $\angle KHI = \phi$ gilt, falls solche Punkte existieren.

Vereinigtes Königreich von Großbritannien und Nordirland

An einer Mathematikolympiade beteiligen sich n Länder mit je zwei Teilnehmern. Es stehen die Klausurräume A und B zur Verfügung. Die $2n$ Teilnehmer werden in ungeordneter Folge in eine Reihe gestellt und durchnummeriert. Nr. 1 geht in Raum A . Der zweite bis $2n$ -te Teilnehmer geht in den Raum, in den der Teilnehmer vor ihm ging, wenn der andere Teilnehmer seines Landes nicht bereits dort ist, sonst in den anderen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Raum A zuerst gefüllt ist?

Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien

Man beweise für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung

$$(n!)! > (n-1)!^{n!}$$

Mongolische Volksrepublik

In der Ebene sind $2n$ Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Man zeige, daß mindestens ein Dreieck entsteht, wenn man mehr als n^2 der Verbindungsstrecken zeichnet.

Königreich der Niederlande

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 seien fünf beliebige positive reelle Zahlen. Man zeige, daß man aus ihnen P_k und P_l so auswählen kann, daß

$$0 < \frac{1}{P_k + 25} - \frac{1}{P_l + 25} < \frac{1}{100} \text{ gilt.}$$

Republik Österreich

Man zeige, daß die Gleichung

$$x^2 - 2y^2 = 7$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungspaare x, y besitzt.

Volksrepublik Polen

Man betrachte die Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n+1}$$

aus reellen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Wird ein beliebiges Glied a_i aus der Summe gestrichen, so können die übrigen Glieder so umgruppiert werden, daß zwei gleich große Teilsummen verbleiben.

Man weise nach, daß dann

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{2n+1} \text{ ist.}$$

Sozialistische Republik Rumänien

Es seien k und p natürliche Zahlen mit $k^2 = p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)(p+6)(p+7)$.

Man beweise, daß $k = p = 0$ ist.

Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken

Gegeben seien n konvexe Figuren in der Ebene, von denen je zwei einen nichtleeren Durchschnitt haben. Man zeige, daß dann eine Gerade existiert, die mit jeder der Figuren einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Königreich Schweden

Gegeben sei eine Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$ und den Eigenschaften

- $f(0) = 0$
- Für alle $x \geq 0$ ist $f(x+1) = f(x) + \sqrt{x}$
- Für alle $x \geq \frac{1}{2}$ ist $2f(x) < f\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Man bestimme $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Tschechoslowakische Sozialistische Republik

Gegeben sei ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck ABQ mit der Hypotenuse AP . Man konstruiere ein Quadrat $ABCD$ so, daß die Punkte B, C, P sowie die Punkte C, D, Q auf je einer Geraden liegen. Außerdem ist die Seitenlänge des Quadrats durch die Länge a der Katheten des gegebenen Dreiecks APQ auszudrücken.

Ungarische Volksrepublik

n sei eine natürliche Zahl. Man berechne die Summe

$$\sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}.$$

Vereinigte Staaten von Amerika

Gegeben ist ein Stoß von N Karten, darunter genau drei Asse. Die Karten werden von oben nach unten einzeln umgedreht, bis das zweite As gewendet ist. Man zeige, daß die zu erwartende Anzahl von umzudrehenden Karten $\frac{N+1}{2}$ ist (unter der zu erwartenden Anzahl versteht man die durchschnittliche Anzahl für alle möglichen gleichwahrscheinlichen Kartenverteilungen).

Demokratische Republik Vietnam

Man finde für eine gegebene positive ganze Zahl n die größte reelle Zahl p , so daß für beliebige positive Zahlen A_i, B_i die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{B_i} \geq p \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{\sum_{i=1}^n B_i}$$

erfüllt ist.

Mathematik-olympiaden in Österreich

Wettbewerbe für Schüler auf dem Gebiet der Mathematik haben in Österreich noch keine große Tradition. Erst im Jahre 1969 entschloß sich das *Bundesministerium für Unterricht und Kunst*, einen solchen Bewerb jährlich durchzuführen.

Die Ziele der österreichischen Mathematikolympiaden entsprechen denen anderer Länder, die solche Bewerbe veranstalten. An der Spitze stehen wohl die Entdeckung und Förderung von mathematischen Talenten. Da eine spezielle Förderung wegen einer zu geringen Wochenstundenzahl im obligatorischen Unterricht kaum gegeben ist, können sich interessierte Schüler zu Vorbereitungskursen melden. In diesen Kursen lernen die Schüler Beweisverfahren kennen, werden mit immer schwierigeren Aufgaben konfrontiert und zur Beschäftigung mit der Mathematik

auch außerhalb der unterrichtlichen Zeit motiviert. Wir unterscheiden zwischen einem *Anfängerkurs* für Schüler, die noch an keinem Wettbewerb teilgenommen haben, und einem weiterführenden *Fortgeschrittenenkurs*. Die schönen Erfolge, die österreichische Schüler bei Internationalen Olympiaden in den letzten Jahren erringen konnten, zeigen, daß diese Maßnahme notwendig und richtig ist. Die Bewerbe werden getrennt für Anfänger und Fortgeschrittene durchgeführt. Die Anfänger bestreiten zunächst einen *Kurswettbewerb*. Die besten Schüler der Kurse bewerben sich dann um die Ehre eines *Landessiegers*. Von einem *Bundesbewerb* wurde in den letzten Jahren abgesehen. Wichtiger als der Bewerb erscheint uns eine Verlängerung der Kurs-tätigkeit.

Die Bewerbe der Fortgeschrittenen werden in drei Stufen durchgeführt: Kurs-, Gebiets- und Bundesbewerb. *Gebietswettbewerbe* werden meist in drei Städten veranstaltet. Die besten Schüler der drei Gebiete (insgesamt etwa 30) werden vor dem *Bundesbewerb* zu einem 14-tägigen Spezialkurs zusammengefaßt. Die besten acht Schüler werden für die IMO nominiert. Wegen der Kurstätigkeit sind die Bewerbe nicht über das ganze Jahr verteilt, sondern beginnen erst Ende April. Alle Bewerbe werden in Form von Klausuren durchgeführt.

Das Interesse der Schüler an der Mathematikolympiade ist ständig im Steigen begriffen. Während im Gründungsjahr nur etwa 23 Kurse geführt werden konnten, so haben wir in diesem Jahr rund 1000 Anmeldungen allein zu den Anfängerkursen. Dies ist zweifelsohne noch nicht die gewünschte Breitenwirkung.

Vielleicht wird uns die XVIII. IMO in Österreich dem Ziel, daß alle mathematischen Talente an der Olympiade teilnehmen, näherbringen.

Th. Mühlgassner/W. Ratzinger

Aufgaben – gestellt von der österreichischen IMO-Delegation 1975

1. Gegeben ist ein Dreieck mit den Seiten a , b , c , dem Umkreisradius R und den Punkten U (Umkreismittelpunkt) und H (Höhendurchschnittspunkt). Man beweise:

$$9R^2 = \overline{UH}^2 + a^2 + b^2 + c^2.$$

2. Man finde alle Paare x , y von natürlichen Zahlen, für die die Gleichung

$$x^5 - xy^2 + y^2 - 1 = 0$$

gilt.

3. Es ist zu beweisen, daß die Zahl

$$\sum_{n=0}^{\infty} 10 \frac{-n^2 + 3n + 4}{2}$$

irrational ist.

Eine Aufgabe von W. Redtenbacher

Mitglied der österreichischen Mannschaft bei der XIV., XV. und XVI. IMO

▲ 1535 ▲ a) Es sind alle reellen Lösungen (x_1, x_2) des Gleichungssystems

$$x_1^4 + (x_1 x_2)^4 = 1, \quad (1)$$

$$x_1^2 + (x_1 x_2)^5 = 1 \quad (2)$$

zu ermitteln.

b) Die obige Aufgabe ist auf den Fall von n Variablen ($n \geq 2$) zu verallgemeinern. Es sind also alle reellen Lösungen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ des Gleichungssystems

$$x_1^{2n} + (x_1 x_2)^{2n} + (x_1 x_2 x_3)^{2n} + \dots + (x_1 x_2 \dots x_n)^{2n} = 1, \quad (1)$$

$$x_1^{2n+1} + (x_1 x_2)^{2n+1} + (x_1 x_2 x_3)^{2n+1} + \dots + (x_1 x_2 \dots x_n)^{2n+1} = 1 \quad (2)$$

zu ermitteln.



Mag. Th. Mühlgassner (Eisenstadt) und Mag. W. Ratzinger (Linz) – Initiatoren österreichischer Mathematikolympiaden – Delegationsleitung der österr. IMO-Mannschaft.

IMO-Teilnehmer der DDR stellen Aufgaben

▲ 1 ▲ Es seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ n beliebige positive reelle Zahlen ($n \geq 2$) und m eine natürliche Zahl mit $m \geq 2$.

1. Man beweise, daß dann gilt:

$$\sqrt[m]{a_1 + \sqrt[m]{a_2 + \dots + \sqrt[m]{a_n}}} \leq \sqrt[m]{a_1 + a_2 + \dots + a_n}. \quad (1)$$

2. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

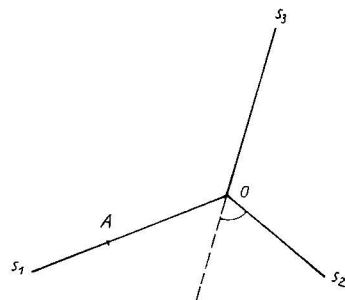
Ralph Lehmann, Petershagen

▲ 2 ▲ Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen m und n mit $n \geq 1$ die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$s = \frac{1}{1 \cdot (m+1)} + \frac{1}{(m+1)(2m+1)} + \frac{1}{(2m+1)(3m+1)} + \dots + \frac{1}{((n-1)m+1)(nm+1)} = \frac{n}{nm+1}$$

Hans-Gert Gräbe, Halle

▲ 3 ▲ In einer Ebene seien ein Punkt O und drei von diesem Punkt ausgehende Strahlen s_1, s_2, s_3 gegeben, wobei die orientierten Winkel $\angle(s_1, s_2), \angle(s_2, s_3), \angle(s_3, s_1)$ sämtlich größer als 0° und kleiner als 180° sind und die Verlängerung von s_3 über O hinaus mit den Strahlen s_1 und s_2 je einen spitzen Winkel bildet. Ferner sei ein Punkt A auf s_1 gegeben, der nicht mit O zusammenfällt (vgl. die Abb.).



Es soll ein Dreieck ABC , dessen Eckpunkt B auf s_2 und dessen Eckpunkt C auf s_3 liegt, so konstruiert werden, daß die Strecken OA, OB, OC auf den Winkelhalbierenden dieses Dreiecks liegen. Hans-Gert Gräbe, Halle

▲ 4 ▲ Man beweise, daß die Zahl $2^k + 1$ keine Primzahl ist, wenn k eine natürliche Zahl ist, die sich nicht als Potenz von 2 darstellen läßt, wenn also $k \neq 2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^n, \dots$ ist. Hans-Jürgen Schmidt, Greifswald

▲ 5 ▲ Es sei $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ eine Fibonacci-Folge, d. h. eine Folge, für die $u_1 = 1, u_2 = 1$ und $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ für $n \geq 2$ gilt.

a) Man entscheide, ob die unendliche Reihe

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{2^k} = \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2^2} + \frac{u_3}{2^3} + \dots + \frac{u_n}{2^n} + \dots$$

konvergiert und berechne gegebenenfalls ihre Summe.

b) Man entscheide, ob auch die unendliche Reihe

$$\bar{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} + \dots$$

konvergiert und gebe bejahendenfalls einen Näherungswert für ihre Summe an, wobei eine Genauigkeit von 1% ausreichen soll.

Hinweis zur Lösung: Zur Lösung kann die Formel

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

benutzt werden (vgl. N. N. Worobjow: Die Fibonacci'schen Zahlen. Berlin 1971, S. 29).

Klaus Altmann, Berlin

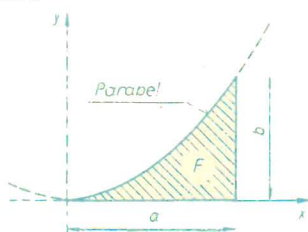
Herleitung der Fläche unter der Parabel ohne Integralrechnung

Mathematik
in der Pädagogischen
Hochschule
„Wolfgang Ratke“,
Köthen

In jedem besseren Tabellenbuch wird die Fläche unter der Parabel (Bild 1) mit

$$F = \frac{1}{3} a \cdot b$$

angegeben, die z. B. in der Statik häufig benötigt wird.



Berechnet wird diese Fläche F durch Integration der quadratischen Funktion $y = \frac{b}{a^2} x^2$

$$F = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 dx = \frac{b}{a^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{3} (a^3 - 0^3) = \frac{1}{3} a \cdot b$$

Hier soll gezeigt werden, daß diese Fläche auch ohne Integration berechnet werden kann.

Man benutzt dabei folgenden Kunstgriff:

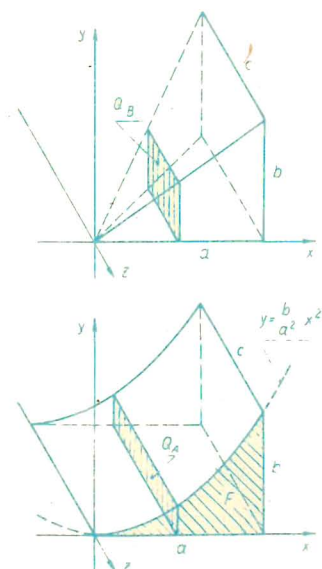


Bild 2 zeigt zwei unterschiedliche Körper, die volumengleich sind, was sich mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri beweisen läßt.

Das Cavalierische Prinzip besagt:

Körper mit inhaltsgleichem Querschnitt in gleichen Höhen haben gleiches Volumen.

Die Länge a der Körper soll hier als Höhe im Sinne des Cavalierischen Prinzips aufgefaßt werden.

Die Querschnittsflächen der Körper betragen in Höhe x (mit $0 \leq x \leq a$):

Körper A

$$Q_{Ax} = c \cdot \frac{b}{a^2} x^2$$

Körper B

$$Q_{Bx} = \frac{b}{a} x \cdot \frac{c}{a} x \quad (\text{Strahlensatz!})$$

$$\text{D. h. } Q_{Ax} = Q_{Bx}$$

Daraus folgt nach dem Cavalierischen Prinzip

$$V_A = V_B$$

Nachdem die Volumengleichheit der Körper A und B bewiesen ist, läßt sich die Größe der gesuchten Fläche F leicht herleiten:

$$V_A = F \cdot c \quad (\text{Prisma})$$

$$V_B = \frac{1}{3} b \cdot c \cdot a \quad (\text{Pyramide})$$

$$\text{Da } V_A = V_B \text{ und } F \cdot c = \frac{1}{3} b \cdot c \cdot a$$

$$\text{ist } F = \frac{1}{3} a \cdot b$$

M. Wilde

Satz des Cavalieri: Wenn für zwei Körper mit gleich langen Höhen und gleichen Grundflächeninhalten gilt, daß parallel zur Grundflächenebene in beliebigen, aber jeweils gleichen Abständen von dieser geführte Schnitte stets zu Schnittflächen mit gleich großen Flächeninhalten führen, so haben die beiden Körper gleiche Volumina. (Lehrbuch Klasse 8, S. 80)

Ringparabel



Die jüngste Pädagogische Hochschule der DDR befindet sich in der im Bezirk Halle gelegenen Kreisstadt Köthen. Dem seit September 1963 bestehenden Pädagogischen Institut wurde am 1.9.1974 der Status einer Pädagogischen Hochschule verliehen.

Unsere Ausbildungsstätte für Fachlehrer in den Kombinationen Mathematik/Chemie, Chemie/Biologie und Biologie/Chemie trägt den Namen des Humanisten und Pädagogen Wolfgang Ratke, der in den Jahren 1618/19 in Köthen wirkte.

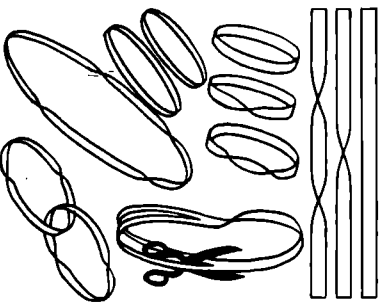
An der Sektion Mathematik werden jährlich 90 Studenten der Fachrichtung Mathematik/Chemie immatrikuliert. Entsprechend dem gültigen Lehrprogramm werden sie in einem vierjährigen Studium als Diplomlehrer ausgebildet.



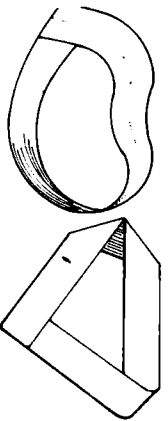
Die Hochschullehrer und wissenschaftlichen Mitarbeiter der Sektion Mathematik arbeiten in den Lehrkollektiven Theoretische Mathematik, Angewandte Mathematik und Methodik des Mathematikunterrichts. Obwohl die Sektion Mathematik erst seit 1972 besteht, hat sich die mathematische Forschung bereits gut entwickelt. Unsere Algebraiker beschäftigen sich mit den universell-algebraischen und kategorientheoretischen Grundlagen abstrakter Automaten; die Geometer führen Untersuchungen über die Anwendung des Schrägspiegelungskalküls in den Naturwissenschaften durch. Unter Anleitung wissenschaftlicher Mitarbeiter beschäftigen sich einige unserer Diplomanden mit einem System zur maschinellen Leistungskontrolle. Eine Forschungsgruppe Prozeßoptimierung befindet sich im Aufbau. Die Mitglieder des Lehrkollektivs Methodik arbeiten im Rahmen der Schulbuchforschung an der Verbesserung der Mathematiklehrbücher.

Die Zauberringe

Wir schneiden aus festem Papier drei lange Streifen in Breite von je 20 mm und kleben sie in verschiedener Weise zusammen:



den ersten zu einem einfachen Ring (siehe Bild), den zweiten drehen wir vor dem Zusammenkleben einmal und den dritten vor dem Zusammenkleben zweimal. Nun behaupten wir, daß 3 verschiedene Lösungen entstehen, wenn wir die Ringe der Länge nach aufschneiden. Das Ergebnis ist überraschend. Versucht es erst selbst einmal!



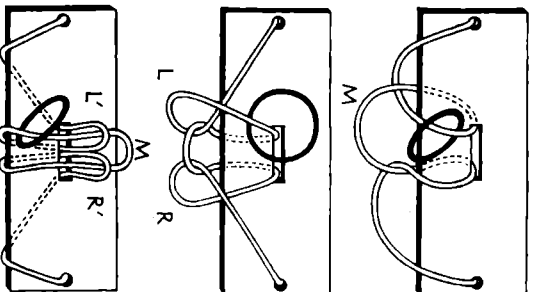
2

Schnur ist durch diese Öffnungen geschlungen – genau wie abgebildet. Die Enden der Schnur sind hinten befestigt oder mit je einem Knoten versehen.

In der linken Schlaufe hängt ein Ring. Es wird verlangt, den Ring in die rechte Schlaufe zu bringen, ohne die Schnüre zu lösen oder das Brett zu zerschneiden. Der Ring geht auch nicht etwa durch den Schlitz zu stecken. Man kann erst einmal solch ein „Brett“ aus Pappe basteln und probieren.

Lösung: Man zieht zunächst die Schlinge *M* so weit heraus, daß man den Ring durch diese Schlinge nach oben schieben kann. Der Ring wird nun gegen das Brett gedrückt, und zugleich werden die aus der Öffnung hängenden Schnurteile *L* und *R* nach vorn und unten gezogen, beide gleichzeitig.

4



kleine Felder hat (Rechenheftpapier). Die senkrechten Felder werden rechts außen von oben nach unten mit den Buchstaben *A* bis *J* bezeichnet, die waagerechten Felder oben von links nach rechts mit den Ziffern *1* bis *10*. Diese 100 Felder sind das Meer, in das nun – verdeckt vor den Augen des anderen – jeder an beliebiger Stelle seine Fische einzeichnet, und zwar:

Einsatzzettel

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	X									
B		X	X	X	X	X	X	X	X	X
C			X							
D				X						
E					X					
F						X				
G							X			
H								X		
I									X	
J										X

TIPSCHEIN

Tipzettel

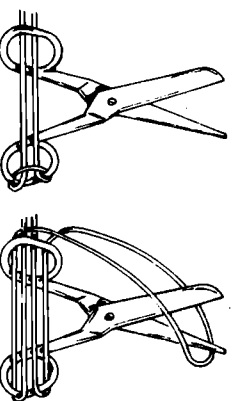
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										
J										

7

1 Wal = 4 Quadrate lang
2 Haifische = je 3 Quadrate lang
3 Thunfische = je 2 Quadrate lang
4 Flundern = je 1 Quadrat.
Die Fische dürfen sich nur an den Ecken, nicht an den Längsseiten berühren. Nun beginnt der Fang. Abwechselnd wirft jeder ein Netz auf die Fische in dem Quadratfeld des anderen. Peter sagt zum Beispiel:

Die Schere in der Schnur

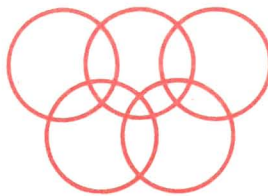
Um den Griff einer Schere schlingt man eine Schnur, wie es das linke Bild zeigt: Die beiden Enden werden an irgendeinem Gegenstand im Zimmer befestigt. Nun soll die Schere von der Schnur gelöst werden, ohne daß die Knoten geöffnet oder die Schnur durchgeschnitten wird. (Es empfiehlt sich, eine möglichst lange Schnur zu benutzen.)



5

Mathematik und Sport

alpha-Wandzeitung



Mitarbeiter gesucht

Auf dieser *alpha*-Wandzeitung haben wir 12 Aufgaben aus Anlaß der Olympischen Spiele 1976 gestellt.

Wer sendet uns Aufgaben (mit Lösungsvorschlag) von den Olympischen Spielen 1976 für unseren *alpha*-Wettbewerb 1976/77? Die besten Einsender erhalten Buchprämien aus dem Bereich des Sports. Red. *alpha*

Die olympischen Ringe

- a) Kannst du die fünf olympischen Ringe in einem Zug zeichnen, ohne eine Linie zweimal zu durchfahren?
b) Durch die fünf Ringe werden 15 Gebiete (das Außengebiet nicht mitgezählt) begrenzt. Trage in die Gebiete die Zahlen 1 bis 15 so ein, daß jede Zahl nur einmal vorkommt und die Summe in jedem Ring 39 beträgt!

Ingo Rath (Wien)



▲1▲ Die DDR-Mannschaft errang bei Olympischen Sommerspielen bisher folgende Medaillen:

	Gold	Silber	Bronze
Melbourne 1956	1	4	2
Rom 1960	3	9	7
Tokio 1964	3	11	5
Mexiko 1968	9	9	7
München 1972	20	23	23

a) Berechne, wieviel Gold-, Silber- bzw. Bronzemedailles insgesamt seit 1956 bei Olympischen Spielen von DDR-Sportlern errungen wurden!

b) Stelle für die einzelnen Olympischen Spiele getrennt ein Säulendiagramm auf, in dem du die errungenen Medaillen darstellst (1 Medaille = 1 cm)!

▲2▲ Ergänze unter Ausnutzung folgender Aussagen die untenstehende Tabelle der inoffiziellen Länderwertung nach Abschluß aller 195 Disziplinen der Olympischen Spiele von 1972!

(1) Die DDR erreichte mehr als 19 Goldmedaillen und 6. Plätze.

(2) Die Mannschaft der BRD/WB kam auf eine Gesamtpunktzahl, in der die Ziffer 1, 2 und 3 jede genau einmal vorkommen.

(3) Ungarn erkämpfte doppelt so viele Bronzemedailles wie es 5. Plätze erreichte.

(4) Die japanische Mannschaft erkämpfte Goldmedaillen und ihre Gesamtpunktzahl ist eine Kubikzahl.



	Gold	Silber	Bronze	4.	5.	6.	Punkte
UdSSR	50	27	22	16	19	9	
USA		31	29	29	21	8	639
DDR		23	23	22	22		480
BRD/WB	13		16	17	20	11	
Ungarn	6	13		9		8	222
Japan		8	8	10	9	5	

▲3▲ In München 1972 stand Hallenhandball erstmals auf dem olympischen Programm. Nach Abschluß der Hauptrunde ergab sich für die Gruppe A folgender Tabellenstand:

1. ČSSR	3	42:38	4:2
2. DDR	3	36:34	4:2
3. UdSSR	3	34:34	3:3
4. Schweden	3	34:40	1:5

Die DDR spielte gegen die ČSSR 14:12. Bestimme die möglichen Ausgänge aller anderen Spiele (nur Sieg, Niederlage oder Unentschieden, nicht die Ergebnisse)!

▲4▲ Monika, Michael und Bernd verfolgten im Fernsehen das Rennen der Einerkajak bei den Olympischen Spielen von München. Am Bildschirm war der Einlauf nicht genau auszumachen und die drei Freunde hatten verschiedene Meinungen, wie in welcher Reihenfolge die ersten drei Plätze belegt wurden:

Monika: Peterson (Schweden) gewann vor Shaparenko (UdSSR) und Czapó (Ungarn).

Michael: Du hast dich versehen, Shaparenko (UdSSR) kam vor Peterson (Schweden) ins Ziel.

Bernd: Es war Peterson (Schweden) vor Czapó (Ungarn), aber der Schwede war nicht auf dem ersten Platz.

Als die offiziellen Ergebnisse durchgegeben wurden, stellte sich heraus, daß genau eine Aussage falsch gewesen ist.

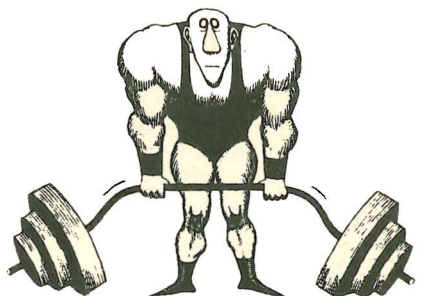
Welche war das, und wie lautete die Reihenfolge der drei Erstplatzierten?

▲5▲ Die Olympiasieger im Dreisprung erreichten folgende Weiten:

1896: 13,71 m;	1900: 14,44 m;
1904: 14,33 m;	1908: 14,92 m;
1912: 14,76 m;	1920: 14,51 m;
1924: 15,53 m;	1928: 15,21 m;
1932: 15,72 m;	1936: 16,00 m;
1948: 15,40 m;	1952: 16,22 m;
1956: 16,35 m;	1960: 16,81 m;
1964: 16,85 m;	1968: 17,39 m;
1972: 17,35 m;	

a) Stelle die Weiten in Abhängigkeit vom Jahr in einem Koordinatensystem graphisch dar, und verbinde die Punkte durch Geraden!

b) Ermittle in m und %, um wieviel besser die Leistungen der Olympiasieger von 1908, 1924, 1948 und 1972 als das Ergebnis des Siegers von 1896 sind!



Hinweis: Bei einer inoffiziellen Länderwertung werden für Gold-, Silber- bzw. Bronzemedailles und die Plätze 4, 5 und 6 die Punktzahlen 7, 5 bzw. 4 und 3, 2 und 1 vergeben.

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen



Kreisolympiade

Klassenstufe 5

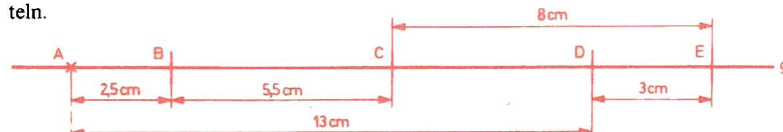
1. Wegen $4500 : 9 = 500$ und $135000 : 9 = 15000$ wurde als Bedarf für 500 Neubauwohnungen 15000 m^2 Flachglas angenommen, für 1000 Neubauwohnungen folglich das Doppelte, also 30000 m^2 .

2. Aus Gleichung (3) entsteht wegen $280 : 7 = 40$ genau dann eine wahre Aussage, wenn man $u = 40$ einsetzt. Hiernach entsteht wegen $4 \cdot 40 = 160$ genau dann aus (2) eine wahre Aussage, wenn man $z = 160$ einsetzt. Gleichung (4) wird genau dann wahr, wenn man $v = 120$ einsetzt; denn es gilt $160 = 120 + 40$, während die Summe aus 40 und je einer anderen Zahl als 120 eine andere Zahl als 160 ergibt. Wegen $160 + 120 = 280$ wird (5) genau für $y = 280$ wahr, und wegen $280 : 40 = 7$ wird (1) genau für $x = 7$ wahr.

3. Nach (1) waren genau 13 der Pioniere schon einmal an der Ostsee. Nach (2) und (3) betrug die Anzahl der Pioniere, die schon einmal im Harz, aber noch nicht an der Ostsee waren, wegen $15 - 6 = 9$ genau 9 Pioniere. Also waren wegen $13 + 9 = 22$ genau 22 Pioniere dieser Gruppe schon einmal in wenigstens einer der genannten Feriengenden. Nach (4), und weil damit jeder der anwesenden Pioniere erfaßt wurde, betrug wegen $22 + 4 = 26$ deren Anzahl 26.

4. Wir tragen zunächst von A aus auf g mit dem Zirkel eine Strecke von 2,5 cm Länge ab. Ihr anderer Endpunkt sei B. Dann tragen wir wegen $0,3 \text{ dm} = 3 \text{ cm}$ und $2,5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 5,5 \text{ cm}$ von B aus auf der Halbgeraden von g , auf der A nicht liegt, eine Strecke von 5,5 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt C. Wegen $2,5 \text{ cm} + 5,5 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ tragen wir nun von C aus auf der Halbgeraden von g , auf der B nicht liegt, eine Strecke von 8 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt E. Da D laut Aufgabe zwischen C und E liegt, tragen wir schließlich wegen $50 \text{ mm} = 5 \text{ cm}$ und $8 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$ von E aus auf derselben Halbgeraden von g , auf der C liegt, eine Strecke von 3 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt D.

Wegen $2,5 \text{ cm} + 5,5 \text{ cm} + 8 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 13 \text{ cm}$ hat die Strecke AD eine Länge von 13 cm. Es ist auch zulässig, die Länge von AD nach der Konstruktion durch Messung zu ermitteln.



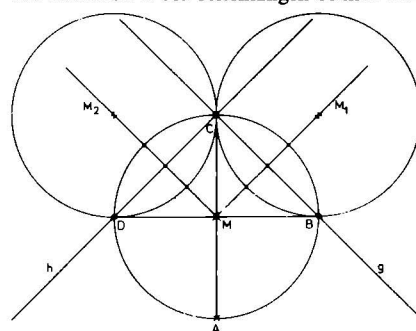
Klassenstufe 6

1. Der erste Hubschrauber beförderte $\frac{1}{3}$ von 15000 kp, das sind 5000 kp. Der zweite beförderte $\frac{7}{8}$ von 15000 kp, wegen $\frac{7}{8} \cdot 15000 = 13125$ sind das 13125 kp; der dritte beförderte $\frac{3}{5}$ von 15000 kp, wegen $\frac{3}{5} \cdot 15000 = 9000$ also 9000 kp. Das beförderte Sperrgut hatte somit wegen $5000 + 13125 + 9000 = 27125$ ein Gesamtgewicht von 27125 kp.

2. Die Anzahl der Dreibett-Kabinen muß mindestens 1 und kann wegen $3 \cdot 14 = 42 > 41$ höchstens 13 betragen. Außerdem muß ihre Anzahl ungerade sein, da sonst (bei gerader Anzahl von Dreibett-Kabinen) eine gerade Zahl von Plätzen dadurch belegt wären und als Differenz zur ungeraden Zahl 41 mithin eine ungerade Zahl von Betten auftreten würde, die sich nicht ausschließlich auf Zweibett-Kabinen verteilen läßt. Für jede der ungeraden Zahlen von Dreibett-Kabinen von 1 bis 13 gibt es nun jeweils genau eine (zugehörige) Anzahl von Zweibett-Kabinen, wie nachstehende Tabelle ausweist:

Anzahl der Dreibett-Kabinen	Anzahl der damit vorh. Betten	Anzahl der darüber hinaus vorh. Betten	Anzahl der Zweibett-Kab.	Gesamtplätze
1	3	38	19	41
3	9	32	16	41
5	15	26	13	41
7	21	20	10	41
9	27	14	7	41
11	33	8	4	41
13	39	2	1	41

4. a) Die schraffierte Fläche kann man sich dadurch entstanden denken, daß aus einem Rechteck R zwei Rechtecke S und T herausgeschnitten wurden, wobei wegen $10 + 15 + 10 + 15 + 10 = 60$ das Rechteck R die Seitenlängen 60 mm und



70 mm hat und jedes der Rechtecke S, T die Seitenlängen 15 mm und 50 mm. Daher ergeben sich für R, S, T wegen $60 \cdot 70 = 4200$ bzw. $15 \cdot 50 = 750$ die Flächeninhalte 4200 mm^2 bzw. 750 mm^2 bzw. 750 mm^2 . Somit hat wegen $4200 - 750 - 750 = 2700$ die schraffierte Fläche den Flächeninhalt $A = 2700 \text{ mm}^2$.

b) Die Seitenlängen von R sind $(3e + 2f)$ und h , die Seitenlängen von jedem der Rechtecke S, T sind f und g . Daher hat R den Flächeninhalt $(3e + 2f)h$, und jedes der Rechtecke S, T hat den Flächeninhalt $f \cdot g$. Also ist $A = (3e + 2f)h - 2fg$.

Klassenstufe 7

1. a) Wenn die Angaben für ein Rechteck zutreffen, dann ergibt sich der Umfang als Summe aus dem Vierfachen der kleineren Seitenlänge und dem Doppelten von 75 m. Das Vierfache der kleineren Seitenlänge beträgt somit $650 \text{ m} - 150 \text{ m} = 500 \text{ m}$, die kleinere Seitenlänge also 125 m, die größere 200 m.

Der Flächeninhalt eines derartigen Rechtecks beträgt $125 \cdot 200 \text{ m}^2 = 25000 \text{ m}^2 = 2,5 \text{ ha}$.

b) Parallel zur größeren Rechteckseite können nach den Bedingungen der Aufgabe $\frac{125}{5} - 1 = 24$ und parallel zur kleineren

$\frac{200}{5} - 1 = 39$ Bäume gepflanzt werden. Die gesuchte Anzahl der Bäume beträgt somit $24 \cdot 39 = 936$.

2. Ist am 1. Januar 1975 das jüngste Kind x Jahre alt, so ist das zweite $2x$ Jahre, das älteste $4x$ Jahre, die Mutter $14x$ Jahre, der Vater $15x$ Jahre und der Großvater $(64 + 4x)$ Jahre alt. Es gilt nun laut Aufgabe

$$x + 2x + 4x + 14x + 15x = 4x + 64,$$

daraus folgt $32x = 64$, also $x = 2$.

Das jüngste Kind war am 1. Januar 1975 somit 2 Jahre alt, das zweite 4 Jahre, das älteste 8 Jahre, die Mutter 28 Jahre, der Vater 30 Jahre und der Großvater 72 Jahre alt.

3. Die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A, B, C seien α, β, γ . Da $\triangle ABC$ bei A spitzwinklig ist, bilden A, D, C ein bei D rechtwinkliges Dreieck mit α als Größe des Innenwinkels bei A .

Daher gilt $\angle ACD = 90^\circ - \alpha$.

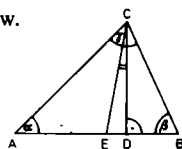
Da D und E auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen, gilt folglich

$$\angle DCE = |\angle ACD - \angle ACE| = |90^\circ - \alpha - \frac{\gamma}{2}|,$$

wegen

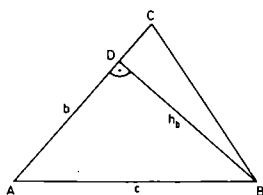
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ \text{ also } \angle DCE = \frac{1}{2} |\beta - \alpha|,$$

w. z. b. w.



Bemerkung: Wie vorstehende Lösung zeigt, braucht man nur die Voraussetzung, daß $\angle CAB$ spitz ist. Da sich dies eventuell durch Vertauschung der Bezeichnung von A mit B (die an Voraussetzungen und Behauptung sonst nichts ändert) stets erreichen läßt, gilt der Satz sogar für beliebige Dreiecke.

4. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



Der Fußpunkt des von B auf die Gerade durch A und C gefällten Lotes sei D . Dann gilt $\overline{BA} = c$, $\overline{BD} = h_b$, und es ist $A \neq D$, wegen $c \neq h_b$ ist folglich ABD ein Dreieck. In ihm sind c, h_b Seitenlängen, und es enthält den rechten Winkel $\angle BDA$. Punkt C liegt erstens auf der Geraden durch A und D und zweitens auf dem Kreis um A mit b .

Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Wir konstruieren das Teildreieck ABD aus $\overline{AB} = c$, $\overline{BD} = h_b$ und dem rechten Winkel $\angle BDA$.

(2) Wir zeichnen die Gerade durch D und A .

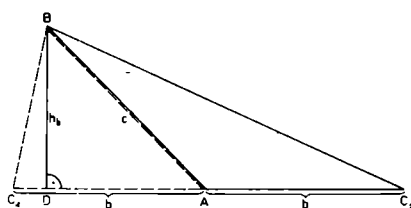
(3) Wir zeichnen den Kreis um A mit b . Schneidet er die Gerade durch D und A , so sei C einer der Schnittpunkte.

(III) Jedes so erhaltene Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion ist $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BD} = h_b$ und BD die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe.

(IV) Wegen $h_b < c$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach (ssw) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegenüberliegt.

Konstruktionsschritt (2) ist stets eindeutig ausführbar, da sich wegen $h_b < c$ bei (1) $D \neq A$ ergeben hatte.



Schließlich ergibt (3) stets zwei verschiedene Punkte C_1 und C_2 . Da nun der wegen $h_b < c$ spitze Winkel $\angle DAB$ in dem einen der beiden Dreiecke ABC_1, ABC_2 als Innenwinkel in dem anderen als Außenwinkel bei A auftritt, so ist das eine dieser Dreiecke bei A spitzwinklig, das andere bei A stumpfwinklig; folglich sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent. Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck mithin nicht, auch nicht bis auf Kongruenz, eindeutig bestimmt.

Klassenstufe 8

1. Die von der Gesamtmasse von 2000 g genommenen 12%, das sind $\frac{12}{100} \cdot 2000 \text{ g} = 240 \text{ g}$, sind laut Aufgabe genau 20%, d. h. ein Fünftel der Masse des Wassers.

Wegen $240 \text{ g} : 5 = 1200 \text{ g}$ enthielt das Gefäß also 1200 g Wasser. Mithin beträgt die Masse des leeren Gefäßes 800 g.

2. Wenn bereits das Doppelte der kleinsten der sechs Zahlen $(n+1)$ die größte $(n+6)$ übertrifft, also $2(n+1) > (n+6)$ und mithin $n > 4$ gilt, kann aus den sechs Zahlen sicher kein geordnetes Paar mit den geforderten Teilbarkeitseigenschaften gefunden werden. Da aus $n > 4$ stets auch $2(n+1) > (n+6)$ folgt, kann n höchstens gleich 1, 2, 3, 4 sein. Analog stellt man fest, daß höchstens für $n=1$ eine der sechs Zahlen das Dreifache einer anderen sein kann und daß das Vierfache wegen $4(n+1) \geq (n+7) > (n+6)$ nicht auftreten kann. Aus analogen Gründen sind höhere Vielfache erst recht nicht möglich.

Es sei $n=1$. Unter den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7 gilt $2 \mid 4$, $2 \mid 6$ und $3 \mid 6$. Weitere Teilbarkeitsbeziehungen treten nicht auf. Folglich erhalten wir in diesem Fall genau die Zahlenpaare (2; 4), (2; 6), (3; 6).

Es sei $n=2$. Unter den Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8 treten genau die Teilbarkeitsbeziehungen $3 \mid 6$ und $4 \mid 8$ auf. Man erhält mithin genau die Paare (3; 6), (4; 8).

Es sei $n=3$. Dann erhält man aus den Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9 genau das Paar (4; 8).

Es sei $n=4$. Aus den Zahlen 5, 6, 7, 8, 9, 10 erhält man genau das Paar (5; 10). Damit sind alle gesuchten Paare ermittelt.

3. Der Winkel $\angle AMD$ ist Außenwinkel des Dreiecks ACM .

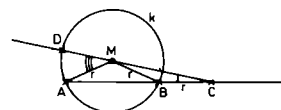
Folglich gilt: $\angle AMD = \angle ACM + \angle MAC$.

Nun gilt: $AM = BM = BC = r$.

Folglich sind die Dreiecke ABM und BMC gleichschenkelig. Daher gilt:

$$(\angle MAC =) \angle MAB = \angle MBA \quad (1)$$

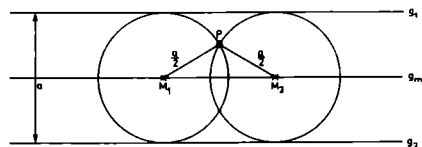
$$\text{und } \angle BMC = \angle BCM (= \angle ACM). \quad (2)$$



Der Winkel $\angle MBA$ ist Außenwinkel des Dreiecks BMC und wegen (2) daher doppelt so groß wie $\angle ACM$.

Folglich ist wegen (1) $\angle MAC$ doppelt so groß wie $\angle ACM$ und mithin $\angle AMD$ dreimal so groß wie $\angle ACM$, w. z. b. w.

4. (I) Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



Sein Mittelpunkt M liegt erstens auf der Mittelparallelen g_M zu g_1 und g_2 und zweitens (da sein Radius folglich $\frac{a}{2}$ beträgt) auf dem Kreis um P mit dem Radius $\frac{a}{2}$.

Daher entspricht ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion gewonnen werden kann:

(II) (1) Wir konstruieren die Mittelparallele g_M zu g_1 und g_2 .

(2) Wir zeichnen um P einen Kreis mit $\frac{a}{2}$, schneidet er g_M , so sei M einer der Schnittpunkte.

(3) Wir zeichnen um M den Kreis k mit $\frac{a}{2}$.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion beträgt der Abstand von M zu g_1 und g_2 jeweils $\frac{a}{2}$, g_1 und g_2 sind somit Tangenten an k . Ferner gilt auch nach Konstruktion $\overline{MP} = \frac{a}{2}$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Da P zwischen g_1 und g_2 liegt,

ist der Abstand von P zu g_M kleiner als $\frac{a}{2}$. Also existieren stets genau zwei Schnittpunkte von g_M mit dem Kreis um P mit $\frac{a}{2}$.

Es entstehen somit stets zwei Kreise, die den geforderten Bedingungen genügen.

Klassenstufe 9

1. Laut Aufgabenstellung sind alle Paare (a, b) mit a, b natürlich und $a > b$ zu ermitteln, für die

$$a^2 - b^2 = a + b \text{ gilt.}$$

Nun ist nach einer binomischen Formel $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, und daher ist die geforderte Eigenschaft gleichwertig mit $(a+b)(a-b) = a+b$. Wegen a, b natürlich und $a > b$, ist $a+b \neq 0$. Also ist die genannte Eigenschaft weiterhin gleichwertig mit $a-b=1$, d. h. die gestellte Bedingung wird genau von den Paaren (a, b) natürlicher Zahlen erfüllt, für die a um 1 größer ist als b .

2. a) In dem Feld aD kann nur noch die Ziffer 4 eingetragen werden, da die Zeile a bereits die Ziffern 1, 2, 3 enthält und in Spalte D die 5 steht. Gleiche Überlegungen führen zu aE : 5.

Nun darf z. B. in eE nur noch 2 oder 3 stehen, da in der Spalte E bereits 5 und 4 sowie in den Diagonalen $aA + eE$ die 1 stehen.

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b					
c				5	
d					4
e					

Sei eE : 2, dann folgt eindeutig in dieser Reihenfolge:

dD : 3; cC : 4; bB : 5; eA : 3; cA : 2; bA : 4; dA : 5; eD : 1; bD : 2; bC : 1; eC : 5; dC : 2; eB : 4; dB : 1; cB : 3; cE : 1; bE : 3.

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5	1	2	3
c	2	3	4	5	1
d	5	1	2	3	4
e	3	4	5	1	2

Die Kontrolle aller Zeilen, Spalten und Diagonalen zeigt, daß die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

b) Sei eE : 3, dann folgt eindeutig in dieser Reihenfolge:

dD : 2; cC : 4; eD : 1; bD : 3; dB : 1; dC : 5; dA : 3; cA : 2.

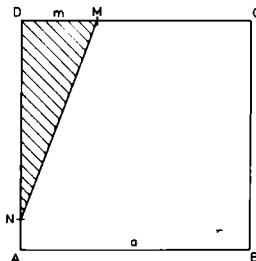
	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b				3	
c	2		4	5	
d	3	1	5	2	4
e				1	3

Das Feld eA kann nun nach den Regeln der Aufgabe nicht mehr besetzt werden, da die schon besetzten Felder in der Spalte A und in der Diagonalen $aE + eA$ bereits alle Ziffern

1, 2, 3, 4, 5 enthalten. Also ist durch die Besetzung eA : 3 keine weitere Eintragung zu erhalten; es gibt somit genau die in a) gefundene den Bedingungen entsprechende Eintragung.

3. Für jeden Punkt N auf dem Strahl aus D durch A sei $\overline{DN} = n$ gesetzt. Dann hat das Dreieck MND wegen $DN \perp DM$ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}mn$. Dieser verhält sich genau dann zum Flächeninhalt a^2 von $ABCD$ wie 1:7, wenn $\frac{1}{2}mn = \frac{1}{7}a^2$, d. h. $n = \frac{2a^2}{7m}$ gilt.

Ferner liegt N genau dann auf AD , wenn $n \leq a$ gilt.



Daher existiert zu gegebenem m genau dann ein Punkt N auf AD mit der verlangten Eigenschaft, wenn

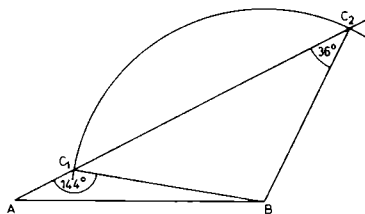
$$\frac{2a^2}{7m} \leq a, \text{ d. h. } m \geq \frac{2}{7}a \text{ gilt.}$$

Zu jedem solchen m hat dann jeweils genau der Punkt N auf AD mit

$$\overline{DN} = \frac{2a^2}{7m}$$

die verlangte Eigenschaft.

4. Da beide Dreiecke den gestellten Bedingungen genügen, muß $\angle BAC_1 = \angle BAC_2$ gelten. Daher lassen sich die Dreiecke so legen, daß C_1 und C_2 auf demselben von A ausgehenden Strahl liegen. Ferner gilt $\overline{BC_1} = \overline{BC_2}$, also ist das Dreieck BC_1C_2 gleichschenkelig.



Folglich gilt auch $\angle C_2C_1B = \angle C_1C_2B$ als Basiswinkel. Geht man von diesen (folglich spitzen) Winkeln zu $\angle AC_1B$, $\angle AC_2B$ über, so bedeutet dies bei demjenigen der beiden Scheitel C_1, C_2 , der zwischen dem anderen und A liegt, den Übergang zum Nebenwinkel (des spitzen Winkels), also eine Vergrößerung, bei dem anderen keine Veränderung. Da nach Voraussetzung $\angle AC_1B$ größer als $\angle AC_2B$ ist, liegt somit C_1 zwischen C_2 und A , und es gilt $\angle AC_1B + \angle C_2C_1B = 180^\circ$ (Nebenwinkel), also $\angle AC_1B + \angle AC_2B = 180^\circ$.

Da $\angle AC_1B = 4 \cdot \angle AC_2B$ ist, folgt daraus $5 \cdot \angle AC_2B = 180^\circ$ und somit $\angle AC_2B = 36^\circ$ sowie $\angle AC_1B = 144^\circ$. Der Winkel $\angle AC_1B$ hat eine Größe von 144° .

Klassenstufe 10

1. 1. Lösungsweg: Wäre A Zweiter, so nach (2) B Erster im Widerspruch zu (1). Wäre A Dritter, so nach (1) C Erster im Widerspruch zu (3). Also wurde A Erster. Folglich wurde nach (4) B Zweiter und mithin C Dritter.

Der Aufgabenstellung kann entnommen werden, daß alle Bedingungen erfüllt werden können; also werden sie bei diesem (einzig als möglich verbliebenen) Einlauf erfüllt.

(Man kann auch wie im folgenden 2. Lösungsweg direkt bestätigen, daß bei dem Einlauf ABC , und nur bei diesem, alle Aussagen (1) bis (4) wahr sind.)

2. Lösungsweg: Da A, B, C die ersten drei Plätze belegten, sind genau folgende sechs Fälle möglich:

Widerspruch zur Aussage

- | | | | | |
|----|---|---|---|----------|
| a) | A | B | C | ./. |
| b) | A | C | B | (4) |
| c) | B | A | C | (1) |
| d) | B | C | A | (1), (4) |
| e) | C | A | B | (2) |
| f) | C | B | A | (3) |

In fünf dieser Fälle entsteht ein Widerspruch zu wenigstens einer Aussage. Als einziger allen Bedingungen genügender Fall verbleibt a) mit der Reihenfolge ABC .

2. 1. Lösungsweg: Nimmt man an, anfangs seien im ersten Kästchen x , im zweiten y und im dritten z Kugeln, dann sind nach den drei Verteilungen folgende Anzahlen von Kugeln in den Kästchen:

Kästchen	1	2
anfangs	x	y
1. Verteil.	$x - y - z$	$y + y$
2. Verteil.	$2(x - y - z)$	$2y - (x - y - z)$
3. Verteil.	$4(x - y - z)$	$[2(2y - (x - y - z) - 2z)] - 2z$

Kästchen	3
anfangs	z
1. Verteil.	$z + z$
2. Verteil.	$4z$
3. Verteil.	$4z - 2(x - y - z) - (3y - x - z)$

Daher ist die Bedingung der Aufgabe nur erfüllt, wenn

- (1) $4(x - y - z) = 64$,
- (2) $-2x + 6y - 2z = 64$ und
- (3) $-x - y + 7z = 64$ gilt.

Hieraus folgt

$$x = 104, y = 56, z = 32.$$

Das erste Kästchen enthielt ursprünglich 104 Kugeln, das zweite 56 und das dritte 32 Kugeln.

2. Lösungsweg: Nach der 3. Verteilung enthielt jedes der Kästchen 64 Kugeln. Da bei dieser Verteilung die Anzahl der Kugeln des 1. und 2. Kästchens verdoppelt wurde, enthielten diese nach der 2. Verteilung je 32 Kugeln, das dritte somit 128 Kugeln.

Da bei der 2. Verteilung die Anzahl der Kugeln des 1. und 3. Kästchens verdoppelt wurde, enthielten diese nach der 1. Verteilung 16 bzw. 64 Kugeln, das zweite somit zu diesem Zeitpunkt 112 Kugeln.

Da bei der 1. Verteilung die Anzahl der Kugeln des 2. und 3. Kästchens verdoppelt wurde, enthielten diese somit anfangs 56 bzw. 32 und das erste somit 104 Kugeln.

3. Es sei o.B.d.A. die Seitenlänge eines „kleinsten Quadrates“ des Gitternetzes mit 1 angenommen. Dann haben die Seiten der Dreiecke (als Rechteckdiagonalen bzw. -seiten) die folgenden Längen:

Dreieck 1: $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; 5

Dreieck 2: $\sqrt{13}$; $\sqrt{17}$; $5\sqrt{2}$

Dreieck 3: $\sqrt{2}$; 2; $\sqrt{10}$

Dreieck 4: 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$

Folglich sind die Dreiecke 1 und 4 ähnlich; denn es ist

$$\sqrt{5}:1 = \sqrt{10}:\sqrt{2} = 5:\sqrt{5}$$

Außerdem sind die Dreiecke 1 und 3 ähnlich; denn es ist

$$\sqrt{5}:\sqrt{2} = \sqrt{10}:2 = 5:\sqrt{10}$$

Mithin sind die Dreiecke 1, 3, 4 untereinander ähnlich. Wären die Dreiecke 2 und 4 ähnlich, so müßte wegen

$$\sqrt{13} < \sqrt{17} < 5\sqrt{2} \text{ und } 1 < \sqrt{2} < \sqrt{5}$$

die Gleichung

$$\sqrt{13}:1 = \sqrt{17}:2 \text{ gelten,}$$

was nicht der Fall ist. Also sind die Dreiecke 2 und 4 nicht ähnlich. Folglich sind die Dreiecke 1, 3, 4 sämtliche untereinander ähnlichen der Dreiecke 1, 2, 3, 4.

4. Es sei (a, b) ein Paar positiver reeller Zahlen, für das (*) gilt. Dann gilt

$$(a-b)^2 \geq 0, \text{ also } a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab,$$

$$(a+b)(a+b) \geq 4ab, \text{ und wegen } ab > 0$$

daher

$$(a+b) \frac{(a+b)}{ab} \geq 4 \text{ bzw.}$$

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4, \text{ woraus wegen (*)}$$

die Behauptung (**) folgt.

Das Gleichheitszeichen gilt genau für $a-b=0$, d. h. genau für $a=b$, was zusammen mit (*) genau für $a=b=1$ zutrifft.

DEUTSCHLANDSYMPIADE

Klassenstufe 7

1. Angenommen, (1) wäre wahr. Dann hätte die Mannschaft der Klasse 8a den zweiten Platz belegt, also wäre (3) falsch und somit (4) wahr. Das steht im Widerspruch zur Annahme. Deshalb ist (1) falsch und somit (2) wahr, d. h., die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz. Daraus folgt, daß (6) falsch und somit (5) wahr ist. Den zweiten Platz belegte mithin die Mannschaft der Klasse 7a. Daraus folgt, daß die Aussage (4) falsch und somit (3) wahr ist, d. h., den ersten Platz belegte die Mannschaft der Klasse 8a.

Für den vierten Platz verbleibt dann nur noch die Mannschaft der Klasse 7b.

Daher kann nur die folgende Verteilung den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:

Den ersten Platz belegte die Mannschaft der Klasse 8a, den zweiten die Mannschaft der Klasse 7a, den dritten die Mannschaft der Klasse 8b und den vierten die Mannschaft der Klasse 7b.

Diese Verteilung entspricht in der Tat den Bedingungen; denn bei ihr sind die Aussagen (2), (3), (5) wahr und (1), (4), (6) falsch.

2. Die drei Winkel mit dem Scheitelpunkt C bilden zusammen einen gestreckten Winkel. Folglich gilt

$$2\gamma + 70^\circ = 180^\circ, \text{ woraus man}$$

$$2\gamma = 110^\circ \text{ bzw.}$$

$$\gamma = 55^\circ \text{ erhält.}$$

Der Winkel $\angle BCF$ ist Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABC. Also gilt nach dem Außenwinkelsatz

$$\gamma = 2\alpha \text{ bzw. } \alpha = \frac{\gamma}{2},$$

woraus man $\alpha = 27,5^\circ$ erhält.

Nun gilt nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf $\triangle BDC$:

$$\alpha + \beta + \delta = 180^\circ, \text{ also}$$

$$27,5^\circ + \beta + 70^\circ = 180^\circ \text{ und mithin}$$

$$\beta = 82,5^\circ.$$

Die drei Winkel mit dem Scheitelpunkt D bilden ebenfalls einen gestreckten Winkel. Also gilt

$$2\beta + \phi = 180^\circ \text{ und folglich}$$

$$165^\circ + \phi = 180^\circ \text{ bzw.}$$

$$\phi = 15^\circ.$$

Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf $\triangle ECD$ gilt:

$$\eta + \gamma + \phi = 180^\circ \text{ bzw.}$$

$$\eta + 55^\circ + 15^\circ = 180^\circ, \text{ also}$$

$$\eta = 110^\circ$$

und damit nach dem Satz über Nebenwinkel $\varepsilon = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

Damit sind die Winkelgrößen $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta$ und ϕ ermittelt.

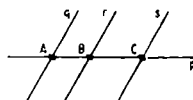
3. Behauptung: Es gibt keine 5 Geraden und 3 Punkte, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Beweis: Angenommen, es gäbe 5 derartige Geraden p, q, r, s, t und 3 derartige Punkte A, B, C . Dann lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

a) Die Punkte A, B, C liegen auf ein und derselben Geraden (etwa p).

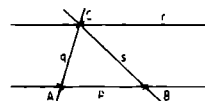
b) Die Punkte A, B, C liegen nicht auf ein und derselben Geraden.

Im Falle a) geht laut Aufgabe noch (mindestens je eine weitere der genannten Geraden durch A bzw. B bzw. C . Da kein weiterer Schnittpunkt auftreten soll, müssen diese 3 Geraden (etwa q, r, s) zueinander parallel sein.



Jede weitere (fünfte) Gerade durch einen der Punkte A, B, C ist nun zu q, r , und s nicht parallel und erzeugt daher (mindestens) einen weiteren (vierten) Schnittpunkt, entgegen der Annahme.

Im Falle b) können entweder die A, B, C enthaltenden Geraden (etwa p, q, r) jede genau einen dieser Punkte enthalten und zueinander parallel sein, dann liefert bereits jede vierte Gerade, die durch einen der Punkte A, B, C verläuft, (mindestens) einen weiteren Schnittpunkt, da sie zu p, q, r nicht parallel ist, oder (mindestens) eine der Geraden (etwa p) enthält zwei der Punkte A, B, C (etwa A, B). Dann kann von den (mindestens) zwei Geraden, die sich im dritten der Punkte (c) schneiden, nur die eine (q) außer durch C auch noch durch einen der Punkte A, B (etwa A) verlaufen und die andere (r) entweder zu p parallel sein oder durch C und B verlaufen, da anderenfalls ein weiterer Schnittpunkt entstünde. Das heißt, es lassen sich durch C höchstens drei Geraden (q, r, s) unter den Bedingungen der Aufgabe legen, wenn p durch A und B verläuft. Jede weitere Gerade (t) durch einen der Punkte A, B ist stets zu (mindestens) drei der Geraden p, q, r, s nicht parallel und liefert daher (mindestens) einen weiteren Schnittpunkt, entgegen der Annahme (siehe Bild). Damit ist die Behauptung bewiesen.



4. Ist v die auf der Strecke übliche Durchschnittsgeschwindigkeit, so fährt der Zug mit der Geschwindigkeit $\frac{120}{100}v = \frac{6}{5}v$.

Ist s die Länge der Strecke von B bis zu der Stelle, an der der Rückstand aufgeholt ist, und ist t die Fahrzeit des Zuges von B bis zu dieser Stelle, so ist einerseits

$$s = \frac{6}{5}v \cdot t,$$

andererseits die für die genannte Strecke übliche Fahrzeit (in Minuten)

$$t + 15, \text{ also } s = v \cdot (t + 15).$$

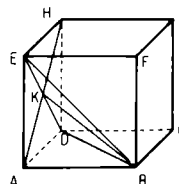
Daraus folgt

$$\frac{6}{5}vt = vt + 15v, \text{ also } \frac{1}{5}vt = 15v,$$

$$\text{also } t = 5 \cdot 15 = 75.$$

Der Rückstand ist mithin in 75 min aufgeholt.

5. Das Dreieck EBD ist gleichseitig; denn seine Seiten sind Diagonalen kongruenter Quadrate. Da in jedem Quadrat die Diagonalen



einander halbieren, ist K Mittelpunkt der Seite ED und folglich BK Seitenhalbierende im Dreieck EBD . Im gleichseitigen Dreieck fallen Höhe und Seitenhalbierende, die von ein und derselben Ecke ausgehen, zusammen. Somit gilt tatsächlich

$$DE \perp BK, \text{ w.z.b.w.}$$

6. Wegen $z > 0$ gilt auch $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, so ist ihre Quersumme durch 9 teilbar. Daher sind alle Zahlen a , b und c dieser Aufgabe durch 9 teilbar.

Da jede der 1000000000 Ziffern von z höchstens 9 beträgt, ist

$$a \leq 9 \cdot 1000000000 = 9000000000,$$

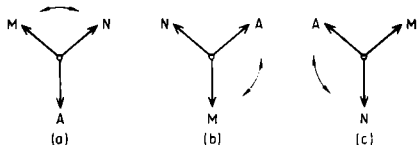
also ist a höchstens zehnstellig.

Deshalb ist $b < 9 \cdot 10 = 90$, also ist b eine der Zahlen 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27, 18, 9.

Die Quersumme jeder dieser 9 Zahlen ist 9. Daher gilt $c = 9$ für alle zu betrachtenden Zahlen z .

Klassenstufe 8

1. Nach den Erklärungen des Ortskundigen würden alle drei Richtungsschilder auf den richtigen Weg weisen, wenn die beiden falschen Schilder miteinander ausgetauscht würden, da genau zwei der drei Schilder falsch und folglich genau eines richtig beschriftet waren. Weil der Wanderer aus Altdorf kam, konnte er leicht feststellen, ob das Richtungsschild, das nach Altdorf wies, richtig oder falsch beschriftet war. Wenn es richtig beschriftet war (a), mußten die beiden anderen falsch sein, und er ging den Weg, auf welchen das Schild „Mittendorf“ wies.



Wenn es aber falsch beschriftet war (b), (c), konnte er sich dieses Schild mit dem Richtungsschild „Altdorf“ vertauscht denken, und dann wiesen alle drei Schilder – auch das nach Neudorf – in die richtige Richtung.

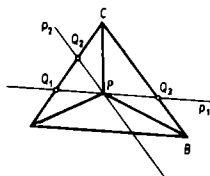
2. Jede Primzahl $p > 3$ ist weder durch 2 noch durch 3 teilbar und daher von keiner der Formen $6n = 2 \cdot 3n$, $6n + 2 = 2(3n + 1)$, $6n + 3 = 3(2n + 1)$, $6n + 4 = 2(3n + 2)$ mit ganzzahligem n . Da sie aber wie jede ganze Zahl von einer der Formen $6n + r$ mit ganzzahligen n , r und $0 \leq r \leq 5$ ist, gilt entweder $p = 6n + 1$ (n ganzzahlig) oder $p = 6m + 5 = 6(m + 1) - 1$ (m ganzzahlig), also mit $n = m + 1$

$p = 6n - 1$ (n ganzzahlig) (2)
Wäre $n \leq 0$ in (1) oder (2), so ergäbe sich der Widerspruch $p \leq 1$ bzw. $p \leq -1$. Daher ist in beiden Fällen die ganze Zahl $n \geq 1$, w.z.b.w.

3. I. Angenommen, P sei ein Punkt, wie er nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.

Dann hat das Dreieck ABP ein Drittel des Flächeninhalts von $\triangle ABC$ als Flächeninhalt. Sind h_c , h'_c die Längen der Höhen auf die Gerade durch A und B in den Dreiecken ABC , ABP , so ist folglich

$$h'_c = \frac{1}{3} h_c.$$



Also liegt P auf einer Parallelen zu AB im Abstand $\frac{1}{3} h_c$, und zwar, da P im Innern von

$\triangle ABC$ liegt, auf derjenigen Parallelen p_1 , die auf derselben Seite der Geraden durch A und B verläuft, auf der auch C liegt. Diese Parallele p_1 schneidet AC in einem Punkt Q_1 .

für den $\overline{AQ_1} = \frac{1}{3} \overline{AC}$ gilt. Ebenso liegt P auf der Parallele p_2 zu BC durch denjenigen

Punkt Q_2 auf AC , für den $\overline{CQ_2} = \frac{1}{3} \overline{AC}$ gilt.

Somit entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
II. (1) Man konstruiert die Punkte Q_1 und Q_2 auf AC , für die

$$\overline{AQ_1} = \overline{CQ_2} = \frac{1}{3} \overline{AC} \text{ gilt.}$$

(2) Man zieht die Parallele p_1 zu AB durch Q_1 und die Parallele p_2 zu BC durch Q_2 .

(3) Schneiden sich p_1 und p_2 , so sei P ihr Schnittpunkt.

III. Jeder so konstruierte Punkt P entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion liegt P ebenso wie Q_1 auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie C . Ferner liegt P ebenso wie Q_2 auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie A . Weiterhin schneidet p_1 die Strecke BC in einem Punkt Q_3 , der folglich auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B . Da Q_2 zwischen Q_1 und C liegt, liegt der Schnittpunkt P von p_1 mit p_2 zwischen Q_1 und Q_3 und damit ebenfalls auf derselben Seite der Geraden durch A und C wie B . Damit ist gezeigt, daß P im Innern von $\triangle ABC$ liegt. Sind ferner h_c , h'_c die Längen der Höhen auf die Gerade durch A und B in den Dreiecken ABC , ABP und sind h_a , h'_a die Längen der Höhen auf die Gerade durch B und C in den Dreiecken ABC , PBC , so ist nach

Konstruktion $h'_c = \frac{1}{3} h_c$, $h'_a = \frac{1}{3} h_a$. Daher ha-

ben die Dreiecke ABP und PBC je ein Drittel des Flächeninhalts von $\triangle ABC$ als Flächeninhalt. Dasselbe gilt auch für $\triangle ACP$; denn da P im Innern von $\triangle ABC$ liegt, setzt sich $\triangle ABC$ aus den Dreiecken ABP , PBC , ACP zusammen.

IV. Da die Seiten AB und BC des Dreiecks ABC nicht parallel zueinander und folglich

p_1 und p_2 ebenfalls nicht parallel zueinander sind, schneiden sie einander in genau einem Punkt. Somit existiert stets genau ein Punkt P , der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

4. Die Entfernung von A nach B betrage s km. Die Pioniergruppe hat beim Anstellen ihrer Überlegung bereits 3 km zurückgelegt, muß also noch $(s - 3)$ km bewältigen. Bei gleichförmiger Bewegung ist die Zeit der Quotient aus Weg und Geschwindigkeit. Bei beiden Geschwindigkeiten $v_1 = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ bzw.

$v_2 = 4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ist die Zeit t vom Beginn der Geschwindigkeitserhöhung bis zur Abfahrt des Zuges gleich. Diese Zeit in Stunden beträgt somit

$$t = \frac{s-3}{v_1} - \frac{2}{3} \text{ bzw. } t = \frac{s-3}{v_2} + \frac{3}{4}.$$

Nach Einsetzen der Werte für v_1 bzw. v_2 erhält man daraus

$$\frac{s-3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{s-3}{4} + \frac{3}{4} \text{ bzw.}$$

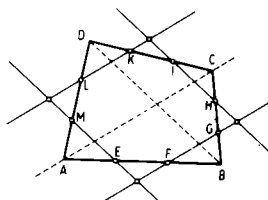
$$4s - 12 - 8 = 3s - 9 + 9, \text{ also } s = 20.$$

Die Länge des Weges von A nach B beträgt somit 20 km.

5. Nach Voraussetzung gilt:

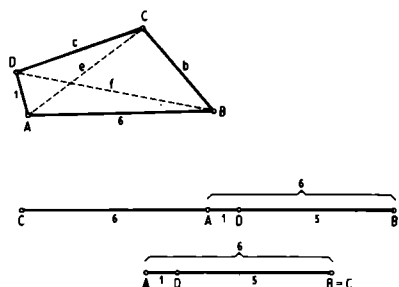
$$\overline{AM} : \overline{AD} = 1 : 3 = \overline{AE} : \overline{AB}.$$

Daraus folgt nach der Umkehrung des 1. Teiles des Strahlensatzes $ME \parallel DB$. Ebenso folgt $IH \parallel DB$, also gilt $ME \parallel IH$.



Da ferner $ABCD$ konvex ist, liegt C und folglich auch IH außerhalb von $\triangle ABD$, während ME innerhalb $\triangle ABD$ liegt. Also sind die Gerade durch M , E , und die Gerade durch I , H zwei voneinander verschiedene Parallelen. Die gleiche Aussage ergibt sich für die Gerade durch F , G und die Gerade durch L , K . Daraus folgt die Behauptung.

6. Es sei $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$. Nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABD , ABC und ACD , gilt (alle Längenangaben in Zentimeter)



$$\begin{aligned} 5 &< f < 7, \\ 6 - e &< b < 6 + e, \\ e - 1 &< c < e + 1. \end{aligned}$$

Aus (1) und $e + f = 11$ folgt

$$4 < e < 6.$$

Aus (2), (3) und (4) folgt

$$5 < b + c < 2e + 7 < 19.$$

Hieraus und aus $u = b + c + 7$ folgt

$$12 < u < 26.$$

Wie das Bild zeigt, treten diese Längen $x = 12$ (cm) und $y = 26$ (cm) im Entartungsfall tatsächlich auf, sind daher die gesuchten Längen. Daher gilt $12 \leq u \leq 26$.

Klassenstufe 9

1. Angenommen, drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen genügen den Bedingungen der Aufgabe. Dann gibt es eine positive ganze Zahl k so, daß diese drei Zahlen $2k-1$, $2k+1$ und $2k+3$ lauten. Für diese k gilt dann

$(2k-1)^2 + (2k+1)^2 + (2k+3)^2 = 1111x$ mit einer natürlichen Zahl x , für die $1 \leq x \leq 9$ gilt,

$$12k^2 + 12k + 11 = 1111x, \text{ also}$$

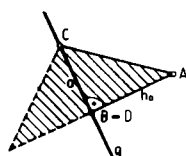
$$k^2 + k + 1 = \frac{1111x + 1}{12}.$$

Da $k^2 + k + 1$ eine ganze Zahl ist, muß wegen der Teilbarkeit durch 12 die Zahl $(1111x + 1)$ eine gerade und folglich $1111x$ eine ungerade Zahl sein. Mithin kommen für x nur die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 in Frage. Für diese hat $1111x + 1$ die Werte 1112, 3334, 5556, 7778, 10000, von denen nur 5556 durch 12 teilbar ist. Daher verbleibt nur die Möglichkeit $x = 5$.

Daraus erhält man $k^2 + k + 1 = 463$ mit den Lösungen $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1849}$, von denen

nur $k = 21$ positiv ist. Daher können nur die aus $k = 21$ als $2k-1$, $2k+1$, $2k+3$ entstehenden drei aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen 41, 43 und 45 den Bedingungen der Aufgabe genügen. Die Probe $41^2 + 43^2 + 45^2 = 1681 + 1849 + 2025 = 5555$ bestätigt, daß diese drei Zahlen die geforderten Bedingungen erfüllen.

2. Fall: 1) Der Fußpunkt D der Höhe h_a falle mit B oder C zusammen. Es entsteht ein gerader Kreiskegel mit dem Radius h_a und der Höhe a (siehe Bild):



$$V = \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot a$$

Fall 2) Der Fußpunkt D sei innerer Punkt der Strecke BC . Dann gilt:

$$V = V_{K_1} + V_{K_2},$$

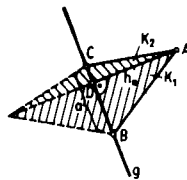
wobei K_1 der Kegel mit der Höhenlänge $\overline{BD}$

(1) und K_2 der Kegel mit der Höhenlänge $\overline{CD}$

(2) sein soll (siehe Bild).

(3)

(4)



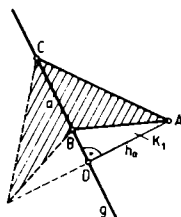
$$V = \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot \overline{BD} + \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot \overline{CD},$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot (\overline{BD} + \overline{CD}), \text{ und wegen}$$

$$\overline{BD} + \overline{CD} = a \text{ folgt}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot a.$$

Fall 3) Der Fußpunkt D liege außerhalb der Strecke BC (siehe Bild).



Dann gilt

$$V = V_2 - V_1,$$

wenn (o.B.d.A.) $\overline{DB} < \overline{DC}$ und K_2 der Kegel mit der Höhenlänge $\overline{DC}$ ist, also

$$V = \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot \overline{DC} - \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot \overline{DB},$$

und wegen $\overline{DC} - \overline{DB} = a$ folgt

$$V = \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot a.$$

Das Volumen V des durch Rotation der Dreiecksfläche entstandenen Körpers beträgt mithin in allen drei Fällen

$$V = \frac{1}{3} \pi a \cdot h_a^2.$$

3. I) Angenommen, eine Zahl x genügt der Forderung der Aufgabe. Dann ergibt sich: Aus D folgt: Gleichgültig, welche der beiden Aussagen wahr ist, x muß eine dreistellige natürliche Zahl sein. Aus C folgt: Wäre C_2 wahr, dann wäre auch C_1 wahr, was im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht. Also ist C_2 falsch und demnach C_1 wahr.

Aus C_1 und D folgt, daß x eine dreistellige natürliche Zahl ist, die mit der Ziffer 3 beginnt.

Wäre D_2 wahr, dann müßte x die Zahl 333 sein. Für diese Zahl wären jedoch beide Aussagen B_1 und B_2 falsch. Demnach muß D_2 falsch und D_1 wahr sein.

Wäre B_2 wahr, dann müßte gelten

$$x + 1 = 12n.$$

Dann würde daraus folgen

$$x + 1 - 6 = 12n - 6$$

$$x - 5 = 6(2n - 1),$$

d. h. auch Aussage B_1 wäre wahr.

Da das im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht, muß B_2 falsch und B_1 wahr sein. Ist nun $x - 5$ durch 6 teilbar, dann auch $x + 1$,

und da von zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von 6 genau eines durch 12 teilbar ist, $x + 1$ aber nicht durch 12 teilbar sein darf, muß $x - 5$ durch 12 teilbar sein.

Aus den bisherigen Aussagen folgt:

x ist eine Primzahl mit $300 < x < 399$.

Sie ist um 5 größer als ein Vielfaches von 12 und ungleich 389. Alle diese Bedingungen werden genau von den Zahlen 317 und 353 erfüllt.

Wäre nun A_2 wahr, dann käme nur die Zahl 353 in Frage, und damit wäre auch A_1 wahr. Folglich muß A_2 falsch sein, und damit entfällt 353.

Somit kann nur die Zahl 317 die in der Aufgabe genannte Forderung erfüllen.

II) Insbesondere ist hiermit gezeigt, daß außer der Zahl 317 keine Zahl der Forderung der Aufgabe genügt, d. h., es ist gezeigt, daß A_1 für die Zahl 317 wahr ist. Ferner sind B_1 , C_1 , D_1 für 317 wahr und A_2 , B_2 , C_2 , D_2 für 317 falsch. Daher genügt 317 tatsächlich der Forderung der Aufgabe.

4. Angenommen, es gäbe n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren erste die Zahl a und deren Summe die Zahl 60 ist. Dann gilt $a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + [(a + (n - 1))] = 60$.

Bei Verwendung der Summenformel für die natürlichen Zahlen erhält man $\frac{1}{2}n$

$(2a + n - 1) = 60$ und somit

$$a = \frac{60 - n + 1}{2} \text{ oder } a = \frac{120 - n^2 + n}{2n}.$$

Wäre $r \geq 12$, so wäre $n^2 - n = n(n - 1) = 12 \cdot 11 > 120$, also $a < 0$. Also verbleiben nur die Möglichkeiten $n = 2, \dots, 11$. Für diese hat $\frac{120 - n(n - 1)}{2n}$ die in der nachstehenden Tabelle angegebenen Werte:

n	2	3	4	5	6
$n(n-1)$	2	6	12	20	30
$120 - n(n-1)$	118	114	108	100	90
$2n$	4	6	8	10	12
$\frac{120 - n(n-1)}{2n}$	$\frac{59}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{10}{2}$	$\frac{15}{2}$

n	7	8	9	10	11
$n(n-1)$	42	56	72	90	110
$120 - n(n-1)$	78	64	48	30	10
$2n$	14	16	18	20	22
$\frac{120 - n(n-1)}{2n}$	$\frac{39}{7}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{11}$

Daher können nur die Darstellungen als Summen aus den in (1), (2), (3) genannten Zahlen die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

(1) 19, 20, 21

(2) 10, 11, 12, 13, 14

(3) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Die Probe bestätigt, daß die Summe dieser Zahlen jeweils 60 ist.

Hinweis: Das Probieren kann auch wesent-

lich eingeschränkt werden, wenn man beachtet, daß aus

$$\frac{1}{2}n(2a+n-1)=60, \text{ also}$$

$$n(2a+n-1)=120 \text{ folgt,}$$

daß $n \mid 120$ sein muß, und, falls n gerade ist, $8 \mid n$ gilt. Mithin bleiben nur noch $n=3, 5, 8$ übrig.

5. Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Dabei seien a, b und c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC bzw. AB und α, β und γ die Größen der Innenwinkel bei A, B und C .

Ferner schneide die Halbierende des Winkels $\angle ACB$ die Seite AB in D . Da jede Winkelhalbierende eines Dreiecks stets innerhalb des Dreiecks verläuft, liegt D zwischen A und B . Es wird nun (o.B.d.A.) behauptet:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

Beweis: Man verlängert BC über C hinaus um b bis zum Punkt E . Wegen $AC=EC$ ist das Dreieck ACE gleichschenkelig.

Also gilt

$\angle CAE = \angle CEA$ (als Basiswinkel im gleichschenkeligen Dreieck) und ferner

$\angle CAE + \angle CEA = \gamma$ (nach dem Außenwinkelsatz). Daraus folgt

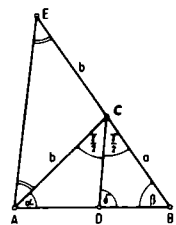
$$\angle CAE = \frac{\gamma}{2}$$

Die Winkel $\angle CAE$ und $\angle ACD$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Geraden und außerdem gleich groß. Folglich sind die Strecken CD und AE parallel.

Daher gilt nach einem der Strahlensätze

$$\frac{AD}{BD} = \frac{EC}{BC} \text{ und wegen } AC=EC=b$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}, \text{ w.z.b.w.}$$



6. Wegen $abc=1$ gilt $c = \frac{1}{ab}$.

Mithin gilt

$$\begin{aligned} & (1+a)(1+b)(1+c) \\ &= (1+a)(1+b)\left(1+\frac{1}{ab}\right) \\ &= (1+a+b+ab)\left(1+\frac{1}{ab}\right) \\ &= 1+a+b+ab+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+1 \\ &= 2+\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right). \quad (*) \end{aligned}$$

Nun gilt für alle $x > 0$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0, \text{ also}$$

$$x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0 \text{ bzw.}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (1), \text{ und das}$$

Gleichheitszeichen gilt genau für $x=1$.

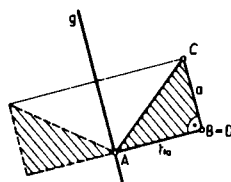
Wegen (1) folgt aus (*)

$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 2+2+2+2=8$, wobei das Gleichheitszeichen genau für $a=b=c=1$ gilt, w.z.b.w.

Klassenstufe 10

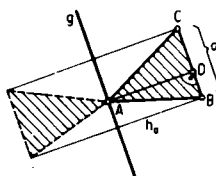
1. Für die Lage des Punktes D unterscheiden wir drei Fälle.

Fall 1: D fällt mit einem der Punkte B, C zusammen, o.B.d.A. mit dem Punkte B . Das Volumen V des Rotationskörpers ergibt sich dann als Differenz des Volumens V_z eines Zylinders mit dem Radius h_a und der Höhenlänge a und des Volumens V_k eines Kegels mit gleichem Radius und gleicher Höhenlänge (siehe Bild).



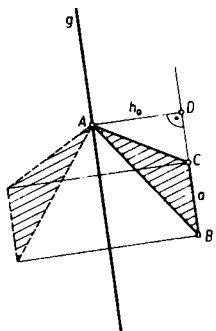
$$\begin{aligned} V &= V_z - V_k \\ &= \pi h_a^2 \cdot a - \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot a \\ &= \frac{2}{3} \pi h_a^2 \cdot a. \end{aligned}$$

Fall 2: D liegt zwischen B und C . Dann ist das Volumen V gleich der Differenz aus V_z und der Summe der Volumina V_{k_1} eines Kegels mit dem Radius h_a und der Höhenlänge BD und V_{k_2} eines Kegels mit gleichem Radius und der Höhenlänge DC , wobei $BD+DC=BC=a$ gilt (siehe Bild).



$$\begin{aligned} V &= V_z - (V_{k_1} + V_{k_2}) \\ &= \pi h_a^2 \cdot a - \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot (BD + DC) \\ &= \frac{2}{3} \pi h_a^2 \cdot a. \end{aligned}$$

Fall 3: D liegt auf der Geraden durch B und C außerhalb von BC , o.B.d.A. so, daß C zwischen B und D liegt.



Dann ist das Volumen V gleich der Differenz aus der Summe der Volumina V_z und V_{k_2} und dem Volumen V_{k_1} , wobei diesmal $BC=BD-CD=a$ gilt (siehe Bild).

$$\begin{aligned} V &= V_z + V_{k_2} - V_{k_1} \\ &= \pi h_a^2 \cdot a + \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot \overline{CD} - \frac{1}{3} \pi h_a^2 \cdot \overline{BD} \\ &= \pi h_a^2 \cdot \left[a + \frac{1}{3} (\overline{CD} - \overline{BD}) \right] \\ &= \pi h_a^2 \cdot \left(a - \frac{1}{3} a \right) = \frac{2}{3} \pi h_a^2 \cdot a. \end{aligned}$$

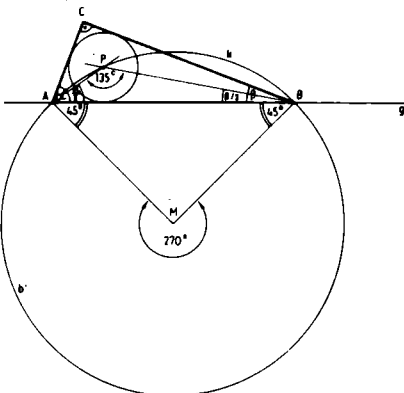
Das Volumen V des betrachteten Rotationskörpers beträgt also in jedem Falle

$$V = \frac{2}{3} \pi a \cdot h_a^2.$$

2. I. Angenommen, P sei der Inkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB . Dann liegt P nicht auf der Geraden g durch A, B . Sind α, β die Innenwinkelgrößen bei A bzw. B im Dreieck

ABC , so ist $\alpha + \beta = 90^\circ$ und $\angle BAP = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ABP = \frac{\beta}{2}$, also $\angle BAP + \angle ABP = 45^\circ$ und

daher $\angle APB = 135^\circ$. Ist M der Mittelpunkt des Umkreises k von $\triangle ABP$, so hat folglich derjenige Zentriwinkel, der zu dem P nicht enthaltenden Bogen $b' = \widehat{AB}$ von k gehört, die Größe 270° . Also ist $\triangle ABM$ ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB ; folglich gilt $\angle BAM = \angle ABM = 45^\circ$, und da zu b' ein überstumpfer Zentriwinkel gehört, liegt M auf derselben Seite von g wie b' , d. h. nicht auf derselben Seite von g wie P (siehe Bild).



Daher kann ein Punkt P nur dann der gesuchten Menge V angehören, wenn diese durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man zeichnet die Gerade g durch A und B . Sie teilt die Ebene in zwei Halbebenen ε_1 und ε_2 .

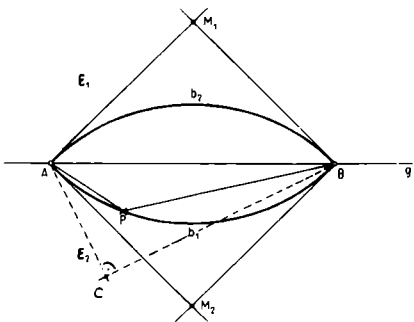
(2) Man trägt an AB in A und B je einen Winkel von 45° so an, daß dessen freie Schenkel in ε_1 verlaufen und sich in M_1 schneiden.

(3) Man zeichnet den Kreis um M_1 mit dem Radius $\overline{M_1A} = \overline{M_1B}$. Der in ε_2 liegende Bogen dieses Kreises sei b_1 genannt.

(4) Man trägt an AB in A und B je einen Winkel von 45° so an, daß dessen freie Schenkel in ε_2 verlaufen und sich in M_2 schneiden.

(5) Man zeichnet den Kreis um M_2 mit dem Radius $\overline{M_2A} = \overline{M_2B}$. Der in ε_1 liegende Bogen dieses Kreises sei b_2 genannt.

(6) Die Vereinigungsmenge der beiden Kreisbögen b_1 und b_2 mit Ausnahme der Punkte A und B sei mit V bezeichnet.



III. Jeder Punkt P der so konstruierten Menge V gehört der gesuchten Menge an.

Beweis: Nach Konstruktion sind die Dreiecke ABM_1 und ABM_2 gleichschenkelig-rechtwinklig mit der Hypotenuse AB .

Liegt $P (\neq A, B)$ auf b_1 , so ist $\angle APB$ ein in dem Kreis k_1 um M_1 mit $M_1A = M_1B$ liegender Peripheriewinkel; und der Zentriwinkel, der zu dem P nicht enthaltenden, d. h. in ε_1 gelegenen Bogen $b'_1 = \widehat{AB}$ von k_1 gehört, ist überstumpft, da auch M_1 in ε_1 liegt. Somit hat dieser Zentriwinkel die Größe 270° , folglich gilt $\angle APB = 135^\circ$, also

$\angle BAP + \angle ABP = 45^\circ$. Trägt man an AB in A und B je einen Winkel der Größe $2 \cdot \angle BAP$ bzw. $2 \cdot \angle ABP$ so an, daß die freien Schenkel in ε_2 verlaufen, so schneiden sich diese folglich in einem Punkt C , für den

$\angle BAC + \angle ABC = 90^\circ$, also $\angle ACB = 90^\circ$ gilt. In dem entstandenen rechtwinkligen Dreieck ABC mit AB als Hypotenuse ist P der Schnittpunkt zweier Innenwinkelhalbierenden, also der Inkreismittelpunkt.

Daher gehört P der gesuchten Menge an.

Analog beweist man, daß jeder Punkt $P (\neq A, B)$ auf b_2 der gesuchten Menge angehört.

IV. Alle Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar.

3. (I) Angenommen, für Zahlen a und b seien die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann hat die Gleichung $(1+a^2x^2):x^2=b$ mindestens eine Lösung x . Daraus folgt $b \neq 0$; denn für keine Zahl a hat die Gleichung $(1+a^2x^2):x^2=0$ eine Lösung. Da ferner beide in der Aufgabe angegebenen Gleichungen mindestens eine gemeinsame Lösung x haben, so gilt für diese auch die nach Division der zweiten durch die erste entstehende Gleichung $x^4=1$. Hieraus folgt $x^2=1$, also $1+a^2=b$. Somit können die Bedingungen der Aufgabe nur erfüllt sein, wenn $b=1+a^2$ ist.

(II) Zum Nachweis, daß für $b=1+a^2$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, ermitteln wir zunächst die Lösungsmenge der Gleichung

$$(1+a^2x^2):x^2=1+a^2:$$

Angenommen, für eine Zahl x gelte diese Gleichung, dann folgt $1+a^2x^2=x^2+a^2x^2$, also $x^2=1$. Daher können nur die Zahlen 1 und -1 Lösung sein. Sie sind dies auch; denn es gilt

$$(1+a^2 \cdot 1^2):1^2=1+a^2 \text{ und}$$

$$[(1+a^2 \cdot (-1)^2):(-1)^2=1+a^2.$$

Also hat $(1+a^2x^2):x^2=1+a^2$ die Lösungsmenge $\{1, -1\}$. Ferner ermitteln wir die Lösungsmenge der Gleichung

$$(1+a^2x^2):x^2=1+a^2:$$

Angenommen, für eine Zahl x gelte diese Gleichung. Dann folgt

$$x^2+a^2x^4-1-a^2=0, \text{ also}$$

$$a^2(x^4-1)+x^2-1=0,$$

$$(x^2-1)[a^2(x^2+1)+1]=0 \text{ und somit wegen}$$

$$a^2(x^2+1)+1 \geq a^2 \cdot 1+1 \geq 1 > 0 \text{ weiter}$$

$$x^2-1=0.$$

Daher können nur die Zahlen 1 und -1 Lösung sein. Sie sind dies auch; denn es gilt

$$(1+a^2 \cdot 1^2):1^2=1+a^2 \text{ und}$$

$$[(1+a^2 \cdot (-1)^2):(-1)^2=1+a^2. \text{ Also hat}$$

auch $(1+a^2x^2):x^2=1+a^2$ die Lösungsmenge $\{1, -1\}$.

Daher sind die Bedingungen der Aufgabe genau für $1+a^2=b$ erfüllt, und die gesuchte Lösungsmenge ist $\{1, -1\}$.

4. Aus der Voraussetzung folgt:

$$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{HA'}:\overline{HC'} \quad (1)$$

Nach dem Hauptähnlichkeitssatz gilt

$$\triangle AC'H \sim \triangle HA'C \text{ (Scheitelwinkel, rechte Winkel) und}$$

$$\triangle ABA' \sim \triangle CBC' \text{ (gemeinsamer Winkel, rechte Winkel)}$$

$$\text{Daraus folgt } \overline{AH}:\overline{CH}=\overline{HC'}:\overline{HA'} \quad (2)$$

$$\text{und } \overline{AB}:\overline{CB}=\overline{AA'}:\overline{CC'} \quad (3)$$

Nach (1) und (2) ergibt sich

$$\overline{HA'}:\overline{HC'}=\overline{HC'}:\overline{HA'} \quad (1)$$

$$\text{und damit } \overline{HC'}=\overline{HA'} \quad (2)$$

Unter Berücksichtigung von (2) folgt daraus

$$\overline{CH}=\overline{AH}. \quad (3)$$

Durch Addition erhält man daraus

$$\overline{CC'}=\overline{AA'}. \quad (4)$$

Durch Einsetzen in (3) ergibt sich

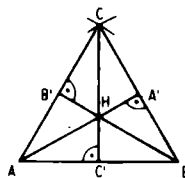
$$\overline{AB}=\overline{CB}. \quad (5)$$

Analog verläuft der Beweis für

$$\overline{AB}=\overline{AC}. \quad (6)$$

Damit ist bewiesen, daß das Dreieck ABC

gleichseitig ist.



5. Angenommen, es gibt Positionssysteme mit Basen n und darin jeweils zweistellige Zahlen x mit den Ziffern a und b , welche die geforderten Eigenschaften haben, dann gilt:

$$nb+a=2(na+b) \quad (*) \quad (a > 0, b < n)$$

Aus (*) folgt $n(b-2a)=2b-a$. Dabei gilt

$$b-2a \neq 0; \text{ denn wäre } b-2a=0, \text{ also } b=2a, \text{ dann müßte auch } 2b-a=0, \text{ also } 4a-a=0$$

und mithin $a=0$ sein, im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher folgt aus * weiterhin

$$n = \frac{2b-a}{b-2a}. \text{ Da } n \text{ positiv ist, unterscheidet man}$$

zwei Fälle:

$$\text{I. } 2b-a < 0 \text{ und } b-2a < 0 \text{ oder}$$

$$\text{II. } 2b-a > 0 \text{ und } b-2a > 0.$$

Fall I. entspricht nicht den Bedingungen der Aufgabe, denn wegen $a-2b > 0$ und $2a-b > 0$

$$\text{sowie } n = \frac{a-2b}{2a-b} \geq 2 \text{ wäre } a-2b \geq 4a-2b, \text{ also}$$

$$3a \leq 0, \text{ d. h. } a \leq 0, \text{ im Widerspruch zur Voraussetzung.}$$

Im Falle II. folgt entsprechend $a \geq 0$, wobei $a=0$ genau für $n=2$ gilt. Daraus folgt $n \geq 3$.

Da a, b und n natürliche Zahlen > 1 sind, folgt $b-2a \geq 1$. Aus $b-2a=1$ erhält man

$$n=3a+2. \text{ Es sei nun } b-2a=d \geq 2. \text{ Dann}$$

$$\text{müßte gelten } 2b-a=2(2a+d)-a=3a+2d$$

$$\text{und damit } n = \frac{3a+2d}{d}. \text{ Wegen } b < n \text{ würde nun}$$

$$2a+d < \frac{3a+2d}{d} \text{ oder } 2ad+d^2 < 3a+2d \text{ bzw.}$$

$$d^2-2d+1+2ad < 3a+1 \text{ bzw.}$$

$$(d-1)^2+2ad < 3a+1 \text{ gelten. Nun folgte aber aus } d \geq 2:$$

$$(d-1)^2 \geq 1, \text{ also } 2ad \geq 4a \text{ und damit}$$

$$(d-1)^2+2ad \geq 4a+1 > 3a+1, \text{ im Widerspruch zur Annahme. Folglich ist } b=2a+1,$$

$$n=3a+2 \text{ die einzige Lösung.}$$

$$(3a+2)(2a+1)+a=6a^2+8a+2$$

$$=2(3a^2+4a+1)=2[(3a+2)a+2a+1].$$

Es gibt mithin unendlich viele Positionssysteme, in welchen es zweistellige Zahlen der verlangten Eigenschaft gibt; und zwar in jedem dieser Positionssysteme genau eine zweistellige Zahl dieser Art. Für alle diese Positionssysteme gilt:

Die Zahlen x und n erfüllen genau dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn $x=an+b=an+2a+1$ und $n=3a+2$ gilt, wobei $n=3a+2$ und $b=2a+1$, wobei a eine beliebige natürliche Zahl > 0 ist.

6. a) Laut Definition von $[x]$ ist $[x]=g$ für jede reelle Zahl erklärt und eine ganze Zahl. Für alle ganzen Zahlen g ist ebenso $(-1)^g$ erklärt. Also ist durch $y=f(x)=(-1)^{[x]}$ eine Funktion f erklärt, die für alle reellen x existiert.

b) Wegen $(-1)^1=-1, (-1)^2=+1, (-1)^3=-1, (-1)^4=+1$ liegt die Vermutung nahe, daß $f(x+2)=f(x)$ gilt.

Aufgrund der Definition von $[x]$ gilt genau dann $[x]=g$, wenn es eine reelle Zahl a mit $0 \leq a < 1$ gibt, so daß $x=g+a$ ist. Folglich gilt $x+2=g+2+a$ und, da $g+2$ ebenfalls eine ganze Zahl ist, $[x+2]=g+2=[x]+2$.

Damit ergibt sich

$$f(x+2)=(-1)^{[x+2]}$$

$$=(-1)^{[x]+2}$$

$$=(-1)^{[x]} \cdot (-1)^2=(-1)^{[x]},$$

d. h. $f(x+2)=f(x)$, es existiert also ein p mit $p=2$.

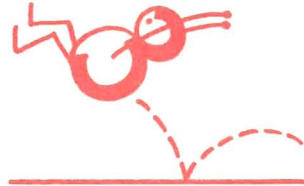
Fortsetzung auf Seite 72



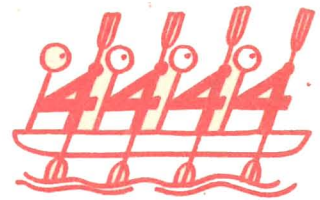
EINER-KANADIER



ZWEIER-BOB



DREISPRUNG



VIERER-KAJAK

▲6▲ Im Kanuslalom werden Punkte zur Wertung benutzt (Fahrzeit in s plus Strafpunkte für das Berühren oder Auslassen von Toren). Sieger wird demnach der Sportler mit der geringsten Gesamtpunktzahl. Die ersten Sechs der Olympischen Spiele von 1972 erreichten folgende Punktzahlen:

1. Horn (DDR)	268,56
2. Sattler (Österreich)	270,76
3. Gimpel (DDR)	277,95
4. Peters (BRD)	282,82
5. Raum (BRD)	288,01
6. Havlicek (ČSSR)	289,56

Weiter ist folgendes bekannt:

1. Jeder erhielt Strafpunkte, die in den Stufen 10, 20, 30, ... vorkamen.
 2. Keiner erhielt mehr als 40 Strafpunkte.
 3. Zweimal erhielten Sportler die gleiche Strafpunktzahl.
 4. Ein besser platzierter Sportler (s. o.) erhielt weniger Strafpunkte als ein nach ihm platzierter.
 5. Der BRD-Sportler *Peters* erzielte die zweit-schnellste Fahrzeit.
- Ermittle, wieviel Strafpunkte jeder dieser Sportler erhielt, und ordne sie in der Reihenfolge nach ihren reinen Fahrzeiten!

▲7▲ Der Moderne Fünfkampf beginnt mit einem Geländeritt über 1000 bis 1500 m mit 10 bis 23 Hindernissen (je nach Gegebenheiten des Austragungsortes). Gewertet wird wie folgt:
Fehlerloser Ritt mit einer Geschwindigkeit von 400 m/min: 1 100 Punkte
Für jede angefangene Sekunde über die erlaubte Zeit werden abgezogen (bis zu einer Gesamtzeit von 6 min): 5 Punkte.
Wird die Reitzzeit von 6 min überschritten, erhält der Sportler 0 Punkte. Außerdem gibt es noch Strafpunkte an Hindernissen. Pluspunkte werden keine vergeben.
Die Strecke für den Geländeritt sei 1 100 m, 1 200 m bzw. 1 450 m lang.
a) Berechne für die drei Längen, welche Zeit ein fehlerloser Geländeritt höchstens dauern

darf, damit die Höchstpunktzahl erreicht wird!

b) Wieviel Punkte erhält ein Sportler, der die jeweilige Strecke in 5:30 min absolviert?

▲8▲ Folgende Hürdenstrecken sind olympische Disziplinen: 110 m und 400 m bei den Männern und 100 m bei den Frauen. Es sind jeweils 10 Hürden zu überwinden. Folgende Abstände gelten vom Start bis zur 1. Hürde bzw. von der letzten Hürde bis zum Ziel:

110 m:	13,72 m	14,02 m
400 m:	45,00 m	40,00 m
100 m:	13,00 m	10,50 m

Wie groß ist bei jeder Hürdenstrecke der Abstand zwischen den Hürden?

▲9▲ Die letzte Disziplin des Modernen Fünfkampfs ist der Geländelauf über 4000 m. Für eine Zeit von 14:15,0 werden 1000 Punkte vergeben, für je 1 s Abweichung von dieser Zeit werden 3 Punkte dazugezählt (bei schnellerem Lauf) bzw. abgezogen (bei langsamem Lauf). Ein Sportler A hat 42 Punkte Rückstand zum Führenden B, der den Geländelauf in 13:47,0 schon absolviert hat.

- Wie schnell muß A laufen, um B
- a) um 3 Punkte
 - b) um 12 Punkte zu überbieten?

▲10▲ Der Weltrekord im 10000-m-Lauf steht bei 27:30,8 min.

- a) Welcher Durchschnittsgeschwindigkeit entspricht das?
- b) Welche Zeit wurde durchschnittlich für jeweils 100 m benötigt?

▲11▲ Bei großen internationalen Rudermeisterschaften bestreiten meist sechs Boote die einzelnen Ausscheidungen und Finalrennen (ggf. je nach Teilnehmerzahl auch nur 5 oder 4).

Bei den Olympischen Spielen in München 1972 wurden Vorläufe und Hoffnungsläufe, das Halbfinale und das Finale gerudert, ehe die Sieger feststanden. Im Einer gab es 3 Vorläufe, 3 Hoffnungsläufe, 2 Halbfinalläufe (mit

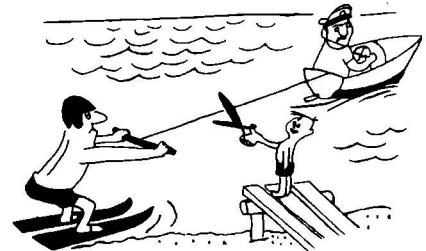
je sechs Booten) und das Finale mit sechs Booten. Die Sieger der Vorläufe erreichten direkt das Halbfinale.

- a) Wieviel Boote aus jedem Hoffnungslauf kamen ins Halbfinale?
- b) Mit welcher minimalen Platzziffer (d. i. die Summe der Platzierung in jedem Lauf) konnte ein Sportler Olympiasieger werden?
- c) Mit welcher maximalen Platzziffer konnte ein Sportler Olympiazweiter werden, wenn in den Vorläufen je sechs Boote starteten?

▲12▲ Nach dem ersten Teilsprung, dem sogenannten Hop (dt. Hupf) teilt man die Dreisprungtechnik in zwei Varianten ein, die Flachsprungtechnik (Hop beträgt 35 bis 36% des Gesamtsprunges) und die Steilsprungtechnik (Hop beträgt mehr als 38% des Gesamtsprunges).

Ein Sportler erreicht 16,90 m im Dreisprung. Wie weit ist sein erster Teilsprung mindestens, wenn er

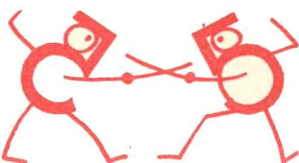
- a) nach der Flachsprungtechnik
- b) nach der Steilsprungtechnik springt?



Ich gratuliere dir zur Eröffnung der Saison, Vater!



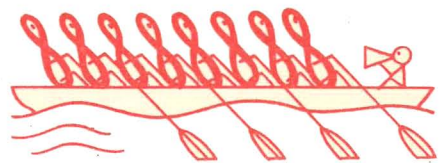
MODERNER FÜNFKAMPF
(Teildisziplin Fechten)



SIEBENMETERWURF
beim Hallenhandball



RUDER-ÄCHTER



Berufsbild: Diplom-Ingenieur für Landtechnik



Über die Ausbildung landtechnischer Hochschulkader

Die sozialistische Landwirtschaft ist ein Zweig unserer Volkswirtschaft, der einen bedeutenden Beitrag zur Lösung der vom VIII. Parteitag der SED beschlossenen Hauptaufgabe leistet. Fast 50% unseres Nahrungsgüterbedarfs produziert die Land-, Forst- und Nahrungsgüterwirtschaft unserer Republik, jeder dritte bis vierte Werktätige im produzierenden Bereich unserer Volkswirtschaft ist mit seinen Leistungen an der Erzeugung von Lebensmitteln beteiligt, der Anteil am gesellschaftlichen Gesamtprodukt beträgt etwa 30%, und für diese Produktion werden etwa 23% der Grundfonds unserer Volkswirtschaft benötigt.

Diese Zahlen machen sichtbar, welche große Verantwortung die Arbeiter und Genossenschaftsbauern für die immer bessere Versorgung der Bevölkerung mit ausreichend qualitätsgerechten Nahrungsmitteln und der Industrie mit Rohstoffen haben.

Die Unterstützung, die die Arbeiterklasse der DDR und auch der UdSSR unserer sozialistischen Landwirtschaft gibt, sollen folgende Angaben deutlich machen.

Der Mechanisierungsgrad beträgt in der Getreideernte 99,9%, bei der Kartoffelernte 91,1% und bei der Ernte der Zuckerrüben 96,2%. Je 100 ha landwirtschaftlicher Nutzfläche stehen den in 1210 kooperativen Abteilungen Pflanzenproduktion, 47 LPG und 5 VEG Pflanzenproduktion arbeitenden 345000 Arbeitern und Genossenschaftsbauern 111 PS zur Verfügung. 27% dieser PS-Leistung entfallen dabei auf Traktoren aus der Sowjetunion.

Der schrittweise Übergang zu industriemäßigen Produktionsmethoden, der damit verbundene Einsatz moderner, hochleistungsfähiger Maschinensysteme und Anlagen sowie die notwendige Erhöhung der Arbeitsproduktivität erfordern die Ausbildung hochqualifizierter landtechnischer Hochschulkader.

In Arbeitsteilung mit Diplom-Agraringenieuren und Diplom-Agrarökonomern tragen sie die Verantwortung, daß die von der Arbeiterklasse bereitgestellte Technik effektiv eingesetzt und erhalten wird.

Entsprechend der Aufgabenverteilung und wissenschaftlichen Profilierung unserer Universitäten und Hochschulen ist die Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg verantwort-

lich für die Ausbildung und Erziehung produktionsorientierter landtechnischer Hochschulkader, die unmittelbar in den Landwirtschaftsbetrieben bzw. ihren Vorleistungsbereichen (Kreisbetriebe für Landtechnik, Landtechnische Instandsetzungswerke und Betriebe des landtechnischen Anlagenbaus) eingesetzt werden.

Zur Realisierung dieser Zielstellung dient ein vierjähriges Direktstudium, das in der Grundstudienrichtung „Mechanisierung der Landwirtschaft“ zu absolvieren ist.

Der zunehmenden Spezialisierung und Arbeitsteilung der landwirtschaftlichen Produktion wird im Studium dahingehend Rechnung getragen, daß die Ausbildung in folgenden Fachrichtungen erfolgt:

- Mechanisierung der Pflanzenproduktion
- Mechanisierung der Tierproduktion und
- Landtechnische Instandhaltung.

Das Studium schließt mit dem Erwerb des ersten akademischen Grades „Diplomingenieur“ ab.

Unter Berücksichtigung der spezifischen Aufgabenstellung der Ingenieurhochschulen ist es notwendig, daß der Bewerber die Hochschulreife (Abitur) und eine abgeschlossene Berufsausbildung in einem landwirtschaftlich-landtechnischen Beruf besitzt.

Facharbeiter, die die 10. Klasse absolviert haben und im Rahmen ihrer berufspraktischen Tätigkeit vorbildliche fachliche und gesellschaftliche Leistungen nachweisen können, haben die Möglichkeit, im Rahmen eines einjährigen Vorbereitungslehrgangs die Hochschulreife zu erwerben. Dazu werden sie vom Betrieb delegiert und erhalten die für die Konsultationswochen notwendige Arbeitsbefreiung von 60 Arbeitstagen.

Für alle anderen Bewerber gilt das an den Oberschulen verbindliche Bewerbungsverfahren, wobei Bewerber, die ihren Ehrendienst bei der NVA ableisten, bereits vor Aufnahme des Wehrdienstes in das Zulassungsverfahren einbezogen werden.

Spezielle Auskünfte erteilt jedoch auch jederzeit das Direktorat für Erziehung, Aus- und Weiterbildung der Ingenieurhochschule.

Das Studium stellt einen Klassenauftrag dar und erfordert vom Studenten eine hohe Leistungsbereitschaft auf fachlichem und gesellschaftlichem Gebiet.

Der zunehmende industriemäßige Charakter der landwirtschaftlichen Produktion sowie die damit verbundene Mechanisierung und Teilautomatisierung der Produktionsprozesse erfordern vom zukünftigen Absolventen nicht nur umfassende fachspezifische und gesellschaftswissenschaftliche Kenntnisse.

Unumgängliche Voraussetzung für die komplexe Beherrschung technisch-technologischer Prozesse sind gefestigte Kenntnisse in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Wissensgebieten, die für die ingenieurmäßige Anwendung z. T. unmittelbar, zum größeren Teil aber mittelbar, d. h. über andere Grundlagendisziplinen und die fachrichtungsspezifischen Lehrgebiete, wirksam werden. So zielt die Ausbildung im Lehrgebiet Mathematik auf die Aneignung der wichtigsten mathematischen Methoden zur Beurteilung und Lösung naturwissenschaftlicher, technisch-technologischer und ökonomischer Probleme. Die Ausbildung gliedert sich (unter Einbeziehung der Belange der numerischen Mathematik) in die Teilgebiete lineare Algebra/lineare Optimierung, Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung/mathematische Statistik.

An ausgewählten Beispielen wird dabei auch demonstriert, wie die Mathematik unmittelbar zur Intensivierung der Produktion beitragen kann. So werden die Studenten zum Beispiel mit den mathematischen Grundlagen der an der Landwirtschaftlichen Hochschule Wolgograd ausgearbeiteten Methode zur Programmierung der Ernte vertraut gemacht. Mit dieser Hochschule verbinden uns besonders enge Partnerschaftsbeziehungen, daneben auch mit Hochschulen in der VR Polen, der Ungarischen VR und der ČSSR.

Die beste Vorbereitung auf die mathematische Ausbildung sind solide Kenntnisse des Schulstoffs, da dieser als bekannt vorausgesetzt und auf ihm systematisch aufgebaut wird. Schwierigkeiten haben erfahrungsgemäß insbesondere solche Studenten, die an der Schule ihre Rechenfertigkeiten (bis hin zum formalen Differenzieren und Integrieren) nicht genügend gefestigt haben. Diesbezügliche Lücken lassen sich später schwer schließen. Die Methoden der Wissensvermittlung an einer Hochschule stellen im Vergleich zur allgemeinbildenden Schule höhere Anforderungen an die Selbständigkeit, insbesondere die disziplinierte Durchführung des Selbststudiums. Wer sich auf ein Studium vorbereitet, sollte deshalb möglichst frühzeitig beginnen, selbständig mit Lehrbüchern zu arbeiten.

In den Lehrgebieten Physik und Chemie wird ein Überblick über die für die Ausbildung wesentlichen physikalischen und chemischen Zusammenhänge und die Grundlagen für das Verständnis der Chemisierung der Landwirtschaft, insbesondere der Anwendung chemischer Mittel in technischen Bereichen gegeben.

Durch Demonstrationsexperimente und selbständige Arbeit im physikalischen und chemischen Praktikum werden die naturwissenschaftlichen Grundbegriffe gefestigt, das Vorstellungsvermögen geschult und experimentelle Fähigkeiten und Fertigkeiten vermittelt.

Parallel und zur Festigung des auf den späteren Einsatz orientierenden Wissens werden die theoretischen Lehrveranstaltungen in den Grundlagenfächern und den Fachdisziplinen durch Übungen und Praktika ergänzt.

In ausgewählten, fortschrittlichen Landwirtschaftsbetrieben werden das 4wöchige Berufspraktikum I (am Ende des 1. Studienjahres) und das 5monatige Ingenieurpraktikum im 7. Semester durchgeführt. Das Berufspraktikum II wird als 7wöchiges Praktikum am Ende des 2. Studienjahres in ausgewählten Jugendobjekten der FDJ absolviert. Die besten Studenten durchlaufen ein Praktikum im sozialistischen Ausland.

Ausgerüstet mit umfangreichen theoretischen Kenntnissen und praktischen Fertigkeiten wird der Absolvent befähigt, die ihm entsprechend seiner Ausbildung übertragenen Funktionen und Tätigkeiten in der sozialistischen Praxis zu erfüllen.

Der Einsatz erfolgt für Absolventen der Fachrichtung

- Mechanisierung der Pflanzenproduktion: Überwiegend als landtechnische Leitungskader in KAP, LPG und VEG der Pflanzenproduktion, in ACZ (Agrochemische Zentren), bei der Mechanisierung des Gartenbaus und der Forstwirtschaft sowie in weiteren Einrichtungen der Land-, Forst- und Nahrungsgüterwirtschaft;

- Mechanisierung der Tierproduktion: Als „Technische Leiter“ bzw. Betriebsingenieur in LPG und VEG sowie ihren kooperativen Einrichtungen der Tierproduktion und VE-Kombinaten für industrielle Mast (KIM);

- Landtechnische Instandhaltung: Als Technologen für die vorbeugende Instandhaltung und für die Instandsetzung in Kreisbetrieben für Landtechnik, Landtechnischen Instandsetzungswerken und Betrieben des Landtechnischen Anlagenbaus.

H. Bausch/E. Schneider



Bei Freunden in Kuba zu Gast

In den Jahren 1967/68 beschlossen die verantwortlichen Mitarbeiter im kubanischen Erziehungsministerium die Modernisierung des Mathematikunterrichts in der *Primaria* (Kl. 1 bis 6). Als Vorbild wählten die kubanischen Genossen den Mathematikunterricht an unserer polytechnischen Oberschule.

In Anlehnung an unsere Lehrpläne, Lehrbücher und Unterrichtshilfen wurden inzwischen Ausbildungsmaterialien für die *Primaria* und auch für die *Secundaria* (Kl. 7 bis 9) entwickelt. Bei der Einführung dieser Materialien in den Unterricht werden die kubanischen Pädagogen seit 1968 von Lehrbildnern aus Erfurt und Köthen tatkräftig unterstützt. Im Juni/Juli 1971 war ich das erste Mal als Lehrkraft in einem Kurs mit einer großen Gruppe kubanischer Mathematiklehrer und Schulinspektoren in Havanna eingesetzt und auch in den Jahren 1972, 1974, 1975 und 1976 führte ich in Havanna Weiterbildungskurse durch. Da es in Kuba keine Ausbildung in *Methodik des Mathematikunterrichts* gibt, wird in den Kursen, ausgehend von den fachwissenschaftlichen Grundlagen des Schulstoffes, vor allem an der methodischen Aufbereitung des Stoffes und dem zweckmäßigen Einsatz der Lehrbücher gearbeitet.

Die Kursteilnehmer führen dann ihrerseits in den Weiterbildungswochen mit den Lehrern in den Provinzen Lehrgänge durch, so daß im darauffolgenden Jahr in einer weiteren Klassenstufe ein moderner Mathematikunterricht erteilt werden kann. Unsere kubanischen Kollegen sind mit großem Eifer bei der Erfüllung dieser Aufgabe. Trotz 30° im Schatten bei der Vorlesung oder beim Selbststudium erlahmt ihr Fleiß nicht.

Bei meinen Besuchen in Kuba habe ich bereits in vielen Schulen hospitiert und mich davon überzeugen können, wie gut unsere Kursteilnehmer das Gelernte weitergegeben haben und es nun im Unterricht umgesetzt wird. Besonders eindrucksvoll waren Besuche in der *Escuela Vocacional „W. I. Lenin“* (Spezialschule) und in der *Escuela en el Campo* (Landoberschule) mit dem Namen „*Republica Democratica Alemana*“ am 21. Mai 1974, als dort der *Concurso Nacional de Matematica* (nationale Mathematikolympiade) stattfand. Aus dem Kreis der Teilnehmer an

diesem Wettbewerb wurde auch die Delegation Kubas zur XVI. Internationalen Mathematik-Olympiade 1974 in Erfurt ausgewählt.

W. Jungk

Aufgaben aus der Republik Kuba

▲1▲ Gegeben sei eine quadratische Gleichung in der Normalform $x^2 + px + q = 0$; der Koeffizient p des linearen Gliedes px und das absolute Glied q seien beides reelle Zahlen.

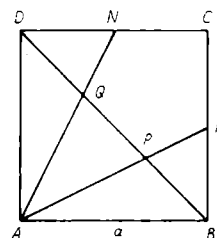
a) Für welche Werte von p und q besitzt die gegebene Gleichung die reellen Lösungen $x_1 = a$ und $x_2 = b$?

b) Für welche Werte von p und q besitzt die gegebene Gleichung die reellen Lösungen $x_1 = a^2$ und $x_2 = b^2$?

c) Es seien $x_1 = a$ und $x_2 = 2a$ reelle Lösungen der gegebenen Gleichung; es ist p als Funktion von q darzustellen!

d) Es sei $p = -2$, und eine der beiden Lösungen sei gleich dem Quadrat der anderen Lösung. Welchen Wert hat in diesem Fall das absolute Glied q ?

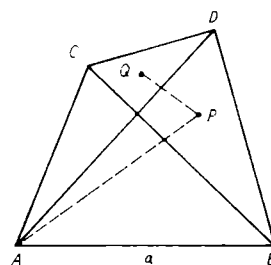
▲2▲ Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $AB = a$ dar. Der Mittelpunkt M der Seite BC und der Mittelpunkt N der Seite CD wurden mit dem Eckpunkt A des Quadrates verbunden. Die Diagonale AC schneide AM in P und AN in Q .

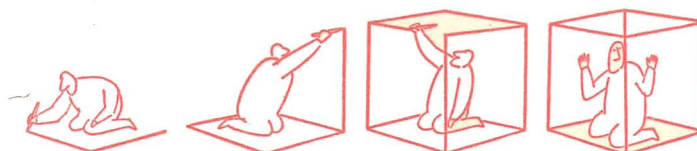


a) Es ist zu beweisen, daß $\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{DQ}$ gilt!
b) Welche der drei Winkel $\angle BAP$, $\angle PAQ$ und $\angle QAD$ sind einander kongruent?

▲3▲ Die abgebildete Figur sei ein reguläres Tetraeder $ABCD$ mit der Kantenlänge $AB = a$. Das von A auf die Ebene CBD gefällte Lot habe den Fußpunkt P . Das von P auf die Ebene CAD gefällte Lot habe den Fußpunkt Q . Es ist zu beweisen, daß

$\overline{PQ} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AP}$ gilt.





Hundert Gefangene

Es war einmal ein russischer Märchenkönig mit Namen *Dodon*. Bei einem Streifzug nahm er 100 Feinde gefangen. Diese sperrte er in 100 Einzelzellen. Davor patrouillierte Tag und Nacht die Wache.

Alle Zellschlösser konnte man mit einem Schlüssel öffnen, den der König trug. Wurde dieser Schlüssel im Schloß einmal umgedreht, ließ sich die Tür öffnen. Wurde er nochmals umgedreht, war die Tür verschlossen, usw.

Zu seinem Geburtstag wünschte der König, die Gefangenen freizulassen. Deshalb schickte er am Tage zuvor einen Boten, der alle Zellen nacheinander durchging und immer den Schlüssel einmal drehte. Nun waren alle Zellen geöffnet. Doch da der Geburtstag des Königs noch nicht angebrochen war, sperrten die Wachen noch den Ausgang.

Sobald der Bote den Schlüssel zurückbrachte, entschied sich der König *Dodon* wieder anders. Er schickte einen zweiten Boten, der den Schlüssel in jedem zweiten Zellschloß noch einmal umdrehen sollte. Damit waren alle Zellen mit ungerader Nummer wieder verschlossen.

Danach mußte ein dritter Bote den Schlüssel in der 3., 6., 9., usw. Zelle wieder umdrehen. Dann ein vierter Bote den in der 4., 8., 12., ... usw. Genau so machten es alle weiteren Boten des Märchenkönigs bis zum 100., der den Schlüssel nur in der 100. Zelle umdrehte.

Endlich brach der Geburtstag des Königs an. Die Wache wurde entlassen, und alle Gefangenen, die in offenen Zellen saßen, waren frei.

Wieviele Gefangene hat der Märchenkönig *Dodon* freigelassen?

Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau

Motorsport

$$\begin{array}{r}
 \text{VOLVO} \\
 + \text{FIAT} \\
 \hline
 \text{MOTOR} \\
 \\
 \text{TATRA} \\
 + \text{BENZ} \\
 \hline
 \text{MOTOR}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 \text{SAAB} \\
 + \text{FORD} \\
 \hline
 \text{MOTOR}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 \text{VOLGA} \\
 + \text{DODGE} \\
 \hline
 \text{MOTOR}
 \end{array}$$

aus: „Fules“, Budapest

Kleine Logelei

Denke mit!

Herr Maier, Herr Berger und Herr Janik wohnen in Linz, Graz oder Wien. Sie sind von Beruf Schlosser, Lehrer oder Arzt. Ihre Lieblingsbeschäftigung ist Segelflug, Boxen oder Tennis. Sie trinken gerne Tee oder Fruchtsaft oder Mineralwasser.

Folgendes ist bekannt:

1. Herr Berger kennt den Lehrer, der weder boxt noch Tennis spielt.
 2. Der Schlosser, der in Graz wohnt, besucht oft seinen Freund in Linz, der gern Tee trinkt.
 3. Janik, der gern Mineralwasser trinkt, ist nicht der Arzt.
 4. Der Tennisspieler ist nicht Schlosser.
 5. Maier, der keinen Fruchtsaft trinkt, spielt Tennis.
- Gib Beruf, Wohnort, Lieblingsbeschäftigung und Lieblingsgetränk von Herrn Maier, Berger und Janik an!

Schüler Peter Braumüller, Wiener Neustadt

aus: Tribüne, Zeichnung: Gabbert



Silbenrätsel

Aus den Silben

a – arc – ber – bol – che – con – di – ein – eins – eur –
ex – flä – funk – ge – go – in – in – kreis – la – le – lu –
mal – me – mi – mor – na – ni – no – null – o – o – on –
ons – pa – pier – pli – ra – rad – re – rie – sa – stel –
sym – täts – the – ti – ti – ti – ti – tri – trie – us – vi – vo –
zit

sind 13 Begriffe zu bilden, deren Anfangs- und Endbuchstaben, von oben nach unten gelsen, jeweils einen französischen Mathematiker ergeben.

1. Hilfsmittel der Nomographie,
2. Wissensgebiet der Physik,
3. Planmäßige Tilgung einer Schuld,
4. Funktionsbegriff,
5. Vorname eines Physikers (1. Physiknobelpreisträger),
6. Begriff der Stereometrie,
7. Größe aus der Dreiecksberechnung,
8. Das Bogenmaß des Winkels α hat das ...
9. Rauminhalt (Mz.),
10. Beruf, der umfangreiche mathematische Kenntnisse verlangt,
11. entwickelt, aufgelöst,
12. Gebiet der Mathematik.
13. erste Bekanntschaft mit der Mathematik.

Dipl.-Ing. K. Gallien, Berlin

Kryptarithmetik

1.
$$\begin{array}{r} \text{EVE} \\ \text{DID} \\ \hline \text{O, TALK} \end{array}$$

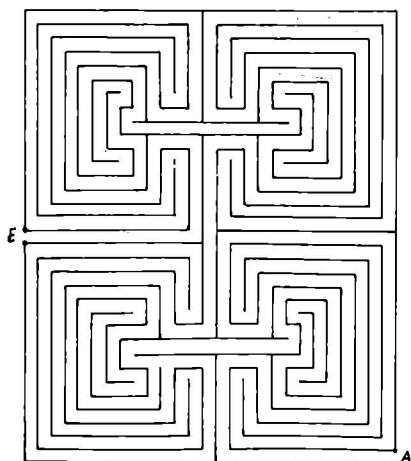
2. $Z \cdot 17 \cdot d = ddd \dots$

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, so daß richtig gelöste Aufgaben entstehen.

Dr. M. Skalicky, Wien

Ein Troja-Diagramm

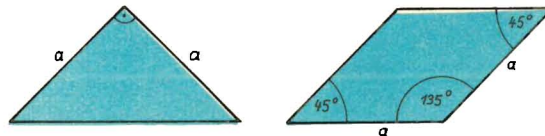
Dr. M. Skalicky, Wien



Legespiel

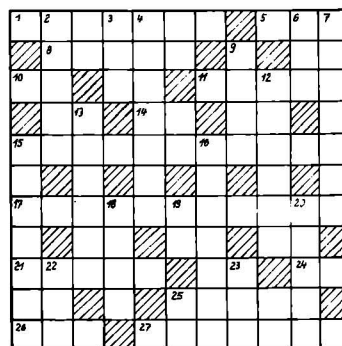
Schneide aus Pappe acht kongruente Rhomben mit der Seite a und den Winkeln 45° und 135° sowie zwölf kongruente rechtwinklig-gleichschenkelige Dreiecke mit den Katheten a aus! Lege diese 20 Pappstücke zu einem Quadrat zusammen!

Lehrerin Irmgard Träger, Wilhelm-Pieck-OS, Döbeln



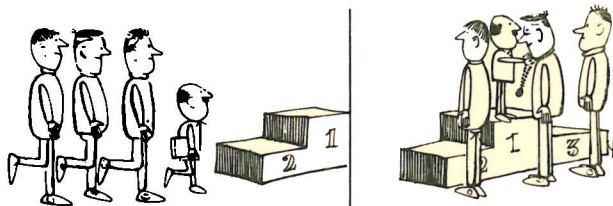
Kreuzworträtsel

Waagerecht: 1. bedeutender deutscher Philosoph und Mathematiker (1646 bis 1716), 5. Bezeichnung einer bestimmten Zeitzone (Abk.), 8. eigentümliche Sprechweise, Mundart, 10. Funktionssymbol für den natürlichen Logarithmus, 11. italienischer Geigenbauer, 14. älteres Zeichen für den Tangenshyperbolicus, 15. Teil eines Bruches, 17. Hochzahlen, Exponenten, 21. weiblicher Vorname, 24. Hühnerprodukt, 25. Teil einer geometrischen Figur (Mz.). 26. engl.: eins, 27. geschlossene Linienzüge.



Senkrecht: 2. Stelle im Positionssystem der Zahlen, 3. Einheit der Information, 4. deutsche Mathematikerin (1882 bis 1935), 6. lat.: ist, 7. Gesamtheit aller mathematischen Symbole, 9. römischer Gott der Liebe, 12. Grundlage der Mathematik, Grundaussagen, 13. Teil des Rechenstabs (Mz.), 15. bedeutender italienischer Philosoph und Logiker (1781 bis 1848), 16. rumänischer Mathematiker (1873 bis 1939), 18. norwegischer Mathematiker (1802 bis 1829), 19. Begrenzer aus der algorithmischen Sprache ALGOL, 20. geometrischer Begriff, 22. Neugrad, 23. Arbeiterpartei in der BRD (Abk.)

Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden



1. Fall: $x > 9$

$$-(9-x) - (0,5x+1) = 12$$

$$x = 44$$

$$L_1 = \{44\}$$

2. Fall: $-2 \leq x \leq 9$

$$9-x - (0,5x+1) = 12$$

$$x = -\frac{8}{3}$$

Widerspruch zur Voraussetzung

$$L_2 = \emptyset$$

3. Fall: $x < -2$

$$9-x - (-0,5x-1) = 12$$

$$x = -4$$

$$L_3 = \{-4\}$$

Zu jeder Lösung ist eine Probe durchzuführen. Für die gestellte Ausgangsgleichung erhält man die Lösungselemente $\{44; -4\}$

Lösungshinweise und Lösungen zu:

Kombinatorik und binomischer Satz, S. 49

▲ 1 ▲ Wir überprüfen eine Hypothese, z. B. für $k=2$:

$$1+3=2^2;$$

a) Die Hypothese (die Gesetzmäßigkeit) ist gegeben;

b) Die Hypothese soll für eine gewisse Anzahl k von Summanden wahr sein, d. h., es ist wahr, daß

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2;$$

wir zeigen, daß in diesem Falle die Hypothese (Formel) auch für $k+1$ Summanden wahr ist, d. h., es gilt auch

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)$$

$$=(k+1)^2.$$

Die Summe der ersten angeordneten k Summanden ist tatsächlich gleich k^2 . Es bleibt zu zeigen, daß

$$k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Das läßt sich unmittelbar nachprüfen.

▲ 2 ▲ a) 90 b) 49 c) $\frac{120}{7!} = \frac{1}{42}$

▲ 3 ▲ 3120

▲ 4 ▲ $5! - 4! = 96$

▲ 5 ▲ vgl. Formel (2)!

▲ 6 ▲ a) 720 b) 132 c) 210

▲ 7 ▲ a) $V_4^4 = P_4 = 24$ b) $V_3^4 = 120$

c) $V_6^4 = 360$

▲ 8 ▲ $\frac{13!}{8!} + \frac{13!}{9!} = 100$ b) 10

▲ 9 ▲ a) 10 b) 7 c) 9

▲ 11 ▲ a) 210 b) 56 c) 56

▲ 12 ▲ a) 7 b) 14 c) 12

▲ 13 ▲ $C_{30}^3 = 1040$

▲ 14 ▲ $C_{10}^9 = 210$

▲ 18 ▲ a) $x=7, y=3$ b) $x=12, y=5$

c) $x=15, y=6$

▲ 19 ▲ $V_9^9 = P_9 = 9! = 362880$

▲ 20 ▲ $C_3^3 = 84$

▲ 21 ▲ $V_3^3 = 504$

▲ 22 ▲ $C_{15}^3 \cdot C_4^4 = 1820$

Lösung zu: Eine Aufgabe

von Prof. Dr. Gläser (Heft 2/76)

▲ 1533 ▲ 1. Es sei $n=m=1$. Dann gilt $z=1-x$, wobei x eine beliebige reelle Zahl mit $0 < x < 1$ ist.

Daher gilt $-1 < -x < 0$,

also $0 < z < 1$,

(1) wobei z jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen kann, weil x jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen kann.

2. Wegen $x > 0$ gilt auch $x^2 > 0$, $x^3 > 0$ und allgemein $x^n > 0$;

(2) ferner gilt $x < 1$, also da x eine positive reelle Zahl ist, auch

$$x^2 < x < 1, x^3 < 1 \text{ und allgemein}$$

$$x^n < 1.$$

Aus (2) und (3) folgt

$$0 < x^n < 1,$$

$$-1 < -x^n < 0,$$

$$0 < 1 - x^n < 1.$$

Aus (4) folgt weiter

$$0 < (1 - x^n)^m < 1,$$

(5) wobei m und n beliebige von Null verschiedene natürliche Zahlen sind.

3. Damit haben wir bewiesen, daß für alle reellen Zahlen z mit

$$z = (1 - x^n)^m$$

$0 < z < 1$ gilt, falls m und n beliebige von Null verschiedene natürliche Zahlen sind. Da andererseits, wie unter 1. gezeigt wurde, für $n=m=1$ auch z jeden Wert zwischen 0 und 1 annimmt, ist also M die Menge aller reellen Zahlen z , für die $0 < z < 1$ gilt.

Lösung zu: Eine Aufgabe

von Prof. Dr. Bock, Heft 1/76, S. 3

▲ 1460 ▲ Zu a) Ein regelmäßiges Sechseck ergibt sich als Schnittfigur aus Symmetriegründen genau dann, wenn die Ebene zu einer Begrenzungsfläche (in Skizze zur Begrenzungsfläche BCE bzw. ADF) parallel läuft und durch den Mittelpunkt des Oktaeders geht. Die Seitenlänge des regelmäßigen Sechsecks beträgt $\frac{s}{2}$.

b) Lage der Ebene nach Skizze sei vorausgesetzt. Es wird der Punkt A gewählt, von dem aus die Eckpunkte des Sechsecks verbunden werden.

V sei das Volumen der sich ergebenden sechsseitigen Pyramide;

h sei deren Höhe. Dann ergibt sich:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{s}{4} \cdot \frac{s}{4} \sqrt{3}$$

$$V = \frac{s^2}{8} \cdot \sqrt{3} h$$

Die Höhe h ist die Hälfte des Abstandes d zwischen den Begrenzungsflächen BCE und ADF . Dieser Abstand d ist die Höhe der dreiseitigen Pyramide $BCEA$ bezüglich BCE . Deren Volumen ist der vierte Teil des

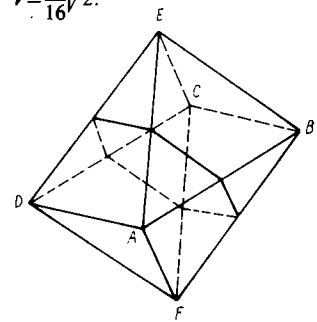
Oktaedervolumens $\left(\frac{s^3}{3}\sqrt{2}\right)$. D. h. es gilt:

$$\frac{s^2}{12}\sqrt{3} \cdot 2 \cdot h = \frac{1}{4} \cdot \frac{s^3}{3}\sqrt{2}.$$

Daraus ergibt sich:

$$h = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ und somit}$$

$$V = \frac{s^3}{16}\sqrt{2}.$$



Nachtrag: Auch bei Wahl eines anderen Eckpunktes des Oktaeders (anstelle von A) ergibt sich dasselbe Volumen, da die Höhen aller sechsseitigen Pyramiden, die jeweils möglich sind, untereinander gleich sind.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,

Heft 1/76

W5 ■ 1461 Die gegebene Zahl läßt sich in der Form $10a+b$ darstellen. Wegen $a=2b$ erhalten wir daraus $10 \cdot 2b + b = 21b$. Die durch Vertauschen der Ziffern erhaltene Zahl ist dann $10b+a$. Wegen $a=2b$ erhalten wir daraus $10b+2b=12b$.

Nun gilt ferner

$$21b \cdot 13 - 522 = 12b,$$

$$273b - 12b = 522,$$

$$261b = 522,$$

$$b = 2.$$

Aus $b=2$ und $a=2b$ folgt $a=4$. Die gesuchte Zahl lautet somit 42, und es gilt $42 \cdot 13 - 522 = 24$.

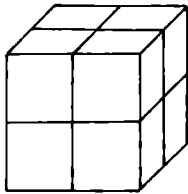
W5 ■ 1462 Es sei a die größere und b die kleinere der beiden zu ermittelnden natürlichen Zahlen.

Wegen $a+b=149$ gilt dann $a \geq 75$ und $b \leq 74$. Wegen $a \cdot b = 5394 = 2 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 31$ und wegen $a < 149$ kann also a nur gleich $3 \cdot 29 = 87$ oder $3 \cdot 31 = 93$ sein. Dann wäre b gleich $2 \cdot 31 = 62$ oder $2 \cdot 29 = 58$. Wegen $a+b=87+62=149$ oder $a+b=93+58=151 > 149$ gilt nur $a=87$ und $b=62$.

Somit lauten die gesuchten Zahlen 87 und 62.

W5 ■ 1463 Von den Zahlen 12, 24, 36, 48 besitzt nur die Zahl 36 die Quersumme 9, also gilt $n_1=36$. Von den Zahlen 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70 sind nur 16, 34, 52, 70 durch 2 teilbar; also könnte n_2 gleich 16, 34, 52, 70 sein. Für $n_1 - n_2 = d$ gilt entweder $36 - 16 = 20$ oder $36 - 34 = 2$ oder $36 - 52$ nicht lösbar oder $36 - 70$ nicht lösbar. Wegen $d > n_2$ gibt es genau eine Zahl $n_2 = 16 < 20$, die die gestellten Bedingungen erfüllt. Daher genügen nur die Zahlen 36 und 16 den Bedingungen der Aufgabe.

W5 ■1464 Man sieht genau 7 Spielwürfel. Davon sieht man drei Spielwürfel mit einer, drei Spielwürfel mit zwei und einen Spielwürfel mit drei sichtbaren Flächen. Das sind zusammen $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 12$ Flächen von Spielwürfeln. Im günstigsten Fall zeigen davon 7 Flächen die Augenzahl 6, 4 Flächen die Augenzahl 5 und eine Fläche die Augenzahl 4; das sind insgesamt $7 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 66$ Augen. Im ungünstigsten Fall sind es $7 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 18$ Augen. Es sei x die Summe der Augenzahlen; dann gilt also $18 \leq x \leq 66$.



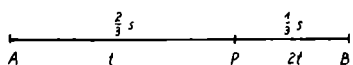
W5 ■1465 Da keine zwei der Mitglieder dieser Arbeitsgemeinschaft den gleichen Vor- und Familiennamen haben, aber nur vier verschiedene Vornamen vorkommen, heißen vier dieser Schüler Hans Schulze, Fritz Schulze, Günter Schulze, Ernst Schulze. Es verbleiben zweimal der Vorname Hans, zweimal der Vorname Fritz, dreimal der Vorname Günter. Da der Familienname Krause dreimal vorkommt, heißen drei weitere Schüler Hans Krause, Fritz Krause, Günter Krause. Ein Schüler heißt Hans Paetow. Nunmehr verbleiben zweimal der Vorname Günter, einmal der Vorname Fritz. Da der Familienname Müller zweimal vorkommt, heißen zwei weitere Schüler Fritz Müller, Günter Müller. Der letzte Schüler heißt Günter Paetow.

W5 ■1466 Aus $168:2=84$ folgt, daß aus der VR Polen 84 Lehrlinge ausgebildet werden. Aus $84 \cdot 3=252$ folgt, daß aus der Ungarischen VR 252 Lehrlinge ausgebildet werden. Wegen $527-168-84-252=x$ und somit $x=23$ werden in diesem Betrieb z. Z. 23 Lehrlinge aus der VR Bulgarien ausgebildet.

W6 ■1467 Aus $v=v_1+v_2=45 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
 $=81 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $s=v \cdot t=81 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 6 \text{ s}$
 $=81000 \frac{\text{m}}{\text{h}} \cdot \frac{6}{60 \cdot 60} \text{ h}=135 \text{ m}$ folgt, daß der erste Zug eine Länge von 135 m besaß.

W6 ■1468 Aus $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ folgt, daß der Reisende während des dritten Teiles der gesamten Reisestrecke geschlafen hatte.

W6 ■1469 Der nachstehend abgebildeten Zeichnung entnehmen wir folgendes:

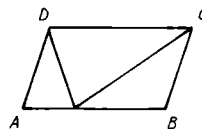


Wegen $v=\frac{s}{t}$ erhalten wir $v_1=\frac{2s}{3t}$ und $v_2=\frac{1s}{6t}$.

also $v_1:v_2=4:1$. Die Geschwindigkeit während des Radfahrens war viermal so groß wie die während des Fußmarsches.

W6 ■1470 Aus a) folgt: Martin heißt mit Nachnamen weder Altmann noch Müller. Aus b) folgt: Martin hat auch nicht den Nachnamen Neubert. Also heißt Martin mit Nachnamen Tröger. Aus b) folgt: Ernst heißt mit Nachnamen weder Neubert noch Müller. Da Ernst nicht Tröger heißen kann, hat Ernst den Nachnamen Altmann. Aus a) folgt: Karl heißt mit Nachnamen nicht Müller. Da Karl auch nicht Tröger bzw. Altmann heißen kann, hat Karl den Nachnamen Neubert. Somit hat Franz den Nachnamen Müller.

W6 ■1471 Die Winkel $\angle APD$ und $\angle CDP$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen; deshalb gilt $\angle APD = \angle CDP$. Wegen $\angle APD = \angle CDP$ gilt dann auch $\angle CDP = \angle CPD$, d. h., das Dreieck DPC ist gleichschenkelig, und es gilt $\overline{CD} = \overline{CP}$. Daraus folgt die Konstruktion: Wir schlagen um C mit $\overline{CD}$ als Radius einen Kreis, der $\overline{AB}$ in P schneidet und verbinden C und D mit P .



Ph6 ■1472 Gegeben: $V_0=2300 \text{ m}^3$

$$\gamma_1 = 1,03 \frac{\text{P}}{\text{cm}^3} = 1,03 \frac{\text{Mp}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma = 0,9 \frac{\text{P}}{\text{cm}^3} = 0,9 \frac{\text{Mp}}{\text{m}^3}$$

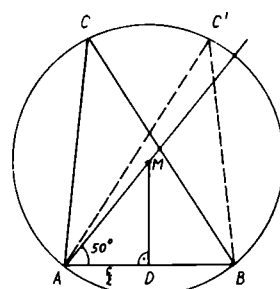
Gesucht: V

Ein Körper schwimmt, wenn das Gewicht (G) gleich der Auftriebskraft (F_A) ist.

$$\begin{aligned} F_A &= G & \text{mit } F_A &= \gamma_1 \cdot V_1 \\ \gamma_1 \cdot V_1 &= \gamma \cdot V & G &= \gamma \cdot V \\ \gamma_1(V - V_0) &= \gamma \cdot V & V_1 &= V - V_0 \\ \gamma_1 \cdot V - \gamma_1 V_0 &= \gamma \cdot V \\ 1,03 \cdot V - 1,03 \cdot 2300 &= 0,9 \cdot V \\ 0,13 V &= 2369 \\ V &\approx 18200 \end{aligned}$$

Das Volumen des gesamten Eisberges beträgt rund 18200 m^3 .

Ma7 ■1473 Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises k des zu konstruierenden Dreiecks ABC . Wegen $\overline{AM} = \overline{BM} = r$ ist das Dreieck ABM gleichschenkelig, und es gilt $\angle MAB = \angle MBA$. Die Gerade DM ist somit Mittel-



senkrechte zu $\overline{AB}$. Da der halbe Zentriwinkel $\angle AMD$ gleich dem Peripheriewinkel $\angle ACB = \gamma = 40^\circ$ ist, gilt ferner $\angle MAD = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. Aus diesen Überlegungen ergibt sich die folgende Konstruktion des Dreiecks ABC :

Wir zeichnen eine Strecke $\overline{AD} = \frac{c}{2} = 3 \text{ cm}$, tragen in A an $\overline{AD}$ einen Winkel von 50° an. Das in D auf $\overline{AD}$ zu errichtende Lot schneidet den freien Schenkel des angetragenen Winkels in M . Der Kreis um M mit $\overline{AM}$ als Radius, schneidet $\overline{AD}$ in B . Der Kreis um D mit $s_c = 8 \text{ cm}$ als Radius schneidet den Kreis um M mit $\overline{AM}$ als Radius in C und C' . Verbinden wir C und C' mit A und B , so erhalten wir das zu konstruierende Dreieck ABC bzw. ABC' .

Ma7 ■1474 Angenommen, Olaf habe von Peter x 1-Pfennig-, y 5-Pfennig- und somit $(12-x-y)$ 10-Pfennig-Münzen erhalten; dann gilt

$$\begin{aligned} x + 5y + 10(12 - x - y) &= 45, \\ -9x - 5y + 120 &= 45, \\ 5y &= 75 - 9x, \\ 5y &= 75 - 5x - 4x, \\ y &= 15 - x - \frac{4x}{5}. \end{aligned}$$

Nun ist y nur dann ganzzahlig, wenn x ein Vielfaches von 5 ist. Da Olaf 12 Münzen erhalten hat, gibt es genau drei Fälle, nämlich $x=0$, $x=5$ und $x=10$.

Für $x=0$ erhalten wir $y=15>12$, was nicht möglich ist. Für $x=5$ erhalten wir $y=6$, d. h., Olaf hat von Peter fünf 1-Pfennig-, sechs 5-Pfennig- und wegen $12-5-6=1$ genau eine 10-Pfennig-Münze erhalten. Für $x=10$ erhalten wir $y=-3$, also eine negative Zahl, was ebenfalls nicht möglich ist.

Ma7 ■1475 Aus a) folgt: Hans ist nicht 10 Jahre alt. Aus b) folgt: Hans ist weder 11 noch 13 Jahre alt. Folglich ist Hans 8 Jahre alt. Aus c) folgt: Hans bezieht die Zeitschrift „technikus“. Aus b) folgt: Kurt ist weder 8 noch 11 noch 13 Jahre alt. Also ist Kurt 10 Jahre alt.

Aus a) folgt: Kurt hat „alpha“ abonniert. Aus c) folgt: Ingo ist nicht 11 Jahre alt, also beträgt sein Lebensalter 13 Jahre, und er hat die Zeitschrift „technikus“ abonniert. Folglich ist Gerd 11 Jahre alt, und er bezieht nach a) die Zeitschrift „alpha“.

Zusammenstellung:

Name	Alter	Zeitschrift
Gerd	11	alpha
Hans	8	technikus
Ingo	13	technikus
Kurt	10	alpha

Ma7 ■1476 Es seien f, g, h, i, k, p die von Frank, Georg, Hans, Inge, Konrad, Peter gespendeten Geldbeträge.

Aus a) folgt: $6 \leq f, g, h, i, k, p \leq 12$.

Aus b) folgt: $p < k$.

Aus c) folgt: $i < p < g < h$.

Aus d) folgt: $k < h < f$.

Aus e) folgt: $h + 2 = f$ und $i + 2 = p$.

Deshalb gilt $6 \leq i < p < g$, $k < h < f \leq 12$ bzw. $6 \leq i < i + 2 < g$, $k < h < h + 2 \leq 12$ (*)

Es sei $i = 6$; dann gilt $p = i + 2 = 6 + 2 = 8$. Aus $h + 2 \leq 12$ folgt $h \leq 10$. Aus $g > p = 8$ und $g < h \leq 10$ folgt $g = 9$. Aus $k > p = 8$ und

$k < h \leq 10$, $k = 9$; also ist $h = 10$ und $f = 12$. Für $i \geq 7$ ist die fortlaufende Ungleichung (*) nicht erfüllbar.

Somit spendete Inge 6 M, Peter 8 M, Georg und Konrad je 9 M, Hans 10 M, Frank 12 M. Es haben Inge 12 M, Peter 16 M, Georg und Konrad je 18 M, Hans 20 M, Frank 24 M erhalten.

Ph 7 ■ 1477 Gegeben: $t_1 = 51,36$ s
 $t_2 = 51,22$ s
 $s_1 = 100$ m

gesucht: $s = s_1 - s_2$

Die Zeiten sind direkt proportional den Wegen. $t_1 : t_2 = s_1 : s_2$

$$t_1 : (t_1 - t_2) = s_1 : (s_1 - s_2)$$

$$t_1 : (t_1 - t_2) = s_1 : s$$

$$s = \frac{(t_1 - t_2) s_1}{t_1}$$

$$s = \frac{0,14 \text{ s} \cdot 100 \text{ m}}{51,36 \text{ s}}$$

$$s \approx 0,27 \text{ m} = 27 \text{ cm}$$

Die Differenz beträgt 27 cm.

Ch 7 ■ 1478

a) $m = v \cdot q$

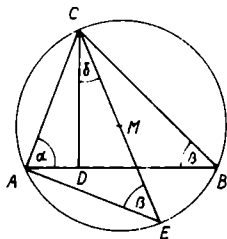
$$m = 55 \text{ l} \cdot 1,145 \text{ kg} \cdot \text{l}^{-1} = 62,975 \text{ kg}$$

$$\text{b) } v = \frac{m}{q} \quad V = \frac{55 \text{ kg}}{1,145 \frac{\text{kg}}{\text{l}}} = 48,04 \text{ l}$$

Ma 8 ■ 1479 Bezeichnet man den zweiten Schnittpunkt der Geraden CM mit dem Umkreis mit E, so gilt nach dem Satz des Thales $\angle CAE = 90^\circ$ (siehe Bild). Ferner gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\angle AEC = \beta$. Wegen $\angle DCA = 90^\circ - \alpha$, also $\angle ECA = 90^\circ - \alpha + \delta$ folgt, da die Winkelsumme im $\triangle AEC$ gleich 180° ist,

$$90^\circ + \beta + 90^\circ - \alpha + \delta = 180^\circ,$$

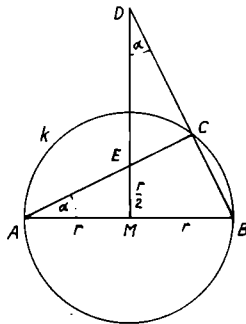
$$\delta = \alpha - \beta, \text{ w. z. b. w.}$$



Ma 8 ■ 1480 Nach dem Satz des Thales gilt $\angle BCA = 90^\circ$. Daraus folgt, wenn man $\angle EAM = \alpha$ setzt, $\angle MBC = 90^\circ - \alpha$, also $\angle BDM = \alpha = \angle EAM$. Ferner gilt $\angle AME = \angle DMB = 90^\circ$, also $\triangle DMB \sim \triangle AME$. Daraus folgt $\frac{DM}{MB} = \frac{AM}{EM}$, $\frac{DM}{MB} = \frac{MB \cdot AM}{EM} = \frac{r \cdot r}{r} = 2r$.

Daher beträgt der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks MBD

$$A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2r = r^2$$



Ma 8 ■ 1481 a) Das Volumen eines jeden der 27 Behälter beträgt

$$V_1 = \frac{\pi}{4} d^2 h,$$

wobei $d = 3,4$ m und $h = 17$ m ist.

Man erhält

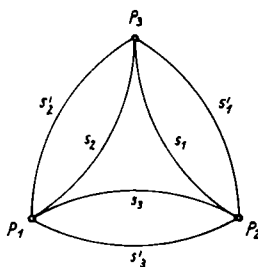
$$V_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 3,4^2 \cdot 17 \text{ m}^3 = \pi \cdot 2,89 \cdot 17 \text{ m}^3 \approx 154 \text{ m}^3$$

b) Das Gesamtvolumen der 27 Behälter beträgt $V \approx 154 \cdot 27 \text{ m}^3 \approx 4160 \text{ m}^3 = 4160000000 \text{ cm}^3$.

Das in den Behältern gespeicherte Wasser hat also eine Masse von 4160000000 g. Da die mittlere Temperaturdifferenz gegenüber einer Außentemperatur von 20°C etwa $120^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 100$ grad beträgt, ist in den 27 Behältern eine Wärmeenergie von $4160000000 \cdot 100 \text{ cal} = 416000000000 \text{ cal}$, d. s. 416 Gigakalorien, gespeichert.

Ma 8 ■ 1482 Von P_3 aus gibt es zunächst vier Möglichkeiten, die Wanderung zu beginnen, und zwar auf den Wegen s_1, s_1', s_2, s_2' (siehe Bild). Wir untersuchen zunächst die Möglichkeit, bei der der Weg s_1 von P_3 nach P_2 gewählt wird.

a) Von P_2 aus gibt es dann zwei Möglichkeiten, den Weg nach P_1 fortzusetzen, und von P_1 je zwei Möglichkeiten, den Weg weiter nach P_3 zu begehen, insgesamt also vier Möglichkeiten. Die weiteren Wege über P_2, P_1 bis zur Beendigung der Wanderung sind dann eindeutig bestimmt.



b) Es besteht aber auch die Möglichkeit, von P_2 aus auf s_1' nach P_3 zurückzukehren. Dann gibt es von P_3 aus zwei Möglichkeiten, nach P_1 zu gelangen, und von P_1 je zwei

Möglichkeiten, nach P_2 zu wandern, insgesamt also vier Möglichkeiten.

c) Der Wanderer hat aber auch die Möglichkeit, nachdem er wie im Falle a) in P_1 angekommen ist, wieder nach P_2 und dann nach P_3 zurückzukehren. Dann gibt es noch zwei Möglichkeiten, den Weg nach P_1 fortzusetzen, insgesamt also vier Möglichkeiten.

d) Endlich hat der Wanderer, nachdem er wie im Falle a) in P_3 angekommen ist, noch die Möglichkeit, nach P_1 zurückzukehren und dann den Weg über P_2 nach P_3 zu beenden. Da es für den Weg bis P_3 - vgl. Fall a) - bereits vier Möglichkeiten gibt, erhalten wir in dem vorliegenden Fall weitere vier Möglichkeiten.

Es gibt also insgesamt

$$4 + 4 + 4 + 4 = 16 \text{ Möglichkeiten}$$

für die Fortsetzung des Weges, nachdem zu Beginn der Weg s_1 von P_3 nach P_1 gewählt wurde.

Wie oben gezeigt wurde, gibt es vier Möglichkeiten, die Wanderung zu beginnen, und zu jeder dieser vier Möglichkeiten 16 Möglichkeiten, die Wanderung fortzusetzen. Die Anzahl der Varianten für den Wanderweg beträgt also insgesamt $4 \cdot 16 = 64$.

Ph 8 ■ 1483

Gegeben: $A = 4 \cdot 5 \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2$

$$p = 100 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$

Gesucht: F

Das Gewicht drückt auf alle vier Räder gleichmäßig.

$$F = p \cdot A$$

$$F = \frac{100 \text{ kp} \cdot 20 \text{ cm}^2}{\text{cm}^2}$$

$$F = 2000 \text{ kp} = 2 \text{ Mp.}$$

Ch 8 ■ 1484 1. Lieferung: In 3,720 t sind 84% Trockenmasse. 2. Lieferung: In 3,800 t sind 87,5% Trockenmasse

$$3,125 \text{ t}$$

$$3,325 \text{ t}$$

$$6,450 \text{ t zusammen.}$$

6,450 t Trockenmasse entsprechen dann 86% der zu verrechnenden Getreidemasse. 100% entsprechen 7,500 t. Der LPG werden 7,500 t Getreide angerechnet.

Ma 9 ■ 1485 Es sei x eine reelle Zahl, für die die Ungleichung

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 > (x+3)^2 + (x+4)^2 + (x+5)^2 \quad (1)$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 &> x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 \\ &+ x^2 + 10x + 25, \\ 6x + 5 &> 24x + 50, \\ -18x &> 45. \end{aligned} \quad (2)$$

Daraus folgt

$$18x < -45,$$

$$x < -\frac{45}{18},$$

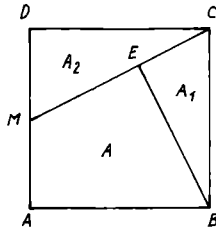
$$x < -\frac{5}{2}. \quad (3)$$

Für alle reellen x , für die die Ungleichung (3) erfüllt ist, ist aber auch die Ungleichung (1) erfüllt.

Daher besteht die Lösungsmenge der Ungleichung (1) aus allen reellen Zahlen x , für die $x < -\frac{5}{2}$ gilt:

$$L = \left\{ x < -\frac{5}{2}; x \in P \right\}.$$

Ma9 ■ 1486 Aus $\overline{CD} = a$, $\overline{DM} = \frac{a}{2}$ folgt nach dem Satz des Pythagoras (siehe Bild)



$$\overline{MC} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Aus $\angle CDM = \angle CEB = 90^\circ$ und $\angle DMC = \angle BCE$ als Wechselwinkel der geschnittenen Parallele folgt

$$\triangle CDM \sim \triangle CEB,$$

also $a : \frac{a}{2}\sqrt{5} = \overline{EB} : a$, $\overline{EB} = \frac{a^2}{2\sqrt{5}} = \frac{2a}{5}\sqrt{5}$.

Ferner gilt $\overline{EC} : a = \frac{a}{2} : \frac{a}{2}\sqrt{5}$,

$$\overline{EC} = \frac{a}{5}\sqrt{5}. \text{ Daher ist}$$

der Flächeninhalt des Dreiecks CEB gleich

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{5}\sqrt{5} \cdot \frac{a}{5}\sqrt{5} = \frac{a^2}{5}.$$

Ferner ist der Flächeninhalt des Dreiecks CDM gleich

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

Also ist der gesuchte Flächeninhalt des Vierecks ABEM gleich

$$A = a^2 - A_1 - A_2 = a^2 - \frac{a^2}{5} - \frac{a^2}{4},$$

$$A = \frac{20a^2 - 4a^2 - 5a^2}{20} = \frac{11}{20}a^2.$$

Ma9 ■ 1487 Es sei x eine positive reelle Lösung der Gleichung

$$x^{1976} = 1976. \text{ Dann gilt} \quad (1)$$

$$\left((x)^{1976} \right)^{1976} = 1976^{1976},$$

also auf Grund der Potenzgesetze

$$(x^{1976})^{1976} = 1976^{1976}. \quad (2)$$

Setzt man

$$x^{1976} = t, \text{ also } x = \sqrt[1976]{t}, \quad (3)$$

so erhält man aus (2)

$$t' = 1976^{1976}. \quad (4)$$

Diese Gleichung ist offenbar für $t = 1976$ erfüllt. Damit haben wir wegen (3) eine Lösung der Gleichung (1) erhalten, nämlich

$$x = \sqrt[1976]{1976}. \quad (5)$$

Denn aus (5) folgt $x^{1976} = 1976$, also

$$x^{1976} = \left(\sqrt[1976]{1976} \right)^{1976} = 1976.$$

Es ist jetzt nur noch nachzuweisen, daß die Gleichung (4) und damit auch die Gleichung (1) keine weiteren positiven reellen Lösungen hat.

Setzt man $f(t) = t'$, so gilt

$$f(t) < 1 \text{ für } 0 < t < 1,$$

$$f(t) = 1 \text{ für } t = 1.$$

Ferner ist $f(t)$ streng monoton wachsend für $t > 1$, nimmt also den Wert 1976¹⁹⁷⁶ genau einmal an, und zwar für $t = 1976$.

Daher hat die Gleichung (4) keine weiteren positiven reellen Lösungen, und die Gleichung (1) hat genau eine positive reelle Lösung, nämlich $x = \sqrt[1976]{1976}$.

Ma9 ■ 1488 Es sei (x, y, z) ein Tripel von nicht negativen reellen Zahlen, für die das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllt ist. Dann folgt durch Subtraktion aus (1) und (2):

$$xy - xz + y^2 - z^2 = 0,$$

$$x(y - z) + (y + z)(y - z) = 0,$$

$$(y - z)(x + y + z) = 0; \quad (4)$$

(1) und (3):

$$xy - yz + x^2 - z^2 = 0,$$

$$(x - z)(x + y + z) = 0; \quad (5)$$

(2) und (3):

$$xz - yz + x^2 - y^2 = 0,$$

$$(x - y)(x + y + z) = 0. \quad (6)$$

Das Gleichungssystem (4), (5), (6) ist erfüllt genau dann, wenn

$$y - z = x - z = x - y = 0 \quad (7)$$

oder wenn

$$x + y + z = 0. \quad (8)$$

Im Falle der Gleichungen (7) gilt $x = y = z$, also wegen (1)

$$x^2 + x^2 + x^2 = x^3,$$

$$x^3 - 3x^2 = 0,$$

$$x^2(x - 3) = 0, \quad (9)$$

also $x = 0$ oder $x = 3$.

Damit haben wir bereits zwei Lösungstriple erhalten, nämlich die Tripel $(0, 0, 0)$ und $(3, 3, 3)$. Die Probe zeigt, daß für diese Tripel die Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt sind. Im Falle der Gleichung (8) gilt wegen $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

$$x = y = z = 0.$$

Wir erhalten also kein weiteres Lösungstriple. Das gegebene Gleichungssystem hat daher genau zwei Lösungstriple, die der gestellten Bedingung genügen, nämlich $(0, 0, 0)$ und $(3, 3, 3)$.

Ph9 ■ 1489 Gegeben: $G = 285 \text{ p}$

$$V = 67 \text{ cm}^3 - 40 \text{ cm}^3 = 27 \text{ cm}^3$$

$$\gamma = 11,4 \text{ p} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Gesucht: $\gamma_1 : V_1$

Die Wichte (γ_1) des Körpers ergibt sich

$$\text{aus } \gamma_1 = \frac{G}{V}$$

$$\gamma_1 = \frac{285 \text{ p}}{27 \text{ cm}^3}$$

$$\gamma_1 \approx 10,56 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$$

Da $\gamma_1 < \gamma$, muß der Körper einen Hohlraum besitzen. Diesen Hohlraum erhält man durch

$V_1 = V - V_2$, wobei V_2 das Volumen des reinen Bleikörpers ist.

$$V_2 = \frac{G}{\gamma}$$

$$V_1 = V - V_2$$

$$V_2 = \frac{285 \text{ p} \cdot \text{cm}^3}{11,4 \text{ p}}$$

$$V_1 = 27 \text{ cm}^3 - 25 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = 25 \text{ cm}^3$$

$$V_1 = 2 \text{ cm}^3$$

Der Hohlraum beträgt 2 cm^3 .

$$\text{Ch9} \blacksquare 1490 \quad \frac{2}{x} = \frac{0,03}{100}$$

$$x = \frac{20 \cdot 10^3}{3} = 6,66 \cdot 10^3$$

$$2r = 6,66 \cdot 10^3$$

$$2r = 6,66 \cdot 10^3 \text{ mm} : 3,14$$

$$= 2,1 \cdot 10^3 \text{ mm} = 21 \text{ m}$$

Der Durchmesser müßte 2,3 m lang sein.

Ma10/12 ■ 1491 a) Für $x = 6$ sind die Gleichungen (7), (6), (5) und (4) erfüllt, aber nicht die Gleichung (3) und daher auch nicht die Gleichungen (2) und (1); denn aus (4) folgt (3) nur für $x \geq 8$. Der Fehler bei der obigen Schlußweise besteht also darin, daß eine Implikation nicht notwendig umkehrbar ist:

Aus (3) folgt zwar für die Gleichung (4), aber nicht aus (4) für die Gleichung (3).

b) Hätte die Funktion f in ihrem Definitionsbereich eine Nullstelle x_0 , so müßte, da aus (1), wie oben gezeigt wurde, (7) folgt, $x_0 = 6$ sein. Das ist aber wegen $f(6) = -4$ nicht möglich. Daher hat die Funktion f in ihrem Definitionsbereich keine Nullstelle, w. z. b. w.

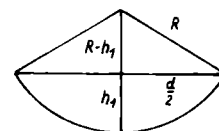
Ma10/12 ■ 1492 a) Da der Flächeninhalt der Blechscheibe gleich der Summe der Flächeninhalte der Kugelkappe und des Zylindermantels ist, gilt

$$\frac{\pi}{4} D^2 = 2\pi R h_1 + \pi d h_2 \quad (1)$$

wobei R der Radius der zu der Kugelkappe gehörenden Kugel ist. Nun gilt für den Radius R dieser Kugel (siehe Bild)

$$R^2 = \frac{d^2}{4} + (R - h_1)^2, \quad (2)$$

$$2R h_1 = \frac{d^2}{4} + h_1^2. \quad (3)$$



Setzt man diesen Wert in (1) ein, so erhält man

$$\frac{D^2}{4} = \frac{d^2}{4} + h_1^2 + d h_2,$$

$$D^2 = d^2 + 4(h_1^2 + d h_2),$$

$$D = \sqrt{d^2 + 4(h_1^2 + d h_2)}. \quad (4)$$

Damit ist der Durchmesser D der Blechscheibe als Funktion von d , h_1 , h_2 dargestellt.

b) Für $d = 230 \text{ mm}$, $h_1 = 70 \text{ mm}$, $h_2 = 110 \text{ mm}$ erhält man aus (4)

$$D = \sqrt{230^2 + 4(70^2 + 230 \cdot 110)} \\ = \sqrt{173\,700} \text{ mm} \approx 416,8 \text{ mm}.$$

Der Durchmesser der Blechscheibe beträgt also rund 417 mm.

Ma 10/12 ■ 1493 Es seien x, y, z drei von Null verschiedene paarweise teilerfremde natürliche Zahlen, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

$$x + y < 50, \quad (2)$$

$$x \text{ ist durch } 7 \text{ teilbar.} \quad (3)$$

Wegen $x < 50 - y$ und $y > 0$ ist dann

$$x = 7, 14, 21, 28, 35 \text{ oder } 42. \quad (4)$$

Ferner gilt wegen (1)

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y). \quad (5)$$

Dabei ist $z + y > z - y > 0$; ferner sind $z + y$ und $z - y$ beide gerade oder beide ungerade, da sonst $2z$ ungerade wäre, und haben außer 2 keinen gemeinsamen Teiler, da sonst z und y nicht teilerfremd wären. (6)

Wir behandeln jetzt die einzelnen sich aus (4) ergebenden Fälle:

1. $x = 7$. Dann gilt

$$(z + y)(z - y) = 49.$$

Wegen (6) folgt, daß nur einer der beiden Faktoren durch 7 teilbar ist, $z + y = 49$, $z - y = 1$, also $2z = 50$, $z = 25$, $y = 24$.

Wir erhalten damit die erste Lösung:

$$x = 7, y = 24, z = 25$$

und überzeugen uns davon, daß die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind.

2. $x = 14$. Dann gilt

$$(z + y)(z - y) = 4 \cdot 49.$$

Hier gibt es keine Zerlegung der Zahl $4 \cdot 49$ in Faktoren, die den Bedingungen (6) entsprechen.

3. $x = 21$. Dann gilt

$$(z + y)(z - y) = 9 \cdot 49.$$

Wegen (6) gibt es dann nur die folgende Faktorenenzerlegung:

$$z + y = 49, z - y = 9,$$

also $2z = 58$, $z = 29$, $y = 20$.

Wir erhalten somit die zweite Lösung:

$$x = 21, y = 20, z = 29$$

und überzeugen uns davon, daß die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind.

4. $x = 28$. Dann gilt

$$(z + y)(z - y) = 16 \cdot 49.$$

Hier gibt es keine Zerlegung der Zahl $16 \cdot 49$ in Faktoren, die den Bedingungen (6) und (2) entspricht.

5. $x = 35$. Dann gilt

$$(z + y)(z - y) = 25 \cdot 49.$$

Wegen (6) gibt es dann nur die folgende Faktorenenzerlegung:

$$z + y = 49, z - y = 25,$$

also $2z = 74$, $z = 37$, $y = 12$.

Wir erhalten somit die dritte Lösung:

$$x = 35, y = 12, z = 37$$

und überzeugen uns davon, daß die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind.

6. $x = 42$. Dann gilt

$$(z + y)(z - y) = 36 \cdot 49.$$

Hier gibt es keine Zerlegung der Zahl $36 \cdot 49$ in Faktoren, die den Bedingungen (6) und (2) entsprechen. Damit sind sämtliche Fälle behandelt. Es gibt also genau drei Tripel von natürlichen Zahlen, nämlich

(7, 24, 25), (21, 20, 29), (35, 12, 37),

für die die gestellten Bedingungen erfüllt sind.

Ma 10/12 ■ 1494 Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung

$$12x^4 - 11x^3 - 146x^2 - 11x + 12 = 0. \quad (1)$$

Dann gilt $x \neq 0$. Die Gleichung (1) ist eine sogenannte symmetrische Gleichung, da der Koeffizient von x^4 und das Absolutglied sowie die Koeffizienten von x^3 und x übereinstimmen. Wir dividieren daher durch x^2 und erhalten

$$12x^2 - 11x - 146 - 11 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$12 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 11 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 146 = 0. \quad (2)$$

Wir setzen

$$x + \frac{1}{x} = z \text{ und erhalten} \quad (3)$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2, \text{ also } x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2.$$

Wegen (2) erhalten wir dann die Gleichung

$$12(z^2 - 2) - 11z - 146 = 0,$$

$$z^2 - \frac{11}{12}z - \frac{170}{12} = 0. \quad (4)$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$z_1 = \frac{11}{24} + \sqrt{\frac{121}{24^2} + \frac{170}{12}} = \frac{11}{24} + \sqrt{\frac{8281}{24^2}},$$

$$z_1 = \frac{11 + 91}{24} = \frac{17}{4};$$

$$z_2 = \frac{11 - 91}{24} = -\frac{10}{3}.$$

Wegen (3) erhalten wir für $z_1 = \frac{17}{4}$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4},$$

$$x^2 - \frac{17}{4}x + 1 = 0. \text{ Diese}$$

quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$x_1 = 4, x_2 = \frac{1}{4}.$$

Für $z_2 = -\frac{10}{3}$ erhalten wir

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3},$$

$$x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0. \text{ Diese}$$

quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$x_3 = -\frac{1}{3}, x_4 = -3.$$

Wenn also die Gleichung (1) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Lösungen

$$x_1 = 4, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = -\frac{1}{3}, x_4 = -3$$

sein. Die Probe zeigt, daß das tatsächlich Lösungen der Gleichung (1) sind. Denn für $f(x) = 12x^4 - 11x^3 - 146x^2 - 11x - 12 = 0$ gilt

$$f(4) = 0, f\left(\frac{1}{4}\right) = 0, f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \text{ und}$$

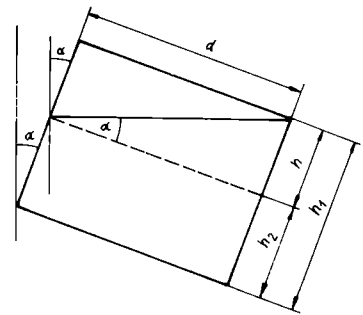
$$f(-3) = 0.$$

Ph 10/12 ■ 1495 Gegeben: $d = 90$ cm

$$h_1 = 80 \text{ cm } h_2 = 70 \text{ cm}$$

Gesucht: α

Aus der Zeichnung ergibt sich



$$\tan \alpha = \frac{h}{d} \quad h = h_1 - h_2$$

$$\tan \alpha = \frac{10}{90}$$

$$\tan \alpha = 0,1111$$

$$\alpha = 6,34^\circ$$

Der Küber muß um $6,34^\circ$ geneigt sein.

Ch 10/12 ■ 1496



$$2 \cdot 55,85 \rightarrow 159,7$$

$$2 \cdot 55,85 \text{ g} \rightarrow 159,7 \text{ g Fe}_2\text{O}_3$$

$$x \text{ g} \rightarrow 0,164 \text{ Fe}_2\text{O}_3$$

$$x \text{ g} : 2 \cdot 55,85 \text{ g} = 0,1649 \text{ g} : 159,7 \text{ g}$$

$$x = 0,1147 \text{ Fe}$$

(Atomgewicht des Sauerstoffs auf 16 gerundet)

$$0,5240 \text{ g} \rightarrow 0,1147 \text{ g Fe}$$

$$100 \text{ g} \rightarrow x \text{ g Fe} \quad \text{Eisengehalt } 21,89\%$$

$$0,5240 = \frac{0,1147}{x}$$

$$\frac{100}{0,5240} = \frac{0,1147}{x}$$

Lösungen zu: alpha-heiter (3/76)

Hundert Gefangene

Es ist offensichtlich, daß die Zellen offen waren, deren Nummer eine ungerade Zahl an Teilern besitzt. Die meisten Nummern N mit dem Teiler 4 haben doch auch noch den Teiler $\frac{N}{4}$. Die Nummer 20 hat z. B. die Teiler 1 und 20, 2 und 10, 4 und 5, 5 und 4, 10 und 2, 20 und 1. Also 6 Teiler. Ungerade Anzahlen an Teilern haben lediglich die Nummern, die Quadratzahlen sind. Die Nummer 25 hat die Teiler 1 und 25, 5 und 5, 25 und 1.

Also drei Teiler.

Der König hat 10 Gefangene freigelassen.

Und zwar die mit den Zellennummern 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 und 100.

Motorsport

$$71671 + 9542 = 81213;$$

$$8662 + 4375 = 13037;$$

$$70253 + 10156 = 80409;$$

$$58518 + 6023 = 64541$$

Kleine Logelei

Herr Maier spielt Tennis (5). Aus (5) und (3) folgt, daß er Tee trinkt. Aus Tee folgt Linz (2). Da deswegen Graz ausscheidet, ist er nicht Schlosser. Da er wegen (5) auch nicht Segelflieger ist, ist er auch nicht Lehrer (1) und somit Arzt.

Somit ergibt sich: Maier, Tennis, Tee, Linz, Arzt.

Herr Berger ist nicht Lehrer (1), also auch nicht Segelflieger, demzufolge Boxer. Da jetzt für Janik nur mehr Segelflug bleibt, ist Berger der Schlosser. Aus (2) folgt Graz. Wegen (3) und (5) trinkt er Fruchtsaft.

Somit ergibt sich: Berger, Boxer, Schlosser, Graz, Fruchtsaft. Für Herrn Janik folgt dann: Janik, Lehrer, Segelflug, Mineralwasser.

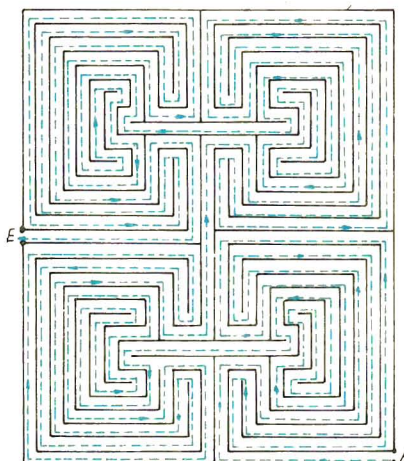
Silbenrätsel

1. Funktionspapier, 2. Relativitätstheorie, 3. Amortisation, 4. Nullstelle, 5. Conrad, 6. Oberfläche, 7. Inkreisradius, 8. Symbol arc, 9. Volumina, 10. Ingenieur, 11. Explizit, 12. Trigonometrie, 13. Einmaleins
- François Viète (Vieta), René Descartes -

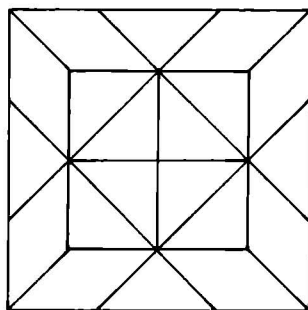
Kryptarithmetik

1. $\frac{303}{242} = 0,7986$
2. $Z = 65359477124183...$
 $Z \cdot 17 = 11111...$
 $d = 1, 2, 3, ..., 9$

Troja-Diagramm



Legespiel



Kreuzworträtsel

Waagrecht: 1. Leibniz, 5. MEZ, 8. Idiom, 10. In, 11. Amati, 14. th, 15. Bruchstrich, 17. Logarithmen, 21. Agnes, 24. Ei, 25. Ecken, 26. one, 27. Graphen

Senkrecht: 2. Einer, 3. bit, 4. Noether, 6. est, 7. Zeichen, 9. Amor, 12. Axiome, 13. Zungen, 15. Bolzano, 16. Titeica, 18. Abel, 19. if, 20. Ebene, 22. gon, 23. DKP.



„Du, Vati, wieviel Liter verbrauchst du eigentlich auf 100 Kilometer?“

Übung macht den Meister

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abschlußprüfung, Klasse 10

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

- ▲ 1 ▲ Berechnen Sie 7^0 !
- ▲ 2 ▲ Formen Sie die Potenz a^{-3} ($a \in P$, $a \neq 0$) so um, daß kein negativer Exponent auftritt!
- ▲ 3 ▲ Schreiben Sie die Potenz $a^{\frac{1}{2}}$ ($a \in P$, $a > 0$) als Wurzel!
- ▲ 4 ▲ Schreiben Sie die Wurzel $\sqrt[3]{k^2}$ ($k \in P$, $k > 0$) als Potenz!
- ▲ 5 ▲ Schreiben Sie die Gleichung $2^3 = 8$ in der Form $\log_a b = c$!
- ▲ 6 ▲ Schreiben Sie die Gleichung $\log_5 125 = 3$ in der Form $a^c = b$!
- ▲ 7 ▲ Berechnen Sie $\sqrt{0,09}$!
- ▲ 8 ▲ Schreiben Sie die Gleichung $3^4 = 81$ in der Form $\sqrt[n]{a} = b$!
- ▲ 9 ▲ Berechnen Sie die Wurzel $\sqrt[3]{0,008}$!
- ▲ 10 ▲ Schreiben Sie die Einheit $1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$ als Produkt!
- ▲ 11 ▲ Berechnen Sie $\left(3,5 \cdot \frac{11}{3} + 13,5\right)^c$!

- ▲ 12 ▲ Schreiben Sie $\sqrt[4]{a^3}$ als Potenz! Berechnen Sie den Logarithmus $\log_2 32$!
- ▲ 13 ▲ Vereinfachen Sie folgende Terme:
 a) $2pq^{k+1} \cdot 4p^{-2}q^k$ d) $5\sqrt{k^2} - \sqrt{49k^2}$
 b) $\frac{5a^4x^2}{25a^6x^7}$ e) $\sqrt[3]{a^6b^9}$
 c) $\sqrt[4]{m} \cdot \sqrt[4]{m^7}$ $\sqrt[3]{135} : \sqrt[3]{5}$
 $\sqrt[3]{\frac{a^2}{9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{3}}$
- ▲ 14 ▲ Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes:
 $x_1 = 1,68 \cdot 4,35$
 $x_2 = \frac{7,05}{1,39}$
 $x_3 = \frac{0,276 \cdot 765}{0,038}$
 $x_4 = \frac{\sqrt{545} \cdot 23,2}{4680 \cdot 0,665}$
- ▲ 15 ▲ Schreiben Sie die Zahlen 628000000 und 0,0037 in der Darstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen, d. h. in der Form $a \cdot 10^n$! Dabei soll der Faktor a jeweils zwischen 1 und 10 liegen!
- ▲ 16 ▲ Vergleichen Sie das folgende Zahlenpaar miteinander: $7\sqrt[3]{8}$ und $5\sqrt[3]{18}$! Setzen Sie das richtige Zeichen ($<$; $=$; $>$)!

Fortsetzung von Seite VIII

c) Wir zeigen, daß $p=2$ die kleinste positive Periode ist:

Angenommen, es gäbe für f eine Periode p mit $0 < p < 2$. (2)

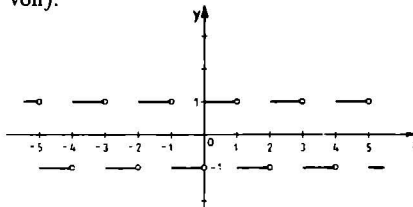
Dann wäre $0 < \frac{p}{2} < 1$ (2)

und $-1 < -\frac{p}{2} < 0$. (3)

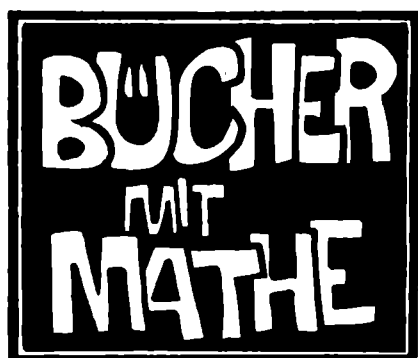
Es müßte $f(x+p) = f(x)$ für alle x gelten, also auch etwa für $x_0 = -\frac{p}{2}$, d. h., es müßte

$f\left(-\frac{p}{2}\right) = f\left(\frac{p}{2}\right)$ sein. Wegen (3) gilt aber $\left[-\frac{p}{2}\right] = -1$ und damit $f\left(-\frac{p}{2}\right) = -1$ und wegen (2) $\left[\frac{p}{2}\right] = 0$ und damit $f\left(\frac{p}{2}\right) = 1$, folglich ist $f\left(-\frac{p}{2}\right) \neq f\left(\frac{p}{2}\right)$.

Daher ist $p=2$ tatsächlich die kleinste Periode von f .



d) Die so „o“ bezeichneten Punkte gehören nicht zum Graph der Funktion.



aus dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

A. S. Solodownikow

Lineare Ungleichungssysteme

98 Seiten, Preis: 5,00 M
Math. Schülerbücherei Nr. 74

Die gegenwärtige intensive Entwicklung der Theorie der linearen Ungleichungssysteme begann erst in den vierziger bis fünfziger Jahren dieses Jahrhunderts, als das stürmische Wachstum der angewandten Disziplinen (lineare, konvexe und andere Gebiete der mathematischen Optimierung, die sog. Spieltheorie usw.) ein vertieftes und systematisches Studium der linearen Ungleichungen nötig machten. Diese Broschüre möchte den Leser mit verschiedenen Aspekten der Theorie der linearen Ungleichungssysteme vertraut machen; mit geometrischen Aspekten und, eng damit zusammenhängend, mit Lösungsmethoden, mit einigen rein algebraischen Eigenschaften und mit prinzipiellen Fragen der linearen Optimierung. Für die Lektüre werden keinerlei Kenntnisse vorausgesetzt, welche die Ergebnisse des Mathematikunterrichts der Schule überschreiten.

H. Pieper

Zahlen aus Primzahlen

167 Seiten, Preis: 6,70 M

Aus dem Inhalt: Primzahlen; die p -adische Entwicklung der rationalen Zahlen; die p -adischen Zahlen.

Dieses Büchlein stellt eine kurze Einführung in ein Teilgebiet der Mathematik, nämlich in die Arithmetik, in die Theorie der Zahlen dar. Hensel nannte es das „reinste und mathematischste Gebiet“ der Mathematik.

Gauß sagte einmal, die Mathematik sei die Königin der Wissenschaften, die Zahlentheorie aber die Königin der Mathematik. Dieses Buch wurde sehr ausführlich geschrieben; es soll mit wenigen Vorkenntnissen verständlich sein. Doch oberflächlich lesen läßt es sich nicht. Man muß mit ihm arbeiten, die Abstraktionen und Schlüsse nachvollziehen, sich Schritt für Schritt die Kenntnisse aneignen, in den Stoff eindringen.

K.-D. Drews

Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben

154 Seiten, Preis: 7,50 M
Math. Schülerbücherei Nr. 89

Themen dieses Buches sind die Bestimmung der Lösungen von linearen Gleichungssystemen, die Matrizenrechnung sowie die Bestimmung der Lösungen von linearen Optimierungsaufgaben. Dabei stehen sowohl die Herleitung der wesentlichen theoretischen Aussagen als auch die Bereitstellung von algorithmisch aufbereiteten Rechenverfahren im Vordergrund, und zwar erfolgt die Entwicklung der Theorie unmittelbar in Verbindung mit den Lösungsalgorithmen. Diese wurden unter den in der Praxis üblichen Verfahren ausgewählt und erhalten Formulierungen, die dem Leser das übersichtliche Durchrechnen von Beispielen ermöglichen, aber auch eine Verwendbarkeit in modernen programmgesteuerten Rechenautomaten erkennen lassen. Der Stoff ist so abgefaßt, daß er für Schüler der Abiturstufe verständlich wird.

N. N. Worobjow

Teilbarkeitskriterien

85 Seiten, Preis: 4,20 M
Math. Schülerbücherei Nr. 52

Aus dem Inhalt: Die Teilbarkeit von Zahlen; die Teilbarkeit von Summen und Produkten; Restgleichheits- und Teilbarkeitskriterien; die Teilbarkeit von Potenzen; Beweise der Sätze, Lösungen der Aufgaben. Die vorliegende Broschüre kann als Beschreibung einer der möglichen *Spaziergänge* am Rande der modernen Mathematik angesehen werden. Die Darlegung grundlegender Dinge, die sich auf Teilbarkeitskriterien beziehen, erlaubt es, einige ziemlich abstrakte Fragen der diskreten Mathematik zu berühren. Dazu ge-

hören vor allem die Aussagen der elementaren Zahlentheorie, die sich um den Hauptsatz der Arithmetik und die kanonische Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren gruppieren.

Das Büchlein ist für mathematikinteressierte Schüler der oberen Klassen bestimmt und setzt, von einigen Anwendungen des binomischen Satzes abgesehen, keinerlei Vorkenntnisse voraus.

I. I. Golowina/I. M. Jaglow

Vollständige Induktion in der Geometrie

144 Seiten, Preis: 5,80 M
Math. Schülerbücherei Nr. 75

Aus dem Inhalt: Berechnungen mittels vollständiger Induktion; Beweise mittels vollständiger Induktion (Aufgaben über Karten, Färbungsprobleme); Vollständige Induktion bei Konstruktionen; Bestimmung von Figuren mittels vollständiger Induktion; Definition mittels vollständiger Induktion; Vollständige Induktion nach der Dimensionszahl; ...; Lösung der Aufgaben. Das Buch wendet sich an Schüler der höheren Klassen der Erweiterten Oberschulen. Es kann vorteilhaft im Unterricht und zur Arbeit im Mathematikzirkel verwendet werden.

A. O. Gelfond

Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen

(Diophantische Gleichungen)

59 Seiten, Preis: 3,80 M
Math. Schülerbücherei Nr. 22

Aus dem Inhalt: Gleichungen mit einer Unbekannten; Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten; Beispiele für Gleichungen zweiten Grades mit drei Unbekannten; Gleichungen der Form $x^2 - Ay^2 = 1$. Die Ermittlung aller Lösungen dieser Gleichung; die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten; Gleichungen höheren als zweiten Grades mit zwei Unbekannten; algebraische Gleichungen höheren Grades als zweiten Grades mit drei Unbekannten und einige Exponentialgleichungen.

Das vorliegende Büchlein behandelt eines der interessantesten Gebiete der Zahlentheorie, nämlich die Auflösung von sogenannten diophantischen Gleichungen.

625 Millionen Mark für das Lernen

Im Zeichen des IX. Parteitages

In der sozialistischen Schule sind Unterrichtsmittel kein Zusatz für den Unterricht. Sie sind Quellen und Mittel für die Gewinnung von Erkenntnissen. Ohne sie und ihre effektive Nutzung wäre das angestrebte Bildungs- und Erziehungsziel nicht zu erreichen, könnten viele Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten nicht erworben werden.

Die Richtigkeit dieser These findet jeder Schüler Tag für Tag in der eigenen Praxis bestätigt. Und er erlebte, wie diese materielle Bedingung Unterrichtsmittel sich von Jahr zu Jahr verbesserte.

Das ist leicht dahingeschrieben und registriert. Aber welcher gesellschaftliche Aufwand steckt dahinter, was gab unsere Gesellschaft allein für diese eine Bedingung hohen Unterrichtsniveaus seit dem VIII. Parteitag aus?

Die an unseren Schulen allein von 1971 bis 1975 gelieferten Unterrichtsmittel repräsentieren einen Wert von 625 Millionen Mark. Der zentrale Fonds des *Ministeriums für Volksbildung* stieg von 49,7 im Jahre 1971 auf 77,7 Millionen Mark im Jahre 1975. Gegenwärtig besitzt jede Schule in der DDR einen Unterrichtsmittelbestand von durchschnittlich 140000 Mark. In den *Kreisstellen für Unterrichtsmittel* stehen hochwertige technische Geräte und Unterrichtsmittel, wie Filme, Diareihen, Tonbänder u. a., zur Ausleihe an die Schulen bereit.

Etwa 1500 Unterrichtsmittel wurden neu- bzw. weiterentwickelt. Darunter befinden sich Gerätesysteme für Schüler zum Experimentieren im naturwissenschaftlichen und polytechnischen Unterricht.

Von 1971 bis 1975 wurden 134 Bildreihen und Dia-Filme, 67 Tonbildreihen und 64 eigens für den Unterricht produzierte Schallplatten herausgegeben.

Und auch in diesem Bereich gibt es eine immer enger werdende Zusammenarbeit mit anderen sozialistischen Staaten. So bewähren sich seit Jahren z. B. Wattmeter und Demonstrationsmeßgeräte aus der UdSSR, Universalmeßgeräte aus der ČSSR, Telefonbaukästen aus der VR Polen in unseren Schulen. Die „Interscola“ und die kürzlich zu Ende gegangene „Škola nová 75“ in Brno sind Ausdruck dafür.

Eine millionenschwere Bedingung ist für die solide Ausbildung unserer Kinder von den Werktätigen allein seit dem VIII. Parteitag geschaffen worden und wird ständig vervollkommen.

J. Golde

Das Staatliche Kontor für Unterrichtsmittel und Schulmöbel in Leipzig stellt für unsere Schulen fast 100 verschiedenartige mathematische Modelle zur Verfügung. Darüber hinaus werden weit über 2000 Arbeitsmittel und Modelle für andere Unterrichtsgebiete von den Mitarbeitern dieses Kollektivs bereitgestellt.

