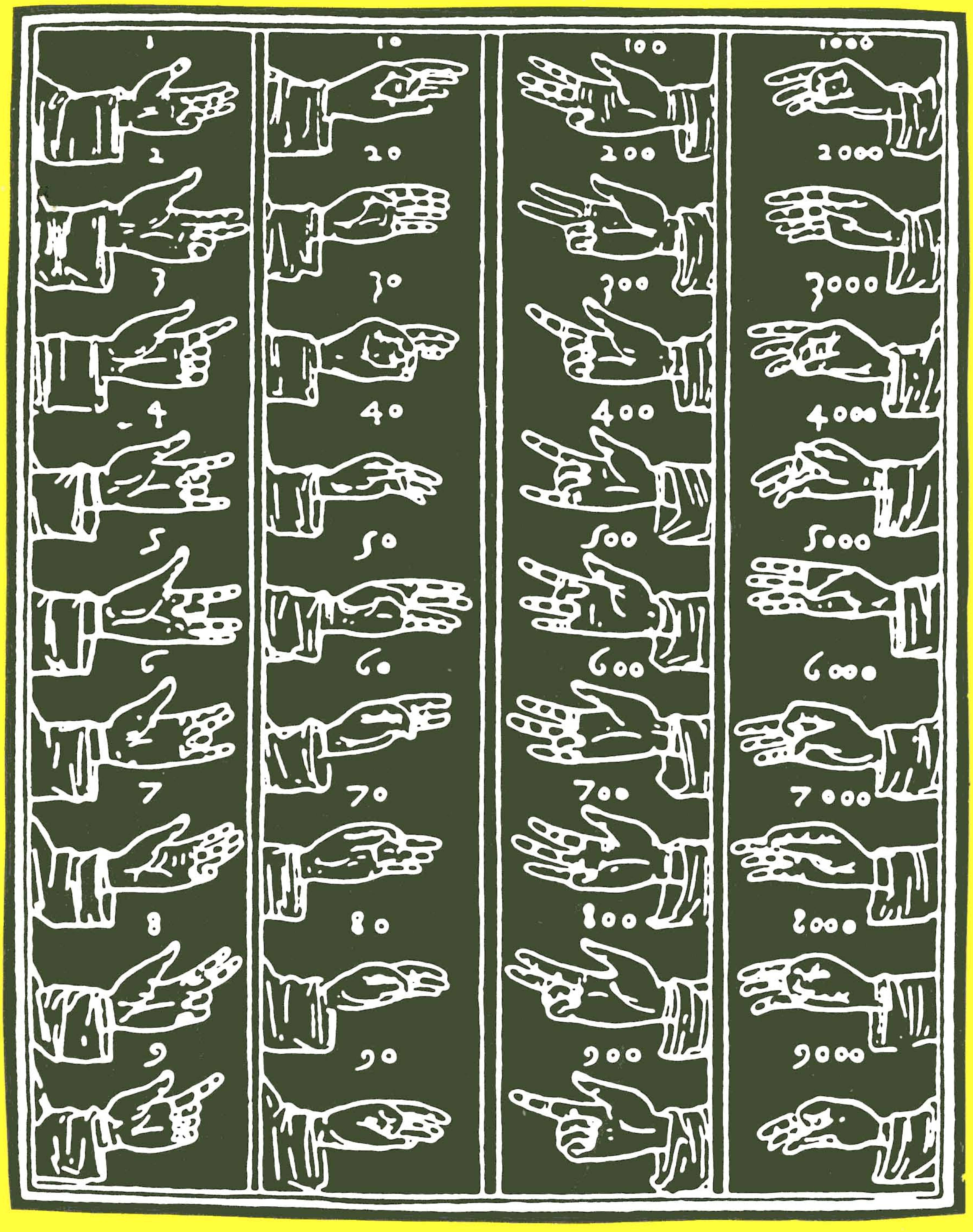
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



4

Volk und Wissen Verlag Berlin
24. Jahrgang 1990
Preis 1,50 DM
ISSN 0002-6395

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presse- und Informationsdienstes der Regierung der DDR
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 DM, im Abonnement zweimonatlich 1,20 DM. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel: für das osteuropäische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Dr. R. Thiele (S. 73/74/89); G. Stelzer (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto, Leipzig
Techn. Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einem historischen Holzschnitt
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

73 Eine mathematische Exkursion rund um das Wahlrecht
Dr. H.-J. Scharfenberg, Hochschule für Recht und Verwaltung, Potsdam-Babelsberg

74 Weißt du, wieviel Sternlein stehen? Teil 2
Dr. R. Thiele, K.-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und Naturwiss. der K.-Marx-Universität Leipzig

76 Wie lange bekommt eine Wand Sonne?
StR A. Zenkert, Potsdam

78 Gerechte und ungerechte Würfelspiele, Teil 2
Dr. G. Lorenz, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin

80 Mathematik und das Fahrrad von Olaf Ludwig
Dr. E. Warmuth/Dr. W. Warmuth, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin/Ingenieurhochschule Berlin

82 Läßt sich der Zufall berechnen? Teil 2
W. Träger, VEB Organisations- und Abrechnungszentrum Leipzig, BT Döbeln

84 In freien Stunden · alpha-heiter
Zusammenstellung: Dr. G. Liebau, Leipzig

86 Eine Aufgabe für den Schulrechner SR 1
Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

88 Was ist eine Delaunay-Triangulierung?
Dr. W. Moldenhauer/Dr. K. Wetwitschka, Sektion Mathematik der Pädag. Hochschule „Dr. Th. Neubauer“, Erfurt

90 XXX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
Aufgaben der Schulolympiade

92 Über einfache Gewinnstrategien
OStR Th. Scholl, Berlin

93 alpha-Schachseite
H. Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin,
stud. phys. M. Spindler, Sangerhausen

94 Lösungen

IV. U.-Seite: Auf den Spuren von Mathematikern
A. Schmidt, NEG Greifswald

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 12. April 1990
Auslieferungstermin: 9. August 1990

Alphons weist euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

Eine mathematische Exkursion rund um das Wahlrecht

Das Wahlrecht ist in unserem Lande in die öffentliche Diskussion gerückt. Innerhalb kurzer Zeit wurden die Volksvertretungen unseres Landes neu gewählt. Um zu erreichen, daß die vom Wähler abgegebene Stimme letztlich zu einem handlungsfähigen Parlament führt, muß die Mathematik angewendet werden.
Am einfachsten ist dies beim Mehrheitswahlrecht. Das Wahlgebiet (das Land, der Bezirk, der Kreis, die Stadt oder Gemeinde, der Stadtbezirk) werden dazu in eine bestimmte Zahl von Wahlkreisen untergliedert. In diesen Wahlkreisen sind jeweils ein oder mehrere Abgeordnetensitze zu vergeben. Um diese Abgeordnetensitze bewerben sich in der Regel mehrere Kandidaten. Im Falle des **absoluten Mehrheitswahlrechts** erhält derjenige Kandidat einen Sitz im Parlament, der mehr als 50 % der abgegebenen Stimmen erhalten hat.
Ein Beispiel: In einem Wahlkreis wurden 21 300 Stimmen abgegeben. Der Kandidat A hat 11 200 Stimmen, der Kandidat B 6 400 Stimmen und der Kandidat C 3 700 Stimmen erhalten. Für den Abgeordnetensitz werden mehr als 50 % der Stimmen, also in diesem Falle mindestens 10 651 Stimmen benötigt. Das bedeutet, daß Kandidat A die Wahl gewonnen hat.
Beim **relativen Mehrheitswahlrecht** reicht die relative Mehrheit der abgegebenen Stimmen zur Erlangung des Parlamentssitzes, d. h. gewonnen hat derjenige Kandidat, der im Verhältnis zu den anderen Kandidaten die meisten abgegebenen Stimmen auf sich vereinigen kann.
Auch dazu ein Beispiel: Von den in einem Wahlkreis abgegebenen 16 490 Stimmen entfallen auf den Kandidaten A 2 321, den Kandidaten B 791, den Kandidaten C 5 322, den Kandidaten D 4 293 und den Kandidaten E 3 763 Stimmen. Gewonnen hat der Kandidat C, der mit 5 322 Stimmen die relative Mehrheit bekommen hat.
Das Mehrheitswahlrecht hat den Nachteil, daß nur die für den siegreichen Kandidaten abgegebenen Stimmen erfolgreich sind, während beim 1. Beispiel 47,4 % der Stimmen verfallen und beim 2. Beispiel sogar nur 32,3 % Stimmenanteil für einen Abgeordnetensitz ausreichen.
Etwas komplizierter ist die Berechnung bei Anwendung des **Verhältniswahlrechts.** Beim Verhältniswahlrecht kommt es darauf an, die für die Kandidatenlisten von Parteien abgegebenen Stimmen proportional in Parlamentssitze umzurechnen.
Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten. In der Weimarer Republik kam zum Beispiel ein **automatisches Verfahren** zur Anwendung, nach dem ein bestimmter Stimmenanteil für die Zuteilung eines Abgeordnetensitzes gesetzlich festgelegt wurde.
Ein Beispiel: Im Wahlgebiet wurden 63 752 319 Stimmen abgegeben. Gesetzlich werden 120 000 Stimmen für einen Abgeordnetensitz vorgeschrieben.
Die Partei A erhält 18 372 500 Stimmen, die Partei B 21 273 184 Stimmen, die Partei C 10 200 243 Stimmen und die Partei D 13 906 392 Stimmen. Die Umrechnung dieser Stimmen in Abgeordnetensitze ergibt folgende Ergebnisse:
Partei A: 153 Sitze; Partei B: 177 Sitze;
Partei C: 85 Sitze; Partei D: 115 Sitze.
Damit sind im Parlament insgesamt 530 Abgeordnete vertreten.
Das Wahlrecht kennt neben den automatischen auch mathematische Verfahren.
Ein solches mathematisches Verfahren ist das **Auszählverfahren nach d'Hondt.**
Ein Beispiel: In einem Wahlkreis sind insgesamt 14 700 Stimmen abgegeben worden. Es stehen 12 Abgeordnetensitze zur Verfügung. Die Partei A hat 7 100, die Partei B 4 200 und die Partei C 3 400 Stimmen erhalten.

		A	B	C
Stimmenzahl	1	7 100 (1)	4 200 (2)	3 400 (4)
dividiert durch:	2	3 550 (3)	2 100 (6)	1 700 (8)
	3	2 366 (5)	1 400 (10)	1 133 (12)
	4	1 775 (7)	1 050	850
	5	1 420 (9)	840	680
	6	1 183 (11)	700	566

Nachdem die für die einzelnen Parteien abgegebenen Stimmen durch 1, 2, 3 usw. dividiert wurden, werden die 12 größten Quotienten (da 12 Abgeordnetensitze zu vergeben sind) der Reihenfolge nach numeriert. Die Anzahl der durchzuführenden Divisionen richtet sich nach der Anzahl der Abgeordnetensitze. Nach diesen Rechenoperationen erhält die Partei A 6 Sitze, Partei B 3 Sitze und die Partei C ebenfalls 3 Sitze.
Bei den Wahlen in der DDR kommt das sogenannte **Hare-Niemeyer-Verfahren** zur Anwendung.
Auch hierzu ein Beispiel:
Wir gehen wieder von 12 Abgeordnetensitzen und 14 700 abgegebenen Stimmen aus, die sich wie im obigen Beispiel auf die einzelnen Parteien verteilen. Nach dem Hare-Niemeyer-Verfahren wird die Gesamtzahl der Sitze (a) multipliziert mit der für eine Partei abgegebenen Stimmen (b) und dividiert durch die Gesamtzahl der abgegebenen Stimmen (c), d. h.

$d = \frac{a \cdot b}{c}$, wobei $a = 12$, $c = 14\,300$ gilt.

Nach entsprechenden Berechnungen ergibt sich folgende Übersicht:

		A	B	C
Stimmenzahl	(b)	7 100	4 200	3 400
Quotient	(d)	5,79	3,43	2,77
Sitze	(e)	5	3	2
plus Sitze	(f)	1		1
Gesamtsitze	(e+f)	6	3	3

Die Ziffern vor dem Komma ergeben die Zahl der Abgeordnetensitze (e), die jeder Partei zustehen. Die danach noch verbleibenden Sitze ($f = a - e$) werden nach der Anzahl der Zehntel bzw. Hundertstel nach dem Komma vergeben. *H.-J. Scharfenberg*

Merkwürdiges Rechnen

Wie leicht zu bestätigen ist, gelten $\frac{9}{6} - \frac{6}{10} = \frac{9}{10}$ und $\frac{25}{5} - \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$. Es sind alle geordneten Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen a, b und c zu ermitteln, die die Gleichung $\frac{a}{b} - \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ erfüllen!
Angenommen, das Tripel $(a; b; c)$ mit $a, b, c \in N$ und $bc \neq 0$ ist Lösung. Durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung $\frac{a}{b} - \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ mit dem gemeinsamen Nenner bc ergibt sich $ac - b^2 = ab$ und durch weitere äquivalente Umformungen $a(c - b) = b^2$. Insbesondere muß also auch $a \neq 0$ gelten. x^2 mit $x \in N$ sei die größte Quadratzahl, die Teiler von a ist und y^2 mit $y \in N$ die größte Quadratzahl, die Teiler von $c - b$ ist. Mit geeigneten natürlichen Zahlen m und n gilt dann $a = mx^2$ und $c - b = ny^2$.
In der Primfaktorzerlegung von m und auch in der von n kann kein Primfaktor mehr als einmal auftreten. Denn ist p eine Primzahl und würde p^2 Teiler von m gelten, so wäre im Widerspruch zur Maximalauswahl von x^2 die Quadratzahl $(px)^2 > x^2$ ein Teiler von a.
Aus $b^2 = a(c - b) = mx^2ny^2$ folgt nunmehr $m = n$ und wegen $b, m, x, y \in N$ auch $b = mxy$. Aus $c - b = my^2$ ergibt sich schließlich
$c = b + my^2 = mxy + my^2 = my(x + y)$. Da die benutzten Umformungen äquivalent sind, erfüllen für alle von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen m, x und y die Tripel $(a; b; c)$ mit $a = mx^2$, $b = mxy$ und $c = my(x + y)$ und nur diese die Gleichung $\frac{a}{b} - \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$.
Es gibt also unendlich viele Lösungstripel $(mx^2; mxy; my(x + y))$ mit $m, x, y \in N$ und $mxy \neq 0$. Für $m = 1$, $x = 3$ und $y = 2$ ergibt sich z. B. $(9; 6; 10)$. *W. Träger*

Weißt du, wieviel Sternlein stehen?

Die Entwicklung der Zahlwörter und Zahlzeichen

Teil 1

Wir hatten uns bereits im ersten Teil überlegt, wie weitgehend Zahlen in unser Alltagsleben eingedrungen sind. Jeder, der schon einmal im Ausland gewesen ist, hat die international einheitliche Zahlenschreibweise schätzen gelernt. Auch wenn die Sprachkenntnisse nicht mehr ausreichten, der aufgeschriebene Kaufpreis oder die notierte Zugabfahrt waren ohne weiteres verständlich.
Benannt werden die von uns gebrauchten Ziffern nach den Arabern, erfunden wurden sie aber in Indien. – Kurioserweise benutzt man jedoch heute sowohl in Arabien als auch in Indien noch Ziffernschreibweisen, die nicht dem heutigen Standard der „arabischen Ziffern“ entsprechen.
Die älteste Form, Mengenangaben „schriftlich“ festzuhalten, dürfte das Einkerben gewesen sein: für jedes Mengenelement wurde eine Kerbe auf einem Holzstück angebracht. Die ältesten Zahlenschriften lassen ihren Ursprung im Kerben erkennen, etwa die chinesischen Bambusziffern (vgl. Bild 1). Die Zahlzeichen der Mayas wiederum verarbeiten das Zählen mit Hilfe von Steinchen (vgl. Bild 2).
Da das Aneinanderreihen gleicher Zeichen bei größeren Zahlen zu unübersichtlichen Zeichenfolgen führt, wurden Folgen von Kerben strukturiert, und schließlich ersetzte man eine bestimmte Menge von Kerben durch ein neues Zeichen. Das ägyptische Ziffernsystem arbeitete für die Zahlen von 1 bis 9 mit einfachen Strichen (= Kerben); die 10 wurde durch ein einem auf dem Kopf stehenden U ähnelnden Zeichen wiedergegeben (vgl. Bild 3). Die Zehner wurden mit diesem Zeichen notiert, 10 solcher Zehner wurden durch eine neue Hieroglyphe bezeichnet usw. Um 3000 v. u. Z. sind auf einem Denkmal, das das älteste bekannte Zeugnis für Hieroglyphen

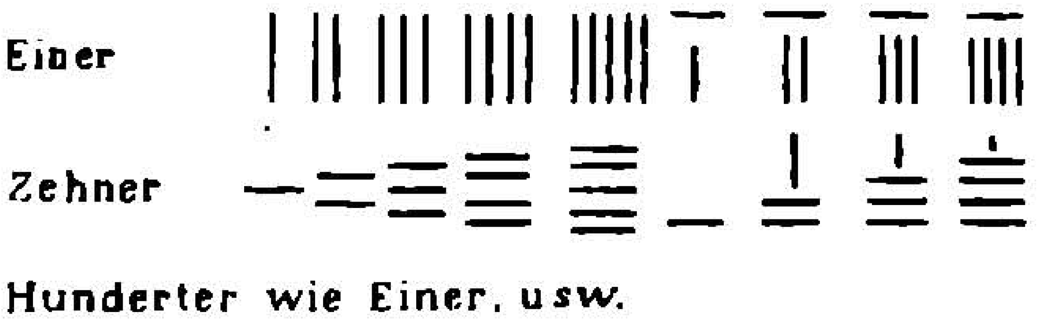


Bild 1
Chinesische Bambusziffern

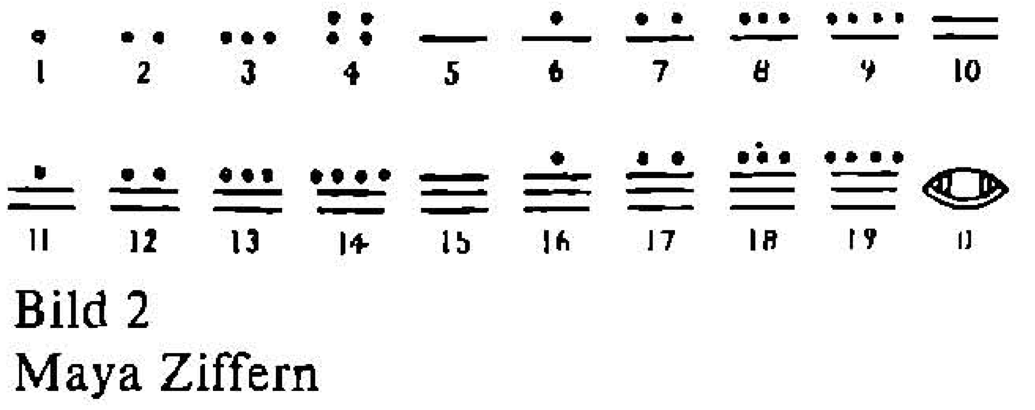


Bild 2
Maya Ziffern

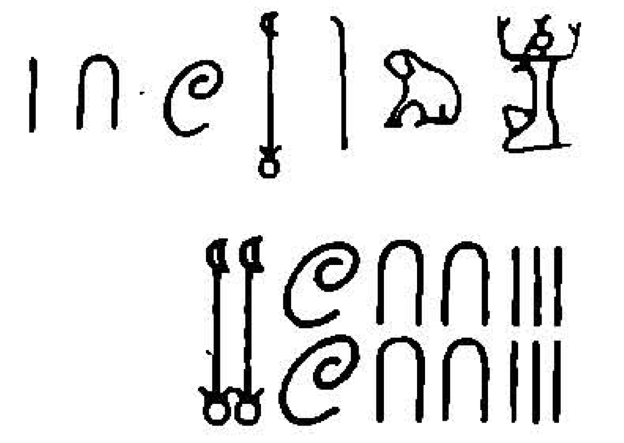


Bild 3
Ägyptische Hieroglyphen. Die obere Reihe zeigt von links nach rechts die Zahlen 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 (Frosch) und 1 Million (Luftgott). Die untere Reihe zeigt die Zahl 2 246.

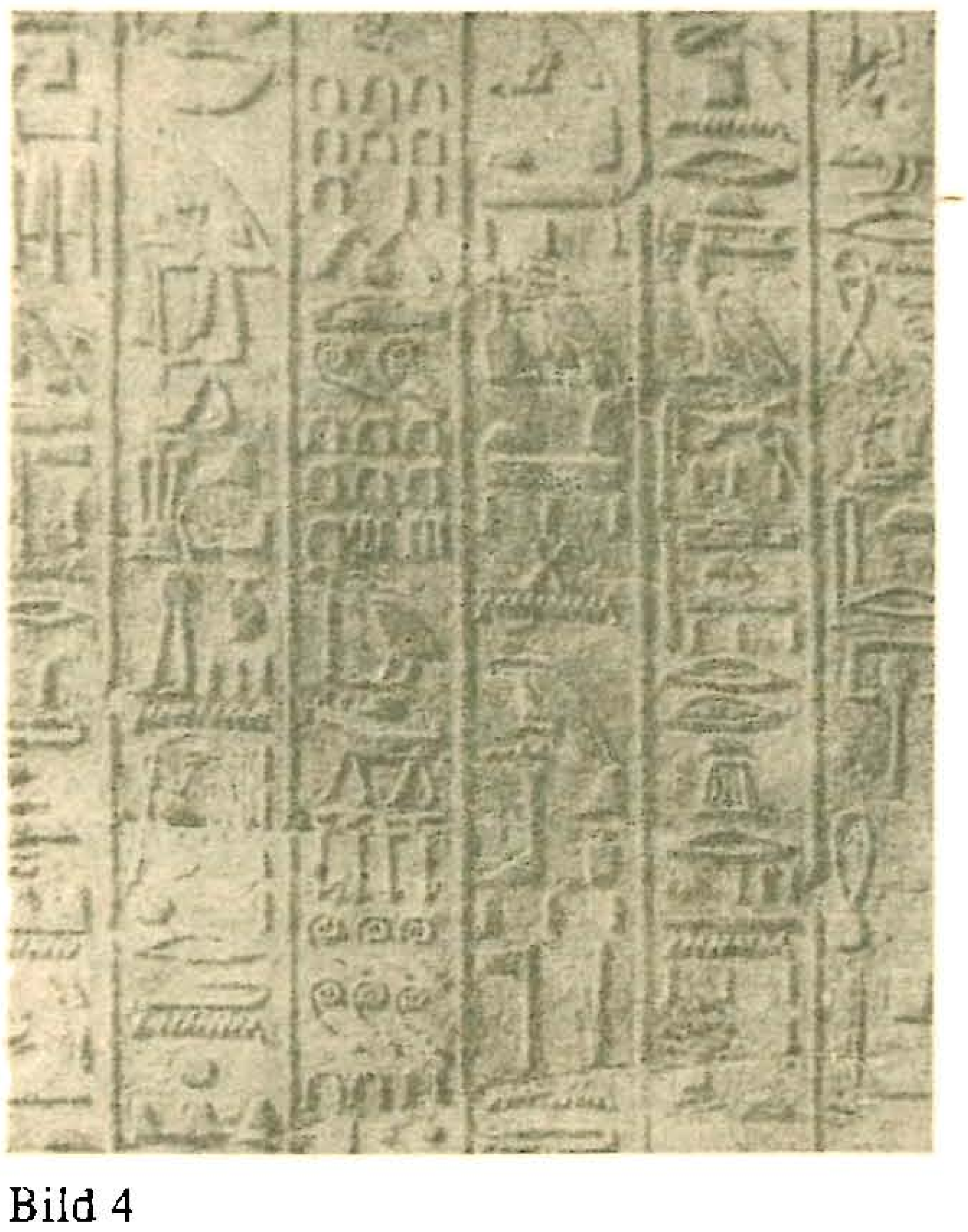


Bild 4
Ein ägyptischer Hieroglyphentext mit Zahlzeichen aus der Zeit um 1500 v. u. Z. (3. Spalte von links).

ist, bereits die riesigen Zahlenangaben 120 000 Gefangene, 400 000 erbeutete Rinder und 1 422 000 erbeutete Ziegen bei einem Kriegszug des Königs Narmer gemacht. Die propagandistische Übertreibung bei der Siegesmeldung (schon damals üblich) interessiert uns nicht, für uns ist die Fähigkeit der Ägypter bemerkenswert, derart große Zahlen aufschreiben zu können (vgl. Bild 4).
Die ägyptische Zahlschreibweise führte aber in eine Sackgasse, da sich diese Art der Zahldarstellung zwar recht gut für das Zählen und Weiterzählen (Addieren) eignet, aber Multiplikations- oder Divisionsverfahren nicht sehr angepaßt ist. Beim praktischen Gebrauch schliffen sich die „Schönschreibweisen“ der Hieroglyphen immer mehr ab, so daß die ägyptische Schreibschrift schließlich sehr viele individuelle Zeichen für die Ziffern besaß, was das Algorithmisieren des Rechnens außerordentlich behinderte und erschwerte (vgl. Bild 5).

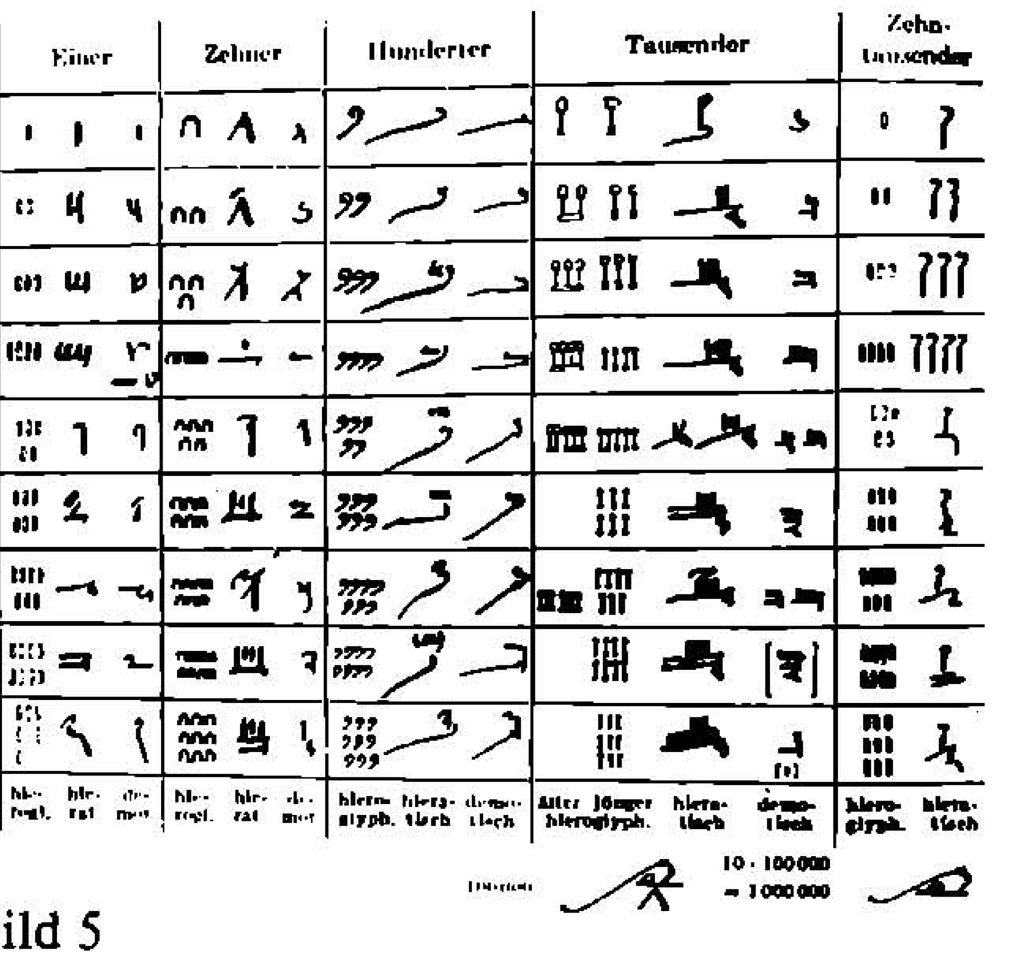


Bild 5
Zahlzeichen in hieroglyphischer und daraus abgeleiteten „Schreibschriften“. Die Verzifferung ist deutlich zu erkennen.

Das andere Extrem einer Verzifferung ist die Dualschreibweise. Hier reichen zwei Ziffern (in der Regel sind es die Zeichen 0 und L), um jede beliebige natürliche Zahl zu notieren. Der Nachteil des geringen Zeichenbestandes zeigt sich in der „Länge“ großer Zahlen, bereits 4 wird dual mit drei Ziffern L00 geschrieben. Computer stört das nicht so sehr, denn günstig ist bei ihnen die Möglichkeit, den Ziffern 0 und L zwei elektrische Ladungszustände im Rechenwerk zuordnen zu können.
Die Grundlage des Dualsystems ist das Zusammenfassen in Zweiergruppen. Die Ägypter benutzten wie auch wir Zehnergruppen. Die Babylonier faßten nach einigen Vorformen ihre Zahlenangaben in 60er Einheiten zusammen, modern geschrieben:
$z = a_n 60^n + a_{n-1} 60^{n-1} + \ldots + a_1 60 + a_0$
$(a_i = 0, 1, 2, \ldots, 59$ für $i = 1, \ldots, n)$.
Auch die babylonische Keilschrift benutzt für die ersten neun Zahlen Zeichen, die an Kerben erinnern (vgl. Bild 6). Für die 10 erscheint ein neues Zeichen; die Zahlen zwischen 10 und 60 werden aus beiden Zeichenarten kombiniert (vgl. Bild 7).

Bild 6
Keilschrift. Zahlzeichen von 1 bis 10

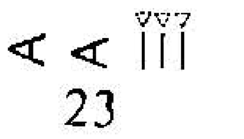


Bild 7
Die Zahl 23 in Keilschrift

Sollen Zahlen über 60 hinaus dargestellt werden, greift man auf ein Stellensystem zurück. Damit können die alten Zahlzeichen weiter benutzt werden. Der Wert eines Zeichens ist nicht absolut (wie bei den Ägyptern), sondern hängt von dessen Stelle ab. Das ist uns von den arabischen Ziffern her vertraut. Ein Beispiel: die Ziffer 2 steht für unterschiedliche Werte in 22.

Das Keilschriftsystem weist aber gegenüber der arabischen Zahlschreibweise einen Mangel auf: die Null fehlt. Die Null ermöglicht es, eine Leerstelle zu markieren, also beispielsweise anzuzeigen, daß in 204 keine Zehner vorhanden sind. Andererseits weist 30 darauf hin, daß keine Einer erscheinen. Die Keilschrift ist aus diesem Grund mehrdeutig. Auch wenn der Schreiber für fehlende Einheiten einen Leerraum ließ, war dieser doch subjektiv und ersetzte das Schreiben von Nullen nicht. Beispielsweise lassen sich zwei Keile so deuten (vgl. Bild 8):

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &= 2 \\ &= 1 \cdot 60 + 1 = 61 \\ &= 1 \cdot 60^2 + 1 = 3\,601 \\ &= 2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 0 = 7\,200 \end{aligned}$$

Bild 8
Vieldeutigkeit der Keilschrift. Das Fehlen der Null (oder eines Leerraumzeichens) macht die Lesung der Zahlen mehrdeutig.

Der Rechner, der die Zahlen aufschrieb, hatte jedoch aus der Aufgabenstellung heraus eine Vorstellung von deren Größe. Damit beseitigte er die Unbestimmtheit, die für uns besteht. Das uns irritierende Verfahren hat so Jahrhunderte gut funktioniert. Das Keilschriftsystem hat gegenüber den ägyptischen oder römischen Ziffern einen gewaltigen Vorteil. Weil sich die Positionen der Ziffern nicht eindeutig festlegen lassen, können zwei Keile auch als

$2 \cdot 60^{-1}$ oder $1 \cdot 60^{-1} + 1 \cdot 60^{-2}$

usw. gedeutet werden. Damit können Brüche problemlos dargestellt werden und wie natürliche Zahlen in die Rechenschemata einbezogen werden.

Die Griechen benutzten zwei Zahlschreibweisen. Die herodianischen Zahlen greifen auf die Anfangsbuchstaben der Zahlwörter zurück:

Π = 5 Penta (Π ist eine alte Schreibweise des Pi),
Δ = 10 Deka,
H = 100 Hekaton.

Interessant ist dabei eine Multiplikationsschreibweise:
$50 = 5 \cdot 10$ wurde ΠΔ geschrieben, entsprechend ΠH $= 500 = 5 \cdot 100$ usw. Die ionischen Zahlzeichen sind mit den 24 Buchstaben des griechischen Alphabets identisch, wobei noch drei alte Buchstabenformen aufgenommen wurden, damit 27 Zeichen für die drei Gruppen von Einern, Zehnern und Hundertern zu je 9 Ziffern vorhanden waren. Die Multiplikation mit 1000 wurde durch einen Strich links vom Buchstaben notiert. Um in einem geschriebenem Text Zahlen nicht mit Wörtern zu

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Einer	Α'	Β'	Γ'	Δ'	Ε'	Ϛ'	Ζ'	Η'	Θ'
	α'	β'	γ'	δ'	ε'	ς'	ζ'	η'	θ'
Zehner	Ι'	Κ'	Λ'	Μ'	Ν'	Ξ'	Ο'	Π'	Ϙ'
	ι'	κ'	λ'	μ'	ν'	ξ'	ο'	π'	ϙ
Hunderter	Ρ'	Σ'	Τ'	Υ'	Φ'	Χ'	Ψ'	Ω'	ϡ
	ρ'	σ'	τ'	υ'	φ'	χ'	ψ'	ω'	ϡ
Tausender	͵α	͵β	͵γ	͵δ	͵ε	͵ς	͵ζ	͵η	͵θ

Bild 9
Die ionischen Zahlzeichen

verwechseln, wurden Zahlen überstrichen (vgl. Bild 9).
Uns geläufige Potenzgesetze wie $10^n \cdot 10^m = 10^{m+n}$ waren bei diesen Buchstabenziffern und ihrem 1×1 nicht leicht zu erkennen. Archimedes (287 bis 212 v. u. Z.) meisterte in einer berühmten Arbeit über die Sandzahl diese Schwierigkeiten virtuos, indem er bei der Berechnung der Anzahl der Sandkörner im Weltall Myriaden von Myriaden bildete. Mit dem Wort Myriade wurde im Griechischen die Zahl 10000 benannt. Archimedes berechnete auf diese Weise die gesuchte Anzahl mit rund 10^{57} Sandkörnern, wobei er sowohl Zahlwörter erfand als auch Rechenregeln erkannte, um die außergewöhnliche Größenordnung zu bewältigen.

Die Zuordnung von Zahlen und Buchstaben, wie sie die Griechen vornehmen, hat im Verlauf der Geschichte immer wieder zu unbegründeten Spekulationen geführt, die einen tieferen Sinn in der aus praktischen Erwägungen getroffenen Doppeldeutigkeit der Zeichen sahen. Dabei wurde die mit Zahlen gemachte Erfahrung, daß sich die Wirklichkeit durch diese beschreiben läßt, unkritisch auf geschriebene Texte übertragen. Genauer: wichtige Texte (wie etwa eine Bibelstelle) wurden „dechiffriert" und gedeutet. Michael Stifel kam auf diese Weise dazu, einen Weltuntergang für den 18. Oktober 1533 um 8 Uhr morgens in Lochau vorherzusagen (vgl. „alpha" 5/89). Das Wort „Amen" hatte beispielsweise den Zahlenwert 99

$\alpha = 1, \mu = 40, \varepsilon = 8, \nu = 50;$
also $\alpha\mu\varepsilon\nu = 1 + 40 + 8 + 50 = 99$).

Religiöse mittelalterliche Manuskripte enden daher oft mit der Zahl 99.

Die römischen Ziffern sind bis heute bekannt und werden für besondere Anlässe noch benutzt (Angabe von Jahreszahlen, Seiten- oder Kapitelzählung in Büchern u. a. m.). Auch hier ist der Ursprung Kerbe nicht zu übersehen. X markierte die Bündelung in Zehnereinheiten (durchgestrichene Kerbe) und erhielt so den Zahlwert 10. Die Hälfte des Zeichens ist V und bedeutet 5.

Hiervon kommt die Redensart „Ein X für ein U (= V im Lateinischen) vormachen", die besagt, daß einem in einer Rechnung eine 10 für eine 5 untergeschoben werden soll, womit sich der zu zahlende Betrag verdoppelt. Die Zeichen für 100 oder 1000 wurden ursprünglich anders als in der heute durch die mittelalterliche Schreibweise verbreiteten Form geschrieben. 1000 war eine eingeklammerte I, d. h. (I); doppelte Einklammerung ((I)) ergab den Wert von 10000 usw. 500 als die Hälfte von 1000 wurde sinnfällig durch das halbe Zeichen |) bzw. später im Druck durch D wiedergegeben. Erst im Mittelalter kamen die Abkürzungen C = 100 (C von centum) und M = 1000 (M von mille) auf. Größere Zahlen wurden durch Überstreichen aus kleineren gewonnen: $(\overline{\mathrm{I}}) = 1$ Million (d. h. Überstreichen ist Multiplikation mit 1000).

Diese römischen Zahlzeichen wurden bis ins Mittelalter verwendet, wobei sie später im Druck durch kleine Buchstaben wiedergegeben wurden: i für eins, j am Ende einer Einerkette (z. B. 3 = iij), v für 5 und x für 10 usw. Die arabischen Ziffern kamen im 8. Jahrhundert von Indien nach Arabien und wurden von dort nach Europa gebracht. In der Regierungszeit des Kalifen al-Ma'mun, eines Sohnes des berühmten Harun al-Raschids, schrieb al-Chorizmi ein Buch (um 820) über den Gebrauch der arabischen Zahlen, das im 12. Jahrhundert ins Lateinische übersetzt wurde und damit im Abendland lesbar wurde. Vermutlich haben jedoch Kaufleute und Händler die Verbreitung der arabischen Ziffern sowohl von Indien nach Arabien als auch von dort nach Europa bereits früher durch den Handel gebracht.

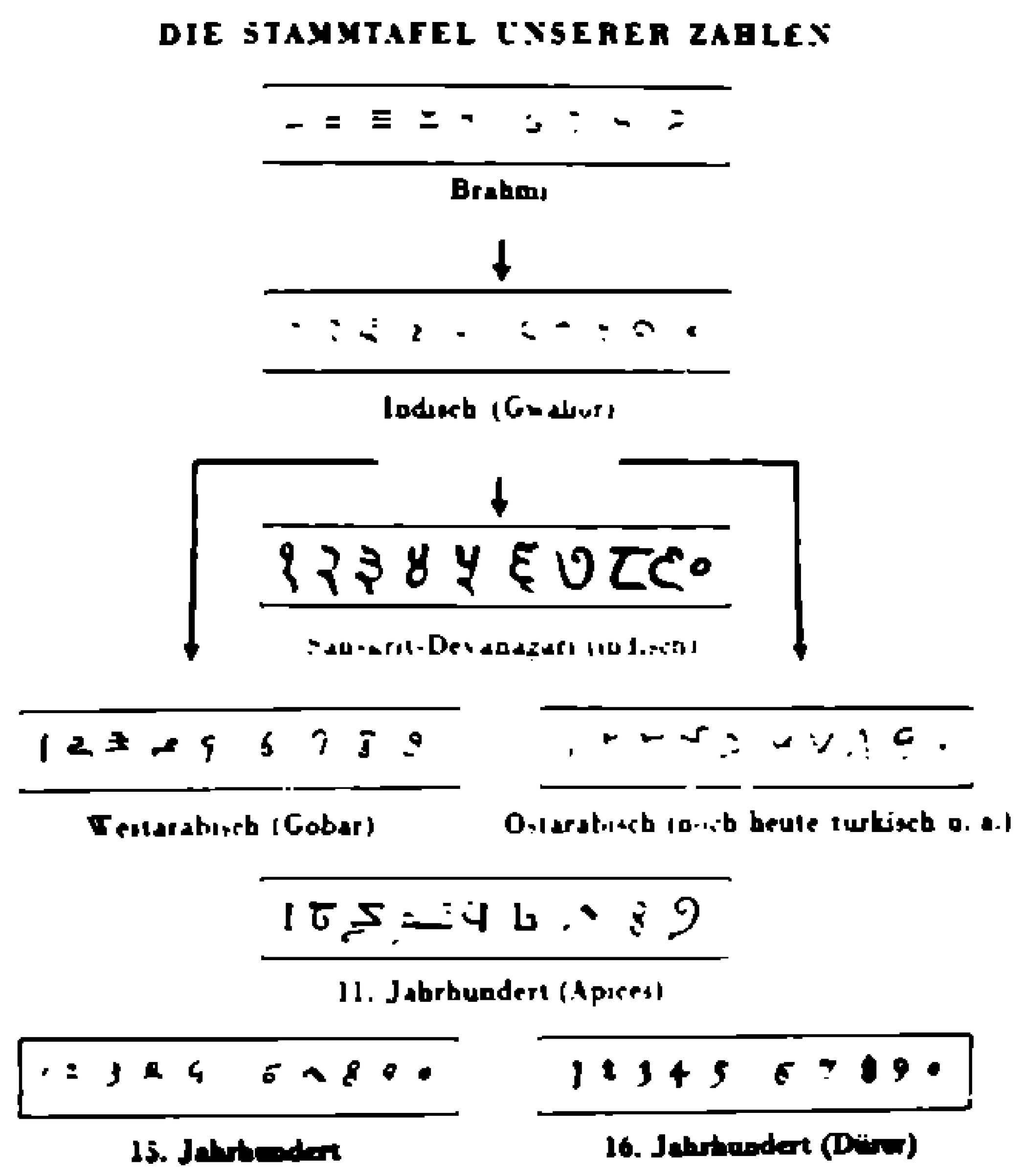


Bild 10
Die Entwicklung der arabischen Zahlen

Über die Entstehung der sogenannten arabischen Ziffern in Indien ist nicht viel bekannt. In Indien waren verschiedene Ziffernsysteme verbreitet (vgl. Bild 10). Um 870 erscheint erstmals in der Gwalios-Schrift schriftlich die Null, aber sie dürfte schon vorher bekannt gewesen sein. Die Inder liebten große Zahlen. Obwohl sie zur Zeit der Ägypter und Sumerer auch nicht weiter als bis 100000 zählen konnten, ist um die Zeitwende die Rede davon, daß Buddha die Zahlen bis 10^{54} benennen könne. Auch die Sissa-Zahl

$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615,$

die in einer der Legenden über die Erfindung des Schachs erscheint und die Anzahl der Weizenkörner angibt, wenn auf das erste Feld des Schachbretts ein Korn gelegt wird und auf den weiteren Feldern jeweils verdoppelt wird, ist indischer Herkunft. Näherungsweise ist die Sissa-Zahl gleich $18 \cdot 10^{18}$, eine Zahl, die nicht jeder gleich benennen könnte (nämlich 18 Trillionen).

Ein Grund, weshalb die arabischen Ziffern nicht sofort die römischen Ziffern verdrängten, ist der, daß das praktische Rechnen mit dem Abakus vollzogen wurde. Der Abakus war ein Rechenbrett mit Rechensteinen. Diese Steine wurden gemäß der Rechenvorschrift auf Linien bewegt. Das Liniensystem spiegelt ein Stellenwertsystem wider (vgl. Bild 11/12).

Fortsetzung auf Seite 89

Wie lange bekommt eine Wand Sonne?

Die Arbeit mit der Besonnungsscheibe

Angenommen, eine Hauswand verläuft genau in der Ost-West-Richtung, ist also nach Süden ausgerichtet. Wie lange bekommt diese Wand Sonne? In den meisten Fällen ist die Antwort rasch zur Stelle: 12 Stunden, natürlich! – Ganz so einfach ist die Beantwortung dieser Frage jedoch nicht, und die Antwort ist nur sehr bedingt richtig. Genau genommen trifft es nur für zwei Tage des Jahres zu, nämlich für den Frühlings- und Herbstbeginn (1989: 20. 3. und 23. 9.). Im Winterhalbjahr, wenn die Tage kürzer als 12 Stunden sind, wird die Sonnenscheindauer durch die Tageslänge bestimmt, die am 21. 12. nur 7 h 36 min betragen kann. Für das Sommerhalbjahr (20. 3. bis 23. 9.) wird vielfach angenommen, daß die Sonnenscheindauer an der Wand, die sogenannte Besonnung, mehr als 12 Stunden betragen muß.

Wer aber den Beitrag in Heft 3/90 über das verfehlte Ziel aufmerksam gelesen hat, weiß, daß die Sonne erst nach 6 Uhr die Ostrichtung erreicht und bereits vor 18 Uhr die Westrichtung überschreitet.

Am 21. 6., dem Tag der Sommersonnenwende, ist dieser Unterschied am größten, so daß die Ost-West-Wand nur für 9 h 20 min Sonnenlicht erhält. Dies mag vielleicht etwas paradox klingen, da allgemein angenommen wird, daß die Sonne infolge ihres großen Tagbogens im Hochsommer ja viel länger scheine. Maßgeblich ist aber die Ost-West-Richtung der Wand und wann die Sonne diese beiden Himmelsrichtungen erreicht.

Die Frage nach der Besonnungsdauer einer Wand ist von praktischer Art, denn wer möchte nicht gern wissen, wie lange die Sonne auf den Balkon oder die Terrasse scheint oder von wann bis wann eine Sonnenuhr Licht erhält? Auf den ersten Augenblick mag diese Thematik sehr einfach erscheinen: Man nehme sich eine Uhr und notiere sich an einem Sonnentag die Zeiten, wann die Sonne „um die Ecke“ kommt und wieder verschwindet. Diesem sei geraten, die Ablesung nach ein oder zwei Monaten zu wiederholen – und er wird nicht wenig erstaunt sein: Die Werte stimmen nicht überein!

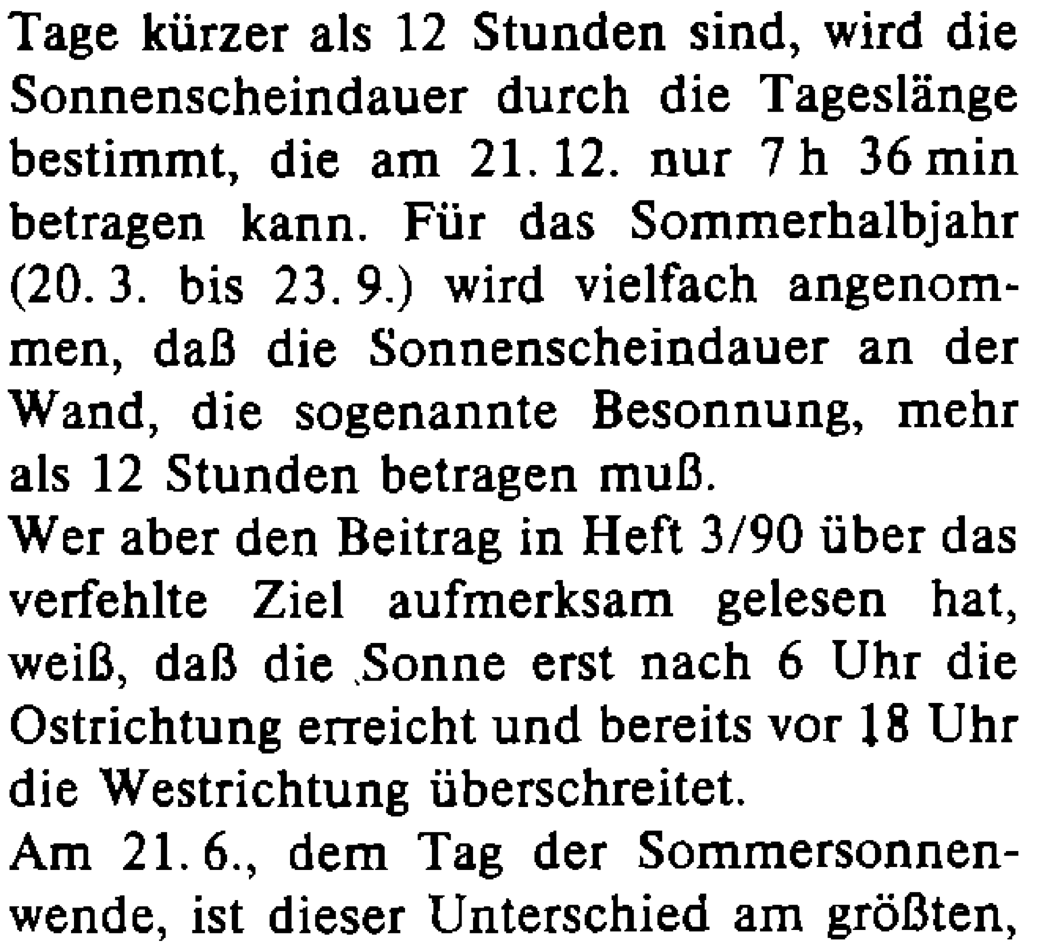


Bild 1
Der Zeitpunkt einer bestimmten Sonnenrichtung ist in den Jahreszeiten verschieden.

Das Problem liegt wie folgt: Die Sonne steht zur gleichen Zeit nicht in derselben Richtung. Im Sommer macht die Sonne größere Schritte in der Richtung, im Winter kleinere. Nur zu Mittag, wenn die Sonne den Höchststand im Süden einnimmt, geschieht dies unabhängig von der Jahreszeit um 12 Uhr wahrer Ortszeit.

Kommen wir zu unserer Ost-West-Wand zurück, die nur am 20. 3. bzw. 23. 9. für 12 h Sonnenschein erhält. An diesen beiden Tagen geht die Sonne genau im Osten auf und im Westen unter. Maßgeblich für die Dauer der Besonnung ist der Zeitpunkt, wann die Sonne die Ostrichtung bzw. die Westrichtung überschreitet. Im Sommerhalbjahr wird die Besonnungsdauer in jedem Fall kürzer als 12 h sein, wie aus der folgenden Übersicht hervorgeht:

Datum	Besonnungsdauer
20. 3. bzw. 23. 9.	12 h
21. 7. bzw. 21. 8.	10 h 44 min
21. 5. bzw. 21. 7.	9 h 40 min
21. 6.	9 h 22 min

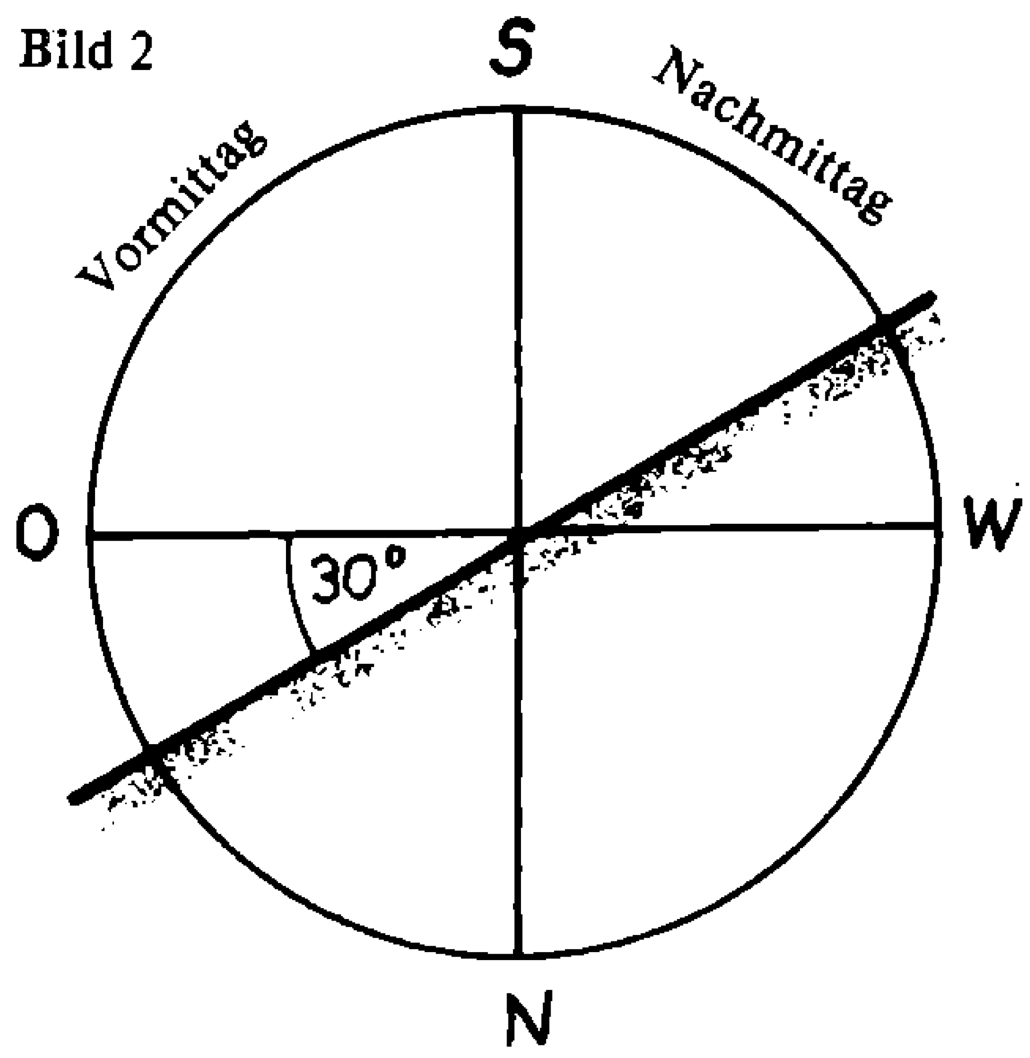
Die Berechnungen gelten für die geographische Breite von 52°, was der Mitte unserer Republik entspricht. In südlicheren Gebieten wird die Besonnungsdauer um weitere 10 min am 21. 6. eingeschränkt (Sonneberg), in den nördlichen ist sie um 14 min länger (Rügen). Die Übersicht zeigt, daß die Veränderungen zwischen dem 21. 5. und 21. 7. verhältnismäßig gering sind. In dieser Zeit verändern sich der Tagbogen und die Tagesdauer kaum merklich.

Die Besonnungsdauer bei abweichenden Wänden

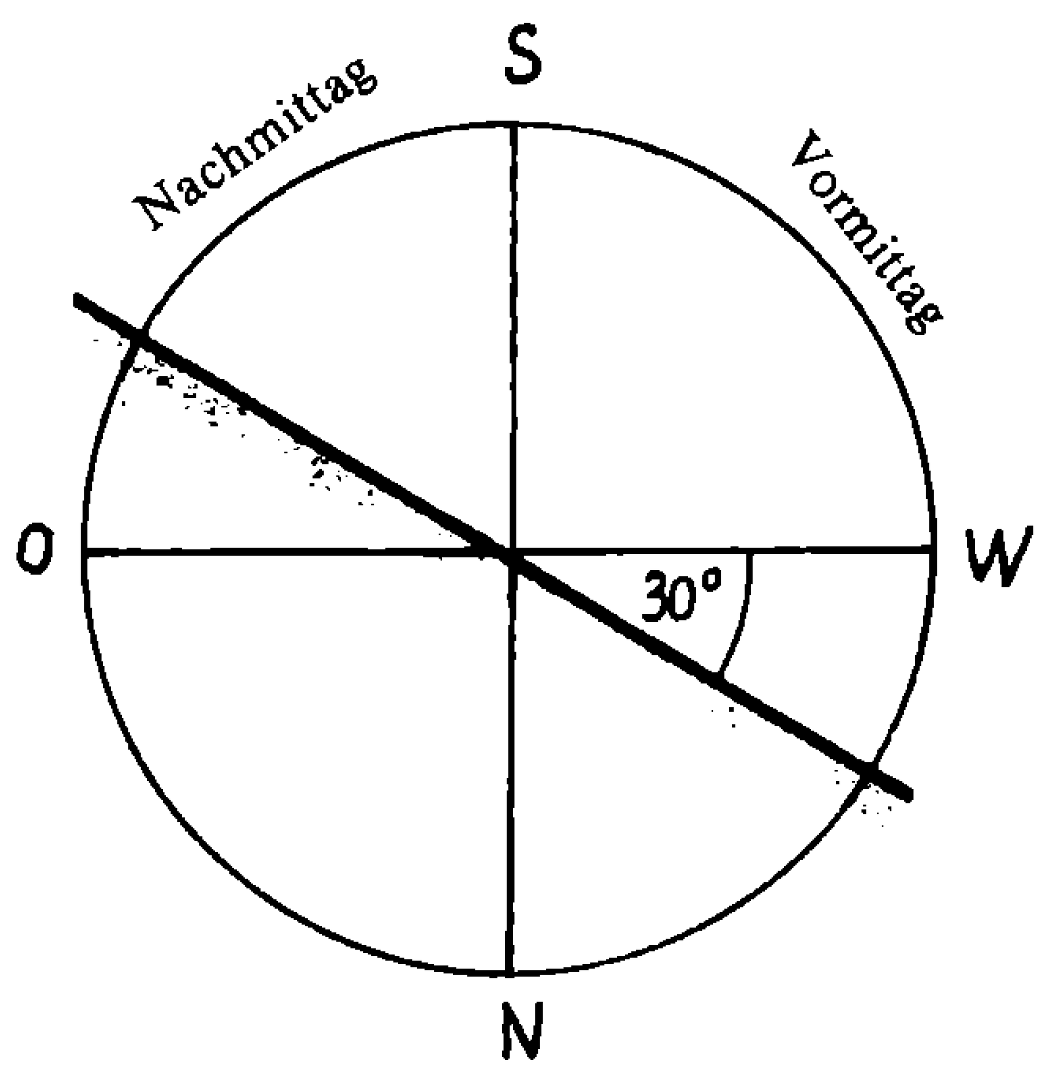
Es handelt sich hierbei um Wände, die von der Ost-West-Richtung abweichen, wie dies auch zumeist der Fall sein dürfte. Mit dieser „Drehung“ aus der Ost-West-Richtung verändern sich selbstverständlich die Besonnungsverhältnisse, je nachdem, ob die Wand nach Osten oder Westen weist. Bei einer Ostabweichung wird die Besonnungsdauer am Vormittag verlängert, am Nachmittag dagegen verkürzt. Sinngemäß ist es bei einer Westabweichung der Wand. Auch hier ist die Besonnung von der Jahreszeit, d. h. von der Größe des Sonnen-Tagbogens abhängig. Für die Berechnung ist hierfür eine recht umständliche Formel notwendig, die wir uns aber ersparen wollen. Wir können die Besonnungsdauer mittels einer sehr einfachen graphischen Darstellung rasch bestimmen. Es ist damit möglich, das sogenannte *Streiflicht der Sonne* zeitlich zu bestimmen. Mit anderen Worten:

Wir können den Zeitpunkt festlegen, wann die Wand Sonne erhält und wann das Sonnenlicht verschwindet. Bei dieser graphischen Darstellung ist eine Tagesgenauigkeit nicht erforderlich, es reicht aus, wenn wir die Ergebnisse für die astronomisch wichtigen Tage (21. 6., 20. 3./23. 9. und 21. 12.) bekommen.

Bild 2



Östliche Wandabweichung



Westliche Wandabweichung

Wichtig ist es zu wissen, um wieviel Grad die Wand von der Ost-West-Richtung abweicht. Für die Bestimmung gibt es mehrere Methoden, die mit Berechnungen verbunden sind. Die Lage eines Gebäudes zu den Himmelsrichtungen kann man einem Bauplan entnehmen oder mit einem guten Kompaß bestimmen. Bei der Arbeit mit dem Kompaß ist jedoch zu beachten,

daß Eisenteile oder elektrische Leitungen im Gebäude das Ergebnis beeinträchtigen können.
Die folgenden Beispiele zeigen, wie sich die Wandabweichung von 30° in Richtung Ost sowie in Richtung West auf die Sonnenscheindauer an der Wand auswirken kann.
Die Übersicht zeigt einige interessante Fakten: Eine nach Osten abweichende Wand bekommt im Hochsommer am Nachmittag wenig Sonne. Im Frühling und Herbst ist die Besonnung aber um 1 Stunde länger. Im Winter wirkt sich die Wandabweichung nicht aus, da die kurze Sonnenscheindauer (kleiner Tagbogen) im Bereich der Wand bleibt.
Mit Hilfe der Besonnungsscheibe können wir für jede Wandabweichung die Besonnungsdauer ermitteln. Der innere Teil besteht aus einer Einteilung für den 21. 6., 20. 3./23. 9. und 21. 12., die anzeigt, in welcher Richtung (Azimut) die Sonne zu der betreffenden Zeit steht. Diese Richtungen sind in den Jahreszeiten verschieden, wie auch die Richtungsänderung unterschiedlich groß ist. So ersehen wir daraus, daß die Sonne am 21. 6. um 10 Uhr mit der Sonnenrichtung vom 20. 3./23. 9. um 9 Uhr sowie mit dem Sonnenaufgang am 21. 12. zusammenfällt. Die Einteilung beweist aber auch die Aussagen über die Kritik an der Orientierungsregel über das verfehlte Ziel in Heft 3/90. Die Ost-West-Richtung wird von der Sonne am 21. 6. erst um 7.20 Uhr bzw. bereits um 16.40 Uhr erreicht. Der Winkelabstand der Sonne von der Südrichtung (Meridian) kann an der Gradeinteilung am Außenrand leicht abgelesen werden.
Die Gradeinteilung am Außenrand dient der Einstellung der Wandabweichung. Dazu legen wir ein Lineal an, daß dieses z. B. von 30° über den Mittelpunkt zu 30° auf der gegenüberliegenden Seite reicht, wobei wir die betreffende Wandabweichung zu berücksichtigen haben. Da unsere Besonnungsscheibe mit den Himmelsrichtungen auf einer Windrose übereinstimmt, erfolgt die Drehung des Lineals in der gewünschten Richtung der Wandabweichung.
Die nachfolgenden Beispiele dienen zur Kontrolle:
Wann beginnt die Besonnung (Streiflicht) bei einer Wandabweichung von 15° nach West am 21. 6.? Ergebnis: 8.30 Uhr. Wann endet die Besonnung (Streiflicht) bei einer Wandabweichung von 50° nach Ost am 20. 3./23. 9.? Ergebnis: Kurz vor 15 Uhr.
Die Zeitangaben entsprechen der wahren Ortszeit oder Sonnenzeit (WOZ). Diese differiert gegenüber der Mitteleuropäischen Zeit um den Betrag des Längenunterschiedes zu Görlitz (15°).
Im östlichen Teil der DDR ist dieser Unterschied gering, nimmt jedoch in Richtung Westen zu und beträgt z. B. in Potsdam bereits 8 min, in Erfurt aber schon 16 min. Der Zeitunterschied ist zur wahren Ortszeit bei uns stets hinzuzuzählen, um die MEZ zu erhalten. Wir wollen die Zeitgleichung bei der Arbeit mit der Besonnungsscheibe außer acht lassen.
Unsere Vorrichtung läßt sich aber auch zur Bestimmung der Wandabweichung verwenden. In diesem Falle gehen wir von der Uhrzeit aus, indem wir von der MEZ den Zeitunterschied (Längendifferenz) abziehen. Beobachten wir z. B., wie am 21. 6. um 15 Uhr WOZ die Sonne hinter einer Wand (Streiflicht) verschwindet, so kann es sich nur um eine Wandabweichung von 22° nach Ost handeln. Wir legen das Lineal am 21. 6. bei 15 Uhr an und lesen an der Gradeinteilung 22° ab.
Erscheint z. B. die Sonne am 21. 12. erst um 11 Uhr an der Hauswand, so handelt es sich um eine sehr große Wandabweichung von 75° in Richtung West.

Datum	Richtung Ost Beginn	Ende	Richtung West Beginn	Ende
21. 6.	Sonnenaufgang	14.35 Uhr	9.25 Uhr	Sonnenuntergang
20. 3./23. 9.	Sonnenaufgang	15.35 Uhr	8.20 Uhr	Sonnenuntergang
21. 12.	In jedem Falle vom Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang			

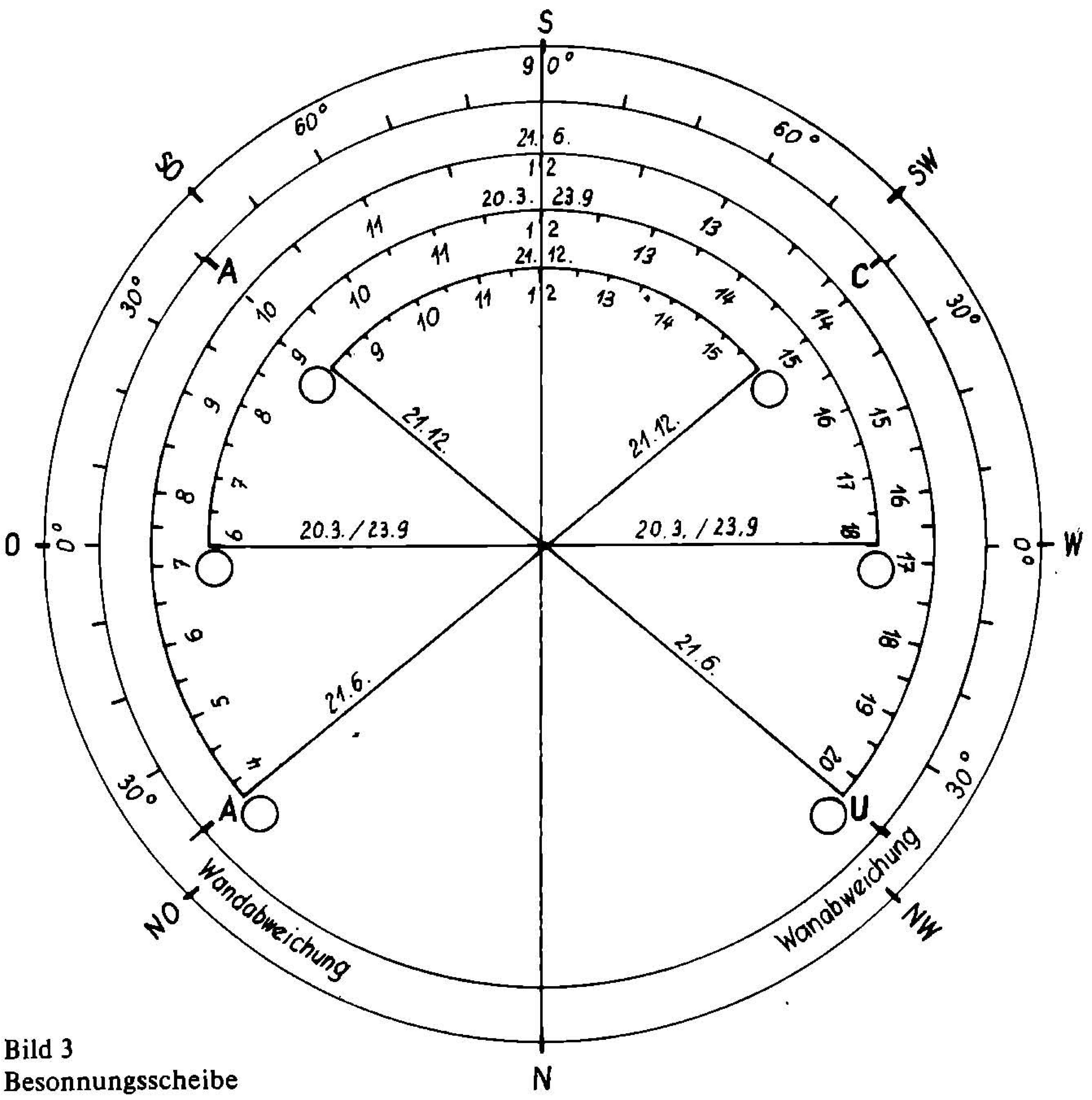


Bild 3
Besonnungsscheibe

Sonnenschein an einer Nordwand?

Diese Frage wird oft etwas übereilt mit einem Nein beantwortet.
Betrachten wir die Besonnungsscheibe, so sehen wir, daß im Sommer die Sonne weit über Osten bzw. Westen in Richtung Norden hinausgeht und somit eine Nordwand durchaus bescheinen kann. So gibt es eine Reihe von Nord-Sonnenuhren, die jedoch nur zwischen dem 20. 3. und 23. 9. (Sommerhalbjahr) die Zeit anzeigen können.

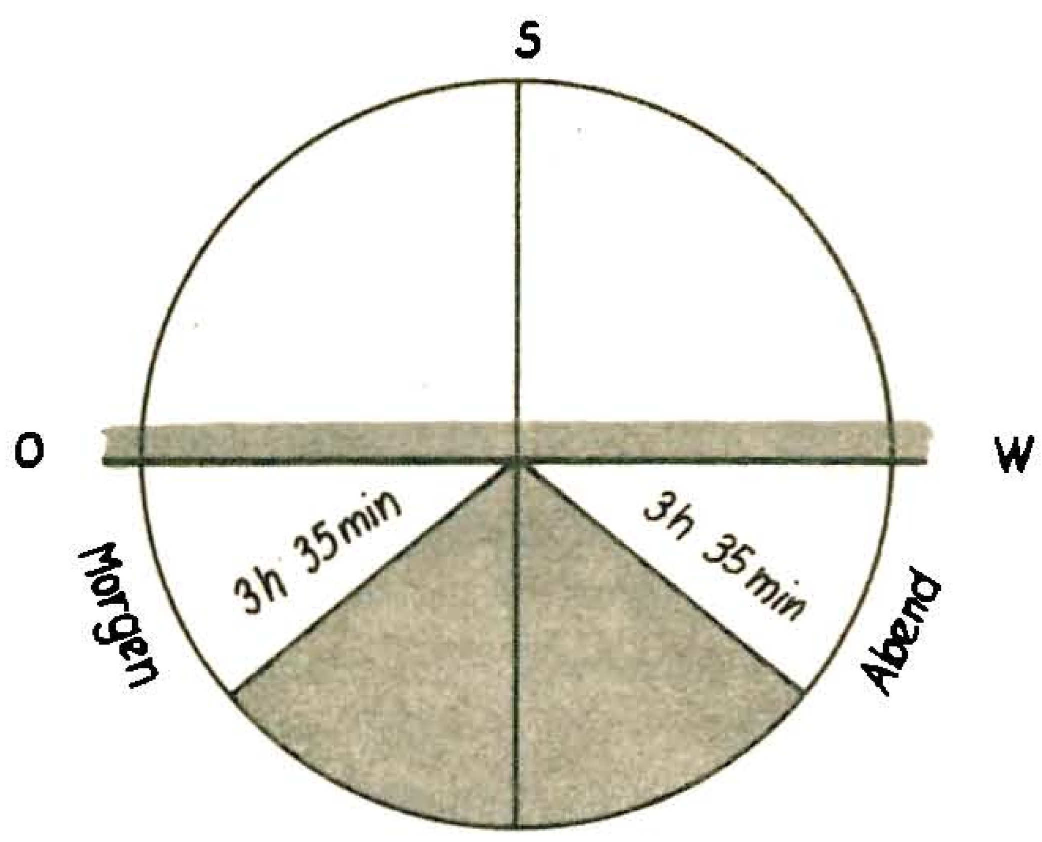


Bild 4
Die Besonnung einer Nordwand.
Dauer der Besonnung am 21. 6.:
Insgesamt 7 h 10 min.

Dieser Anzeigebereich ist um so größer, je mehr man sich dem 21. 6., dem Tag der Sommersonnenwende, nähert.
Wer also eine Nordwand hat, braucht nicht wegen des fehlenden Sonnenscheins verzagt zu sein. Die Wand bekommt immerhin vom Sonnenaufgang bis gegen 7.20 Uhr und von 16.40 Uhr bis zum Sonnenuntergang Sonne, wenn wir dabei den längsten Tag des Jahres berücksichtigen. Für ein Sonnenbad reicht es immerhin noch aus, wenngleich die Sonne dann aber tiefer steht.

Bei einer nach Norden gerichteten Wand kommt es somit zu einer Doppel-Besonnung, und zwar in den frühen Vormittagsstunden sowie in den späten Nachmittagsstunden. Besteht hier eine Wandabweichung, so kann die eine oder andere Seite mehr oder weniger eingeschränkt bzw. erweitert werden.

Mit den Buchstaben A und U an der randlichen Gradeinteilung werden diejenigen Punkte am Horizont gekennzeichnet, wo die Sonne an den Tagen der Sommer- und Wintersonnenwende aufgehen bzw. untergehen kann. Diese Punkte liegen jeweils 40,2° vom Ost- bzw. Westpunkt entfernt, erreichen nicht die Nebenhimmelsrichtungen SO, SW, NO und NW, die bei jeweils 45° liegen.

Unsere Besonnungsscheibe ist für die Breite von 52° berechnet, kann aber im gesamten Gebiet der DDR verwendet werden. Die dabei auftretenden Unterschiede sind gering und können für unsere Zwecke vernachlässigt werden.

Es muß in diesem Zusammenhang auch bemerkt werden, daß eine zeitliche genaue Bestimmung des Streiflichtes nicht leicht ist und sich um 2 bis 3 Minuten unterscheiden kann. Die Sonne ist keine punktförmige Lichtquelle sondern hat eine Ausdehnung von 0,5° am Himmel. Wer den genauen Zeitpunkt des Streiflichtes an der Wand bestimmen möchte, muß dafür eine Latte von 1 bis 2 m Länge verwenden, die in Verlängerung der Hauswand gelegt wird.

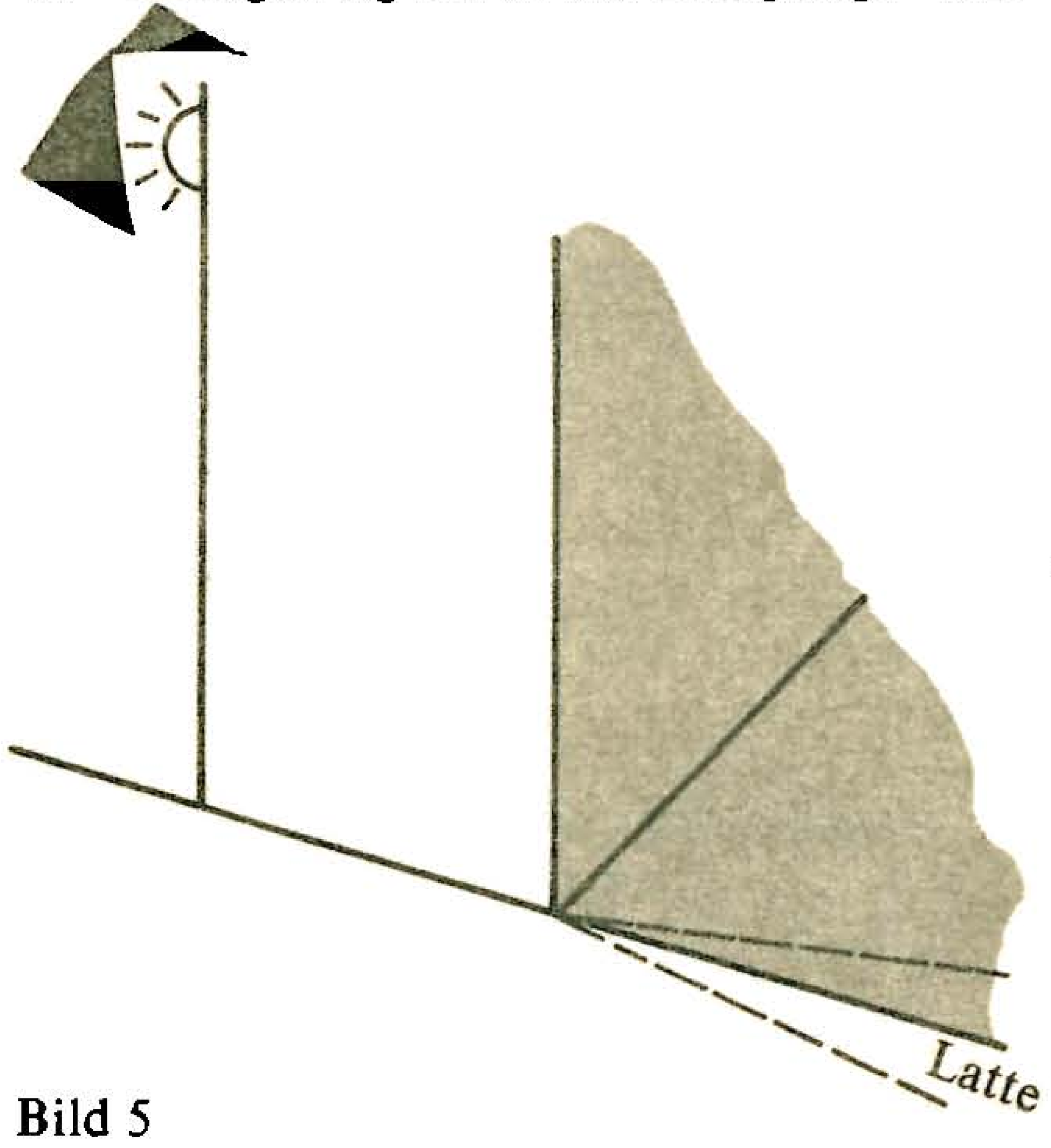


Bild 5
Die Bestimmung des Streiflichtes an einer Wand mittels des Schattenwurfes und einer Latte.

——— richtig

– – – – falsch

Der Schatten der Wand muß genau auf die Latte fallen, wobei kein Knick zwischen Latte und Schatten entstehen darf. Auf diese Weise wird eine Genauigkeit von einer Minute erzielt.

A. Zenkert

Gerechte und ungerechte Würfelspiele – Überraschungen mit ungewöhnlichen Würfeln

Teil 2

Spielwürfel, die eine andere Augenverteilung als der „Normal-Würfel" (N) aufweisen, jedoch wie dieser insgesamt 21 Augen tragen, sind ihm gleichwertig, wenn man – nach der Regel „Höhere Augenzahl gewinnt" – nur einmal wirft. Wir haben aber bemerkt, daß sie sich gegenüber N ganz unterschiedlich verhalten, wenn man die Augenzahlen mehrerer Würfe zusammen wertet bzw. mit mehreren Würfeln spielt: G (Augenverteilung 3, 3, 3, 4, 4, 4) ist auch dann immer gleichwertig mit N, F (Augenverteilung 1, 1, 4, 5, 5, 5) ist ihm überlegen und Z (2, 2, 2, 3, 6, 6) unterlegen.

Wir werden also wohl mit weiteren Überraschungen rechnen können, wenn wir diese Würfel gegeneinander antreten lassen! Tun wir dies zunächst für G und Z, und beschränken wir uns dabei auf einen einzigen Wurf:

G	–	3(3)	4(3)	–
Z	2(3)	3(1)	–	6(2)

$g_G = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 21$
$g_Z = 2 \cdot 6 = 12$
$Q_{G/Z} = 21 : 12 = 1{,}75$

Das ist nun ein ganz erheblicher Qualitätsunterschied, der sich beim Spielen deutlich bemerkbar macht: Spielt etwa ein Spieler S_G mit dem Würfel G gegen S_Z mit dem Würfel Z nach der beschriebenen Regel (wer die höhere Augenzahl geworfen hat, erhält vom anderen einen Chip), so dürfte nach 100 Spielen S_G „im Schnitt" (d. h. nicht etwa in jeder Serie von 100 Spielen!) 25 Chips von S_Z gewonnen haben:

$100 \cdot \frac{21}{36} = 58{,}\overline{3}$ Spiele mit Gewinn für S_G,

$100 \cdot \frac{12}{36} = 33{,}\overline{3}$ Spiele mit Gewinn für S_Z

und $100 \cdot \frac{3}{36} = 8{,}\overline{3}$ Spiele mit unentschiedenem Ausgang.

Beim Vergleich von G und F erhalten wir ebenfalls einen Überlegenheitsquotienten 1,75, allerdings zugunsten von F:

$Q_{F/G} = 1{,}75$.

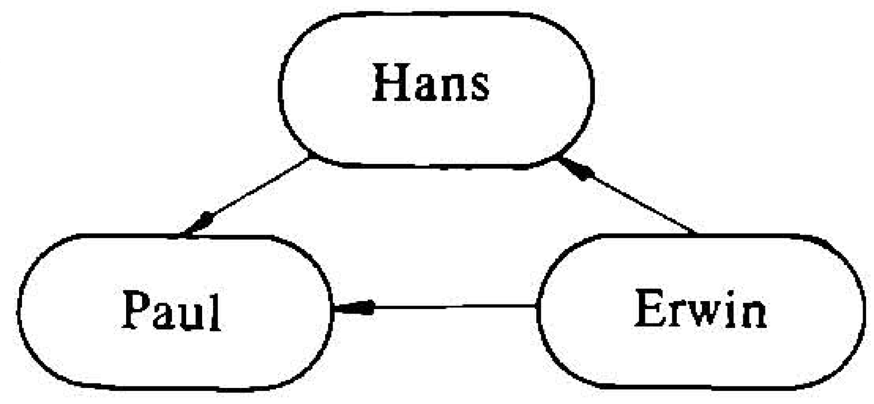
Der Würfel F ist also gewissermaßen um ebensoviel stärker als der Würfel G, wie dieser stärker ist als Z. Nun erwartet man gewiß (sofern man sich nicht wegen der bisherigen Überlegungen zur Vorsicht gemahnt fühlt), daß dann F erst recht dem Würfel Z überlegen ist. Prüfen wir das nach:

Z	–	2(3)	3(1)	–	–	6(2)
F	1(2)	–	–	4(1)	5(3)	–

$g_Z = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 20$
$g_F = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 16$
$Q_{Z/F} = 20 : 16 = 1{,}25$

Demnach ist im Gegenteil der Würfel Z dem Würfel F überlegen, wenn auch der Überlegenheitsquotient nicht so stark von 1 abweicht wie beim Vergleich von G mit F oder mit Z. Dieses Ergebnis scheint auf den ersten Blick unseren Erfahrungen zu widersprechen: Wenn wir wissen, daß Hans größer ist als Erwin und Paul wiederum größer ist als Hans, dann können wir daraus schlußfolgern, daß Paul auch („erst recht") größer ist als Erwin (Bild 3).

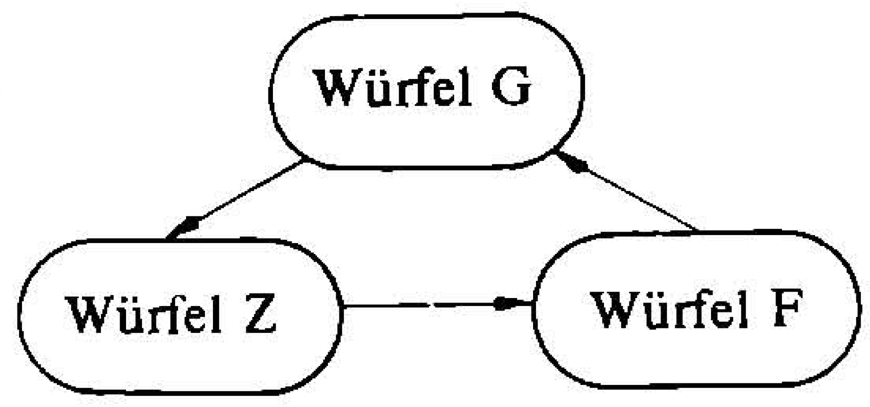
Bild 3



X←Y bedeutet
Y ist kleiner als X bzw. X ist größer als Y

Die Beziehung *ist größer als* ist „transitiv" (von *transire* (lat.) – *überleiten*, wörtlich *hinübergehen*, vgl. Transitverkehr u. ä.). Dasselbe trifft auch auf andere Beziehungen zu wie *ist älter als*, *ist wärmer als*, die eine gewisse Anordnung zum Ausdruck bringen. Warum aber gilt eine derartige „Übertragbarkeit" für *ist stärker als* bei den ungewöhnlichen Würfeln nicht (Bild 4)?

Bild 4



X←Y bedeutet
Y unterliegt X bzw. X besiegt Y

Die Überlegenheitsquotienten, die wir berechnet haben, sind ja kein Maß für eine „absolute Spielstärke", so wie etwa Größe, Alter, Temperatur feststehende Maßzahlen für die oben genannten transitiven Beziehungen liefern. Bei den Überlegenheitsquotienten geht es vielmehr immer nur um einen zweiseitigen Vergleich.

Sie liefern keine Qualitätszahlen, die einem Würfel ein für allemal, gegenüber allen anderen, zukommen. Deshalb ist an das Q auch ein Z/G oder dgl. als Index angehängt worden, und eigentlich hätte schon in den Bezeichnungen für die Anzahlen der Gewinnwürfe zum Ausdruck kommen müssen, gegen welchen Würfel jeweils gespielt wird, also etwa

$g_{G/Z} = 21$, $g_{Z/G} = 12$, $g_{G/F} = 21$,
$g_{F/G} = 12$, $g_{Z/F} = 20$, $g_{F/Z} = 16$.

Bei dem *ist stärker als* der ungewöhnlichen Würfel liegt deshalb ebenso wenig Transitivität vor wie etwa beim Aufeinandertreffen je zweier Mannschaften in gewissen sportlichen Vergleichen.

▲6▲ Berechne die Quotienten $Q_{Z/G}^{(2)}$, $Q_{F/G}^{(2)}$ und $Q_{F/Z}^{(2)}$ für den paarweisen Vergleich der Würfel Z, F und G bei zwei Würfen (bzw. das Spiel mit jeweils zwei derartigen Würfeln)!
Was scheint dir an den Ergebnissen besonders überraschend?

Die „geschlossene Kette", die von den Würfeln F, G, Z gebildet wird (Bild 4), ist mit drei Gliedern eine der kürzestmöglichen. Sie ist auch von allen Ketten mit drei Gliedern bei den Würfeln mit der Augensumme 21 wegen der relativ großen Überlegenheitsquotienten 1,75, 1,75 und 1,25 die bemerkenswerteste. Interessant ist nun die Frage nach längeren derartigen Ketten, bei denen keiner der Überlegenheitsquotienten kleiner als 1,5 (gerundet) ist. Um solche Ketten zu finden, wählt man aus allen möglichen Würfeln mit insgesamt 21 Augen nur diejenigen aus, für die man im direkten Vergleich mit einem anderen mindestens einmal einen Überlegenheitsquotienten von (gerundet) 1,5 oder mehr (bzw. einen Quotient von 1 : 1,5 oder weniger) errechnet. Man gelangt so zu den fünfzehn im Bild 5 dargestellten Würfeln.

▲7▲ Wieviel zweiseitige Vergleiche muß man durchrechnen, um diese Würfel auszusortieren?

▲8▲ Die Bezeichnung der Würfel mit N, F, G, Z, V und dgl. ist recht unübersichtlich, zumal es beispielsweise außer dem Würfel F noch weitere gibt, die drei Fünfen auf ihren Flächen tragen. Man gelangt zu einer besseren Bezeichnungsweise, wenn man alle möglichen Würfel mit insgesamt 21 Augen geeignet anordnet. Dazu kann man beispielsweise die Augenzahlen auf den sechs Flächen als Ziffern deuten, mit denen man dann eine möglichst kleine sechsstellige Zahl darstellt – so, als würde man mit sechs Würfeln „niedrige Hausnummer" spielen und hätte die von den Seiten gezeigten Augen geworfen. Die verschiedenen Zahlen werden dann der Größe nach geordnet, mit der kleinsten beginnend. Die „Platzziffern" bei dieser Anordnung liefern dann für jeden Würfel eine eindeutig bestimmte Zahl zur Kennzeichnung. So erhält beispielsweise der Würfel mit 1, 1, 1, 6, 6, 6 die Nummer 1, der Normalwürfel die Nummer 10.

a) Ermittle für jeden Würfel im Bild 5 die zugehörige Nummer!

b) Welche Nummern ergeben sich für die Würfel, wenn man möglichst große sechsstellige Zahlen darstellt (wie beim Spiel „hohe Hausnummer") und dann bei der Anordnung der Zahlen mit der größten beginnt?

Die Pfeile, die im Bild 5 eingezeichnet sind, symbolisieren die Qualitätsvergleiche, und zwar – mit Ausnahme des (gestrichelten) Pfeils von Würfel F zum Würfel Z – nur solche, die zu Überlegenheitsquotienten vom (gerundeten) Mindestwert 1,5 gehören.

Die Pfeilspitze ist dabei immer auf den jeweils überlegenen Würfel gerichtet. Die Pfeile erleichtern es, geschlossene Ketten unterschiedlicher Länge zu bilden. So erhält man beispielsweise eine viergliedrige Kette, wenn man in der Kette mit den drei Würfeln F, G, Z den Würfel Nummer 1 zwischen F und Z „einfügt". Die längstmöglichen Ketten enthalten 6 Würfel.

▲9▲ a) Berechne die Überlegenheitsquotienten $Q_{1/F}$ und $Q_{Z/1}$ in der angegebenen viergliedrigen Kette!

b) Versuche, unter den Würfeln im Bild 5 zwei solche zu finden, bei deren Vergleich sich ein möglichst großer Überlegenheitsquotient ergibt!

c) Welche der Würfel im Bild 5 können in keiner geschlossenen Kette vorkommen? Welche Würfel müssen in jeder Kette auftreten?

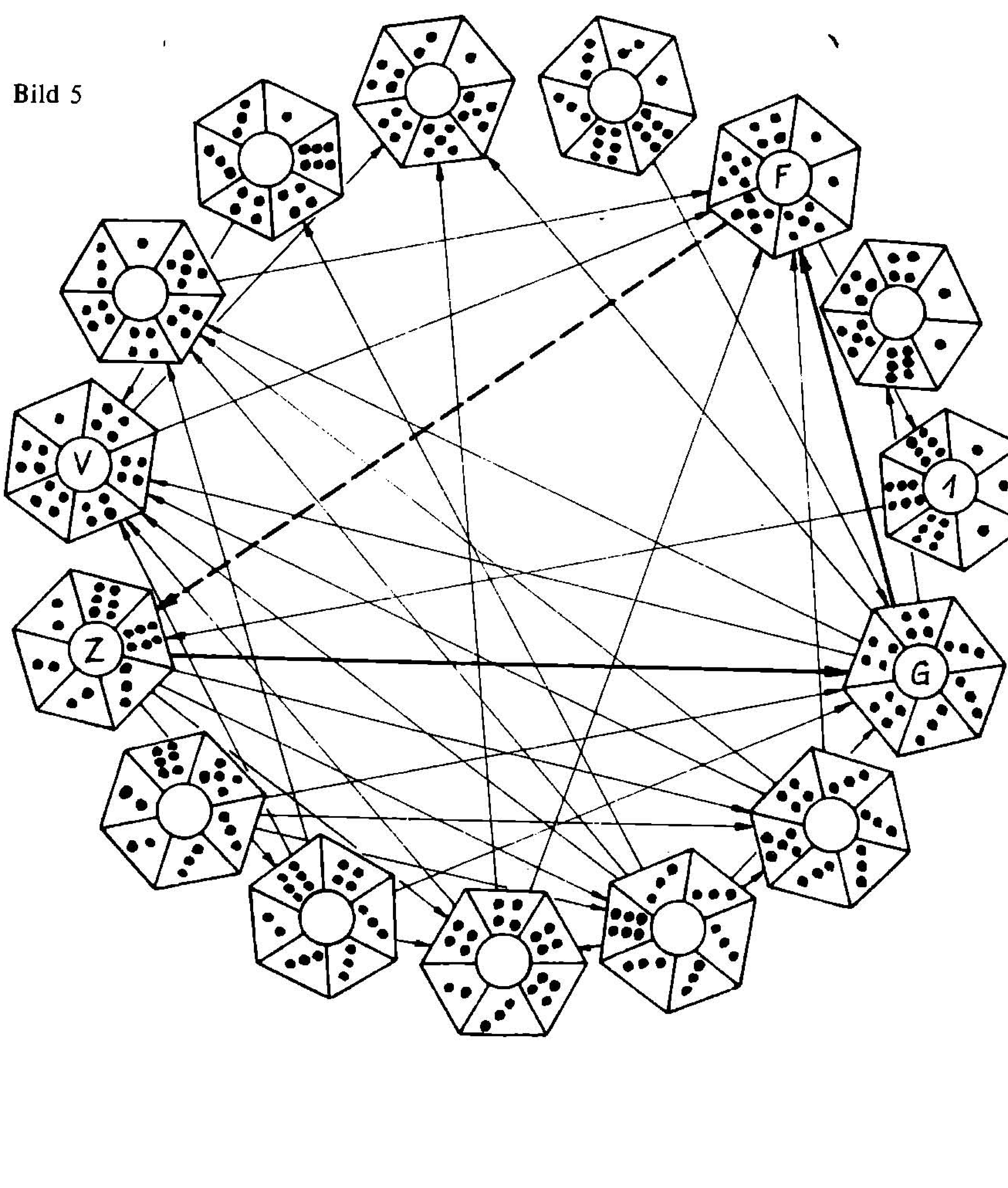
d) Stelle einige sechsgliedrige Ketten zusammen! Warum kann keine Kette mehr als 6 Würfel enthalten?

Fertigt man sich alle Würfel einer solchen Kette an, so kann man zu einem Spiel herausfordern, das jedem Uneingeweihten fair erscheint und bei dem man dennoch zur Verblüffung des Spielpartners (und aller neutralen Beobachter) so gut wie immer Sieger wird. Eine solche Herausforderung kann mit folgenden Worten geschehen:

„Hier habe ich 4 (5, 6) ungewöhnliche Würfel. Ungewöhnlich sind sie deshalb, weil sie nicht wie unser normaler Spielwürfel auf ihren Flächen die Augenzahlen von 1 bis 6 zeigen. Bei allen beträgt aber die Augenzahl insgesamt 21 – wie beim normalen Würfel –, wovon du dich überzeugen kannst. – Ich mache dir nun folgendes, einmalig günstiges Angebot: Du suchst dir einen beliebigen dieser Würfel aus – den Würfel, den du für den besten hältst. Ich nehme mir dann einen der übrigen Würfel, und wir spielen gegeneinander nach der Regel ‚Wer die höhere Augenzahl wirft, bekommt einen Punkt'. Wer bei einer Serie von Spielen zuerst 20 (25, 50, ...) Punkte erreicht hat, ist Gewinner. Wenn du während des Spielens zu der Meinung kommst, daß ein anderer Würfel besser ist, kannst du wechseln und dabei auch den wählen, mit dem ich gerade würfle. Allerdings erhalte ich bei einem solchen Wechsel auch immer die Möglichkeit, mir einen anderen Würfel zu nehmen. Du darfst außerdem beliebig oft mit verschiedenen Würfeln probieren – nicht nur, bevor wir anfangen zu spielen, sondern auch zwischendurch, wenn du willst!"

Natürlich muß man sich die Aufeinanderfolge der Würfel gut einprägen, wenn man gewinnen will. Das fällt am leichtesten, wenn die Kette nur vier Würfel enthält. Andererseits macht aber die Benutzung von sechs Würfeln mehr Eindruck. Bei ihr fällt es dem Spielpartner (und allen Zuschauern) gewiß auch schwerer dahinterzukommen, daß sich zu ausnahmslos jedem Würfel unter den übrigen fünf ein anderer finden läßt, der dem zuerst ausgewählten Würfel erheblich überlegen ist. *G. Lorenz*

Bild 5



Mathematik und das Fahrrad von Olaf Ludwig

Auf dem Weg zum Olympiasieg 1988 in Soul legte Olaf Ludwig mit seinem Rennrad bei der größten Übersetzung mit einer Pedalumdrehung 10,1 m zurück. Woher wir das wissen? Nun, wir haben einen Brief an Olaf Ludwig geschrieben und um einige Angaben über sein Rennrad gebeten. Wir haben sie bekommen und noch ein Autogramm dazu, dann haben wir gerechnet.

1. Das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines beliebigen Kreises

Um die vom Fahrrad zurückgelegte Strecke zu bestimmen, muß man den Umfang des Laufrades kennen. Ihn zu messen, ist eine umständliche Angelegenheit, leicht schleichen sich Fehler ein.

▲1▲ Überlege dir ein geeignetes Meßverfahren. Erkenne die Fehlerquellen!

Viel leichter fällt es uns, den Durchmesser eines Kreises zu messen. Wir suchen deshalb nach einem Zusammenhang zwischen Durchmesser und Umfang eines Kreises. Dazu betrachten wir den Quotienten aus diesen beiden Größen. Wir haben folgende Gegenstände vermessen:

Gegenstand	Umfang u	Durchmesser d	Quotient $\frac{u}{d}$
Topfdeckel	64,1 cm	20,9 cm	3,07
Sportrad	220,0 cm	71,5 cm	3,08
Kinderrad	151,4 cm	50,0 cm	3,03
Blumenuntersetzer	34,0 cm	11,0 cm	3,09
Rad ohne Bereifung	200,0 cm	64,0 cm	3,13

▲2▲ Ergänze unsere Meßreihe durch eigene Messungen an kreisförmigen Gegenständen.

Betrachtet ihr die Meßreihen, dann vermutet ihr vielleicht, daß der Quotient $\frac{u}{d}$ eine feste Zahl in der Nähe von 3 ist, egal, welchen Kreis man untersucht. Die geringen Schwankungen des Quotienten $\frac{u}{d}$ könnten daher rühren, daß nicht richtig abgelesen wurde, das Meßverfahren zu ungenau oder der Gegenstand nicht kreisrund war.

Tatsächlich kann man beweisen:

Der Quotient aus Umfang u und Durchmesser d ist für jeden Kreis ein und dieselbe Zahl. Ein Näherungswert für diese Zahl ist 3,14.

Diese feste Zahl erhielt den Namen π (lies: pi). Ihr findet sie auf fast jedem Taschenrechner. Der SR 1 gibt den Wert 3,1415927 aus. Wir verwenden in allen weiteren Rechnungen den Näherungswert 3,14. Diesen Näherungswert fand bereits um 300 vor unserer Zeitrechnung Archimedes, ein bedeutender Mathematiker des Altertums. Seit dem Ende des 18. Jahrhunderts ist bekannt, daß π eine irrationale Zahl, d. h. ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch ist. Bis heute bemühen sich die Mathematiker darum, die Zahl π auf möglichst viele Stellen hinter dem Komma genau zu berechnen. Am 8. 8. 89 meldete die Presse einen neuen Rekord bei der Berechnung von π. Einem japanischen Informatikprofessor gelang es, π auf 536 870 000 Stellen nach dem Komma zu bestimmen. Das Symbol π führte übrigens erst der berühmte Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) ein.

Wir halten fest: $\frac{u}{d} = \pi$. Indem wir diese Gleichung nach u umstellen, gewinnen wir die Aussage:

Für den Umfang u eines Kreises mit dem Durchmesser d gilt
$u = \pi \cdot d$ (Umfang = $\pi \cdot$ Durchmesser).

Wir können also den Umfang eines Kreises *berechnen*, wenn wir den Durchmesser kennen.

Offenbar ist es wesentlich einfacher, den Durchmesser eines Kreises mit einer vorgegebenen Genauigkeit zu messen als den Umfang.

▲3▲ Begründe diese Aussage!

Warum sehen Besitzer von 28er Fahrrädern eigentlich auf die von 24er Fahrrädern herab? Der Unterschied besteht in der Größe der Laufräder, und wir wollen uns genauer ansehen, was diese seltsamen Zahlenangaben bedeuten.

2. Die Größeneinteilung der Fahrräder und ein „hartnäckiges" altes Längenmaß

Bei einem 28er Fahrrad hat ein Laufrad einschließlich Bereifung einen Durchmesser von etwa 28 Zoll. Man schreibt dafür abkürzend 28″.

▲4▲ Suche auf den Reifen deines Fahrrades eine Bezeichnung wie $28 \times 1\frac{3}{8} \times 1\frac{5}{8}$.

Die Bezeichnung $28 \times 1\frac{3}{8} \times 1\frac{5}{8}$ sagt aus, daß der Reifen auf ein 28er Rad paßt und daß er $1\frac{3''}{8}$ breit und $1\frac{5''}{8}$ hoch ist.

Das Maß Zoll ist ein Längenmaß, das im Mittelalter eingeführt wurde und wie viele damalige Einheiten von Abmessungen des menschlichen Körpers abgeleitet war. Ein Zoll bedeutete eine Daumenbreite. Wessen Daumen war da wohl *maß*gebend? Wir können uns lebhaft vorstellen, daß diese Festlegung von Land zu Land unterschiedlich war und sich außerdem im Laufe der Zeit veränderte.

Wir merken uns nur, daß heute gilt
1 Zoll = 1″ = 1 Inch = 1 in = 0,025 4 m
= 25,4 mm.

Das ist das alte englische Zoll $\left(\text{gleich } \frac{1}{12} \text{ Fuß}\right)$. Die meisten Länder haben sich inzwischen einer internationalen Vereinbarung über Maßeinheiten angeschlossen, wonach das Meter die grundlegende Längenmaßeinheit ist. (Abgeleitete Einheiten sind z. B. cm, dm, mm und km.) Das Maß Zoll leistet dem in der Praxis hartnäckigen Widerstand und behauptet sich vor allem noch in speziellen Industrie- und Handwerkszweigen. So gibt es in vielen Haushalten Zollstöcke (mit mm-Teilung), der Klempner verlegt $\frac{3''}{4}$-Rohre, die importierten Jeans tragen die Größenangaben W 27 (in), L 36 (in), und wir fahren ein 28er Rad.

Da wir schon lange mit dem Meter viel vertrauter sind, rechnen wir die Größenangaben für Fahrräder in diese oder eine davon abgeleitete Einheit um.

Beispiel: 28er Fahrrad:
Durchmesser = 28″ = $28 \cdot 25{,}4$ mm
= 711 mm
Umfang = $\pi \cdot$ Durchmesser
= $3{,}14 \cdot 711$ mm = 2,2 m.

Bei einer Umdrehung rollt also das Laufrad eines 28er Fahrrades 2,2 m weit.

▲5▲ Vervollständige die folgende Tabelle:

Fahrradtyp	Vertreter	Durchmesser in ″	Durchmesser in mm	Umfang in m
28er	Sportrad	28	711	2,2
27er	Rennrad			
26er	Tourenrad		660	
24er	Jugendrad			
20er	Kinderrad			
$12\frac{1}{2}$er	Bambirad		318	1,0
8er	Roller	8		

Ein Vorläufer unseres heutigen Fahrrades war das Hochrad. Wir kennen es aus dem Museum. Die Tretkurbel befand sich am Vorderrad. Dieses hatte einen Durchmesser von etwa 2 m (knapp dreimal soviel wie ein Sportfahrrad) und legte demnach bei einer Kurbelumdrehung $\pi \cdot 2$ m = 6,3 m zurück. Das war das Ziel seiner Erfinder gewesen: Mit einer Kurbelumdrehung sollte eine möglichst lange Strecke zurückgelegt werden. Dazu brauchte der Fahrer allerdings auch sehr viel Kraft. Außerdem setzten die Körpermaße eines Menschen und das Bedürfnis, einigermaßen sicher auf- und abzusteigen sowie bremsen zu können, der Entwicklung immer größerer Hochräder bald Grenzen. Eine neue Idee wurde geboren.

3. Der Kettenantrieb

Die Kraft wird auf das Kettenrad ausgeübt und mit Hilfe der Kette auf den (hinteren) Zahnkranz und damit auf das Hinterrad übertragen.

Beispiel: Wenn das Kettenrad 51 Zähne und der Zahnkranz 17 Zähne hat, dann dreht sich bei einer Pedalumdrehung das Kettenrad einmal und der Zahnkranz und mit ihm das Hinterrad $\frac{51}{17} = 3$mal.

Wenn es sich außerdem um ein 28er Fahrrad handelt, fahren wir bei einer Pedalumdrehung $3 \cdot \text{Umfang} = 3 \cdot 2{,}2\ \text{m} = 6{,}6\ \text{m}$ weit. Etwa genauso weit wären wir mit einem Hochrad von 2,1 m Durchmesser bei einer Kurbelumdrehung gefahren.

▲6▲ Begründe die letzte Aussage!

Das *Übersetzungsverhältnis* ist die Zahl

$$\frac{\text{Anzahl der Zähne am Kettenrad}}{\text{Anzahl der Zähne am Zahnkranz}} = \frac{\text{Zähne vorn}}{\text{Zähne hinten}}.$$

Die Übersetzungsverhältnisse können bei einem 28er und einem 26er Fahrrad gleich sein und trotzdem sind die Auswirkungen unterschiedlich. Ein 26er Fahrrad rollt nämlich bei einem Übersetzungsverhältnis von 3 bei einer Pedalumdrehung nur 6,3 m weit.

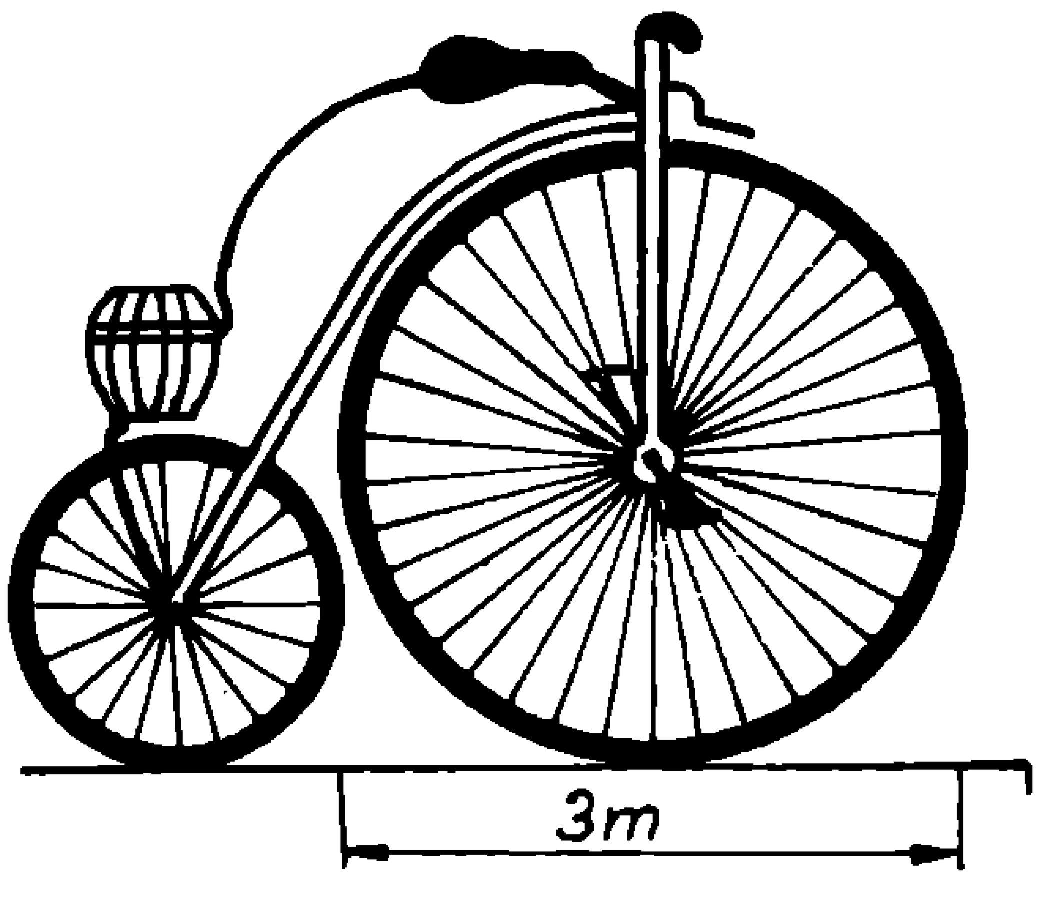
▲7▲ Überprüfe diese Aussage!

Um die Übersetzung eines bestimmten Fahrrades zu beschreiben, hat man die *Entfaltung* eingeführt. Sie wird berechnet als Entfaltung
$= \text{Übersetzungsverhältnis} \cdot \text{Radumfang}$.

Die Entfaltung gibt also die Wegstrecke (in m) an, die das Fahrrad bei einer Pedalumdrehung zurücklegt. Mit Hilfe der Entfaltung können wir unser Fahrrad in Gedanken mit einem Hochrad vergleichen. Beim Hochrad ist die Entfaltung gleich dem Umfang. Aus dem Umfang berechnen wir den Durchmesser als

$$\text{Durchmesser} = \frac{\text{Umfang}}{3{,}14}.$$

Beispiel: Ein Klappfahrrad mit einer Entfaltung von 4,6 m entspricht in diesem Sinne



einem Hochrad mit einem Durchmesser von $\frac{4{,}6}{3{,}14}\ \text{m} = 1{,}5\ \text{m}$.

Radrennfahrer haben ihre eigene Sprache. Sie sagen z. B.: „Ich fahre 120 Zoll“ und meinen damit eigentlich „Ich schaffe es, ein Hochrad mit einem Durchmesser von 120″ zu bewegen“. 120 Zoll sind immerhin $120 \cdot 0{,}0254\ \text{m} = 3\ \text{m}$.

Es kann also wohl nur im übertragenen Sinne gemeint sein. Aber wir bekommen eine ungefähre Vorstellung von der dazu erforderlichen Kraft.

▲8▲ Ein Rennrad gehört zur 27er Kategorie. Welche Entfaltung gehört zu der Aussage „Ich fahre 120 Zoll“? Mit welchem Übersetzungsverhältnis kann der Fahrer diese Entfaltung erreichen? Wie viele Zähne müßte der Zahnkranz dann haben, wenn das Kettenrad 51 Zähne hat?

Beispiel: Wir „berechnen“ ein sogenanntes Bambirad. Das sind die kleinen Fahrräder, mit denen viele Kinder das Radfahren erlernen. Die Laufräder sind $12\frac{1}{2}$″ groß. Ihr Durchmesser beträgt 318 mm und ihr Umfang 1 m. Das Kettenrad hat 30 Zähne, der Zahnkranz 16.

Wir berechnen

$$\text{Übersetzungsverhältnis} = \frac{\text{Zähne vorn}}{\text{Zähne hinten}} = \frac{30}{16} = 1{,}875$$

und Entfaltung
$= \text{Übersetzungsverhältnis} \cdot \text{Radumfang}$
$= 1{,}875 \cdot 1\ \text{m} = 1{,}875\ \text{m}$.

Das Rad rollt also bei einer Pedalumdrehung 1,9 m weit. Das entspricht einem Hochrad folgender Größe:

$$\text{Durchmesser} = \frac{\text{Umfang}}{3{,}14} = \frac{1{,}9}{3{,}14} = 0{,}6\ \text{m} = 24''.$$

Unsere kleinen Rennfahrer fahren demnach 24 Zoll.

▲9▲ Berechne nun dein Fahrrad!

Wir betrachten noch einmal die Formel

$$\text{Entfaltung} = \frac{\text{Zähne vorn}}{\text{Zähne hinten}} \cdot \text{Radumfang}.$$

Der Radumfang sei fest vorgegeben (z. B. 2,2 m, d. h. ein 28er Fahrrad). Wir wollen untersuchen, wie sich die Anzahl der Zähne vorn und hinten auf die Entfaltung auswirkt. Dazu stellen wir zwei Wertetabellen auf:

1. Kettenrad 48 Zähne		2. Zahnkranz 18 Zähne	
Zähne hinten	Entfaltung	Zähne vorn	Entfaltung
13	8,1 m	36	4,4 m
16	6,6 m	40	4,9 m
18	5,9 m	46	5,6 m
20	5,3 m	48	5,9 m
24	4,4 m	51	6,2 m

Wir erkennen:

Die Entfaltung wird größer, wenn die Anzahl der Zähne hinten kleiner oder die Anzahl der Zähne vorn größer wird.

Zugleich beachten wir:

Je größer die Entfaltung ist, desto größer ist das vergleichbare Hochrad, desto anstrengender ist das Fahren.

Wir unternehmen nun einen kurzen Abstecher in die Sportgeschichte: Großes Rennen Berlin–Wien um die Jahrhundertwende. Am Berg halten die Rennfahrer an. Sie drehen die Hinterräder um. Wir sehen am Hinterrad zwei Zahnkränze. Sie fahren mit dem größeren Zahnkranz (d. h. mit dem kleineren Hochrad!) den Berg hinauf, oben angekommen wechseln sie das Hinterrad zurück. Diese Wechsel kosten wertvolle Zeit.

Der Wunsch nach höheren Geschwindigkeiten spornte den Erfindungsgeist der Menschen an.

4. Die Gangschaltung

Eine Gangschaltung ermöglicht es, das Übersetzungsverhältnis während der Fahrt zu verändern. Gangschaltungen für Freizeitsportler besitzen ein oder zwei Kettenradblätter und 3 bis 5 Zahnkränze. Ein *Gang* ist ein bestimmtes Übersetzungsverhältnis.

Beispiel: Bei einer Gangschaltung mit Zweifachkettenrad und drei Zahnkränzen gibt es $2 \cdot 3 = 6$ verschiedene Kombinationen von Kettenrad und Zahnkranz.

Offensichtlich müssen nicht alle möglichen Kombinationen zu verschiedenen Gängen führen.

▲10▲ Überlege dir ein entsprechendes Beispiel.

Es ist also möglich, daß eine sogenannte 10-Gang-Schaltung nur so viel leistet wie z. B. eine 8- oder 6-Gang-Schaltung. Wer sich eine Gangschaltung selbst baut, sollte das beachten.

Zum Abschluß wenden wir uns dem Olympiafahrrad von Olaf Ludwig zu. Es ist ein 27er Rennrad, das Kettenrad hat die Größen 50 und 55, der Zahnkranz die Größen 12, 13, ..., 18. Daraus ergeben sich in geordneter Reihenfolge die Gänge 4,6; 4,2; 3,9; 3,7; 3,6; 3,4; 3,3; 3,2; 3,1; 2,9 und 2,8. In der Aufgabe 5 haben wir den Radumfang 2,2 m berechnet. Im größten Gang beträgt die Entfaltung demnach 10,1 m. Das entspricht einem Hochrad von 3,2 m Durchmesser.

E. u. W. Warmuth

Preisaufgabe

Im Straßen-Einzelwettbewerb in Soul 1988 siegte Olaf Ludwig vor Bernd Gröne und Christian Henn (beide BRD) in der Zeit von 4 h 32 min und 22 s. Die Strecke war 196,8 km lang.

Löst die folgenden Aufgaben und ihr bekommt eine Vorstellung von der Leistung dieser Rennfahrer.

1. Wie viele Kurbelumdrehungen hätte es für Olaf Ludwig auf dem Olympiakurs höchstens geben können?
2. Wie viele Umdrehungen hat er mit den Pedalen mindestens vollführt, wenn wir annehmen, daß Olaf Ludwig ständig „auf Anschlag“ getreten hat. Welche Zeit hatte er dabei im Durchschnitt für eine Kurbelumdrehung?

Wir losen 8 Autogrammfotos von Olaf Ludwig aus.

Nur Postkarten an: Redaktion „alpha“
PSF 14, Leipzig, 7027

Einsendeschluß: 10. 9. 1990

Läßt sich der Zufall berechnen?

Teil 2

Mischt der Zufall die Karten, so verliert der Verstand das Spiel.

Um die Einführung des Begriffes „bedingte Wahrscheinlichkeit" vorzubereiten, wird vorübergehend angenommen: Beim im Teil I (Heft 2/90) betrachteten gezinkten Würfel sind die 5 und 6 Punkte tragenden Würfelflächen als einzige rot gefärbt. Und von den mit diesem Würfel ausgeführten 1 000 Würfen sind alle ungültig, bei denen das Ereignis
$U = \{1; 3; 5\}$ eingetreten ist.
Unter diesen Annahmen wäre

$$P(R) = \frac{456}{88 + 131 + 456} \text{ als Näherungswert}$$

der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Rot", für $R = \{5; 6\}$ ermittelt worden. Bei Wertung aller 1000 Würfe kann dieser Quotient nicht als Näherungswert einer Wahrscheinlichkeit bezeichnet werden. Er wird dann Näherungswert der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(R/G)$ für
$R = \{5; 6\}$ bezüglich $G = \{2; 4; 6\}$ genannt.
Für diesen Quotienten gilt:

$$P(R/G) = \frac{\frac{456}{1000}}{\frac{88 + 131 + 456}{1000}} = \frac{P(R \cap G)}{P(G)}.$$

Allgemein wird festgesetzt:
Definition 4: Sind A und B zum gleichen zufälligen Versuch gehörende Ereignisse mit $P(A) > 0$, so heißt

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ *bedingte Wahrscheinlichkeit für B bezüglich A* (kurz: B bez. A).

Gemäß dieser Definition ist für $P(B) > 0$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für A bez. B gleich

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$ Durch Umstellen der Formeln für $P(A/B)$ und $P(B/A)$ nach $P(A \cap B)$ ergibt sich der folgende Satz.

Satz 4: Sind A und B zum gleichen zufälligen Versuch gehörende Ereignisse mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$, so gilt
$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = P(A/B) \cdot P(B)$.
Im Spezialfall der Gleichwahrscheinlichkeit der Elementarereignisse gilt:

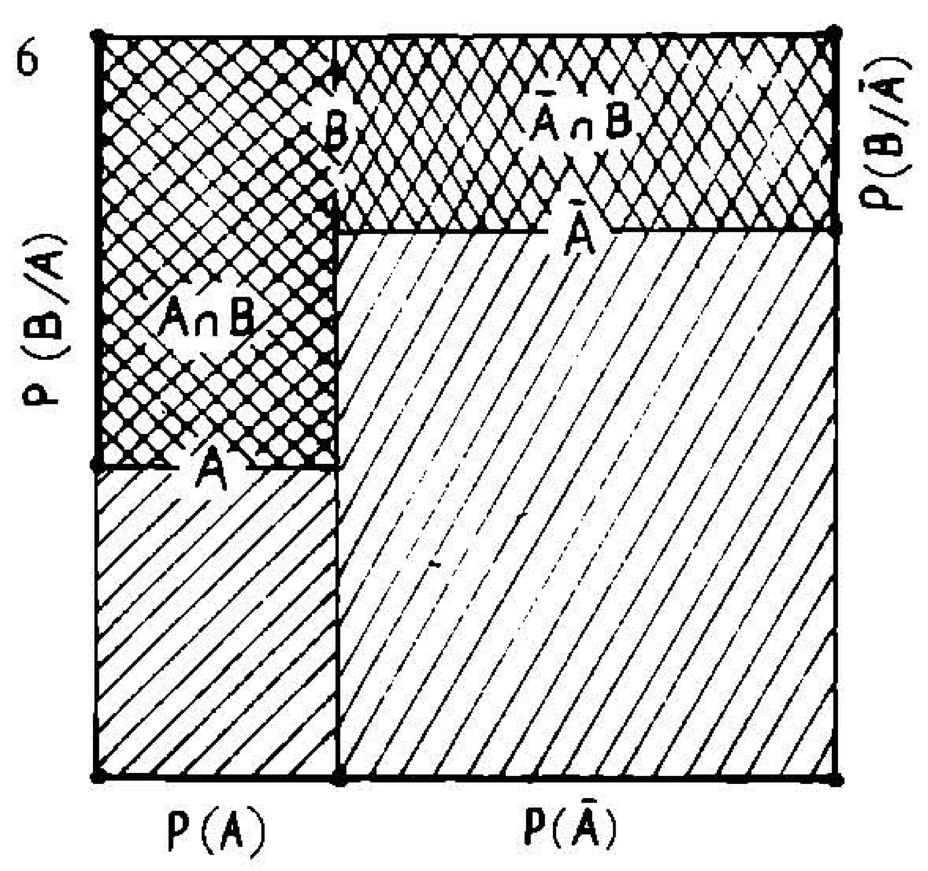
$$\text{bedingte Wahrscheinlichkeit für } A \text{ bez. } B = \frac{\text{Anzahl der sowohl zu } A \text{ als auch zu } B \text{ gehörenden Elementarereignisse}}{\text{Anzahl der zu } B \text{ gehörenden Elementarereignisse}}.$$

▲6▲ Wie groß sind die mit den in Aufgabe 1 eingeführten Ereignisse A und $\bar{D}$ gebildeten bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A/D)$ und $P(D/A)$?

▲7▲ Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für $R = \{5; 6\}$ bez. $G = \{2; 4; 6\}$ bei einmaligem Würfeln mit einem Idealwürfel?

In speziellen Venn-Diagrammen werden Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten auch als Strecken sichtbar: Wird dem Ereignis A als Fläche die eines Rechtecks zugeordnet, dessen eine Seite 1 dm lang ist, so hat die andere Rechteckseite, da der Flächeninhalt $P(A)\,\text{dm}^2$ ist, die Länge $P(A)\,\text{dm}$. Werden nunmehr den Ereignissen $A \cap B$ und $\bar{A} \cap B$ Flächen von Rechtecken, deren eine Seite $P(A)\,\text{dm}$ bzw.
$P(\bar{A})\,\text{dm} = [1 - P(A)]\,\text{dm}$ lang ist, zugeordnet, so sind deren andere Seiten $P(B/A)\,\text{dm}$ bzw. $P(B/\bar{A})\,\text{dm}$ lang (Bild 6).

Bild 6

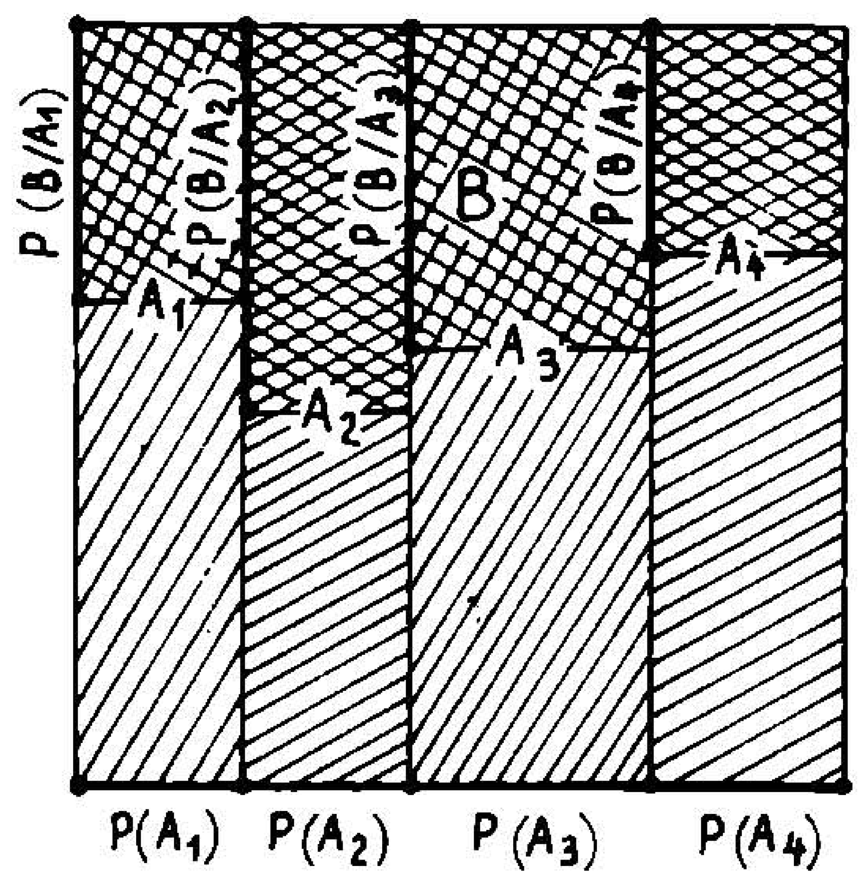


Definition 5: Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen ein *vollständiges System von Ereignissen eines zufälligen Versuchs*, wenn zwei beliebige von ihnen unvereinbar sind und wenn bei jeder Ausführung des zufälligen Versuchs unbedingt eines von ihnen eintritt.
Für ein vollständiges System von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gilt also
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega,\ A_i \cap A_j = \emptyset$
für $i \neq j$ und damit
$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

▲8▲ Für einmaliges Würfeln mit einem Würfel sollen die Ereignisse
$A_1 = \{1; 2; 3\}$, $A_2 = \{6\}$ und A_3 ein vollständiges System bilden. Wie lautet A_3?

Für jeden zufälligen Versuch sind zwei komplementäre Ereignisse sowie alle Elementarereignisse vollständige Systeme von Ereignissen.
Für einen zufälligen Versuch mögen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein vollständiges System von Ereignissen mit
$P(A_i) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bilden, und B sei ein zum gleichen zufälligen Versuch gehörendes Ereignis. Im Venn-Diagramm seien die Ereignisse A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durch n Rechtecke mit der Seite 1 dm dargestellt und das Ereignis B durch n Rechtecke, so daß die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B/A_i)$ als Strecken sichtbar sind (Bild 7).

Bild 7



Aus dieser Darstellung ist der Flächeninhalt jedes der n Rechtecke des Ereignisses B als
$P(B/A_i) \cdot P(A_i)\,\text{dm}^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$
ablesbar. Demnach gilt
$P(B)\,\text{dm}^2 = P(B/A_1) \cdot P(A_1)\,\text{dm}^2 + P(B/A_2) \cdot P(A_2)\,\text{dm}^2 + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)\,\text{dm}^2$.
Damit wurde die „Formel der totalen Wahrscheinlichkeit" anschaulich erhalten.
Satz 5: Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein vollständiges System von Ereignissen eines zufälligen Versuchs mit
$P(A_i) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und ist B ein zum gleichen zufälligen Versuch gehörendes Ereignis, so gilt

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n).$$

▲9▲ In einer Urne befinden sich viele rote und grüne Kugeln. 30 % aller Kugeln sind rot, 70 % aller Kugeln sind grün gefärbt. 40 % aller roten Kugeln und 50 % aller grünen Kugeln haben weiße Punkte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus dieser Urne eine Kugel mit weißen Punkten herauszunehmen?

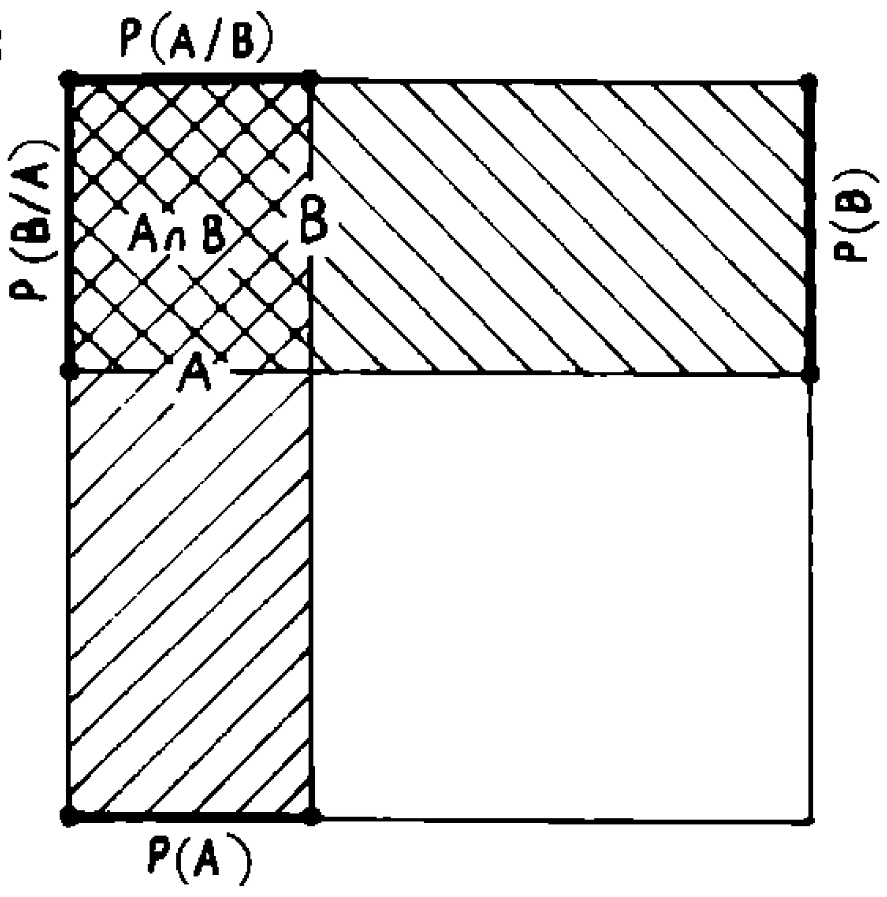
Mit $A = A_i$ gilt laut Satz 4
$P(B/A_i) \cdot P(A_i) = P(A_i/B) \cdot P(B)$
und damit $P(A_i/B) = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$.
Wird in dieser Formel $P(B)$ durch die in Satz 5 angegebene Darstellung ersetzt, so ergibt sich die Formel von Bayes (Th. Bayes, 1702 bis 1763, engl. Math.).
Satz 6: Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein vollständiges System von Ereignissen eines zufälligen Versuchs und ist B ein weiteres Ereignis des gleichen zufälligen Versuchs, so gilt

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)}.$$

▲10▲ Zum Futteranbau sät eine LPG eine Gemengesaat aus, bei der 29 % der Samenkörner Blaue Süßlupine, 54 % Sommerwicke und 17 % Sonnenblume sind. Bei der Lupine beträgt die Keimfähigkeit 80 % (d. h. von 100 Lupinesamenkörnern keimen im Mittel 80), bei der Wicke 95 % und bei der Sonnenblume 85 %. Wie groß ist

die Wahrscheinlichkeit, daß eine aufgehende Pflanze
a) eine Lupine,
b) eine Wicke und
c) eine Sonnenblume ist?
Bild 6 läßt erkennen: Gilt speziell $P(B/A) = P(B/\bar{A})$, so gelten ebenfalls $P(A/B) = P(A)$ und $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (Bild 8).

Bild 8



Definition 6: Zwei Ereignisse A und B eines zufälligen Versuchs heißen *unabhängig*, falls gilt
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

▲11▲ Welche Paare der in Aufgabe 1 betrachteten Ereignisse sind unabhängig?

▲12▲ Es sind zwei zum einmaligen Würfeln mit einem Idealspielwürfel gehörende, nicht unabhängige Ereignisse anzugeben!

Aus Satz 4 und Definition 6 folgt:
Satz 7: Die zum gleichen zufälligen Versuch gehörenden Ereignisse A und B mit $P(B) > 0$ sind unabhängig genau dann, wenn $P(A/B) = P(A)$ gilt.

W. Träger

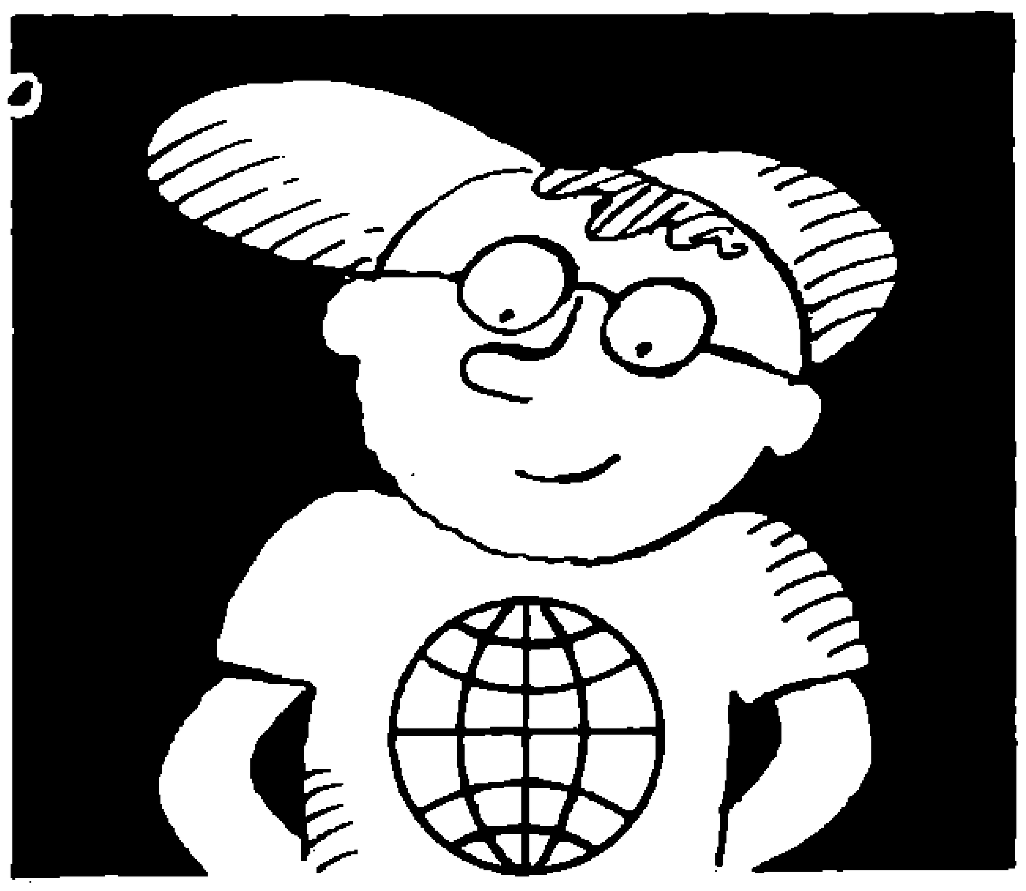
Die Fortsetzung folgt im nächsten Heft

„Noch" Euripides (480 bis 406 v. u. Z.) meinte:
Des Zufalls Wege sind uns unbekannt.
Sie zu berechnen, lehrt uns keine Kunst.

Wen wundert es, denn die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde erst in der Mitte des 17. Jahrhunderts von P. de Fermat, B. Pascal, C. Huygens und Jakob Bernoulli bei der mathematischen Behandlung von Glücksspielen begründet.
Probleme der Naturwissenschaften förderten ihre Weiterentwicklung bedeutend, z. B. durch die Fehlertheorie, die kinetische Gastheorie, die Zuverlässigkeitstheorie und die Bedienungstheorie.

Eine Zufalls-Beobachtung kann in der Tat jeder machen. Aber von ihr bis zu der großen Ahnung, daß etwas Bedeutsames dahintersteckt, ist ein großer Schritt, und ein noch größerer von dieser Ahnung bis zur klaren wissenschaftlichen Erkenntnis, was dieses Etwas ist.

Max von Laue



▲1▲ Милиционер Степан Степанов обернулся на звук бьющегося стекла и увидел четырех подростков, убегающих от разбитой витрины. Через 5 минут они были в отделении милиции.
Андрей заявил, что стекло разбил Виктор, Виктор же утверждал, что виноват Сергей. Сергей заверял, что Виктор лжет, а Юрий твердил, что это сделал не он. Из дальнейшего разговора выязнилось, что лишь один из ребят говорил правду.
Кто разбил стекло?

aus: Quant, Moskau

▲2▲ **Find the pattern**
Create two more examples of the same nature as the following:

$3^2 - 1^2 = 2^3$, $6^2 - 3^2 = 3^3$, $10^2 - 6^2 = 4^3$.

Notice the particular set from which we took the integers that are squared. When you succeed in identifying the required set you should have no difficulty creating more examples; you should also find it easy to prove the general validity of the pattern.

aus: Fun with mathematics, Toronto

▲3▲ **Carrés magiques**
Avec, pour chacun, les nombres de 1 à 25 inclus, à vous de reconstituer ces 2 carrés magiques. Les positions de certains nombres sont imposées d'avance et vous devez trouver un total de **65** sur chaque ligne, chaque colonne et sur les grandes diagonales.

		3		
23			19	
	4			
6		20	2	24
			11	

		21		
24	7			
	11			
2			16	
				23

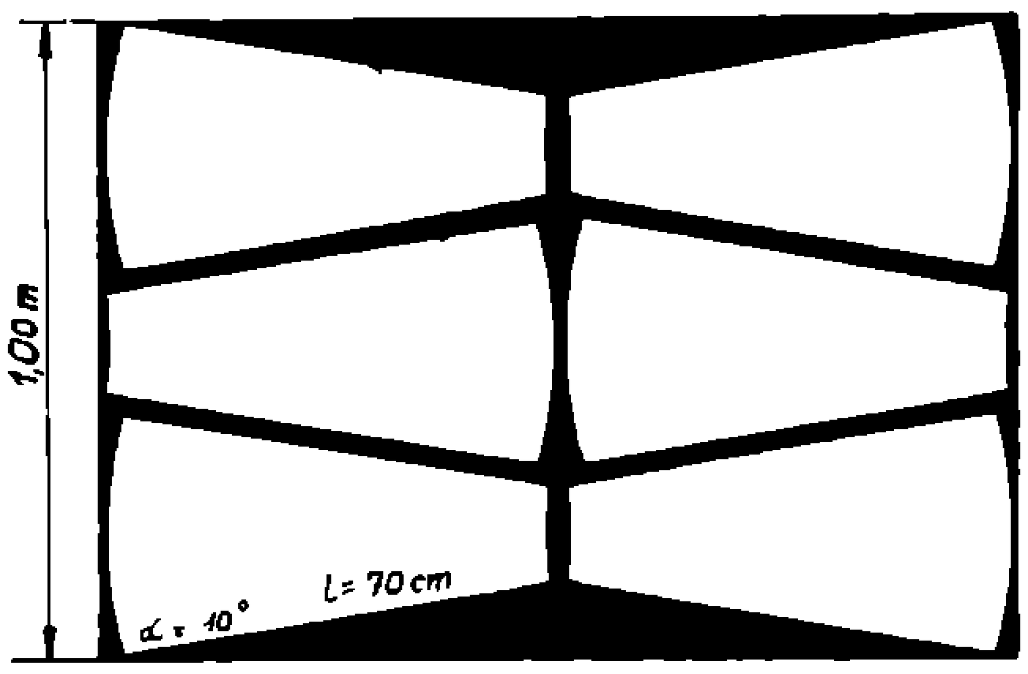
Coup de pouce: répartissez les 25 nombres en 5 tranches (1-5, 6-10, 11-15, 16-20, 21-25). Ils doivent alors être disposés de telle façon que ceux d'une même tranche figurent obligatoirement sur des lignes **et** sur des colonnes **différentes**!

aus: Logigram, Paris

Noch ein Zuschneideproblem: Der Sechs-Bahnen-Rock

Ihr wißt, liebe alpha-Leser, daß Technologien weitgehend von den Eigenschaften des Materials bestimmt werden, das man verarbeiten will. So könnt ihr die im Heft 3/90 vorgestellten Methoden, einen weiten Rock zuzuschneiden, nur bei festen Stoffen anwenden. Aus Seide zugeschnitten würde der Rock zipfeln, d. h. er würde an den Stellen, wo der Faden schiefwinklig zum Radius bzw. zum senkrechten Fall des Kleidungsstückes läuft, länger werden.
Es gibt im wesentlichen drei Rockformen, bei denen dieses Übel nicht auftritt: den angekrausten, den Stufen- und den Sechs-Bahnen-Rock.
Setze ich den Rock aus sechs gleichen, symmetrischen Bahnen zusammen, dann kann die Abweichung vom Fadenlauf gering gehalten werden (Fadenlauf = Parallele zur Webekante).
Das Bild zeigt, wie man den Schnitt auf den Stoff legen kann. Nun kommt es darauf an, ihn so zu konstruieren, daß die Stoffbreite 1 m gut ausgenutzt wird.

Webekante



Webekante

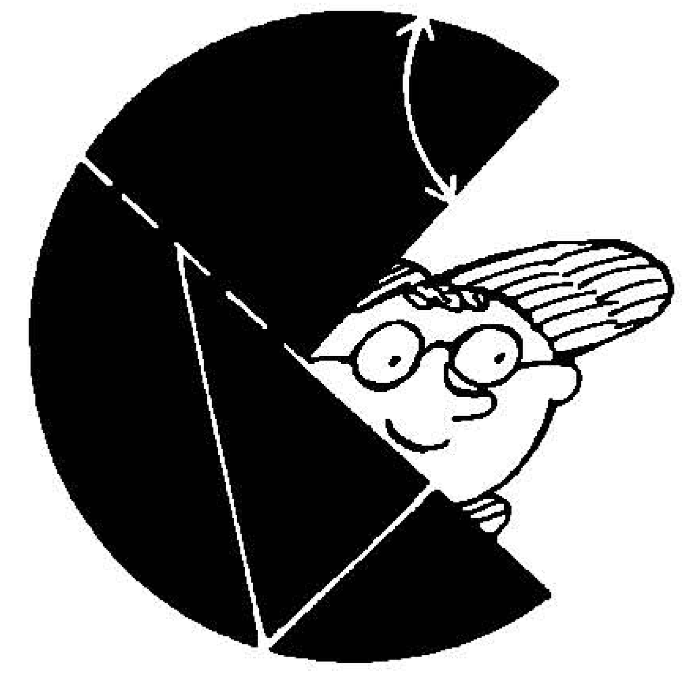
Folgende Bedingungen sind zu erfüllen:
1. Die Rockbahnen haben die Form eines Kegelstumpfmantels. Die Schnitteile sind so aufzulegen, daß ihre Symmetrieachsen die Richtung des Fadenlaufs haben.
2. Die Nahtlinien bilden mit dem Fadenlauf einen Winkel von 10°.
3. Die Rocklänge beträgt vor dem Säumen 70 cm.
4. Für die Nahtzugaben und das versetzte Auflegen der mittleren Rockbahn ist ein geschätzter Spielraum von insgesamt 8 cm zu veranschlagen.

Damit haben die Sehnen der drei Kreisbogen, die die Schnittkante berühren, eine addierte Länge von $2S + s = 92$ cm.
Rechnet weiter und konstruiert!

J. Heller

Die Lösung erscheint im nächsten Heft.

In freien Stunden · alpha-heiter



Mathe-Mix

Sechs mathematische Begriffe wurden untereinander auf sieben Buchrücken geschrieben; doch die Bücher wurden umgestellt.

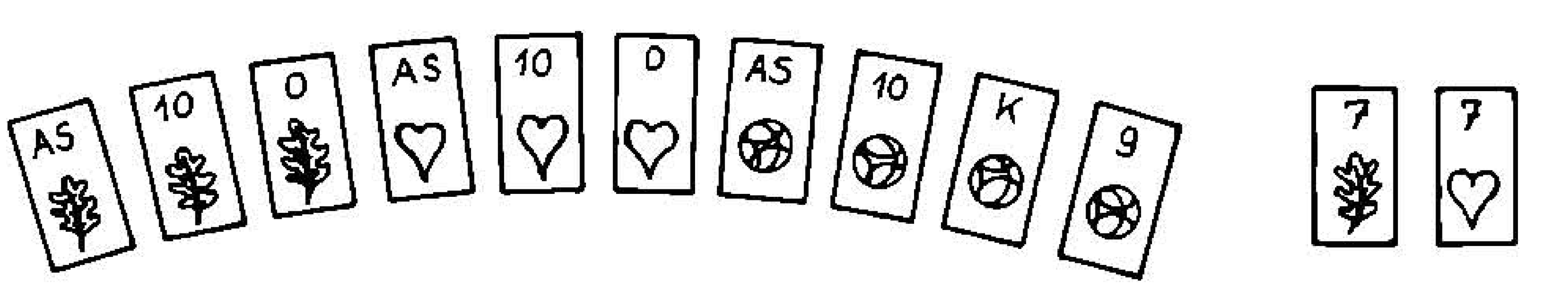
IE	YM	IA	AX	LS	TR	ME
NG	LE	UC	BR	HG	HU	IC
CK	NV	AC	DR	HE	RE	IE
NG	RE	HL	FE	ER	NU	CH
TT	BS	GE	KU	LA	NI	CH
ON	LI	LT	MU	IP	TI	KA

Bringt die Bücher wieder in die richtige Reihenfolge, und ihr werdet wissen, um welche Begriffe es sich handelt!

Dr. R. Mildner, Leipzig

Ein Farbspiel „ohne 11 Spitzen"

Das Blatt eines Skatspielers besteht aus den 10 Karten As, Zehn und Ober von Pik und auch von Herz sowie As, Zehn, König und Neun von Karo. Beim Reizen erhält er das Spiel auf „24". Im Skat findet er Pik- und Herz-Sieben. Er spielt Kreuz und ge-



winnt das Spiel, obgleich ein Spieler mit derartigen Karten im Mittel nur jedes 18. Spiel gewinnen kann.

a) Welche Kartenblätter haben seine Gegner?
b) Welche Karten hat der Spieler in den Skat gelegt?
c) Welche Spielweise wendet der Spieler an?

W. Träger, Döbeln

Einer paßt nicht

Stempel Fenster Klafter Klammer Klemmer Stummel Meister

Von den sieben Begriffen weisen sechs eine Gemeinsamkeit auf. Einer paßt nicht in diese Reihe. Welcher ist es und warum?

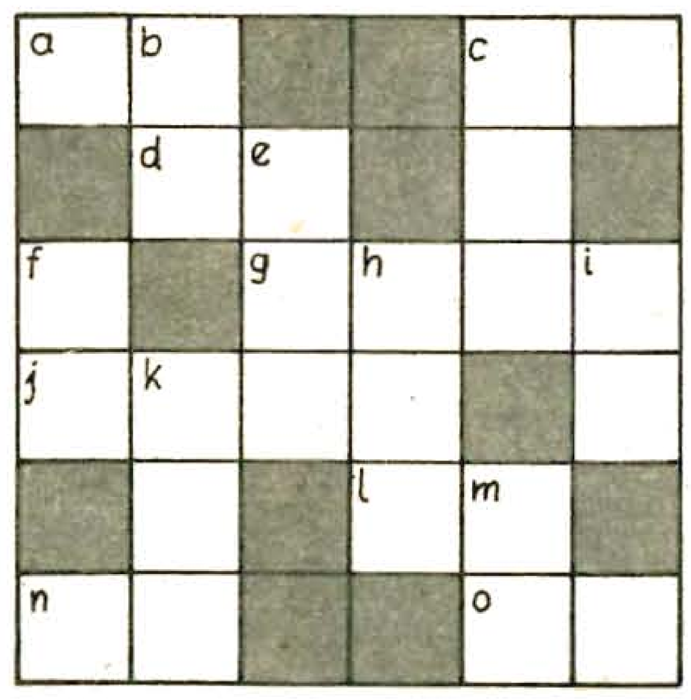
Ing. K.-H. Milde, Dresden

Lernen ist wie Rudern gegen den Strom. Sobald man aufgibt, treibt man zurück.

Chinesisches Sprichwort

Kreuzzahlrätsel

Waagerecht: a_w Quersumme aller drei- und vierstelligen Zahlen dieses Rätsels; c_w Quadratzahl; d_w echter Teiler von n_w; g_w Primzahl kleiner als j_w; j_w Zahl mit gleichen Ziffern; l_w Vielfaches von f_s; n_w Quadratzahl; o_w Vielfaches von l_w



Senkrecht: b_s gerade Zahl; c_s Zahl mit den drei Ziffern von k_s; e_s ungerade Zahl; f_s Teiler von j_w; h_s Primzahl; i_s Quadratzahl; k_s Teiler von j_w; m_s ungerade Zahl.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Personalpronomen

Die abgebildeten Kryptogramme sind – durch Einsetzen von dezimalen Grundziffern für die Buchstaben – mehrdeutig lösbar.
Gebt im Falle b) alle Lösungen und in den Fällen a) und c) mindestens vier verschiedene Lösungen an!

a) $\begin{array}{r} ICH \\ +DU \\ \hline WIR \end{array}$ b) $\begin{array}{r} ER \\ +ES \\ \hline SIE \end{array}$ c) $\begin{array}{r} WIR \\ +IHR \\ \hline SIE \end{array}$

Dr. R. Mildner, Leipzig

Otto Hahn (Chemiker, Nobelpreisträger, 1879 bis 1968) ging mit einem jüngeren Wissenschaftler, aufmerksam seine Umgebung beobachtend, spazieren. Dabei entschlüpfte dem 78jährigen die Äußerung: „Wissen Sie, wenn man die vielen hübschen jungen Mädchen sieht, möchte man wirklich noch einmal 70 sein."

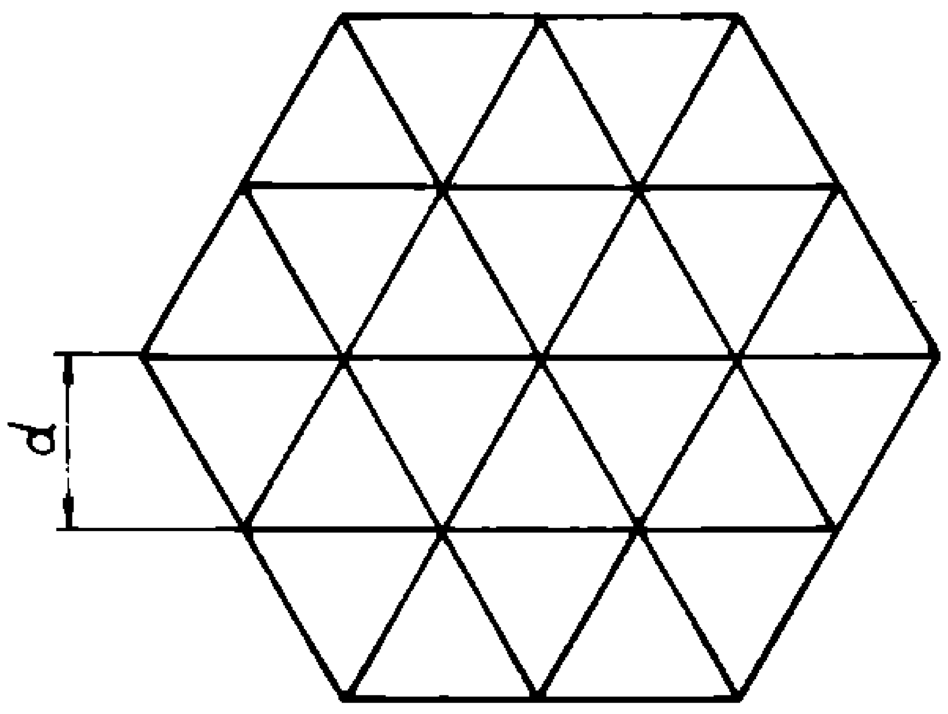
aus: Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, VEB Fachbuchverlag Leipzig

Magische Hexagone

Den 24 kongruenten gleichseitigen Dreiecken sind
a) die natürlichen Zahlen von 1 bis 24 und
b) die natürlichen Zahlen von 1 bis 6, wobei jede genau viermal verwandt wird,

so zuzuordnen, daß die Summen der in allen 12 sichtbaren Streifen der Breite d stehenden Zahlen gleich sind.

W. Träger, Döbeln



Vom Kern zum Wort

Unabhängig von ihrer Reihenfolge sind die bereits eingetragenen Wörter zu Begriffen nachstehender Bedeutung zu ergänzen. Richtig gelöst ergeben die Anfangsbuchstaben den Namen des Ergebnisses einer Grundrechenoperation.

				R	A	T	
				E	I	S	
		D	I	N			
					I	O	N
		P	L	I			
			O	N	E		
					A	L	E
			G	E	N		

1. Gerade, die eine Kurve in einem Punkt berührt,
2. spezielle Vierecke,
3. Hochzahl einer Potenz,
4. Zahlwort (lateinisch),
5. 10^{18} als Zahlwort,
6. Kreise, auf denen die Eckpunkte eines Vielecks liegen,
7. Gegenteil von explizit,
8. y-Wert im Koordinatensystem.

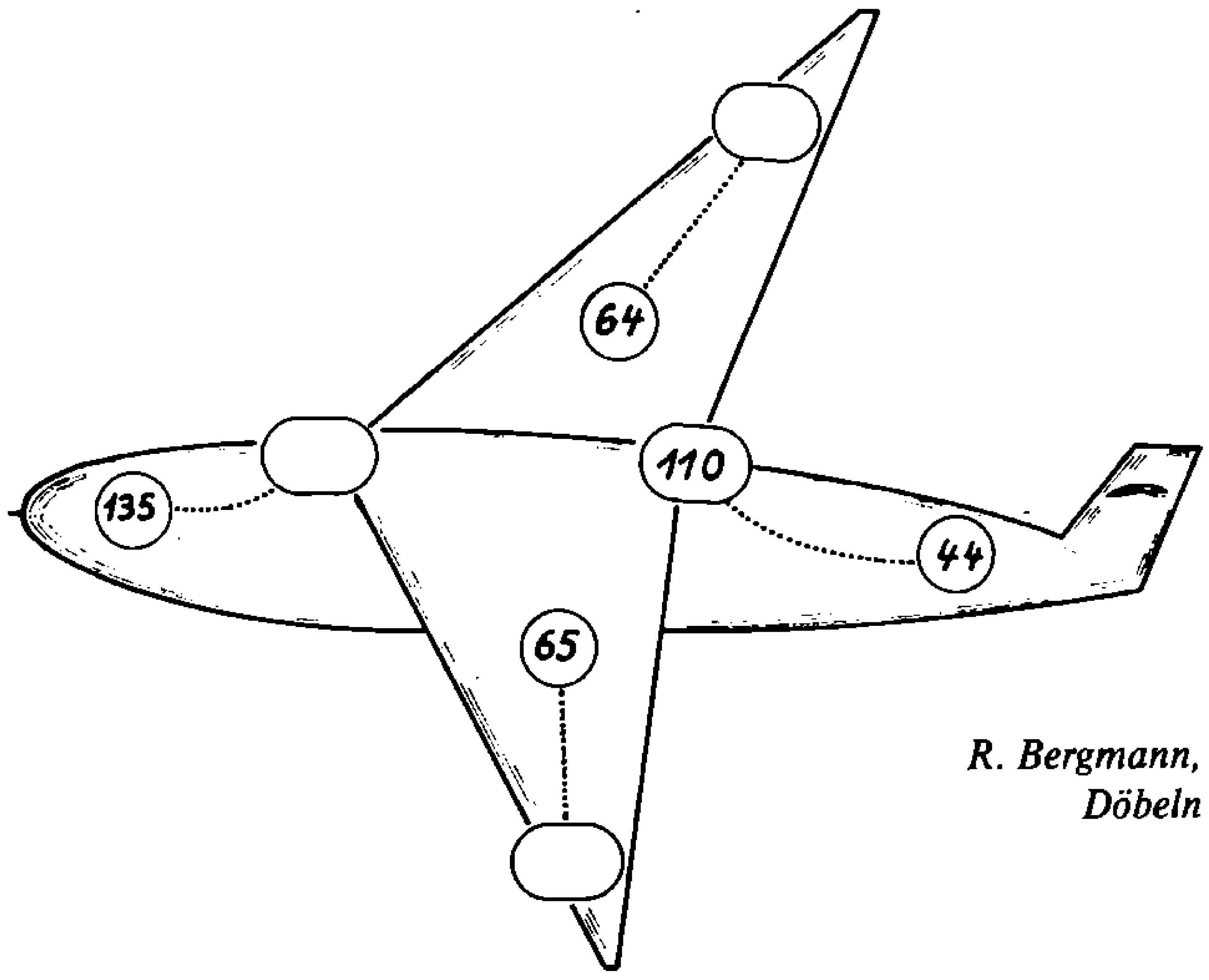
OL K. Koch, Schmalkalden

Mathematische Luftfracht

In die drei freien ovalen Felder sind natürliche Zahlen derart einzutragen, daß das Flugzeug sich im „Gleichgewicht" befindet, daß also die Summe der auf der linken Tragfläche stehenden beiden Zahlen (Kreis und Oval) gleich der Summe der beiden auf der rechten stehenden ist und die Summe der beiden vorn stehenden Zahlen gleich der Summe der beiden hinten stehenden ist. Dabei ist zu beachten, daß die Summe

a) aller in Kreisen stehenden Zahlen gleich der Summe aller in den Ovalen stehenden,
b) der Quadrate aller in Kreisen stehenden Zahlen gleich der Summe der Quadrate aller in den Ovalen stehenden sein soll.

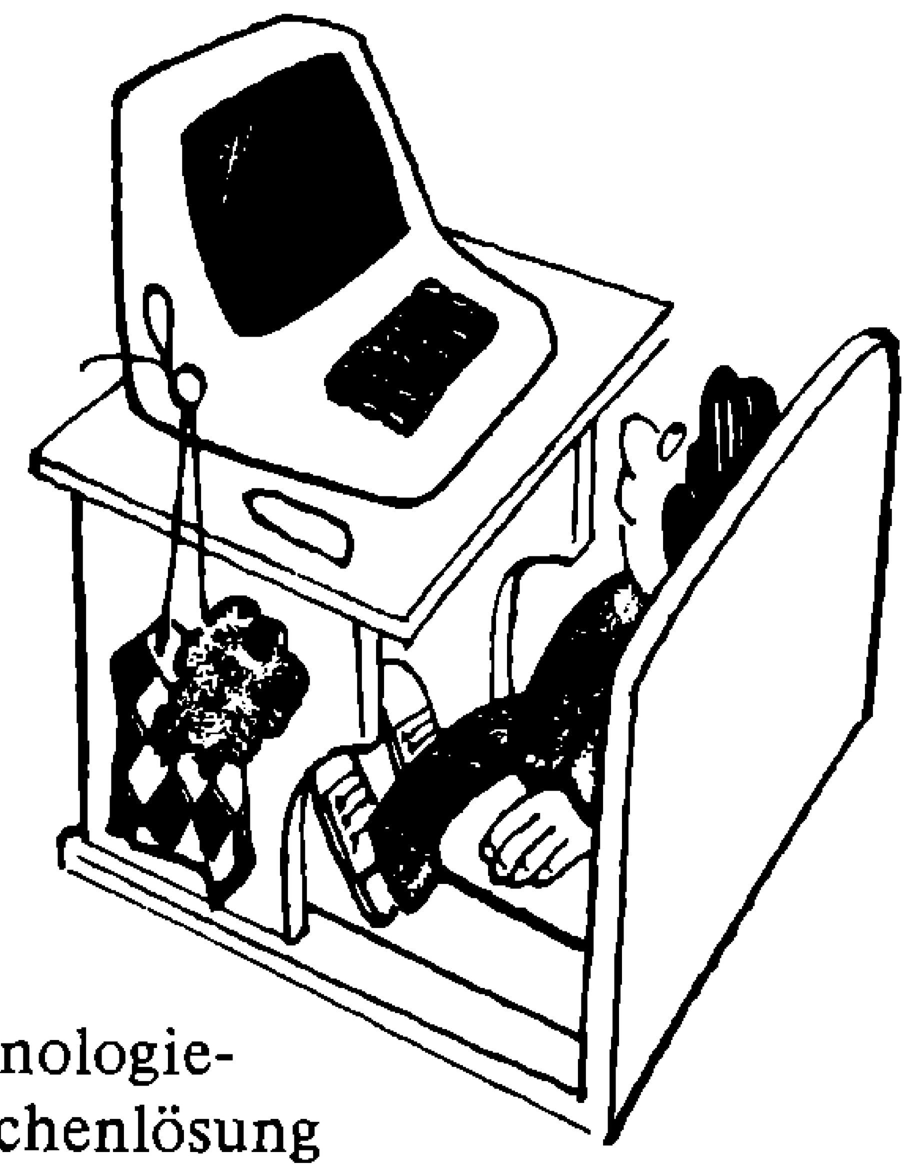
Wie lauten die einzutragenden Zahlen?



R. Bergmann, Döbeln

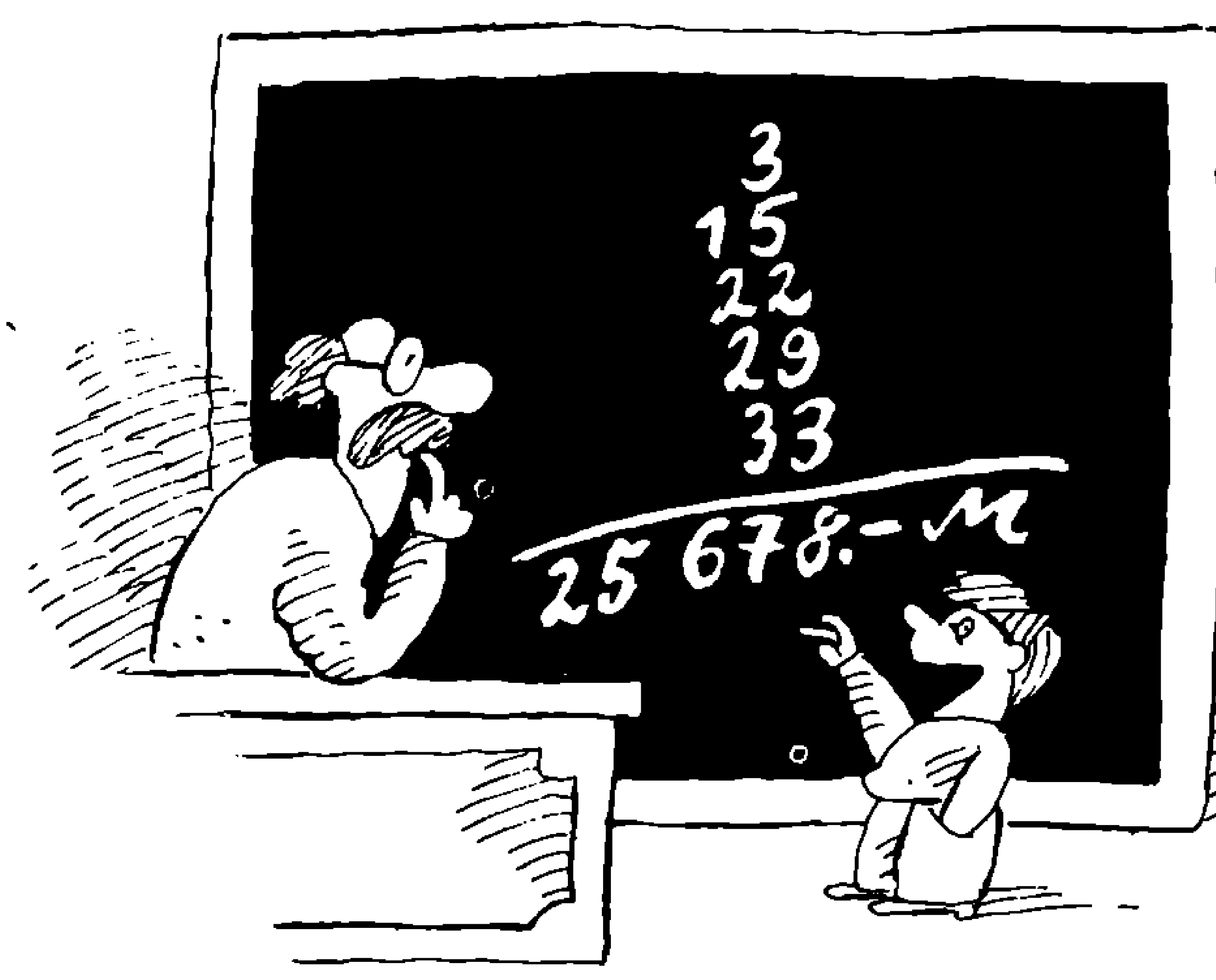
Wir wünschen allen (Schul-)anfängern einen guten Start in den neuen Lebensabschnitt!

Alphons



Technologie-Zwischenlösung

Peter Dittrich aus: Eulenspiegel



„Ganz einfach, wir haben im Lotto gewonnen!"

Lothar Otto

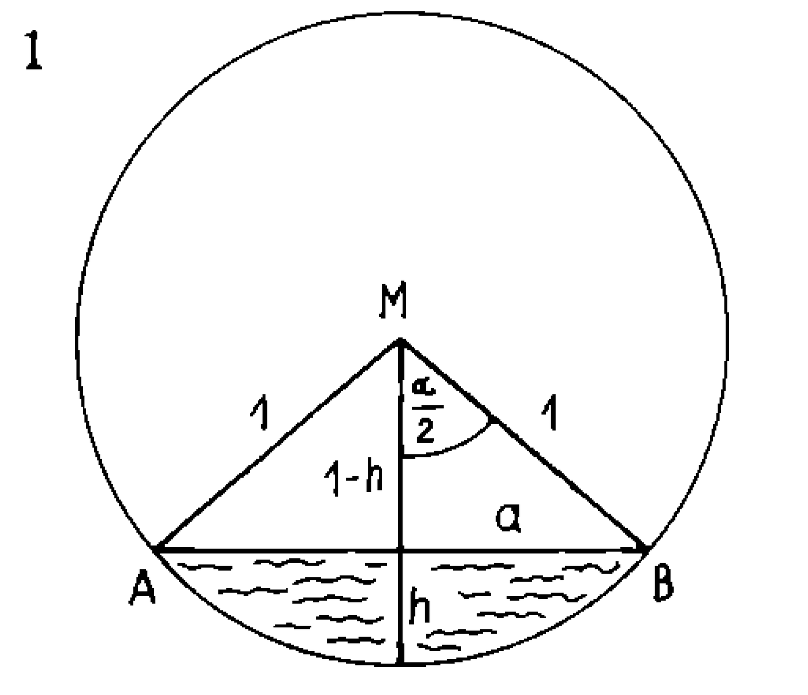
Eine Aufgabe für den Schulrechner SR1

Ein Flüssigkeitstank habe die Gestalt eines liegenden Zylinders, der Durchmesser betrage 2 m und die Länge L des liegenden Zylinders 10 m. Für diesen Tank soll ein Meßstab angefertigt werden. Nun werden einige Leser einwenden, daß diese Aufgabe nicht sehr sinnvoll ist, denn für einen echten Tank wird man den Meßstab doch durch Ausprobieren (Einfüllen abgemessener Flüssigkeitsmengen) schnell erhalten können. Unlängst hat sich aber ein Betrieb mit einem derartigen Problem an uns gewandt. In diesem Betrieb ist der Behälter bereits teilweise gefüllt und soll nie restlos leer werden, eine Füllanzeige fehlt aber.

1. Ein gleichmäßig unterteilter Stab

Es soll zuerst ein gleichmäßig unterteilter Stab hergestellt werden, bei dem die Markierungen im Abstand von 10 cm aufzutragen sind. Das Bild 1 stellt einen Schnitt parallel zu den Stirnflächen des Tanks dar.

Bild 1



Es ist $\cos\frac{\alpha}{2} = 1 - h$. Alle Winkel sollen in Bogen angegeben werden, bei Berechnungen mit dem SR 1 ist dieser deshalb auf RAD zu stellen. Der Kreissektor ABM hat den Flächeninhalt $S = \frac{\alpha}{2}$ (weil der Kreis vom Radius 1 den Flächeninhalt π besitzt, gilt nämlich: $S : \pi = \alpha : 2\pi$).

Der Flächeninhalt F_D des Dreiecks ABM ist $F_D = \frac{a}{2}(1 - h)$. Wegen

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}$ folgt $F_D = (1 - h)\sin\frac{\alpha}{2}$.

Mithin ist der Flächeninhalt F_K des durch AB markierten Kreisabschnittes

$$F_K = \frac{\alpha}{2} - (1 - h)\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\alpha - 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha).$$

Ihr könnt F_K nun auch als Funktion von h notieren. Es ist aber einfacher, die Rechnung so zu organisieren:

a) Vorgabe von h
b) Berechne $\alpha = 2\arccos(1 - h)$
c) Berechne $V = 5(\alpha - \sin\alpha)$
d) Notiere V und beginne die Rechnung mit einem neuen h bei a).

Um das Zwischenergebnis α nicht aufschreiben zu müssen, wird α im Speicher M des SR 1 durch Drücken der Taste [x→M] abgespeichert. Nachdem $\sin\alpha$ gebildet wurde, kann die Zahl α durch [MR] zurückgeholt und zu $-\sin\alpha$ addiert werden. wir haben also folgende Tasten auf dem SR 1 zu drücken:

[ ]…[ ] [+/-] [+] [1] [=] [F] [arccos]
Eingabe h

[×] [2] [=] [x→M] [sin]
[+/-] [+] [MR] [=] [×] [5] [=]
Ergebnis notieren

Aus Symmetriegründen braucht die Rechnung nur für $0 < h \leqq 1$ durchgeführt zu werden.

Tabelle 1

Höhe h [m]	Volumen V [m³] SR 1	Z 9001	Vol. [l] (rund)
0,1	0,58725	0,58726	590
0,2	1,6350111	1,63501	1640
0,3	2,9549883	2,95499	2950
0,4	4,472952	4,47295	4470
0,5	6,141848	6,14185	6140
0,6	7,9267319	7,92674	7930
0,7	9,7992199	9,79922	9800
0,8	11,734794	11,7348	11730
0,9	13,711305	13,7113	13710
1,0	15,707963	–	15710

In der 3. Spalte sind die mit dem Heimcomputer robotron Z 9001 erhaltenen Resultate angegeben. Für die vorliegende Aufgabe bietet es sich an, einen programmierbaren Rechner zu benutzen, weil für verschiedene Werte h immer die gleichen Rechenoperationen auszuführen sind. Der Heimcomputer kann jedoch die Werte der Funktion arccos nicht direkt berechnen, d. h. diese Funktion ist für den Z 9001 nicht als (fest programmierte) Standardfunktion vorgesehen. Der Z 9001 besitzt aber die Standardfunktion arctan. Weil aus $u = \cos v$ stets

$$\tan v = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 v}}{\cos v} = \frac{\sqrt{1 - u^2}}{u} \text{ folgt,}$$

ist bei uns

$$\alpha = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2h - h^2}}{1 - h}\right).$$

Das entsprechende BASIC-Programm lautet:

```
10 FOR H=0.1 TO 0.91 STEP 0.1
20 AP=2*ATN(SQR(2*H-H*H)/
   (1-H))
30 V=5*(AP-SIN(AP))
40 PRINT "V=";V,"H=";H
50 NEXT
```

Bei diesem Programm werden die Anweisungen 20, 30 und 40 für H = 0,1, H = 0,2, …, H = 0,9 abgearbeitet. AP bezeichnet die Größe α. ATN, SIN und SQR stehen für die im Computer programmierten Funktionen arctan, sin und $\sqrt{\ }$. Für H = 1 würde das Programm kein Ergebnis liefern, weil dann in Anweisung 20 eine Division durch 0 auftreten würde.

2. Ein nichtlinear unterteilter Stab

Wie hoch ist der Tank bei einer vorgegebenen Flüssigkeitsmenge gefüllt? Wie ist die Unterteilung eines Stabes vorzunehmen, wenn Markierungen zu bestimmten Volumina anzuzeichnen sind? Dieses Problem soll jetzt skizziert werden.

Es ist

$V = 5(\alpha - \sin\alpha)$ und $h = 1 - \cos\frac{\alpha}{2}$.

Bestimme zuerst α so, daß

$\alpha - \sin\alpha - \frac{1}{5}V = 0$ ist, und ermittle anschließend die zugehörige Höhe h, wobei V gegeben ist. Es liegt eine nichtlineare Gleichung für die Unbekannte α vor. Grafisch können wir die Lösung näherungsweise als Abszisse des Schnittpunktes der Kurve $y = \sin\alpha$ mit der Geraden $y = \alpha - \frac{1}{5}V$ bestimmen. Beim Heimcomputer kann man sich die Funktion $\alpha - \sin\alpha - \frac{V}{5}$ auf dem Bildschirm aufzeichnen lassen, dann kann ungefähr die Nullstelle abgelesen werden. Häufig ist die erhaltene Näherung α_0 *iterativ* auf folgende Weise zu verbessern:

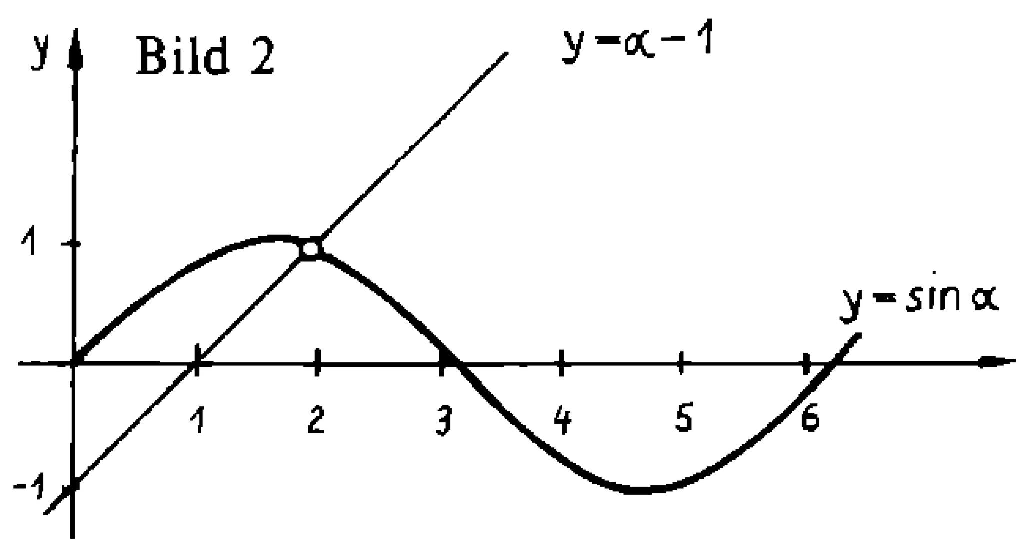
Wegen $\alpha = \sin\alpha + \frac{1}{5}V$ kann

$\alpha_1 = \sin\alpha_0 + \frac{1}{5}V$ berechnet werden,

anschließend

$\alpha_2 = \sin\alpha_1 + \frac{1}{5}V$, usw. Für „genügend gute“ Näherungen α_0 und Lösungen α mit $0 < \alpha < \pi$, die nicht zu nahe bei π liegen, liefert diese Methode immer bessere Näherungen für die Nullstelle.

Ist z. B. $V = 5$, so finden wir grafisch (Bild 2) $\alpha_0 \approx 2$.



Auf dem SR 1 ist die Tastenfolge

[2] [sin] [+] [1] [=]
Ergebnis notieren

auszuführen. Wir finden die Näherungen $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 1{,}909, \ldots$,
$\alpha_{10} = 1{,}9345633$.

Der SR 1 zeigt den Funktionswert
$\alpha_{10} - \sin\alpha_{10} - 1 = 4 \cdot 10^{-8}$ an,
also haben wir die Nullstelle sehr gut angenähert.

Dazu finden wir $h = 0{,}43246$ m. Eine andere Iterationsvorschrift zur Nullstellenbestimmung erhaltet ihr mit dem Newton-Verfahren:

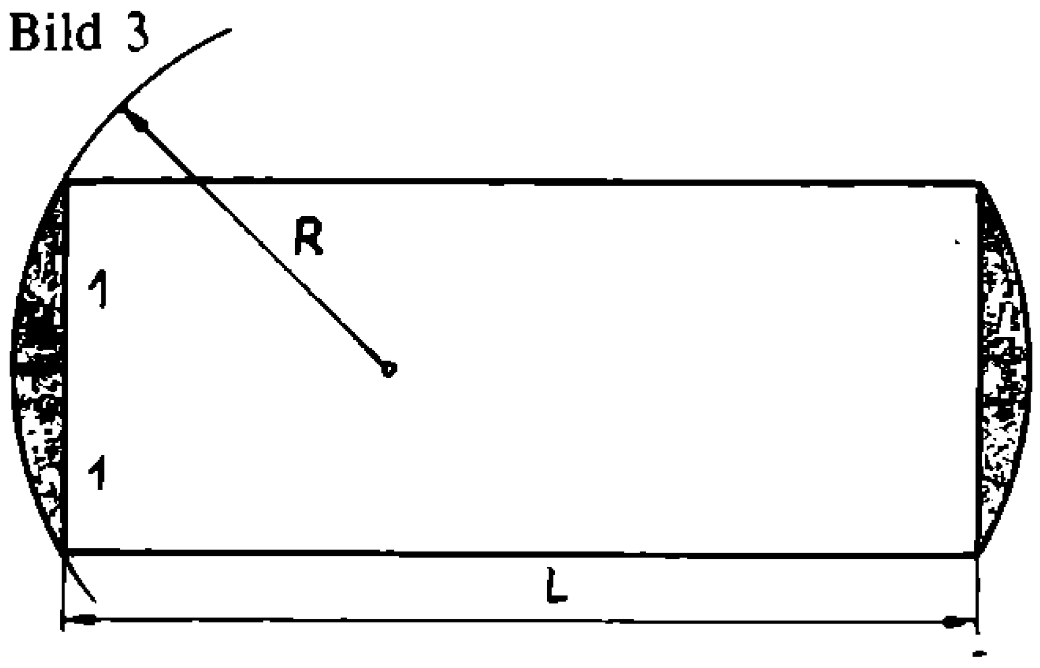
$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{\alpha_k - \sin\alpha_k - \frac{1}{5}V}{1 - \cos\alpha_k},\ k = 0, 1, \ldots$$

Probiert es auf eurem Schulrechner aus und berechnet die Abstände auf dem Meßstab, wenn die zugehörigen Volumendifferenzen 1 m³ betragen sollen!

3. Behälter mit gewölbten Stirnflächen

In Wirklichkeit haben die Tankbehälter gewölbte Stirnhauben.
Wir *nehmen* hier *an*, daß es sich dabei um Abschnitte einer Kugel mit einem gewissen Radius R handelt (Bild 3).
Nun werden die durchzuführenden Rechnungen schwierig.

Bild 3



a) Sind nur „schwache" Wölbungen vorhanden, so berechne man näherungsweise den Meßstab für einen etwas längeren Zylinder. Das Volumen V_Z des Zylinders der Länge $L = 10$ m beträgt $10\,\pi$m³.
Die schraffierten Kugelabschnitte besitzen das Volumen

$$V_A = 2\frac{1}{6}\pi(3 + H^2)\,H,$$

also ist das Gesamtvolumen des Tanks

$$V_G = V_Z + V_A = 10\pi + \frac{1}{3}\pi(3 + H^2)\,H$$

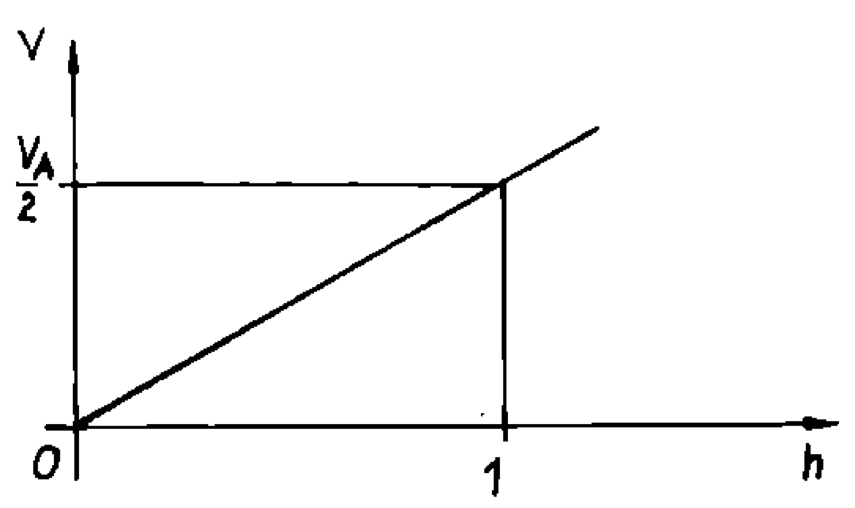
$$= \pi\left(10 + H + \frac{H^3}{3}\right).$$

Ist z. B. $H = 0{,}2$ m, so ergibt dies $V_G = 32{,}053$ m³. Das entspricht dem Volumen eines liegenden Kreiszylinders vom Radius 1 m und der Länge

$$10 + H + \frac{H^3}{3} = 10{,}203\text{ m}.$$

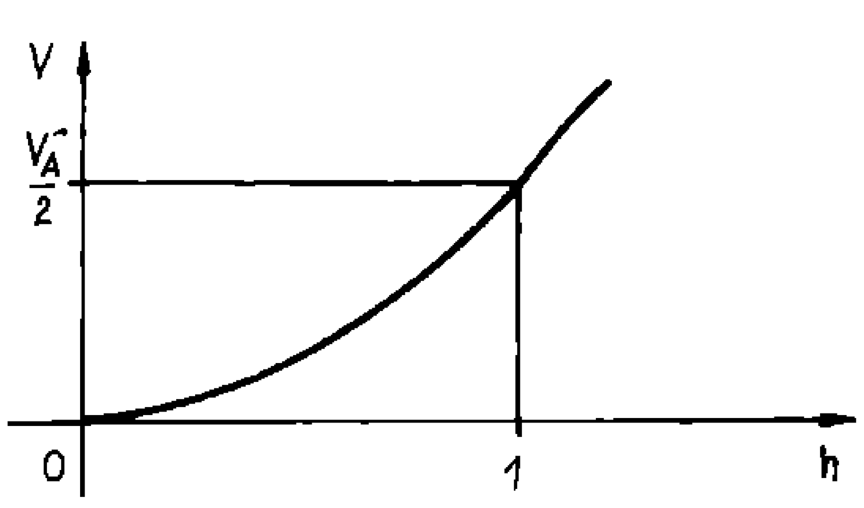
b) Man könnte auch so vorgehen: Die beiden Kugelabschnitte haben zusammen das Volumen V_A. Dieses Volumen fügen wir proportional zur vorgegebenen Höhe h der (wie in 1. berechneten) Flüssigkeitsmenge des zur Höhe h gefüllten Zylinders hinzu (Bild 4).

Bild 4



Weil für kleine h diese Korrektur zu groß ist, wäre es günstiger, eine Funktion der in Bild 5 gezeichneten Gestalt zu suchen.

Bild 5



Die Funktion

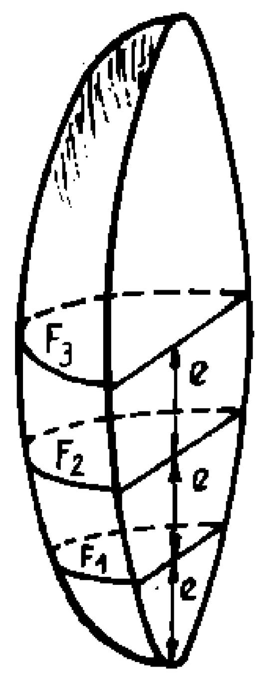
$$g(h) = \frac{1}{2\pi}(\pi h - 0{,}7\sin(\pi h))\,V_A \text{ ist}$$

z. B. recht gut geeignet. Ihr könnt also

$$V(h) = 5(\alpha - \sin\alpha) + \frac{1}{2\pi}(\pi h - 0{,}7\sin(\pi h))\,V_A \text{ mit}$$

$\alpha = \arccos(1 - h)$ berechnen bzw. zu den in Tabelle 1 angegebenen Zahlen den zweiten Summanden als Korrektur zufügen.
c) Das Volumen ließe sich näherungsweise auch folgendermaßen ermitteln: Wir legen im Abstand $h = l, 2l, \ldots$ zur Grundfläche (Erdboden) parallele Ebenen (Bild 6) und nähern die Kugel vom Radius R „schichtweise" durch Kegelstümpfe an.

Bild 6



Damit werden auch die Kugelabschnitte, welche die Stirnwölbungen des Tanks bilden, schichtenweise aus Abschnitten von Kegelstümpfen zusammengesetzt. Die Deckfläche einer derartigen Schicht (zur Höhe $h = il$) ist ein Kreisabschnitt, seinen Flächeninhalt F_i wollen wir berechnen. Überlegt euch, daß

$R = \frac{1}{2H}(1 + H^2)$ ist. Für die Sehnenlänge s ($= 2a = \overline{AB}$, siehe Bild 1) gilt

$$s = 2\sqrt{2h - h^2}.$$

Die Kugel vom Radius R wird in der Höhe $h = il$ von einer zur Grundfläche parallelen Ebene in einem Kreis vom Radius

$\varrho = \sqrt{R^2 - (1 - h)^2}$ geschnitten, mithin gilt für den Inhalt der gesuchten

Fläche $F_i = \frac{\varrho^2}{2}(\beta - \sin\beta)$ mit

$$\beta = 2\arcsin\frac{s}{2\varrho},\ F_0 = 0.$$

Bild 7

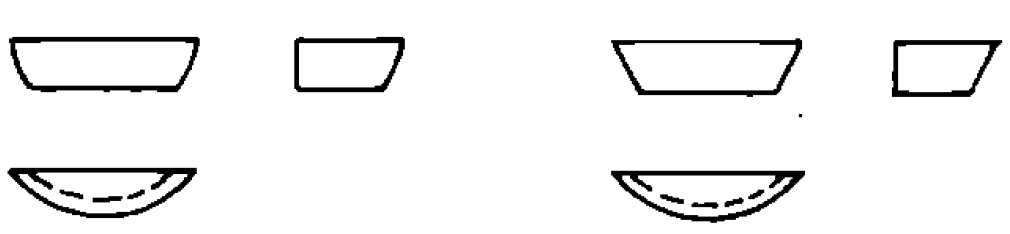


Bild 7 zeigt euch die Schichten des Kugelabschnittes und die approximierenden Kegelstumpfabschnitte in drei Ansichten. Wir bezeichnen (ähnlich wie vorn) mit $V_G(h)$, $V_A(h)$ und $V_Z(h)$ die Flüssigkeitsmenge vom Tank, von den beiden Kugelabschnitten und vom Kreiszylinder bei der Füllhöhe h. Dann ist ungefähr

$V_A(l) = lF_1$ und

$V_A(il) = V_A((i-1)\,l) + l(F_i + F_{i-1})$

für $i \geqq 2$.

Als konkretes Beispiel betrachten wir einen Tank mit $H = 0{,}2$ m, $L = 10$ m und wählen $l = 0{,}1$ m.
Dann ist $R = 2{,}6$ und $R^2 = 6{,}76$.

Wir erhalten (unter Berücksichtigung der Werte $V_Z(h)$ aus Tabelle 1) die gerundeten Werte

Tabelle 2

i	h	F_i [m²]	$V_A(h)$ [m³]	$V_G(h)$ [m³]
1	0,1	0,0229	0,0023	0,590
2	0,2	0,0593	0,0105	1,646
3	0,3	0,0994	0,0264	2,981
4	0,4	0,1392	0,0503	4,523
5	0,5	0,1760	0,0818	6,224
6	0,6	0,2080	0,1202	8,047
7	0,7	0,2340	0,1644	9,964
8	0,8	0,2531	0,2131	11,948
9	0,9	0,2648	0,2649	13,976
10	1,0	0,2688	0,3183	16,026

Wir können uns davon überzeugen, wie gut diese Näherungen sind.
Exakt berechenbar ist

$$V_A = V_A(2) = 2\frac{1}{6}\pi H(3 + H^2),$$

mit dem SR 1 erhält man
$V_A = 0{,}63669$ m³. Nun muß

$$\left[\sum_{i=1}^{10} F_i + \frac{1}{2}F_{10}\right]\frac{1}{10} \approx \frac{1}{4}V_A \text{ sein;}$$

eigentlich muß nach unserem Vorgehen zwischen den beiden Zahlen „<" stehen.
Wir überprüfen dies mit dem SR 1 und notieren

$$\frac{1}{10}\left[\sum_{i=1}^{90} F_i + \frac{1}{2}F_{10}\right] = 0{,}1591 \text{ sowie}$$

$\frac{1}{4}V_A = 0{,}1592$. Da hier nur mit vier Dezimalstellen gerechnet wurde, ist dies eine sehr gute Übereinstimmung.

Zum Schluß sind in Tabelle 3 die mit den Methoden a), b) und c) berechneten Volumina (in m³) zu vorgegebenen Höhen dargestellt:

Tabelle 3

h [m]	a)	b)	c)
0,1	0,599	0,597	0,590
0,2	1,668	1,657	1,646
0,3	3,015	2,993	2,981
0,4	4,564	4,533	4,523
0,5	6,267	6,230	6,224
0,6	8,088	8,050	8,047
0,7	9,998	9,965	9,964
0,8	11,973	11,948	11,948
0,9	13,990	13,976	13,976
1,0	16,027	16,026	16,026

W. Schmidt

Buchtip

H. Backe/R. Backe/H. Giegengack

Erlebte Physik

Das Physik-Experimentierbuch
304 S., 328 Abb.
Bestell-Nr. 654 051 2 Preis: 18,00 DM
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Physik 200mal zum Selbermachen! Das ist das Skelett dieses Experimentierbuches, das bereits zwei Generationen in die Physik eingeführt hat.

Was ist eine Delaunay-Triangulierung?

Alle nachfolgenden Betrachtungen wollen wir der Einfachheit halber nur in der Ebene durchführen. Zunächst definieren wir den Begriff „Triangulierung". Dazu sei eine Menge von n paarweise verschiedenen Punkten gegeben.

Definition: Ein zusammenhängendes Netz von Dreiecken heißt genau dann *Triangulierung einer Menge von n Punkten*, wenn alle Eckpunkte der Dreiecke Punkte der Menge sind und wenn jeder Punkt der Menge Eckpunkt eines Dreiecks ist.

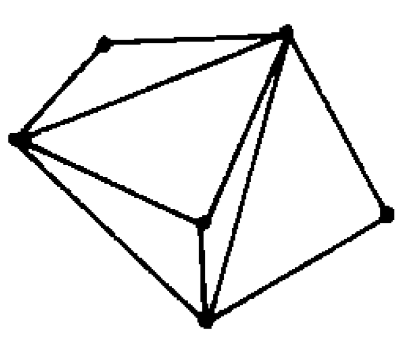


Bild 1

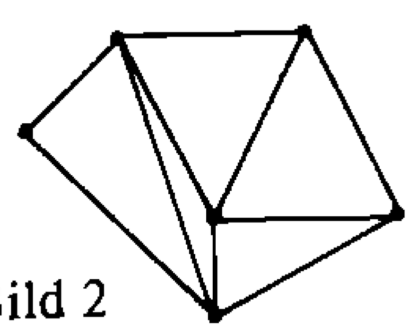


Bild 2

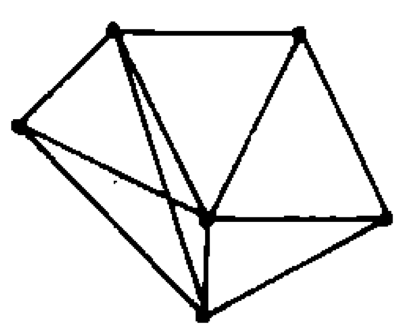
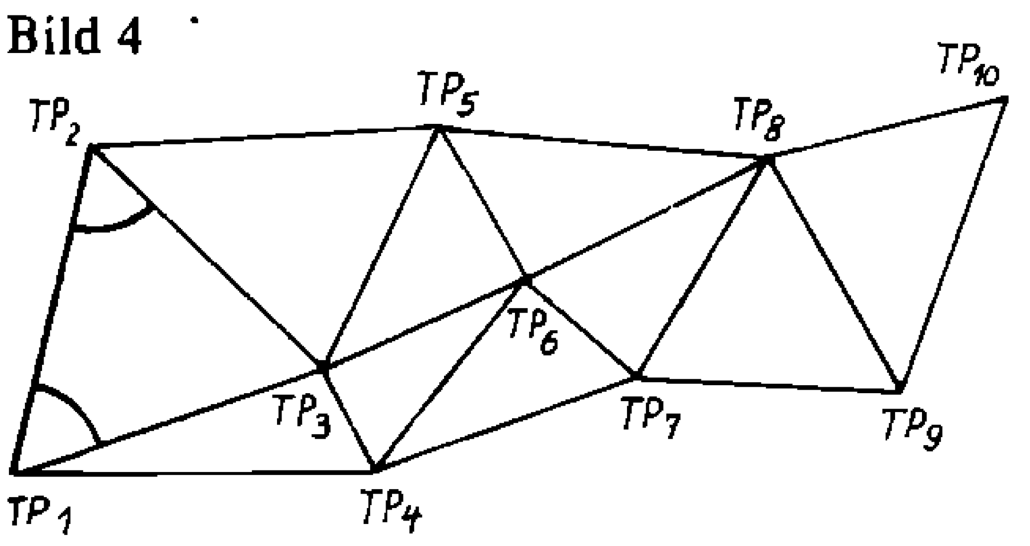


Bild 3

In den Bildern 1 und 2 sind zwei verschiedene Triangulierungen derselben Menge von 6 Punkten dargestellt. Das in Bild 3 aufgeführte Beispiel ist keine Triangulierung dieser Menge.

Triangulierungen spielen in verschiedenen Gebieten eine Rolle. Beispielsweise werden zur Landvermessung markante Punkte in der Landschaft als trigonometrische Punkte gekennzeichnet und durch eine Triangulierung verbunden (Bild 4).

Bild 4



Wenn die Entfernung zwischen zwei trigonometrischen Punkten bekannt ist, etwa die zwischen TP_1 und TP_2, so lassen sich, indem nur Winkel zwischen trigonometrischen Punkten gemessen werden, sukzessive alle anderen Entfernungen berechnen. Dies ist sicher nützlich, da in der Landschaft Winkel leichter gemessen werden können als Entfernungen und zudem Hindernisse zwischen trigonometrischen Punkten, zum Beispiel Flüsse, eine direkte Entfernungsmessung erschweren. (Vgl. den Artikel K.-G. Steinert: Gauß' Beiträge zur Astronomie und Geodäsie. *Alpha* 11 (1977) 2, S. 25ff.)

▲1▲ Nenne Beispiele aus anderen Gebieten, in denen Triangulierungen auftreten!

Die in den Bildern 1 und 2 angeführten Beispiele zeigen, daß es im allgemeinen mehrere verschiedene Möglichkeiten gibt, Triangulierungen einer gegebenen Menge von Punkten zu zeichnen. Eine spezielle unter Umständen sogar eindeutig bestimmte Triangulierung ist dagegen die Delaunay-Triangulierung.

Bevor wir diese definieren, werden wir zunächst einen Begriff einführen, auf dessen Grundlage später die Delaunay-Triangulierung einer Punktmenge bestimmt wird. Dazu ordnen wir jedem Punkt einer gegebenen Menge ein Territorium zu. Für alle Punkte, die dem Territorium von P angehören, gilt dabei, daß der Abstand zum Punkt P kleiner ist als der zu den übrigen Punkten der betrachteten Menge. Aus dieser Zuordnungsvorschrift folgt unmittelbar, daß die Territorialgrenze, die die Territorien zweier benachbarter Punkte A und B gegeneinander abgrenzt, auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegt, da genau für die Punkte auf der Mittelsenkrechten gleiche Abstände zu A und B vorliegen. Die Territorialgrenzen bilden um jeden Punkt ein konvexes Vieleck, das Voronoi-Polygon dieses Punktes (Bilder 5 und 6).

Bild 5

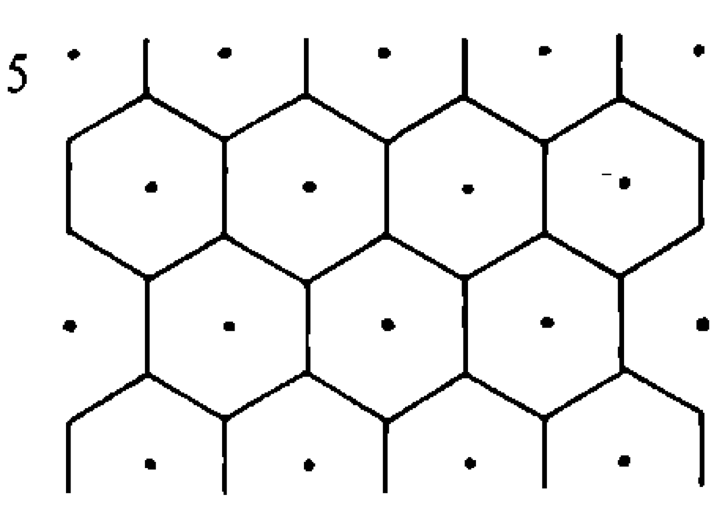
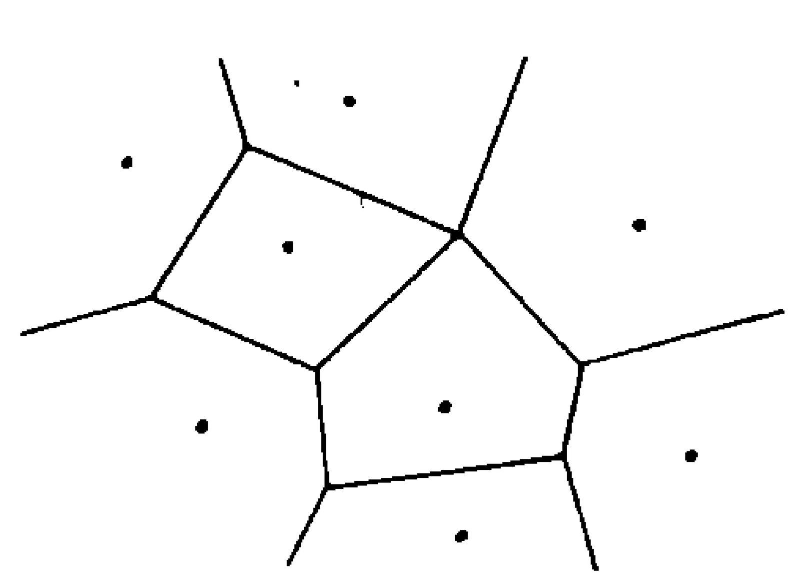


Bild 6



Einige dieser Voronoi-Polygone begrenzen unendliche Territorien, andere sind geschlossen. Die Zerlegung der Ebene, die durch die Voronoi-Polygone erzeugt wird, heißt Dirichlet-Zerlegung. Sie wird unter anderem dazu verwendet, das Territorialverhalten von Tieren zu beschreiben.

▲2▲ Wähle 10 Punkte und konstruiere die zugehörige Dirichlet-Zerlegung!

Fall 1: Wir betrachten vorerst nur solche Anordnungen von n Punkten, deren Dirichlet-Zerlegung die Eigenschaft haben, daß jeweils genau drei Voronoi-Polygone einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen. Sind A, B und C drei Punkte, deren zugehörige Voronoi-Polygone den Eckpunkt U gemeinsam haben, so ist U der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle ABC$, also dessen Umkreismittelpunkt.

▲3▲ Beweise, daß der Umkreis des erwähnten Dreiecks $\triangle ABC$ außer A, B und C keinen weiteren Punkt der betrachteten Menge im Inneren oder auf dem Rand enthält!

Wir definieren jetzt den Begriff Delaunay-Triangulierung.

Definition: Eine Triangulierung einer Menge von n Punkten heißt genau dann **Delaunay-Triangulierung**, wenn der Umkreis jedes Dreiecks der Triangulierung keinen Punkt der Menge im Inneren enthält.

Nun können wir eine Delaunay-Triangulierung einer Menge von Punkten konstruieren. Wir verbinden drei Punkte genau dann zu einem Dreieck, wenn ihre Voronoi-Polygone einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen. Aufgrund der in Aufgabe 3 genannten Eigenschaft enthält der Umkreis jedes dieser Dreiecke keinen weiteren Punkt der Menge. Es liegt demnach eine Delaunay-Triangulierung vor.

Die Besonderheit, die Delaunay-Triangulierungen gegenüber anderen Triangulierungen auszeichnet, ist die Eigenschaft, annähernd „gleichwinklige" Dreiecke zu erzeugen.

Zwei Dreiecke, die eine gemeinsame Seite besitzen, bilden ein Viereck, wobei die gemeinsame Seite eine Diagonale darstellt. Liegt ein konvexes Viereck vor, besteht die Möglichkeit, diese Diagonale durch die andere Diagonale zu ersetzen, wodurch zwei neue Dreiecke entstehen (Bilder 7 und 8).

Bild 7

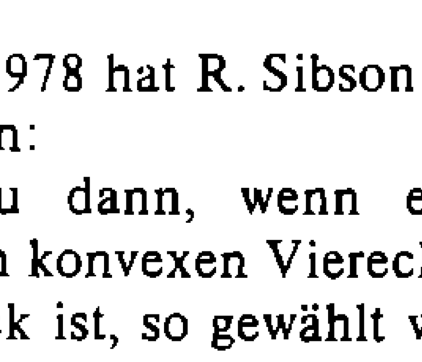
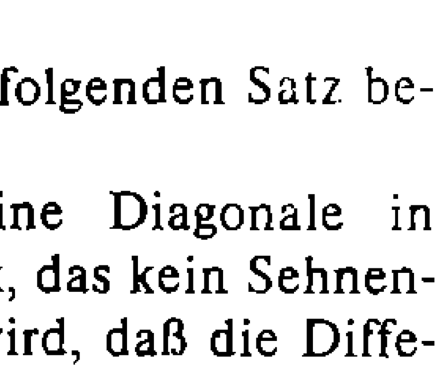


Bild 8



Während die beiden Dreiecke in Bild 7 nahezu „gleichwinklig" sind, ist bei den beiden Dreiecken in Bild 8 eine größere Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten der sechs Innenwinkel festzustellen.

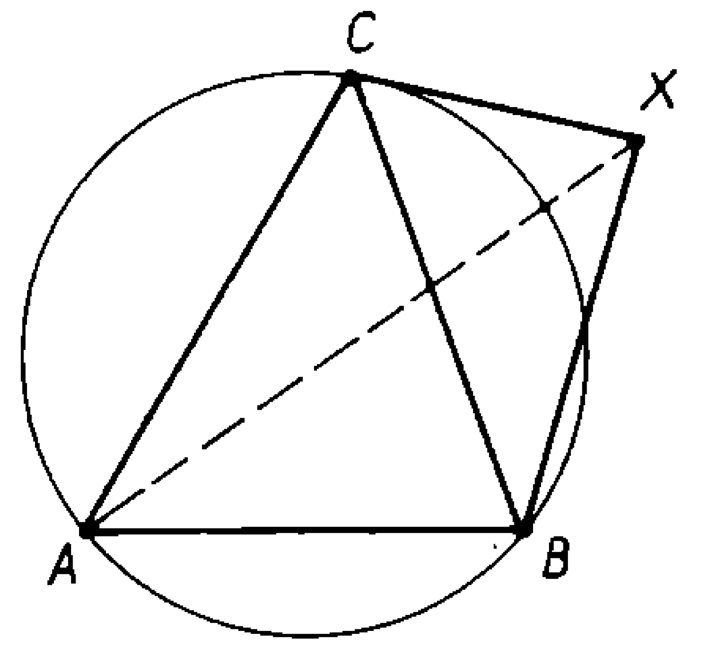
Erst 1978 hat R. Sibson folgenden Satz bewiesen:

Genau dann, wenn eine Diagonale in einem konvexen Viereck, das kein Sehnenviereck ist, so gewählt wird, daß die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten der sechs Innenwinkel minimal ist, liegt eine Delaunay-Triangulierung vor.

Nach diesem Max-Min-Winkelkriterium ist die Lage der Diagonalen im Viereck $ABCX$ abhängig von der Lage des Punktes X bezüglich des Dreiecks $\triangle ABC$.

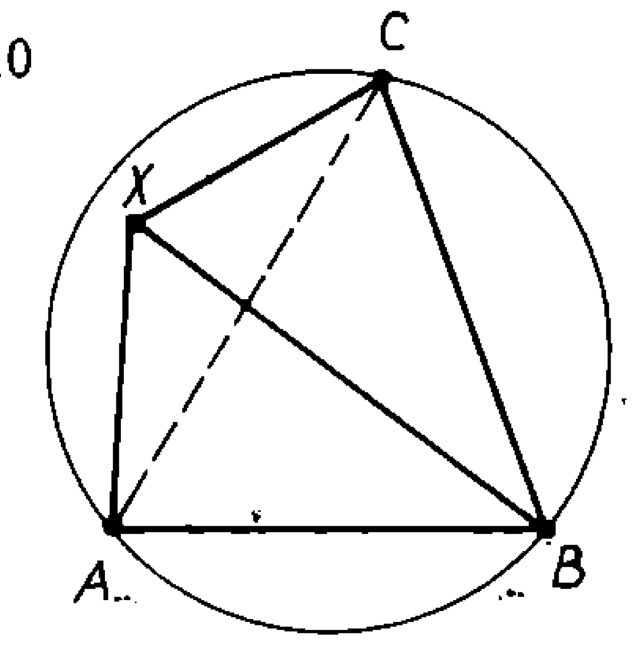
Liegt X außerhalb des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ (Bild 9), so ergibt sich nach dem Max-Min-Winkelkriterium als Diagonale BC.

Bild 9



Wenn X dagegen innerhalb des Umkreises, aber noch außerhalb des $\triangle ABC$ liegt (Bild 10), liefert das Kriterium BX als Diagonale.

Bild 10



Betrachten wir nun die Umkreise der Dreiecke, die bei einer Triangulation nach dem Max-Min-Winkelkriterium entstehen, so zeigt sich, daß es keinen Punkt der jeweils gegebenen Menge gibt, der innerhalb des Umkreises eines Dreiecks liegt.

Fall 2: Wir betrachten nun beliebige Anordnungen von n Punkten, also auch solche, bei deren Dirichlet-Zerlegung mehr als drei Voronoi-Polygone einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen.

Um eine Delaunay-Triangulierung derartiger Mengen konstruieren zu können, müssen wir noch festlegen, wie mehr als drei Punkte, deren Voronoi-Polygone einen gemeinsamen Eckpunkt haben, zu Dreiecken zu verbinden sind.

▲4▲ Beweise, daß alle Punkte einer gegebenen Menge, deren Voronoi-Polygone einen gemeinsamen Eckpunkt U besitzen, auf einem Kreis um U liege, der keinen weiteren Punkt der Menge im Inneren enthält!

Aus dem in Aufgabe 4 genannten Sachverhalt folgt, daß wir alle Punkte einer gegebenen Menge, die einem Kreis angehören, der keinen Punkt der Menge als inneren Punkt besitzt, auf beliebige Art und Weise zu Dreiecken verbinden können, ohne daß die Eigenschaft der Delaunay-Triangulierung verletzt wird. Eine eindeutig bestimmte Delaunay-Triangulierung erhalten wir daher genau dann, wenn immer genau drei Voronoi-Polygone der Dirichlet-Zerlegung der betrachteten Menge einen gemeinsamen Punkt haben.

▲5▲ Konstruiere eine Delaunay-Triangulierung der in Aufgabe 2 gewählten Punktmenge!

Wo spielt in der Mathematik dieser elementargeometrische Sachverhalt eine Rolle?

Wir geben skizzenhaft ein Beispiel an.

Es sollen die Strömungsverhältnisse an der Tragfläche eines Flugzeugs untersucht werden. Die mathematische Beschreibung ist durch ein Differentialgleichungssystem gegeben. Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Beziehungen zwischen Funktionen und deren Ableitungen angeben. Im allgemeinen gelingt es meist nicht, die Lösungsfunktion explizit zu bestimmen. Daher begnügt man sich mit Funktionswerten der gesuchten Funktion an einigen Stellen. Diese Stellen können die Eckpunkte der Dreiecke einer Triangulierung, zum Beispiel einer Delaunay-Triangulierung sein. Deshalb ist es wichtig, solche Triangulierungen zu beherrschen.

W. Moldenhauer, K. Wetwitschka

Fortsetzung von Seite 75

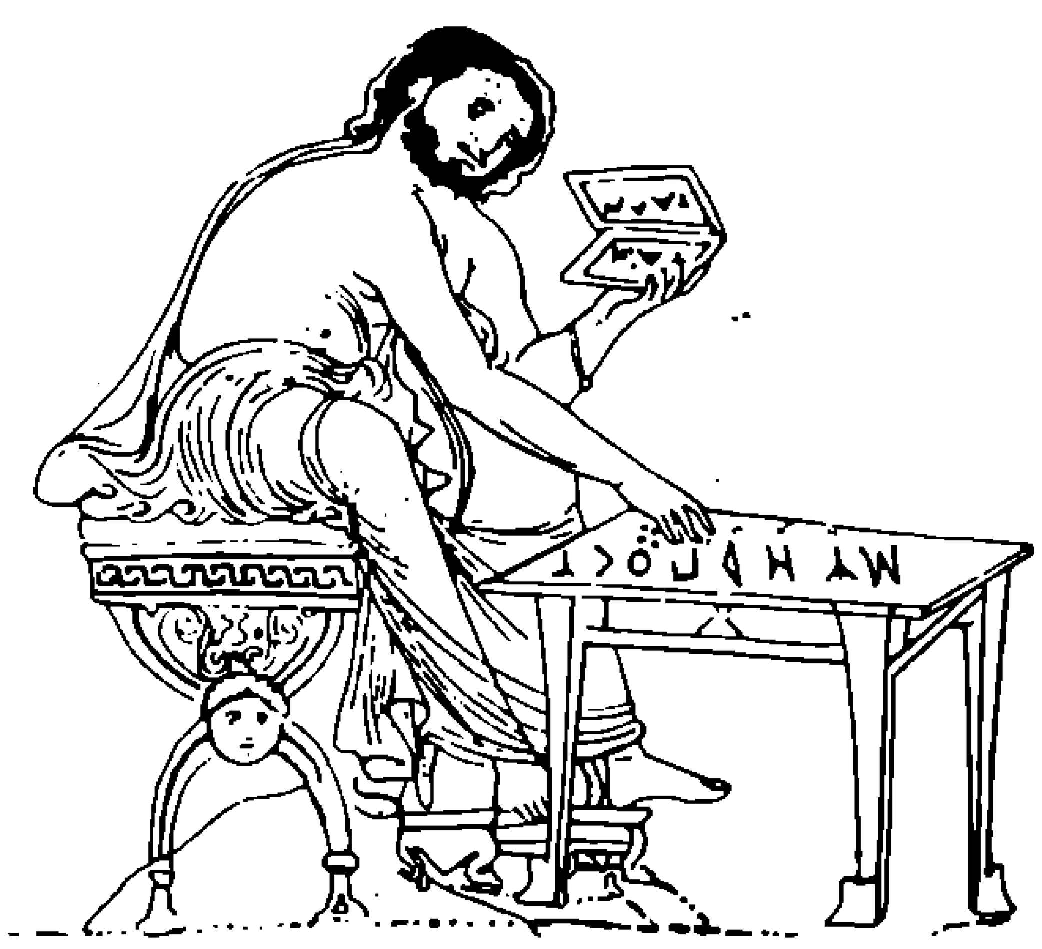


Bild 11
Darstellung eines griechischen Rechenbretts (Abakus)

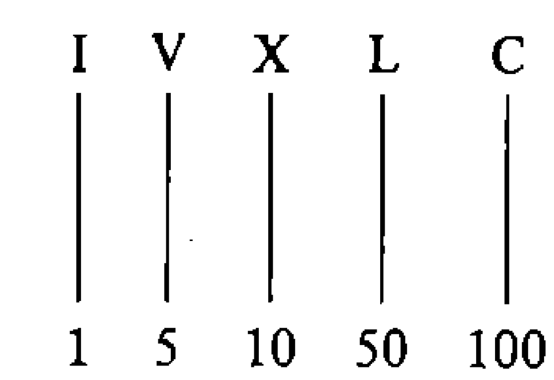


Bild 12
Prinzipskizze des Abakus.
Das Liniensystem ist mit römischen Ziffern bezeichnet

Obwohl die Position der Steine deren Wert bestimmte und dies dem Rechner tagtäglich vor Augen geführt wurde, übertrugen die Rechner dieses unbewußt gehandhabte Positionssystem nicht in die Ziffernschreibweise. Erst mit den arabischen Ziffern setzte sich langsam das Positionssystem durch, und noch Adam Ries schrieb (um 1520) Rechenbücher zum Rechnen auf den Linien (Abakus) oder mit der Feder (entspricht arabischen Ziffern mit Multiplikationstabellen, d. h. dem 1×1). Erst allmählich faßte das algorithmische Rechnen Fuß. Der Grund: Was man konnte, funktionierte, und niemand lernt gern um, wenn es nicht nötig ist (Bild 13).

Die Schriftform der Ziffern wurde durch das Aufkommen des Buchdrucks stabili-

Bild 13
Symbolische Darstellung:
Sieg des Ziffernrechnens über das Rechnen auf den Linien

siert. Als die Frakturschrift bei den Zahlzeichen durch Antiquaschriften abgelöst wurde, bekamen die Ziffern die im wesentlichen noch heute übliche Form. Erst neuerdings sind mit Bank- und Computerzahlen neue Formen verbreitet worden, wobei der auf vielen Waren des täglichen Bedarfs angebrachte Strichcode, die Europäische Artikelnummer (EAN), die radikalste Änderung der Zahlzeichen ist, bedingt durch die Forderung nach Maschinenlesbarkeit (Bild 14).

Bild 14
Computerzahlen sowie ein Beispiel für den Strichcode

R. Thiele

Wie mit dem Abakus gerechnet wird, demonstrieren wir in Heft 5/90. *Alphons*

Kuriose Identitäten

1. Es gibt eine natürliche Zahl m, für die folgendes gilt:

a) $\sqrt[4]{m} = \frac{1}{4}\sqrt{m}$

und

b) $\sqrt[8]{m} = \frac{1}{8}\sqrt{m}$

Wie heißt sie?

2. Es gibt eine natürliche Zahl m, für die folgendes gilt:

$$\sqrt[3]{n} = \frac{1}{3}\sqrt{n}$$

Wie heißt sie?

Ing. Klaus-Horst Milde, Dresden

XXX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Schulolympiade

Abgabe beim Mathematiklehrer: Ende September 1990

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden im Oktober 1990 in der Trommel und der Jungen Welt veröffentlicht.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

300511 Die folgenden Figuren sollen jeweils in gleichgroße Teile zerlegt werden, d. h. in Teile, die alle denselben Flächeninhalt haben.

a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 5 cm und zeichne darin ein, wie es in zwei gleich große Teile zerlegt werden kann!

b) Zeichne ein weiteres gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 5 cm und seine Zerlegung in drei gleich große Teile!

c) Zeichne für ein weiteres solches Dreieck eine Zerlegung in vier gleich große Teile!

d) Zeichne ein Quadrat der Seitenlänge 7 cm und eine Zerlegung dieses Quadrates in sieben gleich große Teile!

300512 Die Schüler Arnim, Bert, Conny und Detlef wohnen in verschiedenen Städten der DDR, und zwar jeder in genau einer der Städte Dresden, Magdeburg, Potsdam, Schwerin. Darüber macht Arnim folgende vier Aussagen:

(1) Ich bin weder aus Potsdam noch aus Dresden.
(2) Bert ist entweder aus Potsdam oder aus Schwerin.
(3) Conny ist weder aus Dresden noch aus Magdeburg.
(4) Detlef ist entweder aus Potsdam oder aus Magdeburg.

Stelle fest, ob alle diese Aussagen Arnims gleichzeitig wahr sein können! Begründe deine Feststellung!

300513 Fritz, Hans und Petra haben am Ostseestrand einen Beutel voll Muscheln gesammelt. Sie wissen nicht, wieviel Muscheln sie im Beutel haben.

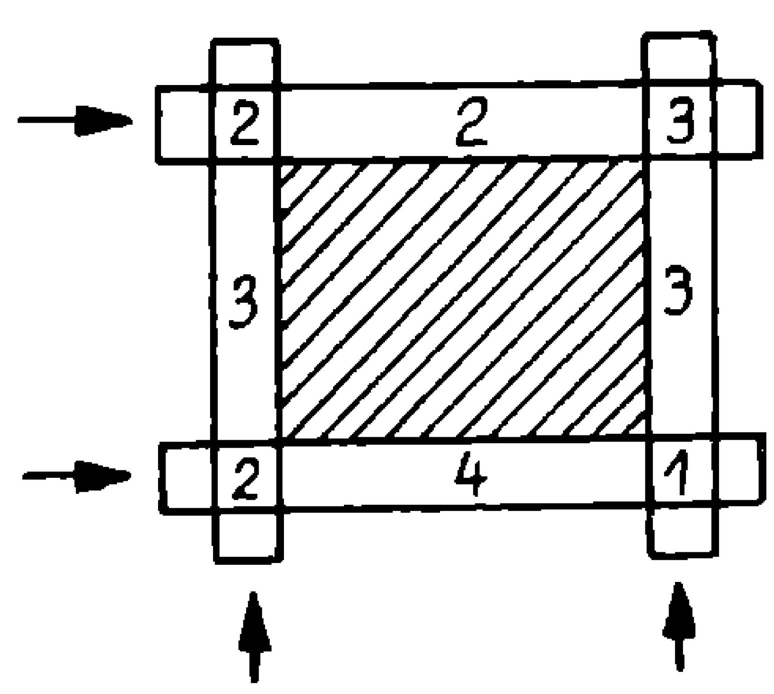
Fritz meint: „Wenn man siebenmal hintereinander je 12 Muscheln aus dem Beutel nimmt, dann bleiben noch mehr als 6 Muscheln übrig."

Hans meint: „Wenn man aber neunmal hintereinander je 10 Muscheln aus dem Beutel nehmen wollte, dann würden die Muscheln dafür nicht ausreichen."

Petra zählt nun die Muscheln nach und stellt fest: „Keiner von euch beiden hat recht."

Wieviel Muscheln waren insgesamt im Beutel?

300514 In einem Schema wie im Bild sollen natürliche Zahlen eingetragen werden. Das Bild zeigt ein Beispiel. Darin beträgt die Summe aller acht Zahlen 20. In jeder Zeile und in jeder Spalte (siehe die Pfeile) entsteht dieselbe Teilsumme, nämlich 7.



a) Gib zwei verschiedene Eintragungen an, bei denen jeweils die Summe aller acht Zahlen 30 beträgt und in jeder Zeile sowie in jeder Spalte die Teilsumme 8 entsteht!

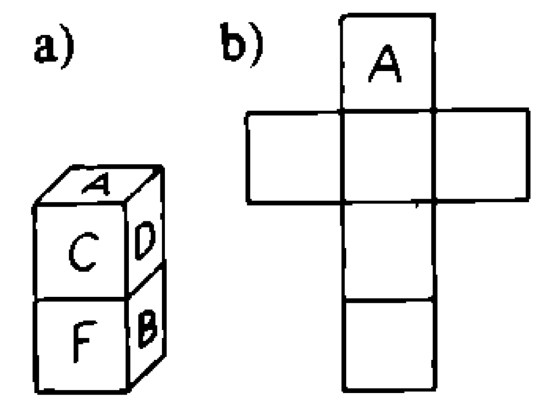
b) Gib eine Eintragung an, bei der in jeder Zeile und in jeder Spalte die Teilsumme 10 entsteht und die Summe aller acht Zahlen möglichst klein ist!

c) Gib eine Eintragung an, bei der die Summe aller acht Zahlen 24 beträgt und in jeder Zeile sowie in jeder Spalte ein einheitlicher Wert als Teilsumme entsteht, der möglichst klein ist!

Eine Begründung zu den Eintragungen wird nicht verlangt.

Olympiadeklasse 6

300611 Das Bild a) zeigt zwei gleiche, mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F in gleicher Anordnung beschriftete Würfel. Man soll die Beschriftung des Würfelnetzes im Bild b) so ergänzen, daß zwei Würfel, die mit je einem solchen Netz hergestellt werden, sich zum Bild a) zusammenstellen lassen.



Gib zwei verschiedene Ergänzungsmöglichkeiten an! Gib zu beiden Ergänzungsmöglichkeiten an, welche Fläche des unteren Würfels dann als Grundfläche gewählt werden muß!

300612 a) Gib alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen an, bei denen eine der beiden Ziffern um 4 kleiner ist als die andere!

b) Ermittle unter diesen Zahlen alle diejenigen, die durch ihre Quersumme teilbar sind!

Hinweis: Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. So hat z. B. die Zahl 24801 wegen $2 + 4 + 8 + 0 + 1 = 15$ die Quersumme 15.

300613 Lina kauft 7 Bleistifte und 8 Hefte ein und stellt dabei fest, daß 7 Bleistifte teurer als 8 Hefte sind.

Was ist teurer: 10 Bleistifte und 2 Hefte oder 11 Hefte und 2 Bleistifte? Begründe deine Antwort!

300614 Die Seiten eines Buches sind mit den Zahlen von 1 bis 235 durchnumeriert.

a) Wie oft wurde bei der Numerierung insgesamt die Ziffer 4 verwendet?

b) Wie oft wurde bei der Numerierung insgesamt die Ziffer 0 verwendet?

c) Wie viele Ziffern sind insgesamt bei dieser Numerierung zu drucken?

Olympiadeklasse 7

300711 Während eines mathematischen Spielnachmittages wurden alle Mitspieler vom Spielleiter aufgefordert, in eine Hand eine gerade Anzahl und in die andere Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen zu nehmen. Anschließend erhielt jeder Mitspieler die Aufgabe, die Anzahl der Hölzchen in seiner rechten Hand mit 2 zu multiplizieren und das entstandene Produkt zur Anzahl der Hölzchen in seiner linken Hand zu addieren.

Jedesmal, wenn ein Mitspieler die so gebildete Summe dem Spielleiter mitteilte, war dieser in der Lage, zutreffend zu sagen, ob der Mitspieler eine gerade Anzahl von

Hölzchen in seiner rechten oder in seiner linken Hand hatte. Wie war das möglich?

300712 Fünf Schüler der Klasse 7a sammelten Altpapier. Von der Menge, die sie insgesamt zusammenbrachten, hatte Marco ein Viertel, Frank ein Sechstel, Matthias ein Fünftel und Steffen ein Zehntel beigetragen. Dirk hatte 2 kg mehr als Marco gesammelt.
a) Wieviel Kilogramm Altpapier hatte jeder dieser fünf Schüler beigetragen?
b) Welcher Betrag wurde für die von den fünf Schülern insgesamt abgelieferte Papiermenge bezahlt, wenn für jedes Kilogramm 30 Pfennig bezahlt wurden?

300713 Von drei Geraden wird vorausgesetzt, daß sie durch einen Punkt C gehen. Von einer vierten Geraden wird vorausgesetzt, daß sie nicht durch C geht und die drei anderen Geraden in Punkten A, B, D schneidet, wobei B zwischen A und D liegt. Auf der Geraden durch A und C liege ein Punkt E so, daß C zwischen A und E liegt. Weiter wird vorausgesetzt, daß die Winkel $\sphericalangle ECD$ und $\sphericalangle ABC$ einander gleich groß sind.
a) Zeichne vier Geraden und dazu Punkte A, B, C, D, E so, daß diese Voraussetzungen erfüllt sind!
b) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die Winkel $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle BAC$ einander gleich groß sein müssen!

300714 In jedem Dreieck beträgt bekanntlich die Innenwinkelsumme 180°, in jedem Viereck 360°.
a) Zeichne je ein Fünfeck, ein Sechseck und ein Siebeneck! Miß die Innenwinkel und berechne jeweils die Innenwinkelsumme! Was vermutest du?
b) Beweise deine Vermutung für jedes Fünfeck, Sechseck und Siebeneck!
c) Versuche eine Formel zu finden und zu beweisen, die für jede natürliche Zahl $n > 3$ die Innenwinkelsumme in jedem n-Eck angibt!
Hinweis: In dieser Aufgabe werden alle n-Ecke als konvex vorausgesetzt, d. h. als n-Ecke, in denen kein Innenwinkel größer als 180° ist. Außerdem wird in dieser Aufgabe vorausgesetzt, daß kein Innenwinkel gleich 180° ist.

Olympiadeklasse 8

300811 Axel läßt Jörg mit einem roten, einem blauen und einem gelben Würfel würfeln. Ohne daß er die geworfenen Augenzahlen sieht, sagt er dann: „Verdopple die Augenzahl des roten Würfels, addiere dazu die Zahl 8 und multipliziere die Summe mit 50! Merke dir das Resultat! Addiere nun zur Augenzahl des blauen Würfels die Zahl 10 und multipliziere die Summe mit 10! Bilde dann zum Schluß die Summe aus dem gerade erhaltenen Produkt, dem vorher gemerkten Resultat und der Augenzahl des gelben Würfels! Wenn du mir diese Summe nennst, kann ich dir von jedem der drei Würfel die geworfene Augenzahl nennen."
a) Wähle drei mögliche Augenzahlen und führe die angegebenen Berechnungen aus!
b) Beschreibe, wie man von der am Ende der Berechnungen genannten Summe zu den Augenzahlen kommen kann! Erkläre, warum man nach deiner Beschreibung stets die richtigen Augenzahlen findet!

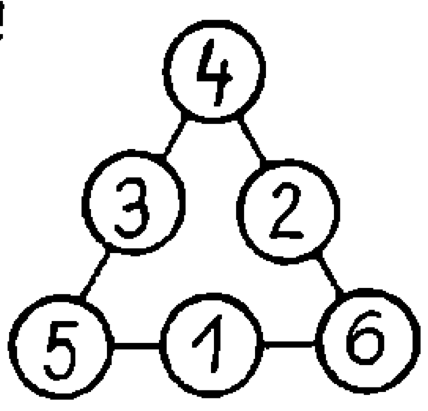
300812 Im Mathematikunterricht wird zur Berechnung des Flächeninhalts eines Drachenvierecks folgende Formel benutzt:

$$A = \frac{e \cdot f}{2}.$$

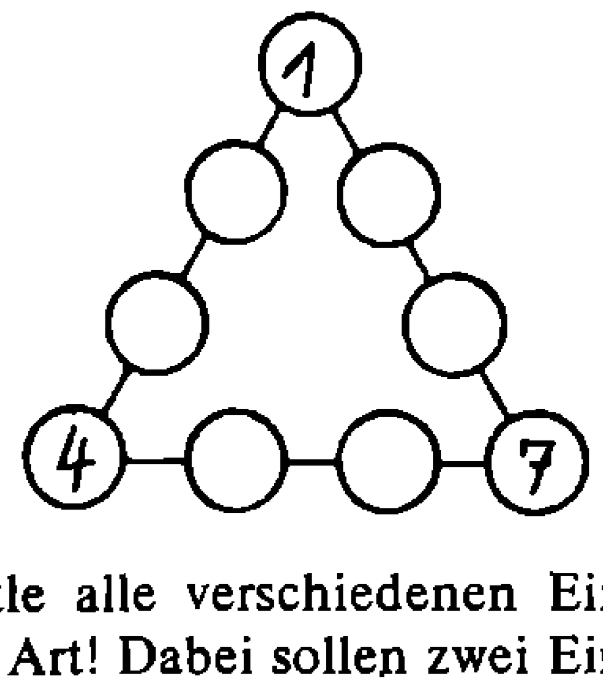
Dabei bedeuten e bzw. f die Längen der beiden Diagonalen des Drachenvierecks. Rolf behauptet, daß diese Formel für jedes Viereck gilt, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.
Hat er recht?

300813 In einer Ebene seien sieben Punkte so gegeben, daß keine drei von ihnen auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Ermittle die Anzahl aller derjenigen Dreiecke, deren Ecken drei der gegebenen Punkte sind!

300814 a) In das Schema des Bildes a) sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 so einzutragen, daß jede der drei „Seitensummen" $5 + 1 + 6$, $6 + 2 + 4$, $4 + 3 + 5$ den Wert $S = 12$ hat.
Untersuche, ob eine solche Eintragung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 auch mit $S = 9$ möglich ist, ebenso auch mit $S = 10$ und $S = 11$!



Gib jedesmal, wenn das der Fall ist, je eine derartige Eintragung an!
b) In das Schema des Bildes b) sollen außer den bereits eingetragenen „Eckenzahlen" 1, 4, 7 die Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 so eingetragen werden, daß jede der drei „Seitensummen" den Wert $S = 19$ hat.



Ermittle alle verschiedenen Eintragungen dieser Art! Dabei sollen zwei Eintragungen genau dann als verschieden gelten, wenn in einer dieser beiden Eintragungen mindestens eine der Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 einer anderen Dreiecksseite angehört als in der anderen Eintragung.
c) Im Bild b) beträgt die „Eckensumme" $E = 1 + 4 + 7 = 12$. Ermittle alle diejenigen Werte E, die als „Eckensumme" auftreten können, wenn man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so in das Schema einträgt, daß die drei „Seitensummen" einen einheitlichen Wert S haben! Begründe, daß es für andere Werte E keine solche Eintragung geben kann!

Olympiadeklasse 9

300911 Drei Schüler wollen ein Spiel nach folgenden Regeln spielen:
1. Es wird (d. h. durch Auslosung der Reihenfolge) festgelegt, daß jeder der drei Schüler stets eine bestimmte Rechenoperation auszuführen hat, und zwar
ein Schüler A die Subtraktion der Zahl 2, ein Schüler B die Division durch die Zahl 2, der dritte Schüler C das Ziehen der Quadratwurzel (z. B. mit dem Taschenrechner ermittelt).
2. Dann wird eine dreistellige natürliche Zahl zufallsbedingt gewählt (z. B. durch Auslosen unter allen dreistelligen natürlichen Zahlen) und als „Startzahl" bezeichnet.
3. Nun führen die Schüler stets gleichzeitig jeweils ihre Rechenoperation aus. Beim ersten Mal wenden sie die Operation auf die „Startzahl" an, jedes weitere Mal auf das zuvor erhaltene Resultat.
4. Sobald ein Schüler ein Resultat kleiner als 1 erhält, ist das Spiel beendet; dieser Schüler hat verloren.
Bei der Diskussion zur Vereinbarung der Regeln protestiert ein Schüler. Er meint, nach diesen Regeln ergäbe schon die Festlegung der Rechenoperationen zwangsläufig, wer verlieren müsse.
Stimmt das?

300912 Ein Betrieb hat in den letzten vier Jahren seine Produktion (jeweils gegenüber dem Vorjahr) um 8 %, 11 %, 9 % bzw. 12 % gesteigert. Peter meint, daß der Betrieb dann eine Produktionssteigerung von insgesamt 40 % erreicht hat.
Weisen Sie nach, daß das nicht stimmt!
Bernd meint, der Betrieb hätte eine größere Steigerung erreicht, wenn er die Produktion viermal um 10 % gesteigert hätte.
Stellen Sie fest, ob das richtig ist!

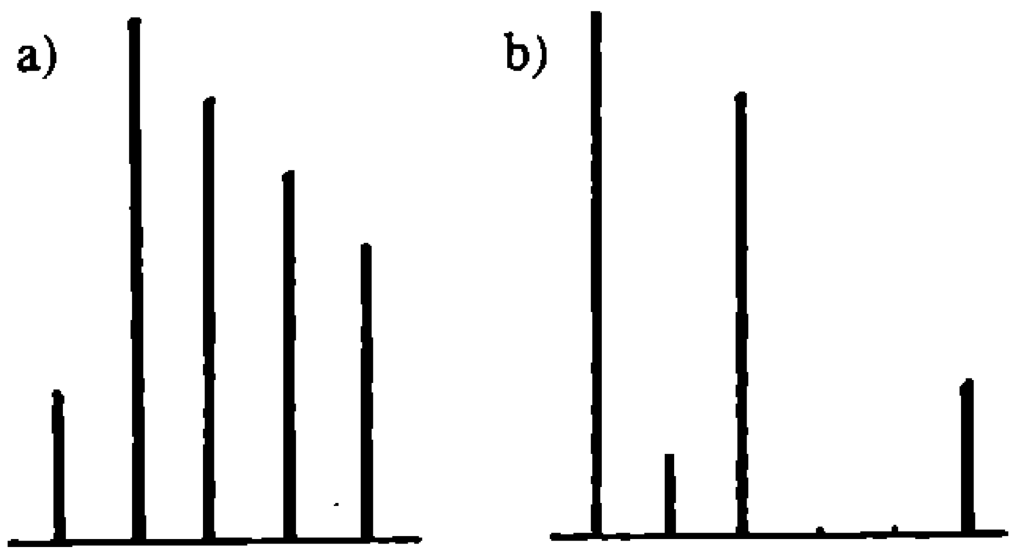
300913 Beweisen Sie, daß in jedem Trapez $ABCD$ mit $AB \| CD$, dessen Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht stehen,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{CD})^2$$

gilt!

300914 Ansgar, Bernd und Christoph sehen auf einer Wanderung die Schornsteine eines Kraftwerkes aus genau südlicher Richtung und später aus genau westlicher Richtung. Ansgar fertigte jeweils eine maßstabsgerechte Skizze an. Dabei war in beiden Fällen niemals ein kleinerer Schornstein genau vor einem größeren zu sehen (siehe Bild a, b).
Während der Wanderung stellen die Freunde außerdem fest, daß das Kraftwerk genau sieben Schornsteine hat, von denen keine zwei die gleiche Höhe haben.

a) b)



Blick aus südlicher Richtung — Blick aus westlicher Richtung

Bernd meint: „Aus südwestlicher Richtung waren nur vier Schornsteine zu sehen."
Christoph korrigierte ihn: „Es waren genau fünf Schornsteine, einer von ihnen stand genau vor einem größeren."
Schließlich bemerken sie, daß der drittkleinste Schornstein aus keiner der drei Beobachtungsrichtungen (südlich, westlich, südwestlich) zu sehen war, sondern jeweils durch einen größeren verdeckt wurde.
Ermitteln Sie alle Anordnungen von Schornsteinen auf einem Gelände, die nach diesen Beobachtungen möglich sind! Dabei sei angenommen, daß die Korrektur von Bernds Aussage durch Christoph den Tatsachen entspricht.

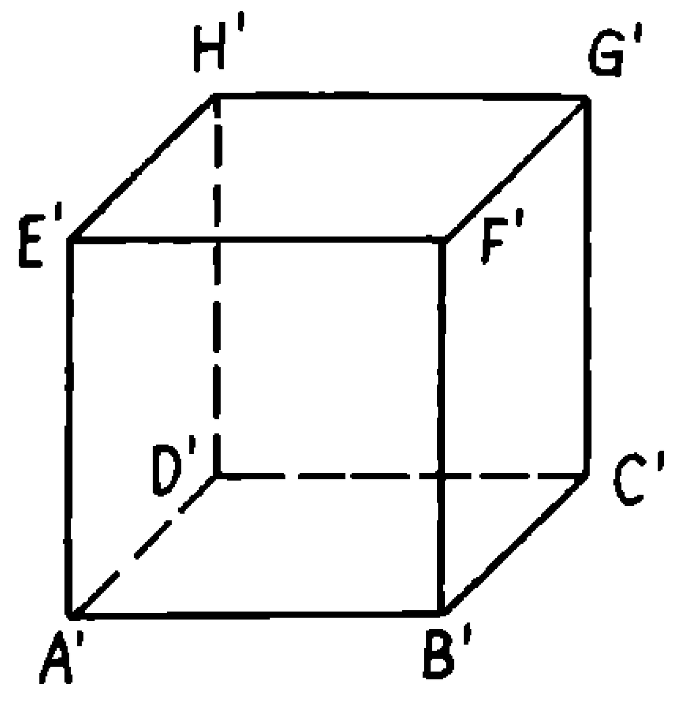
Olympiadeklasse 10

301011 a) Beweisen Sie, daß es unendlich viele pythagoreische Zahlentripel gibt!
b) Beweisen Sie, daß es auch pythagoreische Zahlentripel mit verschiedenen Werten jeweils des Quotienten aus der größten und der kleinsten Zahl des Tripels gibt!
Hinweis: Ein pythagoreisches Zahlentripel ist ein Tripel (a, b, c) aus drei positiven natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

301012 Armin möchte ein (auf einem KC lauffähiges) BASIC-Programm schreiben, mit dem sich nach Eingabe jeweils einer natürlichen Zahl $Z > 1$ feststellen läßt, ob Z eine Primzahl ist. Er legt das Programm so an, daß darin (durch eine FOR ... NEXT-Anweisung) alle natürlichen Zahlen $N = 2, \ldots, Z - 1$ geprüft werden, ob sie Teiler von Z sind.
Bert sagt dazu: „Es genügt, nur die natürlichen Zahlen
$N = 2, \ldots, G$ zu prüfen, wobei G die ganze Zahl mit
$G \leqq \sqrt{Z} < G + 1$ ist (also durch
G = INT(SQRZ) ermittelt werden kann)."
Er sagt außerdem: „Wenn Z eine mindestens dreistellige Primzahl ist, so sind nach meinem Vorschlag weniger als ein Zehntel so vieler Zahlen zu überprüfen wie bei deinem Verfahren." Armin entgegnet: „Bei deinem Vorschlag, bei dem ja Teiler von Z ungeprüft bleiben können, hat man keine Sicherheit, daß jede Nichtprimzahl als solche erkannt wird."
a) Ist Berts erste Aussage oder Armins Entgegnung wahr?
b) Ist Berts zweite Aussage wahr?

301013 Wenn die Produktion eines Betriebes um 50 % zurückging (z. B. infolge des Ausfallens eines Teils der Anlage), so muß sie anschließend offensichtlich verdoppelt, d. h. um 100 % erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.
Ermitteln Sie eine Formel, durch die man jeweils aus einem gegebenen Prozentsatz a denjenigen Prozentsatz b berechnen kann, für den die nachstehende Aussage (1) gilt!
(1) Wenn die Produktion um a Prozent zurückging, so muß sie anschließend um b Prozent erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.

301014 Das Bild sei das Bild eines von genau sechs ebenen Vierecksflächen begrenzten Körpers $ABCDEFGH$ in Parallelprojektion. Die Vierecke $A'B'F'E'$ und $D'C'G'H'$ sind einander kongruente Quadrate, die vier Strecken $A'D'$, $B'C'$, $F'G'$, $E'H'$ sind zueinander parallel und gleichlang, D' liegt im Innern von $A'B'F'E'$.



Beweisen Sie, daß es einen Körper gibt, mit dem bei geeigneter Parallelprojektion diese Bedingungen erfüllt sind und bei dem keine seiner sechs begrenzenden Vierecksflächen einen Innenwinkel der Größe 90° hat!

Olympiadeklassen 11/12

301211 Man untersuche, ob es natürliche Zahlen a, b, c, d gibt, für die die folgenden beiden Bedingungen (1) und (2) gelten:
$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 111111111111, \qquad (1)$$
$$a + b + c + d < 11111. \qquad (2)$$
Falls das zutrifft, gebe man solche Zahlen an.

301212 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die die Gleichung
$$3x^2 + ax - 2 = 0 \qquad (1)$$
zwei reelle Lösungen besitzt, die, wenn man sie in geeignet gewählter Reihenfolge mit x_1 und x_2 bezeichnet, der Bedingung
$$6x_1 + x_2 = 0 \qquad (2)$$
genügen.

301213 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die beiden folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten:
$$3x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0, \qquad (1)$$
$$3x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0. \qquad (2)$$

301214 In jedem Dreieck ABC seien die Seitenlängen wie üblich mit a, b, c bezeichnet. Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle CAB$ schneide die Seite BC in einem Punkt D.
Man beweise, daß in jedem Dreieck für die Länge w der Strecke AD gilt:
$$w = \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(b+c)^2 - a^2}.$$

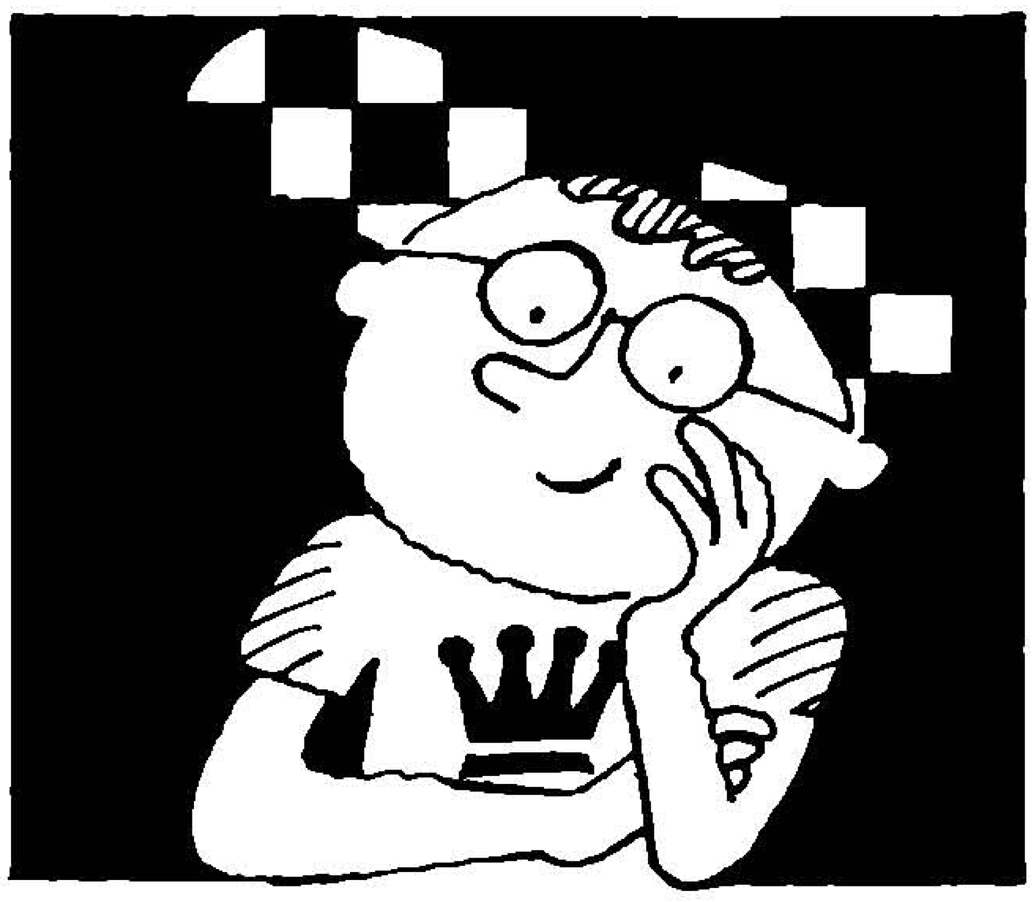
Über einfache Gewinnstrategien

Mit diesem Beitrag möchten wir interessierten *alpha*-Lesern einfache Gewinnstrategien für zwei Spiele mit mathematischen Inhalten vorstellen.

Zum ersten Spiel gehören zwei Spielpartner A und B und 100 (oder weniger) Spielmünzen. Die beiden Spieler müssen von den vorhandenen Spielmünzen abwechselnd jeweils mindestens eine Spielmünze, aber höchstens sechs Spielmünzen wegnehmen. Wer auf diese Weise die letzte Spielmünze erhält, hat verloren.
Es ist nun sicherlich von Interesse, wie der beginnende Spieler A vorgehen muß, damit sein Mitspieler B verliert. Geht man vom Spielende aus, so wird klar, daß Spieler A gewinnt, wenn er nach dem eigenen Wegnehmen von Spielmünzen dem Spielpartner B 1, 8, 15, 22, ..., 99 Spielmünzen, also stets $(7 \cdot n + 1)$ Spielmünzen, hinterläßt. Ist dem Spieler B diese Spielstrategie nicht bekannt, so könnte Spieler A auch den Spieler B beginnen lassen. Spieler A muß in diesem Fall nur dafür sorgen, daß er nach dem Wegnehmen von Spielmünzen einmal dem Spieler B die Anzahl von $(7 \cdot n + 1)$ Spielmünzen hinterläßt. (Dabei vertritt die Variable n beliebige natürliche Zahlen.) Ist dies erreicht, muß Spieler A nur noch darauf achten, daß er selbst und Spieler B bei jedem Wechsel der Entnahme von Spielmünzen zusammen stets sieben Stück entfernen.

Zum zweiten Spiel gehören ebenfalls zwei Spielpartner A und B und ausreichend Spielmünzen. Die beiden Spieler A und B müssen abwechselnd von den vorhandenen Spielmünzen (z. B. 100 Stück) mindestens eine Spielmünze, aber höchstens die Hälfte der jeweils noch vorhandenen Spielmünzen wegnehmen. Wer auf diese Weise die letzte noch vorhandene Spielmünze nehmen muß, hat verloren.
Dieses Spiel gewinnt Spieler A, wenn es ihm gelingt, seinem Spielpartner B zum Schluß drei Spielmünzen zu hinterlassen. Von diesen restlichen drei Spielmünzen muß Spieler B eine Spielmünze wegnehmen.
Wegen $2 > \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ darf Spieler B nicht zwei Spielmünzen entfernen. Für Spieler A verbleiben dann noch zwei Spielmünzen, von denen er eine wegnimmt, so daß Spieler B die letzte Spielmünze nehmen muß und somit das Spiel verliert.
Spieler A erzwingt den Sieg im Spiel, wenn es ihm gelingt, nach einer eigenen Entnahme von Spielmünzen seinem Partner B ..., 63, 31, 15, 7, 3, 1 (allgemein 2^{n-1}, wobei n eine natürliche Zahl gleich oder größer als 1 darstellt) Spielmünzen zu hinterlassen. In der rückläufigen Zahlenfolge 1, 3, 7, 15, 31, 63, ... ist jede Zahl gleich dem um eins vermehrten Doppelten der vorangehenden Zahl. (Allgemein gilt $(2^n - 1) \cdot 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$).
Um zu gewinnen, muß Spieler A so viele Spielmünzen wegnehmen, daß er dem Mitspieler B stets die Anzahl $(2^n - 1)$ an Spielmünzen hinterläßt.
Nun möge der fleißige Leser sich einen Partner suchen und diese beiden Spielstrategien in der Praxis erproben.

Th. Scholl



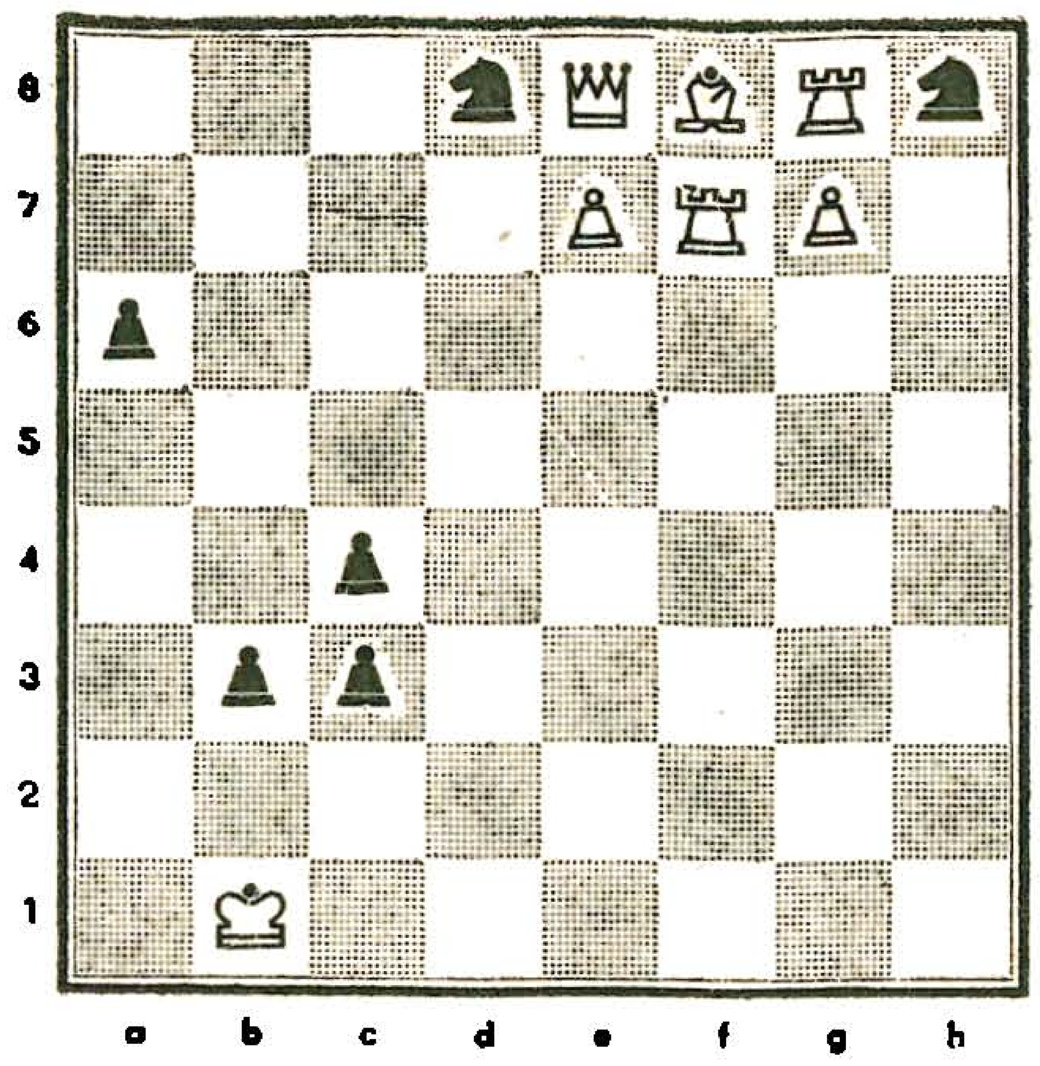
Jährlich eine neue Attraktion – Schülerpokal im Schach

Das zentrale Pionierlager Wilhelmsthal bei Eisenach lud jedes Jahr im 2. Feriendurchgang zur großen Endrunde des Pionierpokals der Schachspieler ein. Für 17 Tage versammelten sich hier rund 500 junge Sportler aus allen Teilen der Republik, um in herrlicher Umgebung ihrem königlichen Spiel zu fröhnen.
Der Thüringer Wald bietet dafür beste Bedingungen – Wartburg und Drachenschlucht, Ruhla und Bad Liebenstein erfreuen sich jährlich aufs Neue großer Beliebtheit. Aber mit Fußballplatz und Schwimmbecken, Tischtennisplatten und Zeltkino fordert auch das Lager zum Verweilen auf. Der Pionierpokal ist zur Tradition geworden. Entstanden aus den Anfängen des Schulschachs, aus harten Kämpfen von Arbeitsgemeinschaften und Schulen gegeneinander schon zu Beginn der fünfziger Jahre, hat er sich über das Einschlafen der Schulschachbewegung hinweg gehalten und darf nun auch ihren Aufstieg wieder miterleben. Bereits zum 30. Mal konnten 1989 die begehrten Trophäen vergeben werden. Ein seltener Rekord!
Im gleichen Jahr feierte Wilhelmsthal als Austragungsort sein 10. Jubiläum. Der Andrang hier ist groß – wer möchte nicht gerne DDR-Pokalsieger genannt werden?
Harte Vorausscheide reduzieren deshalb in den Frühlingsmonaten das Bewerberfeld. Oft sind mehr als 100 Mannschaften Anwärter auf die maximal 12 zu vergebenden Plätze pro Altersklasse. Gekämpft wird in den Altersgruppen 9/10, 11/12, 13/14 jeweils männlich und weiblich. Bei 4 Runden k.-o.-System bleiben viele auf der Strecke – nur die Besten erhalten die begehrten Fahrkarten. Pro Mannschaft 6 Spieler und ein Ersatzmann erreichen die zentrale Endrunde, welche im Rundensystem ausgetragen wird. 11 harte Kämpfe stehen ihnen bevor.
Doch nicht nur Schach soll hier die Ferien bestimmen, bei Wanderungen, Sport und Spiel können sich die Mannschaften erholen. Ein Jahr Training, ein Jahr fleißiges Üben, Siege und Niederlagen sollen hier für alle belohnt werden. Wichtig kann und darf nicht nur harter Kampf sein, wichtig sind auch Kameradschaftlichkeit, Hilfsbereitschaft, Fairneß; der Sommer hier oben schmiedet die Teams enger zusammen, läßt neue Beziehungen wachsen.
Stark vertreten in allen Altersklassen sind vor allem Halle, Leipzig, Dresden und Berlin – Bezirke, die auch bei den Mathematikolympiaden traditionell gute Ergebnisse aufzuweisen haben. Spielerisch werden in den Ferien neue Erkenntnisse gewonnen, schachlich-mathematische Fähigkeiten trainiert. So konnte die Sektion Buna-Halle-Neustadt dreimal in Folge den „Supercup" als erfolgreichste Sektion des Pokalwettbewerbs gewinnen, mußte ihn aber 1989 nach zweiter Wertung an MoGoNo Leipzig abtreten. Besonders stark vertreten stets auch Stahl Niederschönhausen, Post Dresden und TSG Wittenberg, um hier nur einige zu nennen.
Die meisten unserer heutigen Großmeister haben als Kinder einmal hier gesessen, Pokalfieber gespürt. Die wahren Schachspieler sind wie die Wissenschaftler bezüglich ihres Fachgebietes fanatisch. Wer hier einmal wirklich gekämpft hat, behält nicht nur Siege und Medaillen, sondern auch Freude und Ferienspaß in guter Erinnerung. Ein Dank gilt an dieser Stelle allen Betreuern, Schiedsrichtern und besonders den Organisatoren, welche seit vielen Jahren dafür sorgen, daß hier alles in geordneten Bahnen verläuft.
Heute ändern sich die Zeiten in rasendem Tempo. Vieles, was vor kurzem noch unmöglich war, erscheint plötzlich schon als selbstverständlich.
Das Schulschach, stiefmütterlich behandelt in den letzten 20 Jahren, geht einer neuen Blüte entgegen.
Viel ist zu tun, um z. B. den Stand der BRD auf diesem Gebiet zu erreichen. Hier werden die Zusammenhänge Schach-Mathematik seit langem intensiv genutzt (alpha wird darüber berichten).
Aber schon beginnen in der DDR auch Diskussionen um die Notwendigkeit der Austragung eines „Schülerpokals". Doch sollten wir nicht alles Alte verwerfen, besonders dann nicht, wenn es uns viel gegeben hat und dies auch weiterhin noch kann. Verwerfen sollten wir insbesondere nicht ein solches Großereignis, um das uns selbst die BRD-Schachfreunde beneiden.

M. Spindler

Mattfelder gesucht

Kennst Du das Schachspiel? Kaum jemand wird diese Frage verneinen, eher kommen dann oftmals Aussagen wie „Aber spielen kann ich es nicht gut", die das spielerische Können negieren. Jedoch die unausschöpfliche Vielfalt des Schachspiels hält neben dem schier unergründlichen Spiel selbst noch genügend kleinere und größere, faszinierende und knifflige Aufgaben sowohl für den Anfänger als auch für den Meister bereit.
Als kleines Beispiel dazu folgende Aufgabe. In dem abgebildeten Diagramm fehlt



der schwarze König. Auf wie vielen Feldern könnte der schwarze König mit einem Zug von Weiß sofort mattgesetzt werden? Ein Lösungsbeispiel: Man setzt den schwarzen König auf das Feld h3 und Weiß zieht g7:h8D matt.

H. Rüdiger

Buchtips für Schachfreunde

E. Gufeld
Gewinnen mit Königsindisch
160 S., 120 Diagr.,
Leinen mit Schutzumschlag
Bestell-Nr. 671 840 5 Preis: 12,80 DM

J. Awerbach
Damenendspiele
416 S., 734 Diagr.,
Leinen mit Schutzumschlag
Bestell-Nr. 671 838 4 Preis: 22,00 DM

S. Steffens
Go spielend lernen
256 S., 460 Abb.,
Leinen mit Schutzumschlag
Bestell-Nr. 671 852 8 Preis: 18,80 DM

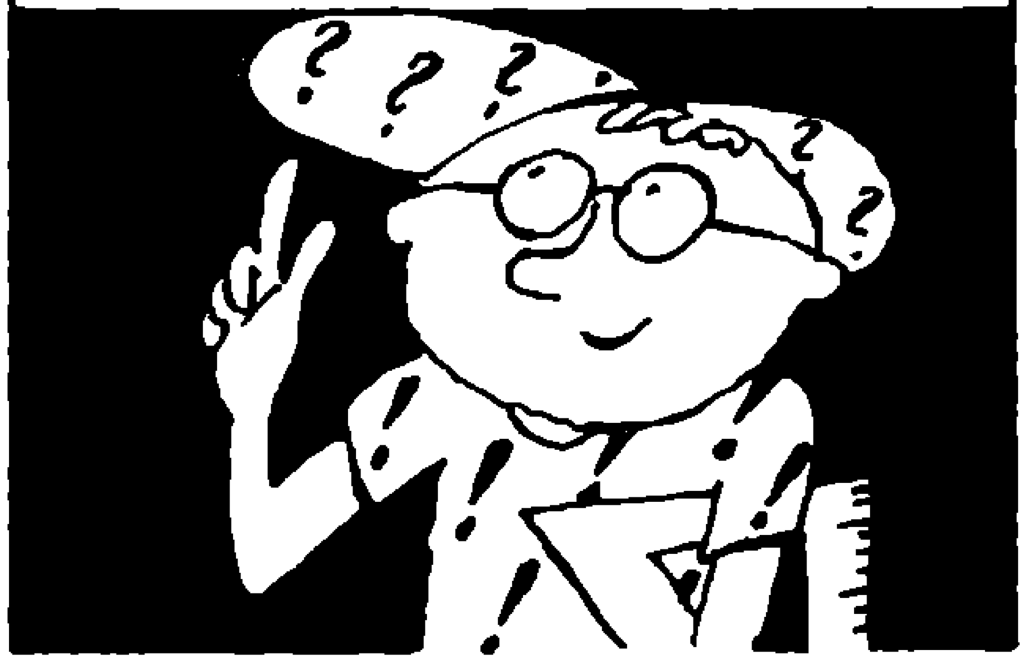
Eine Einführung in das älteste Brettspiel der Welt.
Wie findet man Zugang zum Go?
Der Autor wählte anstelle des mit 19 Linien versehenen Standardbretts das überschaubare 9er Brett, um den Leser Schritt für Schritt in die Regeln und die Taktik des Go einzuführen. Der mit zunehmendem Schwierigkeitsgrad des Stoffes wachsende Übungsbedarf wird dabei berücksichtigt.

alle Titel: Der Sportverlag Berlin

Übrigens – das Go-Spiel könnt ihr in den Spielwarenläden erwerben.

Alphons

Lösungen



Lösungen zu: Zwei Eigenaufgaben aus der MSG Greifswald
Heft 2/90

Aufgabe von Jan Fricke
Wenn der Stapel gleich viele Büchsen jeder Sorte enthalten soll, muß die Gleichung
$4n + 2k - 6 = \frac{k(2n+1-k)}{2}$ gelten.
Die Bedingungen $n = k$ und $n,\ k \in N$ gestatten die Lösungen $n = 14$, $k=5$ und $n = k = 0$. Die letztere „ist keine Lösung im Sinn der Aufgabenstellung, sie ist jedoch praxisnäher" (J. F.).

Aufgaben von René Schöne
Der Winkel $\alpha = \sphericalangle DAB$ variiert zwischen α_0 und α_1 mit $\cos\alpha_0 = \frac{7}{9}$ und $\cos\alpha_1 = \frac{1}{3}$, wobei α_0 und α_1 die Winkel des Dreiecks mit den Seitenlängen $3x$, $3x$, $2x$ sind, welches als Grenzfall entsteht, wenn D auf $\overline{AC}$ oder C auf $\overline{BD}$ liegt. Aus Symmetriegründen braucht nur der Fall $60° \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ behandelt werden. Sei M der Mittelpunkt des Inkreises. Wir verwenden
$p := \frac{\overline{AM}}{x}$ als Parameter und erhalten
$$Q(p) = \frac{7+72}{(4p^4 - 24p^2 - 9)}.$$
Es gilt $p^2 = \frac{3}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{3} + \frac{1}{2p}$.
Diese Gleichung ist für $\sqrt{\frac{3}{2}} \leqq p \leqq \sqrt{3}$ eindeutig umkehrbar. Dort ist Q monoton wachsend, nimmt sein Maximum $\frac{27}{5}$ bei 3 an, $\alpha = 60°$. Das Minimum 5 wird erst im Entartungsfall $p = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\alpha = \alpha_1$ angenommen.

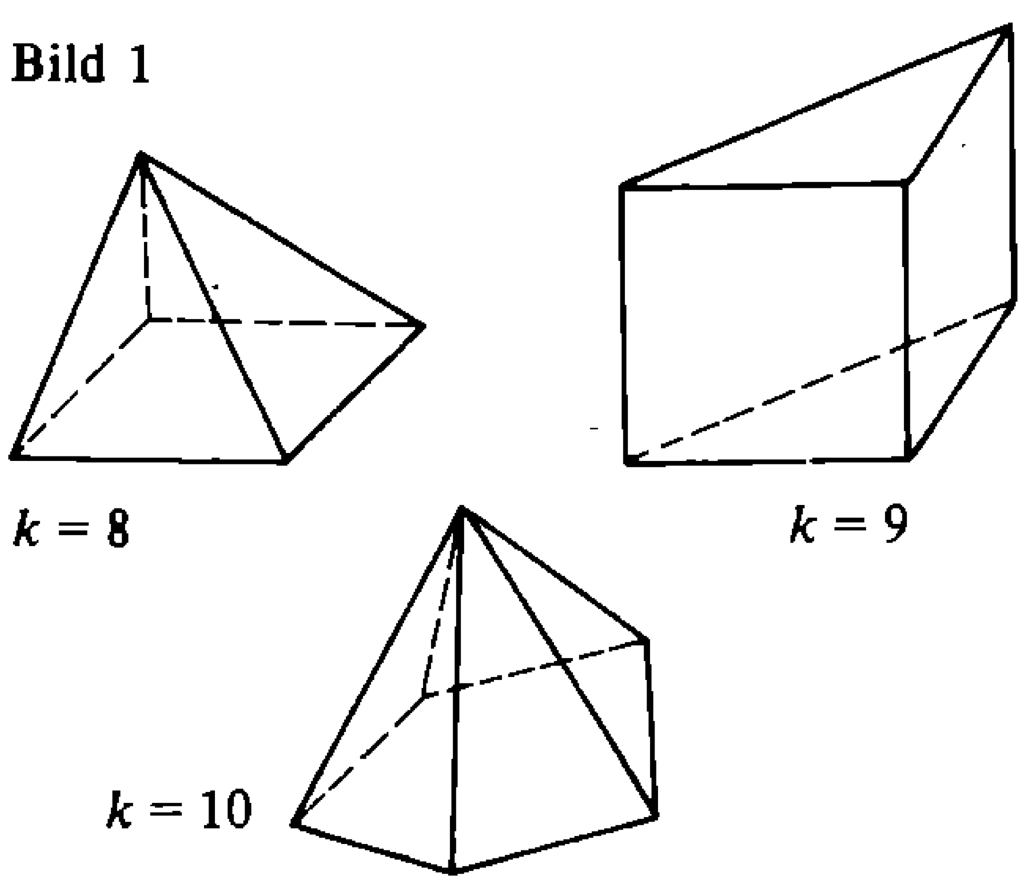
Lösung zu: Kryptarithmetische Knobelaufgabe
Heft 3/90

Wir sind es gewöhnt, bei Additionen oder Subtraktionen die betreffenden Zahlen senkrecht untereinander zu schreiben. Damit erhalten wir z. B. folgende Gleichung:
$$\begin{array}{r} E\,I\,C \\ -\ \ I\,H \\ \hline G\,B\,C \end{array} \qquad (1)$$
Wegen: $C - H = C$ folgt $H = 0$ und wegen $I - I = B$ folgt $B = 0$! Also steckt der Fehler schon hier in dieser Gleichung!
Eine weitere Gleichung ist:
$$II \cdot DC = BCG. \qquad (2)$$
Hieraus folgt aber, daß B nicht Null sein kann! Damit haben wir die Aussage $H = 0$ und $B \neq 0$! Deshalb ist in der Gleichung (1) ein Buchstabe I durch K zu ersetzen!
Weil der Ausdruck $\overline{IH}$ falsch ist, (unter Voraussetzung, die wir eben begründet haben) schreiben wir dafür jetzt KH. Damit heißt die Gleichung (1) jetzt:
$$EIC - KH = GBC.$$
Die Lösung der Aufgabe ist:
$$\begin{array}{ccccc} 924 & - & 50 & = & 874 \\ : & & + & & - \\ 22 & \cdot & 34 & = & 748 \\ \hline 42 & + & 84 & = & 126 \end{array}$$
Die einzelnen Buchstaben haben folgende Ziffernzuordnung:
$A = 1$, $B = 7$, $C = 4$, $D = 3$, $E = 9$,
$F = 6$, $G = 8$, $H = 0$, $I = 2$, $K = 5$.

Lösungen zu: Einige Folgerungen aus dem Eulerschen Polyedersatz
Heft 3/90

▲1▲ a) Wir geben zuerst je ein Beispiel für ein Polyeder mit $k = 8$, $k = 9$ und $k = 10$ an (Bild 1):

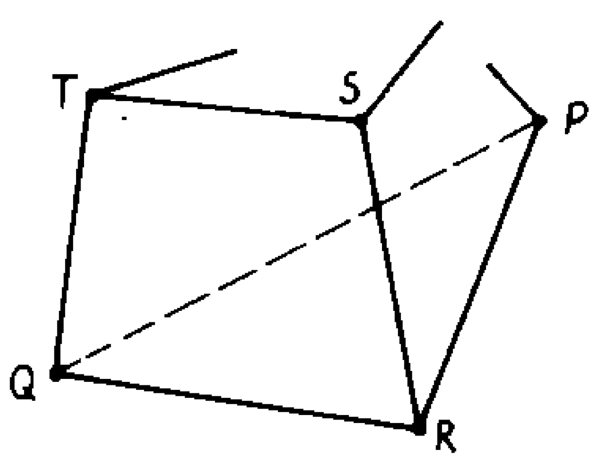
Bild 1



Errichten wir nun über einer Dreiecksfläche jedes Polyeders ein Tetraeder, so entsteht ein neues Polyeder, das jeweils drei Kanten mehr als das Ausgangspolyeder sowie weitere Dreiecksflächen enthält. Außerdem kann man die Höhe des angesetzten Tetraeders stets so wählen, daß das neu entstandene Polyeder konvex ist. Dieses Verfahren können wir fortsetzen, womit die Aufgabe gelöst ist.
b) Wir können sehr leicht Beispiele für Polyeder mit $e = 5, 6, 7, \ldots$ Ecken angeben. Dazu betrachten wir in der Ebene ein regelmäßiges $(e-1)$-Eck, $e \geqq 5$, und errichten darüber eine gerade Pyramide. Damit ist ein konvexes Polyeder mit $e = 5, 6, 7, \ldots$ Ecken entstanden.
c) Als Beispiel für Polyeder mit $f = 5, 6, 7, \ldots$ Flächen eignen sich ebenfalls die geraden Pyramiden mit regelmäßiger Grundfläche. Vergrößern wir nämlich die Anzahl der Ecken der Grundfläche um eins, so erhöht sich die Anzahl der Flächen des Polyeders ebenfalls um eins. Da es eine gerade Pyramide mit fünf Flächen (quadratische Grundfläche) gibt, ist diese Aufgabe gelöst.

▲2▲ Wir zeigen, daß es unter allen konvexen Polyedern mit genau fünf Flächen genau zwei Typen gibt.
Dazu bedenken wir, daß es keine Polyederecke eines Polyeders mit genau fünf Flächen geben kann, in der fünf Flächen zusammentreffen. Außerdem treffen in jeder Polyederecke mindestens drei Flächen zusammen.
Es entstehen zwei Fälle:
1. Ein Polyeder mit genau fünf Flächen enthält (mindestens) eine Ecke, in der genau vier Flächen zusammentreffen.
Dann muß die fünfte Fläche aber die anderen vier Flächen schneiden, und es entsteht eine Pyramide mit viereckiger Grundfläche.
2. Ein Polyeder mit genau fünf Flächen enthält nur Ecken, in denen genau drei Flächen zusammentreffen.
Aus dem Eulerschen Polyedersatz folgt dann mit $f = 5$ und $k = \frac{3}{2} \cdot e$, daß $e = 6$ und $k = 9$ ist. Enthält ein Polyeder ein p-Eck, so hat dieses Polyeder wenigstens $2p$ Kanten. Folglich enthält ein Polyeder mit genau fünf Flächen in diesem Fall höchstens Vierecke.
Würde ein solches Polyeder nur Vierecke enthalten, so hätte es $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot f = 10$ Kanten.
Würde ein solches Polyeder nur Dreiecke enthalten, so hätte es $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot f = 7{,}5$ Kanten.
Folglich muß ein Polyeder mit genau fünf Flächen in diesem Fall wenigstens ein Dreieck und ein Viereck enthalten. Dann muß es eine Kante $\overline{QR}$ geben, an der ein Dreieck und ein Viereck zusammentreffen (Bild 2).

Bild 2



P sei der dritte Eckpunkt des Dreiecks und S, T die weiteren Ecken des Vierecks. Da in diesem Fall von jeder Ecke genau drei Kanten ausgehen, muß von P, S und T jeweils noch genau eine weitere Kante ausgehen. Damit haben wir bereits die neun Kanten, die uns zur Verfügung stehen, verbraucht, denn P kann nicht mit S bzw. T durch eine Kante verbunden werden. Da unser Polyeder sechs Ecken hat, müssen sich die freien Kanten von P, S und T in einem Punkt U treffen. Das entstandene Polyeder hat genau fünf Flächen. Damit ist gezeigt, daß es genau zwei Typen von Polyedern mit genau fünf Flächen gibt. Ohne Beweis soll mitgeteilt werden, daß es sieben verschiedene konvexe Polyedertypen mit genau sechs Flächen gibt. Die Bilder zeigen zu jedem Typ ein Beispiel.

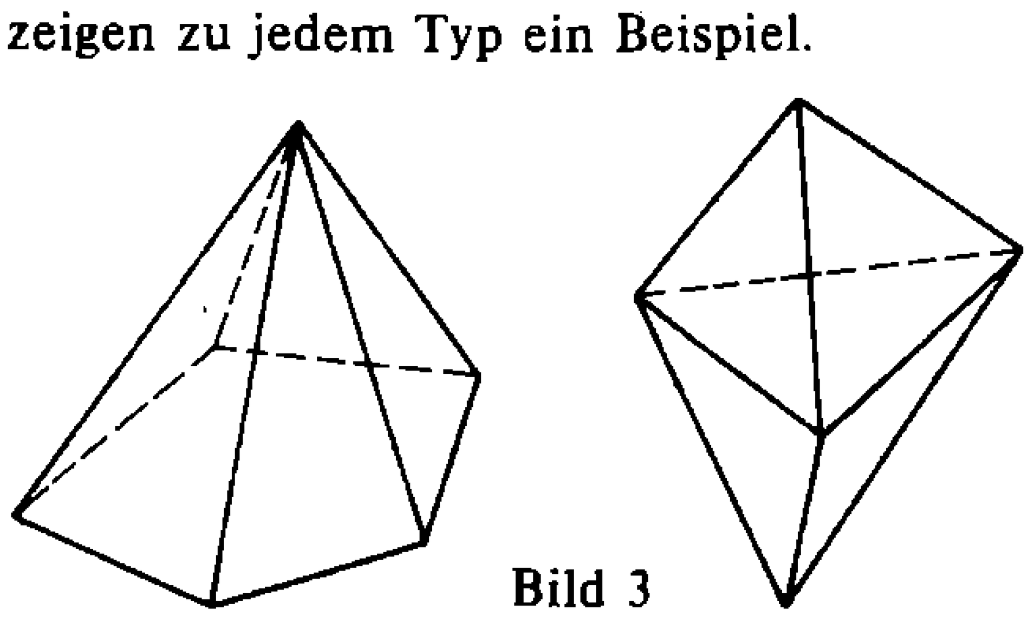
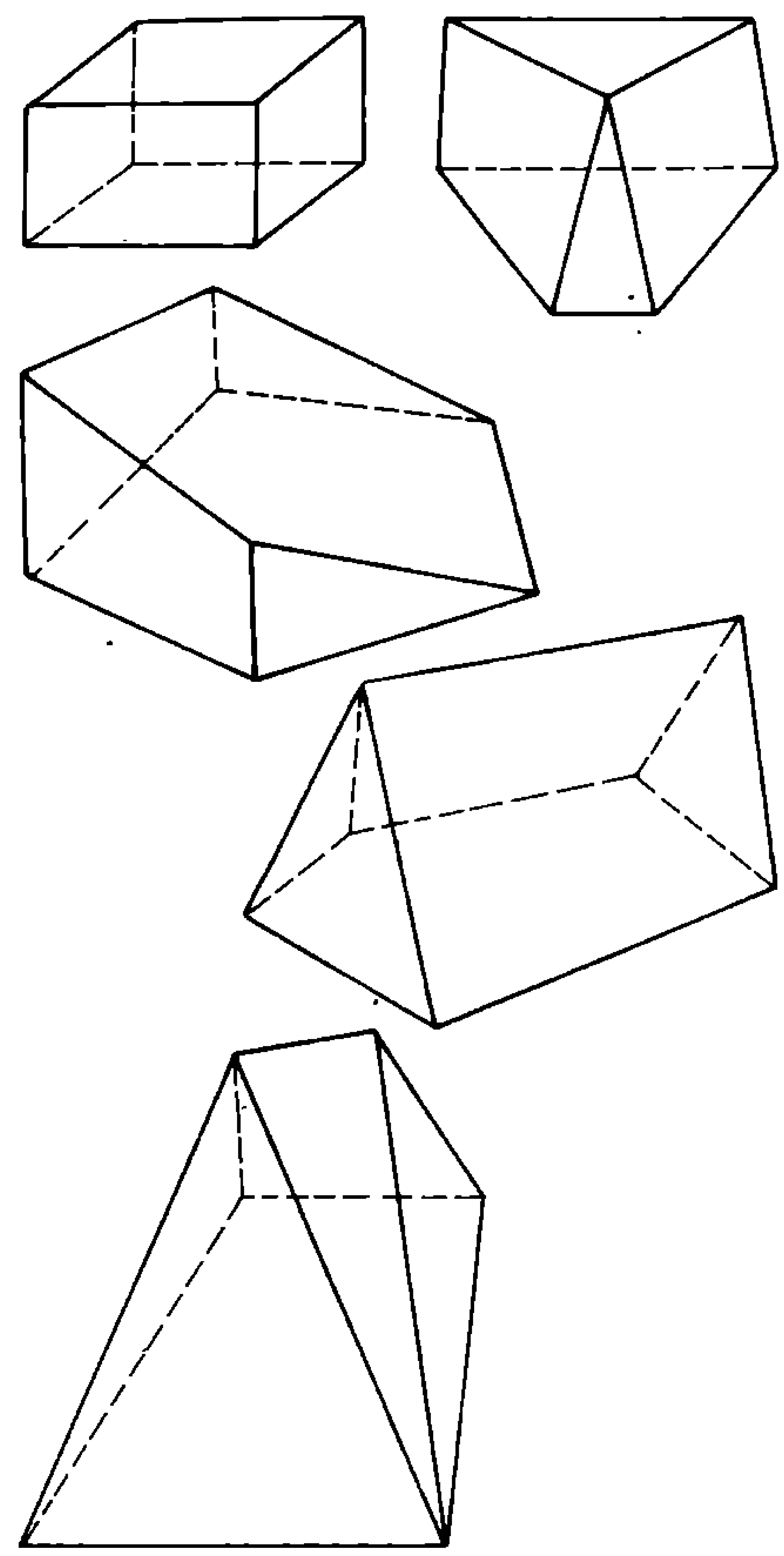


Bild 3



▲3▲ P sei ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten. f_3, f_4, … ist die Anzahl der Flächen mit genau 3, 4, … Ecken. Dann kann man die Summe der Flächenwinkel $\sum\alpha$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\sum\alpha &= \pi f_3 + 2\pi f_4 + 3\pi f_5 + \ldots\\ &= \pi\cdot(f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots)\\ &= \pi\cdot((3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots)\\ &\quad - 2(f_3 + f_4 + f_5 + \ldots))\\ &= \pi\cdot(2k - 2f)\\ &= 2\pi(k - f).\end{aligned}$$

▲4▲ Wir versuchen im folgenden ein Tetraeder $ABCS$ zu konstruieren, bei dem jede Kante Schenkel eines stumpfen Winkels ist.

In einem 1. Fall nehmen wir an, daß alle stumpfen Winkel, die am Tetraeder $ABCS$ vorkommen, an genau einer Ecke liegen. Dann können aber höchstens drei Kanten als Schenkel von stumpfen Winkeln auftreten, und damit erfüllt ein solches Tetraeder nicht die gestellten Anforderungen.

In einem 2. Fall, nehmen wir an, daß es im gesuchten Tetraeder an genau zwei Ecken stumpfe Winkel gibt. Dann gibt es höchstens fünf Kanten, die Schenkel eines stumpfen Winkels sind, denn die beiden betrachteten Ecken sind durch genau eine Kante verbunden.

Also müssen bei dem gesuchten Tetraeder an wenigstens drei Ecken stumpfe Winkel liegen.

Nehmen wir nun in einem 3. Fall an, daß an genau drei Ecken des gesuchten Tetraeders stumpfe Winkel liegen. A, B und C seien diese drei Ecken. Dann muß jedes der Dreiecke ABS, BCS und CAS genau einen stumpfen Winkel enthalten, da AS, BS und CS Kanten von stumpfen Winkeln sein sollen. Außerdem kann das Dreieck ABC noch stumpfwinklig sein.

Ist $\sphericalangle SAB$ stumpf, so folgt, daß dann auch $\sphericalangle SBC$ und $\sphericalangle SCA$ stumpf sein müssen. Durch mehrmaliges Anwenden der Dreiecksungleichung folgt $|SC| > |BS| > |AS| > |SC|$, womit sich ein Widerspruch zu $|SC| = |SC|$ ergibt. Folglich kann auch dieser Fall nicht auftreten.

Als letzte Möglichkeit für unser gesuchtes Tetraeder bleibt im 4. Fall, daß an jeder Tetraederecke ein stumpfer Winkel liegt. Da aber ein Tetraeder genau vier Flächen hat, folgt sofort, daß es im letzten Fall genau vier stumpfe Winkel gibt.

Ist $\sphericalangle ASB$ stumpf, so gibt es für die Lage des stumpfen Winkels an der Ecke A zwei Möglichkeiten: entweder ist $\sphericalangle SAC$ oder $\sphericalangle CAB$ stumpf. Ist $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle SAC$ stumpf, so folgt sofort, daß entweder $\sphericalangle SBC$ und $\sphericalangle ACB$ (Bild 4) oder $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BCS$ (Bild 5) ebenfalls stumpf sind. Ist $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle CAB$ stumpf, so folgt sofort, daß auch $\sphericalangle SBC$ und $\sphericalangle ACS$ stumpf sind (Bild 6).

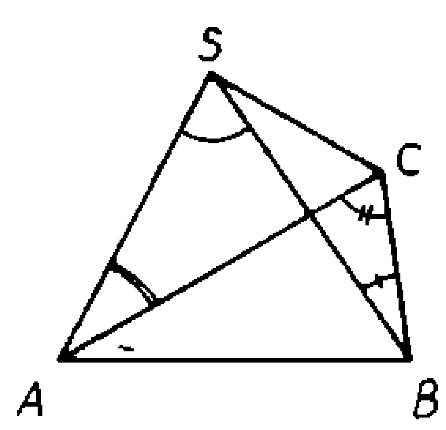


Bild 4

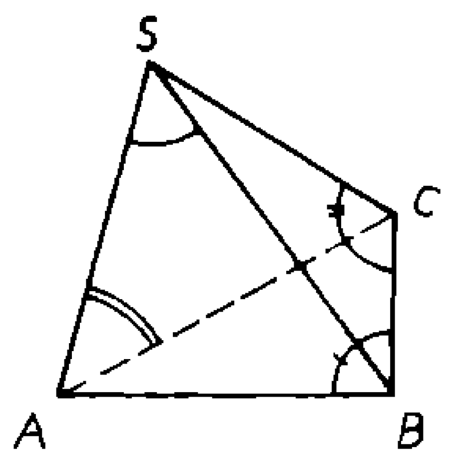


Bild 5

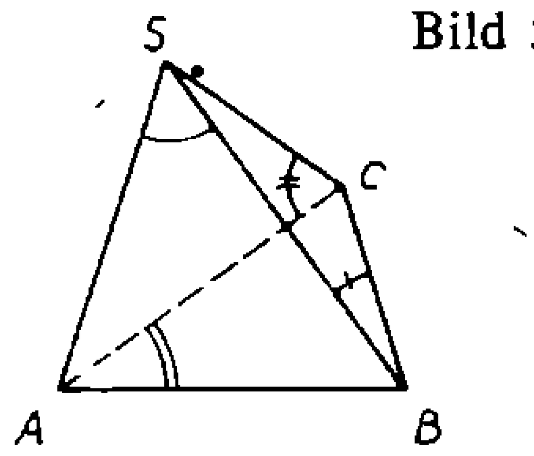


Bild 6

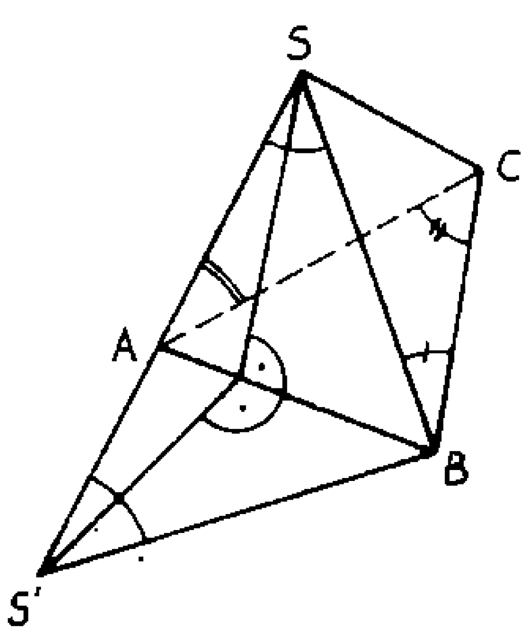
Bei der Verteilung der stumpfen Winkel nach Bild 5 folgt durch mehrmaliges Anwenden der Dreiecksungleichung, daß $|AB| > |BS| > |CS| > |AC| > |AB|$ gilt.

Bei der Verteilung nach Bild 6 folgt analog, daß $|AB| > |AS| > |SC| > |BC| > |AB|$ gilt.

In beiden Fällen entsteht also ein Widerspruch zu $|AB| = |AB|$, und folglich können diese beiden Verteilungsmöglichkeiten nicht auftreten.

Nun bleibt noch die Verteilungsmöglichkeit der stumpfen Winkel nach Bild 4 zu untersuchen. Hier hilft uns die Anwendung der Dreiecksungleichung nicht weiter.

Bild 7



Um festzustellen, daß auch diese Verteilungsmöglichkeit nicht zu realisieren ist, klappen wir das Dreieck ABS in die Ebene des Dreiecks ABC. S' sei das Bild von S (Bild 7). Es ist klar, daß

$|\sphericalangle SAC| < |\sphericalangle S'AC|$ und $|\sphericalangle SBC| < |\sphericalangle S'BC|$ ist.

Folglich gilt

$|\sphericalangle SAC| + |\sphericalangle SBC| < |\sphericalangle S'AC| + |\sphericalangle S'BC|$. (1)

Weil das Dreieck ACB bei C stumpfwinklig ist, gilt

$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle CBA| < 90°$. (2)

Weil das Dreieck ASB bei S stumpfwinklig ist, gilt

$|\sphericalangle SAB| + |\sphericalangle SBA| < 90°$, bzw.

$|\sphericalangle S'AB| + |\sphericalangle S'BA| < 90°$. (3)

Aus (2) und (3) folgt

$|\sphericalangle S'AC| + |\sphericalangle S'BC| = |\sphericalangle S'AB| + |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle S'BA| + |\sphericalangle CBA| < 180°$.

Dieses ergibt zusammen mit (1), daß $|\sphericalangle SAC| + |\sphericalangle SBC| < 180°$ ist. Damit entsteht aber ein Widerspruch zu der Tatsache, daß die Summe von zwei stumpfen Winkeln stets größer als 180° ist.

Folglich gibt es kein Tetraeder, bei dem jede Kante Schenkel eines stumpfen Winkels ist.

Lösungen zu: Gerechte und ungerechte Würfelspiele, Teil 1
Heft 3/90

▲1▲ a) Beispielsweise: V erhält im Falle des Gewinns von Z 5 Chips, zahlt aber andernfalls an ihn 7 Chips.
b) $a : b = 1 : 3$

▲2▲ a) 1(36)
b) nicht möglich: 2,5; 5,5; 7;
unterschiedlich möglich:
2(2, 1, 1; 2, 2, 2); 4(4, 1, 1; 4, 2, 2; 4, 3, 3; 4, 4, 4)
c) 9(3, 3, 2; 5, 3, 2; 5, 5, 2; 4, 4, 3; 4, 5, 3; 5, 5, 3; 5, 5, 4; 5, 6, 4; 6, 6, 5)

▲3▲ 31

▲4▲ Bei allen

▲5▲ $Q_{V/N}^{(2)} = 585 : 545 = 1{,}0734$;
$Q_{V/N}^{(3)} = 21225 : 20280 = 1{,}0466$

Teil 2

▲6▲ $Q_{Z/G}^{(2)} = 612 : 567 = 1{,}0794$;
$Q_{F/G}^{(2)} = 612 : 567 = 1{,}0794$
$Q_{F/Z}^{(2)} = 688 : 536 = 1{,}2836$

▲7▲ Da Vergleich mit dem Normalwürfel stets 1 ergibt (Aufgabe 3), genügen wegen der 31 ungewöhnlichen Würfel (Aufgabe 2) $31 \cdot 30 : 2 = 465$ Berechnungen.

▲8▲ a) Die Nummern lauten, im Bild 5 bei Nr. 1 beginnend in mathematisch positivem Drehsinn (entgegen dem Uhrzeigersinn):
1; 5; 6(F); 9; 13; 15; 17; 18(V); 19(Z); 22; 26; 29; 30; 31; 32(G)
b) Die Nummern sind die gleichen.

▲9▲ a) $Q_{1/F} = Q_{1/6} = 18 : 12 = 1{,}5$;
$Q_{Z/1} = Q_{19/1} = 18 : 12 = 1{,}5$
b) Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 7a: Nr. 18 und Nr. 32 sowie Nr. 30 und Nr. 32 ($Q_{18/32} = Q_{32/30} = 15 : 6 = 2{,}5$); ferner ist $Q_{18/30} = 25 : 11 = 2{,}27$.
c) In keiner Kette: 5; 9; 13; 22;
in jeder Kette: 1; 6; 19
d) 1 – 19 – 26 – 29 – 18 – 6; 1 – 19 – 26 – 32 – 17 – 6; 1 – 19 – 26 – 32 – 18 – 6; 1 – 19 – 30 – 15 – 18 – 6; 1 – 19 – 30 – 29 – 18 – 6.

Lösungen zu:
Läßt sich der Zufall berechnen?
Teil 2

▲6▲ $P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{3}{7}$,

$P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{1}{3}$

▲7▲ $P(R/G) = \frac{P(R \cap G)}{P(G)} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

▲8▲ $A_3 = \{4; 5\}$

▲9▲ R – Die herausgenommene Kugel ist rot. G – Die herausgenommene Kugel ist grün. W – Die herausgenommene Kugel hat weiße Punkte.
$P(R) = 0{,}3$, $P(G) = 0{,}7$, $P(W/R) = 0{,}4$, $P(W/G) = 0{,}5$
$P(W) = P(W/R) \cdot P(R) + P(W/G) \cdot P(G)$
$= 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}47 = 47\,\%$

▲10▲ L – Ein Samenkorn ist ein Lupinesamen. W – Ein Samenkorn ist ein Wikkesamen. S – Ein Samenkorn ist ein Sonnenblumensamen. K – Ein Samenkorn keimt.

$$P(L/K) = \frac{P(K/L) \cdot P(L)}{P(K/L) \cdot P(L) + P(K/W) \cdot P(W) + P(K/S) \cdot P(S)}$$
$$= \frac{0{,}80 \cdot 0{,}29}{0{,}80 \cdot 0{,}29 + 0{,}95 \cdot 0{,}54 + 0{,}85 \cdot 0{,}17} \approx 0{,}26 = 26\,\%$$

$P(W/K) \approx 58\,\%$, $P(S/K) \approx 16\,\%$

▲11▲ C und D

▲12▲ $U = \{1; 3; 5\}$ und $G = \{2; 4; 6\}$ sind nicht unabhängig, denn wegen $P(U) = P(G) = \frac{1}{2}$, $U \cap G = \emptyset$ und $P(U \cap G) = 0$ gilt $P(U \cap G) \neq P(U) \cdot P(G)$.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Auf den Laut zerspringenden Glases wandte sich der Milizionär Stepan Stepanowitsch um und erblickte vier Jugendliche, die von einer zerschlagenen Fensterscheibe fortliefen. Nach fünf Minuten befanden sie sich auf der Milizstation.
Andrej bekannte, daß Viktor das Glas zerschlug, Viktor behauptete, daß Sergej schuld sei. Sergej beteuerte, daß Viktor lügt und Juri bekräftigte, daß er es nicht getan habe. Bei dem weiteren Gespräch stellte sich heraus, daß nur (genau) einer der Jungen die Wahrheit sagte. Wer schlug die Fensterscheibe ein?
Lösung: Aus den Aussagen von Viktor und Sergej folgt, daß beide nicht gleichzeitig die Unwahrheit gesagt haben können und somit sprach einer von ihnen die Wahrheit. Da nur genau einer der Jungen die Wahrheit sagte, lügen Andrej und Juri. Also lügt Juri, wenn er behauptet, daß er es nicht gewesen sei. Juri war der Täter.

▲2▲ **Finde die Regeln**
Gib zwei weitere Beispiele mit denselben Eigenschaften der folgenden an: $3^2 - 1^2 = 2^3$, $6^2 - 3^2 = 3^3$, $10^2 - 6^2 = 4^3$.
Beachte die Reihe, aus der wir die Zahlen genommen haben, die quadriert wurden. Wenn du die Reihe weiter fortsetzt, wirst du keine Schwierigkeiten haben, weitere Beispiele zu finden; dir wird es auch nicht schwerfallen, die Allgemeingültigkeit der Regeln zu zeigen.
Lösung: Die nächsten beiden Beispiele würden sein: $15^2 - 10^2 = 5^3$ und $21^2 - 15^2 = 6^3$. Die Zahlen 3, 6, 10, 15, ... erhält man aus der Reihe der Zahlen, die durch die Addition $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ entstehen. Die Regelmäßigkeit läßt vermuten, daß die Differenz der Quadrate zweier solcher aufeinanderfolgender Zahlen immer eine ganzzahlige dritte Potenz ist. Offensichtlich ist

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$
$$= \frac{n^2}{4}[(n+1)^2 - (n-1)^2]$$
$$= \frac{n^2}{4}(n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n - 1)$$
$$= \frac{n^2}{4} \cdot 4n = n^3.$$

▲3▲ **Magische Quadrate**
In jedem der beiden Quadrate sind einige Zahlen eingetragen.
Trage in jedes Quadrat die noch fehlenden Zahlen bis 25 ein, so daß die Summe jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen 65 beträgt!
Hinweis: Teile die fünfundzwanzig Zahlen in fünf Gruppen (1 – 5; 6 – 10; 11 – 15; 16 – 20; 21 – 25)! Diese Gruppen müssen so angeordnet werden, daß zwei Zahlen der gleichen Gruppe unbedingt in verschiedenen Zeilen und Spalten stehen!
Lösung:

14	16	3	25	7
23	10	12	19	1
17	4	21	8	15
6	13	20	2	24
5	22	9	11	18

15	3	21	9	17
24	7	20	13	1
18	11	4	22	10
2	25	8	16	14
6	19	12	5	23

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Mathe-Mix

AX	IA	LS	YM	ME	TR	IE
BR	UC	HG	LE	IC	HU	NG
DR	AC	HE	NV	IE	RE	CK
FE	HL	ER	RE	CH	NU	NG
KU	GE	LA	BS	CH	NI	TT
MU	LT	IP	LI	KA	TI	ON

Ein Farbspiel „ohne 11 Spitzen"
a) Da seine Gegner von jeder der „Farben" Pik, Herz und Karo insgesamt 3 Karten haben, und dazu noch 11 Trumpfkarten, kann der Spieler höchstens je einen Farbstich in den „Farben" Pik, Herz und Karo machen. Mit Skat und diesen drei Farbstichen kann er selbst zu seinem Partiegewinn maximal 53 Augen (3 Asse, 2 Zehnen) beisteuern. Von seinen Gegnern kann er mit diesen drei Stichen maximal 11 Augen (2 Könige, 1 Ober), 8 Augen (2 Könige) oder noch weniger Augen erhalten. Da er mindestens 61 Augen erzielen muß, muß er alle 3 Stiche machen, dabei von seinen Gegnern mindestens 8 Augen erhalten. Einer der beiden Gegner hat also eine Karokarte, der andere 2 Karokarten in seinem Blatt. Ein Gegner hat den Pikkönig und der andere Pikneun und Pikacht in seinem Blatt. Und weiterhin hat ein Gegner Herzkönig und der andere Herzneun und Herzacht in seinem Blatt.
b) Der Spieler muß in den Skat zwei verschiedenfarbige Karten mit insgesamt 22, 21 oder 20 Augen legen.
c) Ist der Spieler selbst der Vorderhandspieler, so muß er sofort nacheinander die drei Farbstiche kassieren. Andernfalls muß er die Pik-Herz- und Karokarte seines Blattes mit jeweils maximaler Augenzahl so lange aufheben, bis er mit einer von diesen drei Karten erstmals einen Stich machen kann. Im Anschluß muß er sofort die beiden anderen gewinnträchtigen Stiche einheimsen.

Einer paßt nicht
Außer dem Wort Klammer haben die anderen im Singular und im Plural die gleiche Schreibweise.

Kreuzzahlrätsel
Man beginnt mit j_w. Wegen e_s muß j_w ungerade sein. 3 entfällt wegen k_s und n_w, sowie 5, 7, 9 wegen c_s und c_w. Mit $j_w = 1111$ ergibt sich dann die gesamte Lösung eindeutig.

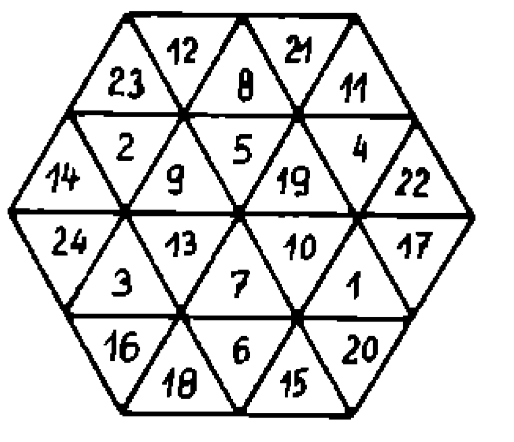
2	7			1	6
	2	7		1	
1		1	1	0	3
1	1	1	1		6
	0		3	3	
8	1			9	9

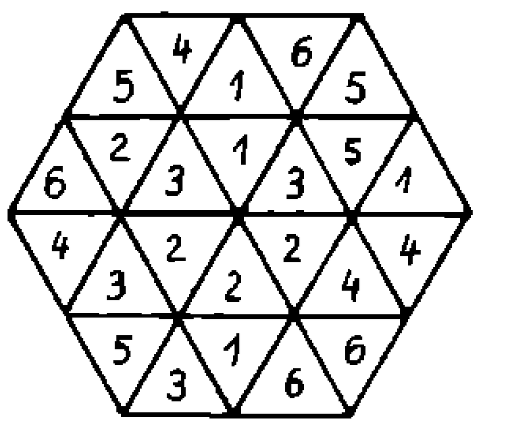
Personalpronomen
Je vier Lösungen sind:

a)
153	271	352	478
+64	+58	+79	+62
217	329	431	540

b) Es gibt genau die vier Lösungen:
54	65	76	87
+51	+61	+71	+81
105	126	147	168

c)
612	543	157	425
+102	+403	+597	+295
714	946	754	720

Magische Hexagone
Eine Lösung ist:
a)


b)


Vom Kern zum Wort
Quadrate; Umkreise; Ordinate; Trillion; Implizit; Exponent; Numerale; Tangente → Quotient

Mathematische Luftfracht
a) Die Summe aller in Kreisen stehenden Zahlen ist 308. Da 110 + 44 = 154 ist, muß in das vordere Oval 19(= 154 – 135) eingetragen werden. Die Summe der zwei in die verbleibenden freien ovalen Felder zu schreibenden Zahlen ist somit
179 = 308 – (19 + 110). Weil beide sich

um Eins unterscheiden (wegen $65-64=1$!), lauten sie 89 und 90.

b) Die Summe der Quadrate aller in Kreisen stehenden Zahlen ist

$135^2+44^2+65^2+64^2=28\,482$. Auf gleiche Art wie bei a) bestimmt man für das vordere Oval die Zahl 19. Somit ist die Summe der Quadrate der noch in die beiden freien Ovale zu schreibenden Zahlen $28\,482-19^2-110^2=16\,021$. Da die Differenz der einzutragenden Zahlen Eins beträgt (vgl. Lösung a)!), folgert man die Gleichung

$x^2+(x+1)^2=16\,021$ ($x \in N$), wobei x die kleinere der beiden Zahlen, $x+1$ die größere ist. Die Lösung $x=89$, weshalb die zweite gesuchte Zahl $x+1=90$ ist.

Die gesuchten drei Zahlen sind 19, 89 und 90. Mit ihnen erhält man die Paare (Oval, Kreis) = (19; 135), (89; 65), (90; 64), die mit dem gegebenen Paar (110; 44) allen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Lösung zur Schachecke

Auf 36 Feldern kann der schwarze König mit einem Zug von Weiß sofort mattgesetzt werden, z. B. auf a3 mit e:d8S oder auf e2 mit e:d8T.

Lösungen zu: Ein Zuschneideproblem
Heft 3/90

- Beim Tellerrock (Bild 1) ist der Radius der Saumlinie

$r_S = \dfrac{135\text{ cm}}{2} = 67{,}5\text{ cm}.$

Der Radius der Taillenlinie ergibt sich aus $2r_T \cdot \pi = 62$ cm; $r_T = 9{,}9$ cm.

Mithin beträgt die Rocklänge (vor dem Säumen):

$l_R = 67{,}5\text{ cm} - 9{,}9\text{ cm} = 57{,}6\text{ cm}.$

Dieser Rock wäre zu kurz.

- Der Glockenrock (Bild 2) ist aus zwei Viertelkreisen zusammengesetzt; folglich ist der Radius r_T für die Taillenlinie doppelt so groß wie der entsprechende für den Tellerrock: $r_T = 19{,}8$ cm.

Der größtmögliche Radius r_S für die Saumlinie des Glockenrocks ist die Hälfte der Diagonalen im Rechteck mit den Seitenlängen 1,50 m und 1,35 m, also:

$(2r_S)^2 = (150\text{ cm})^2 + (135\text{ cm})^2;$

$r_S = 100{,}9$ cm.

Mit dieser Saumlinie wird der Rock

$l_R = 100{,}9\text{ cm} - 19{,}8\text{ cm} = 81{,}1\text{ cm}$

lang, also viel zu lang, aber nicht sehr weit.

- Bild 3 zeigt den aus einem Stück geschnittenen Rock.

Als Ausgangspunkt für alle weiteren Berechnungen muß der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB = \alpha$ ermittelt werden. Das Lot vom Kreismittelpunkt M auf die untere Schnittkante (Fußpunkt F) halbiert diesen Winkel und ist Ankathete von $\frac{\alpha}{2}$ im rechtwinkligen Dreieck MAF.

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{135\text{ cm} - 75\text{ cm}}{75\text{ cm}} = 0{,}8;$

$\dfrac{\alpha}{2} = 36{,}87°;\ \alpha = 73{,}74°.$

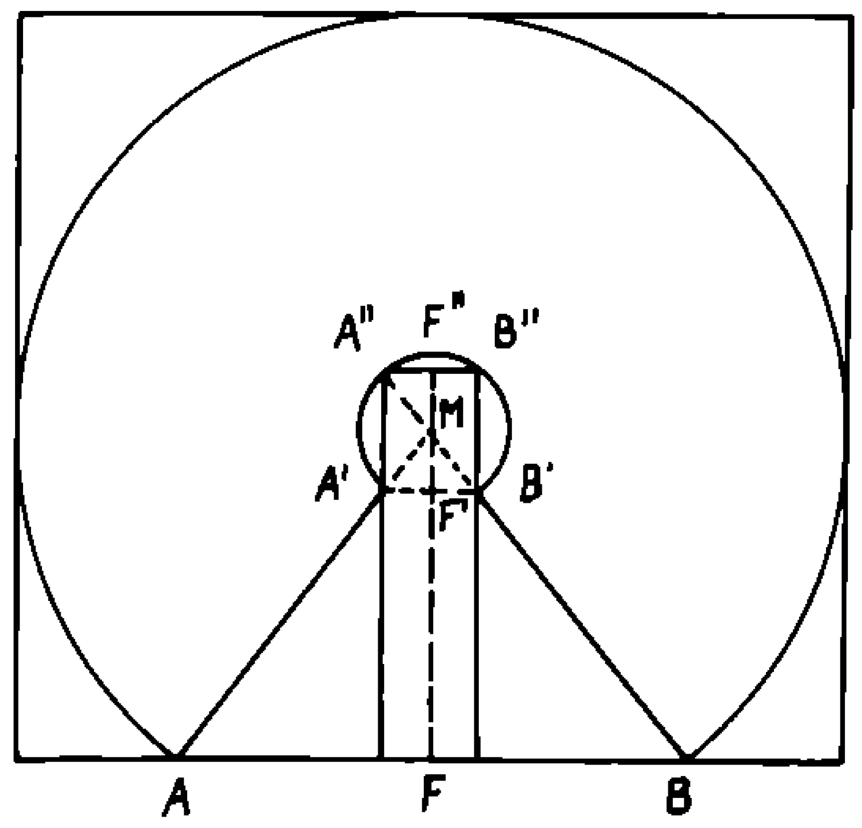


Bild 3
Weiter Glockenrock

Im großen Teilkreis (Saumlinie) ist der Teilumfang s zu errechnen:

$s = \dfrac{\pi \cdot 150\text{ cm}\,(360° - \alpha)}{360°};$

$s = 374{,}7$ cm;

im kleinen Teilkreis (Taille) dagegen der Radius r_T, der zum Teilumfang 62 cm (Taillenweite) gehört:

$\dfrac{2r_T \cdot \pi \cdot (360° - \alpha)}{360°} = 62\text{ cm};\ r_T = 12{,}4\text{ cm}.$

Die Rocklänge l_R (= Differenz zwischen beiden Radien) liegt mit

$75\text{ cm} - 12{,}4\text{ cm} = 62{,}6\text{ cm}$ im vorgeschriebenen Bereich.

Die Breite des Bundstreifens b ist doppelt so groß wie die Gegenkathete von $\frac{\alpha}{2}$ im $\Delta MA'F'$:

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{b}{2} : r_T = \dfrac{b}{2r_T};$

$b = 2 \cdot 12{,}4\text{ cm} \cdot \sin 36{,}87°;\ b = 14{,}9\text{ cm}.$

Die Länge des Bundstreifens l_B kann so groß werden wie die Summe der Kathetenlängen $\overline{MF}$ und $\overline{MF''}$ in den entsprechenden ähnlichen Dreiecken.

$\overline{MF} = 60$ cm ist bekannt. $\overline{MF''}$ sei x.

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{x}{r_T};$

$x = 12{,}4\text{ cm} \cdot \cos 36{,}87°;\ x = 9{,}9\text{ cm}$

$l_B = 60\text{ cm} + 9{,}9\text{ cm} = 69{,}9\text{ cm}.$

- Bild 4 zeigt wieder einen Tellerrock.

Sein Taillenradius wurde bereits mit 9,9 cm berechnet. Um die nötige Rocklänge zu erreichen, muß der Radius der Saumlinie mindestens 70 cm, wegen Nahtzugabe und Saum besser 71 cm betragen. Für die Weite an der Saumlinie ergibt sich dann

$s = \pi \cdot 142\text{ cm} = 446{,}1\text{ cm}.$ Für den Bund bleibt ein 8 cm breiter, mehr als ausreichend langer Streifen.

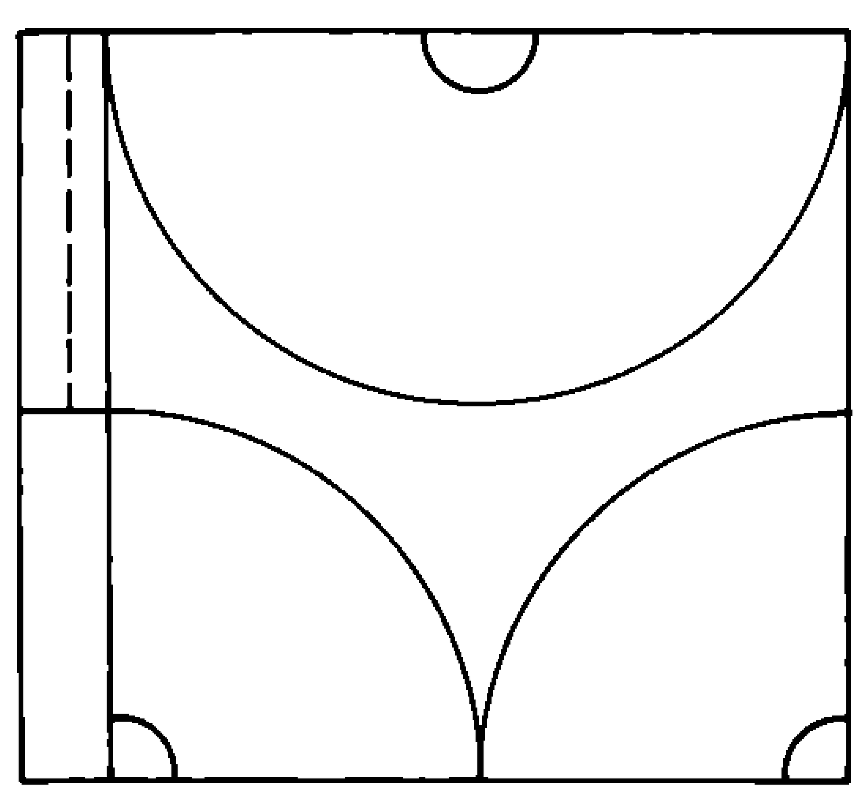
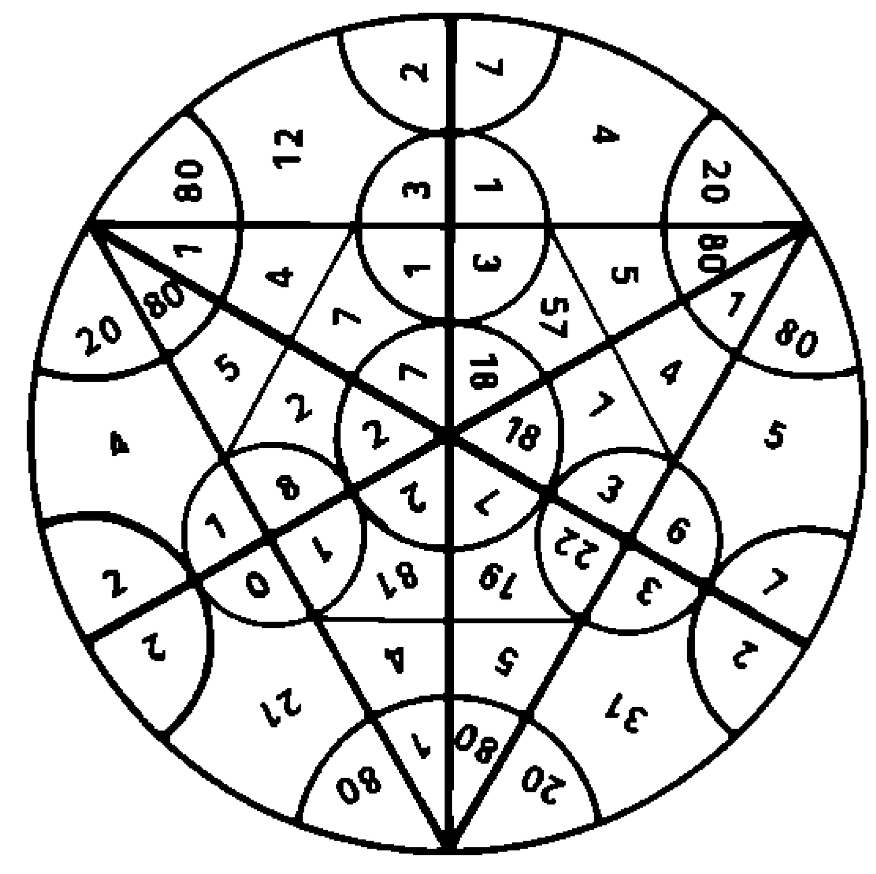
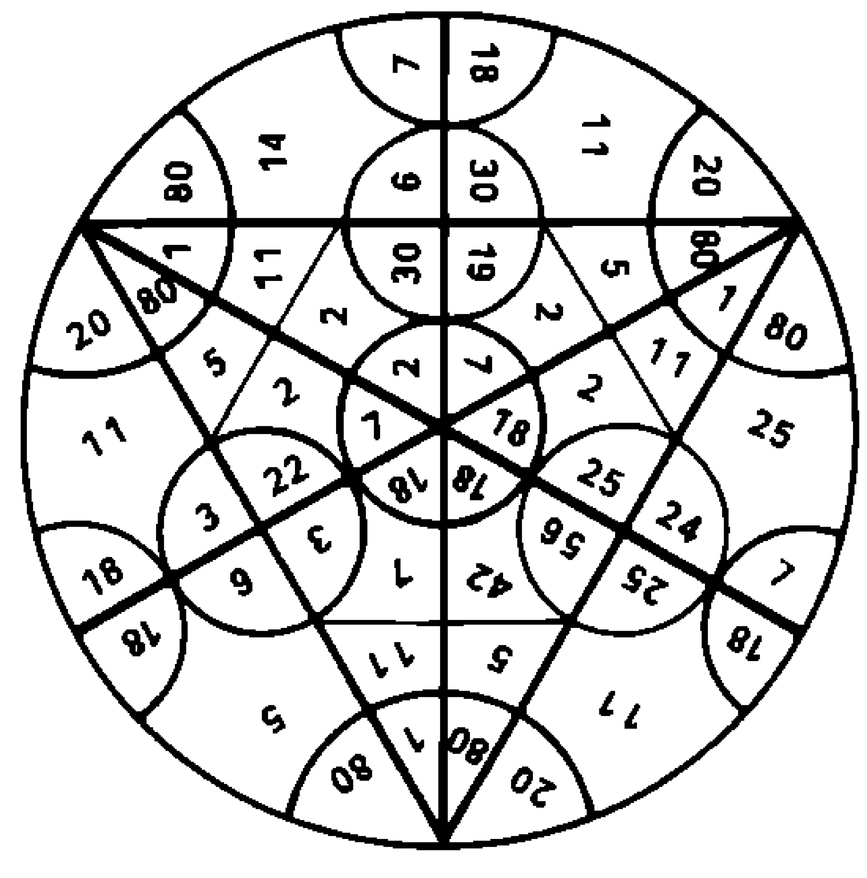


Bild 4
Tellerrock mit Seitennähten und hinterer Mittelnaht

Eine Gegenüberstellung der errechneten Maße macht deutlich, daß die Schnittlösung Bild 3 einen modisch breiten Bund bietet, während der Tellerrock Bild 4 die größere Saumweite hat.

Lösung zu: Verflixt und zu-gepuzzelt, Heft 2/90





Lösungen zu: AJHSME
Heft 3/90

▲1▲ Die drei Striche auf der Skala unterteilen 10 bis 11 in vier Teile. Daher bedeuten die Teilstriche nacheinander (bei 10 beginnend) 10,25; 10,50; 10,75. Daher ist D die Antwort.

▲2▲ Es ist $8 \cdot 0{,}25 \cdot 2 \cdot 0{,}125$
$= 8 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}$. Daher gilt C.

▲3▲ Es ist $0{,}075 \cdot 2{,}56$
$= 75 \cdot 10^{-3} \cdot 256 \cdot 10^{-2} = 19\,200 \cdot 10^{-5}$
$= 0{,}192$. B ist richtig.

▲4▲ Eine Billion bedeutet in den USA 10^9.

Die Kosten jedes USA-Bürgers betragen also $\dfrac{20 \cdot 10^9}{250 \cdot 10^6} = \dfrac{20 \cdot 10^3}{250} = 80$ Dollar.

C ist anzukreuzen.

▲5▲ Der Umfang des Beetes beträgt $2\pi r = 2\pi \cdot 12 \approx 75$ Fuß. Daher sind rund 75 Rosenstöcke erforderlich. D ist richtig.

▲6▲ E ist richtig.

▲7▲ Der sich überschneidende Teil beträgt $2 \cdot 3 = 6$ FE (Flächeneinheiten). Die Fläche des horizontalen Rechtecks ist gleich $2 \cdot 10 = 20$ FE und die des vertikalen Rechtecks $3 \cdot 8 = 24$ FE. Damit ist die gesuchte Fläche gleich $20 + 24 - 6 = 38$ FE. B gilt.

▲8▲ Die 36 % entsprechen 45 Tassen. Also entsprechen 4 % dann $45 : 9 = 5$ Tassen. Ist die Maschine mit 100 % gefüllt, enthält sie $5 \cdot 25 = 125$ Tassen. C ist wahr.

Auf den Spuren von Mathematikern
Andreas Mayer

Ich möchte über einen Mathematiker des 18. Jahrhunderts berichten, der für die Universität in Greifswald Bedeutendes geleistet hat. Es wäre heute aber sicher nur wenigen Spezialisten bekannt, hätte er sich nicht selbst ein großartiges Denkmal gebaut: das Hauptgebäude der Universität Greifswald. Der Name des Mathematikers ist Andreas Mayer. Er wurde am 8. 6. 1716 in Augsburg als Sohn eines Architekten geboren und studierte in Berlin, Wittenberg und Marburg. In Marburg beeinflußte ihn vor allem Christian Wolff (1679 bis 1754). Bei diesem Gelehrten promovierte er auch im Alter von 20 Jahren. Wolff riet ihm, nach Wittenberg zu gehen. Dort hielt Andreas Mayer Vorlesungen und verfaßte Arbeiten über Physik, Astronomie und Mathematik. Schon 1740 habilitierte er.

In Greifswald wurden zu dieser Zeit die Naturwissenschaften nur wenig beachtet. Als Wolff aufgefordert wurde, einen Vorschlag für die Besetzung der naturwissenschaftlichen Lehrämter zu unterbreiten, nannte er der Universität und dem schwedischen König (Greifswald gehörte von 1648 bis 1815 zu Schweden) seinen ehemaligen Schüler Mayer. Im Herbst 1740 wurde Andreas Mayer nach Greifswald berufen, er zog aber erst zu Ostern 1741 an seine neue Wirkungsstätte, an der er 41 Jahre ohne Unterbrechung tätig war.

Als Universitätslehrer für Mathematik, Physik, Astronomie und Geographie wird ihm großer Erfolg bescheinigt. In Greifswald ließ er nach seinen Entwürfen ein Haus (Martin-Luther-Str. 10) bauen. Durch die runden Bodenfenster führte er jahrelang genaue astronomische Messungen durch. 1775 wurde unter seiner Lei- …ver- turm am …e Sternwarte errichtet. Andreas Mayer leistete auch Beiträge zur Landvermessung. Als Ostsee und Bodden zugefroren waren, führte er exakte Küstenvermessungen durch. Eine Karte Mayers von Rügen und Vorpommern aus dem Jahre 1763 wurde zur 525-Jahrfeier der Ernst-Moritz-Arndt-Universität (1981) nachgedruckt.

In seinen zahlreichen Lehrveranstaltungen benutzte Mayer u. a. die Eulerschen Werke und die in Greifswald gedruckten Lehrbücher von W. J. G. Karsten (siehe alpha 1/1986), höchstwahrscheinlich auch die Bücher von Ch. Wolff.

Andreas Mayer erhielt zahlreiche internationale Ehrungen durch Mitgliedschaften an verschiedenen Akademien, und er unterhielt einen regen Briefwechsel mit großen Gelehrten seiner Zeit.

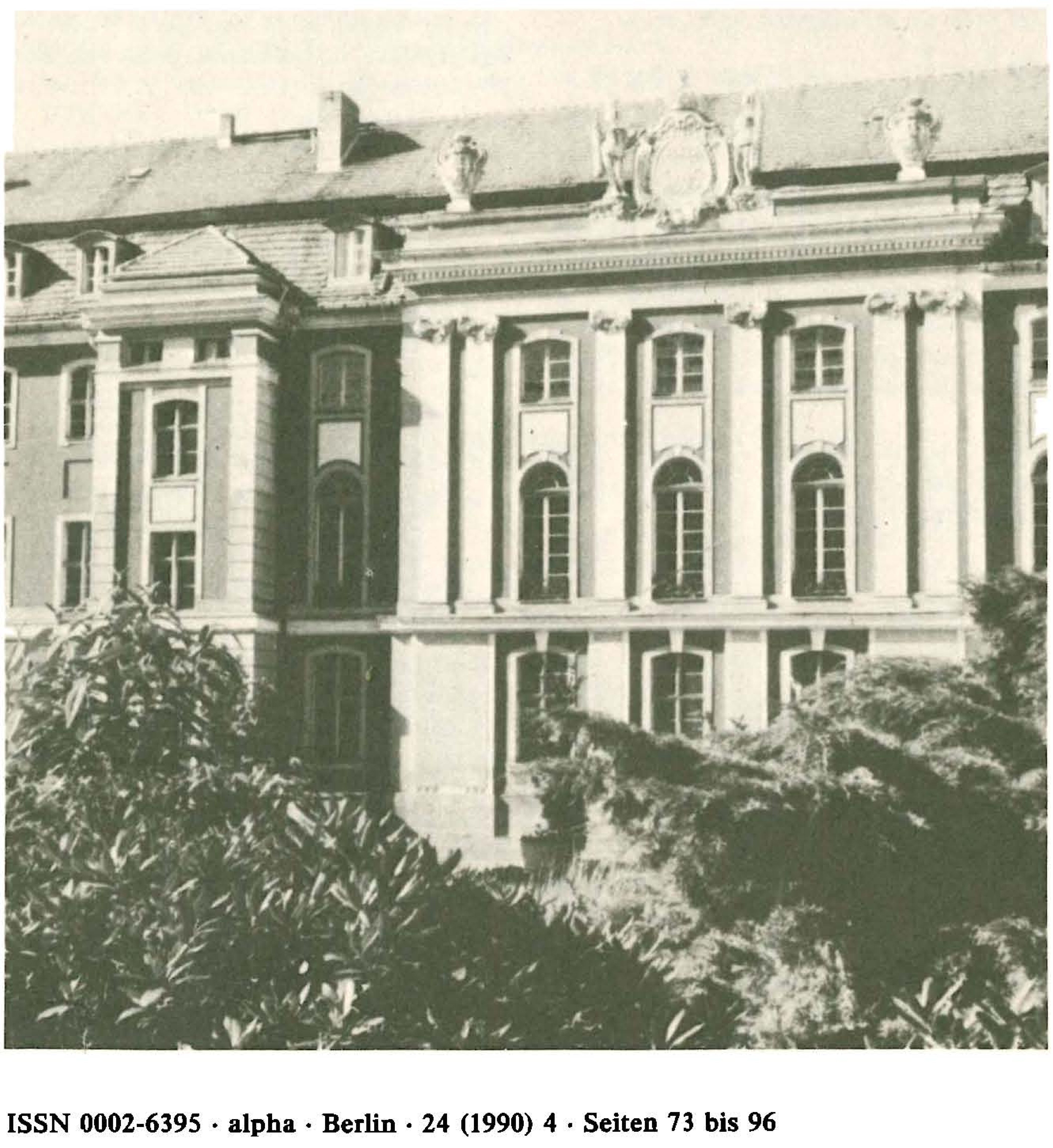
A. Mayer war zweimal verheiratet. Er starb am 20. 12. 1782 in Greifswald.

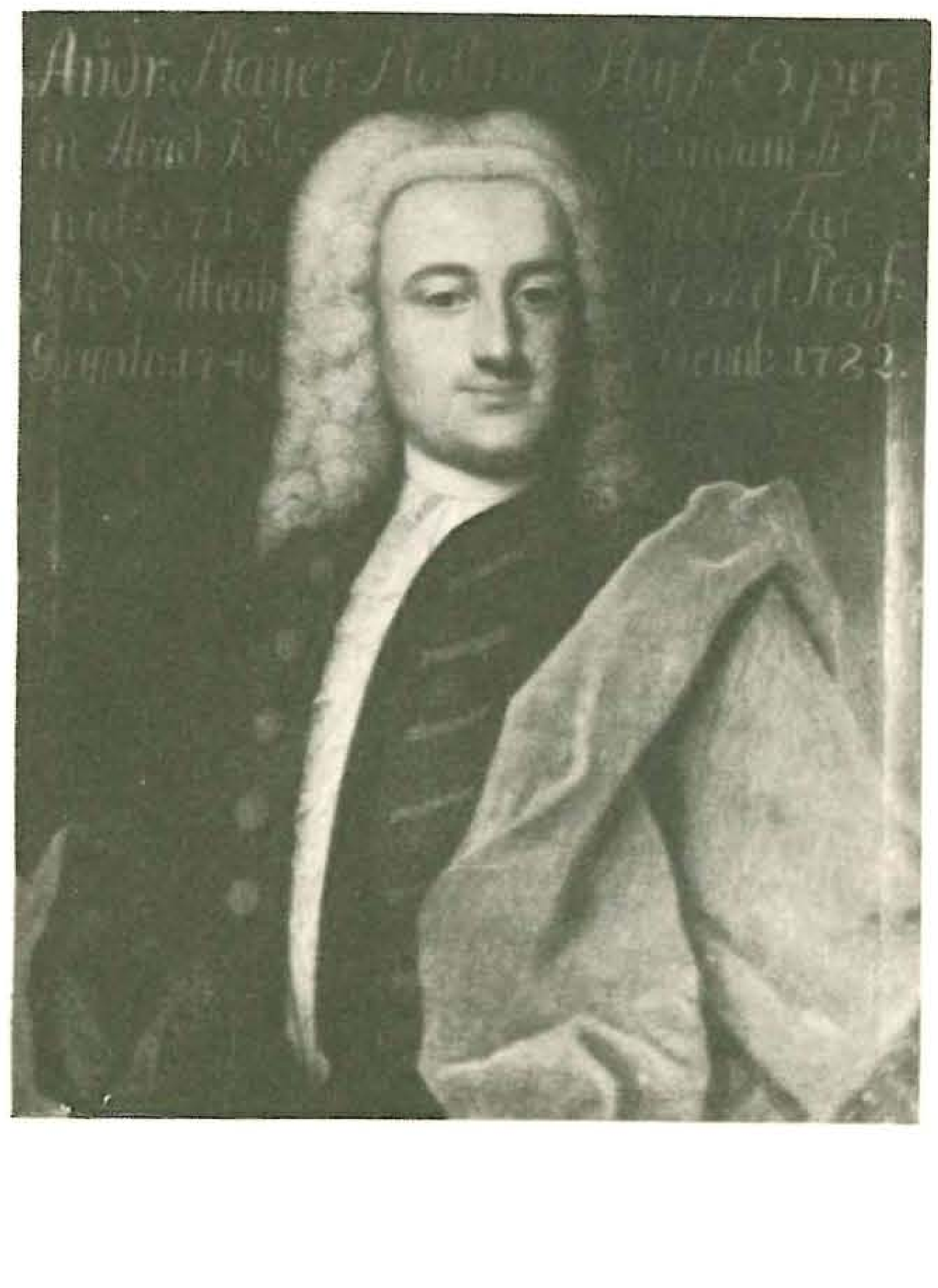
Wohl einmalig für einen Mathematiker und Rektor einer Universität ist, daß Andreas Mayer den Entwurf und die Bauleitung eines neuen Universitätshauptgebäudes übernahm. Am 3. 8. 1747 war die Grundsteinlegung für den Mittelflügel, bereits am 28. 4. 1750 wurde das spätbarocke Gebäude eingeweiht. Die ehemalige Universitätsbibliothek mit einer schönen Galerie, die von 24 Säulen getragen wird, dient heute als Aula. Hier ist auch ein Ölgemälde mit dem Porträt A. Mayers zu sehen.

In der Aula finden in unserer Zeit Konzerte und wissenschaftliche Veranstaltungen statt. Hier trafen wir uns auch zur Jugendweihefeier.

Über Andreas Mayer habe ich mich informiert nach Aufsätzen von J. Fait (Festschrift zur 500-Jahrfeier I, Greifswald 1956), F. v. Krbek (dieselbe Festschrift, Band II) und J. Buhrow (Wissenschaftliche Zeitschrift der EMAU, Greifswald, 1984).

A. Schmidt





ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 24 (1990) 4 · Seiten 73 bis 96