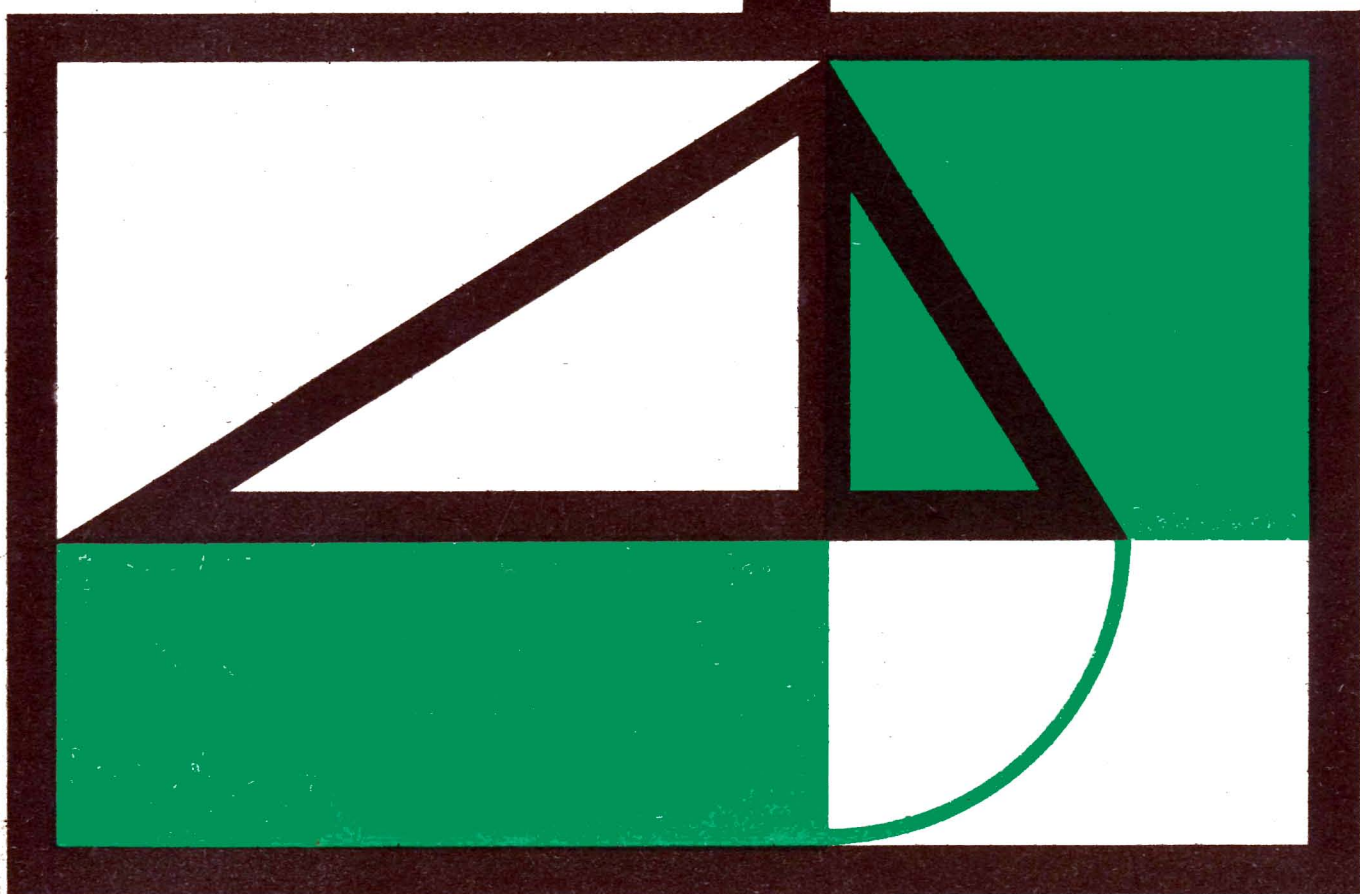


**Mathematische
Schüler-
zeitschrift**

alpha



**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin**

**3. Jahrgang 1969
Preis 0,50 M
Index 31059**

3

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil. E. Hammeister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin);
Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröter (Dresden); Studienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); W. Unze (Leipzig); Dr. habil. W. Walsch (Halle);

Redaktion:

StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 2005 41
Postcheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 49); Archiv PET, Dresden (S. 50) Bildstelle TH Magdeburg (S. 51); J. Lehmann, Leipzig (S. 51); Bildstelle Verlag Volk und Wissen, Foto Seifert (S. 51); Faksimile: *Calendarium* 1597, Reykjavik 1968: *Bókaútgáfa Menningargæðis og bjóðvinafélagsins* (S. 69); Vignette F. Fricke, Berlin (S. 70);
Vignetten: H.-J. Jordan/H. Tracksdorf (beide Leipzig)

Typographie: H. Tracksdorf

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:

Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollensetdruck)

Redaktionsschluß 1. April 1969

alpha

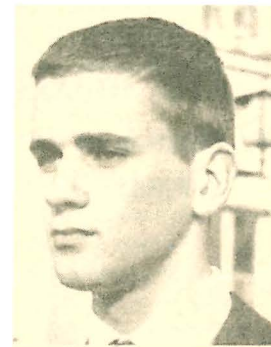
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 49 Ulrich Zähle berichtet... (5)*
stud. math. U. Zähle, Lomonossow-Universität Moskau
- 50 Mathematische Modelle aus der DDR (5)
Oberlehrer W. Glaß, Bezirkskabinett für Weiterbildung, Leipzig
- 51 *alpha* berichtet (5)
- 52 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung Teil 3 (7)
J. Frormann, Klement-Gottwald-Schule (EOS), Berlin-Treptow
- 54 Rechnen mit Resten Teil 1 (6)
Dr. G. Lorenz, Sektion Mathematik, Bereich Schulmathematik und Methodik, Humboldt-Universität Berlin
- 57 Bange machen gilt nicht! (geometr. Extremwertproblem) (7)
Oberlehrer Th. Scholl, Ministerium für Volksbildung
- 58 Ein Zirkelnachmittag über den 18. Mathematischen Jahreswettbewerb der USA (aus *alpha* 1/68)
W. Träger, Schloßberg-Oberschule Döbeln
- 60 VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (10)
Aufgaben, Statistik, Bericht — DDR — Ausscheid
Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
- 62 Concursul de Mathematica, etapa locală (6)
Prof. G. Ricescu, Generalsekretär d. Ges. f. Math. der SR Rumänien
- 63 Eine Aufgabe von
Prof. Dr. phil. habil. Maximilian Miller (8)
Hochschule für Verkehrswesen „Friedrich List“, Dresden
- 64 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (5)
- 65 Lösungen (5)
- 69 An welchem Wochentag wurde ich geboren? (5)
W. Unze, Sonderschule für Körperbehinderte, Leipzig
- 70 In freien Stunden: *alpha* heiter (5)
Studienrat J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig;
Oberlehrer H. Pätzold, OS Waren/Müritz
- 72 Leser schreiben an *alpha* (5)
Mit Zirkel und Zeichendreieck
Zusammenstellung: Studienrat J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig
- III. Umschlagseite: Aufgaben aus Büchern des Transpress-Verlags (5)
- IV. Umschlagseite: Post vom Kosmonauten (5)

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Ulrich Zähle berichtet



Als man mich 1961 fragte, ob ich an einer Mathematikolympiade teilnehmen möchte, konnte ich noch nicht ahnen, daß eben dieser Wettbewerb meinen weiteren Lebensweg entscheidend beeinflussen sollte.

Über die Fehler, die ich bei diesem ersten Versuch gemacht hatte, ärgerte ich mich. Doch vom Ärgern allein ändert sich nichts. Ich begann, in Büchern zu blättern, zuerst aus Neugierde („Wie hätte denn die Lösung richtig formuliert werden müssen?“); bald wurde daraus Wissensdurst, den es durch beharrliche und zielstrebige Beschäftigung zu stillen galt. Bei den Olympiaden stellten sich erste Erfolge ein, die mir jedoch nicht als Ruhekissen dienten, sondern mich im Gegenteil anspornten.

Doch die Olympiaden sind kein Selbstzweck. In einem hochentwickelten Industriestaat, wie ihn unsere Republik darstellt, gewinnt die Mathematik immer mehr an Bedeutung. Ein großer Bedarf an hochqualifizierten Fachkräften ist die Folge.

Ich war deshalb besonders froh darüber, daß ich die Möglichkeit bekam, die 11. und 12. Klasse der Erweiterten Oberschule an der Arbeiter-und-Bauern-Fakultät Halle in einer Mathematik/Physik-Spezialklasse zu absolvieren. Ich konnte einerseits mein mathematisches Wissen in starkem Maße erweitern, unter anderem durch eine Grundausbildung in den Methoden der *Numerischen Mathematik*. Andererseits bot sich die Möglichkeit einer intensiven Vorbereitung auf ein Studium im befreundeten Ausland.

Die Mathematikolympiaden, die für mich in jedem Jahr gewisse Höhepunkte meiner außerschulischen Betätigung waren, und Erfolge an der ABF bestätigten mir, daß ich auf dem richtigen Wege war, nicht nur in fachlicher Hinsicht.

Im Herbst 1968 nahm ich ein Mathematikstudium an der Moskauer *Lomonossow-Universität* (Mechanisch-Mathematische Fakultät) auf. Mit mir studieren im ersten Kurs etwa 600 Studenten. Besonders erfreut bin ich, daß ich mit zwei sowjetischen IMO-Teilnehmern zusammen wohne. Im ersten Semester hatten wir 36 Wochenstunden (einschließlich 8 Std. Russisch), dazu Hausaufgaben in hinreichender Menge, so daß der Start nicht leicht war. Grundlegende Sprach-

schwierigkeiten haben wir zwar schnell überwunden, aber man bekommt in den Vorlesungen auch jetzt noch nicht alle Feinheiten mit. Diese Lücken versuche ich stets schnell zu schließen. Seit dem 20. Dezember läuft die erste Prüfungsperiode. Im ersten Teil waren die Prüfungen, die sich auf den Seminarstoff beziehen. In der Regel bestehen diese Prüfungen (schriftliche Arbeiten, aber vor allem Gespräche) aus mehreren Teilen, wobei sich der Umfang der Prüfung nach den Leistungen in den schriftlichen Arbeiten im Laufe des Jahres richtet. Im Januar hatten wir Examen in den drei Fächern: *Analysis*, *Analytische Geometrie* und *Höhere Algebra*. Neben dem äußerst intensiven Studium, das wir hier bei berühmten Mathematikern absolvieren und das natürlich einen Großteil der Zeit beansprucht, finden wir aber auch Gelegenheit, uns mit Moskau und vor allem seinen Menschen bekannt zu machen, Freundschaften mit sowjetischen und ausländischen Studenten zu schließen. Besonders seit meinem Studium habe ich meine Ansicht bestätigt gefunden, daß die Teilnahme an den Mathematikolympiaden eine Reihe positiver Eigenschaften entwickeln hilft, daß eine gute Platzierung in einer Mathematikolympiade ein Erfolg ist, auf den man besonders stolz sein sollte, daß dies aber noch nicht hinreichend sein kann, um eine weitere erfolgreiche Entwicklung zu garantieren. Dazu gehört mehr:

Man muß beharrlich um die Vervollkommnung seines Wissens, seiner Fähigkeiten (nicht nur streng ausgerichtet auf mathematisches Gebiet!) bemüht sein, darf sich von Erfolgen nicht blenden lassen. Nur so kann man Höchstleistungen vollbringen, Höchstleistungen, die uns alle voranbringen!

Nobelpreisträger Nikolai Semjonow, UdSSR:

Der Begriff „talentierter Mensch“ umfaßt außer den Fähigkeiten in noch größerem Maße die Leidenschaft für die geliebte Sache. Wenn ein Mensch diese Leidenschaft für das wissenschaftliche Schaffen nicht bereits in der Jugend verspürt, dann wird er nie ein Wissenschaftler.

Mathematische Modelle aus der DDR

Zu Besuch in der Firma
„Pädagogische Entwurfstechnik“



Neben dem kleinen Flößchen Prießnitz befindet sich in Dresden in der Prießnitzstraße die Produktionsstätte der Firma „Pädagogische Entwurfstechnik“ (PET). Hier entstehen mathematische Modelle. Wer kennt sie nicht, die Pyramiden, Kegel oder Würfel aus farbigem Plast?

Mit viel Fleiß und großem Können wird von den Werk-tätigen von PET all das entwickelt und gebaut, was auf dem Gebiet der Unterrichtsmittel mitgeholfen hat, das Ansehen unserer Republik auf dem Weltmarkt zu stärken. Die Modelle gehen in 20 Länder. Die Exportpalette reicht von den meisten europäischen Ländern bis hinüber nach Übersee, wie Kuba, Kolumbien und Chile.

In Bezug auf Form und Gestaltung der Unterrichtsmittel ging die Firma PET neue Wege. Besonders hervorzuheben sind dabei die Zerlegbarkeit der Modelle und ihre Gestaltung aus farbigem Material, die vielseitigen Bearbeitungsformen für ihre Anfertigung. Der

offensichtliche Vorteil eines Plastmodells gegenüber dem traditionellen Holzmodell besteht darin, daß man es nicht nur schneiden, bohren und fräsen, sondern auch biegen, ziehen, schleudern und pressen kann.

Die meisten PET-Modelle wurden direkt im Betrieb entwickelt. Die Ideen dazu kamen aber auch unmittelbar aus dem Unterricht. Lehrer und Schüler unserer Republik haben dem Betrieb wertvolle Hinweise für den Bau oder die Weiterentwicklung von Modellen gegeben. Oft stellen sich die Mitarbeiter des Betriebes die Frage: „Entsprechen unsere Modelle noch den Anforderungen eines modernen Unterrichts?“ So entstehen immer wieder neue Formen, die von bewährten Facharbeiterinnen in hoher Qualität und Funktionstüchtigkeit hergestellt werden.

Aus dem Sortiment von über 500 verschiedenen Modellen, Demonstrations- und Übungsgeräten möchten wir einige vorstellen.

W. Glaß

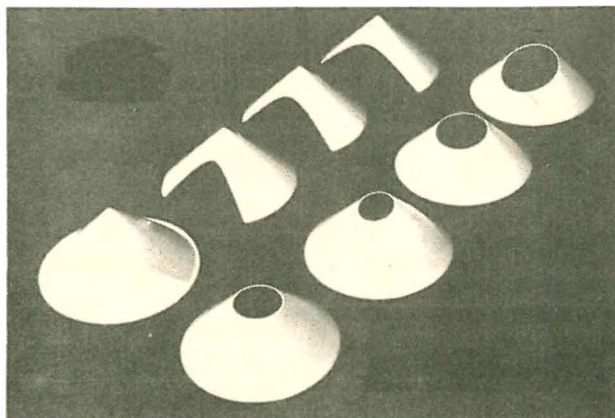
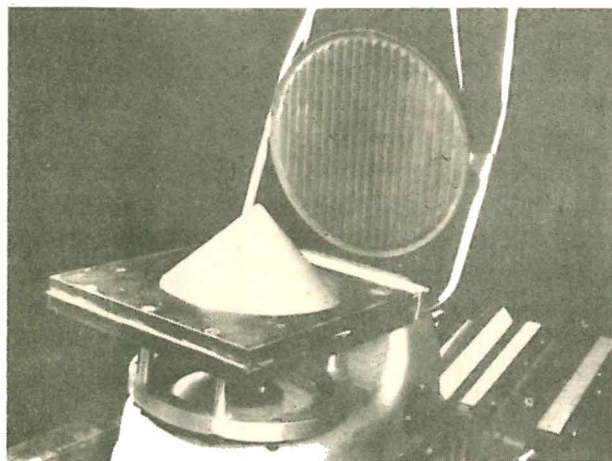
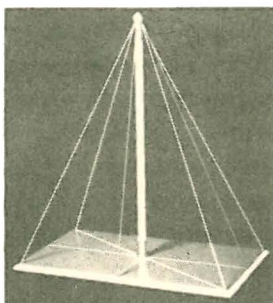
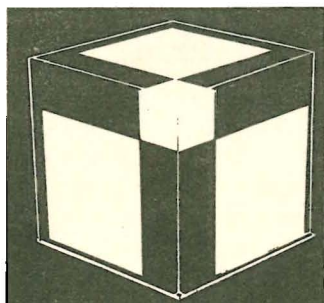


Bild 1 Demonstrationsmodell: $(a + b)^3$

Bild 2 Fadenmodell: Pyramide mit nichtquadratischer Grundfläche. Die Grundfläche ist mit Nuten versehen, in die sich Stützreiecke einschieben lassen.

Bild 3 Kegelschnittmodell

Bild 4 Pressen eines Kegels zum Kegelschnittmodell

Magdeburg

46 Schüler, die besten Jungen Mathematiker aus der DDR, nahmen als Gäste an der VI. wissenschaftlichen Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR teil.

Die Tagung war die bisher größte ihrer Art. 1100 Wissenschaftler aus 11 Ländern nahmen an der Arbeit der verschiedenen Sektionen teil. Insgesamt standen 24 Übersichtsvorträge und fast 200 Kurzvorträge in 15 Fachsektionen auf dem Programm. Den Festvortrag, dem sich eine öffentliche Diskussion anschloß, hielt der Minister für das Hoch- und Fachschulwesen, Gießmann, zum Thema „Mathematik und Datenverarbeitung in der Technik“. Gastgeber war die Technische Hochschule „Otto von Guericke“.

Halle

Freunde der Mathematischen Fakultät der Gorki-Universität Charkow besuchten die Arbeiter- und Bauern-Fakultät „Walter Ulbricht“. An dieser Fakultät bereiten sich schon seit Jahren Mädchen und Jungen aus allen Teilen der DDR auf ein Studium im befreundeten sozialistischen Ausland vor. Die zukünftigen Studenten interessierten sich im Gespräch mit ihren Charkower Studienkollegen für den Ablauf des Mathematikstudiums in der Sowjetunion. Schnell waren kleine Diskussionsgruppen gebildet. Viele Erfahrungen wurden ausgetauscht. Sprachschwierigkeiten wurden schnell überwunden. Dieses Treffen wird allen Teilnehmern noch lange in Erinnerung bleiben.

London

Im Mai 1968 fand die vierte englische Mathematik-Olympiade statt (Landesausscheid). Sechs Schüler des Bundesstaates New York nahmen als Gast an diesem Wettbewerb teil.

Leipzig

Harald Englisch nimmt seit dem 5. Schuljahr an den Veranstaltungen des Bezirkskabinetts für außerunterrichtliche Tätigkeit — Fach Mathematik — teil. Er legte 1968 an der Volkshochschule (als Schüler der 8. Klasse der Leibniz-OS) das Abitur im Fach Mathematik mit der Note „sehr gut“ ab und wurde vom Mathematikunterricht seiner Schule freigestellt. Zwischen Volks-

bildung, Leitung der FDJ des Stadtbezirks, Schule, Elternhaus, Harald Englisch und der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität wurde ein Förderungsvertrag abgeschlossen: H. E. darf an Übungen, Klausuren und Prüfungen des 1. Studienjahres teilnehmen, um nach Ablegung des Abiturs in den übrigen Fächern des Mathematikstudiums mit dem zweiten Studienjahr zu beginnen.

New York

In „The American Mathematics Monthly, Vol. 74“ erschien ein Bericht über die Berufswahl bzw. den Werdegang mathematisch begabter Schüler. Um diese herauszufinden, veranstaltet die MAA (siehe *alpha* 1/68 und dieses Heft S. 34/35) alljährlich einen umfassenden Wettbewerb. Was wird aus den Schülern, die sich dort als die besten qualifizieren? Antwort: Von 103 Schülern wurden nur 33 Mathematiker.

Dresden

Der *alpha*-Club der 29. OS Leipzig (5 Arbeitsgemeinschaften, 89 Schüler) führte in den Winterferien eine Exkursion nach Dresden durch. Es wurden der *Mathematisch-Physikalische Salon* und das *Verkehrsmuseum* besucht. Eine Stadtrundfahrt machte die 44 Teilnehmer mit dem Aufbau der Elbestadt vertraut. Höhepunkt des Tages: Besichtigung des Fernsehturms (siehe Beitrag Heft 3/67, S. 78/79) unter fachkundiger Führung von Prof. Dr. Zill, TU Dresden (siehe Foto).



Plauen

Die Mathematiklehrer der Fachkommission Mathematik des Kreises Plauen-Land beziehen die Zeitschrift *alpha* in je drei Exemplaren. Auf nummerierten Karten (Format A 6)

werden die einzelnen Aufgaben der Zeitschrift aufgeklebt. Gleiche Nummern tragen die andersfarbigen Lösungskarten. Mit dieser Kartei wird in Trainingslagern und in Zirkeln gearbeitet.

Altentreptow

... In unserem Kreis bestehen drei Zirkel Junger Mathematiker. Wir fassen hier, meist nach den Kreisolympiaden, 10 bis 12 der besten Schüler zusammen und treffen uns monatlich einmal. Dabei sind uns die *alpha*-Aufgaben eine große Hilfe. ... Die nicht als Wettbewerbsaufgaben laufenden Aufgaben werden fast alle behandelt. Die Schüler suchen Lösungen, werden aber vorwiegend herangeführt, um sie im Finden der Lösungswege zu schulen. ...

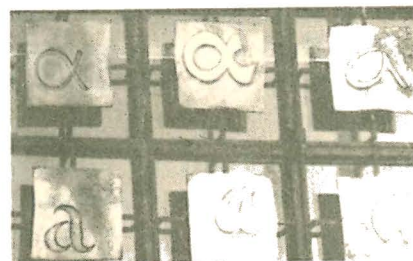
Dipl.Gwl. S. Mamerow

Leipzig

Am 6. 2. 1969 verteidigte unser Redaktionsmitglied OL H. Lohse an der Karl-Marx-Universität seine Arbeit: *Effekt- und Verlaufsanalyse programmierten Lernens, untersucht am Mathematikprogramm „Elementare Zahlenfolgen“*. Wir gratulieren Herrn OL Dr. H. Lohse zu seiner Promotion.

Berlin

Wer aufmerksam durch das Zentrum Berlins gegangen ist, wird bemerkt haben: Ein handgeschmiedetes Tor ist Eingang zur Staatsbibliothek. Es trägt den Buchstaben A 72 mal.



Paris

In Frankreich wird das Abitur *baccalauréat* genannt. An der *Akademie von Paris* gibt es eine Spezialklasse Mathematik (*classe de mathématiques élémentaires*). Schüler des 12. Schuljahres, die eine betont mathematische Bildung wünschen, erhalten dort 9 Stunden Mathematikunterricht wöchentlich. Eine Aufgabe (von vier) aus dem Abitur geben wir wieder (bewertet mit 4 Punkten von 20): Für das Intervall $[0, \pi]$ ist die durch die Gleichung

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$$

definierte Funktion zu diskutieren. Konstruiere ihren Graphen in einem ortho-normierten Koordinatensystem (Einheit 2 cm)! Bestimme mit Hilfe einer Tafel die Abszisse des Punktes im Bogenmaß, in dem der Graph die x -Achse schneidet.

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung



Noch einige Bemerkungen zur Division: Die letzte Aufgabe „ging auf“, das heißt, sie lieferte ein ganzzahliges Ergebnis. Das würde natürlich in *jedem* Zahlensystem eintreten, denn die Teilbarkeit oder Nichtteilbarkeit zweier ganzer Zahlen ist unabhängig vom System. Wir untersuchen nun die Fälle, bei denen der Divisor im Dividenden nicht ganzzahlig aufgeht. Vom Dezimalsystem sind uns folgende Möglichkeiten bekannt:

- a) Man erhält einen *endlichen* Dezimalbruch genau dann, wenn der Divisor (natürlich weitestgehend gegen den Dividenden gekürzt) nur Primfaktoren enthält, die auch in der Basis 10 vorkommen, also nur 2 oder 5, z. B. $1 : 8 = 0,125$.
- b) Man erhält einen *rein-periodischen* Dezimalbruch, wenn der Divisor weder den Primfaktor 2 noch den Primfaktor 5 enthält, z. B. $1 : 3 = 0,3$.
- c) Man erhält einen *gemischt-periodischen* (vorperiodischen) Dezimalbruch, wenn der Divisor sowohl die Primfaktoren 2 oder 5 als auch andere enthält, z. B. $1 : 6 = 0,1\bar{6}$.

Die Aussagen lassen sich für ein beliebiges Zahlensystem mit der Basis g – genannt g – *adisches System* – verallgemeinern, wenn man statt „Primfaktoren 2 oder 5“ sagt: „Primfaktoren, die in g vorkommen“. Den Begriff Dezimalbruch ersetzt man durch den Begriff g – *adischer Bruch*.

Aus diesem Sachverhalt folgt, daß jeder (rein- oder gemischt-) periodische Dezimalbruch im Fünfersystem auch periodisch ist, aber umgekehrt jeder endliche Dezimalbruch nicht notwendig einen endlichen Fünferbruch ergeben muß, nämlich dann nicht, wenn der Divisor durch 2 teilbar ist.

Beispiel: Im Dezimalsystem liefert $\frac{7}{20} = 0,35$ eine endliche Entwicklung, im Fünfersystem ist

$$\frac{7}{20} = \frac{\bar{1}2}{40} = \bar{1}2 : 40 = 0,1\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3} \dots = 0,1\bar{3}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \overline{300} \\ 220 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 300 \\ \overline{220} \\ 300 \end{array}$$

ein vorperiodischer Bruch.

Die Tatsache, daß die Periodizität bzw. Nichtperiodizität einer Bruchentwicklung vom verwendeten Zahlensystem abhängt, ist rechentechnisch insofern von Bedeutung, als dadurch die Genauigkeit des Ergebnisses beeinträchtigt werden kann. So kommt es vor, daß uns ein Automat die bei einer Aufgabe herauskommende rationale Zahl $\frac{1}{2}$ liefert in der Form 0,499999999.

Mit der schriftlichen Division haben wir gleichzeitig ein Mittel, rationale Zahlen, die als Quotient zweier ganzer Zahlen gegeben sind, im Fünfersystem darzustellen. Man kodiert Zähler und Nenner um und führt die Division wie im vorigen Beispiel aus:

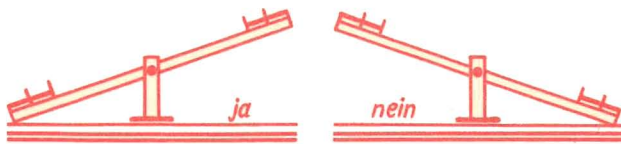
▲ Aufgabe: Stelle $\frac{3}{4}$ im Fünfersystem dar!

Auf die Umkodierung eines (endlichen oder periodischen) Fünferbruches in das Dezimalsystem wollen wir hier verzichten, weil dazu Kenntnisse über geometrische Reihen nötig sind. Der fortgeschrittene Leser möge sich das selbst überlegen.

1.4. Das Dualsystem

Wir hatten uns im Abschnitt 1.2. überlegt, daß im Rechenautomaten jede Ziffer des verwendeten Zahlensystems durch einen wohlbestimmten stabilen physikalischen Zustand eines Schaltelements realisiert werden muß. In der Absicht, die Zahl der Zustände zu verringern, waren wir vom Dezimalsystem auf das Fünfersystem gekommen. Auch fünf verschiedene Zustände sind technisch noch nicht sehr zweckmäßig. Es hat sich gezeigt, daß ein Schaltelement mit nur zwei verschiedenen Stellungen, ein sogenanntes *bistabiles* Schaltelement, am zuverlässigsten arbeitet, sei es eine Elektronenröhre, die je nach Polung den Strom durchläßt oder ihn sperrt, sei es ein Halbleiter, der ähnlich arbeitet, sei es ein elektromagnetisches Relais, das entweder angezogen oder abgefallen ist. Für ein solches bistabiles Schaltelement hat man die anschauliche Bezeichnung *Flipflop* aus dem Amerikanischen übernommen. Es sagt *ja* oder *nein*, ein drittes gibt es nicht. „Rechentechnischer“ ausgedrückt: Es speichert stets genau eine von zwei möglichen Informationen.

Man denke etwa an die beiden verschiedenen Ruhestellungen einer Wippe:



Ja oder nein und nichts weiter bedeutet für unser Vorhaben die Frage: Gibt es ein Zahlensystem mit nur zwei Ziffern (im folgenden mit L und O bezeichnet)? Daß es tatsächlich möglich ist, jede ganze (später auch beliebige reelle) Zahl mit nur zwei Ziffern zu schreiben, ist vielen sicher schon bekannt. Dieses sogenannte *Dualsystem* wollen wir jetzt näher untersuchen, insbesondere seine Rechengesetze und deren Anwendung in der Rechentechnik kennenlernen. Setzen wir $O = 0$ und $L = 1$, so fällt es uns nach den Umkodierungsübungen des vorigen Abschnitts nicht schwer, zu erfassen, daß es sich um eine Summe aus Zweierpotenzen handelt, z. B.

$$LLOLOOLL = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 256 + 128 + 32 + 4 + 2 + 1 = 423.$$

Um das überaus einfache Einsundeins und Einmaleins dieses Systems würde uns mancher Schulanfänger beneiden. Es lautet:

$$\begin{array}{ll} O \cdot O = O & O + O = O \\ O \cdot L = L \cdot O = O & O + L = L + O = L \\ L \cdot L = L & L + L = LO \end{array}$$

Mit diesen wenigen Elementaroperationen, in sinnvoller Reihenfolge angewendet, beherrschen wir bereits das schriftliche Rechnen (die vier Grundrechenarten) in dem neuen System. Wir betrachten wieder je ein Beispiel, diesmal wegen der rechentechnischen Gesichtspunkte ausführlicher als beim Fünfersystem. Die beiden zu verknüpfenden Zahlen seien

$$84 = LLOLOO \text{ und } 21 = LLOL$$

Addition:

$$\begin{array}{r} LLOLOO \\ + LLOL \\ \hline LLOLOL \\ \hline LLOLOL \end{array} \quad \begin{array}{l} 1. \text{ Summand: Augend*} \\ 2. \text{ Summand: Addend} \\ \text{Überträge} \\ \text{Summe} \end{array}$$

Subtraktion:

$$\begin{array}{r} LLOLOO \\ - LLOL \\ \hline LLLL \\ \hline LLLL \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Minuend} \\ \text{Subtrahend} \\ \text{Überträge} \\ \text{Differenz} \end{array}$$

* Rechentechnisch macht man trotz der Vertauschbarkeit einen Unterschied zwischen den beiden Summanden. Denn der Automat hält sich an die gegebene Reihenfolge und wendet nicht, wie ein menschlicher Rechner, gelegentlich das Kommutativgesetz an.

Multiplikation:

$$\begin{array}{r} \text{Multiplikand} \quad \text{Multiplikator} \\ LLOLOO \cdot LLOL \\ \hline LLOLOO \\ O \\ LLOLOO \\ O \\ LLOLOO \\ \hline LLOLLLOOLOO \end{array}$$

Aus diesem Beispiel gewinnen wir folgende wichtige Erkenntnis: Eigentliche multiplikative Teiloperationen, wie wir sie vom Dezimal- und auch noch vom Fünfersystem her kennen ($2 \cdot 3 = 6$; $\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{13}$ usw.) kommen hier gar nicht vor. Die Ziffer L im Multiplikator bedeutet, daß der Multiplikand einfach hinzuschreiben ist, eine O, daß dieser nicht hinzuschreiben ist. Zwischendurch werden die Teilergebnisse immer um eine Stelle verschoben, bis alle Ziffern des Multiplikators abgearbeitet sind, und die Teilergebnisse werden schrittweise, d. h. jeweils nur zwei Summanden, addiert. Ob man dabei mit der höchsten oder niedrigsten Ziffer des Multiplikators beginnt, ist egal. Man muß es nur bei der Verschiebung (nach links oder nach rechts) berücksichtigen. Es folgt die ausführliche Darstellung:

$$LLOLOO \cdot LLOL$$

Die erste linke Ziffer L des Multiplikators

bedeutet: Schreibe den Multiplikanden hin und verschiebe ihn nach links! (Jede fehlende

Einerstelle wird sofort durch eine O ausgefüllt.)

$$\begin{array}{r} LLOLOO \\ LLOLOO \end{array}$$

Die nächste Ziffer O bedeutet:

Addiere nichts und

verschiebe das Zwischenergebnis nach links!

$$\begin{array}{r} LLOLOO \\ LLOLOO \\ LLOLOO \end{array}$$

Die nächste Ziffer L bedeutet:

Addiere den Multiplikanden und verschiebe das Zwischenergebnis nach links!

$$\begin{array}{r} + LLOLOO \\ LLOLOO \\ LLOLOO \\ LLOLOO \end{array}$$

Es folgt eine O, also ist das

Zwischenergebnis nur

zu verschieben:

$$LLOLOOLOO$$

Die letzte zu verarbeitende

Ziffer ist L, also:

$$+ LLOLOO$$

Damit liegt das

$$LLOLLLOOLOO$$

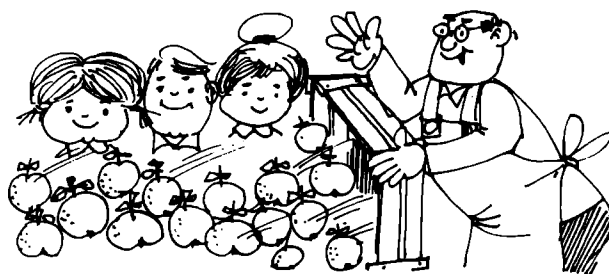
Endergebnis vor:

Das Dualsystem hat also den für die Rechentechnik bedeutsamen Vorteil, daß jede Multiplikationsaufgabe in die abwechselnd gegebenen Befehle „Addiere!“ bzw. „Addiere nicht!“ und „Verschiebe!“ aufgelöst werden kann. Eine Multiplikationsschaltung multipliziert also gar nicht im eigentlichen Sinne, sondern addiert im wesentlichen nur. Im nächsten Beitrag befassen wir uns mit der Division.

J. Frommann

Rechnen mit Resten

Teil 1



1. Gerade — ungerade

Häufig begegnen uns Aufgaben, in denen es um die Teilbarkeit ganzer Zahlen geht — Aufgaben also, die in die mathematische Disziplin der *Zahlentheorie* gehören. Eine einfache Aufgabe dieser Art ist:

▲ B 1 Jemand behauptet, er könne 30 Äpfel so unter 3 Kinder (ungleichmäßig) verteilen, daß jedes Kind eine ungerade Anzahl Äpfel erhält. Ist das möglich? Begründe deine Antwort!

Wir übersehen wohl alle sofort, daß eine solche Verteilung nicht möglich ist. Aber wie müßte eigentlich eine Beweisführung für diese Unmöglichkeit aussehen? Doch etwa so:

Gerade Zahlen g sind die durch 2 teilbaren Zahlen, also die Zahlen der Form $g = 2k$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Entsprechend haben die ungeraden Zahlen u die Form $u = 2k + 1$, weil sie bei Division durch 2 den Rest 1 lassen. Nehmen wir nun einmal an, die Verteilung sei in der angegebenen Art doch möglich, und die Äpfelanzahlen für die Kinder seien A_1, A_2 und A_3 . Dann müßte sein:

$A_1 = 2k_1 + 1$ $A_2 = 2k_2 + 1$ $A_3 = 2k_3 + 1$
mit natürlichen Zahlen k_1, k_2, k_3 . Die Summe wäre dann $A = A_1 + A_2 + A_3 = 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 3 = 2(k_1 + k_2 + k_3 + 1) + 1$, also $A = 2k + 1$,

und dabei wäre k als Summe von k_1, k_2, k_3 und 1 wieder eine natürliche Zahl, A also ungerade. Da 30 aber eine gerade Zahl ist, kann diese Summe A nie 30 sein. Wir müssen also unsere Annahme, die Aufspaltung von 30 in drei ungerade Summanden sei doch möglich, fallen lassen.

Dieser *indirekte Beweis* — so nennt man Beweise, bei denen von der Annahme des Gegenteils der Behauptung ausgegangen und dann gezeigt wird, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt — ist freilich ziemlich umständlich. Manchem wird es mit Recht so vorkommen, als hätten wir mit einer Kanone nach Spatzen geschossen. Obendrein ist es z. B. für Schüler der Klasse 5 gar nicht möglich, den Beweis so zu führen. Sie würden es vielleicht so machen:

Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade, die Summe aus einer ungeraden und einer geraden Zahl

ist stets ungerade. Deshalb kann die gerade Zahl 30 nicht in drei ungerade Summanden zerlegt werden. Allerdings stützt sich diese Beweisführung nun wiederum auf — für den Schüler der Klasse 5 eigentlich unbewiesene — Sätze über das Rechnen mit geraden und ungeraden Zahlen. Diese Sätze können wir auch folgendermaßen formulieren:

Bezeichnen wir einmal die Menge aller geraden Zahlen mit G und die Menge aller ungeraden Zahlen mit U , so könnten wir etwa schreiben $U + U = G$ und $G + U = U$; freilich dürften wir diese „Addition“ nicht mit dem Vereinigen von Mengen verwechseln. Wir rechnen gewissermaßen in einem Bereich, der nur zwei Elemente enthält, G und U . Die Addition, die zwischen diesen Elementen erklärt ist, läßt sich auch in Form einer „Tabelle mit doppeltem Eingang“ angeben:

+	G	U
G	G	U
U	U	G

Selbstverständlich läßt sich auch subtrahieren; wir müssen dann „statt in die Tabelle hinein aus ihr heraus gehen“. Diese Subtraktion spiegelt auch genau wider, daß wir beispielsweise wieder eine gerade Zahl erhalten, wenn wir von einer geraden Zahl eine gerade Zahl subtrahieren.

Und so sieht eine Tabelle für die Multiplikation aus:

$\cdot$	G	U
G	G	G
U	G	U

Auch diese Operation läßt sich umkehren, allerdings nur zu U : $U = U$ und $G : U = G$. Und warum ist die Division durch G unmöglich? Um diese Frage zu beantworten, bezeichnen wir einmal den gesuchten Quotienten mit X und versuchen es zunächst mit $U : G = X$. Das bedeutet $X \cdot G = U$, und ein solches X läßt sich nicht finden, denn sowohl für $X = G$ als auch für $X = U$ ergibt $X \cdot G$ wiederum G . Und wie steht es mit $G : G = X$? Hier finden wir zwar ein X , aber leider nicht nur ein einziges: Wegen $U \cdot G = G \cdot G = G$ kommt für X sowohl G als auch U in Frage. Da wir aber für eine Rechenoperation ein eindeutiges Ergebnis verlangen müssen, bleibt uns nichts anderes übrig, als auf die Division durch G ganz zu verzichten.

Noch etwas fällt bei der Division von G und U auf: Sie ist nicht mehr direkt übertragbar auf die Zahlen selbst. 17 und 3 z. B. sind ungerade Zahlen, ihr Quotient $17 : 3$ aber ist weder gerade noch ungerade. Eine solche Eigenschaft kann ja nur ganzen Zahlen zukommen, und $\frac{17}{3}$ ist nun mal keine ganze Zahl. Es ist

also schon notwendig, mit den Mengen G und U zu arbeiten und nicht mit den Zahlen selbst. Bei diesem Rechnen handelt es sich im Grunde um das Arbeiten mit den sogenannten *Restklassen modulo 2*. Was das ist, und welche Bedeutung dieses Rechnen sonst noch hat? Dazu müssen wir etwas weiter ausholen. Es wird aber gut sein, wenn wir uns zuvor zur Übung einmal selbst an den folgenden Aufgaben versuchen:

▲ A 1 Peter sagt zu seinem Vater: „Ich weiß ein Kunststück. Jeder von uns beiden hat 30 Streichhölzer zur Verfügung und nimmt einige davon in die Hand. Du sagst mir, ob die Anzahl der Streichhölzer, die du in die Hand genommen hast, gerade oder ungerade ist. Ich werde dir dann, ohne nachzuzählen, sagen, ob die Gesamtzahl der übriggebliebenen Streichhölzer gerade oder ungerade ist“. Wieso weiß Peter das?

▲ A 2 Peter sagt zu seinem Freund: „Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast!“ Wie macht Peter das?

2. Kongruenz — einmal nicht geometrisch

Das grundlegende Werk der modernen Zahlentheorie sind die berühmten *Disquisitiones arithmetica* (Arithmetische Untersuchungen) von *Carl Friedrich Gauß*, die dieser als erst Einundzwanzigjähriger geschrieben hat; allerdings sind sie erst drei Jahre später, nämlich im Jahre 1801, erstmalig im Druck erschienen. Der Zahlentheorie galt ja die besondere Liebe von Gauß, und so wie man ihn später als *Princeps mathematicorum* — als *Fürst der Mathematiker* — bezeichnete, so nannte er die Zahlentheorie *Königin der Mathematik*. Er meinte auch, daß „alle diejenigen, die diese Wissenschaft ernstlich studieren, eine Art Leidenschaft dafür fassen“.

In dem genannten Buch führt *Gauß* eine Beziehung zwischen ganzen Zahlen ein, die als Kongruenz bezeichnet wird. Häufig nennt man sie auch *zahlentheoretische Kongruenz*, um sie deutlicher von der Kongruenz in der Geometrie, der bekannten Deckungsgleichheit, zu unterscheiden. Dieser Begriff und auch die von *Gauß* gewählte symbolische Schreibweise sind nun äußerst zweckmäßig und deshalb fruchtbar

für die weitere Entwicklung der Zahlentheorie geworden. Der Mathematiker *Edmund Landau* (1877 bis 1938) soll darum gesagt haben: „Wenn *Gauß* nichts anderes getan hätte als diese Bezeichnung einzuführen, wäre er schon ein großer Mathematiker gewesen“. Die zahlentheoretische Kongruenz zweier ganzer Zahlen a und b bedeutet, daß a und b bei der Division durch eine gegebene natürliche Zahl m , die man *Modul der Kongruenz* nennt, denselben Rest lassen. So ist beispielsweise 17 kongruent mit 42 nach dem Modul 5, denn es ist ja $17 \equiv 3 \cdot 5 + 2$ und $42 = 8 \cdot 5 + 2$, 17 und 42 lassen also bei Division durch 5 denselben Rest 2. Man schreibt dafür $17 \equiv 42 \pmod{5}$, auch kürzer $17 \equiv 42 (5)$, und spricht „17 kongruent 42 modulo 5“.

Allgemein können wir sagen:

Für ganze Zahlen a, b und m mit $m > 1$ gilt $a \equiv b (m)$ genau dann, wenn es ganze Zahlen k und l gibt mit $a = k \cdot m + r$ und $b = l \cdot m + r$. Für die ganze Zahl r , den Rest, gilt dabei $0 \leq r < m$, doch ist diese Einschränkung für die Erklärung der Kongruenz eigentlich nicht nötig. (Warum?) Speziell kann man natürlich auch immer schreiben $a \equiv r (m)$ und $b \equiv r (m)$.

Weitere Beispiele:

▲ B 2 $79 \equiv 14 (13)$ $34 \equiv 4 (6)$ $56 \equiv 0 (8)$

Während $17 \equiv 42 (5)$ gilt, sind 17 und 42 beispielsweise nicht kongruent nach dem Modul 7, denn es ist ja $17 = 2 \cdot 7 + 3$, aber $42 = 6 \cdot 7 + 0$. Man sagt auch, daß 17 und 42 *inkongruent* modulo 7 sind und schreibt $17 \not\equiv 42 \pmod{7}$ bzw. $17 \not\equiv 42 (7)$.

Bisher haben wir uns in unseren Beispielen immer auf natürliche Zahlen a und b beschränkt. Die Erklärung der Kongruenz gilt aber für alle ganzen Zahlen, schließt also auch negative mit ein. So ist beispielsweise $-33 \equiv 55 (11)$ und $-18 \equiv 0 (9)$. Bei Resten, die von 0 verschieden sind, muß man allerdings aufpassen. Es ist nicht etwa $-35 \equiv 57 (11)$, sondern beispielsweise $-31 \equiv 57 (11)$, weil sowohl -31 als auch 57 bei Division durch 11 den Rest 2 lassen:

$-31 = (-3) \cdot 11 + 2$ und $57 = 5 \cdot 11 + 2$.

▲ B 3 $-39 \equiv 11 (5)$ $71 \equiv -1 (8)$
 $-22 \equiv -50 (4)$

Leichter übersehbar wird oftmals der Sachverhalt — besonders bei Beteiligung negativer Zahlen —, wenn man etwas umformt: $a \equiv b (m)$ bedeutet ja nach der Erklärung der Kongruenz $a = k \cdot m + r$ und $b = l \cdot m + r$. Durch Subtraktion erhält man aus diesen Gleichungen $a - b = (k - l) m$, und da mit k und l auch $k - l$ eine ganze Zahl ist, folgt aus $a \equiv b (m)$, daß $a - b$ durch m teilbar ist. Wie wir uns leicht selbst überlegen können, gilt auch umgekehrt: Ist $a - b$ durch m teilbar, so lassen a und b bei Division durch m denselben Rest. Deshalb ist $a \equiv b (m)$ gleichbedeutend mit $m \mid (a - b)$ („ m teilt $a - b$ “), wofür wir freilich auch schreiben können $a - b \equiv 0 (m)$. So

ist für unsere Beispiele $B \ 3 - 39 - 11 = -50$ durch 5 teilbar, $71 - (-1) = 72$ durch 8 und $-22 - (-50) = 28$ durch 4.

Bemerkenswert ist nun, daß mit zahlentheoretischen Kongruenzen weitgehend so gearbeitet werden kann wie mit Gleichungen. Daß man die Seiten einer solchen Kongruenz vertauschen kann, ist offensichtlich: Mit $a \equiv b \ (m)$ ist auch $b \equiv a \ (m)$. Ferner folgt aus $a \equiv b \ (m)$ und $b \equiv c \ (m)$ auch $a \equiv c \ (m)$. Es gilt aber noch weit mehr, etwa:

(I) Aus $a_1 \equiv b_1(m)$ und $a_2 \equiv b_2(m)$ folgt stets $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2(m)$.

Dazu zunächst ein Beispiel:

▲ B 4 $47 \equiv 5 \ (7)$ und $25 \equiv 53 \ (7)$, aber auch $72 \equiv 58 \ (7)$.

Der Beweis dafür, daß eine solche *seitenweise Addition zahlentheoretischer Kongruenzen* allgemein gestattet ist, ist recht leicht:

$a_1 \equiv b_1 \ (m)$ bedeutet $a_1 - b_1 = k \cdot m$ } mit ganzen
 $a_2 \equiv b_2 \ (m)$ bedeutet $a_2 - b_2 = l \cdot m$ } k, l .

Addition dieser beiden Gleichungen liefert

$$(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = (k + l) m,$$

also gerade die Behauptung, weil mit k und l auch die Summe $k + l$ eine ganze Zahl ist. Ebenso leicht folgt man

(II) $a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \ (m)$ und

(III) $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \ (m)$.

Das Rechnen mit Kongruenzen, das auf diesen Tatsachen beruht, ist wichtig für fast alle Teilgebiete der Zahlentheorie. Es verhilft auf verhältnismäßig einfache Weise zu Ergebnissen, die man anders nur sehr umständlich erreicht. Zwei Aufgaben sollen uns den Vorteil dieses Rechnens deutlich machen:

▲ B 5 Gesucht ist der Rest, den die Zahl $z = 4543^{19} + 37$ bei Division durch 5 läßt.

Es ist $4543 \equiv 3(5)$, demnach $4543^2 \equiv 9(5)$, also $4543^2 \equiv 4(5)$. Ebenso erhält man $4543^3 \equiv 2(5)$ und $4543^4 \equiv 1(5)$, daraus durch Quadrieren $4543^8 \equiv 1(5)$, dann $4543^{16} \equiv 1(5)$ und schließlich wegen $4543^{19} = 4543^{16} \cdot 4543^3$ und $37 \equiv 2(5)$ das Ergebnis $4543^{19} + 37 \equiv 1 \cdot 2 + 2(5)$.

Die Zahl z hat also den Fünferrest 4.

▲ B 6 Es ist nachzuweisen, daß $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ für keine ganze Zahl n gekürzt werden kann.

Den Beweis führen wir wieder *indirekt*, d. h., wir nehmen zunächst an, der Bruch wäre doch für irgendein n zu kürzen. Die Kürzungszahl sei dabei $q > 1$. Dann müßte gelten $21n + 4 \equiv 0(q)$ und $14n + 3 \equiv 0(q)$. Nach den Regeln für das Rechnen mit Kongruenzen wäre dann auch $7n + 1 \equiv 0(q)$ (Subtraktion, [II]) und damit $14n + 2 \equiv 0(q)$ (Verdoppeln, [I] mit $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$).

Daraus und aus $14n + 3 \equiv 0(q)$ folgt aber (wiederum durch Subtraktion) $1 \equiv 0(q)$, und das ist nicht mög-

lich. Unsere Annahme, der Bruch sei für irgendein n zu kürzen, muß also fallengelassen werden, weil sie zu einem Widerspruch führt. Wie wäre es nun, wenn wir zunächst einmal wieder einige Aufgaben selbstständig zu lösen versuchten? Hier einige Vorschläge:

▲ A 3 Zu beweisen ist: Die Summe zweier aufeinanderfolgender Potenzen von 2 (mit natürlichen Exponenten $n \geq 1$) ist stets durch 6 teilbar.

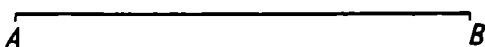
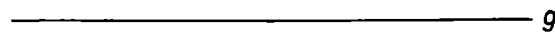
▲ A 4 Man bestimme die letzten zwei Ziffern der Zahl 9^{99} .

▲ A 5 Einige von 20 Bogen Papier wurden in 4 Teile zerschnitten. Sodann wurden einige der zerschnittenen Bogen nochmals in 4 Teile zerschnitten usw. Als man alle so entstandenen Papierbogen zählte, erhielt man 451. Man beweise, daß falsch gezählt worden ist!

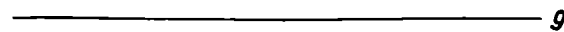
G. Lorenz

Mit Bleistift und Lineal

▲ 412 Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ und eine zu $\overline{AB}$ parallele Gerade g . Die Strecke $\overline{AB}$ ist unter Verwendung von Bleistift und Lineal (ohne Maßeinteilung) zu halbieren. Bei Konstruktion des Halbierungspunktes von $\overline{AB}$ unter Mitverwendung von g sind nur die Tätigkeiten Schneiden und Verbinden zulässig.



▲ 413 Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ und eine zu $\overline{AB}$ parallele Gerade g . Die Strecke $\overline{AB}$ ist unter den gleichen Nebenbedingungen wie oben zu verdoppeln.



E. Schröder

(Lösungen siehe in diesem Heft auf Seite 68.)



Bange machen gilt nicht!

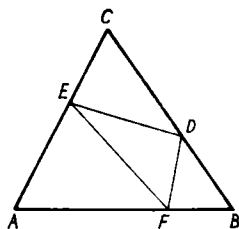
Modell eines geometrischen Extremwertproblems

Wir wollen euch heute eine geometrische Aufgabe vorstellen, die wir gemeinsam lösen werden, und an der wir zeigen, wie man ein geometrisches Problem etwa anpacken kann. Wir erwarten eure aufmerksame und aktive Mitarbeit.

▲ Dies ist unsere Aufgabe:

Einem spitzwinkligen Dreieck ΔABC ist ein weiteres Dreieck ΔDEF so eingeschrieben, daß D zwischen B und C , E zwischen A und C , F zwischen A und B liegt. Das Dreieck ΔDEF wollen wir „Indreieck“ nennen. Welches von allen möglichen Indreiecken besitzt den kleinsten Umfang?

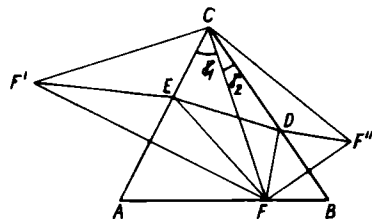
Wir fertigen uns zunächst eine Überlegungsfigur an.



Um etwas über die Länge des Umfangs eines der vielen möglichen Indreiecke aussagen zu können, ist es sicher günstiger, den Umfang des betrachteten Indreiecks als eine einzige Strecke darzustellen. Wir gehen dabei in drei Schritten vor.

1. Schritt:

Wir spiegeln zunächst den Punkt F des Indreiecks ΔDEF einmal an der Geraden AC , zum anderen an der Geraden BC als Symmetrieachse. (Führe alle Konstruktionen selbstständig aus!)



Die Punkte F' und F'' seien die durch diese beiden Spiegelungen erhaltenen Bildpunkte von F . Wir verbinden C mit F , C mit F' , C mit F'' , E mit F' und D mit F'' .

Auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt nun

$$\sphericalangle FCA = \sphericalangle ACF' = \gamma_1; \sphericalangle FCB = \sphericalangle BCF'' = \gamma_2; \sphericalangle ACB = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2; \overline{EF} = \overline{EF'}; \overline{DF} = \overline{DF''}; \overline{CF} = \overline{CF'} = \overline{CF''}.$$

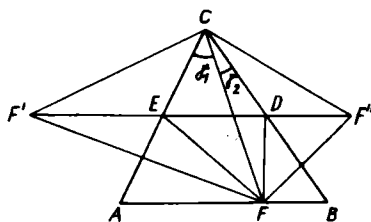
Aus den Eigenschaften der angeführten Winkel folgt

$\sphericalangle F'CF'' = 2\gamma$. (Beweise das!) Der Winkel $\sphericalangle F'CF''$ ist somit konstant und gleich 2γ für jede mögliche Lage des Punktes F . Aus den Eigenschaften der angeführten Strecken folgt, daß der Umfang des Indreiecks DEF gleich der Länge des Streckenzuges $\overline{F'EDF''}$ ist. (Beweise das!)

2. Schritt:

Wir halten den Punkt F fest. Die Lage der Punkte D und E verändern wir so, daß die Punkte F' , E , D und F'' auf einer Geraden liegen.

Der Umfang des von uns betrachteten Indreiecks DEF ist dadurch kleiner geworden, denn die Strecke $\overline{F'F''}$ ist kleiner als jeder Streckenzug zwischen ihren Endpunkten. Daher hat unter allen Indreiecken mit dem festen Punkt F dasjenige Dreieck ΔDEF den kleinsten Umfang, bei dem die Punkte D und E auf der Geraden $\overline{F'F''}$ liegen.



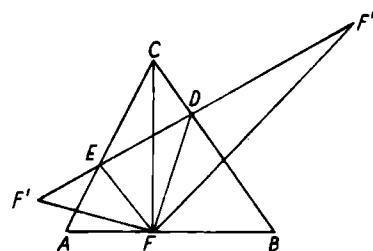
Auf Grund unserer Konstruktion liegen die Punkte F und F' bezüglich der Geraden AC spiegelbildlich zueinander. Jeder Punkt der Symmetrieachse ist von zwei symmetrischen Punkten gleich weit entfernt. Es gilt also $\overline{EF} = \overline{EF'}$. Aus ähnlichen Überlegungen folgt ferner $\overline{DF} = \overline{DF''}$.

Die Symmetrieachse zweier Geraden halbiert den Winkel zwischen den beiden Geraden. Folglich gilt $\sphericalangle ACF' = \sphericalangle ACF$ und $\sphericalangle BCF'' = \sphericalangle BCF$. Da der Punkt C Schnittpunkt beider Symmetrieachsen ist, gilt weiterhin $\overline{CF} = \overline{CF'} = \overline{CF''}$; das Dreieck $\Delta F'F''C$ ist somit gleichschenkelig, und der Dreieckswinkel $\sphericalangle F'CF''$ ist gleich 2γ .

Der Umfang des von uns betrachteten Indreiecks ΔDEF ist demnach gleich der Länge der Basis des gleichschenkligen Dreiecks $\Delta F'F''C$.

3. Schritt:

Wir verändern die Lage des Punktes F so, daß $\overline{CF}$ Höhe des Dreiecks ΔABC ist. Die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks $\Delta F'F''C$ sind am kürzesten, wenn der Punkt F Fußpunkt der Höhe $\overline{CF}$ ist. (Begründe das!) Mit einer kleiner werdenden Schenkellänge wird aber auch die Basis $\overline{F'F''}$ kleiner. Daher hat das Indreieck ΔDEF dann den kleinsten Umfang, wenn F Höhenfußpunkt ist und die Punkte D und E auf der Geraden $\overline{F'F''}$ liegen.



Es ist leicht nachzuweisen, daß die Punkte D und E in diesem Fall auch Höhenfußpunkte sind. (Führe diesen Beweis aus!) Das Ergebnis unserer Untersuchungen lautet also:

Von allen Indreiecken eines gegebenen spitzwinkligen Dreiecks ΔABC hat das aus den Fußpunkten der drei Höhen gebildete Dreieck den kleinsten Umfang.

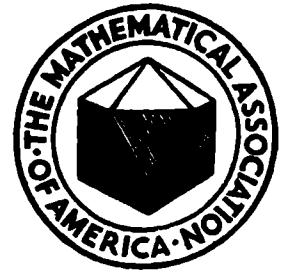
Die hier dargestellte Lösung der Aufgabe stammt sinngemäß von dem bekannten ungarischen Mathematiker *Fejer*, der diese Lösung als Student gefunden hatte.

Wir hoffen, daß ihr am Knacken dieser recht harten Nuß neben der angestrengten Arbeit auch etwas Freude hattet.

Th. Scholl

Ein Zirkelnachmittag

über „18. Mathematischer Jahreswettbewerb der USA“, alpha 1/68



Wir beschäftigen uns mit Aufgaben dieses Beitrags an einem Zirkelnachmittag, um Hilfsmittel und Methoden kennenzulernen, mit denen man bei einem solchen Wettbewerb, bei dem von den zu jeder Aufgabe angegebenen fünf Ergebnissen a, b, c, d und e jeweils genau eines als richtig anzukreuzen ist, bestehen kann. Wir beschäftigen uns mit dem mathematischen Wettbewerb der USA, um die Bemerkung der Redaktion *alpha*: Dieses Prinzip hat für die Auswertung enorme Vorteile, für die objektive Messung der tatsächlich gezeigten Leistung allerdings auch Nachteile zu verstehen. Wir beschäftigen uns damit, um zu erkennen, warum wir diese in den USA gepflegte Form der Durchführung von Mathematik-Olympiaden nicht übernehmen können.

Wir werden bei der „Lösung“ ausgewählter Aufgaben überrascht sein, mit welchen einfachen, wenig exakten Schlüssen oft das richtige Ergebnis aussortiert werden kann. Natürlich werden wir solche „Lösungswege“ beschreiten, die entscheidend die besonderen Bedingungen dieses Wettbewerbes ausnutzen!

1. Um z. B. zu entscheiden, in welches der fünf mit a bis e benannten Ergebnisse (siehe Aufgabe 2 des zitierten Beitrags)

a	b	c	d	e
---	---	---	---	---

$$1 \quad 2xy \quad 2x^2y^2 + 2 \quad 2xy + \frac{2}{xy} \quad \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}$$

sich für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ der Term

$$T(x; y) = \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{y^2+1}{y} + \frac{x^2-1}{y} \cdot \frac{y^2-1}{x}$$

umformen läßt, genügt es, für x und y spezielle Zahlen einzusetzen. Wir wählen nach kurzer Überlegung $x = y = 2$. Damit ergibt sich

$$T(2; 2) = \frac{2^2+1}{2} \cdot \frac{2^2+1}{2} + \frac{2^2-1}{2} \cdot \frac{2^2-1}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = 8,5.$$

Die Ergebnisse a, b und c scheiden jetzt sofort aus, weil sich bei dieser Belegung der Variablen bei diesen mit Sicherheit eine natürliche Zahl ergibt:

$x = y = 2$	
a	natürliche Zahl
b	
c	
d	$2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{2}{2 \cdot 2} = 8,5$
e	$\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = 4$

Da bei jeder Aufgabe genau eines der angegebenen Ergebnisse richtig ist, kann nur und muß gelten:

$$\frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{y^2+1}{y} + \frac{x^2-1}{y} \cdot \frac{y^2-1}{x} = 2xy + \frac{2}{xy}$$

Ein Teilnehmer an diesem Wettbewerb hätte auf seinem gedruckten Antwortzettel bei dieser Aufgabe nur das Ergebnis d anzukreuzen. Von ihm wird ja kein Lösungsweg verlangt!

2. „Einem gleichseitigen Dreieck von der Seitenlänge s ist ein Kreis, diesem wiederum ein Quadrat einbeschrieben. Der Flächeninhalt des Quadrates ist durch s auszudrücken. Welche der fünf angeführten Lösungen ist richtig?“ (siehe Aufgabe 3)

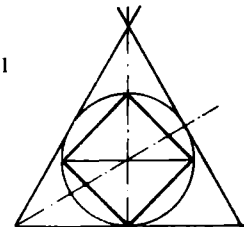
a	b	c	d	e
$\frac{s^2}{24}$	$\frac{s^2}{6}$	$\frac{s^2\sqrt{2}}{6}$	$\frac{s^2\sqrt{3}}{6}$	$\frac{s^2}{3}$

Hier zeichnen wir mittels Zeichendreieck (30°—, 60°— und 90°— Winkel) und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $s = 10$ cm. Den zugehörigen einbeschriebenen Kreis zeichnen die meisten mit dem Zirkel einfach durch Probieren. Nur einige von uns überlegen sich, daß der Mittelpunkt dieses Kreises der Schnittpunkt zweier Symmetrieachsen (mittels Zeichendreieck wiederum einfach zu zeichnen) dieses Dreiecks ist und daß sein Radius der kürzere Abschnitt dieser Symmetrieachsen ist. Schließlich werden zu dem Kreis wiederum mittels Zeichendreieck zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser gezeichnet. Die Endpunkte dieser Durchmesser dienen als Eckpunkte des gesuchten Quadrates. Die Seite des Quadrates wird nunmehr zu $a \approx 4$ cm gemessen. Nach der Formel $A = a^2$ ist damit

der Flächeninhalt des Quadrates bestimmt zu $A \approx 16$ cm². Schließlich wird in den fünf angegebenen Ergebnissen jeweils noch für $s = 10$ cm eingesetzt:

$s = 10$ cm	
a	$\frac{100}{24}$ cm ² ≈ 4 cm ²
b	$\frac{100}{6}$ cm ² ≈ 17 cm ²
c	$\frac{100\sqrt{2}}{6}$ cm ² ≈ 24 cm ²
d	$\frac{100\sqrt{3}}{6}$ cm ² ≈ 29 cm ²
e	$\frac{100}{3}$ cm ² ≈ 33 cm ²

Abb. 1



Mittels dieser primitiven Zeichen-Meß- und Rechenmethode entscheiden wir, daß nur das Ergebnis b richtig sein kann.

3. Analog läßt sich die folgende Aufgabe lösen, wie der Leser mühelos selbst feststellen wird: „Gegeben ist ein Dreieck, dessen Umfang p cm und dessen Flächeninhalt k cm² beträgt. Der Inkreis dieses Dreiecks habe den Radius q cm. Es ist der Quotient $\frac{p}{k}$ durch den Inkreisradius auszudrücken. Aus den fünf angegebenen Lösungen ist die richtige herauszufinden.“ (siehe Aufgabe 4)

a	b	c	d	e
$\frac{\sqrt{2}}{q}$	$\frac{2}{\sqrt{q}}$	$\frac{2}{q}$	$\frac{q}{2}$	*

An dieser Aufgabe wollen wir eine andere wichtige Kontrollmöglichkeit erproben, die in diesem Falle von den angegebenen Ergebnissen immerhin drei ausschalten gestattet:

(* Der Quotient ist unabhängig von q .)

Die gesuchte Formel zwischen Umfang, Inkreisradius und Flächeninhalt eines Dreiecks gilt nicht nur für die Maßzahlen dieser Größen in Zentimeter, sondern auch für die Maßzahlen dieser Größen in jeder anderen Längeneinheit. Wir wählen als zweite Längeneinheit 1 mm. Der Umfang unseres Dreiecks betrage jetzt p' mm, der Inkreisradius q' mm und der Flächeninhalt k' mm². Zwischen alten und neuen Maßzahlen bestehen die Beziehungen $p' = 10 \cdot p$, $q' = 10 \cdot q$ und $k' = 100 \cdot k$. Für den Quotienten $\frac{p'}{k'}$ gilt damit

$$\frac{p'}{k'} = \frac{10 p}{100 k} = \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{k}. \text{ Andererseits}$$

gilt für die fünf angegebenen Ergebnisse:

Maßzahlen in mm		
a	$\frac{\sqrt{2}}{q'} = \frac{\sqrt{2}}{10q} = \frac{1}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{q}$	
b	$\frac{2}{\sqrt{q'}} = \frac{2}{\sqrt{10q}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{\sqrt{q}}$	
c	$\frac{2}{q'} = \frac{2}{10 \cdot q} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{q}$	
d	$\frac{q'}{2} = \frac{10 \cdot q}{2} = 10 \cdot \frac{q}{2}$	
e	Der Quotient ist unabhängig von q , d. h., es gilt $\frac{p'}{k'} = 1 \cdot \frac{p}{k}$	

Durch Vergleich ergibt sich, daß nur noch a oder c das richtige Ergebnis sein kann.

4. Mittels Zeichnen, Messen und Peilen läßt sich auch die folgende Aufgabe im amerikanischen Stile „lösen“:

„Der Umfang eines Rechtecks $ABCD$ beträgt 20 cm. Es ist die Maßzahl der kleinsten Diagonale AC eines solchen Rechtecks, die möglich ist, zu ermitteln. Entscheiden Sie, welche der angegebenen fünf Lösungen richtig ist!“ (siehe Aufgabe 5)

a	b	c	d	e
0	$\sqrt{50}$	10	$\sqrt{200}$	keine der Zahlen a bis d

Die Summe der Katheten (der dem rechten Winkel anliegenden Seiten) des rechtwinkligen Teildreiecks ABC eines solchen Rechtecks beträgt also 10 cm. Auf Millimeterpapier, zumindest jedoch auf Kästchenpapier zeichnen wir einen rechten Winkel und markieren auf seinen Schenkeln Paare von Katheten zulässiger Dreiecke ABC .

Durch Messen der zulässigen Hypotenusen (der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seiten) erkennen wir, daß offenbar diejenige im zulässigen rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck die kürzeste ist. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz ergibt sich die Maßzahl ihrer Länge zu $\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$. Bei dieser Aufgabe wird also das Ergebnis b als richtig angekreuzt.

5. Abschließend wollen wir noch die folgende Aufgabe mittels eines Diagrammes lösen

(siehe Aufg. 10). „Zwei Kerzen gleicher Länge sind aus verschiedenen Rohstoffen hergestellt. Werden beide Kerzen zur gleichen Zeit angezündet, so brennt die eine in drei, die andere in vier Stunden völlig ab. Um welche Uhrzeit müssen beide Kerzen zugleich angezündet werden, so daß um 16 Uhr ein Kerzenstumpf doppelt so lang wie der andere ist.“

a	b	c	d	e
13 ²⁴	13 ²⁸	13 ³⁶	13 ⁴⁰	13 ⁴⁸

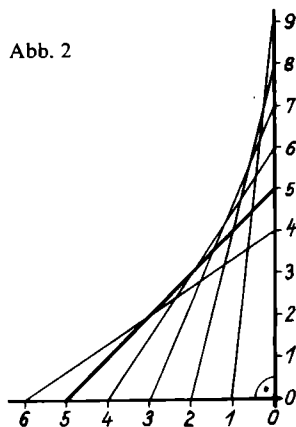


Abb. 2

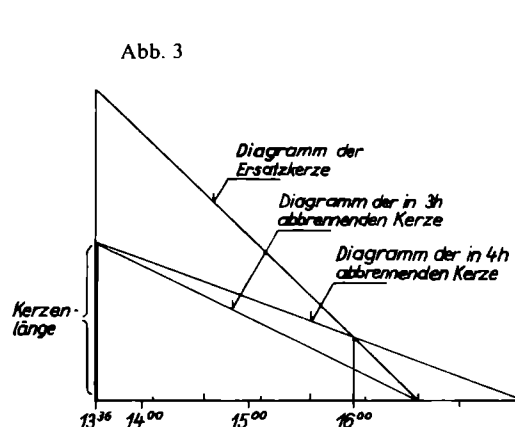


Abb. 3

Auf kariertem Papier wählen wir eine orientierte Gerade als Zeitachse, wobei wir zweckmäßig 6 Kästchenlängen einer Stunde entsprechen lassen. Senkrecht zur Zeitachse werden die jeweiligen Kerzenstumpflängen abgetragen. Da nach halber (2/3) Brenndauer die Stumpflänge noch die halbe (2/3) Kerzenlänge beträgt, wird das Abbrennen einer Kerze in unserem Diagramm offenbar jeweils durch eine Strecke beschrieben.

Um 16⁰⁰ kann nur die langsamere abbrennende Kerze doppelt so lang sein wie die schnellere abbrennende. Um diesen Zeitpunkt auf unserer Zeitachse richtig festzulegen, verdoppeln wir in jedem Zeitpunkt die Stumpflänge der schneller abbrennenden Kerze. Mit anderen Worten: Wir stellen das Abbrennen einer dritten Kerze mit verdoppelter Ausgangslänge und der Brenndauer 3 h graphisch dar. Durch das Hinzunehmen der dritten Kerze ist der Zeitpunkt 16⁰⁰ Uhr auf unserer Zeitskala leicht festzulegen: Es ist der Zeitpunkt, in dem die Ersatzkerze gleichlang mit der in 4 h abbrennenden Kerze ist. Von dieser Stelle der Zeitachse aus kotieren wir nunmehr die Zeitachse, wobei eine Kästchenlänge jeweils 10 Minuten entspricht. Die gesuchte Antwort lautet: Ergebnis c ist das richtige! Im Anschluß an die Behandlung dieser Aufgaben machen wir uns Gedanken darüber, wie der Aufgabensteller unsere wenig exakten Lösungswege ausschalten könnte. So ergibt sich z. B. bei unserem 5. Beispiel, daß hier durch Vorgeben von fünf dichter beieinander liegenden Uhrzeiten als in Frage kommende Ergebnisse die Diagrammethode

als Lösungsweg ausscheidet. — Zum Schluß des Zirkelnachmittags entscheidet jeder Zirkelteilnehmer für sich allein, ob bei der von uns als drittes Beispiel betrachteten Aufgabe das Ergebnis a oder c das richtige ist. (Jeder *alpha*-Leser möge dies auch tun, um das Folgende zu verstehen.) Wir sehen uns die Zettel an, mittels denen der einzelne Schüler seine Entscheidung fällte. Wir lassen uns die Überlegungen nennen, die der eine oder andere hierbei anstellte. In dem anschließenden Gespräch kommt zum Ausdruck:

Wir wissen: Bei unserer Mathematik-Olympiade wird bei der Lösung einer Aufgabe Wert gelegt auf klare Gedankenführung, exakte Schlüsse und Begründungen sowie auf logisch einwandfreien, übersichtlichen Aufbau. Sehr elegante exakte Lösungen finden besondere Anerkennung.

Wir erkennen: Da die Einhaltung dieser Forderungen bei der „USA-Form“ der Mathematik-Olympiaden nicht garantiert ist und mittels des allein mit Kreuzen versehenen, ansonsten vorgedruckten Antwortzettels das Maß der Einhaltung bzw. Nichteinhaltung dieser Forderungen überhaupt nicht kontrolliert werden kann, müssen wir diese „USA-Form“ der Mathematik-Olympiaden ablehnen.

W. Träger

Wichtiger Hinweis

Auf vielfachen Wunsch veröffentlichen wir in Heft 4/69 die Aufgaben der Schulolympiade 1969/70.

In Heft 1, 2 und 3/69 veröffentlichen wir die Aufgaben der Kreis-, Bezirks- und DDR-Olympiade 1968/69.

Das Heft 6/69 wird um acht Seiten in seinem Mittelteil erweitert. Mit ihm erhalten unsere Leser eine vollständige, in sich geschlossene Dokumentation der Lösungen der Aufgaben der VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR.

Redaktion *alpha*

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade (28. 3. bis 1. 4. 1969)

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. a) Beweisen Sie, daß für jedes Dreieck der folgende Satz gilt: Das Produkt der Längen a und b zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkt aus der Länge h der dritten Dreiecksseite zugeordneten Höhe und der Länge d des Umkreisdurchmessers dieses Dreiecks.

b) Folgern Sie aus diesem Satz die Beziehung $F = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot d}$, wobei F der Flächeninhalt des Dreiecks und c die Länge der dritten Dreiecksseite sind!

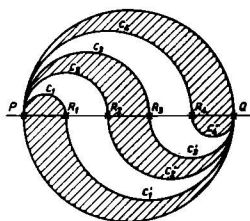
2. Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $a \neq b$ und $ab > 0$. Man untersuche, ob für

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

$$s = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

Ist dies der Fall, so drücke man s weitgehend vereinfacht durch a und b aus, in diesem Falle rational!

3. In einer Ebene ε sei k ein Kreis mit gegebenem Radius r ; ferner sei eine natürliche Zahl $n \geq 2$ gegeben. Ein Durchmesser PQ von k werde in n gleiche Teile geteilt; die Teilpunkte seien $R_1, \dots, R_{n-1}$, so daß $\overline{PR_1} = \overline{R_1R_2} = \dots = \overline{R_{n-1}R_n} = \overline{R_{n-1}Q}$ gilt. Eine der beiden Halbebenen, in die ε durch die Gerade g_{PQ} zerlegt wird, sei H genannt, die andere H' . Dann sei c_i der in H gelegene Halbkreis über PR_i , ferner c'_i der in H' gelegene Halbkreis über R_iQ , sowie schließlich b_i die aus c_i und c'_i zusammengesetzte Kurve ($i = 1, \dots, n-1$).



Man berechne die Inhalte der Flächenstücke, in die die Kreisfläche durch je zwei benachbarte Kurven $b_1, \dots, b_{n-1}$ bzw. durch b_1 bzw. b_{n-1} und den jeweiligen Halbkreis (siehe Abb.) zerlegt wird!

4. Im Innern eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien 288 Punkte gelegen. Es

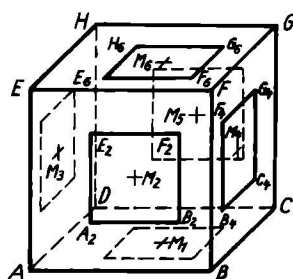
soll eine Anzahl von Parallelen zu AB derart gezogen werden, daß auf ihnen durch die Strecken AD und BC jeweils (zu AB parallele) Strecken abgeschnitten werden. Ferner soll von jedem der 288 Punkte auf genau eine der Parallelen das Lot gefällt werden.

Man beweise: Bei jeder Verteilung der 288 Punkte im Innern des Quadrates ist es möglich, die Parallelen und die Lote so zu wählen, daß die Summe L der Längen aller dieser Parallelstrecken und aller dieser Lote kleiner als $24a$ wird.

5. Man ermittle alle reellen Zahlen x , die die Gleichung

$$4 \cdot \log_4 x + 3 = 2 \cdot \log_x 2$$

6. Die Abbildung zeigt einen Würfel $W = ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a . In den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $DCGH$, $EFGH$ von W sind kantenparallele Quadrate $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2F_2E_2$, $A_3D_3H_3E_3$, $B_4C_4G_4F_4$, $D_5C_5G_5H_5$, $E_6F_6G_6H_6$ einer Kantenlänge $x < a$ und mit den Mittelpunkten $M_1, \dots, M_6$ gelegen und zwar so, daß die drei Geraden $g_{M_1M_6}$, $g_{M_2M_5}$, $g_{M_3M_4}$ kantenparallel verlaufen und sich in einem und demselben Punkt schneiden.



Aus W werden nun die drei Quader $A_1B_1C_1D_1E_6F_6G_6H_6$, $A_2B_2F_2E_2D_5C_5G_5H_5$, $A_3D_3H_3E_3B_4C_4G_4F_4$ herausgeschnitten. Für welchen Wert von x hat der entstehende Restkörper das halbe Volumen des ursprünglichen Würfels?

Olympiadeklasse 11/12

1. Jeder nicht negative periodische Dezimalbruch repräsentiert eine rationale Zahl, die auch in der Form $\frac{p}{q}$ dargestellt werden kann

(p und q natürliche Zahlen und teilerfremd, $p \geq 0$, $q > 0$). Nun seien a_1, a_2, a_3 und a_4 Ziffern zur Darstellung von Zahlen im dekadischen System. Dabei sei $a_1 \neq a_3$ oder $a_2 \neq a_4$. Beweisen Sie:

Die Zahlen

$$z_1 = 0, \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

$$z_2 = 0, \overline{a_4 a_1 a_2 a_3}$$

$$z_3 = 0, \overline{a_3 a_4 a_1 a_2}$$

$$z_4 = 0, \overline{a_2 a_3 a_4 a_1}$$

haben in der obigen Darstellung $\frac{p}{q}$ stets gleiche Nenner.

2. In einer Ebene ε liege ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Als „Spiegelung am Kreis k “ bezeichnet man die folgende Abbildung, durch die jedem Punkt $P \neq M$ aus ε ein Punkt P' aus ε zugeordnet wird:

(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.

(2) Es ist $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = r^2$.

a) Konstruieren Sie zu einem beliebig im Innern von k gegebenen Punkt $P \neq M$ den Spiegelpunkt P' !

b) Es sei ein weiterer Kreis k_1 beliebig gegeben, jedoch so, daß M außerhalb von k_1 liegt. Konstruieren Sie k_1 , d.h. die Menge aller Spiegelpunkte P' der Punkte P von k_1 !

3. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen $u, v, w, \dots$ heißt eine Halbgruppe, wenn in ihr eine Operation definiert ist, die jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus $\mathfrak{M}$ eindeutig ein Element w aus $\mathfrak{M}$ zuordnet (man schreibt $u \circ v = w$) und wenn diese algebraische Operation assoziativ ist, d.h. wenn für alle Elemente u, v, w aus $\mathfrak{M}$ gilt:

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$$

Es sei nun c eine positive reelle Zahl und es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller nicht negativen reellen Zahlen, die kleiner als c sind. Für je zwei Zahlen u, v aus $\mathfrak{M}$ werde definiert:

$$u \circ v = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

Man untersuche

a) ob $\mathfrak{M}$ eine Halbgruppe ist;

b) ob diese Halbgruppe regulär ist, d.h. ob aus $u \circ v_1 = u \circ v_2$ stets $v_1 = v_2$ und aus $v_1 \circ u = v_2 \circ u$ ebenfalls $v_1 = v_2$ folgt.

4. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| &= 3 \\ xy &= 3! \end{aligned}$$

5. Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen x gilt:

$$\begin{aligned} \sin 5x &= 16 \sin x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \\ &\cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

6. Es seien n eine positive ganze Zahl, h eine reelle Zahl und $f(x)$ ein Polynom (ganze rationale Funktion) mit reellen Koeffizienten vom Grade n , das keine reellen Nullstellen besitzt. Man beweise, daß dann auch das Polynom

$$F(x) = f(x) + h \cdot f'(x) + h^2 \cdot f''(x) + \dots + h^n \cdot f^{(n)}(x)$$

Erste Preise wurden vergeben:

GERHARD SPENS
Humboldt-OS Erfurt (EOS)
(Olympiadeklasse 10, Vorbereitungsklasse)

THOMAS JENTSCH
EOS „August Hermann Franke“, Halle
(Olympiadeklasse 10, Vorbereitungsklasse)

WOLFGANG BURMEISTER
EOS Dresden – Süd. (Olympiadeklasse 11,
EOS) Schüler einer 10. Klasse



Zweite Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Pawel Kröger, Rumjanzew-OS Leipzig (Schüler einer 4. Klasse); Ursula Tyl, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Dietmar Soyka, EOS Karl-Marx, Spremberg (Bez. Cottbus); Stefan Ladmann, EOS Max-Klinger, Leipzig; Martin Pusak, EOS Demmin (Bez. Neubrandenburg); Gerd Morgner, EOS Geschw. Scholl, Auerbach (Bez. Karl-Marx-Stadt); Thomas Kühn, Salzmann-Oberschule (EOS), Schnepfenthal (Bez. Erfurt); Stephan Wolf, EOS Heinrich-Hertz, Berlin; Olaf Böhme, EOS Dresden-Reick (aus Kl. 9); Norbert Boy, BBS Maschinelles Rechnen, Neustrelitz;

In Olympiadeklasse 11 an: Jürgen Scheffer, EOS Elsterwerda (aus Kl. 9); Andreas Felgenhauer, Spezialkl. der TH Magdeburg; Achim Nötzold, Spezialkl. der TH Karl-Marx-Stadt;
In Olympiadeklasse 12 an: Hans-Dieter Gronau, EOS Friedrich Engels, Neubrandenburg; Jürgen Gärtner, BBS der VEB Rafena-Werke, Radeberg (Bez. Dresden);

Dritte Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Gerd Thieme, Otto-Grotewohl-OS, Pirna; Volker Lehmitz, EOS Hagenow (Bez. Schwerin); Reinhard Wobst, 22. OS Dresden; Gert Keller, Pestalozzi-OS Dresden; Wolfgang Wagner, EOS A.-Reichwein, Halle; Siegfried Kropf, EOS Egelu (Bez. Magdeburg); Rainer Biallas, EOS Geschw.-Scholl, Magdeburg; Hans Sipel, EOS Luckenwalde (Bez. Potsdam) (aus Kl. 9); Roland Spannaus, BBS Transformatoren- und Röntgenwerke Dresden;

In Olympiadeklasse 11 an: Manfred Krzikalla, Spezialschule physik.-techn. Richtung, Frankfurt; Joachim Voigt, Spezialklasse Heinrich Hertz, Berlin (aus Kl. 10);

In Olympiadeklasse 12 an: Gottfried Jetschke, EOS Lichtenstein (Bez. Karl-Marx-Stadt); Klaus Neumann, EOS Ernst Schneller, Meiß; Gerold Schmidt, EOS Helmholtz, Leipzig; Joachim Loose, EOS Kleinmachnow (Bez. Potsdam); Frank Guhlmann, EOS Grimma (Bez. Leipzig); Ulrich Imme, EOS Ilmenau (Bez. Suhl); Marlen Müller und Wolfgang Cordts, beide Spezialklasse der ABF „Walter Ulbricht“, Halle;

Diplome für ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe erhielten:

Roland Engelmann, Otto-Ludwig-OS, Saalfeld; Joachim Haase, Geschw.-Scholl-Oberschule, Wismar

Anerkennungsurkunden für sehr gute Leistungen erhielten:

Klasse 10: Gerhard Junker, Anna-Seghers-OS Gotha; Klaus Berthold, Spezialschule Riesa; Bernd Oldenburger, EOS Oschatz; Burkhardt Seifert, EOS Fr.-Engels, Neubrandenburg; Günter Schwalbe, EOS Brand-Erbisdorf; Michael Schulze, EOS Fr.-Engels, Karl-Marx-Stadt; Frank Müller, EOS Calau; Uwe Kucharzyk, EOS Königs Wusterhausen; Ludwig Schäfer, Humboldt-OS, Erfurt; Rainer Schumann, EOS Naumburg; Jürgen Rose, Paul-Oestreich-OS, Berlin; Christoph Winter, EOS Gerh.-Hauptmann, Wernigerode; Bernd Kulicke, EOS Templin; Joachim Puls, BS Halbleiterwerk, Frankfurt;
Klasse 11 — Manfred Fischer, Gera; Gudrun Fröbel und Rolf Schmidt, beide Spezial-OS Zeiss, Jena; Rainer Schmidt, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Martin Horatschek, Spezialkl. d. Univ. Halle; Jürgen Bechstein, Goethe-OS Ilmenau; Rainer Landrock, ABF „Walter Ulbricht“, Halle; Reiner Nürnberg, Fontane-OS Neuruppin; Rainer Schleis, EOS Kleinmachnow; Georg Bartholomäus, EOS Greifswald; Silvia Rohmeiß, EOS Ilmenau; Stefan Heinrich, Spezialklasse d. Humboldt-Univers., Berlin; Heinz Voigt, Soz. Betriebschule Regis bei Leipzig

Fakten

Teilnehmerzahl: 223, davon Mädchen: 22
Insgesamt starteten 13 Schüler in höheren als der ihnen entsprechenden Klassenstufe.

Olympiadeklasse 10

10. Klasse OS	13 Teilnehmer
10. Klasse EOS	81 Teilnehmer
10. Klasse BS	16 Teilnehmer

Olympiadeklasse 11/12

11. Klasse EOS	30 Teilnehmer
11. Klasse Spezial	21 Teilnehmer
11./12. Klasse BS	9 Teilnehmer
12. Klasse EOS	36 Teilnehmer
12. Klasse Spezial	17 Teilnehmer
zusammen	223 Teilnehmer

Berufswünsche:

Diplommathematiker, Mathematik-Physiklehrer	139
Diplomphysiker	33
Ingenieurstudium	19
Offizier NVA (Fachr. Mathematik)	5
Facharbeiter f. Datenverarbeitung	3
Sonstige mathematikintensive Berufe	11
Arzt	3
Sonstige Berufe	10
zusammen	223

Aus dem Programm

29. 3. 69 — Feierliche Eröffnung der VIII. OJM in der Jugendhochschule „Wilhelm Pieck“ am Bogensee (bei Berlin)

1. Klausur: Arbeitszeit 4 Stunden; 3 Aufgaben

Am Nachmittag: Basketball, Volleyball, Tischtennis, Schach-Simultanspiel
Am Abend: Wehrpolitisches Forum

30. 3. 69 — 2. Klausur: Arbeitszeit 4 Stunden; 3 Aufgaben

Am Nachmittag: Forum über die 3. Hochschulreform und die Perspektiven der Wissenschaft Mathematik in der DDR
Aussprache über das Treffen Junger Sozialisten zum 20. Jahrestag der DDR.

Am Abend: Vortrag von Prof. Dr. Kurt Schröder, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin

31. 3. 69 — Fahrt aller Teilnehmer nach Berlin, Besichtigung der Hauptstadt der DDR, Besuch der Theatervorstellung: Schwejk im zweiten Weltkrieg (Berliner Ensemble), feierliche Abschlusfeier und Siegerehrung im Marx-Engels-Auditorium der Humboldt-Universität zu Berlin

Lösung der VIII. OJM

Unsere Liebe, unsere Treue und unsere Kraft dem sozialistischen Vaterland!

Concursul de matematica

Etapă Iacolă — 22 martie 1968



Der Generalsekretär der Gesellschaft für Mathematik der S. R. R., Prof. Gh. Răzescu, kündigt der Redaktion die Aufgaben dieses Wettbewerbs. — Reine Arbeitszeit: 3 Stunden; Teilnehmerkreis: Schüler der 6. bis 9. Klassen; erreichbare Höchstpunktzahl: 20.

Anfang Juli 1969 findet in der SR Rumänien die XI. Internationale Mathematikolympiade statt. Aus diesem Anlaß veröffentlichen wir die Aufgaben der Schulolympiade 1968 (Lokal-Etappe genannt). Wir danken Herrn Dr. K. Bochmann, Romanisches Institut der Karl-Marx-Universität Leipzig, für die Übersetzung der Aufgaben und Herrn Oberlehrer Th. Scholl, Berlin, für ihre Bearbeitung sowie die Anfertigung der Lösungen (siehe Heft 5/69).

Klassenstufe 6

▲ 1. In 16 Arbeitstagen haben 15 Weberinnen zusammen 2280 m Stoff gewebt.

a) Wieviel Weberinnen würden bei gleicher Arbeitsintensität in 24 Tagen zusammen 1596 m Stoff weben?

b) Wieviel Meter Stoff würde eine Weberin an einem Tag weben?

c) Aus dem von einer Weberin an einem Tag gewebten Stoff können eine Schürze, ein Hemd und ein Bettlaken hergestellt werden. Wieviel Meter Stoff benötigt man zur Anfertigung für jedes dieser drei Wäschestücke, wenn sich die Meterzahlen der jeweils erforderlichen Stofflängen umgekehrt proportional zu den Zahlen $2, \frac{8}{7}$ und 1 verhalten?

▲ 2. Gegeben seien ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{BC}$ und ein innerer Punkt M der Strecke $\overline{BC}$. Der Punkt M ist an den Geraden AB und AC zu spiegeln; die so erhaltenen Bildpunkte seien N bzw. P . Die Verbindungsgerade MN schneide die Seite $\overline{AB}$ im Punkte D , die Verbindungsgerade MP schneide die Seite $\overline{AC}$ im Punkte E . Es ist zu beweisen, daß

- die Dreiecke NMA und MPA gleichschenkelig sind;
- die Punkte N, A und P auf einer Geraden liegen;
- die Dreiecke NDA und AEP kongruent sind.

Prof. Grigore Gheba

Klassenstufe 7

▲ 1. Gegeben ist der Term

$$T = (x + y) \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy^2} \right) : \frac{1}{xy}.$$

a) Dieser Term ist soweit wie möglich zu vereinfachen.

b) Danach ist der Wert des Terms für $x = -2$ und $y = 2$ zu bestimmen.

c) Für welche Werte x und y ist der Term nicht definiert?

d) Für $y = 6$ nehme der Term den Wert $-\frac{1}{2}$ an; für welchen Wert von x trifft dies zu?

▲ 2. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABD mit der Hypotenuse $\overline{BD}$; die Kathete $\overline{AD}$ sei 15 m lang, und es gelte $\overline{AD} : \overline{AB} = 3 : 4$. Es ist der Kreis k mit der Kathete $\overline{AB}$ als Durchmesser zu zeichnen; sein Schnittpunkt mit der Hypotenuse $\overline{BD}$ sei P . Ferner ist im Punkte B die Tangente an den Kreis k zu konstruieren; ihr Schnittpunkt mit der Geraden AP sei C . Schließlich ist durch P eine Parallele zur Tangente BC zu zeichnen; die Parallele schneide die Seite $\overline{AB}$ in M und die Verbindungsgerade CD in N .

a) Ermittle die Längen der Diagonalen AC und BD des Trapezes $ABCD$.

b) Beweise, daß $\overline{MP} = \overline{PN}$ gilt!

Georgescu Ozana, Bukarest

Klassenstufe 8

▲ 1. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= a^2 + b^2 \\ bx - ay &= -(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

▲ 2. Gegeben sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 2x - 15 \\ v &= x^2 - 6x + 9 \\ w &= x^2 + 10x + 25. \end{aligned}$$

a) Weise nach, daß $u^2 = v \cdot w$ gilt!

b) Berechne $\frac{u+v}{u-v}$ und kürze soweit wie möglich! " "

c) Der gekürzte Bruch sei mit $F(x)$ bezeichnet. Besitzt die Gleichung $F(x) = \frac{x+5}{4}$

eine reelle Lösung? (Die Antwort ist zu begründen!)

Tomuleanu Valeria, Bukarest

▲ 3. Gegeben ist die dreiseitige Pyramide $SABC$, deren Grundfläche das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{AB} = 16$ cm und $\overline{AC} = 12$ cm bildet. Die Seitenkante $\overline{SA}$ der Pyramide steht senkrecht zur Grundfläche, die Seitenfläche SBC bildet mit der Grundfläche einen Winkel von 45° . Ermittle

a) den Rauminhalt der Pyramide;

b) die Summe der Längen der Kanten der Pyramide;

c) die Oberfläche der Pyramide;

d) das Volumen des der Pyramide umbeschriebenen Zylinders, dessen Grundfläche durch den Umkreis des Dreiecks ABC gebildet wird und dessen Höhe gleich der Höhe der Pyramide ist.

Mitrea Victoria, Bukarest

Klassenstufe 9

▲ 1. a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$3(m-1)x + 4(m-2)y = 24$$

$$2x - y = \frac{5m-13}{(m-1)(m-2)}.$$

b) Für welche reellen Zahlen m besitzt das System keine Lösung?

c) Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen m , für die die Zahlen x und y ebenfalls natürliche Zahlen sind und für die die Zahlenpaare $[x, y]$ das Gleichungssystem erfüllen!

▲ 2. Für zwei Mengen A und B gilt:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

b) $A \cap B = \{4, 6, 9\}$;

c) $A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$;

d) $B \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Bestimmen Sie die Mengen A und B , die diese Bedingungen erfüllen!

Prof. E. Georgescu-Buză, Bukarest

▲ 3. Gegeben sind ein spitzwinkliges Dreieck ABC und ein innerer Punkt M der Strecke $\overline{BC}$. Der Punkt M ist an den Geraden AB und AC zu spiegeln; die so erhaltenen Bildpunkte seien N und P .

a) Es ist zu beweisen, daß der Umfang des Fünfecks $ANBCP$ gleich der doppelten Summe aus den Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BC}$ ist. Geben Sie diejenige Lage des Punktes M an, für die dieser Umfang am kleinsten ist.

b) Es ist zu beweisen, daß das Dreieck ABC in A rechtwinklig ist, wenn die Punkte N, A und P auf einer Geraden liegen. Es ist ferner zu beweisen, daß die Punkte N, A und P auf einer Geraden liegen, wenn das Dreieck ABC in A rechtwinklig ist.

c) Es ist zu beweisen, daß der Punkt M die Seite $\overline{BC}$ halbiert und das Dreieck ABC in A rechtwinklig ist, wenn das Viereck $NBCP$ ein Parallelogramm ist. Es ist ferner zu beweisen, daß das Viereck $NBCP$ ein Parallelogramm ist, wenn der Punkt M die Seite $\overline{BC}$ halbiert und das Dreieck ABC in A rechtwinklig ist.

Prof. I. Şiclov, Petroşani

▲ 1. Gegeben ist die Gleichung

$$\tan x + \cot x = m, \text{ wobei } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ gilt.}$$

a) Welche Werte kann m annehmen?

b) Der Term $\sin x + \cos x + \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^4 x + \cos^4 x$ ist durch m auszudrücken.

c) Es ist der Funktionswert von

$$f(x) = \sin x + \cos x + \sin^3 x + \cos^3 x$$

+ $\sin^4 x + \cos^4 x$ für $x = \frac{\pi}{12}$ zu bestimmen.

▲ 2. Gegeben ist die Summe

$$s_n = \frac{7}{(1 \cdot 6)^2} + \frac{17}{(6 \cdot 11)^2} + \frac{27}{(11 \cdot 16)^2} + \dots + \frac{10n - 3}{[(5n - 4)(5n + 1)]^2}$$

a) Weisen Sie nach, daß $s_n = \frac{n(5n + 2)}{(5n + 1)^2}$

gilt!

b) Weisen Sie nach, daß für jede von Null verschiedene natürliche Zahl n die Ungleichung $s_n < \frac{1}{5}$ gilt!

▲ 3. Gegeben sind drei Punkte A, B und C des Raumes, die auf den Halbgeraden a, b und c , deren gemeinsamer Ursprung der Punkt O ist, liegen. Auf der Strecke $\overline{AB}$ ist ein Punkt M , auf der Strecke $\overline{AC}$ ein Punkt N so festzulegen, daß die Gerade MN parallel zur Geraden BC verläuft. Eine Ebene π , die die Gerade MN enthält und die parallel zur Geraden OA liegt, hat mit der Strecke $\overline{OB}$ den Punkt P , mit der Strecke $\overline{OC}$ den Punkt Q gemeinsam.

a) Beweisen Sie, daß das Viereck $MNPQ$ ein Parallelogramm ist!

b) Bestimmen Sie, in welchem Verhältnis der Punkt M die Strecke $\overline{AB}$ innen teilen muß, damit das Parallelogramm $MNPQ$ ein Rhombus ist!

Aufgaben (und Lösungen) für Schüler der Technischen Meisterschulen (1. u. 2. Jahr) sowie der Spezialoberschulen (1. bis 3. Jahr) werden im Rahmen unseres *alpha*-Wettbewerbs veröffentlicht, d. Red.

Kein Mensch wird dadurch kräftig, daß er eine Abhandlung über Turnen liest, sondern indem er turnt; kein Mensch lernt denken, indem er die fertiggeschriebenen Gedanken anderer liest, sondern dadurch, daß er selbst denkt und sich die Natur der Dinge selbst zu erklären sucht.

Mihai Eminescu
(rumänischer Dichter)

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. phil. habil. Maximilian Miller

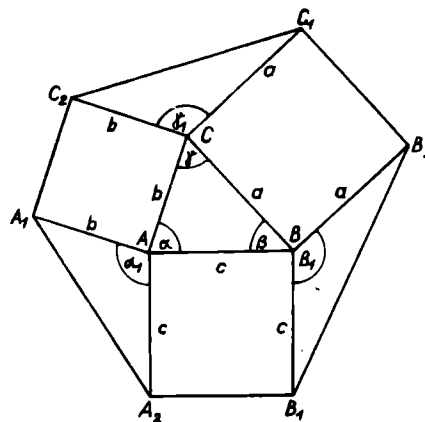
Hochschule für Verkehrswesen „Friedrich List“, Dresden



▲ 411 Der damalige Obertertianer (9. Klasse) *Josef Klein* aus Olpe fand im Jahre 1937 folgenden Satz:

Zeichnet man über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC (siehe Abb.) nach außen die Quadrate und verbindet man je zwei benachbarte Ecken der Quadrate miteinander, so entstehen drei Dreiecke, die dem ursprünglichen Dreieck ABC inhaltsgleich sind.

Diese Satz ist zu beweisen.



Berufe, die an der „Hochschule für Verkehrswesen Friedrich List“ erlernt werden können:

I. Diplomingenieure

A Verkehrstechnik:

1. Eisenbahnbetrieb
2. Verkehrsmaschinentechnik
3. Eisenbahnsicherungstechnik und Fernmeldetechnik
4. Elektrische Bahnen und Anlagen

B Verkehrsbauwesen:

1. Eisenbahnbau
2. Straßenbau und Straßenverkehr
3. Verkehrswasserbau

C Mathematik-Ingenieure: Ausbildung wie in A und B mit vertiefter Ausbildung in Mathematik

II. Diplomingenieurökonomen

1. Transportwesen
2. Post- und Fernmeldewesen (Nachrichtenwesen).

Für mathematisch interessierte Oberschulabsolventen kommen besonders C (Mathematik-Ingenieure) in Betracht. Der Einsatz erfolgt hauptsächlich in Rechenzentren und Datenverarbeitungsinstituten.

Wer löst mit? α -Wettbewerb



Letzter Einsendetermin 20. August 1969

5 $\blacktriangle$ 396 Unter der Quersumme einer natürlichen Zahl verstehen wir die Summe aller den Ziffern dieser Zahl entsprechenden natürlichen Zahlen. Die Quersumme der Zahl 1967 errechnet sich zum Beispiel durch $1 + 9 + 6 + 7$ und beträgt 23.

Versuche, durch einfache mathematische Überlegungen die Summe aller Quersummen der Zahlen von 1 bis 1000 zu errechnen!

OL K. Fuhrmann, Leipzig

W 5 $\blacksquare$ 397 Hans besitzt zwei Schachteln, die gleich hoch, aber verschieden breit sind. Er will seine neuen Farbstifte in eine dieser Schachteln packen. Benutzt er die erste Schachtel, so liegen jeweils 5 Stifte nebeneinander und in mehreren Schichten übereinander; es bleiben dabei 3 Stifte übrig, die nicht mehr in die Schachtel hineinpassen. Verwendet er die zweite Schachtel, so haben darin jeweils 7 Stifte nebeneinander Platz; es fehlen ihm jedoch noch 3 Stifte, um diese Schachtel auszufüllen. Da beide Schachteln gleich hoch sind, passen in sie gleich viele Schichten hinein. Wieviel Farbstifte besitzt Hans?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

W 5 $\blacksquare$ 398 Annerose hatte nach 18 Tagen erst die Hälfte ihres Taschengeldes, das sie monatlich von ihren Eltern erhielt, ausgegeben. Dies stellte sie bei einer Zwischenabrechnung fest. Bei gleichbleibender Sparsamkeit konnte sie im ganzen Monat (30 Tage) 2 M Ersparnisse zurücklegen. Wieviel Mark betrug ihr monatliches Taschengeld?

StR J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig

6 $\blacktriangle$ 399 Die Maßzahlen der Längen der drei Seiten eines Dreiecks ABC seien natürliche Zahlen und alle verschieden groß. Die Seite $\overline{BC} = a$ ist 7 cm, die Seite $\overline{AB} = c$ hingegen 11 cm lang. Welche Länge kann die Seite $\overline{AC} = b$ haben, wenn ihre Maßzahl ungerade sein soll und der Umfang des Dreiecks ABC kleiner als 31 cm ist?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

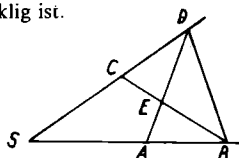
W 6 $\blacksquare$ 400 In einer Schachtel befinden sich 12 rote, 14 grüne und 20 blaue Kugeln. Wieviel muß man der Schachtel ohne hinzusehen, also ohne die Farbe der Kugeln zu erkennen, wenigstens entnehmen, um mit Sicherheit eine Kugel jeder Farbe dabei zu haben?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

W 6 $\blacksquare$ 401 Jemand gibt als Ergebnis der Multiplikation 588·795 die Zahl 467 450 an. Entscheide, ohne die Multiplikation auszuführen, ob das genannte Ergebnis richtig sein kann!

OL P. Polster, Dresden

W 7 $\blacksquare$ 402 Für die nachstehend abgebildete Figur gilt $\overline{AS} = \overline{CS}$ und $\overline{BS} = \overline{DS}$. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck BDE gleichschenkelig ist.



StR. D. Michels, Rostock

W 7 $\blacksquare$ 403 Es sind alle sechsstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:

a) Die aus der ersten und zweiten, aus der dritten und vierten bzw. aus der fünften und sechsten Stelle gebildeten Zahlen verhalten sich wie 1 : 2 : 3.

b) Die zu ermittelnden sechsstelligen Zahlen sind durch 72 teilbar.

OL. P. Polster, Dresden

W 8 $\blacksquare$ 404 Gegeben sei ein Parallelogramm, das einen spitzen Winkel von 60° hat und dessen Umfang 24 cm beträgt. Ferner halbiert die von dem Scheitelpunkt eines stumpfen Winkels dieses Parallelogramms ausgehende Höhe die zugehörige Seite.

Achtung!

Mit Heft 3 endet der Wettbewerb des Jahres 1969. In Heft 4/69 veröffentlichen wir die Aufgaben der Schulolympiade 1969. In Heft 5 beginnt der α -Wettbewerb 1969/70 (entsprechend dem Schuljahresrhythmus).

Alle Schüler, welche im Laufe des Jahres 1969 (Heft 1 bis 3) vier oder mehr Antwortkarten mit dem Prädikat „vorbildlich gelöst“ oder „gut gelöst“ erworben haben, senden diese geschlossen zwischen dem 1. und 15. September 1969 an die Redaktion α (7027 Leipzig, Postfach 14) ein. Sie erhalten im Laufe des Oktober eine Anerkennungsurkunde und ein α -Abzeichen. Eine Jury

Es ist die Länge der kleineren Diagonale dieses Parallelogramms zu ermitteln.

OL W. Lerche, Dresden

W 8 $\blacksquare$ 405 Es sind alle geordneten Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen a, b, c zu ermitteln, für die

$$a + b + c = abc$$

gilt. (Unter einem geordneten Tripel positiver ganzer Zahlen versteht man drei in einer bestimmten Reihenfolge angegebene positive ganze Zahlen).

Reinhardt Wobst, 22. OS Dresden, Kl. 10

W 9 $\blacksquare$ 406 Gegeben sei die für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3$. Es ist zu beweisen, daß dann für alle reellen Zahlen z

$$f(z + 1) = f(z) + 2z + 1 \text{ gilt.}$$

StR. G. Schulze, Herzberg/Elster

W 9 $\blacksquare$ 407 Von einem regelmäßigen Tetraeder mit der Kantenlänge a werden durch ebene Schnitte vier Pyramiden, deren Spitzen in den Ecken des Tetraeders liegen, so abgetrennt, daß der verbleibende Restkörper von vier regelmäßigen Sechsecken und vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist.

Es sind der Oberflächeninhalt und das Volumen des Restkörpers zu berechnen.

StR. G. Schulze, Herzberg/Elster

W 10/12 $\blacksquare$ 408 Gegeben sei die für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{2}(3x - 5).$$

Es ist zu beweisen, daß dann für alle reellen Zahlen z

$$f\left(z - \frac{5}{2}\right) = f\left(z + \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{2} \text{ gilt.}$$

StR G. Schulze, Herzberg/Elster

W 10/12 $\blacksquare$ 409 Von einem Würfel mit der Kantenlänge a wurden durch ebene Schnitte acht Pyramiden, deren Spitzen in den Ecken des Würfels liegen, so abgetrennt, daß der verbleibende Restkörper von sechs Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist. Es sind der Oberflächeninhalt und das Volumen des Restkörpers zu berechnen.

StR G. Schulze, Herzberg/Elster

wertet alle Karten aus, übergibt die Namen der Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender der Redaktion zur Veröffentlichung.

Wer seine Karten zurückerhalten möchte, der lege einen vorschriftsmäßig frankierten Umschlag mit Adresse bei.

Bitte die Antwortkarten (geschlossen) erst dann einsenden, wenn die Antwortkarten für Heft 3 eingetroffen sind!

Nun wünschen wir allen für Heft 3 viel Erfolg beim Knobeln! Im vergangenen Jahr waren es über 800 Schüler, welche eine Anerkennungsurkunde erhielten. Wieviel werden es in diesem Jahre sein?

Redaktion α

Lösungen



▲ 353 Aus $x : 20 = 480 : 100$ folgt $x = 96$;
aus $y : 30 = 480 : 100$ folgt $y = 144$.
Es sind 96 Apfel- und 144 Birnbäume angepflanzt.
Aus $480 - (96 + 144) = 240$ und $240 : 4 = 60$ und $3 \cdot 60 = 180$ folgt weiter, daß die Plantage noch mit 60 Pflaumen- und 180 Kirschbäumen bepflanzt ist.

W 7 ■ 354 Es seien a Flaschen Weinbrand und b Flaschen Sekt vorhanden; dann sind es noch $16 - a - b$ Flaschen Wein.
 $175a + 180b + 92(16 - a - b) = 1980$
 $83a + 88b = 508$
 $83a = 6 \cdot 83 + 10 - 83b - 5b$
 $a = 6 - b \cdot \frac{10 - 5b}{83}$

Da a , b und c nur natürliche Zahlen sein können, muß $10 - 5b$ durch 83 teilbar sein. Nur $b = 2$ erfüllt diese Bedingung. Ferner ist $a = 4$ und $16 - a - b = 10$. Es wurden also 4 Flaschen Weinbrand, 2 Flaschen Sekt und 10 Flaschen Wein bereitgestellt.

W 7 ■ 355 Aus $bf + bf = dmh$ folgt $d = 1$;
aus $hhe - cme = dhm$ folgt $m = 0$;
aus $bf + bf = 10h$ folgt $b = 5$;
aus $1a \cdot 5f = c0e$ und $a \geq 2$ und $f \geq 2$ folgt $c \geq 6$; aus $hhe - c0e = 1h0$ folgt $h = c + 1$ und aus $iag - 5f = hhe$ folgt $i = h + 1$.

Es gilt also entweder $c = 6, h = 7, i = 8$ oder $c = 7, h = 8, i = 9$. Aus $5f + 5f = 10h$ folgt, daß h eine gerade Zahl ist. Deshalb gilt nur $c = 7, h = 8, i = 9$.

Aus $7e + 108 = 180$ folgt $e = 2$;
aus $5f + 5f = 108$ folgt $f = 4$;
aus $1a \cdot 54 = 702$ folgt $a = 3$;
aus $93g - 54 = 882$ folgt $g = 6$.

Wir erhalten also $936 : 13 = 72$
 $\quad \quad \quad +$
 $\quad \quad \quad 54 + 54 = 108$
 $\quad \quad \quad \hline$
 $882 - 702 = 180$

und stellen fest, daß alle waagrecht und senkrecht angeordneten Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

▲ 356 Bezeichnen wir die ursprüngliche Anzahl der Mähdrescher, die die Kooperationsgemeinschaften A, B, C und D besitzen, mit x, y, z und u , so gilt nach den Voraussetzungen der Aufgabe

$$x + 4 = y = z - 4 = 6 = u + 6 = 30;$$

denn nach dem Ausleihen verfügt jede Kooperationsgemeinschaft über die gleiche Anzahl von Mähdreschern, d. s. $\frac{120}{4} = 30$ Mähdrescher.

Wir erhalten daher
 $x = 30 - 4 = 26, y = 30,$
 $z = 30 + 10 = 40, u = 30 - 6 = 24.$

Daher besitzt die Kooperationsgemeinschaft A 26 Mähdrescher, B 30 Mähdrescher, C 40 Mähdrescher und D 24 Mähdrescher.

▲ 357 Wegen der letzten in der Aufgabe gegebenen Voraussetzung ist die 3. Vermutung von Horst falsch, also sind seine beiden anderen Vermutungen richtig, also kommt E auf Platz 5 und A auf Platz 2. Da B nicht auf Platz 4 kommt, ist die 1. Vermutung von Egon falsch, und seine anderen beiden Vermutungen sind richtig, also wird D Letzter sein. Daher ist die 2. Vermutung von Karl falsch. Da nun A auf Platz 2 kommt, erhält B wegen der 1. (richtigen) Vermutung von Karl den Platz 1. Wegen der (richtigen) 3. Vermutung von Egon kommt F vor C , daher verbleibt für C nur der Platz 4 und für F der Platz 3. Wir erhalten die folgende Reihenfolge, in der die Sportler durchs Ziel kamen:
 $B, A, F, C, E, D.$

Gleichzeitig stellen wir fest, daß bei dieser Reihenfolge und nur bei dieser Reihenfolge sämtliche Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

W 8 ■ 358 Wir bezeichnen die Antworten der Automaten der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Wir wissen, daß A_5 falsch ist; daher sind mindestens drei Automaten intakt. Daraus folgt, daß A_1 und A_2 wahr sind, daß also der 1. und der 2. Automat intakt sind. Nun gibt es für A_3 und A_4 die folgenden vier Möglichkeiten, wobei wir im Falle einer richtigen Antwort ein W und im Falle einer falschen Antwort ein F vermerken:

A_3	A_4	Schlußfolgerung
W	W	Dann wären die ersten vier Automaten intakt, was im Widerspruch zu A_5 steht.
W	F	Dann wären genau zwei Automaten beschädigt, und A_4 könnte nicht falsch sein, was im Widerspruch zu dieser Annahme steht.
F	W	Es entsteht kein Widerspruch.
F	F	Dann wären A_3, A_4 und A_5 falsch, was im Widerspruch zu den obigen drei Schlußfolgerungen steht, wonach mindestens drei Automaten intakt sind.

Nur die dritte Möglichkeit ist widerspruchsfrei; daher sind A_1, A_2 und A_4 wahr, dagegen A_3 und A_5 falsch. Folglich sind der 1., 2. und 4. Automat intakt und der 3. und 5. Automat beschädigt.

W 8 ■ 359 Die Summe zweier vierstelliger Zahlen ist stets kleiner als 20 000; daraus folgt $F = 1$. Wegen $R + S \neq 1$ gilt also $R + S = 11$.

Daraus folgt $E + N + 1 = 10 + N$, d. h. $E = 9$. Daraus folgt weiter $I + I + 1 = 9$ oder $I + I + 1 = 19$; da $I \neq 9$ ist, gilt $I = 4$. Man erhält wegen $R + S = 11$, daher die in der folgenden Tabelle angegebenen Möglichkeiten:

R	S	U	V	N
3	8	5	6	0, 2 oder 7
3	8	6	7	0, 2 oder 5
5	6	2	3	0, 7 oder 8
5	6	7	8	0, 2 oder 3

Das sind insgesamt $4 \cdot 3 = 12$ Lösungen; hinzu kommen noch durch Vertauschung von R und S weitere 12 Lösungen, so daß die Aufgabe insgesamt 24 Lösungen hat. Eine dieser Lösungen ist z. B.

$$\begin{array}{r} 6493 \\ + 9408 \\ \hline 15901. \end{array}$$

▲ 360 Aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich

$$\begin{array}{ll} 0 < q - p < 10, & (1) \\ p + q = a^2, \text{ wobei } a \text{ eine natürliche Zahl ist,} & (2) \\ p + q + a = 42. & (3) \end{array}$$

Aus (2) und (3) folgt $a^2 + a = 42$.

$$\text{Nun ist } a^2 + a = \begin{cases} < 42 \text{ für } a < 6, \\ = 42 \text{ für } a = 6, \\ > 42 \text{ für } a > 6; \end{cases}$$

daraus folgt $a = 6$. (Man erhält $a = 6$ auch durch die Lösung der quadratischen Gleichung $a^2 + a - 42 = 0$).

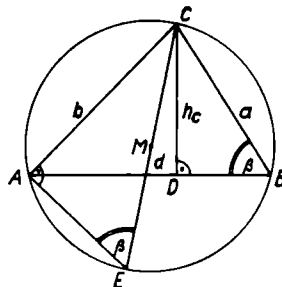
Wegen (2) gilt $p + q = 36$ und wegen (1) $q - p < 10$, also $2q < 46$, d. h. $q < 23$ und $p > 13$.

Diese Bedingungen sind aber nur für die Primzahlen $p = 17$ und $q = 19$ erfüllt.

Andererseits sind aber für diese beiden Primzahlen auch die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt; daher hat die Aufgabe genau eine Lösung, nämlich

$$p = 17, q = 19.$$

■ 361 Es seien ABC ein Dreieck, D der Fußpunkt der von C auf AB gefällten Höhe, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{CD} = h_c$ und d der Durchmesser des Umkreises des Dreiecks ABC . Es ist nun zu beweisen, daß $a \cdot b = h_c \cdot d$ gilt.



Wir unterscheiden die drei möglichen Fälle, wonach die Höhe $\overline{CD}$ im Innern, außerhalb bzw. auf dem Rand des Dreiecks liegt.

1. Die Höhe $\overline{CD}$ liegt im Innern des Dreiecks ABC . Dann gilt (vgl. Fig. 1), da auch der

Mittelpunkt M des Umkreises im Innern des Dreiecks liegt, nach dem Thalesatz

$$\angle CDB = \angle CAE = 90^\circ,$$

ferner nach dem Peripheriewinkelsatz

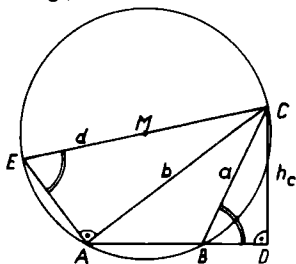
$$\angle ABC = \angle AEC = \beta, \text{ also}$$

$$\triangle CDB \sim \triangle CAE. \text{ Daraus folgt}$$

$$a : h_c = d : b,$$

$$a \cdot b = h_c \cdot d, \text{ w.z.b.w.}$$

2. Die Höhe $\overline{CD}$ liegt außerhalb des Dreiecks ABC . Dann gilt (vgl. Fig. 2), da auch der Mittelpunkt M des Umkreises außerhalb des Dreiecks liegt,



$$\angle BDC = \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\angle CBD = \angle CEA = 180^\circ - \beta, \text{ also}$$

$$\triangle CBD \sim \triangle CEA. \text{ Daraus folgt}$$

$$a : h_c = d : b,$$

$$a \cdot b = h_c \cdot d, \text{ w.z.b.w.}$$

3. Die Höhe $\overline{CD}$ liegt auf dem Rand des Dreiecks ABC .

Dann können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\overline{CD} = \overline{CB} = a = h_c$ gilt. Ferner gilt $\overline{AC} = b = d$ (Thalesatz), also auch in diesem Falle

$$a \cdot b = h_c \cdot d, \text{ w.z.b.w.}$$

Bemerkung:

Bei dieser Beweisaufgabe — das gilt für viele ähnliche Aufgaben — kam es darauf an, eine Fallunterscheidung vorzunehmen. Es genügt nicht, wie das häufig geschieht, nur den Fall 1 zu behandeln. Man muß noch zusätzlich beweisen, daß die Behauptung auch in den Fällen 2 und 3 (die Höhe $\overline{CD}$ liegt außerhalb oder auf dem Rand des Dreiecks) richtig ist.

W 9 ■ 362 Es seien von Bernd a Widerstände zu je 17Ω , b Widerstände zu je 21Ω und c Widerstände zu je 28Ω in Reihe geschaltet worden; dann gilt

$$17a + 21b + 28c = 167,$$

$$17a + 7(3b + 4c) = 167. \text{ Wir ersetzen}$$

$3b + 4c$ durch d und erhalten aus (1)

$$17a + 7d = 167,$$

$$d = 23 - 2a - \frac{3(a-2)}{7}. \quad (2)$$

Da a , b und c natürliche Zahlen sind, muß auch d eine natürliche Zahl sein; das heißt, es muß $3(2-a)$ durch 7 teilbar sein. Das trifft zu für $a = 2, 9, 16, 23, \dots$ und damit für $d = 19, 2, -15, -32, \dots$

Es kommen nur die beiden Lösungen

$a_1 = 2$; $d_1 = 19$ bzw. $a_2 = 9$, $d_2 = 2$ in Frage. Wir setzen $a_1 = 2$ in Gleichung (1) ein und erhalten nach entsprechender Umformung

$$3b + 4c = 19$$

$$b = 6 - c - \frac{c-1}{3}.$$

Eine Belegung der Variablen b und c ist unter Berücksichtigung der Bedingungen der Aufgabe nur möglich für

$$c_1 = 1, \text{ also } b_1 = 5 \text{ und } c_2 = 4, \text{ also } b_2 = 1.$$

Wenn wir dagegen $a_2 = 9$ in Gleichung (1) einsetzen, erhalten wir nach entsprechender Umformung

$$3b + 4c = 2.$$

$$\text{Für } c_1 = 1 \text{ erhalten wir } b_1 = -\frac{2}{3};$$

$$\text{für } c_2 = 4 \text{ erhalten wir } b_2 = -\frac{14}{3}.$$

Beide Lösungen für b widersprechen den Bedingungen der Aufgabe; somit entfällt auch $a_2 = 9$ als Lösung. Als Lösung der Gleichung (1) erhalten wir demnach

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 5, \quad c_1 = 1$$

$$a_2 = 2, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = 4$$

Im ersten Fall wurden 8, im zweiten 7 Widerstände benutzt; also schaltete Bernd

2 Widerstände zu 17Ω ,

1 Widerstand zu 21Ω und

4 Widerstände zu 28Ω in Reihe;

Klaus hingegen

2 Widerstände zu 17Ω ,

5 Widerstände zu 21Ω ,

1 Widerstand zu 28Ω in Reihe.

W 9 ■ 363 Es seien

x die Anzahl der Schüler, die nur die Zeitschrift „Wissenschaft und Fortschritt“ lesen, y die Anzahl der Schüler, die nur die Zeitschrift „Jugend und Technik“ lesen, z die Anzahl der Schüler, die beide Zeitschriften lesen.

Dann gilt:

$$x + z = y + z + 22, \quad (1)$$

$$6y = 25z, \quad (2)$$

$$x + z \text{ ist teilbar durch } z. \quad (3)$$

Aus (1) folgt

$$x - y = 22, \text{ also } 6x - 6y = 132;$$

daher gilt wegen (2) $6x - 25z = 132$,

$$\text{also } z(6\frac{x}{z} - 25) = 132. \quad (4)$$

Nun ist wegen (3) $\frac{x}{z}$ eine positive ganze Zahl,

also auch $6\frac{x}{z} - 25$; ferner ist wegen (2) z

ein Vielfaches von 6. Andererseits ist wegen

(4) z ein Teiler von 132; daher kann z nur gleich 6, 12, 66 oder 132 sein.

1. Aus $z = 6$ würde wegen (4) folgen $x - 25 = 22$, d. h. $x = 47$, was wegen (3) unmöglich ist.

2. Aus $z = 12$ würde wegen (4) folgen $\frac{x}{2} - 25 = 11$, d. h. $x = 72$ und hieraus wegen (2) $y = 50$; da die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind, haben wir eine Lösung des Systems erhalten.

3. Aus $z = 66$ würde wegen (4) folgen $\frac{x}{11} - 25 = 2$, d. h. $x = 11 \cdot 27$, was der Bedingung widerspricht, wonach x durch z teilbar ist.

4. Aus $z = 132$ würde wegen (4) folgen $\frac{x}{22} - 25 = 1$, d. h. $x = 22 \cdot 26$, was wieder

der Bedingung widerspricht, wonach x durch z teilbar ist.

Daher erhalten wir als einzige Lösung $x = 72$, $y = 50$, $z = 12$; d. h. 72 Schüler lesen nur die Zeitschrift „Wissenschaft und Fortschritt“, 50 Schüler lesen nur die Zeitschrift „Jugend und Technik“, 12 Schüler lesen beide Zeitschriften.

■ 364 Angenommen, (x, y, z) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems. Dann folgt aus (1) und (2) durch Subtraktion:

$$-(a-b)x + (a-b)y + az - cz - bz + cz = a - c - b + c,$$

$$-(a-b)x + (a-b)y + (a-b)z = a - b$$

und hieraus wegen $a - b \neq 0$

$$-x + y + z = 1. \quad (4)$$

Ferner folgt aus (2) und (3) durch Subtraktion:

$$ax - bx - ax + cx - (b-c)y$$

$$+ (b-c)z = b - c,$$

$$-(b-c)x - (b-c)y + (b-c)z = b - c$$

und hieraus wegen $b - c \neq 0$

$$-x - y + z = 1. \quad (5)$$

Schließlich folgt aus (1) und (3) durch Addition:

$$(a-c)x + ay - by + by - cy$$

$$+ (a-c)z = a - c$$

$$(a-c)x + (a-c)y + (a-c)z = a - c$$

und hieraus wegen $a - c \neq 0$

$$x + y + z = 1. \quad (6)$$

Wir erhalten nun durch Subtraktion bzw.

Addition

$$\text{aus (4) und (5)} \quad 2y = 0, \text{ also } y = 0,$$

$$\text{aus (4) und (6)} \quad -2x = 0, \text{ also } x = 0,$$

$$\text{aus (5) und (6)} \quad 2z = 2, \text{ also } z = 1.$$

Damit haben wir nachgewiesen, daß, wenn das Gleichungssystem (1), (2), (3) eine Lösung hat, $x = 0$, $y = 0$ und $z = 1$ gilt. Da nun die Gleichungen (1), (2) und (3) für diesen Wert erfüllt sind (Probe!), gibt es genau eine Lösung, nämlich

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1.$$

W 10/12 ■ 365 Bezeichnet man mit x die Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe A lösten, y die Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe B lösten, z die Anzahl der Schüler, die beide Aufgaben lösten, so gilt, da jeder Teilnehmer mindestens eine Aufgabe löste, $20 < x + y + z < 40$,

$$x + y + 1 = 2z, \quad (1)$$

$$y - z = 4x, \quad (2)$$

wobei x , y und z natürliche Zahlen sind.

Aus (3) folgt

$$y = 4x + z \text{ und daher aus (2)}$$

$$5x + 1 = z,$$

also $y = 9x + 1$. Mithin gilt

$$x + y + z = 15x + 2.$$

Daher folgt aus (1)

$$20 < 15x + 2 < 40,$$

$$18 < 15x < 38.$$

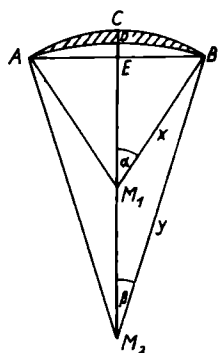
Nun ist $x = 2$ die einzige natürliche Zahl, die diese Ungleichungen erfüllt. Aus $x = 2$ folgt wegen der obigen Gleichungen $y = 19$ und $z = 11$, also $x + y + z = 32$.

Für diese Zahlen sind aber auch die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt. Die obige Lösung ist daher die einzige Lösung.

32 Schüler nahmen an dem Wettbewerb teil.

W 10/12 ■ 366 Es seien (vgl. die nebenstehende Figur) M_1 der Mittelpunkt und x die Maßzahl (in m) des Radius des Kreisbogens ACB , M_2 der Mittelpunkt und y die Maßzahl (in m) des Radius des Kreisbogens ADB .

Ferner gilt für die Maßzahlen (in m) der Strecken $\overline{CD}$ $\overline{DE} = 1$, $\overline{EB} = 6$, $\overline{M_1E} = x - 2$, $\overline{M_2E} = y - 1$.



Daher gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned}x^2 &= 6^2 + (x - 2)^2, \\x^2 &= 36 + x^2 - 4x + 4, \\4x &= 40, \\x &= 10; \\y^2 &= 6^2 + (y - 1)^2, \\y^2 &= 36 + y^2 - 2y + 1, \\2y &= 37, \\y &= 18,5.\end{aligned}$$

Ferner erhält man die Größe der Winkel $\alpha = \angle EM_1B$ und $\beta = \angle EM_2B$ aus

$$\sin \alpha = \frac{6}{x} = 0,6, \alpha \approx 36,87^\circ;$$

$$\sin \beta = \frac{6}{y} = \frac{6}{18,5} \approx 0,3243, \beta \approx 18,92^\circ.$$

Daher ist die Maßzahl des Flächeninhalts des Kreissektors CM_1B

$$S_1 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi x^2 \approx \frac{36,87 \cdot 100\pi}{360} \approx 32,18$$

und des Kreissektors DM_2B

$$S_2 = \frac{\beta}{360^\circ} \cdot \pi y^2 \approx \frac{18,92 \cdot 18,5^2 \pi}{360} \approx 56,50.$$

Ferner ist die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks EM_1B

$$D_1 = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ und des Dreiecks } EM_2B$$

$$D_2 = \frac{17,5 \cdot 6}{2} = 52,5.$$

Daher gilt für den Flächeninhalt des Flächenstücks, das durch die Kreisbögen ACB und ADB begrenzt ist,

$$A = 2[(S_1 - D_1) - (S_2 - D_2)]$$

$$\approx 2[8,18 - 4,00] = 8,36.$$

Das schraffierte Flächenstück hat daher den Flächeninhalt $8,36 \text{ m}^2$.

▲ 367 Es seien m und n die beiden Summanden; die größtmöglichen Summanden und ihr Produkt sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

m	n	mn	m	n	mn
0	12	0	4	8	32
1	11	11	5	7	35
2	10	20	6	6	36
3	9	27			

Das Produkt $m \cdot n$ ist in keinem Falle größer als 36.

▲ 368 Es gilt $27 + 21 = 48$ und $48 \cdot 4 = 192$; das Buch enthält also 192 Seiten.

▲ 369 Es sei $\overline{AC} = x \text{ m}$; dann ist $\overline{CD} = 2 \cdot x \text{ m}$ und $\overline{DB} = 3 \cdot 2 \cdot x \text{ m}$. Daraus folgt $\overline{AC} : \overline{CD} : \overline{DB} = x \text{ m} : 2 \cdot x \text{ m} : 6 \cdot x \text{ m} = 1 : 2 : 6$,
 $\overline{AC} = x \text{ m}$, $\overline{CD} = 2x \text{ m}$, $\overline{DB} = 6x \text{ m}$,
 $\overline{AB} = x + 2x + 6x = 9x \text{ m}$,
 $9x = 72$,
 $x = 8$. Daher gilt
 $\overline{AC} = 8 \text{ m}$, $\overline{CD} = 16 \text{ m}$,
 $\overline{DB} = 48 \text{ m}$.



also $9 \cdot x = 72$,

$x = 8$. Daher gilt

$$\overline{AC} = 8 \text{ m}, \overline{CD} = 16 \text{ m},$$

$$\overline{DB} = 48 \text{ m}.$$

W 5 ■ 370 Der Geldbetrag, der für die Schrippen zu bezahlen ist, muß auf die Ziffer 0 oder 5 enden. Dann muß der Betrag, der auf die Knüppel entfällt, auf die Ziffer 2 oder 7 enden. Da kein Vielfaches von 8 auf die Ziffer 7 endet, muß der Betrag für Knüppel auf die Ziffer 2 enden. Dieser Betrag kann daher nur gleich $4 \cdot 8 = 32$ sein; denn keine andere natürliche Zahl, die ein Vielfaches von 8 und kleiner als 72 ist, endet auf 2. Aus $72 - 32 = 40$ und $40 : 5 = 8$ folgt, daß 8 Schrippen und 4 Knüppel eingekauft wurden. Das Zelt ist also mit zwölf jungen Pionieren belegt.

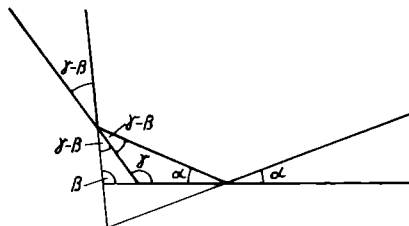
W 5 ■ 371 Aus $a < b$ folgt, daß $\frac{a}{b}$ ein

echter, hingegen $\frac{b}{a}$ ein unechter Bruch ist.

Deshalb gilt $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$. Eine Ungleichung bleibt

richtig, wenn man beide Seiten mit der gleichen natürlichen Zahl multipliziert, also gilt $\frac{2a}{b} < \frac{2b}{a}$.

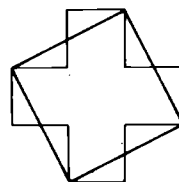
▲ 372 Aus dem stumpfwinkligen Dreieck der nachstehend abgebildeten Zeichnung läßt sich die Winkelbeziehung



$\alpha + \gamma + (\gamma - \beta) = 180^\circ$ ablesen; es gilt also

$$\gamma = 90^\circ - \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

▲ 373 Auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Kreuzes stehen je zwei benachbarte der vier eingezeichneten Strecken aufeinander senkrecht, und sie sind einander kongruent. Das eingezeichnete Viereck ist somit ein Quadrat.



▲ 374 Unter Beachtung der Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 3, 9 und 4 erhalten wir

- a) $3 \mid 83271$, $3 \mid 83274$, $3 \mid 83277$;
b) $3 \nmid 84172$, $3 \nmid 84272$, $3 \nmid 84472$,
 $3 \nmid 84572$, $3 \nmid 84772$, $3 \nmid 84872$;
c) $9 \mid 23058$, $9 \mid 23958$;
d) $4 \nmid 58706$, $4 \nmid 58726$, $4 \nmid 58746$,
 $4 \nmid 58766$, $4 \nmid 58786$.

W 6 ■ 375 Aus a) folgt unmittelbar: Ernst ist Abonnent der *Jungen Welt*; aus b) folgt unmittelbar: Axel ist Abonnent von *Neues Leben*, und Bernd ist Abonnent von *Junge Welt*; aus c) folgt: Fred ist entweder 16 oder 17 Jahre alt, Bernd ist entweder 17 oder 16 Jahre alt;

aus b) folgt: Bernd ist nicht 17 Jahre alt, also ist Bernd 16 Jahre und Fred damit 17 Jahre alt; weiterhin folgt daraus, daß Fred Abonnent von *Neues Leben* ist; aus a) und b) folgt: Ernst ist 20 Jahre alt; dann ist Axel 19 Jahre alt.

W 6 ■ 376 Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Der Lehrer ist erst im Jahre 1968, und zwar vor dem Zeitpunkt der Fragestellung, 25 Jahre alt geworden. Aus $1968 - 25 = 1943$ folgt, daß er in diesem Falle im Jahre 1943 geboren wurde. Nun gilt $1943 = 27 \cdot 71 + 26$. Diese Möglichkeit entfällt also; denn der Rest ist nicht gleich 25. b) Der Lehrer wird noch im Jahre 1968, und zwar nach dem Zeitpunkt der Fragestellung, 26 Jahre alt. Aus $1968 - 26 = 1942$ folgt, daß er in diesem Fall im Jahre 1942 geboren wurde. Nun gilt $1942 = 27 \cdot 71 + 25$,
 $1942 = 47 \cdot 41 + 15$,
 $1942 = 45 \cdot 43 + 7$. Der Lehrer wurde demnach am 15. 7. 1942 geboren.

▲ 377 Es seien von den vier Ehemännern insgesamt x Tulpen gekauft worden; dann entfallen auf Franz $\frac{1}{4}x$ Tulpen

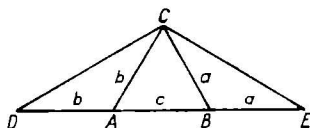
$$\text{Willi } \frac{1}{3}x - 2 \text{ T. Klaus } \frac{1}{2}x - 6 \text{ T.}$$

$$\text{Hans } \frac{1}{8}x + 3 \text{ T.}$$

Durch Addition erhalten wir $\frac{29}{24}x - 5 = x$

und damit $x = 24$. Aus $\frac{1}{4} \cdot 24 = 6$ und $\frac{1}{3} \cdot 24 - 2 = 6$ und $\frac{1}{2} \cdot 24 - 6 = 6$ und $\frac{1}{8} \cdot 24 + 3 = 6$ folgt, daß jeder der vier Ehemänner genau sechs Tulpen kaufte.

▲ 378 Wir tragen die Strecken $a + b, b + c$ und $a + c$ auf einer Geraden g nacheinander von D bis F ab und halbieren die Strecke $\overline{DF}$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DF}$ sei E ; dann gilt $\overline{DE} = a + b + c$. Nun schlagen wir um D mit $b + c$ und um E mit $a + c$ als Radius je einen Kreis; die Schnittpunkte dieser Kreise mit der Strecke $\overline{DE}$ seien die Punkte B und A .



Dann gilt

$$DA = (a + b + c) - (a + c) = b,$$

$$BE = (a + b + c) - (b + c) = a,$$

$$AB = (a + b + c) - a - b = c;$$

daher läßt sich das Dreieck ABC aus den drei Seiten leicht konstruieren. Wir schlagen um A mit $\overline{DA}$ und um B mit $\overline{BE}$ je einen Kreis; diese Kreise schneiden sich im Punkt C . Verbinden wir C mit A und B , so erhalten wir das zu konstruierende Dreieck ABC .

▲ 379 Es sind bei der Lösung der Aufgabe zwei Fälle zu unterscheiden.

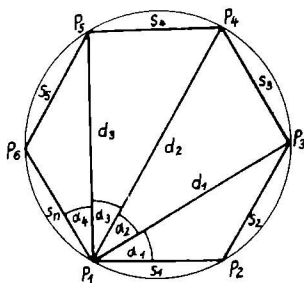
1. Fall: Es sei $x \geq 0$; wegen $|x| = x$ gilt dann $x = \frac{x}{2} + 2$, und wir erhalten daraus $x = 4$.

2. Fall: Es sei $x < 0$; wegen $|x| = -x$ gilt dann $-x = \frac{x}{2} + 2$, und wir erhalten daraus

$$x = -\frac{4}{3}.$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist demnach $\{4; -\frac{4}{3}\}$.

W 7 ■ 380 Im regelmäßigen Sechseck gilt $s_1 = s_2 = \dots = s_6$. Aus der Gleichheit der Sehnen folgt die Gleichheit der Peripheriewinkel, d. h. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.



Jeder Innenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks beträgt 120° ; damit beträgt jeder der vier Winkel $\alpha_i = \frac{120^\circ}{4} = 30^\circ$.

W 7 ■ 381 Für den dritten Mitspieler sind drei Fälle denkbar:

1. Fall: Er sieht auf den Köpfen der beiden anderen Mitspieler einen weißen und einen grünen Hut. In diesem Fall würde er bereits, ohne die Aussagen seiner Mitspieler gehört zu haben, erkennen, daß er einen schwarzen Hut aufhat. Dieser Fall kann also nicht vorliegen.

2. Fall: Er sieht auf den Köpfen jedes der beiden anderen schwarze Hüte. In diesem Fall könnte er trotz der Aussagen seiner Mitspieler nicht herausfinden, ob er einen weißen oder grünen Hut auf dem Kopf hat. Dieser Fall kann also auch nicht eintreten.

3. Fall: Er sieht auf dem Kopf genau eines seiner beiden Mitspieler einen schwarzen Hut. Da die beiden ersten Fälle nicht vorliegen können, muß dieser dritte und letzte Fall vorliegen. Hätte er in diesem letzten Falle selbst keinen schwarzen Hut auf, so würde der Mitspieler mit einer schwarzen Kopfbedeckung zwei Personen mit nicht schwarzen Hüten sehen und daraus erkennen, daß er selbst einen schwarzen Hut erhalten hat und darum nicht geurteilt haben: „Ich weiß nicht, welche Farbe mein Hut hat.“ Also hat der dritte Mitspieler selbst einen schwarzen Hut auf. Dies erkannte der dritte Mitspieler allein aus dem Urteil desjenigen seiner Mitspieler, der selbst einen schwarzen Hut auf hat.

Spiegeln, Spiegeln an der Wand...

▲ 1. Aufgabe: Der Text muß richtig lauten (alpha 1/69, S. 9): Welches ist der kürzeste Weg, der von einem Punkt A , der zwischen den Schenkeln eines Winkels α liegt, zu einem Punkt des einen Schenkels, von dort zu einem Punkt des anderen Schenkels und wiederum zum Punkt A führt (Abb. 7)?

Lösungen zu alpha-heiter

Der Müßiggänger (3/69)

Der Müßiggänger wurde 50 Jahre alt.

Geometry Problem (3/69)

Solution: Locate O' , G , H , and I as shown in the diagram. Since $OH = O'I$ and $O'H = O'I$ and angle $HOI = 60^\circ$, we have angles $OO'H = OO'I = 60^\circ$. Thus from the properties of $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ triangles, we know that $2O'H = O'I$, which implies that $OG = 3O'H$. Therefore the area of the larger circle is 9 times that of the smaller. Hence the area of the smaller circle is $\frac{1}{9}$.

Bilderrätsel (3/69)

ALPEN, HASE, EI, LEITER
ALP HA HEI TER

Mathematische Begriffe (3/69)

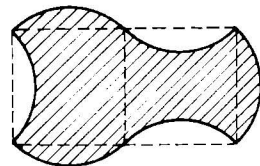
1. Meter, 2. Achse, 3. Tonne, 4. Hoehe, 5. Eigner, 6. Monat, 7. Alpha, 8. Tafel, 9. Index, 10. Kegel — MATHEMATIK

Magisches Quadrat (3/69)

-16	+12	+10	-10
+6	-6	-4	0
-2	+2	+4	-8
+8	-12	-14	+14

Denkertjes (Denksport)

Der Flächeninhalt entspricht zwei gleichgroßen Quadraten (siehe Abb.)

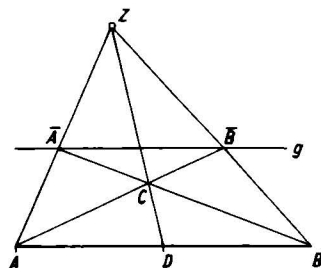


Magischer Würfel

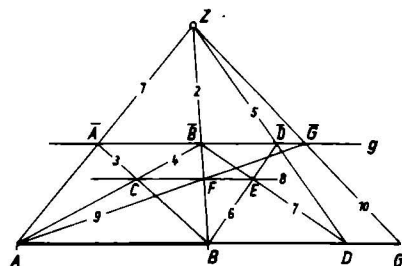
Hier erwarten wir Lösungsvorschläge vom Leser und neue, ähnliche Probleme zur Veröffentlichung.

Lösungen zu „Mit Bleistift und Lineal!“

▲ 412 Annahme von Z beliebig, jedoch nicht auf g und (AB) . (ZA) schneidet g in $\bar{A}$, (ZB) schneidet g in $\bar{B}$, (AB) und (BA) schneiden sich in C . (ZC) schneidet (AB) in D . D ist der Halbierungspunkt der Strecke $\overline{AB}$.



▲ 413 Annahme von Z und Konstruktion von C wie bei Aufgabe 412. Annahme von D auf (AB) beliebig und Konstruktion von E analog zur Konstruktion von C . (CE) ist parallel g und schneidet (ZB) in F . (AF) schneidet g in $\bar{G}$. $(Z\bar{G})$ schneidet (AB) in G . Es gilt $\overline{AB} = \overline{BC}$.



An welchem Wochentag wurde ich geboren?

Die 6. Aufgabe, Klassenstufe 7, der Bezirksolympiade lautet: Der große deutsche Mathematiker *Carl Friedrich Gauß* wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren. Auf welchen Wochentag fiel sein Geburtstag? (Der 30. 4. 1967 war ein Sonntag; die Jahre 1800 und 1900 waren keine Schaltjahre.)

Die Lösung, zusammengestellt von der Aufgabenkommission des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR lautet:

Von einem Tag des Jahres 1777 bis zum gleichen Tag des Jahres 1967 sind es 190 Jahre, und zwar 45 Jahre zu 366 Tagen und 145 Jahre zu 365 Tagen. In den 45 Jahren rückte der Wochentag um

90 Wochentage,

in den 145 Jahren um 145 Wochentage vor.

Das sind zusammen 235 Wochentage,

d. h. 33mal eine Woche und 4 Wochentage.

Daher war der 30. 4. 1777 ein Mittwoch.

Es ist oft wissenswert, welcher Wochentag zu einem gegebenen Datum der Geschichte oder aus unserem Leben gehört. Die Wochentage lassen sich unter Benutzung von drei Tabellen und der nachstehenden Rechenregel leicht feststellen.

Tabelle 1 (Monatszahlen):

Jeder Monat hat eine bestimmte Zahl und zwar:

Januar 3 (2), Februar 6 (5), März 6, April 2, Mai 4, Juni 0, Juli 2, August 5, September 1, Oktober 3, November 6, Dezember 1.

(In Schaltjahren gelten für die beiden ersten Monate die eingeschlossenen Zahlen. Ein Schaltjahr ist jedes Jahr, dessen beide letzten Stellen durch 4 teilbar sind; von den Schlußjahren der Jahrhunderte, wie 1600, 1700, 1800 usw., jedoch nur die, in denen die Zahl 400 ohne Rest teilbar ist.)

Tabelle 2 (Jahrhundertzahlen):

1— 99	2	1100—1199	5
100— 199	1	1200—1299	4
200— 299	0	1300—1399	3
300— 399	6	1400—1499	2
400— 499	5	1500—4. Okt. 1582	1
500— 599	4	5. Okt. 1582—1699	5
600— 699	3	1600—1699	4
700— 799	2	1700—1799	2
800— 899	1	1800—1899	0
900— 999	0	1900—1999	5
1000—1099	6	2000	4

Tabelle 3 (Wochentage):

So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	S
1	2	3	4	5	6	0

Die Rechnung ist nunmehr wie folgt durchzuführen:

allgemein

am Beispiel des 22. März 1832

Es werden addiert:

Die Tageszahl 22

Die Monatszahl nach Tabelle 1 6

Die Jahrhundertzahl nach Tabelle 2 0

Die Jahreszahl des Jahrhunderts 32

Ein Viertel dieser Jahreszahl (ohne Rücksicht

auf etwa verbleibenden Rest) $\frac{+ 8}{68}$

Division der Summe durch 7; der bleibende Rest gibt den Wochentag nach Tabelle 3 an.

$68 : 7 = 9 \cdot 7 + 5$

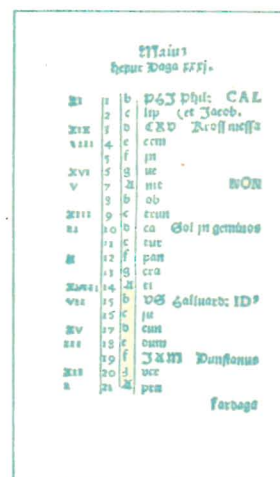
Da der Rest 5 beträgt, war der 22. März 1832, der Todestag Goethes, ein Donnerstag.

Nun könnt ihr an Hand der Tabellen überprüfen, ob der 30. 4. 1777 (Geburtsdatum von *C. F. Gauß*) ein Mittwoch war, wie die amtliche Lösung besagt.

Die Zahlen der Tabelle 1 kann man sich mit Gedächtnishilfen einprägen; aus Tabelle 2 ist wohl nur 0 bzw. 5 zu merken, da fast immer nach Daten aus dem 19. bzw. 20. Jahrhundert gefragt wird; die Zahlen der Tabelle 3 sind ohne Mühe als Reihenfolge der Wochentage zu erkennen. Hat man sich dazu noch die Rechenregel eingeprägt, dann läßt sich die Berechnung der Wochentage ohne weiteres aus dem Gedächtnis durchführen.

Viel Spaß beim Rechnen! Überprüft sogleich den Wochentag des Datums, an dem ihr diese Aufgabe lest; stellt den Wochentag eures Geburtstages fest usw. Vielleicht ist in eurer Familie ein Sonntagskind?

W. Unze



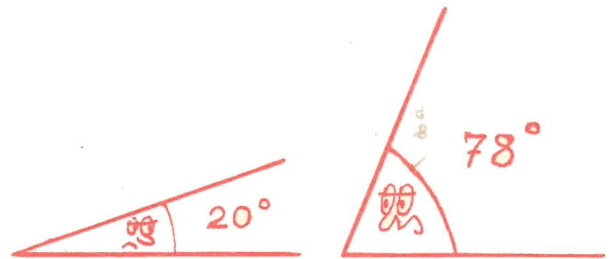
Calendarium Íslenzkt Rím 1597

Der Mathematiklehrer *Gestur O. Gestsson* aus Reykjavík (Island) — eifriger *alpha*-Leser — sandte uns eine Faksimileausgabe eines isländischen Dauerkalenders aus dem Jahre 1597.

Man nannte diese Kalenderbücher *Rím*, weil der größte Teil ihres Inhalts in Strophen abgefaßt war. Diese Methode, die Isländer mit der Zeitrechnung vertraut zu machen, nannte man „Buchreime“ (*bókrím*) im Unterschied zu den „Fingerreimen“ (*fingerím*), einer Methode, allerlei über Zeit und Himmelskörper mit den Fingern (unter Zuhilfenahme von Merkversen) zu errechnen.

In freien Stunden **alpha** heiter

„Lächerlich, erst 20“
Aus: Zeit im Bild 42/68



Hundert gewinnt

Zu diesem Spiel benötigen wir 3 Würfel, einen Becher und die Kenntnis der 4 Grundrechenarten. Spielerzahl beliebig. Jeder Spieler würfelt einmal. Die 3 Augenzahlen werden unter Verwendung der 4 Grundrechenarten verknüpft, das Ergebnis wird notiert. Dann kommt der nächste an die Reihe. Beim zweiten Durchgang wird so verfahren wie beim ersten Durchgang. Die notierten Ergebnisse können nun ebenfalls unter Verwendung der 4 Grundrechenarten verknüpft werden. Wer zuerst 100 erreicht, scheidet aus. Der letzte Spieler hat diese Runde verloren.

Beispiele:

Hans würfelt: 3-5-5 und rechnet so: $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$
 2. Durchgang: 1-3-5 : $(1+3) \cdot 5 = 20$
 3. Durchgang: 2-3-5 : $(3-2) \cdot 5 = 5$
 Nun addiert Hans die Teilergebnisse: $75 + 20 + 5 = 100$
 Oder: 4-5-5 : $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$
 Oder: 1. Durchgang: 2-5-6 : $2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$
 2. Durchgang: 6-6-6 : $(6 \cdot 6) - 6 = 30$
 3. Durchgang: 2-5-5 : $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$

Rechnung: $(60 : 30) \cdot 50 = 100$

Varianten: Für 100 eine andere Zahl nehmen, z. B. 111 oder 99.

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Einstein und die Null

Während des zweiten Weltkrieges wurde Einstein von einer Tageszeitung um ein Interview gebeten. Nachdem die Fragen beantwortet waren, saß man noch beim Tee. Da fragte der Reporter: „Herr Professor, was halten Sie eigentlich von Hitler?“

Einstein überlegte. „Das fragen Sie doch außerhalb dessen, was Sie zu veröffentlichen gedenken?“

Der Reporter wurde stutzig.

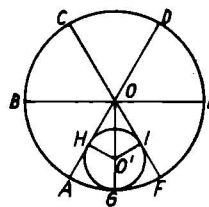
„Als Naturwissenschaftler möchte ich sagen — Hitler ist eine Größe.“

Einstein sah die Entrüstung und fuhr fort: „Na ja, ich meine in diesem Falle eine rechnerische Größe, und das ist in der Mathematik die Null doch zweifellos. Hätte man mit dieser Null vorher gerechnet, brauchte man heut nicht mit ihr abzurechnen.“

Aus: NBI 4/69

Geometry Problem

Let A, B, C, D, E and F be the vertices of a regular polygon and let the area of the larger circle be 1. What is the area of the smaller circle?



Aus: The Mathematical Log,
Dec. 68, Oklahoma

Der Müßiggänger

Ein Müßiggänger hat von Beginn seines 19. Jahres bis zu seinem Lebensende $\frac{3}{8}$ der Zeit verschlafen,

$\frac{1}{16}$ mit Essen und Trinken zugebracht, $\frac{1}{4}$ mit Spazierengehen vertrieben, $\frac{3}{16}$ mit Spielen verdorben,

$\frac{1}{16}$ im Lehnstuhle vergähnt und im ganzen nur zwei

Jahre sich der Arbeit gewidmet. Wie alt ist dieser Mensch geworden?

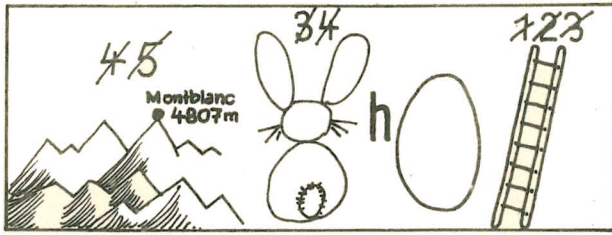
Aus: Allgemeine Arithmetik und Algebra, Köln 1906

Sonst noch 'ne Frage?

Rakete 4/68 (Sonderausgabe auf der MMM Leipzig 1968)



Bilderrätsel



Ekkehart Paditz, OS Lommatzsch, Kl. 7b

Mathematische Begriffe

In die (senkrechten) Spalten sind Wörter der folgenden Bedeutung einzutragen. (Jedes Wort hat fünf Buchstaben.) (ö ist als oe zu schreiben.)

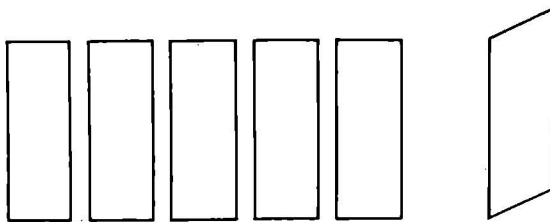
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1. Maßeinheit der Länge,
2. Teil des Koordinatensystems,
3. Maßeinheit der Masse,
4. Besondere Linie im Dreieck,
5. Stellenwert,
6. Maßeinheit der Zeit,
7. griechischer Buchstabe,
8. Zusammenstellung von bestimmten Zahlenwerten,
9. zusätzliches Unterscheidungsmerkmal bei Variablen, (z. B. $a_1, a_2, \dots$)
10. geometrischer Körperper.

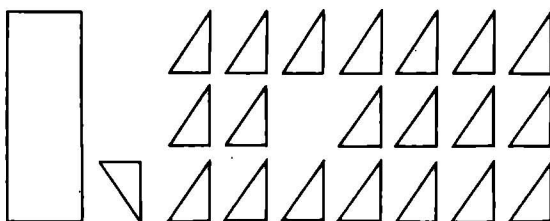
Die Buchstaben in der ersten (waagerechten) Zeile ergeben den Namen einer Wissenschaft.

OStR K.-H. Lehmann, V.L.d.V., Berlin

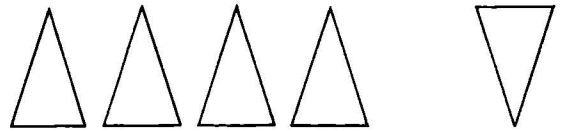
Geometrische Karikaturen



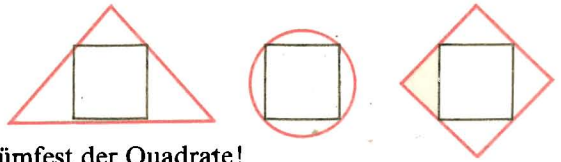
„Er hatte schon immer einen Hang zum Besonderen!“



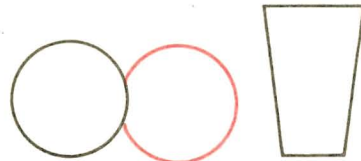
„So, so — wieder mal ohne Hausaufgaben.“



„Sie will zum Ballett!“



Kostümfest der Quadrate!



„Stellen wir erst einmal fest, wer Vorfahrt hatte!“

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

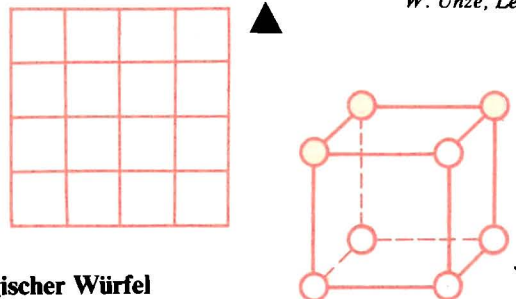
Magisches Quadrat

Die Elemente der Zahlenfolge

$$-16, -14, \dots, 0, +2, +4, \dots, +14$$

sind in die 16 Felder so einzusetzen, daß in jeder Reihe, jeder Spalte und jeder der beiden Diagonalen die Summe stets -4 beträgt. Jedes Element der Zahlenfolge darf nur einmal verwendet werden.

W. Unze, Leipzig



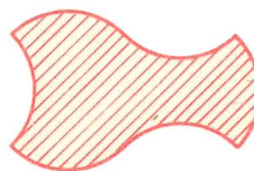
Magischer Würfel

Setze die Ziffern 1 bis 8 so in die Felder der Würfel-ecken ein, daß die Summe der Zahlen der Grundfläche gleich der Summe der Deckfläche ist. Gibt es mehrere Lösungen? Gibt es eine Lösung, bei der die Summe der Zahlen der Grund-, der Deck- und jeder Seitenfläche gleich ist?

Aus: Mamamuka, Sofia

Denkertjes (Denksport)

Überlege, wie groß der Flächeninhalt folgender Figur ist. Nicht rechnen, sondern denken und mit Lineal arbeiten!



Aus: Pythagoras 3-68/69, Niederlande

Leser schreiben an alpha

Als künftige Mathematikstudentin und Abiturientin machen mir die Aufgaben und Erläuterungen dazu sehr viel Spaß.

Elvira Mohn, 9204 Großschirma b. Freiberg

Herzlichen Dank für die interessanten Hefte!
Ola-Andre Strazalla, 22 Greifswald

Ich möchte nicht versäumen, der Redaktion und den Mitarbeitern der *alpha* meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die abwechslungsreiche und ansprechende Gestaltung dieser Schülerzeitschrift. Gerade durch die Aufgaben des Wettbewerbs werden die mathematisch interessierten Schüler an Probleme herangeführt, die über den Lehrstoff des Mathematikunterrichts hinausgehen.

*Hans Kreul, Vater v. Klaus-Jürgen K.,
88 Zittau*

Hiermit möchte ich mich recht, recht herzlich bei Dir, liebe *alpha*, bedanken, daß es Dich gibt. Ich finde Dich einfach prima.

Joachim Stranz, 128 Bernau b. Berlin

Mir macht das Lösen der Aufgaben von 1968, besonders der Wettbewerbsaufgaben, viel Spaß. Es hätten manchmal sogar mehr sein können.

Ilona Boenig, 94 Aue

Die Zeitschrift *alpha* gefällt mir sehr gut. Ich versuche, jede Aufgabe zu lösen, und beteilige mich auch immer am *alpha*-Wettbewerb.

Ehrenfried Zschech, 86 Bautzen

Da wir uns gerne mit mathematischen Knobeleien beschäftigen, wird das Lösen der Wettbewerbsaufgaben in Zukunft ein Teilprogramm unserer Arbeit in der AG werden.

*Zirkel Junger Mathematiker, Kl. 6,
OS Greitz-Pohlitz*

Ich bin Mitglied eines Mathematikzirkels an unserer Schule, und wir benutzen die *alpha* als Arbeitsgrundlage. Unsere Lösungen besprechen wir gemeinsam, nachdem wir sie abgeschickt haben. . . Ich habe den Wunsch, mich später für ein Studium der Mathematik zu bewerben. Deshalb ist es für mich nützlich, wenn ich mich über den Schulstoff hinaus mit mathematischen Problemen beschäftigen kann.

Rolf Osterloh, 3253 Egehn

Wir übersenden 110 Antwortkarten des *alpha*-Wettbewerbs. Wir freuen uns, daß wir die Zahl dieser Karten, im Vergleich zum Vorjahr, mehr als verdoppeln konnten. Die Arbeit mit der Zeitschrift ist ein Hauptbestandteil unserer Arbeit. . . Dieser Tätigkeit ist es auch unbedingt zuzuschreiben, daß wir bei der diesjährigen Kreisolympiade sehr zufriedenstellend abschneiden konnten. Von den 7 Teilnehmern (wir sind eine 8-klassige Landschule mit 65 Schülern in der Mittelstufe) erzielten wir einen 1. Preis, zwei 2. Preise und einen 3. Preis und waren damit die beste Schule im Kreismaßstab. Dieser Erfolg war nur durch die ständige Ausnutzung der Veröffentlichungen in der *alpha* möglich. Wir beginnen aus diesem Grunde mit der Werbung für *alpha* bereits in der 4. Klasse.

E. Pohl, Lehrer, OS Rüditz, Kr. Bernau

In meiner Freizeit löse ich gerne Aufgaben aus der *alpha*, und es wäre schön, wenn sie monatlich erschiene. Meine Leistungen sind sehr gut. Bei der Kreisolympiade konnte ich einen ersten Platz belegen.

Wolfgang Jenschke, 8038 Dresden

Ich möchte mich heute, nachdem wieder ein *alpha*-Jahr vergangen ist, recht herzlich bedanken für alles. Sie können sich vielleicht vorstellen, wie sehr „Mathematiktraining“ hilft. Auch bei mir hat es sich bemerkbar gemacht. Ich bekam — Sie werden staunen — fast das Dreifache an Antwortkarten als im Vorjahr. . . Übrigens habe ich erfahren, daß ich in der Kreisolympiade den 5. Platz erreicht habe. (Ein Zeichen der Übung!)

Helga Rülcke, 18 Brandenburg

Die Zeitschrift ist mir ein guter Helfer bei meinem Lieblingsfach „Mathematik“. Schon zwei Jahre hintereinander belegte ich bei der Kreisolympiade den 1. Platz.

Volker Boos, 4601 Dabrun (i3 J.)

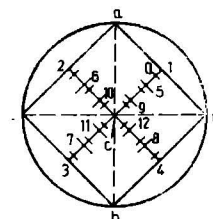
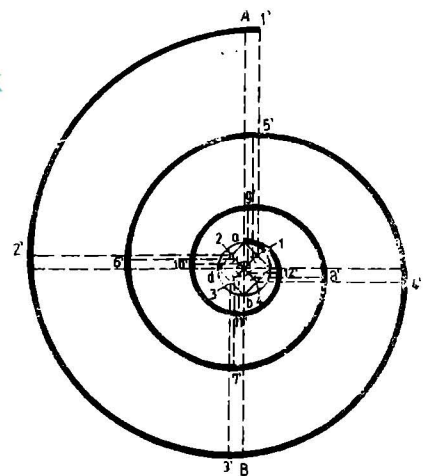
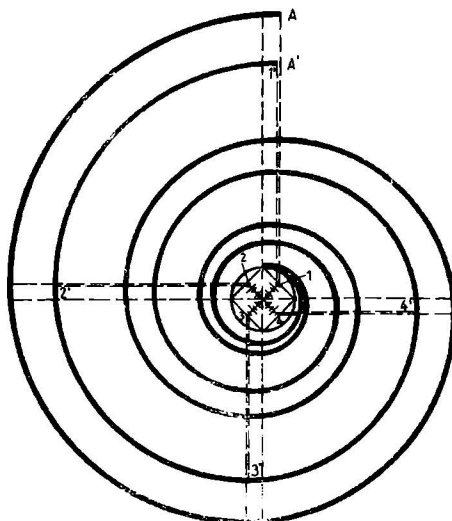
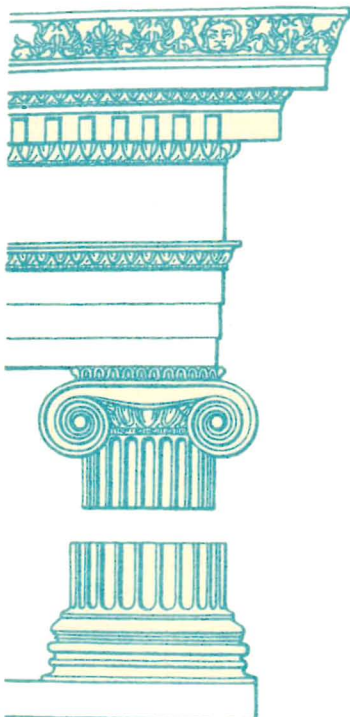
alpha vermittelt mir Interessantes und Wissenswertes. Mein Mathematikdurchschnitt ist 1,0. Durch *alpha* konnte ich so gute Leistungen erzielen.

Christiane Kreuzer, 701 Leipzig

Ich kann heute feststellen, daß ich meine Leistungen im Fach Mathematik wesentlich verbessern konnte und daß Sie mit Ihrer Zeitschrift daran keinen unwesentlichen Anteil hatten. Ich kann Ihnen heute nur sagen, machen Sie weiter so!

Hans-Dieter Lucas, 354 Osterburg

Mit Zirkel und Zeichendreieck



Der VEB Verlag für Verkehrswesen „transpress“, Berlin, stellte der Redaktion eine Auswahl seiner in den letzten Jahren veröffentlichten Bücher zur Verfügung. Mathematikfachlehrer W. Unze, Leipzig, stellte unter Verwendung dieses Materials Aufgaben zur Wiederholung der Grundkenntnisse zusammen. Wer löst mit?

5 ▲ 414 Im Stückgutverkehr von Haus zu Haus werden Behälter vier verschiedener Größen verwendet.

Behälter	Länge	Breite	Höhe (i. mm)
A	1450	800	900
B	1650	950	1300
C	1950	1100	1420
S	1200	800	800

Berechne das Fassungsvermögen der vier unterschiedlich großen Behälter (in m^3)!

Aus: *Lehrbuch für Berufskraftfahrer (Teil 3)*

6 ▲ 415 Von den hauptsächlichsten Typen der Verkehrsflugzeuge der UdSSR werden die höchst zulässige Anzahl der Passagiere und die Startmasse der Flugzeuge genannt:

Typ	Anzahl der Passagiere	Startmasse in kg	Startmasse je Passagier in kg
An 10 A	132	55 000	
An 24	50	21 000	
IL 18 B	110	61 200	556
IL 18 E	122	61 200	
IL 62	186	157 500	
Jak 40	24	12 400	
Tu 104	100	74 500	745
Tu 144	220	165 000	
Tu 124	56	36 000	
Tu 134	72	42 000	

Bei welchem Flugzeugtyp ist die Startmasse je Passagier am kleinsten? Ergänze die Aufstellung entsprechend!

Aus: *aerotyp, Verkehrsflugzeuge*

7 ▲ 416 Die Durchmesser der Treibräder unserer Lokomotiven sind von ihrem Verwendungszweck (Güterzuglokomotive, Schnellzuglokomotive usw.) abhängig.

Die Treibraddurchmesser betragen bei der

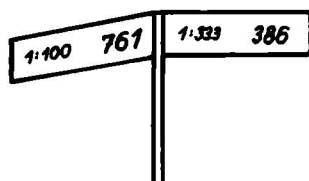
- a) elektrischen Lokomotive der Baureihe E 410 1250 mm,
- b) dieselelektrischen Lokomotive der Baureihe TE 40 1050 mm,
- c) Dampflokomotive der Baureihe 62 1750 mm.

Wieviel Umdrehungen U führt ein Treibrad dieser Lokomotiven auf der Strecke Leipzig—Berlin (165 km) aus?

Aus: *Eisenbahn-Jahrbuch 1968*

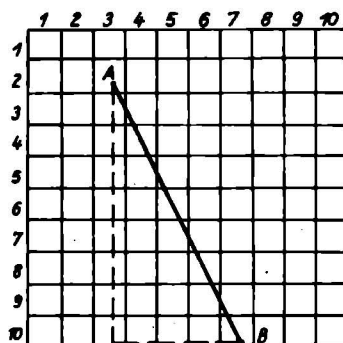
8 ▲ 417 Auf Bahnstrecken haben die durch Gelände bedingten Neigungen großen Einfluß auf den Fahrtablauf des Zuges. So werden u. a. Neigungen bzw. Neigungswechsel dem Lokomotivführer durch entsprechende Zeichen bekannt gegeben.

Was bedeuten diese beiden abgebildeten Zeichen, und welcher Höhenunterschied besteht zwischen Anfang und Ende eines so markierten Streckenabschnittes?



Aus: *Lehrbuch für die sozialistische Berufsbildung im Betriebs- und Verkehrsdienst der Deutschen Reichsbahn, Teil 3*

9 ▲ 418 Der neue Stückguttarif der Deutschen Reichsbahn ist auf der Basis der Luftlinienentfernung aufgebaut. Zur Berechnung wurde eine maßstabgerechte Landkarte der DDR mit einem Gitternetz überzogen; die Seitenlänge der Quadrate des Gitternetzes beträgt in der Wirklichkeit 10 km. Es entstehen so in der waagerechten Richtung 51 und in der senkrechten 37 Quadrate, die entsprechend nummeriert sind. Jeder Ort in der DDR kann so durch ein Zahlenpaar, die sogenannte Quadratnummer, bestimmt werden.



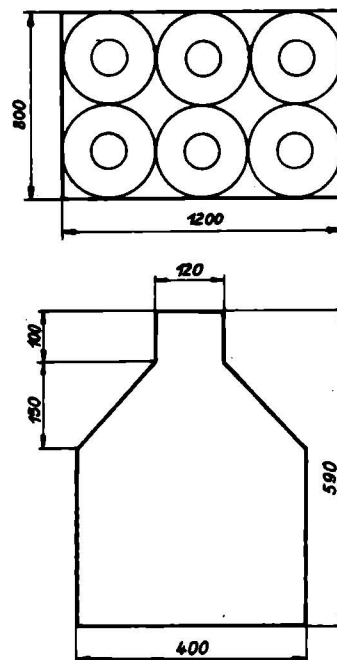
In der Abbildung ist die Lage der Orte A und B eingezeichnet, deren Luftlinienentfernung gleich der Länge l der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist. Berechne die Länge der Luftlinie zwischen den Orten A und B!

Aus: *Stückgut — Transport — Ordnung und Tariffragen*

10 ▲ 419 Das Palettensystem beim Transport, Umschlag und Lagerung kleiner Ladeeinheiten mit der Palette mit den international verbindlichen Abmessungen von 800 mm $\times$ 1200 mm nutzbarer Fläche ist zum Kernstück aller Rationalisierungsmaßnahmen unserer Transportunternehmen geworden. Aus der Abbildung ist das Palettierungsschema für die Palettierung von Kannen

bestimmten Inhalts auf der Flachpalette ersichtlich. Berechne aus den angegebenen Maßen

- a) den Inhalt einer bis 2 cm unter den oberen Rand gefüllten Kanne mit Rohstoff für unsere Seifenindustrie (unter Vernachlässigung der Blechstärke der Kanne), und
- b) die Masse des auf der Palette transportierten Rohstoffes bei einer Dichte von $1,25 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$!



Aus: *Palettier-Katalog*

Folgende Transpress-Bücher empfehlen wir unseren jungen Lesern:

Heinz Seyfert
Mein Motorrad
296 Seiten, 116 Abb., 7,80 M

Heinz Kunicki
Deutsche Dieseltreibfahrzeuge
gestern und heute
328 Seiten, 144 Abb., 38 Tafeln, 13,80 M

Birr/Kuschinsky/Uhlig
Leitfaden der Navigation
Terrestrische Navigation
394 Seiten, 165 Abb., 12 Tafeln, 18,00 M

Carl-Lothar Heinecke
Internationale Schiffsmodell-Revue
Eine Übersicht vom Schiffsmodellsport in Europa
116 Seiten, 35 Abb., 5 Tafeln,
36 Fotos, cellophanisiert, 12,80 M

Heinz A. F. Schmidt
Historische Flugzeuge
208 Seiten, 380 Abb., Halbl., cell., 16,80 M

Post vom Kosmonauten

Am 5. Februar 1969 konnten die Mitglieder des Schülerclubs *alpha* folgendes in ihr Tagebuch eintragen:

Heute war ein besonderer Tag für uns. Es war die letzte Veranstaltung vor den Winterferien. Aber trotzdem mühten wir uns alle mit geometrischen Problemen und mit Gleichungen ... Doch gerade an diesem Tage gab es Grund zu besonderer Freude: Wir hatten endlich Antwort bekommen auf einen Brief unserer Arbeitsgemeinschaft an den *Fliegerkosmonauten Beregowoi!* Verena hatte ihn mit vielseitiger Unterstützung in die russische Sprache übersetzt. Während des Jahres hatten wir uns mit Problemen des Weltraumes beschäftigt, waren im Jenaer Planetarium, hatten Verbindung mit Herrn Dr. Marx geknüpft und darüber dem Fliegerkosmonauten geschrieben.

Und nun kam seine Antwort, über die wir uns natürlich sehr freuten. Der Brief des Kosmonauten wird einen Ehrenplatz in unserem Tagebuch einnehmen.

Aus einem Brief an die Redaktion:

Unser Name wurde analog der Mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* gewählt. Wir benutzen sie oft in unseren Veranstaltungen. Schülerclub nennen wir

uns deshalb, weil wir nicht nur „rechnen“, sondern daneben auch Veranstaltungen vielfältiger Art durchführen, wie Foren, Exkursionen, Lichtbildervorträge. Am Club beteiligen sich 12 Schüler der 7. und 8. Klasse. Zu besonderen Veranstaltungen werden auch andere Schüler eingeladen. Ebenfalls erscheinen von uns Wandzeitungen im Schulhaus.

Rosemarie Steiner
Leiter der AG Mathematik Schülerclub *alpha*
Polytechnische Oberschule „Reinstädter Grund“,
6901 Dröbnitz

An die Mitglieder des mathematischen Zirkels *alpha*
Liebe Kinder!

Ich danke Euch für Euren Brief, in dem Ihr so gut die Arbeit Eures Zirkel- und Pionierlebens beschreibt. Alles, was Ihr tut, muß sehr interessant sein. Ich wünsche Euch von ganzem Herzen Erfolg, Vielfalt in der Arbeit, eine feste Gesundheit und Glück. Auf Eure Bitte schicke ich Euch ein Foto mit Autogramm.

Mit freundlichem Gruß

ЛЕТУЧКО-КОСМОНАВТ СССР

Toperov
T. TOPEROV

Wieviel Urlauber lesen auf unserem Suchbild die „alpha“?

