

**Mathematische
Schüler-
zeitschrift**

alpha



**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin**

**3. Jahrgang 1969
Preis 0,50 M
Index 31059**

4

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil. E. Hammeister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin);
Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröter (Dresden); Studienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); W. Unze (Leipzig); Dr. habil. W. Walsch (Halle);

Redaktion:

StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
0,50 M, im Abonnement zweimonatlich
(1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Aus: Wen die Götter lieben v. L. Infeld (S. 73, 74); Archiv: Erziehungsministerium der VAR, Kairo (S. 77); J. Lehmann, Leipzig (S. 83); Archiv: Hochschulbildstelle der TH Ilmenau (S. 87); F. Fricke, Berlin, aus ZIB 42/68 (S. 88); J. Lehmann, Leipzig (S. 95); Foto Jung, Neustrelitz (S. 95); Kreisbildstelle Schmalkalden (S. 96); Zentralbild (S. 86); Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:

Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollensetdruck)

Redaktionsschluß: 2. Juni 1969

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 73 Evariste Galois — Mathematiker und Patriot (5)*
Prof. Dr. O. Stamford/Dr. E. Hertel, Sektion Mathematik,
Friedrich-Schiller-Universität Jena
- 75 Vom IMO-Teilnehmer zum Doktor-Aspiranten (7)
H. Ernst, Sektion Physik, Karl-Marx-Universität Leipzig
- 76 Mathematikprobleme — selbst gemacht (7)
Dr. Naszla H. A. Khedre, Wissenschaftliche Mitarbeiterin für Mathematik in der
Planungsabteilung des Erziehungsministeriums der VAR (Oberschulen), Kairo
- 77 Aus der Vereinigten Arabischen Republik berichtet (5)
E. Kirchner, Erziehungsministerium der VAR, Kairo
- 78 Rechnen mit Resten, Teil 2 (6)
Dr. G. Lorenz, Sektion Mathematik, Bereich Schulmathematik und Methodik,
Humboldt-Universität Berlin
- 80 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung Teil 4 (7)
J. Frommann, Klement-Gottwald-OS, Berlin
- 82 Multicurve (9)
Dr. E. Schröder, Institut für Geometrie, Technische Universität Dresden
- 83 Wir stellen vor: 22 Junge Mathematiker (5)
die erfolgreichsten Teilnehmerinnen der VIII. Olympiade
Junger Mathematiker der DDR
- 84 IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (5)
Aufgaben der 1. Stufe (Schulolympiade)
Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
- 87 Eine Aufgabe von
Prof. Dr. rer. nat. habil. H. Sachs (8)
Direktor der Sektion „Mathematik, Rechentechnik und Ökonomische Kybernetik“
Technische Hochschule Ilmenau
- 88 In freien Stunden: *alpha* heiter (5)
Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig,
Oberlehrer H. Pätzold, Waren/Müritz
- 90 Lösungen (5)
- 94 Wir stellen ein Zahlenrätsel auf (5)
W. Träger, Schloßberg-Oberschule Döbeln
- 95 *alpha* gratuliert (5)
Redaktion *alpha*
- 96 Pioniere des *alpha*-Wettbewerbs (5)
Fachkommission Mathematik des Kreises Schmalkalden
- III./IV. Umschlagseite: Büchertips für unsere Leser (5)
Zusammenstellung: Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Evariste Galois — Mathematiker und Patriot



In den frühen Morgenstunden des 30. Mai 1832 fand in Paris ein Pistolenduell statt — für die damalige Zeit war das sicher nichts Besonderes. Auch daß einer der Duellanten schwer getroffen zu Boden sank, war wohl der „Normalfall“ für den Ausgang eines solchen Duells. Nicht üblich war aber, daß der Getroffene nach dem Duell allein auf dem Wege liegend gefunden wurde — seine Sekundanten hatten ihn verlassen. Das Mysteriöse dieses Duells wird jedoch deutlicher, wenn man die weiteren Ereignisse verfolgt.

Der Getroffene — ein Mitglied der „Gesellschaft der Freunde des Volkes“, einer Vereinigung der progressivsten Republikaner der damaligen Zeit — verstarb einen Tag nach dem Duell im Krankenhaus. Als sich seine Freunde trafen, um Einzelheiten des Begräbnisses zu besprechen, das zu einer Demonstration der Republikaner werden sollte, trat plötzlich die Polizei auf und verhaftete den größten Teil der Anwesenden, obwohl das Duell und auch diese Zusammenkunft „geheim“ geblieben war. All das berechtigt zu der Annahme, daß das Duell wahrscheinlich durch Intrigen der Polizei und mit ihrer Hilfe zustande gekommen war. Wer war das Opfer dieser Intrige, zu dessen Begräbnis — trotz der Maßnahmen der Polizei — zwei- bis dreitausend Republikaner anwesend waren? Das Opfer war ein junger Mann, von dem der deutsche Mathematiker Felix Klein sagte: „Um 1830 leuchtete ein neuer Stern von ungeahntem Glanze am Himmel der reinen Mathematik auf, um freilich, einem Meteor gleich, sehr bald zu verlöschen: *Evariste Galois*.“ Ein Mann, dessen Name heute jedem Mathematiker bekannt ist.

Worin liegen nun die Ursachen für das tragische Ende dieses hervorragenden mathematischen Genies? Um diese Frage beantworten zu können, muß man sich die Geschichte Frankreichs im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts und die Entwicklung des jungen *Galois* vergegenwärtigen.

Evariste Galois wurde am 25. Oktober 1811 in Bourg-la Reine bei Paris als Sohn des späteren Bürgermeisters dieser Stadt geboren. Im Jahre 1823 trat *Galois* in das *Collège Louis-le Grand* ein, der größten und wichtigsten Schule zur Erziehung von loyalen Untertanen

des Königs im damaligen Paris. Daß die Schule ihr Erziehungsziel nicht bei allen Schülern verwirklichen konnte, beweisen die Namen *Robespierre*, *Viktor Hugo* — und eben *Evariste Galois*, die alle Schüler von *Louis-le Grand* waren.

Der junge *Galois* litt unter der Abgeschiedenheit und Strenge, die das Internat beherrschten. Seine Lehrer bezeichneten ihn als zerstreut und verträumt. Er mußte die vorletzte Klasse noch einmal wiederholen wegen nicht ausreichender Leistung. Um der Langeweile der Hauptgegenstände Griechisch und Latein zu entgehen, begann *Galois* zum ersten Mal am Mathematikunterricht teilzunehmen, der an der Schule nicht obligatorisch war! Mit 16 Jahren begann also *Galois* sich erstmalig mit Mathematik zu beschäftigen, und er war vom ersten Tage an von ihr fasziniert — er war von da an „von einer Leidenschaft für die Mathematik besessen“. An der Schule wurde elementare Geometrie nach *Euklid* und elementare Algebra unterrichtet. Bald befriedigte ihn der Unterricht nicht mehr, er konnte von seinen Lehrern kaum noch etwas lernen, denn er studierte in seiner Freizeit die Werke der damals bedeutendsten französischen Mathematiker *Legendre* und *Lagrange*. Er widmete sich besonders der Algebra, deren Unvollkommenheit gegenüber der Geometrie ihn nicht befriedigte — man konnte damals die allgemeine Lösung von Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades angeben, über Gleichungen höheren Grades gab es keine allgemeingültigen Aussagen.

Bereits nach einem Jahr veröffentlichte *Galois* seine erste Arbeit, den Beweis eines Satzes über die periodischen Kettenbrüche, in einer mathematischen Zeitschrift. Sie enthielt noch keine wesentlichen Ergebnisse — diese „sparte“ er auf für ein Manuskript, das er an die *Académie française* (der französischen Akademie der Wissenschaften) zur Begutachtung schickte. Dieses Manuskript enthielt die Grundgedanken der heute als *Galoissche Theorie* bekannten Methode zur Untersuchung von algebraischen Gleichungen, die sich wesentlich auf die von *Galois* entwickelte Gruppentheorie stützt.

Die Neuheit und Tiefe dieser Gedanken erschwerten

Das war die erste große Enttäuschung im Leben des jungen *Galois*, der die berechnete Hoffnung hatte, mit dieser Arbeit bekannt, wenn nicht berühmt zu werden. Die zweite Enttäuschung folgte, als *Galois* die Aufnahmeprüfung an der *Ecole polytechnique*, an der er Mathematik studieren wollte, zum zweiten Male nicht bestand. Auch hier muß angenommen werden, daß seine Antworten auf die Fragen des Prüfers nicht verstanden wurden, weil sie „zu mathematisch“ waren. Auch seine zweite an die Akademie eingesandte Arbeit wurde von *Poisson* als unverständlich und unvollständig abgelehnt.

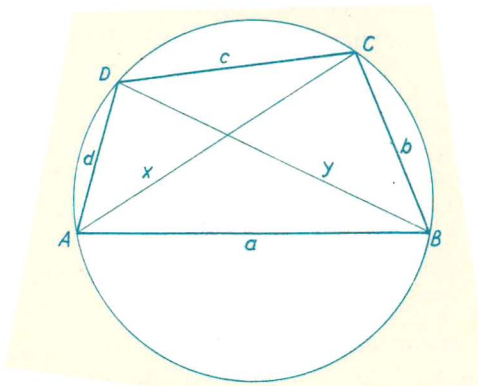
Seine wissenschaftliche Arbeit blieb unbekannt, sein mathematisches Genie unerkannt, aber der Polizei war er durch seine politische Aktivität als Aufrührer bekannt, und sie suchte nach Mitteln, um gegen ihn einschreiten zu können. So wurde er im Mai 1831 nach einem Bankett, auf dem in vorgerückter Stunde mißfällige Äußerungen gegen den König *Louis Philippe* gefallen waren, verhaftet. Er mußte allerdings nach einer vierwöchigen Untersuchungshaft freigesprochen werden. Aber bereits einen Monat später, am 14. Juli 1831, dem Erinnerungstag des Bastillesturmes, wurde er erneut verhaftet und diesmal auf Grund von gefälschtem Beweismaterial zu sechs Monaten Freiheitsentzug verurteilt. Seine Strafe mußte *Galois* in Sainte-Pélagie verbüßen. *Galois* verbrachte insgesamt mehr als 9 Monate seines kurzen Lebens im Gefängnis. In der Nacht vor dem Duell, das vier Wochen nach seiner Haftentlassung stattfand, verfaßte *Galois* sein „Mathematisches Testament“ in Form eines Briefes an *Auguste Chevalier*. Obwohl der Brief noch im gleichen Jahr veröffentlicht wurde, verging noch ein halbes Jahrhundert, bevor die Bedeutung der Arbeiten *Galois* erkannt und er als einer „der genialsten Mathematiker aller Zeiten“ (*Perron*) gewürdigt wurde. Über seinen hervorragenden mathematischen Leistungen sollte man jedoch nicht vergessen, auch die

E. Hertel/O. Stamford (Aus: Wurzel 7/8 – 68)

[illegible]

Ein schwieriges geometrisches Problem

▲ 420 „Finde die zwei Diagonalen x und y eines Vierecks, das in einen Kreis eingezeichnet ist, mittels seiner vier Seiten a, b, c, d !“



Wer kann obige Aufgabe lösen?

* Auch in der DDR ist eine deutsche Ausgabe dieses bedeutenden Romans erschienen. Wir empfehlen dessen Lektüre allen interessierten *alpha*-Lesern. d. R.

Vom IMO-Teilnehmer zum Doktor- Aspiranten

Sicher wäre die Mannschaft der Deutschen Demokratischen Republik ohne Sieg von den olympischen Sommerspielen aus Mexiko in die Heimat zurückgekehrt, hätten am Anfang nicht Wochen, Monate und Jahre harten Trainings gestanden. Sicher könnte sich auch unsere Gabi kaum mit dem Weltmeistertitel schmücken, wäre nicht jede ihrer Bewegungen hundertfach geübt und ihr Tagesablauf vor solch großen sportlichen Bewährungsproben exakt festgelegt ... Die Mannschaft unserer Republik, die im Jahre 1960 in das Gastgeberland Rumänien zur II. Internationalen Mathematikolympiade fuhr, war mit einer Wandergruppe vergleichbar, die nach einem Spaziergang durch das Elbsandsteingebirge nun hohe Karpatengipfel erklimmen sollte. Ich gehörte dieser Mathematik-Expedition an und bewunderte wie meine Freunde die Schönheit des rumänischen Landes, durch das uns die aufmerksamen Gastgeber fast zwei Wochen lang führten. Diesem beeindruckenden Erlebnis konnten wir im Wettstreit mit fast durchweg gut trainierten mathematischen Spitzensportlern leider keine gleichwertige Leistung entgegensetzen. Es zeigte sich, daß auch hier ohne tägliches geplantes und kontrolliertes Üben, ohne Tests unter wettkampfmäßigen Bedingungen weder mit mannschaftlicher Geschlossenheit Siege errungen, noch systematisch Talente gefunden und gefördert werden können. Inzwischen sind wir neun Jahre älter geworden, und die Siegerlisten der letzten Mathematikolympiaden weisen aus, daß an die Lösung dieser Aufgabe — in der Mathematikausbildung neben der Breite auch eine entsprechende Tiefe zu erreichen — verantwortungsvoll und konsequent herangegangen wurde. Wir haben viel erreicht und sind unbescheidener geworden. Das ist gut so. Von unseren Teilnehmern an jener II. IMO treffe ich manchmal noch zwei: Einer studierte Medizin, der andere Veterinärmedizin ...

Ich selbst bin mit meinem Physikstudium an der Leipziger *Karl-Marx-Universität* der Sache ziemlich treu geblieben, denn Physik und Mathematik müssen zwei gute Schwestern sein. Nehmt ein beliebiges Physikbuch zur Hand und schlagt es auf! — Der Beweis scheint mir hinreichend (notwendig war er

sicher nicht). Während der Experimentalphysiker bestrebt ist, seine Experimente unter Benutzung von Modellen in Formeln zu kleiden und aus ihnen weitere wichtige Schlüsse zu ziehen, liefert der theoretische Physiker das mathematische Gerüst für neue erfolgversprechende Versuche. Dieses Bild ist natürlich sehr vereinfacht und sagt noch nichts über die Beziehungen der Physik als Wissenschaft zur Praxis und nichts über die Menschen, die die Physik zum Nutzen der Gesellschaft in mittelbar und unmittelbar sichtbare Erfolge umsetzen, aus. Gerade hier haben und werden sich im Rahmen der 3. Hochschulreform bedeutende Veränderungen ergeben, die ein vor allem der Zukunft angemessenes Wissenschaftssystem schaffen werden. Diese Umgestaltung erlebe ich als Aspirant an der Sektion Physik mit und freue mich natürlich, daß in dem jüngsten Staatsratsbeschuß zur Durchführung der 3. Hochschulreform die großartige Perspektive von Mathematik und Physik ganz besonders unterstrichen wird.

Dieser Beschluß muß nun mit Leben erfüllt werden, mit dem erfolgreichen Schaffen sozialistischer Forschungskollektive, in denen junge Studenten neben oder besser gemeinsam mit erfahrenen Wissenschaftlern arbeiten. Die Hörsäle auch unserer Sektion werden sich entsprechend den erhöhten Anforderungen der strukturbestimmenden Zweige der Industrie mit weit mehr Studenten als bisher füllen. Doch bevor man Physikstudent wird, steht natürlich die Frage: Was bin ich als Physikabsolvent, was muß ich als Diplomphysiker sein?

Walter Ulbricht sagte im November 1966 in Dresden, daß unsere sozialistische Gesellschaft von den Absolventen unserer Universitäten verlangt, „daß sie

1. den Marxismus-Leninismus zutiefst begriffen haben, eine klassenmäßige Position in unserem nationalen Kampf einnehmen und die Zusammenhänge von Politik, Ökonomie, Ideologie und Wissenschaft verstehen;
2. über ein breites Spektrum von Kenntnissen ihres Fachgebietes verfügen, die es ihnen ermöglichen, dem raschen Fortschreiten der Technik und der Wissenschaft zu folgen;
3. über spezielle moderne Kenntnisse ihres Fachgebietes verfügen, über ein anwendungsbreiteres Wissen, das es ihnen ermöglicht, den Fortschritt der Wissenschaft und Technik mitzubestimmen;
4. sich die Schätze der deutschen und internationalen Kultur angeeignet haben.“

Hieraus und aus der besonderen Rolle, die die Physik im Rahmen der Naturwissenschaft und Technik einnimmt, ergeben sich für das Berufsbild des Physikabsolventen besondere Merkmale, die Prof. Dr. rer. nat. habil. H. Pfeifer aus Anlaß der Gründung der Sektion Physik am 29. 1. 1969 anführte:

„Hier sind insbesondere der hohe Grad der theoretischen Durchdringung und die Möglichkeit, ihre Ergebnisse und Methoden in den verschiedenen Bereichen der naturwissenschaftlich-technischen Forschung und Entwicklung anzuwenden, zu nennen. Unter diesen Umständen gewinnt die Physik beim umfassenden Aufbau des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus in der DDR einen ständig wachsenden Einfluß auf die Entwicklung der Arbeitsproduktivität sowie auf die Erschließung neuer Produktionsmöglichkeiten und Energiereserven. Sie nimmt damit eine bedeutende Stellung in der Auseinandersetzung zwischen dem kapitalistischen und sozialistischen Lager ein und bedingt, daß die Arbeit des Physikers stets mit politischen Entscheidungen verbunden ist und Probleme der Organisation und Leitung eines sozialistischen Industriebetriebes und der Forschung berührt. Zu den wichtigsten Teilgebieten der Physik, auf denen vom Physiker umfassende Kenntnisse verlangt werden, gehören neben der allgemeinen Physik vor allem Elektronik und Physik der Hülle, des Kerns und des Festkörpers. Dabei sollen die theoretischen Grundlagen, experimentelle und theoretische Methoden sowie Zusammenhänge und Schlußfolgerungen für die Anwendung beherrscht werden. Im Zusammenhang mit der experimentellen Physik kommt der modernen Meßtechnik eine besondere Bedeutung zu. Natürlich muß der Physiker zur Bewältigung physikalischer Fragestellungen und praktischer Anwendung der Physik über ein solides mathematisches Rüstzeug verfügen. Neben diesen Grundkenntnissen in Mathematik und Physik werden noch Spezialkenntnisse gefordert, die im Zusammenhang mit der Diplomarbeit durch vertieftes Studium eines Teilgebietes erworben werden. Abschließend seien besondere Fähigkeiten, die von einem Physiker erwartet werden, angeführt:

- Das Vermögen, seine gesellschaftliche Stellung und Verantwortung für die Nutzung der wissenschaftlichen Ergebnisse im Interesse der DDR zu erkennen und zu handeln;
- die Fähigkeit zur Leitung eines Kollektivs;
- die Fähigkeit zur fachlichen Anleitung zugeworbener Fachkräfte;
- die Fähigkeit zur Vorbereitung von Entscheidungen durch klare Diskussionen der Vor- und Nachteile mehrerer möglicher Lösungen eines Problems;
- das Vermögen der selbständigen Einarbeit in physikalische Probleme mit Hilfe der Fachliteratur;
- die Abstraktionsfähigkeit;
- die Übung im Erkennen logischer Zusammenhänge;
- die Fähigkeit zur Extrapolation von Entwicklungstendenzen.“

H. Ernst

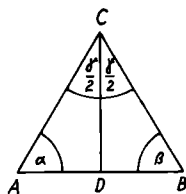
Mathematikprobleme – selbst gemacht

Liebe Mädchen und Jungen in der DDR!

Ich habe eure Mathematikzeitschrift *alpha* kennengelernt und mir gedacht, daß bestimmt auch euch Freude machen kann, was ich mit anderen Schülern ausprobiert habe. Ich wollte nämlich feststellen, wie Schüler selbst mathematische Zusammenhänge entdecken können und die verschiedenen Stücke anders zusammenstellen und gute mathematische Vorstellungen entwickeln.

Jedesmal ist eine geometrische Figur mit gegebenen Beziehungen dargestellt. Die Aufgabe besteht darin, soviel wie möglich mathematische Probleme damit „aufzubauen“, *and die noch niemand bei dieser Figur gedacht hat*. Dabei braucht sich das nicht auf geometrische Probleme zu beschränken, sondern man kann alle Teilgebiete der Mathematik dazu verwenden. Die Aufgaben brauchen auch nicht gelöst, sondern bloß als Sätze formuliert zu werden. Die Lösung kann man dem Freund oder der Freundin überlassen.

Damit ihr es gut versteht, folgt erst ein ausführliches Beispiel:



Es ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ und $\overline{CD}$ als Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze gegeben. (Fig. 1) Es sind möglichst viele Probleme aus Geometrie, Trigonometrie, Algebra, Vektorrechnung oder Differentialrechnung zu formulieren. Einige mögliche Probleme könnten die folgenden sein:

1. Man beweise, daß $\overline{CD}$ das Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt.
2. Man beweise, daß $\overline{CD}$ die Höhe und Seitenhalbierende des Dreiecks ABC ist.
3. Man beweise, daß die Fläche des Dreiecks ADC die Hälfte der Fläche des Dreiecks ABC ist.
4. Man beweise, daß $\overline{DB} = \overline{CB} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$.

5. Man beweise, daß der Radius des einbeschriebenen Kreises durch $r = \overline{AD} \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$ gegeben ist.

6. Man beweise, daß der Radius des um-
beschriebenen Kreises durch $R = \frac{1}{2} \frac{\overline{CB}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$
gegeben ist.

7. Wenn das Dreieck um $\overline{CD}$ rotiert, dann entsteht ein Kegel mit der Höhe $\overline{CD}$ und dem Volumen $\frac{1}{3} \cdot \overline{AD}^2 \cdot \overline{CD}$.

8. Man beweise, daß
 $(2 \cdot \overline{AC} + \overline{AB})^2 \geq 3 \overline{AC} (2 \cdot \overline{AB} + \overline{AC})$ ist.

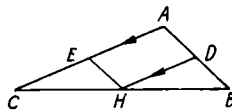
9. Man zeige, daß $\vec{CD} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$ ist.

10. $\lim_{\gamma \rightarrow 90^\circ} \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{2}.$

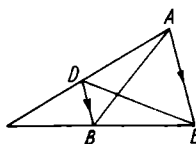
11. Bei konstanter Summe $\overline{CD} + \overline{AB}$ erhält man die größte Fläche des Dreiecks, wenn $\overline{CD} = \overline{AB}$ ist.

Nun nehmt euch 30 Minuten Zeit und versucht, in ähnlicher Art zu den folgenden Figuren Probleme und Aufgaben zu finden, die ihr noch nicht in einem Mathematik-lehrbuch gesehen habt.

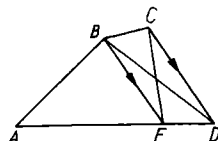
▲ Aufgabe 1: D und E sind jeweils Mittelpunkte der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$, $\overline{DH} \parallel \overline{AC}$.



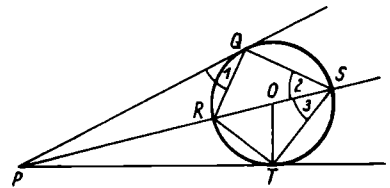
▲ Aufgabe 2: $\overline{DB} \parallel \overline{AE}$.



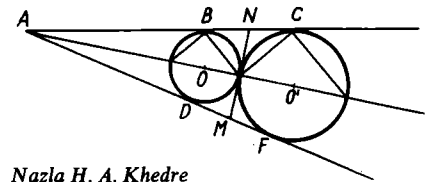
▲ Aufgabe 3: $\overline{BF} \parallel \overline{CD}$.



▲ Aufgabe 4: PQ und PT sind Tangenten an den Kreis mit dem Mittelpunkt O . PRS enthält den Mittelpunkt. Die Winkel 1, 2 und 3 sind gleich.



▲ Aufgabe 5: ABC , ADF und MN sind gemeinsame Tangenten an die zwei Kreise mit den Mittelpunkten O bzw. O' .



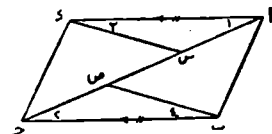
Nazla H. A. Khedre

Der vorliegende Beitrag zeigt Gedanken aus der Dissertation von Frau Dr. Nazla H. A. Khedre, verteidigt am Institut of Education Library, London University, 1968.

- 4 -

تمرین محلول

ا ب ح و شکل و باعی فیہ ح = ا و یوازہ وصل فطرہ : ح نم
اخذت علیہ نقطۃ مثل سر و وصل سرہ ہرسم ن ب مستقیم لاقی : ح فی سرہ
بحث کانت : د ا و سرہ = د ح و سرہ
انفت آن : و سرہ = ب و سرہ



(نکلی ۲)

المعطيات : ا ب ح و شكل رباعي $a = b$ و $\angle B = \angle C$ و $\angle A = 90^\circ$
 نقسمان على ج د بحيث كانت $d = e$ و $b = c$ (شكل ٢)
 المطلوب إثبات أن : $m = n$
 البرهان : ا // ب و $c = d$ قاطع
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$ بالتبادل

في ا د هـ و ز ح ط ي ق ر ك خ ع ف ص غ

فـ ١ د ٢ هـ ٣ و ٤ ز ٥ ح ٦ ط ٧ ي ٨ ق ٩ ر ١٠ ك ١١ خ ١٢ ع ١٣ ف ١٤ ص ١٥ غ

(فرخا) ١ = ح > ب (فرخا)
(برمانا) ٢ = د > ن
(فرخا) ٤ = ز > ط

} في ا د هـ و ز ح ط ي ق ر ك خ ع ف ص غ

∴ يتطابق المثلثان وينتج أن :

وهو المطلب

$$u = \frac{1}{2} \ln 2$$

Ausschnitt aus dem Geometriebuch für Vorbereitungsklassen (S. 48). Arabisch wird von rechts nach links geschrieben, Zahlen jedoch wie in der DDR.

Aus der VAR berichtet

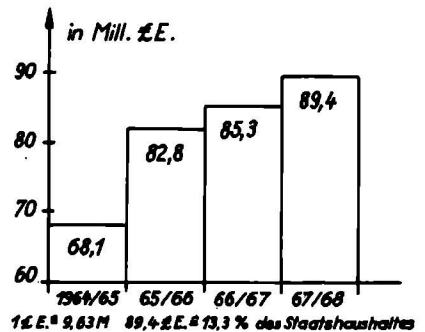
Seit der Revolution im Jahre 1952 wurden in der *Vereinigten Arabischen Republik* große Anstrengungen zur Verbesserung der Volksbildung unternommen. Eine große Anzahl neuer Schulen wurde gebaut, Schulgeldfreiheit eingeführt und ein energischer Kampf gegen das Analphabetentum begonnen. Schulpflicht besteht für alle Kinder zwischen dem 6. und 12. Lebensjahr. Nach Beendigung der sechsjährigen Grundschule werden die besten Schülerinnen und Schüler in eine dreijährige Vorbereitungsschule und davon wieder die besten in eine dreijährige Oberschule oder Technische Schule aufgenommen.

Trotz der mehrfachen israelischen Aggressionen, die dem Land große Opfer abverlangen, stellt die Regierung einen beträchtlichen Anteil des Staatshaushaltes für das Erziehungswesen zur Verfügung. 1965/66 besuchten 78,6% der Kinder im schulpflichtigen Alter die Grundschule. Dieser Prozentsatz konnte nicht, wie geplant, erhöht werden, da durch die imperialistische Aggression im Jahre 1967 Schulen in den Bezirken Sinai,

Suez und Ismaila geschlossen werden mußten. Alle Flüchtlingskinder wurden wieder eingeschult. Zwischen der VAR und der DDR bestehen Handelsbeziehungen. Im Rahmen eines Kulturbkommens wurde u. a. vereinbart, daß Fachleute des Erziehungswesens ausgetauscht werden. Seit einiger Zeit arbeiten im Erziehungsministerium in Kairo Experten aus der DDR auf dem Gebiete des Mathematik-, Physik- und Chemieunterrichts. Gemeinsam mit ägyptischen Pädagogen werden neue moderne Lehrpläne und einzelne Stoffeinheiten in Schulversuchen ausprobiert. Das ist ein Zeichen echter und ehrlicher Zusammenarbeit.

Fakten:

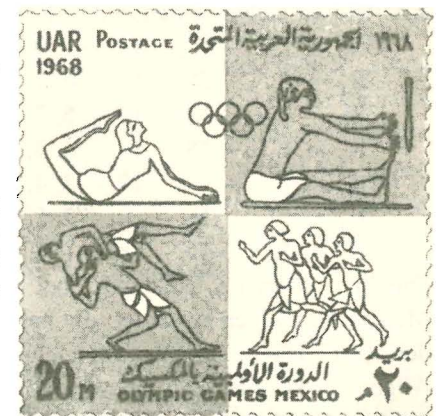
Die VAR ist ein junger Nationalstaat, der im Jahre 1953 seine Unabhängigkeit erlangt hat.
 Fläche: 1 000 000 km²
 Einwohner (1962): 27,3 Mill. ...
 Einwohner pro km²: 27
 Länge des Nils auf dem Gebiet der VAR: 1 500 km
 Breite der Niloase:
 Oberägypten: 2 km,
 Unterägypten: 10 bis 25 km
 Anteil des Kulturlandes in der VAR: 3,5%.
 Wichtigster Exportartikel: hochwertige Baumwolle (Der Exporterlös dieses Produkts beläuft sich auf etwa 80% der Gesamteinnahmen.)
 wichtigste Städte: Kairo 3,3 Mill. Einw.; Alexandria 1,4 Mill. Einw.; Port Said 226 000 E.; El-Giza 177 000 E.; Tanta 175 000 E.; El-Miakalla el Kubra 162 000 E.; Suez 156 000 E.



Aufwendungen des Erziehungsministeriums (ohne Hoch- und Fachschulen) in E. (ägyptisches Pfund)



1



2



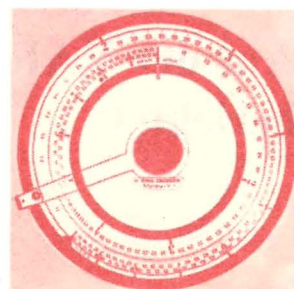
3

- 1 Briefmarke, herausgegeben aus Anlaß der Industriausstellung der VAR
- 2 Briefmarke, herausgegeben zu Ehren der Olympischen Spiele in Mexiko
- 3 Briefmarke, die Flüchtlinge zeigt, welche durch die Aggression Israels ihre Heimat verlassen mußten



Das große Verwaltungsgebäude „Mogamma“ am *Midan El Tahrir*, dem Freiheitsplatz in Kairo, in dem Frau Dr. Nazla und die DDR-Experten arbeiten.

Rechnen mit Resten, Teil 2



Rechenscheibe

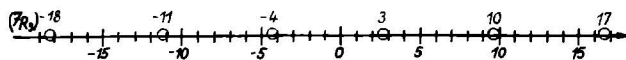
3. Eine seltsame Arithmetik

Um nun vom „Rechnen mit Kongruenzen“ zum „Rechnen mit Resten“ zu kommen, betrachten wir zunächst einmal den Fall des Moduls 7, also $a \equiv b \pmod{7}$, etwas näher:

Offensichtlich sind doch bei $m=7$ auch sieben verschiedene Reste möglich, nämlich 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Fassen wir nun jeweils die ganzen Zahlen zusammen, die bei Division durch 7 den gleichen Rest lassen, also nach dem Modul 7 einander kongruent sind, so erhalten wir sieben sogenannte „Restklassen“:

$$\begin{aligned} {}^7R_0 &= \{\dots, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \dots\} \\ {}^7R_1 &= \{\dots, -20, -13, -6, 1, 8, 15, 22, \dots\} \\ {}^7R_2 &= \{\dots, -19, -12, -5, 2, 9, 16, 23, \dots\} \\ {}^7R_3 &= \{\dots, -18, -11, -4, 3, 10, 17, 24, \dots\} \\ {}^7R_4 &= \{\dots, -17, -10, -3, 4, 11, 18, 25, \dots\} \\ {}^7R_5 &= \{\dots, -16, -9, -2, 5, 12, 19, 26, \dots\} \\ {}^7R_6 &= \{\dots, -15, -8, -1, 6, 13, 20, 27, \dots\} \end{aligned}$$

Die hier gewählte Symbolik, bei der z. B. 7R_3 die Menge der Zahlen bedeutet, die bei Division durch 7 den Rest 3 lassen, dürfte wohl leicht verständlich sein. Allgemein könnte man entsprechend beim Modul m die Menge der Zahlen, die bei Division durch m den Rest r lassen, mit mR_r bezeichnen. Zwei aufeinanderfolgende Zahlen aus einer solchen Restklasse haben übrigens immer die Differenz m ; das wird auch an der Zahlengeraden deutlich.



Jede ganze Zahl liegt in genau einer dieser sieben Restklassen 7R_0 bis 7R_6 , d. h., es gibt keine Zahl, die nirgends vorkommt, und auch keine, die in verschiedenen Restklassen enthalten ist. Daraus erklärt sich auch der Name Restklassen für diese Zahlenmengen. Allgemein spricht man nämlich von einer Einteilung einer Menge in Klassen, wenn diese so in Teilmengen zerlegt wird, daß jedes Element in genau einer dieser Teilmengen vorkommt (und keine dieser Teilmengen leer ist). Mittels der zahlentheoretischen Kongruenz modulo m wird also die Menge der ganzen Zahlen in m Klassen aufgespalten. Weil jede ganze

Zahl in genau einer Restklasse liegt, kann jedes beliebige Element einer Klasse als stellvertretend für alle übrigen Elemente und damit für die ganze Klasse angesehen werden. Man nennt die Elemente deshalb auch „Repräsentanten“ der Klasse. So können wir z. B. die sieben Restklassen modulo 7 jeweils durch ein beliebiges ihrer Elemente repräsentieren, etwa durch $-21, 1, -12, 17, -80, -37, 41$. Diese Zahlen bilden ein sogenanntes „vollständiges Restsystem modulo 7“. Zweckmäßiger und übersichtlicher ist es allerdings, wenn man die kleinsten nicht-negativen Repräsentanten wählt, also die eigentlichen „Reste“ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Allgemein bezeichnet man die Menge der Zahlen 0, 1, 2, ..., $m-1$ als (vollständiges) „einfaches“ Restsystem modulo m . Die Tatsache, daß jede Klasse durch ein beliebiges ihrer Elemente vertreten werden kann, kann man auch zur kürzeren Bezeichnung der Klassen ausnutzen. Sind keine Irrtümer durch das Weglassen des Moduls zu befürchten, so können wir beispielsweise für die Klassen 7R_3 kurz $\bar{3}$ schreiben, weil 3 ein Repräsentant dieser Klasse ist. Der Querstrich über der Ziffer soll dabei andeuten, daß es sich um die ganze Klasse handelt, in der die Zahl liegt, nicht etwa um die Zahl 3 selbst. Freilich könnten wir statt $\bar{3}$ sehr wohl auch $-\bar{4}, \bar{17}$ o. dgl. schreiben.

Werfen wir nun einen Blick zurück auf unsere anfängliche Betrachtung der geraden und ungeraden Zahlen: Die dort mit G und U bezeichneten Mengen der geraden bzw. ungeraden Zahlen sind ja nichts anderes als die beiden Restklassen modulo 2. Es ist $G = {}^2R_0$ bzw. $G = \bar{0}$, wenn wir auf die Angabe des Moduls verzichten, und entsprechend $U = {}^2R_1 = \bar{1}$. Die im Abschnitt 1. angegebenen Sätze über das Rechnen mit G und U ergeben sich durch Anwendung der im Abschnitt 2. aufgeführten Regeln über das Rechnen mit Kongruenzen. So lautet z. B. (I) für $m=2, b_1=0$ und $b_2=1$: Aus $a_1 \equiv 0(2)$ und $a_2 \equiv 1(2)$ folgt $a_1 + a_2 \equiv 1(2)$. Deshalb ist $G + U = U$, bzw. in neuer Schreibweise $\bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$. Auf diese Weise können wir zu all den Regeln gelangen, die im Abschnitt 1. in Form je einer Tabelle für Addition und Multiplikation niedergelegt sind.

Wie sieht das nun im Bereich der Restklassen modulo 7 aus, wenn wir hier beispielsweise eine Addition erklären? Offensichtlich liegt doch folgendes Verfahren nahe: Wollen wir beispielsweise 7R_3 und 7R_5 addieren, so nehmen wir uns einen Repräsentanten von 7R_3 , etwa -18 , und einem Repräsentanten von 7R_5 , z.B. 61 . Dann bilden wir die Summe $-18 + 61 = 43$ und sehen nach, in welcher Restklasse diese Summe liegt. Da 43 ein Repräsentant von 7R_1 ist, setzen wir fest ${}^7R_3 + {}^7R_5 = {}^7R_1$. In Kurzschreibweise ohne Angabe des Moduls würde das lauten $\bar{3} + \bar{5} = \bar{1}$.

Freilich ist eine solche Erklärung nur sinnvoll, wenn wir immer auf $\bar{1}$ geführt werden — gleichgültig, mit welchen Repräsentanten für $\bar{3}$ und $\bar{5}$ wir gearbeitet haben. Das ist aber der Fall, da nach den Regeln über das Rechnen mit Kongruenzen aus Abschnitt 2. die Addition einer Zahl x mit dem Siebenerrest 3 zu einer Zahl y mit dem Siebenerrest 5 stets eine Zahl mit dem Siebenerrest 8 (bzw. 1) ergibt: Aus $x \equiv 3 \pmod{7}$ und $y \equiv 5 \pmod{7}$ folgt nach (I) $x + y \equiv 8 \pmod{7}$ und damit wegen $8 \equiv 1 \pmod{7}$ auch $x + y \equiv 1 \pmod{7}$. Das Ergebnis für $\bar{3} + \bar{5}$ ist also von der Wahl der Repräsentanten für die Summanden unabhängig. Der Bequemlichkeit halber wird man sich für die Ermittlung der Summe natürlich die kleinsten nicht-negativen Repräsentanten wählen, also nicht mit -18 und 61 arbeiten, wie wir es getan haben, sondern mit 3 und 5 .

Genauso können wir nun für die Multiplikation verfahren: Für die Ermittlung von $\bar{4} \cdot \bar{5}$ z. B. berechnen wir $4 \cdot 5 = 20$, und wegen $20 \equiv 6 \pmod{7}$ ist $\bar{4} \cdot \bar{5} = \bar{6}$. Auch hier ist — wegen der Regel (III) für das Rechnen mit Kongruenzen — das Ergebnis von der Wahl der Repräsentanten unabhängig; wir hätten statt 4 und 5 auch andere Elemente aus $\bar{4}$ und $\bar{5}$ nehmen können und wären dann ebenfalls zu $\bar{6}$ gelangt.

Nun ist es leicht, auch im Bereich der Restklassen modulo 7 Additions- und Multiplikationstabellen aufzustellen:

$m = 7$	+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$		$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$		$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$		$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$		$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$		$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$		$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$		$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Mittels dieser Tabelle kann man auch subtrahieren und dividieren. So ist z. B. $\bar{2} - \bar{4} = \bar{4}$, weil $\bar{5} + \bar{4} = \bar{2}$ ist. Entsprechend erhalten wir $\bar{4} : \bar{6} = \bar{3}$ wegen $\bar{3} \cdot \bar{6} = \bar{4}$. Selbstverständlich hätten wir die Subtraktion der Restklassen auch über die Subtraktion ihrer Repräsentanten erklären können. Wollen wir auch den Quotienten zweier Restklassen ohne Zuhilfenahme der Tabelle über die Repräsentanten ermitteln, so sind

wir freilich auf solche Repräsentanten angewiesen, für die sich die Division ausführen läßt, etwa 18 für $\bar{4}$ und 6 für $\bar{6}$; das liefert wegen $18 : 6 = 3$ ebenfalls $\bar{4} : \bar{6} = \bar{3}$.

In dem allgemeinverständlich geschriebenen Buch „Die Zahl und ihre Theorie“ von G. N. Berman (als Übersetzung aus dem Russischen 1954 erschienen im *Urania-Verlag Jena*) wird übrigens ein hübsches Rechengerät beschrieben, das das Rechnen mit Restklassen anschaulich illustriert. Die Beschreibung gilt für den Modul 5, doch läßt sich das sinngemäß auch auf beliebige andere Moduln übertragen, wenn auch die technische Ausführung bei Moduln oberhalb von 12 etwa schon problematisch werden dürfte. Wie sieht nun ein solches Rechengerät für das Rechnen mit Restklassen modulo 5 aus?

Wir zeichnen auf einer starken Unterlage (Karton) einen Kreis und schneiden uns ferner eine etwas kleinere Kreisscheibe aus Karton. Dann markieren wir auf dem Umfang jedes dieser Kreise 5 Punkte in gleichmäßiger Verteilung (vom Mittelpunkt aus unter einem Winkel von $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten); die Punkte müssen also die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks bilden. Diese Punkte werden auf beiden Kreisscheiben im gleichen Umlaufsinn mit $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ und $\bar{4}$ bezeichnet. Dann legen wir die kleinere Kreisscheibe so auf die Unterlage, daß die Mittelpunkte der Kreise übereinander liegen, und befestigen sie dort mit einem Reißbrettstift, so daß sie um den Mittelpunkt gedreht werden kann.

Das Addieren zweier Restklassen, z. B. $\bar{3}$ und $\bar{4}$, geht nun folgendermaßen vor sich: Wir markieren uns auf der Unterlage, also auf dem größeren Kreis, den einen Summanden $\bar{3}$ und stellen ihm die Restklasse $\bar{0}$ auf der kleineren Scheibe gegenüber. Das Ergebnis finden wir nun auf dem größeren Kreis gegenüber dem zweiten Summanden $\bar{4}$ auf der kleinen Scheibe. Wir lesen ab $\bar{3} + \bar{4} = \bar{2}$, und das ist ja für das Rechnen mit Restklassen modulo 5 auch richtig.

Das Multiplizieren ist allerdings etwas komplizierter: Zunächst bringen wir die kleine Kreisscheibe in die Ausgangslage, stellen sie also so, daß sich Zeichen für gleiche Restklassen gegenüberstehen. Wollen wir nun berechnen $\bar{3} \cdot \bar{4}$, so drehen wir die kleine Scheibe 3mal (wegen des ersten Faktors $\bar{3}$) um einen Winkel, der $\frac{4}{5}$ des Vollwinkels von 360° beträgt (dabei liefert der andere Faktor $\bar{4}$ den Zähler 4 und der Modul den Nenner 5). Insgesamt wird also um $\frac{3 \cdot 4}{5} \cdot 360^\circ = 864^\circ$ gedreht, das entspricht einer Drehung um 144° , weil sich ja eine Drehung um einen Vollwinkel von 360° und Vielfache davon nicht auswirkt. Das Ergebnis

der Multiplikation ist nun diejenige Restklasse, die auf dem größeren Kreis gegenüber der Restklasse $\bar{0}$ des kleineren Kreises vermerkt ist. So finden wir für das gesuchte Produkt $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{2}$ — in Übereinstimmung mit dem, was wir auch rechnerisch ermitteln würden. Bei den Restklassen modulo 5 ist also $\bar{3} + \bar{4} = \bar{3} \cdot \bar{4}$.)

Gewiß ist dieses mechanische Verfahren — zumindest für die Multiplikation — recht umständlich, jedenfalls umständlicher als das rechnerische Vorgehen. Aber es hat uns unversehens zu der Erkenntnis geführt, daß wir in der Planimetrie beim Arbeiten mit den Winkeln auch so etwas wie Restklassen vor uns haben. Der Unterschied zwischen einem Winkel von 864° und einem Winkel von 144° ist hier genau so wenig bedeutsam wie der zwischen dem Repräsentanten 2 und dem Repräsentanten 12 beim Arbeiten mit Restklassen modulo 5. So ist uns nun wohl auch die Rede-weise „die Winkel sind nur modulo 360° bestimmt“ verständlich.

Das Addieren mit dem beschriebenen Rechengerät erinnert vielleicht auch manchen an das Arbeiten mit der sog. „Rechenscheibe“. Das ist ein Gerät, das auf dem Prinzip des Rechenstabes beruht, bei dem aber die Teilung auf Kreisen angeordnet sind, um das beim Stab hin und wieder nötige Durchschieben der Zunge zu ersparen. Allerdings wird mit dieser Rechenscheibe ebenso wie mit dem Stab nicht addiert, sondern multipliziert, weil die Kreise ja nicht gleichmäßig geteilt sind, sondern eine sogenannte „logarithmische Teilung“ tragen — ebenso wie die Grundskalen des Rechenstabes. Aber auch hier und beim Rechenstab haben wir so etwas ähnliches wie Restklassen: Rechenstab und Rechenscheibe liefern ja nur die Ziffernfolge des Ergebnisses, so wie wir auch beim Einstellen nur die Ziffernfolge beachten. Dabei wird z. B. zwischen 0,74, 7,4, 74, 740, 7400 usw. nicht unterschieden; all diese Zahlen „liegen in derselben Klasse“. Nur haben in diesen Klassen zwei aufeinanderfolgende Zahlen nicht dieselbe Differenz wie bei den Restklassen, sondern denselben Quotienten, und zwar beträgt der stets 10:

$$\frac{7400}{740} = \frac{740}{74} = \frac{74}{7,4} = \frac{7,4}{0,74} = 10.$$

G. Lorenz

Einführung in die Elektronische Daten- verarbeitung

Teil 4

Von den vier Grundrechenoperationen, die wir am Beispiel der Zahlen LOLOLOO und LOLOL betrachten wollten, fehlt uns noch die Division:

$$\begin{array}{r} \text{Dividend} \quad \text{Divisor} \quad \text{Quotient} \\ \text{LOLOLOO} : \text{LOLOL} = \text{LOO} \\ - \text{LOLOL} \\ \hline \text{OOO} \end{array}$$

Die Einfachheit ist verblüffend. Das liegt einmal daran, daß das Ergebnis zufällig eine reine Potenz von 2 ist, aber auch an der Tatsache, daß jedes Teilergebnis, also jede Quotientenziffer, nur O oder L sein kann. Es ist also immer nur zu entscheiden, ob sich der Divisor von dem jeweiligen Rest des Dividenden abziehen läßt oder nicht, und damit ist die Division vollständig auf die Subtraktion zurückgeführt. Gleich noch ein weniger triviales Beispiel:

$$10\,545 : 185 = 57$$

$$\begin{array}{r} \text{LOLOOLOOLLOOOL} : \text{LOLLLOOL} = \text{LLLOOL} \\ - \text{LOLLLOOL} \\ \hline \text{LOOLOOOOL} \\ - \text{LOLLLOOL} \\ \hline \text{LLOLOOOO} \\ - \text{LOLLLOOL} \\ \hline \text{LOLLLOOL} \\ - \text{LOLLLOOL} \\ \hline \text{LOLLLOOL} \\ - \text{LOLLLOOL} \\ \hline \text{O} \end{array}$$

Hierbei wurde der Divisor jedesmal um eine Stelle nach rechts verschoben. Rechentechnisch ist es einfacher, den Divisor stehenzulassen und den Dividenten schrittweise nach links zu verschieben, bis — nach einer bestimmten Anzahl von Subtraktionen — der Divident verbraucht ist. Der Effekt ist der gleiche, es sieht dann so aus:

$$\begin{array}{l} \text{LOLOOLOOLLOOOL} : \text{LOLLLOOL} \\ \text{Keine Subtraktion: } \text{LOLLLOOL} = \text{LLLOOL} \\ \text{Rest: } \text{LOOLOOLOOLLOOOL} \\ \text{Verschiebung des Divi-} \\ \text{denden nach links: } \text{LOLOOLOOLLOOOL} \\ \text{Subtraktion;} \\ \text{Quotientenziffer L } - \text{LOLLLOL} \\ \text{Rest: } \text{LOOLOOOOLOOOL} \\ \text{Verschiebung: } \text{LOOLOOOOLOOOL} \end{array}$$

Subtraktion;
 Quotientenziffer L — $\frac{LOLLLOOL}{LOLOO O O O O L}$
 Rest: $LOLOO O O O O L$
 Verschiebung: $LOLOO O O O O L$
 Subtraktion;
 Quotientenziffer L — $\frac{LOLLLOOL}{LOLLLOOL}$
 Rest: $LOLLLOOL$
 Verschiebung: $LOLLLOOL$
 Keine Subtraktion;
 Quotientenziffer O — $\frac{LOLLLOOL}{LOLLLOOL}$
 Rest: $LOLLLOOL$
 Verschiebung: $LOLLLOOL$
 Keine Subtraktion;
 Quotientenziffer O — $\frac{LOLLLOOL}{LOLLLOOL}$
 Rest: $LOLLLOOL$
 Verschiebung: $LOLLLOOL$
 Subtraktion;
 Quotientenziffer L — $\frac{LOLLLOOL}{LOLLLOOL}$
 Rest: O

▲ **Aufgaben:** Kodiere die Zahlen 51 und 17 in das Dualsystem um und rechne schriftlich die Aufgaben $51 + 17$; $51 - 17$; $51 \cdot 17$; $51 : 17$

in diesem System, wobei die Multiplikation und die Division in der ausführlichen Form zu schreiben sind! Prüfe die Ergebnisse durch Umkodierung in das Dezimalsystem!

Noch einige Bemerkungen zur Umkodierung ganzer Zahlen vom Dezimal- in das Dualsystem: Was das Handrechnen betrifft, so haben wir diese Aufgabe bei den vorigen Beispielen schon gelöst. Wenn dies aber in der Praxis von einem Automaten zu bewältigen ist, so müssen wir berücksichtigen, daß dieser — dual arbeitend — die Dezimalzahlen gar nicht kennt. Wir können höchstens die einzelnen Ziffern der Dezimalzahl, dual verschlüsselt, in den Automaten geben, nachdem wir ein Programm entwickelt haben, wie — nur mit Hilfe dualer Grundoperationen — daraus die Dualzahl zu berechnen ist. Dieser Vorgang soll im folgenden beschrieben werden, und zwar gleich an Hand eines Beispiels:

Gegeben die Dezimalzahl $Z = 7948$.

Die dual verschlüsselten Ziffern sind

$OLLL^* - LOOL - OLOO - LOOO$

Somit ist, dual geschrieben,

$$Z = OLLL \cdot (LOLO)^3 + LOOL \cdot (LOLO)^2 + OLOO \cdot LOLO + LOOO.$$

Es handelt sich also um eine nach fallenden Potenzen von LOLO geordnete Summe, ein *Polynom* in LOLO.

Allgemeine Schreibweise:

Sind $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ die Ziffern der Dezimalzahl z und setzen wir $LOLO = x$, so gilt

$$Z = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Für das praktische Ausrechnen ist dem fortgeschrittenen Leser vielleicht das sogenannte *Hornersche Schema*

bekannt. Hierbei handelt es sich um eine andere, rechnerisch handlichere Schreibweise des Polynoms Z , nämlich

$$Z = \{ \dots ((a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2}) x + a_{n-3} \} x + \dots + a_1 \} x + a_0.$$

▲ **Aufgabe:** Man überzeuge sich durch Ausmultiplizieren dieser $n - 1$ ineinandergeschachtelten Klammern am Beispiel $n = 5$, daß wirklich das Polynom Z herauskommt. Dabei kann man sowohl mit der äußersten, als auch mit der innersten Klammer beginnen.

Auf unser Beispiel angewendet, ist,

$$Z = [(OLLL \cdot LOLO + LOOL) \cdot LOLO + OLOO] \cdot LOLO + LOOO.$$

Diesen aus abwechselnder Multiplikation und Addition bestehenden Algorithmus kann der Automat bewältigen. Das Potenzieren (Berechnen von $(LOLO)^3$ usw.), das der Automat nicht „kann“, wird dadurch vermieden. Das Ergebnis ist die gewünschte Kodierung der Zahl Z .

▲ **Aufgabe:** Führe die Rechnung durch und mache durch Umkodierung in das Dezimalsystem die Probe!

Wir wollen hiermit den Abschnitt über das Dualsystem abschließen, natürlich, ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Wir gehen also u. a. auf die Darstellung gebrochener Zahlen im Dualsystem, die *Dualbrüche*, nicht mehr ein. Wenn der Leser aber die Aussagen über die Fünferbrüche in 1.3. sinngemäß auf das Dualsystem überträgt, werden ihm folgende Fragen bzw. Aufgaben nicht schwerfallen:

1. Was bedeutet der Dualbruch $LO,OLOOLL$?
2. Wann liefert ein (weitestgehend gekürzter) Quotient aus ganzen Zahlen
 - a) einen endlichen
 - b) einen rein periodischen
 - c) einen gemischt periodischen Dualbruch?
3. Wie kann man bei den vier Grundrechenoperationen mit endlichen Dualbrüchen das Komma berücksichtigen?
4. Löse im Dualsystem, d. h. mit Hilfe von Dualbrüchen, die Aufgaben

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{8}; \quad \frac{3}{4} - \frac{5}{8}; \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8}; \quad \frac{3}{4} : \frac{5}{8}!$$

Warum ergibt die Division einen periodischen Dualbruch?

J. Frommann

Unser Glückwunsch

gilt unseren Redaktionsmitgliedern, welche am Tag des Lehrers 1969 ausgezeichnet wurden: Prof. Dr. H. Karl, PH Potsdam; Dr. Theodor Neubauer-Medaille in Gold; Dr. habil W. Walsch, Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg; Dr. Theodor Neubauer-Medaille in Gold; Studienrat G. Schulze, EOS Herzberg/Elster; Oberstudienrat.

* Da wir maximal vier Dualziffern benötigen, schreiben wir zweckmäßigerweise jede Ziffer gleich als Vierergruppe, als sog. *Tetrade*, füllen also die Leerstellen durch Nullen aus.

Multicurve

Die Zeichenschablone „multicurve“ ist für Schüler ab Klasse 9 als ein vielseitig brauchbares Lehrmittel zu empfehlen. Zunächst stellt sie die Bilder von je zwei Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln unmittelbar bereit. Diese Kegelschnitte sind auf eine gemeinsame Achse bezogen und haben paarweise je einen gemeinsamen Brennpunkt. Diese Punkte sind durch Ausbohrungen im Material markiert, was für konstruktive Auswertungen von Vorteil ist. Auch die Leitgeraden der Parabeln lassen sich für weitere Konstruktionen schnell und genau einzeichnen. An den maßgerechten Vorlagen der Kegelschnitte können den Schülern in einfach überschaubarer Weise verschiedene Definitionen dieser Kurven erläutert und deren Fokaleigenschaften bewiesen werden. Ferner prägen sich beim Lernenden von vorn herein richtige Vorstellungen über die Bilder der Kegelschnitte, die Lage ihrer Brennpunkte, Leitgeraden bzw. Leitkreise und Asymptoten ein.

Die Schablone bedeutet jedoch nicht allein für den Unterricht in Mathematik — etwa bei der planimetrischen Behandlung der Kegelschnitte — ein gut brauchbares Arbeitsmittel, sondern sie kann auch im Physikunterricht eine nützliche Hilfe zur begrifflichen Klärung physikalischer Zusammenhänge sein. Z. B. läßt sich an Hand einer sauber gezeichneten Parabel bei Vorgabe von Brennpunkt und Leitgerade die Brenneigenschaft eines Parabolspiegels ohne viel Zeitaufwand beweisen. Diese parabolische Form findet nicht nur an optischen Geräten, sondern auch bei Antennen von Ultrakurzwellessendern und Empfängern Anwendung. Zu der beim schiefen Wurf eines Körpers entstehenden Bahnkurve geben die Parabeln der Schablone anschauliche Bilder. Bei isothermer Ausdehnung einer bestimmten Gasmenge wird die Zuordnung von Druck und Volumen durch eine gleichseitige Hyperbel annähernd beschrieben. Auch hierzu weist die Schablone eine entsprechende Kurve auf. Die Anwendungen von Kegelschnitten in Mathematik, Technik und Naturwissenschaften sind so vielfältig, daß die unmittelbare Bereitstellung einiger Repräsentanten dieser Kurven nicht allein für Lernende, sondern auch für Lehrende und Forschende in diesen Gebieten angebracht erscheint. Darüber hin-

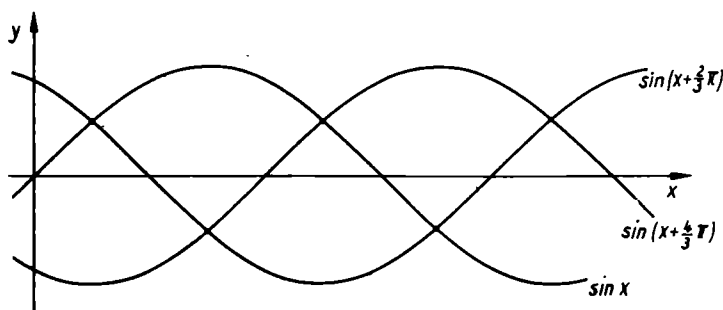
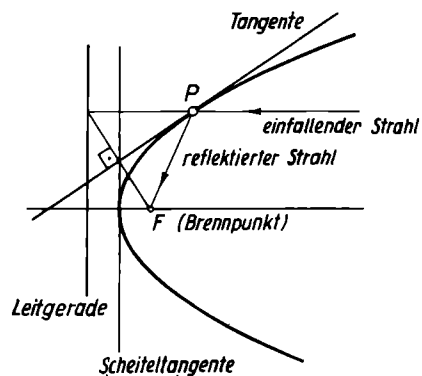
aus kann an Hand der mit „multicurve“ gezeichneten Kurven eine erste Einführung in die Problematik der Tangentenbestimmung gegeben werden. Für Kegelschnitte läßt sich diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal unter Mitverwendung der Brennpunkte exakt lösen.

Die in der Schablone eingearbeitete Sinuslinie gibt ein anschauliches Bild für den zeitlichen Ablauf einer ungedämpften harmonischen Schwingung. Sie ist ferner als ein Beispiel für das Verständnis des Funktionsbegriffes besonders geeignet.

Außerdem lassen sich die Kurvenbögen der Schablone im herkömmlichen Sinn zum Zeichnen beliebiger Kurven verwenden. Die Maßstäbe für Längen- und Winkelmessung sowie die Winkel von 90°, 60°, 45°, 30° und 15° sichern eine vielseitige Anwendbarkeit und schnelle Handhabung von „multicurve“ im Unterricht, bei Erledigung der Hausaufgaben und in mathematischen Schülerzirkeln.

Gegenstand der Zeichnungen:

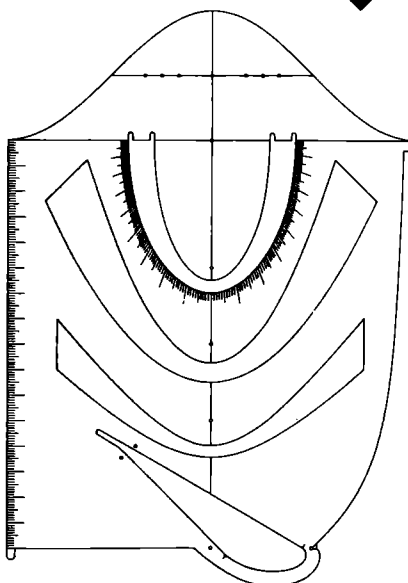
1. Tangentenkonstruktion und Brenneigenschaft bei der Parabel
2. Sinus-Linie und Erzeugung von Phasenverschiebungen



MEISSNER KG

808 Dresden, Goethestr. 9

Ruf 582 76 und 58 46 39



Für den Mathematik-Unterricht empfehlen wir unsere Rechenstäbe und Zeichenschablonen.

System Mono-Rietz	EVP M 12,—
System Rietz	EVP M 18,20
System Darmstadt	EVP M 19,—
System Variant	EVP M 20,20
System ELECTRIC	EVP M 27,70
Radienschablonen	EVP M 1,65
Kreisschablonen	EVP M —,70
„multicurve“	EVP M 4,—

Zu beziehen durch Ihren einschlägigen Fachhandel.

Wir stellen vor: 22 Junge Mathematiker

die erfolgreichsten Teilnehmerinnen
der VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
April 1968 — Berlin-Bogensee



Von links: Ingrid Schiemann, Cottbus — Susi Rudolph, Dresden — Carola Hartmann, Freital — Veronika Eberhardt, Eisenach — Marlen Müller, Halle — Heidi Sieler, Hermsdorf — Holda Hofmann, Torgelow — Silvia Rohmeiß, Ilmenau — Leonore Lösche, Leipzig — Ursula Tyl, Berlin — Renate Kretschmar, Jena — Gabriele Fischer, Berlin — Barbara Greiner-Petter, Berlin — Juliane Heß, Schleusingen — Ingrid Rosch, Neubrandenburg — Barbara Müller, Falkensee — Brigitte Bohm, Falkensee — Ute Lange, Babelsberg — Burglind Jöricke, Rostock — Beate Schneeweiß, Guben — Steffi Lorenz, Markkleeberg bei Leipzig — Gudrun Fröbel, Jena
Berufswünsche: 17 Diplommathematiker bzw. Mathematiklehrer, 1 Bauarchitekt, 2 Stud. Naturw., 2 Arzt

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Achtung:

Alle Aussagen sind stets zu beweisen beziehungsweise zu begründen. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen beziehungsweise Konstruktionen von Hilfslinien usw.) muß deutlich zu erkennen sein. Bei den Aufgaben wird kein Anspruch auf Originalität erhoben, daher erfolgt grundsätzlich keine Quellenangabe. Die Gedankengänge sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Sämtliche Lösungen sind bis zum 22. Oktober 1969 beim Mathematiklehrer abzugeben.

Olympiadeklasse 5

5; 1) Gib eine Möglichkeit an, die Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 so in das gegebene quadratische Netz einzutragen, daß in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der beiden Hauptdiagonalen jede der 5 Ziffern genau einmal vorkommt!

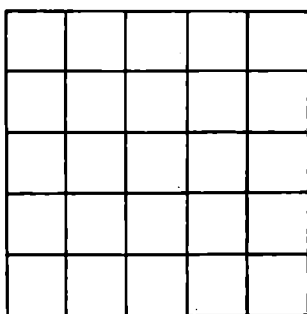


Abb. A 5; 1

Anmerkung: Es genügt ein Beispiel. Begründungen werden nicht verlangt.

5; 2) In einer Mathematikarbeitsgemeinschaft wurde die folgende Aufgabe aus einem sowjetischen Lehrbuch gestellt:

Wassja kaufte zwei Alben für Briefmarken. Kolja fragte ihn, wieviel er dafür bezahlt habe. „Ich verwendete zur Bezahlung nur Geldstücke einer Sorte“, antwortete Wassja, „und zwar für das eine Album genau 7, für das andere genau 5. Für beide Alben bezahlte ich insgesamt 60 Kopeken.“

(In der Sowjetunion gibt es 1-, 2-, 3-, 5-, 10-, 15-, 20- und 50-Kopekenstücke und keine anderen Sorten von Kopekenstücken.) Wieviel Kopeken kostete das eine und wieviel das andere Album?

5; 3) Abb. A 5; 3 zeigt genau 7 Punkte A, B, C, D, E, F, G und genau 5 Geraden, von denen eine durch A, B, C , eine durch A, F, E , eine durch A, G, D , eine durch B, G, F und eine durch C, D, E , geht. Außerdem gilt $BF \parallel CE$. Wir wollen sagen

eine Strecke } „gehört der Zeichnung an“,
ein Dreieck }
ein Trapez }

wenn ihre Endpunkte zwei } der Punkte $A, B,$
seine Eckpunkte drei } C, D, E, F, G
seine Eckpunkte vier }

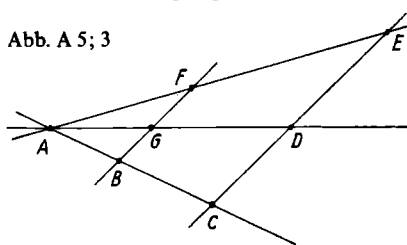
die Strecke } schon vollständig
alle Seiten des Dreiecks } gezeichnet
alle Seiten des Trapezes }

in Abb. A 5; 3 { vorkommt
{ vorkommen
{ vorkommen.

(Beispiele: Die Strecke AB , das Dreieck $\triangle ABF$ „gehören der Zeichnung an“. Die Strecke BD „gehört der Zeichnung“ nicht „an“, auch nicht die Strecke, die den Mittelpunkt von AB mit B verbindet, auch nicht das Dreieck $\triangle ABD$.)

Gib alle Strecken, Dreiecke und Trapeze an, die „der Zeichnung angehören“!

Abb. A 5; 3



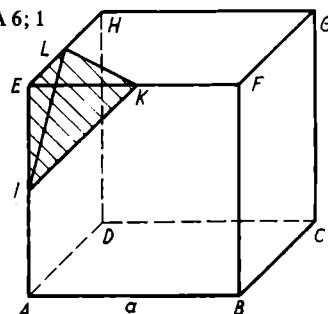
5; 4) Im Werkunterricht fertigen Schüler Bauklötze an, die die Form von Quadern besitzen, und zwar sind bei jedem Bauklotz je drei in verschiedenen Richtungen verlaufende Seitenkanten 55 mm, 55 mm und 70 mm lang.

Zur besseren Aufbewahrung werden diese Bauklötze in quaderförmige Baukästen (mit Schiebedeckel) gepackt, deren Innenmaße (in den drei Richtungen der Seitenkanten gemessen) 0,33 m, 2,2 dm und 21 cm betragen. Berechne die größtmögliche Anzahl von Bauklötzen, die in sechs dieser Baukästen eingeschichtet werden können!

Olympiadeklasse 6

6; 1) Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abb. A 6; 1) und der Kantenlänge $a = 4$ cm. Von ihm werde durch einen ebenen Schnitt durch die Punkte I, K, L eine Ecke abgeschnitten, wobei I der Mittelpunkt von AE , K der Mittelpunkt von EF und L der Mittelpunkt von EH ist. Zeichne ein Netz des Restkörpers und bezeichne die Eckpunkte!

Abb. A 6; 1



6; 2) In den Ferien war Klaus auf dem Lande. Aus seinen Beobachtungen ergab sich folgende Scherzaufgabe:

$1\frac{1}{2}$ Hühner legen in $1\frac{1}{2}$ Tagen $1\frac{1}{2}$ Eier.

Ermittle die Anzahl aller Eier, die bei gleicher Legeleistung 7 Hühner in 6 Tagen legen würden!

6; 3) In einem Wettbewerb der Mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“ sollten den vier dort vorgegebenen geometrischen Figuren die richtigen Namen zugeordnet werden.

In genau $\frac{3}{25}$ der eingesandten Lösungen wurden allen vier vorgegebenen Figuren die richtigen Namen zugeordnet. Bei genau doppelt soviel Lösungen wurden je zwei Figuren die richtigen und je zwei Figuren die falschen Namen zugeordnet. Die Anzahl der Lösungen mit genau drei falschen Zuordnungen war genau viermal so groß wie die Zahl der richtigen Lösungen. Genau 240 der eingesandten Lösungen enthielten keine richtige Zuordnung. Weitere Einsendungen lagen nicht vor. Ermittle die Anzahl aller zu diesem Wettbewerb eingesandten Lösungen!

6; 4) Eine Arbeitsgemeinschaft erhielt als Auszeichnung für sehr gute Leistungen einen Betrag von genau 240,— M. Bei gleichmäßiger Verteilung dieses Geldes auf alle Mitglieder der Arbeitsgemeinschaft hätte jedes Mitglied einen ganzzahligen Betrag (in Mark) erhalten. Die Mitglieder beschlossen jedoch, die 240,— M gemeinsam auf einer Wanderfahrt auszugeben. Genau drei der Mitglieder konnten an der Wanderfahrt nicht teilnehmen, infolgedessen standen bei gleichmäßiger Verteilung des Geldes auf alle Teilnehmer der Wanderfahrt für jeden Teilnehmer genau 4,— M mehr zur Verfügung als bei gleichmäßiger Verteilung auf alle Mitglieder. Ermittle die Mitgliederzahl der Arbeitsgemeinschaft!

Olympiadeklasse 7

7; 1) Schneide ein rechteckiges Stück Papier aus, teile es durch gerade Linien in acht kongruente Rechtecke und schreibe jeweils auf Vorder- und Rückseite einer jeden Rechtecksfläche denselben Buchstaben, wie es in der Abbildung angedeutet ist.

O	N	G	A
W	G	F	L

Falte das Stück Papier so, daß die Buchstaben in der Reihenfolge WOLFGANG übereinanderliegen!

Als Lösung gilt das entsprechend gefaltete Papier oder eine Beschreibung des Vorgehens.

7; 2) Gegeben sei ein Dreieck ΔABC . Darin sei die die Halbierende des Innenwinkels bei A enthaltende Gerade eingezeichnet. Außerdem seien eine parallele Gerade zur Seite AB und eine parallele Gerade zur Seite AC derart eingezeichnet, daß diese sich im Innern des Dreiecks ΔABC , aber nicht auf der Winkelhalbierenden schneiden.

Beweise, daß die Schnittpunkte der drei eingezeichneten Geraden die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks bilden!

7; 3) Eine Touristengruppe aus der DDR von genau 100 Personen fuhr ins Ausland. Über diese Gruppe sind folgende Angaben bekannt:

- (1) Genau 10 Touristen beherrschen weder Russisch noch Englisch.
 - (2) Genau 75 Touristen beherrschen Russisch.
 - (3) Genau 83 Touristen beherrschen Englisch.
- Ermittle die Anzahl aller Touristen dieser Gruppe, die beide Sprachen beherrschen!

7; 4) Gegeben sei eine beliebige dreistellige natürliche Zahl (z.B. 357). Schreibt man hinter diese Zahl noch einmal die gleiche Zahl, so erhält man eine sechsstellige Zahl (im Beispiel 357357). Beweise, daß für jede sechsstellige Zahl, die auf diese Weise entstehen kann, die folgende Behauptung gilt: Dividiert man die sechsstellige Zahl zuerst durch 7, dann den gefundenen Quotienten durch 11 und den jetzt gefundenen Quotienten durch 13, so erhält man die dreistellige Ausgangszahl.

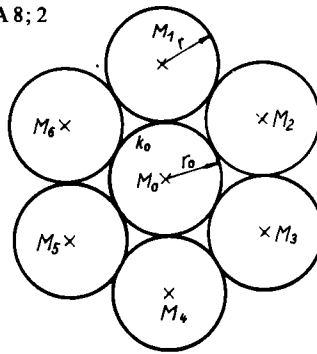
Olympiadeklasse 8

8; 1) Untersuche, ob es Vielecke mit einer der folgenden Eigenschaften gibt:

- a) Die Anzahl der Diagonalen ist dreimal so groß wie die Anzahl der Eckpunkte.
- b) Die Anzahl der Eckpunkte ist dreimal so groß wie die Anzahl der Diagonalen.

8; 2) Gegeben seien in der Ebene ein Kreis k_0 und 6 Kreise vom Radius r , deren jeder in der aus der Abbildung A 8; 2 ersichtlichen Weise genau zwei von ihnen und außerdem den Kreis k_0 von außen berührt. Ermittle den Radius r_0 des Kreises k_0 !

Abb. A 8; 2



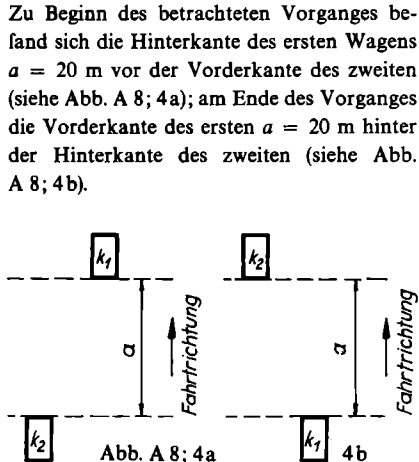
8; 3) a) Beweise folgenden Satz:

Wenn in einem (nicht überschlagenen) ebenen Viereck alle Seiten gleichlang sind (Rhombus), dann stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

b) Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

8; 4) Auf zwei nebeneinanderliegenden Fahrbahnen sind zwei 4 m lange Kraftwagen in gleicher Fahrtrichtung gefahren. Der erste hatte eine Geschwindigkeit von $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, der zweite eine Geschwindigkeit von $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Der zweite Kraftwagen fuhr an dem ersten vorbei. Zu Beginn des betrachteten Vorganges befand sich die Hinterkante des ersten Wagens $a = 20$ m vor der Vorderkante des zweiten (siehe Abb. A 8; 4a); am Ende des Vorganges die Vorderkante des ersten $a = 20$ m hinter der Hinterkante des zweiten (siehe Abb. A 8; 4b).



Wie lange dauert dieser Vorgang, und welche Fahrstrecke wurde von der Vorderkante des zweiten Wagens dabei zurückgelegt?

Olympiadeklasse 9

9; 1) Auf der Siegerehrung einer Kreisolympiade wurde folgendes mitgeteilt:

Genau ein Neuntel aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade errangen einen Preis.

Genau ein Zehntel aller Teilnehmer der Kreisolympiade sind Mitglieder des Kreisklubs Junge Mathematiker.

Von den Preisträgern stammen genau 75 Prozent aus dem Kreisklub. Genau 6 derjenigen Schüler, die an der Kreisolympiade teilnahmen und Mitglieder des Kreisklubs sind, erhielten keinen Preis. Ermitteln Sie die Anzahl aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade!

9; 2) Aus je 12 geradlinigen Hölzern von je 1 dm Länge sollen die Ränder ebener Figuren gelegt werden, deren Flächeninhalte der Reihe nach

$I_1 = 9 \text{ dm}^2$; $I_2 = 8 \text{ dm}^2$; $I_3 = 7 \text{ dm}^2$; $I_4 = 6 \text{ dm}^2$; $I_5 = 5 \text{ dm}^2$; $I_6 = 4 \text{ dm}^2$; $I_7 = 3 \text{ dm}^2$ groß sind.

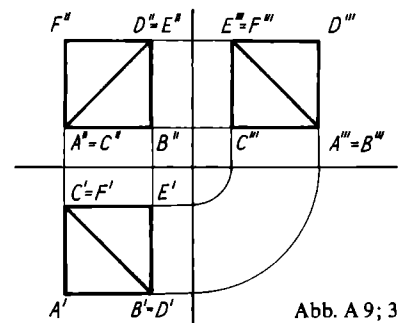
Dabei sollen in jedem Fall alle 12 Hölzer zur Herstellung der Berandung der betreffenden Figur gebraucht und keines geteilt oder geknickt werden; keine zwei Hölzer sollen (ganz oder teilweise) übereinanderliegen oder sich überkreuzen.

Geben Sie für jeden Fall eine Lösung an!

9; 3) In Abb. A 9; 3 ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper im Grund-, Auf- und Seitenriß dargestellt.

(Ein durch ebene Flächen begrenzter Körper K heißt konvex, wenn für jede seiner Begrenzungsflächen $\mathcal{F}$ gilt: Ist ε die Ebene, in der $\mathcal{F}$ liegt, so befindet sich K ganz in einem der beiden Halbräume, in die der Raum durch ε zerlegt wird.) Die Umrisse des dargestellten Körpers sind im Grund-, Auf- und Seitenriß Quadrate mit der Seitenlänge a .

Bauen oder beschreiben Sie einen solchen Körper und berechnen Sie sein Volumen!



9; 4) Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl z sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden.

Ist die erste Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als die zweite Quersumme von z bezeichnet.

(Beispiele: Die erste Quersumme von 98 ist $9 + 8 = 17$, die zweite Quersumme von 98 ist $1 + 7 = 8$.)

Die erste Quersumme von 43 ist $4 + 3 = 7$, eine zweite Quersumme von 43 wird nicht erklärt.)

Ist die zweite Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße deren Quersumme die dritte Quersumme von z . In entsprechender Weise werden gegebenenfalls höhere Quersummen erklärt.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die keine zweite Quersumme erklärt ist!

b) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die die zweite, aber nicht die dritte Quersumme erklärt ist!

c) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist!

Olympiadeklasse 10

10; 1) Bei einem international besetzten Radrennen ergab sich folgende Rennsituation: Das Feld der Teilnehmer war in genau drei Gruppen (Spitzengruppe, Hauptfeld, letzte Gruppe) aufgesplittet.

Jeder Fahrer fuhr in einer dieser Gruppen. Genau 14 Fahrer waren in der letzten Gruppe, darunter kein DDR-Fahrer.

Genau 90 Prozent der übrigen Fahrer bildeten das Hauptfeld. Darin fuhren einige, jedoch nicht alle DDR-Fahrer. Die Spitzengruppe umfaßte genau ein Zwölftel des gesamten Teilnehmerfeldes.

Von den dort vertretenen Mannschaften waren genau die polnische am schwächsten und genau die sowjetische am stärksten vertreten.

a) Wieviel Fahrer nahmen insgesamt teil?

b) Wieviel DDR-Fahrer waren in der Spitzengruppe?

c) Wieviel Mannschaften waren in der Spitzengruppe vertreten?

10; 2) In jedem von drei Betrieben I, II, III wurden drei Erzeugnisarten E_1 , E_2 , E_3 produziert. Die Produktionskosten je Stück waren für gleichartige Erzeugnisse in allen drei Betrieben gleich. Aus nachstehender Tabelle sind die Stückzahlen der täglich produzierten Erzeugnisse sowie die täglichen Gesamtproduktionskosten zu ersehen.

Betrieb	Tägliche Stückzahlen			Tägliche Gesamtproduktionskosten in M
	E_1	E_2	E_3	
I	5	5	8	5950
II	8	6	6	6200
III	5	8	7	6450

Wie hoch waren die Produktionskosten je Stück der einzelnen Erzeugnisarten?

10; 3) In einem regelmäßigen Sechseck mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F seien X, Y, Z die Mittelpunkte der Seiten AB, CD und EF . Berechnen Sie das Verhältnis $I_s : I_D$, wenn I_s der Flächeninhalt des Sechsecks und I_D der Flächeninhalt des Dreiecks ΔXYZ ist!

10; 4) Es sei $f(x)$ die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ definierte Funktion und x_0 eine beliebige reelle Zahl.

Beweisen Sie, daß dann

$$f(x_0 - 1) = f(x_0 + 1) - 8x_0 + 6 \text{ gilt!}$$

(Dabei bezeichnet $f(x_0 - 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 - 1$ und $f(x_0 + 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 + 1$.)

Olympiadeklassen 11 und 12

11/12; 1) Bei einer Abendveranstaltung tanzte jeder der anwesenden Herren mit genau drei Damen, und zwar mit jeder genau einmal. Als alle Teilnehmer nach dem Tanz

noch in gemütlicher Runde beieinander saßen und den Abend überblickten, wurde festgestellt, daß jede der anwesenden Damen mit genau zwei Herren, und zwar mit jedem genau einmal getanzt hatte. Ferner bemerkte man, daß je zwei Herren im Verlaufe des Abends genau eine gemeinsame Tanzpartnerin gehabt hatten. Es ist die Anzahl aller bei dieser Veranstaltung anwesenden Damen und Herren zu ermitteln.

11/12; 2) a) Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = \frac{9}{16} \text{ zu ermitteln.}$$

b) Ferner sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = a$$

keine,

genau eine,

genau zwei,

genau drei,

genau vier bzw.

mehr als vier verschiedene reelle Lösungen in x hat.

11/12; 3) Es sind alle natürlichen Zahlen a anzugeben, für welche die Gleichung

$$a^a = (a^a)^a \text{ erfüllt ist. } (a^a \text{ bedeutet } a^{(a^a)})$$

11/12; 4) In einem ebenen Gelände kann das Abstecken eines Kreisbogens vom Ra-

dius r über einer Sehne AB mit der Länge $\overline{AB} = s < 2r$ (der gesuchte Kreisbogen sei der kleinere von zwei A und B begrenzten Kreisbogen vom Radius r) nach der folgenden Näherungsmethode ausgeführt werden:

In beliebigen Teilpunkten T im Innern der Strecke AB werden Senkrechte nach der Seite des gesuchten Kreisbogens errichtet und auf diesen von T aus Strecken der Länge

$$\overline{TP'} = z' = \frac{ab}{2r} \text{ abgetragen } (\overline{AT} = a, \overline{TB} = b).$$

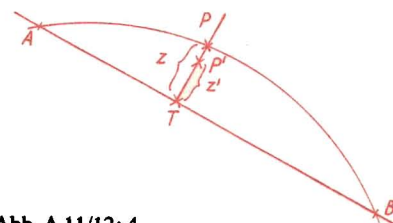


Abb. A 11/12; 4

Der gesuchte Punkt P des Kreisbogens auf der Geraden durch T und P' habe von T den Abstand $\overline{TP} = z$.

Ferner sei, wie in der Vermessungstechnik vorausgesetzt wird, $s \leq \frac{1}{5}r$. Es ist zu be-

weisen, daß dann der relative Fehler

$$\delta = \frac{|z - z'|}{z}$$

stets kleiner als 0,0051, d. s. $5,1\text{‰}$, ist.



Mit diesem Bild (aufgenommen anl. der DDR-Olympiade 69) sagen wir Dank den Tausenden von Mathematiklehrern, welche die Olympiaden Junger Mathematiker Jahr um Jahr hervorragend unterstützen.



In Heft 6 bringen wir einen Beitrag zu „Mathematik und Schach“. Unser Bild zeigt Teilnehmer der DDR-Olympiade beim Simultanspiel.

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. rer. nat. habil. Horst Sachs

Direktor der Sektion „Mathematik, Rechentechnik und Ökonomische Kybernetik“
der Technischen Hochschule Ilmenau

▲ 410 In der Ebene seien eine Anzahl geschlossener Kurven $C_1, C_2, \dots, C_m$ gezeichnet, so daß eine Figur F entsteht, die folgenden Bedingungen genügt:

- I Auf jeder der Kurven C_μ liegt mindestens ein Punkt, in dem C_μ sich selbst oder eine andere Kurve C_μ' schneidet;
- II es gibt nur eine endliche Anzahl n von Schnittpunkten;
- III in keinem Punkt der Ebene schneiden sich mehr als zwei Kurvenstücke;
- IV F ist „zusammenhängend“, d. h. je zwei Schnittpunkte sind durch (mindestens) einen Weg verbunden, der sich aus Stücken der Kurven C_μ zusammensetzt.

(Abb. 1 zeigt eine solche Figur mit $m = 3$ und $n = 14$).

F ist ein spezieller planarer Graph. Die n Schnittpunkte werden auch als *Knotenpunkte* bezeichnet. Ein Kurvenstück, das zwei Knotenpunkte miteinander verbindet, ohne im Innern einen weiteren Knotenpunkt zu enthalten, heißt eine *Kante*; k sei die Anzahl der Kanten von F . Durch F wird die Ebene in f Gebiete zerlegt, von denen sich eines (das Außengebiet) ins Unendliche erstreckt.

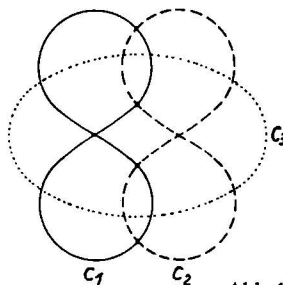


Abb. 1

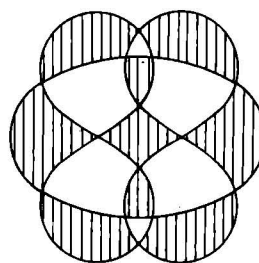


Abb. 2

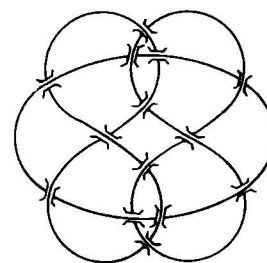


Abb. 3

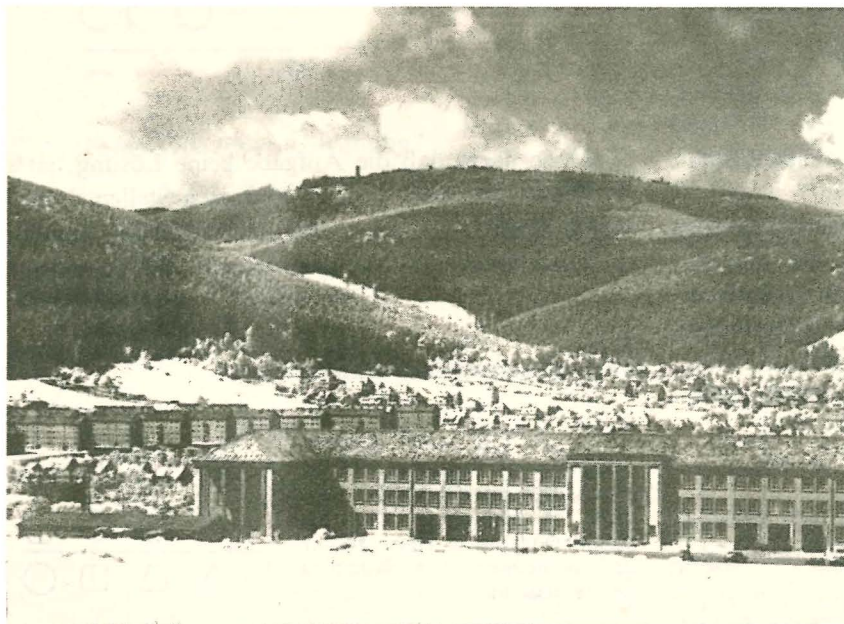
Man beweise:

- a) $k = 2n$, $f = n + 2$.
- b) Man kann die Gebiete so mit zwei Farben färben, daß je zwei längs einer Kante benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben (Abb. 2).
- c) Die Figur F sei das Schema eines zu bauenden Straßensystems, das mittels Brücken an den Schnittpunkten kreuzungsfrei gehalten werden soll. Dann kann man die Brücken stets so bauen, daß ein Passant beim Durchlaufen einer beliebigen der Straßen C_μ die Schnittpunkte abwechselnd auf der Brücke und unter der Brücke passiert (Abb. 3).

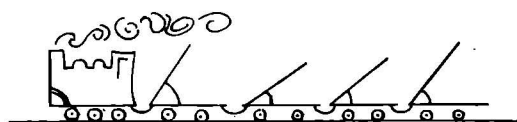
Über die Mathematik-Ausbildung an der TH Ilmenau

1953 wurde die Hochschule für Elektrotechnik in Ilmenau gegründet. Anlässlich ihres zehnjährigen Bestehens erhielt sie den Namen „Technische Hochschule Ilmenau“. Gegenwärtig gliedert sie sich in sechs Sektionen, darunter die Sektion „Mathematik, Rechentechnik und Ökonomische Kybernetik“, durch die sämtliche Ingenieur-Studenten der TH ihre Grundausbildung in Mathematik, maschineller Rechentechnik und Ökonomie erhalten. An dieser Sektion werden auch Diplommathematiker der Ausbildungsrichtung „Mathematische und statistische Methoden der Operationsforschung“ zum späteren Einsatz vor allem in der elektrotechnischen Industrie (einschl. wiss. Gerätebau und Rechenelektronik) ausgebildet; es kann ein technisches Nebenfach (etwa Regelungstechnik) oder ein ökonomisches Nebenfach gewählt werden. Die Sektion beschäftigt sich mit der Modellierung und Optimierung technischer und ökonomischer Systeme und Prozesse mit dem Ziel ihrer mathematisch-ökonomischen Beherrschung (Grundlagen und Anwendungen), wobei neben allgemeinen Optimierungsverfahren insbesondere kombinatorische Modelle und Algorithmen (Graphentheorie, Netzplantechnik) eine Rolle spielen.

Technische Hochschule Ilmenau

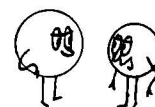


In freien Stunden **alpha** heiter



„Immer diese Winkelzüge“

Aus: Zeit im Bild 42/68



Spiel am Badestrand

An diesem Spiel können mehrere Spieler gleichzeitig teilnehmen, mindestens zwei! Benötigt wird kariertes Papier und Bleistifte. Zuerst markiert jeder Spieler auf seinem Blatt ein Quadrat mit etwa 20 Kästchen Seitenlänge, dann bezeichnet jeder Spieler die untere Seite mit Zahlen von 1 bis 20 und die linke Seite des Quadrates mit Buchstaben a, b, c usw. Nun zeichnet jeder Spieler in sein Quadrat eine beliebige geometrische Figur, jedoch nur geradlinige Figuren! Zum Beispiel Rechteck, Parallelogramm, Trapez, unregelmäßiges Vieleck o. ä.

Durch Angabe der Koordinaten eines gegnerischen Feldes wird nun abwechselnd versucht, die Figur des Gegners zu „orten“! Hat man die Figur im Feld des anderen aufgestöbert, beginnt die eigentliche Überlegung. Durch geschickte Wahl der Koordinaten soll nun die Figur des Gegners ermittelt werden. Sieger ist natürlich derjenige, der die Figur des anderen nennen kann. Um ein planloses „Erraten“ möglichst auszuschalten, muß der Spieler 2mal aussetzen, der eine falsche Figur genannt hat. Man wird neben der eigenen Figur natürlich nach und nach auch die gegnerische Figur mit einzeichnen, um ihre Gestalt zu ermitteln.

ald jabr w'almokabala (um 830)

▲ Ich habe 10 in zwei Teile zerlegt, den einen durch den anderen geteilt. Der Quotient war 4.

▲ Ich habe 4 Maß Weizen und 6 Maß Gerste gekauft, das Maß Gerste halb so teuer wie das des Weizens. Nachher habe ich die Ausgaben zusammengezählt. Die Summe war da gleich dem Unterschied der Preise vermehrt um den Unterschied der Maße.

Mohammed ibn Musa al Khwarizmi

Painter's Puzzle

A paint tin weighs 5 lb. (pounds) when half full and 4 lb. when it is one third full of paint. Find the weight of a full tin of paint.

Aus: mathematical pie 39/63, Shirley, England

Vater Pfiffig

„Bisher hast du 6 Mark Taschengeld erhalten. Ab sofort bekommst du nur noch den 0,8ten Teil deines Taschengeldes.“

Sohn Knobel ärgerte sich zunächst, dann aber schenkte er vor lauter Freude seiner kleinen Schwester eine Tüte Bonbons.

Rätsel zur Mengenlehre

Suche ein Wort, dessen Buchstabenmenge der des Wortes „Mathematik“ gleich ist.

OL. H. Herzog, V.L.d.V., Leipzig

Zahlenrätsel — einmal anders

Troll 4/65 enthielt die folgende Aufgabe:

„Glatte Rechnung. Jeder Ring bedeutet eine Ziffer, gleiche Ringe immer gleiche Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind Zahlen zu finden, die die waagerechten und senkrechten Aufgaben lösen.“

$$\begin{array}{r}
 \text{Ring} \quad \text{Ring} \quad \text{Ring} - \text{Ring} \quad \text{Ring} \quad \text{Ring} = \text{Ring} \quad \text{Ring} \\
 : \quad \quad \quad + \quad \quad \quad + \\
 \text{Ring} \quad \text{Ring} \quad \cdot \quad \text{Ring} = \text{Ring} \quad \text{Ring} \quad \text{Ring} \\
 \hline
 \text{Ring} \quad \text{Ring} + \text{Ring} \quad \text{Ring} \quad \text{Ring} = \text{Ring} \quad \text{Ring} \quad \text{Ring}
 \end{array}$$

1. Weise nach, daß die Aufgabe keine Lösung hat!
2. Ersetzt du einen Ring an mehreren Stellen durch einen neuen, der unter den vorhandenen Ringen nicht vorkommt, so wird die Aufgabe lösbar.

Prof. Dr. habil. W. Renneberg, Leipzig

Erst übersetzen, dann nachdenken!

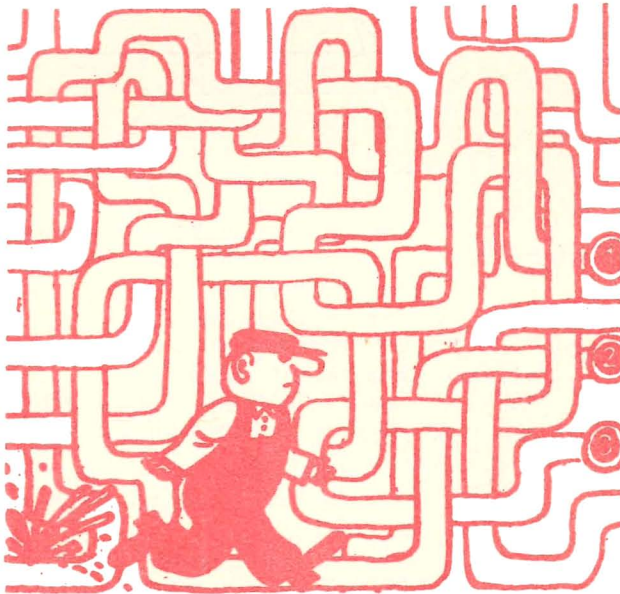
В този пример бройната система има основа осем, но вместо с букви цифрите са записани с геометрични фигури. С това ходът на решението на задачата не се изменя.

$$\begin{array}{r}
 \square \quad \bigcirc \quad \triangle \quad \hexagon \\
 + \quad \triangle \quad \square \quad \bigcirc \quad \hexagon \\
 \hline
 \triangle \quad \triangle \quad \square \quad \bigcirc
 \end{array}$$

Aus: „Unterhaltungsmathematik“, Sofia 1967, Autor: L. M. Lopowok

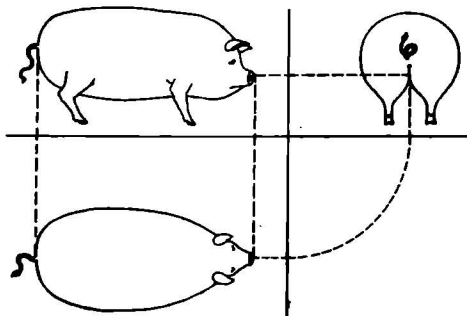
Rohrbruch

Bei Krauses gab es einen Rohrbruch. Herr Krause läuft so schnell er kann in den Keller, um den Haupt-hahn zu schließen. In seiner Aufregung betätigt er den falschen Hahn, und das Wasser schießt weiter aus der defekten Stelle im Rohr. Könnt ihr helfen? Welchen der drei Hähne muß er zudrehen?



Aus: Trommel 10/69

Grund-, Auf-, Kreuzriß



Ist in der Zeitung alles in Ordnung?

Aus: W. Lietzmann: Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen

Nicht der Mathematiker — der Fußballer

Die beiden Brüder *Bohr*, *Niels*, der Physiker, und *Harald*, der Mathematiker, gingen mit einem Freund durch Kopenhagen. Der Freund war erstaunt, daß *Harald* freundlichst begrüßt wurde, *Niels* aber nicht. „Alle Achtung, hier stehen die Mathematiker ja hoch im Kurs!“ *Niels Bohr* winkte ab. „Nicht der Mathematiker ist damit gemeint, sondern *Harald* als ein beliebter Fußballspieler unserer Stadt.“

Aus: NBI 4/69



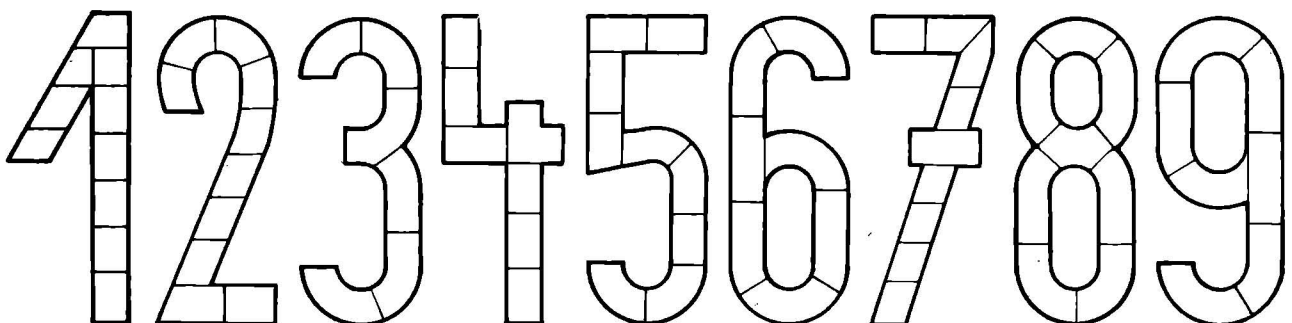
Aus: Für Dich 48/69

Bitte den Kassenzettel, falls ich reklamieren muß.

Zusammenhänge finden!

Es sind Begriffe zu finden, die mit der Ziffer in Zusammenhang stehen, in die sie eingesetzt werden müssen:
1 spezielle Menge, 2 Positionssystem zur Basis 2, 3 dreigliedriger Ausdruck, 4 Viereck mit 4 gleichen Seiten, 5 erstrebenswert im Lotto, 6 Musikstück für Gesangsstimmen, 7 der 7. Monat im römischen Kalender, 8 regelmäßiger Körper mit 8 kongruenten Seitenflächen, 9 ein spezielles Vieleck

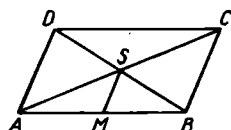
Mathematikfachlehrer W. Weber, EOS Schkeuditz



Lösungen



▲ 382 Wir legen einen Punkt D , der nicht auf der Geraden AB liegt, fest und verbinden D mit A und B . Dann ziehen wir zu AB durch D die Parallele und zu AD durch B die Parallele; diese Parallelen schneiden einander im Punkte C . Wir verbinden A mit C und bezeichnen den Schnittpunkt der Geraden AC



und BD mit S . Das so erhaltene Viereck $ABCD$ ist auf Grund der Konstruktion ein Parallelogramm. Wir zeichnen nun durch S die Parallele zu AD ; sie schneidet die Strecke $\overline{AB}$ im Punkte M , der Mitte von $\overline{AB}$; denn nach dem Strahlensatz gilt $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{AS} : \overline{SC}$ und, da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, $\overline{AS} : \overline{SC} = 1 : 1$. Daraus folgt $\overline{AM} = \overline{MB}$.

▲ 383 Wir beweisen die Behauptung *indirekt*. Wir nehmen an, es gäbe zwei ganze, einander teilerfremde Zahlen m und n , so daß 4 sowohl Teiler von $m + n$ als auch Teiler von $m - n$ ist. Dann würde gelten:

$$m + n = 4a$$

und $m - n = 4b$, wo a und b ganze Zahlen sind. Daraus würde folgen:

$$\begin{aligned} (m+n) + (m-n) &= 4a + 4b = 4(a+b), \\ 2m &= 4(a+b), \\ m &= 2(a+b). \end{aligned} \quad (1)$$

Ferner würde folgen:

$$\begin{aligned} (m+n) - (m-n) &= 4a - 4b = 4(a-b), \\ 2n &= 4(a-b), \\ n &= 2(a-b). \end{aligned} \quad (2)$$

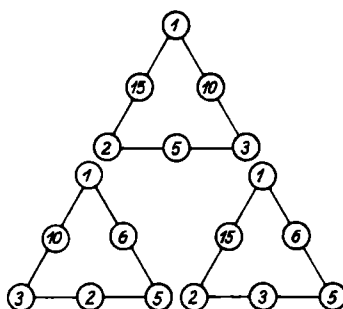
Wegen (1) und (2) wäre also sowohl m als auch n durch 2 teilbar, was der Voraussetzung, wonach m und n teilerfremd sind, widerspricht.

Daher ist die gemachte Annahme falsch und die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

Beispiel: $m = 15, n = 7$. Die Zahlen $m+n=22$ und $m-n=8$ haben den größten gemeinsamen Teiler 2 und nicht 4.

W 8 ■ 384 Da die einem Eckkreis zugeordnete Zahl a jeweils zu zwei Produktdarstellungen der Zahl 30 mit drei Faktoren gehört, darf $n = \frac{30}{a}$ keine Primzahl sein.

Denn sonst hätte n nur die Produktdarstellungen $1 \cdot n$. Als Zahlen a kommen demnach nur in Frage 1, 2, 3 und 5. Andererseits führt jede Zuordnung von drei dieser vier Zahlen zu einer Lösung. Damit gibt es genau drei, nicht durch Spiegelung oder Drehung aufeinander abbildbare Belegungen, nämlich:



W 8 ■ 385 a) Schreiben wir die Zahlen a, b, c als Dezimalbrüche, so erhalten wir:

$$a = 0,6; \quad b = 0,600798\dots; \quad c = 0,600079\dots$$

Daher gilt $a < c < b$.

b) Wenn wir die etwas umständliche Division vermeiden wollen, können wir wie folgt allgemein vorgehen:

Falls $b > a > 0$ und $x > 0$ ist, gilt

$$\frac{a+x}{b+x} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bx-ab-ax}{b(b+x)} = \frac{(b-a)x}{b(b+x)} > 0;$$

also $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$, daraus folgt

$$\frac{3}{5} < \frac{3001}{5001} < \frac{301}{501}, \text{ also } a < c < b.$$

▲ 386 Da die Oberfläche der Erde

$$0 = 4\pi R^2 \approx 509,9 \cdot 10^6 \text{ km}^2$$

beträgt, ist eine Fläche von

$$509,9 \cdot 10^6 \cdot 0,708 \text{ km}^2 \approx 361,0 \cdot 10^6 \text{ km}^2$$

vom Meer bedeckt.

Falls alle Eismassen abtauen würden, wäre das Volumen der entstehenden Wassermassen gleich

$$28,8 \cdot 10^6 \cdot 0,9 \text{ km}^3 \approx 25,9 \cdot 10^6 \text{ km}^3.$$

Der Meeresspiegel würde sich also um

$$x = \frac{25,9 \cdot 10^6}{361,0 \cdot 10^6} \text{ km} \approx 0,0717 \text{ km},$$

d. s. rund 71,7 m oder 71 700 mm heben.

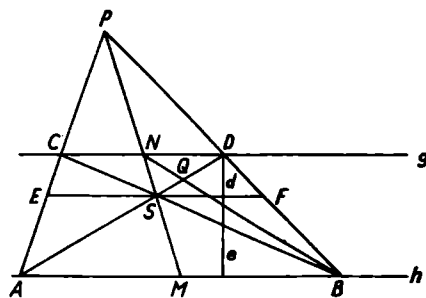
▲ 387 Da die Summe der vier natürlichen Zahlen ungerade ist, sind nur die folgenden beiden Fällen möglich:

1. Drei Zahlen sind gerade, eine ist ungerade. Dann ist das Produkt gerade.
2. Drei Zahlen sind ungerade, eine ist gerade. Dann ist ebenfalls das Produkt gerade.
3. In allen anderen Fällen aber ist die Summe gerade und damit die Voraussetzung nicht erfüllt.

▲ 388 Konstruktion: Wir wählen einen Punkt P so, daß er in derjenigen durch die Gerade g bestimmten Halbebene liegt, in der die Gerade h nicht gelegen ist.

Die Verbindungsgeraden von P mit A bzw. B schneiden die Gerade g in den Punkten C bzw. D .

Wir verbinden A mit D und B mit C und erhalten den Schnittpunkt S der Geraden AD und BC . Wir verbinden P mit S . Dann ist der Schnittpunkt M der Geraden PS mit h der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.



Beweis: Es seien E und F die Schnittpunkte der Parallelen durch S zu der Geraden h mit den Geraden PA bzw. PB .

Ferner seien der Abstand der Geraden EF und g gleich d und der Abstand der Geraden EF und h gleich e (vgl. die Abb.).

Dann sind die Dreiecke ABC und ABD flächengleich, also auch die Dreiecke ASC und SBD . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\overline{ES} \cdot d}{2} + \frac{\overline{ES} \cdot e}{2} &= \frac{\overline{SF} \cdot d}{2} + \frac{\overline{SF} \cdot e}{2}, \\ \overline{ES} \cdot \frac{d+e}{2} &= \overline{SF} \cdot \frac{d+e}{2}, \\ \overline{ES} &= \overline{SF} \end{aligned}$$

und hieraus nach dem Strahlensatz wegen $\overline{ES} : \overline{AM} = \overline{PS} : \overline{PM}$ und $\overline{SF} : \overline{MB} = \overline{PS} : \overline{PM}$ $\overline{AM} = \overline{MB}$, d. h. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, w.z.b.w.

W 9 ■ 389 Es seien

- x_1 die Anzahl der Medaillen der DDR,
- x_2 die der UdSSR,
- x_3 die von Rumänien,
- x_4 die der Niederlande,
- x_5 bzw. x_6 die der übrigen beiden Länder.

Dann gilt nach Voraussetzung

$$5 \geq x_1 > x_2 = x_3 > x_4 > x_5 \geq x_6 > 0, \\ s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15.$$

1. Es sei $x_1 \leq 4$; dann gilt

$$x_2 = x_3 \leq 3, \quad x_4 \leq 2, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = 1, \text{ also } s \leq 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 14, \text{ was der}$$

Voraussetzung widerspricht.

2. Daher gilt $x_1 = 5$. Ferner gilt

$$x_2 = x_3 \geq 3, \quad x_4 \geq 2, \quad x_5 \geq 1, \quad x_6 \geq 1.$$

2.1. Es sei $x_2 = x_3 = 4$. Dann gilt

$$s \geq 5 + 4 + 4 + 2 + 1 + 1 = 17, \text{ was der Voraussetzung widerspricht.}$$

2.2. Daher gilt $x_2 = x_3 = 3$, also $x_4 = 2$,

$$x_5 = x_6 = 1 \text{ und } s = 5 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 15, \text{ so daß alle}$$

Voraussetzungen erfüllt sind.

Es erhielten also die DDR 5 Medaillen, die UdSSR und Rumänien je 3 Medaillen.

W 9 ■ 390 Angenommen, es sei x eine reelle Zahl, für die Ungleichung

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \text{ erfüllt ist.} \quad (1)$$

Dann gilt $x \neq 1$, da sonst der Nenner auf der

linken Seite von (1) gleich Null wäre. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall $x - 1 > 0$, d. h. $x > 1$. Dann gilt
 $x + 1 > x - 1$, also wegen $x - 1 > 0$
 $\frac{x+1}{x-1} > 1$.

Die Ungleichung (1) ist daher zunächst für alle $x > 1$ erfüllt.

2. Fall $x - 1 < 0$, d. h. $x < 1$. Dann gilt
 $x + 1 > x - 1$, also wegen $x - 1 < 0$
 $\frac{x+1}{x-1} < 1$.

Die Ungleichung (1) ist also für keine reelle Zahl x , die kleiner als 1 ist, erfüllt.

Daher ist die gegebene Ungleichung (1) für alle reellen Zahlen x , die größer als 1 sind, und nur für diese reellen Zahlen x erfüllt.

▲ 391 Es gilt $x^2 - x - 6 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{25}{4}$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) \\ = (x+2)(x-3).$$

Daher ist die Bedingung $x^2 - x - 6 < 0$ mit der Bedingung $(x+2)(x-3) < 0$ äquivalent, d. h. mit der Bedingung (4):

$$-2 < x < 3. \quad (6)$$

Die gegebene Bedingung ist aber nicht äquivalent mit den Bedingungen (1), (2), (3) oder (5), weil diese eine andere Erfüllungsmenge als (6) besitzen. Die Bedingung (3) ist sogar für keine reelle Zahl x erfüllt.

▲ 392 a) Wir bezeichnen die vier Zahlen a, b, c, d so, daß
 $a \leq b \leq c \leq d$ gilt.

Dann ist $a+b$ kleiner oder gleich den anderen Summen und $c+d$ größer oder gleich den anderen Summen. Ferner ist

$a+b \leq a+c$ kleiner oder gleich den in dieser Ungleichung nicht vorkommenden Summen und

$c+d \geq b+d$ größer oder gleich den in dieser Ungleichung nicht vorkommenden Summen.

Daher gilt in dem vorliegenden Fall

$$a+b=12 \quad (1), \quad a+c=15 \quad (2), \\ c+d=22 \quad (3), \quad b+d=19 \quad (4).$$

Es verbleiben nur noch die Summen $b+c$ und $a+d$, die in dem vorliegenden Fall beide gleich 17 sind:

$$b+c=a+d=17. \quad (5)$$

Wir erhalten aus (1) $b=12-a$

und aus (2) $c=15-a$,

also wegen (5) $b+c=27-2a=17$,

$$\text{d. h.} \quad 2a=10, a=5,$$

ferner $b=7, c=10, d=12$.

Die gesuchten vier Zahlen sind also 5, 7, 10 und 12; denn die Summen von je zwei dieser Zahlen sind 12, 15, 17, 17, 19 und 22.

b) In dem vorliegenden Fall sind diese vier Zahlen (abgesehen von der Reihenfolge) eindeutig bestimmt, weil $b+c=a+d=17$ ist und die Gleichungen (1), (2), (5) und (3) genau eine Lösung für a, b, c, d haben.

c) Ist also $b+c=a+d$, so sind die vier Zahlen a, b, c, d durch die Angabe der sechs Summen eindeutig bestimmt. Ist aber $b+c \neq a+d$, und sind die sechs Summen, der Größe nach geordnet, $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ mit $s_3 \neq s_4$, so erhält man die Gleichungen

$$a+b=s_1 \quad (1), \quad a+c=s_2 \quad (2),$$

$$c+d=s_6 \quad (3), \quad b+d=s_5 \quad (4),$$

$$b+c=s_3 \quad \text{oder} \quad b+c=s_4 \quad (5)$$

und hieraus (analog wie oben) die Lösungen

$$a = \frac{s_1+s_2-s_3}{2} \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{s_1+s_2-s_4}{2} \quad \text{usw.,}$$

also wegen $s_3 \neq s_4$ zwei verschiedene Lösungen.

Die vier Zahlen a, b, c, d sind also dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn

$a+d=b+c$ gilt, wenn also die Summe der ersten und vierten Zahl gleich der Summe der zweiten und dritten Zahl ist (falls die vier Zahlen der Größe nach geordnet sind).

Es sei noch bemerkt, daß in jedem Falle die Bedingungen

$$s_1+s_6=s_2+s_5=s_3+s_4$$

erfüllt sein müssen, weil sonst das Gleichungssystem keine Lösung hat.

W 10/12 ■ 393 Die Sekretärin kann mit Zuversicht an die Erledigung des ihr übertragenen Auftrages gehen. Man kann beweisen, daß es auf jeden Fall eine solche Dreiergruppe gibt.

Man suche sich irgendeinen der 66 Mathematiker heraus, beispielsweise den Mathematiker X. Er korrespondiert mit jedem der 65 übrigen Mathematiker über genau eines der vier Gebiete Analysis, Zahlentheorie, Geometrie bzw. Wahrscheinlichkeitsrechnung und, weil $16 \cdot 4 < 65$ und $17 \cdot 4 > 65$ ist, mit mindestens 17 von ihnen über eines dieser vier Gebiete, z. B. über Analysis. Sind unter diesen 17 Wissenschaftlern zwei vorhanden, deren Briefwechsel gleichfalls das Gebiet der Analysis betrifft, so ist eine solche gewünschte Dreiergruppe gefunden.

Ist das nicht der Fall, so befassen sich diese 17 Mathematiker untereinander nur mit Zahlentheorie, Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Einer dieser 17 Wissenschaftler, sagen wir der Mathematiker Y, korrespondiert über eines dieser drei Gebiete, z. B. über Zahlentheorie mit mindestens 6 Mathematikern dieser Gruppe, weil $5 \cdot 3 < 17$ und $6 \cdot 3 > 17$ ist. Sind unter diesen 6 Wissenschaftlern zwei vorhanden, deren Briefwechsel gleichfalls das Gebiet der Zahlentheorie betrifft, so ist wiederum eine solche Dreiergruppe gefunden. Ist das nicht der Fall, so befassen sich diese 6 Mathematiker untereinander nur mit Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Einer dieser 6 Wissenschaftler, sagen wir der Mathematiker Z, korrespondiert über eines der beiden Gebiete, z. B. über Geometrie, mit mindestens drei Mathematikern dieser Gruppe. Sind unter diesen drei Wissenschaftlern zwei vorhanden, deren Briefwechsel gleichfalls das Gebiet der

Geometrie betrifft, so ist wieder eine solche Dreiergruppe gefunden.

Ist das nicht der Fall, dann korrespondierten diese drei Wissenschaftler untereinander nur über Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung. So findet man also auch in diesem Fall eine solche Dreiergruppe. Es muß also unter den 66 Mathematikern drei Mathematiker geben, die untereinander nur über Probleme einer einzigen Disziplin korrespondieren.

W 10/12 ■ 394 In der beigefügten Schnittfigur sind

M der Mittelpunkt der Erde,

K der Standort des Kosmonauten,

T_1, T_2 die Berührungspunkte der von K an dem Schnittkreis gelegten Tangenten,

$a = \overline{KA} = 225$ km die Entfernung des

Kosmonauten von der Erdoberfläche,

$R = \overline{MT_1} = 6370$ km der (mittlere)

Radius der Erde

und $x = \overline{AB}$ die Höhe der gesuchten Kugelkappe, die durch die Berührungspunkte aller von K an die Erdoberfläche gelegten Tangenten begrenzt ist.

Da das Dreieck MT_1K rechtwinklig ist und da $\overline{MB} = R - x$ und $\overline{MK} = R + a$ gilt, folgt nach dem Satz des Euklid

$$R^2 = (R-x)(R+a),$$

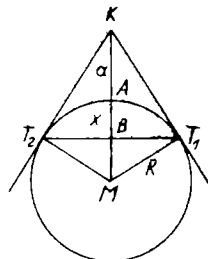
also $R^2 = R^2 + aR - Rx - ax$,

d. h. $Rx + ax = aR$

also $x(R+a) = aR$,

d. h. $x = \frac{aR}{R+a}$. Wir erhalten

$$x = \frac{225 \cdot 6370}{6595} \text{ km} \approx 217,3 \text{ km}.$$



Daher beträgt der Flächeninhalt der gesuchten Kugelkappe

$$A = 2\pi R x \approx 2\pi \cdot 6370 \cdot 217,3 \text{ km}^2 \\ \approx 8\,700\,000 \text{ km}^2.$$

Der Kosmonaut konnte also ein Gebiet von rund 8,7 Millionen Quadratkilometer überblicken, das ist etwa das 80fache der Fläche der DDR (rund 108 000 km²) und mehr als ein Drittel der Fläche der UdSSR (rund 22 000 000 km²).

Lösung der Aufgabe

von Prof. Dr. K. Manteuffel

▲ 395 1. Es ist 60 das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3, 4, 5, 6; daher werden die Bedingungen für 2, 3, 4, 5, 6 sicher von den Zahlen der Form $m = 60\lambda + 1$, $\lambda = 0, 1, 3, \dots$ erfüllt. Dann soll m noch durch 7 teilbar sein, d. h. $60\lambda + 1 \equiv 0(7)$ bzw.

$4\lambda + 1 \equiv 0(7)$; alle $\lambda \equiv 5(7)$, d. h. alle $\lambda = 5 + 7\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, erfüllen diese Bedingung. Daher müssen alle Zahlen

$m_\mu = 60(5 + 7\mu) + 1 = 301 + 420\mu$, $\mu = 0, 1, 2, \dots$ sämtlichen Bedingungen genügen; für $\mu = 0$ ergibt sich mit $m_0 = 301$ die Anzahl der am Ausflug teilnehmenden Schüler.

2. Durch Überlegung und Probieren kann man auf verschiedenen Wegen zum gesuchten Ergebnis kommen.

Z. B. 60 und jedes Vielfache davon sind durch 2, 3, 4, 5, 6 teilbar; also ergeben 61, 121, 181, 241, 301, 361, ... bei Division durch 2, 3, 4, 5, 6 jeweils den Rest 1. Es braucht von diesen nur die Zahl ermittelt zu werden, die bei Division durch 7 den Rest 0 ergibt; die gesuchte kleinste Zahl ist 301. Addiert man zu 301 Vielfache des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von 2, 3, 4, 5, 6, 7, also Vielfache von 420, dann erhält man alle gesuchten Zahlen.

Oder man geht von den Vielfachen von 7 aus. In Frage kommen nur solche Vielfachen, die bei Division durch 10 den Rest 1 ergeben (die gesuchten Zahlen müssen sowohl bei Division durch 2 als auch bei Division durch 5 jeweils den Rest 1 ergeben, also auch bei Division durch 10); Zahlen mit diesen Eigenschaften sind 21, 91, 161, 231, 301, 371, ... Man prüft nun die Reste, die sich bei Division durch 4 und 6 ergeben, und findet die Zahl 301. Man verfährt dann weiter wie oben.

5 ▲ 396 Wir stellen die folgenden Zahlenpaare zusammen:

- 1 und 998
- 2 und 997
- 3 und 996

499 und 500.

Die Quersummen aus den beiden Zahlen jedes dieser 499 Paare betragen zusammen stets 27. Die Summe der Quersummen der Zahlen von 1 bis 998 beträgt somit $27 \cdot 499 = 13473$.

Wir addieren noch die Quersummen der Zahlen 999 und 1000, also 27 und 1.

Die Summe der Quersummen der Zahlen von 1 bis 1000 beträgt damit 13501.

W 5 ■ 397 Es sei n die Anzahl der Schichten, die für beide Schachteln gleich ist, dann gilt $7 \cdot n - 3 = 5 \cdot n + 3$. Diese Gleichung wird nur durch $n = 3$ erfüllt, das heißt, Hans besitzt 18 Farbstifte.

W 5 ■ 398 Das Taschengeld hätte bei gleichbleibender Sparsamkeit für 36 Tage gereicht. Da es nur für 30 Tage bestimmt war, wurde der sechste Teil des Taschengeldes eingespart, das waren 2 M. Folglich beträgt Anneroses Taschengeld $6 \cdot 2$ M., das sind 12 M.

6 ▲ 399 Aus $u = a + b + c$ und

$7 + b + 11 < 31$ folgt $b < 13$. Aus $a + b > c$ folgt $7 + b > 11$, also $b > 4$.

Die Seite $AC = b$ kann entweder 5 cm oder 9 cm lang sein, da die Maßzahlen der Seitenlängen verschieden groß sein sollen.

W 6 ■ 400 Im ungünstigsten Falle werden der Schachtel zunächst alle blauen und grünen Kugeln entnommen, das sind zusammen 34 Kugeln. Erst mit der 35. Kugel ist dann eine rote dabei, so daß man eine Kugel jeder der drei Farben besitzt.

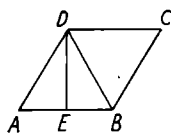
W 6 ■ 401 Die Quersumme des ersten Faktors beträgt 21, die des zweiten ebenfalls 21. Beide Faktoren sind demnach durch 3 teilbar; folglich muß ihr Produkt durch 9 teilbar sein. Die Quersumme des genannten Ergebnisses beträgt aber 26; diese Zahl ist nicht durch 9 teilbar. Das angegebene Ergebnis ist also falsch.

W 7 ■ 402 Aus $\overline{SB} = \overline{SD}$, $\overline{SA} = \overline{SC}$ und $\angle CSB = \angle ASD$ folgt $\triangle SBC \cong \triangle SAD$ und damit auch $\angle SDA = \angle SBC$ und $\angle SAD = \angle SCB$. Aus der Gleichheit der Winkel $\angle SAD$ und $\angle SCB$ folgt die Gleichheit ihrer Nebenwinkel, also $\angle EAB = \angle ECD$. Aus den Voraussetzungen der Aufgabe folgt ferner $\overline{AB} = \overline{CD}$. Aus den bisher ermittelten Beziehungen folgt $\triangle ABE \cong \triangle DCE$ und damit auch $\overline{BE} = \overline{DE}$, das heißt, daß das Dreieck BDE gleichschenkelig ist.

W 7 ■ 403 Die gesuchten Zahlen sind durch 72 teilbar, also auch durch 8 und 9. Nun steht wegen der Voraussetzung a) der Aufgabe an der 4. Stelle eine gerade Zahl; daher muß die aus der 5. und 6. Stelle gebildete Zahl durch 8 teilbar sein; andererseits ist diese Zahl wegen der Voraussetzung a) auch durch 3 teilbar. Das trifft nur für die Zahlen 24, 48, 72 und 96 zu. Für 24 wäre die aus den ersten beiden Stellen gebildete Zahl 8; wir erhalten nur eine fünfstellige Zahl; also entfällt 24.

Die in Frage kommenden Zahlen lauten demnach 163 248, 244 872 und 326 496. Die Quersummen dieser Zahlen sind 24, 27 und 30. Nur die Zahl 244 872 ist durch 9 und damit auch durch 72 teilbar. Daher ist 244 872 die einzige sechsstellige natürliche Zahl, die die gestellten Bedingungen erfüllt.

W 8 ■ 404 Es sei $ABCD$ das gegebene Parallelogramm mit $\angle DAB = 60^\circ$ und der der von dem Eckpunkt D ausgehenden Höhe $\overline{DE}$. Dann gilt nach Voraussetzung $\overline{AE} = \overline{EB}$. Ferner ist $\angle EDA = 30^\circ$ und auch $\angle BDE = 30^\circ$, da die Dreiecke EDA und BDE kongruent sind. Daraus folgt $\angle BDA = 60^\circ$, d. h. das Dreieck BDA ist gleichseitig.



Daher gilt $\overline{AD} = \overline{AB}$, also $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{AB} = \overline{CD}$, d. h. das Parallelogramm $ABCD$ ist ein Rhombus. Da nach Voraussetzung der Umfang dieses Rhombus 24 cm beträgt, ist seine Seitenlänge gleich 6 cm. Die Länge der kleineren Diagonale $\overline{BD}$ ist also ebenfalls gleich 6 cm, weil das Dreieck ABC gleichseitig ist.

W 8 ■ 405 Angenommen a, b und c seien drei positive ganze Zahlen, und es sei $a + b + c = abc$.

Dann gilt

$$3a + 3b + 3c = abc + abc + abc, \text{ also } a(bc - 3) + b(ac - 3) + c(ab - 3) = 0.$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn entweder $ab = ac = bc = 3$ gilt oder mindestens eine der Zahlen $ab - 3, ac - 3, bc - 3$ negativ ist, da nach Voraussetzung a, b, c positive Zahlen sind.

Im ersten Falle würde man $b = c$, also $b^2 = 3$ erhalten, was nicht möglich ist.

Im letzteren Falle wäre z. B. $ab - 3 < 0$, also $ab < 3$. Das ist nur möglich, wenn $a = b = 1$ oder $a = 1, b = 2$ oder $a = 2, b = 1$ gilt.

Aus $a = b = 1$ würde

$$(c - 3) + (c - 3) + c(-2) = 0, \text{ d. h. } -6 = 0 \text{ folgen, was nicht möglich ist.}$$

Aus $a = 1, b = 2$ folgt

$$(2c - 3) + 2(c - 3) + c(-1) = 0, \text{ also } 3c - 9 = 0, \text{ d. h. } c = 3.$$

Wir erhalten also das erste Lösungstriple $(1, 2, 3)$; denn es gilt $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Durch Vertauschung der a, b, c erhalten wir die weiteren Lösungstriple $(2, 1, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$; insgesamt gibt es also 6 Lösungstriple.

Ist nun $a = 2, b = 1$, so ist $c = 3$; wir erhalten also das bereits oben ermittelte Triple $(2, 1, 3)$. Auch in den Fällen $ac - 3 < 0$ oder $bc - 3 < 0$ erhalten wir wieder nur die obigen Lösungstriple; daher gibt es genau 6 Lösungstriple.

W 9 ■ 406 Wegen $f(x) = x^2 - 3$ gilt für alle z :

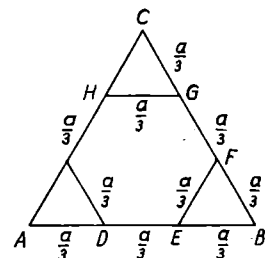
$$f(z + 1) = (z + 1)^2 - 3 = z^2 + 2z + 1 - 3 = z^2 + 2z - 2,$$

$$f(z) + 2z + 1 = z^2 - 3 + 2z + 1 = z^2 + 2z - 2,$$

$$\text{also } f(z + 1) = f(z) + 2z + 1, \text{ w. z. b. w.}$$

W 9 ■ 407 1. Wie aus der Figur ersichtlich ist, ist der Restkörper von vier regelmäßigen Sechsecken mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ und vier gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ begrenzt. Der Flächeninhalt jedes dieser

Dreiecke beträgt $\frac{1}{9} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{a^2}{36} \sqrt{3}$ und daher der Flächeninhalt jedes der Sechsecke $\frac{6 \cdot a^2}{36} \sqrt{3} = \frac{a^2}{6} \sqrt{3}$.



Also beträgt der Oberflächeninhalt des Restkörpers

$$A = \frac{4 \cdot a^2}{36} \sqrt{3} + \frac{4 \cdot a^2}{6} \sqrt{3} = \frac{7}{9} a^2 \sqrt{3}.$$

2. Das ursprüngliche Tetraeder hat das Volumen $V_1 = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}$. Jede der vier abgetrennten Pyramiden ist ebenfalls ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge $\frac{a}{3}$, also mit

$$\text{dem Volumen } V_2 = \frac{1}{27} \cdot \frac{a^3}{12} \sqrt{2}.$$

Daher beträgt das Volumen des Restkörpers

$$\begin{aligned} V &= V_1 - 4V_2 = \frac{a^3}{12} \sqrt{2} - \frac{4}{27} \cdot \frac{a^3}{12} \sqrt{2} \\ &= \frac{a^3}{12} \sqrt{2} \left(1 - \frac{4}{27}\right), \\ V &= \frac{23}{324} a^3 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

W 10/12 ■ 408 Wegen $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 5)$ gilt für alle z :

$$\begin{aligned} f\left(z - \frac{5}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left[3 \left(z - \frac{5}{2} \right) - 5 \right] = \frac{1}{2} \left[3z - \frac{25}{2} \right] \\ &= \frac{3}{2}z - \frac{25}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(z + \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{2} &= \frac{1}{2} \left[3 \left(z + \frac{1}{2} \right) - 5 \right] - \frac{9}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[3z - \frac{7}{2} \right] - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}z - \frac{25}{4}, \end{aligned}$$

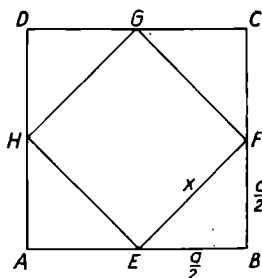
$$\text{also } f\left(z - \frac{5}{2}\right) = f\left(z + \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{2}, \text{ w.z.b.w.}$$

W 10/12 ■ 409 1. Wie aus der Figur ersichtlich ist, ist der Restkörper von sechs Quadraten mit der Seitenlänge x und acht gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge x begrenzt, wobei

$$x^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}, \text{ also } x = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ gilt.}$$

Daher beträgt der Oberflächeninhalt des Restkörpers

$$\begin{aligned} A &= 6x^2 + \frac{8x^2}{4} \sqrt{3} = 2x^2(3 + \sqrt{3}) \\ &= 2 \cdot \frac{a^2}{2} (3 + \sqrt{3}) = a^2(3 + \sqrt{3}) \approx 4,732 a^2. \end{aligned}$$



2. Jede der acht abgetrennten Pyramiden hat als Grundfläche ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck mit der Länge der Kathete $\frac{a}{2}$ und der Länge der Höhe $\frac{a}{2}$. Das Volumen jeder Pyramide beträgt daher

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{48}.$$

Daher beträgt das Volumen des Restkörpers

$$V = a^3 - \frac{8 \cdot a^3}{48} = \frac{5}{6} a^3.$$

Lösung der Aufgabe

von Prof. Dr. rer. nat. habil. M. Müller

▲ 410 Beweis:

Die Fläche des Dreiecks ABC sei F ,

Die Fläche des Dreiecks AA_1A_2 sei F_a ,

Die Fläche des Dreiecks BB_1B_2 sei F_b ,

Die Fläche des Dreiecks CC_1C_2 sei F_c .

Es gelten nun folgende Winkelbeziehungen:

$$\alpha_1 = \pi - \alpha; \quad \beta_1 = \pi - \beta; \quad \gamma_1 = \pi - \gamma; \quad \text{somit ist} \\ \sin \alpha_1 = \sin \alpha; \quad \sin \beta_1 = \sin \beta; \quad \sin \gamma_1 = \sin \gamma.$$

$$\begin{aligned} \text{Da } F &= \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot ca \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

$$F_a = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin \alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin \alpha$$

$$F_b = \frac{1}{2} \cdot ca \cdot \sin \beta_1 = \frac{1}{2} \cdot ca \cdot \sin \beta$$

$$F_c = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \gamma_1 = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \gamma,$$

ergibt sich: $F_a = F_b = F_c = F$.

▲ 414

Behälter A: $V = 1\,044\,000 \text{ cm}^3 \approx 1 \text{ m}^3$

Behälter B: $V = 2\,037\,750 \text{ cm}^3 \approx 2 \text{ m}^3$

Behälter C: $V = 3\,045\,900 \text{ cm}^3 \approx 3 \text{ m}^3$

Behälter S: $V = 768\,000 \text{ cm}^3 \approx 0,75 \text{ m}^3$

▲ 415

Typ: Startmasse je Passagier:

An 10 A rund 417 kg

An 24 420 kg

IL 18 B 556 kg

IL 18 E 501 kg

IL 62 847 kg

Jak 40 517 kg

Tu 104 745 kg

Tu 114 750 kg

Tu 124 643 kg

Tu 134 583 kg

▲ 416 Aus $u = d$ und $U = \frac{165\,000}{u}$ folgt:

a) $u \approx 3,925 \text{ m}, U \approx 42\,040$;

b) $u \approx 3,297 \text{ m}, U \approx 50\,045$;

c) $u \approx 5,495 \text{ m}, U \approx 30\,030$.

▲ 417 Auf einer Fahrstrecke von 761 m Länge hat der Zug auf je 100 m eine Steigung von 1 m zu überwinden; der Höhenunterschied beträgt also 7,61 m.

Rechte Tafel: Danach fällt die Fahrstrecke auf einer Länge von 386 m und zwar je 333 m um 1 m; das Gefälle beträgt also 1,16 m. Der Höhenunterschied der Gesamtstrecke (1147 m) beträgt damit 6,45 m.

Lösungen zu alpha-heiter

Vater Pfiffig

$$\frac{6}{0,8} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}; \text{ Knobel erhält nunmehr } 7,50 \text{ M Taschengeld.}$$

Rätsel zu Mengenlehre

$$M_1 = \{m, a, t, h, e, i, k\}$$

$$M_2 = \{t, h, e, m, a, i, k\}$$

THEMATIK

aldjahr w'almokabala

▲ Die beiden Zahlen sind 8 und 2.

▲ Weizen: $\frac{1}{3}$; Gerste $\frac{1}{6}$

Painter's Puzzle

A full tin weighs 8 lb.. 6 lb. of paint and 2 lb. for the tin. (1 engl. Pfund = 453,6 g)

Zahlenrätsel — einmal anders

Umfassende Lösung siehe Heft 6/69

Rohrbruch

Hahn 3 muß geschlossen werden.

Erst übersetzen, dann nachdenken!

$$2\,543 + 1\,253 = 4\,126$$

Zusammenhänge finden!

Einermenge, Dualsystem, Trinom, Quadrat, Fünftip, Sextett, September, Oktaeder, Neuneck

Wer schoß die 12? (6/68)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Krümel: } 9, 9, 12, 10, 8 \\ \text{Flax: } 5, 11, 10, 7, 7 \\ \text{Krümel: } 10, 9, 10, 11, 8 \\ \text{Flax: } 5, 9, 12, 7, 7 \end{array} \right\}$$

Auch so ist es richtig, meinen Rita Jeske, Lauter, und Dr. E. Kliemand nebst Sohn, Berlin

Kryptarithmetik (6/68)

Es muß auf Seite 183 rechts unten richtig heißen in Problem 1: $A B C B$

Dr. Kliemand, Berlin

Without a Word

Gentlemen, in *alpha* No. 6/68 on page 182 you used a wrong term for the sign $\div$ and for the German translation „geteilt durch“. The right term is „divided by“. Nevertheless I have enjoyed *alpha*.

Yours truly Uwe Unruh, Zansibar
(Teacher of maths from GDR)

Mitarbeiter gesucht

Liebe junge Freunde!

alpha erwartet von euch: Berichte über die Arbeit in den AGs, über Lehrmittelselbstbau, Fach- bzw. Jahresarbeiten, AG-Pläne, Mathematik-Wettbewerbe, Beiträge über lustige Begebenheiten aus dem Mathematikunterricht, Bilder, Rätsel u. ä.

Wir stellen ein Zahlenrätsel auf

$$\begin{array}{rcl} \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} & : & \boxed{}\boxed{} = \boxed{}\boxed{} \\ - & & \times \\ \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} + & & \boxed{}\boxed{} = \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} \\ \hline \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} - & & \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} = \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} \end{array}$$

Mit dem Beitrag „Wir lösen ein Zahlenrätsel“ von Th. Scholl aus *alpha* 3/68 als Anleitung haben wir sicher schon manches Zahlenrätsel wie das als Vignette abgedruckte gelöst. Zu diesem lautet die Lösung:

$$\begin{array}{r} 1368 : 24 = 57 \\ - \quad \cdot \quad + \\ 168 + 39 = 207 \\ \hline 1200 - 936 = 264 \end{array}$$

Da laufend in Illustrierten derartige Zahlenrätsel veröffentlicht werden, wollen wir uns überlegen, wie ein solches Zahlenrätsel entworfen wird. Zu diesem Zweck ersetzen wir zunächst die Zahlen des angegebenen Rätsels durch Variable r, s, t, u, v, w, x, y und z :

$$\begin{array}{lcl} & A & B \quad C \\ \text{I} & r : s = t & \\ & - \quad \cdot \quad + & \\ (1) & \text{II} & u + v = w \\ & \text{III} & x - y = z \end{array}$$

Zusätzlich sind wiederum wie im Artikel „Wir lösen ein Zahlenrätsel“ die in den Zeilen und Spalten stehenden Gleichungen mit I, II und III bzw. mit A, B und C bezeichnet worden.

Durch Vergleich mit anderen in Illustrierten abgedruckten Zahlenrätseln stellen wir fest, daß eine Reihe dieser vom gleichen eben aufgeschriebenen Grundtyp (1) sind. Wir vermuten deshalb, daß es viele Zahlenrätsel vom Typ (1) gibt.

Um weitere Zahlenrätsel mit Grundschema (1) zu erhalten, suchen wir Bedingungen auf, denen jede Lösung der in diesem Schema enthaltenen sechs Gleichungen genügen muß: Durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung I mit s folgt

$$(\alpha) \quad r = s \cdot t.$$

Durch Vertauschen der rechten und linken Seiten der Gleichung II und B ergibt sich

$$(\beta) \quad w = u + v \quad \text{und}$$

$$(\gamma) \quad y = s \cdot v.$$

Nunmehr setzen wir die erhaltenen Bedingungen (α) , (β) und (γ) in das Schema (1) ein:

$$\begin{array}{lcl} & A & C \\ (2) & (s \cdot t) : s = t & \\ & - \quad \cdot \quad + & \\ & u + v = (u + v) & \\ \text{III} & x - (s \cdot v) = z & \end{array}$$

Bei dieser notwendigen Wahl von r, y und w sind die mit I, II und B bezeichneten Gleichungen stets wahr. Deshalb sind diese drei Symbole am Rande des Schemas (2) nicht mehr notiert worden. Durch Vertauschen der Seiten der Gleichung C des Schemas (2) ergibt sich:

$$(\delta) \quad z = t + u + v$$

Durch Einsetzen von (δ) in (2) folgt:

$$\begin{array}{lcl} & A & \\ (3) & (s \cdot t) : s = t & \\ & - \quad \cdot \quad + & \\ & u + v = (u + v) & \\ \text{III} & x - (s \cdot v) = (t + u + v) & \end{array}$$

Nunmehr stellen wir die Gleichung III des Schemas (3) nach x um:

$$x - s \cdot v = t + u + v \quad | + s \cdot v$$

$$(\epsilon) \quad x = t + u + v + s \cdot v$$

Weiterhin wird (ϵ) in (3) eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} & A & \\ (4) & (s \cdot t) : s = t & \\ & - \quad \cdot \quad + & \\ & u + v = (u + v) & \\ & (t + u + v + s \cdot v) - (s \cdot v) = (t + u + v) & \end{array}$$

Durch diesen Auflösungs- und Einsetzungsprozeß ist es uns gelungen, die Zahl der Variablen im Schema (1) schrittweise zu verkleinern. Darüber hinaus sind im Schema (4) fünf der sechs enthaltenen Gleichungen bei jeder Belegung mit natürlichen Zahlen der noch enthaltenen Variablen s, t, u und v mit natürlichen Zahlen von selbst erfüllt. Lediglich die Gleichung A des Schemas (4) stellt noch eine zu realisierende Bedingung dar. Zu diesem Zweck stellen wir diese Gleichung schrittweise nach u um:

$$\begin{array}{lcl} s \cdot t - u = t + u + v + s \cdot v & | + u & \\ s \cdot t = (t + v) + 2u + s \cdot v & | -(t + v) - s \cdot v & \\ s \cdot t - (t + v) - s \cdot v = 2u & | \text{(Vertauschen der Seiten)} & \\ 2u = s \cdot t - s \cdot v - (t + v) & | \text{(Anwenden des Distributivgesetzes)} & \\ 2u = s(t - v) - (t + v) & | : 2 & \\ (5) & u = \frac{s \cdot (t - v) - (t + v)}{2} & \end{array}$$

Wird die Variable u gemäß (5) gewählt, so ist auch die Gleichung A des Schemas (4) bei jeder Belegung der Variablen s, t und v mit natürlichen Zahlen erfüllt. Denn wir können

auch rückwärts aus der Gleichung (5) durch Umformen zur Gleichung A des Schemas (4) gelangen.

Unserem bisherigen Vorgehen entsprechend müßten wir noch (5) in (4) einsetzen. Das so entstehende Schema würde nur noch die Variablen s, t und v enthalten. Bei jeder Belegung der Variablen s, t und v mit natürlichen Zahlen wären alle sechs in ihm enthaltenen Gleichungen stets wahre Aussagen.

Weil jedoch der Term (eindeutiger, Variable enthaltender Rechenausdruck), nach dem gemäß (5) die Variable u zu ersetzen ist, relativ kompliziert ist und da außerdem die Variable u mehrfach (viermal) im Schema (4) vorkommt, verzichten wir auf das Einsetzen. Statt dessen werden wir mit der Gleichung (5) und dem Schema (4) arbeiten müssen.

Vorher ist allerdings zur Gleichung (5) noch eine wichtige Bemerkung zu machen: Nicht bei jeder Belegung der Variablen s, t und v mit natürlichen Zahlen wird die gemäß (5) berechnete Zahl u auch eine natürliche Zahl sein.

Auf Grund unserer Überlegung gilt folgende Aussage:

Lehrsatz: Jede Belegung der Variablen s, t und v mit natürlichen Zahlen, für die $s \cdot (t - v) - (t + v)$ eine gerade natürliche Zahl ergibt, führt zu einer Lösung des Systems (1): Zunächst wird durch Einsetzen der entsprechenden natürlichen Zahlen in (5) die zugeordnete natürliche Zahl u berechnet und anschließend werden die jetzt insgesamt den Variablen s, t, u und v zugeordneten natürlichen Zahlen in (4) eingesetzt und damit wird jeweils eine Lösung des Systems (1) erhalten.

Eine Lösung des Systems (1) wollen wir berechnen: Wir setzen $s=7, t=29$ und $v=11$. Bei dieser Belegung ist die notwendige Bedingung erfüllt:

$$\begin{aligned} s \cdot (t - v) - (t + v) &= 7 \cdot (29 - 11) - (29 + 11) \\ &= 7 \cdot 18 - 40 \\ &= 126 - 40 \\ &= 86 \end{aligned}$$

Gemäß (5) berechnen wir nunmehr zunächst u :

$$u = \frac{s \cdot (t - v) - (t + v)}{2} = \frac{86}{2} = 43$$

Danach werden für s, t, u und v die entsprechenden natürlichen Zahlen in (4) eingesetzt:

$$(5) \quad \begin{array}{rcl} (7 \cdot 29) & : & 7 = 29 \\ - & & + \\ 43 & + & 11 = (43+11) \\ (29+43+11+7 \cdot 11) - (7 \cdot 11) & = & (29+43+11) \end{array}$$

Durch Ausrechnen der in Klammern stehenden Rechenausdrücke erhalten wir:

$$(6) \quad \begin{array}{rcl} 203 & : & 7 = 29 \\ - & & + \\ 43 + 11 & = & 54 \\ 160 - 77 & = & 83 \end{array}$$

Um ein Zahlenrätsel zu erhalten, müssen wir lediglich das System (6) noch verschlüsseln. Diesmal wählen wir den Schlüssel:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
⊕	⊗	⊖	⊙	⊘	⊙	⊗	⊕	⊖	⊙

Damit ergibt sich das folgende Zahlenrätsel, das wir bei nächster Gelegenheit unseren Freunden zum Lösen vorlegen werden:

$$\begin{array}{rcl} \oplus \oplus \oplus & : & \oplus = \oplus \oplus \\ - & & + \\ \oplus \oplus & + & \oplus \oplus = \oplus \oplus \\ \oplus \oplus \oplus - \oplus \oplus & = & \oplus \oplus \end{array}$$

Auf Grund von Überlegungen wissen wir, daß das Zahlenrätsel (7) mindestens eine Lösung hat. Durch Auflösen dieses Zahlenrätsels bestätigt man leicht, daß es auch nur diese eine uns bekannte Lösung besitzt.

Die folgenden Aufgaben lösen wir selbständig:

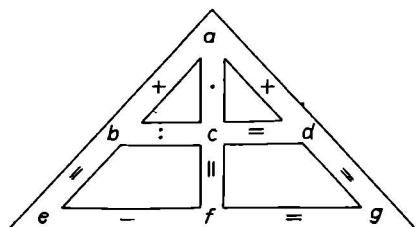
▲ 1. Aufgabe: Stelle ein weiteres Zahlenrätsel vom Typ (1) auf!

▲ 2. Aufgabe: Welchen Bedingungen müssen die natürlichen Zahlen s, t und v genügen, damit $s \cdot (t-v) - (t+v)$ eine gerade natürliche Zahl ist?

Natürlich lassen sich auch Zahlenrätsel mit anderem Grundschema als (1) bilden.

▲ 3. Aufgabe: Bestimme natürliche Zahlen a, b, c, d, e, f und g so, daß sie den im folgenden Schema enthaltenen fünf Gleichungen genügen!

Stelle hieraus durch Verschlüsselung ein Zahlenrätsel auf!



Diese Ausführungen veranlassen sicher einige von uns, sich andere Grundschemas ausdenken und zu prüfen, ob zu diesen Lösungen

und damit durch Verschlüsseln auch Zahlenrätsel gehören. Zwei Vorschläge für anspruchsvolle Leser seien hierzu noch unterbreitet: Ein Teil der im Schema enthaltenen Gleichungen könnte vier natürliche Zahlen enthalten wie eine Gleichung der Form $a+b=c \cdot d$. Schließlich könnten auch teilweise gebrochene Zahlen im Zahlenrätsel zugelassen sein. Z. B. kann eine gebrochene Zahl in verschlüsselter Form das folgende Aussehen haben:

$$\frac{\oplus}{\opl�}$$

Wir wünschen euch beim Knobeln viel Erfolg! *alpha* ist bereit, die besten Produkte zu veröffentlichen. Die Bedingung hierfür lautet: Die neu entworfenen Zahlenrätsel dürfen nicht zu leicht sein, andererseits jedoch auch nicht zu kompliziert. Außerdem freut sich die Redaktion sehr, wenn künftighin *alpha*-Leser die Illustrierten und die Wochenendausgaben der Tageszeitungen mit Zahlenrätseln versorgen.

W. Träger



Pawel Kröger, Klasse 4

Rumjanzew-Oberschule, Leipzig
2. Preis (in Klassenstufe 10), DDR-Olympiade



alpha gratuliert

31 Schüler, die im *alpha*-Wettbewerb 1967, bzw. 1968 erfolgreich abschnitten (siehe *alpha* 2/68, 2/69), nahmen an der DDR-Olympiade teil. Wir gratulieren recht herzlich und wünschen weiterhin Erfolg.

Stellvertretend für sie stellt die Redaktion *alpha* vor:

Hans-Dietrich Gronau, Klasse 12

Friedrich-Engels-OS, Neubrandenburg

2. Preis,

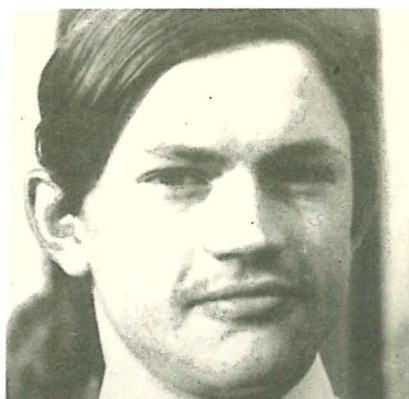
DDR-Olympiade, Kandidat zur XI. IMO

Jürgen Schefter, Klasse 9

EOS Elsterwerda

2. Preis,

DDR-Olympiade, Kandidat zur XI. IMO



Albrecht Heß, Klasse 7

Oberschule Dresden-Süd,

neben Pawel Kröger

jüngster Teilnehmer der DDR-Olympiade



Pioniere des **alpha** -Wettbewerbs

Vor einem Jahr, am 3. April 1968, riefen die Abteilung Volksbildung beim Rat des Kreises Schmalkalden und die Fachkommission Mathematik zur Verbesserung der außerunterrichtlichen Arbeit auf mathematischem Gebiet auf. Alle Schüler der Klassen 5 bis 10, die im Fach Mathematik die Noten 1 oder 2 hatten oder erreichen wollten, wurden angesprochen, sich regelmäßig am Schülerwettbewerb der mathematischen Zeitschrift *alpha* zu beteiligen. Als Ansporn setzte die Abteilung Volksbildung für die fleißigsten und besten Einsender sowie für die aktivsten Klassen, Lehrer und Schulen Preise und Prämien aus. Den Leitern der Fachzirkel für Mathematik und den Schulen wurde empfohlen, die Einsendung aller Lösungen der Schule gemeinsam vorzunehmen. Der Aufruf der Abteilung Volksbildung und der Fachkom-

mission Mathematik fand sehr bald ein erfreuliches Echo. Die Zahl der Einsendungen zum Wettbewerb übertraf die Erwartungen. An verschiedenen Schulen begannen wieder feste Zirkel und Arbeitsgemeinschaften für Mathematik zu arbeiten. Viele Lehrer lenkten und förderten die Tätigkeit der Schüler. Der Aufschwung machte sich auch sehr bald bei der Redaktion der Zeitschrift *alpha* bemerkbar. Ein im September 1968 in unserer Kreisstadt durchgeführtes Schülerforum der Redaktion *alpha*, geleitet von ihrem Chefredakteur, dem Verdienten Lehrer des Volkes, Studienrat J. Lehmann, wurde zu einem Höhepunkt der außerunterrichtlichen Tätigkeit und zum Ansporn noch intensiverer mathematischer Betätigung unserer aktiven Teilnehmer des *alpha*-Wettbewerbs.

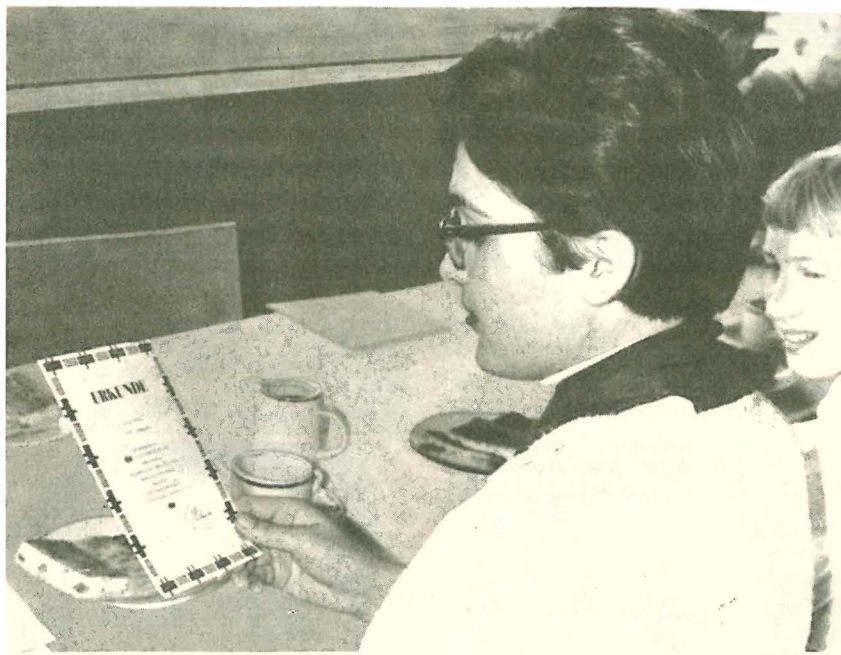
Als der *alpha*-Wettbewerb des Jahres 1968, der zweite Wettbewerb der noch jungen mathematischen Schülerzeitschrift, zu Ende ging, konnte unser Kreis eine gute Bilanz ziehen. Rund 1600 Antwortkarten wurden an die Redaktion weitergeleitet, fast das Siebenfache aller Lösungen unseres gesamten

schrift *alpha* genannt worden war. Aber auch die Oberschule *Mittelstille*, eine kleine Schule, erzielte ein sehr erfreuliches Ergebnis.

Am 3. April 1969, genau ein Jahr nach dem Aufruf, hatte nun die Abteilung Volksbildung die 20 besten Teilnehmer des Wettbewerbs (Schüler mit 11 und mehr Antwortkarten) sowie Lehrer, die besonders aktiv die Durchführung des *alpha*-Wettbewerbs unterstützt hatten, zu einem Empfang in die Kreisstadt geladen. Der Vertreter der Abteilung Volksbildung und der Fachberater für Mathematik würdigten die großen Anstrengungen der aktiven und besten *alpha*-Wettbewerbsteilnehmer und Lehrer, beglückwünschten sie zu ihren Erfolgen und hoben die große Bedeutung guter mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten für unsere sozialistische Volkswirtschaft hervor. Im Auftrage des Chefredakteurs von *alpha* überreichte der Fachberater für Mathematik, Oberlehrer Gehb, den Aktiven die Anerkennungsurkunden der Redaktion und im Auftrage der Abteilung Volksbildung Bücher mit vorwiegend mathematischem Inhalt. Erfolgreichster Teilnehmer des Wettbewerbs war der Schüler *Eberhard Manske* von der Oberschule *Steinbach-Hallenberg* mit 19 Antwortkarten. Die geladenen Mathematiklehrer erhielten als Anerkennung „Eingefangenes Unendlich“ von Franz von Krbek. Bei Kaffee und Kuchen führten Schüler und Lehrer einen regen Erfahrungsaustausch. Einer der Teilnehmer des *alpha*-Wettbewerbs erfreute Schüler und Lehrer mit mancherlei Kunststücken, bei denen ein Anliegen der Mathematik, gründlich und exakt zu denken und zu arbeiten, besonders sichtbar wurde.

Die Abteilung Volksbildung beim Rat des Kreises Schmalkalden wird auch den neuen Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* aktiv unterstützen und die besten Teilnehmer und Arbeitsgemeinschaften mit Fachlehrern wiederum ehren und prämiieren.

Feier anlässlich der Überreichung der *alpha*-Urkunden in Schmalkalden



mission Mathematik fand sehr bald ein erfreuliches Echo. Die Zahl der Einsendungen zum Wettbewerb übertraf die Erwartungen. An verschiedenen Schulen begannen wieder feste Zirkel und Arbeitsgemeinschaften für Mathematik zu arbeiten. Viele Lehrer lenk-

ten und förderten die Tätigkeit der Schüler. Der Aufschwung machte sich auch sehr bald bei der Redaktion der Zeitschrift *alpha* bemerkbar. Ein im September 1968 in unserer Kreisstadt durchgeführtes Schülerforum der Redaktion *alpha*, geleitet von ihrem Chefredakteur, dem Verdienten Lehrer des Volkes, Studienrat J. Lehmann, wurde zu einem Höhepunkt der außerunterrichtlichen Tätigkeit und zum Ansporn noch intensiverer mathematischer Betätigung unserer aktiven Teilnehmer des *alpha*-Wettbewerbs.

Erwin Manske
im Auftrag der Fachkommission
Mathematik, Schmalkalden

Rund um die Mathematik

Görke/Ilgner/Lorenz/Pietzsch/Rehm

Der Kinderbuchverlag 1969

160 S., zahlreiche Abb. und Bilder, 9,80 M
Nr. 34 der Mathematischen Schülerbücherei
(ab Kl. 5)

Endlich ist ein Buch für unsere jüngsten *alpha*-Leser da!

Aus der großen Zahl von interessanten Problemen haben wir zwei herausgegriffen: Susi feiert ihren dreizehnten Geburtstag und hat dazu noch vier Freundinnen eingeladen: Inge, Helga, Karin und Dagmar. Beim Kaffeetrinken scherzt man miteinander:

(1) *Susi*: „Komm du erst mal in meine Jahre, *Karin*!“

(2) *Inge*: „Gib doch nicht so an, *Susi*. Auch wenn du heute Geburtstag hast, fehlen dir immer noch einige Wochen bis zu mir, genau soviel wie mir bis zu *Dagmar*.“

(3) *Karin*: „Ich finde, du kannst eigentlich gar nicht mitreden, *Helga*. Bei euch ist Mathematik doch noch ein Kinderspiel.“

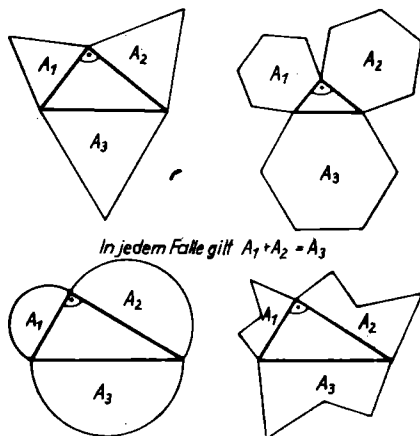
(4) *Helga*: „Haha, wenn *Inge* das gesagt hätte, aber du?“

Wir wollen einmal probieren, ob wir aus diesen vier Sätzen die Mädchen nach ihrem Alter ordnen können.

Satz des Pythagoras:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

Wer erkennt diesen Satz nicht? Wer aber weiß, daß Mathematiker herausgefunden haben, daß ein derartiger Satz auch dann noch gilt, wenn über den Katheten und der Hypotenuse regelmäßige Sechsecke, beliebige — allerdings regelmäßige — Vielecke, Halbkreise oder sogar ganz beliebige, unregelmäßige Vielecke — sofern diese nur alle die gleiche äußere Form haben — errichtet werden?



Brockhaus abc

Naturwissenschaft und Technik

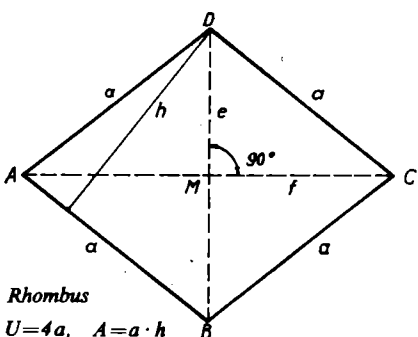
VEB F. A. Brockhaus Verlag, Leipzig, 1969

in zwei Bänden 28,00 M
ab Kl. 5

Die neue, auf zwei Bände erweiterte Auflage des bewährten Nachschlagewerkes enthält auf rund 1 200 Seiten etwa 16 000 Stichwörter, die ergänzt werden durch 1 400 erläuternde Abbildungen im Text und auf 56 teils farbigen Kunstdrucktafeln, einer Vielzahl von Tabellen, Schemata und graphischen Darstellungen sowie zahlreichen Literaturangaben. Das Werk ist ein modernes Informations- und Arbeitsmittel, weitgehend allgemeinverständlich für den mathematisch/naturwissenschaftlich interessierten Leser, hinreichend informativ für den wissenschaftlich tätigen Fachmann zur Orientierung auf fernerliegende Spezialgebiete.

Punkt 1) ein Grundelement der Geometrie; ein geometrisches Gebilde mit einer bestimmten Lage, aber ohne Ausdehnung (von der Dimension Null). Als *P. e* bezeichnet man auch die Elemente einer Menge, die den Axiomen eines gewissen Raumes genügen

Rhombus, Raute, ein Parallelogramm mit vier gleichlangen Seiten. Die beiden Diagonalen sind zugleich Winkelhalbierende. Sie stehen aufeinander senkrecht und halbieren einander.



Die optimale Lösung

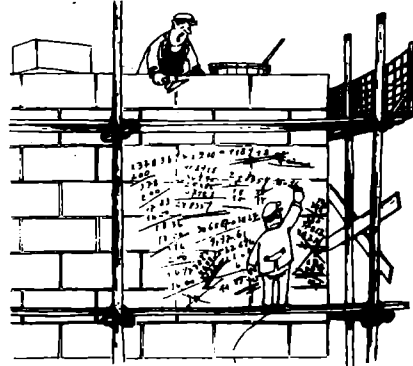
Gilde/Altrichter

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin 1968

207 Seiten, über 100 Zeichnungen, 6,80 M
(ab Kl. 8)

Rechenautomaten lösen komplizierte Rechnungen in Sekunden, Minuten oder Stunden. Jedoch dauert die Vorbereitung für diese kurzen Rechenzeiten, also das Aufstellen des Programms, Wochen, Monate oder Jahre. Selbst wenn man davon absieht, daß elektronische Rechner nur in einer beschränkten Zahl zur Verfügung stehen, kann man mit ihnen immer nur Aufgaben lösen, die programmiert sind.

In der Industrie werden täglich Entscheidungen gefällt, die kurzfristig beschlossen werden müssen. Wir stehen nun vor der überraschenden Tatsache, daß wir zur Erleichterung der Handarbeit und ihrer Lösung raffinierte Maschinen aufstellen, aber für die Erleichterung und Verbesserung vieler geistiger Arbeit ist bisher wenig getan worden. Das Buch soll deshalb dazu anregen, sich mit einfachen mathematischen Methoden zu befassen, die den Weg zur optimalen Lösung wichtiger Aufgaben besser und schneller zu finden ermöglichen.



„Na, kommt denn nun noch ein Stein drauf, oder nicht?“

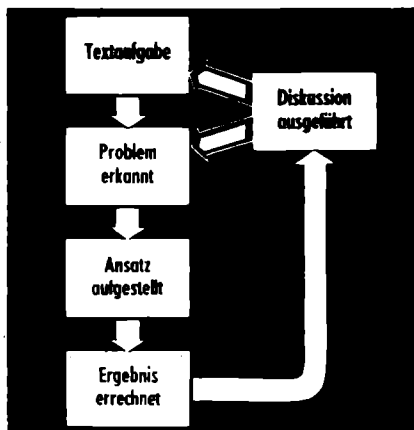
Anleitung zum Lösen physikalischer Aufgaben

Kießling/Körner

VEB Fachbuchverlag Leipzig 1968

128 Seiten, 56 Bilder, 1 Beilage, 5,00 M
(ab Kl. 8)

Der Wert physikalischer Kenntnisse erweist sich erst dann, wenn der Leser imstande ist, physikalische Probleme in mathematische Form zu kleiden und auf dieser Grundlage numerisch auszuwerten. Der Leser wird



angeleitet, ein Problem in einzelne Denkschritte aufzugliedern, beginnend bei der Ordnung der gegebenen Größen über den Ansatz bis zur Lösung und Kritik. Durch voll durchgerechnete Beispiele wird dem Leser die Durchführung deutlich vor Augen gestellt.

**Rogalski**

**160 Seiten einschließlich Abbildungen;
L 7 N, Pappband;
5,70 Mark**

Wußtest Du schon?

Das Ballgewicht beträgt 396 bis 453 g, der Ballumfang 68 bis 71 cm. Die Mindestantrittstärke beim Fußball: 8 Mitspieler; Spielbeginn: Die Kapitäne beider Mannschaften lösen um Seitenwahl oder Anstoß! Das Spiel beginnt nicht mit dem Anpfiff, sondern mit dem gültigen Anstoß! D. h., der Ball ist erst im Spiel, wenn er den Weg seines Umfangs, nämlich 70 cm, zurückgelegt hat. Der gültige Anstoß verlangt:

1. Jeder Spieler der anstoßenden Mannschaft muß sich in seiner eigenen Spielhälfte befinden.
2. Jeder Spieler der nicht anstoßenden Mannschaft muß 9,15 m vom Ball entfernt bleiben.
3. Der Ball muß nach vorn gestoßen werden.
4. Der anstoßende Spieler darf den Ball nicht ein zweites Mal spielen.
5. Der zweite Spieler darf den Ball erst spielen, nachdem er eine Strecke von 70 cm zurückgelegt hat.
6. Der Gegner darf erst in das Spiel eingreifen, wenn der Ball den Weg von 70 cm zurückgelegt hat.

