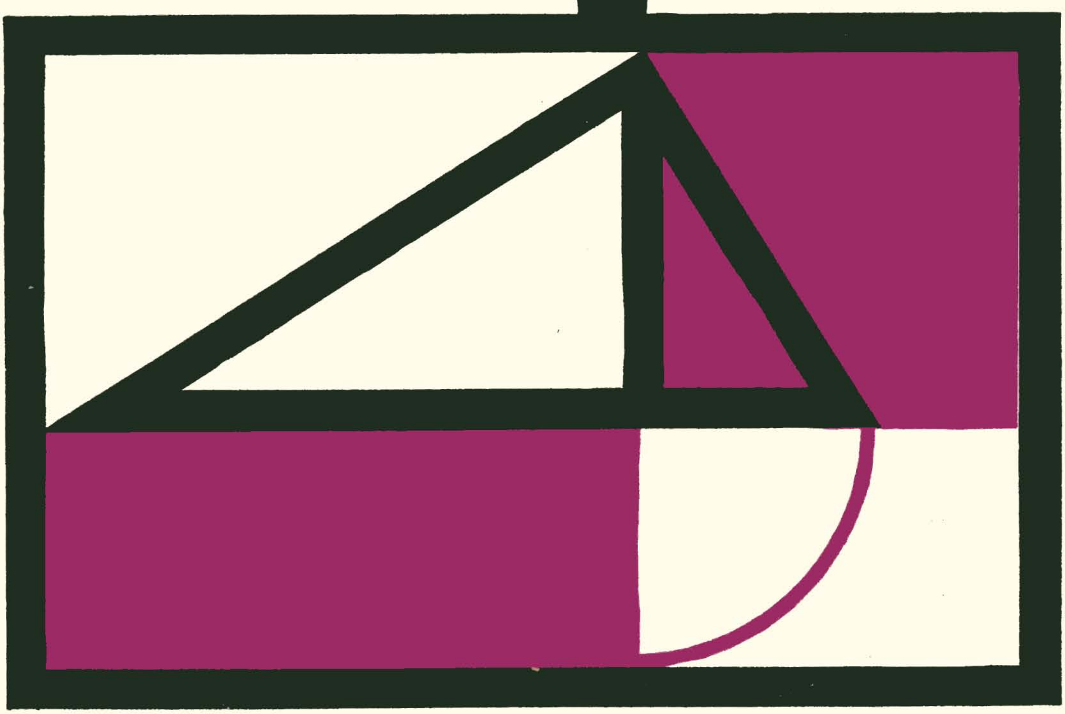
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

2. Jahrgang 1968
Preis 0,50
Index 31059

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968
Heft 6

Anschrift der Redaktion: Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags: Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden
Fotos: Junge Welt-Bild, Glomm, Berlin (S. 161); Archiv: TU Dresden, Inst. f. Maschinelle Rechentechnik, Literaturstelle (S. 166); Archiv: J. Frormann, Berlin (S. 172)
Vignetten: B. Gubitz, Leipzig (S. 180, 181); H.-J. Jordan, Lpzg.;
Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß: 23. Sept. 1968

Inhalt

* Bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

X. Internationale Mathematik-Olympiade

Bericht

An der X. Internationalen Mathematik-Olympiade in Moskau nahm auch aus der DDR eine Delegation von acht Schülern unter der Leitung von Herrn *Dr. Bausch* und Herrn *Oberstudienrat Titze* teil. Wir hatten uns in einem vierzehntägigen zentralen Lehrgang gründlich vorbereitet und konnten nun am 7. Juli mit einer IL-18 der Interflug von Berlin-Schönefeld nach Moskau fliegen. Fünf von uns besaßen bereits internationale Erfahrung, denn sie hatten schon an der IX. IMO in Jugoslawien erfolgreich teilgenommen. Natürlich hofften wir alle, daß es uns auf der Jubiläumsolympiade gelingen würde, unseren zweiten Platz von Cetinje zu verteidigen.
Auf dem Flughafen Scheremetjewo wurden wir von unserer netten Dolmetscherin *Alla* schon erwartet und in einer Fahrt durch das abendliche Moskau in unser Quartier, eine Internatsschule in der Nähe der Lomonossow-Universität, geführt. Bis zur Eröffnung der Olympiade blieben uns noch zwei Tage, für die unsere Gastgeber ein nettes Programm vorbereitet hatten. Wir besichtigten das Schloßmuseum von Kuskowo mit seiner schönen Parkanlage und genossen aus dem 25. Stockwerk der Moskauer Staatlichen Lomonossow-Universität den Blick auf das Häusermeer von Moskau, seine Neubauviertel und das Lenin-Stadion jenseits der Moskwa bis hin zum neuen Fernsehturm in Ostankino. Auch im Pionier-Palast waren wir zu Gast; er beeindruckte uns durch seine moderne Architektur.
Am Morgen des 10. Juli wurde die Olympiade von *Professor Markuschewitsch*, dem Vorsitzenden der Jury, eröffnet. Mannschaften aus 12 Ländern traten zum Wettbewerb an: aus Bulgarien, der CSSR, der DDR, England, Italien, Jugoslawien, der Mongolischen VR, Polen, Rumänien, Schweden, der UdSSR und Ungarn. Aus Österreich war ein Beobachter erschienen, um sich über den Verlauf der Olympiade zu unterrichten.
Die Klausuraufgaben des ersten Tages waren zu unserer Überraschung recht leicht zu bewältigen und bereiteten vor allem den Mannschaften aus der UdSSR, der DDR und Ungarn, die im Vorjahr die ersten drei Plätze belegt hatten, keine großen Schwierigkeiten. So mußte die Entscheidung durch die zweite Klausur fallen, die sich als etwas schwieriger erwies. Der Schwerpunkt lag auf der letzten Aufgabe, zu der mehrere originelle Lösungen gefunden wurden. Aber auch hiermit wurden wir gut fertig, und so konnten wir uns abends unbeschwert an den Darbietungen des Moskauer Staatszirkus erfreuen.
Drei Tage später entschied die Jury über die Verteilung der Preise und Diplome. Große Freude herrschte bei uns, als wir erfuhren, daß wir mit 304 von 320 möglichen Punkten das bisher beste Mannschaftsergebnis und damit den ersten Platz vor der UdSSR, Ungarn und England erkämpft hatten. In der Einzelwertung erhielten wir fünf erste und drei zweite Preise, so daß keiner von uns leer ausging. Besonders hat uns gefreut, daß wir unseren Sieg gerade auf der Jubiläumsolympiade feiern konnten. Daß es uns gelingen würde, sogar unsere Gastgeber, die schon jahrelang den ersten Platz behauptet hatten, zu schlagen, hatten wir kaum erwartet. Trotzdem glauben wir, daß unser Sieg kein Zufall war, sondern durch die gute Vorbereitung an unseren Schulen in mathematischen Zirkeln und Lehrgängen im Zuge des neuen sozialistischen Bildungssystems möglich wurde.
An den mathematischen Teil der Olympiade schlossen sich, wie schon in den letzten Jahren, Exkursionen durch das Gastgeberland an. So besuchten wir die Wohn- und Arbeitsräume Lenins im Moskauer Kreml mit seiner 20000 Bände umfassenden Bibliothek, das Dorf Leninskije Gorki, wo Lenin seine letzten Lebensjahre verbrachte, und das Lenin-Mausoleum auf dem Roten Platz. Besonders beeindruckten uns die historischen Bauten des Kreml, seine Türme und Mauern, Kathedralen und Paläste sowie die Rüstkammer mit ihren reichen Schätzen, die von der altrussischen handwerklichen Kunst zeugen. Ein weiterer Höhepunkt war der Besuch der

Tretjakow-Galerie, durch die uns unsere Betreuerin Alla mit großer Sachkenntnis führte. Natürlich durfte auch eine Besichtigung der Volkswirtschaftsausstellung nicht fehlen. Besonders interessierten uns hier die Pavillons Atomenergie und Kosmos.
Drei Tage verbrachten wir in Leningrad. Selbst der Dauerregen, der uns dort empfing, konnte unsere gute Stimmung nicht trüben. Unser Programm war ebenso reichhaltig wie in Moskau. Auf einer Stadtrundfahrt sahen wir den berühmten Panzerkreuzer *Aurora*, den Smolny, das Winterpalais und die Peter-Pauls-Festung. Ein besonderes Erlebnis war für uns alle der Besuch der Ermitage. Leider war die Zeit viel zu kurz, um diese weltberühmte Gemäldesammlung eingehend kennenzulernen. Das bekannte Leningrader Ballett erlebten wir in einer Aufführung von *Antonius und Kleopatra* des sowjetischen Komponisten *Lebedew*. Ein Ausflug führte uns nach Peterhof, wo *Peter I.* seine Sommerresidenz erbauen und mit einem wunderschönen Park umgeben ließ, der an die Ostsee grenzt. Die Rückfahrt mit einem Tragflügelboot *Raketa* machte uns viel Spaß. Im Pionierpalast wurden wir schon von sowjetischen Pionieren erwartet, mit denen wir einen frohen Nachmittag bei Spiel und Tanz verbrachten. Der Expreßzug *Roter Pfeil* brachte uns in $8\frac{1}{2}$-stündiger Fahrt nach Moskau zurück.
Am 18. Juli wurden im *Auditorium maximum* der Lomonossow-Universität die Preisträger der Olympiade geehrt. Es konnten 22 erste, 22 zweite und 20 dritte Preise vergeben werden. Einen Sonderpreis erhielt das einzige Mädchen unter 96 Teilnehmern, eine mongolische Schülerin, die die höchste Punktzahl ihrer Mannschaft erreicht hatte. Journalisten und Bildreporter interessierten sich besonders für uns als die siegreiche Mannschaft. Mit einem Festessen im Internat wurde die X. IMO offiziell beendet. Am nächsten Vormittag waren wir in der Botschaft der DDR zu Gast, und der Botschafter beglückwünschte uns zu unseren Erfolgen.
Auf dem Flugplatz verabschiedeten wir uns von unserer Betreuerin, mit der wir herzliche Freundschaft geschlossen hatten, und traten den Rückflug nach Berlin an.
Noch stand uns ein Höhepunkt unserer erlebnisreichen Tage bevor — ein Empfang, den das Ministerium für Volksbildung, der Zentralrat der FDJ und die Mathematische Gesellschaft der DDR für uns veranstalteten. Wir wurden mit der Artur-Becker-Medaille sowie mit Anerkennungsurkunden und wertvollen Geld- und Buchprämien ausgezeichnet. Wir alle haben in Moskau unser Bestes gegeben, haben viele Freundschaften geschlossen und unvergeßliche Eindrücke von der Sowjetunion gewonnen. Bald beginnt die dritte Stufe der VIII. Mathematik-Olympiade der DDR, und wir werden uns anstrengen, auch bei der XI. Internationalen Mathematik-Olympiade in Bukarest wieder dabei zu sein.

Eifrige Diskussion unter den Teilnehmern des Vorbereitungslagers zur X. IMO (Juni 1968, Pionierpark „Ernst Thälmann", Wuhlheide)

Lösungen zu den Aufgaben der X. IMO

1. Aufgabe

Es sei ΔABC ein solches Dreieck. Seine Seitenlängen seien $a = n - 1$, $b = n$ und $c = n + 1$, die gegenüberliegenden Winkel α, β und γ. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(n-1)^2 &= n^2 + (n+1)^2 \\ &\quad - 2n(n+1)\cos\alpha \\ n^2 &= (n+1)^2 + (n-1)^2 \\ &\quad - 2(n+1)(n-1)\cos\beta \\ (n+1)^2 &= (n-1)^2 + n^2 - \\ &\quad - 2(n-1)\, n \cos\gamma\end{aligned}$$

und damit

$$\cos\alpha = \frac{n+4}{2n+2}, \quad \cos\beta = \frac{n^2+2}{2n^2-2},$$
$$\cos\gamma = \frac{n-4}{2n-2}.$$

Es ist $\alpha < \beta < \gamma$, da der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt.
Ist einer der Winkel doppelt so groß wie der andere, so besteht einer der drei Fälle

$$\text{I. } \beta = 2\alpha, \text{ II. } \gamma = 2\beta, \text{ III. } \gamma = 2\alpha,$$

die einzeln untersucht werden.
I. $\beta = 2\alpha$
Dann ist $\cos\beta = 2\cos^2\alpha - 1$,

$$\frac{n^2+2}{2n^2-2} = \frac{2(n+4)^2}{4(n+1)^2} - 1$$

und nach Umformung:

$2n^3 - 4n^2 - 8n + 16 = 0$, $2(n-2)^2 (n+2) = 0$. Wegen $n > 0$ folgt $n = 2$.
Das Dreieck mit den Seiten $a = 1$, $b = 2$ und $c = 3$ ist jedoch zu einer Strecke entartet.
II. $\gamma = 2\beta$
Dann ist $\cos\gamma = 2\cos^2\beta - 1$,

$$\frac{n-4}{2n-2} = \frac{2(n^2+2)^2}{4(n^2-1)^2} - 1 \text{ und}$$
$2n^4 - 3n^3 - 13n^2 + 3n + 2 = 0$,
$(2n^2 - 3n - 11)(n^2 - 1) = 9$.
Durch Umformung folgt $[2(n-2)^2 + (5n - 19)](n^2 - 1) = 9$.
Für $n \geqq 4$ gilt:
$2(n-2)^2 \geqq 0, 5n - 19 \geqq 1, n^2 - 1 \geqq 15$,
also $(2n^2 - 3n - 11)(n^2 - 1) > 9$.
Für $n = 2$ und $n = 3$ gilt ebenfalls
$(2n^2 - 3n - 11)(n^2 - 1) \neq 9$,
d. h., im Bereich der natürlichen Zahlen gibt es keine Lösung.

III. $\gamma = 2\alpha$

Dann ist $\cos\gamma = 2\cos^2\alpha - 1$,
$$\frac{n-4}{2n-2} = \frac{2(n+4)^2}{4(n+1)^2} - 1$$
und $2n^3 - 7n^2 - 17n + 10 = 0$, $(2n^2 - 17)(2n - 7) = 99$.
Für $n > 5$ gilt:
$2n^2 - 17 > 33$, $2n - 7 > 3$, also $(2n^2 - 17)(2n - 7) > 99$.
Für $2 \leqq n < 5$ ist:
$|2n^2 - 17| < 33$, $|2n - 7| \leqq 3$, also $(2n^2 - 17)(2n - 7) < 99$.
Für $n = 5$ ist $(2n^2 - 17)(2n - 7) = 99$.
Nur das Dreieck mit den Seiten $a = 4$, $b = 5$ und $c = 6$ kommt als Lösung in Frage.
Es ist noch zu zeigen, daß dieses den Bedingungen der Aufgabe genügt.
Aus $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ und $\cos\gamma = \frac{1}{8}$ sowie
$\cos\gamma = \cos 2\alpha$ folgt, da α und γ Dreieckswinkel sind:
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \text{ und } \gamma = 2\alpha.$$
Ergebnis: Das Dreieck mit den Seitenlängen
$a = 4$, $b = 5$, $c = 6$
ist das einzige, das die geforderten Eigenschaften hat.

2. Aufgabe

Es sei x eine natürliche Zahl, die die Bedingung erfüllt, und n sei die Stellenzahl von x.
Dann ist $p(x) \leqq 9^n$, $x \geqq 10^{n-1}$.

I. Es sei $n = 1$:
Dann ist $p(x) = x$, $x^2 - 11x - 22 = 0$.
Die Wurzeln $x_{1/2} = \frac{11}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{209}$
sind nicht ganzzahlig.

II. Es sei $n = 2$:
Dann ist $x^2 - 10x - 22 = p(x) \leqq 81$.
Es folgt $x^2 - 10x + 25 \leqq 128$,
$|x - 5| \leqq \sqrt{128} < 12$, $10 \leqq x \leqq 16$.
Nun muß $p(x) + 47 = (x-5)^2$ eine Quadratzahl sein. Dieser Bedingung genügt nur die Zahl $x = 12$. Sie erfüllt auch die gegebene Gleichung.

III. Es sei $n > 2$:
Dann ist $0 < 10^{n-1} - 5 \leqq x - 5$,
$(10^{n-1} - 5)^2 \leqq (x-5)^2$.
Durch Subtraktion von 47 folgt:
$p(x) = x^2 - 10x - 22 \geqq 10^{2n-2} - 10^n - 22$.
Wegen $n > 2$ ist
$10^n \geqq 1000$, $10^{2n-2} - 2 \geqq 8$, also
$10^{2n-2} - 2 \cdot 10^n \geqq 8000$.
Damit ist $p(x) \geqq 10^{2n-2} - 10^n - 22$
$\geqq 10^n + 8000 - 22 > 10^n$.
Das widerspricht der Ungleichung $p(x) \leqq 9^n$.
Ergebnis: Nur die Zahl 12 ist Lösung.

3. Aufgabe

Für beliebige reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt
$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 \geqq 0,$$
und Gleichheit besteht nur für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
Es folgt $(n-1)\sum\limits_i x_i^2 - 2\sum\limits_{i<j} x_i x_j \geqq 0$,
$$n\sum_i x_i^2 \geqq \sum_i x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j = (\sum_i x_i)^2$$
$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geqq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 \quad (*)$$
Es sei nun $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ eine reelle Lösung von (1). Durch Addition aller n Gleichungen erhält man
$$a(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + nc = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$
$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} + \frac{b-1}{a}\,\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{c}{a} = 0.$$
Unter Benutzung von (*) folgt daraus
$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 + \frac{b-1}{a}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) + \frac{c}{a} \leqq 0$$
$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{b-1}{2a}\right)^2 \leqq \frac{(b-1)^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{\Delta}{4a^2}. \quad (**)$$
Gleichheit gilt in (**) wie in (*) nur für $x_1 = x_2 \ldots = x_n$.

I. Es sei $\Delta < 0$:
Dann folgt aus (**)
$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{b-1}{2a}\right)^2 < 0$ (Widerspruch). Damit gibt es für $\Delta < 0$ keine Lösung.

II. Es sei $\Delta = 0$;
Dann gilt in (**) notwendig Gleichheit:
$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{b-1}{2a}\right)^2 = 0$, es folgt
$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -\frac{b-1}{2a}.$$
Durch Einsetzen bestätigt man, daß dies eine Lösung ist. Damit gibt es für $\Delta = 0$ genau eine Lösung.

III. Es sei $\Delta > 0$: Durch Einsetzen zeigt man, daß die beiden n-Tupel

$$\left[-\frac{b-1+\sqrt{\Delta}}{2a}; \dots ; -\frac{b-1+\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \text{ und}$$

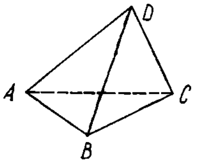
$$\left[-\frac{b-1-\sqrt{\Delta}}{2a}; \dots ; -\frac{b-1-\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$$

Lösungen von (1) sind.
Damit gibt es für $\Delta > 0$ mehr als eine Lösung.

4. Aufgabe

Es sei AB eine Kante, deren Länge nicht größer als die Länge der übrigen Kanten ist. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\overline{CD} < \overline{AC} + \overline{AD} \qquad \overline{CD} < \overline{BC} + \overline{BD}.$$



Daraus folgt $(\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{CD}) + (\overline{AD} + \overline{BD} - \overline{CD}) > 0$.
Mindestens einer der beiden Summanden ist positiv, es sei also o. B. d. A.

$\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{CD}$. Weiter ist (1)

$\overline{AC} < \overline{BC} + \overline{AB} \leqq \overline{BC} + \overline{CD}$

$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC} \leqq \overline{CD} + \overline{AC}$

$\overline{BC} + \overline{CD} > \overline{AC}$ (2)

$\overline{CD} + \overline{AC} > \overline{BC}$ (3)

Die Gültigkeit der Dreiecksungleichungen
$a + b > c \qquad b + c > a \qquad c + a > b$
ist notwendig und hinreichend für die Existenz eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c. Nach (1), (2), (3) läßt sich daher aus den drei von C ausgehenden Kanten ein Dreieck konstruieren.

5. Aufgabe

a) Es ist $f(x + 2a) = f[(x + a) + a]$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - [f(x+a)]^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} - \left(\frac{1}{4} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} + f(x) - [f(x)]^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + [f(x)]^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \left| f(x) - \frac{1}{2} \right|$$

Nun ist $f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x-a) - [f(x-a)]^2} \geqq \frac{1}{2}$, also $f(x + 2a) = f(x)$.

b) Beispiel:
Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)$ genügt für $a = 1$ der Funktionalgleichung, denn:

$$f(x+1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left|\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right|\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1 + \left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|}{2} \cdot \frac{1 - \left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)\,[1 - f(x)]},$$

$$f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$$

6. Aufgabe

Es sei $n = x_\alpha x_{\alpha-1} \dots x_1 x_0 = \sum_{i=0}^{\alpha} 2^i x_i$ mit
$x_i = 0$ oder $x_i = 1$
die Darstellung der Zahl n im Dualsystem.

Dann ist $\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = x_\alpha x_{\alpha-1} \dots x_{k+1} + x_k$ (*).

Beweis:

Fall I: $x_k = 0$,
$n = x_\alpha x_{\alpha-1} \dots x_{k+1} 0 x_{k-1} \dots x_1 x_0$
und damit $n + 2^k$
$= x_\alpha x_{\alpha-1} \dots x_{k+1} 1 x_{k-1} \dots x_1 x_0$.

Es folgt $\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] =$
$x_\alpha x_{\alpha-1} \dots x_{k+1} = x_\alpha x_{\alpha-1} \dots x_{k+1} + x_k$.

Fall II: $x_k = 1$,
$n = x_\alpha x_{\alpha-1} \dots x_{k+1} 1 x_{k-1} \dots x_1 x_0$
und damit $n - 2^k$
$= x_\alpha x_{\alpha-1} \dots x_{k+1} 0 x_{k-1} \dots x_1 x_0$.

Es folgt $\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n - 2^k}{2^{k+1}}\right] + 1$
$= x_\alpha x_{\alpha-1} \dots x_{k+1} + x_k$.

Unter Benutzung von (*) nimmt die Summe folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = x_\alpha x_{\alpha-1} \dots x_1 &+ x_0 \\ + x_\alpha \dots x_2 &+ x_1 \\ + x_\alpha \dots x_3 &+ x_2 \\ &\vdots \\ + x_\alpha &+ x_{\alpha-1} \\ &+ x_\alpha \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Stellenwerte der x_i folgt

$$\begin{aligned} S &= x_\alpha (2^{\alpha-1} + 2^{\alpha-2} + \dots + 2^0 + 1) \\ &\quad + x_{\alpha-1} (2^{\alpha-2} + \dots + 2^0 + 1) \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad + x_1 (2^0 + 1) + x_0 \\ &= 2^\alpha x_\alpha + 2^{\alpha-1} x_{\alpha-1} + \dots + 2^1 x_1 + x_0 \\ S &= n. \end{aligned}$$

Ergebnis: Die gesuchte Summe ist gleich n.

Wolfgang Burmeister
Preisträger der X. IMO (DDR-Mannschaft)

Weitere Lösungswege und Berichte findet der interessierte Leser in der Zeitschr. für Lehrer „Mathematik in der Schule“ 2/69, d. Red.

In der Sowjetunion erscheinen erstmalig

Die „Mathematischen Manuskripte" von Karl Marx

Unter den zahlreichen Publikationen, die zu Ehren des 150. Geburtstages von Karl Marx in der Sowjetuinon erscheinen, erweckt zweifellos die lang erwartete Veröffentlichung der „Mathematischen Manuskripte" von Marx im Moskauer Verlag Wissenschaft besonderes Interesse. Sie ist das Ergebnis einer mehr als ein Jahrzehnt währenden mühevollen und beharrlichen Forschungsarbeit des Instituts für Marxismus-Leninismus beim ZK der KPdSU. Marx' umfangreicher mathematischer Nachlaß bestätigt, daß Friedrich Engels in seiner Rede am Grabe von Marx durchaus mit Recht hervorhob, daß der große Wissenschaftler und Revolutionär selbst auf dem Gebiet der Mathematik selbständige Entdeckungen gemacht hat. Und mit gleichem Recht konnte Engels im Vorwort zum *Anti-Dühring* feststellen: „Marx und ich waren wohl ziemlich die einzigen, die aus der deutschen idealistischen Philosophie die bewußte Dialektik in die materialistische Auffassung der Natur und Geschichte hinübergerettet hatten. Aber zu einer dialektischen und zugleich materialistischen Auffassung der Natur gehört Bekanntschaft mit der Mathematik und der Naturwissenschaft. Marx war ein gründlicher Mathematiker."

In der Tat: Wie an alle seine wissenschaftlichen Arbeiten ging Marx auch an seine mathematischen Studien mit größter Gründlichkeit, Gewissenhaftigkeit und Systematik heran und fand nicht eher Ruhe, bis ein Weg zur Lösung der auftauchenden Probleme sichtbar wurde. Von besonderem Interesse sowohl für den Historiker als auch für den Philosophen der Mathematik sind dabei seine Ausarbeitung über den historischen Entwicklungsgang des Differentialbegriffs und ein gesondertes Manuskript, in dem er die Methode von D'Alembert und Lagrange seiner eigenen Differentialmethode gegenüberstellt.

Paul Lafargue berichtet in seinen Erinnerungen an Karl Marx: „In der höheren Mathematik fand er die dialektische Bewegung in ihrer logischsten und zugleich einfachsten Form wieder, seiner Meinung nach war auch eine Wissenschaft erst dann wirklich entwickelt, wenn sie dahin gelangt war, sich der Mathematik bedienen zu können." Getreu dieser Auffassung wandte Marx im Unterschied zu den meisten Ökonomen seiner Zeit in großem Umfang mathematische Methoden und Denkformen an.

Heute ist die Einführung mathematischer Methoden auf ökonomischem Gebiet, insbesondere bei der laufenden und der Perspektivplanung, sowie in anderen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens zu einem allgemeinen, unumgänglichen Erfordernis geworden. Überall wächst das Bedürfnis, mathematische Methoden und Modelle auszuarbeiten und moderne Rechentechnik zur Lösung komplizierter Probleme einzusetzen.

Darum finden die „Mathematischen Manuskripte" von Marx sowohl inhaltlich als vor allem von der methodischen Seite her nicht nur Interesse bei den Mathematikern, sondern darüber hinaus bei Wissenschaftlern und Forschern vieler anderer Disziplinen, insbesondere im Bereich der Leitung und Planung der Wirtschaft, aber auch seitens der Philosophen, Soziologen usw.

Darum wird die Veröffentlichung dieser Manuskripte auch in unserer Republik eine große Beachtung finden. Die Moskauer Ausgabe bringt die Marxschen Manuskripte in der Originalsprache und in russischer Übersetzung. Da die Manuskripte — von einigen Passagen und wenigen französischen Einstreuungen abgesehen — in deutscher Sprache abgefaßt sind, kann diese Ausgabe auch vom deutschen Leser ohne Schwierigkeiten benutzt werden.

R. Sperl

Aus: „Die Presse der Sowjetunion" 52/68

Eine Wissenschaft ist erst dann wirklich entwickelt, wenn sie dahin gelangt ist, sich der Mathematik bedienen zu können.

Berufsbild

Diplom-Mathematiker (Rechentechnik und Datenverarbeitung)

Nachdem euch die Berufsbilder des *Facharbeiters für Datenverarbeitung*, des *Mathematisch-technischen Assistenten* und des *Ingenieurs für Programmierung* vorgestellt wurden, wollen wir jetzt den Weg zum Diplom im Fach Mathematik an der TU Dresden und die Einsatzmöglichkeiten beschreiben.
Natürlich sind Diplom-Mathematiker nicht die einzigen Hochschulabsolventen für die Datenverarbeitung. Auch die Fakultäten für Ingenieurökonomie und Elektrotechnik beispielsweise bilden Fachleute für dieses Gebiet aus.

Welche Anforderungen werden gestellt, wenn ihr euch für ein Mathematik-Studium bewerben wollt?

Erforderlich für den Studienbewerber sind überdurchschnittliche Leistungen in Mathematik und sehr gute Leistungen in anderen naturwissenschaftlichen Fächern (insbesondere in Physik), sowie ausgeprägte Fähigkeiten zum Erkennen logischer Zusammenhänge. Voraussetzung für die Immatrikulation ist der Nachweis der Hochschulreife (z. B. Abitur).

Wie sieht der Studienablauf aus?

Für Studenten der Mathematik gliedert sich das Studium in

2 Jahre Grundstudium, 2 Jahre Fachstudium, 1 Jahr Spezialstudium.

In den Vorlesungen des Grundstudiums erfolgt der exakte Aufbau der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer bzw. mehrerer reeller Variabler. Darüber hinaus wird die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der komplexen Funktionen vermittelt.

Spezialrichtung Rechentechnik und Mathematische Kybernetik

In der Spezialrichtung Rechentechnik und Mathematische Kybernetik werden die im Grundstudium erworbenen Kenntnisse durch Vorlesungen über Höhere Analysis, Operationsforschung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik ergänzt. Besondere Schwerpunkte der Ausbildung sind Numerische Mathematik, Anwendungsgebiete der Mathematischen Logik und ein technisches Nebenfach (Elektronik).
In der Numerischen Mathematik werden die Verfahren bereitgestellt, die es gestatten, praktische Rechnungen auf Rechenautomaten durchzuführen.
Die Schaltalgebra und Automatentheorie stellen die theoretischen Hilfsmittel bereit, die beim Entwurf aller digitalen Einrichtungen zur Informationsverarbeitung benötigt werden. Solche Einrichtungen sind zum Beispiel Steuerschaltungen, die bei der Automatisierung in der Industrie eingesetzt werden, wie auch Datenverarbeitungsanlagen und Prozeßrechner.
Die Grundlage für die Ausarbeitung von Programmen bilden die Algorithmentheorie und die Programmierungssprachen.

Die zuletzt genannten Anwendungsgebiete der Mathematischen Logik bilden gemeinsam die eigentliche Theorie der informationsverarbeitenden Systeme.
Im Spezialstudium beschäftigt sich der Studierende intensiv mit einem der genannten Fachgebiete. Dabei ergibt sich ein Thema für eine Diplomarbeit, die zum Abschluß des Studiums anzufertigen ist. Der Student soll hierbei zeigen, daß er in der Lage ist, Probleme selbständig zu bearbeiten.

Welche Einsatzmöglichkeiten bestehen?

Die Absolventen der Spezialrichtung Rechentechnik und Mathematische Kybernetik können sowohl in Betrieben und Forschungszentren, die sich mit der Entwicklung von Datenverarbeitungsanlagen beschäftigen, als auch in einem der vielen jetzt entstehenden Rechenzentren zum Einsatz gelangen. Außerdem kommen Forschungsinstitute der Universitäten und Akademien — auch für speziellere Forschungsvorhaben wie z. B. auf dem Gebiet der Linguistik — als Arbeitsstätte in Frage. Für einen kleinen Teil von Absolventen mit überdurchschnittlichen Leistungen besteht die Möglichkeit, an einer Universität, Hochschule oder zentralen Forschungseinrichtung zu arbeiten.

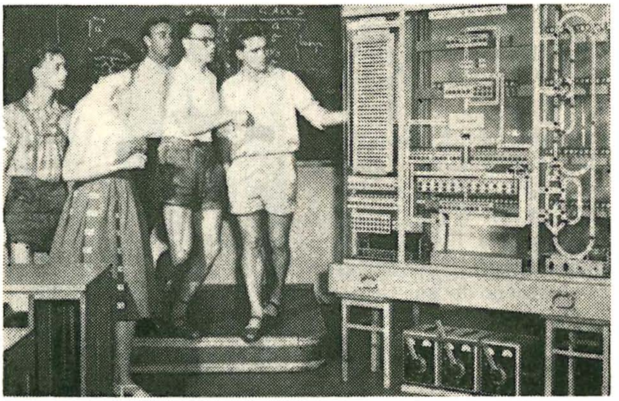
Spezialrichtung Numerische Mathematik

Die stürmische Entwicklung der elektronischen Rechentechnik in den letzten Jahren hat auch zu einem gewaltigen Aufschwung der Numerischen Mathematik geführt.
Neben der Spezialrichtung Rechentechnik und Mathematische Kybernetik bildet deshalb auch die Spezialrichtung Numerische Mathematik Fachleute für die Datenverarbeitung aus.
Für das Fachstudium in dieser Spezialrichtung ist das allgemeine Grundstudium für Mathematiker Voraussetzung.
Der Inhalt des Fachstudiums wird gebildet aus einer Vertiefung der im Grundstudium erworbenen Kenntnisse über Numerische Analysis, Einführung in Aufbau und Arbeitsweise von Rechenautomaten, Algorithmische Sprachen, Optimierung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Funktionalanalysis, Partielle Differentialgleichungen und Theoretische Physik.

J. Lötzsch/G. Seifert

Welche Einsatzmöglichkeiten bestehen?

Absolventen werden eingesetzt in Organisations- und Rechenzentren der Industrie, der Landwirtschaft und des Verkehrswesens für Programmierung und Problemanalyse oder in Rechenzentren an Hoch- und Fachschulen.



Zusätzlich zu den Vorlesungen und Übungen erfolgt eine umfassende Ausbildung an einer Vielzahl von Geräten der maschinellen Datenverarbeitungs- und Rechentechnik. Das Bild zeigt Studenten im Praktikum bei der Arbeit am Modellautomaten, der vom Institut für Maschinelle Rechentechnik der TU Dresden entwickelt und gebaut wurde.

Eine Aufgabe von

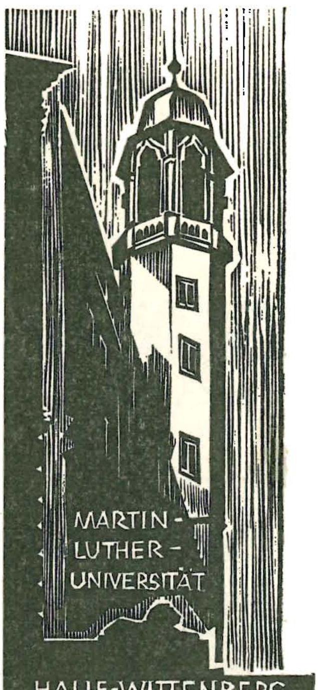
Prof. Dr. rer. nat. habil. Rolf Klötzler

Direktor der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Vorsitzender der Bezirkssektion Halle-Leipzig der Mathematischen Gesellschaft der DDR

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Mit den vorliegenden Aufgaben werdet Ihr auf einen wichtigen Zweig der Mathematik aufmerksam gemacht, auf die Optimierungstheorie. Sie wendet sich Fragen zu, wie man eine mathematisch erfaßbare Entscheidung zu fällen hat, um möglichst günstige Bedingungen zu gewährleisten. Solche Bedingungen können z. B. darauf orientiert sein, möglichst geringe Kosten oder geringe Zeit aufzuwenden. Es kann auch häufig interessieren, einen Produktionsprozeß mit möglichst wenig Arbeitskräften oder möglichst geringem Materialaufwand zu gestalten. Solche und ähnliche Fragen sind natürlich heute vom ökonomischen Standpunkt aus äußerst wichtig. Auf der Oberschule werdet Ihr im Rahmen der Differentialrechnung schon mit solchen Fragen vertraut gemacht. Einfache Aufgaben lassen sich auch schon mit elementaren Mitteln behandeln. Es gibt aber eine große Zahl von Problemen der Optimierungstheorie, die noch ihrer Lösung harren und den vollen Einsatz der höheren Mathematik verlangen. Aus diesem Grunde wird an vielen Hochschulen und Universitäten der DDR zu Problemen der Optimierungstheorie geforscht, so auch an der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

R. Klötzler

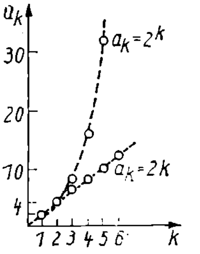


9 **298a** Um vom Ort A nach dem 200 km entfernten Ort B zu gelangen, kann man eine Teilstrecke der Länge x zunächst mit dem Verkehrsmittel F_1 und den Rest der Strecke mit dem Verkehrsmittel F_2 zurücklegen.
Die Durchschnittsgeschw. von F_1 ist $v_1 = 20$ km/h. Die Durchschnittsgeschw. von F_2 ist $v_2 = 50$ km/h. Die Benutzung von F_1 kostet pro Kilometer 5 Pf.
Die Benutzung von F_2 kostet pro Kilometer bei einer Fahrstrecke $\leqq 100$ km 7 Pf, während jeder darüber hinausgehende Fahrkilometer nur noch 4 Pf kostet.
Wie ist x zu wählen, um eine optimale, d. h. möglichst günstige (schnelle und billige) Anreise zu haben? Wir fassen dabei eine Lösung x_0 als optimal auf, wenn es kein anderes x gibt, für das sowohl die gesamten Fahrtkosten $K(x)$ als auch die gesamte Fahrzeit $T(x)$ kleiner als $K(x_0)$ bzw. $T(x_0)$ sind.

11 **298b** Unter dem Einfluß konstanter Windrichtung und Wind-
stärke kann ein Segelboot in der Richtung des Winkels φ
12 maximal die Geschwindigkeit $v = v_0(1 - \cos\varphi)$ erreichen, wenn v_0 eine positive Konstante ist, φ den Winkel zwischen x-Achse und Kiellinie (Fahrtrichtung) des Bootes darstellt und der Wind in Richtung der negativen x-Achse weht (von einer Abdrift wird abgesehen). Man berechne die aus Geradenstücken bestehende Fahrtroute, auf der das Segelboot am schnellsten vom Punkt O (0,0) zu dem Punkt $A(x_0, y_0)$ mit $x_0 > 0$, $y_0 \geqq 0$ gelangt.
Ist die Lösung eindeutig? Wie groß ist die Fahrzeit T?

Elementare Zahlenfolgen

4. Teil



In *alpha* 5/68 besprachen wir den für die Praxis wichtigen Typ der geometrischen Zahlenfolgen. Die Aufgaben dazu habt ihr sicher richtig gelöst. Vergleicht eure Lösungen mit den hier angegebenen!

Lösungen

294 Geg.: $a_3 = 6$ und $a_6 = \frac{81}{4}$ einer geometrischen Folge. Gesucht: a_1 und q.

Independente Darstellung für geometrische Folgen:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \quad \text{mit } k \in \{1; 2; \ldots\}$$
$$\text{und } q \neq 0.$$

Für $k = 3$ folgt $a_3 = a_1 \cdot q^2$,

für $k = 6$ $\quad a_6 = a_1 \cdot q^5$.

Division der zweiten Gleichung durch die erste führt auf

$$\frac{a_6}{a_3} = q^3; \text{ also ist } q = \sqrt[3]{\frac{a_6}{a_3}} = \frac{3}{2}.$$

Für das Anfangsglied ergibt sich damit

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{8}{3}.$$

295a Independente Darstellung:

$$a_k = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \text{ oder } a_k = 2^{2-k}$$
$$\text{oder } a_k = \frac{1}{2^{k-2}},$$

jeweils mit $k \in \{1; 2; \ldots\}$.

Rekursive Darstellung: $a_k = a_{k-1} \cdot \frac{1}{2}$

für $k > 1$ mit $a_1 = 2$.

295b Graphische Darstellung der Folgen $a_k = 2k$ und $a_k = 2^k$: Die Graphische Darstellung von $a_k = 2k$ ergibt eine Punktfolge längs einer steigenden Geraden; die graphische Darstellung von $a_k = 2^k$ ist eine Punktfolge längs einer steigenden Exponentialkurve (siehe Abb. rechts oben).

Vergleich: Die Glieder der geometrischen Folge $a_k = 2^k$ nehmen sehr bald viel höhere Werte an als die entsprechenden Glieder der arithmetischen Folge 1. Ordnung $a_k = 2k$.

296 Bildet man die zu den gegebenen Folgen zugehörigen Quotientenfolgen, so sieht man leicht:
Die Folge der Schnittgeschwindigkeiten ist *keine* geometrische Folge, dagegen liegt mit der Folge der Drehzahlen eine geometrische Folge vor. Dabei ist natürlich zu berücksichtigen, daß die Drehzahlen auf ganze Zahlen gerundete Werte sind. Die Quotientenfolge ist infolgedessen nur annähernd konstant.

297 1945: $2{,}13 \cdot 10^9$ Menschen
1965: $3{,}20 \cdot 10^9$ Menschen

$$q = \frac{3{,}20 \cdot 10^9}{2{,}13 \cdot 10^9} = 1{,}5$$

1985: $3{,}20 \cdot 10^9 \cdot 1{,}5 = 4{,}80$ Milliarden Menschen.

Nun wollen wir uns einigen weiteren Eigenschaften von Zahlenfolgen zuwenden und die zugehörigen Grundbegriffe erläutern. Zunächst seien die wichtigsten Zahlenfolgen, die wir bisher behandelten, noch einmal zusammengestellt:

(f_1) $2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ \ldots$
(f_2) $2;\ 2{,}8;\ 4;\ 5{,}6;\ 8;\ 11;\ 16;\ 22.$
(f_3) $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots$
(f_4) $1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ \ldots$
(f_5) $7;\ 4;\ 1;\ -2;\ -5;\ -8.$
(f_6) $-2:\ +4;\ -8;\ +16;\ -32;\ +64;\ -128;\ +256;\ -512.$
(f_8) $0;\ 1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ \ldots$
(f_9) $8;\ 4;\ 2;\ 2;\ 1;\ 2;\ \frac{1}{2};\ 4;\ \frac{1}{8};\ 32;\ \ldots$
(f_{10}) $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \ldots;\ 2^{63}$
(f_{11}) $1;\ 1;\ 1;\ 1;\ \ldots$
(f_{12}) $2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots$

Achtet einmal auf die Zu- oder Abnahme des Zahlenwertes der Glieder einer Folge! Euch fällt auf, daß bei einigen Folgen die Glieder mit wachsender Gliednummer k immer *grö-*

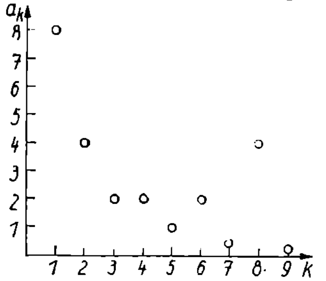
ßere Werte annehmen, bei anderen aber *nehmen* die Zahlenwerte mit wachsendem k *ab*.
Ja, es sind sogar Folgen darunter, bei denen wir ein abwechselndes Zu- und Abnehmen der Zahlenwerte feststellen können.
Wir haben es mit der Eigenschaft des Wachsens und Fallens von Zahlenfolgen zu tun.
Ist für alle k $a_k < a_{k+1}$, ist also das jeweils folgende Glied größer als das k-te Glied, so sprechen wir von einer *streng monoton wachsenden* (oder *steigenden*) Zahlenfolge; gilt jedoch $a_k > a_{k+1}$ für alle k, dann liegt eine *streng monoton fallende* Zahlenfolge vor.
f_1, f_2, f_4 sind Beispiele für streng monoton wachsende Zahlenfolgen, denn jedes $(k + 1)$te Glied ist größer als das voranstehende k-te Glied.
f_3, f_5, f_{12} sind Beispiele für streng monoton fallende Zahlenfolgen, denn das Glied a_{k+1} ist jeweils kleiner als der unmittelbare Vorgänger a_k.
f_{11} ist — wie wir bereits wissen — eine *konstante* Folge; hier gilt

$$a_k = a_{k+1} \text{ für jedes } k.$$

Trifft auf alle Glieder einer Zahlenfolge die Relation

$$a_k \leqq a_{k+1} \text{ zu,}$$

so haben wir eine *monoton wachsende* Zahlenfolge vor uns;
mit $a_k \geqq a_{k+1}$ eine *monoton fallende* Zahlenfolge.
Das Gleichheitszeichen, das hier — im Gegensatz zu oben — mit auftritt, besagt also, daß gewisse benachbarte Glieder gleich sein *können*. Demzufolge ist f_8 eine monoton wachsende Zahlenfolge; die ersten fünf Glieder der Folge f_9 bilden eine monoton fallende Zahlenfolge. Die Folge f_9 hat aber bezüglich der weiteren Glieder ein anderes Verhalten: die Zahlenwerte der Glieder nehmen abwechselnd zu und ab. In einem solchen Falle sprechen wir von einer *oszillierenden* Folge (oszillieren, hin- und herschwingen). f_9 ist also von a_4 an oszil-

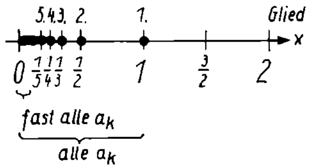


lierend. An der graphischen Darstellung dieser Folge (s. Abbildung) könnt ihr das Oszillieren gut beobachten.
Überlegt, für welche Werte von d (konstante Differenz) arithmetische Folgen 1. Ordnung monoton wachsen, für welche sie monoton fallen!
Überlegt weiter, für welche Werte von a_1 und q geometrische Folgen monoton wachsen bzw. fallen! Gibt es oszillierende geometrische Folgen? —
Bei einigen Folgen treten Glieder mit negativen Zahlen auf. Wir nennen eine Zahlenfolge *positiv definit*, wenn ihre sämtlichen Glieder positiven Wert haben, *negativ definit*, wenn alle ihre Glieder negativ sind. Die Folge 7; 4; 1; −2; −5; −8; −11; ... heißt „im wesentlichen negativ definit", denn alle Glieder von a_4 an tragen negatives Vorzeichen. Eine Folge, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, wird *alternierend* genannt. f_6 zum Beispiel ist eine alternierende Folge.
Zur Beantwortung der oben aufgeworfenen Fragen geben wir eine Übersicht über die *Eigenschaften geometrischer Folgen* in Abhängigkeit vom Anfangsglied a_1 und vom Quotienten q:

Anfangsglied	Quotient	Eigenschaften der betreffenden geometr. Folgen
$a_1 > 0$	$q > 1$	streng monoton wachsend; positiv definit
	$q = 1$	konstant; positiv definit
	$0 < q < 1$	streng monoton fallend; positiv definit
	$q < 0$	oszillierend; alternierend.
$a_1 = 0$	$q \neq 0$	konstant.
$a_1 < 0$	$q > 1$	streng monoton fallend; negativ definit
	$q = 1$	konstant; negativ definit
	$0 < q < 1$	streng monoton wachsend; negativ definit
	$q < 0$	oszillierend; alternierend.

Wählt für jedes der aufgeführten Fälle ein Beispiel aus und stellt diese Zahlenfolge graphisch dar! So werden euch die Zusammenhänge leicht verständlich.
Denkt auch über den folgenden Satz nach, dessen Richtigkeit sich leicht nachweisen läßt: *Eine Folge ist genau dann alternierend, wenn ihre Quotientenfolge negativ definit ist.* —
Zum Schluß wenden wir unser Augenmerk auf die Folge $f_3 = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$
Wir werden an ihr eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft kennenlernen, die gewissen Zahlenfolgen zukommt. f_3 ist offensichtlich eine streng monoton fallende, positiv definite Folge. Das ist an sich schon eine interessante Sache. Obwohl jedes seiner Glieder kleiner ist als das vorangehender werden Werte wie

$-\frac{1}{2}$, -1 o. ä. niemals erreicht, bleiben tatsächlich sämtliche Glieder positiv. Tragen wir die Glieder der Folge als Punkte auf dem reellen Zahlenstrahl ein — übrigens eine zweite Möglichkeit der graphischen Darstellung von Folgen —, so wird uns deutlich, daß in dem endlichen Intervall $0 < x \leqq 1$ *alle*, das heißt, *unendlich viele Glieder* der Folge liegen.



Die Glieder der Zahlenfolge werden immer kleiner, $a_{1000} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ z. B. ist schon ein Wert nahe Null, aber kein Glied der Folge wird exakt Null. Und doch liegen in unmittelbarer Nähe des Wertes Null, in jeder noch so kleinen Umgebung um Null, *fast alle* Glieder der Folge, d. h., alle bis auf endlich viele. Null ist der *Grenzwert* der unendlichen Zahlenfolge $a_k = \frac{1}{k}$.

Der Grenzwertbegriff hat grundlegende Bedeutung für den Aufbau der Differential- und Integralrechnung sowie weitere Disziplinen der Mathematik. Wir beschreiten damit Gebiete, in denen es eigentlich erst richtig interessant wird.

Die exakte und ausführliche Behandlung des Grenzwertbegriffes muß einer Artikelserie vorbehalten bleiben, die wir später einmal bringen.

Für heute soll es genug sein. Habt Dank für eure Mitarbeit und euer Mitdenken! H. Lohse

So arbeite ich mit „alpha"

Ich heiße *Waltraud Kühne*, war Schülerin der erweiterten Helmholtz-OS, Leipzig. Jetzt besuche ich die Spezialklasse der Martin-Luther-Univers. Halle. Besonders interessieren mich die Fächer Mathematik und Russisch, aber ich diskutiere auch gern politische und philosophische Fragen. In meiner Freizeit lese ich viel, besonders Bücher sozialistischer Schriftsteller. Da ich nach Abschluß der Schulzeit Mathematik studieren will, beschäftige ich mich auch außerhalb des Unterrichts mit mathematischen Problemen.

□ Ich suche mir aus den Wettbewerbsaufgaben meiner Klassenstufe die mich interessierenden Aufgaben heraus (für das Lösen aller Aufgaben fehlt mir die Zeit) und bemühe mich um beste Lösungsmöglichkeit und exakte schriftliche Darstellung. Diese von *alpha* geforderte Bedingung halte ich für sehr wichtig, sie zwingt zu logischem Durchdenken des Problems. Die Benachrichtigungskarten mit dem Vermerk „vorbildlich" oder „gut gelöst", zeigen mir dann, wie weit ich den Anforderungen gerecht geworden bin.

□ Ich hebe mir stets eine „Abschrift" der eingeschickten Aufgaben auf und überprüfe sie dann, wenn die Lösungen veröffentlich werden. Außerdem verfolge ich die Lösungswege der von mir nicht gerechneten Aufgaben. Dieses „Nachbereiten" hat mir manchen einfacheren und schnelleren Lösungsweg eingebracht.

□ Mit großem Interesse verfolge ich die Veröffentlichungen, die solche mathematische Stoffgebiete zum Inhalt haben, die nicht in der Schule behandelt werden, wie z. B. „Elementare Zahlenfolgen", „Mengenlehre" u. ä. oder Aufgaben, die bedeutende Mathematiker stellen.

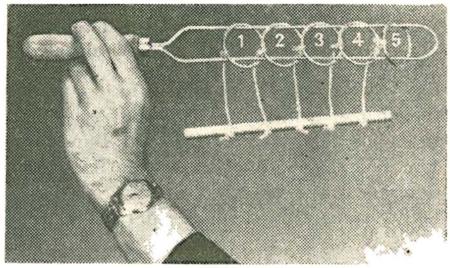
□ Da ich schon bei meiner Vorstellung erwähnte, daß neben Mathematik Russisch mein Lieblingsfach ist, freue ich mich, wenn Aufgaben in russischer Sprache erscheinen. Neben dem mathematischen Problem reizt mich die Übersetzung. (Heft 5/67, 5/68). In Nummer 5/67 erfuhr ich auch von der Jahresarbeit des Schülers *Reinhard Höppner*, der sowjetische Aufgabensammlungen ins Deutsch übersetzte und mit Lösungsanhang versah. Das ist genau das, was auch mir Freude bereiten würde! Ich habe mich deshalb an den Leiter unseres Bezirkskonsultationspunktes Mathematik gewandt und eine sowjetische Aufgabensammlung erhalten, die ich allerdings nur abschnittsweise bearbeiten kann.

□ Die *alpha* benutze ich nicht nur zur mathematischen Weiterbildung, sie hilft auch bei der Erweiterung der Allgemeinbildung. Solche Artikel wie „Nowosibirsk", Biographien wie über *A. J. Chintschin*, *A. F. Möbius* oder Berichte wie „Als Diplommathematiker in Dubna" und „Als Mathematiklehrer in Tansania" haben mir sehr gut gefallen.

Meine Darlegungen über die Arbeit mit *alpha* sind weder vollständig noch sollen sie als „Musterbeispiel" aufgefaßt werden, sondern sie sollten sowohl eine Anregung für Schüler als auch ein Dank an die Zeitschrift sein. Während ihres zweijährigen Bestehens hat sie mir und vielen anderen mit ihren Beiträgen Wissen vermittelt und Freude an selbständiger Arbeit bereitet.

Waltraud Kühne

Schön ist so ein Ring(el)spiel



Im Folgenden soll ein nicht nur unterhaltendes, sondern auch geistreiches Spiel beschrieben werden, das erfahrungsgemäß dem Anfänger viel Kopfzerbrechen macht. Für uns wird es interessant sein, die Spielregeln zu ergründen und die Zusammenhänge mathematisch zu erfassen.

Wir nehmen fünf gleichgroße Ringe (etwa von einer alten Gardinenstange) und basteln uns dazu passend (s. Abbildung!) aus Draht eine Spange. Nachdem wir an jeden Ring ein Stück Bindfaden geknotet haben, schieben wir die Ringe über die Stange, verschlingen, wie es die Abbildung zeigt, die Fäden mit den Ringen und befestigen die freien Fadenenden an einer Stange (Holzstab).

Die Aufgabe des Spiels besteht nun darin, alle fünf Ringe von der Stange zu trennen (natürlich ohne eine der Befestigungen zu lösen). Der Anfänger beginnt meistens damit — etwa die Stange in der linken Hand haltend —, den fünften Ring nach rechts von der Stange zu ziehen und einfach nach unten fallen zu lassen. Macht man das mit dem vierten Ring auch, so gerät man in eine „Sackgasse", denn wegen der dazwischenliegenden Fäden kann kein weiterer Ring abgezogen werden, ohne jetzt schon ein Wirrwarr zu schaffen. Besser ist es, wenn man den fünften Ring nach Abziehen von oben durch die Spange wirft. Man kann aber auch den vierten und fünften Ring gleichzeitig herunterziehen und, den fünften in der Hand behaltend, den vierten von oben durch die Spange werfen. Danach kann man entweder den fünften wieder heraufschieben oder ihn ebenfalls von oben durch die Spange werfen, ohne die Fäden zu verwirren.

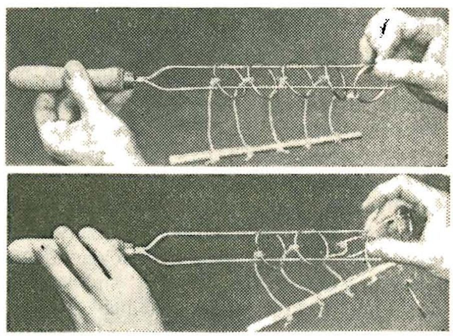
Nach diesen und weiteren Versuchen werden uns die Spielregeln verständlich. Sie lauten:

1. Der fünfte Ring kann jederzeit unabhängig von den anderen von der Spange gelöst, d. h. gesenkt und auch wieder auf die Spange geschoben, d. h. gehoben werden. (Beim Senken muß man natürlich wie oben beschrieben vorgehen und beim Heben umgekehrt, also den Ring zuvor von unten durch die Spange stecken.)

2. Um einen der anderen Ringe senken oder heben zu können, ist es notwendig und hinreichend, daß der folgende Ring gehoben, also oben ist, während alle danach folgenden Ringe gesenkt, also unten sind. (Um einen solchen Ring zu senken, schiebe man ihn zusammen mit dem folgenden von der Stange, werfe ihn — den anderen in der Hand behaltend — von oben hindurch und schiebe den anderen wieder herauf. Das Heben geschieht in genau umgekehrter Richtung und Reihenfolge: Ring von unten durch die Spange stecken, letzten Ring von der Spange ziehen, den anderen zugleich mit dem letzten heraufschieben.)

3. Der Zustand der links vor dem zu senkenden oder zu hebenden Ring befindlichen Ringe hat auf die Manipulationen keinen Einfluß.

Die Regeln lassen sich wie folgt mathematisch formulieren: Jeder Zustand sei durch eine mit den Ziffern 0 und 1 geschriebene fünfstellige Zahl gekennzeichnet. Eine 1 bedeutet, daß der betreffende Ring oben, eine 0, daß dieser unten ist. Z. B. heißt 10100: der 1. und der 3. Ring sind oben, die anderen unten. (In diesem Fall könnte auf Grund der Regel nur der 2. Ring gehoben, also anschließend der Zustand 11100 hergestellt werden.)



Senken des 5. Ringes — Senken des 3. Ringes

Mit diesen theoretischen Kenntnissen ausgerüstet, beginnen wir das Spiel. Wir nennen jedes Heben bzw. Senken eines Ringes, also die Überführung eines Zustandes in den nächsten, eine Operation, wobei wir allerdings aus bestimmten Gründen das gleichzeitige Senken bzw. Heben des 4. und 5. Ringes als eine Operation zählen, also auch den Zwischenzustand nicht extra hinschreiben. Nehmt nun das Spiel zur Hand und macht die folgenden Operationen langsam und besonnen, weil jeder Fehler meist ausweglose Verwirrung schafft und man dann meistens nicht umhinkann, durch Aufknoten einiger Fäden den Ausgangszustand wieder herzustellen:

11111, 11110, 11010, 11011, 11000, 01000, 01011, 01010, 01110, 01111, 01100, 00100, 00111, 00110, 00010, 00011, 00000.

Aus der Folge dieser Operationen lassen sich einige interessante Erkenntnisse gewinnen:

1. Es ist der einzige Weg, der zum Ziel führt, sofern man sich nicht wiederholen, also unnötige Zwischenschritte einschalten will. Jede Abweichung an einer beliebigen Stelle führt in eine Sackgasse, aus der man nur durch „Umkehren", also Herstellen eines vorher schon dagewesenen Zustandes herauskommt.

2. Die (unterstrichenen) Zwischenzustände 01111, 00111, 00011 zeigen, daß man das Spiel mit fünf Ringen zunächst auf ein Spiel mit vieren, dieses dann auf eins mit dreien und schließlich auf zwei Ringe reduzieren muß. Wir hätten also auch mit vier Ringen, d. h. mit dem Zustand 01111 = 1111 beginnen, d. h. den 1. Ring von vornherein weglassen können, wären dann natürlich mit erheblich weniger Operationen ausgekommen.

3. Bei 5 anfänglichen Ringen braucht man 16 Operationen, bei 4 Ringen 7, bei 3 Ringen 4, bei 2 Ringen 1 Operation. Ist n also die Anzahl der Ringe und $Z(n)$ die Anzahl der nötigen Operationen, so gilt falls $n \leqq 5$:

$$Z(n) = 2^{n-1} - 1 \quad \text{für gerade } n$$

und

$$Z(n) = 2^{n-1} \quad \text{für ungerade } n.$$

4. Die Folge der Operationen kann auf Grund der Spielregeln jederzeit rückwärts durchlaufen werden, so daß das Aufschieben eines von der Spange gelösten Systems von Ringen das gleiche Problem ist und auch für die Anzahl der Operationen die gleichen unter 3. genannten Formeln gelten.

Es ergibt sich nun die Frage, ob sich das Spiel auch mit mehr als fünf Ringen betreiben läßt. Das ist in der Tat der Fall, und es gelten sogar die genannten Formeln für beliebig große n. Das soll jetzt bewiesen werden, und zwar eignet sich hierzu das Verfahren der vollständigen Induktion, also der Schluß von n auf $n + 1$:

1) Induktionsanfang: Die Formel gilt für $n = 2$.

$$Z(2) = 2^1 - 1 = 1$$

(Zwei Ringe lassen sich trivialerweise mit einer Operation von der Spange ziehen).

2) Induktionsannahme: Wir nehmen an, die Formel sei bis zu einem gewissen $n = k$, d. h. für $2 \leqq n \leqq k$, bereits bewiesen. (Die Annahme ist berechtigt, weil wir ja die Richtigkeit der Formel bis $n = k = 5$ empirisch bestätigt haben.)

3) Induktionsschluß: Wir zeigen jetzt, daß die Formel, wenn sie bis $n = k$ gilt, dann auch für $n = k + 1$ richtig ist, wobei wir zwischen geraden und ungeraden k unterscheiden müssen:

a) k sei eine gerade Zahl:

Sind $k + 1$ Ringe auf der Spange, so müssen wir, um den 1. Ring senken und damit das Spiel auf k Ringe zurückführen zu können, wie folgt vorgehen:

1. Senken der letzten $k - 1$ Ringe; das sind, da $k - 1$ ungerade, lt. Induktionsannahme 2^{k-2} Operationen,

2. Senken des 1. Ringes; das ist eine Operation,

3. Heben der letzten $k - 1$ Ringe; das sind nochmal 2^{k-2} Operationen.

Also ist mit $2^{k-2} + 1 + 2^{k-2}$
$= 2 \cdot 2^{k-2} + 1 = (2^{k-1} + 1)$ Operationen der Fall $n = k$ erreicht. Um diesen zum Endzustand zu führen, sind, ebenfalls lt. Induktionsannahme, weitere

$$(2^{k-1} - 1) \text{ Operationen}$$

nötig. Also ergeben sich insgesamt $2 \cdot 2^{k-1}$

$$= 2^k \text{ Operationen.}$$

Es ist also (für $k+1$ ungerade)

$$Z(k+1) = 2^k.$$

Die Formel gilt also auch für $n = k+1$.

b) k sei eine ungerade Zahl:

Die Überlegung verläuft wie bei a), nur sind unter 1. und 3. jeweils $(2^{k-2} - 1)$ Operationen, also insgesamt, um den Zustand $n = k$ zu erhalten, $(2^{k-1} - 1)$ Operationen notwendig.

Hinzu kommt

$$Z(k) = 2^{k-1}.$$

Somit ist (für $k + 1$ gerade)

$$Z(k + 1) = 2^k - 1.$$

Auch in diesem Fall wird also die Richtigkeit der Formel für $n = k + 1$ bestätigt. Die Formeln sind damit für beliebige $n \geqq 2$ bewiesen.

Man erkennt, daß — da es sich im wesentlichen um die Folge der Potenzen von 2 handelt — die Anzahl der nötigen Operationen mit zunehmender Zahl von Ringen schnell anwächst (vgl. die bekannte Schachbrett-Weizenkörner-Aufgabe). Bei sechs Ringen sind es bereits 31 Operationen, was schon — zumal diese in eindeutig vorgeschriebener Reihenfolge auszuführen sind — eine kaum zumutbare Geduldsprobe bedeutet. Mit vier Ringen wäre es fast zu leicht. Wir haben also mit der Zahl fünf einen Mittelweg: schwer genug, um dem Unbefangenen wenig Aussicht auf Erfolg zu bieten, leicht genug, um bei Einsicht in die Zusammenhänge, einiger Übung und Fingerfertigkeit die Lösung zum Erstaunen der anderen geschickt und schnell vorzuführen.

J. Frormann

alpha berichtet aus aller Welt

Magdeburg

Die VI. Wissenschaftliche Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR findet in der Zeit vom 10. bis 15. Februar 1969 an der Technischen Hochschule Otto von Guericke, Magdeburg, statt.

Tschernowzy

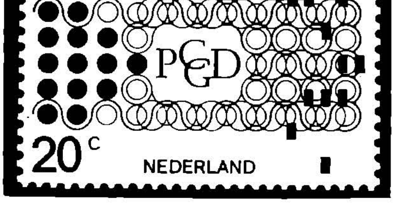
An der Mittelschule 1 der arbeitenden Jugend in Tschernowzy (Ukrainische SSR) werden Aufgaben aus der Zeitschrift „alpha“ diskutiert und gelöst. Besonderen Spaß bereitet den Lesern die Rubrik „*alpha* — heiter“.

Leipzig

Die Leipziger Volkszeitung (LVZ) gab aus Anlaß des 20. Jahrestages der Pionierorganisation „Ernst Thälmann“ die VII. Sonderausgabe für Junge Mathematiker (Klassenstufe 2 bis 12) heraus. Sie steht unter dem Motto „Mathematik und Sport“ (in Vorbereitung auf das V. Deutsche Turn- und Sportfest 1969). Neben 144 Aufgaben (und Lösungen) aus allen Bereichen des Sports bringt sie Statistiken und technische Zeichnungen von Sporteinrichtungen und Sportgeräten. Ein Wettbewerb mit wertvollen Preisen wird sicher — wie im Vorjahr — tausende von Teilnehmern finden.

Den Haag

Am 16. Januar 1968 erschien in den Niederlanden ein Sonderwert zu 20 Cent: *50 Jahre Postscheckdienst in Holland.* Die Briefmarke symbolisiert mit Kreisen und Rechtecken einen automatisierten Postscheck- und Girodienst, an dem zur Zeit etwa eineinhalb Millionen Kontoinhaber teilnehmen. Diese Briefmarke ist die erste, welche die Lochkartentechnik symbolisiert.



Köthen

Am VI. Spezialistenlager Junger Mathematiker des Bezirks Halle (August 1968) beteiligten sich über 130 Schüler. Ihre Entscheidung, aktive Erholung mit dem tieferen Eindringen in mathematische Probleme zu verbinden, war sehr bedeutsam. Der Lagervorsitzende U. Brecht (Stößen, Kr. Hohenmölsen) meint: „Ich habe schon jahrelang in Mathematik eine Eins und knoble gern. Das Lager bot mir daher sehr viel. Es war prima. Das sagen alle. Besonders unvergeßlich wird mir das Freundschaftstreffen mit den sowjetischen und vietnamesischen jungen Menschen bleiben.“

Tartu

In estnischen Schulen werden seit 1954 in den Fächern Mathematik, Physik und Chemie Olympiaden unter Leitung der Staatlichen Universität Tartu und des Min. f. Vobi. der Estnischen SSR durchgeführt. Im Dezember/Januar sind gestellte Aufgaben zu Hause zu lösen. Es folgte eine Klausur in der Schule. Ende März (während der Winterferien) versammeln sich die besten Schüler zur letzten Runde in der Universität. Die Sieger nehmen nicht nur Preise in Empfang, sondern sie haben damit auch schon automatisch die Abschlußprüfung im entsprechendem Fach abgelegt. Besondere Freude herrscht natürlich, wenn ein Sieger noch nicht Schulabgänger ist (11. Schuljahr). Mehrere Schüler der 10. Klasse haben es schon geschafft. Im Frühjahr 1961 ging Jaak Tepandi, 8. Klasse (II. OS Tallin) als Sieger hervor, 1964 war es Mihkel Aul, 9. Klasse (IV. OS Tartu). Hervorragend schnitten ab: II. OS Tallin, I. OS Viljadi, OS Noo. gekürzt von Prof. O. Prinits

Aufgaben aus diesen Olympiaden veröffentlichen wir im Rahmen des *alpha*-Wettbewerbs, d. Redaktion.

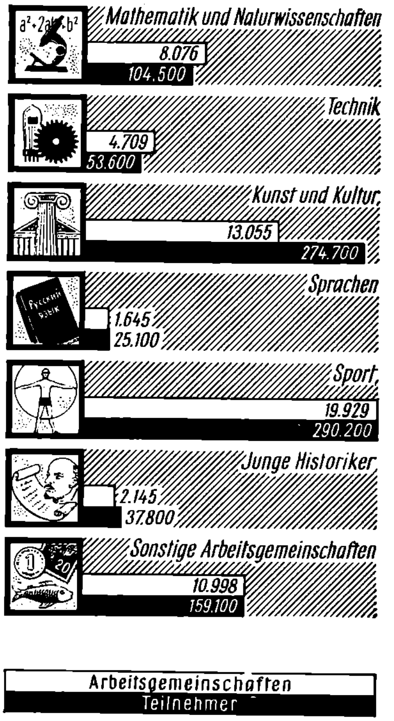
Budapest

In der Zeit vom 23. bis 30. Juni 1968 fand auf Einladung des Ministeriums für Bildungswesen der Ungarischen Volksrepublik die II. Internationale Physikolympiade statt (I. Olympiade 1967 in Warschau). Erstmalig nahm die DDR teil (Leiter: Dr. J. Wendt, Päd. Inst. Güstrow). Mannschaften, bestehend aus drei Schülern, nahmen teil aus: Bulgarien, CSSR, DDR Jugoslawien, Polen, Rumänien, UdSSR, Ungarn. Der Wettbewerb bestand aus einem theoretischen Teil (drei physikalische Aufgaben) und einem praktischen Teil (Lösen einer experimentellen Aufgabe). — Arbeitszeit: je 5 Stunden — Die III. Olympiade findet 1969 in Brno statt. Aufgaben, Lösungen, Organisationsformen findet der interessierte Leser in der Zeitschrift für Lehrer „Physik in der Schule“ 12/67, 3/68, 9/68 und 12/68. Eine der drei gestellten Aufgaben lautete: Auf einer geneigten Ebene (Neigungswinkel 30°) befindet sich eine homogene Walze mit der Masse $m_1 = 8$ kg und einem Durchmesser $d = 10$ cm. An die Achse der Walze ist mit einem Faden ein Ziegelstein mit der Masse $m_2 = 4$ kg befestigt. Mit welcher Beschleunigung bewegen sich die Körper? Der Reibungskoeffizient zwischen Ziegelstein und geneigter Ebene beträgt $\mu = 0{,}6$. Der Rollenwiderstand und die Achsreibung sind zu vernachlässigen.

Ilmenau

Ein Kollektiv des „Lagers Wismar“, das im August 1968 im Spezialistenlager für Mathematik (Goethe-Schule, Ilmenau) weilte, sandte einen Stoß Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb an die Redaktion ein.

Berlin



(aus DLZ 28/68)

Mexico 68

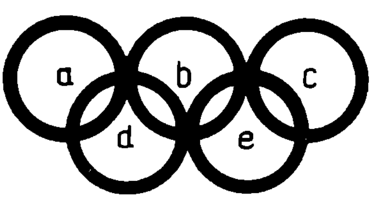
An den Tagen der Olympischen Spiele in Mexico haben wir alle mit Spannung und Stolz das hervorragende Abschneiden der Sportler unserer Deutschen Demokratischen Republik verfolgt. An diesen Tagen sahen wir immer wieder im Fernsehen und in den Zeitungen das Symbol der Olympischen Spiele, die fünf Ringe. Liegt es da für Junge Mathematiker nicht auf der Hand, dieses Symbol für mathematische Aufgaben zu nutzen?

340 Anstelle der Buchstaben a, b. c, d und e sind solche natürliche Zahlen in die fünf Ringe des olympischen Symbols einzusetzen, daß die Produkte der jeweils auf parallelen Geraden unserer Zeichnung stehenden Zahlen einander gleich sind. Es soll also gelten: $abc = de$, $ad = be$ und $ce = bd$.

341 Ersetze in Aufgabe 340 das Wort *Produkte* durch *Summen* und die (nichtgedruckten) Multiplikationszeichen durch Additionszeichen! Löse die so entstehende Aufgabe!

342 (Für Schüler ab Klasse 9): Welcher Zusammenhang besteht zwischen den allgemeinen Lösungen der Aufgaben 340 uud 341? Begründe diesen Zusammenhang!

W. Träger, Döbeln



Gruß aus der Demokratischen Republik Vietnam

Eine arithmetische Aufgabe

285 Es gibt einhundert Büffel und einhundert Bündel Heu.
Jeder stehende Büffel frißt fünf Bündel.
Jeder liegende Büffel frißt drei Bündel.
Je drei alte Büffel fressen zusammen ein Bündel.
Wieviel stehende, liegende und alte Büffel sind es?

Hat die Aufgabe mehrere Lösungen?

Wir wollen annehmen, daß es unter den 100 Büffeln genau drei Arten gibt, nämlich *stehende Büffel, liegende Büffel* und *alte Büffel* und daß ein beliebiger dieser 100 Büffel nur zu einer dieser drei Arten gehören kann.

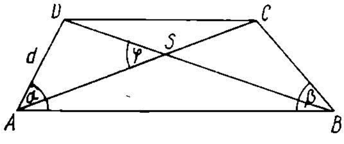
Die Aufgabe lautet auf vietnamesisch:

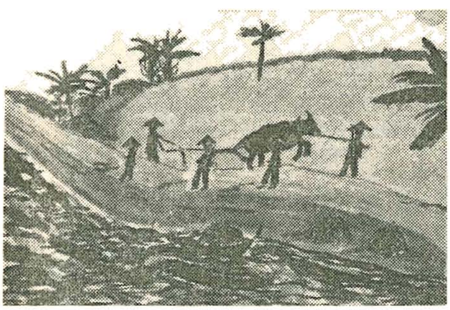
Trăm trâu trăm cỏ
Trâu đứng ăn năm
Trâu nằm ăn ba
Lụ khụ trâu già
Ba con một bó
Có bao nhiêu trâu đứng
trâu nằm
trâu già

Dieses Gedicht stellt eine sehr alte Aufgabe dar, die die alten vietnamesischen Reisbauern den jungen zu stellen pflegen, daß so die Aufgabe von Generation zu Generation weitergegeben wurde. Mitgeteilt von Nguyen lam Son

Eine geometrische Aufgabe

286 Es ist ein Trapez $ABCD$ mit den einander parallelen Seiten AB und $\overline{CD}$ und dem Schnittpunkt S der Diagonalen zu konstruieren, wenn die Seite $AD = d$ und die Winkel $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ und $\sphericalangle ASD = \varphi$ gegeben sind. Mitgeteilt von Nguyen van Tang





Die beiden Kinderzeichnungen (links aus der UdSSR, rechts DDR) wurden auf einer Ausstellung im Leipziger Haus der DSF im Mai 1968 unter dem Motto gezeigt: Frieden den Kindern Vietnams

СТАРТУЕТ ОЛИМПИАДА!

3. (8—10). Точки К и Р симметричны основанию Н высоты ВН треугольника АВС относительно прямых АВ и ВС. Доказать, что точки пересечения прямой КР со сторонами АВ и ВС (или их продолжениями) — основания высот треугольника АВС.

8. (8—9). Дана окружность и на ней точка А. Произвольная окружность с центром в точке А пересекается с данной окружностью в точках К и Р и касается диаметра данной окружности в точке Н. Найти геометрическое место точек пересечения отрезков КР и АН.

9. (8—10). Доказать, что $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1967}$ можно представить в виде $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, где a и b — целые числа, причем $3a^2-2b^2=1$.

10. (8—10). Восстановить выпуклый четырехугольник, если известны четыре точки — основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей четырехугольника на его стороны.

Ausgewählte Aufgaben

299 3. Gegeben ist ein Dreieck ABC, für das H Fußpunkt der Höhe auf AC ist.
Die Punkte K bzw. P seien die durch Spiegelung an der Geraden AB bzw. BC erhaltenen Bildpunkte von H.
Es ist zu beweisen, daß die Schnittpunkte der Geraden KP mit den Dreieckseiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ (oder ihrer Verlängerungen) ebenfalls Höhenfußpunkte des Dreiecks ABC sind.

300 8. Gegeben seien ein Kreis k_1 und auf ihm ein Punkt A. Ein weiterer Kreis k_2 um A als Mittelpunkt möge den Kreis k_1 in den Punkten K und P schneiden und einen Durchmesser von k_1 im Punkte H berühren. Es ist der geometrische Ort der Schnittpunkte der Strecken $\overline{KP}$ und $\overline{AH}$ zu bestimmen.

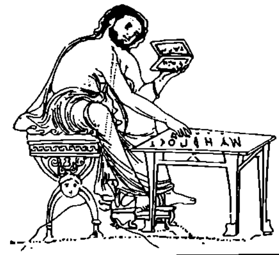
301 9. Es ist zu beweisen, daß $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1967}$ in der Form $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$ dargestellt werden kann, wobei a und b ganze Zahlen sind, die der Gleichung $3a^2-2b^2=1$ genügen.

302 10. Es ist ein konvexes Viereck zu konstruieren, von dem vier Punkte gegeben sind, und zwar die Fußpunkte der von dem Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks auf seine Seiten gefällten Lote.

In Heft 5/68 veröffentlichten wir die Aufgaben der Allunions-Fernolympiade 1967/68 in russischer Sprache. Heute bieten wir vier dieser Aufgaben in deutscher Sprache (zur Selbstkontrolle und aktiven mathematischen Beschäftigung unserer Leser). In Heft 2/69 bringen wir umfassende Lösungswege dazu.

Teilnahmebed. f. Schüler d. allgemeinbildenden Schulen und anderer mittlerer Lehranstalten: Die Allunions-Fernolympiade, seit 1965 durchgeführt, ist Bestandteil der Physik-, Mathematik- und Chemieolympiaden der Republiken und gleichzeitig (Fern-) Wettbewerb der Schüler der RSFSR. Wer die Aufgaben der Fernolympiade bewältigt, wird zu den Gebietsolympiaden (Bezirks- und Republikolympiaden) eingeladen und besitzt die gleichen Rechte wie die Sieger der Rayonolympiaden. Die Sieger der Gebietsolympiaden werden zum Abschlußwettbewerb der Republikolympiaden entsandt. In der RSFSR wurden im April 1966 der Abschlußwettbewerb der Physik-, Mathematik- und Chemieolympiaden der RSFSR veranstaltet. An einem solchen Abschlußwettbewerb nehmen die Sieger der Olympiaden der Unionsrepubliken teil. Die Sieger der Gebietsolympiaden werden in Spezialistenlager eingeladen, z. B. in das Sommerlager der Sibirischen Abteilung der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Die Teilnahme an der Allunions-Fernolympiade kann sowohl in einem wie auch in mehreren Fächern erfolgen. — Vor jeder Aufgabe ist die Klasse angegeben, für deren Schüler sie bestimmt ist; jedoch können diese ihre Kräfte auch an Aufgaben für höhere Klassen messen. — Um Sieger der Olympiade zu werden, ist es nicht unbedingt erforderlich, sämtliche Aufgaben zu lösen, manchmal genügt auch die besonders gute Lösung einer Aufgabe.

Der mathematische Wettstreit in der Antike



Der erste mathematische Wettstreit, von dem wir Kunde haben, wurde nach einem legendären Bericht zwischen den beiden größten griechischen Dichtern *Homer* und *Hesiod* ungefähr im achten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung ausgetragen. Bei einer Bestattungsfeierlichkeit in Chalkis[1]) legte *Hesiod* seinem Rivalen folgende Frage vor: „Weißt du zu sagen, wieviel Volks die Atriden[2]) vormals gegen Ilion)[3] führten?" *Homer* antwortete mit einem Rechenexempel folgendermaßen:

„Fünfzig an Zahl gab's Feuer im Heer, an jeglichem staken fünfzig Spieße, es schmorten an jeglichem fünfzig Braten, dreimal dreihundert Mann aber speisten von jeglichem Braten." Das Ergebnis dieser für die damalige Zeit ziemlich schwierigen Multiplikationsaufgabe lautet: Einhundertzwölf Millionen fünfhunderttausend Mann.

Bei einer anderen Leichenfeier soll *Hesiod* seinen Gegner nach dem Alter der Baumnymphen gefragt haben. Das Zahlenrätsel hat folgenden Wortlaut: „Neun der Geschlechter von Menschen, die hoch in die Jahre gelangten, lebt die geschwätzige Krähe, der Hirsch vier Alter der Krähen, dreimal durchdauert der Rabe des Hirschen Alter, der Phönix[4]) lebt neun Alter des Raben und die Nymphen zehn Alter des Phönix."

Nimmt man das Alter des Menschen zu 70 Jahren an, so ergibt sich das Alter der Nymphen zu

$$70 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 10 = 680400 \text{ Jahren.}$$

Bei den Olympiaden selbst wurden, so weit wir unterrichtet sind, keine mathematischen Wettkämpfe ausgetragen. Jedoch wurden bei den Gastmählern, die im Anschluß an die sportlichen Wettkämpfe zu Ehren der Sieger stattfanden, vielfach mathematische Wettkämpfe veranstaltet. Dabei wurde folgende Ordnung eingehalten: Der das Präsidium führende Symposiarch[5]) stellte eine in Versen gekleidete Rechenaufgabe; der erste, der die richtige Lösung in Versen zu geben vermochte, hatte nun seinerseits das Recht, eine weitere Aufgabe zu stellen. Es wurden im allgemeinen nicht mehr als neun — diese Zahl ist gleich der Anzahl der Musen[6]) — Aufgaben gestellt. Wer die meisten Aufgaben richtig gelöst hatte, bekam als Sieger einen Efeukranz. Gab ein Teilnehmer eine falsche Lösung an, so mußte er einen Becher mit Salzlauge in einem Zuge leeren, während der Sieger mit einem Becher voll gewürzten Weines geehrt wurde.

An den in Griechenland bestehenden privaten und öffentlichen Schulen waren mathematische Wettkämpfe sehr beliebt. In einem Gedicht des Epigrammatikers[7]) *Metredorus* wird die Philosophen- und Mathematikerschule des Pythagoras (um 550 v. d. Z.) ausdrücklich als *Ringschule des Geistes* (Palaestra ingenii) bezeichnet. Der aus der Schillerschen Ballade bekannte Tyrann *Polykrates von Samos*[8]) soll einstmals bei einem Gastmahl den berühmten *Pythagoras* gefragt haben, wieviel Schüler er habe. Der legendäre *Pythagoras* soll mit einem in Versen abgefaßten Rechenexempel geantwortet haben: „Ich will es sagen dir, o Polykrates. Siehe, die Hälfte treibet die treffliche Mathematik, dagegen ein Viertel mühet sich um die Natur, die unsterbliche, aber das Siebtel gänzliches Schweigen befolgt, im Herzen die Lehre bewahrend. Zähl' drei Frauen hinzu, aus denen Theano hervorragt, soviel leite zu Priestern ich an der pierischen Musen." Für uns bietet diese Aufgabe keine Schwierigkeiten. Wir finden aus der Gleichung $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$ die Lösung $x = 28$.

Der König *Hieron II. von Syrakus* veranstaltete an seinem Hof im Jahre 248 v. d. Z. einen mathematischen Wettstreit. Wie weit der am Hofe *Hierons* lebende *Archimedes* als Aufgabensteller oder Schiedsrichter an diesem Wettkampf beteiligt war, können wir nicht mehr feststellen. Wir wissen nur, daß an dem Wettstreit auch Erwachsene teilnahmen und daß derselbe ein unrühmliches Ende fand, indem er in eine wüste Prügelei der Teilnehmer ausartete. *Hieron* verbot deshalb Wettkämpfe dieser Art.

Einen ungefähren Begriff von den bei mathematischen Wettkämpfen gestellten Aufgaben geben uns die mathematischen Epigramme der griechischen Anthologie[9]). In dieser Sammlung stehen auch 47 arithmetische Rätselaufgaben von der Art, wie sie bei Symposien[10]) in geistigen Wettkämpfen gegeben wurden. Das vermutlich auf den Mathematiker *Heron von Alexandria* (1. Jh. v. d. Z.) zurückgehende Epigramm diente als Muster für die noch um die Jahrhundertwende (1900) in den mathematischen Schulbüchern auftauchenden Brunnen- oder Röhrenaufgaben: „Vier Springbrunnen es gibt. Die Zisterne anfüllet der erste täglich, der andere braucht zwei Tage dazu, und der dritte drei Tage, und der vierte gar vier Tage. Welche Zeit nun brauchen zugleich sie?" Aus der Gleichung $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{x}$ ergibt sich $x = \frac{12}{25}$ Tage. Ein zweites Epigramm erinnert an die berühmte Kronenaufgabe des *Archimedes* (auf Grund dieser Aufgabe soll *Archimedes* das Gesetz über den scheinbaren Gewichtsverlust von festen Körpern in Flüssigkeiten entdeckt haben): „Schmied' mir die Krone und menge das Gold mit Kupfer zusammen, füg' auch Zinn noch hinzu samt sorglich bereitetem Eisen. Sechzig der Minen sie hab' an Gewicht. Zwei Drittel der Krone wiege das Gold mit dem Kupfer gemengt; drei Viertel dagegen Gold mit dem Zinn im Gemisch; drei Fünftel betrage das Gold noch, wenn du es fügst zu dem Eisen. Wohlan! Nun sage mir pünktlich, was du an Gold mußt nehmen und Kupfer, zu treffen die Mischung; wieviel Minen an Zinn; auch nenne die Masse des Eisens, das du zu schmieden vermagst von sechzig der Minen die Krone." (Eine Mine = 437 Gramm.) Die Krone enthielt 30,5 Minen Gold; 9,5 Minen Kupfer; 14,5 Minen Zinn; und 5,5 Minen Eisen.

Eine Aufgabe mit mythologischem[11]) Einschlag enthält folgendes Epigramm: „*Eros* (Amor) beklagte sich einst bei seiner Mutter *Aphrodite:* Wegschleppen mir die Musen von meinen Äpfeln: *Kleio* das Fünftel mir nahm; *Euterpe* das Zwölftel der Äpfel; aber das Achtel *Thalia,* die hehre; das Zwanzigstel dann noch packte *Melpomene* auf; *Terpsichore* stahl mir das Viertel; doch ein Siebtel drauf griff *Erato* sich zu dem Anteil; aber *Polymnia* hat auch 30 Äpfel geraubt, 120 erhaschte *Urania, Kalliope* nahm sich 300 Stück. Nur fünfzig ließen die Musen mir übrig. Wieviele Äpfel hatte ich zuvor?" Antwort: *Eros* besaß 3360 Äpfel.

Ein Rätsel, das kaum mathematische Überlegung erfordert, stammt von dem Weltweisen *Kleobulos* (ca. 600 v. d. Z.). „Vater ist einer, der Kinder sind zwölf, von diesen zählt jedes wiederum zweimal dreißig, doch zweifach beschaffen ihr Aussehen. Weiß sind die einen zu schauen, die anderen schwarz, aber beide sind sie unsterblich zwar, doch schwinden sie alle dahin." Antwort: Das Jahr, 12 Monate, 30 Tage und 30 Nächte.

Als letztes Beispiel aus dem Altertum möchte ich anführen: *Frage:* Trefflichster Kündiger der Zeit, welch' Teil ist des Tages verlaufen? *Antwort:* Nimm des Verlaufes zwei Drittel; es bleibt dann doppelt so viel noch.

Lösung: Der Tag wurde in 12 Stunden eingeteilt. Vom ganzen Tag seien noch zweimal $\frac{2}{3}$ des verlaufenen Tages übrig. Ist x der bis zum Zeitpunkt der Frage vergangene Teil des Tages, so ergibt sich aus der Gleichung $x + \frac{4}{3}x = 12$ die Lösung $x = 5\frac{1}{7}$ Stunden.

M. Otto

Worterklärungen:

1 Chalkis: Kleinstadt auf der griechischen Insel Evboia

2 Atriden: griechischer Volksstamm

3 Ilion (Troja): bis ins 4. Jahrtausend zurückreichende befestigte Stadt nahe der Nordwestküste Kleinasiens

4 Phönix: ägyptischer Sagenvogel, der sich alle 500 Jahre selbst verbrannte und aus der Asche verjüngt hervorging

5 Symposiarch: der das Gespräch Leitende

6 Musen: in der griechischen Sage neun Schutzgöttinen der Künste (später der Wissenschaften), Töchter des Zeus

7 Epigramm: durch kurz und prägnant ausgedrückte Gedanken, Gefühle und Stimmungen charakterisiert es einen bestimmten Gegenstand (Person, Ereignis u. a.)

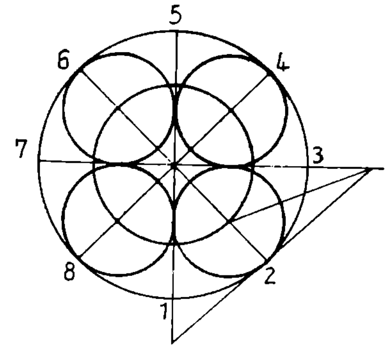
8 Polykrates von Samos: gekreuzigt 522 v. u. Z., etwa 538 Tyrann von S., einer der mächtigsten Herrscher, förderte die Dichtkunst

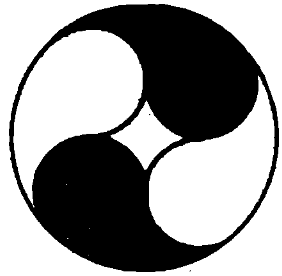
9 Anthologie: Blütenlese; bunte Sammlung meist epigrammatischer Dichtungen aus einem Zeitraum von etwa sechs Jahrhunderten; berühmte Namen wie Sappho, Alkaios, Pindar, Theokrit u. a. werden als Verfasser dieser Epigramme genannt

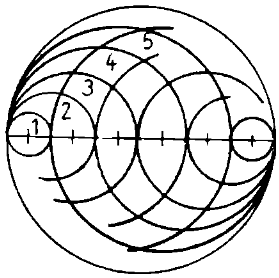
10 Symposion: altgriechisches Trinkgelage nach der Hauptmahlzeit mit zwanglosen Gesprächen (oft über ein bestimmtes Thema), Symposium (Bedeutung heute): Bezeichnung für eine fachwissenschaftliche Tagung

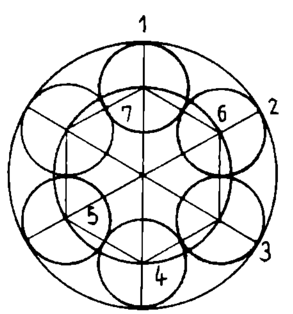
11 mythologisch: überlieferte, bildhafte Vorstellung vom Entstehen und der Bedeutung religiösen Kults, vom Ursprung der Welt, der Menschen, der Götter

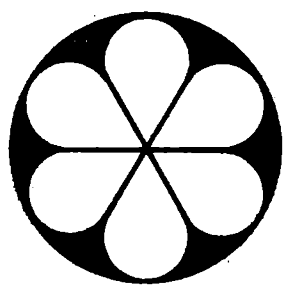
Mit Zirkel und Zeichendreieck

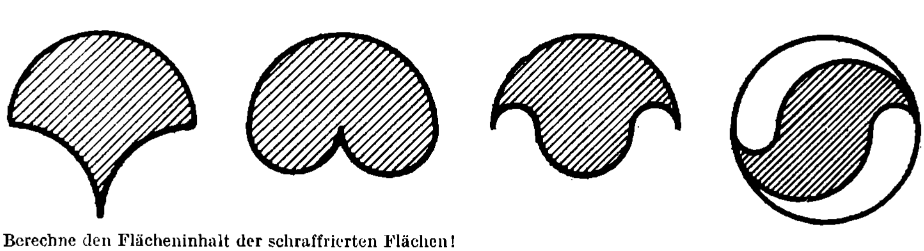




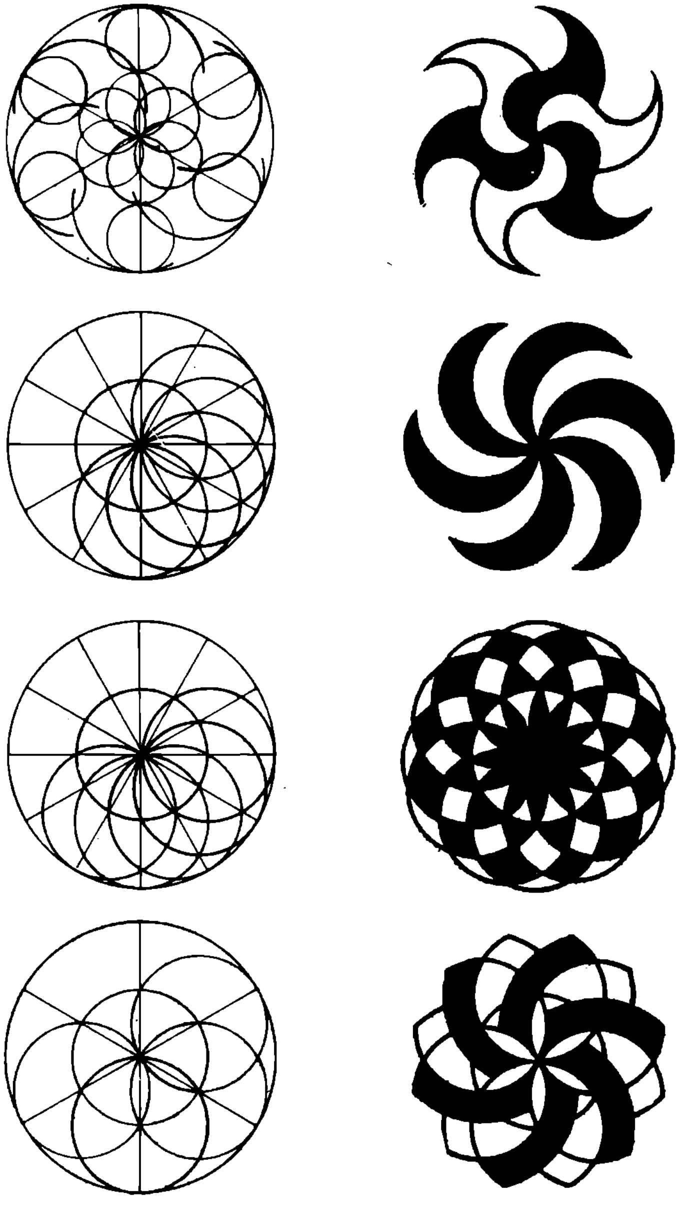


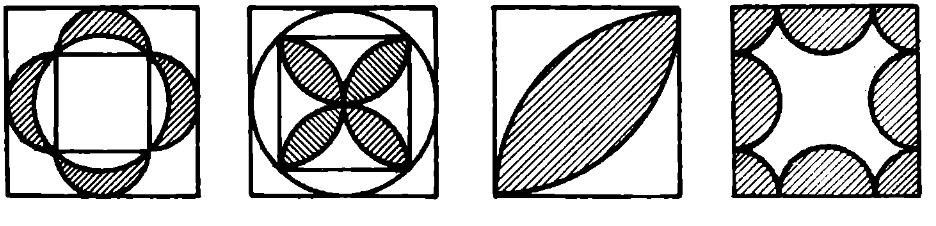




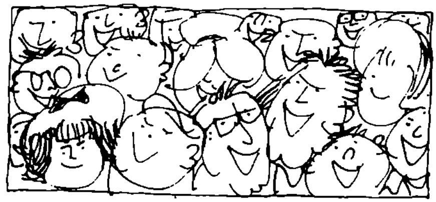


Berechne den Flächeninhalt der schraffierten Flächen!



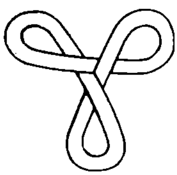


In freien Stunden
alpha heiter



Flax stellt eine Aufgabe . . .

„Krümel, ich hab' Dir ein *unendliches Band* aufgezeichnet! Schau Dir's genau an! Nimm ein leeres Blatt Papier und zeichne dieses Band — natürlich aus dem Kopfe — nach! Mal sehen, ob Du eine gute Beobachtungsgabe hast!"



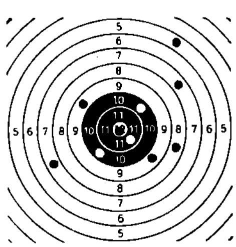
Krümel revanchiert sich . . .

„Flax, hier ist ein Tablett, unterteilt in 12 Felder und drei Münzen Durch einmaliges Verschieben jeder Münze um drei Felder soll erreicht werden, daß in jeder Waagerechten, Senkrechten und Diagonalen nur eine Münze liegt!"

	O		
	O		
	O		

Wer schoß die 12?

Krümel sicherte sich mit seinen vier ersten Schüssen fünfmal soviel Ringe wie mit seinem letzten Schuß. Flax erzielte mit seinen letzten vier Schüssen siebenmal soviele Ringe wie mit seinem ersten Schuß. Außerdem — das verraten wir noch — erzielte Krümel mit den



beiden ersten Schüssen genausoviel Ringe wie mit den beiden letzten.

Der junge Hirt

Ein junger Hirte ließ mit Freuden
1008 Schafe weiden,
Bis daß der Sonne letzter Strahl
Entwich aus seinem grünen Thal,
Und grauer Abend war geworden.
Jetzt führte er sie in 12 Horden,
Doch so, daß jegliche 2 mehr
Enthielt, als das nächstvor'ge Heer.
Sag', wieviel in die erste kommen,
Und jede andre aufgenommen?

Aus: „Die Wunder der Rechenkunst"
von Joh. Christ. Schäfer, Weimar, 1857

Without a Word

Each empty square requires one figure so that the working from top to bottom and from left to right is correct. BODMAS applies. D.I.B.

8	÷		+		=7
−		+		÷	
	−	6	×		=−5
×		÷		×	
	−		+	4	=
=		=		=	

(÷ diversed by — geteilt durch
× multiplied by — mal)

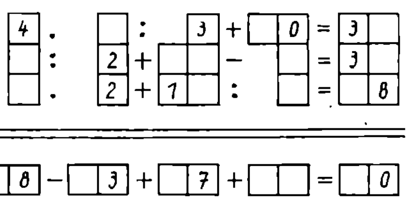
Aus: „mathematical pie" Nr. 49 (England)

Totgesagter Gelehrter

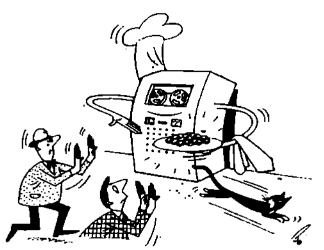
Der große Mathematiker *Richard Dedekind* (1831 bis 1916), der letzte Schüler von *C. F. Gauß*, las zu seinem nicht geringen Erstaunen in dem 1904 erschienenen Gelehrtenkalender, der unter dem Motto „Nulla dies nizi festiva" (Kein Tag ohne festliche Erinnerung) zu jedem Tag des Jahres Erinnerungsdaten vom Leben und Sterben namhafter Gelehrter verzeichnete, folgende Notiz: „4. September

1899, Todestag des bedeutenden Mathematikers *Richard Dedekind*, geb. am 6. 10. 1831 in Braunschweig." Dedekind schrieb hierauf an den Herausgeber des Gelehrtenkalenders: „4. September könnte vielleicht stimmen, aber die Jahreszahl ist sicher falsch. Vielmehr habe ich diesen Tag nach meinen Tagebuchnotizen in voller Gesundheit und sehr anregender Unterhaltung über System und Lehre mit meinem Mittagsgast und verehrten Freund *Cantor* aus Halle verlebt, der bei dieser Gelegenheit nicht mir selbst, wohl aber einem Irrtum von mir den Todesstoß versetzte." Aber auch das Todesdatum sollte sich später als unrichtig erweisen: *Dedekind* starb nicht am 4. 9., sondern am 12. 2. 1916.

mitgeteilt von M. Otto, Köthen



Aus *Matematika* Mathematische Schülerzeitschrift, VR Bulgarien, 1/68

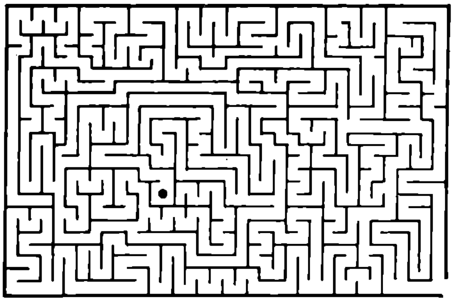


Wissenschaftler einer amerikanischen Universität ließen von einem Elektronenrechner eine ideale Speisefolge zusammenstellen, worin die für die menschliche Ernährung notwendigen Proteine, Vitamine, Salze, Fette, Mineralstoffe usw. in den erforderlichen Mengen enthalten waren. Die Laboratoriumskatze rührte das fertige Essen nicht an, den Professoren und Studenten wurde nach dem Genuß übel.

Aus: „Rechentechnik — Datenverarbeitung" 8/68

Garten mit verwirrenden Gängen

Der englische Mathematiker *W. W. Rouse Ball* (19. Jh.) hatte in seinen Garten ein Labyrinth (siehe Abb.) gebaut. Wer findet zum Punkt im Innern dieses Irrgartens?



Д в а д ц а т ь   ч е т ы р е

Очень легко число 24 выразить тремя восьмерками: $8 + 8 + 8$. Но можете ли вы сделать то же, пользуясь не восьмерками, а другими тремя одинаковыми цифрами? Задача имеет не одно решение.

Aus: 

1. Wie lautet die im Dezimalsystem geschriebene Zahl $ABCD$, wenn die Zahlen ABC, ACB, BCA, AC und B jeweils Quadratzahlen sind?

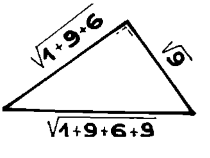
2. Wie heißt die im Dezimalsystem geschriebene Zahl $ABCB$, wenn deren Quersumme und die der Zahl ABC und die Zahl B jeweils Quadratzahlen sind?

3. Bestimme die im Dezimalsystem geschriebene Zahl $ABCB$, wenn gilt
$ABCB = AA\,(ACB + 10)$!

H. Decker, Köln

Redaktion **alpha**

wünscht allen Lesern ein gesundes, frohes und erfolgreiches



VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu den Aufgaben der DDR-Olympiade (15./19. 4. 1968)

Im folgenden machen wir unsere Leser mit den Lösungen zu den Aufgaben der VII. OJM bekannt. Die Lösungen stammen entweder von den bei der Korrektur eingesetzten Koordinatoren oder Schülern. Einige Lösungen lehnen sich an den Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission (siehe Beitrag, Heft 3/68, S. 76) an. Im Anschluß an die Lösungen werden Bemerkungen gemacht. Die Bereitstellung dieser Materialien verdanken wir den Koordinatoren. Sie werden nach den jweiligen Bemerkungen zu den Schülerlösungen genannt. Bei der Zusammenstellung des Beitrags unterstützten uns Herr Dr. Bausch und Oberstudienrat Titze. Die Begutachtung besorgte Herr Prof. Dr. Pirl. Die Aufgaben und Lösungen der Olympiadeklasse 11/12 findet der interessierte Leser in Heft 10/68 der Zeitschrift für Lehrer „Mathematik in der Schule“.

1. Aufgabe

Lösung 1 (Renate Uhlmann, BBS TPW Thalheim)

Die vorgegebenen Teilbarkeitsbeziehungen werden in der Form

$$a^{100} = 73x + 2 \text{ bzw.}$$
$$a^{101} = 73y + 69$$

geschrieben, wobei x und y (von 0 verschiedene) natürliche Zahlen sind. Aus der ersten Gleichung folgt nach Multiplikation mit a

$$a^{101} = 73ax + 2a$$

und unter Verwendung der zweiten Gleichung

$$2a = 73z + 69 \quad (z = y - ax).$$

Damit auf der rechten Seite ebenfalls eine gerade ganze Zahl steht, muß z ungerade sein. Einsetzen von $z = 2u + 1$ liefert

$$2a = 146u + 142$$
$$a = 73u + 71.$$

Wenn es also natürliche Zahlen a mit den in der Aufgabe genannten Bedingungen gibt, so lassen sie bei Division durch 73 den Rest 71.

Der überwiegende Teil der Schüler war mit den Anfängen der Kongruenzrechnung vertraut und bemühte sich, die Aufgabe mit diedem Hilfsmittel zu lösen.

Lösung 2 (Joachim Puls, 2. OS, Frankfurt/Oder)

$$a^{100} \equiv 2 \bmod 73$$
$$a^{101} \equiv 69 \bmod 73$$
$$\overline{a^{101} \equiv 2a \bmod 73}$$
$$a^{101} \equiv 69 \bmod 73.$$

Subtraktion liefert

$$0 \equiv 2a - 69 \bmod 73$$
$$2a \equiv 69 \equiv -4 \bmod 73.$$

Da 2 zu 73 teilerfremd ist, darf man durch 2 dividieren, ohne den Modul 73 zu verändern, so daß also $a \equiv -2 \equiv 71 \bmod 73$ gilt.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen

Manche Schüler argumentieren nur damit, daß 2 eine Primzahl sei. Die Primzahleigenschaft allein ist aber im allgemeinen nicht ausschlaggebend. Aus einer Kongruenz $ak \equiv bk \bmod m$ erhält man, wenn d der größte gemeinsame Teiler von k und m ist, die Kongruenz $a \equiv b \bmod \frac{m}{d}$, und lediglich im Spezialfall $d = 1$ folgt $a \equiv b \bmod m$.

In einigen Schülerlösungen wird behauptet, daß die „Division“ der Kongruenz $a^{101} \equiv 69 \bmod 73$ durch die Kongruenz $a^{100} \equiv 2 \bmod 73$ zu dem Ergebnis $a \equiv \frac{69}{2} \bmod 73$ führe. Abgesehen von der inkorrekten Ausdrucksweise ist ein solches Vorgehen nur dann gerechtfertigt, wenn zunächst definiert wird, was man unter einer Kongruenz der Form $a \equiv \frac{b}{c} \bmod m$ versteht und unter welcher Voraussetzung diese Schreibweise sinnvoll ist.

Ist nämlich c zum Modul m teilerfremd, so kann man für die Kongruenz $ca \equiv b \bmod m$ die Schreibweise $a \equiv \frac{b}{c} \bmod m$ einführen, was für die Ermittlung eines Zahlenwertes für a wenn b, c, m gegeben sind, häufig nützlich ist. Mit $ca \equiv b \bmod m$ gilt nämlich für beliebige ganze Zahlen s, t auch die Kongruenz $(c + sm)\, a \equiv b + tm \bmod m$ und damit in der so eingeführten „Bruchschreibweise“

$a \equiv \frac{b}{c} \equiv \frac{b + t\,m}{c + s\,m} \bmod m$. Für $s = 0$ und $t = 1$ erhält man dann in unserem Beispiel $a \equiv \frac{69}{2} \equiv \frac{142}{2} \equiv 71 \bmod 73$.

Die Schreibweise $\frac{b}{c} \equiv \frac{g}{h} \bmod m$ soll zum Ausdruck bringen, daß es eine ganze Zahl a mit $ca \equiv b \bmod m$ und $ha \equiv g \bmod m$ gibt. Für zu m teilerfremde Zahlen c und h ist die Existenz solcher Zahlen a stets gewährleistet (Lösung linearer Kongruenzen mit einer Unbekannten).

Zwei Kongruenzen $b \equiv g \bmod m$ und $c \equiv h \bmod m$ haben die Kongruenz $\frac{b}{c} \equiv \frac{g}{h} \bmod m$ zur Folge, wenn die Zahlen c und h zu m teilerfremd sind. (Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel $\frac{9}{7} \equiv \frac{3}{5} \bmod 12$ zeigt.) Wegen $c \equiv h \bmod m$ genügt es, wenn man von einer der Zahlen c, h weiß, daß sie zu m teilerfremd ist: denn alle Zahlen einer Restklasse mod m haben mit dem Modul m stets den gleichen größten gemeinsamen Teiler. Daher ist mit 2 auch a^{100} zu 73 teilerfremd, und der Übergang von den beiden Kongruenzen $a^{101} \equiv 69 \bmod 73$ und $a^{100} \equiv 2 \bmod 73$ zu

$$a = \frac{a^{101}}{a^{100}} \equiv \frac{69}{2} \equiv \frac{142}{2} \equiv 71 \bmod 73$$

ist möglich.

Dieser Lösungsweg erscheint also nur ohne die notwendigen Erklärungen besonders kurz, setzt die Kenntnis relativ vieler Gesetzmäßigkeiten über Restklassen voraus.

Dr. Horst Müller

2. Aufgabe

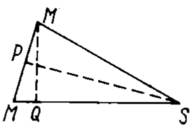
Lösung in Anlehnung an den Vorschlag der Aufgabenkommission

V_1 sei das Volumen des Behälters für die erste der oben angegebenen Lagen der Pyramide. Die Grundfläche der Pyramide fällt dann mit einer Seitenfläche des umschließenden Quaders zusammen, die Höhe der Pyramide ist gleich der Höhe des Behälters. Es gilt

$$V_1 = a^2 h \qquad (1)$$

V_2 sei das Volumen des Behälters in der zweiten Lage der Pyramide. Wir berechnen V_2 für die beiden möglichen Fälle $h \geqq \frac{a}{2}$ und $h < \frac{a}{2}$.

Fall 1: Es sei $h \geqq \frac{a}{2}$. Die Seitenfläche ABS der Pyramide liege in einer Seitenfläche des Behälters, die Kante AB sei gemeinsame Kante von Pyramide und Behälter. Wir legen eine Ebene durch die Pyramidenspitze S, die Mitte M von AB und die Mitte M' der Gegenseite zu AB im Basisquadrat der Pyramide. Die Schnittfigur dieser Ebene mit der Pyramide ist (wegen der Kongruenz der Seitenflächen der Pyramide) das gleichschenklige Dreieck SMM' mit $\overline{SM} = \overline{SM'} = s$; $\overline{MM'} = a$ (Fig.)



Die Höhe $\overline{SP}$ dieses Dreiecks ist die Pyramidenhöhe h; die Seiten $\overline{SM}$, $\overline{SM'}$ sind die Höhen der Seitenflächen der Pyramide. Wegen $h \geqq \frac{a}{2}$ gilt $\sphericalangle MSP \leqq 45°$, also $\sphericalangle MSM' \leqq 90°$.

Hieraus folgt $\overline{MQ} \leqq \overline{MS} = s$, wobei Q der Fußpunkt des Lotes von M' auf die Verbindungsgerade der Punkte M und S ist. Sei $x = \overline{M'Q}$, dann gilt:

$$V_2 = a \cdot s \cdot x \qquad (2)$$

Die Dreiecke MQM' und MSP sind (wegen der Gleichheit der Winkel) ähnlich, also $x : a = h : s$ oder

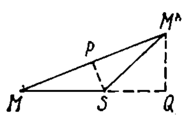
$$x = \frac{a\,h}{s}. \qquad (3)$$

Einsetzen dieser Beziehung in (2) ergibt

$$V_2 = a^2 h = V_1,$$

d. h., die Behältervolumina sind für $h \geqq \frac{a}{2}$ in beiden Lagen gleich.

Fall 2: Es sei $h < \frac{a}{2}$. Die Schnittfigur SMM' ist jetzt ein bei S stumpfwinklig gleichschenkliges Dreieck (Fig.). Wie im Fall 1 fällen wir von M' das Lot $\overline{M'Q}$ auf die Verbindungsgerade der Punkte M und S.



Wegen $\sphericalangle MSM' > 90°$ ist $s_1 = \overline{MQ} > \overline{MS} = s$.

Für das Volumen des umschließenden Quaders gilt (mit $x = \overline{M'Q}$):

$$V_2 = a\,s_1\,x$$

Wie im Fall 1 ist $x = \frac{a\,h}{s}$; demzufolge

$$V_2 = a^2 h \cdot \frac{s_1}{s},$$

und wegen $\frac{s_1}{s} > 1$ gilt also

$$V_2 > V_1.$$

Das Volumen ist kleiner, wenn die Grundfläche der Pyramide mit einer Seitenfläche des Behälters zusammenfällt.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen

In den von den Schülern gefundenen Lösungen wurden diese Überlegungen meist nur geringfügig abgeändert. Besonders klare und übersichtliche Darstellungen gaben *Wolfgang Birken* (EOS „Friedrich Engels", Neubrandenburg), *Hannes Handorf* (Goethe-EOS, Schwerin), *Traugott Schulmeiß* (EOS Köthen) und *Peter Oswald* (EOS Dresden-Süd). Auffällig ist, daß viele Schüler den Fall $h = \frac{a}{2}$ gesondert untersuchten.

Die einfache Ähnlichkeitsbetrachtung, die zu Formel (3) führte, wurde oft durch längere Rechnungen mit dem Satz des Pythagoras ersetzt.

So schließt man etwa im Fall 2 aus

$$x^2 + s_1^2 = a^2 \text{ und } x^2 + (s_1 - s)^2 = s^2$$

auf $\quad s_1 = \frac{a^2}{2s}$ und mit $s^2 = \frac{a^2}{4} + h^2$

auf $\quad x = \frac{a\,h}{s}.$

Für V_2 erhält man damit

$$V_2 = a s_1 x = \frac{a^4 h}{2} \frac{1}{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

und wegen $h < \frac{a}{2}$ hieraus

$$V_2 > V_1 = a^2 h.$$

Dr. Klaus Zacharias

3. Aufgabe

Lösung

Im Dreieck gilt nach dem Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha \text{ oder}$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos\alpha.$$

Setzt man diesen Term in die Gleichung (1) ein, so erhält man:

$b^2 x^2 + 2bc \cos\alpha \cdot x + c^2 = 0$. Hieraus folgt:

$$x_{1,2} = -\frac{c}{b}\left(\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}\right)$$

$$= -\frac{c}{b}\left(\cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha}\right)$$

Da $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ist, gilt $\sin\alpha > 0$ und $\sin^2\alpha > 0$.

Der Radikand ist also negativ. Die Lösungen sind demnach nicht reell.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen

Die Aufgabe ist von den meisten Schülern richtig gelöst worden. Bei der Lösung der Aufgabe wurden der Kosinussatz bzw. die Dreiecksgleichung angewandt. Bei der Anwendung der letzteren trat häufig der Trugschluß $a + b > c \rightarrow a^2 + b^2 > c^2$ auf.

Dr. Jurgis Szlaza

4. Aufgabe

Lösung 1: (Klaus Bernhardt, EOS „Otto von Guericke", Magdeburg)

Es seien c die Länge der Hypotenuse, a und b die Längen der Katheten, x und y die Größen der spitzen Winkel, die in der gewählten Reihenfolge den Katheten a und b gegenüberliegen, und A der Flächeninhalt des betrachteten rechtwinkligen Dreiecks. Dann gilt

$$\sin x + \sin y = \frac{a + b}{c} \qquad (1)$$

Den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks kann man dann mit der Formel

$$A = \frac{1}{2}\,ab \text{ bzw. } A = \frac{2\,ab}{4} \text{ berechnen.}$$

Unter Verwendung des Satzes des Pythagoras folgt

$$A = \frac{a^2 + 2\,ab + b^2 - c^2}{4} \text{ und damit}$$

$$A = \frac{(a + b)^2 - c^2}{4}.$$

Klammert man im Zähler c^2 aus, so erhält man

$$A = \frac{c^2\left[\left(\frac{a + b}{c}\right)^2 - 1\right]}{4}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man für den Flächeninhalt A des rechtwinkligen Dreiecks

$$A = \frac{c^2\left[(\sin x + \sin y)^2 - 1\right]}{4}. \qquad (3)$$

Damit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst.

Da x ein spitzer Winkel ist, gilt

$$0 < \sin 2x \leqq 1. \qquad (4)$$

Unter Verwendung der Formeln

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ und}$$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ erhält man aus (4)

$$1 < \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x \leqq 2.$$

Da $\sin x$ und $\cos x$ für spitze Winkel positiv sind, folgt

$$1 < \sin x + \cos x \leqq \sqrt{2}.$$

Da im rechtwinkligen Dreieck

$$\cos x = \sin y$$

gilt, erhalten wir schließlich die Bedingung

$$1 < \sin x + \sin y \leqq \sqrt{2}. \qquad (5)$$

Damit ist gezeigt, daß die Bedingung (5) für die Existenz eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse c und den spitzen Winkeln von der Größe x und y notwendig ist. Es muß noch gezeigt werden, daß (5) auch hinreichend ist. Letzteres erkennt man aber aus der Betrachtung der Funktion $f(x) = \sin x + \cos x$. Da $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ und die Funktion $f(x)$ stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen, daß jeder Funktionswert mit $1 < f(x) \leqq \sqrt{2}$ auf dem Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)^2$ (mindestens) einmal angenommen wird.

Damit existiert also bei vorgegebenem c zu *jeder* Sinussumme, die die Bedingung (5) erfüllt, (mindestens) ein rechtwinkliges Dreieck.

Zur Ergänzung sei noch ein zweiter Lösungsweg für den zweiten Teil der Aufgabe angegeben.

Lösung 2 (in Anlehnung an den Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission):

Die Höhe h auf der Hypotenuse kann genau alle Werte $0 < h \leqq \frac{c}{2}$ annehmen, wie man etwa durch Konstruktion des Dreiecks aus c, h zeigt. Daher kann $A = \frac{ch}{2}$ genau alle Werte $0 < A \leqq \frac{1}{4} c^2$, wegen (3) also $(\sin x + \sin y)^2 - 1$ genau alle Werte $0 < (\sin x + \sin y)^2 - 1 \leqq 1$ und somit $\sin x + \sin y$ wegen $\sin x + \sin y > 0$ genau alle Werte

$$1 < \sin x + \sin y \leqq \sqrt{2} \text{ annehmen.}$$

Man beachte, daß auf diese Weise gezeigt ist, daß (5) nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung ist.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen

Wenn von 94 Schülern immerhin 31 Schüler 6 bzw. 5 Punkte für ihre Lösungen zu dieser Aufgabe erhielten, aber nur der Schüler *Klaus Bernhardt* die volle Punktzahl (7 Punkte) erreichte, so ist das darauf zurückzuführen, daß die meisten Schüler nicht einmal erkannt hatten, daß man von der Bedingung (5) auch zeigen muß, daß sie hinreichend ist. Als weiterer wesentlicher Mangel der Schülerlösungen wäre zu erwähnen, daß die Schüler beim Betrachten von Funktionen häufig Eigenschaften derselben benutzten, die diesen Funktionen nur wegen ihrer Stetigkeit zukommen, die Schüler die Stetigkeit der Funktionen aber nicht einmal erwähnten, ja sich wahrscheinlich nicht einmal dessen bewußt waren, daß es auch unstetige Funktionen gibt.

Hans-Jürgen Sprengel

Aufgabe 5 und 6 veröffentlichen wir in Heft 1/69, d. Red.

Lösungen

276a Es seien x der erste Faktor und y der zweite Faktor.

Dann gilt wegen Zeile 3 $8x < 1000$, d. h., $x < 125$, und wegen Zeile 2 und 4 $9x \geqq 1000$, d. h., $x > 111$.

Wir erhalten also $y = 989$ und, weil das Produkt xy auf 5 endet, $\mathbf{x = 115}$.

Es gibt also genau eine Lösung, und zwar

```
115 · 989
---------
 1035
   920
   1035
---------
 113735
```

276b Wegen Zeile 1 und 3 ist der erste Faktor $x = 100a + 20 + b$, wegen Zeile 1 ist der zweite Faktor $y = 100c + 10 + d$, wobei a, b, c, d natürliche Zahlen seien, die größer als Null und kleiner als 10 sind. Man erhält

$$xy = (100a + 20 + b)(100c + 10 + d) = 100k + 10(b + 2d) + bd, \qquad (1)$$

wo k eine natürliche Zahl ist.

Wegen Zeile 2 und 5 endet die Zahl xy auf 51. (2)

Daher können nun die folgenden vier Fälle auftreten:

1. $\mathbf{b = 1, d = 1,}$
also wegen (1) $xy = 100k + 10(1 + 2) + 1 \cdot 1 = 100k + 31$ im Widerspruch zu (2).

2. $\mathbf{b = 3, d = 7,}$
also wegen (1) $xy = 100k + 10 \cdot 17 + 21 = 100k + 191$ im Widerspruch zu (2)

3. $\mathbf{b = 7, d = 3,}$
also wegen (1) $xy = 100k + 10 \cdot 13 + 21 = 100k + 151$

4. $\mathbf{b = 9, d = 9.}$
Auch dieser Fall führt zu einem Widerspruch, weil dann wegen Zeile 2 $9x < 1000$ wäre, was wegen Zeile 4 nicht möglich ist.

Daher ist nur der *Fall 3* möglich, und wir erhalten $b = 7$, $d = 3$. Daraus folgt

$$x = 100a + 27. \qquad (3)$$

Nur das Vierfache dieser Zahl x hat den Zehner 0, also ist wegen Zeile 4 $c = 4$.
Ferner gilt $4x \geqq 1000$, d. h., $x \geqq 250$
und $3x < 1000$, d. h., $x \geqq 333$.
Daraus folgt wegen (3) $x = 327$.
Wir erhalten also genau eine Lösung, nämlich

$$\begin{array}{r} 327 \cdot 413 \\ \hline 1308 \\ 327 \\ 981 \\ \hline 135051 \end{array}$$

283b Analog wie oben (beachte: 8-adisches Positionssystem!) erhält man $D = 1$ oder $D = 2$ und weiter durch Ausschaltung aller Fälle, in denen sich eine Zahl wiederholt, die einzige Lösung:

$$\begin{array}{r} 2\,3\,1\,5 \\ +\,2\,3\,1\,5 \\ +\,2\,3\,1\,5 \\ \hline 7\,1\,4\,7 \end{array}$$

283c Da im 7-adischen Positionssystem gerechnet werden soll, gilt

$$(5^3 \cdot F + 5^2 \cdot Ü + 5 \cdot N + F) \cdot 2 = 5^3 \cdot Z + 5^2 \cdot E + 5 \cdot H + N;$$

dabei sind die Buchstaben jeweils durch eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu ersetzen. Ferner ist $F \neq 0, Z \neq 0$.
Wegen $2F < 7$ ist **F gleich 1 oder 2 oder 3**.
Aus F erhält man dann N und aus N schließlich H und danach die Zahlen der folgenden Tabelle, wenn man für $Ü$ und E diejenigen Zahlen ausschließt, die bereits besetzt sind:

F	N	H	Z	Ü	E	Bemerkungen
1	2	4	3	6	5	1. Lösung: $\begin{array}{r} 1\,6\,2\,1 \\ +\,1\,6\,2\,1 \\ \hline 3\,5\,4\,2 \end{array}$
2	4	1	5	3	0	2. Lösung: $\begin{array}{r} 2\,3\,4\,2 \\ +\,2\,3\,4\,2 \\ \hline 5\,0\,1\,4 \end{array}$
3	6	5	6			nicht möglich, da $N \neq Z$.

Diese Aufgabe hat also genau zwei Lösungen.

283d Da im 6-adischen Positionssystem gerechnet werden soll, gilt

$(6^3 \cdot Z + 6^2 \cdot W + 6 \cdot E + I) \cdot 2 = 6^3 \cdot V + 6^2 \cdot I + 6 \cdot E + R$; dabei sind die Buchstaben jeweils durch eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 zu ersetzen.
Ferner ist $Z \neq 0$, $V \neq 0$.
Wegen $2 \cdot Z < 6$ erhält man $\mathbf{Z = 1}$ oder $\mathbf{Z = 2}$.
Ferner gilt $\mathbf{E = 0}$ oder $\mathbf{E = 5}$.
Denn es muß eine der folgenden Gleichungen erfüllt sein
$2 \cdot E = E$, $2 \cdot E + 1 = E$, $2 \cdot E = 6 + E$, $2 \cdot E + 1 = 6 + E$,
was nur für $E = 0$ und $E = 5$ zutrifft.

Ist $E = 0$, so gilt $2 \cdot I < 6$, also $\mathbf{I = 1}$ oder $\mathbf{I = 2}$.

Ist $E = 5$, so gilt wegen $2 \cdot 5 + 1 = 6 + 5$ $\mathbf{I = 3}$ oder $\mathbf{I = 4}$. Wir erhalten dabei die in der folgenden Tabelle angegebenen Möglichkeiten:

E	I	R	Z	W	V	Bemerkungen
0	1	2	1			nicht möglich, da $Z \neq I$
0	2	4	1	4		nicht möglich, da $W \neq R$
0	2	4	2			nicht möglich, da $Z \neq I$
5	3	0	1	1		nicht möglich, da $W \neq Z$
5	3	0	2	1	4	Lösung
5	4					nicht möglich, da $2W + 1$ ungerade und I gerade

Es gibt daher genau eine Lösung, nämlich

$$\begin{array}{r} 2\,1\,5\,3 \\ +\,2\,1\,5\,3 \\ \hline 4\,3\,5\,0. \end{array}$$

284 Die Lösung dieser Aufgaben wird im Prinzip ebenso durchgeführt wie oben; wir müssen jedoch beachten, daß es sich um verschiedene Positionssysteme handelt. Wir erhalten dann die Lösungen:

a) Im dekadischem Positionssystem:

$$\begin{array}{r} \mathrm{A\,N\,N\,A} \\ \mathrm{L\,U\,I\,S\,A} \\ \hline \mathrm{N\,E\,I\,R\,U\,T} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\,1\,1\,6 \\ 9\,7\,3\,5\,6 \\ \hline 1\,0\,3\,4\,7\,2 \end{array}$$

b) Im 7-adischem Positionssystem:

$$\begin{array}{r} \mathrm{K\,U\,R\,T} \\ \mathrm{K\,A\,R\,L} \\ \hline \mathrm{T\,R\,A\,N\,K} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,0\,3\,1 \\ 5\,2\,3\,4 \\ \hline 1\,3\,2\,6\,5 \end{array}$$

c) Im 8-adischem Positionssystem:

$$\begin{array}{r} \mathrm{K\,A\,R\,L} \\ \mathrm{G\,E\,O\,R\,G} \\ \hline \mathrm{L\,O\,K\,E\,R} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,1\,7\,4 \\ 3\,6\,0\,7\,3 \\ \hline 4\,0\,2\,6\,7 \end{array}$$

288 Lösungen der Aufgaben von Prof. Dr. rer. nat. habil. F. Kuhnert

288a x — Anzahl der Flugzeuge vom Typ F
y — Anzahl der Flugzeuge vom Typ H

$$\begin{aligned} 1000x + 500y &= 10000 \\ 3x + 2y &\leqq 35 \\ 100x + 30y &\leqq 900 \\ x &\geqq 0 \\ y &\geqq 0 \\ 8x + 5y &\to \min \end{aligned}$$

Aus dem Ansatz erhält man:

$$\begin{aligned} y &= 20 - 2x \\ 20 - 2x &\geqq 0 \\ 3x + 40 - 4x &\leqq 35 \\ 100x + 600 - 60x &\leqq 900 \\ x &\geqq 0 \\ 8x + 100 - 10x &\to \min. \end{aligned}$$

Daraus weiter

$$0 \leqq x \leqq 10 \qquad x \geqq 5 \qquad x \leqq \frac{15}{2}$$
$$x \to \max.$$

Als optimale Lösung: $x = 7$, $y = 6$. Man muß also 7 Flugzeuge vom Typ F und 6 Flugzeuge vom Typ H einsetzen, damit die Gesamtausgaben minimal werden.

288b x_i — die in der i-ten Dekade abzuerntende Fläche in ha ($i = 1, 2, 3$)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \qquad x_1 \geqq 0$$
$$x_2 \geqq 0 \qquad x_3 \geqq 0$$
$$130\,x_1 \leqq 500$$
$$(130 + 25)\,x_2 \leqq 500$$
$$(130 + 25 + 25)\,x_3 \leqq 500$$
$$130 \cdot 40 \cdot x_1 + (130 + 25) \cdot 32 \cdot x_2 + (130 + 25 + 25) \cdot 26 \cdot x_3 \ \max$$

Aus dem Ansatz erhält man:

$$x_3 = 5 - x_1 - x_2$$
$$5 - x_1 - x_2 \geqq 0$$
$$130\,x_1 \leqq 500$$
$$155\,x_2 \leqq 500$$
$$170(5 - x_1 - x_2) \leqq 500$$
$$x_1 \geqq 0 \qquad x_2 \geqq 0$$
$$5200\,x_1 + 155 \cdot 32\,x_2 + 170 \cdot 26(5 - x_1 - x_2)$$
$$\max.$$

Daraus weiter

$$x_1 + x_2 \leqq 5$$
$$x_1 \leqq \frac{50}{13}$$
$$x_2 \leqq \frac{500}{155}$$
$$35 \leqq 17\,x_1 + 17\,x_2$$
$$x_1 \geqq 0 \qquad x_2 \geqq 0$$
$$1780\,x_1 + 1440\,x_2 \ \max.$$

Grafisches Lösen ergibt:

$$x_1 = \frac{50}{13} \qquad x_2 = \frac{15}{13} \qquad x_3 = 0.$$

288c $x_1 \geqq 1 \qquad x_1 + x_2 \geqq 2$

$$\vdots$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n \qquad x_j \geqq 0$$
$$j = 1, \ldots, n$$
$$x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + \ldots + n x_n \to \min$$

Aus dem Ansatz erhält man

$$x_1 + 2\,x_2 + \ldots + n x_n = x_n + (x_n + x_{n-1}) + (x_n + x_{n-1} + x_{n-2}) + \ldots + (x_n + x_{n-1} + \ldots + x_2) + (x_n + x_{n-1} + \ldots + x_2 + x_1)$$

Da $x_n \geqq 0$, $x_n + x_{n-1} \geqq 0$, $x_n + x_{n-1} + x_{n-2} \geqq 0, \ldots x_n + x_{n-1} + \ldots + x_2 + x_1\, n$,
so ist $x_1 + 2\,x_2 + \ldots + n x_n \geqq n$.
Andererseits gilt bei $x_1 = n$, $x_2 = x_3 \ldots = = x_n = 0$:
$x_1 + 2\,x_2 + \ldots + n x_n = n$.
Folglich ist $x_1 = n$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ die gesuchte Lösung.

287 Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. H. Dallmann

a) Flüssigkeitsquerschnitt

$$F = \frac{D^2}{4}\,[\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha]\ \mathrm{cm}^2$$
$$V = F \cdot L \cdot 10^{-3}$$
$$= \frac{1}{4}\,D^2 L \cdot 10^3\,[\alpha - \sin\alpha\cos\alpha]\ \text{Liter}$$

b) $V = 5 \cdot 10^3\,[\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha]$;

$$\cos\alpha = 1 - \frac{2\,x}{D} = 1 - \frac{x}{100}$$

x	20	40	60	80
cos α	0,8	0,6	0,4	0,2
α	0,6434	0,9273	1,1592	1,3695
V	817	2236,5	3963	5867,5

x	100	120	140	160
cos α	0	—0,2	—0,4	—0,6
α	1,5708	1,7721	1.9824	2,2142
V	7854	9840,5	11745	13471

303 $a + b + c + d = 45$

$$(a + 2) = (b - 2) = 2 \cdot c = \frac{d}{2}$$

daraus folgt

$$a = a \qquad a = 8$$
$$b = a + 4 \qquad b = 12$$
$$c = \frac{a}{2} + 1 \qquad c = 5$$
$$d = 2a + 4 \qquad d = 20$$

304 $|x| > 2\,x$ gilt für alle $x < 0$ oder für x können alle negativen Zahlen stehen.

305 Frauen Männer Gesamtzahl

$$\left[\frac{35}{100}\,x\right] + \left[\frac{35}{100}\,x + 252\right] = \frac{100}{100}\,x$$
$$x = 840$$

oder 252 Männer $\mathrel{\widehat{=}}$ 30%
840 Beschäftigte $\mathrel{\widehat{=}}$ 100%

306

	Rolf	Inge	
damals	$2x$	x	$5x = 45$
heute	$3x$	$2x$	$x = 9$

307 $n(n - 1) = s$

$$14 \cdot 13 = s$$
$$182 = s.$$ Es sind

182 Spiele in der Fußballoberliga notwendig.

309 Der Sohn sei n Jahre alt; dann ist der Vater $4 \cdot n$, beide Personen sind zusammen $n + 4n = 5n$ Jahre alt. Aus $50 < 5n < 60$ folgt $10 < n < 12$; es gilt somit $n = 11$.
Der Sohn ist 11, der Vater 44 Jahre alt.

310 Die Summe aus den beiden Zahlen ist um soviel größer wie die Differenz kleiner ist als die größere der beiden Zahlen. Aus dieser Überlegung ergibt sich folgender Lösungsweg:

$$121 + 45 = 166; \quad 166{:}2 = 83.$$

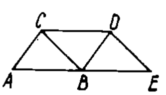
Die gegebene Zahl lautet 83.

311 Für eine Belegung der Buchstaben a, h, l und p kommen nur die Zahlen 2, 3, 5 und 7 in Frage. Die Quersumme ergibt nur dann eine Primzahl, wenn die Primzahl 2 in ihr zweimal vorkommt, also $2 + 2 + 3 + 5 + 7 = 19$. Damit gilt $a = 2$. Weiterhin kann „*al*" als Primzahl nur 23 und „*aph*" nur 257 lauten.
Also ist für *alpha* die Zahl 23572 zu setzen.

312 Wir addieren alle Zahlen und erhalten so die doppelte Anzahl der von allen drei Klassen insgesamt gesammelten Flaschen; denn es wiederholt sich jede Größe. $(790 + 970 + 920 = 2680)$ Nun dividieren wir die Summe durch 2. $(2680 : 2 = 1340)$
Wir erhalten dann die Anzahl Flaschen, die von den Schülern der drei Klassen insgesamt zusammengetragen wurden.
Aus $1340 - 790 = 550$ folgt: die Schüler der Klasse 5c sammelten 550 Flaschen.
Aus $1340 - 970 = 370$ folgt: die Schüler der Klasse 5a sammelten 370 Flaschen.
Aus $1340 - 920 = 420$ folgt: die Schüler der Klasse 5b sammelten 420 Flaschen.
Aus $1340 \cdot 0{,}05 = 67$ folgt, daß der Betrag von 67 M dem Solidaritätskonto gutgeschrieben wurde.

313 Das Dreieck ABF ist Vertreter einer Klasse von gleichschenkligen Dreiecken, die genau 5 Stück umfaßt.
Das Dreieck KJE ist Vertreter einer anderen Klasse von Dreiecken, die genau 5 Stück umfaßt.
Das Dreieck CDA ist Vertreter einer dritten Klasse von Dreiecken, die genau 5 Stück umfaßt.
Das Dreieck CHB ist Vertreter einer vierten Klasse von Dreiecken, die genau 10 Stück umfaßt.
Das Dreieck ECD ist Vertreter einer fünften Klasse von Dreiecken, die genau 5 Stück umfaßt.
Das Dreieck EFC ist Vertreter einer sechsten Klasse von Dreiecken, die genau 5 Stück umfaßt.
Die Figur enthält somit 35 verschiedene gleichschenklige Dreiecke.

314 Man verbindet einen frei wählbaren Punkt C, der nicht auf der Geraden AB liegt,



und verbindet ihn mit den Endpunkten A und B der gegebenen Strecke. Durch B zeichnet man die Parallele zu $\overline{AC}$ und durch C die Parallele zu $\overline{AB}$; der Schnittpunkt dieser Parallelen sei der Punkt D. Nun ist durch D die Parallele zu $\overline{BC}$ zu konstruieren; sie schneidet die über B hinaus verlängerte Strecke $\overline{AB}$ im Punkte E so, daß $\overline{AB} = \overline{BE}$ gilt.
Begründung: Das Viereck $ABDC$ ist nach Konstruktion ein Parallelogramm; folglich gilt $\overline{AB} = \overline{CD}$. Das Viereck $BEDC$ ist aus den gleichen Gründen ebenfalls ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{BE} = \overline{CD}$. Aus $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BE} = \overline{CD}$ folgt $AB = BE$.

315 Es gilt der Satz: Das Produkt aus dem k. g. V. und dem g. g. T. zweier Zahlen ist gleich dem Produkt dieser beiden Zahlen.
Folglich gilt: $x \cdot 4725 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 45$, d. h., $x = 495$. Die zweite Zahl lautet 495.

316 Es gilt der Satz: *Die Summe der drei Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 360°.*
Es seien α', β' und γ' die drei Außenwinkel des Dreiecks ABC; dann gilt

$$\alpha' = \gamma' - 29^\circ$$
$$\beta' = \gamma' - 49^\circ$$
$$\gamma' = \gamma'$$

also $\alpha' + \beta' + \gamma' = 3\gamma' - 78^\circ = 360^\circ$, d. h., $3\gamma' = 438^\circ$, $\gamma = 146^\circ$.
Die Innenwinkel des Dreiecks ABC betragen $\alpha = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$, $\beta = 180^\circ - 97^\circ = 83^\circ$ und $\gamma = 34^\circ$.

W(6)317 Die drei Zeilen seien mit a, b und c, die drei Spalten mit d, e und f gekennzeichnet. Die drei Spalten lassen sich auf sechsfache Weise anordnen:

d e f, d f e, e d f, e f d, f d e, f e d.

Außerdem lassen sich die Zeilen auf sechsfache Weise anordnen:

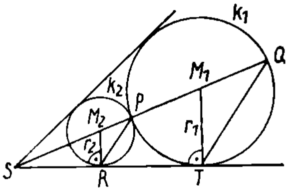
a b c, a c b, b a c, b c a, c a b, c b a.

Darüberhinaus darf man die Zeilen gegen die Spalten austauschen. Es gibt also $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ verschiedene Anordnungen; dabei ist die gegebene Anordnung mit eingeschlossen.

W(6)318 Aus $1 + 7 = 8$ folgt: die Ziffer an der Zehnerstelle im Dividenden ist eine 8.
Aus 28 — *7 = *1 folgt $28 - 17 = 11$.
Aus 11*:** = ** folgt: die Ziffer an der Zehnerstelle muß im Divisor und im Quotienten eine 1 sein.
Schließlich finden wir die Lösung: $289 : 17 = 17$.

319 Die Mittelpunkte aller Kreise, die die Schenkel des Winkels α berühren, liegen auf der Halbierungslinie des Winkels α. Aus der nachstehenden Zeichnung ist folgendes ersichtlich:
Die Berührungsradien $\overline{M_1T}$ und $\overline{M_2R}$ stehen senkrecht auf der Geraden ST. Die Winkel

$\sphericalangle RM_2P$ und $\sphericalangle TM_1Q$ sind als Stufenwinkel an einem geschnittenen Streifen gleich groß. Die Dreiecke TQM_1 und RPM_2 sind beide gleichschenklig. Aus der Gleichheit der beiden Winkel an den Spitzen dieser Dreiecke folgt die Gleichheit ihrer Basiswinkel, d. h., $\sphericalangle QTM_1 = \sphericalangle PRM_2$. Somit sind die Ge-



raden TQ und RP zueinander parallel, sie bilden ebenfalls einen Streifen.

Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion: Wir zeichnen die Halbierungslinie des Winkels α, sie schneide den Kreis k_1 in den Punkten P und Q. Wir fällen von M_1 das Lot auf einen Schenkel des Winkels α, der Fußpunkt sei T. Wir zeichnen nun durch P die Parallele zur Geraden TQ; sie schneidet den Schenkel ST im Punkte R. Schließlich errichten wir in R die Senkrechte auf ST; sie schneidet die Halbierungslinie von α im Punkte M_2. Der Kreis um M_2 als Mittelpunkt mit dem Radius $r_2 = \overline{M_2R}$ ist dann der zu konstruierende Kreis k_2.

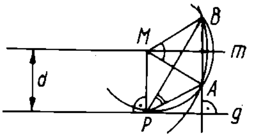
320a Die vier abgeschnittenen Papierdreiecke sind einander kongruent, denn sie stimmen jeweils in zwei Seiten und in dem von ihnen eingeschlossenen Winkel von 90° überein. Folglich besitzt das verbleibende viereckige Papierstück vier gleich lange Seiten. Da außerdem die vier abgeschnittenen Papierdreiecke gleichschenklig sind, ist jeder ihrer Basiswinkel gleich 45°. Zwei solcher Basiswinkel bilden zusammen mit einem Viereckswinkel jedes Mal einen gestreckten Winkel; deshalb sind alle Viereckswinkel rechte Winkel. Das verbleibende Papierstück hat also wieder die Gestalt eines Quadrates.

b Die abgeschnittenen vier Dreiecke lassen sich zu einem Quadrat zusammen legen, daß dem nach Abschneiden verbleibenden Quadrat kongruent ist. Also wird nach jedem Abschneiden die Ausgangsfläche auf die Hälfte verkleinert.

Nach dem ersten Abschneiden erhalten wir $\frac{1}{2}$ der Ausgangsfläche; nach dem zweiten Abschneiden erhalten wir $\frac{1}{2^2}$ der Ausgangsfläche; nach dem n-ten Abschneiden schließlich $\frac{1}{2^n}$ der Ausgangsfläche.

Wegen $2^9 = 512$ und $2^{10} = 1024$ müssen die Ecken mindestens zehnmal abgeschnitten werden, damit das schließlich entstandene quadratische Reststück einen Flächeninhalt besitzt, der weniger als ein Tausendstel der Ausgangsfläche beträgt.

321 Der Punkt P kann nicht mit den Punkten A und B in einer Geraden liegen; also existiert stets ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M, der Umkreis des Dreiecks ABP ist.



Der Mittelpunkt des Kreises k liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB. Nach dem Peripheriewinkels. gilt: $\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB$. Der Winkel $\sphericalangle AMB$ wird um so größer, je kleiner der Abstand des Punktes M von der Strecke $\overline{AB}$ ist, je kleiner also der Radius r des Kreises k ist. Den kleinsten Radius aller möglichen Kreise k, die durch A und B gehen und mit der Geraden g wenigstens einen Punkt gemeinsam haben, besitzt der Kreis, für den die Gerade g Tangente ist. Der Berührungspunkt dieses Kreises k mit der Geraden g ist also der gesuchte Punkt P. Der Punkt M ist somit der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m von $\overline{AB}$ mit dem Kreis um A mit d als Radius; dabei ist d der Abstand der parallelen Geraden m und g. P ist dann der Fußpunkt des von M auf g gefällten Lotes.

W(7)322 In einem regelmäßigen n-Eck hat jeder Innenwinkel das Maß $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$, folglich gilt:

$$\frac{2n-2}{2n} \cdot 180° - 10° = \frac{n-2}{n} \cdot 180°,$$
$$\frac{n-1}{n} \cdot 180° - \frac{n-2}{n} \cdot 180° = 10°,$$
$$\frac{180°}{n} = 10°,$$
$$n = 18.$$

Das erste Vieleck besitzt 18 Seiten; es handelt sich also um ein regelmäßiges 18-Eck.

W(7)323 Aus $\frac{x}{5} + \frac{y}{13} = \frac{77}{65}$ folgt durch Umformung $13x + 5y = 77$ bzw. $x = 6 - \frac{5y+1}{13}$. Der Zähler $5y + 1$ ist durch 13 teilbar für $y = 5, 18, 31, \ldots$

Nur für $y = 5$ wird x positiv und zwar gleich 4. Also gilt $\frac{4}{5} + \frac{5}{13} = \frac{77}{65}$.

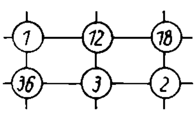
324 Da die Punkte D und D' symmetrisch bezüglich der Symmetrieachse AP liegen, gilt $\overline{AD} = \overline{AD'}$ und $\sphericalangle DAP = \sphericalangle PAD' = \alpha$. Ferner gilt $\overline{AD'} = \overline{BD'} = \overline{AD} = \overline{AB}$, daher ist das Dreieck ABD' gleichseitig und $\sphericalangle D'AB = 60°$.
Daher ist $2\alpha = 90° - 60° = 30°$, d. h., $\alpha = 15°$.
Ferner ist aus Symmetriegründen

$$\sphericalangle P'AB = \sphericalangle DAP = \alpha = 15°.$$

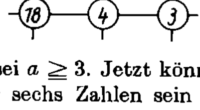
Also gilt $\sphericalangle PAP' = 90° - 2\alpha = 90° - 30° = 60°$.

Aus Symmetriegründen ist ferner $\overline{AP} = \overline{AP'}$, d. h., das Dreieck $AP'P$ ist gleichseitig, w. z. b. w.

325 Es muß gelten $abc = def = 6^3 = 216$ und $ad = be = cf = 6^2 = 36$. Wegen $ad = 36$ ist a ein Teiler von 36.
1. *Fall:* Es sei $a = 1$. Aus $ad = 36$ folgt dann $d = 36$. Wegen $def = 216$ gilt $ef = 6$. Hiernach sind die Zahlen e und f entweder die Zahlen 1 und 6 oder die Zahlen 2 und 3. Da alle sechs Zahlen voneinander verschieden sein sollen, scheidet wegen $a = 1$ das Zahlenpaar (1; 6) aus. Da schließlich f die zweitkleinste der sechs gesuchten Zahlen sein soll, muß gelten $f = 2$ und $e = 3$. Aus $be = 36$ und $cf = 36$ folgt schließlich $b = 12$ und $c = 18$. Wegen $1 \cdot 12 \cdot 18 = 216$ ist damit eine Lösung gefunden.



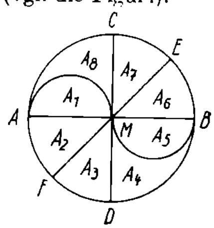
2. *Fall:* Es sei $a = 2$. Aus $ad = 36$ folgt dann $d = 18$. Weiterhin folgt aus $def = 216$ jetzt $ef = 12$. Die Zahlen e und f sind entweder 1 und 12, 2 und 6 oder 3 und 4. Da a die kleinste der sechs Zahlen sein soll, scheiden die Paare (1;12) und (2; 6) aus. Da schließlich f die zweitkleinste der sechs Zahlen sein soll, muß gelten $f = 3$ und $e = 4$. Durch analoges Weiterschließen wie oben wird die folgende zweite Lösung gefunden:



3. *Fall:* Es sei $a \geq 3$. Jetzt können, da a die kleinste der sechs Zahlen sein soll, für die Paare $(a; d)$, $(b; e)$ sowie $(c; f)$ nur die Zahlenpaare (3; 12), (4; 9) sowie (6; 6) in Frage kommen. Das Paar (6; 6) scheidet aus, da sämtliche sechs Zahlen voneinander verschieden sein sollen. Da nunmehr nur zwei Paare von Zahlen verbleiben, können keinesfalls anstelle der sechs Buchstaben sechs den Bedingungen genügende voneinander verschiedene Zahlen eingesetzt werden. In diesem Fall existiert keine weitere Lösung.

326 Wegen $abc = def$ gilt $p = abc \cdot abc = (abc)^2$. Die damit als Quadratzahl erkannte natürliche Zahl p enthält einen jeden Primfaktor in einer Potenz mit einem durch zwei teilbaren Exponenten. Wegen $ad = be = cf$ gilt analog $p = ad \cdot ad \cdot ad = (ad)^3$. Als Kubikzahl enthält die natürliche Zahl p jeden Primfaktor in einer Potenz mit einem durch drei teilbaren Exponenten. Da also in der Primfaktorzerlegung von p jeder Exponent sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar ist, ist jeder Exponent durch 6 teilbar. Also ist die Zahl p die sechste Potenz einer anderen natürlichen Zahl.

W(8)327 Es seien M der Mittelpunkt des Kreises, A und B die Berührungspunkte der kleinen Halbkreise mit dem Kreis. Ferner sei $\overline{MA} = \overline{MB} = r$. Wir zeichnen die **erste** Gerade AB. Dann errichten wir auf AB in M die Senkrechte und erhalten die **zweite** Gerade CD. Nun, konstruieren wir die Halbierungslinie des Winkels BMC und erhalten die **dritte** Gerade EF (vgl. die Figur!).



Somit ist die Kreisscheibe in acht Gebiete zerlegt worden, deren Flächeninhalte wir mit $A_1, A_2, \ldots, A_8$ bezeichnen (siehe Figur!). Bezeichnen wir den Flächeninhalt der Kreisscheibe mit $A = \pi r^2$, dann gilt

$$A_2 = A_3 = A_6 = A_7 = \frac{A}{8};$$
$$A_1 = A_5 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{8} = \frac{A}{8};$$
$$A_4 = A_8 = \frac{A}{4} - \frac{A}{8} = \frac{A}{8}.$$

Die acht Gebiete sind also einander paarweise inhaltsgleich.

An unsere neuen Leser!

Durch die Deutsche Post (zuständiges Postamt) oder dem Verlag Volk und Wissen, 108 Berlin, Lindenstr. 54a, Abtlg. Vertrieb, können noch folgende Hefte bezogen werden:

3/67, 4/67, 5/67, 6/67
1/68, 2/68, 3/68, 4/68, 5/68.

Redaktion *alpha*