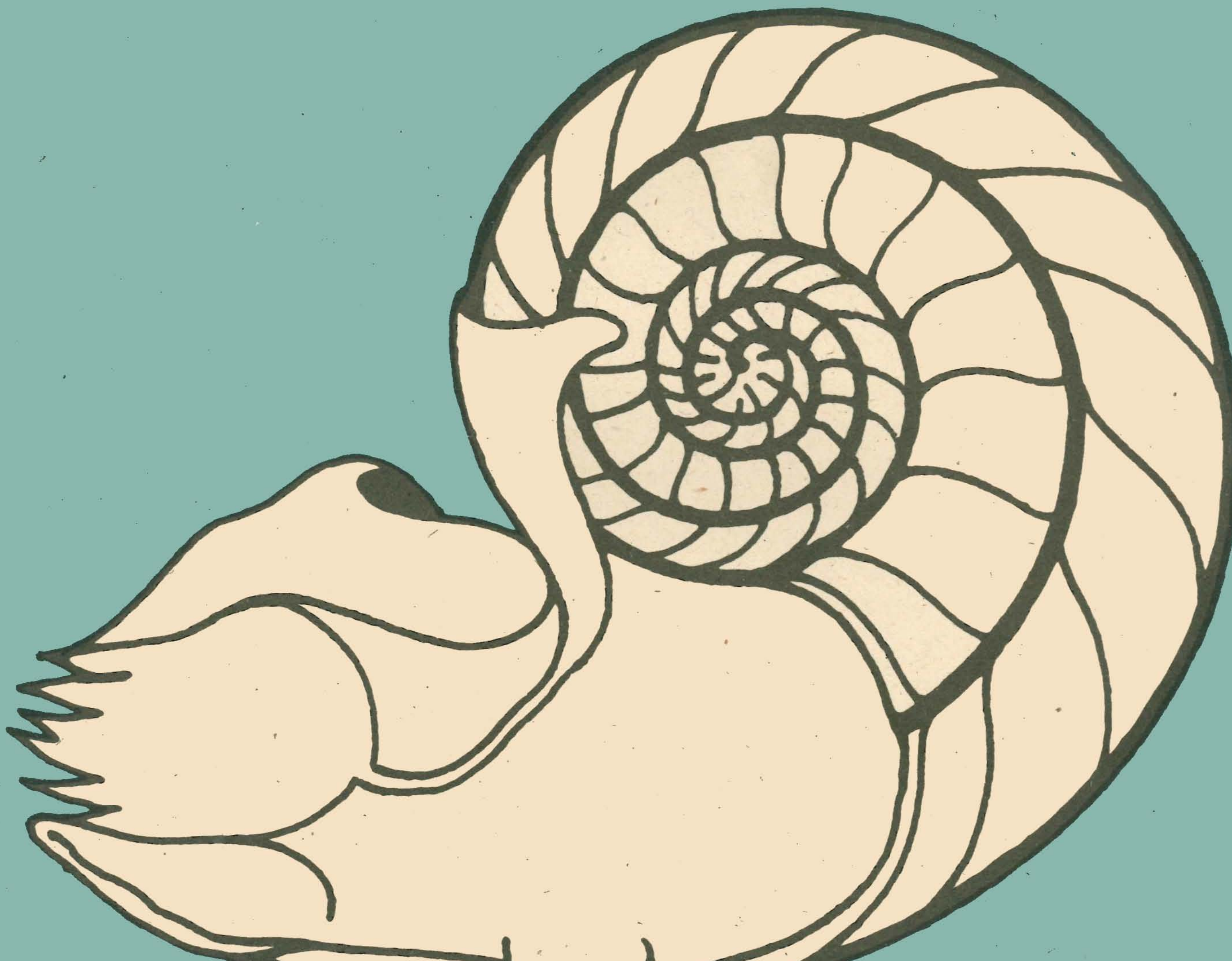
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
22. Jahrgang 1988
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: wissenschaft und fortschritt 8/79 (S. 122); B. Liebau (S. 123); A. Körner (S. 124); L. Wolf (S. 131); J. Töppler (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto (Titelvignetten); Logigram, Frankreich (S. 127)
Briefmarken: H. Tracksdorf (S. 130)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 8. August 1988
Auslieferungstermin: 6. Dezember 1988

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Zum Jahreswechsel

Figur 1: Wieviel verschiedene Lesemöglichkeiten – stets zu einem benachbarten Buchstaben fortschreitend – gibt es in der Matrix für den Begriff „Weihnachtsgaben“?

W	E	I	H	N	A	C	H	T
E	I	H	N	A	C	H	T	S
I	H	N	A	C	H	T	S	G
H	N	A	C	H	T	S	G	A
N	A	C	H	T	S	G	A	B
A	C	H	T	S	G	A	B	E
C	H	T	S	G	A	B	E	N

Figur 2: In die Jahreszahl 1988 wurden im Rösselsprung, d. h. in der Gangart eines Springers beim Schachspiel, die Nachnamen von 10 bedeutenden Mathematikern aus der Vergangenheit aufeinanderfolgend eingetragen. Welche Mathematiker sind es?

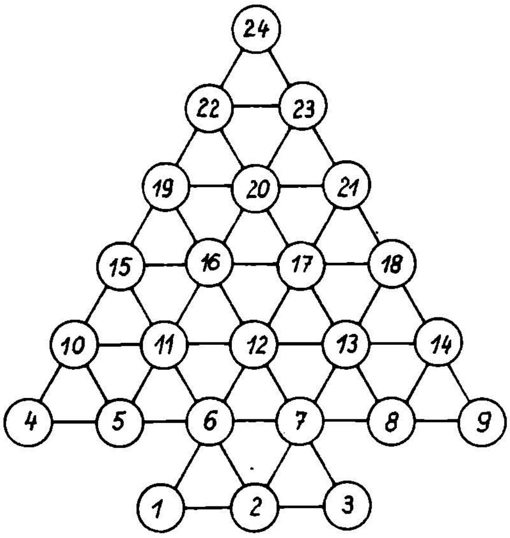
P	H	A	G
S	O	Y	I
T	H	A	R
	A	M	C
	E	E	M
	E	R	F
	S	R	D

O	B	H
I		T
E	R	L
		R
A	A	T
A	T	S
C	P	L

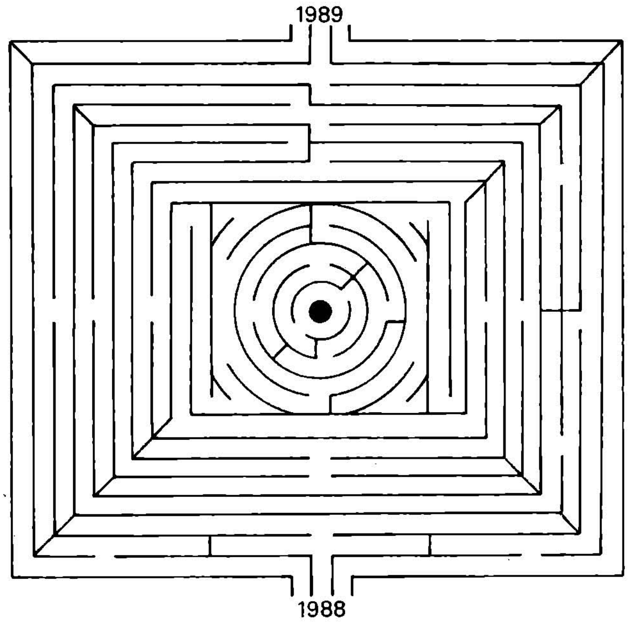
K	A	N
D		E
N	I	C
E	A	U
E		R
G	L	U

D	S	R
A		E
D	T	S
E	W	S
S		I
E	R	S

Figur 3: Findet in der Baumfigur Wege von 1 bis 24 mit größtmöglicher bzw. kleinstmöglicher Zahlensumme sowie mit den Zahlensummen 100 bzw. 200! Dabei darf jede Zahl nur höchstens einmal überquert und nicht wieder nach unten abgestiegen werden.



Figur 4: Sicher findet ihr schnell den Weg durch das Labyrinth, der vom Jahr 1988 in das Jahr 1989 führt.



Figur 5: Ersetzt die Buchstaben W, X, Y und Z so durch dezimale Grundziffern, daß sich eine richtig ausgeführte Additionsaufgabe ergibt, m. a. W., ermittelt sämtliche Lösungen des Kryptogramms!

$$\begin{array}{rrrr} & X & X & Y \\ + & X & X & W \\ \hline Y & X & Z & Z \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & X & X & Y \\ + & X & X & Z \\ \hline Y & X & Z & X \end{array}$$

Figur 6: Ermittelt sämtliche Lösungen dieses Kryptogramms!

Figur 7: Wieviel verschiedene Lesemöglichkeiten – ausgehend von links oben oder rechts unten und stets zu einem benachbarten Buchstaben fortschreitend – gibt es in der Matrix für den Begriff „Neujahr“?

N	E	U	J	A	H	R
E	U	J	A	H	R	H
U	J	A	H	R	H	A
J	A	H	R	H	A	J
A	H	R	H	A	J	U
H	R	H	A	J	U	E
R	H	A	J	U	E	N

Figur 8: Und zum Schluß senden die *alpha*-Redaktion und der Autor dieser Knobeleien allen *alpha*-Lesern zum Jahreswechsel einen herzlichen Gruß, der im Rösselsprung in die Jahreszahl 1989 eingetragen wurde. Viel Spaß beim Ermitteln dieses Satzes!

R. Mildner

S	N	F	H
A	T	T	D
U	E	C	S
	N	E	I
	U	G	D
	I	H	S
	E	N	N

H	E	L
A		A
L	P	N
		L
E	G	S
E	A	U
L	W	S

L	E	E
N		E
S	I	R
	H	
R	C	N
E		O
E	F	K

!	A	E
S		R
H	U	J
S	C	E
L		E
H	N	I

Das spiralige Haus eines Tintenfischs

Mathematische Ergänzungen zum Titelbild

Unser heutiges Titelbild zeigt den schematisierten Schnitt durch das Gehäuse eines Tintenfisches, dessen Name *Schiffsboot* ist. Schlagen wir in einem Lexikon nach, dann finden wir: *Schiffsboot, Nautilus: Gattung rezenter Kopffüßer mit äußerer, gekammerter spiraliger Schale (bis 27 cm Durchmesser), die als Schwimmapparat dient, offene Grubenaugen, etwa 90 Kopftentakeln und 4 Kiemen. S. leben in sechs Arten im westl. Stillen Ozean bis in etwa 700 m Tiefe.* (BI Universallexikon, VEB Bibliographisches Institut, 1. Aufl. Leipzig 1987)

Was uns an dieser Charakterisierung besonders interessiert, ist der Hinweis auf die sofort ins Auge fallende, fast ideale Spiralform des Gehäuses.

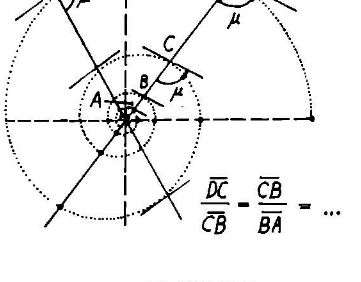
Wir fragen uns, ob sich diese Spirale als mathematische Kurve genauer beschreiben läßt und ob man aus den Eigenschaften einer solchen Kurve ableiten kann, warum hier gerade diese Form entsteht und auch sonst in der Natur häufig zu beobachten ist.

A. Als mathematisches Objekt ist die vorliegende Kurve unseres Wissens erstmals um das Jahr 1640 definiert und untersucht worden, und zwar unabhängig und auf recht verschiedenen Wegen von den bedeutenden Gelehrten René Descartes (1596 bis 1650) in Frankreich und Evangeliste Torricelli (1608 bis 1647) in Italien.

Wir wollen jetzt einige der wichtigsten Eigenschaften dieser Kurven, die man als *Logarithmische Spiralen* bezeichnet, zusammenstellen, ohne uns allerdings näher mit ihrer Herleitung befassen zu können.

(1) Jede *Logarithmische Spirale* besitzt einen charakteristischen Punkt O, um den sie sich herumwindet. Sie wird dabei vollständig durch die Eigenschaft charakterisiert, daß ihr Schnittwinkel mit jedem von O ausgehenden Strahl immer konstant gleich μ ist (Bild 1). Die Spirale windet sich ohne Ende um den Pol herum, der Umfang einer Umrundung wird dabei immer kleiner und kleiner.

Bild 1



(2) Bezeichnet $r(\varphi)$ den Abstand eines Kurvenpunktes P, dessen Fahrstrahl mit der Abszissenachse den Winkel φ einschließt, vom Pol O, dann gilt $r(\varphi) = d \cdot e^{\varphi \cdot \cot \mu}$ als *Polardarstellung* der Spirale, deren Name wegen der daraus folgenden Formel

$$\log r(\varphi) - \log d = \varphi \cdot \cot \mu$$

verständlich wird.

(3) Die von R. Descartes in den Vordergrund gestellte Eigenschaft ist die Proportionalität der Bogenlänge $s(\varphi)$ und des Abstandes eines Kurvenpunktes vom Pol, die sich in der Gleichung

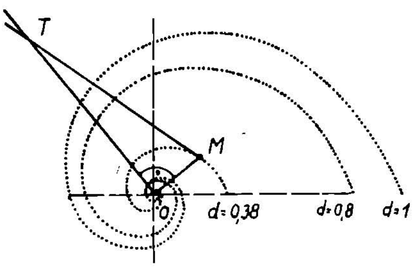
$$s(\varphi) = \frac{r(\varphi)}{\cos \mu}$$

ausdrückt, wenn man die Bogenlänge so definiert, daß $s(\varphi)$ gegen Null strebt, wenn der Punkt sich dem Pol beliebig nähert.

Auch Torricelli hatte festgestellt, daß man dieser Kurve eine endliche Bogenlänge *bis zum Pol gemessen* zuschreiben kann, obwohl derselbe nicht Endpunkt der Spirale ist! Er fand:

Zeichnet man zu einem Punkt M auf der Spirale den Fahrstrahl $\overline{OM}$ und die Tangente, errichtet auf OM im Punkte O die Senkrechte und bestimmt den Schnittpunkt T der Senkrechten mit der Tangente, dann ist die Strecke $\overline{MT}$ gleich dem Grenzwert der Bogenlänge von M bis zu einem Punkt P, der sich auf der Spirale dem Punkt O beliebig nähert (Bild 2).

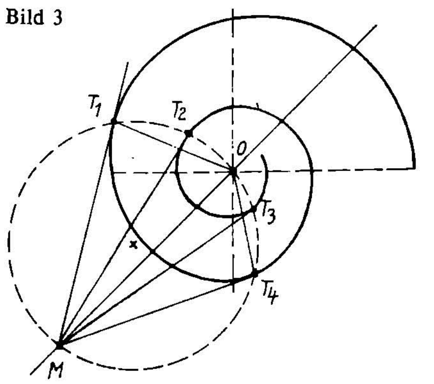
Bild 2



(4) Aus dem zuletzt Gesagten folgt eine interessante dynamische Eigenschaft: Läßt man eine *Logarithmische Spirale* auf einer Geraden (hier MT) ohne Gleiten abrollen, dann bewegt sich der Pol auf einer Geraden (nämlich OT).

(5) Erinnert man sich noch an den Peripheriewinkelsatz, dann sieht man leicht, daß die Berührungspunkte T_i aller von einem festen Punkt M aus an eine *Logarithmische Spirale* gelegten Tangenten mit O und M auf einer Kreislinie liegen (Bild 3).

Bild 3



(6) Wenn man eine um einen Punkt herumlaufende Kurve bezüglich dieses Punktes einer Dehnung (oder Stauchung) unterzieht, dann hat man die Vorstellung, daß die Kurve dabei irgendwie *größer* (bzw. *kleiner*) wird. Die *Logarithmische Spirale* belehrt uns eines Besseren: Zwei bezüglich O gedehnte *Logarithmische Spiralen* sind stets zueinander kongruent und können durch eine Drehung um O zur Deckung gebracht werden (Bild 2). (Man beweist das leicht unter Verwendung der Polardarstellung!)

(7) Betrachtet man zu einer ebenen Kurve in einem Kurvenpunkt denjenigen Kreis, der sie gleichgekrümmt berührt, dann nennt man ihn *Krümmungskreis*, seinen Mittelpunkt *Krümmungszentrum* und den Kehrwert des Radius *Krümmung* der Kurve in diesem Kurvenpunkt. Der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte einer Kurve heißt *Evolute* derselben.

Und auch hier hat unsere *Logarithmische Spirale* eine Überraschung bereit: Die Evolute ist stets eine drehungskongruente (d.h. nach (6) eine nur gedehnte) *Logarithmische Spirale!*

Es gibt noch eine ganze Reihe weiterer tiefliegender und teilweise überraschender Eigenschaften unserer Spiralen. Die daran anknüpfenden Untersuchungen können aber hier nicht verständlich gemacht werden.

Wir bemerken nur, daß Leonhard Euler (1707 bis 1783), einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten, sie offenbar für so wesentlich gehalten hat, daß er auf seinen Grabstein eine *Logarithmische Spirale* meißeln ließ (Bild 4).

B. Jetzt wenden wir uns dem zweiten Teil der aufgeworfenen Frage zu und versuchen zu verstehen, warum das Gehäuse des Nautilus gerade diese Form bekommt.

Die letzte Ursache dafür ist die Art und Weise, wie mehrzellige Lebewesen wach-

Bild 4

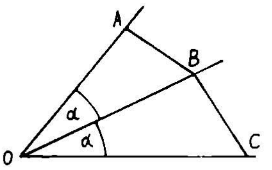
sen: durch Zellteilung! Das führt nämlich dazu, daß der Längenzuwachs in einer Wachstumsrichtung der vorhandenen Länge proportional ist.

(1) Unser Kopffüßer bewohnt immer die letzte (größte) Kammer und schlüpft von Zeit zu Zeit aus einer zu eng gewordenen in eine neu angelegte (Prinzip des Häutens!). Wenn das Wachstum in allen Richtungen gleich schnell vor sich geht, dann bleibt der Körper geometrisch ähnlich, die Kammern sollten das dann auch sein. Denken wir uns ihre Form vereinfacht als Dreiecke mit einer Ecke fest im Punkte O, dann sollte also gelten:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}},$$

d. h. $\overline{OB}$ ist die mittlere Proportionale von $\overline{OA}$ und $\overline{OC}$ (Bild 5).

Bild 5



Dann müssen aber die drei Punkte A, B und C auf einer *Logarithmischen Spirale* liegen, denn mit

$\overline{OA} = d \cdot e^{\varphi \cot \mu}$ und

$\overline{OC} = d \cdot e^{(\varphi + 2\alpha) \cot \mu}$ wird

$\overline{OB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OC} = d^2 \cdot e^{2(\varphi + \alpha) \cot \mu}$

und demzufolge $\overline{OB} = d \cdot e^{(\varphi + \alpha) \cot \mu}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Die Sache wird aber noch interessanter! Wir fragen uns nämlich jetzt, warum wohl die Kammer selbst durch den Bogen einer Spirale begrenzt wird.

Nun: das Wachstum geschieht durch Zellteilung und folglich ist der Längenzuwachs pro Zeitdifferenz der Länge proportional.

Also gilt in radialer Richtung $\frac{\Delta r}{\Delta t} = k \cdot r$ und in Richtung der äußeren Begrenzungskurve $\frac{\Delta s}{\Delta t} = k \cdot s$. Daraus folgern wir

$$\frac{\Delta s}{\Delta r} = \frac{k \cdot s \cdot \Delta t}{k \cdot r \cdot \Delta t} = \frac{s}{r}$$

und hieraus wiederum

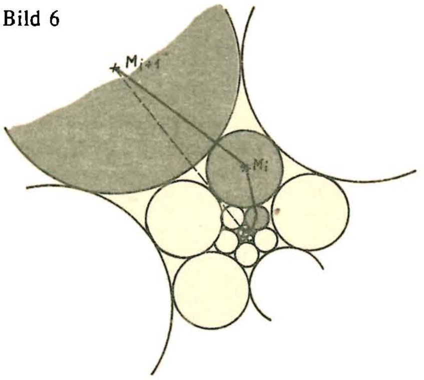
$$\frac{(s + \Delta s)}{(r + \Delta r)} = \frac{s + \frac{s}{r} \cdot \Delta r}{(r + \Delta r)} = \frac{s}{r}.$$

Während des Wachsens bleibt das Verhältnis von Radius r und Bogenlänge s konstant! Das charakterisiert aber gerade eine Logarithmische Spirale (Eigenschaft (3)).

Schauen wir uns nun mit unseren neuen Erkenntnissen ausgerüstet einmal aufmerksam in der Natur um, ob wir nicht an weiteren Lebewesen solche Spiralen entdecken und ihre Entstehung erklären können! Sicher habt ihr – vielleicht bisher mehr unbewußt – beobachtet, daß die Einzelblüten (oder später die Einzelfrüchte) eines Korbblütlers sich ebenfalls spiralig ordnen. Das kann man sich ganz ähnlich erklären. Wir vereinfachen den Sachverhalt wieder, indem wir annehmen, daß auf einem kreisförmigen Blütenboden ebenfalls kreisförmige Früchte dicht gepackt sitzen und mit gleicher Geschwindigkeit wachsen.

Dann müssen die Mittelpunkte von sich jeweils berührenden Früchten in aufeinanderfolgenden Größenschichten wieder auf *Logarithmischen Spiralen* liegen (Bild 6).

Bild 6



Wieder ist nämlich längs der Kurve $\frac{\Delta s}{\Delta t} = a \cdot s$, während für den Abstand $\overline{OM_i}$ $\frac{\Delta r}{\Delta t} = a \cdot r$ gilt. Somit bleibt das Verhältnis von s zu r während des Wachstums konstant, die Kurve ist eine Logarithmische Spirale.

C. Eine Nachbemerkung

Wir hoffen, unsere Leser durch die Betrachtungen zu zweierlei anregen zu können. Erstens sollten sich recht viele von ihnen einmal mit den wichtigsten elementaren Kurven und ihren Eigenschaften beschäftigen. In älteren wissenschaftlichen Bibliotheken findet man dazu vielleicht noch das Buch von Gino Loria *Spezielle Algebraische und Transzendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte, B. G. Teubner, Leipzig, 1902*. Jetzt, wo vielen wenigstens ein Kleinrechner (etwa KC 85/2 und /3) zugänglich ist, kann die Beschäftigung sehr an Reiz gewinnen, wenn man die Bilder auf dem Bildschirm entstehen läßt (unsere Abbildungen sind z. B. so entstanden!).

Zum Zweiten aber möchten wir anregen, aufmerksamer durch unsere Umwelt zu gehen und Fragen zu stellen, deren Beantwortung nicht sofort auf der Hand liegt und die vielleicht von Lehrern oder Klassenkameraden bisher überhaupt noch nicht aufgeworfen worden sind. Zum Thema unseres Aufsatzes finden sich beispielsweise viele Ergänzungen in einem Artikel in *Wissenschaft und Fortschritt*, Heft 8/1979.

R. Hofmann

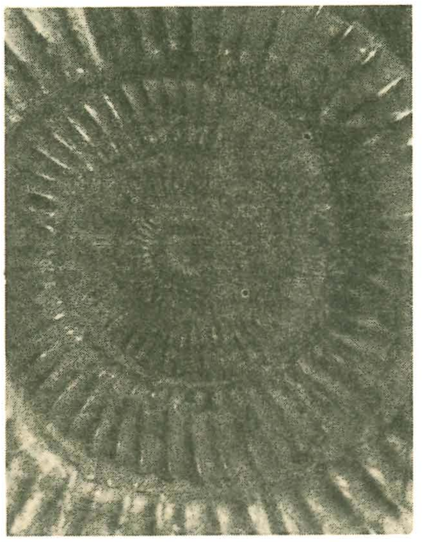


Bild 7
Lias-Ammonit (etwa 190 Mill. Jahre)

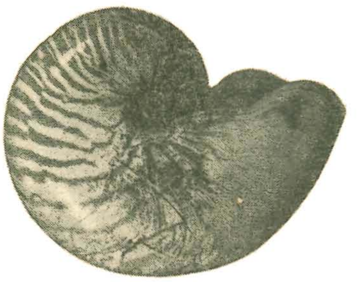
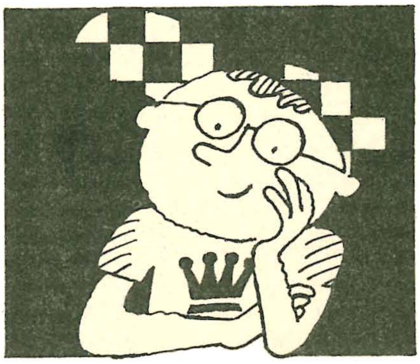


Bild 8
Nautilus (lebendes Fossil – kommt heute noch in der Tiefsee vor)

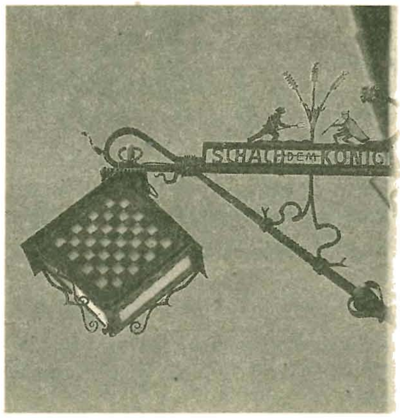
Bild 9
Trias-Ammonit (etwa 200 Mill. Jahre)

Die auf den Bildern 7 bis 9 dargestellten Stücke stammen aus der Geologisch-Paläontologischen Sammlung des Wissenschaftsbereiches Geophysik der Karl-Marx-Universität Leipzig. Wir danken der Mitarbeiterin des WB, Frau A.-B. Ernst, für ihre freundliche Unterstützung.



19. Fach: Schach

Seit etwa vier Jahren besteht an unserer Schule in Ströbeck eine Mathematik-Arbeitsgemeinschaft für die Klassen 3 bis 5. Hier können sich die an Mathematik interessierten Schüler unserer kleinen zentralen Dorfschule (wir haben Kinder aus insgesamt fünf Dörfern) hauptsächlich noch spielerisch mit mathematischen Problemen beschäftigen. Neben mathematischen Spielen und aus Zeitungen, Büchern und Zeitschriften gesammelten Knobelaufgaben beschäftigen wir uns auch mit der Vorbereitung auf Olympiaden und mathematische Wettkämpfe und beteiligen uns natürlich auch am *alpha*-Wettbewerb. Jedes Jahr wird bei uns Ende September eine Mathematik-Schulolympiade organisiert, die in sehr würdiger Form stattfindet, so daß sie für die Teilnehmer eine echte Auszeichnung bedeutet. Auf dem Appell zu unserem Nationalfeiertag werden die drei besten Schüler jeder Klassenstufe prämiert. Sie erhalten neben kleinen Präsenten auch jeder von der Schule ein Jahresabonnement der Zeitschrift *alpha*. Auf diese Weise wird erreicht, daß sich möglichst viele Schüler auch in ihrer Freizeit mit Mathematik beschäftigen.
Die Sieger unserer Schulolympiade werden selbstverständlich zur Kreisolympiade nach Halberstadt delegiert.
Wir nutzen auch jede Möglichkeit, an mathematischen Wettbewerben im Kreismaßstab teilzunehmen. Bei all diesen Leistungsvergleichen konnten wir AG-Mitglieder in den letzten Jahren stets vordere Plätze erreichen. Diese Erfolgsergebnisse spornen uns natürlich zu weiterer Arbeit an.
Zu Beginn der 6. Klasse sind wir alt genug, um selbständig mit dem Bus nach Halberstadt zu fahren. Die besten von uns werden dann in die Kreis-AG in die Station Junger Techniker und Naturforscher *Heinz Rockmann* delegiert. Die Station ist für uns auch nichts Neues mehr. Wir kennen sie und viele der dort tätigen Lehrer von früheren Wettbewerben oder vom Spezialistenlager in den Ferien. Hier sind dann in jeder AG nur Schüler derselben Klassenstufe und wir können deshalb noch mehr lernen.
Einige unserer AG-Mitglieder sind gleichzeitig Mitglieder der AG *Schach* an unserer Schule und haben sich mit anderen Schülern auch am Schachwettbewerb der *alpha* beteiligt.
Ihr müßt aber auch wissen, daß Schach seit 1823 an unserer Schule Unterrichtsfach ist. Selbstverständlich wahren wir diese schöne Tradition. Am Schachunterricht nehmen alle Schüler der Klassen 3 bis 7 teil. Ab Klasse 8 ist die Teilnahme in einer Arbeitsgemeinschaft möglich. Für uns Schüler bedeutet dies pro Woche eine zusätzliche Stunde Unterricht. Das ist selbstverständlich, weil ja bereits unsere Eltern, Großeltern, ... in der Schule Schachunterricht hatten.

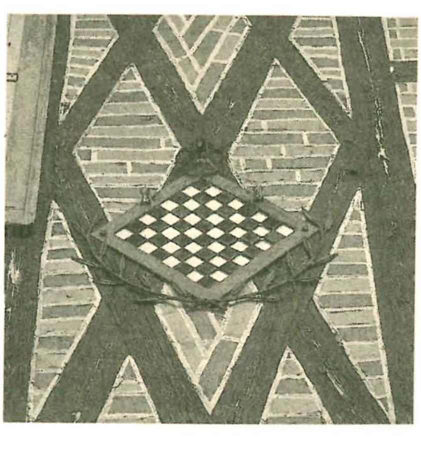


Straßenlampe am Schachturm in Ströbeck

Am Ende jedes Schuljahres kämpfen die Schüler der 7. Klassen um drei Sätze Figuren und die Schüler der 8. Klassen um drei Bretter mit einer Widmung: *Zur Belohnung des Fleißes im Schach*. Diese Trophäen werden hart umkämpft und finden großes Interesse bei Schülern, Eltern und allen anderen Einwohnern im Dorf.
Auch das Fernsehen der DDR hat bereits einen solchen Wettkampf gefilmt und in einer Sendung *Elternsprechstunde* gesendet.
Wir sind stolz auf unseren Schulnamen: *Schule der DSF – Dr. Emanuel Lasker*.
Dr. Lasker war der einzige deutsche Schachweltmeister.
Er konnte diesen Titel 27 Jahre lang für sich in Anspruch nehmen.
Aus rassischen Gründen verlegte er 1936 seinen Wohnsitz in die Sowjetunion. Hier arbeitete der promovierte Mathematiker in Moskau an der AdW am Institut für Mathematik und löste wichtige mathematische Probleme.
In den Schulen beschäftigte er sich mit Pionieren und löste mit diesen mathematische Aufgaben.
Wir sind dabei, die Biographie dieses Schachspielers, Mathematikers und hervorragenden Menschen weiter zu erforschen. Dabei geht es uns insbesondere um seine Beziehungen zur Sowjetunion.
Wir haben das *Karl-Sudhoff-Institut*, das uns dabei unterstützt hat, angeregt, eine Biographie über Dr. E. Lasker herauszugeben, damit möglichst viele Menschen über diese bedeutende Persönlichkeit mehr erfahren und von ihm lernen können.

Matthias Orb
Mathe-AG der Schule der DSF
„Dr. E. Lasker"

Schachsymbol an einem Ströbecker Haus, das jeder Gewinner der jährlichen Schulmeisterschaft anbringen darf.



alpha bat Dr. R. Thiele vom Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften der Karl-Marx-Universität Leipzig, ihren Lesern mehr über Emanuel Lasker mitzuteilen.

Schach als Kampf

Emanuel Lasker ist weniger als Mathematiker, sondern als Schachspieler bekannt geworden. Das entspricht letztendlich seinen Absichten, denn Schach war dem promovierten Mathematiker wichtiger als sein Fachgebiet. Geboren ist Lasker am 24. Dezember 1868 in Berlinchen (Neumark). Nach dem Abitur studierte er in Berlin, Göttingen sowie Heidelberg Mathematik und Philosophie und promovierte an der Universität Erlangen *Über Reihen auf der Konvergenzgrenze*. Obwohl Lasker 1893 an der Tulane University in New Orleans (USA) und 1901 an der Victoria University in Manchester (Großbritannien) Vorlesungen gehalten hatte, war er ein Berufsschachspieler. Seine Schachkarriere hatte 1889 begonnen, und bereits 1894 schlug er den amtierenden Weltmeister Steinitz. 1902 siedelte Lasker in die USA über, kam aber 1907 wieder nach Deutschland zurück und ließ sich in Thyrow bei Berlin nieder. 1905 erschien in den Mathematischen Annalen, einer wichtigen mathematischen Zeitschrift, ein Artikel von Lasker *Zur Theorie der Modulen und Ideale*, in dem Lasker den Begriff des Primideals faßt. Damit leistete der Schachweltmeister einen bedeutenden Beitrag zur Entwicklung der modernen Algebra. 1921 verlor Lasker den Weltmeistertitel im Schach, den er 27 Jahre getragen hatte, gegen den 20 Jahre jüngeren Capablanca. Lasker schrieb auch Bücher über Schach und andere Denkspiele. Er begriff Schach als eine Kunst und betonte die psychologische Seite des Spiels (Schwäche des Gegners nützen).
1927 eröffnete er eine *Schule für Verstandesspiele*, in der neben Schach auch Go, Bridge oder Lasca gelehrt wurden. Lasca ist ein Brettspiel, das Lasker selbst erfunden hat. 1933 mußte Lasker in die Emigration

gehen. Zunächst fand er Aufnahme in Großbritannien, folgte aber dann einer Einladung in die Sowjetunion. Die sowjetische Akademie der Wissenschaften ernannte ihn 1935 zu ihrem Mitglied. Lasker lebte bis 1937 in Moskau und ging dann nach New York. Dort starb er im Alter von 72 Jahren am 11. 1. 1941.

Lasker über das Schachspiel

Das Schachspiel, nur ein Theaterkrieg, kann als Sinnbild aller Arten des Kampfes dienen, so z. B. eines Disputs (Streitgespräch), diplomatischer Unterhandlungen oder eines gerichtlichen Prozesses. Es bereitet uns für das feinere Verständnis der strategischen Gesetze vor.
Lasker war der Meinung, daß jeder Zug nicht an sich stark oder schwach ist, sondern insbesondere im Hinblick auf den jeweiligen Gegner gut oder schlecht ist. Er strebte nicht nach dem objektiv besten Zug, sondern nach dem für den jeweiligen Gegner unangenehmsten.

Schachspieler über Lasker

Max Euwe
(Weltmeister im Schach, Mathematiker)
Lasker war von allen Großmeistern, denen ich in den vergangenen 35 Jahren begegnet bin, der Größte.

José Raúl Capablanca
(Weltmeister im Schach)
Er war der tiefgründigste Schachspieler, den ich je gekannt habe.

Alexander Aljechin
(Weltmeister im Schach)
Die Idee der Schachkunst ist undenkbar ohne Lasker.

Richard Réti
Sein Stil ist ein klares Wasser mit einem Tropfen Gift.

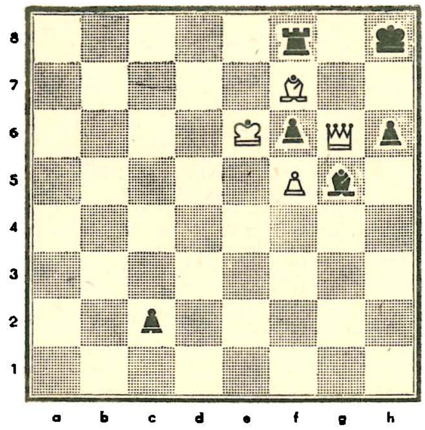
R. Thiele

Der Sportverlag Berlin bereitet in seiner Reihe „Das Schachgenie“ eine Biographie von Lasker vor. Sie ist für 1990 geplant. In der Reihe erschienen bisher folgende Titel: „Das Schachgenie Paul Keres“, A. Suetin 1987, und „Das Schachgenie Capablanca“, I. u. Wl. Linder 1988.

Zwei Aufgaben von Dr. Emanuel Lasker

Als Schachmeister war Dr. Emanuel Lasker die überragende Persönlichkeit seiner Zeit. Von 1894 bis 1921 trug er die Krone des Schachweltmeisters. Weder vor noch nach ihm gelang es einem Schachweltmeister, sich 27 Jahre auf dem Schachthron zu behaupten. In einer Reihe bedeutender Schachwerke zeigte er sich als wegbereitender Schachdenker. Seine philosophischen Schriften, seine Werke über andere Spiele und seine mathematischen Arbeiten lassen ihn als Persönlichkeit von universellem Geist erkennen.

Mit zwei kleinen Aufgaben, die es zu lösen gilt, mögen die Leser auf Dr. Laskers schachlichen Spuren wandeln.
Diagramm 1 zeigt eine Aufgabe von Dr. Emanuel Lasker aus dem Buch von J. Prety *ABC d'Echecs* (1895). Weiß beginnt und setzt Schwarz spätestens im 6. Zuge matt.



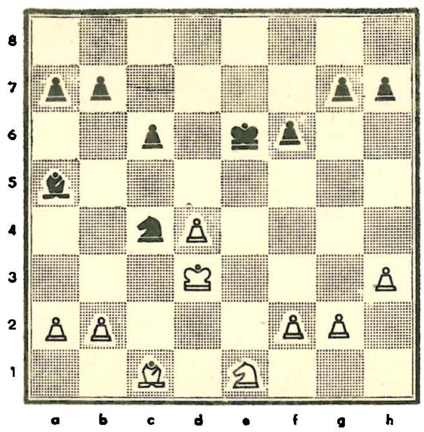


Diagramm 2 zeigt eine Partiestellung zwischen Dr. Lasker und Dr. Euwe (Nottingham, 1936). Mit einer imponierenden Wendung gewinnt der bereits 68jährige Dr. Lasker gegen den zu jener Zeit amtierenden Schachweltmeister eine Leichtfigur innerhalb von 3 Zügen. Weiß am Zuge.

H. Rüdiger

Buchtips

Anatoli Mazukewitsch
Seltene Gambits
334 S., 380 Diagr.
Bestell-Nr. 671 735 7 Preis: 19,80 M

Jakow Neistadt
Damenopfer
224 S., 335 Diagr.
Bestell-Nr. 671 671 7 Preis: 15,50 M

Aleksei Suetin
Modernes Mittelspiel
320 S., 218 Diagr.
Bestell-Nr. 671 730 6 Preis: 16,50 M

Alle Titel sind Neuerscheinungen des Sportverlages, Berlin

Ganz in Familie

1. „In sechs Jahren werde ich noch einmal so alt sein, wie ich vor sechs Jahren war“, sagt Annerose verschmitzt. „Nun, wie alt bin ich?“

2. Ein Vater ist jetzt 28 Jahre und sein Sohn 4 Jahre alt.
In wieviel Jahren wird der Vater zweimal älter als sein Sohn sein?

3. Zwei Jungen sind zusammen 19 Jahre alt, und zwar ist der eine um drei Jahre älter als der andere.
Wie alt sind die beiden?

4. Auf die Frage, wie alt er sei, gab A zur Antwort: „Wäre ich noch einmal so alt, wie ich jetzt bin, und noch zwei Jahre dazu, so hätte ich gerade soviel über 100 Jahre als mir jetzt davon abgehen.“
Wie alt ist A?

5. „Ich und mein Sohn“, sagte ein Vater verschmitzt, „sind zusammen 48 Jahre alt. Das Quadrat des Drittels meines Alters ist um 48 größer als das Quadrat der um 2 vermehrten Zahl des Alters meines Sohnes.“
Wie alt sind Vater und Sohn?

6. Eine Mutter ist heute viermal so alt wie ihre Tochter.
In 16 Jahren wird sie nur doppelt so alt sein wie diese.
Wie alt sind Mutter und Tochter?

7. Ein Vater hat sieben Kinder. Jeder Sohn hat doppelt soviel Schwestern wie Brüder.
Wieviel Mädchen und Jungen sind das?

8. Armin sagt: „Wenn ich 4mal so alt bin wie jetzt, fehlt mir zu 100 Jahren gerade noch mein jetziges Alter.“
Wie alt ist Armin heute?

9. In einem Haus wohnen die vier Familien A, B, C und D mit insgesamt 24 Personen. Familie A hat ebensoviel Kinder wie B und D zusammen. Familie C halb so viel. Familie D hat zwei Kinder mehr als Familie B.
Aus wieviel Erwachsenen und Kindern besteht jede Familie, wenn bei Familie B noch ein Großvater wohnt?

A. Körner/
J. Lehmann

Im Kopf zu lösen!

Welche Zahl ist größer:
31^{80} oder 17^{100}?

aus: Funktio, Helsinki

Rund um den SR 1

Die Tasten $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$, $\boxed{\text{tan}}$ – Umschalter für Winkelmaße

Das Tastenfeld des Schulrechners SR 1 enthält im oberen Teil drei schwarze Tasten, nämlich die Funktionstasten $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$, $\boxed{\text{tan}}$. Die Tasten sind, wie man sieht, doppelt belegt.

arcsin	arccos	arctan
$\boxed{\text{sin}}$	$\boxed{\text{cos}}$	$\boxed{\text{tan}}$

Mit diesen Tasten ist man in der Lage, Funktionswerte für vorgegebene Winkel zu ermitteln und außerdem bei vorheriger Betätigung der Taste $\boxed{\text{F}}$ zu gegebenen Funktionswerten trigonometrischer Funktionen ein zugehöriges Argument anzugeben. Zu den Funktionstasten gehört noch der *Umschalter für Winkelmaße*, dem wir uns zunächst näher zuwenden wollen.

Der Umschalter für Winkelmaße

Der Umschalter für Winkelmaße ermöglicht drei Schalterstellungen:

	DEG	RAD	GRD
1.	▬		

Diese Schalterstellung wird gewählt, wenn die Eingabe (bzw. Ausgabe) der Winkelgröße in dezimalgeteiltem Altgrad erfolgen soll.

Beispiele:

● $y = f(x) = \sin x$
Ermitteln Sie $f(32°)$!
Ablaufplan: (DEG) 32 $\boxed{\text{sin}}$ [5.2991-01]
Ergebnis: $f(32°) = \sin 32° = 0{,}52991$

● $y = f(x) = \sin x$
$f(x) = 0{,}62$.
Ermitteln Sie x für $0° \leqq x \leqq 90°$!
Es soll also zu einem gegebenen Winkelfunktionswert 0,62 in einem gegebenen Intervall der (bzw. die) zugehörige(n) Winkel ermittelt werden.
Ablaufplan: (DEG) 0,62 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{sin}}$
d. h. 0,62 $\boxed{\text{arcsin}}$ [38.316135]
Ergebnis: $x = 38{,}316\,135°$.

Arkusfunktionen sind Umkehr- oder inverse Funktionen der trigonometrischen Funktionen, z. B.
$y = \arcsin x$; $y = \arccos x$;
$y = \arctan x$; $y = \operatorname{arccot} x$
bedeutet der Bogen y (*Bogen* im lateinischen *arcus*), dessen Sinus die Größe x hat.

Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen ist dieser Bogen nur dann eindeutig anzugeben, wenn ein Intervall vorgegeben wird, in dem die betreffende trigonometrische Funktion alle ihre Werte annimmt und monoton ist.

▲ 1 ▲ Erkunden Sie, in welchen Intervallen der SR 1 die Winkel für
a) $\arcsin x$; b) $\arccos x$; c) $\arctan x$
angibt!

	DEG	RAD	GRD
2.		▬	

Diese Schalterstellung wird verwendet, wenn die Eingabe (bzw. Ausgabe) der Winkelgröße in Bogenmaß erfolgt (bzw. erfolgen soll). Die Einheit des Winkels ist hier der **Radiant** (Zeichen: rad). 1 rad ist der Winkel, für den das Verhältnis der Längen von Kreisbogen und Radius gleich 1 ist (1 rad = 57,295 78°).
Zuweilen wird die Einheit *rad* auch weggelassen, und man gibt die Winkel als Vielfache bzw. Teile von π an
$\left(\text{z. B. } 2\pi,\ 7\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{3}\right)$.

Beispiele:

● $y = f(x) = \cos x$
Ermittle $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$!
Ablaufplan:
(RAD) π $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{cos}}$ [7.0710-01]
Ergebnis: $\cos\frac{\pi}{4} = 0{,}707\,10$

● $y = f(x) = \cos x$
$f(x) = 0{,}2$.
Ermittle x in Bogenmaß für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$!
Ablaufplan:
(RAD) 0,2 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{cos}}$ [1.3694384]
Ergebnis: $x = 1{,}369\,438\,4$ rad

Den Umschalter für Winkelmaße kann man nutzen, um Winkel, die in dezimal geteiltem Altgrad gegeben sind, in Bogenmaß umzurechnen und umgekehrt.

▲ 2 ▲ Betätigen Sie die Tasten des SR 1 in angegebener Reihenfolge und füllen Sie die Leerstellen aus!

a)

Eingabe	Anzeige
Schalterstellung DEG	0.
45	45.
$\boxed{\text{sin}}$	
Schalterstellung RAD	
$\boxed{\text{F}}$	
$\boxed{\text{sin}}$	

Welche Bedeutung hat der vom SR 1 zuletzt angezeigte Zahlenwert?

b)

Eingabe	Anzeige
Schalterstellung RAD	0.
$\boxed{\pi}$	
$\boxed{\div}$	
4	
$\boxed{=}$	
$\boxed{\text{sin}}$	
Schalterstellung DEG	
$\boxed{\text{F}}$	
$\boxed{\text{sin}}$	

Welche Bedeutung hat der vom SR 1 zuletzt angezeigte Zahlenwert?

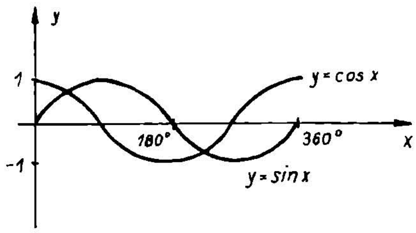
	DEG	RAD	GRD
3.			▬

Man stellt den Umschalter auf GRD, wenn die Eingabe (bzw. Ausgabe) der Winkelgröße in **Neugrad** oder Gon (Winkelmaß, dessen Einheit der 100. Teil eines rechten Winkels ist) erfolgt (bzw. erfolgen soll).
Die Einheit Gon (Zeichen: g) wird in der Geodäsie verwendet.

Wir experimentieren mit den Tasten $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{cos}}$

Aus der grafischen Darstellung der Funktion $y = \sin x$ $(0° \leqq x \leqq 360°)$ erkennt man (vgl. Bild 1), daß im gegebenen Intervall zwar zu jedem x-Wert genau ein y-Wert gehört, aber nicht umgekehrt jedem y-Wert genau ein x-Wert zugeordnet ist. Das wird erneut beim Ausfüllen nachstehender Tabelle deutlich.

Bild 1



▲ 3 ▲ Vervollständigen Sie die Tabelle!

x	0°	30°	90°	150°	180°
$\sin x$	0				
x	210°	270°	330°	360°	
$\sin x$				0	

Aus diesem Grunde haben auch goniometrische Gleichungen der Form $\sin x = a$ im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$ im allgemeinen mehr als eine Lösung.

▲ 4 ▲ Geben Sie eine Gleichung der Form $\sin x = a$ an, die im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$ genau eine Lösung hat!

▲ 5 ▲ Geben Sie eine Gleichung der Form $\sin x = a$ an, die im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$ genau drei Lösungen hat.

▲ 6 ▲ Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $\sin x = 0{,}54$ im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$ an.
Mit dem Taschenrechner SR 1 erhält man als eine Lösung der Gleichung $\sin x = 0{,}54$ (entsprechend dem Ablaufplan: 0,54 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{sin}}$) den Wert 32.683639. Aus der obenstehenden Tabelle und dem Bild der Sinusfunktion wissen wir, daß die Gleichung $\sin x = 0{,}54$ im vorgegebenen Intervall genau zwei Lösungen hat und die zweite Lösung im Intervall $90° < x < 180°$ (II. Quadrant) liegen muß.
Um eine Vermutung über die Beziehungen der Winkel und deren Sinuswerte in den

ersten beiden Quadranten zu erhalten, kann das Lösen der Aufgabe 7 nützlich sein!

• ▲ 7 ▲ Vervollständigen Sie die Tabelle mit dem SR 1 (Umschalter auf DEG)!

x	x $\boxed{\sin}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\sin}$
0	0
12	
30	
80	
100	
120	
140	

Füllen Sie die weiteren Leerstellen der Tabelle ohne Nutzung des SR 1 aus!

x	x $\boxed{\sin}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\sin}$
145	
150	
170	
175	

Formulieren Sie – ausgehend von der ausgefüllten Tabelle – eine Vermutung! Kontrollieren Sie, ob Sie alle Lösungen der Gleichung $\sin x = 0{,}54$ (vgl. Aufgabe 6) ermittelt haben!

▲ 8 ▲ Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $\cos x = 0{,}32$ im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$ an!
Beachten Sie, daß bereits dem Kurvenverlauf der Kosinusfunktion (Bild 1) zu entnehmen ist, daß die Gleichung im vorgegebenen Intervall zwei Lösungen hat. Wie die Lösung für das Teilintervall $270° < x \leqq 360°$ zu ermitteln ist, können Sie durch das Ausfüllen nachstehender Tabelle erkunden.

x	(DEG) x $\boxed{\cos}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$
270	
280	
290	
300	
350	

Überprüfen Sie mit dem SR 1, ob Sie alle Lösungen der Gleichung $\cos x = 0{,}32$ richtig bestimmt haben!
Da der Kosinus eines Winkels x sowohl im Intervall $90° < x \leqq 180°$ als auch im Intervall $180° \leqq x < 270°$ negativ ist, wäre es interessant zu erfahren, wie der Taschenrechner bei der Abarbeitung des nachstehenden Rechenablaufplans
(x $\boxed{\cos}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$ $(180° \leqq x < 270°)$) reagiert.
Dazu füllen wir folgende Tabelle aus.

x	x $\boxed{\cos}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$
180	180°
185	
200	
240	
260	

▲ 9 ▲ Betrachten Sie die ausgefüllte Tabelle und formulieren Sie eine Vermutung!
$\cos(180° + x) = \cos \ldots$

▲ 10 ▲ Ermitteln Sie im Intervall $0° \leqq x \leqq 360°$ jeweils alle reellen Lösungen der angegebenen Gleichungen!
a) $\sin x = 0{,}25$
b) $\sin x + \cos 60° = 1{,}2$
c) $2 \sin 0° + \dfrac{\tan 45°}{\cos 60°} + 2 \sin x = 3$
d) $\cos x = -0{,}5$
e) $\cos x = -\sin 60°$

Dem Kurvenverlauf der Funktion $y = \sin x$ und dem Kurvenverlauf der Funktion $y = \cos x$ (siehe Bild 1) ist zu entnehmen, daß der Sinus eines Winkels mit dem Kosinus eines anderen Winkels übereinstimmen muß. Das Lösen der Aufgaben 11 und 12 wird uns helfen, diese Beziehungen zu erkennen.

▲ 11 ▲ Stellen Sie den Umschalter für Winkelmaße auf DEG!
Betätigen Sie die Tasten des SR 1 in der angegebenen Reihenfolge und füllen Sie die Leerstellen aus!

a)

Tastenfolge	Anzeige
60	60.
$\boxed{\cos}$	
$\boxed{F}$	
$\boxed{\sin}$	

b)

Tastenfolge	Anzeige
50	50.
$\boxed{\cos}$	
$\boxed{F}$	
$\boxed{\sin}$	

▲ 12 ▲ Welche Taschenrechneranzeige vermuten Sie jeweils nach folgender Tastenfolge (Umschalter auf DEG)?
a) 70 $\boxed{\cos}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\sin}$
b) 30 $\boxed{\cos}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\sin}$
c) 30 $\boxed{\sin}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$
d) 20 $\boxed{\sin}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$

Überprüfen Sie Ihre Voraussage mit dem Taschenrechner!
Formulieren Sie eine Vermutung über den zugrunde liegenden Sachverhalt!

▲ 13 ▲ Lösen Sie im Intervall $0 \leqq x \leqq 90°$ folgende Gleichungen:
a) $\cos 30° = \sin x$; b) $\sin x = \cos 70°$;
c) $\cos x = \sin 45°$!

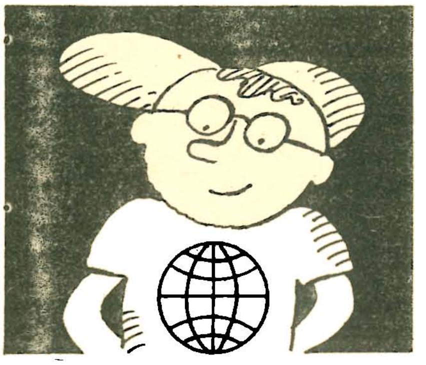
L. Flade

Mit diesem Beitrag schließen wir die Serie zum Taschenrechner SR 1 ab. Natürlich wird er euch in unseren Beiträgen noch öfter begegnen.
Bei Nachfragen nutzt bitte die inzwischen zum Taschenrechner erschienene Literatur, die ihr sicher auch in den Bibliotheken ausleihen könnt, zum Beispiel:

Gilde/Altrichter:
Schneller, leichter, genauer

Gilde/Altrichter:
Mehr Spaß mit dem Taschenrechner
beide VEB Fachbuchverlag, Leipzig

Fanghänel:
Mein Freund, der Taschenrechner
VE Verlag Volk und Wissen, Berlin



▲ 1 ▲ Find the pattern
In the accompanying diagram we develop a special arrangement in five columns of the integers greater than 1. Explore the structure of the arrangement and predict in which column (from left to right) the number 100 will fall.

	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
17	16	15	14	
–	–	–	–	–

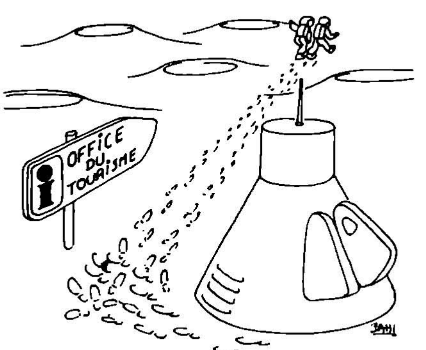
aus: Fun with mathematics, Toronto

▲ 2 ▲ Déterminer x et y pour que le nombre $\overline{4x5y}$ soit divisible par 6. *H.*

▲ 3 ▲ Простота математики
Джон фон Нейман, один из крупнейших матиматиков нашего столетия, выступая в конце 40-х годов с докладом о будущем электронно-вычислительных машин, сказал, что математика – только очень малая и очень простая часть жизни. Когда в ответ на это аудитория зашумела, фон Нейман добавил: „Если люди не верят в то, что математика проста, то только потому, что они не осознают, как сложна жизнь".
aus: Quant, Moskau

▲ 4 ▲ On fond 82 kg de bronze et 18 kg d'argent. Calculer la masse volumique de l'alliage.
La masse volumique du bronze
$8{,}5\ \text{kg dm}^{-3}$,
la masse volumique de l'argent
$10{,}5\ \text{kg dm}^{-3}$.

H.



Wie man Brezeln und andere Figuren mit Zirkel und Lineal konstruiert

Die Figuren im Bild 1 sind aus Kreisen bzw. Kreisbögen zusammengesetzt. Wir wollen untersuchen, wie man solche Figuren mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

a) Ei

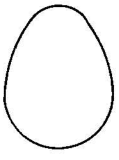
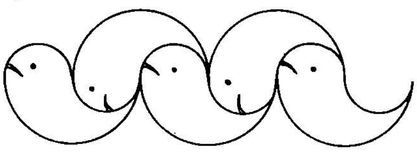
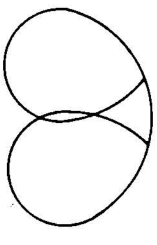


Bild 1

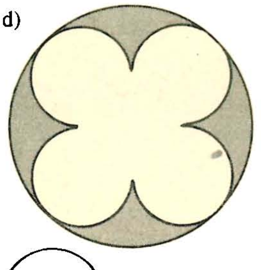
b) Muster aus Walfischen



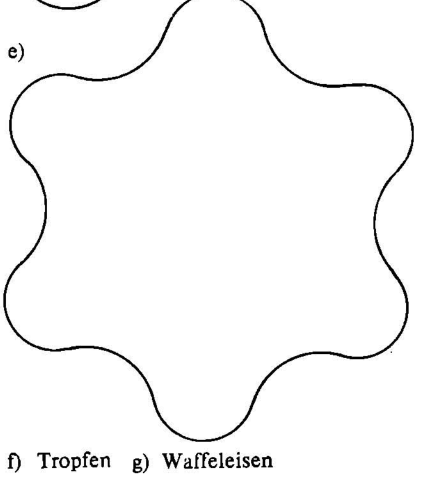
c) Brezel



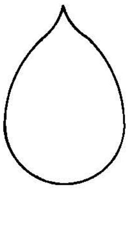
d)



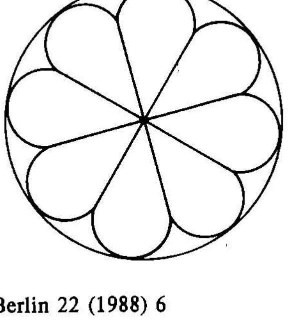
e)



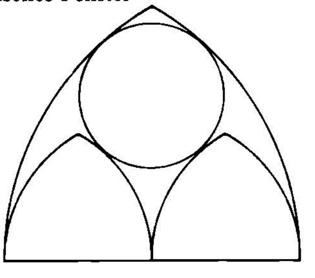
f) Tropfen



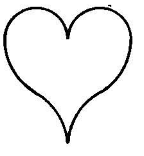
g) Waffeleisen



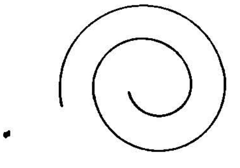
h) gotisches Fenster



i) Herz



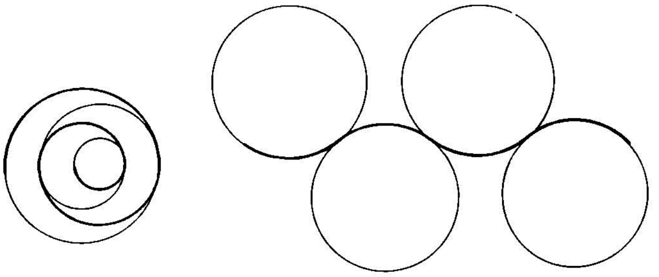
k) Spirale



l) Schlangenlinie

Untersuchen wir zunächst einmal, und zwar an den Beispielen k und l (Bild 1), aus was für Kreisbögen die Figuren zusammengesetzt sind: Wir ergänzen die in den Figuren enthaltenen Kreisbögen zu ganzen Kreisen.

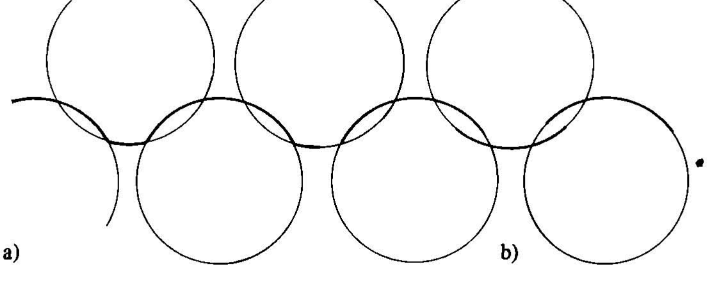
Bild 2



Wir erkennen: Jeweils zwei der Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt. Sie berühren sich in diesem Punkt. Diese Berührungspunkte sind genau die Begrenzungspunkte der einzelnen Kreisbögen, aus denen die Figur zusammengesetzt ist.

Was passiert nun aber, wenn die Kreise, aus deren Bögen die Figur zusammengesetzt ist, sich nicht in einem Punkt berühren, sondern zwei gemeinsame Punkte haben? Versuchen wir, aus solchen Kreisen eine Wellenlinie zusammenzusetzen:

Bild 3

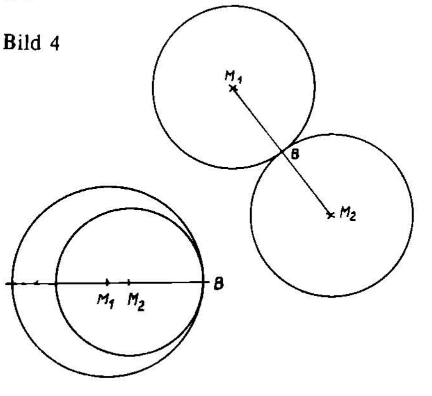


a) b)

Wir erkennen: In diesem Fall hat die Figur *Ecken* (siehe bei a)) oder *Lücken* (siehe bei b)). Ein *nahtloser* Übergang zwischen Kreisbögen verschiedener Kreise ist also dort und nur dort möglich, wo sich zwei Kreise berühren.

Um solche Figuren wie in Bild 1 konstruieren zu können, muß man also neben den Mittelpunkten und Radien der Kreise auch ihre Berührungspunkte exakt bestimmen können. Es ist deshalb naheliegend, die Frage zu untersuchen: Gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Berührungspunkt zweier Kreise und ihren Mittelpunkten?

Bild 4

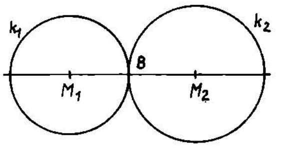


Das Bild läßt uns vermuten:

* Haben zwei Kreise genau einen gemeinsamen Punkt (oder auch: berühren sich zwei Kreise), so liegt dieser gemeinsame

Punkt (der Berührungspunkt) auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der beiden Kreise.
Den Beweis dieser Aussage führen wir indirekt:
Voraussetzung: k_1 und k_2 haben genau einen gemeinsamen Punkt, den Punkt B.

Bild 5



Annahme: Der Punkt B liegt nicht auf der Geraden M_1M_2. Wir spiegeln k_1 und k_2 an der Geraden M_1M_2. Dabei gilt:

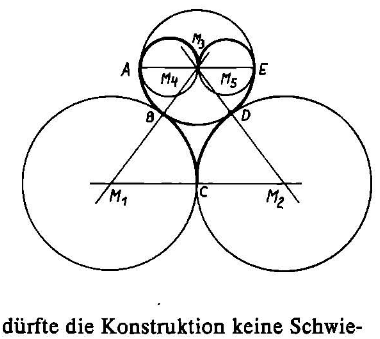
(1) $\left.\begin{array}{l} k_1' = k_1 \\ k_2' = k_2 \end{array}\right\}$ (da die Spiegelgerade durch die Mittelpunkte von k_1 und k_2 geht)

(2) B liegt auf k_1 und k_2 (Voraussetzung)
$\rightarrow$ B' liegt auf k_1' und k_2'
(Eigenschaft der Spiegelung)
$\rightarrow$ B' liegt auf k_1 und k_2 (wegen (1))
(3) $B' \neq B$
(B liegt nicht auf der Spiegelgeraden)
Aus (2) und (3) folgt: k_1 und k_2 haben zwei gemeinsame Punkte, nämlich B und B'. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, also kann die Annahme nicht wahr sein.
Damit ist die Aussage (*) bewiesen.
An den Beispielen h und i des Bildes 1 soll nun gezeigt werden, wie uns die Aussage * bei der Konstruktion von Figuren aus verschiedenen Kreisbögen helfen kann.

Beispiel i:
Konstruktion eines Herzens

Wir fertigen zunächst eine Überlegungsfigur an, in der wir die verwendeten Kreisbögen zu ganzen Kreisen ergänzen. Da wir wissen (vgl. Aussage *), daß die Berührungspunkte der Kreise auf den Verbindungsgeraden der jeweiligen Kreismittelpunkte liegen, zeichnen wir auch diese Verbindungsgeraden ein:

Bild 6

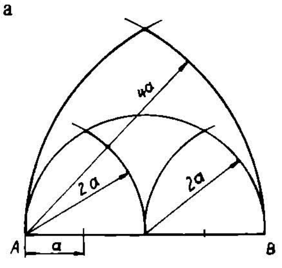


Nun dürfte die Konstruktion keine Schwierigkeiten mehr bereiten:
1. gleichschenkliges Dreieck $M_1M_2M_3$ mit $\overline{M_1M_2}$ als Basis
(Das Dreieck muß wegen der Axialsymmetrie der Figur gleichschenklig sein. Die Form des Herzens richtet sich nach dem Verhältnis $\overline{M_1M_2}:\overline{M_1M_3}$; siehe z. B. Bild 8i);
2. Kreis k_1 um M_1 mit $r_1 = \frac{\overline{M_1M_2}}{2}$;
Kreis k_2 um M_2 mit $r_2 = \frac{\overline{M_1M_2}}{2} \rightarrow$ Berührungspunkt von k_1 und k_2: C;
3. Kreis k_3 um M_3 mit $r_3 = \overline{M_1M_3} - r_1 \rightarrow$ Berührungspunkte des Kreises k_3 mit k_1 und k_2: B, D;
4. Parallele zu M_1M_2 durch $M_3 \rightarrow$ Schnittpunkte der Parallelen mit k_3: A, E;
5. Kreise k_4 und k_5 mit den Durchmessern $\overline{AM_3}$ bzw. $\overline{M_3E}$.
Die gesuchte Figur besteht aus den Kreisbögen $\widehat{M_3A}$; $\widehat{AB}$; $\widehat{CB}$; $\widehat{DC}$; $\widehat{DE}$; $\widehat{EM_3}$. (Zur Bezeichnung der Kreisbögen vgl. Lehrbuch Mathematik 7, S. 138.)

Beispiel h:
Konstruktion eines gotischen Fensters

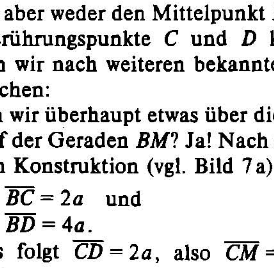
Die ersten Konstruktionsschritte dürften unmittelbar aus dem Bild 1h erkennbar sein:

Bild 7a



Wie aber finden wir den Mittelpunkt und den Radius r des noch fehlenden Kreises?
Wir wissen: 1. Wegen der Symmetrie der Figur liegt M auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.
2. Angenommen, M wäre schon bekannt; wegen des Satzes (2) müßten die Berührungspunkte C und D dann auf der Geraden BM liegen:

Bild 7b



Da wir aber weder den Mittelpunkt M noch die Berührungspunkte C und D kennen, müssen wir nach weiteren bekannten Größen suchen:
Wissen wir überhaupt etwas über die Strecken auf der Geraden BM? Ja! Nach der bisherigen Konstruktion (vgl. Bild 7a) ist:

$\overline{BC} = 2a$ und
$\overline{BD} = 4a$.

Daraus folgt $\overline{CD} = 2a$, also $\overline{CM} = a$ und $\overline{BM} = 3a$.
Damit kann in dem Bild 7a der Punkt M (Kreise um A und B mit $r = 3a$) und schließlich der noch fehlende Kreis um M mit $r = a$ konstruiert werden.

Aufgaben

▲1▲ Konstruiere die Figuren aus den Bildern 1a bis 1l!
(*Hinweis:* In manchen Fällen sind – ähnlich wie im Beispiel i bestimmte Stücke frei wählbar, wodurch sich die Form der Figur geringfügig ändern kann. In den Lösungen ist im allgemeinen nur eine Möglichkeit angegeben.)

▲2▲ Berechne für die Figur in Bild 8a
a) das Verhältnis der drei Radien,
b) den Umfang, wenn r_1 gegeben ist!

▲3▲ In Bild 1d sei der Radius der kleinen Kreise r. Berechne
a) den Radius des großen Kreises,
b) den Flächeninhalt der grauen Fläche!

E. Goldberg

Traumlösung

Im Schlaf wurden die größten Entdeckungen gemacht und Meisterwerke der Literatur und Musik geschaffen.

Als der russische Gelehrte Dmitri Mendelejew an seinem Periodensystem der Elemente arbeitete, konnte er es lange nicht in Form einer Tabelle bringen. Nach langer rastloser Arbeit schlief er ein und träumte das, was seinen Namen unsterblich machte.
Mendelejew selbst darüber: „Ich sah im Traum eine Tabelle, in der die Elemente so wie nötig angeordnet waren; als ich aufwachte, schrieb ich sie sofort auf einen Zettel – nur an einer Stelle war später eine Korrektur notwendig."

Der französische Mathematiker Henri Poincaré – nicht in der Lage, eine Gleichung zu integrieren – ließ sie liegen und ging schlafen. Gegen Morgen hatte er einen Traum, in dem er vor den Studenten eine Vorlesung hielt und an der Tafel diese Gleichung löste. Poincaré erwachte und schrieb die Lösung aufs Papier.

Der bekannte Mathematiker Carl Friedrich Gauß löste im Schlaf eine Aufgabe, über der er 19 Jahre gesessen hatte.

Der italienische Komponist Giuseppe Tartini kam lange Zeit mit einer seiner Sonaten nicht zurande. Einmal erschien ihm der Teufel, der eine außergewöhnliche Melodie trällerte. Tartini erwachte, schrieb die Musik und nannte sie *Teufelstriller-Sonate*.

Der deutsche Chemiker Friedrich August Kekulé von Stradonitz sah im Traum die gewohnten langen linearen Ketten von Atomverbindungen des Azetylen. Plötzlich begannen die Ketten in Bewegung zu geraten, näherten einander, wanden sich wie Schlangen. Eine packte ihren Schwanz und begann sich zu drehen. Kekulé erwachte und verbrachte den Rest der Nacht mit der Aufstellung einer neuen Hypothese: der ringförmigen Verkettung des Benzols.

aus: Sputnik, Moskau

Carl Zeiss
(1816 bis 1888)

Vor 100 Jahren, am 3. 12. 1888 starb in Jena Carl Zeiss, der Gründer des heute weltbekannten Betriebes für optische, feinmechanische und neuerdings auch elektronische Geräte, der nun den Namen VEB Kombinat Carl Zeiss trägt. Wer heute den Namen Zeiss hört, denkt wohl zuerst an Planetarien und astronomische Fernrohre, an die Multispektralkamera und andere hochspezialisierte Hilfsmittel der Forschung. Was aber einst den Ruhm der Firma begründete, war die Produktion von Mikroskopen, die erst durch Zeiss im Zusammenwirken mit dem Jenaer Physiker Ernst Abbe (1840 bis 1905) aus dem Stadium des *Pröbelns* in das Stadium exakter Berechnung überführt wurde.

Carl Zeiss wurde am 11. 9. 1816 in Weimar als Sohn eines Kunstdrechslermeisters geboren, der zugleich ein Spielwarengeschäft betrieb. Nach dem Besuch des Gymnasiums in Weimar (etwa bis zur heutigen 10. Klasse) ging er 1834 nach Jena in die Lehre zum Hofmechanikus Dr. Friedrich Körner, der eine private Werkstatt führte und zugleich als Privatdozent an der Universität Unterricht im Bau wissenschaftlicher Geräte erteilte. Eine ähnliche Mischung von gewerblicher Tätigkeit und engem Kontakt zur sich stürmisch entwickelnden Naturwissenschaft mag auch Carl Zeiss als Ideal künftigen Wirkens vorgeschwebt haben. Als er sich jedoch nach den damals noch für Handwerker üblichen Wanderjahren 1845 um die Eröffnung eines eigenen Geschäftes bewarb, zunächst in Weimar, dann in Jena, mußte er lange gegen erhebliche bürokratische Widerstände kämpfen. Immerhin war Jena damals ein Städtchen von nur etwa 6 000 Einwohnern, in dem es bereits zwei Optiker und Mechaniker gab. Daß ein hochspezialisierter Handwerksbetrieb nach wenigen Jahren Kunden unter den Wissenschaftlern halb Europas haben könnte, war den um ihr bescheidenes Brot fürchtenden Jenaer Bürgern nicht vorstellbar. Hervorzuheben ist, daß Zeiss die lange Wartezeit nutzte, um wiederum an der Universität Vorlesungen über Mathematik, Physik und Chemie zu besuchen und den Professoren bei der Herstellung bzw. Verbesserung ihrer Apparaturen zu helfen, wie er es auch schon während seiner Lehre getan hatte. So erwarb er viele nützliche Kenntnisse und Bekanntschaften. Insbesondere in dem bedeutenden Jenaer Botaniker Matthias Jacob Schleiden (1804 bis 1881), einem Pionier der Erforschung der Pflanzenzellen, erwuchs ihm ein verständnisvoller und engagierter Förderer.

Nachdem Zeiss 1846 die Erlaubnis zur Gründung eines *mechanischen Ateliers* erkämpft hatte, hat er seinen Betrieb aus bescheidensten Anfängen zum Weltruhm geführt. Das Hauptproblem bestand für ihn zunächst in einer wesentlichen Verbesserung des Auflösungsvermögens der Mikroskope, deren Zusammensetzung aus verschiedenen Linsen damals noch weitgehend vom zufälligen Ergebnis geduldigen Probierens abhing. Nachdem eine anfängliche Zusammenarbeit mit dem Jenaer Mathematiker Fr. W. Barfuß nicht zu brauchbaren Ergebnissen geführt hatte, gewann er 1866 den aus einer Arbeiterfamilie stammenden Physikprofessor Ernst Abbe zur Mitarbeit. 1871 gelang es Abbe, ebenfalls nach nicht wenigen Mißerfolgen, die Abhängigkeit der Bildqualität von der Lichtbeugung an den nicht selbstleuchtenden Objekten mathematisch zu beschreiben, und 1873 fand er die nach ihm benannte Sinusbedingung für mikroskopische Linsensysteme, die deren Berechnung bis heute zugrundeliegt. Einen weiteren Meilenstein in der Verwissenschaftlichung der optischen Produktion stellte ab 1881 die Zusammenarbeit mit dem Chemiker und Glastechniker Dr. Friedrich Otto Schott (1851 bis 1935) dar, die 1884 zur Errichtung der *Schottschen* Glashütte in Jena als wichtigem Zulieferbetrieb führte. Abbe wurde 1875 Teilhaber von Zeiss, nach dessen Tod Alleininhaber und wandelte den Betrieb schließlich in die Form einer Stiftung um, deren Überschüsse der Stadt und Universität in vielfältiger Form zugute kamen. Aus Mitteln der Zeiss-Stiftung wurden z. B. das Volkshaus in Jena mit Bibliothek und größtem Veranstaltungssaal der Stadt sowie das *Abbeanum* der Universität erbaut, in dem Teile der Sektionen Mathematik und Physik bis heute beheimatet

sind. Hatten noch bis zum Tode von Zeiss die Mikroskope den Kern der Produktion gebildet, so wurde nach seinem Tode nach und nach auch die Herstellung von Fotoapparaten, terrestrischen und astronomischen Fernrohren, geodätischen Instrumenten aufgenommen.

Gewiß beruhte der Erfolg von Carl Zeiss zum Teil auf seiner geschäftlichen Begabung, der Durchsetzung höchster Qualität und Präzision in der täglichen Arbeit und auch auf der damals allgemein üblichen harten Ausbeutung der Arbeiter und besonders der Lehrlinge. Entscheidend aber war seine frühe Erkenntnis, daß eine Produktion, die Hilfsmittel für die Wissenschaft liefert, sich selbst in starkem Maße der Wissenschaft bedienen muß.

Von seinem Weg der mathematischen und physikalischen Durchdringung der Wirkungsprinzipien der optischen Geräte ließ er sich auch durch anfängliche Rückschläge technischer und ökonomischer Art niemals abbringen. So ehren wir heute in Carl Zeiss einen Pionier der Entwicklung von Mathematik und Naturwissenschaften zur unmittelbaren Produktivkraft.

P. Schreiber

Neue Inhalte und Anforderungen an Berufe im Kombinat VEB Carl Zeiss JENA

Wenn man den Namen *Carl Zeiss JENA* hört, denkt man oft zuerst an Optik und Präzisionsmechanik. Haben sich doch unsere Gründer Carl Zeiss, Ernst Abbe und Otto Schott einen bleibenden Platz in der Geschichte verdient, haben Generationen von erfahrenen Facharbeitern in Optik und Mechanik auf einer wissenschaftlichen Grundlage des optischen Präzisionsgerätebaus durch ihre Arbeit einem Firmennamen Weltruf verschafft.

Nun beinhaltet die vom XI. Parteitag der SED beschlossene ökonomische Strategie, daß sich unser Kombinat VEB Carl Zeiss JENA zu einem Zentrum von Hochtechnologien entwickelt. Die Mikroelektronik ist eine solche Technologie, und vor allem darauf ist diese Strategie gerichtet.

Schon seit den letzten 15 Jahren haben wir nun in unserem Kombinat schrittweise zunehmend anspruchsvolle Aufgaben für die Herstellung und Anwendung der Mikroelektronik in Angriff genommen. Die größten Effekte in unserem Kombinat hat die Mikroelektronik bei der Lösung von Aufga-

ben ermöglicht, die für die Mikroelektronik selbst unerläßlich, aber auf herkömmliche Weise nicht beherrschbar sind. So ist beispielsweise mit der Mikroelektronik der Anspruch an die Hochleistungssysteme der Optik enorm gewachsen. Nur durch die Computertechnik ist es überhaupt noch möglich, derartige Optiken zu berechnen und herzustellen.
So sind Erzeugung wie auch Anwendung der Geräte unseres Kombinates durchdrungen von Rechentechnik. Wir wollen nun genauer anschauen, wodurch diese *Durchdringung* gekennzeichnet ist, und welche Anforderungen und Perspektiven sich nicht zuletzt für mathematikorientierte Berufe auftun.

Renaissance der Optik und Mikroelektronik

Vor wenigen Jahrzehnten war man der Meinung, daß bei der Entwicklung optischer Systeme keine bedeutenden Fortschritte mehr möglich sind. Mit den Anforderungen, die die Raumfahrt (Multispektralkamera MKF 6) und die Mikroelektronik an die optischen Systeme stellten, kam es zu einer Renaissance der Optik. Für die Herstellung höchstintegrierter Schaltkreise werden Objektive benötigt, die Strukturbreiten von 0,002, später auch bis zu 0,0005 mm abbilden können. Solche Objektive sind selbst das Entwicklungsergebnis modernster CAD-Technik.

Mikroelektronik im Optischen Präzisionsgerätebau

Die Geräte unseres Kombinates sind hauptsächlich informationsverarbeitende Geräte. Ihre Bedienung erfordert zunehmend Kenntnisse aus der Informatik. Umgekehrt wird die Informatik zunehmend zur notwendigen Methode, ein Gerät überhaupt erst zu entwickeln. Man kann das ablesen daran, wie sich die *Elektronik-Dichte* in unseren Geräten weiter vollzieht. Gleichzeitig wächst auch die Dichte, mit der Transistorfunktionen in einem Schaltkreis untergebracht werden.

Bild 1
Ausschnitt einer Struktur aus dem 64 KBit DRAM-Schaltkreis U 2164. Die Auflösung beträgt etwa 2 Mikrometer, die Reliefhöhe etwa 1 Mikrometer.

Bild 2
Entwicklung der Elektronikdichte in den Erzeugnissen des Optischen Präzisionsgerätebaus unseres Kombinates VEB Carl Zeiss JENA. Es ist davon auszugehen, daß sich die Anzahl der Transistorfunktionen je Gerät durchschnittlich alle 2 Jahre verdreifacht.

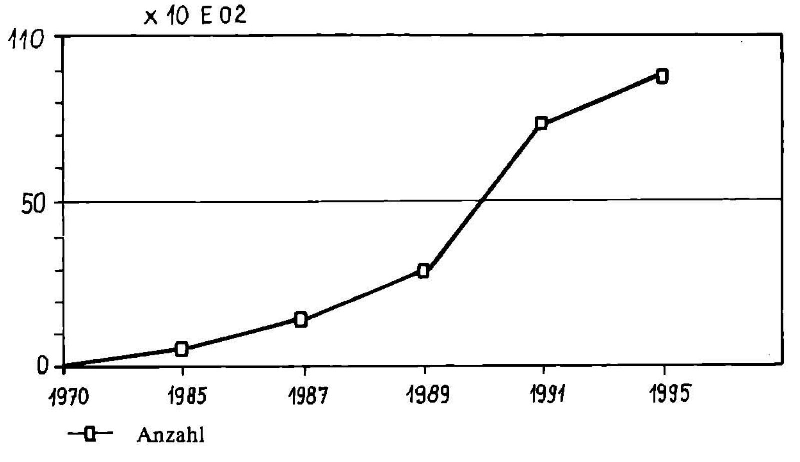


Bild 3
Wachstum der Komplexität bei Schaltkreisen, die im Kombinat VEB Carl Zeiss JENA zum Einsatz kommen. Bezogen auf 1987 = 1 bedeutet dies für die Jahre 1988 = 4, 1990 = 15, 1992 = 50 und 1995 = 125fache Komplexität.
Das entspricht übrigens auch dem Gesetz von Gordon Moore, wonach sich die in einem Chip integrierte Bauelementeanzahl alle 2 Jahre verdreifacht bei gleichbleibender Chipfläche.

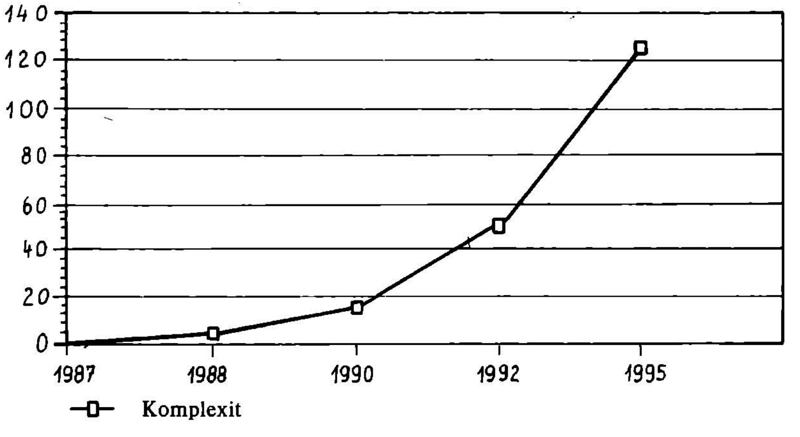


Bild 4
Ein anwenderspezifischer Schaltkreis verhindert die Arbeit, die sonst beim Einsatz vieler herkömmlicher elektronischer Bauelemente aufgewendet würde.

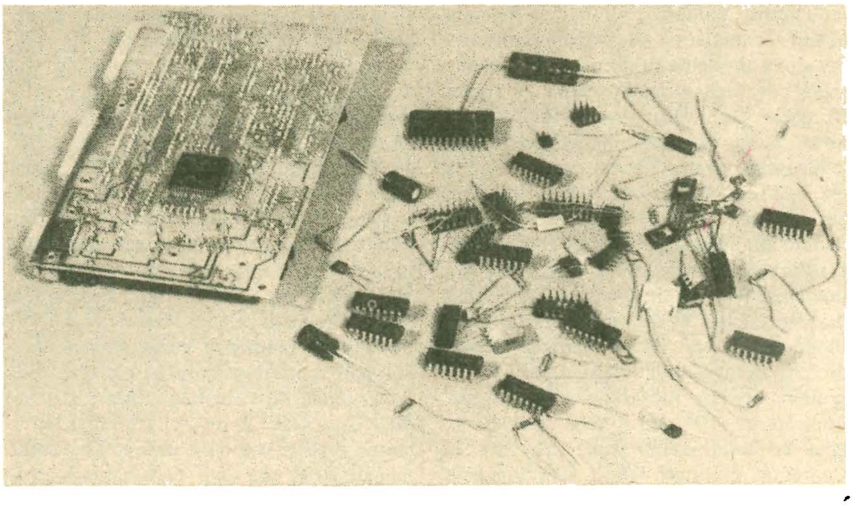
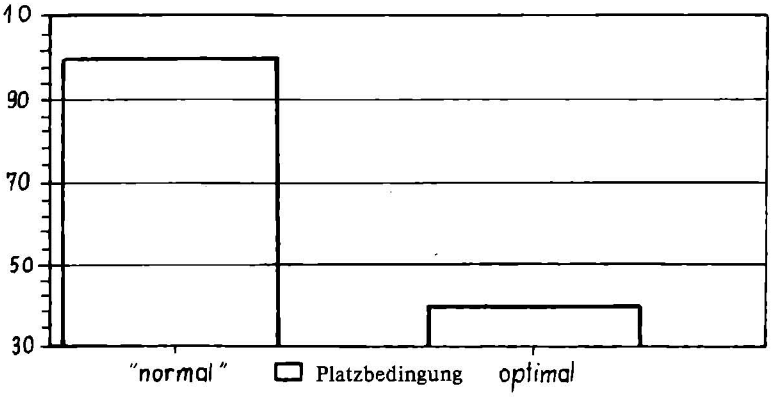


Bild 5
Will man eine digitale Schaltung in einen Schaltkreis integrieren, so kann man bis zu 60 % Platz sparen, wenn man vorher eine Optimierung durchführt.



Die Spitze eines Eisberges

In unserem Kombinat sind inzwischen alle Voraussetzungen gegeben, hochintegrierte und auch Hybrid-Schaltkreise selbst zu entwerfen und herzustellen. Bei den hochintegrierten Schaltkreisen arbeiten wir zur Zeit mit einem Integrationsgrad von 3000 Gattern je Schaltkreis. 1990 werden es über 100000 Gatter je Schaltkreis sein. Wir bezeichnen solche Schaltkreise als *anwenderspezifische* Schaltkreise. Das besonders Interessante an ihnen ist, daß man damit für jedes Gerät oder jeden Anwendungszweck die elektrischen Schaltungen *maßgeschneidert* in einen Schaltkreis hineinpacken kann, daher auch die Bezeichnung *anwenderspezifisch*. Die Wirkung besteht darin, daß das, was bisher in Form von Baugruppen aufgebaut wurde, nun auf eine Leiterplatte geht; daß das, was bisher auf einer Leiterplatte war, nun in einen einzelnen Schaltkreis geht. Man kann sagen, daß mit einem solchen Schaltkreis ein bis zwei Leiterplatten oder etwa 100 bis 200 elektronische Bauelemente *eingespart* werden können. Aber man darf das nicht so verstehen, daß 1 bis 2 Leiterplatten bzw. 100 bis 200 Bauelemente, die bisher *da* waren, nun *nicht mehr da* sind. Vielmehr wird mit dem Einsatz eines anwenderspezifischen Schaltkreises von vornherein die Verwendung so vieler Leiterplatten oder Bauelemente verhindert.
Die Folgen sind also außer einer *Einsparung* von Bauteilen auch verringerte Masse, reduziertes Volumen, geringerer Energiebedarf, reduzierter Herstellungsaufwand, vor allem aber eine Erhöhung der Zuverlässigkeit der Schaltung. Als Preis zu zahlen ist dabei eine völlig neue Herangehensweise beim Entwurf solcher integrierter maßgeschneiderter Schaltungen. U. a. ist ein restloses Beherrschen und Verstehen der elektrischen Schaltung, die in einen Schaltkreis gepackt werden soll, unumgänglich. Hier bekommen Fragen der mathematischen Durchdringung und Modellierung solcher Schaltungen einen hohen Stellenwert. Beim Entwurfsprozeß müssen die Schaltungen auf einem Computer simuliert werden. Erfahrungen zeigen, daß im späteren selbst entworfenen Schaltkreis alles das funktionieren wird, was vorher im Computer simuliert wurde, aber von dem, was nicht simuliert wurde, auch nichts funktionieren wird. Beim Aufbau einer Leiterplatte können beim Ausprobieren einzelne Bauelemente notfalls ausgetauscht, oder es können auch einmal ein paar Drähte noch hineingelötet werden. Beim Integrieren geht das nicht – es muß dann ggf. der ganze Schaltkreis neu hergestellt und wieder ausprobiert werden. Wie wichtig diese mathematische Durchdringung der in einen Schaltkreis hineinzuintegrierenden Schaltungen sein kann, läßt sich auch folgendermaßen zeigen:
Das wird auch an einem weiteren Beispiel deutlich: Nach der Herstellung eines solchen Schaltkreises muß er meßtechnisch überprüft werden. Wenn es sich z. B. um eine rein digitale Schaltung von z. B. 25 Flip Flops handelt, die mit einer Rate von 10 Millionen mal in der Sekunde ein- und ausgeschaltet wird, würde das Messen aller dann möglichen Schalt-Zustände dennoch eine Zeit von etwa 36 Jahren erfordern. Um solche Testzeiten in die Größenordnung von einigen Sekunden oder Minuten zu bringen, sind hochentwickelte, natürlich mathematisch fundierte *Fahrpläne* für solche Meßarbeiten vonnöten.

Computer aus dem Baukasten

Bei der Benutzung von Geräten unseres Kombinates gibt es eine Reihe von Aufgaben der Bedienung, Steuerung und der Auswertung von Meßdaten. Bisher wurden viele dieser Arbeiten vom Menschen ausgeführt. Aufgrund der Zunahme des Umfangs, der notwendigen Schnelligkeit und der Kompliziertheit dieser Arbeiten müssen diese immer mehr dem Gerät selbst überlassen werden. Wir sagen dazu, daß die Geräte durch den Einbau von immer mehr Mikroelektronik *intelligenter* gemacht werden. Ein Weg dahin führt über die Verwendung *maßgeschneiderter* Computer im Innern der Geräte unseres Kombinates. Stets geht es dabei darum, aus einem Grundsortiment solcher Module (z. B. Zentraleinheit, Meßwerte verarbeitende Baugruppen, Antriebssteuerungen ausführende Baugruppen, Speicherbaugruppen u. a. m.) diejenigen Mikrocomputer mit einer Verarbeitungsbreite von 8 Bit und 16 Bit zusammenzusetzen, die dem Verwendungszweck des Gerätes am besten entsprechen. Die 8 Bit-Computer setzen wir in der Regel in kleineren Geräten bzw. als Hilfscomputer in größeren Baugruppen ein, während die 16 Bit-Computer vorrangig in Großgeräten verwendet werden. Ein Beispiel für die Anwendung vieler solcher Baugruppen in einem Großgerät ist die elektronische Steuerung unseres Großplanetariums *COSMORAMA*.

Womit wir es noch zu tun haben – Software

Obwohl wir ein Kombinat des Optischen Präzisionsgerätebaus sind, wird dennoch jeder zweite in Forschung und Entwicklung arbeitende Kollege direkt mit der Elektronik zu tun haben. Die Gründe dafür wurden bereits dargelegt. Ähnlich wie der Gebrauch eines Homecomputers nur in dem Maße möglich ist, in dem man dafür Software zur Verfügung hat, muß man sich das auch bezgl. der Verwendung der Geräte unseres Kombinates vorstellen. Es geht also darum, daß unsere Werktätigen in weitaus größerem Ausmaß in der Lage sein müssen, Software herzustellen. Im Grunde genommen müssen sich auch die Kollegen, die unsere Geräte in der Fertigung in Betrieb nehmen und ausprobieren, zum praktischen Umgang mit solcher Software befähigen. Insgesamt bleiben diese Anforderungen an die Tätigkeit der Werktätigen auf unbestimmte Zeit gültig, da sich die Mikroelektronik selbst auf unbestimmte Zeit weiter mit höchstem Tempo weiterentwickelt. Dieses Tempo ist dadurch zu kennzeichnen, daß sich der Entwicklungsstand der Mikroelektronik, man kann auch sagen – das Fachwissen – alle 2 bis 3 Jahre erneuert.

Die Aussichten

Wir haben gesehen, daß sich im Optischen Präzisionsgerätebau Veränderungen ereignen. Die Optischen Präzisionsgeräte wandeln sich entsprechend ihrem Verwendungszweck zu Geräten der Informatik. Das trifft vor allem auch auf die Hochtechnologie-Produkte unseres Kombinates zu. Gleichzeitig werden zu ihrer Entwicklung und Herstellung selbst modernste Hochtechnologien einschließlich moderner Rechentechnik benötigt. Das Erzeugen einer immer mehr maßgeschneiderten Mikroelektronik in den Geräten, aber auch deren Ausstattung mit Software erfordert von unseren Werktätigen, daß sie sich zunehmend von gewohnten Arbeitsmethoden trennen und sich mit neuen anfreunden müssen. Zu den neuen ist in jedem Falle der Umgang mit Computertechnik einschließlich die Herstellung maßgeschneiderter Mikrocomputer, das mathematische Durchdringen verschiedener Entwurfsarbeiten und das Herstellen oder die Anwendung von Software zu rechnen. So sieht man, daß sich für mathematisch interessierte oder vorgebildete Werktätige eine Reihe von ausgesprochen interessanten Arbeitsmöglichkeiten in unserem Kombinat ergibt.

L. Wolf

Regsechs und Gleisechs – zwei Legespiele

Fünf Dreiecke – ein Sechseck, ein Fünfeck, ein Rechteck

Zur Erinnerung: *Ein regelmäßiges Sechseck besitzt sechs gleichlange Seiten, und jeder Innenwinkel eines derartigen Sechsecks beträgt 120°. Die Seitenlänge stimmt mit dem Umkreisradius überein.*

Zeichnet euch ein regelmäßiges Sechseck und zerlegt es mit Hilfe spezieller Diagonalen in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke und in drei untereinander kongruente gleichschenklige Dreiecke, so wie es Bild 1 zeigt.

Bild 1

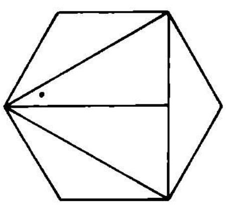
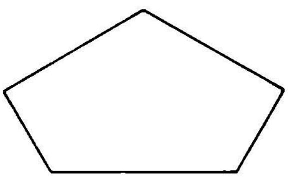


Bild 2



Versucht dann, aus diesen fünf Elementen den in Bild 2 dargestellten Drachen, also ein Fünfeck, sowie ein Rechteck und einen Rhombus zusammenzulegen. Aus dem Rhombus erhaltet ihr sofort zwei kongruente gleichseitige Dreiecke. Nun ist es auch ganz leicht, das Haus (Bild 3) und das Segelschiff (Bild 4) zu bauen.

Bild 3

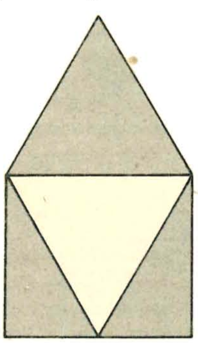
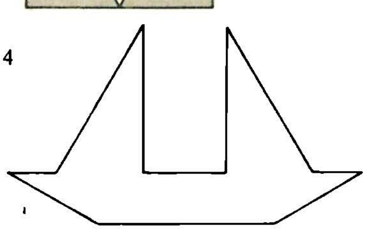


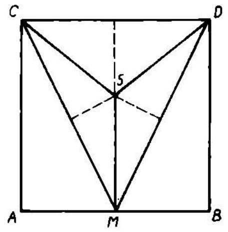
Bild 4



Leider gelingt es nicht, aus den fünf Elementen ein Quadrat zu legen. *Das Legespiel nennen wir Regsechs.*

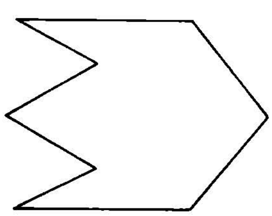
Um das Spiel *Gleisechs* zu erhalten, wollen wir von einem Quadrat (Bild 5) ausgehen. Man verbinde den Mittelpunkt M der Seite AB mit den Eckpunkten C und D. Anschließend wird das Dreieck CDM in drei Teildreiecke so zerlegt, daß $\overline{CS} = \overline{DS} = \overline{MS}$ ist. Wir haben also wieder fünf Dreiecke, nämlich die kongruenten rechtwinkligen Dreiecke ACM und BDM, die kongruenten gleichschenkligen Dreiecke DMS und CMS sowie das Dreieck CDS.

Bild 5



Legt nun ein gleichseitiges Sechseck, eine zum Drachen (Bild 2) verwandte Fünfeckfigur, einen Rhombus und die Schwalbe (Bild 6) aus den fünf Elementen von Gleisechs zusammen. Sicher findet ihr noch weitere interessante Figuren.

Bild 6



Und wenn ihr beim Suchen nach neuen Kombinationen etwas Muße findet, so berechnet doch einmal alle Winkel und alle Seitenlängen der Dreiecke bei beiden Spielvarianten. Vielleicht können euch dabei Geschwister, Freunde oder eure Eltern helfen.

▲1▲ Welche Innenwinkel besitzt das zusammengelegte gleichseitige (aber nicht regelmäßige) Sechseck?

▲2▲ Wie ist in Bild 5 der Punkt S zu konstruieren?

Übrigens: Werden die Dreiecke der Legespiele aus Pappe, Plaste oder Sperrholz angefertigt, dann dürfte dies ein originelles, schönes Weihnachtsgeschenk sein!

W. Schmidt

Kryptogramm

An das Pioniertreffen erinnert unser Kryptogramm, bei dem Buchstaben derart durch Ziffern zu ersetzen sind, daß die Additionsaufgabe richtig gelöst wird.
Wieviel verschiedene Lösungen gibt es?

$$\begin{array}{r} \text{KARL} \\ +\ \text{MARX} \\ \hline \text{STADT} \end{array}$$

W. Schmidt, Greifswald

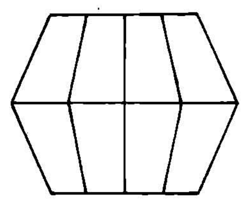
Knobeleien
(nicht nur) für Klasse 8

Folgende Aufgaben stammen aus der 30. Mathematikolympiade der RSFSR, die im Februar dieses Jahres stattfand. Dr. Werge von der Karl-Marx-Universität Leipzig, zu dieser Zeit zu einem Studienaufenthalt in der Sowjetunion, sandte uns diese Aufgaben und wünscht euch viel Spaß beim Knobeln! Ich natürlich auch!

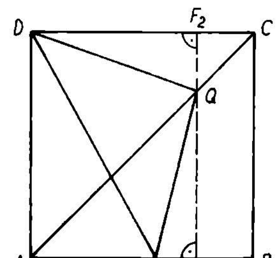
Alphons

▲1▲ Können in den Ecken eines regelmäßigen Achtecks die Zahlen 1, 2, ..., 8 so verteilt werden, daß die Summe der Zahlen in drei beliebigen benachbarten Ecken
a) größer als 11,
b) größer als 13 ist?

▲2▲ Teile ein regelmäßiges Sechseck in acht flächengleiche Stücke!

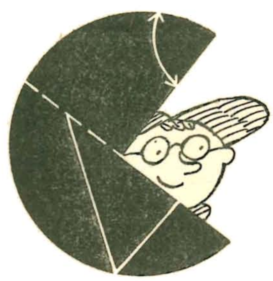


▲3▲ Auf der Seite $\overline{AB}$ bzw. der Diagonalen $\overline{AC}$ eines Quadrates $ABCD$ liegen die Punkte P bzw. Q so, daß
$\overline{AP} : \overline{PB} = 3:2$ und
$\overline{AQ} : \overline{QC} = 4:1$ gilt.
Bestimme die Winkel im Dreieck PQD!



▲4▲ Über zwei Häufchen von Spielsteinen ist folgendes bekannt: Werden vom ersten 100 Steine auf den zweiten gelegt, liegen auf dem zweiten zweimal mehr Steine. Wird aber (vom Ausgangszustand) eine gewisse Zahl Steine vom zweiten zum ersten Häufchen gelegt, so ist ihre Zahl auf dem ersten sechsmal größer als auf dem zweiten.
Wie groß ist die kleinstmögliche Zahl von Steinen in beiden Häufchen?

In freien Stunden · alpha-heiter



Weihnachtliche Kryptarithmetik

Wie müssen die Ziffern der englischen Kryptogramme lauten, damit richtig gelöste Additionsaufgaben entstehen?

a)
```
  N O E L
+ N O E L
---------
  B E L L
```

b)
```
  N O E L
+ N O E L
---------
B E L L S
```

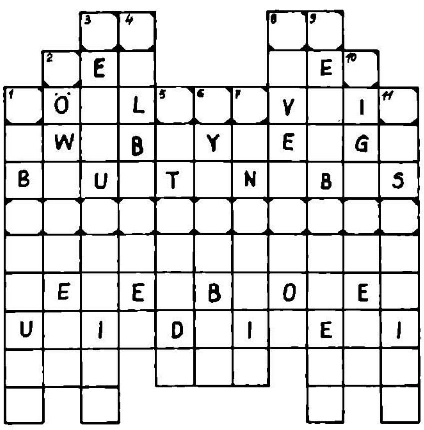
c)
```
    D I N G
    D O N G
    D I N G
    D O N G
+ B E L L S
-----------
  S O U N D
```

aus: Journal of Recreational Mathematics, Farmingdale

alpha-heiter – ernst

Gesucht sind 11 senkrecht einzutragende mathematische Begriffe bzw. Namen von Wissenschaftlern:

1. Zuordnung, 2. Logiker und Mathematiker (1878 bis 1940), 3. Anordnung von Elementen,
4. Zerlegen eines Ganzen in zwei gleiche Teile,
5. sternförmige Kurve mit vier Spitzen,
6. Kegelschnitt, 7. Begründer der Relativitätstheorie (1879 bis 1955), 8. Spiegelung am Kreis,
9. Relation im Bereich der ganzen Zahlen,
10. Charakteristikum einer Matrix, 11. Begriff aus der Reihenlehre.



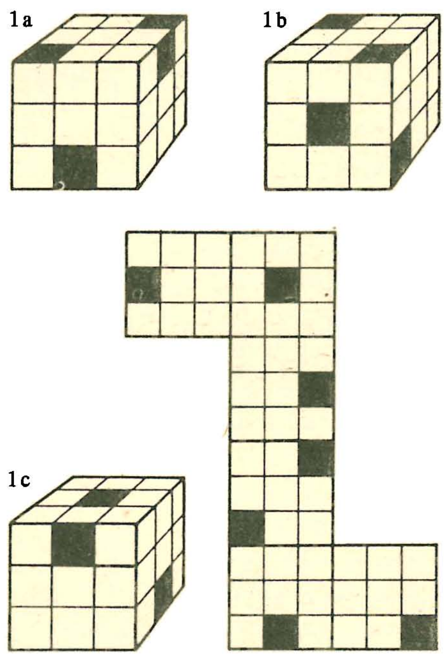
Bei richtiger Eintragung der Begriffe bringen die Anfangsbuchstaben (1 bis 11) und die Buchstaben der markierten Mittelzeile (v. l. n. r. gelesen) eine Meinung vieler alpha-Leser zum Ausdruck.

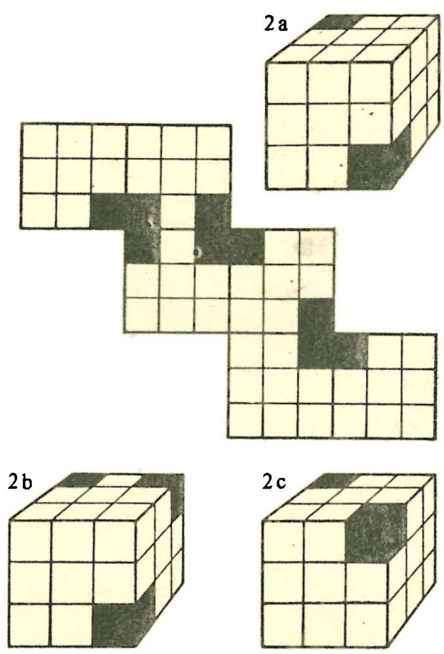
Dr. R. Mildner, Leipzig

Würfellogik

Gehört das angegebene Flächennetz zu einem, zu zwei, zu drei oder zu keinem der abgebildeten Würfel?

aus: Logigram, Paris



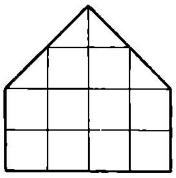


Was alles in einem Dreieck steckt

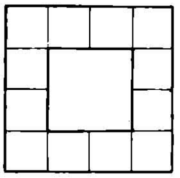
Die Figur A ist mit fünf Schnitten so zu zerlegen, daß aus den entstehenden Teilen die Figur B zusammengesetzt werden kann.

Ing. A. Körner, Leipzig

Figur 1



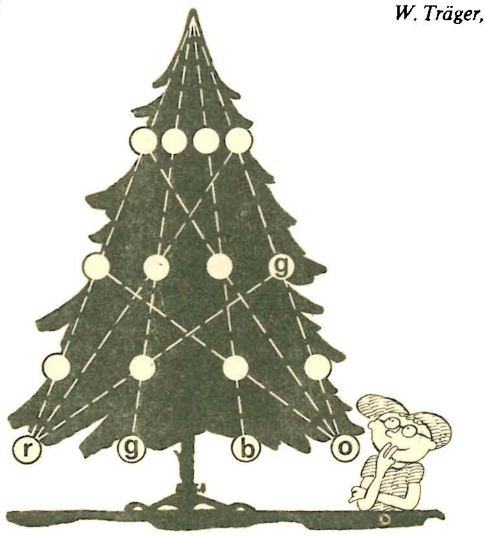
Figur 2



Knobeleien am Weihnachtsbaum

Ein Weihnachtsbaum wurde mit Glaskugeln in den Farben rot (r), gelb (g), blau (b) und olivgrün (o) sowie silbrigen Baumschmuckgirlanden festlich ausgestattet. Genau vier Glaskugeln von jeder Farbe sind sichtbar. Von diesen befinden sich an den Zweigen keines der vier Quirle sowie auf keinem der im Bilde geradlinigen Girlandenteile zwei Kugeln gleicher Farbe. Von fünf Kugeln ist die Farbe angegeben. Welche Farbe haben die übrigen Kugeln?

W. Träger, Döbeln

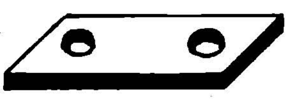


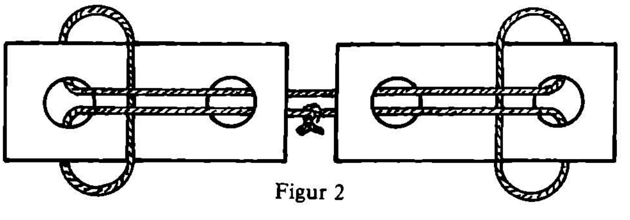
Löse die Verbindung

Nimm die Hülse einer Streichholzschachtel und schneide Ober- und Unterseite ab. Dahinein kommen zwei Löcher mit einem Durchmesser von etwa 1 cm. Fädele einen Faden (nicht zu kurz) durch die Löcher und knote ihn fest (siehe Bild).
Probiere nun die Teile der Streichholzschachtel vom Faden zu trennen ohne den Knoten zu lösen.

aus: Pythagoras, Amsterdam

Figur 1





Figur 2

1988 – 1989

Die durch Hintereinanderaufschreiben der Ziffern dieser beiden Jahreszahlen entstehende Zahl 19 881 989 ist in Primfaktoren zu zerlegen. Dabei benutze man zweckmäßig die Tabelle der Primzahlen im Tafelwerk und den SR 1!

W. Träger, Döbeln

Eine schöne Bescherung

Vor dem Auspacken ihrer in drei Paketen verpackten Weihnachtsgeschenke stellen die Geschwister fest: Die drei quaderförmigen Pakete lassen sich zu einem Quader mit den Kantenlängen 6 dm, 5 dm und 2 dm aneinanderlegen. Auch die Maßzahlen aller Kanten der drei Pakete zur Maßeinheit Dezimeter sind ganzzahlig.
Zwei Pakete sind volumengleich, ohne daß beide Pakete durchweg gleiche Kantenlängen haben. Das dritte Paket hat ein kleineres Volumen als diese beiden. Welche Abmessungen haben die drei Pakete?

W. Träger, Döbeln

Daß dem berühmten Mathematiker David Hilbert alles *Schmalspurdenken* zuwider war, bewies er in einer Senatssitzung der Universität Göttingen. Dort debattierte man, ob die Mathematikerin Sonja Kowalewskaja auf einen ordentlichen Lehrstuhl berufen werden sollte – als erste Frau. Zu ihren Gunsten entschied Hilbert: „Meine Herren, wir sind doch keine Badeanstalt, sondern ein Senat!“

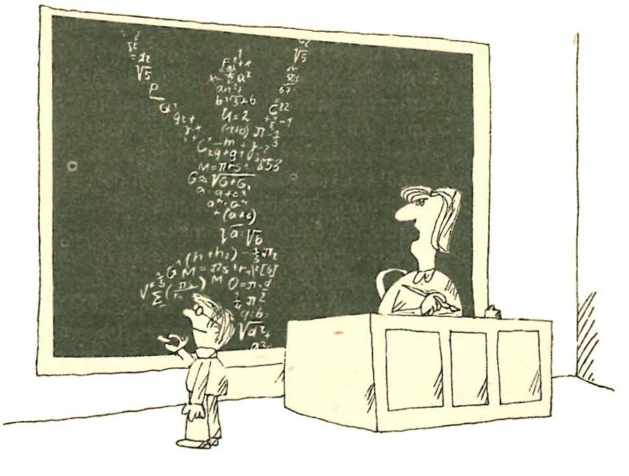
nach: Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, VEB Fachbuchverlag Leipzig

alpha-heiter · Preisaufgabe Heft 4/88

alpha gratuliert:

Karl Hause, Erfurt
Heike Lehmann, Machern
Ronald Peters, Wismar

L. Otto, Leipzig

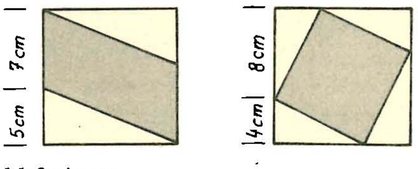


Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1989

Ma 5 ■ 2945 In den beiden Bildern wurden vom linken Quadrat zwei gleichgroße Teilflächen und vom rechten Quadrat vier gleichgroße Teilflächen abgeschnitten. Welche der beiden grauen Flächen hat den größeren Flächeninhalt? Begründe deine Feststellung!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Maße in cm

Ma 5 ■ 2946 Die vier Mitglieder einer Familie sind zusammen (in ganzen Jahren) 120 Jahre alt. Hanni ist 10 Jahre älter als ihr Bruder Peter. Die Mutter dieser Kinder ist dreimal so alt wie Hanni. Der Vater ist zwei Jahre älter als seine Frau. Wie alt ist jede dieser vier Personen?

Schülerin K. Schwartz, Suhl

Ma 5 ■ 2947 Löse die folgenden drei Aufgaben, ohne eine Multiplikation durchzuführen!

a) $1987 \cdot 1988 = a$
$1988 \cdot 1987 = b$
Bestimme $a : b$!

b) $123\,456 + 1988 \cdot 1987 = v$
$9\,876\,544 - 1987 \cdot 1988 = w$
Bestimme $v + w$!

c) $1987 \cdot 234\,560 = x$
$234\,559 \cdot 1987 = y$
Bestimme $x - y$!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2948 Beweise, daß es unter irgendwelchen 20 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen keine drei verschiedenen ungeraden Zahlen gibt, die sich durch 5 ohne Rest teilen lassen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2949 Hans und Franz wollten ihr Geld zusammenlegen und sich ein Knobelheft kaufen. Leider fehlte ihnen trotzdem noch etwas Geld für diesen Kauf. Hans fehlten 34 Pf und Franz fehlten 2 Pf an dem Preis.
Wieviel Geld hatte jeder, und wie teuer war das Knobelheft?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2950 Auf einem Sportplatz beträgt eine Runde 400 m. Fritz will mit seinem Hund Mopsi einmal um den Platz laufen. Beide starten zur gleichen Zeit und vom gleichen Punkt, aber in entgegengesetzter Richtung. Fritz legt in jeder Sekunde 3 m, sein Hund aber 5 m zurück. Nach wieviel Sekunden begegnen sich beide wieder? Wieviel Meter ist dann Fritz gelaufen?

StR W. Melka, Neubrandenburg

Ma 5 ■ 2951 Die Schülerinnen Anke, Bärbel, Yvonne und Doreen wohnen in den Städten Berlin, Cottbus, Halle und Leipzig. Von ihnen wissen wir folgendes:

(1) Bärbel und das Mädchen aus Halle waren zusammen im Ferienlager.

(2) Anke und Bärbel schreiben sich mit den Mädchen aus Berlin und Leipzig Briefe.

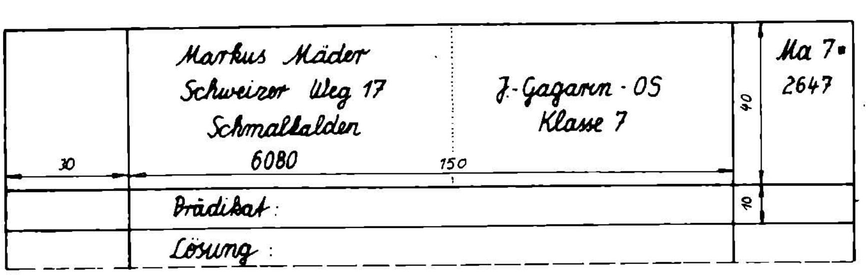
(3) Yvonne und das Mädchen aus Berlin besuchten kürzlich zusammen ein Trainingslager.

In welcher Stadt wohnen diese vier Schülerinnen?

Schülerin D. Weyh, Winne

Ma 6 ■ 2952 Zur Familie Meier gehören vier Personen. Der Vater ist sechsmal so alt wie sein jüngster und dreimal so alt wie sein ältester Sohn. Die Mutter ist 12 Jahre jünger als der Vater. Alle Familienmitglieder sind zusammen (in ganzen Zahlen) 123 Jahre alt. Wieviel Jahre ist die Mutter älter als ihr jüngster Sohn?

Schülerin D. Klaus, Aspenstedt



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

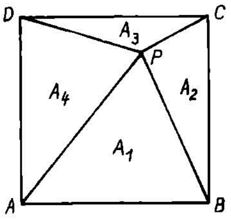
3. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer.) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.
4. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (siehe Muster), da die eingehenden Lösungen aufgabenweise sortiert und korrigiert werden. Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.
5. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“. Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!
6. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

Der Jahreswettbewerb 1988/89 läuft von Heft 5/1988 bis Heft 1/1989. Zwischen dem 1. und 10. September 1989 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden.

Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht.
Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/88 bis 1/89) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1988/89 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Allein anhand dieser werden die Teilnehmerlisten aufgestellt. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 2953 Ein innerer Punkt P des abgebildeten Quadrates $ABCD$ wurde mit den vier Eckpunkten des Quadrates verbunden. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABP$, $\triangle BCP$, $\triangle CDP$, $\triangle DAP$. Es ist nachzuweisen, daß die Beziehung $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$ gilt! *Sch.*

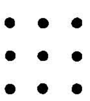


Ma 6 ■ 2954 Der Nachfolger vom Zweifachen eines Produkts aus zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen lautet 1985. Um welche beide Zahlen handelt es sich?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2955 Unter dem *Querprodukt* einer natürlichen Zahl versteht man das Produkt aus den einstelligen Zahlen, die ihren Grundziffern entsprechen. Gesucht ist die größte vierstellige natürliche Zahl, deren Querprodukt 504 beträgt.
Mathe-Klub, Gotha

Ma 6 ■ 2956 Die neun Punkte des Bildes seien Eckpunkte von vier Quadraten mit der Seitenlänge 1 cm. Ermittle die Anzahl der Geraden, die durch
a) genau drei dieser Punkte verlaufen,
b) genau zwei dieser Punkte verlaufen,
c) genau zwei dieser Punkte verlaufen, deren Abstand größer als 2 cm ist!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2957 Ermittle die kleinste sechsstellige natürliche Zahl, die aus lauter verschiedenen Grundziffern besteht und durch 18 teilbar ist! *Sch.*



Na/Te 6 ■ 434 Ein 200 m langer Zug durchfährt einen Tunnel, der eine Länge von 1,6 km hat. Wie lange dauert es, bis der Zug den Tunnel passiert hat, wenn er mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von $15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ fährt?

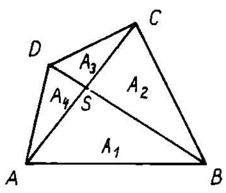
Ma 7 ■ 2958 Sieben Pilzsammler fanden zusammen 100 Speisepilze. Keine zwei der Pilzsammler hatten dieselbe Anzahl Pilze im Korb. Kann man in jedem Fall von den Pilzsammlern beliebig vier so auswählen, daß die Gesamtzahl ihrer Pilze kleiner als 51 ist?
Die Antwort ist zu begründen. *Sch.*

Ma 7 ■ 2959 Die Zahl 45 ist in vier Summanden zu zerlegen, für die folgendes gilt: Addiert man zum ersten Summanden 2, subtrahiert man vom zweiten Summanden 2, multipliziert man den dritten Summanden mit 2, dividiert man den vierten Summanden durch 2, so erhält man stets dasselbe Ergebnis.
Wie lauten die vier Summanden?
Schülerin N. Knust, Wörmlitz

Ma 7 ■ 2960 Zeichne ein Dreieck ABC, konstruiere den Mittelpunkt M_A von $\overline{BC}$ und den Mittelpunkt M_B von $\overline{AC}$. Verlängere nun $\overline{AM_A}$ über M_A hinaus um sich selbst bis A' und $\overline{BM_B}$ über M_B hinaus um sich selbst bis B'. Weise schließlich nach, daß die Punkte A', B' und C auf einer Geraden liegen. *Sch.*

Ma 7 ■ 2961 Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist gleich dem Produkt aus diesen drei Zahlen.
a) Welche drei Zahlen erfüllen diese Bedingung?
b) Wie viele solcher Tripel natürlicher Zahlen gibt es? *Sch.*

Ma 7 ■ 2962 In dem abgebildeten Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich im Punkte S schneiden, seien A_1, A_2, A_3 bzw. A_4 die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$ bzw. $\triangle DAS$. Es ist nachzuweisen, daß die Beziehung $A_1 \cdot A_3 = A_2 \cdot A_4$ gilt! *Sch.*



Na/Te 7 ■ 435 An einem Hebel hängt links vom Drehpunkt ein Körper mit der Masse 100 g in einem Abstand von 10 cm vom Drehpunkt, rechts ein Körper mit einer Masse von 20 g im Abstand von 50 cm vom Drehpunkt. Befindet sich der Hebel im Gleichgewicht? Welche Druckkraft wirkt auf das Lager im Drehpunkt?

Na/Te 7 ■ 436 Der Zugweg eines Flaschenzuges mit paralleler Seilführung ist sechsmal so groß wie der Hubweg. Kann man mit einer Kraft von 1000 N eine Last von 4800 N heben?

Ma 8 ■ 2963 Es ist zu beweisen, daß es
a) unter neun aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen keine zwei gibt, die durch 9 teilbar sind,
b) unter zehn beliebigen natürlichen Zahlen stets zwei gibt, deren Differenz durch 9 teilbar ist. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ■ 2964 Es sei A ein vorgegebener Eckpunkt eines Quadrates $ABCD$, P ein innerer Punkt der Quadratseite $\overline{BC}$ und Q ein innerer Punkt der Quadratseite $\overline{CD}$. Aus der Kenntnis der Lage der Punkte A, P und Q ist das Quadrat $ABCD$ zu konstruieren! *Sch.*

Ma 8 ■ 2965 Es sind alle Primzahlzwillinge der Form
$(2^n - 1;\ 2^n + 1)$, $n \in N$ zu finden!
A. Israel, Techn. Rechner, Karl-Marx-Stadt
Mathematikfachlehrer G. Roesch, Apolda

Ma 8 ■ 2966 Gegeben ist ein Rechteck, dessen eine Seite 10 cm länger ist als die andere. Um wieviel Quadratzentimeter unterscheidet sich der Flächeninhalt dieses Rechtecks von dem eines Quadrates mit dem gleichen Umfang?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ■ 2967 Das Quadrat der natürlichen Zahl 175 kann man bilden, indem man die Ziffer 5 streicht, die übrig bleibende Zahl 17 mit ihrem Nachfolger 18 multipliziert und an das erhaltene Produkt 306 die 25 anhängt, so daß als Ergebnis die Zahl 30625 zustande kommt. Die Probe ($175^2 = 30625$) bestätigt dieses Ergebnis. Kann man mit jeder natürlichen Zahl, die auf die Ziffer 5 endet, so verfahren? Ein Beweis ist zu erbringen!
Sven Hartmann, Berlin

Na/Te 8 ■ 437 Eine Luftmasse nimmt bei $t = 24\,°\text{C}$ einen Raum von $V = 1000\ \text{cm}^3$ ein. Welches Volumen hat sie unter gleichem Druck bei 0 °C? (Die Luft wird als ideales Gas angenommen.)

Na/Te 8 ■ 438 Mit einem Tauchsieder (Leistung 1000 W) wird in einem Gefäß 1 kg Eis geschmolzen und anschließend das Schmelzwasser erwärmt. Welche Temperatur hat das Schmelzwasser 10 min nach dem Einschalten des Tauchsieders? Wird diese Temperatur in Wirklichkeit erreicht? Begründe!

Ma 9 ■ 2968 Anläßlich einer Familienfeier stellt Renate fest, daß ihr Bruder Rainer im Jahre x^2 genau x Jahre alt wird. Wie alt wird Rainer im Jahre 1989?
Antje Mißbach, Magdeburg

Ma 9 ■ 2969 Gegeben ist das folgende Gleichungssystem (Grundbereich: die Menge N der natürlichen Zahlen):
(1) $x + 4y = 16$
(2) $5y - 4x = 20$
(3) $3y - 4x = 12$.
Peter will dieses System mit dem sogenannten Gleichsetzungsverfahren lösen und verfährt wie folgt: Er stellt jede Gleichung nach y um und erhält
(1) $y = 4 - \frac{x}{4}$; (2) $y = 4 + \frac{4x}{5}$;
(3) $y = 4 + \frac{4x}{3}$.
Nun folgert er daraus:
$4 - \frac{x}{4} = 4 + \frac{4x}{5}$, also $-\frac{x}{4} = \frac{4x}{5}$ bzw. $-\frac{1}{4} = \frac{4}{5}$; er setzt die rechten Seiten der Gleichungen (2) und (3) gleich und erhält $\frac{1}{5} = \frac{1}{3}$, und beim Gleichsetzen von (1) und (3) ergibt sich $-\frac{1}{4} = \frac{4}{3}$. Das sind offenbar drei falsche Aussagen, und daraus folgert Peter, daß das gegebene Gleichungssystem keine Lösung in N hat. Sein Schulfreund sagt ihm aber nach einiger Zeit, daß er doch eine Lösung gefunden habe, nämlich das geordnete Paar (0; 4). Peter setzt nun in jede Gleichung für $x = 0$ und für $y = 4$ ein und findet die Lösung bestätigt. Wer hat nun recht, und wodurch kommt es zu diesen Widersprüchen?
Ing. A. Körner, Leipzig

Ma 9 ■ 2970 Bernd behauptet, daß zur Numerierung der Seiten eines Buches genau 43mal die Ziffer Null verwendet wurde. Es ist zu zeigen, daß diese Behauptung falsch ist.

Dipl.-Math. A. Fittge, Berlin

Ma 9 ■ 2971 Es ist zu beweisen, daß es unter fünf beliebigen natürlichen Zahlen stets drei Zahlen gibt, deren Summe durch 3 teilbar ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 2972 Wir notieren eine beliebige vierstellige natürliche Zahl und addieren zu dieser noch drei weitere Zahlen, die entstehen, wenn wir jedesmal die erste Ziffer streichen und sie an die anderen Ziffern anhängen. Nun dividieren wir die erhaltene Summe durch die Quersumme einer dieser Zahlen und erhalten 1111. Es ist zu beweisen, daß man stets dieses Ergebnis erhält, wenn man in der beschriebenen Weise verfährt.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 9 ■ 439 An einem Kilowattstundenzähler wurde in 5 min eine Zunahme von 0,03 kWh beobachtet, als ein Draht mit einem Durchmesser von 1 mm und dem spezifischen elektrischen Widerstand von $0{,}42\,\frac{\Omega\cdot\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$ 1000 g Wasser erwärmte. Um wieviel Kelvin wurde das Wasser erwärmt und wie lang war der Draht, wenn ein in den Stromkreis geschalteter Strommesser 3,2 A anzeigte?

Na/Te 9 ■ 440 Ein Aluminiumblock mit den Abmessungen 20 mm · 20 mm · 25 mm wird in 100 °C heißes Wasser getaucht und dann in 200 g Wasser mit der Temperatur $T = 27\,°C$ gebracht. Es ergab sich eine Mischungstemperatur von 29,1 °C. Wie groß ist die spezifische Wärmekapazität des Aluminiums?

Ma 10/12 ■ 2973 Es sind die Zahlen $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ und $z_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ zu vergleichen!

W. Träger, Döbeln

Ma 10/12 ■ 2974 Es sind alle Zahlen x anzugeben, für die $z = 5(x-6) - (x-5) + x(x-4)$ Primzahl ist!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ■ 2975 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC (rechter Winkel $\sphericalangle ACB$) teilt die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ die gegenüberliegende Seite $\overline{AC}$ in zwei Abschnitte, die 4 cm bzw. 5 cm lang sind.
Wie lang sind die Seiten des Dreiecks ABC?

Ing. A. Körner, Leipzig

Ma 10/12 ■ 2976 Die Summe $s = a^{1988} + b^{1988} + c^{1988} + d^{1988}$ ist in ein Produkt umzuformen. Es sind a, b, c, d natürliche Zahlen, die die Gleichung $ab = cd$ erfüllen.

Birgit Breuer, PH Erfurt

Ma 10/12 ■ 2977 Es sind alle geordneten Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen x und y zu bestimmen, die die Ungleichung $2x + y \geqq xy$ erfüllen!

W. Träger, Döbeln

Spezialistenlager, Grethen 1988

Am Haus der Jungen Pioniere „Fritz Siemon" Markkleeberg existierten im Schuljahr 1987/88 vier Arbeitsgemeinschaften Mathematik für Schüler der Klassen 5 bis 7 und drei Arbeitsgemeinschaften Informatik mit dem Ziel, mathematisch interessierte und begabte Schüler zu fördern.
Höhepunkt des Schuljahres war für die Schüler der 5. Klassen die Teilnahme am kombinierten Kreisspezialistenlager Mathematik/Russisch vom 9. bis zum 13. Mai in der Jugendherberge Grethen bei Grimma.
Christiane, eine Teilnehmerin, berichtet euch darüber.

Im Spezialistenlager standen für Mathematik jeweils vormittags und nachmittags $1\frac{1}{2}$ Std. auf dem Tagesplan.
Am ersten Tag nach unserer Ankunft behandelten wir zunächst die Graphentheorie. Wenn man sie beherrscht, kann man auf einen Blick erkennen, ob eine Figur sich in einem Zuge zeichnen läßt. Frau Dr. Deweß von der Karl-Marx-Universität Leipzig hat uns dies einleuchtend und verständlich erklärt. Dieses Thema fanden alle sehr interessant.
Nachmittags baute jeder eine Sonnenuhr nach der Erklärung von Herrn Henke. Anschließend probierten wir sie gleich aus, sie funktionierte bei allen.
Am nächsten Tag machte uns Herr Geßner vom Wissenschaftlich-Technischen Zentrum der Land- und Nahrungsgüterwirtschaft Markkleeberg, dem Patenbetrieb des HdJP *Fritz Siemon*, mit dem Problem der Kombinatorik bekannt. Die Kombinatorik untersucht die verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung von Elementen.
Zur Verdeutlichung stellte er uns eine interessante Aufgabe:
Könnte ein Skatspieler sämtliche möglichen Spiele im Laufe seines Lebens spielen?

Wir versuchten sie zu lösen. Lange knobelten wir daran und waren dann verblüfft über die Lösung, eine fast unvorstellbare große Anzahl von Spielmöglichkeiten, die unmöglich in einem Menschenleben zu schaffen wären.

Am Nachmittag besuchte uns die Chefredakteurin der *alpha* und erzählte uns Interessantes aus der Geschichte der Mathematik. Das war alles noch sehr unbekannt und, ich finde, doch sehr wissenswert, so zum Beispiel, daß unsere heutigen Zahlen ihren Ursprung in Indien haben.
Am letzten Tag im Spezialistenlager schafften wir uns an den verschiedensten Mathe-Knobeleien, was auch großen Spaß bereitete. Nachmittags wurde dann eine Lagerolympiade über die behandelten Themen durchgeführt.
Alle Teilnehmer fanden, daß das Spezialistenlager sehr gut organisiert war und uns Hilfe beim weiteren Lernen sein wird. Ich persönlich habe viel dazu gelernt und noch mehr Interesse für Mathematik und andere Wissensgebiete gewonnen.

Christiane Müller

Und nun noch eine Aufgabe für euch, die die Schüler im Lager lösten:
In einem Theaterstück werden von den Kindern Lutz, Klaus, Peter, Uwe und Thomas abwechselnd die Rollen Schneidermeister, Schneidergeselle, Kunde, Betrüger und Gefängniswärter gespielt.
Wieviel verschiedene Möglichkeiten der Rollenbesetzung gibt es? Überprüfe deine Aussage, indem du alle Möglichkeiten aufschreibst für den Fall, daß Lutz den Schneidermeister spielt!

Na/Te 10/12 ■ 441 Ein Körper mit der Masse 100 kg wird in einem Fahrstuhl mit der Beschleunigung von $1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ bewegt. Wie groß ist die Gewichtskraft des Körpers bei der Aufwärts- und bei der Abwärtsbewegung? (Fallbeschleunigung $10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)

Na/Te 10/12 ■ 442 Eine Gewehrkugel verläßt das $s = 1{,}20$ m lange Rohr mit einer Geschwindigkeit $v = 720\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
Wie groß ist die durch die Pulvergase erzeugte Beschleunigung, wenn man die Wirkung der Gase unveränderlich annimmt und wie lange ist das Geschoß im Rohr?

Buchtips

Chr. Posthoff/G. Reinemann
Computerschach – Schachcomputer
206 S., 65 Abb., 9 Tab.
Bestell-Nr. 763 664 7 Preis: 16,00 M
Akademie-Verlag Berlin

Eberhard Schröder
Kartenentwürfe der Erde
Kartographische Abbildungsverfahren aus mathematischer und historischer Sicht
168 S., 64 Abb.
Bestell-Nr. 666 460 3 Preis: 9,00 M
MSB, Nr. 128 (Für Schüler ab Klasse 9)

S. Lang, New Haven
Faszination Mathematik
Ein Wissenschaftler stellt sich der Öffentlichkeit
Etwa 168 S., 90 Abb.
Bestell-Nr. 666 457 4 Preis: etwa 12,50 M
(Für Schüler ab Klasse 10)

Beide Titel: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

Systematisches Probieren mit Computerhilfe

Die Verwendbarkeit programmierbarer Kleincomputer eröffnet die Möglichkeit der Realisierung *algorithmischer* Lösungsmethoden.

Algorithmen sind *uralter* Bestand des Wissens der Menschen, deren Bedeutung als Problemlösungsvorschriften mit der unmittelbaren Ausführbarkeit durch geeignete Maschinen (Computer) heute stark im Wachsen begriffen ist.

Doch wollen wir es gleich vorwegnehmen: Wunder können selbst Computer nicht vollbringen! Auch weitere Entwicklungen informationsverarbeitender Technik (IVT) werden Maschinen hervorbringen, die vom menschlichen Nutzer mehr abverlangen als irgendeine Geste, die dem Computer den Auftrag andeuten soll, den er i. f. zur vollen Zufriedenheit des Nutzers zu erfüllen hat. Moderne IVT kann – bei richtiger Anwendung – intelligenzverstärkend wirken, intelligenzgebärend wirkt sie mit Sicherheit nicht!

Was es nun heißt, ein System bestehend aus Hard- und Software richtig anzuwenden, kann an vielen Beispielen verdeutlicht werden. Ganz besonders eignen sich solche Aufgabenstellungen, zu deren Bearbeitung mehrere verschiedene Lösungsideen existieren. Oftmals werden analytische Methoden verwendet, die solche Verfahren, die auf ein sinnvolles Probieren hinauslaufen, völlig in den Schatten stellen. Die Ursache für diese Situation liegt auf der Hand: Bisher verbot sich umfangreiches Probieren von selbst, denn die praktische Ausführung kann i. a. nicht vom Menschen realisiert bzw. fehlerfrei beherrscht werden. Dies ist schon interessant, man weiß ganz genau wie die Aufgabe gelöst wird (z. B. Probieralgorithmus) und kann es ohne einen Rechensklaven nicht tun.

Im vorliegenden Beispiel vereinfacht sich der Lösungsweg gegenüber dem analytischen beachtlich, so daß sehr viele Schüler in der Lage sein werden, diesen ohne weitere Erläuterungen nachzuvollziehen.

Die Grundidee wurde bereits dargestellt: Systematisches Probieren in einem abgeschlossenen Intervall. Die *Begrenztheit* des zu betrachtenden Intervalls ist immer dann zu sichern, wenn *alle* Lösungen gesucht sind, denn es lassen sich nur *endlich* viele Zahlen durchmustern.

▲1▲ Eine vierstellige Zahl und die (ebenfalls vierstellige) Zahl, die entsteht, wenn man die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibt, sind beide durch 78 teilbar. Wie heißen diese Zahlen?

```
10  FOR I=1000 TO 9999
20      IF I/78 ( ) INT (I/78) THEN 90
30      A$=MID$(STR$(I),2): B$=" "
40      FOR K=4 TO 1 STEP -1
50          B$=B$+MID$ (A$,K,1)
60      NEXT K
70      K=VAL (B$)
80      IF K/78 = INT (K/78)
        THEN PRINT I
90  NEXT I
```

Nach etwa 3 Minuten kann das Resultat abgelesen werden: 2496, 6006, 6942 und 8580 sind zunächst die Programmausgaben. Die Zahl 8580 liefert bei Umkehrung der Ziffernfolge 858 – eine dreistellige Zahl – und muß daher ausgesondert werden. Folglich sind 2496, 6006 (ein Palindrom!) und 6942 die Lösungen der Aufgabe.

▲2▲ Gesucht sind alle dreistelligen Zahlen *abc*, mit geraden Zahlen *a*, *b* und *c*, die teilbar sind durch das Produkt a✱b✱c! (Wie viele solcher Zahlen müssen vom Programm untersucht werden?)

Da es für *b*, *c* in $z = abc$ (a, b, c sind die Ziffern von z – nicht das Produkt ist gemeint!) genau 5 Möglichkeiten gibt (0, 2, 4, 6, 8) und a einer der Zahlen 2, 4, 6 oder 8 entspricht, müssen (unter Beachtung der Reihenfolge) 5✱5✱4 = 100 Zahlen untersucht werden. Diese Überlegung wollen wir bestätigen, indem die Testzyklen mitgezählt werden.

```
  4  N=0
 10  FOR I=2 TO 8 STEP 2
 20    FOR K=0 TO 8 STEP 2
 30      FOR L=0 TO 8 STEP 2
 40        N=N+1
 50        S=100*I+10*K+L
 60        Q=I*K*L
 70        IF Q=0 THEN 90
 80        IF S/Q = INT (S/Q)
           THEN PRINT S,
 90      NEXT L
100    NEXT K
110  NEXT I
120  PRINT
130  PRINT N
```

Innerhalb weniger Sekunden werden die Lösungen 224 und 624 ermittelt. N=100 wird bestätigt.

▲3▲ Eine dreistellige Zahl mit verschiedenen Ziffern ist gleich einem Fünftel der Zahl, die man erhält, wenn man die Summe aus den dreistelligen Zahlen bildet, die durch Umstellung der Ziffern der Ausgangszahl entstehen.

Wie heißt die Zahl?

Bevor wir zum Computer greifen ist hier etwas mehr Vorbereitung nötig. Außerdem können ausreichende Vorüberlegungen unter Umständen den Programmieraufwand senken bzw. effizientere Programme ermöglichen.

Die Ziffern der Ausgangszahl z seien abc, also $z = 100a + 10b + c$. Dann ist die Zahl z' gesucht, für die gilt z' = 0.2✱s mit
$s = 100(2(b + c) + a) + 10(2(a + c) + b) + 2(a + b) + c$.

Außerdem sind natürlich a( )0, b( )0, c( )0 sowie a( )b, a( )c und b( )c gefordert.

```
 3  DEF FN F(X)=VAL (MID$(A$,X,1))
10  FOR I=100 TO 999
20      A$=MID$(STR$(I),2)
30      A=FN F(1): B=FN F (2):
        C=FN F(3)
40      IF A=B OR A=C OR B=C
        THEN 80
50      IF B=0 OR C=0 THEN 80
60      S=100*(2*(B+C)+A)+10*
        (2*(A+C)+C)+2*(A+B)+C
70      IF I=S/5 THEN PRINT I
80  NEXT I
```

Wie man sieht, gibt es *mehrere* Zahlen, die die genannten Forderungen erfüllen: 481, 518, 592 und 629.

Damit sind drei Beispielaufgaben gelöst. Wir mußten Grundwissen aus der Mathematik und einige Programmierkenntnisse verwenden. Dann brauchten wir auf die Ergebnisse nicht lange zu warten.

Es ging nicht darum zu zeigen, daß die Verwendung von Computern bewährte Lösungsmethoden verdrängen.

Vielmehr wollten wir demonstrieren, daß die hier in Beispielen vorgestellte Klasse von Aufgaben zweckmäßig algorithmisch zu lösen ist.

Insofern ist gerade solchen algorithmischen Verfahren und vor allem Denkweisen künftig mehr Aufmerksamkeit zu schenken.

Man beachte dabei aber stets, daß der „Griff" zum Computer erst dann erfolgt, wenn die Aufgabe eigentlich schon gelöst ist – nur der konkrete Wert derselben fehlt.

Chr. Wagenknecht

Computer hilft beim Knobeln

Die 30 Preisträger eines Schülerwettbewerbs sollen mit Büchern prämiert werden. Es stehen Bücher zu 30 Mark, 24 Mark bzw. 18 Mark zur Verfügung. Jedes Buch soll vertreten sein.

Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es, wenn 600 Mark zur Verfügung stehen? *Mathematikolympiade 1965, Klasse 10, DDR-Olympiade*

Programm zur Lösung:

```
10  FOR A=1 TO 28
12  FOR B=1 TO 28
14  FOR C=1 TO 28
16  IF 30*A+24*B+18*C=600
    THEN PRINT A;B;C
18  NEXT C, B, A
```

In dieser Form benötigt der Computer etwa 9 Minuten, um die vier Fälle zu ermitteln. Wenn man beachtet, daß aus
A+B+C=30 und
30*A+24*B+18*C=600 folgt:
B=2*(5−A), dann erkennt man, daß A höchstens 4 sein kann.
Wird Zeile 10 dahingehend geändert, braucht der Computer nur noch 1,3 Minuten! Man erkennt, daß es auf eine sinnvolle Programmierung ankommt.

H. Pätzold, Waren (Müritz)

Elektronik macht's möglich

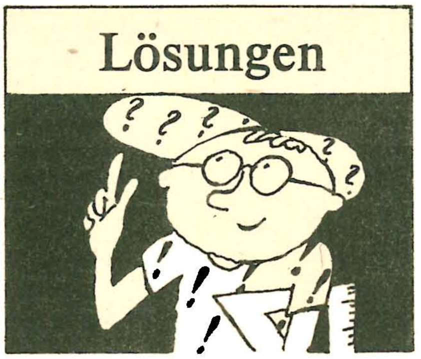
Dem französischen Weber *Joseph-Maria Jacquard* war es gelungen, mit einem auf Lochkarten eingestanzten Programm Webstühle automatisch zu steuern und damit Fäden zu den verschiedensten Mustern schnell und fehlerfrei zu verknüpfen. Als der englische Mathematiker und Ingenieur *Charles Babbage* das erfuhr, sann er unablässig darüber nach, wie auf ähnliche Art mit sehr vielen Zahlen verfahren werden könnte, um beispielsweise logarithmische, statistische und astronomische Werte, deren Berechnung größte Mühe bereitete, rationell und exakt maschinell zu ermitteln. *Babbage* entwarf 1832 eine Rechenmaschine, an der er – seine Kräfte und Gelder verausgabend – bis an sein Lebensende baute, ohne daß sie je funktionierte. Seine Mitbürger schimpften ihn „crackpot" (Narr). Und tatsächlich, Jahrzehnte nach *Babbages* Tod wurde – beim Versuch, seine Maschine zu vollenden – nachgewiesen, daß sich sein Plan nicht verwirklichen ließ, jedenfalls nicht mit der Technik, die ihm zur damaligen Zeit zur Verfügung stand, den Zahnrädern, Schalthebeln und der sonstigen, noch relativ einfachen Mechanik.

Bemerkenswert ist aber, daß *Babbages* Rechenautomat aus drei Teilen bestand, die er store (Vorratskammer), mill (Rechenmühle) und control (Arbeitsaufsicht) nannte. Heute sagt man Speicher, Rechenwerk und Steuerwerk und meint damit den prinzipiellen Aufbau eines jeden Computers der Welt. Der „Narr" von Cambridge war es, der diese geniale Idee hatte.

aus: Lingmann/Schmiedel – Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten – von Naturwissenschaftlern und Technikern VEB Fachbuchverlag Leipzig

Zwei Forscher sind mit einem Ballon gefahren. Durch einen gewaltigen Sturm wurden sie weit abgetrieben. Erst nach Stunden landeten sie in einer unbekannten Siedlung und fragten, ohne die Gondel zu verlassen, einen Passanten:
„Sagen Sie bitte, wo befinden wir uns?"
„Sie befinden sich in der Gondel eines Ballons", antwortete dieser trocken.
„Das kann nur ein Programmierer sein", bemerkte einer der Ballonpiloten zum anderen, „der eine so präzise und gleichzeitig für uns so wertlose Antwort gibt."

A. Halameisär, Moskau



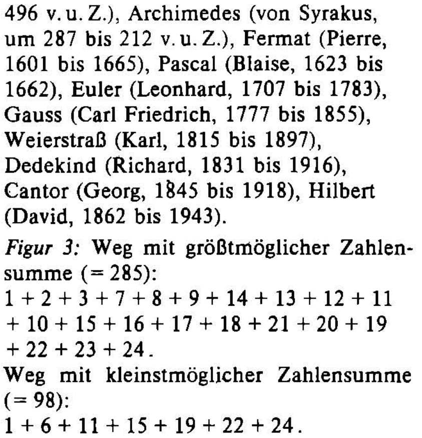
Lösungen zu: Zum Jahreswechsel

Figur 1:
Es gibt $3003 = \frac{14!}{8!6!}$ Lesemöglichkeiten.

Figur 2: Pythagoras (von Samos, 580 bis 496 v. u. Z.), Archimedes (von Syrakus, um 287 bis 212 v. u. Z.), Fermat (Pierre, 1601 bis 1665), Pascal (Blaise, 1623 bis 1662), Euler (Leonhard, 1707 bis 1783), Gauss (Carl Friedrich, 1777 bis 1855), Weierstraß (Karl, 1815 bis 1897), Dedekind (Richard, 1831 bis 1916), Cantor (Georg, 1845 bis 1918), Hilbert (David, 1862 bis 1943).

Figur 3: Weg mit größtmöglicher Zahlensumme (= 285):
1 + 2 + 3 + 7 + 8 + 9 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 15 + 16 + 17 + 18 + 21 + 20 + 19 + 22 + 23 + 24.
Weg mit kleinstmöglicher Zahlensumme (= 98):
1 + 6 + 11 + 15 + 19 + 22 + 24.
Weg mit Zahlensumme 100 (einziger Weg):
1 + 2 + 6 + 11 + 15 + 19 + 22 + 24.
Zwei Wege mit der Zahlensumme 200 sind z. B.: 1 + 2 + 3 + 7 + 6 + 5 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 18 + 17 + 16 + 19 + 22 + 24;
1 + 6 + 5 + 10 + 11 + 12 + 17 + 16 + 15 + 19 + 20 + 21 + 23 + 24.

Figur 4:



Figur 5:
Eindeutige Lösung: 991 + 997 = 1988

Figur 6:
Eindeutige Lösung: 991 + 998 = 1989

Figur 7:
Es gibt $128 = 2^7$ Lesemöglichkeiten.

Figur 8: Allen alphalesern ein frohes Weihnachtsfest und ein gesundes glueckliches neues Jahr!

Lösungen zur Schachecke

1) 1. Lg8 (droht 2. Dh7 matt) T:g8 2. Kf7 T:g6 3. f:g6 h5 (Oder 3. ... c1D 4. g7+ Kh7 5. g8D matt) 4. g7+ Kh7 5. g8D+ Kh6 6. Dg7/Dh8 matt.

2) 1. b4 L:b4 (Erzwungen, da sonst 2. K:c4) 2. Sc2 und Schwarz verliert mit dem 3. Zug von Weiß den Lb4 oder den Sc4.

Lösungen zu:
Die Tasten $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\tan}$

▲1▲ a) $-90° \leqq x \leqq 90°$;
b) $0° \leqq x \leqq 180°$; c) $-90° \leqq x \leqq 90°$

▲2▲ a) Der zuletzt angezeigte Wert ist das Bogenmaß von 45° (0,785 39).
b) Der zuletzt angezeigte Wert ist das dezimal geteilte Altgrad zu $\frac{\pi}{4}$ (45°).

▲3▲

x	0°	30°	90°	150°	180°
$\sin x$	0	0,5	1	0,5	0
x	210°	270°	330°	360°	
$\sin x$	−0,5	−1	−0,5	0	

▲4▲ $\sin x = 1$

▲5▲ $\sin x = 0$

▲6▲ $x_1 = 32{,}683\,639$; $x_2 = 147{,}316\,36$

▲7▲

x	x $\boxed{\sin}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\sin}$
0	0
12	12
30	30
80	80/80.000002/
100	80/80.000002/
120	60
140	40
145	35
150	30
170	10
175	5/5.0000001/

$\sin x = \sin(180° - x)$.

▲8▲ $x_1 = 71{,}337\,075°$;
$x_2 = 360° - x_1 = 288{,}662\,925°$

▲9▲ $\cos(180° + x) = \cos(180° - x)$

▲10▲ a) 14,477 512°; 165,522 49°
b) 44,427 004°; 135,573° c) 30°; 150°
d) 120°; 240° e) 150°; 210°

▲11▲

a)

Tastenfolge	Anzeige
60	60.
$\boxed{\cos}$	0.5
$\boxed{F}$	0.5
$\boxed{\sin}$	30.

b)

Tastenfolge	Anzeige
50	50.
$\boxed{\cos}$	6.4278-01
$\boxed{F}$	6.4278-01
$\boxed{\sin}$	40.

▲12▲
a) 20; b) 60; c) 60; d) 70;
$\cos x = \sin(90° - x)$, $\sin x = \cos(90° - x)$

▲13▲ a) 60°; b) 20°; c) 45°

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Finde die Gesetzmäßigkeit
Im nachfolgenden Diagramm ordneten wir ganze Zahlen größer als 1 in fünf Spalten an. Untersuche die Struktur und finde heraus, in welcher Spalte (von links nach rechts) die Zahl 100 vorkommen wird.
Lösung: In der 2. und 4. Spalte stehen gerade Zahlen, durch 8 teilbare kommen in der 2. Spalte und durch 4, aber nicht durch 8 teilbare Zahlen in der 4. Spalte vor. Da 100 durch 4, aber nicht durch 8 teilbar ist, gehört sie in die 4. Spalte.

▲2▲ Bestimme x und y so, damit die Zahl $\overline{4x5y}$ durch 6 teilbar ist!
Lösung: Die vierstellige Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist. Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie gerade ist, d. h. $y = \{0; 2; 4; 6; 8\}$. Damit die Zahl auch durch 3 teilbar ist, muß die Summe von x und y durch 3 teilbar sein.
Es gibt 17 Zahlen:

4050	4152	4254	4056	4158
4350	4452	4554	4356	4458
4650	4752.	4854	4656	4758
4950			4956	

▲3▲ Die Leichtigkeit der Mathematik
John v. Neumann, einer der bedeutendsten Mathematiker unseres Jahrhunderts, sagte Ende der vierziger Jahre bei einem Vortrag über die zukünftigen elektronischen Rechenmaschinen, daß die Mathematik nur ein sehr kleiner und sehr einfacher Teil des Lebens ist. Als die Zuschauer daraufhin in Bewegung gerieten, fügte er hinzu: „Wenn die Leute nicht glauben, daß die Mathematik einfach ist, dann nur, weil sie nicht begreifen, wie kompliziert das Leben ist."

▲4▲ Man schmilzt 82 kg Bronze und 18 kg Silber. Berechne die Dichte der Legierung, wenn die Dichte von Bronze $8{,}5\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ und von Silber $10{,}5\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ beträgt!
Lösung:
Berechnung des Volumens der Legierung:
$$V = \frac{m}{\varrho}$$
Bronze: $V = \dfrac{82\,\text{kg}}{8{,}5\,\text{kg}\,\text{dm}^{-3}} = 9{,}65\,\text{dm}^3$

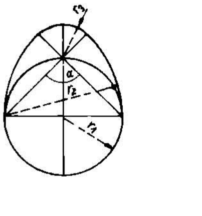
Silber: $V = \dfrac{18\,\text{kg}}{10{,}5\,\text{kg}\,\text{dm}^{-3}} = 1{,}71\,\text{dm}^3$

Dichte der Legierung:
$$\varrho = \frac{m}{V};\quad \varrho = \frac{100\,\text{kg}}{11{,}36\,\text{dm}^3} = 8{,}8\,\text{kg}\,\text{dm}^{-3}$$
Die Dichte der Legierung beträgt etwa $8{,}8\,\text{kg}\,\text{dm}^{-3}$.

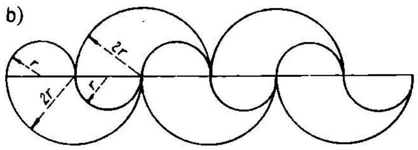
Lösungen zu: Wie man Eier, Brezeln, Herzen und andere Figuren mit Zirkel und Lineal konstruiert

▲1▲

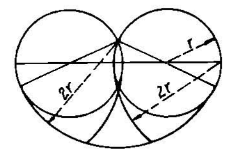
Bild 8 a)



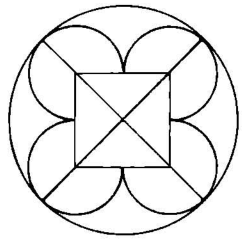
b)



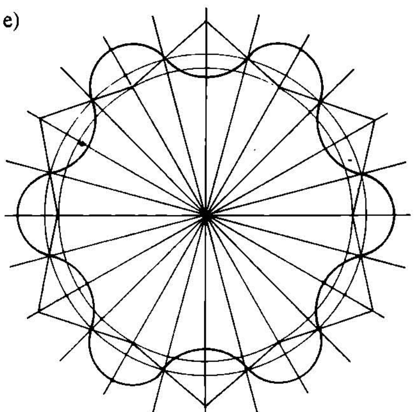
c)



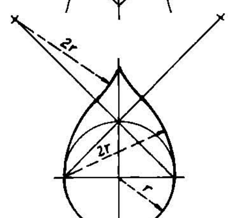
d)



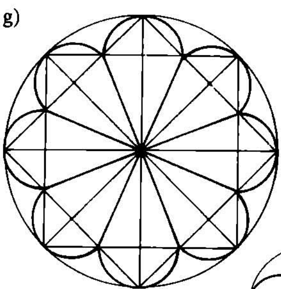
e)



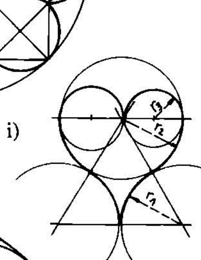
f)



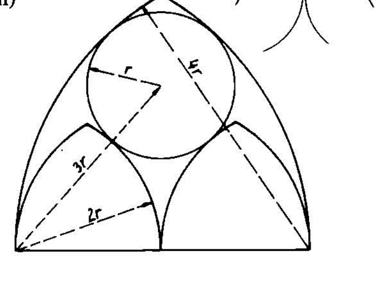
g)



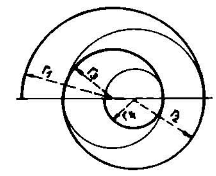
i)



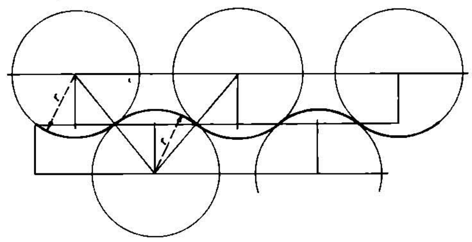
h)



k)



l)



▲2▲ a) geg.: r_1
ges.: r_2, r_3; $r_1 : r_2 : r_3$
Lösung: 1. $r_2 = 2r_1$ (siehe Bild 8 a)
2. $r_3 = r_2 - \sqrt{2r_1^2}$
(Bild 8 a; Satz des Pythagoras)
$r_3 = 2r_1 - r_1\sqrt{2}$
$r_3 = r_1(2 - \sqrt{2})$
3. $r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 2 : (2 - \sqrt{2})$
(wegen 1. und 2.)
b) Die Figur besteht aus:
- einem Halbkreis mit $r = r_1$,
- zwei Achtelkreisen mit $r = r_2 = 2 \cdot r_1$, (Achtelkreise, da die zu diesen Bögen gehörenden Zentriwinkel jeweils 45° groß sind – Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck);
- einem Viertelkreis mit $r = r_3 = r_1(2 - \sqrt{2})$. (Viertelkreis, da der zu diesem Bogen gehörende Zentriwinkel ein rechter Winkel ist – Scheitelwinkel; Satz des Thales)

$$U = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r_1 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2\pi(2r_1) + \frac{1}{4} \cdot 2\pi r_1(2 - \sqrt{2})$$
$$U = \pi r_1 + \pi r_1 + \pi r_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi r_1$$
$$U = \left(3 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \pi \cdot r_1$$

▲3▲ Wir orientieren uns an dem Bild 8 d.
a) Radius der kleinen Kreise: r (gegeben)
→ Länge der Quadratseite: $2 \cdot r$
(vgl. Bild 8 d)
→ Länge der Quadratdiagonalen:
$\sqrt{4r^2 + 4r^2}$ (Satz des Pythagoras)
$= 2r \cdot \sqrt{2}$
→ Durchmesser des großen Kreises:
$2r \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot r$ (Bild 8 d)
→ Radius des großen Kreises:
$r \cdot \sqrt{2} + r = r(\sqrt{2} + 1)$
b) Es sei A – Inhalt der grauen Fläche (gesucht), A_1 – Flächeninhalt des großen Kreises, A_2 – Flächeninhalt eines kleinen Kreises, A_3 – Flächeninhalt des Quadrates.
$$A = A_1 - \left(A_3 + 4 \cdot \frac{3}{4}A_2\right)$$
$$= \pi \cdot (r\sqrt{2} + r)^2 - (2r)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi r^2$$
$$= \pi r^2 \cdot (2 + 2\sqrt{2} + 1) - 4r^2 - 3\pi r^2$$
$$= r^2(3\pi + 2\sqrt{2}\,\pi - 4 - 3\pi)$$
$$A = r^2(2\sqrt{2}\,\pi - 4)$$

Lösung zu:
Welche Zahl ist größer?

Ein möglicher Weg: $17^{100} > 16^{100}$
$= 2^{400} = (2^5)^{80} = 32^{80} > 31^{80}$

Lösungen zu:
Regsechs und Gleisechs

▲1▲ Das regelmäßige Sechseck bei *Regsechs* besitze den Umkreisradius 1. Die gleichseitigen Dreiecke haben dann die Seitenlängen 1; 1; $\sqrt{3}$ und die Winkel 30°; 30°; 120°. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke haben die Seitenlängen 3; $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, die Winkel betragen 30°; 60° und 90°.

Bei *Gleisechs* gehe man von einem Quadrat der Seitenlänge 1 aus. Die rechtwinkligen Dreiecke *AMC* und *BDM* besitzen die Seitenlängen 1; $\frac{1}{2}$ und $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Aus dem Satz des Pythagoras folgt
$\overline{CS} = \overline{DS} = \overline{MS} = \frac{5}{8}$.

▲2▲ In dem Sechseck *Gleisechs* betragen die Innenwinkel 4δ bzw. $180° - 2\delta$, d. h. etwa 106,3° bzw. 126,9°,
denn aus $\cos\delta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und $\sin\mu = \frac{2}{\sqrt{5}}$
erhält man mit Hilfe des Taschenrechners SR 1
$\delta = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$ und $\mu = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$
also $\delta = 26{,}565\,051°$ und $\mu = 63{,}434\,949°$.
Der Punkt *S* im Bild 5 ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf $\overline{DM}$ und $\overline{CM}$ und $\overline{CD}$.

Lösungen zu: Knobeleien
(nicht nur) für Klasse 8

▲1▲ a) 1, 8, 3, 2, 7, 4, 6, 5 (eine der möglichen Anordnungen)
b) Nein. Weil die Summe $1 + 2 + \ldots + 8 = 36$ beträgt, jede Ecke als linker, mittlerer oder rechter Summand auftritt $(36 \cdot 3 = 108)$, damit im Mittel die Summe dreier benachbarter Zahlen gleich $108 : 8 = 13{,}5$ ist, also die nächstgrößere ganze Zahl 14 für *alle* Tripel nicht erreichbar ist.

▲2▲ Alle Trapeze in der folgenden Teilung sind flächengleich, weil sie kongruente Höhen haben und die Diagonale bzw. die Seiten in vier kongruente Strecken geteilt wurden.

▲3▲ Die Fußpunkte des Lotes von *Q* auf *AB* bzw. *CD* seien F_1 bzw. F_2. Laut Strahlensatz gilt
$\overline{AF_1} : \overline{F_1B} = \overline{AQ} : \overline{QC} = 4 : 1$
(Strahlenabschnitte) und
$\overline{QF_1} : \overline{CB} = 4 : 5$ (Parallelenabschnitte).
Damit folgt
$\overline{BF_1} = \frac{1}{5} \cdot \overline{AB}$, $\overline{PF_1} = \frac{1}{5} \cdot \overline{AB}$ sowie
$\overline{QF_1} = \frac{4}{5} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{QF_2} = \frac{1}{5} \cdot \overline{AB}$.
Analog gilt $\overline{F_2D} = \frac{4}{5} \cdot \overline{AB}$.
Nach *sws* sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle QF_1P$ und $\triangle QF_2D$ kongruent. Darüber hinaus gilt
$\sphericalangle DQP = 180° - \sphericalangle DQF_2 - \sphericalangle PQF_1 = 90°$,
und somit ist $\sphericalangle PQD$ gleichschenklig-rechtwinklig:
$\sphericalangle DQP = 90°$, $\sphericalangle PDQ = \sphericalangle QPD = 45°$.

▲4▲ Sei *n* die gewisse Zahl, *x* bzw. *y* die Zahl der Steine auf dem ersten bzw. zweiten Häufchen.
Dann gelten die Gleichungen
$$3(x - 100) = y + 100 \qquad (1)$$
$$x + n = 7(y - n). \qquad (2)$$
Wird (2) nach *x* umgestellt und in (1) eingesetzt, ergibt sich $y = 20 + \frac{6}{5}n$.
Da *y* eine ganze Zahl sein muß, für $n = 0$ aber nicht von Umlegen gesprochen werden kann, ist $n \geqq 5$. Auf dem ersten Häufchen liegen damit 142, auf dem zweiten 26 Steine.

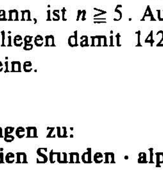
Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

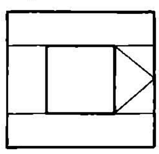
Weihnachtliche Kryptarithmetik
a) $3250 + 3250 = 6500$;
$1750 + 1750 = 3500$;
$4250 + 4250 = 8500$;
$4750 + 4750 = 9500$
b) $9387 + 9387 = 18\,774$
c) $1467 + 1567 + 1467 + 1567 + 28\,993 = 35\,061$

alpha-heiter – ernst
1. Abbildung, 2. Löwenheim,
3. Permutation, 4. halbieren, 5. Astroide,
6. Hyperbel, 7. Einstein,
8. Inversion, 9. Teilbarkeit,
10. Eigenwert, 11. Restglied
Meinung: alpha-heiter – interessant

Würfellogik
1. Würfel *c*; 2. Würfel *a*, *b* und *c*

Was alles in einem Dreieck steckt


Figur A

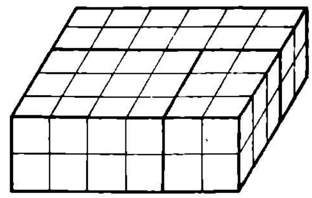

Figur B

Knobeleien am Weihnachtsbaum
g r o b
b o r g
o b g r
r g b o

Löse die Verbindung
Dieser Aufforderung unsererseits kam Stefan Kage, zum Redaktionsschluß noch Schüler der 12. Klasse der EOS *Karl Marx*, Leipzig nach. Wenn ihr nicht zum Ziel kommt, schreibt an uns.
Wir senden euch dann die Lösung, deren Veröffentlichung in *alpha* zuviel Platz einnehmen würde.

1988 – 1989
$19\,881\,989 = 337 \cdot 58\,997$

Eine schöne Bescherung



Lösung zu:
Spezialistenlager Grethen 1988
Es gibt 120 Möglichkeiten.

Lösung zu: Titelblatt Heft 5/88

1. Zeile:	1602
2. Zeile:	127 + 62 = 90 + 99
3. Zeile:	52 94
4. Zeile:	161
5. Zeile	32 18

Lösungen zu: Binäres Zahlenraten

▲1▲ Es müssen sieben Zahlenkarten verwendet werden (A, B, C, D, E, F, G).
Karte A wird um folgende Zahlen ergänzt:
33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99.
Karte B wird um folgende Zahlen ergänzt:
34, 35, 38, 39, 42, 43, 46, 47, 50, 51, 54, 55, 58, 59, 62, 63, 66, 67, 70, 71, 74, 75, 78, 79, 82, 83, 86, 87, 90, 91, 94, 95, 98, 99.
Karte C wird um folgende Zahlen ergänzt:
36, 37, 38, 39, 44, 45, 46, 47, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 62, 63, 68, 69, 70, 71, 76, 77, 78, 79, 84, 85, 86, 87, 92, 93, 94, 95, 100.
Karte D wird um folgende Zahlen ergänzt:
40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95.
Karte E wird um folgende Zahlen ergänzt:
48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95.
Die neu hinzugekommene Karte F enthält die Zahlen
32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 96, 97, 98, 99, 100.
Die neu hinzugekommene Karte G enthält die Zahlen
64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

▲2▲

A	1	27	21	15	B	2	27	22	15
	23	13	3	25		23	14	3	26
	11	17	31	5		11	18	31	6
	29	7	9	19		30	7	10	19
C	4	29	22	15	D	8	29	26	15
	23	14	5	28		27	14	9	28
	13	20	31	6		13	24	31	10
	30	7	12	21		30	11	12	25
E	16	29	26	23					
	27	22	17	28					
	21	24	31	18					
	30	19	20	25					

XXIX. Internationale Mathematikolympiade

Canberra, 9. bis 21. Juli 1988

1. Preis für ≧32 und ≦42 Punkte
2. Preis für ≧23 und ≦31 Punkte
3. Preis für ≧14 und ≦22 Punkte.

Es nahmen 268 Schüler aus 49 Ländern teil, 9 weitere Länder waren durch offizielle Beobachter vertreten.

Die Lösungen der Aufgaben senden wir euch auf Wunsch zu. Legt bitte einen frankierten Rückumschlag bei. *Alphons*

Aufgaben

1. Man betrachte in einer Ebene zwei Kreise mit den Radien R und r $(R > r)$ mit dem gleichen Mittelpunkt. Es sei P ein fester Punkt auf dem kleineren Kreis und B ein variabler Punkt auf dem größeren Kreis. Die Gerade BP schneide den größeren Kreis ein zweites Mal in C. Die Senkrechte l auf BP in P schneide den kleineren Kreis erneut in A (falls l eine Tangente in P ist, dann ist $A = P$).
(I) Man bestimme die Menge aller Werte von
$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$.
(II) Man bestimme den geometrischen Ort aller Mittelpunkte von AB.
(Kreis ≡ Kreislinie) *(Luxemburg)*

2. Sei n eine positive ganze Zahl; es seien $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ Teilmengen einer Menge B und es gelte:
a) Jede Menge A_i enthält genau $2n$ Elemente.
b) Für alle Indizes i und j $(1 \leqq i < j \leqq 2n + 1)$ enthält die Menge $A_i \cap A_j$ genau ein Element.
c) Jedes Element von B gehört zu mindestens zwei der Mengen A_i. Für welche Werte n kann man für gegebene Menge B und ihre Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ mit den Eigenschaften a), b) und c) jedem Element von B eine der Zahlen 0 oder 1 so zuordnen, daß genau n Elementen jeder Menge A_i die Zahl 0 zugeordnet wird?
(ČSSR)

3. Es sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Es gelte:
$$f(1) = 1,\ f(3) = 3,$$
und für alle $n \in N$
$$f(2n) = f(n),$$
$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),$$
$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).$$
Man bestimme die Anzahl aller Elemente $n \in N$ mit $n \leqq 1988$ und $f(n) = n$.
(Großbritannien)

4. Man zeige, daß die Menge aller reellen Zahlen x, die der Ungleichung
$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqq \frac{5}{4}$$
genügen, eine Vereinigung von disjunkten Intervallen ist, wobei die Summe aller Intervallängen 1988 beträgt.
(Irland)

5. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse BC; der Fußpunkt der Höhe auf BC sei D. Die Verbindungsgerade der Inkreismittelpunkte der Dreiecke ABD und ACD schneidet die Seiten AB, AC in den Punkten K bzw. L. Es seien S und T der Flächeninhalt von ABC bzw. AKL.
Zeige, daß $S \geqq 2T$ ist. *(Griechenland)*

6. Es seien a und b positive ganze Zahlen, so daß $ab + 1$ ein Teiler von $a^2 + b^2$ ist.
Man zeige, daß $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist. *(BRD)*

Arbeitszeit: zweimal 4,5 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

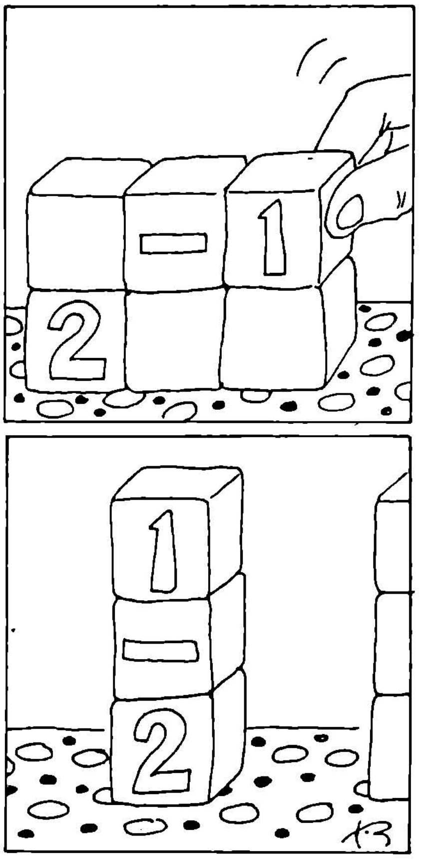
Unsere Mannschaft der IMO 88:
Prof. Dr. Burosch, Delegationsleiter
Dr. U. Quasthoff, stellv. Delegationsleiter

Andreas Siebert	1. Preis, 33 Punkte
Martin Welk	2. Preis, 31 Punkte
Dirk Liebscher	2. Preis, 28 Punkte
Gerard Zenker	2. Preis, 27 Punkte
Frank Göring	2. Preis, 26 Punkte

Inoffizielle Länderwertung – Preisverteilung

Platz	Land	1.	2.	3.
1.	UdSSR	4	2	-
2.	SR Rumänien	2	4	-
3.	VR China	2	4	-
4.	BRD	1	4	1
5.	DDR (5 Schüler)	1	4	-
6.	SR Vietnam	1	4	-
7.	USA	-	5	1
8.	VR Bulgarien	-	4	2
9.	Frankreich	1	1	3
10.	Luxemburg (3 Schüler)	-	1	2
11.	Kanada	1	1	2
12.	Großbritannien	-	3	2
13.	ČSSR	-	2	2
14.	Schweden	1	-	4
15.	Israel	1	-	4
16.	Österreich	1	1	1
17.	Ungarische VR	-	2	2
	⋮			

Jede Mannschaft bestand aus 6 Schülern bzw. der in Klammern angegebenen Anzahl von Schülern.



aus: Funktio, Helsinki

Buchtip

J. Lehmann

Mathematik – von der Pflicht zur Kür

148 S. mit 138 Abb.
Bestell-Nr. 666 253 6 Preis: 12,00 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

In 2. Auflage (1. Aufl. 1987) erscheint der 130. Band der „Mathematischen Schülerbücherei" mit einhundert Aufgaben der schriftlichen Abschlußprüfung Klasse 10 im Fach Mathematik. Gegliedert sind die zehn Kapitel des „Pflicht"-Teils nach inhaltlichen Schwerpunkten, und ergänzt werden sie jeweils durch die „Kür": einhundertfünfzig Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades, unterhaltsame Knobeleien und ausgewählte historische Mathematikaufgaben. Lösungen und Lösungshinweise vervollständigen das Buch. Die 3. Auflage ist 1989 geplant.

Binäres Zahlen„raten“

Wohl jeder jugendliche „Möchtegern-Zauberer“ und an Unterhaltungsmathematik Interessierte ist ihnen schon begegnet: den Zahlenkarten, mit deren Hilfe sich eine gedachte natürliche Zahl (z. B. das Alter einer Person) „erraten“ läßt.

Ist diese Zahl nicht größer als 31, so benötigt man zu diesem Kunststück fünf Zahlenkarten (A, B, C, D, E), die wie abgebildet beschriftet werden.

A:	B:	C:	D:	E:
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Die Vorführung spielt sich dann etwa so ab: Ein williger Zuschauer wird aufgefordert, an eine beliebige natürliche Zahl von 1 bis 31 zu denken und festzustellen, auf welchen der fünf Zahlenkarten diese gedachte Zahl steht. Läßt man sich nun die betreffenden Karten, die die gedachte Zahl enthalten, aushändigen, so ist man sofort imstande, diese gedachte Zahl zu errechnen: Man braucht lediglich die Anfangszahlen dieser Karten zu addieren. Kommt die gedachte Zahl etwa auf den Karten C und D vor, so handelt es sich um die Zahl 12(= 4 + 8), steht sie z. B. auf den Karten A, B und E, so wurde an die Zahl 19 (= 1 + 2 + 16) gedacht.

Wer ergründen will, wie dieses Kunststück „funktioniert“, ist eingeladen, sich zunächst einmal die Besonderheiten unseres dezimalen Stellenwertsystems in Erinnerung zu rufen: Es werden 10 Ziffern verwendet (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), und jede nächsthöhere Stelle ist das Zehnfache der vorhergehenden (Wert der 1. Stelle $= 1 = 10^0$, Wert der 2. Stelle $= 10 = 10^1$, Wert der 3. Stelle $= 100 = 10^2$, ... Wert der n-ten Stelle $= 10^{n-1}$). Daraus folgt, daß sich jede Zahl dieses Zehnersystems als Summe von Zehnerpotenzen darstellen läßt, z. B.

$342_{(10)} = 10^2 + 10^2 + 10^2 + 10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^0 + 10^0$;

jede Zehnerpotenz kann dabei bis zu neunmal als Summand auftreten.

Die Basis eines Stellenwertsystems muß aber keineswegs 10 sein. Die kleinstmögliche hierfür geeignete Basis ist die Zahl 2. In diesem Zahlensystem (Zweiersystem, Binärsystem), das seit der Konstruktion elektronischer Rechenanlagen große Bedeutung erlangt hat, werden nur zwei verschiedene Ziffern (0 und 1) verwendet, und jede nächsthöhere Stelle ist das Zweifache der vorhergehenden (Wert der 1. Stelle $= 1 = 2^0$, Wert der 2. Stelle $= 2 = 2^1$, Wert der 3. Stelle $= 4 = 2^2$, Wert der 4. Stelle $= 8 = 2^3$, ... Wert der n-ten Stelle $= 2^{n-1}$). In einem solchen Zahlensystem ist dann jede Zahl als Summe von Zweierpotenzen darstellbar, wobei aber – im Gegensatz zu vorhin – jede Zweierpotenz nur höchstens einmal als Summand auftreten kann, z. B. $1011_{(2)} = 2^3 + 2^1 + 2^0$. (Will man wissen, welcher Zahl des Zehnersystems diese Zahl entspricht, braucht man bloß die Werte dieser Zweierpotenzen zu addieren: $8 + 2 + 1 = 11$.)

Die folgende Übersicht zeigt den Beginn der natürlichen Zahlenreihe in binärer Ziffernschreibweise, als Summe von Zweierpotenzen und in dezimaler Schreibweise.

$$
\begin{aligned}
1_{(2)} &= 2^0 = 1_{(10)}\\
10_{(2)} &= 2^1 = 2_{(10)}\\
11_{(2)} &= 2^1 + 2^0 = 3_{(10)}\\
100_{(2)} &= 2^2 = 4_{(10)}\\
101_{(2)} &= 2^2 + 2^0 = 5_{(10)}\\
110_{(2)} &= 2^2 + 2^1 = 6_{(10)}\\
111_{(2)} &= 2^2 + 2^1 + 2^0 = 7_{(10)}\\
1000_{(2)} &= 2^3 = 8_{(10)}\\
1001_{(2)} &= 2^3 + 2^0 = 9_{(10)}\\
1010_{(2)} &= 2^3 + 2^1 = 10_{(10)}\\
1011_{(2)} &= 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11_{(10)}\\
1100_{(2)} &= 2^3 + 2^2 = 12_{(10)}\\
1101_{(2)} &= 2^3 + 2^2 + 2^0 = 13_{(10)}\\
1110_{(2)} &= 2^3 + 2^2 + 2^1 = 14_{(10)}\\
1111_{(2)} &= 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 15_{(10)}\\
10000_{(2)} &= 2^4 = 16_{(10)}\\
10001_{(2)} &= 2^4 + 2^0 = 17_{(10)}\\
10010_{(2)} &= 2^4 + 2^1 = 18_{(10)}\\
10011_{(2)} &= 2^4 + 2^1 + 2^0 = 19_{(10)}\\
10100_{(2)} &= 2^4 + 2^2 = 20_{(10)}\\
10101_{(2)} &= 2^4 + 2^2 + 2^0 = 21_{(10)}\\
10110_{(2)} &= 2^4 + 2^2 + 2^1 = 22_{(10)}\\
10111_{(2)} &= 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 23_{(10)}\\
11000_{(2)} &= 2^4 + 2^3 = 24_{(10)}\\
11001_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^0 = 25_{(10)}\\
11010_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^1 = 26_{(10)}\\
11011_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 27_{(10)}\\
11100_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^2 = 28_{(10)}\\
11101_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 29_{(10)}\\
11110_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 30_{(10)}\\
11111_{(2)} &= 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 31_{(10)}
\end{aligned}
$$

Doch nun zurück zu unseren Zahlenkarten.

Ein Vergleich dieser Übersicht mit den Zahlenkarten macht deutlich, nach welchen Kriterien die Zahlen den fünf Karten zugeordnet wurden und lüftet so ihr „Geheimnis“:

Karte A enthält alle natürlichen Zahlen von $1_{(10)}$ bis $31_{(10)}$, die in binärer Ziffernschreibweise an der 1. Stelle die Ziffer 1 haben (die bei der Darstellung als Summe von Zweierpotenzen den Summanden $2^0 = 1$ enthalten;

Karte B enthält alle natürlichen Zahlen von $1_{(10)}$ bis $31_{(10)}$, die in binärer Ziffernschreibweise an der 2. Stelle die Ziffer 1 haben (die bei der Darstellung als Summe von Zweierpotenzen den Summanden $2^1 = 2$ enthalten);

Karte C enthält alle natürlichen Zahlen von $1_{(10)}$ bis $31_{(10)}$, die in binärer Ziffernschreibweise an der 3. Stelle die Ziffer 1 haben (die bei der Darstellung als Summe von Zweierpotenzen den Summanden $2^2 = 4$ enthalten);

Karte D enthält alle natürlichen Zahlen von $1_{(10)}$ bis $31_{(10)}$, die in binärer Ziffernschreibweise an der 4. Stelle die Ziffer 1 haben (die bei der Darstellung als Summe von Zweierpotenzen den Summanden $2^3 = 8$ enthalten);

Karte E enthält alle natürlichen Zahlen von $1_{(10)}$ bis $31_{(10)}$, die in binärer Ziffernschreibweise an der 5. Stelle die Ziffer 1 haben (die bei der Darstellung als Summe von Zweierpotenzen den Summanden $2^4 = 16$ enthalten).

▲1▲ Eingangs wurde festgehalten, daß die gedachte Zahl nicht größer als 31 sein darf. (Wir sagen jetzt wohl besser: Sie muß kleiner als $32 = 2^5$ sein.)

Wie müssen Anzahl und Beschriftung der Zahlenkarten abgeändert werden, damit die gedachte Zahl $\leqq 100$ sein kann?

▲2▲ Jede der fünf ursprünglichen Zahlenkarten enthält genau 16 Zahlen. Die Zahlen jeder Karte lassen sich daher in vier Reihen zu je vier Zahlen anordnen.

Mit etwas Geschick und Ausdauer sollte es dem Leser möglich sein, dies so zu tun, daß diese Anordnung jeweils ein magisches Quadrat darstellt. Als Hilfe ist jeweils die Position der kleinsten Zahl und die Konstante des magischen Quadrates angegeben.

A

1			

(64)

E

16			

(94)

B

2			

(66)

C

	4		

(70)

D

8			

(78)

W. Miller

Mersennesche Zahlen

Die Mathematik entwickelt sich heutzutage – wie auch die meisten modernen Wissenschaften – mit stark wachsender Geschwindigkeit. In der Welt erscheinen hunderte mathematische Zeitschriften, in denen alljährlich zehntausende wissenschaftliche Arbeiten veröffentlicht werden. Aber vor 350 Jahren gab es noch keine mathematischen Zeitschriften, und die Gelehrten tauschten ihre Forschungsergebnisse in persönlichen Briefen aus.
Nun gab es jemand – den französischen Mönch *Marin Mersenne* (1588 bis 1648), der mehr solcher Briefe als andere erhielt. Mersenne von der Entdeckung eines neuen Satzes benachrichtigen hieß zugleich, die Priorität zu sichern, denn Mersenne informierte darüber in der Regel seine übrigen Briefpartner – unter ihnen *R. Descartes, B. Pascal, P. Fermat, Ch. Huygens* und andere Gelehrte der damaligen Zeit. Diese Tätigkeit des Marin Mersenne trug zur Gründung der Pariser Akademie bei.

Von den eigenständigen mathematischen Leistungen Mersennes sind seine Untersuchungen der Zahlen der Form
$M_n = 2^n - 1$ $(n \in N)$ am bekanntesten.
Wer geometrische Reihen kennt, bemerkt sofort, daß M_n gleich der Summe der ersten n Glieder der geometrischen Reihe mit dem Anfangsglied $2^0 = 1$ und dem Quotienten 2 ist:
$M_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$.
Mersenne interessierte, welche der Zahlen $M_n = 2^n - 1$ *Primzahlen* sind. Diese Frage erwuchs aus einem Problem, das bereits von den alten Griechen gestellt worden war.
Wir kommen darauf noch zurück.
Primzahlen, die man als Wert des Terms $2^n - 1$ für eine natürliche Zahl n erhält, werden auch *Mersennesche Zahlen* genannt.

Auch wir wollen uns mit dem Problem der Suche nach Mersenneschen Zahlen etwas beschäftigen.

Wir berechnen einige Zahlen
$M_n = 2^n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
und schreiben sie der Reihe nach in Tabelle 1.

Erste Feststellung: Die Zahlen, die in ein und derselben Spalte stehen, enden mit ein und derselben Ziffer. Die Zahlen in der ersten Spalte enden auf die Ziffer 1, die in der zweiten Spalte auf 3, die in der dritten Spalte auf 7 und die in der vierten Spalte auf 5.

▲1▲ Versucht, diese Feststellung exakt zu begründen!

Das bedeutet, daß die Zahlen M_n in der vierten Spalte alle durch 5 teilbar sind. Unter ihnen kann sich also keine Mersennesche Zahl befinden.

Zweite Feststellung: Die Zahlen in der zweiten und die Zahlen in der vierten Spalte sind alle durch 3 teilbar.
Beweis: Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Zahlen M_{2k} und M_{2k+2} mit *geradem* Exponenten n ist
$M_{2k+2} - M_{2k} = (2^{2k+2} - 1) - (2^{2k} - 1)$
$= 2^{2k+2} - 2^{2k} = 2^2 \cdot 2^k - 1 \cdot 2^{2k}$
$= 3 \cdot 2^{2k}$.
Wenn also M_{2k} durch 3 teilbar ist, so ist auch M_{2k+2} durch 3 teilbar. Da $M_2 = 3$ ist, sind *alle* Zahlen M_n mit geradem n durch 3 teilbar.
Es hat deshalb nur in der ersten und in der dritten Spalte einen Sinn, nach Mersenneschen Zahlen (außer $M_2 = 3$) zu suchen.

Dritte Feststellung: Wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist $(n = k \cdot l,\ k > 1,\ l > 1)$, dann ist M_n sowohl durch M_k als auch durch M_l teilbar. Dies folgt aus
$2^{kl} - 1 = (2^k)^l - 1 = (2^l)^k - 1$ und
$x^m - 1 = (x \cdot 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)$.
Nebenbei: Aus der dritten Feststellung folgen die ersten beiden, da alle Zahlen der zweiten Spalte durch $M_2 = 3$ teilbar sind und alle Zahlen der vierten Spalte durch $M_4 = 15$.
Die Zahl $2^n - 1$ ist höchstens dann eine Primzahl, wenn n eine Primzahl ist.
Ob aber für *jede* Primzahl p die Zahl M_p prim ist? Die Hoffnung auf eine positive Antwort wird schnell zerstört:
Schon $M_{11} = 2047 = 28 \cdot 29$ ist eine zusammengesetzte Zahl.
Mersenne selbst gab alle Primzahlen n an, die nicht größer als 257 sind und für die seiner Meinung nach die Zahlen $M_n = 2^n - 1$ prim sind. Er lieferte jedoch keinen Beweis dafür. In der Folgezeit wurde klar, daß seine Voraussagen fehlerhaft waren.
An der Suche nach Mersenneschen Zahlen beteiligte sich auch *Leonhard Euler*, Mitglied der Petersburger Akademie, einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit. Im Jahre 1750 entdeckte er die zehnte der (in natürlicher Reihenfolge geordneten) Mersenneschen Zahlen:
$M_{31} = 2\,147\,483\,647$.
Wenn früher die Suche nach Mersenneschen Zahlen *von Hand* geführt wurde, so bezog man im 20. Jahrhundert die moderne Rechentechnik mit ihrer sehr hohen Arbeitsgeschwindigkeit ein. Im Jahre 1952 wurden mit einem Schlag fünf neue Mersennesche Zahlen entdeckt: M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203} und M_{2281}; sie sind das 13. bis 17. Glied der Folge der Mersenneschen Zahlen. Die nächsten sechs Mersenneschen Zahlen wurden in den Jahren 1958 bis 1963 gefunden. Es schlossen sich an M_{19937} (Nummer 24/entdeckt im Jahre 1971), M_{21701} (Nummer 25/1978), M_{23209} und M_{44497} (Nummer 26 und 27/beide 1979). Die letzte uns bekannte Mersennesche Zahl fand man 1983: M_{86243}. Es ist noch ungewiß, ob dies die 28. in der Folge der Mersenneschen Zahlen ist.
Warum sind nun die Mersenneschen Zahlen so interessant? Sie stehen im Zusammenhang mit den sogenannten *vollkommenen Zahlen*, mit denen sich schon die alten Griechen beschäftigten. Dies sind Zahlen, die gleich der Summe all ihrer Teiler (natürlich mit Ausnahme der betreffenden Zahl selbst) sind. Die ersten drei vollkommenen Zahlen sind 6, 28 und 496
$(6 = 1 + 2 + 3;$
$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$
$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 15 + 31 + 62 + 124 + 248).$
Schon *Euklid* bewies:
Wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist, so ist die Zahl $2^{n-1}(2^n - 1)$ vollkommen.

▲2▲ Beweist diesen Satz!

Leonhard Euler hat bewiesen, daß alle *geraden vollkommenen Zahlen* die Form $2^{n-1}(2^n - 1)$ haben, wobei $2^n - 1$ eine Mersennesche Zahl ist. Und die *ungeraden vollkommenen Zahlen*? Eine ungerade vollkommene Zahl hat noch niemand gefunden, und niemand hat bisher bewiesen, daß es solche Zahlen nicht gibt.

nach J. W. Koroljow/Q. M. Mamedow, aus Quant, übersetzt und bearbeitet von C. P. Helmholz

Tabelle 1

M_1 = 1	M_2 = 3	M_3 = 7	M_4 = 15
M_5 = 31	M_6 = 63	M_7 = 127	M_8 = 255
M_9 = 511	M_{10} = 1.023	M_{11} = 2.047	M_{12} = 4.095
M_{13} = 8.191	M_{14} = 16.383	M_{15} = 32.767	M_{16} = 65.535
M_{17} = 131.071	M_{18} = 262.143	M_{19} = 524.287	M_{20} = 1.048.575
M_{21} = 2.997.151	M_{22} = 4.194.303	M_{23} = 8.388.607	M_{24} = 16.777.215
M_{25} = 33.554.431	M_{26} = 67.108.863	M_{27} = 134.217.727	M_{28} = 268.435.455
M_{29} = 536.870.911	M_{30} = 1.073.741.823	M_{31} = 2.147.483.647	M_{32} = 4.294.967.295
. . .	. . .	. . .	. . .
M_{4n-3}	$M_{2(2n-1)}$	M_{4n-1}	M_{4n}

Ein interessanter Theodolit

Carl Zeiss Jena, 1908

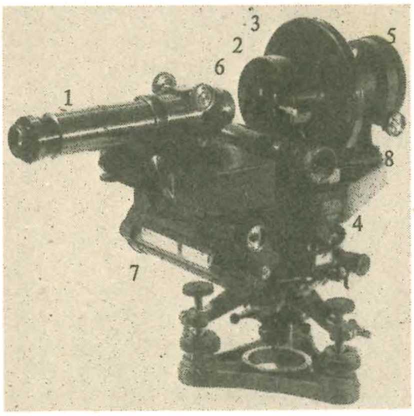


Bild 1

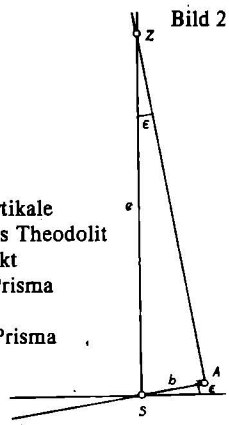


Bild 2

S = Stehachse (vertikale Drehachse) des Theodolit und Brechpunkt des hinteren Prisma
A = Brechpunkt des vorderen Prisma
Z = Zielpunkt

Die Aufgabe des Geodäten, unter anderem von der Erdoberfläche ein *ähnliches, maßstäblich verkleinertes und durch Kartenzeichen erläutertes Abbild* in Form einer Karte herzustellen, wurde bis zum Einsatz der Luftbildmessung fast ausschließlich durch kombinierte Winkel- und Streckenmessung verwirklicht.

Die ältesten Vermessungsgeräte, genutzt etwa 3000 Jahre v.u.Z. in Ägypten beispielsweise bei der Felder-Neueinteilung nach den jährlichen Nilüberschwemmungen, waren Meßseile und Meßstangen. Vervollkommnet bzw. auch vereinfacht wurde die Längenmeßtechnik durch die Einführung des Rades zur Streckenmessung. Nahezu 100 Jahre vor unserer Zeitrechnung beschrieb Heron von Alexandria diese Methode und deutete an, daß man sie schon seit langem im Einsatz habe. Leonardo da Vinci (1452 bis 1529) war übrigens ebenfalls mit der Konstruktion von Wagen mit Meßrädern und von Schrittzählern beschäftigt. Von Interesse dürfte auch sein, daß schon im römischen Heer Schrittzähler genutzt wurden, die von Soldaten getragen wurden, die auf ein bestimmtes Schrittmaß eingeübt waren.

Um das Jahr 1300 kam dann der sogenannte *Jakobsstab* zum Einsatz; ein Gerät, das sowohl für die Strecken- als auch für die Winkelmessung eingesetzt werden konnte.

Der Begriff *Theodolit* für ein Winkelmeßgerät wurde erstmals von dem Engländer Digges um das Jahr 1600 eingeführt, nachdem in der Astronomie für Winkelmessungen genutzte Astrolabien auch für die Bestimmung von Horizontalwinkeln eingesetzt worden waren. Die Erweiterung dieser Geräte durch Fernrohre, um damit eine Erhöhung der Ziel- und Meßgenauigkeit zu erreichen, war erst nach Einführung des Fadenkreuzes möglich; das geschah in der Mitte des 17. Jahrhunderts.

Mit dem Einsatz des Fernrohres für geodätische Zwecke kam natürlich auch die Frage nach der Streckenmessung unter Nutzung optischer Mittel auf. Der Geodät benötigt fast ausschließlich den horizontalen Abstand zweier Punkte. Ob mit Meßketten, Meßseilen, Meßstangen oder Meßbändern, stets ist deshalb das Fadenlot ein unentbehrliches Hilfsmittel bei der mechanischen Streckenmessung. Was nimmt es Wunder, wenn man diese Meßmethode durch eine optische abzulösen trachtete. Bereits um 1670 versuchte sich der Italiener Montanari mit der optischen Streckenmessung; aber erst 1812 bekam diese durch Georg von Reichenbach enormen Auftrieb. Bei den dabei verwendeten sog. Reichenbachschen Distanzfäden handelt es sich um ein in der Fadenkreuzebene des Fernrohres angebrachtes Strichpaar, dessen auf dem Zielbild einer senkrecht stehenden und mit Teilung versehenen Latte erzeugter Lattenabschnitt ein Maß für die Entfernung darstellt. Der Nachteil dieser Meßmethode ist, daß sie streng nur für horizontale Zielungen gilt und daß bei schrägen Visuren der systematische Fehleranteil wächst und außerdem nur Schrägentfernungen gemessen werden.

Unter den vielen Lösungsvarianten zur optischen Streckenmessung, die vor und nach der letzten Jahrhundertwende instrumentell verwirklicht wurden, sei hier nur eine herausgegriffen, die bei Carl Zeiss, Jena konstruiert und offenbar nur in ganz wenig Exemplaren gebaut wurde. Der abgebildete Theodolit – selbst seine Bezeichnung ist zur Zeit noch unbekannt – basiert auf einer Idee von Pulfrich und stammt aus dem Zeitraum 1907/08. Auffällig an ihm ist vorerst sein horizontal gelagertes Fernrohr (1); eine Maßnahme, die offenbar eine bequeme Beobachtungsstellung des Messenden auch bei sehr steilen Zielungen ermöglichen sollte. In seiner Funktion als Theodolit werden mit ihm Horizontal- und Vertikalwinkel gemessen. Zur Bestimmung dieser Winkel sind Teilkreise eingebaut (3 und 4), die über Nonienablesungen eine Winkelablesung auf 1′ zulassen. Geneigte Zielungen werden mit dem Gerät durch ein dem Fernrohr vorgelagertes und um die Fernrohrachse drehbares Prisma (2) realisiert. [illegible] ist der Vertikalkreis (3). Aus dieser konstruktiven Lösung der Vertikalwinkelmessung ergibt sich auch die Eigenart, daß Zielvisur und Fernrohrachse rechtwinklig zueinander stehen. Mit dem fest installierten Beobachtungsmikroskop (8) kann jederzeit über eine Dosenlibelle die Horizontierung des Gerätes kontrolliert werden.

Das Interessanteste aber an diesem Theodolit dürfte seine instrumentelle Ausrüstung für die optische Streckenmessung sein. Zu diesem Zweck kann am vorderen Ende des drehbaren Tubus (5) ein zweites Prisma angeordnet werden, das an den Drehungen des ersten teilnimmt. So entsteht im Gerät eine Basis b, an deren Enden rechtwinklig austretende Zielstrahlen angeordnet sind. Eine schwenkbare Abdeckplatte (6) erlaubt wahlweise durch das vordere bzw. hintere Prisma den gleichen Zielpunkt zu beobachten. Der sich dabei bildende und zu messende kleine Winkel ε – der sog. parallaktische Winkel – ist ein Maß für die Entfernung, die sich aus folgender Gleichung errechnen läßt:

$$e = \frac{b}{\sin \varepsilon} \qquad \text{(Siehe Bild 2)}$$

Es zeugt vom praktischen Sinn Pulfrichs, wenn er diesem Theodolit eine Meß- und Ableseeinrichtung hinzufügte, die nicht den Winkel selbst, sondern an der Trommel (7) ablesbar den für die obige Formel benötigten Sinus des Winkels ermitteln ließ. Von der Methode her hatte diese Variante der optischen Streckenmessung zwei Vorteile: 1. Der Zielpunkt brauchte nicht signalisiert und somit nicht begehbar zu sein und 2. war die ermittelte Entfernung bereits die Horizontalentfernung. Der Nachteil aber war – und daran ist offenbar auch eine Weiterentwicklung gescheitert – die geringe Genauigkeit. Die fehlertheoretische Untersuchung der Gleichung verbunden mit der nur 150 mm betragenden Gerätebasis b läßt das Verfahren nur für kurze Distanzen – also nur wenige Meter – zu, und in diesem Bereich liegt nicht die Menge der geodätischen Arbeiten.

Auch Pulfrich hat diese Schwachstelle erkannt und fast zur gleichen Zeit die *Basislatte* entwickelt, die sich bis in unsere Tage bei geodätischen Arbeiten bewährt hat. Hierbei wird der parallaktische Winkel zu einer im Zielpunkt aufzustellenden horizontalen Latte gemessen, die zwei in ihrem Abstand geeichte Zielmarken trägt. Der Abstand dieser Zielmarken beträgt heutzutage zwei Meter; zu Zeiten Pulfrichs waren es drei Meter. Gemessen werden können Strecken von über 100 Metern, wobei allerdings Hilfsfiguren zu bestimmen sind.

Natürlich ist mit Einführung der elektromagnetischen bzw. elektro-optischen Streckenmeßgeräte auch auf dem Gebiet der Streckenmessung eine kolossale Wende eingetreten.

Das Optische Museum der Carl-Zeiss-Stiftung Jena ist glücklicher Besitzer des zuvor beschriebenen Theodoliten. *J. Töppler*