Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

OJM
DDR

10 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
5. Jahrgang 1971
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

2

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import BmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Eigenfoto H.-U. Schwarz, Jena; H. Richter, Jena; D. Bauer, Leipzig (alle S. 25/26); Eigenfoto V. Nikolajewa-Tereschkowa, Moskau; Zentralbild (S. 27/28); J. Lehmann, Leipzig; „Freiheit“ Wittenberg; Eigenfoto B. Worel, Neubrandenburg (S. 30/31); J. Lehmann, ADN (S. 36); Briefmarkenentwürfe Klunker, Herzberg (S. 43);
Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 25. Januar 1971

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

10 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Hans-Ulrich Schwarz:

Ich war Teilnehmer der I. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

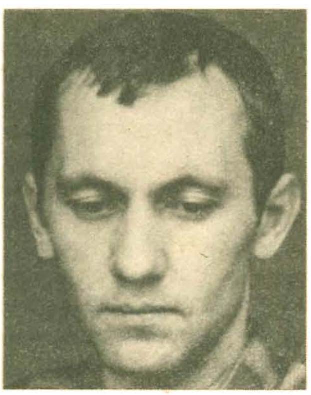
(27. 4. 1962 — Olympiadeklasse 10, EOS)

In diesem Jahr wird die *X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR durchgeführt.* Grund also, ein bescheidenes Jubiläum zu feiern bzw. einen Blick zurück zu tun. An meiner Entwicklung vermag man zu erkennen, wie bedeutungsvoll eine Teilnahme und ein gutes Abschneiden sein können.

Geboren 1946 in Achelstädt, einem kleinen Dorf des Kreises Arnstadt, eingeschult in Isserstedt bei Jena, umgeschult an die Westschule in Jena, delegiert an die EOS „Grete Unrein" in Jena, hatte ich bis in die 10. Klasse kaum mehr mit Mathematik zu tun als die übrigen Schüler meines Jahrgangs. Es sei denn, man hielte das Verfahren meines Vaters, mich als „Versuchskaninchen" bei der Erprobung von Mathematikarbeiten für seine Klasse einzusetzen, für eine Förderung. Arbeitsgemeinschaften, Spitzenzirkel, Spezialistenlehrgänge usw. gab es damals noch nicht.

Mein 1. Platz beim Kreisausscheid der *I. Olympiade Junger Mathematiker der DDR* in der Klassenstufe 10 war deshalb eine Überraschung auch für mich. Anfangs etwas tastend und sporadisch, später, nachdem ich auch beim Bezirksausscheid und beim DDR-Ausscheid Bester der Klassenstufe geworden war, immer bewußter und intensiver begann ich, mich mit der im allgemeinen als spröde verschrieenen Mathematik zu beschäftigen. Praktisch im Selbststudium arbeitete ich etliche mathematische Werke durch. Verständnisvolle Unterstützung fand ich bei meinen Lehrern und meinen Eltern.

Im folgenden Jahr beteiligte ich mich in der Klassenstufe 12, obwohl ich erst die 11. Klasse besuchte. Dies geschah nicht aus Überheblichkeit, aber ein DDR-Ausscheid wurde damals nur für die Klassen 10 und 12 durchgeführt. Ich hoffte, so unter „ferner liefen" über die einzelnen Stufen bis zum DDR-Ausscheid zu kommen. Die dabei gewonnenen Erfahrungen sollten mir dann im nächsten Jahr von Nutzen sein. Daß es anders kam, daß ich nicht nur auf Kreis- und Bezirksebene, sondern auch in Berlin den 1. Platz belegen würde, das hat niemand vorausgesehen. Die Freude war natürlich riesengroß. Von allen Seiten kamen Gratulationen, zahlreiche Zeitungen brachten mein Bild mit entsprechenden Würdigungen. Ich gehörte auch zu der Mannschaft, die unsere Republik bei der V. IMO in der VR Polen vertrat. Da die mathematischen Wettbewerbe damals bei uns keine solchen Traditionen besaßen wie beispielsweise in der Ungarischen VR oder der UdSSR, war es bereits ein Erfolg, als wir mit drei 3. Preisen zurückkehrten. Die Tage in der VR Polen waren natürlich erlebnisreich. Interessant war auch das Zusammentreffen mit *Jungen Mathematikern* der sozialistischen Länder. Mit einigen schloß ich enge Freundschaft, stehe noch in brieflicher Verbindung, und es kam auch zu gegenseitigen Besuchen.



Vor 10 Jahren: Hans-Ulrich Schwarz nimmt die Urkunde: 1. Preis in der Klassenstufe 10, EOS (Siegerfeier in Jena) entgegen
Heute: Dr. Hans-Ulrich Schwarz, Diplom-Mathematiker an der Friedrich-Schiller-Universität, z. Z. Ehrendienst in der NVA

Selbstverständlich beteiligte ich mich als Schüler der 12. Klasse an der *III. Olympiade Junger Mathematiker der DDR.* Wieder belegte ich in allen drei Stufen den 1. Platz. An der IMO in Moskau konnte ich aber leider nicht teilnehmen, denn ich war inzwischen Student geworden. Einer Anregung der *Jungen Welt* folgend, hatte sich der damalige Direktor des Mathematischen Institutes der Friedrich-Schiller-Universität in Jena, Herr Professor Dr. *Kerstan,* entschlossen, mich als Mathematikstudent zu immatrikulieren, obwohl ich noch kein Abitur besaß. Dieses Beispiel hat meines Wissens nicht viel Nachfolger gefunden. Damit ich den Stoff des ersten Semesters besser aufholen konnte, drückte mir Prof. Dr. *Kerstan* den „Fichtenholz" in der Ursprache in die Hand. Dadurch besserten sich nicht nur meine mathematischen, sondern auch meine Russisch-Kenntnisse. Natürlich, leicht war es nicht, mit den andren gleichzuziehen und wieder zur Spitze zu gehören. Aber ich schaffte es, und das „Karl-Marx-Stipendium" war mein Lohn.

Von den drei Spezialrichtungen Kybernetik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Funktionsanalysis, die in Jena zur Wahl standen, gefiel mir die letzte am besten. Unter der Anleitung von Prof. Dr. *Pietsch* kam ich hier zum erstenmal mit Forschungsthemen in Berührung. 1968 fertigte ich meine Diplomarbeit über *Normideale* an. In meinem Studienjahr war auch *Lutz Bernhardt,* der 1963 ebenfalls Mitglied der DDR-Mannschaft bei der IMO in der VR Polen war. Er hatte sich dann für die Spezialrichtung Kybernetik entschieden. Im 4. Studienjahr gründete er einen Studentenzirkel mit dem Ziel, ein Programm für den Rechenautomaten ZRA 1 aufzustellen, mit dem man Stundenpläne aufstellen kann. Das Programm sollte den Verantwortlichen die verzwickte und langwierige Puzzelei abnehmen und optimale Lösungen bringen. Das ist uns auch recht gut gelungen. Nicht nur die Arbeit in diesem Zirkel machte uns allen Spaß, eine Studienreise nach Grusinien, die wir mit dem *Universitätspreis* als Auszeichnung erhielten, war ein unvergeßliches Erlebnis.

Nach Abschluß des Studiums arbeitete ich in Jena an der Sektion Mathematik als Assistent. Im Herbst 1969 trat ich meinen Ehrendienst bei der NVA an. In meiner Freizeit konnte ich die abschließenden Arbeiten an meiner Dissertation durchführen. Zur Verteidigung im Juni 1970 erhielt ich von meiner Einheit Sonderurlaub. Meine Doktorarbeit handelt ebenfalls von Normidealen. Nach meiner Entlassung werde ich wieder an der Universität in Jena tätig sein.
Zum Abschluß eine Aufgabe (sie ist vielleicht typisch für mein Fachgebiet, sie läßt erkennen, wie auch hier elementare Hilfsmittel angewendet werden können):

9▲691 Man beweise für beliebige positive Zahlen a, b, p die Ungleichung

$$\frac{2^{p+1}\,ab}{\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}\right)^p} \leq a+b.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt für $a=b$.)

Hans-Ulrich Schwarz

Peter Beckmann:

Ich war Teilnehmer der I. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
(27. 4. 1962 — Olympiadeklasse 10, OS)

Zum zehnten Mal wetteifern Tausende Schüler unserer Republik bei der Mathematik-Olympiade, ermitteln die Besten der Schulen, Kreise, Bezirke und der DDR. Ihr Wettbewerb ist spannend und auch anstrengend wie ein sportlicher. Es siegt, wer das größte Wissen und die besten Nerven hat, so wie im Sport der siegt, der die größte Kondition hat und nervlich stark ist.
Uns Teilnehmern der *I. Olympiade Junger Mathematiker der DDR* ist es nicht mehr vergönnt, unsere mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten im „sportlichen" Wettbewerb zu messen. Die weitaus meisten „Pioniere" der Mathematik-Olympiaden nutzen heute diese Fähigkeiten in der täglichen Arbeit, lösen technische, ökonomische sowie auch rein mathematische und theoretisch-physikalische Probleme, bilden Schüler und Studenten aus. Vielen half die Teilnahme an den Olympiaden bei der Berufswahl, sie studierten Mathematik. So wandte sich beispielsweise mein Interesse mehr und mehr dieser eleganten Wissenschaft zu, nachdem ich erfolgreich bei den Olympiaden mitgestritten hatte, während ich mich zuvor besonders mit Naturwissenschaften beschäftigt hatte, vor allem chemische Experimente machte und den Wunsch hatte, einmal Chemie zu studieren. Die Mathematik-Olympiade 1962 gab dabei den Ausschlag. Wie bereits im Vorjahr bei der Stadtolympiade Leipzigs hatte ich in der Stadt und im Bezirk gute Plätze belegt und erreichte völlig unerwartet beim Republikausscheid den 1. Platz der 10. Klasse für Schüler der polytechnischen Oberschule. Seitdem war es mein Wunsch, Mathematiker zu werden.
In den folgenden drei Jahren erlernte ich in einer Abiturklasse den Beruf eines Chemielaboranten. Ich nahm auch weiterhin an den Mathematik-Olympiaden teil. Zu dieser Zeit begann eine systematische Vorbereitung in Zirkeln und Lehrgängen, insbesondere auf die Bezirks- und Republikausscheide. Das in diesen Vorbereitungszirkeln Gelernte war noch in den ersten Studienjahren eine wesentliche Hilfe.
1965 begann ich schließlich ein Mathematikstudium an der Karl-Marx-Universität in Leipzig, und seit September 1970 bin ich als wissenschaftlicher Assistent an der Sektion Mathematik tätig. Dabei blieb ich mit der „Olympiade-Bewegung" verbunden, war Zirkelleiter in Mathematik-Lagern, die vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit Leipzig organisiert wurden, war Korrektor bei Bezirks- und Republik-Olympiaden und leite jetzt einen Zirkel für die besten Schüler der 10. und 11. Klassen des Bezirkes Leipzig. Ein ganzes System solcher Zirkel hat die FDJ-Organisation unserer Sektion als Jugendobjekt übernommen. Den Olympiaden und den damit verbundenen Zirkeln messen wir eine große Bedeutung bei, schließlich braucht unser Staat auch in den nächsten Jahren und Jahrzehnten viele Mathematiker, ebenso werden sich die anderen Wissenschaften immer mehr der Mathematik bedienen müssen.

Vor 10 Jahren: Peter Beckmann, 1. Preisträger der Klassenstufe 10, OS (Siegerfeier in Jena)
Heute: Diplom-Mathematiker Peter Beckmann, Karl-Marx-Universität Leipzig, bei einem Vortrag vor *Jungen Mathematikern* des Bezirks Leipzig

Euch *Jungen Mathematikern* wünsche ich viel Freude an unserer Wissenschaft und Erfolg im Mathematikunterricht und in der außerunterrichtlichen Arbeit, außerdem möchte ich Euch noch eine Aufgabe stellen:

8▲692 In einem pythagoreischen teilerfremden Zahlentripel a, b, c sei a die ungerade und b die gerade Zahl. Dann läßt sich das Tripel darstellen durch

(1) $a=pq,\ b=\frac{p^2-q^2}{2},\ c=\frac{p^2+q^2}{2}$
mit $p>q>0$,

wobei p und q teilerfremd und beide ungerade sind, oder durch

(2) $a=m^2-n^2,\ b=2mn,\ c=m^2+n^2$ mit $m>n>0$,

wobei m und n teilerfremd sind und eine der beiden Zahlen gerade ist. Man drücke nun das Paar p, q durch das zugehörige m, n aus und umgekehrt.

Peter Beckmann

Bei den Internationalen Mathematikolympiaden von Schülern der DDR errungene Preise

IMO	1. Preis	2. Preis	3. Preis
I. (1959)	—	—	—
II.	—	—	—
III.	—	—	1
IV.	—	1	—
V.	—	—	3
VI.	—	1	2
VII.	—	2	3
VIII.	3	3	—
IX.	3	3	1
X.	5	3	—
XI.	—	4	4
XII. (1970)	1	2	4

Aus dem „Mathematikbeschluß" vom 17. Dezember 1962 zitiert

„Die Olympiaden Junger Mathematiker sind ein wirksames Mittel zur Weckung des Interesses aller Schüler an der Mathematik und zur Auswahl und Förderung befähigter Schüler. Damit tragen sie wesentlich zur Verbesserung der mathematischen Bildung bei.
Die Förderung erfolgreicher Teilnehmer der mathematischen Olympiaden und anderer mathematisch befähigter Schüler ist eine gemeinsame Aufgabe der Schule und der Volksbildungsorgane, der Mathematischen Gesellschaft der DDR, der Wissenschaftler der Hoch- und Fachschulen, der wissenschaftlich-technischen Kader der Betriebe und Forschungsstätten sowie der gesellschaftlichen Organisationen."

10 Jahre Weltraumflug

„Tiefbewegt schaute ich in die für mich ungewohnte neue Welt und war bemüht, alles zu sehen und mir einzuprägen. Erstaunlich klar und kalt erblickte ich durch die Bordfenster die Sterne. Zu ihnen war es noch weit – so weit! –, und dennoch schienen sie von der Bahn des Raumschiffes „Wostok“ aus näher zu sein als von der Erde. Natürlich geht es hier nicht um einige hundert Kilometer, die im Vergleich zu den Lichtjahren, die uns von den Sternen trennen, wie ein Tropfen im Ozean sind. Vielmehr handelt es sich um das Prinzip: Der Mensch hat die Schwerkraft der Erde überwunden und ist in den Weltraum vorgestoßen.“ *J. A. Gagarin*

J. A. Gagarin vor dem Start am 12. 4. 1961

Vor 10 Jahren, am 12. April 1961, gingen die Träume und Pläne des russischen Gelehrten *Ziolkowski* in Erfüllung: *Juri Alexejewitsch Gagarin* startete an diesem Tage mit dem Raumschiff Wostok I, umkreiste als erster Mensch die Erde einmal auf einer Kreisbahn in 327 km Höhe und landete danach wieder auf der Erde.

In diesem Beitrag wollen wir uns nicht mit den Phasen des Starts, der Landung und der Kursänderung eines Raumflugkörpers beschäftigen, in denen zumindest teilweise die Raketentriebwerke arbeiten. Wir wollen jedoch die Phase des Umlaufens eines Raumflugkörpers oder Himmelskörpers um einen Zentralkörper (Erde, Mond, Sonne, Stern), in der die Raketentriebwerke nicht brennen, mittels geeigneter physikalischer Gesetze verstehen lernen. Allerdings können wir mit den Mitteln der Schulmathematik nur *Spezialfälle* der physikalisch möglichen Umläufe durchrechnen, nämlich *kreisförmige Bewegungen*.

Bei unseren Rechnungen werden Zahlenriesen und auch Zahlenzwerge eine Rolle spielen. Daß Zahlenriesen, wie 17 300 000 000 000, sich mittels einer Zehnerpotenz in der Form $1{,}73 \cdot 10^{13}$ schreiben lassen, überblicken wir. Daß sich auch Zahlenzwerge, z. B. 0,000 000 000 003 84, nach einer erweiternden Potenzdefinition in der gleichen Form schreiben lassen, wollen wir auf möglichst einfachem Wege verstehen lernen.

An der Tabelle

......

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$$
$$10^2 = 10 \cdot 10$$

lesen wir ab: Auf der linken Seite der aufgeschriebenen Gleichungen vermindert sich von Zeile zu Zeile der Potenzexponent um 1. Die Zahlen der rechten Seite entstehen in der angegebenen Reihenfolge jeweils durch Division mit 10 auseinander. Durch Beibehalten dieser Vorschrift ist die aufgeführte Tabelle wie folgt zu ergänzen:

$$10^1 = 10$$
$$10^0 = 1$$
$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$
$$10^{-2} = \frac{1}{10 \cdot 10}$$
$$10^{-3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10}$$

Für den letzten Teil der so erhaltenen Tabelle kann geschrieben werden:

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1}$$
$$10^{-2} = \frac{1}{10^2}$$
$$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$$

....

Wie für die Basis 10, so lassen sich derartige Tabellen auch für jede von 0 verschiedene reelle Zahl *a* aufstellen. Deshalb wird festgelegt:

Definition: Ist n eine beliebige natürliche Zahl und a eine von 0 verschiedene reelle Zahl, so soll gelten $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Durch diese Definition werden die Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten und von 0 verschiedener Basis erklärt. Für den oben angegebenen Zahlenzwerg gilt zunächst:

$$0{,}000\,000\,000\,003\,84 = \frac{3{,}84}{10^{12}}$$

Wegen $\frac{1}{10^{12}} = 10^{-12}$ gilt deshalb

$0{,}000\,000\,000\,003\,84 = 3{,}84 \cdot 10^{-12}$. Natürlich könnte man statt $3{,}84 \cdot 10^{-12}$ auch z. B. $38{,}4 \cdot 10^{-13}$ oder $384 \cdot 10^{-14}$ schreiben. Wir wollen jedoch vereinbaren, daß der vor der Zehnerpotenz stehende Faktor stets zwischen 1 und 10 liegen soll.

Bei physikalischen Betrachtungen spielen statt Zahlen meistens Größen eine Rolle. Um auch beim Aufschreiben von Größen Bruchstriche zu vermeiden, wird die eben angegebene Definition für Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten im erweiternden Sinne auch auf Maßeinheiten angewendet. So wird z. B., wenn für Sekunde die Abkürzung *s* benutzt wird, statt $\frac{1}{s^2}$ auch s^{-2} geschrieben. Und für die Geschwindigkeiten $2\,370 \frac{m}{s}$ und $0{,}087 \frac{km}{h}$ schreiben wir $2{,}37 \cdot 10^3 m \cdot s^{-1}$ bzw. $8{,}7 \cdot 10^{-2} km \cdot h^{-1}$.

Aufgaben:

▲1▲ Sputnik I, der erste künstliche Erdtrabant, wurde am 4. 10. 1957 in der Sowjetunion gestartet. Er umkreiste die Erde genähert mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn in der Höhe 588 km über der Erdoberfläche in jeweils $T = 1$ h 35 min einmal. Der mittlere Erdradius beträgt 6 371 km.

Wie groß war die Bahngeschwindigkeit v von Sputnik I?

Die Antwort finden wir mit der Formel $s = vt$ für eine kreisförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v. Wird der Bahnradius mit r bezeichnet und wird als spezieller Weg der Umfang $u = 2\pi r$ der Kreisbahn gewählt, so ist die zugehörige Zeit die Umlaufzeit T. Bei dieser Wahl folgt aus $s = v \cdot t$ die Formel

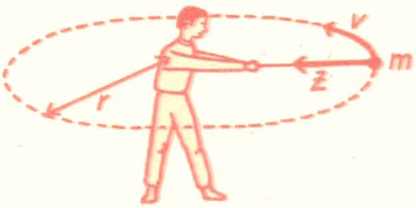
(1) $2\pi r = vT$ $(\pi = 3{,}14159\ldots)$

Mit $r = 6\,371$ km $+ 588$ km $= 6\,959$ km und $T = 1$ h 35 min $= 5\,700$ s folgt aus (1) $v = 7\,667 m \cdot s^{-1}$. Sputnik I durchlief seine Bahn mit der Geschwindigkeit $7{,}67 \cdot 10^3 m \cdot s^{-1} = 7{,}67 km \cdot s^{-1}$.

Tatsächlich wich die Bahn von Sputnik I etwas von einer Kreisbahn ab. Bei seinem Flug näherte sich Sputnik I auf seiner ebenen Bahn bei jedem Umlauf der Erdoberfläche bis auf 288 km und entfernte sich anschließend jeweils wieder auf 947 km. Also bewegte sich Sputnik I auf einer ebenen Bahn, die sich dem Erdmittelpunkt bis auf 6 599 km nähert und sich von ihm bis auf 7 318 km entfernt. Nach fast 1 400 Erdumkreisungen verglühte Sputnik I nach 92 Tagen in der Erdatmosphäre. Da der erdnächste Bahnpunkt nur 228 km von der Erdoberfläche entfernt war, wurde Sputnik I infolge der in dieser Höhe noch relativ dichten Erdatmosphäre merklich abgebremst. Wegen des Energieverlustes näherte er sich langsam immer mehr der Erdoberfläche, um schließlich beim Eintauchen mit hoher Geschwindigkeit in noch dichtere Schichten der Erdatmosphäre zu verglühen.

Bei den folgenden Betrachtungen werden wir den Einfluß der Lufthülle des Zentralkörpers auf einen Raumflugkörper unberücksichtigt lassen. Unter dieser Bedingung kann ein Raumschiff seinen Zentralkörper, sofern das Raumschiff bei seinem Flug nicht in den Anziehungsbereich anderer Himmelskörper kommt, fast unbegrenzt oft umkreisen. Für die Erde ist die erste Bedingung in guter Näherung bereits erfüllt, sofern ein Raumschiff sich der Erde nicht mehr als bis auf etwa 200 km nähert. Für den Mond ist die erste Bedingung durchweg erfüllt, da er keine Atmosphäre besitzt. Von Versuchen auf der Erdoberfläche wissen wir: Um einen Körper zu zwingen, sich auf einer Kreisbahn gleichförmig (mit konstanter Bahngeschwindigkeit) zu bewegen, muß auf ihn stets eine auf den Kreismittelpunkt gerichtete Kraft wirken, die Zentripedalkraft Z genannt wird.

Hat der auf der Kreisbahn bewegte Körper die Masse m, ist r der Radius seiner Bahn und ist v seine Bahngeschwindigkeit, so ist die Größe der Zentripedalkraft bestimmt durch: (2) $Z = m\frac{v^2}{r}$.



Wird die Masse m in Kilogramm (kg), die Geschwindigkeit v in Meter pro Sekunde ($m \cdot s^{-1}$) und der Radius r in Meter (m) gemessen, so ergibt sich gemäß Formel (2) die Zentripedalkraft in der Einheit $kg \cdot m \cdot s^{-2}$. Diese Krafteinheit nennt man zu Ehren des englischen Physikers *Isaak Newton* (1643 bis 1727) das Newton (N): $1N = 1\ kg \cdot m \cdot s^{-2}$. Später werden wir durch Lösen der Aufgabe 3 den Zusammenhang zwischen der Krafteinheit Newton (N) und der uns wohlbekannten Krafteinheit Kilopond (kp) kennenlernen: $1\ kp = 9{,}81\ N$.

▲2▲ Der Mond bewegt sich in guter Näherung auf einer Kreisbahn mit Radius $r = 384\,400\ km = 3{,}844 \cdot 10^5$ km um die Erde. Seine Umlaufzeit[1] beträgt $T = 27{,}32 d$ (d – Abkürzung für Tag) und seine Masse $m = 7{,}347 \cdot 10^{22}$ kg. Berechne die Zentripedalkraft, die gemäß Formel (2) auf den Mond einwirkt! Durch Umstellen von (1) nach v ergibt sich $v = \frac{2\pi r}{T}$.

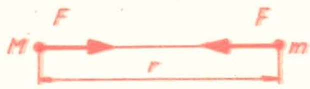
Durch Einsetzen dieses Terms für v in (2) folgt: (3) $Z = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$.

Mit den für Radius r, Masse m und Umlaufzeit T gegebenen Werten ergibt sich gemäß (3) $Z = 2{,}00 \cdot 10^{20} N$.

Der Mond ist nicht durch ein Seil an die Erde gekettet, durch das diese riesige Kraft übertragen werden kann. Dennoch nahm *Isaak Newton* völlig berechtigt an, daß auf den Mond eine Kraft der errechneten Größe wirken muß, die auf die Erde zu gerichtet ist.

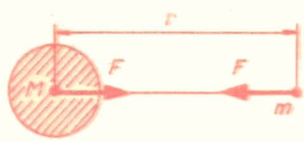
Allgemein erkannte *Isaak Newton*, daß zwei „genähert punktförmige" Massen M und m sich stets gegenseitig mit gleich großen Kräften anziehen. Jede der Anziehungskräfte F hat die Richtung der Verbindungsstrecke beider Körper. Sie ist gegeben durch:

$$(4) \quad F = k\frac{Mm}{r^2} \text{ (Gravitationsgesetz)}$$



Dabei ist r der Abstand der beiden Massen und k ist eine Konstante, die sogenannte Gravitationskonstante. „Genähert punktförmig" bedeutet, daß die räumliche Ausdehnung der Massen M und m erheblich kleiner als ihr Abstand r ist.

Die Formel (4) hat auch noch Gültigkeit, wenn eine der beiden Massen „genähert punktförmig" ist und die andere die Gestalt einer Kugel mit konstanter Dichte[2] hat.



Die in Formel (4) vorkommende Konstante k kann durch entsprechende Messungen auf der Erdoberfläche bestimmt werden. Da die zwischen Massen an der Erdoberfläche auftretenden Anziehungskräfte im allgemeinen sehr klein sind, werden diese Kräfte meist nicht bemerkt. Zu ihrer Messung sind deshalb äußerst empfindliche Versuchsanordnungen nötig. *Richarz* und *Krigar-Menzel* (1896) benutzten zur Bestimmung der Gravitationskonstanten zwei Bleikugeln mit den Massen $M = 158$ kg (Radius 14,9 cm) und $m = 0{,}73$ kg (Radius 2,5 cm), die sich, sofern ihre Mittelpunkte 20 cm von einander entfernt sind, gegenseitig mit der Kraft $F = 1{,}92 \cdot 10^{-7} N$ anziehen. Gemäß Formel (4) ist aus diesen Angaben die Gravitationskonstante berechenbar. Die Gravitationskonstante k hat den Wert:

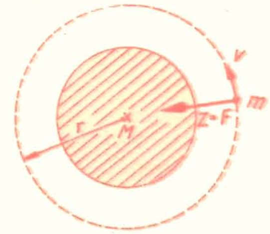
$$(5) \quad k = 6{,}670 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}.$$

▲3▲ Die Erde ist genähert eine Kugel mit dem Radius $r = 6{,}371 \cdot 10^3$ km und der Masse $M = 5{,}979 \cdot 10^{24}$ kg. Mit welcher Kraft wird ein an der Erdoberfläche liegender Körper der Masse 1 kg von der Erde angezogen?

Durch Einsetzen der gegebenen Werte in (4) ergibt sich unter Berücksichtigung von (5) $F = 9{,}81 N$. Da laut Definition die Masse 1 kg an der Erdoberfläche[3] von der Erde mit der Kraft 1 kp angezogen wird, gilt, wie bereits oben angegeben, $1\ kp = 9{,}81 N$.

Mit den erworbenen Kenntnissen verstehen wir nunmehr auch, warum ein „genähert punktförmiger" Körper der Masse m einen als ruhend angenommenen Körper der Masse M, der ebenfalls „genähert punktförmig" ist oder die Gestalt einer Kugel mit durchweg konstanter Dichte hat, auf einer Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit umfliegen kann: Die für die Kreisbewegung notwendige Zentripedalkraft muß gleich groß mit der Anziehungskraft beider Massen sein: $Z = F$. Laut Formel (3) und (4) ist diese Bedingung äquivalent mit

$$\frac{4\pi^2 mr}{T^2} = k\frac{Mm}{r^2}.$$



Durch Umformen folgt hieraus

$$(6) \quad kMT^2 = 4\pi^2 r^3.$$

Hierin sind π die Kreiszahl, k die Gravitationskonstante, M die Masse des Zentralkörpers, T die Umlaufzeit des Körpers der Masse m um den Zentralkörper und r der Radius der Bahn des Körpers der Masse m. Als Besonderheit sei vermerkt: In der Gleichung (6) kommt die Masse m des umlaufenden Körpers nicht vor. Selbständig lösen wir mittels Formel (6) die beiden folgenden Aufgaben:

▲4▲ Durch die vollautomatische sowjetische Mondsonde Luna XVI wurde mit minimalem ökonomischem Aufwand und ohne Gefährdung von Menschenleben Mondgestein zur Erde transportiert. Vor der Landung auf dem Mond umkreiste Luna XVI in der Zeit zwischen dem 17. und 20. 9. 1970 vorübergehend den Mond in einer Höhe von 110 km über der Mondoberfläche. Der Mondradius beträgt $1{,}738 \cdot 10^3$ km und die Mondmasse $M = 7{,}347 \cdot 10^{22}$ kg. Berechne aus diesen Angaben die Umlaufzeit von Luna XVI auf der angegebenen Bahn!

▲5▲ Die Sonne hat die Masse $M = 1{,}985 \cdot 10^{30}$ kg. Ein Raumschiff umfliege die Sonne auf einer Kreisbahn in $T = 258 d$. Auch die Erde umkreist die Sonne in $365{,}24 d$ genähert auf einer Kreisbahn einmal. Berechne für Raumschiff und Erde jeweils den Bahnradius! Berechne weiterhin für beide Körper gemäß Formel (1) die Bahngeschwindigkeit v!

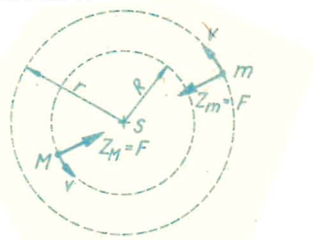
Ergänzend sei mitgeteilt: Die Gleichung (6), auf die wir uns beim Lösen der jetzigen Aufgaben stützten, ist äquivalent mit der Forderung, daß Gravitationskraft und Zentripedalkraft einander gleich sind. Also gilt für die der Zentripedalkraft entgegengesetzte Zentrifugalkraft: Für einen seinen Zentralkörper auf einer Kreisbahn umfliegenden Trabanten heben sich Zentrifugalkraft und Anziehungskraft einander auf. *Juri Gagarin* war der erste Mensch, der die Erde im Zustand der Schwerelosigkeit und außerhalb der Lufthülle umkreiste!

Isaak Newton konnte auf Grund des von ihm erkannten Gravitationsgesetzes die allgemeine Bahn berechnen, auf der sich ein Körper um seinen als ruhend angenommenen Zentralkörper bewegt. Diese Bahnen erwiesen sich als identisch mit den Schnittlinien von Kegelmänteln mit Ebenen. Die geschlossenen unter diesen Bahnen werden Ellipsen genannt. Daß sich die Planeten auf Ellipsen um die Sonne bewegen, hatte bereits vor *Newton* der deutsche Astronom *Johannes Kepler* (1571 bis 1630) auf empirischem Wege erkannt. Kreise wiederum sind spezielle Ellipsen. Nur diesen Fall der Kreisbewegung konnten wir gemeinsam behandeln!

Bisher haben wir den Zentralkörper immer als ruhend angenommen.

Nach dem Gravitationsgesetz ist diese Annahme höchstens näherungsweise berechtigt. Merkliche Abweichungen zur Formel (6) treten auf, wenn die Masse des Trabanten nicht sehr klein gegenüber der Masse des Zentralkörpers ist. Würde man z. B. aus dem Bahnradius $r = 3{,}844 \cdot 10^5$ km und der Umlaufzeit $T = 27{,}32d$ des Mondes um die Erde gemäß Formel (6) die Masse der Erde als jetzigen Zentralkörper berechnen, so würde man statt $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg den Wert $6{,}05 \cdot 10^{24}$ kg erhalten. Der so erhaltene Wert wäre um die Mondmasse $0{,}07 \cdot 10^{24}$ kg zu groß. Daß diese Abweichung auftreten muß, ergibt sich aus folgenden Betrachtungen:

Sofern sich im Raum bzw. im betrachteten Raumteil nur zwei Körper der Massen M und m befinden, wirkt nach dem Gravitationsgesetz auf beide Körper eine Kraft. Es kann sich also keiner der beiden Körper in Ruhe befinden. Eine spezielle Bewegung zweier Körper der Massen M und m wollen wir kennenlernen: Dabei sollen sich beide Körper gleichförmig auf in einer Ebene liegenden konzentrischen Kreisen um den gemeinsamen Mittelpunkt S[4] so bewegen, daß der Punkt S in jedem Zeitmoment auf der Verbindungsstrecke beider Körper bzw. ihrer Mittelpunkte liegt. Insbesondere durchlaufen dann beide Körper ihre Bahn in der gleichen Zeit T.



Gemäß Formel (3) sind dann die auf beide Körper wirkenden Zentripedalkräfte gegeben durch $Z_M = \frac{4\pi^2 MR}{T^2}$ bzw. durch $Z_m = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$.

Nach Formel (4) ist die auf beide Körper wirkende Gravitationskraft gegeben durch

$$F = k\frac{Mm}{(R+r)^2}.$$

Damit die betrachtete Bewegung möglich ist, muß $F = Z_M = Z_m$ gelten. Durch Einsetzen und mittels einfacher Umformungen folgt hieraus

(7) $MR = mr$ und

(8) $k(M+m)T^2 = 4\pi^2(R+r)^3$.

Mittels der Gleichung (8) ist es möglich, aus dem Abstand $R+r$ beider Körper bzw. ihrer Mittelpunkte und ihrer gemeinsamen Umlaufzeit T die Summe $M+m$ ihrer Massen zu berechnen. Mittels der Gleichung (7) lösen wir die folgenden Aufgaben selbständig:

▲6▲ Die Masse der Erde beträgt $M = 5{,}979 \cdot 10^{24}$ kg und die des Mondes $m = 7{,}347 \cdot 10^{22}$ kg. Im Mittel beträgt der Abstand der Mittelpunkte beider Körper $3{,}844 \cdot 10^5$ km. Berechne hieraus die Lage des Bewegungszentrums S des Erde-Mond-systems! Die Erde ist genähert eine Kugel mit dem Radius $6{,}371 \cdot 10^3$ km. Welche Lage hat der Punkt S in bezug auf die Erdoberfläche?

▲7▲ Um die Erde mit der Masse $M = 5{,}979 \cdot 10^{24}$ kg bewege sich ein Raumschiff der Masse $m = 1\,400$ kg auf einer Kreisbahn mit dem Radius 6 600 km und dem Mittelpunkt S. Welchen Abstand besitzt der Punkt S vom Mittelpunkt der Erde?

H. Busch/W. Träger

[1] Es handelt sich hier um die in der Astronomie als siderische Umlaufzeit bezeichnete Zeit. Sie ist zu unterscheiden von der synodischen Umlaufzeit (29,53 *d*), die zwischen zwei gleichen Mondphasen verstreicht.

[2] Als weitere Verallgemeinerung ist möglich: Der kugelförmige Körper besteht aus konzentrischen Kugelschalen mit jeweils konstanter Dichte.

[3] Da die Erde nur in erster Näherung eine Kugel ist, gilt diese Definition exakt nur für Orte der Erdoberfläche mit bestimmter geographischer Breite, nämlich unter 45° geographischer Breite.

[4] Aus Gründen, auf die hier nicht eingegangen werden kann, wird das Zentrum S beider Bahnen als Schwerpunkt der Massen M und m bezeichnet.

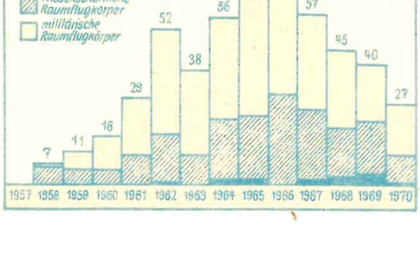
Die Kosmonautin an die *alpha*-Leser

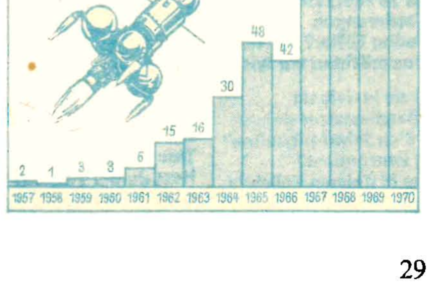
Liebe Schüler!

Ihr seid Zeugen hervorragender Ereignisse. Ihr lebt in einer Zeit, in der Wissenschaft und Technik aufblühen, in der Zeit der Eroberung des Kosmos. Vor kurzem wurde der Gruppenflug der „Sojus-Raumschiffe“ erfolgreich durchgeführt und die Interkosmos-Serie, an denen auch Euer Land mitgearbeitet hat, gestartet. In Zukunft erweitert sich der Kreis der Menschen bedeutend, die den Kosmos erobern. Neue, vollkommenere Raumschiffe sowie die Schaffung orbitaler Stationen mit einem künstlichen Gravitationsfeld gestatten nicht nur den Kosmonauten, sondern auch Wissenschaftlern, an Raumflügen teilzunehmen. Vielleicht werdet Ihr, *Junge Mathematiker*, das sein und Eure Freunde aus den Zirkeln *Junger Kosmonauten*, denn ohne die Wissenschaft, der Ihr Euch verschrieben habt, sind kosmische Flüge nicht möglich.

Ich möchte Euch große Erfolge beim Lernen wünschen und Euch *Lenins* Worte ins Gedächtnis rufen, der sagte, daß die Jugend ein Stoßtrupp ist, daß sie bei jeder Arbeit eigene Initiative und Wagemut zeigen muß.

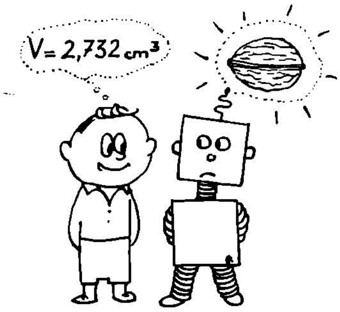
Valentina Nikolajewa-Tereschkowa





Wer löst mit?
alpha – Wettbewerb

Letzter Einsendetermin 1. Juli 1971



Teil 1: Auswahl von Aufgaben aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

* 5 * 647 An einem Tische sitzen sieben Schüler. Einer hört auf den Vornamen Fred, einer heißt Willi, vier heißen Lutz, und einer heißt Christian. Weiter wissen wir nur, daß unter ihnen zwei Brüder mit dem Familiennamen Scheibner, einer mit dem Zunamen Franke und vier Schüler mit dem Namen Schulz sind.

a) Von wem können wir mit Sicherheit Vor- und Zunamen angeben?

b) Warum muß er so heißen?

* 5 * 648 Aus 36 gleich großen Quadraten soll durch Aneinanderlegen ein Rechteck gebildet werden.

a) Wieviel Lösungsmöglichkeiten gibt es? (Bei jeder möglichen Lösung sollen sämtliche Quadrate verwendet werden.)

b) Welches der möglichen Rechtecke hat den kleinsten Umfang?

* 6 * 649 In einer Möbelfabrik wurde die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert. Die Jahresproduktion betrug 1 920 Tische. Wieviel Tische wurden im Juni und wieviel im Dezember hergestellt?

* 6 * 650 Zu Beginn des Schuljahres kaufte Heinz zwei verschiedene Sorten von Heften; die eine kostete 8 Pf, die andere 15 Pf pro Stück. Er zahlte für 12 Hefte zusammen 1,31 M. Wieviel Hefte kaufte er von jeder Sorte?

* 7 * 651 In einem Haus mit 28 Fenstern sollen einige fehlende Fensterläden beschafft werden, so daß an jedem Fenster zwei Läden vorhanden sind. Einige Fenster haben noch zwei Läden; bei der gleichen Anzahl von Fenstern fehlen beide, der Rest hat je einen Laden. Wieviel neue Fensterläden braucht man? Begründe die Antwort!

* 7 * 652 Auf einer Exkursion fuhren mit Autobussen genau 319 Schüler, auf einer anderen genau 232. In jedem der Autobusse, die auf beiden Exkursionen fuhren, saß genau die gleiche Anzahl Schüler. Ermittle diese Anzahl! (Wir setzen dabei voraus, daß in jedem Autobus mehr als ein Schüler saß.)

* 8 * 653 Jemand würfelt mit n Würfeln bei einem einzigen Wurf zusammen die Augenzahl $3n+4$, und zwar zeigte dabei jeder Würfel die gleiche Augenzahl. Man ermittle sämtliche Werte von n, für die das möglich ist.

* 8 * 654 Die Fischer Adam, Bauer, Christiansen und Dahse (abgekürzt A, B, C, D) wägen nach dem Fischen ihre Ausbeute und stellen fest:

a) D fing mehr als C.

b) A und B fingen zusammen genau so viel wie C und D zusammen.

c) A und D fingen zusammen weniger als B und C zusammen.

Ordne die Fangergebnisse a, b, c, d der Fischer A, B, C, D der Größe nach! (Beginne mit dem größten Ergebnis!)

* 9 * 655 Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat. Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die anderen aber falsch sind:

a) Anna hat den Ball.

b) Brigitte hat den Ball nicht.

c) Claudia hat die Schere nicht.

Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

* 9 * 656 Bei einem Schachturnier mit 8 Teilnehmern spielt jeder gegen jeden genau eine Partie. Am Ende des Turniers haben alle Teilnehmer verschiedene Punktzahlen erzielt. Der Spieler auf dem zweiten Platz hat genau so viele Punkte gewonnen wie die letzten vier zusammen. Dabei erhält man für einen Sieg 1 Punkt und für ein Unentschieden $\frac{1}{2}$ Punkt. Wie endete die Partie zwischen den Spielern, die den 4. bzw. den 6. Platz belegten?

* 10 * 657 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$. Ferner sei r der Radius desjenigen im Innern dieses Dreiecks liegenden Halbkreises, dessen Durchmesser auf der Hypotenuse $\overline{AB}$ liegt und der die Katheten $\overline{AC}=b$ und $\overline{BC}=a$ berührt.

Es ist zu beweisen, daß dann stets

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \quad \text{gilt.}$$

* 10 * 658 In den Klassen 5 bis 8 einer Schule gibt es 300 Schüler. Von ihnen lesen regelmäßig

genau 120 Schüler die Zeitschrift „Technikus", genau 90 Schüler die Zeitschrift „Fröhlichsein und Singen", genau 180 Schüler die Zeitschrift „Die Trommel", genau 60 Schüler die Zeitschriften „Die Trommel" und „Technikus", genau 16 Schüler die Zeitschriften „Technikus" und „Fröhlichsein und Singen", genau 24 Schüler die Zeitschriften „Fröhlichsein und Singen" und „Die Trommel", genau 6 Schüler alle drei genannten Zeitschriften.

I. a) Wieviel Schüler lesen genau eine dieser Zeitschriften regelmäßig?

b) Wieviel Schüler lesen keine dieser Zeitschriften regelmäßig?

II. Lösen Sie die Aufgabe allgemein, indem Sie die Schülerzahl mit s bezeichnen und die übrigen angegebenen Zahlen der Reihe nach durch die Variablen a bis g ersetzen!

Teilnehmer der DDR-Olympiade 1970 stellen Aufgaben

* 9 * 659 Gegeben seien die beiden rationalen Zahlen

$$a=\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} \quad \text{und} \quad b=\frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}.$$

Es ist zu entscheiden, ob $a<b$, $a>b$ oder $a=b$ gilt.

Roland Wolter, EOS Lucas Cranach, Wittenberg-Piesteritz, Klasse 10

* 10/12 * 660 Es sei a eine positive reelle Zahl. Es ist zu entscheiden, ob das Gleichungssystem

$$x_1x_4x_5=a^2, \qquad (1)$$
$$x_1+x_2+x_4+x_6=3a, \qquad (2)$$
$$x_3+x_5=2x_6, \qquad (3)$$
$$x_1x_2x_4=a^3 \qquad (4)$$

eine Lösung hat, wobei keine der Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 negativ ist.

Bernhard Worel, Antonin-Zapotocky-OS, Neubrandenburg, Klasse 10

In Heft 4/70 (Seite 86) wurden beide Schüler nicht richtig eingeordnet. Mit den beiden Namen und den zugehörigen Fotos stellen wir diese zwei erfolgreichen Teilnehmer vor, d. Red.

Roland Wolter

Bernhard Worel

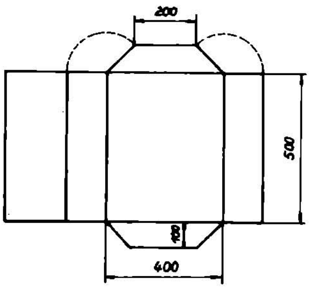
Teil 2: Wettbewerbsaufgaben

W 5 ■ 661 In der ersten Etage eines kleineren Hotels befinden sich mehrere Gästezimmer, die alle mit fortlaufenden Zimmernummern versehen sind. Addiert man diese Zimmernummern, so erhält man 95. Die Summe aus der ersten und letzten, zweiten und vorletzten Zimmernummer – und so fort – ergibt stets 19. Wieviel Gästezimmer befinden sich in dieser Etage? Welche Nummern tragen diese Zimmer?

Guido-Gerald Blosfeld, Halle, Kl. 5

W 5 ■ 662 Die abgebildete Figur (Maße in mm) stellt das Netz eines Behälters dar, in dem hochwertige Instrumente versandt werden. Bestimme das Volumen des Behälters (in dm^3)! Die Wandstärke des verwendeten Materials bleibe unberücksichtigt.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



W 6 ■ 663 Die Maßzahlen der Kantenlängen (gemessen in cm) eines Quaders seien natürliche Zahlen; sein Rauminhalt betrage $270\ cm^3$, und die Summe der Maßzahlen aller Kantenlängen betrage 80 cm. Für die Kantenlängen a, b und c gelte ferner $a<b<c$. Es sind die Kantenlängen des Quaders zu bestimmen! *Sch.*

W 6 ■ 664 Welche natürlichen Zahlen a erfüllen die Ungleichung

$$\frac{3}{5}<\frac{a}{41}<\frac{7}{11}?$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

W 7 ■ 665 Unter welchen Bedingungen nimmt der Term

$$\frac{a(b-c)-b(c-a)+c(a-b)}{a-b+c}$$

den Wert Null an, wenn keine der Variablen mit Null belegt werden darf und nicht alle drei Variablen untereinander gleich sein sollen? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

W 7 ■ 666 Kann ein regelmäßiges Tetraeder einen quadratischen Schatten werfen, wenn die einfallenden Lichtstrahlen parallel verlaufen und senkrecht auf die Bildebene auftreffen? *Schüler Uli Klaus, Erfurt*

8 ▲ 667 Es ist zu beweisen, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a \neq b$ die Ungleichung

$$\frac{b}{b-a}+\frac{a+b}{a}-\frac{a}{b-a}+\frac{a}{b}>4$$

erfüllt ist. *K.*

W 8 ■ 668 Je ein Bleistift, Lineal, Radiergummi, Kurvenschablone, Rechenstab, Zeichendreieck und Zirkel sind so auf die Schüler Lutz, Martina, Peter, Rainer und Rita verteilt, daß jeder Schüler mindestens einen dieser Gegenstände besitzt. Wie sind diese Gegenstände verteilt, wenn die folgenden Aussagen dieser Schüler sämtlich wahr sind?

(1) Rainer: „Wenn ich den Zirkel habe, so habe ich auch den Bleistift."

(2) Lutz: „Ich besitze den Rechenstab nicht und Rainer hat den Zirkel."

(3) Martina: „Wenn ich das Zeichendreieck habe, so habe ich auch den Rechenstab."

(4) Rita: „Ich habe das Lineal oder ich habe den Radiergummi."

(5) Martina: „Peter hat das Zeichendreieck oder Rita hat den Radiergummi."

(6) Peter: „Ich habe das Zeichendreieck und ich habe das Lineal." *T.*

W 8 ■ 669 Es sind alle geordneten Paare ganzer Zahlen zu ermitteln, für die die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die erste Zahl eines jeden Paares ist kleiner als 3.
2. Die Summe der beiden Zahlen eines jeden Paares ist größer als 2.
3. Die Differenz aus der ersten und der zweiten Zahl eines jeden Paares ist positiv.

Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

9 ▲ 670 Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die

$$\log_4(\log_3(\log_2 x))=0 \text{ gilt.}$$

Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

W 9 ■ 671 a) Es ist ein Dreieck ABC aus $\overline{CD}=h_c=4$ cm, $\overline{CE}=s_c=4{,}2$ cm, $\overline{BF}=h_b=6$ cm zu konstruieren.

b) Welche Beziehungen müssen zwischen den gegebenen Größen h_c, s_c und h_b erfüllt sein, damit das Dreieck ABC aus diesen Stücken konstruierbar ist? *K.*

W 9 ■ 672 Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x+y+z=232 \quad (1)$$

$$\frac{2x+y+z}{2}=\frac{x+3y+z}{3}=\frac{x+y+4z}{4} \quad (2)$$

zu ermitteln. *Baurat h. c. Dipl.-Ing. Dr. Max Skalicky, Wien*

W 10/12 ■ 673 Es sind alle natürlichen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung

$$\left[\frac{x+2}{45-x}\right]=4 \text{ erfüllt ist.}$$

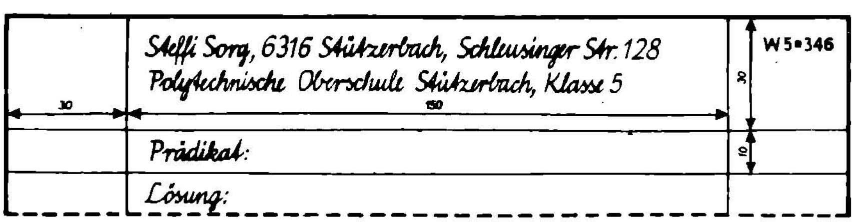
Bemerkung: Ist z eine reelle Zahl, so versteht man unter $[z]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist. Es gilt also z. B.

$$\left[\frac{5}{2}\right]=2,\ \left[\frac{41}{8}\right]=5,\ [6]=6.$$ *K.*

W 10/12 ■ 674 Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB}=a$ und $\overline{BC}=b$. Es soll die Länge x des Lotes, das von dem Eckpunkt A des Rechtecks auf die Diagonale $\overline{BD}$ gefällt ist, berechnet werden. *T.*

In eigener Sache

Am 31. 12. 1970, dem Einsendeschluß für Heft 5/70, lagen über 6000 Lösungen vor. Nun beginnt für die Redaktion, sie besteht aus dem Chefredakteur und der Redaktionsassistentin *F. Lehmann* (s. Foto), die Arbeit. Wir brauchen rund 40 Arbeitsstunden, um die Stöße von Einsendungen beim Postamt (Postfach) abzuholen, zu öffnen, die Lösungen zu entfalten, und endlich nach dem letzten Einsendetermin nach Nummern zu sortieren. Die Mathematikfachlehrer *G. Schulze* (Herzberg), *W. Unze* (Leipzig) und *J. Lehmann* (Chefredakteur) beginnen dann mit der Korrektur. Die Redaktionsassistentin erhält nach ca. 3 Wochen die angefertigten Antwortkarten, wertet sie statistisch aus, und dann gehen die Karten über das Hauptpostamt Leipzig zum Einsender. Das ist ein hartes Stück Arbeit, denn daneben gilt es die nächsten Hefte für den Satz vorzubereiten, Autoren zu gewinnen für neue Beiträge, Leserpost zu beantworten (jährlich ca. 1500 Briefe), Leserkonferenzen und technische Besprechungen zu führen, soll doch jedes neue Heft so gestaltet sein, daß es mit Interesse studiert wird. Red. *alpha*



Albrecht Dürer

ein Künstler, Humanist und Geometer

Teil 2

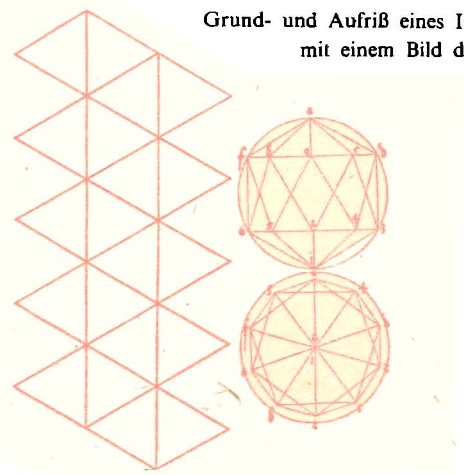
D. Luther steht bei seiner Bibelübersetzung wiederholt vor der Aufgabe, Sachverhalte mit Worten beschreiben zu müssen, die es in der deutschen Sprache bis dahin noch nicht gab. Ähnlich geht es Dürer bei der Abfassung seiner Werke. Erstmals benutzt er den Begriff „unendlich" im mathematischen Sinn und schreibt „eyn vnentliche zal". Durch Übernahme des Wortes „punktus" aus dem Lateinischen geht mit dem Begriff auch das Wort „Punkt" in den deutschen Sprachgebrauch ein. Weniger nachhaltig waren seine Übersetzungsversuche für konvex und konkav mit *eingebogen* und *ausgebogen*. Auch seine Wortprägung *Barlini* für parallele Geraden hat sich nicht eingeführt. Für „konstruieren" benutzt er das bei Bauhütten gebräuchliche Wort „reißen" oder „aufreißen". Ein Kreis heißt bei Dürer „cirkellini" und ein Rechteck „ablange fierung". Die von ihm vorgeführten Fünfeck- und Neuneckkonstruktionen mit „unverrücktem" Zirkel stammen offensichtlich aus den Rezeptsammlungen mittelalterlicher Bauhütten. Ferner finden sich in der „Underweysung" Umwandlungen von Dreiecken in flächengleiche Rechtecke. Diese werden konstruktiv mit dem Höhensatz oder dem Lehrsatz von Pythagoras in flächengleiche Quadrate übergeführt. Zur Konstruktion der dabei erforderlichen rechtwinkeligen Dreiecke wird, wie auch in der heutigen Schulgeometrie, der Lehrsatz des Thales verwendet.

Kreisquadratur und Kreisrektifikation sind für Dürer zwei voneinander unabhängige Problemstellungen. Während er zur Umfangsbestimmung den Bruch $\frac{22}{7}$ als Näherungswert für π benutzt, setzt er bei der Flächenbestimmung $\frac{25}{8}$ als Faktor zu dem Quadrat des Kreisradius. Für die Kugel gibt er folgende Beschreibung: „Aber kein vollkumenes Korpus ist / das allenthalbe gleicher ist dann ein Kugel." Ferner wird eine exakte Konstruktion regelmäßiger Fünf- und Zehnecke vorgeführt, die sich bereits bei Ptolemäus nachweisen läßt.

Entsprechend dem Vorbild in Euklids „Elementen" geht Dürer in seinem Werk auf die fünf Platonischen Körper ein. Er schreibt: „Zum dritten sind Corpora, die allenthalben gleich sind, von Feldern, Ecken und Seiten, die der Euklides corpora regularia nennt; der beschreibt ihrer fünf, darum dass ihr nit mehr künnen sein, die in eine Kugel, darin sie allenthalben anrühren, verfasst mügen werden."

Er gibt Darstellungen dieser fünf regulären Körper in zugeordneten Normalrissen. Ohne früheres Vorbild sind die zugehörigen Netze.

Grund- und Aufriß eines Ikosaeders mit einem Bild des Netzes



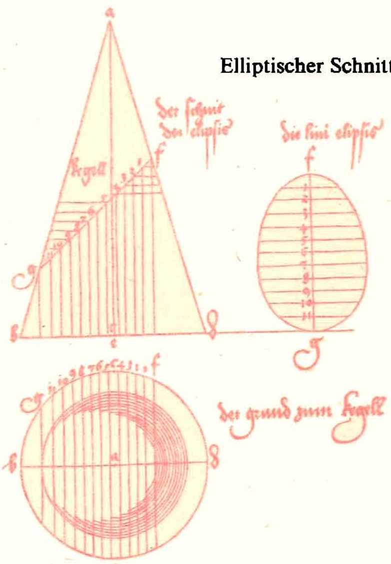
Bei dieser Gelegenheit behandelt er auch die zur Erdglobenherstellung aktuelle Netzabwicklung der Kugel in 16 Bogenzweiecke. Zu den dreizehn existierenden halbregulären konvexen (archimedischen) Polyedern führt er in der ersten Auflage von sieben und in der zweiten Auflage von neun solchen Körpern die Beschreibung mit Darstellung der Netze an. Unter ihnen findet sich z. B. das aus 12 regulären Fünfecken und 20 regulären Sechsecken bestehende Ikosaedron truncum, welches als Vorlage unseres heutigen Fernsehfußballs diente. Als schmückendes Beiwerk findet sich ein abgestumpftes Polyeder z. B. in dem bekannten Kupferstich „Melancholie" aus dem Jahre 1514.

Sehr aufschlußreich für Dürers künstlerisches Schaffen sind seine Ausführungen zu den Kegelschnitten und zur Perspektive. Da es sich hierbei um die erste deutschsprachige Auseinandersetzung mit diesen Gegenständen handelt, ist das Werk auch für die Geschichte der Mathematik von außerordentlichem Interesse.

Bei Einführung der Kegelschnitte geht er anschaulich konstruktiv von Grund- und Aufriß eines Drehkegels aus, den er mit einer zweitprojizierenden Ebene schneidet. Durch unterschiedliche Festlegung des Neigungswinkels der schneidenden Ebene gegen die Basis gelangt er zu den drei Kegelschnittarten Ellipse, Parabel und Hyperbel. Die Bezeichnungen sucht er durch die deutschen Worte Eilinie, Brennlinie und Gabellinie zu ersetzen. Er schreibt einführend hierzu: „Die alten haben angetzeigt / das man dreyerley schnydt durch ein kegel mag thun."

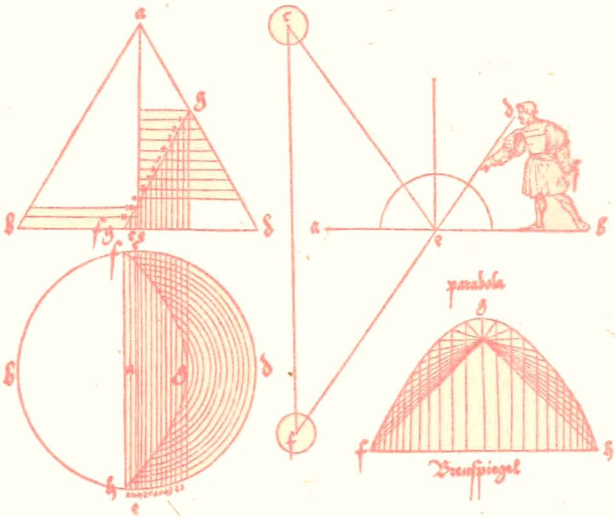
Die Melancholie (1514)

Als Entdecker der Kegelschnitte gilt der Grieche Menaichmos, welcher um 350 v.u.Z. lebte. Die Wortprägungen Ellipse, Parabel und Hyperbel gehen auf Apollonius (250 bis 200) zurück und bezeugen tiefere Einsichten in die Erzeugungsweisen der Kegelschnitte.



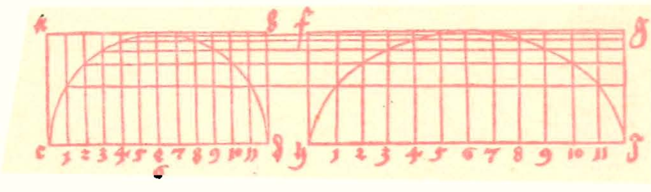
Elliptischer Schnitt eines Drehkegels

Aus Dürers Wortschöpfung „Eilinie“ für Ellipse spricht die irrige Annahme, daß die Ellipse in ihren Hauptscheiteln verschieden stark gekrümmt sei und daher nur eine Symmetrieachse besitze. Dieser Irrtum findet bei der Darstellung von Tor- und Fensterbögen, die in Vertikalebenen bezüglich der Bildebene liegen, zeichnerisch seinen Niederschlag. Die in der zweiten Auflage veröffentlichten Konstruktionen zur Bestimmung der wahren Gestalt von Kegelschnitten mittels Umlegungen tragen bereits den Charakter eines neuzeitlichen Lehrbuches. Auf Brennpunkte und Fokaleigenschaften der Kegelschnitte geht er nur für den Fall der Parabel ein. Auch die als Zeichenhilfen wichtigen Scheitelkrümmungskreise von Kegelschnitten und Asymptoten der Hyperbel behandelt Dürer nicht. Weitere Impulse zur Belebung der Lehre von den Kegelschnitten geben später Kepler und Newton durch ihre Entdeckungen auf dem Gebiet der Himmelsmechanik. An anderer Stelle führt die konstruktive Entwicklung eines Torbogens aus einem Halbkreis auf eine halbe Ellipse. Das hierbei angewandte Konstruktionsverfahren stellt eine affine



Parabolischer Schnitt eines Drehkegels, Darstellung der Parabel mit Brennpunkt

Affine Transformation eines Halbkreises



Transformation dar. Wenn es auch Dürer hierbei nicht bewußt wurde, eine Ellipse gezeichnet zu haben, so verdeutlicht uns das Bild recht einprägsam, wie bei ihm der mathematische Begriff einer affinen Abbildung in der Anlage schon vorhanden war. (Fortsetzung folgt in Heft 4/71.)

E. Schröder

Dürer steht an unserer Seite

... Dürer zu gedenken ist für unsere Republik eine Sache tiefer Überzeugung. Denn vieles von dem, was über Dürer geschrieben wurde, mag vergänglich sein. Doch der Geist dieses größten Künstlers der deutschen Renaissance wirkt lebendig fort in unserer sozialistischen Kunst der Gegenwart.

aus: ND vom 12. 9. 1970

Was ist eine Funktion? Teil 2

2. Der allgemeine Begriff einer Funktion

Es ist unschwer zu sehen, daß im Beispiel 3 (siehe Heft 6/70, S. 124/125) für jeden der 28 Tage des Februars ein bestimmter Diensthabender festgesetzt ist. Mit anderen Worten, die Menge der Februartage wird auf die Menge der Jungen *abgebildet*, die den Dienst unter sich aufgeteilt haben. Man kann vereinbaren, mit dem Buchstaben x einen beliebigen Februartag und mit $y=f(x)$ den Diensthabenden am Tage x zu bezeichnen. Es liegt kein Grund vor, die Abbildung

Tag $x \rightarrow y =$ Diensthabender am Tag x

nicht mit Recht eine *Funktion* zu nennen und diese Abbildung in der Form

$y=f(x)$ zu schreiben.

Wir werden eine beliebige Abbildung f einer Menge E auf eine Menge M eine Funktion mit dem Definitionsbereich E und dem Wertevorrat M nennen.

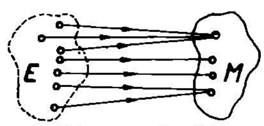


Abbildung von E <u>auf</u> M

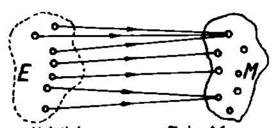


Abbildung von E <u>in</u> M

Vergeßt nicht, daß wir, wenn wir von einer Abbildung f einer Menge E auf eine Menge M sprechen, dabei meinen, daß $y=f(x)$ für *jedes* x aus E und *nur* für x aus dieser Menge definiert ist, während der Wert y der Funktion y notwendig der Menge M angehört und jedes y aus dieser Menge Wert der Funktion f für wenigstens einen Wert des Arguments x ist.

Ist nur bekannt, daß die Werte der Funktion f notwendig der Menge M angehören, ohne daß behauptet wird, daß *jedes* Element dieser Menge ein Wert der Funktion f ist, so sagt man, die Funktion bilde ihren Definitionsbereich E <u>in</u> die Menge M ab, oder, die Abbildung f sei eine Abbildung der Menge E <u>in</u> die Menge M.

Man muß somit die Bedeutung der Ausdrücke „Abbildung <u>auf</u> die Menge M" und „Abbildung <u>in</u> die Menge M" streng auseinanderhalten.*

Von der Abbildung

$x \rightarrow |x|$

beispielsweise kann man sagen, sie sei eine Abbildung von R <u>in</u> R, man kann aber nicht sagen, daß dies „eine Abbildung von R <u>auf</u> R" ist.

Vom rein logischen Standpunkt aus ist am einfachsten der Fall, daß der Definitionsbereich der Funktion endlich ist. Es ist klar, daß eine Funktion, deren Definitionsbereich aus n Elementen besteht, nicht mehr als n verschiedene Werte annehmen kann. Durch Funktionen, die auf endlichen Mengen definiert sind, werden also Abbildungen endlicher Mengen auf endliche Mengen realisiert.

Solche Abbildungen bilden einen der Untersuchungsgegenstände eines wichtigen Zweiges der Mathematik, der *Kombinatorik* (siehe Aufgaben 8, 11, 18, 19).

Beispiel 4. Wir wollen Funktionen betrachten, deren Definitionsbereich die aus zwei Buchstaben A und B bestehende Menge

$M=\{A, B\}$

ist und deren Werte derselben Menge angehören, d. h. Abbildungen der Menge M <u>in</u> sich.

Solcher Funktionen gibt es insgesamt vier. Wir geben sie durch eine Tabelle vor:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

Die Funktionen f_1 und f_2 sind *konstant:* der Wertevorrat jeder dieser Funktionen besteht aus einem einzigen Element.

Die Funktionen f_3 und f_4 bilden die Menge M <u>auf</u> sich ab. Die Funktion f_3 kann man durch die Formel

$f_3(x)=x$

wiedergeben. Es handelt sich hierbei um die *identische* Abbildung: jedes Element der Menge E wird auf sich selbst abgebildet.

Um die Erklärung der Bedeutung des „Funktions"begriffs selbst abzuschließen, haben wir nur noch darauf hinzuweisen, daß die zur Bezeichnung der „unabhängigen Veränderlichen", d. h. eines beliebigen Elements des Definitionsbereichs, und der „abhängigen Veränderlichen", d. h. eines beliebigen Elements des Wertevorrats, getroffene Buchstabenwahl völlig unerheblich ist. Durch die Schreibweisen

$$x \mapsto \sqrt{x},\quad \xi \mapsto \sqrt{\xi},\quad y \mapsto \sqrt{y},$$
$$f(x)=y=\sqrt{x},\quad f(\xi)=\eta=\sqrt{\xi},$$
$$f(y)=x=\sqrt{y}$$

wird *ein und dieselbe Funktion* f definiert, die eine nichtnegative Zahl auf ihre (mit positivem Vorzeichen genommene) Quadratwurzel abbildet. Unter Benutzung dieser Schreibweisen erhalten wir

$f(1)=1,\ f(4)=2;\ f(9)=3$ usw.

* Es sei noch bemerkt, daß man jede Abbildung „<u>auf</u>" auch Abbildung „<u>in</u>" nennen kann, aber nicht umgekehrt.

3. Umkehrbare Funktion

Die Funktion $y=f(x)$

heißt *umkehrbar***, wenn sie jeden ihrer Werte ein einziges Mal annimmt. Von der Art sind die Funktionen $f_3(x)$ und $f_4(x)$ von Beispiel 4. Die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ von Beispiel 4 dagegen sowie die Funktionen der Beispiele 1, 2 und 3 sind *nichtumkehrbar.*

Um von einer beliebigen Funktion zu beweisen, daß sie nichtumkehrbar ist, genügt es, irgend zwei Argumentwerte $x_1 \neq x_2$ aufzuweisen, für die

$f(x_1)=f(x_2)$ ist.

Im Beispiel 3 braucht man nur zu bemerken, daß Petja sowohl am 1. als auch am 5. Februar Dienst hat. Daher ist die Funktion von Beispiel 3 nicht umkehrbar.

Beispiel 5. Die Funktion f

$x \mapsto y=-\sqrt{x}$

ist umkehrbar. Sie ist auf der Menge R_+ der nichtnegativen Zahlen definiert. Ihr Wertevorrat ist die Menge

$R_-=(-\infty, 0]$

aller nichtpositiven Zahlen. Gibt man sich ein beliebiges y aus der Menge R_- vor, so kann man nach der Formel $x=y^2$ das zugehörige x finden.

Die Funktion g

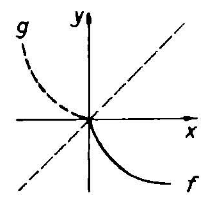
$y \mapsto x=y^2$ für $y \leqq 0$

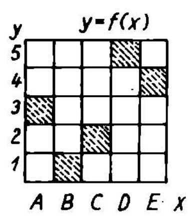
ist die *Umkehrfunktion* (*inverse* Funktion) zur Funktion f. Sie bildet die Menge R_- auf die Menge R_+ ab. Wie bereits gesagt wurde, kommt es auf die Wahl der Buchstaben zur Bezeichnung der unabhängigen und der abhängigen Veränderlichen nicht an. Die Funktionen f und g kann man in der Form

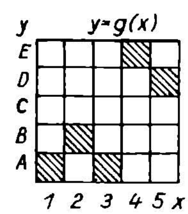
$f(x) = -\sqrt{x}$ für $x \geqq 0$,

$g(x) = x^2$ für $x \leqq 0$

schreiben. In Abbildung 3 sind graphische Darstellungen der zueinander inversen Funktionen f und g wiedergegeben.







Beispiel 6. Die durch die Tabelle

x	A	B	C	D	E
$y=f(x)$	3	1	2	5	4

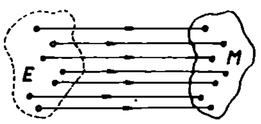
** Die Herkunft der Bezeichnung wird im folgenden klar werden: eine Funktion ist umkehrbar, wenn zu ihr eine Umkehrfunktion existiert.

vorgegebene Funktion ist auf der Menge der ersten fünf Buchstaben des deutschen Alphabets definiert, während ihr Wertevorrat die Menge der ersten fünf natürlichen Zahlen ist. Die Umkehrfunktion g wird durch die Tabelle

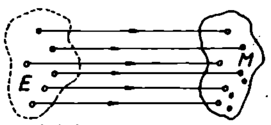
x	1	2	3	4	5
$y=g(x)$	B	C	A	E	D

gegeben. In Abbildung 4 sind diese Funktionen graphisch dargestellt.

Wir geben jetzt exakte Definitionen. f sei eine Abbildung der Menge E auf die Menge M. Wenn es zu jedem Element y aus der Menge ein einziges Element $x=g(y)$ der Menge E gibt, für das $f(x)=y$ ist, so ist die Abbildung f *umkehrbar*, und $y \to x$ heißt die *Umkehrabbildung* (*inverse* Abbildung) zur Abbildung f***. Die Umkehrbarkeit einer Abbildung f bedeutet somit, daß zu ihr eine Umkehrabbildung g existiert.



umkehrbare Abbildung von E auf M

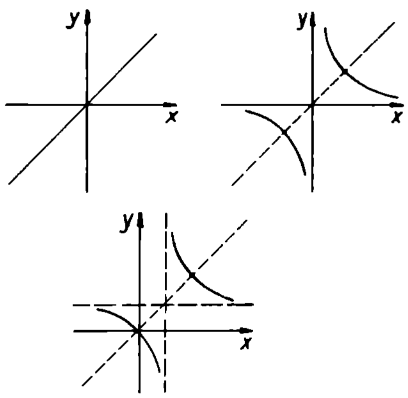


umkehrbare Abbildung von E in M

Die zu f inverse Abbildung wird gewöhnlich mit f^{-1} bezeichnet. Ist beispielsweise

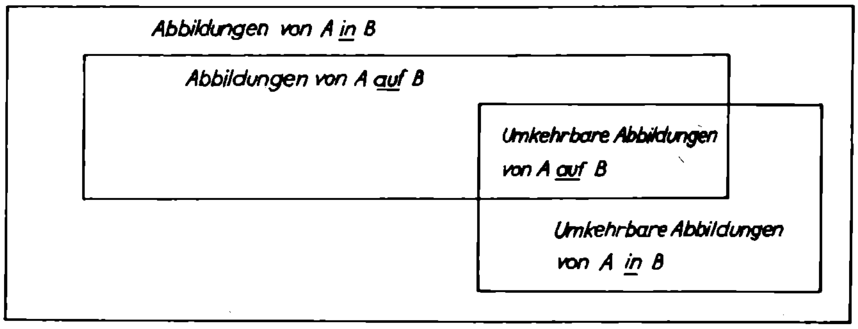
$$f(x)=x^3, \text{ so ist } f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}.$$

Da das Wort „Funktion" einfach ein Synonym des Wortes „Abbildung" ist, haben wir damit zugleich die Bedeutung des Ausdrucks „Umkehrfunktion" definiert.



Versucht selbst, das oben Gesagte zu wiederholen, indem ihr an Stelle des Wortes „Abbildung" das Wort „Funktion" gebraucht. Es ist klar, daß der Definitionsbereich der Umkehrfunktion f^{-1} der Wertevorrat der Funktion f und daß der Wertevorrat von f^{-1} der Definitionsbereich der Funktion f ist.

*** Derartige Abbildungen heißen auch *eineindeutige* Abbildungen von E auf M.



Die Umkehrfunktion der Umkehrfunktion f^{-1} ist die ursprüngliche Funktion f:

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Die Funktionen f und f^{-1} sind somit stets invers zueinander.

Beispiel 7. Es gibt Funktionen, die zu sich selbst invers sind. Von dieser Art sind die Funktionen

a) $f(x)=x$, b) $f(x)=\frac{1}{x}$, c) $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

Prüft das nach! Graphische Darstellungen dieser Funktionen sind in Abbildung 5 wiedergegeben. Bestätigt, daß alle diese Funktionsbilder zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten, d. h. der Geraden $y=x$, symmetrisch sind.

Wir wollen die Beziehungen zwischen den verschiedenen Arten von Abbildungen einer Menge A auf eine Menge B und von A in eine Menge B schematisch darstellen:

Wir erinnern nochmals daran, daß der Begriff der Abbildung von A in B der allgemeinste Begriff ist. Fällt bei einer derartigen Abbildung das Bild von A mit B zusammen, so spricht man von einer Abbildung von A auf B.

Umkehrbare Abbildungen heißen auch noch *eineindeutige* Abbildungen. Dieser Ausdruck wird uns in Büchern häufig begegnen.

In letzter Zeit hat die französische Terminologie auch in unserer Literatur Verbreitung gefunden:

1) eine Abbildung von A auf B wird von den Franzosen „surjektiv" oder eine „Surjektion" genannt;

2) umkehrbare Abbildungen von A in B heißen bei ihnen „injektiv" oder „Injektionen",

3) umkehrbare Abbildungen von A auf B heißen nach der französischen Terminologie „bijektiv" oder „Bijektionen".

Wir weisen darauf hin, daß ein solcher Reichtum an Ausdrücken überflüssig ist, wenn man nur beim Gebrauch der Präpositionen „in" und „auf" Obacht gibt.

A. N. Kolmogorow

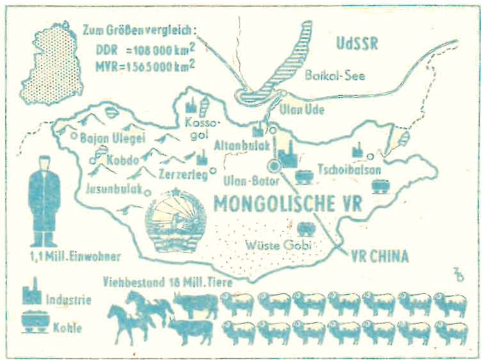
(In Heft 4/71 folgen Aufgaben zu diesem Beitrag, d. Red.)

Wir sind sie *Zum 25. Jahrestag der Gründung der SED*

Wer aber ist die Partei?
Sitzt sie in einem Haus mit Telephonen?
Sind ihre Gedanken geheim, ihre Entschlüsse unbekannt?
Wer ist sie?
Wir sind sie.
Du und ich und wir — wir alle.
In deinem Anzug steckt sie, Genosse, und denkt in deinem Kopf.
Wo ich wohne, ist ihr Haus, und wo du angegriffen wirst,
Da kämpft sie.
Zeige uns den Weg, den wir gehen sollen,
Und wir werden ihn gehen wie du, aber
Gehe nicht ohne uns den richtigen Weg,
Ohne uns ist er
der falscheste.
Trenne dich nicht von uns!
Wir können irren, und du kannst recht haben, also
Trenne dich nicht von uns!
Daß der kurze Weg besser ist als der lange, das leugnet keiner,
Aber wenn ihn einer weiß
Und vermag ihn uns nicht zu zeigen, was nützt uns seine Weisheit?
Sei bei uns weise!
Trenne dich nicht von uns!

Bertolt Brecht

Mathematikolympiaden in der MVR



Die *Mongolische Volksrepublik* nimmt seit 1964 (außer 1967) an den Internationalen Mathematikolympiaden teil. Insbesondere in den letzten beiden Jahren kam es zwischen den Delegationsleitern des bisher einzigen nichteuropäischen Teilnehmerlandes, den Delegationsleitern der DDR und dem Chefredakteur *alpha* zu mehreren freundschaftlichen Aussprachen über die außerunterrichtliche Arbeit im Fach Mathematik. Wir interessierten uns in erster Linie für die Olympiaden in der MVR:

In der MVR wird im Schuljahr 1970/71 die 8. Olympiade durchgeführt.

1. Stufe: Alle Schüler der 1. bis 10. Klasse nehmen unter Klausurbedingungen an der Schulolympiade teil. Die Aufgaben dazu stellen die Mathematiklehrer der Schule zusammen.

2. Stufe: Die erfolgreichsten Teilnehmer jeder Klassenstufe werden nochmals (in mehreren kleineren Gruppen) geprüft. Die Sieger dieser Gruppen bewerben sich in einem weiteren Wettbewerb um den Titel: Klassenstufensieger.

3. Stufe: Die Klassenstufensieger — ab Klasse 7 — werden zur Gebiets- bzw. Stadtolympiade delegiert. (Dies entspricht etwa unserer Kreisolympiade.) Wer die vom Gebietskomitee gestellten Aufgaben am vollständigsten und elegantesten löst, wird „Gebietssieger“.

4. Stufe: Der jeweils erfolgreichste Teilnehmer der Klassenstufe 10 (Abiturstufe) des Gebietsausscheids — man nennt ihn „Champion“ — nimmt an der Landesolympiade in der Hauptstadt Ulan-Bator teil. Für interessierte *Junge Mathematiker* der Klassenstufe 7 bis 9 wird (neben den beschriebenen Olympiadestufen) noch eine Fernolympiade ausgeschrieben. Besonders erfolgreiche Schüler erhalten daraufhin direkt vom Zentralen Komitee eine Einladung zur Teilnahme an der Landesolympiade. Von den 40 Knaben und 4 Mädchen, welche 1970 den Landeswettbewerb erreichten, wurden die 14 Spitzenreiter — wie jedes Jahr — in einem 6wöchigen Lehrgang auf die IMO vorbereitet. Für diese Schüler entfiel — als Anerkennung für die gezeigten Leistungen — die Teilnahme an den schriftlichen und mündlichen Abschlußprüfungen (Abitur). Alle 14 Schüler wurden ohne die vorher üblichen Aufnahmegespräche an Hochschulen immatrikuliert.

Mit *Dambin Chaltar*, Träger eines 3. Preises auf der XI. IMO, führten wir ein Gespräch. Es zeigt die hohe Einsatzbereitschaft eines der IMO-Teilnehmer der MVR:

Die Eltern *Dambins* sind Viehzüchter. Sie betreuen 500 Schafe. Sie leben im Winter in einem kleinen Dorf, 400 km von der Gebiets- (wir sagen Kreis-)stadt entfernt. Im Sommer ziehen sie mit ihrer Herde durch die an die Ländereien des Dorfes angrenzende Steppe. *Dambin* nahm von Klasse 7 bis 9 an den ersten 3 Stufen der Olympiade mit sehr gutem Erfolg teil. Ab Klasse 8 wurde er im Rahmen einer Arbeitsgemeinschaft von seinem Mathematiklehrer gefördert. (Spezialarbeitsgemeinschaften auf Gebietsebene gibt es wegen der großen Entfernung der Städte und Dörfer voneinander nicht.) 1969 wurde *Dambin* „Champion“ des Gebiets Gorod. Als Preise erhielt er Bücher und mathematische Lehrmittel. Beim nachfolgenden Landesausscheid und im Vorbereitungslager auf die XI. IMO gehörte er zu den Besten.

XII. IMO: Teilnehmer der mongolischen Mannschaft

Allein sein Bericht über die Anreise zur Landeshauptstadt zeigt uns die völlig anderen Bedingungen, unter denen ein mongolischer Schüler zur Landesolympiade kommt: Ein Tagesritt ist nötig, um die seinem Wohnort am nächsten liegende Bushaltestelle zu erreichen. Sein ihn begleitender Vater, selbst beritten, nimmt dann *Dambins* Pferd wieder mit nach Hause zurück. Mit dem Bus geht es dann mehrere hundert Kilometer zur Gebietshauptstadt. Eine Verkehrsmaschine überbrückt die 1 000 km zur Landeshauptstadt.

Dambin, der jetzt in Moskau Mathematik studiert, übergab uns eine Aufgabe. Sie wurde vom erfolgreichsten IMO-Teilnehmer der DDR, *W. Burmeister*, bearbeitet:

▲675 Gegeben sind n natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die alle größer als 1 sind. Man finde die kleinste natürliche Zahl, die bei der Division durch $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der Reihe nach die Reste $a_1-1, a_2-1, \ldots, a_n-1$ ergibt.

Die Delegationsleitung der mongolischen Mannschaft zur XII. IMO übergab uns, verbunden mit den herzlichsten Grüßen an alle *alpha*-Leser, zwei Aufgaben:

▲676 An einem Schachturnier beteiligten sich zehn Spieler, wobei jeder gegen jeden Teilnehmer einmal gespielt hat. Nach Beendigung des Turniers haben alle Spieler verschiedene Punktzahlen. Die Spieler, die die ersten beiden Plätze belegen, haben kein Spiel verloren. Der Spieler, der den dritten Platz belegt, hat zehn Punkte weniger als der Erste und Zweite zusammen.

Der Vierte hat so viel Punkte wie die vier letzten Spieler zusammen.

Es sind die Punktzahlen der Spieler anzugeben, die die ersten sechs Plätze belegten.

▲677 Gegeben sei ein gerader Kreiszylinder. Aus einem beliebigen Punkt M der Deckfläche ist eine Senkrechte MN auf die Grundfläche gefällt.

Bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Strecken, die Punkte der Kreislinie der Deckfläche mit Punkten der Kreislinie der Grundfläche verbinden und die gegebene Strecke $\overline{MN}$ schneiden.

1. Österreichische Mathematik-olympiade

Aufgaben der Schulolympiade

Im Schuljahr 1969/70 wurden in Österreich erstmals Vorbereitungskurse für einen mathematischen Wettbewerb abgehalten. Teilnahmeberechtigt waren Schüler der 5., 6. und 7. Gymnasialklasse (entspricht unserem 10., 11. und 12. Schuljahr). Im wesentlichen wurden in diesen von Mathematiklehrern gehaltenen Stunden Aufgaben aus der Zahlentheorie, Gleichungen und Gleichungssysteme, Ungleichungen und Aufgaben zur Teilbarkeit behandelt. Als Abschluß (8. 5. 70) diente der „Kurswettbewerb", (entspricht der Schulolympiade).
Die acht besten Kandidaten des Kurswettbewerbs trafen sich bei den „Gebietsolympiaden" (entspricht der Kreisolympiade), die in den drei Städten Saalbach, Wien und Graz stattfanden (21. 5. 70). Die jeweils acht besten Schüler der genannten drei Gebiete kamen zu einem zweiwöchigen Vorbereitungskurs zusammen, der von einem Universitätsprofessor und drei Gymnasialprofessoren betreut wurde. Nach Abschluß dieses Intensivkurses fuhren die Teilnehmer gemeinsam nach Wien zur „ersten österreichischen Mathematikolympiade" (22. 6. 70). Die acht besten *Jungen Mathematiker* nahmen an der XII. IMO teil.

alpha-Leser Janous Walter, Kl. 8, Gymnasium Horn (Niederösterreich)

▲1▲ Beweise für alle natürlichen Zahlen n:
$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\leqq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

▲2▲ Zeige, daß für jede ganze nichtnegative Zahl n der Ausdruck
$A_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$ *durch* 133 *teilbar ist.*

▲3▲ Löse im Körper der reellen Zahlen, wobei a ein reeller Parameter und x die Lösungsvariable ist, die Gleichung
$$\frac{ax+4}{2x+a}=\frac{x+a}{x+1}.$$
Für welche a ergibt sich nun:
a) keine Lösung, b) eine reelle Lösung mit der Vielfachheit 2 (d. h. eine Doppellösung), c) eine reelle Lösung mit der Vielfachheit 1 (d. h. es ergeben sich bei Berechnung zwar zwei Werte für x; einer liegt jedoch außerhalb des Definitionsbereiches), d) zwei reelle Lösungen, e) die Lösung 0 und eine positive Lösung, f) eine positive und eine negative Lösung, g) zwei positive Lösungen?

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang Richter

Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Variante 1

▲ 678a Wir wollen von der folgenden bekannten *Umschichtungsaufgabe* ausgehen: Ein Zweimarkstück a, ein Markstück b und ein Pfennig c liegen, der Größe nach geordnet, an einem Ort A übereinander, der Pfennig zuoberst. Man schichte diese Geldstücke in der gleichen Reihenfolge an einer anderen Stelle B auf. Es ist gestattet, eine oder mehrere Münzen inzwischen an einer anderen Stelle C abzulegen. Zu jeder Zeit sollen jedoch kleinere Münzen stets oberhalb von größeren Münzen liegen. Gefragt ist, wie oft dabei insgesamt die drei Münzen ihren Platz wechseln müssen.
Verallgemeinere diese Aufgabe nach verschiedenen Richtungen und gib die Lösungen an!

Variante 2

▲ 678b Auf einem Lagerplatz werden an einem Standort A quadratische Platten in den Abmessungen $a_n\times a_n$ (in cm²) ($a_1<a_2<\ldots<a_n$) gelagert. Wir wollen dabei kurz von „Platten der Sorte „n"" sprechen. Von der Sorte „n" seien k_n Platten vorhanden (k_n sei eine natürliche Zahl). Die Platten werden, der Größe nach geordnet, übereinandergestapelt. Es kommt eine Bestellung auf Platten der Sorte „m". Um diese Platten auf den Lieferwagen zu heben, müssen die darüberliegenden Platten der Sorte „$m-1$", „$m-2$, ..., „2", „1" durch einen Kran jede einzeln abgehoben und auf einem anderen Platz (Standort B), wieder der Größe nach geordnet, abgelegt werden. Dies ist (für $m>2$) nur durchführbar, wenn ein weiterer Platz (Standort C) für eine kurzfristige Zwischenlagerung vorhanden ist.
Wieviel Hebeoperationen muß der Kran durchführen, bevor er mit dem Beladen des Lieferwagens beginnen kann?

Sektion Mathematik
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Die Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena wurde im Oktober 1966 als eine der ersten Sektionen in der DDR gegründet. Ihre Zielstellung war seit der Gründung: klassenmäßige sozialistische Erziehung der Studenten, auf hohem wissenschaftlichem Niveau stehende Ausbildung von Diplommathematikern in den Ausbildungsrichtungen Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematischer Statistik, Analysis, Mathematische Kybernetik sowie von Diplomlehrern der Ausbildungsrichtung Mathematik/Physik, Durchführung einer an den Strukturlinien unserer Volkswirtschaft orientierten Forschung auf den Gebieten Wahrscheinlichkeitstheorie, mathematische Statistik, Analysis und mathematischer Kybernetik. Die Herausarbeitung dieses Profils geschah mit dem Ziel einer wissenschaftlichen Kooperation mit dem Zentrum des wissenschaftlichen Gerätebaus, dem VEB Carl Zeiss Jena. Schwerpunkte der Arbeit der Sektion sind die Schaffung eines Systems des wissenschaftlich-produktiven Studiums sowie die Erarbeitung neuer Lehr- und Lernmethoden einschließlich neuer Lehrmittel.
An diesen Aufgaben werden die Studenten beteiligt. So arbeitete im vergangenen Studienjahr ein Studentenzirkel ein Programm zur Prüfungsautomatisierung unter Benutzung des R 300 aus. Ein anderer Zirkel half bei der Einrichtung eines Hörsaals für ein audiovisuelles Lehrprogramm. In Diplomarbeiten werden Teile des Lehrstoffs des Grundstudiums methodisch aufbereitet für die Herstellung audiovisueller Programme und teilprogrammierten Lehrmaterials. Das Betriebspraktikum der Mathematikstudenten dient ganz bestimmten betrieblichen Aufgaben, die im Einklang mit der Ausbildungsrichtung der Studenten stehen. Kompliziertere Aufgaben der Betriebe werden in Form von Diplomarbeiten fortgeführt.
In den kommenden Jahren erfolgt der Einsatz der Mathematik-Absolventen unserer Sektion schwerpunktmäßig in der Forschung und Entwicklung im VEB Carl Zeiss Jena und anderen strukturbestimmenden Industriezweigen sowie an der Sektion Mathematik unserer Universität. Gleichzeitig erreichen uns ständig neue Forderungen nach Absolventen aus den verschiedensten Bereichen der Volkswirtschaft. Daher wurden die Zulassungszahlen stark erhöht, so daß wir jeden Oberschüler mit Interesse für Mathematik zu einem Studium der Mathematik in Jena einladen können.

Relationen Teil 3

5. Darstellung von Beziehungen im Diagramm

Zur besseren Übersicht und zur Erleichterung der Schreibarbeit wollen wir nun eine Darstellung für Beziehungen kennenlernen, nämlich die Darstellung im Diagramm, die uns auch Zugang zu wichtigen Eigenschaften von Beziehungen verschafft. Diese Darstellung ist allerdings nur für endliche Grundmengen möglich. Zur Erklärung der Darstellung wollen wir ein Beispiel betrachten. K sei wieder die Beziehung „ist kleiner als", d. h. „$a\,K\,b$" bedeutet „a ist kleiner als b" oder „$a<b$". Die Grundmenge G bestehe aus den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, also $G=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Wir zeichnen nun ein Quadrat von 6 mal 6 Kästchen und tragen an der linken Seite (von oben nach unten) in einer bestimmten (aber nicht vorgeschriebenen) Reihenfolge die Elemente der Grundmenge ab, so daß vor jeder Zeile des Quadrats genau ein Element der Grundmenge steht. Dann tragen wir dieselben Elemente *in derselben Reihenfolge* von links nach rechts über dem Quadrat ab, so daß über jeder Spalte des Quadrats genau ein Element steht. Jedem der 36 Felder des Quadrats entspricht nun genau ein geordnetes Paar von Elementen aus G. Wir wollen vereinbaren, daß wir zuerst das Element nennen, das die Zeile bezeichnet. Wir wollen also von links in das Diagramm gehen. Wir ordnen also jedem Feld genau ein geordnetes Elementenpaar $[a; b]$ mit Elementen aus G zu.

Bild 1

		0	1	2	3	4	5	2. Eingang
	0							
	1							
1. Eingang	2				2;3			
	3							
	4							
	5							

Umgekehrt können wir jedem geordneten Paar $[a; b]$ mit Elementen aus G genau ein Feld unseres Diagramms zuordnen. Die Zuordnung zwischen Feldern und geordneten Paaren über G ist also umkehrbar eindeutig.

Wir hatten uns gemerkt, daß K die Menge aller geordneten Paare $[a; b]$ ist, für die gilt: „$a\,K\,b$" oder „$a<b$" ist eine wahre Aussage. (a und b waren der Grundmenge beliebig entnommen.) K wird nun im Diagramm so dargestellt, daß alle zu K gehörigen geordneten Paare betrachtet und deren Felder im Diagramm gekennzeichnet werden. Das kann z. B. durch Hineinschreiben der geordneten Paare in die entsprechenden Felder erfolgen (siehe Bild 2). Diese Methode würde aber keine Schreiberleichterung bringen. Wir wollen deshalb die betreffenden Felder durch ein Kreuz kennzeichnen (siehe Bild 3).

Das Kreuz im Feld 1; 4 der Abb. 3 bedeutet z. B., daß das Paar $[1; 4]$ zur Beziehung K gehört. Und das stimmt, denn „$1<4$" ist eine wahre Aussage.

Die freigebliebenen Felder gehören zu geordneten Paaren $[c; d]$, die nicht zur Beziehung K gehören. So ist z. B. das Feld 4; 1 bei der Darstellung der „Kleiner-als-Beziehung" frei, da „$4<1$" eine falsche Aussage darstellt.

K	0	1	2	3	4	5
0		0;1	0;2	0;3	0;4	0;5
1			1;2	1;3	1;4	1;5
2				2;3	2;4	2;5
3					3;4	3;5
4						4;5
5						

Bild 2

R_{10}	1	2	3	4	5	6	7
1	X						
2	X	X		X			
3	X		X			X	
4	X	X		X			
5	X				X		
6	X	X	X			X	
7	X						X

Bild 5

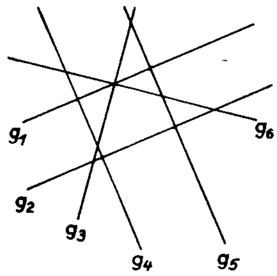


Bild 7

K	0	1	2	3	4	5
0		X	X	X	X	X
1			X	X	X	X
2				X	X	X
3					X	X
4						X
5						

Bild 3

R_{11}	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_1						
g_2						
g_3						
g_4						
g_5						
g_6						

Bild 6

R_{14}	0	1	2	3	4	5
0						
1	X					
2		X				
3			X			
4				X		
5					X	

Bild 8

R_9	0	1	2	3	4	5	6
0							X
1						X	
2					X		
3							
4			X				
5							
6	X						

Bild 4

R_{15}	5	0	2	4	3	1
5				X		
0						
2						X
4					X	
3			X			
1		X				

Bild 9

Aufgaben: Benutze zu den folgenden Aufgaben kariertes Papier! Erledige alle Aufgaben, bevor du weiterliest!

■ 9 ■ Stelle in einem Diagramm die Beziehung R_7 dar, wobei „$a\,R_7\,b$" bedeuten soll „$a \leqq b$". Die Grundmenge sei $G_7=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Durch welche geordneten Paare unterscheiden sich K (siehe Bild 3) und R_7?

■ 10 ■ Stelle in einem Diagramm die Beziehung R_8 dar. „$a\,R_8\,b$" bedeute „a teilt b". $G_8=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

■ 11 ■ Im obenstehenden Diagramm (Bild 4) sind nicht alle zur Darstellung der Beziehung R_9 gehörigen Felder gekennzeichnet. Vervollständige die Darstellung!
„$a\,R_9\,b$" bedeutet „$a+b=6$".
$G_9=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

■ 12 ■ Was ist an der Darstellung der Beziehung R_{10}: „ist ein Vielfaches von" (siehe Bild 5) nicht richtig? ... $G_{10}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Korrigiere die Darstellung! Begründe die Änderung!

■ 13 ■ Welche geordneten Paare haben R_8 und R_{10} gemeinsam? Begründe deine Antwort!

■ 14 ■ Im folgenden Diagramm sollst du die Beziehung R_{11}: „steht senkrecht auf" darstellen. Die Grundmenge bestehe aus den Geraden g_1 bis g_6 des Bildes 7. (Wir wollen voraussetzen, daß Geraden, die in der Abb. als zueinander parallel bzw. zueinander senkrecht erscheinen, auch wirklich diese Lage zueinander haben sollen.)
Kennzeichne alle zur Darstellung von R_{11} gehörigen Felder!

■ 15 ■ Fertige dir selbst ein Diagramm zur Darstellung der Beziehungen R_{12} an und fülle es entsprechend aus!
R_{12} sei die Beziehung: „verläuft parallel" (oder auch „hat dieselbe Richtung wie").
Die Grundmenge bestehe wieder aus den Geraden g_1 bis g_6 des Bildes 7.

■ 16 ■ „$a\ R_{13}\ b$" bedeute „a läßt bei Division durch 3 denselben Rest wie b".
Stelle diese Beziehung über der Grundmenge $G_{13} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dar! Ordne die Elemente der Grundmenge der Größe nach!

■ 17 ■ Welche Beziehung wird durch das Diagramm – Bild 8 – dargestellt?
Gib die Beziehung und die Grundmenge an! Schreibe die Lösung wieder wie folgt auf:
„$a\ R_{14}\ b$" bedeutet „a .... b". $G_{14} =$

■ 18 ■ Vergleiche die im Diagramm – Bild 9 – dargestellte Beziehung R_{15} mit der Beziehung R_{14}!
Was stellst du fest?
Hinweis: Vergleiche die den gekennzeichneten Feldern zugeordneten Paare!

■ 19 ■ „$a\ R_{16}\ b$" bedeute „a und b besitzen einen gemeinsamen Teiler". R_{16} soll über der Grundmenge $G_{16} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ betrachtet werden.
a) Stelle diese Beziehung in einem Diagramm dar!
b) Was fällt dir an dieser Beziehung auf?
c) Wie würde sich die Darstellung ändern, wenn die Beziehung wie folgt lautet: „a und b besitzen einen gemeinsamen Teiler, der größer ist als 1"? Begründe deine Antwort!

Mit diesen Kenntnissen ausgerüstet, können wir nun viele Beziehungen bilden. Es müssen nicht immer solche sein, die uns aus der Mathematik bekannt sind. Wir nehmen einfach eine beliebige Menge G als Grundmenge und bilden eine gewisse Menge von geordneten Paaren mit Elementen aus G. Wenn wir dabei von der Darstellung im Diagramm ausgehen (also nur im Falle endlicher Grundmengen), heißt das: Jede beliebige im Diagramm gekennzeichnete Menge von Feldern stellt eine Beziehung dar.

Bild 10

[illegible]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1			X							
2				X						
3										
4				X						
5							X	X		
6	X									
7										
8										
9										X
10										

Beispiele:
Es sei $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
Wir greifen uns zunächst die geordneten Paare [1; 3], [2; 4], [4; 4], [5; 7], [5; 8], [6; 1], [9; 10] heraus. Diese bilden eine Beziehung. Wir bezeichnen sie mit R_{17}. Sie ist im Bild 10 dargestellt.
Dann greifen wir uns z. B. die geordneten Paare [1; 10], [10; 1], [2; 9], [9; 2], [3; 8], [8; 3], [4; 7], [7; 4], [5; 6], [6; 5] heraus. Diese bilden auch eine Beziehung. Wir bezeichnen sie mit R_{18}. Sie ist im Bild 11 dargestellt.

Bild 11

[illegible]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										X
2									X	
3								X		
4							X			
5						X				
6					X					
7				X						
8			X							
9		X								
10	X									

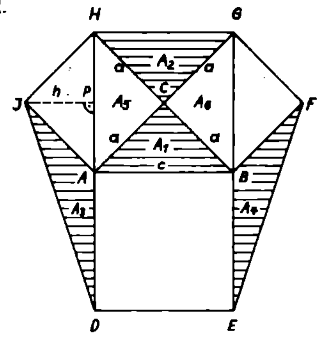
Wenn wir Glück haben, finden wir bei diesem willkürlichen Herausgreifen von Paaren eine Beziehung, die sich in kurzer Form durch einen sprachlichen Ausdruck oder durch Variable beschreiben läßt. Im ersten Fall (Beziehung R_{17}) haben wir Pech, im zweiten Fall (Beziehung R_{18}) haben wir Glück, denn „$a\ R_{18}\ b$" bedeutet „$a + b = 11$". Sollten wir alle möglichen geordneten Paare, die man über G bilden kann, auswählen, dann haben wir die sogenannte „Allbeziehung" über G aufgestellt. In der Aufgabe 19a) haben wir eine solche Allbeziehung über der Grundmenge $G_{16} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aufgestellt. Überprüfe, ob du diese Aufgabe richtig gelöst hast! *R. Herrmann*

Vorfahrt beachten!

Unter diesem Thema starteten wir in Heft 5/70 einen Wettbewerb. Über 100 Einsendungen trafen bei uns ein. Wir sind erfreut über das Interesse an den Problemen des Straßenverkehrs. Im Auftrage der Deutschen Volkspolizei, Abteilung Verkehrserziehung, überreichen wir an folgende *alpha*-Leser Buchpreise:
1. Joachim Jaensch, 925 Mittweida; 2. Stefan Poppe, 705 Leipzig; 3. Albrecht Böttcher, 9314 Neudorf; 4. Elke und Carmen Hauptmann, 8245 Glashütte; 5. Angela Brandt, 9014 Karl-Marx-Stadt; 6. Andreas Juhl, 425 Eisleben; 7. Volker Heumann, 45 Dessau; 8. Rolf Hübner, 36 Halberstadt.

Leser fragen – alpha antwortet

Der Schüler *Peter Schilling* (8. Klasse) aus Golmsdorf übersandte uns die nachstehende Abbildung. Es handelt sich um ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck *ABC* mit der Hypotenuse $\overline{AB}$, über dessen Seiten die Quadrate *CBFG*, *ACHJ* und *DEBA* konstruiert wurden. In der Zeichnung wurden ferner die Verbindungsgeraden *JD*, *EF* und *HG* gezogen.
Peter bittet uns um den Beweis für folgende Aussagen: Die Dreiecke *ABC*, *HCG*, *DAJ* und *EFB* sind flächengleich. Die Summe der Flächeninhalte der angeführten Dreiecke ist gleich dem Flächeninhalt des Quadrats *DEBA*.



Nach Voraussetzung gilt $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACH = \sphericalangle BCG = 90°$, deshalb ist auch $\sphericalangle HCG = 90°$.
Folgende Dreiecke sind kongruent, denn sie stimmen in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein:
$\triangle ABC \cong \triangle HCG \cong \triangle ACH \cong \triangle AHJ \cong \triangle BGC \cong \triangle GBF$.
Die Dreiecke *DAJ* und *AHJ* sind flächengleich, da sie gleiche Grundlinien und zugehörige gleiche Höhen besitzen ($\overline{DA} = \overline{AH} = c$, $\overline{JP} = h$). Aus der Flächengleichheit der Dreiecke *DAJ* und *AHJ* und der Kongruenz der Dreiecke *AHJ* und *ABC* folgt $A_1 = A_3$. Analog dazu gilt $A_4 = A_1$, also auch $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$. Ferner folgt daraus $A_3 = A_5$ und $A_4 = A_6$, und aus der Kongruenz der Quadrate *ABGH* und *DEBA* folgt die Flächengleichheit für die in Peters zweiter Aussage genannten Figuren. *StR Th. Scholl, Berlin*

alpha fragt – Leser antworten

● Wie bereite ich mich auf die Mathematikolympiade vor? ● Wie wurde in der Arbeitsgemeinschaft eine echte Verbindung zur Pionier- und FDJ-Arbeit geschaffen? ● Wie sieht der Arbeitsplan unserer Arbeitsgemeinschaft, Klassenstufe 5 (oder 6) aus? ● Wie habe ich gearbeitet, um gute Erfolge in Mathematik zu erzielen?

In freien Stunden alpha heiter

Lengren; aus: 100 neue Scherze (Eulenspiegelverlag)

Gestörter Lebenslauf

Eine Walze, die vergnüglich durch ihr Dasein rollte,
sah eines Tages einen Kegel aufrecht stehn —
ein Stich, ein Schmerz: Von da an wollte
sie auch so gehn.

Ach Gott, wie mühsam, bis sie sich erhoben!
Die eignen Arme waren viel zu schwach,
die guten Vettern kamen, drückten, schoben,
bald rutschte sie, bald gab der Boden nach,
und endlich, endlich war sie oben
mit Weh und Ach.

Da stand sie nun. Und mußte lang verschnaufen.
Und erst, als alles fort war und sie ganz allein,
versuchte schüchtern sie das neue Laufen
erst mit dem einen, dann dem andern Bein —:

O Himmel nein, wie war das schwer!
Nach ein paar Schritten ging's nicht mehr,
und schon nach einer knappen Stund
war ihre Sohle wund und wund.

Kam gleichen Wegs ein Wandersmann,
dann blieb sie stehn, beschaute sich die Gegend:
„Sehr schön ist's hier, jaja, und schön, daß es
nicht regent.
Es ist doch gut, daß man's jetzt sehen kann."

Doch war der Wandrer hinterm nächsten Baum,
da packte es sie doppelt schmerzhaft wieder:
Das selige Rollen war ein ferner Traum,
und nah war nur das Brennen ihrer Glieder.

Was tun? Jaja, was tun?
Als sie noch rollte,
da war ihr Fehler, daß sie wollte.
Doch nun, als sie das Rollen wieder wollen sollte,
da war ihr Fehler, daß sie es nicht wollte.

K. Menninger, aus Zwischen Raum und Zahl

Ference Pataki in Aktion

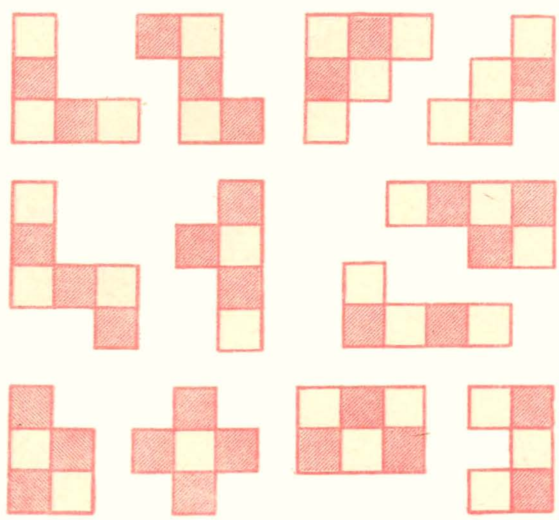
Ference Pataki, das ungarische Rechenphänomen, das in Sekundenschnelle die Multiplikation zweier dreistelliger Zahlen im Kopf ausführt, stellte im *Deutschen Fernsehfunk* die folgende Aufgabe: „Multiplizieren Sie die Zahl Ihrer Schuhgröße mit 2, addieren sie zu diesem Produkt 39, multiplizieren Sie die so erhaltene Summe mit 50, addieren Sie zu diesem Produkt 21, subtrahieren Sie von dieser Summe nunmehr die Zahl Ihres Geburtsjahres." Zur Überraschung aller Mitspieler war das Ergebnis eine vierstellige Zahl; die Zahl aus ihren ersten beiden Ziffern lieferte die Schuhgröße, die Zahl aus den beiden letzten Ziffern das derzeitige Alter der Mitspieler.
Wer findet die allgemeine Lösung zu diesem Problem?

Brandschutz-Rechenübung

Die Besatzung eines LF 16 (Löschfahrzeug Typ 16) ist bei einer Übung in zwei Reihen angetreten. In jeder Reihe stehen gleichviel Feuerwehrleute. Der Gruppenführer steht vor den beiden Reihen und befiehlt, daß der Maschinist und der Schlauchtruppführer in die zweite Reihe zurücktreten. In der zweiten Reihe stehen jetzt dreimal soviel Feuerwehrmänner wie in der ersten. Wieviel Feuerwehrmänner mit Gruppenführer sind angetreten?

Das zersprungene Schachbrett

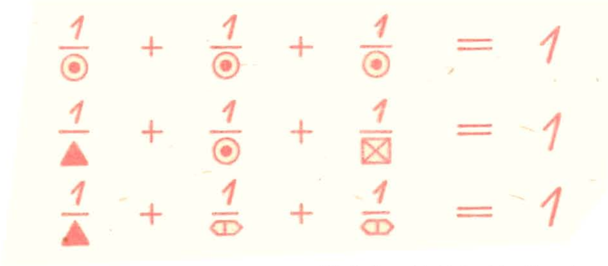
Setze die 12 Teile zu einem Quadrat (8 mal 8 Felder) zusammen!



aus: du bist dran, 42 Spiele am Tisch von Bruno Rüger

Kryptarithmetik

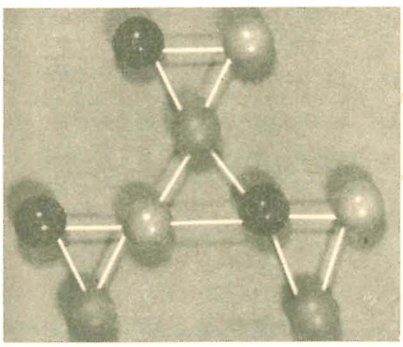
Im vorliegenden Schema sollen die geometrischen Figuren so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischen System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche geometrische Figuren gleiche Ziffern und verschiedene geometrische Figuren verschiedene Ziffern bedeuten.



Dipl.-Ing. E. Schmidt, Potsdam

Eine Aufgabe von Albert Einstein

Auch dann, als *Albert Einstein* schon in der ganzen Welt berühmt war, hat er nicht aufgehört, den Lesern der Frankfurter Zeitung mathematische Probleme zu stellen. Hier ist eins von vielen:



Die neun abgebildeten Kugeln stellen Eckpunkte von vier kleinen und drei größeren gleichschenkligen Dreiecken dar. Man soll die Ziffern 1 bis 9 in die einzelnen Kugeln so einschreiben, daß ihre Summe in jedem von diesen 7 Dreiecken immer die gleiche ist.

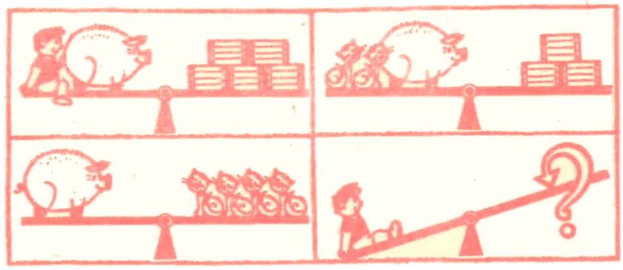
Selbststudium

aus: Cappriccio Romain, Zeichner: Jon Popescu-Gopo, Bukarest

Wieviel wiegt der Knabe?

Der Junge und das Schwein wiegen zusammen soviel wie fünf Kisten. Das Schwein allein wiegt soviel wie vier Katzen. Zwei Katzen plus Schwein wiederum bringen ebensoviel Kilo auf die Waage wie drei der Kisten. Schließlich sitzt der Knabe allein auf der einen Seite — wie viele Katzen müssen auf die andere Seite springen, um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen?

aus: NBI, Arithmetische Knobelei Nr. 66



Rätsel

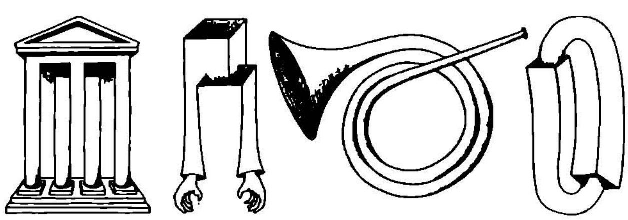
Aus den folgenden Silben sind 17 Begriffe zu bilden. Die Anfangsbuchstaben ergeben einen aktuellen Begriff.

a-a-ab-ad-bel-ble-bruch-bus-chun-chun-di-di-eck-ein-el-ex-gen-gen-gen-gens-glei-glei-go-heit-in-le-le-lip-lung-mal-na-nent-nor-null-pa-po-ra-recht-rhom-ri-schacht-se-stand-stel-tan-tan-te-te-ter-tion-un-va-vall

1. Eine Strecke, die 2 beliebige, nicht nebeneinanderliegende Eckpunkte eines n-Eckes verbindet. ($n > 3$)
2. Rechenart
3. Winkelfunktion
4. Die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Entfernung von 2 festen Punkten konstant ist.
5. Schnittpunkt einer Funktion mit der x-Achse
6. Allgemeines Symbol
7. Wie nennt man n bei der Potenz a^n?
8. Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel
9. Entfernung zweier Punkte
10. Ein Parallelogramm, dessen Seiten alle gleich lang sind
11. Aus Zähler und Nenner bestehende Zahl
12. Teil von Größenangaben
13. Verfahren zur Einschließung einer Lücke
14. Gerade, die den Kreis berührt
15. Ausdrücke, in denen die Zeichen „$<$“, „$>$“, „$\leqq$“, „$\geqq$“ vorkommen.
16. Bild der Funktion $y = x^2$
17. Ausdrücke, in denen das Gleichheitszeichen „$=$“ vorkommt.

Renate Zimmermann, Dresden (Kl. 11)

Das darf doch nicht wahr sein



aus: „Plexus“, Paris, Zeichner: Margat

Über Eigenschaften der natürlichen Zahlen

5▲679 Wieviel dreistellige natürliche Zahlen gibt es, die vorwärts und rückwärts gelesen einander gleich sind?
(Beispiele: 383, 191, 222)

5▲680 Udo addiert alle natürlichen Zahlen von 1 bis 20, ohne die einzelnen Summanden zu notieren. Finde einen einfachen Weg, diese Aufgabe im Kopf zu lösen!

5▲681 Udo meint: „Voriges Jahr war ich viermal so alt wie mein Bruder; dieses Jahr bin ich nur noch dreimal so alt. Wenn das so weitergeht, wird er mich bald eingeholt haben.“ Was ist zu Udos Aussage zu bemerken?

5▲682 Bei einer zweistelligen natürlichen Zahl vertauscht Hans die Ziffern und erhält eine neue zweistellige Zahl. Wenn er nun die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert, so erhält er 72. Ermittle alle zweistelligen Zahlen, für die dies zutrifft!

5▲683 Von einer natürlichen Zahl n seien folgende Eigenschaften bekannt:
a) n ist zweistellig,
b) die Quersumme von n beträgt stets 13,
c) n ist durch 5 teilbar.
Ermittle alle Zahlen n!

5▲684 Axel multipliziert fünf natürliche Zahlen miteinander. Er erhält als Produkt eine ungerade Zahl. Ist die Summe dieser fünf Zahlen gerade oder ungerade?

5▲685 Solche Zahlen wie 2929 oder 3434 sind durch 101 teilbar. Gib eine Begründung dafür, warum das so ist!

5▲686 Ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die folgendes gilt:
a) n ist dreistellig,
b) die Anzahl der Einer der Zahl n ist kleiner als die der Zehner, aber größer als die der Hunderter,
c) n ist durch 7 und durch 3 teilbar,
d) $n<452$,
e) n ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.

5▲687 Welche Zahlenfolge erhält man, wenn man zu den natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... jeweils 3 addiert und die erhaltenen Summen verdoppelt?

5▲688 Aus der Zahl 6789876 sind zwei Ziffern durchzustreichen, so daß die übrig bleibende fünfstellige Zahl
a) möglichst groß,
b) möglichst klein ist.

D. Michels/Th. Scholl

Sport frei!

7▲689 Die 13. Europameisterschaften im Schwimmen, Springen und Wasserball im September 1970 in Barcelona wurden zu einem großartigen Erfolg für die Deutsche Demokratische Republik. Es wurden Wettkämpfe in insgesamt 34 Disziplinen durchgeführt, wobei in jeder Disziplin genau eine Goldmedaille vergeben wurde. Über die Verteilung der Goldmedaillen liegen folgende Informationen vor:
a) Die Schwimmsportler unserer Republik errangen soviele Goldmedaillen wie die Schwimmer der UdSSR, Westdeutschland/Westberlins, Schwedens, Ungarns und der ČSSR zusammengenommen.
b) Die Schwimmer Schwedens und der ČSSR erkämpften zusammen doppelt soviele Goldmedaillen wie die Schwimmer Ungarns; dabei betrug die Anzahl der Goldmedaillen für die ČSSR den dritten Teil der Goldmedaillen Schwedens.
c) Die Anzahlen der Goldmedaillen, die die Mannschaften der UdSSR, Westdeutschland/Westberlins und Ungarns erkämpften, verhalten sich wie 3:2:1.
d) Auf die Schwimmer Ungarns entfiel der 17. Teil der Anzahl aller vergebenen Goldmedaillen.
e) Die restlichen Goldmedaillen nahmen die Schwimmer Frankreichs und Italiens mit nach Hause.
Wieviel Goldmedaillen erkämpften die Mannschaften der einzelnen Länder?

S.-H.

GST marschiert

7▲690 Am 1. Mai, dem Weltkampftag der internationalen Arbeiterbewegung, bildeten 150 Mitglieder der GST einen gesonderten Marschblock, der aus mehreren Reihen mit gleichvielen Fahnenträgern bestand. Während des Marsches zum Kundgebungsplatz mußte der Marschblock beim Passieren einer engen Straße umformiert werden. In jeder Reihe marschierten jetzt vier Personen weniger; es mußten aber zehn Reihen mehr als zuvor gebildet werden. Wieviel Fahnenträger bildeten ursprünglich eine Reihe? (Löse die Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle!)
(Lösungen siehe S. 45, d. Red.)

Mathematik und Chemie

8▲677 Durch Kopplung der endothermen Reaktion mit der Gleichung
$C+H_2O \rightarrow CO+H_2$; $Q_1=+31{,}4$ kcal und der exothermen Reaktion mit der Gleichung
$2\,C+O_2+4\,N_2 \rightarrow 2\,CO+4\,N_2$;
$Q_2=-52{,}8$ kcal
wird (theoretisches) Mischgas erzeugt.
Dem Reaktionsapparat werden jeweils 1 mol Wasserdampf und k mol Sauerstoff zugeführt $(0 \leq k \leq 1)$.

1. Die Reaktionswärme Q der gekoppelten Reaktion ist eine Funktion von k.
a) Stelle die Funktionsgleichung auf!
b) Gib Definitionsbereich und Wertevorrat an!
c) Bestimme die Nullstelle k_0!
d) Stelle die Funktion für die oben gegebenen Werte von Q_1 und Q_2 graphisch dar!
e) In welchem (molaren) Verhältnis stehen die Ausgangsstoffe Wasserdampf und Sauerstoff, wenn die Wärmebilanz gleich Null ist?

2. a) Gib die Zusammensetzung des erzeugten Mischgases in Abhängigkeit von k an (in Volumenprozent)!
b) Berechne die prozentuale Zusammensetzung für $k=k_0$ und $k=1$!

3. a) Bestimme die verbrauchten Stoffmengen (Kohlenstoff, Wasser, Luft) in Abhängigkeit vom Volumen des erzeugten Mischgases (im Normzustand) und von k!
b) In einem Winklergenerator werden stündlich 30000 m^3 Mischgas erzeugt (im Normzustand). Wieviel Kohlenstoff, Wasser und Luft werden dabei verbraucht $(k=1)$?
Anleitung: Von dem Gehalt an Kohlendioxid im Mischgas wird abgesehen. Dichten:
Wasserstoff $\varrho_1=0{,}089\ kg\,m^{-3}$,
Kohlenmonoxid $\varrho_2=1{,}25\ kg\,m^{-3}$.

4. Unter dem Heizwert H eines Gases versteht man diejenige Wärmemenge, die beim Verbrennen eines Kubikmeter Gases (im Normzustand) entsteht. Der Heizwert eines Gasgemisches berechnet sich aus den Anteilen und Heizwerten der einzelnen Gase.
a) Bestimme den Heizwert H des (theoretischen) Mischgases in Abhängigkeit von der Zusammensetzung (als Funktion von k)!
b) Wie groß ist der Heizwert des Mischgases, wenn die Wärmebilanz gleich Null ist? Heizwerte: Wasserstoff $H_1=3050\ kcal\,m^{-3}$, Kohlenmonoxid $H_2=3020\ kcal\,m^{-3}$. *Renneberg*

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

(6./7. Februar 1971)

Olympiadeklasse 7

1) Während der Friedensfahrt fuhr an 6 Thälmannpionieren eine Spitzengruppe von Radrennfahrern so vorbei, daß man eine Reihenfolge eindeutig feststellen konnte. Um diese Reihenfolge zu ermitteln, gab jeder der 6 Pioniere seine Beobachtungen wieder, wobei sämtliche Aussagen wahr sind:

(1) In der Spitzengruppe waren genau 8 Fahrer, darunter genau ein Belgier und genau zwei Polen.
(2) Von den Fahrern, die vor dem Belgier fuhren, waren mindestens zwei DDR-Fahrer.
(3) Von den Fahrern, die vor den beiden Polen fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.
(4) Von den Fahrern, die hinter dem Belgier fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.
(5) Zwei sowjetische Fahrer fuhren unmittelbar hintereinander.
(6) Am Anfang und am Schluß der Spitzengruppe fuhr jeweils ein DDR-Fahrer.
Ermittle die genaue Reihenfolge der Fahrer der Spitzengruppe!

2) Gegeben sei ein Winkel der Größe 60° mit dem Scheitelpunkt S. Ferner sei $P \neq S$ ein beliebiger, auf einem der Schenkel des Winkels gelegener Punkt. Der Fußpunkt des Lotes von P auf den anderen Schenkel des Winkels sei F.
Beweise, daß sich die Halbierende des Winkels $\sphericalangle PSF$ und die Strecke PF in einem Punkte schneiden, der auf der Mittelsenkrechten von PS liegt!

3) Von den Schülern einer 8. Klasse gehören genau $\frac{3}{5}$ dem Schulchor und genau $\frac{7}{10}$ der Schulsportgemeinschaft an. Genau $\frac{2}{5}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse sind sowohl Mitglied des Chores als auch Mitglied der Schulsportgemeinschaft (SSG). Berechne, der wievielte Teil der Anzahl aller Schüler dieser Klasse weder im Chor noch in der SSG ist!

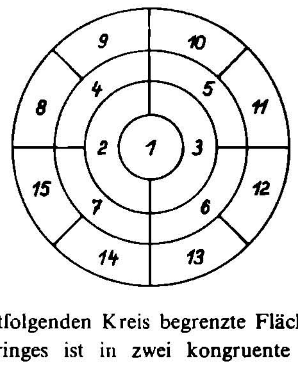
4) Nach der Sage machte die böhmische Königin *Libussa* die Gewährung ihrer Hand von der Lösung eines Rätsels abhängig, das sie ihren drei Freiern aufgab:
„Wenn ich aus diesem Korb mit Pflaumen dem ersten Freier die Hälfte des Inhalts und noch eine Pflaume, dem zweiten die Hälfte des Restes und noch eine Pflaume, dem dritten die Hälfte des nunmehrigen Restes und noch drei Pflaumen geben würde, dann wäre der Korb geleert.
Nenne die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält!"

5) Aus den zweistelligen Primzahlen 13, 17, 37, 79 erhält man wieder Primzahlen, wenn man ihre Ziffern jeweils vertauscht, also die Zahlen 31, 71, 73, 97 bildet. Ebenso kann man bei der Primzahl 131 die Ziffern beliebig vertauschen, also die Zahlen 113, 311 bilden, ohne daß die Primzahleigenschaft verlorengeht. Gibt es dreistellige Primzahlen mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern, bei denen sämtliche möglichen Ziffernvertauschungen stets wieder dreistellige Primzahlen ergeben?
(Ohne Benutzung der Zahlentafel)

6) Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus
$a = 5{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $s_c = 3$ cm!
Dabei bedeuten a, b die Längen der Seiten BC bzw. AC und $\overline{CD} = s_c$ die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AB. Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob sich mit den gegebenen Stückchen ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt!

Olympiadeklasse 8

1) Die Abbildung A 8; 1 zeigt vier konzentrische Kreise. Die innere Kreisfläche ist mit 1 bezeichnet. Die von dem innersten und dem nächstfolgenden Kreis begrenzte Fläche des Kreisringes ist in zwei kongruente Teile, mit 2 und 3 bezeichnet, geteilt. Entsprechend ist die Fläche des nächsten Kreisringes in 4 und die des letzten in 8 jeweils untereinander kongruente Teilflächen zerlegt, die fortlaufend numeriert wurden.



Wie müssen die Verhältnisse der Radien der vier Kreise gewählt werden, damit alle diese 15 genannten Flächenstücke einander inhaltsgleich sind?

2) Eine Pumpe P_1 füllt ein Becken in genau 4 h 30 min. Eine zweite Pumpe P_2 füllt dasselbe Becken in genau 6 h 45 min. Beim Füllen dieses Beckens wurde eines Tages zunächst die Pumpe P_1 genau 30 min lang allein eingesetzt. Anschließend wurden beide Pumpen zusammen so lange eingesetzt, bis das Becken gefüllt war.
Berechne, wie lange es insgesamt dauerte, bis das Becken unter diesen Umständen gefüllt wurde!
(Es sei angenommen, daß beide Pumpen während ihres Einsatzes mit konstanter Leistung arbeiteten.)

3) Gegeben seien eine Gerade g und zwei auf verschiedenen Seiten von g gelegene Punkte A und B.
Konstruiere alle diejenigen Punkte P auf g, die die Eigenschaft haben, daß der Strahl PB einen der Winkel halbiert, die von g und der Geraden g_1 durch A und P gebildet werden!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob sie stets eindeutig durchführbar ist!

4) Es seien a, b natürliche Zahlen, und es gelte $a > b$. Gib für a und b Bedingungen an, so daß folgendes gilt: Die Differenz der Quadrate von a und b ist genau dann eine Primzahl, wenn diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind.

5) Fritz behauptet seinen Mitschülern gegenüber:
(1) In unserem Haus wohnen mehr Erwachsene als Kinder.
(2) Es gibt in unserem Hause mehr Jungen als Mädchen.
(3) Jeder Junge hat wenigstens eine Schwester.
(4) Kinderlose Ehepaare wohnen nicht in unserem Hause.
(5) Alle in unserem Hause wohnenden Ehepaare haben ausschließlich schulpflichtige Kinder.
(6) Außer den Ehepaaren mit Kindern wohnt niemand in unserem Hause.

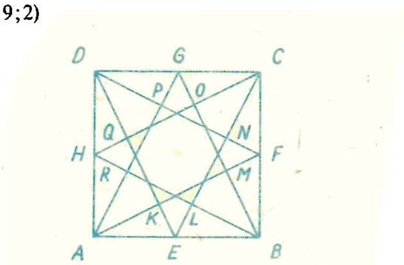
Brigitte entgegnete darauf: „Diese Aussagen können aber nicht sämtlich wahr sein.“ Untersuche, ob Brigitte mit diesem Einwand recht hat!

6) Beweise den folgenden Satz:
Sind D, E, F die Fußpunkte der Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$, dann halbieren die Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle DEF$.
(Da der Beweis für alle drei Winkel analog verläuft, genügt es, ihn für den Winkel $\sphericalangle EFD$ zu führen.)

Olympiadeklasse 9

1) Günter verbrachte in seinen Ferien eine Anzahl von Tagen mit seiner FDJ-Gruppe in einem Lager. An jedem Tage wurden aus seiner Gruppe genau zwei Schüler vormittags und genau zwei Schüler nachmittags zum Tischdienst eingeteilt.
Im Laufe der Tage wurden alle Schüler seiner Gruppe gleich oft zu diesem Tischdienst eingesetzt.
Ferner ist folgendes bekannt:
(1) Günter war an genau 6 Tagen zum Tischdienst eingeteilt.
(2) Wenn er nachmittags Tischdienst hatte, hatte er vormittags keinen.
(3) Er hatte an diesen Tagen genau 13 mal nachmittags keinen Tischdienst.
(4) Er hatte an diesen Tagen genau 11 mal vormittags keinen Tischdienst.
Aus wieviel Schülern bestand Günters Gruppe?

2) In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA mit E, F, G, H bezeichnet. In dem Streckenzug $A\ F\ D\ E\ C\ H\ B\ G\ A$ auftretende Schnittpunkte seien so mit K, L, M, N, O, P, Q, R bezeichnet, daß $AKEL$ $BMFNCOGPDQHR$ ein (nicht konvexes) Sechzehneck ist, auf dessen Seiten keine weiteren Schnittpunkte des obengenannten Streckenzuges mit sich selbst liegen (s. Abb. A 9;2)



Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Sechzehnecks!

3) Wenn x eine reelle Zahl ist, so bedeute $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (So ist z. B.

$$[3{,}7]=3,\quad [-3{,}7]=-4,\quad [4]=4.)$$

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x für die $\left[\frac{10+3x}{6}\right]=\frac{5x+3}{7}$ *gilt!*

4) Ermitteln Sie alle geordneten Tripel reeller Zahlen (x, y, z), die Lösungen des Gleichungssystems

(1) $\quad x+y=2$
(2) $\quad xy-z^2=1$ *sind!*

5) Eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D habe die Kantenlängen
$\overline{AB}=4$ cm, $\overline{AC}=3$ cm, $\overline{BC}=5$ cm, $\overline{BD}=12$ cm, $\overline{CD}=13$ cm, und $\sphericalangle ABD$ sei ein rechter Winkel.
Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide!

6) Es ist ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a+b+c$, α, γ zu konstruieren.
Dabei bedeuten wie üblich $a; b; c$ die Längen der Seiten BC, AC, AB und α, γ die Größen der Winkel $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ACB$.
Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Olympiadeklasse 10

1) a) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Addiert man zu einer ganzen Zahl k das Quadrat der Hälfte ihres unmittelbaren Vorgängers, so entsteht das Quadrat einer rationalen Zahl.
b) Nutzen Sie eine bei diesem Beweis erhaltene Gleichung, um vier voneinander verschiedene pythagoreische Zahlentripel zu finden!
(Ein pythagoreisches Zahlentripel (x,y,z) ist ein geordnetes Tripel dreier von Null verschiedener natürlicher Zahlen x, y, z mit der Eigenschaft $x^2+y^2=z^2$. Zwei derartige Tripel heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht eines von ihnen aus dem anderen dadurch erhalten werden kann, daß man x, y und z mit einer natürlichen Zahl $\neq 1$ multipliziert oder daß man x mit y vertauscht oder daß man beides durchführt.)

2) Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC}=\overline{BC}$. Konstruieren Sie die Parallele zu AB, die die Dreiecksfläche in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt. Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

3) Geben Sie für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, daß für jedes reelle x

$$f(x)=f(x+1)-a \text{ gilt!}$$

4. Unter $n!$ (gelesen n Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ und alle positiven reellen Zahlen $x \neq 1$

$$\frac{1}{log_2 x}+\frac{1}{log_3 x}+\frac{1}{log_4 x}+\ldots+\frac{1}{log_n x}=\frac{1}{log_{n!} x}$$

gilt!

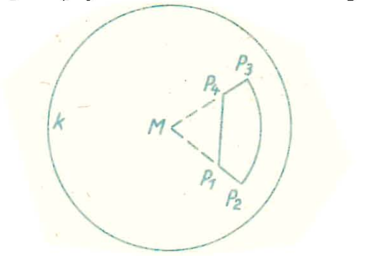
5. Während eines Schachturniers, bei dem jeder gegen jeden genau einmal spielte, wurden genau 15 Partien gespielt. Genau 5 Spiele endeten unentschieden (remis). Wie üblich gab es für jeden Sieg einen, für jedes Remis einen halben Punkt, für jede Niederlage 0 Punkte. Nach Abschluß des Turniers hatten keine zwei Spieler die gleiche Gesamtpunktzahl erzielt.
Der zweitbeste Spieler erreichte genau zwei Punkte mehr als der letzte.
Über einige Teilnehmer A, B, C, ... ist ferner folgendes bekannt:
A, der sich besser als D plazierte, erreichte wie dieser kein Remis.
C, der Dritter wurde, schlug den Vierten.
Zeigen Sie, daß diese Angaben hinreichend sind, um den Ausgang des Spieles B gegen C zu ermitteln!

6. Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet. Es ist zu beweisen, daß es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkte bestehendes Punktepaar gibt, so daß der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist.

Olympiadeklasse 11/12

1. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sind α, β, γ die Größen der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks, so gilt:
$sin^2\gamma \geqq sin\ 2\alpha \cdot sin\ 2\beta$.

2. In einer Ebene ϵ liege ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.
Als Spiegelung am Kreis k sei diejenige Vorschrift bezeichnet, durch die jedem Punkt $P \neq M$ in ϵ der folgendermaßen definierte Punkt P' in ϵ zugeordnet wird:
(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) $\overline{MP}\cdot\overline{MP'}=r^2$.
Gegeben sei ferner ein im Innern von k gelegener Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ der folgenden Gestalt:
P_1, P_2 seien auf einem und demselben Strahl gelegen; P_3, P_4 auf einem und demselben anderen von M ausgehenden Strahl.
Es gelte $\overline{MP_1}=\overline{MP_4}<\overline{MP_2}=\overline{MP_3}$.
Der Winkel $\sphericalangle P_2MP_3$ sei kleiner als 180°.
Der Kurvenzug bestehe aus den Strecken P_1P_2, P_3P_4 und P_4P_1 sowie aus dem im Innern des Winkels $\sphericalangle P_2MP_3$ gelegenen Bogen $\widehat{P_2P_3}$ des Kreises um M durch P_2.



Spiegeln Sie diesen Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ an k (Beschreibung und Begründung einer Konstruktion unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal)!

3. Es sei f die für alle reellen Zahlen x durch $f(x)=\frac{1-x^2}{x^6+4}$ definierte Funktion.
Es ist zu entscheiden, ob unter allen Funktionswerten $f(x)$ ein größter und ein kleinster Wert vorkommen. Diese Werte sind gegebenenfalls zu ermitteln.

4. Es sind alle ganz-rationalen Funktionen $y=f(x)$ anzugeben, die für alle reellen x die Gleichungen
$f(t\cdot x)=t\cdot f(x)$ erfüllen.
Dabei sei t eine beliebig gegebene und dann fest gehalten zu denkende reelle Zahl.

5. Es seien zwei nicht in derselben Ebene liegende (also zwei windschiefe) Geraden g_1 und g_2 gegeben.
Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, zu denen es Punkte P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2 mit der Eigenschaft gibt, daß P die Strecke P_1P_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilt.
Anmerkung: Eine Gerade g ist zu einer Ebene ϵ genau dann parallel, wenn es in ϵ eine Gerade gibt, die zu g parallel ist.

6. Es sei $\mathfrak{M}_1$ die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x, y in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & y\geqq 0 \\ (2) & y-2x\leqq 1 \\ (3) & y+2x\leqq 1 \end{array}\right\} \quad (x, y \text{ reell})$$

Ist ferner n eine positive ganze Zahl, so sei $\mathfrak{B}_n$ die Menge aller Punkte, für deren Koordinaten die folgenden Ungleichungen gelten:

$$(4) \quad \frac{2^n-3}{2^n}<y<\frac{2^n-1}{2^n}$$

$$(5) \quad \frac{3}{2^{n+1}}<x<\frac{3}{2^{n+1}}$$

a) Stellen Sie $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$ graphisch dar!
b) Es ist zu beweisen, daß es einen Punkt $P\in\mathfrak{M}_1$ gibt, der in keiner der Punktmengen $\mathfrak{B}_n$ enthalten ist.
c) Es sei $\mathfrak{M}_2$ die Punktmenge, für die (1), (2), (3) und (6) $y\leqq 1-\frac{1}{1000}$ gilt.
Es ist zu beweisen, daß es ein n_1 gibt mit der Eigenschaft, daß jedes Element von $\mathfrak{M}_2$ auch Element der Vereinigungsmenge $\mathfrak{B}_1\cup\mathfrak{B}_2\cup\ldots\mathfrak{B}n_1$ ist.
Ermitteln Sie die kleinste Zahl n_1, die diese Bedingung erfüllt!

Lösungen zu aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht

5▲679

101	202 ...	909
111	212 ...	919
121	222 ...	929
...	... ...	...
...	... ...	...
191	292 ...	999

Jede Spalte enthält zehn solcher Zahlen. Da es 9 Spalten gibt, erhalten wir 90 Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

5▲680 Udo rechnet $20+(1+19)+(2+18)+\ldots+(9+11)+10=10\cdot 20+10=210$.

5▲681 Im vorigen Jahr sei der Bruder von Udo n Jahre, also Udo $4\cdot n$ Jahre alt gewesen. In diesem Jahr ist Udo dann $4\cdot n+1$ und sein Bruder $n+1$ Jahre alt.

n	$4\cdot n$	$n+1$	$4\cdot n+1$
1	4	2	5
2	8	3	9
3	12	4	13
4	16	5	17

Nur $n=2$ erfüllt die Bedingungen. Im vorigen Jahr war Udo 8, sein Bruder 2 Jahre alt. In diesem Jahr ist Udo 9, sein Bruder 3 Jahre alt. Ganz gleich, wie lange beide leben werden, Udo wird stets sechs Jahre älter sein als sein Bruder.

5▲682 Die zweistellige natürliche Zahl sei $10a+b$ mit $a>b$. Durch Vertauschen der Ziffern erhalten wir die Zahl $10b+a$.
Nun gilt

$$\begin{aligned}(10a+b)-(10b+a)&=72,\\ 9a-9b&=72,\\ 9(a-b)&=72,\\ a-b&=8.\end{aligned}$$

Wegen $1\leqq a\leqq 9$ und $a>b$ folgt daraus entweder $a=8$ und $b=0$ oder $a=9$ und $b=1$. Da 80 nach dem Vertauschen der Ziffern keine zweistellige Zahl ergibt, entfällt dieser Fall. Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung; die zweistellige Zahl lautet 91, und es gilt $91-19=72$.

5▲683 Die zweistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 13 lauten 49, 58, 67, 76, 85, 94. Nur 85 ist durch 5 teilbar. Es gibt also genau eine Zahl mit den genannten Eigenschaften.

5▲684 Ein Produkt aus beliebig vielen Faktoren ist gerade, wenn wenigstens ein Faktor gerade ist. Damit das Produkt ungerade wird, müssen alle fünf Faktoren ungerade sein. Die Summe von fünf ungeraden Zahlen ist ebenfalls ungerade.

5▲685 $2929=29\cdot 100+29\cdot 1$
Allgemein:

$$\begin{aligned}100n+n&=n(100+1)=101\cdot n\\ 2929&=29\cdot(100+1)\\ &=29\cdot 101\end{aligned}$$

5▲686 Aus c) und e) folgt, daß die Zahlen n durch 2, 3 und 7 teilbar, also Vielfache von 42 sind. Wegen a) und d) kommen zunächst nur die Zahlen 126, 168, 210, 252, 294, 336, 378, 420 in Frage. Wegen b) entfallen davon die Zahlen 126, 168, 210, 252, 336, 378 und 420. Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung, nämlich die Zahl $n=294$.

5▲687 $z=(n+3)\cdot 2$ mit $n=0, 1, 2, 3, 4,\ldots$ ergibt die Zahlenfolge 6, 8, 10, 12, 14, ...

5▲688 a) 89876 b) 67876

Sport frei!

7▲689 Es wurden genau 34 Goldmedaillen vergeben.
Aus d) folgt: $34:17=2$; die Schwimmer Ungarns erkämpften zwei Goldmedaillen.
Angenommen, auf die UdSSR entfallen x, auf Westdeutschland/Westberlin y und auf Ungarn $z=2$ Goldmedaillen; nach c) gilt dann $x:y:z=3:2:1$ bzw. $x:y:2=3:2:1$ und folglich $x=6$, $y=4$. Aus b) folgt, daß die Schwimmer Schwedens und der ČSSR zusammen $2z=2\cdot 2=4$ Goldmedaillen erkämpften. Da ferner die Anzahl der auf die ČSSR entfallenden Goldmedaillen gleich dem dritten Teil der auf Schweden entfallenden ist, erhielt die ČSSR eine, Schweden drei Goldmedaillen.
Nach a) erhielt die DDR dann $6+4+3+2+1=16$ Goldmedaillen. Nach e) gilt: $34-32=2$ und $2:2=1$; die Mannschaften Frankreichs und Italiens errangen je eine Goldmedaille.

GST marschiert

7▲690 Da beim Umformieren des Marschblocks jede Reihe um vier Personen verringert wurde, mußten zuvor mindestens fünf Personen in einer Reihe marschieren. Es sei m die Anzahl Personen, die ursprünglich eine Reihe bildeten, und n die Anzahl der Reihen; dann gilt $m\cdot n=150$.

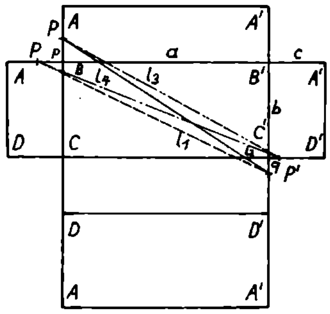
m	n	$m-4$	$n+10$	$(m-4)\cdot(n+10)$
5	30	1	40	40
6	25	2	35	70
10	15	6	25	150
15	10	11	20	220
25	6	21	16	336
30	5	26	15	390
50	3	46	13	598
75	2	71	12	852
150	1	146	11	1606

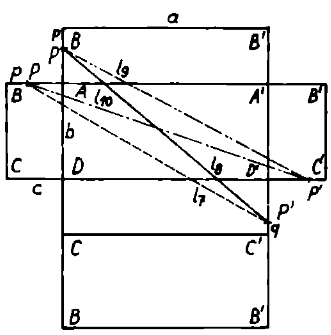
Nur für die dritte Zeile der Tabelle gilt $m\cdot n=(m-4)(n+10)=150$.

Ursprünglich bildeten somit zehn Fahnenträger eine Reihe.
Probe: $10 \cdot 15 = 6 \cdot 25 = 150$.

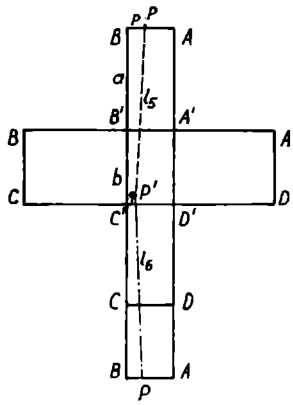
Lösung zu der Aufgabe
von Prof. Dr. Herbert Frank

▲589 Klappt man die Oberfläche eines Quaders auf, indem man sie an einigen Kanten aufschneidet, und legt sie in die Ebene, so bleibt die Länge eines beliebigen Kurvenbogens unverändert. Da in der Ebene die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten P und P' die Strecke $\overline{PP'}$ ist, wäre die Lösung der genannten Aufgabe auf folgendem Wege zu finden:
Man sucht alle Aufklappungen (Abwicklungen) der Oberfläche des Quaders $ABCD\,A'B'C'D'$ in die Ebene derart, daß die Punkte P und P' durch eine Strecke verbindbar sind, die ganz in der aufgeklappten Oberfläche des Quaders liegt. Dabei ist zu beachten, daß an aufgeschnittenen Kanten die Punkte paarweise zu identifizieren sind, d. h. entsprechende („aufgeschnittene“) Punkte als ein und derselbe Punkt gelten. Beiliegend habe ich die möglichen Fälle skizziert (ich hoffe, keinen übersehen zu haben). Es ergeben sich 10 Möglichkeiten, die Punkte P und P' mit einer Strecke zu verbinden, die ganz in der aufgeklappten Oberfläche des Quaders liegen. Unter diesen Strecken ist nun die Strecke mit der kleinsten Länge auszuwählen (das können auch mehrere Strecken gleicher Länge sein). Zu diesem Zweck berechnet man die Länge dieser Strecke mit Hilfe des Satzes von Pythagoras. Man erhält folgendes Resultat, wobei a, b, c die Länge der Kanten $\overline{AA'}$, $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AD}$ bezeichnen, p den Abstand des Punktes P vom Punkte B und q den Abstand des Punktes P' vom Punkte C':





$l_1^2 = (a+p)^2 + (b+q)^2$
$l_2^2 = a^2 + (b+p+q)^2 = (a+p-p)^2 + (b+q+p)^2$
$\quad = (a+p)^2 + (b+q)^2 - 2p(a-b-q)$
$l_3^2 = (a+q)^2 + (b+p)^2 = (a+p+q-p)^2$
$\quad + (b+q+p-q)^2$
$\quad = (a+p)^2 + (b+q)^2 - 2(p-q) \cdot (a-b)$
$l_4^2 = (a+p+q)^2 + b^2$
$\quad = (a+p+q)^2 + (b+q-q)^2 = (a+p)^2$
$\quad + (b+q)^2 + 2q(a-b+p)$
$l_5^2 = l_6^2 = (a+b)^2 + (p-q)^2 = (a+p)^2 + (b+q)^2$
$\quad + 2ab - 2pq - 2ap - 2bq$
$l_7^2 = (a+c-p)^2 + (b+c-q)^2 = (a+p+c-2p)^2$
$\quad + (b+q+c-2q)^2$
$\quad = (a+p)^2 + (b+q)^2 + (c-2p)(2a+c)$
$\quad + (c-2q)(2b+c)$ usw.



Über eine Vielzahl von Fallunterscheidungen wäre nun zu entscheiden, welche dieser Größen jeweils die kleinste ist. Ob diese Frage überhaupt entscheidbar ist, vermag ich nicht zu sagen, da ich sie selbst nicht näher untersucht habe. Vielleicht hätte ich die Aufgabe auf einen Spezialfall einschränken sollen; dann hätte sie allerdings vieles von ihrem mathematischen Reiz verloren.

Lösung des Mathematischen
„Kreuzworträtsels“ (Heft 1/71)

3	5	7		4	2	0
3	3		4		6	2
3		1	0	1		7
	1	9	6	8	3	
2		1	3	0		9
2	0		2		4	9
2	7	0		9	9	9

Zur Erläuterung der Lösung geben wir die folgenden Hinweise:
Waagerecht:
a) Es gibt nur drei solche Primzahlen, nämlich 3, 5 und 7.
c) Die Zahl ist gleich $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.
f) Wir erhalten $4x - 52 + 3x + 21 = 200$, also $7x = 231$, d. h., $x = 33$.
h) Wir erhalten $x < \frac{1000}{16} = 62\frac{1}{2}$, also ist die gesuchte natürliche Zahl gleich 62.
i) Bereits die Zahl 101 ist eine Primzahl, da sie nicht durch 2, 3, 5 und 7 teilbar ist.
k) Es gilt $2^9 = 512 < 10\,000$, $3^9 = 19\,683$ und $4^9 = 262\,144 > 100\,000$; die weiteren neunten Potenzen natürlicher Zahlen haben mehr als 5 Stellen; daher ist 19683 die einzige Zahl mit den gegebenen Eigenschaften.
m) Wir erhalten $x^2 = 120^2 + 50^2 = 16\,900$, also $x = 130$.
o) Die Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck beträgt $\frac{n(n-3)}{2}$. Für $n = 8$ erhalten wir $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$.
p) Von den zweistelligen Zahlen $25 - 1 = 24$, $50 - 1 = 49$, $75 - 1 = 74$ und $100 - 1 = 99$ besitzt nur die Zahl 49 einen Vorgänger, der durch 16 teilbar ist.
q) Die Maßzahl der anderen Kathete beträgt $\sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{1296} = 36$. Daher ist die Maßzahl des Flächeninhalts gleich $\frac{36 \cdot 15}{2} = 270$.
r) Hier hat sich in der Aufgabe ein Fehler eingeschlichen. Es muß richtig heißen: „Das Produkt zweier natürlicher Zahlen, deren k.g.V. gleich 333 und deren g.g.T. gleich 3 ist.“ Dann erhalten wir das Produkt $333 \cdot 3 = 999$; denn das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist gleich dem Produkt ihres k.g.V. und ihres g.g.T.

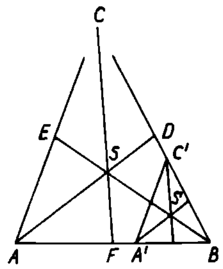
Senkrecht:
a) Aus $\frac{x}{1000} < \frac{1}{3}$ folgt $x < \frac{1000}{3} = 333\frac{1}{3}$. Daher ist die gesuchte Zahl gleich 333.
b) Die kleinste Primzahl, die größer als 50 ist, ist 53.
d) Aus $x + y = 8$ und $y - x = 4$ folgt $2y = 12$, also $y = 6$ und weiter $x = 2$.
e) Wir erhalten $1:37 = 0{,}027\ldots$; die ersten drei Ziffern sind also 0, 2, 7.
g) Wir erhalten $4x = 3x + 40\,632$, also $x = 40\,632$.
i) Es gilt $\frac{39\,800}{209} < x < \frac{40\,000}{209}$, also $190\frac{90}{209} < x < 191\frac{81}{209}$, d. h., $x = 191$.
j) Die Maßzahl des Radius ist gleich 30; daher ist die Maßzahl des Umfangs des regelmäßigen Sechsecks gleich $30 \cdot 6 = 180$.
l) Da die Zahlen 2, 3 und 37 teilerfremd sind, ist die gesuchte Zahl gleich $2 \cdot 3 \cdot 37 = 222$.
n) Die größte dreistellige natürliche Zahl ist 999.

Lösungen zu den Aufgaben von
Frau Dr. Nazla H. A. Khedre (Heft 1/71)

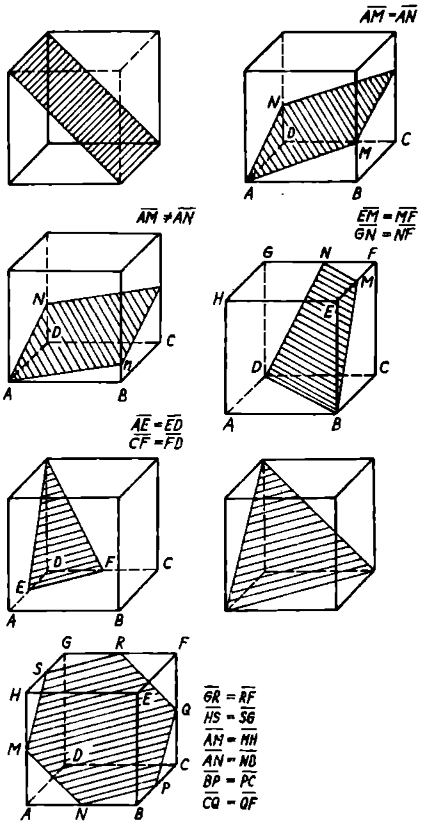
1. Aus $EL \parallel CD$, $EG \perp CD$ und $AB \perp CD$ folgt, daß das Viereck $GOLE$ ein Rechteck ist. $\overline{OE} = r$ ist Diagonale dieses Rechtecks; damit gilt $\overline{OE} = \overline{GL}$, denn die Diagonalen eines Rechtecks sind gleichlang. Aus analogen Gründen ist auch das Viereck $KFHO$ ein Rechteck mit der Diagonalen $\overline{OF} = r$, und es gilt $\overline{OF} = \overline{HK}$. Aus $r = \overline{OE} = \overline{GL}$ und $r = \overline{OF} = \overline{HK}$ folgt $\overline{GL} = \overline{HK}$.

2. Wir legen auf der Seite $\overline{BC}$ einen inneren Punkt C' fest und zeichnen durch C' die

Parallele zu AC; ihr Schnittpunkt mit der Geraden AB sei A'. Auf Grund unserer Konstruktion sind die Dreiecke ABC und $A'BC'$ einander ähnlich. Wir konstruieren nun die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks $A'BC'$; ihr Schnittpunkt sei S'. Durch A zeichnen wir dann die Parallele zu $A'S'$, die die Gerade BC in D schneidet. Die Gerade BS' schneide die Gerade AC in E; der Schnittpunkt der Geraden AD und BE sei S. Schließlich halbieren wir die Seite $\overline{AB}$, der Halbierungspunkt sei F und zeichnen die Gerade FS. Wegen $\overline{CF}=s_c$ und $\overline{SF}=\frac{1}{3}s_c$ gilt $\overline{SC}=2\cdot\overline{SF}$. Damit läßt sich C konstruieren, indem wir auf der Geraden FS von S aus die Strecke $\overline{SC}=2\cdot\overline{SF}$ abtragen.



3. Der Anschaulichkeit halber geben wir mögliche Lösungen durch Schrägbilder an.



Lösungen der Aufgaben, gestellt für die alpha-Leser von den 6 Mädchen, welche an der XII. IMO teilnahmen:

Helena Husova (ČSSR): Durch jedes Zerschneiden eines Blattes Papier in zwölf Teile vergrößert sich die Anzahl der Papierstückchen um elf Stück. Werden n Blätter zerschnitten, so erhalten wir $(12+11n)$ Blätter zum Teil unterschiedlicher Größe. Die Gleichung $12+11n=100$ besitzt die Lösung $n=8$. Die Gleichung $12+11n=1000$ besitzt im Bereich der natürlichen Zahlen als Grundbereich keine Lösung. Auf die vorgegebene Weise können 100, aber nicht 1000 Papierstückchen entstehen.

Virginia Stoinova Hristova (VR Bulgarien): Es seien in dieser Reihenfolge $\overline{PD}=r$, $\overline{PE}=s$, $\overline{PF}=t$ die Längen der von P auf $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ gefällten Lote. Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC ergibt sich dann

$$\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}as+\frac{1}{2}at=\frac{1}{2}ah,$$
$$\frac{1}{2}a(r+s+t)=\frac{1}{2}ah,$$
$$r+s+t=h.$$

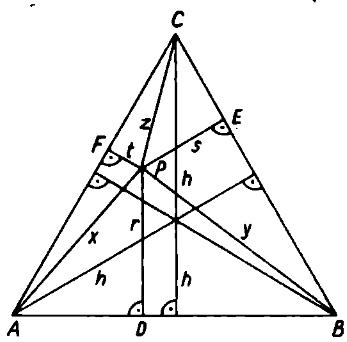
Die Summe aus den Längen dieser Lote ist also konstant, und zwar gleich der Höhe h des Dreiecks ABC.

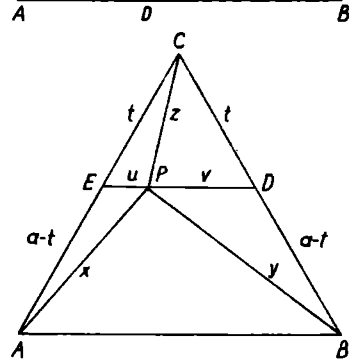
Für eine beliebige Lage des Punktes P gilt dann (wie der Zeichnung zu entnehmen ist):

$$z+r\geqq h,\quad x+s\geqq h,\quad y+t\geqq h.$$

Daraus folgt $x+y+z+(r+s+t)\geqq 3h$,

$$x+y+z+h\geqq 3h,$$
$$x+y+z\geqq 2h=a\sqrt{3}.$$





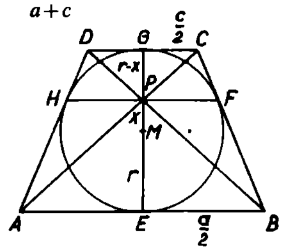
Wir zeichnen eine Parallele zu AB durch P, sie schneide AC in E, BC in D. Das Dreieck EDC ist dann ebenfalls gleichseitig.

Es sei $\overline{ED}=\overline{CD}=\overline{CE}=t$, $\overline{PE}=u$ und $\overline{PD}=v$, dann gilt $\overline{AE}=\overline{BD}=a-t$.

Wegen $z<t$, $x<u+(a-t)$, $y<v+(a-t)$ gilt dann $x+y+z<2a+(u+v)-t$,

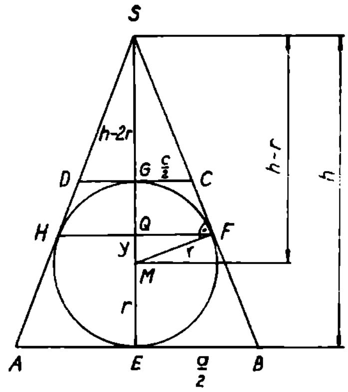
$$x+y+z<2a+t-t,$$
$$x+y+z<2a.$$

Agnes Szendrei (Ungarische VR): Jedes gleichschenklige Trapez ist eine axialsymmetrische Figur. Die Berührungspunkte E und G des Inkreises mit den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sowie der Schnittpunkt P der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ liegen auf der Symmetrieachse EG des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$. Es sei M der Mittelpunkt des Inkreises und r sein Radius; bezeichnen wir $\overline{MP}$ mit x, dann gilt $\overline{EP}=r+x$ und $\overline{GP}=r-x$. Nach dem Strahlensatz erhalten wir $a:c=(r+x):(r-x)$ bzw. $x=\frac{r(a-c)}{a+c}$.



Der Schnittpunkt S der Geraden BC und AD liegt ebenfalls auf der Symmetrieachse EG. Es sei $\overline{ES}=h$, Q der Schnittpunkt der Sehnen $\overline{EG}$ und $\overline{FH}$ und $\overline{MQ}=y$, dann gilt $\overline{GS}=h-2r$. Nach dem Strahlensatz erhalten wir $h:(h-2r)=a:c$ bzw. $h=\frac{2ar}{a-c}$. Wenden wir auf das rechtwinklige Dreieck MFS den Kathetensatz an, so erhalten wir $y(h-r)=r^2$ bzw. $h=\frac{r(r+y)}{y}$. Durch Gleichsetzen und weiteres Umformen erhalten wir schließlich $\frac{2ar}{a-c}=\frac{r(r+y)}{y}$ bzw. $y=\frac{r(a-c)}{a+c}$.

Damit gilt $x=y$ bzw. $\overline{MP}=\overline{MQ}$, das heißt, die Punkte P und Q fallen zusammen. Dieser Sachverhalt gilt auch für ein beliebiges Tangentenviereck; der Beweis wird dann allerdings recht schwierig.



Cevelma Dansansaravin (Mongolische VR): Es sei x die Anzahl der Bäume und y die Anzahl der Vögel; dann gilt $y-x=1$ und $2(x-1)=y$. Durch Substitution erhalten wir daraus $2(x-1)-x=1$. Diese Gleichung hat die Lösung $x=3$. Aus $y-3=1$ folgt $y=4$. Es waren drei Bäume und vier Vögel vorhanden.

Angelika Rindler (Österreich): Es seien p und $p+2$ Primzahlen, ihre Summe beträgt $2p+2=2(p+1)$. Da p Primzahl ist, muß $p+1$ eine gerade Zahl und somit durch 2 teilbar sein. Folglich ist $2(p+1)$ durch $2\cdot 2=4$ teilbar.

Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen p, $p+1$, $p+2$ ist genau eine durch 3 teilbar. Da $p\neq 3$, und p und $p+2$ beides Primzahlen sind, kann nur $p+1$ durch 3 teilbar sein. Deshalb ist $2(p+1)$ durch $4 \cdot 3 = 12$ teilbar.

Ursula Tyl (DDR): Es sei p das Produkt zweier der vier angegebenen Zahlen; nach Voraussetzung gilt dann

$$p^2 = (n-1)(n^2-n)(n^3-n^2)(n^4-n^3),$$
$$p^2 = (n-1)\,n\,(n-1)\,n^2\,(n-1)\,n^3\,(n-1),$$
$$p^2 = n^6(n-1)^4,$$
$$p = n^3(n-1)^2.$$ Nun gilt aber

auch $(n-1)(n^4-n^3) = n^3(n-1)^2$ und $(n^2-n)(n^3-n^2) = n^3(n-1)^2$.

Folglich ist das Produkt aus der ersten und vierten stets gleich dem Produkt aus der zweiten und dritten der angegebenen vier Zahlen und zwar für $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$.

Lösung der Aufgabe von
Dipl.-Math. V. Scharnitzky (Heft 6/70, S. 144)

Da $1970 = 2 \cdot 5 \cdot 197$ und $n = 2k$, wobei k eine positive ganze Zahl ist, haben wir nur zu beweisen, daß die Zahl

$$z = 222^{2k} + 202^{2k} - 192^{2k} - 172^{2k}$$
$$= 2^{2k}(111^{2k} + 101^{2k} - 96^{2k} - 86^{2k})$$

durch 2, durch 5 und durch 197 teilbar ist.

Nun ist, weil k eine positive ganze Zahl ist, 2^{2k} durch 2 teilbar; wir haben also nur noch zu beweisen, daß die Zahl

$$x = (111^{2k} - 86^{2k}) + (101^{2k} - 96^{2k})$$

durch 5 und durch 197 teilbar ist. Wir haben dabei die Summanden so geordnet, daß die Summe der Basen der Potenzen in beiden Klammern jeweils 197 beträgt, da ja auch die Teilbarkeit durch 197 nachzuweisen ist.

Wir erhalten weiter

$$x = (111^k + 86^k)(111^k - 86^k) + (101^k + 96^k)(101^k - 96^k).$$

Nun gilt für alle positiven ganzen Zahlen k und für alle reellen Zahlen a und b mit $a \neq b$ (vgl. z. B. das Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 57)

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}),$$

also ist $a^k - b^k$ durch $a-b$ teilbar. Daraus folgt, daß $111^k - 86^k$ durch $111 - 86 = 25$ und $101^k - 96^k$ durch $101 - 96 = 5$ teilbar ist, also ist x durch 5 teilbar.

Nun unterscheiden wir die folgenden beiden Fälle:

1. Fall: k sei eine ungerade positive ganze Zahl. Dann gilt

$$a^k + b^k = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + \ldots - ab^{k-2} + b^{k-1}),$$

also ist $a^k + b^k$ durch $a+b$ teilbar.

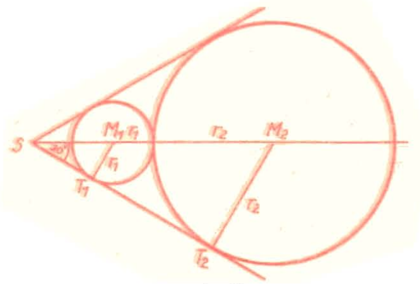
Daraus folgt, daß in diesem Fall $111^k + 86^k$ durch $111 + 86 = 197$ und $101^k + 96^k$ durch $101 + 96 = 197$ teilbar ist. Also ist auch x durch 197 teilbar.

2. Fall: $k = 2m$ sei eine gerade positive ganze Zahl. Dann gilt $a^k - b^k = a^{2m} - b^{2m} = (a^m + b^m)(a^m - b^m)$.

Ist nun m ungerade, so ist wieder $a^m + b^m$ durch $a+b$ teilbar. Also ist in diesem Fall $111^m + 86^m$ und $101^m + 96^m$ durch 197 teilbar, d. h., auch x ist durch 197 teilbar.

Ist aber m gerade, so setzen wir das Verfahren so lange fort, bis wir einen Zerlegungsfaktor $a^t + b^t$ mit ungeradem t erhalten, der dann durch $a+b$ teilbar ist; dabei kann auch $t = 1$ werden. Daher ist auch in diesem Falle x durch 197 teilbar. Damit haben wir bewiesen, daß die Zahl x in jedem Falle durch 197 und durch 5 teilbar ist. Also ist die Zahl z durch 197, durch 5 und durch 2 teilbar, also durch 1970 teilbar, w. z. b. w.

9▲611 Es seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2, S der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten und T_1 bzw. T_2 die Berührungspunkte einer Tangente mit den Kreisen k_1 bzw. k_2.



Dann hat das rechtwinklige Dreieck M_1ST_1 die Winkel $\sphericalangle M_1ST_1 = 30°$ und $\sphericalangle T_1M_1S = 60°$; man kann es sich also durch Zerlegung eines gleichseitigen Dreiecks in zwei kongruente rechtwinklige Teildreiecke entstanden denken. Wegen $\overline{M_1T_1} = r_1$ gilt also $\overline{SM_1} = 2r_1$ und analog $\overline{SN_2} = 2r_2$. Daraus folgt

$$\overline{M_1M_2} = \overline{SM_2} - \overline{SM_1} = 2r_2 - 2r_1.$$

Andererseits gilt, da die Kreise k_1 und k_2 sich berühren,

$$\overline{M_1M_2} = r_1 + r_2.$$

Wir erhalten also die Gleichungen

$$r_1 + r_2 = 2r_2 - 2r_1,$$
$$3r_1 = r_2,$$
$$r_1 : r_2 = 1 : 3.$$

Die Radien der Kreise k_1 und k_2 verhalten sich also wie $1:3$.

10/12▲615 Angenommen, lg 5 sei rational; dann gilt $\lg 5 = \frac{p}{q}$, wobei wegen $\lg 5 > 0$ p und q teilerfremde, von Null verschiedene natürliche Zahlen sind.

Es gilt also, da die Basis der dekadischen Logarithmen gleich 10 ist,

$$10^{\frac{p}{q}} = 5, \quad 10^p = 5^q, \quad 5^q \cdot 2^p = 5^q.$$

Wegen $p \geqq 1$ ist der Term auf der linken Seite dieser Gleichung durch 2 teilbar, also auch der Term auf der rechten Seite, d. h., die Zahl 5^q und damit auch die Zahl 5 ist durch 2 teilbar. Das ist aber ein Widerspruch; daher ist die Annahme, lg 5 sei eine rationale Zahl falsch, womit die Behauptung bewiesen ist.

Berichtigung

Gudrun Manske erhielt das *alpha*-Abzeichen in Gold. Sie wurde versehentlich in Klassenstufe 6 anstatt in Klassenstufe 9 eingereiht. Sie ist (bei 18 eingesandten Lösungen) Preisträger und erhielt eine Buchprämie. In Klassenstufe 8 muß es heißen: *Beate Recknagel*, in Heft 6/70 auf S. 137, Klassenstufe 5: *Elke Genath*. Wir danken dem Mathematikfachlehrer E. Manske, Steinbach-Hallenberg, für den Hinweis. Der vorbildlichen Schule wünschen wir weiterhin gute Erfolge im *alpha*-Wettbewerb. Als Anerkennung für die sehr guten Leistungen wurden 5 Buchprämien überreicht, d. Red.

Lösungen zu alpha-heiter

Ference Pataki in Aktion

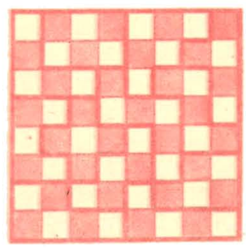
$[(2a+39) \cdot 50 + 21] - (1971 - b) = 100a + b$

Jede individuelle Belegung der Variablen a und b des Ausdrucks $100a+b$ liefert die in der Aufgabe gesuchte Zahl.

Brandschutz-Rechenübung

Es sind 9 Feuerwehrleute angetreten.

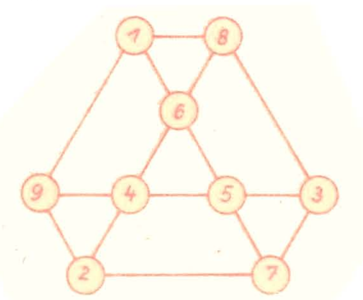
Das zersprungene Schachbrett



Kryptarithmetik

▲=2 ⊙=3 ⊂⊃=4 ⊠=6

Eine Aufgabe von Albert Einstein



Wieviel wiegt der Knabe?

Es müssen 6 Katzen auf die Waage springen.

Rätsel

1. Diagonale 2. Addition 3. Tangens 4. Ellipse 5. Nullstelle 6. Variable 7. Exponent 8. Rechteck 9. Abstand 10. Rhombus 11. Bruch 12. Einheit 13. Intervallschachtelung 14. Tangente 15. Ungleichungen 16. Normalparabel 17. Gleichungen: *Datenverarbeitung*

Literatur

In Vorbereitung

GELFAND/GLAGOLEWA/SCHNOL

Funktionen und graphische Darstellungen

Übersetzung aus dem Russischen
Etwa 104 Seiten mit etwa 200 Abbildungen.
Etwa 7,40 M

Der Behandlung von Funktionen und ihrer graphischen Darstellungen wird in der Schule ein weiter Raum gegeben, da sie in nahezu allen Bereichen von Wissenschaft und Technik eine hervorragende Rolle spielen. Der Inhalt des vorliegenden Buches ist eine Erweiterung und Vertiefung des Lehrplanstoffes; wesentliche Teile knüpfen genau dort an, wo die schulmäßige Behandlung endet.

W. MAY

Differentialgleichungen

Etwa 196 Seiten mit etwa 34 Abbildungen.
Etwa 7,50 M

Das Buch stellt für Schüler der oberen Klassen diesen über den Lehrplan der Schule hinausgehenden Stoff in verständlicher Form dar. Dabei will es keine vollständige Behandlung der verschiedenen Arten von Differentialgleichungen bringen, sondern dem Leser einen Einblick in die Bedeutung, Lösungsprinzipien und Möglichkeiten der Anwendung von Differentialgleichungen geben.

Neuerscheinungen

ZICH/KOLMAN

Unterhaltsame Logik

Übersetzung aus dem Tschechischen
84 Seiten mit 15 Abbildungen.
Etwa 5,90 M

Nach kurzer, leichtverständlicher Einführung in die Aussagenlogik, die nur geringe Voraussetzungen an mathematischen Kenntnissen erfordert und für Schüler der mittleren und oberen Klassenstufen geeignet ist, regen viele interessante Aufgaben den Leser zur intensiven Mitarbeit an.

H. BELKNER

Matrizen

96 Seiten. 4,30 M

E. LEHMANN

Lineare Optimierung für Junge Mathematiker

116 Seiten mit 36 Abbildungen. 4,85 M

Alle Bändchen kartoniert und im Format 12 cm × 19 cm

Außerdem lieferbar

Belkner	
Determinanten	4,80 M
Gelfand/Glagolewa/Kirillow	
Die Koordinatenmethode	3,40 M
Hameister	
Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene	4,20 M
Hasse	
Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik	3,30 M
Krysicki	
Zählen und Rechnen einst und jetzt	4,80 M
Lietzmann	
Altes und Neues vom Kreis	2,10 M
Der Pythagoreische Lehrsatz	3,30 M
Riesen und Zwerge im Zahlenreich	1,85 M
Wo steckt der Fehler?	4,80 M
Miller	
Rechenvorteile	3,75 M
Sedláček	
Einführung in die Graphentheorie	6,40 M
Übungen für Junge Mathematiker	
Teil 1:	
Lehmann, Zahlentheorie	6,50 M
Teil 2:	
Grosche, Elementargeometrie	4,50 M
Teil 3:	
Kleinfeld, Ungleichungen	5,50 M

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Zum 10. Male wird in der DDR die Mathematik-Olympiade durchgeführt. Die meisten von Euch werden sich schon einige Male erfolgreich an der ersten Stufe beteiligt haben; manchen ist es gelungen, an einer Kreis-, Bezirks- oder sogar an der DDR-Olympiade teilzunehmen und sich dort Preise zu verdienen. Aber nicht nur den Preisträgern, sondern allen Teilnehmern an irgendeiner Stufe der Mathematik-Olympiade möchte ich anläßlich dieses Jubiläums die herzlichsten Glückwünsche aussprechen; denn für alle bedeutet schon die Teilnahme an diesem Wettkampf einen Gewinn. Die Mühe für die Vorbereitung trägt ihre Früchte in der schulischen Arbeit und darüber hinaus, und für viele wird die Beschäftigung mit der Mathematik auch zur Freude an der Mathematik geführt haben.

Wie Eure Schülerzeitschrift *alpha* soll auch die Mathematische Schülerbücherei Euch bei Eurer Arbeit helfen, Kenntnisse vermitteln und Freude bereiten. Wir Verlagsmitarbeiter hoffen, daß uns das bisher gelungen ist, und wir werden uns weiterhin bemühen, Euch viele interessante Bändchen der Mathematischen Schülerbücherei zur Verfügung zu stellen.

Für die erfolgreiche Teilnahme an der 10. Mathematik-Olympiade möchte ich Euch meine besten Wünsche übermitteln.

D. Ziegler *Verantw. Lektor für Mathematik*

Bücher von heute sind morgen Taten

Literatur zu: 10 Jahre Raumfahrt (siehe S. 27 bis 29)

J. A. Gagarin / W. I. Lebedew
Der Sprung ins Weltall
Aus dem Russischen von Friedrich Bergner.
205 Seiten mit Fotos, Halbleinen 7,20 M,
Verlag Neues Leben, Berlin

Die Autoren schildern aus eigenem Erleben die Emotionen und Reaktionen von Raumpiloten in außergewöhnlichen Situationen. Sie machen den Leser nicht nur mit dem Bau und der Ausstattung sowjetischer Raumschiffe bekannt, sondern gehen vor allem auf die im Zustand der Schwerelosigkeit und in der Welt der Stille auftretenden Erscheinungen und Schwierigkeiten sowie auf Möglichkeiten zu ihrer Überwindung ein.

Heinz Mielke **Der Weg zum Mond**
264 Seiten mit Illustrationen, Fotos und Tafeln,
Halbleinen 12,40 M, Verlag Neues Leben, Berlin

Zusammen mit dem Leser verfolgt der Autor den Weg, den das menschliche Erkenntnisstreben von ersten Phantasievorstellungen bis zur wissenschaftlichen Erkundung des Mondes zurückgelegt hat, und macht ihm den wechselseitigen Zusammenhang der Raumfahrtforschung und der wissenschaftlich-technischen Revolution und damit den Nutzen dieser Forschung für die Entwicklung der menschlichen Gesellschaft erkennbar.

Bestellung obengenannter Titel sind unter Angabe des Kennwortes *alpha* zu richten an:
Buchhaus Leipzig, 701 Leipzig, PSF 140

Heinz Mielke **Lexikon Raumfahrt**
367 Seiten, zahlreiche Abb., Halbleinen 18,60 M,
transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin

Das Lexikon ist gegenwärtig das umfassendste deutschsprachige Nachschlagewerk seiner Art. Es enthält etwa 1 200 Stichwörter und Synonyme sowie zahlreiches Bildmaterial. Übersichten über die Grenzwissenschaften der Raumfahrt, Fakten aus der Raketen- und Raumfahrtgeschichte sowie Biographien der Kosmonauten und Astronauten ermöglichen eine umfassende Information.

Frösi Schallfolie: **Der Weg in den Kosmos**
Preis 2,— M
Zu bestellen bei: Redaktion Frösi, Verlag „Junge Welt", 108 Berlin

Inhaltsangabe der Schallfolie: Originalaufnahmen von Sputnik 1 bis 3, Lunik 1 bis 5; Startvorbereitungen auf dem Kosmodrom Baikonur. Die Stimme des ersten Kosmonauten aus der Testkammer und dem Weltall · Telefongespräch J. Gagarins nach Saratow

Daten seines Fluges: Raumschiff „Wostok 1" · 4725 kg Start: 12. 4. 1961 7.07 MEZ · Startort: Baikonur · Landung: 12. 4. 1961, 8.55 MEZ · Landeort: Dorf Smelowka, südlich Engels an der Wolga.

Aus der Mathematischen Schülerbücherei

L. A. KALJOUJNINE
Primzahlzerlegung
Übersetzung aus dem Russischen · MSB, Band 59
1971, etwa 40 Seiten, Broschur 2,40 M
Bestellnummer: 569 878 0

T. ROMAN
Reguläre und halbreguläre Polyeder
Übersetzung aus dem Rumänischen · MSB, Band 45
1968, 119 Seiten, 76 Abbildungen, Broschur, 6,— M
Bestellnummer: 569 467 5

I. M. SOBOL
Die Monte-Carlo-Methode
Übersetzung aus dem Russischen · MSB, Band 61
1971, etwa 50 Seiten, Broschur, 3,80 M
Bestellnummer: 569 879 9

N. N. WOROBJOW
Die Fibonaccischen Zahlen
Übersetzung aus dem Russischen · MSB, Band 19
2., erweiterte Auflage 1971, 129 Seiten, 22 Abbildungen, Broschur, 4,80 M
Bestellnummer: 569 841 4