Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

$(a+b)^0$ 1

$(a+b)^1$ 1 1

$(a+b)^2$ 1 2 1

$(a+b)^3$ 1 3 3 1

$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
5. Jahrgang 1971
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

5

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import BmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: S. N. Hirurkar, Nagpur (S. 97); J. Lehmann, Leipzig (S. 98, S. 107, S. 109, S. 111); K. Bastian, Halle (S. 110); ČSTK, Bratislava (S. 108/109)
Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes des Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 27. Juli 1971

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Ramanujan –

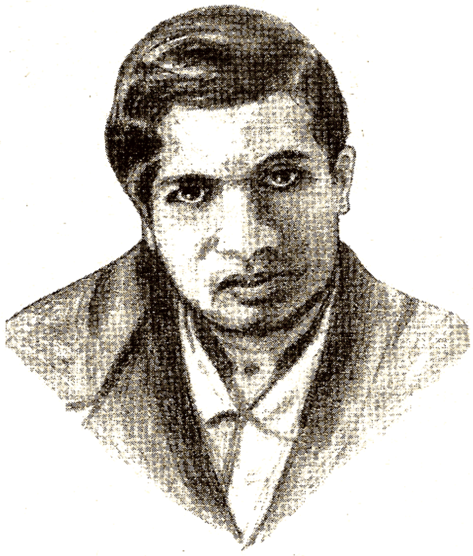
das mathematische Genie Indiens

Das Leben *Ramanujans* bietet wohl das interessanteste Beispiel aus der neueren Zeit dafür, was ein wirklich großes Talent in fast völliger Isolierung von dem in der Welt vorhandenen Wissenschatz vollbringen kann. Das Schaffen *Ramanujans* bis zu seinem 27. Lebensjahr ist nämlich ein kaum wiederholbares Experiment über das Wirken eines mathematischen Gehirns im Vakuum. Wir werden kurz berichten, wie das zustande gekommen ist und was das Ergebnis war.

Srinivasa Ramanujan Aiyangar wurde am 22. Dezember 1887 in einem Dorf im Süden Indiens geboren. Seine Eltern gehörten der privilegierten Kaste der Brahmanen an. Sie unterschieden sich jedoch in nichts von den kleinen Angestellten, Kaufleuten und Bauern ihrer Umgebung. *Ramanujans* Vater war Buchhalter eines kleinen Textilgeschäftes in der Stadt Kumbakonam (Provinz Madras). Seine Mutter war vermutlich eine außergewöhnliche und willensstarke Frau, jedoch kann infolge ihrer religions- und kastenbedingten Vorurteile ihr Einfluß auf einen so begabten Sohn in bezug auf dessen wissenschaftliche Entwicklung nicht als günstig angesehen werden. *Ramanujan* achtete seine Mutter und ordnete sich ihr vollständig unter. Sie war verständlicherweise nicht in der Lage, seinen durch nichts zu hemmenden Drang zur Mathematik zu begreifen. Von der Richtigkeit ihres Handelns überzeugt, bremste sie eine Entwicklung und lenkte ihn mit starker Hand auf den einzig ihr bekannten und für ihre Familie traditionellen Weg zum kleinen Angestellten oder Beamten. Nur der innere Drang des Genies half *Ramanujan*, schließlich ein schöpferischer Mathematiker zu werden, der sich frei der Beschäftigung mit der geliebten Wissenschaft hingibt. Der Weg dahin war jedoch lang – zu lang.

Ramanujan wurde in der Atmosphäre einer für das koloniale Indien verständlichen Feindseligkeit gegenüber allem Europäischen und insbesondere Englischen erzogen, wobei sich der Protest gegen die koloniale Unterdrückung in der strengen Befolgung der nationalen Bräuche, der alten Lebensweise und des traditionellen Erziehungs- und Ausbildungssystems der Brahmanen äußerte. Für die mathematische Entwicklung des jungen *Ramanujan* ergaben sich daraus sehr schwierige Bedingungen, die sich auf seine gesamte wissenschaftliche Laufbahn stark auswirkten. Man muß auch berücksichtigen, daß die britische Verwaltung ihrerseits keine besonderen Anstrengungen unternahm, auf irgendeinem Gebiet der Wissenschaft und der Kunst Talente des indischen Volkes zu fördern. Das urwüchsige Genie *Ramanujans* blieb deshalb den größten Teil seines kurzen Lebens sich selbst überlassen.

Von 1892 bis 1897 besuchte *Ramanujan*, wie es für die Brahmanen üblich war, die Grundschule. Infolge seiner sehr guten Ergebnisse wurde ihm anschließend in der städtischen Mittelschule von Kumbakonam die Hälfte des Schulgeldes erlassen. Erzogen in den mythischen Traditionen des Brahmanentums, fragte *Ramanujan* schon in der zweiten Klasse der Mittelschule (die in unserem Schulsystem etwa der fünften Klasse entspricht) die älteren Mitschüler und die Lehrer, worin die „höhere Wahrheit" in der Mathematik bestehe. Er war es ja gewohnt anzunehmen, daß auf jedem Gebiet der menschlichen Tätigkeit eine mystische „höhere Wahrheit" existiert – der Ursprung der Dinge, der das betreffende Gebiet lenkt und in sich alles enthält, was darüber bekannt sein kann. Man sagt, daß er als Antwort Hinweise auf den Pythagorassatz, die Prozentrechnung u. ä. erhielt.



S. Ramanujan (1887 bis 1920), für *alpha* gezeichnet von Prof. Dr. *S. N. Hirurkar*, Universität Nagpur (Indien), Sektion Mathematik

Bereits in der vierten Klasse der Mittelschule studierte *Ramanujan* einen vollständigen Trigonometrie-Lehrgang, und zwar nach dem zweibändigen Lehrbuch von *Loney*, das er sich bei einem ihm bekannten Studenten der Universität Madras lieh. Es wird erzählt, daß dieser Student von den Trigonometriekenntnissen des Schülers in Erstaunen versetzt wurde. Häufig wandte er sich an *Ramanujan* mit der Bitte, ihm beim Lösen von Aufgaben zu helfen. In der fünften Klasse entdeckte *Ramanujan* selbständig die Eulerschen Formeln, welche Sinus und Kosinus nach der Exponentialfunktion einer imaginären Variablen ausdrücken. Als er jedoch erfuhr, daß diese Formeln schon bekannt sind, versteckte er seine Notizen auf dem Dachboden. Das war seine erste Berührung mit der westlichen Mathematik. Er begriff nun, daß das Loneysche Lehrbuch bei weitem nicht alle bekannten mathematischen Fakten enthält. Die Ärmlichkeit der Kumbakonamer Bibliothek und die schlechten Kenntnisse der englischen Sprache behinderten die mathematische Entwicklung des jungen *Ramanujan* jedoch stark. Erst im Jahre 1903, als *Ramanujan* in der sechsten Klasse der Mittelschule war, gelang es ihm über einen Bekannten, das einzige in Kumbakonam vorhandene Buch über höhere Mathematik zu erhalten. Das war das Buch von *Carr* „Sammlung elementarer Ergebnisse der reinen und der angewandten Mathematik“, das 1880 bis 1886 in London in zwei Bänden erschienen war. Das Buch enthält 6 165 Sätze und Formeln, die meisten von ihnen werden ohne Beweise und Herleitungen angeführt. Lediglich für eine kleine Anzahl der wichtigsten Sätze werden einige Beweisschritte aufgezeigt. Das Werk von *Carr* wäre, wie auch Hunderte andere Bücher, bald in Vergessenheit geraten, wenn es nicht von *Ramanujan* gelesen worden wäre.

Der englische Mathematiker *Hardy* schrieb: „... *Ramanujan* hat dieses Buch berühmt gemacht, und es gibt keinerlei Zweifel daran, daß es ihn stark beeinflußt hat und der Ausgangspunkt seiner Laufbahn war. Ein solches Buch mußte gewisse Vorzüge haben; und wirklich, das Buch von *Carr* ... ist nicht einfach ein drittklassiges Lehrbuch, sondern es ist ein Buch, das mit Sachkenntnis und mit Liebe geschrieben wurde ...“.

In der kurzen (und bisher einzigen) Biographie *Ramanujans,* die von *Seshu Aiyar* (Lehrer und später Direktor des Kumbakonamer College) und *Ramachandra Rao* (hoher Regierungsbeamter der Provinz Madras) verfaßt wurde, wird dieser wichtige Abschnitt im Leben *Ramanujans* wie folgt beschrieben: „Vor *Ramanujan* tat sich eine neue Welt auf, die er begeistert durchwanderte. Das Buch von *Carr* weckte die in ihm schlummernden Kräfte. Begierig ging er daran, die in ihm angeführten Formeln und Sätze herzuleiten und zu beweisen. Da er hierbei keinerlei andere Bücher benutzen konnte, stellte jeder von ihm gefundene Beweis eine selbständige Untersuchung dar. Anfangs befaßte er sich mit Methoden der Zusammenstellung magischer Quadrate. Dann interessierte er sich für die Geometrie. Er versuchte, die Quadratur des Kreises zu lösen, und fand dabei eine außerordentlich gute Näherungsformel für den Kreisumfang, nach der die Länge des Erdäquators bis auf 1 bis 2 m genau errechnet werden kann. Bald war er von der Geometrie enttäuscht und wandte sich der Algebra zu, wobei er einige neue Reihen aufstellte. Häufig schrieb er gleich früh nach dem Erwachen fertige Formeln auf, anschließend überprüfte er sie schnell. Übrigens gelang es ihm nicht immer, einen strengen Beweis zu führen. Seine Ergebnisse trug er in ein Notizbuch ein, das er gewöhnlich den Mathematikern zeigte, die sich für seine Arbeit interessierten.“

Dieses Notizbuch ist seitdem berühmt geworden, 1957 wurde es von dem *Tata Institute of Fundamental Research* in Bombay als „facsimile edition“ in zwei Großbänden herausgegeben.

Bevor wir mit dem Lebenslauf *Ramanujans* fortfahren, wollen wir einige seiner Ergebnisse aus dem Notizbuch anführen. Wir wählen die einfachsten aus, aber auch diese zeigen eine Virtuosität im Aufstellen von Formeln und im formalen Rechnen, wie sie nur solche Meister unserer Wissenschaft wie *Leonard Euler* (1707 bis 1783) und *Carl Gustav Jacob Jacobi* (1804 bis 1851) besessen haben.

Ramanujan verstand sich meisterhaft auf Näherungsformeln (wofür vor allem Intuition benötigt wird). Tiefgehende Überlegungen führten ihn beispielsweise zu der Feststellung, daß bis auf die zehnte Dezimalstelle genau

$$\pi = \frac{63}{25} \cdot \frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}$$

und bis auf die neunte Dezimalstelle genau

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{1\,103}{99^2} \text{ gilt.}$$

Von Virtuosität im Auffinden unbekannter Formeln zeugen auch folgende Ergebnisse des jungen *Ramanujan:*

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots}}} = 3,$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}} = 4,$$

$$\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-\sqrt{8+\ldots}}}} = 1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ,$$

$$\sqrt{11-2\sqrt{11+2\sqrt{11-\ldots}}} = 1+4\sin 10^\circ,$$

$$\sqrt{23-2\sqrt{23+2\sqrt{23-\ldots}}} = 1+4\sqrt{3}\sin 20^\circ.$$

In den letzten drei Formeln wiederholen sich die Vorzeichen vor den Wurzelzeichen periodisch in Dreiergruppen: „–“, „+“, „–“. Hier zwei weitere bemerkenswerte Formeln *Ramanujans:*

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}},$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}}.$$

Diese exakten Gleichungen sind natürlich Spezialfälle bedeutend allgemeinerer Beziehungen, die *Rama-*

nujan kannte, aber niemandem mitteilte. Nach seinem Tod wurde ein Teil dieser allgemeinen Beziehungen von anderen Mathematikern reproduziert; es gibt aber keinen Zweifel, daß einige von ihnen verloren sind. *Hardy*, der sich sehr intensiv mit der Erforschung des Schaffens *Ramanujans* befaßte, bemerkte: „In den Formeln *Ramanujans* ist immer bedeutend mehr enthalten als man auf den ersten Blick annimmt. Jeder, der sie herzuleiten versucht, wird sich davon überzeugen. Einige seiner Formeln decken außerordentlich tiefgehende analytische Abhängigkeiten auf, andere sind weniger bedeutend, aber unter den Formeln *Ramanujans* gibt es nicht eine, die nicht interessant und lehrreich wäre".

Die letzten beiden Formeln sind völlig elementar, aber sehr inhaltsreich. Sie besitzen eine einmalige innere Symmetrie, und ihre Existenz konnte nur von einem Mathematiker allerhöchsten Ranges vermutet werden. Im Gegensatz zu ihnen sind die ersten zwei Gleichungen einfach und elegant. Folgende Kette scharfsinniger Umformungen führt zur ersten Formel:

$$n(n+2)=n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}$$
$$=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}}$$
$$=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)(n+5)}}}$$
$$=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+(n+4)(n+6)}}}}$$

usw., woraus *Ramanujan* schließt (streng genommen erfordert das noch eine zusätzliche Begründung), daß

$$n(n+2)=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+(n+4)\sqrt{1+\dots}}}}}$$

Hieraus erhalten wir für $n=1$ die erste Formel.

Folgende Formel wird von *Ramanujan* auf geradezu artistische Weise und lediglich unter Zuhilfenahme von Formeln der Schultrigonometrie hergeleitet:

$$1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ=\sqrt{1+4\sqrt{3}\sin 20^\circ+12\sin^2 20^\circ}$$
$$=\sqrt{1+4\sqrt{3}\sin 20^\circ+12\cdot\frac{1-\cos 40^\circ}{2}}$$
$$=\sqrt{7+4\sqrt{3}\sin 20^\circ-6\cos 40^\circ}$$
$$=\sqrt{7+4\sqrt{3}\sin 20^\circ-2\sqrt{3}\cos 70^\circ-2\sqrt{3}\cos 10^\circ}$$
$$=\sqrt{7+2\sqrt{3}\cos 70^\circ-2\sqrt{3}\cos 10^\circ}$$
$$=\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin 30^\circ\sin 40^\circ}$$
$$=\sqrt{8-(1+2\sqrt{3}\sin 40^\circ)}.$$ Analog erhält man

$$1+2\sqrt{3}\sin 40^\circ=\sqrt{8+(2\sqrt{3}\sin 80^\circ-1}$$ und

$$2\sqrt{3}\sin 80^\circ-1=\sqrt{8-(1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ)}.$$

Diese drei Resultate führen zu der Gleichung

$$1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ=\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-(1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ)}}}.$$

Die gesuchte Formel kann hieraus durch Iteration (d. h. durch wiederholtes Einsetzen) gefunden werden. Die gesamte Technik *Ramanujans* zeigt einen Überfluß unerwartet phantastischer Wendungen in den, wie es scheint, einfachsten Dingen. Die Gleichheit

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

zum Beispiel ist nicht schwer zu beweisen, man mußte aber erst mal darauf kommen!

V. Lewin

Dieser Beitrag wird in Heft 1/72 fortgesetzt, d. Red.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Dr.-Ing.
Viktor Lewin

Lehrstuhlleiter an dem Lenin-Pädagogischen Istitut Moskau

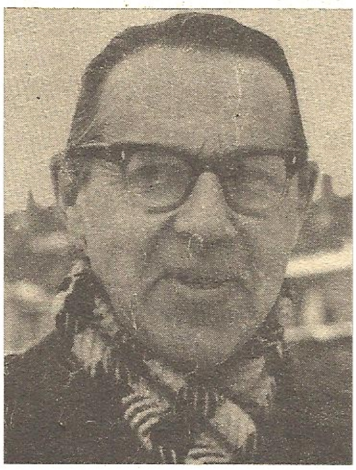
▲774 Es ist zu beweisen, daß die Ungleichung

$$2^{-|x|}+2^{-\frac{1}{|x|}}\leqq 1$$

für alle reellen Zahlen x erfüllt ist.

Ferner ist der Graph der Funktion

$y=2^{-|x|}+2^{-\frac{1}{|x|}}$ zu zeichnen.



Wie löst man schwierige Aufgaben?

In jedem Heft von „*alpha*“ werden Aufgaben gestellt. Viele davon kann man nicht lösen, wenn man nur versucht, ein bestimmtes, aus dem Mathematikunterricht bekanntes Lösungsverfahren schematisch anzuwenden. Es ist gewöhnlich notwendig, etwas gründlicher nachzudenken und selbständig einen Lösungsweg zu suchen. Aber wie macht man das?

Sicherlich hat jeder schon einmal gestaunt, wenn er die fertige Lösung einer Aufgabe gelesen hat, und sich dann gefragt: Wie kann man nur auf solche Lösungswege kommen?

Nun, das ist gar nicht so geheimnisvoll, wie es manchmal aussehen mag. Man braucht dazu zunächst einmal zwei Dinge: Sichere und ausreichende mathematische Kenntnisse sowie Ausdauer und Beharrlichkeit beim Suchen nach der Lösung. Es kann aber sein, daß man trotzdem nicht zum Ziel kommt, weil man nicht weiß, *wie* man eine Lösung sucht. Gerade das wollen wir uns einmal an einem Beispiel ansehen.

Wir wählen eine Aufgabe, die im Oktober 1968 bei einem mathematischen Schülerwettbewerb in Budapest gestellt worden ist. Es handelt sich dabei darum, einen Beweis zu führen, und das fällt ja oft besonders schwer.

Aufgabe: In einer Ebene seien eine Gerade g und ein Kreis k gegeben, der einen Radius von n cm besitzen soll (n ist eine natürliche Zahl). Außerdem seien in k genau $4n$ Strecken der Länge 1 cm eingezeichnet. Es ist zu beweisen, daß es unter diesen Voraussetzungen stets eine Sehne in k gibt, die zu g parallel oder zu g senkrecht verläuft und die mit wenigstens zwei der eingezeichneten Strecken gemeinsame Punkte besitzt.

Bevor wir überhaupt mit der Lösungssuche beginnen, müssen wir uns erst einmal über die Aufgabenstellung klar werden. Das ist *immer* notwendig! Wir wollen uns also merken: *Ich muß die Aufgabe verstehen!*

Dazu fertigen wir am besten eine Skizze an. Das ist sehr häufig nützlich. Wir merken uns:

Ich versuche, zur gegebenen Aufgabe eine Skizze zu machen!

Aus dem Text unserer Aufgabe geht hervor, daß zunächst eine Gerade g und ein Kreis k zu zeichnen sind. Da durch g offenbar nur eine Richtung festgelegt werden soll, wollen wir g so legen, daß die Gerade den Kreis nicht schneidet, damit wir eine möglichst übersichtliche Zeichnung bekommen.

Wie groß soll der Radius des Kreises gewählt werden? Die Aufgabe verlangt, die Behauptung für jeden *beliebigen* Radius zu beweisen, dessen Maßzahl eine natürliche Zahl ist. Wir wollen uns den Sachverhalt erst einmal an einem möglichst einfachen *Sonderfall* klarmachen. Deshalb wählen wir für unsere Zeichnung $n=1$.

Auch das ist oft nützlich. Wir halten fest: *Ich versuche, zunächst einen einfachen Sonderfall der Aufgabe zu betrachten!* (Damit die Zeichnung nicht zu klein wird, können wir als Maß*einheit* eine Länge von 2 cm festlegen.) Wir haben nun $4n=4 \cdot 1=4$ Einheitsstrecken (von je 2 cm Länge) in den Kreis zu zeichnen, und zwar ganz beliebig. So erhalten wir beispielsweise eine Skizze, wie sie im Bild 1 dargestellt ist. Diese Skizze veranschaulicht einen speziellen Fall der in der Aufgabe gegebenen *Voraussetzungen.*

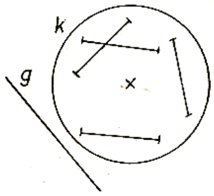


Bild 1

Das klare Erkennen der gegebenen Voraussetzungen ist vor allem bei Beweisaufgaben (aber natürlich auch sonst) wichtig. Wir merken uns also:

Ich muß versuchen, die gegebenen Voraussetzungen richtig zu verstehen!

Unsere Behauptung besagt nun: Es gibt eine Sehne in k, die zu g parallel oder senkrecht verläuft und die wenigstens zwei der eingezeichneten Strecken trifft.

Das ist bei *unserer* Skizze offensichtlich: man kann sehr leicht eine solche Sehne einzeichnen, z. B. so, wie das im Bild 2 dargestellt ist. Aber damit ist unsere Aufgabe nicht gelöst! Wir müssen die Behauptung doch etwas genauer betrachten! Auch das ist wieder wichtig:

Ich muß versuchen, die Behauptung vollständig zu verstehen!

Unsere Behauptung besagt: Es gibt *stets* eine solche Sehne, ganz gleich, wie die vier Einheitsstrecken in den Kreis eingezeichnet werden.

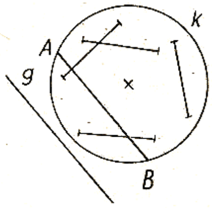


Bild 2

Wie könnte man das beweisen? Durch weitere Zeichnungen sicher nicht, denn es gibt unübersehbar viele Möglichkeiten für die Lage der Einheitsstrecken in dem Kreis. Kennen wir vielleicht ähnliche Sätze, die uns weiterhelfen könnten?

So eine Frage ist oft nützlich:

Kenne ich Sätze, in denen ähnliche Voraussetzungen oder eine ähnliche Behauptung auftreten?

In unserem Fall müssen wir die Frage leider mit „Nein“ beantworten. Untersuchen wir also den Sachverhalt weiter, betrachten wir ihn von verschiedenen Seiten. Dabei wollen wir jedes Wort der Aufgabenstellung genau beachten und auch versuchen, die Bedingungen mit anderen Worten auszudrücken. Das ist wohl immer notwendig:

Ich muß alle Bedingungen der Aufgabe beachten, sie eventuell umformulieren, Zusammenhänge suchen, vielleicht Hilfslinien zeichnen, Schlüsse ziehen!

Beginnen wir noch einmal bei der Behauptung! Wir wollen sie einmal *anders* formulieren, z. B. so: Es gibt *keine* Lage der Einheitsstrecken im Kreis, bei der *jede* Sehne, die zu g parallel oder senkrecht verläuft, nur *höchstens eine* der Einheitsstrecken trifft.

Wie kommt das eigentlich? Um den Grund dafür zu finden, versuchen wir, eine Zeichnung anzufertigen, die der Behauptung widersprechen würde. Wir beginnen mit einer Strecke e_1. Dann überlegen wir, wie die zweite Strecke e_2 *nicht* liegen dürfte, damit es nicht schon bei zwei Strecken eine Sehne parallel oder senkrecht zu g gibt, die beide Strecken trifft. Wir finden: e_2 darf nicht in die beiden punktierten Streifen hineinragen oder an sie anstoßen (siehe Bild 3)!

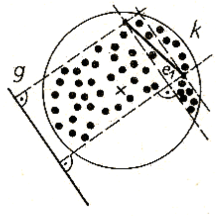


Bild 3

Diese Bedingung ist noch leicht zu erfüllen. Mit dem Einzeichnen von e_2 entstehen aber zwei weitere Streifen, die für die nächste Strecke e_3 „gesperrt“ sind (siehe Bild 4). Nun wird es schon schwierig, und wir sehen auch den Grund: in dem Kreis ist nicht genügend Platz, um die Strecken so hinein zu zeichnen, daß in jedem der entstehenden Streifen nur genau eine Strecke anzutreffen ist – oder, anders ausgedrückt, daß Streifen gleicher Richtung sich nirgends berühren oder überdecken. Aber vielleicht haben wir nur ungeschickt begonnen und nicht darauf geachtet, die „Sperrstreifen" möglichst schmal zu machen?

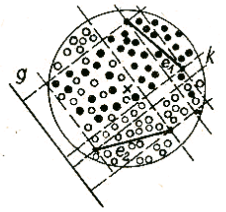


Bild 4

Wir fangen noch einmal von vorne an! Jetzt sehen wir aber: Wenn wir *einen* der durch e_1 bestimmten Streifen *schmaler* machen (durch Drehen von e_1), dann wird der *andere* Streifen *breiter*.

Nun verstehen wir die Behauptung wieder etwas besser und können sie noch anders ausdrücken, etwa so: Stets ist die Summe der Breiten aller zu *g parallelen* Streifen größer oder gleich dem Durchmesser des Kreises oder die Summe der Breiten aller zu *g senkrechten* Streifen ist größer oder gleich dem Durchmesser.

Wir wollen das als Ungleichung schreiben. Dazu vereinbaren wir: p_r sei die Breite des durch die Strecke e_r bestimmten Streifens, der *parallel* zu g verläuft;

s_r sei die Breite des durch die Strecke e_r bestimmten Streifens, der *senkrecht* zu g verläuft.

Die Behauptung lautet jetzt (gleich für *beliebiges n*, also für $4n$ Einheitsstrecken):

$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{4n}\geqq 2n$ oder

$s_1+s_2+s_3+\cdots+s_{4n}\geqq 2n$

Dieser Schritt ist wieder sehr wichtig! Wir wollen uns merken:

Ich führe passende Bezeichnungen ein und versuche, die Bedingungen der Aufgabe mit mathematischen Symbolen auszudrücken!

Bis jetzt sind wir gut vorangekommen. Es würde nun genügen, folgendes nachzuweisen: Wenn die erste Ungleichung *nicht* gilt, dann muß zumindest die zweite gelten. Aber wie sollen wir das zeigen? Wir sehen dazu keinen Weg.

In einer solchen Situation hilft oft folgendes: *Ich versuche, den Satz indirekt zu beweisen!*

Bei einem indirekten Beweis nimmt man an, die Behauptung sei *falsch*. Man versucht dann, aus dieser Annahme einen *Widerspruch* herzuleiten. Gelingt das, dann muß man die Annahme fallen lassen und somit die Richtigkeit der Behauptung anerkennen. Bei unserem Beispiel sieht das so aus:

Angenommen, unsere Behauptung sei *falsch*. Dann dürfte weder die eine noch die andere Ungleichung gelten. Es müßte dann vielmehr heißen:

$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{4n}<2n$ und

$s_1+s_2+s_3+\cdots+s_{4n}<2n$

Daraus würde folgen (durch Addition):

(*) $(p_1+s_1)+(p_2+s_2)+(p_3+s_3)+\cdots+(p_{4n}+s_{4n})<4n$

Wir fragen uns, ob das möglich ist. Dazu überlegen wir: alle p_r und alle s_r sind größer oder gleich Null; auf der linken Seite der Ungleichung stehen $4n$ Summanden der Form (p_r+s_r); wenn die Ungleichung gelten soll, muß *wenigstens einer* dieser Summanden kleiner als 1 sein – sind nämlich *alle* $4n$ Summanden gleich oder größer als 1, dann kann die Summe nicht kleiner als $4n$ sein. *Kann* nun irgend ein Summand (p_r+s_r) kleiner als 1 sein? Eine kleine Skizze (siehe Bild 5) zeigt uns, daß das offenbar *nicht* möglich ist! Stets gilt $p_r+s_r\geqq e_r$, und e_r hat ja die Länge 1. Also können wir feststellen: Alle Summanden, die auf der linken Seite der Ungleichung (*) stehen, sind mindestens gleich 1, die Ungleichung (*) ist also *falsch*. Unsere Annahme, die Behauptung gelte nicht, hat somit zu einem Widerspruch geführt. Wir müssen diese Annahme fallenlassen, die Behauptung ist somit bewiesen.

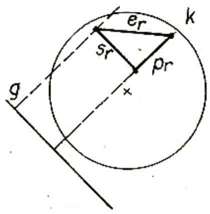


Bild 5

Sind wir jetzt fertig? Im allgemeinen nicht. Es ist wichtig, noch einen letzten Hinweis zu beachten:

Ich überprüfe alle Lösungsschritte auf ihre Richtigkeit und die Lösung auf Vollständigkeit! Erst nach dem erfolgreichen Abschluß dieser Überprüfung kann ich sagen: Die Aufgabe ist gelöst.

War unser Beispiel schwierig? Ja, ganz leicht war es sicher nicht. Aber wir wollten ja gerade lernen, wie man schwierige Aufgaben löst. Haben wir dieses Ziel erreicht? Nun, diese Frage muß jeder für sich selbst entscheiden, indem er versucht, neue Aufgaben zu lösen und dabei jene „Merksätze" anzuwenden, die wir bei der Bearbeitung unserer Aufgabe herausgestellt haben. Eine Garantie für das Finden von Lösungen geben die „Merksätze" natürlich nicht, aber oft können sie doch weiterhelfen, wenn man einmal steckengeblieben ist. Dazu viel Erfolg!

W. Walsch

Das magische Quadrat

▲807 Im Januar 1971 erhielt Fritz von seinem Opa eine Geburtstagskarte, auf der dieser zusätzlich das folgende magische Quadrat angebracht hatte.

1956—1971

68	58	57	71
63	65	66	60
67	61	62	64
56	70	69	59

Darunter stand geschrieben:

Hier steh'n die Zahlen von 16 Jahren,
obgleich es doch nur 15 waren.
Verwirrend scheinen sie gemischt,
ganz ohne Ordnung aufgetischt.
Durchläuft man Spalte oder Zeile,
auch kreuz und quer in aller Eile
- selbst daran muß man sich nicht binden –
man wird die gleiche Summe finden.
Doch wie und wo, will ich nicht sagen,
man muß schon selber etwas wagen.

Im Februar feierte der Opa seinen Geburtstag und erhielt von seinem Enkel eine Glückwunschkarte, auf welcher dieser das gleiche magische Quadrat angebracht hatte.

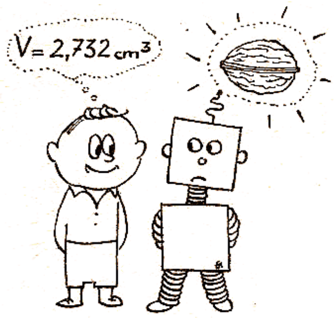
1. Was hat sich Fritz dabei gedacht, und in welchem Jahr ist sein Opa wohl geboren?
2. Wie groß ist die Summe s einer Spalte oder Reihe? Wieviel Quadrate und Rechtecke geben die gleiche Summe s, wenn man die 4 Zahlen in ihren Ecken addiert?
3. Versuche eine Gedächtnishilfe für die Anordnung der Zahlen im magischen Quadrat zu finden!
4. Fritz hat entdeckt, daß er in einigen Jahren auch zum Geburtstag seiner Mutter ein magisches Quadrat sinnvoll verwenden kann. Die Summe s einer Spalte wird aber bei diesem Quadrat 330 betragen.
a) Stelle das magische Quadrat auf!
b) Was besagt es für das Geburtstagskind?
c) Wie alt ist oder wird die Mutter 1971?

W. Bennewitz

(Lösung siehe Heft 6/71.)

Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 3. Januar 1972

Der Wettbewerb läuft über vier Hefte. Es hat sich gezeigt, daß in den „Ferienheften" (Heft 3/69 und 3/70) wesentlich weniger Lösungen eingingen als zu den Aufgaben der Hefte 5, 6, 1 und 2. Außerdem ist damit für die Redaktion eine größere Zeitspanne zur Auswertung der rücklaufenden Karten und Urkunden gegeben. In den vier Wettbewerbsheften werden gleichviele Aufgaben gestellt wie in fünf Heften vergangener Jahre. Auf Hinweis zahlreicher Leser nehmen wir die Olympiadeaufgaben aus dem Wettbewerb heraus, da sie in den Arbeitsgemeinschaften behandelt wurden und oft die offiziellen Lösungen des Zentralen Komitees der OJM bekannt sind. Im letzten Jahr gingen über 30000 Lösungen ein. In oft wochenlanger Kleinarbeit haben drei Mathematiklehrer das Material korrigiert. Eine gewissehafte Einhaltung der Wettbewerbsbedingungen, Sauberkeit und Übersichtlichkeit in der Ausführung der Lösungen und termingerechte Einsendung erleichtern dem Wettbewerbskollektiv die Arbeit.

Wir wünschen unseren Lesern beim Wettbewerb 1971/72 viel Freude und vor allem Erfolg.

Chefredakteur

5▲775 Die Variablen der nachstehenden neun Gleichungen sind mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 10 derart zu belegen, daß alle Gleichungen zugleich erfüllt werden, das heißt, für gleiche Buchstaben sind gleiche Zahlen, für verschiedene Buchstaben sind verschiedene Zahlen einzusetzen.

(1) $a+a=b$, (4) $g+h=d$, (7) $h+h=c$,
(2) $c-d=e$, (5) $i-f=h$, (8) $f+f=g$,
(3) $e+f=a$, (6) $e+e=f$, (9) $g+g=j$.

Andreas Börner, Schkortitz (Kreis Grimma)

W 5■776 Helga, Carola, Sonja, Adelheid und Renate, die zu den aktiven Teilnehmern der diesjährigen Kinder- und Jugend-Spartakiade gehören, bewohnen während der Wettkampftage gemeinsam ein Zimmer. Die Heimatorte dieser fünf Mädchen sind Görlitz, Berlin, Jena, Rostock und Merseburg. Aus ihren Gesprächen erfahren wir:

a) Sonja und Carola starten im Hochsprung, während die Mädel aus Jena und Merseburg für diese Disziplin nicht gemeldet sind.

b) Drei Schülerinnen, nämlich Adelheid, Sonja und die Schülerin aus Görlitz waren bereits im Vorjahr Teilnehmer der Spartakiade.

c) Drei Schülerinnen, nämlich Carola, Renate und das Mädel aus Görlitz haben im Fach Mathematik die Note 1.

d) Carola war noch nie in der Hauptstadt der DDR.

e) Adelheid steht mit der Schülerin aus Merseburg im Briefwechsel.

Den Vornamen der fünf Mädchen sind die Namen ihrer Heimatorte zuzuordnen.

Karin Schubert, Pfaffroda

W 5■777 Im Berliner Schokoladenwerk VEB „Elfe" wurde eine neue Bonbonsorte entwickelt, die in Kürze in den Handel kommen soll.

Wieviel Gramm wiegt ein Bonbon, wenn eine Tüte Bonbon 80 Pf kostet, 1000 Bonbon auf 50 Tüten kommen und 1 kg Bonbon 5 M kostet?

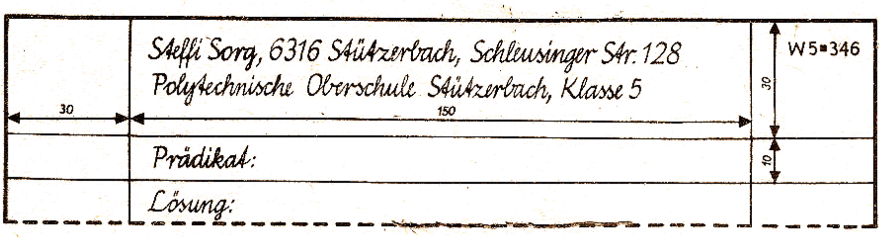
Hans-Peter Tams, Domsühl (Kl. 7)

*5 * 778 In der nachstehenden Additionsaufgabe ist jedes Sternchen durch eine der Ziffern von 1 bis 9 zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Die Quersumme des ersten Summanden soll dabei 10 und die des zweiten 5 betragen.

$$\begin{array}{rccc} & 5 & * & * \\ + & * & 2 & * \\ + & * & 6 & * \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Wieviele Lösungen besitzt diese Aufgabe?

Carsten Schmidt, Dessow



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit * versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben *seiner oder einer höheren Klassenstufe* einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W■ 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgeben.

Der Jahreswettbewerb 1971/72 läuft von Heft 5/71 bis Heft 2/72. Zwischen dem 1. und 10. September 1972 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/71 bis 2/72 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 5/72 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/71 bis 2/72) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1971/72 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen *richtig frankiert* sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

*5*779 Bei einem Tischtennisturnier sollen die 36 Teilnehmer zunächst Vorrundenspiele in sechs Gruppen zu je sechs Spielern austragen, und zwar jeder gegen jeden. Die beiden Erstplazierten aus den Vorrundenspielen sollen danach Zwischenrundenspiele in zwei Gruppen zu je sechs Spielern nach dem gleichen System austragen. Die beiden Erstplazierten dieser zwei Gruppen kommen in die Endrunde. Das Turnier beginnt um 8.30 Uhr. Zwischen den Vorrunden- und Zwischenrundenspielen liegt eine Pause von einer Stunde; nach Abschluß der Zwischenrundenspiele wird nochmals eine Pause von 15 Minuten eingelegt. Bis zu welcher Uhrzeit wird die Sporthalle zur Durchführung des Turniers voraussichtlich besetzt sein, wenn man für jedes Spiel im Durchschnitt 15 Minuten Spielzeit rechnet?

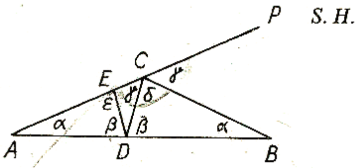
Biologiefachlehrer K.-H. Schubert, Pfaffroda

6▲780 Gibt es ein konvexes Vieleck, bei dem die Anzahl der Diagonalen doppelt so groß ist wie die Anzahl seiner Eckpunkte? Die Antwort ist zu begründen!

Rainer Helbig, Leipzig, Thomas-OS (Kl. 7)

W 6■781 In der abgebildeten Figur sei Winkel $\sphericalangle BCD = \delta = 80°$. Es sind die Größen der Winkel α, β, γ und ε zu bestimmen!

S. H.



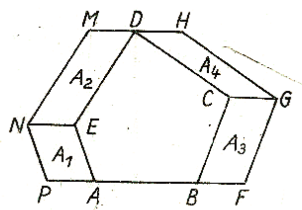
W 6■782 Aus dem Unterricht wissen wir, daß in einem Rechteck die Diagonalen einander halbieren und gleich lang sind.
Beweise: Wenn in einem Rechteck die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist es ein Quadrat.

T.

*6*783 Es sind alle gebrochenen Zahlen $\frac{a}{b}$ mit $1<b<21$ anzugeben, die die folgenden Eigenschaften besitzen: Erweitert man $\frac{a}{b}$ mit 4 und vergrößert man danach den erweiterten Zähler um 7, so ist der auf diese Weise entstehende Bruch gleich $\frac{3}{4}$. Wieviele Zahlen $\frac{a}{b}$ gibt es, die den Bedingungen genügen?

Ing. f. Rechenelektronik H. Werner, Berlin

*6*784 Über den vier Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ und $\overline{EA}$ eines konvexen Fünfecks $ABCDE$ wurden Parallelogramme – wie aus der



Zeichnung ersichtlich – derart gezeichnet, daß die Punkte P, A, B, F und M, D, H jeweils auf einer Geraden liegen und daß $\overline{PA}=\overline{BF}$ gilt. Es ist zu beweisen, daß für die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 und A_4 der Parallelogramme die Beziehung $A_1+A_2=A_3+A_4$ gilt!

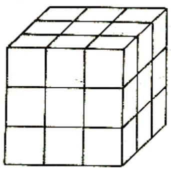
Sch.

7▲785 In einem Drachenviereck* $ABCD$ mit der Symmetrieachse AC sei die Diagonale $\overline{BD}$ halb so lang wie die Diagonale $\overline{AC}$. Es ist der Flächeninhalt des Drachenvierecks in Abhängigkeit von der Diagonale $\overline{AC}=e$ anzugeben.

Yvonne Kruber, OS Stolpen, Kl. 9

W 7▲786 Ein Holzwürfel mit der Kantenlänge 100 mm soll durch $3n$ Sägeschnitte ($n=1, 2, 3, 4, \ldots$), von denen jeweils n Schnitte zu einer Seitenfläche des Ausgangswürfels parallel und untereinander äquidistant sind, in kongruente Teilwürfel zersägt werden. Die zerspante Schnittbreite betrage dabei 1 mm.

a) Wieviel Teilwürfel kann man auf diese Weise höchstens erhalten?



b) Wie groß darf die Anzahl der Schnitte sein, wenn nicht mehr als 50% des Volumens des Ausgangswürfels zerspant werden sollen?

T.

W 7■787 Bei einer Mathematikolympiade schrieben sieben Teilnehmer, und zwar Axel, Bernd, Dieter, Eberhard, Gerda, Helga und Ilona, die Klausur in einem Raum. Diese sieben Schüler wohnen in sieben verschiedenen Städten der DDR. In Vorbereitungslagern haben sich einige dieser sieben Schüler bereits kennengelernt. So kennt

a) Axel genau einen Schüler und zwei Schülerinnen, b) Bernd genau drei Schüler und keine Schülerin, c) Dieter genau zwei Schüler und eine Schülerin, d) Eberhard genau zwei Schüler und zwei Schülerinnen, e) Gerda keinen Schüler, aber zwei Schülerinnen, f) Helga genau drei Schüler und eine Schülerin, g) Ilona genau zwei Schüler und eine Schülerin.

Es ist zu ermitteln, wer sich untereinander kennt!

Bei dieser Aufgabe setzen wir voraus, daß, wenn ein Teilnehmer A den Teilnehmer B kennt, so auch der Teilnehmer B den Teilnehmer A kennt.

Mathematikfachlehrer E. Naumann, Schloßoberschule Karl-Marx-Stadt

*7*788 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Man zeichne die Diagonalen ein, ihr Schnittpunkt sei M. Die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$ und $\overline{DM}$ sind zu halbieren; die Halbierungspunkte seien in der vorgegebenen Reihenfolge E, F, G und H. Wie verhält sich der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ zu dem des Rechtecks $EFGH$?

Ingolf Kunath, EOS Meißen, Kl. 10

*7*789 Auf einer kreisförmigen Radrennbahn, deren Bahnlänge 300 m beträgt, trainieren zwei Rennfahrer. Beide fahren mit konstanten Geschwindigkeiten. Wenn sie in entgegengesetzte Richtungen fahren, dann treffen sie sich 15 s nach dem Start. Fahren hingegen beide in gleicher Richtung, dann überholt Fahrer A den Fahrer B das erste Mal nach 150 s. Es sind die Geschwindigkeiten beider Fahrer in km h^{-1} zu ermitteln!

Uwe Löser, Goßwitz

8▲790 Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, von dem der Umfang $a+b+c = 10$ cm sowie die Winkel $\alpha=80''$ und $\beta=60°$ gegeben sind.

Wolfgang Riedel, Spezialklasse 11 der Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt

8▲791 Es sind alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 3$ anzugeben, für die die Anzahl n der Seiten eines konvexen n-Ecks ein ganzzahliges Vielfaches der Anzahl seiner Diagonalen ist.

Wolfgang Luth, 3. EOS Rostock, Kl. 11c

W 8■792 Steffi, Marion und Christine unternehmen mit ihren Eltern eine Ferienreise. Eine der drei Familien reist an die Ostsee, die andere in die Sächsische Schweiz und die dritte in den Thüringer Wald. Über die Reiseziele werden die folgenden Aussagen gemacht:

(1) Steffi fährt an die Ostsee;

(2) Christine reist in den Thüringer Wald, oder Steffi reist in die Sächsische Schweiz.

a) Welche Reiseziele können die drei Mädchen haben, wenn die Aussage (1) wahr und die Aussage (2) falsch ist?

b) Welche Reiseziele können die drei Mädchen haben, wenn die Aussage (1) falsch und die Aussage (2) wahr ist?

T.

W 8■793 Klaus sagt zu Peter: „Denke dir zwei natürliche Zahlen, von denen die erste größer als die zweite ist! Bilde die Differenz dieser beiden Zahlen, und gib mir diese Differenz an! Bilde dann die Differenz der Quadrate dieser beiden Zahlen, und gib mir auch diese Differenz an! Nun kann ich mit Hilfe von nur vier Rechenoperationen die beiden von dir gedachten Zahlen ermitteln."

a) Welche Rechenoperationen hat Klaus ausgeführt, um die beiden gedachten Zahlen zu ermitteln?

b) Wie lauten die gedachten Zahlen, wenn Peter als Differenz der beiden Zahlen die Zahl 5 und als Differenz ihrer Quadrate die Zahl 105 angegeben hat?

Bodo Geyer, OS Cainsdorf, Kl. 8a

*8*794 Gesucht ist eine sechsstellige natürliche Zahl, die die folgenden Eigenschaften hat:

1. Addiert man die aus den ersten drei Grundziffern dieser Zahl gebildete Zahl zu der aus den letzten drei Grundziffern gebildeten Zahl, so erhält man die Summe 999.
2. Multipliziert man die sechsstellige Zahl mit 6, so erhält man wieder eine sechsstellige Zahl, deren erste drei Grundziffern gleich den letzten drei Grundziffern und deren letzte drei Grundziffern gleich den ersten drei Grundziffern der ursprünglichen Zahl sind.

Emil Eichhorn, Bautzen (Alter: 82 Jahre)

* 8 * 795 Es seien a und b zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, und es sei $c=ab$. Es ist zu beweisen, daß dann die Zahl

$$x = a^2+b^2+c^2$$

stets gleich dem Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl ist. *Sch.*

9 ▲ 796 Gegeben seien zwei Kreise mit den Radien 4 cm und 6 cm, deren Mittelpunkte den Abstand 7 cm haben. Es ist der Abstand der Schnittpunkte dieser beiden Kreise zu berechnen.

Schüler Rainer Zerck, Wismar

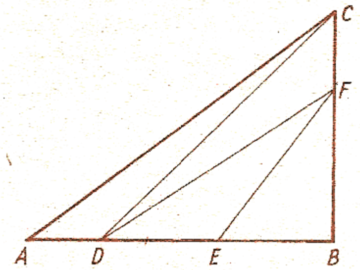
9 ▲ 797 Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit den Seitenlängen a, b, c, d, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen. Es ist zu beweisen, daß dann stets die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$a^2+c^2 = b^2+d^2.$$

T.

W 9 ■ 798 Drei Schüler haben die Vornamen Henry, Peter und Uwe. Ihre Nachnamen sind Bergmann, Sabel und Strauch. Wie heißen die drei Schüler, wenn die folgende Aussage falsch ist? „Wenn Henry den Nachnamen Bergmann hat, so hat Uwe den Nachnamen Strauch.“ *T.*

W 9 ■ 799 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck, auf dessen Kathete $\overline{AB}$ der Punkt D zwischen A und B und der Punkt E zwischen D und B liegt und auf dessen Kathete $\overline{BC}$ der Punkt F zwischen B und C liegt (vgl. die Abb.). Ferner sei $\overline{EB}=15$ cm und $\overline{BF}=20$ cm. Endlich seien die Flächeninhalte der Dreiecke EBF, DEF, DFC und ADC gleich groß.
Es soll die Länge der Strecke $\overline{AD}$ berechnet werden. *S. H.*



* 9 * 800 Klaus zeigt seinen Eltern sein Halbjahreszeugnis und wird dafür gelobt. „Ja“, sagt er voller Stolz, „im vorigen Jahr hatten wir die gleichen Fächer wie in diesem Jahr. Damals betrug die Summe meiner Zensuren noch 27 und das Produkt sogar 3456. Ich hatte vier Einsen. Jetzt beträgt die Summe 22 und das Produkt nur 192. Mein Zensurendurchschnitt liegt jetzt unter 1,6.“
Darauf sagen die Eltern: „Junge, daraus wird doch keiner schlau. Wer soll nun wissen, wieviele Einsen, Zweien, Dreien oder Vieren du jetzt hast und im Vorjahr hattest?“
Ich denke, wir können die Zensurenverteilung in diesem Jahr und im Vorjahr herausfinden. Klaus hat sogar eine Angabe gemacht, die wir für die Ermittlung der Zensuren nicht benötigen. Welche Angabe ist das?

Bernd Hübler, Fachlehrer für Mathem., POS VII Neubrandenburg

* 9 * 801 Gegeben seien in der Ebene zwei Punkte A und B, die benachbarte Punkte eines Quadrats $ABCD$ sind. Es sollen nur mit dem Zirkel, also ohne Benutzung des Lineals, die anderen Eckpunkte C und D dieses Quadrats konstruiert werden.

Jürg Helbig, Lessing-Oberschule, Halle, Kl. 8

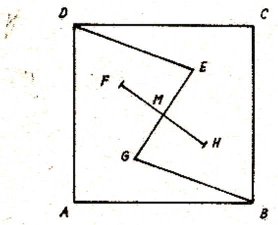
W 10/12 ■ 802 Im Jahre 1963 stellte ein Mathematiker an seinem Geburtstag fest, daß das von ihm erreichte Alter gleich dem Produkt der vier natürlichen Zahlen ist, die den Grundziffern seines Geburtsjahres entsprechen.
In welchem Jahr wurde dieser Mathematiker geboren, und welches Alter hatte er an seinem Geburtstag erreicht?

Dozent L. M. Lopowok, Woroschilowgrad, UdSSR

W 10/12 ■ 803 In einer Kammer (Länge $L=4{,}0$ m, Breite $B=2{,}5$ m Höhe $H=2{,}3$ m) steht als einziges Möbel an der Längswand ein Schrank, der die Form eines Quaders mit den Außenmaßen $a=0{,}6$ m, $b=1{,}8$ m, $h=2{,}1$ m hat. Kann dieser Schrank ohne Zerlegung durch eine an der Schmalseite der Kammer befindliche Tür mit den lichten Maßen 0,8 m und 1,9 m transportiert werden? Die Antwort ist zu begründen.

Dr. Gerhard Hesse, Radebeul

* 10/12 * 804 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Von B und D aus seien zwei gleich lange Strecken $\overline{BG}$ und $\overline{DE}$ so gezeichnet, daß $\sphericalangle CDE = \sphericalangle ABG$ ist und E und G innere Punkte des Quadrates $ABCD$ sind. M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EG}$. Auf der Mittelsenkrechten dieser Strecke seien die Punkte F und H so konstruiert, daß $\overline{FM}=\overline{HM}=\overline{EM}$ gilt (vgl. die Abb.).



Es ist zu beweisen, daß dann stets die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

1. $\overline{HC}=\overline{ED}=\overline{FA}=\overline{GB}$;
2. $\overline{HC} \parallel \overline{FA}$;
3. $HC \perp ED$ und $FA \perp GB$.

Prof. Dr. Th. Glocke Pädagogische Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“, Erfurt

* 10/12 * 805 Es ist zu beweisen, daß das Produkt

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\ldots\cdot\frac{49}{50}$$

größer als 0,1 und kleiner als 0,123 ist.

Schüler Egbert Lindner, Dresden

Nachgedacht und mitgemacht!

„Wer ist der beste in Mathematik?“ fragte der Pionierleiter zum Gruppennachmittag der Klasse 5a.
Alle Pioniere zeigten auf Wolfgang.
„Bitte, Wolfgang, merke dir eine zweistellige Zahl. Aber nenne sie mir nicht! Beantworte nur die folgenden drei Fragen:
„1. Kann man diese Zahl durch 3 dividieren, oder bleibt ein Rest?“
„Es gibt den Rest 1.“
„2. Und wenn du diese Zahl durch 5 dividierst?“
„Da erhalte ich den Rest 3.“
„3. Und wenn du durch 7 teilst?“
„Hier bleibt kein Rest.“
„Dann hast du dir die Zahl 28 gemerkt!“
„Richtig!“ antwortete Wolfgang. „Aber wie konntest du das wissen?
„Und ich möchte mir auch eine Zahl denken!“ rief Helga.
„Kannst du sie auch erraten?“
„Selbstverständlich. Sag' nur die Reste beim Dividieren durch 3, 5 und 7!“
„Die Reste sind 2, 3 und 5!“
„Dann hast Du Dir 68 gemerkt!“
„Richtig!“
Alle Pioniere bedrängten nun den Pionierleiter, sein „Geheimnis“ zu verraten!
„Ganz leicht! Jeder kann die Zahl finden, wenn er folgendes macht:
1. Der Rest beim Dividieren durch 3 ist mit 70 zu multiplizieren.
2. Den zweiten Rest muß man mit 21 multiplizieren.
3. Den dritten Rest mit 15.
Danach addiert man die drei Produkte und erhält die gedachte Zahl. Ergibt die Multiplikation mehr als 105, so muß man noch 105 subtrahieren.“

Ein Beispiel möchte ich euch geben und ihr alle werdet das Zahlenkunststück auch beherrschen:

a) Reste 1, 2, 4, also
$1\cdot 70=70$; $2\cdot 21=42$; $4\cdot 15=60$
b) $70+42+60=172$
c) $172-105=67$.“

Mathematikfachlehrer A. Halameisär, 325. Schule, Moskau

Concursul de matematică
etapa locale

Am 1. März 1970 wurde in der Stadt Bukarest in einer dreistündigen Klausur die Schulolympiade durchgeführt. Wir danken der Redaktion *Gazeta matematica*, die uns die Aufgaben zur Verfügung stellte. Studienrat *Th. Scholl*, Berlin, bearbeitete das Material für unsere Leser und erarbeitete die Lösungen.

Klassenstufe 6, siehe Seite 114

Klassenstufe 7

1. Die folgenden beiden Terme sind durch äquivalente Umformungen so weit wie möglich zu vereinfachen:

$$T_1=\frac{2a^2b+2ab^2}{3a^2+6ab+3b^2}:\frac{1}{a+b}-\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\frac{a^3b^3}{3a^2-3b^2},$$

$T_2=\left(\frac{2}{a}-\frac{3}{b}\right)\cdot\frac{27}{4b^2-9a^2}:\frac{1}{2b+3a}$. Danach ist ein Term T_3 zu bilden, für den gilt

$$T_3=\left(3\,T_1+\frac{T_2}{27}\right)\left(3\,T_1-\frac{T_2}{27}\right).$$

Schließlich ist das geometrische Mittel aus den Termen T_1 und T_2 zu bilden unter der Voraussetzung, daß $a>0$ und $b>0$ gilt.

Gh. Stefanescu, Bukarest

2. Die Summe zweier rationaler Zahlen beträgt 60, ihr Produkt 675. Es ist die Summe aus den reziproken Werten dieser beiden Zahlen zu bestimmen!

Ghita Dimonte, Bukarest

3. In einem Kreis k mit dem Mittelpunkt O werden zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ angenommen. Es ist ein innerer Punkt E der Strecke $\overline{OB}$ festzulegen und die Verbindungsgerade CE zu zeichnen, die den Kreis k in einem weiteren Punkt F schneidet. Die im Punkt F an den Kreis k zu konstruierende Tangente t schneide die Gerade AB im Punkte G.

a) Es ist zu beweisen, daß $\sphericalangle OCE+\sphericalangle EFG=90°$ gilt.

b) Es ist zu beweisen, daß das Dreieck $\triangle EFG$ gleichschenklig ist.

c) Welches Maß muß der Kreisbogen $\widehat{DF}$ haben, damit das Dreieck $\triangle EFG$ gleichseitig ist? Unter der Voraussetzung, daß das Dreieck $\triangle EFG$ gleichseitig ist, soll die Richtigkeit folgender Aussagen nachgewiesen werden:

d) Das Dreieck $\triangle DOF$ ist ebenfalls gleichseitig.

e) Die Dreiecke $\triangle COE$ und $\triangle CFD$ sind einander ähnlich. Unter der Voraussetzung, daß der Radius r des Kreises k die Länge 8 cm hat, sind die Längen der Strecken $\overline{CF}$, $\overline{EO}$ und $\overline{CE}$ zu bestimmen.

Ghita Dimonte, Bukarest

Klassenstufe 8

1. Gegeben sei ein gerades dreiseitiges Prisma $ABCDEF$, das das Dreieck ABC zur Grundfläche und das Dreieck DEF zur Deckfläche hat und in dem $\overline{AB}=\overline{AC}=4$ cm, $\overline{BC}=5$ cm und $\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}=6$ cm betragen. Eine Ebene, die durch die Ecke A geht, schneidet die Kante $\overline{BE}$ in einem Punkt P und die Kante $\overline{CE}$ in einem Punkt Q derart, daß die Geraden $\overline{BC}$ und $\overline{PQ}$ zueinander parallel verlaufen.

a) Welche Länge muß die Strecke $\overline{BP}$ besitzen, damit das Dreieck $\triangle PQD$ gleichseitig ist?

Unter der Voraussetzung, daß das Dreieck $\triangle PQD$ gleichseitig ist, sind folgende Aufgaben zu lösen:

b) Es ist das Volumen der Pyramide $EFQPD$ zu berechnen.

c) Es sind das Volumen und die Oberfläche des Polyeders $ABCDPQ$ zu berechnen.

d) Es ist zu zeigen, daß die Polyeder $ABCPQ$, $DEFPQ$ und $ADPQ$ volumengleich sind.

Elena Matroscenco, Bukarest

2. Der Term $T=\frac{2x-1+(2x-1)^2+(2x-1)^3}{8x^3+1}$ soll so weit wie möglich vereinfacht werden. Danach soll die Gleichung $T=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ in x gelöst werden

Valeria Tomuleanu, Bukarest

3. Gegeben sind drei Terme

$$T_1=\frac{1}{3}\,[2(b^2+c^2)]-a^2,$$

$$T_2=\frac{1}{3}\,[2(c^2+a^2)-b^2] \text{ und}$$

$$T_3=\frac{1}{3}\,[2(a^2+b^2)-c^2].$$

Es ist der Term

$T_4=\frac{T_1+T_2+T_3}{T_1{}^2+T_2{}^2+T_3{}^2}$ zu bestimmen!

C. Ionescu-Tiu, Bukarest

75 Jahre Gazeta matematica

Im September 1970 konnte die rumänische mathematische Schülerzeitschrift *Gazeta matematica* auf ihr 75jähriges Bestehen zurückblicken. Ihr Wirken ist auf das engste mit der Mathematik in Rumänien verbunden. Gegründet im Jahre 1895 aus der Notwendigkeit, die Mathematikausbildung der Studenten der *Hochschule für Brücken- und Straßenbau* zu unterstützen, entwickelte sich die Zeitschrift zu einem Organ, in dem führende rumänische Mathematiker Artikel und Aufgaben veröffentlichten, an denen die mathematikinteressierten Schüler und Studenten ihre Kräfte maßen. Einen großen Aufschwung für die rumänische Mathematik brachten die Bildungsreform und die Reform von 1948; der Aufbau des Sozialismus verlangte auch von der *Gazeta matematica*, das wissenschaftliche und methodische Niveau zu heben und einen breiten Leserkreis an die Mathematik heranzuführen und für sie zu interessieren. Akademiemitglied *Gr. C. Moisil* schreibt dazu in einem Artikel „Zum 75. Jahr" in der Sondernummer 10/70:

„Die *Gazeta matematica* reorganisierte sich, um ihren neuen Aufgaben gerecht zu werden. Die Gesellschaft für mathematische Wissenschaften in der Sozialistischen Republik Rumänien hat es verstanden, ihre Arbeit und ihre besonders charakteristischen Publikationen zu prägen:

- die Aufgabe, das Interesse der breiten Masse der Schüler an der Mathematik zu wecken,
- die Aufgabe, eine Trennung der fachwissenschaftlichen Arbeit von der pädagogischen zu verhindern.

Diese Merkmale behalten auch weiterhin ihre Gültigkeit. Die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften und des Interesses der Oberschüler für die Mathematik ist auf Unterstützung der Mathematiker durch die Kommunistische Partei Rumäniens zurückzuführen."

Heute veröffentlicht die *Gazeta matematica* in jeder ihrer Nummern mathematische, mathematisch-historische Artikel und eine Vielzahl von Problemen und Aufgaben (in Heft 10/70 findet man z. B. die Probleme 10686 bis 10729), deren Lösungen in den nächsten Nummern ausführlich besprochen werden. Viele der Probleme und Aufgaben stammen übrigens von Lesern der Zeitschrift, die auch originelle Lösungen und sogar kleinere mathematische Artikel in der Zeitschrift veröffentlichen.

Durch die Welt der Tetraeder

Wer sein räumliches Vorstellungsvermögen trainieren will, der folge unserem

Streifzug durch die Welt der Tetraeder

Die Rolle, die in der Ebene die Dreiecke spielen, übernehmen im Raum die Tetraeder. Die *regelmäßigen Tetraeder* sind euch sicherlich bekannt (vgl. *alpha* 1/69); sie kamen in einigen Olympiade-Aufgaben schon vor und sollen natürlich auch eine Station auf unserem Streifzug bilden. Was aber wißt ihr über Tetraeder, die *nicht* regelmäßig sind? Mit ihnen wollen wir uns vor allen Dingen bekannt machen. Ob ihr dann auch der Meinung seid, daß die unregelmäßigen Tetraeder eigentlich viel interessanter sind als die regelmäßigen?

Die Voraussetzungen zum Verständnis der einzelnen Abschnitte sind verschieden, und nicht alle Abschnitte hängen voneinander ab. Für Schüler ab 8. Klasse ist dieses Unternehmen sicherlich zuträglich, Schüler aus niederen Klassenstufen sollten es auch einmal probieren.*

Die beigefügten Bilder sind senkrechte oder schräge Parallelprojektionen räumlicher Figuren. Bei solch einer Projektion wird das Bild eines Punktes P etwa mit P' oder P^s bezeichnet; diese Kennzeichnung ist meistens fortgelassen!

1. Der geometrische Begriff „Tetraeder"

● *Voraussetzung:* Im Raum seien vier Punkte A, B, C, D gegeben. Sie sollen nicht in einer Ebene liegen.

● *Behauptung* 1: Es liegen keine drei dieser vier Punkte auf einer Geraden.

● Beweis: Würden etwa A, B und C auf einer Geraden liegen, und bezeichnen wir diese Gerade mit g, dann könnten wir so schließen: Der Punkt D darf nicht auch noch zu g gehören, da vier Punkte einer Geraden in unendlich vielen Ebenen liegen (in welchen?); dies würde der Voraussetzung über A, B, C und D widersprechen. Liegt nun der Punkt D nicht auf der Geraden g, dann bestimmen D und g eine (einzige) Ebene, in der alle vier Punkte enthalten sind; dies wäre ebenfalls gegen die Voraussetzung. Da wir alle möglichen Lagen des Punktes D bezüglich der Geraden durch die Punkte A, B, C berücksichtigt haben, ist die Behauptung 1 (indirekt) bewiesen worden.

● *Folgerung:* Die gegebenen Punkte sind paarweise verschieden. (Denn wäre etwa $A=B$, dann würden $A=B$, C und D in wenigstens einer Ebene liegen; dies sollte aber nicht zutreffen.)

● *Bemerkung:* Die Feststellung, daß gewisse Punkte paarweise verschieden sind, ist in der Geometrie öfters herauszustellen. Es kann nämlich passieren, daß im Laufe einer Untersuchung zwei Punkte als gleich erkannt werden, denen das anfangs nicht anzusehen war. Besonders für jene Fälle, in denen „uns die Anschauung verläßt", ist diese Bemerkung wichtig. Hierzu werden wir noch Beispiele kennenlernen.

Einige einfache Feststellungen und weitere Folgerungen fassen wir in der Behauptung 2 zusammen:

● *Behauptung 2a:* Die vier Punkte A, B, C und D legen genau die sechs eindeutig bestimmten Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ (Bild 1) und Geraden AB, AC, AD, BC, BD, CD fest.

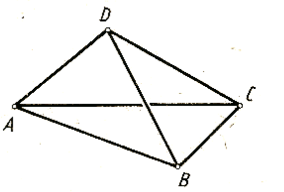


Bild 1: Bild von 4 Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, und ihren Verbindungsstecken (Tetraeder).

● *Behauptung 2b:* Durch jeden Punkt gehen genau drei dieser sechs Geraden; diese drei Geraden liegen nicht in einer Ebene:
Durch A gehen die Geraden AB, AC, AD, durch B gehen die Geraden ...
(vervollständige diese Übersicht).

● *Behauptung 2c:* Diese sechs Geraden bzw. Strecken lassen sich auf drei Weisen so zu Paaren (bei denen es nicht auf die Reihenfolge ankommt) ordnen, daß jedes Paar alle vier Punkte enthält:
AB und CD, AC und BD, AD und BC bzw.
$\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$.

Betrachten wir das Geradenpaar AB und CD! Da die vier Punkte A, B, C und D nicht in einer Ebene liegen, sind auch die beiden Geraden nicht in einer Ebene enthalten. Sie treffen sich nicht in einem Punkt, denn sonst würden sie eine Ebene bestimmen, in der entgegen der Annahme alle vier Punkte lägen. Sie sind aber auch nicht parallel zueinander, da sonst durch den gleichen Schluß ein Widerspruch zur Voraussetzung über A, B, C und D herzuleiten wäre.

● *Bezeichnung:* Zwei Geraden des Raumes, die keinen Punkt gemeinsam haben und nicht parallel sind, nennt man zwei *windschiefe* Geraden. Kürzer: Zwei Geraden heißen *windschief*, wenn sie keine Ebene gemeinsam haben.

Solche Paare windschiefer Geraden werden in unseren Betrachtungen eine Rolle spielen. Löse in diesem Zusammenhang die

▲**Aufgabe 1** Es seien a und b zwei windschiefe Geraden. Ferner sei ε eine Ebene durch die Gerade a. Dann gilt: Entweder trifft die Gerade b die Ebene ε in genau einem Punkt oder die Gerade b ist zur Ebene ε parallel. (*Anleitung*. Schreibe nieder, was du über die gegenseitige Lage einer Geraden und einer Ebene weißt. – Suche in deiner Umgebung Modelle für windschiefe Geraden und zur Behauptung der Aufgabe 1, etwa in Gestalt geeigneter Kanten und Flächen eines Schuhkartons!)

▲**Aufgabe 2** Es seien a und b zwei windschiefe Geraden. Es gibt dann eine Ebene α durch die Gerade a und eine Ebene β durch die Gerade b, die eindeutig bestimmt und zueinander parallele Ebenen sind.

● *Behauptung 2d:* Aus den sechs Strecken, die die Punkte A, B, C, D festlegen, lassen sich geschlossene Streckenzüge herstellen, und zwar genau die folgenden drei:
$\overline{AB}-\overline{BC}-\overline{CD}-\overline{DA}$, $\overline{AB}-\overline{BD}-\overline{DC}-\overline{CA}$, $\overline{AD}-\overline{DB}-\overline{BC}-\overline{CA}$ (Bilder 2 und 3).

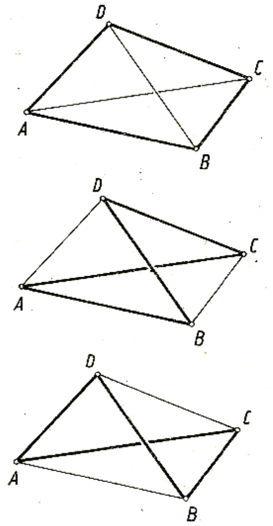


Bild 2: Aus vier Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, herzustellende räumliche Vierecke.

● *Bezeichnung:* Solch einen geschlossenen Zug aus vier Strecken, die nicht in einer Ebene liegen, nennt man ein *räumliches Viereck* oder *windschiefes Viereck*.

▲**Aufgabe 3** Vergleiche den so eingeführten Begriff „Räumliches Viereck" mit dem, was du über Vierecke in der Ebene (*ebene Vierecke*) weißt! (*Anleitung*. Die Ausgangsfigur in der Ebene besteht wieder aus vier Punkten. Welche Voraussetzung hast du jetzt für sie festzulegen?)

* Die Betrachtungen sind übrigens absichtlich nicht als „Mathematik im Erzählstil" durchgeführt worden. Legt einmal selber Wert darauf, die verschiedenen Bestandteile einer Untersuchung möglichst deutlich herauszupräparieren und zu kennzeichnen!

● *Behauptung 2e:* Je drei der vier Punkte A, B, C und D legen ein Dreieck fest. Es gibt genau vier Dreiecke, und zwar die mit den Eckpunkten ... (schreibe sie selber hin).

● *Bezeichnung: „Tetraeder“.* Sind A, B, C, D vier Punkte des Raumes, die nicht in einer Ebene liegen, dann nennt man die Figur aus den vier Dreiecken $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ ein *Tetraeder* (oder *Vierflächner*); *Symbol:* Tetraeder $ABCD$. Es heißen A, B, C, D die Eckpunkte oder Ecken, die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ die *Kanten* und die angeführten Dreiecke die *Seitenflächen* oder die Seiten des Tetraeders.

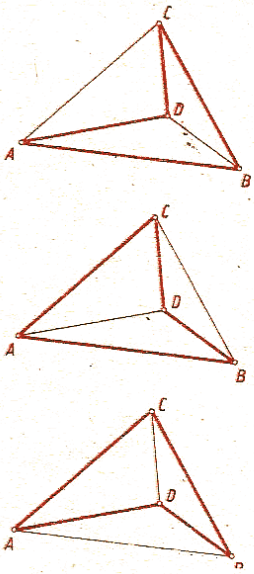


Bild 3: Aus vier Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, herzustellende räumliche Vierecke.

● *Bemerkung:* Je nach den Bedürfnissen eines Problems ist es bequem und üblich, den so eingeführten Begriff „Tetraeder“ geeignet abzuwandeln: Man nennt unter Umständen auch die Gerade, die durch eine Kante des Tetraeders festgelegt ist, eine Kante, oder die Ebene, in der eine Seitenfläche liegt, eine Seite (auch Seitenebene) des Tetraeders. Ein Punkt, der Eckpunkt ist oder auf einer Kante oder im Inneren eines der begrenzenden Dreiecke liegt, heißt ein *Punkt* oder ein *Randpunkt* des Tetraeders. Auf natürliche Weise werdet ihr wie bei einem Dreieck in der Ebene so auch bei einem Tetraeder im Raume *innere* und *äußere* Punkte des Tetraeders unterscheiden. Die inneren Punkte zusammen mit den Randpunkten sind Punkte eines ebenfalls Tetraeder genannten Körpers; man müßte eigentlich zwischen Tetraeder*körper* und Tetraeder*fläche* unterscheiden – die Bequemlichkeit der Mathematiker verlangt sozusagen, daß jeder Leser mathematischer Literatur genau aufpassen muß, welchen Inhalt die verwendeten Begriffe und Bezeichnungen haben sollen, wobei dieser Inhalt in einer einzigen Abhandlung „naheliegenden“ Änderungen unterworfen sein kann!

● *Hinweis:* Eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche nennt man eine *dreiseitige Pyramide*. (Auch hier ist zwischen der Pyramide als Körper und als Fläche zu unterscheiden.) Solch eine dreiseitige Pyramide ist natürlich nichts anderes als ein Tetraeder, an dem eine Ecke als Spitze und die gegenüberliegende Seite als Grundfläche hervorgehoben worden sind. Sind Ecken und Seitenflächen gleichberechtigt, dann ist das Wort Tetraeder besser als die Bezeichnung (dreiseitige) Pyramide.

2. Regelmäßige und rechtwinklige Tetraeder

Unter den regelmäßigen Polyedern (vgl. *alpha* 1/69) ist dir der Würfel sicherlich am vertrautesten. Nach einem Verfahren, das bei der Lösung der zugehörigen Olympiade-Aufgaben recht nützlich war, stellen wir aus einem Würfel regelmäßige Tetraeder her: Die acht Ecken eines Würfels zerlegen wir in zwei Gruppen zu vier Punkten, wie es Bild 4 zeigt. Die Punkte solch einer Gruppe haben die Eigenschaft, nicht in einer Ebene zu liegen und bestimmen daher ein Tetraeder. Auf diese Weise sind durch die Ecken eines Würfels zwei Tetraeder festgelegt. Jedes dieser Tetraeder ist regelmäßig, denn es sind untereinander gleichlange Diagonalen der Würfelseiten-Quadrate die Kanten eines Tetraeders. Beide Tetraeder sind daher auch kongruent. Überdies sind sie durch Drehung etwa um die Achse a durch 90° zur Deckung zu bringen.**

▲**Aufgabe 4** Gib weitere Drehachsen an!

Die beiden Tetraeder durchdringen sich in einem regelmäßigen Oktaeder; dieser Durchschnitt ist in Bild 4 gestrichelt eingezeichnet. Die auf gleiche Art aus einem Quader herzustellenden Tetraeder sind nicht regelmäßig. Sie sind ebenfalls kongruent, doch lassen sie sich nicht durch Drehungen um der Geraden a entsprechende Achsen zur Deckung bringen.

** Diese Drehung ist Beispiel für eine Deckabbildung des Tetraeders.

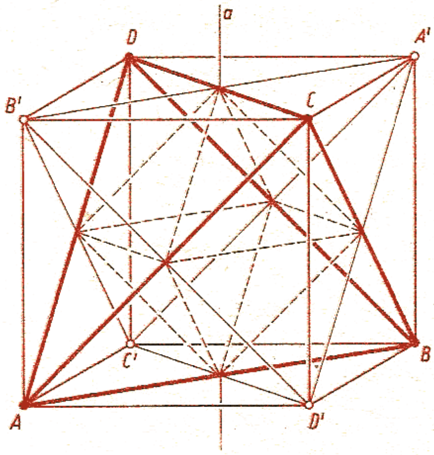


Bild 4: Aus den Ecken eines Würfels lassen sich zwei regelmäßige und acht rechtwinklige Tetraeder bilden.

▲**Aufgabe 5** Versuche Spiegelungen an geeigneten Ebenen als mögliche Deckabbildungen anzugeben! Welche Deckabbildungen gibt es jedoch, wenn der Quader ein Paar Quadrate als Seitenflächen besitzt?

Weitere Tetraeder sind aus einem Würfel zu erhalten, wenn ein Eckpunkt und die dieser Ecke benachbarten Ecken des Würfels herausgegriffen werden. Wir erhalten so acht Tetraeder:

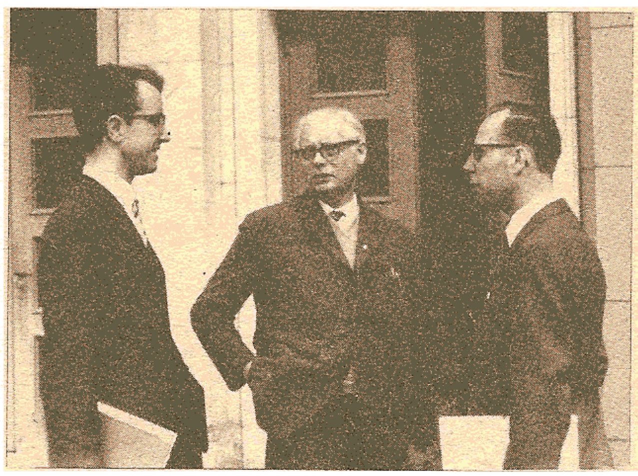
$AB'C'D'$, $BC'D'A'$, $CD'A'B'$, $DA'B'C'$, $A'BCD$, $B'CDA$, $C'DAB$, $D'ABC$.

Diese Tetraeder zeichnen sich dadurch aus, daß sie jeweils eine Ecke besitzen, in der die angrenzenden Kanten paarweise senkrecht aufeinander stehen. Auf gleiche Weise erhalten wir aus einem Quader solche Tetraeder.

● *Bezeichnung:* Ein Tetraeder, das in einer Ecke paarweise senkrecht aufeinander stehende Kanten besitzt, heißt ein *rechtwinkliges Tetraeder*.

Dieser ausführlichen Einführung des Begriffs „Tetraeder“ wird sich in einem der nächsten Hefte ein weiterer Beitrag anschließen.

G. Geise


Drei Experten im Gespräch (X. OJM, DDR-Stufe): Dozent Dr. *G. Geise* im Bild rechts (Autor unseres obigen Beitrags) im Gespräch mit Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. *R. Lüders* (Mitte) und Dozent Dr. *L. Stammler* (Mitglieder des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR).

XIII. Internationale Mathematikolympiade

Žilina/Bratislava 1971

Aufgaben

1. Sei n eine natürliche Zahl mit $n>2$. Man beweise, daß die folgende Behauptung genau für $n=3$ und $n=5$ gilt:
„Für beliebig reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist die Ungleichung

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)$$
$$+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})\geqq 0$$

erfüllt." (Ungarische VR, 5 Punkte)

2. Es sei ein konvexes Polyeder P_1 mit genau neun Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_9$ gegeben. P_i sei das Polyeder, das man aus P_1 durch die Parallelverschiebung $A_1 \to A_i$ erhält ($i=2, 3, \ldots, 9$). Man beweise, daß wenigstens zwei Polyeder $P_1, P_2, \ldots, P_9$ mindestens einen inneren Punkt gemeinsam haben müssen. (UdSSR, 7 Punkte)

3. Man beweise, daß die Folge $\{2^n-3\}$, $n=2, 3, 4, \ldots$, mindestens eine unendliche Teilfolge mit paarweise teilerfremden Elementen enthält.
(VR Polen, 9 Punkte)

4. Alle Seitenflächen eines Tetraeders $ABCD$ seien spitzwinklige Dreiecke. Wir betrachten alle geschlossenen Polygonzüge $XYZTX$, die folgendermaßen definiert sind:
X, Y, Z und T seien innere Punkte der Kanten AB, BC, CD bzw. DA. Man beweise:
a) Ist $\sphericalangle DAB+\sphericalangle BCD \neq \sphericalangle ABC+\sphericalangle CDA$, so existiert unter den Polygonzügen kein kürzester.
b) Ist $\sphericalangle DAB+\sphericalangle BCD=\sphericalangle ABC+\sphericalangle SDA$, so existieren unendlich viele kürzeste Polygonzüge $XYZTX$. Ihre Länge beträgt $2\,AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$,
wobei $\alpha=\sphericalangle BAC+\sphericalangle CAD+\sphericalangle DAB$ ist.
(Niederlande, 6 Punkte)

5. Man beweise, daß in der Ebene für jede natürliche Zahl n eine unendliche (und nicht leere) Punktmenge S mit der folgenden Eigenschaft existiert:
Zu jedem beliebigen Punkt A aus S gibt es in S genau n Punkte, die von A den Abstand 1 haben. (VR Bulgarien, 7 Punkte)

6. $A=(a_{ij})$; $i, j=1, 2, \ldots, n$ sei eine Matrix, deren Elemente ganze, nichtnegative Zahlen sind.
Die Matrix habe folgende Eigenschaft:
Ist ein Element $a_{ij}=0$, dann gilt für diese i und j

$$a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}+a_{1j}+2_{2j}+\ldots$$
$$+a_{nj}\geqq n.$$

Man beweise, daß die Summe aller Elemente der Matrix nicht kleiner als $\frac{n^2}{2}$ ist.
(Schweden, 8 Punkte)

DDR-Teilnehmer der XIII. IMO

Wolfgang Burmeister 1. Preis
dazu: Sonderpreis für die elegante Lösung der 3. Aufgabe
Erweiterte Oberschule Dresden-Süd, Klasse 12

Harald Englisch 2. Preis
EOS „Karl Marx", Leipzig, Klasse 11

Thomas Jentsch 3. Preis
Spezialklasse Mathematik/Physik der Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg (ehem. Dresden), Klasse 12

Arnulf Möbius 3. Preis
Spezialklasse Mathematik/Physik der Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg (ehem. Leipzig), Klasse 12

Gerhard Spens 3. Preis
Humboldt-EOS Erfurt, Klasse 12

Reinhard Wobst 3. Preis
Spezialklasse an der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, Klasse 12

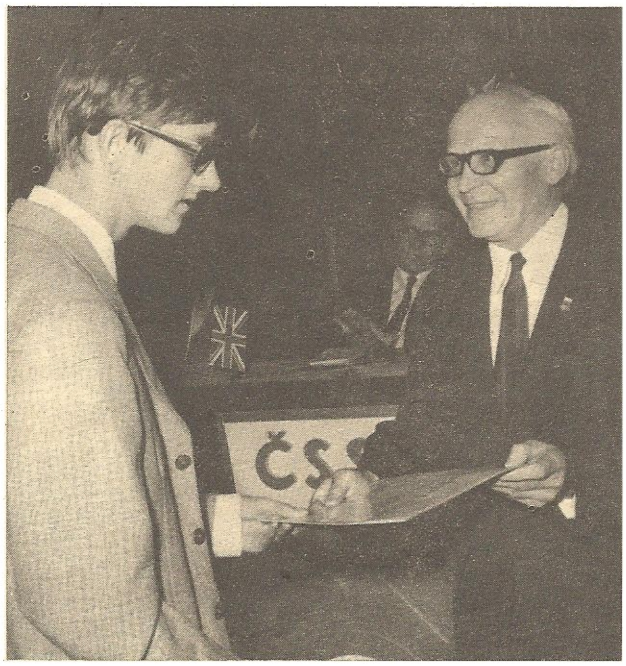
Olaf Böhme
EOS „Berthold Brecht", Dresden, Klasse 11

Hans-Jürgen Fischer
Spezialklasse an der Sektion der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, Klasse 11

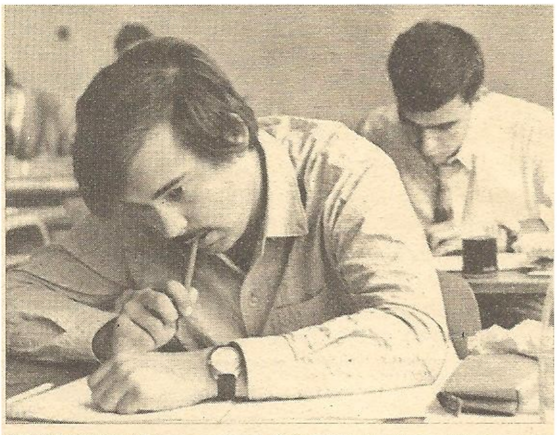
Preisträger der XIII. IMO

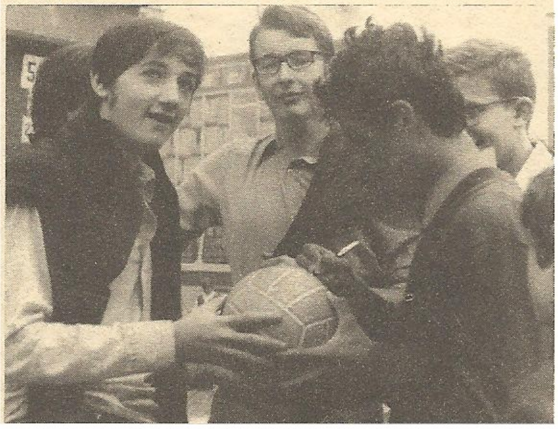
	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Sonderpreis	Gesamtpunktz.
Ungarische VR	4	4		2	255
UdSSR	1	5	2		205
DDR	1	1	4	1	142
VR Polen	1		4		118
Großbritannien		1	4		110
SR Rumänien		1	4		110
Österreich			4		82
SFR Jugoslawien			2		71
ČSSR			1		55
Schweden			2		43[1]
Niederlande			2	1	48
VR Bulgarien					39
Frankreich					38
Mongolische VR					26
Republik Kuba					9[2]
	7	12	29	4	1351[3]

[1] bei 7 Teilnehmern [2] bei 4 Teilnehmern
[3] von 4830 möglichen Punkten



● Klausur-Atmosphäre (13./14. 7. 1971) ● Adressenaustausch nach einem turbulenten Fußballspiel ● Die Jury der XIII. Internationalen Mathematikolympiade – Abschlußfeier in der Komensky-Universität Bratislava ● Sonderstempel, herausgegeben zu Ehren der XIII. IMO ● Ausstellung: 20 Jahre Mathematikolympiaden in der ČSSR – 13 Jahre Internationale Mathematikolympiaden ● Akademiemitglied J. Novák überreicht einen 1. Preis an Imre Ruzsa, Budapest. Er erreichte als einziger Teilnehmer die volle Punktzahl (42 Punkte), Foto S. 108 unten





alpha stellt vor

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Der Verein tschechischer und später tschechoslowakischer Mathematiker und Physiker begann in den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts eine *Zeitschrift für die Pflege der Mathematik* herauszugeben. Diese enthielt auch eine Beilage, die für Schüler der damaligen Mittel- und Oberschulen bestimmt war. Aus ihr ging 1920 die selbständige *Mathematisch-naturwissenschaftliche Umschau* hervor. Bei der Reorganisierung des Vereins tschechoslowakischer Mathematiker und Physiker übernahm der Verlag der Akademie diese Zeitschrift. Allmählich verlor sie ihren Leserkreis und stellte 1955 ihr Erscheinen ein.

Unter schwierigen Bedingungen gelang es 1956, die Zeitschrift zu erneuern, neue Leser und Autoren zu gewinnen.

In diesem Jahr erscheint der 50. Jahrgang der *Umschau.* Neben klassischen Partien der Mathematik werden überwiegend Artikel mit moderner Thematik veröffentlicht. In der Geometrie finden wir vor allem Beiträge, die in der technischen Praxis Anwendung finden können. Die Physik gibt Anleitungen aus sich neu bildenden Fachgebieten. Die Astronomie macht mit der Erschließung des Weltalls vertraut.

Die Wettbewerbsbewegung der Mittel- und Oberschüler wird durch Preisausschreiben, die unabhängig von den Mathematik- und Physikolympiaden durchgeführt werden, gefördert. Eine besondere Rubrik ist den jüngsten Lesern gewidmet. Sie wird durch Aufgaben – häufig unterhaltsam – und elementare Artikel gefüllt. Damit soll von Kindheit an die Liebe zur Mathematik geweckt werden, die leider noch häufig in verschiedenen Lehrbüchern von der Form her vernachlässigt wird. *Rozhledy* macht ihre Leser auch mit dem Inhalt befreundeter ausländischer Zeitschriften vertraut, aus denen sie kürzere Artikel, aber auch Aufgaben abdruckt.

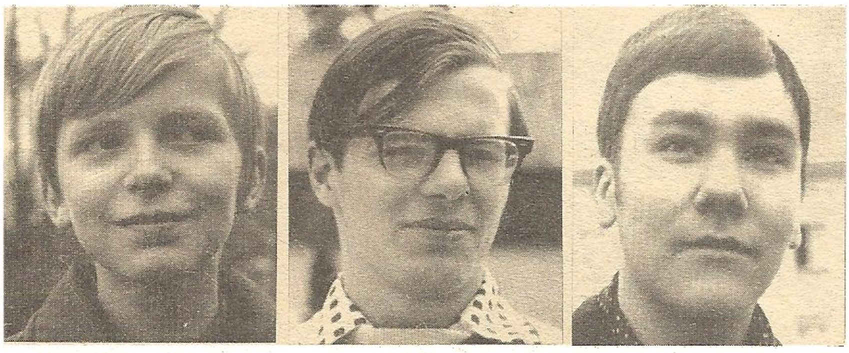
Doc. Ota Setzer, Prag (Chefredakteur)

Die Redaktion *Rozhledy* grüßt die Leser von *alpha* recht herzlich und stellt folgendes Problem:

▲ 806 Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ aus den gegebenen Seiten $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$ und dem Inkreisradius ϱ!

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade (5. 4. bis 8. 4. 1971)



Erste Preise wurden vergeben:

Bernd Zaddach, 10. OS Cottbus, 8. Schuljahr (Olympiadeklasse 10)

Wolfgang Burmeister, EOS Dresden-Süd (Olympiadeklasse 12)

Thomas Jentsch, Spezialklasse der Martin-Luther-Universität Halle (Olympiadeklasse 12, Spezialklasse)

Zweite Preise wurden vergeben:

In **Olympiadeklasse 10** an: **Lothar Wenzel,** EOS „Friedrich List" Berlin; **Matthias Günther,** EOS „Helmholtz" Leipzig; **Guntram Pausch,** EOS „Wilhelm Pieck" Borna (Bez. Leipzig); **Jürgen Roßmann,** EOS „Antonin Zapotocky" Neubrandenburg; **Bernhard Worel,** OS V. Neubrandenburg; **Bernd Süssmilch,** BBS des soz. Binnenhandels Schwerin; **Holger Steinberg,** BBS Schiffselektronik Rostock; **Winfried Kung,** BBS Wohnungsbaukombinat Rostock

In **Olympiadeklasse 11: Rainer Siegmund-Schultze,** EOS „Heinrich Hertz", Berlin

In **Olympiadeklasse 12: Stefan Ladmann,** EOS „Max Klinger" Leipzig; **Reinhard Wobst,** Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt; **Harald Englisch,** EOS „Karl Marx" Leipzig

Dritte Preise wurden vergeben:

In **Olympiadeklasse 10: Stefan Zeh,** Karl-Marx-OS Plauen; **Ralf Lehmann,** J.-Curie-OS Petershagen (Bez. Frankfurt/Oder); **Eckart Böhringer,** EOS „Heinrich Hertz" Berlin; **Ursula Baier,** EOS „Ernst Schneller" Meißen; **Hans-Gert Gräbe,** EOS „A. v. Humboldt" Erfurt; **Steffen Oswald,** M.-A.-Nexö-OS Dresden; **Ulrich Krüger,** EOS „Friedrich Engels" Riesa; **Konrad Engel** (Kl. 9), Herder-OS Rostock; **Oswald Knoth,** Goethe EOS Wurzen (Bez. Leipzig); **Wilfried Hartmann,** EOS Windischleuba (Bez. Leipzig)

In **Olympiadeklasse 11: Olaf Böhme,** EOS Dresden-Reick; **Hans-Jürgen Fischer,** Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt; **Bernd Hofmann,** Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt;

In **Olympiadeklasse 12: Gerhard Spens,** Humboldt EOS Erfurt; **Ludwig Schäfer,** Humboldt-EOS Erfurt; **Hans-Rainer Schumann,** EOS Naumburg; **Andreas Pomp,** Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt; **Arnulf Möbius,** Spezialklasse der Martin-Luther-Universität Halle

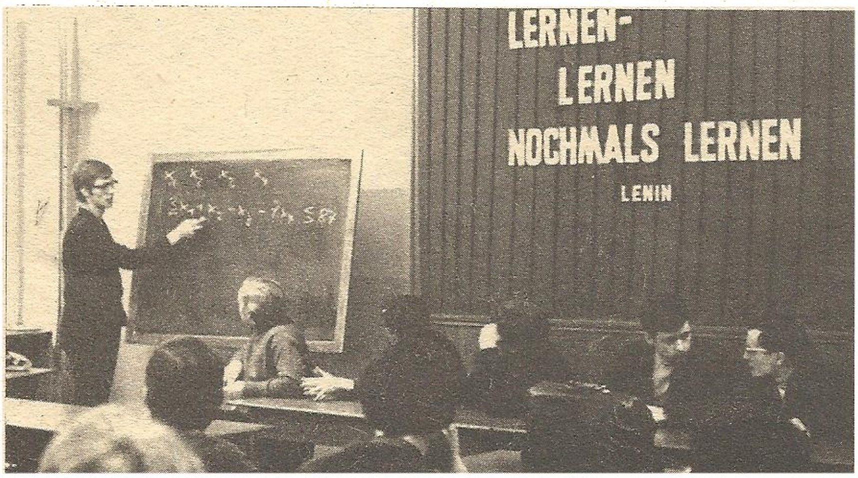
An der X. OJM nahmen 186 Jungen und 25 Mädchen teil.

Was ist aus ihnen geworden?

alpha stellt ehemalige IMO-Teilnehmer vor

Aus Anlaß der *X. Olympiade Junger Mathematiker* veranstaltete die Mathematische Gesellschaft der DDR ein wissenschaftliches Kolloquium mit ehemaligen IMO-Teilnehmern der DDR. Zwanzig junge Mathematiker und Physiker folgten der Einladung. Zwölf von ihnen berichteten in Kurzvorträgen über ihre Arbeit. Einige Themen seien genannt: Operatorenideale – Extremwertprobleme in der Theorie der konformen Abbildungen – Anwendung der Gruppentheorie in der Elementarteilchenphysik – Über vertauschbare Funktionen – Über eine spezielle Ungleichung. Alle IMO-Teilnehmer weilten einen Tag bei den 220 Teilnehmern der X. OJM in der Jugendhochschule „Wilhelm Pieck", Berlin-Bogensee. Aufgeteilt in kleine Gruppen, berichteten sie den OJM-Teilnehmern über ihre Erfolge an Internationalen Mathematikolympiaden, über ihre gesellschaftliche und wissenschaftliche Entwicklung. Sie machten ihre Zuhörer sozusagen aus erster Hand mit den Studienbedingungen und dem Studienverlauf an Hochschulen vertraut. Sie zeigten insbesondere die rasche Entwicklung der Mathematik in der DDR zwischen dem VII. und VIII. Parteitag.

1. Diplom-Physiker *Thomas Görnitz*, Assistent, Karl-Marx-Universität Leipzig (III. IMO)
2. Dr. *Uwe Küchler*, Assistent, Friedrich-Schiller-Universität Jena (V. IMO)



3. Dr. *Hans-Ulrich Schwarz*, Assistent an der Friedrich-Schiller-Universität Jena (V. IMO)

4. Diplom-Mathematiker *Bernd Noack*, Assistent, Institut für Gesellschaftswissenschaften beim ZK der SED (V. IMO)

5. Diplom-Physiker *Rolf-Günther Riedel*, Problemanalytiker, Kombinat Robotron (V. IMO)

6. Diplom-Mathematikerin *Monika Noack*, Forschungsstudentin, Humboldt-Universität zu Berlin (VI. u. VII. IMO)

7. *Manfred Brandt*, stud. math. Forschungsstudent, Humboldt-Universität zu Berlin (VI., VII. IMO)

8. Diplom-Mathematiker *Manfred Krüppel*, Assistent, Universität Rostock (VI. IMO)

9. *Wilhelm Otto*, stud. math., Forschungsstudent, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin (VII. IMO)

10. *Walter Liepe*, stud. math., Humboldt-Universität zu Berlin (VII/VIII. IMO)

11. *Peter Enskonatus*, stud. math., Forschungsstudent, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin (VII./VIII. IMO)

12. Dr. *Marko Roczen*, Assistent, Humboldt-Universität zu Berlin (VII. IMO)

13. *Gert Siebert*, stud. math., Forschungsstudent, Humboldt-Universität zu Berlin (VIII./IX. IMO)

14. *Christoph Bandt*, stud. math., Universität Greifswald (IX./X. IMO)

15. *Joachim Fritz*, stud. math., Humboldt-Universität zu Berlin (IX./X. IMO)

16 *Ulrich Zähle*, stud. math., Lomonossow-Universität, Moskau (IX./X. IMO)

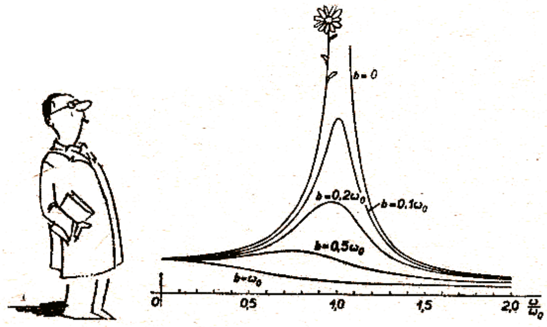
17. *Hans-Görg Roos*, stud. math., Technische Hochschule Otto von Guericke, Magdeburg (X. IMO)

18. *Jürgen Gärtner*, stud. math., Technische Universität Dresden (X./XI. IMO)

19. *Hans-Dietrich Gronau*, stud. math., Universität Rostock (XI. IMO)

20. *Klaus Neumann*, stud. math., Technische Universität Dresden (XI. IMO)

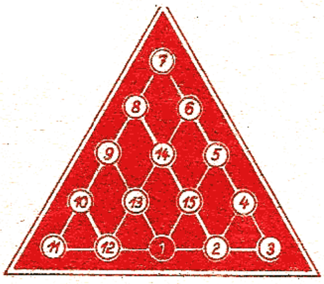
In freien Stunden alpha heiter



Wladimir Renčin, Praha

Vierzehn Figuren

Aus Pappe oder Sperrholz wird ein Dreieck ausgesägt, das man so einteilt, wie es auf der Zeichnung angegeben ist. Für das Spiel benötigt man 14 Figuren.

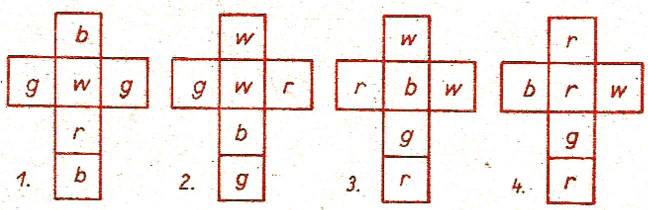


Die Figuren werden auf allen hellen Kreisen des Dreiecks aufgestellt, der Kreis mit der Nummer 1 bleibt frei. Die Figuren können nur gesetzt werden, wenn man mit ihnen eine andere Figur überspringen kann. Jede übersprungene Figur wird vom Spielfeld genommen. Die letzte Figur muß mit ihrem Sprung auf dem Kreis mit der Nummer 1 enden. Diese Aufgabe ist mit einer Mindestzahl von Zügen zu erfüllen.
Hier ist eine Lösung mit einer Mindestzahl von 13 Zügen: 5 auf 1, 7 auf 5, 8 auf 15, 4 auf 6, 1 auf 5, 6 auf 4, 3 auf 5, 12 auf 14, 10 auf 8, 8 auf 15, 5 auf 1, 2 auf 12 und 11 auf 1.

Ein neues Knobelspiel

Es sind vier Knobelwürfel nach folgendem Muster herzustellen (die Kleinbuchstaben im Netz der Würfel bedeuten die Farben Blau (*b*), Grün (*g*), Rot (*r*), Weiß (w)):
Diese vier Würfel sind zu einem quadratischen Prisma so zusammenzusetzen, daß die Farben Weiß, Rot, Blau und Grün auf allen vier Rechteckflächen der Prismen in beliebiger Reihenfolge zu sehen sind.

Schüler W. König, Berlingerode, übersandte uns die Unterlagen zu diesem kanadischen Spiel



Denksport

Was denkt ein *Junger Mathematiker*, wenn er vor einem Klassenraum steht, sich überzeugt, daß genau fünf Mitschüler darin sind, und er dann acht Schüler herauskommen sieht?
Lösung: Er denkt: „Wenn jetzt noch drei Schüler hineingehen, dann ist der Klassenraum leer“.

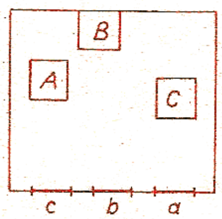
Auf der DDR-Olympiade von Dr. L. Stammler, Halle, zum besten gegeben

Name mit sechs Buchstaben

Der Name einer Stadt hat 6 Buchstaben. Setzt man für den Buchstaben die Zahl, die seine Stellung im Alphabet angibt, so gilt folgendes:
a) Subtrahiert man die erste Zahl von der Summe der übrigen, erhält man 56
b) Subtrahiert man die zweite Zahl von der Summe der übrigen, erhält man 50
c) das gleiche Verfahren auf die dritte Zahl angewandt, liefert 24
d) bei der vierten Zahl ergibt sich 36
e) bei der fünften Zahl 42
f) bei der sechsten Zahl 32
Wie heißt die Stadt?

OL H. Pätzold

Straßenbauer gesucht



Auf einem umfriedeten Grundstück liegen drei Häuser *A*, *B*, *C* und an einer Seite liegen drei Tore *a*, *b*, *c*. Wie muß man drei Wege anlegen, daß *A* mit *a*, B mit *b* und *C* mit *c* verbunden wird, und daß sich dabei kein Weg kreuzt? Die Wege müssen innerhalb des Grundstückes verlaufen!

Silbenrätsel

Der Anfangsbuchstabe eines jeden Wortes ergeben ein Teilgebiet der Mathematik, welches bereits in der polytechnischen Oberschule gelehrt wird.

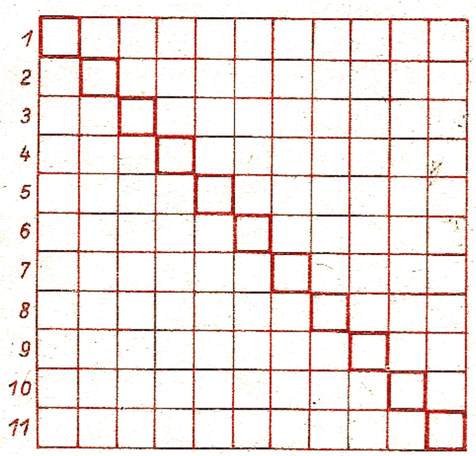
a – ba – bel – bo – de – der – di – dif – drei – e – e – eck – ei – el – ein – ep – ex – fe – fer – ge – gen – gik – go – heits – i – ko – kreis – kus – la – läu – le – le – le – lip – lo – lon – ment – mo – nal – nent – ner – nom – null – or – po – ra – ra – ren – renz – ro – sa – se – ska – si – stel – ta – tan – te – tho – tron – zie.

1. Ebene Figur
2. Rechengerät im Altertum
3. Rechenoperation
4. Einteilung
5. Zusammenstellung von Werten
6. Hochzahl
7. Grundlagenwissenschaft
8. Teil eines Rechenstabes
9. Ebene Figur mit zwei Brennpunkten
10. Schnittpunkt einer Funktion mit der x-Achse
11. Unterschied zweier Zahlen
12. Kreis mit dem Radius $r=1$
13. Geometrischer Grundbegriff
14. Griechischer Buchstabe
15. Bezeichnung für senkrecht
16. Eingliedriger Term
17. Begriff aus der Mengenlehre
18. Gerade, die einen Kreis berührt
19. Name eines Rechenautomaten
20. Regelmäßiger Polyeder
21. Stelle im Dezimalsystem

Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch
Peter-Göring-OS Lucka (Kreis Altenburg)

Aus den Buchstaben

a-a-a-a-a-a-a-a-b-b-b-c-c-c-c-d-d-d-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-e-f-g-g-g-g-h-h-h-h-h-h-h-i-i-i-i-i-i-i-i-k-k-k-l-l-l-l-l-l-l-l-m-m-m-n-n-n-n-n-n-n-n-n-n-n-n-n-n-o-o-o-o-p-p-p-r-r-r-r-r-r-s-s-s-s-s-ß-t-t-t-t-t-t-u-u-u-u-u-u-u-r-w-w



sind waagerecht 11 Wörter einzutragen (ß ein Buchstabe, ä=ae). Die markierte Diagonale ergibt einen Abschnitt in der *alpha*-Zeitschrift.

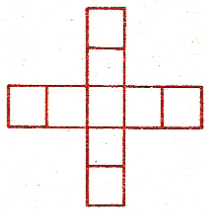
1. Winkel am Dreieck
2. Rechenvorschrift
3. Begriff aus der Bruchrechnung
4. Aufgabentyp
5. anderer Name für Quotient
6. mathematische Ausdrücke mit Gleichheitszeichen
7. Begriff vom Kreis
8. Begriff vom Trapez
9. Zahlenpaar in der graphischen Darstellung
10. zwei Winkel, die einen Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben
11. k.g.V. von Nennern gegebener Brüche

Mathematikfachlehrer H. Winkler
OS Hartmannsdorf (Bez. Karl-Marx-Stadt)

Summenkreuz

Die Zahlen 1 bis 9 sind in das Kreuz so einzutragen, daß senkrecht wie waagerecht die gleiche Summe entsteht.

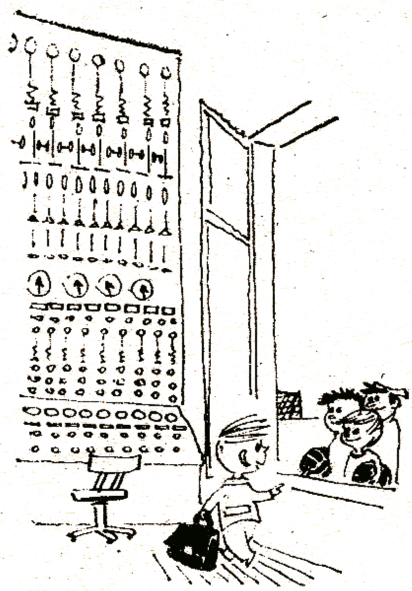
Schülerin Kerstin Diestler, Rudolstadt



Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} \underline{52 \cdot **} \\ ** \\ \underline{**} \\ *7* \end{array}$$

René Brunsch, Kl. 5, Wüstenbrand
(Bez. Karl-Marx-Stadt)



Ich programmiere nur schnell die Hausaufgabe, dann komme ich spielen. *aus: Ogonjok (S. Tscherepanow)*

Spielwürfel und Mathematik

▲1▲ Welche Augenzahl wird durch genau einen Wurf mit genau zwei Spielwürfeln (3 Würfeln, 4 Würfeln, n Würfeln) mindestens und welche höchstens erzielt?

▲2▲ Udo hat mit genau einem Wurf die Augenzahl 7 (13) erreicht. Wieviel Spielwürfel hat er bei diesem Wurf mindestens und wieviel höchstens benutzt? Welche Augenzahlen zeigen dabei die einzelnen Würfel?

▲3▲ Petra hat in genau einem Wurf mit nur einem Würfel mehr Augen erzielt als Klaus in genau einem Wurf mit vier Würfeln. Gib alle Möglichkeiten an!

▲4▲ Bärbel erreichte in genau einem Wurf mit genau drei Würfeln weniger Augen als Sabine in genau einem Wurf mit genau zwei Würfeln. Wieviel verschiedene Möglichkeiten an Gesamtaugenzahlen beider Spielpartner gibt es?

▲5▲ Axel benutzt beim Würfeln bei jedem Wurf stets genau fünf Spielwürfel. Berechne die Gesamtaugenzahlen aller möglichen Würfe, wenn dabei niemals keine zwei (oder mehr) Würfel die gleiche Augenzahl zeigen!

▲6▲ Hans erzielt in genau einem Wurf mit genau drei Würfeln die Gesamtaugenzahl 6 (11). Wieviel Möglichkeiten gibt es?

Würfelspiele

Drei Spielwürfel sollen zu einem quadratischen Prisma übereinander gestapelt sein (Bild 1). Wenn ihr nur die obere Fläche der Säule und nur zwei seitliche Flächen seht, könnt ihr sofort die Summe der Augen auf den Flächen, mit denen die Würfel aufeinander liegen, und die Augen auf der Unterfläche der Säule ermitteln. So ist zum Beispiel in der Anordnung der Würfel, die in Bild 2 dargestellt ist, die gesuchte Summe 17. Überlegt, nach welchen Regeln man sich richten muß, um die Summe der verdeckten Augen zu erraten.

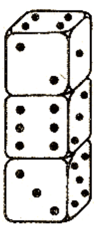


Bild 1

In welcher Reihenfolge lagen die Würfel?

Gebt euren Freunden drei Würfel, ein Stück Papier und einen Bleistift und sagt ihnen, sie sollen die Würfel beliebig nebeneinanderlegen und die dreistellige Zahl bilden, deren Ziffern den Augen auf den oberen Seiten der Würfel entsprechen. Das ist zum Beispiel bei den in Bild 3 dargestellten Würfeln die Zahl 254. An diese Zahl sollen sie die drei Ziffern anhängen, die den Augen auf den Unterseiten der Würfel entsprechen. Damit erhält man eine sechsstellige Zahl, in unserem Beispiel 254 523. Dann sollen sie diese Zahl durch 111 teilen und euch das Ergebnis sagen.

Bild 2

Ohne eine Multiplikation durchzuführen, könnt ihr sehr schnell die drei ersten Ziffern der sechsstelligen Zahl angeben und damit also sagen, in welcher Reihenfolge die Würfel lagen.

Wie wird das gemacht? Man zieht von der angesagten Zahl 7 ab und teilt die Differenz durch 9. Die Ziffern des Quotienten geben die Lage der Würfel an.

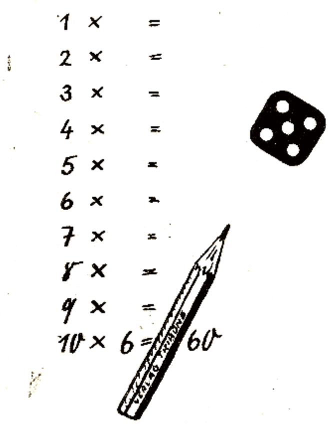
Wenn wir unser Beispiel fortsetzen, erhalten wir also:

$254\,523:111=2\,293$; $2\,293-7=2\,286$;
$2\,286:9=254$.

Was ist die mathematische Grundlage dieses Kunststücks?

Setzen

Beliebig viele Mitspieler. Ein Würfel. Jeder Spieler schreibt auf ein Blatt Papier:



Dann würfelt er zehnmal hintereinander. Nach jedem Wurf muß er die entsprechende Augenzahl in eine der noch unvollständigen Gleichungen einsetzen. Welche er wählt, steht ihm frei (z. B. $10\cdot 6=60$, wenn er eine Sechs gewürfelt hat). Sieger ist, wer die 10 Ergebnisse addiert und die höchste Endsumme aufweisen kann.

Aufgaben der Schulolympiade (Stadt Bukarest)

Klassenstufe 6

(Siehe Beitrag Seite 105 in diesem Heft)

1. Gegeben sei ein Dreieck ABC, in dem $\overline{AB}<\overline{AC}$ ist. Von einem inneren Punkt M der Seite $\overline{AB}$ ist das Lot auf die Gerade BC zu fällen; sein Fußpunkt sei D. Auf der Seite $\overline{BC}$ ist ein innerer Punkt N so festzulegen, daß $\overline{BD}=\overline{DN}$ gilt. Danach ist die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{CN}$ zu konstruieren; ihr Schnittpunkt mit der Geraden AC sei P. Der Punkt N ist mit den Punkten M und P zu verbinden.

a) Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle MNP$ zu bestimmen für den Fall, daß die Winkel $\sphericalangle CAB=64°$ und $\sphericalangle CBA=72°$ betragen.

b) Es sei ferner $\overline{AB}+\overline{AC}=11$ cm. Welchen Umfang besitzt das Viereck $AMNP$?

c) Ändert sich der Umfang des Vierecks $AMNP$, wenn sich der Punkt M auf $\overline{AB}$ bewegt? Die Antwort ist zu begründen!

d) Es falle der Punkt M mit dem Eckpunkt A des Dreiecks ABC zusammen. Es ist der Umfang des Dreiecks ANP zu berechnen!

A. Hollinger, Bukarest

2. Drei Radfahrer starten zum gleichen Zeitpunkt im Ort A und fahren auf demselben Wege mit unterschiedlichen, aber jeweils konstanten Geschwindigkeiten bis zum Ort B. Ihre Fahrzeiten verhalten sich wie 3:4:5. Der erste Radfahrer trifft in B um 14 Uhr, der zweite um 14.20 Uhr ein. Die Geschwindigkeit des zweiten Radfahrers betrug dabei $30\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Um wieviel Uhr trifft der dritte Radfahrer im Ort B ein?

b) Wieviel Minuten benötigt jeder der drei Radfahrer, um die Entfernung $\overline{AB}$ zurückzulegen?

c) Wie groß ist die zurückgelegte Entfernung?

d) Mit welchen Geschwindigkeiten fuhren der erste bzw. der dritte Radfahrer?

H. Bercovici, Bukarest

3. Es sind alle rationalen Zahlen x zu bestimmen, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{2\cdot(2{,}4-\sqrt{4{,}1616})}{x}=\frac{(2\cdot\sqrt{2})^2+2^2}{5:\sqrt{1:\left(1+\frac{7}{9}\right)}}.$$

I. C. Ligor, Bukarest

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Aufgaben der DDR-Olympiade Fortsetzung

1. Aufgabe (Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission)

(1) Da genau neun Ziffern verwendet werden müssen, kann höchstens eine der Primzahlen einstellig sein. Andererseits muß, da neun ungerade ist, mindestens eine der Primzahlen einstellig sein. Dafür kommen genau die Zahlen 2, 3, 5 und 7 in Frage.

(2) Die vier anderen Zahlen sind wegen (1) sämtlich zweistellig und können nur auf die Ziffern 1, 3, 7 und 9 enden, da sie sonst durch 2 oder 5 teilbar wären.

(3) Die einstellige Primzahl kann weder 3 noch 7 sein, da sonst für die restlichen vier zweistelligen Zahlen nur genau drei verschiedene Endziffern vorhanden wären, also (2) nicht erfüllt werden kann.

Es werden nun genau die folgenden beiden Fälle unterschieden:

(4a) Die einstellige Primzahl sei 2. Für die Zehnerstellen der vier zweistelligen Primzahlen bleiben dann genau die Ziffern 4, 5, 6 und 8.

Sämtliche zweistelligen Primzahlen, die sich unter diesen Bedingungen bilden lassen, sind:

41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 83 und 89. Von ihnen kann die Zahl 43 nicht zu einer der gesuchten Mengen gehören, da diejenigen der genannten Primzahlen, in denen weder die Ziffer 4 noch die Ziffer 3 vorkommt, genau die Primzahlen 59, 61, 67 und 89 sind. Je drei von diesen enthalten aber eine der Ziffern 6, 9 zweifach, so daß man aus ihnen keine drei weiteren, den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden Primzahlen auswählen kann. Wählt man aus den verbleibenden acht Primzahlen als Zahl, in der die Ziffer 5 vorkommt, die Zahl 53, dann entfallen 59 und 83, und aus den verbleibenden fünf Zahlen lassen sich, da dann 89 stets verwendet werden muß, zusammen mit den bereits gewählten Zahlen genau die folgenden beiden Mengen bilden:

(I) $\{2, 53, 41, 67, 89\}$ und
(II) $\{2, 53, 47, 61, 89\}$.

Analog findet man bei der Wahl von 59 (und damit 83) die beiden Mengen

(III) $\{2, 59, 41, 67, 83\}$ und
(IV) $\{2, 59, 47, 61, 83\}$.

Damit sind alle Möglichkeiten für Mengen der genannten Art, die die Zahl 2 enthalten, erschöpft.

(4b) Die einstellige Primzahl sei 5.

Dann bleiben für die Zehnerstellen der vier zweistelligen Primzahlen genau die Ziffern 2, 4, 6 und 8.

Sämtliche zweistelligen Primzahlen, die sich unter diesen Bedingungen bilden lassen, sind 23, 29, 41, 43, 61, 67, 83 und 89. Wie in (4a) zeigt man, daß 43 zu keiner der Mengen gehören kann. Ähnliche Überlegungen wie in (4a) ergeben genau Mengen, die den Bedingungen entsprechen, nämlich:

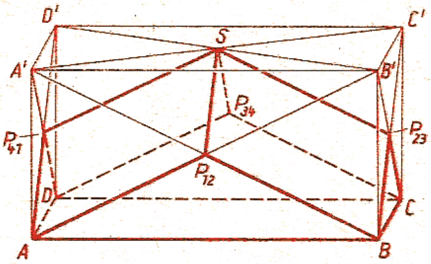
(V) $\{5, 23, 41, 67, 89\}$
(VI) $\{5, 23, 47, 61, 89\}$
(VII) $\{5, 29, 41, 67, 83\}$
(VIII) $\{5, 29, 47, 61, 83\}$.

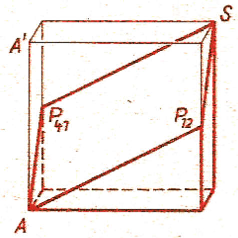
Es gibt mithin genau die Mengen I bis VIII der gesuchten Art.

2. Aufgabe: Man bezeichnet die vier schneidenden Ebenen mit E_1, E_2, E_3, E_4 entsprechend der in der Aufgabenstellung festgelegten Reihenfolge. E_1 und E_2 schneiden die Deckfläche des Quaderkörpers nach den Diagonalen $(B'D')$ bzw. $(A'C')$. Der Schnittpunkt S dieser Diagonalen ist den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam. E_1 und E_2 schneiden die Seitenfläche $(ABB'A')$ des Quaderkörpers nach den Diagonalen (AB') bzw. $(A'B)$. Der Schnittpunkt P_{12} dieser Diagonalen ist den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam. Folglich ist die Verbindungsgerade (SP_{12}) die Schnittgerade der Ebene E_1 und E_2. Wegen der Konvexität des Quaders hat die Schnittgerade mit dem Quaderkörper genau die Strecke SP_{12} gemeinsam. Aus den gleichen Überlegungen ist die Verbindungsgerade (AP_{12}) Schnittgerade von E_1 mit der von den Punkten $ABB'A'$ aufgespannten Ebene. Entsprechend liegt (BP_{12}) in der Schnittgeraden von E_2 mit $(ABB'A')$. Die Punkte A, B und P_{12} liegen gemeinsam mit dem Restkörper unterhalb der Ebenen E_3 und E_4. Daraus folgt, daß die Strecken AP_{12}, BP_{12}, SP_{12} Kanten des Restkörpers darstellen. Die Kante AB bleibt bei diesen vier Schnitten ungeändert bestehen.

Durch zyklische Fortsetzung dieser Überlegungen findet man, daß die Punkte A, B, C, D als Eckpunkte am Restkörper erhalten bleiben, während die Ecken A', B', C', D' entfallen. Genau die Mittelpunkte P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} und S der Seitenfläche bzw. Deckfläche treten als neue Eckpunkte dazu. Es verbleibt ein konvexer Restkörper mit 9 Ecken, 16 Kanten und 9 Flächen. Die Probe mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes $e+f-k=2$ ist erfüllt.

Das Volumen V_R des Restkörpers kann in folgender Weise zu dem Volumen V_Q des Quaders in Beziehung gesetzt werden: Man lege durch den Punkt S zwei seitenparallele ebene Schnitte, die den Quaderkörper in vier kongruente Quaderkörper zerlegen. Durch Anbringen der vier ebenen Schnitte wird z. B. der Teilquader mit der Kante AA' von der Ebene E_1 in zwei volumengleiche Teilkörper zerlegt, wobei genau der untere Teil dem Restkörper zufällt. Wendet man diese Überlegung auf alle vier Teilquader an, ergibt sich die Aussage $V_R : V_Q = 1 : 2$.





Bemerkungen: Diese mit 7 Punkten ausgeschriebene Aufgabe lag 109 Teilnehmern zur Lösung vor. Es ergab sich der folgende Punktspiegel für diese Aufgabe: 0 : 12; 1 : 7; 2 : 2; 3 : 4; 4 : 6; 5 : 13; 6 : 20; 7 : 45. Die Aufgabe wurde etwa von 40 % der Teilnehmer vollständig gelöst, während auch ein Teil fast nichts mit der Aufgabe anzufangen wußte. Zur Volumenbestimmung des Restkörpers wurden sehr unterschiedliche Methoden angewandt, auf die hier im einzelnen nicht eingegangen werden kann. Ein zyklisches Vorgehen nach der hier demonstrierten Art, was eine wiederholte Anwendung gleicher Schlußweisen erlaubt, wurde von keinem Teilnehmer angewandt. Auch eine Probe mit dem *Eulerschen Polyedersatz* war in keiner Arbeit zu finden.

Dozent Dr. E. Schröder, Technische Universität Dresden

3. Aufgabe (3.1 und 3.2: siehe Heft 4/71, Seite VIII)

4. Aufgabe (nach dem Vorschlag der Aufgabenkommission):

Angenommen, es gibt eine quadratische Funktion
$f(x)=ax^2+bx+c$, a, b, c reell, $a \neq 0$
mit der geforderten Eigenschaft.

Dann gilt für jedes reelle x:

$a(x+1)^2+b(x+1)+c=a(-x)^2+b(-x)+c$,

also

$ax^2+2ax+a+bx+b+c=ax^2-bx+c$.

Daraus folgt

$$(a+b)(2x+1)=0.$$

Da diese Gleichung insbesondere für $x=0$ erfüllt sein muß, folgt

$a=-b$.

Mithin können höchstens die quadratischen Funktionen der Form

$f(x)=ax^2-ax+c$ ($a\neq 0$, a, c beliebig reell) die geforderte Eigenschaft haben.

Tatsächlich gilt für jede von diesen:

$f(x+1)=a(x+1)^2-a(x+1)+c=ax^2+ax+c$

$f(-x)=a(-x)^2-a(-x)+c=ax^2+ax+c$,

also $f(x+1)=f(-x)$.

Bemerkungen: Es zeigte sich, daß diese relativ leichte Aufgabe viele Schüler dazu verleitete, nicht mit der notwendigen Sorgfalt zu arbeiten. So fehlten z. B. häufig die Probe bzw. der Hinweis, daß a und c beliebig reelle Werte (außer $a\neq 0$) annehmen können.

J. Bartsch, Universität Rostock

5. Aufgabe (Vorschlag der Aufgabenkommission):

a) Angenommen, die reelle Zahl $x\neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung, d. h. es sei

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Wegen $r<-6$ gilt $0<-\frac{3}{r}<\frac{1}{2}$. Daher gilt

$$\frac{x}{2}>\frac{1}{2}+\frac{3}{r}>0, \text{ also } x>0 \text{ und damit}$$

$$2>x\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{r}\right) \text{ bzw.}$$

$$4>x\left(\frac{6+r}{r}\right) \text{ bzw. wegen}$$

$$\left(\frac{6+r}{r}\right)>0.$$

$$0<x<\frac{4r}{6+r}.$$

Also können höchstens solche x, für die

$$0<x<\frac{4r}{6+r} \text{ gilt,}$$

Lösungen der gegebenen Ungleichung sein. Tatsächlich gilt für alle diese Werte

$$\frac{2}{x}>\frac{2}{\frac{4r}{6+r}}=\frac{3}{r}+\frac{1}{2}, \text{ also } \frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}.$$

b) In diesem Falle geht die gegebene Ungleichung in

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{2}>\frac{1}{2} \text{ über.}$$

Diese Ungleichung ist für alle $x>0$ und nur für diese erfüllt, da genau für sie

$$\frac{2}{x}>0 \text{ gilt.}$$

c) In diesem Falle gilt $-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}$. (2)

Angenommen, die reelle Zahl $x\neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung. Dann gilt

$\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}$. Wegen (2) ist diese Ungleichung für alle $x>0$ erfüllt.

Es sei nun $x<0$. Dann gilt $rx>0$, und man erhält durch Multiplikation von (1) mit rx:

$$2r-3x>\frac{rx}{2} \text{ und weiter}$$

$$4r-6x>rx, \text{ woraus man wegen}$$

$$(r+6)>0$$

$$x<\frac{4r}{6+r} \text{ erhält.}$$

Also können im Falle c) höchstens solche x, für die $x>0$ oder $x<\frac{4r}{6+r}$ gilt, die gegebene Ungleichung erfüllen.

Tatsächlich ist für $x>0$ wegen (2)

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2} \text{ und für}$$

$$x<\frac{4r}{6+r}$$

$$\frac{2}{x}>\frac{2}{\frac{4r}{6+r}}=\frac{3}{r}+\frac{1}{2}, \text{ also}$$

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}.$$

d) In diesem Falle gilt $-\frac{3}{r}<0$.

Angenommen, die reelle Zahl $x\neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung. Dann gilt

$$\frac{2}{x}>\frac{1}{2}+\frac{3}{r}>0 \text{ und daher } x>0.$$

Daraus folgt

$$0<x<\frac{4r}{6+r}. \text{ Also können höchstens}$$

solche x, für die $0<x<\frac{4r}{6+r}$ gilt,

Lösungen der gegebenen Ungleichung sein. Tatsächlich ist in diesem Falle

$$\frac{2}{x}>\frac{2}{\frac{4r}{6+r}}=\frac{3}{r}+\frac{r}{2}, \text{ also } \frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}.$$

6. Aufgabe:

Bemerkungen: Die Aufgabe wurde von einem großen Teil der Schüler richtig gelöst, wobei jedoch nicht in allen Fällen die Notwendigkeit des Hinweises erkannt worden war, daß alle nach der Konstruktion gewonnenen Punkte den Bedingungen der Aufgabe genügen. Neben den Lösungen, die dem Vorschlag der Aufgabenkommission, der die üblichen Schritte bei der Bearbeitung einer derartigen Aufgabe unter Benutzung der Dreieckshöhen und Anwendung des Strahlensatzes ausführlich darlegt, entsprechen, entwickelten u. a. *Gerald Teuschbein* (Bez. Gera) und *Cornelia Kästner* (Bez. Cottbus) Gedanken, die bei der folgenden Lösung berücksichtigt wurden.

Unter der Annahme, daß in einem Dreieck ABC ein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Dreieck EFD existiert, kann man folgende Aussagen machen:

(1) Dreieck EFD ist wegen der geforderten Parallelität der entsprechenden Seiten ähnlich dem Dreieck ABC.

(2) Der Flächeninhalt des Dreiecks EFD ist der dritte Teil des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.

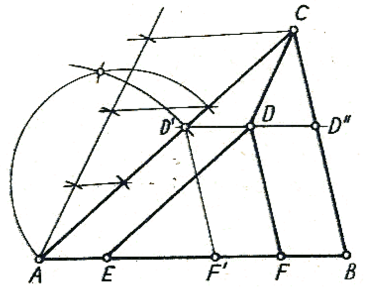
(3) Durch Parallelverschiebung des Dreiecks EFD um die Länge der Strecke AE in Richtung der Strecke BA entsteht das diesem kongruente Dreieck $AF'D'$.

(4) Nach dem Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke gilt:

$$\overline{AD'}:\overline{AC}=1:\sqrt{3}=\frac{1}{3}\sqrt{3}:1.$$

(5) Der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ ist doppelt so groß wie der des Trapezes $FBCD$. Wegen der Längengleichheit von $F'D'$ und FD folgt aus der Flächenformel für ein Trapez nach dem Strahlensatz

$2\overline{FB}=\overline{F'B'}$, also $\overline{FB}=\overline{F'F}$.



Konstruktion: Man teilt $\overline{AC}$ im Verhältnis $\frac{1}{3}\sqrt{3}:1$ durch Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks über der Hypotenuse $\frac{2}{3}\overline{AC}$ mit der einen Kathete $\frac{1}{3}\overline{AC}$. Die zweite Kathete ist dann gerade $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,\overline{AC}$.

Durch den Teilpunkt D' wird je eine Parallele zu AB bzw. BC gezeichnet. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit BC bzw. AB seien D'' und F'. Der Mittelpunkt von $D'D''$ ist D, der von $F'B$ ist F. Der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch D mit AB ist E. Diese Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar, wenn A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

Die nach der Konstruktion gewonnenen Punkte E, F und D genügen stets den Bedingungen der Aufgabe, denn es gelten folgende Überlegungen:

Wegen $\overline{AD'}=\frac{1}{3}\sqrt{3}\,\overline{AC}$ und $F'D'$ parallel BC ist der Flächeninhalt des Dreiecks $AF'D'$ gleich dem dritten Teil des Flächeninhalts des Dreiecks ABC. Wegen der Kongruenz der Dreiecke $AF'D'$ und EFD trifft das auch für den Flächeninhalt des Dreiecks EFD zu. Damit ist der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ doppelt so groß wie der des Dreiecks EFD. Da D die Strecke $D'D''$ und F die Strecke $F'B$ halbiert und $F'D'$ gleich FD ist, ist der Flächeninhalt des Trapezes $FBCD$ halb so groß wie der des Trapezes $F'BCD'$, also gleich dem des Dreiecks EFD. Damit muß auch das Trapez $EDCA$ den gleichen Flächeninhalt besitzen, da die Summe der drei Teilflächen die Fläche des Dreiecks ABC ergeben muß.

H.-J. Vogel, Päd. Hochschule Potsdam

Lösungen

Lösungen zu „Aufgepaßt – nachgedacht – mitgemacht“ (Heft 5/71)

▲1▲

Anzahl der Würfel	kleinste Augenzahl	größte Augenzahl
2	$2\cdot 1=2$	$2\cdot 6=12$
3	$3\cdot 1=3$	$3\cdot 6=18$
4	$4\cdot 1=4$	$4\cdot 6=24$
n	$n\cdot 1=n$	$n\cdot 6=6n$

▲2▲ Die höchste Augenzahl eines Spielwürfels beträgt 6. Um mit genau einem Wurf die Gesamtaugenzahl 7 zu erreichen, muß man mindestens zwei Würfel verwenden. Dabei sind folgende Augenzahlenpaare möglich: (1;6), (2;5), (3;4). Es sind höchstens sieben Würfel benutzt worden, von denen jeder die Augenzahl 1 zeigte, denn $7\cdot 1=7$. Um mit genau einem Wurf die Gesamtaugenzahl 13 zu erreichen, muß man mindestens drei Würfel verwenden. Sie könnten folgende Augenzahlentripel zeigen: (1,6,6), (2,5,6), (3,4,6), (3,5,5), (4,4,5). Es können höchstens 13 Würfel benutzt werden, von denen jeder die Augenzahl 1 zeigt, denn $13\cdot 1=13$.

▲3▲ Petra (5); Klaus (1,1,1,1)
Petra (6); Klaus (1,1,1,1)
Petra (6); Klaus (1,1,1,2)

▲4▲ Sabine habe die Gesamtaugenzahl 12 erreicht, dann könnte Bärbel die Gesamtaugenzahl 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 oder 11 gewürfelt haben. Weitere Möglichkeiten wären folgende:

Sabine (11); Bärbel (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 oder 10)
Sabine (10); Bärbel (3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9)
Sabine (9); Bärbel (3, 4, 5, 6, 7 oder 8)
Sabine (8); Bärbel (3, 4, 5, 6 oder 7)
Sabine (7); Bärbel (3, 4, 5 oder 6)
Sabine (6); Bärbel (3, 4 oder 5)
Sabine (4); Bärbel (3)

Es gibt also $1+2+3+4+5+6+7+8+9$, das sind 45 verschiedene Möglichkeiten.

▲5▲

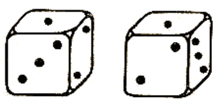
Augenzahlen der fünf Würfel	Gesamtaugenzahl
(1, 2, 3, 4, 5)	15
(1, 2, 3, 4, 6)	16
(1, 2, 3, 5, 6)	17
(1, 2, 4, 5, 6)	18
(1, 3, 4, 5, 6)	19
(2, 3, 4, 5, 6)	20

▲6▲ Um die Gesamtaugenzahl 6 zu erreichen, gibt es folgende drei Möglichkeiten: (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2). Um die Gesamtaugenzahl 11 zu erreichen, gibt es folgende sechs Möglichkeiten: (1, 4, 6), (1, 5, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 4).

Lösungen der Würfelspiele (Heft 5/71)

a) *Feststellung der verdeckten Summe nach der sichtbaren Zahl der Augen auf der oberen Fläche der Säule.* Die Summe der Augen auf den verdeckten Flächen, mit denen die Würfel aufeinanderliegen, und die Augenzahl auf der unteren Fläche ist minus der Zahl der Augen, die auf der oberen Fläche der Säule sichtbar ist (vgl. Bild S. 114). Wenn also die Augen addiert werden, die sich auf allen horizontalen Flächen der drei Würfel befinden, das heißt die Augen auf drei Paaren einander gegenüberliegenden Flächen, dann beträgt die Summe 21 ($3\cdot 7=21$). Aber die Summe soll nach der Bedingung der Aufgabe nicht die Zahl der Augen a auf der oberen Fläche enthalten. Wenn wir diese Zahl von 21 abziehen, erhalten wir die gesuchte Summe.

b) *Feststellung der verdeckten Summe nach zwei sichtbaren Seitenflächen der Säule.* Bei Beachtung des „Prinzips der Sieben“ sind zwei Reihenfolgen für die Anordnung der Augen auf den Flächen eines Spielwürfels möglich. Die eine Reihenfolge für die Anordnung ist die spiegelbildliche Wiedergabe der anderen. Legt einen Würfel mit der 1 nach oben auf den Tisch. Dann befindet sich die 2 auf einer Fläche und die 3 auf einer benachbarten Fläche rechts oder links davon. Mit anderen Worten folgen beim Blick von oben die drei Augen den zwei Augen entweder im Uhrzeigersinn (Bild a) oder entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn (Bild b). Nachdem die Reihenfolge der Anordnung für 1, 2 und 3 Punkte festliegt, ist die Anordnung der 4, 5 und 6 Punkte auf den übrigen Würfelflächen eindeutig nach dem „Prinzip der Sieben“ bestimmbar. Wenn wir wissen, wie die Punkte auf den Seiten des Würfels zueinander geordnet sind und das „Prinzip der Sieben“ kennen, genügt es, wenn wir zwei beliebige benachbarte Seitenflächen des Würfels sehen, um die Zahl der Augen auf der oberen und dann auch auf der unteren Fläche festzustellen.



a *b*

Zum Beispiel sehen wir auf dem unteren Würfel S. 114, Bild 1 auf einer Fläche 3 Punkte und auf der rechts benachbarten 5 Punkte. Folglich müssen auf der benachbarten Fläche nach links 2 Punkte sein, oben 1 Punkt und unten 6 Punkte (wenn es ein Würfel vom Typ b ist). Auf dem mittleren Würfel hat eine Seitenfläche 6 Augen, folglich die abgewandte 1 Auge, die rechte hat 3, folglich die obere 2 und die untere 5 Augen. Zum fehlerlosen Erraten der Augen auf den verdeckten Flächen nach der gezeigten Methode ist freilich angespannte Aufmerksamkeit und praktische Übung erforderlich.

Da die Summe der Augen auf zwei einander gegenüberliegenden Flächen eines jeden Spielwürfels immer gleich 7 ist, sind die drei Ziffern, die der zuerst aufgeschriebenen dreistelligen Zahl angehängt werden, Ergänzungen zu 7. Wenn wir die anfangs aufgeschriebene Zahl mit A bezeichnen, dann ist die hinzugesetzte dreistellige Zahl $777-A$ und die ganze sechsstellige Zahl $1000\,A+(777-A)$ oder $999\,A+777=111\ (9\,A+7)$. Wie man sieht, ist die Zahl durch 111 teilbar. Man erhält $9\,A+7$. Diese Zahl wird angesagt. Wenn wir von ihr 7 abziehen und die Differenz durch 9 teilen, dann erhalten wir die ursprüngliche Zahl A.

(aus: Kordemski: köpfchen, köpfchen)

Lösung zur Aufgabe von NPT Prof. Dr. Hans Reichardt

▲758▲ Der Flächeninhalt der nach dem Herausschneiden verbleibenden Figur beträgt

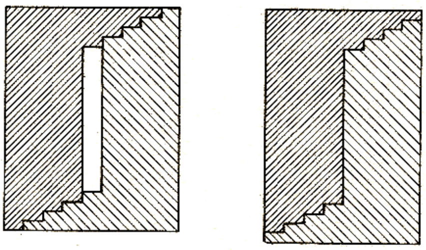
$$A=(9\cdot 12-1\cdot 8)\,\text{m}^2=100\,\text{m}^2$$

und ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks, das nach dem Zusammensetzen der Teile entstehen soll.

Da nur zwei Schnitte zulässig sind, liegt es nahe, den ersten Schnitt von der unteren Teppichkante bis zu dem herausgeschnittenen Teil und den zweiten Schnitt von dem herausgeschnittenen Teil bis zur oberen Kante so zu führen, daß beim Zusammensetzen der Teile der herausgeschnittene Teil bedeckt wird. Dann hat eine Seite des neu entstehenden Rechtecks die Länge 8 m und wegen

$$A=100\,\text{m}^2=8\cdot 12{,}5\,\text{m}^2$$

die andere Seite die Länge 12,5 m.



1 2

Aus diesem Grunde liegt es nahe, die beiden Schnitte treppenförmig zu führen, wie das aus dem Bild 1 zu erkennen ist, in der die durch die Schnitte entstandenen Teilfiguren verschieden schraffiert sind. Verschiebt man jetzt die rechte Teilfigur um $\frac{1}{2}$ m nach unten und um 1 m nach links, so erhält man durch das Zusammensetzen beider Teilfiguren ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 m und 12,5 m, womit die Aufgabe gelöst ist (vgl. Bild 2).

Druckfehlerteufel

Dipl.-Ing. Dr. M. Skalicky stellt fest: In Heft 2/71, S. 37 muß es in ▲1▲ richtig heißen: $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ und nicht $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

In 2/71, S. 27...29 stellt er eine verblüffende Formel auf: Wenn

v Fluchtgeschwindigkeit von der Erde,

D Durchmesser der Erde,

dann ist $\frac{v^2}{D} = \frac{1\text{ kp}}{1\text{ kg}}$.

■ *Karin Müller* und *Wolfgang Riedel* stellten fest, daß es in 2/71, S. 45 Bezirksolympiade Kl. 11/12, Aufgabe 6 richtig heißen muß:

$$-\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}}.$$

Schwieriges Problem

Zu dem von uns gebotenen Problem in Heft 6/70, Seite 139, sandte uns Prof. *M. Benjamin* eine Lösung:

„Nachstehend der Versuch einer vollständigen Lösung.

Wir wollen zunächst nur solche Lösungen betrachten, die sich nicht nur durch die Reihenfolge der Ziffern unterscheiden (wesentlich verschiedene Lösungen). Es sei also etwa $A<B<C<D<E$. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt ferner, daß ein Zehnerübertrag bei der Addition nicht erfolgen kann; ferner kann keine Ziffer gleich Null sein. (Denn wenn etwa $A=0$, so $A+E=E=F$ entgegen der Bedingung, daß $E \neq F$).

Die Lösungen müssen dann folgenden Bedingungen genügen: $A+E=B+D=2C=F$; A, B, C, D, E, F natürliche Zahlen und kleiner als 10 und paarweise verschieden.

Eine Lösung liegt also dann vor, wenn sich eine gerade Zahl auf zwei verschiedene Arten als Summe zweier verschiedener Zahlen darstellen läßt. Das ist nur für $F=6$ und $F=8$ möglich (für $F=4$ gibt es nur eine Darstellung, bei der ein Summand Null ist). Wir erhalten die nachfolgenden Lösungen:

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	2	3	4	5	6
1	2	4	6	7	8
1	3	4	5	7	8
2	3	4	5	6	8

Aus diesen wesentlich unterschiedenen Lösungen ergeben sich durch Umstellung der Ziffern weitere. Dabei ist zu berücksichtigen:

1. Die Ziffer ‚C‘ kann ihren Platz nicht ändern.

2. Die vier anderen Ziffern der Summanden bilden zwei Paare (A,E) und (B,D), die jeweils symmetrisch zu ‚C‘ in der Darstellung der Zahl stehen.

Infolgedessen sind zu jeder Ziffernfolge 8 Zahlen möglich, die sich nur durch die Reihenfolge der Ziffern unterscheiden:

A B C D E	*D A C E B*
A D C B E	*D E C A B*
B A C E D	*E B C D A*
B E C A D	*E D C B A*

Insgesamt gibt es somit 32 verschiedene Lösungen des ‚schwierigen Problems‘. Werten wir solche Lösungen als gleich, bei denen nur die Reihenfolge der beiden Summanden vertauscht ist, so haben wir 16 verschiedene Lösungen.“

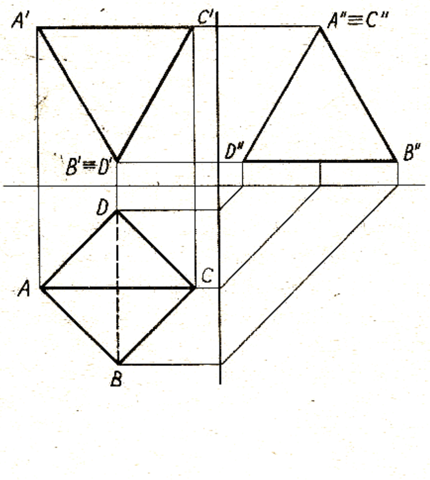
Magisches Quadrat

In Heft 1/71 boten wir auf S. 5 24 magische Quadrate. Es gibt noch weitere, die wir aus Platzgründen nicht veröffentlichen konnten. *Siegrun Kühn* aus Putzkau war pfiffig und sandte uns weitere Vorschläge.

▲ 675 Zu dieser Aufgabe sandte uns *W. Burmeister* die Lösung (Heft 2/71, S. 36):
x sei die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Wir sehen, daß $x+1$ ohne Rest durch $a_1, a_2, \ldots, a_n$ teilbar ist; $x+1$ ist ein gemeinsames Vielfaches dieser n Zahlen. Nun soll x möglichst klein sein, dann ist $x+1$ das kleinste gemeinsame Vielfache der gegebenen Zahlen; wir bezeichnen es durch eckige Klammern.
Antwort: Die gesuchte Zahl ist das kleinste gemeinsame Vielfache der gegebenen Zahlen; vermindert um 1:
$x=[a_1, a_2, \ldots, a_n]-1$.

8 ▲ 692 Aus (1) folgt $c-b=q^2$ und $c+b=p^2$, und (2) ergibt $c-b=m^2+n^2-2mn=(m-n)^2$, $c+b=m^2+n^2+2mn=(m+n)^2$. Es folgt $q^2=(m-n)^2$ und $p^2=(m+n)^2$, und daraus wegen $p>q>0$ und $m>n>0$: $p=m+n$, $q=m-n$.
Durch Auflösen nach m und n erhält man: $m=\frac{p+q}{2}$, $n=\frac{p-q}{2}$. Aus der Teilerfremdheit von p und q folgt dabei die von m und n, und umgekehrt; denn hätten p und q einen gemeinsamen Teiler >2, so hätten m und n den gleichen gemeinsamen Teiler, hätten m und n einen gemeinsamen Teiler >1, so auch p und q. Sind p und q beide ungerade, so sind sowohl $p+q$ als auch $p-q$ gerade und genau eine der beiden durch 4 teilbar, von m und n also eine gerade und die andere ungerade. Sind von m und n eine gerade und die andere ungerade, so sind sowohl p als auch q ungerade.

W 7 ■ 666 Der Abbildung ist folgendes zu entnehmen: Ein regelmäßiges Tetraeder erzeugt einen quadratischen Grundriß, wenn zwei nicht in einer Ecke zusammenstoßende Kanten parallel zur Grundrißebene liegen. Zur Erhöhung der Anschaulichkeit wurde die senkrechte Parallelprojektion im Dreitafelverfahren gewählt.



8 ▲ 667 Wir formen zunächst den Term auf der linken Seite der Ungleichung um und erhalten

$$\frac{b}{b-a}+\frac{a+b}{a}-\frac{a}{b-a}+\frac{a}{b}$$
$$=\frac{b-a}{b-a}+\frac{a}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=2+\frac{a^2+b^2}{ab}. \qquad (1)$$

Nun gilt für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a \neq b$

$$\frac{(a-b)^2}{ab}>0, \text{ also}$$
$$\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}-2>0,$$

mithin

$$\frac{a^2+b^2}{ab}>2. \text{ Daraus folgt} \qquad (2)$$
$$2+\frac{a^2+b^2}{ab}>4, \text{ also wegen (1)}$$
$$\frac{b}{b-a}+\frac{a+b}{a}-\frac{a}{b-a}+\frac{a}{b}>4, \text{ w.z.b.w.}$$

W 8 ■ 668 Wegen (6) hat Peter mindestens das Zeichendreieck und das Lineal. Da Peter das Lineal besitzt, hat wegen (4) Rita mindestens den Radiergummi. Laut (2) hat Rainer mindestens den Zirkel. Nach (1) muß Rainer mindestens noch den Bleistift besitzen. Noch nicht erkannt ist, wer Rechenstab und Kurvenschablone hat. Da jeder Schüler mindestens einen der angegebenen Gegenstände haben muß, sind Rechenstab und Kurvenschablone in den Händen von Lutz und Martina. Da wegen (2) Lutz den Rechenstab nicht hat, hat diesen Martina. Lutz hat also die Kurvenschablone.

Bei der gefundenen Verteilung sind auch die Aussagen (5) und (3) wahr. Diese wurden jedoch zur Ermittlung der Verteilung nicht herangezogen. Wenn also die Aussagen (1) bis (5) wahr sind, so besitzt Lutz die Kurvenschablone, Martina den Rechenstab, Peter das Zeichendreieck und das Lineal, Rainer den Zirkel und den Bleistift, Rita den Radiergummi.

W 8 ■ 669 Angenommen, das geordnete Paar (x,y) ganzer Zahlen entspricht den Bedingungen der Aufgabe. Dann gilt

$$x<3; \qquad (1)$$
$$x+y>2; \qquad (2)$$
$$x-y>0, \text{ also } y<x. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt
$2<x+y<x+x=2x$, also $2x>2$, d.h., $x>1$. (4)

Wegen (1) und (4) gilt also
$1<x<3$ und, da x eine ganze Zahl ist, $x=2$. (5)

Aus (2) folgt daher
$2+y>2$, also $y>0$.

Andererseits gilt wegen (3) und (5)
$y<2$, also ist $y=1$. (6)

Wir erhalten also genau ein geordnetes Paar (2,1) ganzer Zahlen und überzeugen uns davon, daß für $x=2$, $y=1$ die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind.

Bemerkung: Wir können diese Aufgabe auch durch die folgende Überlegung lösen:

Es kann nicht $x \leqq 1$ gelten; denn dann wäre wegen (3) $y \leqq 0$, also $x+y \leqq 1$, was der Bedingung (2) widerspricht. Daher gilt $x>1$ und außerdem wegen (1) $x<3$, also $x=2$. Ferner folgt wieder wie oben aus (2) $y>0$, also wegen (3) $y=1$.

9 ▲ 670 Angenommen, x sei eine Lösung der Gleichung

$$\log_4(\log_3(\log_2 x)) = 0.$$

Dann gilt, weil die Gleichung $\log_4 z=0$ nur die Lösung $z=1$ hat,

$$\log_3(\log_2 x) = 1.$$

Nun hat die Gleichung $\log_3 t=1$ nur die Lösung $t=3$, daher gilt

$$\log_2 x=3.$$

Daraus folgt $2^3=x$, also $x=8$.

Die gegebene Gleichung hat also genau eine Lösung, nämlich $x=8$.

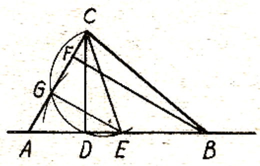
Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß $x=8$ tatsächlich eine Lösung der gegebenen Gleichung ist. Wir erhalten nämlich

$$\log_4(\log_3(\log_2 8)) = \log_4(\log_3 3) = \log_4 1 = 0.$$

W 9 ■ 671 a) Es sei ABC das gesuchte Dreieck mit $\overline{CD}=h_c$, $\overline{CE}=s_c$ und $\overline{BF}=h_b$ (vgl. die Abb.). Ferner möge die Parallele durch E zu $\overline{BF}$ die Seite $\overline{AC}$ in G schneiden.

Dann gilt nach dem Strahlensatz, da E der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ ist, $\overline{EG}:\overline{BF}=1:2$, also $\overline{EG}=\frac{\overline{BF}}{2}=\frac{h_b}{2}$.

Da $\sphericalangle CGE=90°$, liegt der Punkt G auf dem Thaleskreis um $\overline{CE}$. Andererseits liegt G auf dem Kreis um E mit dem Radius $\frac{h_b}{2}$. Nach dieser Überlegung läßt sich das Dreieck ABC leicht konstruieren. Wir zeichnen $\overline{CD}=h_c$ und errichten in D auf $\overline{CD}$ die Senkrechte, die den Kreis um C mit dem Radius s_c in dem Punkt E schneidet. (Ist $s_c>h_c$, so erhalten wir noch einen zweiten Schnittpunkt E', der in der Abbildung aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet ist.)



Dann zeichnen wir über $\overline{CE}$ als Durchmesser den Halbkreis, der in derselben Halbebene bezüglich CE wie der Punkt D liegt (bzw. den Halbkreis über $\overline{CE'}$ als Durchmesser, der in der anderen Halbebene bezüglich CE' wie der Punkt D liegt).

Den Punkt G (bzw. G') erhalten wir nun als Schnittpunkt dieses Halbkreises mit dem Kreis um E (bzw. E') mit dem Radius $\frac{h_b}{2}$.

Wir verbinden C mit G (bzw. G') und erhalten den Schnittpunkt A (bzw. A') dieser Verbindungsgeraden mit der Geraden DE (bzw. mit DE').

Wir verlängern $\overline{AE}$ über E hinaus (bzw. $\overline{AE'}$ über E' hinaus) um sich selbst und erhalten den Punkt B (bzw. B') und damit das gesuchte Dreieck ABC (bzw. $A'B'C$). Aus dieser Konstruktion ersehen wir, daß wir im Falle $s_c > h_c$ genau zwei Dreiecke erhalten, die den gegebenen Bedingungen entsprechen. Im Falle $s_c=h_c$ erhalten wir jedoch nur ein (gleichschenkliges) Dreieck, das den gegebenen Bedingungen entspricht.

b) Aus der Konstruktion haben wir bereits ersehen, daß die Bedingung $s_c \geqq h_c$ erfüllt sein muß.

Ferner muß die Bedingung $\frac{h_b}{2} \leqq s_c$ erfüllt sein, weil sonst der Kreis um E mit dem Radius $\frac{h_b}{2}$ den Halbkreis über $\overline{CE}$ nicht schneiden würde. Sind andererseits diese beiden Bedingungen erfüllt, so ist das Dreieck ABC auch konstruierbar.

W 9 ■ 672 Es sei das Zahlentripel (x, y, z) eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems; dann gilt

$$x+y+z = 232 \tag{1}$$

und, wie wir durch Multiplikation der zweiten Gleichung mit 12 erhalten,

$$12x+6y+6z=4x+12y+4z= =3x+3y+12z. \tag{2}$$

Wir könnten jetzt aus der Gleichung (1) $z=232-x-y$ ermitteln und diesen Wert in (2) einsetzen. Wir würden dann zwei Gleichungen mit den Variablen x und y erhalten, die wir nach einer der üblichen Methoden lösen können. Dieses Verfahren ist aber etwas umständlich, und der folgende Weg führt schneller zum Ziel:

Subtrahieren wir in (2) jeweils die Summen von $12x+12y+12z$, so erhalten wir

$$6y+6z=8x+8z=9x+9y,$$

$$6(y+z)=8(x+z)=9(x+y)=k, \tag{3}$$

wobei wir zur Vereinfachung $9(x+y)=k$ gesetzt haben.

Daher gilt

$$y+z=\frac{k}{6}, \tag{4}$$

$$x+z=\frac{k}{8}, \tag{5}$$

$$x+y=\frac{k}{9}. \tag{6}$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt durch Addition der Terme auf den linken bzw. rechten Seiten

$2(x+y+z)=\frac{k}{6}+\frac{k}{8}+\frac{k}{9}=\frac{29k}{72}$. Wegen $x+y+z=232$ erhalten wir hieraus

$2 \cdot 232=\frac{29}{72}k$, also

$$k=\frac{2 \cdot 232 \cdot 72}{29}=1152. \tag{7}$$

Wir erhalten daher wegen (4), (5), (6) und (7)

$$x=(x+y+z)-(y+z)=232-\frac{k}{6}=232-192 =40, \tag{8}$$

$$y=(x+y+z)-(x+z)=232-\frac{k}{8}=232-144 =88, \tag{9}$$

$$z=(x+y+z)-(x+y)=232-\frac{k}{9}=232-128 =104. \tag{10}$$

Wenn also das gegebene Gleichungssystem überhaupt eine Lösung hat, so gibt es wegen (8), (9) und (10) genau eine Lösung, nämlich

$$x=40,\ y=88,\ z=104.$$

Durch Probe überzeugen wir uns davon, daß das tatsächlich Lösungen des gegebenen Gleichungssystems sind. Wir erhalten nämlich durch Einsetzen dieser Werte in (1)

$40+88+104=232$ und in (2)

$$\frac{2 \cdot 40+88+104}{2}=\frac{40+3 \cdot 88+104}{3} =\frac{40+88+4 \cdot 104}{4},$$ also $136=136=136$,

das sind in beiden Fällen wahre Aussagen.

W 10/12 ■ 673 Es sei x eine natürliche Zahl, für die die gegebene Gleichung erfüllt ist. Dann gilt

$$4 \leqq \frac{x+2}{45-x} < 5. \text{ Also gilt} \tag{1}$$

$$x < 45, \tag{2}$$

da sonst diese fortlaufende Ungleichung nicht erfüllt wäre. Weiter folgt aus (1) wegen $45-x>0$

$$x+2 \geqq 4(45-x),$$

$$x+2 \geqq 180-4x,$$

$$5x \geqq 178,$$

$$x \geqq \frac{178}{5}=35\frac{3}{5}. \tag{3}$$

Andererseits folgt aus (1)

$$x+2 < 5(45-x),$$

$$x+2 < 225-5x,$$

$$6x < 223,$$

$$x < \frac{223}{6}=37\frac{1}{6}. \tag{4}$$

Die Ungleichungen (3) und (4) und daher auch die fortlaufende Ungleichung (1) sind also für natürliche Zahlen x nur dann erfüllt, wenn $x=36$ oder $x=37$ ist.

Die gegebene Gleichung hat daher nur die Lösungen $x=36$ und $x=37$.

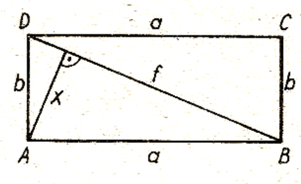
W 10/12 ■ 674 Es sei f die Länge der Diagonalen $\overline{BD}$ des Rechtecks $ABCD$ (vgl. die Abb.). Dann gilt für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks ABD einerseits

$A_1=\frac{fx}{2}$ und andererseits

$A_1=\frac{ab}{2}$. Daraus folgt

$\frac{fx}{2}=\frac{ab}{2}$, also

$$x=\frac{ab}{f}.$$



Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras $f=\sqrt{a^2+b^2}$, daraus folgt

$$x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

W 8 ■ 668 *Uta* und *Rainer Gutsche* aus Herzberg schrieben uns, daß sie solche Aufgaben gern lösen. Sie sind bei der Lösung des Problems wie folgt vorangegangen: „Zuerst haben wir die Aussagen 1 bis 6 durch verschiedene Symbole in der Tabelle dargestellt. Dann haben wir bei Peter, Rainer und Rita

Spalte	a	b	c	d	e	f	g
Dinge / Personen	Bleistift	Lineal	Radiergummi	Kurvenschabl.	Rechenstab	Dreieck	Zirkel
Lutz	⬡	⬡	⬡	◬	$\boxed{2}$	⬡	⬡
Martina	⬡	⬡	⬡	⬡	◬	$\boxed{3,6}$	⬡
Peter	⬡	⑥	⬡	⬡	⬡	$\boxed{6}$	–
Rainer	$\boxed{1,2}$	–	–	–	–	–	$\boxed{1,2}$
Rita	⬡	⬡	$\boxed{4}$	⬡	⬡	⬡	⬡

gestrichen, was nicht mehr gelten kann. In den Spalten *a, b, c, f, g* konnten wir danach auch streichen (aber bei *d* und *e* nicht). Bei *e* war nur noch Martina frei, und danach bliebe nur noch für Lutz die Schablone übrig. In der Tabelle kennzeichneten wir außerdem gleich die Nummern der Aussagen."

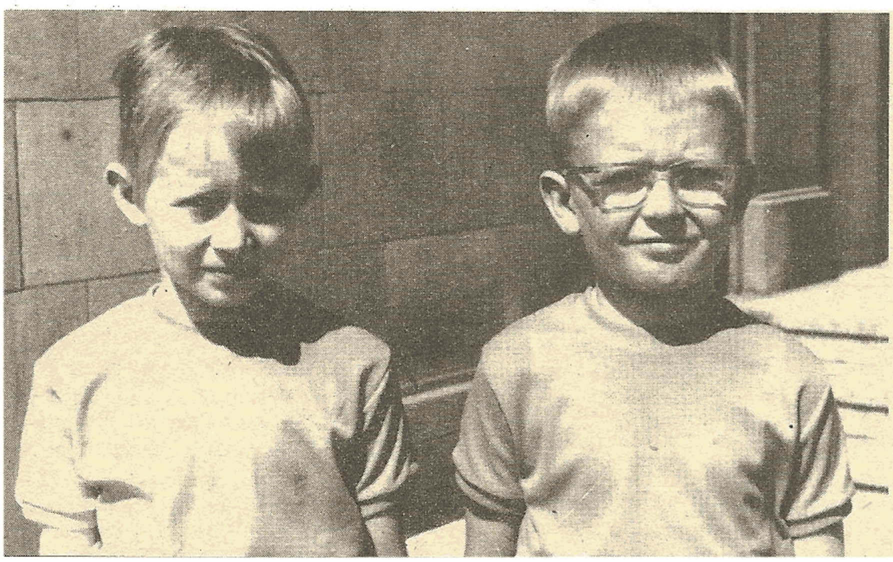
① Der Kreis markiert den Gegenstand, den die Person besitzt. (Die Nummern sind die Aussagenummern)

$\boxed{4}$ Das Quadrat bezeichnet den Gegenstand, den die Person nach der Aussage nicht besitzt.

◬ Das Dreieck mit dem Punkt markiert den Gegenstand, den die Person nur besitzen kann.

⬡ Die kleinen Sechsecke geben die Fälle an, die ausscheiden. Lutz besitzt die Kurvenschablone, Martina den Rechenstab, Peter das Lineal und das Dreieck, Rainer den Bleistift und den Zirkel, Rita den Radiergummi.

Uta Gutsche, Kl. 3c Rainer Gutsche, Kl. 4a



Junge Mathematiker und ihre „Ordografie"

Ja, liebe Leser und Löser unserer interessanten Zeitschrift *alpha*, um die Rechtschreibung geht es hier! Seit Jahren leite ich AGs in Mathematik. Immer höher steigen die kleinen Mathematiktalente auf der Stufenleiter der Erkenntnisse, doch an einem Punkt muß ich oft trotz elegantester Beweisführungen, trotz Meisterung der kniffligsten Fallunterscheidungen, trotz zähen Ringens nach dem besten Lösungsweg die Hände über dem Kopf zusammenschlagen – das ist bei den Fragen der Rechtschreibung!

Nun gut, zugegeben, da gibt es schon einige schwierige Klippen, wenn ich z. B. an *Hypotenuse, Hypothese, Ellipse, Hyperbel, Polygon* usw. denke. Aber das ist noch gar nichts gegenüber den Worten des täglichen Gebrauchs. Eine kleine Blütenlese will ich mitteilen, die Euch zum Nachdenken anregen soll: *Kravör (Graveur), Producktionsleiter, Razelisierung* und aus den Lösungen des *alpha*- Wettbewerbs: *Beweiß, Kurfenschapplone, quatratisch, Priemfaktoren, Difision, Haubtnenner, Umpfang, Vormell (Formel), Etasche, Minnimum* ...

Alle Originale sind bei mir einzusehen! Keines erfunden! Ob Ihr nachdenkt? Fühlt sich jemand getroffen? Also macht's besser! Dies wünscht Euch in der Hoffnung, daß in Zukunft den 40 Punkten bei der Olympiade nicht 40 Rechtschreibungsfehler gegenüberstehen, die sich eingeschlichen haben,

Euer Hans-Karl Noßke,
Mathematikfachlehrer,
Leipzig

Lösungen zu alpha-heiter

Ein neues Knobelspiel

Würfel	vorhandene Farben			
1.	r	w	2	$2b$
2.	r	$2w$	$2g$	b
3.	$2r$	$2w$	g	b
4.	$3r$	w	g	b

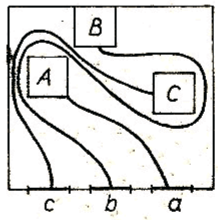
$r \hat{=}$ rot $w \hat{=}$ weiß $g \hat{=}$ grün $b \hat{=}$ blau

	1.	2.	3.	4.
vorn	w	g	b	r
oben	b	r	g	w
hinten	b	w	r	g
unten	r	g	w	b
rechte bzw. linke Seite	$g \mid g$	$w \mid b$	$r \mid w$	$r \mid r$

Name mit sechs Buchstaben

(*a*) 56; (*b*) 50; (*c*) 24; (*d*) 36; (*e*) 42; (*f*) 32 – Berlin

Straßenbauer gesucht



Silbenrätsel

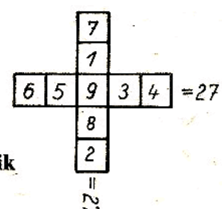
1. Dreieck
2. Abakus
3. Radizieren
4. Skala
5. Tabelle
6. Exponent
7. Logik
8. Läufer
9. Ellipse
10. Nullstelle
11. Differenz
12. Einheitskreis
13. Gerade
14. Epsilon
15. orthogonal
16. Monom
17. Element
18. Tangente
19. Robotron
20. Ikosaeder
21. Einer

Lösungswort: Darstellende Geometrie

Aus den Buchstaben

1	**A**	U	SS	E	N	W	I	N	K	E	L
2	A	**L**	G	O	R	I	T	H	M	U	S
3	D	O	**P**	P	E	L	B	R	U	C	H
4	S	A	C	**H**	A	U	F	G	A	B	E
5	V	E	R	H	**A**	E	L	T	N	I	S
6	G	L	E	I	C	**H**	U	N	G	E	N
7	D	U	R	C	H	M	**E**	S	S	E	R
8	M	I	T	T	E	L	L	**I**	N	I	E
9	K	O	O	R	D	I	N	A	**T**	E	N
10	N	E	B	E	N	W	I	N	K	**E**	L
11	H	A	U	P	T	N	E	N	N	E	**R**

Summenkreuz



Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} 52 \cdot 11 \\ \hline 52 \\ 52 \\ \hline 572 \end{array}$$

Aus der Arbeit der Arbeitsgemeinschaften

Bezirksklub Junger Mathematiker Gera

Gründung am 3. 1. 1971, Teilnehmer: talentierte Schüler der Klassen 8 bis 12.
Der BKJM wird vom Klubrat geleitet, dessen Vorsitzender ein Lehrer der Spezialschule des VEB *Carl Zeiß Jena* ist. Zum Klubrat gehören weiterhin ein Kreisfachberater Mathematik, ein pädagogischer Mitarbeiter des Bezirkskabinetts für außerunterrichtliche Tätigkeit, zwei Schüler der 8. bis 12. Klasse, ein wissenschaftlicher Mitarbeiter der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität, ein Mitglied der FDJ-Bezirksleitung und ein Student der Sektion Mathematik. Es wurden durchgeführt: 3 bis 4 Wochenendkurse, ein Winter- und ein Sommerlager. Vorwiegend Studenten betreuen die Mitglieder des BKJM.

Aus der Station Junger Techniker Leisnig berichtet

Es begann mit einer Wandzeitung, auf der eine Knobelei der Woche zu finden war. Hier ein Beispiel: Im Fotogeschäft erwirbt ein Kunde einen Fotoapparat und einen Film mit einem Hundertmarkschein. Da der Verkäufer nicht herausgeben kann, wechselt er die Banknote im benachbarten Textilkonsum ein. Mit dem Film und 97,– M Wechselgeld verläßt nun der Kunde das Geschäft. Kurze Zeit darauf bringt nun die Kassiererin aus dem Textilladen den Schein zurück, da es sich um eine Fälschung handele. Sie erhält ihn hier gegen einen echten Schein umgetauscht. Wie groß ist der Gesamtverlust der Fotoverkaufsstelle durch den betrügerischen Kunden?
Diese durchaus nicht neue Aufgabe und weitere lösten stets heftige Diskussionen aus. Das Bedürfnis, sich mit mathematischen Problemen zu befassen, stieg mit jeder veröffentlichten „Knobelei". Der zweite Schritt folgte: Monatlich wurde ein mathematischer Knobelnachmittag gestaltet.
Für die 5. Klassen begann eine Veranstaltung z. B. damit, daß drei Schüler nacheinander je eine beliebige 6-stellige Zahl untereinander an die Tafel schreiben durften. Der Lehrer nahm die Kreide und setzte rasch 3 weitere darunter. Nachdem ein Schüler die Addition der 6 Zahlen ausgeführt hatte, wurde ein anderer beauftragt, hinter einem Wandbild einen geschlossenen Briefumschlag hervorzuziehen und die darin enthaltene Notiz laut vorzulesen. Verblüfft hörten die Teilnehmer den Wert 2999997, die an der Tafel stehende Summe! Die Frage, „Wie ist das möglich?" führte zu den unwahrscheinlichsten Vermutungen. Nicht zuletzt traute man dem Lehrer die tollsten Zauberkünste zu! Die Erkenntnis jedoch, daß der Lehrer nur mit den drei hinzugefügten Zahlen jede darüberstehende zu 999999 ergänzt hatte und daher den Lösungszettel getrost vorbereiten konnte, bedurfte erst manchen Hinweises.
Material entnahmen wir aus „Köpfchen, Köpfchen", (Urania-Verlag) „Zahlenriesen" (B. G. Teubner), der Mathe-LVZ (Sonderausgabe der Leipziger Volkszeitung). Am meisten „Futter" bietet *alpha*.
Vor 7 Jahren entstand bei uns, unabhängig von dieser Massenarbeit, ein *Klub Junger Mathematiker*. Zweimal treffen sich die besten Schüler unseres Kreises (Klassenstufe 7/8).

Aus einem Brief des Leiters des Klubs G. Fischer, Leisnig (Bez. Leipzig)

Ein AG-Leiter berichtet

An der Peter-Göring-Oberschule Lucka (Kreis Altenburg) gibt es seit sieben Jahren Mathematikarbeitsgemeinschaften. Stets wurde in ihnen ein wichtiger Grundsatz verwirklicht: AG-Stunden sind keine Unterrichtsstunden! Es gibt vielleicht einen grundlegenden Unterschied zu anderen Arbeitsgemeinschaften, denn in unseren Arbeitsgemeinschaften wird in etwa der Hälfte aller Zusammenkünfte *Geschichte der Mathematik* betrieben.
Die Geschichte der Mathematik hat einen wesentlichen Anteil beim Erwerb eines wissenschaftlichen Weltbildes. Weiterhin wird durch die Geschichte der Mathematik deutlich, daß die Mathematik, wie sie heute gelehrt wird, das Ergebnis eines langen historischen Prozesses ist, der u. a. durch den Einfluß der ökonomischen und gesellschaftlichen Verhältnisse geprägt wurde. Welche Probleme werden besprochen? Die folgenden zwei Pläne geben Auskunft:
AG I (Klasse 9): Die Anfänge. Altägyptische Mathematik: Quellen, Rechentechnik, Einzelprobleme. Babylonische Mathematik: Schrift, Zahlensystem, Zahlentafeln, geometrische Probleme. Griechische Mathematik: Periodisierung, Logistik, Thales, pythagoreische Schule, Zusammenbruch der *arithmetica universalis,* Elemente des Euklid, Archimedes. Die Mathematik am Ausgang der Antike: Heron, Diophantos, Pappos, Verfall und Ursachen des Verfalls. (nach: Wußing, *Mathematik in der Antike*)
AG II (Klasse 10):
Zur Geschichte der Logarithmen. Geschichte der Trigonometrie: Anfänge, Archimedes, Trigonometrie und Astronomie, Regiomontanus, Gauß, Euler.
Interessierte Schüler fertigen Anschauungstafeln dazu an.

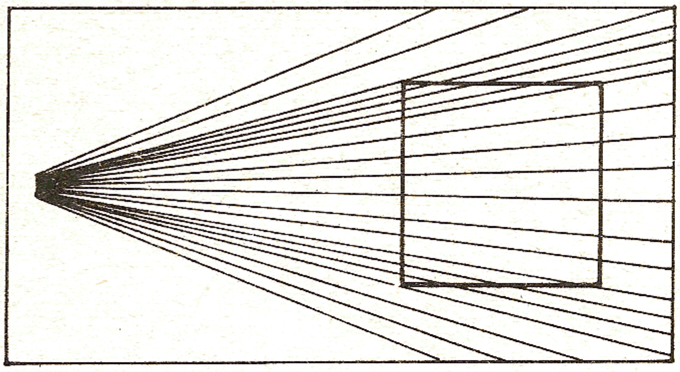
Aus einem Brief des Mathematikfachlehrers K.-H. Gentzsch

Ein Ingenieur berichtet über seine Arbeit

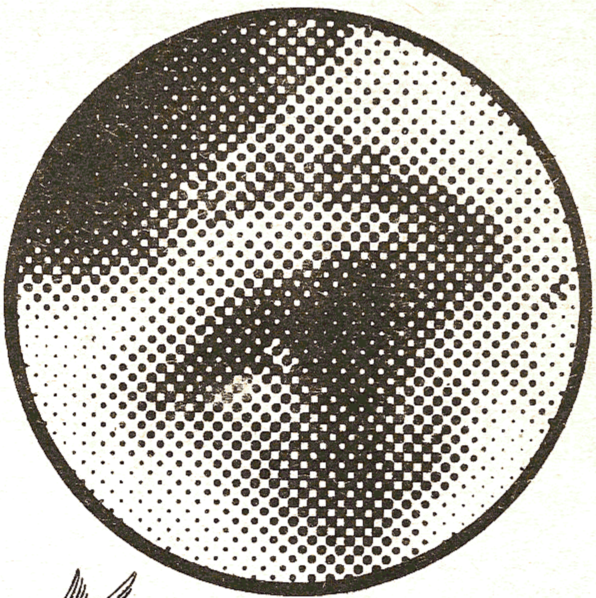
Zunächst möchte ich mich vorstellen: Ich bin Ingenieur und als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Hauptabteilung Metallurgie des Ernst-Thälmann-Werkes Magdeburg tätig.
Mit der Oberschule kam ich in Kontakt, als mein Sohn vor sieben Jahren in die erste Klasse kam. Seit dieser Zeit bin ich im Elternbeirat der Oskar-Linke-OS tätig. Vom ersten Schuljahr an hatte ich besonderes Interesse am Mathematikunterricht und aus der guten Zusammenarbeit mit den Mathematiklehrerinnen ergab sich die Gründung einer Arbeitsgemeinschaft. Ich begann im 2. Halbjahr des 5. Schuljahres. Wenn ich zurückblicke, so glaube ich, daß dieser Zeitpunkt besonders günstig ist. Ich konnte mit einer geschichtlichen Einführung beginnen, die Schüler behandelten gerade die Antike im Geschichtsunterricht. Diese Einführung, die das Wesen der Mathematik von den Bedürfnissen der Gesellschaft ableitet, machte allen viel Freude und hat dazu beigetragen, das Interesse der AG-Teilnehmer zu wecken, da sie auch durch Hinweise auf die Technik jener Zeit zum Nachdenken angeregt wurden. Überhaupt habe ich immer wieder auf die Wechselbeziehungen zur Gesellschaft hingewiesen. Jeder konnte erkennen, warum wir von einer Produktivkraft Mathematik sprechen.
Ich beziehe *alpha* seit ihrem Erscheinen. Zu 80 Prozent nutze ich die in ihr enthaltenen Aufgaben für unsere Arbeit. Nicht „schulmäßige Arbeit" brachte uns voran, sondern eine intensive Diskussion zu den gestellten Problemen. Zu besonderen Schwerpunkten der Arbeit überreichte ich den *Jungen Mathematikern* ausführliche Lösungshinweise (Ormig-Abzüge). Ein gemeinsam mit Eltern und Lehrern durchgeführter mathematischer Nachmittag fand großen Anklang. Ich mußte feststellen, daß die Schüler der Klassenstufen 5 und 6 mit ihrem Schulwissen die in *alpha* gestellten Aufgaben nur unter Anleitung lösen konnten. Es war für mich als Ingenieur oft nicht leicht, den Schülern entsprechend ihrer Ausbildung einen geeigneten Lösungsweg für gestellte Aufgaben zu bieten. *alpha* hat dabei gute Dienste geleistet. Unsere beliebte Schülerzeitschrift *alpha* sollte gerade hier Neuland beschreiten und auch für den AG-Leiter Hinweise für seine Arbeit geben, die sicher auch von den *Jungen Mathematikern* studiert werden. Ich möchte sagen, daß die AG-Arbeit in unserem hochentwickelten Industriestaat eine zwingende Notwendigkeit ist.

Ing. K. Lenz

Optische Täuschungen

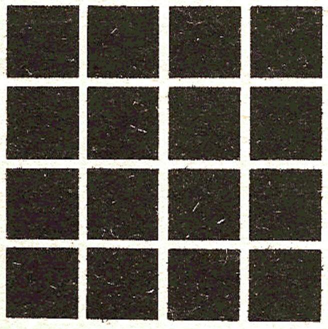


Quadratisch oder nicht?

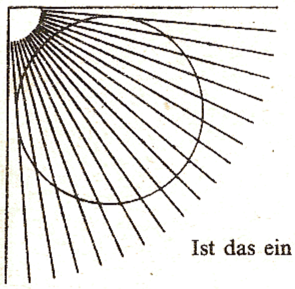


Betrachtet man das Sieb aus der Ferne, erkennt man leicht darauf ein ...

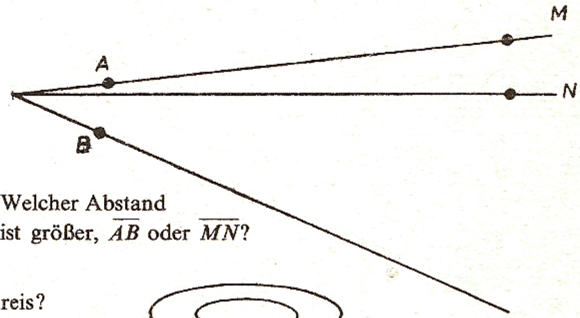
Von Schnabel zu Schnabel: Welche der beiden Strecken ist länger?



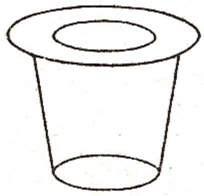
Wo sich die weißen Linien kreuzen, sieht das Auge graue Flecken, die es gar nicht gibt.



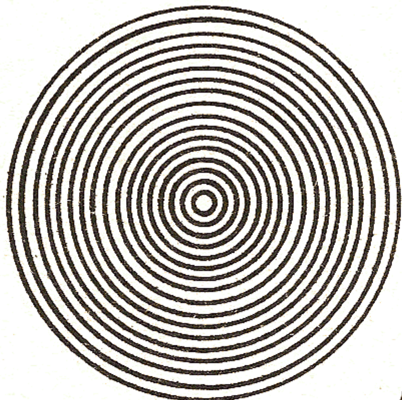
Ist das ein Kreis?



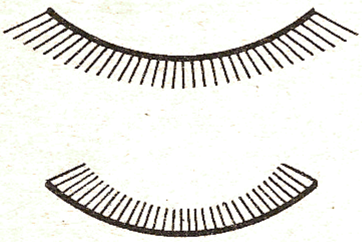
Welcher Abstand ist größer, $\overline{AB}$ oder $\overline{MN}$?



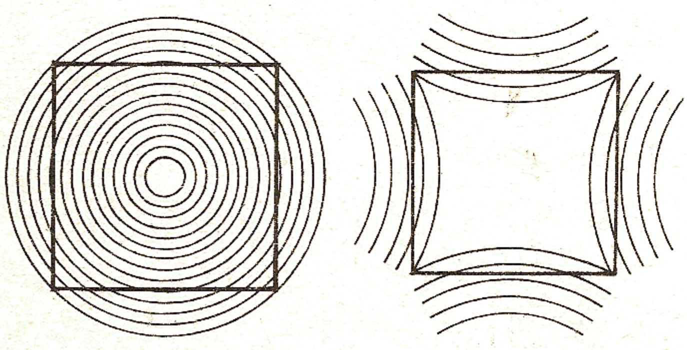
Welche Ellipse ist größer, die untere oder die innere oben?



Bewegungstäuschung: Wird die Figur bewegt, so scheint der Durchmesser zu rotieren.



Welcher Bogen ist länger, der untere oder der obere?



Ist das nun ein Quadrat oder nicht?

Welche Strecke ist länger: $\overline{AC}$ oder $\overline{AB}$?