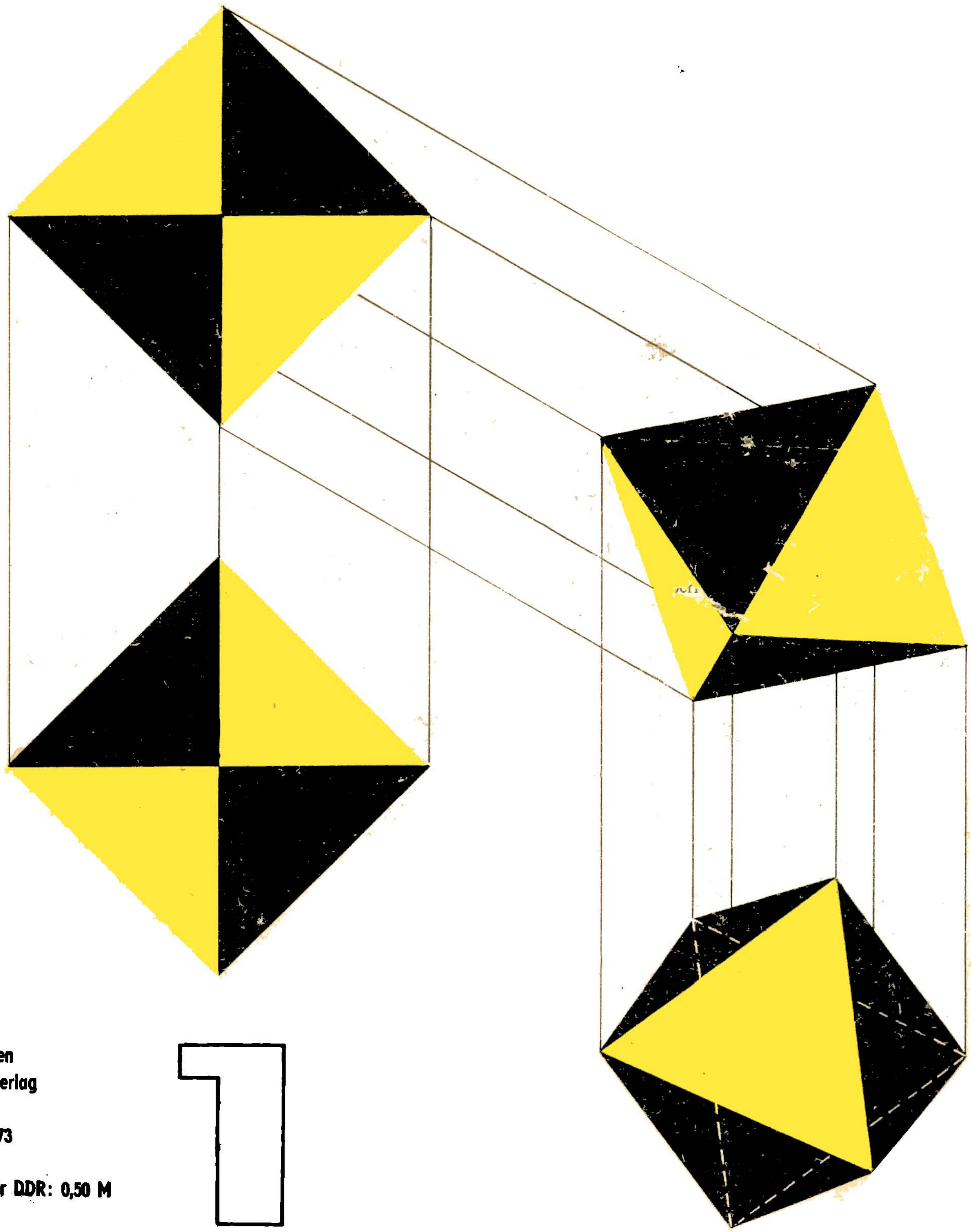
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
7. Jahrgang 1973
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

1

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignetten aus „Rentierzüchter am Schwarzen Meer“ J. Migunow, Moskau (S. 4); J. Lehmann, Leipzig (S. 6/7); Vignetten: K.-H. Guckuk, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 27. November 1972

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Einige Fragen und Aufgaben ungewohnter Art

Es gibt Schüler, die sich auf Klassenarbeiten freuen und ihre Rückgabe kaum erwarten können. Sie tun das deshalb, weil sie — auch vor sich selbst — beweisen möchten, was sie gelernt haben, und weil ihnen die gute Zensur eine echte Belohnung ist. Es gibt aber auch Schüler, die sich vor Klassenarbeiten fürchten; sie möchten verbergen, daß sie etwas nicht gelernt haben. Sicher gehört jeder *alpha*-Leser zur ersten Gruppe und hat sich deshalb schon manchmal gewundert oder gar geärgert, wenn etwas in einer Klassenarbeit nicht vorkam, was er eigentlich erwartet hatte. Und gerade, wenn das Lernen viel Mühe gekostet hat, möchte man doch gerne eine Bestätigung dafür haben, ob diese Mühe erfolgreich war.

Diese Möglichkeit soll euch jetzt für ein Stoffgebiet gegeben werden, das viel Anstrengung fordert und in Leistungskontrollen nur selten auftritt: *Reelle Zahlen.* Sie werden am Anfang des 9. Schuljahres behandelt, aber schon in Klasse 7 vorbereitet durch die Einführung der Quadratwurzel und der Irrationalzahlen. Deshalb ist fast alles Folgende auch für die Schüler aus den 7. Klassen verständlich, sofern sie die Irrationalzahlen schon kennengelernt haben. Am Wort „Reelle Zahlen“, das sie noch nicht kennen, sollten sie nicht scheitern. Es genügt, wenn sie sich vorstellen: Die Menge der rationalen Zahlen und die Menge der irrationalen Zahlen ergeben zusammen die Menge der reellen Zahlen.

Und nun viel Spaß beim Nachdenken — und nicht aufs Glatteis führen lassen! Notiert eure Antworten und Lösungen und vergleicht dann mit denen in diesem Heft, Seite 23.

▲1▲ Wenn man etwas tut, sollte man eigentlich wissen, aus welchem Anlaß und mit welchem Ziel man es tut. Das gilt auch in der Mathematik. Darum:

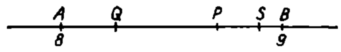
a) Welche wichtige Erkenntnis war der Anlaß für die Einführung der reellen Zahlen?

b) Welches Ziel ergab sich damit für die Einführung?

c) Ist dieses Ziel erreicht worden?

▲2▲ Sicher wurde im Unterricht davon gesprochen, daß den Punkten einer Geraden Zahlen zugeordnet werden. Versuchen wir es:

a) Ordne dem Punkt P möglichst genau einen Dezimalbruch p zu!

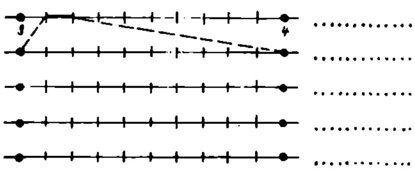


b) Ordne dem Punkt Q möglichst genau einen Dezimalbruch q zu! Q ist folgendermaßen entstanden: Die Strecke $\overline{AB}$ wurde in 11 gleiche Teile geteilt; Q ist Endpunkt des dritten Teilstückes.

c) (Ab Klasse 8). Welche Zahl muß dem Punkt S zugeordnet werden? Für S gilt: Sein Abstand vom Nullpunkt der Zahlengeraden ist genau so groß, wie die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 8 bzw. 4 Einheiten lang sind.

▲3▲ Die Zahl π lautet 3,14159265.... Derartige Dezimalbrüche kann man durch fortgesetzte Zehnteilung an der Zahlengeraden veranschaulichen.

Intervallänge



a) Auf dem ersten der fünf Zahlengeradenteile ist dasjenige Intervall gekennzeichnet, in dem der zu π gehörige Punkt liegen müßte. Kennzeichne in gleicher Weise auch auf den anderen vier Zahlengeradenteilen die für π zutreffenden Intervalle! Beschrifte dabei die durch „●“ markierten Punkte mit den zugehörigen Dezimalbrüchen!

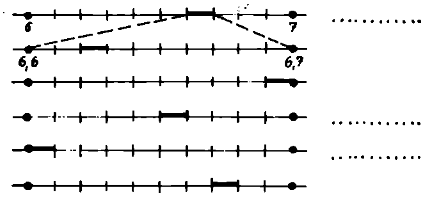
b) Gib rechts (unter Intervallänge) für jeden Schritt die Differenz derjenigen beiden Zahlen an, die zu den durch „●“ gekennzeichneten Punkten gehören!

▲4▲ Jetzt wollen wir umgekehrt wie bei Aufgabe 3 vorgehen: Wir wissen von einem Punkt P, daß er bei den ersten sechs Schritten einer fortgesetzten Zehnteilung auf der Zahlengeraden in den gekennzeichneten Intervallen liegt.

a) Beschrifte, wo es noch fehlt, die durch „o“ markierten Punkte mit den zugehörigen Dezimalbrüchen!

b) Gib für jeden Schritt die Länge der durch einen starken Querstrich gekennzeichneten Intervalle an!

Intervallänge



c) Gib den zu P gehörigen Dezimalbruch möglichst genau an!

d) Wir wollen annehmen, daß P ein irrationaler Punkt ist und die Zehnteilung (in Gedanken) beliebig weit fortgesetzt wird. Was würdest du auf folgende Frage erwidern: „Wie lang ist das kürzeste dabei entstehende Intervall?“

▲5▲ Auf einer Geraden seien in bekannter Weise die reellen Zahlen aufgetragen; wir erhalten dadurch die uns bekannte reelle Zahlengerade. Überlege, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind!

a) Zu jeder rationalen Zahl gehört genau ein Punkt.

b) Zu jedem Punkt gehört genau eine rationale Zahl.

c) Zu jeder irrationalen Zahl gehört genau ein Punkt.

d) Zu jedem Punkt gehört genau eine irrationale Zahl.

e) Zu jeder reellen Zahl gehört genau ein Punkt.

f) Zu jedem Punkt gehört genau eine reelle Zahl.

▲6▲ Schreibe einen unendlichen nichtperiodischen Dezimalbruch zwischen 6 und 7 auf!

▲7▲ Setze bei a) bis h) zwischen beiden Zahlen das zutreffende Zeichen $<$, $=$, $>$. Setze keins der Zeichen, wenn du meinst, daß auf Grund der vorliegenden Angaben eine Entscheidung nicht möglich ist. (Punkte wie z. B. bei 6,14... bedeuten lediglich, daß es sich um einen unendlichen Dezimalbruch handelt, bei dem nach der 4 nicht nur die 0 auftritt.)

a)	0,373736	$0,\overline{37}$	e)	4,8139	4,8139...
b)	$7,\overline{5}$	7,5555	f)	2,75...	2,754...
c)	$\sqrt{2}$	1,414	g)	9,571...	9,571...
d)	$\sqrt{27}$	$-\sqrt{27}$	h)	6,14999	6,14...

▲8▲ Gib ohne Benutzung von Zahlentafel oder Rechenstab zwei endliche Dezimalbrüche a und b mit folgenden Eigenschaften an:

(1) a und b haben eine Stelle nach dem Komma.

(2) Es gilt: $b-a=0{,}1$

(3) Es gilt: $a<\sqrt{7}<b$

▲9▲ Beantworte und begründe, ohne Rechenstab oder Zahlentafel zu benutzen:

a) Ist 5,5 der Anfang des unendlichen Dezimalbruchs zu $\sqrt{30}$?

b) Ist 4,1 der Anfang des unendlichen Dezimalbruchs zu $\sqrt{18}$?

▲10▲ Es sei $a = 1{,}23456789101112\ldots$ derjenige unendliche Dezimalbruch, der sich durch fortlaufendes Hinschreiben der Folge der natürlichen Zahlen ergibt. Wenn man aus a endliche Dezimalbrüche bildet, in dem man nacheinander immer eine Stelle mehr berücksichtigt, so erhält man eine unendliche Folge, deren erste fünf Glieder heißen

1; 1,2; 1,23; 1,234; 1,2345.

Durchdenke für diese Folge und den unendlichen Dezimalbruch a die Fragen a) bis g)! Überlege, ob eine Antwort möglich ist und wie sie heißen müßte!

a) Wie heißt das 12. Glied der Folge?

b) Wie groß ist die Differenz zwischen dem 7. und dem 6. Glied?

c) Was ist über die Größe zweier beliebiger benachbarter Glieder zu sagen?

d) Welches ist das größte Glied der Folge?

e) Was ergibt ein Größenvergleich aller Glieder mit a?

f) Welches Glied hat den kleinsten Abstand von a?

g) Welches Glied ist genau so groß wie a?

▲11▲ (nur für Klasse 9). Bei den unendlichen Dezimalbrüchen wurden die periodischen mit der Neunerperiode, also z. B. $7{,}1\overline{9}$, besonders erwähnt. Durchdenke die folgenden Sätze, ob sie wahr, ob sie falsch oder ob sie vielleicht sinnlos sind!

a) $7{,}1\overline{9}$ ist kleiner als 7,20.

b) $7{,}1\overline{9}$ ist gleich 7,20.

c) $7{,}1\overline{9}$ ist größer als 7,20.

d) $7{,}1\overline{9}$ und 7,20 gehören zu verschiedenen Punkten der Zahlengeraden.

e) Der Punkt zu $7{,}1\overline{9}$ liegt unmittelbar vor dem zu 7,20.

f) $7{,}1\overline{9}$ und 7,20 gehören zum gleichen Punkt der Zahlengeraden.

g) $7{,}1\overline{9}$ ist eine rationale Zahl.

h) $7{,}1\overline{9}$ ist eine irrationale Zahl.

i) $7{,}1\overline{9}$ ist eine reelle Zahl.

▲12▲ (nur für Klasse 9). Das Rechnen mit reellen Zahlen kam im Unterricht etwas kurz weg. Doch die beiden folgenden Aufgaben sind leicht. Es sei a der unendliche Dezimalbruch von Aufgabe 10 und $b = 3{,}\overline{27}$.

a) Gib $a + b$ bis zur sechsten Stelle nach dem Komma an!

b) Gib $a \cdot b$ bis zur zweiten Stelle nach dem Komma an!

Durchdenke auch das Vorgehen, wenn mehr Stellen gefordert werden!

▲13▲ Wir wollen die unter a) bis f) stehenden Zahlen betrachten:

a) 17 b) 0,17 c) $17{,}\overline{17}$ d) -17 e) $\sqrt{17}$ f) $\frac{17}{2}$

Gib jeweils den Nachfolger der betreffenden Zahl an (bezüglich der Kleinerbeziehung)! Wenn dir das nicht gelingen sollte, so wären als Ursachen dafür drei Fälle zu unterscheiden:

1. Für die betreffende Zahl gibt es gar keinen Nachfolger. 2. Du weißt nicht, ob es für sie einen Nachfolger gibt. 3. Du weißt zwar, daß die betreffende Zahl einen Nachfolger hat, du kannst ihn aber nicht finden.

Welcher Fall liegt bei dir jeweils vor?

▲14▲ Zwei Zahlbereiche kann man besonders gut dadurch vergleichen, daß man gemeinsame und unterscheidende Eigenschaften betrachtet. Wir wollen das für die Bereiche „Rationale Zahlen" und „Reelle Zahlen" tun, indem wir überlegen: Welche der unter a) bis h) beschriebenen Eigenschaften haben beide Bereiche, hat einer (welcher?), hat keiner?

Im Bereich dieser Zahlen

a) ... kann man unbeschränkt dividieren (außer durch 0).

b) ... kann man unbeschränkt potenzieren (natürliche Zahlen größer 0 als Exponenten).

c) ... liegt zwischen zwei beliebigen Zahlen mindestens eine weitere.

d) ... gibt es für jeden Punkt der Zahlengeraden genau eine Zahl.

e) ... gehört zu jeder Zahl genau ein Punkt der Zahlengeraden.

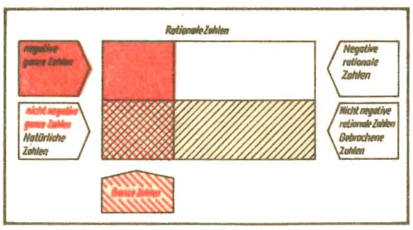
f) ... hat jede positive Zahl eine Quadratwurzel.

g) ... liegen zwischen beliebigen Zahlen unendlich viele weitere Zahlen.

h) ... ist jede Gleichung der Form $x^n = a$ lösbar. (n kann jede natürliche Zahl, a kann jede Zahl des jeweiligen Bereichs sein.)

G. Pietzsch

(Lösungen siehe Seite 23, d. Red.)



Reelle Zahlen, die rationalen Punkten zugeordnet sind, heißen rationale reelle Zahlen. Alle anderen reellen Zahlen heißen irrational.

Die rationalen reellen Zahlen und die irrationalen reellen Zahlen bilden zusammen den Bereich der reellen Zahlen.

Eine Aufgabe von Nationalpreisträger Prof. Dr. rer. nat. Dr. sc. techn. Dieter König

Ordentlicher Professor an der Sektion Mathematik der Bergakademie Freiberg

▲1002▲ Wir betrachten zwei zufällige Ereignisse A, B, die unter bestimmten Bedingungen eintreten können, aber nicht notwendig eintreten müssen. Außerdem betrachten wir das Ereignis AB (Produkt von A und B), das darin besteht, daß A und B gemeinsam eintreten (faßt man A und B als Mengen auf, so bedeutet das Produkt AB den Durchschnitt $A \cap B$).

Zwei zufällige Ereignisse A, B heißen (stochastisch) unabhängig voneinander genau dann, wenn die Wahrscheinlichkeit $P(AB)$ für das gemeinsame Eintreten von A und B gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ für das Eintreten von A und $P(B)$ für das Eintreten von B ist, d. h. wenn

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Man prüfe für die drei Ereignisse A, B, C des folgenden Beispiels, ob je zwei von ihnen stochastisch unabhängig sind und ob A, B, C „insgesamt" stochastisch unabhängig sind, d. h. ob gilt

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Beispiel: Es wird gleichzeitig mit zwei regulären Würfeln mit je 6 Seiten mit den Zahlen 1, 2, ..., 6 gewürfelt; die zufälligen Ereignisse seien:

A: beim 1. Würfel liegt eine gerade Zahl oben,

B: beim 2. Würfel liegt eine ungerade Zahl oben,

C: es liegt bei beiden Würfeln eine gerade oder bei beiden Würfeln eine ungerade Zahl oben.

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeiten für die auftretenden zufälligen Ereignisse können im Sinne der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmt werden, d. h. z. B.

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Möglichkeiten oben liegender Zahlen, bei denen das Ereignis } A \text{ eintritt}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten oben liegender Zahlen}}$$

Zusatzfrage: Welche allgemeine Aussage gestattet das Ergebnis dieses Beispiels?

Berufsbild: Geophysiker

Die Geophysik umfaßt die Physik der festen Erde, der Wasserhülle (Ozeanologie), der Lufthülle (Meteorologie) und der hohen Atmosphäre. Eine besondere volkswirtschaftliche Bedeutung besitzt sie für den Nachweis von nutzbaren mineralischen Rohstoffen.

Bereits seit langer Zeit besteht eine fruchtbare Wechselwirkung zwischen der Geophysik und der Mathematik. So hat das Problem eines flüssigen, rotierenden Erdkörpers, bei dem zwischen der Massenanziehung und der Fliehkraft Gleichgewicht herrscht, die Mathematiker zu Untersuchungen der Erdgestalt angeregt (*Newton, Huygens, Clairant*). Diese Arbeiten bildeten wiederum den Anlaß zu Vermessungen von Meridianbögen (z. B. *Clairant* und *Maupertius* 1736). Es sei auch daran erinnert, daß unser Metermaß nach der *Französischen Revolution* als 10 Millionster Teil eines Meridianquadranten, gemessen zwischen Pol und Äquator, definiert wurde.

Die Analyse des Erdmagnetismus führte *C. F. Gauss* auf verschiedene mathematische Probleme (Potentialtheorie, Kugelfunktionen). Ihm gebührt ferner das Verdienst, gemeinsam mit *Weber* 1836 bis 1841 auf Anregung von *Alexander von Humboldt* erstmalig gleichzeitige Messungen des Magnetfeldes an 44 verschiedenen Orten auf der ganzen Welt zu vereinbarten Zeiten organisiert zu haben.

Zur Darstellung des auf der Erde beobachteten Magnetfeldes benutzte *C. F. Gauss* Reihenentwicklungen nach speziellen Funktionen, jedoch mußten besondere mathematische Hilfsmittel ersonnen werden, um die punktweise gemessenen Werte durch diese Funktionen darzustellen. Die Auswertung erbrachte wesentliche neue Erkenntnisse, man erkannte das Erdinnere als Quelle des überwiegenden Teils des Magnetfeldes. Diese und weitere später erzielte Ergebnisse führten zu der jahrzehntelang vertretenen Hypothese eines aus Nickel und Eisen bestehenden Erdkernes.

Bei der Erkundung von Rohstoffen werden ebenfalls physikalische Messungen an der Erdoberfläche durchgeführt. Für Übersichtsvermessungen erfolgen z. B. Messungen der Schwerkraft, die entsprechend der ungleichmäßigen Verteilung der Dichte im Untergrund an verschiedenen Punkten unterschiedliche Werte besitzt, (Ursache: gestörter geologischer Aufbau der Erdkruste) oder auch magnetische Messungen, die infolge unterschiedlicher Magnetisierbarkeit der Gesteine lokale Abweichungen ergeben. Während es auf Grund bekannter physikalischer Gesetze relativ einfach ist, von einem vorgegebenen Modell der Erdkruste die an der Erdoberfläche zu erwartenden Fehler zu berechnen, bereitet die für die Praxis wichtige Aufgabe, aus den gemessenen Werten die Lage der Grenzflächen zwischen verschiedenen Gesteinen zu bestimmen, große Schwierigkeiten. Für ein einzelnes geophysikalisches Verfahren ist diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar, deshalb werden oft verschiedene Verfahren kombiniert. Andererseits werden die Meßwerte eines Untersuchungsgebietes in ihrer Gesamtheit nach verschiedenen mathematischen Verfahren bearbeitet, um die Vieldeutigkeit einzuschränken.

Die meisten dieser Verfahren erfordern so viel Rechenarbeit, daß sie nur mit elektronischen Rechenmaschinen durchgeführt werden können. Die Entwicklung neuer Verfahren auf der Grundlage guter mathematisch-physikalischer Kenntnisse und ihre sinnvolle Anwendung auf geologische Probleme gehören zu den Hauptaufgaben des Geophysikers.

Seit etwa 1920 werden durch Sprengungen künstlich erzeugte seismische Wellen benutzt, um im oberen Erdkrustenbereich den geologischen Aufbau zu untersuchen, woraus insbesondere Hinweise auf Erdöl- und Erdgaslagerstätten abgeleitet werden können. Einerseits ist der Ausbreitungsvorgang der seismischen Wellen infolge von Reflexionen und Berechnungen an einer Vielzahl von Schichtgrenzen der Erdkruste sehr kompliziert, und andererseits werden die Anforderungen an die Genauigkeit der Bestimmung der Lage und Tiefe geologischer Schichten immer größer. Da nach diesen Angaben kostspielige Tiefbohrungen niedergebracht werden müssen, wird laufend an der Verbesserung der Auswertemethoden gearbeitet. Während früher eine rein manuelle Bearbeitung erfolgte, setzt man seit einigen Jahren auch hier elektronische Rechenmaschinen ein, für die spezielle Seismik-Programme entwickelt wurden.

Die mathematisch-physikalische Theorie der Ausbreitung seismischer Wellen ist die Grundlage dieser Programme.

Auch in unserer Republik besteht ein solches Bearbeitungszentrum für geophysikalische Messungen. Absolventen unserer Hochschulen sind hier an der Verbesserung vorhandener und Entwicklung neuer Rechenprogramme aktiv tätig, um auf diese Weise einen Beitrag für die Sicherung der Rohstoffbasis unserer sozialistischen Industrie zu liefern.

R. Rösler

Übersicht über den Ablauf des Studiums

	Stunden etwa
Gesellschaftswissenschaften	360
Sprachen, Sport	330
Mathematik	400
Höhere Mathematik	
Lineare Algebra, Funktionstheorie	
Stochastik, Kybernetik, Rechentechnik	
Physik	420
Experimentalphysik, Praktikum	
Kernphysik, Theoretische Physik	
Geologie, Mineralogie, Geochemie	350
Lagerstättenlehre	
Geophysik	450

Die Dauer des Studiums beträgt vier Jahre und beginnt mit einem Grundstudium, dem sich das Fachstudium anschließt. Nach $3\frac{1}{2}$ Jahren findet eine Hauptprüfung statt, nach der die Berufsbezeichnung Geophysiker mit Hochschulabschluß geführt werden kann. Danach kann eine Diplomarbeit angefertigt werden und der akademische Grad eines Diplom-Geophysikers erworben werden. Einsatzmöglichkeiten für Geophysiker bestehen in der geologischen Industrie, im Bergbau und teilweise in Forschungsinstituten. Die Betonung der Grundlagenausbildung ermöglicht einen vielseitigen Einsatz in verschiedenen Gebieten. Die internationale Zusammenarbeit der sozialistischen Länder und die notwendige Auswertung der Literatur erfordern gute Sprachkenntnisse, besonders der russischen Sprache.

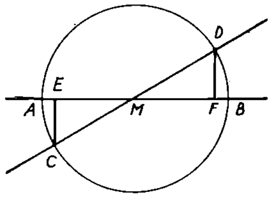
Für fachlich und gesellschaftlich bewährte Absolventen besteht die Möglichkeit im Rahmen des Forschungsstudiums, einer Aspirantur oder neben ihrer beruflichen Tätigkeit eine Dissertation anzufertigen und den akademischen Grad eines Dr. rer. nat. zu erwerben.

Einige Aufgaben aus den Abschluß- und Reifeprüfungen der Schuljahre 1970/71 und 1971/72

Alljährlich finden für viele tausende Schüler der 10. bzw. der 12. und 13. Klassen (Berufsausbildung mit Abitur) schriftliche Abschluß- und Reifeprüfungen im Fach Mathematik statt. Diese Prüfungen geben bis zu einem bestimmten Grade Aufschluß über das erreichte Niveau der mathematischen Bildung unserer Schüler, wenn sie auch nicht in der Lage sind, einzig und allein den Stand des vorhandenen Wissens und Könnens beim Schüler widerzuspiegeln.
Zu einem Zeitpunkt, an dem die neuen Planungsunterlagen in allen Klassen verbindlich geworden sind, sollen einige ausgewählte Aufgaben sowohl den Schwierigkeitsgrad der Abschluß- und Reifeprüfungen aufzuzeigen, als auch auf die neuen Elemente des mathematischen Unterrichtsstoffes hinweisen.

Aus den Abschlußprüfungen der Schuljahre 1970/71 und 1971/72:

Aufgabe: Durch den Mittelpunkt M eines Kreises verlaufen zwei Geraden, die miteinander einen spitzen Winkel bilden. Sie schneiden den Kreis in den Punkten A und B bzw. C und D. Von C und D sind die Lote auf die durch A und B verlaufende Gerade gefällt. Die Fußpunkte der Lote seien E und F (siehe Skizze).



a) Beweisen Sie, daß die Dreiecke MEC und MFD kongruent sind! (Benutzen Sie dabei einen der Kongruenzsätze!)
b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{ME}$ für $\overline{MC}=13$ cm und $\overline{CE}=5$ cm!
Skizze (nicht maßstäblich)

Lösung: Die gegebene Skizze zeigt:
$\overline{MC}=\overline{MD}=$ Radius des Kreises,
$\sphericalangle MEC=\sphericalangle MFD=90°$, $\overline{ME}=\overline{MF}$,
$\sphericalangle EMC=\sphericalangle FMD$ (Scheitelwinkel), $\sphericalangle ECM=\sphericalangle FDM$ (Wechselwinkel).
Für den geforderten Beweis können demzufolge alle vier Kongruenzsätze verwendet werden, was die Lösung sehr stark vereinfacht.
An einem Kongruenzsatz soll der Lösungsweg nochmals gezeigt werden.
Satz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
Da $\overline{ME}=\overline{MF}$, $\overline{MC}=\overline{MD}$ und $\sphericalangle CME=\sphericalangle DMF$, gilt also $\triangle MEC\cong\triangle MFD$. Der Teil b) der Aufgabe wird mittels des Satzes des Pythagoras gelöst:

$$(\overline{MC})^2=(\overline{ME})^2+(\overline{EC})^2$$
$$(\overline{ME})^2=(\overline{MC})^2-(\overline{EC})^2$$
$$\overline{ME}=\sqrt{(\overline{MC})^2-(\overline{EC})^2}$$
$$\overline{ME}=\sqrt{13^2-5^2}$$
$$\overline{ME}\quad\sqrt{169-25}$$
$$\overline{ME}=\sqrt{144}$$
$$\overline{ME}=12$$

Die Länge der Strecke $\overline{ME}$ beträgt 12 cm. $(n\neq 0)$.

Aufgabe: Gegeben ist eine natürliche Zahl n
a) Schreiben Sie in allgemeiner Form die der Zahl n unmittelbar vorangehende natürliche Zahl (Vorgänger) und die unmittelbar folgende natürliche Zahl (Nachfolger) auf!
b) In einem speziellen Fall sei das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger von n die Zahl 323. Berechnen Sie n mit Hilfe einer Gleichung!
c) Geben Sie eine natürliche Zahl zwischen 400 und 500 an, die sich ebenfalls als Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer natürlichen Zahl darstellen läßt!

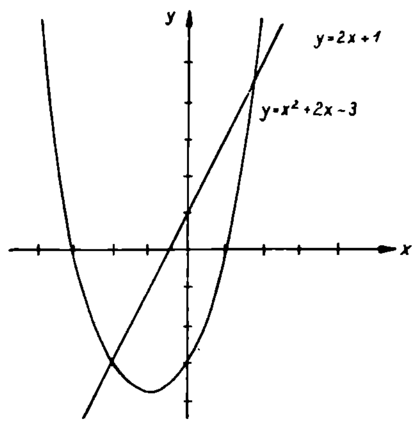
Lösung: a) Wenn die gegebene Zahl n heißt, muß der Vorgänger $n-1$, der Nachfolger $n+1$ sein; also $n-1$, n, $n+1$.
b) Die Lösung dieser Aufgabe führt auf eine rein quadratische Gleichung:

$$(n-1)(n+1)=323$$
$$n^2-1=323$$
$$n^2=324$$
$$n_1=+18$$
$$n_2=-18$$

Da es sich bei der Aufgabe nur um natürliche Zahlen handelt, scheidet die zweite Lösung aus.
c) Hierbei überlegen wir:
1. Es muß wieder eine natürliche Zahl sein.
2. Sie muß zwischen 400 und 500 liegen.
3. Sie muß, um 1 vermehrt, eine Quadratzahl ergeben.
Wir finden im Tafelwerk: $21^2=441$ und $22^2=484$. Daraus ergeben sich die Möglichkeiten $20\cdot 22=440$ und $21\cdot 23=483$.
Für die Lösung der Aufgabe kommen die Zahlen 440 und 483 in Betracht, wobei laut Aufgabenstellung nur eine angegeben werden braucht.

Aufgabe: Gegeben sind zwei Funktionen f_1 und f_2 mit den Gleichungen
(1) $f_1(x)=y=2x+1$,
(2) $f_2(x)=y=x^2+2x-3$ mit $x\in P$.
a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f_1 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_1!
c) Der Graph der Funktion f_2 ist eine Parabel. Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitels, und zeichnen Sie die Parabel in das bei a) verwendete Koordinatensystem!
d) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_2!
e) Die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte an!

Lösung: a)



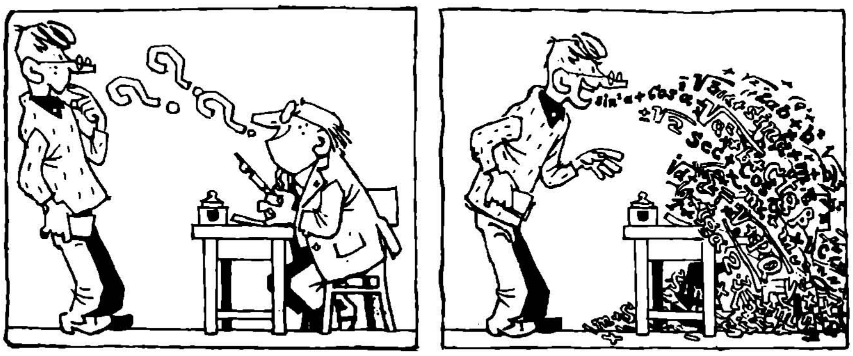
b)
$$2x+1=0$$
$$2x=-1$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

c) Aus dem Tafelwerk, Seite 59, entnehmen wir:
$S\left[-\frac{p}{2};\,q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$. Daraus folgt $S(-1;-4)$.
d) $x^2+2x-3=0$. Nach der Lösungsformel für die quadratische Gleichung:

$$x_{1;2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$
$$x_{1;2}=-1\pm\sqrt{1+3}$$
$$x_1=1\qquad x_2=-3$$

e) Hierbei müssen beide Gleichungen zum Schnitt gebracht werden.

$$x^2+2x-3=2x+1$$
$$x^2=4$$
$$x_1=+2;\qquad y_1=+5$$
$$x_2=-2;\qquad y_2=-3$$



Ein Vorkommnis bei der Prüfung

Aufgabe:

Gegeben ist die lineare Ungleichung

$$\frac{8(2x+1)}{5} < 3x+2$$

a) Lösen Sie diese Ungleichung im Bereich der reellen Zahlen!

b) Geben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an:

1. Die Lösungsmenge L_1 obiger Gleichung im Bereich der natürlichen Zahlen;
2. die Lösungsmenge L_2 obiger Gleichung im Bereich der ganzen Zahlen mit $-4 < x < 1$;
3. die Menge M aller Elemente, die sowohl in L_1 als auch in L_2 vorkommen!

Lösung:

$$\frac{8(2x+1)}{5} < 3x+2$$

a) $$\frac{16x+8}{5} < 3x+2$$

$$16x+8 < 5(3x+2)$$

$$16x+8 < 15x+10 \qquad x<2$$

b) $L_1 = \{0; 1\}$

$L_2 = \{-3; -2; -1; 0\}$

$M = \{0\}$

Aus den Reifeprüfungen der Schuljahre 1970/71 und 1971/72:

Aufgabe: Durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2+q}{x^2+1} \quad x, q \text{ reell}; q \neq 1)$$

sind rationale Funktionen gegeben.

a) Untersuchen Sie, ob diese Funktionen für $q>0$ bzw. für $q<0$ Nullstellen besitzen! Begründen Sie Ihre Aussage!

b) Ermitteln Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$!

c) Jede derartige Funktion hat genau eine lokale Extremstelle. Berechnen Sie diese Extremstelle und den zugehörigen Funktionswert! (Hinweis: Auf die Untersuchung der zweiten Ableitung kann auf Grund der Aufgabenstellung verzichtet werden.)

Lösung: $x^2+q=0$

$q>0 \Rightarrow x^2=-q$ (keine Nullstellen im Bereich der reellen Zahlen)

$q>0 \Rightarrow x^2 = q$

$x = \pm\sqrt{q}$ (zwei reelle Nullstellen)

b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+q}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{q}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

c) $$f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-(x^2+q)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x-2qx}{(x^2+1)^2}$$

$2x(1-q)=0$

$x_E = 0 \qquad y_E = q$

Aufgabe: Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch $a_n = 3n(n-1) \quad (n \geqq 1)$.

a) Berechnen Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Zahlenfolge!

b) Bestimmen Sie die Partialsummen s_1, s_2 und s_3 der gegebenen Zahlenfolge!

c) Das allgemeine Glied für die Folge der Partialsummen kann in der Form $s_n = n^3 + r \cdot n \quad (r \in P;\ n \in N;\ n \geqq 1)$ dargestellt werden.

Bestimmen Sie den Wert der Variablen r unter Verwendung der im Teil b) berechneten Partialsummen!

d) Setzen Sie den von Ihnen ermittelten Wert der Variablen r in die in c) angeführte Gleichung ein!

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß der so erhaltene Ausdruck das allgemeine Glied für die Folge der Partialsummen ist!

Lösung:

a) $a_1 = 0$ ($n=1$ in a_n eingesetzt)

$a_2 = 6$

$a_3 = 18$

b) $s_1 = 0$; $s_2 = 0+6 = 6$; $s_3 = 0+6+18 = 24$

c) Die Lösung kann durch Einsetzen von s_1 oder s_2 oder s_3 erfolgen.

Lösung mit s_1: $s_n = n^3 + r \cdot n$

$0 = 1^3 + 3 \cdot 1$

$r = -1$

d) $s_n = n^3 - n$

I.A.: $n = 1 \Rightarrow s_n = 0$

I.V.: $s_k = k^3 - k$

I.B.: $s_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1)$

I.Bew.: $s_{k+1} = s_k + 3(k+1)k$

[Für $3n(n-1) = a_n$ setzen wir $a_{n+1} = 3(n+1)(n+1-1) = 3(n+1)n$]

$s_{k+1} = k^3 - k + 3k^2 + 3k$

$= k^3 + 3k^2 + 2k$

$= (k+1)^3 - (k+1)$ w.z.b.w. *G. Püffeld*

Zwischen den Prüfungen

Da liege ich,
vom Strand bewacht,
der lockrem Sand befiehlt,
mich festzuhalten.
Plus- und Minuszeichen
hab ich
hinweggespült.

Aber manchmal,
einer Wolke nachsehend,
ertapp ich mich
bei dem Gedanken;
Ähnelt sie nicht
einem Wurzelzeichen?

Dann weiß ich:
Die Prüfungen beginnen erst.

Kurt Scharf

2. Zentrales Poetenseminar der FDJ in Schwerin aus: JW 31. 8. 71, S. 5

Denkmal des *N. Copernicus* in Warschau

Gedenkmünze der DDR (5 M), herausgegeben zu Ehren des 400. Geburtstages von J. Kepler (1971)

Nicolaus Copernicus

Teil 3

X

Der Kampf um die Anerkennung des heliozentrischen Weltbildes war schwer, lang und opferreich.
Die katholische und die lutherische Kirche sprachen sich gegen das copernicanische System aus. Als der Naturphilosoph *Giordano Bruno* aus der heliozentrialen Auffassung weltanschauliche Konsequenzen zog, stellte ihn die Inquisition vor Gericht; im Jahre 1600 wurde er in Rom auf dem Scheiterhaufen hingerichtet.
Der große italienische Naturforscher *Galileo Galilei* trat für das heliozentrische Weltbild ein; im Jahre 1633 wurde er zum Widerruf gezwungen. Er starb im Gewahrsam der Inquisition. Die Bücher von *Copernicus* selbst und alle die Werke, die die heliozentrische Auffassung vertraten, wurden auf den päpstlichen Index der verbotenen Bücher gesetzt und die Lehre des Copernicus als „förmlich ketzerisch" erklärt. Dies blieb so, noch bis zum Jahre 1833!
Der hervorragende deutsche Astronom und Mathematiker *Johannes Kepler* (siehe *alpha*, Heft 3/72) war einer der glühendsten Anhänger von *Copernicus*. Mit großem Mut verbreitete er die heliozentrische Auffassung und fügte der Lehre des *Copernicus* die neue Einsicht hinzu, daß sich die Planeten in Ellipsen um die Sonne bewegen. Auf der Keplerschen Grundlage errichtete *Isaac Newton* im 17. Jahrhundert die Fundamente der mathematischen Himmelsmechanik, die auf Grund ihrer großen theoretischen und praktischen Erfolge auch zur Anerkennung des heliozentrischen Weltbildes unter den Naturwissenschaften führte.
Indessen fehlte um diese Zeit noch ein direkter, experimenteller Beweis für die Bewegung der Erde um die Sonne. Bei der Bewegung der Erde mußten eine Aberration* des Lichtes und eine Parallaxe** bei der Beobachtung der Fixsterne nachzuweisen sein. Doch konnten beide physikalische Effekte wegen ihrer Kleinheit erst mit vervollkommneten Instrumenten nachgewiesen werden, die Aberration 1728 durch den Engländer *James Bradley*, die Fixsternparallaxe 1833 durch *Friedrich Wilhelm Bessel*. Damit war nun auch der experimentelle Nachweis der Richtigkeit des heliozentrischen Systems unwiderlegbar erbracht und der Triumph der Lehre von *Copernicus* vollkommen.

XI

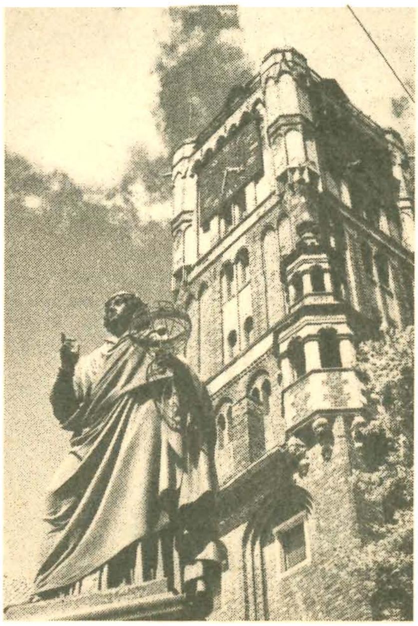
Auch in der Deutschen Demokratischen Republik werden Werk und Person des *Nicolaus Copernicus* aus Anlaß seines 500. Geburtstages gewürdigt werden. Die vielfältigen Vorbereitungen werden durch ein bei der Akademie der Wissenschaften der DDR bestehendes Copernicus-Komitee geleitet, dessen Vorsitzender der Vizepräsident der Akademie, *Prof. Dr. Scheel*, ist.
Eine Fülle von Veranstaltungen an der Akademie, an den Hochschulen und Oberschulen, im Rahmen der Urania-Gesellschaft u. a. m. wird die Leistung von *Copernicus* einem breiten Publikum nahebringen. Die Verlage der DDR werden Publikationen über *Copernicus* vorlegen, deren Ziel es ist, das Wirken von *Copernicus* darzustellen, das durch tiefgreifende Umwälzungen auf dem Wege zum Fortschritt geführt hat, zur Begründung des wissenschaftlichen astronomischen Weltbildes.

H. Wußing

* *Aberration:* a) Eine infolge der endlichen Geschwindigkeit des Lichtes und der Bewegung der Erde hervorgerufene *scheinbare* Ortsveränderung der Gestirne.
b) Die *jährliche* Aberration, die dadurch bewirkt wird, daß ein Beobachter auf der Erde infolge deren Rotation in einem Kreis um die Erdachse bewegt wird. Infolge der Erdrotation *erscheint* für einen Beobachter am Erdäquator ein Stern im Meridian um einen Winkel von 0,32″ nach Osten verschoben. Mit wachsender geographischer Breite φ des Beobachtungsortes und damit abnehmender Bewegungsgeschwindigkeit wird auch der Aberrations-Winkel α geringer. Es gilt $\alpha = 0{,}32'' \cdot \cos\varphi$.

** Parallaxe: Eine Standortveränderung eines Beobachters gegenüber einem bestimmten Himmelskörper ergibt sich bei der Bewegung der Erde um die Sonne. Infolge dieses dauernden Standortwechsels erscheinen die Himmelskörper von der Erde aus an verschiedene Punkte der Himmelskugel projiziert. Diese dadurch hervorgerufenen Ortsveränderungen werden als eine *parallaktische Bewegung* bezeichnet.

Leitungskollektiv der „Operation Fromburg"



Denkmal des *N. Copernicus* auf dem Markt von Toruń

Bücher anläßlich des 500. Geburtstages

M. Biskup: Mikołaj Kopernik

Biographien hervorragender Naturwissenschaftler und Techniker

Etwa 140 Seiten mit etwa 10 Abb., kartoniert etwa 4,80 M

In der Broschüre wird *Nicolaus Copernicus* (lateinische Schreibweise des Namens) gewürdigt, der mit seinem heliozentrischen Weltsystem eine wesentliche Grundlage unseres modernen Weltbildes schuf. Auch seine umfangreiche politische Tätigkeit wird hier ausführlich dargestellt.

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft · Leipzig

H. Wußing: Nikolaus Kopernikus

85 Seiten, 70 Abbildungen und Fotos, Ganzgewebe, 9,80 M

Mit diesem Buch wird in knapper, übersichtlicher Darstellung und reicher Ausstattung eine der Bedeutung der Ereignisse würdige Publikation vorgelegt. Denn „unter allen Entdeckungen und Überzeugungen", konnte Goethe noch sagen, „möchte nichts eine größere Wirkung auf den menschlichen Geist hervorgebracht haben, als die Lehre des Kopernikus."

Es ist besonderes Anliegen der Arbeit, die Kopernikanische Wendung im Weltbild und die bedeutende wissenschaftsgeschichtliche Persönlichkeit ihres Schöpfers vor dem kulturgeschichtlichen Hintergrund der Renaissance und des Zeitalters der großen geographischen Entdeckungen zu zeichnen.

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Operation Fromburg

Zu Ehren des polnischen Astronomen *Copernicus* rief der polnische Pfadfinderverband zu der Aktion „1001 Kleine Dinge" auf. Über 1500 Jugendliche erklärten sich bereit, nach

Fromburg zu fahren und dort an Verschönerungsarbeiten, Ausgrabungen (unter Anleitung von Wissenschaftlern), Anlegung von Parkanlagen, neuen Wegen usw. mitzuwirken. Die Mädchen und Jungen sind in Schulen, Zeltlagern und Touristenherbergen untergebracht. Die Hälfte des Tages ist der Freizeit (Wanderungen, Spiele, Touristikübungen usw.) gewidmet.

EOS „Heinrich Hertz" ehrt den großen Wissenschaftler

N. Copernicus zu ehren — seinen 500. Geburtstag würdig in den Unterricht und die außerunterrichtlichen Veranstaltungen einzubeziehen — bedeutet für die Schüler unserer Schule eine vielseitige Auseinandersetzung mit den Ergebnissen der modernen Astronomie und den astronomischen Erfahrungen eines halben Jahrtausends.

Im Astronomieunterricht wird das Leben und Wirken des verdienstvollen Astronomen und Mathematikers durch die Einbeziehung von Zitaten aus seinen Werken lebendig gemacht und sein zukunftsweisendes Gedankengut im heliozentrischen Weltbild diskutiert und gezeigt, daß er die Grundbausteine für die Arbeiten eines *J. Kepler* und *I. Newton* vorzeichnete. Durch eine gute Zusammenarbeit mit der Berliner *Archenhold*-Sternwarte ist die Möglichkeit geboten, ein Fünftel des Jahresstoffes des Astronomieunterrichts in den Ausstellungsräumen und dem Planetarium zu erarbeiten. Im *Copernicus*-Jahr werden dabei die Copernicusausstellung und der Copernicus-Gedenkplatz ein weiterer guter Anknüpfungspunkt sein.

Innerhalb des Schullebens spielt der *Heinrich-Hertz*-Wettbewerb eine bedeutende Rolle. In der diesjährigen Ausschreibung ist ein Thema dem Leben und Wirken *N. Copernicus* gewidmet; ein weiteres bestätigt die Ergebnisse seiner Fundamentalaussagen über das *3. Keplersche Gesetz* in der Form:

$$a^3 : u^2 (\mathfrak{M}_\circ + m_{Pl}) = k,$$

für das auf dem Rechner SER 2d ein Programm ausgearbeitet wird, das es gestattet, die Größen a und m_{Pl} auf sieben Stellen sowie u und $\mathfrak{M}_\circ$ auf vier Kommastellen auszudrücken.

Der Schwerpunkt unserer Arbeit liegt aber in der beobachtungstechnischen Unterweisung mit dem Schulfernrohr 63/840. (Jede Klasse, in der Astronomieunterricht durchgeführt wird, besitzt ein solches Fernrohr.) Jeder Schüler führt ein lehrplangerechtes Beobachtungsprogramm durch, wobei die Planung dafür voll in den Händen der Schüler liegt. Es bildet die Vorstufe einer schöpferischen astronomischen Tätigkeit im Sinne des Lebenswerkes *N. Copernicus*: von der unmittelbaren Anschauung zu theoretischen Kenntnissen zu gelangen. *R. Botschen*

Ersttagsbrief, herausgegeben am 12. 2. 1972 zu Ehren eines *Copernicus*-Symbosiums in Frombork

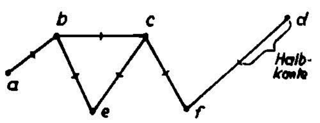
Aus der Graphentheorie
Teil 2

Nun zum bereits angekündigten ersten Satz:

Satz 1: Es seien $|X|=n$ die Anzahl der Knotenpunkte, $|U|$ die Anzahl der Kanten und $s_1, s_2 \ldots, s_n$ die Valenzen der Knotenpunkte des Graphen $G=[X, U]$.
Dann gilt

$\sum_{i=1}^{n} s_i=2|U|$, d. h. die Summe der Valenzen aller Knotenpunkte des Graphen G ist gleich der doppelten Kantenzahl.

Beweis: Wir denken uns jede Kante durch zwei Halbkanten ersetzt (Bild 9), so daß jede Halbkante mit genau einem Knotenpunkt inzidiert. Hat der Knotenpunkt $i \in X$ die Valenz s_i, so inzidiert er mit genau s_i Halbkanten, d. h. $\sum_{i=1}^{n} s_i$ ist gleich der Summe aller Halbkanten und damit gleich der doppelten Kantenzahl.



Wenn ihr die Graphen der Bilder 2 und 3b betrachtet, so werdet ihr einen wesentlichen Unterschied feststellen. Im Graphen des Bildes 3b können wir von jedem Knotenpunkt aus jeden der übrigen Knotenpunkte des Graphen erreichen, während wir im Graphen des Bildes 2 von den Knotenpunkten E oder F aus zu keinem der Knotenpunkte A, B, C, D gelangen können. Diesen Unterschied wollen wir exakt erfassen. Dazu müssen wir wieder einige neue Begriffe vereinbaren. (Def. 5 bis 9)

Definition 5: $(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_4)(a_4, a_5) \ldots (a_{n-1}, a_n)$ heißt eine *Kantenfolge*. Hierbei werden durch a_i Knotenpunkte, durch (a_i, a_j) Kanten bezeichnet.

Die Kantenfolge heißt *geschlossen*, wenn $a_n=a_1$ ist, sonst *offen*.

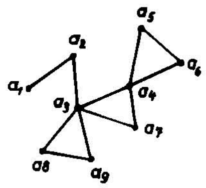
Bemerkung: In einer Kantenfolge können gleiche Kanten mehrmals auftreten.

Definition 6: Eine Kantenfolge, in der jede Kante eines Graphen G höchstens einmal auftritt, heißt *Kantenzug*.

Bemerkung: Gleiche Knotenpunkte können mehr als einmal vorkommen.

Definition 7: Ein offener Kantenzug, in dem kein Knotenpunkt mehr als einmal vorkommt, heißt *Weg*.

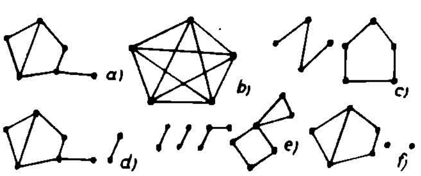
Definition 8: Kommt in einem Kantenzug jeder Knotenpunkt — mit Ausnahme des Anfangsknotenpunktes, der gleich dem Endknotenpunkt ist — genau einmal vor, so spricht man von einem *Kreis*.



Beispielsweise ist im Graphen des Bildes 10
$(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_8)(a_8, a_9)(a_9, a_3)(a_3, a_7) \cdot (a_7, a_4)(a_4, a_6)(a_6, a_5)(a_5, a_4)(a_4, a_7)(a_7, a_3) \cdot (a_3, a_9)(a_9, a_8)(a_8, a_3)(a_3, a_2)$
eine Kantenfolge, aber kein Kantenzug.
$(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_8)(a_8, a_9)(a_9, a_3)(a_3, a_7)$ ist eine Kantenfolge.
$(a_3, a_7)(a_7, a_4)(a_4, a_3)$ ist ein Kreis und $(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_7)(a_7, a_4)(a_4, a_5)$ *„ein Weg, der den Knotenpunkt a_1 mit dem Knotenpunkt a_5 verbindet."*

Definition 9: Ein Graph G, in dem je zwei Knotenpunkte a_i, a_j durch (mindestens) einen Weg verbunden ist, heißt *zusammenhängend*.
Nicht zusammenhängende Graphen bestehen aus mindestens zwei (zusammenhängende) *Komponenten*.

Beispiele: Der Graph in Bild 2 ist also ein nichtzusammenhängender Graph mit zwei Komponenten. —
Jeder Graph mit mehr als einem Knotenpunkt, der einen isolierten Knotenpunkt enthält, ist nicht zusammenhängend. —



Die Graphen c), bzw. d), bzw. e), bzw. f) des Bildes 11 sind nicht zusammenhängend und bestehen aus 2 bzw. 4 bzw. 3 Komponenten.
Wir wollen nun endlich einmal wieder die etwas öde Kette der — sehr notwendigen — Definitionen durchbrechen; denn wir sind bereits in der Lage, zwei weitere einfache Sätze in der üblichen graphentheoretischen Terminologie zu formulieren und zu beweisen.

Zunächst noch eine Frage:
Findet ihr die beiden folgenden Aussagen zunächst nicht auch verblüffend?

Aussage 1: Die Anzahl der Menschen, die eine ungerade Anzahl von Freunden haben, ist gerade.

Aussage 2: Die Anzahl der Staaten, die bilaterale Verträge unterzeichnet haben, ist gerade.

Sicher wird es euch gelingen mit Hilfe des Satzes 2, dem wir uns nun sofort zuwenden wollen, beide Aussagen zu beweisen.

Satz 2: In jedem zusammenhängenden Graphen G ist die Anzahl der Knotenpunkte ungerader Valenz gerade.

Beweis:
Es sei $\sum_1=\sum\limits_{s_i \text{ ungerade}} s_i$ *und* $\sum_2=\sum\limits_{s_i \text{ gerade}} s_i$.

Nach Satz 1 ist $\sum_1+\sum_2=\sum_{i=1}^{|X|} s_i=2|U|$.

Es ist $\sum_1=2|U|-\sum_2$. (*)

$\sum_2$ als Summe gerader Zahlen ist eine gerade Zahl, $2|U|$ ist ebenfalls gerade und damit auch $2|U|-\sum_2$.

Da die rechte Seite der Gleichung (*) eine gerade Zahl ist, ist es auch die linke: $\sum_1$.

Wir zeigen indirekt, daß $\sum_1$ eine gerade Anzahl (ungerader) Summanden enthält, indem wir annehmen, das Gegenteil sei der Fall und diese Annahme zum Widerspruch führen.

Wir nehmen also an, es sei $\sum_1=\sum_{i=1}^{2m-1}(2n_i-1)$.

(Jede ungerade Zahl kann bekanntlich in der Form $2q-1$ mit natürlichem q dargestellt werden.)

$$\sum_1=\sum_{i=1}^{2m-1} 2n_i-\sum_{i=1}^{2m-1} 1=2\sum_{i=1}^{2m-1} n_i-(2m-1)$$
$$=2\sum_{i=1}^{2m-1} n_i-2m+1=2\cdot\sum_{i=1}^{2m-1} n_i-2m+2-1$$
$$2\left(\sum_{i=1}^{2m-1} n_i-2+1\right)-1=2q+1.$$

$\sum_1$ ist also eine ungerade Zahl. Unsere Annahme hat damit zum Widerspruch geführt, wir hatten uns ja überlegt, daß $\sum_1$ gerade ist.

Damit haben wir gezeigt, daß $\sum_1$ durch eine gerade Anzahl von Summanden entsteht, diese ist aber gleich der Anzahl der Knotenpunkte geraden Valenz in G.

Unsere neu gewonnenen Erkenntnisse wollen wir wieder durch das Lösen einiger Aufgaben erhärten.

▲5▲ Sieben Freunde, die in Urlaub fahren, vereinbarten, daß jeder von ihnen an drei von den übrigen sechs eine Ansichtskarte schicken sollte.
Kann diese Korrespondenz so organisiert werden, daß jeder nur denjenigen Freunden schreibt, von denen er im Laufe des Urlaubs Ansichtskarten erhält?

▲6▲ Man entscheide, ob ein Graph mit sechs Knotenpunkten existiert, deren Valenzen der Reihe nach 2, 3, 3, 4, 4, 4 sind.

▲7▲ Man entscheide, ob ein Graph mit mehr als einem Knotenpunkt existiert, für den zwei Knotenpunkte niemals die gleiche Valenz haben.

▲8▲ G sei der vollständige n-Graph: Man wähle in G zwei Knotenpunkte x und y aus und bestimme die Anzahl aller Wege im Graphen G, die in x beginnen und in y enden.

▲9▲ $G=[X, U]$ sei ein (endlicher) schlichter Graph, in dem jeder Knotenpunkt die Valenz g hat. Es ist zu beweisen, daß dann $2|U|=g\cdot|X|$ gilt.

▲10▲ G sei der vollständige n-Graph. Wieviel verschiedene Kreise lassen sich in G finden?

W. Voß

Zum 500. Geburtstag von N. Copernicus

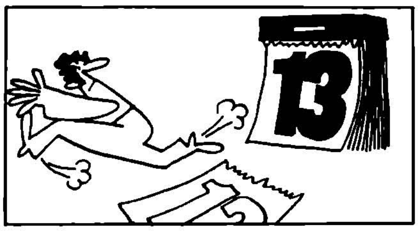
- Die UNESCO hat beschlossen, den 500. Geburtstag des polnischen Astronomen am 19. 2. 1973 in Paris feierlich zu begehen. Eine einstimmig gebilligte Resolution unterstreicht die außergewöhnliche Bedeutung der Entdeckungen des N. C. Sie ruft alle Mitglieder und nationalen UNESCO-Kommissionen auf, den Geburtstag dieses großen Wissenschaftlers zu ehren und „die internationale wissenschaftliche Zusammenarbeit, vor allem auf dem Gebiet der Kosmosforschung, zu entwickeln und sie im Geiste des Friedens und des Fortschritts der gesamten Menschheit zugänglich zu machen."
- Ende Februar 1973 läuft in den Filmtheatern der DDR ein zweiteiliger Film (in Farbe) an, der das Leben und Wirken von N. C. zeigt (Koproduktion VR Polen/DDR).
- Die Zeitschrift „Astronomie in der Schule" (Herausgeber: Verlag Volk und Wissen) gab ein Sonderheft zu Ehren des N. C. heraus (6/72). Es eignet sich besonders für den Unterricht sowie für eine intensive außerunterrichtliche Arbeit.
- Der mathematisch-physikalische Salon im Dresdener Zwinger ehrt N. C. durch eine Ausstellung.
- Zu Ehren des N. C. werden in der VR Polen 500 Copernicus-Kabinette, ausgestattet mit modernen Lehrmitteln für den naturwissenschaftlichen Unterricht, aus gesellschaftlichen Mitteln eingerichtet.

Ach du grüne Neune!

Sprichwörtliche Redensarten

Wir färben die **Neun grün**, kommen vom **Hundertsten ins Tausendste, geben unseren Dreier dazu** oder **machen jemandem ein X für ein U vor**. Und doch ist uns der Ursprung solcher Redensarten oft **ein Buch mit sieben Siegeln**.
Daraus kann man nur **das Fazit ziehen**, sie zu erklären.

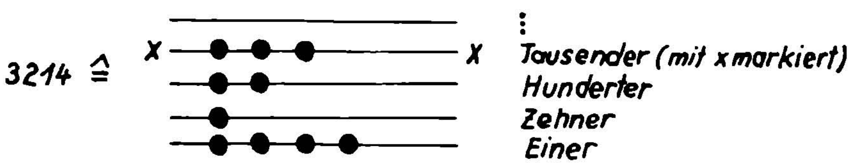
Eigentlich ist es ein Lob für das Zählen und Rechnen, wenn man es zum Kennzeichen für das Verhalten macht: **Er tut, als ob er nicht bis drei zählen könnte**, meint ja, daß sich jemand sehr dumm anstellt. Es ist wohl auch ziemlich einfach, bis drei zu zählen ...
Diese Redensart findet sich an verschiedenen Stellen, so z. B. bei dem Wiener Prediger *Abraham a Santa Clara* in „Mercks Wien" von 1679: „so einfältig, daß sie nicht koennten drey zehlen" oder — etwas abgewandelt — in Luthers Tischreden:
„stellet sich also sehr schwach, als kuendte er nicht vier zehlen".
Aber wenn wirklich jemand nicht bis drei zählen kann, dann fahren sicher viele entrüstet in die Höhe mit einem:
„Jetzt schlägts dreizehn!"



Hat es schon irgendwann dreizehn Mal geschlagen? Bei normalen Uhren sicher nicht, zumal auch die durchgängige Zählung der Stunden erst mit aufkommender Industrialisierung eingeführt wurde. Es wäre also etwas Ungewöhnliches, nicht mit rechten Dingen Zugehendes, wenn es dreizehn Mal schlüge, d. h. — nach mystischer Vorstellung —: der Teufel hat seine Hand im Spiel.
Diese abergläubische Vorstellung ließ besonders den 13. eines Monats zum Inbegriff eines unglücklichen Tages werden.
Und wenn man am 13. die Abmachung trifft, **in acht Tagen** wieder zusammenzukommen, meint man sicher den 20., also zwischen den beiden Terminen die Zeitspanne von einer Woche. Diese hat aber doch nur sieben Tage!?
Die Ursache hierfür liegt in einer mittelalterlichen Rechtsformel.
Alle sechs Wochen wurde eine ordentliche Gerichtsversammlung („Ding") abgehalten. Mußte man nach Gerichtsbeschluß ein Jahr warten (z. B. in Erbschaftsangelegenheiten), so wurde diese Sache auf dem Ding nach diesem Jahr, also insgesamt nach einem Jahr und sechs Wochen verhandelt. Für den kürzeren Zeitraum einer Woche war die analoge Zugabefrist ein Tag (im Französischen auch: „quinze jours" für zwei Wochen, wörtlich 15 Tage).
Nach Adam Ries ist also hier auf alle Fälle etwas falsch, denn mit dieser Redensart pflegt man die Richtigkeit einer Rechnung zu bestätigen und würdigt damit gleichzeitig die großen Verdienste des Annaberger Rechenmeisters. *A. Ries* (*1492 in Staffelstein b. Bamberg, † 1559 in Annaberg) verfaßte die volkstümlichsten und verbreitetsten (weil deutsch geschriebenen und pädagogisch gut aufgebauten) Rechenbücher des 16. Jahrhunderts, in denen er — aufbauend auf Altes — das noch neue Ziffernrechnen verbreitete und viel praktische Beispiele gab.
Jetzt sind wir schon von sich dumm anstellenden Leuten, die nicht bis drei zählen können, zu einem bedeutenden Mann der mittelalterlichen Mathematik gekommen — sozusagen **vom Hundertsten ins Tausendste**, von einem Thema zum anderen. Ihr werdet's vielleicht nicht glauben — wir bleiben mit diesen Worten bei Adam Ries. In Wirklichkeit hat diese Wendung nämlich folgenden Ursprung: Ende des 15. bis ins 17. Jahrhundert (also zu Adam Ries' Zeit!) wurde sehr viel das Rechenbrett benutzt, auf dem waagerechte Linien gezogen waren, die den Stellenwert von aufgelegten Marken (sog. Rechenpfennigen) festlegten: auf der untersten Linie die Einer, dann die Zehner, die Hunderter usf. („Rechnen auf der Linien"). — Siehe Abb. —

Den ursprünglichen Wortlaut dieser Redensart findet man bei *Agricola* (1529): „Er wirfft das hundert in tausent", d. h. der Rechenpfennig wird auf die falsche Linie gelegt.

Ch. Pollmer



Kleine Worte Große Wirkung Teil 3

„Wenn - - -, so ..." und „Wenn ..., so - - -"

Als Klaus in seiner Mathematikarbeit begründete, daß die Zahl 3 741 111 durch 3 teilbar ist, schrieb er:

„Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch die Quersumme dieser Zahl durch 3 teilbar."

Hans dagegen hatte geschrieben:

„Da die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist, ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar"

und erhielt die volle Punktzahl.

Klaus war nun der Meinung, daß beide Aussagen dasselbe zum Ausdruck bringen. Ist das wirklich so?

Zunächst sei erst einmal geklärt, daß es sich bei den obigen Sätzen wieder um Aussagenverbindungen handelt, die mit der Wendung „wenn –, so" gebildet werden. Eine solche Aussagenverbindung nennt man auch *Implikation*.

Bei den uns bisher bekannten Aussagenverbindungen (Konjunktion, Alternative, Disjunktion) spielte die Reihenfolge der Teilaussagen für die Entscheidung, ob die Aussage wahr ist, keine Rolle.

Bei der Implikation ist das nicht so. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

Der Satz

Wenn *eine Zahl durch 2^3 teilbar ist,* **so** *ist sie auch durch 2 teilbar*

hat die Form „wenn – – –, so . . .". Er ist wahr.

In solchen Sätzen nennt man den ersten Teil (vor dem Komma) oft *Voraussetzung*, den zweiten Teil *Behauptung*.

Vertauscht man nun die Voraussetzung und die Behauptung, so erhält man die *Umkehrung* dieses Satzes:

Wenn *eine Zahl durch 2 teilbar ist,* **so** *ist sie auch durch 2^3 teilbar.*

Dieser Satz ist falsch.

Betrachten wir einmal die Begründungen von Hans und Klaus:

Hans schrieb:

Wenn die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch die Zahl durch 3 teilbar.

Klaus dagegen schrieb die *Umkehrung* dieses Satzes auf, nämlich:

Wenn die Zahl durch 3 teilbar ist, so ist die Quersumme dieser Zahl durch 3 teilbar.

Beide Sätze haben die „wenn-, so"-Form, aber deswegen kann man nicht sagen, daß sie dasselbe ausdrücken. Dabei spielt es gar keine Rolle, daß diesmal *beide* Sätze *wahr* sind. Sie unterscheiden sich trotzdem sehr wesentlich voneinander:

Die *Voraussetzung* von Hans lautet:

Die Quersumme der Zahl 3 741 111 ist durch 3 teilbar. Die daran anschließende Behauptung ist: Die Zahl 3 741 111 ist auch durch 3 teilbar.

Klaus setzt dagegen voraus, daß die Zahl durch 3 teilbar ist, und schließt daran die Behauptung an, daß auch die Quersumme durch 3 teilbar ist.

Die Umkehrung eines wahren Satzes kann wahr sein, sie kann aber auch falsch sein, wie wir oben gesehen haben. Deshalb ist es stets sehr wichtig, sich genau zu überlegen, ob die Umkehrung eines Satzes wahr ist oder nicht.

Ist die Umkehrung eines wahren Satzes wahr, so kann man beides (Satz und Umkehrung) in *einem* Satz formulieren, indem man die Redewendung „genau dann, wenn" bzw. „dann und nur dann, wenn" verwendet.

Also: Eine Zahl ist **genau dann** durch 3 teilbar, **wenn** ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Oder: Eine Zahl ist **dann und nur dann** durch 3 teilbar, **wenn** ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Wir wollen jetzt zu einigen Sätzen selbst die Umkehrungen bilden und dann nachprüfen, ob sie wahr sind:

Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, so ist sie auch durch 2 teilbar.

Die Umkehrung lautet:

Wenn eine Zahl durch 2 teilbar ist, so ist sie auch durch 6 teilbar.

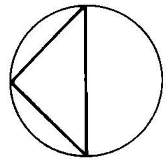
Der zweite Satz ist offenbar falsch, denn 14 ist z. B. durch 2, aber nicht durch 6 teilbar.

Wie steht es mit folgenden Sätzen? Überlegt selbst!

a) Wenn eine Zahl durch 12 teilbar ist, so ist sie auch durch 6 teilbar.

b) Wenn ein Rechteck *ABCD* vier gleichlange Seiten hat, so ist das Rechteck *ABCD* ein Quadrat.

c) Wenn irgendein Punkt *P* innerhalb des Dreiecks liegt, so liegt er auch innerhalb des Kreises. (Siehe Abb.)



Nur die Umkehrung des Satzes b) ist wahr.

Zum Schluß noch ein paar schwierigere Aufgaben:

Überprüft, ob folgende Sätze wahr sind!

a) Eine Zahl ist dann und nur dann durch 9 teilbar, wenn sie auch durch 3 teilbar ist.

Lösen wir die Aufgabe a) gemeinsam: Wie wir gelernt haben, bedeutet die Redeweise „dann und nur dann, wenn" die Zusammenfassung eines Satzes mit seiner Umkehrung. Um zu entscheiden, ob der Satz a) wahr ist, wollen wir überlegen, ob die beiden Teilaussagen wahr sind, aus denen der Satz zusammengesetzt werden kann. Die beiden Teilaussagen lauten:

a′) Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, so ist sie auch durch 3 teilbar.

a″) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so ist sie auch durch 9 teilbar.

Der Satz a′) ist wahr, der Satz a″) aber ist falsch. Also ist der durch Zusammenfassung von a′) und a″) entstandene Satz *falsch.*

Durchdenkt nun einmal selbständig die nächsten Sätze!

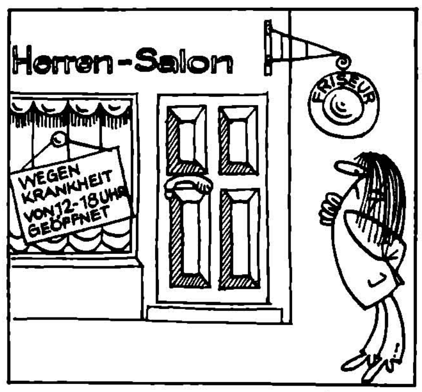
b) Ein Dreieck *ABC* besitzt dann und nur dann drei gleichgroße Winkel, wenn es gleichseitig ist.

c) Zwei Zahlen haben genau dann einen gemeinsamen Teiler, wenn sie beide gerade sind.

d) Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn sie durch 8 teilbar ist.

L. Flade

Was ist hier unlogisch?



Ungleichungen im Bereich der natürlichen Zahlen

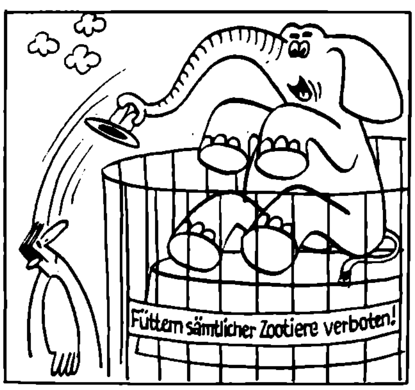
Aufgaben		Lösungsmenge
1	$x < 3$	$L = \{0, 1, 2\}$
2	$4 > n$	
3	$2 + y < 5$	
4	$9 - u > 7$	
5	$9n < 35$	
6	$7x + 2 < 30$	
7	$3(x+5) < 15$	
8	$42 > 5t > 19$	
9	$k : 9 < 6$	
10	$72 > 45 + r > 66$	

Schon im Altertum treten Ungleichheitsrelationen, vor allem in der Geometrie, häufig auf. So formuliert der griechische Mathematiker *Eukleides* (Euklid) *von Alexandria* (um 365 bis um 300 v. u. Z.) in seinem bedeutenden Werk „Elemente“ auch eine Reihe von Sätzen aus der Geometrie, die Ungleichheitsrelationen ausdrücken, z. B. den Satz: *„In jedem Dreieck sind je zwei Seiten zusammen größer als die dritte“.* Diese Relationen werden aber stets in Worten formuliert; Ungleichungen im modernen Sinne mit einem Relationszeichen ($<$ oder $>$) kennt man weder im Altertum noch im Mittelalter.

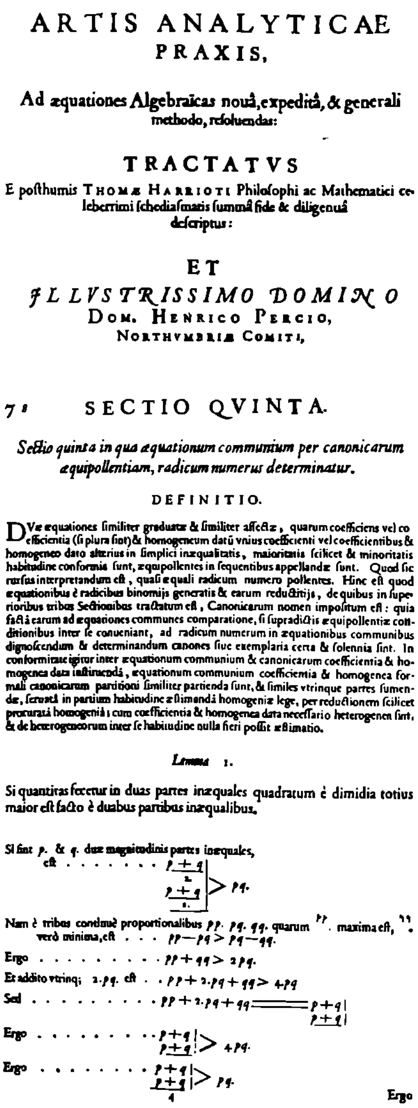
Diese Zeichen, mit deren Hilfe die Formulierung von Ungleichheitsrelationen wesentlich erleichtert wird und wichtige Schlußfolgerungen aus Ungleichungen hergeleitet werden können, treten in der Mathematik erst seit dem 17. Jahrhundert auf und haben sich seit dieser Zeit allgemein durchgesetzt. Sie können zuerst in dem grundlegenden Lehrbuch der Algebra des englischen Mathematikers *Thomas Harriot* (1560 bis 1621), der auch als Astronom und Kartograph bedeutendes geleitet hat, nachgewiesen werden. Dieses Werk, das den Titel

Artis analyticae praxis

hat, wurde erst 1631, zehn Jahre nach dem Tode *Harriots*, herausgegeben. Die von ihm benutzten Relationszeichen (siehe Abb.) entsprechen bereits den modernen Zeichen, sie sind aber meistens erheblich länger und größer, als sie heute geschrieben werden.



Das Werk ist, wie das noch im 17. Jahrhundert häufig üblich war, in lateinischer Sprache geschrieben.



ARTIS ANALYTICAE
PRAXIS,

Ad æquationes Algebraicas nouâ, expeditâ, & generali methodo, resoluendas:

TRACTATVS

E posthumis Thomæ Harrioti Philosophi ac Mathematici celeberrimi schediasmatis summâ fide & diligentiâ descriptus:

ET

ILLVSTRISSIMO DOMINO
Dom. Henrico Percio,
Northvmbriæ Comiti,

78 SECTIO QVINTA.

Sectio quinta in qua æquationum communium per canonicarum æquipollentiam, radicum numerus determinatur.

DEFINITIO.

DVæ æquationes similiter graduatæ & similiter affectæ, quarum coefficiens vel coefficientia (si plura sint) & homogeneum datū vnius coefficienti vel coefficientibus & homogeneo dato alterius in simplici inæqualitatis, maioritatis scilicet & minoritatis habitudine conformia sunt, æquipollentes in sequentibus appellandæ sunt. Quod sic rursus interpretandum est, quasi æquali radicum numero pollentes. Hinc est quod æquationibus è radicibus binomijs generatis & earum reductitijs, de quibus in superioribus tribus Sectionibus tractatum est, Canonicarum nomen impositum est: quia factâ earum ad æquationes communes comparatione, si supradictis æquipollentiæ conditionibus inter se conueniant, ad radicum numerum in æquationibus communibus dignoscendum & determinandum canones siue exemplaria certa & solennia sint. In conformitate igitur inter æquationum communium & canonicarum coefficientia & homogenea data instituendâ, æquationum communium coefficientia & homogenea formali canonicarum partitioni similiter partienda sunt, & similes vtrinque partes sumendæ, seruatâ in partium habitudine æstimandâ homogeniæ lege, per reductionem scilicet procuratâ homogeniâ; cum coefficientia & homogenea data necessario heterogenea sint, & de heterogeneorum inter se habitudine nulla fieri possit æstimatio.

Lemma 1.

Si quantitas secetur in duas partes inæquales quadratum è dimidia totius maior est facto è duabus partibus inæqualibus.

Si sint p. & q. duæ magnitudinis partes inæquales,

est . . . . $\frac{p+q}{2} \cdot \frac{p+q}{2} > pq$.

Nam è tribus continuè proportionalibus pp. pq. qq. quarum pp. maxima est, qq. verò minima, est . . . $pp - pq > pq - qq$.

Ergo . . . . $pp + qq > 2pq$.

Et addito vtrinq; $2.pq$. est . . $pp + 2.pq + qq > 4pq$

Sed . . . . $pp + 2.pq + qq = (p+q)(p+q)$

Ergo . . . . $(p+q)(p+q) > 4pq$.

Ergo . . . . $\frac{(p+q)(p+q)}{4} > pq$.

Ergo

▲11▲ Die beiden Ungleichungen $a<b$ und $b<c$ lassen sich als fortlaufende Ungleichung $a<b<c$ schreiben.
Stelle aus den Ungleichungen
$z>x$, $v>x$, $y>v$, $z<v$, $x<y$, $z<y$
eine fortlaufende Ungleichung her!

▲12▲ Bestimme die Menge aller natürlichen Zahlen n, für die die Ungleichungen $342<n<356$ erfüllt sind und außerdem jeweils eine der folgenden Bedingungen gilt:
a) n ist keine gerade Zahl,
b) n ist Vielfaches von 3,
c) n ist durch 2 und 3 teilbar,
d) n ist durch 2, aber nicht durch 3 teilbar,
e) n ist durch 3, aber nicht durch 2 teilbar,
f) 20 ist Teiler von n,
g) n ist durch 25 teilbar,
h) n ist entweder durch 2 oder durch 3 teilbar,
i) 2 oder 3 sind Teiler von n,
k) n ist sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar.

▲13▲ Wieviel Möglichkeiten gibt es, in der Ungleichung $a<b$ die Variablen a und b durch die natürlichen Zahlen von 0 bis 20 zu ersetzen, daß die Ungleichung dabei stets erfüllt wird?

▲14▲ Es sind alle geordneten Paare (x, y) natürlicher Zahlen anzugeben, für die die Ungleichung
$3x+4y<10$ erfüllt ist.

▲15▲ Es sind alle geordneten Paare (x, y) natürlicher Zahlen anzugeben, für die das Ungleichungssystem
$x+y<4$
$2x+5y>10$ erfüllt ist.

▲16▲ $9x+22-2x<100-11x-42$
Bestimme die Lösungsmenge!

▲17▲ Setze in die folgenden Aufgaben das jeweils richtige Zeichen ($=$, $<$, $>$) für * ein!
$35:7+40$ * 45
$(81-39):7$ * 5
$49:7+55$ * 62
$(94-38):7$ * 9

▲18▲ Vergleiche die folgenden beiden Ungleichungen:
$3x+5<20$ und $3x<15$
Was stellst du fest?

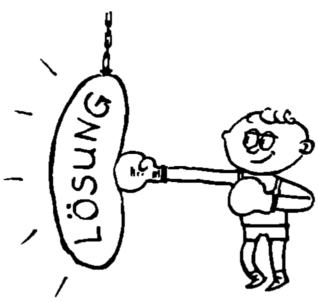
Diese Seite wurde gestaltet für einen Arbeitsgemeinschaftsnachmittag in Klasse 5/6 (*alpha*-Club, 29. OS, 7027 Leipzig).

J. Lehmann

Die Redaktion *alpha* erwartet weitere Vorschläge für Zirkelnachmittage in den Klassenstufen 5/6 für die Seite:
aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht.

Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 3. Mai 1973

5▲1003 Gegeben sei ein Quader mit dem Rauminhalt $V = 64\,\text{cm}^3$. Welche Kantenlängen a, b und c (in cm) könnte der Quader besitzen, wenn deren Maßzahlen natürliche Zahlen sein sollen? Welcher von diesen Quadern besitzt die kleinste Oberfläche? *P.*

5▲1004 Karin kaufte einen Radiergummi zu 0,23 M, einen Bleistift zu 0,20 M und vier Hefte zum Stückpreis von 0,08 M. Beim Bezahlen stellt sie fest, daß der Gesamtpreis genau den vierten Teil des Geldbetrages ausmachte, den sie bei sich hatte. Später kaufte sie dann noch ein Zeichendreieck für 0,44 M. Wieviel Mark besaß Karin noch nach dem Einkauf? *Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch, 7404 Meuselwitz*

W 5 ■ 1005 Gegeben sei eine Gerade g und zwei einander entsprechende Punkte A und A', die symmetrisch bezüglich der Geraden g als Symmetrieachse liegen. Ferner sei ein Punkt B, der mit A auf der gleichen Seite von g liegt derart gegeben, daß B nicht auf AA' liegt, und daß AB nicht parallel zu g verläuft. Es ist der Bildpunkt B' von B unter alleiniger Verwendung eines Lineals zu konstruieren, d. h. es dürfen nur Geraden gezogen werden. *Sch.*

W 5 ■ 1006 Ein Lebensmittellager lieferte an vier Konsumverkaufsstellen insgesamt 1200 Schachteln Pralinen mit je 125 g Inhalt. Davon erhielt die erste Verkaufsstelle den dritten Teil. Die zweite Verkaufsstelle erhielt von den danach verbleibenden Schachteln den vierten Teil. Die restlichen Schachteln wurden an die dritte und vierte Verkaufsstelle zu gleichen Teilen aufgeteilt. Wieviel Schachteln Pralinen wurden an jede dieser Verkaufsstellen geliefert? Wieviel Kilogramm wiegt die insgesamt ausgelieferte Menge an Pralinen? *Heidrun Mau, POS Siedenbollentin, Kl. 6*

W 5*1007 Ein Mathematiklehrer war mit seinem Trabant unterwegs. Vor Antritt der Fahrt zeigte das Tachometer eine fünfstellige Kilometerzahl an, bei der (von links nach rechts gelesen) die erste Ziffer mit der vierten, die zweite mit der fünften übereinstimmte. Dividiert man die Zahl, die der zweiten Ziffer entspricht, durch die Zahl, die der ersten Ziffer entspricht, so erhält man als Ergebnis die dritte Ziffer. Keine Ziffer kam in der fünfstelligen Kilometerzahl mehr als zweimal vor. Nach Beendigung der Fahrt waren die vierte und fünfte Ziffer miteinander vertauscht. Wie lautete der Tachometerstand vor Antritt der Fahrt? Wieviel Kilometer war der Lehrer gefahren, wenn er mehr als 20 km, aber weniger als 30 km zurückgelegt hat? *Mathematiklehrer Rolf Langbein, 6427 Lichte*

W 5*1008 Addiert man die Zahlen, die jeweils das Lebensalter von *Axel* und *Bernd* (in ganzen Jahren) angeben, so erhält man 21. Ihr Freund *Dieter* ist genau drei Jahre älter als Axel und neun Jahre jünger als *Bernd*. Wie alt ist jeder der drei Jungen?

6▲1009 Ermittle alle durch 36 teilbaren dreistelligen natürlichen Zahlen, deren Zehnerstelle jeweils eine Primzahl darstellt. *P.*

6▲1010 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit der Rechteckseite $\overline{BC} = a$ und der Diagonalen $\overline{AC} = 2a$. Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle CAB$ zu bestimmen. *P.*

W 6 ■ 1011 Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC, verlängere die Seite $\overline{AB}$ über B hinaus um sich selbst bis D und verbinde C mit D. Beweise, daß die Geraden AC und CD aufeinander senkrecht stehen! *Sch.*

W 6 ■ 1012 Klaus hat vier verschiedene Sorten Stahlkugeln. Mit Hilfe einer Balkenwaage stellt er fest, daß zwei Kugeln der Sorte B

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W* 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

Der Jahreswettbewerb 1972/73 läuft von Heft 5/72 bis Heft 2/73. Zwischen dem 1. und 10. September 1973 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/73 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1972/73 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

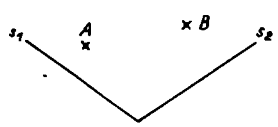
genau so schwer sind wie eine Kugel der Sorte A. Drei Kugeln der Sorte C wiegen ebensoviel wie eine Kugel der Sorte B. Fünf Kugeln der Sorte D haben das gleiche Gewicht wie eine Kugel der Sorte C.
a) Wieviel Kugeln der Sorte D muß Klaus in die eine Waagschale legen, wenn sie einer Kugel der Sorte A in der anderen Waagschale das Gleichgewicht halten sollen?
b) In der einen Waagschale liegen 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C. Wieviel Kugeln der Sorte B muß Klaus in die andere Waagschale legen, um Gleichgewicht zu erhalten? *P.*

W 6*1013 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Innenwinkeln $\sphericalangle CAB=\alpha=70°$ und $\sphericalangle ABC=\beta=80°$. Ferner ist ein innerer Punkt P, der mit den Punkten A, B und C verbunden ist, derart gegeben, daß $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBA$, $\sphericalangle PBC=\sphericalangle PCB$ und $\sphericalangle PAC=\sphericalangle PCA$ gilt. Es ist die Größe dieser sechs Winkel zu bestimmen. *Sch.*

W 6*1014 Gegeben seien zwei parallele Geraden g_1 und g_2, die den Abstand $h=3{,}5$ cm haben. Aus den Stücken $\overline{AD}=d=3{,}8$ cm, $\overline{BC}=b=4{,}5$ cm und $\overline{BD}=f=6{,}0$ cm sind alle möglichen, paarweise nicht kongruenten Trapeze $ABCD$ mit den parallelen Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ so zu konstruieren, daß jeweils $\overline{AB}$ auf g_1 und $\overline{CD}$ auf g_2 liegt. Beschreibe die Konstruktion und begründe die Anzahl der Lösungen. *W. Henker, Pionierhaus „Juri Gagarin", Karl-Marx-Stadt*

7▲1015 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Der Kreis k um A mit $\overline{AB}$ als Radius schneide die Diagonale $\overline{AC}$ im Punkte E. Die im Punkte E an den Kreis k zu konstruierende Tangente schneide die Seite $\overline{BC}$ im Punkte F. Es ist zu beweisen, daß $\overline{CE}=\overline{EF}=\overline{FB}$ gilt. *Sch.*

7▲1016 Ein Lichtstrahl g, der von einer punktförmigen Lichtquelle A ausgeht, wird an den in der Abbildung gezeigten, gegeneinander geneigten Spiegeln s_1 und s_2 so reflektiert, daß er durch den Punkt B geht. Der Lichtstrahl g ist zu konstruieren; die Konstruktion ist zu begründen. *Sch.*



W 7 ■ 1017 Die Mannschaften A, B, C, D belegten bei einem Turnier die ersten vier Plätze. Auf die Frage, welchen Platz jede dieser Mannschaften belegte, erhielt man von drei Personen R, S, T jeweils zwei Antworten, von denen jeweils genau eine wahr und genau eine falsch ist.
R_1: Mannschaft C belegte den zweiten Platz.
R_2: Mannschaft D belegte den dritten Platz.
S_1: Mannschaft C belegte den ersten Platz.
S_2: Mannschaft B belegte den zweiten Platz.
T_1: Mannschaft A belegte den zweiten Platz.
T_2: Mannschaft D belegte den vierten Platz.
Welchen Platz belegte jede der Mannschaften A, B, C und D?

Aus der polnischen Zeitschrift: Matematyka-czasopismo dl a nauczycieli

W 7 ■ 1018 Gegeben sei eine Gerade g und auf ihr ein fester Punkt P sowie ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1, der mit g keinen Punkt gemeinsam hat. Es ist ein zweiter Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2 zu konstruieren, der g in P und den Kreis k_1 von außen in einem Punkte Q berührt.

Nach E. Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise, Leipzig 1967
Mitgeteilt von Christine Kohlmann, 8701 Lawalde, Kl. 11

W 7*1019 Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2, den Radien $r_1=2$ cm und $r_2=3$ cm und dem Mittelpunktabstand $\overline{M_1M_2}=9$ cm. Ferner sei ein Punkt P gegeben, für den $\overline{PM_1}=4$ cm und $\overline{PM_2}=6$ cm gilt. Auf dem Kreis k_1 ist ein Punkt A, auf k_2 ein Punkt B so zu konstruieren, daß die Strecke $\overline{AB}$ durch den Punkt P halbiert wird. *Sch.*

W 7*1020 Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien $r_1<r_2$, die sich in den Punkten P und Q schneiden. Auf k_1 ist ein Punkt A und auf k_2 ein Punkt B so zu konstruieren, daß die Gerade AB durch P geht und $\overline{AP}=\overline{PB}$ gilt. *Sch.*

▲8▲1021 Man beweise, daß die um 5 verminderte Summe der Quadrate von vier aufeinander folgenden ganzen Zahlen stets gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl ist.
Hans Reinhard Berger, Liechtenstein Student

W 8 ■ 1022 Ein Kraftwagen fährt auf einer Autobahn mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Ein zweiter Kraftwagen befindet sich 2 km hinter dem ersten und fährt in derselben Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit von 85 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Wann wird der zweite Kraftwagen den ersten einholen? Welche Entfernung hat er von dem Zeitpunkt, an dem er von dem ersten noch 2 km entfernt war, bis zum Zeitpunkt des Einholens gerechnet, zurückgelegt? *L.*

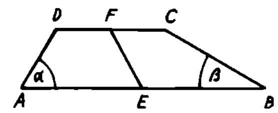
W 8 ■ 1023 Bei den XX. Olympischen Sommerspielen 1972 belegte im Rudern der Vierer ohne Steuermann der DDR den ersten Platz und erhielt eine Goldmedaille. Dabei wurden die folgenden Zeiten nach Zurücklegung einer Strecke von 500 m, 1000 m, 1500 m und der Gesamtstrecke von 2000 m registriert:

Strecke	Zeit
500 m	1 min 31,61 s
1000 m	3 min 10,16 s
1500 m	4 min 50,06 s
2000 m	6 min 24,27 s

Es sollen jeweils die mittleren Geschwindigkeiten des Bootes auf den einzelnen Teilstrecken von je 500 m Länge und auf der Gesamtstrecke berechnet werden, und zwar in $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (mit zwei Stellen nach dem Komma) und in $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ (mit einer Stelle nach dem Komma). Ferner soll der größte Betrag der prozentualen Abweichungen der Geschwindigkeiten auf den Teilstrecken von der mittleren Geschwindigkeit auf der Gesamtstrecke berechnet werden. *L.*

W 8*1024 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$, das die folgende Eigenschaft besitzt: Die von dem Punkt C ausgehende Höhe $\overline{CD}$ ist doppelt so lang wie der Hypotenusenabschnitt $\overline{AD}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist durch die Höhe $\overline{CD}=h$ auszudrücken. Ferner soll der Flächeninhalt für den Fall $h=4$ cm berechnet werden. *Sch.*

W 8*1025 Es sei $ABCD$ ein Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}=a$ und $\overline{CD}=c$, dessen Winkel bei den Eckpunkten A und B zusammen 90° betragen: $\alpha+\beta=90°$.



Man berechne die Länge $\overline{EF}$ der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ aus den Längen a und b dieser Grundseiten.

Viktor Chastschanski, Schüler Dzershinsk, UdSSR

▲9▲1026 Man beweise, daß die Summe der dritten Potenzen von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen stets durch 9 teilbar ist.

Viktor Chastschanski, Schüler Dzershinsk, UdSSR

▲9▲1027 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Ungleichung
$|x|+|x-1|>2$ erfüllt ist. (1)
Ferner ist der Graph der Funktion
$f(x)=|x|+|x-1|$ zu zeichnen; (2)
aus dieser Zeichnung ist die Lösungsmenge der Ungleichung (1) abzulesen.

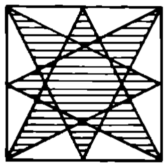
Dr. Gerhard Hesse, Dresden

W 9 ■ 1028 Bei der inoffiziellen Länderwertung der XX. Olympischen Sommerspiele 1972 belegte die DDR mit 480 Punkten nach der UdSSR und den USA und vor allen übrigen Ländern den dritten Platz. Die DDR erhielt 20 Goldmedaillen. Die Anzahlen der Silbermedaillen, Bronzemedaillen und sechsten Plätze, die die DDR erhielt, waren gleich groß, aber größer als die Anzahl der vierten Plätze, die ebenso groß wie die Anzahl der fünften Plätze und größer als die Anzahl der Goldmedaillen war.
Wieviel Silbermedaillen, Bronzemedaillen, vierte, fünfte bzw. sechste Plätze erhielt

die DDR, wenn für eine Goldmedaille 7 Punkte, für eine Silbermedaille 5 Punkte, für eine Bronzemedaille 4 Punkte und für einen 4., 5. bzw. 6. Platz 3, 2 bzw. 1 Punkte angerechnet werden? *L.*

W 9 ■ 1029 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge $\overline{AB} = a = 10$ cm dar. Die Mitte jeder Quadratseite wurde jeweils mit den nichtbenachbarten Eckpunkten des Quadrates verbunden. So entstand ein achtzackiger Stern, dessen Flächeninhalt A_S zu berechnen ist.

Martin Theuer, Crussow
Fachlehrer für Mathematik



W 9*1030 Es sei n eine natürliche Zahl, die größer als 2 ist. Ferner seien a, b die Längen der Katheten und c die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Man beweise, daß dann stets

$a^n + b^n < c^n$ gilt.

Janous Walther, Horn (Österreich)

W 9*1031 Es seien a und b zwei reelle Zahlen.
1. Die Summe $a^2 - b^2 + ab$
soll als Produkt von zwei Faktoren dargestellt werden, die in a und b linear sind und deren Koeffizienten reelle Zahlen sind.
2. Es ist nachzuweisen, daß die Summe $a^2 + b^2 + ab$ nicht als Produkt von zwei solchen Faktoren dargestellt werden kann.

Hans-Reinhard Bergen, Student
Hohenstein-Ernstthal

▲10/12▲1032 Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x + y = 5, \qquad (1)$$
$$x^5 + y^5 = 275 \qquad (2)$$

zu ermitteln. *Gerd Weißenborn, Berlin*
EOS „Heinrich Hertz" Kl. 11

▲10/12▲1033 Es sei f eine Funktion, die aus der Menge aller geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen besteht, für die die Gleichung $(x^2 + y^2)^2 = x - y^2$
erfüllt ist und für die $y \geqq 0$ gilt.
a) Man bestimme den Definitionsbereich von f.
b) Man stelle die Funktion f in der Form $y = f(x)$ dar.
c) Man bestimme rechnerisch die Nullstellen dieser Funktion und gebe den größten Funktionswert (das Maximum) an.
d) Man zeichne den Graph dieser Funktion.

Wolfgang Riedel, Karl-Marx-Stadt, Student

W 10/12 ■ 1034 Auf Grund einer Verordnung des Ministerrates über die Förderung des Baus von Eigenheimen können für Arbeiterfamilien und kinderreiche Familien besondere Vergünstigungen bei der Finanzierung gewährt werden. Werden z. B. für ein Eigenheim, dessen Baukosten 65000,– M betragen,
Eigenleistungen (die auch durch Freundes- und Nachbarschaftshilfe sowie die Hilfe des Betriebes erbracht werden können) in Höhe von 19500,– M
erbracht, so kann
a) für das Baumaterial ein zinsloser Kredit von 32000,– M,
der mit jährlich 1% zu tilgen ist, und
b) für Bauleistungen ein Kredit von 13500,– M
gewährt werden, der mit jährlich 5% zurückzuzahlen ist, worin jeweils 4% Zinsen für das Restdarlehn enthalten sind.
65000,– M

1. Wie hoch ist die jährliche bzw. monatliche Zahlung für die Verzinsung und Tilgung der Kredite zu a) und b)?
2. In wieviel Jahren wird der Kredit zu b) getilgt sein?
3. In wieviel Jahren werden beide Kredite zu a) und b) getilgt sein, wenn man berücksichtigt, daß nach Tilgung des Kredits zu b) alle Zahlungen auf die Tilgung des zinslosen Kredits zu a) verrechnet werden?

Anleitung zur Lösung: Zur Vereinfachung der Rechnung ist anzunehmen, daß die Zahlungen jeweils am Ende eines Jahres erfolgen. Dann kann man die Tilgungszeit t (in Jahren) für den Kredit zu b) aus der Formel

$$5 \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} = 100 \cdot q^t$$

berechnen, wobei $q = 1{,}04$ ist. *L.*

W 10/12 ■ 1035 Man beweise, daß die Ungleichung

$$|ac + bd| \leqq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \qquad (1)$$

für alle reellen Zahlen a, b, c, d erfüllt ist.

Olaf Böhme, stud. math., Dresden

W 10/12*1036 Es seien f_1 und f_2 zwei Funktionen, die für alle reellen Zahlen x durch die folgenden Ausdrücke definiert sind:

$$f_1(x) = \sin x \cdot \cos x, \qquad (1)$$
$$f_2(x) = \sin x + \cos x. \qquad (2)$$

Man ermittle für jede dieser Funktionen den größten Funktionswert.

Ralph Lehmann, Strausberg,
EOS „Diesterweg", Kl. 10

W 10/12*1037 Es seien ABC ein Dreieck und P ein Punkt im Innern dieses Dreiecks. Die Verbindungsgeraden des Punktes P mit den Eckpunkten A, B, C des Dreiecks mögen die jeweils gegenüberliegenden Seiten in den Punkten D, E und F schneiden. Man beweise, daß dann stets gilt

$$\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE} = \overline{FB} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{EA}.$$

(Dieser Satz aus der Geometrie wird auch der „Satz des Ceva" genannt. Er wurde zuerst von dem italienischen Mathematiker Giovanni Ceva im Jahre 1678 veröffentlicht.)

Herwig Gratias, EOS Sömmerda, Kl. 11

LESER SCHREIBEN

Seit fünf Jahren bin ich *alpha*-Leser. Die Zeitschrift half mir stets, mein mathematisches Wissen zu erweitern, so daß ich jetzt eine Spezialklasse besuchen kann.

Volker Boos, Dabrun

In Vorbereitung auf die Mathematikolympiaden hat mir *alpha* sehr geholfen. Mehrfach war ich bei Kreis- und Bezirksolympiaden erfolgreich. *Elisabeth Heusinger, Suhl*

Da die Wettbewerbsaufgaben oft schwer waren, wollte ich manchmal aufgeben. Ich tat es jedoch nicht. So festigte sich mein mathematisches Denken. Es gelang mir zum zweiten Male, einen 1. Platz in der Kreisolympiade zu belegen.

Jens Schönfelder, Schwedt

Allen Mitarbeitern der *alpha* möchte ich für die Mühe danken, die sie im Laufe der Jahre für die Ausarbeitung einer stets interessanten und lehrreichen Zeitschrift aufgewendet haben. Vielleicht haben die Knobelaufgaben und die Beiträge meinen Berufswunsch beeinflußt – ich bin seit September 1972 Mathematikstudent an der TH Karl-Marx-Stadt. Ich werde auch weiterhin die *alpha* lesen und interessante Aufgaben zu meinem Vergnügen lösen.

Wolfgang Riedel, Karl-Marx-Stadt

alpha ist Klasse! Die ständige Beschäftigung mit ihr hat meine schulischen Leistungen sehr gefördert.

Norbert Littig, Lichtenberg

Ich möchte meinen Dank für die interessante und unterhaltsame Zeitschrift aussprechen. Jetzt werde ich ein Mathematikstudium in Leipzig aufnehmen. Daran hat *alpha* gewiß einen Anteil. *Frank Kretschmar, Leipzig*

Das Lösen von Aufgaben macht mir viel Freude und hilft mir auch tüchtig im Unterrichtsfach Mathematik. Im letzten Schuljahr war ich über ein viertel Jahr krank. Trotzdem habe ich „sehr gut" im Zeugnis erhalten, weil ich mich viel mit den Aufgaben aus der *alpha* befaßt habe und auch schon versuche, Aufgaben höherer Klassenstufen zu lösen. *Judith Klinkert, Nordhausen*

Die Zeitschrift *alpha* hat dazu beigetragen, daß ich ab September 1972 eine Spezialklasse Mathematik besuchen darf und einmal Mathematik studieren werde.

Dagmar Marby, Quedlinburg

Seit Jahren bin ich ein Leser der *alpha*. Besonderes Interesse haben wir Ungarn an den Aufgaben der Schülerzeitschrift. Sie helfen besonders die Olympiaden vorzubereiten. Viele Artikel sind methodisch sehr gut. Sie helfen unseren Lehrern und Schülern in der außerunterrichtlichen Arbeit.

Dr. István Reiman, Kandidat der math. Wissenschaften und Dozent der TU Budapest

Preisträger Physik-Wettbewerb '72

Zum Wettbewerb gingen 809 Lösungen ein, davon 254 von Mädchen. 203 Lösungen wurden als „falsch gelöst" bewertet. Alle Einsender erhielten Antwortkarten, die für den *alpha*-Wettbewerb 1972/73 mitgewertet werden. Folgende Teilnehmer erhielten eine Anerkennungsurkunde und eine Buchprämie (vom Verlag Volk und Wissen): Martin Blümlinger, Linz (Österreich); Thomas Maiwald, Olbersdorf; Thomas Luschtinetz, Stralsund; Thomas Kischel, Greifswald; Daniel Hersberger, Basel (Schweiz); Meinhard Mende, Lunzenau; Ute Winkler, Teelow; Andreas Weller, Altenberg; Cornelia Thannhauser, Linz (Österreich); Viktor Chaschtschanski, Dzerschinsk (UdSSR); Ing. Erhard Eulitzer, Cottbus; Karl Krause, Mansfeld (Rentner, 71 Jahre); Johannes Blümlein, Heldberg.

alpha-Wettbewerb Preisträger

Thomas Maiwald, 8809 Olbersdorf; Angelika Müller, 22 Greifswald; Thomas Kischel, 22 Greifswald; Viktor Chaschtschanski, Dzerschinsk (UdSSR); Dietmar Gröger, 3257 Hecklingen; Jan Müller, 1034 Berlin; Uwe Schäfer, 75 Cottbus; Marion Bohn, 1055 Berlin; Jürgen Sommerschuh, 85 Bischofswerda; Wolfgang Huschmann, 9156 Oelsnitz; Eva Gerstner, 806 Dresden; Manuela Lehmert, 562 Worbis; Dagmar Lorenz, 89 Görlitz; Cornelia Thannhauser, Linz (Österreich); Siegfried Weiß, 8713 Neusalza-Spremberg; Martin Blümlinger, Linz (Österreich); Frank Müller, 75 Cottbus; Anne-Kathrin Steinbach, 372 Blankenburg; Hubert Steinmetz, 5401 Clingen; Elke Witt, 4401 Uthausen; Gerald Gerlach, 801 Dresden; Andreas Große, 7123 Engelsdorf; Roswitha Schlotte, 90 Karl-Marx-Stadt; Volker Ludley, 4401 Bergwitz; Eva Marx, 5401 Clingen; Ulf Ritschel, 1201 Booßen; Audrey Hoffmann, 1055 Berlin; Falk Bachmann, 402 Halle; Heiko Tennert, 73 Döbeln; Hartmut Herrmann, 1282 Schönow; Andrea Nießen, 1071 Berlin; Jörg Brüstel, 7401 Ziegelheim; Detlef Rütz, 20 Neubrandenburg; Uwe Szyszka, 2001 Brohm, Gisela Czogalla, Jörg Wachsmann, Elke Halecker, Frank Billert, Arnd Halecker, alle 5401 Clingen; Ulv Krabisch, 7024 Leipzig; Birgit Mann, 1071 Berlin; Silke Zimmermann, 5401 Clingen; Sabine Schröder, 128 Bernau; Dagmar Pohle, 7906 Mühlberg; Marcus Kasner, 209 Templin; Waldemar Olk, 6088 Steinbach-Hallenberg; Barbara Wolf, 437 Köthen; Andreas Illing, 9272 Gersdorf; Horst Lange, 8809 Olbersdorf; Reinhard Koeppe, 3404 Loburg; Bianca Herrmann, 4608 Zahna; Hildrun Methling, 2424 Dassow; Lew Dimenstein, Leningrad (UdSSR); Heidi Günther, 8606 Sohland; Jens Burghardt, 12 Frankfurt/O.; Andreas Wenzel, 9201 Dorfchemnitz; Thomas Fiedler, 22 Greifswald; Dietrich Jaeckel, 69 Jena; Uta Stopp, 8019 Dresden; Rolf Bartl, 58 Gotha; Bernd Grünler, 657 Zeulenroda; Petra Peter, 117 Berlin; Bertold Möbius, 8020 Dresden; Michael Minx, 1071 Berlin; Lutz Thorwarth, 608 Schmalkalden; Gudrun Bertram, Karl-Heinz Wiesemann, Silke Kranhold, Sabine Range, alle 5401 Clingen; Kurt Oppitz, 15 Potsdam; Angela Gebhardt, 9402 Bernsbach; Lothar Eimecke, 7901 Fermerswalde; Bengt Nölting, 22 Greifswald; Thomas Kaatz, 445 Gräfenhainichen; Andrea Mittelbach, 1058 Berlin; Andreas Goldhahn, 9402 Bernsbach; Frank Burghardt, 12 Frankfurt/O.; Klaus Schulze, 7253 Brandis; Bernd Bräutigam, 9402 Bernsbach; Karin Schmidt, 9402 Bernsbach; Ulf Ruthenberg, 20 Neubrandenburg; Ingolf Buttig, 8504 Großharthau; Jörg Kunzmann, 9402 Bernsbach; Janis Zadius, Riga (UdSSR); Ines Mannschatz, 1055 Berlin; Jürgen Friedrich, 9341 Boden; Peter Bräuning, 63 Ilmenau; Hans-Peter Küchler, 1055 Berlin; Wolfgang Taubert, 61 Meiningen

Teilnahme von Kollektiven am alpha-Wettbewerb (1971/72)

OS Fambach (131 Schüler; 1191 Karten); OS Steinbach-Hallenberg (96 Schüler, 1079 Karten); OS Burkau (48 Schüler, 433 Karten); OS Haynrode (51 Schüler, 320 Karten); OS Clingen (31 Schüler, 521 Karten); Teil-OS Neunhofe (26 Schüler, 160 Karten); *alpha*-Club Rotta-Bergwitz (31 Schüler, 350 Karten); *alpha*-Club 29. OS Leipzig (30 Schüler, 218 Karten); OS Ernst Thälmann Karl-Marx-Stadt (26 Schüler, 285 Karten); OS Löderburg (20 Schüler, 188 Karten); OS Stolpen (17 Schüler, 212 Karten); OS Bahratal (16 Schüler, 185 Karten); OS II Hainichen (14 Schüler, 168 Karten); OS Kuhfelde (12 Schüler, 120 Karten); OS Rüdnitz (10 Schüler, 73 Karten); Pionierhaus „Juri Gagarin" Karl-Marx-Stadt; OS Adolf Diesterweg, Lobenstein; OS Wingerode; OS Siechenrasen/Schmalkalden; E.-Hartsch-OS Gersdorf; OS Breitenbach/Eichsf.; OS I Dingelstädt; Fritz-Reuter-OS Siedenbollentin; Adolf Diesterweg-OS Spremberg; Hegel-OS Magdeburg; Käthe-Kollwitz-OS Wittenberg; Friedrich-Schiller-OS Eilenburg; OS Oberschönau; OS Lössau; OS Gösen; EOS Worbis; Clara-Zetkin-OS Wiehe/Unstr.; OS Wolmirstedt; OS Asbach; OS Jördenstorf; OS Broderstorf; OS I Teltow; OS Großbodungen; Goethe-OS Gnoin; Maxim-Gorki-OS Berlin; 22. OS Rostock; OS Breitenbach; EOS Schmalkalden; OS Zepernick; Martin-Andersen-Nexö-OS Marienberg; Ernst-Thälmann-OS Ruhla; 13. OS Berlin-Friedrichshagen; OS Mittelstille; Klub Junger Mathematiker Cottbus; III. OS Bernau; OS Blumberg; OS Struth-Helmersdorf; Comenius-OS Oranienburg; OS Großpostwitz; Theodor-Neubauer-OS Bad Salzungen; Käthe-Kollwitz-OS Bützow; OS Zörnigall; OS Alt-Töplitz; 9. OS Berlin-Friedrichshagen; OS Mahlis; Karl-Liebknecht-OS Berlin-Köpenick; OS Kavelstorf; OS I Saßnitz; Käthe-Kollwitz-OS Schwerin-Görris; 32. OS Berlin; OS Großtreben; 13. OS Leipzig; OS Radebeul I; Maxim-Gorki-OS Berlin; OS Oberröblingen; BS VEB Erdöl und Erdgas, Grimmen; L. Fürnberg-OS Wegeleben; OS Ahlbeck; G.-Hauptmann-OS Ribnitz-Damgarten; *alpha*-Zirkel OS Bad Kösen; OS Schernberg; Diesterweg-OS I, Halle; OS Gielow; E.-Struwig-OS Großwokern; OS Dorfchemnitz

Vorbildliche Hilfe

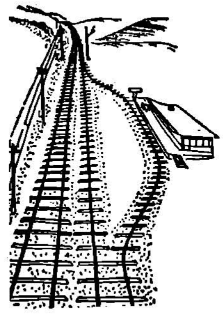
Ende September wurden 150 Päckchen mit Buchprämien für die Preisträger des Wettbewerbs 1971/72 versandt.

Wir danken den Verlagen, welche uns Bücher im Wert von 2500 M zur Verfügung stellten. Das ist ein echtes Zeichen der Anerkennung für die vielen Tausend aktiven Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb.

Einen wertvollen Beitrag zur weiteren Qualifizierung unserer Leser leisteten:

▪ VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin ▪ VEB Fachbuchverlag, Leipzig ▪ Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin ▪ Transpress, VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin ▪ VEB Verlag Technik, Berlin ▪ Sportverlag, Berlin ▪ Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin ▪ BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig ▪ Der Kinderbuchverlag, Berlin ▪ Verlag Die Wirtschaft, Berlin ▪ Deutscher Militärverlag, Berlin ▪ Polnisches Kultur- und Informationszentrum, Leipzig

In freien Stunden alpha heiter



Ludas Matyi, Budapest

Kombiniere!

Bei den Verkehrsbetrieben einer Stadt sind Werner, Horst, Peter, Alfred und Günther als Taxi-Fahrer angestellt. Ihnen stehen innerhalb von 5 Tagen täglich ein Trabant, ein Wartburg, ein Skoda, ein Moskwitsch und ein Tatra zur Verfügung.
Wer fährt am Freitag (5. Tag) welchen PKW-Typ?
Wir wissen, daß am Dienstag Peter mit dem Wartburg fuhr und alle anderen einen anderen PKW-Typ. Am Donnerstag fuhren Werner Trabant und Alfred Moskwitsch. Am Montag fuhr Alfred mit dem Trabant. Peter fuhr am Mittwoch Skoda und Günther Wartburg. Alle Taxifahrer fuhren innerhalb von 5 Tagen jeweils einen anderen PKW-Typ. Wer hat nun am Freitag welchen PKW gefahren?

Ing. E. Schmidt, Potsdam

Ein Kenner mathematischer Zusammenhänge

Folgende kleine Begebenheit zeigt, wie ein Kenner der mathematischen Zusammenhänge einem Nur-Rechner überlegen sein kann. Der französische Rechenkünstler *Henri Mondeux* gab als 14jähriger im Jahre 1840 eine Vorstellung an der *Ecole Polytechnique* in Paris. Professoren und Studenten dieser berühmten Lehranstalt waren zugegen; unter ihnen ihr Studiendirektor, der Mechaniker *Coriolis* und der Mathematiker *Cauchy*, der damals schon bekannt und berühmt war.
Mondeux löste zunächst einige Aufgaben aus dem Zuhörerkreis schnell und richtig. Bei einer größeren Rechnung, die ihn für längere Zeit in Anspruch nahm, rief plötzlich *Cauchy* die Lösung eher als er in den Raum. *Coriolis* stellte sich beschützend vor den Wunderknaben und forderte *Cauchy* auf, selbst eine Aufgabe zu stellen. Dieser zögerte nicht lange und ließ *Mondeux* zunächst die vierten Potenzen der ersten 20 natürlichen Zahlen ermitteln. Nachdem dies erledigt war, verlangte der Mathematiker, die Summe dieser 20 Biquadrate zu bilden. Wieder rechnete *Mondeux* lange, und wieder hatte *Cauchy* das Ergebnis schneller als er, denn er bildete natürlich nicht erst die einzelnen vierten Potenzen, sondern bediente sich der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

(vgl. *alpha* 4/71), die mit $n=20$ sicherlich auch im Kopf schneller das Ergebnis liefert als die gliedweise Addition.

Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden

Nachgedacht!

Setzt man in die Gleichung

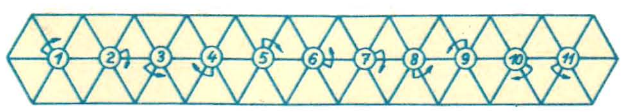
$$a(4+x)+(a+m)^2=(a-m)^2+4a+m(4a+x)$$

für die Variable a die Anzahl der Tage und für die Variable m das Alter des Sperlings ein, so erhält man mit x die Anzahl der Schritte, die dieser Sperling im angenommenen Zeitraum a macht.

Oberlehrer R. Rösel, OS Teterow

Wabenrätsel

1) Größenangabe, die Flächen wie Quadraten, Kreisen usf. zugeordnet ist; 2) bestimmte Menge von Punkten, die auf einer Geraden liegen; 3) griechischer Mathematiker, nach dem ein Satz über rechte Winkel benannt ist; 4) einer der Wahrheitswerte einer Aussage; 5) eine der Beziehungen, die zwischen zwei Zahlen oder Größenangaben bestehen kann; 6) Name für eine natürliche Zahl in bezug auf eine zweite, falls die zweite ein Vielfaches der ersten ist; 7) bestimmter Teil der Oberfläche gewisser Körper; 8) spezieller Körper;



9) kennzeichnende Eigenschaft einer der beiden Arten von Proportionalität; 10) eine der beiden Zahlen, durch die ein Produkt bestimmt ist; 11) Differenz zwischen geschätztem Wert und richtigem Wert.

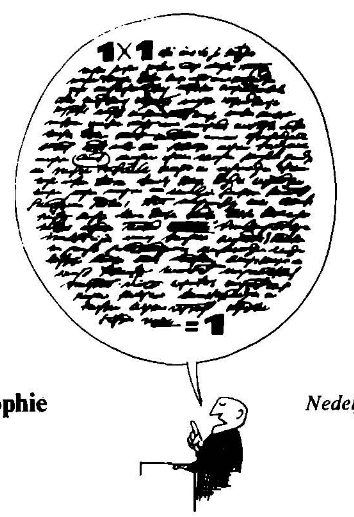
Mathematikfachlehrer W. Träger
Schloßberg-Oberschule Döbeln

$$
\begin{array}{r}
1+9+7+3 \\
+1+9+\ 73 \\
+1+9\cdot 7:3 \\
+1\cdot 9+7+3 \\
+1\cdot 9+7\cdot 3 \\
+\ 19\ -7+3 \\
\hline
1\cdot 9\cdot 7\cdot 3
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1973} &= 1-2+345\cdot 6-7-89 \\
&= 987(6-5)(4-3)\cdot 2-1 \\
&= 44\cdot 44+44-4-4+4:4 \\
&= (55\cdot 55)-555-555+55+(5+5+5):5 \\
&= 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6+666+66:6 \\
&\ \ 9(99+99+9)+99+99:9 \\
&= 23^2+38^2 \\
&= 7^4-6^3-5^3-4^3-3^3+2^2 \\
&= 10^3+10^3-3^3 \\
&= 989-\sqrt{8+9+8}+989 \\
&= (1+9)(7+3)\cdot 19+73 \\
&= 19\cdot 73+197\cdot 3-1\cdot 9+7-3 \\
&= (1\cdot 9+7+3)\cdot(1+9)(7+3)+(1+9)7+3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1\cdot 97+3 &= (1+9)(7+3) \\
(1+9-7):3 &= (1+9):(7+3) \\
197+3 &= 1\cdot 97+3+(1+9)(7+3) \\
197+3 &= (1-9+7+3)(1+9)(7+3) \\
1\cdot 9(7+3) &= 1\cdot 9\cdot 7-3+1\cdot 9+7\cdot 3 \\
1\cdot 1+9\cdot 9+7\cdot 7+3\cdot 3 & \\
&= (1+9)(7+3)+(1+9)(7-3) \\
&\ \ 197\cdot 3-1\cdot 97\cdot 3 \\
&= 197+3+1\cdot 97+3 \\
1+9+7+3 &= 98-76+5+4-3+2-10 \\
1\cdot 9\cdot 7\cdot 3 &= 123-45+6+7+8+90 \\
19+73 &= 1+9\cdot 7-3+1+9+7\cdot 3 \\
19-73 &= 1+9-7+3-1\cdot 9\cdot 7+3 \\
19\cdot 73 &= (1\cdot 9+7+3)\cdot [(1+9)7+3] \\
19:73 &= (1\cdot 9+7+3):[(1+9)7+3]
\end{aligned}
$$

Ing. H. Decker, Köln



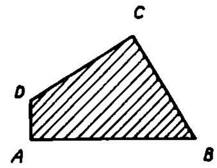
Philosophie

Nedeljko Dragie, Zagreb

Legespiel

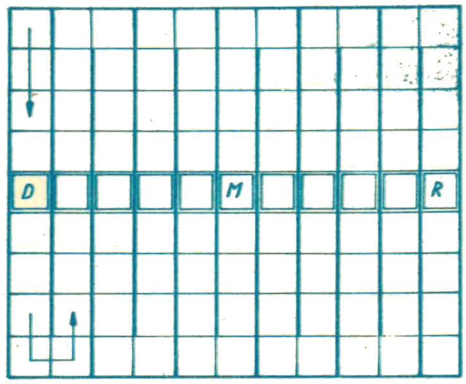
Stelle dir vier kongruente Flächen (siehe Abb.) her und versuche, ein Quadrat daraus zusammenzusetzen.

Aus: „Praxis der Mathematik", Köln (9/65)



Begriffsschlange

In diese Figur sind, links oben beginnend, die Wortbilder mathematischer Begriffe der folgenden Bedeutung einzusetzen:



geometrischer Grundbegriff (6) — geometrischer Grundbegriff (5) — Randpunkt einer Strecke (8) — Eigenschaft, die einer natürlichen Zahl in bezug auf eine andere zukommt, die ein Vielfaches der ersten ist (7) — besondere Strecke am Kreis (6) — kürzeste Verbindung zweier Punkte (7) — Begriff der Mengenlehre (7) — Name des Mathematikers, nach dem ein Satz aus der Kreislehre benannt ist (6) — Zusammenstellung (6) — wichtige Angabe auf Karten (7) — spezielle Abbildung (8) — spezielle Trapezseite (10) — Schrägbild eines Kreises (7) — Zahlwort (4) — spezielles Vieleck (11) — Eigenschaft, die durch Bewegungen aufeinander abbildbaren geometrischen Figuren zukommt (9).

In Klammern ist hier jeweils die Anzahl der Buchstaben des einzusetzenden Wortes angegeben. Die Endbuchstaben der einzusetzenden Worte stimmen mit den Anfangsbuchstaben des jeweils folgenden Wortes überein.
Bei richtiger Lösung steht in den schraffierten Feldern der obigen Figur das Wortbild eines bekannten geometrischen Begriffes.

Irmgard Träger, Dr.-Richard-Sorge-OS Ebersbach

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

(22. November 1972)

Olympiadeklasse 5

1. In der folgenden Aufgabe ist jedes Sternchen (*) so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht. Dabei muß jede Zeile mit einer von 0 verschiedenen Ziffer beginnen.

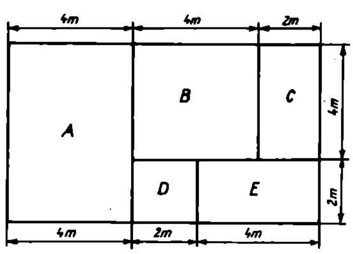
```
4 * * · 3 * *
-------------
* * * 5
  3 * * *
    8 * *
-------------
* * * * 3 *
```

Als Ergebnis wird nur eine richtig ergänzte Aufgabe ohne Begründung verlangt.

2. Eine Oberschule führte für alle Schulklassen ein Schulsportfest durch. Nach dem Sportfest behauptete Gerald, es hätte insgesamt 325 Teilnehmer gegeben.
Günter, der wußte, daß die Anzahl der an dem Sportfest teilnehmenden Mädchen um genau 24 größer war als die der teilnehmenden Jungen, meinte, Geralds Behauptung sei falsch. Weise nach, daß Günters Meinung richtig ist!

3. In einem Kasten befinden sich insgesamt 100 gleichgroße Kugeln, nämlich 28 rote, 28 blaue, 26 schwarze, 16 weiße und 2 grüne. Ulrike soll aus diesem Kasten im Dunkeln (also ohne bei irgendeiner der herausgenommenen Kugeln die Farbe erkennen zu können) eine Anzahl von Kugeln herausnehmen. Diese Anzahl soll sie so wählen, daß unter den herausgenommenen Kugeln mindestens 9 die gleiche Farbe haben müssen. Welches ist die kleinste Kugelanzahl, die Ulrike wählen kann, um diese Aufgabe zu erfüllen?

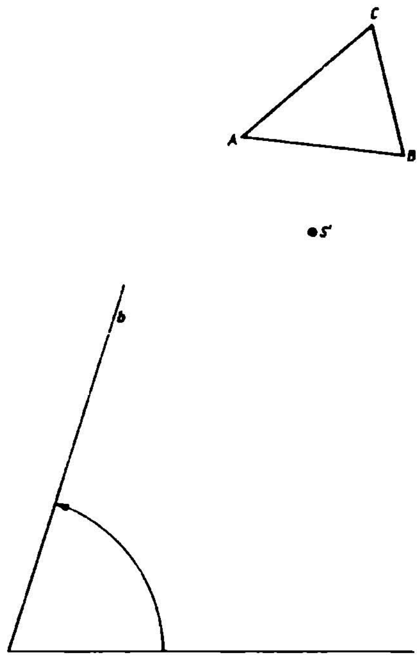
4. Die Abbildung stellt den Grundriß einer Wohnung mit den Räumen A, B, C, D, E dar.



a) Zeichne den Grundriß dieser Wohnung im Maßstab 1:100!
b) Die Fußböden der Räume A und B sollen gestrichen, die der Räume C, D und E mit einem Fußbodenbelag ausgelegt werden. Ermittle den Flächeninhalt der Fußböden der einzelnen Räume und gib die Anzahl der zu streichenden und die der auszulegenden Quadratmeter an!

Olympiadeklasse 6

1. Das auf der Abbildung gezeigte Dreieck $\triangle ABC$ ist um den Drehpunkt S um den Drehwinkel $\measuredangle(a, b)$ im angegebenen Drehsinn zu drehen.



Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal auf dem Arbeitsblatt das dadurch entstehende Dreieck $\triangle A'B'C'$. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

2. An 11 Werktätige eines volkseigenen Betriebes wurden für insgesamt 2650 M Prämien in Höhe von 150 M, 250 M, 350 M, 400 M und 500 M vergeben, wobei jede Prämienstufe mindestens einmal vorkam. Ermittle die Anzahl aller Werktätigen, die mit je 150 M ausgezeichnet wurden!

3. Nach einer Solidaritätssammlung für Vietnam verglichen die Thälmann-Pioniere Rita, Werner, Margot, Beate und Jan ihre Sammelergebnisse. Dabei stellten sie fest:
(1) Beate hatte mehr als Jan, jedoch weniger als Werner gesammelt.
(2) Rita sammelte 13 M, das war weniger, als Jan gesammelt hatte.
(3) Beates Sammelergebnis war um 4 M höher als das Ergebnis Ritas.
(4) Margot sammelte zwar 2 M weniger als Werner, aber 1 M mehr als Jan.
(5) Zwei Pioniere erzielten das gleiche Sammelergebnis.
Stelle fest, welches Sammelergebnis jeder der fünf Pioniere erzielt hatte.

4. Manfred berichtete im Zirkel Junger Mathematiker von einem Besuch des Rostocker Überseehafens:
„Ich habe dort insgesamt 21 Schiffe aus fünf verschiedenen Ländern gesehen. Die Anzahl der Schiffe aus der DDR war halb so groß wie die aller im Hafen liegenden ausländischen Schiffe. Diese kamen aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland sowie aus Indien. Dabei war die Anzahl der sowjetischen Schiffe um zwei größer als die der bulgarischen, diese wieder um eins größer als die der finnischen, diese schließlich um zwei größer als die der indischen Schiffe."
Ermittle die Anzahl der Schiffe aus der DDR, aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland und aus Indien, die Manfred in Rostock gesehen hat!

Olympiadeklasse 7

1. Man ermittle die Paare (x, y) natürlicher Zahlen x und y, für die folgendes gilt:
(1) Die Summe der beiden Zahlen x und y beträgt 15390.
(2) Setzt man die einstellige Zahl x vor die Zahl y, so erhält man eine Zahl z, die viermal so groß ist wie die Zahl u, die man erhält, indem man die Zahl x hinter die Zahl y setzt.

2. Beweise den folgenden Satz:
Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$ die Mittelpunkte beider Diagonalen zusammenfallen, d. h. die Diagonalen einander halbieren, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

3. Über das Alter von vier Tennisspielern Arnold, Bruno, Christoph und Detlef ist folgendes bekannt:
(1) Alle vier Spieler sind zusammen 100 Jahre alt.
(2) Arnold und Bruno sind zusammen genau so alt wie Christoph und Detlef zusammen.

(3) Christoph ist älter als Detlef.
(4) Bildet man alle möglichen „Doppel“ (Gruppen aus zwei Spielern), die sich aus den vier Spielern bilden lassen, dann besteht genau eines dieser „Doppel“ aus zwei gleichaltrigen Spielern.
(5) Der älteste der vier Spieler ist vier Jahre älter als der jüngste.

Wie alt ist jeder der vier Spieler?
(Sämtliche Angaben in vollen Lebensjahren)

4. Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $h_a = 6$ cm, $h_c = 5$ cm und $\beta = 50°$!
Dabei seien h_a die Länge der Dreieckshöhe, die auf BC senkrecht steht, h_c die Länge der auf AB senkrecht stehenden Dreieckshöhe und β die Größe des gegebenen Winkels $\sphericalangle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 8

1. Axel, Bernd, Conrad, Dieter, Erwin, Frank und Gerd sind im Turnunterricht hintereinander der Größe nach angetreten, wobei der Größte von ihnen vorn steht.
Es ist außerdem bekannt:
(1) Dieter steht an vierter Stelle.
(2) Gerd steht unmittelbar vor Bernd und unmittelbar hinter Erwin.
(3) Axel steht unmittelbar hinter Frank.
(4) Gerd und Axel sind Zwillinge, während der Zweitgrößte der sieben Jungen keine Geschwister hat.

Schreibe die Namen der sieben Jungen in der Reihenfolge auf, in der sie angetreten sind!

2. Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, AB eine Sehne von k der Länge r und C ein von A und B verschiedener Punkt auf k.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Größe des Winkels $\sphericalangle BCA$!

3. Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl n sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden.
Ist die erste Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als zweite Quersumme von n bezeichnet. Ist die zweite Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße ihre Quersumme die dritte Quersumme von n.
a) Ermittle den größten Wert, der als dritte Quersumme einer 1972stelligen Zahl auftreten kann!
b) Gib (durch Beschreibung der Ziffernfolge) die kleinste 1972stellige natürliche Zahl an, die diese größtmögliche dritte Quersumme hat!

4. Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 7{,}5$ cm, $a = 6{,}5$ cm und $\alpha + \beta = 120°$!
Dabei sei c die Länge der Seite AB, a diejenige der Seite BC, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 9

1. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Die Summe der Kuben dreier beliebiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

2. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die der Quotient $\frac{8-3x}{7x-2}$ negativ ist!

3. Zu Dekorationszwecken sollen gleichgroße Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.
(2) Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.
(3) Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.
(4) Von jeder der drei Sorten findet genau dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.
(5) Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.
(6) Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.

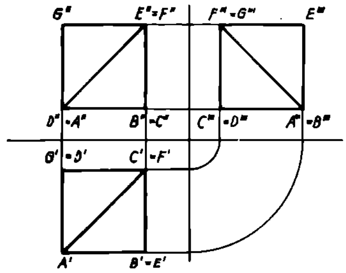
Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig zu erfüllen!

4. Ein konvexes Tangentenviereck $ABCD$ (ein Viereck, in das ein Kreis so einbeschrieben werden kann, daß er jede der vier Seiten des Vierecks in je einem Punkt berührt) habe den Umfang u, der Radius seines Inkreises sei r.
Berechnen Sie den Flächeninhalt A dieses Tangentenvierecks!

Olympiadeklasse 10

1. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Bildet man aus irgend einer im dekadischen System geschriebenen natürlichen Zahl z_1 durch beliebiges Vertauschen ihrer Ziffern untereinander eine neue Zahl z_2, dann ist $|z_1 - z_2|$ stets durch 9 teilbar.

2. In der Abb. ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper in Grund-, Auf- und Seitenriß dargestellt. Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in allen drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.
a) Zeichnen Sie für $a = 6$ cm den Körper in schräger Parallelprojektion $\left(\alpha = 60°;\ q = \frac{1}{2}\right)$!
b) Berechnen Sie das Volumen V des in a) dargestellten Körpers!



3. In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sind zwei Parabeln gezeichnet. Die eine ist der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$. Die zweite liegt ebenfalls symmetrisch zur y-Achse; ihr Scheitelpunkt ist $S(0;\ 6)$. Sie hat ferner folgende Eigenschaft:
Fällt man von den Schnittpunkten A und B beider Parabeln die Lote auf die x-Achse (Fußpunkte seien A_1 bzw. B_1), so ist das Viereck A_1B_1BA ein Quadrat.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, in denen die zweite Parabel die x-Achse schneidet!

4. a) Den Schülern einer Klasse wird die Aufgabe gestellt, $\sqrt{12}$ und $\sqrt{133}$ grafisch zu ermitteln. Dafür sollen nur der Höhensatz oder der Kathetensatz oder beide Sätze (für jede der Wurzeln jeweils einer dieser beiden Sätze) benutzt werden. Ein Schüler löst beide Aufgaben an dem gleichen rechtwinkligen Dreieck.
Wie lauten alle Möglichkeiten, hierfür geeignete Maßzahlen p und q der Längen der Hypotenusenabschnitte zu wählen, so daß diese Maßzahlen p und q überdies rationale Zahlen sind?
b) Man beantworte die gleiche Frage für den Fall, daß $\sqrt{11}$ und $\sqrt{133}$ zu ermitteln waren.

Olympiadeklasse 11/12

1. Es seien u und v zwei ungerade natürliche Zahlen, für die $u > v$ gilt.
a) Man beweise, daß dann $x = u \cdot v$, $y = \frac{u^2 - v^2}{2}$ und $z = \frac{u^2 + v^2}{2}$ drei natürliche Zahlen sind, für die $x^2 + y^2 = z^2$ gilt, d. h. daß (x, y, z) ein pythagoreisches Zahlentripel bilden.
b) Geben Sie je eine hinreichende Bedingung dafür an, daß $x > y$ bzw. $x < y$ gilt!

2. Es sind alle geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a, b anzugeben, für die das Polynom $f(x) = x^2 + ax + b$ ein Teiler des Polynoms $g(x) = x^4 + ax^2 + b$ ist.
Definition: Ein Polynom $f(x)$ heißt genau dann ein Teiler eines Polynoms $g(x)$, wenn es ein Polynom $h(x)$ gibt, so daß $f(x) \cdot h(x) = g(x)$ gilt.

3. Man beweise, daß für keine natürliche Zahl n die Zahl $6n+2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

4. In einer Stadt soll ein Netz von mindestens zwei Autobuslinien eingerichtet werden. Dieses Liniennetz soll folgenden Bedingungen genügen:

(1) Auf jeder Linie gibt es genau drei Haltestellen.
(2) Jede Linie hat mit jeder anderen Linie genau eine Haltestelle gemeinsam.
(3) Es ist möglich, von jeder Haltestelle aus jede andere Haltestelle mit einer Linie zu erreichen, ohne zwischendurch auf eine andere Linie umsteigen zu müssen.

Man ermittle alle Möglichkeiten für die Anzahl der Autobuslinien eines solchen Netzes.

Lösungen

* 10 * 911 1. Für alle Winkel α mit $0<\alpha<45°$ gilt

$$\sin 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\tan 2\alpha\cdot\cos 2\alpha$$
$$=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}(1-2\sin^2\alpha)$$
$$=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\left(1-\frac{2\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)$$
$$=\frac{2\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1-\tan^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)}.$$

Daraus folgt wegen $\tan^2\alpha\neq 1$

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha},\text{ w.z.b.w.}$$

(Vgl. die Formeln in dem Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 61, 62!)

2. Für alle Winkel α mit $0<\alpha<45°$ gilt

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$
$$=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2},$$

da $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$ und $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$ ist.

Es gilt also $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, w.z.b.w.

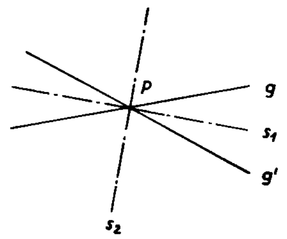
Bemerkung: Wie sich leicht beweisen läßt, gelten die Gleichungen (1) und (2) nicht nur für Winkel zwischen 0° und 45°.

Die Gleichung (1) gilt nämlich für alle Winkel α mit $\alpha\neq 90°+k\,180°$ und die Gleichung (2) für alle Winkel α mit $\alpha\neq k\,180°$, wobei k eine ganze Zahl ist.

Lösungen zu Heft 5/72

5 ▲ 927 Es sei n die Anzahl der Einfamilienhäuser dieses Ortes. Auf Grund der Aufgabe gilt dann $n\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24\cdot n$. Von den dreistelligen natürlichen Zahlen mit gleichen Grundziffern 111, 222, ..., 999 ist nur die Zahl 888 durch 24 teilbar. Deshalb gilt $n=37$, da $37\cdot 24=888$ ist. Im Ort gibt es genau 37 Einfamilienhäuser.

5 ▲ 928 Da die Gerade g und ihre Bildgerade g' den Punkt P gemeinsam haben und nicht parallel zueinander sind, muß P auf der Symmetrieachse liegen. Daher gehen alle Symmetrieachsen durch den Punkt P. Andererseits ist jede der Halbierenden der durch die Gerade g und g' gebildeten Winkel auch Symmetrieachse. Folglich sind die beiden Winkelhalbierenden der Geraden g und g' die beiden Winkelhalbierenden der Geraden g einzigen zulässigen Symmetrieachsen.



W 5 ■ 929 a) Es ist die größte natürliche Zahl zu ermitteln, die kleiner oder gleich 100 ist und die sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist. Diese Zahl lautet 96.

b) Aus $96:3=32$ und $96:4=24$ und $96-32-24=40$ folgt, daß die Schachtel genau 40 Druckknöpfe enthält.

W 5 ■ 930 Wir rechnen $100-10=90$, $90:2=45$, $45-10=35$.

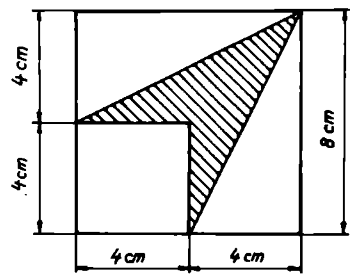
Oder $(x+10)\cdot 2=100-10$,
$(x+10)\cdot 2=90$,
$x+10=45$,
$x=35$.

Der Schüler erreichte genau 35 Punkte.

W 5 * 931 Die siegreiche Mannschaft habe $3\cdot x$ Tore erkämpft; dann hat die gegnerische Mannschaft x Tore erzielt. Zusammen wurden insgesamt $3\cdot x+x=4\cdot x$ Tore geschossen.

Nun gilt $9<4\cdot x<15$; wegen $4\cdot 2=8<9$ und $4\cdot 4=16>15$ besitzt die Aufgabe genau eine Lösung, und zwar $x=3$. Der Endstand lautet demnach 9 : 3, und es wurden insgesamt 12 Tore geschossen.

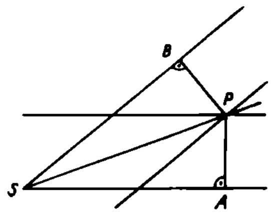
W 5 * 932 Wir erhalten den Flächeninhalt A der schraffiert gezeichneten Fläche, indem wir von dem Flächeninhalt des großen Quadrates ($8\cdot 8\text{ cm}^2=64\text{ cm}^2$) den Flächeninhalt des kleinen weißen Quadrates ($4\cdot 4\text{ cm}^2=16\text{ cm}^2$) und die Flächeninhalte der beiden weißen Dreiecke subtrahieren. Diese beiden weißen Dreiecke lassen sich aber zu einem Rechteck zusammenlegen, das die Seitenlängen 4 cm und 8 cm hat, dessen Flächeninhalt also $4\cdot 8\text{ cm}^2=32\text{ cm}^2$ beträgt.



Daher ist der Flächeninhalt der schraffiert gezeichneten Fläche gleich

$$A=(64-16-32)\text{ cm}^2=16\text{ cm}^2.$$

6 ▲ 933 Wir fällen von P die Lote auf die Schenkel des Winkels α, ihre Fußpunkte seien A und B. Aus $\sphericalangle PSA=\sphericalangle PSB=\frac{\alpha}{2}$ und $\sphericalangle SAP=\sphericalangle SBP=90°$ und $\overline{SP}=\overline{SP}$ folgt $\triangle PBS\cong\triangle PSA$ und damit $\overline{PA}=\overline{PB}$, das heißt, die entstandenen Streifen sind gleich breit.



6 ▲ 934 Die gesuchten Zahlen müssen wegen $12=3\cdot 4$ sowohl durch 4 als auch durch 3 teilbar sein. Die vierstelligen Zahlen sind genau dann durch 4 teilbar, wenn die aus den beiden letzten Ziffern gebildeten Zahlen durch 4 teilbar sind, also wenn 7* durch 4 teilbar ist. Das trifft nur für 72 und 76 zu.

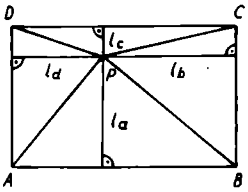
Wegen $9+7+2=18$ ist die Quersumme der Zahl 9*72 genau dann durch 3 teilbar, wenn an Stelle des Sternchens die Ziffer 0, 3, 6 oder 9 steht.

Wegen $9+7+6=22$ ist die Quersumme der Zahl 9*76 genau dann durch 3 teilbar, wenn an Stelle des Sternchens die Ziffer 2, 5 oder 8 steht. Die gesuchten Zahlen lauten somit 9072, 9372, 9672, 9972, 9276, 9576 und 9876.

W 6 ■ 935 Wir fällen von P die Lote auf die vier Rechteckseiten; ihre Längen seien l_a, l_b, l_c und l_d. Wie aus der Zeichnung ersichtlich wird, gilt dann

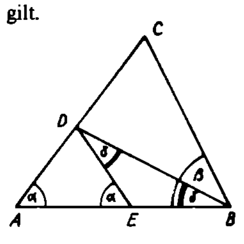
$$A_{ABP}+A_{CDP}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot l_a+\frac{1}{2}\cdot\overline{CD}\cdot l_c$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot(l_a+l_c)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC},$$
$$A_{BCP}+A_{DAP}=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot l_b+\frac{1}{2}\cdot\overline{DA}\cdot l_d$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot(l_b+l_d)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}.$$

Die Summen der Flächeninhalte der genannten Paare von Dreiecken sind also gleich.

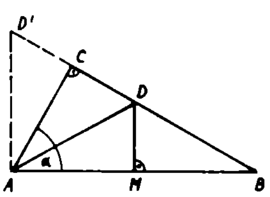


W 6 * 936 Unter den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 sind nur 2, 3 und 5 Primzahlen. Würden die Augenzahlen der Würfel sämtlich verschieden sein, so wäre die Gesamtaugenzahl wegen $2+3+5=10$ keine Primzahl. Würden die Augenzahlen der Würfel sämtlich gleich sein, so wäre die Gesamtaugenzahl gleich $3 \cdot n$, also durch 3 teilbar und keine Primzahl. Also müssen genau zwei der Würfel die gleiche Augenzahl zeigen. Die möglichen Zahlentripel lauten (2, 2, 3), (3, 3,5), (5, 5, 3).

W 6 * 937 Aus $\overline{AD}=\overline{DE}$ folgt, daß das Dreieck AED gleichschenklig ist und somit $\sphericalangle DAE=\sphericalangle DEA=\alpha$ gilt. Aus $\overline{DE}=\overline{EB}$ folgt, daß das Dreieck BDE ebenfalls gleichschenklig ist und $\sphericalangle EBD=\sphericalangle EDB=\delta$ gilt. Nach dem Außenwinkelsatz gilt ferner $\sphericalangle DEA = 2\cdot\sphericalangle EBD$, also $\alpha=2\cdot\delta$ und somit $\sphericalangle EBD = \frac{1}{2}\alpha$. Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion: Wir tragen im Punkte B an die Gerade BA den Winkel $\delta=\frac{1}{2}\alpha$ an, dessen freier Schenkel die Seite $\overline{AC}$ in einem inneren Punkt D schneidet. Um D schlagen wir mit $\overline{AD}$ als Radius einen Kreis, der die Seite $\overline{AB}$ in einem inneren Punkt E schneidet. Die Konstruktion ist genau dann ausführbar, wenn $\frac{1}{2}\alpha<\beta$ gilt.

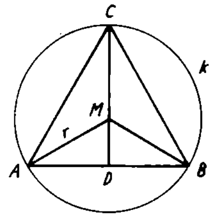


W 6 * 938 Es sei M Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und die Gerade MD sei Mittelsenkrechte zur Seite $\overline{AB}$, dann gilt $\overline{AD}=\overline{BD}$.



Wegen $\overline{BD}=2\cdot\overline{CD}$ gilt deshalb auch $\overline{AD} = 2\cdot\overline{CD}$. Das Dreieck ADC werde an der Geraden AC als Symmetrieachse gespiegelt, und es sei D' Bildpunkt von D, dann gilt $\overline{AD}=\overline{AD'}=\overline{DD'}=2\cdot\overline{CD}$. Das Dreieck ADD' ist somit gleichseitig, und es gilt Winkel $\sphericalangle ADC=60°$ und Winkel $\sphericalangle CAD=90°-60° =30°$. Der Außenwinkel $\sphericalangle ADC=60°$ ist doppelt so groß wie ein Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABD, also Winkel $\sphericalangle DAB=30°$. Folglich gilt $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB=30°+30°=60°$.

7 ▲ 939 Der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\sphericalangle ACB$. Da die Gerade MD nach Voraussetzung Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle AMB$ ist, gilt $\sphericalangle DMB=\sphericalangle ACB$. Die Nebenwinkel $\sphericalangle DMB$ und $\sphericalangle BMC$ ergänzen sich zu 180°, folglich gilt $\sphericalangle DMB+\sphericalangle BMC=180°$ und damit auch $\sphericalangle ACB+\sphericalangle BMC=180°$.



7 ▲ 940 a) Wir rechnen $\frac{3}{2}\cdot 8\%=12\%$, $2\cdot 8\%=16\%$, $4\cdot 8\%=32\%$. Aus $8\%+12\% +16\%+32\%=68\%$ und $100\%-68\%=32\%$ folgt $144 : G=32 : 100$ und somit $G=450$. Es besuchen 450 Schüler der Klassen 5 bis 10 diese Schule.

b) 2 % von 450 Schülern sind 9 Schüler, 8 % von 450 Schülern sind 36 Schüler, 12 % von 450 Schülern sind 54 Schüler, 16 % von 450 Schülern sind 72 Schüler, 32 % von 450 Schülern sind 144 Schüler.

Die Schülerzeitschrift *alpha* wird von 36 Schülern bereits das vierte, von 54 Schülern das dritte, von 72 Schülern das zweite und von 144 Schülern das erste Jahr abonniert.

W 7 ■ 941 Die von E ausgehenden beiden Diagonalen zerlegen das Fünfeck in die drei Dreiecke $\triangle ABE$, $\triangle BCE$ und $\triangle ECD$. Die Summe der Innenwinkel dieser Dreiecke ist gleich der Summe der Innenwinkel des Fünfecks, also gleich $3\cdot 180°=540°$. Jeder Innenwinkel des Fünfecks beträgt somit $540° : 5 =108°$.

Aus der Gleichheit der Seiten und der Innenwinkel des regelmäßigen Fünfecks $ABCDE$ folgt $\triangle ABE\cong\triangle ECD$. Diese beiden Dreiecke sind gleichschenklig, also $\sphericalangle AEB=\sphericalangle CED =(180°-108°) : 2=36°$. Der Winkel $\sphericalangle BEC$ beträgt demnach $108°-2\cdot 36°=36°$.

W 7 ■ 942 Aus $2a+3b=27$ folgt durch Umformung

$$3b=27-2a,$$

$$b=9-\frac{2}{3}a.$$

Damit b eine natürliche Zahl ist, muß $\frac{2}{3}a\leqq 9$ und 3 Teiler von a sein. Das trifft zu für $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=6$, $a_4=9$ und $a_5=12$. Als Lösungsmenge dieser Gleichung erhalten wir somit die geordneten Zahlenpaare (0; 9), (3; 7), (6; 5), (9; 3) und (12; 1).

W 7 * 943 Aus $2(m+n)=mn$ folgt $2m+2n =mn$. Durch weiteres Umformen erhalten wir schrittweise

$$2m=mn-2n,$$

$$2m=n(m-2),$$

$$n=\frac{2m}{m-2},$$

$$n=2+\frac{4}{m-2}.$$

n ist nur dann eine von Null verschiedene natürliche Zahl, wenn $m-2$ positiv und Teiler von 4 ist. Das trifft zu für $m_1=3$, $m_2=4$ und $m_3=6$. Es gibt genau drei geordnete Zahlenpaare (m, n), die die Bedingung erfüllen; sie lauten (3; 6), (4; 4), (6; 3).

W 7 * 944 Aus der Konstruktion folgt: $\sphericalangle DPE=\frac{1}{2}\alpha$, da der Peripheriewinkel über einer Sehne, dessen Scheitel mit dem Mittelpunkt des Kreises auf der gleichen Seite der Sehne liegt, halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel.

Aus dem gleichen Grunde gilt $\sphericalangle ACQ =\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{4}\alpha$. Aus der Konstruktion folgt dann weiter $\sphericalangle ACB=\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{2}\alpha=\frac{3}{4}\alpha$.

8 ▲ 945 a) Wir erhalten die mittlere Geschwindigkeit als Quotienten aus dem Weg von 165 m und der Zeit von 5,22 s:

$$v=\frac{165}{5{,}22}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}=31{,}61\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$=31{,}61\cdot 3{,}6\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}=113{,}8\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit während des Skifluges betrug also $113{,}8\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$; sie war höher als die mittlere Geschwindigkeit der Skispringer auf normalen Schanzen.

b) Berücksichtigt man die angegebenen Fehler, so liegt der Weg zwischen den Werten 164,5 m und 165, 5 m. Die Zeit beträgt höchstens 5,225 s und mindestens 5,215 s.

Daher erhalten wir für die Geschwindigkeit v in $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ die folgende fortlaufende Ungleichung: $\frac{164{,}5\cdot 3{,}6}{5{,}225}\leqq v\leqq\frac{165{,}5\cdot 3{,}6}{5{,}215}$,

$$113{,}3\leqq v\leqq 114{,}3.$$

Die mittlere Geschwindigkeit liegt also bei Berücksichtigung der Fehler zwischen $113{,}3\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ und $114{,}3\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.

8 ▲ 946 1. Es sei x_1 die Anzahl der Arbeitsstunden, die 8 Arbeiter benötigen, um mit modernen Geräten 9 km Gleise zu verlegen. Dann gilt, da 8 Arbeiter in 1 h 90 m Gleise verlegen,

$90x_1=9000$, also $x_1=\frac{9000}{90}=100$.

8 Arbeiter benötigen also 100 Arbeitsstunden, um mit modernen Geräten 9 km Gleise zu verlegen.

2. Es sei x_2 die Anzahl der Arbeitsstunden, die 8 Arbeiter benötigen, um in traditioneller Handarbeit 9 km Gleise zu verlegen. Da unter diesen Bedingungen 40 Arbeiter in $43\frac{3}{4}$ Arbeitsstunden 1125 m Gleise verlegen, benöti-

gen 8 Arbeiter hierfür $43\frac{3}{4}\cdot 5=218\frac{3}{4}$ Arbeitsstunden. Daher gilt

$$x_2 : 218\frac{3}{4}=9000 : 1125, \text{ also}$$

$$x_2=\frac{9000\cdot 218\frac{3}{4}}{1125}=1750.$$

Bei traditioneller Handarbeit werden also 1750 Arbeitsstunden benötigt.

3. a) In traditioneller Handarbeit können 8 Arbeiter in $43\frac{3}{4}$ Arbeitsstunden $\frac{1125}{5}$ m $=225$ m Gleise verlegen.

b) Mit modernen Geräten können dagegen $90\cdot 43\frac{3}{4}$ m $=3937{,}5$ m Gleise verlegt werden.

4. Die Arbeitsproduktivität im Falle b) verhält sich zu der im Falle a) wie 17,5 : 1, sie ist also bei der Arbeit mit modernen Geräten 17,5 mal so groß wie bei traditioneller Handarbeit. Denn, da im Falle b) 3937,5 m Gleise und im Falle a) 225 m Gleise von der gleichen Anzahl von Arbeitern in der gleichen Zeit verlegt werden, erhalten wie

$$\frac{3937{,}5}{225}=17{,}5.$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir x_2 durch x_1 dividieren:

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{1750}{100}=17{,}5.$$

W 8 ■ 947 Es seien x die Anzahl der Goldmedaillen und y die Anzahl der Silbermedaillen, die die DDR erhielt. Dann gilt

$$7x+5y+4\cdot 7+3\cdot 1+2\cdot 3+1\cdot 4=84, \quad (1)$$

$$7x+5y=43, \quad (2)$$

$$y=\frac{43-7x}{5}. \quad (3)$$

Für $x=0, 1, 2, 3, 5, 6$ ist $43-7x$ nicht durch 5 teilbar.
Ferner wird y für $x>6$ negativ.
Für $x=4$ erhalten wir jedoch

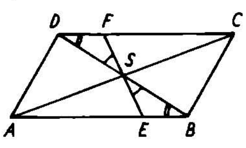
$$y=\frac{43-7\cdot 4}{5}=\frac{15}{5}=3.$$

Daher hat die Gleichung (3) und damit auch die Gleichung (1) genau eine Lösung (x, y), wobei x und y natürliche Zahlen sind, nämlich

$$x=4, \; y=3.$$

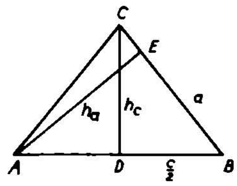
Die Mannschaft der DDR erhielt also 4 Goldmedaillen und 3 Silbermedaillen.

W 8 ■ 948 Es seien $ABCD$ ein Parallelogramm, E ein Punkt auf der Seite $\overline{AB}$ und F ein Punkt auf der Seite $\overline{CD}$, so daß die Strecke $\overline{EF}$ durch den Schnittpunkt S der Diagonalen des Parallelogramms geht (vgl. die Abb.).



Dann gilt
$\overline{BS}=\overline{SD}$, da die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren,
$\sphericalangle BSE=\sphericalangle DSF$ als Scheitelwinkel,
$\sphericalangle EBS=\sphericalangle FDS$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, also
$\triangle SEB\cong\triangle DSF$, da diese Dreiecke in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen.
Daraus folgt $\overline{ES}=\overline{SF}$, d. h., die Strecke $\overline{EF}$ wird durch den Schnittpunkt S der Diagonalen halbiert, w.z.b.w.

W 8 * 949 Es seien
c die Maßzahl der Länge der Seite $\overline{AB}$, a die Maßzahl der Länge der Seite $\overline{BC}$, $h_a=12$ die Maßzahl der Länge der von A ausgehenden Höhe, $h_c=10$ die Maßzahl der Länge der von C ausgehenden Höhe.



Dann gilt für die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks ABC

$$A=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}. \text{ Daraus folgt} \quad (1)$$

$$a\cdot h_a=c\cdot h_c, \quad (2)$$

$$a=\frac{h_c}{h_a}c=\frac{10}{12}c=\frac{5}{6}c. \quad (3)$$

Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras in dem rechtwinkligen Dreieck CDB

$$a^2={h_c}^2+\frac{c^2}{4}. \text{ Daraus folgt wegen (3)}$$

$$\frac{25}{36}c^2=100+\frac{c^2}{4},$$

$$\frac{16}{36}c^2=100,$$

$$c^2=\frac{100\cdot 36}{16}=225, \quad c=15.$$

Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks ABC hat also die Länge 15 cm.

Lösungen zu Flußwanderung bei Muldenstein (Heft 6/72)

1001 a $100\cdot 10^6\,\text{m}^3 : 4\,\text{km}^2$
$=100\cdot 10^6\,\text{m}^3 : (4\cdot 10^6\,\text{m}^2)=25$ m

1001 b $16{,}5\cdot 10^6\cdot 0{,}41$ M $\approx 6{,}8$ Mio M

1001 c 6800000 M : 90000000
$=680000000$ Pf : $90000000\approx 8$ Pf

Lösungen zu Ungleichungen im Bereich der natürlichen Zahlen

▲1▲ $L=\{0, 1, 2, 3\}$; ▲2▲ $L=\{0, 1, 2, 3\}$;

▲3▲ $y\in\{0, 1, 2\}$; ▲4▲ $L=\{0, 1\}$;

▲5▲ $L=\{0, 1, 2, 3\}$;

▲6▲ $L=\{0, 1, 2, 3\}$;

▲7▲ Diese Ungleichung hat keine Lösung; denn es gibt keine natürliche Zahl x, so daß $x+5<5$ gilt. Man sagt: „Diese Ungleichung ist unerfüllbar“ oder „Die Lösungsmenge dieser Ungleichung ist die leere Menge“, Zeichen $L=\emptyset$.

▲8▲ $t\in\{4, 5, 6, 7, 8\}$

▲9▲ $L=\{0, 9, 18, 27, 36, 45\}$;

▲10▲ $L=\{22, 23, 24, 25, 26\}$

▲11▲ Aus $x<z$, $x<v$, $v<y$, $z<v$, $x<y$, $z<y$ folgt $x<z<v<y$.

▲12▲ Die Ungleichung allein betrachtet wird von den Elementen der Menge $\{343, 344, 345, \ldots, 353, 354, 355\}$ erfüllt. Unter den jeweils zusätzlich gestellten Bedingungen erhalten wir für:
a) $\{344, 346, 348, 350, 352, 354\}$;
b) $\{345, 348, 351, 354\}$;
c) $\{348, 354\}$; d) $\{344, 346, 350, 352\}$;
e) $\{345, 351\}$;
f) Es gibt keine Zahl, die die gestellten Bedingungen erfüllt, die Menge ist leer; g) $\{350\}$; h) $\{344, 345, 346, 350, 351, 352\}$; i) $\{344, 345, 346, 348, 350, 351, 352, 354\}$; h) $\{348\}$.

▲13▲ In der Zahlenfolge $0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20$ ist die Zahl 0 kleiner als jede der folgenden 20 Zahlen. Es lassen sich also 20 verschiedene Ungleichungen bilden, in denen stets $a=0$ ist und für b die Zahlen von 1 bis 20 eingesetzt werden können. Wenn $a=1$, so kann b durch die Zahlen von 2 bis 20, also durch 19 verschiedene Zahlen ersetzt werden. Die Überlegungen führen wir fort. Für $a=19$ gibt es genau eine Möglichkeit, nämlich $b=20$. Wegen $20+19+\ldots+3+2+1=(20+1)+(19+2)+(18+3)+\ldots+(11+10)=21\cdot 10=210$ gibt es genau 210 Möglichkeiten zum Ersetzen der beiden Variablen a und b der Ungleichung durch die vorgegebenen Zahlen.

▲14▲ Ist $x=0$, so gilt $4y<10$, also $y=0, 1$ oder 2; ist $x=1$, so gilt $4y<7$, also $y=0$ oder 1; ist $x=2$, so gilt $4y<4$, also $y=0$; ist $x=3$, so gilt $4y<1$, also $y=0$.
Für $x>3$ erhält man wegen $3x>9$ keine Lösung.
$L=\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 0)\}$.

▲15▲ Ist $y=0$, so gilt $x<4$ und $2x>10$, d. h. $x>5$, also keine Lösung;
ist $y=1$, so gilt $x<3$ und $2x>5$, also keine Lösung; ist $y=2$, so gilt $x<2$ und $2x>0$, also $x=1$; ist $y=3$, so gilt $x<1$, d. h. $x=0$, dann ist auch (2) erfüllt.
Für $x>3$ gibt es wegen $x+y<4$ keine Lösung.
$L=\{(1, 2), (0, 3)\}$

▲16▲
$$7x+22<58-11x$$
$$7x+11x<58-22$$
$$18x<36$$
$$x<2$$
$$L=\{0, 1\}$$

▲17▲
$$35 : 7+40=45=45$$
$$(81-39) : 7=6>5$$
$$49 : 7+55=62=62$$
$$(94-38) : 7=8<9$$

▲18▲ Beide Ungleichungen sind einander äquivalent, denn jede dieser Ungleichungen hat die Lösungsmenge $L=\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Lösungen zu „Einige Fragen und Aufgaben ungewohnter Art“ (siehe S. 1/2)

▲1▲ a) Nur mit den rationalen Zahlen würde gelten:

(1) Die Zahlengerade besitzt Lücken, es gibt Punkte ohne Zahl und damit auch Strecken ohne Maßzahl.
(2) Es gibt viele positive Zahlen, die keine Quadratwurzeln haben.
(3) Es gibt viele Gleichungen der Form $x^n = a$, die keine Lösung haben.

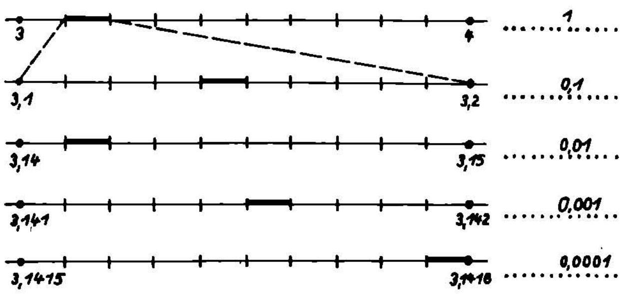
b) Aus diesen drei, miteinander zusammenhängenden Anlässen ergeben sich als Ziele: Es soll ein Zahlenbereich entstehen, in dem

(1) jeder Punkt der Zahlengeraden seine Zahl findet,
(2) jede positive Zahl ihre Quadratwurzel hat (allgemeiner: in dem das Radizieren positiver Zahlen unbeschränkt ausführbar ist.)
(3) jede Gleichung der Form $x^n = a$ lösbar ist.

c) Die Ziele (1) und (2) sind erreicht worden, Ziel (3) jedoch nicht. Denn für negative a ist nach wie vor nicht jede derartige Gleichung lösbar. Das wird erst durch eine abermalige Erweiterung, zum Bereich der „komplexen Zahlen“, erreicht.

▲2▲ a) Vom Punkt P ist nichts weiter bekannt, also muß gemessen und dann gerechnet werden: $\overline{AB} = 30$ mm; $\overline{AP} = 21$ mm
$x : 10 = 56 : 80$; $x = 7$; $p = 8 + 0{,}7$; $p = 8{,}7$
b) $q = 8\frac{3}{11} = 8{,}\overline{27}$ c) $\sqrt{80}$

▲3▲



▲4▲

a)	b)	c)
6; 7	0,1	6,629507
6,6; 6,7	0,01	
6,62; 6,63	0,001	
6,629; 6,630	0,0001	
6,6295; 6,6296	0,00001	
6,62950; 6,62951	0,000001	

d) Es gibt bei fortgesetzter Zehnteilung kein kürzestes Intervall. Also läßt sich auch keine Länge dafür angeben.

▲5▲ a) wahr c) wahr e) wahr
b) falsch d) falsch f) wahr

▲6▲ Angaben wie 6,31784... reichen nicht aus, um einen unendlichen Dezimalbruch vollständig anzugeben. Weil man auf diese Weise über die weiteren Stellen nichts weiß, gibt es unendlich viele Dezimalbrüche, die mit 6,31784... gemeint sein könnten. Da man unendlich viele Ziffern nicht hinschreiben kann, muß man eine Vorschrift angeben, nach der diese Stellen zu besetzen sind, z. B.
6,323322333222... (es wechseln 2 und 3; das Beispiel zeigt, wie ihre Anzahl stets um 1 wächst.) Oder
6,24681012... (Die Fortsetzung erfolgt gemäß der Folge der geraden Zahlen.)
Oder $\sqrt{40}$.

▲7▲ a) < b) > c) > d) > e) <
f), g) und h) müssen offen bleiben.

▲8▲ $a = 2{,}6$ und $b = 2{,}7$
denn $a^2 = 2{,}6^2 = 6{,}76 < 7$
und $b^2 = 2{,}7^2 = 7{,}29 > 7$.

▲9▲ a) Nein, denn $5{,}5^2 = 30{,}25 > 30$.
b) Nein, denn $4{,}2^2 = 17{,}64 < 18$.

▲10▲ a) 1,23456789101 b) 0,000007
c) Das nachfolgende Glied ist stets größer
d) Es gibt kein größtes Glied.
e) Alle Glieder sind kleiner als a.
f) und g) Ein solches Glied gibt es nicht.

▲11▲ Wenn bei der Definition für „Reelle Zahl“ die periodischen Dezimalbrüche mit Neunerperiode ausgeschlossen werden — und bei allen Schülern aus Klasse 9 ist das sicher geschehen —, so sind a), b) und c) eigentlich sinnlos. Denn da $7{,}1\overline{9}$ keine reelle Zahl ist, kann $7{,}1\overline{9}$ weder kleiner, noch gleich, noch größer als 7,20 sein. Ist dieser Ausschluß jedoch nicht geschehen, so wäre b) wahr, a) und c) falsch. Auf alle Fälle ist aber e) wahr und sind d) und f) falsch. Bei g), h) und i) ist es ähnlich wie bei a) bis c): Ist ein Ausschluß erfolgt, so sind g), h) und i) falsch, andernfalls nur h).

▲12▲ a) 4,507295
b) 4,04 denn $3{,}2727 \cdot 1{,}2345 < a \cdot b < 3{,}273 \cdot 1{,}235$
also $4{,}04014815 < a \cdot b < 4{,}042155$

▲13▲ Die Frage nach dem Nachfolger einer Zahl ist eigentlich nur sinnvoll, wenn man weiß, in welchem Zahlbereich man sich befindet. Legt man nur den Bereich der ganzen Zahlen zugrunde, so haben 17 und -17 den Nachfolger 18 bzw. -16. Bewegt man sich im Bereich der rationalen oder sogar in dem der reellen Zahlen, so gibt es auch für 17 und -17 keinen Nachfolger, genau so wenig wie für die anderen vier Zahlen. Angaben wie 0,18; $17{,}\overline{171}$; $\sqrt{18}$; $\frac{18}{2}$ sind für diese vier Zahlen auf alle Fälle falsch.

▲14▲	rationale Zahl	reelle Zahl
a)	ja	ja
b)	ja	ja
c)	ja	ja
d)	nein	ja
e)	ja	ja
f)	nein	ja
g)	ja	ja
h)	nein	nein

Lösungen zu alpha-heiter

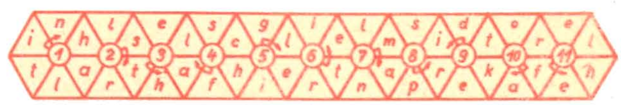
Kombiniere!

Um die Lösung zu finden, ist es vorteilhaft, eine Tabelle aufzustellen und die bekannten Angaben einzutragen und danach mit den Schlußfolgerungen zu beginnen.
Alfred konnte am 2. und 3. Tag keinen Wartburg fahren, da an diesen Tagen *Peter* und *Günther* diesen belegten, d. h. erst am 5. Tag fuhr *Alfred* mit dem Wartburg. *Peter* konnte am Montag und Donnerstag keinen Trabant fahren, weil *Alfred* und *Werner* diesen benutzten. An den genannten Tagen konnte *Peter* nur Tatra oder Moskwitsch fahren, d. h. am 5. Tag fuhr *Alfred* — Wartburg, *Peter* — Trabant, *Günther* — Moskwitsch, *Werner* — Skoda, *Horst* — Tatra.

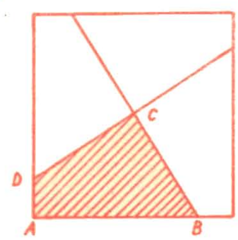
Nachgedacht!

Unabhängig von a und m stets $x = 0$. Der Sperling macht keine Schritte, er hüpft nämlich!

Wabenrätsel



Legespiel



Begriffsschlange

Gerade, Ebene, Endpunkt, teilbar, Radius, Strecke, Element, Thales, System, Maßstab, Bewegung, Grundseite, Ellipse, eins, Siebzehneck, Kongruenz; Durchmesser.

Weltfestspiele der Jugend und Studenten Berlin 1973 Hauptstadt der DDR

Was hat Mathematik mit den X. Weltfestspielen zu tun? Das wird sich mancher fragen, der diese Überschrift liest. In unserer AG Mathematik der 9. und 10. Klassen der EOS *August-Hermann-Francke* Halle meinen wir: sehr viel, denn wir finden uns dort nicht zusammen, um uns die Langeweile zu vertreiben. Wenn die FDJler in den Betrieben in Vorbereitung der X. Weltfestspiele auf vielfache Weise große Anstrengungen zur Erhöhung der Produktion unternehmen, so stellen wir uns das Ziel, gemäß dem Aufruf Lenins an die Jugend „Lernen, lernen, nochmals lernen" hohe Lernergebnisse im Fach Mathematik zu erreichen. Wir wollen damit zugleich Freude beim Knobeln und Lösen von Mathematikaufgaben haben und Schüler für die Mathematik interessieren. Dabei haben wir uns zu Ehren und in Vorbereitung der X. Weltfestspiele verpflichtet:

- Jeder AG-Teilnehmer ist Abonnent der *alpha*-Zeitung und beteiligt sich am *alpha*-Wettbewerb 1972/73.
- Wir bereiten die Teilnahme an Mathematikolympiaden in der Stadt Halle und im Bezirk gründlich vor.
- Im Frühjahr 1973 gestalten wir eine Schulwandzeitung über das Thema „Mathematik und X. Weltfestspiele".
- Jeder erfüllt seine gesellschaftliche Funktion in der FDJ-Gruppe zuverlässig und verantwortungsbewußt.

Wie können wir diese Aufgaben erfolgreich lösen? Wer einmal die *alpha*-Hefte früherer Jahrgänge durchblättert, findet viele Hinweise zu einer lebendigen Gestaltung unserer AG-Zusammenkünfte. Es sei hier z. B. auf Biographien großer Mathematiker verwiesen, auf Artikel über Gleichungen mit absoluten Beträgen (6/70), über darstellende Geometrie (6/67, 1/68, ...), über Logik und Mengenlehre (2/68, 1, 2, 3/67, ...). Besonderes Interesse finden auch die Darlegungen über den Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salon in Dresden (2/69), über Mathematik und Musik (6/69) und über die zahlreichen Berichte von Mathematikolympiaden aus vielen Ländern. Nicht unerwähnt sollen hier ferner die hübschen Anregungen in *alpha* heiter bleiben.

Zu einer planmäßigen Auswertung der *alpha*-Zeitschrift studieren wir eine Reihe von Artikeln, die wir in der AG vortragen und diskutieren. So beschäftigen wir uns z. Z. mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion (2/67, 3/67). Dabei lernen wir, mathematische Aufgaben auf verschiedene Arten zu lösen, üben uns in konzentrierter Arbeitsweise und erwerben die Fähigkeit, einfache mathematische Texte zu lesen. Natürlich spielen das Lösen von Aufgaben und die Diskussion über sie eine bedeutende Rolle. Dazu verwenden wir neben der *alpha* u. a. die Bücher „Aufgaben von Mathematikolypiaden aus der UdSSR und ČSSR" und „Olympiadeaufgaben aus der DDR".

Wir sind überzeugt, daß unser erfolgreiches Bemühen auf dem vorgezeigten Wege nicht nur zur Erfüllung des *Mathematik-Beschlusses* des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom Dezember 1962, sondern auch der Lösung der vom VIII. Parteitag gestellten Hauptaufgabe dient.

Auf zum X. Festival! *Kerstin Bachmann*

Unsere Mathematik-Wandzeitung

Leben und Werk des N. Copernicus

Wir beschäftigen uns in der Arbeitsgemeinschaft nicht nur mit mathematischen Problemen, die den Schulstoff vertiefen und ergänzen, sondern unterhalten uns auch über das Leben und Schaffen berühmter Mathematiker und Naturwissenschaftler, werten ihre Stellung innerhalb der menschlichen Gesellschaft ihrer Epoche.

Wir wählen vor allem solche Persönlichkeiten aus, die mit dem von uns behandelten Stoff in Beziehung stehen oder deren Geburts- bzw. Todesjahr sich jährt. Der in den Heften 6/69 bis 5/70 in *alpha* veröffentlichte Mathematikkalender erleichtert uns die Arbeit wesentlich. Ist unsere Entscheidung getroffen, dann beauftragen wir einige Mitglieder der AG, sich mit den wichtigsten Daten aus dem Leben und Werk des Wissenschaftlers an Hand von Lexika und anderen Nachschlagewerken bekanntzumachen.

Andere Schüler suchen in populärwissenschaftlichen Zeitschriften (*Urania*, *wissenschaft und fortschritt*) oder in der *alpha* sowie *Mathematik in der Schule* nach auswertbaren Beiträgen. Auch Büchern wie „Geschichte der Mathematik im Mittelalter" oder „Mathematik in der Antike", nicht zuletzt den vielen Broschüren der Mathematischen Schülerbücherei („Der Pythagoreische Lehrsatz", „Altes und Neues vom Kreis") haben wir häufig Anregungen entnehmen können. Solches Material sollte in keiner Handbibliothek einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft fehlen. Über einige Mathematiker und Naturwissenschaftler sind Lebensbilder verfaßt, so daß sich ein Gang in eine Bibliothek lohnt. Sind auf diese Art und Weise genügend Quellen erschlossen worden, erarbeiten einige Zirkelmitglieder Zusammenfassungen und tragen diese der AG vor.

Augenblicklich beschäftigen wir uns mit Leben und Werk des polnischen Astronomen N. Copernicus. Da er wesentlich zur Herausbildung des modernen Weltbildes beigetragen hat, entschlossen wir uns, die vorgetragenen Zusammenfassungen so zu bearbeiten, daß sie als Wandzeitungszyklus allen Schülern unserer Schule Anfang 1973 zugänglich gemacht werden kann.

- Auf der ersten Wandzeitung veröffentlichen wir ein Porträt Copernicus und berichten über ihn biographisch.
- Auf der zweiten Wandzeitung bilden wir eine historische Darstellung des heliozentrischen Weltsystems des Copernicus ab und erläutern es. Ferner würdigen wir seine gesellschaftliche Bedeutung in Hinblick auf das ptolemäische geozentrische System. Wir gehen aber auch auf den Mangel des Copernicanischen Systems ein, der vor allem in der Annahme von kreisförmigen Planetenbahnen beruht.
- Da der Begriff „Epizykel" in den Texten der zweiten Wandzeitung verwendet wurde – in einem gesonderten AG-Nachmittag sprachen wir über Rollkurven, zu dem die Epizykloiden gehören – beschlossen wir, auf einer dritten Wandzeitung die diskutierten Begriffe durch Skizzen und deren Beschriftung zu erläutern.
- Da auf den drei beschriebenen Wandzeitungen wenig Bildmaterial verarbeitet wurde, wollen wir diesen Mangel später durch Bildtafeln aus Material der Tagespresse und aus Zeitschriften bereichern.

Ute Schweidt, Waltraud Böttinger,
Mitglieder der AG Mathematik OS Lübtheen

Als geeignete und noch relativ leicht zugängliche Jugendliteratur empfehlen wir:

Harig: **Die Tat des Copernicus** (Urania-Verlag 1962)
Radczun: **Und sie bewegt sich doch** (Kinderbuchverlag Berlin 1971)
Winkler: **Den Sternen auf der Spur** (Postreiter-Verlag Halle 1962)
Mielke: **Zu neuen Horizonten** (Transpress-Verlag Berlin 1972)
Beust: **Unser Sternenhimmel** (Urania-Verlag 1967)
ABC-Astronomie (VEB Brockhaus Leipzig 1971)

Inhaltsverzeichnis 1967 bis 1972
(leicht gekürzt)

Vorfahrt beachten! (W. Träger) ● 5/72, 6/72 Kleine Worte — Große Wirkung (L. Flade)

Mengenlehre

1/67 Mit Mengen fängt es an (1) (W. Walsch/ H. Lohse) ● 2/67 Wir operieren mit Mengen (2) (W. Walsch) ● 3/67 Wir untersuchen Abbildungen (3) (W. Walsch) ● 4/67 Wir lösen Aufgaben aus der Mengenlehre (W. Walsch) ● 2/69 Zweiermengen und geordnete Paare (H. Tiede)

Nomographie

2/70, 3/70, 4/70, 5/70 Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen (W. Träger)

Olympiaden — Olympiadeaufgaben

1/67 VIII. IMO 1966 (J. Lehmann) ● 1/67 Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO (H. Bausch) ● 1/67 bis 6/67 VI. OJM der DDR ● 2/67 Mathematischer Leistungsvergleich Praha—Neubrandenburg (J. Lehmann) ● 3/67 Mathematischer Mannschaftswettbewerb (M. Mäthner/G. Schulze) ● 3/67 Mathematische Wettbewerbe in England ● 4/67 Mathematikolympiaden in Bulgarien (S. Bodurow) ● 5/67 Mathematikolympiaden in der UdSSR, Allunionsolympiade Tbilissi 1967 (J. Petrakow) ● 5/67 Eine vorbildliche Jahresarbeit (R. Höppner) ● 6/67 IX. IMO 1967 (H. Bausch) ● 1/68 bis 6/68, 2/69 VII. OJM der DDR ● 1/68 18. Mathematischer Jahreswettbewerb USA 1967 ● 3/68 Die Aufgabenkommission des Zentralen Komitees für die OJM der DDR (H. Karl) ● 5/68, 6/68 X. IMO 1968 (H. Bausch/W. Burmeister) ● 6/68 Allunions-Fernolympiade (R. Lüders/J. Lehmann) ● 1/69 bis 3/69, 6/69, 2/70 VIII. OJM der DDR ● 3/69 Concursul de matematica, Etapa locala-22 martie 1968 ● 5/69, 1/70 XI. IMO 1969 (H. Bausch/ J. Lehmann) ● 5/69 Fernolympiade Mathematik, UdSSR 1968 (G. Ulbricht) ● 1/70 bis 4/70 IX. OJM der DDR ● 2/70 Mathematikolympiaden in der ČSSR (O. Langer/ St. Horák) ● 3/70 Mathematische Schülerwettstreite in Ungarn (I. Reimann/M. Walter) ● 4/70 Mathematische Wettbewerbe in Schweden ● 5/70 XII. IMO 1970 (H. Bausch/ J. Lehmann) ● 1/71 bis 4/71 X. OJM der DDR ● 2/71 10 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker der DDR ● 2/71 Mathematikolympiaden in der MVR ● 2/71 Österreichische Mathematikolympiade ● 5/71 Concursul de matematica (SR Rumänien) ● 5/71 XIII. IMO 1971 (J. Lehmann) ● 1/72 bis 5/72 XI. OJM der DDR ● 1/72 FdGB-Urlauber-Olympiade 1972 (W. Träger) ● 3/72 Mathematikolympiaden in der VR Polen (S. Straszewicz) ● 3/72 Rückblick auf die XIII. IMO (Red.) ● 3/72 Mathematikolympiade in der Republik Kuba (L. J. Davidson) ● 5/72 XIV. IMO 1972

Planimetrie

1/68, 2/68, 3/68 Nichts Einfacheres als ein Quadrat (H. Wiesemann) ● 5/68 Was ist ein Viereck? (L. Görke) ● 6/68, 1/69, 3/69, 5/69, 6/72 Mit Zirkel und Zeichendreieck (J. Lehmann) ● 1/69 Spieglein, Spieglein an der Wand (W. Träger) ● 3/69 Mit Bleistift und Lineal (E. Schröder) ● 3/69 Bange machen gilt nicht! — Modell eines geom. Extremwertproblems (Th. Scholl) ● 5/69 Übe sinnvoll — überall! Anleitung zur Arbeit am Dreieck (G. Pietzsch) ● 6/69 Kleine geometrische Exkursion (Th. Scholl) ● 2/70 Wie löst man eine Konstruktionsaufgabe? (H. Titze) ● 3/70, 4/70 Ornamente (R. Bittner) ● 2/72 Arbeitsblatt Geometrie (H. Herzog) ● 3/72 Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises (E. Schröder)

Relationen

6/70, 1/71, 2/71 Relationen (R. Herrmann)

Stereometrie

1/69 Fernsehfußball — reguläre Polyeder (E. Schröder) ● 2/69 Der Eulersche Polyedersatz (H. Günther) ● 5/71 Durch die Welt der Tetraeder (G. Geise)

Unterhaltung

1/68 Hinter die Kulissen geschaut (W. Träger) ● 3/68, 4/68 Wir lösen ein Zahlenrätsel (Th. Scholl) ● 3/68, 4/68, 5/68 Eine Knobelgeschichte 1., 2., 3. Teil (W. Träger) ● 6/68 Schön ist so ein Ring(el)spiel (J. Frormann) ● 3/69 An welchem Wochentag wurde ich geboren? (W. Unze) ● 4/69 Wir stellen ein Zahlenrätsel auf (W. Träger) ● 1/71 Wir spielen mit optimaler Strategie (W. Träger) ● 3/71 Wirklichkeit und Täuschung (J. Sedláček) ● 1/72 Kryptarithmetik (J. Lehmann/ R. Lüders) ● 1/72 Geometrisches Kreuzworträtsel aus: Quant ● 2/72 Ein mathematisches Kreuzworträtsel (Ch. Riehl) ● 3/72 Mathe-Quiz im Ferienlager (J. Lehmann/ W. Träger)

Verbindung zur Praxis

1/67 Die Deutsche Bücherei im Spiegel von Zahlen und Fakten (S. Günther) ● 3/67 Schwankt der Fernsehturm? (W. Zill) ● 3/67 Der Berliner Fernsehturm (W. Zill) ● 4/67 Auf den Spuren Roald Amundsen (S. Meier) ● 5/67 Erfahrungsaustausch mit sowj. Wissenschaftlern (Bratsk) (H. Werner) ● 6/67 Ernährung und Leistungsfähigkeit (W. Kraak) ● 1/68 50 Jahre Rote Armee ● 1/68 Dresden in Zahlen (W. Weidauer) ● 1/69 Messegold für Präzisionsreißzeuge (A. Hanisch) ● 2/69 Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden — Zwinger (H. Grötzsch) ● 3/69 Mathematische Modelle aus der DDR (W. Glaß) ● 4/69 Multicurve (E. Schröder) ● 4/69 Aus der VAR berichtet ● 5/69 20 Jahre Entwicklung des Volksbildungswesens in der DDR (J. Lehmann) ● 6/69 Mathematik und Musik (Ch. Lange) ● 6/69 Rund um das Schachbrett (K. Kannenberg) ● 1/69 bis 6/70 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung (J. Frormann) ● 4/71 Waffen aus Suhl (E. Hoffmann) ● 6/71, 1/72 Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug? (W. Träger) ● 1/72 bis 6/72 Graphiken zur Direktive des VIII. Parteitages der SED (Verlag Die Wirtschaft) ● 3/72 Fluidkompaß Sport 3 (Red.) ● 4/72 Die Rechenmaschine — ein Souvenir aus der Sowjetunion (A. Mertens) ● 6/72 Mathematik im Reich der Töne (E. Schröder)

Zahlenbereiche

5/68 Übe sinnvoll — Anleitung zum Rechnen mit gebrochenen Zahlen (G. Pietzsch) ● 1/72 Über zwei Operationen mit Zahlen (K. Tschimow)

Zahlenfolgen

6/67 Einige Aufgaben über Folgen aus den Schriften des Altertums (A. A. Kolosow) ● 3/68, 4/68, 5/68, 6/68 Elementare Zahlenfolgen (H. Lohse)

Zahlentheorie

3/69, 4/69, 5/69, 1/70, 2/70 Rechnen mit Resten (G. Lorenz) ● 5/70 Freitag der 13. (T. Bailey/G. Hofmann) ● 4/71 Die Teilbarkeit durch 7 (E. Naumann) ● 2/72, 3/72 Die Arithmetik der Binomialkoeffizienten (D. B. Fuchs)

Zirkel (Arbeitsgemeinschaften)

1/67 Eine Arbeitsgemeinschaft erlebte die Deutsche Bücherei (AG 29. OS Leipzig) ● 5/67 Mathematischer Wettbewerb (W. Werner) ● 5/68 Was verbirgt sich hinter: MBZ 8? (G. Horn) ● 3/69 Ein Zirkelnachmittag über „18. Mathem. Jahreswettbewerb der USA" (W. Träger) ● 5/70 Arbeitsgemeinschaften haben das Wort ● 2/72 Über eine mathematisch-physikalische Schule in Kiew (L. A. Kaloujmine) ● 4/72 Arbeitspläne Mathematik (Kl. 5/6) (D. Klöppel/W. Rautenberg) ● 4/72 Über unsere Arbeit mit der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* (AG Math. Lübtheen) ● 4/72 Mathematik frei Haus (Korrespondentenzirkel) (R. Bergmann) ● 5/72 Mathematikern über die Schultern geschaut (H. Bode)