



$(a+b)^0$

1

$(a+b)^1$

1

1

$(a+b)^2$

1

2

1

$(a+b)^3$

1

3

3

1

$(a+b)^4$

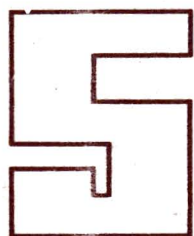
1

4

6

4

1



**Redaktionskollegium:**

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil. E. Hammeister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); W. Unze (Leipzig); Dr. habil. W. Walsch (Halle);

**Redaktion:**

STR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

**Anschrift der Redaktion:**

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

**Anschrift des Verlags:**

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin  
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 2005 41  
Postscheckkonto: Berlin 132 626  
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft  
0,50 M, im Abonnement zweimonatlich  
(1 Heft) 0,50 M

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegen-  
genommen.

Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import BmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Presseagentur Nowosti, APN (S. 97); Archiv *alpha* (S. 99); F. Nickel, Leipzig (S. 107); Zentralbild (S. 107); W. Stoye, Berlin (S. 108) J. Lehmann, Leipzig (113);

Die Vignetten auf S. 112 fertigte während der XII. IMO an: Prof. Constantin Ottescu, Bukarest (Stellv. Delegationsleiter – Sekretär der Math. Gesellschaft der SR Rumänien)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

**Gesamtherstellung:**

Staatsdruckerei

der Deutschen Demokratischen Republik,  
(Rollenoffsetdruck)

Redaktionsschluß: 28. Juli 1970

---

**alpha**

**Mathematische Schülerzeitschrift**

---

**Inhalt**

- 97 Wir stellen vor:  
Leninpreisträger Lew Semjonowitsch Pontrjagin (5)\*
- 98 Ein kleiner Dreh führt zum Ziel (7)  
Anschaulich und maßgetreu auf einem Blatt  
Dozent Dr. E. Schröder, Technische Universität Dresden
- 100 Achtung Kreuzung — Vorfahrt beachten! (5)  
Kleine Übung im logischen Schließen  
W. Träger, Schloßberg-Oberschule, Döbeln
- 102 Einführung in die elektronische Datenverarbeitung Teil 11 (7)  
J. Frommann, Klement-Gottwald-Schule (EOS), Berlin-Treptow
- 103 Arbeitsgemeinschaften haben das Wort
- 104 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (5)
- 106 Berufsbild: Bauingenieur (5)  
Dr.-Ing. W. Wittig, Hochschule für Bauwesen, Leipzig
- 108 Eine Aufgabe von  
Prof. Dr. rer. nat. habil. Herbert Frank (7)  
Humboldt-Universität zu Berlin
- 109 Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen (6)  
W. Träger, Schloßberg-Oberschule, Döbeln
- 111 Freitag, der 13. (8)  
Aus: The Mathematics Teacher 5/69, New York
- 112 XII. Internationale Mathematikolympiade  
Budapest/Kesthely 1970  
Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig
- 114 Lösungen (5)
- 118 In freien Stunden, *alpha* heiter (5)  
Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig  
Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz
- 120 Mathematik-Kalender November/Dezember 1970 (5)  
W. Heinig, Hohenstein-Ernstthal; Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig
- IV. Umschlagseite: Leser schreiben an *alpha* (5)

\* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

---

Wir stellen vor:

## Leninpreisträger Lew Semjonowitsch Pontrjagin

---

Am 3. September 1970 wurde *Lew Semjonowitsch Pontrjagin* 62 Jahre alt. Er gehört zu den wenigen Mathematikern der Welt, die zu Lebzeiten verdientermaßen als Klassiker der Weltwissenschaft anerkannt wurden.

Die Arbeiten von Akademiemitglied *L. S. Pontrjagin* betreffen nicht ein einzelnes Gebiet der Mathematik, sondern eine ganze Reihe ihrer Teilgebiete. Er ist ein Wissenschaftler großen Formats und eines umfassenden mathematischen Gesichtskreises. Grundlegende wissenschaftliche Resultate, die von *Lew Semjonowitsch* stammen, kann man in der Algebra und der Geometrie, in der Topologie und der Theorie der Differentialgleichungen, in der Theorie der Steuerung und Regelung sowie in der Spieltheorie finden. Und jedesmal sind mit seinem Namen sehr wichtige, tiefgehende und grundlegende Resultate verknüpft.

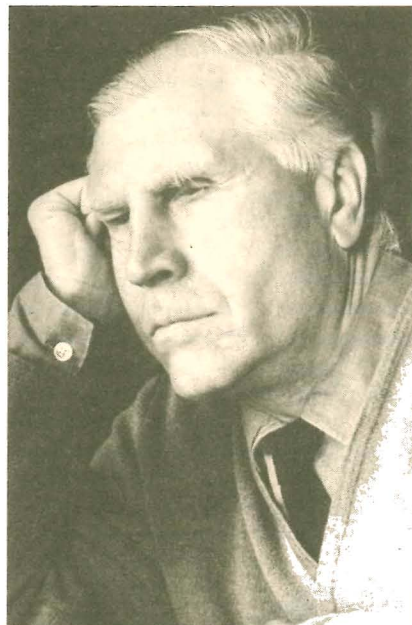
Mehrere tausend Arbeiten, die in der ganzen Welt erschienen sind (nicht nur mathematische Arbeiten, sondern auch Arbeiten auf dem Gebiet der angewandten technischen Wissenschaften), enthalten bedeutende Resultate und Methoden, die auf *L. S. Pontrjagin* zurückgehen. Es ist jetzt schon nicht mehr möglich, alle Werke, in denen Hinweise auf die Forschungen *Lew Semjonowitschs* enthalten sind, zu verfolgen. Einen besonders großen Teil der Arbeiten nehmen die Untersuchungen auf dem Gebiet der mathematischen Theorie der optimalen Steuerung ein, die von *Lew Semjonowitsch* und seinen Schülern durchgeführt wurden. Der Name *Pontrjagins* wurde auf diesem Gebiet schon zum Symbol. Überaus kennzeichnend ist, daß die Internationale Astronautische Akademie *L. S. Pontrjagin* zum Ehrenmitglied wählte (gemeinsam mit *J. Gagarin* und *W. Tereschkowa*).

*L. S. Pontrjagin*, der Begründer zweier großer mathematischer Schulen ist (einer Schule für algebraische Topologie und einer Schule für die mathematische Theorie optimaler Steuerung), erzog eine ganze Generation sowjetischer Wissenschaftler. Als sowjetischer und russischer Patriot vertritt er auf großen internationalen mathematischen Kongressen die sowjetische Wissenschaft würdig und eindrucksvoll. Die Heimat würdigte die wissenschaftlichen Leistungen *L. S. Pontrja-*

*gins*: er wurde zweimal mit dem Leninorden ausgezeichnet und erhielt weitere hohe Orden und Auszeichnungen. Für seine Arbeiten erhielt er ferner den Leninpreis, den Staatspreis sowie den Lobatschewskipreis.

*L. S. Pontrjagin* wurde in einer armen Familie geboren. Sein Vater, *Semjon Akimowitsch Pontrjagin*, ein kleiner Angestellter aus der Stadt Trubtschewska des Orłowski Gouvernements, starb im Jahre 1927. *Lew Semjonowitschs* Mutter, *Tatjana Andrejewna* (geboren im Jahre 1879), kommt aus einem Dorf des Jaroslawski Gouvernements; in Moskau arbeitete sie als Schneiderin.

Die materielle Lage der Familie schloß die Möglichkeit aus, den Jungen auf das Gymnasium oder auch nur auf eine Realschule zu schicken — die allererste Schulbildung erhielt *L. S. Pontrjagin* in der Städtischen Schule. Im Alter von 14 Jahren ereilte ihn ein Unglück: infolge einer Explosion verlor er das Augenlicht. Von diesem Augenblick an fielen alle Sorgen, die die Regelung des Lebens ihres Sohnes betrafen, auf *Tatjana Andrejewna*. Ungeachtet der großen Schwierigkeiten, die sie überwinden mußte, beschloß sie, die Aufgabe zu übernehmen, mit der sie zu Recht die Dankbarkeit der sowjetischen



und der Weltwissenschaft erwarb. Im Laufe vieler Jahre war sie faktisch die Privatsekretärin *Lew Semjonowitschs*, las ihm wissenschaftliche Literatur vor, setzte Formeln in seine wissenschaftlichen Manuskripte ein, las die Korrekturen seiner Arbeiten usw. Dafür mußte sie insbesondere Fremdsprachen lernen.

Abgesehen davon, daß *T. A. Pontrjagina Lew Semjonowitsch* half, umhagte sie ihn auch in allen anderen Beziehungen mit größter Sorge und Aufmerksamkeit.

Eine kleine Skizze zeigt anschaulich, welche Schwierigkeiten auftraten und von *Tatjana Andrejewna* und ihrem talentierten Sohn überwunden werden mußten.

Wir, die Mathematiker, benutzen stets die Zeichen  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\supset$ ,  $\subset$ . Trotz äußerlicher Ähnlichkeit sind sie für uns dem Sinn nach völlig verschieden und werden verschieden benannt. Aber für *Tatjana Andrejewna* sagten die Termini *Durchschnitt*, *Vereinigung*, *Inklusion* nichts. Sie dachte sich zum Aussprechen von Formeln und zum Korrekturlesen eine Spezialsprache aus: das Zeichen für den Durchschnitt nannte sie „Schwänzchen nach unten“, das Zeichen  $\subset$  nannte sie „Schwänzchen nach rechts“ usw.

Im Jahre 1925 wurde *L. S. Pontrjagin* Student der Moskauer Universität. Seine hervorragenden mathematischen Fähigkeiten und das große wissenschaftliche Interesse lenkten sofort die Aufmerksamkeit seiner Lehrer auf ihn; er lernte ausgezeichnet. Der überraschendste Eindruck war, daß der Student *L. S. Pontrjagin* komplizierteste Rechnungen (z. B. in der Tensor-Analyse) im Gedächtnis behielt, obwohl er nichts niederschrieb.

Den Studenten der Physik und Mathematik jener Zeit (wie auch jetzt in der Mechanik und Mathematik) schlug man die Auswahl einer Reihe von Spezialkursen und Seminaren vor, in denen vielfältigste mathematische Fragen betrachtet wurden. Bei der Auswahl der Probleme für die selbständige wissenschaftliche Arbeit spielte nicht nur die Thematik eine bedeutende Rolle, sondern auch die Persönlichkeit des Professors. *Lew Semjonowitsch* erinnert sich, daß es für ihn in den Vorlesungen *A. J. Chintschins* über analytische Zahlentheorie kalt und ungemütlich war. In den Vorlesungen und Seminaren *Pawel Sergejewitsch Alexandroffs* dagegen konnte er leicht und frei atmen, er fühlte sich dort „wie zu Hause“.

Die Persönlichkeit *P. S. Alexandroffs*, seine Aufmerksamkeit und Hilfe spielten eine unwahrscheinlich große Rolle bei der Herausbildung der wissenschaftlichen Interessen *L. S. Pontrjagins*, der persönlichen Begabungen und Neigungen des jungen Wissenschaftlers.

gekürzt aus: *uspechi matematicheskich nauk* 6(144) 1968, übersetzt von Renate Schönberg, VdW

# Ein kleiner Dreh führt zum Ziel

## Anschaulich und maßtreu auf einem Blatt

Bei der IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (1. Stufe) wurde die folgende Aufgabe gestellt:

Ein ebenflächig begrenzter konvexer Körper ist durch Grund-, Auf- und Kreuzriß wiedergegeben. Seine drei scheinbaren Umrisse stellen Quadrate der Seitenlänge  $a$  dar. Dieser Körper ist zu beschreiben, als Modell zu basteln und sein Volumen durch  $a$  auszudrücken. Vergl. *alpha* 4/69 S. 85. (Bild 1)

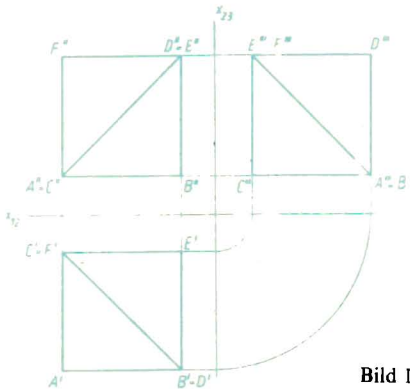


Bild 1

Um von einem durch mehrere Risse dargestellten Körper der vorliegenden Art ein räumliches Modell anfertigen zu können, müssen zwei Voraussetzungen erfüllt sein:

1. Die Körpermaße (Kantenlängen und Kantewinkel) sind bekannt oder aus den Bildern rekonstruierbar.

2. Mit den Bildern muß man eine anschauliche Vorstellung über die Gestalt des dargestellten Körpers verknüpfen können.

Aus der hier vorliegenden Darstellung des Körpers sind zwar sämtliche Kantenlängen und Winkel ablesbar bzw. rekonstruierbar. Wird allerdings die Anfertigung eines Modells oder seine Beschreibung gefordert, bleiben alle Längen- und Winkelmaße nur ein Stückwerk, wenn man von dem Körper selbst keine anschauliche Vorstellung besitzt. Eine geeignete Abbildungsmethode, die unter Verzicht auf eine maßtreue Wiedergabe bestimmter Kanten und Winkel unser Vorstellungsvermögen besser anzusprechen vermag, kann bei der Lösung dieser Aufgabe helfen. Zunächst erhebt sich die Frage, warum das hier durch drei Risse dargestellte räumliche Objekt vorstellungsmäßig so schwer erfäßbar

ist. Die Begründung ist sehr einfach. Verschiedene Kanten und damit auch Begrenzungspolygone stehen lotrecht auf den Bildebenen. Die Körperkanten erscheinen in den entsprechenden Rissen als Punkte und die ebenen Begrenzungspolygone als Strecken. Zum Beispiel stehen die beiden Dreiecke  $(ACF)$  und  $(BDE)$  lotrecht auf Grund- und Aufrißtafel. Sie erscheinen daher in diesen Rissen als Strecken.

Im Kreuzriß sieht man diese Dreiecke in wahrer Gestalt, wobei das Dreieck  $(ACF)$  sichtbar und das Dreieck  $(BDE)$  verdeckt ist. Ferner liegen die Dreiecke  $(ABC)$  und  $(DEF)$  horizontal. Folglich bilden sie sich in Auf- und Kreuzriß als Strecken ab. Erschwerend kommt noch hinzu, daß sich in allen drei Rissen je eine sichtbare und eine verdeckte Kante aus verschiedenen Seitenpolygone überlagern. Im Grundriß fällt die sichtbare Kante  $(FD)$  mit der verdeckten Kante  $(BC)$  zusammen. Analoges läßt sich für die Kanten  $(AF)$  und  $(BE)$  im Kreuzriß feststellen. Wer sich aus Grund- und Aufriß allein keine anschauliche Vorstellung des Körpers ableiten kann, dem hilft hier auch der Kreuzriß nicht weiter.

Es kommt uns jetzt darauf an, aus den Bildern des Körpers unter einem möglichst geringen Konstruktionsaufwand ein neues Bild zu gewinnen, das weder projizierende Kanten und Seiten noch sich überdeckende Kanten enthält. Die geforderte Einfachheit der Konstruktion wird mittels einer Parallelprojektion erfüllt, weil hierbei parallele Kanten in parallele Bildstrecken übergeführt werden und Streckenverhältnisse auf parallelen Geraden erhalten bleiben.

Aus vorgegebenem Grund- und Aufriß läßt sich ein solcher Parallelriß wenig aufwendig nach einem von L. Eckhart eingeführten Einschneidungsverfahren gewinnen. Hierbei schneidet man zunächst diese beiden Bilder des Objektes auseinander und klebt sie in einer neuen Anordnung auf das Zeichenblatt. Ferner gibt man noch zwei Ordnerrichtungen beliebig vor und bringt die Ordnungslinien durch zugeordnete Punktepaare, z. B.  $A'$  und  $A''$ , miteinander zum Schnitt. Auf diesem Wege erhält man von sämtlichen Eckpunkten  $A, B, C, D, E, F$  je einen Bildpunkt. Nun bedarf es noch einiger Überlegungen, um

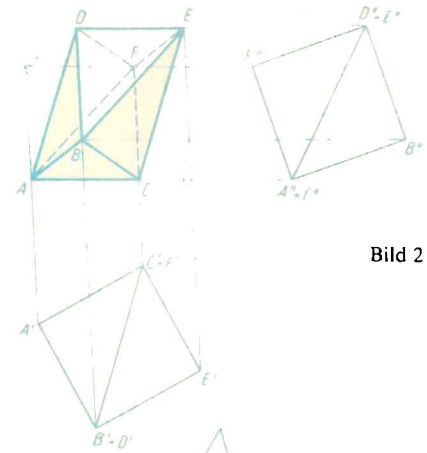
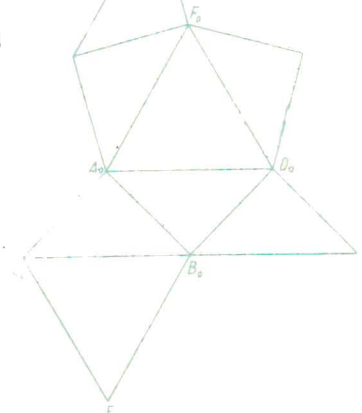


Bild 2

Bild 3



die Punkte richtig miteinander zu verbinden und über die Sichtbarkeit der Kanten zu entscheiden. (Bild 2) Vorstellungsmäßig ist der Körper leicht zu erfassen, wenn man ihn in einen Würfel der Kantenlänge  $a$  einbettet. Führt man dann einen Schnitt durch die Eckpunkte  $A, D, F$ , wird eine dreiseitige Pyramide von dem Würfel abgeschnitten, deren Volumen ein Sechstel des Würfelvolumens ausmacht. Der gleiche Volumenabzug erfolgt, wenn man eine Schnittebene durch die Punkte  $B, C, E$  legt. Mit  $a$  als Kantenlänge des umschließenden Würfels hat der hier dargestellte Restkörper das Volumen  $\frac{2}{3}a^3$ . Wie man weiter erkennt,

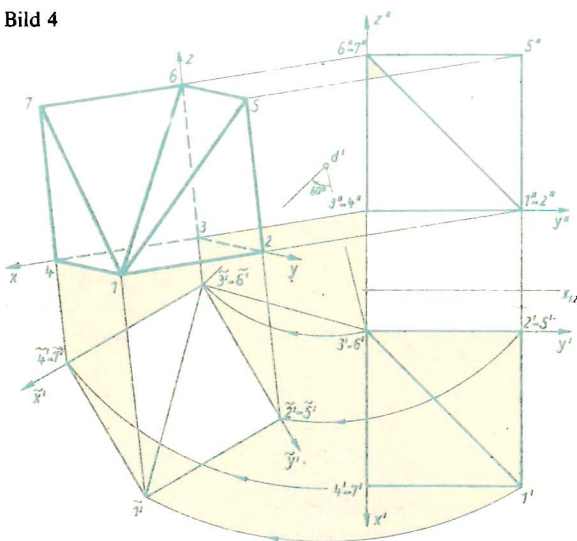
besteht das Netz dieses Polyeders aus zwei gleichseitigen und sechs gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecken. (Bild 3)

Für die anschauliche Erfassung dieses konvexen Körpers kann auch der Eulersche Polyedersatz mit herangezogen werden. (Vgl. *alpha* 2/69 S. 30). Bild 1 zeigt, daß der Körper 6 Ecken besitzt. Etwas mehr Überlegung erfordert die Abzählung der Kanten. Man findet  $k = 12$ . Aus dem Eulerschen Polyedersatz folgt für die Anzahl der Flächen  $f = 8$ . Damit ist unsere Vorstellung von dem Netz des Körpers auch von dieser Seite gestützt. Die Anordnung der beiden Bilder in der Zeichenebene sowie die Wahl der Einschneiderrichtungen bedarf bei dem Eckhartschen

Verfahren einiger Erfahrungen, um zu einem wenig verzerrten, anschaulichen Bild des räumlichen Objektes zu gelangen. Es läßt sich nachweisen, daß man in jedem Fall als Bild irgendeine Parallelprojektion des Polyeders auf die Zeichenebene erhält. Das entstehende Bild bezeichnet man auch als axonometrisches Bild des Körpers. Die Forderung der Anschaulichkeit ist jedoch nicht für jeden Fall gesichert. Ein weiterer Nachteil besteht darin, daß man Grund- und Aufriß trennen oder neu zeichnen muß, um ein axonometrisches Bild nach dieser Methode konstruieren zu können. Eine Anwendung des Einschneideverfahrens unmittelbar auf zugeordnete Normalrisse ergibt stark verzerrte Bilder, was für die Anschauung keinen Gewinn bedeutet. Diese Nachteile sollen durch eine kleine Abwandlung der Konstruktion beseitigt werden.

Ausgehend von einer in zugeordneten Normalrisse vorliegenden Körperdarstellung (Bild 4) wird zunächst der Grundriß um einen Winkel von  $60^\circ$  bezüglich einer erstprojizierenden Drehachse  $d$  gedreht. Diese Drehung läßt sich mit Hilfe eines Zirkels konstruktiv sehr einfach durchführen. Der zu jedem Punkt des Grundrisses gehörige Drehradius  $\rho$  wird einfach auf dem einzuziehenden Kreisbogen von der Ausgangslage her im Drehsinn abgetragen. Nun sind der Aufriß und der um  $60^\circ$  gedrehte Grundriß die Ausgangsbilder, auf die wir das Einschneideverfahren anwenden. Die Einschneiderichtung für den gedrehten Grundriß wählen wir lotrecht oder nur wenig abweichend von der Lotrechten. Die Einschneiderichtung durch den Aufriß wird leicht geneigt gegen die Waagerechte angenommen. Die Bildpunkte finden sich wieder in den Schnittpunkten einander zugeordneter Einschneidestrahlen.

Bild 4



Der Vorzug dieser Konstruktion besteht darin, daß man, von Grund- und Aufriß eines räumlichen Objektes ausgehend, mit geringem Zeit- und Konstruktionsaufwand ein anschauliches axonometrisches Bild des Körpers neben den zugeordneten Normalrisse erhält. Die sich zwanglos ergebende

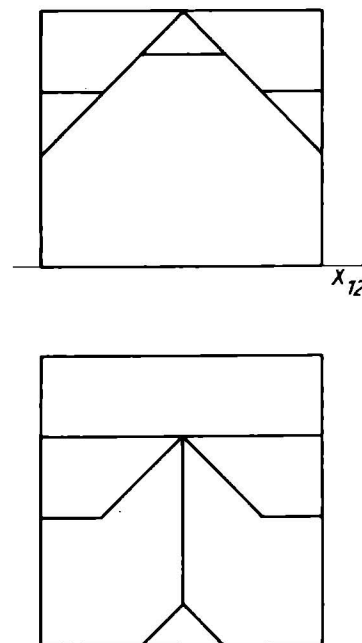
Vereinigung beider Bilder auf einem Zeichenblatt vermag die Verständigung zwischen Konstrukteur und Hersteller sowie Hersteller und Verbraucher über den räumlichen Gegenstand zu erleichtern.

E. Schröder

#### Aufgabe:

Von dem durch Grund- und Aufriß dargestellten Hausmodell ist nach dem Drehschnittverfahren ein anschauliches axonometrisches Bild zu konstruieren. (Bild 5)

Bild 5



#### Wir stellen vor:

Nationalpreisträger Oberstudienrat **Dr. R. Lüders**, Fachlehrer für Mathematik am Institut für Lehrerbildung Berlin-Köpenick  
 Studienrat **Th. Scholl**, Fachreferent für Mathematik in der Hauptabteilung Lehrerbildung des Min. f. Volksbildung  
 Mit Umsicht, Exaktheit, großer Sachkenntnis und unermüdlichem Fleiß haben beide Mitarbeiter seit Gründung der Schülerzeitschrift *alpha* rund 600 Aufgaben und Lösungen für unsere Leser bearbeitet, z. T. selbst gestellt. Dafür sagen wir herzlichsten Dank.

Red. *alpha*



# Achtung Kreuzung-Vorfahrt beachten!

## Kleine Übung im logischen Schließen

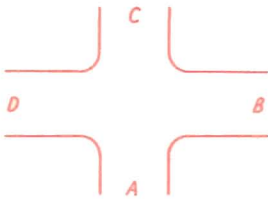


Bild 1

Vorfahrt auf der Hauptstraße beachten!

Das Verkehrsaktiv einer Schule führt in Zusammenarbeit mit der Volkspolizei an verschiedenen Tagen sowie zu verschiedenen Tageszeiten eine Verkehrsdichteermittlung über die Zufahrt von Fahrzeugen auf eine Kreuzung wie die des Bildes 2 durch: Mittels Bleistift, Zettel und Uhr sowie durch Zählen werden die Anzahlen der pro Stunde von jeder Zufahrtstraße aus über die Kreuzung rollenden Fahrzeuge ermittelt.

Bild 2



Das Ergebnis lautet: Pro Stunde rollen, aus den Straßen B, C und D kommend, fast gleich viele Fahrzeuge über die Kreuzung, während aus der Straße A pro Stunde eine erheblich größere Zahl von Fahrzeugen über die Kreuzung fährt. Auf Grund dieser Verkehrsdichteuntersuchung macht sich eine Neubeschilderung dieser Kreuzung mit die Vorfahrt regelnden Verkehrszeichen notwendig. Die VP erteilt dem Verkehrsaktiv den Auftrag:

**Aufgabe 1:** Alle vier zu einer Kreuzung des Bildes 2 führenden Straßen sind in beiden Richtungen zu befahren. Über die Kreuzung fährt keine Straßenbahn. Welche Verkehrszeichen müssen an dieser Kreuzung aufgestellt werden, damit bei jeder denkbaren Verkehrssituation an der Kreuzung jeweils das auf der Straße A anführende Fahrzeug die Vorfahrt hat?

Bei der nächsten Tagung des Verkehrsaktivs in der Schule wird eine Skizze der Kreuzung (Bild 2) aufgezeichnet, und die die Vorfahrt durch Verkehrszeichen an Kreuzungen und Einmündungen regelnden Vorschriften des § 13 der Straßenverkehrsordnung (StVO) werden bereitgelegt:

§ 13 der StVO:

**Absatz 1:** An Kreuzungen und Einmündungen von gleichrangigen Straßen hat Vorfahrt, wer von rechts kommt, unabhängig davon, ob die Fahrtrichtung beibehalten wird oder nicht.

**Absatz 2:** Der Benutzer der Hauptstraße (Bild 3) hat Vorfahrt vor dem Benutzer der Nebenstraße (Bild 1 und 4). Bei abbiegender Hauptstraße wird durch ein Zusatzschild (Bild 5) unter den vorfahrtregelnden Verkehrszeichen der Verlauf der Hauptstraße angezeigt. Der Benutzer des Kreisverkehrs (Bild 6) hat die Vorfahrt. Feld-, Wald- und andere Wege, die auf Straßen einmünden oder diese kreuzen, sind untergeordnet.

**Absatz 3:** Wer nach links abbiegen will, hat die entgegenkommenden Fahrzeuge aller Art vorfahren zu lassen. Das gilt nicht, wenn ein Vorfahrtsfall nach Absatz 1 vorliegt oder der Linksabbieger Benutzer der abbiegenden Hauptstraße ist, unabhängig davon, ob er auf der Hauptstraße verbleibt oder diese

verläßt. Straßen mit mehreren voneinander getrennten Fahrbahnen gelten als dieselben Straßen.

**Absatz 4:** Straßenbahnen haben an den mit dem Verkehrszeichen des Bildes 7 gekennzeichneten Stellen die Vorfahrt.

Die Absätze dieses Paragraphen 13 werden von jedem Aktivmitglied nochmals gründlich durchgelesen. In der anschließenden Aussprache über diese Regeln wird besonders herausgestellt: An einer Straßenkreuzung oder Einmündung, die nicht Teil eines Kreisverkehrs ist und an der der Verkehr zur Zeit nicht durch einen Verkehrsposten der VP oder durch Verkehrsampeln geregelt wird, sind entweder alle einmündenden Straßen gleichrangig oder zumindest teilweise sind die einmündenden Straßen gleichrangig. Der erste Fall liegt vor, wenn an einer Kreuzung oder Einmündung keine vorfahrtregelnden Verkehrszeichen stehen. Im zweiten Fall bilden genau zwei zur Kreuzung oder Einmündung führende Straßen eine nichtabbiegende oder abbiegende Hauptstraße. Die beiden die Hauptstraße bildenden Straßen sind also gleichrangig. Weiterhin sind in diesem Falle alle übrigen zur Kreuzung oder Einmündung führenden Straßen Nebenstraßen, also ebenfalls untereinander gleichrangig.

Als erfahrene Mitarbeiter eines Verkehrsaktivs erinnern sich unsere Pioniere auch daran, daß es Verkehrssituationen an Kreuzungen und Einmündungen gibt, für die

Verkehrsschilder an der Einmündung der Straße X in die Kreuzung des Bildes 2

Straße X

A



entweder



oder



B

entweder



oder



C

D



Bild 3



Hauptstraße



Bild 4

Halt!

Vorfahrt auf der Hauptstraße beachten

Bild 5a

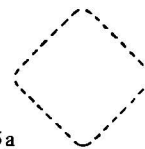
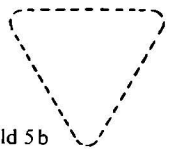


Bild 5b



5a: Zusatzschild „Abbiegende Hauptstraße“ zum Verkehrszeichen Bild 3

5b: Zusatzschild „Abbiegende Hauptstraße“ zu den Bildern 1 und 4

Bild 6

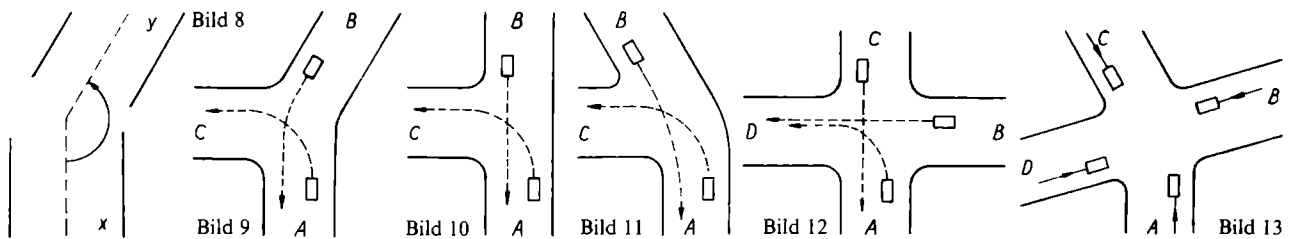


Kreisverkehr

Bild 7



Vorfahrt der Straßenbahn beachten



keiner der Absätze des § 13 der StVO die Vorfahrt regelt. Als Beispiel sei erwähnt: Kommt auf jeder der vier Straßen *A*, *B*, *C* und *D* einer Kreuzung des Bildes 2, an der jetzt keine vorfahrtregelnden Verkehrszeichen stehen sollen, fast gleichzeitig ein Fahrzeug gefahren, so versagt der jetzt zuständige Absatz 1 des § 13. Denn jedes der vier Fahrzeuge müßte warten, bis das von rechts kommende über die Kreuzung gefahren ist. In einem solchen Fall müssen die Fahrzeugführer durch gegenseitiges Verständigen festlegen, ob sie, ohne sich gegenseitig zu behindern, gleichzeitig weiterfahren können (Dies könnte in unserem Beispiel der Fall sein, wenn alle vier Fahrzeuge nach rechts abbiegen wollen.), oder wer als erster die Kreuzung passiert. Im Eifer der Beschäftigung mit dem § 13 der StVO wird im Aktiv nochmals mitgeklärt, was im Sinne des Absatz 1 dieses Paragraphen „ein von rechts Kommender“ ist: Für ein auf der Straße *X* zur Kreuzung oder Einmündung *K* fahrendes Fahrzeug ist ein auf der Straße *Y* ebenfalls zu *K* fahrendes Fahrzeug ein von rechts kommendes, falls der Mittelstrahl (siehe Bild 8) der Straße *X* durch eine Drehung um seinen Anfangspunkt im Gegenuhrzeigersinn mit einem Drehwinkel, der kleiner als  $180^\circ$  ist, auf den Mittelstrahl der Straße *Y* abgebildet wird.

Falls die Abschätzung eines derartigen Drehwinkels in der Nähe von  $180^\circ$  liegt, muß jeder Fahrer beachten, daß die nach § 13 der StVO festgelegte Vorfahrtsregelung sich u. U. ändert, falls dieser Drehwinkel als gleich oder verschieden von  $180^\circ$  angesprochen wird. Bei einer Kreuzung oder Einmündung mit abbiegender Hauptstraße dürften in dieser Beziehung von seiten der Kraftfahrer kaum Fehlinterpretationen auftreten, weil hier das Zusatzschild „abbiegende Hauptstraße“ eindeutig zu entscheiden gestattet, ob der fragliche Drehwinkel gleich, kleiner als oder größer als  $180^\circ$  ist. Nach diesen Vorbereitungen geht das Verkehrsaktiv an das Lösen der Aufgabe 1:

Als erste Verkehrssituation betrachten die Pioniere auf den Straßen *A* und *B* gleichzeitig zur Kreuzung des Bildes 1 fahrende Fahrzeuge. Wären die Straßen *A* und *B* gleichrangig, so hätte gemäß Absatz 1 des § 13 das Fahrzeug auf *B* die Vorfahrt vor dem Fahrzeug auf *A*. Da jedoch stets das Fahrzeug auf *A* die Vorfahrt haben soll, können die Straßen *A* und *B* nicht gleichrangig sein. Also muß die eine von beiden Teil der Hauptstraße und die andere Nebenstraße sein.

Weiterhin kann *B* nicht Teil der Hauptstraße und *A* Nebenstraße sein, weil sonst bei der gleichen Verkehrssituation wie oben jetzt gemäß Absatz 2 des § 13 wiederum der Benutzer von *B* Vorfahrt vor dem Benutzer von *A* hätte. Also muß die Straße *A* Teil der Hauptstraße und *B* Nebenstraße sein.

Schließlich kann der zweite Teil der Hauptstraße nicht *C* sein. Denn sonst hätte im folgenden Falle gemäß Absatz 3 des § 13 das Fahrzeug auf *C* die Vorfahrt vor dem Fahrzeug auf *A*: Gleichzeitig fahren Fahrzeuge auf *A* und *C* zur Kreuzung der Abb. 1. Das Fahrzeug auf *C* will geradeaus weiterfahren in die Straße *A* und das Fahrzeug *A* will nach links abbiegen in die Straße *D*. – Also müssen die Straßen *A* und *D* die (abbiegende) Hauptstraße bilden und die Straßen *B* und *C* müssen Nebenstraßen sein.

Damit ergeben sich die folgenden Beschilderungen für die vier Straßen (siehe Abb. S. 100 links unten).

Daß umgekehrt bei allen vier ermittelten Ausschilderungen in jeder Verkehrssituation an der Kreuzung der Abb. 1 stets das Fahrzeug auf der Straße *A* die Vorfahrt hat, bestätigt das Verkehrsaktiv anschließend. (Der Leser führe diese Betrachtung selbstständig durch.)

Das Verkehrsaktiv der Schule hat damit die ihm gestellte Aufgabe gelöst. Wenige Tage später wird die Neubeschilderung der Straßenkreuzung gemäß der erzielten Ergebnisse vorgenommen. Da die Sicht für die aus den neuen Nebenstraßen *B* und *C* auf die Kreuzung fahrenden Fahrzeuge nicht erschwert ist, wird an den Einmündungen der neuen Nebenstraßen nur das Zeichen „Vorfahrt auf der Hauptstraße beachten“ des Bildes 1 aufgestellt.

Da viele Verkehrsunfälle mit schweren körperlichen und materiellen Schäden die Folge von Unkenntnis bzw. falschen Anwendens der Regeln der Vorfahrt sind, wollen wir uns weiter in der Anwendung dieser Regeln durch das selbständige Lösen der folgenden Aufgaben üben, damit wir nicht eines Tages als Verkehrsteilnehmer durch falsches Verhalten an einer Kreuzung oder Einmündung einen Verkehrsunfall verursachen.

**Aufgabe 2:** Gib in Form einer Skizze eine geeignete Kreuzung oder Einmündung mit der zugehörigen Ausschilderung an und gib weiterhin zu dieser eine solche Verkehrssituation an, für die die Regeln des § 13 der StVO nicht die Reihenfolge des Passierens der beteiligten Fahrzeuge festlegen.

**Aufgabe 3:** Alle zu den Einmündungen der Bilder 9, 10 und 11 führenden Straßen sind unbeschildert. Gib an, in welcher Reihenfolge die mit ihrer Zielrichtung eingezeichneten Fahrzeuge die Kreuzung passieren! Begründe deine Entscheidung!

**Aufgabe 4:** Über die Kreuzung des Bildes 12 fährt keine Straßenbahn. Die Zielrichtung der gleichzeitig auf den Straßen *A*, *B* und *C* zur Kreuzung fahrenden Fahrzeuge sind im Bild 12 markiert. Welche vorfahrtregelnden Verkehrszeichen stehen an dieser Kreuzung, wenn ...

a) zunächst das auf der Straße *B* anfahrende Fahrzeug über die Kreuzung fährt, danach das auf *A* und zuletzt das auf *C* anfahrende, b) zunächst das auf *C* anfahrende über die Kreuzung fährt, dann das auf *B* und zuletzt das auf *A* anfahrende.

**Aufgabe 5:** An eine Kreuzung des Bildes 13, auf der für Straßenbahnen keine Sonderregelung gilt, fahren gleichzeitig auf allen einmündenden Straßen *A*, *B*, *C* und *D* Fahrzeuge heran. Unabhängig davon, wie jedes einzelne Fahrzeug weiterfahren will, hat stets das Fahrzeug auf *A* die Vorfahrt vor allen anderen. Welche beiden Straßen bilden die Hauptstraße?

Wir nehmen zur Kenntnis:

Auch für die Verkehrssituation an Kreuzungen gelten die Grundregeln für das Verhalten im Straßenverkehr, die im § 1 der StVO festgelegt sind:

§ 1 der StVO:

**Absatz 1:** Vorsicht und gegenseitige Rücksichtnahme aller Verkehrsteilnehmer sind Grundregeln für das Verhalten im Straßenverkehr.

**Absatz 2:** Jeder Teilnehmer am öffentlichen Straßenverkehr hat sich so zu verhalten, daß er Personen oder Sachwerte nicht gefährdet oder beschädigt und Personen nicht mehr als unvermeidbar behindert oder belästigt werden.

W. Träger

### Achtung! Wettbewerb!

In diesem Beitrag sind 4 Aufgaben gestellt. Wir fordern alle *alpha*-Leser auf, zu ihnen Lösungen einzusenden. Die *Hauptabteilung Verkehrserziehung beim Ministerium des Innern der DDR* und die Redaktion *alpha* überreichen den erfolgreichsten Einsendern wertvolle Preise! Wir wünschen viel Erfolg! (Kennwort: Vorfahrt beachten! Redaktion *alpha*, 7027 Leipzig, Postfach 14).

# Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

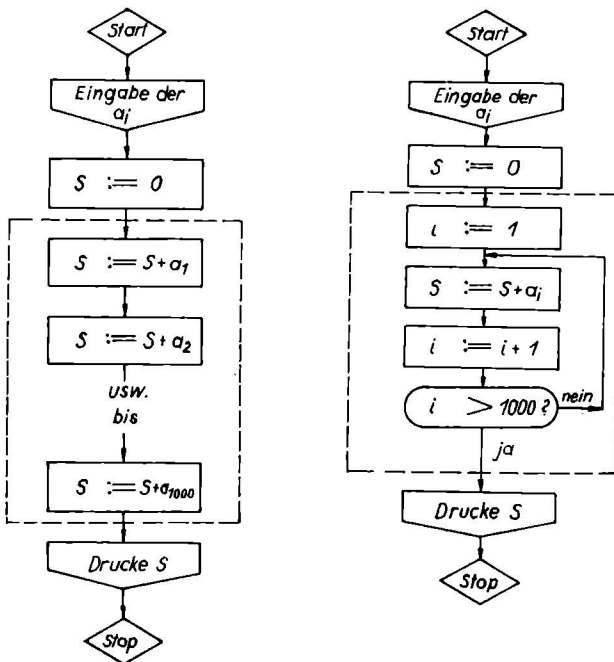


## Teil 11

**Beispiel 2:** In 1000 aufeinanderfolgende Speicherplätze eines Automaten werden die Zahlen  $a_i$  ( $i=1,2,3, \dots, 1000$ ) eingegeben mit dem Ziel,

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1000} = \sum_{v=1}^{1000} a_v^*$$

zu berechnen. Entsprechend dem vorigen Flußdiagramm würde man programmieren:



Man beachte bei diesem Beispiel, daß eine Unterscheidung der Zwischensummen durch Indizes nicht nötig ist. Es handelt sich um eine *laufende* Zwischensumme, der trotz Veränderung des Wertes stets das gleiche Symbol zukommt. Für solche Größen benötigt der Automat einen Anfangswert. Der Schritt  $S := 0$  ist also bei diesem Programm nicht überflüssig.

Wir wollen an der Programmdarstellung noch etwas verbessern. Es wäre doch sehr zeit- und platzraubend, das durch „usw. bis“ Beschriebene ausführlich hin-

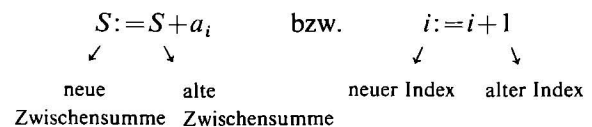
\* Das hier benutzte Symbol  $\sum$  ist dem fortgeschritteneren Leser als Summenzeichen bekannt. Wenn nicht, so hat das keinen Einfluß auf das Verständnis des folgenden.

zuschreiben. Andererseits würde es nichts wesentlich Neues ergeben, da es sich um eine Vielzahl gleichartiger Schritte handelt, sich also ein gewisser Prozeß, nämlich das Hinzufügen des nächsten Summanden, ständig wiederholt. Die Darstellung mit Hilfe eines laufenden Index, ausgedrückt durch das Symbol  $i$ , gestattet es, das Programm rationeller zu gestalten.  $i$  beginnt mit dem Wert 1 (Anfangswert), erhöht sich bei jeder Teiladdition um 1 (Schrittweite) und endet mit dem Wert 1000 (Endwert). Hier das Diagramm, wobei die gestrichelt eingerahmten Teile in diesem und dem vorigen Ablauf einander entsprechen, s. oben. Das Neue hieran ist der in das Programm eingebaute *Test* in Form einer Entscheidungsfrage (Alternative):  $i > 1000$ ? Dabei wird ein

Programmverzweigungskästchen (Alternativkästchen)

verwendet. Es ist klar, daß jede Entscheidungsfrage eine Programmverzweigung nach sich zieht. Hier wiederholt sich bei negativer Antwort ein bestimmter Schritt, nämlich das Addieren des nächsten Summanden zwecks Bildung der neuen Zwischensumme  $S$ , während bei positiver Antwort die Rechnung abzubrechen ist.

Die Relationen



zeigen nochmals deutlich, daß das Zeichen  $:=$  von einem Gleichheitszeichen wesensverschieden ist, denn „ $S = S + a_i$ “ ( $a_i \neq 0$ ) oder „ $i = i + 1$ “ wäre offensichtlich falsch.

Die beiden Programmabläufe des Beispiels 2 unterscheiden sich dadurch, daß letzterer einen *Zyklus*, eine *Schleife* enthält. Es ist ein *zyklisches Programm*. Fehlen solche Schleifen, wie im Beispiel 1 und in der ersten Fassung des Beispiels 2, so spricht man von einem *Geradeausprogramm*.



# Arbeitsgemeinschaften haben das Wort

## Arbeitsgemeinschaft EDV — Magdeburg

In der Klasse 10v der Clara-Zetkin-Oberschule Magdeburg lesen alle Schüler regelmäßig die *alpha*. Besonderes Interesse widmen sie den Beiträgen „Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung“. Der Grund: Seit 1967 existiert eine Arbeitsgemeinschaft für die Datenverarbeitung an dieser Schule, deren Schirmherr *Prof. Dr. Roder* von der Technischen Hochschule Otto von Guericke Magdeburg ist. 1967 fand der erste Kursus statt, an dem sich 10 Schüler der Klasse beteiligten.

Als erstes befaßten wir uns mit einer Aufgabe, die das Ordnen eines Zahlentripels beinhaltete. Das Flußdiagramm sowie das Feinprogramm wurden teilweise selbständig erarbeitet. Die Kodierung erledigten einige Schüler vollkommen selbständig, ebenso die Eingabe in den Kleinrechner SER 2c, der sich in der Technischen Hochschule Otto v. Guericke Magdeburg befindet und den wir freundlicherweise benutzen durften. Dieser Kursus wurde mehrmals wiederholt, um möglichst vielen Schülern einige Grundkenntnisse der EDV zu vermitteln.

Inzwischen wurde bereits ein zweiter Kursus durchgeführt. Unter der Leitung der Assistentin Frau *Felgenträger* beschäftigten wir uns mit der Funktion  $y = ax + b$ . Diesmal war der Anteil der selbständigen Arbeit der Schüler am Flußdiagramm und Feinprogramm

bedeutend größer als beim ersten Kursus. Kodierung und Eingabe in den Kleinrechner erfolgten diesmal ebenfalls wieder selbständig.

AG-EDV, Clara-Zetkin-OS Magdeburg

## AG Mathematik Lucka

Vor sechs Jahren wurde an der Peter-Göring-Oberschule in Lucka (Kreis Altenburg) die erste Arbeitsgemeinschaft Mathematik gegründet. Zur Zeit gibt es drei Arbeitsgemeinschaften: je eine für die Klassenstufe 5 (20 Mitglieder), Klassenstufe 9 (33 Mitglieder) und Klassenstufe 10 (24 Mitglieder). Die Schüler der 5. Klassen treffen sich wöchentlich einmal, die Schüler der 9. und 10. Klassen monatlich dreimal.

Es besteht ein wesentlicher Unterschied zu anderen Arbeitsgemeinschaften, denn im Mittelpunkt vieler Zusammenkünfte steht die *Geschichte der Mathematik*. Wir haben uns vorgenommen, im Leninjahr das Buch von *Wußing* „Mathematik in der Antike“ (Teubner-Verlag Leipzig) mit der 9. Klasse systematisch zu studieren. Dabei haben schon jetzt alle begriffen: die Mathematik, wie sie heute gelehrt wird, ist das Ergebnis eines langen historischen Prozesses, der u. a. durch den Einfluß der ökonomischen und gesellschaftlichen Verhältnisse geprägt wurde. Die Beschäftigung mit der Geschichte der Mathematik ist keine nutzlos vertane Zeit. Sie hilft jedem Schüler beim Erwerb eines wissenschaftlichen Weltbildes. Auch im Staatsbürgerkundeunterricht kommt den Schülern das in der Arbeitsgemeinschaft erworbene Wissen zugute.

Und so arbeiten wir mit *alpha*!

Unsere Arbeit wird durch *alpha* erleichtert, weil wir Artikel dieser Zeitschrift auswerten. Ein Exemplar je Heft wird in unsere Schülerbücherei aufgenommen und jeder Schüler, der *alpha* nicht von Anfang an abonniert hat, kann sich die Hefte ausleihen. Die Geschichte der Mathematik wird in der AG der Klasse 10 fortgesetzt. Alle AG-Mitglieder kennen den

Arbeitsplan und bereiten sich mit unterschiedlicher Intensität vor. Wie bereitete sich *Monika Hebel* zum Thema „Leonhard Euler – Leben und Werk“ vor? Sie berichtete: „In *alpha* 4/1967 fand ich einen Beitrag über *Leonhard Euler*, der mich sofort interessierte. Ich studierte den Artikel und suchte mir weitere Literatur. Als ich völlige Klarheit besaß, fertigte ich eine Wandzeitung (siehe Bild) an. Die Wandzeitung sollte eine Vororientierung auf den AG-Nachmittag sein und lenkte nicht nur die Aufmerksamkeit der AG-Mitglieder auf sich.“

Zum AG-Nachmittag würdigte *Monika* mit einer ausführlichen Biographie das Leben *Eulers*. Im Anschluß an die Biographie bewies der AG-Leiter den Eulerschen Polyedersatz. Eine gute Mitarbeit war zu verzeichnen, weil sich die Mehrzahl der Mitglieder mit *alpha* 2/1969 vorbereiteten. Und nochmals verwendeten wir an diesem Nachmittag *alpha*. Aus Heft 4/1967 rechneten wir die Aufgaben aus *Eulers* Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“.

Zusammenfassend kann man feststellen: *alpha* hilft jedem Schüler, sein Wissen zu festigen und zu erweitern. Es liegt an jedem Schüler selbst, die gebotene Hilfe zu nutzen. Die Mitglieder der Mathematik-Arbeitsgemeinschaften der Peter-Göring-Oberschule Lucka nutzen diese Hilfe und werden auch in Zukunft mit dieser Zeitschrift arbeiten.

AG-Leiter *K.-H. Gentzsch*

## Um den Pokal der FdJ-Kreisleitung Teterow

Im Jahre 1969 hat im Kreis Teterow ein Wettbewerb um den *Pokal der FdJ-Kreisleitung* für die beste Schulmannschaft im Fach Mathematik begonnen. Im Mai 1969 wurde bereits die Vorrunde durchgeführt. Alle Schulen durften Mannschaften aufstellen. Die zehn besten Mannschaften der Vorrunde nahmen am 3. 10. 1969 am 1. Wettbewerb teil. Zu jeder Mannschaft gehörte je ein Schüler aus der 5., 6., 7. und 8. Klasse. Sieger des 1. Wettbewerbs wurde die Mannschaft der OS Teterow I. Mit diesem Wettstreit soll die „wettbewerbsarme“ Zeit überbrückt werden. Ziel ist, daß alle Teilnehmer noch mehr Freude am Knobeln haben sollen. Diese Form der außerunterrichtlichen Arbeit soll bei uns zur Tradition werden.

Schülerin *Carola Kuhn*, OS I, Teterow

Liebe Freunde!

Wenn dieser Beitrag erscheint, werdet Ihr bereits in der 2. Etappe Eures Pokalwettbewerbs sein. Bitte sendet uns einen weiteren Bericht, vor allem aber die Aufgaben! Viel Erfolg wünscht

Redaktion *alpha*

◀ Mathematikwandzeitung der Peter-Göring-Oberschule Lucka



4. April 1707 in der Nähe von Basel geboren, Unterrichtet durch seinen Vater und durch Professor *Bernoulli*.

1725 Gründung der Akademie der Wissenschaften in Petersburg. *Daniel und Nikolaus Bernoulli* (Söhne des *Johann Bernoulli*) erhielten durch ihre Berufung zu Professoren

1727 Euler folgte dem Beispiel der Brüder *Bernoulli* und ging nach Petersburg; erhielt das Amt eines Adjunkten der Mathematik (Gehilfe des Professors)

1741 König *Friedrich II.* lud Euler nach Berlin ein.

1766 *Katharina II.* erfüllte den Wunsch *Eulers*, an die Petersburger Akademie zurückzukehren. Euler erkrankte infolge Überanstrengung. Er diktierte seine Entdeckungen zu Fragen der reinen und angewandten Mathematik.

18. September 1783 starb er in Petersburg.

Euler lieferte in allen Gebieten der Mathematik, die zu seiner Zeit existierten, maßgebliche Beiträge. Er leistete weiterhin Hervorragendes in der Astronomie, der Optik und der Musik. Über 800 Arbeiten unterstreichen die enorme Produktivität des Mathematikers.

Tabelle, die von Euler eingeführten mathematischen Symbole

In der folgenden Tabelle werden Symbole aufgeführt, die Euler in die Mathematik eingeführt hat:

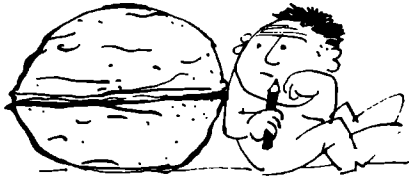
Symbol	Bedeutung des Symbols	Jahr
$\pi$	Verhältnis der Länge des Kreisumfangs zum Durchmesser	1736
$e$	Quotientenwert aus $-1$	1737
$\sin$	Sinus des Bogens	1748
$\cos$	Kosinus des Bogens	1748
$\tan$	Tangens des Bogens	1753
$\cot$	Cotangens	1753
$\Delta x$	Differenz $x_1 - x_2$ , oder Zuwachs der Variablen $x$	1755
$\Delta(x)$	Erhöhung des Arguments $x$	1755
$a, b, c$	Seiten des Dreiecks	1755
$a, b, c$	Winkel des Dreiecks, die dies entsprechenden Seiten $a, b, c$ gegenüberliegen	1756

Urteile großer Mathematiker über Euler:

*Laplace*: „Leit Euler, er ist unser aller Meister!“

*Gauß*: „Das Studium der Werke *Eulers* bleibt die beste Schule in den verschiedensten Gebieten der Mathematik, und kann durch nichts anderes ersetzt werden.“

# Wer löst mit? **alpha**-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 31. Dezember 1970

## Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

**Redaktion alpha,**  
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben, mit \* versehen, gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe oder die entsprechenden in Heft 1/71, 2/71, 3/71 veröffentlichten Aufgaben der Kreis-, Bezirks- bzw. DDR-Olympiade einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 gekennzeichnet sind oder veröffentlichte Olympiadaufgaben 11/12.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgaben-Gruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder das Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Antwortsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 70/71 läuft von Heft 5/70 bis Heft 3/71. Zwischen dem 1. und 10. Oktober 1971 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/70 bis 3/71 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/71 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/70 bis 3/71) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1970/71 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Redaktion *alpha*

5 ▲ 561 Mit welchen natürlichen Zahlen können die Variablen  $a, b, c, d$  belegt werden, damit man aus den Gleichungen

$$48 : a = b, \quad 24 : c = a, \quad 56 - (c \cdot d) = 50$$

drei wahre Gleichheitsaussagen erhält, wenn außerdem  $a > c$  und  $(a + b + c) : d = 6$  gelten soll?

Carsten Schmidt, 1901 Dessow

5 ▲ 562 In dem nachstehenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß die waagrecht und senkrecht angeordneten Rechenaufgaben richtig gelöst sind. Gleiche Buchstaben bedeuten dabei gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben hingegen verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{r} abc : ac = de \\ \dots \quad + \\ \underline{fg} + he = aai \\ aaaj \dots \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

Peter Wekel,  
925 Mittweida

W 5 ■ 563 Ein Autobus fährt täglich (auch sonn- und feiertags) zweimal mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 40 km in der Stunde von der Kreisstadt A in das Dorf B und zurück. Innerhalb des Dorfes B wurde die Zufahrtsstraße für den Autobus erneuert und zugleich begradigt, wodurch sie um 200 m kürzer wurde. Wieviel Fahrkilometer und wieviel Fahrstunden werden durch die Straßenverkürzung in einem Jahr eingespart?

Karl-Heinz Seidel, 6521 Rockau

OS „Maxim Gorki“, Kl. 5c

W 5 ■ 564 Die Summe aus einer zweistelligen natürlichen Zahl und deren Quersumme beträgt 100. Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die diese Bedingung erfüllen! Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen?

Sch.

\* 5 \* 565 Setzt man die Ziffer Null zwischen zwei gleiche zweistellige natürliche Zahlen, dann erhält man eine fünfstellige Zahl, die bei Division durch 91 einen Quo-

tienten ergibt, der elfmal so groß ist wie die ursprüngliche zweistellige Zahl. Begründe diese Aussage!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6 ▲ 566 Gegeben sei ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge  $\overline{AB} = a$ ; es seien ferner E der Mittelpunkt der Seite  $\overline{BC}$  und F der Mittelpunkt der Seite  $\overline{CD}$ . Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks AEF durch die Seitenlänge  $a$  des Quadrates ABCD auszudrücken!

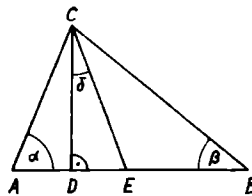
Guido Bimberg, Halle

6 ▲ 567 Von vier äußerlich gleich aussehenden Kugeln sind zwei schwerer als die beiden anderen. Die beiden schwereren sowie die beiden leichteren Kugeln sind jeweils untereinander masegleich. Mit nur zwei Wägungen ist mittels einer Tafelwaage ohne Wägestücke festzustellen, welches die schwereren und welches die leichteren Kugeln sind.

T.

W 6 ■ 568 In dem abgebildeten Dreieck ABC ist  $\overline{CD}$  Höhe zur Seite  $\overline{AB}$  und  $\overline{CE}$  die Winkelhalbierende des Winkels  $\sphericalangle ACB = \gamma$ . Der Winkel  $\sphericalangle DCE = \delta$  ist durch die Winkel  $\sphericalangle CAB = \alpha$  und  $\sphericalangle CBA = \beta$  auszudrücken!

Sch.



W 6 ■ 569 Wie groß sind die Innenwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks, bei dem die Winkelhalbierende eines Basiswinkels das gegebene Dreieck in zwei gleichschenklige Teildreiecke zerlegt?

\* 6 \* 570 Ein mit Farbe angestrichener Holzwürfel soll so zersägt werden, daß wiederum gleichgroße Würfel entstehen; es

	Steffi Sorg, 6316 Stützerbach, Schleusinger Str. 128 Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5	W 5 = 346
	Prädikat:	
	Lösung:	

soll kein Holzteil dabei übrig bleiben, und die anfallenden Sägespäne seien unberücksichtigt. Man möchte nun mindestens 30 möglichst große und rauminhaltgleiche Würfel erhalten, die völlig ohne Farbanstrich sind. Welche Kantenlänge besitzen diese Würfel (in cm), wenn der angestrichene Holzwürfel ein Volumen von  $27 \text{ dm}^3$  hat? Erläutere deine Überlegungen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7 ▲ 571 Für welche rationalen Zahlen gilt die folgende Beziehung? Das Produkt aus dieser rationalen Zahl und ihrem absoluten Betrag ist gleich der Summe aus dieser rationalen Zahl und ihrem absoluten Betrag.

Anleitung: Beachte die Definition des absoluten Betrages einer Zahl; nimm eine Fallunterscheidung vor!

$$7 \text{ ▲ } 572 \text{ In dem Schema } \begin{array}{c} \text{OMA} \\ + \text{OPA} \\ \hline \text{PAAR} \end{array}$$

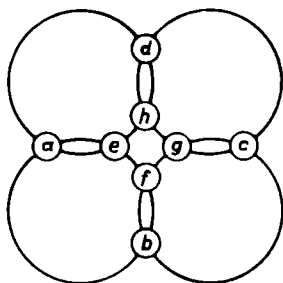
sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischen System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Ferner darf die Ziffer 0 nicht am Anfang einer Zahl stehen. Wieviel Lösungen hat diese Aufgabe?

Jochen Heinecke, Altenburg

W 7 ■ 573 „Warum halten Sie die vorgeschriebene Geschwindigkeitsbegrenzung nicht ein? Sie fahren mit einer Geschwindigkeit von  $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  durch die Ortschaft,“ kritisierte eine Verkehrskontrolle der Volkspolizei einen Kraftfahrer. Welche Zeit (in Sekunden) hatte die Volkspolizei gestoppt, um diese Aussage treffen zu können, wenn die Meßstrecke 100 m betrug?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

W 7 ■ 574 Die nachstehend abgebildete Figur stellt vier einander kongruente Kreise dar, deren Schnittpunkte durch kleinere Kreise markiert und in die die Buchstaben  $a, b, c, d, e, f, g, h$  eingetragen wurden. Diese



acht Buchstaben sind durch die natürlichen Zahlen  $1, 2, \dots, 7, 8$  so zu ersetzen, daß die vier Summen der jeweils auf einem Kreis liegenden Zahlen sämtlich gleich sind. T.

\* 7 \* 575 Zeichne drei kongruente Kreise  $k_1, k_2$  und  $k_3$  mit den Mittelpunkten  $M_1,$

$M_2$  und  $M_3$  so, daß die drei Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen und die Kreise paarweise keinen Punkt gemeinsam haben! Konstruiere danach einen vierten Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$ , der die Kreise  $k_1, k_2$  und  $k_3$  sämtlich von außen berührt. T.

8 ▲ 576 Es ist die folgende Behauptung zu beweisen: Es gibt keine Quadratzahl, deren Nachfolger durch 3 teilbar ist.

R. Schulz, Rotta, Fachlehrer für Mathematik

8 ▲ 577 Der Kapitän eines Schiffes beobachtet genau 45° voraus (d.h. in genau nordöstlicher Richtung) an Steuerbord (rechts) ein Leuchtfeuer. Das Schiff steuert nord und läuft 12 Knoten (d.h. 12 sm/h). Nach 30 min Fahrt beobachtet der Kapitän das Leuchtfeuer genau querab, d.h. unter einem Winkel von 90°, also in genau östlicher Richtung.

Wieviel Seemeilen ist das Schiff zur Zeit der zweiten Beobachtung von dem Leuchtfeuer entfernt?

Es ist eine Zeichnung anzufertigen; die Antwort ist zu begründen. K.-H. Krüger, Wustrow, Fachlehrer für Mathematik

W 8 ■ 578 Es ist die folgende Behauptung zu beweisen:

Vertauscht man bei einer beliebigen  $n$ -stelligen natürlichen Zahl (in dekadischer Darstellung), wobei  $n > 2$  gilt, die erste und die letzte Ziffer miteinander, bildet aus beiden Zahlen die Differenz und dividiert diese Differenz durch 9, so erhält man entweder Null oder eine Zahl, die aus lauter gleichen Ziffern besteht.

W 8 ■ 579 Einem Quadrat sei ein Kreis einbeschrieben und ein Kreis umbeschrieben. Wie verhalten sich die Flächeninhalte dieser beiden Kreise zueinander?

Sektion Mathematik der TU Dresden

\* 8 \* 580 Es seien  $g$  eine Gerade,  $P$  ein Punkt, der nicht auf  $g$  liegt, und  $P'$  der zu  $P$  in bezug auf die Gerade  $g$  symmetrisch gelegene Punkt in der Ebene. Ferner sei  $A$  ein weiterer Punkt der Ebene, der nicht auf  $g$  liegt, nicht mit  $P$  zusammenfällt und von der Geraden  $g$  einen größeren oder kleineren Abstand als  $P$  hat. Es soll der zu  $A$  in bezug auf die Gerade  $g$  symmetrisch gelegene Punkt  $A'$  nur mit dem Lineal (also ohne Zirkel) konstruiert werden.

Anleitung: Unterscheide die beiden Fälle: a)  $A$  liegt auf derselben Seite von  $g$  wie  $P$ ; b)  $A$  liegt auf der anderen Seite von  $g$ !

Yvonne Kruber, POS Stolpen, Kl. 8b (jetzt 9)

9 ▲ 581 Es ist das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} x(y+z) &= 810, & (1) & & K. Krause, \\ y(x+z) &= 680, & (2) & & Mansfeld, Lehrer i. R. \\ z(x+y) &= 572. & (3) & & \end{aligned}$$

W 9 ■ 582 Es sind alle reellen Zahlen  $x$  zu ermitteln, für die  $x^3 > -x^2$  gilt.

Sektion Mathematik der TU Dresden

W 9 ■ 583 Es seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte mit  $\overline{AB} = 9 \text{ cm}$ . Ferner sei  $S$  ein Punkt auf der Geraden  $AB$  zwischen  $A$  und  $B$  mit  $\overline{AS} = 7 \text{ cm}$ .  $D$  sei ein Punkt außerhalb der Geraden  $AB$ , der von  $S$  und  $B$  den gleichen Abstand von 9 cm hat. Es ist die Länge der Strecke  $\overline{AD}$  zu berechnen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

\* 9 \* 584 Die Rechenaufgabe  $x = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1)^3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1 + 2 + 3)^3$  löst ein Schüler unzulässigerweise wie folgt:  $x = 1^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 3^3 + 3^3 \cdot 1^3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3) = 251 - 216 = 35$  und erhält dennoch ein richtiges Ergebnis.

Man beweise, daß man bei einer solchen Aufgabe durch dieses Verfahren stets zu einer richtigen Gleichung kommt, d.h., daß für alle reellen Zahlen  $x, y, z$  gilt:

$$(xy + yz + zx)^3 - xyz(x + y + z)^3 = x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 - xyz(x^3 + y^3 + z^3).$$

W. Burmeister, Dresden

10/12 ▲ 585 Es sind alle reellen Zahlen  $x$  zu ermitteln, für die die Ungleichung  $\frac{x^2 + 2x - 15}{x + 1} < 0$  erfüllt ist. S. H.

W 10/12 ■ 586 Ein Würfel sei in ein Gefäß, das die Form eines geraden Kreiszyinders mit dem Durchmesser 30 cm hat, so hineingestellt, daß eine Kante des Würfels den Boden des Gefäßes berührt und vier Ecken des Würfels, die nicht auf dieser Kante liegen, die Gefäßwand in gleicher Höhe über dem Boden berühren. Wieviel Liter Wasser muß man in das Gefäß gießen, damit die höchstgelegene Kante des Würfels genau in der Wasseroberfläche liegt?

W 10/12 ■ 587 In einem Gefäß befinden sich weiße, schwarze, rote und blaue Kugeln, und zwar genau 100 Kugeln von jeder Farbe. Eine Versuchsperson soll mit verbundenen Augen aus diesem Gefäß Kugeln ziehen.

- Wieviel Kugeln muß die Versuchsperson mindestens ziehen, um mit Sicherheit wenigstens 4 Kugeln von der gleichen Farbe zu erhalten?
- Wieviel Kugeln muß die Versuchsperson mindestens ziehen, um mit Sicherheit wenigstens 10 Kugeln von einer Farbe und außerdem wenigstens 10 Kugeln von einer anderen Farbe zu erhalten?
- Wieviel Kugeln muß die Versuchsperson mindestens ziehen, um mit Sicherheit wenigstens 10 Kugeln von jeder der vier Farben zu erhalten?

Bemerkung: Die Aufgabe a) ist sehr bekannt und schon häufig gestellt worden. Dagegen sind die Aufgaben b) und c) kaum bekannt und haben auch ein überraschendes Ergebnis.

L.

\* 10/12 \* 588 Es sind alle linearen Polynome von der Form  $f(x) = ax + b$  anzugeben, wobei  $a$  und  $b$  reelle Zahlen sind, so daß für alle reellen  $x$  die Gleichung

$$f[f(x)] = 2x + 1 \text{ erfüllt ist.}$$

W. Burmeister, Dresden

---

# Berufsbild: Bauingenieur

---

Die Gestaltung des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus in der Deutschen Demokratischen Republik ist auf das engste mit der Durchführung umfangreicher Bauaufgaben verbunden. Dem Bauwesen obliegt die Aufgabe, für die Volkswirtschaft und die Bereiche unseres sozialen und kulturellen Lebens komplette Bauwerke und Anlagen zu errichten und sie planmäßig in kürzester Bauzeit mit niedrigsten Kosten und in hoher Qualität fertigzustellen und nutzungsfähig zu übergeben.

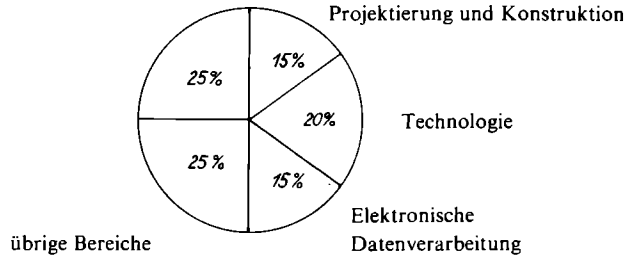
Das Bauwesen nimmt bei der Entwicklung unserer nationalen Wirtschaft eine Schlüsselstellung ein. Auf der Grundlage einer umfassenden Industrialisierung und unter den Bedingungen der wissenschaftlich-technischen Revolution hat es entscheidenden Anteil an der Durchsetzung und Mitbestimmung des wissenschaftlich-technischen Höchststandes in allen Industriezweigen und an der Sicherung eines hohen Nutzeffektes der Investitionen.

Die bereits vollzogenen bzw. sich vollziehenden Veränderungen innerhalb des Bauwesens führen auch zu einer grundlegenden Wandlung des Berufsbildes. Während früher der Bauingenieur über ein gutes, größtenteils handwerkliches Allgemeinwissen auf vielen Fachgebieten verfügte, muß er heute neben diesem Allgemeinwissen noch großes Spezialwissen auf seinem Fachgebiet haben, um die geforderten Aufgaben erfüllen zu können. Durch die ständig zunehmende Industrialisierung muß sich heute der Bauingenieur stärker mit Fragen und Aufgaben beschäftigen, die früher nur im Maschinenbau benötigt wurden. Zu denken ist hier insbesondere an die angestrebte vollautomatische Fertigung von Bauelementen sowohl des Beton- als auch des Stahlbaues, die vom Bauingenieur hohe technologische Kenntnisse und Erfahrungen verlangen.

Die dringend notwendige Senkung der Baukosten stellt an einen Bauingenieur weitere hohe Aufgaben. Er muß in der Lage sein, die Bauprozesse, beginnend von der Projektierung bis zur Vorfertigung und Montage, ökonomisch günstig zu gestalten. Dies erfordert ein hohes Maß an volkswirtschaftlichem Denken und ökonomischem Wissen. Große Hilfe

hierbei leisten die mathematischen Methoden der Operationsforschung und Optimierung, die durch den Einsatz von elektronischen Rechenanlagen voll praxiswirksam werden. Für die Ausbildung erwächst hieraus die Aufgabe, dem Bauingenieur hohe mathematische Kenntnisse zu vermitteln, die es ihm gestatten, die vorhandenen mathematischen Hilfsmittel maximal im Rahmen der geforderten Aufgaben anzuwenden. Der Einsatz der Bauingenieure entsprechend der vorhandenen Aufgaben des Bauwesens ist im Prognosezeitraum wie folgt vorgesehen:

Forschung und Entwicklung



Die vom Bauingenieur zu lösenden Aufgaben sollen am Beispiel des Hochhauses der Karl-Marx-Universität, einem der bedeutendsten Bauwerke der Stadt Leipzig, dargestellt werden.

### 1. Phase Planung:

In dieser Phase ist der Bauingenieur maßgeblich an der Festlegung des Standortes eines neu zu errichtenden Bauwerkes beteiligt. Dieser muß sowohl den städteplanerischen Gesichtspunkten entsprechen, als auch die Möglichkeiten zur Errichtung eines derartigen Bauwerkes zulassen. Insbesondere muß hier geklärt werden, ob der vorhandene Baugrund eine genügende Tragfähigkeit aufweist, um die Bauwerkslasten zu übernehmen.

### 2. Phase Projektierung:

In kollegialer Zusammenarbeit von Architekt und Bauingenieur werden die statische Berechnung und alle zum Bau notwendigen Zeichnungen angefertigt. Im Rahmen der technologischen Vorbereitung werden Fertigungsmethode und Fertigungsablauf des Bauwerkes festgelegt. In dieser Phase ist das Bauwerk in den „Köpfen“ der Projektanten bereits fertig.

### 3. Phase Bauausführung:

Über die Bauausführung gibt es bei baufremden Personen die wenigsten Unklarheiten. Durch die Vielzahl der Baustellen in unserer Republik ist fast jeder mit den einzelnen Phasen der Bauausführung sehr gut vertraut. Das schnelle Wachstum unserer Wohn- und Industriebauten begeistert immer wieder und zeugt vom großen Wissen und Können der Bauarbeiter und Ingenieure. Der Bauingenieur muß jetzt mithelfen, die in der Projektierungsphase erarbeiteten

Pläne in die Baupraxis umzusetzen. Insbesondere muß er die Arbeit auf der Baustelle so organisieren, daß die vorgegebenen Bauzeiten und Baukosten nicht überschritten werden. Auch ist die zeichnungsgerechte Bauausführung in der geforderten Qualität zu überwachen.

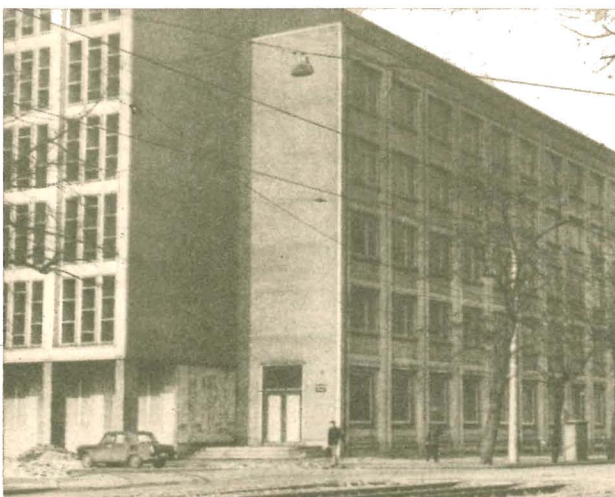
Die hier angegebenen Aufgaben des Bauingenieurs stellen jedoch nur einen sehr kleinen Einblick in sein interessantes Wirken dar. Bei allen Aufgaben muß sich der Bauingenieur immer darüber im klaren sein, daß seine Produkte über mindestens 50 Jahre von allen Menschen begutachtet und kritisiert werden. Er wird daher immer bestrebt sein, sich eine gute „Visitenkarte“ zu schaffen.

### Über die Bauingenieurausbildung an der Hochschule für Bauwesen, Leipzig:

Die III. Hochschulreform hat auch an der Hochschule für Bauwesen Leipzig zu wesentlichen strukturellen und inhaltlichen Veränderungen geführt. Ausgehend von den gesellschaftlichen Notwendigkeiten und den Bedürfnissen der Baukombinate wurden 2 Sektionen gebildet, die in entsprechenden Fachstudien Studenten fachspezifisch ausbilden. Die Ausbildungsdauer beträgt 4 Jahre und schließt mit dem akademischen Grad eines Diplomingenieurs ab. Diese 4 Studienjahre gliedern sich in ein für alle Studenten gemeinsames 2jähriges Grundstudium und ein sektionsspezifisches 2jähriges Fernstudium.

Die Sektion Technologie bildet im Rahmen des Fachstudiums Technologie Bauingenieure aus, die für folgende Tätigkeitskomplexe vorgesehen sind:

- Verfahrensgestaltung für Produktionsprozesse der zentralen und nichtstationären Bauproduktion
- Systemgestaltung für komplexe Prozesse der Bauproduktion
- Arbeitsgestaltung in allen Bereichen der zentralen und nichtstationären Produktion.

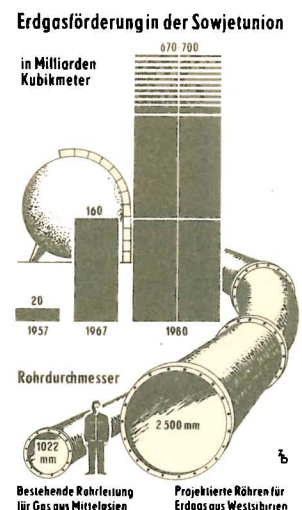
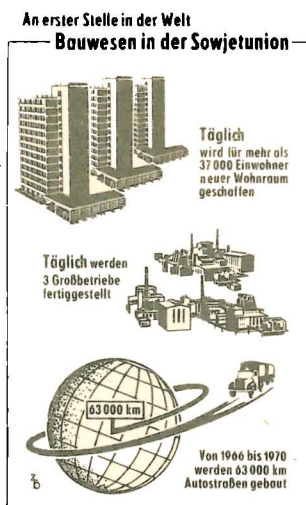
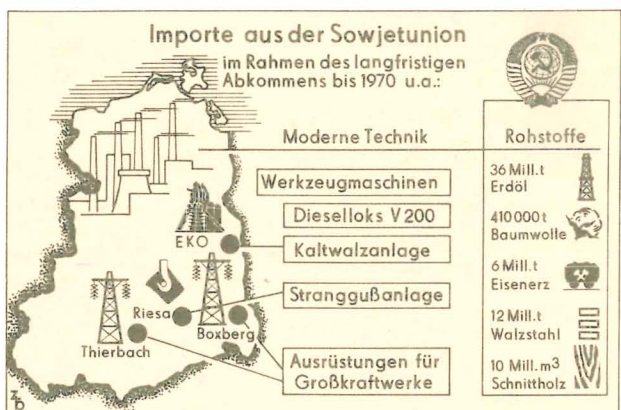


Die Sektion Ingenieurbau bildet im Rahmen des Fachstudiums Ingenieurbau (Ingenieur Tiefbau in Vorbereitung) Bauingenieure aus, die für folgende Tätigkeitskomplexe vorgesehen sind.

— Projektierung von baulichen Anlagen aller Art (Wohngesellschafts- und Industriebauten, Brücken und Sonderkonstruktionen) aus den zur Zeit bekannten Baustoffen.

W. Wittig

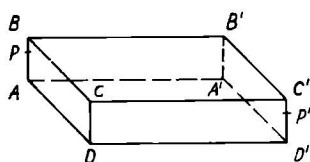
### Lenins Vermächtnis wird erfüllt



## Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Herbert Frank

Direktor der Sektion Mathematik  
der Humboldt-Universität zu Berlin

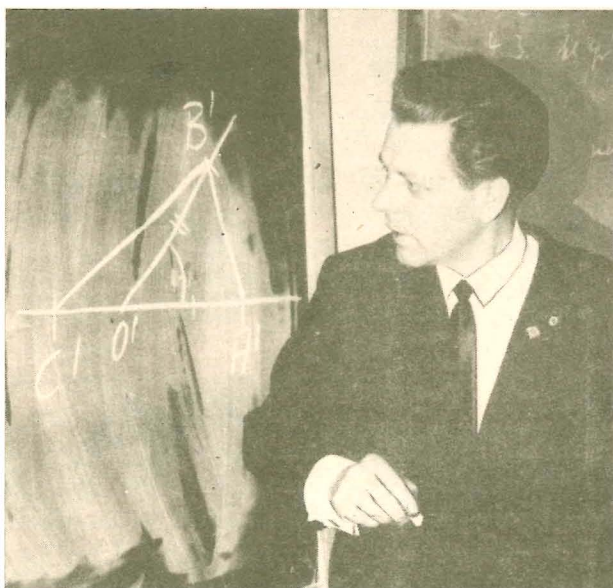
▲ 589 Es sei ein Quader  $ABCD A' B' C' D'$  gegeben und auf seinen diagonal gegenüberliegenden Kanten  $\overline{AB}$  und  $\overline{D' C'}$  je ein Punkt  $P$  bzw.  $P'$ , wobei  $P$  näher zur Ecke  $B$  als zur Ecke  $A$  und  $P'$  näher zur Ecke  $C'$  als zur Ecke  $D'$  liegt (s. Abb.).



Konstruiere die kürzeste Verbindungslinie zwischen den Punkten  $P$  und  $P'$ , die ganz auf der Oberfläche des Quaders liegt!

*Hinweis:* In der Ebene ist die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten  $P$  und  $P'$  die Strecke  $\overline{PP'}$ .

*Bemerkung:* Die gesuchte kürzeste Verbindungslinie zwischen den Punkten  $P$  und  $P'$  kann auch experimentell ermittelt werden, indem man auf der Oberfläche des Quaders einen Faden von  $P$  nach  $P'$  spannt. Aus der höheren Mathematik ist bekannt, daß der gespannte Faden die Lage der kürzesten Verbindungslinie einnimmt.



Wir stellen vor:

Sektion Mathematik der Humboldt-Universität  
zu Berlin

Mathematische Forschung und Lehre bauen an der Humboldt-Universität zu Berlin auf langjährigen und großen Traditionen auf. In der Vergangenheit wirkten an der Humboldt-Universität solche bekannten Mathematiker, wie *Weierstraß*, *Landau*, *Schur*, *v. Neumann*. Heute wird an der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität vor allem auf den Gebieten „Mathematische Kybernetik und Rechentechnik“ und „Mathematische und statistische Methoden der Operationsforschung“, aber auch auf den Gebieten „Analysis“, „Algebra“, „Geometrie“ und „Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik“ ausgebildet. Einen besonderen Schwerpunkt stellt in der Arbeit der Sektion die Ausbildung von Diplom-Lehrern für Mathematik und Physik dar.

In jeder Studienrichtung wird darauf geachtet, daß die Studenten sowohl in ihrer gesellschaftlichen als auch in ihrer fachlichen Entwicklung die höchsten Anforderungen erfüllen. Der ständig wachsende Bedarf an hochqualifizierten Diplom-Mathematikern und Diplom-Lehrern und die damit verbundene steigende Anzahl von Studenten an der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität führten zu einer weitgehenden Veränderung des Studienganges. In einem 4jährigen Studium erhalten unsere Studenten die für ihren späteren Beruf notwendigen Kenntnisse und Fähigkeiten vermittelt. Die gesellschaftlich aktivsten und fachlich besten Studenten haben darüber hinaus die Möglichkeit, in weiteren 3 Jahren als Forschungsstudenten den Titel „Dr. rer. nat.“ an unserer Sektion zu erwerben. Es ist das besondere Anliegen unserer Ausbildung, begabte und interessierte Studenten frühzeitig in die mathematische Forschung an unserer Sektion einzubeziehen.

Unsere Sektion unterhält vielfältige Beziehungen zum mathematischen Leben der DDR. Über Weiterbildungsveranstaltungen, die Förderung der Mathematik-Olympiaden und die direkte Unterstützung von Großforschungszentren sind fruchtbare Kontakte hergestellt, die weit über Berlin hinausreichen.

Allen bekannt sind die Arbeiten unseres Bereiches „Schulmathematik und Methodik des Mathematikunterrichts“. Die Mitarbeiter dieses Bereiches waren und sind aktiv an der Entwicklung der Lehrpläne und Lehrbücher für den Mathematikunterricht von der 1. bis zur 12. Klasse beteiligt.

Ich wünsche allen *alpha*-Lesern weiterhin viel Freude und Erfolg beim Lösen mathematischer Probleme. Beide sind Quellen für das Interesse an der Mathematik. Das Studium an unserer Sektion wird ihnen weitere Schätze der Mathematik erschließen.

# Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen

## 10. Aufgabe:

Für  $1 \leq R_1, R_2 \leq 10$  ist ein Nomogramm mit drei parallelen Funktionsleitern zur Formel  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  (Formel für Ersatzwiderstand zweier parallel geschalteter Widerstände) zu zeichnen!

*Lösung:* In naheliegender Weise wird gesetzt:

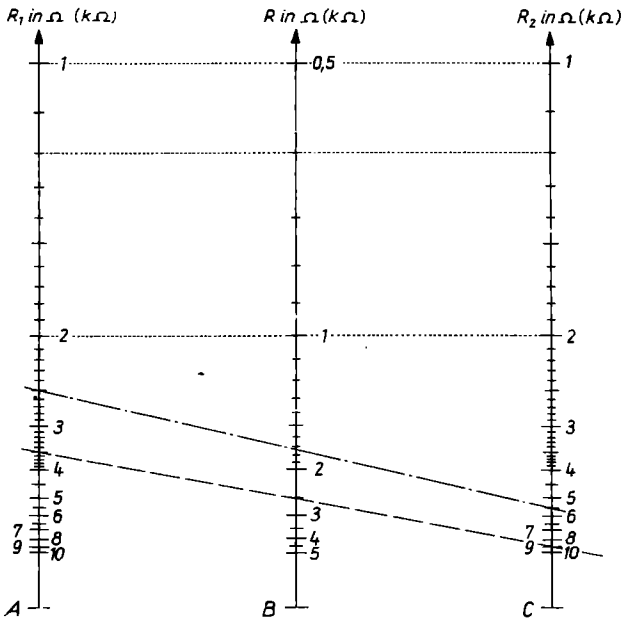
$R_1 = x\Omega, R_2 = y\Omega$  und  $R = z\Omega$ . Dann gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Hieraus folgt durch einfache Umformungen

$$2 \cdot \frac{1}{2z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Diese Gleichung geht durch die Festsetzung  $f(x) = \frac{1}{x}, g(y) = \frac{1}{y}$  und  $h(z) = \frac{1}{2z}$  in die Schlüsselgleichung  $2h(z) = f(x) + g(y)$  über. Mit den drei Funktionen  $\xi = \frac{1}{x}, \eta = \frac{1}{y}$  (Vergleiche Aufgabe 2!) und  $\xi = \frac{1}{2z}$  können



wir bei geeigneter Wahl der Längeneinheit und des Abstandes der drei parallelen Leiter das Nomogramm zeichnen. Die Kotierung der  $z$ -Leiter kann dabei auf Grund der folgenden Bemerkung zeichnerisch festgelegt werden: Für  $R_1 = R_2$  folgt aus

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ die einfachere Gleichung } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} = \frac{2}{R_1}.$$

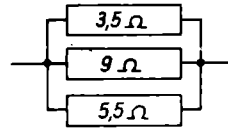
Hieraus folgt weiter  $R = \frac{R_1}{2}$ .

Dies bedeutet, daß jede Gerade, die durch zwei Punkte der  $R_1$ - und  $R_2$ -Leiter mit gleichen Koten (also parallel zur Geraden durch die Punkte  $A, B$  und  $C$  verläuft, den  $R$ -Leiter in einem Punkte schneiden muß, dessen Kote halb so groß ist wie die der ersten beiden Schnittpunkte (Siehe punktiert markierte Geraden der Abb.).

Den Nachweis, daß jede Lösung des angefertigten Nomogramms der Gleichung  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  genügt, führen wir analog zu dem auf Seite 81 geführten Beweis selbständig.

## 11. Aufgabe:

Ermittle mit dem gemäß Aufgabe 10 angefertigten Nomogramm den Gesamtwiderstand  $R$  dreier parallel geschalteter Widerstände von  $3,5\Omega, 9\Omega$  und  $5,5\Omega$ !



*Lösung:* Zunächst wird der Gesamtwiderstand von zwei parallel geschalteten Widerständen, etwa von  $3,5\Omega$  und  $9\Omega$  zu  $2,5\Omega$  (Gestrichelt markierte Gerade der obigen Abb.) ermittelt. Anschließend wird noch der Gesamtwiderstand der parallel geschalteten Widerstände von  $2,5\Omega$  und  $5,5\Omega$  zu  $R = 1,7\Omega$  (Durch Punkte und Striche markierte Gerade der obigen Abb.) bestimmt.

Wir überblicken, daß zu den Formeln  $R = R_1 + R_2$  (Ersatzwiderstand zweier hintereinander geschalteter Widerstände) und

$$A = \frac{a+b}{2} \text{ (Arithmetisches Mittel } A \text{ zweier reeller}$$

Zahlen  $a$  und  $b$ ) sehr einfach anzufertigende Nomogramme des von uns betrachteten Typs gehören. Diese würde man mit Vorteil auf Millimeterpapier zeichnen. Doch auch zu Formeln, denen man es nicht unmittelbar ansieht, gehören Nomogramme mit drei parallelen Funktionsleitern. Neben Formeln wie  $H =$

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \text{ (Harmonisches Mittel } H \text{ zweier positiver reeller}$$

Zahlen) und  $A = \pi R^2 - \pi r^2$  (Fläche  $A$  eines Kreisringes mit den Radien  $R$  und  $r$ ) gehören hierzu auch die Formeln  $w:g:p:100$  (Grundgleichung der Prozentrechnung),  $m = \rho V$  (Beziehung zwischen Masse, Dichte und Volumen eines homogenen Körpers) und  $U = IR$  (Ohmsches Gesetz).

**12. Aufgabe:**

Zu der Formel  $w:g=p:100$  ist ein Nomogramm mit drei parallelen Funktionsleitern zu zeichnen!

*Lösung:* Schüler (ab Klasse 9), die die Logarithmusfunktion kennen, können diese Aufgabe wie folgt anpacken: Die gegebene Formel wird zunächst umgestellt zu  $w = \frac{p}{10} \cdot \frac{g}{10}$ .

Mittels der Festsetzungen  $w=z$ ,  $p=x$  und  $g=y$  und Logarithmieren der gegebenen Gleichung folgt

$$\lg z = \lg \frac{x}{10} + \lg \frac{y}{10}$$

Der hieraus folgenden, der Schlüsselgleichung unseres Nomogrammtyps angepaßten Gleichung

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lg z = \lg \frac{x}{10} + \lg \frac{y}{10}$$

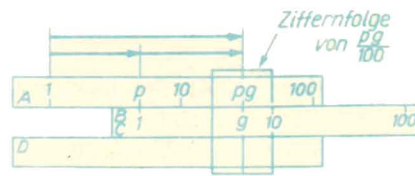
sind die Gleichungen der drei Leiterfunktionen zu entnehmen:

$$\xi = \lg \frac{x}{10}; \eta = \lg \frac{y}{10}; \xi = \frac{1}{2} \lg z \text{ (Siehe Aufgabe 4!)}$$

Schüler (ab Klasse 7), die mit dem Rechenstab umgehen können, werden die Aufgabe wie folgt lösen: die beiden äußeren Funktionsleitern des gesuchten Nomogrammes werden versuchsweise kongruent zu der auf der Zunge des Rechenstabes markierten Skale B gezeichnet und mit  $p$ - bzw.  $g$ -Leiter benannt. Diese beiden Leitern sind durch Anlegen der Stabzunge und Übertragen der Koten der Skale B sehr einfach und schnell zu zeichnen.

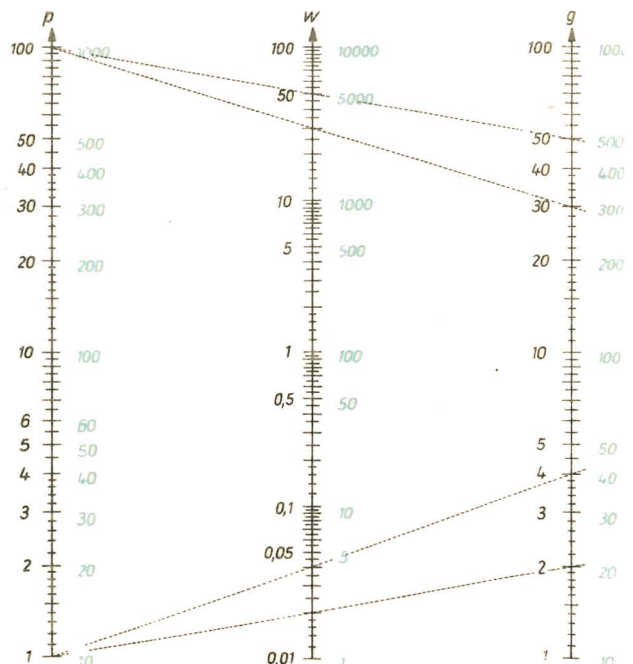
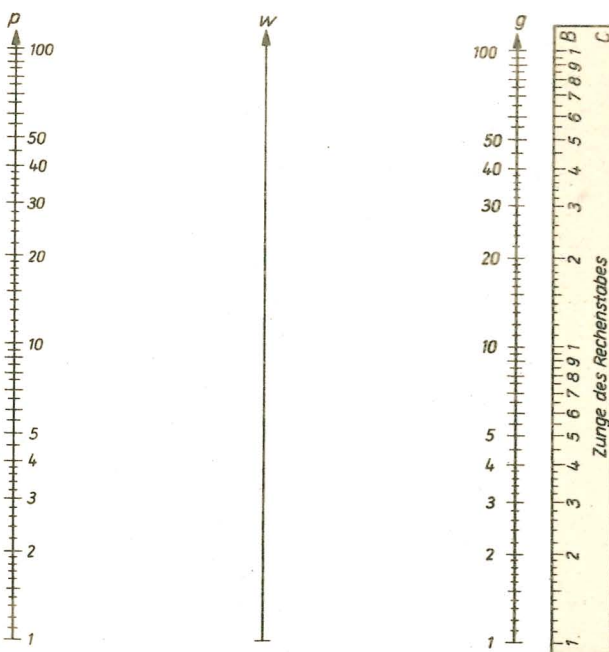
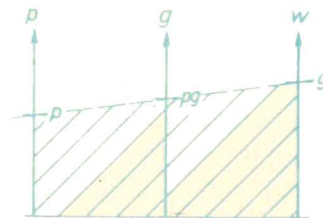
Natürlich muß gezeigt werden, daß dieser Ansatz zum Ziele führt, d. h. es ist möglich, die  $w$ -Leiter so zu kotieren, daß jede Lösung des entstehenden Nomogrammes der Gleichung  $w:g=p:100$  genügt. Mit Rechenstab finden wir das zu gegebenen  $p$  und  $g$ , die der Einfachheit halber beide der Zusatzbedingung

$1 \leq p; g \leq 10$  genügen sollen, gehörige  $w$ , das durch die Formel  $w = \frac{pg}{100}$  bestimmt ist, mittels der folgenden Stabeinstellung. Da der Nenner 100 bei dieser Stabeinstellung unberücksichtigt bleibt, gestattet diese Einstellung nur die Ziffernfolge des als Dezimalbruch geschriebenen Ergebnisses von  $\frac{pg}{100}$  abzulesen.



Die Strecke, die die Punkte mit den Koten 1 und  $pg$  der Skale A zu Endpunkten hat, ist gleich der Summe der Strecken, die die Punkte mit den Koten 1 und  $p$  der Skale A bzw. mit den Koten 1 und  $g$  der Skale B zu Endpunkten haben. Diese Streckenrelation benutzen wir zum Nachweis, daß unser Ansatz zum Ziele führt: Wir ergänzen die obige Abb. durch eine  $w$ -Leiter, die ein Bild der schon gezeichneten  $p$ - und  $g$ -Leiter im Maßstab 1:2 ist.

Auf dieser  $w$ -Leiter trägt der Punkt die Kote  $pg$ , der mit den Punkten mit den Koten  $p$  und  $g$  der  $p$ - bzw.  $g$ -Leiter in einer Geraden liegt. Dies folgt aus der am Rechenstab als gültig abgelesenen Streckenrelation, aus der schon früher benutzten Beziehung zwischen





Mittellinie und Grundseiten eines Trapezes (In der Abb. S. 110, Mitte, schraffiert.) sowie daraus, daß die  $w$ -Leiter ein Bild der Skale  $B$  des Rechenstabes im Maßstab 1:2 ist.

Damit ist gezeigt, daß die getroffene Wahl der  $p$ - und  $g$ -Leiter zum Ziele geführt hat. Die Unschönheit, daß die jetzige  $w$ -Leiter nur die richtige Ziffernfolge des Ergebnisses liefert, läßt sich durch einfaches Umkottieren beseitigen: Jede bisherige Kote der  $w$ -Leiter wird durch ihren hundertsten Teil ersetzt.

Natürlich wird man bei der praktischen Ausführung die Kottierung der  $w$ -Leiter zeichnerisch vornehmen. Dabei stützt man sich etwa auf die beiden folgenden Bemerkungen:

Für  $p=100$  folgt aus  $w:g=p:100$  die einfache Beziehung  $w=g$ . Gerade, die durch den Punkt der  $p$ -Leiter mit der Kote 100 verlaufen, schneiden die  $g$ - und  $w$ -Leiter in Punkten mit gleichen Koten. Geraden, die durch den Punkt der  $p$ -Leiter mit der Kote 1 verlaufen, schneiden wegen  $w:g=1:100$  die  $w$ - und  $g$ -Leiter in Punkten, deren Koten sich wie 1:100 verhalten. Wie auf Grund dieser beiden Bemerkungen die  $w$ -Leiter kottiert wird, zeigen die punktiert markierten Geraden der Abbildung (Abb. S. 110 unten).

Eine zweite Kottierung (Diese Koten sind rot gedruckt) der drei Leitern dieses Nomogrammes ist zweckmäßig: Wir multiplizieren alle Koten der  $g$ - und  $p$ -Leiter mit dem Faktor 10. Gemäß der Formel  $w = \frac{gp}{100}$  sind

dann alle Koten der  $w$ -Leiter mit dem Faktor 100 zu multiplizieren.

Anschließend lassen wir uns noch mitteilen, daß dieses Nomogramm vorteilhaft auf das in Fachgeschäften erhältliche logarithmische Papier gezeichnet wird.

## V. Schlußbemerkung

Nomogramme, die wir zu wichtigen komplizierten Formeln des Schulstoffes in größerem Format angefertigt haben, können wir auf eine feste Unterlage aufgezogen und durch glasklare Kunststoffolie vor Beschädigung und Verschmutzung geschützt, unserer Schule bei besonderen Anlässen als Geschenke überreichen. Diese Nomogramme stehen dann, an entsprechenden Stellen in den Fachkabinetten ausgehängt, bei Bedarf zur Benutzung bereit.

Viel Erfolg bei der Anfertigung und viel Freude bei der Verwendung von Nomogrammen wünscht

W. Träger

## Freitag, der 13.

Aberglaube oder nicht: Das Problem, wie oft ein „Freitag, der 13.“ in einem bestimmten Jahr auftritt, hat die folgende elegante Lösung:

Ob ein „Freitag, der 13.“ im Januar vorkommt, hängt von zwei Dingen ab: Erstens vom Wochentag, auf den der 13. im vorherigen Monat, im Dezember, fällt; und zweitens von der Anzahl der Tage im Monat Dezember. Wenn zum Beispiel der 13. im Dezember auf einen Montag fällt, so wird der 13. im Januar auf einen Donnerstag fallen, da ja der Dezember 31 Tage hat. Ob ein „Freitag, der 13.“ im Februar auftritt, hängt entsprechend davon ab, auf welchen Wochentag der 13. im Januar fällt und wie viele Tage der Januar hat, oder auf welchen Tag der 13. im Dezember fällt und wie viele Tage Dezember und Januar zusammen haben.

Wir haben jetzt ein Modell und brauchen zur Lösung nur noch einige mathematische Begriffe. Wir betrachten die Folge der Monate eines Jahres, die mit Dezember beginnend in der gewöhnlichen Reihenfolge angeordnet sind:

{Dezember, Januar, ..., November}.

$D_i$  sei die Anzahl der Tage des  $i$ -ten Monats in der obigen Folge, und wir definieren

$$d_i \equiv D_i \pmod{7},*$$

\* Über die Bedeutung einer Kongruenz  $a \equiv b \pmod{p}$  könnt Ihr Euch in *alpha* 3/69 bis 2/70 informieren.

wobei  $0 \leq d_i < 7$  ist. Dann ist  $d_i$  die Anzahl der Wochentage, um die sich der 13. nach vorn bewegt, wenn wir von einem Monat mit  $D_i$  Tagen zum nächsten Monat übergehen.

Jetzt definieren wir

$$\delta_i \equiv \sum_{k=1}^i d_k \pmod{7} \text{ für } i=1, 2, \dots, 12,$$

wobei  $0 \leq \delta_i < 7$ .

Die Zahlen  $\{\delta_i\} = \{d_1 \pmod{7}, d_1 + d_2 \pmod{7}, \dots, d_1 + d_2 + \dots + d_{12} \pmod{7}\}$  geben die Gesamtzahl der Wochentage  $\pmod{7}$  an, um die sich der 13. im  $i$ -ten Monat gegenüber der Stellung im vorhergehenden Dezember vorwärts bewegt.

Wir betrachten jetzt ein Nichtschaltjahr:

$$\{D_i\} = \{31, 31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 30, 31, 30\}$$

$$\{d_i\} = \{3, 3, 0, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2\}$$

$$\{\delta_i\} = \{3, 6, 6, 2, 4, 0, 2, 5, 1, 3, 6, 1\}.$$

Die Folge  $\{\delta_i\}$  enthält alle Zahlen zwischen 0 und 6, und folglich gibt es in jedem Nichtschaltjahr mindestens einen „Freitag, den 13.“. Da die Zahl 6 als einzige dreimal auftritt, fällt in einem Nichtschaltjahr der 13. dreimal auf einen Freitag, genau dann, wenn der 13. im vorherigen Dezember auf einem Sonnabend lag. Es wird dann einen „Freitag, den 13.“ im Februar, März und November geben, denn die 6 steht in der Folge  $\{\delta_i\}$  an der zweiten, dritten und elften Stelle.

Für ein Schaltjahr gilt:

$$\{D_i\} = \{31, 31, 29, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30\}$$

$$\{d_i\} = \{3, 3, 1, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2\}$$

$$\{\delta_i\} = \{3, 6, 0, 3, 5, 1, 3, 6, 2, 4, 0, 2\}$$

Das Ergebnis ist ähnlich. In einem gegebenen Schaltjahr gibt es mindestens einen und höchstens drei „Freitag, den 13.“, und nur, wenn der 13. im vorhergehenden Dezember auf einen Dienstag fällt, werden wir drei „Freitage, den 13.“ haben.

Eine Betrachtung der Folge  $\{\delta_i\}$  liefert in beiden Fällen (Schaltjahr oder Nichtschaltjahr) das Ergebnis, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau ein „Freitag, der 13.“ in einem gegebenen Jahr vorkommt,  $\frac{3}{7}$  ist.

Die Wahrscheinlichkeit für genau zwei „Freitage, den 13.“ ist ebenfalls  $\frac{3}{7}$  und die für genau drei ist  $\frac{1}{7}$ . Um die „unglücklichen“

Jahre (jene Jahre mit drei „Freitag, den 13.“) zu bestimmen, wurde das folgende berechnet. Für  $1800 < x \leq 1900$  ist das Jahr  $x$  genau dann ein „unglückliches“, wenn  $x \equiv 9, 12, 15$  oder  $26 \pmod{28}$  ist.

Für  $1900 < x \leq 2000$  gilt: Das Jahr  $x$  ist dann und nur dann ein „unglückliches“, wenn  $x \equiv 10, 21, 24$  oder  $27 \pmod{28}$  ist. So sind die einzigen „unglücklichen“ Jahre, die noch in unserem Jahrhundert vorkommen, die Jahre 1970, 1981, 1984, 1987 und 1998.

Als Übungsaufgabe kann nun berechnet werden, wie oft in einem gegebenen Jahr der 21. auf einen Donnerstag fällt.

Nach einem Artikel von William T. Bailey, Buffalo (aus: *The Mathematics Teacher* 5/69) übersetzt und bearbeitet von Gerald Hofmann, Student im 2. Studienjahr, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig.

# XII. Internationale Mathematikolympiade

Budapest/Keszthely 1970



1.  $M$  sei ein beliebiger innerer Punkt auf der Seite  $AB$  eines Dreiecks  $ABC$ .  $r_1, r_2, r$  seien entsprechend die Inkreisradien der Dreiecke  $AMC, BMC, ABC$ .  $q_1, q_2, q$  seien die Radien der Ankreise dieser Dreiecke, die im Inneren des Winkels  $\sphericalangle ACB$  liegen. Man beweise, daß

$$\frac{r_1}{q_1} \cdot \frac{r_2}{q_2} = \frac{r}{q} \text{ gilt.}$$

(VR Polen, 5 Punkte)

2. Gegeben seien natürliche Zahlen  $a, b, n$  ( $a > 1, b > 1, n > 1$ ).  $A_{n-1}$  und  $A_n$  seien Zahlen im Zahlensystem mit der Basis  $a$ ,  $B_{n-1}$  und  $B_n$  seien Zahlen im Zahlensystem mit der Basis  $b$ .

$A_n$  und  $B_n$  haben die Ziffern  $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0$ .  $A_{n-1}$  und  $B_{n-1}$  haben die Ziffern  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0$  (wobei  $x_n \neq 0$  und  $x_{n-1} \neq 0$  ist), also

$$A_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2} \dots x_0,$$

$$A_n = x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0$$

(Zifferschreibweise im System mit der Basis  $a$ )

$$B_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2} \dots x_0, B_n = x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0$$

(Zifferschreibweise im System mit der Basis  $b$ )

Man zeige, daß

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$$

dann und nur dann gilt, wenn  $a > b$  ist.

(SR Rumänien, 7 Punkte)

3. Es seien  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  reelle Zahlen mit  $1 = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = \dots$  (1)

Wir betrachten die Folge  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ , die durch

$$b_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

definiert ist.

Man beweise:

I. Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  gilt

$$0 \leq b_n < 2.$$

II. Für ein beliebiges  $c$  aus  $0 \leq c < 2$  existieren solche Zahlen  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  mit der Eigenschaft (1), daß

$$b_n > c$$

für unendlich viele natürliche Zahlen  $n$  erfüllt ist.

(Schweden, 8 Punkte)

4. Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen  $n$  mit folgender Eigenschaft:

Die Menge  $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$  läßt sich in zwei elementfremde nicht leere Teilmengen so zerlegen, daß das Produkt aller Elemente der einen Teilmenge gleich dem Produkt aller Elemente der anderen Teilmenge ist.

(ČSSR, 6 Punkte)

5. In einem Tetraeder  $ABCD$  sei der Winkel  $\sphericalangle BDC$  ein rechter. Der Fußpunkt des von  $D$  auf die Ebene  $ABC$  gefällten Lotes sei identisch mit dem Schnittpunkt der Höhen

des Dreiecks  $ABC$ . Es ist zu beweisen, daß  $(AB + BC + AC)^2 \leq 6 \cdot (AD^2 + BD^2 + CD^2)$  ist.

Für welche Tetraeder gilt das Gleichheitszeichen?

(VR Bulgarien, 6 Punkte)

6. In einer Ebene seien 100 Punkte gegeben, wobei keine drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen. Wir betrachten alle möglichen Dreiecke, deren Eckpunkte unter den gegebenen Punkten vorkommen.

Man beweise, daß höchstens 70 Prozent dieser Dreiecke spitzwinklig sind. (UdSSR, 8 Punkte)

● Preise wurden für folgende Punktzahlen vergeben:

1. Preis 40 bis 37 Punkte

2. Preis 35 bis 30 Punkte

3. Preis 28 bis 19 Punkte

36 und 29 Punkte erreichte kein Teilnehmer. Sonderpreise wurden für die *elegante Lösung* einer Aufgabe vergeben.

## DDR-Teilnehmer der XII. IMO

Wolfgang Burmeister 1. Preis  
dazu: Sonderpreis für die elegante Lösung der 3. Aufgabe

*Erweiterte Oberschule Dresden-Süd, Klasse 11*

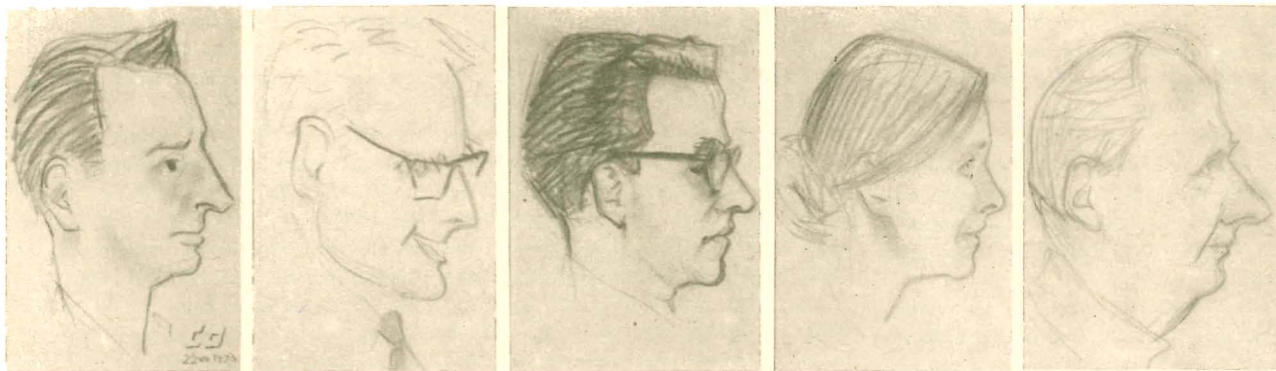
Jürgen Scheffter 2. Preis  
*Erweiterte Oberschule „Wladimir Komarow“, Elsterwerda, Klasse 10*

Andreas Felgenhauer 2. Preis  
*Spezialklasse für Mathematik an der Technischen Hochschule „Otto von Guericke“ Magdeburg, Klasse 12*

Olaf Böhme 3. Preis  
dazu: Sonderpreis für die elegante Lösung der 4. Aufgabe

*Erweiterte Oberschule Dresden-Reick, Klasse 10*

Peter Oswald 3. Preis  
*Erweiterte Oberschule Dresden-Süd, Klasse 12*



### Sie waren mit dabei

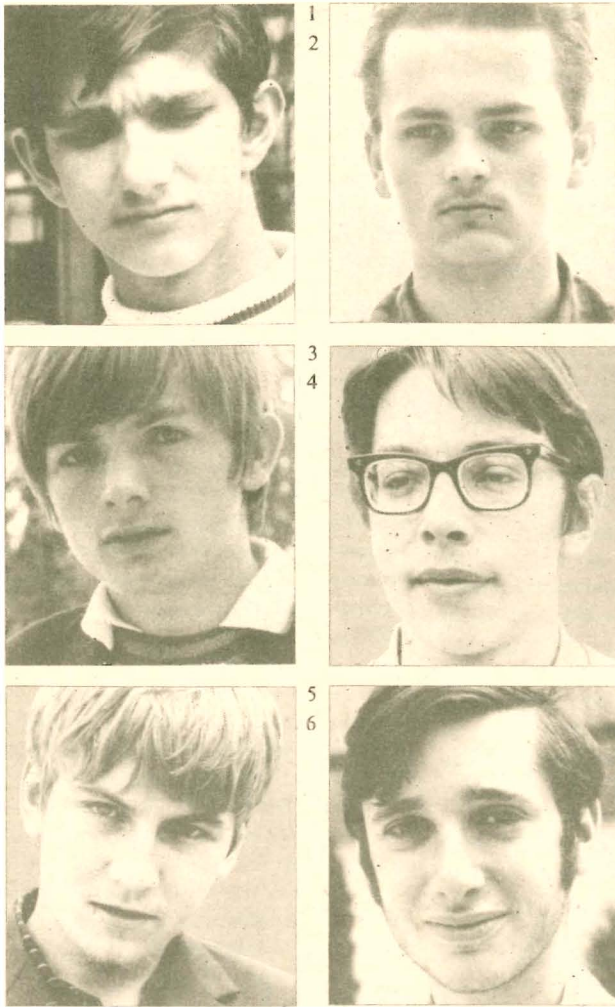
Delegationsleiter Dr. habil. H. Bausch  
Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin

Delegationssekretär Dr. habil. G. Burosch  
Universität Rostock

Päd. Betreuer Oberlehrer M. Mäthner  
Rat des Bezirkes, Abt. Volksbildung, Cottbus

Sonderberichterstatter der *Jungen Welt*  
Dipl.-Journalist Irma Weinreich, Berlin

Chefredakteur *alpha*  
StR J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig



## Preisträger der XII. IMO

	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Sonderpreis	Gesamtpunktz.
VR Ungarn	3	1	3	4	233
DDR	1	2	4	2	221
UdSSR	2	1	3		221
SFR Jugoslawien		3	3		209
SR Rumänien		3	4		208
England	1		6		180
ČSSR			4	1	150
VR Bulgarien			3		145
Frankreich		1	4		141
Schweden			2		110
Polen			1		105
Österreich			1		104
Niederlande			1		87
Mongolische VR			1		78
	7	11	40	7	2192*

\* von 4480 möglichen Punkten

### alpha stellt vor

Einen *ersten Preis* erhielten:

1. Imre Ruzsa, Budapest
2. Ervin Bajmóczy, Budapest
3. István Gönczi, Miscole (VR Ungarn)
4. Klimov Arkagyji, Arsamas
5. Hoduljev Andrej, Kalinin (4. und 5. UdSSR)
6. Bernard Silverman, London
7. Wolfgang Burmeister, Dresden

Thomas Jentsch 3. Preis  
Spezialklasse für Mathematik/Physik  
der Martin-Luther-Universität  
Halle, Klasse 11

Fredy Reimann 3. Preis  
Erweiterte Oberschule „Theodor Fontane“,  
Neuruppin, Klasse 12

Ursula Tyl  
Erweiterte Oberschule „Heinrich Hertz“,  
Berlin, Klasse 11

● Alle Teilnehmer erhielten vom Ministerium für Volksbildung und von der Mathematischen Gesellschaft der DDR Ehrenurkunden, Geld- und Buchprämien.

● Der Zentralrat zeichnete aus: W. Burmeister mit der *Artur-Becker-Medaille in Gold*, J. Scheffer mit der *Artur-Becker-Medaille in Silber*, O. Böhme, P. Oswald, T. Jentsch, F. Reimann mit der *Artur-Becker-Medaille in Bronze*. A. Felgenhauer erhielt die *Ehrenurkunde des Zentralrates* und U. Tyl ein *Anerkennungsschreiben* des 1. Sekretärs des Zentralrates Dr. G. Jahn.

Die Auszeichnung nahmen vor (am 22. 7. 1970 im Interhotel „Unter den Linden“): Dr. G. Herger (Zentralrat der FdJ), OStR S. Tielmann (Min. f. Volksbildung), Prof.

Dr. W. Engel (stellv. Vorsitzender der Mathematischen Gesellschaft und Vorsitzender des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR). Die Glückwünsche des ZK der SED überbrachte im Namen von Prof. Dr. K. Hager die Genossin Dr. Sonja Müller.

● F. Reimann studiert ab September Mathematik an der Universität Budapest, P. Oswald in der Sowjetunion.

● An der XII. IMO nahmen 6 Mädchen teil. *alpha* stellt sie in Heft 1/71 vor.

● Österreich führte im vergangenen Schuljahr erstmals eine Mathematikolympiade durch, nahm an der XII. IMO erstmals teil.

● Die XII. IMO wurde vom stellv. Minister für Kultur der VR Ungarn und vom Vorsitzenden der Jury, Prof. Dr. G. Hájos (Universität Budapest) in der *Hochschule für Agrarwirtschaft* in Keszthely (Plattensee) eröffnet.

● Die beiden Klausuren (Arbeitszeit je 4 Stunden) fanden am 13. und 14. Juli in der *Fachschule für Gastronomie* in Keszthely statt.

● Koordinatoren haben die Aufgabe, die von den 14 Delegationsleitern für die Lösung der Aufgaben ihrer Schüler erteilten Punktzahlen in Hinsicht auf alle Teilnehmer in Überein-

stimmung zu bringen. Von den 12 (für jede Aufgabe zwei) eingesetzten ungarischen Koordinatoren waren 5 ehemalige Teilnehmer an IMOs.

● Die Abschlussfeier der XII. IMO fand in der Aula der *TU Budapest* statt. Prof. Dr. J. Vyšin, Delegationsleiter der ČSSR-Mannschaft, dankte im Namen aller Teilnehmer den ungarischen Freunden für die große Gastfreundlichkeit und lud für 1971 zur XIII. IMO nach Zilina/Bratislava ein.

● Unsere ungarischen Freunde zeigten uns Budapest bei Tage und bei Nacht (Stadtrundfahrten). Wir besichtigten das Thermalbad Heviz, unternahmen eine Ganztags-Exkursion mit zwei Sonderschiffen auf dem Plattensee zum Badacsony. Alle Mannschaften machten ausgiebig Gebrauch vom Baden im Balaton bei 35° Luft- und 27° Wassertemperatur. Die gemeinsame Unterkunft von Jury und Mannschaften in der Fachschule für Gastronomie sowie drei Empfänge gaben umfassend Gelegenheit zum Erfahrungsaustausch. Zahlreiche Freundschaften wurden geschlossen und werden noch lange an die erlebnisreichen Tage in der VR Ungarn erinnern.

J. Lehmann

# Lösungen



## Lösung der Aufgabe, ausgewählt von Prof. Dr. H. Wufing

$$\blacktriangle 500 \quad x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

$$x = 84$$

Der griechische Mathematiker *Diophant* wurde 84 Jahre alt.

## Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. Th. Glocke

$\blacktriangle 509$  1. Lösung: Zum Beweis soll die Tatsache verwendet werden, daß der Schwerpunkt eine Schwerlinie oder Seitenhalbierende in einem bestimmten Verhältnis teilt. Als Hilfslinie wird die Gerade durch  $E$  parallel zu  $AC$  benutzt, die  $AB$  in  $E'$  schneide.  $M$  sei die Mitte der Strecke  $AB$ ,  $P'$  die Mitte von  $DE$  und  $S$  der Schnittpunkt von  $CM$  und  $FP'$ .

$$\text{Vor.: } \overline{AD} : \overline{DB} = \overline{BE} : \overline{EC} = \overline{CF} : \overline{FA},$$

$$\overline{EE'} \parallel \overline{AC}, \overline{AM} = \overline{MB}, \overline{DP'} = \overline{P'E}$$

Beh.: Der Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$  fällt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks  $DEF$  zusammen.

$$\text{Bew.: } \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{BE} : \overline{BC} = \overline{CF} : \overline{CA} \text{ nach Voraussetzung} \quad (1)$$

$$\overline{BE} : \overline{BC} = \overline{BE}' : \overline{BA} \text{ n. V.}$$

$$\overline{BE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB} \text{ n. (1),}$$

$$\text{also } \overline{BE}' : \overline{BA} = \overline{AD} : \overline{AB},$$

$$\text{also } \overline{BE}' = \overline{AD}, \text{ folglich } M \text{ auch Mitte von } \overline{DE}' \quad (2)$$

$$\overline{DM} : \overline{DE}' = \overline{DP}' : \overline{DE} = 1 : 2 \text{ n. V. und (2),}$$

$$\text{also } \overline{MP}' \parallel \overline{EE}' \text{ und } \overline{DM} : \overline{DE}' = \overline{MP}' : \overline{E'E} = 1 : 1 \text{ (Strahlensatz und Umkehrung).}$$

Wegen  $\overline{BE}' : \overline{BA} = \overline{BE} : \overline{BC} = \overline{CF} : \overline{CA}$  ist  $E'F \parallel BC$ , das Viereck  $ECFE'$  also ein Parallelogramm. Es ist also auch  $\overline{EE}' = \overline{CF}$  und damit  $\overline{MP}' : \overline{FC} = 1 : 2$ .

$$\text{Wegen } \overline{MP}' \parallel \overline{EE}' \parallel \overline{FC} \text{ gilt:}$$

$$\overline{SM} : \overline{SC} = \overline{SP}' : \overline{SF} = 1 : 2.$$

Der Punkt  $S$  ist also Schwerpunkt sowohl des Dreiecks  $ABC$  als auch des Dreiecks  $DEF$ , weil er je eine Seitenhalbierende dieser Dreiecke im Verhältnis 1 : 2 teilt.

2. Lösung: Durch die Abbildung von  $A$  auf  $B$ ,  $B$  auf  $C$ ,  $C$  auf  $A$  ist eine ebene Affinität festgelegt und aufgespannt. Diese sog. *Anschlußaffinität* ist zyklisch von 3. Ordnung. Sie hat u. a. folgende Eigenschaften:

1) Der Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$  ist

Fixpunkt der Affinität, andere Fixpunkte existieren nicht.

2) Dieser Fixpunkt ist Schwerpunkt aller Schließungsdreiecke der Affinität.

Durch die Affinität werden die Strecken  $AB$  auf  $BC$ ,  $BC$  auf  $CA$ ,  $CA$  auf  $AB$  abgebildet und wegen der Teilverhältnistreue der Affinität auch  $D$  auf  $E$ ,  $E$  auf  $F$ ,  $F$  auf  $D$ .

Wegen 1) und 2) fällt der Schwerpunkt des Dreiecks  $DEF$  mit dem Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$  zusammen.

## Lösung zu „Wurzelziehen“

(Heft 3/70, Seite 59)

Das Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel ist zweistellig, das Doppelte von ihr ist dagegen einstellig, d. h., die erste Ziffer ist kleiner als 5, kann aber nicht kleiner als 3 sein weil deren Quadrat einstellig ist. Die erste Ziffer kann somit nur 4 lauten. Der erste Subtrahend ist also 16. Die zweite Ziffer der Wurzel besitzt folgende Eigenschaft: Wenn man sie hinter 8 schreibt und danach die zweistellige Zahl mit ihr multipliziert, kommt wieder eine zweistellige Zahl heraus. Die zweite Ziffer der Wurzel ist also 1. Die dritte Ziffer der Wurzel ist eine Zahl mit folgender Eigenschaft: Schreibt man sie hinter 82 und multipliziert mit ihr, so ergibt sich eine vierstellige Zahl, deren zweite Ziffer  $5 - 1 = 4$  lautet, denn auf der vierten Zeile steht  $1 \cdot 81 = 81$ . Dieser Forderung genügen zwei Zahlen, die 3 und 9. Die Werte der noch unbekanntenen Ziffer ergeben sich, indem man die Wurzel wirklich auszieht.

Wir haben also zwei Lösungen erhalten  $\sqrt{170569} = 413$  und  $\sqrt{175561} = 419$ .

## Lösung zu „Die merkwürdige Waage“

(alpha-heiter, Heft 3/70, S. 70)

Auf der dritten Skizze halten zwei Kugeln und ein Würfel einem Zylinder und einem Kegel das Gleichgewicht. Am Gleichgewicht ändert sich nichts, wenn wir in beide Waagschalen je einen Würfel legen. Dann ist

1	$\circ \circ \circ - \square \square \circ \circ$
2	$\circ \circ - \square$
3	$\circ \circ \circ - \Delta \square \circ \circ$
4	$\circ \circ - \Delta \square$
5	$\square \square = \Delta \square$
6	$\square = \circ \circ - \Delta$
7	$\square = \square \square - \Delta$
8	$\square \square + \circ = \Delta \Delta + \square \square$
9	$\square \square \square - \Delta \Delta + \circ = \Delta \Delta + \square \square \square$
10	$\circ \circ \circ \circ - \Delta \Delta + \circ = \Delta \Delta + \square \square \square$
11	$\circ \circ \circ \circ - \Delta \Delta = \Delta \Delta + \circ \circ \circ \circ$
12	$\Delta \Delta \Delta \Delta = \circ \circ = \square \square$

auf der linken Seite ein Zylinder, ein Kegel und ein Würfel, dasselbe wie auf der zweiten Abbildung in der rechten Waagschale. Durch Vergleich der zweiten und dritten Skizze erhalten wir somit:

$$6 \text{ Kugeln} = 2 \text{ Würfel} + 2 \text{ Kugeln.}$$

Hieraus folgt

$$4 \text{ Kugeln} = 2 \text{ Würfel, d. h.}$$

$$2 \text{ Kugeln} = 1 \text{ Würfel.}$$

Wir legen jetzt in der zweiten Abbildung an Stelle des Würfels 2 Kugeln in die rechte Waagschale. Dann gilt

$$6 \text{ Kugeln} = 1 \text{ Kegel} + 1 \text{ Zylinder} + 2 \text{ Kugeln,}$$

$$\text{d. h. } 4 \text{ Kugeln} = 1 \text{ Kegel} + 1 \text{ Zylinder}$$

$$2 \text{ Würfel} = 1 \text{ Kegel} + 1 \text{ Zylinder.}$$

Hieraus folgt

$$1 \text{ Zylinder} = 2 \text{ Würfel} - 1 \text{ Kegel, und}$$

$$2 \text{ Zylinder} = 4 \text{ Würfel} - 2 \text{ Kegel.}$$

Aus der ersten Skizze ergibt sich:

$$2 \text{ Zylinder} + 1 \text{ Kugel} = 2 \text{ Kegel} + 3 \text{ Würfel.}$$

Unter Benutzung der obigen Gleichung folgt:

$$4 \text{ Würfel} - 2 \text{ Kegel} + 1 \text{ Kugel}$$

$$= 2 \text{ Kegel} + 3 \text{ Würfel,}$$

$$8 \text{ Kugeln} - 2 \text{ Kegel} + 1 \text{ Kugel}$$

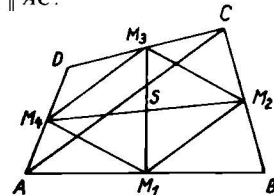
$$= 2 \text{ Kegel} + 3 \text{ Würfel,}$$

$$9 \text{ Kugeln} - 2 \text{ Kegel} = 2 \text{ Kegel} + 6 \text{ Kugeln.}$$

Von beiden Waagschalen nehmen wir 6 Kugeln weg und legen 2 Kegel dazu, dann ist  $3 \text{ Kugeln} = 4 \text{ Kegel}$ .

Damit liegt bereits das Ergebnis vor, da gerade 4 Kegel das Gleichgewicht zu halten war. Die Anzahl der das Gleichgewicht haltenden Körper läßt sich noch vermindern, weil  $2 \text{ Kugeln} = 1 \text{ Würfel}$  ist und somit  $4 \text{ Kegel} = 1 \text{ Würfel} + 1 \text{ Kugel}$  gilt.

$\blacksquare$  527 Wir beweisen zunächst, daß das Viereck  $M_1M_2M_3M_4$  ein Parallelogramm ist (vgl. Abb.). Nach der Aufgabenstellung ist  $M_1$  die Mitte der Seite  $AB$  und  $M_2$  die Mitte der Seite  $BC$ ; daraus folgt  $\overline{BM}_1 : \overline{M}_1A = 1 : 1$  und  $\overline{BM}_2 : \overline{M}_2C = 1 : 1$ , also  $\overline{BM}_1 : \overline{M}_1A = \overline{BM}_2 : \overline{M}_2C$ . Aus der Umkehrung des Strahlensatzes folgt daher  $M_1M_2 \parallel AC$ .



Aus  $\overline{DM}_3 : \overline{M}_3C = \overline{DM}_4 : \overline{M}_4A$  folgt ferner  $M_3M_4 \parallel AC$ . Daher gilt  $M_1M_2 \parallel M_3M_4$ .

Analog beweist man, daß auch

$$M_2M_3 \parallel M_4M_1 \text{ gilt.}$$

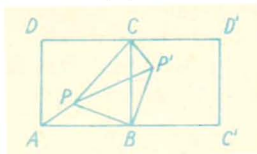
Das Viereck  $M_1M_2M_3M_4$  ist daher ein Parallelogramm.

Da in jedem Parallelogramm die Diagonalen einander halbieren, halbieren auch die Diagonalen  $\overline{M}_1M_3$  und  $\overline{M}_2M_4$  einander, d. h., es gilt  $\overline{M}_1S = \overline{SM}_3$  und  $\overline{M}_2S = \overline{SM}_4$ , womit die Behauptung bewiesen ist.

$\blacktriangle$  528 Bei der vorliegenden Aufgabe ist es wie auch bei vielen anderen geometrischen Konstruktionsaufgaben zweckmäßig, eine

Drehung durchzuführen, bei der man ein Dreieck erhält, dessen Seiten man aus den gegebenen Stücken konstruieren und berechnen kann.

Drehen wir nämlich das Quadrat  $ABCD$  um den Punkt  $B$  im negativen Drehsinn um einen Winkel von  $90^\circ$ , so bleibt der Punkt  $B$  fest, und es werden die Punkte  $A$  in  $C$ ,  $C$  in  $C'$ ,  $D$  in  $D'$  und  $P$  in  $P'$  übergeführt (s. Abb.). Ferner gilt  $\overline{PA} = \overline{P'C} = 1$  cm,  $\overline{PB} = \overline{P'B} = 2$  cm,  $\sphericalangle PBP' = 90^\circ$ .



a) Nun läßt sich das Viereck  $PBP'C$  aus diesen Stücken leicht konstruieren. Wir konstruieren nämlich zunächst das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck  $PBP'$  aus den bekannten Stücken und dann das Dreieck  $PP'C$  aus  $\overline{PP'}$ ,  $\overline{P'C} = 3$  cm,  $\overline{P'C} = 1$  cm. Wir erhalten das Viereck  $PBP'C$ , dessen Diagonale  $\overline{BC}$  gleich der gesuchten Seite des Quadrats  $ABCD$  ist.

b) Bei der Berechnung der gesuchten Seitenlänge  $x$  des Quadrats  $ABCD$  können wir analog verfahren. Wir erhalten zunächst  $\overline{PP'}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{P'B}^2 = 4 \text{ cm}^2 + 4 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$ .

Ferner gilt  $\overline{PP'}^2 + \overline{P'C}^2 = 8 \text{ cm}^2 + 1 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2 = \overline{PC}^2$ , also  $\sphericalangle PP'C = 90^\circ$  und wegen  $\sphericalangle BP'P = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle BP'C = 135^\circ$ . Daher gilt nach dem Kosinussatz  $x^2 = \overline{BC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{P'C}^2 - 2 \overline{PB} \cdot \overline{P'C} \cdot \cos 135^\circ$ ,

$$x^2 = 4 \text{ cm}^2 + 1 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ cm}^2 = (5 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2,$$

$$x = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \text{ cm} \approx 2,80 \text{ cm}.$$

Das Quadrat  $ABCD$  hat also die Seitenlänge  $\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$  cm, d. s. rd. 2,80 cm.

▲ 529 Angenommen,  $a$  und  $b$  seien zwei ungerade natürliche Zahlen mit der verlangten Eigenschaft. Dann gilt für die Summe aller natürlichen Zahlen, die größer als  $a$  und kleiner als  $b$  sind,  $s = (a+1) + (a+2) + \dots + (b-2) + (b-1) = 1000$ . (1)

Zur leichteren Berechnung schreiben wir noch einmal die Summe in der umgekehrten Reihenfolge der Summanden und erhalten  $s = (b-1) + (b-2) + \dots + (a+2) + (a+1)$ .

Durch Addition erhalten wir  $2s = (a+b) + (a+b) + \dots + (a+b) + (a+b)$ . Diese Summe hat genau  $b-a-1$  Summanden, daher gilt  $2s = (a+b)(b-a-1) = 2000$ . (2)

Wer bereits die Summenformel für die arithmetische Reihe kennt, kann schneller rechnen und erhält aus (1), da das Anfangsglied gleich  $a+1$ , das letzte Glied gleich  $b-1$ , die Anzahl der Glieder gleich  $b-a-1$  ist, unmittelbar  $2s = (b-a-1)(a+1+b-1) = (b-a-1)(a+b)$ . Nun gilt  $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ ;

die Zahl 2000 hat also nur die ungeraden Teiler 1, 5, 25 und 125. Andererseits sind nach Voraussetzung  $a$  und  $b$  ungerade, also  $a+b$  gerade und  $b-a-1$  ungerade.

Daher ist  $b-a-1$  gleich einer der Zahlen 1, 5, 25, 125. Dann ist wegen (2)  $a+b$  gleich 2000, 400, 80 bzw. 16. Wir erhalten daher folgende Fälle:

- 1.)  $b-a-1=1$ , d. h.  $b-a=2$  und  $b+a=2000$ ; also  $b=1001$ ,  $a=999$ .
- 2.)  $b-a-1=5$ , d. h.  $b-a=6$  und  $b+a=400$ ; also  $b=203$ ,  $a=197$ .
- 3.)  $b-a-1=25$ , d. h.  $b-a=26$ ; und  $b+a=80$ ; also  $b=53$ ,  $a=27$ .
- 4.)  $b-a-1=125$ , d. h.  $b-a=126$  und  $b+a=80$ ; also  $2a=-46$ ,  $a=-23$ , was der Voraussetzung widerspricht, wonach  $a$  eine natürliche Zahl ist.

Wir überzeugen uns durch die Probe, daß die in den Fällen 1. 2 und 3 angegebenen Zahlen  $a$  und  $b$  tatsächlich die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

- 1.)  $a=999$ ,  $b=1001$ ;  $s=1000$ .
  - 2.)  $a=197$ ,  $b=203$ ;  $s=198+199+200+201+202=1000$ .
  - 3.)  $a=27$ ,  $b=53$ ;  $s=28+29+30+\dots+50+51+52 = (28+52)+(29+51)+(30+50)+\dots+(39+41)+40 = 12 \cdot 80 + 40 = 1000$ .
- Daher hat die Aufgabe nur die unter 1.), 2.) und 3.) angegebenen Lösungen.

▲ 530 Angenommen, die reelle Zahl  $x$  sei eine Lösung der Gleichung

$$\sqrt{x+\sqrt{2x}} + \sqrt{x-\sqrt{2x}} = x, \quad (1)$$

dann gilt  $x \geq 0$  und  $x \geq \sqrt{2x}$ , also  $x^2 \geq 2x$ , d. h.,  $x=0$  oder  $x \geq 2$ , da nur die Quadratwurzel aus einer nicht negativen Zahl reell ist. Ist nun die Gleichung (1) erfüllt, so gilt, wie man durch Quadrieren feststellt,

$$x + \sqrt{2x} + x - \sqrt{2x} + 2\sqrt{(x+\sqrt{2x})(x-\sqrt{2x})} = x^2,$$

$$2x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = x^2,$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x} = x^2 - 2x. \quad (2)$$

Daraus folgt durch nochmaliges Quadrieren  $4(x^2 - 2x) = (x^2 - 2x)^2$ , also  $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 4) = 0$ ,  $x(x-2)(x^2 - 2x - 4) = 0$ . (3)

Die Gleichung (3) hat genau vier reelle Lösungen, nämlich  $x_1=0$ ,  $x_2=2$ ,  $x_3=1+\sqrt{1+4}=1+\sqrt{5}$ ,  $x_4=1-\sqrt{5}$ .

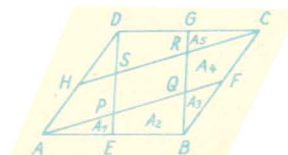
Die gegebene Gleichung (1) hat also, wenn überhaupt, höchstens die vier Lösungen  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Nun ist die Gleichung (1), wie man durch Probe feststellt, für  $x_1=0$  und  $x_2=2$  erfüllt. Sie ist aber auch für  $x_3=1+\sqrt{5}>2$  erfüllt; denn für diesen Wert ist die Gleichung (3) erfüllt und, weil  $x_3^2 - 2x_3 > 0$  ist, auch die Gleichung (2). Dann ist aber wegen  $x_3 > 0$  und  $x_3 - \sqrt{2x_3} > 0$  auch die Gleichung (1) erfüllt.

Dagegen ist für  $x_4=1-\sqrt{5}<0$  die Gleichung (1) nicht erfüllt, weil eine Lösung dieser Gleichung nicht negativ sein kann.

Die gegebene Gleichung (1) hat also genau drei reelle Lösungen, nämlich  $x_1=0$ ,  $x_2=2$ ,  $x_3=1+\sqrt{5}$ .

▲ 531 Aus  $\triangle ABF \cong \triangle CDH$  folgt  $AF \parallel CH$ . Analog ergibt sich  $BG \parallel DE$ . Ferner ist der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABF$  gleich  $\frac{A}{4}$ , weil das Viereck  $ABCD$  in die vier flächengleichen Dreiecke  $ABF$ ,  $AFC$ ,  $HFC$ ,  $DHC$  zerlegt werden kann. (vgl. die Abb.)



Wir bezeichnen nun den Flächeninhalt des Dreiecks  $AEP$  mit  $A_1$ , des Vierecks  $EBQP$  mit  $A_2$ , des Dreiecks  $BFQ$  mit  $A_3$ , des Vierecks  $FCRQ$  mit  $A_4$ , des Dreiecks  $CGR$  mit  $A_5$ . Dann gilt

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_3 + A_4 + A_5 = \frac{A}{4}, \quad (1)$$

weil die Dreiecke  $ABF$  und  $BCG$  flächengleich sind. Daraus folgt

$$A_1 + A_2 = A_4 + A_5. \quad (2)$$

Nun ist aber  $A_1 = A_5$ , weil die entsprechenden Dreiecke kongruent sind. Wir erhalten daher aus (2)

$$A_2 = A_4. \quad (3)$$

Ferner gilt wegen  $\overline{QB} : \overline{PE} = \overline{AB} : \overline{AE} = 2 : 1$   $A_2 = 3 A_1$  und analog  $A_4 = 3 A_3$ . (4)

Daraus folgt wegen (3)  $A_1 = A_3$ . (5)

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABF$  ist also gleich

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_1 + 3 A_1 + A_1 = 5 A_1 = \frac{A}{4};$$

daraus folgt  $A_1 = \frac{A}{20}$ . (6)

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABQ$  ist also gleich

$$A_1 + A_2 = 4 A_1 = 4 \cdot \frac{A}{20} = \frac{A}{5}. \quad (7)$$

Deshalb gilt für den Flächeninhalt des kongruenten Dreiecks  $CDS$ . Der Flächeninhalt des Dreiecks  $BCR$  (und auch des kongruenten Dreiecks  $DAP$ ) ist gleich

$$A_3 + A_4 = 4 A_3 = 4 A_1 = \frac{A}{5}. \quad (8)$$

Der gesuchte Flächeninhalt des Vierecks  $PQRS$  ist also gleich

$$A - 4 \cdot \frac{A}{5} = \frac{A}{5},$$

er ist also gleich dem fünften Teil des Flächeninhalts des Rhombus  $ABCD$ .

### Lösungen zu: Abschlußprüfung im Fach Mathematik, Tanzania

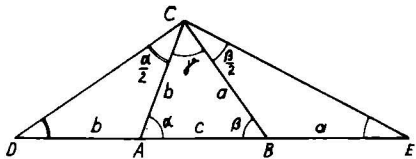
1.  $1232 : 7 = x$ ;  $x = 176$
2.  $34800 : 4 = x$ ;  $x = 8700$
3.  $144 : 12 \cdot 3 = 36$ ; der dritte Teil eines Dutzend ist in 144 Stück 36mal enthalten.

4.  $\frac{11}{8} - \frac{2}{3} = x$ ;  $\frac{33-16}{24} = x$ ;  $x = \frac{17}{24}$
5.  $3\frac{1}{3} + \frac{11 \cdot 7}{7 \cdot 5} = x$ ;  $3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{5} = x$ ;  $x = 5\frac{8}{15}$
6.  $\frac{40 \cdot 3}{9 \cdot 4} = x$ ;  $x = 3\frac{1}{3}$
7.  $0.25 : 4 = x$ ;  $x = 0,0625$
8.  $x = 54,62$
9.  $x = 9,331$
10.  $4875 : 5 = x$ ;  $x = 975$
11.  $154 \text{ cm}^2 : 3 = 51\frac{1}{3} \text{ cm}^2$ ; die schraffierte Fläche des Ziffernblattes beträgt  $51\frac{1}{3} \text{ cm}^2$ .
12.  $11 - 3 = 8$ ;  $8 : 4 = 2$ ;  $3 - 2 = 1$ ; der Anfang des unvollständigen Zahlenstrahls muß mit der Zahl 1 bezeichnet werden.
13.  $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$ ;  $\frac{2}{8} \hat{=} 25\%$
14. Es sind 2 Stunden und 45 Minuten vergangen.
15.  $x = 8$
16.  $(48 + 80 + 75 + 63 + 29) : 5 = x$ ;  $295 : 5 = x$ ;  $x = 59$
17.  $x = (864 : 16) : 4$ ;  $x = 54 : 4$ ;  $x = 13,5$
18.  $\overline{BC} = \overline{AD} - \overline{AB} - \overline{CD}$ ;  
 $\overline{BC} = 16 \text{ cm} - 7 \text{ cm} - 4 \text{ cm}$ ;  $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$
19.  $\sphericalangle ACB = 360^\circ - 320^\circ = 40^\circ$ ;  
 $\sphericalangle CAB = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$
20.  $33,3 : 100 = 0,333 = \frac{333}{1000}$
21.  $x = 6 \cdot 5 \cdot 3$ ;  $x = 90$ ; der Stapel enthält 90 Ziegelsteine.
22.  $10\%$  von 71 Schillingen sind 7,10 Schillinge;  $7,1 < 7,5$ ; der größere der beiden Beträge beträgt 7,50 Schillinge.
23.  $\frac{1}{2,5} = \frac{10}{25} = x$ ;  $x = 0,4$
24. Es gilt  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACB$ ; das Dreieck ist gleichwinklig und damit auch gleichseitig
25.  $\sphericalangle ABC = 60^\circ$  (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) und damit auch  $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ . Das Dreieck ist somit gleichseitig, also  $\overline{AB} = \overline{AC} = 30 \text{ cm}$ .
26.  $x = \frac{27+9+3+1}{81}$ ;  $x = \frac{40}{81}$
27.  $2\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 5$ ;  $120 : 5 = 24$ ; das Auto legte in einer halben Stunde 24 km zurück
28. Aus  $9 \cdot 17 = 153$  und  $10 \cdot 17 = 170$  und  $11 \cdot 17 = 187$  folgt wegen  $160 < x < 180$  somit  $x = 170$ . Es gibt nur eine solche Zahl.
29.  $A_1 = 5^2$  Flächeneinheiten = 25 Flächeneinheiten;  $A_2 = 10$  Flächeneinheiten;  $25 : 100 = 10 : x$ ;  $x = 40$ ; Der Flächeninhalt der schraffierten Quadrate beträgt 40% des Flächeninhaltes des Quadrates  $ABCD$ .
30.  $45 \cdot \frac{2}{5} = 18$ ;  $\frac{2}{5} \text{ m}$  des Stoffes kosten 18 Schillinge.
31. Die Diagonalen eines Quadrates stehen senkrecht aufeinander, also  $\sphericalangle CSB = 90^\circ$ .
32. Der Zug kommt um 18.30 Uhr an.

33.  $2 \cdot (x + 3x) = 304$ ;  $x = 38$ ; der Garten ist 114 m lang und 38 m breit.
34. Der Januar hat 31 Tage, der Februar 28 Tage, der März 31 Tage, im April sind 14 Tage vergangen; insgesamt sind 104 Tage vergangen.
35. Der 27. März dieses Jahres war ein Mittwoch.
36.  $80 : 100 = x : 700$ ;  $x = 560$ ; bei Barzahlung kostet das Rundfunkgerät 560 M.
37.  $240 : 3 = 80$ ;  $240 \cdot \frac{5}{8} = 150$ ;  
 $240 - 230 = 10$ ; Hamis verkaufte am ersten Tag 80, am zweiten 150, am dritten 10 Apfelsinen.
38.  $0,04 + 0,0007 = x$ ;  $x = 0,0407$
39.  $x = 1,5$
40.  $x = 13$ ; allgemein  $x = 3n + 1$  für  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$
41.  $\dot{V} = 40 \cdot 30 \cdot 50 \text{ cm}^3 = 60\,000 \text{ cm}^3 = 60 \text{ l}$
42.  $z = \frac{200 \cdot 2,5 \cdot 3}{100} = 15$ ; nach drei Jahren besitzt Hubert 215 Schillinge.
43.  $3 \cdot 8 = 24$ ; für die Arbeit hätten 5 Arbeiter 24 Tage benötigt.
44. Das C erscheint in Spiegelschrift als  $\text{C}$ .
45.  $3,50 \cdot 4 = 14$ ;  $14 + 6 = 20$ ;  $20 : 5 = 4$ ; das arithmetische Mittel beträgt im letzteren Fall 4 Schillinge.
46. Auf 2 ha Anbaufläche ist mit einer Ernte von 50 Sack Mais zu rechnen.
47. Es müssen 2,4 ha Mais angebaut werden, um 60 Sack Mais zu ernten.
48.  $45 - 30 = 15$ ; es müssen zusätzlich auf 0,6 ha Land Mais angebaut werden.
49.  $A = 1,75 \cdot 2 \text{ m}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} \cdot 0,765625 \text{ m}^2$ ;  
 $A \approx 4,760268 \text{ m}^2$
50. Da nur nach der benötigten Anzahl der Zehn-Schilling-Scheine gefragt wird, brauchen die Teilbeträge, die kleiner als 10 Schillinge sind, nicht betrachtet zu werden. Es werden zwei Zehn-Schilling-Scheine benötigt.
- ▲ 533 Der Autobus spart täglich eine Fahrstrecke von  $4 \cdot 200 \text{ m} = 800 \text{ m}$  ein, also im Jahr  $365 \cdot 800 \text{ m} = 292\,000 \text{ m}$  bzw. 292 km. Aus  $292 : 40 = 7,3$  folgt, daß 7,3 Stunden bzw. 7 Stunden und 18 Minuten jährlich an Fahrzeit eingespart wird.
- ▲ 534 Der erste Summand sei  $a$ , der zweite  $b$ ; wir erhalten folgende Tabelle:
- | $a$ | $b$ | $5 \cdot a$ | $3 \cdot b$ | $5a + 3 \cdot b$ |
|-----|-----|-------------|-------------|------------------|
| 0   | 10  | 0           | 30          | 30               |
| 1   | 9   | 5           | 27          | 32               |
| 2   | 8   | 10          | 24          | 34               |
| 3   | 7   | 15          | 21          | 36               |
| 4   | 6   | 20          | 18          | 38               |
| 5   | 5   | 25          | 15          | 40               |
| 6   | 4   | 30          | 12          | 42               |
| 7   | 3   | 35          | 9           | 44               |
| 8   | 2   | 40          | 6           | 46               |
| 9   | 1   | 45          | 3           | 48               |
| 10  | 0   | 50          | 0           | 50               |
- Es gibt genau eine Lösung, nämlich  $a = 7$  und

- $b = 3$ . Der erste Summand heißt 7, der zweite 3.
- ▲ 535 Die zweistellige Zahl sei  $n = 10a + a = 11a$  und die vierstellige Zahl sei  $z = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a$ . Dann gilt  $x \cdot 11a = 1111a$ , und wegen  $a \neq 0$  gilt somit  $x = 101$ .
- Probe  $11 \cdot 101 = 1111$   
 $22 \cdot 101 = 2222$   
 $33 \cdot 101 = 3333$   
.....  
 $99 \cdot 101 = 9999$
- ▲ 536 Aus  $0,21 + 0,30 = 0,51$  und  $10 \cdot 0,51 = 5,10$  folgt, daß zehn Flaschen Brause einschließlich Pfand 5,10 M kosten. Aus  $510 : 30 = 17$  folgt, daß Heinz 17 leere Flaschen dafür abgeben muß.
- ▲ 537 In der Zahlenfolge 0, 1, 2, 3, ..., 19, 20 ist die Zahl 0 kleiner als jede der folgenden 20 Zahlen. Es lassen sich also 20 verschiedene Ungleichungen bilden, in denen stets  $a = 0$  ist und für  $b$  die Zahlen von 1 bis 20 eingesetzt werden können. Wenn  $a = 1$ , so kann  $b$  durch die Zahlen von 2 bis 20, also durch 19 verschiedene Zahlen ersetzt werden. Diese Überlegungen führen wir fort. Für  $a = 19$  gibt es genau eine Möglichkeit, nämlich  $b = 20$ .
- Wegen  
 $20 + 19 + 18 + \dots + 3 + 2 + 1 =$   
 $(20 + 1) + (19 + 2) + (18 + 3) + \dots + (11 + 10)$   
 $= 21 \cdot 10 = 210$   
gibt es genau 210 Möglichkeiten zum Ersetzen der beiden Variablen  $a$  und  $b$  der Ungleichung durch die vorgegebenen Zahlen.
- ▲ 538 Wir zeichnen die Verbindungsgerade  $\overline{BE}$  und halbieren die Strecke  $\overline{BE}$ ; ihr Mittelpunkt sei  $P$ . Danach drehen wir die Gerade  $h$  um  $P$  als Drehpunkt im positiven Sinn um einen Winkel von  $180^\circ$ . Bei Ausführung dieser Drehung fällt das Bild  $h'$  der Geraden  $h$  mit der Geraden  $g$  zusammen, und das Bild  $E'$  des Punktes  $E$  fällt mit dem Punkte  $B$  zusammen. Wegen  $\overline{AB} = \overline{EF}$  fällt das Bild  $F'$  von  $F$  mit  $A$ , wegen  $\overline{BC} = \overline{DE}$  fällt das Bild  $D'$  von  $D$  mit  $C$  zusammen. Da bei einer Drehung um einen Winkel von  $180^\circ$  Original-, Bild- und Drehpunkt auf einer Geraden liegen, schneiden die beiden Verbindungsgeraden  $AF$  und  $CD$  die Verbindungsgerade  $BE$  im Drehpunkt  $P$ , das heißt, alle drei Verbindungsgeraden schneiden sich in genau einem Punkt.
- ▲ 539 Die Zahl 48 ist nur durch die folgenden einstelligen Zahlen teilbar: 1, 2, 3, 4, 6 und 8. Sie läßt sich daher nur in der folgenden Weise als Produkt zweier einstelliger Zahlen schreiben:  
 $48 = 6 \cdot 8$  oder  $48 = 8 \cdot 6$ .  
Nun gilt  $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$  und  $8^2 + 6^2 = 100$ .  
Wir erhalten daher zwei Lösungen; die gesuchte Zahl ist entweder 68 oder 86.
- ▲ 540 Die Dreiecke  $CDA$  und  $ECB$  sind nach Konstruktion gleichschenkelig, sie besitzen somit gleich große Basiswinkel. Nach

dem Außenwinkelsatz gilt  $\sphericalangle DCA = \frac{\alpha}{2}$  und  $\sphericalangle ECB = \frac{\beta}{2}$ , folglich  $\sphericalangle DCE = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma$   
 $= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ .



▲ 541 Von 6.45 Uhr bis 6.55 Uhr sind zehn Minuten vergangen. Wegen  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$  hat Jürgen in dieser Zeit den zwölften Teil der Fahrstrecke zurückgelegt. Für die gesamte Fahrstrecke benötigte er demnach  $12 \cdot 10$  Minuten, das sind 120 Minuten oder 2 Stunden. Um drei Viertel der Strecke  $\overline{AB}$  zu durchfahren, werden 90 Minuten benötigt. Um 6.45 Uhr hatte Jürgen ein Viertel der Strecke  $\overline{AB}$  geschafft; 90 Minuten später, also um 8.15 Uhr erreichte er sein Ziel B. Jürgen startete demnach um 6.15 Uhr in A.

▲ 542 Aus der nachstehenden Tabelle ist ersichtlich, welche von Null verschiedenen natürlichen Zahlen  $a, b, c$  bzw.  $d, e, f$  die Gleichung  $a + 3b + 5c = 12$  bzw. die Gleichung  $d + 3e + 5f = 20$  erfüllen.

$a$	$b$	$c$	$a+b+c$	$d$	$e$	$f$	$d+e+f$
1	2	1	4	1	3	2	6
4	1	1	6	2	1	3	6

In allen anderen Fällen ist  $d+e+f > 6$ . Die Summe  $a+b+c$  ist also gleich 6, und wir erhalten zwei Lösungen:

$a_1 = 4, b_1 = 1, c_1 = 1, d_1 = 1, e_1 = 3, f_1 = 2;$   
 $a_2 = 4, b_2 = 1, c_2 = 1, d_2 = 2, e_2 = 1, f_2 = 3.$

▲ 543 Heinz sei gegenwärtig  $x$  Jahre alt; aus der nachstehenden Tabelle werden die Beziehungen zwischen den Lebensaltern der Familienmitglieder ersichtlich.

Personen	gegenwärtiges Alter in Jahren	Alter vor 2 Jahren	Alter vor 3 Jahren	Alter vor 1. Jahr
Heinz	$x$	$x-2$	$x-3$	
Mutter	$3x$			$3x-1$
Vater	$4(x-2)+2$ $= 4x-6$	$4(x-2)$		
Großmutter	$7(x-3)+3$ $= 7x-18$		$7(x-3)$	
Großvater	$2(3x-1)+1$ $= 6x-1$			$2(3x-1)$

Aus  $x + 3x + (4x - 6) + (7x - 18) + (6x - 1) = 248$  folgt  $x = 13$ . Heinz ist 13, seine Mutter 39, sein Vater 46, seine Großmutter 73 und sein Großvater 77 Jahre alt.

▲ 544 Es sei  $100x + 10y + z$  die dreistellige Primzahl, dann gilt für ihre Quersumme

$x + y + z \leq 27$ . Diese Quersumme soll eine zweistellige Primzahl der Form „ap“ sein; es kommen also nur die Zahlen 13, 17, 19, 23 in Frage. Wäre „ap“ die Zahl 23, so wäre  $a=2$  und die Zahl „alpha“ würde auf 2 enden. Es gibt aber keine Quadratzahl, die auf 2 endet; somit entfällt die Zahl 23, und es ist  $a=1$ . Setzen wir  $a=1$  in „alpha“ ein, so erhalten wir die Zahl 11p1. In der dreistelligen Primzahl muß demnach an der Hunderterstelle die Ziffer 1, an der Einerstelle die Ziffer 1 oder 9 stehen. Die in Frage kommenden Primzahlen, deren Quersumme 13, 17 oder 19 ist, lauten 139, 179, 199. Aus  $142^2 > 20000$  folgt, daß die dreistellige Primzahl 139 ist. Aus „alpha“ erhalten wir die Zahl 19321.

▲ 545 Es sind bei der Lösung der Aufgabe zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: Es sei  $x \geq 0$ ; wegen  $|x| = x$  gilt dann  $x + 2 - 2x = 0$ , und wir erhalten daraus  $x = 2$ .

2. Fall: Es sei  $x < 0$ ; wegen  $|x| = -x$  gilt dann  $-x + 2 - 2x = 0$ , und wir erhalten daraus  $x = \frac{2}{3}$ . Dieser Wert erfüllt jedoch

nicht die Bedingung  $x < 0$  und entfällt somit als Lösung. Die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung ist demnach  $\{2\}$ .

### Lösungen zu alpha heiter

#### Gans und Gänsrich

$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100 \quad x = 36$

Es kamen 36 Gänse vom nahen Teich geflogen.

#### Der Mathematiker als Detektiv

Die Anzahl der Ballen sei  $x$ , dann beträgt der Preis jedes Ballens  $\frac{1800}{x}$ . Einen Tag früher

hätte er  $(x+30)$  Ballen erhalten und jeder Ballen wäre um 3 M billiger gewesen:

$\frac{1800}{x+30} + 3 = \frac{1800}{x}$   
 $x^2 + 30x - 1800 = 0 \quad x = 20$

Es fehlen demnach 20 Ballen.

#### Damespiel in Mini-Format

Es sind acht Züge notwendig.

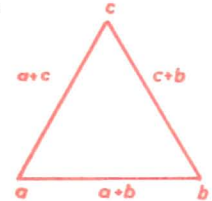
#### Mathematische Zeichen

1.	W	W	S	S
2.	W	W	S	S
3.	W	S	W	S
4.	W	S	W	S
5.	W	S	S	W
6.	S	W	S	W
7.	S	W	S	W
8.	S	S	W	W
9.	S	S	W	W

**Gleichung:** größer als, Limes, entspricht, ist gleich, Kosinus, höchstens gleich, (kleiner oder gleich), unendlich,  $n!$  Fakultät, genau dann, wenn. **Integral:** identisch gleich, nicht gleich, Tangens, enthalten in, größer oder gleich, rechtwinklig zu, Altgrad, liegt vor, **Alpha:** angenähert (rund), leere Menge, Promille, höchstens gleich, abgeschlossenes Intervall  $a$  b. (Vgl. Tafelwerk S. 49)

#### Leicht zu durchschauen

$a+b+c = a+b+c = a+b+c$  oder  $abc = abc = abc$



#### Kennst Du das griechische Alphabet?



#### Summe gesucht

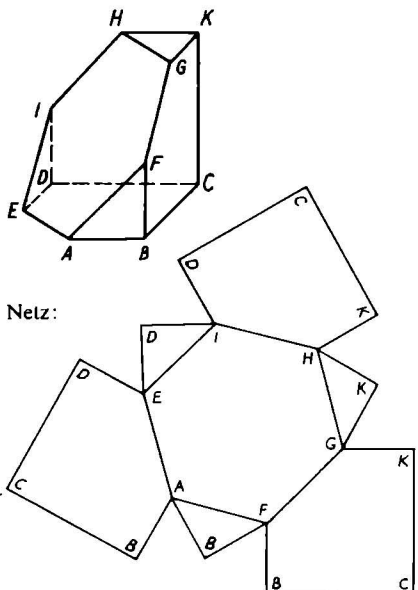
3
7 1 9
2
8 5 4
6

#### Geschichte der Mathematik

1. Alcuin, 2. Russel, 3. Cantor, 4. Hypatia, 5. Infeld, 6. Mueller, 7. Examen, 8. Dioptra, 9. Euklid, 10. Syrakus: Archimedes.

#### Restkörper gesucht (aus Heft 4/70)

Schrägbild:



# In freien Stunden **alpha** heiter



aus: Magazin 1/68 (F. Leuchte)

## Gans und Gänserich

Ein Gänsrich watschelte in Ruh  
in einem Erlgesträuche;  
Da kam ein Gänseschwarm hinzu  
Von einem nahen Teiche.  
Der Gänsrich sprach: „Ich grüß Euch schön!  
Fürwahr ich bin verwundert,  
Euch insgesamt allhier zu sehn,  
Ihr seid gewiß an Hundert.“  
Ein kluges Gänslein drauf versetzt:  
„Wird viel zu hundert fehlen!  
Du hast zu hoch die Zahl geschätzt,  
Drum magst Du selber zählen.  
Verdopple unsre Zahl, dann sei  
Die Hälfte noch genommen,  
Ein Viertel und Du, Freund, dabei,  
Wirst hundert dann bekommen.

## Der Mathematiker als Detektiv

Um die Jahrhundertwende passierte Folgendes: Ein Kaufmann hatte für 1800,- M Tuchballen gekauft und stirbt plötzlich. Der Verwalter schickt den Erben 100 Ballen. Diese erinnern sich, daß der Kaufmann sagte, hätte er das Geschäft einen Tag früher abgeschlossen, hätte er für das gleiche Geld 30 Ballen mehr bekommen und jeder Ballen wäre um 3,— M billiger gewesen. Ein Freund der Familie, ein Mathematiker, kann aus diesen Angaben errechnen, um wieviel Ballen der Verwalter die Erben betrogen hat.

## Damespiel im Mini-Format

Auf 5 Feldern (siehe Abb.) stehen 2 weiße und 2 schwarze Damesteine.

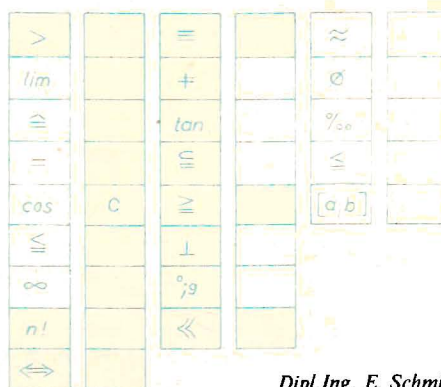


Wieviel Züge sind nötig, damit die Steine die Plätze wechseln?

Ein Zug besteht entweder darin, daß ein Stein um ein Feld gerückt wird oder daß ein Stein über einen anderen springt. W: weiß; S: schwarz).

## Mathematische Zeichen

Bestimme die vorgegebenen mathematischen Zeichen. Trage die Anfangsbuchstaben der Begriffe in die danebenstehenden freien Felder ein. Bei richtiger Begriffsbestimmung ergeben die Anfangsbuchstaben, jeweils von oben nach unten gelesen, einen mathematischen Begriff.



Dipl.Ing. E. Schmidt, Potsdam

## Leicht zu durchschauen!

Zeichne ein Dreieck und schreibe an jede Ecke eine beliebige Zahl, dann addiere je zwei benachbarte Zahlen und schreibe sie an die entsprechende Seite! Jetzt addiere die so erhaltenen Zahlen und die Zahl der gegenüberliegenden Ecke. Man erhält stets das gleiche Resultat für die möglichen Endsummen. Wie kommt das? Mit der Multiplikation geht es auch!

## Kennst Du das griechische Alphabet?

Es sind die Namen der dargestellten griechischen Buchstaben gesucht!

Mathematikfachlehrer W. Weber,  
EOS Schkeuditz b. Leipzig

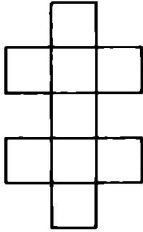




### Summe gesucht

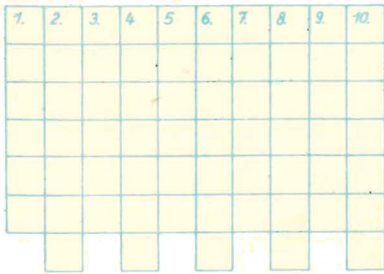
Die Zahlen von 1 bis 9 sind in das Netz so einzutragen, daß jeweils waagrecht sowie senkrecht die gleiche Summe erscheint.

Schüler P. Stöckert, Leipzig



### Geschichte der Mathematik

Heute sollen alle *alpha*-Leser ihre Kenntnisse in Geschichte der Mathematik überprüfen. Zu diesem Gebiet waren in unserer Zeitschrift interessante Beiträge zu finden, so daß die Aufgabe nicht zu schwer sein wird.



In die Spalten sind die folgenden Wörter einzutragen:

1. Mathematiker (735 bis 804) am Hofe Karls des Großen
2. Mathematiker und Friedenskämpfer, geb. 1872
3. Begründer der Mengenlehre
4. Tochter Theons, die 415 der Heidenverfolgung zum Opfer fiel
5. Verfasser des Romans „Wen die Götter lieben“
6. ein anderer Name des Regimontan (ü als ue schreiben!)
7. Prüfung
8. Vermessungsinstrument im Altertum
9. Verfasser der „Elemente“
10. Vaterstadt des Archimedes

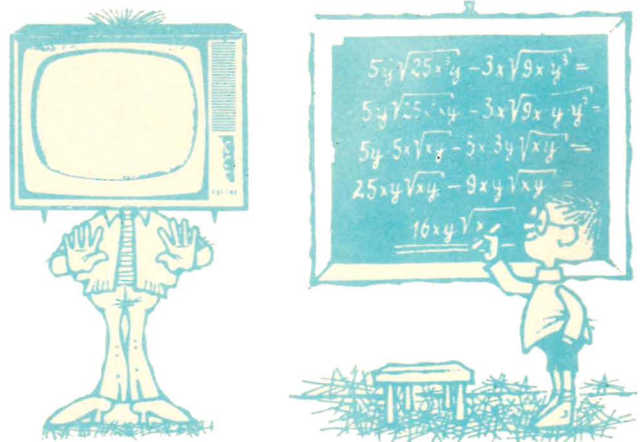
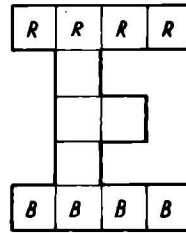
Bei richtiger Lösung erscheint in der ersten Zeile der Name eines bekannten Mathematikers aus dem Altertum.

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch,  
OS Lucka (Krs. Altenburg)

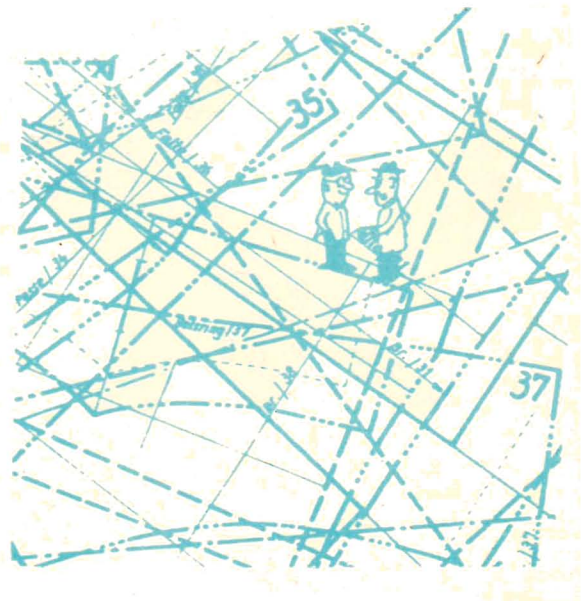
### Peg Puzzle

This is a puzzle for one person. You need: 4 red and 4 blue counters. – Put the red counters on the squares marked *R*, and the blue counters on the squares marked *B*. – Object: to change the positions of the

red and blue counters. – Rules: any counter can move backwards, forwards or sideways to any adjacent square. A counter can move several squares at a time. Diagonal moves are not allowed. Jumping over counters is not allowed.



„Nee, hab keine Zeit für ein Hobby!“  
aus: ZB, Febr. 1967 (H.-J. Starke)



„Verzeihung, fährt hier die Linie 87?“  
aus: Eulenspiegel 19/70 (Franz Fricke)

Mit *alpha* bringt man gut in Schwung,  
die mathematische Wandzeitung.

---

# Mathematik-Kalender

---

## November 1970

<b>So</b>	<b>1</b>	
<b>Mo</b>	<b>2</b>	* 1815 Georges Boole. Wirkte in Cork. Begründer der mathematischen Logik († 8. 12. 1869)
<b>Di</b>	<b>3</b>	† 1918 Alexander Michailowitsch Ljapunow Wirkte in Charkow und Petersburg. Richtungweisende Arbeiten zur Theorie der Differentialgleichungen. (* 6. 6. 1857)
<b>Mi</b>	<b>4</b>	
<b>Do</b>	<b>5</b>	
<b>Fr</b>	<b>6</b>	
<b>Sa</b>	<b>7</b>	

---

<b>So</b>	<b>8</b>	* 1868 Felix Hausdorff. Wirkte hauptsächlich in Bonn. Grundlegende Arbeiten zur Mengenlehre und Topologie († 26. 1. 1942)
<b>Mo</b>	<b>9</b>	
<b>Di</b>	<b>10</b>	
<b>Mi</b>	<b>11</b>	
<b>Do</b>	<b>12</b>	† 1944 Georg David Birkhoff (* 21. 3. 1884)
<b>Fr</b>	<b>13</b>	
<b>Sa</b>	<b>14</b>	† 1716 Gottfried Wilhelm Leibniz (* 1. 7. 1646)

---

<b>So</b>	<b>15</b>	† 1630 Johannes Kepler. Astronom und Mathematiker (* 27. 12. 1571)
<b>Mo</b>	<b>16</b>	* 1717 Jean Lerond d'Alembert († 1783)
<b>Di</b>	<b>17</b>	* 1790 August Ferdinand Möbius († 26. 9. 1868)
<b>Mi</b>	<b>18</b>	
<b>Do</b>	<b>19</b>	† 1959 Alexander Jakowlewitsch Chintschin. Siehe <i>alpha</i> , Heft 5/67. (* 19. 7. 1894)
<b>Fr</b>	<b>20</b>	† 1856 Wolfgang Bolyai. Siehe <i>alpha</i> , Heft 3/70 (* 9. 2. 1775)
<b>Sa</b>	<b>21</b>	

---

<b>So</b>	<b>22</b>	
<b>Mo</b>	<b>23</b>	
<b>Di</b>	<b>24</b>	
<b>Mi</b>	<b>25</b>	Kreisolympiade Mathematik
<b>Do</b>	<b>26</b>	
<b>Fr</b>	<b>27</b>	
<b>Sa</b>	<b>28</b>	

---

<b>So</b>	<b>29</b>	† 1953 Ernst William Barnes. Wirkte in Cambridge. (* 1. 4. 1874)
<b>Mo</b>	<b>30</b>	

## Dezember 1970

<b>Di</b>	<b>1</b>	* 1792 Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski († 4. 2. 1856)
<b>Mi</b>	<b>2</b>	
<b>Do</b>	<b>3</b>	† Francesco Bonaventura Cavalieri. Italienischer Mathematiker (geb. um 1598)
<b>Fr</b>	<b>4</b>	
<b>Sa</b>	<b>5</b>	

---

<b>So</b>	<b>6</b>	
<b>Mo</b>	<b>7</b>	* 1823 Leopold Kronecker. Wirkte in Berlin. Fundamentale Arbeiten auf den Gebieten der Algebra und Zahlentheorie († 29. 12. 1891)
<b>Di</b>	<b>8</b>	† 1869 Georges Boole (* 2. 11. 1815) † 1894 Pafnuti Levowitsch Tschebyscheff. Wirkte in Moskau und Petersburg. Begründer und bedeutender Vertreter der Petersburger mathematischen Schule (* 16. 5. 1821)
<b>Mi</b>	<b>9</b>	
<b>Do</b>	<b>10</b>	* 1804 Carl Gustav Jakob Jacobi († 18. 2. 1851)
<b>Fr</b>	<b>11</b>	
<b>Sa</b>	<b>12</b>	

---

<b>So</b>	<b>13</b>	† 1603 François Vieta. Französischer Mathematiker und Jurist. (* 1540) † 1921 Max Noether (* 24. 9. 1844)
<b>Mo</b>	<b>14</b>	
<b>Di</b>	<b>15</b>	* 1802 Johann Bolyai. Siehe <i>alpha</i> Heft 3/70. († 17. 1. 1860)
<b>Mi</b>	<b>16</b>	
<b>Do</b>	<b>17</b>	* 1842 Sophus Lie († 18. 2. 1899)
<b>Fr</b>	<b>18</b>	* 1848 Bernard Bolzano (* 5. 10. 1781)
<b>Sa</b>	<b>19</b>	Beginn der Weihnachtsferien

---

<b>So</b>	<b>20</b>	
<b>Mo</b>	<b>21</b>	
<b>Di</b>	<b>22</b>	* 1859 Otto Hölder († 29. 8. 1937) * 1819 Ossian Bonnet († 26. 6. 1892)
<b>Mi</b>	<b>23</b>	
<b>Do</b>	<b>24</b>	* 1822 Charles Hermite. Wirkte in Paris. Bed. und vielseitige Arbeiten zur Arithmetik, Algebra, Analysis. († 14. 1. 1902)
<b>Fr</b>	<b>25</b>	
<b>Sa</b>	<b>26</b>	* 1792 Charles Babbage († 18. 10. 1871)

---

<b>So</b>	<b>27</b>	* 1591 Johannes Kepler († 15. 11. 1630)
<b>Mo</b>	<b>28</b>	* 1903 John von Neumann († 6. 2. 1957)
<b>Di</b>	<b>29</b>	† 1891 Leopold Kronecker (* 7. 11. 1823)
<b>Mi</b>	<b>30</b>	
<b>Do</b>	<b>31</b>	

Az "alpha" fiatal olvasóinak sok  
sikerrel kívánok matematikai tanulási-  
-nyáitkosz. Rényi: Alfréd

Ich wünsche den jungen Lesern von „alpha“ viel  
Erfolg bei ihren mathematischen Studien.

ALFRÉD RÉNYI \* 1921, † 1970

## Dialoge über Mathematik

1967, 123 S., Broschur, 9,60 M

## Briefe über die Wahrscheinlichkeit

1969, 107 S., Broschur, 7,80 M

(Für beide Titel: Vertrieb nur in der DDR  
und den anderen sozialistischen Staaten  
mit Ausnahme der VR Ungarn gestattet.)



VEB DEUTSCHER  
VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

Im 49. Lebensjahr, mitten in seiner vollen Schaffenskraft, wurde A. Rényi durch eine schwere Krankheit aus unserer Mitte gerissen. Sein Tod wird von Wissenschaftlern ebenso wie von den für den Mathematikunterricht interessierten Erwachsenen und Schülern betrauert. A. R. war Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, der Mathematischen Gesellschaft der VR Ungarn und Professor an der Universität Budapest, von mehr als zehn mathematischen Zeitschriften Chefredakteur oder Redakteur. Unter seiner äußerst vielseitigen mathematischen Tätigkeit wäre die Gründung und Förderung der ungarischen wahrscheinlichkeitstheoretischen Schule an erster Stelle zu nennen. Obgleich er von Anfang an in der Oberstufe der Universität unterrichtete – bereits im Alter von 28 Jahren war er Hochschullehrer – widmete er auch der Schule seine Aufmerksamkeit. Er begnügte sich nicht damit, die Mathematiker und die zukünftigen Mathematiker zu lehren, sondern er verstand auch ausgezeichnet durch Vorträge oder seine populärwissenschaftliche Literatur, die Schönheit und Nützlichkeit der Mathematik denen zu zeigen, die sie nicht als Beruf gewählt haben. A Rényi war der erste ausländische Wissenschaftler, der mit *alpha* kurz nach ihrer Gründung in Verbindung trat. Wir schätzten besonders an ihm: seinen unerschütterlichen Optimismus, seine beschwingte Phantasie und seine stete Hilfsbereitschaft.

Redaktion *alpha*

POSTKARTE

Gebühren-  
frei!

Postamt

.....  
(PLZ)

Sofort an den zuständigen  
Postzeitungsvertrieb weiterleiten.

VLV Spremberg Ag 310 69 DDR 2761  
I 20 8 986

Z 6

## Leser schreiben an alpha

Seit über einem Jahr lese ich nun schon die Zeitschrift *alpha*. Ich beteilige mich seit September 1969 am Wettbewerb. Ich finde diese Art des Wettbewerbs einfach Klasse.

Schüler Wolfram Eid, Zeitz

Beim Rücklauf der Stöße von Antwortkarten im September 1969 wurde unser langjähriger und erfolgreicher Wettbewerbsteilnehmer *Ehrenfried Zech*, Bautzen, versehentlich in Klassenstufe 6, statt in Klassenstufe 7 eingereiht. *Bernd Kutnik*, Teterow, nahm in Klasse 8 am *alpha*-Wettbewerb teil, wurde aber nicht unter den Preisträgern, zu denen er durch seine Leistung gehört, in Heft 5/69 genannt. Er erhielt nachträglich eine Buchprämie.

Redaktion *alpha*

Die Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb und das Lösen weiterer Aufgaben hat dazu beigetragen, daß ich in diesem Schuljahr bei der Kreisolympiade den 1. Platz erreichte und bei der Bezirksolympiade mit einem 3. Preis ausgezeichnet wurde.

Angela Rohrbeck, Franzburg (Bez. Rostock)

Ich bin eifriger Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb. Das Lösen dieser Aufgaben macht mir sehr viel Spaß. Mir helfen diese Aufgaben auch im Mathematikunterricht weiter.

Sigrid Wegener, Ziesar

Durch ein Leserforum des Chefredakteurs von *alpha* wurde ich angeregt, Aufgaben für den *alpha*-Wettbewerb zusammenzustellen und übersende sie hiermit.

Harald Loose, Potsdam-Babelsberg

Ich finde die Schülerzeitschrift sehr interessant. Besondere Freude macht mir das

Lösen verschiedener Aufgaben. Da sie oft über den im Unterricht behandelten Stoff hinausgehen, regt mich *alpha* zum Studium anderer Bücher und Zeitschriften an. Seit ich die *alpha* habe, interessiere ich mich verstärkt für die Mathematik.

Schüler C. Kempfe, Berlin

Im März 1970 bestand unsere Arbeitsgemeinschaft Mathematik drei Jahre. Ich begann mit 5 Schülern. Im Laufe der Zeit wurden es zwei Arbeitsgemeinschaften. Im Zirkel II habe ich auch talentierte Schüler des 4. bzw. 3. Schuljahres. Die Besten nehmen schon am *alpha*-Wettbewerb teil.

Arbeitsgemeinschaftsleiter  
Hannelore Jurack, Burkau

### Lieber alpha-Leser!

Immer wieder erreicht uns Post, daß Schüler und Erwachsene „durch Zufall“ ein *alpha*-Heft in die Hände bekommen und begeisterte Leser wurden. Uns wurde auch mitgeteilt, daß aktive *alpha*-Leser in ihrer Klasse geworben haben, um weiteren interessierten Mitschülern die Möglichkeit zu schaffen, sich neben dem Mathematikunterricht durch aktives außerunterrichtliches Selbststudium weiter zu qualifizieren. Wir haben daher einen Bestellzettel abgedruckt. Schneide ihn aus und gib ihn den Schülern, die bestellen wollen! Sollte diese Bestellkarte nicht ausreichen, so wird jedes Postamt helfen.

Berichtet uns, wie Ihr geworben habt, welche Erfolge Ihr hattet.

Eure Redaktion *alpha*

In diesem Jahr ist die Zahl der *alpha*-Abonnenten in der Klasse 5b der Peter-Göring-Oberschule Lucka (Kreis Altenburg) um fünf gestiegen. Bei der Zeugnisausgabe im Februar wurden fünf Schüler mit einem *alpha*-Jahresabonnement durch die Patenbrigade ausgezeichnet.

AG-Leiter K.-H. Gentsch

Ich kann Ihnen verraten, daß das Erscheinen von *alpha* stets die ganze Familie auf den Plan ruft ... Im übrigen sind alle Beiträge der Zeitschrift auch für „Nichtmathematiker“ sehr interessant.

Erika Rahnefeld, Karl-Marx-Stadt  
(als Mutter der Tochter Bärbel)

... Spaß macht mir auch das Lösen der *alpha*-Wettbewerbsaufgaben. ... Leider mußte ich schon zweimal erfahren, daß ich eine Aufgabe falsch gelöst habe. Trotzdem lasse ich mich nicht entmutigen und löse fleißig weiter. Auch versuche ich mich an Aufgaben höherer Klassenstufen, oft mit Erfolg. Auf Ihr „Inserat“ in 1/70 — Mitarbeiter gesucht — sende ich zwei Aufgaben.

Roland Borch, Cottbus, Kl. 8

Ich finde *alpha* einfach Klasse. Mir macht das Lösen der Aufgaben sehr viel Spaß. Ich versuche, jede Aufgabe zu lösen, auch wenn sie nicht meiner Klassenstufe entspricht. Ich habe den Wunsch, später einmal Mathematik zu studieren. Deshalb ist es für mich gut, mich mit Problemen zu beschäftigen, die über den Lehrplan des Mathematikunterrichts hinausgehen.

Udo Braun, Crimmitschau

Bestellschein				
		Empfangstellennummer des PZV	Zustellbezirk	Einziehbezirk
Ich bestelle hiermit ab _____ zur Zustellung/Abholung *)		Artikelnummer		WGr
Überwiesen wird	Stück		Titel der Zeitung/Zeitschrift	
	zu den Bezugsbedingungen lt. Postzeitungsliste zum Abonnementspreis von _____ M		Karteinummer	
In Blockschrift ausfüllen:				
Name, Vorname: _____				
Anschritt: _____ (Postleitzahl, Wohnort, Straße, Hausnummer, Gebäudeteil, Stockwerk)				
Das Abonnementsgeld wird bar bezahlt *)				
ist abzubuchen vom Konto Nr. _____ beim _____ (Postscheckamt, Bankinstitut u. a.)				
*) Nichtzutreffendes streichen				
Ich versichere, daß ich den obengenannten Bezieher geworben habe			_____	
(Unterschrift des Werbers)			(Eigenhändige Unterschrift des Bestellers)	
Die stark umrandeten Felder werden von der Deutschen Post ausgefüllt				
Bezieherkarte/ Kundenkarte berichtigt	Adreßplatte geprägt/ Z 47 ausgefertigt	Bestellvermerk	Verteilkarte berichtigt	Vermerke