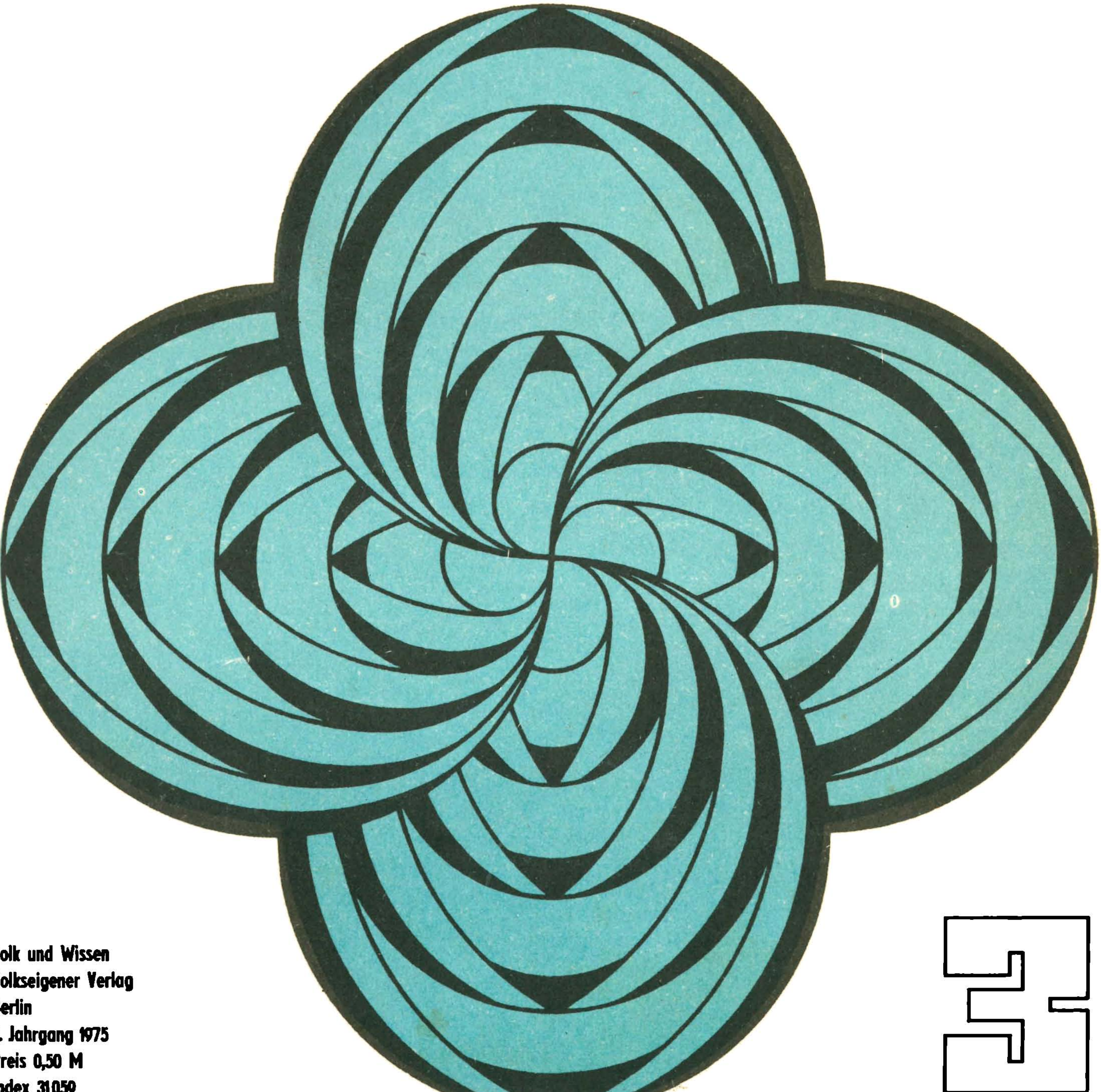
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
9. Jahrgang 1975
Preis 0,50 M
Index 31059

3

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 51); *Elemente der Mathematik,* Basel/Stuttgart (S. 52); J. Lehmann, Leipzig (S. 57); Zentralinstitut für Metallurgie, Leipzig (S. 60/61); PH Güstrow (S. 62); *Vignetten:* Heinz Jankofsky, Berlin (S. 54); Matthias Vorbeck, Berlin (S. 62); K.-H. Guckuck, Leipzig (S. 63/64); R. Schulz, Rotta (III. US); PH Dresden, Just (III. US); Tran hun Minh, Leipzig (III. US)
Typographie: H. Tracksdorf

Satz: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik
Rollenoffsetdruck: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 8. März 1975

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Lineare Systeme und ihre Beschreibung durch Operatoren

Die Wissenschaft entwickelt sich ständig weiter. Besonders der Schüler von heute, d. h., der Facharbeiter, Spezialist und Leiter von morgen, muß sich die Frage vorlegen, wie er den ständig steigenden Anforderungen gerecht werden und die anfallenden Aufgaben meistern kann. Aber so wie *Friedrich Engels* von der Renaissance sagte, „eine Zeit, die Riesen brauchte und Riesen zeugte", hat auch die Gegenwart die Hilfsmittel für die Lösung heutiger Probleme bereitgestellt.
Von einem dieser Hilfsmittel, der Systemtheorie und ihren mathematischen Methoden, soll im folgenden die Rede sein, wobei wir uns natürlich mit der Andeutung einiger elementarer Teilaspekte begnügen müssen.

1. Systeme

Zur Bewältigung vielschichtiger komplexer Probleme sind im Rahmen der *Systemtheorie* wissenschaftliche Methoden entwickelt worden, die sich in der Praxis bewährt haben. Ein *System* ist nichts anderes als ein geschlossenes Ganzes, das mit seiner Umwelt in Kontakt steht wie ein Radioapparat, eine Fabrik, eine Datenverarbeitungsanlage, ein Mondauto oder ein Sonnensystem.
Kontakt mit der Umwelt soll bedeuten, daß auf das System *Eingangssignale* wirken, die das System zu ganz bestimmten *Ausgangssignalen* veranlassen (Bild 1), wobei das Wort Signal in einem sehr allgemeinen Sinn verwendet wird. Beispielsweise handelt es sich beim Radio um elektromagnetische bzw. akustische Wellen, die die Rolle der Signale spielen, bei der Fabrik um Rohstoffe bzw. Waren, bei der Rechenmaschine um Ein- bzw. Ausgangsdaten, beim Sonnensystem um Gravitationskräfte bzw. Geschwindigkeitsänderungen des Massenmittelpunktes usw. Das klassische Beispiel für ein System ist ein Sender, der eine Nachricht überträgt.

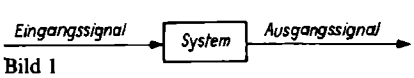


Bild 1

Die Erfolge der Systemtheorie beruhen darauf, daß man über das Verhalten eines Systems als Ganzes Aussagen machen kann, ohne *alle* Einzelheiten, aus denen das System sich zusammensetzt, genauer zu kennen. Jeder, der ein Radio- oder Fernsehgerät einschaltet, aber keine Ahnung von der Arbeitsweise dieser Systeme besitzt, nutzt jenen Sachverhalt unbewußt aus.
Das Geheimnis dieses Erfolges beim Aufbau immer umfassenderer und komplizierterer Systeme beruht darin, daß man letztere aus in ihrem Verhalten bekannten Systemen zusammensetzt, so wie ein Haus aus einzelnen Bauelementen entsteht. Dieses *Baukastenprinzip* ermöglicht es, den Überblick zu behalten bzw. zu gewinnen. Dabei beantwortet die Systemtheorie auch die Frage, *wie* gegebene Bauelemente prinzipiell zusammenzusetzen sind, um ein System mit vorgegebenen Eigenschaften zu erhalten. Bei mehreren denkbaren Möglichkeiten liefert sie darüber hinaus die günstigste Möglichkeit hinsichtlich der Erreichung zusätzlicher Eigenschaften wie niedrige Herstellungskosten, erhöhte Betriebssicherheit usw. Bei sich widersprechenden Anforderungen liefert sie einen geeigneten Kompromiß.
Es sei noch bemerkt, daß sich die Anwendung der Systemtheorie keineswegs auf die Technik und die Ökonomie beschränkt, sondern daß sie sich auch in der Biologie und der Medizin erfolgreich bewährt hat, indem man beispielsweise den Menschen als ein biologisches System auffaßt und sein Verhalten im gesunden und krankhaften Zustand untersucht, um Rückschlüsse der verschiedensten Art daraus zu ziehen.

2. Operatoren

Nach den einleitenden Bemerkungen über die Bedeutung und über einige Anwendungsmöglichkeiten der Systemtheorie soll jetzt versucht werden, einige einfache mathematische Grundlagen der Systemtheorie zu skizzieren. Zu diesem Zweck beschreiben wir das Eingangssignal durch eine Funktion $x=x(t)$ mit der Zeit t als unabhängige Veränderliche und das Ausgangssignal ebenfalls durch eine *Zeitfunktion* $f=f(t)$. Beim Beispiel des Radios stellen diese Funktionen die erwähnten Wellenschwingungen dar (Bild 2). Vier Beispiele für einfache Bauelemente sind den nächsten Bildern zu entnehmen (Bild 3 bis 6).

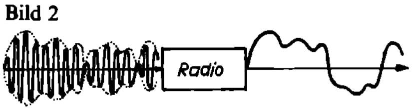
Bild 2


Bild 3

Bild 4

Bild 5

Bild 6

Zur Beschreibung der Arbeitsweise von Systemen benutzen wir sogenannte *Operatoren*, die im folgenden durch halbfette lateinische Buchstaben bezeichnet werden wie **A**, **B** usw. Der Kürze wegen sprechen wir von einem System **A**, wenn ein System mit dem Operator **A** gemeint ist. Bewirkt ein System **A** die Umwandlung eines Eingangssignals $x(t)$ in das Ausgangssignal $f(t)$, so schreiben wir

$$\mathbf{A}x(t)=f(t) \text{ oder kurz } \mathbf{A}x=f$$

und lesen: **A** angewandt auf $x(t)$ ergibt $f(t)$.
Zwei Operatoren **A**, **B** heißen *gleich*, geschrieben $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, wenn $\mathbf{A}x(t)=\mathbf{B}x(t)$ für alle nur möglichen Eingangssignale gilt. Die Stellung der Operatoren in diesen Gleichungen erinnert bewußt an eine Multiplikation, und in der Technik wird der Operator eines Systems auch *Übertragungsfaktor* genannt. Mit den soeben eingeführten Bezeichnungen läßt sich Bild 1 durch die Kurzfassung des Bildes 7 ersetzen.

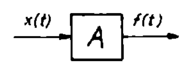
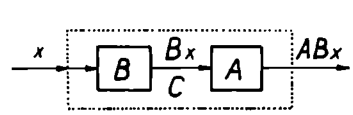


Bild 7

3. Produkte von Operatoren

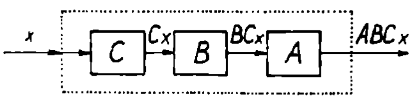
Ein Beispiel für den einleitend erwähnten Aufbau neuer Systeme aus gegebenen Bauelementen erhalten wir, wenn wir das System **C** betrachten, das durch *Reihenschaltung* aus den Systemen **A** und **B** entsteht (Bild 8). Dabei hängt das Ergebnis im allgemeinen von der *Reihenfolge* der auftretenden Teilsysteme ab, und stillschweigend wird vorausgesetzt, daß das Ausgangssignal des Systems **B** ein mögliches Eingangssignal für das System **A** ist. Bei der Reihenschaltung können wir das Ausgangssignal $f(t)$ durch $f(t)=\mathbf{C}x(t)$ oder auch durch $f(t)=\mathbf{A}(\mathbf{B}x(t))$ ausdrücken, so daß wir die Gleichung

$$\mathbf{C}x(t)=\mathbf{A}(\mathbf{B}x(t)) \text{ erhalten.}$$

Bild 8


Die zusätzlichen Klammern legen dabei die Reihenfolge der Anwendung der einzelnen Operatoren fest. Es ist üblich, den Operator **C** der Reihenschaltung als *Produkt* der Operatoren **A** und **B** (in dieser Reihenfolge) zu bezeichnen und $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ zu schreiben,
d. h. $(\mathbf{AB})x(t)=\mathbf{A}(\mathbf{B}x(t))$.
Entsprechend ist ein Produkt von drei Operatoren (in bestimmter Reihenfolge) durch
$$(\mathbf{ABC})x(t)=\mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{C}x(t)))$$
erklärt (Bild 9).

Bild 9

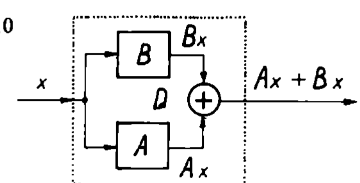


▲1▲ Dieses Produkt ist *assoziativ*, d. h., es gilt $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (Beweis!).
Bei gleichen Faktoren benutzt man auch die *Potenzschreibweise*
$\mathbf{A}^2=\mathbf{AA}$, $\mathbf{A}^3=\mathbf{A}^2\mathbf{A}=\mathbf{AA}^2=\mathbf{AAA}$ usw.

4. Summen von Operatoren

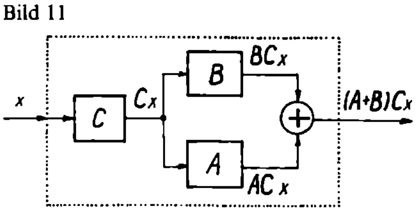
Eine weitere Möglichkeit für eine Verknüpfung gegebener Systeme bietet uns die *Parallelschaltung* (Bild 10). Hierbei wird zusätzlich ein sogenannter *Addierer* benutzt, d. h., ein System mit zwei Eingängen, das als Ausgangssignal die Summe der Eingangssignale liefert. Außerdem tritt auf der linken Seite des Schaltbildes ein *Verzweigungspunkt* auf, der angibt, daß das Eingangssignal $x(t)$ sowohl zum System **A** als auch (in Form eines Duplikats) zum System **B** geführt wird. Für den Übertragungsfaktor **D** des gesamten Systems gilt
$$\mathbf{D}x(t)=\mathbf{A}x(t)+\mathbf{B}x(t).$$
Es ist üblich, **D** als *Summe* der Operatoren **A** und **B** zu bezeichnen und $\mathbf{D}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ zu schreiben, d. h.,
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})x(t)=\mathbf{A}x(t)+\mathbf{B}x(t).$$

Bild 10



▲2▲ Die so definierte Addition von Operatoren ist *kommutativ*, d. h. für zwei Summanden gilt
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A},$$
für drei Summanden ist sie auch assoziativ, d. h., $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$,
und die Benutzung der Klammern ist hier überflüssig (warum?).
Da die in den Bildern 11 und 12 dargestellten Systeme offenbar *äquivalente* Systeme dar-

Bild 11



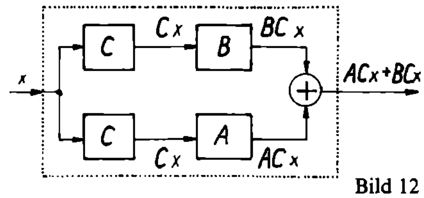


Bild 12

stellen, d. h. Systeme, die gleiche Eingangssignale mit gleichen Ausgangssignalen beantworten, erkennen wir die Gültigkeit des *rechtsseitigen Distributivgesetzes*
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}.$$
Nebenbei haben wir hierdurch ein Beispiel für *unterschiedliche Realisierungsmöglichkeiten* eines Systems mit bestimmten Übertragungseigenschaften durch unterschiedliche innere Anordnung kennengelernt. Da man bei der ersten Variante mit einem Bauelement weniger auskommt, ist sie in ihrer Herstellung billiger und somit in der Praxis zu bevorzugen.

5. Lineare Operatoren

Triviale Beispiele für Operatoren sind die bereits durch Bild 3 eingeführten *Verstärker*, d. h., Operatoren **A** mit der Eigenschaft
$$\mathbf{A}x(t)=ax(t),$$
wobei a eine feste (von **A** abhängende) Zahl und die Multiplikation auf der rechten Seite der Gleichung die gewöhnliche Multiplikation ist. Für Verstärker sind alle Gleichungen der vorhergehenden Abschnitte leicht nachprüfbar (Probe!). Eine Verstärkung im eigentlichen Sinne des Wortes liegt natürlich nur im Fall $a>1$, vor, im Fall $a=1$ läßt das System das Eingangssignal *unverändert*, im Fall $0<a<1$ liegt eine *Abschwächung* vor und im Fall $a=0$ eine *Annullierung*, d. h., das System reagiert auf kein Eingangssignal und sendet stets das Ausgangssignal $f(t)\equiv 0$. Im Fall $a=-1$ ist das System ein *Kommutator* (Bild 4), d. h., das Ausgangssignal ist gleich dem mit entgegengesetztem Vorzeichen versehenen Eingangssignal, und die noch verbleibenden Fälle $a<-1$ und $-1<a<0$ lassen sich wegen $a=(-1)|a|$ auf die vorhergehenden durch Reihenschaltung zurückführen. Sofern keine Mißverständnisse zu befürchten sind, werden wir im folgenden bei einem Verstärker den Operator **A** einfach durch die zugehörige *Zahl a* ersetzen.
Für beliebige Zahlen a, a_1, a_2 und beliebige Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ gilt nach bekannten Klammerregeln
$$a(a_1x_1(t)+a_2x_2(t))=a_1ax_1(t)+a_2ax_2(t).$$
Operatoren **A** mit der analogen Eigenschaft
$$\mathbf{A}(a_1x_1(t)+a_2x_2(t))=a_1\mathbf{A}x(t)+a_2\mathbf{A}x_2(t)$$
heißen *lineare Operatoren* und die zugehörigen Systeme *lineare Systeme*. Speziell sind also Verstärker lineare Systeme. Die Linearität eines Systems bedeutet nichts anderes als die Gültigkeit des aus der Physik (Klasse 10) bekannten *Überlagerungsprinzips*, daß sich nämlich zwei unabhängige Ursachen (unter bestimmten Bedingungen) nicht gegenseitig beeinflussen, sondern in ihren Wirkungen additiv überlagern.
Ein linearer Operator läßt sich auch noch anders charakterisieren. Ein Operator heißt additiv, wenn er für beliebige Eingangsfunktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ die Eigenschaft
$$\mathbf{A}(x_1(t)+x_2(t))=\mathbf{A}x_1(t)+\mathbf{A}x_2(t)$$
besitzt, und er heißt *homogen*, wenn er für beliebige Zahlen a und beliebige Eingangsfunktionen $x(t)$ die Eigenschaft
$$\mathbf{A}(ax(t))=a\mathbf{A}x(t) \text{ besitzt.}$$

▲3▲ *Ein Operator, der sowohl additiv als auch homogen ist, ist zugleich auch linear und umgekehrt.* Die Richtigkeit dieser Behauptung ist leicht nachprüfbar, und dem Leser sei ihr Beweis zur Einübung der Begriffe ausdrücklich empfohlen.
Aus der Definitionsgleichung für additive Operatoren folgt, wenn wir $x_1(t)=\mathbf{B}x(t)$, $x_2(t)=\mathbf{C}x(t)$ wählen, daß lineare Operatoren **A** auch das *linksseitige Distributivgesetz*
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$
erfüllen. Aus der Definitionsgleichung für homogene Operatoren folgt für $a=-1$, daß diese stets *ungerade* Operatoren sind, d. h. die Eigenschaft
$$\mathbf{A}(-x(t))=-\mathbf{A}x(t)$$
besitzen. Es gibt auch *gerade* Operatoren, d. h., solche mit der Eigenschaft $\mathbf{A}(-x(t))=\mathbf{A}x(t)$, wie beispielsweise der *Gleichrichter* (Bild 5)
$$\mathbf{A}x(t)=|x(t)|.$$
Gerade Operatoren können natürlich nicht linear sein. Ist **A** der Gleichrichter und **B** der Kommutator, so gilt $\mathbf{AB}x(t)=|x(t)|$ und $\mathbf{BA}x(t)=-|x(t)|$, so daß wir hiermit auch ein Beispiel für zwei Operatoren mit $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ kennengelernt haben, die also *nicht vertauschbar* sind.
▲4▲ Die Bedeutung linearer Systeme liegt darin, daß sie sich besonders leicht übersehen und handhaben lassen. Beispielsweise ergeben sich durch Reihen- und Parallelschaltung aus linearen Systemen stets wieder lineare Systeme oder, anders ausgedrückt, *Produkt und Summe linearer Operatoren ergeben stets wieder lineare Operatoren* (Beweis!).

6. Der Verschiebungsoperator

Um auch ein nichttriviales Beispiel für einen Operator kennenzulernen, betrachten wir den durch
$$\mathbf{V}x(t)=x(t-1)$$
definierten *Verschiebungsoperator*. Sein Name kommt daher, daß bei Anwendung dieses Operators jede Eingangsfunktion um eine Zeiteinheit nach „rechts“ verschoben wird (Bild 13). Der Verschiebungsoperator beschreibt ein System, das auf Grund vorhandener Trägheit ein ankommendes Signal erst nach einer „Schrecksekunde“ weiterleitet. Beispiele für die Anwendung des Verschiebungsoperators auf spezielle Eingangsfunktionen $x(t)$ sind $\mathbf{V}1=1$, $\mathbf{V}t=t-1$,

$$\mathrm{V}t^2=(t-1)^2=t^2-2t+1,$$
$$\mathrm{V}(2t^3)=2(t-1)^3=2t^3-6t^2+6t-2,$$
$$\mathrm{V}(t^2-1)=\mathrm{V}((t+1)(t-1))=t(t-2)=t^2-2t,$$
$$\mathrm{V}2^t=2^{t-1}=\frac{1}{2}2^t.$$

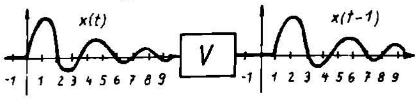


Bild 13

Wegen
$\mathrm{V}(a_1x_1(t)+a_2x_2(t))=a_1x_1(t-1)+a_2x_2(t-1)$
$=a_1\mathrm{V}x_1(t)+a_2\mathrm{V}x_2(t)$
für beliebige a_1, a_2 und $x_1(t)$, $x_2(t)$ ist der Verschiebungsoperator ein linearer Operator. Nach einer vorhergehenden Feststellung (welcher?) sind dann auch die durch mehrmalige Anwendung von V entstehenden *Potenzen*

$$\mathrm{V}^2x(t)=x(t-2),\ \mathrm{V}^3x(t)=x(t-3)$$

und allgemein für beliebige natürliche Zahlen $n\geqq 2$

$$\mathrm{V}^nx(t)=x(t-n)$$

lineare Operatoren, die die Weitergabe eines Eingangssignals um 2, 3 bzw. n Zeiteinheiten verzögern.

Durch Zusammensetzung von Verstärkern und Verschiebungsoperatoren kann man leicht weitere Beispiele für lineare Operatoren bilden, etwa $\mathrm{A}=1-2\mathrm{V}$ mit

$$\mathrm{A}x(t)=x(t)-2x(t-1).$$

Wählen wir $x(t)=t$, so erhalten wir hierbei $\mathrm{A}t=2-t$, und für $x(t)=2^t$ folgt

$$\mathrm{A}2^t=2^t-2\cdot 2^{t-1}=0$$

für alle t. Dieses Beispiel zeigt, daß es Systeme gibt, die auf gewisse Eingangssignale nicht (mit einem von 0 verschiedenen Ausgangssignal) reagieren, obwohl der Operator nicht der annullierende Operator ist. Systeme mit dieser Eigenschaft heißen *singulär*.

7. Operatoren als verallgemeinerte Funktionen

Im Lehrbuch Mathematik der 8. Klasse wird eine Funktion als eine *eindeutige Abbildung x von einer Menge D auf eine Menge W* erklärt (Bild 14), allerdings mit der ausdrücklichen Einschränkung, daß es sich bei den Mengen *D* und *W* um *Zahlenmengen* handelt. Obwohl bei der Wiederholung des Funktionsbegriffs in Klasse 9 auf diese Einschränkung *verzichtet* wird, beziehen sich auch dort alle Beispiele nur auf solche

Bild 14

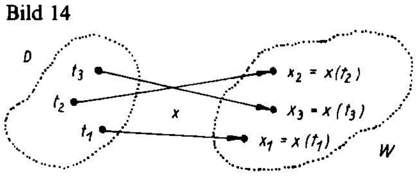
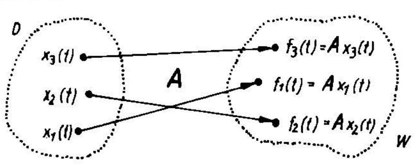


Bild 15



spezielle Funktionen. Echte Beispiele für den verallgemeinerten Funktionsbegriff sind die zuvor betrachteten Operatoren. Diese sind ja nichts anderes als *eindeutige Abbildungen, bei denen die Elemente des Definitionsbereiches D die Eingangssignale und die Elemente des Wertebereiches W die Ausgangssignale* sind (Bild 15).

Diese Elemente sind also hier keine Zahlen, sondern selbst Funktionen (im engeren Sinne als Abbildungen zwischen Zahlenmengen). Der einzige äußere Unterschied besteht darin, daß es bei den Funktionen im engeren Sinne üblich ist, die Argumente in Klammern zu setzen, während die Argumente bei den Operatoren ohne Klammern direkt hinter das Symbol für den Operator gesetzt werden, sofern die Benutzung der Klammern nicht dadurch erforderlich wird, daß das Argument sich aus mehreren Teilen zusammensetzt.

Die Beispiele für Operatoren, die wir hier behandelt haben, waren im Grunde genommen alle sehr einfach. In den Anwendungen treten natürlich wesentlich kompliziertere Operatoren auf. Wegen des elementaren Charakters dieses Beitrages können wir darauf aber nicht weiter eingehen.

Aufgaben

▲5▲ Man weise nach, daß die Systeme der Bilder 16 und 17, bei denen die dreieckigen Bauelemente Verstärker bedeuten, äquivalent sind, d. h., den gleichen Übertragungsfaktor besitzen.

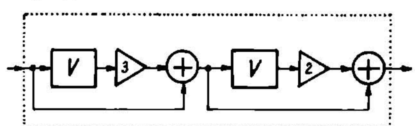


Bild 16

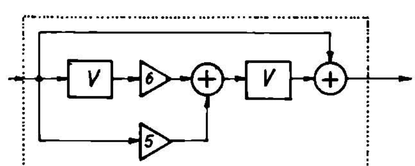


Bild 17

▲6▲ Man stelle bei dem System des Bildes 18, das eine Rückkopplung enthält, die Gleichung auf, die zwischen Ein- und Ausgangssignal besteht. A sei ein linearer Operator.

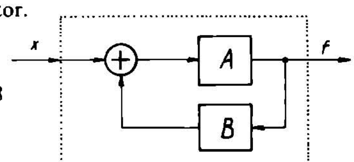


Bild 18

▲7▲ Man berechne für den Operator $\mathrm{A}=1+a_1\mathrm{V}+a_2\mathrm{V}^2$ das Ausgangssignal $f(t)$ für das Eingangssignal $x(t)=t$ und überprüfe, unter welchen Bedingungen für die auftretenden Parameter $f(t)\equiv 0$ wird.

▲8▲ Man löse Aufgabe 7 im Fall $x(t)=z^t$, wobei z eine von Null verschiedene (unbekannte) Zahl sei. *L. Berg*

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. Hans-Joachim Roßberg

▲1382▲ Auf welcher Kurve $\mathfrak{C}$ liegen die Schnittpunkte der folgenden Geradenpaare $(0<\varphi<2\pi,\ \varphi\neq\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi)$?

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi=1\cos\varphi\sin\varphi \qquad (1)$$
$$x\cos^3\varphi=y\sin^3\varphi \qquad (2)$$

Verschaffe dir eine Vorstellung vom Verlauf dieser Kurve durch Wertetabelle und durch Überlegung!

Man kann folgende Eigenschaften elementar erschließen:

a) Es gibt vier Symmetrieachsen.

b) $\mathfrak{C}$ liegt im Innern des Kreises $\mathfrak{K}$ um 0 mit Radius 1.

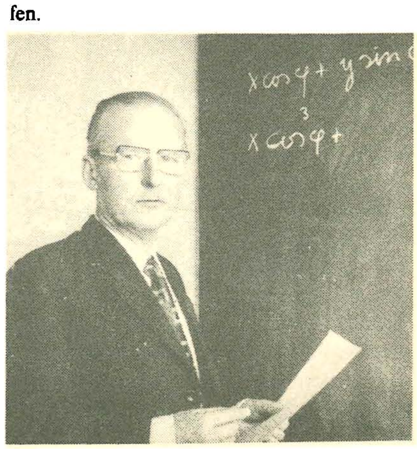
c) Die Kurvenpunkte mit minimalem Abstand von 0 liegen auf den Winkelhalbierenden des Koordinatenkreuzes.

d) In jedem Quadranten ist $\mathfrak{C}$ streng monoton.

e) Wer mit der Differentialrechnung vertraut ist, kann zeigen: Die Ableitung ist in jedem Quadranten monoton. Was folgt aus den Grenzwerten dieser Ableitung?

Kurzbiographie: Prof. Dr. rer. nat. habil. H.-J. Roßberg wurde 1927 in Döbeln als Sohn eines Mathematiklehrers geboren. Er besuchte von 1932 bis 1935 die Volksschule. Im Jahre 1946 schloß er seine Schulzeit mit dem Abitur ab, studierte fünf Jahre an der Karl-Marx-Universität Mathematik.

Nachdem er als Assistent und Oberassistent am *Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften* (1956 bis 1969, Berlin) tätig war, wurde er als ordentlicher Professor für mathematische Methoden der Operationsforschung berufen.



Emmy Noether
(1882 bis 1935)

Leseprobe

Emmy Noether hat die Algebra des 20. Jahrhunderts durchgreifend neugestaltet. Diese Leistung reiht sie ein unter die bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts überhaupt. Allen, die noch das Glück persönlicher Begegnung mit ihr hatten, ist sie in unvergeßlicher Erinnerung als Mensch voller Herzensgüte, Selbstlosigkeit, Lebensfreude und ursprünglicher Vitalität. Als sie mitten aus voller mathematischer Produktivität heraus am 14. April 1935 ganz unerwartet an den Folgen einer Tumor-Operation verstarb, herrschte unter ihren zahlreichen Freunden, Schülern und Kollegen aus aller Welt tiefe Bestürzung und Trauer.

Emmy Noether wurde als erstes Kind von *Max Noether* und seiner Frau *Ida*, geb. *Kaufmann*, am 23. März 1882 in Erlangen geboren. Beide Elternteile stammten aus vermögenden Familien von Kaufleuten und Gelehrten jüdischen Glaubens.

Der Vater *Max Noether* war seit 1875 Professor der Mathematik in Erlangen und hatte mit einer Vielzahl hervorragender Arbeiten zur *Invariantentheorie* und zum Aufbau der *algebraischen Geometrie* als selbständiger mathematischer Disziplin beigetragen. Erlangen besaß – nicht zuletzt durch das Wirken von *Max Noether* u. a. – seit der Mitte des 19. Jahrhunderts – einen guten Ruf als Pflegestätte der Mathematik. In diesem, allerdings etwas kleinstädtisch gefärbten Milieu des Studienbetriebes wuchs *Emmy Noether* heran, zusammen mit drei jüngeren Brüdern.

Ein Mädchen aber war damals, im Deutschen Kaiserreich, nicht für die Wissenschaft bestimmt, schon gar nicht für Mathematik. So durchlief *Emmy*, ein kluges und freundliches Kind, von 1889 bis 1897 nur die Klassen der *Städtischen Höheren Töchterschule* in Erlangen und meisterte mühelos die fast ausschließlich sprachlich und hauswirtschaftlich orientierte Ausbildung. Lediglich in der Klavierausbildung kam *Emmy* nicht über die Anfangsgründe hinaus.

Sogar noch der nächste Schritt ihrer Ausbildung, eine im Jahre 1900 abgeschlossene Staatsprüfung als *Lehrerin der französischen und englischen Sprache*, deutet in nichts auf die spätere, schrittmachende mathematische Leistung hin.

Dann aber erwachte in *Emmy* der Wunsch zum Universitätsstudium, zunächst als Hospitantin in Erlangen. Sie mußte das Abitur nachholen; dies geschah 1903 in Nürnberg. Danach ließ sich *Emmy Noether* in Göttingen für das Wintersemester 1903/04 immatrikulieren, darauf in Erlangen im Oktober 1904.

Für ein junges Mädchen erforderte der Entschluß zum Studium damals, unter den Bedingungen weitverbreiteter Voreingenommenheit gegen das Frauenstudium, einigen persönlichen Mut: Unter den 986 um diese Zeit in Erlangen Studierenden gab es außer *Emmy* noch insgesamt ein einziges weiteres Mädchen; im Bereich der Sektion II der Philosophischen Fakultät (dem der Naturwissenschaften) blieb *Emmy* ständige alleinige Ausnahme. Noch kurz vor dem 1. Weltkrieg gab es in Deutschland Professoren, die, obwohl das Frauenstudium gesetzlich erlaubt war, sich weigerten, mit ihren Vorlesungen zu beginnen, solange eine Frau im Hörsaal anwesend war.

Unter dem Einfluß *P. Gordans* beschäftigte sich *Emmy Noether* zunächst mit Invariantentheorie und promovierte mit einer entsprechenden Dissertation „Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form" im Jahre 1907.

Im Jahre 1915 übersiedelte *Emmy Noether* nach Göttingen, an das damals unstreitig führende mathematische Zentrum Deutschlands und eines der mathematischen Hauptzentren der Erde. Hier forschten und lehrten *Felix Klein* und *David Hilbert*. Um diese Zeit, nach den Publikationen von *A. Einstein* zur Relativitätstheorie, waren die Differentialinvarianten bevorzugter Forschungsgegenstand.

E. Noether beteiligte sich eifrig, ging *Hilbert* bei der Forschung zur Hand und führte *Hilberts* Seminar zur Invariantentheorie durch. Trotz einer ganzen Reihe von bedeutenden Arbeiten über Differentialinvarianten und trotz der Vorstöße von *Hilbert* und *Klein* scheiterte *Emmy Noether* beim ersten Versuch der Habilitation, und zwar an der Habilitationsordnung in Deutschland, die ausdrücklich nur Männer zur Habilitation zuließ. *Hilbert* soll, wie eine fast sicher verbürgte Anekdote berichtet, damit für die weibliche Kandidatin argumentiert haben, daß er nicht einsehe, wieso das Geschlecht ein Gegenargument darstelle. Schließlich, so fügte *Hilbert* hinzu, nach allem was er wisse, seien sie eine Universität und nicht eine Badeanstalt. Aber auch *Hilbert* drang nicht durch; die Habilitation *E. Noethers* konnte erst im Frühsommer 1919 erfolgen, als nach dem Zusammenbruch des Kaiserreiches die antiquierte Habilitationsordnung in diesem Punkte aufgehoben wurde.

Doch wirkten reaktionäre und antisemitische Auffassungen fort. Zwar erhielt *E. Noether* am 6. April 1922 die Berechtigung zur Führung der Dienstbezeichnung „außerordentlicher Professor" ausdrücklich ohne Besoldung und Änderung ihrer juristischen Stellung, endlich 1923 auf nochmalige Intervention einen *Lehrauftrag für Algebra* mit einem minimalen Einkommen; aber eine ordentliche Berufung an eine deutsche Universität hat *E. Noether* ebensowenig erhalten wie die Ernennung zum Mitglied einer deutschen Akademie. Mit dem Anfang der 20er Jahre begann *E. Noether* eine Reihe grundlegender Publikationen, die das Gesicht der Algebra grundsätzlich neu formen sollten.

Seit der Mitte der 20er Jahre fand *Emmy Noether* eine Reihe von hochbegabten Schülern aus aller Welt, die sich in Göttingen um sie scharten, darunter Schüler aus Frankreich, den USA, aus China, aus der Sowjetunion. Zu Anfang der 30er Jahre war ihr Ruf als einer der bedeutendsten Neugestalter der Mathematik im internationalen Maßstab unbestritten, auch wenn sich damals noch nicht alle ihrer Auffassung anzuschließen vermochten.

Die Göttinger Zeit wurde nur durch zwei kurze Gastprofessuren in Moskau (1928/29) und Frankfurt/Main (1930) unterbrochen. Über die Moskauer Zeit, die sie im Kreise ihres ehemaligen Göttinger Schülers *P. S. Alexandrow* und seiner Freunde verbrachte, hat sich *Emmy Noether* stets sehr lobend geäußert, trotz der damals noch schwierigen Lebensbedingungen nach Krieg und Konterrevolution. Im engsten Kontakt stand sie seitdem ferner mit *O. J. Schmidt*, dem bedeutenden Mathematiker, Polarforscher und Stammvater der sowjetischen algebraischen Schule, mit dem hochbegabten Algebraiker *N. G. Tschebotarjew* und *L. S. Pontrjagin* (geb. 1908). Die Göttinger Zeit war für *Emmy Noether* ausgefüllt mit Forschung und Vorlesungen, vor allem mit temperamentvollen Diskussionen über Mathematik im Kreise ihrer Schüler, die von ihr selbstironisch als „Trabanten", von anderen im liebevollen Scherz als „Noether-Knaben" bezeichnet wurden. Dies wenigstens, die relative Unabhängigkeit von Vorlesungstätigkeit und anderen Verpflichtungen, war die

Folge des Umstandes, daß sie keine Berufung erhalten hatte. Bei bescheidenem Lebensstil und großer Genügsamkeit lebte sie von ererbtem Vermögen.

Die Forderungen an ihre Schüler waren außergewöhnlich hoch; sie selbst war uneigennützig auf den Fortschritt ihrer Schüler bedacht. *Van der Waerden* sprach im Nachruf für alle ihre Schüler, wenn er so urteilt:

„Völlig unegoistisch und frei von Eitelkeit, beanspruchte sie niemals etwas für sich selbst, sondern förderte in erster Linie die Arbeiten ihrer Schüler. Sie schrieb für uns alle immer die Einleitungen, in denen die Leitgedanken unserer Arbeit erklärt wurden, die wir selbst anfangs niemals in solcher Klarheit bewußt machen und aussprechen konnten. Sie war uns eine treue Freundin und gleichzeitig eine strenge, unbestechliche Richterin."

Ganz zweifellos machte diese Art ständiger, intensiver Diskussion mit ihren „Trabanten" eines der „Geheimnisse" der Fruchtbarkeit der *Noetherschen Schule* aus. Durch ihre Schüler wurde die moderne Auffassung an fast alle deutschen Universitäten verpflanzt; ausländische Studierende und Schüler *Emmy Noethers* trugen das strukturelle Denken in die Zentren mathematischer Forschung nach Frankreich, der Sowjetunion, Japan und den USA.

Kurz nach *Emmy Noethers* Tode urteilten zwei führende Mathematiker, *H. Hopf* und *P. S. Alexandrow*, über ihre Wirkung auf den Gang der Mathematik: „Die allgemeine mathematische Einsicht *Emmy Noethers* beschränkte sich nicht auf ihr spezielles Wirkungsgebiet, die Algebra, sondern übte einen lebhaften Einfluß auf jeden aus, der zu ihr in mathematische Berührung kam." Sie selbst sah vielleicht noch klarer ihre eigene Leistung. In einem Brief urteilt sie folgendermaßen: „Meine Methoden sind Arbeits- und Auffassungsmethoden und daher anonym überall eingedrungen."

Viele noch heute lebende führende Mathematiker rechnen es sich zur Ehre an, Schüler, „Trabanten" oder Diskussionspartner von *Emmy Noether* gewesen zu sein. Sie rühmten ihre Güte und ihre Gastfreundlichkeit, die sie trotz eines gelegentlichen Ungeschicks zu entwickeln pflegte. Berühmt, geradezu sprichwörtlich waren gewaltige Schüsseln von Pudding, bei dessen Verzehr höchste Mathematik in einer Mansardenwohnung getrieben wurde. Beliebt waren auch die ausgedehnten Spaziergänge, Baden und Schwimmen im Göttinger Stadtbad. *Emmy Noether* war eine vorzügliche, leidenschaftliche Schwimmerin und Taucherin.

Als Frau war *E. Noether* wenig attraktiv, ihre Stimme war rauh. Im Umgang war sie nie sentimental, eher burschikos. Und doch ging von ihr eine spezifische Art von Anziehungskraft, eine unwiderstehliche geistige Ausstrahlung aus.

Alles in allem verlief die Göttinger Zeit für *Emmy Noether* glücklich. Sie war erfolgreich in der Forschung, sie war fröhlich im Kreise ihrer Schüler und Freunde, sie erfreute sich zunehmender Anerkennung in aller Welt. Höchstens die Tatsache, daß ihre aufwendige Mitarbeit an den „Mathematischen Annalen" keine offizielle Anerkennung fand, kränkte sie ein wenig. Mit bewundernswerter Standhaftigkeit hatte sie die traurigen Pflichten erfüllt, die sich aus dem Tode der Mutter (1915), des einen Bruders *Alfred* (1918), des Vaters (1921) und des jüngsten Bruders (1928) ergaben. Sonst aber schien sich alles harmonisch zu entwickeln. Da brach die Nacht des Faschismus über Deutschland herein. Als ehemaligem Mitglied der Sozialdemokratischen Partei Deutschlands, als überzeugter Pazifistin, vor allem aber ihrer jüdischen Herkunft wegen entzog ihr das faschistische Deutschland die Lehrbefugnis. Die gleiche, verbrecherische Verfügung traf den Mathematiker *R. Courant* und den theoretischen Physiker und Nobelpreisträger *Max Born*. Andere, zum Beispiel *O. Neugebauer, F. Landau, O. Blumenthal, P. Bernays* wurden aufgefordert, ihre Vorlesungstätigkeit einzustellen. *H. Weyl* übernahm vorübergehend das Direktorat des Mathematischen Institutes, emigrierte aber auch bald.

Helmut Hasse unternahm einige, aber sinnlose Anstrengungen, von der durch den Eingriff der Nazis zerstörten weltberühmten Göttinger mathematisch-physikalischen Schule an Substanz zu retten, was sich noch retten ließ. Aber auch ein Gutachten über *Emmy Noether* konnte keine Abhilfe schaffen; das Lehrverbot für sie blieb bestehen. Inzwischen hatte *H. Weyl* für sie in den USA die Fühler ausgestreckt; Ende Oktober 1933 fuhr sie nach den USA und übernahm eine Gastprofessur an einer Frauenhochschule, am *Bryn Mawr College* (Pennsylvanien), in relativer Nähe zu Princeton (New Jersey), wo inzwischen auch *A. Einstein* und *H. Weyl* als Professoren aufgenommen worden waren und sich ihrerseits nach Kräften für andere vertriebene Kollegen aus Deutschland bemühten.

Gegenüber Göttingen, wo *Emmy Noether* sich im Kreise anspruchsvollster und hochbegabter Schüler in ihrem Element hatte bewegen können, bedeutete das College eine gewaltige Umstellung. Mit dem ihr eigenen frohgemuten Naturell hat *Emmy Noether* diese Veränderung gemeistert. Bald fand sie sogar echte Schülerinnen im College; im nahegelegenen Princeton bildete sich ein vielversprechender Ansatz einer neuen Noether-Schule.

Kein Brief, keine private Mitteilung, nichts deutete auf eine Erkrankung *Emmy Noethers* hin, nichts auf die Absicht, sich einer Operation zu unterziehen. Die Freunde traf die Nachricht vom plötzlichen Tode an den Folgen eines chirurgischen Eingriffs wie ein Blitz aus heiterem Himmel.

Eine kleine Gruppe von Freunden aus der alten Heimat und der neuen Wirkungsstätte nahm von ihr Abschied.

Sehr poetisch ist ein südamerikanischer Nachruf auf *Emmy Noether*, deren Leistung für die Entwicklung der modernen Algebra nicht hoch genug veranschlagt werden kann. Am Schluß heißt es: „Die Verehrung, die diese bewundernswerte Frau wegen ihres Verstandes erweckt, steht an Intensität der Hochachtung und Liebe ihrer Schüler nicht nach, die sie wegen ihrer Charaktereigenschaften für sie empfinden. Ein schönes Beispiel, das man jenen vorhalten soll, die mit mittelalterlichen Kriterien heute noch von der intellektuellen und psychologischen Inferiorität der Frau sprechen." *H. Wußing*

1882	23. März, Emmy Noether in Erlangen geboren
1900	April, Prüfung als Lehrerin für französische und englische Sprache
1907	13. Dezember, Promotion zum Dr. phil. in Erlangen
1915	April, Übersiedlung nach Göttingen
1919	4. Juni, Habilitation in Göttingen
1922	6. April, Dienstbezeichnung *Außerordentlicher Professor*
1923	Sommer, Lehrauftrag für Algebra
1925	August, Abschluß des schrittmachenden Manuskriptes „Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern"
1928/29	Gastprofessor in Moskau
1930	Gastprofessor in Frankfurt/Main
1932	Juni, Abschluß des Manuskriptes „Nichtkommutative Algebren"
1932	Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis
1932	7. September, Bedeutender Vortrag „Hyperkomplexe Größen und ihre Beziehung zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie" auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Zürich
1933	April, Entzug der Lehrbefugnis durch die faschistischen Behörden
1933	Oktober, als Gastprofessor in den USA am Bryn Mawr College, Pennsylvanien
1934	Sommer; endgültige Übersiedlung nach den USA
1935	14. April, unerwarteter Tod Emmy Noethers nach einer Operation

„Notwendig und hinreichend“ ist hier zu beweisen

In alpha 5/1974 wurde ein Bericht über die XVI. Internationale Mathematikolympiade 1974 in Erfurt/Berlin gegeben. Darin fanden auch die sechs von den Teilnehmern zu lösenden Aufgaben einen Abdruck. Sicher hat dies viele alpha-Leser dazu angeregt, sich Gedanken über die Lösung einer oder mehrerer Aufgaben zu machen. Außerdem interessiert hierbei, welche Lösungsvarianten von den Teilnehmern der verschiedenen Länder geboten wurden. Im folgenden soll für Aufgabe 2 des ersten Arbeitstages einmal eine mögliche Lösung demonstriert und weitere Betrachtungen sollen daran angeknüpft werden.

Aufgabe: Es seien A, B, C die Ecken eines Dreiecks. Die Größen seiner Innenwinkel bei A, B bzw. C seien α, β bzw. γ.
Man zeige, daß es dann und nur dann auf der Strecke AB einen Punkt D gibt, für den $\overline{CD}$ das geometrische Mittel von $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ ist, wenn

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\leqq\sin^2\frac{\gamma}{2}\text{ gilt.}$$ [1]

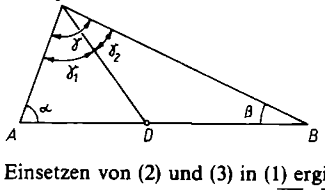
Lösung: Der Beweis ist in zwei Richtungen zu führen.
I. Im Dreieck $\triangle ABC$ ist auf der offenen Strecke AB ein Punkt D derart vorgegeben, daß die Gleichung

$$\overline{CD}^2=\overline{AD}\cdot\overline{BD} \qquad (1)$$

gilt (Voraussetzung).
Mit den in Abbildung 1 eingeführten Bezeichnungen lassen sich folgende Beziehungen ablesen:

a) aus Dreieck $\triangle ADC$ $\quad \overline{CD}=\overline{AD}\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1} \quad (2)$

b) aus Dreieck $\triangle BCD$ $\quad \overline{CD}=\overline{BD}\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma_2} \quad (3)$



Durch Einsetzen von (2) und (3) in (1) ergibt sich nach Kürzen mit dem Faktor $k=\overline{AD}\cdot\overline{BD}\neq 0$.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma_2}=1$$

oder $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\sin\gamma_1\cdot\sin\gamma_2$. Wegen

$$\sin\gamma_1\cdot\sin\gamma_2=\frac{1}{2}\left[\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos(\gamma_1+\gamma_2)\right]$$
$$\leqq\frac{1}{2}\left[1-\cos\gamma\right]=\sin^2\frac{\gamma}{2} \qquad (5)$$

folgt aus (4) unter Berücksichtigung von (5)

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\leqq\sin^2\frac{\gamma}{2} \qquad (6)$$

II. In dem vorgelegten Dreieck $\triangle ABC$ besteht die Beziehung

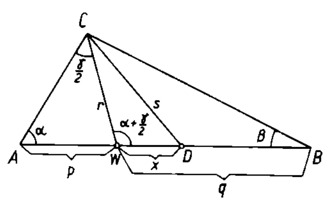
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\leqq\sin^2\frac{\gamma}{2} \qquad (7)$$

Die Winkelhalbierende von γ schneidet die Seite AB in W.
Für die weitere Rechnung werde gesetzt:

$$\overline{AW}=p,\ \overline{BW}=q,\ \overline{CW}=r \qquad (8)$$

Aus Abbildung 2 lassen sich folgende Beziehungen ablesen:

$$\sin\alpha=\frac{r}{p}\sin\frac{\gamma}{2},\ \sin\beta=\frac{r}{q}\sin\frac{\gamma}{2} \qquad (9)$$



Durch Einsetzen von (9) in (7) findet man die zu (7) äquivalente Relation

$$r^2\leqq p\cdot q \qquad (10)$$

In diesem Teil des Beweises ist zu untersuchen, ob bei Gültigkeit der Voraussetzung (10) auf der offenen Strecke AB ein Punkt D derart existiert, daß die Gleichung

$$\overline{AD}\cdot\overline{BD}=\overline{CD}^2 \qquad (11)$$

erfüllt ist. Setzt man

$$\overline{WD}=x,\ \overline{CD}=s\cdot \qquad (12)$$

so lautet Gleichung (11)

$$s^2=(p+x)\cdot(q-x). \qquad (13)$$

Durch Anwendung des Cosinus-Satzes der ebenen Trigonometrie auf das Dreieck $\triangle CWD$ findet man

$$s^2=r^2+x^2-2rx\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right) \qquad (14)$$ [2]

Aus (13) und (14) resultiert für x die quadratische Gleichung

$$2x^2+Mx+N=0 \quad\text{mit} \qquad (15)$$
$$M=p-q-2r\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\ \text{und}\ N=r^2-pq.$$

Nun wird gezeigt, daß (15) eine reelle Lösung x_0 mit $x_0\geqq 0$ und $x_0<q$ besitzt. Dies gilt offenbar für

$$x_0=\frac{-M+\sqrt{M^2-8N}}{4}. \qquad (16)$$

Wegen $M^2\geqq 0$ und $r^2-pq\leqq 0$ entsprechend der Voraussetzung (10) ist gesichert, daß der Radikand $M^2-8N\geqq M^2\geqq 0$ ist.
Die Lösung (16) von (15) ist daher eine nichtnegative reelle Zahl.
Nun ist noch zu zeigen, daß $x_0<q$ gilt. Dies beweisen wir indirekt.
Man geht von der Annahme aus

$$x_0\geqq q \qquad (17)$$

und führt dies auf einen Widerspruch. Unter Verwendung von (16) folgt aus (17)

$$-M+\sqrt{M^2-8N}\geqq 4q$$

und

$$\sqrt{M^2-8N}\geqq 4q+M \qquad (18)$$

Durch Quadrieren beider Seiten von (18) ändert sich nichts an der Orientierung dieser Ordnungsrelation, also

$$M^2-8N\geqq 16q^2+8qM+M^2$$

oder

$$0\geqq 8\left[q^2+r^2-2qr\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\right] \qquad (19)$$ [3]

Die Anwendung des Cosinus-Satzes auf das Dreieck $\triangle BCW$ liefert weiter

$$0\geqq 8\,\overline{BC}^2. \qquad (20)$$

Ausgehend von (17) wurde der Widerspruch in (20) hergeleitet. Das Gleichheitszeichen in (20) ist durch Zulassung des Gleichheitszeichens in (17) bedingt. Folglich kann auch D nicht mit B zusammenfallen. Damit ist die Existenz eines Punktes D auf der links abgeschlossenen, rechts offenen Strecke WB und damit auf der offenen Strecke AB derart gesichert, daß die Forderung (11) unter der Voraussetzung (7) erfüllt ist. Wie aus (10) und (16) weiterhin abzulesen ist, fällt D genau dann mit W zusammen, wenn in (7) das Gleichheitszeichen gilt.

Beim Korrigieren der Arbeiten zeigte sich, daß sehr verschiedenartige Lösungsvarianten geboten wurden, von denen einige skizziert werden sollen. Zum Beispiel fand von mehreren Teilnehmern der Sekantensatz Anwendung. Hierzu wurde der Umkreis k zum Dreieck $\triangle ABC$ eingezeichnet und eine Parallele g zu $e=e(AB)$ durch C gelegt. Durch Spiegelung von g an e ergibt sich die Gerade h. Schneidet diese den Umkreis k in den Punkten C_1 und C_2, so gilt nach dem Sekantensatz

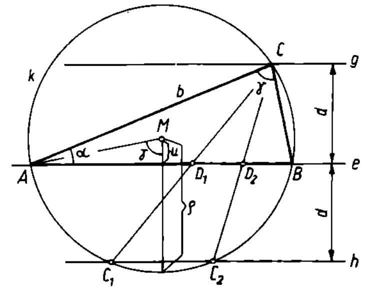
$$\overline{AD_i}\cdot\overline{D_iB}=\overline{CD_i}\cdot\overline{D_iC_i}, \quad (i=1,2)$$

wie dies aus Abbildung 3 abzulesen ist. Ferner folgt nach Konstruktion

$$\overline{CD_i}=\overline{D_iC_i}. \quad (i=1,2)$$

Daher besteht die Gleichung

$$\overline{AD_i}\cdot\overline{D_iB}=\overline{CD_i}^2.$$



Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Punktes D_i auf der offenen Strecke AB mit der geforderten Eigenschaft (1) ist also, daß die Gerade h den Kreis k reell schneidet oder in einem Punkt berührt. Eine analytische Fassung dieser Bedingung ist aus Abbildung 3 abzulesen.

Es gilt

$h_c = d = b \sin\alpha$ (Distanz der Parallelen)

$\varrho = \frac{c}{2\sin\gamma}$ (Umkreisradius)

$u = \frac{c}{2}\cot\gamma$ (Länge des Lotes von M auf e im Sinne einer orientierten Größe)

Notwendig und hinreichend für den Schnitt bzw. die Berührung von h und k ist das Bestehen der Relation

$$d \leqq \varrho - u$$

oder $b \sin\alpha \leqq \frac{c}{2\sin\gamma}(1-\cos\gamma)$.

Wegen $\frac{b}{c}\sin\gamma = \sin\beta$ und $(1-\cos\gamma) = 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$ folgt die Ungleichung

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \leqq \sin^2\frac{\gamma}{2}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Punktes D auf der offenen Strecke AB mit der geforderten Eigenschaft.

Verschiedentlich fanden auch Mittel der Analysis Verwendung. So wurde zunächst gezeigt, daß die Forderung

$$\overline{AD} \cdot \overline{BD} = \overline{CD}^2$$

äquivalent ist mit der Gleichung

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \varphi\right)$$

mit $-\frac{\gamma}{2} < \varphi < \frac{\gamma}{2}$.

Dabei ist φ der von w_γ und (CD) eingeschlossene orientierte Winkel. Die Funktion $f(\varphi) = \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \varphi\right)$ hat die Eigenschaften $f\left(-\frac{\gamma}{2}\right) = f\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 0$, $f(\varphi) > 0$ für $-\frac{\gamma}{2} < \varphi < \frac{\gamma}{2}$ und $f'(0) = 0$.

Ferner wurde nachgewiesen, daß $f(\varphi)$ an der Stelle $\varphi = 0$ ein absolutes Maximum bezüglich des betrachteten Intervalls besitzt. Damit folgt weiter

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} \geqq \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \varphi\right),$$

womit die Beweiskette geschlossen ist.

Bemerkenswert waren auch einige von den Teilnehmern der französischen Delegation gebotenen Lösungen. Trotz der durch den Lehrplan bedingten Unkenntnis über trigonometrische Funktionen und Lehrsätze der ebenen Trigonometrie wurden vollständige Beweisführungen mittels Zerlegungen in rechtwinklige Dreiecke und Diskussionen von Diskriminanten quadratischer Gleichungen vorgelegt. Fallunterscheidungen und langwierige Rechnungen machten die Lösungswege vielfach sehr schwer überschaubar.

Diese hier besprochene, von der finnischen Delegationsleitung vorgeschlagene Aufgabe war von der Jury mit 6 Punkten ausgezeichnet worden. Für den Nachweis der Richtigkeit einer Implikation wurden drei Punkte ausgegeben. Für den Nachweis der Äquivalenz beider Aussagen gab es die volle Punktzahl. Lösungsansätze wurden anteilmäßig bewertet. Für die 140 Teilnehmer ergab sich der folgende Punktespiegel:

Punkte	Teilnehmer gesamt	Teilnehmer DDR
0	25	0
1	14	1
2	5	0
3	4	1
4	20	0
5	8	1
6	64	5

Eberhard Schröder

[1]) bezüglich der Bezeichnungen von Strecken, Längen von Strecken und Winkeln wurde die in den Aufgabenstellungen angewandte Bezeichnungsweise übernommen.

[2]) x wird hier im Sinne einer orientierten Größe eingeführt.

[3]) Das beiderseitige Quadrieren der Ungleichung (18) ist erlaubt wegen

$$4q + M = 3q + p - 2r\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{q}\left[3q^2 + pq - 2rq\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\right]$$
$$> \frac{1}{q}\left[q^2 + r^2 - 2qr\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\right] > 0.$$

Kombinatorische Probleme beim Aufstellen einer Fußballmannschaft

Der Trainer einer Fußballmannschaft hat sich für das Aufstellen seiner Mannschaft nach folgendem Schema entschieden:

		1		Torwart
	2	3	4	Verteidiger
5	6	7	8	Läufer
	9	10	11	Stürmer

▲1▲ Zur Verfügung stehen dem Trainer 14 Spieler A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M und N. Dabei können A nur als Torwart, B, C, D und E nur als Verteidiger, F, G, H, I, J und K nur als Läufer und L, M und N nur als Stürmer eingesetzt werden. Insbesondere darf der Stürmer N nur als „Linksaußen“, also mit der Rückennummer 11 eingesetzt werden.

Wieviel Möglichkeiten für das Aufstellen der Mannschaft gibt es?

Dabei ist eine Mannschaftsaufstellung eine Menge von 11 geordneten Paaren $(X; n)$, wobei X der Name des Spielers (A, B, ..., N) ist, und n die ihm zugeordnete Rückennummer ist. Natürlich muß in einer solchen Menge von 11 geordneten Paaren $(X; n)$ jede der Rückennummern 1, 2,..., 10 und 11 genau einmal vorkommen und kein Name eines Spielers darf zweimal vorkommen.

▲2▲ Für das Aufstellen der Läuferreihe stehen dem Trainer 6 Spieler A, B, C, D, E und F zur Verfügung. Für den Einsatz dieser 6 Spieler gibt es folgende Beschränkung: A darf höchstens auf den Positionen 6 und 7 spielen.

Wieviel Möglichkeiten für das Aufstellen der Läuferreihe gibt es?

▲3▲ Für das Aufstellen der Läuferreihe stehen dem Trainer 5 Spieler A, B, C, D und E zur Verfügung. Dabei sollen A und B unbedingt zum Einsatz kommen und sogar auf benachbarten Positionen spielen.

Wieviel Möglichkeiten zum Aufstellen der Läuferreihe gibt es?

▲4▲ Zum Einsatz stehen dem Trainer 13 Spieler A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L und M zur Verfügung. A und B können nur als Torwart aufgestellt werden, C, D und E nur als Verteidiger, F, G, H und I nur als Läufer und J, K und L nur als Stürmer. Der Spieler M kann sowohl als Läufer als auch als Stürmer eingesetzt werden.

Wieviel Möglichkeiten für das Aufstellen der Mannschaft gibt es?

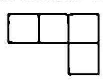
W. Träger

Rückblick auf die XVI. IMO

Es ist nun schon zu einer guten Tradition geworden, daß die DDR-Mannschaft während der IMO von jeder teilnehmenden Mannschaft eine Aufgabe für unsere *alpha*-Leser erhält. Wir danken stud. math. *Wolfgang Burmeister*, Forschungsstudent an der TU Dresden, für die Bearbeitung der gestellten Probleme.

Volksrepublik Bulgarien

Gegeben sei ein Schachbrett der Größe $m \times n$ Felder. Für welche m und n kann es in „Tetraminos" zerlegt werden?



Republik Finnland

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Die Eckpunkte bewegen sich mit gegebenen konstanten Geschwindigkeiten v_A, v_B, v_C so, daß in jedem Augenblick gilt:

$$\vec{v_A} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB},\ \vec{v_B} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC} \text{ und } \vec{v_C} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CA}.$$

Es ist der Weg zu ermitteln, den die Punkte A, B, C beschreiben.

Republik Frankreich

Gegeben sei eine Primzahl p mit folgender Eigenschaft: Für jede natürliche Zahl a besitzt die Zahl $(a+1)^p - a^p$ nur Teiler der Form $2kp+1$ $(k \in N)$.

Man zeige, daß es für eine solche Zahl p unendlich viele Primzahlen von der Form $2kp+1$ $(k \in N)$ gibt.

(*Hinweis:* Wenn es nur endlich viele Primzahlen $P_1, \ldots, P_n$ dieser Form gäbe, könnte man $a = P_1 \cdot \ldots \cdot P_n$ setzen und einen Widerspruch herleiten. Schwieriger ist zu beweisen, daß Voraussetzung und Behauptung dieser Aufgabe für alle ungeraden Primzahlen p gelten.)

Vereinigtes Königreich von Großbritannien und Nordirland

Die Bilder der Funktionen $y = bx + c$ und $y = x^3$ mögen sich in genau drei Punkten mit den Abszissen x_1, x_2, x_3 schneiden. Man zeige, daß durch die Gleichungen

$$x_1 = px_2^2 + qx_2 + r$$
$$x_2 = px_3^2 + qx_3 + r$$
$$x_3 = px_1^2 + qx_1 + r$$

drei reelle Zahlen p, q, r eindeutig bestimmt werden und gebe diese in Abhängigkeit von b und c an.

Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien

Auf einem Schachbrett der Größe $n \times n$ steht in jeder waagerechten und senkrechten Reihe genau ein Turm.

Um wieviel Felder müssen alle n Türme im Höchstfalle insgesamt rücken, damit sie auf eine vorgegebene lange Diagonale des Brettes zu stehen kommen?

Republik Kuba

Gegeben seien fünf Punkte in einer Ebene. Man zeige, daß unter allen Dreiecken, die drei dieser Punkte als Eckpunkte haben, höchstens sieben spitzwinklige vorkommen.

Mongolische Volksrepublik

Welches ist der größtmögliche Flächeninhalt für alle Dreiecke, deren Seiten a, b, c der folgenden Bedingung genügen:

$$0 < a \leqq 1 \leqq b = 2 \leqq c \leqq 3?$$

Königreich der Niederlande

Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 40°$. P sei ein Punkt im Innern dieses Dreiecks, für den $\sphericalangle PAB = 30°$ und $\sphericalangle PBA = 20°$ gilt.

Man soll den Winkel $\sphericalangle PCA$ ermitteln.

Republik Österreich

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen, die dem Intervall $\langle m, M \rangle$ der Zahlengeraden angehören. Die Summe dieser Zahlen sei Null. Man beweise die Ungleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq -n \cdot m \cdot M.$$

Volksrepublik Polen

Gegeben sei eine natürliche Zahl $n > 3$. Für jedes Paar a, b von natürlichen Zahlen mit $1 \leqq a < b \leqq n$ bilden wir die Differenz $\sqrt[b]{b} - \sqrt[a]{a}$.

Zu bestimmen ist das Produkt

$$P = \prod_{1 \leqq a < b \leqq n} (\sqrt[b]{b} - \sqrt[a]{a})$$

aller derartigen Differenzen.

Hinweis: Die Aufgabe besitzt eine überraschend einfache Lösung.

Tschechoslowakische Sozialistische Republik

Es ist die Menge aller Polynome $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d reell) mit folgender Eigenschaft gegeben:

Für alle $x \in \langle -1, 1 \rangle$ gilt $P(x) \in \langle -1, 1 \rangle$.

Man zeige, daß man eine Zahl K so angeben kann, daß $|a| \leqq K$ für alle Polynome aus dieser Menge gilt. Ferner bestimme man das kleinstmögliche K dieser Art.

Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken

Es seien a, b, c, d vier positive Zahlen, deren Produkt gleich 1 ist.

Es ist zu beweisen, daß

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + bc + cd + da + ac + bd \geqq 10$ gilt.

Sozialistische Republik Rumänien

Gegeben sei eine Zahl $\alpha > 1$.

Man beweise, daß keine für alle reellen x definierte Funktion $f(x)$ existiert, so daß $f(x) \not\equiv$ const. und

$$|f(a) - f(b)| \leqq |a - b|^\alpha$$

für alle reellen Zahlen a und b gilt.

Königreich Schweden

Gegeben sind zwei Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ positiver reeller Zahlen. Dabei gilt für jedes $n \in N$

$$a_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}} \text{ und } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Man beweise, daß beide Folgen einen Grenzwert besitzen und daß gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a_0 b_0}.$$

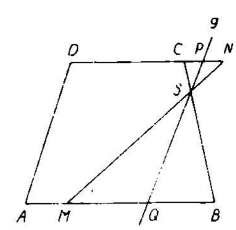
Ungarische Volksrepublik

Auf der Höhe h_c eines Dreiecks ABC sei ein Punkt P gegeben. Die Geraden AP, BP, CP schneiden die Seiten BC, CA bzw. AB in den Punkten A_1, B_1 bzw. C_1. Man beweise:

$$\sphericalangle B_1C_1P = \sphericalangle PC_1A_1.$$

Vereinigte Staaten von Amerika

Die abgebildete Figur stellt ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB} = 5$ cm und $\overline{CD} = 3$ cm dar. Ein innerer Punkt M von $\overline{AB}$, der 1 cm von A entfernt ist, wurde mit einem Punkt N der Geraden DC verbunden, wobei $\overline{DN} = 4$ cm und $\overline{CN} = 1$cm beträgt. Durch den Schnittpunkt S der Geraden BC und MN wurde eine Gerade g gezeichnet, die $\overline{CN}$ in einem inneren Punkt P und $\overline{MB}$ in einem inneren Punkt Q schneidet.



Wie lang ist die Summe $x + y$ aus den Strecken $\overline{DP} = x$ und $\overline{AQ} = y$?

Demokratische Republik Vietnam

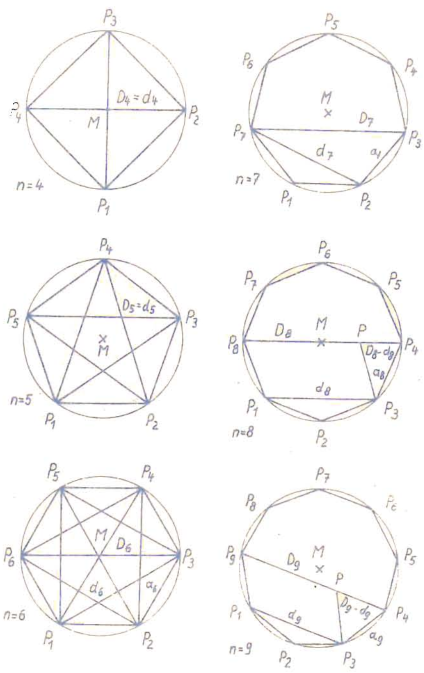
Es sei ein Polyeder gegeben, dessen Seitenflächen schwarz und weiß gefärbt wurden derart, daß je zwei weiße Seitenflächen weder eine gemeinsame Kante noch eine gemeinsame Ecke haben. Außerdem gibt es mehr weiße als schwarze Flächen.

Es ist zu beweisen, daß ein solches Polyeder keine Inkugel (d. h. eine Kugel, die sich innerhalb des Polyeders befindet und sämtliche Seitenflächen berührt) hat.

Deutsche Demokratische Republik

Jeder Teilnehmer der XVI. IMO erhielt eine Urkunde. Sie enthielt u. a. eine elegante geometrische Aufgabe aus einer DDR-Olym-

piade (in den vier IMO-Verhandlungssprachen) und als Randleiste den Lösungsweg (siehe Abb.).
Man untersuche, ob es regelmäßige n-Ecke gibt, bei denen die Differenz der Längen einer größten und einer kleinsten Diagonale gleich der Seitenlänge des n-Ecks ist.
Wenn ja, so gebe man alle natürlichen Zahlen $n (n \geq 4)$ an, für die das gilt.

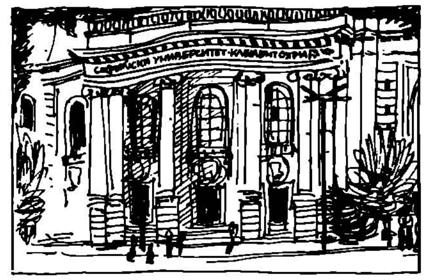


Ich war 1966 dabei

In diesem Jahr ist die VR Bulgarien zum 2. Male Gastgeber einer IMO. Im Jahre 1966 war ich als Chefredakteur der *alpha* Gast der VIII. IMO. Mit diesem Bildbericht geben wir einen Einblick in die VIII. IMO und grüßen unsere bulgarischen Freunde aufs herzlichste.

So wurden die Preise verteilt:
Die internationale Jury vergab bei der VIII. IMO in Sofia insgesamt 40 Preise. Und das sind die Preisträger:
Sowjetunion (fünf erste Preise, ein zweiter Preis, ein dritter Preis)

DDR	(3/3/–)
Ungarische VR	(3/2/1)
VR Polen	(1/4/2)
VR Bulgarien	(1/–/3)
SR Rumänien	(1/1/2)
SFR Jugoslawien	(–/2/1)
ČSSR	(–/1/2)
MVR	(ein Sonderpreis)



Die erste der gestellten Aufgaben der VIII. IMO
Bei einem mathematischen Schülerwettbewerb wurden insgesamt drei Aufgaben, A, B, C, gestellt. Unter allen Teilnehmern gab es (genau) 25 Schüler, von denen jeder wenigstens eine Aufgabe gelöst hatte. Unter den Schülern, welche die Aufgabe A nicht gelöst hatten, war die Anzahl derjenigen, welche die Aufgabe B gelöst hatten, zweimal so groß wie die Anzahl derjenigen, welche die Aufgabe C gelöst hatten. Die Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe A gelöst hatten, war um 1 größer als die Anzahl der übrigen Schüler, welche die Aufgabe A gelöst hatten. Von den Schülern, die nur eine Aufgabe gelöst hatten, hatte die Hälfte die Aufgabe A nicht gelöst. Wieviel Schüler hatten nur die Aufgabe B gelöst?

Die Universität Sofia, Austragungsort der Klausuren (Bild rechts oben)

Während die Delegationsleiter korrigierten, besuchten die Teilnehmer das Hüttenwerk Kremikowski

Die siegreiche sowjetische Mannschaft bei einem Stadtbummel durch Sofia

Auf der 1200 km langen Rundfahrt der Freundschaft (am Schwarzen Meer)

In freien Stunden alpha heiter

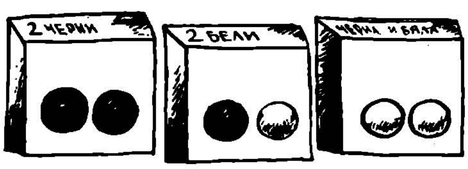
Unterhaltungsmathematik aus der VR Bulgarien

Wie viele sind es?

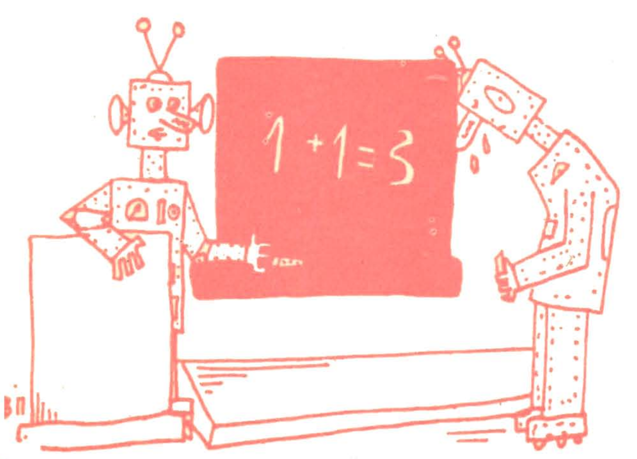
Zwölf Personen tragen insgesamt 12 Brote. Die Männer tragen je zwei Brote, die Frauen je ein halbes, die Kinder je ein viertel Brot.
Wie viele Männer, Frauen und Kinder sind es?

Drei Kästchen

Vor uns liegen drei gleiche Kästchen. In einem sind zwei weiße, in dem anderen zwei schwarze und im dritten eine schwarze und eine weiße Kugel. Auf den Deckeln sind sie gekennzeichnet.



Das Problem besteht darin – ohne hineinzuschauen – eine Kugel aus einem Kästchen herauszunehmen und zu erkennen, welche Kugeln in welchem Kästchen liegen, wenn bekannt ist, daß die Beschriftung auf keinen Fall der Wahrheit entspricht.



„Sage deinem Konstrukteur, daß ich gern einmal mit ihm reden möchte!"

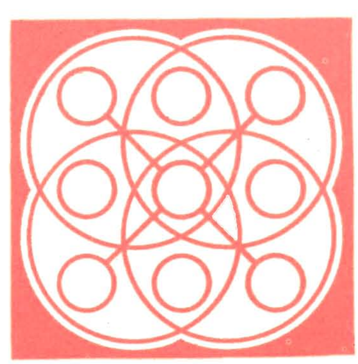
Utschitelsko delo, Sofia

Angeln mit vielen Unbekannten

Vater Nikolai mit Sohn und Vater Peter mit Sohn gehen angeln. Die Zahl der Fische, die Nikolai geangelt hat, endet mit der Ziffer 2, die seines Sohnes mit der Ziffer 3, die von Peter ebenfalls mit 3 und die seines Sohnes mit 4.
Die Summe aller Fische, die sie insgesamt geangelt haben, ist die Quadratzahl einer natürlichen Zahl.
Wie heißt der Sohn vom Vater Nikolai?

Arithmetisches Rätsel

In die Kreisfiguren sind die Zahlen 11 bis 19 so einzusetzen, daß die Summe aller vier Zahlen, die sich in einem großen Kreis befinden, die Zahl 59 ergibt, gleichzeitig soll die Summe der drei Zahlen, welche sich in den Kreisfiguren auf den Diagonalen befinden, jeweils die Zahl 39 ergeben.



Beim Einkauf

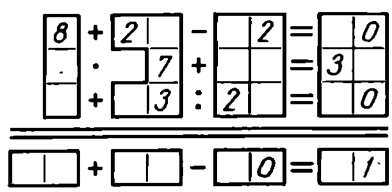
In fünf Minuten war die Hälfte meines Geldes weg, erzählte ein Mann seiner Frau, als er aus dem Geschäft kam. Dabei betragen meine Lewas jetzt genau die Hälfte der Stotinkis, die ich anfangs hatte, und die Stotinkis genauso viele wie die Lewas, welche ich am Anfang hatte.
Wieviel Geld hatte der Mann, und wieviel ist ihm nach dem Einkauf geblieben? (1 Lew = 100 Stotinki)

Das Lotterielos

Ich habe mir ein Lotterielos, auf dem die Summe der Ziffern (Quersumme) der fünfstelligen Zahl dem Alter meines Vaters entspricht, gekauft. Als ich ihm das sagte, wußte er sofort, welche Zahl mein Lotterielos trägt. Weißt du es?

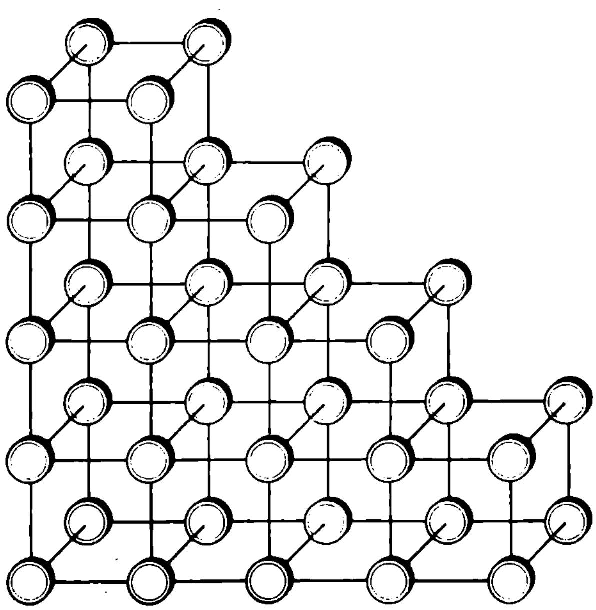
Kryptarithmetik

```
* * * . * 8 *        * * * . * * *
-------------        -------------
      * * * *                * 0 *
      * * *              * 5 * *
    * 0 *                * * 5
-------------        -------------
    * * * * 0        1 * * * * 8
```

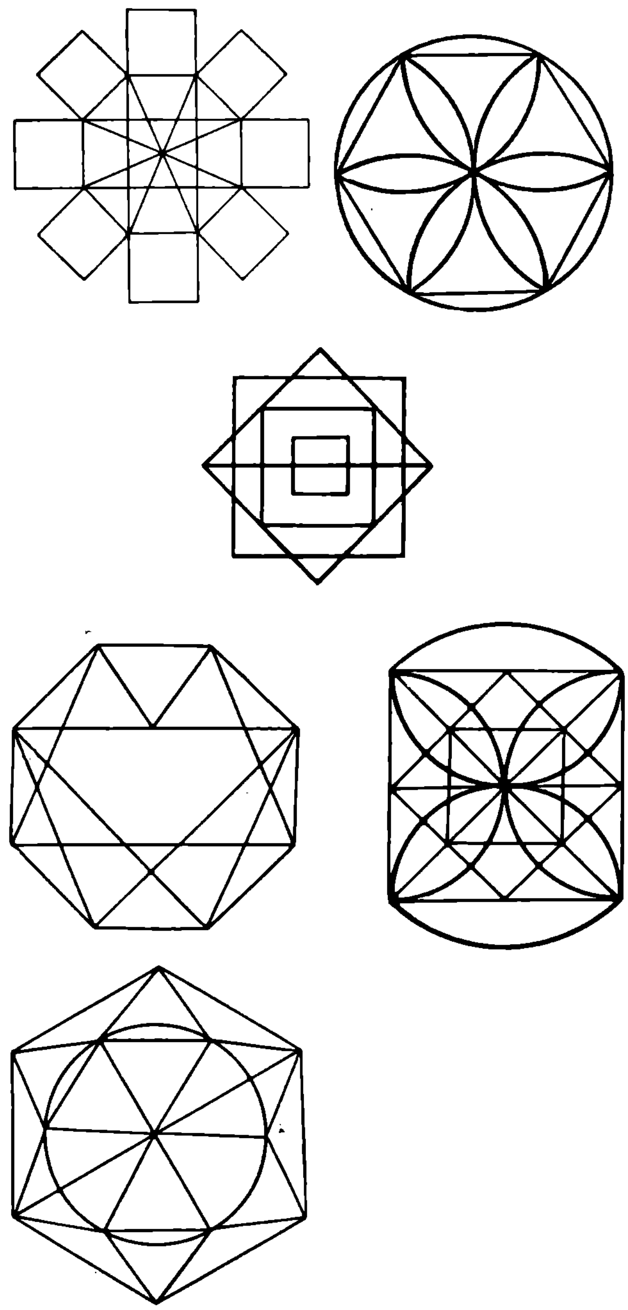


Die Treppe

Fülle die Treppe mit den Zahlen 1 bis 38 so, daß die Summe an jeder Wand jedes Würfels 78 beträgt!



In einem Zug



Die auf diesen beiden Seiten gestellten Probleme übernahmen wir aus der bulgarischen mathematischen Schülerzeitschrift

Herausgeber: ZK des Komsomol und des Ministeriums für Volksbildung der VR Bulgarien.

Patenschaft in Aktion

alpha-Wandzeitung

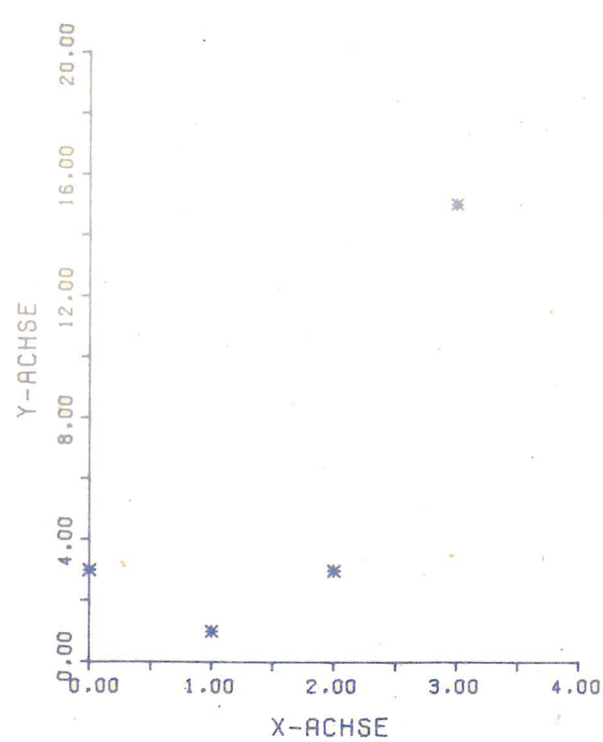
Seit 1969 besteht ein Patenschaftsvertrag zwischen dem *alpha*-Club der 29. Oberschule und dem *Wartungskollektiv der EDV-Anlage des Zentralinstituts der Metallurgie* in Leipzig. Von dieser Zusammenarbeit wurde in dieser Zeitschrift schon berichtet. Höhepunkte waren 1974 – wie alljährlich – der Besuch einer Gruppe des *alpha*-Clubs bei der Patenbrigade und erstmals auch der Sieger der Kreisolympiade des Stadtbezirks Südost. Ihre Auszeichnung fand in den Räumen des ZIM unter Mitwirkung der Patenbrigade statt. Den *Jungen Mathematikern* wurde die Arbeitsweise einer modernen EDVA erläutert und vorgeführt. Alle interessierten sich besonders für das neu aufgebaute elektromechanische Zeichengerät, in der Fachsprache als *Plotter* bezeichnet. Mit diesem Gerät werden mathematische Ergebnisse, die sich graphisch darstellen lassen, in relativ kurzer Zeit und sehr genau gezeichnet. Als Überraschung hatte ein Mitarbeiter des ZIM – ehemaliger Teilnehmer an Mathematikolympiaden – eine Urkunde mit Hilfe des Rechners angefertigt, auf der die Patenbrigade die Sieger zu ihrem Erfolg beglückwünschte. Diese Urkunde wurde in Anwesenheit der *Jungen Mathematiker* vom Plotter gezeichnet und jedem Sieger überreicht.
Da der Plotter, wie schon erwähnt, große Aufmerksamkeit erregte, möchten wir hier etwas mehr von seiner Funktion und Anwendung bringen.

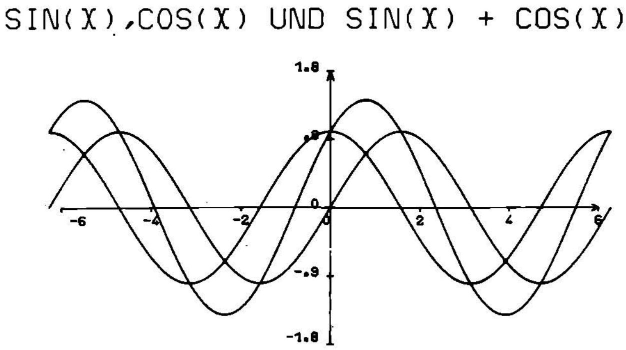
Zeichnerische Darstellung von Ergebnissen der EDV

Mit Hilfe des Plotters können die Ergebnisse der elektronischen Datenverarbeitung automatisch in grafische Form umgesetzt werden. Je ein Schrittmotor mit angebautem Getriebe bewirkt den Antrieb in der x-Achse und der y-Achse. Den Motoren ist eine Elektronik vorgeschaltet, welche die ankommenden Steuersignale umwandelt und verstärkt. Die Steuerung erfolgt durch Signale, die die EDV-Anlage zunächst auf Magnetband aufzeichnet und die später durch eine besondere Magnetbandeinheit gelesen und dem Plotter zugeführt werden.
Bei jedem ankommenden Steuersignal dreht sich der Rotor des einen oder anderen Schrittmotors um einen festliegenden Drehwinkel, woraus eine genau definierte lineare Bewegung des Zeichenstiftes um eine Schrittlänge von 0,03175 mm in positiver oder negativer x-Richtung oder y-Richtung resultiert. Ein Elektromagnet bewirkt durch ankommende Signale ein Heben oder Senken des Zeichenstiftes.
Erhalten beide Schrittmotoren gleichzeitig ein Steuersignal, so wird ein Schritt in Richtung einer Diagonalen ausgelöst. Jede Zeichnung wird aus einer geeigneten Aufeinanderfolge von einzelnen Schritten zusammengesetzt. Durch geeignete Grundprogramme für die EDVA werden solche Steuersignale an den Plotter gegeben, daß eine ideale Annäherung an den gewünschten Kurvenzug erreicht wird. Die kleinen Grundschritte lassen sich in der fertigen Zeichnung nicht mehr mit dem bloßen Auge erkennen, die deshalb aus Linien und Kurven sowie Beschriftungen beliebiger Art bestehen kann.

▲1383▲

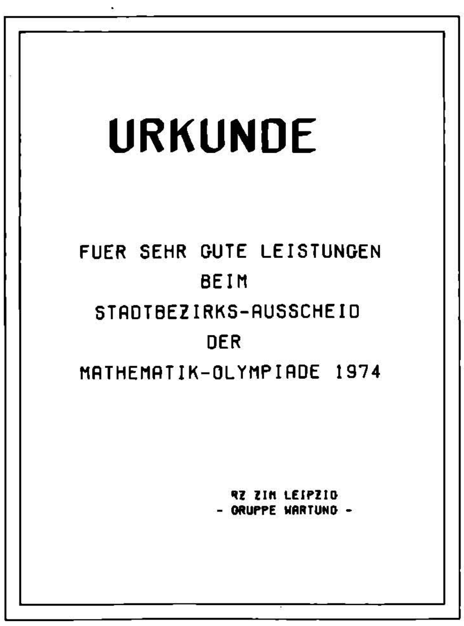
```
MIT EINEM EDV-PROGRAMM KANN MAN DURCH EINE
GEGEBENE ANZAHL VON PUNKTEN IM KOORDINATENSYSTEM
EINE AUSGLEICHSKURVE LEGEN. DIE AUSGLEICHS-
KURVEN WERDEN DURCH POLYNOME N-TEN GRADES
GEBILDET. DAS PROGRAMM ERRECHNET DAS POLYNOM.
ZEICHNET DIE KURVE UND DIE FORMEL DES POLYNOMS.
DER RECHNER BENOETIGT DAZU CA. 30 SEKUNDEN.

WIE LANGE BRAUCHST DU DAZU --

IM NAECHSTEN HEFT FINDEST DU DIE LOESUNG DES
RECHNERS.
BESTIMME EIN POLYNOM 3-TEN GRADES DURCH DIE IM
KOORDINATENSYSTEM ANGEGEBENEN 4 PUNKTE.
GEGEBEN SIND  P1-(0.3)
              P2-(1.1)
              P3-(2.3)
              P4-(3.15)
GESUCHT IST  AX**3+BX**2+CX+D=Y
```





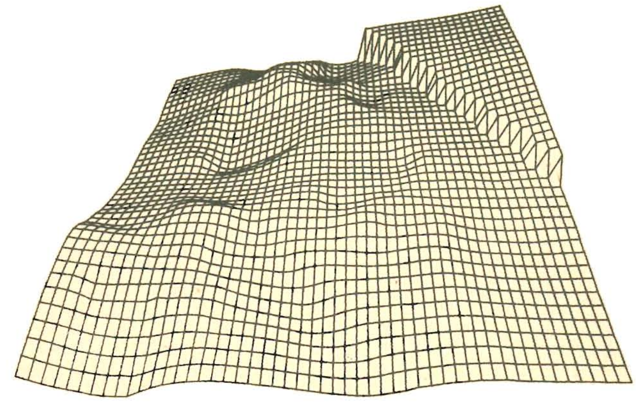
Kurven im Achsenkreuz

Ein Teil der Erdkugel, vom Plotter gezeichnet.

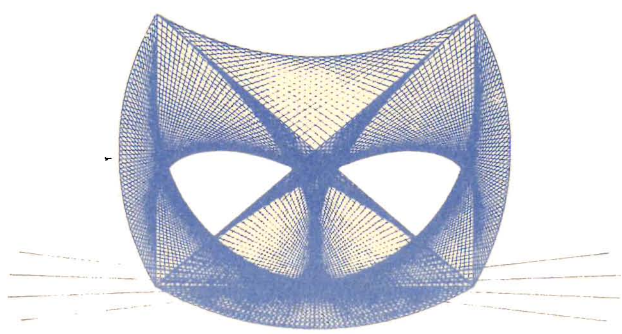

URKUNDE

FUER SEHR GUTE LEISTUNGEN
BEIM
STADTBEZIRKS-AUSSCHEID
DER
MATHEMATIK-OLYMPIADE 1974

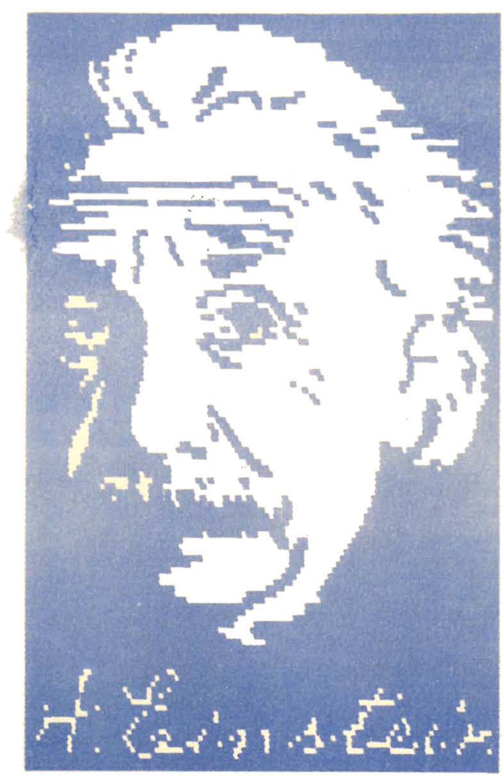
RZ ZIM LEIPZIG
- GRUPPE WARTUNG -



Dreidimensionale Darstellung einer Oberflächenstruktur

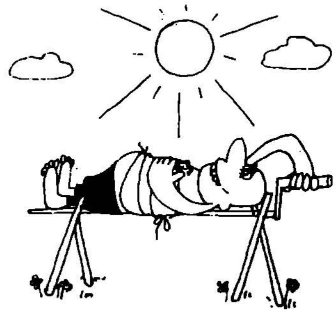


Computergraphik



Das Titelblatt des Heftes 2/75 zeigt einen Würfel in isometrischer Darstellung. Durch Rotation von Vierecken pro Würfelfläche entstand dieser schöne Effekt.

Preisträger



Der VIII. Internationalen Physikolympiade entgegen

Preisträger des Physikwettbewerbs 1974

Zu unserem Physikwettbewerb gingen ein:

Klassenstufe 6	108 Lösungen
7	65 Lösungen
8	67 Lösungen
9	59 Lösungen
10/12	138 Lösungen
zus.	437 Lösungen

Alle Teilnehmer erhielten im Februar eine Antwortkarte, die Preisträger eine Urkunde und eine Buchprämie.

Preisträger: Thomas Bienek, Schwepnitz; Lutz Möller, Schmiedeberg; Frank Regensburger, Dresden; Frank Hadamik, Radebeul; Ulv Krabisch, Leipzig; Volker Lerche, Schmalkalden; Torsten Waldeck, Karl-Marx-Stadt; Annelie Meyer, Silberstraße; Josef Hofbauer, Traismauer (Österreich); Karl Krause, Mansfeld; Wolfgang Huschmann, Oelsnitz; Petra Maeder, Berlin.

„Heute behandeln wir in der Schule die Atomzertrümmerung."
Aus: Učitelské noviny, Prag

Preisträger des Chemie-Wettbewerbs 1974

Zu unserem Chemie-Wettbewerb gingen ein:

Klassenstufe 7	365 Lösungen
8	260 Lösungen
9	311 Lösungen
10/12	455 Lösungen
zus.	1391 Lösungen

Alle Teilnehmer erhielten im Februar eine Antwortkarte, die Preisträger eine Urkunde und eine Buchprämie.

Preisträger: Dietmar Schröter, Dresden (Kl. 6); Olaf Heese, Berlin; Heike Brünig, Saalfeld; Elke Weiß, Merseburg; Friedbert Rode, Wingerode; Steffen Roch, Annaberg; Michael Weicker, Mügeln; Heidemarie Probst, Bad Frankenhausen; Josef Hofbauer, Traismauer (Österreich); Lutz Krukowska, Böhlitz-Ehrenberg; Daniel E. Hersberger, Reinach (Schweiz); Ulrich Kirchhübel, Flöha; Martin Ermrich, Elbingerode; Birgit Baldauf, Zschornewitz; Wiete Schirmer, Karl-Marx-Stadt.

Preisträger des Wettbewerbs 30 Jahre VR Polen

Zu unserem Sonderwettbewerb 1974 gingen 418 Lösungen ein. Alle Teilnehmer erhielten im Februar eine Antwortkarte, die Preisträger eine Urkunde und eine Buchprämie.

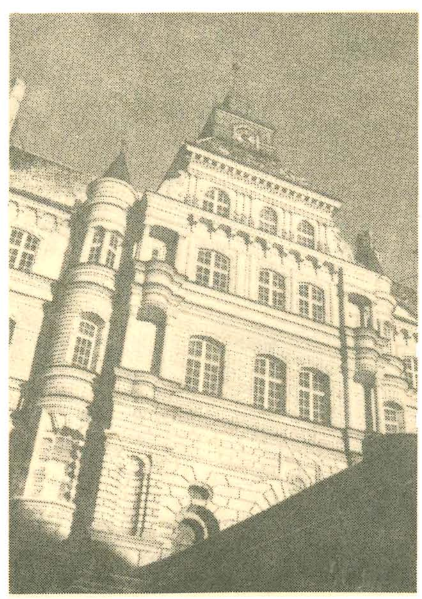
Preisträger: Das Kollektiv der OS Döllnitz/Saalkreis; AG Mathematik (Kl. 9), OS Kleinberndten; Klasse 7b der OS Karl Marx, Schmalkalden; Bernd Müller, Stralsund; Ulrike Baumann, Radebeul; Dorothea Möller, Gerbstedt; Annegret Kirsten, Leuna; Norbert Fuchs, Meiningen; Mario Steller Lichtenstein; Gudrun Tappert, Wilh.-Pieck-Stadt Guben; Elvira Klingebiel, Bischofferode; Karin Sukowski, Neukloster; Michael Menzel, Greifswald; Holger Brodmann, Hettstedt; Heidrun Vorsprecher und Greta Böhmisch, Berlin; Christel Mitzenheim, Jena.

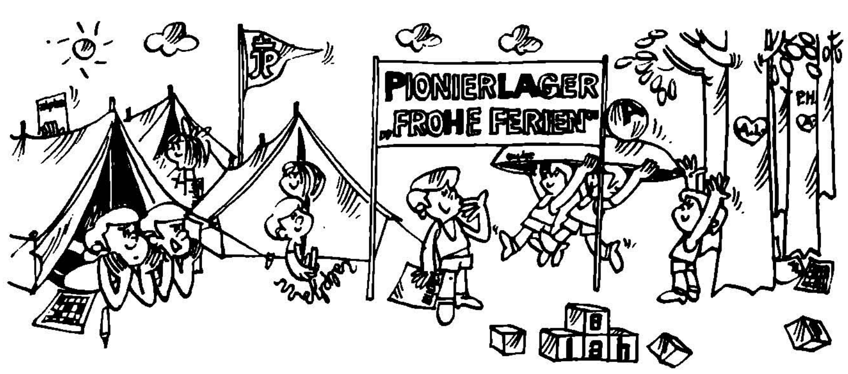
Die DDR ist in diesem Jahr der Gastgeber der VIII. IPO. *alpha* wird ausführlich darüber berichten.

Aus dem Programm:
6./7. Juli – Anreise der Delegationen, Freundschaftstreffen mit FDJlern der PH Güstrow, Empfang der Jury durch den Rektor der Pädagogischen Hochschule und Vertreter des Ministeriums für Volksbildung
8. 7. – Exkursion nach Schwerin, am Abend: Eröffnungsfeier in der PH Güstrow
9. 7. – 1. Klausur (theoretische Probleme)
10. 7. – Exkursion nach Schwerin
11. 7. – 2. Klausur (Experimente)
12./13. 7. – Exkursion nach Rostock
14. 7. – Feierlicher Abschluß der VIII. IPO
15./16. 7. – Exkursion nach Potsdam und Berlin
17. 7. – Abreise der Delegationen

VIII. INTERNATIONALE PHYSIK OLYMPIADE DDR 1975 GÜSTROW

Päd. Hochschule Güstrow

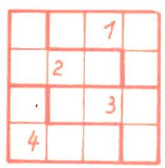




Unterhaltsame Logik

speziell für Klassen 5/6

6

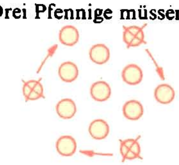


7 Die Punkte 3, 12, 14, 23, 25 und 34 werden besetzt.

8 $5-3=2$, $2+1=3$, $6-2=4$, $6-1=5$, $4+2=6$, $3+4=7$, $6+2=8$, $3+6=9$, $4+6=10$

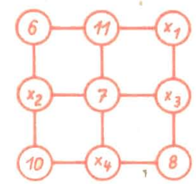
9 Bei genau 5 Würfeln sind je zwei gegenüberliegende Würfelflächen verdeckt. Die Summe ihrer Augenzahlen beträgt daher $5\cdot 7=35$. Bei dem obersten Würfel ist nur die der Fläche mit der Augenzahl 1 gegenüberliegende Fläche verdeckt. Sie hat die Augenzahl 6. Mithin beträgt die Summe der Augenzahlen aller verdeckten Flächen $35+6=41$.

10 Drei Pfennige müssen umgelegt werden.

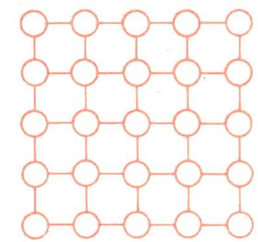


10

3 Die waagerechten, senkrechten und die in den Diagonalen liegenden 3 Zahlen ergeben stets die gleiche Summe.
Wie groß ist die Summe? Welche Werte müssen für x_1, x_2, x_3 und x_4 eingesetzt werden?



4 Streicht von den 25 Punkten 5! Es müssen aber auf jeder Waagerechten, Senkrechten und Diagonalen 4 Punkte zu zählen sein.



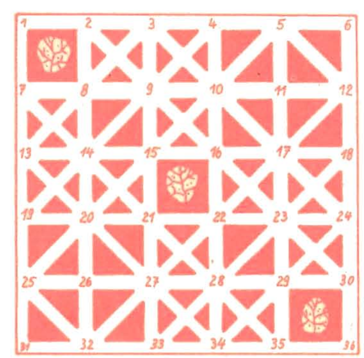
3

14 Gegeben

1 2 = 3
1 2 3 = 4
1 2 3 4 = 5
1 2 3 4 5 = 6
1 2 3 4 5 6 = 7
1 2 3 4 5 6 7 = 8
1 2 3 4 5 6 7 8 = 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 10

Setze auf der linken Seite Rechenzeichen derart, daß wahre Aussagen in Form von Gleichungen entstehen. (Nebeneinanderstehende Ziffern dürfen als eine Zahl betrachtet, doch die Reihenfolge darf nicht geändert werden. Du darfst auch Klammern verwenden.)

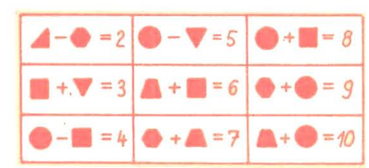
8



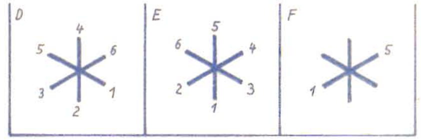
5

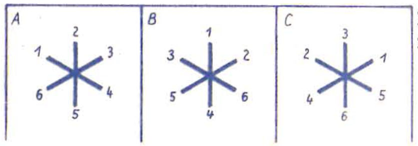
7 Inspektor Leclerc stellt 6 Polizisten auf die Wege des Stadtparkes, daß sie sämtliche Wege übersehen können. Einer steht auf 34. Wo müssen die anderen aufgestellt werden?

8 Welche Zeichen müssen anstelle der geometrischen Figuren gesetzt werden?

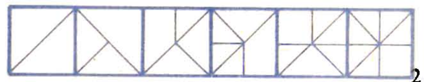


1 Jede der Zahlen 1 bis 6 werden in die Felder *A* bis *E* so eingesetzt, daß jede der Zahlen einmal um den Mittelpunkt jeden Platz einnimmt.
Wie müssen nach diesem Schema die fehlenden Zahlen in das Feld *F* geschrieben werden?





2 Sind diese Quadrate tatsächlich jeweils nur durch eine Strecke erweitert worden?



2

11 1, 5, 9, 3, 7; 3, 7, 1, 5, 9; 5, 9, 3, 7, 1; 7, 1, 5, 9, 3; 9, 3, 7, 1, 5

12
$$\begin{array}{rcl} 253 & : & 23 = 11 \\ - & \cdot & + \\ 13 & & 9 = 22 \\ \hline 240 & - & 207 = 33 \end{array}$$

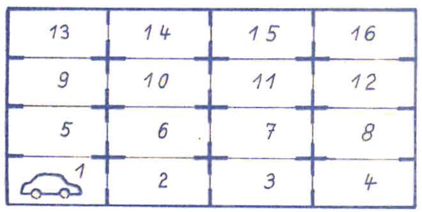
13 Man kann die Wörter „Junge Welt" ohne Überspringen genau 56mal lesen.

11

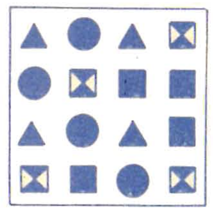
14 Beispiele für mögliche Lösungen:

$1+2 = 3$
$12:3 = 4$
$(1+2)\cdot 3-4 = 5$
$12-3-4 = 5$
$12+3-4-5 = 6$
$12:3+4+5-6 = 7$
$(1+2)\cdot 3-4:5+6 = 7$
$1\cdot 2\cdot 3-5+5-6+7 = 8$
$(12:3)\cdot 4+5-6-7 = 8$
$1-2-3+4-5+6+7 = 8$
$(1+2)\cdot(3+4)-5-6+7-8 = 9$
$1+2\cdot 3+4+5-6+7-8 = 9$
$1\cdot 2+3+4+5+6+7-8-9 = 10$
$(1\cdot 2\cdot 3-4)\cdot 5-6+7+8-9 = 10$

5 Das Auto soll alle Felder durchfahren. Außer Feld 1 darf jedes nur einmal durchfahren werden. Das Ziel ist die 16.
Wer schafft es in kürzester Zeit?



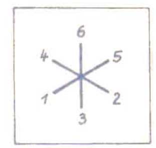
6 Teile das Quadrat in vier gleiche Teile. In jedem der Teile darf jedes Muster nur einmal vorkommen.



4

Lösungen

1



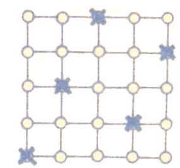
2 Jedes der Quadrate ist jeweils nur um eine Strecke erweitert worden. Das sieht man nicht sofort, da einzelne Quadrate gedreht wurden.

9

3

6	11	4
5	7	9
10	3	8

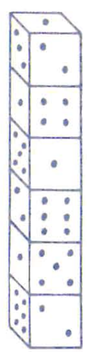
4

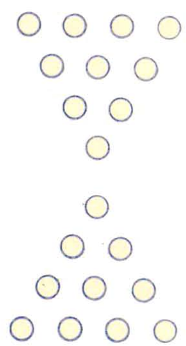


5 1-2-1-5-6-7-3-4-8-12-
-11-10-9-13-14-15-16

9 Auf einem Tisch sind sechs gleichgroße Spielwürfel so übereinandergesetzt, wie es die Abb. zeigt. Auf der obersten Fläche ist die Augenzahl 1 zu sehen.
Ermittle die Summe der Augenzahlen der verdeckten Flächen dieser Würfel.

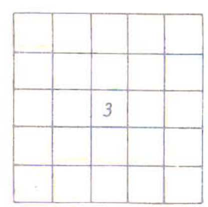
10 Zehn Pfennige liegen in der Anordnung auf dem Tisch, wie es Bild a) zeigt. Es sollen einige Pfennige so umgelegt werden, daß die auf dem Bild 2 dargestellte Anordnung entsteht.
a) Wie viele Pfennige muß man mindestens umlegen?
b) Welche Pfennige sind das? Kreuze an!





6

11 Die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 sind so in die Figur einzusetzen, daß sich aus der Waagerechten, der Senkrechten und den beiden Diagonalen jeweils die Summe 25 ergibt.



7

12 Frisch gewagt ist halb gelöst

$$\begin{array}{rcl} FHR & : & FR = CC \\ - & \cdot & + \\ CR & + & T = FF \\ \hline FBE & - & FES = RR \end{array}$$

13

J U N G E W
U N G E W E
N G E W E L
G E W E L T

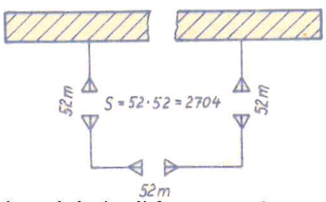
Auf wieviel verschiedene Weisen kann man in der abgebildeten Tabelle die Wörter „Junge Welt" lesen, ohne dabei Zeilen oder Spalten zu überspringen?

Ein Zaun und ... eine quadratische Funktion

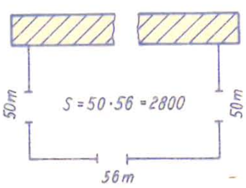
Im Kontor der Brigade saß der Leiter des Maschinenhofs, *Alexej Chromov*, über ein Blatt Papier gebeugt und zeichnete etwas: er hatte vor, den Maschinenhof mit einer Umzäunung mit drei Toren zu versehen.

„*Kostja*“, wandte er sich an den Bautechniker, der gerade das Kontor betreten hatte, „ich plane hier eine Umzäunung und habe 120 Meter Maschenzaun. Wie werde ich das am besten machen?“

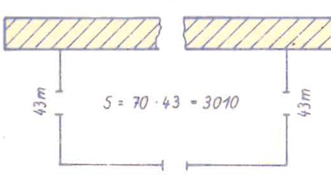
„Auf der einen Seite sind die Garage und die Werkstätten“, sagte der Techniker, „wir werden ihre Wände ausnutzen. Du hast 120 Meter Zaun, dazu kommen die drei Tore, jedes zu 12 Meter, das heißt, die ganze Umzäunung mißt 156 Meter.“ Und er zeichnete einen Plan: .



„Bitte, das wird ziemlich eng werden, nur etwa 2700 Quadratmeter“ bemerkte *Alexej*, nachdem er den Plan angeschaut hatte. „Moment mal, kann man nicht die eine Seite länger machen? Etwa so“:



„Richtig, so sind es fast hundert Quadratmeter mehr“, pflichtete der Techniker bei. „Wie wäre es, könnten wir nicht auf dieser Seite auch noch etwas zugeben?“



„Sieh einmal an, noch über zweihundert Quadratmeter gewonnen“, rief *Alexej* erfreut, „doch der Zaun ist nicht länger geworden! Höre, *Kostja*, können wir nicht noch mehr gewinnen?“

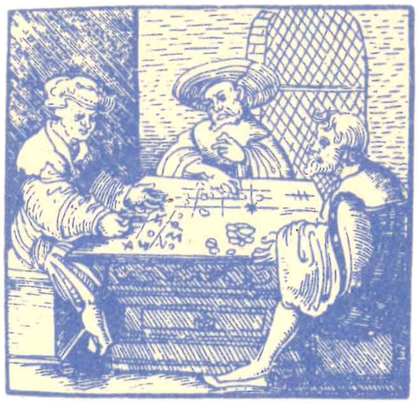
„Möglich“, ließ sich der Lehrer *Semjon Petrovitsch* vernehmen, der gerade das Kontor betrat, „zunächst wollen wir die Aufgabe scharf formulieren und dann lösen“.

Aufgabe

Es sind Länge und Breite eines Rechtecks von maximalem Flächeninhalt zu ermitteln, wenn die Summe der Längen dreier seiner Seiten 156 Meter beträgt. *A. Halameisär*

(Lösung siehe S. 71).

Die Rechnung ohne den Wirt machen ...



Mathematisches und Zahlen in sprichwörtlichen Redensarten

Wenn man heute in eine Gaststätte geht, kann man sich anhand der Speisenkarte das ausrechnen, was man zu bezahlen hat – das heißt aber noch lange nicht, daß man **die Rechnung ohne den Wirt macht.** Diese Redensart drückt vielmehr aus, daß man sich gewaltig verrechnen oder verplanen kann, wenn man wesentliche Faktoren nicht berücksichtigt – und der Wirt war früher in seiner Eigenmächtigkeit schon ein wesentlicher Faktor. Das sagt auch eine Überlieferung aus dem Jahre 1639: „Wer die Zech ohn den Wirth macht, muß zweymahl rechnen“.

Man mußte also genau aufpassen, daß man nicht betrogen wurde, daß einem nicht **ein X für ein U vorgemacht** wurde. Bei den im Mittelalter fast ausschließlich verwendeten römischen Zahlzeichen bedeutet ja X zehn und V – das zugleich auch für U stand – fünf. Der ursprüngliche Sinn dieser Redewendung ist also der, daß man zehn („ein X“) statt fünf („ein V = U“) angeschrieben bekommt, demnach tüchtig betrogen wird.

Sei es wie es sei – entweder hat man sein Geld nicht richtig gezählt oder der Wirt bzw. Ober hat uns **mit doppelter Kreide angeschrieben** (d. h. einen Posten zweimal gerechnet), jedenfalls, wenn das Geld zum Begleichen der Rechnung nicht reicht, drücken wir unsere Bestürzung durch den Ruf **„Ach du grüne Neune!“** aus, auch wenn der Ober vielleicht keinen grünen Kugelschreiber verwendet oder gar keine Neun geschrieben hat. Die Deutung ist in diesem Fall sehr umstritten. Über das Schlesische wurde es als verhüllende Form für „krumme Not“, die Epilepsie (= Fallsucht), ausgelegt.

Die einfachste Lösung, aus unserer Misere herauszukommen, wäre, **einen Strich durch die Rechnung zu machen.** Einmal ist das möglich im wahrsten Sinne des Wortes und zum anderen so, wie man die Redensart anwendet: Man durchkreuzt die Absichten des anderen, verhält sich anders, als der andere annimmt, und geht z. B. einfach aus der Gaststätte.

Was dann passiert, kann man **sich an den fünf Fingern abzählen,** d. h. sich ohne große Mühe im voraus überlegen: Weil man **etwas auf dem Kerbholz hat,** wird die Gaststätte entsprechende gerichtliche Maßnahmen einleiten.

Die letzte Redensart benutzen wir heute für „ein Vergehen begangen, etwas ausgefressen haben“. Ausgangspunkt dafür ist die Benutzung des Kerbholzes als Abrechnungsmittel für Handelsleistungen oder Schulden (daher der oben aufgeführte Sinn).

Das Kerbholz (oder auch Kerbstock genannt) ist seit vorgeschichtlicher Zeit in Europa bekannt als wichtigstes Gerät zur Aufzeichnung von Arbeitsleistungen oder Handelsmengen, bevor die schriftliche Rechnungsführung aufkam. Es besteht aus zwei durch Spalten eines Holzstabes gewonnenen Teilen; diese beiden Teile wurden genau aneinandergehalten und Kerben als Ausdruck gewisser Mengen darauf eingeschnitten (die man damit auf dem Kerbholz hatte!). Die Partner erhielten dann je einen Teil des Kerbholzes und konnten bei der Abrechnung die Übereinstimmung der Kerben durch Aneinanderhalten der Teile prüfen.

Ein Verfahren, bei dem bestimmt nicht mehr Holz verbraucht wurde, als heute in allem zur Durchführung des Handels notwendigen Papier steckt. Womit **in die Kerbe** der Gegner des „Papierkrieges“ **gehauen** werden soll, d. h. deren Kerbe wird vertieft, was auf dem Kerbholz eine Vergrößerung der Menge bedeutete und heute im Sinne von „Verstärkung des Standpunktes“, „Unterstützung in einer bestimmten Meinung“ verwendet wird.

Ch. Pollmer

Vor 200 Jahren

...am 29. Oktober 1675 hat *Leibniz* zum ersten Male die beiden Symbole *d* und ∫ benützt·

„Utile erit scribi ∫ pro „omnia“ et ∫ l pro „omnia l“. ∫ significat summam, *d* differentiam“ ...

zu deutsch:

„Vorteilhaft schreibt man ∫ für „alles“ und ∫ l für „alle l“. ∫ bezeichnet eine Summe, *d* ein Differenz.“

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade, 24. bis 27. März 1975

Aufgaben · Olympiadeklasse 10

1. Es sei $z=(1-\frac{4}{1^2})(1-\frac{4}{3^2})(1-\frac{4}{5^2})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{4}{199^2})$
(wobei die Nenner der Subrahenden in den Faktoren die Folge der ungeraden Quadratzahlen von 1^2 bis 199^2 durchlaufen).
Man stelle die rationale Zahl z in der Form $z=\frac{p}{q}$ dar, wobei p, q ganze, teilerfremde Zahlen sind und $q>0$ ist.

2. Beweisen Sie folgenden Satz:
Ist $ABCD$ ein Tangentenviereck mit den Seitenlängen $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{AD}=d$ und dem Inkreismittelpunkt M, so gilt
$$\frac{a}{c}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BM}}{\overline{CM}\cdot\overline{DM}}.$$
Von den nachstehenden Aufgaben 3A und 3B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

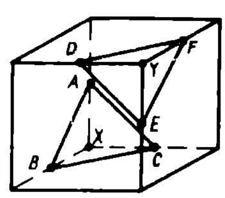
3A. Es sei $ABCDS$ eine gerade vierseitige Pyramide mit fest vorgegebener quadratischer Grundfläche $ABCD$.
Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $PQRTP$, wobei P ein fest vorgegebener innerer Punkt der Kante AS, Q ein innerer Punkt von BS, R von CS sowie T von DS ist.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Winkelgrößen φ ($0°<\varphi<90°$), für die folgendes gilt: Hat der Winkel $\sphericalangle ASB$ die Größe φ, so existiert unter den auf der Pyramide $ABCDS$ betrachteten Streckenzüge $PQRTP$ ein kürzester.

3B. Sechs Schüler eines Mathematikzirkels machen mit dem folgenden Ratespiel ein kleines Logiktraining: Peter, Klaus, Monika, Ilona und Uwe verstecken fünf Gegenstände: Zirkel, Radiergummi, Lineal, Bleistift und Füller so bei sich, daß jeder genau einen dieser Gegenstände hat. Dann bekommt Dirk fünf Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau zwei falsch sind.
Die Aussagen lauten:
Uwe: „Wenn Peter den Zirkel nicht hat, dann hat Klaus das Lineal nicht."
Monika: „Uwe hat soeben eine wahre Aussage gemacht."
Peter: „Ich habe den Zirkel oder Klaus hat das Lineal nicht."
Klaus: „Ich habe das Lineal nicht oder Uwe hat den Bleistift."
Ilona: „Ich habe den Füller oder ich habe den Bleistift."
Man untersuche, ob sich nach diesen Regeln alle Verstecke der Gegenstände eindeutig ermitteln lassen. Wie lauten, falls dies möglich ist, die Verstecke?

4. Man ermittle alle rationalen Zahlen r, die die folgende Gleichung erfüllen:
$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^r+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^r=4.$$

5. In einem Klub Junger Mathematiker gibt es Streit um das Monotonieverhalten von Funktionen. Bekannt ist von zwei Funktionen f und g, daß beide für alle reellen Zahlen x definiert sind, f im gesamten Definitionsbereich streng monoton wächst und daß die Gleichung $g(x)^2-f(x)^2=1$ für alle x erfüllt ist. Annemarie folgert nun daraus:
„Dann ist auch g eine auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsende Funktion." Brigitte widerspricht: „Es läßt sich nur schließen, daß g im gesamten Definitionsbereich entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist."
Christa meint: „Ihr habt beide nicht recht."
Wer von diesen Schülerinnen hat nun recht?
Anmerkung: Eine Funktion f wird genau dann als streng monoton $\left\{\begin{matrix}\text{wachsend}\\\text{fallend}\end{matrix}\right\}$ in einem Intervall bezeichnet, wenn für alle Zahlen x_1, x_2 aus diesem Intervall, für die $x_1<x_2$ gilt, die Ungleichung $\left\{\begin{matrix}f(x_1)<f(x_2)\\f(x_1)>f(x_2)\end{matrix}\right\}$ gilt.

6. Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a. Eine seiner Raumdiagonalen habe die Endpunkte X und Y. Die Mittelpunkte der von X ausgehenden Würfelkanten seien mit A, B, C, sie Mittelpunkte der von Y ausgehenden Würfelkanten mit D, E, F so bezeichnet, daß A und E auf zwei zueinander parallelen Würfelkanten liegen, ebenso B und F und ebenso C und D.



a) Man ermittle alle Möglichkeiten, eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten A, B, C und den Punkten D, E, F so zu wählen, daß folgendes gilt: Die drei Strecken, die jeden der Punkte A, B, C jeweils mit seinem zugeordneten Punkt verbinden, und die sechs Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD sind die sämtlichen Kanten einer Figur, die entweder ein Polyeder (d. i. ein ebenflächig begrenzter Körper) ist oder aus mehreren Polyedern zusammengesetzt werden kann.

b) Wenn es Figuren der in a) genannten Art gibt, so ermittle man für jede von ihnen das Volumen.

Einen ersten Preis erhielten:
Olympiadeklasse 10: Uwe Schäfer, EOS „Dr. Th. Neubauer", Cottbus (Kl. 9); Werner Hoffmann, EOS Mühlhausen; Thomas Maiwald, EOS Zittau (Kl. 9)
Olympiadeklasse 12: Harry Reimann, EOS „Heinrich Hertz", Berlin; Ralph Lehmann, EOS Diesterweg, Strausberg; Bernd Zaddach, Spezialklasse Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin; Helmut Roßmann, EOS „Friedrich Engels", Neubrandenburg

Einen zweiten Preis erhielten:
Olympiadeklasse 10: Thomas Kischel, Lenin-OS Greifswald; Stefan Geiß, EOS Humboldt, Erfurt; Thomas Kaatz, EOS Gräfenhainichen; Roger Labahn, EOS „Geschw. Scholl", Anklam; Harald Katzberg, EOS Kyritz; Joachim Heinitz, Käthe-Kollwitz-OS Zwickau; Torsten Beseniuk, EOS Brühl (Schwerin); Hans-Diettmar Gröger, EOS Staßfurt
Olympiadeklasse 11: Uwe Risch, EOS „Geschw. Scholl", Burg; Uwe Löbus, EOS „R. Rolland" Dresden; Michael Marozinek, EOS „Heinrich Hertz", Berlin (Kl. 10); In Olympiadeklasse 12: Udo Matte und Uwe Quasthoff, beide Spezialklasse Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle; Klaus Altmann, Alexander Wilczok und Martin Hanke, alle EOS „Heinrich Hertz", Berlin

Einen dritten Preis erhielten:
Olympiadeklasse 10: Hartmut Walter, EOS „J. W. Goethe", Bischofswerda; Dirk Bothmann, EOS „F. Schiller", Bautzen; Rüdiger Schultz, EOS „Ernst-Moritz-Arndt", Bergen; Uwe Baumbach, EOS „Heinrich Hertz", Berlin; Lutz Gärtner, Pestalozzi-OS Wismar; Michael Zwicke, EOS „Friedrich Engels", Riesa; Roland Kaschner, EOS „J. R. Becher", Lacuhammer; Thomas Luschtinetz, Hansa-OS Stralsund; Stefan Vogel, Ernst-Thälmann-OS Plauen (Kl. 9). In Olympiadeklasse 11: Friedhelm Schieweck, EOS „Otto v. Guericke", Magdeburg; Hans-Georg Martin, Spezialschule VEB Zeiß, Jena; Reiner Lindemann, Spezialkl. der Humboldt-Universität zu Berlin; Uwe Ebert, EOS Altenberg; Marcus Kasner, EOS „Hermann Matern", Templin; Frank Burghardt, Spezialschule techn. Richtung Frankfurt/O.; Peter Szyler, EOS „Geschw. Scholl", Gardelegen; Frank Richter, EOS Herzberg (Kl. 10)
Olympiadeklasse 12: Andreas Engel, Spezialklasse der Humboldt-Universität zu Berlin; Thomas Schmitt und Jürgen Helbig, beide Spezialklasse der Martin-Luther-Universität Halle; Kurt Frischmuth, ABF „Walter Ulbricht", Halle

Anerkennungsurkunden für gute Leistungen wurden an weitere 51 Schüler vergeben.

Lösungen

Hinweis: Zu Aufgabe 1260 (5/74) ist uns ein Formulierungsfehler unterlaufen. Es muß heißen „... wenn die Verpackungskosten unberücksichtigt bleiben sollen?"

Abbildung zur Lösung 1309

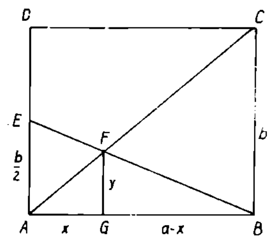
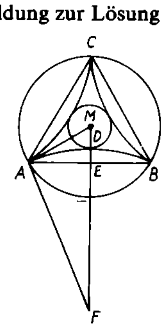


Abbildung zur Lösung 1315



Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 1/1975

5▲1321 1,35 m = 135 cm; 3,45 m = 345 cm; $135:15=9$; $345:15=23$. Für dieses Badezimmer benötigt man für 9 Reihen je 23 Fliesen, insgesamt also $9\cdot 23=207$ Fliesen. $207\cdot 6$ mm = 1 242 mm = 124,2 cm ≈ 1,24 m. Der Stapel Fliesen ist rund 1,24 m hoch.

5▲1322 Wir rechnen $5\cdot(28+30)=50\cdot 58=290$, $540-290=250$ und $250:25=10$. An dieser Schule gibt es zehn Klassenräume mit je 25 Sitzplätzen.

W 5■1323 Wir rechnen $27-11=16$ und $4\cdot 16=64$. Oder $x:4=27-11$, $x:4=16$, $x=64$. In diesem Betrieb arbeiten 64 Brigaden.

W 5■1324 Angenommen, es gibt x Zimmer mit je 6 Betten; dann gilt

$$\begin{aligned} 6\cdot x+4\cdot 9+2\cdot(9+3)&=126,\\ 6x+36+24&=126,\\ 6x&=66,\\ x&=11. \end{aligned}$$

In diesem Studentenwohnheim gibt es elf 6-Bett-Zimmer.

W 5*1325 Aus d) folgt: Andrea besucht die Klasse 4b. Aus a) folgt: Dirk hat nicht den Familiennamen Hofmann. Aus c) folgt: Andrea hat nicht den Familiennamen Hofmann. Deshalb heißt einer der Pioniere Mario Hofmann.
Aus c) folgt: Mario Hofmann besucht die Klasse 4b und ist der jüngste, also 9 Jahre alt. Deshalb sind Dirk und Andrea beide 10 Jahre alt.
Aus b) folgt: Dirk heißt nicht mit Familiennamen Hoschke, also Meisel. Deshalb heißt Andrea mit Familiennamen Hoschke.
Ergebnis: Mario Hofmann, 9 Jahre alt, Klasse 4b, Dirk Meisel, 10 Jahre alt, Klasse 4a, Andrea Hoschke, 10 Jahre alt, Klasse 4 b.

W 5*1326 Die größte zweistellige natürliche Zahl, deren Ziffer auf die Grundziffer 2 endet, lautet 92. Streichen wir die Ziffer 2, so verbleibt die Ziffer 9.
Wegen $92+9=101<145$ muß eine der gesuchten Zahlen zwischen 101 und 145 liegen und auf die Grundziffer 2 enden.
Daher ist diese Zahl von der Form $10x+2$, und wir erhalten

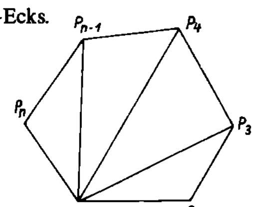
$$\begin{aligned} (10x+2)+x&=145,\\ 11x&=143,\\ x&=13. \end{aligned}$$

Die beiden natürlichen Zahlen lauten also 132 und 13; es gilt $132+13=145$.

6▲1327 Die zu ermittelnden Zahlen lassen sich darstellen durch
$n=1000a+100\cdot 3a+10\cdot(3a-5)+a$.
Wegen $3a\leqq 9$ gilt $a\leqq 3$. Wegen $a>0$ kann daher a nur gleich 1, 2 oder 3 sein. Da für $a=1$ die Zahl $3a-5$ keine natürliche Zahl ist, gilt $a=2$ oder $a=3$.
Es gibt somit zwei Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen, sie lauten 2612 und 3943.

6▲1328 Unter vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es genau zwei gerade und zwei ungerade Zahlen. Die Summe zweier gerader, aber auch die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist also in jedem Falle eine gerade Zahl, deshalb durch 2 teilbar und, weil sie größer als 2 ist, keine Primzahl.

W 6■1329 Es seien $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ und P_n die Eckpunkte eines konvexen n-Ecks. Von einem Eckpunkt aus lassen sich genau $(n-3)$ Diagonalen ziehen, die das n-Eck in $(n-2)$ Dreiecke zerlegen. Die Summe der Innenwinkel jedes dieser Dreiecke beträgt 180°; die Summe der Innenwinkel dieser $(n-2)$ Dreiecke beträgt somit $(n-2)\cdot 180°$. Sie ist gleich der Summe der Innenwinkel des n-Ecks.

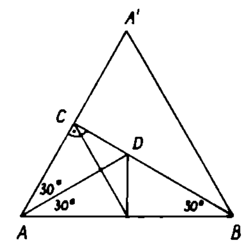


W 6■1330 Angenommen, es nehmen x Lehrerinnen und somit $(126-x)$ Lehrer an der Weiterbildung teil, dann gilt

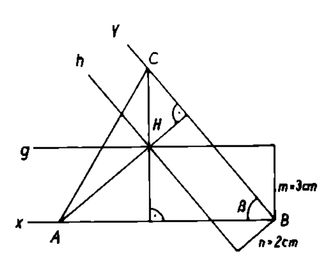
$$\begin{aligned} \frac{x}{5}&=\frac{126-x}{2},\\ 2x&=630-5x,\\ 7x&=630,\\ x&=90. \end{aligned}$$

An der Weiterbildung nehmen 90 Lehrerinnen und 36 Lehrer teil.

W 6*1331 Es sei $\overline{AC}=b$ und $\overline{AB}=c=2b$. Wir spiegeln A an der Geraden BC als Symmetrieachse; es sei A' der Bildpunkt von A. Wegen $\overline{AB}=2\cdot\overline{AC}$ und auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt dann $\overline{CA}=\overline{CA'}=b$, also $\overline{AA'}=2b$ und $\overline{AB}=\overline{A'B}=2b$.
Somit ist das Dreieck ABA' gleichseitig, und es gilt Winkel $\sphericalangle BAC=60°$ und Winkel $\sphericalangle ABC=90°-60°=30°$.
Da $\overline{AD}$ Winkelhalbierende ist, gilt weiter Winkel $\sphericalangle CAD=\sphericalangle BAD=30°$. Also ist das Dreieck ABD gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$, und die Winkelhalbierende $\overline{DE}$ ist auch Seitenhalbierende. Daher gilt $\overline{AE}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}=\overline{AC}=b$. Das Dreieck AEC ist daher gleichschenklig und wegen Winkel $\sphericalangle CAE=60°$ sogar gleichseitig.



W 6*1332 Zunächst ist der Winkel $\sphericalangle XBY=\beta=50°$ mit seinem Scheitel B zu zeichnen. Danach ist zu dem Schenkel BX von β eine Parallele g im Abstand $m=3$ cm und zu dem Schenkel BY eine Parallele h im Abstand $n=2$ cm zu konstruieren. Der Schnittpunkt der Geraden g und h sei H. Die Senkrechte zu BX durch H schneidet BY im Punkte C, die Senkrechte zu BY durch H schneidet BX im Punkte A. Verbindet man A mit C, so erhält man das zu konstruierende Dreieck ABC.



7▲1333 Ein Spielwürfel besitzt $1+2+3+4+5+6=21$ Augen. Für sein Volumen gilt demnach

$$V=V_1-V_2=a^3-\frac{21}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3,$$
$$V=(18^3-14\pi\cdot 1^3)\ \text{mm}^3\approx 5788\ \text{mm}^3.$$

7 ▲ 1334 Das Plansoll für einen Tag betrage x m³, dann gilt

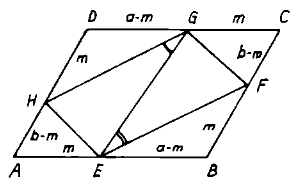
$$\begin{aligned}(x+14)+(x-2)+(x+16)&=184,\\ 3x+28&=184,\\ 3x&=156,\\ x&=52.\end{aligned}$$

Die Brigade mußte täglich 52 m³ Holz nach dem Plan bereitstellen.

W 7 ■ 1335 Wegen $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ und $\overline{AE}=\overline{CG}=m$ gilt $\overline{EB}=\overline{DG}=a-m$. Wegen $\overline{BC}=\overline{AD}=b$ und $\overline{BF}=\overline{DH}=m$ gilt $\overline{CF}=\overline{AH}=b-m$. Ferner gilt $\sphericalangle HAE=\sphericalangle FCG$ und $\sphericalangle EBF=\sphericalangle GDH$. Daraus folgt $\triangle AEH\cong\triangle GFC$ und $\triangle EBF\cong\triangle GDH$.

Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt weiter

$$\overline{EH}=\overline{FG} \text{ und } \overline{EF}=\overline{GH}.$$



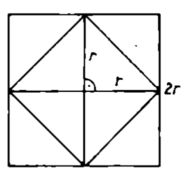
Die Diagonale $\overline{EG}$ zerlegt das Viereck $EFGH$ in zwei kongruente Dreiecke $\triangle EFG$ und $\triangle GHE$ ($\overline{EF}=\overline{HG}$, $\overline{EH}=\overline{FG}$, $\overline{EG}=\overline{EG}$). Aus der Kongruenz dieser beiden Dreiecke folgt $\sphericalangle FEG=\sphericalangle HGE$. Da diese Winkel Wechselwinkel an geschnittenen Geraden sind, müssen die Geraden parallel verlaufen. Deshalb gilt $EF \parallel GH$ und $EH \parallel FG$, d. h., das Viereck $EFGH$ ist ein Parallelogramm.

W 7 ■ 1336 Angenommen, es gebe x Kabinen mit zwei Betten, y Kabinen mit drei Betten und z Kabinen mit vier Betten; dann gilt

$$\begin{array}{rcll} x+y+z&=&29 & \cdot 4\\ 2x+3y+4z&=&86 & \cdot(-1)\\ \hline 4x+4y+4z&=&116 & \\ -2x-3y-4z&=&-86 & +\\ \hline 2x+y&=&30 & \\ y&=&30-2x, & \end{array}$$

Da x, y und z sämtlich natürliche Zahlen sind, ist $2x$ eine gerade natürliche Zahl. Dann ist auch $y=30-2x$ eine gerade natürliche Zahl. Daher ist die Behauptung des Fahrgastes falsch.

W 7*1337 Wir drehen das dem Kreis einbeschriebene Quadrat um den Mittelpunkt des Kreises als Drehzentrum um 45°.



Es seien A_1, A_2, A_3 die Maßzahlen der Flächeninhalte des Kreises, des umbeschriebenen und des einbeschriebenen Quadrates; dann gilt $A_1=\pi r^2$ $A_2=(2r)^2$, $A_3=4\cdot\frac{1}{2}\cdot r^2=2r^2$. Für das arithmetische Mittel aus A_2 und A_3 erhalten wir $m_1=\frac{1}{2}(4r^2+2r^2)=3r^2$, und es gilt $3r^2<\pi r^2$, weil $3<\pi=3{,}14\ldots$

Der Flächeninhalt des Kreises ist also größer als das arithmetische Mittel aus den Maßzahlen der Flächeninhalte der beiden Quadrate.

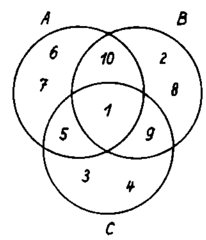
Es seien u_1, u_2, u_3 die Maßzahlen der Umfänge des Kreises, des umbeschriebenen und des einbeschriebenen Quadrates; dann gilt $u_1=2\pi r$, $u_2=8r$, $u_3=4r\sqrt{2}$. Für das arithmetische Mittel aus u_2 und u_3 erhalten wir

$$m_2=\frac{1}{2}(8r+4r\sqrt{2})=2r(2+\sqrt{2}).$$

Nun gilt aber

$$\frac{2r(2+\sqrt{2})}{2\pi r}=\frac{2+\sqrt{2}}{\pi}=\frac{2+1{,}41}{3{,}14}>1.$$

Der Umfang des Kreises ist also kleiner als das arithmetische Mittel aus den Maßzahlen der Umfänge der beiden Quadrate. Die Behauptungen treffen daher in beiden Fällen nicht zu.



W 7*1338 $A=\{1, 5, 6, 7, 10\}$;
$B=\{1, 2, 8, 9, 10\}$

W 8 ■ 1339 a) Die mittlere Geschwindigkeit auf der 1000-m-Bahn betrug für *Eduard Rapp* (UdSSR)

$$v_1=\frac{1000}{67{,}61}\,\mathrm{m}\cdot s^{-1}=14{,}79\,\mathrm{m}\cdot s^{-1}$$
$$=53{,}24\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1},$$

für *Ferrucio Ferro* (Italien)

$$v_2=\frac{1000}{67{,}66}\,\mathrm{m}\cdot s^{-1}=14{,}78\,\mathrm{m}\cdot s^{-1}$$
$$=53{,}21\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}.$$

b) Als *Rapp* durch das Ziel fuhr, hatte *Ferro* noch 0,05 s zu fahren, bis er das Ziel erreichte. Da *Ferro* in 1 Sekunde 14,78 m zurücklegte, betrug sein Abstand von dem Ziel noch

$$14{,}78\cdot 0{,}05\,\mathrm{m}\approx 0{,}74\,\mathrm{m}.$$

Rapp hatte also bei der Fahrt durch das Ziel einen Vorsprung von 0,74 m.

W 8 ■ 1340 Angenommen, es gibt ein solches Dreieck mit der Maßzahl der Höhe h und der Maßzahl der Seitenlänge a. Dann ist die Maßzahl des Flächeninhalts gleich

$$A_2=\frac{a\cdot h}{2}$$

und die Maßzahl des Umfangs gleich

$u=3a$. Wegen $A=u$ gilt

$$\frac{a\cdot h}{2}=3a, \text{ also } h=6, \text{ wegen } a\neq 0.$$

Hat nun ein gleichseitiges Dreieck eine Höhe, deren Maßzahl $h=6$ ist, so gilt

$$A=\frac{a\cdot 6}{2}=3a=u,$$

d. h., die Maßzahl A des Flächeninhalts ist gleich der Maßzahl u des Umfangs, es gibt also ein gleichseitiges Dreieck mit der verlangten Eigenschaft.

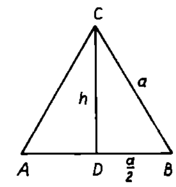
In einem solchen gleichseitigen Dreieck (siehe Bild) gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$a^2=h^2+\frac{a^2}{4},\ \frac{3}{4}a^2=h^2,\ a^2=\frac{4h^2}{3}=\frac{4h^2\cdot 3}{9},$$

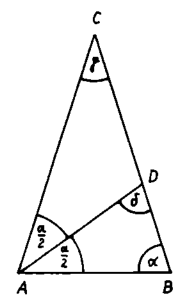
also $a=\frac{2h}{3}\sqrt{3}$ und daher wegen $h=6$

$$a=\frac{2\cdot 6}{3}\sqrt{3}=4\sqrt{3}\approx 6{,}93.$$

Ferner gilt $A=u=3a=12\sqrt{3}\approx 20{,}8$.



W 8*1341 Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis $\overline{AB}$ ebenso lang wie die Winkelhalbierende $\overline{AD}$ des Basiswinkels $\sphericalangle CAB$ sei (vgl. das Bild).



Bezeichnet man die Größen der Winkel mit $\sphericalangle CAB=\sphericalangle ABC=\alpha$, $\sphericalangle BCA=\gamma$, $\sphericalangle BDA=\delta$, so gilt $\sphericalangle CAD=\sphericalangle DAB=\frac{\alpha}{2}$.

Wegen $\overline{AB}=\overline{AD}$ ist das Dreieck ABD ebenfalls gleichschenklig; daher gilt $\delta=\alpha$.

Da die Winkelsumme des Dreiecks ABD gleich 180° ist, gilt weiter

$$\alpha+\frac{\alpha}{2}+\delta=180°,$$

$$\text{also } \frac{5}{2}\alpha=180°,\quad \alpha=72°.$$

Daher ist der Winkel an der Spitze des Dreiecks ABC gleich

$$\gamma=180°-2\alpha=180°-144°=36°.$$

W 8*1342 Da a und b nach Voraussetzung gerade natürliche Zahlen sind, sind auch die Zahlen $a+b$, $a-b$ und ab gerade Zahlen. Wir haben daher nur noch nachzuweisen, daß wenigstens eine dieser drei Zahlen durch 3 teilbar ist.

1. Ist nun a oder b durch 3 teilbar, so ist ab durch 3 teilbar.

2. Ist weder a noch b durch 3 teilbar, so läßt jede dieser Zahlen bei der Division durch 3 den Rest 1 oder 2. Daher gilt

$$a=3m+1 \quad\text{oder}\quad a=3m+2,$$
$$b=3n+1 \quad\text{oder}\quad b=3n+2,$$

wobei m und n natürliche Zahlen sind.

Ist $a=3m+1$ und $b=3n+1$, so ist

$$a-b=(3m+1)-(3n+1)=3m-3n$$
$$=3(m-n) \text{ durch 3 teilbar.}$$

Ist $\quad a=3m+2$ und $b=3n+2$, so ist
$a-b=(3m+2)-(3n+2)=3m-3n$
$=3(m-n)$ durch 3 teilbar.

Ist $\quad a=3m+1$ und $b=3n+2$, so ist
$a+b=(3m+1)+(3n+2)$
$=3m+3n+3=3(m+n+1)$ durch 3 teilbar.

Ist $\quad a=3m+2$ und $b=3n+1$, so ist ebenfalls
$a+b=(3m+2)+(3n+1)$
$=3(m+n+1)$ durch 3 teilbar.

3. In allen Fällen ist also wenigstens eine der drei Zahlen $a+b$, $a-b$, ab durch 3 teilbar und daher auch, da es gerade Zahlen sind, durch 6 teilbar, w. z. b. w.

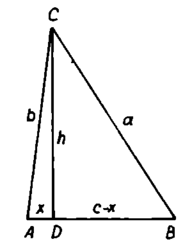
W 9 ■ 1343 Es seien $2k+1$, $2k+3$, $2k+5$, $2k+7$ vier aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen, wobei k eine natürliche Zahl ist. Dann ist das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl gleich
$P_1=(2k+3)(2k+5)=4k^2+16k+15$
und das Produkt aus der ersten und vierten Zahl gleich
$P_2=(2k+1)(2k+7)=4k^2+16k+7$.
Es gilt also für alle k
$P_1-P_2=8$,
d. h., wenn man beliebige vier aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen, z. B. 1, 3, 5, 7 oder 3, 5, 7, 9 usw. wählt, so ist stets das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl um 8 größer als das Produkt aus der ersten und vierten Zahl.

W 9 ■ 1344 Es seien a die Maßzahl der Seitenlänge der quadratischen Grundfläche und h die Maßzahl der Höhe des Prismas. Dann ist die Maßzahl des Volumens des Prismas gleich
$$V=a^2h$$
und die Maßzahl der Oberfläche gleich
$$A=2a^2+4ah=2a(a+2h).$$
Wegen $V=A$ folgt daraus
$$a^2h=2a(a+2h),$$
also wegen $a\neq 0$
$$ah=2a+4h,$$
$$h(a-4)=2a,$$
$$h=\frac{2a}{a-4}.$$
Da a und h von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, gilt $a-4>0$, also $a>4$.
Ferner gilt
$$h=\frac{2a-8+8}{a-4}=\frac{2(a-4)}{a-4}+\frac{8-}{a-4}=2+\frac{8}{a-4}.$$
$a-4$ ist also ein Teiler von 8, da h eine natürliche Zahl ist. Wegen $a-4>0$ kann daher $a-4$ nur gleich 1, 2, 4 oder 8 sein.
Die folgende Tabelle zeigt die vier Möglichkeiten für a und h; in diesen vier Fällen (und nur in diesen Fällen) gilt $V=A$.

$a-4$	1	2	4	8
a	5	6	8	12
$h=2+\frac{8}{a-4}$	10	6	4	3
$V=a^2h$	250	216	256	256
$A=2a(a+2h)$	250	216	256	432

W 9*1345 Die Menge $N=\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ enthält genau n gerade und genau n ungerade Zahlen. Die Menge M möge genau p gerade und genau q ungerade Zahlen enthalten. Da die Menge M als Teilmenge der Menge N genau $n+1$ Zahlen enthält, enthält sie mindestens 1 und höchstens n ungerade Zahlen sowie mindestens 1 und höchstens n gerade Zahlen; es gilt $p+q=n+1$. Wir können daher die Menge M so ordnen, daß wir zunächst die p geraden Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ und dann die q ungeraden Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_q$ angeben:
$$a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q \qquad (1)$$
Jede der geraden Zahlen a_i ist gleich dem Produkt aus einer Potenz von 2 und einer ungeraden Zahl $c_i: a_i=2^{s_i}\cdot c_i$. Jetzt ordnen wir jeder geraden Zahl a_i der Zeile (1) die ungerade Zahl c_i zu und jeder ungeraden Zahl der Zeile (1) diese Zahl selbst zu und erhalten die Zahlen:
$$c_1, c_2, \ldots, c_p, b_1, b_2, \ldots, b_q \qquad (2)$$
In der Zeile (2) stehen $p+q=n+1$ ungerade Zahlen, die alle kleiner als $2n$ sind. Da es aber nur n solche Zahlen gibt, müssen mindestens zwei Zahlen der Zeile (2) übereinstimmen. Es gilt daher entweder $c_i=c_k$ oder $c_i=b_j$.
Im ersten Falle gilt
$$a_i=2^{s_i}\cdot c_i,\ a_k=2^{s_k}\cdot c_k,$$
$$\text{also } \frac{a_i}{a_k}=\frac{2^{s_i}}{2^{s_k}}=2^{s_i-s_k}.$$
Da wir o. B. d. A. $s_i>s_k$ annehmen können, ist $2^{s_i-s_k}$ eine ganze Zahl, also a_i durch a_k teilbar. Im zweiten Falle gilt
$$a_i=2^{s_i}\cdot c_i,\ b_j=c_i, \text{ also } \frac{a_i}{b_j}=2^{s_i}$$
d. h. a_i ist durch b_j teilbar. In jedem Falle gibt es also in M zwei Zahlen, von denen die eine durch die andere teilbar ist, w. z. b. w.

W 9*1346 a) Wir nehmen zunächst an, daß die Höhe $\overline{CD}=h$ innerhalb des Dreiecks ABC liegt (vgl. das Bild) und bezeichnen die Länge der Strecke $\overline{AD}$ mit x. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras
$$h^2=b^2-x^2, \qquad (1)$$
$$h^2=a^2-(c-x)^2. \qquad (2)$$
Daraus folgt
$$a^2-c^2+2cx-x^2=b^2-x^2, \qquad (3)$$
$$2cx=b^2+c^2-a^2,$$
$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}. \qquad (4)$$
Wegen (1) gilt weiter
$$h=\sqrt{b^2-x^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2}. \qquad (5)$$
Ferner gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC
$$A=\frac{ch}{2}=\frac{c}{2}\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2}. \qquad (6)$$
Es läßt sich leicht zeigen, daß die Formeln (5) und (6) auch dann gültig sind, wenn die Höhe $\overline{CD}$ außerhalb des Dreiecks liegt.
Für die praktische Rechnung ist es zweckmäßig, die Formeln (5) und (6) noch umzugestalten. Wir erhalten
$$h=\sqrt{b^2-x^2}=\sqrt{(b+x)(b-x)}$$
$$=\sqrt{\left(b+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)},$$
$$h=\frac{1}{2c}\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)}$$
$$\overline{(2bc-b^2-c^2+a^2)},$$
$$h=\frac{1}{2c}\sqrt{[(b+c)^2-a^2]\,[a^2-(b-c)^2]},$$
$$h=\frac{1}{2c}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)}$$
$$\frac{2c}{(a+b-c)(a-b+c)}.$$ Setzt man



$$a+b+c=2s, \text{ so wird}$$
$$b+c-a=2s-2a=2(s-a),$$
$$a+c-b=2s-2b=2(s-b),$$
$$a+b-c=2s-2c=2(s-c),$$
also
$$h=\frac{1}{2c}\sqrt{16s(s-a)(s-b)(s-c)},$$
$$h=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (7)$$
Wegen (6) folgt daraus für den Flächeninhalt
$$A=\frac{ch}{2}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (8)$$
Die Formel (8) wird auch die *Heronische Inhaltsformel* genannt nach dem griechischen Mathematiker Heron von Alexandria (um 130 u. Z.).
b) Man erhält für $a=12$ cm, $b=10$ cm, $c=8$ cm
$$s=\frac{a+b+c}{2}=15\text{ cm},$$
$$s-a=3\text{ cm},$$
$$s-b=5\text{ cm},$$
$$s-c=7\text{ cm};$$
daher gilt wegen (7) und (8)
$$h=\frac{2}{8}\sqrt{15\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\text{ cm}$$
$$=\frac{15}{4}\sqrt{7}\text{ cm}\approx 9{,}92\text{ cm},$$
$$A=\sqrt{15\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\text{ cm}^2$$
$$=15\sqrt{7}\text{ cm}^2\approx 39{,}69\text{ cm}^2.$$

W 10/12 ■ 1347 Aus (1) folgt für den jährlichen Steigerungsfaktor q der UdSSR
$$q^{10}=\frac{91{,}0}{45{,}3},$$
$$10\cdot\log q=\lg 91{,}0-\lg 45{,}3,$$
$$\lg q=\frac{\lg 91{,}0-\lg 45{,}3}{0\,10}=0{,}03029.$$
Analog erhält man für den jährlichen Steigerungsfaktor r der USA
$$r^{10}=\frac{119{,}3}{106{,}2},$$
$$\lg r=\frac{\lg 119{,}3-\lg 106{,}2}{10}=0{,}00505.$$
Ferner erhält man aus (2)
$$91{,}0\cdot q^x=119{,}3\cdot r^x,$$

$$\left(\frac{q}{r}\right)^x = \frac{119{,}3}{91{,}0},$$
$$x(\lg q - \lg r) = \lg 119{,}3 - \lg 91{,}0,$$
$$x = \frac{\lg 119{,}3 - \lg 91{,}0}{\lg q - \lg r} = \frac{0{,}1176}{0{,}0252} \approx 4{,}7.$$

Unter Voraussetzung gleichbleibender jährlicher Steigerungsfaktoren war also nach rund 5 Jahren, d. h., im Jahre 1970, damit zu rechnen, daß die UdSSR die USA in der Rohstahlproduktion überholen wird. Tatsächlich erfolgte das Überholen 1 Jahr später, nämlich im Jahre 1971, in dem die Rohstahlproduktion in der UdSSR 120,7 Mill. t, dagegen in den USA 109,3 Mill t betrug. Diese Differenz (von 1 Jahr) hat verschiedene Ursachen, eine der Ursachen ist die durch Konjunkturschwankungen in den USA bedingte ungleichmäßige Entwicklung; daher war die Annahme eines gleichbleibenden Steigerungsfaktors nur angenähert zutreffend.

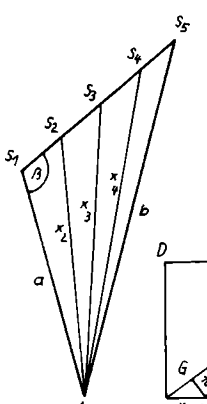
W 10/12 ■ 1348 Wir setzen $\overline{S_1S_5} = c = 4 \cdot 1{,}8\ \text{m} = 7{,}2\ \text{m}$, $\sphericalangle S_5S_1A = \beta$, $\overline{AS_2} = x_2$, $\overline{AS_3} = x_3$, $\overline{AS_4} = x_4$ (vgl. das Bild).
Dann gilt nach dem Kosinussatz

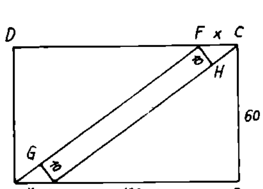
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{8^2 + 7{,}2^2 - 13^2}{2 \cdot 8 \cdot 7{,}2} = -\frac{53{,}16}{115{,}2} = -0{,}4615.$$

Ferner erhalten wir

$$x_2^2 = (8^2 + 1{,}8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 1{,}8 \cos\beta)\ \text{m}^2 = (64 + 3{,}24 + 13{,}29)\text{m}^2 = 80{,}53\ \text{m}^2,$$
$$x_2 = 8{,}97\ \text{m};$$
$$x_3^2 = (8^2 + 3{,}6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3{,}6 \cos\beta)\ \text{m}^2 = (64 + 12{,}96 + 26{,}58)\ \text{m}^2 = 103{,}54\ \text{m}^2,$$
$$x_3 = 10{,}18\ \text{m};$$
$$x_4^2 = (8^2 + 5{,}4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5{,}4 \cos\beta)\ \text{m}^2 = (64 + 29{,}16 + 39{,}87)\text{m}^2 = 133{,}03\ \text{m}^2,$$
$$x_4 = 11{,}53\ \text{m}.$$

Die gesuchten Abstände des Standortes A von den Mittelpunkten S_2, S_3 bzw. S_4 der zweiten, dritten bzw. vierten Schale betragen also 8,97 m, 10,18 m, 11,53 m.





W 10/12*1349 Der von dem Weg eingenommene Teil des Grundstücks stellt ein Parallelogramm $AECF$ dar, dessen Seiten $\overline{AE}$ und $\overline{FC}$ die Maßzahl x haben mögen. Ferner sei G der Fußpunkt des von E auf AF und H der Fußpunkt des von F auf EC gefällten Lotes (vgl. das Bild). Dann gilt für die Maßzahlen der Längen der Seiten der rechtwinkligen Dreiecke AEG und EBC

$$\overline{AE} = x,\ \overline{EG} = 10,\ \overline{AG} = \sqrt{x^2 - 100},$$
$$\overline{EB} = 100 - x,\ \overline{BC} = 60.$$

Wegen $AG \parallel EC$ gilt nun

$$\triangle AEG \sim \triangle EBC,$$

also

$$\overline{AG} : \overline{EG} = \overline{EB} : \overline{BC},$$
$$\sqrt{x^2 - 100} : 10 = (100 - x) : 60,$$
$$6\sqrt{x^2 - 100} = 100 - x,$$
$$36x^2 - 3600 = 10000 - 200x + x^2,$$
$$35x^2 + 200x - 13600 = 0,$$
$$x^2 + \frac{40}{7}x - \frac{2720}{7} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau eine positive Lösung, nämlich

$$x = -\frac{20}{7} + \sqrt{\frac{400}{49} + \frac{2720}{7}} = \frac{-20 + \sqrt{19440}}{7},$$
$$x \approx \frac{-20 + 139{,}4}{7} \approx 17{,}06.$$

Nun ist die Maßzahl des Flächeninhalts des Parallelogramms $AEFC$ gleich dem Produkt aus der Maßzahl der Länge der Seite $\overline{AE} = x$ und der Maßzahl der zugehörigen Höhe $\overline{BC} = 60$

$$A \approx 17{,}06 \cdot 60 \approx 1024.$$

Der Flächeninhalt des von dem Weg eingenommenen Teils des Grundstücks beträgt daher rund 1020 m².

W 10/12*1350 a) Aus $z = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{15}$ und $zx = x + x^2 + \ldots + x^{15} + x^{16}$ folgt durch Subtraktion

$$zx - z = x^{16} - 1,$$
$$z(x-1) = x^{16} - 1$$

und hieraus wegen $x - 1 \neq 0$

$$z = \frac{x^{16} - 1}{x - 1} \qquad (1)$$

Das ist die geforderte Umformung; denn man benötigt zur Berechnung von

$x^2 = x \cdot x$ 1 Multiplikation
$x^4 = x^2 \cdot x^2$ 1 weitere Multiplikation,
$x^8 = x^4 \cdot x^4$ 1 weitere Multiplikation,
$x^{16} = x^8 \cdot x^8$ 1 weitere Multiplikation,
zusammen also 4 Multiplikationen.
Ferner benötigt man zur Berechnung von
$\dfrac{x^{16} - 1}{x - 1}$ 1 Division,
so daß also insgesamt 5 Multiplikationen bzw. Divisionen notwendig sind.

b) Wir versuchen, den Ausdruck

$$z = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{15}$$

so umzuformen, daß eine Summe von Produkten entsteht, zu deren Berechnung nicht mehr als 5 Multiplikationen erforderlich sind. Wir erhalten

$$z = 1 + (x + x^4 + x^7 + x^{10} + x^{13}) + (x^2 + x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14}) + (x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15}),$$
$$z = 1 + x(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12}) + x^2(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12}) + x^3(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12}),$$
$$z = 1 + (x + x^2 + x^3)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12}),$$
$$z = 1 + (x + x^2 + x^3)\left[(1 + x^3 + x^6) + x^6(x^3 + x^6)\right]. \qquad (2)$$

Damit haben wir eine Umformung erhalten, die den gestellten Forderungen entspricht; denn man benötigt zur Berechnung von

$x^2 = x \cdot x$ 1 Multiplikation,
$x^3 = x^2 \cdot x$ 1 weitere Multiplikation,
$x^6 = x^3 \cdot x^3$ 1 weitere Multiplikation.

Mit diesen drei Multiplikationen sind bereits (da Additionen nicht gezählt werden) die Summen

$x + x^2 + x^3$, $1 + x^3 + x^6$, $x^3 + x^6$

erfaßt worden. Wir benötigen jetzt nur noch zur Berechnung von

$x^6(x^3 + x^6)$ 1 weitere Multiplikation,
$(x + x^2 + x^3)\left[(1 + x^3 + x^6) + x^6(x^3 + x^6)\right]$
1 weitere Multiplikation, so daß insgesamt nur 5 Multiplikationen erforderlich sind, womit auch die Aufgabe b) gelöst ist.

Lösung zu: Der „Dirichletsche Schubfachschluß", Heft 1/75

a) Bei der Division einer natürlichen Zahl n durch 1000 können die Reste 0, 1, 2, 3, …, 999 auftreten.
Aus $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$, … folgt, daß die Potenzen von 7 nur auf die Ziffern 1, 3, 7 und 9 enden.
Von den bei der Division durch 1000 auftretenden Resten können deshalb diejenigen fortfallen, die auf die Ziffern 0, 2, 4, 5, 6 oder 8 enden. Es entfallen also alle geraden Zahlen, das sind 500 Zahlen, ferner noch alle auf die Ziffer 5 endenden Zahlen, das sind weitere 100 Zahlen. Auf die verbleibenden 400 Reste verteilen wir die ersten 400 Potenzen der 7. Wir nehmen nun eine Fallunterscheidung vor.
1. Fall: Wenigstens eine der Potenzen $7^1, 7^2, 7^3, \ldots, 7^{400}$ läßt bei Division durch 1000 den Rest 1, endet also auf die Ziffern 001, dann wäre die Existenz einer solchen Potenz bereits gesichert.
2. Fall: Keine dieser 400 Potenzen läßt bei Division durch 1000 den Rest 1. Dann lassen wenigstens zwei der Potenzen den gleichen Rest r, und es gilt

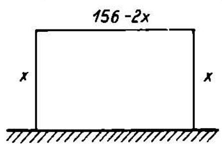
$$7^k = 1000m + r,$$
$$7^i = 1000n + r,$$
$$7^k - 7^i = 1000(m - n),$$
$$7^i(7^{k-i} - 1) = 1000(m - n),$$

wobei $k > i$ gelte.
Da 7^i zu 1000 teilerfremd ist, muß 7^{k-i} bei Division durch 1000 den Rest 1 lassen. Wegen $0 < k - i < 400$ gehört 7^{k-i} zu den ersten 400 Potenzen der 7. Deshalb ist nur der 1. Fall richtig.
b) Es sei 7^m die kleinste Potenz, die bei Division durch 1000 den Rest 1 läßt, also auf die Ziffern 001 endet.
Dann läßt auch $(7^m)^n$ bei Division durch 1000 den Rest 1, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Das heißt, es gibt unendlich viele Potenzen von 7, die auf die Ziffern 001 enden.
Ohne Beweis: Die kleinste auf die Ziffern 001 endende Potenz von 7 ist 7^{20}, eine 17stellige Zahl.

Lösung zu: Ein Zaun und ... eine quadratische Funktion, Seite 65

Die zur Wand senkrechten Seiten mögen je x Meter lang sein; dann hat die zur Wand parallele Seite $(156-2x)$ Meter, und der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt $S=x(156-2x)$ Quadratmeter. (siehe Bild) Wir formen den Ausdruck für den Flächeninhalt um, indem wir ein vollständiges Quadrat abtrennen:

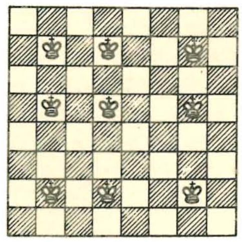
$$S=x(156-2x)=-2(x^2-78x+1521-1521)$$
$$=-2[(x-39)^2-1521]=-2\cdot(-1521)$$
$$-2(x-39)^2 \text{ oder } S=3042-2(x-39)^2.$$



Somit ist der Flächeninhalt des Rechtecks (des Maschinenhofs) gleich der Differenz aus der konstanten Größe 3042 und der veränderlichen Größe $2\cdot(x-39)^2$. Da aber der Ausdruck $2\cdot(x-39)^2$ nicht negativ sein kann, beträgt der Flächeninhalt höchstens 3042 Quadratmeter; dieser Wert wird erreicht, falls $2\cdot(x-39)^2=0$, also $x=39$ ist, d. h., die Länge des Hofs (in Richtung der Wand) muß 78 Meter betragen, die Breite dagegen 39 Meter. Unter genau diesen Bedingungen wird der Flächeninhalt des Grundstücks maximal und beträgt 3042 Quadratmeter.

Anmerkung: Es ergibt sich, daß die eine Seite des Rechtecks doppelt so lang sein muß wie die andere. Versucht zu beweisen, daß dieses Ergebnis „unabhängig von der Zaunlänge" ist (man setze diese gleich z und rechne dann genauso wie oben gezeigt)!

Lösungen zu
Rund um das Schachbrett Heft 2/75



Der König

Damen auf dem Schachbrett

a) Die Damesteine stellt man u. a. auf die Felder c6, c3, f8, h5.

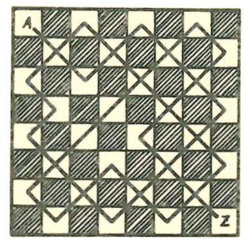
b) Die Damesteine kann man u. a. auf die Felder d6, e5, f4, g8 und h7 stellen.

c) Mit einem Damestein kann man 1456 Züge machen.

Das Petrow-Dreieck

Derartige Damestellungen gibt es vier: 1. weiß c3, e3 und d6, schwarz d8; 2. weiß d6, f6 und e3, schwarz e1; 3. weiß f4, f6 und c5, schwarz a5; 4. weiß c3, c5 und f4, schwarz h4. Bei jedem dieser Dreiecke bildet eine Dame die Dreiecksspitze (zum Brettrand). Das Dreieck ist in jeder konkreten Stellung in der geringsten Zugzahl aufzubauen. In allen vier Fällen hat die schwächere Seite, deren Dame binnen vier Züge gefangen wird, den Anzug. Sobald die einzelne Dame gezogen hat, zieht die gegnerische Dame vom großen Weg an das Ende der Diagonale der einzelnen Dame. Wenn diese dann wieder am Zug ist, folgt ein doppeltes Damenopfer nach folgendem Muster.

1. ... d8–h4; 2. c3–e1! h4–f6; 3. e3–g5! f6; h4; 4. d6–g3; h4:f2; 5. e1:beliebig (Falls hingegen 1. ... d8–a5, so 2. c3–e1! a5–d8; 3. c3–b6! d8 : a5; 4. d6–b4 a5 : beliebig und 5. e1 : beliebig).



Von A bis Z

Das zersprungene Schachbrett

Die Lösung sei jedem Leser selbst überlassen!

Magisches Quadrat

5g und 2b; 1g und 2b; 5a und 5d

Kleines Mathematik-Sprachlexikon Teil 3

Wurzeln
корни · roots · racines

$\sqrt[n]{}=b$, n-te Wurzel aus c gleich b
корень энной степени из c равен b
(the) n-th root of c is equal to b
racine ennième de c égale b

$\sqrt[n]{}$ Wurzelausdruck
корень · radical · terme radical

$\sqrt{}$ Wurzelzeichen
знак корня
· root sign (radical sign) · signe radical

n Wurzelexponent
показатель корня index of a root
exposant d'une racine

c Radikand
подкоренное выражение · radicand · base

b Wurzelwert
значение корня
value of a root · valeur d'une racine

$\sqrt[n]{c^m}=c^{\frac{m}{n}}$, n-te Wurzel aus c hoch m gleich c hoch m n-tel
корень энной степени из c в степени m равен c в степени m, делённое на n
the n-th root of c to the m-th equals c to the power of m over n
racine ennième de c puissance m égale c puissance m sur n

$\sqrt{x}$ Quadratwurzel aus x
корень квадратный из x
square root of x · racine carrée de x

$\sqrt[3]{x}$ Kubikwurzel aus x
корень кубический из x
cube root of x · racine cubique de x

radizieren
извлечь корень
to extract a root · extraire la racine

einen Wurzelausdruck durch eine Potenz mit gebrochenem Exponenten wiedergeben
необразовать подкоренное выражение с помощью степени с дробным показателем
to express a radical by a power with a fractional exponent
reproduire un terme radical par une puissance à un exposant fractionnaire

Potenzen
возвести в степень · Powers · Puissances

$b^n=c$, b hoch n gleich c
b в энной степени равно c
b to the n-th power is equal to c
b puissance n égale c

b Basis
основание степени · base · base

n Potenzexponent
показатель степени · power exponent
exposant d'une puissance

c Potenzwert
значение степени · value of a power
valeur d'une puissance

b^n Potenz
степень · power · puissance

$b^{-n}=\frac{1}{b^n}$, b hoch minus n gleich eins durch b hoch n
b в степени минус n равно единице делённой на b в энной степени
b to the power of minus n is equal to one over b to the n-th
b puissance moins n égale un sur b puissance n

b^2 b Quadrat
b в квадрате (или: b квадрат)
b squared · b au carré

b^3 b hoch drei
b в кубе · b cubed · b puissance trois

potenzieren
возвести в степень · to raise to a power
élever à une puissance

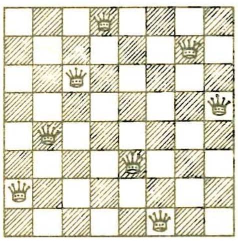
eine Zahl quadrieren
возвести число в квадрат
to square a number · carrer un nombre

Er kommt niemals zum Ziel

Der Springer gelangt immer von einem schwarzen Feld auf ein weißes und dann vom weißen wiederum auf ein schwarzes usw. Das Schachbrett hat 64 Felder. Um nach h8 zu gelangen, muß der Springer, wenn er jedes Feld berührt, 63 Züge ausführen. Am Anfang steht der Springer auf einem schwarzen Feld und am Ende muß er ebenfalls auf einem schwarzen Feld ankommen. Das ist unmöglich, weil der 63. Zug ein ungerader ist und der Springer bei jedem ungeraden Zug, da er doch auf einem schwarzen Feld beginnt, auf ein weißes Feld kommt.

Rössel und Läufer

Die Red. *alpha* erwartet Lösungsvorschläge.



Acht-Königinnen-Problem

Lösungen zu alpha-heiter 3/75

Wie viele sind es?

$$x+y+z=12$$
$$2x+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=48$$
$$y=36-7x$$

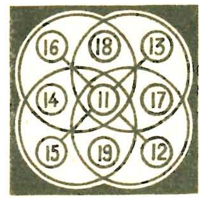
Fünf Männer, eine Frau und sechs Kinder transportierten die 12 Brote.

Drei Kästchen

Man nehme eine Kugel aus dem Kästchen „schwarz/weiß" heraus. Da die Beschriftung falsch ist, müssen zwei Kugeln gleicher Farbe in ihm stecken (2× schwarz oder 2× weiß). Sollte die entnommene Kugel weiß sein, ist die andere auch weiß. Analog folgt, daß mit dem Kästchen 2× weiß zwei schwarze Kugeln liegen und im dritten können nur schwarz/weiß sein. Wenn die gezogene Kugel schwarz ist, dann ist die andere auch schwarz, in dem Kästchen mit der Beschriftung schwarz/schwarz stecken eine schwarze und eine weiße Kugel.

Angeln mit vielen Unbekannten

Da die Summe der Endziffern der geangelten Fische $2+3+3+4=12$ mit der Ziffer 2 endet und es kein Quadrat einer natürlichen Zahl gibt, das mit 2 endet, muß es sich nicht um vier, sondern um drei Personen handeln. $(2+3+4=9)$, d. h., daß der Sohn von einem gleichzeitig der Vater von dem anderen ist. Nikolai kann nicht der Sohn vom Vater Peter sein, da seine Beute mit der Ziffer 2 endet und nicht, wie es im Text – 4 – heißt. Daraus folgt, daß Peter der Sohn von Nikolai ist.



Arithmetisches Rätsel

Beim Einkauf

Der Mann hatte am Anfang 99,98 Lewa, nach dem Einkauf 49,99 Lewa.

Das Lotterielos

Die Summe der Ziffern einer fünfstelligen Zahl kann nicht größer als 45 sein $(9+9+9+9+9=45)$. Sie kann nicht kleiner gewesen sein, sonst würde es mehrere Möglichkeiten geben und der Vater würde die Zahl nicht sofort erkennen. Das Los trägt die Zahl 99999 und mein Vater ist 45 Jahre alt.

Kryptarithmetik

$120 \cdot 589 = 70\,680$;
$177 \cdot 594 = 104\,368$
$8+24-12=20$;
$(2 \cdot 7)+17=31$
$7+(63:21)=10$;
$17+94-50=61$

Die Treppe

5	35			
34	4			
36	2	38		
3	37	1		
19	21	17	23	
20	18	22	16	
30	8	32	6	29
9	31	7	33	10
14	26	12	28	15
25	13	27	11	24

Geometrie

геометрия · geometry · géométrie

Planimetrie

планиметрия · planimetry · planimétrie

Geraden und Winkel

прямые углы

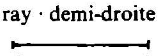
lines and angles · droites et angles

Gerade g

прямая g · straight line g · droite g

Strahl

луч · ray · demi-droite

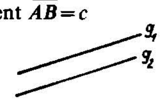


Strecke $\overline{AB}=c$

отрезок $\overline{AB}$ на g

line segment AB is equal to c

segment $\overline{AB}=c$

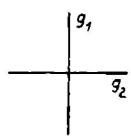


g_1 ist parallel zu g_2 $(g_1 \| g_2)$

g_1 и g_2 параллельны между собой

g_1 is parallel to g_2

g_1 ist parallel to g_2



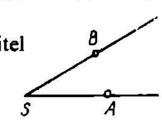
g_1 steht senkrecht auf g_2 $(g_1 \perp g_2)$

g_1 перпендикулярно к g_2

g_1 is perpendicular to g_2

g_1 perpendiculaire à g_2 (*oder auch:* g_1 et g_2 orthogonaux)

Scheitel



вершина · vertex · sommet

Schenkel

сторона (угла) · leg · côté

Winkel ASB

угол ASB · angle ASB · angle ASB

spitzer Winkel

острый угол · acute angle · angle aigu

rechter Winkel

прямой угол · right angle · angle droit

stumpfer Winkel

тупой угол · obtuse angle · angle obtus

gestreckter Winkel

развёрнутый угол

straight angle · angle plat

überstumpfer Winkel

угол больше 180°

reflex angle · angle de plus de 180°

Komplementwinkel $(+=90°)$

дополнительные углы, сумма которых равна 90°

complementary angles

angles complémentaires

Supplementwinkel

дополнительные углы, сумма которых равна 180°

supplementary angles

angles supplémentaires

Winkelpaare an einer Transversalen durch zwei Gerade

пары углов, образуемых при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой

pairs of angles made by a transversal cutting ob two straight lines

angles formés par deux parallèles coupés par une sécante

Stufenwinkel

соответственные углы

corresponding angles · angles correspondants

Scheitelwinkel

вертикальные углы

vertical · angles opposés (par le sommet)

ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

● Seit 1969 fördern Studenten der Sektion Mathematik/Geographie der PH *Karl Friedrich Wilhelm Wander* Dresden interessierte und talentierte Schüler der Klassen 5 bis 8. Die künftigen Mathematiklehrer wollen ihr bereits erworbenes fachliches Wissen an die Schüler weitergeben und dabei wertvolle Erfahrungen in der Planung und Gestaltung der außerunterrichtlichen Arbeit sammeln. Allen Teilnehmern macht es Freude, Denk- und Knobelaufgaben zu stellen, die sie selbst erdacht, aus Büchern oder der *alpha* ausgewählt und mit denen sie sich schon gründlich beschäftigt haben.

Spiel und Sport werden natürlich im Lager groß geschrieben. Unser Bild zeigt *Junge Mathematiker* beim Training für die Mopedfahrerlaubnis.

Zwei Aufgaben aus ihrer Arbeit:

Klasse 6: Drei Offiziere der NVA treffen sich zu einer Besprechung:
Major *Weiß*, Oberleutnant *Schwarz* und Hauptmann *Braun*. Beiläufig bemerkte der Schwarzhaarige: „Es ist merkwürdig, daß einer von uns weiße, einer schwarze und einer braune Haare hat, daß jedoch keiner von uns die Haarfarbe hat, die seinem Namen entspricht."
„Du hast recht", entgegnete Major *Weiß*. Welche Haarfarbe hat der Hauptmann?

Klasse 8: Es stehen fünf einzelne Spulen mit den Widerständen 1 Ω, 2 Ω, 5 Ω, 10 Ω und 20 Ω zur Verfügung. Stelle fest, wie viele Widerstände gemessen werden können, wenn die Spulen jeweils in Reihe geschaltet sind!

● Der im Jahre 1972 in Gräfenhainichen gebildete *Kreisklub Junger Mathematiker* kann eine Reihe schöner Erfolge aufweisen: So konnten z. B. im Februar 1975 die sieben Teilnehmer im Bezirksausscheid einen 1., 2., 5. und 6. Platz erringen.
Höhepunkt der Arbeit ist das jährlich in den Sommerferien durchgeführte vierzehntägige Spezialistenlager (für Kl. 5 bis 7).
An 6 Vormittagen beschäftigen sich die Teilnehmer mit mathematischen Problemen, u. a. mit Elementen der Mengenlehre, der Aussagenlogik und der Geometrie sowie Aufgaben aus früheren Olympiaden und *alpha*-Heften. Abschluß und Höhepunkt ist die Lagerolympiade.

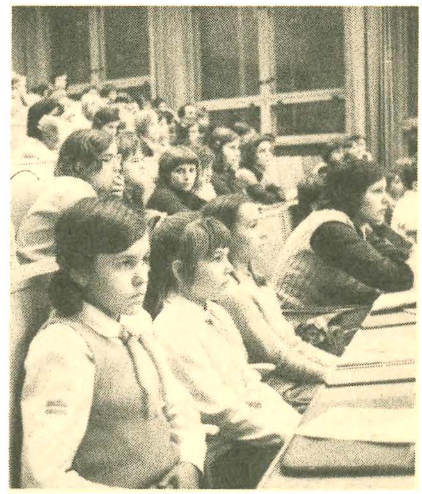
Drei Aufgaben aus der Klausur:

Klasse 5: In einem Kasten befinden sich 100 Kugeln, davon sind 25 weiß, 20 grün, 15 schwarz, 10 blau, 5 rot und der Rest gelb. Wieviel Kugeln mußt du mit verbundenen Augen mindestens herausnehmen, damit du auch im ungünstigsten Fall
a) 2 Kugeln, b) 6 Kugeln, c) 20 Kugeln
gleicher Farbe bekommst?

Klasse 6: Konstruiere Dreiecke ABC mit folgenden Bestimmungsstücken:
Seite $\overline{BC}=a=5$ cm, Winkel $ACB=\gamma=100°$
Winkelhalbierende $\overline{BD}=w_\beta=6$ cm.

Klasse 7: Gegeben ist eine Strecke $\overline{AB}$ und außerhalb von AB ein Punkt P.
a) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem $\overline{AB}$ die Seite c und P der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks ABC ist!
b) Wo muß P liegen, damit das Dreieck stumpfwinklig ist?

Aus Anlaß des 25. Jahrestages der Gründung unserer Republik legten sie im Oktober 1974 in einem ersten Kolloquium Rechenschaft über ihre Arbeit ab (siehe Foto).

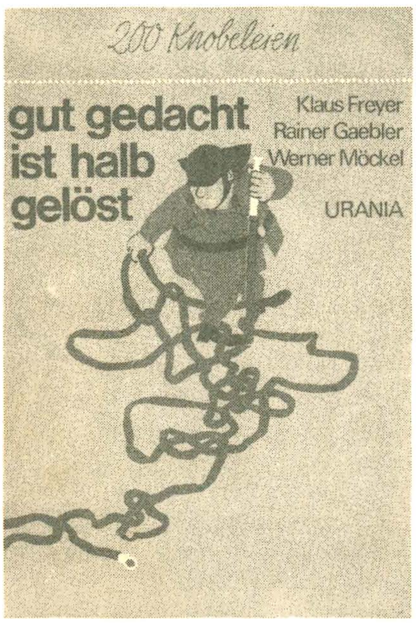


● Mit einem Vortrag vom stellv. Vorsitzenden der Mathematischen Gesellschaft der DDR, Prof. Dr. Klötzler, der Verpflichtung der 25 Schüler durch den Direktor der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität, Prof. Dr. Schumann, und einer Aussprache zwischen den Gästen, Wissenschaftlern und Schülern wurde die *Mathematische Schülergesellschaft Leipzig* gegründet (16. 12. 74).

Unser Foto: Feierliche Eröffnung der *Olympiade Junger Mathematiker der DDR*, Bezirksausscheid. Alle 25 Schüler der MSG Leipzig hatten sich durch hervorragende Leistungen für diese 3. Stufe qualifiziert.

BÜCHER MIT MATHE

aus dem Urania-Verlag



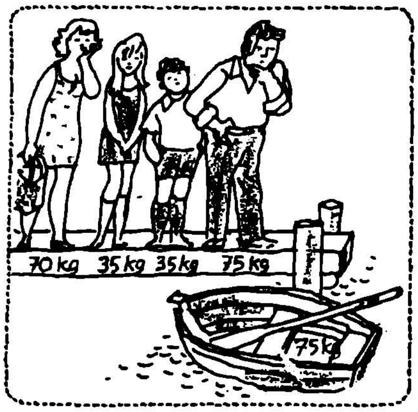
Bestell-Nr. 6531958, 223 S., zahlr. Abb., Preis 12,00 M

Köpfchen, Köpfchen muß man bei der Beschäftigung mit dem jetzt in 2. Auflage erschienenen Buch haben. Kniffliges für jung und alt wird hier in einer abwechslungsreichen, nach Sachgebieten geordneten Auswahl dargeboten. Unterhaltsame Aufgaben aus verschiedenen Gebieten von Mathematik und Physik regen das logische Denken an.

Vier Mann und nur ein Boot

Im Urlaub kamen Vater, Mutter, Tochter und Sohn auf einer Wanderung an einen kleinen Fluß, den sie überqueren wollten. Weit und breit war keine Brücke zu sehen. Als sie eine Weile am Ufer entlanggegangen waren, entdeckten sie ein Wochenendhäuschen mit einer Anlegestelle, an der ein Boot vertäut war. Das Boot, ein winziges Gefährt, hatte eine Tragfähigkeit von maximal 75 kg. Der Vater wog 75 kg, die Mutter 70 kg und Tochter und Sohn je 35 kg.

Wie konnte die Familie mit dem entdeckten Boot übersetzen, und wie viele Flußüberquerungen waren mindestens erforderlich?



Johannes Lehmann

Mathe mit Pfiff

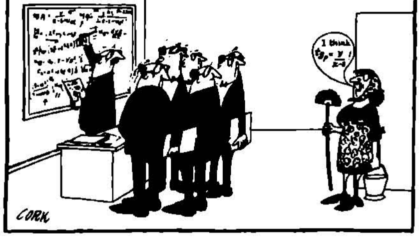
Ein Buch aus der akzent-Reihe

128 S., zahlreiche lustige Vignetten, Vierfarbendruck, Best.-Nr. 6533646 Preis 4,50 M

Aus dem Inhalt:
Überall natürliche Zahlen · gebrochene Zahlen · Teilbar oder nicht teilbar? · Überall Variable · Gleichungen und Ungleichungen in Theorie und Praxis · Logik/Kombinatorik · Aus alten Mathematikbüchern · Gesucht x, gesucht A · Rund um den Kreis · Geometrie · Magische Quadrate · Würfeleien · Kryptarithmetik · Rätsel und Spiele · umfassende Lösungen

● Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl.
Wie lauten diese beiden Zahlen?

● Bisher hast du 6 Mark Taschengeld erhalten. Ab sofort bekommst du nur noch den 0,8.Teil dieses Taschengeldes. Jörg ärgerte sich zunächst, dann aber schenkt er vor lauter Freude seiner kleinen Schwester Claudia eine Tüte Bonbons.
Es ist das Verhalten von Jörg zu begründen.



Göttner/Fischer/Krieg

Was ist, was kann Statistik

255 S., zahlr. Abb., Bestell-Nr. 6533160, Preis 6,80 M

Kennziffern, statistische Analysen, graphische und tabellarische Darstellungen statistischen Inhalts sind heute Bestandteile der beruflichen Tätigkeit vieler Menschen. Sowohl zur Leitung und Planung der gesamten Volkswirtschaft als auch über einzelne Teile sind statistische Informationen unentbehrlich. Ebenso bedingt die Lösung naturwissenschaftlicher, technisch-konstruktiver und technologischer Aufgaben in vielen Fällen die Verwendung statistischer Werte. Ohne die Anwendung statistischer Methoden ist ein tieferes Eindringen in den Gegenstand der einzelnen Wissenschaften nicht mehr vorstellbar. Aufgabe des vorliegenden Bändchens soll es sein, den Leser in die Methoden der Statistik einzuführen und an einer Auswahl von Beispielen deren Bedeutung zu zeigen.

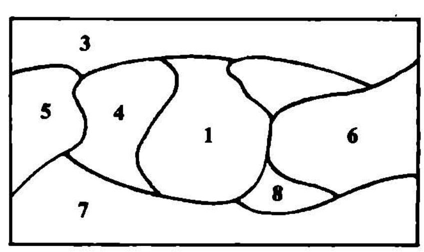
Hugo Steinhaus

100 neue Aufgaben

Best.-Nr. 6532866, 176 Seiten, zahlreiche Abb., Preis 8,50 M

Das Buch enthält in einer breiten Skala Aufgaben und Probleme aus verschiedenen Gebieten der elementaren Mathematik, Aufgaben zum Kopfzerbrechen für mathematisch noch weniger Gewandte sowie für Geübte. Sie erfordern nicht unbedingt Kenntnisse der höheren Mathematik. Wer sie aber lösen will, muß klar und schöpferisch denken. Diese Fähigkeit wird beim Beschäftigten mit den Aufgaben zwanglos entwickelt bzw. gefördert.

Färbung einer Landkarte



Die Abbildung zeigt acht Länder; es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 die Namen dieser Länder. Wie können wir diese Landkarte mit den vier Farben Rot, Blau, Gelb und Grün farbig gestalten, so daß für jedes Paar benachbarter Länder die Färbung verschieden ist?