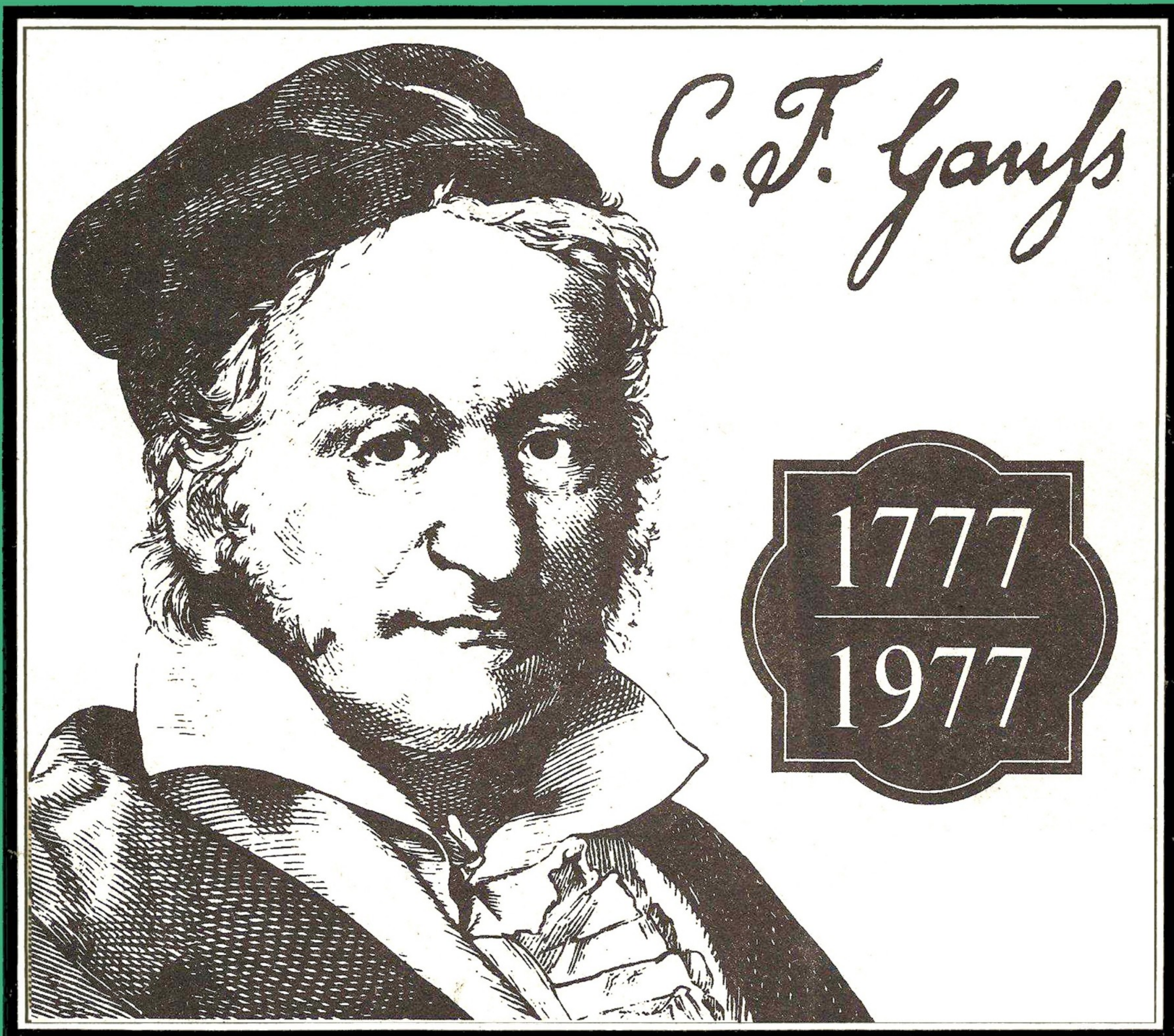
alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
11. Jahrgang 1977
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Archiv des *alpha*-Clubs der 29. OS, Leipzig (S. 1, 7)
Vignetten: K.-H. Guckuck, H. Teske, Leipzig;
Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 23. Oktober 1976

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Die mathematische Schülerzeitschrift „alpha" wurde anläßlich ihres 10jährigen Bestehens vom Zentralrat der FDJ am 13. 12. 1976, dem 28. Geburtstag der Pionierorganisation „Ernst Thälmann", mit der Artur-Becker-Medaille in Gold ausgezeichnet.

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Carl Friedrich Gauß

1777 bis 1855

Im letzten Viertel eines Jahrhunderts, in dem sich die Entwicklung der Mathematik weitgehend außerhalb von Deutschland vollzogen hatte, wuchs in Braunschweig Carl Friedrich Gauß zum größten Mathematiker seiner Zeit heran. Nach seinem Tode wurden auf Veranlassung des Königs von Hannover Münzen geprägt, auf denen Gauß als „Princeps mathematicorum" (Fürst der Mathematiker) bezeichnet wurde. Dieser Titel wurde allgemein anerkannt. Man kann Gauß als einen der größten Wissenschaftler überhaupt ansehen.

Gauß kam aus ganz einfachen Verhältnissen. Sein Vater, Gerhard Dietrich Gauß, hat eine ganze Reihe von Berufen ausgeübt; so war er zum Beispiel Gärtner, „Weißbinder" und Kassierer einer Versicherung.

Gauß' Mutter Dorothea geb. Benze hatte vor ihrer Ehe, die die zweite ihres Mannes war, als Magd gearbeitet. Carl Friedrich war ihr einziges Kind. Gauß schilderte seinen Vater als rechtschaffenen und geachteten Mann und als guten Rechner, der allerdings zu Hause herrisch und rauh gewesen sei.

Die mathematische Begabung zeigte sich bei Gauß sehr früh. Er hat später einmal von sich behauptet, daß er eher rechnen als sprechen gelernt hätte. Von ihm wird erzählt, daß er mit drei Jahren beim Anhören einer Lohnabrechnung seines Vaters einen Fehler entdeckt und sofort das richtige Resultat angegeben habe. Als er auf der Volksschule mit etwa neun oder zehn Jahren in die Rechenklasse kam, löste er die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen, in wenigen Augenblicken folgendermaßen:

$$1+2+\ldots+100=(1+100)+(2+99)+\ldots+(50+51)=50\cdot 101=5050,$$

das heißt, er entdeckte das Prinzip der Summenformel für die arithmetische Reihe. Seine Lehrer wurden bald auf ihn aufmerksam. Vor allem interessierte sich der Gehilfe des Lehrers Büttner, D. M. Chr. Bartels, der nur acht Jahre älter als Gauß und mathematisch sehr aktiv war, für ihn und unterstützte Gauß bei dessen mathematischer Entwicklung sehr tatkräftig. Gauß kam 1788 von der Volksschule auf das Gymnasium Catharineum. Bartels, der gleichzeitig eine Stelle im Collegium Carolinum, der späteren Technischen Hochschule, bekam und später Professor der Mathematik in Kasan und Dorpat war, wurde auf Gauß aufmerksam. Gauß fiel aber nicht nur durch seine mathematischen Leistungen, sondern durch seine schnellen Fortschritte in den Fremdsprachen auf und wurde 1791 durch v. Zimmermann dem Herzog von Braunschweig vorgestellt, der ihm Stipendien für den Besuch des Gymnasiums, später für das Studium in Göttingen und auch noch für die anschließende Zeit gewährte, bis Gauß im Jahre 1807 Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Göttingen wurde. Bis dahin hatte sich Gauß längst als überragender Mathematiker ausgewiesen. 1791 beschäftigte er sich mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel von zwei positiven reellen Zahlen α und β, das man erhält, wenn man zu $\alpha'=\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\beta'=\sqrt{\alpha\beta}$ übergeht und diesen Prozeß beliebig oft wiederholt. 1792 vermutete er auf Grund von Abzählungen in Primzahltafeln den Primzahlsatz, nach dem die Anzahl der Primzahlen unterhalb von x asymptotisch gleich $\frac{x}{\ln x}$ ist, und der erst mehr als 100 Jahre später nach einer langen Entwicklung der Funktionentheorie bewiesen werden konnte. Außerdem beschäftigte er sich mit dem Parallelen-Axiom. Schon damals, also im Alter von 15 Jahren, untersuchte er, wie eine Geometrie aussehen müsse, in der das Parallelen-Axiom nicht gilt.

Von 1795 bis 1798 studierte Gauß in Göttingen, und zwar zunächst Mathematik und Philologie. Den endgültigen Entschluß, ausschließlich Mathematik zu studieren, faßte Gauß aber erst, als er 1796 erkannt hatte, welche regelmäßigen Vielecke mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Er löste damit ein Problem, das seit der Antike keinen Schritt einer Lösung näher gebracht worden war.

Die Ankündigung der Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks war Gauß' erste wissenschaftliche Publikation, und von dem Tage der Entdeckung an führte er sein wissenschaftliches Tagebuch, in das er seine wichtigsten Ergebnisse viele Jahre lang eintrug.

Während Gauß in diesem Zusammenhang die komplexen Zahlen ohne Bedenken benützte, vermied er sie, da sie damals noch kein „Bürgerrecht" in der Mathematik hatten, in seiner Dissertation systematisch, in der er den ersten strengen Beweis für den Fundamentalsatz der klassischen Algebra gab, der in seiner „reellen" Formulierung besagt, daß sich jedes Polynom mit reellen Koeffizienten in ein Produkt ebensolcher Polynome 1. und 2. Grades zerlegen läßt. Er promovierte damit Ende 1799 in Helmstedt, und zwar in Abwesenheit, wurde aber von dem dortigen Mathematiker J. F. Pfaff zu einem Aufenthalt für einige Monate eingeladen, der sehr harmonisch und fruchtbar verlief.

Inzwischen hatte Gauß eine Leistung vollbracht, die wohl einzigartig in der Geschichte der Mathematik dasteht: In den Jahren 1796 bis 1798, also im Alter von 19 bis 21 Jahren, schrieb er sein erstes Buch, die „Disquisitiones arithmeticae" (Arithmetische Abhandlungen). Bis dahin war die Zahlentheorie eine Sammlung von zahlreichen interessanten, schönen und größtenteils auch recht tiefliegenden Einzelergebnissen gewesen, die aber kaum miteinander zusammenhingen. Die sehr inhaltsreiche und äußerst lebendig geschriebene „Vollständige Anleitung zur Algebra" von L. Euler bietet dafür ein Musterbeispiel. Durch die „Disquisitiones arithmeticae" aber wurde die Zahlentheorie mit einem Schlag zu einer einheitlichen und systematischen Wissenschaft; in der Theorie der Kongruenzen (1. Hauptteil) erhielt sie eine durchsichtige und tragfähige Grundlage, auf der sich die Theorie der quadratischen Formen (2. Hauptteil) und der Kreisteilung (3. Hauptteil) errichten ließ.

Zwar befanden sich im 2. und 3. Hauptteil lange und komplizierte Rechnungen sowie schwierige rechnerische Ansätze, so daß es als Wunder erscheinen könnte, daß dabei überhaupt interessante Ergebnisse herauskamen. Studiert man aber das Werk gründlicher, so erkennt man, welch tiefes strukturelles Denken dahinter steckt, durch das die Fragestellungen und Ansätze erst motiviert und die Rechnungen durchsichtig werden. Während des Druckes der „Disquisitiones arithmeticae", der sich bis 1801 hinzog, beschäftigte sich Gauß damit, eine Theorie der elliptischen Funktionen, der ϑ-Reihen und der Modulfunktionen aufzubauen, ohne davon etwas zu veröffentlichen. Später waren dann Mathematiker wie Abel und Jacobi viele Jahre unabhängig von Gauß damit beschäftigt, die gleiche Theorie zu durchforschen. Die Zurückhaltung von Gauß ist vielleicht damit zu

Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.

C. F. Gauß

begründen, daß seine Theorie seinen Prinzipien „Pauca sed matura" (Weniges, aber Reifes), mathematische Strenge wie bei den alten Griechen, und „ut nihil amplius desiderandum relictum sit" (daß nichts mehr zu wünschen übrig bleibe) noch nicht genügte; wahrscheinlich vermißte er noch die Möglichkeit einer Einordnung in allgemeinere Gesetzmäßigkeiten.
Im Jahre 1801 wurde dann Gauß nach dem Erscheinen der „Disquisitiones arithmeticae" unter den Mathematikern weltberühmt, und die Petersburger Akademie wählte ihn zu ihrem korrespondierenden Mitglied.
Im gleichen Jahr begann aber auch seine Wirkung als Astronom (Weltberühmtheit sich allgemein durchzusetzen). In der Neujahrsnacht zum 19. Jahrhundert, am 1. Januar 1801, war der erste kleine Planet „Ceres" durch den italienischen Astronomen G. Piazzi beobachtet worden, doch ging er zunächst nach 40tägiger Beobachtung wieder verloren. Den damaligen Astronomen war es nicht möglich, aus diesen wenigen Daten eine Bahn einigermaßen exakt zu bestimmen. Gauß wandte sich diesem Problem zu und entwickelte neue Methoden, um eine Keplerbahn aus nur drei Beobachtungen zu berechnen. Da aber mehr Beobachtungen vorlagen, hatte er die Möglichkeit, seine Prinzipien der Ausgleichsrechnung anzuwenden, und bestimmte die Bahnelemente so genau, daß Ceres von mehreren Astronomen Ende 1801 und Anfang 1802 wieder aufgefunden werden konnte. Seine Mitteilung an den Verleger, dieses Buch werde noch nach Jahrhunderten studiert werden, war berechtigt; noch heute erfolgt die Bahnbestimmung nach den Gaußschen Methoden, wobei natürlich der Rechengang wegen des Einsatzes der elektronischen Rechenmaschinen modifiziert worden ist.
Astronomie und Zahlentheorie fesselten von nun an Gauß in gleichem Maße. Einerseits nannte er die Mathematik die Königin der Wissenschaften und die Zahlentheorie die Königin der Mathematik, andererseits aber betrachtete er – wie er sich in einem Briefe an seinen Jugendfreund W. Bolyai vom 20. Juni 1803 ausdrückte – die reine Größenlehre (Zahlentheorie) und die Astronomie als die beiden Pole seiner wissenschaftlichen Wirksamkeit, „nach denen sich mein Geisteskompaß immer wendet". Außerdem ergänzten sich beide Wissenschaften für ihn insofern, als er die geringe Anwendbarkeit der Zahlentheorie kannte und sich seinem Staat gegenüber für die Förderung seiner zahlentheoretischen Forschungen dadurch dankbar erweisen wollte, daß er sich auch Dingen mit aller Kraft zuwandte, die unmittelbaren praktischen Nutzen brachten.
Im Jahre 1803 lehnte er einen Ruf auf eine Professur in St. Petersburg ab, da ihm der Herzog von Braunschweig seine finanzielle Lage verbesserte und den Bau einer eigenen Sternwarte in Aussicht stellte. Jedoch wurde der Herzog 1806 in der Schlacht gegen Napoleon bei Jena und Auerstedt tödlich verletzt. 1807 wurde Gauß Professor in Göttingen und blieb dort in dieser Stellung bis zu seinem Lebensende.
Seine erste Ehe schloß Gauß 1805 mit Johanna Osthoff aus Braunschweig. Sein erster Sohn, geboren 1806, wurde Artillerieoffizier und Oberbaurat an der Eisenbahndirektion in Hannover, und seine erste Tochter, geboren 1808, heiratete 1830 den Professor G. H. Ewald, einen bedeutenden Göttinger Philologen, der 1837 nach Tübingen ging, wo seine Frau indessen schon 1840 starb. Ewald war einer der „Göttinger Sieben", das heißt einer von sieben Göttinger Universitätsprofessoren, die 1837 dem König den Treueid verweigerten, als dieser die neue Verfassung außer Kraft setzte und auf die reaktionäre alte zurückgriff. Dieser Protest wurde vom König mit der Entlassung der sieben Professoren beantwortet.
Bald nach der Geburt des dritten Kindes, 1809, starb Gauß' Frau, und das Kind überlebte sie nur wenige Monate. Trotz dieses schweren Schlages heiratete Gauß der Kinder wegen bereits im Jahre 1810 Wilhelmine Waldeck, die Tochter eines Göttinger Professors der Rechte. Dieser Ehe entstammen zwei Kinder. Der 1811 geborene Sohn wurde von seinem Vater als „Taugenichts" bezeichnet, wanderte 1830 nach Amerika aus und starb dort 1896 als wohlhabender Farmer. Die Tochter Therese, geboren 1816, blieb im Hause des Vaters und pflegte ihn bis zu dessen Tode; Gauß' zweite Frau starb schon 1831. Therese selbst überlebte ihren Vater nur neun Jahre. Zu erwähnen ist noch, daß Gauß' Mutter im Alter von 75 Jahren zu ihm in die Dienstwohnung der Sternwarte zog, wo sie noch 22 Jahre lebte.
Schon als Student war Gauß 1799 bei der trigonometrischen Vermessung von Westfalen konsultiert worden. 1818 erhielt er den ministeriellen Auftrag, die Hannoversche Triangulierung durchzuführen.
Gauß begnügte sich aber nicht mit der Vermessung eines solchen Gebietes, sondern war äußerst interessiert an der Bestimmung der Gestalt der Erde durch weltweite Vermessungen. Diese Bestrebungen waren für ihn der Anlaß zur Beschäftigung mit zwei wichtigen theoretischen Fragestellungen, nämlich zunächst der Frage nach den konformen Abbildungen einer Fläche des Raumes auf eine andere, und dann der Frage nach den Schlüssen, die man aus Ergebnissen von Messungen, die sich nur auf die Längen von Kurven auf einer gegebenen Fläche und den Winkeln zwischen ihnen beziehen, über die Gestalt der Fläche im Raum ziehen kann. Flächen, die ineinander ohne Dehnung verbogen werden können, unterscheiden sich in ihrer Metrik nicht; die neue Gaußsche „innere Geometrie" einer Fläche beschäftigt sich also mit Biegungsvarianten. Aufs engste mit Gauß' Interessen für Astronomie und Geodäsie hingen seine potentialtheoretischen Untersuchungen zusammen. Zunächst behandelte er 1813 ein spezielles Problem, nämlich die bis dahin nur unvollständig beantwortete Frage nach der Anziehung eines allgemeinen homogenen Ellipsoids, wobei er Integralsätze benutzte.
Die regelmäßige Lektüre auswärtiger Zeitungen, die in einer Göttinger Lesestube auslagen, gab ihm die Möglichkeit, die Börsennachrichten systematisch auszuwerten und daraufhin sehr erfolgreiche Börsengeschäfte abzuschließen, so daß seine so gewonnenen Einnahmen sein Gehalt als Göttinger Professor wesentlich überstiegen. Andererseits hat er von 1845 bis 1850 sehr langwierige Untersuchungen und Berechnungen zur Reorganisation der Göttinger Professoren-Witwenkasse angestellt, die dadurch in Schwierigkeiten gekommen war, daß 1844 die Anzahl der Professorenwitwen stark angestiegen war und die vorgesehenen Pensionen nicht mehr gezahlt werden konnten.
Wie schon erwähnt, hat sich Gauß schon im Alter von 15 Jahren damit beschäftigt, die Eigenschaften einer Geometrie zu untersuchen, in der alle Axiome des Euklid mit Ausnahme des Parallelenaxioms gelten. Man hatte seit der Antike versucht, das Parallelenaxiom seiner besonderen Struktur wegen aus den anderen Axiomen herzuleiten. Alle vermeintlichen Beweise waren aber daran gescheitert, daß an irgendeiner unauffälligen Stelle eine scheinbare Selbstverständlichkeit benutzt wurde, zum Beispiel, daß es Dreiecke mit beliebig großem Flächeninhalt gibt, die aber in Wirklichkeit nur mit Hilfe des Parallelenaxioms zu beweisen war. Gauß hat eine ganze Reihe solcher Fehler aufgedeckt.
Da es nun bisher nicht gelungen war, die Abhängigkeit des Parallelenaxioms von den anderen euklidischen Axiomen direkt zu beweisen, konnte man versuchen, eine Geometrie aufzubauen, in der durch einen Punkt außerhalb einer Geraden mindestens zwei Geraden hindurchgehen, die die gegebene Gerade nicht schneiden, in der Hoffnung, dabei zu einem Widerspruch zu kommen. Gauß aber kam bei solchen Untersuchungen immer weiter vorwärts und erhielt so interessante und weitgehende Resultate, daß er immer mehr zur Überzeugung kam, eine solche Geometrie könne in sich frei von Widersprüchen sein. Er hat darüber nichts veröffentlicht.
Im Gegenteil: Einige vertraute Bekannte, denen er seine Ansichten darüber mitteilte, hat er gebeten, völliges Stillschweigen zu bewahren, da er das Geschrei der Böotier (ein altgriechischer Volksstamm, der als denkfaul, schwerfällig und unkultiviert galt) fürchtete. Er warnte sie, solche Ideen zu publizieren, da sie sonst – wie er sich in einem Brief an Chr. L. Gerling ausdrückte – ein Wespennest aufstören würden. Zu Anfang des 19. Jahr-

hunderts arbeiteten unabhängig voneinander und etwa gleichzeitig zwei junge Mathematiker die nichteuklidische Geometrie aus und veröffentlichten sie. Ab 1829 erschien darüber in Kasan in Rußland eine Serie von Abhandlungen von N. I. Lobatschewski, und 1823 publizierte J. Bolyai in Ungarn seine Geometrie als Anhang eines Mathematikbuches seines Vaters W. Bolyai, der ein Studienfreund von Gauß war, von diesem die Schwierigkeiten der Bemühungen um das Parallelenaxiom kannte und seinen Sohn dringend beschworen hatte, von seinen Untersuchungen abzulassen, weil sie aussichtslos seien.

Gauß erfuhr zunächst von Bolyais Resultaten. In einem Brief an Chr. L. Gerling bezeichnete er J. Bolyai als ein Genie erster Größe.

An den Vater Bolyais aber schrieb er, er dürfe dessen Sohn nicht loben, da das hieße, sich selbst zu loben; denn der ganze Inhalt sei ihm, zum Teil schon seit fast 30 Jahren, aus eigenen Untersuchungen bekannt. Auf den jungen Bolyai wirkte dieser Brief natürlich niederschmetternd, und besonders in Ungarn hat man Gauß' Reaktion sehr übelgenommen.

Erst allmählich, etwa ab 1841, kamen die an deutschen Universitäten schwer zugänglichen, noch dazu russisch geschriebenen ersten Arbeiten von Lobatschewski zu Gauß' Kenntnis. Gauß begriff sofort die Bedeutung dieser Publikationen und begann, um sie genauer studieren zu können, mit bestem Erfolg russisch zu lernen, was er gleichzeitig als Erprobung der Elastizität seines Geistes (er stand ja damals schon im 7. Jahrzehnt seines Lebens) ansah.

Im Jahre 1828 nahm Gauß als Gast von A. v. Humboldt an einer großen Naturforscherversammlung in Berlin teil und kam dort mit dem Physiker W. E. Weber in Kontakt, der sich nach Webers Berufung 1831 nach Göttingen zu einer engen Zusammenarbeit ausgestaltete. Ihr erstes gemeinsames Thema war der Erdmagnetismus. Zwar organisierten sie eine weltweite Beobachtung des Erdmagnetismus, aber für Gauß waren die theoretischen Eroberungen die Hauptsache. Trotzdem kömmerte sich Gauß aber auch um neue Beobachtungsmethoden, die eine wesentliche Erhöhung der Meßgenauigkeit mit sich brachten (Erfindung des Magnetometers). Gauß und Weber erfanden 1833 gemeinsam den elektromagnetischen Telegraphen, den sie gleich zu einem Nachrichtendienst zwischen dem Physikalischen Institut und der Sternwarte benützten.

Sonstige physikalische Arbeiten bezogen sich auf die Mechanik, wo Gauß das Prinzip des kleinsten Zwangs aufstellte, und auf die Optik, wo er die bisherigen Berechnungsmethoden für den Durchgang von Lichtstrahlen durch ein Linsensystem wesentlich verbesserte.

Die Wirkung von Gauß auf die Mathematiker seiner Zeit erfolgte fast ausschließlich durch seine Publikationen. Gegen Vorlesungen hegte er einen großen Widerwillen, direkte Schüler der Mathematik hatte er nicht, und die Korrespondenz mit mathematischen Kollegen war äußerst gering im Vergleich mit dem sehr umfangreichen Briefwechsel, den er mit seinen Bekannten und Freunden aus dem Bereich der Astronomie führte.

So waren zu seinem 50jährigen Doktorjubiläum 1849 nur zwei Mathematiker, Dirichlet und Jacobi, nach Göttingen gekommen.

Bei dieser Gelegenheit erhielt er das Ehrenbürgerrecht der Stadt Göttingen, und darüber hat er sich mehr gefreut als über die vielen Ehrungen, die er etwa 50 Jahre lang in Gestalt von Berufungen an andere Universitäten – er blieb aber in Göttingen – und von Wahlen in wissenschaftliche Akademien und gelehrte Gesellschaften empfing. Im Wintersemester 1850/51 hielt er noch Vorlesungen über die Methode der kleinsten Quadrate; unter den wenigen Hörern befand sich der damals 19jährige Dedekind, der von Gauß' Gesamtpersönlichkeit aufs tiefste beeindruckt wurde.

In den folgenden Jahren verschlechterte sich der Gesundheitszustand von Gauß immer mehr, bis sein Leben am 23. Februar 1855 erlosch.

H. Reichardt (gekürzt aus: „Biographien bedeutender Mathematiker" – als Leseprobe)

Nichts ist getan, wenn noch etwas zu tun übrig ist. *C. F. Gauß*

Lebensdaten zu Carl Friedrich Gauß

1777	30. April, Carl Friedrich Gauß in Braunschweig geboren
1784	Besuch der Volksschule
1788	Eintritt ins Gymnasium Chatarineum
1792	Aufnahme in Collegium Carolinum
1795	Beginn des Studiums in Göttingen
1796	Mit der Entdeckung der Konstruktion des regulären 17-Ecks beginnt Gauß, sein wissenschaftliches Tagebuch zu führen
1799	Promotion in Abwesenheit in Helmstedt; anschließend dort Aufenthalt bei J. F. Pfaff bis Ostern 1800
1801	Die „Disquisitiones arithmeticae" erscheinen Gauß berechnet die Bahnelemente der Ceres
1805	Heirat mit Johanna Osthoff
1807	Gauß wird Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Göttingen
1809	„Theoria motus corporum coelestium..." erscheint im Druck Tod von Frau Johanna und des dritten Kindes
1810	Gauß schlägt eine Berufung nach Berlin aus Heirat mit Wilhelmine Waldeck
1811	Ausbau der Göttinger Sternwarte beginnt
1812	Studien zur Reihenlehre
1818	Gauß erhält den Auftrag zur Vermessung des Königreiches Hannover
1820	Gauß erfindet den Heliotropen
1821 bis 1825	Gauß leitet die geodätischen Arbeiten im Gelände
1824	Endgültiges Scheitern der Berufungsverhandlungen nach Berlin
1827	Erscheinen der „Disquisitiones generales circa superficies curvas" im Druck
1828	Teilnahme an der Naturforscherversammlung in Berlin, zu Gast bei Alexander von Humboldt, Bekanntschaft mit Wilhelm Weber
1829	Gauß stellt das physikalische Prinzip des kleinsten Zwanges auf
1831	Seine zweite Frau stirbt. Wilhelm Weber wird nach Göttingen berufen
1832	Gauß und Weber stellen ein absolutes physikalisches Maßsystem auf Erdmagnetische Untersuchungen
1839	Gauß stellt die Grundlagen einer allgemeinen Potentialtheorie dar
1841	Gauß lernt die Arbeiten von N. I. Lobatschewski kennen und erlernt die russische Sprache
1849	Feier des 50jährigen Doktorjubiläums von Gauß in Göttingen Die letzte Abhandlung
1855	23. Februar, Tod in Göttingen

Quadratische Reste

Teil 1

1. Die Zahlen

$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

heißen *ganze Zahlen.* Man kann ganze Zahlen multiplizieren und erhält wieder ganze Zahlen. Wenn man jedoch ganze Zahlen dividiert, ergeben sich nicht immer ganze Zahlen. Ist dies doch der Fall, so liegt eine besondere Eigenschaft vor. Sind a und b ganze Zahlen und ist ihr Quotient $\frac{a}{b}$ wieder eine ganze Zahl, so heißt b ein Teiler von a oder a ein Vielfaches von b. Dieses drücken wir kurz durch das Zeichen „$b \mid a$" aus. Wir schreiben „$b \nmid a$", wenn b nicht Teiler von a ist, also der Quotient $\frac{a}{b}$ keine ganze Zahl ist.

Beispiele:

$37 \mid 111$, $-7 \mid 1001$, $1 \mid -1973$, $1979 \mid 1979$, $2 \nmid -1977$, $3 \nmid 1977$, $9 \nmid 66$. Jede Zahl $a(\neq 0)$ hat die vier Teiler $+1$, -1, $+a$, $-a$. Es gibt Zahlen p, die nur die vier Teiler $+1$, -1, $+p$, $-p$ (und keine anderen) haben.

Beispiele:

$+2$, -2, $+3$, -3, $+37$, -37, $+997$, -997, $+1973$, -1973, $+1979$, -1979, $+3989$, -3989.

Solche Zahlen p, die genau vier Teiler (nämlich $+1$, -1, $+p$, $-p$) haben, heißen *Primelemente;* die Zahlen $+1$, -1 gehören also nicht zu den Primelementen. Die positiven Primelemente heißen Primzahlen. Die Folge der Primzahlen beginnt mit

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots$

Die größte bekannte Primzahl ist $2^{19937}-1$. Je größer die Zahlen werden, um so seltener treten Primzahlen auf. Daß die Folge der Primzahlen jedoch nicht abbricht, hat zuerst *Euklid* bewiesen. Man kann sogar in einem gewissen Sinne sagen, daß es wesentlich „mehr" Primzahlen als Quadratzahlen gibt.

Die Folge der Quadratzahlen beginnt mit

$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \ldots$

Die (unendliche) Summe über alle Reziproken der Quadratzahlen

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\ldots$$

liegt zwischen $\frac{5}{4}$ und $\frac{7}{4}$ $\left(\text{sie ist genau } \frac{\pi^2}{6}\right)$. Die (unendliche) Summe über alle Reziproken der Primzahlen

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\ldots$$

ist jedoch unendlich groß!

2. Es sei nun eine Primzahl p gegeben. Wir betrachten alle ganzzahligen Vielfachen von p, welche nicht größer als eine gegebene Zahl a sind.

Beispiele:

1) $p=7$, $a=66$. Die Vielfachen von 7, welche nicht größer als 66 sind, sind

$\ldots, -14, -7, 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63.$

2) $p=11$, $a=-18$. Die Vielfachen von 11, welche nicht größer als -18 sind, sind

$\ldots, -55, -44, -33, -22.$

Unter diesen gibt es ein größtes Vielfaches, etwa qp mit einer ganzen Zahl q. (In den Beispielen: 1) $9 \cdot 7$, 2) $(-2)11$).

Es ist also qp nicht größer als a (d.h. $qp \leqq a$), jedoch $(q+1)p > a$. $qp \leqq a$ bedeutet, daß es eine Zahl $r \geqq 0$ gibt, die zu qp addiert gerade a ergibt, also

$a = qp + r$, wobei $r \geqq 0$ ist.

(In den Beispielen: 1) $66 = 9 \cdot 7 + 3$,

2) $-18 = (-2)11 + 4$.)

$a < (q+1)p$ besagt, daß $r < p$ sein muß; denn wäre $r \geqq p$, so müßte

$r = a - qp \geqq p$ sein, d.h. $a \geqq p + qp = (q+1)p$, was $a < (q+1)p$ widerspricht.

Es gibt also genau eine ganze Zahl r mit $0 \leqq r < p$, so, daß

(1) $\quad a = qp + r$

mit einer ganzen Zahl q ist. (Die Aussage $p \mid a$ ist natürlich gleichbedeutend mit $r=0$.) Die Zahl r heißt der Rest der Division von a durch p oder *Rest von a modulo p.*

(Dividiert man eine natürliche Zahl a durch p, so ergibt sich als Quotient gerade dieses q, und es bleibt ein Rest r mit $0 \leqq r < p$.) Der Rest von a modulo p ist stets eine der Zahlen

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, p-1.$

Beispiele:

$$\begin{aligned} -28 &= (-4) \cdot 7 + 0 \\ 71 &= 10 \cdot 7 + 1 \\ -103 &= (-15) \cdot 7 + 2 \\ -67 &= (-10) \cdot 7 + 3 \\ 81 &= 11 \cdot 7 + 4 \\ 145 &= 20 \cdot 7 + 5 \\ 216 &= 30 \cdot 7 + 6 \end{aligned}$$

(Es ist auch $216 = 31 \cdot 7 + (-1)$; dies ist aber nicht die gewünschte Zerlegung (1), da in (1) ein *positiver* Rest gefordert wird.)

3. Der Rest einer Quadratzahl modulo p ist natürlich auch eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots, p-1$. Es gibt aber einen Unterschied, je nachdem wir beliebige ganze Zahlen oder nur Quadratzahlen zulassen.

Ist eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots, p-1$ gegeben, so kann man natürlich stets eine ganze Zahl a finden, deren Rest modulo p die gegebene Zahl ist. Es gibt sogar unendlich viele solcher Zahlen. Ist a eine solche, so sind $a+p$, $a+2p, \ldots$ weitere.

Beispiel:

$p=7$. Gegeben sei die Zahl 5. Ganze Zahlen, für die 5 der Rest modulo 7 ist, sind: $5, 12, 19, 26, 33, 40, \ldots$ und $-2, -9, -16, -23, \ldots$.

Ist eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots, p-1$ gegeben, so kann es jedoch vorkommen, daß keine *Quadratzahl* existiert, die bei der Division durch p die gegebene Zahl als Rest hat (also die gegebene Zahl als Rest modulo p hat).

Beispiele:

$p=7$. Gegeben sei die Zahl 2. Dann gibt es eine Quadratzahl, die bei der Division durch 7 den Rest 2 hat:

$3^2 = 1 \cdot 7 + 2.$

$p=7$. Gegeben sei die Zahl 3. Dann gibt es keine Quadratzahl, deren Rest modulo 7 die Zahl 3 ist. Als Reste der Division von Quadratzahlen durch 7 treten nämlich nur die Reste auf, die sich bei der Division der speziellen Quadratzahlen $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ durch 7 ergeben (wie im Beweis des untenstehenden Satzes 1 allgemein gezeigt wird). Es sind dies nur die Zahlen 0, 1, 2, 4, nicht jedoch 3 (und 5, 6). Auch für 5 (bzw. 6) kann es keine Quadratzahlen geben, die bei der Division durch 7 den Rest 5 (bzw. 6) haben. Für 0, 1, 4 gibt es entsprechende Quadratzahlen:

$7^2 = 7 \cdot 7 + 0$, $6^2 = 5 \cdot 7 + 1$, $5^2 = 3 \cdot 7 + 4$.

Es ist eine besondere Eigenschaft, wenn eine Zahl unter den p Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, p-1$ als Rest bei der Division einer Quadratzahl durch p auftritt.

Definition 1: Gibt es für die natürliche Zahl $a \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ eine Quadratzahl x^2 so, daß x^2 bei der Division durch p den Rest a läßt ($x^2 = q \cdot p + a$), so heiße *a quadratischer Rest von p* (Bezeichnung nach *Gauß*: aRp); gibt es eine solche Quadratzahl nicht, so heiße *a quadratischer Nichtrest von p* (Bezeichnung: aNp).

Beispiele: $1R7$, $2R7$, $3N7$, $4R7$, $5N7$, $6N7$.

Ist zunächst p die einzige gerade Primzahl 2, dann sind die Zahlen 0, 1 beide quadratische Reste von 2; 0 tritt als Rest gerader Quadratzahlen, 1 als Rest ungerader Quadratzahlen bei der Division durch 2 auf.

Es sei von jetzt an $p \neq 2$. Dann gilt

Satz 1: Unter den p Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p-1$ können nicht mehr als $\frac{p+1}{2}$ Zahlen quadratischer Rest von p sein.

Beweis: Als Reste der Division von Quadratzahlen durch p treten nur die Reste auf, die sich bei der Division der Quadratzahlen $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, (p-1)^2$ durch p ergeben: Ist nämlich x^2 eine Quadratzahl und gilt $x = q \cdot p + r$ mit $0 \leqq r < p$, so wird $x^2 = q^2p^2 + 2qpr + r^2 = (q^2 \cdot p + 2qr)p + r^2$ und x^2 hat den gleichen Rest bei der Division durch p wie r^2. Es treten sogar nur die Reste auf, die sich bei der Division der Quadratzahlen $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ durch p ergeben.

Es gilt nämlich:

$\left(\frac{p-1}{2}+1\right)^2$ läßt bei der Division durch p den gleichen Rest wie

$\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Analog gilt:

$\left(\frac{p-1}{2}+2\right)^2$ läßt bei der Division durch p den gleichen Rest wie

$\left(\frac{p-1}{2}-1\right)^2$,

. . . . usw.

$(p-2)^2$ läßt bei der Division durch p den gleichen Rest wie 2^2,

$(p-1)^2$ läßt bei der Division durch p den gleichen Rest wie 1^2,

p^2 läßt bei der Division durch p den gleichen Rest wie 0^2.

Es gibt also unter den Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots, p-1$ höchstens $\frac{p-1}{2}+1=\frac{p+1}{2}$ quadratische Reste von p. Genauer gilt:

Satz 2: Die Hälfte der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ wird zu quadratischen Resten von p, die übrigen werden zu Nichtresten (d. h., es gibt unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ genau $\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste und $\frac{p-1}{2}$ quadratische Nichtreste von p).

Beweis: Die Zahlen

$1^2, 2^2, 3^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$

haben bei der Division durch p genau $\left(\frac{p-1}{2}\right)$ *verschiedene* Reste, denn hätten zwei Quadratzahlen x^2, y^2 (wobei z. B. $x>y$ sei und die natürlichen Zahlen x, y nicht größer als $\frac{p-1}{2}$ sind) den gleichen Rest bei der Division durch p, so müßte $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ positiv und durch p teilbar sein. Dies ist aber unmöglich, da jeder der Faktoren $x-y$ und $x+y$ kleiner als p ist. Es gibt unter den Zahlen 1, 2, 3, …, $p-1$ also $\left(\frac{p-1}{2}\right)$ quadratische Reste und nicht mehr, weil nach Hinzunahme der Null $\frac{p-1}{2}+1=\frac{p+1}{2}$ entstehen, und dies ist nach Satz 1 die obere Grenze für die Anzahl der Reste. Folglich gibt es *genau* $\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste von p, und die übrigen $\frac{p-1}{2}$ Zahlen sind quadratische Nichtreste von p.

Beispiel: $p=13$. Es ist

$1^2=0\cdot 13+1$, $2^2=0\cdot 13+4$, $3^2=0\cdot 13+9$, $4^2=1\cdot 13+3$, $5^2=1\cdot 13+12$, $6^2=2\cdot 13+10$. Folglich gilt $1R13$, $4R13$, $9R13$, $3R13$, $12R13$, $10R13$, aber $2N13$, $5N13$, $6N13$, $7N13$, $8N13$, $11N13$.

Es ist also sehr leicht, bei gegebener Primzahl p alle Zahlen unter den Zahlen 1, 2, 3, …, $p-1$ anzugeben, die quadratische Reste oder Nichtreste von p sind. Es müssen einfach die Quadrate

$1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$

und deren Reste bei der Division durch p bestimmt werden. Alle Zahlen, die dabei als Reste auftreten, sind quadratisxche Reste von p; die übrigen quadratische Nichtreste von p.

Wir definieren nun allgemeiner:

Definition 2: Es sei a eine ganze Zahl. Gibt es eine Quadratzahl x^2 so, daß $x^2=g\cdot p+a$ ist (g sei dabei eine ganze Zahl), so heiße a quadratischer Rest von p.

Wir wollen zeigen: Die ganze Zahl $a=qp+r$ ist quadratischer Rest von p genau dann, wenn ihr Rest r modulo p quadratischer Rest von p ist. (Letzteres können wir dann mit Hilfe der Sätze 1 und 2 leicht entscheiden.)

Ist $a=qp+r$ mit $0\leqq r<p$, und ist r quadratischer Rest von p (nach Def. 1), so gibt es ein x mit $x^2=q'p+r$. Dann ist aber $a=qp+r=qp+(x^2-q'p)=(q-q')p+x^2$, d. h.

$x^2=(q'-q)p+a$,

also a quadratischer Rest von p.

Führe selbständig den Beweis für die Umkehrung!

Ist a quadratischer Rest von p, so ist r ebenfalls quadratischer Rest von p.

Beispiel:

Ist -33 quadratischer Rest von 13?

Der Rest von -33 modulo 13 ist 6, da $-33=(-3)13+6$. Da $6N13$, ist auch $-33N13$.

4. Die umgekehrte Aufgabe hingegen, alle Primzahlen anzugeben, für die eine vorgelegte ganze Zahl quadratischer Rest oder Nichtrest ist, erfordert weit tiefere Untersuchungen: Gegeben sei eine ganze Zahl a. Von welchen ungeraden Primzahlen p ist a quadratischer Rest?

Die Zahl 1 ist als Quadratzahl quadratischer Rest von allen Primzahlen. Für die Zahl -1 gilt der Satz A (wir bezeichnen Sätze, die hier *nicht* bewiesen werden, mit großen Buchstaben).

Satz A: Für alle Primzahlen von der Form $4m+1$ ist -1 quadratischer Rest; für alle Primzahlen von der Form $4m+3$ ist -1 quadratischer Nichtrest.

Beispiele:

-1 ist quadratischer Rest der Primzahlen 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, ….

Die entsprechenden Quadrate sind $2^2, 5^2, 4^2, 12^2, 6^2, 9^2, 23^2, 11^2, 27^2, 34^2, 22^2, \ldots$, nämlich $2^2=1\cdot 5+(-1)$, $5^2=2\cdot 13+(-1)$, $4^2=1\cdot 17+(-1)$, $12^2=5\cdot 29+(-1)$, … usw.

-1 ist Nichtrest der Primzahlen 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, ….

Unter den Primzahlen bis 100 befinden sich folgende, für die 2 quadratischer Rest ist: 7, 17, 23, 31, 41, 47, 71, 73, 79, 89, 97. Die entsprechenden Quadrate sind $3^2, 6^2, 5^2, 8^2, 17^2, 7^2, 12^2, 32^2, 9^2, 25^2, 14^2$. (Beispielsweise: $25^2=7\cdot 89+2$ oder $17^2=7\cdot 41+2$.) Unter diesen Primzahlen kommt keine von der Form $8m+3$ oder $8m+5$ vor. Man kann beweisen:

Satz B: Für alle Primzahlen von der Form $8m+3$ oder der Form $8m+5$ ist 2 Nichtrest.

Satz C: Für alle Primzahlen von der Form $8m+1$ oder der Form $8m+7$ ist 2 quadratischer Rest.

(Zahlen der Form $8m+0$, $8m+2$, $8m+4$, $8m+6$ können keine Primzahlen sein, da sie durch 2 teilbar sind.)

Zu den Primzahlen bis 100, für die -2 quadratischer Rest ist, gehören die folgenden: 3, 11, 17, 19, 41, 43, 59, 67, 73, 83, 89, 97.

Die gesuchten Quadrate sind nämlich $2^2, 3^2, 7^2, 6^2, 11^2, 27^2, 36^2, 47^2, 12^2, 74^2, 49^2, 17^2$. (Beispielsweise $27^2=729=17\cdot 43+(-2)$, $47^2=2209=33\cdot 67+(-2)$, $74^2=66\cdot 83+(-2)$.)

Es sind dies nur Primzahlen von der Form $8m+1$ oder $8m+3$. Man kann beweisen

Satz D: Für alle Primzahlen der Form $8m+5$ oder der Form $8m+7$ ist -2 Nichtrest.

Satz E: Für alle Primzahlen der Form $8m+1$ oder $8m+3$ ist -2 quadratischer Rest.

Nachdem wir das Problem für die Zahlen $+1$, -1, $+2$, -2 gelöst haben, müssen wir jetzt die ganzen Zahlen $+3, -3, +4, -4, +5, -5, +6, -6, +7, -7, +8, -8, \ldots$ untersuchen. Dabei können wir uns jedoch auf Primelemente beschränken. Irgendeine ganze Zahl läßt sich ja (eindeutig) als Produkt von Primelementen schreiben. Weiß man, von welchen ungeraden Primzahlen p diese Primelemente quadratische Reste sind, so weiß man auch, von welchen Primzahlen die gegebene ganze Zahl (also das Produkt dieser Primelemente) quadratischer Rest ist. Es gilt nämlich für Primzahlen p der folgende

Satz F:

a) Das Produkt zweier quadratischer Reste von p ist ein quadratischer Rest von p.

b) Das Produkt zweier Nichtreste von p ist ein quadratischer Rest von p.

c) Das Produkt eines quadratischen Restes mit einem Nichtrest ist ein Nichtrest von p.

(Wir geben weiter unten Beispiele für die Anwendung dieses Satzes.)

Die Primzahlen bis 100, für die 3 quadratischer Rest ist, sind 3, 11, 13, 23, 37, 47, 59, 61, 71, 73, 83, 97.

Die Quadrate, die bei der Division durch diese Primzahlen den Rest 3 liefern, sind $3^2, 5^2, 4^2, 7^2, 22^2, 12^2, 11^2, 8^2, 28^2, 21^2, 13^2, 10^2$. (Beispielsweise: $3^2=2\cdot 3+3$, $5^2=2\cdot 11+3$, $4^2=1\cdot 13+3$, $22^2=13\cdot 37+3$.)

Unter diesen Primzahlen kommt keine vor, die sich in einer der Formen $12m+5$ (wie z. B. 17 oder 41) oder $12m+7$ (wie z. B. 19) schreiben läßt. Man kann beweisen:

Satz G: Für alle Primzahlen der Formen $12m+5$ oder $12m+7$ ist 3 Nichtrest.

Satz H: Für alle Primzahlen der Formen

$12m+1$ oder $12m+11$ ist 3 quadratischer Rest.

(Zahlen der Formen $12m+0$, $12m+2$, $12m+3$, $12m+4$, $12m+6$, $12m+8$, $12m+9$, $12m+10$ sind keine Primzahlen, da sie durch 12, 2, 3, 4, 6, 4, 3, 2 teilbar sind.)

Untersuchen wir nun, für welche Primzahlen -3 quadratischer Rest ist. Es ist $3^2=4\cdot 3+(-3)$, $2^2=1\cdot 7+(-3)$, $6^2=3\cdot 13+(-3)$, $15^2=225=12\cdot 19+(-3)$, $11^2=4\cdot 31+(-3)$, $16^2=7\cdot 37+(-3)$, $13^2=4\cdot 43+(-3)$, $27^2=12\cdot 61+(-3)$, $8^2=1\cdot 67+(-3)$, $17^2=4\cdot 73+(-3)$, $32^2=13\cdot 79+(-3)$, $26^2=7\cdot 97+(-3)$.

Zu den Primzahlen bis 100, deren quadratischer Rest -3 ist, gehören somit 3, 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97. Diese Zahlen (außer 3) haben die Form $3m+1$.

Satz 3: Für alle Primzahlen von der Form $3m+2$ ist -3 Nichtrest.

Satz 4: Für 3 und für alle Primzahlen der Form $3m+1$ ist -3 quadratischer Rest.

Die Sätze 3 und 4 lassen sich mit Satz F aus den Sätzen G und H sowie A herleiten. Als Beispiel beweisen wir Satz 4:

Nach Satz F gilt: $-3Rp$ genau dann, wenn entweder

a) $-1Rp$ und $3Rp$ oder

b) $-1Np$ und $3Np$. Nach Satz A ist $-1Rp$ für alle Primzahlen der Form $4m+1$. Nach Satz H ist $3Rp$ für alle Primzahlen der Form $12m+1$ oder $12m+11$. Nach Satz A ist $-1Np$ für alle Primzahlen p der Form $4m+3$. Nach Satz G ist $3Np$ für alle Primzahlen p der Form $12m+5$ oder $12m+7$. Die Zahlen der Form $12m+11$ haben nicht die Form $4m+1$. Die Zahlen der Form $12m+5$ haben nicht die Form $4m+3$. Daher gilt: Es ist $-3Rp$ für alle Primzahlen p, für die gilt entweder a) p ist von der Form $12m+1$ (diese Zahlen sind auch von der Form $4m+1$) oder b) p ist von der Form $12m+7$ (diese Zahlen sind auch von der Form $4m+3$).

Die Primzahlen der Form $12m+1$ oder $12m+7$ sind aber genau die Primzahlen der Form $3m+1$. (Die übrigen Primzahlen haben ja die Form $12m+5$ oder $12m+11$ und sind nicht von der Form $3m+1$).

Daraus folgt *Satz 4*.

Beweise ganz analog Satz 3!

Man hätte übrigens ähnlich umgekehrt die Sätze G und H mittels Satz F aus den Sätzen 3 und 4 und A herleiten können. Wer versucht es? Jetzt fragen wir, für welche Primzahlen $+4$ und -4 quadratische Reste sind.

Für alle Primzahlen p gilt $2^2=0\cdot p+4$, d. h., 4 ist quadratischer Rest für alle Primzahlen.

Aus Satz Fa) und b) zusammen mit Satz B und Satz C folgt noch einmal, daß 4 quadratischer Rest für alle Primzahlen ist. Ferner folgt aus Satz Fa) und c), daß -4 quadratischer Rest für alle Primzahlen ist, für die -1 quadratischer Rest ist (letzteres wird in Satz A beschrieben).

Satz 5:

a) 4 ist quadratischer Rest für alle Primzahlen.

b) -4 ist quadratischer Rest für alle Primzahlen von der Form $4m+1$ und Nichtrest für alle Primzahlen von der Form $4m+3$.

Wir gehen nun zu den Resten $+5$ und -5 über.

Zu den Primzahlen bis 100, deren quadratischer Rest $+5$ ist, gehören die folgenden: 5, 11, 19, 29, 31, 41, 59, 61, 71, 79, 89. (Man bestimme die entsprechenden Quadrate!)

Diese Zahlen >5 haben die Form $5m+1$ oder $5m+4$. Tatsächlich gilt

Satz I: Für 5 und alle Primzahlen der Form $5m+1$ oder $5m+4$ ist 5 quadratischer Rest.

Satz K: Für alle Primzahlen von der Form $5m+2$ oder $5m+3$ ist 5 Nichtrest.

Nach Satz F ist -5 quadratischer Rest für alle Primzahlen p, für die gilt: a) $-1Rp$ und $5Rp$ oder b) $-1Np$ und $5Np$. Für -1 muß man die Primzahlen in der Form $4m+1$ oder $4m+3$ schreiben, für 5 muß man die Primzahlen in der Form $5m+1$, $5m+2$, $5m+3$, $5m+4$ schreiben.

Zu den Primzahlen der Form $4m+1$ bis 100, deren quadratischer Rest -5 ist, gehören: 29, 41, 61, 89. (Die entsprechenden Quadrate sind 13^2, 35^2, 19^2, 23^2; z. B. $23^2=6\cdot 89+(-5)$.) Sie sind von der Form $5m+1$ oder $5m+4$. Unter ihnen kommen jedoch keine Primzahlen von der Form $5m+2$ oder $5m+3$ vor.

Zu den Primzahlen der Form $4m+3$ bis 100, deren quadratischer Rest -5 ist, gehören 3, 7, 23, 43, 47, 67, 83. (Die entsprechenden Quadrate sind 1^2, 3^2, 8^2, 9^2, 18^2, 14^2, 24^2; z. B. $18^2=7\cdot 47+(-5)$.) Diese Primzahlen sind von der Form $5m+2$ oder $5m+3$.

Für die Primzahl 5 ist -5 Nichtrest. Alle anderen ungeraden Primzahlen haben eine der Formen $20m+1$, $20m+3$, $20m+7$, $20m+9$, $20m+11$, $20m+13$, $20m+17$, $20m+19$.

Primzahlen, die sowohl von der Form $4m+1$ und $5m+1$ bzw. $5m+4$ sind, haben die Form $20m+1$ bzw. $20m+9$. Primzahlen, die sowohl von der Form $4m+3$ und $5m+2$ bzw. $5m+3$ sind, haben die Form $20m+7$ bzw. $20m+3$.

Aus den Sätzen F und I folgt

Satz 6: Für alle Primzahlen von einer der Formen $20m+1$, $20m+3$, $20m+7$, $20m+9$ ist -5 quadratischer Rest.

Primzahlen, die sowohl von der Form $4m+1$ und $5m+2$ bzw. $5m+3$ sind, haben die Form $20m+17$ bzw. $20m+13$. Primzahlen, die sowohl von der Form $4m+3$ und $5m+1$ bzw. $5m+4$ sind, haben die Form $20m+11$ bzw. $20m+19$.

Aus den Sätzen F und K folgt

Satz 7: Für 5 und alle Primzahlen von einer der Formen $20m+11$, $20m+13$, $20m+17$, $20m+19$ ist -5 Nichtrest.

Für die Zahl 6 folgt aus Satz F: 6 ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen, für die gilt:

a) $2Rp$ und $3Rp$ oder b) $2Np$ und $3Np$.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Förste

Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik der Akademie der Wissenschaften der DDR, Leiter der Abt. Theoretische Strömungsmechanik

▲1566▲ Wenn ein Gas durch ein kreiszylindrisches Rohr strömt, gelten für Geschwindigkeit, Druck und Dichte in zwei nahe beieinanderliegenden Querschnitten auf Grund der Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie die Gleichungen

$$\varrho_2 u_2=\varrho_1 u_1,$$

$$\varrho_2 u_2^2+p_2=\varrho_1 u_1^2+p_1,$$

$$\frac{1}{2}u_2^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\varrho_2}=\frac{1}{2}u_1^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\varrho_1};$$

dabei ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen γ eine Konstante.

a) Man stelle $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ als Funktion von $\frac{p_2}{p_1}\geq 1$ dar.

b) Welches Verdichtungsverhältnis $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ kann für Luft ($\gamma=1{,}4$) nicht überschritten werden?

Es gilt $2Rp$, falls p von der Form $8m+1$ oder $8m+7$ ist; $3Rp$, falls p von der Form $12m+1$ oder $12m+11$ ist. Diese Primzahlen sind von einer der Formen $24m+1$, $24m+23$. Es gilt $2Np$, falls p von der Form $8m+3$ oder $8m+5$ ist, ferner $3Np$, falls p von der Form $12m+5$ oder $12m+7$ ist. Diese Primzahlen sind von einer der Formen $24m+5$, $24m+19$.

Satz 8: Für alle Primzahlen von einer der Formen $24m+1$, $24m+5$, $24m+19$, $24m+23$ ist 6 quadratischer Rest.

Satz 9: Für 3 und alle Primzahlen von einer der Formen $24m+7$, $24m+11$, $24m+13$, $24m+17$ ist 6 Nichtrest.

(Alle ungeraden Primzahlen, außer 3, haben eine der Formen $24m+1$, $24m+5$, $24m+7$, $24m+11$, $24m+13$, $24m+17$, $24m+19$, $24m+23$.)

Für die Zahl -6 folgt aus Satz F: -6 ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen p, für die gilt:

a) $-1Rp$ und $2Rp$ und $3Rp$ oder

b) $-1Rp$ und $2Np$ und $3Np$ oder

c) $-1Np$ und $2Np$ und $3Rp$ oder

d) $-1Np$ und $2Rp$ und $3Np$.

Aufgabe: Leite daraus den Satz 10 ab!

Satz 10: Für 3 und alle Primzahlen von einer der Formen $24m+1$, $24m+5$, $24m+7$, $24m+11$ ist -6 quadratischer Rest.

(Fortsetzung des Beitrags folgt in Heft 2/77.)

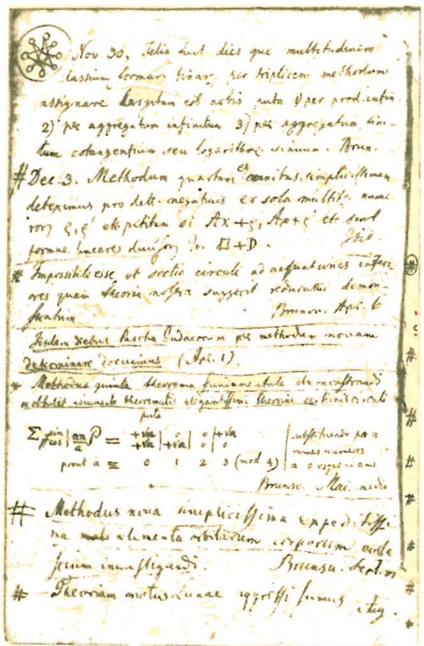
H. Pieper

Das Mathematische Tagebuch von C. F. Gauß

C. F. Gauß (1777 bis 1855), der von seinem Zeitgenossen *Laplace* als der größte Mathematiker aller Zeiten und Völker bezeichnet wurde, drang bei seinen Forschungen tief in mathematische Probleme ein und leistete Grundlegendes. Durch seine Veröffentlichungen und Vorlesungen erhält man jedoch keinen vollständigen Einblick in sein Schaffen, denn Briefe und Notizen belegen, daß Gauß einige seiner wesentlichsten Ideen nicht veröffentlichte (wie z. B. die sehr weit fortgeschrittenen Arbeiten zur nichteuklidischen Geometrie). Sein wiederholt ausgesprochener Grundsatz war, nichts übereilt zu publizieren, sondern nur Vollkommenes. Damit wurde in der Regel jede Spur verwischt, die den Weg hätte zeigen können, wie Gauß zu diesen Ergebnissen gekommen war. Sein wissenschaftlicher Nachlaß, der erstaunliche Sachen ans Licht brachte, hat uns mitunter Einblicke in seine Arbeitsweise gegeben, wie ihn beispielsweise das Rechnen mit konkreten Zahlen auf allgemeine Gesetze führte.

Einen Fall von unschätzbarem Wert bildet der Fund des „Notizenjournals", der *Stäckel* 1898 auf Grund einer Erwähnung in einem Gaußschen Brief mit kriminalistischem Spürsinn gelang. Das 19seitige Oktavheft wurde mit zwei Unterbrechungen von 1796 bis 1814 geführt. Die erste Eintragung bezieht sich auf eine Entdeckung, die nach 2000jährigem Steckenbleiben das Problem der Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke für $n = 17$ vorantrieb und wenig später das Problem für beliebiges n einer Lösung zuführte. Diese Erkenntnis, die von Gauß am 30. März 1797 schon vor dem Aufstehen gewonnen wurde, bewog ihn, sich endgültig der Mathematik und nicht der klassischen Philologie zu widmen. Das Tagebuch, während der Studienzeit in Göttingen (1795 bis 1798) kurz vor dem 19. Geburtstag begonnen, ist für uns deshalb so interessant, weil es Einblick in die Entwicklung eines auf sich gestellten mathematischen Genies gibt, das Ringen um Neues zeigt, aufsehenerregende Entdeckungen neben längst Bekanntes stellt, Gauß' Entdeckerfreude widerspiegelt, seine Vermutungen enthält und auch über Empfindungen des Verfassers berichtet.

Geburtshaus C. F. Gauß' in Braunschweig



Eine Seite aus dem Tagebuch C. F. Gauß'

Eine Durchsicht des Tagebuches erfordert umfangreiche mathematische Kenntnisse, denn vieles, was Gauß notierte, gehört zum Bestand der Mathematik. Aber auch der Zweck des Buches, als persönliches Notizheft zu dienen, macht eine Deutung aller in lateinisch und unter reichlicher Verwendung von Abkürzungen (z. B. „Zahl $= \Delta + \Delta + \Delta$") vorgenommenen Eintragungen schwierig, so daß noch nicht alle 146 Notizen restlos geklärt sind. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die Notiz vom 21. 10. 1796 „Wir haben GEGAN bezwungen". Das Buch läßt uns u. a. die Entstehungsgeschichte der grundlegenden Ideen von Gauß in der Zahlentheorie (Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste), der lemniskatischen und elliptischen Funktionen verfolgen. Es zeigt klar, daß sich Gauß schon 1797 im Besitz der geometrischen Interpretation von komplexen Zahlen befand, die sie später ihres mystischen Charakters entkleiden sollten. Viele Notizen beziehen sich auf das arithmetisch-geometrische Mittel, mit dem sich Gauß bereits seit 1792 befaßte.

Das Mathematische Tagebuch von C. F. Gauß ist von der Akademischen Verlagsgesellschaft Geest und Portig in ihrer berühmten Reihe „Ostwalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften" als Band 256 herausgegeben worden. Es enthält neben dem lateinischen Text und einem Faksimile-Abdruck eine deutsche Übersetzung, einen kurzen Kommentar sowie eine historische Einführung.

R. Thiele

Gauß und die Zahlen

Bereits als 15jähriger begann *Gauß*, Primzahltabellen aufzustellen, um Ordnung in das Chaos ihrer Verteilung zu bringen, und er berechnete die reziproken Werte von Primzahlen bis über einhundert Stellen nach dem Komma, um die Perioden zu ermitteln. So kann es nicht verwundern, daß *Gauß* sich beispielsweise die Zahl der Gewitter pro Jahr notierte oder die Anzahl der Schritte von der Göttinger Sternwarte zu Orten festhielt, die er häufig besuchte. In einem Heft finden sich u. a. folgende Angaben:

1600	Jan 1	0
1642	Dec 25	16709
1727	März 20	46475
1769	Sept 14	61983
1853	Dec 9	92749

In der zweiten Zeile ist das Geburtsdatum und in der dritten Zeile der Sterbetag von *Isaac Newton* aufgeschrieben. Die dritte Spalte gibt die Anzahl der seit dem 1. Januar 1600 verflossenen Tage an, so daß *Newtons* Alter $46475 - 16709 = 30766$ Tage betrug. In der vierten Zeile befindet sich *A. v. Humboldts* Geburtsdatum, während die fünfte Zeile in der dritten Spalte $61983 + 30766 = 92749$ zeigt, also offensichtlich das Datum für *A. v. Humboldt* ermittelt, an dem er älter als *Newton* wird. Dies ist der 9. Dezember 1853, und Gauß gratuliert dem erstaunten *A. v. Humboldt*. Drei Tage vor seinem Tod zählt *Gauß* die Zahl seiner Tage: 28419.

R. Tiele

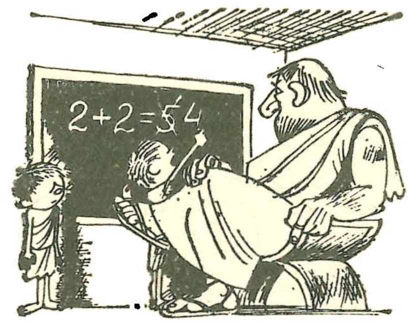
Gauß, C. F.

Wissenschaftliches Tagebuch 1796 bis 1814

(Ostwalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften)
96 S., 22 Abb., kartoniert 12,– M
Bestell-Nr. 669 721 0
Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig

Wer löst mit?
alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 2. Mai 1977



Ma 5 ■1567 Vier Schülerinnen, und zwar Ina, Katrin, Andrea und Carola, bilden einen Timurtrupp. Sie helfen den Rentnerinnen Frau Neumann, Frau Peter, Frau Heller und Frau Weise. Jede dieser vier Schülerinnen hilft genau einer dieser Frauen. Nun wissen wir folgendes:

a) Ina hilft weder Frau Heller noch Frau Peter,

b) Carola hilft Frau Neumann,

c) Andrea hilft nicht Frau Peter.

Wie lauten die Vornamen derjenigen Schülerinnen, die Frau Peter, Frau Heller bzw. Frau Weise helfen?

Schülerin Birgit Weyh, Fambach

Ma 5 ■1568 Eine Gemüseverkaufsstelle erhielt eine Lieferung von 964 kg Kartoffeln. Nach einer Woche war nur noch der vierte Teil dieser angelieferten Kartoffelmenge vorrätig.

Wieviel Mark waren für die bereits verkauften Kartoffeln eingenommen worden, wenn 1 kg Kartoffeln 16 Pf kostet?

Fachlehrer Dieter Knape, Jessen

Ma 5 ■1569 Hans und Uwe sollen für ihre Klassenkameraden anläßlich einer Disko-Veranstaltung 30 Flaschen Fruchtsaftgetränk zum Einzelpreis von 0,40 M einschließlich Pfandgeld und für den Rest des verbleibenden Geldes einige Päckchen Salzsticks zum Einzelpreis von 0,75 M einkaufen. Ihnen stehen genau 19,– M für den Einkauf zur Verfügung. Wieviel Päckchen Salzsticks könnten sie höchstens einkaufen?

Schülerin Ines Rakette, Lommatzsch

Ma 5 ■1570 Ein Betrieb richtete zwei Kinderferienlager ein. Es wurden insgesamt 385 Betten angeschafft. Die Unkosten für die Betten betrugen für das erste Lager 10250,– M, für das zweite Lager 1250,– M weniger als für das erste. Wieviel Betten wurden für jedes für das erste. Wieviel Betten wurden für jedes dieser zwei Lager angeschafft?

Fachlehrer Dieter Knape, Jessen

Ma 5 ■1571 Die Durchführung eines Wandertages für eine Schulklasse war mit Unkosten verbunden. Hätte jeder Schüler dieser Klasse 80 Pf entrichtet, so hätten noch 1,50 M zur Deckung der Unkosten gefehlt. Wenn hingegen jeder Schüler 90 Pf gezahlt hätte, so wären 1,50 M übrig geblieben. Wieviel Schüler beteiligten sich am Wandertag?

Schüler Roland Kampe, Rostock

Ma 5 ■1572 Ein Autobus war während einer Stadtrundfahrt mit 50 Personen besetzt. Im Autobus befanden sich 26 Erwachsene mehr als Kinder und zwei Männer weniger als Frauen. Wieviel Männer, Frauen und Kinder nahmen an dieser Stadtrundfahrt teil? *Schüler Roland Kampe, Rostock*

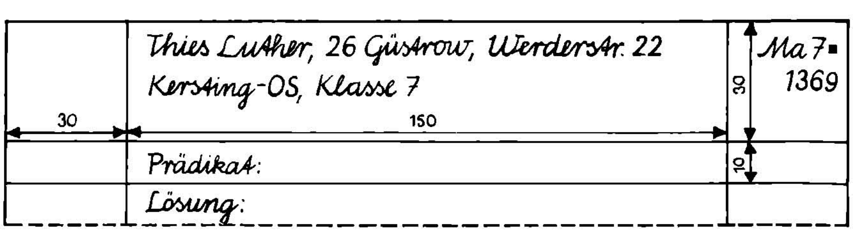
Ma 6 ■1573 Im Jahre 1970 war Peter 8 Jahre, sein Vater 31 Jahre alt. In welchem Jahr wird Peters Vater doppelt so alt sein wie Peter selbst?

Schülerin Kerstin Funke, Großörner

Ma 6 ■1574 Günter fragt seinen Bruder Hans, wieviel Mark er im letzten Monat von seinem Taschengeld gespart habe. Hans erwidert: „Wenn du halb soviel Mark gespart hättest wie ich und noch 1,50 M mehr, dann hättest du 4,– M gespart. Nun sage mir, wieviel Mark ich gespart habe!“

Schüler Roland Kampe, Rostock

Ma 6 ■1575 Vier ehemalige Schulkameraden, und zwar Herr A., Herr B., Herr C. und Herr D., treffen sich einige Jahre nach dem Abschluß der Oberschule. Ihrem Gespräch ist zu entnehmen, daß je einer von ihnen in Dresden, Halle, Leipzig und Suhl wohnt. Von diesen vier Personen wissen wir:



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1976/77 läuft von Heft 5/76 bis Heft 2/77. Zwischen dem 1. und 10. September 1977 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/77 veröffentlicht. Wer mindestens *10* Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1976/77 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

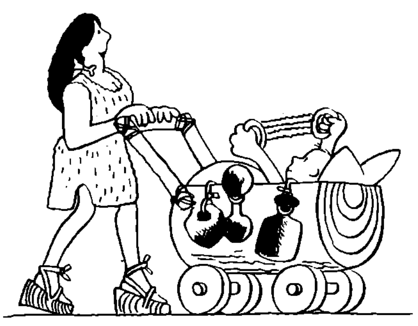
a) zwei Personen, und zwar Herr A. und der Leipziger, sind von Beruf Elektriker,
b) zwei Personen, und zwar Herr B. und der Suhler, sind von Beruf Dreher,
c) zwei Personen, und zwar Herr C. und der Suhler, sind begeisterte S5hachspieler,
d) zwei Personen, und zwar Herr B. und der Dresdener, üben verschiedene Berufe aus.
In welcher Stadt wohnt jeder dieser vier Herren? *Schülerin Monika Müller, Fambach*

Ma 6 ▪1576 Multipliziert man das Produkt zweier natürlicher Zahlen mit der Summe aus diesen Zahlen, so erhält man 8602.
Um welche Zahlen handelt es sich?
Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 6 ▪1577 Ein Dreieck ABC habe die Innenwinkelgrößen α, β und γ. Ein Außenwinkel mit dem Scheitel A sei um 10° kleiner als ein Außenwinkel mit dem Scheitel C. Ein Außenwinkel mit dem Scheitel B sei um 50° größer als α. Wie groß sind alle Innen- und Außenwinkel dieses Dreiecks? *Sch.*

Ph 6 ▪1578 Ein Ballen Glaswolle von 0,6 m^3 hat eine Masse von 57,5 kg. Wieviel % Glas enthält sein Volumen, wenn die Dichte des Glases $2{,}5\,\frac{g}{cm^3}$ beträgt?

Ma 7 ▪1579 Jemand kauft in einer Buchhandlung 10 Bücher für insgesamt 36,80 M. Es sind Bücher zum Einzelpreis von 4,30 M, 6,30 M und 2,60 M. Wieviel Bücher von jeder Preislage hat dieser Käufer erworben?
Schüler Andreas Fittke, Berlin

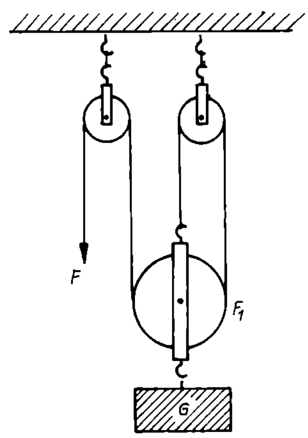


Ma 7 ▪1580 Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen beträgt 421200. Wie heißen diese vier Zahlen?
Schülerin Anne Schmücking, Sondershausen

Ma 7 ▪1581 Bei den XII. Olympischen Winterspielen 1976 in Innsbruck erzielten die Sportler der DDR in der Nationenwertung mit 135 Punkten den zweiten Platz hinter der UdSSR. Für eine Gold-, Silber-, Bronzemedaille, einen 4., 5. bzw. 6. Platz wurden jeweils 7, 5, 4, 3, 2 bzw. 1 Punkte vergeben.
Die Anzahl der von den Sportlern aus der DDR erkämpften Goldmedaillen war gleich der Anzahl der errungenen Bronzemedaillen und gleich der Anzahl der erzielten vierten Plätze. Die Anzahl der erkämpften Silbermedaillen stimmte mit der Anzahl der erzielten fünften Plätze überein. Jede der Anzahlen der erkämpften Gold-, Silber-, Bronzemedaillen, 4., 5. und 6. Plätze ist gleich einer einstelligen Primzahl. Wieviel Gold-, Silber-, Bronzemedaillen, 4., 5. bzw. 6. Plätze gingen an die Sportler aus der DDR?
Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 7 ▪1582 Katja erhielt von ihrer Mutter 3,80 M zum Einkauf von Kuchen. Sie kaufte Butterkuchen zu 25 Pf, Pflaumenkuchen zu 35 Pf und Törtchen zu 70 Pf je Stück. Von einer dieser Kuchensorten kaufte Katja genau zwei Stück, von einer weiteren genau drei Stück und von der verbleibenden genau vier Stück.
Von welcher Sorte Kuchen hat Katja genau zwei, drei bzw. vier Stück gekauft, wenn sie das erhaltene Geld restlos ausgegeben hat?
Schülerin Ilona Kleff, Vetschau

Ph 7 ▪1583 Welche Kraft F hält die Last $G = 120$ kp im Gleichgewicht, wenn jede Rolle 6 kp wiegt?

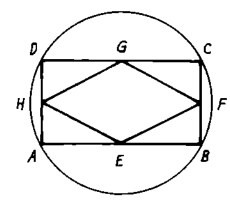


Ch 7 ▪1584 Zum aluminothermischen Schweißen einer Straßenbahnschiene werden 3 kg Eisen benötigt.
a) Wieviel Gramm Aluminium sind mit Eisen(II, II)-oxid zu mischen, damit die gewünschte Menge Eisen entsteht?
b) Wieviel Gramm Aluminiumoxid entstehen dabei? *Prof. Dr. W. Renneberg, Leipzig*

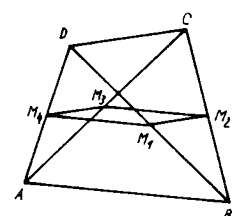
Und schön aufpassen,
daß die Säure nicht
auf die Textilien läuft!

Ma 8 ▪1585 Es sind all[e na]türlichen Zahlen z zu erm[itteln, die die] folgenden Eigenschaften haben:
1. Die beiden Grundziffern von z si[nd von]einander verschieden;
2. das Quadrat von z ist eine dreistellige Zahl;
3. die letzte Grundziffer des Quadrats von z stimmt mit der ersten Grundziffer der Zahl z überein. *Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ▪1586 Einem Kreis mit dem Radius $r = 5$ cm sei ein Rechteck $ABCD$ einbeschrieben (siehe Bild). Es seien E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ dieses Rechtecks. Es ist der Umfang des Vierecks $EFGH$ zu berechnen.
Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 8 ▪1587 Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, dessen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ nicht parallel sind. Ferner seien M_1 und M_3 die Mittelpunkte der Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{AC}$, M_2 und M_4 die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ dieses Vierecks (siehe Bild).
Es ist zu beweisen, daß das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein Parallelogramm ist. *Sch.*



Ma 8 ▪1588 Es ist zu untersuchen, ob es vier natürliche Zahlen a, b, c, d mit $a > b > c > d > 0$ gibt, die die folgende Eigenschaft haben:
Die sechs Differenzen
$a-b$, $a-c$, $a-d$, $b-c$, $b-d$, $c-d$
können so geordnet werden, daß sie die Folge der Zahlen
1, 2, 3, 4, 5, 6 bilden.
Bejahendenfalls sind vier solche Zahlen a, b, c, d anzugeben. *L.*

Ph 8 ▪1589 Wie groß muß die Leistung eines elektrischen Kochers sein, wenn 2 l Wasser in 25 min von 10°C auf 100°C erhitzt werden sollen? Dabei wird die aufgenommene elektrische Leistung nur zu 70% für die Erwärmung des Wassers wirksam.
H. B., Leipzig

Ch 8 ▪1590 Kupfer(II)-oxid reagiert mit Eisen, wobei Eisen(II, III)-oxid entsteht.
a) Stelle die Funktionsgleichung auf, aus der man den Verbrauch an Eisen zur vollständigen Umsetzung bekannter Massen Kupfer(II)-oxid berechnen kann!

b) Berechne mit Hilfe der aufgestellten Funktionsgleichung den Verbrauch an Eisen zur vollständigen Umsetzung von 4 g, 7 g und 11 g Kupfer(II)-oxid!

c) Stelle die Ergebnisse graphisch in einem Koordinatensystem dar!

Ma 9 ■1591 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Gleichung

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}=\frac{x^2-6x-7}{x^2-8x-9}$$

erfüllt ist.

Klaus Beck, EOS Kleinmachnow, Kl. 10

Ma 9 ■1592 Gegeben seien in einem rechtwinkligen Dreieck ABC die Länge der Hypotenuse $\overline{AB}=c=25$ cm und die Länge der Höhe $\overline{CD}=h=12$ cm. Man berechne die Längen der Katheten a und b.

Fachlehrer für Mathematik und Physik Klaus Meier, Osternienburg

Ma 9 ■1593 Es seien A, B, C Mengen, die natürliche Zahlen als Elemente enthalten und von denen folgendes bekannt ist:

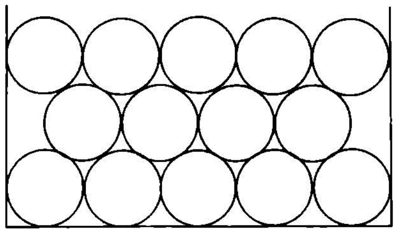
$$A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}, \quad (1)$$
$$B\cup C=\{1,2,4,6,8\}, \quad (2)$$
$$C\cup A=\{1,2,3,4,5,7,8\}, \quad (3)$$
$$A\cap B=\{2\}, \quad (4)$$
$$B\cap C=\{2,4,8\}, \quad (5)$$
$$C\cap A=\{2\}. \quad (6)$$

Man gebe die Elemente jeder der Mengen A, B, C an.

Hinweis: Unter $A\cup B$ versteht man die Vereinigung der Mengen A und B, d. h. die Menge aller Elemente, die der Menge A oder der Menge B angehören. Unter $A\cap B$ versteht man den Durchschnitt der Mengen A und B, d. h. die Menge aller Elemente, die sowohl der Menge A als auch der Menge B angehören (vgl. Mathematik, Lehrbuch für Klasse 9, S. 58). *L.*

Und heute besprechen wir den freien Fall

Ma 9 ■1594 Es sollen Holzstämme von zylindrischer Form, die jeweils einen Durchmesser von 100 mm und eine Länge von 1 m haben, so gestapelt werden, wie das im Bild im Querschnitt gezeigt wird, wobei der Stapel 1 m lang, 1 m breit und höchstens 1 m hoch ist. (Im Bild sind nur drei Schichten des Stapels mit je fünf bzw. vier Stämmen gezeigt.)



a) Wieviel Stämme können gestapelt werden?

b) Wie groß ist das Gesamtvolumen der gestapelten Stämme? *L.*

Ph 9 ■1595 Ein leichtsinniger Radfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von $30\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ eine abschüssige Straße hinab und prallt, ohne daß er vorher bremsen kann, gegen ein festes Hindernis. Aus welcher Höhe würde ein Sturz im freien Fall die gleiche Wirkung haben? *Dr. G. Hesse, Radebeul*

Ch 9 ■1596 Berechnen Sie die Menge 10%ige Äthansäure, die theoretisch zum Lösen von 32,7 g Zink benötigt wird!

Wieviel Liter Wasserstoff entstehen bei dieser Reaktion?

Ma 10/12 ■1597 Man beweise, daß die Gleichung

$$x^{2n+1}+2x^{2n}+2^2x^{2n-1}+2^3x^{2n-2}+\ldots+2^{2n+1}=0,$$

wobei n eine natürliche Zahl ist, genau eine reelle Lösung hat, und ermittle diese.

Fachlehrer für Mathematik Erwin Huth, Schulpforte

Ma 10/12 ■1598 Man berechne

$$z=\frac{1\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}\cdot 3\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot 100\frac{100}{101}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100}.$$

Studienrat Johannes Lehmann, Leipzig

Ma 10/12 ■1599 Es sind alle Paare (x, y) von ganzen Zahlen x, y zu ermitteln, für die die folgenden drei Ungleichungen erfüllt sind:

$$x+y<3, \quad (1)$$
$$x-y<3, \quad (2)$$
$$2x+y>2. \quad (3)$$

Man löse diese Aufgabe

a) graphisch

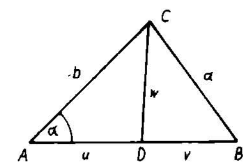
b) rechnerisch (durch eine geeignete Umformung der Ungleichungen (1), (2), (3)).

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ■1600 Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit den Seitenlängen $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$.

a) Man berechne die Länge der Winkelhalbierenden $\overline{CD}=w$ aus a, b, c.

b) Man gebe den Wert der Länge dieser Winkelhalbierenden an, wenn $a=5$ cm, $b=6$ cm, $c=7$ cm.



Hinweis zur Lösung: Man benutze den Satz, wonach die Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, und berechne u aus $u:v=b:a$ sowie $u+v=c$ (vgl. das Bild). Dann ermittle man mit Hilfe des Kosinussatzes w^2 in dem Dreieck ADC und ferner $\cos\alpha$ mit Hilfe des Kosinussatzes in dem Dreieck ABC. *Sch.*

Ph 10/12 ■1601 Verkürzt man ein mathematisches Pendel um die Hälfte seiner Länge, so vergrößert sich seine Frequenz um $\frac{1}{2}$ Hertz. Wie lang ist das Pendel, und wie groß ist seine Frequenz? *H. B., Leipzig*

Ch 10/12 ■1602 In unserer Republik werden nach dem Gips-Schwefelsäure-Verfahren aus einheimischen Rohstoffen Schwefeldioxid und Zement hergestellt. Berechnen Sie, wieviel Kubikmeter Schwefeldioxid beim Einsatz von 204 t Kalziumsulfat theoretisch hergestellt werden können!

„Er wird doch wohl kein Intellektueller werden wollen!"

Nachgedacht – mitgemacht

Aufgaben, die das Leben schreibt

Klasse 5

Die gesellschaftlichen Fonds aus Mitteln unseres Staates werden unter anderem auch zur Stützung der niedrigen Mieten in unserer Republik verwendet.

So betragen die Mietkosten für einen Quadratmeter Wohnfläche in einer Neubauwohnung oder modernisierten Wohnung durchschnittlich 3 Mark im Monat. Der Bürger trägt davon im Durchschnitt nur 1,05 Mark.

a) Eine Familie mit drei Personen bewohnt eine Neubauwohnung mit 63 Quadratmetern Wohnfläche. Welche Miete muß diese Familie etwa in einem Monat bezahlen, und wie hoch ist etwa der Zuschuß aus den gesellschaftlichen Fonds?

b) Welchen Zuschuß aus gesellschaftlichen Fonds erhält eine Familie allein durch diese Maßnahme im Jahr, die für eine Neubauwohnung monatlich 58 Mark Miete zahlt?

Klasse 6

Bis 1980 sollen in der DDR durch Rekultivierung ehemaliger Abbaugebiete des Braunkohlenbergbaus 12500 ha Ackerland geschaffen werden.

a) Wieviel Getreide könnte einmal von dieser Fläche bei einem Hektarertrag von 41 dt geerntet werden?

b) Welche Länge hätte ein flächengleiches Rechteck, wenn es 1 km breit wäre?

Klasse 7

Das Sammeln von Altstoffen (Metallschrott, Altpapier usw.) erlangt auch im Fünfjahrplan 1976 bis 1980 große Bedeutung, da sie zunehmend zur Herstellung neuer Produkte verwendet werden. Der Erfassungsgrad dieser Altstoffe, d. h. der Anteil der Altstoffe, der tatsächlich zur Wiederverwendung zur Verfügung steht, ist von 24% im Jahre 1975 auf 30% im Jahre 1980 zu erhöhen. Dadurch können 1980 gegenüber 1975 zusätzlich Sekundärrohstoffe in Höhe von 350 Mill. Mark genutzt werden.

a) Für wieviel Mrd. Mark werden im Jahre 1980 Sekundärrohstoffe in der Volkswirtschaft genutzt?

b) Wieviel Mark sind das pro Kopf der Bevölkerung der DDR, wenn wir eine Bevölkerungszahl von 16,8 Mill. annehmen?

c) Welchen Wert in Mark haben die nicht erfaßten Altstoffe pro Kopf der Bevölkerung der DDR?

Klasse 8

Über den Neubau von Unterrichtsräumen im Zeitraum 1976 bis 1980 wissen wir, daß im Bezirk Halle 550 mehr als im Bezirk Leipzig, im Bezirk Magdeburg 150 mehr als im Bezirk Leipzig und im Bezirk Dresden genauso viele wie im Bezirk Halle geschaffen werden. Insgesamt sollen in diesen vier Bezirken 5650 Unterrichtsräume neu entstehen. Wieviel sind es in jedem einzelnen Bezirk?

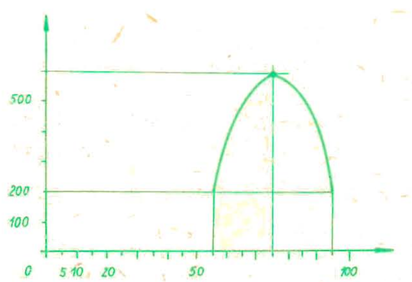
Klasse 9

Die Forstwirtschaft hat einen wichtigen Beitrag zur Entwicklung und Nutzung der Waldbestände zu leisten. Dabei sollen bis 1980 in größerem Umfange wissenschaftlich-technische Erkenntnisse genutzt werden.

Für die Entwicklung von Jungpflanzen spielt die Intensität der Lichteinstrahlung eine wesentliche Rolle.

Für das Wachstum gibt es einen Optimalwert. Seine Kenntnis gibt die Möglichkeit einer entsprechend günstigen Umweltgestaltung.

Beschreiben Sie anhand der Abbildung den Zusammenhang zwischen Lichteinstrahlung und Wachstum, der hier näherungsweise dargestellt ist! Geben Sie für die Kurve einen analytischen Ausdruck an!



Lichtoptimumkurve einer Schattenpflanze
h...Wuchshöhe in mm,
s...Lichteinstrahlung in %

Klasse 10/12

Zur Sicherung des Wohnungsbauprogramms und der anderen Vorhaben der Bauindustrie ist die Zementproduktion bis 1980 auf 125 bis 127 Prozent zu steigern. Bereits im Jahr 1976 soll eine Tagesproduktion von etwa 31400 t Zement erreicht werden, was einer Steigerung auf das 1,4fache gegenüber 1970 entspricht. Die Deutsche Reichsbahn verwendet zum Zementtransport Behälterwagen Uce(s) mit zwei der in der Abbildung dargestellten Behälter. Die zulässige Höchstbelastung eines solchen Waggons wird gerade erreicht, wenn beide Behälter vollständig mit Schüttgut einer Dichte von $1{,}1\ \mathrm{kg\cdot dm^{-3}}$ gefüllt sind. Bei größerer Dichte (Zement hat eine Dichte zwischen 0,9 und $1{,}5\ \mathrm{kg\cdot dm^{-3}}$) muß der Füllstand entsprechend niedriger sein.

a) Berechnen Sie das Volu...
ters!

b) Berechnen Sie die zulässige H...
stung eines Behälterwagens Uce(s)!

c) Wie viele solcher Waggons sind für ... Transport einer Tagesproduktion mindestens erforderlich? Wie lang wäre der entstehende Zug, würde man alle Waggons aneinanderreihen (Länge über Puffer etwa 9 m)?

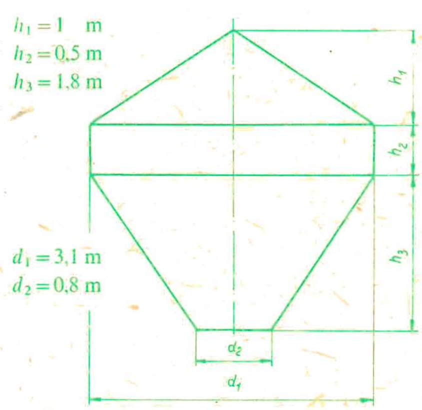
d) Berechnen Sie das Volumen des Zements in einem Behälter und die Füllstandhöhe, wenn Zement einer Dichte von $1{,}4\ \mathrm{kg\cdot dm^{-3}}$ unter Ausnutzung der zulässigen Höchstbelastung befördert werden soll! Beide Behälter werden gleichmäßig gefüllt.

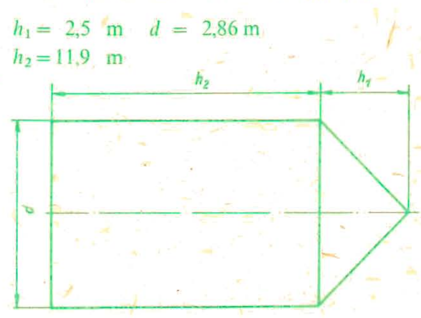
e) Die Abbildung zeigt in senkrechter Eintafelprojektion ein im VEB Baumechanik Halle-Ost hergestelltes Zementsilo für Baustellen. Berechnen Sie sein Volumen!

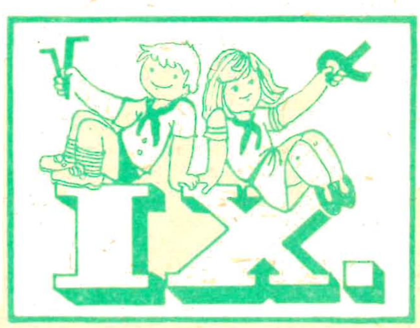
f) Wie viele Zement-Behälterwagen Uce(s) werden für das möglichst vollständige Füllen eines solchen Silos mit Zement einer Dichte von $1{,}4\ \mathrm{kg\cdot dm^{-3}}$ benötigt?

g) Bis zu welcher Höhe kann ein solches Silo mit dem Inhalt eines Zement-Behälterwagens (Dichte $1{,}4\ \mathrm{kg\cdot dm^{-3}}$) gefüllt werden?

E. Stöckel







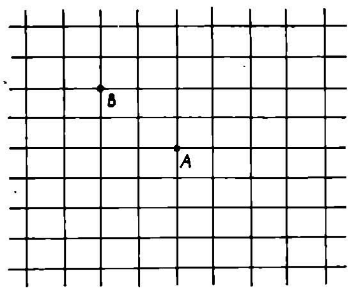
Logeleien

speziell für Klasse 5/6

alpha-Wandzeitung

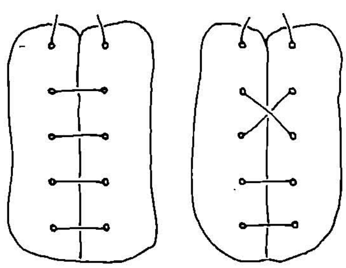
Orthopolis

Orthopolis ist eine Stadt, in der sich die Straßen in gleichen Abständen rechtwinklig kreuzen. Um auf einem kürzesten Weg von A nach B zu gelangen, benötigt man 20 Minuten. Zeichne in Orthopolis alle Punkte ein, die man von A auf den kürzesten Wegen ebenfalls in 20 Minuten erreicht!



Zugeschnürt

Wie sieht der Verlauf der Schnürsenkel von der anderen Seite aus?

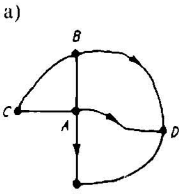


a) b)

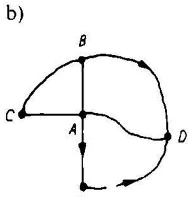
Achtung, Einbahnstraße!

In den Abbildungen sind jeweils fünf Plätze gezeichnet, die durch sieben Einbahnstraßen verbunden sind. Dabei ist für einige Einbahnstraßen die Richtung bereits festgelegt. Ist es möglich, die anderen Einbahnstraßen so zu legen, daß man von jedem Platz zu jedem fahren kann?

a)



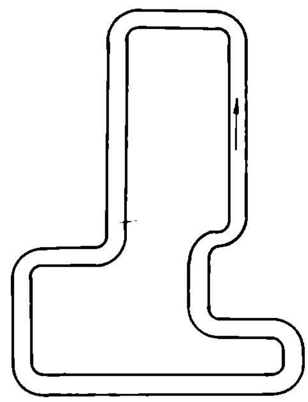
b)



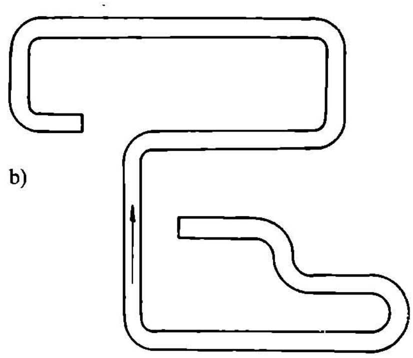
Gleiche Länge gesucht

Bei welcher der gezeichneten Straßenbahnlinien haben beide Schienen die gleiche Länge?

a)

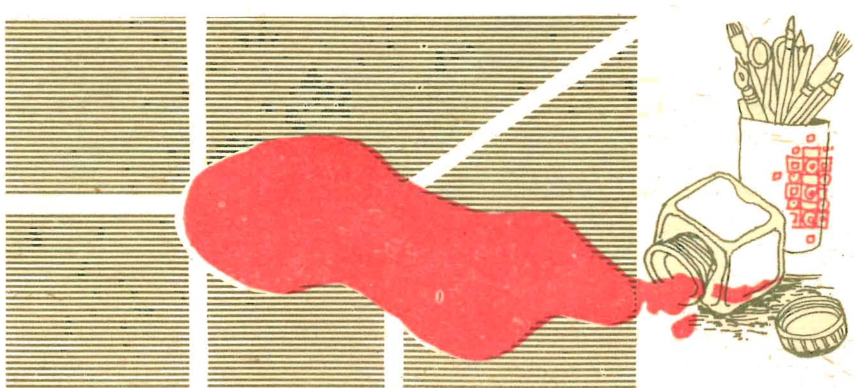


b)



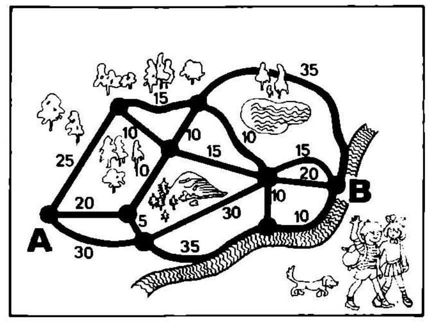
Verkleckster Stadtplan

Die Abbildung zeigt den Ausschnitt eines Stadtplans. Auf ihm befindet sich ein Tintenklecks, der den Verlauf der unter ihm befindlichen Straßen nicht mehr erkennen läßt. Es ist bekannt, daß in dem Viertel, das der Ausschnitt zeigt, keine Sackgassen vorhanden sind.
Kann der Klecks zwei oder vier y-förmige Straßengablungen (je aus genau drei Straßen) verdecken?



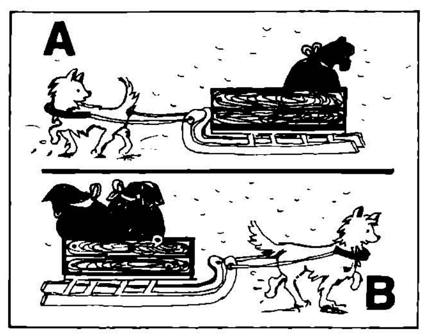
Kürzester Weg gesucht!

Gesucht ist der kürzeste Weg von A nach B. (Die angegebenen Zahlen geben die benötigten Wegzeiten an.)



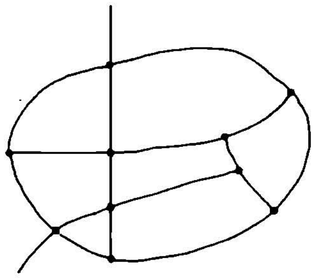
Transport mit Hundeschlitten

Die Wissenschaftler einer Polarstation A erhalten die Aufgabe, am Punkt B einige Messungen vorzunehmen. Um B von der Station A zu erreichen, benötigt man mit Hundeschlitten vier Wochen. Ein Hundeschlitten kann für vier Wochen Proviant mit sich führen. Auf der Station gibt es drei Hundeschlitten.
Wie muß man sie einsetzen, damit die Wissenschaftler B erreichen?

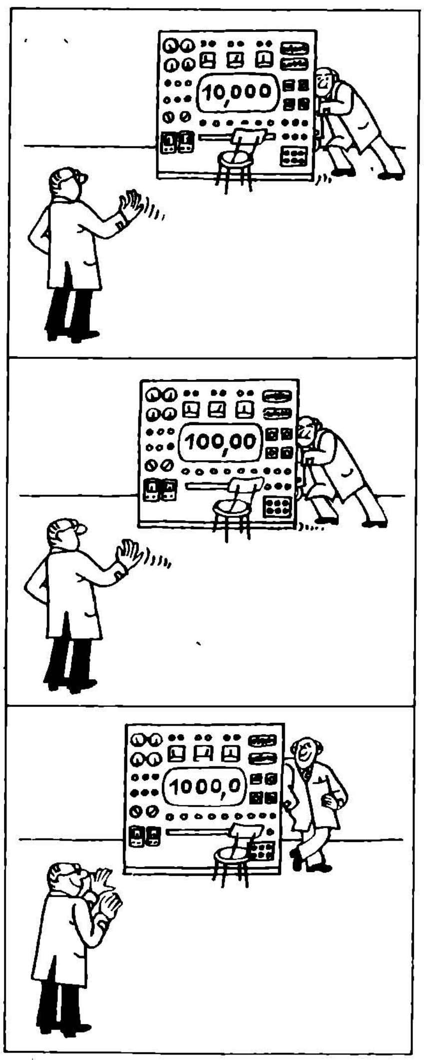


Reger Busverkehr

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus dem Straßennetz einer Stadt. Auf den eingezeichneten Straßen sollen Buslinien so verkehren, daß man von jeder Haltestelle des Busnetzes zu jeder anderen Haltestelle kommt, gegebenenfalls durch Umsteigen. Dabei sollen die Busse so eingesetzt werden, daß verschiedene Buslinien keine Teilstücke von Straßen gemeinsam haben. An Kreuzungen von Buslinien haben jeweils beide Linien eine Haltestelle. Wie viele Buslinien braucht man wenigstens?



Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik die Königin der Mathematik. *C. F. Gauß*

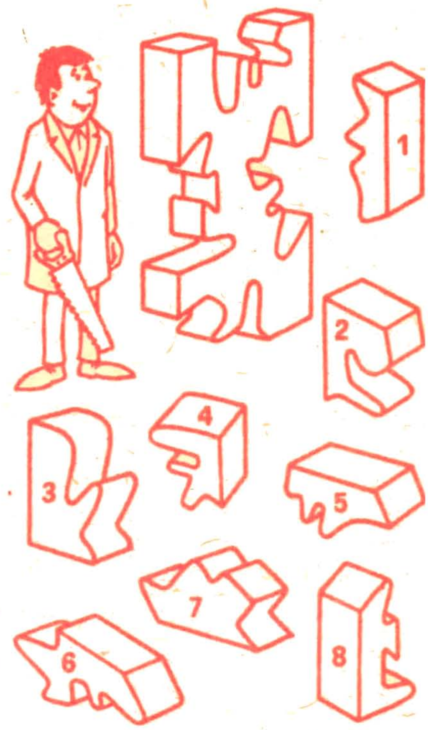


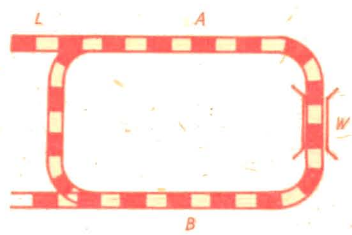
WÜRFEL ELLIPSE PARALLELEN
QUADRATE DREIECKE
EINS ZWEI SIEBEN

H. Pätzold

Wir rangieren

Die Abbildung zeigt zwei schwer beladene Eisenbahnwagen A und B sowie eine Rangierlok L. Die Positionen von A und B sollen vertauscht werden, wonach sich die Lokomotive L wieder an der alten Stelle befinden soll. Die Lokomotive kann beiderseitig ankuppeln, bei Bedarf können auch A und B aneinandergekuppelt werden. Allerdings ist die Brücke W nur für die leichtere Rangierlok befahrbar. Zwischen der Brücke und den Weichen und auf den beiden Anschlußgleisen ist für die Rangierlok und beide Wagen Platz.





L = Lokomotive; A, B = Wagen (Güter-);
W = Brücke

R. Thiele

Ein logischer Krimi

Im Alltagsleben begegnen wir komplizierten Schlußfolgerungen nur höchst selten. Sherlock Holmes hat aber auch komplizierte Schlußfolgerungen zu ziehen. Betrachten wir einmal den folgenden kleinen Krimi.

„Von dem Bankeinbruch in der Sit-Down Street erfuhr Sherlock Holmes aus den Morgenblättern. Es fiel mir auf, daß er in der einen Zeitung die meines Erachtens unbedeutendsten Einzelheiten des polizeilichen Verhörs der vier im Kassensaal arbeitenden Angestellten mit einem Blaustift unterstrich:

»Timid: Bitte ich weiß nichts, ich hab' ja den Saal als erster verlassen...«

»Unfair: Von uns vieren bin nicht ich als letzter weggegangen...«

»Coxford: Ich war beim Nachhausegehen weder der erste noch der letzte...«

»Psmith: Ich verließ den Kassensaal als letzter...«

Ich konnte Holmes einige Aufklärungen über Lage und Zugang zu dem Bankgebäude geben sowie einige Skizzen von dessen Räumlichkeiten im Innern anfertigen. Eine halbe Stunde später waren wir an Ort und Stelle. Ich sah, daß Holmes' Plan fertig war..."

„... Nun ging mir ein Licht auf, wie Holmes die erste Spur entdeckte.

– Die Gangster haben in der Bank einen Spießgesellen. Der Spießgeselle ist der, der den Kassensaal als erster verließ.

– Also Timid...

– Watson, seien Sie nicht oberflächlich. Während ich dieses Telegramm aufgebe, fragen Sie den Pförtner, in welcher Reihenfolge die vier Beamten des Kassensaals gestern nachmittag die Bank verließen.

Nachdem ich vom Pförtner die Wahrheit erfahren hatte, die ein wenig von den von Holmes unterstrichenen Geständnissen abwich, eilte ich zu Holmes zurück.

– Holmes! Von den vieren hat genau einer gelogen. Sie werden überrascht sein...

– Well – unterbrach mich Holmes – also ist Unfair der Spießgeselle."

Wie gelangte Holmes zu diesem Resultat, ohne Watsons Antwort bis zu Ende gehört zu haben? *Prof. Dr. Imre Rusza, Budapest*

In freien Stunden alpha heiter

Gauß-Anekdote

In der folgenden Anekdote sind einige Wörter ausgelassen. Sucht diese Wörter, und schreibt sie in der durch die Zahlen angegebenen Reihenfolge auf! (Die Anzahl der Punkte entspricht der Anzahl der Buchstaben.)

Die ersten und letzten Buchstaben (beim 7. Wort der erste und vorletzte Buchstabe) ergeben dann hintereinander gelesen die Namen zweier Städte, die im Leben von Carl Friedrich Gauß eine bedeutende Rolle gespielt haben.

In einer alten ...7... wird folgendes berichtet:

Als der zehnjährige Carl Friedrich Gauß die Rechenklasse der Volksschule besuchte, geschah es eines Tages, daß der Lehrer die Kinder .10. Weile beschäftigen wollte. Er stellte ..11.. daher die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zusammenzurechnen. Er durfte ...8.., daß diese ...2.... einige Zeit in Anspruch nehmen würde.

Aber er hatte die Aufgabe kaum genannt, als der kleine Carl Friedrich nach vorn kam und seine Rechentafel umgekehrt auf den Tisch legte. Der Lehrer war erstaunt. Er konnte es ..5.. glauben, daß jemand die ....1..... dieser Summe so schnell ausführen könne. Aber als er die ..4.. Seite der Tafel betrachtete, fand er dort das richtige Ergebnis 5050. = 5050 erhalten.

Gauß hatte erkannt, daß diese Aufgabe leicht zu lösen war, wenn man einen anderen .9. benutzte. ..6.. die Zahlen der Reihe nach zu addieren, hatte er die erste und letzte, die zweite und vorletzte usw. zusammengefaßt, dabei jeweils 101, insgesamt ..3. 50 · 101 = 5050 erhalten.

OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Verkettungsrätsel

1												
2												
3												
4												
5												

In jede Zeile des abgebildeten Schemas sind jeweils zwei Wörter der folgenden Bedeutung so einzutragen, daß immer der letzte Buchstabe des ersten Wortes mit dem ersten Buchstaben des zweiten Wortes übereinstimmt. Bei richtiger Lösung ergeben die 5 markierten Buchstaben von oben nach unten gelesen den Namen eines genialen deutschen Mathematikers.

1. Zeile: Eine Bewegung – ein Winkelmaß (ß = ein Buchstabe)
2. Zeile: Teilgebiet der Mathematik – davon hat jedes Dreieck 3 Stück
3. Zeile: Fehlerhaft, abweichend – Kurve, die für jedes Dreieck existiert
4. Zeile: Begriff aus der Logarithmenrechnung – Gerade, die einen Kreis in zwei Punkten schneidet
5. Zeile: Ein Parallelogramm, dessen Seiten alle gleich lang sind – kürzeste Verbindung zweier Punkte

Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben sind 18 Begriffe zu bilden. Die Anfangsbuchstaben der gefundenen Wörter von oben nach unten gelesen ergeben den Namen eines genialen deutschen Mathematikers, der 1777 bis 1855 lebte, während die Endbuchstaben von unten nach oben gelesen eine Möglichkeit der Auflösung linearer Gleichungssysteme ergeben, die nach ihm benannt wurde.

auf – al – an – be – be – bra – bu – c – ~~chan~~ – cosh – da – der – dis – e – eur – fer – fun – gauß – ge – ge – ge – gral – griff – h – hu – in – in – in – ka – kör – läu – lung – ma – mann – men – ne – ni – ons – per – rie – ries – riß – ro – satz – scher – se – spie – sig – ~~son~~ – strich – ta – tal – te – te – the – ti – tiv – tri – u – ver.

1. Lied, bes. im Kabarett
2. Begriff aus der Trigonometrie
3. Fremdwort für Drehkörper
4. Einteilung auf einem Rechenstabteil
5. Bekannter Satz, den erstmalig C. F. Gauß in seiner Dissertation bewies
6. Definition, zu der die klassische Problemstellung der Integralrechnung führte

7. Beruf, der umfangreiche mathematische Kenntnisse erfordert
8. Grundbegriff der Geometrie
9. Eigenschaft zweier verschiedener Rechenoperationen, in ihrer Hintereinanderfolge vertauschbar zu sein
10. Deutscher Rechenmeister
11. Es existiert in jeder Gruppe und hat die Eigenschaft $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$
12. Zeichen für Hyperbelkosinus
13. Abk. für honoris causa
14. Genialer deutscher Mathematiker
15. Begriff der darstellenden Geometrie
16. Nachtraubvogel
17. Griech. Buchstabe
18. Eine Bewegung

D. Völzke

Diagonale Verkettung

In jeder Zeile des abgebildeten Schemas sind jeweils zwei Wörter folgender mathematischer Bedeutung so einzutragen, daß immer der eingetragene Buchstabe der letzte Buchstabe des ersten Wortes und gleichzeitig der erste Buchstabe des zweiten Wortes ist.

1		G						
2			A					
3				U				
4					S			
5						S		

1. Zeile: Zeichen für Logarithmus – Italienischer Naturforscher (1564 bis 1642)
2. Zeile: Fläche (lat.) – Im Altertum benutztes Rechenbrett
3. Zeile: Fehlerlos, nicht abweichend – Teil der Uhr
4. Zeile: griech. Mathematiker des Altertums – Zeichen für Hyperbelsinus
5. Zeile: eine Winkelfunktion – Zeichen für Sinus

D. Völzke

Kryptarithmetik

Jeder Buchstabe entspricht einer der Ziffern von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. *Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden*

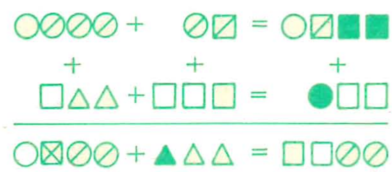
```
  HERON      HEGEL
+ HEGEL    + GAUSS
  84971      81297

  GAUSS      EULER
+ EULER    + HERON
  68003      7167N
```

```
  GAUSS
+ GAUSS
+ GAUSS
+ GAUSS
 KLASSE
```

D. Völzke

Gaußsche Lebensdaten



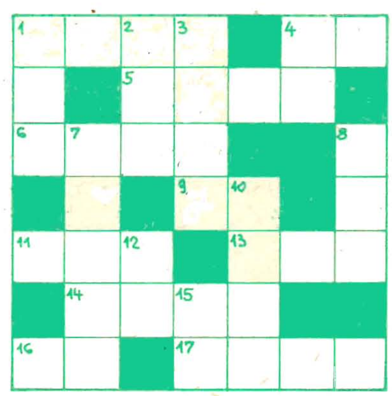
D. Völzke

Kreuzzahlrätsel

1977: Gedenkjahr für zwei berühmte Mathematiker.
In jedes freie Kästchen ist eine Ziffer zu setzen. Keine Zahl beginnt mit Null.
Die Zahlen in den Reihen bzw. Spalten bedeuten:

Waagerecht:

1. Geburtsjahr von Gauß (Primzahl)
4. Eine Primzahl, deren einzelne Ziffern keine Primzahlen sind
5. Das Quadrat von 12. senkrecht
6. Die Quersumme ist gleich $2a$
9. Das Doppelte einer Quadratzahl
11. Eine Primzahl, deren einstellige Quersumme wieder eine Primzahl ergibt.
13. Ein Vielfaches von a^3
14. a^5
16. Eine Primzahl, deren Quersumme gleich $2a$ ist
17. Todesjahr von Newton



Senkrecht:

1. a^3
2. Ein Vielfaches von a^3
3. Eine Primzahl, die zugleich die Postleitzahl der *alpha*-Redaktion ist
4. Eine Quadratzahl
7. Zahl aus gleichen Ziffern
8. a^4
10. Eine Primzahl, deren einzelne Stellen ebenfalls Primzahlen sind, und zwar in steigender Folge
12. Eine Primzahl
15. Eine Zahl, deren erste Stelle größer als die zweite ist.

Ing. H. Decker, Köln

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade (17. 11. 1976)

Olympiadeklasse 5

1.
$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & A & = & B \\ + & & \cdot & & - \\ C & \cdot & D & = & E \\ \hline F & - & G & = & H \end{array}$$

In das obenstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind. Stelle fest, ob es eine solche Eintragung gibt, ob sie die einzige ist und wie sie in diesem Falle lautet!

2. Zwei Junge Pioniere legten in ihrem Ruderboot stromabwärts in 10 Minuten eine Strecke zurück, deren Länge insgesamt 1 km und 200 m betrug.
Wieviel Zeit brauchten sie um dieselbe Strekke gegen den Strom zurückzurudern, wenn sie dabei durchschnittlich in jeder Minute 40 m weniger zurücklegten als auf der Hinfahrt?

3. Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 4$ cm! Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$, der 5 cm lang ist und parallel zur Geraden durch A und C in Richtung von A nach C verläuft!
Konstruiere das Bild $A'B'C'D'$ des Quadrates $ABCD$ bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

4. Jeder Schüler braucht im Jahr 15 Hefte. Aus 1 Tonne Papier können 25000 Hefte hergestellt werden.
Wie viele Schüler insgesamt kann man unter diesen Umständen aus 3 Tonnen Papier für ein Jahr mit Heften versorgen?

Olympiadeklasse 6

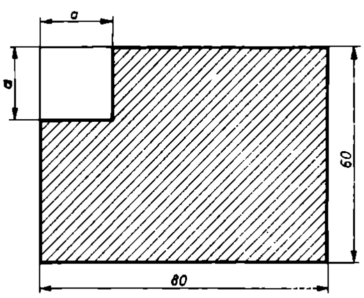
1. Ludwig sagt: „Ich kann die Leserzahl 58 125 der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha" als Ergebnis der Additionsaufgabe

$$\begin{array}{rr} & ALPHA \\ + & HEI \\ + & TER \\ \hline & 58125 \end{array}$$

erhalten, indem ich für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) einsetze, und zwar für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern, und wenn ich noch weiß, daß $I < R$ ist und die Ziffern $EHPL$ in dieser Reihenfolge hintereinander gelesen die Zahl 1976 ergeben. Welche Ziffern sind für die Buchstaben einzusetzen, damit alle diese Angaben zutreffen?
Überprüfe, ob die ermittelte Einsetzung alle Forderungen erfüllt, und ob es noch andere derartige Eintragungen gibt!

2. In einem Pionierlager wurden in vier Räumen 65 Thälmann-Pioniere untergebracht. Der eine Raum hat 68 m² Bodenfläche, der zweite 76 m², der dritte 64 m² und der vierte 52 m². Die Pioniere wurden so untergebracht, daß auf jeden von ihnen die gleiche Anzahl von Quadratmetern Bodenfläche kam.
Ermittle für jeden der vier Räume die Anzahl der Thälmann-Pioniere, die jeweils untergebracht wurden!

3. Die abgebildete schraffierte Fläche besteht aus einer Rechteckfläche, aus der eine quadratische Fläche herausgeschnitten wurde. Die schraffierte Fläche hat einen Flächeninhalt von 44 cm². Aus den im Bild angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a (in mm) des herausgeschnittenen Quadrats zu berechnen.



4. Ein Kraftfuttergemisch für Zuchteber ist aus Haferschrot, Weizenkleie, Gerstenschrot, Mineralstoffen und Wasser zusammengesetzt, und zwar ist die Hälfte des Gemischs Haferschrot,
$\frac{1}{10}$ des Gemischs ist Weizenkleie, $\frac{1}{4}$ des Gemischs ist Gerstenschrot, $\frac{1}{100}$ des Gemischs sind Mineralstoffe,
der Rest ist Wasser.
Berechne (in kg) den Anteil an Wasser, den 35 kg dieses Kraftfuttergemischs enthalten!

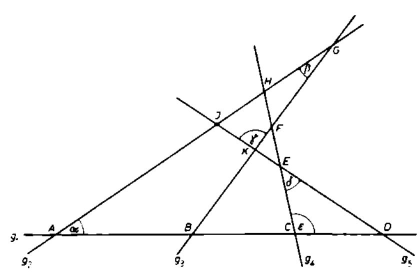
Olympiadeklasse 7

1. Nach der Jugendweihefeier ließen sich alle Schüler einer Klasse einzeln fotografieren. Jeder ließ von seinem Foto genügend viele Abzüge herstellen, und dann tauschte jeder Schüler dieser Klasse mit jedem seiner Klassenkameraden sein Foto aus. Wieviel Schüler tauschten insgesamt in dieser Klasse miteinander die Fotos aus, wenn dabei genau 812 Fotografien ihren Besitzer wechselten?

2. Eine Gärtnerische Produktionsgenossenschaft verkaufte in den Monaten August bis November Äpfel. Der Preis für 1 kg Äpfel war im September um 20% niedriger als im August, im November hingegen um 20% höher als im September.
Waren die Äpfel im November billiger, im Preis gleich oder teurer als im August?
Falls der Preis im November von dem im August abwich, ist anzugeben, um wieviel Prozent des Augustpreises der Novemberpreis von diesem abwich.

3. Konstruiere aus $a = 5{,}0$ cm und $b = 7{,}0$ cm ein Dreieck ABC, bei dem die Mittelsenkrechten der Seiten BC und AC aufeinander senkrecht stehen! Dabei seien a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Es seien g_1, g_2, g_3, g_4 und g_5 fünf Geraden, die einander wie im Bild angegeben paarweise in den voneinander verschiedenen Punkten A, B, C, D, E, F, G, H, J und K schneiden. Gegeben seien die Größen der Winkel $\sphericalangle BAJ$, $\sphericalangle HGF$, $\sphericalangle FKJ$ und $\sphericalangle DEC$, in dieser Reihenfolge α, β, γ und δ genannt.
Ermittle die Größe ε des Winkels $\sphericalangle DCE$!



Olympiadeklasse 8

1. Für Schülerexperimente wurden genau 29 Einzelteile (Versuchsmaterialien) für genau 29 M eingekauft. Das waren Teile zu 10 M, 3 M oder 0,50 M; von jeder Sorte mindestens ein Teil. Andere Sorten kamen unter den eingekauften Teilen nicht vor. Wieviel Teile von jeder der drei Sorten waren es insgesamt?

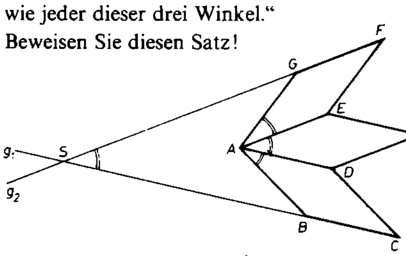
2. Ein Rechteck habe die Seitenlängen a_1 und b_1.
Um wieviel Prozent verändert sich der Flächeninhalt dieses Rechtecks, wenn die Seite a_1 um 25% verkleinert und die Seite b_1 um 20% vergrößert wird?

3. In einem Kreis k seien zwei verschiedene Durchmesser, die nicht aufeinander senkrecht stehen, eingezeichnet.
Ferner sei durch jeden der vier Endpunkte beider Durchmeser die Tangente gelegt.
Beweise, daß die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Tangenten die Ecken eines nichtquadratischen Rhombus sind!

4. Konstruiere ein Viereck $ABCD$, das folgende Bedingungen erfüllt: Die Größe β des Innenwinkels $\sphericalangle CBA$ im Viereck $ABCD$ beträgt 60°. Die Länge f der Diagonalen BD beträgt 12,5 cm. Die Länge b der Seite BC beträgt 6,0 cm.
Der Abstand h des Schnittpunktes S der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ von der Seite AB beträgt 3,5 cm. Die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ stehen senkrecht aufeinander.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die angegebenen Bedingungen ein Viereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

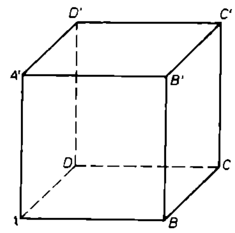
Olympiadeklasse 9

1. Karlheinz betrachtet die im Bild dargestellte, aus drei kongruenten Rhomben bestehende Figur. Dabei stellt er fest, daß der Winkel $\sphericalangle BSG$ genau so groß ist wie jeder der Winkel $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle EAG$. Nach einigem Nachdenken behauptet er, daß der folgende Satz gilt: „Sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $AEFG$, die genau den Punkt A gemeinsam haben, so gegeben, daß die Winkel $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAE$ und $\sphericalangle EAG$ gleichgroß und kleiner als 120° sind, dann hat auch der Winkel $\sphericalangle BSG$, den die Gerade g_1 durch B und C mit der Geraden g_2 durch F und G einschließt, die gleiche Größe wie jeder dieser drei Winkel."
Beweisen Sie diesen Satz!



2. Die Zahl $\frac{20}{21}$ soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß
a) die beiden Summanden Brüche mit gleichem, von 21 verschiedenem Nenner und mit unterschiedlichen Zählern sind,
b) die beiden Summanden Brüche mit gleichem Zähler und mit unterschiedlichen Nennern sind.
Dabei sollen in jedem Bruch, der als Summand auftritt, jeweils der Zähler und der Nenner natürliche Zahlen sein, die zueinander teilerfremd sind.
Geben Sie für a) und b) je ein Beispiel einer derartigen Zerlegung an, und weisen Sie nach, daß es alle verlangten Eigenschaften hat!

3. Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ (siehe Bild). Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $XYZTX$, wobei X, Y, Z und T in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten AA', BB', CC' bzw. DD' seien.
Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartiger Punkte X, Y, Z, T so gibt, daß der Streckenzug $XYZTX$ unter allen betrachteten Streckenzügen



a) minimale b) maximale
Gesamtlänge besitzt!

4. In der folgenden Anordnung von Zeichen

$$\begin{array}{ccccc} ab & X & ab & = & cad \\ Y & & Y & & Z \\ ae & X & ae & = & ffe \\ \hline ff & Y & ff & = & gg \end{array}$$

sollen die einzelnen Symbole so durch Elemente des jeweiligen Grundbereichs ersetzt werden, daß jeweils wahre Aussagen entstehen.
Dabei ist der Grundbereich für die Kleinbuchstaben b, d, e die Menge der Ziffern von 0 bis 9, für a, c, f, g die Menge der Ziffern von 1 bis 9, und der Grundbereich für die Großbuchstaben X, Y, Z ist die Menge der Operationszeichen „+", „−", „·" und „:".
Gleiche Symbole bedeuten dabei gleiche, verschiedene Symbole verschiedene Elemente des jeweiligen Grundbereichs.
Untersuchen Sie, ob eine solche Ersetzung möglich ist, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle Ersetzungen mit den geforderten Eigenschaften!

Olympiadeklasse 10

1. Es sei q eine ganze Zahl.
Beweisen Sie, daß dann $\frac{q^3-q}{6}$ ebenfalls eine ganze Zahl ist!

2. Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem CD die Höhe auf der Hypotenuse ist, seien die Kathetenlänge $b=\overline{AC}=4$ cm, und die Länge $p=\overline{BD}=1{,}8$ cm gegeben.
Man berechne die Längen der restlichen Seiten des Dreiecks, die Höhenlänge $\overline{CD}=h$ und die Länge $q=\overline{AD}$.

3. In der Aufgabe

$$\begin{array}{r} \text{LOTTO} \\ +\ \text{TOTO} \\ \hline \text{SPIEL} \end{array}$$

sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so daß eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für eine solche Ersetzung!

4. Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ (Bild wie Kl. 9/3.):
Man ermittle alle verschiedenen Streckenzüge, die lediglich aus Würfelkanten zusammengesetzt sind und folgende Eigenschaften haben:
1. Der Streckenzug beginnt und endet im Punkt A.
2. Bei einmaligem Durchlaufen des Streckenzuges wird jeder Eckpunkt eines Würfels genau einmal erreicht.
Dabei gelten zwei Streckenzüge genau dann als verschieden, wenn es eine Würfelkante gibt, die in einem der beiden Streckenzüge vorkommt, in dem anderen aber nicht. Insbesondere gelten Streckenzüge, die sich nur in der Durchlaufungsrichtung unterscheiden, nicht als verschieden.

Olympiadeklassen 11/12

1. Es sei R ein Rechteck mit dem Flächeninhalt A, den Seitenlängen a, b und der Diagonalenlänge d. Ferner sei a das arithmetische Mittel von b und d.
Man ermittle für dieses Rechteck a, b und d in Abhängigkeit von A.

2. Einer Kugel K_1 mit gegebenem Radius r sei ein Zylinder Z_1 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben. Diesem Zylinder Z_1 sei eine Kugel K_2 und dieser wieder ein Zylinder Z_2 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben. Dieses Verfahren sei weiter fortgesetzt, d. h., liegen für eine natürliche Zahl n bereits eine Kugel K_n und ein Zylinder Z_n mit quadratischem Achsenschnitt vor, so sei dem Zylinder Z_n eine Kugel K_{n+1} und dieser wieder ein Zylinder Z_{n+1} mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Für jedes $n=1, 2, \ldots$ sei V_n das Volumen der Kugel K_n, und es sei $S_n=V_1+V_2+\ldots+V_n$.
a) Man ermittle das Volumen V_{10}.
b) Man ermittle S_{10}.
c) Man berechne „$\lim_{n\to\infty} S_n$", falls dieser Grenzwert existiert.
Hinweis: Ein Zylinder heißt einer Kugel einbeschrieben, wenn die Kreislinien, die seine beiden Grundflächen beranden, auf der Kugel liegen. Eine Kugel in einem Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt heißt diesem Zylinder einbeschrieben, wenn sie seine beiden Grundflächen berührt.

3. In einem Quadrat der Seitenlänge 1 mögen sich 51 Punkte befinden.
Man beweise, daß es zu jeder Anordnung solcher 51 Punkte einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$ gibt, der wenigstens drei dieser Punkte in seinem Innern enthält.

4. Es seien x und y
a) nichtnegative reelle Zahlen,
b) nichtnegative ganze Zahlen,
für die die Ungleichungen

$$8x+3y\leqq 25, \qquad (1)$$
$$-2x+3y\leqq 10 \qquad (2)$$

erfüllt sind.
Man weise nach, daß für die Summe

$$z=2x+y \qquad (3)$$

in den Fällen a) bzw. b) jeweils ein größter Wert existiert, und gebe diesen für jeden der Fälle an.

Lösungen

Lösungen zu: 9∘5 = 2 (siehe Seite 124)

Aufgabe 1: z. B. Addition: $(G, +)$, $(R^*, +)$, $(R, +)$, $(P, +)$
Subtraktion: $(G, -)$, $(R, -)$
Multiplikation: $(N, \cdot)$, $(R^*, \cdot)$, $(R, \cdot)$, $(P, \cdot)$
Division: $(R^* / \{0\}, :)$, $(P / \{0\}, :)$

Aufgabe 2: a) Die Abgeschlossenheit von M bezüglich $+\oplus$ ist leicht zu prüfen: z. z. ist für alle $x, y \in M$: $x + \oplus y \in M$. Die Eindeutigkeit von $+\oplus$ folgt aus der Definition.
b) Assoziativität, Kommutativität, Existenz eines neutralen Elements ($n = 12$), ...

Aufgabe 3: a) wie 2a)
b) z.z. ist für alle $x, y \in M'$: $x \circ y \in M'$ (leicht zu prüfen). Kurios ist dabei, daß 0 und 10 fast die gleichen Eigenschaften besitzen:
Für alle $x \in M'$ ($x \neq 10$) gilt
$x \circ 10 = 10 \circ x = x$ und $x \circ 0 = 0 \circ x = x$, weiterhin gilt $0 \circ 0 = 10 \circ 0 = 0 \circ 10 = 10 \circ 10 = 0$.
c) $\circ$ besitzt die gleichen Eigenschaften wie $+\oplus$.
d) $x \circ y =_{Df} \begin{cases} x + y, \text{ falls } x + y < 10 \\ x + y - 10, \text{ falls } x + y \geqq 10 \end{cases}$
e) weitere Restklassenadditionen, -multiplikationen

Aufgabe 4: $1 \circ 1 = 4$, $2 \circ 1 = 6$, $4 \circ 0 = 8$, $2 \circ 3 = 10$, $0 \circ 3 = 6$, $0 \circ 0 = 0$

Aufgabe 5: $(R^*, \circ_1)$ mit $x \circ_1 y =_{Df} \frac{x \cdot y}{2}$
bzw. $(R^*, \circ_2)$ mit $x \circ_2 y =_{Df} 2x + y$ für alle $x, y \in R^*$.

Aufgabe 6: a) $2 \triangle 1 = 1{,}5$, $2 * 1 = \sqrt{2}$, $2 \square 1 = 1{,}3$;
b) $2 \triangle 2 = 2$, $2 * 2 = 2$, $2 \square 2 = 2$;
c) $\frac{1}{2} \triangle \frac{1}{8} = \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2} * \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \square \frac{1}{8} = \frac{1}{5}$.

Aufgabe 7: a) R^*, R, P, P^+, ..., nicht aber z. B. N, G
b) $2 * 1 \notin N$, $\notin G$, $\notin R^*$, R: $2 * (-1) \notin P$
c) $(R^* / \{0\}, \quad)$ – ja, da Summe $(x + y)$, Produkt $(2xy)$ und Quotient $\left(\frac{2xy}{x+y}\right)$ positiver rationaler Zahlen eindeutig bestimmt sind und wieder in $R^* / \{0\}$ liegen.
$(R / \{0\}, \square)$ nein, da z. B. $2 \square (-2)$ nicht

Aufgabe 8: Wir zeigen, daß $x \square y \leqq x * y$ für alle $x, y \in P^+$ gilt:

$\frac{2xy}{x+y} \leqq \sqrt{xy}$ gdw. $\frac{2xy}{\sqrt{xy}} \leqq x + y$ gdw.
$4xy \leqq (x+y)^2$ gdw. $0 \leqq (x-y)^2$.
Analog zeigt man den zweiten Teil. Das Gleichheitszeichen gilt nu für $x = y$.

Aufgabe 9f a) $x \square y \leqq x * y \leqq x \triangle y < x \quad y$
b) ja, $x \bullet 0 = 0 \bullet x = \sqrt{x^2} = x$ für alle $x \in P^+$.

Aufgabe 10: a) $x \sqcap y = g$ genügt den beiden Bedingungen:
1. $\frac{g}{x}$ und $\frac{g}{y}$, d. h. g ist ein gemeinsamer Teiler von x und y.
2. Für alle natürlichen Zahlen t gilt:
Wenn $\frac{t}{x}$ und $\frac{t}{y}$, so $\frac{t}{g}$.
$x \sqcup y = k$ genügt den beiden Bedingungen:
1. $\frac{x}{k}$ und $\frac{y}{k}$, d. h. k ist ein gemeinsames Vielfaches von x und y.
2. Für alle natürlichen Zahlen v gilt:
Wenn $\frac{x}{v}$ und $\frac{v}{v}$, so $\frac{k}{v}$.
b) $24 \sqcap 180 = 12$, $24 \sqcup 180 = 360$;
$476 \sqcap 714 = 238$, $476 \sqcup 714 = 1428$.
c) Für alle $x \in N$ gilt:
$x \sqcap 0 = 0 \sqcap x = x$ $\quad$ $x \sqcup 0 = 0 \sqcup x = 0$
sowie
$x \sqcap 1 = 1 \sqcap x = 1$ $\quad$ $x \sqcup 1 = 1 \sqcup x = x$;
insbesondere gilt also:
$0 \sqcap 0 = 0$, $0 \sqcap 1 = 1 \sqcap 0 = 1$, $0 \sqcup 0 = 0$, $1 \sqcup 0 = 0 \sqcup 1 = 0$.
d) Zum Beweis vergleiche E. Lehmann: Übungen für Junge Mathematiker 1, Leipzig 1968, S. 46
Wenn x und y teilerfremd sind, erhalten wir
$x \sqcup y = x \cdot y$.

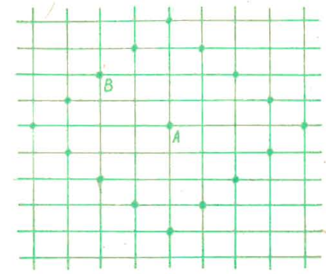
Aufgabe 11: a)
6 9 8 12
3 4
12 18
2 6
6, also

$2 \sqcup \{[(6 \sqcap 9) \sqcup (8 \sqcap 12)] \sqcap 18\} = 6$.
b) Ersetzen wir in der vorletzten Zahlenreihe 6 durch 3, ergeben sich neben 12 und 6 (in der 3. Reihe) weitere zwei Möglichkeiten:
3 und 15, usw.

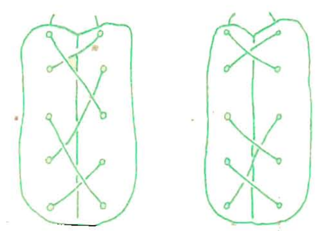
Aufgabe 12: $(\mathfrak{P}(M), \sqcap)$: M übernimmt die Rolle der 0 aus $(N, \sqcap)$:
$X \cap M = M \cap X = X$;
$\emptyset$ übernimmt die Rolle der 1 aus $(N, \sqcap)$:
$X \cap \emptyset = \emptyset \cap X = \emptyset$
$(\mathfrak{P}(M), \cup)$: M übernimmt die Rolle der 0 aus $(N, \sqcup)$:
$X \cup M = M \cup X = M$;
$\emptyset$ übernimmt die Rolle der 1 aus $(N, \sqcup)$:
$X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X$.
Auch für den Durchschnitt und die Vereinigung gelten die Verschmelzungssätze:
Für alle $X, Y \in \mathfrak{P}(M)$ gilt:
$(X \cup Y) \cap X = X$ und $(X \cap Y) \cup X = X$.
Zum Beweis vergleiche *M. Hasse:* Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik, Leipzig, 1968 (Band 2 der Math. Schülerbücherei), S. 21.

Lösungen zu: Logeleien
(in diesem Heft S. 12/13)

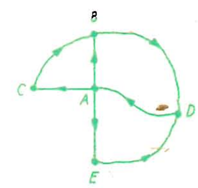
Orthopolis



Zugeschnürt



Achtung, Einbahnstraße!



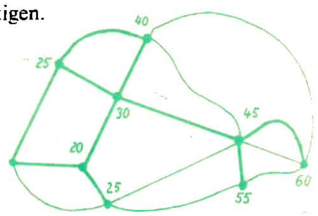
In der Abbildung a) kann ein Fahrer den Platz D oder E nicht mehr verlassen. Die Festlegung der Straßen in der Abbildung b) läßt Lösungen zu. Wir legen die Einbahnstraßen so, wie es die Abbildung zeigt. Dann kann man von A alle anderen Plätze erreichen. Andererseits ist auch A von den Plätzen B, C, D und E erreichbar. Damit kommt man ganz sicher (wenn auch nicht auf dem kürzesten Weg) von einem Platz X zu einem Platz Y, indem man von X nach A und dann von A nach Y fährt.

Gleiche Länge gesucht

Auf den geraden Straßenteilen haben beide Schienen die gleiche Länge. Damit interessieren uns nur noch die Kurven. Wie aus der Zeichnung hervorgeht, sind sämtliche Kurvenstücke einander kongruent (deckungsgleich). Bei einer Rechtskurve (in Fahrtrichtung gesehen) ist die innere Schiene kürzer als die äußere Schiene, bei einer Linkskurve ist es genau umgekehrt. Wenn auf eine Rechtskurve (bzw. Linkskurve) eine Linkskurve (bzw. Rechtskurve) folgt, so gleichen sich die Längenunterschiede aus.
In der Abbildung a) gibt es sieben Links- und drei Rechtskurven. Deshalb ist der rechte Straßenrand (in Fahrtrichtung = Pfeil) länger (und zwar um $2b\pi$ mit dem Schienenabstand b).
Die in Abbildung *b)* gezeigte Straßenbahnlinie hat je fünf Links- und Rechtskurven, also sind beide Schienen gleich lang.

Kürzester Weg gesucht

Die Ziffern an den einzelnen Orten geben die kürzeste Zeit an, die man benötigt, um von A aus zu ihnen zu gelangen. Die zugehörigen Wege sind stärker hervorgehoben. Der kürzeste Weg von A nach B ist in 60 Minuten zu bewältigen.



Transport mit Hundeschlitten

Zunächst fahren alle drei Schlitten mit Proviant für vier Wochen ab. Nach einer Woche hat sich ihr Proviant verringert und reicht nur noch für drei Wochen. Um die Station A wieder zu erreichen, benötigt der erste Schlitten Proviant für eine Woche. Bevor er umkehrt, gibt er den überschüssigen Proviant für zwei Wochen zu gleichen Teilen an den zweiten und dritten Schlitten ab, die jetzt wieder Proviant für vier Wochen haben.

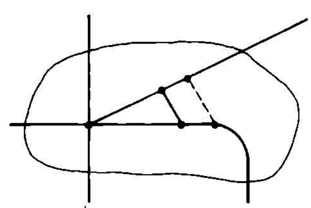
Nach einer weiteren Woche hat der erste Schlitten wieder A erreicht, der zweite und dritte Schlitten haben jeweils Proviant für drei Wochen. Der zweite Schlitten braucht Proviant für zwei Wochen, damit er zurück zur Station kann. Deshalb kann er dem dritten Schlitten Proviant für eine Woche geben und gefahrlos umkehren. Der dritte Schlitten hat jetzt wieder Proviant für vier Wochen. In zwei Wochen erreicht er den Punkt B, und der zweite Schlitten ist in A angekommen. Nachdem in B die Messungen ausgeführt wurden, kehrt der dritte Schlitten mit Proviant für zwei Wochen um. Zur gleichen Zeit macht sich der gerade in A angekommene zweite Schlitten mit Proviant für vier Wochen auf den Weg nach B. Er trifft nach zwei Wochen auf den dann proviantlosen dritten Schlitten und gibt ihm die Hälfte seines Proviantes ab, wodurch beide noch eine Woche in Richtung A fahren können. Wenn sich der zweite und dritte Schlitten treffen, fährt ihnen der erste Schlitten mit Proviant für vier Wochen entgegen. Er trifft sie nach einer Woche, wobei er noch Proviant für drei Wochen hat, so daß alle drei Schlitten zur Station A zurückkehren können.

Die Abbildung zeigt eine graphische Darstellung der Fahrt. Die Kurve für die Rückfahrt ist das Spiegelbild der Hinfahrt in bezug auf eine Gerade, die durch die Proviantmenge für zwei Wochen gezogen wurde.

Die Zahlenangaben beziehen sich auf die Wochen, die seit der Abfahrt des 3. Schlittens von A verstrichen sind.

Reger Busverkehr

Wir betrachten die Punkte, an denen mehrere Straßen zusammentreffen. Wenn an einem Punkt vier Straßen aufeinandertreffen (Kreuzung), so lassen wir dort die Buslinien sich kreuzen. Diese Punkte beachten wir deshalb nicht weiter. Interessant sind die Punkte, von denen eine ungerade Anzahl von Straßen ausgeht, denn hier muß eine Buslinie anfangen oder enden. Im Plan gibt es sechs Punkte, wo drei Straßen sich treffen, und zwei Punkte, von denen Straßen ausgehen bzw. enden. Wir haben also acht Punkte, die gleichzeitig End- bzw. Anfangspunkte von Buslinien sind. Also benötigen wir vier Linien.



Wir rangieren

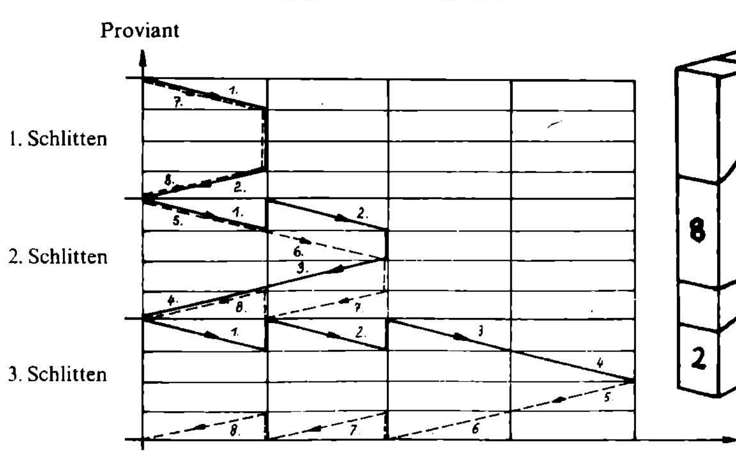
Die Lokomotive kuppelt an A an und fährt bis zu B. Dann wird A auf das untere Anschlußgleis gefahren. Die Lok fährt über die Brücke an B heran. Alle Wagen werden an die Lok gekuppelt und nach oben gebracht, wo A abgekuppelt wird. Die Lok fährt mit B wieder nach unten und schiebt B auf das untere Abstellgleis. Dann fährt die Lok über die Brücke zu A zurück und schiebt A nach unten, wo A stehen bleibt. Jetzt zieht die Lok B nach oben, läßt B stehen und fährt in die Ausgangsposition zurück.

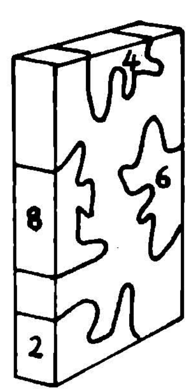
Ein logischer Krimi

Holmes' Gedankengang war folgender: Von den vier Geständnissen ist eines falsch, die übrigen sind wahr. Welches mag wohl falsch sein? Das des Beamten Psmith nicht, denn wenn die drei anderen Geständnisse wahr sind, so konnte nur Psmith den Saal als letzter verlassen haben (und das behauptete er ja gerade). Wenn Coxford lügt, so war er entweder der erste oder der letzte. Timid behauptet aber, daß er der erste, und Psmith, daß er der letzte war; wenn Timid und Psmith die Wahrheit sagen, konnte also Coxford weder der erste noch der letzte sein, demnach hat auch er richtig ausgesagt. Auch Unfair log nicht. Denn wenn Psmith die Wahrheit sagte, war er der letzte, somit sagte Unfair die Wahrheit, indem er behauptete, daß er nicht als letzter wegging. Es bleibt also nichts anderes übrig, als daß Timid gelogen hat, was auch damit vereinbar ist, daß die drei anderen Beamten die Wahrheit sagten. Timid behauptete nämlich, er sei als erster gegangen.

Die Falschheit dessen wäre nur dann mit der Wahrheit der drei anderen Geständnisse unvereinbar, wenn sich von den drei anderen Geständnissen herausstellte, daß keiner der drei Angestellten der erste sein konnte (dann müßte nämlich doch Timid der erste gewesen sein). Nun, weder Psmith noch Coxford war (nach ihrem eigenen Geständnis) der erste. Unfair aber hatte nur gesagt, er sei nicht der letzte gewesen. Es ist also mit der Wahrheit seines Geständnisses vereinbar, daß er der erste war. Da die Meldung Watsons, daß von den vier Geständnissen genau eines falsch sei, nur mit der Kombination vereinbar ist, daß Timid gelogen hat, somit bleibt nur eine einzige Möglichkeit übrig:

Unfair hat sich als erster entfernt. Da Holmes schon herausgefunden hat (wie er das anstellte, darüber fehlen leider die aufregenden Einzelheiten), daß er, der den Saal als erster verließ, der Spießgeselle war, wußte Holmes auf Grund der Information Watsons sofort, daß kein anderer als Unfair der Spießgeselle sein konnte.





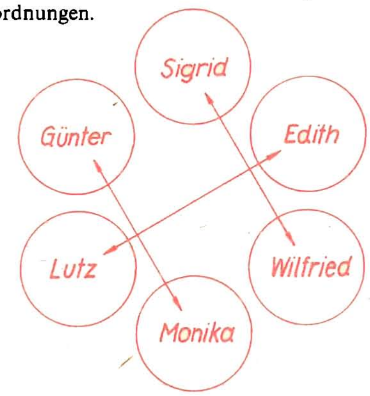
Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
(Heft 5/76)

Ma 5 ■1538 Im Jahre 1974 wurden durch Fußgänger (618 + 8492) Unfälle, also 9110 Unfälle verursacht. Insgesamt gab es in diesem Jahr in der DDR $7 \cdot 9110 = 63770$ Verkehrsunfälle. Aus $624946000 : 63770 = 9800$ folgt, daß die durchschnittlichen Kosten, die ein Verkehrsunfall verursacht, etwa 9800 M betragen.

Ma 5 ■1539 Aus $15\,\text{kg} - 10\,\text{kg} = 5\,\text{kg}$ folgt, daß jeder Pionier 5 kg Altpapier mehr abliefern will, als im Pionierauftrag vorgesehen ist. Dieser Schule gehören somit $2140 : 5 = 428$ Pioniere an. Insgesamt werden $15\,\text{kg} \cdot 428 = 6420\,\text{kg}$ Altpapier abgeliefert.

Ma 5 ■1540 Nach der Entnahme von 74 Kugeln könnten wir im ungünstigsten Falle 10 schwarze, 10 weiße, 12 gelbe, 14 rote, 14 grüne und 14 blaue Kugeln haben. Im Kasten befinden sich dann weder schwarze, noch weiße, noch gelbe Kugeln. Beim Entnehmen einer weiteren Kugel ist diese entweder rot oder grün oder blau. Nach der Entnahme von 75 Kugeln erhalten wir also mit Sicherheit 15 gleichfarbige; sie sind entweder rot oder grün oder blau.

Ma 5 ■1541 Aus d) folgt: Edith sitzt (links oder rechts) neben Sigrid; Günter sitzt (rechts oder links) neben Sigrid.
Aus c) folgt: Wilfried sitzt neben Edith.
Aus b) und e) folgt: Entweder sitzt Monika neben Günter, oder Monika sitzt neben Wilfried. Wenn Monika neben Günter sitzt, dann würde Monika mit Wilfried derselben Gruppe angehören, was wegen e) nicht möglich ist. Folglich sitzt Monika neben Wilfried und somit Lutz zwischen Monika und Günter.
Aus a) folgt: Monika und Günter, Edith und Lutz, Sigrid und Wilfried gehören jeweils der gleichen Pioniergruppe an. Die folgende Graphik veranschaulicht eine der möglichen Sitzordnungen.



Ma 5 ■1542 Die beiden Zahlen seien a und b. Alle für diese Zahlen möglichen Fälle sind in der nachstehenden Tabelle erfaßt.

a	b	a^2	b^2	a^2+b^2
9	11	81	121	202
8	12	64	144	208
7	13	49	169	218
6	14	36	196	232
5	15	25	225	250
4	16	16	256	272
3	17	9	289	298
2	18	4	324	328
1	19	1	361	362

Nur $a=7$ und $b=13$ erfüllen die gestellten Bedingungen.

Ma 5 ■1543 Wir lösen die Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.
Aus den Angaben folgt $a=c+1$, $d=a+1=c+2$, $b=(a+c)\cdot d$.

a	b	c	d
2	9	1	3
3	20	2	4
4	35	3	5

Wegen $1\leqq b\leqq 9$ entfallen $c=2, 3, 4, \ldots$, da in diesen Fällen $b>9$. Es gibt nur eine Zahl, die die Bedingungen erfüllt; sie lautet 2913.

Ma 6 ■1544 Aus a) und d) folgt: Andreas ist zehn, Jürgen zwölf Jahre alt. Aus e) folgt: Michael ist ebenfalls zwölf Jahre alt. Somit ist Christian zehn Jahre alt.
Aus b) und c) folgt: Michael hat weder den Familiennamen Matuschewski noch den Familiennamen Anders. D. h., Michael hat entweder den Familiennamen Constantin oder Jordan.
Aus e) und f) folgt: Michael hat den Familiennamen Jordan; Jürgen hat den Familiennamen Matuschewski. Somit hat Andreas den Familiennamen Constantin, Christian hat den Familiennamen Anders.

Ma 6 ■1545 Nach einer Stunde zeigt die zweite Uhr gegenüber der ersten eine um $1\frac{1}{2}$ Minuten vorausgeeilte Uhrzeit an. Nach 24 Stunden bzw. nach einem Tag zeigt die zweite Uhr gegenüber der ersten eine um

$24\cdot 1\frac{1}{2}$ Minuten $=36$ Minuten vorausgeeilte

Uhrzeit an. Damit beide Uhren wieder die gleiche Uhrzeit anzeigen, müßte sich die zweite Uhrzeit gegenüber der ersten um 12 Stunden unterscheiden. Aus $12\text{ h}=12\cdot 60\text{ min}=720\text{ min}$ und $720:36\triangleq 20$ folgt, daß 20 Tage vergehen, bis beide Uhren wieder die gleiche Uhrzeit anzeigen.

Ma 6 ■1546 Wir rechnen $720\text{ g}:2=360\text{ g}$; Petra hat $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ der Torte verzehrt und dabei $360\text{ g}:4=90\text{ g}$ Kirschen gegessen. Eine Schale enthält $360\text{ g}:3=120\text{ g}$ Kirschen. Petra hat insgesamt $90\text{ g}+120\text{ g}=210\text{ g}$ Kirschen verzehrt.

Ma 6 ■1547 Angenommen, die gesamte Marschstrecke betrug x Kilometer. Bis zum ersten Kontrollpunkt waren $\left(\frac{x}{2}-2\right)$ km zurückzulegen. Nun gilt

$\left(\frac{x}{2}-2\right)+7+3=x,\ 8=\frac{x}{2},\ x=16.$

Die gesamte Marschstrecke betrug 16 km.

Ma 6 ■1548 Angenommen, im Monat März haben x Schüler Geburtstag; ihren Geburtstag haben dann $2x$ Schüler im Januar, $4x$ Schüler im Mai, $(4x-4)$ Schüler im Juli und $(2x-2)$ Schüler im Oktober. Zusammen sind das $(13x-6)$ Schüler. Nun gilt aber

$$30<13x-6<40,$$
$$36<13x<46.$$

Nur die natürliche Zahl $x=3$ erfüllt diese Ungleichung. Zur Klasse gehören somit $13\cdot 3-6=33$ Schüler.

Ph 6 ■1 Gegeben: $a=10\text{ cm}$
$h=15\text{ cm}$
$\varrho=0{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Gesucht: a) m
b) Höhe des Wasserspiegels

a)
$$V=a^2h$$
$$V=10\text{ cm}\cdot 10\text{ cm}\cdot 15\text{ cm}$$
$$V=1500\text{ cm}^3$$
$$m=\varrho\cdot V$$
$$m=0{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\cdot 1500\text{ cm}^3$$
$$m=300\text{ g}$$

In diesem Gefäß befinden sich 300 g Schnee.
b) Die Dichte vom Wasser zur Dichte des Schnees verhält sich wie $1:0{,}2=5:1$. Da sich die Höhen in den quadratischen Prismen bei gleicher Grundfläche ebenfalls wie $5:1$ verhalten, gilt:
$5:1=15:3$, d. h., das Wasser steht 3 cm hoch.

Ma 7 ■1549 Angenommen, a Schüler gehören der Klasse 7a, b Schüler der Klasse 7b und c Schüler der Klasse 7c an, dann gilt

$$a+b+c=85, \qquad (1)$$
$$\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=26. \qquad (2)$$

Multiplizieren wir Gleichung (2) mit 3 und subtrahieren die so erhaltene Gleichung von Gleichung (1), so erhalten wir

$$c-\frac{3}{4}\cdot c=85-78,$$
$$\frac{1}{4}\cdot c=7,$$
$$c=28.$$

Für $c=28$ erhalten wir durch Einsetzen in Gleichung (1)

$$a+b+28=85,$$
$$a+b=57.$$

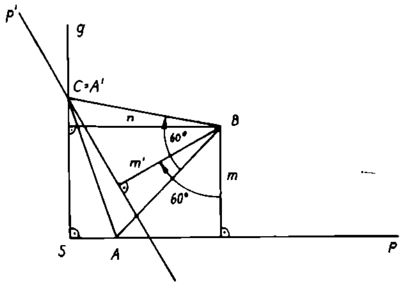
Nun ist b ein Vielfaches von 3 und von 10, also ein Vielfaches von 30. Da a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, kann deshalb nur $b=30$ und somit $a=27$ gelten. Der Klasse 7a gehören 27 Schüler an.

Ma 7 ■1550 Die kleinste dieser fünf geraden natürlichen Zahlen sei $2k$ mit $k=1, 2, 3, \ldots$; dann gilt

$$2k\cdot(2k+2)\cdot(2k+4)\cdot(2k+6)\cdot(2k+8)=3840,$$
$$2k\cdot 2(k+1)\cdot 2(k+2)\cdot 2(k+3)\cdot 2(k+4)=3840,$$
$$32\cdot k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)=3840, \qquad (1)$$
$$k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)=120,$$
$$k^5<120.$$

Wegen $2^5=32<120<243=3^5$ folgt daraus $k=1$ oder $k=2$.
Für $k=1$ erhalten wir aus Gleichung (1) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$;
für $k=2$ erhalten wir aus Gleichung (1) $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720>120$.
Die Aufgabe besitzt somit genau eine Lösung, nämlich $k=1$, und wir erhalten $2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10=3840$.

Ma 7 ■1551 Wir drehen die Figur um B als Drehzentrum im mathematisch negativen Sinne um einen Winkel von 60°. Dann wird der Eckpunkt A des zu konstruierenden gleichseitigen Dreiecks ABC auf den Punkt C abgebildet. Folglich schneidet das Bild p' von p den Schenkel q in $A'=C$, und es ist $\overline{BC}$ die gesuchte Seite des zu konstruierenden gleichseitigen Dreiecks ABC.



Ma 7 ▪1552 Aus $(15+x)\cdot(20+x)=(9+x)\cdot(32+x)$ folgt

$$300+15x+20x+x^2=288+9x+32x+x^2,$$
$$35x+300=41x+288,$$
$$6x=12$$
$$x=2.$$

Wir erhalten die Produkte $17\cdot 22$ und $11\cdot 34$, für diese gilt $17\cdot 22=11\cdot 34=374$.

Ph 7 ▪2 Gegeben:

$p_1=765\text{ Torr}=\frac{765\cdot 1{,}36}{1000}\text{ at}\approx 1{,}04\text{ at}$

$p_2=0{,}025\text{ at}$

$d=75\text{ mm}=7{,}5\text{ cm}$

$\pi=3{,}14$

Gesucht: F

Die Druckkraft F ergibt sich aus

$F=p\cdot A$

$F=\frac{(p_1-p_2)\pi d^2}{4}$

$F=\frac{(1{,}04-0{,}025)\text{ at}\cdot 3{,}14\cdot 7{,}5^2\text{ cm}^2}{4}$

$F\approx 44{,}82\text{ kp}$

$p=p_1-p_2$

$A=\frac{d^2}{4}$

Der Deckel wird mit einer Druckkraft von 44,82 kp verschlossen.

Ch 7 ▪1 a) 1 t Magneteisenstein enthält $0{,}75\cdot 0{,}7\text{ t}=0{,}525\text{ t}$ Eisen. $40\cdot 40$ t Erz enthalten $1600\cdot 0{,}525\text{ t}=840\text{ t}$ Eisen.

b) 1 t Roteisenstein enthält $\frac{1}{3}$ t Eisen.

$60\cdot 40$ t Erz enthalten $2400\cdot\frac{1}{3}\text{ t}=800\text{ t}$ Eisen.

Aus den gelieferten Mengen können a) 840 t, b) 800 t Eisen gewonnen werden.

c) Die Verarbeitung von Magneteisenstein ist wegen des höheren Eisengehalts wirtschaftlicher.

Ma 8 ▪1553 Es sei k eine negative ganze Zahl, wobei wir die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $k<-7$.

Dann gilt $k<0$, $k+5<0$ und $k+7<0$,

also $z=k(k+5)(k+7)<0$,

da alle drei Faktoren negativ sind.

2. Fall: $-7\leqq k\leqq -5$

Dann gilt $k<0$, $k+5\leqq 0$ und $k+7\geqq 0$,

also $z=k(k+5)(k+7)\geqq 0$,

da von den drei Faktoren entweder einer gleich Null ist oder zwei negativ und einer positiv sind. In diesem Fall ist also z nicht negativ.

3. Fall: $-5<k<0$

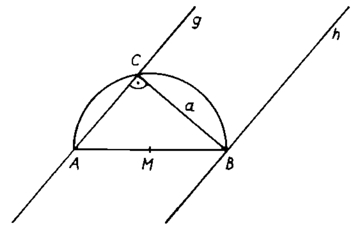
Dann gilt $k<0$, $k+5>0$, $k+7>0$,

also $z=k(k+5)(k+7)<0$,

da ein Faktor negativ und die beiden anderen Faktoren positiv sind. Die Zahl $z=k(k+5)(k+7)$ ist also für negative ganze Zahlen k genau dann nicht negativ, wenn $-7\leqq k\leqq -5$ gilt, wenn also

$k=-7$, $k=-6$ oder $k=-5$ gilt.

Ma 8 ▪1554 Es seien g und h zwei parallele Geraden, die durch Punkte A bzw. B gehen und den Abstand $a=4$ cm haben (siehe Bild). Ferner sei C der Fußpunkt des von B auf die Gerade g gefällten Lotes. Dann ist $\overline{BC}=a$ und $\sphericalangle BCA=90°$.



Nach der Umkehrung des Satzes des Thales liegt dann C auf einem der beiden Halbkreise mit $\overline{AB}$ als Durchmesser. Daraus ergibt sich die Konstruktion:

Man konstruiert einen der beiden Halbkreise mit $\overline{AB}$ als Durchmesser und schlägt um B einen Kreis mit dem Radius $a=4$ cm, der den Halbkreis in C schneidet. Dann ist AC die verlangte Gerade g und die Parallele zu g durch B die verlangte Gerade h.

Bemerkung: Die Aufgabe hat noch eine zweite Lösung. Zeichnet man nämlich den „unteren" Halbkreis mit $\overline{AB}$ als Durchmesser, so erhält man den Schnittpunkt C' sowie zwei parallele Geraden g' und h', die zu g und h bezüglich AB spiegelbildlich liegen und im Bild nicht gezeichnet sind.

Ma 8 ▪1555 Angenommen, es gäbe zwei rationale Zahlen a und b, für die die Gleichung

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{2(a-b)}=\frac{a-b}{2(a+b)}-\frac{a^2-b^2}{a} \qquad (1)$$

erfüllt ist. Dann gilt $a\neq 0$,

$a-b\neq 0$ und $a+b\neq 0$ und daher auch

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)\neq 0,$$

da sonst nicht alle Nenner in der Gleichung (1) von Null verschieden wären.

Da der Hauptnenner in (1) gleich $2a(a^2-b^2)$ ist, folgt weiter $(a^2+b^2)2a-(a+b)^2a$

$=(a-b)^2a-(a^2-b^2)2(a^2-b^2)$,

$2(a^2-b^2)^2=a[(a-b)^2+(a+b)^2-2(a^2+b^2)]$,

$2(a^2-b^2)^2$

$=a[a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2-2a^2-2b^2]$,

$2(a^2-b^2)^2=0$,

$a^2-b^2=0$,

$(a+b)(a-b)=0$.

Also ist $a+b=0$ oder $a-b=0$, was der obigen Voraussetzung widerspricht. Daher gibt es keine rationalen Zahlen a und b, für die die Gleichung (1) erfüllt ist.

Ma 8 ▪1556 Da die Mannschaft D das Punkte-Verhältnis 1:5 und das Torverhältnis 0:5 erreichte, spielte sie einmal unentschieden mit 0:0 und verlor die übrigen beiden Spiele. Nunmehr sind zunächst die folgenden drei Fälle möglich:

1. Fall: A spielte gegen D 0:0.

Dann hätte A gegen B und C zusammen 4 Tore erzielt, was der Voraussetzung widerspricht, wonach B und C zusammen nur 3 Gegentore hinnehmen mußten. Also kann dieser Fall nicht eintreten.

2. Fall: B spielte gegen D 0:0.

Dann hätte B gegen A und C zusammen 4 Tore erzielt, was wieder der Voraussetzung widerspricht. Also kann auch dieser Fall nicht eintreten.

Daher kann nur der folgende Fall eintreten:

3. Fall: C spielte gegen D 0:0.

Da C und D gegeneinander keine Tore erzielten, aber zusammen 7 Gegentore hatten, entfällt eines der 8 Tore, die A bzw. B erzielten, auf das Spiel A gegen B, das daher mit einem Torverhältnis 1:0 oder 0:1 endete. Da aber A 2 Spiele gewann und ein Spiel unentschieden spielte, gewann A gegen B mit dem Torverhältnis 1:0.

Die übrigen drei Tore erzielte A mit den Spielen gegen C und D. Daher mußte A gegen D mindestens ein Tor erzielen, konnte also, da D überhaupt kein Tor erzielte, nicht gegen D unentschieden spielen. Daher spielte A gegen C unentschieden, und zwar mit dem Torverhältnis 1:1, ferner gewann A gegen D mit dem Torverhältnis 2:0. Daraus folgt weiter, daß B das Spiel gegen C mit dem Torverhältnis 1:0 und das Spiel gegen D mit dem Torverhältnis 3:0 gewann. Daher fielen die sechs Spiele wie folgt aus:

A gewann gegen B mit dem Torverhältnis 1:0. A spielte unentschieden gegen C mit dem Torverhältnis 1:1. A gewann gegen D mit dem Torverhältnis 2:0. B gewann gegen C mit dem Torverhältnis 1:0. B gewann gegen D mit dem Torverhältnis 3:0. C spielte unentschieden gegen D mit dem Torverhältnis 0:0.

Ph 8 ▪3 Gegeben: $U=6$ V; $P=3$ W.

Gesucht: a) I, b) R, c) W_{el}

a) $P=U\cdot I$ b) $R=\frac{U}{I}$

$I=\frac{P}{U}$ $R=\frac{6\text{ V}}{0{,}5\text{ A}}$

$I=\frac{3\text{ W}}{6\text{ V}}$ $R=12\,\Omega$

$I=0{,}5$ A

c) $W_{el}=U\cdot I\cdot t$

$W_{el}=6\text{ V}\cdot 0{,}5\text{ A}\cdot 24\text{ h}$

$W_{el}=3\text{ W}\cdot 86400\text{ s}$

$W_{el}=259\,200\text{ Ws}$

Bei der Glühlampe beträgt die Stromstärke 0,5 A, der Widerstand 12 Ω und die elektrische Arbeit 259 200 Ws.

Ch 8 ▪2 a)

$$\underset{5\text{ g}}{\overset{79{,}5\text{ g}}{CuO}}+H_2\rightarrow Cu+\underset{m_1}{\overset{18\text{ g}}{H_2O}}$$

NR: $1\ \text{mol}\cdot 79{,}5\,\frac{g}{\text{mol}} = 79{,}5\ g$,

$1\ \text{mol}\cdot 18\,\frac{g}{\text{mol}} = 18\ g$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:
$m_1 = 1{,}13\ g$

b) 318,0 g 232 g
$4CuO + Fe \rightarrow Cu + Fe_3O_4$
5 g m_2

NR: $4\ \text{mol}\cdot 79{,}5\,\frac{g}{\text{mol}} = 318{,}0\ g$,

$1\ \text{mol}\cdot 232\,\frac{g}{\text{mol}} = 232\ g$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:
$m_2 = 3{,}65\ g$

c) 79,5 g 81 g
$CuO + Zn \rightarrow Cu + ZnO$
5 g m_3

NR: $1\ \text{mol}\cdot 79{,}5\,\frac{g}{\text{mol}} = 79{,}5\ g$,

$1\ \text{mol}\cdot 81\,\frac{g}{\text{mol}} = 81\ g$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:
$m_3 = 5{,}09\ g$

Man erhält a) 1,1 g Wasser, b) 3,7 g Eisen-(II, III)-oxid, c) 5,1 g Zinkoxid.

Lösungen zu alpha-heiter (Heft 1/77)

Gauß-Anekdote

1. Berechnung, 2. Rechnung, 3. also, 4. untere, 5. nicht, 6. statt, 7. Chronik, 8. hoffen, 9. Weg, 10. eine, 11. ihnen
Braunschweig Göttingen

Verkettungsrätsel

1. Zeile: Drehung – Gradmaß
2. Zeile: Algebra – Ankreis
3. Zeile: Ungenau – Umkreis
4. Zeile: Numerus – Sekante
5. Zeile: Rhombus – Strecke
Lösungswort: Gauss

Silbenrätsel

1. Chanson, 2. Ankathete, 3. Rotationskörper, 4. Läuferstrich, 5. Fundamentalsatz der Algebra, 6. Riemannscher Integralbegriff, 7. Ingenieur, 8. Ebene, 9. Distributiv, 10. Ries, 11. Inverse, 12. Cosh, 13. h. c., 14. Gauß, 15. Aufriß, 16. Uhu, 17. Sigma, 18. Spiegelung
Carl Friedrich Gauß – Gaußsches Verfahren

Diagonale Verkettung

1. Zeile: Log – Galilei
2. Zeile: Area – Abakus
3. Zeile: Genau – Unruh
4. Zeile: Thales – Sinh
5. Zeile: Tangens – Sin

Kryptarithmetik

$A=8$ $G=3$ $L=0$ $O=5$ $S=7$
$E=2$ $H=4$ $N=1$ $R=6$ $U=9$

$$\begin{array}{r} 80166\\ +\ 80166\\ +\ 80166\\ +\ 80166\\ \hline 320664 \end{array}$$

Es bedeuten: $A=0$ $U=1$ $L=2$ $K=3$ $E=4$ $S=6$ $G=8$

Gaußsche Lebensdaten

$$\begin{array}{rcrcr} 1777 & + & 78 & = & 1855\\ + & & + & & +\\ 200 & + & 222 & = & 422\\ \hline 1977 & + & 300 & = & 2277 \end{array}$$

Kreuzzahlrätsel

Ein Lösungsweg:
(w = waagerecht, s = senkrecht)

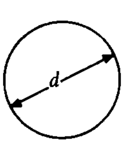
^{1}1	7	^{2}7	^{3}7	■	^{4}8	9
2	■	^{5}5	0	4	1	■
^{6}5	^{7}3	0	2	■	■	^{8}6
■	3	■	^{9}7	^{10}2	■	2
^{11}1	3	^{12}7	■	^{13}3	7	5
■	^{14}3	1	^{15}2	5	■	■
^{16}7	3	■	^{17}1	7	2	7

Zunächst die Jahreszahlen w1) 1777 und w17) 1727, dann die Postleitzahl s3) 7027. 1s) nur 125, somit $a=5$ und w14) 3125, s2) 750, s8) 625, s7) 33333, w16) 73. w9) kann nur 72 sein. Dann ist s10) 2357 und w13) 375. Da w5) das Quadrat von s12) ist, muß s12) 71 und w5) 5041 sein. Dann ist w11) 137, ferner s4) 81 und w4) 89.
Die Zahlen in den vier Ecken des Rätselfeldes ergeben zeilenweise gelesen das Gedenkjahr 1977!

1977

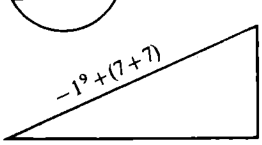
$0=(1+9)(7-7)$
$1=1^9+7-7 \quad =\sqrt{1+9\cdot(7-7)}$
$2=\sqrt{-1-9+7+7} \quad =1\cdot 9-\sqrt{7\cdot 7}$
$3=1\sqrt{9+7-7} \quad =\sqrt{1\cdot 9\cdot 7:7}$
$4=-1-9+7+7 \quad =1-\sqrt{9+7}+7$
$5=-1\cdot 9+7+7 \quad =1+\sqrt{9}+7:7$
$6=1-9+7+7 \quad =1-9+7+7$
$7=1^{9+7}\cdot 7 \quad =(1-9+7)\cdot 7$
$8=1^{9\cdot 7}+7 \quad =1\cdot 9-7:7$
$9=1\cdot 9+7-7$
$10=1+9+7-7$

Schüler A. Fittke, Berlin



$d=1\cdot 9-\sqrt{7\cdot 7}$
$A\approx(1+\sqrt{9}\cdot 7):7$

H. Decker



$19-(7+7)$

$\sqrt{1\cdot 9\cdot 7\cdot 7}-(1\cdot 9+7-7)$

$U=\sqrt{1\cdot 9\cdot 7\cdot 7}+(1\cdot 9+7-7)$
$A=(19-7)\cdot 7-(1+9+7+7)$

H. Förg-Rob, Schwaz (Österreich)

$1=\sqrt{1^{9+7\cdot 7}}$
$9=1\cdot 9+(7-7)$
$7=-1+9-(7:7)$
$7=1+\sqrt{9}+(7:7)+1^9+(7:7)$
$19=1+\sqrt{9}+7+7+1^{-9+7-7}$
$197=(1+\sqrt{9})\cdot 7\cdot 7+1$
$1977=19\cdot(7+7)\cdot[-1+9-(7:7)]$
$\quad +(1\cdot 9+7+7)\cdot[1+\sqrt{9}+(7:7)]$

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke

$19+77=\sqrt{1\cdot 9}\cdot 77-19\sqrt{7\cdot 7}-1\cdot 9+\sqrt{7\cdot 7}$
$\sqrt{1\cdot 9}+\sqrt{7\cdot 7}=1+9-7+7$
$\sqrt{1\cdot 9}-\sqrt{7\cdot 7}=1+9-7-7$
$\sqrt{1\cdot 9}\cdot\sqrt{7\cdot 7}=(1+9-7)\cdot 7$
$\sqrt{1\cdot 9}:\sqrt{7\cdot 7}=(1+9-7):7$
$1977=12(34+56)+7+890$

Ing. H. Decker, Köln

$1977-1777=(1+9)(7+7)-17+77$
$\quad =197-7-1+77:7$

$1+7+7+7=-1+9+7+7$

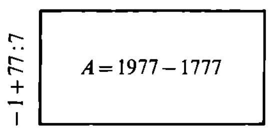
$(1+7)(7+7)=(-1+9)(7+7)$

$1777=(1-9+7\cdot 7)^2+(1+9+7-7)^2$
$\quad -(1\cdot 9-\sqrt{7\cdot 7})^2$

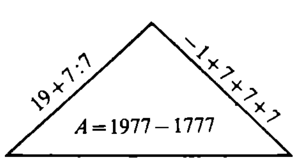
$1855-1777=1^9+77$

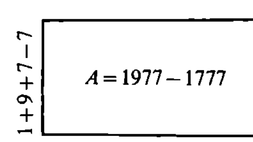
1977 = MCMLXXVII

MC − ML = XXV · II
M + C − M = L + XXV · II
M : C · M = L · XX · V · II
(MC − ML) : XXV = II
$\sqrt{M-C}$ + M : L = XXV · II



$19+7:7$





$-1+7+7+7$

alpha-Wettbewerb Abzeichen in Gold

Für neunjährige Teilnahme

Christoph Scheurer, Glauchau; **Kerstin Bachmann,** Halle; **Lutz Püffeld,** Hennigsdorf; **Uwe Lewandovski,** Leipzig; **Annegret Kirsten,** Leuna; **Ralph Lehmann,** Petershagen; **Henrik Frank,** Greifswald; **Eckhard Schadow,** Oranienburg

Für achtjährige Teilnahme

Detlef Poppe, Mühlhausen; **Kirsten Helbig,** Frankfurt; **Bernd Hanke,** Großschweidnitz; Ute und **Ines Greiner,** Wurzen; **Astrid Rösel,** Zittau; **Michael Schnelle,** Calau; **Martin Ermrich,** Elbingerode; **Guido Blosfeld,** Halle; **Gerlinde Koch,** Trusetal

Für siebenjährige Teilnahme

Holger Jurack, Burkau; **Hermann Tenor,** Dessau; **Ulf Hutschenreiter,** Dresden; **Birgit Kühnstedt,** Erfurt; **Ulrike Bandemer,** Freiberg; **Angelika Müller,** Greifswald; **Falk Bachmann, Wilfried Carl, Birgit Krötenheerdt,** alle Halle; **Dirk Sprengel,** Potsdam; **Peter Herrlich,** Radebeul; **Ilona Drews,** Wöbbelin; Hellfried Schumacher, Ahlbeck; Birgit Weiß, Bernau; Ullrich Riedel, Flöha; Lars Luther, Güstrow; Rainer Gutsche, Herzberg; Torsten Waldeck, Karl-Marx-Stadt; Jens-Uwe Richter, Kemtau; Andreas Neubert, Schwarzenberg; Bernd Redlich, Wernburg; Stephan Fleischmann, Zella-Mehlis

Für sechsjährige Teilnahme

Borwin Wegener, Berlin; **Jürgen Sommerschuh,** Bischofswerda; **Arno Feuerherdt,** Brandenburg; **Uwe Rieckert,** Cottbus; **Elke Seidel,** Dresden; **Marid Helbig,** Frankfurt; **Andreas Illing,** Gersdorf; **Thies Luther,** Güstrow; **Frank Schulze,** Himmelsberg; **Ulv Krabisch, Bernd Kreußler,** beide Leipzig; **Lew Dimenstein,** Leningrad (UdSSR); **Sybille Baumgart,** Löderburg; **Karl Krause,** Mansfeld (Rentner); **Wolfgang Huschmann,** Oelsnitz; **Volker Lerche,** Schmalkalden; **Gudrun Drews,** Wöbbelin; **Manuela Lehmert,** Worbis; Regina Kupfer, Belgershain; Thomas Jarosch, Berlin; Ralf Mayas, Ingo Fietze, Manfred Seidler, Helga Schuster, alle Cottbus; Carola Zimmermann, Joachim Ernst, beide Döbeln; Andreas Wenzel, Dorfchemnitz; Wolfram Flämig, Eva Gerstner, Klaus Schlegel, alle Dresden; Uwe Beck, Falkensee; Wolfgang Seeber, Gehren; Thomas Jakob, Gera; Isolde Kehr, Gospenroda; Ursula Märker, Greifswald; Matthias Heinevetter, Heiligenstadt; Sabine Pohl, Jena; Roland Kaschner, Lauchhammer; Norbert Littig, Lichtenberg; Bernhard Tschada, Löbau; Ulrike Zinke, Lützen; Uwe Bormann, Magdeburg; Carola Fechtner, Neubrandenburg; Kornelia Poike, Neukirch; Karla Eberlein, Niederfrauendorf; Stefan Kaiser, Niederschmalkalden; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Thomas Maiwald, Olbersdorf; Frank Aßmus, Oranienburg; Rainer Seifert, Pinnau; Andreas Fischer, Radebeul; Beate Brandtner, Schildau; Lutz Thorwarth, Schmalkalden; Karin Küsche, Steinbach-Hallenberg; Kerstin Utke, Stralsund; Dietmar Glanz, Worbis

Für fünfjährige Teilnahme:

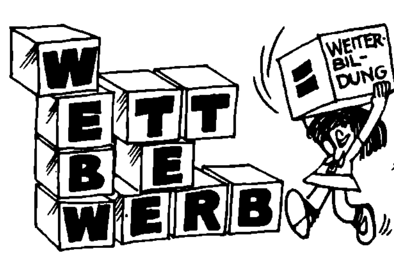
Andreas Fittke, Audrey Hoffmann, Jens Peter Mönch, alle Berlin; **Ulf Ritschel,** Booßen; **Andreas Mempel,** Clingen; **Dieter Kratsch,** Göhren; **Arnhild** und **Dagmar Lorenz,** Görlitz; **Andreas Kasparek,** Gräfenhainichen; **Stefan Krötenheerdt,** Halle; **Eckard Liebscher,** Ilmenau; **Claudia Kummer,** Leipzig; **Reinhard Koeppe,** Loburg; **Wolfgang Taubert, Gerald Werner,** beide Meiningen; **Petra Beck,** Potsdam; **Birgit Rosenberger,** Suhl; Matthias Ohm, Ahlbeck; Ralf Heinze, Arnstadt; Wolfgang Schippel, Andrea Nießen, Christian Kolliwer, alle Berlin; Jörg Kunzmann, Uta Weidauer, beide Bernsbach; Klaus Harms, Bobzin; Uwe Lumm, Clingen; Cornelia Güntzel, Clemens Jaunich, Jürgen Sägenschnitter, Peter Röhl, Frank Mayas, Jörg Kaiser, alle Cottbus; Ralph Scharf, Döbeln; Rainer Grünert, Karl-Heinz Jünger, beide Dresden; Michael Schalle, Drognitz; Udo Grünert, Freital; Andrej Jendrusch, Glienicke; Karin Kramer, Claudia Endtricht, beide Görlitz; Irmhild Bittner, Michael Fukarek, Sylke und Bengt Nölting, alle Greifswald; Cornelia Thiel, Güstrow; Ingo Lenz, Hagenow; Uta Gutsche, Herzberg; Leonore Weise, Thomas Göpfert, beide Karl-Marx-Stadt; Uwe Klaus, Stefan Kasper, beide Leipzig; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Ute Busch, Lobenstein; Hans-Joachim Berger, Andreas Erben, Rüdiger Tanzke, alle Löderburg; Wolfgang Blachnik, Lübbenau; Uwe Finke, Magdeburg; Matthias Breitbarth, Mühlhausen; Volker Schulz, Nauen; Winfried Glöde, Neubrandenburg; Uwe Trautvetter, Neuenhofe; Thomas Richter, Neuhausen; Elke Gräfe, Oberlichtenau; Axel Müller, Oberlungwitz; Steffen Krebs, Radebeul; Ilona Wünsche, Rodewitz; Iris Schulz, Rotta; Erika Krüger, Sangerhausen; Sabine Peter, Schmalkalden; Dieter Hornawsky, Silbach; Walter Rempel, Sonneberg; Kerstin Schubert, Petra Thomzik, Stefan Meingast, alle Steinbach-Hallenberg; Thomas Luschtinetz, Stralsund; Petra Henkel, Töplitz; Roland Löffler, Weida; Detlef Kohn, Weimar; Falk Pankau, Wildpark; Manfred Häußler, Jörg Keitel, beide Westgreußen; Rolf Kuhn, Wintzingerode; Katrin Richter, Wittenberg; Heidrun Schön, Worbis; Manfred Zimmer, Volstedt; Karsten König, Zeuthen; Evelin Ebert, Zschocken; Kurt Oertel, Zschornewitz (Rentner); Andreas Bernert, Zwickau

Für vierjährige Teilnahme

Volkmar Türke, Auerbach; **Christine Spiegelberg, Peter Pörs,** beide Berlin; **Martina Menge,** Bernburg; **Gudrun Billig,** Coswig; **Werner Jeroch,** Dresden; **Barbara Gehb,** Fambach; **Wolfhart Umlauft,** Freital; **Frank Kratsch,** Göhren; **Jens Negever,** Grimma; **Günter Mosel,** Gülze; **Torsten Musiol,** Güstrow; **Andrea Herrmann,** Hammerunterwiesenthal; **Ute Schilling,** Hoyerswerda; **Torsten Busch,** Klausdorf; **Armin Körner,** Leipzig; **Steffen Langbein,** Lichte; **Michael Thränhardt,** Oranienbaum; **Wilfried Röhnert,** Radebeul; **Thomas Apel,** Reichenbach; **Andreas Matthus,** Rostock; **Jörg** und **Aldo Bojarski, Roland Schlesinger,** alle Saßnitz; **Torsten Löwe,** Schleiz; **Heiko Müller,** Schmalkalden; **Bernadette Domaschke,** Seifhennersdorf; **Andrea Hönemann,** Stützerbach; **Dirk Herrmann,** Töplitz; **Katrin Wahn,** Uebigau; Christine Stüber, Alsleben; Birgit Oelschlegel, Arndt Gläßer, beide Altenbeuthen; Steffen Roch, Annaberg; Roger Labahn, Anklam; Peter Möller, Carmen Schwebmeyer, beide Bad Doberan; Katrin Rurainsky, Bad Langensalza; Annette Pötschke, Bautzen; Torsten Flade, Beierfeld; Andreas Kopf, Claudia Ziehm, Valeska Heymann, Frank Thienert, Andreas Gude, alle Berlin; Dirk Markgraf, Peter Wiehe, Marion Heise, alle Bischofferode; Silke Kornisch, Böhlitz-Ehrenberg; Bärbel Ifland, Brehme; Friedemann Vetter, Buckow; Uwe Grätzschmann, Annette Schulz, beide Cottbus; Ina Daberkow, Ralf Ott, beide Demmin; Thomas Kollowa, D.-Kirchhain; Ralf Kretschmer, Uwe Hanisch, Michael Apitz, Andreas Schlegel, Reinhard Pohl, Frank Regensburger, Uwe Hartig, alle Dresden; Regina Klingebiel, Ecklingerode; Andrea Puckert, Eichicht; Heidelore Stallbohm, Eldena; Sabine Lützkendorf, Eberhard Georgy, Annette Lasar, alle Erfurt; Monika Müller, Anke Ilgen, Klaus Ullrich, alle Fambach; Astrid Umlauft, Steffi Haucke, beide Freital; Dieter Bahlmann, Friedrichsgrün; Sylvia Schimanski, Gademow; Dietmar Richter, Garitz; Beatrix Seeboth, Gernrode; Kurt Wiechmann, Glasin; Peter Brauer, Gnoien; Uwe Reimann, Dagmar Klatte, beide Görlitz; Christian Wolf, Wolfgang Fukarek, beide Greifswald; Holger Heydrich, Carola Berger, beide Grimma; Axel Schulz, Jens Siemoneit, beide Grimmen; Burkhard Rahn, Groß-Naundorf; Beate Kuhle, Gr. Schwarzlosen; Torsten Ueberdick, Halle; Steffen Wendt, Haida; Lutz Wenert, Hartau; Ute Sonnenburg, Hennigsdorf; Kerstin Schmelzer, Hettstedt; Lutz Dietrich, Hohenstein-E.; Grit Kiefel, Holzendorf; Ulrike Otto, Ilmenau; Reinhardt Rascher, Ronald Rösch, beide Karl-Marx-Stadt; Eva Kertèsz, Kecskemèt (UVR); Christian Gürlich, Ketzin; Christiane Jordan; Frauke Apel, Susanne Burda, Petra Hansche, Detlef Dumjahn, Steffen Apel, alle Klausdorf; Matthias Marx, Klepzig; Olaf Gutschker, Kolkwitz; Jürgen Hüttner, Kottengrün; Dagmar Laux, Holger Hentze, beide Leipzig; Rolf Busch, Lobenstein; Bernd Ehrling, Löderburg; Birgit Boldt, Ludwigslust; Ines Quast, Lübbendorf; Elke Klein, Lüderitz; Adrian Schubert, Lugau; Ina Greiner-Petter, Malchin; Gabriele Otto, Steffen Trapp, beide Meißen; Holger Kreil, Mittelbach; Rainer Bauer, Mittweida; Cordula Becker, Moskau (UdSSR); Michael Weicker, Mügeln; Ines Pahl, Neuenhofe; Andreas Massanek, Neusornzig; Achim Troll, Kerstin Klingbeil, beide Oberlungwitz; Henri Hofmann, Oberschönau; Thomas Köhler, Oederan; Michael Monse, Olbersdorf; Ulrich Kammer, Pirna; Jürgen Krahl, Plauen; André Wortha, Pleetz; Sabine Einert, Pockau; Hilmar Müller, Postlin; Regina Grübe, Potsdam; Carmen Henze, Pratau; Steffi Förtsch, Reitzengeschwenda; Armin Hoell, Achim Bastian, beide Ribnitz; Michael Zwicke, Riesa; Gert Mielke, Rolofshagen; Ulf Günther, Ronneburg; Hardy Eich, Frank Wegner, Anke Bartsch, alle Rostock; Viola Forner, Rotta; Ruth Klingbeil, Salow; Ralf Briesemeister, Siegfried Müller, beide Sachsendorf; Harald Schlesinger, Saßnitz; Jürgen Rolle, Schlegel; Heike Gernschke, Annette Seidel, Katrin Bauer, Antje Tischer, Constanze Prause, Peter Heide, Peter Gaudian, Andreas Mäder, Uwe Schleicher, Frank Schaft, Claudia Pansold, Petra Weichler, Falk Oelschläger, alle Schmalkalden; Eberhard Förster, Söllichau; Hans-Dietrich Schwabe, Thomas Sroka, Hubertus Mund, alle Sondershausen; Gerald Manske, Christine Döll, Katrin Döll, Sabine Holland-Nell, Cornelia Horn, Heidrun Päckert, Heike Sauer, Bernd Enter, Sigrun Bahner, Sigrun Bickel, Sabine Henkel, Kerstin Holland, Liane Jäger, Petra Pfannschmidt, Anette Recknagel, Christine Recknagel, Reinhold Beckmann, Beate Wurschi, Frank Hoffmann, Eva Hausdörfer, Claudia Holland, Katja Kohlhas, Petra Krätschmer, Iris Ruck, Thomas Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Holger Hoppe, Stendal; Thomas Reuscher, Stralsund; Günter und Bert Carlsen, Titschendorf; Antje Lorenz, Töplitz; Sylvia Zipf, Waldheim; Bettina Schade, Waren; Thomas Weiß, Gunter Reißig, Jürgen Lehmann, alle Weimar; Christine Kindt, Wendisch Priborn; Uli Meier, Sylvia Kunze, beide Weißenfels; Manuel Richter, Wilthen; Carola Senft, Wingerode; Holger Schnabel, Wismar; Angela Schlegel, Sabine Klatzsche, Barbara Höpfner, alle Wolgast; Ralf Becker, Wolmirstedt; Bernd Haase, Wünschendorf; Andreas Pietsch, Stefan Zimmermann, beide Zella Mehlis; Ute Scharkowski, Zepernick; Steffen Heinrich, Zittau; Birgit Baldauf, Zschornewitz

Für dreijährige Teilnahme

Udo Clemens, Altenburg; **Arno Jeromin,** Altentreptow; **Olaf Rausch,** Aue; **Lutz Heinrich,** Bad Langensalza; **Wolfgang Spielke,** Bad Salzungen; **Kerstin Schade,** Berlingerode; **Vera Schulze,** Brandis; **Jens Schumann,** Coswig; **Grit Schulze, Andrea Dreyer, Claudia Kerstan,** alle Cottbus; **Jürgen Anders,** Dahlewitz; **Frank Meurer,** Dietzhausen; **Jens Paetzold,** Demmin; **Klaus-Dieter Gloe, Uwe Krebs, Frank Wittwer, Heike-Karen Bochmann, Peter-Alexander Pöhler,** alle Dresden; **Thomas Böhme,** Eisleben; **Uwe Kintzel,** Erfurt; **Birgit Weyh,** Fambach; **Thomas Gerlach,** Friedeburgerhütte; **Ricarda Kremmer,** Floh; **Sylvio Klose,** Gera; **Birgit Thiele,** Gerstungen; **Astrid Strauch,** Greifswald; **Gudrun Tappert,** Guben; **Ruth Jacobs,** Halle-Neustadt; **Doris Planer,** Hohendorf; **Andreas Schimmang,** Hohenleipisch; **Michael Eckhardt, Sylvia Fischer,** beide Hoyerswerda; **Rolf Kamieth,** Kakerbeck; **Kerstin Rudorf,** Karl-Marx-Stadt; **Jörg Pöhland,** Klingenthal; **Frank Jeschek,** Kloster; **Alois Weninger,** Knittelfeld (Österreich); **Ute-Barbara Heuer,** Leisnig; **Karola Näther,** Leipzig; **Bärbel Wintzler,** Lobenstein; **Bernd Küchau, Rüdiger Brandt,** beide Lübtheen; **Peter Weingart,** Mühlhausen; **Volkmar Riemer,** Neubrandenburg; **Andrea Thränhardt,** Oranienbaum; **Rüdiger Düsnig,** Osterburg; **Klaus Beck,** Potsdam; **Frank Hadamik, Falk Breuer, Ulrike Baumann, Dagmar Herrlich,** alle Radebeul; **Andreas Kundt,** Ribnitz; **Ronald Bracholdt,** Riesa; **Christine Schober, Birgit** und **Heiko Lehmann,** alle Rostock; **Peter Dittrich,** Rudolstadt; **Manuela Wilke,** Rüdnitz; **Ina** und **Uwe Ebert,** Ruppendorf; **Ralf Bahrmann, Mario Primas, Ronald Zachert,** alle Sachsendorf; **Heinz-Olaf Müller,** Schmalkalden; **Lutz Möller,** Schmiedeberg; **Ina Spanaus,** Schleusingen; **Thomas Bienek,** Schwepnitz; **Eckart Möbius, Roderich Winkler,** beide Schwerin; **Annelie Meyer,** Silberstraße; **Ramona Willfarth, Angelika Hensel,** beide Sondershausen; **Gerd Birnbaum,** Spitzkunnersdorf; **Almut Beckmann, Petra Recknagel,** beide Steinbach-Hallenberg; **Jürgen Wage,** Springstille; **Simone Teichmüller,** Stöckey; **Bernd Kasch,** Stralsund; **Beate Nahler,** Weimar; **Iris Reinhold, Aloys Werner,** beide Wingerode; **Frank Höpfner,** Wolgast; **Frank Lohmeyer, Birgit Thomas, Steffen Pankow,** alle Zittau; **Frank Erdmann,** Zeitz; Marion Herzfeldt, Ahlbeck; Torsten Pautzsch, Simone Brod, Kerstin Dorenburg, Thomas Vohla, Jörg Schüttler, Kerstin Hubrich, Diana Hiller, Jens Lohse, Manuela Meyer, Andreas Schnabel, alle Altenburg; Frank Maschke, Altendorf; Antje Lange, Kirsten Rosenow, Bernd Bethke, Martina Meister, alle Altentreptow; Uwe Simon, Apolda; Dieter Koch, Henri Koch, beide Arnstadt; Jens-Peter Finke, Aschersleben; Hans-Jürgen Kopf, Bad Frankenhausen; Margit Weibrecht, Jana Michaelis, Kirsten Wettstein, alle Bad Salzungen; Jörg Schmidt, Steffen Schröter, Andreas Zschiesche, alle Bergwitz; Michael Prescher, Marion Breitschuh, Jutta Schöwel, Jörg Rudolph, Dagmar Fischer, Mike Sandau, Katrin Kolliwer, Gabi Stage, Sylvia Röße, Christina Ziehm, alle Berlin; Steffi Kraus, Margaretha Kott, Astrid Leineweber, Manuela Apel, Manfred Kahlert, Werner König, alle Berlingerode; Uwe Kassner, Bernau; Sylvia Neubert, Gabriele Stiehler, Jörg Günthel, Cerstin Berger, Uwe Weißflog, Sybille Fechler, Volker Wesely, Andrea Nestmann, alle Bernsbach; Iris Buchardt, Heidi Hanke, beide Bernterode; Renate Dietrich, Bisdorf; Sabine Wukasch, Bischofswerda; Andreas Bohne, Borna; Heike Wätzig, Braunsdorf; Ute Wehr, Heinz-Wilfired Böttcher, beide Breitenworbis; Corina Eckstein, Breitungen; Birgit Butters, Kerstin Wiefel, beide Breternitz; Reiner John, Peter Krabbe, beide Britz; Péter Surj n, Budapest (UVR); Adelbert Heddergott, Büttstedt; Corina Baake, Bützer; Ingolf Greß, Beeskow; Ralf Lehmann, Burgstädt; Iris Grinda, Calbe; Carola Kunze, Callenberg; Thomas Seifert, Camberg; Arno Roßform, Chorin; Gisbert Ehrlich, Conradsdorf; Ines Fietze, Detlef Kaiser, Ilka Kohlstock, Uwe Ring, Achim und Toralf Kling, Jens Purand, Ellen Harnath, Steffen Rücker, Iris Grundke, alle Cottbus; Karin Piehler, Daßlitz; Mario Binkowski, Demmin; Ingolf Hoffmann, Döbeln; Birgit Remane, Döllnitz; Sylvia Schwenke, Dohna; Regina Bricks, Dorfilm; Benno Blase, Falk Kutschbach, Ralf Kunze, Gundula Göllner, Egmar Schmidt, Bärbel Wendt, Angela Jircik, Sabine Rahn, Annett Körner, Thomas Keßler, Matthias Apitz, Norbert Koksch, Thomas Uhlig, Uta Oelschlägel, Lutz Friedemann, Grit Hartmann, Birgit Wendt, Christian Dahl, Ulrike Schneider, alle Dresden; Jörg Bruchertseifer, Dubna (UdSSR); Annett Riehl, Egeln; Jürgen Kachold, Eichicht; Matthias Arbeiter, Eisenach; Thomas Dittrich, Eisenhüttenstadt; Angelika Zielke, Engertsdorf; Petra Hebecker, Erfurt; Romy Sorge, Uwe Kucharz, beide Falkenberg; Rainer Fabianski, Falkensee; Kornelia Möller, Heike Reckenbeil, Thomas Kassel, Ellen Reum, Thomas Wingeß, Lutz Mittelsdorf, Marita Heß, Harald Laabs, Sabine Erb, Heiko Möller, Wolfgang Hensel, alle Fambach; Kathrin Meißner, Forst; Angela Marks, Frankenthal; Beret Brabec, Bernd Jäger, beide Frankfurt; Eva-Maria Anske, Freiberg; Falk Kehling, Freist; Heike Brüggemann, Friedeburgerhütte; Steffen Fleischer, Fockendorf; Sabine Blossey, Gademow; Viola Richter, Garitz; Christina Hesse, Claudia Hartung, Erika Schunke, Jörg Gärtner, Sybille Trümper, Robert Heise, alle Gerstungen; Astrid Bauer, Gnoien; Angelika Brose, Sylvia Kittelmann, Andreas Endtricht, Jens-Peter Würfel, alle Görlitz; Ralph Waldert, Gotha; Manuela Jarzinka, Heike Polley, beide Grapzow; Uwe Schindler, Martina Schmidt, beide Gräfenhainichen; Kerstin Hiller, Christof Herrmann, Torsten Abs, Franka Wölfel, Johanna Meuche, Detlef Riedel, Sabine Weinert, Simone Lütt, Evelyn Schmidt, alle Greifswald; Frank Rahnfeld, Greiz; Steffen Horbert, Grimma; Frank Grzeca, Grimmen; Bernd Dübe, Groß-Bademeusel; Bettina Glorius, Großbodungen; Uwe Müller, Gröbers; Wolfgang Müller, Großfurra; Matthias Weser, Großenhain; Ines Fabian, Groß Schacksdorf; Kerstin Voigtländer, Großweitzschen; Andrea Potthoff, Groß Wüstenfelde; Karola Mau, Groß Zarnewanz; Martina Ullrich, Uwe Bias, beide Guben; Bettina Dähn, Christine Bülow, beide Güstrow; Uwe Friedrich, Jens Folgmann, beide Halle; Jörg Uhlmann, Halle-Neustadt; Andreas Tölke, Heringen; Michael Schwarzkopf, Hettstedt; Christine Naß, Hinternah; Hartmut Müller, Hohen Neuendorf; Knut Bauer, Hohenstein-E.; Jörg Grohmann, Alf Droth, Michael Dietrich, Undine Nathan, Andreas Tetschke, Violetta Czok, Mathias Grundmann, alle Hoyerswerda; Matthias Riebisch, Ilmenau; Bernd Fliegner, Jarmen; Hardy Tempel, Jessen; Simone Winkler, Jemitz-Thumitz; Marina Richter, Jeßnigk; Hannelore Zschutzschke, Jüdenberg; Uwe Lüttig, Kalkstein; Dorit Zahn, Kandelin; Ulf Krause, Petra Quasdorf, Kathrin Bauer, Marko Hanke, Arnd Rösch, Ralf Hennig, Katrin Kempe, Wolfgang Riehl, alle Karl-Marx-Stadt; Christina Michel, Kaulsdorf; Gudrun Genzel, Kirchohmfeld; Kerstin Vogel, Kmehlen; Matthias Heinz, Dagmar Melzer, beide Kolochau; Mathias Mauermann, Krepta; Heiko Moritz, Kreischa; Olaf Kasten, Axel Hansow, beide Kloster; Joachim Richter, Anja Montag, beide Küllstedt; Ines Neubert, Krölpa; Klaus Breitsprecher, Krien; Armin Kaschner, Lauchhammer; Andrea Kellert, Leest; Andreas Bernstein, Lehmitz; Thomas Reimann, Eva Godehardt, Heimo Woitek, Peter Damaschke, Ute Kanngießer, Ines Weiß, alle Leinefelde; Gunnar Heller, Leisnig; Thomas Richter, Thomas Könze, Annette Göhde, Jens Rudolf, Birgit Hentze, Uwe Haberlandt, Uwe Körner, alle Leipzig; Roland Zippel, Leizen; Steffen Riemer, Silvia Görmer, Jörg Steinbach, Limbach-Oberfrohna; Günther Bronner, Harald Richter, beide Linz (Österreich); Jörg Teschner, Ludwigsfelde; Peter Witte, Löwenberg; Frank Kernbach, Lobenstein; Anne Brünner, Annett Weise, Katleen Weise, alle Löderburg; Peter Timm, Lübtheen; Torsten Jahnke, Lübz; Martina Lorenz, Lunow; Martina Wolf, Magdeburg; Detlev und Uwe Schröder, Malchow; Udo Kretschmann, Markneukirchen; André Wenzel, Meiningen; Gabriele Schüler, Mengersgereuth-H.; Andreas Cott, Menteroda; Elke Weiß, Merseburg; Ines Schulze, Christiana Pydde, beide Milmersdorf; Gunter Fix, Mittelbach; Eva-Maria Hille, Mittelndorf; Heike Dietzel, Frank Demczenko, Jens Güth, Lutz Neike, alle Mittelstille; Peter Stolze, Möhlau; Michael Schmidt, Mühlhausen; Kerstin Mauerhof, Nattwerder; Klaus Bolze, Naundorf; Liane Krümmling, Erika Trautvetter, beide Neuenhofe; Sula Hempel, Neusalza; Detlef Krohn, Neustrelitz; Michael Andrä, Niederspier; Frank Beilicke, Nordhausen; Volker Röckel, Oberlungwitz; Frank Böhm, Ramona Orlikowski, Sylvia Marr, Dagmar Motz, Brita Häfner, Cornelia Pfannschmidt, Petra Zimmermann, Peter Hucke, Brigitte Schmidt, Uwe Marr, Michael Peter, Marion Kern, Annette Johannes, Ingo Roßnick; Thomas Voigt, Bärbel Baumbach, Mathias Weisheit, alle Oberschönau; Matthias Theurich, Helga Lange, Annette Lange, Uta Rößler, alle Olbersdorf; Birgit Beran, Jörg Vetter, Klaus Meier, Petra Denkewitz, Doris Basler, Uwe Kusmirek, Peter Massag, Andrea Fesser, alle Osternienburg; Antje Langer, Uwe Langer, beide Oybin; Arno Rockmann, Pansfelde; Ute Möllhoff, Piesau; Holger Haußner, Peuschen; Klaus-Michael Bull, Penzlin, Bernd Sollmann, Pirna; Annegret Naumann, Dagmar Naumann, Angela Kusmierek, alle Pißdorf; Jens Kipping, Plottendorf; Barbara Jendrezjeska, Poggendorf; Heidrun Thiel, Popitz; Karsten Freye, Reinhard Mummelthey, Rainer Nizze, Jens Jacobi, alle Potsdam; Jens-Peter Planke, Sigrid Planke, beide Premnitz; Bärbel Kenner, Pulsnitz; Sylvia Bollinger, Raddingsdorf; Uwe Poppe, Frank Berndt, beide Radeburg; Gunter Bürschnick, Rackwitz; Uwe Hadamik, Radebeul; Michael Thamm, Sybille Behrens, Kerstin Neubert, alle Ribnitz; Jana Walter, Röbel; Heike Jentsch, Rödern;. Volker Siebenhaar, Roßdorf; Hans-Georg Lobert, Roßleben; Dörthe und Mathias Bethge, Wolfram Bütow, alle Rostock; Petra Forner, Bodo Pfuhl, Kerstin Meier, alle Rotta; Matthias Reinhardt, Rudolstadt; Beate Floeter, Bernd-Peter Günther, Helmut Engelmann, alle Sachsendorf; Anne Baumgart, Salow; Angela Sakowski, Saßnitz; Jens-Uwe Otto, Sangerhausen; Kurt Rödiger, Scherbda; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Marina Herzog, Schlottwitz; Carmen Güth, Dietmar Müller, Claudia Pansold, Martin Tengler, Peter Hucke, alle Schmalkalden; Torsten Jeschke, Schwarzheide; Frank Templin, Schwerin; Angela Beinio, Kerstin Reich, beide Siedenbollentin; Volker Böhme, Silberhausen; Heike Hohnstein, Uta Pfeiffer, Sabine Moldauer, Barbara Tschada, Ronald Bandisch, Karsten Libbertz, Simone Mahlow, Ronald Süß, alle Sondershausen; Christine Kosmehl, Senftenberg; Volker Steuer, Spremberg; Bodo Ußfeller, Roswitha Nattermann, Birgit Wilhelm, Hartmut Beran, Udo Büchner, alle Springstille; Claudia Schlegel, Stadtroda; Thomas Eichhorn, Steinach; Petra Kiehm, Annedore Döll, Andrea Möller, Gerald Manske, Tamara König, Jens Hoffmann, Sabiene Bahner, Christine Munk, Carmen Döll, Andrea Hoffmann, Peter Nickel, Frank Reumschüssel, Birgit Hoffmann, Sabine Menz, Ines Semmelrogge, Monika Simmnik, Marion König, Kerstin Nothnagel, Kerstin Rothämel, Carola Holland-Letz, Angela Bieber, Sabine Munk, Marion Wolff, Petra Koch, Anita Knoth, Bärbel Margraf, Anette Mänger, Birgit Heidenreich, Silvia Frank, Steffi Marr, Heike Wilhelm, Andreas Holland-Moritz, Rudi Holland-Moritz, Eberhard Wahl, Sabine Wilhelm, Kerstin Scheerschmidt, Andreas Günnel, alle Steinbach-Hallenberg; Angela Tertin, Bianca Lettow, Silvia Heidrich, Lutz Dettmann, Marion Buckmann, Bernd Bethge, Andreas Wallmann, Viola Becker, Carola Franck, Carmen Hein, Viola Frank, Thorsten Ladwig, Andrea Reinhard, Torsten Perleberg, alle Stralsund; Beate Balla, Strausberg; Andreas Wilk, Suhl; Matthias Sievert, Thomas Hantel, beide Teterow; Michael Hauff, Teuchern; Hans Creutzburg, Ruth Tschernenka, beide Thal; Bernd Hartwig, Ute Ribbe, Ingrid Esch, Henry Ribbe, alle Thaldorf; Heike Carlsen, Titschendorf; Carola Zinger, Lothar Hennig, beide Töplitz; Detlef Barop; Michael Rehm, beide Torgau; Detlef Müller, Sylke Meier, beide Torgelow; Roland Franke, Tornau; Kathrin Ebeling, Manuela Ritsche, beide Trebbichau; Ingo Lämmel, Ursula Klimpke, Andrea Neyer, alle Treben; Annegret Wolf, Ina Reich, beide Trusetal; Bettina Wassermann, Ellen Krüger, Jürgen Graf, Andrea Wolter, Roland Lehmann, alle Uebigau; Dietmar Ulbricht, Velten; Jürgen Prestin, Waren; Sabine Stolpe, Andreas Möckel, Ralf Kurch, Dorit Lehmann, alle Weimar; Karin Seidel, Kerstin Koch, Frank Grabein, Yvonne Ruß, alle Weißwasser; Olaf Lenz, Anett Klengel, Birgit Kohn, alle Weixdorf; Steffen Grunewald, Werder; Uwe Schantora, Wernshausen; Christiane Kern, Bodo Vogel, Babette Rudolph, Ilona Thierbach, alle Wellmitz; Anette Blödner, Wiederitzsch; Matthias Keßler, Steffi Voigt, Heike Vießmann, alle Wilkau-Haßlau; Gabriele Lawrenz, Wittenberge; Heike Senft, Wingerode; Anke Müller, Cordula Genseburg, beide Wolgast; Elisabeth Giese, Volker Bergner, Uwe Felsberg, alle Worbis; Antje Schultheiß, Wüstenbrand; Jens Mucke, Christoph Chojetzki, beide Zeithain; Stefan Möbius, Zella-Mehlis; Michael Gruhn, Zepernick; Michael Kändler, Ines Grigoleit, Stefan Gondlach, Michael Steurich, Udo Matzner, Roger Voigt, Gerald Sommer, Angelika Schubert, Heike Grigoleit, Gabriele Herzig, Bettina Lehmann, Uta Hochberger, alle Zittau; Ute Baumann, Zschocken; Ramona Franke, Zschornewitz; Jörg Georgi, Zwickau; Dirk Dalisda.



ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Vorbildliche Schule

Schüler und Mathematiklehrer der Oberschule Ernst Thälmann in Steinbach-Hallenberg legten zu Ehren des IX. Parteitages und des X. Parlaments der FDJ Rechenschaft über ihre Arbeit in den zurückliegenden Jahren ab. Sie konnten stolz auf eine erfolgreiche Bilanz sein:
24 1. Preise bei den Kreisolympiaden, vier 1. Preise, zwei 2. und drei 3. Preise bei den Bezirksolympiaden. Zwei Schüler nahmen an einer DDR-Olympiade teil und belegten einen 4. Platz bzw. erhielten eine Anerkennungsurkunde für die originelle Lösung einer Aufgabe.
Was sind die Gründe für diese erfreulichen Ergebnisse?
Als im Jahre 1962 der „Mathematikbeschluß" veröffentlicht wurde, begann man an der OS Steinbach-Hallenberg sofort, mathematisch interessierte und talentierte Schüler für jeweils sechs Arbeitsgemeinschaften zu gewinnen und systematisch zu fördern. Die im Jahre 1967 erstmals erscheinende *alpha* fand in Steinbach-Hallenberg sofort viele Freunde und wurde zu einem ständigen Helfer in Unterricht, Arbeitsgemeinschaft und Freizeit. Die Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb wurde dabei nicht dem Selbstlauf überlassen. Alle Teilnehmer erkannten den Vorteil der regelmäßigen Beteiligung für die Entwicklung mathematischen Wissens und Könnens und lösten durch ihre Initiative eine Wettbewerbsatmosphäre zwischen den einzelnen Klassen aus. Um den Wettbewerb beobachten und steuern zu können, wurden die Namen der Teilnehmer, die Anzahl der abgegebenen Lösungen und die erteilten Prädikate durch einen verantwortlichen Schüler erfaßt und an einer Wandzeitung veröffentlicht.
Mit Abschluß des Schuljahres 1975/76 wurde im *alpha*-Wettbewerb folgendes Ergebnis erzielt: 11298 eingereichte richtige Lösungen, 964 Urkunden und Abzeichen, davon 245 in Gold und 719 in Silber.
Damit ist diese Schule seit Bestehen des *alpha*-Wettbewerbs die aktivste in der DDR. Für diese hervorragende kollektive Leistung sprechen wir allen Jungen Mathematikern und ihren Betreuern unseren Dank und unsere Anerkennung aus und wünschen weiterhin viel Erfolg in der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik

Redaktion alpha

Leser schreiben an alpha

● Der *alpha*-Wettbewerb hat mich stets zum Denken angeregt. Weiter so!

Diana Hiller, Altenburg

● 5. Sept. 76: Anbei sende ich Euch 79 Karten des *alpha*-Wettbewerbs. Ich löse die Aufgaben sehr gern. Sie haben mir geholfen, als Schüler der 6. Klasse in der Klassenstufe 8 erster Preisträger der Kreis- und Bezirksolympiade in Görlitz, Dresden, Jelenia Góra und Lubań (VR Polen) zu werden.

Bodo Heise, Görlitz

● Ich finde die *alpha* sehr vielseitig und interessant. Ich löse die Aufgaben jedes Heftes sehr gern. Sie trugen dazu bei, daß ich im Fach Mathematik auf einer glatten Eins stehe. *Sabine Marx, Karl-Marx-Stadt*

● Im Mathe-Club der Stadt Wismar nehme ich mit viel Freude teil. Wir begeistern immer mehr Mitglieder aus der AG für die Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb.

Silke Gabriel, Wismar

● Liebe *alpha*! Ich lese Dich noch nicht lange. Ich finde Deine Beiträge interessant. Ich bin begeistert, daß im Wettbewerb nun auch Physik- und Chemieaufgaben enthalten sind. *Heiko Richter, Elsterwerda*

● Die *alpha* gefällt mir eigentlich ganz gut. Aber vielleicht könnten Sie mehr Berufsbilder bringen? *Kerstin Geisler, Neu-Prenzlin*

● Das Lösen der *alpha*-Aufgaben macht allen Zirkelteilnehmern sehr viel Spaß und regt die Schüler an, für den Wandzeitungswettbewerb unserer Schule Aufgaben zu stellen. Einige dieser Aufgaben stellen wir dem *alpha*-Wettbewerb zur Verfügung.

AG Mathematik Deutschenbora

● Mir gefällt die *alpha* gut! Oft rechnet bei uns sogar die ganze Familie mit!

Maria Schönfeld, Karl-Marx-Stadt

● Ich finde die *alpha* schön knifflig und interessant... Könnt Ihr nicht die Aufgaben noch mehr bildlich (auch witzig) darstellen?

Birgit Barth, Wolfen

● ...Ich fand das „kleine Sprachlexikon" sehr gut. Eure Zeitschrift war mir eine sehr gute Hilfe für die Olympiaden und die Abschlußprüfung in Mathematik (Übung macht den Meister). *Volker Schulz, Nauen*

● ...Von 250 Schülern unserer Schule sind 40 Leser der *alpha*. Wir senden Euch in Kürze Aufgaben, die die Schüler selbst erdacht haben. *AG-Leiter K. Schulze, Himmelsberg*

● Das mathematische Sprachlexikon stellte für mich eine große Hilfe dar, denn ich lerne in einer R-Klasse seit dem dritten Schuljahr Russisch und seit der siebenten Klasse Englisch. Ich möchte ja auch einmal mathematische Bücher in der Originalsprache lesen und daraus lernen. *Frank Erdmann, Zeitz*

● ...Ich würde es begrüßen, wenn die angewandte Mathematik z. B. in Physik, Chemie oder Wirtschaftsstatistik in der *alpha* noch mehr berücksichtigt würde.

Guido Blosfeld, Halle

● Die *alpha*, schon oft half sie mir, doch ebenso viele Male stellte sie mich vor Probleme. – Ich will auch nicht verschweigen, daß ich, wenn diese gelöst, auch etwas Stolz verspüre. Alles ist vergessen, wenn ich in ihr lese. Es macht einfach Spaß, neues Wissen zu erwerben, neue Wege zu gehen.
Aber wer denkt, in ihr stände nur Theorie, der irrt sich! Sogar der Humor spielt bei ihr eine Rolle. Lies sie! Und du wirst staunen, was du aus der *alpha* alles lernen kannst.

Ilona Wünsche, Rodewitz

● Ich komme aus der Mongolischen Volksrepublik. In Leipzig kaufte ich mir die *alpha*. Die Aufgaben sind für mich sehr interessant. Ich übersende Ihnen vier Aufgaben für den *alpha*-Wettbewerb.

P. Altanzog, z. Z. Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle

---

Mit dieser Vignette sagen wir Dank all den fleißigen Helfern, die unsere Jungen Mathematiker mit Rat und Tat unterstützten.

„Es ist mein AG-Leiter!"