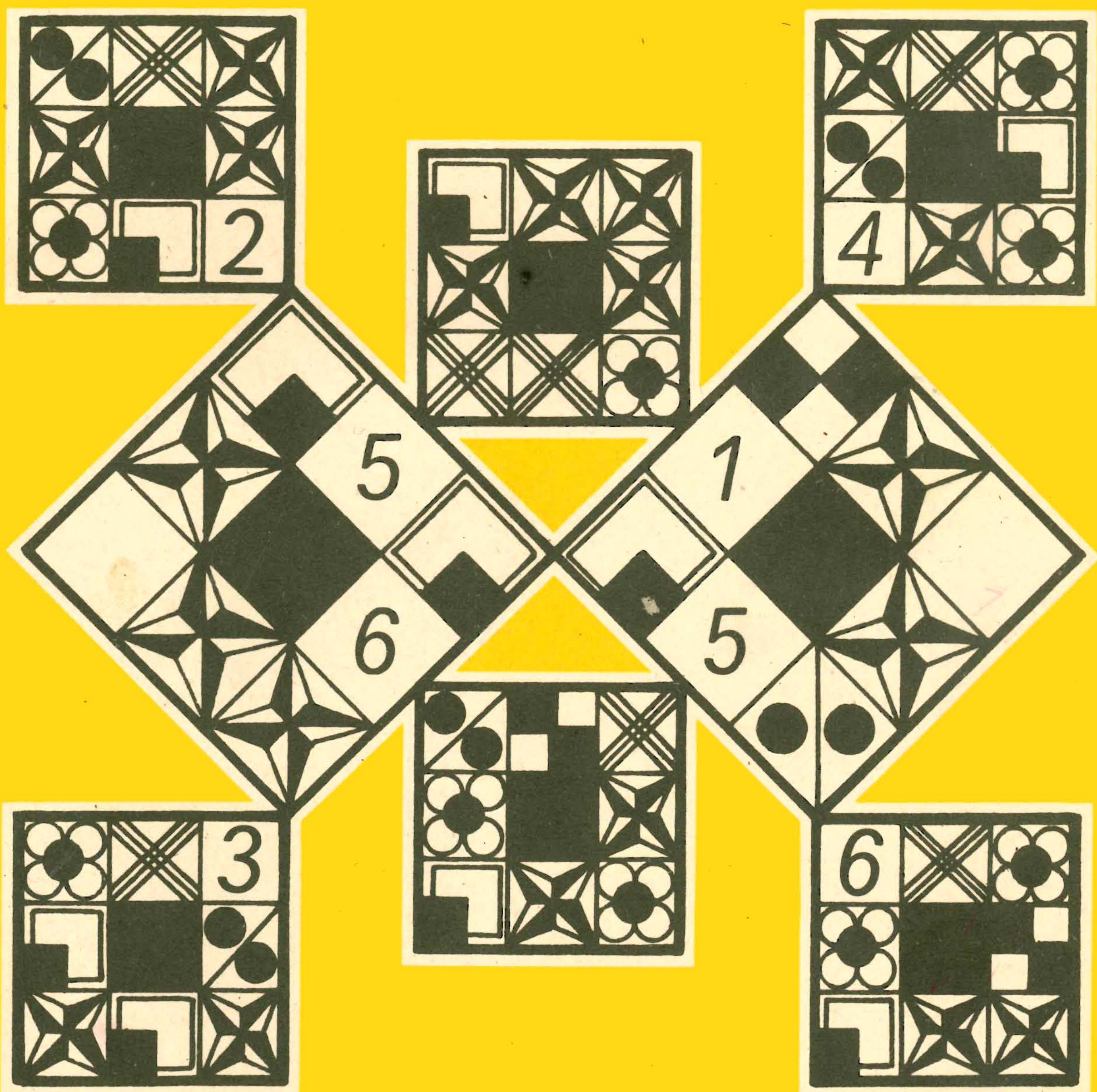
Mathematische Schülerzeitschrift

# alpha




4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
22. Jahrgang 1988
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
*Herausgeber und Verlag:*
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
*Anschrift des Verlags:*
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
*Anschrift der Redaktion:*
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
*Erscheinungsweise:* zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

*Fotos:* R. Thiele (S. 73); ADN – ZB/Michel (S. 74); ADN – ZB/Gerth (S. 75); J. Jahnel (S. 77); Kurt Oertel (S. 83); R. Bölling (S. 92)
*Vignetten:* L. Otto (Titelvignetten, S. 76, S. 88 l., IV. U.-S.); aus Eulenspiegel, Berlin (S. 87 M.)
*Titelblatt:* W. Fahr nach einer Vorlage von W. Neugebauer (beide Berlin)
*Typographie:* H. Tracksdorf, Leipzig

*Gesamtherstellung:* INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395

*Redaktionsschluß:* 13. April 1988
*Auslieferungstermin:* 9. August 1988

# Mathematische Schülerzeitschrift

## Inhalt

# Flächenberechnung bei Dreiecken mit dem SR 1

Erste Bekanntschaft mit dem Flächeninhalt von Dreiecken macht ein Schüler meist in Klasse 5 am Spezialfall: Für Dreiecke mit $\sphericalangle(a, b) = 90°$ und den Seitenlängen $a$ und $b$ gilt $A = \frac{1}{2}ab$ (der Flächeninhalt $A$ des rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem halben Produkt der Seiten $a$ und $b$). In Klasse 6 wird das Wissen erweitert: Aus Grundseite und Höhe lernt ihr den Inhalt nach der Formel $A = \frac{g \cdot h}{2}$ zu berechnen. Oft sind leider die Seitenlängen bekannt, die zugehörigen Höhen jedoch nicht.

Schüler dieser Klassenstufe können sich helfen, indem sie durch Konstruktion die Höhen näherungsweise bestimmen. Dieser Mangel wird erst in Klasse 10 mit umfangreicheren Mitteln beseitigt.

▲ 1 ▲ *Man berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seitenlängen 13 cm, 14 cm, 15 cm! Man gebe dazu einen Programmablaufplan für den SR 1 an, so daß man ohne das Notieren von Zwischenergebnissen zum Ziel kommt.*

(Schüler der 6. Klasse ermitteln die Länge einer Höhe durch Konstruktion.)

Schon dem griechischen Mathematiker *Heron von Alexandria* (um 75 u. Z.) war eine Formel bekannt, um den Flächeninhalt aus den drei Seiten eines Dreiecks rechnerisch zu bestimmen. Die sogenannte *Heronsche Formel*

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei $s$ der halbe Umfang des Dreiecks ist, zeigt, daß man für die Flächenberechnung keine Winkelgrößen als Hilfswerte benötigt.

▲ 2 ▲ *Gib einen Programmablaufplan für den SR 1 an, so daß bei Anwendung der Heronschen Formel keine Zwischenergebnisse notiert werden müssen! Überprüfe damit das in Aufgabe 1 ermittelte Ergebnis!*

Wer Aufgabe 2 selbständig gelöst hat, beherrscht seinen Schulrechner sehr gut. Wir wollen nun versuchen, eine Formel zu finden, die leicht programmierbar und einprägsam ist. Dazu seien $a$, $b$, $c$ die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks, ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $c \geqq a$ und $c \geqq b$.

Unter Verwendung des Kosinussatzes

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

berechnen wir zunächst den Kosinuswert des größten Winkels

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Aus $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$ und $0° < \gamma < 180°$ folgt

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{(2ab)^2}}.$$

Wir benutzen diese Beziehung und formen die Formel $A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$ um:

$$A = \frac{1}{2}ab\sqrt{\frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{(2ab)^2}},$$

daher ist

$$A = \sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} : 4.$$

▲ 3 ▲ *Man gebe einen Programmablaufplan zur Anwendung dieser Formel auf dem SR 1 an und überprüfe das Ergebnis von Aufgabe 1!*

Diese Formel ist nicht nur *rechnerfreundlich*, sie läßt sich wegen der gleichartigen Terme wie beim Kosinussatz auch leicht merken. Wir wollen noch weitere Vorteile kennenlernen.

▲ 4 ▲ *Man berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn die Maßzahlen der Seitenlängen 48, 55, 73 sind!*

Seid bitte nicht verunsichert, wenn plötzlich 0 zu quadrieren ist. Sorgfältiges Abarbeiten des weiteren Programms führt zum richtigen Ergebnis. Wir erinnern uns an den *Lehrsatz des Pythagoras:*

*Hat der Term $a^2 + b^2 - c^2$ den Wert 0, so ist das Dreieck rechtwinklig.* Für die Berechnung seines Flächeninhaltes eignet sich daher die eingangs erwähnte einfache Formel $A = (48 \cdot 55) : 2$.

Man überprüfe dies! *Hat der genannte Term einen positiven Wert, so handelt es sich um ein spitzwinkliges Dreieck, ist der Wert negativ, handelt es sich um ein stumpfwinkliges Dreieck, wobei der stumpfe Winkel der Seite c gegenüberliegt.*

Aufmerksames Beobachten der Zwischenergebnisse liefert also nützliche Zusatzinformationen! Zum Schluß sei an den Spezialfall des gleichseitigen Dreiecks erinnert.

▲ 5 ▲ *Man leite aus*

$$A = \sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} : 4$$

*eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes gleichseitiger Dreiecke her und vergleiche das Ergebnis mit der Angabe im Tafelwerk!*

*B. Herrmann*

# Eine historische Aufgabe

Verfolgungsaufgaben gehören zu den interessantesten Problem der Unterhaltungsmathematik. Eine der einfachsten Aufgaben dieser Art ist die Frage, wann eine Person eine andere überholen wird. Dieser Grundtypus erscheint bereits 1000 Jahre vor der Zeitrechnung in der chinesischen Mathematik. Der gelehrte Mönch Alcuin von York verfaßte am Hofe Karls des Großen die Aufgabensammlung *Propositiones ad acuendos iuvenes* (etwa um das Jahr 1000), in der unter anderem die Verfolgungsproblematik als Hund – Hasen – Aufgabe erscheint. Auf diese Einkleidung wird im ganzen Mittelalter ständig zurückgegriffen, beispielsweise durch die italienischen Mathematiker Pacioli und Cardano (um 1500 bzw. 1540) oder die deutschen Mathematiker Rudolff und Köbel (um 1520). In Köbels Rechenbuch wird das Jagdproblem Hund – Hase variiert. In jenen Jahrhunderten wurden Nachrichten durch Boten überbracht, und so bildeten sich in Italien allgemeinere Kurierprobleme heraus, in denen zwei Boten zur gleichen oder zu verschiedenen Zeiten in gleicher (oder entgegengesetzter) Richtung von gleichen oder verschiedenen Orten aus starten. Später bot die Uhr mit ihren Zeigern die Möglichkeit, knifflige Überholaufgaben zu formulieren.

Von Wandern.

Von wandern vber Landt.

Zwen Bürger auß Oppenheym/ Einer Son Heynrich/ der ander Contz võ Treber genant/ wolten mit einander gen Rom gehen/ Vnd Heynrich was alt/ vnd mocht einen tag nicht mehr denn zehen meilen gehen/ Aber Contz von Treber was jung vnd starck/ der mocht einen tag 13. meilen gehen/ Deßhalben gieng Son Heynrich neun tag ehe auß Oppenheym denn Contz von Treber/ Also war Son Heynrich Contzen 90. meilen fürgangen/ ehe Contz angehabē hat außzugehen.

Unser Bild zeigt eine Seite aus dem *Rechenbuch* von Köbel (Ausgabe von 1564), in der zwei Oppenheymer Bürger nach Rom wandern und zu verschiedenen Zeiten aufbrechen. Die Wahl eines italienischen Zielortes weist noch auf den italienischen Ursprung der Kurierprobleme hin.

Viel Spaß beim Lösen wünscht Euch

*R. Thiele*

# Mathematikolympiaden in der Volksrepublik Moçambique

Der Autor dieses Beitrags – Mitarbeiter der Sektion Mathematik der *Karl-Marx*-Universität Leipzig – bildet zur Zeit an der Universität *Eduardo Mondlane* in Maputo Lehrer für die Fächer Mathematik und Physik aus. Er ist einer der DDR-Bürger, die der VR Moçambique unter zum Teil komplizierten Bedingungen beim Aufbau des Sozialismus helfen. In einem Brief an die Redaktion *alpha* berichtet er über Mathematikolympiaden in diesem jungen afrikanischen Staat.

Bei der Überwindung der Folgen einer 500-jährigen Kolonialzeit hat das Bildungswesen besonders viel zu leisten. Bereits in den ersten 10 Jahren des Bestehens der VR Moçambique konnte die Zahl der Analphabeten bedeutend gesenkt werden. Dies gelang, obwohl noch zu wenige Schulräume, Arbeitsmaterialien und Lehrer vorhanden sind. Beispielsweise muß an den großen Schulen der Hauptstadt in drei Schichten gearbeitet werden:

Vormittags haben die Klassen 10 und 11 Unterricht, nachmittags die Klassen 7 bis 9, und abends lernen die Erwachsenen.

Die Moçambiquaner wissen, daß für den Aufbau ihres Landes mathematisches und naturwissenschaftliches Wissen und Können große Bedeutung haben. Von den sozialistischen Ländern griffen sie deshalb die Idee auf, regelmäßige Schülerolympiaden durchzuführen. Im Jahre 1981 begann man mit einer Mathematikolympiade, an der 139 Schüler teilnahmen. Bereits drei Jahre später gab es Olympiaden in den Fächern Mathematik, Physik, Chemie, Biologie, Geographie, Geschichte und Portugiesisch dazu, an denen sich insgesamt mehr als 4000 Jugendliche beteiligten.

Durch diese Olympiaden werden die Schüler zu intensiverer Beschäftigung mit dem jeweiligen Fachgebiet angespornt.

Preisträger der Olympiaden nutzen alle Möglichkeiten des Weiterlernens. So qualifizierte sich z. B. *Lourenza Làzaro Magaia*, einer der Preisträger der Mathematikolympiade von 1981, inzwischen zum Lehrer für Mathematik und Physik. Er arbeitet zur Zeit als Assistent an der Universität Maputo und bereitet sich auf ein Zusatzstudium in der DDR vor.

Die Mathematikolympiade wird landesweit in zwei Stufen durchgeführt. An der 1. Stufe können sich alle Schüler ab Klasse 7 beteiligen. Die fünf besten Schüler jeder Schule und Klassenstufe dürfen die Aufgaben der 2. Stufe lösen. In der Klassenstufe 10/11 starten auch Studenten, die zu Lehrern für die Klassen 7 bis 9 ausgebildet werden.

Während die Lösungen der 1. Stufe in den Provinzen korrigiert werden, erfolgt die Auswertung der 2. Stufe zentral in der Hauptstadt Maputo.

Einige Olympiadeaufgaben wollen wir euch im Anschluß an diesen Beitrag vorstellen.

Die Mathematikolympiaden finden in der Öffentlichkeit starke Beachtung. So veröffentlichen Zeitungen und auch *Radio Moçambique* mathematische Preisaufgaben in Vorbereitung auf die Olympiade. Das Bild 2 zeigt ein Plakat, das zur Teilnahme u. a. an der Mathematikolympiade aufruft.

Zur Vorbereitung auf die Mathematikolympiade nutzen die immer zahlreicher werdenden Teilnehmer vor allem die seit

Bild 1 Unterricht in der mit Unterstützung der FDJ errichteten Technischen Schule von Maotize.

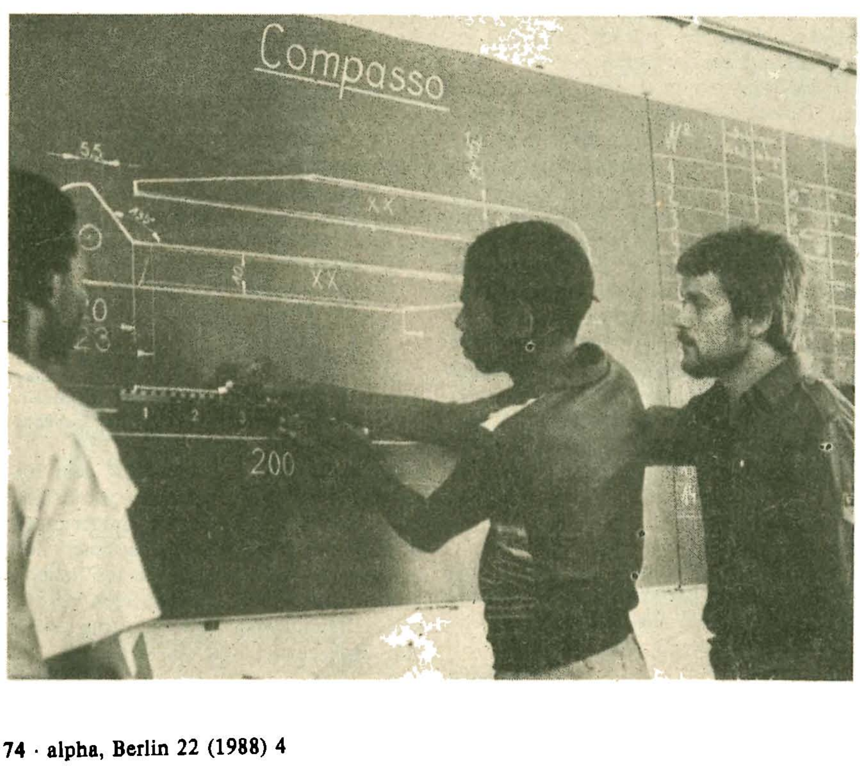



Bild 2

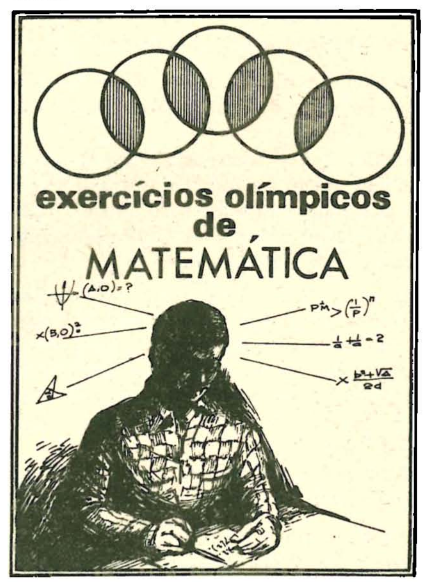
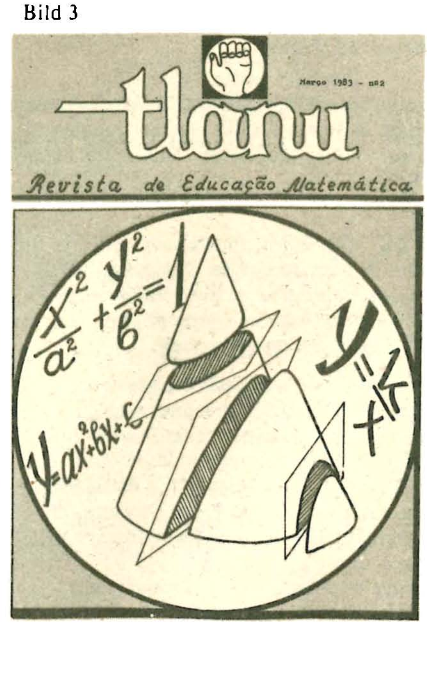



Bild 3



fünf Jahren bestehende Schülerzeitschrift *Tlanu*, eine Bruderzeitschrift der *alpha*. An ihrer Gestaltung sind Wissenschaftler aus der DDR wesentlich beteiligt. *Tlanu* bedeutet in den Bantusprachen soviel wie die Zahl 5. Diese Zahl war die Basis des von den Eingeborenen im Gebiet der heutigen VR Moçambique beim Zählen und Rechnen verwendeten Positionssystems. Das Bild 3 zeigt eine Titelseite dieser Zeitschrift. *H. Hunecke*

## Aufgaben

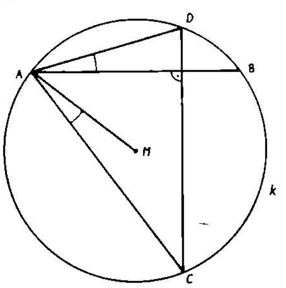
### Klassenstufe 7

▲1▲ a) Num torneio de xadres, cada aluno joga contra ca da aluno. Ao todo, fazem – se 28 jogos. Quantos são os alunos participantes.
b) Num outro torneio do mesmo tipo, participam 10 alunos. Quantos jogos se fazem no total?
(Originaltext einer Olympiadeaufgabe)

▲1▲ a) Bei einem Schachturnier spielte jeder Schüler gegen jeden anderen Teilnehmer genau einmal. Insgesamt wurden 28 Spiele ausgetragen. Wie viele Schüler nahmen an diesen Turnier teil?
b) An einem anderen Schachturnier nahmen 10 Schüler teil. Wie viele Spiele mußten ausgetragen werden, wenn jeder Schüler gegen jeden anderen Turnierteilnehmer genau einmal spielte?

▲2▲ Mario, Angelo und Lucas sind drei Jugendliche. Einer von ihnen wohnt in Lichinga, einer in Nampula und einer in Inhambane. Von ihnen ist folgendes bekannt:
(1) Angelo und der Jugendliche aus Nampula beschäftigen sich in ihrer Freizeit mit dem Lösen mathematischer Aufgaben.
(2) Derjenige von ihnen, der in Nampula wohnt, kennt Lucas nicht.
(3) Angelo ist der Freund des Jugendlichen, der in Lichinga wohnt.
Ermittle, in welcher Stadt jeder der drei Jugendlichen wohnt!

▲3▲ Im abgebildeten Kreis $k$ mit dem Mittelpunkt $M$ stehen die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ aufeinander senkrecht. Weise nach, daß die Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle MAC$ einander kongruent sind!




▲4▲ Ein Bauer brachte Gurken zum Markt. Wenn er die Gurken in Mengen mit jeweils 10 Stück einteilte, blieb die letzte Menge unvollständig; es fehlten zwei Gurken. Als er die Gurken in Mengen mit jeweils 12 Stück einteilte, blieben acht Gurken übrig. Wie viele Gurken brachte der Bauer zum Markt, wenn es mehr als 300 weniger als 400 Stück waren?

### Klassenstufe 8

▲5▲ Man finde alle natürlichen Zahlen $m$ und $n$, für die $m^2 - n^2 = 91$ gilt!

▲6▲ Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck $ABC$ mit den Höhen $h_a$ (Höhe auf $\overline{BC}$) und $h_c$ (Höhe auf $\overline{AB}$), die sich im Punkte $S$ schneiden. Ferner gelte $\overline{AS} = \overline{BC}$. Es ist die Größe des Winkels $CAB$ zu bestimmen!

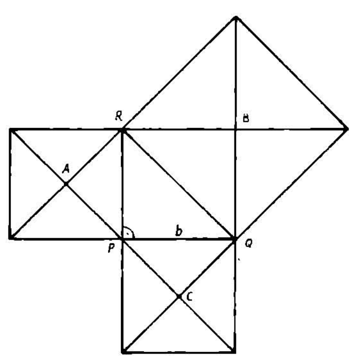
▲7▲ Man weise nach, daß für alle positiven reellen Zahlen $a$ und $b$ die Ungleichung

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \text{ erfüllt wird!}$$

▲8▲ Ein Mathematiker wurde gefragt, an welchem Tag und Monat er Geburtstag habe, scherzhaft antwortete er: „Wenn man den Tag meines Geburtstages mit 12, den Monat mit 31 multipliziert und diese beiden Produkte addiert, so erhält man 368. Nun rechnet meinen Geburtstag selber aus!"

### Klassenstufe 9

▲9▲ Es seien $A$, $B$ und $C$ die Mittelpunkte der Quadrate über den Seiten eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks $PQR$. Ferner habe die Strecke $\overline{PQ}$ die Länge $b$. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ durch die Länge $b$ auszudrücken!



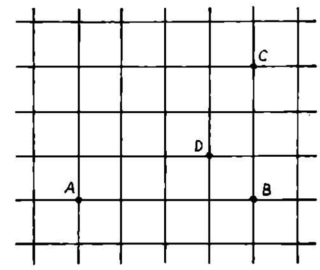

▲10▲ Ein Händler kaufte eine gewisse Anzahl Hühner für 3 360 MT, von denen sieben infolge einer Krankheit starben. Die restlichen Hühner verkaufte er für einen Stückpreis, der um 20 MT pro Huhn höher lag als der ursprüngliche Kaufpreis. Nachdem er alle Hühner verkauft hatte, betrug sein Gewinn 140 MT. Wie viele Hühner hatte er ursprünglich gekauft?
(Die Währung Mocambiques ist der *Metical*, abgekürzt MT, Mehrzahl Meticais.)

▲11▲ Ein Händler verkaufte eine gewisse Menge Speiseöl für 24 000 MT. Dabei verdiente er soviel Prozent wie ihm das Öl in Tausendern gekostet hatte. Für welchen Preis hatte er das Öl eingekauft?

▲12▲ Auf Grund einer Dürre erhöhte man den Preis für Kartoffeln um 20 %. Etwas später wurde der Preis für Kartoffeln wieder um 20 % gesenkt. Wann waren die Kartoffeln billiger, vor der Preiserhöhung oder nach der Preissenkung?
Wieviel Prozent beträgt der Preisunterschied?

### Klassenstufe 10

▲13▲ In einem aus kongruenten Quadraten bestehenden Gitternetz wurden vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ (wie aus dem Bild ersichtlich) festgelegt. Es ist zu beweisen, daß die Gerade $AD$ den Winkel $BAC$ halbiert!




▲14▲ Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck $ABC$ mit der Basis $\overline{AB}$. Es sei $M$ der Mittelpunkt der Höhe $\overline{CD}$. Die Gerade $AM$ schneide $BC$ im Punkte $K$. Man zeige, daß $\overline{AM} = 3 \cdot \overline{MK}$ gilt!

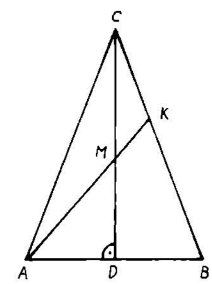
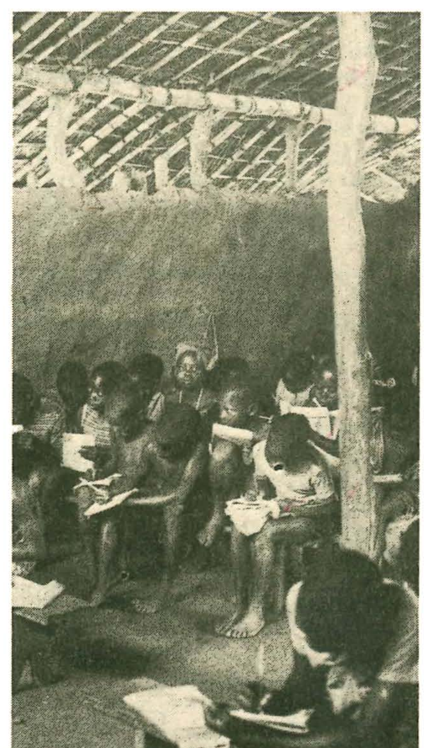
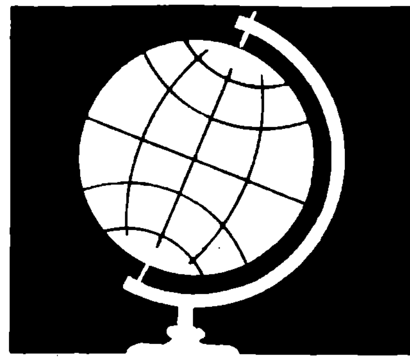


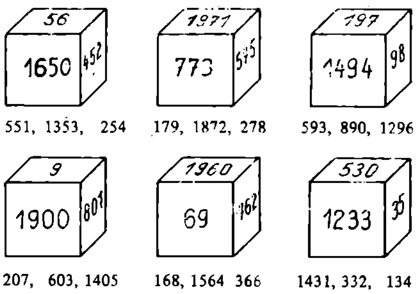

Bild 4
Eine Schule bei Motala, einer kleinen Ortschaft in der Provinz Sambesi. Besonders auf dem Lande entstanden seit der Gründung der VR Moçambique hunderte, wenn auch noch sehr einfache Schulgebäude.



# Schneller als mit dem Rechner

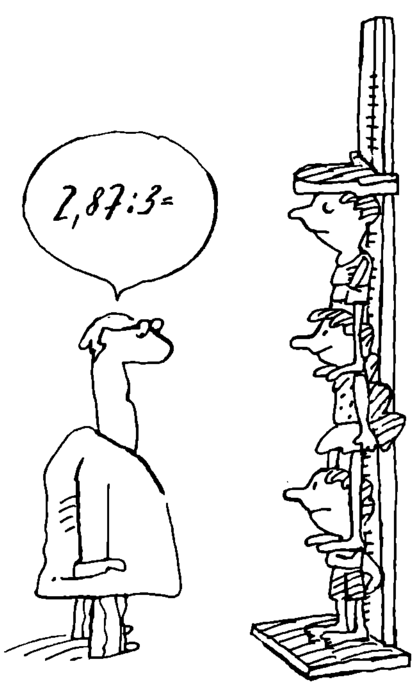
## Teil 1






Es ist zu hoffen, daß die Überschrift neugierig gemacht hat. Bei folgendem Würfelspiel[1] wirst du, oder besser gesagt, wird dein Mitspieler dieses sicherlich sagen.

Auf den sechs abgebildeten Würfeln siehst du auf den Würfelflächen ein-, zwei-, drei- oder vierstellige natürliche Zahlen notiert. (Die Zahlen der jeweils nicht sichtbaren Flächen sind daruntergeschrieben.) Du könntest dir solche Würfel mit den angegebenen Zahlen herstellen und dann deinen Freund würfeln lassen. Danach stellt ihr die gewürfelten sechs Zahlen schön in Reihe nebeneinander und dein Freund beginnt – so schnell er kann – mit dem Rechner zu addieren. ... Aber du hast schon längst das Ergebnis zu Papier gebracht. Dein Freund stellt erstaunt fest, daß beide Ergebnisse (wenn er richtig eingetippt hat) übereinstimmen. Auswendig kannst du die Summe nicht gelernt haben, denn es gibt mehr als 46 Tausend (genau $6^6$) Würfelmöglichkeiten! Wenn du ihm dann noch sagst, daß du diese speziellen Würfel auch mit anderen Zahlen beschriften könntest und daß es auch mehr oder weniger als sechs Würfel sein könnten, wird er neugierig sein und wissen wollen, wie du das machst und wie das so kommt.




Beschäftigst du dich näher mit den Zahlen auf diesen speziellen Würfeln, so wirst du vielleicht bald hinter das *Geheimnis des Rechenkünstlers* kommen. Suche und überlege zuerst selbständig, indem du dir diese Zahlen etwas genauer ansiehst!

Bald wirst du das Geheimnis lüften und finden, daß du nur die sechs Einer dieser sechs Zahlen zu addieren brauchst, das erhaltene aus zwei Ziffern bestehende Ergebnis zu 50 ergänzen und die so gefundene Zahl vor die Einersumme setzen mußt. Zu dieser vierstelligen Zahl addierst du noch die (eventuell vorhandenen) Tausender der sechs Zahlen.

Wären zum Beispiel die Zahlen gewürfelt: 452, 1971, 98, 1900, 69, 1233, so addierst du die Einer und erhälst 23. Die Ergänzung ergibt 27; ferner sind es drei Tausender. Also (statt 2723) ist 5723 die Lösung.

Nun gibt es zwei Fragen:

1. *Warum* findet man so die *schnelle Lösung*?
2. *Wie* stellt man sich solche Zahlen auf den Würfeln her?

Im nächsten Heft werden diese Fragen zu beantworten sein. Viel Spaß beim Knobeln! *H.-J. Kerber*

[1] Nach einer Idee von Heath/1927 aus *Magazin* 3/87

## Wo steckt der Fehler?

Löse die Gleichung

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3}!$$

Für die Exponenten gilt: $2x + x = 3$

also $x = 1$.

Die Probe zeigt, daß das Ergebnis richtig ist!

Wie kommt mit einer falschen Rechnung, das richtige Ergebnis zustande?

*aus: Lietzmann, Wo steckt der Fehler, BSB B. G. Teubner, 1963*

▲1▲ Products

If $x$ and $y$ integers and $s$ represents their sum, $d$ their difference and $p$ their product, show that the product of $s$, $d$ and $p$ is always a multiple of 6.

Note: The product of three consecutive integers is divisible by 6.

*nach: The Australian Mathematic Teacher*

▲2▲ La masse de la tour Eiffel est 8200 t. Calculer le volume de l'acieur utilisé pour la construire. Le poids volumique de l'acier est 7,8 kg/dm³. *H.*

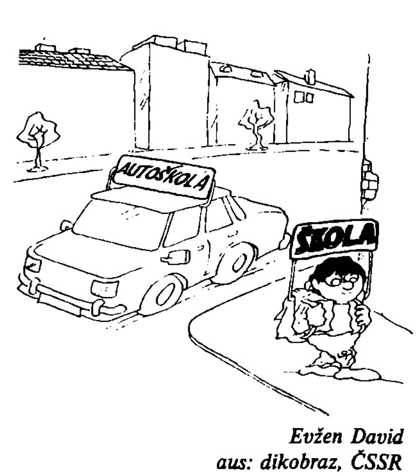
▲3▲ В куче 1001 камень. Она произвольно делится на две кучи, подсчитывается число камней в них и записывается произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одного камня) проделывается та же операция: она делится на две и записывается произведение чисел камней в двух вновь образовавшихся кучах. Затем та же операция повторяется с одной из трех получившихся куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одному камню. Чему равняется сумма 1000 записанных произведений?

*aus: Quant, Moskau*

▲4▲

In Randwick, the cats, I declare,
They number one third of a square.
If a quarter did roam,
Just a cube would stay home.
How many, at least, must be there?

*aus: Parabola, Australien (Schulolympiade Mathematik 1987)*




*Evžen David*
*aus: dikobraz, ČSSR*

# alpha-Porträt:

## Mathematikstudent
# Jörg Jahnel

Im Jahre 1968 wurde ich in Eisenberg im Bezirk Gera geboren. Von 1975 bis 1983 besuchte ich die *Maxim-Gorki*-Oberschule in der kleinen Stadt Schkölen. Von Klasse 4 an war ich Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik, in der vorwiegend Aufgaben des *alpha*-Wettbewerbs behandelt wurden. So ergab sich die etwas außergewöhnliche Gelegenheit, schon in Klasse 4 als Frühstarter an der Kreisolympiade Junger Mathematiker teilzunehmen. Der damalige 1. Preis war wohl in erster Linie auf das völlig unbekümmerte Herangehen zurückzuführen, hat aber in jedem Fall ein bis heute erhalten gebliebenes Interesse an der Mathematik hervorgebracht. Von da an nahm ich jährlich, und solange wie möglich als Frühstarter an Kreisolympiaden teil. In Klasse 6 qualifizierte ich mich erstmalig für die Bezirksolympiade, in Klasse 8 für die DDR-Olympiade. Über den 3. Preis unter um zwei Jahre älteren Schülern hatte ich mich sehr gefreut. An diesem Erfolg hatte zweifellos die Förderung durch den Bezirksklub Gera Junger Mathematiker großen Anteil.

Im Jahre 1983 wechselte ich an die Spezialschule *Carl Zeiss* in Jena. Obwohl die Anforderungen stark gestiegen waren, hatten sich meine Leistungen nur unwesentlich verschlechtert. Auch mein Interesse an der Mathematik blieb, trotz der wenigen freien Zeit, erhalten. 1987 legte ich das Abitur mit Prädikat *Auszeichnung* ab.

In die Zeit an der Spezialschule fielen meine größten Erfolge auf dem Gebiet der Mathematikolympiaden. Im Jahre 1985, als Schüler der 10. Klasse, gehörte ich, für mich selbst etwas überraschend, neben vier Schülern der 12. Klasse und einem weiteren Schüler der 10. Klasse zur Mannschaft der DDR bei der Internationalen Mathematikolympiade (IMO) in Finnland. Dort erreichte ich einen 2. Preis.

In den Jahren 1986 und 1987 nahm ich noch zweimal an Internationalen Mathematikolympiaden teil, in der VR Polen und der VR Kuba. Ich erreichte dabei einen ersten und einen zweiten Preis. Selbstverständlich sind IMO-Teilnahmen aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet sehr interessant. Dies betrifft natürlich zuerst die mathematische Seite. Weiterhin ist der olympische Geist der Völkerverständigung zu nennen, der auch bei der IMO ausgeprägt ist. Gespräche mit Teilnehmern aus anderen Ländern verlaufen im allgemeinen in einer freundlichen Atmosphäre. Man würde sich jedoch bessere Fremdsprachenkenntnisse wünschen. Ein dritter Aspekt betrifft die Reiseziele. Der Leser wird schon vermutet haben, daß von den drei von mir besuchten Ländern Kuba mit einigem Abstand das attraktivste war.

Auf Initiative des Bezirksklubs Junger Mathematiker wurde ich seit Klasse 8 durch die *Friedrich-Schiller*-Universität Jena und seit Klasse 9 speziell durch Prof. Kerstan individuell gefördert. So hatte ich die gewiß nicht alltägliche Gelegenheit, mir während meiner Schulzeit Teile des Stoffes für das Mathematikstudium anzueignen und Prüfungen abzulegen. Das wohl bisher wichtigste Ergebnis dieser Förderung ist meine Diplomarbeit, die inhaltlich am Ende der 11. Klasse fertiggestellt war und die ich am 1. 9. 1987, dem Tag meiner offiziellen Immatrikulation, einreichte. Nunmehr studiere ich an der *Friedrich-Schiller*-Universität Jena nach einem individuellen Studienplan.

**Aufgaben**

▲1▲ Im Würfel mit der Kantenlänge 1 seien 57 Punkte gelegen. Man zeige, daß man stets 8 von ihnen derart auswählen kann, daß jeder (möglicherweise entartete) geschlossene Polygonzug mit diesen Punkten als Eckpunkten eine Gesamtlänge von höchstens $4 \cdot \sqrt{3}$ hat.

▲2▲ $n$ sei eine natürliche Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist.
$a_1, \ldots, a_n$ seien ganze Zahlen derart, daß $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = n$ gilt.
Man beweise $a_1 + \ldots + a_n \neq 0$.

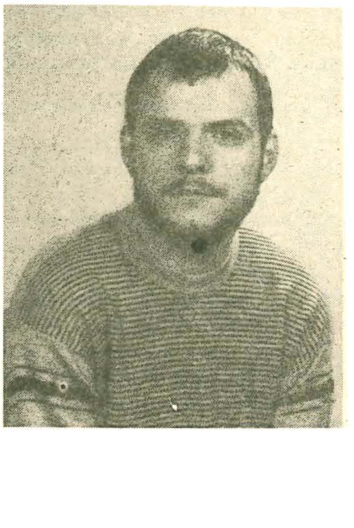
▲3▲ Man entscheide, ob $2^{683} - 1$ eine Primzahl ist.

▲4▲ Man finde die kleinste positive ganze Zahl $a$, für die $a^3 - 130a^2 - 91a$ durch 1987 teilbar ist.

▲5▲ Gibt es ganze Zahlen $m$, $n$, so daß $5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1985$ gilt?

▲6▲ Im Würfel mit Kantenlänge 1 seien 1988 Punkte gelegen. Man zeige, daß man stets 32 von ihnen derart auswählen kann, daß jeder (möglicherweise entartete) geschlossene Polygonzug mit diesen Punkten als Eckpunkte eine Gesamtlänge von höchstens $8 \cdot \sqrt{3}$ hat.

*J. Jahnel*



# Ohne Wasser, merkt euch das, wär' diese Welt ein leeres Faß

Wasser ist für Menschen, Tiere und Pflanzen lebenswichtig.

Der Wasserbedarf steigt ständig, und zwar durch die Zunahme der Bevölkerung, durch das Anwachsen des Lebensstandards (Badezimmer, Haushaltmaschinen) sowie durch eine umfangreichere gärtnerische und landwirtschaftliche Bewässerung und das Zunehmen der Industrialisierung. Mit Wasser sollte deshalb jedermann sparsam umgehen.

**Aufgaben**

▲1▲ Genau am 1. 1. 1988, um 0.00 Uhr fing dieser verflixte Wasserhahn an zu tropfen. Alle 24 s fiel einer – ich meine ein Tropfen (0,198 8 ml)!

a) Wieviel Liter Wasser sind das in einer Stunde?

b) Wieviel Liter Wasser sind das an einem Tag?

c) Wieviel Kubikmeter Wasser sind das im gesamten Jahre 1988?

d) Nehmen wir einmal an, in einer Kreisstadt gibt es 500 solcher *Tropfhähne.* Wieviel Kubikmeter Wasser gehen dann im Verlaufe eines Jahres der sinnvollen Nutzung verloren?

▲2▲ Herr Müller sprengt trotz Verbotes in der trockenen Sommerperiode seinen Rasen vor dem Haus aus dem öffentlichen Trinkwassernetz. Das benutzte Gerät versprüht pro Minute 5 l Wasser.

In den höher gelegenen Ortsteilen ist nicht zuletzt aus solchen Gründen der Wasserdruck so gering, daß die Einwohner in den Tagesstunden kein Wasser entnehmen können. Wie oft muß Klaus mit zwei Eimern laufen (je 8 l Fassungsvermögen), wenn er die von Herrn Müller vergeudete Wassermenge aus dem Tankwagen heranschaffen sollte? Wir nehmen dabei an, daß das Sprühgerät 1 Std. in Betrieb ist.

▲3▲ Familie Weber sammelt das Regenwasser in einer Tonne von 200 l Fassungsvermögen und benutzt es während der Trockenheit zum Gießen im Garten. Im Faß sind noch 40 l. Bei einem Regenschauer werden innerhalb von 1,5 Std. 12 l pro Quadratmeter Niederschlag gemessen. Das Laubendach hat eine Fläche von 12,5 $m^2$. 80 % der Wassermenge gelangen in das Faß.

a) Wieviel Liter Regenwasser enthält das Faß nach diesem Schauer?

b) Wieviel Kannen Wasser (zu 8 l) kann Familie Weber nutzen, wenn eine Reserve von 50 l verbleiben soll?

c) Um wieviel Millimeter steigt in dieser Zeit der Wasserspiegel des Schwimmbeckens im Garten der Familie Weber, das noch nicht vollständig gefüllt war?

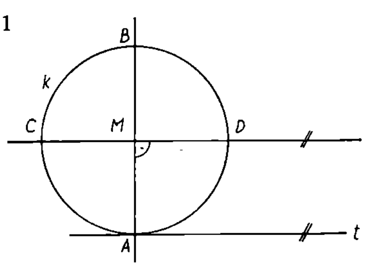
*J. Kreusch*

# Näherungsweise Konstruktionen für den halben Kreisumfang

Auch im Zeitalter der Rechenmaschinen mit graphischen Bildschirmen und Zeichenautomaten ist das Skizzieren und Zeichnen von Hand, das Konstruieren mit Zirkel und Lineal und weiteren Zeichenhilfsmitteln unentbehrlich. Wird man doch teure Gerätetechnik erst dann einsetzen wollen, wenn die „Idee“ einen umsetzungsfähigen Reifegrad erreicht hat, und für einen Einzelfall sollte man nicht erst große Programmierbemühungen investieren. Daher kann es wertvoll sein, für die Ermittlung des Umfangs eines Kreises Konstruktionen zu kennen. Sie sind auch anderweitig interessant, denn sie gehören in jenes anspruchsvolle mathematische Gebiet, das die Güte von Rechnungen untersucht, die statt mit reellen Zahlen (auf die sich die Theorie bezieht) mit den Zahlen, die ein Rechenhilfsmittel (Zeichnung, Logarithmen, Rechenstab, ..., Computer) realisiert, ausgeführt werden.

Da die Konstruktion des (halben oder ganzen) Umfangs eines Kreises nur Teilaufgabe innerhalb einer umfangreicheren Konstruktion sein wird, kann folgende Ausgangssituation als typisch angenommen werden (Bild 1): Von dem Kreis $k$ liegen außer Mittelpunkt $M$ und Radius $r$ (als Strecke, etwa $r = \overline{CM}$) auch noch ein Paar zueinander senkrechter Durchmesser $g_{AB}$ und $g_{CD}$ sowie etwa in $A$ die Tangente $t$ an $k$ vor. Die durch die Konstruktion dieser Stücke bedingten Einflüsse auf die nachfolgenden Konstruktionsschritte sollen ignoriert werden.

Bild 1



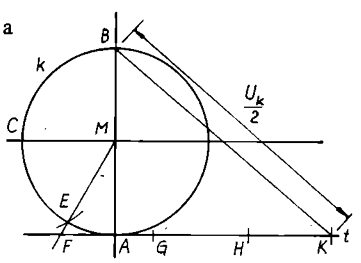

Im Jahre 1685 wurde von *Adam Amandus Kochansky* (siehe nebenstehende biographische Skizze) folgende konstruktive Ermittlung des halben Kreisumfangs veröffentlicht (Bild 2a):

– An die Halbgerade, die in $M$ beginnt und durch $A$ geht, wird ein Winkel der Größe 30° angetragen (2 Möglichkeiten!), etwa so: Der Kreis um $C$ durch $M$ trifft $k$ im Punkt $E$; es ist $\sphericalangle EMA = 30°$.

– Die Verbindung von $M$ mit $E$ trifft $t$ im Punkt $F$.

– Auf der Halbgeraden, die in $F$ beginnt und durch $A$ geht, wird dreimal eine Strecke der Länge $r$ abgetragen; das liefert der Reihe nach die Punkte $G$, $H$ und $K$.

Bild 2a




$E$: $\overline{CE} = \overline{CM} = r$,
$F$: $g_{ME}$ mit $t$ schneiden,
$G$: $\overline{FG} = \overline{CM} = r$,
$H$: $\overline{GH} = \overline{CM} = r$,
$K$: $\overline{HK} = \overline{CM} = r$.

(Die kurzgefaßte Konstruktionsbeschreibung zu Bild 2a ist nun verständlich, wenn man den Doppelpunkt als Abkürzung für „ist festgelegt durch“ nimmt.)

Behauptung: Die Strecke $BK$ hat näherungsweise die Länge des halben Umfangs $u/2$ von $k$.

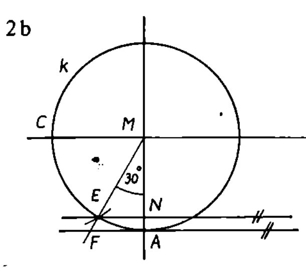
Nun wird ja der Zusammenhang zwischen halbem Umfang $u/2$ und Radius $r$ des Kreises $k$ durch $u/2 = \pi \cdot r$ beschrieben. Die Behauptung kann daher auch in der Form

$u/2 = \pi \cdot r \approx u_K/2 = \pi_K \cdot r$

notiert werden, worin $u_K/2$ die nach *Kochansky* konstruierte Näherung des halben Kreisumfangs von $k$ und $\pi_K$ die aus dieser Konstruktion sich ergebende Näherung von $\pi$ bezeichnet.

In der Tat werden wir die Güte der angegebenen geometrischen Konstruktion nur durch Rechnung bestimmen können!

Bild 2b




Zur Vorbereitung betrachten wir Bild 2b: Die Parallele zu $t$ durch $E$ trifft $g_{AM}$ im Punkt $N$. Es ist $\overline{EN} = r/2$; daher folgt in dem rechtwinkligen Dreieck $MEN$ mit dem rechten Winkel bei $N$, daß

$\overline{MN} = \sqrt{r^2 - (r/2)^2} = r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

(Länge der Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $r$).

Die Dreiecke $MEN$ und $MFA$ sind ähnlich, woraus folgt:

$\overline{FA} : \overline{EN} = \overline{MA} : \overline{MN}$, also

$\overline{FA} = \overline{EN} \cdot \overline{MA} / \overline{MN} = \frac{r}{2} \cdot r / r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = r/\sqrt{3}$.

Das liefert (Bild 2a) zunächst

$\overline{AK} = 3r - r/\sqrt{3} = r\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

und damit endlich

$$u_K/2 = \overline{BK} = \sqrt{\overline{AK}^2 + \overline{AB}^2}$$
$$= r \cdot \sqrt{\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2^2}$$
$$= r \cdot \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$$

sowie

$$\pi_K = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}141\,533\,339\ldots$$

Der Vergleich von $\pi_K$ mit $\pi$ liefert den absoluten Fehler

$|\pi - \pi_K| = 0{,}000\,059\,31\ldots \approx 6 \cdot 10^{-5}$

für die Approximation von $\pi$ durch $\pi_K$. Die Abweichung der konstruierten Länge von der wahren Länge des halben Kreisumfangs, der sogenannte Rektifikationsfehler $F$, ergibt sich zu

$F = |u/2 - u_K/2| = r \cdot |\pi - \pi_K|$
$= r \cdot 0{,}000\,059\ldots \approx r \cdot 6 \cdot 10^{-5}$.

Den zeichnerischen Einsatz der *Kochansky*schen Konstruktion findet man etwa wie folgt gewertet:

„Da das unbewaffnete Auge erfahrungsgemäß zwei Punkte, die um weniger als 1/20 [mm] voneinander entfernt sind, nicht mehr zu trennen vermag, bleibt der Rektifikationsfehler $F$ des halben Kreisumfanges $u/2 = r \cdot \pi$ so lange unter dieser Schranke der Zeichengenauigkeit, als

$F \approx 6 \cdot 10^{-5} \cdot r\,[\mathrm{mm}] < \frac{1}{20}\,[\mathrm{mm}]$

ist. Das ist der Fall, wenn

$r < \frac{10^5}{6 \cdot 20}\,[\mathrm{mm}] = \frac{5}{6} \cdot 10^3\,[\mathrm{mm}] < 83{,}4\,[\mathrm{cm}]$

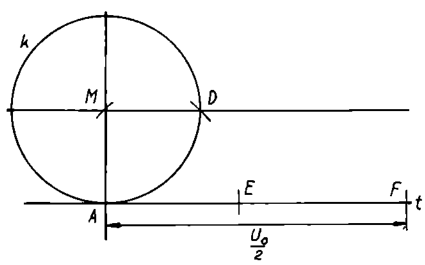
ist, d. h. aber für fast alle auf dem Zeichenblatt auftretenden Kreise.“

Diese Abschätzung geht nun freilich davon aus, daß die Näherungskonstruktion exakt ausführbar sei. Tatsächlich aber ist die Konstruktion aus mehreren Schritten, deren jeder fehlerbehaftet ist, zusammengesetzt. Da der erfahrene Zeichner um die visuell und manuell (beim Gebrauch der Zeichengeräte) bedingten Ungenauigkeiten des konkreten Konstruierens weiß, verwendet er auch gerne Näherungskonstruktionen, die zwar theoretisch weniger genau, dafür aber aus nur wenigen Schritten bestehen und in diesem Sinne „schnell“ sind. Eine solche Konstruktion wird unten zum Vergleich angeführt.

Die *Kochansky*sche Konstruktion kommt mit einer Zirkelöffnung aus (: Vorzug!), benötigt jedoch sechs Schritte, das Abgreifen von $u_K/2 = \overline{BK}$ einbegriffen (Bild 2a). Ungenauigkeiten (Fehler) entstehen bei folgenden Operationen:

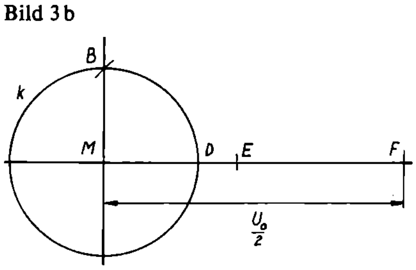
1., 2.: In $C$ einstechen, bis $M$ spannen (falls $r$ noch im Zirkel ist, entfällt 2.),
3., 4.: $M$ und $E$ verbinden,
5., 6., 7.: in $F$, in $G$, in $H$ einstechen,
8., 9.: in $K$ einstechen, bis $B$ spannen.
Wenn der einzelne Fehler wieder mit maximal 1/20 [mm] angenommen wird, dann ist das praktisch erhaltene Ergebnis möglicherweise um $8 \cdot 0{,}05$ [mm] = 0,4 [mm] gegenüber dem theoretisch begründeten verfälscht!
Praktisch unaufwendiger, aber theoretisch weniger genau ist die folgende Näherungskonstruktion, die 1895 von *Philbert Maurice d'Ocagne* mitgeteilt wurde (s. nebenstehende biographische Skizze). Sie ist aus nur zwei Schritten zusammengesetzt, benötigt allerdings zwei verschiedene Zirkelöffnungen. Dafür kann sie meist so eingerichtet werden, daß die Strecke, deren Länge den halben Kreisumfang annähert, gleich dort zu liegen kommt, wo sie benötigt wird, etwa auf $g_{CD}$ (von $M$ oder von $D$ aus nach rechts angetragen) oder auf $t$ (von $A$ aus angetragen): Bilder 3a und 3b (die kurzen Konstruktionsbeschreibungen nach dem Muster aus Bild 2a). (Die benötigten Kreisbögen wird man nur zu einem kleinen Teil ausführen, um die Zeichnung nicht mit unnötigen Linien zu belasten.)

Bild 3a




$E$: $\overline{AE} = \overline{AD}$,
$F$: $\overline{EF} = \overline{EM}$.

Bild 3b




$E$: $\overline{ME} = \overline{DB}$,
$F$: $\overline{EF} = \overline{EB}$.

Es ist eine neue Näherung für den halben Kreisumfang
$u_0/2 = \overline{AF}$ in Bild 3a,
$u_0/2 = \overline{MF}$ in Bild 3b,
$u_0/2 = r \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = r \cdot \pi_0$,
worin
$\pi_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}146\,264\ldots$
eine neue Näherung für $\pi$ angibt mit dem absoluten Fehler
$|\pi - \pi_0| = 0{,}004\,671\ldots \approx 5 \cdot 10^{-3}$,
d. h. die Näherung $\pi_0$ von $\pi$ ist um den Faktor 100 schlechter als die Näherung $\pi_K$ von $\pi$.

Fehler können bei folgenden Operationen entstehen:
Bei der Konstruktion Bild 3a:
1.: in $A$ einstechen,
2.: bis $D$ spannen,
3.: in $E$ einstechen,
4.: bis $M$ spannen.
Bei der Konstruktion Bild 3b:
1.: in $D$ einstechen,
2.: bis $B$ spannen,
3.: in $M$ einstechen,
4.: in $E$ einstechen,
5.: bis $B$ spannen.
Das gibt $4 \cdot 0{,}05$ [mm] = 0,2 [mm]
oder $5 \cdot 0{,}05$ [mm] = 0,25 [mm]
als möglichen Gesamtfehler der Konstruktionsausführung.
Die visuell-manuell bedingten Fehler in der praktischen Ausführung einer Konstruktion machen es illusorisch, einen numerisch sehr kleinen Fehler einhalten zu können, wenn relativ viele Teilkonstruktionen auszuführen sind. Anders ausgedrückt: Theoretisch sehr gute Näherungskonstruktionen können bei ihrem praktischen Einsatz weniger guten unterlegen sein! Das ist übrigens das Schicksal vieler exakter Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, deren Fehler der Theorie nach ja gleich Null ist. Vor diesem Hintergrund beurteile man eine beliebige Lösung der folgenden Aufgabe:
Man ersinne eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal für den halben Kreisumfang, die
$\pi_N = \sqrt{14} - 0{,}6 = 3{,}141\,657\ldots$
als Näherung für $\pi$ verwendet!
(Es ist $|\pi - \pi_N| = 0{,}000\,064\,73\ldots$,
also $\pi_N$ kaum schlechter als $\pi_K$.)

*G. Geise*

### Adam Adamandus Kochański

polnischer Jesuit und Mathematiker, geb. 5. 8. 1631 in Dobrzyń an der Wisła (nahe Warschau), studierte Theologie an deutschen und italienischen Universitäten, hielt sich längere Zeit in Prag auf. 1680 bis 1685 Mathematiker in Warschau, 1686 bis 1690 Hofkaplan des polnischen Königs Jan III. Sobieski, von diesem 1691 zum *Königlichen Mathematiker* ernannt. Kochański beschäftigte sich hauptsächlich mit geometrischen Konstruktionen, besonders mit der näherungsweisen Rektifikation des Kreises und der Berechnung von regelmäßigen Vielecken sowie mit magischen Quadraten. Er starb am 19. 5. 1700 in Teplice (heute ČSSR).

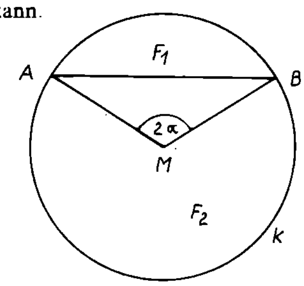
### Philbert Maurice d'Ocagne

Ingenieur und Mathematiker, geb. 25. 3. 1862 in Paris, 1893 Prof., 1922 Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften, Arbeitsgebiete: Darstellende, projektive und Differentialgeometrie, insbesondere vom Standpunkt der angewandten Mathematik, zählt vor allem zu den Begründern der graphischen Statik und der Nomographie, insgesamt über 200 wissenschaftliche Arbeiten. Er starb am 23. 10. 1938 in Paris.

*P. Schreiber*

# Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Geise

Die Aufgabe kann nur näherungsweise (= approximativ) gelöst werden. Es gibt Verfahren, die durch fortgesetztes Wiederholen einer Rechenvorschrift immer bessere Näherungen für die Lösung ermitteln (Iterationsverfahren). Sie benötigen allerdings einen ersten Wert, mit dem das Verfahren gestartet werden kann. In vielen Fällen verhilft eine graphische Lösung der Aufgabe zu solch einem Startwert. Hier geht es um solch eine durch Konstruktion zu gewinnende Näherungslösung, bei der eine näherungsweise Ermittlung des halben Kreisumfangs dienlich sein wird.
Sei $k$ ein Kreis mit Mittelpunkt $M$ und Radius $r$. Zwei Punkte $A$ und $B$ von $k$ legen einen Mittelpunkts- oder Zentriwinkel der Größe $\measuredangle AMB = 2\alpha$ fest ($0° \leq 2\alpha \leq 180°$). Es ist $2\alpha$ so zu bestimmen, daß die Sehne $AB$ die Kreisfläche in zwei Teile zerlegt, deren Flächeninhalte $F1$ und $F2$ ein vorgegebenes Verhältnis haben: $F1 : F2 = m : n$. Der Fall $m : n = 1 : 1$ ist natürlich nicht interessant, so daß man sich etwa auf die Aufgabe $F1 : F2 = 1 : 2$ festlegen kann.




Geg.: Positive (reelle) Zahlen $m$, $n$.
Ges.: $2\alpha$, so daß $F1 : F2 = m : n$

### Kurzbiographie

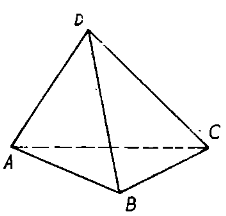
Gerhard Geise, 1930 in Stendal geboren, Ausbildung als Kraftfahrzeughandwerker, Mathematikstudium 1951 bis 1956 an der *Martin-Luther*-Universität Halle, 1961 Promotion, 1967 Habilitation, Berufung zum Hochschuldozenten, 1972 zum Ordentlichen Professor für Reine Mathematik (Geometrie) an der TU Dresden, Sektion Mathematik. Forschungstätigkeit seit 1968 bevorzugt auf verschiedenen Gebieten der geometrischen Verfahren zum Entwurf von Kurven und Flächen (CAD), seit 1962 vielfältig bei der Förderung mathematisch interessierter und talentierter Schüler wirksam; Vorsitzender der Bezirkssektion Dresden der MGdDDR; rund achtzig Veröffentlichungen, ein Buch, an mehreren Patenten beteiligt.

# Pythagoreische Tetraeder

1. *Verwandtschaft* zwischen ebenen Figuren und Körpern

Ein Dreieck ist uns als ebene geometrische Figur recht gut bekannt: Wir kennen Begriffe wie Seite und Winkel, Eigenschaften wie *gleichschenklig* oder *rechtwinklig* und einige Lehrsätze. Weit weniger vertraut ist uns dagegen das Tetraeder (zu deutsch: *Vierflächner*), eine dreiseitige Pyramide (Bild 1), obwohl das Tetraeder für die Raumgeometrie etwa die Bedeutung hat, wie sie dem Dreieck in der ebenen Geometrie zukommt.

Bild 1




Deshalb sollen hier einige Betrachtungen zur Raumgeometrie der Tetraeder dargelegt werden, insbesondere ein Satz, der sehr viel *Ähnlichkeit* mit dem bekannten Satz des Pythagoras hat und der deshalb auch Satz des Pythagoras für Tetraeder, Satz des Pythagoras im Raum oder kurz *räumlicher Pythagoras* genannt wird. Dreieck und Tetraeder sind in einem gewissen Sinne *verwandte* oder *analoge* Figuren (das Wort *ähnlich* darf man in der Geometrie für diesen Sachverhalt nicht verwenden, weil seine Bedeutung in der Ähnlichkeitslehre genau fixiert ist und auch dafür reserviert bleiben soll), so wie Kreis und Kugel oder Quadrat und Würfel. Worin diese *Verwandtschaft* genau besteht, soll hier nicht exakt auseinander gesetzt werden, weil uns dazu die Hilfsmittel aus der analytischen Geometrie fehlen. Dagegen können wir mit dem Dimensionsbegriff immerhin sagen, worin sich Quadrat, Kreis und Dreieck einerseits, von Würfel, Kugel und Tetraeder andererseits unterscheiden: Erstere lassen sich in eine Ebene (Dimension $n = 2$) legen, i. allg. nicht aber in eine Gerade (Dimension $n = 1$), für letztere ist ein Raum (Dimension $n = 3$) erforderlich, eine Ebene reicht i. a. zur Einbettung nicht aus.

Um über pythagoreische Tetraeder zu diskutieren, werden einige Begriffe, der Raumgeometrie benötigt. Zu ihrer Einführung wollen wir grundsätzlich von der bekannten ebenen Geometrie ausgehen, jedoch die Formulierungen unter Umständen so wählen, daß eine Übertragung auf die Raumgeometrie naheliegend ist. Als bekannt wird insbesondere vorausgesetzt:

(I) Eine *Gerade* in einer *Ebene* ist durch zwei verschiedene Punkte eindeutig definiert. Sie teilt die *Ebene* in zwei *Halbebenen*.

(I′) Eine *Ebene* in einem *Raum* ist durch *drei* verschiedene Punkte eindeutig definiert. Sie teilt den *Raum* in zwei *Halbräume*.

Uns fällt auf, daß beide Sätze bis auf die Kursiv geschriebenen Wörter identisch sind. Diese Wörter wollen wir als geordnete Begriffspaare zusammenstellen: Gerade – Ebene, Ebene – Raum, zwei – drei. So erhalten wir ein kleines Wörterbuch.

Ersetzt man gleichzeitig das erste Wort eines jeden Begriffspaares in I durch das zweite, so geht I in I′ über. Ersetzt man jetzt das zweite Wort wieder durch das erste, so wird aus I′ wieder I. Wenn es uns gelingt, eine ebene Figur und einen Körper durch eine einheitliche Definition im eben beschriebenen Sinne einheitlich zu charakterisieren, so sollen sie *verwandt* oder *analog* genannt werden.

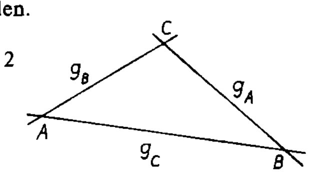
So ist also die Ebene das räumliche Gegenstück zur Geraden einerseits und andererseits das zweidimensionale Analogon zum Raum.

Nach diesem Vorbild wollen wir nun versuchen, Dreieck und Tetraeder einheitlich zu definieren, so daß nur analoge Begriffe ausgetauscht werden müssen.

(II) Definition des Dreiecks

Gegeben seien in einer *Ebene drei* verschiedene Punkte $A$, $B$, $C$. Je *zwei* Punkte bestimmen eine *Gerade*. $g_A$ sei die *Gerade*, die durch $B$ und $C$ definiert ist, $g_B$ ist bestimmt durch $A$ und $C$ und $g_C$ durch $A$ und $B$. Das Gebiet der *Ebene*, das durch die *drei Geraden* $g_A$, $g_B$ und $g_C$ begrenzt wird, nennen wir *Dreieck ABC*. Die *drei Strecken* $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ sind die Seiten des *Dreiecks ABC*, deren *Längen* mit $a$, $b$ und $c$ bezeichnet werden.

Bild 2




(Bemerkung: In der Schule wird das Dreieck als Streckenzug definiert, das sind nur die Randpunkte des Dreiecks nach dieser Definition. Die Streckenzugdefinition ist für unsere Zwecke jedoch nicht geeignet.)

(II′) Definition des Tetraeders

Gegeben seien im *Raum vier* verschiedene Punkte $A$, $B$, $C$, $D$. Je *drei* Punkte bestimmen eine Ebene. $E_A$ sei die *Ebene*, die durch $B$, $C$ und $D$ definiert ist, $E_B$ durch $A$, $C$, $D$, $E_C$ durch $A$, $B$, $D$ und $E_D$ durch $A$, $B$, $C$. Das Gebiet des *Raumes*, das durch die *vier Ebenen* $E_A$, $E_B$, $E_C$ und $E_D$ begrenzt wird, nennen wir *Tetraeder ABCD*. Die vier Dreiecke $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$, $\triangle ABC$ sind die Seiten des *Tetraeders ABCD*, deren *Flächeninhalte* mit $F_A$, $F_B$, $F_C$ und $F_D$ bezeichnet werden.

Berücksichtigt man zu den bereits aufgeführten die neuen Begriffspaare Dreieck – Tetraeder, Strecke – Dreieck, Länge – Flächeninhalt, drei – vier, so sind auch II und II′ identische Definitionen. Dreieck und Tetraeder sind damit verwandte geometrische Objekte. Aus diesem Grunde vermuten wir, vom Dreieck her bekannte geometrische Beziehungen am Tetraeder wiederzufinden.

Wir wollen am Satz des Pythagoras zeigen, daß diese Vermutung einerseits berechtigt ist, andererseits aber auch darauf hinweisen, daß es keinen *Automatismus* gibt, mit dessen Hilfe man Sätze der ebenen Geometrie in Sätze der räumlichen *übersetzen* kann. Man kann mit Hilfe der analogen Begriffe von gewissen Dreieckssätzen nur zu Hypothesen über Tetraedersätze gelangen, die dann ihrerseits bewiesen oder verworfen werden müssen. Beides führt jedoch i. a. zu einem tieferen geometrischen Verständnis.

2. Hilfsformeln

Sind die Koordinaten zweier Punkte

$A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$

in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem gegeben, so ist die Länge der Strecke $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \tag{1}$$

Liegen zwei Punkte

$P = (x_P, y_P, z_P)$, $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$

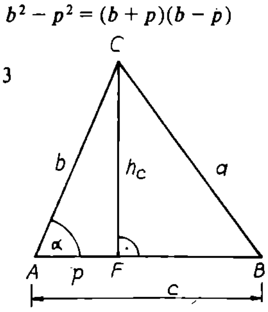
im Raum und sind ihre räumlichen kartesischen Koordinaten gegeben, so ist die Länge der Strecke

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}. \tag{2}$$

Für den Flächeninhalt eines Dreiecks $ABC$ benutzen wir $F = \frac{1}{2} c \cdot h_c$, aber die Höhe $h_c$ wollen wir eliminieren und durch die Seiten ausdrücken:

$h_c^2 = b^2 - p^2 = (b + p)(b - p)$

Bild 3

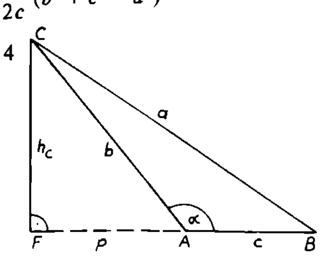



1. Fall: $\alpha$ spitz (siehe Bild 3)

$a^2 = h_c^2 + (c - p)^2 = b^2 + c^2 - 2cp,$

$p = \frac{1}{2c}(b^2 + c^2 - a^2)$

Bild 4




2. Fall: $\alpha$ stumpf (siehe Bild 4)

$a^2 = h_c^2 + (c + p)^2 = b^2 + c^2 + 2cp,$

$p = \frac{-1}{2c}(b^2 + c^2 - a^2).$

Es gilt für beide Fälle einheitlich

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}(2bc + b^2 + c^2 - a^2)$$
$$\times (2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$
$$= \frac{1}{4c^2}(a + b + c)(b + c - a)$$
$$\times (a + c - b)(a + b - c)$$

oder

$$16F^2 = (a + b + c)(b + c - a)$$
$$\times (a + c - b)(a + b - c) \qquad (3)$$

oder ausmultipliziert

$$16F^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2$$
$$+ 2b^2c^2. \qquad (4)$$

Führt man in (3) den halben Umfang $s = \frac{(a + b + c)}{2}$ ein, so erhält man die bekannte Heronische Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks, benannt nach dem griechischen Ingenieur und Mathematiker *Heron*, der im 1. Jh. u. Z. in Alexandria lebte:

$$F = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}. \qquad (5)$$

Hat man die Koordinaten der Eckpunkte $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, so kommt man über (1) und (4) zu

$$F = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)$$
$$+ x_3(y_1 - y_2)]. \qquad (6)$$

3. Pythagoreische Dreiecke und Tetraeder

Der Satz des Pythagoras für das Dreieck besteht aus zwei Aussagen:

(1) Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Länge der größten Seite (Hypotenuse, sie liegt dem rechten Winkel gegenüber) gleich der Summe der Quadrate der Längen der anderen Seiten (Katheten).

Ist $\sphericalangle ACB = 90°$, so folgt

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad (7)$$

(2) Umkehrung: Ist das Quadrat der Länge der größten Seite eines Dreiecks gleich der Summe der Quadrate der Längen der anderen Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig und der rechte Winkel liegt der größten Seite gegenüber.

Ist $c^2 = a^2 + b^2$, so folgt

$$\sphericalangle ACB = 90°. \qquad (8)$$

Für ein beliebiges Dreieck *ABC* mit *c* als größte Seite ist die Beziehung

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (\text{III})$$

richtig oder falsch. Wir wollen diese Beziehung (III) pythagoreische Relation für das Dreieck *ABC* nennen und falls sie richtig ist, das Dreieck selbst dann pythagoreisch. Man überlegt sich sofort: Hat ein Dreieck keine größte Seite, so kann es nicht pythagoreisch sein. Der Begriff *pythagoreisches Dreieck* ist überflüssig und auch ungebräuchlich, denn die pythagoreischen Dreiecke sind genau die rechtwinkligen. Er wurde hier benutzt, um auf die pythagoreischen Tetraeder hinzuführen. (III) kann in Worten so formuliert werden: Das Quadrat des Inhaltes der größten Seite ist gleich der Summe der Quadrate der Inhalte aller anderen Seiten. Diese Formulierung ist schon unabhängig von der Dimension $n = 2$. Daher ist es nach der in Abschnitt 1 dargelegten Philosophie naheliegend zu formulieren:

Ist $\triangle ABC$ die größte Seite eines Tetraeders *ABCD*, so nennt man die Relation

$$F_D^2 = F_A^2 + F_B^2 + F_C^2 \qquad (\text{III}')$$

die pythagoreische Relation für das Tetraeder und wenn diese Relation gültig ist, das Tetraeder selbst dann pythagoreisch. Auch hier ist klar: Hat ein Tetraeder keine größte Seite, so kann es nicht pythagoreisch sein. Dabei ist es für uns noch offen, ob es überhaupt pythagoreische Tetraeder gibt. Kann uns der Sachverhalt der ebenen Geometrie (7) und (8) einen Hinweis geben, welche Tetraeder pythagoreisch sein könnten? In (7) und (8) tritt als hinreichend und notwendige Bedingung $\sphericalangle ACB = 90°$ auf. Damit können wir zunächst nichts anfangen für die Raumgeometrie, denn der Winkelbegriff kommt in unserem *Wörterbuch der analogen Begriffspaare* von Abschnitt 1 nicht vor. Nun könnten wir versuchen, eine räumliche Verallgemeinerung des Dreieckswinkelbegriffes (Winkel zwischen zwei Seiten) am Tetraeder zu definieren. Aber dazu bieten sich gleich drei Möglichkeiten an, was uns unsere Aufgabe sehr erschwert:

– Winkel zwischen zwei Seiten (Ebenen) eines Tetraeders. Er wird Keilwinkel genannt und ist ein ebener Winkel.

– Winkel zwischen Seite und Kante eines Tetraeders. Auch dieser Winkel ist ein ebener Winkel.

– Winkel, der von drei Seiten eines Tetraeders gebildet wird. Er ist ein Raumwinkel.

Diese Winkel haben alle ihre Bedeutung in der Tetraedergeometrie, aber für das Verständnis pythagoreischer Tetraeder kann man sie entbehren. Daher soll auf die Winkelproblematik nicht weiter eingegangen werden.

Wir ersetzen $\sphericalangle ACB = 90°$ in (7) und (8) durch $\overline{AC} \perp \overline{BC}$. (IV)

(IV) übersetzen wir nun in die Raumgeometrie durch

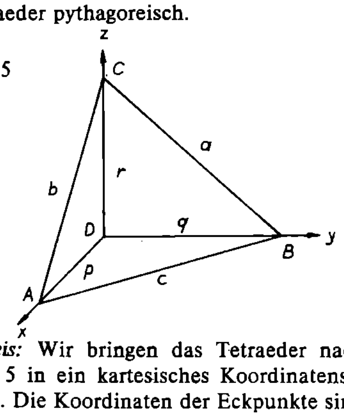
$\triangle ABD \perp \triangle ACD$ und $\triangle ABD \perp \triangle BCD$ und $\triangle ACD \perp \triangle BCD$. (IV')

Wir zeigen: Aus IV' folgt III'.

Satz über die einfachsten pythagoreischen Tetraeder.

Stehen in einem Tetraeder drei Seiten paarweise aufeinander senkrecht, so ist das Tetraeder pythagoreisch.

Bild 5




*Beweis:* Wir bringen das Tetraeder nach Bild 5 in ein kartesisches Koordinatensystem. Die Koordinaten der Eckpunkte sind dann

$A = (p, o, o)$, $B = (o, q, o)$, $C = (o, o, r)$, $D = (o, o, o)$

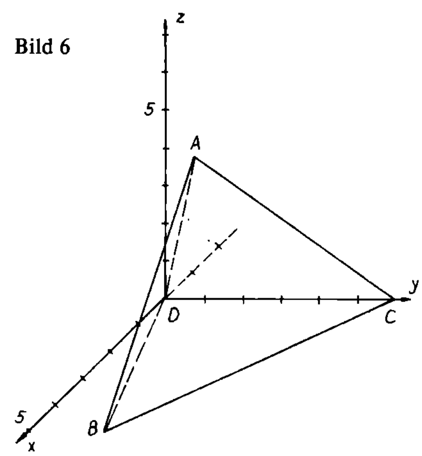
mit $p, q, r > o$. Die Flächeninhalte $F_A$, $F_B$ und $F_C$ sind unmittelbar aus Bild 5 ablesbar, für $F_D$ bekommt man nach (4)

$$16F_D^2 = -(q^2 + r^2)^2 - (p^2 + r^2)^2$$
$$- (p^2 + q^2)^2 + 2(q^2 + r^2)$$
$$\times (p^2 + r^2) + 2(q^2 + r^2)(p^2 + q^2)$$
$$+ 2(p^2 + r^2)(p^2 + q^2)$$
$$= 4q^2r^2 + 4p^2r^2 + 4p^2q^2$$
$$= 16F_A^2 + 16F_B^2 + 16F_C^2, \text{ q. e. d.}$$

Durch ein Gegenbeispiel zeigen wir, daß IV' aber nicht aus III' folgt:

$A = (-1, 0, 3)$, $B = (5, 2, 0)$, $C = (0, 6, 0)$, $D = (0, 0, 0)$

Bild 6




Nach (2) ist $\overline{AB}^2 = 49$, $\overline{AC}^2 = 46$, $\overline{AD}^2 = 10$, $\overline{BC}^2 = 41$, $\overline{BD}^2 = 29$, $\overline{CD}^2 = 36$.

Nach (4) erhält man $16F_A^2 = 3\,600$, $16F_B^2 = 1\,440$, $16F_C^2 = 1\,060$, $16F_D^2 = 6\,100$. Damit ist das Tetraeder *ABCD* pythagoreisch, aber nicht einmal ein Seitenpaar steht senkrecht, wie man aus Bild 6 sehen kann oder man baut sich nach Bild 7 ein maßstäbliches Modell.

Bild 7

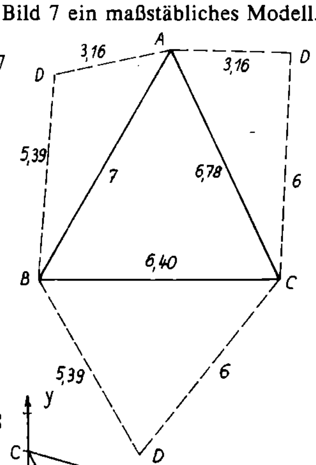
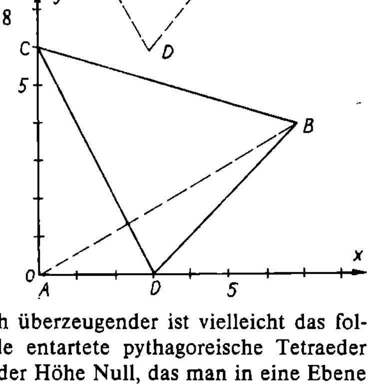



Bild 8




Noch überzeugender ist vielleicht das folgende entartete pythagoreische Tetraeder mit der Höhe Null, das man in eine Ebene legen kann (Bild 8):

$A = (0, 0)$, $B = (7, 4)$, $C = (0, 6)$, $D = (3, 0)$. Nach (6) ist

$F_A = 18$, $F_B = 9$, $F_C = 6$, $F_D = 21$.

$21^2 = 18^2 + 9^2 + 6^2$.

*W. Dörband*

# Ein verzwickter Quader

*Vorbemerkung der Redaktion:*
Im Heft 3/88 veröffentlichte *alpha* die Aufgaben der Kreisolympiade und verzichtete dabei zunächst auf die heiß umstrittene Aufgabe 270923. Der folgende Beitrag gibt nun Gelegenheit, sich intensiv mit ihr zu beschäftigen.

270923 *Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit a, b, c bezeichnet, die Länge der Raumdiagonalen mit d und der Oberflächeninhalt mit A. Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage: Es gilt genau dann*

$d = \frac{1}{3}(a + b + c)$, *wenn* $A = 8d^2$ *gilt.*

Viele werden die Aufgabe kennen. Diejenigen, die sich noch nicht damit beschäftigt haben, sollten es ruhig versuchen. Dann kann man die eigenen Überlegungen mit den weiteren Ausführungen vergleichen.
Zum Beweis sucht man nach weiteren Beziehungen zwischen $A$, $d$ und den Kantenlängen $a$, $b$, $c$ und stößt sofort auf
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ und $A = 2ab + 2ac + 2bc$.
Nun sieht man, daß die Gleichung

$$2(ab + bc + ac) = A = 8d^2 = 8(a^2 + b^2 + c^2)$$

genau dann gilt, wenn

$$(a + b + c)^2 = 9(a^2 + b^2 + c^2) = 9d^2$$

ist. Da alle Größen positive Zahlen sind, ist letztere Gleichung genau dann erfüllt, wenn $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$ ist. Damit wäre der geforderte Beweis erbracht.
Nun haben aber Schüler richtig bemerkt, daß für einen echten Quader stets

(1) $\quad a + b + c < 3d$

gelten muß, d. h. die Gleichung

$d = \frac{1}{3}(a + b + c)$ ist für alle Quader falsch. Was nun? Ist die behauptete Aussage in der Aufgabe nun doch falsch? Dann müßte unser Beweis ebenfalls einen Fehler enthalten. Sehen wir uns den kurzen Beweis noch einmal genau an, so stellen wir seine Korrektheit erneut fest. Wie erklärt sich aber der Widerspruch zu Ungleichung (1)? Dazu müssen wir über *genau dann, wenn* Aussagen tiefer nachdenken. Solche Aussagen setzen sich aus zwei Aussagen $H_1$ und $H_2$ zusammen. In der Aufgabe 270923 bedeutet für einen beliebigen Quader $H_1$ die Aussage $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$ und $H_2$ die Aussage $A = 8d^2$.
Verbindet man zwei Aussagen $H_1$ und $H_2$ durch *genau dann, wenn*, also $H_1$ genau dann, wenn $H_2$, so versteht man darunter, daß die Aussage $H_1$ dann und nur dann wahr ist, wenn die Aussage $H_2$ wahr ist. Das bedeutet aber auch, daß die Aussage $H_1$ genau dann falsch ist, wenn die Aussage $H_2$ falsch ist. Wir merken uns: Für den Beweis einer *genau dann, wenn* Aussage ist es nicht erforderlich, die Wahrheit von $H_1$ oder $H_2$ nachzuweisen. Es kommt nur darauf an zu zeigen, daß $H_1$ und $H_2$ beide denselben Wahrheitswert besitzen. Das erreicht man üblicherweise, indem man zeigt, daß aus $H_1$ die Aussage $H_2$ folgt und umgekehrt, daß $H_1$ aus $H_2$ folgt. Bei Gleichungen, wie im vorliegenden Fall, kann man dies durch äquivalente Umformungen bewerkstelligen.
Kommen wir zur Feststellung (1) zurück. Diese Feststellung allein gibt keine Antwort auf die Frage, ob die Behauptung der Aufgabenstellung richtig oder falsch ist. Kann aber zusätzlich $A \neq 8d^2$ nachgewiesen werden, ist der in der Aufgabenstellung geforderte Beweis erbracht, da dann beide Aussagen falsche Aussagen sind. Und in der Tat ist

(2) $$A = 2ab + 2bc + 2ac \leqq a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2 = 2d^2 < 8d^2,$$

da bekanntlich $2xy \leqq x^2 + y^2$ für alle reellen Zahlen $x$, $y$ gültig ist. Wir halten fest, daß durch die beiden Ungleichungen (1) und (2) ein zweiter vollgültiger Beweis für die Aufgabe 270923 gegeben wird.
Nachdem wir jetzt mathematisch alles wieder in Ordnung gebracht haben, könnte man freilich nach dem Sinn einer solchen Aufgabe fragen, da ja sofort $3d = a + b + c$ als falsche Aussage erkannt wird.
Ist zum Beispiel ein Beweis wie der zuerst geführte sinnlos, weil wir uns über die Gültigkeit der Aussagen $H_1$ und $H_2$ überhaupt keine Gedanken gemacht haben? Man muß diese Frage verneinen. Auch dieser so scheinbar *rein akademische* Beweis hat seinen *praktischen* Nutzen. Mit Hilfe der bewiesenen *genau dann, wenn* Aussage kann man nämlich zum Beispiel aus (1) sofort auf $A \neq 8d^2$ schließen, ohne dies direkt ausführen zu müssen. (Freilich ist die direkt bewiesene Ungleichung (2) eine schärfere Aussage).
Nun kann man die Aufgabenstellung für beliebige Quader folgendermaßen verallgemeinern.

▲1▲ *Für welche positiven Zahlen m und n gilt* $a + b + c = nd$ *genau dann, wenn* $A = md^2$ *ist?*

Zusätzlich kann man die folgenden Fragen stellen.

▲2▲ *Für welche positiven n ist die Gleichung* $a + b + c = nd$ *für wenigstens einen Quader wahr?*

▲3▲ *Für welche positiven m ist die Gleichung* $A = md^2$ *für wenigstens einen Quader wahr?*

Wie wir bereits wissen ist $n = 3$ zu groß. Wegen

(3) $\quad d < a + b + c$

ist $n = 1$ zu klein. Was ist mit $n = 2$? Im Fall des Würfels ist $n = \sqrt{3}$. Gibt es Quader mit noch größerem $n$? Bei $A3$ wissen wir aus (2) bereits, daß $m = 2$ die größtmögliche Zahl ist.
Ihr solltet jetzt erst einmal selbst versuchen, diese Aufgaben zu lösen. Es ist wirklich nicht schwer. Wenn Ihr eine Lösung gefunden habt, könnt Ihr weiterlesen und Eure mit unseren Beweisen vergleichen.
Zur Behandlung der Aufgabe $A1$ gehen wir von der Gleichung

$$2ab + 2bc + 2ac = A = md^2 = m(a^2 + b^2 + c^2)$$

aus und addieren auf beiden Seiten $d^2$. Das ergibt

$$(a + b + c)^2 = 2ab + 2bc + 2ac + a^2 + b^2 + c^2 = (m + 1)(a^2 + b^2 + c^2) = (m + 1)d^2$$

Diese Gleichung ist äquivalent zur Gleichung $a + b + c = \sqrt{m + 1}\, d$.
Insgesamt stellen wir also fest, daß für $n = \sqrt{m + 1}$ und nur dafür die beiden Gleichungen $a + b + c = nd$ und $A = md^2$ äquivalent sind. Wählt man $m = 8$, dann ist $n = 3$, wie in der Olympiadeaufgabe.
Die Aufgabe $A1$ mit dem Ergebnis $n = \sqrt{m + 1}$ können wir bei der Behandlung der Aufgaben $A2$ und $A3$ nutzen. Aus der Ungleichung (2) wissen wir, daß in $A3$ nur $m \leqq 2$ in Frage kommt. Das hat aber unmittelbar $n = \sqrt{m + 1} \leqq \sqrt{3}$ in $A2$ zur Folge. Wie wir schon aus (3) wissen, muß auch $n > 1$ sein. Damit schließen wir auf $m = n^2 - 1 > 0$.
Es bleibt als letztes zu klären, ob es nun für jedes $n$ aus dem Intervall $1 < n \leqq \sqrt{3}$ wenigstens einen Quader mit $a + b + c = nd$ gibt. Für $n = \sqrt{3}$ ist es der Würfel. Sei also im folgenden $n$ eine beliebige aber feste reelle Zahl aus dem Intervall $1 < n < \sqrt{3}$.
Die Frage ist, ob es einen Quader mit den Kantenlängen $a$, $b$, $c$ gibt, so daß

(4) $\quad a + b + c = nd = n\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

gilt. Wir wählen $a = b$ und $c = a + x$. Gelingt es uns zu zeigen, daß es zu vorgegebenen $n$ mit $1 < n < \sqrt{3}$ stets ein positives $x$ mit

(5) $\quad 3a + x = n\sqrt{3a^2 + 2ax + x^2}$

gibt, so ist das Problem gelöst. Dann erfüllt nämlich ein Quader mit den Kantenlängen $a$, $b = a$, $c = a + x$ die gewünschte Gleichung (4). Wir haben also eine positive Lösung der Gleichung (5) zu suchen. Durch quadrieren erhält man

(6) $$9a^2 + 6ax + x^2 = (3a + x)^2 = n^2(3a^2 + 2ax + x^2)$$

und nach weiterem Umstellen schließlich die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2a\frac{n^2 - 3}{n^2 - 1}x + 3a^2\frac{n^2 - 3}{n^2 - 1} = 0.$$

Wir können

$$p = 2a\frac{n^2 - 3}{n^2 - 1} < 0,$$

$$q = 3a^2\frac{n^2 - 3}{n^2 - 1} < 0$$

für alle $n$ aus dem Intervall $1 < n < \sqrt{3}$ feststellen. Damit ist die Diskriminante $\frac{p^2}{4} - q > 0$ und die quadratische Gleichung hat zwei reelle Lösungen. Wegen $p, q < 0$ ist eine Lösung positiv und zwar

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$= \frac{a}{n^2-1}\left(3 - n^2 + n\sqrt{2(3-n^2)}\right).$$

Für positive $x$ sind die Gleichungen (5) und (6) gleichwertig. Wir haben so eine positive Lösung der Gleichung (5) gefunden. Schreiben wir das Ergebnis noch einmal in aller Deutlichkeit auf. Zu jedem $n$ aus dem Intervall $1 < n < \sqrt{3}$ gibt es einen Quader mit den Kantenlängen $a$, $b = a$, $c = a + x$ so, daß die Gleichung (4) erfüllt ist. Das Problem aus Aufgabe $A2$ ist jetzt vollständig geklärt. Für die Zahlen $n$ aus dem Intervall $1 < n \leqq \sqrt{3}$ und nur für diese Zahlen gibt es Quader, deren Kantenlängen die Gleichung (4) befriedigen.
Dieses Ergebnis führt nun in Zusammenhang mit der Aufgabe $A1$, d. h. mit der Gleichung $m = n^2 - 1$, zur Beantwortung der Frage $A3$. Für alle $m$ mit

$$0 = 1^2 - 1 < n^2 - 1 = m$$
$$= n^2 - 1 \leqq 3 - 1 = 2$$

und nur für diese gibt es wenigstens einen Quader mit $A = md^2$.

Zum Schluß wollen wir noch darauf hinweisen, daß man ähnliche Überlegungen für nichtnegative Summanden $a_1, a_2, \ldots, a_k$ anstellen kann.
Wir setzen $d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2}$ und

$$A = 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_1a_k$$
$$+ 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \ldots + 2a_2a_k$$
$$+ 2a_3a_4 + 2a_3a_5 + \ldots + 2a_3a_k$$
$$+ 2a_4a_5 + \ldots + 2a_{k-1}a_k$$
$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} a_ia_j.$$

Folgende Aufgaben lassen sich formulieren:

▲ 4 ▲ *Für welche positiven Zahlen m und n gilt* $nd = a_1 + \ldots + a_k$ *genau dann, wenn* $A = md^2$ *ist?*
▲ 5 ▲ *Für welche positiven n gibt es positive* $a_1, \ldots, a_k$ *so, daß* $nd = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ *gilt?*
▲ 6 ▲ *Für welche positiven m gibt es positive* $a_1, \ldots, a_k$ *so, daß* $A = md^2$ *gilt?*

*F. Fiedler*

## Aufgabe zum Titelblatt

**Visuelle Logik**

Zwischen den Zeichen und Ziffern in den kleinen quadratischen Feldern besteht ein logischer Zusammenhang. Welche Zeichen müssen in die zwei leeren Felder eingezeichnet werden, wenn der logische Zusammenhang erhalten bleiben soll?

# Gewinner des alpha-Sonderwettbewerbs

Aufgaben aus Büchern des Teubner-Verlages, Leipzig
Heft 3/1987, Lösungen:
▲ 1 ▲ Es sind genau 35 Stufen.
▲ 2 ▲ Der Durchschnitt ist die Menge, die nur aus dem Punkt (2; 1) besteht.
▲ 3 ▲ a) $x^2 - 10x + 21 = 0.$
b) $x^2 + 4x - 12 = 0.$
c) $x^2 + 11x + 10 = 0.$
▲ 4 ▲ Bezeichnen wir die gesuchten Zahlen mit $x$ und $y$, so muß $xy + x + y = 79$ gelten. Wir erhalten (z. B. im Bereich der natürlichen Zahlen) folgende Lösungsmöglichkeiten:

| $x$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 79 | 39 | 19 | 15 | 9 |

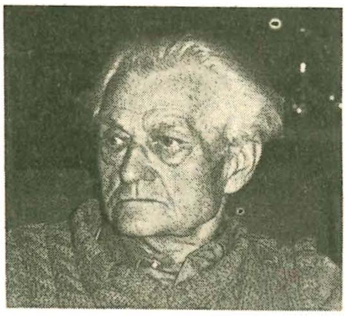
▲ 5 ▲ a) Der Restkörper hat 12 Eckpunkte und 24 Kanten.
b) Sechs Teilflächen sind Quadrate, acht Teilflächen sind gleichseitige Dreiecke.

Bis zum 17. Dezember 1987, dem letzten Einsendetermin, trafen in der *alpha*-Redaktion mehrere hundert Zuschriften ein, die überwiegend richtige Lösungen enthalten. Im Januar wurden die Gewinner durch Los ermittelt. Folgende *alpha*-Leser erhielten Buchpreise aus der Produktion des Teubner-Verlages:
Sören Boigs, Flintbek; Silke Herger, Gera; Christian Kühn, Wismar; Silke Schiede, Sömmerda; Doris Seifert, Rochlitz; Heidrun Tiedt, Teterow; Heike Walter, Berlin; Andreas Werner, Leipzig; Tobias Zepter, Langewahl; Kerstin Zirnstein, Pirna.
*Sonderpreise:* Thilo Bocklisch, Karl-Marx-Stadt (4. Klasse); Peter Hörnich, Schwedt (z. Zt. NVA); Kurt Oertel, Gräfenhainichen (85 Jahre)
*alpha*-Redaktion und Teubner-Verlag danken für die rege Beteiligung und für die interessanten Anmerkungen zu einzelnen Bänden der *Mathematischen Schülerbücherei.*
Auf vielfachen Wunsch wird auf Seite 84 eine Liste aller bis Ende 1988 vorliegenden Bände dieser erfolgreichen Buchreihe abgedruckt, an der sich sechs Verlage unseres Landes beteiligen.

*J. Lehmann/J. Weiß*

*Kurt Oertel, einer der Preisträger im Teubner-Sonderwettbewerb, ist auch der älteste Teilnehmer an unserem alpha-Wettbewerb. Die Redaktion bat ihn, in alpha über sich zu berichten.*

Am 7. 5. 1903 wurde ich, Kurt Oertel, in Helfta geboren. Das Datum enthält die ersten drei ungeraden Primzahlen in umgekehrter Folge, sollte das schon ein Hinweis auf die Mathematik in meinem Leben bedeuten?
Nach vier Jahren Volksschule im heimatlichen Helfta ging es zur Oberrealschule nach Eisleben. Das Rechnen, dann die folgende Mathematik in den kommenden Schuljahren wurden zum Lieblingsfach. Ich wurde bester Schüler der Anstalt. Die Debatte über die richtige Lösung einer Aufgabe mit dem Mathe-Lehrer ging zu meinen Gunsten aus. Neben den Aufgaben der Schule wurden Knobelaufgaben aller Art gelöst. Mein auch so geringes Taschengeld wurde nicht nur in Eiswaffeln u. a. Leckereien umgesetzt, sondern fast immer in Heftchen mathematischen Inhalts: Mathematische Spielereien, später Rechenhilfen, Neues über den Kreis, diophantische Gleichungen usw., die noch heute in meinem Bücherschrank stehen. Die Aufstellung von magischen Quadraten, die pythagoreischen Zahlen haben mich lange beschäftigt. Ungelöste Probleme, wie Fermat u. a. gehörten auch dazu.
Ich wollte gern Mathematik studieren, aber es kam nicht dazu. Ich wählte ein naturwissenschaftliches Thema, die Metallhüttenkunde. Mein Studium in Glausthal/Bergakademie schloß ich 1928 als Dipl.-Ing. für Metallhüttenwesen ab.



Das war zu einer schlechten Zeit. Betriebsstillegungen, -einschränkungen waren an der Tagesordnung. Schließlich Betriebsassistent bei Borchers in Goslar. Wegen Betriebsreduzierung nach $1\frac{1}{2}$ Jahren arbeitslos. Endlich nach vielen Bewerbungen im In- und Ausland Einstellung auf Kochhütte der Mansfeld A. G. als Vorarbeiter (6,60 M Schichtlohn). Dann weitere Entwicklung in den Mansfeld-Betrieben bis zum Hüttendirektor auf Kochhütte/Helbra. Nicht ohne Einfluß blieben die 20er Putschwochen, der Weltkrieg. Entlassung!
Neuer Anfang beim VEB Elektrokorund-Schmelze in Zschornewitz als Produktions- und zuletzt Technischer Leiter bis zu meiner vorzeitigen Pensionierung 1965 (aus gesundheitlichen Gründen).
Durch all die Jahre blieb die Mathe das beliebteste Hobby. Wesentlichen Anstoß und ständige Anregungen gab mir meine Beteiligung an den *alpha*-Wettbewerben, die ich vor 20 Jahren mit meiner Enkeltochter Martina begann. Im Jahre 1988 beteiligte ich mich das 17. Mal selbst. *K. Oertel*

## Gesamtverzeichnis Mathematische Schülerbücherei, 1988

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft (BGT)
Der Kinderbuchverlag (KB)
Urania-Verlag (U)
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (DVW)
VEB Fachbuchverlag (FV)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag (VWV)

*Redaktionsschluß:* 13. April 1988

**Band 1**
Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie (DVW 5. Aufl. 1965, 9. Aufl. 1975)

**Band 2**
Hasse, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik (BGT 1965, 9. Aufl. 1987)

**Band 3**
Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik I (U 1965)

**Band 4**
Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene (BGT 1966, 3. Aufl. 1970)

**Band 5**
Vyšin, Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben (BGT 1972, 2. Aufl. 1975)

**Band 6**
Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz (BGT 8. Aufl. 1966, 9. Aufl. 1968)

**Band 7**
Varga, Mathematische Logik für Anfänger I (VWV 1970)

**Band 8**
Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion (DVW 6. Aufl. 1965, 13. Aufl. 1982)

**Band 9**
Korowkin, Ungleichungen (DVW 4. Aufl. 1965, 7. Aufl. 1973)

**Band 10**
Gnedenko/Chintschin, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (DVW 5. Aufl. 1965, 12. Aufl. 1983)

**Band 11**
Lietzmann, Wo steckt der Fehler? (BGT 4. Aufl. 1966, 5. Aufl. 1969)

**Band 12**
Lietzmann, Altes und Neues vom Kreis (BGT 4. Aufl. 1966)

**Band 13**
Lietzmann, Riesen und Zwerge im Zahlenreich (BGT 7. Aufl. 1966, 8. Aufl. 1969)

**Band 14**
Miller, Rechenvorteile (BGT 3. Aufl. 1966, 8. Aufl. 1987)

**Band 15**
Natanson, Einfachste Maxima- und Minimaaufgaben (DVW 3. Aufl. 1965, 7. Aufl. 1975)

**Band 16**
Natanson, Summierung unendlich kleiner Größen (DVW 2. Aufl. 1967, 3. Aufl. 1969)

**Band 17**
Dubnow, Fehler in geometrischen Beweisen (DVW 2. Aufl. 1965, 5. Aufl. 1973)

**Band 18**
Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen I (DVW 2. Aufl. 1965, 4. Aufl. 1968)

**Band 19**
Worobjow, Die Fibonaccischen Zahlen (DVW 2. Aufl. 1971, 3. Aufl. 1977)

**Band 20**
Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen II (DVW 2. Aufl. 1965, 4. Aufl. 1968)

**Band 21**
Kurosch, Algebraische Gleichungen beliebigen Grades (DVW 3. Aufl. 1965, 5. Aufl. 1969)

**Band 22**
Gelfond, Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (DVW 3. Aufl. 1966, 5. Aufl. 1973)

**Band 23**
Schafarewitsch, Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades (DVW 2. Aufl. 1965, 4. Aufl. 1974)

**Band 24**
Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik II (U 1966)

**Band 25**
Markuschewitsch, Rekursive Folgen (DVW 2. Aufl. 1968, 4. Aufl. 1977)

**Band 26**
Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen III (DVW 2. Aufl. 1965, 5. Aufl. 1976)

**Band 27**
Steinhaus, 100 Aufgaben (U 1968)

**Band 28**
Perelman, Unterhaltsame Geometrie (VWV 1962)

**Band 29**
Perelman, Unterhaltsame Algebra (VWV 1965)

**Band 30**
Kolosow, Kreuz und quer durch die Mathematik (VWV 1963)

**Band 31**
Teplow, Grundriß der Kybernetik (VWV 1966)

**Band 32**
Jaglom/Boltjanski, Konvexe Figuren (DVW 1956)

**Band 33**
Belkner, Determinanten (BGT 1968, 4. Aufl. 1987)

**Band 34**
Autorenkollektiv, Rund um die Mathematik (KB 1969, 7. Aufl. 1980)

**Band 35**
Schmidt, Kein Ärger mit der Algebra (KB 1968)

**Band 36**
Übungen für Junge Mathematiker, Teil 1: Lehmann, Zahlentheorie (BGT 1968, 2. Aufl. 1970)

**Band 37**
Übungen für Junge Mathematiker, Teil 2: Grosche, Elementargeometrie (BGT 1969, 3. Aufl. 1983)

**Band 38**
Übungen für Junge Mathematiker, Teil 3: Kleinfeld, Ungleichungen (BGT 1969, 3. Aufl. 1983)

**Band 39**
Krysicki, Zählen und Rechnen einst und jetzt (BGT 1968)

**Band 40**
Sedláček, Einführung in die Graphentheorie (BGT 1968, 2. Aufl. 1972)

**Band 41**
Gelfand/Glagolewa/Kirillow, Die Koordinatenmethode (BGT 1968)

**Band 42**
Markuschewitsch, Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen (DVW 4. Aufl. 1973)

**Band 43**
Markuschewitsch, Flächeninhalte und Logarithmen (DVW 4. Aufl. 1977)

**Band 44**
Donath, Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks (DVW 1968, 3. Aufl. 1976)

**Band 45**
Roman, Reguläre und halbreguläre Polyeder (DVW 1968, 2. Aufl. 1987)

**Band 46**
Autorenkollektiv, Kompendium der Mathematik (VWV 1969, 10. Aufl. 1981)

**Band 47**
Lehmann, Lineare Optimierung für Junge Mathematiker (BGT 1970)

**Band 48**
Belkner, Matrizen (BGT 1970, 4. Aufl. 1986)

**Band 49**
May, Differentialgleichungen (BGT 1971, 2. Aufl. 1974)

**Band 50**
Sobol, Die Monte-Carlo-Methode (DVW 1971, 3. Aufl. 1981)

**Band 51**
Zich/Kolman, Unterhaltsame Logik (BGT 1970, 3. Aufl. 1975)

**Band 52**
Worobjow, Teilbarkeitskriterien (DVW 1972, 2. Aufl. 1973)

**Band 53**
Freyer/Gäbler/Möckel, Gut gedacht ist halb gelöst (U 1972, 7. Aufl. 1987)

**Band 54**
Bürger/Wittmar, Was ist, was soll Datenverarbeitung? (U 1969, 3. Aufl. 1974)

**Band 55**
Cendrowski, Die Bande der unsichtbaren Hand (KB 2. Aufl. 1970)

**Band 56**
Göttner, Was ist, was soll Operationsforschung? (U 1970, 4. Aufl. 1973)

**Band 57**
Dege, EDV Maschinelles Rechnen (U 1971)

**Band 58**
Gelfand/Glagolewa/Schnol, Funktionen und ihre graphische Darstellung (BGT 1971, 2. Aufl. 1974)

**Band 59**
Kaloujnine, Primzahlzerlegung (DVW 1971)

**Band 60**
Trachtenbrot, Wieso können Automaten rechnen? (DVW 6. Aufl. 1971)

**Band 61**
Boltjanski/Gochberg, Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie (DVW 1972)

**Band 62**
Varga, Mathematische Logik für Anfänger II (VWV 1973)

**Band 63**
Maibaum, Wahrscheinlichkeitsrechnung (VWV 1972, 4. Aufl. 1987)

**Band 64**
Wilenkin, Unterhaltsame Mengenlehre (BGT 1972, 3. Aufl. 1986)

**Band 65**
Belkner, Metrische Räume (BGT 1972)

**Band 66**
Jäckel, Mathematik heute (U 1972)

**Band 67**
Sedláček, Keine Angst vor Mathematik (FV 5. Aufl. 1969)

**Band 68**
Schreiber, Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie (BGT 1980)

**Band 69**
Gronitz, Praktische Mathematik (VWV 1975)
**Band 70**
Hilbert, Matrizen (VWV 1975, 2. Aufl. 1977)
**Band 71**
Mader/Richter, Wissensspeicher Mathematik (VWV 1977, 8. Aufl. 1988)
**Band 72**
Steinhaus, 100 neue Aufgaben (U 1973)
**Band 73**
Miller, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme (BGT 1973, 5. Aufl. 1986)
**Band 74**
Solodownikow, Lineare Ungleichungssysteme (DVW 1973)
**Band 75**
Golowina/Jaglom, Vollständige Induktion in der Geometrie (DVW 1973)
**Band 76**
Rehm, Zahl, Menge, Gleichung (KB 1973, 5. Aufl. 1985)
**Band 77**
Lehmann, Kurzweil durch Mathe (U 1980, 3. Aufl. 1985)
**Band 78**
Kordemski, Köpfchen, Köpfchen! (U 1963, 13. Aufl. 1983)
**Band 79**
Glade/Manteuffel, Am Anfang stand der Abacus (U 1973)
**Band 80**
Bašmakova, Diophant und diophantische Gleichungen (DVW 1974)
**Band 81**
Pieper, Zahlen aus Primzahlen (DVW 1974, 2. Aufl. 1984)
**Band 82**
Lehmann, Mathe mit Pfiff (U 1975, 2. Aufl. 1977)
**Band 83**
Jaglom, Ungewöhnliche Algebra (BGT 1976)
**Band 84**
Belkner, Reelle Vektorräume (BGT 1974)
**Band 85**
Stahl/Wenzel, Elektronische Datenverarbeitung (VWV 1975)
**Band 86**
Göttner/Fischer/Krieg, Was ist, was kann Statistik? (U 1975)
**Band 87**
Übungen für Junge Mathematiker, Teil 4: Borneleit, Gleichungen (BGT 1976, 3. Aufl. 1983)
**Band 88**
Kolman, Die vierte Dimension (BGT 1975)
**Band 89**
Drews, Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben (DVW 1975, 2. Aufl. 1977)
**Band 90**
Lovász/Vesztergombi/Pelikán, Kombinatorik (BGT 1977)
**Band 91**
Rehm, Strecke, Kreis, Zylinder (KB 1977, 3. Aufl. 1984)
**Band 92**
Fanghänel/Vockenberg, Arbeiten mit Mengen (VWV 1978, 6. Aufl. 1988)
**Band 93**
Fehringer, Näherungsrechnung (VWV 1978, 5. Aufl. 1987)
**Band 94**
Lohse, Elementare Statistik (VWV 1983)
**Band 95**
Kantor/Solodownikow, Hyperkomplexe Zahlen (BGT 1978)
**Band 96**
Smorgorschewski, Lobatschewskische Geometrie (BGT 1978)
**Band 97**
Berg, Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen (DVW 1979)
**Band 98**
Ruben, Philosophie und Mathematik (BGT 1979)
**Band 99**
Thiele, Mathematische Beweise (BGT 1979, 5. Aufl. 1988)
**Band 100**
Lehmann, 2 × 2 plus Spaß dabei (VWV 1981, 4. Aufl. 1987)
**Band 101**
Drinfel'd, Quadratur des Kreises und Transzendenz von $\pi$ (DVW 1980)
**Band 102**
Hódi, Mathematisches Mosaik (U 1977, 2. Aufl. 1980)
**Band 103**
Quaisser/Sprengel, Räumliche Geometrie (DVW 1981)
**Band 104**
Kufner, Raum und Entfernung (BGT 1981)
**Band 105**
Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie I (DVW 1981)
**Band 106**
Schröder, Mathematik im Reich der Töne (BGT 1982, 3. Aufl. 1988)
**Band 107**
Kästner/Göthner, Algebra – aller Anfang ist leicht (BGT 1983, 3. Aufl. 1987)
**Band 108**
Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie II (DVW 1983)
**Band 109**
Belkner/Brehmer, Riemannsche Integrale (DVW 1984)
**Band 110**
Pieper, Die komplexen Zahlen (DVW 1984, 2. Aufl. 1988)
**Band 112**
Kudrjavzev, Gedanken über moderne Mathematik und ihr Studium (BGT 1983)
**Band 113**
Belkner/Brehmer, Lebesguesche Integrale (DVW 1984)
**Band 114**
Sprengel/Wilhelm, Funktionen und Funktionalgleichungen (DVW 1984)
**Band 115**
Belski/Kaloujnine, Division mit Rest (DVW 1982)
**Band 116**
Quaisser, Bewegungen in der Ebene und im Raum (DVW 1983)
**Band 117**
Höfner/Klein, Wahrscheinlichkeit ganz einfach – Mathematik zwischen Astrologie und Trendrechnung (U 1983, 2. Aufl. 1986)
**Band 118**
Péter, Das Spiel mit dem Unendlichen (BGT 5. Aufl. 1984)
**Band 119**
Krysicki, Keine Angst vor $x$ und $y$ (BGT 1984, 2. Aufl. 1987)
**Band 120**
Bogdanovič, Mathematischer Regenbogen (VWV 1988)
**Band 121**
Lehmann, 3 plus 8 und mitgemacht (VWV 1985, 2. Aufl. 1986)
**Band 122**
Klotzek u. a., kombinieren, parkettieren, färben (DVW 1985)
**Band 123**
Schäfer, Die Wunder der Rechenkunst (Hrsg.: Lehmann) (VWV 1983, 2. Aufl. 1985)
**Band 124**
Kaloujnine/Suščanskij, Transformationen und Permutationen (DVW 1986)
**Band 125**
Deweß/Deweß, Summa summarum (BGT 1986, 2. Aufl. 1987)
**Band 126**
Sominskij/Golovina/Jaglom, Die vollständige Induktion (DVW 1986)
**Band 127**
Quaisser/Sprengel, Extrema (DVW 1986)
**Band 128**
Schröder, Kartenentwürfe der Erde (BGT 1988)
**Band 129**
Boltjanskij/Efremovič, Anschauliche kombinatorische Topologie (DVW 1986)
**Band 130**
Lehmann, Mathematik – von der Pflicht zur Kür (BGT 1987, 2. Aufl. 1988)
**Band 131**
Lehmann u. a., Rechnen und Raten (VWV 1987)
**Band 133**
Höfner, Das Tor zur höheren Mathematik (U 1987)
**Band 134**
Fanghänel, Mein Freund der Taschenrechner (VWV 1988)
**Band 135**
Pieper, Heureka – ich hab's gefunden (DVW 1987)
**Band 136**
Šaškin, Ecken, Flächen, Kanten (DVW 1988)
**Band 137**
Quaisser/Sprengel, Geometrie in Ebene und Raum (DVW 1988)
**Band 138**
Lang, Faszination Mathematik (BGT 1988)

## Spaß mit Quadratzahlen

Wenn die Quadratzahlen bis 25 sicher im Gedächtnis gespeichert sind, können die Quadrate einfacher Dezimalzahlen mit einer 5 hinter dem Komma schnell im Kopf berechnet werden.
Zum Beispiel:

$$3{,}5^2 = 3^2 + 3 + 0{,}25 = 12{,}25$$
$$6{,}5^2 = 36 + 6 + 0{,}25 = 42{,}25.$$

Bei kleinen Zahlen kommt man noch schneller zum Ziel, wenn man die ganze Zahl mit ihrem Nachfolger multipliziert und zum Produkt 0,25 addiert.
Zum Beispiel:

$$3{,}5^2 = 3 \cdot 4 + 0{,}25 = 12{,}25$$
$$8{,}5^2 = 8 \cdot 9 + 0{,}25 = 72{,}25$$

Wer die binomischen Formeln kennt, kann den Beweis für diese Gesetzmäßigkeit leicht erbringen.

*G. Richter, Oranienburg*
*nach: Deutsche Lehrerzeitung, Heft 6/88*

# Computer 1 × 1

*Kleincomputer* ist für viele Mädchen und Jungen ein Zauberwort, von dem sie oft nicht mehr loskommen. Fast drei Jahre habe ich in einem Computer-Zirkel (Schülerakademie Greifswald) die Möglichkeit gehabt, die Bedienung und Programmierung von Kleincomputern zu erlernen und Probleme mit Hilfe eines Computers zu lösen.

In der DDR gibt es den KC 85/1 (frühere Bezeichnung Z 9001) und seinen Nachfolger KC 87 vom VEB Robotron Dresden sowie die Kleincomputer KC 85/2 und KC 85/3 vom VEB Mikroelektronik Mühlhausen.

Computer sind unheimlich schnell und auch zuverlässig, wenn ihnen ein richtiges Programm eingegeben wurde. Sie können sich Zahlen und Namen *merken* und den ganzen Tag rechnen. Mit den Computern kann man Musik erzeugen (SOUND-Befehle) und zeichnen. Sie können eine Modelleisenbahnanlage mit individuellem Fahrplan steuern. Ganze Aufsätze können sie speichern und bei Bedarf ausdrucken. Man kann sich interessante Computerspiele überlegen und programmieren, und dann ist der Computer ein idealer Spielpartner!

Manche Aufgaben sahen zuerst etwas einfach aus, erst beim Schreiben des Programms stießen wir auf Schwierigkeiten. Unsere Übungsprogramme befaßten sich mit mathematischen Aufgaben, mit der Lösung von Knobelproblemen und mit dem Programmieren von Spielen. Wir legten Klassenbücher und Fahrpläne im Computer an und schrieben Vokabellernprogramme. Dazu definierten wir auch kyrillische Zeichen. Andere AG-Mitglieder haben Programme für den Geographie- und den Geschichtsunterricht angefertigt.

Viel Spaß bereitet den Anfängern das *Zeichnen* und das *Komponieren* auf dem Computer. Unser Computer 1 × 1 muß aber als Einstieg in ernsthafte Arbeiten angesehen werden. Fahrkartenautomaten kennt ihr sicher alle, Computer können den Arzt bei der Diagnose unterstützen, ganze Werkanlagen lassen sich mit Computern überwachen und steuern. Akustische Signale (Musik) und optische Hinweise (Aufblinken von Zeichen in verschiedenen Farben) unterstützen die Kontrolle von Betriebsanlagen. Sparkonten mit automatischer Abbuchung von regelmäßigen Zahlungen werden schon lange über Computer geführt. Ganze Bücher lassen sich auf Disketten speichern und können bei Bedarf gedruckt werden.

Dabei macht ein Computer aber nur das, was ihm durch Befehle mitgeteilt wird, nicht mehr, aber auch nicht weniger. So kann der Computer unser Freund und Helfer werden. Aufgaben werden ihm über die Tastatur mitgeteilt, Antworten können z. B. auf dem Bildschirm eines Fernsehgerätes ausgegeben werden. Sehr verbreitet und leicht zu erlernen ist die Programmiersprache BASIC, über die in der *alpha* auch eine Beitragsfolge (Heft 5, 1986 bis Heft 6, 1987) gedruckt worden ist. Diese Sprache ist für den Computer aber erst durch die Hilfe eines Übersetzers (Interpreter oder Compiler, ist meist ein Teil des Computers selbst) verständlich. Man kann den Computer auch im Maschinencode oder in der Assemblersprache programmieren. Das ist umständlicher und aufwendiger, die Programme werden dafür schneller abgearbeitet und benötigen weniger Speicherplatz. Sehr übersichtlich sind Programme in der Sprache PASCAL, andere Programmiersprachen für Kleincomputer sind z. B. LOGO und FORTH.

An die Kleincomputer lassen sich auch Drucker und Zeichengeräte (Plotter) anschließen. Damit können dann Texte wirklich ausgedruckt werden, und Kurven, Funktionsbilder und richtige Bilder können gezeichnet werden. Im Prinzip kann man dann mit dem Computer auch konstruieren, Bauzeichnungen erstellen und sogar Muster entwerfen, z. B. für Pullover. Dieses Einsatzgebiet des Computers ist als CAD (Computer aided design) bekannt, während die Steuerung von Maschinen durch Computer als CAM (Computer aided manufacturing) bezeichnet wird.

Natürlich sollte man immer überlegen, ob die angegebenen Aufgaben mit einem Computer besser als mit einem Taschenrechner, einer Schreibmaschine oder einem einfachen Reißbrett gelöst werden können. Dabei ist zu berücksichtigen, daß der Computer superschnell und (innerhalb seiner Genauigkeitsschranken) exakt arbeitet. Er kann die Zwischenergebnisse mitteilen und bei Fehlern Hinweise geben (Dialog). Außerdem kann er auch mit Buchstaben, Zeichen und sogar von euch definierten Sonderzeichen operieren. Sein Einsatz ist besonders zu empfehlen, wenn gleiche oder ähnliche Berechnungen oder andere Programmstücke mehrmals auszuführen sind.

Computer können uns bei der Lösung vieler Aufgaben helfen. Aber beachtet bitte, daß für die Erarbeitung der meisten Programme sehr gute Kenntnisse im Fach Mathematik erforderlich sind.

*A. Schmidt*

„Für den, der völlig ohne Dunst
in Anwendung der Rechenkunst ...,
ein Rechner ist – dies immer galt –
von völlig nutzlosem Gehalt."

*C. Näther, Leipzig*

## Mini-BASIC für alpha-Leser – Übersicht

(Gültig für KC 85/1, KC 85/2, KC 85/3 und KC 87).

### Darstellung von Zahlen in BASIC

| | Darstellung in BASIC |
|---|---|
| 3,09 | 3.Ø9 |
| $-3{,}9 \cdot 10^{7}$ | −3.9E + Ø7 |
| $1{,}4 \cdot 10^{-4}$ | 1.4E − Ø4 |
| 0,73 | .73 |
| $\pi$ | PI |

Das Vorzeichen „−" wird mit der Taste $\boxed{-}$ eingegeben. Als **Variable für Zahlen** (numerische Variable) verwendet man z. B. A; B1; AK u. ä.

Nicht zugelassen sind Zeichenkombinationen, die nicht mit einem Buchstaben beginnen und solche, die auf BASIC-Wörter führen (z. B. IF, ON1). Der Computer unterscheidet nur die ersten beiden Zeichen einer Variablenbezeichnung, z. B. sind AL1 und AL2 für ihn gleich.

### Rechenoperationen

| | Darstellung in BASIC |
|---|---|
| a + b | A + B |
| a − b | A − B |
| a · b | A ✱ B |
| a : b | A / B |
| $a^{b}$ | A ∧ B |

Wie der Taschenrechner SR 1 *beachten* die Kleincomputer i. a. die Vorrangregeln. Zur Berechnung von Termen stehen auch **Klammern** zur Verfügung. Sie werden so wie in der Mathematik üblich verwendet.

### Mathematische Funktionen

| | Darstellung in BASIC |
|---|---|
| $\sqrt{x}$ | SQR(X) |
| $\lvert x \rvert$ | ABS(X) |
| [x] | INT(X) |
| Zufallszahl | RND(X) |

Anweisung zur Definition einer Funktion DEF FN

DEF FN Name (Argument) = Ausdruck

*Name* ist die Bezeichnung der zu definierenden Funktion,

*Argument* bezeichnet die Variable, von der die Funktion abhängt,

*Ausdruck* definiert die Funktionsvorschrift

Beispiel: DEF FNE(X) = ABS(X + 1)

### Vergleichsoperatoren

| | Darstellung in BASIC |
|---|---|
| = | = |
| ≠ | < > |
| < | < |
| > | > |
| ≦ | < = |
| ≧ | > = |

### Logische Operatoren

| Bedeutung | BASIC-Symbol |
|---|---|
| Nicht; Es gilt nicht (Negation) | NOT |
| und; sowohl – als auch (Konjunktion) | AND |
| oder (Alternative) | OR |

**Anweisungen**

**Wertzuweisung LET**

LET A = $\boxed{\begin{array}{l}\text{TERM}\\ \text{z. B.: 18}\\ \text{C + D}\\ \text{G − 12}\\ \text{A + 1}\end{array}}$

Der Wert des rechts vom Zeichen „=“ stehenden Terms wird ermittelt und der links stehenden Variablen als neuer Wert zugeordnet.

**Eingabeanweisung**

● INPUT

INPUT X

Der Programmablauf wird unterbrochen. Der Computer wartet auf einen Eingabewert.

INPUT X, Y

Der Programmablauf wird unterbrochen. Der Computer wartet auf zwei durch Komma zu trennende Eingabewerte.

Bei INPUT-Anweisungen darf ein informativer Text nur unmittelbar nach INPUT folgen und muß von nachfolgenden Variablen durch ein Semikolon getrennt werden.

Beispiel: INPUT „a (in cm):“; A

**Ausgabeanweisung**

● CLS

Die Anweisung CLS löscht den vereinbarten Bildschirmbereich.

● PRINT

PRINT A

Mit Hilfe der PRINT-Anweisung wird der Wert der Variablen A auf dem Bildschirm ausgedruckt.

PRINT „TEXT“

Auf dem Bildschirm erscheint der zwischen den Anführungszeichen stehende Text.

In PRINT-Anweisungen können auch mehrere Ausgabeelemente enthalten sein, die man durch Komma oder Semikolon trennen kann.

Beispiel: PRINT „a =“; A, „b =“; B

PRINT A; B; C

Die Werte der Variablen A, B, C werden unmittelbar nebeneinander ausgedruckt. (Bei nichtnegativen Zahlen wird statt des Vorzeichens ein Leerzeichen ausgegeben.)

PRINT A, B, C

Die Werte A, B, C werden in drei Druckzonen ausgegeben (tabelliert).

PRINT

Auf dem Bildschirm wird eine Leerzeile erzeugt.

PRINT AT (Z, S); A

Der Wert der Variablen A wird in Zeile Z ab Spaltenposition S ausgedruckt.

● BEEP

Die Anweisung „BEEP“ veranlaßt den Computer zu einem Signalton.

**Anweisungen zur Steuerung des Programmablaufs**

Zählschleife

● FOR – TO – NEXT

FOR X = A TO B STEP C

$\boxed{\text{Anweisung(-en)}}$ } Schleifenkörper

NEXT X

Die Anweisung(-en) des Schleifenkörpers werden für X = A bis X = B (Schrittweite C) ausgeführt.

Verzweigung

● IF... THEN...

IF $\boxed{\text{Bedingung}}$ THEN $\boxed{\text{Anweisung}}$

zB. IF B < 7 OR C = 8 THEN PRINT A

Ist die $\boxed{\text{Bedingung}}$ erfüllt, so wird die $\boxed{\text{Anweisung}}$ ausgeführt und die Programmabarbeitung mit der nächsten Programmzeile fortgesetzt.

Ist die $\boxed{\text{Bedingung}}$ nicht erfüllt, wird die $\boxed{\text{Anweisung}}$ übersprungen und die Programmarbeit mit der nächsten Programmzeile fortgesetzt.

IF $\boxed{\text{Bedingung}}$ THEN Zeilennummer (Bedingter Sprung)

Wenn die $\boxed{\text{Bedingung}}$ erfüllt ist, wird das Programm in der nach „THEN“ stehenden Zeilennummer fortgesetzt, ansonsten wird die Programmabarbeitung mit der nächsten Programmzeile fortgesetzt.

● IF... THEN...: ELSE...

IF $\boxed{\text{Bedingung}}$ THEN $\boxed{\text{Anweisung 1}}$: ELSE $\boxed{\text{Anweisung 2}}$

Wenn die $\boxed{\text{Bedingung}}$ erfüllt ist, dann wird die $\boxed{\text{Anweisung 1}}$ ausgeführt, anderenfalls $\boxed{\text{Anweisung 2}}$. (Für die Anweisungen können auch Zeilennummern stehen. Dann erfolgt in Abhängigkeit vom Erfülltsein der Bedingung ein Sprung zur betreffenden Programmzeile.)

● GOTO *z*

Unbedingter Sprung

Das Programm wird in der nach GOTO angegebenen Zeilennummer *z* fortgesetzt.

Mehrfachverzweigung

● ON X GOTO $z_1$, $z_2$, $z_3$

Die Anweisung bewirkt die Programmfortsetzung in der Zeile, die an X-ter Stelle in der Zeilennummernliste $z_i$ steht.

● PAUSE *n*

Die Anweisung PAUSE *n* bewirkt eine Unterbrechung von *n* Zehntelsekunden.

● END

Die Anweisung END bewirkt, daß der Computer die Programmabarbeitung beendet und in den Kommando-Modus übergeht.

*zusammengestellt von L. Flade/M. Pruzina*

## Computer hilft beim Knobeln

▲ 20 Personen, Männer, Weiber und Jungfrauen, stellen eine Festlichkeit an, die ihnen auf 20 Thaler zu stehen kömmt; jeder Mann gibt 2 Thlr., jede Frau 1 Thlr. und jede Jungfrau 1/2 Thlr.

Wieviel Männer, Weiber und Jungfrauen waren es?

*aus: „Die Wunder der Rechenkunst“ von Joh. Christ. Schäfer 1857 Weimar, herausgegeben von J. Lehmann 1983*

**Programm zur Lösung:**

```
1Ø FOR A = 1 TO 18
12 FOR B = 1 TO 18
14 FOR C = 1 TO 18
16 IF A + B + C = 2Ø
   THEN PRINT TAB (8) A; B; C
   AND 2 * A + B + Ø.5 * C = 2Ø
18 NEXT C, B, A
```

In dieser Version benötigt der Computer zwei Minuten, um die sechs Fälle zu finden. Wenn man berücksichtigt, daß es höchstens sechs Männer sein können (warum?) und Zeile 1Ø dahingehend ändert, sind nur noch 4Ø Sekunden nötig!

*H. Pätzold, Waren (Müritz)*

## Buchtips für Computerfreunde

F. Roitmayr

**Der Sprung in die Computerwelt**

78 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 633 315 0

Preis etwa 8,00 M

Chr. Hülm/S. Pietzsch

**Vom Kerbholz zum Computer**

144 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 632 981 3

Preis etwa 7,80 M

G. Saeltzer

**Erstaunliche Computerwelt**

160 Seiten, zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 632 752 7

Preis etwa 16,80 M

alle Titel: Kinderbuchverlag Berlin

St. Hesse

**Maschinen in der Geisterschicht**

112 Seiten, 43 Abb.
Bestell-Nr. 654 177 1

Preis: 7,50 M

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Als weitere Titel plant der Urania-Verlag:

B. Winde/J. Heim

**Technik en miniature**

Stippvisite bei der Mikrotechnik

M. Roth

**Die intelligente Maschine**

Der Computer als Experte

R. Schmidt

**Softwarekonzepte vorgestellt**

Ein Teil der Bücher ist durch Vorbestellungen bei den Verlagen vergriffen. Sie sind möglicherweise beim Buchhandel z. Z. noch vorrätig. Wir weisen auf die Möglichkeit der Ausleihe in Bibliotheken hin.

# In freien Stunden · alpha-heiter

### Praktische Arithmetik

Leonhard Euler (1707 bis 1783) der große Schweizer Mathematiker lebte und wirkte von 1741 bis 1766 in Berlin. Er hatte in der Bärenstraße ein *artiges Haus* 1742 für 2000 Reichstaler erworben, das unweit von seiner Arbeitsstätte, der Akademie, gelegen war. Es ist übrigens das heutige Haus Nr. 24 in der Behrenstraße, gegenüber der Komischen Oper. Euler, der nie mit einem Fachkollegen um Verdienste und Rechte stritt, stand den Belangen des praktischen Lebens gelegentlich etwas fremd gegenüber. Mit seinem Nachbarn war er in Streit gekommen, wer die Kosten für das Zuschütten eines Grabens, der zwischen beiden Grundstücken lag, tragen sollte. Die Sache kam bis zu Gericht und kostete jede Partei 100 Taler. Der Lohn für das Einebnen des Grabens machte dann genau 5 Taler aus!

*mitgeteilt von Dr. R. Thiele, Leipzig*

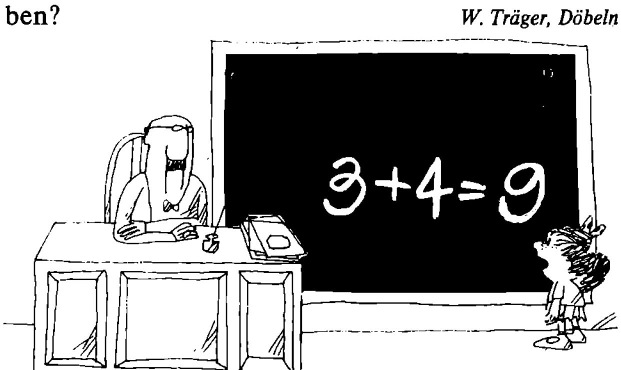
### Eine Gleichung, die den Kopfstand verträgt

Peter, ein Schüler der 3. Klasse, soll als Hausaufgabe eine Summe mit drei Summanden bilden und berechnen. Dabei soll ein Summand eine einstellige Zahl, ein anderer Summand eine zweistellige Zahl und der dritte Summand ein Produkt aus einer einstelligen und einer zweistelligen Zahl sein.

$* + ** + * \cdot **$

Sein älterer Bruder Sven, der Peter gegenüber am Tisch sitzt, bemerkt, daß Peters Aufgabe und ihr Ergebnis auch von seinem Platz aus in gewohnter Weise lesbar sind und daß auch aus dieser Sicht die Aufgabe richtig gelöst ist.
Welche Aufgabe kann Peter aufgeschrieben haben?

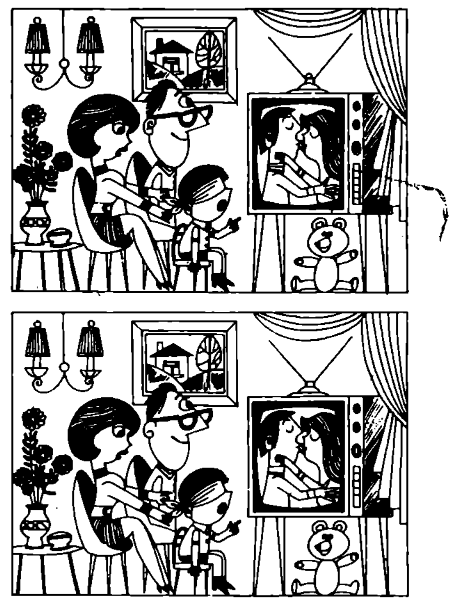
*W. Träger, Döbeln*




„Vati ist nach Überstunden eben müde!“

### Fehler gesucht

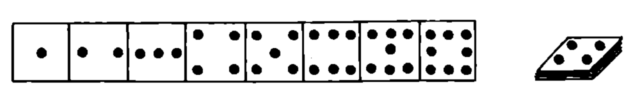
Beim Neuzeichnen des Bildes unterliefen dem Zeichner einige Fehler. Schaut genau hin! Bestimmt findet ihr sie heraus. *aus: Krokodil, Moskau*



### Mathematische Faltarbeit

Anja hat den abgebildeten, aus acht mittels Punkten auf beiden Blattseiten numerierten Quadraten bestehenden Papierstreifen auf verschiedene Weise jeweils zu einem Paket aus acht übereinanderliegenden Quadraten zusammengefaltet, so daß obenauf das Quadrat mit vier Punkten und ganz unten das Quadrat mit sieben Punkten liegt. Wieviel Möglichkeiten des Zusammenfaltens gibt es da?

*W. Träger, Döbeln*



### Der Eulersche Polyedersatz

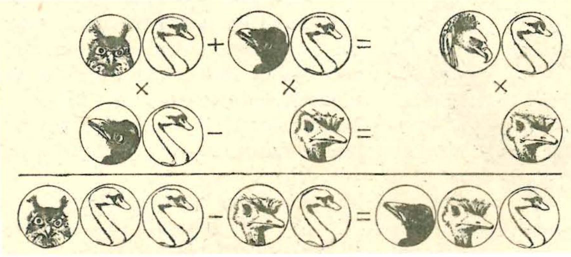
Es hilft kein Stauchen, hilft kein Strecken!
Konvexe Polyeder wissen,
daß EULER sie sich fügen müssen:
Die Rechnung auf die 2 stets führt,
falls von der Flächen – plus Ecken –
die Kantenzahl man subtrahiert.

*K. Nähter, Leipzig*

## Zoo-Logisches

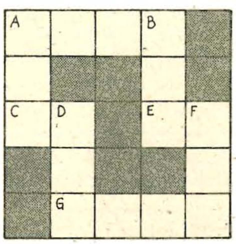
Ersetze die Figuren durch Ziffern!

*aus: Füles, Budapest*



## Geburtsjahre

Es sind mehrstellige natürliche Zahlen zu finden, für die gelten soll:




*Waagerecht:*

$A_w$ Jahr der ersten *alpha*-Ausgabe
$C_w$ Quersumme von $A_w$
$E_w$ Querprodukt von $G_w$
$G_w$ Jahr der I. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

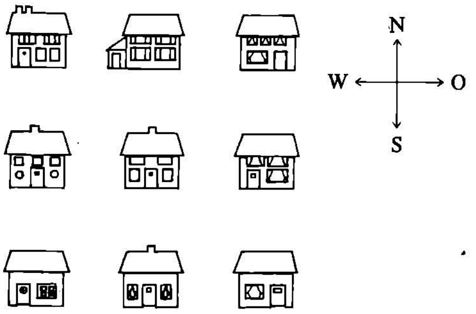
*Senkrecht:*

$A_s$ Eine durch 11 teilbare Zahl
$B_s$ Eine durch 11 teilbare Zahl
$D_s$ $\frac{(A_w - G_w)}{2} \cdot 127$
$F_s$ $\frac{(A_w + G_w)}{2} : 4$

*Schülerin S. Kerber, Saal*

## Wo sind sie zu Hause?

Neun Freunde wohnen in einem gleichen Wohngebiet. Findet heraus, wo jeder wohnt und berücksichtigt dabei, daß die Straßen von West nach Ost und die Avenuen von Nord nach Süd verlaufen!




Jacob wohnt westlich von Martin, der in der gleichen Straße wie Quentin wohnt. Dieser wohnt westlich von Romuald, der südlich von Guillaume lebt. Quentin hat seine Wohnung südlich von Gilles, der in der gleichen Avenue zu Hause ist wie Martin, der nördlich von Renaud lebt. Jacob wohnt in der gleichen Avenue wie Renaud, der in der gleichen Straße wie Malcolm zu Hause ist. Dieser lebt in einer anderen Straße und in einer anderen Avenue wie Clément. Gilles ist westlich von Clément zu Hause, der in der gleichen Avenue wie Guillaume wohnt; dieser hat seine Wohnung in der gleichen Straße wie Jacob.

*aus: Logigram, Paris*

## Etwas komplizierte Angelegenheit!

Der kleine Steffen fragt seinen Vater: „Vati! – Ist morgen auch heute?“ Der Vater erwidert: „Freilich. – Paß mal auf. Das ist so: Heute ist heute heute. Heute wird aber morgen gestern sein, so wie heute gestern morgen war. Und so war gestern auch heute, deshalb wird morgen auch heute sein.“

*mitgeteilt von A. Körner, Leipzig*

## alpha-heiter · Preisaufgabe
## Verschlüsselte Geburtsdaten

In der Buchhaltung eines Betriebes arbeiten Rainer, Miriam und Marina. Zu Rainers Geburtstag sagte Miriam: „Nun bin ich wieder für viele Wochen, nämlich bis zu meinem Geburtstag, um so viele Jahre jünger als Rainer wie ich älter bin als Marina.“ Dabei zählte sie jedes Lebensalter nach vollen Lebensjahren. Und Miriam bemerkte: „Gibt man unsere Geburtsdaten (Tag, Monat, Jahr), wie es in unserer Branche üblich ist, mit sechs aufeinanderfolgenden Ziffern an, so kann jeder seinen Vornamen als seine verschlüsselten Geburtsdaten auffassen, wobei einheitlich für uns drei gleiche Ziffern durch gleiche Buchstaben und verschiedene Ziffern durch verschiedene Buchstaben ersetzt sind.“ Wann wurden Rainer, Miriam und Marina geboren?

*Hinweis:* Werden Datumsangaben aus unserem Jahrhundert durch sechs aufeinanderfolgende Ziffern angegeben, so legen je zwei Ziffern Tag, Monat und Jahr fest. So wird z. B. der 3. 7. 1924 durch die Ziffernfolge 030724 angegeben.

*W. Träger, Döbeln*

Schreibt eure Lösung bitte nach folgendem Schema auf eine Postkarte und sendet sie an die Redaktion *alpha*!

*Verschlüsselte Geburtsdaten*
RAINER: ......
MIRIAM: ......
MARINA: ......
Den Absender nicht vergessen!
Einsendeschluß: 31. 8. 1988

Unter den richtigen Einsendungen werden drei Gewinner ausgelost. Ihre Namen werden im Heft 6/88 veröffentlicht.

Zu gewinnen sind: Logikspiele des VEB Kamenzer Spielwaren und des VEB Plasticart sowie ein Autogramm unseres zweifachen Olympiasiegers Frank-Peter Roetsch.

# XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## Aufgaben der Schulolympiade

*Abgabe beim Mathematiklehrer: Ende September 1988*

*Achtung:* Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

Die Lösungen werden im Oktober 1988 in der *Trommel* und der *Jungen Welt* veröffentlicht.

*Hinweis:* Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht.

Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

*Anmerkung:* $\sphericalangle ABC$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet $AB$ die Strecke mit den Endpunkten $A$ und $B$, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke $AB$ bedeutet.

### Olympiadeklasse 5

280511 In jedes der acht freien Felder der Figur ist genau eine natürliche Zahl so einzutragen, daß die Summe der drei in jeder waagerechten und jeder senkrechten Reihe stehenden Zahlen jeweils 39 beträgt.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 9 | |
| | | |

Finde eine derartige Eintragung, bei der neun Zahlen vorkommen, von denen keine zwei einander gleich sind!

280512 Aus den Ziffern 1, 2 und 3 sollen dreistellige Zahlen gebildet werden.

a) Jede dieser drei gegebenen Ziffern soll in jeder der zu bildenden Zahlen genau einmal vorkommen.

Schreibe alle dreistelligen Zahlen auf, die sich auf diese Art und Weise bilden lassen!

b) In weiteren dreistelligen Zahlen aus den drei gegebenen Ziffern dürfen Ziffern auch mehr als einmal auftreten; dafür brauchen sie nicht alle vorzukommen.

Schreibe alle diejenigen dreistelligen Zahlen auf, die nun zusätzlich zu den in a) aufgezählten Zahlen noch gebildet werden können!

280513 Vier gleich große Kisten mit gleichem Inhalt haben zusammen eine Masse von 132 kg.

Welche Masse hat dann der Inhalt einer Kiste, wenn die Masse aller vier leeren Kisten zusammen 12 kg beträgt?

280514 a) Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A(1;9)$, $B(4;6)$ und $C(6;10)$!

Verbinde je zwei dieser drei Punkte durch eine Strecke! Wieviel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?

b) Zeichne zwei weitere Punkte $D$ und $E$; wähle sie so, daß jede Verbindungsstrecke von zwei der fünf Punkte $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ keinen weiteren der fünf Punkte enthält! Verbinde je zwei der fünf Punkte durch eine Strecke!

Wieviel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?

c) Man kann die in b) gesuchte Anzahl von Verbindungsstrecken auch durch eine Überlegung ermitteln, ohne die Punkte und die Strecken zu zeichnen.

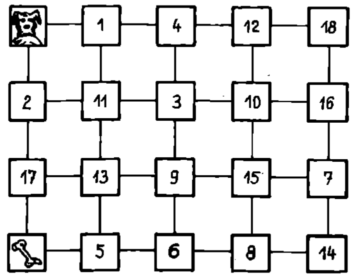
Beschreibe eine solche Überlegung!

d) Ermittle auf die in c) beschriebene Weise die Anzahl aller Verbindungsstrecken zwischen je zwei von zehn Punkten, für die dasselbe wie in b) gilt!

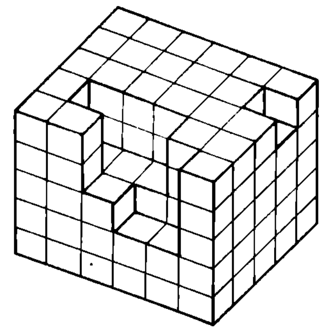
### Olympiadeklasse 6

280611 Bello kann nur dann zum Knochen gelangen, wenn er einen Weg wählt, bei dem das Produkt der dabei überquerten Zahlen 2 431 beträgt.

Welchen Weg muß er wählen?




280612 Ein großer Quader wurde in kleine, untereinander gleich große Würfel zerlegt. Wie im Bild ersichtlich, wurden dann einige kleine Würfel herausgenommen. Von denjenigen kleinen Würfeln, die im Bild nicht zu sehen sind, wurde aber keiner weggenommen. Wie viele der kleinen Würfel enthält dann der im Bild gezeigte Restkörper insgesamt noch? Beschreibe, wie du die gesuchte Anzahl gefunden hast!



280613 Mario, Petra, Rigo und Tanja unterhalten sich darüber, welche Plätze sie bei der Schulolympiade wohl belegen werden.

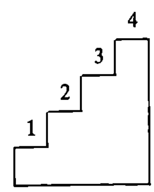
Dabei äußern sie folgende Meinungen:

(1) Tanja wird den ersten Platz erreichen und Petra den zweiten.
(2) Tanja wird Zweite werden und Rigo Dritter.
(3) Mario wird den zweiten Platz und Rigo den vierten belegen.
(4) Keine zwei Schüler werden auf den gleichen Platz kommen.

Nach Abschluß der Schulolympiade stellt sich heraus, daß die Aussage (4) wahr ist und daß in den Meinungen (1), (2) und (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch ist.

Gib an, welcher Schüler hiernach welchen Platz bei der Schulolympiade belegt! Zeige, daß die von dir genannte Platzverteilung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

280614 Die Treppe im Bild besteht aus vier Stufen. Um diese vierstufige Treppe hinaufzugehen, darf man jeweils mit einem Schritt entweder genau eine oder genau zwei Stufen nach oben steigen. (Eine hiernach mögliche Schrittfolge lautet z. B. 1, 3, 4.)




a) Gib für diese Treppe alle möglichen Schrittfolgen an!

Wieviel sind es insgesamt?

b) Gib für eine dreistufige Treppe alle möglichen Schrittfolgen an, ebenso für eine zweistufige Treppe und für eine einstufige Treppe!

c) Jemand behauptet: „Man kann die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine vierstufige Treppe durch eine einfache Rechnung finden, wenn man die Anzahl

aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe und die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe kennt."
Gib eine solche einfache Rechnung an! Schreibe sie in Form einer Gleichung!
d) Schreibe entsprechend eine Gleichung, mit der sich die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe aus den entsprechenden Anzahlen für eine zweistufige und für eine einstufige berechnen läßt!
e) Wie kommt es, daß die in c) und d) gefundenen Beziehungen gelten?
f) Gib die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine fünfstufige und für eine sechsstufige Treppe an!

**Olympiadeklasse 7**

280711 Ein Spiel für zwei Mitspieler hat folgende Regel: Einer der beiden nennt eine beliebige einstellige Zahl. Der andere nennt eine größere natürliche Zahl, die jedoch höchstens um 10 größer sein darf als die vorhergenannte. So wechselt man ab. Gewonnen hat derjenige, der unter Beachtung der Spielregeln die Zahl 100 nennen kann.
a) Gibt es für den beginnenden Spieler eine Möglichkeit, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?
b) Gibt es aber auch einen Spielbeginn, der anschließend dem zweiten Spieler eine Möglichkeit gibt, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?

280712 Aus den Ziffern 1, 3, 4, 5, 7 und 9 sollen sechsstellige natürliche Zahlen gebildet werden, in denen jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt.
a) Ermittle die Anzahl aller verschiedenen Zahlen, die auf diese Weise gebildet werden können!
b) Untersuche, welche von den auf diese Weise gebildeten Zahlen durch 18 teilbar sind!

280713 a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Winkel $\sphericalangle DAB$ ein spitzer Winkel ist! Konstruiere das Lot von $D$ auf die Gerade durch $A$ und $B$; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit $E$! Konstruiere das Lot von $B$ auf die Gerade durch $C$ und $D$; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit $F$!
b) Beweise, daß in jedem solchen Parallelogramm $ABCD$ für die so konstruierten Punkte $E$, $F$

$$\triangle AED \cong \triangle CFB \quad \text{gilt!}$$

280714 Im Mathematikunterricht stellt der Lehrer die Aufgabe, die Seitenlängen eines gleichschenkligen Dreiecks $ABC$ mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ zu ermitteln, wenn vorausgesetzt ist, daß eine der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks den Dreiecksumfang derart teilt, daß der eine Teil 12 cm und der andere 9 cm beträgt.
Dazu äußern sich einzelne Schüler folgendermaßen:
Achim: „Die Aufgabe hat keine Lösung; denn die Seitenhalbierende eines gleichschenkligen Dreiecks ist Symmetrieachse und kann somit den Umfang nur in zwei gleich große Teile zerlegen."
Birgit: „Es gibt bis auf Kongruenz genau ein Dreieck, das die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt."
Claudia: „Die Aufgabe hat bis auf Kongruenz genau zwei (zueinander nicht kongruente) Lösungen."
Dorit: „Da man in ein Dreieck drei Seitenhalbierende einzeichnen kann, hat die Aufgabe mindestens drei zueinander nicht kongruente Lösungen."
Untersuche, wer von den vier Schülern recht hat, und begründe deine Feststellungen!

**Olympiadeklasse 8**

280811 In einem Kasten befinden sich 500 Kugellagerkugeln, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden; 499 Kugeln haben untereinander die gleiche Größe und das gleiche Gewicht, eine einzige Kugel hat zwar die gleiche Größe wie jede der anderen Kugeln, ist aber leichter als sie. Es soll nun – mit Hilfe einer Balkenwaage, nur durch wiederholte Feststellung, ob Gleichgewicht zwischen zwei gleich großen Anzahlen dieser Kugeln besteht oder nicht – die leichtere Kugel ermittelt werden.
Zeige, daß sechs Wägungen hierfür in jedem Fall ausreichen, d. h.: Wie auch die Ergebnisse einer 1., 2., ..., 5. Wägung ausfallen mögen, stets soll man die nächste Wägung so durchführen können, daß nach der 6. Wägung die leichtere Kugel eindeutig ermittelt ist.

280812 Es sei $M$ der Umkreismittelpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks $ABC$. Die Größe des Winkels $\sphericalangle BAM$ betrage 40° und die des Winkels $\sphericalangle BCM$ sei 30°.
Ermittle aus diesen Angaben die Größe $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der drei Innenwinkel des Dreiecks $ABC$!

280813 Beweise die folgende Aussage!
Für je fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt: Unter diesen fünf Zahlen gibt es stets genau eine, die durch 5 teilbar ist.

280814 Es sei $ABC$ ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei $P$ ein beliebiger im Innern dieses Dreiecks gelegener Punkt.
a) Konstruiere ein derartiges Dreieck!
b) Miß die Länge der von $P$ auf die Seiten gefällten Lote, und vergleiche die Summe dieser Längen mit der Länge einer Höhe dieses Dreiecks! Was vermutest du?
c) Beweise deine Vermutung!
*Hinweis:* Es ist zweckmäßig, den Flächeninhalt geeigneter Teildreiecke zu betrachten.

**Olympiadeklasse 9**

280911 In ein Quadrat mit 4 × 4 Feldern sollen die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen werden, daß jede der Zahlen genau einmal auftritt und daß sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe ergibt.
Versuchen Sie, eine solche Eintragung zu finden!

280912 Gibt es eine rationale Zahl, aus der man nach dem Bilden des Reziproken und anschließendem Verdoppeln wieder die ursprüngliche rationale Zahl erhält?

280913 Beweisen Sie, daß in jedem Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ die Mittelsenkrechte auf der Diagonalen $AC$ die Seite $AB$ zwischen $A$ und $B$ schneidet!

280914 Drei Werkstücke $W_1$, $W_2$, $W_3$ durchlaufen eine Taktstraße mit vier Bearbeitungsmaschinen $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$. Dabei muß jedes Werkstück die Maschinen in der Reihenfolge $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ durchlaufen, und an jeder Maschine soll die Reihenfolge der drei Werkstücke dieselbe sein.
Die Bearbeitungszeiten der Werkstücke auf den einzelnen Maschinen sind (in Stunden) in der folgenden Tabelle angegeben:

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $W_1$ | 4 | 1 | 2 | 1,5 |
| $W_2$ | 2 | 2,5 | 1 | 0,5 |
| $W_3$ | 2 | 3,5 | 1 | 1 |

Es können niemals zwei Werkstücke gleichzeitig auf derselben Maschine bearbeitet werden. Die Zeiten zum Wechseln der Werkstücke an den Maschinen seien so klein, daß sie vernachlässigt werden können.
Geben Sie eine Reihenfolge der drei Werkstücke für das Durchlaufen der Taktstraße so an, daß die Gesamtzeit (das ist die Zeit vom Eintritt des zuerst eingegebenen Werkstücks in die Maschine $M_1$ bis zum Austritt des zuletzt bearbeiteten Werkstücks aus der Maschine $M_4$) so klein wie möglich ist!
Zeigen Sie, daß die von Ihnen angegebene Reihenfolge mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge unterbietet!

**Olympiadeklasse 10**

281011 a) Bernd hörte, daß der Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) nachwies: Für jede ganze Zahl $x$ mit $-40 < x < 41$ ist die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl. Bernd wollte dies für mindestens zehn dieser Zahlen nachrechnen. Rechnen Sie dies ebenfalls für mindestens zehn dieser Zahlen nach!
b) Untersuchen Sie, ob sogar für jedes ganzzahlige $x$ die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl ist!

281012 Antje will alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen $z$ ermitteln, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) die erste und die zweite Ziffer von $z$ sind einander gleich.
(2) Die dritte und die vierte Ziffer von $z$ sind einander gleich.
(3) Die Zahl $z$ ist eine Quadratzahl.
Antje will diese Aufgabe lösen, ohne eine Zahlentafel, einen Taschenrechner oder einen anderen Rechner zu benutzen. Wie kann sie vorgehen?

**Fortsetzung auf Seite 96**

# Karl-Weierstraß-Institut und Spezialschule „Heinrich Hertz“

Im Jahre 1986 beging die EOS *Heinrich Hertz* (Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung) in Berlin ihren 25. Geburtstag. Blättern wir ein wenig in der Schulchronik: 1962 wurden die ersten mathematischen Spezialklassen gebildet. Seit 1963 findet der *Heinrich-Hertz*-Wettbewerb statt, ein Schülerwettstreit, bei dem Einzel- und Kollektivarbeiten angefertigt werden (Themen aus verschiedenen Wissenschaftsgebieten, Literaturarbeiten, Unterrichtsmittel, Aufträge aus Betrieben). Bei den *Internationalen Mathematikolympiaden* (IMO) erringen von 1964 bis 1985 insgesamt 14 Schüler der *H zwei O* erste bis dritte Preise. 1969 wird das Pflichtfach WpA (wissenschaftlich-praktische Arbeit) in den Klassenstufen 11 und 12 eingeführt. Gegenwärtig sind es mehr als 30 WpA-Gruppen (zu durchschnittlich je zwei bis drei Schülern), die in wöchentlichem bzw. 14tägigem Rhythmus in verschiedenen Institutionen und Betrieben der Hauptstadt betreut werden.
Der Autor dieser Zeilen leitet seit 1971 WpA-Gruppen im *Karl-Weierstraß*-Institut für Mathematik der *Akademie der Wissenschaften der DDR*.
Es soll im folgenden über diese Arbeit berichtet werden.
Eine Gruppe von vier bis sechs Schülern kommt einmal pro Woche in das Institut. Das Ziel des sich jeweils über ein Jahr erstreckenden Unterrichts besteht darin, grundlegende Kenntnisse auf solchen Gebieten zu vermitteln, auf denen im Institut eigene Forschungsarbeit geleistet wird (z. B. Zahlentheorie, Algebra, Algebraische Geometrie, Funktionentheorie). Besonderes Gewicht liegt dabei auf der Entwicklung und Förderung von schöpferischen Fähigkeiten. So tragen zunächst die Schüler ihre Lösungen der Aufgaben vor, die sie in der jeweils vorangegangenen Woche erhalten haben. In der Regel sind drei bis vier Aufgaben zu bearbeiten (am Schluß sind einige davon aufgeführt), die jeder Schüler aus einer größeren Anzahl selbst – je nach Neigung und Interesse – wählt. Einerseits macht es Freude eigene Ideen darzustellen, andererseits übt die Möglichkeit der Diskussion des Vorgetragenen die kritische Auseinandersetzung mit der betreffenden Thematik. Dieser erste Teil beansprucht etwa die Hälfte der auf drei Stunden bemessenen Zeit (außerdem werden die schriftlich festzuhaltenden Lösungen vom Leiter korrigiert). Hiernach schließt sich in der verbleibenden Zeit die Fortführung des Arbeitsthemas durch einen Vortrag des Leiters an. Gegen Ende des WpA-Jahres erhält jeder Schüler ein Thema, über das eine Arbeit unter Heranziehung wissenschaftlicher Originalarbeiten (darunter auch in russischer oder englischer Sprache) anzufertigen ist. Bei der Auswahl der Themen finden vor allem solche Berücksichtigung, die Ansatzpunkte für eigenes Forschen bieten. Den Abschluß bildet die Verteidigung der Ergebnisse durch Vorträge der einzelnen Schüler. An dieser Veranstaltung nehmen insbesondere auch Fachlehrer der *Heinrich-Hertz*-Oberschule und ehemalige WpA-Schüler teil.
Zur weiteren Intensivierung der Zusammenarbeit zwischen dem Institut und der Spezialschule ist 1986 ein Arbeitsplan für den Zeitraum bis 1990 vereinbart worden. So wird vom Institut ein Spezialunterricht in Mathematik durchgeführt, der im Rahmen des wahlweise obligatorischen Unterrichts stattfindet. Vorträge profilierter Wissenschaftler des Instituts sind als Beitrag zur Lehrerweiterbildung vorgesehen. Außerdem sollen Lehrer die Möglichkeit erhalten, an Kolloquien, Seminaren und anderen Veranstaltungen (wie dem Tag junger Wissenschaftler) teilzunehmen. Durch das Institut werden Studienförderungsvereinbarungen abgeschlossen (Durchführung von Praktika, Betreuung von Diplomarbeiten). Schließlich berichtet eine Ausstellung (im Institut und an der Schule) in regelmäßigen Abständen über die Zusammenarbeit, Ergebnisse und Leistungen der WpA-Gruppen.
Bei der Arbeit an dieser schönen und lohnenden Aufgabe konnte der Autor auch manchen Entwicklungsweg über die Schulzeit hinaus verfolgen. In den letzten Jahren gab es die ersten Promotionen ehemaliger Schüler. Einige haben inzwischen ihre Tätigkeit am *Karl-Weierstraß*-Institut aufgenommen.

Spezialschule *Heinrich Hertz*, Berlin

Zum Abschluß sollen einige Aufgaben angeführt werden, die den Schülern meines ersten WpA-Kurses zu Beginn gestellt wurden.

Folgende Behauptungen sind zu beweisen:

▲1▲ Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geqq 3$.

▲2▲ Aus $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ folgt $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqq \frac{1}{n}$ für beliebige reelle Zahlen $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

▲3▲ Für jede Primzahl $p \geqq 5$ läßt $p^2$ bei Division durch 24 den Rest 1.

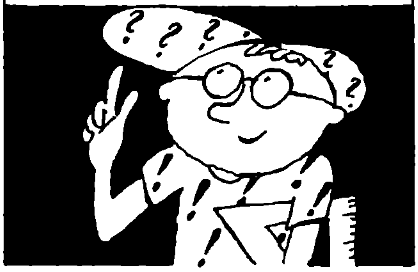
▲4▲ Für jede natürliche Zahl $n$ können Zähler und Nenner des Bruches $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ nicht gekürzt werden.

▲5▲ Die Summe von $2n + 1$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch $2n + 1$ teilbar (für jede natürliche Zahl $n$).

▲6▲ Unter $n + 1$ beliebig gewählten Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 2n - 1, 2n\}$ gibt es stets mindestens zwei, von denen eine ein Teiler der anderen ist (für jede natürliche Zahl $n$).

*R. Bölling*

# Lösungen




**Lösungen zu:**
**7. Adam-Ries-Wettbewerb**
Heft 2/88

▲1▲ a) Wegen 3,15 − 2,25 = 0,90 und 0,90 dt = 90 kg sammelte die Klasse 5b genau 90 kg Altstoff mehr als die Klasse 5a, wofür sie 2250 Pfennige erhielt.
Wegen 2250 : 90 = 25 kostete daher 1 kg dieses Altstoffes 25 Pfennige. Wegen 225 · 25 = 5625 erhielt die Klasse 5a für 2,25 dt dieses Altstoffes daher M 56,25.
b) Wir nehmen an, daß Klasse 3 genau $x$ kg Altpapier gesammelt hat. Nach Aufgabenstellung gilt dann:

| | Sammelergebnis in kg | | |
|---|---|---|---|
| Klasse 3 | $x +$ | 60 | |
| Klasse 4 | $x +$ | 80 | 140 |
| Klasse 5 | $x + (x + 80) = 2 \cdot x +$ | 80 | 200 |
| Klasse 6 | $\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x + 80) = \quad x +$ | 40 | 100 |
| zusammen | $5 \cdot x + 200$ | | 500 |

Da die vier Klassen zusammen 500 kg Altpapier sammelten, muß $5 \cdot x + 200 = 500$ gelten. Hieraus folgt $x = 60$ (weil $5 \cdot 60 + 200 = 500$). Wegen $2 \cdot 60 + 80 = 200$ folgt hieraus, daß Klasse 5a genau 200 kg Altpapier, d. h. 2 dt Altpapier gesammelt hat.
(Berechnet man noch die Sammelergebnisse der anderen Klassen, dann kann man der so ergänzten Tabelle entnehmen, daß diese Lösung tatsächlich alle im Text genannten Bedingungen erfüllt.)

▲2▲ *Hinweis:* Bei derartigen Aufgaben ist es oft günstig, zunächst die Bedingung herauszufinden, die die kleinste Erfüllungsmenge besitzt; bei unserer Aufgabe ist dies die Bedingung (3). Aus dieser Erfüllungsmenge eliminiert man dann diejenigen Elemente, die eine der restlichen Bedingungen nicht erfüllen.

| $z = \overline{ab}$ | $\overline{ba}$ | $3 \cdot \overline{ba}$ | $a + b$ |
|---|---|---|---|
| 20 | 2 | 6 | |
| 31 | 13 | 39 | |
| 42 | 24 | 72 | |
| 53 | 35 | 105 | 8 |
| 64 | 46 | 138 | 10 |
| 75 | 57 | 171 | 12 |
| 86 | 68 | 204 | |
| 97 | 79 | 237 | |

Es gibt genau 8 zweistellige Zahlen $z = \overline{ab}$ mit den Ziffern $a$ und $b$, die die Bedingung (3) erfüllen (vgl. Tabelle).
Unter den zugehörigen Zahlen der Gestalt $3 \cdot \overline{ba}$ (das ist das Dreifache der Zahl, die aus $z$ durch Vertauschen der Ziffern entsteht) gibt es nur 3 Zahlen, die die Bedingung (2) erfüllen, nämlich 105, 138 und 171.
Also können nur die Zahlen 53, 64 und 75 die Bedingungen (2) und (3) erfüllen.
Betrachtet man deren Ziffernsumme $a + b$, dann erkennt man, daß nur die Zahlen 53 und 75 auch die Bedingung (1) und damit alle Bedingungen erfüllen können.
Die für diese Zahlen bereits durchgeführten Rechnungen zeigen, daß sie die Bedingungen (1), (2) und (3) tatsächlich erfüllen. Folglich sind die Zahlen 53 und 75 die einzigen Lösungen unserer Aufgabe.

▲3▲ a) Wir stellen fest, welche Arten von Quadraten mit unterschiedlichen Seitenlängen in der betreffenden Figur vorkommen, ermitteln dann jeweils deren Anzahl und erhalten die gesuchte Gesamtzahl als Summe dieser Anzahlen.
Folglich findet man in der Figur a2 genau 14, in der Figur a3 genau 30 Quadrate.

zu Figur a2

| Seitenlänge des Quadrats | Anzahl der Quadrate |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 2 | 4 |
| 1 | 9 |
| Gesamtanzahl | 14 |

zu Figur a3

| Seitenlänge des Quadrats | Anzahl der Quadrate |
|---|---|
| 4 | 1 |
| 3 | 4 |
| 2 | 9 |
| 1 | 16 |
| Gesamtanzahl | 30 |

Wenn ein Quadrat die Seitenlänge $n$ hat, dann findet man in ihm
$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2)$ Quadrate.

b) Um die gesuchte Gesamtanzahl von Dreiecken zu erhalten, stellen wir zunächst fest, welche Arten von Dreiecken vorkommen (siehe Spalteneingänge der Tabelle). Dann bestimmen wir jeweils deren Anzahl und bestimmen die Summe dieser Anzahlen.
Da Figur b2 aus 4 Figuren b1 zusammengesetzt ist, enthält sie auch jeweils die vierfache Anzahl von Dreiecken der Gestalt d1 bzw. d2 wie Figur b1.
Figur b1 enthält jeweils genau 4 Dreiecke der Art d1 und d2. Analog findet man in Figur b2 jeweils 4 Dreiecke der Art d3 und d4. In Figur b2 gibt es allerdings noch vier weitere Dreiecke der Art d3 (eines davon wurde in Figur b2 grau markiert)! Also findet man in Figur b2 insgesamt 44 Dreiecke.
Bei analogem Vorgehen (vgl. Tabelle) findet man in Figur b3 insgesamt 124 Dreiecke.

**Lösungen zu: Geschwindigkeiten in Natur und Technik**
Heft 3/88

▲1▲ Das Umrechnungsverhältnis für Geschwindigkeiten von $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist;
$1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000}{3600}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{10}{36}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ bzw.
$1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Der Hase hat demnach eine Geschwindigkeit von $11{,}11\ldots\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Er kann in 10 s eine Strecke von rund 111 m zurücklegen.

▲2▲

| Tier | $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ | $v_i : v_5$ |
|---|---|---|
| Gepard | 101 | 2,8 |
| Antilope | 97 | 2,7 |
| Schildkröte | 0,18 | 0,005 |
| Schnecke | $5{,}76 \cdot 10^{-3}$ | 0,000 16 |
| Mensch | 36 | 1 |

▲3▲

| Tier | $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ | $v_i : v_{10}$ |
|---|---|---|
| Schwertfisch | 133 | 18,5 |
| Thunfisch | 101 | 14 |
| Delphin | 90 | 12,5 |
| Lederschildkröte | 35 | 4,85 |
| Freistilschwimmer | 7,2 | 1 |

| Arten von Dreiecken / Figur | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $d_5$ | $d_6$ | Gesamtanzahl |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_1$ | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| $b_2$ | 4 · 4 = 16 | 4 · 4 = 16 | 4 + 4 = 8 | 4 = 4 | 0 = 0 | 0 = 0 | 44 |
| $b_3$ | 9 · 4 = 36 | 9 · 4 = 36 | 4 · 8 − 8 = 24 | 4 · 4 = 16 | 4 + 4 = 8 | 4 = 4 | 124 |

▲4▲ $v_{15} = 980 \frac{m}{s}$

| Tier | $\frac{km}{h}$ | $v_i : v_{15}$ |
|---|---|---|
| Mauersegler | 288 | 0,082 |
| Schwalbe | 216 | 0,061 |
| Brieftaube | 68 | 0,019 |
| Buchfink | 194 | 0,055 |

Das Flugzeug erreicht eine Höchstgeschwindigkeit von $3\,528 \frac{km}{h}$.

▲5▲ Bei einer Geschwindigkeit von $a \frac{km}{h}$ ist die prozentuale Steigerung bezüglich der Geschwindigkeit der Rocket-Lokomotive $x = \frac{100}{46} a$.

| | |
|---|---|
| Versuchstriebwagen von 1903: | 457 % |
| Dampflok BR 05 | 436 % |
| Superexpreßzug Japan | 354 % |
| Superexpreß Höchstgeschwindigkeit | 457 % |
| Superexpreß geplant | 870 % |
| TGV Höchstgeschwindigkeit | 826 % |

Die Geschwindigkeit der Dampflok BR 05 war um rund 336 % höher als die der *Rokket.*

▲6▲ Der R 801 hat eine Reisezeit von 3 h und 46 min, d. h. 226 min. Seine Geschwindigkeit ist demnach
$v = \frac{742}{226} \cdot 60 \frac{km}{h}$, also $v = 197 \frac{km}{h}$.
Entsprechend ist für den R 815 die Reisestrecke 617 km und die Reisezeit 2 h und 54 min, das sind 174 min.
Folglich ist $v = 213 \frac{km}{h}$.
Die Fahrzeit der *Rocket* berechnet man nach der Formel $t = \frac{s}{v}$ ($s$ = Weg, $v$ = Geschwindigkeit).
Damit wird $t = \frac{742}{46} = 16{,}13$ h.
Die Lokomotive *Rocket* würde als 16 h und 8 min benötigen.

▲7▲

| | | |
|---|---|---|
| Lipsia: | $v = \frac{182}{136} \cdot 60 \frac{km}{h}$ | $v = 80 \frac{km}{h}$ |
| Selketalbahn: | $v = \frac{17{,}5 \cdot 60}{75} \frac{km}{h}$ | $v = 14 \frac{km}{h}$ |

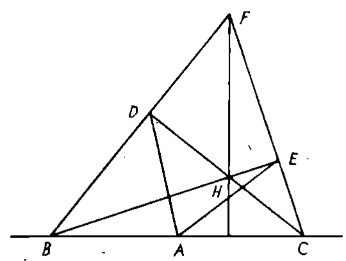
Der Städteexpreß fährt 5,7 (also rund 6) mal schneller als die Selketalbahn.

## Lösungen zu: Vier historische Mathematikaufgaben
Heft 3/88

### Die Anzahl aller Primzahlen
Mit $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot p$ hätten alle natürlichen Zahlen (außer 1) einen gemeinsamen Teiler größer als 1. Somit auch $P + 1$. Andererseits ist $(P, P+1) = 1$.
(Aus $d \mid P$, $d \mid P + 1$ folgt
$d \mid (P+1) - P$, d. h. $d \mid 1$, $d = 1$.)

### Das Kästchenproblem
Nach Öffnen eines Schubfaches, welches eine Goldmünze enthält, hat man folgende drei gleichwahrscheinliche (gleichberechtigte) Fälle:
(1) Man hat das erste Schubfach im ersten Kästchen geöffnet.
(2) Man hat das zweite Schubfach im ersten Kästchen geöffnet.
(3) Man hat das Fach mit der Goldmünze im dritten Kästchen geöffnet.
Nur in einem dieser drei Fälle (nämlich im Fall (3)) ist im zweiten Schubfach des Kästchens eine Silbermünze, also die Wahrscheinlichkeit, daß sich im anderen Fach des ausgewählten Kästchens eine Silbermünze befindet, gleich $\frac{1}{3}$.

### Der Streckenübertrager
Es sei $A$ ein beliebiger Punkt der gegebenen Geraden, dann tragen wir von $A$ aus auf dieser Geraden nach beiden Seiten hin zwei gleiche Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ ab (siehe Bild) und bestimmen dann auf zwei beliebigen anderen durch $A$ gehenden Ge-




raden die Punkte $E$ und $D$, so daß auch die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ gleich werden. Die Geraden $BD$ und $CE$ mögen sich in $F$, die Geraden $BE$ und $CD$ in $H$ schneiden; dann ist $FH$ die gesuchte Senkrechte. In der Tat: die Winkel $\sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle BEC$ sind als Winkel im Halbkreis über $BC$ Rechte, und daher steht nach dem Satze vom Höhenschnittpunkt eines Dreiecks (die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt!), auf das Dreieck $BCF$ angewandt, auch $FH$ auf $BC$ senkrecht.

### Die Russellsche Antinomie
Die meisten Mengen enthalten sich nicht selbst als Element. (Beispiel: Die Menge $N$ der natürlichen Zahlen. Elemente von $N$ sind die natürlichen Zahlen. $N$ ist, da es keine natürliche Zahl ist, nicht als Element in $N$ enthalten.)
Es sei $M$ die Menge aller dieser Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten. Entweder enthält $M$ sich selbst als Element oder nicht. Enthält $M$ sich selbst als Element ($M \in M$), so kann $M$ nicht zu $M$ gehören (nach Definition von $M$), d. h. $M \notin M$. Enthält $M$ sich nicht selbst als Element, dann gehört $M$ aber zu $M$ (nach Definition von $M$). Somit $M \in M$ genau dann, wenn $M \notin M$. Das ist ein Widerspruch!

## Lösungen zu: Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen
Heft 3/88

▲1▲ $1^6$ endet auf 1; $2^6$ endet auf 4; $3^6$ endet auf 9; $4^6$ endet auf 6; $5^6$ endet auf 5; $6^6$ endet auf 6, also endet die angegebene Summe wegen
$1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 = 31$ auf 1.

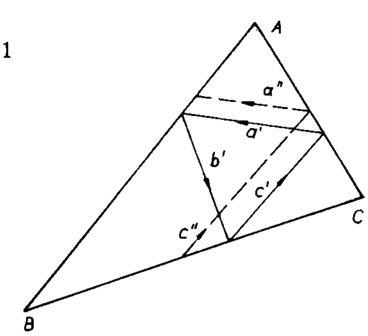
▲2▲ Für $n \geqq 2$ gilt $2^{2^n} = 2^4 \cdot 2^{n-2} = 16^{2^{n-2}}$. Da jede Potenz von 16 mit 6 endet, ist die letzte Ziffer von $2^{2^n}$ im Falle $n \geqq 2$ stets die 6 und die von $2^{2^n} + 1$ demzufolge die 7.

▲3▲ Die Zahl $z$ ist das Produkt von acht Faktoren. Jeder dieser Faktoren ist eine Zahl der Form $100a + 76$, wobei $a$ eine natürliche Zahl ist. Wegen
$(100a + 76)(100b + 76)$
$= 100(100ab + 76a + 76b + 57) + 76$
ist das Produkt je zweier Zahlen dieser Form wieder eine Zahl dieser Form. Daher gilt dasselbe für $z$, d. h., $z$ endet auf 76.

## Lösungen zu: Bemerkungen zu dem Artikel „Ein Brief G. Gentzens an seinen Großvater“
Heft 3/88

▲1▲ a) Konstruktion eines solchen Indreiecks
Gegeben denken wir uns das Dreieck $\triangle ABC$ mit den im mathematisch positiven Umlaufsinn orientierten Seiten $a = \overrightarrow{BC}$, $b = \overrightarrow{CA}$, $c = \overrightarrow{AB}$ sowie im Sinne der vorgegebenen Orientierung ein gleichseitiges Dreieck $\triangle A_0B_0C_0$.
Lege durch $A_0$, $B_0$ bzw. $C_0$ solche gleichorientierten Parallelen zu $a$, $b$ und $c$, daß diese ein zu $\triangle ABC$ ähnliches und gleichorientiertes Umdreieck $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ zu $\triangle A_0B_0C_0$ bilden. Eine anschließende Ähnlichkeitstransformation führt $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ in $\triangle ABC$ über und $\triangle A_0B_0C_0$ in ein Indreieck $\triangle A'B'C'$ der gesuchten Art.
b) Eindeutigkeit des gleichseitigen Indreiecks
Gäbe es zwei Lösungen der gestellten Aufgabe, also zwei gleichseitige Indreiecke vorgegebener Orientierung, so müßten deren Seiten $a'$, $b'$, $c'$ bzw. $a''$, $b''$, $c''$ paarweise parallel und gleichorientiert sein. Da beide Indreiecke aber verschieden sind, müssen die Seitenlängen eines dieser Seitenpaare verschieden sein, z. B. $a'' < a'$. Das hat gemäß Bild 1 notwendig $c'' > c'$ zur Folge. Das widerspricht aber der geforderten Gleichheit $a' = b' = c'$ und $a'' = b'' = c''$. Somit kann es nicht zwei verschiedene gleichseitige Indreiecke geben.

Bild 1




▲2▲ Wir denken uns das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Innenwinkeln $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ gegeben. Nun zeichnen wir irgendein gleichseitiges Dreieck $\triangle A_0B_0C_0$ und über seinen Seiten als Sehnen Kreisbögen mit den Peripheriewinkeln $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ bzw. $\bar{\gamma}$ (Bild 2). Dabei ist
$\bar{\alpha} = 180° - \alpha$, $\bar{\beta} = 180° - \beta$,
$\bar{\gamma} = 180° - \gamma$.
Nach dem Satz vom Peripheriewinkel

schneiden sich diese drei Kreisbögen in einem gemeinsamen Punkt $\bar{O}$, da $\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}=360°$ beträgt. Lege weiterhin durch $A_0$, $B_0$ und $C_0$ die Senkrechten zu den Strecken $\bar{O}A_0$, $\bar{O}B_0$ und $\bar{O}C_0$. Diese bilden dann mit ihren Schnittpunkten $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ ein zu $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, da seine Innenwinkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ sind. Eine anschließende Ähnlichkeitstransformation werde so ausgeführt, daß $\bar{A}$ in $A$, $\bar{B}$ in $B$ und $\bar{C}$ in $C$ übergeht. Dabei wird $\bar{O}$ in den gesuchten Punkt $O$ übergeführt und die Strecken $\bar{O}A_0$, $\bar{O}B_0$ und $\bar{O}C_0$ ergeben als Bild die gesuchten Lote $l_a$, $l_b$ und $l_c$.

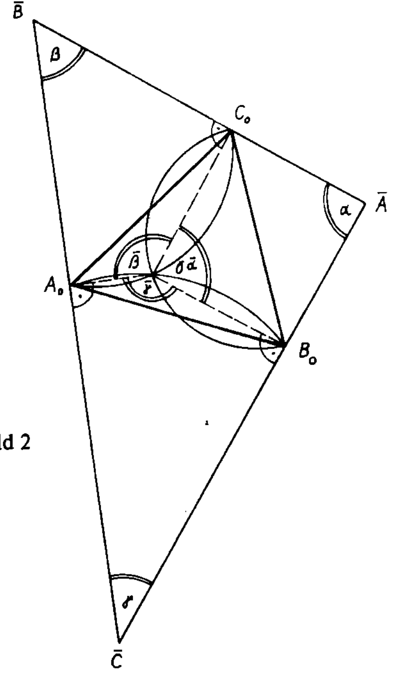



Bild 2

**Lösung zu: Visuelle Logik**
Heft 3/88

Die Zeichen und Buchstaben sind die verschlüsselten Zahlen 1, 2, 3, 6 und 7. Gleiche Zeichen und gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Zahlen.
Das Produkt der deckungsgleich waagerecht und senkrecht sich gegenüberliegenden Werte ergibt immer 42. Die gesuchte Zahl ist also 42.

**Lösungen zu: Flächenberechnung bei Dreiecken mit dem SR 1**

▲1▲ Es ist $a = 13$, $b = 14$ und $c = 15$.
Aus $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
und $A = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$ folgt $A = 84$.

Ein Programmablaufplan ist
a $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ b $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ c $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$
$\boxed{\div}$ a $\boxed{\div}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{x}$ a $\boxed{x}$
b $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

▲2▲ a $\boxed{+}$ b $\boxed{+}$ c $\boxed{-}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$
$\boxed{=}$ $\boxed{x\to M}$ $\boxed{x}$ a $\boxed{+/-}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{x}$ a
$\boxed{M+}$ b $\boxed{+/-}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{x}$ b $\boxed{M+}$ c
$\boxed{+/-}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}}$

▲3▲ a $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ b $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ c $\boxed{x^2}$
$\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{x\to M}$ $\boxed{2}$ $\boxed{x}$ a $\boxed{x}$ b
$\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$

An den Stellen a, b, ... ist die jeweilige Zahl in den SR 1 einzugeben. $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$ bedeutet arccos, damit wird gerade $\gamma$ ermittelt.

▲4▲ 1320

▲5▲ $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

**Lösung zu:**
**Eine historische Aufgabe**

Son Heynrich legt am Tag 10 Meilen zurück, Contz von Treber 13 Meilen. Son Heynrich startet 9 Tage vor Contz von Treber. Er hat damit einen Vorsprung von 90 Meilen. Wir nehmen an, daß sich beide $n$ Tage nach dem Abmarsch von Contz treffen. Dann haben Son Heynrich bzw. Contz von Treber $10n$ bzw. $13n$ Meilen zurückgelegt bzw.
$90 + 10n = 13n$
oder $90 = 3n$
und $n = 30$.
Beide treffen sich 30 Tage nach dem Abmarsch von Contz.

**Lösung zu:**
**Wo steckt der Fehler?**
Heft 4/88

Die Antwort erfordert die Lösung der Frage für welchen Wert $a$ gilt:
$a^2 + a = a^3$? Dividiere durch $a$.
Es folgt:
$$a^2 - a = 1 \text{ und } \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$
also:
$$a = \frac{1}{2}\left(1 - \pm\sqrt{5}\right) \text{ d. h.}$$
für den Wert $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
ist eine derartig absurde Rechnung tatsächlich möglich!

*mitgeteilt von Ing. A. Körner, Leipzig*

**Lösungen zur Sprachecke**

▲1▲ Es seien $x$ und $y$ ganze Zahlen und $s$ ist ihre Summe, $d$ ihre Differenz und $p$ ihr Produkt. Es ist zu zeigen, daß das Produkt von $s$, $d$ und $p$ immer ein Vielfaches von 6 ist.
Beachte: Das Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen ist durch 6 teilbar.
*Lösung:*
$s = x + y$; $d = x - y$; $p = xy$;
$sdp = (x+y)(x-y)xy$
$= (x^2 - y^2)xy$
$= [(x^2-1) + 1 - (y^2-1) - 1]xy$
$= [(x-1)(x+1) - (y-1)(y+1)]xy$
$= y(x-1)x(x+1) - (y-1)y(y+1)$

▲2▲ Die Masse des Eiffelturms beträgt 8200 t. Berechne das Volumen des Stahls, den man zu seiner Konstruktion benötigte!
Die Dichte von Stahl ist $7{,}8\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

*Lösung:* $V = \frac{m}{\varrho}$; $V = 1050\ \text{m}^3$.
Das Volumen des verwendeten Stahls beträgt $1050\ \text{m}^3$.

▲3▲ In einem Haufen befinden sich 1001 Steine. Er wird beliebig in zwei Haufen geteilt, die Anzahl der Steine in jedem von ihnen wird gezählt und das Produkt der beiden Zahlen aufgeschrieben. Danach wird mit einem der beiden Haufen (in dem sich mehr als ein Stein befindet) die gleiche Operation durchgeführt: Er wird in zwei Haufen geteilt, und die Anzahl der Steine in beiden neugebildeten Haufen miteinander multipliziert wird aufgeschrieben. Dann wird die Operation mit einem der drei erhaltenen Haufen wiederholt usw., bis jeder Haufen nur noch aus einem Stein besteht. Wie lautet die Summe der aufgeschriebenen Produkte? Warum?
*Lösung:* Wir stellen uns vor, daß am Anfang alle Steine paarweise durch je eine Schnur verbunden sind. Wenn wir einen Haufen mit mehr als einem Stein in zwei Haufen teilen, so zerschneiden wir jeweils alle Schnüre, die die zwei neu gebildeten Haufen verbinden. Ihre Anzahl ist gleich dem Produkt der Steineanzahlen in jedem der beiden betrachteten Haufen. Am Ende unseres Prozesses sind alle Schnüre zerschnitten. Wieviele waren es am Anfang? Es waren
$$\sum_{n=1}^{1000} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$$
$$= (1000\cdot 1001)\cdot\frac{1}{2} = 500500.$$
Man kann auch einen Induktionsbeweis dieser Formel führen.

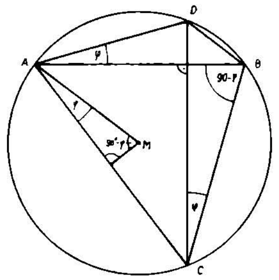
▲4▲ Die Zahl der Katzen in Randwick ist ein Drittel einer Quadratzahl. Wenn ein Drittel herumstreift, ist genau die dritte Potenz immer zu Hause. Wieviel Katzen muß es mindestens geben?
*Lösung:* Es sei $x$ die Zahl der Katzen. Aus dem Gedicht entnehmen wir:
$$x = \frac{1}{3}y^2 \text{ und } \frac{3}{4}x = z^3 \text{ und } \frac{1}{4}y^2 = z^3.$$
$y$ und $z$ sind ganze Zahlen. Daraus folgt: $y$ ist teilbar durch 3 und 2 und folglich durch 6. Wir setzen $y = 6w$, wobei $w$ eine ganze Zahl ist, dann gilt $9w^2 = z^3$. Die kleinste Zahl, die diese Gleichung erfüllt, ist $z = 9$ (mit $w = 9$) und folglich ist $y = 54$ und $x = 972$. Es muß mindestens 972 Katzen geben.

**Lösungen zu: Mathematikolympiaden in der VR Moçambique**

▲1▲ a) Angenommen, es nahmen $x$ Schüler an dem Schachturnier teil. Jeder der $x$ Schüler spielte gegen $(x-1)$ Schüler. Das würde $x(x-1)$ Spiele ergeben. Da die Spiele $A$ gegen $B$ und $B$ gegen $A$ als nur ein Spiel rechnen, gilt für die Anzahl der Spiele
$\frac{1}{2}\cdot x\cdot(x-1) = 28$,
$x\cdot(x-1) = 56 = 8\cdot 7$, also $x = 8$.
An diesem Turnier nahmen 8 Schüler teil.
b) Die Überlegungen zur Aufgabe 1a) führen zu folgender Rechnung:
$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9 = y$, also $y = 45$. Es mußten 45 Spiele ausgetragen werden.

▲2▲ Wegen (1) wohnt Angelo nicht in Nampula. Wegen (3) wohnt Angelo nicht in Lichinga. Folglich wohnt Angelo in Inhambane. Wegen (2) wohnt Lucas nicht in Nampula. Folglich wohnt Lucas in Lichinga. Somit wohnt Mario in Nampula.

▲3▲ Das Lot von $M$ auf $\overline{AC}$ habe den Fußpunkt $E$; der Winkel $MAE$ habe die Größe $\varphi$, der Winkel $EMA$ somit die Größe




$90° - \varphi$. Der Peripheriewinkel $ABC$ ist so groß wie der halbe Zentriwinkel $EMA$; er hat somit ebenfalls die Größe $90° - \varphi$. Der Winkel $BCD$ hat deshalb die Größe $\varphi$. Der Peripheriewinkel $DAB$ steht mit dem Peripheriewinkel $BCD$ über der gleichen Sehne $\overline{BD}$. Deshalb hat er die Größe $\varphi$. Folglich sind die Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle MAC$ einander kongruent. Fortsetzung in 5/88

**Lösungen zu:**
**In freien Stunden · alpha-heiter**

**Eine Gleichung, die den Kopfstand verträgt**

Peter hat eine der folgenden fünf Aufgaben aufgeschrieben.

$6 + 99 + 9 \cdot 66 = 699$
$9 + 66 + 6 \cdot 99 = 669$
$6 + 99 + 6 \cdot 99 = 699$
$9 + 66 + 9 \cdot 66 = 669$
$8 + 96 + 8 \cdot 88 = 808$

**Fehler gesucht**

**Mathematische Faltarbeit**

Es gibt 19 zulässige Möglichkeiten des Zusammenfaltens. Dabei befinden sich die Quadrate mit den Nummern 1 bis 7 in einer der 10 angegebenen Anordnungen. Das Quadrat mit der Nummer 8 befindet sich jeweils an einer der durch einen Stern markierten Stellen:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 1 | 1 | 5 | 2 | 5 | 3 | 5 | 3 | 3 |
| 6 | 5 | 2 | 6 | 1 | 6 | * | 6 | * | * |
| 1 | 6 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | * | 1 | * | * | 2 | * | 5 | 1 |
| 3 | 3 | 5 | 3 | 5 | 1 | * | 2 | 6 | * |
| * | * | 6 | * | 6 | 2 | 5 | 1 | 1 | 5 |
| 7 | 7 | * | 7 | * | * | 6 | * | * | 6 |
| | | 7 | | 7 | 7 | * | 7 | 7 | * |
| | | | | | | 7 | | | 7 |

**Zoo-Logisches**

$$\begin{array}{ccccc} 20 & + & 10 & = & 30 \\ \times & & \times & & \times \\ 10 & - & 5 & = & 5 \\ \hline 200 & - & 50 & = & 150 \end{array}$$

**Geburtsjahre**

$A_w$ und $G_w$ findet man leicht mit Hilfe der Titelseite *alpha* bzw. der diesjährigen OJM.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A 1 | 9 | 6 | B 7 | |
| 3 | | | 1 | |
| C 2 | D 3 | | E 5 | F 4 |
| | 8 | | | 9 |
| | G 1 | 9 | 6 | 1 |

**Wo sind sie zu Hause?**

| | | |
|---|---|---|
| Jacob | Gilles | Guillaume |
| Quentin | Martin | Clément |
| Renaud | Malcolm | Romuald |

**Fortsetzung von Seite 91**

281013 Gegeben sei eine regelmäßige, fünfseitige, gerade Pyramide $P$ mit der Höhenlänge $h = 10$ cm. Durch einen ebenen Schnitt, der parallel zur Grundfläche verläuft, soll von dieser Pyramide eine wiederum regelmäßige, fünfseitige und gerade Pyramide $P^*$ abgetragen werden, deren Volumen $V^*$ ein Drittel des Volumen $V$ der ursprünglichen Pyramide $P$ ist.
Wie groß ist die Höhenlänge $h^*$ dieser abgetrennten Pyramide $P^*$?
*Hinweis:* Schätzen Sie vor der Berechnung das zu erwartende Ergebnis! Wird es
a) zwischen 2 cm und 4 cm,
b) zwischen 4 cm und 6 cm,
c) zwischen 6 cm und 8 cm,
d) zwischen 8 cm und 9 cm liegen?

281014 Wenn Frank große natürliche Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 7 untersucht, geht er folgendermaßen vor: Von rechts beginnend teilt er die Zahl in Gruppen zu je drei Ziffern ein. (Damit auch die links stehende Gruppe aus drei Ziffern besteht, wird sie nötigenfalls durch Davorsetzen von einer oder zwei Ziffern 0 ergänzt.)
In jeder Gruppe addiert Frank zur rechts stehenden Ziffer das Dreifache der mittleren und das Doppelte der linken Ziffer. So erhält er *Gruppensummen*; diese versieht er (von rechts beginnend) abwechselnd mit den Vorzeichen + und −. Schließlich addiert er alle so abgewandelten *Gruppensummen* und erhält damit eine *Gesamtsumme.* Diese kann man leicht auf ihre Teilbarkeit durch 7 überprüfen.
1. Beispiel: Zu untersuchen sei die Zahl 45 893 127, in Gruppen 045 893 127.
Die Gruppe 127 hat die Gruppensumme
$7 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 15$,
die Gruppe 893 hat die Gruppensumme
$3 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 46$,
die Gruppe 045 hat die Gruppensumme
$5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 17$.
Als Gesamtsumme ergibt sich die Zahl
$+15 - 46 + 17 = -14$;
diese ist durch 7 teilbar.
2. Beispiel: Zu der Zahl 45 693 127 findet man entsprechend die Gesamtsumme
$+15 - 42 + 17 = -10$; diese ist nicht durch 7 teilbar.
Frank sagt nun, bei seinem Verfahren gelte stets: Genau dann, wenn die Gesamtsumme durch 7 teilbar ist, ist es auch die ursprüngliche Zahl.
Beweisen Sie diese Aussage!

**Olympiadeklassen 11/12**

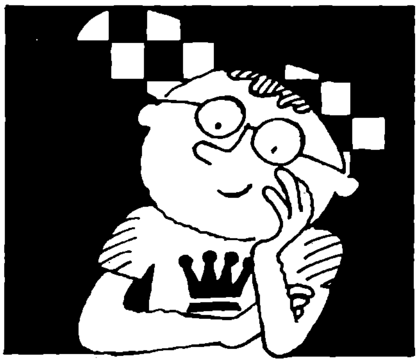
281211 Ein Arbeitskollektiv will sich gemeinsam am Tele-Lotto 5 aus 35 beteiligen. Die Kollegen $A$, $B$, $C$ werden mit der Auswahl der Zahlen auf den abzugebenden Tipscheinen beauftragt. Bei ihrer Beratung, welche Tips sie zusammenstellen wollen, stellt jeder der drei Kollegen bestimmte Forderungen. So verlangt $A$, daß jeder Tip drei Primzahlen enthält, deren Summe 42 ist.
$B$ fordert, daß jeder Tip drei Zahlen enthält, deren Produkt das 33fache ihrer Summe ist.
$C$ erwartet, daß jeder Tip zwei Zahlen enthält, die keine Primzahlen sind.
Man ermittle alle diejenigen Tips, die die Forderungen aller drei Kollegen erfüllen.

281212 Man untersuche, ob es rechtwinklige Dreiecke $ABC$ mit dem rechten Winkel bei $C$ gibt, in denen die Seitenlängen
$a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ in dieser Reihenfolge
a) eine geometrische Folge,
b) eine arithmetische Folge bilden.
Falls es solche Dreiecke gibt, ermittle man jeweils in Abhängigkeit von $a$ alle diejenigen Seitenlängen $b$, $c$, für die die geforderte Eigenschaft vorliegt.

281213 a) Man gebe zwei Quadrupel $(x, y, z, u)$ reeller Zahlen an, die das folgende Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllen.
b) Man ermittle ein Quadrupel $(x, y, z, u)$ ganzer Zahlen so, daß eine der Variablen $x$, $y$, $z$, $u$ den Wert 1988 besitzt und das Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllt wird.

(1) $1x + 9y + 8z + 8u = 1$
(2) $9x + 9y + 24z + 24u = 9$
(3) $8x - 13y + 8z + 7u = 8$
(4) $8x - 21y - 10z + 8u = 8$

281214 Im Überseehafen Rostock wird eine Stückgutsendung erwartet. Über sie ist nur bekannt, daß die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) eingehalten sind:
(1) Die Gesamtmasse aller Stücke der Sendung beträgt 10 t.
(2) Die Masse jedes einzelnen Stücks ist nicht größer als 1 t.
Zum Transport stehen Lastkraftwagen (LKW) mit einer Tragfähigkeit von je 3 t zur Verfügung.
Man untersuche, ob für jede Stückgutsendung, die die Bedingungen (1), (2) einhält, eine einmalige Fahrt von
a) 5 LKW, b) 4 LKW, c) 3 LKW
zum Abtransport der Sendung ausreicht.
Dabei sei angenommen, daß sich Stückgüter von insgesamt 3 t jeweils auch auf einem LKW unterbringen lassen.



# Reizvolle Schachknobelei

Der 5. alpha-Schachwettbewerb vermittelte wiederum vielen Teilnehmern Freude und Begeisterung an der unermeßlichen Schönheit des Schachs. Die Vermischung von Elementen der Kunst, des Sports und des Rätsels in den gestellten Schachaufgaben fasziniert viele Leser immer wieder aufs Neue. „Diese Aufgaben haben mich sehr angeregt, mich mit dem königlichen Spiel mehr zu befassen" (Luis Urbina, Leipzig), „die Knobeleien waren in der Tat wieder reizvoll" (F. Fiedler, Mügeln), „für jeden etwas und somit eine echte Werbung für das Schachspiel" (E. Bösenberg, Töppeln) und „das Knobeln nach den richtigen Lösungen hat wieder viel Spaß gemacht" (T. Mautsch, Duben).
Welche Faszination vom Schachspiel ausgeht, zeigt auch das breite Altersspektrum der Teilnehmer. Zu den jüngsten Teilnehmern zählten Roland Voigt (Böhlen), Daniela Manthey (Oranienburg) und Andreas Jähnlich (Weißwasser) mit 6 bzw. 7 Jahren. Als älteste Teilnehmer sind Hilde Espig (Karl-Marx-Stadt), Elisabeth Möller (Bad Kösen) und Fritz Rauhe (Wendgräben) mit 82 bzw. 83 Jahren zu nennen.
Allen Teilnehmern ein herzliches Dankeschön fürs Mitmachen!

**Lösungen**

▲1▲ 1. Kf7 Kh7
2. Dh4 matt (1 P.).

Die Lösung zu dieser Aufgabe von J. Kotrc aus *Die Schachpartie* (1920) wurde von fast allen Einsendern gefunden.

▲2▲ 1. Te8 (droht 2. D:f8 matt)
1. ... D:e8/De7
2. Sf6/S:e7 matt (2 P.).

Ein verblüffend schnelles Matt!

▲3▲ Sh8 (droht 2. Dh7 matt)
1. ... Te8/Tf7
2. Df7/D:f7 matt (2 P.).

▲4▲ 1. Dh7+ K:h7
2. Sf6++ (Doppelschach von Sf6 und Ld3)
2. ... Kh8
3. Sg6 matt (3 P.).

▲5▲ 1. Sd8 (droht 2. D:f7 matt und 2. Te8 matt)
1. ... De6
2. D:e6+ Kf8
3. Df7 oder De8 matt (1 P.).
1. ... T:d8
2. D:d8+ Df8
3. Dd5+ Df7
4. Te8 matt (3 P.).

Der elegante Schlüsselzug 1. Sd8 unterbricht die Wirkungskraft des Turmes a8 und lenkt gleichzeitig die schwarze Dame vom Feld f7 ab.

▲6▲ 1. Sg7–f5 (droht 2. Td4 matt)
1. ... L:f5
2. L:f5 matt (2 P.).
1. ... Lf6
2. Sg3 matt (2 P.).
1. ... Sb3/Sc6+
2. Lc6/L:c6 matt (2 P.).

Bei dieser Aufgabe von Harald Dieffenbach („Schach", 1980) wurden zahlreiche Löser durch eine der mehreren vorhandenen Verführungsvarianten zu der Angabe einer falschen Lösung verleitet.
Die vermeintlichen Schlüsselzüge
1. Sg4/Sd1/Sf1/Se6/Sef5/Sd5
werden jeweils durch
1. ... Lg6/Le1/Le1/Le7/Lf2/Sc6+
widerlegt.
Für die richtige Lösung war es erforderlich, das Ausgangsfeld des gezogenen Springers anzugeben. Denn sowohl der Springer auf e3 als auch der auf g7 können im 1. Zug nach dem Feld f5 gezogen werden, aber nur der Springerzug von g7 nach f5 führt zum zweizügigen Matt.

▲7▲ 1. Th2 K:a4
2. Lc6+ K:a3/Ka5
3. Lc5/Th5 matt (6 P.).

In dieser Aufgabe von William A. Shinkman (*Checkmate*, 1903) wurde der paradoxe königsferne Hinterstellungszug 1. Th2, welcher die spätere Flucht des schwarzen Königs auf die 2. Reihe vereitelt, von mehreren Teilnehmern nicht als Schlüsselzug für die richtige Lösung erkannt. Der Versuch 1. Th5+ K:a4 2. Kc3 führt nach 2. ... a5 nicht zum Matt im 3. Zug, ebenso nicht 1. Lg3 Kb6 2. Tb4+ nach 2. ... Kc5.

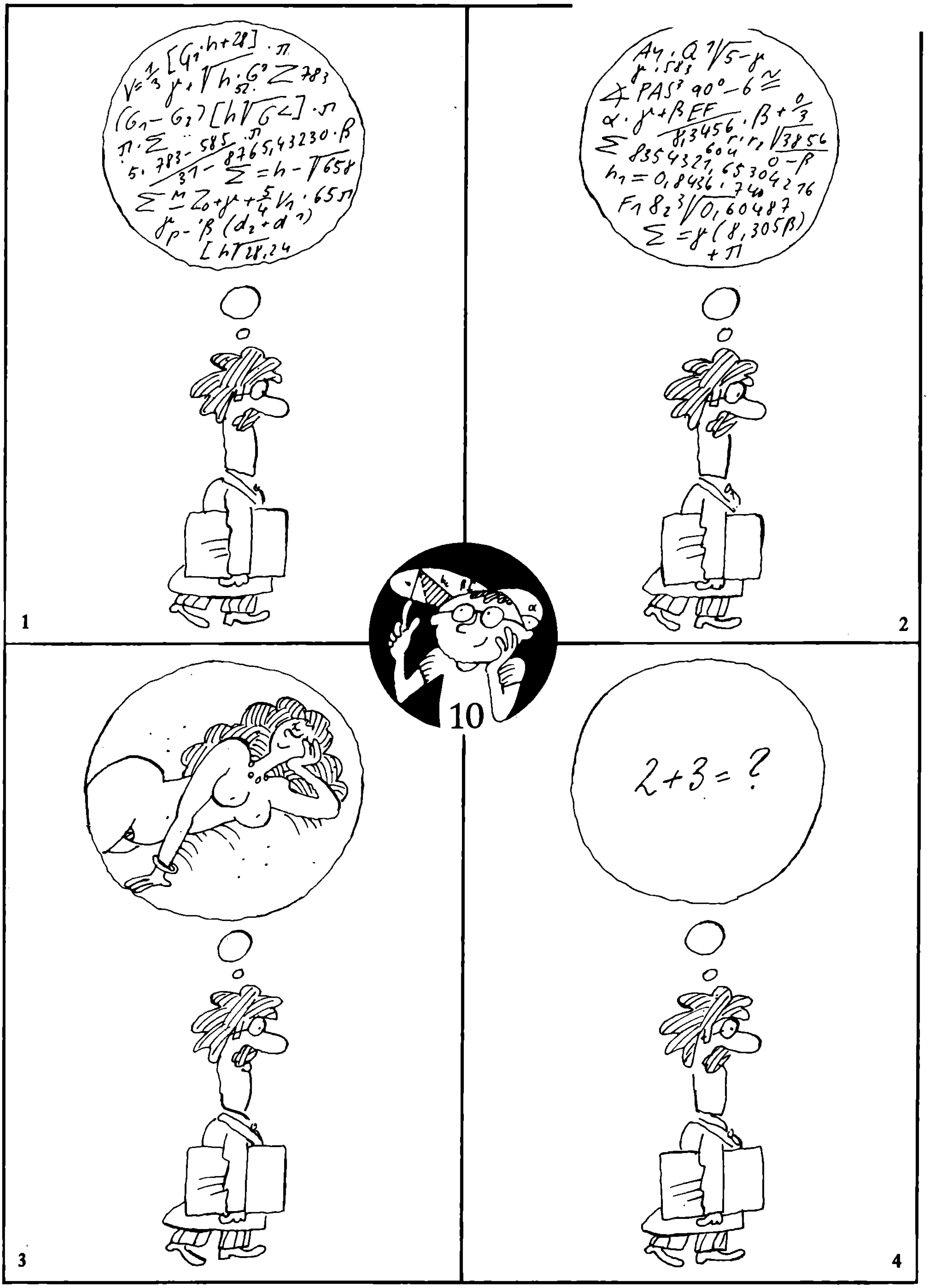
▲8▲ 1. Se2+ Kf2
2. Sf4+ Ke3, Ke1/Kg3, Kg1
3. De2/Dg2 matt.
2. ... K:f3/Kf1
3. De2+/De2+ Kg3/Kg1.
4. Dg2/Dg2 matt.
1. ... Kg2
2. Sf4+ Kg3, Kg1, Kh1
3. Dg2 matt.
2. ... K:f3/Kf1
3. De2+/De2+ Kg3/Kg1
4. Dg2/Dg2 matt.
1. ... Kh2
2. Sf4+ Kh2 beliebig
3. Dg2 matt.
1. ... K:f3
2. Sg1+ Ke3/Kg4
3. De2/Dg6 matt.
2. ... Kg3 (Hauptvariante)
3. De2 Th2/Th1
4. Df3 matt/Df3+ Kh2
5. Df2 matt.

Mehrere Löser, die diese logische Miniatur von dem Karl-Marx-Städter Manfred Zukker richtig gelöst hatten, waren begeistert von dem Reiz dieser Aufgabe. „Diese Aufgabe verdient einen Schönheitspreis" (G. Wuttig, Berlin). Die Aufgabe, die 1968 in der *Schwalbe* erschien, erhielt auch dort den 1. Preis.
Mit einer Lenkung wird in der Hauptvariante der weiße Bauer auf f3 beseitigt und nach 2. Sg1+ Kg3 die Ausgangsstellung ohne den Bauern f3 wieder erreicht. Nach 3. De2 gerät Schwarz in Zugzwang und wird musterhaft matt gesetzt.

Die bei den jeweiligen Aufgaben angegebene Punktzahl verdeutlicht ungefähr den steigenden Schwierigkeitsgrad und diente zur Auswertung der Lösungseinsendungen. Die volle Punktzahl erreichten 219 der insgesamt 446 Teilnehmer.
Unter den Einsendern, die die volle Punktzahl erzielten, sowie unter jenen bis zum Alter von 14 Jahren, welche die Aufgaben Nr. 1 bis 4 richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Bernd Ballandt (Wittichenau),
Carsten Grau (Jena),
Stefanie Grunst (Plaue),
Michael Klimt (Erfurt)
und Stefan Warnest (Neuruppin).
Weiterhin wurden Preise unter allen Teilnehmern verlost, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten:
Matthias Gutzeit (Dresden),
Lutz Häselbarth (Weimar),
Steffen Reymann (Wismar),
Karola Schulz (Schwerin)
und Karin Wingeyer (Zettlitz).
Die zwei Buchpreise für die Teilnehmer, welche alle Aufgaben einschließlich der Zusatzaufgabe korrekt gelöst hatten, gehen an:
Matthias Borchardt (Pasewalk)
und Karsten Thomaneck (Neubrandenburg).
Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch!

„Besten Dank, alpha, für dieses Schachvergnügen" (F. Hoffmann, Weißenfels) und „für die wieder gelungene Auswahl origineller, pointierter Schachaufgaben in ausgewogener Schwierigkeit" (K. Rubin, Berlin).
„Die Idee des alpha-Schachwettbewerbs finde ich ausgezeichnet. Ich hoffe, daß 1988 eine neue Schachknobelei in alpha zu finden ist" (M. Ludwig, Plauen).
Der 6. alpha-Schachwettbewerb ist 1988 bereits im nächsten Heft (5/1988)! Alle alpha-Leser sind dazu wiederum herzlich aufgefordert, sich zu beteiligen!

*H. Rüdiger*




ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 22 (1988) 4 · Seiten 73 bis 96