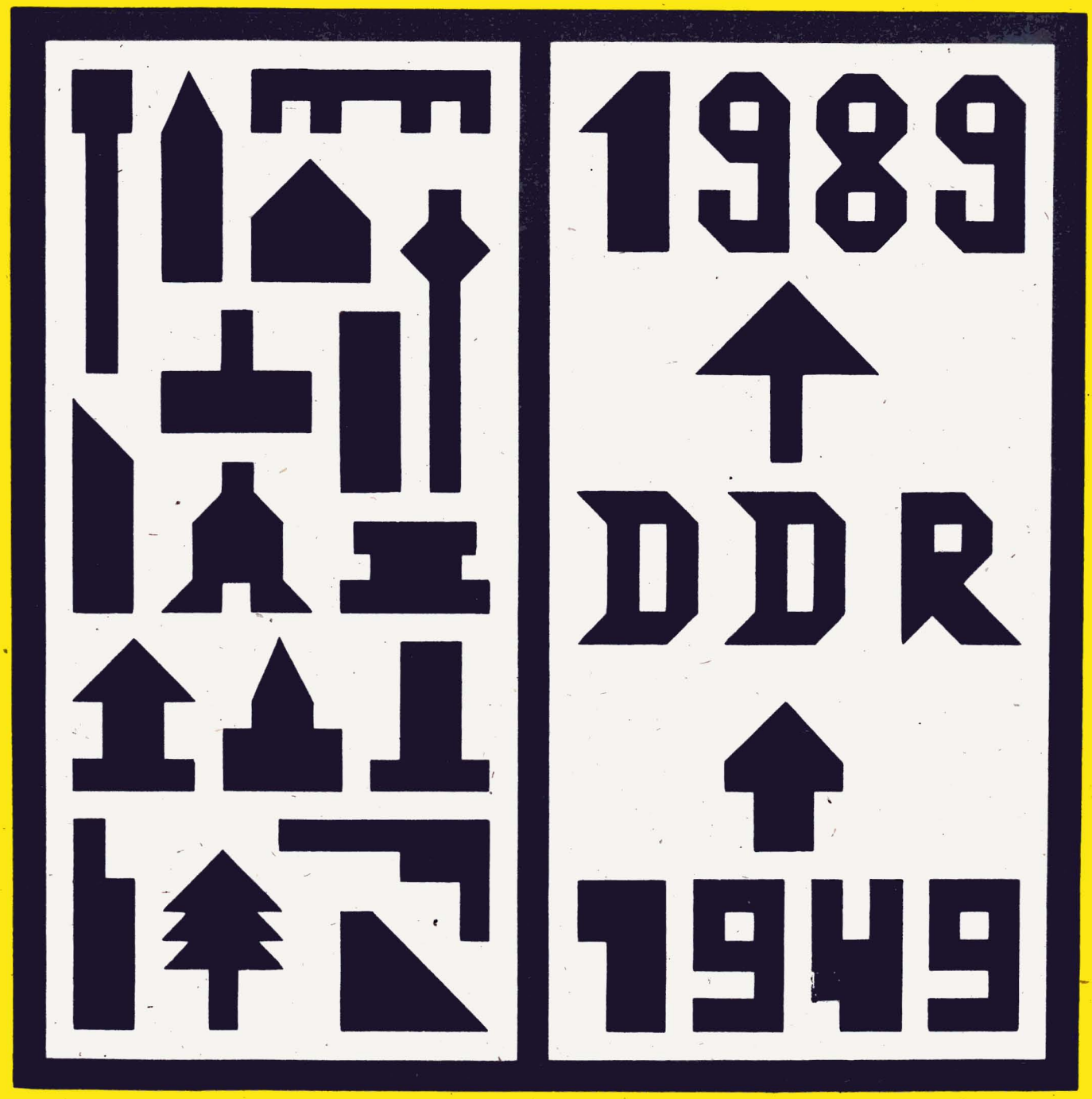
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
23. Jahrgang 1989
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

alpha

4

Mathematische
Schülerzeitschrift



Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086

Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Studiendirektor Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig 7010.

Fotos: F. Wagenseil, Werneuchen (S. 82); H. Boettcher, Weimar (S. 83); H. Beyrich, Karl-Marx-Stadt (S. 86, 87); Dr. P. Schreiber, Greifswald (S. 90/91)

Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelvignetten); The Australien Mathematics Teacher, Kenmore Hills (S. 92)

Techn. Zeichnungen: StR G. Gruß, Leipzig

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von Dr. R. Mildner, Leipzig

Typografie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 11. April 1989
Auslieferungstermin: 9. August 1989

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

73 Leser antworten Lesern
A. Körner, Leipzig

74 In freien Stunden · alpha-heiter
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der K.-Marx-Universität Leipzig

76 Wir berechnen ein ebenes Fachwerk
Prof. Dr. G. Clemens, Sektion Ingenieurbau der Technischen Hochschule Leipzig

81 Schachecke
H. Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin

82 Unser alpha-Klub
alpha-Klub der Werneucher Oberschule „Juri Gagarin"

83 Ein Hobbymathematiker stellt sich vor
Hartmut Boettcher, VEB Tierzucht Erfurt

84 Überall Näherungswerte
Dr. L. Flade/Dr. M. Pruzina, Sektion Mathematik der M.-Luther-Universität Halle

86 Das Rechenbuch des Johannes Widmann von 1489
Dr. H. Beyrich, Karl-Marx-Stadt

87 Acht mathematische Knobelaufgaben
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz, OStR Th. Scholl, Berlin

88 Das Problem der kürzesten Fahrtstrecke, Teil 2
Dr. S. Dempe, Sektion Mathematik der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt

90 Kirche, König, Konvergenz
Zum 200. Geburtstag von A. L. Cauchy
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

92 Sprachecke
R. Bergmann, Döbeln/P. Hofmann, Dr. G. Liebau (beide Leipzig)

93 XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
Aufgaben der Schulolympiade

95 Eine interessante Multiplikation
OStR Th. Scholl, Berlin

96 Lösungen

IV. U.-Seite: Gut gedacht ist halb gelöst
Dr. Ch. Werge, Sektion Mathematik der K.-Marx-Universität Leipzig

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.

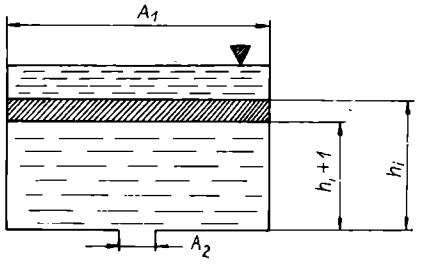
Leser antworten Lesern

Anfrage eines Lesers an „alpha" (Heft 5/1988; 3. Umschlagseite): „Ein Würfel mit einem Kilometer Kantenlänge sei mit Wasser gefüllt. Im Boden sei eine Öffnung von 100 mm Durchmesser.
Wie lange braucht das Wasser, um aus dem Gefäß herauszufließen?"
Der Leser war auf einen (geschätzten) Wert von mindestens 250 Jahren gekommen und bat um den „mathematischen Nachweis".

Versuch der Lösung

Vorbemerkung: Der gewünschte „Nachweis" bedarf zunächst der Physik!
Wenn eine Flüssigkeit (z. B. Wasser) aus einem offenen Gefäß durch eine im Verhältnis zum Gefäß kleine Bodenöffnung abfließt, ist die Ausflußgeschwindigkeit eine unmittelbare Funktion der Höhe der Flüssigkeitssäule über der Ausflußöffnung!
Nämlich: $v = \sqrt{2gh}$.
In dem vorgelegten Falle ist die Gesamtzeit eine Funktion im Sinne einer gleichförmig verzögerten Bewegung, denn die Flüssigkeitssäule sinkt allmählich auf Null und ebenso die Ausströmgeschwindigkeit. (Jeder Badeofen, den man leerlaufen läßt, zeigt das sehr anschaulich.)

Im nachstehenden Bild bezeichnen:
A_1 = Querschnittsfläche des Würfels (m^2)
A_2 = Querschnittsfläche der Ausflußöffnung (m^2)
h_i = Höhe der Wassersäule zu einem Zeitpunkt t_i
h_{i+1} = Höhe der Wassersäule zu einem Zeitpunkt t_{i+1}.



Da die einzige auf das Wasser wirkende Kraft die Schwerkraft ist, kann von einer gleichförmig verzögerten Bewegung ausgegangen werden.
Das während eines Zeitelementes Δt ausfließende Volumen ergibt sich aus: Ausflußquerschnitt × in der Zeit Δt zurückgelegter Weg, also:

$$\Delta V = A_2 \cdot s_t.$$

Bezeichnet man die Zeitdifferenz $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ und analog $v_i - v_{i+1} = \Delta v$, dann ist $s_t = \frac{\Delta v \cdot \Delta t}{2}$ und damit

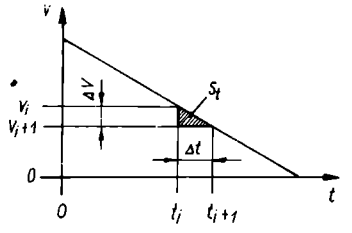
$$\Delta V = \frac{A_2}{2} \cdot \Delta_v \cdot \Delta_t, \qquad (1)$$

außerdem ist aber auch

$$\Delta V = A_1 \cdot (h_i - h_{i+1}) \qquad (2)$$

oder mit $h_i - h_{i+1} = \Delta h$

$$\Delta V = A_1 \cdot \Delta h. \qquad (3)$$



Nun ist aber offensichtlich die Summe aller Δv gleich $v_{max} - v_{min}$ und entsprechend die Summe aller Zeitelemente Δt gleich $t_{max} - t_{min}$ und weil $v_{min} = 0$; ebenfalls $t_{min} = 0$ ergibt sich

$$\sum \Delta v = v_{max} \quad \text{und} \quad \sum \Delta t = t_{max}.$$

Damit folgt aus (1)

$$\sum \Delta V = V_{ges} = \frac{A_2}{2} \cdot v_{max} \cdot t_{max}$$

(wobei $t_{max} = t_{ges}$).
Weiterhin ist die Summe aller Δh gleich h_{ges}, woraus sich mit (3) die einfache Tatsache $V_{ges} = A_1 \cdot h_{ges}$ ergibt.
Damit erhält man

$$A_1 \cdot h_{ges} = \frac{A_2}{2} \cdot v_{max} \cdot t_{ges}. \qquad (4)$$

Setzt man nun noch $v_{max} = \sqrt{2gh_{ges}}$ ein und stellt (4) entsprechend um, folgt

$$t_{ges} = \frac{A_1 \cdot h_{ges} \cdot 2}{A_2 \cdot \sqrt{2gh_{ges}}}.$$

Mit den Zahlenwerten

$A_1 = 10^6\ m^2$; $A_2 = 10^{-2} \cdot \frac{\pi}{4}\ m^2$;

$h_{ges} = 10^3\ m$; $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

folgt $t_{ges} = \frac{8 \cdot 10^{11}}{\pi \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1000}}$,

$t_{ges} = 1\,817\,986\,328$ Sekunden, das sind, das Jahr mit 365 Tagen gerechnet, 57,648 Jahre.

Achtung!

Aufgrund der Überlegungen in der Herleitung der Lösung könnte man auf den Gedanken kommen, die Gesamtzeit mit einem Computer mit hinlänglicher Genauigkeit in der Größenordnung dermaßen berechnen zu wollen, daß man die Teilzeiten für die Höhen h_i berechnet.
Dabei könnte man die Höhe h_i von 1 000 Meter bis 1 Meter in Schritten zu je einem Meter einsetzen.
Den Rest könnte man dann im Bereich von ein Meter bis $\frac{1}{10\,000}$ Meter mit entsprechender Schrittweite berechnen.
Damit würde man (anscheinend!!!) genügend genau rechnen und doch vermeiden eine Division durch Wurzel aus Null zu bekommen. Diese Überlegung ist deswegen falsch, weil bei h_i gegen Null ein Grenzwert entsteht, der gegen Unendlich geht!
Der Versuch so zu rechnen, scheint berechtigt zu sein, denn im Bereich $h_i = 1\,000$ Meter bis $h_i = 1$ Meter, Schrittweite = 1 m, ergibt sich eine Summe der Teilzeiten von 1 776 463 055 Sekunden. Im Bereich von $h_i = 1$ Meter bis $h_i = 0{,}01$ Meter und Schrittweite = 0,01 Meter ergibt sich aber schon eine Summe von 5 343 560 757 Sekunden!
Treibt man diesen Versuch noch weiter, ergibt sich z. B. für eine Restmenge von 10 m^3 eine Ausflußzeit von $1{,}44 \cdot 10^{11}$ Sekunden.
Womit die obige Aussage über den Grenzwert bestätigt wird!

A. Körner

Und noch einmal – **Achtung!**
In dieser Lösung wird eine Voraussetzung verwendet, die eigentlich des Beweises bedarf. Versucht also, diese Voraussetzung zu finden und den Beweis für ihre Richtigkeit zu erbringen.
Eure Lösung könnt ihr an uns schicken.
Wir sind schon gespannt darauf!

Alphons

alpha-Preisaufgabe

Das moderne Hexeneinmaleins
(frei nach Goethe)

Aus 5 mach 5, mach 2, mach 3
das schützt euch vor dem Einerlei.
Die 6 bleibt 6 und wird zur 9
das scheint die Hexe zu erfreu'n!
Und aus der 7 mach die 8
das ist mit viel Verstand gemacht!
4 wird zur 4 – oder zur 7
nun sind uns nur noch 2 geblieben!
Aus 6 mach keins – aus 2 mach 1
das ist das Hexeneinmaleins!

Unser Hexlein ist wirklich 'modern! Das wird euch klar, wenn ihr des Rätsels Lösung findet!
Sendet diese bitte an den Urheber dieses Rätsels:

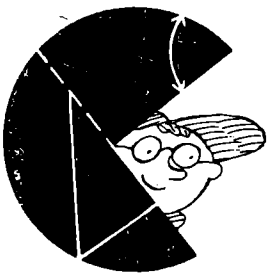
Helmut Pätzold
Mattei 62
Waren
2060

Unter den richtigen Einsendungen werden drei Gewinner ausgelost.
Ihnen winkt ein Autogramm unseres „Schwimmhexleins" Kristin Otto!

Alphons

In freien Stunden · alpha-heiter

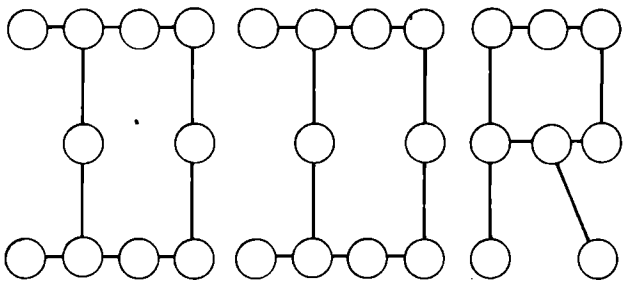
Ein mathematischer Blumenstrauß



Liebe Freunde!
In diesem Jahr feiert die Deutsche Demokratische Republik – unser Heimatland – ihren 40. Geburtstag. Auch wir wollen zu den Gratulanten zählen, und wir möchten unserer Republik mit den folgenden mathematischen Knobeleien einen herzlichen Geburtstagsgruß überbringen.

DDR-40

Tragt die ganzen Zahlen von 0 bis 27 so in die abgebildete Figur ein, daß die Zahlensumme auf jedem geradlinigen Abschnitt 40 beträgt!



Von Bezirk zu Bezirk

In der abgebildeten Buchstaben-Matrix sind alle 15 Bezirksstädte der DDR eingetragen, und dies entweder von links nach rechts, von rechts nach links oder von oben nach unten.
Findet diese 15 Städtenamen und markiert (etwa durch Streichung) deren Buchstaben! (Einige Buchstaben gehören mehreren Städtenamen an; diese brauchen aber nur einmal markiert zu werden.)

G	R	U	B	N	E	D	N	A	R	B	U	E	N
M	O	I	L	H	U	S	C	H	W	E	R	I	N
K	S	R	T	R	U	F	K	N	A	R	F	O	P
H	T	D	A	T	S	X	R	A	M	L	R	A	K
A	O	R	O	Z	A	R	E	G	E	I	S	S	O
L	C	R	D	R	E	S	D	E	N	N	T	E	C
L	K	H	N	I	G	R	U	B	E	D	G	A	M
E	R	F	U	R	T	K	S	U	B	T	T	O	C
L	E	I	P	Z	I	G	P	O	T	S	D	A	M

Diejenigen Buchstaben, die am Schluß noch nicht markiert sind, ergeben (v. l. n. r. und v. o. n. u. gelesen) den Namen einer wissenschaftlichen Zeitschrift der DDR, die für Computerfreunde sicher höchst interessant ist.

Geographisches

Wie lang ist jeder der genannten acht Flüsse unseres Landes, wenn die folgenden acht Aussagen gelten:
(1) Die Elbe ist mit einer Länge von 1 165 km der drittgrößte Strom Mitteleuropas.
(2) Die Bode ist 13 km länger als die Peene.
(3) Die Länge der Oder beträgt 7 km mehr als die doppelte Länge der Saale.
(4) Die Länge der Elbe beträgt 18 km weniger als die siebenfache Länge der Bode.
(5) Die Länge der Elbe beträgt 13 km mehr als die Summe der Längen von Havel, Saale und Spree.
(6) Die Länge der Saale beträgt 41 km weniger als die dreifache Länge der Peene.
(7) Die Länge der Oder beträgt 168 km weniger als die dreifache Länge der Havel.
(8) Die Länge der Spree beträgt 10 km mehr als die dreifache Länge der Mulde (ohne Zwickauer und Freiberger Mulde).

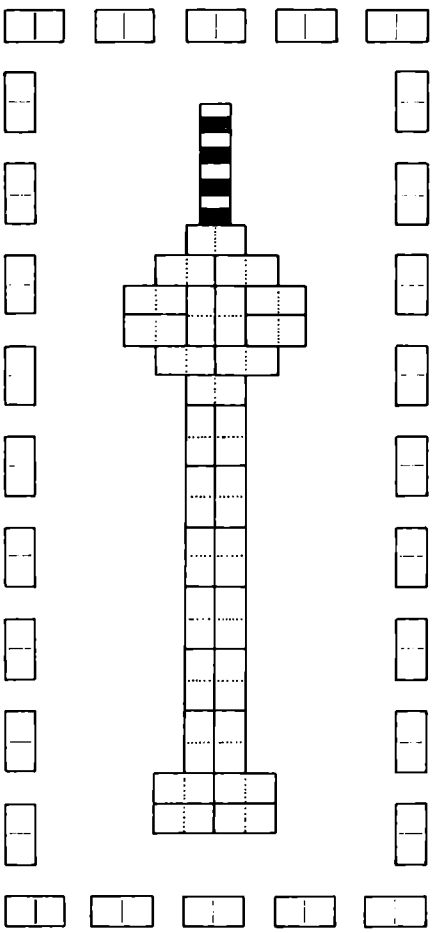
Von Stadt zu Stadt

In dem folgenden Text sind die Namen von 40 Städten unserer Republik versteckt, die es zu finden gilt:
Neues Schuljahr, erster Schultag, und es klingelte zur Hofpause. Endlich waren wir wieder für die Dauer von zwanzig Minuten von Chemie mit Naphthalen, von Geographie mit Spitzbergen und von Biologie mit Forstschädlingen und Arterneuerung befreit. Alle Schüler strömten auf den Schulhof in die Sonne. „Bergziege" und „Grauwolf" entwickelten dabei ein rasantes Tempo und wurden von unserem Klassenlehrer, Herrn Barth, von uns auch „Doktor Gaudium" genannt, mit Nachdruck ermahnt.
Da die schöne Ferienzeit zu Ende war, gab es viel zu erzählen:
Da hörte man vom Dresdener Zwinger, vom Leipziger Völkerschlachtdenkmal, von der historisch wert-

vollen alten Burg in Querfurt, von einer Reise nach Tabor, nach Bulgarien und an die Wolga.
Steffen Schaller hatte die Ferienzeit bei seiner Oma in Wismar verbracht, und von dort aus hatte er auch Rostock und Güstrow besucht. Hans Merseburger, wir nennen ihn „Isegrim", machte ein todernstes Gesicht, als er uns einen Calauer auftischen wollte.
„Kojenaugust" wieherte, und „Jungfrau Maria" lachte albern auf. „Hallo Schatz!", rief Uwe ihr zu. „Wer da?", unkte sie zurück und zog reizvoll ihre Bluse zurecht. Marie sah neckisch aus, doch sie war schwer in Sorge um ihre neue Bluse, denn diese war bei der Hitze nicht mehr wie ein Laken so weiß. „Wasser!", rief Peter aus Jux ganz laut. Wir aber linderten unseren Durst mit dem feierlichen Schwur, zentnerweise am Nachmittag Speiseeis zu verzehren. Gerade da ertönte das Vorklingeln, und wir eilten in den Klassenraum zurück.

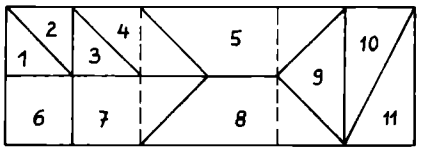
Fernsehturm-Domino

Nehmt die 28 Steine eines vollständigen Dominospiels zur Hand, und löst damit die folgenden beiden Aufgaben:
a) Legt die 28 Domino-Steine so zu dem abgebildeten stilisierten Berliner Fernsehturm zusammen, daß die Augensummen in den waagerechten Domino-Reihen stets 8, 9 bzw. 10 betragen, je nach dem, ob diese Reihen aus 2, 4 bzw. 6 Domino-Halbteilen bestehen!
b) Legt die 28 Domino-Steine so zu einem geschlossenen Rechteckring (siehe Umrandung des Fernsehturms) zusammen, daß die Domino-Anlegeregel (es dürfen nur gleiche Halbteile aneinander liegen) erfüllt ist!



Erbauliche Ansichten

Zerschneidet ein rechteckiges Stück Karton, dessen Seitenlängen im Verhältnis 1:3 stehen, in die abgebildeten 11 Teile, und legt mit diesen 11 Teilen jede Figur auf dem Titelblatt dieses alpha-Heftes zusammen! Die Teile dürfen beidseitig verwendet werden.



Ein grundlegendes Recht

Gesucht sind 15 waagerecht einzutragende mathematische Begriffe folgender Bedeutung:
1. spezielles Viereck, 2. Hochzahl, 3. Rechenautomat, 4. Kegelschnitt, 5. kurvenberührende Gerade, 6. Sternkurve, 7. Koordinaten-Nullpunkt, 8. eindeutige Abbildung, 9. schräger Abhang, 10. Grundbegriff der Analysis, 11. Gleichungsergebnisse, 12. rationale Rechenoperation, 13. Umklappung, 14. Primzahl, 15. Grundbegriff der Vektoranalysis.

1				T			K
2			O			N	
3		M			T		
4		P			B		
5			G			T	
6				O			E
7				R			G
8			K			O	
9				H			G
10				G			L
11			U			E	
12		V			I		
13		L			U		
14			N			H	
15				I			T

Bei richtiger Eintragung der Begriffe nennen die Anfangsbuchstaben (1 bis 15) ein grundlegendes und verfassungsmäßig gesichertes Recht für alle Bürger unserer Republik.

Viel Spaß beim Knobeln wünscht euch

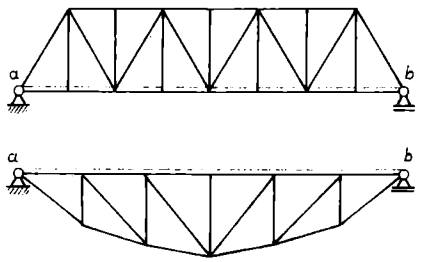
R. Mildner

Wir berechnen ein ebenes Fachwerk

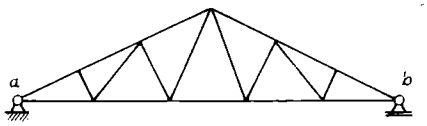
1. Das Rechenmodell „Fachwerk" – die Aufgabe

Für den Werkstoff Stahl sind Tragwerke, deren tragende Konstruktionen als Fachwerk ausgeführt sind, typisch. Bild 1 zeigt solche Systeme.

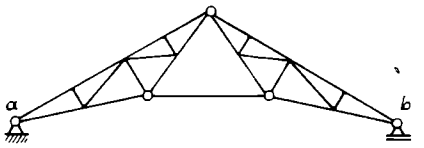
Bild 1
a) Brückenträger



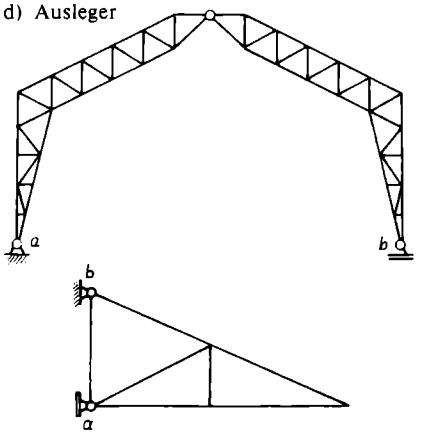
b) Dachträger



c) Dreigelenkrahmen als Fachwerk



d) Ausleger



In der Technik verstehen wir unter einem **Fachwerk** ein System von zug- bzw. druckfesten Stäben, die in Knoten gelenkig miteinander verbunden sind. Die Belastung erfolgt ausschließlich in den Knoten.

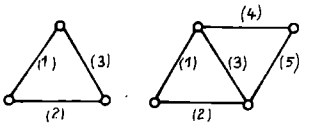
In diesem Sinne sind die in Bild 1 gezeigten Systeme Fachwerke.

Dabei handelt es sich um **ebene Fachwerke**, weil alle Stäbe, Knoten und Kräfte in einer Ebene liegen. Solche ebenen Fachwerke sind Bestandteile vieler räumlicher Konstruktionen.

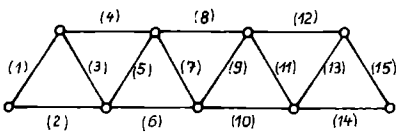
Die vorangestellte Erklärung beschreibt ein **Modell**, das wir der Berechnung zugrunde legen. Wir bezeichnen dieses Modell als **ideales Fachwerk**. Reale Fachwerkkonstruktionen haben natürlich keine Gelenke in den Knoten. Vielmehr sind die Fachwerkstäbe an den Knoten miteinander verschweißt, verschraubt oder vernietet. Dennoch ist das ideale Fachwerk bei sorgfältig durchdachter Konstruktion ein für die Praxis gut brauchbares Modell für ein reales Fachwerk.

Um den Aufbau eines Fachwerkes zu verfolgen, betrachten wir Bild 2a. Drei Stäbe, die an den Enden jeweils durch Gelenke verbunden sind, bilden ein Stabdreieck. Nehmen wir an, daß die Stäbe selbst sich nicht verformen können, so wird sich diese Figur auch unter beliebiger Belastung nicht verändern. Wir sagen, sie ist *kinematisch starr*. An diese einfache Grundfigur kann ein weiterer Knoten durch zwei Stäbe angeschlossen werden. So entsteht die Figur nach Bild 2b, die ebenfalls kinematisch starr ist. In dieser Weise kann man fortfahren (Bild 2c).

Bild 2a) b)



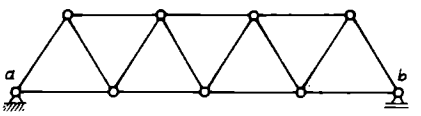
c)



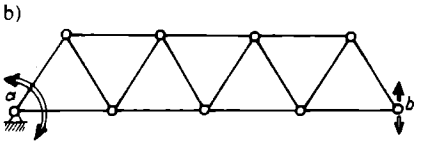
Wir erkennen:
Geht man von einem Stabdreieck aus, so entsteht durch zweistäbigen Anschluß weiterer Knoten ein **einfaches Fachwerk**.

Soll die Fachwerkscheibe als Träger verwendet werden, so muß man sie unbeweglich mit dem Fundament verbinden. Dafür wollen wir jedoch nicht mehr Bindungen einsetzen als unbedingt erforderlich sind. Die unbewegliche Bindung an die Fundamente kann erreicht werden wie in Bild 3a gezeigt wird. Das Lager bei a ist ein **festes Gelenklager**, es verhindert eine Verschiebung des Punktes a sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung, läßt jedoch noch eine Drehung der Fachwerkscheibe um den Punkt a zu (Bild 3b). Das Lager bei b darf die dieser Drehung entsprechende Bewegung des Punktes b nicht zulassen. Es muß also vertikale Bewegungen verhindern. Horizontale Bewegungen dagegen sollen möglich sein. Dadurch werden Zwängungen und die damit verbundenen Beanspruchungen vermieden, die sonst entstehen würden, wenn sich die Länge des Trägers infolge Temperaturänderungen ändert. Eine gleichmäßige Temperaturänderung erzeugt dann im Tragwerk keine zusätzlichen Kräfte. Das Lager b ist ein **verschiebliches Gelenklager**.

Bild 3a)



b)



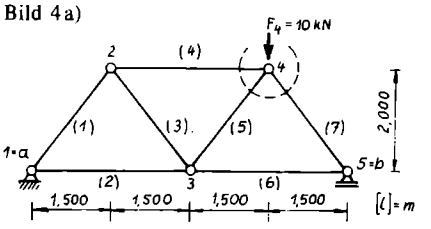
Wir wollen jetzt die Kräfte in Stabrichtung eines belasteten einfachen ebenen Fachwerkes berechnen. Dabei setzen wir als vorhandenes Wissen voraus:
- Rechnen mit Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck,
- Gleichgewichtsbedingungen für eine ebene zentrale Kräfteschar,
- Hebelsatz.

2. Der Lösungsweg

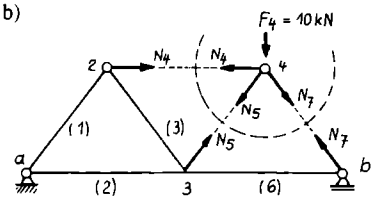
2.1. Modellbildung durch Freischneiden der Knoten

Zunächst müssen wir die Kräfte, die berechnet werden sollen, sichtbar machen. Das geschieht durch **Freischneiden** der Knoten. Wir trennen die an einem Knoten angeschlossenen Stäbe durch und ersetzen die den Stäben entsprechenden Bindungen durch Kräfte. Diese Kräfte sind so zu wählen, daß sie den ursprünglich vorhandenen

Bild 4a)



b)



Ruhezustand des Knotens wieder herstellen können. Bild 4b zeigt das für den Knoten 4 des Beispiels Bild 4a.

Durch Freischneiden werden die den Bindungen entsprechenden Kräfte sichtbar.

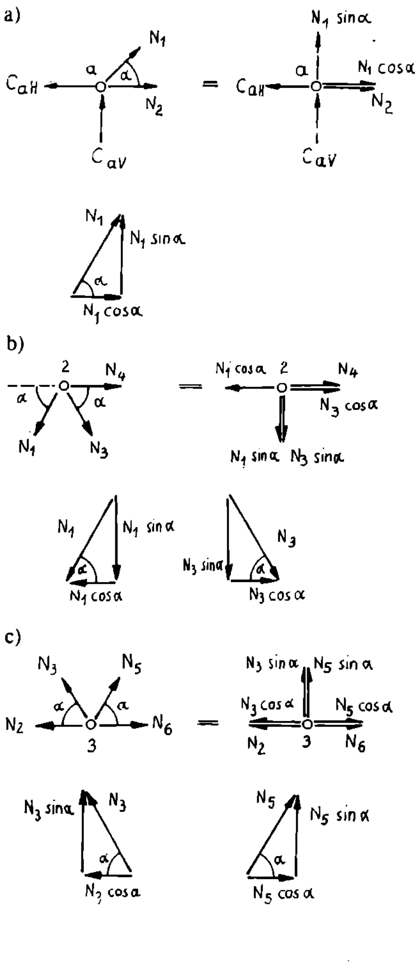
In unserem Falle sind diese Kräfte die Stabkräfte des Fachwerkes. Wir wollen sie im Modell so zeichnen, daß sie vom Knoten weg zeigen, also *in den Schnitt hinein*. Anschaulich sind solche Kräfte Zugkräfte.

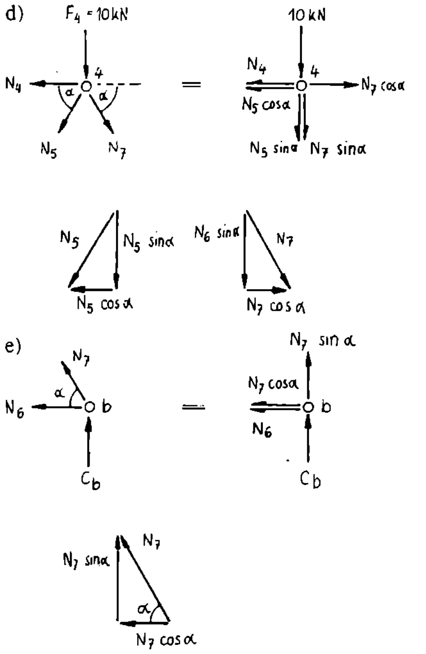
Ganz analog verfahren wir mit den äußeren Bindungen. Da das Gelenklager bei a weder eine vertikale noch eine horizontale Verschiebung zuläßt, müssen wir beim Freischneiden für das Lager eine vertikale und eine horizontale Stützkraft C_{aH} und C_{aV} ansetzen. Bei b wird dagegen nur die vertikale Verschiebung verhindert, also gibt es dort lediglich eine vertikale Stützkraft C_b (Bild 5a, e).

Wir schneiden nun nacheinander jeden Knoten des Fachwerkes frei und erhalten dabei jeweils eine zentrale Kräfteschar, die äußere Kräfte (Lasten) F_i, Stabkräfte N_i und bei a bzw. b auch Stützkräfte enthält.

Durch das Freischneiden der Fachwerkknoten wird an jedem Knoten eine zentrale Kräfteschar sichtbar. Die Kräfte dieser Schar müssen sich im Gleichgewicht befinden, da der vor dem Freischneiden vorhandene Ruhezustand des Knotens durch die Kräfteschar wieder hergestellt werden muß.

Bild 5
Knotenschnitte $a = 1, 2, \ldots;\ b = 5$
– Lageplan der Kräfte
– Komponentenzerlegung im Kräfteplan





2.2. Der Ansatz der Gleichgewichtsbedingungen

Auf die Kräfte jedes Knotens wenden wir nun die **Gleichgewichtsbedingungen** für zentrale ebene Kräftescharen an. Das führt auf folgende Gleichungen

Knoten 1 (Bild 5a)

$$\sum F_{iH} = N_1 \cos\alpha + N_2 - C_{aH} = 0$$
$$\sum F_{iV} = N_1 \sin\alpha + C_{aV} = 0 \qquad (1)$$

Knoten 2 (Bild 5b)

$$\sum F_{iH} = -N_1 \cos\alpha + N_3 \cos\alpha + N_4 = 0$$
$$\sum F_{iV} = -N_1 \sin\alpha - N_3 \sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

Knoten 3 (Bild 5c)

$$\sum F_{iH} = -N_2 - N_3 \cos\alpha + N_5 \cos\alpha + N_6 = 0$$
$$\sum F_{iV} = +N_3 \sin\alpha + N_5 \sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

Knoten 4 (Bild 5d)

$$\sum F_{iH} = -N_4 - N_5 \cos\alpha + N_7 \cos\alpha = 0$$
$$\sum F_{iV} = -N_5 \sin\alpha - N_7 \sin\alpha - F_4 = 0 \qquad (4)$$

Knoten 5 (Bild 5e)

$$\sum F_{iH} = -N_6 - N_7 \cos\alpha = 0$$
$$\sum F_{iV} = N_7 \sin\alpha + C_b = 0 \qquad (5)$$

In diesen insgesamt 10 Gleichungen treten genau 10 unbekannte Kräfte auf. Wir können also diese Gleichungen zu einem System von 10 Gleichungen für 10 Unbekannte zusammenfassen, das wir dann lösen müssen. Mit den in Bild 4 festgelegten Abmessungen ist $\cos\alpha = 0{,}6$, $\sin\alpha = 0{,}8$. Es entsteht das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllll}
+0{,}6N_1 + N_2 & & & & -C_{aH} & = \varnothing \\
+0{,}8N_1 & & & & +C_{aV} & = \varnothing \\
-0{,}6N_1 & +0{,}6N_3 + N_4 & & & & = \varnothing \\
-0{,}8N_1 & -0{,}8N_3 & & & & = \varnothing \\
 & -N_2 - 0{,}6N_3 & +0{,}6N_5 + N_6 & & & = \varnothing \\
 & +0{,}8N_3 & +0{,}8N_5 & & & = \varnothing \\
 & & -N_4 - 0{,}6N_5 & +0{,}6N_7 & & = \varnothing \\
 & & -0{,}8N_5 & -0{,}8N_7 & -10 & = \varnothing \\
 & & -N_6 - 0{,}6N_7 & & & = \varnothing \\
 & & & -0{,}8N_7 & +C_b & = \varnothing
\end{array}$$

2.3. Die Berechnung der Stabkräfte

Die Auflösung des soeben vorgestellten Systems überlassen wir besser einem kleinen Computer – aber wir geben uns nicht geschlagen.

Betrachten wir einmal die Gleichungen am Knoten 1, so treten in den beiden Gleichgewichtsgleichungen insgesamt vier Unbekannte auf: C_{aH}, C_{aV}, N_1 und N_2. Zwei davon sind Stützkräfte, und wenn wir deren Wert kennen würden, dann könnten wir die beiden Kräfte N_1, N_2 aus den beiden Ansatzgleichungen berechnen.

Ist aber N_1 bekannt, dann verbleiben am Knoten 2 nur die beiden Kräfte N_3 und N_4 als Unbekannte, und zu deren Berechnung genügt wieder die Auflösung der zwei Gleichgewichtsgleichungen am Knoten 2.

Wenn wir so Knoten für Knoten weiter gehen, wird deutlich:

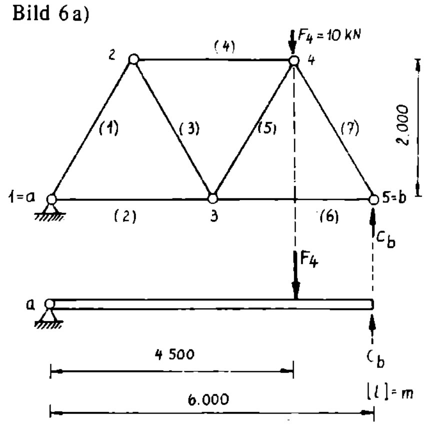
Die Stabkräfte des einfachen Fachwerkes lassen sich aus einer Folge von zwei Gleichungen für jeweils zwei unbekannte Stabkräfte berechnen, sobald die Stützkräfte bekannt sind.

Nun, diese Voraussetzungen werden wir schaffen. Da wir wissen, daß unsere Fachwerkscheibe kinematisch starr ist, genügt der Hebelsatz um zunächst die Stützkraft C_b zu berechnen. Wir schneiden die Fachwerkscheibe bei b frei, es entsteht das Modell von Bild 6a. Das ist nichts anderes als ein einarmiger Hebel. Folglich gilt

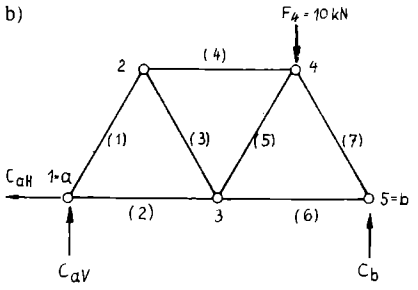
$$6{,}0 \cdot C_b - 4{,}5 \cdot 10 = 0$$
$$C_b = 7{,}50\ \text{kN} \qquad (6)$$

Schneiden wir nun die Fachwerkscheibe äußerlich vollkommen frei, dann müssen natürlich sowohl die vertikalen als auch die horizontalen Kräfte den Gleichgewichtsbedingungen genügen (Bild 6b).

Bild 6a)



b)



Also muß sein

$$\sum F_{iH} = -C_{aH} = 0 \qquad (7)$$

$$\sum F_{iV} = C_{aV} - 10 + C_b = 0. \qquad (8)$$

Damit erhalten wir

$$C_{aH} = 0, \quad C_{aV} = 2{,}5\ \text{kN}.$$

Mit den nun bekannten Werten für die Stützkräfte C_{aV} und C_{aH} heißen die Gleichungen (1)

$$N_1 \cdot 0{,}6 + N_2 = 0$$
$$N_1 \cdot 0{,}8 + 2{,}5 = 0$$

und wir können N_1, N_2 berechnen.

$$N_1 = -3{,}125\ \text{kN}, \quad N_2 = 1{,}875\ \text{kN}.$$

Die Stabkraft N_1 hat ein negatives Vorzeichen, das bedeutet:
Die Richtung der Stabkraft N_1 stimmt nicht mit der im Modell von Bild 5a angenommenen Richtung überein. Die Stabkraft N_1 ist also keine Zugkraft sondern eine Druckkraft.

> Führt die Berechnung einer Stabkraft auf ein negatives Vorzeichen, so wirkt diese Kraft entgegengesetzt zu der Richtung, die bei Freischneiden für das Modell festgelegt wurde.

Da wir N_1 und N_2 schon berechnet haben, bleiben in den für den Knoten 2 gültigen Gleichungen nur N_3 und N_4 unbekannt. Die Bestimmungsgleichungen (2) heißen jetzt

$$-(-3{,}125) \cdot 0{,}6 + N_3 \cdot 0{,}6 + N_4 = 0$$
$$-(-3{,}125) \cdot 0{,}8 - N_3 \cdot 0{,}8 \quad = 0.$$

Also ist

$$N_3 = 3{,}125\ \text{kN}, \quad N_4 = -3{,}750\ \text{kN}.$$

Wieder ist N_4 eine Druckkraft.
Nun können wir mit Knoten 3 fortfahren. Da N_2 und N_3 bekannt sind, vereinfachen sich die Gleichungen (3) zu

$$-(1{,}875) - (3{,}125) \cdot 0{,}6 + N_5 \cdot 0{,}6 + N_6 = 0$$
$$(3{,}125) \cdot 0{,}8 + N_5 \cdot 0{,}8 \quad = 0$$

und wir erhalten

$$N_5 = -3{,}125\ \text{kN}, \quad N_6 = 5{,}626\ \text{kN}.$$

Auch N_5 ist eine Druckkraft.
Der nächste Knoten wäre der Knoten 4. In den Gleichungen (3) ist aber jetzt nur noch N_7 unbekannt, so daß eine der beiden Gleichungen (3) zur Berechnung von N_7 genügt. Die andere dient der Kontrolle!
Die Rechnung führt auf

$$N_7 = -9{,}375\ \text{kN}.$$

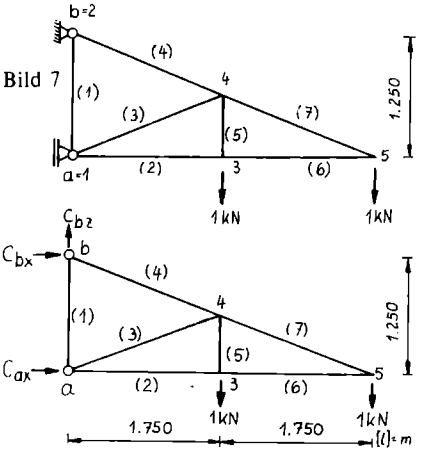
Danach sind am Knoten 5 schon alle Kräfte bekannt, die Gleichungen (4) bieten somit eine weitere Kontrollmöglichkeit.
Das Ergebnis der Rechnung fassen wir zusammen:

Stab Nr.	Stabkraft in kN
1	−3,125 (Druckstab)
2	+1,875 (Zugstab)
3	+4,125 (Zugstab)
4	−3,750 (Druckstab)
5	−3,125 (Druckstab)
6	+5,625 (Zugstab)
7	−9,375 (Druckstab)

Der Konstrukteur kann nun anhand der Stabkräfte prüfen, ob die von ihm gewählten Profile ausreichend bemessen sind. Dabei ist noch zu beachten, daß bei den Druckstäben die Gefahr des Ausknickens besteht. Aber das steht hier nicht zur Erörterung.

In Bild 7 ist ein weiteres Beispiel gezeigt.

Bild 7



Wer wird versuchen, dieses einfache System zu berechnen? Zur Kontrolle sei das Ergebnis verraten:

$C_{ax} = 4{,}200\ \text{kN}$
$C_{bx} = -4{,}200\ \text{kN}$ $\quad C_{bz} = 2{,}000\ \text{kN}$
$N_1 = 0{,}500\ \text{kN}$ $\quad N_2 = -2{,}800\ \text{kN}$
$N_3 = -1{,}487\ \text{kN}$ $\quad N_4 = 4{,}460\ \text{kN}$
$N_5 = 1{,}000\ \text{kN}$ $\quad N_6 = -2{,}800\ \text{kN}$
$N_7 = 2{,}973\ \text{kN}$

In Bild 8 sind andere Lastfälle dargestellt, als Anregung für weitere Berechnungen. Wie wirkt sich eine Änderung des Systems nach Bild 9a oder b aus?

Bild 8

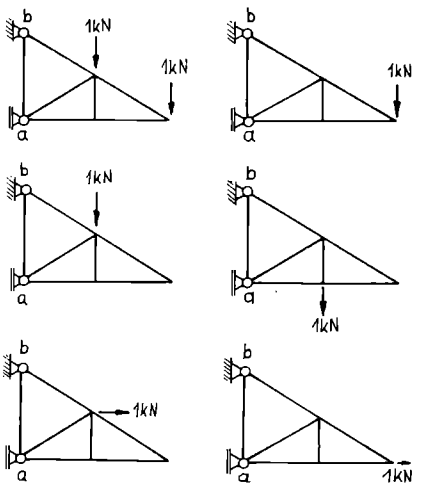
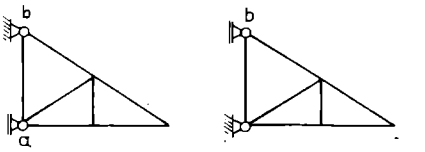


Bild 9a) b)

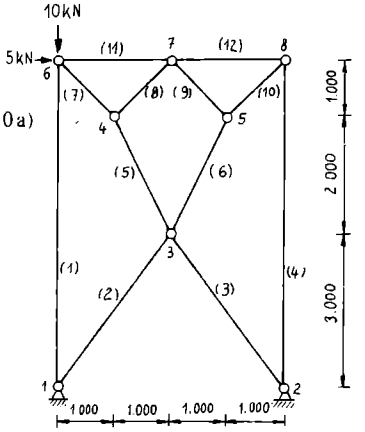


3. Die Berechnung mit dem Computer

3.1. Die Grobstruktur des Programmes

Der im Abschnitt 2.3. vorgestellte Lösungsweg ist sehr leicht mit dem Taschenrechner zu realisieren. Soll die Rechnung jedoch einem Computer übertragen werden, dann ist es einfacher, von dem am Ende des Abschnittes 2.2 aufgestellten Gleichungssystem auszugehen.
Der Vorteil liegt darin, daß die Auswahl der Folge von jeweils nur zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten nicht erforderlich ist und also auch nicht programmiert werden muß. Weiterhin können dann auch solche Fachwerke untersucht werden, für die die im Abschnitt 2.3 vorausgesetzte Folge von jeweils zwei Gleichungen für nur zwei Unbekannte gar nicht gibt. Bild 10a zeigt ein derartiges Fachwerk.

Bild 10a)



Es wäre also nicht computergerecht, den in 2.3 beschriebenen Lösungsweg „zu Fuß" einfach Schritt für Schritt auf den Computer zu übertragen. Der Computer kann mehr. Da wir für jeden Knoten zwei Gleichgewichtsgleichungen aufstellen können, haben wir bei k Knoten $2k$ Gleichungen zur Verfügung, mit denen wir ebenso viele Unbekannte berechnen. Hat ein Fachwerk s Stäbe und t einfache Bindungen, so sind alle Fachwerke erfaßbar, für die

$$2k = s + t. \qquad (9)$$

Für die Arbeit mit dem Computer brauchen wir mindestens die folgenden Routinen:

- Eingabe der zur Beschreibung des Systems und der Belastung erforderlichen Daten
- Berechnung der Koeffizienten des Gleichungssystems
- Lösung des Gleichungssystems
- Darstellung des Ergebnisses.

Darüber hinaus könnten noch Routinen hinzugefügt werden, z. B.

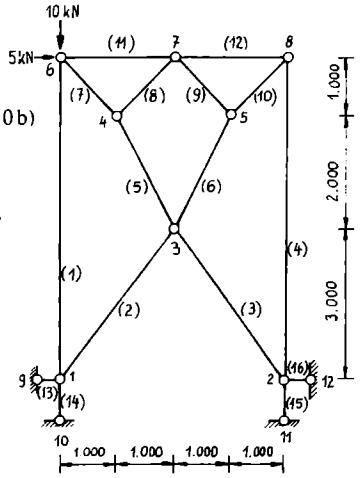
- zum Sichern von Daten/Ergebnissen
- zur Ausgabe des Ergebnisses über einen Drucker.

3.2. Die Eingaberoutine

Für die Eingabe der erforderlichen Daten müssen wir die Beschreibung des Fachwerkes computergerecht aufbereiten:

– Wir ersetzen die äußeren Bindungen des Fachwerkes durch Stützstäbe (Bild 10b) und zählen ab

Bild 10b)

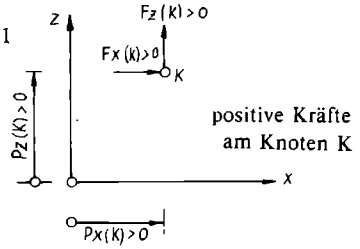


ZS Anzahl der Fachwerkstäbe
ZK Anzahl der Fachwerkknoten
ZW Anzahl der Stützstäbe.

– Systemknoten werden von K = 1 bis K = ZK gezählt. Die Stützenfußpunkte erhalten die Nummern K = ZK + 1 bis K = ZK + ZW. Die Lage eines Punktes K wird durch Koordinaten PX(K), PZ(K) beschrieben.

– Die Last am Knoten K hat die Komponenten FX(K), FZ(K). Die Lastkomponenten sollen das positive Vorzeichen erhalten, wenn sie in die Richtung der positiven Koordinatenachsen zeigen (Bild 11).

Bild 11

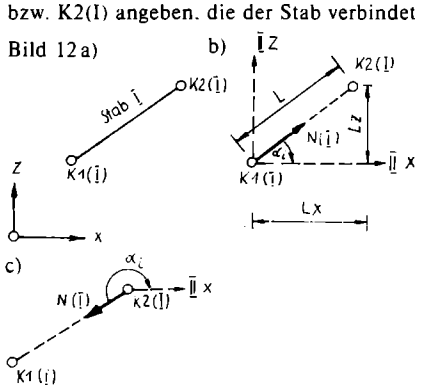


– Die Systemstäbe werden von 1 bis ZS gezählt, die Stützstäbe von ZS + 1 bis ZS + ZW.

– Die Zuordnung der Knoten zu den Stäben beschreiben wir, indem wir für jeden Stab I die Nummern der Knoten K1(I) bzw. K2(I) angeben, die der Stab verbindet (Bild 12a). Dabei legen wir fest, daß für einen Stützstab I stets K1(I) der Systemknoten, K2(I) der Stützenfußpunkt ist.

– Die Stabkräfte werden als Zugkräfte positiv eingeführt. Das gilt auch für die Kräfte in den Stützstäben (Bild 12b).

Bild 12a)



Danach ist das Beispiel Bild 10b wie folgt zu beschreiben:
ZS = 12, ZK = 8, ZW = 4.

Systemknoten (Koordinaten in m, Belastung in kN):

Knoten-Nr.	X(I)	Z(I)	FX(I)	FZ(I)
1	0	0	0	0
2	4	0	0	0
3	2	3	0	0
4	1	5	0	0
5	3	5	0	0
6	0	6	5	−10
7	2	6	0	0
8	4	6	0	0

Stützenfußpunkte (Koordinaten in m):

Punkt-Nr.	X(I)	Z(I)
9	−1	0
10	0	−1
11	4	−1
12	5	0

Zuordnung der Stäbe und Knoten:

Stab-Nr.	K1(I)	K2(I)	
1	1	6	Systemstäbe
2	1	3	
3	2	3	
4	2	8	
5	3	4	
6	3	5	
7	4	6	
8	4	7	
9	5	7	
10	5	8	
11	6	7	
12	7	8	
13	1	9	Stützstäbe
14	1	10	
15	2	11	
16	2	12	

Die Eingabe realisieren wir über eine READ/DATA-Anweisung. Im Listing stehen die Daten des Beispiels in den Zeilen 820–870, und zwar genau in der Reihenfolge, wie sie in den READ-Anweisungen auf den Zeilen 50 und 100–120 festgelegt sind. Im Programm werden nach dem Einlesen der Parameter ZS, ZK und ZW die Felder für die im Programm auftretenden indizierten Variablen dimensioniert. Mit Zeile 80 wird die Erfüllung der Gl. (9) geprüft.

3.3. Die Berechnung der Koeffizienten und die Lösung des Gleichungssystems

Für die Lösung des Gleichungssystems werden wir eine Routine verwenden, die ganz allgemein auf ein beliebiges System von M linearen Gleichungen für M Unbekannte anwendbar ist. Dieser Routine liegt ein Eliminationsverfahren zugrunde (Gaußscher Algorithmus). Sie ist z. B. in [1] beschrieben. Dabei geht man aus von einer Darstellung des Gleichungssystems in folgender Form:

A(1,1)X(1) + ... + A(1,I)X(I) + ...
... + A(1,M)X(M) = B(1)
A(2,1)X(1) + ... + A(2,I)X(I) + ...
... + A(2,M)X(M) = B(2)
⋮
A(R,1)X(1) + ... + A(R,I)X(I) + ...
... + A(R,M)X(M) = B(R)
⋮
A(M,1)X(1) + ... + A(M,I)X(I) + ...
... + A(M,M)X(M) = B(M).

Die Koeffizienten A(R,I), die Lastglieder B(R) und die Unbekannten X(I) wurden dabei als indizierte Variable eingeführt, so wie wir sie dann bei der Umsetzung in BASIC verwenden werden (Feldvariable).

Wir erinnern uns:
Das Gleichungssystem zur Berechnung der unbekannten Stab- und Stützkräfte entsteht, indem für jeden Knoten die Summe der Kraftkomponenten sowohl in der x-Richtung als auch in der z-Richtung aufgeschrieben wird.
Der Knoten 1 liefert also die Zeilen 1 und 2, der Knoten K die Zeilen 2K − 1 und 2K, der letzte Knoten ZK die Zeilen 2ZK − 1 = M − 1 und 2ZK = M.

Daraus ergibt sich:

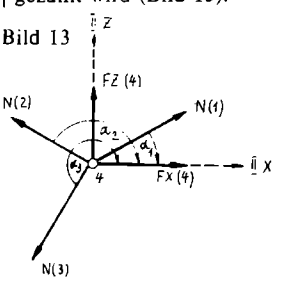
A(2K − 1,I) ist der Kosinus des Richtungswinkels α_i der am Knoten K angreifenden Stabkraft N(I). A(2K,I) ist der Sinus dieses Winkels.

Wir legen nun fest, daß eine nach rechts bzw. nach oben gerichtete Kraft bzw. Kraftkomponente stets positiv in die Summe eingehen soll.

Daher gilt:

Das Vorzeichen der Kraftkomponente wird eindeutig bestimmt durch das Vorzeichen des Kosinus bzw. Sinus des Richtungswinkels α_i, wenn der Winkel stets von der Kraftrichtung bis zur x-Richtung gezählt wird (Bild 13).

Bild 13



Für die Lastglieder stellen wir fest:

Da die Zeile 2K − 1 die Summe der horizontalen Komponenten erfaßt, ist das Lastglied B(2K − 1) = −FX(K).
Entsprechend ist B(2K) = −FZ(K).

Zur Verdeutlichung: Nehmen wir an, der in Bild 13 dargestellte Knoten habe die Nr. 4. Dann ist also K = 4 und die beiden zum Knoten gehörigen Gleichgewichtsgleichungen heißen allgemein
– in +x-Richtung
A(7,1)N(1) + A(7,2)N(2) + A(7,3)N(3)
− B(7) = 0
– in +z-Richtung
A(8,1)N(1) + A(8,2)N(2) + A(8,3)N(3)
− B(8) = 0.

Im Beispiel Bild 13 ist nun gegeben:

$\alpha_1 = 30°$	$\alpha_2 = 150°$	$\alpha_3 = 240°$
$\cos\alpha_1$	$\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_3$
$= +0{,}866$	$= -0{,}866$	$= -0{,}500$
$\sin\alpha_1$	$\sin\alpha_2$	$\sin\alpha_3$
$= +0{,}500$	$= +0{,}500$	$= -0{,}866.$

Daher: Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte

– in $+x$-Richtung

$0{,}866N(1) - 0{,}866N(2) - 0{,}500N(3) + FX(4) = 0$

– in $+z$-Richtung

$0{,}500N(1) + 0{,}500N(2) - 0{,}866N(3) + FZ(4) = 0.$

Bei der Berechnung der Kosinus und Sinus müssen wir uns also jetzt streng auf die Koordinatenrichtungen beziehen. Aus Bild 12b entnehmen wir für die Stabkräfte N(I) im Stab I

$\cos\alpha_i = LX/L, \quad \sin\alpha_i = LZ/L \qquad (10)$

wobei $LX = PX(K2) - PX(K1)$

$LZ = PZ(K2) - PZ(K1) \qquad (11)$

$L = \sqrt{LX^2 + LZ^2}. \qquad (12)$

Dabei greift die Stabkraft in K1 an und zeigt nach K2. Für die am freigeschnittenen Knoten K1 angreifende Stabkraft I entsteht somit für das Gleichgewicht in der x-Richtung ein Koeffizient

$A(2K1 - 1,I) = LX/L \qquad (13)$

und für das Gleichgewicht in der z-Richtung ein Koeffizient

$A(2K1,I) = LZ/L. \qquad (14)$

Ist der freigeschnittene Knoten dagegen K2, so zeigt dieselbe Stabkraft (als Zugkraft angesetzt!) von K2 nach K1 (Bild 12c).

Demzufolge wäre jetzt anzusetzen

$LX' = PX(K1) - PX(K2)$

$LZ' = PZ(K1) - PX(K2).$

Man sieht, es ist $LX' = -LX$, $LZ' = -LZ$ und daher

$A(2K2 - 1,I) = -A(2K1 - 1,I)$

$A(2K2,I) = -A(2K2,I). \qquad (15)$

Die Formeln (13), (14) und (15) finden wir wieder im Programm auf den Zeilen 140–220. In diesem Programmteil werden die Koeffizienten für die Stabkräfte in den Systemstäben berechnet. Für die Stützkräfte erfolgt die Berechnung analog (Zeilen 230–290). Natürlich entfällt das Freischneiden der Fußpunkte.

Schließlich sind noch die Lastglieder B zu berechnen. Das erfolgt auf den Zeilen 300–320.

Auf den Zeilen 340–690 ist dann die Routine zur Auflösung des Gleichungssystems notiert. Zur Erklärung muß wieder auf [1] verwiesen werden.

Schließlich stellen wir die Ergebnisse dar. Natürlich lassen wir auf dem Bildschirm die Bezeichnung N(I) erscheinen (Zeile 730). Um die Ergebnisse ordentlich betrachten zu können, halten wir das Programm an, wenn 20 Werte ausgedruckt sind. Erst auf Tastendruck werden dann die weiteren Werte gezeigt (Zeilen 740–770).

3.4. Beispiele

Das System in Bild 10 führt auf folgende Ergebnisse (Kräfte in kN):

Systemstäbe:

Stab-Nr.	Stabkraft in kN
1	−6,25
2	+4,507
3	−4,507
4	−3,750
5	−5,590
6	+5,590
7	−5,303
8	−1,768
9	+1,768
10	+5,303
11	−1,250
12	−3,750

Stützstäbe:

13	2,500
14	−2,500
15	−7,500
16	−2,500

Positive Kräfte sind Zugkräfte, negative Kräfte sind Druckkräfte. Daher zeigen die Kräfte N(14) bzw. N(16) von unten nach oben auf die Lagerknoten 1 bzw. 2 (Stützkräfte!).

Für das System nach Bild 14 ist

ZS = 9, ZK = 7, ZW = 5

und die Daten führen zu folgender Eingabe auf den Zeilen 820–870.

```
820 DATA 9,7,5
830 DATA 0,0, 3,0, 6,0, 0,2.5, 1.25,4
         4.75,4, 6,2.5
840 DATA -1,0, 0,-1, 2,0, 3,-1, 6,-1
850 DATA 0,0, 0,0, 0,0, 0,0, 5,-10, 0,0,
         0,0
860 DATA 1,4, 1,6, 2,4, 2,7, 3,5, 3,7, 4,5,
         5,6, 6,7
870 DATA 1,8, 1,9, 2,10, 2,11, 3,12
```

Die Rechnung ergibt:

Systemstäbe:

Stab-Nr.	Stabkraft in kN
1	−16,94
2	+10,24
3	+10,85
4	+ 7,16
5	0
6	−11,18
7	−13,02
8	−13,33
9	− 8,59

Stützstäbe:

10	+ 7,84
11	−10,35
12	− 2,84
13	+11,53
14	−11,18

Wenn wir die Stützung verändern, so wie das in Bild 15 dargestellt ist, heißt die Eingabe

```
820 DATA 9,7,5
830 DATA 0,0, 3,0, 6,0, 0,2.5, 1.25,4,
         4.75,4, 6.2.5
840 DATA -1,0, 0,-1, 3,-1, 6,-1, 7,0
850 DATA 0,0, 0,0, 0,0, 0,0, 5,-10, 0,0,
         0,0
860 DATA 1,4, 1,6, 2,4, 2,7, 3,5, 3,7, 4,5,
         5,6, 6,7
870 DATA 1,8, 1,9, 2,10, 3,11, 312
```

Beim Programmablauf erscheint in diesem Fall auf dem Bildschirm nach kurzer Zeit die Information „Matrix singulär". Das heißt, das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar. Praktisch bedeutet das, daß das Fachwerk bei dieser Art der Stützung nicht stabil ist, es kann seine Aufgabe als tragende Konstruktion nicht erfüllen.

3.5. Listing

Die in den Zeilen 820–870 niedergelegten Daten entsprechen dem Beispiel Bild 10.

```
10 CLS:PRINT:PRINT:PRINT"
   A L P H A - PROGRAMM"
20 PRINT:PRINT *EBENES
   FACHWERK*
30 PRINT "- - - - - - - - - -"
40 PRINT:PRINT" ICH LESE DIE
   DATEN EIN"
50 READ ZS,ZK,ZW
60 DIM PX(ZK+ZW),PZ(ZK+ZW),
   FX(ZK+ZW),FZ(ZK+ZW),
   K1(ZS+ZW),K2(ZS+ZW)
70 M=2*ZK
```

Bild 14

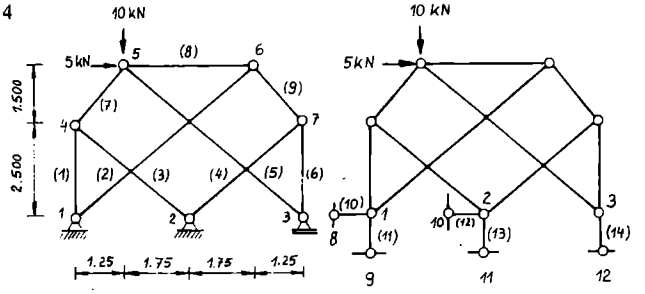
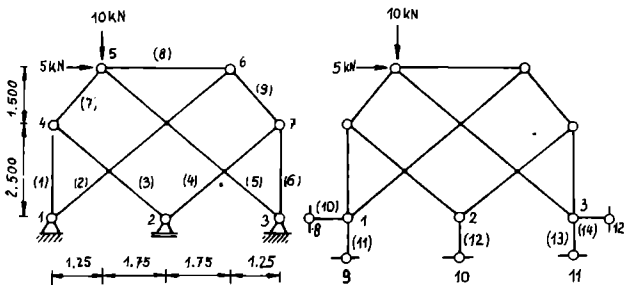


Bild 15 Instabiles Fachwerk



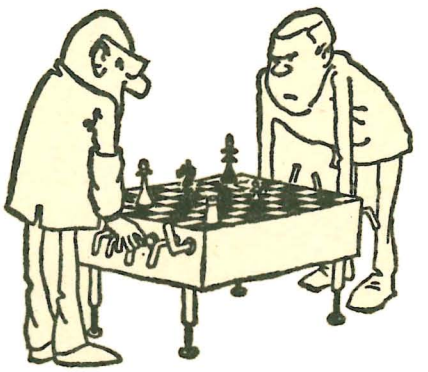
```
 80 IF M-ZS-ZW( )0 THEN
    CLS:PRINT:PRINT"BERECHNUNG
    NICHT MOEGLICH!":END
 90 DIM A(M,M),(B(M),N(ZS+ZW)
100 FOR K=1 TO ZK+ZW:READ
    PX(K),PZ(K):NEXT K
110 FOR K=1 TO ZK:READ
    FX(K),FZ(K):NEXT K
120 FOR I=1 TO ZS+ZW:READ K1
    (I),K2(I):NEXT I
130 CLS:PRINT:PRINT:PRINT"JETZT
    BERECHNE ICH DIE"
135 PRINT:PRINT"KOEFFIZIENTEN
    DES GLEICHUNGSSYSTEMS"
140 FOR I=1 TO ZS
150 K1=K1(I):K2=K2(I)
160 LX=PX(K2)-PX(K1):LZ=PZ(K2)
    -PZ(K1)
170 L=SQR(LX^2+LZ^2)
180 A(2*K1-1,I)=LX/L
190 A(2*K1,I)=LZ/L
200 A(2*K2-1,I)=-A(2*K1,I)
210 A(2*K2,I)=-A(2*K1,I)
220 NEXT I
230 FOR I=ZS+1 TO ZS+ZW
240 K1=K1(I):K2=K2(I)
250 LX=PX(K2)-PX(K1):LZ=PZ(K2)
    -PZ(K1)
260 L=SQR(LX^2+LZ^2)
270 A(2*K1-1,I)=LX/L
280 A(2*K1,I)=LZ/L
290 NEXT I
300 FOR K=1 TO ZK
310 B(2*K-1)=-FX(K):B(2*K)
    = -FZ(K)
320 NEXT K
330 CLS:PRINT:PRINT"NUN LOESE
    ICH DAS GLEICHUNGSSYSTEM"
340 FOR J=1 TO M-1
350 PRINT:PRINT" DURCHLAUF
    J=";J
360 A1=0
370 FOR I=J TO M
380 A0=ABS(A(I,J))
390 IF A0(=A1 THEN GOTO 410
400 A1=A0:I1=I
410 NEXT I
420 FOR K=J TO M
430 Z=A(J,K)
440 A(J,K)=A(I1, K)
450 A(I1,K)=Z
460 NEXT K
470 Z=B(J)
480 B(J)=B(I1)
490 B(I1)=Z
500 IF ABS(A(J,J)/A(1,1))(0.000001
    THEN 810
510 FOR I=J+1 TO M
520 F=A(I,J)/A(J,J)
530 FOR K=1 TO M
540 A(I,K)=A(I,K)-F*A(J,K)
550 NEXT K
560 B(I)=B(I)-F*B(J)
570 NEXT I
580 NEXT J
590 IF ABS(A(M,M)/A(1,1))(0.000001
    THEN 810
600 CLS:PRINT:PRINT" JETZT WERTE
    ICH DIE "
610 PRINT:PRINT"
    DREIECKSMATRIX AUS"
620 N(M)=B(M)/A(M,M)
630 FOR I=M-1 TO 1 STEP -1
640 S=0
650 FOR J=I+1 TO M
660 S=S+A(I,J)*N(J)
670 NEXT J
680 N(I)=(B(I)-S)/A(I,I)
690 NEXT I
700 CLS:PRINT:PRINT" LOESUNG:"
710 PRINT:R=0
720 FOR I=1 TO M:R=R+1
730 PRINT" N(";I;")";TAB(12);"=";N(I)
740 IF R(20 THEN 770
750 PRINT:PRINT"MIT BELIEBIGEM
    TASTENDRUCK WEITER":R=0
760 IF INKEY$=" " THEN 760
770 NEXT I
780 PRINT:PRINT"MIT BELIEBIGEM
    TASTENDRUCK WEITER"
790 IF INKEY$=" " THEN 790
800 END
810 CLS:PRINT:PRINT:PRINT
    "MATRIX SINGULAER!":END
820 DATA 12,8,4
830 DATA 0,0, 4,0, 2,3, 1,5, 3,5, 0,6
840 DATA 2,6, 4,6, -1,0, 0,-1, 4,-1, 5,0
850 DATA 0,0, 0,0, 0,0, 0,0, 0,0, 5,-10,
    0,0
860 DATA 0,0, 1,6, 1,3, 2,3, 2,8, 3,4
865 DATA 3,5, 4,6, 4,7, 5,7, 5,8, 6,7
870 DATA 7,8, 1,9, 1,10, 2,11, 2,12
```

G. Clemens

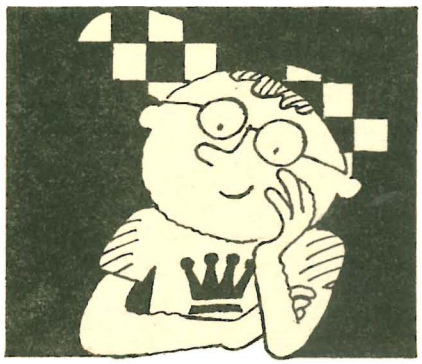
Literatur:

[1] Werner, Basic für Mikrorechner, VEB Verlag Technik, Berlin 1986

[2] Clemens, TM in BASIC, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1989



S. Aschmarin, aus: Nedelja, Moskau



Originelle Mattstellung nach 10 Zügen

Die Mathematik und das Schach haben viele Gemeinsamkeiten.

So bemerkte der englische Mathematiker Godefrey H. Hardy (1877 bis 1947) in seinem Werk „Bekenntnisse eines Mathematikers", daß die Lösung eines Problems beim Schachspiel nichts anderes ist als eine mathematische Übung und daß ein Schachspieler während des Spiels so etwas wie eine mathematische Melodie vor sich hin pfeift.

Ein beliebter Berührungspunkt zwischen Mathematik und Schach findet sich im Genre der Unterhaltungsmathematik, zu dem mathematische Spiele, Aufgaben und Unterhaltsames auf dem Schachbrett gehören, wieder. Es gibt genügend Beispiele, die wahre Wunderwerke menschlichen Scharfsinnes sind und hohe Anforderungen an das Vorstellungsvermögen stellen.

Verblüffend mit welcher kombinatorischer Gradlinigkeit und geometrischer Eleganz Weiß in 10 Zügen aus der Diagrammstellung 1 das erstickende Mattbild in der Diagrammstellung 2 erreicht. Wie lautet die zehnzügige Zugfolge in dieser Aufgabe von C. F. Jänisch (1813 bis 1872), um aus der Diagrammstellung 1 die vorgegebene Mattstellung in Diagramm 2 zu erzielen?

H. Rüdiger

Diagramm 1

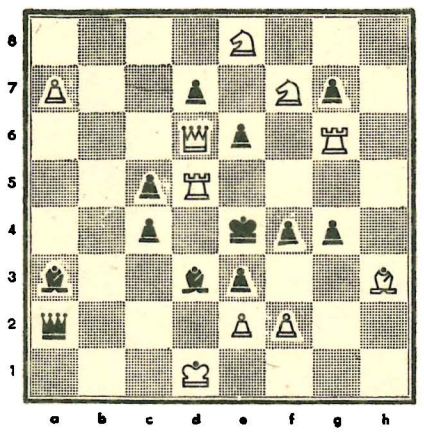
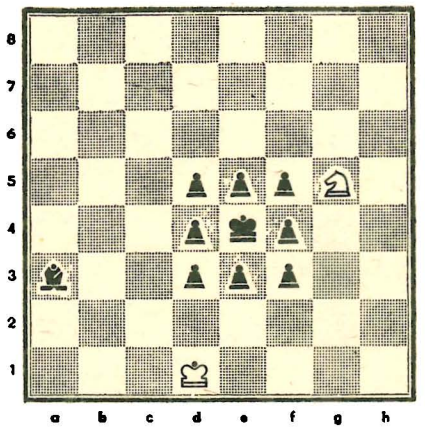


Diagramm 2



Unser alpha-Klub

Unsere Arbeitsgemeinschaft wurde im Schuljahr 1985/86 auf Anregung der Kreisfachberaterin für Mathematik Frau Schwerin für Schüler der 3. und 4. Klasse gegründet. In den ersten Jahren nahmen Schüler aus verschiedenen Orten unseres Kreises teil, und die Gruppe war Bestandteil des Kreisklubs. In diesem Schuljahr besuchen auf Grund ungünstiger Fahrverbindungen nur noch Schüler der 7. Klassen der Werneuchner Oberschule „Juri Gagarin" die Arbeitsgemeinschaft. Trotz wechselnder Durchführungsorte und veränderter Teilnehmerzahl haben sich einige Traditionen herausgebildet und erhalten, die wir euch kurz vorstellen möchten.

Wir führen unsere Zusammenkünfte zur Zeit 14tägig, um 16.15 Uhr, in der Schule durch. Jede Stunde beginnt mit der „Erwärmung", die unsere Köpfe richtig in Schwung bringen soll. Für die Aufgaben haben wir genau 10 Minuten Zeit. Danach werden die Lösungen ausgewertet und bepunktet. Sollte ein Schüler eher fertig sein, erhält er einen Zusatzpunkt, alle anderen Teilnehmer müssen aufhören. Zum Halbjahresende wird jeweils der „Erwärmungssieger" festgestellt. Wollt ihr mal einige Aufgaben kennenlernen?

Hier sind Beispiele:

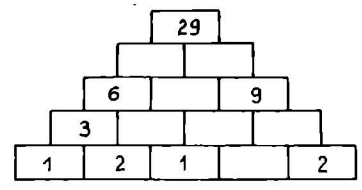
▲1▲ Ein Kind wiegt etwa 25 kg, ein Elefant etwa 3.0 t.
a) Wiegen 30 Kinder mehr als ein Elefant?
b) Wieviel Kinder sind etwa ebenso schwer wie ein Elefant?

▲2▲ Suche alle Tiere aus dem Text heraus und unterstreiche sie!
Walter sah, wie ein bärtiger Geselle einen Teppich und einen Ring an sich raffen wollte, sich später aber umdrehte und entfloh.

▲3▲ Beim Schreiben mathematischer Begriffe sind die Buchstaben durcheinander geraten. Ordne sie wieder so, daß sinnvolle mathematische Begriffe entstehen!
Dropkut, Sasib, Tnerzop, Skrei.

▲4▲ Ich habe mir eine Zahl gedacht. Wenn man zu der Zahl 1 addiert, das Ergebnis durch 5 dividiert, 8 dazuzählt, 5 subtrahiert und das erhaltene Ergebnis mit 6 multipliziert, so erhält man 30. Wie heißt die gedachte Zahl?

▲5▲ Die Summe zweier benachbarter Felder erscheint immer im Mittelfeld darüber. Die eingetragenen Zahlen dienen als Starthilfe.



Na, haben euch die Aufgaben gefallen? Wir kommen oft ganz schön ins Schwitzen. Im zweiten Teil der Stunde beschäftigen wir uns mit verschiedenen mathematischen Problemen und lernen Lösungsmöglichkeiten für sie kennen. Was wir in den vergangenen Jahren dazugelernt haben, wollen wir euch an einer Aufgabe zeigen.

▲ In einer Klasse sind Schüler aus Hirschfelde, Tempelfelde, Schönfeld und Willmersdorf. Insgesamt sind es 25 Kinder. Es sind zwei Schüler weniger aus Tempelfelde als aus Schönfeld, sieben Schüler mehr aus Hirschfelde als aus Tempelfelde und vier Schüler weniger aus Willmersdorf als aus Tempelfelde.
Wie viele Schüler stammen aus jedem Ort?

Als wir Aufgaben dieses Typs zum ersten Mal sahen, fanden wir sie sehr schwer. Dann lernten wir eine Lösungsmöglichkeit durch systematisches Probieren in Tabellen kennen, und schon waren solche Aufgaben leichter zu lösen (siehe Tabelle).

Tempelfelde	Schönfeld	Hirschfelde
	Temp. + 2	Temp. + 7
4	6	11
6	8	13
5	7	12

Willmersdorf	insgesamt
Temp. − 4	25
0	21 mehr
2	29 weniger
1	25

Im Moment arbeiten wir daran, an Hand des Textes Gleichungen aufzustellen, um noch schneller ans Ziel zu kommen.

$x + x + 2 + x + 7 + x - 4 = 25$ zusammenf.
$4x + 5 = 25 \mid -5$
$4x = 20 \mid :4$
$x = 5$

Mit Hilfe des erworbenen Wissens versuchen wir *alpha*-Aufgaben des laufenden Wettbewerbs zu lösen. Einige der Aufgaben erhalten wir auch als Hausaufgaben. In der nächsten Arbeitsgemeinschaftsstunde stellen wir unsere Lösungen vor und diskutieren über die günstigste Variante. Manchmal können wir es aber gar nicht so lange aushalten, und da wir alle in dieselbe Schule gehen, sprechen wir schon in der Pause über die Lösungen.

Ende Januar und Ende Juni werden Klausuren geschrieben, in denen wir unser Wissen unter Beweis stellen können. Im Anschluß daran besucht uns in den Sommer- und Winterferien *Max*. *Max*, das ist ein kleiner Seeräuber, der seine Schätze mit Hilfe von Mathematikaufgaben versteckt und dann nicht mehr finden kann. Wir müssen ihm beim Suchen helfen, manchmal vom Klassenzimmer, manchmal von zu Hause aus. Auch bei einem Geländespiel hat *Max* uns schon durch den Ort gejagt. Einen Teil der Ferien verbringen wir gemeinsam in der Gruppe. Wir waren schon im Pionierpalast in Berlin, haben verschiedene Computerzentren besucht und Wandzeitungen gestaltet. Vertreter unseres alpha-Klubs nehmen am jährlichen Kreisspezialistenlager Mathematik teil. Einige vordere Plätze konnten wir dort schon belegen. Leider sind wir in der Kreismathematikolympiade noch nicht so erfolgreich. Dazu müssen wir weiter viel üben, vielleicht klappt es einmal.

Zum Schluß möchten wir euch noch eine unserer Traditionen vorstellen.

Bei uns gibt es in jedem Jahr zu Weihnachten einen Kalender für das nächste Jahr „Mit Mathematik durch das Jahr". (Der Kalender für 1989 hängt auch in der Redaktion „alpha".)
In diesem Kalender sind in jedem Monat verschiedene Aufgaben unter einem bestimmten Thema enthalten. Einige davon wollen wir euch vorstellen:

▲6▲ Januar:
„Aus einem alten Mathematikbuch"
Wenn man 18 um den achten Teil einer gewissen Zahl vermindert, erhält man den zehnten Teil derselben Zahl.
Wie heißt diese Zahl?

▲7▲ März: „Kryptogramme"

$$\begin{array}{r} 1A1 \cdot AA \\ \hline ABA \\ ABA \\ \hline ACCA \end{array} \qquad \begin{array}{r} OMA \\ +OPA \\ \hline PAAR \end{array}$$

▲8▲ April: „Mathematische Zaubereien"
Denke dir eine mehrstellige natürliche Zahl. Berechne die Quersumme und subtrahiere sie von der gedachten Zahl. Von der so ermittelten Zahl streiche eine beliebige Ziffer. Jeder, der unseren „Trick" kennt, ist dann in der Lage, nach Nennung der übriggebliebenen Zahlen sofort die gestrichene Ziffer zu nennen, ohne die gedachte Zahl zu kennen.
Lösung: Man bildet die Summe der mitgeteilten Ziffern und ermittelt die Zahl, die bis zur nächsten, ohne Rest durch neun teilbaren Zahl, fehlt. Die so gefundene Zahl ist die gesuchte Ziffer.

▲9▲ Juni: „Internationale Mathematik"
Eine Badewanne kann in sechs Minuten gefüllt werden. Die Entleerung dauert zehn Minuten. Wann würde die Badewanne überlaufen, wenn jemand Wasser einlaufen läßt und gleichzeitig vergißt, den Abfluß zu schließen? (VR Polen)

▲10▲ August:
„Knobeleien für die ganze Familie"
Welche Anzahl von Produkten kaufen die Schüler in heute üblichen Maßeinheiten?
Klaus kauft 3 Dutzend Eier.
Otto holt eine Mandel Brötchen.
Uli kauft 3 Zentner Kohlen.
Hans bekommt 3 Sechser.
Elke erhält 3 Schock Äpfel.
Rosi erhält 3 Groschen.

Wir hoffen, daß euch unsere Aufgaben gefallen haben. Viel Spaß beim Lösen wünscht euch der

Werneucher alpha-Klub

Eine harte Nuß

Man ermittle alle Tripel (x, y, z) einstelliger natürlicher Zahlen x, y und z, die folgendem Gleichungssystem genügen:

$$x + y + z = 19$$
$$3x + 5y + 6z = 85.$$

Dr. R. Mildner, Leipzig

Ein Hobbymathematiker stellt sich vor

Unter den Einsendern von Aufgabenvorschlägen für den alpha-Wettbewerb fand sich immer wieder Hartmut Boettcher, Diplomlandwirt. Wir wurden neugierig und fragten einfach mal an:
„Wie kommt ein Diplomlandwirt zu einer so intensiven Beschäftigung mit der Mathematik?"

Seit 25 Jahren bin ich in der Schweinezucht des Bezirkes Erfurt auf dem Gebiete der Leistungs- und Zuchtwertprüfung tätig. Nach einem einjährigen Zusatzstudium „Anwendung mathematischer Methoden und der elektronischen Datenverarbeitung in der Landwirtschaft" und mit dem Tierzuchtleiterabschluß wurde ich Leiter eines Kollektivs im VEB Tierzucht Erfurt, das sich insbesondere mit der Zuchtwertschätzung der im Bezirk eingesetzten Besamungseber befaßt. Dazu gehört auch die Informationsverarbeitung aus den vielfältigen Schweinezucht-Projekten, die im zentralen Rechenzentrum des Kombinates Tierzucht oder mit eigener Rechentechnik angewandt werden. Ich brauche also in meinem Beruf ein gutes Verhältnis zu Zahlen und Formeln.
Die mathematische Schülerzeitschrift „alpha" lernte ich im Jahre 1974 kennen, als unsere älteste Tochter sich auf die Teilnahme an der Mathematik-Kreisolympiade in der 5. Klasse vorbereitete. Wir abonnierten die Zeitschrift, und zwei Jahre später begann auch ich mit der Lösung von Aufgaben der Klassenstufe 10/12.
Inzwischen hat unsere Familie mit drei Töchtern 43 „Teilnahmen" mit über 800 Lösungen geschafft.
Seit dem Jahre 1980 sende ich Aufgabenvorschläge ein, von denen einige bisher veröffentlicht wurden. Ich betrachte die aktive Teilnahme am alpha-Wettbewerb als Hobby und Herausforderung, um mathematisches Grundwissen anzuwenden und logisches Denken weiter zu trainieren.

Aufgaben

▲1▲ Von einer fünfstelligen Zahl ist bekannt:
- die Quersumme der fünf Ziffern beträgt 15,
- betrachtet man die erste und zweite Ziffer sowie die dritte bis letzte Ziffer als selbständige Zahlen, so ist die dreistellige Zahl fünfeinhalb mal größer als die zweistellige Zahl.

Gib mehrere Lösungen an!

▲2▲ Eine Kuhherde erreichte im Jahre 1987 eine durchschnittliche Leistung von 5250 kg Milch bei 4,34% Fettgehalt, das waren 227,85 kg Milchfett je Kuh. Zur Absicherung der Zielstellung für das Jahr 1990 muß die Leistung bei Milchfett (in kg) auf 102,7 Prozent (Basis 1987) gesteigert werden.
Um wieviel Kilogramm Milchmenge ist die Leistung jährlich zu erhöhen, wenn ein durchschnittlicher Milchfettgehalt für das Jahr 1990 von 4,36% erwartet wird?

▲3▲ Man ermittle den Rest, den die Summe

$$s = 1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + 100^6$$

bei Division durch 4 läßt.

▲4▲ In den Kryptogrammen

a) $\begin{array}{r} DREI \\ +DREI \\ \hline SECHS \end{array}$ b) $\begin{array}{r} VIER \\ +FÜNF \\ \hline NEUN \end{array}$

sollen die Buchstaben durch Grundziffern so ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Für gleiche Buchstaben sollen gleiche, für verschiedene Buchstaben sollen verschiedene Grundziffern eingesetzt werden.
Untersuche, wieviel Lösungen die Aufgabe hat!

▲5▲ Bei einem Mühlespielbrett mit 24 Feldern soll auf dem ersten Feld ein Weizenkorn und auf den folgenden Feldern jeweils die doppelte Anzahl an Weizenkörnern vom vorhergehenden Feld liegen.
a) Wie viele Weizenkörner kommen auf das letzte Feld?
b) Wie viele Weizenkörner sind es auf allen Feldern zusammen?
c) Welche Anbaufläche ist für die Erzeugung des Weizens unter b) erforderlich, wenn die Tausendkornmasse 50 g und der durchschnittliche Ertrag 60 dt je Hektar betragen?

▲6▲ Zur Benutzung der Stadtomnibusse in Weimar gibt es Fahrscheine mit 9 Lochfeldern.
Wie viele voneinander verschiedene Möglichkeiten zur Einstellung der Entwerter gibt es, wenn bis zu drei Felder eines Fahrscheins bei Antritt einer Fahrt gelocht werden sollen? *H. Boettcher*

U. Schmidt/W. Schmidt
Mathematische Knobeleien mit und ohne Computer
Etwa 144 S., zahlr. Abb., 39 Programme
Bestell-Nr. 547 513 0 Preis: 10,80 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Überall Näherungswerte

Frank, Michael und Felix planen für die Sommerferien eine kleine Radtour. Am 1. August wollen sie ihre Reise in Halle beginnen. Für diesen Tag steht die Strecke Halle – Pouch auf dem Programm. Das sind etwa 40 km. Hier in Pouch ist die 124 km lange Mulde in einem alten Braunkohletagebau gestaut, und es gibt einen wunderschönen Zeltplatz. Am 2. Tag geht es über Bad Düben nach Wittenberg. Auf dieser Fahrt werden sie die höchste Erhebung der Dübener Heide – die Hohe Gieck (191 m) sehen. In Wittenberg wollen sie gegen 17 Uhr eintreffen, da sie noch einiges für das Abendbrot einkaufen wollen und die Läden 18.00 Uhr schließen.

Am 3. Tag geht es über Roßlau nach Dessau. In Dessau leben heute 104 000 Menschen. Auffallend im Stadtbild sind die vielen Radfahrer. Übernachten werden die Jungen in der Jugendherberge „Jupp Angenfort", Waldkaterweg 11.

Von Dessau nach Halle wollen sie die Eisenbahn benutzen. Für die im Fahrplan ausgewiesenen 57,0 km muß man 4,60 M bezahlen. Da Frank, Michael und Felix Schüler sind, brauchen sie nur die Hälfte dieses Preises zu zahlen.

▲1▲ In dieser Geschichte von den drei Jungen sind einige Zahlen- bzw. Größenangaben angegeben. Entscheide, welche davon genaue Werte und welche Näherungswerte sind! Vervollständige dazu nachstehende Tabelle 1!

Im allgemeinen kann man von Zahlen- oder Größenangaben sehr sicher entscheiden, ob es Näherungswerte oder genaue Werte sind. Mitunter ist das aber nicht so absolut eindeutig möglich. Das habt ihr vielleicht bei der Einordnung der Werte unter f) und i) gemerkt. Natürlich ist es richtig, daß nicht alle Läden „punkt" 18.00 Uhr in Wittenberg schließen. Zuweilen hat man Pech und steht bereits 17.59 Uhr vor verschlossener Ladentür, oder man hat Glück und kann sogar noch nach 18.01 Uhr in den Laden huschen. Trotzdem kann man die Angabe 18.00 Uhr als genauen Wert betrachten, weil er einen Sollwert darstellt. Ähnliches gilt für die im Fahrplan ausgewiesene Entfernung Dessau – Halle. Die 57,0 km von Dessau Hbf. bis Halle Hbf. sind gewiß letztlich gemessen worden und stellen somit einen Näherungswert dar. Für die Berechnung des Fahrpreises nimmt man diese Entfernungsangabe als genauen Wert (Tarifkilometer) an. Wie man unserer kleinen Geschichte entnehmen kann, muß man bei Zahlen- bzw. Größenangaben zwischen *Näherungswerten* und *genauen Werten* unterscheiden.

Näherungswerte sind z. B. alle Ergebnisse von Messungen. Die Genauigkeit, mit der der Zahlenwert angegeben werden kann, hängt insbesondere vom verwendeten Meßinstrument ab. So kann man z. B. eine Strecke

- mit einem Tafellineal auf Zentimeter,
- mit einem Schülerlineal auf Millimeter
- mit einem Meßschieber auf 0,1 Millimeter genau messen.

Man kann – wie ihr seht – eine Strecke in Abhängigkeit vom verwendeten Meßinstrument mit unterschiedlicher Genauigkeit messen, aber den genauen Wert kann man durch Messungen nicht ermitteln. Welches Meßinstrument man für eine spezielle Messung verwendet, hängt sehr stark vom praktischen Sachverhalt ab.

Will man z. B. die Zeit messen, die man benötigt, um von zu Haus zur Schule zu kommen, so genügt eine Armbanduhr, auf der man die Zeit mit Minutengenauigkeit ablesen kann. Zum Schulsportfest wird man zur Zeitmessung beim 100-m-Lauf eine Stoppuhr verwenden, wobei eine Angabe der Laufzeit auf Zehntelsekunden genau ausreicht (Handstoppung). Bei Meisterschaften oder gar Olympischen Spielen genügt eine Messung per Hand nicht mehr; elektronische Apparaturen sichern eine Genauigkeit von Hundertstelsekunden, gegebenenfalls sogar von Tausendstelsekunden (z. B. beim Rennschlittensport).

Beim Einkaufen findet man auf Verpakkungen zuweilen folgende Angaben: Florena-Creme 60 g ± 2,5 g. Das bedeutet, daß eine Dose Florena-Creme zwischen 57,5 g und 62,5 g Creme enthält.

Wenn man mit m die genaue Masse bezeichnet, sind folgende Schreibweisen üblich:

$57{,}5\,\text{g} \leqq m \leqq 62{,}5\,\text{g}$ oder

$60\,\text{g} - 2{,}5\,\text{g} \leqq m \leqq 60\,\text{g} + 2{,}5\,\text{g}$ oder

$m = (250 \pm 4)\,\text{g}$ oder

$m = 250\,\text{g} \pm 4\,\text{g}$

Die Doppelungleichung $57{,}5\,\text{g} \leqq m \leqq 62{,}5\,\text{g}$ beschreibt eine Zahlenmenge; eine solche Zahlenmenge nennt man auch Intervall. Ein Näherungswert gibt also letztlich ein Intervall an, in dem der genaue Wert liegt. Die Intervallgrenzen nennt man auch untere bzw. obere Wertschranke eines Näherungswertes. Stellt man ein Intervall auf einem Zahlenstrahl dar, so erhält man eine Strecke.

Nun kann man den Unterschied zwischen einem genauen Wert und einem Näherungswert anschaulich so erklären: Ein genauer Wert stellt auf der Zahlengeraden einen Punkt dar, ein Näherungswert eine Strecke (Bild 1).

▲2▲ Vervollständige die Tabelle 2!

Werden bei Näherungswerten keine Wertschranken angegeben, so ist wie in Tabelle 3 zu verfahren.

Man geht also davon aus, daß der wahre Wert vom angegebenen Näherungswert nicht mehr abweicht als die Hälfte $\left(\frac{5}{10}\right)$ des Stellenwertes der letzten angegebenen Ziffer. Die Ziffern solcher Näherungswerte werden als *zuverlässige* Ziffern bezeichnet. (Dabei werden die Nullen links von der ersten von Null verschiedenen Ziffer nicht mitgezählt.)

▲3▲ Vervollständige die Tabelle 4!

Wie man den Lösungen der Aufgaben 3c, d, e entnehmen kann, darf man bei Näherungswerten rechte Nullen nicht einfach weglassen oder hinzufügen, da sie dem Leser eine Information über das Intervall geben, in dem der wahre Wert liegt. Näherungswerte nutzt man häufig zur Kontrolle von Rechnungen, so z. B. bei der Überprüfung von Resultaten mittels Überschlägen.

Tabelle 1

	genauer Wert	Näherungswert
a) Abfahrtstag: 1. August	x	
b) Entfernung Halle – Pouch: 40 km		
c) Länge der Mulde: 124 km		
d) Höhe von der „Hohen Gieck": 191 m		
e) Ankunftszeit in Wittenberg: 17.00 Uhr		
f) Ladenschluß: 18.00 Uhr		
g) Einwohner von Dessau: 104 000		
h) Hausnummer: 11		
i) im Fahrplan ausgewiesene Fahrtkilometer Dessau – Halle: 57,0 km		
k) Fahrpreis zweiter Klasse Dessau – Halle: 4,60 M		

Bild 1

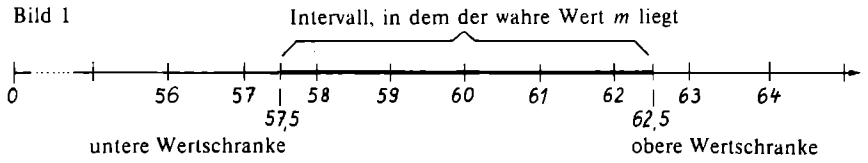


Tabelle 2

	Angabe des Intervalls für den wahren Wert m mit Hilfe einer Ungleichung	untere Wertschranke	obere Wertschranke
Florena-Creme 60 g ± 2,5 g	$57{,}5\ \text{g} \leqq m \leqq 62{,}5\ \text{g}$	57,5 g	62,5 g
Zahnpasta 50 g ± 4 g			
Waschpulver 900 g ± 40 g			
Tafelbutter		246 g	254 g

Tabelle 3

Näherungswert	Stellenwert d. letzten angeg. Ziffer	untere Wertschranke	obere Wertschranke	Bedingungen für den genauen Wert x_w
a) 17	Einer	16,5	17,5	$16{,}5 \leqq x_w \leqq 17{,}5$
b) 2,8	Zehntel	2,75	2,85	$2{,}75 \leqq x_w \leqq 2{,}85$
c) 2,80	Hundertstel	2,795	2,805	$2{,}795 \leqq x_w \leqq 2{,}805$
d) 0,034	Tausendstel	0,033 5	0,034 5	$0{,}033\,5 \leqq x_w \leqq 0{,}34\,5$

Tabelle 4

Näherungswert	Anzahl der zuverlässigen Ziffern	untere Wertschranke	obere Wertschranke	Bedingungen für den genauen Wert x_w
a) 0,03	1	0,025	0,035	$0{,}025 \leqq x_w \leqq 0{,}035$
b) 2,7				
c) 11				
d)	3	10,95		
e)				$10{,}995 \leqq x_w \leqq 11{,}005$

▲4▲ Gib zu folgenden Aufgaben einen Überschlag an! Berechne jeweils auch den genauen Wert!
a) 1 274 · 543 b) 7 432 · 181 c) 9 275 : 35.
Mit Hilfe eines Überschlags kann man eigentlich nur sagen, daß der genaue Wert in der „Nähe" des Überschlags liegen muß. Der genaue Wert kann kleiner oder größer sein als der Überschlag.
Will man eine genauere Angabe über das Resultat haben, es aber nicht ausrechnen, so nutzt man die Angabe eines Intervalls. Man ermittelt also im Kopf zwei Werte (eine untere Schranke, eine obere Schranke), zwischen denen der genaue Wert liegt.
Beispiel: Es ist das Produkt 1 274 · 543 zu ermitteln. Um sich einen ersten Überblick zu verschaffen, in welchem Intervall das Ergebnis p liegen muß, kann man wie folgt vorgehen:

$$1\,200 \cdot 500 \leqq p \leqq 1\,300 \cdot 600$$
$$600\,000 \leqq p \leqq 780\,000.$$

Eine solche Kontrollrechnung nennt man auch Abschätzung.

▲5▲ Gib ein Intervall an
a) für das Produkt 7 432 · 181;
b) für den Quotienten 9 275 : 35!
Beachte: Um von einem Quotienten eine untere Schranke zu erhalten, muß man den Dividenden verkleinern und den Divisor vergrößern.
Näherungswerte können auch beim Rechnen mit genauen Werten entstehen, wenn z. B. das Ergebnis ein unendlicher Dezimalbruch ist und man nicht alle Stellen angeben kann bzw. einen Taschenrechner verwendet, der nur eine begrenzte Zahl von Ziffern anzeigt.
Hier ein Beispiel:
Im Ferienlager wurden zur Ermittlung des Lagermeisters im Fußball neun Spiele ausgetragen. Dabei fielen insgesamt 13 Tore. Wieviel Tore wurden im Durchschnitt pro Spiel erzielt?

Lösung: 13 : 7
Mit dem Taschenrechner SR 1 ermittelt man für den Quotienten 13 : 7 den Näherungswert 1,857 142 9.
Um die Frage hinreichend zu beantworten, genügt es sicher, den Quotienten 13 : 7 auf Zehntel genau zu berechnen.

▲6▲ Welche der folgenden Resultate sind Näherungswerte?
a) 23 : 13 = 1,769 d) 1 : 3 = 0,3
b) 1 : 7 = 1,43 e) $2 : 6 = \frac{1}{3}$
c) 5 : 8 = 0,625 f) 5 : 3 = 1,7.

L. Flade/M. Pruzina

Zaubern, Raten, Spielen, Knobeln

Vier Bände des Kinderbuchverlags Berlin für Freunde am Vorführen verblüffender Kunststücke, an der Schulung des Reaktionsvermögens und der Geschicklichkeit sowie des Wissenstests ab 11 Jahre.

H. Wußing

Adam Ries

Etwa 136 S., 33 Abbildungen
Bestell-Nr. 666 520 0 Preis: etwa 6,80 M
Zum 500. Geburtstag des berühmten Rechenmeisters, dessen Name aus der Redewendung „nach Adam Ries" jedem geläufig ist, wird hier eine auf neuesten Archivforschungen beruhende umfassende Biographie vorgelegt. Insbesondere seine Tätigkeit in Erfurt und Annaberg und die Wirkung seiner beliebten Rechenbücher werden ausführlich gewürdigt.

BSB B. G. Teubner
Verlagsgesellschaft Leipzig

Vom Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin empfehlen wir:

H. Gutzer

Kreativ mit dem Computer

13 Programme für Musik und Grafik
152 S., zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 654 305 1 Preis: 12,00 M

K. Haase/D. Lehmann

Nanos Physikabenteuer

232 S., zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 653 968 5 Preis: 12,00 M

H. Backe/R. Backe/H. Giegengack

Erlebte Physik

Das Physik-Experimentierbuch
304 S., zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 654 051 2 Preis: 18,00 M

Das Rechenbuch des Johannes Widmann von 1489

Der Magister schreibt ein Rechenbuch

„Was – ist dz ist mi⁹ (minus) ... vnnd das + das ist mer."

Mit dieser knappen Erklärung erschienen die beiden mathematischen Zeichen erstmals in einem Buche gedruckt. Es war das Rechenbuch „Behēde (behende) vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft" des Johannes Widmann (um 1460 bis nach 1498?).

Die Symbole finden sich in einer Aufgabe, in der die Warenmenge einer Lieferung von Feigen aus den Fracht- und den Verpackungsgewichten der einzelnen Posten (Bild 1) zu bestimmen und dann der Kaufpreis zu berechnen ist. „Veygen. Itm̄ Eyner kaufft 13 lagel (Fässer) veygen vnd nympt ye 1 c⁽ (Zentner) pro 4 fl $\frac{1}{2}$ ort $\left(4\frac{1}{8}\text{ Gulden}\right)$. Vnd wigt itliche lagel als dan hye nachuolget. vñ ich wolt wissen was an der sum brecht (welche Summe sich ergibt)."

Das 1489, vor 500 Jahren, in Leipzig veröffentlichte Werk gehört zu den frühesten in

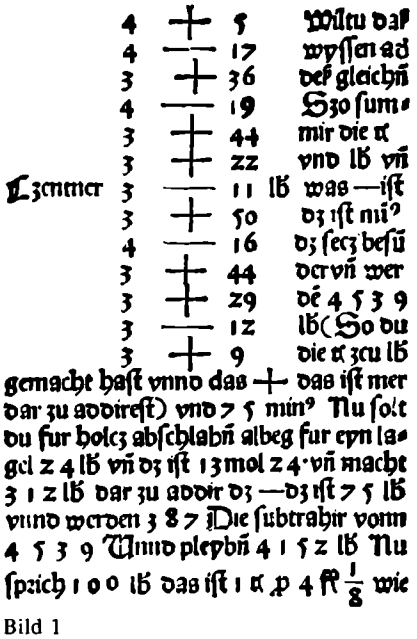


Bild 1
Tabelle der Gewichte der Fässer und Lösung der Aufgabe von den Feigen (die Abbildungen aus Johannes Widmann, Behēde vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft, Leipzig 1489)

deutscher Sprache gedruckten Rechenbüchern. Es lehrt das schriftliche Rechnen mit den indisch-arabischen Zahlzeichen, dessen größere Zweckmäßigkeit gegenüber dem bisher gebräuchlichen Rechnen auf den Linien und den mit römischen Ziffern geschriebenen Zahlen zunehmend erkannt wurde. Damals, am Ausgang des 15. Jahrhunderts, hatten sich in den fortgeschrittenen Ländern Europas frühkapitalistische Wirtschaftsformen herausgebildet. Handwerkliche Produktion, Warenverkehr und Geldumlauf wuchsen rasch an und verlangten allgemein verbreitete Rechenkenntnisse. Dieses Wissen wurde durch Rechenschulen und Rechenbücher vermittelt. Die Schriften stammten vor allem von Rechenmeistern und Universitätsgelehrten.

Johannes Widmann wirkte als Magister an der Universität Leipzig. Er wurde in Eger (heute Cheb, ČSSR) geboren. In Leipzig hielt er Vorlesungen über Arithmetik und im Sommersemester 1486 überhaupt die erste an einer Universität über Algebra. Zu seinem Rechenbuch wird ihn das Handels- und Messetreiben der Stadt angeregt haben.

Die „Behēde vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft" umfaßt 462 nicht numerierte Seiten. Auf eine Einführung in das Rechnen mit natürlichen Zahlen und mit gemeinen Brüchen folgen Textaufgaben mit den behandelten Rechenverfahren und mit Proportionen, Kaufmannsrechnung („zal geordiniret auff kauffmanschafft") und Geometrie.

Das Plus- und das Minuszeichen treten bei der Behandlung der Rechenarten noch nicht auf, sondern erst in der Kaufmannsrechnung. Deshalb liegt die Annahme nahe, daß die beiden Symbole bei solchen Aufgaben entstanden waren. Sie kennzeichneten zunächst mehr die Abweichungen nach oben und unten als die Rechenoperationen.

Ihre Bildung wird aus älteren Handschriften sichtbar. Die Symbole leiten sich von den Schriftzügen der Worte „et (lat., und)" und „minus (lat., weniger)" durch Zusammenziehung, Abkürzung und Vereinfachung ab.

„zal geordiniret auff kauffmanschafft"

Der Magister wollte die Rechenverfahren der Kaufleute eingehend darstellen. Entsprechend der Vielfalt der mathematischen Probleme unterschied er eine große Zahl von Rechenregeln. Sie gingen den Beispielen voraus und werden oft eigentlich erst durch die Beschreibung der Aufgaben verständlich. Widmann nannte sie nach dem Anwendungsgebiet im Alltag oder nach dem Lösungsweg. Das am breitesten einsetzbare Rechenverfahren war der Dreisatz bzw. die Gleichsetzung von Verhältnissen (Regula Detri ader proportionum). Darauf konnten die auf die verschiedenen Anwendungsfälle bezogenen Vorschriften zurückgeführt werden.

„Das regula Detri nicht anders ist dann drey dingk die du seczt vnter welichen das erste vnd das leczte almol muß gleich sein (gemeint ist, dem Gegenstand bzw. der Dimension nach) Weliches leczte du solt multipliciren mit dem mittelsten das dann gleich ist dem vierden vnd vnbekantn̄ · dz erwechst auß solcher multiplicatio · vnd der teylūg (Teilung) daß product mit dem ersten (durch das erste)." Der Rechenweg wurde, wie damals üblich, nur beschrieben, nicht begründet. Er sollte mechanisch beherrscht werden. Beispiele verdeutlichten ihn. „Itm̄ ich hab kaufft 24 lb (Pfund) pro 13 flo. (Gulden) wy kummen 130 lb Machß nach der Regel Also multiplicir das mittelst mit dē leczten vnd teylß durch das erst kumpt 70 flo. 8 ß (Schillinge) 4 hlr (Heller)."

Man rechnet zunächst die 13 Gulden in 273 Schillinge und diese in 3276 Heller um. Nach der Dreisatzrechnung wird auf die Einheit $\left(\frac{3276}{24}\right)$ und dann auf das gefragte Vielfache $\left(\frac{3276}{24}\cdot 130\right.$, das ist die Operation, die Widmann in der Regel verlangt$\left.\right)$ geschlossen. 130 Pfund kosten 17745 Heller oder 70 Gulden 8 Schillinge 9 Heller (nicht 4 Heller, wie von Widmann angegeben).

Mit Hilfe einer Verhältnisgleichung ergibt sich

$$\frac{x}{3276}=\frac{130}{24},\quad x=\frac{130\cdot 3276}{24}=17745.$$

Geldverleiher und -wechsler, Kaufleute und Münzmeister mußten Kenntnisse über die Berechnung der Preise der Münzmetalle Silber und Gold und des Feingehaltes, des Gewichtes und des Wertes (Preises) der Münzen im Zusammenhang mit deren Prägung besitzen (Bild 2). „Itm̄ ist aber eyn mūcz der 6 auff das lot geen (gehen) Vnd besten (bestehen) czu 10 lotn̄ in der prob (enthalten 10 Lot Silber auf 1 Mark Münzlegierung aus Silber und Kupfer). Vnd die m̄r für $8\frac{1}{4}$ fl in die muncz gesaczt Ist die frag wye vil sol man der selbigē pro 1 fl gebn̄ dz die m̄r für $8\frac{1}{4}$ fl hin kumpt." Aus 1 Lot Münzlegierung prägt man 6 Münzen (Groschen), also 96 Münzen aus 1 Mark. Diese 1 Mark Legierung enthält 10 Lot Silber. 1 Mark Silber kostet $8\frac{1}{4}$ fl, folglich kosten 10 Lot Silber $\frac{10}{16}\cdot 8\frac{1}{4}\text{ fl}=5\frac{5}{32}\text{ fl}$.

Demnach haben die 96 Münzen, die aus 1 Mark Legierung geprägt wurden, einen

Wert von $5\frac{5}{32}$ fl, und für 1 fl muß man $\frac{96 \cdot 32}{165}$ Münzen (Groschen) = $18\frac{34}{55}$ Münzen geben.

Neben Aufgaben aus dem täglichen Geschehen behandelte Widmann Beispiele zur Unterhaltung und zur Übung im Rechnen. „Anis. Itm̄ Eyner will eyn sack mit Aniß kauffen Vnd wen er vor itlichß lb (Pfund) 12 ϑ (Pfennige) giebt szo pleiben ym vbrig 37 ϑ Szo er aber für 1 lb 15 ϑ giebt so zu rint ym (zerrinnt ihm, verliert er) 44 ϑ Nu ist die frag wie vil der sagk gewegen hab vnd wie vil er gelcz gehabt hab."

Der Magister löste die Aufgabe mit dem Verfahren von Überschuß und Fehlbetrag, das er wohl in früheren Handschriften gefunden hatte. Er nannte es „Regula augmenti + decrementi (von lat. augmentum, Zunahme, und decrementum, Abnahme)". Man bestimmt eine Zahl (hier die Geldsumme) aus zwei Vielfachen einer weiteren Größe (hier des Gewichtes des Sacks Anis), die größer bzw. kleiner als die gefragte Zahl sind, und diesen Differenzen. Nach der Regel rechnete Widmann $15 - 12$ und dann $\frac{44 + 37}{15 - 12}$. Daraus folgte für den Sack Anis ein Gewicht von 27 Pfund. Weiter erhielt der Magister aus $(27 \cdot 12) + 37$ oder $(27 \cdot 15) - 44$ den Geldbetrag in Höhe von 361 Pfennigen.

Mit der Variablen x findet man heute das Gleichungssystem $y = 12x + 37$, $y = 15x - 44$ (x das Gewicht des Sacks Anis und y der Geldbetrag). Widmann wollte dagegen in seinem Rechenbuch ohne Algebra zum Ziele kommen, weil er auch für mathematisch ungeübte Leser schrieb. *H. Beyrich*

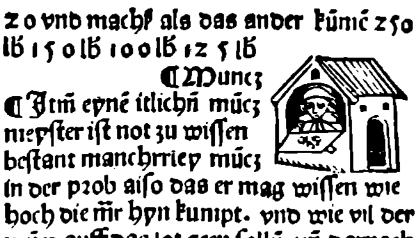

z o vnd machs als das ander künic zso
lb 1 s o lb 1oo lb 1z s lb
Muncz
Jtm̄ eyne itlichn̄ mücz
meyster ist not zu wissen
bestant manchrley mücz
in der prob aiso das er mag wissen wie
hoch die mr̄ hyn kumpt. vnd wie vil der
mücz auff das lot geen solln̄ · vñ darnach
wivil fur 1 ff vñd wie hoch das korn
besten sol vnd die schickung des tigels oz
diemuncz in eynem wesen pleyb. vñ wie
man die stuck in den tigel rechnen sol vñ
des gleichn̄. Als man munczt z 8 fur 1
ff vnd die besten zu 1o lotñ in der pb vñ
die mr̄ fur 8 1/4 ff in die muncz gesaczt
Jst die frag wie vil d selbign̄ auff 1 lot
geen solln̄ vnd wie schwer 1 der selbigen
muncz seyn sol. Jtm̄ ist aber eyn mücz
der 6 auff das lot geen Und besten zu
1o lotn̄ in der prob. Und die mr̄ fur 8 1/4

Bild 2 Münzrechnung. Das Bildchen zeigt einen Geldwechsler hinter seiner Wechselbank. – Silbergewicht 1 Mark (m̄r) = 16 Lot = 233,856 Gramm. – Korn ist die Masse des Edelmetalls in der Münze. – Die Probe (pb) ist die Prüfung des Feingehaltes der Münzlegierung

Acht mathematische Knobelaufgaben

„Aufgepaßt! Mathespaß! Mitgemacht!" steht als Überschrift auf einem Knobelheftchen, das das Neustrelitzer Pionierhaus „Heinrich Rau" im Januar 1989 an Pioniere der 4. Klassen des Kreises verschickt hat. Dies waren Pioniere, die sich für Mathematik und mathematische Knobeleien besonders interessierten. Auf einer beiliegenden vorgedruckten Postkarte mußten die Lösungszahlen von acht Aufgaben eingetragen und eingesandt werden.

Im Februar wurden dann alle Pioniere mit „8 Richtigen" (es waren 36 Pioniere) zu einem interessanten Mathetreff eingeladen. Alle bekamen eine Urkunde und als Preis ein schönes Geschenk.

Nur noch soviel: Die Aufgaben wurden recht gut gelöst. Nur bei Aufgabe 7 und besonders bei Aufgabe 1 gab es oft falsche Lösungen. Was war der Grund? Meist war es die gleiche Ursache: Der Text wird nicht genau genug gelesen. Und wer darauf nicht achtet, braucht gar nicht erst anzufangen! Wir haben die acht Aufgaben ein klein wenig schwieriger gemacht, damit auch Pioniere ab Klasse 5 noch ein paar kleine Nüsse zu knacken haben.

Und hier die acht Aufgaben:

▲1▲ Im Jahre 1989 feiern wir den 40. Geburtstag unserer Republik; daher gilt die Gleichung $1949 + 40 = 1989$. Diese Gleichung ist aber auch interessant. Setzt man nämlich zwischen jede Ziffer ein Pluszeichen (also 7 Stück), so bleibt diese Gleichung trotzdem wahr:

$1 + 9 + 4 + 9 + 4 + 0 = 1 + 9 + 8 + 9$.

Wir erhalten nämlich $27 = 27$.

Setze zwischen bestimmte Ziffern der Gleichung $1949 + 40 = 1989$ nur genau vier Pluszeichen so, daß man eine wahre Aussage erhält! Gib zwei Möglichkeiten an!

▲2▲ Verwende für die sechs verschiedenen Buchstaben des Wortes PIONIER folgende sechs Gleichungen:

$$N + N + N = 45,$$
$$R + R + R = E,$$
$$N + N = P,$$
$$N + P = I,$$
$$N \cdot P = R,$$
$$I + I : N + I : N + I : N = O$$

Mit welchen natürlichen Zahlen müssen die Buchstaben belegt werden, damit man sechs wahre Aussagen erhält?

Berechne die Summe für $P + I + O + N + I + E + R$!

▲3▲ In der Klasse 5a von Susanne ist genau ein Schüler mehr als in der Parallelklasse 5b, aber genau ein Schüler weniger als in der Klasse 5c. Zu den beiden Klassen 5b und 5c gehören insgesamt 58 Schüler. Wie viele Schüler sind in Susannes Klasse?

▲4▲

a) 1122, 2233, 3344, ...
b) 1231, 2342, 3453, ...
c) 1234, 2341, 3412, ...
d) 1123, 2234, 3345, ...

Betrachte in a), b), c), d) jeweils die drei Zahlen. Die Ziffern der zweiten Zahl gehen aus den Ziffern der ersten hervor. Aus der zweiten folgt die dritte; aus der dritten folgt die von dir zu bestimmende vierte Zahl. Wie lauten sie?

▲5▲ Es gilt $2 \cdot 2 = 2 + 2$ und $1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$.

Finde vier natürliche Zahlen, deren Produkt und deren Summe jeweils 8 ergeben!

▲6▲ Denke dir eine dreistellige natürliche Zahl, in der die Ziffer Null nicht vorkommt. Bilde aus der gedachten Zahl zwei weitere Zahlen, indem du jeweils die erste Ziffer an das Ende setzt, addiere nun die Summe aus diesen drei Zahlen durch die Quersumme einer dieser Zahlen. Wie lautet das Ergebnis?

▲7▲ Jemand hat zwei Spielwürfel. Auf dem ersten Würfel stehen die Zahlen von 1 bis 6, auf dem zweiten die Zahlen von 7 bis 12.

Wieviel verschiedene Summen der Augenzahlen können bei gleichzeitiger Verwendung beider Würfel gewürfelt werden?

▲8▲ Betrachte die drei Wörter AUFGEPASST, MATHESPASS und MITGEMACHT; sie enthalten 12 verschiedene Buchstaben.

Untersuche, wie oft jeder der 12 Buchstaben vorkommt auf folgende Weise: A = 5, U = 1, und so weiter.

Welchen Zahlenwert ergibt das Produkt dieser 12 so gefundenen Zahlen?

Viel Spaß beim Knobeln wünschen euch

H.-J. Kerber / Th. Scholl

Es ist nicht genug, daß ich etwas weiß,
bekömmt nicht das Gelernte dadurch,
daß es sich im Leben von selbst anwendet,
Halt und Sicherheit.

Robert Schumann

Das Problem der kürzesten Fahrtstrecke

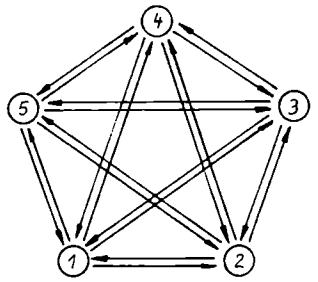
Eine interessante Aufgabenstellung der Diskreten Optimierung

Teil 2

Zum Schluß des ersten Teiles unserer Unterhaltung über ein Problem der Diskreten Optimierung war als Aufgabe gestellt worden, die kürzeste Fahrtstrecke für ein spezielles Problem zu berechnen.

Heute wollen wir einen Lösungsalgorithmus kennenlernen, der diese Berechnung effektiv durchführt. Wie habt ihr die einzelnen Rundreisen konstruiert? Um eine einzelne Rundreise zu erzeugen, kann man doch sicher der Reihe nach einige Pfeile aus dem vollständigen Graphen in Bild 1

Bild 1



herausnehmen und jedesmal entscheiden, ob die entsprechende Fahrtroute zur Rundreise gehören soll oder nicht. Nach endlich vielen solchen Entscheidungen haben wir dann eine Rundreise konstruiert. So können wir zunächst Pfeil (1, 2), dann Pfeil (3, 4) herausnehmen und ihre Zugehörigkeit zur Rundreise fordern. Wählen wir jetzt Pfeil (1, 4) aus, so darf dieser nicht zur Rundreise gehören, da sonst Eigenschaft (ii) verletzt wäre, usw. Diese Vorgehensweise ist sicher sinnvoll, beinhaltet aber eine Tücke. Schon als wir Pfeil (1, 2) in die Rundreise aufgenommen haben, wußten wir nicht, ob er auch wirklich zur Rundreise minimaler Länge gehört. Vielleicht darf er gerade nicht dazu gehören? In unserem Beispiel ist das auch der Fall.

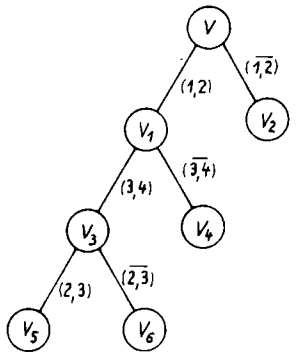
Wir müssen uns also in jedem Schritt beide Möglichkeiten offen lassen. Das heißt, daß wir bei der Wahl des Pfeiles (1, 2) zwei Teilmengen von der Menge V aller Rundreisen konstruieren:

Erstens die Teilmenge V_1, in der alle Rundreisen enthalten sind, die die Fahrtroute (1, 2) enthalten, und zweitens die Teilmenge V_2 aller Rundreisen, die diese Fahrtroute gerade nicht enthalten. Überzeugt euch durch Aufschreiben aller Rundreisen der Menge V_1 davon, daß in ihr gerade sechs Rundreisen enthalten sind, in V_2 sind es die anderen 18. Beide Teilmengen haben keine gemeinsamen Elemente und bestimmen kleinere Teilprobleme der Minimierung von (2) über $\tilde{U} \in V_1$ bzw. $\tilde{U} \in V_2$.

Diese Vorgehensweise, bei der solche kleineren Teilprobleme entstehen, nennen wir „Verzweigen aus einem Problem".

Jedes der neu entstandenen Teilprobleme müssen wir uns nun merken. Jetzt wählen wir uns eines davon aus, z. B. das der Minimierung von (2) über $\tilde{U} \in V_1$. Wir suchen uns jetzt einen weiteren Pfeil, z. B. den Pfeil (3, 4) und konstruieren aus ihm analog zwei neue Teilprobleme: das dritte Teilproblem beinhaltet die Minimierung von (2) über der Menge V_3 aller Rundreisen, die (1, 2) und (3, 4) enthalten, das vierte die Minimierung von (2) über der Menge V_4 aller Rundreisen, die (1, 2), nicht aber (3, 4) enthalten.

Bild 4



Dieser „Verzweigungsprozeß" ist in Bild 4 anschaulich dargestellt, wobei wir die entsprechenden Mengen von Rundreisen durch die Angabe der Entscheidungen charakterisieren. Dabei bedeutet *(1, 2)*, daß der Pfeil (1, 2) in jeder Rundreise von V_1 enthalten ist, $\overline{(1,2)}$ bedeutet, daß (1, 2) in keiner Rundreise von V_2 enthalten ist. Speziell sind in jeder Rundreise von V_5 die Fahrtrouten (1, 2), (3, 4), (2, 3) enthalten. Wie viele solcher Rundreisen gibt es noch? Richtig, genau eine, da die Bedingungen (i), (ii), (iii) die Hinzunahme der Fahrtstrecken (4, 5) und (5, 1) erzwingen. In V_6 sind dagegen noch mehr Rundreisen enthalten, nämlich alle die, die die Fahrtrouten (1, 2), (3, 4), nicht aber (2, 3) enthalten.

Beim Stande der Rechnung aus Bild 4 haben wir noch drei Teilprobleme zu lösen: das Problem der Minimierung von (2) über $\tilde{U} \in V_2$, $\tilde{U} \in V_4$, $\tilde{U} \in V_6$.

Jetzt haben sich bei euch sicher drei Fragen herauskristallisiert:

a) Unklar ist, welches der konstruierten Teilprobleme wir jeweils wählen sollen, um aus ihm zu verzweigen.

b) Wünschenswert wäre eine Möglichkeit, frühzeitig zu entscheiden, ob aus einem Teilproblem überhaupt verzweigt werden muß. Denn, wenn wir sichern können, daß wir die Rundreise minimaler Länge für das Ausgangsproblem gewiß nicht bei der Lösung eines speziellen Teilproblems erhalten können, so müssen wir doch dieses Teilproblem überhaupt nicht lösen, oder? Das Ergebnis dieser Möglichkeit ist eine bedeutende Verringerung des Rechenaufwandes bei der Berechnung der Rundreise minimaler Gesamtlänge.

c) Die dritte Frage ist die, welcher Pfeil als nächstes zur Verzweigung aus einem Teilproblem verwendet werden soll.

Die ersten beiden Fragen werden wir mit einer Methode beantworten, die dem Lösungsalgorithmus gemeinsam mit dem Verzweigungsprinzip seinen Namen branch-and-bound-Algorithmus gab (engl.: branch = verzweigen, bound = begrenzen). Wir werden für jedes der Teilprobleme eine untere Schranke für die Gesamtlänge aller in ihm möglichen Rundreisen konstruieren. Wenn wir solche Schranken berechnen können, ergibt sich als Antwort auf die Fragen a), b): In jedem Schritt werden wir aus demjenigen Teilproblem verzweigen, welches den kleinsten Schrankenwert hat. Um die zweite Frage zu beantworten, nehmen wir an, daß wir eine spezielle Rundreise kennen, deren Gesamtlänge l ist, und daß die untere Schranke der Gesamtlänge aller Rundreisen eines anderen Teilproblems L ist. Wenn nun

$$l \leqq L \tag{4}$$

ist, so folgt

$$l \leqq L \leqq \sum_{(i,j) \in \tilde{U}} c_{ij}$$

für alle möglichen Rundreisen in diesem Teilproblem, d. h., keine einzige kann kürzer sein als die schon berechnete. Damit muß dieses Teilproblem nicht gelöst werden. Wenn (4) für alle noch zu lösenden Teilprobleme erfüllt ist, so haben wir die Rundreise kürzester Gesamtlänge schon berechnet, unser Problem ist gelöst.

Überlegen wir uns jetzt, wie wir solche unteren Schranken berechnen können. Dazu betrachten wir nur die Bedingungen (i), (ii) an eine Rundreise und vergessen für den Augenblick die Forderung (iii).

In jedem Knoten aus E muß also genau ein Pfeil beginnen, m. a. W., von den Elementen einer jeden Zeile von C muß genau eines in der Summe (2) enthalten sein. Wenn wir jetzt die Summe der kleinsten Zahlen jeder Zeile von C bilden, erhalten wir folglich eine untere Schranke für die Gesamtlänge einer beliebigen Rundreise. Wir verwenden die kleinste Zahl einer jeden Zeile von C auch dazu, die Elemente von C zu verkleinern, indem wir die kleinste Zahl jeder Zeile von allen Elementen dieser Zeile abziehen. Von den Elementen der ersten Zeile der Matrix C aus (1) ziehen wir also 109, von den Elementen der zweiten Zeile 100 usw. Wir erhalten dann die Matrix C_0' mit den Elementen c_{ij}'. (Laßt euch durch die in Klammern stehenden Zahlen nicht irritieren, deren Bedeutung wird später erklärt.)

$$C_0' = \begin{bmatrix} \infty & 10 & 0\,(5) & 2 & 10 \\ 5 & \infty & 10 & 0\,(5) & 10 \\ 0\,(9) & 5 & \infty & 5 & 4 \\ 6 & 0\,(2) & 3 & \infty & 0\,(4) \\ 6 & 2 & 10 & 0\,(2) & \infty \end{bmatrix} \quad (5)$$

Sei $\tilde{U}$ die Menge der Pfeile einer beliebigen Rundreise, dann ergibt sich:

$c'_{ij} = c_{ij}$ – minimales Element der Zeile i, für alle Elemente der Matrix C

und folglich

$$\sum_{(i,j)\in\tilde{U}} c_{ij} = \sum_{(i,j)\in\tilde{U}} c'_{ij} + \text{Summe}$$

der minimalen Elemente der Zeilen

$$= \sum_{(i,j)\in\tilde{U}} c'_{ij} + 509. \quad (6)$$

Da alle Elemente der Matrix C' nichtnegativ sein müssen, ist ihre Summe nichtnegativ und wir erhalten als untere Schranke für die Länge einer beliebigen Rundreise in unserem Beispiel mit der Matrix C aus (1) $L = 509$.

Die gleiche Prozedur können wir natürlich auch mit den Spalten der Matrix C' wiederholen, wodurch sich die Elemente der Matrix nochmals verkleinern (oder auch nicht, wie in unserem Beispiel) und die untere Schranke für die Rundreisen L noch weiter erhöhen (kann). Insgesamt haben wir damit ein äquivalentes Rundreiseproblem erhalten (die minimalen Längen der Rundreisen unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summanden).

Welche Auswirkungen hat jetzt die Wahl eines Pfeiles, z. B. die Wahl von (3, 1), und die entspechende Konstruktion zweier Teilprobleme auf die Berechnung unterer Schranken für die Gesamtlänge der Rundreisen?

a) Das erste Teilproblem entsteht durch die Forderung, daß (3, 1) zur konstruierenden Rundreise gehören soll. Somit müssen wir von Ort 3 in den Heimatort 1 fahren, dürfen also nicht woandershin fahren. Folglich können in (2) keine anderen Summanden der 3. Zeile auftreten als c_{31}, wir können die anderen Elemente der 3. Zeile mit ∞ belegen, die entsprechenden Fahrtrouten sind verboten. Analoges trifft auf die erste Spalte zu, da der letzte Ort in unserer Rundreise schon gefunden ist. Damit entsteht Matrix C_1':

$$C_1' = \begin{bmatrix} \infty & 8 & \infty & 0\,(8) & 8 \\ \infty & \infty & 7 & 0\,(7) & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0\,(2) & 0\,(7) & \infty & 0\,(8) \\ \infty & 2 & 7 & 0\,(2) & \infty \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$C_2' = \begin{bmatrix} \infty & 10 & 0\,(5) & 2 & 10 \\ 0\,(1) & \infty & 10 & 0\,(0) & 10 \\ \infty & 1 & \infty & 1 & 0\,(1) \\ 1 & 0\,(1) & 3 & \infty & 0\,(0) \\ 1 & 2 & 10 & 0\,(1) & \infty \end{bmatrix}$$

Klar ist, daß wir jetzt auch Fahrtroute (1, 3) verbieten müssen, da sonst die Bedingung (iii) an eine Rundreise verletzt wäre. Deshalb steht dort ∞. Für dieses Problem können wir analog zu (6) wieder eine untere Schranke berechnen, wir erhalten $L_1 = 514$ ($L(3, 1)$).

b) Wenn die Reiseroute (3, 1) nicht in der zu konstruierenden Rundreise enthalten sein soll, so ist sie verboten, wir können $c_{31} = \infty$ setzen und anschließend eine neue untere Schranke für die Gesamtlänge aller möglichen Rundreisen (die (3, 1) nicht enthalten) berechnen. Die entstehende Matrix ist Matrix C_2' aus (7), die Schranke $L_2 = 518$ ($L(\overline{3, 1})$).

Damit können wir auch die letzte noch offenstehende Frage klären. Dazu überlegen wir uns für jede der Nullen in der Matrix C', welche Auswirkungen es auf den Wert der Schranke hätte, würden wir die entsprechende Fahrtroute in einer Rundreise verbieten. Bei den eben durchgeführten Überlegungen stieg der Schrankenwert um die Summe der minimalen Elemente der 3. Zeile und der ersten Spalte (außer $c'_{31} = 0$). Analog können wir die Steigerungsrate für eine beliebige Fahrtroute (i, j) mit $c'_{ij} = 0$ berechnen und erhalten:

Steigerungsrate = [Summe der minimalen Elemente der i-ten Zeile und der j-ten Spalte außer $c'_{ij} = 0$]. (8)

Für die Aufgabe mit der Entfernungsmatrix C_0' erhalten wir:

- verbieten wir (1, 3), ist die Steigerungsrate gleich 2 + 3 = 5,
- verbieten wir (2, 4), ist die Steigerungsrate gleich 5 + 0 = 5, usw.

Wir werden diese Steigerungsraten in der Matrix C' hinter den Nullen in Klammern angeben und stets den Pfeil zur Verzweigung aus einem Problem auswählen, der die größte Steigerungsrate hat. Damit ergibt sich folgender Lösungsprozeß für unsere Beispielaufgabe, wobei wir der Übersicht halber sowohl die Matrizen C als auch die berechneten Schranken L genauso durch Indizes kennzeichnen wollen, wie die Mengen V der einzelnen Teilprobleme.

Zunächst erhalten wir wie oben beschrieben die Matrix C_0' aus (5). Also ist 9 die größte Steigerungsrate, wir wählen den Pfeil (3, 1) und verzweigen wie in Bild 5 angegeben. C_1' und C_2' haben wir schon berechnet. Nach der Schrankenberechnung sowie der Verkleinerung der Elemente dieser Matrizen analog zu (6) erhalten wir die Matrizen C_1' und C_2' aus (7), wobei $L_1 = 514$ und $L_2 = 518$ ist.

Den kleineren Schrankenwert hat nun Problem 1 mit $L_1 = 514$. Um aus ihm zu verzweigen, wählen wir den Pfeil mit der größten Steigerungsrate in C_1' aus, das ist der Pfeil (1, 4) mit der Steigerungsrate 8. Problem 3 entsteht durch die Forderung, daß sowohl die Fahrtroute (3, 1) als auch die Fahrtroute (1, 4) in der Rundreise enthalten sein sollen, Problem 4 durch die Forderung, daß Pfeil (3, 1), nicht aber Pfeil (1, 4) in der Rundreise enthalten sein soll. Matrix C_3' entsteht aus der Matrix C_1' durch Verbieten aller Fahrtrouten, die in Ort 1 beginnen bzw. in Ort 4 enden sowie der Fahrtroute (4, 1). Danach wurden die Elemente der Matrix in gewohnter Weise verkleinert und es ergibt sich

$$C_3' = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0\,(8) & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0\,(0) & \infty & \infty & 0\,(3) \\ \infty & 0\,(5) & 5 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$C_4' = \begin{bmatrix} \infty & 0\,(0) & \infty & \infty & 0\,(0) \\ \infty & \infty & 7 & 0\,(7) & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0\,(0) & 0\,(7) & \infty & 0\,(0) \\ \infty & 2 & 7 & 0\,(2) & \infty \end{bmatrix} \quad (9)$$

Nach der Berechnung der Schranke L_4 sehen wir, daß die kleinste Schranke L_2 ist. Wir rechnen also in Problem 2 weiter und wählen (1, 3) als nächsten Pfeil aus, usw. Die Rechnung ist in Bild 5 aufgezeigt. Nach der Lösung von Problem 10 erkennen wir, daß in Problem 9 nur noch eine Rundreise möglich ist: V_9 enthält alle Rundreisen, die die Fahrtrouten (1, 3), (5, 4), (2, 1), nicht aber (3, 1) enthalten. Die einzige Rundreise, die sich entsprechend (i), (ii), (iii) daraus noch bilden läßt, ist

$$\tilde{U} = \{(1, 3), (5, 4), (2, 1), (3, 5), (4, 2)\}. \quad (10)$$

Die Länge dieser Rundreise ist

$l = c_{13} + c_{54} + c_{21} + c_{35} + c_{42}$

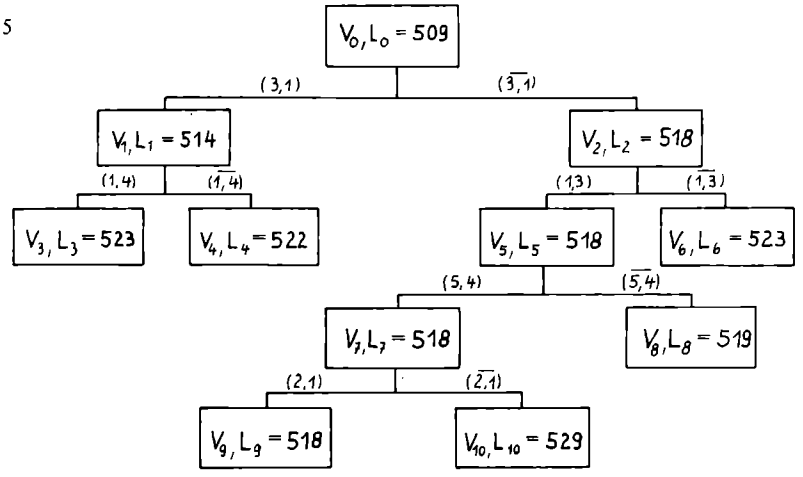
$= 109 + 100 + 105 + 104 + 100 = 518$.

Durch Vergleich der Länge dieser Rundreise mit den unteren Schranken für die Länge der Rundreisen in den noch zu lösenden Teilproblemen 3, 4, 10, 8, 6 analog zu (4) erkennen wir, daß alle diese Probleme nicht mehr gelöst werden müssen, die Rundreise minimaler Länge ist die in (10) gegebene.

Wenn wir die oben am Beispiel beschriebene Rechnung formalisieren, erhalten wir den folgenden Algorithmus zur Lösung des Rundreiseproblems:

Schritt 1: Berechne eine untere Schranke L für die minimale Gesamtlänge einer belie-

Bild 5



bigen Rundreise und verkleinere die Elemente der Matrix C entspechend (5), wobei die Rechnung sowohl bezüglich der Zeilen als auch der Spalten der Matrix C durchgeführt wird. Es ergibt sich Matrix C'_0. Setze $k = 0$.

Schritt 2: Wähle aus der Menge noch zu lösender Teilprobleme dasjenige mit der kleinsten unteren Schranke L_j aus. Sei dies Problem p. Berechne für alle Nullen der Matrix C'_p die Steigerungsraten entsprechend (8) und wähle einen Pfeil (i, j) mit $c'_{ij} = 0$ und der größten Steigerungsrate aus.

Schritt 3: Bestimme die Teilprobleme $k + 1$ und $k + 2$. Problem $k + 1$ entsteht aus Problem p durch Verbieten aller Fahrtrouten, die den Forderungen (i), (ii), (iii) an eine Rundreise sowie der Aufnahme von (i, j) in die entsprechend V_p zu bildende Rundreise widersprechen. Problem $k + 2$ entsteht aus Problem p durch Verbieten der Fahrtroute (i, j) (vgl. (7)). Bestimme die Schranken L_{k+1} und L_{k-2}.

Schritt 4: Falls V_{k-1} oder V_{k-2} aus nur einer Rundreise besteht, merke sie dir.

Schritt 5: Überprüfe, welche der offenen Probleme tatsächlich noch zu lösen sind anhand des Schrankentests (4). Wenn es noch offene Probleme gibt, setze $k := k + 2$ und gehe zu Schritt 2, sonst Ende.

Der Algorithmus berechnet in Schritt 4 eine Reihe von Rundreisen, von denen tatsächlich nur diejenige mit der kürzesten Gesamtlänge von Bedeutung ist. Alle anderen können vergessen werden. Der Schrankentest in Schritt 5 kann natürlich erst dann durchgeführt werden, wenn erste Rundreisen berechnet wurden.

Auf der Basis dieses Algorithmus lassen sich relativ einfach Computerprogramme entwickeln, die das Rundreiseproblem auch bei einer größeren Anzahl von Knoten im vollständigen Graphen lösen können. Zu groß dürfen die Graphen allerdings nicht werden, da wir schnell an die Grenzen der Fähigkeiten unserer Computer kommen werden. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, entweder Algorithmen zu entwickeln, die schnell Rundreisen konstruieren, welche zwar nicht die kleinstmögliche sondern eine nur *wenig* größere Gesamtlänge haben (solche Algorithmen nennt man Näherungsalgorithmen) oder aber vollkommen neue Lösungskonzepte zu entwickeln. Beide Probleme werden in der modernen Forschung auf dem Gebiet der Diskreten Optimierung untersucht, sind aber derzeit noch nicht zur Zufriedenheit gelöst. Fraglich ist auch, ob die zweite Möglichkeit überhaupt zu einer befriedigenden Lösung führen kann. Das könnten durchaus auch interessante Aufgabenstellungen für euch sein! *S. Dempe*

Nachtrag: Wir danken dem Altberliner Verlag und dem Mitteldeutschen Verlag Halle herzlich für die uns als Buchprämien in Auswertung des *alpha*-Wettbewerbs 87/88 zur Verfügung gestellten Titel ihrer Produktion. Durch einen bedauerlichen Irrtum wurden beide Verlage im Heft 1/89 nicht genannt.

Kirche, König, Konvergenz
Zum 200. Geburtstag von A. L. Cauchy

Bild 1

Am 21. August 1989 begehen die Mathematiker der ganzen Welt den 200. Geburtstag eines Fachkollegen, der mit 7 Büchern und rund 800 Veröffentlichungen zu den produktivsten und wirkungsreichsten Mathematikern aller Zeiten gehört. Seinen Namen tragen so zahlreiche mathematische Begriffe und Sätze, daß er jedem Mathematik- oder Physikstudenten schon in den ersten Semestern geläufig wird: Augustin Louis Cauchy (gesprochen Kooschi). Aber auch schon im Mathematiklehrbuch der 11. Klasse wird sein Name erwähnt und sein Bild gezeigt. Etwas vereinfacht könnte man sagen, daß der gesamte Lehrstoff der 11. Klasse in seiner heutigen Form auf Cauchy beruht. Zugleich war Cauchy eine der widerspruchsvollsten und schillerndsten Persönlichkeiten in der Geschichte der Mathematik. Da man sich in dem weitverbreiteten Sammelband Biographien bedeutender Mathematiker (herausgegeben von H. Wußing und W. Arnold, Verlag Volk und Wissen) ausführlich über den Lebensweg Cauchys informieren kann, sollen hier die biographischen Fakten nur in Kürze an den Anfang gestellt werden.

Cauchy wurde in Paris wenige Wochen nach dem Sturm auf die Bastille in einer königstreuen und streng katholischen Beamtenfamilie geboren, die bald darauf vor den revolutionären Ereignissen in ein abgelegenes Dorf floh, wo der Vater zunächst selbst die Erziehung und den Unterricht des kleinen Augustin übernahm. Diese Herkunft und Erziehung bestimmte den gesamten weiteren Lebensweg Cauchys. Durch Vermittlung von Freunden der Familie, die sich frühzeitig Napoleon angeschlossen hatten, konnten die Cauchys 1800 nach Paris und in einflußreiche Staatsämter zurückkehren. Augustin besuchte von 1805 bis 1807 die berühmte, erst 1794 gegründete Pariser Polytechnische Schule und danach zwei Jahre lang die Hochschule der „Brücken und Chausseen", d. h. des Zivilingenieurwesens. An der Polytechnischen Schule erteilten damals hervorragende Mathematiker wie Lagrange, Monge, Laplace, Poisson, Poinsot und Ampère den besten mathematischen Unterricht in ganz Europa. Nach mehrjähriger praktischer Ingenieurtätigkeit kehrte auch Cauchy 1815 als Professor an diese Hochschule zurück. Die Rückkehr der Bourbonen auf den Thron von Frankreich brachte dem Angehörigen einer als königstreu bekannten Familie diesen Aufstieg und weitere wie die Berufung zum Akademiemitglied. Es ist bezeichnend, daß dieser Berufung nicht die sonst übliche Wahl durch die übrigen Mitglieder der Akademie vorausging, da Cauchy wohl zu dieser Zeit schon als herausragende mathematische Begabung anerkannt, jedoch von der Mehrheit der meist demokratisch oder napoleonisch gesinnten Gelehrten Frankreichs auf Grund seiner bourbonischen und betont katholischen Position persönlich nicht geschätzt wurde.

Nach der Julirevolution 1830 verweigerte Cauchy den Untertaneneid auf den „Bürgerkönig" Louis Philippe und emigrierte, zunächst in die Schweiz, dann nach Turin. Von 1833 bis 1838 lebte er als Erzieher des Sohnes des gestürzten Bourbonenkönigs Charles X. an dessen Exilhof in Prag, wo er auch in Berührung mit Bernard Bolzano, dem anderen großen Erneuerer der Analysis, kam. Jedoch haben die erzwungene Zurückgezogenheit Bolzanos vom öffentlichen und wissenschaftlichen Leben und die entgegengesetzten weltanschaulichen und politischen Ansichten einen engeren Kontakt beider Männer verhindert. Während dieser Zeit hatte Cauchy den wissenschaftlichen Kontakt mit den Mathematikern Frankreichs aufrechterhalten und die 1835 gegründete Mitteilungszeitschrift Comptes Rendues der französischen Akademie mit einer Flut von Veröffentlichungen beschickt. Nach dem Tode Charles X. 1836 begann er seine Rückkehr nach Paris vorzubereiten und setzte sie 1838 in die Tat um, konnte jedoch zunächst keine staatliche Anstellung erhalten und übte daher nur eine Lehrtätigkeit am Pariser Jesuitenkollegium aus. 1839 gelang es, ihn als

besoldeten Angestellten in das staatliche „Längenbüro" einzuschmuggeln. Nach der Abschaffung des Amtseides durch die Revolution von 1848 konnte der zwar nicht beliebte, aber inzwischen weltberühmte Cauchy seine Lehrtätigkeit an der Polytechnischen Schule und an der Pariser Universität in vollem Umfang wieder aufnehmen und blieb, vermöge einer Ausnahmegenehmigung durch Kaiser Napoleon III., auch nach dessen Machtergreifung 1852 unbehelligt, obwohl er wiederum den Treueeid verweigert hatte. Cauchy starb am 22. 5. 1857 in Sceaux bei Paris.

Cauchy gilt heute, gemeinsam mit Bolzano, vor allem als einer derjenigen Mathematiker, die am Beginn des 19. Jh. die reichlich 100 Jahre früher von Newton und Leibniz begründete Infinitesimalmathematik (Differential- und Integralrechnung, unendliche Reihen, Differentialgleichungen usw.) auf eine solide logische Grundlage stellten, nachdem während des gesamten 18. Jh. durch Gelehrte wie die Bernoullis, Euler, Lagrange, Taylor und Maclaurin eine Fülle inhaltsreicher Ergebnisse und Anwendungen hervorgebracht worden war, ohne daß diese Männer sich viele Sorgen um saubere Definitionen und strenge Beweise gemacht hatten. Ihre Intuition hatte sie trotzdem fast immer vor ernsthaften Fehlern bewahrt. Nun aber, mit der sich entfaltenden industriellen Revolution, begann mathematischer Unterricht an den traditionellen wie an den zahlreich entstehenden höheren technischen Bildungsanstalten eine immer zentralere Rolle zu spielen. Was im 18. Jh. einzelne große Geister virtuos gehandhabt hatten, mußte für eine breite Schicht durchschnittlich begabter Studenten lehrbar gemacht und nachvollziehbar aufbereitet werden. So begann die große Zeit der Hochschullehrbücher der höheren Mathematik.

Bild 2

A. L. Cauchy's

Lehrbuch

der

algebraiſchen Analyſis.

Aus dem Franzöſiſchen überſetzt

von

C. L. B. Huzler,

Conrector an der Pabenicht'ſchen höheren Stadtſchule in Königsberg.

Königsberg,

im Verlage der Gebrüder Borntträger

1828.

Die aus dem Lehrbetrieb an der Polytechnischen Schule hervorgegangenen Lehrbücher Cauchys bauten die niedere und höhere Analysis erstmals logisch streng auf dem Grenzwertbegriff auf. Sie galten bald als vorbildlich und wurden nicht nur an allen Hochschulen Frankreichs benutzt sondern auch in andere Sprachen übersetzt. Zum Beispiel erschien von Cauchys erstem, 1821 erschienenen Lehrbuch der „algebraischen" oder „niederen" Analysis (die das gesamte Vorfeld der Differential- und Integralrechnung umfaßt) schon 1828 eine deutsche Übersetzung (siehe Bild 2). 1885 folgte eine neue, davon unabhängige deutsche Ausgabe, die bereits in einem der bis heute traditionsreichsten Verlage für mathematische Literatur, dem Julius-Springer-Verlag, erschien. Dieses Buch enthielt neben vielen anderen Neuerungen

- eine Definition „unendlich kleiner Größen" als solcher Veränderlicher, deren Werte der Null beliebig nahe kommen können, darauf aufbauend
- eine Definition der Stetigkeit einer beliebigen Funktion an einer bestimmten Stelle ihres Definitionsbereichs,
- eine Definition des Begriffs konvergente unendliche Reihe.

Bis dahin und insbesondere bei Euler und Lagrange hatte man mit unendlichen Reihen, auch mit in heutiger Sprechweise divergenten, unbefangen als mit „unendlich langen Summen" gerechnet, ohne den Gültigkeitsbereich der dabei verwendeten algebraischen Regeln zu untersuchen. Cauchy formulierte und bewies als erster sogenannte Konvergenzkriterien, die heute meist nach ihm benannt werden und zum Grundhandwerkszeug jedes analytisch arbeitenden Mathematikers gehören.

Cauchys weitere Lehrbücher über die eigentliche Differential- und Integralrechnung, die ebenfalls bald nach ihrem Erscheinen ins Deutsche übersetzt wurden, boten u. a. erstmals

- eine Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert von elementaren Flächeninhalten,
- eine Formulierung des Taylorschen Satzes mit der exakten, nach Cauchy benannten Formel für das Restglied, d. h. für die Differenz zwischen dem Funktionswert und dem durch die Taylorsche Formel gegebenen polynomialen Näherungswert,
- das berühmte Beispiel einer beliebig oft differenzierbaren Funktion, deren formal gebildete Taylorreihe zwar konvergiert, jedoch nicht gegen den Wert der Ausgangsfunktion,
- erste Existenzsätze für Lösungen von Differentialgleichungen.

Daß mathematische Strenge ein zeitabhängiger Begriff ist, wird ein weiteres Mal durch den fundamentalen Irrtum Cauchys demonstriert, der in Unkenntnis des erst viel später herausgearbeiteten Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen zu beweisen glaubte, daß die Grenzfunktion einer konvergenten Reihe stetiger Funktionen selbst stetig sein muß.

Wo Bolzano und Cauchy das Gleiche erstrebten, fällt ein Vergleich der Formulierungen Cauchys mit den meist etwas früheren Bolzanos vom heutigen Standpunkt fast immer zugunsten Bolzanos aus. Bolzanos Arbeiten blieben jedoch (aus Gründen, die wir hier nicht erläutern können, man vergleiche dazu die Biographien bedeutender Mathematiker) zu seinen Lebzeiten fast wirkungslos, während Cauchys Lehrbücher sich breitester Resonanz erfreuten. Außerdem hatte Bolzano ein rein philosophisches Interesse an der Mathematik und stand deren Anwendungen fremd und ohne Verständnis gegenüber, während Cauchy fest in einer Tradition engster Verschmelzung von Mathematik, Physik und Technik stand, wie auch seine eigenen Beiträge zur Himmelsmechanik, Optik und Elastizitätstheorie erkennen lassen. Nicht zuletzt muß man aber über die Unterschiede in Bolzanos und Cauchys Herangehen an die Analysis bemerken, daß Bolzano gedanklich die erst viel später von G. Cantor begründete und heute von fast allen Mathematikern akzeptierte Lehre von den aktual unendlichen Mengen vorweggenommen hatte, während Cauchy sich aus letztlich religiösen Gründen um eine völlige Verbannung des Aktual-Unendlichen aus der Mathematik bemühte. M. Moigno, ein Schüler und Anhänger Cauchys, hat in den von ihm herausgegebenen und mit Zusätzen versehenen „Sieben Vorlesungen" Cauchys über allgemeine Physik bezeugt, daß für Cauchy die Vorstellung der realen Existenz aktual-unendlicher Gesamtheiten mit dem biblischen Schöpfungsakt unvereinbar war. Hiernach mußte jedes Ding einen Anfang haben, zu jedem konkreten Zeitpunkt endlich und nur in fortschreitender Zeit potentiell unendlich, d. h. zu beliebiger Vergrößerung fähig sein.

Die herausragende Rolle, die Cauchy für die Entwicklung zweier bestimmender Richtungen der Analysis im 19. Jh. gespielt hat, nämlich Präzisierung der Grundlagen und systematischer Aufbau einer Analysis der komplexwertigen Funktionen komplexwertiger Veränderlicher (worauf wir hier nicht weiter eingehen können), läßt oft vergessen, daß Cauchy auch auf anderen Gebieten der Mathematik Bedeutendes geleistet hat. So formulierte und bewies er schon 1812 den nach ihm benannten Satz, daß ein konvexes Polyeder durch sein Netz (d. h. durch Form und Größe der Außenflächen und eine eindeutige Vorschrift, welche Kanten miteinander zu verheften sind) bis auf die Lage im Raum eindeutig bestimmt ist. Läßt man auch nichtkonvexe Polyeder zu, so ist dieser Sachverhalt offenbar nicht mehr allgemein richtig. 1815 bewies er eine Behauptung Fermats, wonach sich für beliebige natürliche Zahlen $n \geq 3$ jede natürliche Zahl als Summe von höchstens n n-Eck-Zahlen darstellen läßt. Zur Definition der n-Eck-Zahlen siehe Bild 3 und Aufgabe 1. Der Begriff der sogenannten figurierten oder Polygonalzahlen geht bis auf die Antike zurück.

1844 erschien nach vielen Vorstudien Cauchys umfassende etwa 100 Seiten starke Abhandlung über Permutationen und deren Verknüpfung (heute ebenfalls Stoff der 11. Klasse!). Damit systematisierte er nicht nur ein wichtiges Teilgebiet der Kombinatorik, sondern nahm implizit an der Herausarbeitung einer fundamentalen Disziplin der modernen Mathematik, der Gruppentheorie, hervorragenden Anteil.

„Cauchy ist extrem katholisch und bigott. Das ist eine sehr seltsame Sache bei einem Mathematiker" schrieb der junge Abel im Oktober 1826 in einem Brief ins heimatliche Norwegen. Spürt man diesem Zug im Wesen Cauchys in seinen Werken nach, so wird manche sonst unmotiviert erscheinende Passage verständlicher. Zum Beispiel schweift die kurze Einleitung zum bereits erwähnten Lehrbuch der algebraischen Analysis (1821) unvermittelt in Ausfälle gegen die radikal atheistische französische Aufklärung ab. Die in der Tat auch aus heutiger Sicht verfehlten Vesuche von P. S. Laplace, einem führenden Mathematiker dieser Richtung, die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch auf juristische und moralische Probleme auszudehnen, lieferten ihm einen willkommenen Angriffspunkt, ohne daß er den Namen Laplace dabei nennen mußte. Allgemein bekannt ist heute, daß durch Cauchys Schuld eine bedeutende Arbeit Abels, die dieser 1826 der französischen Akademie eingereicht hatte und die Cauchy zur Beurteilung übergeben worden war, verlegt wurde und erst nach Abels Tod auf Grund einer Intervention der norwegischen Regierung wieder aufgefunden wurde. Eine ähnliche Rolle hat Cauchy möglicherweise auch bei der Unterdrückung von Arbeiten des jungen Galois gespielt. Ob dies wirklich nur durch Arbeitsüberlastung Cauchys und durch (schlimm genug!) Geringschätzung unbekannter junger Leute verursacht war oder ob dabei auch die Abneigung Cauchys gegen einen jungen Revolutionär (Galois) bzw. gegen den aus einem protestantischen Land kommenden protestantischen Pfarrersohn Abel im Spiel war, wird sich vermutlich nie aufklären lassen. Ein gereiftes Verhältnis zur allgemeinen wie zur Wissenschaftsgeschichte gebietet uns, die großen Verdienste Cauchys um die Mathematik ungeachtet seiner zwielichtigen Persönlichkeit zu würdigen. *P. Schreiber*

Aufgaben auf den Spuren Cauchys

▲ 1 ▲ Bild 3 veranschaulicht die Bildung der n-Eck-Zahlen an den Beispielen $n = 3, 4, 5, 6$.

a) Man prüfe an diesen Beispielen, daß folgende induktive Definition der r-ten n-Eck-Zahl p_n^r sinnvoll ist:

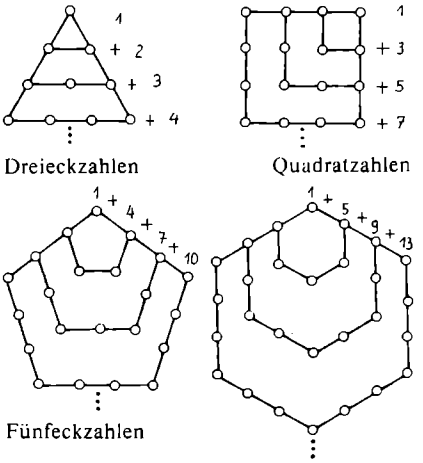
$$p_n^1 = 1, \quad p_n^{r+1} = p_n^r + 1 + (n-2)\,r.$$

Dies läßt sich auch in der Form

$$p_n^r = \sum_{k=0}^{r-1} (1 + (n-2)\,k) \text{ schreiben.}$$

b) Man beweise durch vollständige Induktion über r:

$$p_n^r = \frac{r}{2}(2 + (n-2)(r-1)).$$



Dreieckzahlen Quadratzahlen Fünfeckzahlen Sechseckzahlen

Bild 3: n-Eck-Zahlen

c) Man man prüfe an Beispielen den „einfachsten" Spezialfall des Cauchyschen Satzes für $n = 3$: Jede natürliche Zahl läßt sich als Summe von höchstens drei Dreieckzahlen darstellen.

▲ 2 ▲ Man konstruiere ein Polyedernetz kleinster Flächenanzahl, das sowohl eine konvexe als auch eine nichtkonvexe Realisierung zuläßt. (Ein Polyeder heißt konvex, wenn es zu je zweien seiner Punkte A, B auch die gesamte Strecke AB enthält.)

▲ 3 ▲ Man konstruiere das Netz eines Polyeders kleinster Flächenanzahl, das zwar eine nichtkonvexe, aber keine konvexe Realisierung zuläßt.

▲ 4 ▲ Im erwähnten Lehrbuch der algebraischen Analysis behandelt Cauchy auch die Bestimmung unbekannter Funktionen aus sogenannten Funktionalgleichungen. Er zeigt u. a., daß die einzigen stetigen Funktionen f, die der Funktionalgleichung (*) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ genügen, die Funktionen der Form $f(x) = ax$ (a beliebig) sind. (Dabei ist, wie man sofort sieht, $a = f(1)$.) Man vollziehe seinen Beweis soweit nach, daß erkennbar wird:

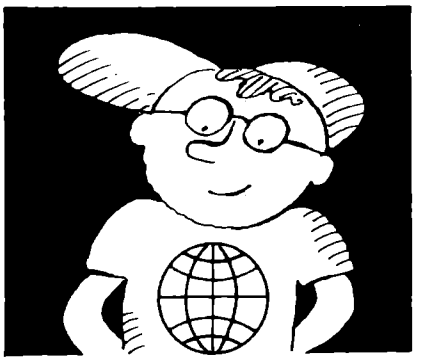
Gilt für f die Gleichung (*), so ist für alle rationalen Zahlen x (einschließlich der negativen) $f(x) = f(1) \cdot x$. (Erst die Ausdehnung dieser Aussage auf irrationale x erfordert die Voraussetzung der Stetigkeit von f und nichtelementare Beweisschritte.)

▲ 5 ▲ Im gleichen Buch beschäftigte sich Cauchy auch mit den Begriffen der symmetrischen und der alternierenden Funktionen von mehreren Veränderlichen. Im Falle zweier Veränderlicher x, y ist dabei eine Funktion f

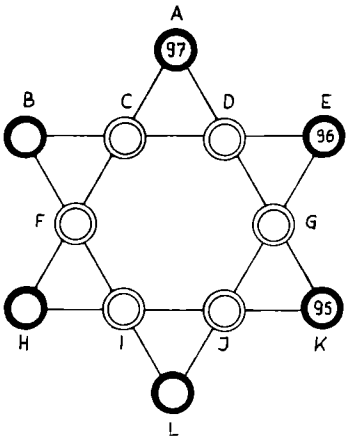
symmetrisch, wenn $f(y, x) = f(x, y)$
für alle x, y ist,
alternierend, wenn $f(y, x) = -f(x, y)$
(Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß f für alle Paare x, y von reellen Zahlen definiert ist.)

a) Man suche Beispiele für symmetrische bzw. für alternierende Funktionen. Symmetrisch ist z. B. $f(x, y) = x + y$, alternierend $f(x, y) = x - y$.

b) Man beweise, daß sich jede (für alle Paare x, y definierte) Funktion f als Summe einer symmetrischen und einer alternierenden Funktion darstellen läßt.



▲ 1 ▲ L'étoile magique
Placez dans les cercles vides les nombres compris entre 94 et 107 de façon à toujours obtenir le total de 402 en additionnant les cercles situés sur une même ligne droite.

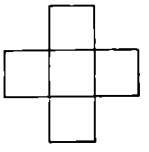


aus: Logigram, Paris

▲ 2 ▲ Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 56, делится на 56 и имеет сумму цифр, равную 56.

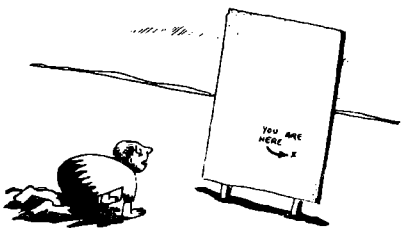
aus: Quant, Moskau

▲ 3 ▲ Changing the cross into a square
The drawing shows a cross with four equal arms. Use four straightline cuts to divide the cross into five pieces so that you can rearrange the pieces to form a square.



Hint: Four of the pieces should be congruent (exactly equal).

aus: Fun with mathematics, Toronto



XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Schulolympiade

Abgabe beim Mathematiklehrer: Ende September 1989

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden im Oktober 1989 in der Trommel und der Jungen Welt veröffentlicht.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

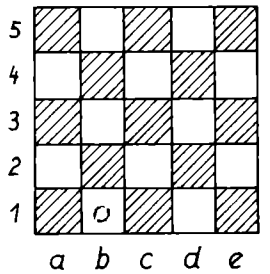
Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

290511 Kerstin erhält am 30. April zu ihrem Geburtstag von mehreren Verwandten Geld geschenkt. Sie hat nun genau 35 Mark in ihrer Sparbüchse und nimmt sich vor, in den folgenden Monaten fleißig Altstoffe zu sammeln, so daß sie am Ende jedes Monats genau 5 Mark in die Sparbüchse stecken kann.
Am Ende welchen Monats werden, wenn ihr Vorhaben gelingt, erstmals 55 Mark in der Sparbüchse sein?

290512 Wenn man zwei zweistellige Zahlen hintereinanderschreibt, entsteht eine vierstellige Zahl.
Gib zwei zweistellige Zahlen so an, daß die Summe aus diesen beiden Zahlen und der daraus gebildeten vierstelligen Zahl genau 1478 beträgt!
(Ein Nachweis, daß es nur eine einzige Möglichkeit für zwei solche Zahlen gibt, wird nicht verlangt. Du kannst aber versuchen, einen solchen Nachweis zu finden.)

290513 Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damestein auf dem Feld b1. Er darf, wie im Damespiel üblich, stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gehen. So kann er in vier Schritten auf die oberste Zeile (d. h. auf irgendeines der beiden Felder b5, d5) gelangen.
Gesucht ist die Anzahl aller verschiedenen Wege, auf denen dieses Ziel erreichbar ist.
Gib diese Anzahl an und beschreibe, wie du sie gefunden hast!

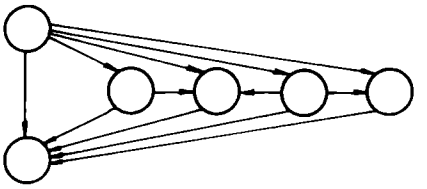


290514 a) Zeichne in einem Koordinatensystem (Einheit 1 cm) ein Dreieck ABC mit $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(1;4)$!
b) Wähle $\overrightarrow{AB}$ als Verschiebungspfeil und zeichne das bei dieser Verschiebung aus dem Dreieck ABC entstehende Bild $A'B'C'$ in dasselbe Koordinatensystem!
c) Zeichne dazu noch das bei der Verschiebung $\overrightarrow{A'C}$ entstehende Bild $A''B''C''$ des Dreiecks $A'B'C'$!
d) Welche Dreiecke und welche Parallelogramme sind mit ihren vollständigen Seitenkanten in der nun entstandenen Gesamtfigur insgesamt enthalten? Zähle diese Dreiecke und Parallelogramme wie üblich durch Angabe ihrer Eckpunkte auf!

Olympiadeklasse 6

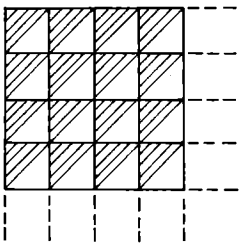
290611 Peter möchte aus einer Kanne, in der sich mehr als 13 Liter Milch befinden, genau 13 Liter abmessen. Das genaue Fassungsvermögen der Kanne ist nicht bekannt, und es ist auch nicht bekannt, wieviel Milch genau in der Kanne ist. Außer der Kanne stehen noch genau zwei weitere Gefäße zur Verfügung. Das eine hat ein Fassungsvermögen von genau 5 Litern, das andere ein Fassungsvermögen von genau 17 Litern. (Eine Skaleneinteilung oder ähnliche Möglichkeiten zum Abmessen anderer Mengen gibt es jedoch nicht.)
Beschreibe, wie Peter allein mit diesen Hilfsmitteln genau 13 Liter Milch abmessen kann!

290612 a) Trage in die sechs Kreise des Bildes je eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 12 so ein, daß jeder Pfeil von einer Zahl zu einem ihrer Teiler führt! Dabei soll jede der genannten Zahlen genau einmal verwendet werden.



b) Ergänze die Figur durch einen weiteren Kreis mit der Zahl 18 und mit den entsprechend zu erklärenden Pfeilen!
c) Zeichne eine neue Figur, wieder bestehend aus Kreisen und entsprechend zu erklärenden Pfeilen, in der die Zahl 75 und alle ihre Teiler vorkommen!

290613 Ein rechteckiger Fußboden, der 3,6 m lang und 2,7 m breit ist, soll mit zwei Sorten gleichgroßer, aber verschiedenfarbiger dreieckiger Teppichfliesen so ausgelegt werden, daß ein Muster entsteht, wie es durch Fortsetzen des Musters des Bildes zu erhalten ist.
Je zwei solcher dreieckigen Fliesen einer Farbe sollen durch einmaliges Zerschneiden einer quadratischen Fliese mit der Seitenlänge 30 cm hergestellt werden.
Wie viele quadratische Teppichfliesen werden von jeder der beiden Sorten insgesamt benötigt?

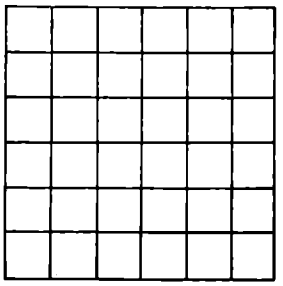


290614 Von den 25 Schülern einer Klasse gehören genau 20 einer Sportgruppe an. An der AG Mathematik nehmen genau 12 Schüler dieser Klasse teil. Genau 3 Schüler dieser Klasse gehören weder einer Sportgruppe noch der AG Mathematik an.
Zeige, wie man aus diesen Angaben erhalten kann, daß es auf folgende Fragen eindeutig bestimmte Zahlenangaben als Antworten gibt! Gib diese Antworten an!
a) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an?
b) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar einer Sportgruppe, aber nicht der AG Mathematik an?
c) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an?

Olympiadeklasse 7

290711 Auf ein 6×6-Felderbrett (siehe Bild) sollen 18 Steine so verteilt werden, daß jeder Stein in genau einem Feld liegt, in jedem Feld nicht mehr als ein Stein liegt

sowie in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonalen nicht mehr als drei Steine liegen.
Gib eine derartige Verteilung an!
Hinweis: Unter einer Diagonale wollen wir in dieser Aufgabe jede Gerade verstehen, die in einer Diagonalrichtung des Quadrates durch die Mittelpunkte von mehreren (mindestens 2, höchstens 6) Feldern verläuft. Es gibt folglich auf diesem Brett genau 18 verschiedene Diagonalen.



290712 Thomas, Uwe und Volker belegten bei einer Mathematikolympiade die ersten drei Plätze, jeder von ihnen einen anderen Platz als die beiden anderen. Über diese Plazierung wurden nun die folgenden drei Aussagen gemacht:
(1) Thomas wurde nicht Erster.
(2) Uwe wurde nicht Zweiter.
(3) Volker wurde Zweiter.
Von diesen drei Aussagen (1), (2), (3) ist genau eine wahr. Untersuche, ob sich hieraus ermitteln läßt, wer von den drei Schülern den ersten, den zweiten und den dritten Platz belegte! Ist dies der Fall, so gib die Plazierung an!

290713 Rolf sagt an seinem Geburtstag, dem 1. September 1989: „Die Quersumme der Jahreszahl meines Geburtsjahres ist zugleich auch das in Jahren gerechnete Alter, das ich heute erreiche." Untersuche, ob es genau ein Jahr als Rolfs Geburtsjahr gibt, für das seine Aussage zutrifft! Ist das der Fall, so gib dieses Geburtsjahr an!

290714 Bei der Wiederholung des Innenwinkelsatzes für konvexe Vierecke geraten Anja und Klaus in einen Streit:
Klaus behauptet: „Zerlegt man ein beliebiges konvexes Viereck $ABCD$ durch Einzeichnen der Diagonalen AC in die beiden Teildreiecke ABC und ADC, dann beträgt die Innenwinkelsumme jedes dieser Teildreiecke 180°. Folglich muß im Viereck $ABCD$ die Innenwinkelsumme $2 \cdot 180° = 360°$ betragen." Anja entgegnet: „Zeichnet man aber noch die zweite Diagonale BD ein, dann erhält man vier Teildreiecke. Die Innenwinkelsumme von $ABCD$ muß folglich $4 \cdot 180° = 720°$ betragen."
Untersuche, welcher der beiden Schüler recht hat! Begründe deine Entscheidung!
Anmerkung: Unter einem konvexen Viereck versteht man ein Viereck, dessen beide Diagonalen innerhalb dieses Vierecks liegen (vgl. Lb. 6, S. 179).

Olympiadeklasse 8

290811 Auf einer Flasche mit handelsüblicher 40prozentiger Essigessenz stehe die folgende Gebrauchsanweisung: „Der Inhalt dieser Flasche (200 ml), mit 800 ml Wasser vermischt, ergibt einen zehnprozentigen Speiseessig."
Stimmt das?

290812 Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Summe aller Kantenlängen dieses Prismas beträgt $15a$. Berechne den Flächeninhalt der Mantelfläche dieses Prismas!

290813 Zwei Kreise k_1 und k_2 seien so gelegen, daß sie zwei verschiedene Schnittpunkte A und D haben und daß ihre Mittelpunkte M_1, M_2 auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und D liegen. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_1 mit der Geraden durch A und M_1 hat, sei B. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_2 mit der Geraden durch A und M_2 hat, sei C.
a) Weise nach, daß unter diesen Voraussetzungen stets der Punkt D auf der Geraden g durch B und C liegen muß!
b) Stelle eine Vermutung über die gegenseitige Lage der Geraden g und der Geraden h durch M_1, M_2 auf! Beweise deine Vermutung!

290814 Zu jeder sechsstelligen natürlichen Zahl n, deren Einer-Ziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl n' bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Anschließend kann man die Zahl $n + n'$ berechnen.
a) Bilde einige Beispiele! Stelle fest, ob es eine Primzahl gibt, durch die in deinen Beispielen die Zahl $n + n'$ teilbar ist! Äußere eine Vermutung!
b) Versuche, deine Vermutung zu beweisen!
c) Jetzt sei k eine beliebige gerade natürliche Zahl größer als Null. Auch zu jeder k-stelligen natürlichen Zahl n, deren Einerziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt.
Gilt für $n + n'$ dann auch eine entsprechende Aussage wie in a), b)?

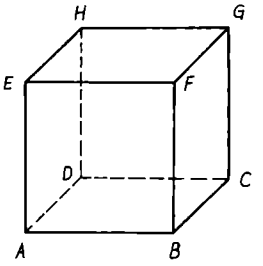
Olympiadeklasse 9

290911 Für das Quadrieren von zweistelligen Zahlen, die mit der Ziffer 5 enden, gibt es folgende einfache Regel:
Man multipliziere die Ziffer an der Zehnerstelle mit derjenigen Zahl, die um 1 größer ist, und schreibe hinter das Produkt die Ziffern 25.
Beispielsweise zur Berechnung von 25^2 führt die Regel wegen $2 \cdot 3 = 6$ auf das Ergebnis 625.
Beweisen Sie diese Regel!

290912 Gibt es unter allen fünfstelligen Zahlen, die sich unter Verwendung genau der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 schreiben lassen, eine Primzahl?

290913 Bei einem Abzählspiel stehen 11 Kinder in einem Kreis. Eines dieser Kinder sagt den Abzählvers auf; dabei wird im Uhrzeigersinn bei jeder Silbe ein Kind weiter gezählt. Auch der Spieler, der den Abzählvers aufsagt, wird in das Abzählen einbezogen. Der Abzählvers hat 15 Silben. Das Kind, auf das die letzte Silbe trifft, verläßt den Kreis; beim nachfolgenden Kind wird das Abzählen wieder mit dem Anfang des Abzählverses fortgesetzt. Dieses Abzählen und Ausscheiden erfolgt so lange, bis nur noch ein Spieler im Kreis ist; dieser Spieler hat gewonnen.
a) Bei welchem Kind muß der abzählende Spieler beginnen, wenn er selbst gewinnen will? (Um die Antwort zu formulieren, numeriere man die Kinder und gebe etwa dem abzählenden Spieler die Nummer 1.)
b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem (Klein-)Computer zu arbeiten, sollten Sie ein Programm schreiben, mit dem sich Aufgabe a) für Abzählspiele mit k Kindern und einem Abzählvers aus s Silben lösen läßt.

290914 Die Eckpunkte eines Würfels seien wie im Bild bezeichnet.
a) Fertigen Sie mit verdoppelten Streckenlängen, aber gleichen Winkeln eine weitere Zeichnung an, die zunächst nur die Eckpunkte des Würfels wiedergibt! Zeichnen Sie nun die Dreiecksflächen BHA, BHC, BHD, BHE, BHF und BHG (durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten) ein! Berücksichtigen Sie dabei die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch mindestens eine davorliegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden! Die Seitenflächen und für die Dreiecke nicht benötigten Seitenkanten des Würfels selbst sollen nicht berücksichtigt werden. (Abschließend können Sie die Anschaulichkeit der Zeichnung noch durch Schraffur oder Farbe erhöhen.)



b) Beweisen Sie, daß die genannten Dreiecke sämtlich untereinander kongruent sind!

Olympiadeklasse 10

291011 Geben Sie mindestens ein Beispiel für 1989 natürliche Zahlen an, deren Summe gleich ihrem Produkt ist! Bestätigen Sie durch Berechnung der Summe und des Produktes die geforderte Gleichung!

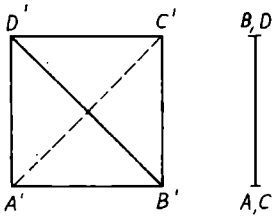
291012 Jens gibt in seinen Taschenrechner eine positive Zahl A ein und wendet dann folgenden Ablauf von Rechenoperationen an: Addition von 1, aus dem Ergebnis Ziehen der Quadratwurzel.
Nun wiederholt er denselben Ablauf von Rechenoperationen mehrere Male. Er beobachtet, daß nach genügend häufiger Wiederholung das Ergebnis auf einem

Zahlenwert Z „stehenbleibt", d. h., daß der Ablauf, auf Z angewandt, wieder Z ergibt (oder sich nur um einen – durch das interne Runden des Rechners entstandenen – sehr kleinen Betrag von Z unterscheidet).
a) Beweisen Sie, daß aus jeder positiven Zahl A, für die diese Beobachtung zutrifft, dieselbe Zahl Z entstehen muß, unabhängig von der Ausgangszahl A!
b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem (Klein-)Computer zu arbeiten, sollten Sie mit einem geeigneten Programm die in a) zu beweisende Behauptung für die Anfangswerte $A = 1, 2, \ldots, 10$ überprüfen.

291013 Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Auf einem Spielbrett sind 14 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.
Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus. Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um 4 Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um 2 Schritte. Werfen sie aber die gleiche Augenzahl, so setzt jeder seinen Stein um 3 Schritte vorwärts. Dieses Würfeln und Voransetzen beider Steine gilt als ein „Zug". Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, daß ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt). Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines „Zuges" der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht. Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht. Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.
Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von „Zügen", aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann? Begründen Sie Ihre Antwort!

291014 Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper $ABCD$ in senkrechter Eintafelprojektion dar.

Projektion: Höhenmaßstab:



Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Der Abstand der Punkte A, C von den Punkten B, D im Höhenmaßstab betrage ebenfalls a.
Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen $V(ABCD)$ des dargestellten Körpers!

Olympiadeklassen 11/12

291211 Man ermittle die Anzahl aller natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:
(1) Die dekadische Zifferndarstellung von z besteht aus fünf paarweise verschiedenen Ziffern.
(2) Die erste und die letzte Ziffer darin sind von 0 verschieden.
(3) Ist z' diejenige Zahl, deren Zifferndarstellung aus der von 7 durch Umkehrung der Reihenfolge entsteht, so besteht die Zifferndarstellung der Zahl $z + z'$ aus sämtlich einander gleichen Ziffern.

291212 Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem

$$x^3 + y^3 = 7 \quad (1)$$
$$x + xy + y = -1 \quad (2)$$

erfüllen.

291213 In jedem Dreieck ABC zerlegt die Mittelsenkrechte der Seite AB die Fläche dieses Dreiecks in zwei Teilflächen, die so mit T_1, T_2 bezeichnet seien, daß A in T_1 und B in T_2 liegt. Der Flächeninhalt von T_1 sei F_1, der von T_2 sei F_2.
Man ermittle unter allen Dreiecken ABC, die rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C sind, genau diejenigen, für die das Verhältnis $k = F_2 : F_1$ ganzzahlig ist.

291214 Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei f_n diejenige Funktion, die für alle reellen $x \neq 0$ durch

$$f_n(x) = \frac{1-x}{x} + \frac{2^2-2x}{x} + \frac{3^2-3x}{x} + \ldots + \frac{n^2-nx}{x}$$

definiert ist.
a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4!
b) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ hat die Funktion f_n genau eine Nullstelle! Geben Sie diese Nullstelle in Abhängigkeit von n an!
c) Beweisen Sie, daß es eine natürliche Zahl n gibt, mit der die Nullstelle der Funktion f_n größer als 100 ist! Ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n!

Zweimal Logik

In Heft 5/1986 wurde das Spiel „Die Barrikade" vorgestellt. Inzwischen kann dieses und ein weiteres Schiebespiel in unseren Spielwarenläden erworben werden. Der VEB Kamenzer Spielwaren hat sie unter der Bezeichnung „Logik 1" und „Logik 2" hergestellt, sie kosten 3,90 M. In der Spielanleitung von „Logik 1" ist gegenüber der Veröffentlichung in der „alpha" eine etwas geänderte Ausgangsstellung angegeben und eine andere Endstellung gesucht.
Eine mögliche Lösung findet man ebenfalls dort. Natürlich sind bei diesem Spiel die verschiedensten Konstellationen denkbar, dadurch wird es gerade so interessant. Übrigens, wer weitere Schiebepuzzle kennenlernen und vielleicht auch nachbauen will, schaue nach bei: R. Thiele, Die gefesselte Zeit, Urania-Verlag, 3. Auflage 1986.

W. Schmidt, Greifswald

Eine interessante Multiplikation

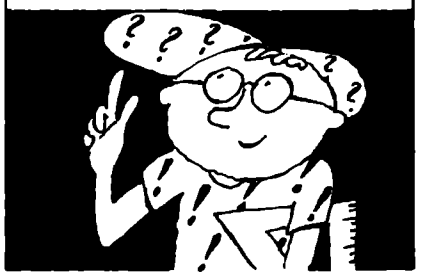
Die Galla sind ein in Nordostafrika lebendes Volk, das vorwiegend Viehzucht betreibt. Bei ihnen rechnet man Multiplikationsaufgaben mit natürlichen Zahlen auf uns ungewohnte Weise. Es werden drei Beispiele vorgestellt und anschließend erläutert.

64 · 17 = ?		
~~32 · 34~~		
~~16 · 68~~		
~~8 · 136~~		
~~4 · 272~~		
~~2 · 544~~		
1 · 1088		
64 · 17 = 1088		
46 · 27 = ?	38 · 31 = ?	
23 · 54	19 · 62	
11 · 108	9 · 124	
5 · 216	~~4 · 248~~	
~~2 · 432~~	~~2 · 496~~	
1 · 864	1 · 992	
46 · 27 = 1242	38 · 31 = 1178	

Der erste Faktor wird stets halbiert, der zweite Faktor verdoppelt. Solange diese Halbierung ohne Rest ausführbar ist, ändert das Produkt den Wert nicht; das davor stehende Produkt wird deshalb gestrichen. Wird aber bei diesem Vorgehen der erste Faktor einmal ungerade, ist er also nicht durch zwei ohne Rest teilbar, so wird beim nächsten Schritt (ohne Rücksicht auf den Divisionsrest) der um eins verminderte erste Faktor halbiert, der zweite verdoppelt, das voranstehende Produkt jedoch nicht durchgestrichen. Die Summe aus allen auf diese Weise nicht gestrichenen zweiten Faktoren ist dann das gesuchte Produkt.
Die Richtigkeit dieser Multiplikationsweise ist leicht einzusehen. Bei jedem Produkt mit ungeradem ersten Faktor wird die Division nicht vollständig ausgeführt (es verbleibt ein Rest 1), so daß der Betrag des zweiten Faktors genau einmal fehlen würde, wenn er nicht durch Stehenlassen und späteres Addieren in das Gesamtergebnis eingehen würde.
Dieses einfache, aber geniale Vorgehen beim Multiplizieren zweier natürlicher Zahlen zeigt, daß auch Völker mit geringen mathematischen Kenntnissen erfolgreich praktische Aufgaben zu lösen wußten.

Th. Scholl

Lösungen



Lösungen zu:
Olympische Kryptogramme
Heft 3/89

▲1▲ 9035136 : 2112 = 4278
▲2▲ keine Lösung
▲3▲ 22 Lösungen, z. B. 983 + 45 = 1028
▲4▲ 17 Lösungen, z. B. 142 · 57 = 8094

Lösungen zu:
Aufgaben über ein Dosierbesteck
Heft 3/89

▲1▲ Laut Hebelgesetz, und weil die Gewichtskraft das Produkt aus der Masse des Körpers und der Erdbeschleunigung ist, gilt:

$m(a - 10{,}3\text{ cm}) = 15\text{ g} \cdot 10{,}3\text{ cm}$
$m(10{,}3\text{ cm} + 8{,}5\text{ cm} - a) = 50\text{ g} \cdot 5{,}4\text{ cm}$

Durch Addieren der linken und rechten Seiten beider Gleichungen folgt:

$m \cdot 8{,}5\text{ cm} = 15\text{ g} \cdot 10{,}3\text{ cm} + 50\text{ g} \cdot 5{,}4\text{ cm}$

$$m = \frac{15\text{ g} \cdot 10{,}3\text{ cm} + 50\text{ g} \cdot 5{,}4\text{ cm}}{8{,}5\text{ cm}} \approx 49{,}94\text{ g}$$

Damit ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$a = \frac{15\text{ g} \cdot 10{,}3\text{ cm}}{m} + 10{,}3\text{ cm} \approx 13{,}39\text{ cm}.$$

▲2▲ Laut Hebelgesetz muß gelten:

$20\text{ g} \cdot x = m(10{,}3\text{ cm} + 8{,}5\text{ cm} + 5{,}4\text{ cm} - a - x)$
$(20\text{ g} + m)\,x = m(10{,}3\text{ cm} + 8{,}5\text{ cm} - a)$

$$x = \frac{m(10{,}3\text{ cm} + 8{,}5\text{ cm} + 5{,}4\text{ cm} - a)}{20\text{ g} + m} \approx 7{,}72\text{ cm}.$$

▲3▲ Mit der Formel

$$V = \frac{h}{12}(d^2 + dD + D^2)$$ ergibt sich

$V_{\text{kleiner Becher}} \approx 51{,}31\text{ cm}^3$
und $V_{\text{großer Becher}} \approx 103{,}8\text{ cm}^3$.
Der kleine Becher faßt also

$$\frac{50\text{ g} \cdot 51{,}31\text{ cm}^3}{103{,}8\text{ cm}^3} \approx 24{,}7\text{ g}.$$

▲4▲ $\dfrac{15\text{ g} \cdot 10{,}25\text{ cm} + 50\text{ g} \cdot 5{,}35\text{ cm}}{8{,}55\text{ cm}}$

$$\leqq m \leqq \frac{15\text{ g} \cdot 5{,}45\text{ cm} + 50\text{ g} \cdot 5{,}45\text{ cm}}{8{,}45\text{ cm}}$$

$49{,}26\ldots\text{ g} \leqq m \leqq 50{,}62\ldots\text{ g}$

$$\frac{15\text{ g} \cdot 10{,}25\text{ cm}}{50{,}62\ldots\text{ g}} + 10{,}25\text{ cm} \leqq a \leqq \frac{15\text{ g} \cdot 10{,}35\text{ cm}}{49{,}26\ldots\text{ g}} + 10{,}35\text{ cm}$$

$13{,}28\ldots\text{ cm} \leqq a \leqq 13{,}50\ldots\text{ cm}$.

▲5▲ Man verschiebt den Waagebalken so lange auf der Schneide, bis er im Gleichgewicht ist. Dann befindet sich der Schwerpunkt S senkrecht unter der Drehachse.

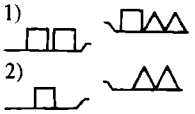
▲6▲ Damit sich der Schwerpunkt des eingefüllten PSM auf der Becherachse befindet.

Lösung zu:
Ein Wägestück ist zu leicht

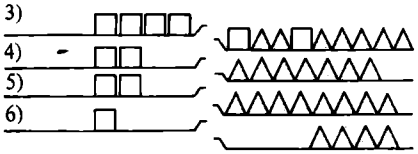
Bei der ersten Wägung legt er auf die linke Waagschale die drei Wägestücke mit den Markierungen 1 und 2 und auf die rechte Waagschale das Wägestück mit der Ziffer 5. Geht dabei die rechte Waagschale nach oben, so ist das Wägestück mit der eingeschlagenen 5 das gesuchte. In diesem Fall ist eine zweite Wägung überflüssig.
Geht die linke Waagschale nach oben, so ist eines der Wägstücke mit den Ziffern 1 oder 2 das gesuchte. In diesem Fall legt er bei der zweiten Wägung auf jede Waagschale eines der Wägestücke mit der Ziffer 2. Ist dabei die Waage im Gleichgewicht, so hat das Wägestück mit der eingeschlagenen 1 weniger als 1 g Masse. Ist die Waage nicht im Gleichgewicht, so ist das gesuchte Wägestück das auf der oben befindlichen Waagschale. Ist schließlich bei der ersten Wägung die Waage im Gleichgewicht, so befindet sich das gesuchte Wägestück unter den drei mit den Ziffern 10 oder 20. Analog wie oben wird mit der zweiten Wägung herausgefunden, welches dieser drei weniger Masse besitzt als seine Beschriftung anzeigt.

Ohne Wägestücke!

Wegen I und weil die Masse einer Kugel ein Vielfaches der Masse eines Kegels ist, ist auch die Masse eines Würfels ein Vielfaches der Masse eines Kegels. Mittels I folgt aus II schrittweise:



Mittels I folgt aus III schrittweise:



Aus 2 und 6 ergibt sich, daß drei Kegel die gleiche Masse haben wie ein Würfel und aus I, daß fünf Kegel die gleiche Masse haben wie eine Kugel.

Lösungen zu:
Einiges über das Sehnenviereck
Heft 3/89

▲2▲ $\alpha = 65°$; $\beta = 50°$;
$\gamma = 25° + 90° = 115°$
▲4▲ $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle BDC$
(Peripheriewinkel über $\overset{\frown}{BC}$)
$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle DBA$
(Peripheriewinkel über $\overset{\frown}{AD}$)
▲5▲ Drachenviereck; Höhensatz
▲6▲ Kathetensatz
▲7▲ Satz des Pythagoras
▲8▲ $e^2 = ac + b^2$
▲9▲ $e = 7$ cm
▲10▲ u. a. $\sphericalangle ACB = 45°$; $\sphericalangle CBD = 25°$;
Winkel bei S 70° bzw. 110°.
▲11▲ $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle BDC$.

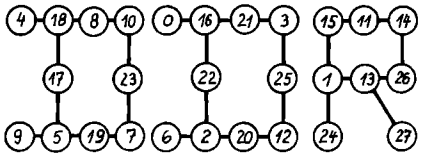
Lösung zur Schachecke

1. f3+ g:f3, 2. e:d3+ c:d3, 3. Lf5+ e:f5, 4. Te6+ d:e6, 5. Td4+ c:d4, 6. a8L+ Dd5, 7. L:d5+ e:d5, 8. Sf6+ g:f6, 9. De5+ f:e5, 10. Sg5 matt.
Möglich ist auch die Zugumstellung 5. Sf6+ g:f6, 6. Td4+ c:d4, 7. a8D+ Dd5, 8. Da:d5+ e:d5.

Lösungen zu:
Ein mathematischer Blumenstrauß

DDR-40

Das Bild zeigt eine mögliche Eintragung:



Von Bezirk zu Bezirk

Es sind eingetragen v. l. n. r.:
Schwerin (2. Zeile), Dresden (6. Z.), Erfurt (8. Z.), Leipzig (9. Z.), Potsdam (9. Z.);
v. r. n. l.: Neubrandenburg (1. Z.), Suhl (2. Z.), Frankfurt/Oder (3. Z.), Karl-Marx-Stadt (4. Z.), Gera (5. Z.), Magdeburg (7. Z.), Cottbus (8. Z.);
v. o. n. u.: Halle (1. Spalte), Rostock (2. Sp.), Berlin (11. Sp.).
Die verbleibenden Buchstaben ergeben den Namen der gesuchten Zeitschrift: MIKROPROZESSORTECHNIK (MP).

Geographisches

Man erhält für die Flußlängen ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem, das man in geeigneter Reihenfolge schrittweise lösen kann:
Elbe: 1165 km (nach (1));
Bode: 169 km (nach (4));
Peene: 156 km (nach (2));
Saale: 427 km (nach (6));
Oder: 861 km (nach (3));
Havel: 343 km (nach (7));
Spree: 382 km (nach (5));
Mulde: 124 km (nach (8)).
(Zahlenangaben nach BI-Handlexikon in zwei Bänden, Leipzig 1982)

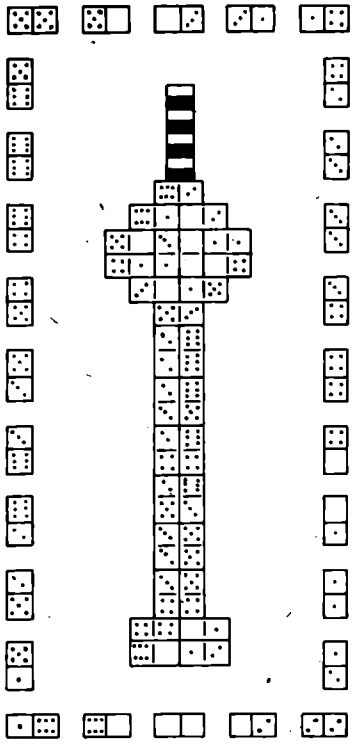
Von Stadt zu Stadt

Es waren folgende Städtenamen (in der Reihenfolge des Textes) versteckt:
Waren, Aue, Thale, Bergen, Forst, Artern, Freital, Sonneberg, Wolfen, Barth, Torgau, Zeitz, Dresden, Leipzig, Altenburg, Burg, Querfurt, Erfurt, Eisenach, Borna, Wolgast, Halle, Wismar, Rostock, Güstrow, Merseburg, Grimma, Calau, Jena, Bernau, Oschatz, Werdau, Greiz, Riesa, Schwerin, Aken, Weißwasser, Berlin, Wurzen, Gera.

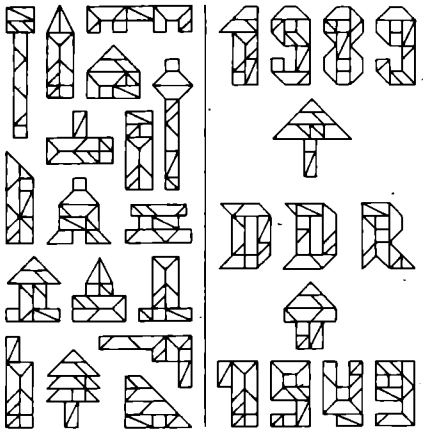
Ein grundlegendes Recht

1. Rechteck, 2. Exponent, 3. Computer, 4. Hyperbel, 5. Tangente, 6. Astroide, 7. Ursprung, 8. Funktion, 9. Böschung, 10. Integral, 11. Lösungen, 12. Division, 13. Umlegung, 14. Neunzehn, 15. Gradient.
Die Anfangsbuchstaben ergeben:
RECHT AUF BILDUNG.

Fernsehturm-Domino
Das Bild zeigt eine Legemöglichkeit:



Erbauliche Ansichten
Das Bild zeigt je eine Legemöglichkeit:



Lösungen zu: Ein Hobby-mathematiker stellt sich vor

▲1▲ Die gesuchten Zahlen sind 14091; 32208; 50325; 62403; 80520.

▲2▲ Die Milchmenge ist jährlich um 39 kg zu steigern.

▲3▲ Wegen der Teilbarkeitsregeln ist die Summe der jeweils letzten zwei Ziffern aller Potenzen der Aufgabe zu ermitteln. Diese endet auf 50. Bei Division durch 4 ergibt sich der Rest 2.

▲4▲ a) Es gibt keine Lösung.
b) $2763 + 1841 = 4604$;
$2863 + 1741 = 4604$; $1832 + 5475 = 7307$;
$1432 + 5875 = 7307$; $2613 + 4574 = 7187$;
$2513 + 4674 = 7187$; $5716 + 2482 = 8198$;
$5416 + 2782 = 8198$; $6847 + 2592 = 9439$;
$6547 + 2892 = 9439$; $5816 + 3293 = 9109$;
$5216 + 3893 = 9109$; $3814 + 5295 = 9109$;
$3214 + 5895 = 9109$.

▲5▲ Auf dem letzten Feld sind 8388608 Weizenkörner. Insgesamt liegen 16777215 Körner auf dem Brett. Das entspricht dem Ertrag einer Anbaufläche von 0,14 Hektar.

▲6▲ Es handelt sich um Kombinationen ohne Wiederholung zur 1. bis 3. Klasse. Es ergeben sich 129 verschiedene Kombinationen.

Lösungen zu: Überall Näherungswerte

▲1▲ Genaue Werte: a), f), h), k)
Näherungswerte: b), c), d), e), g), i)

▲2▲ Zahnpasta:
$46\text{ g} \leqq m \leqq 54\text{ g}$, 46 g, 54 g
Waschpulver:
$860\text{ g} \leqq m \leqq 940\text{ g}$, 860 g, 940 g
Tafelbutter:
$250\text{ g} \pm 4\text{ g}$, $246\text{ g} \leqq m \leqq 254\text{ g}$

▲3▲ b) $2,\ 2{,}65,\ 2{,}75,\ 2{,}65 \leqq x_w \leqq 2{,}75$
c) $2,\ 10{,}5,\ 11{,}5,\ 10{,}5 \leqq x_w \leqq 11{,}5$
d) $11{,}0,\ 11{,}05,\ 10{,}95 \leqq x_w \leqq 11{,}05$
e) 11,00, 4, 10,995, 11,005

▲4▲

Möglicher Überschlag	genaues Resultat
a) $1000 \cdot 500 = 500\,000$	691 782
b) $7000 \cdot 200 = 1\,400\,000$	1 345 192
c) $9000 : 30 = 300$	265

▲5▲
a) z. B.: $7000 \cdot 150 \leqq p \leqq 7500 \cdot 150$
$1\,050\,000 \leqq p \leqq 1\,500\,000$
b) z. B.: $8000 : 40 \leqq q \leqq 9300 : 30$
$200 \leqq q \leqq 310$

▲6▲ a, b, d, f

Lösungen zu: Acht mathematische Knobelaufgaben

▲1▲
$1 + 9 + 49 + 40 = 1 + 9 + 89$, $(\ldots = 99)$
$1 + 94 + 9 + 4 + 0 = 19 + 89$, $(\ldots = 108)$.

▲2▲ Aus $N + N + N = 45$ folgt $N = 15$,
aus $N + N = P$ folgt $P = 30$,
aus $N + P = I$ folgt $I = 45$,
aus $N \cdot P = R$ folgt $R = 450$,
aus $R + R + R = E$ folgt $E = 1350$,
aus $I + N : N + I : N + I : N = O$ folgt
$O = 54$. Daher gilt
$P + I + O + N + I + E + R$
$= 30 + 45 + 54 + 15 + 45 + 1350 + 450$
$= 1989$.

▲3▲ Angenommen in Klasse 5a von Susanne sind x Schüler; dann sind $(x - 1)$ Schüler in Klasse 5b und $(x + 1)$ Schüler in Klasse 5c. Zusammen sind das $2 \cdot x$ Schüler. Nun gilt $2 \cdot x = 58$, also $x = 29$. In Susannes Klasse sind 29 Schüler.

▲4▲ Die vierte Zahl lautet
a) 4455, b) 4564, c) 4123, d) 4456.

▲5▲ $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 1 + 1 + 2 + 4 = 8$.

▲6▲ Beispiel: $(359 + 593 + 935) : (3 + 5 + 9) = 1887 : 17 = 111$.
Allgemeine Lösung: Die drei Zahlen seien $\overline{abc}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ in dezimaler Schreibweise. Dann gilt:
$100 \cdot (a + b + c) + 10 \cdot (a + b + c) + 1 \cdot (a + b + c) = 111 \cdot (a + b + c)$.
Wegen $a + b + c \neq 0$ ist $111 \cdot (a + b + c) : (a + b + c) = 111$.
Das Ergebnis lautet also stets 111.

▲7▲ Die kleinste gewürfelte Summe ist $1 + 7 = 8$, die größte ist $6 + 12 = 18$. Die dazwischenliegenden Summen sind
(z. B.) $n + 7$, $n = 2, 3, 4, 5, 6$ und
$6 + m$, $m = 8, 9, 10, 11$.
Es können also 11 verschiedene Summen der Augenzahlen gewürfelt werden.

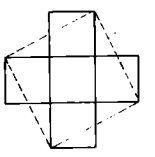
▲8▲ $A = 5$, $U = 1$, $F = 1$, $G = 2$,
$E = 3$, $P = 2$, $S = 5$, $T = 4$, $M = 3$,
$H = 2$, $I = 1$, $O = 1$.
Das Produkt lautet dann 7200.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Magischer Stern
Schreibe in die leeren Kreise Zahlen zwischen 94 und 107, so daß man stets die Summe 402 erhält, wenn man die Zahlen addiert, die in den Kreisen auf einer Geraden stehen.
Lösung:
$A = 97$, $B = 103$, $C = 99$, $D = 104$,
$E = 96$, $F = 101$, $G = 106$, $H = 105$,
$I = 100$, $J = 102$, $K = 95$, $L = 98$.

▲2▲ Bestimmt die kleinste natürliche Zahl, welche auf 56 endet, durch 56 teilbar ist und die Quersumme 56 besitzt!
Lösung: Laut Aufgabe hat die gesuchte
(1) möglichst kleine natürliche Zahl z
(2) die Form $z = 56 \cdot x$,
(3) eine auf 56 endende Dezimalstellung,
(4) die Quersumme 56.
Aus (2) folgt, weil $56 = 8 \cdot 7$ ist,
(5) $8 \mid z$ und (6) $7 \mid z$.
Wegen (1) bis (5) und auf Grund der Teilbarkeitsregel für 8 endet die Dezimaldarstellung von z auf 856 und weiterhin wegen (1) bis (6) auf $9856 = 56 \cdot 176 = y$.
Da $9 + 8 + 5 + 6 = 28$ ist, müssen die noch fehlenden Stellen der Dezimaldarstellung von z die Quersumme $56 - 28 = 28$ ergeben. (Folgerung aus (4).)
Kleinstmögliche Zahl mit dieser Quersumme ist 1999.
Da aber $56 \mid 19\,999\,856$ und $56 \mid y$ ist und weil (1) bis (6) gelten muß, prüfen wir, ob eine der Zahlen 2899, 2989, 2998 ohne Rest durch 7 teilbar ist. Das trifft nur bei $2989 = 7 \cdot 427$ zu.
Da $29\,899\,856 = 56 \cdot 533\,926$ gilt, ist, wie die Herleitung zeigt, $z = 19\,899\,856$ die gesuchte natürliche Zahl.

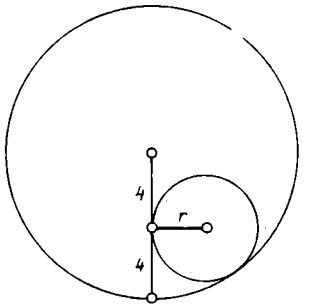
▲3▲
Verwandle das Kreuz in ein Quadrat
Die Zeichnung zeigt ein Kreuz mit vier gleichen Armen. Teile mit vier Geraden das Kreuz so in fünf Teile, daß du die Teile neu in Form eines Quadrates ordnen kannst.
Hinweis: Vier der Teile sollen kongruent sein.
Lösung:



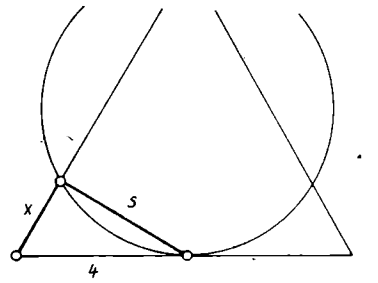
Gut gedacht ist halb gelöst

Ermittelt die jeweils gesuchten Größen, indem ihr eure Kenntnisse über kongruente Dreiecke, Sätze am Kreis und die Satzgruppe des Pythagoras nutzt.

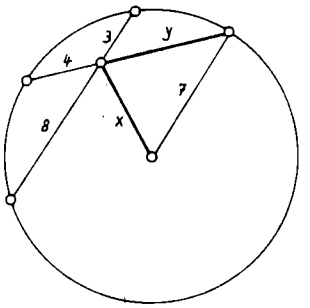
Ch. Werge



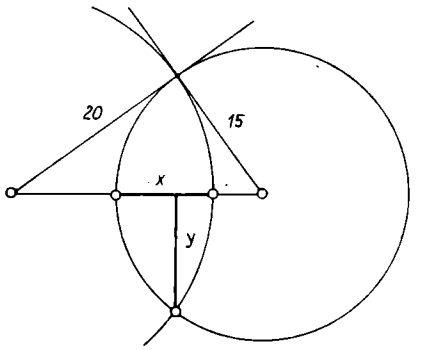
1 ges.: r



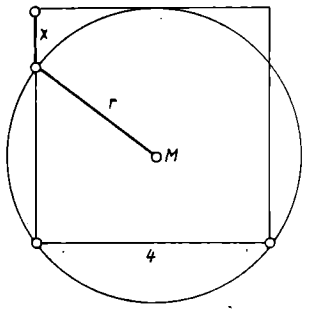
2 ges.: x, s



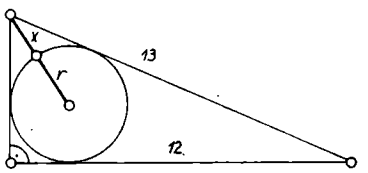
3 ges.: x, y



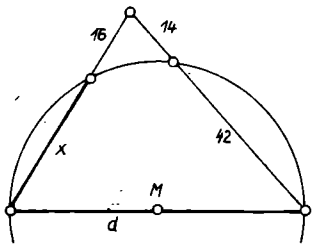
4 ges.: x, y



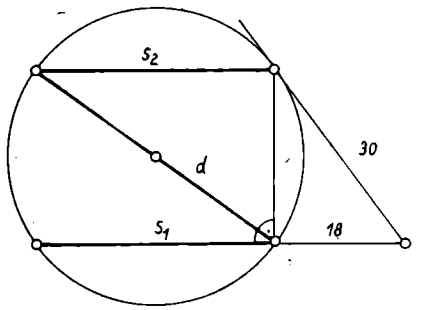
5 ges.: r, x



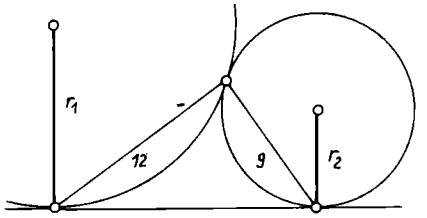
6 ges.: r, x



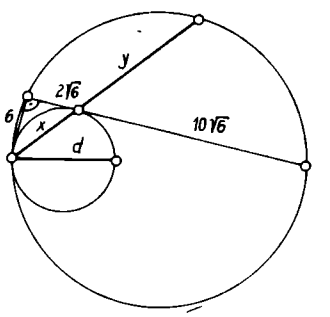
7 ges.: d, x



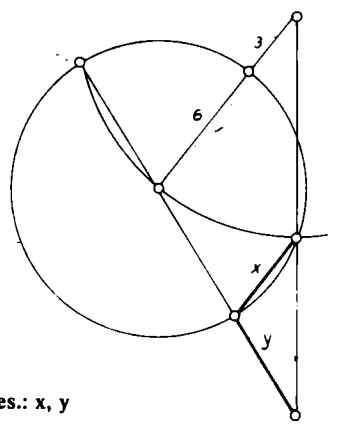
8 ges.: s_1, s_2, d



9 ges.: r_1, r_2



10 ges.: d, x, y



11 ges.: x, y

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 23 (1989) 4 · Seiten 73 bis 96