Mathematische Schülerzeitschrift

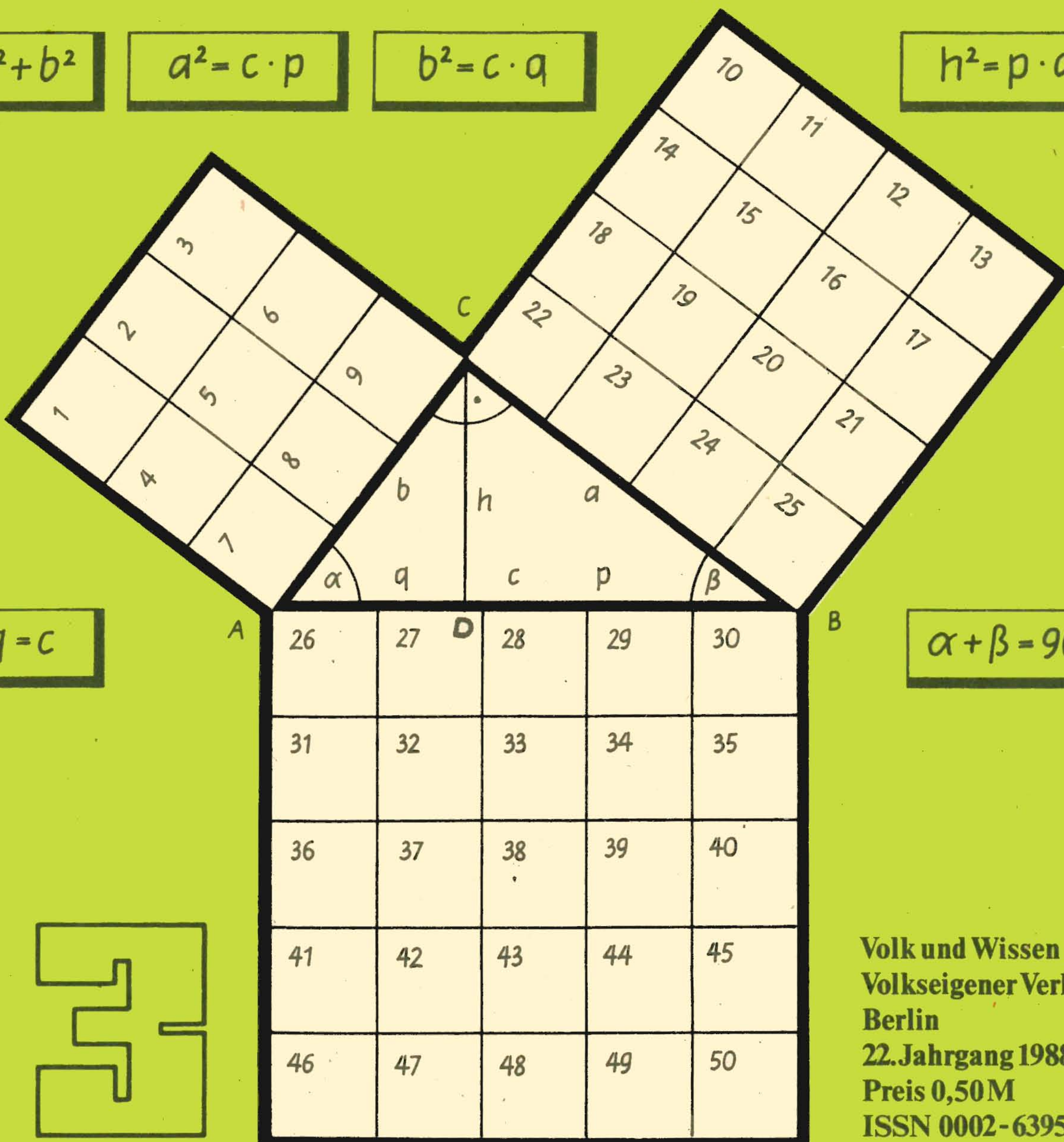
# alpha

$c^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = c \cdot p$

$b^2 = c \cdot q$

$h^2 = p \cdot q$




$p + q = c$

$\alpha + \beta = 90°$

3


Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
22. Jahrgang 1988
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

*Herausgeber und Verlag:*
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
*Anschrift des Verlags:*
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
*Anschrift der Redaktion:*
PSF 14, Leipzig 7027



Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

*Erscheinungsweise:* zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

*Fotos:* R. Schimming (S. 49); H. Pieper (S. 52 o.); R. Bölling (S. 52 M.); K.-Sudhoff-Institut (S. 53); Volk und Wissen (S. 54); V. Paulauskas (S. 57); H. Vilkner (S. 72); A. Zenkert (S. 71/72, III. U.-Seite)
*Vignetten:* L. Otto (Titelvignetten); H. Teske (Titelvignette Ferienmagazin)
*Titelblatt:* W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von R. Mildner, Leipzig
*Typographie:* H. Tracksdorf, Leipzig

*Gesamtherstellung:* INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
*Redaktionsschluß:* 8. Februar 1988
*Auslieferungstermin:* 7. Juni 1988

# Mathematische Schülerzeitschrift

## Inhalt

49 **100. Geburtstag von A. A. Friedmann**
Dr. R. Schimming, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald

50 **Bemerkungen zu dem Artikel „Ein Brief Gerhard Gentzens an seinen Großvater“**
Prof. Dr. R. Klötzler, Sektion Mathematik der *Karl-Marx*-Universität Leipzig

51 **Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen**
Th. Scholl, Berlin

51 **Sprachecke**
R. Bergmann, Döbeln/M. Frank/P. Hoffmann/G. Liebau (alle Leipzig)

52 **Vier historische Mathematikaufgaben**
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR

54 ***alpha*-Märchen: Prinz Epsilon darf heiraten**
U. Siebert, Kreisklub Mathematik Halle-Süd

56 **Symmetrie auf einem Band**
Dr. E. Quaisser, Sektion Mathematik der Päd. Hochschule *Karl Liebknecht*, Potsdam

57 **Eine Aufgabe von Prof. Dr. V. Paulauskas, Vilnius**

58 **Wir rechnen mit dem SR 1**
Ing. A. Körner, Leipzig/Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald

59 ***alpha*-Ferienmagazin**
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

63 **XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR Aufgaben der Bezirksolympiade**

65 **Schachecke**
H. Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin

66 **Lösungen**

71 **Konstruktion von Sonnenuhren**
H. Vilkner, Greifswald

**IV. U.-Seite: Aufgabe zum Titelblatt**
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der *Karl-Marx*-Universität Leipzig

*Alphons*, vom Leipziger Graphiker Lothar Otto, wird insbesondere die Schüler der 5. bis 7. Klassen auf speziell für sie geeignete Beiträge hinweisen.

# 100. Geburtstag von A. A. Friedman

## Mathematiker, Meteorologe, Kosmologe

In diesem Jahr ist Anlaß, des großen sowjetischen Wissenschaftlers Alexander Alexandrowitsch Friedman zu gedenken, der – neben anderen bedeutenden Leistungen – die Expansion des Weltalls vorhersagte. Er wurde am 17. Juni 1888 in Petersburg in der Familie eines Musikers und Komponisten geboren. Der junge Alexander interessierte sich mehr für Mathematik und Naturwissenschaften als für Musik. Als Schüler auf dem Gymnasium verfaßte er – gemeinsam mit seinem Klassenkameraden J. D. Tamarkin – seine erste wissenschaftliche Arbeit. Sie war einem Problem der Zahlentheorie gewidmet und erschien 1906 in französischer Sprache in der renommierten Zeitschrift *Mathematische Annalen*. (Ein zweiter Teil erschien 1909 im *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.) Über die Nachricht der Veröffentlichung freuten sich die beiden Freunde so, daß sie den Unterricht störten und den Raum verlassen mußten.

Es war nur natürlich, daß Alexander Friedman von 1906 bis 1910 Mathematik an der Petersburger Universität studierte. Der Studienbetrieb verlief damals und dort völlig anders als heute und bei uns: er war wenig durchorganisiert. Die Studenten mußten sich vieles selbst erarbeiten. Friedman fiel durch Begabung und Fleiß auf. Er betätigte sich eifrig in fachlichen Studentenzirkeln, aber ebenso in politischen Zirkeln. Letzteres war bei der allgemeinen vorrevolutionären Stimmung nicht ungewöhnlich. Die folgende Episode ist recht aufschlußreich:

In einem Vortrag *Über die Kanäle auf dem Mars* berichtete der Student Friedman, daß diese Kanäle ziemlich plötzlich entdeckt wurden. Die offenbar kurze Bauzeit für diese gewaltigen Anlagen ließe auf eine sozialistische Gesellschaftsordnung auf dem Mars schließen! Nach ausgezeichnetem Studienabschluß verblieb A. A. Friedman an der Universität; wir würden heute sagen als wissenschaftlicher Assistent. Auch andere Petrograder Hochschulen erteilten ihm Lehraufträge. Die geradlinige Laufbahn erhielt im Jahre 1913 eine Wendung durch die Anstellung des jungen Wissenschaftlers als Physiker am Aerologischen Observatorium in Pawlowsk. Bis dahin hatte er schon Arbeiten zur Hydrodynamik und Aerodynamik verfaßt und arbeitete sich nun schnell in die theoretische und praktische Meteorologie ein. Zum Zwecke der Weiterbildung delegierte man Friedman 1914 nach Leipzig zu dem damals führenden Meteorologen Prof. V. Bjerknes. Leider unterbrach der Beginn des ersten Weltkrieges diese Entwicklung: Kaum aus Leipzig zurückgekehrt, zog A. A. Friedman in den Krieg gegen Deutschland. Er wurde seinen Fachkenntnissen entsprechend eingesetzt – als Wetterbeobachter und bei Bombenzielwürfen. Selbst diese Zeit nutzte er, um ständig dazuzulernen; unter anderem wurde Friedman ein Spezialist für technische Fluggeräte. Schließlich wurde er sogar, im Jahre 1917, Direktor des Werkes für Flugzeugzubehör *Aviapribor* in Moskau. Oktoberrevolution und Kriegsende beendeten diese Tätigkeit. Unter der Sowjetmacht erhielt A. A. Friedman eine Menge wechselnder Aufgaben, die er stets mit dem ihm eigenen Elan erfüllte. Seine Laufbahn wurde zum Spiegel der unruhigen Zeit! Wir erwähnen nur einige Stationen: Professor für Theoretische Mechanik an der Universität Perm, Lehraufträge an Petrograder Hochschulen, Studienaufenthalte in Deutschland und Norwegen, im Jahre 1925 dann Direktor des Geophysikalischen Hauptobservatoriums in Pawlowsk. Bei allen äußeren Funktionen fand er Zeit für tiefgründige wissenschaftliche Arbeit. In seinem kurzen und bewegten Leben schrieb Alexander Friedman etwa 50 wissenschaftliche Veröffentlichungen. Er profilierte sich zum führenden Meteorologen des jungen Sowjetstaats, der die gesamte Skala von der Theorie bis zur praktischen Anwendung beherrschte. Besonders erwähnt sei ein Forschungs-Ballonaufstieg in die Rekordhöhe von 7400 Metern zusammen mit einem Ballonpiloten im Jahre 1925. Während des Fluges traten lebensbedrohliche Situationen ein. Am Ende glücklich gelandet, hielt Prof. Friedman den aus einem nahegelegenen Dorf herbeigeeilten Jugendlichen eine improvisierte Vorlesung über den Ballonflug!

Die wissenschaftlichen Interessen und Aktivitäten erstreckten sich auf viele Gebiete der Mathematik, Physik und ihrer Anwendungen. So war Friedman einer der ersten in der Sowjetunion, der die damals recht neue *Allgemeine Relativitätstheorie* Albert Einsteins verbreitete. Mehr noch, die auf der Relativitätstheorie aufbauenden eigenen Arbeiten A. A. Friedmans zur *Kosmologie*, d. h. zur Lehre vom Bau der Welt im Großen, erwiesen sich als fundamental. Seine berühmten Artikel *Über die Krümmung des Raumes* und *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes* erschienen 1922 bzw. 1924 in deutscher Sprache in der *Zeitschrift für Physik*. Die Ergebnisse waren sensationell: Das Weltall kann nicht in Ruhe verharren, sondern muß sich entwickeln. Es dehnt sich aus und war vor einer langen Zeitspanne sehr klein und sehr dicht mit Masse angefüllt. Zwei Fälle, die nacheinander in den beiden Artikeln untersucht werden, sind möglich: Das Weltall ist entweder räumlich endlich (wir sagen heute geschlossen) oder räumlich unendlich (wir sagen offen). Im ersten Fall wird die Expansion nachlassen und sich eines Tages in eine Kontraktion umkehren. Im zweiten Fall hört die Expansion nie auf und die Massen im Weltall werden zunehmend verdünnt. Diese ungewöhnlichen Erkenntnisse fanden damals schwer Aufnahme: sogar Einstein kam zunächst nicht mit ihnen zurecht. Später korrigierte er sich und würdigte in fairer Weise die Leistung des Kollegen. Leider war es Friedman selbst nicht vergönnt, das Werk weiterzuführen: Er starb jung, mit 37 Jahren, am 16. September 1925 in Leningrad nach kurzem Krankenlager an Typhus.

Die ihn kannten, schildern Alexander Alexandrowitsch Friedman als lebhaften und geselligen Menschen. Er sorgte sich um die ihm unterstellten Mitarbeiter. Bezüglich der eigenen Person war er bescheiden und selbstkritisch.

Friedmans Kosmologie ist in den oben dargelegten Grundzügen noch heute gültig. Die Vorhersage der Expansion des Weltalls wurde im Jahre 1929 durch E. Hubble bestätigt, der aus Himmelsaufnahmen eine allgemeine Fluchtbewegung der Galaxien ableitete. Nach dieser Stützung durch Beobachtungen setzte eine Würdigung von Friedmans Beitrag zur Kosmologie ein. Die Sowjetregierung ehrte den Wissenschaftler im Jahre 1931 postum durch den Leninpreis. Leben und Werk A. A. Friedmans wurden durch die Herausgabe seiner *Gesammelten Werke* (1966) und durch andere Veröffentlichungen zugänglich gemacht. Im Jubiläumsjahr 1988 wird ein Buch *Die Welt Friedmans* (in russischer Sprache) erscheinen, das sich an breite Kreise wendet und unter anderem mit neuem Material zur Biographie des Wissenschaftlers aufwartet.

Erläuterung einiger Begriffe:
Hydrodynamik = Lehre von den Flüssigkeiten,
Aerodynamik = Lehre von den Gasen,
Meteorologie = Wetterkunde,
Geophysik = Physik der Erde, einschließlich der Erdatmosphäre,
Expansion = Ausdehnung,
Kontraktion = Zusammenziehung,
postum = nach dem Tode (bei nachträglichen Ehrungen oder Veröffentlichungen).

*R. Schimming*

# Bemerkungen zu dem Artikel „Ein Brief Gerhard Gentzens an seinen Großvater“

Im Beitrag *Ein Brief Gerhard Gentzens an seinen Großvater*, *alpha*, Heft 2/86, Seite 28/29, werden einige geometrische Lehrsätze des 13jährigen begabten Schülers G. Gentzen aus dem Jahre 1922 vorgestellt. Sie beziehen sich auf das nachstehend nochmals angegebene Bild 1, das entsteht, wenn man zu einem gegebenen Dreieck $\triangle ABC$ über den Seiten $AB$, $BC$ und $CA$ gleichseitige Dreiecke $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, und $\triangle CFA$ konstruiert.

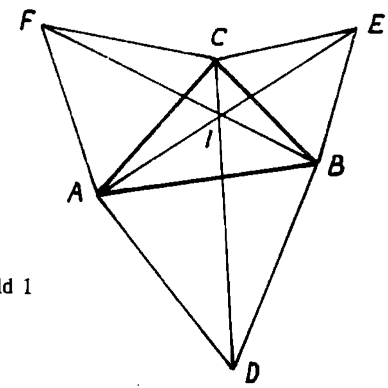



Bild 1

In den dort angegebenen Lehrsätzen 2 und 4 wird nachgewiesen, daß sich die *Pereunten* $AE$, $BF$ und $CD$ und alle Umkreise zu den oben konstruierten gleichseitigen Dreiecken in ein und demselben Punkt $I$ schneiden.

Welche Bedeutung hat diese Erkenntnis und der Punkt $I$ für die Mathematik und deren Anwendung?

Im Jahre 1642 stellte der berühmte französische Mathematiker und Rechtsgelehrte Pierre de Fermat das folgende *Standort-Problem:* Zu drei Eckpunkten $A$, $B$, $C$ eines Dreiecks ist jener Punkt $O$ zu finden, dessen Abstandssumme $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ am kleinsten ist.

Diese Aufgabe wurde 1755 in eingekleideter Form nochmals von der englischen Frauenzeitschrift *The Ladies Diary or Woman's Almanach* gestellt. Die Lösung dieses Problems war im Prinzip schon im 17. und 18. Jahrhundert bekannt (durch Torricelli 1742, Simpson 1750 u. a.) und damit zugleich auch der oben zitierte Lehrsatz 2 und 4; sie lautet: Ist kein Innenwinkel von $\triangle ABC$ größer als 120°, so ist die optimale Lage von $O$ gerade in $I$.

Dieser Punkt $I$ wird auch als *Torricelli-Punkt* oder *Vial-Zentrum* bezeichnet. Die von Gentzen als Pereunten bezeichneten Hilfslinien $AE$, $BF$ und $CD$ tragen die Bezeichnung *Simpsonlinien.*

Es ist bemerkenswert, daß diese Konstruktionselemente auch noch für die Lösung einer anderen nachstehend genannten geometrischen Optimierungsaufgabe von Bedeutung sind:

Finde zu einem Dreieck $\triangle ABC$ das flächengrößte gleichseitige *Umdreieck* (also ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten je einen der Eckpunkte $A$, $B$, $C$ enthalten).

Die Antwort lautet: Falls die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ nicht größer als 120° sind, ist das optimale gleichseitige Umdreieck jenes, dessen Höhen auf den Simpsonlinien zu $\triangle ABC$ liegen.

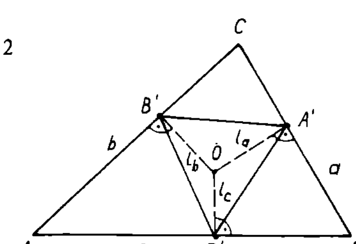
Zur Anregung soll noch ein verwandtes Problem zur Sprache kommen.

Unter dem *Durchmesser D* einer ebenen Figur (Punktmenge) $F$ versteht man den maximalen Abstand von Punktepaaren aus $F$. Ist $F$ ein Dreieck $\triangle ABC$, so ist $D$ gleich dem Maximum der Längen der Dreiecksseiten

$a = BC,\ b = CA,\ c = AB.$

Als *Indreieck* des Dreiecks $\triangle ABC$ bezeichnet man jedes Dreieck $\triangle A'B'C'$, dessen Ecken $A'$, $B'$ und $C'$ auf je einer der Dreieckseiten $a$, $b$ und $c$ liegen. Wie in Figur 2 sei $A'$ auf $a$, $B'$ auf $b$, $C'$ auf $c$.

Bild 2




Wir behandeln gemeinsam die Aufgabe: Finde zu einem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ das Indreieck $\triangle A'B'C'$ kleinsten Durchmessers.

Wir zeigen: Es gibt ein solches Indreieck $\triangle A'B'C'$ kleinsten Durchmessers, und dieses ist genau dann optimal, wenn es gleichseitig ist und in $A'$, $B'$ und $C'$ Lote $l_a$, $l_b$ bzw. $l_c$ zu $a$, $b$ bzw. $c$ besitzt, die einen gemeinsamen Schnittpunkt $O$ haben (vgl. dazu Bild 2)*.

Daß das optimale Dreieck $\triangle A'B'C'$ gleichseitig sein muß, erkennen wir wie folgt: Wäre $\triangle A'B'C'$ optimal, aber nicht gleichseitig, so würde es zwei verschieden lange Dreieckseiten geben, die größte und die kleinste. Wie im Bild 3 seien diese $c'$ und $b'$. Der Durchmesser $D$ von $\triangle A'B'C'$ wäre also gleich der Länge von $c'$.

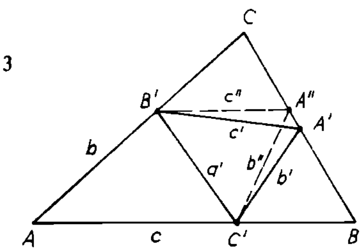
Fall 1: $c' > a' \geqq b'$.

Ist $c'$ nicht senkrecht zu $a$, so können wir $A'$ auf $BC$ in eine solche neue Lage $A''$ verschieben, daß das entstehende neue Indreieck $A''B'C'$ einen Durchmesser besitzt, der gleich der Länge von $c'' = B'A''$ und kleiner als $D$ ist. Das kann aber nicht sein, weil ja schon $\triangle A'B'C'$ kleinsten Durchmesser haben sollte.

Ist $c'$ aber senkrecht zu $a$, so können wir analog zu dem Vorhergehenden jetzt $B'$ auf $AC$ in eine solche neue Lage $B''$ verschieben, daß das Indreieck $\triangle B''C'A'$ wiederum einen kleineren Durchmesser als $D$ besitzt. Das kann aber nach den Optimalitätsvoraussetzungen an $\triangle A'B'C'$ auch nicht sein.

Fall 2: $c' = a' > b'$.

Bild 3




Ist $a'$ nicht senkrecht zu $c$, so können wir durch geringfügige Verschiebung von $C'$ auf $AB$ in die Lage $C''$ ein Dreieck $\triangle A'B'C''$ erhalten, das den gleichen Durchmesser $D$ besitzt und den Voraussetzungen des Falles 1 genügt. Somit ist weder $\triangle A'B'C''$ noch $\triangle A'B'C'$ optimal.

Analog ist die Situation, wenn $c'$ nicht senkrecht zu $a$ ist. Ist aber sowohl $a'$ senkrecht zu $c$ als auch $c'$ senkrecht zu $a$, so wäre der Innenwinkel des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ zum Punkt $B'$ größer als 90°. Das hätte aber zur Folge, daß $b'$ eine größere Länge als $a'$ und $c'$ besitzt im Widerspruch zur Annahme. Diese Situation kann also auch nicht eintreten.

Wir verbinden dieses erste Teilresultat der Gleichseitigkeit des Indreiecks $\triangle A'B'C'$ mit zwei Aufgaben für den Leser:

▲1▲ Zeige konstruktiv, daß zum Dreieck $\triangle ABC$ genau ein gleichseitiges Indreieck vorgegebener Seitenrichtung gefunden werden kann! Wir denken uns dabei die Seiten des Indreiecks im mathematisch positiven Umlaufsinn durch Pfeile (Vektoren) orientiert.

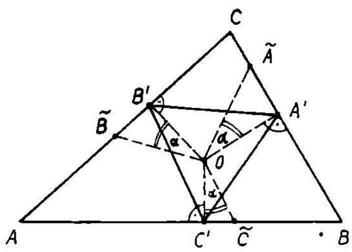
▲2▲ Zeige durch Angabe einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal, daß es zu vorgegebenem Dreieck $\triangle ABC$ stets ein solches gleichseitiges Indreieck $\triangle A'B'C'$ gibt, dessen durch $A'$, $B'$ bzw. $C'$ hindurchgehende Lote $l_a$, $l_b$ und $l_c$ bezüglich $a$, $b$ bzw. $c$ einen gemeinsamen Schnittpunkt $O$ haben!

Unter Benutzung dieser weiteren zwei Resultate zeigen wir nun, daß das gleichseitige Indreieck $\triangle A'B'C'$ genau dann den kleinsten Durchmesser besitzt, wenn es der Konstruktionsvorschrift von Aufgabe 2 genügt.

Dazu konstruieren wir zunächst jenes spezielle Indreieck $\triangle A'B'C'$ gemäß Aufgabe 2 und den gemeinsamen Schnittpunkt $O$ der Lote $l_a$, $l_b$, $l_c$. Nach dem Ergebnis von Aufgabe 1 entsteht dann jedes andere gleichseitige Indreieck $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ (entsprechend Bild 4) durch eine Drehung des Dreibeins $OA'$, $OB'$, $OC'$ um einen Winkel $\alpha$ zum Drehpunkt $O$ sowie durch Strecken dieser Seiten zu $\tilde{O}A$, $\tilde{O}B$, $\tilde{O}C$ um den gemeinsamen Faktor

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\overline{O\tilde{A}}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{O\tilde{B}}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{O\tilde{C}}}{\overline{OC'}} > 1 .$$

Bild 4




Damit hat jedes andere Indreieck $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ einen größeren Durchmesser als $\Delta A'B'C'$.

*R. Klötzler*

* Dieses Resultat läßt sich sogar für sämtliche Dreiecke $\Delta ABC$ bestätigen, deren Innenwinkel nicht größer als 120° sind. Es wurde vom Autor und seinem Schüler G. Jahnel gefunden.

# Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

In Heft 1/87 der *alpha* stellten wir im Rahmen des *alpha*-Wettbewerbs folgende Aufgabe:

Ma 7 ■ 2761 Auf welche Grundziffer endet die Zahl $12^{100}$?

In Heft 4/87 veröffentlichten wir einen Lösungsvorschlag. Er lautete:

Es gilt $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, usw., also endet $2^{4n}$ auf die Grundziffer 6.

Wegen $12^{100} = 12^{4\cdot 25} = 12^{4\cdot n}$ endet diese Zahl auf die Grundziffer 6.

● Wir stellen nun die Lösung von *Christian Kühn* aus Wismar vor, der Schüler der Klasse 7 der Pestalozzi-Oberschule ist. Christian löste diese Aufgabe mit Hilfe von Zahlenkongruenzen, womit er sich in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft beschäftigt hat, wie folgt:

Es gilt $12^1 \equiv 2 \bmod 10$, $12^2 \equiv 4 \bmod 10$,
$12^3 \equiv 8 \bmod 10$, $12^4 \equiv 6 \bmod 10$,
$12^5 \equiv 2 \bmod 10$.
Daraus folgt $12^{4k+1} \equiv 2 \bmod 10$,
$12^{4k+2} \equiv 4 \bmod 10$, $12^{4k+3} \equiv 8 \bmod 10$,
$12^{4k} \equiv 6 \bmod 10$. Wegen $12^{100} = 12^{4\cdot 25}$ gilt deshalb $12^{100} \equiv 6 \bmod 10$.
Die Zahl $12^{100}$ endet auf die Ziffer 6.

● Wir stellen nun die Lösung von *Anja Walter* aus Dohna vor, die Schülerin der Klasse 7a der Marie-Curie-Oberschule ist. Anja löste diese Aufgabe wie folgt:
$12^{100} = 12^{10} \cdot 12^{10} \cdot \ldots \cdot 12^{10}$; dieses Produkt besteht aus zehn Faktoren $12^{10}$. Jeder Faktor $12^{10}$ endet auf die Ziffer 4. Nun endet $4^{10}$ auf die Ziffer 6; deshalb endet auch $12^{100}$ auf die Ziffer 6.

● Wir stellen nun die Lösung von *Sandy Frässdorf* aus Brück vor, die Schülerin der Klasse 6 der Hans-Beimler-Oberschule ist. Sandy löste diese Aufgabe wie folgt:
Es gilt $12^{100} = 12^{4\cdot 25} = (12^4)^{25}$. Nun endet $12^4$ auf die Ziffer 6, denn $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16$ endet auf die Ziffer 6.
Da jedes Produkt, dessen Faktoren auf die Ziffer 6 enden, selbst auf die Ziffer 6 endet, muß auch $12^{100}$ auf die Ziffer 6 enden.
Da etwa 20 % der bei uns eingegangenen Lösungen falsch waren, möchten wir abschließend als Training ähnliche Aufgaben einschließlich Lösungsvorschlägen folgen lassen.

**Aufgaben**

▲1▲ Mit welcher Ziffer endet die Summe
$11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6$?

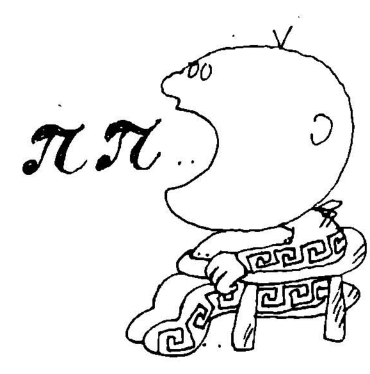
▲2▲ Beweise, daß für jede natürliche Zahl $n$ ($n > 1$) die Zahl $2^{2^n} + 1$ mit der Ziffer 7 endet!

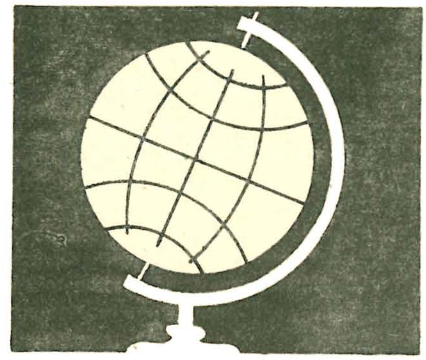
▲3▲ Auf welche beiden Ziffern endet das Produkt $z = 345\,926\,476^3 \times 125\,399\,676^2 \cdot 2\,100\,257\,933\,776^3$?

*Th. Scholl*

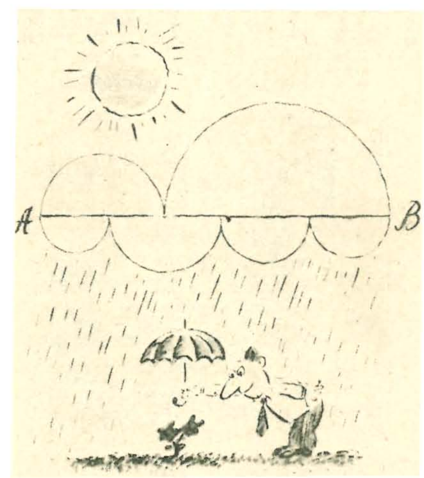
**alpha-Wettbewerb 1986/87**
Fortsetzung aus Heft 2/88

Kerstin Schüler, Antje Hellmann, Katrin Weber, alle Steinbach-Hallenberg; Andreas Lange, Stendal; Silvana Seifert, Strausberg; Kerstin Schuster, Taubenheim; Beate Günther, Trusetal; Stephan Marx, Ueckermünde; Mario Gimpel, Heiko Männecke, Yvette Hartisch, alle Unterbreizbach; Horst Rex, Wählitz; Simone Wilk, Solweig Michels, Dirk Beckmann, alle Waren; Manuela Montag, Bettina Steil, Oliver Auert, alle Weißenschirmbach; Silvio Ladusch, Thomas Westphal, beide Weißwasser; Sebastian Steinbach, Wernigerode; Ralf Klötzer, Wilkau-Haßlau; Torsten Gebauer, Wippra; Bernhard Kühn, Wismar; Sören Schubert, Wittenberg; Christiane Harth, Wittenburg; Jens Müller, Wolgast; Janet Thom, Wünschendorf; Ronny Schwarz, Constanze Sikkel, beide Wulfen; Beate Balzer, Zittau





▲1▲ У каких полуокружностей, изображенный на рисунке, сумма длин больше – у верхних или у нижних?



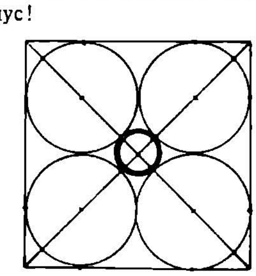

*aus: Quant, Moskau*

▲2▲ A un carrefour le signal lumineux est au vert pendant 50 s, à l'orange pendant 5 s, au rouge pendant 30 s.
A 7 h le signal passe au vert. Combien de fois sera-t-il au vert de 7 h à 19 h? *H.*

▲3▲ If $a$, $b$, $c$, $d$ are four positive integers such that $ab = cd$, prove that $a + b + c + d$ is not a prime number.

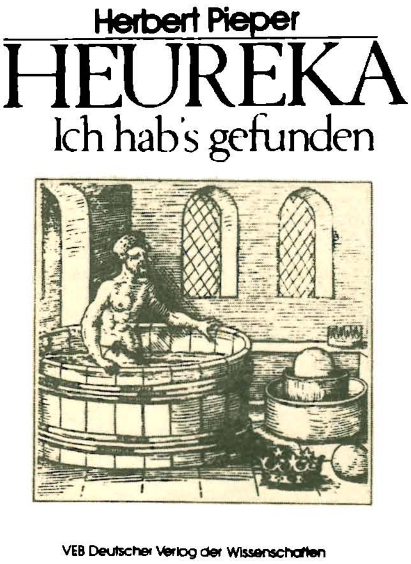
*aus: Parabola, Australien*

▲4▲ Рассмотрим квадрат со стороной длиной 4. В его четыре угла впишем четыре окружности радиуса 1, так как показано на рисунке. Добавим теперь окружность с центром в точке пересечения диагоналей, касающуюся четырёх вписанных окружностей. Вычислите её радиус!



*nach: Quant, Moskau*

# Vier historische Mathematikaufgaben




Im VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften erscheint in diesem Jahr ein Buch mit dem Titel *Heureka, ich hab's gefunden*. 55 mathematische Rätsel und Aufgaben werden darin gestellt und gelöst. Jede Aufgabe wird nicht nur formuliert, sie erscheint vielmehr als Teil eines etwas ausführlicher beschriebenen mathematikhistorischen Sachverhalts. Das Buch ist daher nicht nur eine Sammlung von Mathematikaufgaben, sondern gleichzeitig ein Sachbuch über Mathematikgeschichte. Einige Kostproben seien hier vorab vorgestellt.

### Die Anzahl aller Primzahlen

Im Jahre 1847 konnte Ernst Eduard Kummer mit neuen von ihm gefundenen zahlentheoretischen Methoden den bis dahin größten Fortschritt beim Ringen um den auch gegenwärtig noch nicht gefundenen allgemeinen Beweis der Fermatschen Vermutung, daß die Gleichung

$$x^p + y^p = z^p$$

für jede ungerade Primzahl keine Lösung mit von Null verschiedenen ganzen Zahlen $x$, $y$, $z$ besitzt, erzielen. Während bis zu jener Zeit diese Vermutung nur für die Exponenten $p = 3, 5, 7$ bewiesen worden war, entdeckte Kummer, daß sie für alle sogenannten *regulären* Primzahlen gültig ist. (So sind mit Ausnahme von 37, 59, 67 alle ungeraden Primzahlen bis 100 regulär.)
Dieses aufsehenerregende Resultat und andere zahlentheoretische Ergebnisse begründeten Kummers Ruhm als Zahlentheoretiker. Er wurde 1855 an die Berliner Universität berufen und zum ordentlichen Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften ernannt.
Nach dem Tode von Jacobi (1851) und Eisenstein (1852) in Berlin, Gauß (1855) und Dirichlet (1859) in Göttingen wurde Berlin durch die Tätigkeit von Kummer, Kronecker (auch er kam 1855 nach Berlin) und Weierstraß (er wurde 1856 nach Berlin berufen) ein führendes Zentrum der reinen Mathematik in Deutschland.
In seiner Forschungs- und Vorlesungstätigkeit widmete sich Kummer neben anderen Gebieten immer wieder der Zahlentheorie. Am 25. November 1878 trug er auf der Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse der Akademie einen „neuen elementaren Beweis des Satzes, daß die Anzahl aller Primzahlen eine unendliche ist" vor. Er sagte:
„Der erste sehr einfache und sinnreiche Beweis dieses Satzes, welcher von Euklid herrührt, stützt sich auf keine anderen Hilfsmittel, als auf die Sätze über die Zerlegbarkeit aller Zahlen in Primfaktoren, während die späteren Beweise von Euler und anderen die Hilfsmittel der Analysis namentlich der unendlichen Reihen und Produkte in Anwendung bringen. Da nun ein zweiter ganz elementarer Beweis, insofern er die vorliegende Frage von einer neuen Seite beleuchtet, einiges Interesse haben möchte, so will ich einen solchen der Akademie mitteilen, welchen ich schon seit einer Reihe von Jahren meinen Zuhörern in der Vorlesung über Zahlentheorie vorgetragen habe, welcher aber noch nicht anderweit veröffentlicht ist.
Gesetzt die Anzahl aller in der unendlichen Zahlenreihe enthaltenen Primzahlen sei eine endliche, so müßte auch das Produkt aller Primzahlen, welche ich mit $P$ bezeichne, eine endliche bestimmte Zahl sein:
$P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot p$.
Diese Zahl $P$ aber müßte die ganz besondere Eigenschaft haben" (1): Zu dieser Zahl kann keine natürliche Zahl, außer der 1, teilerfremd sein. Bezeichnet $\varphi(n)$ für eine natürliche Zahl $n$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen $a < n$ mit $(a, n) = 1$, so müßte $\varphi(P) = 1$ sein. Aus der elementaren Zahlentheorie ist bekannt, daß
$\varphi(p) = p - 1$ für Primzahlen $p$ ist und
$$\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2),$$
falls $(n_1, n_2) = 1$ ist.
Somit wäre einerseits $\varphi(P) = 1$ und andererseits
$$\varphi(P) = \varphi(2)\,\varphi(3) \ldots \varphi(p) = (2-1)(3-1) \ldots (p-1) \neq 1.$$
Kummer: „Die Annahme, daß die Anzahl aller Primzahlen eine endliche sei, welche auf diesen Widerspruch führt, ist darum eine falsche. Also die Anzahl aller Primzahlen ist keine endliche Zahl.
Man kann auch auf eine andere, noch einfachere Weise nachweisen, daß eine Zahl $P$, zu welcher keine Zahl außer Eins relative Primzahl (d.h. teilerfremd) wäre, nicht existiert, nämlich daraus, daß je zwei benachbarte Zahlen der Zahlenreihe notwendig relative Primzahlen (teilerfremd) sind."
Wie?

E. E. Kummer (1810 bis 1893)

### Das Kästchenproblem

In seinem Buch über die Wahrscheinlichkeitsrechnung (erschienen in Paris im Jahre 1888) stellte Joseph Bertrand die folgende Aufgabe: Von drei sich äußerlich vollkommen gleichenden Kästchen mit je zwei Schubfächern enthalte das erste in jedem Fach eine Goldmünze, das zweite in jedem Fach eine Silbermünze, das dritte in einem Fach eine Goldmünze, im anderen eine Silbermünze. Zufällig werde ein Kästchen ausgewählt.
(1) Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es das Kästchen ist, in dem sich eine Gold- und eine Silbermünze befinden?
(2) Man hat im ausgewählten Kästchen ein Schubfach geöffnet. Darin befinde sich eine Goldmünze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im anderen Fach des ausgewählten Kästchens eine Silbermünze zu finden?
Auf die erste Frage gab Bertrand die Antwort: $\frac{1}{3}$. Von drei gleichwahrscheinlichen Fällen ist in der Tat einer günstig.

Bei der zweiten Frage liegt die Antwort $\frac{1}{2}$ nahe: Das geöffnete Fach enthält eine Goldmünze. Man kann es nur mit dem ersten oder dritten Kästchen zu tun haben (das zweite Kästchen ist durch das erlangte Wissen – *Im geöffneten Schubfach ist eine Goldmünze* – ausgeschlossen), hat wohl die Wahl zwischen zwei gleichwahrscheinlichen Kästchen.

Bertrand gab diese Lösung zunächst auch, verwarf sie aber sogleich als falsch. Wie sollte – so fragte er – das Öffnen eines Schubfachs genügen, um die Wahrscheinlichkeit zu ändern und von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ zu erhöhen? Bertrand beantwortete nun die zweite Frage mit $\frac{1}{3}$.

Der Wiener Mathematiker Emanuel Czuber kritisierte im Jahre 1899 in einem Bericht über *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendung*, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, diese Lösung:

Nicht das Öffnen des Schubfaches, wohl aber die Wahrnehmung ihres Inhalts übt Einfluß aus, weil es unser Wissen vermehrt und die Anzahl der gleichberechtigten Fälle vermindert. Die einzige richtige Antwort auf die zweite Frage wäre doch $\frac{1}{2}$; denn jetzt liegen zwei gleichberechtigte Fälle vor, repräsentiert durch das erste und dritte Kästchen, eines davon ist günstig.

In seinem später erschienenen Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung berichtigte Czuber seinen eigenen Fehlschluß: Bertrands Antwort $\left(\frac{1}{3}\right)$ ist richtig! Warum?

Ist es nicht trotzdem paradox, daß das durch das Öffnen eines Schubfachs erworbene, gegenüber der ersten Fragestellung vermehrte Wissen an der Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses nichts ändert?

Czuber ergänzte die Bertrandsche Aufgabe durch folgendes Beispiel: Enthielten die Kästchen je drei Schubfächer, und diese drei Schubfächer im ersten Kästchen nur Gold-, im zweiten Kästchen nur Silbermünzen, während im dritten Kästchen zwei Gold- und eine Silbermünze auf die Schubfächer verteilt wären, so verhielte es sich anders. Wieder wäre $\frac{1}{3}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man bei vollzogener zufälliger Wahl das dritte Kästchen ergreift; findet man aber in einem geöffneten Schubfach eine Goldmünze, so gehört das Schubfach mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ dem dritten Kästchen an. Warum?

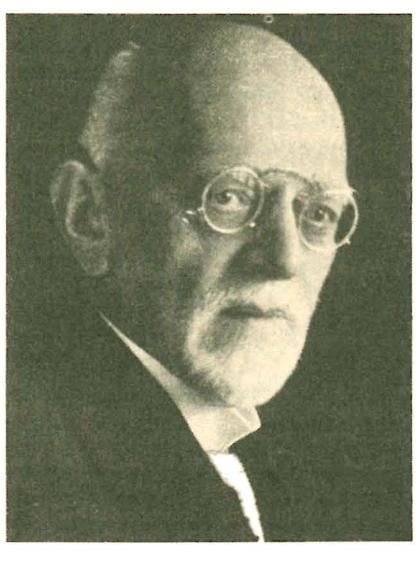
### Der Streckenübertrager

Vom 2. bis 12. August 1900 fand in Paris der 2. Internationale Mathematikerkongreß statt. 226 Wissenschaftler aus vielen Ländern tagten in den Sektionen Zahlentheorie und Algebra, Analysis, Geometrie, Mechanik und mathematische Physik, Geschichte und Bibliographie der Mathematik sowie Unterricht und Methodologie der Mathematik. Am 8. August hielt David Hilbert aus Göttingen ein grundlegendes Referat mit dem Titel *Mathematische Probleme*. Hilbert ging in einer allgemein gehaltenen Einleitung zunächst auf die interessanten Fragen ein, „ob es allgemeine Merkmale gibt, die ein gutes mathematisches Problem kennzeichnen, ...aus welchen Quellen die Mathematik ihre Probleme schöpft, ...welche berechtigten allgemeinen Forderungen an die Lösung eines mathematischen Problems zu stellen sind". Am Ende dieses einleitenden Teils formulierte er sein *Axiom von der Lösbarkeit eines jeden Problems*, seine „Überzeugung, daß ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, daß es gelingt, die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es, daß die Unmöglichkeit seiner Lösung und damit die Notwendigkeit des Mißlingens aller Versuche dargetan wird."

Anschließend formulierte und diskutierte er 23 ungelöste mathematische Probleme (nur *Proben* von Problemen, wie er betonte); diese Probleme stellten sich in den folgenden Jahrzehnten fast alle als mathematische Kernprobleme heraus und übten auf die Entwicklung der modernen Mathematik einen *außergewöhnlichen Einfluß* (P. S. Alexandrov) aus.

Eines dieser Probleme, das siebzehnte (es wurde 1927 von Emil Artin gelöst), steht in einer interessanten Beziehung zu einer geometrischen Aufgabe. Es handelt sich um die geometrischen Konstruktionen mittels Lineal und Streckenübertrager. Diese wurden schon im Kapitel VII der *Grundlagen der Geometrie* von Hilbert (die Monographie war Teil der 1899 erschienenen Festschrift zur Feier der Enthüllung des *Gauß-Weber*-Denkmals in Göttingen) untersucht. Als Streckenübertrager bezeichnete Hilbert ein Instrument, mit dessen Hilfe man auf jeder Geraden von jedem Punkte aus eine gegebene Strecke abtragen kann.

D. Hilbert (1862 bis 1943)



Die folgende Aufgabe beispielsweise läßt sich allein mit Hilfe des Lineals und des Streckenübertragers lösen (wie?):

Es ist zu einer gegebenen Geraden eine Senkrechte zu ziehen.

Im 44. Satz der *Grundlagen der Geometrie* gab Hilbert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß eine vorgelegte Konstruktionsaufgabe, die mittels des Zirkels ausführbar ist, sich auch allein durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken ausführen läßt. Der Beweis ist jedoch nicht einfach und erfordert *einige Sätze zahlentheoretischen und algebraischen Charakters*.

Hilbert konnte sein Kriterium nicht allgemein beweisen. Er führte jedoch die geometrische Fragestellung auf ein algebraisches Problem zurück, das dann in seinem Pariser Vortrag als siebzehntes Problem genannt wurde.

### Die Russellsche Antinomie

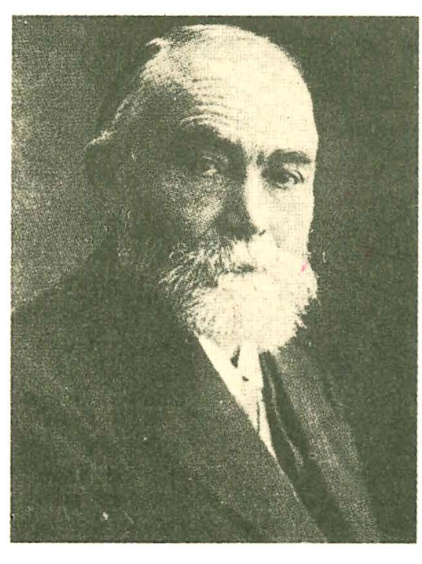
Gottlob Frege wird als einer der bedeutendsten Logiker aller Zeiten angesehen. Er sprach wichtige Erkenntnisse erstmals aus, die heute Allgemeingut der mathematischen Logik geworden sind.

In seinem Buch *Grundlagen der Arithmetik* (erschienen 1884) diskutierte er die Fragen, welcher Natur die arithmetischen Sätze sind und ob und wie man die natürlichen Zahlen definieren kann.

Diese Monographie stellt den programmatischen Versuch dar, grundlegende mathematische Begriffe, insbesondere den Zahlbegriff, auf rein logische Begriffe zurückzuführen (Logizismus), die Frege für sicherer hält als die bloße Anschauung. Das Buch enthält die erste Begründung des Begriffs der natürlichen Zahl.

Im ersten Band des Werkes *Grundgesetze der Arithmetik* (1893), mit dem er sein logizistisches Programm der Arithmetik realisieren wollte, schrieb er: „Und nur das würde ich als Widerlegung anerkennen können, (...) wenn jemand mir nachwiese,

G. Frege (1846 bis 1925)



daß meine Grundsätze zu offenbar falschen Folgesätzen führten. Aber das wird keinem gelingen.“ Doch Frege sollte sich irren.

Am 16. Juni 1902 schrieb Bertrand Russell, Mathematiker und Philosoph am Trinity College in Cambridge, einen Brief an Frege: „Sehr geehrter Herr College! Seit anderthalb Jahren kenne ich Ihre ‚Grundgesetze der Arithmetik‘, aber jetzt erst ist es mir möglich geworden die Zeit zu finden für das gründliche Studium, das ich Ihren Schriften zu widmen beabsichtige. Ich finde mich in allen Hauptsachen mit Ihnen in vollem Einklang. (...) In vielen einzelnen Fragen finde ich bei Ihnen Discussionen, Unterscheidungen, und Definitionen, die man vergebens bei anderen Logikern sucht. (...) Nur in einem Punkt ist mir eine Schwierigkeit begegnet.“ Russell teilt nun Frege mit, wie sich aus diesem *einen Punkte* der *Grundgesetze* ein Widerspruch konstruieren läßt, ebenso wie es nicht die Menge aller der Mengen gibt, die sich nicht selbst als Element enthalten.

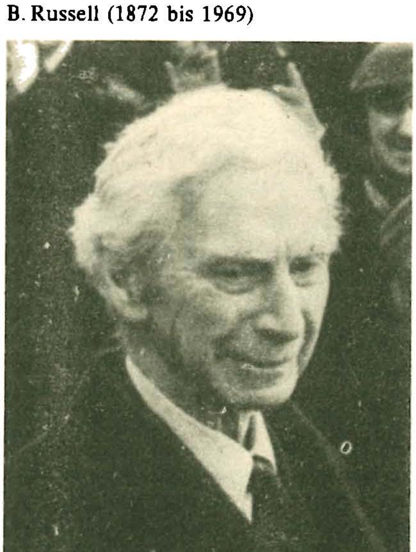
Enthält diese Menge sich selbst als Element? „Aus jeder Antwort folgt das Gegentheil.“ Warum?

Am 22. Juni 1902 schrieb Frege aus Jena an Russell: „Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik aufzubauen dachte, in's Wanken geräth. (...) Jedenfalls ist Ihre Entdeckung sehr merkwürdig und wird vielleicht einen großen Fortschritt in der Logik zur Folge haben, so unerwünscht sie auf den ersten Blick auch scheint.“

In der Nachfolge Freges versuchte Russell den Antinomien der Mengenlehre zu begegnen und das Programm des Logizismus zu verwirklichen. In unserem Jahrhundert hat sich die Einsicht durchgesetzt, daß sich die Mathematik nicht auf die Logik allein gründen läßt. Der Logizismus hat jedoch wesentlich zur Entwicklung der mathematischen Logik und zur Klärung des Antinomieproblems beigetragen.

*H. Pieper*

B. Russell (1872 bis 1969)



# alpha-Märchen: Prinz Epsilon darf heiraten!

Nach erfolgreicher Lösung der ersten Aufgabe wird Prinz Epsilon vor ein weiteres schwieriges Problem gestellt (siehe *alpha*, Heft 2/88). Aber auch dabei können wir ihm mit dem Schulrechner SR 1 helfen, so daß er der schönen Prinzessin wieder einen Schritt näher kommt.

*Im Reich der Zauberer lebt der Magier Riesifos. Er züchtet mit Hilfe seiner Zaubersäfte eigenartige, gnomhafte Wesen. Riesifos weiß zu berichten, daß seine Wesen, am Anfang gerade 10 cm groß, durch seine Zaubersäfte jedes Jahr um 4,8 % ihrer jeweiligen Größe wachsen. Er behauptet, daß die Gnome bereits nach sieben mal sieben Jahren ihre ursprüngliche Größe von 10 cm mehr als verzehnfacht haben. Ob dies stimme, lautete die Frage an Epsilon.*

Ein harter Brocken für unseren Prinzen, doch wir stehen ihm mit dem SR 1 zur Seite:

Die Größe der Gnome nach einem Jahr können wir schnell berechnen. Der Grundwert ist 10 cm und der Prozentsatz 4,8 %. Nach der bekannten Formel zur Berechnung des Prozentwertes $W$ ist dieser

$$W = \frac{G}{100} \cdot P \text{ also } W = 0{,}48\text{ cm}.$$

Die neue Größe $G_{neu}$ in cm ist demnach $G_{alt} + 0{,}48$, also 10,48 cm. Für die Größe nach dem 2. Jahr ist analog vorzugehen: Prozentwert berechnen (für $G$ ist die neue Größe einzusetzen), Addition der Größe nach einem Jahr und des Prozentwertes – man erhält die Größe nach zwei Jahren. Ein ziemlich müßiges Verfahren! Nun ist allgemein jeweils die neue Größe gleich der alten vergrößert um den Prozentwert, also

$$G_{neu} = G_{alt} + W, \text{ wobei } W = \frac{G_{alt}}{100} \cdot 4{,}8$$

ist. Das heißt, wenn wir die zweite Formel in die erste einsetzen, erhalten wir:

$$G_{neu} = G_{alt} \cdot 0{,}048 + G_{alt}.$$

Wir können die Formel vereinfachen, indem wir $G_{alt}$ ausklammern:

$$G_{neu} = G_{alt} \cdot (1 + 0{,}048)$$

bzw. $G_{neu} = G_{alt} \cdot 1{,}048$.

Nach dieser Formel könnt ihr mit dem SR 1 die Berechnung der Tabelle 1 leicht nachvollziehen.

Immerhin müssen wir auf diesem Wege 49 Berechnungen durchführen. Mit einem Computer geht das in Sekundenschnelle, aber auch der SR 1 ist uns eine gute Hilfe. Wir nutzen die Konstantenautomatik! Wir erinnern uns:

Beispiel: Es soll $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots$ berechnet werden!

Tabelle 1

| Größe in cm | nach ... Jahren |
|---|---|
| 10 | Anfangsgröße |
| 10,48 | 1 |
| 10,983 04 | 2 |
| 11,510 225 | 3 |
| 12,062 715 | 4 |
| 12,641 725 | 5 |
| ... | ... |

Nach Eingabe von $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ reicht nun wiederholtes Drücken der $\boxed{=}$-Taste, und immer wieder wird der Inhalt des X-Registers (was in der Anzeige steht) mit 3 multipliziert.

Probiert es aus!

Wißt ihr bereits, wie wir diese Eigenschaft für unser Problem nutzen können?

Richtig, nach Eingabe der Tastenfolge $\boxed{1}$ $\boxed{,}$ $\boxed{0}$ $\boxed{4}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ reicht nun jeweils das Drücken der $\boxed{=}$-Taste aus, um die Größe der Gnome nach jedem Jahr zu ermitteln, da jedesmal die aktuelle Größe (in der Anzeige) mit dem Faktor 1,048 multipliziert wird. Nun braucht ihr nur noch mitzuzählen, wie oft ihr die $\boxed{=}$-Taste gedrückt habt, und ihr könnt so die Behauptung des Zauberers Riesifos nachprüfen! Riesifos sprach von der Verzehnfachung der Größe in 49 Jahren!

Wir können dem Prinzen Epsilon und der Prinzessin jedoch noch viel schneller helfen, die zweite Aufgabe zu lösen. Dazu bezeichnen wir mit $G_o$ die Anfangsgröße der Gnome und mit $G_i$ ihre Größe nach dem $i$-ten Jahr.

Offensichtlich ist $G_o = 10$ cm und $G_1 = 1{,}048 \cdot G_o$, $G_2 = 1{,}048 \cdot G_1$,
also $G_2 = 1{,}048^2 \cdot G_o$, $G_3 = 1{,}048 \cdot G_2$,
also $G_3 = 1{,}048^3 \cdot G_o$, ... usw.

Schließlich ist $G_{49} = 1{,}048^{49} \cdot G_o$. Mit der im SR 1 als Standardfunktion vorhandenen Potenzfunktion erhält man den Wert $G_{49}$ durch die Tastenfolge

$\boxed{1}$ $\boxed{,}$ $\boxed{0}$ $\boxed{4}$ $\boxed{8}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{4}$ $\boxed{9}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$

als $G_{49} = 99{,}4725$ cm. Der Magier Riesifos hatte nicht Recht, erst nach 50 Jahren sind die Gnome größer als 1 m, denn es ist $G_{50} = 104{,}247$ cm.

Übrigens nützt euch das Gesagte auch für die Berechnung des Sparguthabens. Solltet ihr über Jahre hinweg euer Konto nicht bewegen (also nicht abheben noch draufzahlen), könnt ihr durch Eingabe des Zinssatzes $3\frac{1}{4}$% (als Dezimalzahl) mal eurem Guthaben durch Drücken der $\boxed{=}$-Taste beobachten, wie euer Guthaben Jahr für Jahr wächst!

Dank eurer Hilfe hat Prinz Epsilon auch die zweite Aufgabe gelöst. Nun steht die dritte und letzte Aufgabe an.

*Im abgelegensten Teil des Königreiches leben die grausamen Drachen. Dorthin soll sich Prinz Epsilon begeben, um die Behauptung eines kleinen Erdmännchens zu überprüfen. Es gibt dort nämlich drei gefräßige Drachen. Der* *erste von ihnen frißt jeden Tag einen halben Elefanten und dazu einen viertel Elefanten, dazu noch einen achtel Elefanten, sowie einen sechzehntel Elefanten und ... immer noch die Hälfte der vorhergehenden Ration dazu. Der zweite Drachen frißt einen drittel Löwen, dazu einen neuntel Löwen, einen siebenundzwanzigstel Löwen und ... immer noch ein Drittel der vorhergehenden Ration dazu. Während der dritte Drachen einen viertel Tiger, dazu einen sechzehntel Tiger, einen vierundsechzigstel Tiger und ... immer noch ein Viertel der vorhergehenden Ration dazu frißt, und nie zu fressen aufhört! Das Erdmännchen behauptete, daß der erste Drachen einen Elefanten pro Tag verspeist, der zweite reicht mit einem Löwen zwei Tage und der dritte frißt an drei Tagen einen Tiger auf.*

Wollen wir uns zuerst dem Drachen Nummer 1 zuwenden. Sein *Elefantenverbrauch* pro Tag läßt sich mit einer Summe von unendlich vielen Summanden beschreiben, nämlich:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\dots$$

usw.

bzw., da jeder Summand durch die Multiplikation seines Vorgängers mit $\frac{1}{2}$ hervorgeht:

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}$$

$+ \dots$ usw.

Da uns Sätze und Methoden der höheren Mathematik noch nicht bekannt sind, müssen wir uns auf die näherungsweise Berechnung dieser *unendlichen Summe* mit Hilfe des SR 1 beschränken.

Berechnen wir einmal die Summe der ersten 10, 20, 30 und 40 Summanden! Natürlich – mit dem Rechenablaufplan

$\boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}$
$\boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{+}$
$\boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \dots$

ein zeitaufwendiges Unterfangen. Aber man sieht hier schön, wie die Summe zwar stetig wächst, die Zunahme aber immer geringer wird. Die SR 1-Experten haben aber längst einen rationelleren Weg gefunden. Mit Hilfe der Konstantenautomatik sind die Summen schnell erzeugt:

$\boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{X}\ \underset{\boxed{M+}}{\boxed{=}}\ \underset{\boxed{M+}}{\boxed{=}}\ \underset{\boxed{M+}}{\boxed{=}}\ \underset{\boxed{M+}}{\boxed{=}}$

$\underset{\boxed{M+}}{\boxed{=}}\ \underset{\boxed{M+}}{\boxed{=}}\ \dots$

Das Summieren realisiert man durch das Drücken der Speicher-„+“-Taste an den mit dem Pfeil gekennzeichneten Stellen.

Nun könnt ihr die folgende Tabelle leicht nachvollziehen:

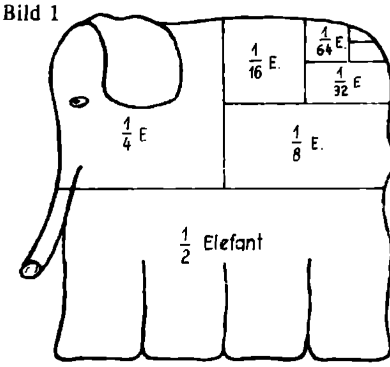
Tabelle 2

| Anzahl von Summanden | Summe |
|---|---|
| 10 | 0.99902344 |
| 20 | 0.99999904 |
| 30 | 0.99999999 |
| 40 | 0.99999999 |

Auch nach 40 Summanden nimmt die Summe weiterhin zu, doch die Summanden sind mittlerweile so klein, daß die Anzeige des SR 1 uns diese Zunahme nicht mehr mitteilen kann. Die Summanden werden so klein, daß sie im Rechner zu 0 abgerundet werden. Prinz Epsilon hat davon als eifriger Leser der Schülerzeitschrift *alpha* schon etwas erfahren (siehe *Chancen für Denkfaule?* in Heft 2/1985). Er ist deshalb auch mit einer Aussage vorsichtig. Mit dem SR 1 oder mit einem Computer kann man nur eine Idee für den Wert der Summe gewinnen, der angezeigte Wert kann aber durchaus falsch sein. Die Prinzessin nickt dem Prinzen jedoch heimlich zu: Die Summe wird den Wert 1 nie übersteigen, das hat sie in Syratanien in der Schule gelernt!

Diese Tatsache läßt sich auch geometrisch plausibel erklären (Bild 1).

Bild 1




Der erste Drache frißt und frißt, aber insgesamt doch nur einen Elefanten pro Tag. Der jeweils übrig bleibende Teil des Elefanten wird halbiert. Hieraus erkennt ihr, daß die Gesamtsumme nie größer als 1 werden kann!

Die erste Antwort zur dritten Frage ist gefunden. Um Teil 2 und 3 zu beantworten, benötigt ihr nun keine Hilfe mehr. Beachtet aber bitte genau, nach welchem Gesetz die Summanden zu bilden sind! Die *Elefantenration* haben wir im Kreisklub Mathematik in Halle mit einem Kleincomputer berechnet.

Hier ist das BASIC-Programm:

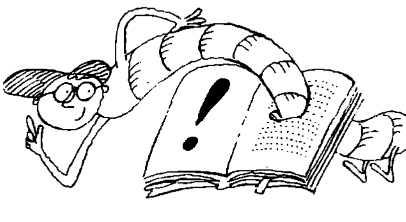
```
10 CLS
20 PRINT "SUMMANDEN",
   "LETZT SUMMAND", "SUMME"
30 PRINT "————————————"
40 S=0:A=1
50 FOR I=1 TO 50
60 A=A/2
70 S=S+A
80 PRINT I, A, S
90 NEXT I
```

Für die Aufgabe mit den Löwen und den Tigern ist lediglich der Befehl Nr. 60 abzuändern!

Prinz Epsilon hat alle drei Aufgaben gelöst! Es findet eine große Hochzeitsfeier statt. Die Prinzessin ist überglücklich. Sogar die Fee, der Magier Riesifos und das kleine Erdmännlein kommen, um zu gratulieren ....

Herrn Dr. Schmidt von der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald möchten wir für Hinweise und Ratschläge danken. Sollter ihr Spaß an den Aufgaben oder neue Ideen haben, so schreibt uns bitte über:
Redaktion *alpha*, PSF 14, Leipzig 7027!

*U. Siebert*



Krysicki, Wlodzimierz
**Keine Angst vor x und y**
Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme
MSB Nr. 119
108 Seiten, 19 Abb. Preis: 6,50 M
Bestell-Nr. 666 186 7

Schreiber, P.
**Euklid**
Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner
59 Seiten, 31 Abb. Preis: 7,50 M
Bestell-Nr. 666 375 8
beide Titel: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

Wiederholungsprogramm
Berane/Gärtner/Lohse
**Gleichungen und Funktionen**
214 Seiten, 92 Bilder Preis: 7,80 M
Bestell-Nr. 546 528 2

Naumann/Schuricht
**Sensoren – technische Sinnesorgane?**
etwa 160 Seiten, 95 Bilder, 4 Tabellen
Bestell-Nr. 547 246 6 Preis: 5,50 M
beide Titel: VEB Fachbuchverlag Leipzig

Höfner, G.
**Computerbegriffe populär**
124 Seiten, zahlr. Abb. Preis: 7,50 M
Bestell-Nr. 654 178 5
Urania-Verlag Leipzig

Wolf, D.
**Bevor der Film ins Kino kommt**
137 Seiten, zahlr. Abb. Preis: 6,80 M
Bestell-Nr. 632 709 2

Spittel, Olaf R
**Kleines Rätselbuch für Kinder**
159 Seiten, zahlr. Abb. Preis: 6,00 M
Bestell-Nr. 632 504 6
beide Titel: Der Kinderbuchverlag Berlin

Ein Teil der Bücher ist beim Buchhandel vergriffen. Wir weisen auf Möglichkeit der Ausleihe in Bibliotheken hin.

# Symmetrie auf einem Band

Sicherlich hast du schnell ein Band zur Hand, das man zum Einpacken von Geschenken verwendet. Suche dir bitte ein solches mit einem Muster aus.

● Was fällt dir auf? Welche Gesetzmäßigkeiten erkennst du?

Wir betrachten die Beispiele in Bild 1, 2 und 3.

Es fällt auf, daß regelmäßig und in gleichen Abständen jeder Teil des Musters wiederkehrt. Durch eine Verschiebung längs des Bandes läßt sich also das Muster zur Deckung bringen. In jedem der drei Bilder haben wir durch einen Pfeil eine derartige Verschiebung mit der kleinsten Verschiebungsweite angegeben.

Diese Eigenschaft ist im allgemeinen schon durch die technische Herstellung bedingt. Wird das Muster aufgedruckt, so muß sich (spätestens) nach einem Umlauf der Druckrolle das Muster wiederholen.

Ist $v$ eine Verschiebung, bei der das Muster des Bandes wieder mit sich zur Dekkung kommt, so tritt dies offenbar auch bei der zu $v$ entgegengesetzten Verschiebung sowie nach der zweimaligen Ausführung der Verschiebung $v$ ein.

Das Band darf man sich dabei weder mit einem Anfang noch mit einem Ende vorstellen. Dies ist natürlich nur eine Vorstellung. Jedes real vorliegende Band hat immer einen Anfang und ein Ende. Aber wenn wir an die drucktechnische Herstellung denken, so besteht natürlich kein Grund, daß die Druckrolle nur eine bestimmte Anzahl von Umdrehungen ausführt.

Im folgenden wollen wir unter einem *Bandmuster* stets ein Muster eines Bandes verstehen, für das es eine Verschiebung mit kleinster Verschiebungsweite gibt, die das Muster auf sich abbildet.

● Ein Bandmuster mit der beschriebenen Verschiebungssymmetrie entsteht, wenn du auf einem Papierstreifen in gleichen Abständen ein Motiv mit einem Stempel aufdruckst oder zeichnest.

Wie müßte das Motiv auf dem Stempel (etwa aus einer Kartoffel gefertigt) aussehen, damit auf diese Weise das Muster in Bild 3 entsteht?

Bandmuster sind dir bereits bei Besichtigung von Museen, Schlössern und in älteren Gebäuden aufgefallen. Sie dienen meist als Abschluß, als Berandung von Wänden (Wandtapeten) und Decken. Man nennt sie *Friese*.

In einschlägigen Geschäften werden Zierstreifen für dekorative Arbeiten angeboten. Man findet Zierstreifen auf Vasen und Geschirr. Denkt man sich hinsichtlich dieser Gegenstände diese Verzierungen abgerollt vor, so führt das wieder zu unseren (endlosen) Bandmustern.

● Gibt es außer den Verschiebungen noch weitere Bewegungen des Bandes, die das Muster zur Deckung bringen? Betrachte die Muster in den Bildern 1, 2 und 3 genauer und vergleiche!

Bild 1

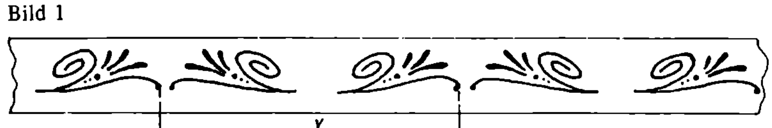



Bild 2

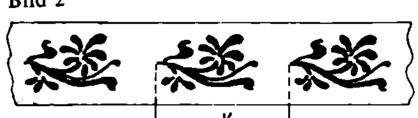



Bild 3

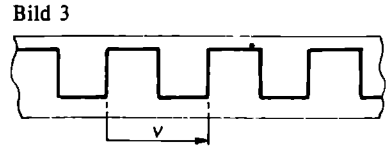
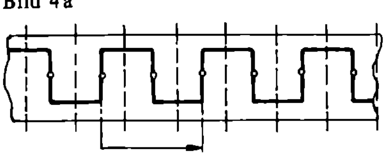



Bild 4a



4b

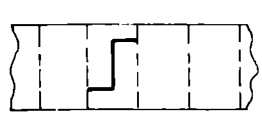
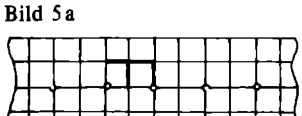
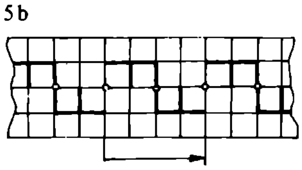


Bild 5a



5b



Das Bandmuster in Bild 1 besitzt Symmetrieachsen, die senkrecht zur Bandrichtung liegen und zwischen denen gleiche Abstände bestehen. Mit anderen Worten, bei der Spiegelung an diesen (und nur an diesen) Geraden kommt das Muster des Bandes zur Deckung. Der Abstand zweier benachbarter Symmetrieachsen ist halb so groß wie die Länge des angegebenen Verschiebungspfeils. In Bild 2 kommen keine weiteren Bewegungen als die bereits genannten Verschiebungen in Frage.

Bei dem Muster in Bild 3 haben wir neben den Verschiebungen und Symmetrieachsen, die zur Bandrichtung senkrecht sind, noch Drehungen um 180°, bei denen das Muster auf sich abgebildet wird. Die Zentren dieser Drehungen liegen in gleichen Abständen auf ein und derselben Geraden; der Abstand zweier benachbarter ist halb so groß wie die Länge des angegebenen Verschiebungspfeils (Bild 4a). Überdies sind die Symmetrieachsen gerade die Mittelsenkrechten von je zwei benachbarten Drehzentren.

Die Drehung um einen Punkt $P$ mit 180° nennt man auch die *Spiegelung am Punkt P*. Und geht dabei das Muster in sich über, so heißt $P$ ein *Symmetriezentrum* des Musters.

Wir wollen nun mit Hilfe von Punktspiegelungen ein Muster auf einem Band erzeugen und wählen zur einfacheren Durchführung kleinkariertes Papier.

● Markiere auf einer Geraden in Bandrichtung Punkte, die gleiche Abstände besitzen. Wähle überdies ein einfaches Motiv (Grundfigur), etwa ein F wie in Bild 5a!

Nun spiegeln wir abwechselnd an den vorgegebenen Punkten. Es entsteht ein Muster wie in Bild 5b. Dieses Muster hat als Symmetriezentren die vorgegebenen Punkte (und nur diese), und es gibt auch hier wieder eine Verschiebung, die das Muster zur Deckung bringt. Eine derartige Verschiebung mit der kleinsten Verschiebungsweite wird durch einen Pfeil beschrieben, der von einem der Symmetriezentren bis zum übernächsten reicht (Bild 5b).

An Hand des Bildes 1 kannst du sofort erkennen, daß man ein Bandmuster auch erhalten kann, wenn man senkrecht zur Bandrichtung Geraden in gleichen Abständen wählt und an ihnen ein vorgegebenes Motiv spiegelt.

● Erzeuge auf diese Weise das Muster in Bild 3! Eine dafür geeignete Grundfigur (Motiv) zeigt Bild 4b.

Wir kehren zurück zu der Erzeugung mit Punktspiegelungen.

● Wähle ein Motiv derart, daß als Muster eine zusammenhängende einfache Linie wie in Bild 3 entsteht und dieses Muster keine Symmetrieachse besitzt. Eine mögliche Lösung zeigt Bild 6a und 6b.

● Welches Bandmuster entsteht, wenn du anstelle des Motivs in Bild 6a das Motiv aus Bild 6c oder 6d verwendest?

Vergleiche diese Muster hinsichtlich der möglichen Deckabbildungen mit den bisher betrachteten Bandmustern!

Ausgehend von dem Motiv in Bild 6d entsteht ein Bandmuster, das neben Symmetrieachsen senkrecht zur Bandrichtung auch noch diejenige Gerade $a$ als Symmetrieachse besitzt, auf der die Symmetriezentren liegen. Außerdem treten zusätzliche Symmetriezentren neben den vorgegebenen Punkten auf, und zwar die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken, die je zwei benachbarte der vorgegebenen Punkte bilden (Bild 6e).

● Wie läßt sich dieses Muster mit Geradenspiegelungen allein herstellen und welche Grundfigur kann dazu gewählt werden? Das Bild 6f zeigt eine Lösung.

● Welche Deckabbildungen besitzt das Bandmuster in Bild 7?

Neben den typischen Verschiebungen gibt es hier nur eine Geradenspiegelung an einer Geraden $a$ in Bandrichtung.

Bei den bisher betrachteten Bandmustern haben wir hinsichtlich der möglichen Deckabbildungen sechs verschiedene Typen kennengelernt. Neben den typischen Verschiebungen gibt es

1. keine weiteren Deckabbildungen (Bild 2),
2. nur Spiegelungen an Geraden senkrecht zur Bandrichtung (Bild 1),
3. nur Punktspiegelungen (Bild 5b und 6b),
4. nur eine Spiegelung an einer Geraden in Bandrichtung (Bild 7),
5. Spiegelungen an Geraden senkrecht zur Bandrichtung und Punktspiegelungen (Bild 3; die Symmetriezentren liegen dabei nicht auf den Symmetrieachsen!)

und schließlich

6. Spiegelungen an Geraden senkrecht zur Bandrichtung, Spiegelung an einer Geraden in Bandrichtung und Punktspiegelungen (Bild 6e; die Symmetriezentren sind dabei die Schnittpunkte der zur Bandrichtung senkrechten Symmetrieachsen mit der einzigen in Bandrichtung liegenden Symmetrieachse).

● Auch das folgende Muster in Bild 8 ist ein Bandmuster.

Besitzt es aber im Vergleich zu irgendeinem der bisherigen Bandmuster die gleiche Art von Deckabbildungen?

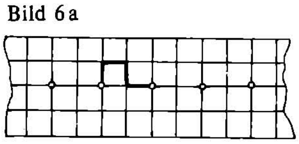
Dieses Muster kann im Vergleich zu dem Muster in Bild 2 noch durch die Nacheinanderausführung der angegebenen Verschiebung $t$ und der Spiegelung an der Geraden $g$ zur Deckung gebracht werden. Eine derartige Bewegung nennt man eine *Schubspiegelung*. Und es ist besonders bemerkenswert, daß weder die Verschiebung $t$ noch die Spiegelung an der Geraden $g$ für sich allein diese Eigenschaft besitzen. (Die Schubspiegelung besitzt also eine eigene Qualität! Schubspiegelungen als Deckabbildungen bestehen (nachträglich gesehen) zwangsläufig bei den Mustertypen 4, 5 und 6.)

Überraschenderweise gibt es nur diese sieben Arten von Bandmustern. (Wenn du meinst, daß du noch eine neue Art (mit einem anderen Gefüge von Deckabbildungen) gefunden hast, dann schicke uns diese zu.) Wir können das hier nicht näher begründen. Es war ohnehin nicht die Absicht, theoretische Grundlagen und Zusammenhänge in den Vordergrund zu stellen. So ist z. B. von Bedeutung, daß die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an den Punkten $P$ und $Q$ eine Verschiebung ist, die doppelt so groß wie $\overline{PQ}$ ist, und daß die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an zueinander senkrechten Geraden die Spiegelung an ihrem Schnittpunkt ist. Wir wollten mehr in Form einer spielerischen Beschäftigung dein Interesse gewinnen und dir den Blick öffnen für geometrische Gesetzmäßigkeiten.

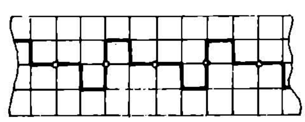
● Und nun kannst du selbst besonders schöne Bandmuster herstellen, etwa auch mit Hilfe von Abriebfolien, die im Handel erhältlich sind. Oder du betrachtest bewußt Friese (Wandmuster) in deiner Umgebung.

Viel Spaß wünscht dir *E. Quaisser*

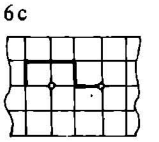
Bild 6a



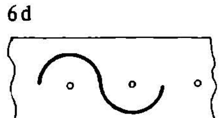
6b



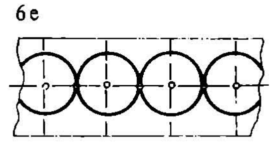
6c



6d



6e




6f

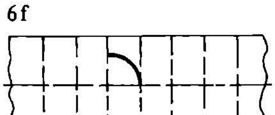


Bild 7

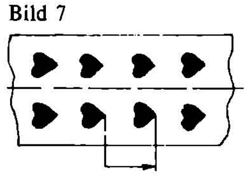



Bild 8

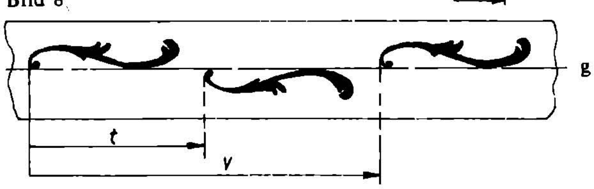



Bild 9

**6096096096096**

# Eine Aufgabe von Prof. Dr. V. Paulauskas

*Mathematische Fakultät*
*der V.-Kapsukas-Universität Vilnius*
*Leiter des Wissenschaftsbereiches Analysis*

▲2908▲ In der linken unteren Ecke eines Schachbrettes steht ein Damestein. Zwei Spieler setzen abwechselnd den Stein in ein unmittelbar benachbartes Feld, erlaubt sind aber nur Züge nach rechts, nach oben und in Richtung *Nordosten* (Diagonalzug nach rechts oben)! Es gewinnt der Spieler, der mit seinem Zug den Damestein in die rechte obere Ecke des Schachbretts setzt.

Kann der Spieler, der den ersten Zug ausführt, gewinnen, unabhängig davon, welche Züge der andere Spieler macht?

Vigantas Paulauskas wurde am 18.10.1944 im Dorf Burju (Rayon Kelmes) in der Litauischen Sowjetrepublik (UdSSR) geboren. Schulbesuch in Kaunas. Von 1962 bis 1967 Studium an der Universität Vilnius Mathematik, Studienabschluß mit Auszeichnung. Danach Aspirantur bei Prof. Statulevčius. 1969 Promotion (Kandidat der Wissenschaften). Wissenschaftliche Arbeit am Lehrstuhl für Wahrscheinlichkeitstheorie und Zahlentheorie unter Leitung von Prof. Dr. J. Kubilius (siehe *alpha* 5/85; 6/86). 1972 Berufung zum Dozenten. 1978 Verteidigung der Dissertation B (Doktor der Wissenschaften). Seit 1981 Professor. Längere Auslandsaufenthalte in Göteborg, Budapest, Dresden, Prag, Upsala, Stockholm, Köln, Aachen, Frankfurt/M. und Kiota. Ausgezeichnet mit dem Ehrenpreis des Komsomol der LSSR (1972) und dem Litauischen Ehrenpreis für Naturwissenschaften (1979). Zahlreiche wissenschaftliche Publikationen, darunter eine Monographie (zusammen mit seinem Schüler Raškauskas).

Arbeitsgebiet von Prof. Paulauskas: Theorie der Verteilungen und Grenzwertsätze in unendlichdimensionalen Räumen. Verdienste hat sich Prof. Paulauskas um die Förderung von talentierten Schülern und jungen Wissenschaftlern erworben. Er ist Vorsitzender des Komitees für die Mathematikolympiade in der LSSR.

# Wir rechnen mit dem SR 1

## Geschwindigkeiten in Natur und Technik

Die besten Läufer der Welt legen im Sprint 100 m in weniger als 10 s zurück. Das ist eine phantastische Zeit und ganz sicher eine beachtliche Leistung für ein *Lebewesen*. Ihr hättet wohl etliche Mühe, auf dem Fahrrad dieses Tempo mitzuhalten. Und doch ist ein ganz gewöhnlicher Feldhase noch etwas schneller, er schafft nämlich etwa $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

▲1▲ Bestätigt, daß der Hase schneller läuft!

Nun sind jedoch nicht alle Lebewesen Schnelläufer, -schwimmer oder -flieger, manche bewegen sich im Schneckentempo.
In den nachstehenden Tabellen sind die Höchstgeschwindigkeiten einiger Tiere angegeben.

Auf dem Lande

| | |
|---|---|
| Gepard | $v_1 = 28\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| Antilope | $v_2 = 27\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| Schildkröte | $v_3 = 5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ |
| Schnecke | $v_4 = 5{,}76\,\frac{\text{m}}{\text{h}}$ |
| Mensch | $v_5 = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |

▲2▲ Berechne die Geschwindigkeiten $v_i$ in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und vergleiche sie. Ermittle das Verhältnis der Geschwindigkeiten der genannten Tiere zu der Höchstgeschwindigkeit des Menschen, also $v_i : v_5$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

Im Wasser

| | |
|---|---|
| Schwertfisch | $v_6 = 37\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| Thunfisch | $v_7 = 28\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| Delphin | $v_8 = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| Lederschildkröte | $v_9 = 9{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| Freistilschwimmer | $v_{10} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |

▲3▲ Rechne alle Geschwindigkeiten in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ um und bestimme, wievielmal die Meeresbewohner schneller als der Mensch im Wasser sind!

In der Luft

| | |
|---|---|
| Mauersegler | $v_{11} = 80\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| Schwalbe | $v_{12} = 60\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| Brieftaube | $v_{13} = 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| Buchfink | $v_{14} = 54\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ |

Der Mensch ist von Natur aus weder auf dem Lande noch im Wasser extrem schnell. Der Luftraum ist ihm für die eigene Fortbewegung gänzlich versagt. Aber seine Fähigkeit, schöpferisch zu denken, schuf und schafft ihm Hilfsmittel, die ihn auch in bezug auf die Geschwindigkeit weit über das Tierreich hinausheben. Moderne Flugzeuge erreichen bis zu $980\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

▲4▲ Bestimme die Geschwindigkeiten $v_{11}$, $v_{12}$, $v_{13}$ und $v_{14}$ der Vögel und die des schnellsten Flugzeuges ($v_{15}$) und ermittle die Quotienten $v_i : v_{15}$ für $i = 11, \ldots, 14$ mit dem SR 1!

Auf dem Lande begann der Mensch 1829 das erste *vollwertige* Hilfsmittel zur deutlichen Steigerung seines Fortbewegungstempos einzusetzen, die Eisenbahn. Die Lokomotive *Rocket* von Stephenson erreichte damals mit einem von 36 Personen besetzten Wagen eine Geschwindigkeit von $46\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Im Jahre 1903 wurde mit einem elektrisch angetriebenen Versuchstriebwagen eine Geschwindigkeit von $210{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erzielt. 1936 brachte es eine Dampflokomotive (Baureihe 05 der DR) mit einem 197 t schweren Zug auf $200{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. In Japan verkehren seit 1964 Super-Expreß-Züge mit einer Reisegeschwindigkeit von $163\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, wobei die Höchstgeschwindigkeit $210\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt und auf $270\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erhöht werden soll. Nach Pressemeldungen sind sogar Höchstgeschwindigkeitszüge mit Linearmotor geplant, die über $400\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren sollen. In Frankreich erzielen die TGV-Züge Spitzengeschwindigkeiten von $260\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und bei Versuchsfahrten sogar $380\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

▲5▲ Auf wieviel Prozent wurden bei den angeführten Zügen die Geschwindigkeiten gegenüber der Geschwindigkeit der Lokomotive *Rocket* gesteigert? Um wieviel Prozent lag die Höchstgeschwindigkeit der Dampflokomotive BR 05 $\left(200{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ über der von der Lokomotive *Rocket* erreichten Geschwindigkeit von $46\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

▲6▲ Dem Kursbuch des internationalen Verkehrs 1985/86 ist zu entnehmen:

| Zug-Nr.: | | | R 801 | R 815 |
|---|---|---|---|---|
| km | Station | | | |
| 0 | Paris Gar-de-Lyon | ab | 10.23 | 11.42 |
| 617 | Valence | an | | 14.36 |
| 742 | Avignon | an | 14.09 | |

Berechne die Reisegeschwindigkeit der beiden Züge!
Welche Fahrzeit würde die Lokomotive *Rocket* für die Strecke Paris – Avignon (ohne Zwischenaufenthalt) mindestens benötigen?

▲7▲ Der Städte-Expreß *Lipsia* benötigt für die 182 km lange Strecke von Berlin bis Leipzig 2 Stunden und 16 Minuten. Die Selketalbahn fährt (zur Freude vieler Harzbesucher) 10.55 Uhr in Gernrode ab und trifft 12.10 Uhr im 17,5 km entfernten Harzgerode ein. Wievielmal schneller ist der Städteexpreß als die Selketalbahn?

Im Straßenverkehr gelang der Durchbruch zu auf die Dauer tauglichen Fahrzeugen erst, als der Verbrennungsmotor zur Verfügung stand. 1885 baute *Carl Benz* ein mit Benzinmotor angetriebenes Straßenfahrzeug. 1895 betrug beim ersten Automobilrennen, das in Frankreich ausgetragen wurde, die Durchschnittsgeschwindigkeit $24\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Schon fünf Jahre danach wurden von einem Kraftwagen $105\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht. Es soll hier auch erwähnt werden, daß viele Rekordjagden nur Reklamewert besitzen und äußerst fragwürdig oder unsinnig sind und nur des Geschäftes wegen Leben und Gesundheit von Menschen aufs Spiel setzen. Ein trauriges Beispiel dafür ist der Rekordversuch mit dem Spezialfahrzeug *Blue Flame* auf einem ausgetrockneten Salzsee im USA-Staat Utah, bei $1000\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ schwebt der Fahrer in Lebensgefahr.

*A. Körner/W. Schmidt*

## Eine Leseranfrage

Liebe Redaktion *alpha*!
Ich habe mich in meiner Freizeit mit einer eurer Aufgaben beschäftigt. Die Anregung dazu erhielt ich durch die FKR Mathematik an meiner Schule. Ich versuchte die Zahlen 1, 9, 8 und 8 (genau in dieser Reihenfolge) mit Hilfe der vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division), $\sqrt{x}$, $x!$ und mit Klammern so zu verknüpfen, daß ich die natürlichen Zahlen von 0 bis 20 erhielt. Weitere Versuche endeten bei der Zahl 41. Außerdem fand ich keine Möglichkeit die Zahl 38 darzustellen. Mich würde sehr interessieren, ob für die Zahl 38 und die Zahlen größer 41 überhaupt Lösungen existieren.

*Arne Krüger*
*Mittelstr. 22*
*Landgrafenroda*
*4241*

Wenn ihr eine Lösung wißt, schreibt doch an Arne!

*Die Redaktion*

## Kryptarithmetik

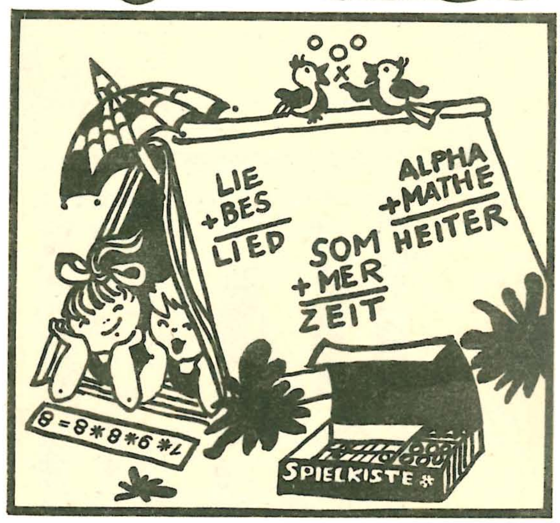
1. Setze natürliche Zahlen so ein, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen!

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | + | | : | | =7 |
| − | ■ | + | ■ | · | ■ |
| | · | 5 | − | | =6 |
| − | ■ | : | ■ | + | ■ |
| | · | | + | | =8 |
| =0 | ■ | =3 | ■ | =9 | ■ |

2. Setze für das Zeichen * Ziffern ein, so daß sich richtig gelöste Aufgaben ergeben!

$2* + *0 = 54$
$7 \cdot * = 2*$
$3* : * = 4$
$4* - 9 = 4*$

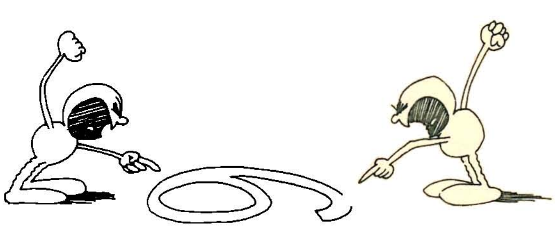
16


1

## Suchbild

Durch welche neun Änderungen unterscheiden sich beide Bilder?



14

## Konkret

1. Auf zwei Büschen saßen 16 Spatzen. Bald darauf flogen vom ersten Busch 2 Spatzen davon und vom zweiten Busch flogen 5 Spatzen zum ersten hinüber. Jetzt saßen auf beiden Büschen gleich viel Spatzen. Wieviel Spatzen waren anfangs auf jedem Busch?

2. Ein Koch soll 4 Liter Milch abmessen. Es stehen ihm aber nur ein 3-Liter- und ein 5-Liter-Gefäß zur Verfügung. Kannst du ihm helfen?

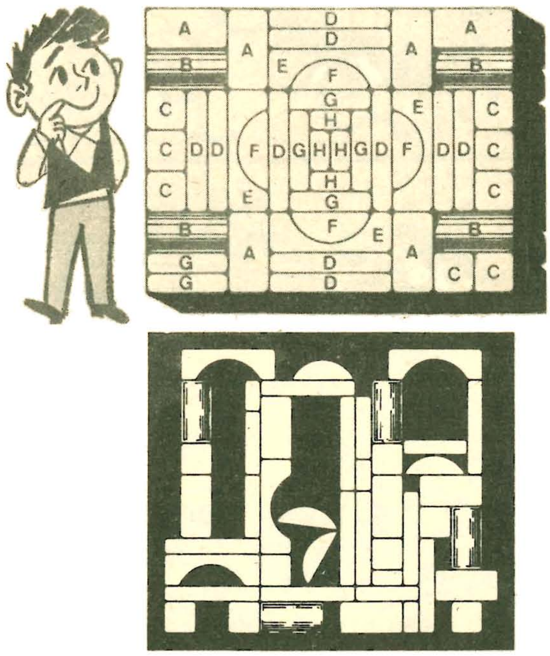
3. Längs einer Landstraße stehen Telegrafenmasten in regelmäßigen Abständen. Vom 1. bis zum 5. sind es 200 Meter. Wie weit ist es vom 1. bis zum 10. Mast?

4. In jedem von drei Körben sind zwei Kohlköpfe. Der eine enthält zwei Weißkohl-, der andere zwei Rotkohl- und der dritte einen Weißkohl- und einen Rotkohlkopf. Jemand hatte die Beschriftung vertauscht. Wer schafft es mit *einem* Griff, ohne in die Körbe zu schauen. Einen Kohlkopf nahm er heraus und konnte nun den Inhalt der anderen richtig bestimmen.

3

## Beobachtungstest

Dieser ungarische Schüler hat mit seinem Baukasten ein schönes Tor gebaut. Ein Stein blieb übrig. Welcher?



2

## Abstrakt

1. Nur Fünfen enthält das Produkt zweier zweistelliger Zahlen.
Welches sind die Faktoren des Produkts?

2. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 10. Verdoppelt man die Ausgangszahl und subtrahiert 1, dann erhält man eine Zahl, die die Ziffern der ersten in umgekehrter Reihenfolge enthält.

3. Der fünfte Teil vom Siebzigfachen einer Zahl ist 420.
Wie heißt die Zahl?

4. Das Dreifache einer Zahl, vermehrt um ihr Vierfaches ist 21.

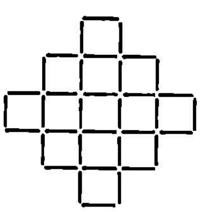
5. Vermindert man das Siebenfache einer Zahl um 27, so erhält man ihr Vierfaches.

6. Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Zahlen ist 61.
Wie heißen die beiden Zahlen?

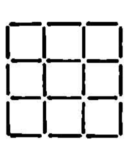
15

## Spiele mit Hölzchen

1. Von den 13 Quadraten sind vier Hölzchen wegzunehmen, so daß noch acht Quadrate übrig bleiben.



2. Nimm von dieser Figur acht Hölzchen weg, so daß nur noch drei Quadrate übrig bleiben!



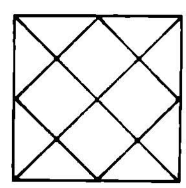
3. In jeder Zahlengruppe ist ein Hölzchen so umzulegen, daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht.

| | | | |
|---|---|---|---|
| III-II=IV | VI+II=III | VII+I=V | VI-IV=IX |

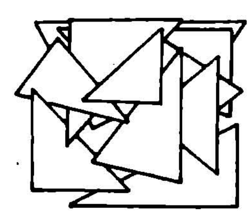
4

## Wie viele Flächen siehst du?

1. Wie viele Quadrate und wie viele Dreiecke findest du in dieser Figur?



2. Wie viele Dreiecke liegen in dieser Figur übereinander?



13

## Irrgarten

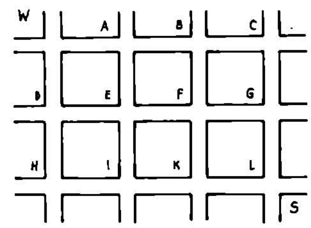
Wer findet am schnellsten den Weg von A nach B?

A B

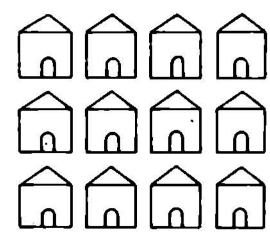
12

## Kürzeste Wege

1. Monika geht auf kürzestem Wege von ihrem Bungalow (*W*) zum Lagerkino (*S*). Zeige Möglichkeiten!




2. Zwölf Häuser sollen durch Telefonkabel verbunden werden.
Um Geld zu sparen, ist der kürzeste Weg durch die Häuser zu finden. Das Kabel kann bei jedem beliebigen Haus beginnen, braucht nicht zum Ausgangspunkt zurück.



5

## Ein Blick in die Praxis

1. Marie-Luise ließ einen Fünfmarkschein wechseln und erhielt dabei 20 Münzen zu 5, 10 und 50 Pfennigen.
Wieviel von jeder Sorte waren es?

2. Ein Baum wirft einen Schatten, der 10 Meter lang ist. Ein drei Meter langer Stab wirft einen zwei Meter langen Schatten.
Wie hoch ist der Baum?

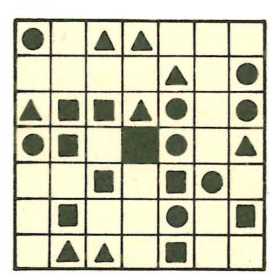
3. Wenn du erraten kannst, wieviel Äpfel ich habe, dann bekommst du die Hälfte weniger als zwei oder – was dasselbe ist – ein Drittel und noch einen Apfel dazu.
Wie viele Äpfel waren vorhanden, wie viele sollten verschenkt werden?

4. Vier große und drei kleine Päckchen wiegen zusammen 2,9 kg. Dagegen haben drei große und vier kleine Päckchen zusammen ein Gewicht von 2,7 kg.
Wie schwer ist ein großes und wie schwer ein kleines Päckchen?

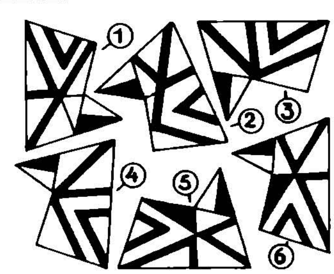
10

## aufgepaßt – mitgemacht

1. Das Quadrat soll in vier formgleiche (kongruente) Teile zerlegt werden. Jedes Teil soll zwei kleine Quadrate, zwei Dreiecke und zwei Kreise enthalten.



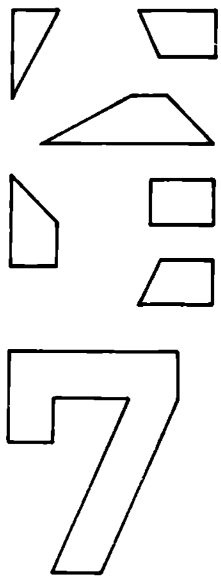
2. Welche beiden Teile gleichen sich vollkommen?




7

## Die interessante Sieben

Ein altes Legespiel: Paust die sechs Teile ab, schneidet sie aus und setzt aus ihnen eine nach dem Muster des Bildes gezeigte *Sieben* zusammen!



6

## Lustige Zahlenspielereien

1. Die Zahlen von 0 bis 10 sollen mit jeweils vier Siebenen oder fünf Dreien und den gebräuchlichen Rechenzeichen dargestellt werden.

Beispiel: $\frac{77}{7} - 7 = 4$; $3 + 33 : 33 = 4$ usw.

2. Die Zahl 100 ist mit jeweils neun gleichen Ziffern (von 1 bis 9), die durch beliebige Rechenoperationen der vier Grundrechenarten zu verbinden sind, darzustellen. Es gibt viele Möglichkeiten.

| | |
|---|---|
| $1 \cdot 1 \cdot 111 - 1 \cdot 1 \cdot 11$ | $= 100$ |
| | $= 100$ |
| | $= 100$ |
| | $= 100$ |
| $55 + 5 + 5\left(5 + 5 - \frac{5+5}{5}\right)$ | $= 100$ |
| | $= 100$ |
| | $= 100$ |
| $\frac{888}{8} - \frac{88}{8} + 8 - 8$ | $= 100$ |
| | $= 100$ |

11

## Abstrakt

1. Die Zahl 80 ist so in zwei Teile zu zerlegen, daß der eine Teil 60 % des anderen bildet.
2. Wieviel sind eineinhalb Drittel von 100?
3. Die Summe zweier Zahlen sei ein ganzzahliges Vielfaches von 1000. Der erste Summand ist 1988. Der zweite Summand ist zweistellig. Berechne ihn!
4. „Wie alt ist die Eiche?“, fragten Schüler den Förster. „Nun überlegt einmal!“, antwortete er verschmitzt. „Addiert die größte einstellige Zahl und die größte zweistellige Zahl und die größte dreistellige Zahl. Von dieser Summe subtrahiert die kleinste vierstellige Zahl! Dann wißt ihr, wie alt die Eiche ist.“

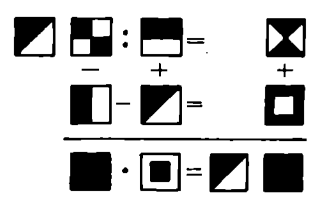
Die Lösungen zu dieser Knobel-Wandzeitung sind auf Seite 69 zu finden. Die Seiten 59 bis 62 können auch, sauber ausgeschnitten und gefaltet, als Mini-Mathe-Heft verwendet werden.

Viel Freude und Erfolg wünscht *J. Lehmann*

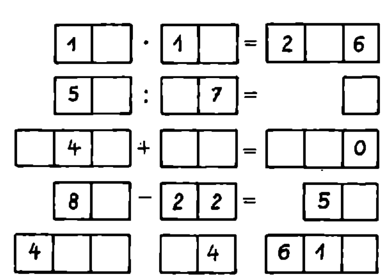
8

## Weißt du es?

1. Setze für die Zeichen Ziffern so ein, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen! Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Ziffern.



2. Setze für die Leerstellen Ziffern so ein, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen!




9

# XXVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## Aufgaben der Bezirksolympiade

*6./7. Februar 1988*

### Olympiadeklasse 7

270731 Vier Mannschaften, A, B, C und D, trugen ein Fußballturnier aus. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere Mannschaft. Jedes gewonnene Spiel wurde mit 2 Punkten für die Siegermannschaft und mit 0 Punkten für die Verlierermannschaft gewertet, jedes unentschiedene Spiel für beide Mannschaften mit je 1 Punkt. Weiterhin ist folgendes bekannt:
(1) Keine Mannschaft blieb ohne Punkte.
(2) Mannschaft A konnte ihren Turniersieg aus dem vorigen Jahr nicht wiederholen, erreichte aber eine höhere Gesamtpunktzahl als Mannschaft B.
(3) Mannschaft C gewann kein Spiel, erreichte jedoch eine geradzahlige Gesamtpunktzahl.
(4) Mannschaft D spielte in keinem ihrer Spiele unentschieden und gewann gegen B sowie gegen den Turniersieger des vorigen Jahres.
Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, welche Punktzahlen jedes Spiel des Turniers den einzelnen Mannschaften erbrachte und welche Gesamtpunktzahlen sie erreichten!
Ist das der Fall, so trage die Punktzahlen in die folgende Tabelle ein!

| Mannschaft | Erreichte Punktzahl gegen A | B | C | D | Erreichte Gesamtpunktzahl |
|---|---|---|---|---|---|
| A | – | | | | |
| B | | – | | | |
| C | | | – | | |
| D | | | | – | |

270732 In einem Betrieb werden Erzeugnisse hergestellt, bei denen die Herstellungskosten für jedes Stück 19,20 M betragen. Der Betrieb hat die Möglichkeit, für 13 500 M eine neue Werkzeugmaschine anzuschaffen; mit dieser Maschine würden die Herstellungskosten für jedes Stück nur noch 13,15 M betragen.
Ein Planziel lautet: Die Summe aus den Anschaffungskosten der neuen Maschine und aus den Herstellungskosten der damit in 3 Jahren hergestellten Erzeugnisse soll weniger als 80 % derjenigen Herstellungskosten betragen, die (für ebenso viele Erzeugnisse) ohne Nutzung der neuen Maschine entstehen würden.
Ermittle die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der dieses Planziel zu erreichen ist!

270733 Gegeben sei ein Dreieck $ABC$, in dem die Größe $\gamma$ des Winkels $\sphericalangle ACB$ kleiner ist als die Größe $\beta$ des Winkels $\sphericalangle ABC$. Gefordert seien die folgenden von einem Punkt $P$ zu erfüllenden Bedingungen (1) und (2):
(1) $P$ liegt auf der Strecke $AC$.
(2) Der Winkel $\sphericalangle APB$ hat die Größe $2\gamma$.
a) Beschreibe hierzu eine Konstruktion; zeige, daß sie zu jedem Dreieck $ABC$ mit $\gamma < \beta$ genau einen Punkt $P$ liefert und daß die beiden folgenden Aussagen b) und c) gelten!
b) Wenn ein Punkt $P$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, dann wird er durch die beschriebene Konstruktion erhalten.
c) Wenn ein Punkt $P$ durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, dann erfüllt er die Bedingungen (1) und (2).

270734 Ermittle alle diejenigen geordneten Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen $x$, $y$, für die
$x^2 + xy + y^2 = 49$ gilt!

270735 In einem Dreieck $ABC$ seien $CD$ und $BE$ die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$ bzw. $\sphericalangle ABC$. Der Schnittpunkt dieser Strecken $CD$, $BE$ sei $S$. Wie üblich bezeichne $\alpha$ die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$. Vorausgesetzt werde nun, daß der Winkel $\sphericalangle BSD$ die Größe $4\alpha$ hat.
Weise nach, daß durch diese Voraussetzung die Winkelgröße $\alpha$ eindeutig bestimmt ist, und ermittle $\alpha$!

270736 In einem Dreieck $ABC$ seien $AD$, $BE$ und $CF$ die drei Seitenhalbierenden. Sie gehen bekanntlich durch einen gemeinsamen Punkt $S$.
Beweise, daß für jedes Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Aussage gilt:
Alle sechs Dreiecke $BDS$, $DCS$, $CES$, $EAS$, $AFS$, $FBS$ haben denselben Flächeninhalt!

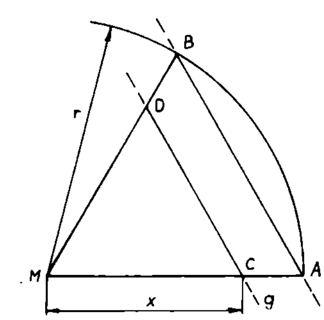
### Olympiadeklasse 8

270831 Während einer Kindergeburtstagsfeier spielt man „Geburtstagsdatum erraten". Katrin, das Geburtstagskind, erklärt ihrem jeweiligen Spielpartner: „Teile dein Geburtstagsdatum auf in eine Tageszahl und eine Monatszahl! (Mein heutiger Geburtstag, der 24. Mai, wäre z. B. aufzuteilen in die Tageszahl 24 und die Monatszahl 5.) Verdopple nun die Tageszahl deines Geburtsdatums, addiere zum Ergebnis 7, multipliziere die Summe mit 50 und vermehre das Produkt um die Monatszahl deines Geburtsdatums!"
Nachdem das Ergebnis genannt wurde, war Katrin in der Lage, das betreffende Geburtsdatum zu nennen. Erkläre, durch welche Überlegung man das Geburtsdatum in jedem Fall aus dem Ergebnis der von Katrin geforderten Rechnung finden kann!

270832 Bei einem Schachturnier spielte jeder der acht Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie; die von den einzelnen Spielern erreichten Punktzahlen waren sämtlich voneinander verschieden. Bernd, der den zweiten Platz belegte, gewann so viele Punkte wie die vier Letztplazierten zusammen.
Gerd wurde Dritter und Uwe belegte den siebenten Platz.
Untersuche, ob aus diesen Voraussetzungen eindeutig folgt, mit welchem Ergebnis die Partie zwischen Gerd und Uwe endete! Ist dies der Fall, dann gib das Ergebnis an!
*Hinweis:* Im Schachsport erhält der Spieler für einen Sieg 1 Punkt, spielt er unentschieden, bekommt er $\frac{1}{2}$ Punkt. Für eine Niederlage gibt es 0 Punkte.

270833 Es sei $k$ ein Kreis, sein Mittelpunkt sei $M$. Diesem Kreis sei ein spitzwinkliges Dreieck $ABC$ einbeschrieben, bei dem für die Größen $\alpha$, $\beta$ der Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ vorausgesetzt werde, daß $\alpha > \beta$ gilt. Im Dreieck $ABC$ sei $D$ der Fußpunkt der auf $AB$ senkrechten Höhe. Der von $C$ ausgehende Strahl durch $M$ schneide $k$ in $E$.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Winkel $\sphericalangle DCE$ stets die Größe $\alpha - \beta$ hat!

270834 Es sei $\overset{\frown}{ABM}$ ein Kreissektor, für den die Länge $r = \overline{MA} = \overline{MB}$ gegeben ist und der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ die Größe 60° hat. Von einer Geraden $g$, die zu $AB$ parallel ist und die Strecken $MA$ bzw. $MB$ in $C$ bzw. $D$ schneidet, sei bekannt, daß der Umfang $u_1$ des Dreiecks $MCD$ gleich dem Umfang $u_2$ der Figur $\overset{\frown}{ABDC}$ ist (siehe Bild).




a) Ermittle unter dieser Voraussetzung die Länge $x = \overline{MC}$ in Abhängigkeit von $r$!
b) Die Länge $r$ sei mit einer Genauigkeit gemessen, bei der sich auf eine Dezimale nach dem Komma genau $r = 6{,}7$ cm ergibt. Ferner sei zur Berechnung verwendet, daß auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau $\pi = 3{,}14$ gilt.
Beweise, daß man daraus die Länge $x$ (in Zentimetern) auf eine Dezimale nach dem

Komma genau durch Berechnung von Schranken ermitteln kann! Wie lautet diese Längenangabe $x$?

270835 Eine quadratförmige schachbrettartige Tabelle bestehe aus 15 mal 15 Feldern. Eine der beiden Diagonalen des Quadrates sei $d$ genannt.
In jedes der 225 Felder der Tabelle kann eine der Zahlen 1 bis 15 so eingetragen werden, daß die folgenden Forderungen (1) und (2) erfüllt sind:
(1) Jede (waagerechte) Zeile enthält jede der 15 Zahlen genau einmal.
(2) Für je zwei Felder, die symmetrisch zu $d$ liegen, gilt: Die Zahlen in diesen zwei Feldern sind einander gleich.
Für jede Eintragung kann man die Summe aus denjenigen Zahlen bilden, die in den fünfzehn von der Diagonale $d$ durchquerten Feldern stehen.
Beweise, daß diese Summe durch die Voraussetzungen (1), (2) eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Summe!

270836 Es sei $ABCDS$ eine gerade Pyramide mit einem Quadrat $ABCD$ als Grundfläche und $S$ als Spitze. Der Fußpunkt der Höhe dieser Pyramide sei $E$, ferner sei $a = \overline{AB}$ und $h = \overline{ES}$.
I. Zeichne ein Bild dieser Pyramide mit den Maßen $a = 6$ cm, $h = 8$ cm in schräger Parallelprojektion $\left(\alpha = 45°, q = \frac{1}{2}\right)$, wobei die Strecke $ES$ in wahrer Länge erscheinen soll!
II. Auf der Strecke $ES$ gibt es genau einen Punkt $P$, für den die (im Raum verlaufenden) Strecken $AP$ und $SP$ einander gleichlang sind.
Leite eine Möglichkeit her, in dem nach I. hergestellten Bild der Pyramide $A'B'C'D'S'$ den Bildpunkt dieses Punktes $P$ zu konstruieren; beschreibe diese Konstruktion und führe sie durch!
III. Die Länge $a$ sei beliebig gegeben. Ermittle dann in Abhängigkeit von $a$ alle diejenigen Werte $h$, für die sich (in der Pyramide mit diesen Maßen $a$, $h$) ein Punkt $P$ auf $ES$ finden läßt, der die in II. genannte Bedingung $\overline{AP} = \overline{SP}$ erfüllt!

**Olympiadeklasse 9**

270931
a) Beweisen Sie, daß die Gleichung
$$x_1^{11} + x_2^{11} + \ldots + x_{1987}^{11} = 1988 \qquad (1)$$
keine Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_{1987})$ besitzt, in der alle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{1987}$ natürliche Zahlen sind!
b) Beweisen Sie, daß die Gleichung (1) unendlich viele verschiedene Lösungen besitzt, in denen alle Zahlen ganze Zahlen sind!
Dabei heißen zwei Lösungen $(x_1, x_2, \ldots, x_{1987})$ und $(x_1', x_2', \ldots, x_{1987}')$ genau dann voneinander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen
$x_1 \neq x_1', x_2 \neq x_2', \ldots, x_{1987} \neq x_{1087}'$
gilt.

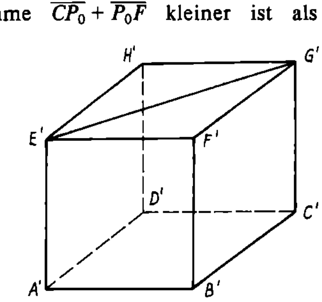
270932
I. Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt: Wenn $a$, $b$, $c$, $d$ reelle Zahlen sind, für die
$b \neq 0$, $b + c \neq 0$ und $b + d \neq 0$ gilt,
so folgt
aus $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$
stets auch $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+d}{b+d}$.
II. Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:
Wenn $a$, $b$, $c$, $d$ positive reelle Zahlen sind, so folgt
aus $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$
stets auch $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+d}{b+d}$.

270933 Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, dessen Seiten $AB$ und $CD$ so gelegen sind, daß sich die Verlängerung von $AB$ über $B$ hinaus und die Verlängerung von $DC$ über $C$ hinaus in einem Punkt $T$ schneiden. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ATD$ sei $h$. Der Schnittpunkt der Diagonalen $AC$ und $BD$ sei $S$; die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ASD$ sei $g$.
Beweisen Sie: Aus diesen Voraussetzungen folgt stets, daß $g$ und $h$ zueinander parallel sind.
(Bemerkung: Auch in dem Spezialfall, daß $g$ und $h$ in dieselbe Gerade fallen, werden sie als zueinander parallel bezeichnet.)

270934 Jens zeichnet auf ein Blatt Papier einige Punkte, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Gerade liegen. Er verbindet einige Male irgend zwei dieser Punkte durch eine Strecke. Dabei kommt es auch vor, daß Punkte jeweils mit mehr als einem anderen Punkt verbunden sind. Dirk zählt nun die von jedem Punkt ausgehenden Strecken und ermittelt dann die Anzahl $A$ aller derjenigen Punkte, von denen jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken ausgeht.
Christa behauptet dann, ohne zu wissen, wie viele Punkte Jens gezeichnet hat und welche Punkte er mit welchen anderen verbunden hat, die Anzahl $A$ müsse in jedem Fall eine gerade Zahl sein. Trifft das zu?

270935 Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ gibt, für die $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ eine Primzahl ist!

270936 Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$
eines Würfels $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion gegeben. Diese ist so gewählt, daß die Fläche $ABFE$ ohne Verzerrung in wahrer Größe $A'B'F'E'$ erscheint.
a) Beweisen Sie die folgende Aussage:
Es gibt auf der Strecke $EG$ genau einen Punkt $P_0$ mit der Eigenschaft, daß die Summe $\overline{CP_0} + \overline{P_0F}$ kleiner ist als die Summe $\overline{CP} + \overline{PF}$ für jeden anderen Punkt $P$ auf $EG$.




b) Leiten Sie eine Möglichkeit her, das Bild $P_0'$ dieses Punktes $P_0$ bei der Parallelprojektion auf dem Arbeitsblatt zu konstruieren! Führen Sie die Konstruktion durch! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
(*Hinweis:* $CP_0$, $P_0F$, $CP$, $PF$ bezeichnen Strecken im Raum, nicht ihre Bildstrecken in der Zeichenebene.)

**Olympiadeklasse 10**

271031 Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) $x$ und $y$ sind dreistellige natürliche Zahlen.
(2) Die drei Ziffern von $x$ sind sämtlich voneinander verschieden.
(3) Die drei Ziffern von $x$ sind auch die drei Ziffern von $y$, nur in anderer Reihenfolge.
(4) Es gilt $x - y = 45$.

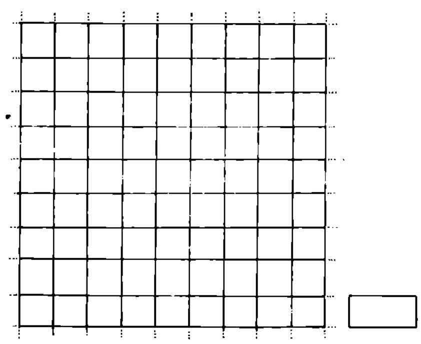
271032 Es sei $a$ eine gegebene positive reelle Zahl. Von einer Funktion $f$, die für alle reellen Zahlen $x$ definiert ist, werde vorausgesetzt, daß sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:
(1) Für jede reelle Zahl $x$ gilt
$f(x) + f(x + a) = 1$.
(2) Es gibt eine reelle Zahl $c$, so daß für alle reellen Zahlen $x$, die $c < x \leqq c + a$ erfüllen, $f(x) > \frac{1}{2}$ gilt.
Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Funktion $f$ ist periodisch; es gibt eine kleinstmögliche Periode von $f$. Ermitteln Sie diese kleinstmögliche Periode von $f$!
(*Hinweis:* Eine Funktion $f$ heißt genau dann periodisch, wenn es eine positive reelle Zahl $p$ gibt, so daß für alle reellen Zahlen $x$ die Gleichung $f(x + p) = f(x)$ gilt. Ist das der Fall, so heißt jede positive reelle Zahl $p$, mit der dies gilt, eine Periode von $f$.)

271033 Vier Kreise $k_1$, $k_2$, $k_3$ und $k_4$ mit den Mittelpunkten $M_1$ bis $M_4$ und den Radien $r_1$ bis $r_4$ mögen so in einer Ebene $E_1$ liegen, daß sich $k_1$, $k_2$ und $k_3$ paarweise von außen berühren. Außerdem berührt $k_4$ die Kreise $k_2$ und $k_3$ ebenfalls von außen und hat mit $k_1$ keinen Punkt gemeinsam.
Die Kreise seien die Grundflächen von vier geraden Kreiskegeln mit den Höhen $h_1$ bis $h_4$ und den Spitzen $S_1$ bis $S_4$. Die Punkte $S_1$, $S_2$ und $S_3$ mögen auf der gleichen Seite von $E_1$ (d. h. im gleichen Halbraum bezüglich $E_1$) liegen.
Folgende Maße seien gegeben:
$r_1 = r_4 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 3$ cm,
$h_1 = 1$ cm, $h_2 = 2{,}1$ cm, $h_3 = 4{,}6$ cm.
Nun sollen $S_1$, $S_2$, $S_3$ und $S_4$ in einer Ebene $E_2$ liegen.
Wie groß muß dann $h_4$ sein?

271034 Ermitteln Sie alle diejenigen positiven rationalen Zahlen $x$, für die
$$x^{2x} = \frac{1}{2}$$
gilt!

271035 Es sei $ABC$ ein Dreieck, der Mittelpunkt von $AB$ sei $S$, der Mittelpunkt von $CS$ sei $M$, der Schnittpunkt von $BC$ mit der Geraden durch $A$ und $M$ sei $P$.
Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Verhältnisse $\overline{BP}:\overline{PC}$ und $\overline{AM}:\overline{MP}$ eindeutig bestimmt sind, und ermittle diese Verhältnisse.

271036 Eine Ebene $E$ sei durch vertikale und horizontale Geraden in Quadrate der Seitenlänge 1 cm zerlegt. Diese Ebene soll mit Rechtecken der Seitenlängen 1 cm, 2 cm so ausgefüllt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
Kein Punkt der Ebene soll frei bleiben, aber die Rechtecke dürfen sich auch nicht gegenseitig überlappen.
Jede der obengenannten vertikalen und horizontalen, beliebig herausgegriffenen Geraden zerlegt nur endlich viele der Rechtecke in kleinere Flächenstücke.



Man untersuche, ob es möglich ist, diese Bedingungen zu erfüllen.

**Olympiadeklassen 11/12**

271231 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen $x$, die das folgende Ungleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x^4 - 6x^2 + 8 \leqq 0, \qquad (1)$$
$$2x^2 - 3x > 0. \qquad (2)$$

271232 Ein Auto soll einen Rundkurs in einem vorgeschriebenen Umlaufsinn durchfahren. Das zur Verfügung stehende Benzin reicht genau zum einmaligen Durchfahren des Kurses, wurde aber vorher willkürlich in eine Anzahl $n \geqq 1$ von Kanistern verteilt, die ebenfalls willkürlich längs des Rundkurses aufgestellt sind. Der Tank des Autos ist zu Beginn leer und besitzt ausreichendes Fassungsvermögen, um beim Erreichen jedes Kanisters dessen Benzin aufzunehmen.
Man beweise, daß es möglich ist, den Startpunkt des Autos so zu wählen, daß der Kurs genau einmal durchfahren werden kann. (Eventuelle Verluste beim Umfüllen, Mehrverbrauch bei wiederholtem Anfahren usw. sollen nicht berücksichtigt werden.)

Von den nachstehenden Aufgaben 271233 A und 271233 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

271233 A Man ermittle den größten Wert, den der Flächeninhalt des Bildes eines beliebig im Raum liegenden Quaders $Q$ mit gegebenen Kantenlängen $a$, $b$, $c$ bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Ebene annehmen kann.

271233 B Es sei $f$ diejenige für alle geordneten Paare $(x, y)$ natürlicher Zahlen $x$, $y$ definierte Funktion, die für alle natürlichen Zahlen $x$, $y$ die folgenden Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt:

$$f(0, y) = y + 1, \qquad (1)$$
$$f(x+1, 0) = f(x, 1), \qquad (2)$$
$$f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y)). \qquad (3)$$

Man ermittle
a) den Funktionswert $f(3, 3)$,
b) den Funktionswert $f(4, 2)$.
(*Hinweis:* Gegebenenfalls kann die Angabe eines gesuchten Funktionswertes durch einen rechnerischen Ausdruck mit konkret angegebenen Rechenoperationen erfolgen, wenn deren zahlenmäßige Ausführung ohne Rechenhilfsmittel eine zu lange Rechenzeit erfordern würde.)

271234 Man beweise für jedes Dreieck $ABC$: Bezeichnen wie üblich $b$, $c$, $h_a$ die Längen der Seiten $AC$, $AB$ bzw. der auf $BC$ senkrechten Höhe und $\alpha$ die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, so gilt

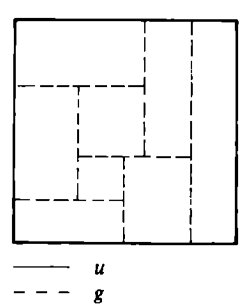
$$h_a \leqq \sqrt{bc} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Man ermittle alle diejenigen Dreiecke $ABC$, bei denen in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

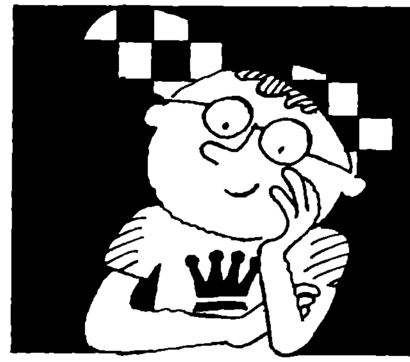
271235 Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x, y, z)$ ganzer Zahlen, die die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$1243 \cdot (1 + yz) = 65 \cdot (xyz + x + z). \qquad (1)$$

271236 Ein quadratisches Feld $Q$ der Seitenlänge 10 km ist von einem Wassergraben $u$ umgeben. Zur Bewässerung soll $Q$ durch Anlegen weiterer Gräben $g$ vollständig in rechteckige Teilfelder $F_1, F_2, \ldots, F_n$ zerlegt werden. (Die Breite der Gräben werde vernachlässigt; das Bild zeigt ein Beispiel für eine solche Zerlegung.)

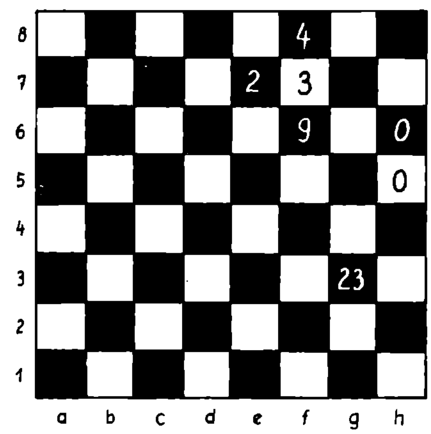



Ferner werde gefordert, daß jeder Punkt der Fläche $Q$ nicht weiter als 100 m von einem Wassergraben ($u$ oder $g$) entfernt ist.
a) Man beweise: Wenn diese Forderung durch Gräben $g$ einer Gesamtlänge von $L$ Kilometern erfüllt wird, so folgt stets $L \geqq 480$.
b) Man beweise, daß es einen kleinsten Wert gibt, den $L$ (bei Erfüllung der genannten Forderung) annehmen kann, und ermittle diesen Wert.



# Kriminalistischer Spürsinn am Schachbrett

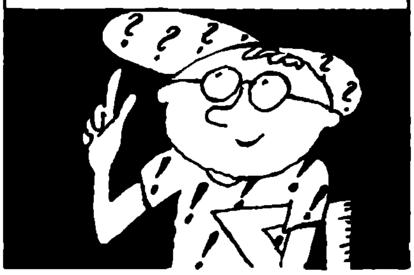
Das Schachspiel bietet uns auch die Möglichkeit Probleme und Aufgaben in der Kniffligkeit zu erweitern, die Verbindung von mathematischer Logik und schachlicher Kombinatorik zu vertiefen. Als Löser wird man veranlaßt, mit fast kriminalistischem Spürsinn zwingend logisch zu kombinieren, um die Lösung korrekt zu beweisen.




Im vorstehenden Diagramm sind 7 Schachfiguren auf die Felder zu setzen, die mit einer Ziffer gekennzeichnet sind. Die jeweilige Ziffer besagt, daß die daraufstehende Figur diese Anzahl Möglichkeiten zum Ziehen hätte. Von den 7 Schachfiguren sind 3 weiß und 4 schwarz. Bei richtiger Aufstellung der gesuchten Figuren ergibt sich ein Zweizüger (Matt in 2 Zügen), der zu lösen ist!

*H. Rüdiger*

# Lösungen



**Lösungen zum alpha-Wettbewerb**
Heft 1/88

Ma 5 ■ 2874 Aus $5 \cdot x \cdot y < 65$ folgt $x \cdot y < 13$. Folgende Zahlenpaare erfüllen die gegebene Ungleichung:

| $x$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |

| $x$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 12 | 3 | 4 | 5 | 6 | 4 |

Ma 5 ■ 2875
Wir rechnen: 28 km · 7 = 196 km;
196 km + 28 km = 224 km;
224 km : 2 = 112 km; 112 km · 3 = 336 km
(Gesamtlänge der Reisestrecke).

Ma 5 ■ 2876 Eine mögliche Lösung ist die folgende:
567 + 328 + 104 = 999.

Ma 5 ■ 2877 Wir stellen eine Tabelle auf: Lebensalter von

| Maik gegenwärtig | Isolde gegenwärtig |
|---|---|
| 6 | 1 |
| 12 | 2 |
| 18 | 3 |
| **Maik in 8 Jahren** | **Isolde in 8 Jahren** |
| 14 | 9 |
| 20 | 10 |
| 26 | 11 |

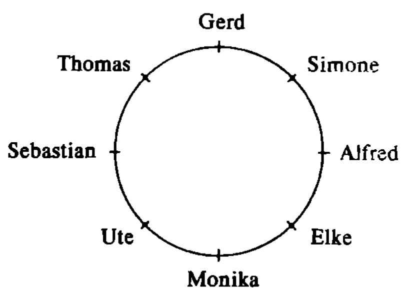
Nur die zweite Zeile der Tabelle erfüllt die Bedingungen. Maik ist gegenwärtig 12 Jahre, seine Schwester Isolde 2 Jahre alt.

Ma 5 ■ 2878 1 209 600 : (60 · 60 · 24) = 14. In 14 Tagen, also am 24. Mai, treffen sich Walter und Rolf wieder.

Ma 5 ■ 2879 Für den Buchstaben S könnte die Ziffer 1 oder 2 eingesetzt werden. Für S = 1 gilt E = 3.
Es sei U = 2, also M = 6. Da 3 · L weder durch 16 noch durch 26 teilbar ist, entfällt diese Möglichkeit.
Es sei U = 4, also M = 2. Dann müßte L = 7 sein. Daraus folgt weiter P = 4, was wegen U = 4 nicht möglich ist.
Es sei U = 6, also M = 8. Dann müßte L = 9 sein. Daraus folgt weiter P = 8, was wegen M = 8 nicht möglich ist.
Es sei U = 7, also M = 1, was wegen S = 1 nicht möglich ist.
Es sei U = 8, also M = 4. Dann müßte L = 4 sein, was wegen M = 4 nicht möglich ist.
Es sei U = 9, also M = 7. Dann müßte L = 5 sein. Daraus folgt weiter P = 6. Wir erhalten folgende Lösung:
6591 + 6591 + 6591 = 19 773.
Für S = 2 existiert keine weitere Lösung, wovon man sich bei gleichartigem systematischem Vorgehen leicht überzeugen kann.

Ma 5 ■ 2880
Mögliche Lösungen sind die folgenden:
3 : 3 + 3 − 3 = 1, 3 + 3 + 3 : 3 = 7,
3 : 3 + 3 : 3 = 2, 3 · 3 − 3 : 3 = 8,
3 · 3 − 3 − 3 = 3, 3 · 3 + 3 − 3 = 9,
3 + 3 − 3 · 3 = 5, 3 · 3 + 3 : 3 = 10.
3 + 3 + 3 − 3 = 6,

Ma 6 ■ 2881 Aus (1) und (2) folgt: Elke ist weder die Frau von Gerd, noch von Thomas, noch von Sebastian. Folglich ist Elke mit Alfred verheiratet.
Aus (4) folgt: Simone ist nicht Thomas Frau. Aus (3) folgt: Die Frau von Thomas heißt nicht Monika. Folglich ist Ute mit Thomas verheiratet.
Aus (4) folgt: Simone ist nicht die Frau von Gerd. Folglich ist Monika mit Gerd und Simone mit Sebastian verheiratet.




Ma 6 ■ 2882 Das k.g.V. von 2, 3, 4, 5 und 6 ist 60. Folglich müssen es $60x + 1$ oder $7y$ Schüler sein. Nun gilt
$7y = 60x + 1$ und $300 < 60x + 1 < 400$.
Von den Zahlen 301 und 361 ist nur 301 durch 7 teilbar. Deshalb gilt $x = 5$ und $y = 43$. Im Ferienlager befinden sich 301 Schüler.

Ma 6 ■ 2883 Angenommen, es sind $x$ Gänse; dann gilt

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100,$$

$$\frac{11}{4} \cdot x = 99, \quad x = \frac{99 \cdot 4}{11}, \quad x = 36.$$

Auf dem Teich schwammen 36 Gänse.

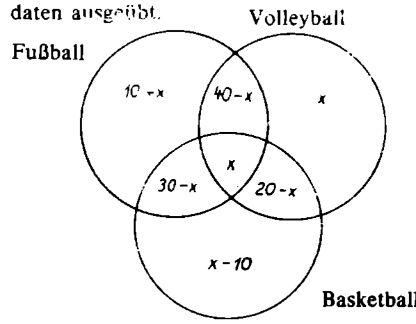
Ma 6 ■ 2884 Die Primzahlen zwischen 10 und 20 lauten 11, 13, 17 und 19. Die Mutter könnte also, da sie 22 Jahre älter als Grit ist, 33 oder 35 oder 39 oder 41 Jahre alt sein. Von diesen Zahlen ist nur 35 durch 5 teilbar. Die Mutter ist 35 Jahre, der Vater 36 Jahre, Grit 13 Jahre, Katja 9 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2885 Es gilt $z = \overline{abba}$,
also $q = 2a + 2b$.
Wegen $10a + b = 2a + 2b$ gilt $b = 8a$.
Wegen $1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$ existiert genau eine Lösung, nämlich $a = 1$, also $b = 8$. Die Telefonnummer lautet 1881.

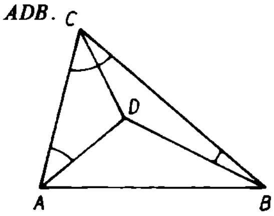
Ma 6 ■ 2886 Die quadratische Grundfläche des Bassins bestehe aus $a^2$ Kacheln. Jede Seitenfläche hat dann $2 \cdot a$ Kacheln, alle vier Seitenflächen also $8 \cdot a$ Kacheln.
Nun gilt $a^2 = 8 \cdot a$, also $a = 8$. Das Volumen des Bassins beträgt somit
$V = a^2 \cdot 2 = 2a^2 = 2 \cdot 8^2$ Liter
= 128 Liter.

Na/Te 6 ■ 416
Die Dichte von Blei beträgt $11{,}3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
Aufgabe kann nur durch inhaltliches Lösen gelöst werden: Das Volumen beträgt 27 ml, das sind 27 cm³ (vgl. LB Physik 6, S. 49). Wenn die Figur aus Blei vollständig wäre, dann müßte die Masse 305,1 g betragen. Da die Masse geringer ist als die auf der Waage bestimmten Masse, muß die Figur innen z. T. hohl sein. Die Massendifferenz beträgt 26,6 g. Durch Überlegung gewinnt man: Der Hohlraum hat ein Volumen von 2 cm³.

Ma 7 ■ 2887 Dem abgebildeten Diagramm ist folgendes zu entnehmen:
$(10 + x) + (40 - x) + x + (30 - x)$
$+ x + (20 - x) + (x - 10) = 100$,
also $x + 90 = 100$, $x = 10$.
Alle drei Ballspielarten werden von 10 Soldaten ausgeübt.




Ma 7 ■ 2888 Verlängert man $CD$ über $D$ hinaus, dann gilt nach dem Außenwinkelsatz für die Dreiecke $ADC$ und $BCD$
$(\sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD) + (\sphericalangle DCB + \sphericalangle CBD)$
$= \sphericalangle ADB$.




Wegen $\sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB$ ist damit die Behauptung bewiesen.

Ma 7 ■ 2889 $t_1 = 7$ min 30 s = 450 s;
$t_2 = 9$ min 30 s = 570 s; $v_2 = v_1 - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$;
wegen $s_1 = s_2$ gilt $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$,
also $450 \cdot v_1 = 570 \cdot (v_1 - 4)$,
$v_1 = 19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, und somit
$s = 19 \cdot 450$ m = 8550 m. Der Tauerntunnel hat eine Länge von 8550 m.

Ma 7 ■ 2890 Ein Rhombus ist zugleich ein Trapez bzw. ein Parallelogramm, aber kein Quadrat. Folglich handelt es sich bei dem Viereck um einen Rhombus.

Ma 7 ■ 2891
Aus $\frac{1}{4} < \frac{x}{17} < \frac{1}{3}$ folgt $\frac{51}{204} < \frac{12x}{204} < \frac{68}{204}$,
also $51 < 12x < 68$ und somit $x = 5$.
Deshalb gilt $\frac{1}{4} < \frac{5}{17} < \frac{1}{3}$.

Na/Te ■ 417 Durch inhaltliche Überlegung gewinnt der Schüler bei Anwendung der Gleichung für die Hubarbeit und der Umrechnung der Masse des Körpers in seine Gewichtskraft: $h = 1{,}25$ m. Da der Weg auf dem Brett 4mal so lang ist wie die Hubhöhe, ist nur $\frac{1}{4}$ der Kraft notwendig bei Benutzung der Rampe.
Die Kraft beträgt also 500 N.

Na/Te 7 ■ 418 Das Gesamtvolumen beträgt 3000 m³. Aus der verdrängten Wassermasse ergibt sich, daß 2500 m³ (b) eingetaucht sind. Folglich sind 500 m³ über Wasser (a).

Ma 8 ■ 2892 Wir stellen eine Tabelle auf:

| Familienmitglied | Alter in Jahren |
|---|---|
| Roland | $x$ |
| Ulrich | $2x$ |
| Mutter | $7x$ |
| Ingrid | $y$ |

Vor drei Jahren war Ingrid $(y - 3)$ und Roland $(x - 3)$ Jahre alt.
Nach den Angaben der Aufgabe gilt
$y - 3 = 5(x - 3)$, d.h. $y = 5x - 12$
für das jetzige Alter von Ingrid.
Wir rechnen:
$x + 2x + 7x + (5x - 12) = 63$,
$15x - 12 = 63$, $15x = 75$, $x = 5$.
Roland ist 5, Ulrich 10, Ingrid 13 und die Mutter 35 Jahre alt.
Die Probe bestätigt, daß die Aufgabe richtig gelöst wurde.

Ma 8 ■ 2893 Aus $a^2 - b^2 = 91$ folgt
$(a + b)(a - b) = 91 = 1 \cdot 7 \cdot 13$.
Daraus folgt weiter

$$\begin{array}{ll} a + b = 91 & \text{oder } a + b = 13 \\ \underline{a - b = \ \ 1} & \quad \underline{a - b = \ \ 7} \\ 2a = 92 & \quad 2a = 20 \\ a = 46, \text{ also} & \quad a = 10, \text{ also} \\ b = 45 & \quad b = \ \ 3. \end{array}$$

Die geordneten Paare [46; 45] und [10; 3] erfüllen die gestellten Bedingungen; es gilt
$46^2 - 45^2 = 2116 - 2025 = 91$ und
$10^2 - 3^2 = 100 - 9 = 91$.

Ma 8 ■ 2894 Wir stellen eine Tabelle auf:

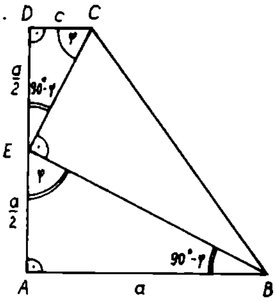
| Platzziffer | Anzahl der Punkte | |
|---|---|---|
| 4. | $x$ | |
| 4. | $x$ | |
| 5. | $x - 2$ | |
| 2. | $2(x-2) + 1$ | $= 2x - 3$ |
| 1. | $2(x-2) + 1 + 8$ | $= 2x + 5$ |
| 3. | $2(x-2) + 1 - 3$ | $= 2x - 6$ |

Nach Addition der Punktzahlen erhält man $9x - 6 = 147$ bzw. $9x = 153$,
d.h. $x = 17$.
Es ergeben sich in geordneter Reihenfolge nachstehende Punktzahlen

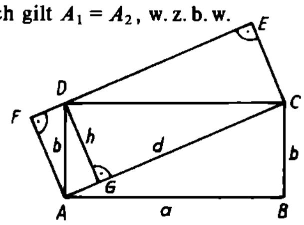
| Platzziffer | Anzahl der Punkte |
|---|---|
| 1. | 39 |
| 2. | 31 |
| 3. | 28 |
| 4. | je 17 |
| 5. | 15 |

Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

Ma 8 ■ 2895 Dem Bild ist folgendes zu entnehmen: $\Delta ABE \sim \Delta CDE$, also
$c : \frac{a}{2} = \frac{a}{2} : a$ und somit $a = 4c$.
Für den Flächeninhalt des Trapezes gilt deshalb
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (a + c) = \frac{1}{2} \cdot 4c \cdot (4c + c)$
$= 10c^2$.




Ma 8 ■ 2896 Es sei $A_1 = a \cdot b$ der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$. Das von $D$ auf $\overline{AC}$ gefällte Lot habe den Fußpunkt $G$. $\overline{AB}$ habe die Länge $a$, $\overline{BC}$ die Länge $b$, $\overline{AC}$ die Länge $d$ und $\overline{DG}$ die Länge $h$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $AGD$ und $ACD$ folgt $h : b = a : d$, also $h = \frac{a \cdot b}{d}$. Für den Flächeninhalt $A_2$ des Rechtecks $ACEF$ gilt dann
$A_2 = d \cdot h$; $A_2 = d \cdot \frac{a \cdot b}{d}$; $A_2 = a \cdot b$.
Folglich gilt $A_1 = A_2$, w. z. b. w.




Na/Te 8 ■ 419 Es sind $x$ Lampen zu 75 W und $(45 - x)$ Lampen zu 40 W vorhanden. Die Leistungsbilanz ergibt
$x \cdot 75\,\text{W} + (45 - x) \cdot 40\,\text{W} = 2500\,\text{W}$,
$x = 20$. Es sind 20 Lampen zu 75 W und 25 Lampen zu 40 W vorhanden.

Na/Te 8 ■ 420
Ges.: Länge des Drahtes $l$ (in m)
Gegeben: Masse des Wassers $m = 200$ g,
Temperaturerhöhung $\Delta T = 90$ K,
Zeit der Erwärmung $t = 3$ min $= 180$ s,
Wärmekapazität des Wassers
$c = 4{,}186 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}}$, Spannung $U = 220$ V,
Spez. Widerst. des Drahtes
$\varrho = 1{,}20\,\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ (Tafelwerk),
Querschnitt des Drahtes $A = 0{,}1\,\text{mm}^2$,
Wirkungsgrad $\eta = 90\,\%$.
Zur Erwärmung des Wassers sind
$Q = c \cdot m \cdot \Delta T = 4{,}186 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}} \cdot 200\,\text{g}$
$\times\, 90$ K erforderlich.
Die unter Berücksichtigung des Wirkungsgrades erforderliche Wärme beträgt
$Q_e = \frac{Q}{\eta}$. Die notwendige Wärmeleistung der Heizquelle beträgt
$P_{th} = \frac{Q_e}{t} = \frac{4{,}186\,\text{J} \cdot 200\,\text{g} \cdot 90\,\text{K} \cdot 10}{\text{g} \cdot \text{K} \cdot 180\,\text{s} \cdot 9}$
$= 465 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 465$ W.

Die Leistung muß vom elektrischen Strom aufgebracht werden:
Da $P_{el} = \frac{U^2}{R}$ und $R = \frac{\varrho \cdot l}{A}$ ist, gilt
$P_{el} = \frac{U^2 \cdot A}{\varrho \cdot l}$
$= 220^2\,\text{V}^2 \cdot 0{,}1 \frac{\text{mm}^2 \cdot \text{m}}{1{,}2\,\Omega \cdot \text{mm}^2 \cdot l}$ $\qquad P_{el} = P_{th}$
Daraus
$l = \frac{220^2\,\text{V}^2 \cdot 0{,}1\,\text{mm}^2 \cdot \text{m}}{1{,}20\,\Omega \cdot \text{mm}^2 \cdot 465\,\text{W}}$, $l = 8{,}67$ m
Beachte: $1\,\text{W} = 1\,\text{V} \cdot 1\,\text{A}$ $\quad 1\,\Omega = \frac{1\,\text{V}}{1\,\text{A}}$!
Die Länge des Drahtes muß etwa 8,7 m betragen.

Ma 9 ■ 2897 $11^3 = 1331 = 78 \cdot 17 + 5$;
$11^3$ läßt bei Division durch 17 den Rest 5.
$7^5 = 16\,807 = 988 \cdot 17 + 11$;
$7^5$ läßt bei Division durch 17 den Rest 11.
Somit läßt $11^3 + 7^5$ bei Division durch 17 den Rest $5 + 11 = 16$, also $(11^3 + 7^5)^4$ den Rest $16^4$.
$16^4 = 65\,536 = 3855 \cdot 17 + 1$; $16^4$ läßt bei Division durch 17 den Rest 1.
$z = (11^3 + 7^5)^4 - 1$ läßt deshalb bei Division durch 17 den Rest $1 - 1 = 0$, d.h. $z$ ist durch 17 teilbar.

Ma 9 ■ 2898 Angenommen, auf dem Parkplatz sind $x$ Pkw vom Typ Wartburg, $y$ Pkw vom Typ Lada, also $(y + 14)$ Pkw vom Typ Trabant abgestellt;
dann gilt $x + y + (14 + y) = 89$,
also $x + 2y = 75$ mit $x < y$.
Daraus folgt $x = 75 - 2y$, wobei die Zahlen $x$, $y$ und $(y + 14)$ Primzahlen sind.
Aus $75 - 2y = x$ und $x < y$ folgt
$75 - 2y < y$, $3y > 75$, also $y > 25$.
Aus $75 - 2y > 0$ folgt $2y < 75$, also
$y \leq 37$. Also gilt $y = 29$ oder $y = 31$ oder $y = 37$.
Für $y = 31$ und $y = 37$ ist $y + 14$ nicht Primzahl. Deshalb existiert genau eine Lösung, nämlich
$y = 29$, $x = 17$, $y + 14 = 43$.
Auf dem Parkplatz sind 17 Pkw vom Typ Wartburg, 29 vom Typ Lada und 43 vom Typ Trabant abgestellt.

Ma 9 ■ 2899 In jedem Rhombus sind die Diagonalen senkrecht zueinander und halbieren einander. Sie zerlegen den Rhombus in vier paarweise kongruente rechtwinklige Dreiecke. In einem solchen Dreieck finden wir die Beziehung
$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$, wenn $a$ die Länge einer Seite, $e$ bzw. $f$ die Längen der beiden Diagonalen des Rhombus bezeichnen.
Wir formen die Gleichung äquivalent um und erhalten
$a^2 = \frac{e^2 + f^2}{4}$ bzw. $4a^2 = e^2 + f^2$,
womit die Behauptung bewiesen ist.

Ma 9 ■ 2900 $4^1 = 4$ endet auf 4; $4^2 = 16$ endet auf 6; $4^3 = 64$ endet auf 4; $4^4 = 256$ endet auf 6; $4^{2n}$ mit $n \in N$ und $n \neq 0$ endet auf 6; $4^{2n+1}$ mit $n \in N$ endet auf 4. Es folgt: $4^{701}$ endet auf 4.
$8^1 = 8$ endet auf 8; $8^2 = 64$ endet auf 4; $8^3 = 512$ endet auf 2; $8^4 = 4096$ endet auf 6; $8^5 = 32\,768$ endet auf 8 usw. (s. o.)

$8^{4\cdot 250} = 8^{1000}$ endet auf 6;
$8^{1000}\cdot 8^3 = 8^{1003}$ endet auf $6\cdot 2 = 12$,
also auf 2.

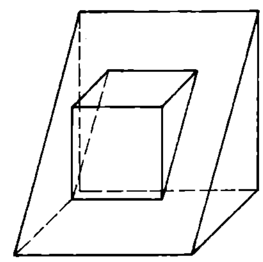
Ma 9 ■ 2901 Nach den Angaben in der Aufgabe ist die Kiste 1 m lang, 20 cm breit und 15 cm hoch.
Wenn der Stab in die Kiste passen soll, dann darf er nicht länger sein als die Raumdiagonale der quaderförmigen Kiste. Die Länge dieser Raumdiagonale kann man mit zweimaliger Anwendung des Satzes des Pythagoras berechnen oder entnimmt der Zahlentafel die Formel
$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, wobei $e$ die Länge der Raumdiagonale des Quaders und $a$, $b$ bzw. $c$ die Längen der Quaderkanten bezeichnen. Man erhält
$e = \sqrt{100^2 + 20^2 + 15^2}$ cm,
$e = \sqrt{10\,625}$ cm, $e \approx 103{,}07$ cm.
Der Metallstab paßt in diese Kiste nicht hinein!

Na/Te 9 ■ 421
Ges.: Anzahl der Stehplätze $x$
Gegeben: Eigenmasse $m_e = 7000$ kg,
Bremskraft $F = 62\,000$ N,
Anhalteweg $s = 40$ m,
Anfangsgeschwindigkeit $v = \frac{72}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Es wird zunächst die Bremsverzögerung $a$ berechnet:
$v^2 = 2\cdot a\cdot s$, $a = \frac{v^2}{2\cdot s}$, $a = 5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.
Die Gesamtmasse des Fahrzeuges
$m = m_e + 42\cdot 75\,\text{kg} + x\cdot 75\,\text{kg}$.
Nach dem Newtonschen Grundgesetz $F = m\cdot a$ ergibt sich eine Gleichung für $x$. Es ergibt sich $x = 30$. Es können also maximal 30 Personen stehend befördert werden, wenn der geforderte Anhalteweg gewährleistet werden soll.

Na/Te 9 ■ 422 Gegeben: $l = 85$ m,
$b = 12$; $t = 2{,}5$ m; $\varrho_w = \frac{1\,\text{t}}{\text{m}^3}$,
Eigenmasse $m_e = 1750$ t.
a) und b) haben die gleiche Lösung, denn nach dem Gesetz von Archimedes ist bei einem schwimmenden Körper die Auftriebskraft so groß wie die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.
Außerdem gilt: Bei einem schwimmenden Körper sind Auftriebskraft und Gewichtskraft gleich groß. Das einfahrende Schiff verdrängt so viel Wasser, wie seine Gewichtskraft beträgt.
Der vollständig mit Wasser gefüllte Trog hat eine Masse $m$ von
$m = l\cdot h\cdot t\cdot \varrho_w + m_e$
$= 85\,\text{m}\cdot 12\,\text{m}\cdot 2{,}5\,\text{m}\cdot\frac{1\,\text{t}}{\text{m}^3} + 1750\,\text{t}$.
Das ergibt eine Gewichtskraft von $m\cdot 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{t}}$.
Die Hubkraft beträgt $43\cdot 10^6$ N.

Ma 10/12 ■ 2903 $6^3 = 216$ endet auf 6. $27^{12}$ endet auf dieselbe Grundziffer wie $7^{12}$; $7^4 = 2401$ endet auf 1, $7^{4n}$ ($n\in N$) endet auf 1, $7^{12} = 7^{4\cdot 3}$ endet auf 1. Somit endet $27^{12}$ auf 1.
$107^{18}$ endet auf dieselbe Grundziffer wie $7^{18}$; $7^{4\cdot 4} = 7^{16}$ endet auf 1, $7^2 = 49$ endet auf 9, $7^{18} = 7^{16}\cdot 7^2$ endet auf $1\cdot 9 = 9$.
Somit endet $107^{18}$ auf 9.
$3^{11} = 3^8\cdot 3^3$; $3^4 = 81$ endet auf 1, $3^8 = 3^{4\cdot 2}$ endet auf 1, $3^3 = 27$ endet auf 7,
$3^{11} = 3^8\cdot 3^3$ endet auf $1\cdot 7 = 7$.
Also endet $6^3\cdot 27^{12}\cdot 107^{18}\cdot 3^{11}$ auf $6\cdot 1\cdot 9\cdot 7 = 378$, also auf 8.

Ma 10/12 ■ 2904 Es handelt sich um einen zusammengesetzten Körper, und zwar um zwei gerade dreiseitige Prismen.
Lösungsmöglichkeit:



Ma 10/12 ■ 2905 a) Man denkt sich einen beliebigen Punkt $P$ im Innern dieses 100-Ecks und verbindet diesen mit allen Eckpunkten, so daß 100 Dreiecke entstehen, deren Innenwinkelsumme $100\cdot 180°$ $= 18\,000°$ beträgt. Subtrahiert man davon die Summe aller Winkel mit dem Scheitel $P$ (360°), so erhält man 17 640°.
In einem regelmäßigen 100-Eck sind alle Innenwinkel gleich groß; die Größe eines Innenwinkels beträgt demnach
$17\,640 : 100 = 176{,}4°$. (In diesem 100-Eck fällt der Punkt $P$ mit dem Mittelpunkt des Umkreises zusammen.)
b) Man zerlegt das $n$-Eck in $n$ gleichschenklige paarweise kongruente Dreiecke, deren Innenwinkelsumme die Größe von $n\cdot 180°$ hat. Davon subtrahiert man die Summe aller Winkel an den Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke (360°) und erhält
$n\cdot 180° - 360° = (n-2)\cdot 180°$. Für regelmäßige $n$-Ecke ist nun noch durch die Anzahl $n$ der Ecken zu dividieren, so daß sich für die Größe $\alpha$ eines Innenwinkels ergibt:
$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}.$$
c) Es sei $M$ der Mittelpunkt des Umkreises des regelmäßigen 100-Ecks und Spitze aller 100 gleichschenkligen Dreiecke. Jeder Schenkel eines Dreiecks ist ein Radius des Umkreises. Für den Flächeninhalt dieses 100-Ecks gilt:
$$A_{100} = \frac{100\cdot r^2 \sin 3{,}6°}{2};$$
$A_{100} \approx 3{,}1395\cdot r^2$.
Der Flächeninhalt des Umkreises beträgt
$A_U = \pi r^2$; $A_U \approx 3{,}1416\cdot r^2$.
Der Flächeninhalt des regelmäßigen 100-Ecks ist um etwa 0,07 % kleiner als der des Umkreises.

Ma 10/12 ■ 2906 Durch Probieren findet man relativ leicht, daß
$16\cdot 17\cdot 18\cdot 19 = 93\,024$ ist, d. h.,
die vier gesuchten Zahlen sind 16, 17, 18 und 19.
Bezeichnet man die kleinste der vier Zahlen mit $x$ und das Produkt der vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit $a$, so gilt allgemein
$a = x(x+1)(x+2)(x+3)$; $x\in N$ und $x \neq 0$. Wir nehmen nun die folgenden äquivalenten Umformungen vor und erhalten
$a = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$,
$a + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$,
$\sqrt{a+1} = x^2 + 3x + 1$,
$\sqrt{a+1} + 1{,}25 = x^2 + 3x + 2{,}25$,
$\sqrt{a+1} + 1{,}25 = (x + 1{,}5)^2$,
$\sqrt{\sqrt{a+1} + 1{,}25} = x + 1{,}5$.
Es folgt nun
$x = f(a)\,\sqrt{\sqrt{a+1} + 1{,}25} - 1{,}5$.
An einer Probe zeigen wir auch, wie der Einsatz des Taschenrechners hier besonders rationell ist.
Es ist $88\cdot 89\cdot 90\cdot 91 = 64\,144\,080$.
Nach der Formel verfahren wir in folgenden Schritten:
(1) $64\,144\,080 + 1 = 64\,144\,081$;
(2) $\sqrt{64\,144\,081} = 8009$;
(3) $8009 + 1{,}25 = 8010{,}25$;
(4) $\sqrt{8010{,}25} = 89{,}5$;
(5) $89{,}5 - 1{,}5 = 88$.
Die kleinste der vier Zahlen ist 88; die Zahlen sind 88, 89, 90, 91.

Na/Te 10 ■ 423 Ges.: Kapazität $C$ (in µF)
Gegeben: $P_{\text{mech}} = 20$ kW;
$\cos\varphi = 0{,}75 \rightarrow \varphi = 41{,}4°$
$\eta = 0{,}85$ $\quad f = 50$ Hz
Aus $P_{\text{mech}}$ und $\eta$ ergibt sich dem Netz entnommene Wirkleistung $P$ in $W$
$P = \frac{P_{\text{mech}}}{\eta}$. Aus $P$ und $\cos\varphi$ ergibt sich dem Netz entnommene Scheinleistung $S$ in VA, $S = \frac{P}{\cos\varphi}$.
Aus $S$ und $\sin\varphi$ ergibt sich dem Netz entnommene Blindleistung $Q$ in var
$Q = S\cdot\sin\varphi$
$= P\cdot\tan\varphi = P_{\text{mech}}\cdot\frac{\tan\varphi}{\eta}$.
Der Kondensator entnimmt dem Netz folgende Blindleistung:
$Q_c = \frac{U^2}{X_c}$. Mit $X_c = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C}$,
$Q_c = U^2\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot C$.
Bei vollständiger Kompensation ist $Q = Q_c$.
Daraus folgt
$C = \frac{Q}{2\cdot\pi\cdot f\cdot U^2}$. Werte eingesetzt:
$C = 1365\,\mu\text{F}\left(1\,\text{F} = 10^{-6}\,\frac{\text{AS}}{\text{V}}\right)$.
Es ist ein Kondensator mit einer Kapazität von etwa 1400 µF parallel zu schalten.

Na/Te 10/12 ■ 424 Ges.: Weg $s$ (in m)
Gegeben: Anfangsgeschwindigkeit
$v_1 = \frac{50}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, Endgeschwindigkeit
$v_2 = \frac{80}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, Beschleunigung $a = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
Ist $t$ die benötigte Zeit zum Beschleunigen, so gilt
$s = v_1\cdot t + a\cdot\frac{t^2}{2}$, $v_2 = v_1 + a\cdot t$
eingesetzt und umgeformt:
$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\cdot a} = 50{,}15$ m. Es wird ein Weg von etwa 50 m benötigt.

**Lösung zu: Springzahlrätsel**

Man erhält die folgenden drei magischen Quadrate:

| | | |
|---|---|---|
| 1: 6 | 2: 1 | 3: 8 |
| 4: 7 | 5: 5 | 6: 3 |
| 7: 2 | 8: 9 | 9: 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10: 1 | 11: 12 | 12: 8 | 13: 13 |
| 14: 14 | 15: 7 | 16: 11 | 17: 2 |
| 18: 15 | 19: 6 | 20: 10 | 21: 3 |
| 22: 4 | 23: 9 | 24: 5 | 25: 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 26: 24 | 27: 10 | 28: 16 | 29: 2 | 30: 13 |
| 31: 17 | 32: 3 | 33: 14 | 34: 25 | 35: 6 |
| 36: 15 | 37: 21 | 38: 7 | 39: 18 | 40: 4 |
| 41: 8 | 42: 19 | 43: 5 | 44: 11 | 45: 22 |
| 46: 1 | 47: 12 | 48: 23 | 49: 9 | 50: 20 |

**Lösungen zu: Sprachecke**

▲1▲ Von welcher Mehrfachkreislinie, dargestellt in der Zeichnung, ist die Summe der Längen größer – der oberen oder der unteren?
*Lösung:* Sind $u$ und $v$ die Längen der Durchmesser der beiden nach oben gewölbten Halbkreise und $w$, $x$, $y$, $z$ die der nach unten gewölbten, so ist die Summe der Längen der oberen Halbkreisbögen

$$s_1 = \frac{\pi}{2}u + \frac{\pi}{2}v = \frac{\pi}{2}(u + v)$$

und die der unteren

$$s_2 = \frac{\pi}{2}w + \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y + \frac{\pi}{2}z = \frac{\pi}{2}(w + x + y + z).$$

Da laut Zeichnung
$u + v = w + x + y + z = \overline{AB}$ ist, folgt

$$s_1 = s_2 = \frac{\pi}{2}\overline{AB}.$$

Beide Summen sind somit gleich groß.

▲2▲ An einer Kreuzung steht die Verkehrsampel für 50 s auf „Grün", 5 s auf „Gelb" und 30 s auf „Rot". Um 7 Uhr schaltet die Ampel auf „Grün". Wie oft steht die Ampel zwischen 7 Uhr und 19 Uhr auf „Grün"?
*Lösung:* In den 43 200 Sekunden zwischen 7 Uhr und 19 Uhr wird der Zyklus „Grün – Gelb – Rot – Gelb", der insgesamt 90 Sekunden dauert, 480mal geschaltet, d. h. „Grün" wird von der Ampel auch 480mal angezeigt (43 200 : 90 = 480).

▲3▲ Es seien $a$, $b$, $c$, $d$ vier positive ganze Zahlen, für die gilt: $ab = cd$. Es ist zu beweisen, daß $a + b + c + d$ keine Primzahl ist.
*Lösung:* Es gilt:
$a(a + b + c + d) = a^2 + ab + ac + ad$
$= a^2 + cd + ac + ad = (a + c)(a + d)$
Wenn $a + b + c + d$ eine Primzahl wäre, dann müßte sie entweder ein Faktor von $(a + c)$ oder $(a + d)$ sein. Das ist aber nicht möglich, da $a + b + c + d$ größer als jeder dieser Terme ist. Daraus folgt das Ergebnis.

▲4▲ Wir betrachten ein Quadrat mit der Seitenlänge 4. In seine vier Ecken beschreiben wir vier Kreise des Radius 1 so ein, wie es im Bild gezeigt ist. Nun fügen wir einen Kreis mit Zentrum im Schnittpunkt der Diagonalen hinzu, der die vier einbeschriebenen Kreise berührt. Berechne seinen Radius!
*Lösung:* Wir betrachten eine Diagonale des Quadrates. Ihre Länge setzt sich aus vier Radien der Kreise in den Ecken und aus vier Radien des Zentrumkreises zusammen.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt:
$4^2 + 4^2 = (4 \cdot r + 4)^2$.
Also ist $r = \sqrt{2} + 1$.

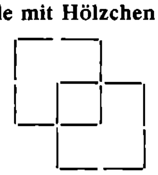
**Lösungen zu: Ferienmagazin**

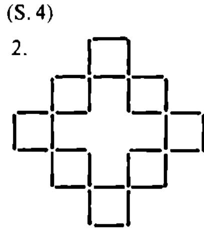
**Titelblatt** (S. 1)
102 + 923 = 1025 oder 106 + 962 = 1068.
268 + 805 = 1073 oder 943 + 325 = 1268.
1 – 9 + 8 + 8 = 8.

**Beobachtungstest** (S. 2)
Ein Baustein $G$ blieb übrig.

**Konkret** (S. 3)
1. Auf dem ersten Busch saßen vier, auf dem zweiten 12 Spatzen.
2. Erst 3 Liter in den 5-Liter-Topf; dann aus dem wieder gefüllten 3-Liter-Topf den 5-Liter-Topf füllen; bleibt in dem 3-Liter-Topf ein Liter zurück. Nun den 5-Liter-Topf ausgießen und den im 3-Liter-Topf verbliebenen Rest hineinschütten; dann nochmals 3 Liter hinzugeben. Damit befinden sich im 5-Liter-Topf genau vier Liter.
3. Der Abstand beträgt 450 m, die sich regelmäßig auf neun Zwischenräume verteilen.
4. Ein Kohlkopf wird aus dem Korb „Weißkohl/Rotkohl" entnommen. Ist es Rotkohl, so ist das andere ebenfalls ein Rotkohlkopf (Beschriftung stimmt ja nicht mehr). In dem Rotkohlkorb ist dann der Weißkohl und im Weißkohlkorb Weißkohl und Rotkohl. (Ist der zuerst herausgenommene Kohl weiß, muß man entsprechend überlegen.)

**Spiele mit Hölzchen** (S. 4)

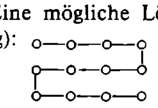
1. 

2. 

3.

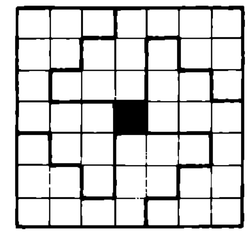
| | |
|---|---|
| III + II = V | VI – III = III |
| VII – II = V | V + IV = IX |

**Kürzeste Wege** (S. 5)
1. Monika hat die Wahl zwischen 10 Wegen, die alle gleich kurz sind:
1. W-C-S; 2. W-B-F-G-S;
3. W-B-K-S; 4. W-A-G-E-S;
5. W-A-E-F-K-S; 6. W-A-I-S;
7. W-D-G-S; 8. W-D-F-K-S;
9. W-D-E-I-S; 10. W-H-S.
2. Eine mögliche Lösung (einfachste Lösung):



**Die interessante Sieben** (S. 6)
Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

**aufgepaßt – mitgemacht** (S. 7)
1.



2. Die Teile 3 und 4 sind deckungsgleich.

**Abstrakt** (S. 8)
1. $80 = x + \frac{60}{100} \cdot x;\; x = 50.$
Die beiden Teile sind 30 und 50.
2. $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 100 = \frac{300}{6} = 50.$
Die Zahl heißt 50.
3. $1988 + x = 2000;\; x = 12.$
Die zweistellige Zahl heißt 12.
4. $9 + 99 + 999 - 1000 = 107.$
Die Eiche ist 107 Jahre alt.

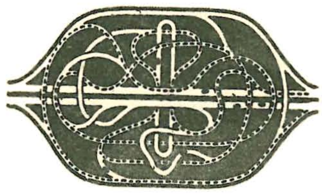
**Weißt du es?** (S. 9)
1. Waagerecht:
$14 : 2 = 7;\; 9 - 1 = 8;\; 5 \cdot 3 = 15$
2. $19 \cdot 14 = 266;\; 51 : 17 = 3;$
$249 + 41 = 290;\; 81 - 22 = 59;$
400; 94; 618.

**Ein Blick in die Praxis** (S. 10)
1. Marie-Luise erhielt vier 5-Pfennig-Stücke, acht 10-Pfennig-Stücke und acht Münzen zu 50 Pfennig.
2. Die Höhe des Baumes verhält sich zur Länge des Schattens wie der Stab zu seinem Schatten, also wie 3 : 2. Demnach ist der Baum 15 Meter hoch.
3. 18 Äpfel waren vorhanden, 7 sollten als Belohnung verschenkt werden,
denn $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{3} + 1;\; x = 18.$
4. Die großen Päckchen wiegen je 500 g, die kleinen je 300 g.

**Lustige Zahlenspielereien** (S. 11)
1. $3 - 3 : 3 - 3 : 3 = 1;$
$3 - 33 : 33 = 2;\; 3 + 3 + 3 - 3 = 3;$
$3 + (3 : 3) + (3 : 3) = 5;$
$(3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) : 3 = 6;\; (33 - 3) : 3 - 3 = 7;$
$3 + 3 + 3 - (3 : 3) = 8;$
$3 + 3 + 3 + 3 - 3 = 9.$
$1 = \frac{77}{77};\; 2 = \frac{7}{7} + \frac{7}{7};\; 3 = \frac{7 + 7 + 7}{7};$
$5 = 7 - \frac{7 + 7}{7};\; 6 = \frac{7 \cdot 7 - 7}{7};$
$7 = 7\frac{7 - 7}{7};\; 8 = \frac{7 + 7 \cdot 7}{7};$
$9 = 7 + \frac{7 + 7}{7}.$

2.
$$2 \cdot 2 \cdot 22 + 2 \cdot 2\left(2 + \frac{2}{2}\right) = 100$$
$$3 \cdot 3\left(3 \cdot 3 + 3 - \frac{3}{3}\right) + \frac{3}{3} = 100$$
$$4 \cdot 44 - 4\left(4 \cdot 4 + 4 - \frac{4}{4}\right) = 100$$
$$66 + 6 \cdot 6 - \frac{6 + 6}{6} + 6 - 6 = 100$$
$$77 + 7 + 7 + \frac{7 \cdot 7 + 7 + 7}{7} = 100$$
$$\frac{999}{9} - \frac{99}{9} + 9 - 9 = 100$$

**Irrgarten** (S. 12)




**Wie viele Flächen siehst du?** (S. 13)
1. Die Figur enthält 6 Quadrate und 20 Dreiecke.
2. Es liegen 10 Dreiecke übereinander.

**Suchbild** (S. 14)
Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

**Abstrakt** (S. 15)
1. Ein Produkt zweier zweistelliger Zahlen muß drei- oder vierstellig sein. So kommen nur 5555 oder 555 in Frage.
Ersteres entfällt, denn $5555 = 55 \cdot 101$.
Es bleibt 555. Die einzige mögliche Kombination zweistelliger Faktoren ist $555 = 15 \cdot 37$.
2. $a + b = 10$; $2(10a + b) - 1 = 10b + a$; $a = 3$; $b = 7$.
3. $\frac{70}{5}x = 420$; $x = 30$. Die Zahl ist 30.
4. $3x + 4x = 21$; $x = 3$.
5. $7x - 27 = 4x$; $x = 9$.
6. $a^2 + (a+1)^2 = 61$; $a^2 + a = 30$; $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$; $a = 5$; $b = 6$.

**Kryptarithmetik** (S. 16)
1. waagerecht: $(3 + 4) : 1 = 7$; $(2 \cdot 5) - 4 = 6$; $(1 \cdot 3) + 5 = 8$.
2. $24 + 30 = 54$; $7 \cdot 4 = 28$
oder $7 \cdot 3 = 21$; $36 : 9 = 4$
oder $32 \cdot 8 = 4$; $49 - 9 = 40$.

Die Aufgaben zu diesem Heft entstammen der Sammlung von J. Lehmann, Leipzig; Dr. R. Mildner, Leipzig (S. 1, 2 Aufg.); L. Penčikowa, Prag (S. 1); Füles, Budapest (S. 2, S. 12); Frösi, Berlin (S. 7, S. 13 je 1 Aufg.); NBI, Berlin (S. 14); Vignette aus *Wurzel*, Jena (S. 14).

**Lösungen zu: Angaben ausreichend für Eindeutigkeit?**
Heft 1/88

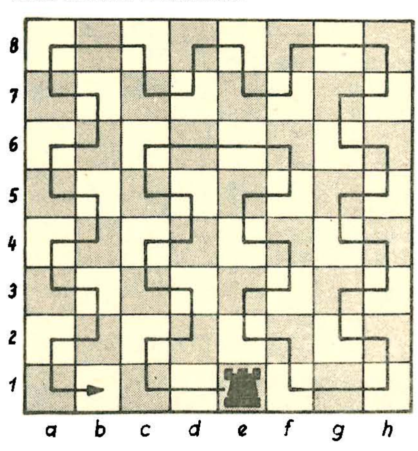
▲1▲ Die zweistellige Zahl sei $z$. Dann lautet die sechsstellige Zahl $\overline{z}\,\overline{z+1}\,\overline{z+2}$, d. h.
$z \cdot 10\,000 + (z + 1) \cdot 100 + (z + 2) = 10\,101z + 102$. Da ein Divisor $z$ ist, muß jeder Summand durch $z$ teilbar sein. Wegen $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ kann $z$ nur 17, 34 oder 51 sein. Da die sechsstellige Zahl halbiert wurde, ist nur 34 möglich. Sie lautet also 343 536. (Die Hälfte dividiert durch 68 ergibt 2526, das sind wieder zwei aufeinanderfolgende und nebeneinandergeschriebene zweistellige Zahlen.)

▲2▲ Die Bildungsvorschrift der fünf Zahlen ist $a$, $2a$, $6a$, $18a$, $54a$, $a \in N$, $10 \leqq a \leqq 99$. Die Zahl mit den gleichen Ziffern ist höchstens vierstellig.
(1) Bei vier gleichen Ziffern gilt
$1111 \cdot x = 11 \cdot 101 \cdot x$, $(x = 1, 2, \ldots, 9)$. Da 101 Primzahl, muß $a$ Vielfaches von 101 sein (Widerspruch zur Voraussetzung).
(2) Bei drei gleichen Ziffern gilt
$111 \cdot x = 3 \cdot 37 \cdot x$, $(x = 1, 2, \ldots, 9)$. Da 37 Primzahl ist, kann $a_1 = 37$, $a_2 = 74$ gelten. $a_1$ entfällt wegen 37, 74, 222, 666, ... (Widerspruch zur Voraussetzung). Jedoch 74, 148, 444, 1332, 3996 erfüllt alle Bedingungen.
(3) Bei zwei gleichen Ziffern hätte auch die erste Zahl (wegen $11 \cdot x$) gleiche Ziffern (Widerspruch zur Voraussetzung). Somit ist die in (2) angegebene Folge die einzige Möglichkeit.

**Lösung zu: Eine harte Nuß**
Heft 1/88
Es gelte die Ungleichung
$$\frac{3x^2}{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)^2} \leqq x + 1. \qquad (1)$$
Der linke Term von (1) ist offenbar nur definiert für
$$x \geqq -\frac{1}{3} \qquad (2)$$
und $x \neq 0$. (3)
Für alle $x$, die (2) und (3) erfüllen, müssen dann weiterhin die folgenden untereinander äquivalenten Ungleichungen gelten:
$$\frac{3x^2\left(\sqrt{1+3x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)^2\left(\sqrt{1+3x}+1\right)^2} \leqq x+1,$$
$$\left(\sqrt{1+3x}+1\right)^2 \leqq 3x+3,$$
$$2\sqrt{1+3x} \leqq 1,$$
$$x \leqq -\frac{1}{4}. \qquad (4)$$
Nach (2), (3) und (4) ist die Ungleichung (1) somit für alle $x$ mit $-\frac{1}{3} \leqq x \leqq -\frac{1}{4}$ erfüllt.

**Lösungen zu: Schachecke**
Heft 1/88
1. Lc1–b2 Lb5–c4; 2. Lb1–c2 Lc5–b4;
3. Lb2–d4 Lc4–a2; 4. Lc2–d3 Lb4–a3;
5. Ld1–a4 La5–d2; 6. La4–b5 Ld2–c1;
7. Ld4–c3 La2–b3; 8. Ld3–b1 La3–c5;
9. Lc3–a5 Lb3–d1; 10. La1–c3 Ld5–b3;
11. Lb5–d3 Lc1–a3; 12. Lc3–d2 Lb3–a4;
13. Ld3–c4 La3–b2; 14. Lb1–a2 Lc5–d4;
15. Ld2–b4 La4–c2; 16. Lc4–b5 Lb2–c1;
17. La2–d5 Ld4–a1; 18. Lb4–c5 Lc2–b1.

Heft 2/88
Bei der abgebildeten Turmwanderung werden 57 gerade Wegstrecken (Züge) benötigt. Keine andere Turmwanderung kann diese Anzahl übertreffen.



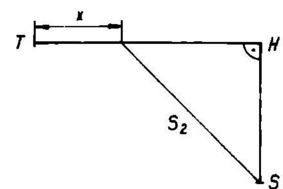

Heft 3/88
Weiß: Kf7, Dg3, Sf8.
Schwarz: Kh5, Lf6, Be7, h6.
Die Lösung dieses Zweizügers von Klaus-Peter Zuncke lautet:
1. Se6 Le5/Lg5 2. Dh3/Sg7 matt.

**Lösungen zu: Der Kreisklub Mathematik Halle-Süd stellt sich vor**
Heft 1/88

**BASIC-Befehle im Pfiffikus**
CLOAD, IF THEN

**Detektiv Schnüffel klärt auf**
Rudi Reich:

```
 10 CLS:Z=0
 20 FOR A=0 TO 50
 30 FOR B=0 TO 25
 40  FOR C=0 TO 10
 50   FOR D=0 TO 5
 60    FOR E=0 TO 2
 70     T=A*1+B*2+C*5+D*10
        +E*20
 80     IF T=50 THEN Z=Z+1
 90 NEXT E, D, C, B, A
100 PRINT "Es gibt"; Z; "Möglich-
    keiten."
110 END
```




Laufzeit rund 1 h und 43 min.
Es gibt wirklich 450 Möglichkeiten, Rudi hat die Wahrheit gesagt.
Steffen Stürz:

```
 10 CLS
 20 FOR X=0 TO 16000 STEP 500
 30   T1=X/25
 40   S2=SQR((16000-X)*(16000-X)
        +10000*10000)
 50   T2=S2/10:T=T1+T2
 60   MI=INT(T/60)
 70   SE=T-MI*60
 80   PRINT X; "m", MI; "min"; SE; "s"
 90 NEXT X
100 END
```

Mit diesem Programm erhält man bei $x = 11\,500$ m die kürzeste Zeit von 25 min 56,6 s. Untersucht man nun das Intervall $11\,000 \leqq x \leqq 12\,000$ mit der Schrittweite 50, erhält man bei 11 650 als kürzeste Zeit 25 min 56,5 s. Man könnte das Intervall weiter verkleinern, aber Stürz hat offensichtlich die Wahrheit gesagt.
Peter Primel:

```
 10 CLS
 20 G=15
 30 W=3
 40 G=G+W
 50 PRINT 1, G
 60 FOR T=2 TO 84
 70   W=W*0.9
 80   G=G+W
 90   PRINT T, G
100 NEXT T
110 END
```

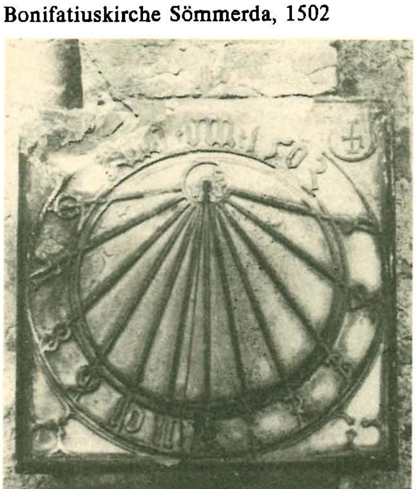
Die Größe nach 84 Tagen betrug nur knapp 45 cm. Peter Primel hatte gelogen!

# Konstruktion von Sonnenuhren

Sonnenuhren dienten unseren Vorfahren jahrhundertelang als Zeitmesser. Sie nutzen die Bewegung der Erde und ihren Umlauf um die Sonne. Noch vorhandene Sonnenuhren aus früherer Zeit sind wichtige Kultur-Dokumente, Sonnenuhren unserer Zeit halten die Tradition aufrecht und sind Schmuckelemente für Gebäude, Gärten und Parkanlagen. Seit es elektronische Taschenrechner gibt, ist die Berechnung von Sonnenuhren bedeutend einfacher geworden und für mathematische Arbeitsgemeinschaften gut geeignet. Das liegt aber nicht daran, daß die Berechnung schneller geht, sondern weil mit Formeln gerechnet wird, während früher zeichnerische Konstruktionen üblich waren. Außerdem liefern die Formeln Strecken, während mit den Zeichnungen Winkel hergestellt werden.

Ein weiterer Vorteil der hier vorgestellten Konstruktionsweise besteht darin, daß von vornherein eine *Einheitsstrecke*, in der Regel die Mittagslinie, festgelegt wird. Wenn diese Einheitsstrecke im Nenner steht, fällt sie weg, und der Zähler eines tan bleibt als *Tangentenstrecke* übrig. Dadurch werden dann auch weitere Formeln einfacher und übersichtlicher. Schließlich kann ein solches, auf eine Einheitsstrecke bezogenes Zifferblatt als ähnliche Figur durch Multiplikation aller Strecken mit demselben Faktor auf diejenige Größe gebracht werden, die für die Sonnenuhr geplant ist. Winkel bleiben bei solchen Maßstabsänderungen unverändert.

Vertikale Sonnenuhr
Bonifatiuskirche Sömmerda, 1502



**Die häufigsten Sonnenuhr-Typen**

1. Horizontale Sonnenuhr (Hor. SU)
Zifferblatt in der Horizontebene; Schattenstab zeigt oben nach dem Himmelsnordpol; Stundenlinien sind nach 12 Uhr zusammengedrängt; Stunden laufen rechts herum

2. Vertikal-Süd Sonnenuhr (Vert. SU)
Wand ist genau nach Süd gerichtet; Schattenstab zeigt unten nach dem Himmels-Südpol bzw. rückwärts hinter der Wand nach dem Himmels-Nordpol; Stundenlinien sind nach 12 Uhr zusammengedrängt; Stunden laufen links herum

3. Vertikal-abweichende Sonnenuhr (Abw. SU)
Wand weicht von der Südrichtung ab; Schattenstab zeigt beim Blick auf die Wand seitwärts abwärts; Mittagslinie jedoch genau senkrecht; Stundenlinien sind nach der *Substilaren* (Linie unter dem Schattenstab) zusammengedrängt. Diese SU ist formelmäßig interessant!

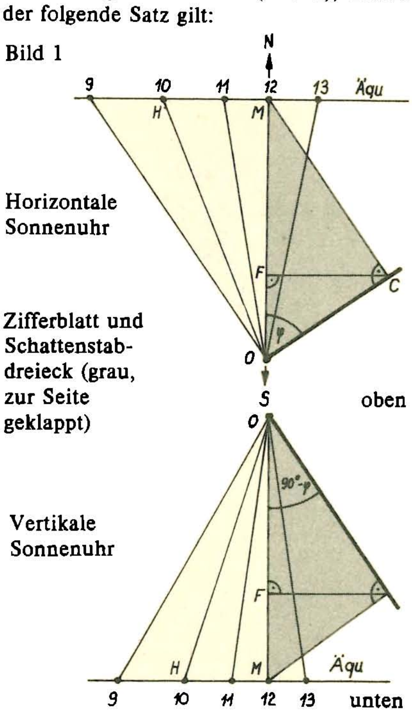
4. Polare Sonnenuhr (Pol. SU)
Wand genau nach Ost oder West gerichtet; Schattenstab in einem bestimmten Abstand parallel zur Wand abgestützt, parallel zur Erdachse, zeigt oben nach dem Himmels-Nordpol; Stundenlinien parallel zueinander und zum Schattenstab

5. Äquatoriale Sonnenuhr (Äqu. SU)
Schattenstab parallel zur Erdachse zeigt nach dem Himmels-Nordpol; Zifferblatt bzw. Stundenringebene steht senkrecht auf dem Schattenstab, liegt also parallel zur Äquatorebene; Stundenlinien, Stundenpunkte gleichmäßig (15° voneinander) verteilt

**Horizontale und Vertikal-Süd Sonnenuhr**

Diese beiden Sonnenuhr-Typen können zusammengefaßt werden (Bild 1), zumal der folgende Satz gilt:

Bild 1




*Eine Hor. SU auf der geographischen Breite φ hat dasselbe Zifferblatt wie eine Vert. SU auf der Breite (90° − φ). Auf der Breite 45° haben also beide dasselbe Zifferblatt. Lediglich in der Beschriftung der Stunden unterscheidet sich die Hor. SU (rechts herum) von der Vert. SU (links herum).*

Bei der Hor. SU, Vert. SU und auch bei der Abw. SU gehen der Schattenstab und alle Stundenlinien vom Koordinatensprung 0 aus. Es sind zu berechnen:
1. Schattenstab (Länge und Richtung)
2. Zifferblatt (Richtung der Stundenlinien)

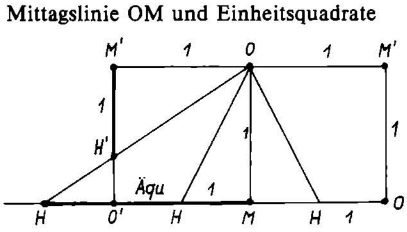
*Schattenstab*
Seine Länge OC und der Erhebungswinkel werden nach den Formeln für das Schattenstabdreieck (Bild 1) berechnet, wobei sich der Erhebungswinkel bei O aus den rechtwinkligen Dreiecken OCF oder OCM ergibt. Eine Kontrolle der berechneten Werte wird in beiden Fällen mit dem *Satz des Pythagoras* vorgenommen.

$$\overline{OF}^2 + \overline{FC}^2 = \overline{OC}^2$$
$$\overline{OC}^2 + \overline{CM}^2 = 1$$

Der *Schattenstab-Endpunkt* C ist nur für die Berechnung nötig. In der Ausführung muß der Schattenstab etwa ein Drittel länger gemacht werden, damit der Schatten bei der Hor. SU im Sommer, bei der Vert. SU im Winter genügend lang wird.

*Zifferblatt*
Der Konstruktion liegt folgender Gedankengang zugrunde: Am 21. März läuft der vom Schattenstab-Endpunkt C erzeugte Schattenpunkt von morgens bis abends auf einer Geraden, der *Äquinoktiallinie* Äqu, entlang und trifft um 12 Uhr WOZ auf den Mittagspunkt M. (Die Abkürzungen sind am Ende des Beitrags erklärt.) Auf dieser Äqu werden die Stundenpunkte H bezeichnet, indem ihre Abstände MH (die Tangentenstrecken *t*) berechnet werden. Zur Herstellung des Zifferblattes brauchen dann nur noch die Stundenlinien von O zu diesen Stundenpunkten gezogen zu werden.
Zu Anfang wird die Mittagslinie $\overline{OM} = 1$ hingelegt. Durch M wird Äqu senkrecht nach beiden Seiten gezogen. Wenn die Tangentenstrecken *t* von M aus abgetragen werden, sind die Werte von *t* in der Nähe von M noch kleiner als 1; schließlich werden sie größer als 1 und dann so groß, daß sie sich nicht mehr zeichnen lassen. Deshalb werden zwischen der Mittagslinie und Äqu auf beiden Seiten Einheitsquadrate OMO'M' angelegt (Bild 2). Tangentenstrekken $\overline{MH} = t < 1$ werden dann auf $\overline{MO'}$ von M aus, solche mit $t > 1$ – entsprechend dem folgenden Satz – auf $\overline{M'O'}$ von M' aus als $\overline{M'H'}$ abgetragen. So ist eine genaue

Bild 2
Mittagslinie OM und Einheitsquadrate



Konstruktion auf kleinstem Raum möglich.

*Satz: Wenn in einem Quadrat MOM'O' eine Seite (z. B. MO') über O' hinaus verlängert wird, so ist, wenn der von O nach H ausgehende Strahl die Strecke $\overline{O'M'}$ in H' schneidet, die Strecke $\overline{M'H'}$ gleich dem reziproken Wert von MH*

$$\overline{M'H'} = \frac{1}{\overline{MH}}$$

Man beweise diesen Satz!

oben

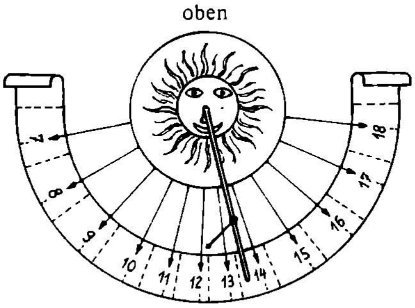



Bild 3 unten

Vertikale Sonnenuhr an einer Südwand, konstruiert für etwa 11° östliche Länge

——→ Anzeige in wahrer Zonenzeit

- - - - Anzeige in wahrer Ortszeit

**Tangentenstrecken-Tabelle**

Das Ausrechnen der Tangentenstrecken $t = \overline{MH}$ geschieht in einer Tabelle (Tab. 1), die so viele Spalten enthält, wie Stundenpunkte bzw. -linien gewünscht werden.

Die erste Zeile der Tabelle enthält die Uhrzeiten, die zweite Zeile die zugehörigen *äquatorialen Stundenwinkel* $\tau$, die 15° je Stunde betragen.

Abkürzungen

| | |
|---|---|
| SU | Sonnenuhr |
| Zbl | Zifferblatt |
| O | Koordinatenursprung = Ausgangspunkt für Stundenlinien und Schattenstab |
| M | Mittagspunkt |
| $\overline{OM}$ | Mittagslinie = Einheitsstrecke |
| Äqu | Äquinoktiallinie |
| H | Stundenpunkte (lat. hora) |
| Stl | Stundenlinie $\overline{OH}$ |
| Zgl | Zeitgleichung |
| WOZ | Wahre Ortszeit |
| WZZ | Wahre Zonenzeit |
| Hor. SU | Horizontale Sonnenuhr |
| Vert. SU | Vertikal-Süd-Sonnenuhr |
| Abw. SU | Abweichende Vert. Sonnenuhr |
| Pol. SU | Polare Sonnenuhr |
| Äqu. SU | Äquatoriale Sonnenuhr |
| $\varphi$ | Geographische Breite |
| $\lambda$ | Geographische Länge |
| $\Delta\lambda$ | Längengrad-Fehler |
| $\tau$ | Stundenwinkel (äquatorparallel) |
| $\tau(\lambda)$ | Zonen-Stundenwinkel |
| $t$ | Tangentenstrecke auf Äqu |
| $t(\lambda)$ | Zonen-Tangentenstrecke |
| $\tau_O$ | Stundenlinienwinkel bei O |
| $\tau_O(\lambda)$ | Zonen-Stundenlinienwinkel |

**Übergang von der WOZ zur Zonenzeit**

Alle grundsätzlichen SU-Probleme werden in WOZ betrachtet und entwickelt. Erst wenn die endgültige Anzeige bevorsteht, wird der Übergang in Zonenzeit vorgenommen, denn die SU soll ja eine einigermaßen richtige Zeit anzeigen.

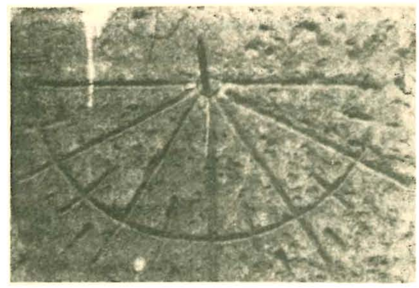
Die WOZ hat zwei Fehler: den Längengradfehler $\Delta\lambda$ und die *Zeitgleichung* Zgl. Der Längengradfehler läßt sich leicht ausschalten; dabei geht die Ortszeit in die Zonenzeit über, aber beides sind noch *wahre* Zeiten. Durch die Zeitgleichung geht eine *wahre* Zeit in eine *mittlere* über, z.B. in die MEZ. Die Zgl. läßt sich aber – außer mit ganz besonderen Mitteln – bei Sonnenuhren nicht ausschalten. Bei SU bleibt es also bei der (wenig bekannten) *wahren Zonenzeit*, und dieser Übergang wird in der dritten Zeile vollzogen, indem der Längengradfehler zum Stundenwinkel zugezählt wird. Es entsteht der Zonen-Stundenwinkel $\tau(\lambda)$; dabei sind die Vorzeichen zu beachten (in Tabelle 1, Zeile 3). Die Stundenwinkel $\tau$ sind vormittags negativ, und der Längengradfehler $\Delta\lambda$ ist westlich des 15. Längengrades – und das gilt fast für die ganze DDR – negativ und umgekehrt. Alle Größen, die in diese Zonenzeit umgerechnet sind, werden durch die Klammer $(\lambda)$ gekennzeichnet und erhalten den Zusatz *Zonen-*. Das gilt für den Zonen-Stundenwinkel $\tau(\lambda)$ sowie für die Zonen-Tangentenstrecken $t(\lambda)$, die in Zeile 4 nach der Formel umgerechnet werden.

Es folgen einige Eigenschaften dieser beiden Sonnenuhr-Typen, die zum Teil aus Zeile 4 des Beispiels in Tabelle 2 hervorgehen.

1. Die Mittagslinie muß stets genau Nord–Süd oder senkrecht ausgerichtet sein.
2. Die 12-Uhr-Stundenlinie liegt bei SU, die Zonenzeit anzeigen, seitlich von der Mittagslinie, und zwar ist sie bei SU, die sich westlich von 15° östlicher Länge befinden, in Richtung 11 Uhr verschoben. Das ist das Erkennungsmerkmal, wie eine Sonnenuhr berechnet und ob sie richtig angebracht worden ist.
3. Stundenlinien, die sich um 12 Stunden unterscheiden, sind die rückwärtig geradlinigen Verlängerungen voneinander.
4. Stundenlinien, die sich nur um sechs Stunden unterscheiden, z.B. 6 bzw. 18 Uhr gegenüber 12 Uhr, stehen bei Anzeige in Zonenzeit nicht genau senkrecht aufeinander.
5. Nördlich von 45° Breite sind die Stundenlinien bei Vert. SU stärker nach 12 Uhr zusammengedrängt als bei Hor. SU. Südlich von 45° ist es umgekehrt.
6. Wenn die Stunden der Sommerzeit angezeigt werden sollen, kann dies nur durch Doppel- oder Umbeschriftung geschehen. Es wäre falsch, sowohl die Zonenzeit als auch die Sommerzeit durch Drehen des Zifferblattes oder gar durch Biegen des Schattenstabes erreichen zu wollen.
7. Auf dem endgültigen Zifferblatt sollen auch die Stundenlinien etwa ein Drittel über Äqu hinaus verlängert werden. Außerdem brauchen die Mittagslinie, die Äqu, die Stundenpunkte H sowie der Punkt C des Schattenstabes auf dem Zifferblatt nicht zu erscheinen. Lediglich der Mittagspunkt M sollte angedeutet werden, damit eine Kontrolle der Anbringung jederzeit möglich ist.

*H. Vilkner*

Vertikale Sonnenuhr Bleicherode, vor 1500



Horizontale Sonnenuhr auf der Promenade von Heringsdorf

Äquatorial-Sonnenuhr Elterlein/Erzgebirge

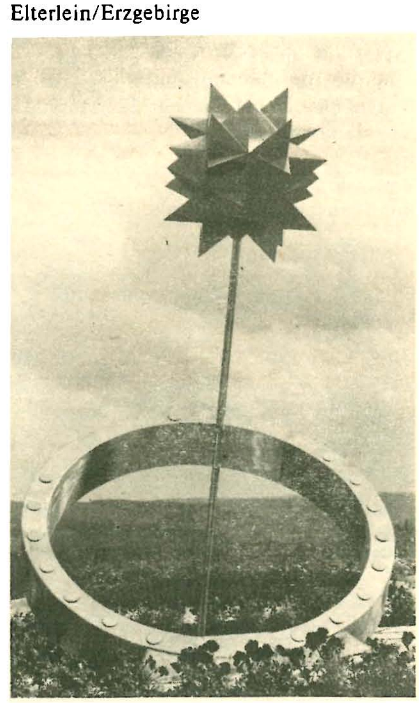


Tabelle 1: Tangentenstrecken

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Uhrzeit | 9 | 10 | $10^{30}$ | 11 | 12 | 13 Uhr |
| 2. Stundenwinkel $\tau$ | −45 | −30 | −22,5 | −15 | 0 | 15 Grad |
| 3. Zonen-Stundenwinkel $\tau(\lambda)$ | vormittags | | | | nachmittags | |
| westl. 15° | $-\lvert\tau\rvert - \lvert\Delta\lambda\rvert$ | | | | $\tau - \lvert\Delta\lambda\rvert$ | |
| östl. 15° | $-\lvert\tau\rvert + \Delta\lambda$ | | | | $\tau + \Delta\lambda$ | |
| 4. Zonen-Tangentenstrecke $t(\lambda)$ | $= \tan\tau(\lambda)\cdot\sin\varphi$ (Hor. SU) | | | | | |
| | $= \tan\tau(\lambda)\cdot\cos\varphi$ (Vert. SU) | | | | | |

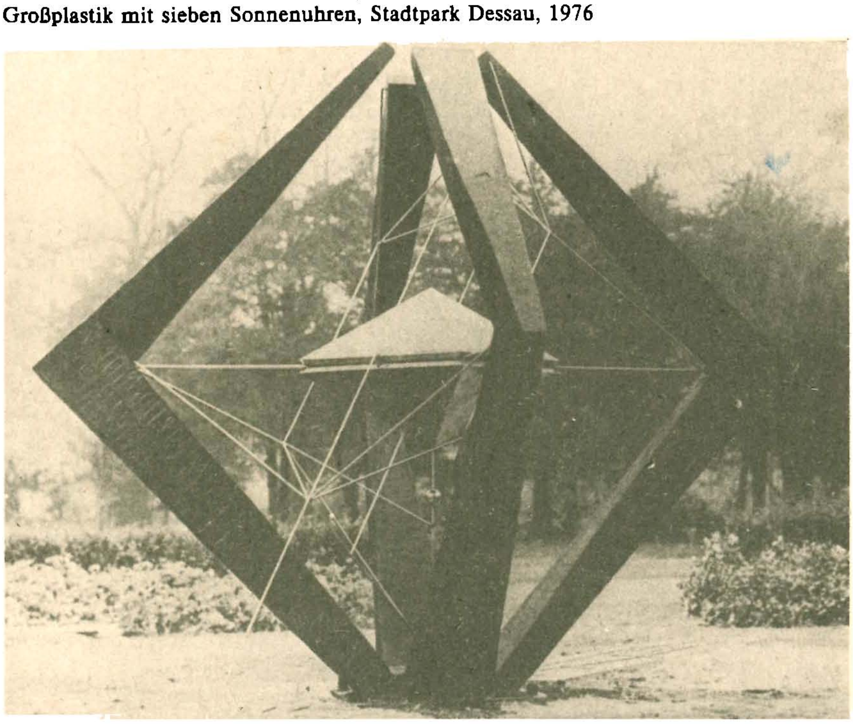
Tabelle 2: Beispiel $\varphi = 54°$, $\lambda = 12°$, $\Delta\lambda = -3°$

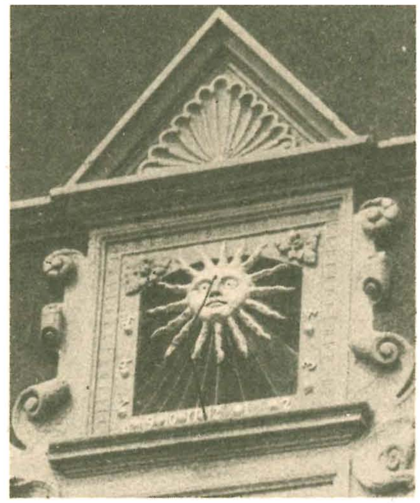
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Uhrzeit | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 Uhr | |
| 2. $\tau$ | −120 | −90 | −60 | −30 | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 Grad | |
| 3. $\tau(\lambda)$ | −123 | −93 | −63 | −33 | −3 | 27 | 57 | 87 | 117 Grad | |
| 4. $t(\lambda)$ | −1,25 | −15,44 | −1,59 | −0,53 | −0,04 | 0,41 | 1,25 | 15,44 | 1,59 Grad | Hor. SU |
| $\frac{1}{t}(\lambda)$ | −0,80 | −0,07 | −0,63 | | | | 0,80 | 0,07 | 0,63 | |
| $t(\lambda)$ | | | −1,15 | −0,38 | −0,03 | 0,30 | 0,91 | 11,22 | | Vert. SU |
| $\frac{1}{t}(\lambda)$ | | | −0,87 | | | | | 0,09 | | |

Formeln

| | Hor. SU | Vert. SU |
|---|---|---|
| Mittagslinie | $\overline{OM} = 1$ | $\overline{OM} = 1$ |
| Länge des Schattenstabes | $\overline{OC} = \cos\varphi$ | $\overline{OC} = \sin\varphi$ |
| Erhebungswinkel des Schattenstabes | $\tan\varphi = \frac{\overline{CF}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{OC}}$ | $\tan(90° - \varphi) = \frac{\overline{CF}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{OC}}$ |
| Stützlot | $\overline{CF} = \sin\varphi\cos\varphi$ | $\overline{CF} = \sin\varphi\cos\varphi$ |
| Projektion des Schattenstabes | $\overline{OF} = \cos^2\varphi$ | $OF = \sin^2\varphi$ |
| Reststrecke | $\overline{FM} = \sin^2\varphi$ | $\overline{FM} = \cos^2\varphi$ |
| Schattenweg | $\overline{CM} = \sin\varphi$ | $\overline{CM} = \cos\varphi$ |
| Tangentenstrecke | $t = \tan\tau\sin\varphi$ | $t = \tan\tau\cos\varphi$ |
| Zonen-Tangentenstrecke | $t(\lambda) = \tan\tau(\lambda)\,\sin\varphi$ | $t(\lambda) = \tan\tau(\lambda)\,\cos\varphi$ |
| Längengrad-Fehler | $\Delta\lambda = \lambda - 15°$ | |
| Zonen-Stundenwinkel | $\tau(\lambda) = \tau + \Delta\lambda$ | |

Großplastik mit sieben Sonnenuhren, Stadtpark Dessau, 1976





Vertikale Sonnenuhr
Gotha, Rathaus

Die Aufnahmen der Sonnenuhren stellte uns der Arbeitskreis Gnomonik im Kulturbund der DDR zur Verfügung.
Der Arbeitskreis als Leit- und Meldestelle für die Sonnenuhren in der DDR, zeichnet für die Beschreibung und bildliche Darstellung historisch und künstlerisch wertvoller Sonnenuhren als Dokumente der Zeitmeßkunst verantwortlich, arbeitet mit der Denkmalspflege und den Bauämtern eng zusammen und berät bei der Anlage von Sonnenuhren.
Wer mehr darüber wissen möchte, kann sich an den Leiter des Arbeitskreises, StR A. Zenkert wenden.

Die Adresse lautet:
Astronomisches Zentrum
„Bruno H. Bürgel"
Planetarium – Beobachtungsstation
Bürgel-Gedenkstätte
Neuer Garten 6
Potsdam
1500

Gorsleben, Kr. Artern
am Friedhofseingang, 1698

## Aufgabe zum Titelblatt

# Springzahlrätsel: Zur Satzgruppe des Pythagoras

Die gesuchten natürlichen Zahlen, Dezimalbrüche (meist als Maßzahlen von Größen), geordneten Zahlenpaare $(x, y)$ und Tripel $(x, y, z)$ – jeweils als Ziffernfolge geschrieben [z. B. 3,61 als Ziffernfolge 361 oder das Tripel $(3, 4, 5)$ als Ziffernfolge 345] – werden in die in eckigen Klammern genannten Kästchen aufgeteilt (in der angegebenen Reihenfolge), wobei in jedem Kästchen mindestens eine Ziffer stehen muß und höchstens eine zweistellige natürliche Zahl stehen darf. Es muß sogar für jede in einem Kästchen stehende Lösungszahl $n$ gelten: $1 \leq n \leq 25$. Zur Textabkürzung seien das Dreieck $ABC$ unserer Rätselfigur mit $\Delta$ und die Quadrate über den Katheten $a$ und $b$ mit $Q_a$ bzw. $Q_b$ bezeichnet. Die Länge einer Kästchenseite sei dabei eine Längeneinheit (1 LE). Maßzahlen von auf die Rätselfigur bezogenen Längen, Flächeninhalten bzw. Volumina sind dementsprechend in LE, $(\text{LE})^2$ bzw. $(\text{LE})^3$ anzugeben. Winkelgrößen werden in Grad angegeben. Wenn von der Länge einer Dreiecks-Transversalen (Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende, Höhe) die Rede ist, so ist stets die Länge des innerhalb des jeweiligen Dreiecks liegenden Abschnitts dieser Transversalen gemeint. Die Textbeifügung *(n Stellen)* bedeutet, daß bei sich ergebenden Dezimalbrüchen diese auf $n$ Dezimalstellen zu runden sind. Durch Mehrfachbelegung mancher Kästchen (d. h., die in diesen Kästchen stehenden Zahlen sind Bestandteile mehrerer Ergebnisse) ist eine gute Hilfe und Kontrolle für nachfolgende Ergebnisse möglich.

*Gesucht sind:* [1]: Flächeninhalt von $\Delta$; [1, 3, 20]: Pythagoreisches Tripel; [2, 3]: Länge des Hypotenusenabschnitts $q$ von $\Delta$; [2, 7]: Umfang von $\Delta$; [3, 4]: Länge (in cm) der Mittelsenkrechten $m_a$ in einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck mit den Schenkeln $a = b = 17{,}4$ cm; [3, 8]: Länge (in cm) einer Winkelhalbierenden eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge $a = 10{,}3$ cm (1 Stelle); [4, 23]: Lösungspaar $(x, y)$ der Gleichung $x^2 + y^2 = 130$; [4, 15, 22]: Länge (in cm) einer Raumdiagonale eines Quaders mit den Kanten $a = b = 5{,}16$ m und $c = 2{,}58$ m; [5, 19, 35]: Länge einer Diagonale in $Q_a$ (2 Stellen); [5, 11, 13]: Pythagoreisches Tripel; [6, 7]: Länge des Hypotenusenabschnitts $p$ von $\Delta$; [6, 12, 22]: Flächeninhalt des Teildreiecks $BCD$ von $\Delta$; [6, 19]: Länge der Seitenhalbierenden $s_a$ von $\Delta$ (1 Stelle); [7, 40]: Länge der Höhe $h$ in $\Delta$; [7, 25]: Flächeninhalt des Teildreiecks $CAD$ von $\Delta$; [8, 11, 18]: Lösungstripel $(x, y, z)$ der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$; [9, 17, 22]: Länge einer Diagonale von $Q_b$ (2 Stellen); [9, 17, 38]: Länge der Seitenhalbierenden $s_b$ von $\Delta$ (2 Stellen); [9, 24]: Größe eines Basiswinkels in einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck; [10, 21, 24]: Größe eines zu einem Basiswinkel eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks gehörenden Außenwinkels; [10, 29]: Länge der Höhe (in cm) eines gleichschenkligen Trapezes mit den Grundseiten $a = 19$ cm und $c = 1$ cm sowie den Seiten $b = d = 15$ cm; [11, 26]: Volumen (in cm³) eines 2,04 m langen Dreikantstabes, dessen Querschnittsfläche kongruent zu $\Delta$ ist (1 LE = 1 cm); [12, 20, 36]: Lösungstripel $(x, y, z)$ der Gleichung $5^2 + 6^2 + x^2 + y^2 = z^2$; [12, 34]: Flächeninhalt (in cm²) eines Trapezes mit den Grundseiten $a = 83$ cm und $c = 27$ cm sowie den Seiten $b = 25$ cm und $d = 39$ cm; [13, 44]: Flächeninhalt (in cm²) eines Rechtecks, dessen Umfang 160 cm beträgt und dessen Seiten einen Längenunterschied von 34 cm haben; [14, 33]: Volumen (in cm³) eines Quaders mit den Kanten $a = a_1$ cm, $b = b_1$ cm und $c = c_1$ cm, wobei $a_1$ eine gerade Primzahl, $b_1$ die größte einstellige und $c_1$ die kleinste dreistellige Primzahl ist; [15, 42]: Flächeninhalt eines Achtecks (in cm²), welches aus einem Quadrat der Seitenlänge $a = 27$ cm dadurch entsteht, daß man seine vier Ecken so abschneidet, daß die vier abgeschnittenen Stücke untereinander kongruente rechtwinklige Dreiecke sind, deren ganzzahlige Eckseitenlängen im Verhältnis $1 : 5$ stehen; [16, 19, 25]: Volumen eines Quaders (in cm³), wenn eine Diagonale einer seiner Begrenzungsflächen 55 cm mißt und eine der zu dieser Fläche senkrechten Kanten 8 cm beträgt; [17, 24, 41]: die positive Lösung der Gleichung $2x^2 + (129)^2 = (387)^2$; [18, 32, 35]: Volumen (in cm³) einer geraden rechteckigen Pyramide mit den Grundkanten $a = 16$ cm und $b = 12$ cm sowie Seitenkanten der Länge $s = 26$ cm; [19, 39]: Maisertrag (in dt), der auf 3 ha eines Maisschlages, der die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse von 500 m und einer Kathete von 300 m hat, erbracht wird, wenn auf dem gesamten Feld 1236 dt Mais geerntet werden; [20, 48]: Leerinhalt (in cm³) einer Schachtel, die 31 cm lang, 1,1 dm breit und 30 mm hoch ist; [21, 49]: Länge (in cm) einer Diagonale eines Rechtecks mit den Seiten $a = 15$ cm und $b = 36$ cm; [23, 37]: Länge der Höhe (in cm) eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn der Hypotenusenabschnitt $q = 7{,}51$ cm und $b = 11{,}88$ cm betragen (2 Stellen); [24, 45]: Breite (in m) eines rechteckigen Feldstückes, das 696 m lang ist und eine Diagonalenlänge von 870 m hat; [27, 43]: Radius (in cm) eines Kreises, bei dem eine Sehne der Länge $s = 16{,}8$ dm einen Abstand von 6,3 dm vom Kreismittelpunkt hat; [28]: Länge der Höhe $h_a$ (in cm) eines Parallelogramms, das einen Flächeninhalt von 208 cm² hat, und die Seite $a = 13$ cm beträgt; [30, 50]: Umkreisradius (in mm) eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $a = 15{,}84$ dm und $b = 21{,}12$ dm; [31, 46]: Abstand (in mm), den eine Sehne der Länge $s = 45{,}6$ cm in einem Kreis mit dem Radius $r = 28{,}5$ cm vom Kreismittelpunkt hat; [40, 50]: Flächeninhalt (in cm²) eines Dreiecks mit den Seiten $a = 39$ cm, $b = 25$ cm und $c = 56$ cm; [41, 47]: Hangabtriebskraft (in kp), die eine kugelförmige Lawine vom Gewicht $G = 1015$ kp an einem Hang (geneigte Ebene) mit der Steigung $4 : 3$ erfährt.

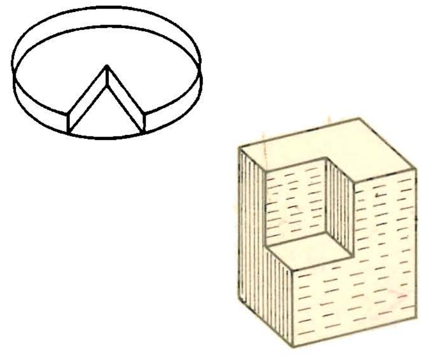
Bei richtiger Auflösung ergeben sich drei magische Quadrate. (In einem magischen Quadrat gilt: Zeilensummen = Spaltensummen = Diagonalsummen.)

*R. Mildner*

## Wo ist das fehlende Stück?

Stelle das *alpha*-Heft auf den Kopf!

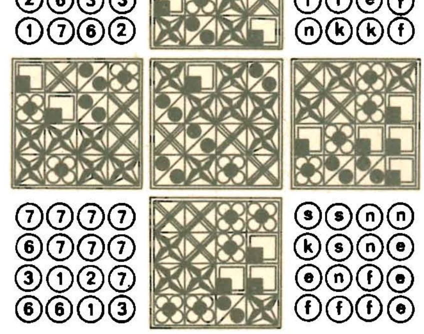
*E. Quaisser, Potsdam*



## Visuelle Logik

Zwischen den Zahlen, Zeichen und Buchstaben besteht ein logischer Zusammenhang, der sich durch eine zweistellige Zahl ausdrücken läßt. Wie lautet diese Zahl?

*W. Neugebauer, Berlin*




ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 22 (1988) 3 · Seiten 49 bis 72