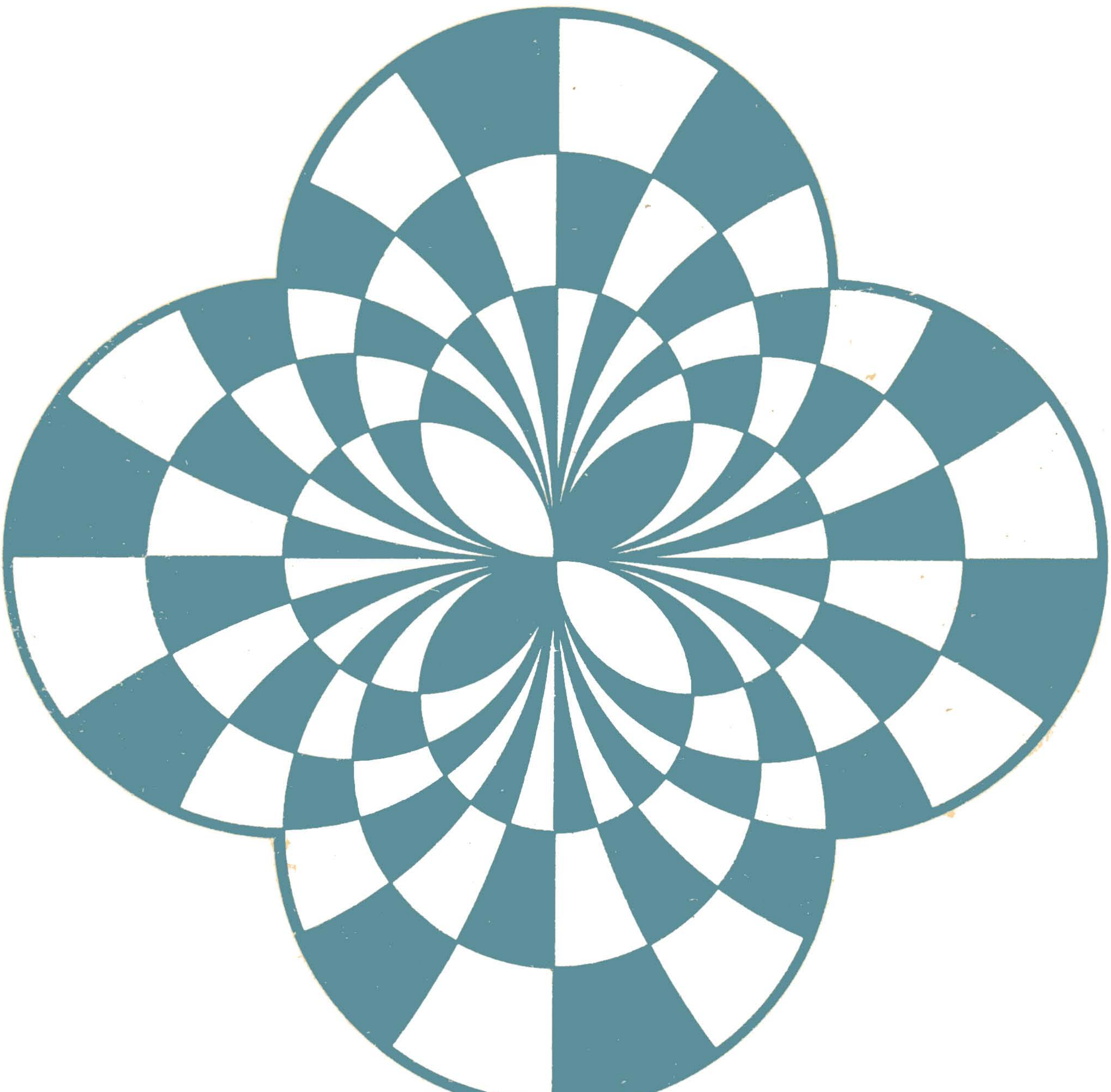
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
7. Jahrgang 1973
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

2

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignette: K.-H. Guckuk, Leipzig – nach einer Idee von B. Radestock, LVZ Leipzig (S. 27); Bild S. 29: Musikabteilung der Sächsischen Landesbibliothek Dresden (S. 29 oben, Mitte); *Foto:* H. P. Hofmann, Berlin (S. 29); *Vignette:* G. Fricke, Berlin (S. 30), Vignette: Cork aus Pythagoras, Niederlande (S. 32); *Vignette:* K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 33); Alte Bücher: Deutsche Bücherei, Leipzig und J. Lehmann, Leipzig (S. 34/35); J. Lehmann, Leipzig (S. 44); *Typographie:* H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 25. Januar 1973

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Über die Bedeutung der Mathematik für den Markscheider

Der Gegenstand des Fachgebietes *Markscheidewesen* ist die Ermittlung und Interpretation bergbaulicher Gegebenheiten in lage- und höhenmäßiger, betrieblich-ökonomischer und geologisch-lagerstättenkundlicher Hinsicht. Die Methode besteht aus der Ermittlung und Sammlung, der Verarbeitung und Speicherung sowie der Angabe den Gegenstand betreffender Daten und Informationen.

Die Arbeit des Markscheiders beginnt mit der Erfassung von Daten. Dabei handelt es sich vor allem um die Erfassung von Meßwerten, die hauptsächlich aus Winkeln, Längen und Höhendifferenzen bestehen. Wie bereits gesagt, müssen die gemessenen Werte weiterverarbeitet werden. Ein wesentliches Ergebnis der Arbeit jeder Markscheiderei ist das bergmännische Riß-, Karten- und Planwerk, das aus Karten der Erdoberfläche, des Grubengebäudes und des Gebirges besteht und neben vollständigen Lage- und Höhenangaben auch alle interessierenden Qualitätsparameter der nutzbaren Mineralien enthält.

Im Markscheidewesen sind dazu oft komplizierte mathematische Operationen notwendig. Neben der sphärischen Trigonometrie spielt die ebene Trigonometrie eine dominierende Rolle. Dreiecksberechnungen sind in den vielfältigsten Arten durchzuführen. Ob bei der Berechnung der Koordinaten eines trigonometrischen Punktes im Übertagegelände oder bei der Berechnung trigonometrisch gemessener Höhen in der Grube, immer sind mathematische, hier besonders trigonometrische Probleme vorherrschend.

Recht umfangreich nutzt der Markscheider auch die mathematische Statistik zur Informationsverdichtung mit Hilfe statistischer Prüf- und Schätzverfahren, zur Planung von Experimenten und Versuchen auf Grund der statistischen Entscheidungstheorie, zur Analyse der Meß- und Auswertegenauigkeit nach fehlertheoretischen Grundsätzen sowie zur Einflußgrößenrechnung.

Ein weiteres Gebiet der Mathematik, welches im Markscheidewesen große Bedeutung hat, ist die Geometrie. Aufgaben der Planimetrie, der Stereometrie, der Analytischen Geometrie bis zur Differentialgeometrie müssen tagtäglich gelöst werden. Erst nach der mathematischen Behandlung der Meßwerte (und dann oft noch durch eine nachfolgende zeichnerische Darstellung) ist man imstande, die Lage der einzelnen Grubenbaue und der Gebirgsschichten zueinander festzustellen.

Somit ist zur analytisch-mathematischen Qualifikation auch noch ein ausgezeichnetes räumliches Denken notwendig, was wiederum, mathematisch gesehen, in der Darstellenden Geometrie seinen Niederschlag findet.

In den Tagebauen der Braunkohle, der großen Kalkwerke usw. stehen vor allen Dingen Massen- und Vorratsberechnungen im Vordergrund.

Die mathematischen Aufgaben im Markscheidewesen sind in diesem Jahrhundert stark angewachsen. Während es früher möglich war, alle Berechnungen noch mit der Logarithmentafel zu bestreiten, ging man später zu mechanischen Tischrechnern über, und heute bedient sich ein großer Teil der Markscheider bereits modernster elektronischer Datenverarbeitungsanlagen.

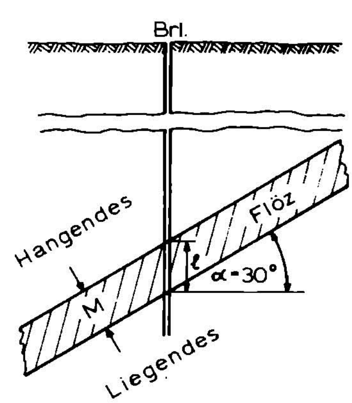
Es wird niemand bestreiten können: „So interessant wie die Mathematik ist auch der Beruf des Markscheiders“. Interessierte Abiturienten haben die Möglichkeit, dieses Fachgebiet an der Bergakademie Freiberg, der ältesten Bergbauhochschule der Welt, zu studieren.

H. Meixner

Aufgaben aus der Markscheidekunde

▲1▲ Bei einer Erkundungsbohrung nach Steinkohle wurde ein mit 30° einfallendes Flöz durchbohrt. Der Bohrkern (Kohle) hat eine Länge l von 1,80 m.

Wie groß ist die Mächtigkeit M dieses Flözes?



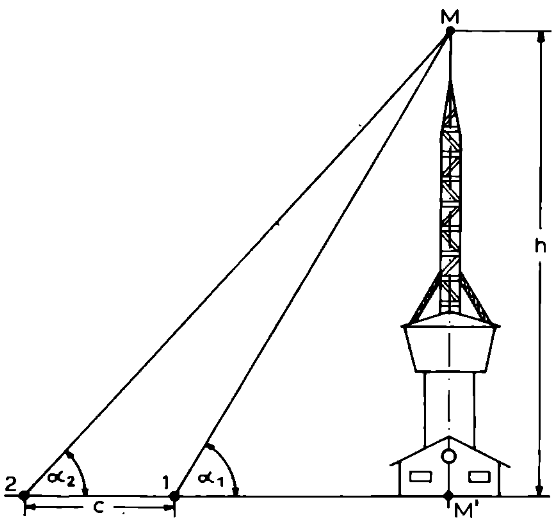
▲2▲ Eine auf der gesamten Erde vorgegebene Richtung ist die der Schwerkraft. Lotlinien konvergieren deshalb zum Erdinnern, so daß der Abstand zwischen zwei Lotlinien mit zunehmender Teufe (bergmännisch für: Tiefe) immer kleiner wird. In verschiedenen Höhenlagen (besonders im Bergbau, wo zwischen Übertage und den einzelnen Sohlen beachtliche Höhenunterschiede auftreten) gemessene Längen müssen deshalb eine Verbesserung erhalten.

Im Abstand von 1 km sind 2 Schächte von je 1 000 m Teufe vorhanden. In jeden dieser Schächte wird zur Orientierungsmessung für das Grubengebäude ein Lot gehängt.

Wie groß ist der Unterschied der Entfernung der Lote zwischen Übertage und Untertage?

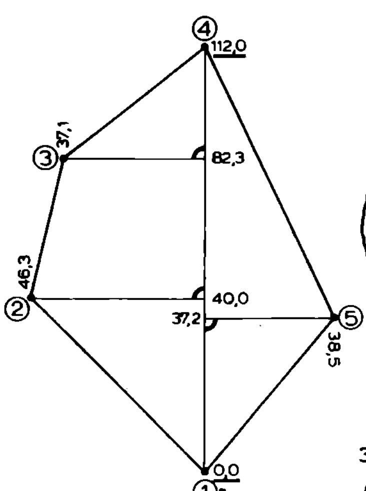
▲3▲ Um die Flugsicherheit eines in der Nähe eines Braunkohlentagebaues liegenden GST-Segelflugplatzes zu gewährleisten, muß die Höhe eines zur Grube gehörenden Wasserhochbehälters mit aufgesetzter UKW-Antenne bestimmt werden.
Zur Berechnung dieser Höhe wurde ein vertikales Hilfsdreieck gemessen.

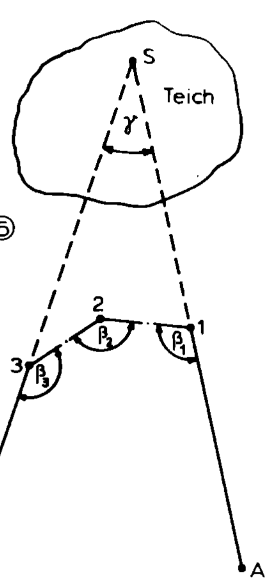
$\alpha_1 = 37°30'$ $\quad\alpha_2 = 26°10'$ $\quad c = 57{,}65$ m



Hierbei liegen M', 1 und 2 auf einer Geraden und in gleicher Höhe. Wie hoch ist die Höhe h des Turmes?

▲4▲ Die Größe eines Feldes innerhalb der Grenzsteine 1 bis 5 soll bestimmt werden.
Hierzu wurde entsprechend der Skizze durch die Punkte 1 und 4 eine Meßlinie (Abszisse) gelegt. Auf dieser Abszisse stehen rechtwinklig die Ordinaten zu den Punkten 2, 3 und 5.
An der Abszisse steht die Entfernung vom Punkt 1 bis zur jeweiligen Ordinate und bis zum Punkt 4. An den Punkten 2, 3 und 5 ist die Länge der Ordinate angegeben.





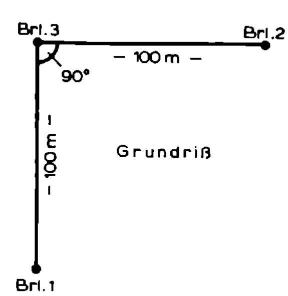
▲5▲ Es sind 2 Gleisachsen gegeben: $A-1$ und $B-3$. Diese sollen mit einer Kurve verbunden werden.

Zu diesem Zweck ist der Winkel γ im Schnittpunkt S der beiden Gleisachsen zu bestimmen. An diesem Punkt befindet sich keine zugängliche Stelle, wo man einen Theodolit aufstellen könnte, um den Winkel direkt zu messen. Es sind dafür die Winkel

$\beta_1 = 106°20'$ $\quad\beta_2 = 141°52'$ $\quad\beta_3 = 142°29'$

gemessen worden. Berechne den Winkel γ!

▲6▲ Zur Erkundung eines Flözes wurden 3 Bohrlöcher in folgender Anordnung niedergebracht:



Das Flöz wurde in den Bohrlöchern in folgenden Höhen angetroffen:
im Bohrloch 1 bei +35 m NN
im Bohrloch 2 bei +45 m NN
im Bohrloch 3 bei +85 m NN
Wie groß ist das Einfallen α des Flözes?
Unter dem Einfallen eines Flözes oder einer Gebirgsschicht versteht man den Vertikalwinkel, den die horizontale Linie mit der Spur eines auf dem Flöz oder der Gebirgsschicht abrollenden, nur der Schwerkraft überlassenen Körpers bildet. Dieses Maß ist für den Bergmann (Projektierung, Ausrichtung etc.) sehr wichtig.

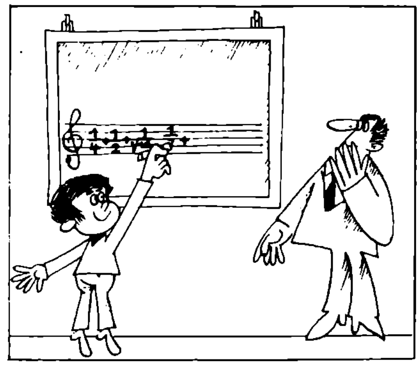
Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil.
Lothar Berg

Sektion Mathematik der Universität Rostock, stellv. Direktor der Sektion für Forschung

▲1038▲ Eine Gardine soll an n vorgegebene Haken gehängt werden, wobei mit den beiden äußersten zu beginnen ist. Um eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Haken zu erreichen, bestimme man bei der jetzt in einem Bogen herunterhängenden Gardine nach Augenmaß die Mitte und hänge sie an den mittleren der verbleibenden Haken, sofern es einen solchen gibt. Bei den jeweils entstehenden Teilbögen verfahre man entsprechend.
Man gebe eine Übersicht über alle nur möglichen Zahlen $n \geqq 2$ an, bei denen das beschriebene Verfahren bis zum letzten Haken ausführbar ist, und beweise die Richtigkeit des Ergebnisses.

Mathematik im Reich der Töne

Teil 2



Für weitere mathematische Betrachtungen stellen wir die Zahlenverhältnisse übersichtlich zusammen:

Tonbezeichnung	c	d	e	f	g	a	h	c'
Schwingungszahl bezogen auf c	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{2}{1}$
bezogen auf Nachbarton		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

Die diatonische Tonleiter hat fünf reine Quinten, nämlich $c-g$, $e-h$, $f-c'$, $g-d'$ und $a-e'$. Bezeichnend sind die großen Terzen $c-e, f-a$ und $g-h$, die in der pythagoreischen Stimmung nur unrein geboten werden. Durch das mehrfache Auftreten der großen Terz und der kleineren Verhältniszahlen ist die diatonische der pythagoreischen Stimmung bezüglich des Klanges von Akkorden überlegen. Bringt man die auf den Grundton bezogenen Brüche der Übersicht auf den gemeinsamen Hauptnenner 24, lassen sich die Verhältniszahlen für die Frequenzen der diatonischen Tonleiter in der folgenden fortlaufenden Proportion schreiben:

24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48.

Für den Grundakkord $c-e-g$ (Tonika) lassen sich die Verhältniszahlen kürzen. Es gilt die Proportion 4 : 5 : 6. Sie wird auch von dem Dominantakkord $g-h-d'$ und dem Subdominantakkord $f-a-c'$ erfüllt. Die diatonische Tonleiter befriedigt optimal die Forderung nach harmonischem Zusammenklang der Töne. Man bezeichnet sie deshalb auch als die reine Tonskala.

Vergleichsweise lautet der Hauptnenner der entsprechenden Brüche in der pythagoreischen Stimmung 384. Dadurch gestaltet sich die Reihe der ganzen Verhältniszahlen für die Töne der Tonleiter wesentlich komplizierter. Bezieht man beide Stimmungen auf die kleinstmögliche ganze Zahl 384, ergibt sich die folgende Gegenüberstellung:

Tonbezeichnung	c	d	e	f	g	a	h	c'
pythagoreische	384	432	486	512	576	648	729	768
diatonische Stimmung	384	432	480	512	576	640	720	768

Von musikalischem Interesse ist weiterhin die Unterscheidung nach Dur- und Moll-Tonart. Die bisher aufgestellten Verhältniszahlen repräsentieren die Dur-Tonart. Bei der Moll-Tonart werden, vom Grundton c ausgehend, die an der Dur-Tonleiter bekannten Intervallschritte in einer anderen Reihenfolge gesetzt, nämlich $\frac{9}{8}, \frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}$. Bemerkenswert ist hierbei, daß sich die Moll-Tonart aus der Dur-Tonart nicht allein durch zyklische Vertauschung der Intervalle ableiten läßt. Es ist auch eine Inversion der zwischen den Halbtonschritten liegenden Intervalle $\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$ vorzunehmen. Wie man durch elementare Rechnung selbst nachprüfen kann, lassen sich die zu der Tonfolge gehörigen Schwingungszahlen durch folgende Proportion ganzzahlig erfassen:

120 : 135 : 144 : 160 : 180 : 192 : 216 : 240

Ein weiteres Kürzen dieser Verhältniszahlen ist nicht möglich. Der Grunddreiklang wird durch das Zahlentripel 10 : 12 : 15 beschrieben. Wegen der Verschiedenheit der musikalischen Wirkung der beiden Tonarten auf die Psyche des Menschen spricht man von Tongeschlechtern. Während man die Dur-Tonart (dur – hart) mit den Vorstellungen von Kraft, Mannestum, Fröhlichkeit und Kühnheit verbindet, erweckt die Moll-Tonart (moll – weich) Gefühle der Trauer, des Ernstes und der in sich gekehrten Besinnlichkeit.

Das Bemühen, zwischen den Zahlen der fortlaufenden Proportionen und den durch die verschiedenen Tongeschlechter ausgelösten psychischen Stimmungen eine Korrelation herzustellen, führt leicht in Bereiche unbeweisbarer Spekulationen. Uns geht es hier um eine zahlenmäßige Erfassung akustischer Effekte an Tonleitern.

Die bisher behandelten Gedankenexperimente beschränkten sich auf ein Monochord. Beim Aufbau von Tonleitern darf uns jedoch nicht allein der Standpunkt des Wohlklanges von Tonfolgen und Akkorden interessieren. Wir müssen auch an die musikalische Praxis und den Instrumentenbau denken. Vor allem richtet sich unser Interesse auf Instrumente mit fester Tonlage, wie Klavier, Orgel oder Harmonika. Eine besonders harte Forderung, die der Musizierende an sein Instrument stellt, ergibt sich daraus, daß er sich bei Wahl der Tonlage seiner Umgebung (einem Chor oder anderen Instrumenten) anpassen muß. Das Instrument muß modulationsfähig sein. Auf einfachste Form gebracht lautet die Forderung: „Alle durch das Instrument verfügbaren Töne (mit Ausnahme der höchsten Oktave) müssen als Grundton einer Tonleiter einsetzbar sein."

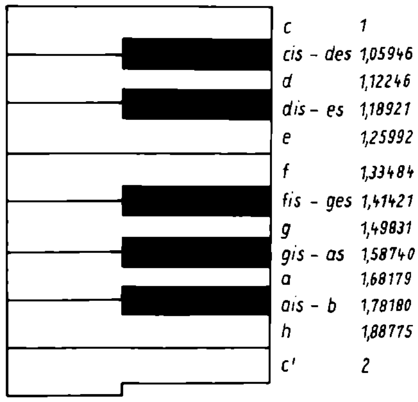
Zunächst ist klar, daß diese Forderung bei der Verschiedenartigkeit der Intervalle innerhalb einer der bisher behandelten Tonleitern schon aus mathematischen Überlegungen heraus nicht realisierbar ist. Deshalb ist man im Instrumentenbau mit fester Tonlage zu einem Kompromiß gezwungen, um dem ausübenden Musiker die Modulationsfreiheit und Spielbarkeit seines Instrumentes zu sichern. Der Kompromiß verlangt, daß an der Reinheit der Harmonien und dem Wohlklang der Tonfolgen gewisse Abstriche vorzunehmen sind. Die Tonstimmung, die auf Grund dieser Forderung konstruiert worden ist, bezeichnet man als temperierte Stimmung. Wie geht man an den Aufbau dieser Tonfolge heran?

Als erstes bleibt die Forderung bestehen, die Oktave rein zu bieten. Sowohl bei der pythagoreischen wie auch bei der diatonischen Tonleiter gibt es fünf ganze und zwei halbe Tonschritte, wobei die Worte „ganz" und „halb" nicht im mathematischen Sinn zu werten sind. Bei der diatonischen Tonleiter war noch zwischen großen und kleinen ganzen Intervallen zu unterscheiden. Es liegt zunächst nahe, die den beiden Tonleitern lagemäßig gemeinsamen fünf ganzen Tonschritte durch Einschalten je eines Zwischentones in zehn halbe Tonschritte aufzuteilen. Im Instrument sind daher vom Grundton zur Oktave nicht mehr, wie früher, sieben Tonschritte unterschiedlicher Weite, sondern insgesamt zwölf Tonschritte einzubauen. Da ferner jeder dieser zwölf Töne als Grundton einer Tonleiter wählbar sein soll, bleibt keine andere Lösung, als den Tonschritten eine einheitliche Größe zu geben. Zwei Personintervalle sind aber für unser musikalisches Empfinden genau dann gleich, wenn die Quotienten ihrer Frequenzen miteinander übereinstimmen. Andererseits soll sich die Frequenz – auf zwölf Tonschritte gleich verteilt – verdoppeln. Beide Forderungen sind erfüllt, wenn der Quotient der Schwingungszahlen zweier benachbarter, sonst beliebig wählbarer Töne $q=\sqrt[12]{2}$ ist, denn es muß gelten $q^{12}=2$. Geht man also von einem Ton mit der Frequenz n um einen ganzen Ton höher, so gehört zu diesem die Frequenz nq^2, während beim Fortschreiten um einen halben Ton die neue Frequenz bei nq liegt. Übernimmt man in die neue Tonleiter den Wechsel von Ganz- und Halbtonschritten aus der pythagoreischen und diatonischen Tonleiter, so ergibt sich folgende Lösung für die Verhältnisse der Tonfrequenzen:

c	d	e	f	g	a	h	c′
1	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[4]{2^3}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	2

Die Wurzelausdrücke lassen noch keinen rechten Vergleich mit den Schwingungszahlen der pythagoreischen und diatonischen Tonleiter zu. Wir werden deshalb die drei hier behandelten Tonleitern auf Dezimalzahlen (5 Stellen nach dem Komma) umschreiben und dem Grundton wieder die Zahl 1 zuordnen. Man gelangt zu folgender Übersicht:

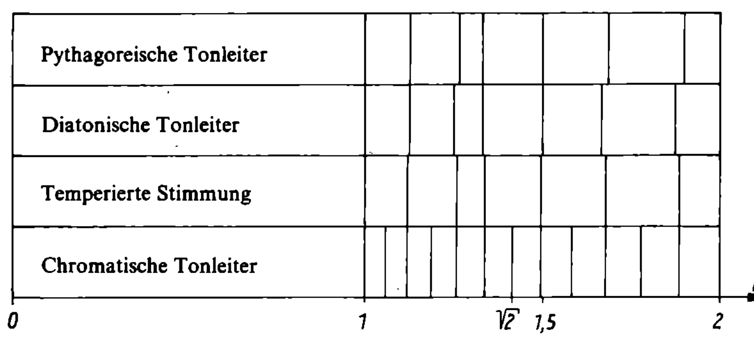
Den zwölf innerhalb einer Oktave liegenden Tönen sind folgende Verhältniszahlen zuzuordnen, wenn man den Grundton mit der Zahl 1 belegt:



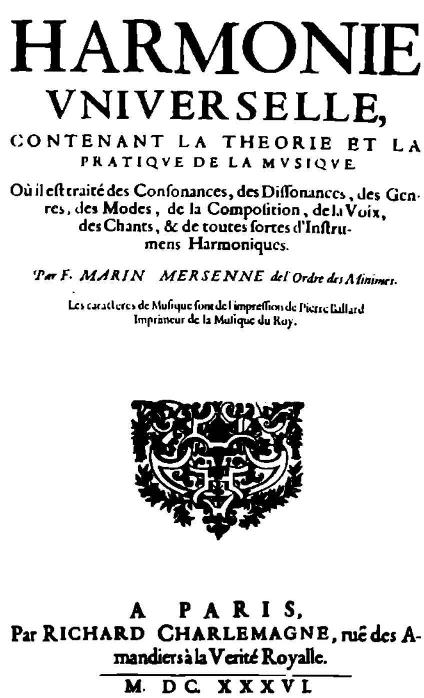
Mit dieser Klaviatur ist auch aus der Sicht der Spieltechnik die Forderung erfüllt, daß jeder verfügbare Ton des Instrumentes zum Grundton einer spielbaren Tonleiter mit gut anschlagbaren Akkorden gemacht werden kann. Wählt man z. B. e als Grundton, so lautet die zugehörige Tonleiter in temperierter Stimmung:
e-fis-gis-a-h-cis′-dis′-e′. Ist f der Grundton, ergibt sich für die zugehörige Dur-Tonleiter: f-g-a-b-c′-d′-e′-f′.

Man kann sich leicht übungsweise weitere Beispiele von Tonleitern in temperierter Stimmung zusammensetzen und dabei überlegen, welche Versetzungszeichen beim Eintragen in Notenlinien anzubringen sind.
Die theoretischen Grundlagen der temperierten Stimmung stellte der französische Mathematiker Mersenne bereits 1636 in seinem Buch „Harmonie universelle“ zur Diskussion. Die nachweislich erste Anwendung fand diese Stimmung in der von Arp Schnitger 1688–1692 erbauten Orgel für die St. Jakobi-Kirche in Hamburg. Bahnbrechend für die gleichschwebend temperierte Stimmung wirkte der Halberstädter Organist Andreas Werckmeister durch sein 1691 erschienenes Buch mit dem umfänglichen Titel: „Musikalische Temperatur, oder deutlicher und warer mathematischer Unterricht, wie man durch Anweisung des Monochordi ein Klavier, sonderlich die Orgelwercke, Positive, Regale, Spinetten und dergleichen wohl temperirt stimmen könne, damit nach heutiger Manier alle modi ficti in einer angenehm und erträglichen Harmonia genommen werden, mit vorhergehender Abhandlung von dem Vorzuge, Vollkommen- und weniger Vollkommenheit der musikalischen Zahlen (Proportionen) und Consonantien, welche bei Einrichtung der Temperaturen wohl in acht zu nehmen sind, benebst einem dazu gehörig – in Kupfer vorgebildeten deutlichen und völligen Monochordo, beschrieben und an das Tageslicht gegeben durch Andreas Werckmeistern, Stiffts-Hof-Organisten zu Quedlinburg. 1691.“
Johann Sebastian Bach trat gleichfalls als Komponist und virtuoser Organist mit allem Nachdruck für das neue Tonsystem ein. Seine Instrumente Klavichord und Spinett waren in entsprechender Weise gestimmt. Ferner schrieb er die berühmten achtundvierzig Präludien und Fugen für das „Wohltemperierte Klavier“! Damit suchte er zu beweisen, daß auf dem gleichschwebend temperierten Instrument alle Tonarten technisch spielbar sind, ohne daß dabei ungewollte Disso-

	pythagor. Stimmung	diatonische Stimmung	temperierte Stimmung
c	1	1	1
d	1,12500	1,12500	1,12246
e	1,26563	1,25000	1,25992
f	1,33333	1,33333	1,33484
g	1,50000	1,50000	1,49831
a	1,68750	1,66667	1,68179
h	1,89844	1,87500	1,88775
c′	2	2	2



Die Zusammenstellung zeigt unverkennbar, daß die zuletzt eingeführte temperierte Stimmung vermittelnd zwischen der pythagoreischen und der diatonischen Stimmung liegt. Bei keinem der acht Töne zeigt die hier konstruierte Tonleiter eine wesentliche Abweichung von den zuvor behandelten Tonleitern. Die außerordentliche Überlegenheit der temperierten Stimmung liegt jedoch darin begründet, daß sie den Bau von Instrumenten fester Tonlage mit optimaler Modulationsfähigkeit ermöglicht. Bei den Klaviaturen derart gestimmter Instrumente ist die Tastenanordnung für die anschlagbaren Töne so getroffen, daß jede Tonart technisch spielbar ist. Die fünf nachträglich in der c-Dur-Tonleiter eingeschobenen Zwischentöne erklingen durch Anschlagen von schwarzen Tasten. Diese Tasten sind etwas kleiner und kürzer ausgebildet und ragen aus dem ebenen Feld der weißen Tasten heraus.
Schlägt man sämtliche verfügbaren Klaviertasten der Reihe nach von unten nach oben laufend an, erklingt die chromatische Tonleiter. Das Intervall zweier Nachbartöne aus der Tonfolge wird durch den Quotienten $q=\sqrt[12]{2}$ numerisch erfaßt. Eine Ausrechnung dieser Zahl auf zehn Stellen nach dem Komma liefert $q=1{,}0594630944$.


HARMONIE
VNIVERSELLE,
CONTENANT LA THEORIE ET LA PRATIQVE DE LA MVSIQVE.
Où il est traité des Consonances, des Dissonances, des Genres, des Modes, de la Composition, de la Voix, des Chants, & de toutes sortes d'Instrumens Harmoniques.
Par F. MARIN MERSENNE de l'Ordre des Minimes.
Les caracteres de Musique sont de l'impression de Pierre Ballard Imprimeur de la Musique du Roy.
A PARIS,
Par RICHARD CHARLEMAGNE, ruë des Amandiers à la Verité Royalle.
M. DC. XXXVI.
Avec Privilege du Roy, & Approbation des Docteurs.

Musicalische Temperatur,
Oder
deutlicher und warer Mathematischer Unterricht/
Wie man durch Anweisung des
MONOCHORDI
Ein Clavier / sonderlich die Orgel-Wercke/
Positive, Regale, Spinetten/ und dergleichen wol temperirt stimmen könne/ damit nach heutiger manier alle Modi ficti in einer angenehm- und erträglichen Harmonia mögen genommen werden/
Mit vorhergehender Abhandlung
Von dem Vorzuge/ Vollkommen- und weniger Vollkommenheit der Musicalischen Zahlen/ Proportionen/ und Consonantien,
Welche bey Einrichtung der Temperaturen wohl in acht zu nehmen sind:
Benebst einem darzugehörig-in Kupffer vorgebildeten deutlichen und völligem
MONOCHORDO
beschrieben/ und an das Tages-Licht gegeben
Durch
Andreas Werckmeistern/ Stiffts-Hof-Organisten zu Quedlinburg.

Franckfurt und Leipzig/
In Verlegung Theodori Philippi Calvisii, Buch-Händler in Quedlinburg/ ANNO 1691.

nanzen in den Akkorden und Verfälschungen in der Melodie auftreten. Von mathematischer, akustischer und technischer Seite war mit der Erfindung und Konstruktion des wohltemperierten Klavieres der Weg für die großen Klavierkomponisten und Virtuosen der folgenden Jahrhunderte bereitet. Hierzu müssen wir uns selbst Andeutungen ersparen, um nicht vom Thema abzukommen.

Die gleichschwebend temperierte Stimmung, nach der heute in allen Konzertsälen der Welt musiziert wird, ist das Ergebnis jahrhundertelangen Suchens und Forschens, wozu die verschiedensten Völker wertvolle Beiträge geliefert haben. Wenn am Ende dieses langen Entwicklungsprozesses eine völlig unpythagoreische Lösung steht, so werden dadurch keinesfalls die Verdienste der Pythagoreer mit ihren ersten systematischen Untersuchungen zur Akustik geschmälert.

Bisher haben wir uns allerdings nur darauf beschränkt, die Töne in ihrem relativen Verhalten zueinander zu beurteilen und relative Maße für die Töne von Tonleitern festzulegen. Es wären jedoch keine Konzerte mit internationaler Besetzung denkbar, wenn nicht auch internationale Absprachen über die absoluten Schwingungszahlen der Töne getroffen würden. Nur so kann der Zusammenklang von Instrumenten verschiedenster Herkunft gesichert sein.

		Demitons égaux, I	*Demitons inégaux.* II
1	C	100,000	100,000. Demiton majeur
2	♯	105946	$106666\frac{1}{3}$ moyen
3	B	112246	112500 majeur
4	A	118921	120,000. mineur
5	xg	125993	125000. majeur
6	G	133481	$133333\frac{1}{3}$ majeur

Das menschliche Ohr registriert bestenfalls akustische Schwingungen im Frequenzbereich von 16 bis 20 000 pro Sekunde als Ton. Dabei ist die obere Grenze einem altersbedingten Schwund ausgesetzt. In der Musik beschränkt man sich auf Töne im Frequenzbereich von 30 bis 4 000. Dies entspricht etwa sieben Oktaven. Die empfindlichste Ansprechbarkeit des menschlichen Ohres liegt etwa bei der Frequenz von 2 700. Die Druckschwankungen für einen gerade noch wahrnehmbaren Ton dieser Frequenz belaufen sich auf $1 \cdot 10^{-10}$ Atmosphären. Dieser Druckunterschied tritt in Meereshöhe bei Überwindung einer Höhendifferenz von etwa $1 \cdot 10^{-4}$ cm auf. Durch diesen Vergleich wird uns die außerordentlich hohe Reizempfindlichkeit unseres Hörsinnes verdeutlicht.

Zur Festlegung einer absoluten Tonskala wurde 1858 in Paris die Übereinkunft getroffen, dem Ton a′ 435 Schwingungen pro Sekunde zuzuordnen. Diese Festlegung wurde 1885 in Wien bestätigt. Man bezeichnet diesen Einstimmton als Kammerton oder Normalton. Allerdings erfolgte 1939 in London aus praktischen Erwägungen eine Neufestlegung der Schwingungszahl auf 440, was nun als „hohe" Stimmung bezeichnet wird.

Die Kenntnis der physikalischen Zusammenhänge bei Tonleitern erlaubt auch gewisse Schlüsse über die Verarbeitung äußerer Reize durch die menschliche Psyche. Zum Beispiel hat man beim Abspielen der chromatischen Tonleiter auf dem Klavier die Empfindung, auf einer akustischen Leiter Sprosse um Sprosse emporzuklettern. Benachbarte Sprossen einer Leiter haben gleichen Abstand. Würde man jede Sprosse einer aufgestellten Leiter mit einer ihrer Höhe über dem Boden entsprechenden Maßzahl versehen, ergäbe sich eine arithmetische Zahlenfolge. Schreibt man jedoch auf jede Klaviertaste die zugehörige Schwingungszahl pro Sekunde, ergibt sich eine geometrische Folge, denn der Quotient q zweier Nachbartöne ist gleich $\sqrt[12]{2}$.

Unsere aus diesem Beispiel resultierende Erfahrung könnte so formuliert werden: Stellt eine Folge gleichartiger, zahlenmäßig erfaßbarer äußerer physikalischer Reize eine geometrische Folge dar, so wird diese durch die Psyche des Menschen in eine arithmetische Folge umgesetzt. Die Psyche des Menschen ist vergleichbar mit einer Logarithmentafel. Für die einzelnen Temperamente ist nur die Basis der Logarithmen verschieden. Schlägt man z. B. von der geometrischen Zahlenfolge 10, 100, 1 000, ... der Reihe nach die zugehörigen Briggsschen Logarithmen auf, ergibt sich die Zahlenfolge 1, 2, 3, ... Diese Gesetzmäßigkeit wird nach dem Physiker Weber und dem Arzt und Psychologen Fechner auch Weber-Fechnersches Gesetz genannt*. Wegen des Vorhandenseins bestimmter Reizschwellen besteht dieser psychophysische Zusammenhang nur innerhalb gewisser Bereiche. Im Beispiel der Tonfolgen ist diese Beziehung über einen großen Bereich sehr gut bestätigt.

Gewisse Begriffsbildungen aus der Akustik lassen sich – um damit auf den Ausgangspunkt zurückzukehren – sinngemäß auf die Wellenoptik übertragen. Das durch unser Auge wahrnehmbare Farbspektrum umfaßt nur eine Oktave der sehr vielfältig in Erscheinung tretenden elektromagnetischen Wellen. Gewissen Farbzusammenstellungen, wie rot und grün oder blau und gelb entsprechen der uns aus der Akustik bekannten Quarte. Werden wir von einer Pracht schönster Farben besonders beeindruckt, spricht man von einer Farbsymphonie. Dagegen glaubt man beim Anblick einer unglücklichen Farbkombination das schrille Tonintervall einer Sekunde zu vernehmen. *E. Schröder*

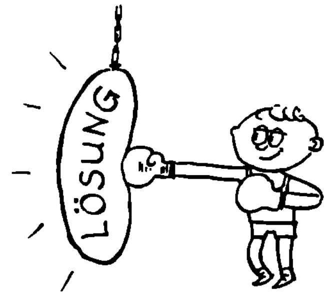
* Wilhelm Eduard Weber (1804–1891) konstruierte 1833 mit Gauß die erste elektromagnetische Telegraphenanlage. Er ist einer der „Göttinger Sieben", die 1837 gegen die Aufhebung der liberalen Verfassung von 1833 durch König Ernst August von Hannover protestierten und daraufhin aus ihren Ämtern entlassen wurden.

Der Verfasser dankt an dieser Stelle für das freundliche Entgegenkommen der Musikabteilung der Sächsischen Landesbibliothek Dresden bei der Beschaffung besonders seltener Musikliteratur.

Dipl.-Päd. Bernd Aust,
Musiker mit Fachschulabschluß,
Leiter der „electra-combo", Dresden:

Exakte theoretische Kenntnisse sind die Grundlagen für jeden guten Musiker. Dazu gehört auch die genaue Kenntnis über den Aufbau der Instrumente und das Wissen darüber, wie der Ton im Instrument entsteht, welche mathematischen und physikalischen Gesetze im Reich der Töne gelten.

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 30. Juni 1973

▲5▲1039 Ein Fußgänger wandert mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit von 5 Kilometern je Stunde von A nach dem 30 Kilometer entfernten Ort B. Unterwegs legt er eine Rast von zwei Stunden ein. Wieviel Minuten später als der Wanderer muß ein Radfahrer in A abfahren, wenn er den gleichen Weg mit der dreifachen durchschnittlichen Geschwindigkeit des Fußgängers fährt und zum gleichen Zeitpunkt wie der Fußgänger in B eintreffen will? *P.*

▲5▲1040 Wie viele dreistellige natürliche Zahlen gibt es, die nicht die Null als Grundziffer enthalten?

W 5 ■ 1041 In der verschlüsselten Additionsaufgabe

$$\begin{array}{r} XY \\ +XY \\ \hline ZX \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Wieviel Lösungen besitzt die Aufgabe? *T.*

W 5 ■ 1042 Der Fußboden eines Raumes von 6 m Länge und 4,5 m Breite soll mit quadratischen Fliesen von der Seitenlänge 15 cm ausgelegt werden.

a) Wieviel Fliesen dieser Art werden benötigt?

b) Da diese Fliesen nicht vorrätig sind, werden rechteckige mit den Maßen 12 cm Breite und 22,5 cm Länge benutzt. Wieviel Fliesen dieser Sorte werden gebraucht? *Sch.*

W 5*1043 Eine natürliche Zahl, die durch 6 teilbar ist, hat folgende Eigenschaft:
Die Hälfte dieser Zahl ist um 5 größer als der dritte Teil dieser Zahl. Wie heißt die Zahl?

W 5*1044 In einer Spezialverkaufsstelle wurden an einem Tage Hühner, Enten, Gänse, Puten und Kaninchen verkauft, insgesamt genau 100 Stück. Zusammen waren es 52 Hühner und Enten, 43 Enten und Gänse, 34 Gänse und Puten, 30 Puten und Kaninchen. Wieviel Stück jeder Tierart wurden an diesem Tage verkauft? *Sch.*

▲6▲1045 Ein 130 m langer Güterzug fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $42\frac{\text{km}}{\text{h}}$ durch einen 220 m langen Tunnel. Wieviel Minuten dauert es, bis der Zug mit seiner ganzen Länge den Tunnel durchfahren hat, das heißt, von der Einfahrt der Lokomotive in den Tunnel bis zur Ausfahrt des letzten Waggons aus dem Tunnel gerechnet?

▲6▲1046 In einem rechtwinkligen Dreieck sei der eine spitze Winkel doppelt so groß wie der andere. Beweise, daß dann die Hypotenuse doppelt so lang ist wie eine der beiden Katheten!

W 6 ■ 1047 Aus den Ziffern 1, 2, 3 und 4 lassen sich durch verschiedenartige Anordnung dieser Ziffern eine bestimmte Anzahl vierstelliger Zahlen bilden. Berechne die Summe aller Zahlen, die sich auf diese Weise bilden lassen, ohne sie alle zum Zwecke des Addierens aufzuschreiben. *Sch.*

W 6 ■ 1048 Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC, konstruiere die Halbierungslinien der Winkel $\sphericalangle CAB=\alpha$ und $\sphericalangle ABC=\beta$, und bezeichne ihren Schnittpunkt mit S! Ziehe durch den Punkt S die Parallele zur Geraden AB; sie möge die Gerade AC in P und die Gerade BC in Q schneiden. Beweise, daß dann $\overline{AP}+\overline{BQ}=\overline{PQ}$ gilt!

30	150		
	Steffi Sorg, 6316 Stützerbach, Schleusinger Str. 128 Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5	20	W5■346
	Prädikat:	10	
	Lösung:		

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W * 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

Der Jahreswettbewerb 1972/73 läuft von Heft 5/72 bis Heft 2/73. Zwischen dem 1. und 10. September 1973 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/73 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1972/73 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

W 6*1049 In der verschlüsselten Additionsaufgabe $XY+XY+XY=ZX$
sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Wieviel Lösungen besitzt diese Aufgabe? *T.*

W 6*1050 Eine sechsstellige natürliche Zahl z_1 beginnt an der höchsten Stelle mit der Grundziffer 1. Streicht man diese Ziffer und hängt man sie hinten wieder an, so erhält man eine sechsstellige Zahl z_2, die dreimal so groß ist wie die Ausgangszahl. Wie heißen diese beiden Zahlen?

▲7▲1051 In der verschlüsselten Additionsaufgabe $XY+XY+XY=ZY$
sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Wie viele Lösungen besitzt diese Aufgabe? *T.*

▲7▲1052 Klaus nahm an der diesjährigen Kreisspartakiade am Wettbewerb im Weitsprung teil. Frank erkundigte sich bei Klaus nach den von ihm erzielten Sprungweiten. Pfiffig antwortete Klaus: „Mein erster Sprung lag zwischen 3 m und 4 m. Die Maßzahl dieser Sprungweite (gemessen in cm) ist durch 5 teilbar. Mit dem vierten Sprung schaffte ich genau 410 cm. Die Quersumme der Maßzahl des vierten Sprungs ist gleich der Quersumme der Maßzahl des ersten Sprungs. Der dritte Sprung war um die Hälfte weiter als der erste. Hätte ich beim zweiten Sprung nicht 44 cm verschenkt, so wäre ich genau so weit gesprungen wie beim dritten Sprung. Der fünfte Sprung war ungültig. Die Summe der Sprungweiten aller übrigen gültigen Sprünge betrug 2118 cm." Ermittle die Weiten der sechs ausgeführten Sprünge, wenn alle Längenangaben in vollen Zentimetern erfolgen!

Dietmar Kurtz, Schüler, 5401 Friedrichroda

W 7 ■ 1053 In einem Aufenthaltsraum stehen mehrere gleichlange Bänke. Setzen sich zunächst je 6 Personen auf je eine Bank, so bleibt eine Bank übrig, auf der nur 3 Personen Platz nehmen. Setzen sich hingegen je 5 Personen auf jede der vorhandenen Bänke, so müssen 4 Personen stehen. Wieviel Bänke und wieviel Personen befinden sich in diesem Aufenthaltsraum?

W 7 ■ 1054 Zwei Primzahlen p_1 und p_2 heißen Primzahlzwillinge, wenn für sie $p_1<p_2$ und $p_1+2=p_2$ gilt.
Es seien p_1 und p_2 Primzahlzwillinge und es gelte $p_1>3$ und $p_2>3$. Es ist zu beweisen, daß dann $p_1\cdot p_2+1$ stets durch 36 teilbar ist. Sch.

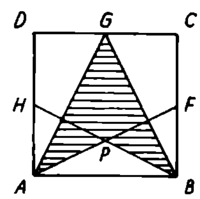
W 7*1055 Gesucht sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleich der vierten Potenz ihrer Quersumme sind. Wie viele solcher Zahlen gibt es?

W 7*1056 Konstruiere ein spitzwinkliges Dreieck ABC, zeichne die drei Höhen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ und verbinde die Fußpunkte D, E und F der Höhen miteinander! Es ist zu beweisen, daß die Höhen des Dreiecks ABC die Innenwinkel des Dreiecks DEF halbieren. *Sch.*

8▲1057 Man beweise, daß die Zahl
$$z=n^3-n$$
a) für alle geraden natürlichen Zahlen n durch 6 und
b) für alle ungeraden natürlichen Zahlen n durch 24 teilbar ist.

Herwig Gratias, Sömmerda
EOS „Ernst Schneller", Kl. 11

8▲1058 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=a=8\text{ cm}^2$ dar. Die Mitte G der Seite $\overline{CD}$ wurde mit den Punkten A und B, die Mitte F der Seite $\overline{BC}$ mit A und die Mitte H der Seite $\overline{AD}$ mit B verbunden. Es ist der Flächeninhalt A_o des schraffierten konkaven Vierecks $APBG$ zu berechnen.



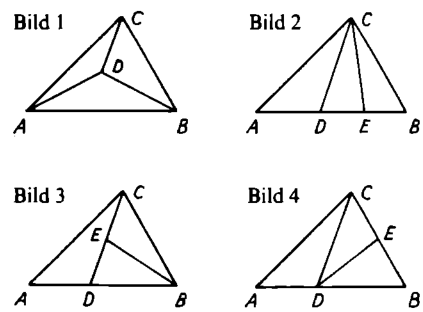
Martin Theuer, Crussow
Fachlehrer für Mathematik

W 8 ■ 1059 Die fahrplanmäßigen Züge der Deutschen Reichsbahn legen mit dem Fährschiff „Saßnitz" die 107,4 km lange Strecke von Saßnitz nach Trelleborg in 3 h 50 min zurück. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des Fährschiffs in $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ bzw. in Knoten auf dieser Strecke?
(Die errechneten Geschwindigkeiten sind jeweils auf eine Stelle nach dem Komma zu runden.)
Das im Jahre 1972 in Dienst gestellte neue Fährschiff „Rügen" erreicht eine Dienstgeschwindigkeit (mittlere Reisegeschwindigkeit) von 20,6 kn. In welcher Zeit kann dieses Schiff die Strecke von Saßnitz nach Trelleborg zurücklegen?
Bemerkung: Bei Seeschiffen wird die Geschwindigkeit meistens in Knoten angegeben: $1\text{ kn}=1\text{sm}\cdot\text{h}^{-1}$; $1\text{ sm}=1852\text{ m}$. *L.*

W 8 ■ 1060 Ein innerer Punkt P eines Dreiecks ABC ist mit den drei Eckpunkten des Dreiecks zu verbinden. Die Verbindungsstrecken $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ und $\overline{CP}$ sind zu halbieren, ihre Mittelpunkte D, E und F sind miteinander zu verbinden. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks DEF durch den Flächeninhalt des Dreiecks ABC auszudrücken. *Sch.*

W 8*1061 Dreiecke lassen sich nach den Winkeln klassifizieren als spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke. Hat ein Dreieck x spitze, y rechte und z stumpfe Winkel, so wollen wir sagen, es sei vom Typ $(x;\ y;\ z)$. So sind die spitzwinkligen Dreiecke vom Typ (3; 0; 0), die rechtwinkligen vom Typ (2; 1; 0) und die stumpfwinkligen vom Typ (2; 0; 1).
In entsprechender Weise können wir auch ebene Vierecke klassifizieren. Hat ein ebenes Viereck x spitze, y rechte, z stumpfe und t überstumpfe Winkel, so wollen wir sagen, es sei vom Typ $(x;\ y;\ z;\ t)$.
Es sollen nun alle Typen von ebenen Vierecken angegeben werden, die genau zwei spitze Winkel haben, und es soll jeder Typ durch eine Zeichnung veranschaulicht werden. *T.*

W 8*1062 Jedes Dreieck ABC kann auf die in den Abbildungen 1, 2, 3 und 4 gezeigten verschiedenen Arten in drei Teildreiecke zerlegt werden.



a) Man beweise, daß der kleinste aller Innenwinkel dieser Teildreiecke nicht größer als 45° ist.
b) Man gebe ein Dreieck ABC und eine Zerlegung dieses Dreiecks in drei Teildreiecke an, bei der der kleinste aller Innenwinkel der Teildreiecke genau 45° beträgt.

Harald Englisch, stud. math., Leipzig
IMO-Teilnehmer 1971 und 1972

9▲1063 Es seien a und b zwei nichtnegative reelle Zahlen. Dann gilt im allgemeinen nicht
$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$
Denn für $a=9$, $b=16$ gilt z. B.
$$\sqrt{a+b}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5,$$
aber $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$, und es ist $5\neq 7$.
Es sollen nun alle geordneten Paare $[a;\ b]$ von nichtnegativen reellen Zahlen a und b ermittelt werden, für die
$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\text{ gilt.}$$
T.

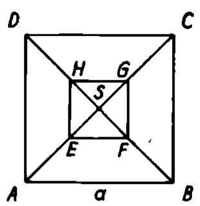
9▲1064 Es sei P ein innerer Punkt eines Dreiecks ABC derart, daß die Dreiecke ABP, BCP und CAP flächengleich sind.
Man beweise, daß dann P der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, also der Schwerpunkt dieses Dreiecks, ist. *Sch.*

W 9 ■ 1065 Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$\frac{2ax}{x+a}+\frac{2ax}{x-a}-\frac{a}{x^2-a^2}=2$$

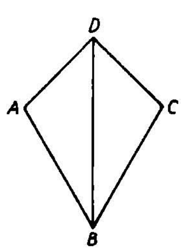
a) keine, b) genau eine, c) genau zwei, d) mehr als zwei reelle Lösungen in x hat.
L.

W 9 ■ 1066 Die beiden abgebildeten Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ befinden sich in Ähnlichkeitslage mit dem Schnittpunkt S der Diagonalen als Ähnlichkeitszentrum, und es gilt $\overline{AB}=\overline{AG}=a$. Es ist zu beweisen, daß auch $\overline{FG}=\overline{GC}$ gilt! *Sch.*



W 9*1067 Es sind alle Primzahlen p zu ermitteln, für die die Zahlen $14+p$, $26+p$, $32+p$, und $38+p$ wieder Primzahlen sind.
Hans-Reinhard Berger, EOS „Prof. Dr. Max Schneider", Lichtenstein, Kl. 12

W 9*1068 Jemand behauptet, daß jedes Viereck $ABCD$, in dem die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gleichlang sind und in dem die Diagonale $\overline{DB}$ den Innenwinkel $\sphericalangle CDA$ des Vierecks halbiert, ein Drachenviereck sei, und beweist diese Behauptung wie folgt (vgl. die Abb.):



Aus $\overline{DB}=\overline{DB}$, $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\sphericalangle BDA=\sphericalangle CDB$ folgt, da die Dreiecke BDA und CDB in zwei Seiten und einem Winkel übereinstimmen, $\triangle BDA\cong\triangle CDB$. Also gilt auch $\overline{DA}=\overline{DC}$, d. h., das Viereck $ABCD$ ist ein Drachenviereck.
Ist diese Behauptung richtig, oder liegt hier ein Trugschluß vor? Die Ausführungen sind durch die Zeichnung eines Vierecks $ABCD$ mit $\overline{AB}=\overline{BC}=2{,}6$ cm, $\overline{DB}=5$ cm, $\sphericalangle CDA=60°$ zu veranschaulichen. *L.*

10/12 ▲ 1069 Es seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $a>c$ und $b>d$. Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{1}{(a-c)^2}+\frac{1}{(b-d)^2}\geq\frac{8}{(a+b-c-d)^2}.$$

Hans-Dietrich Gronau, stud. math. Neustrelitz

10/12 ▲ 1070 Man beweise, daß für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen Zahlen n

$$s_n=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\dots+\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

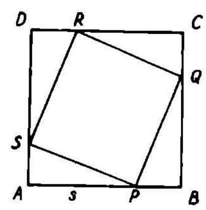
gilt, und berechne s_n für $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=10$, $n=100$.
Wolfgang Riedel, stud. math. Karl-Marx-Stadt

W 10/12 ■ 1071 Es sind alle reellen Zahlen a zu ermitteln, für die die Gleichung

$$\sqrt{x^2-a}=ax$$

mindestens eine reelle Lösung in x hat. Ferner sind diese Lösungen jeweils anzugeben.
Dr. Gerhard Hesse, Dresden

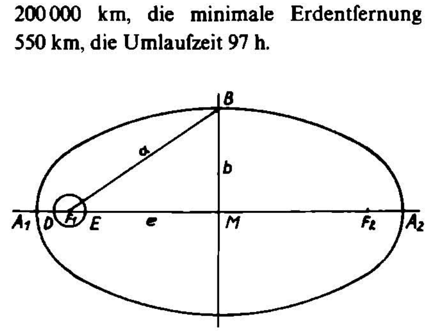
W 10/12 ■ 1072 Einem Quadrat $ABCD$ mit der Seite $\overline{AB}=a$ sei ein Quadrat $PQRS$ einbeschrieben, dessen Eckpunkte auf den Seiten des Quadrates $ABCD$ liegen (vgl. die Abb.).



a) Es ist der Flächeninhalt des Quadrates $PQRS$ zu berechnen, wenn $\overline{AP}=s$.
b) Es sei $a=10$ cm. Kann dann der Flächeninhalt des Quadrates $PQRS$ gleich 30 cm² sein?
c) Es ist der kleinste Flächeninhalt zu ermitteln, den das Quadrat $PQRS$ haben kann.
Prof. Dr. N. Tschaikowski (†) Lwow, UdSSR

W 10/12*1073 Einem regelmäßigen Tetraeder seien eine Kugel einbeschrieben und eine Kugel umbeschrieben. Wie verhalten sich die Volumina dieser beiden Kugeln zueinander?
Herwig Gratias, EOS Sömmerda, Kl. 11

W 10/12*1074 Im Juni 1972 wurde in der Sowjetunion die automatische Station Prognos 2 gestartet. Die Umlaufbahn dieser Station ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt der Mittelpunkt der Erde liegt (vgl. die nicht maßstäbliche Abbildung). Die maximale Erdentfernung der Station beträgt 200 000 km, die minimale Erdentfernung 550 km, die Umlaufzeit 97 h.



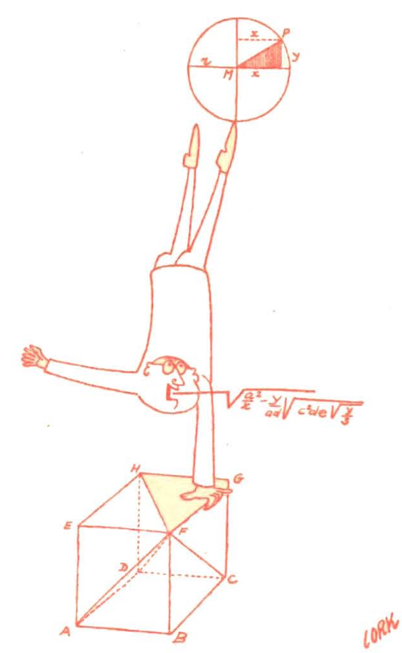
1. Es sollen die Halbachsen a und b der Ellipse berechnet werden.
2. Es soll die Länge der Umlaufbahn (also der Umfang der Ellipse) berechnet werden.
a) nach der sehr groben Näherungsformel $s_1=\pi(a+b)$;
b) nach der besseren Näherungsformel $s_2=\pi[1{,}5(a+b)-\sqrt{ab}]$
c) nach der genauen Formel

$$s=2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\varepsilon^4-\frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\varepsilon^6-\dots-\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2\cdot 4\dots 2n}\right)^2\varepsilon^{2n}-\dots\right],$$

wobei $\varepsilon^2=1-\frac{b^2}{a^2}$ ist.

3. Es soll die mittlere Geschwindigkeit der Station (in km · h⁻¹) auf ihrer Umlaufbahn berechnet werden.
Anleitung zur Lösung:
Mit Hilfe der Abbildung können wir a und b leicht berechnen. Wir erhalten nämlich $\overline{A_1D}=550$ km, $\overline{EA_2}=200\,000$ km,
$r=\overline{DF_1}=\overline{F_1E}=6370$ km, also
$a=\overline{A_1M}=\frac{1}{2}\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}(550+200\,000+2\cdot 6360)$ km,
$a=106\,650$ km;
$e=\overline{F_1M}=a-r-550\text{ km}=99\,730$ km.
Ferner erhalten wir aus dem rechtwinkligen Dreieck BF_1M
$b=\sqrt{a^2-e^2}=11\,950$ km.
Die weiteren Rechnungen zu a), b) und c) können nunmehr mit dem Rechenstab durchgeführt werden, wobei die Ergebnisse auf Vielfache von 1 000 km zu runden sind. *L*

Druckfehlerteufel
W 5*1008: An Stelle von 21 muß es 22 heißen! Alle zu dieser Aufgabe bis 30. Juni noch eingehenden Lösungen werden gewertet.
Redaktion *alpha*



Berufsbild: Statistiker –

eine Spezialisierungsrichtung im Grundberuf Wirtschaftskaufmann

Statistik –
Zahlen, Tabellen, Formulare, Erhebungen, Zählungen, Erfassungen –
Eine gesellschaftswissenschaftliche Disziplin –
Eine mathematische Disziplin –
Ein zentrales staatliches Organ –
Bezirks- und Kreisstellen für Statistik

Statistik ist in allen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens anzutreffen, sowohl in der Theorie als auch in der Praxis. Dieser Artikel soll Aufschluß über die Statistik als Spezialisierungsrichtung im Grundberuf *Wirtschaftskaufmann* geben.

Was ist der Inhalt dieses Berufes und was sind die Aufgaben eines Statistikers?

Für die 17 Millionen Einwohner der Deutschen Demokratischen Republik, die in Tausenden Städten und Gemeinden leben, müssen Kindergärten und Schulen, Arbeitsplätze und Altersheime, Nahrungsmittel und Kleidung, Wohnungen und Ferienheime, Ärzte und Krankenhäuser in ausreichendem Maße vorhanden sein. Wie sollten in unserem Staat all diese Dinge geplant und bereitgestellt werden können, ohne daß die Staatlichen Organe durch die Statistik erfahren, wieviel Betriebe und Arbeitskräfte vorhanden sind, ohne daß die Industriebetriebe melden, was und wieviel sie produzieren – die Landwirtschaft, wieviel sie an pflanzlichen und tierischen Produkten erzeugt – der Handel, was er verkauft hat – ohne daß schließlich die Gemeinden melden, wieviel junge Paare heiraten und wieviel Kinder geboren werden. Aus all diesen Meldungen gewinnt der geschulte Statistiker, der über gute Kenntnisse der Politischen Ökonomie und der Betriebsökonomie verfügen muß, ein Gesamtbild der Bevölkerungsentwicklung, der Entwicklung der Produktion und des Bedarfs. Er erhält Aufschluß über alle wesentlichen Vorgänge in der Volkswirtschaft und gewährleistet durch seine Arbeit eine schnelle Information über ökonomische Vorgänge in den Betrieben und Institutionen. Durch seine Tätigkeit hilft er mit, die leitenden Staats- und Wirtschaftsorgane mit einem möglichst geringen Aufwand an Arbeit umfassend und schnell zu informieren. Dazu wird die Elektronische Datenverarbeitung weitgehend angewandt.
Wie jeder Beruf, stellt natürlich auch der Beruf des *Statistikers* ganz bestimmte Anforderungen an Können und Eigenschaften der jungen Menschen, die erfolgreich auf dem Gebiet der Statistik arbeiten wollen.

Voraussetzungen

Voraussetzung für die Bewerbung ist der erfolgreiche Abschluß der 10. Klasse der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule mit guten Leistungen, insbesondere in den Fächern Mathematik, Deutsch, Staatsbürgerkunde und Russisch.

Ausbildungsdauer und Ausbildungsablauf

Die Ausbildung umfaßt für alle Lehrlinge zwei Jahre, davon ein Jahr berufliche Spezialisierung, und schließt mit dem Facharbeiterzeugnis *Wirtschaftskaufmann – Spezialisierungsrichtung Statistiker* – ab.
In der einjährigen Grundlagenbildung im ersten Lehrjahr werden umfassende Kenntnisse auf mathematischem und ökonomischem Gebiet vermittelt. Die Ausbildung wird im Turnuswechsel von theoretischer und praktischer Ausbildung durchgeführt.
Das zweite Lehrjahr umfaßt die berufliche Spezialisierung und ist vorwiegend durch eine praktische Berufsausbildung gekennzeichnet.

Einsatzmöglichkeiten nach Abschluß der Berufsausbildung

bestehen als Sachbearbeiter in einer Bezirks- oder Kreisstelle der Staatlichen Zentralverwaltung für Statistik mit der Entwicklungsmöglichkeit bis zum mittleren Führungskader (Referent). Nach Abschluß der Lehre kann bei vorhandenen Voraussetzungen ein Fachschulstudium aufgenommen werden, welches nach einem dreijährigen Direktstudium bzw. vierjährigen Fern- oder Abendstudium abschließt.

E. Blüher/R. Schröter

Aufgaben

▲1▲ In der statistischen Arbeit ist zur Darlegung ökonomischer Zusammenhänge die Anwendung mathematischer Methoden von großer Bedeutung.
Drei Kreise eines Bezirkes werden nach dem Pro-Kopf-Verbrauch der Bevölkerung an Nahrungsmitteln untersucht. Es wurden folgende Ergebnisse (Jahresangaben) ermittelt!

Kreis	Gesamtverbrauch (1 000 M)	Pro-Kopf-Verbrauch (M)
1	65 500	2 620
2	106 400	2 800
3	195 300	3 150

Zu berechnen ist: a) der durchschnittliche Pro-Kopf-Verbrauch für alle 3 Kreise insgesamt
b) um wieviel Mark weichen die Angaben über den Pro-Kopf-Verbrauch vom durchschnittlichen Pro-Kopf-Verbrauch ab?

▲2■ Über den Pro-Kopf-Verbrauch an Fleisch und Rauchtabak für die DDR von 1964 bis 1971 liegen folgende Angaben vor:

Jahr	Fleisch (kg)	Rauchtabak (g)
1964	55,0	130
1965	56,3	123
1966	53,5	135
1967	56,0	125
1968	58,0	106
1969	58,7	100
1970	60,1	101
1971	61,5	88

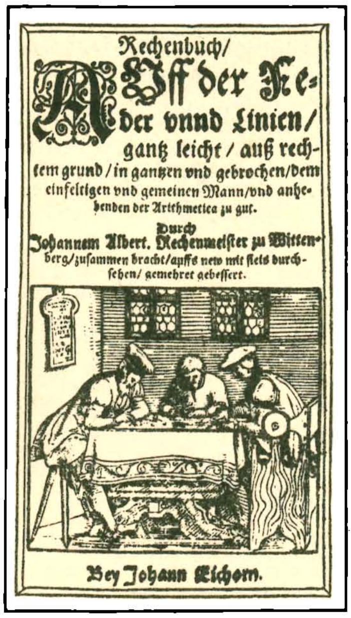
Es ist das durchschnittliche Wachstumstempo des Pro-Kopf-Verbrauchs von 1954 bis 1971
a) bei Fleisch b) bei Rauchtabak
zu ermitteln.

Computer-Lieder doch mit Gefühl?

Mit der Frage, ob eine Maschine Musik schaffen kann, befaßte sich ein Symposium in Rostow am Don. Die Antwort war positiv. Die sowjetischen Wissenschaftler analysierten klassische Musikwerke, u. a. Klaviersonaten mit mathematischen Methoden, und kamen zu dem Schluß, daß auf EDV-Anlagen Musikwerke modelliert werden können. Musikstudenten, Künstler des Moskauer Bolschoi-Theaters und Musikwissenschaftlern legte man 16 Liedmelodien vor, von denen acht von dem Computer „Ural-22" geschaffen worden waren. Obwohl die Teilnehmer des Experiments in einer vorherigen Befragung die Computermusik abgelehnt hatten („Die ganze Computermusik ist keine Musik, da ihr das Gefühl fehlt.), zeigte sich, daß keiner in der Lage war, die Computerlieder sicher von den anderen zu unterscheiden.

In alten Mathe-Büchern geblättert

(Die auf dieser Seite veröffentlichten Aufgaben wurden z. T. in unsere heutige Umgangssprache umgesetzt)


Rechenbuch/ Auff der Feder vnnd Linien/ gantz leicht / auß rechtem grund / in gantzen vnd gebrochen/ dem einfeltigen vnd gemeinen Mann/ vnd anhebenden der Arithmetica zu gut. Durch Johannem Albert. Rechenmeister zu Wittenberg/ zusammen bracht/ auffs new mit fleis durchsehen/ gemehret gebessert.

Bey Johann Eichorn.

▲1▲ Jemand habe mit drei Würfeln gewürfelt. Willst du raten, wieviel Augen auf jedem Würfel zu sehen sind, so lasse ihn folgendes ausrechnen:

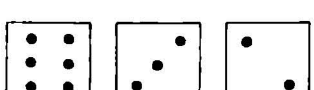
Die Augenzahl des ersten Würfels ist zu verdoppeln und anschließend ist 5 zu addieren. Die Summe ist mit 5 zu multiplizieren und zum Produkt sind 10 zu addieren.

Zu diesem Ergebnis ist die Augenzahl des zweiten Würfels zu addieren und die Summe mit 10 zu multiplizieren.

Schließlich sind noch die Augen des dritten Würfels zu addieren.

Nun lasse dir diese Summe nennen, subtrahiere im Kopfe 350 und aus dem verbleibenden Rest (eine dreistellige Zahl) kannst du die Augenzahlen der Würfel (d. i. jede Ziffer der Zahl) ansagen.

Beispiel: Die Würfel zeigen die Augen



$\cdot 2=4$ $\quad$ 55 $\quad$ 580

$+5=9$ $\quad$ $+\ 3=58$ $\quad$ $+\ 6 = 586$

$\cdot 5=45$ $\quad$ $\cdot 10=580$

$+10=55$

Lösung: $\begin{array}{r} 586 \\ -350 \\ \hline 236 \end{array}$, also 2; 3; 6.

▲2▲ Es reisen zwei Gesellen zugleich von Wittenberg nach Spanien. Der erste läuft jeden Tag 7 Meilen, und der andere läuft am ersten Tag eine Meile, am nächsten Tag zwei, am dritten Tag drei Meilen und so fortsetzend, jeden Tag eine Meile mehr. Es ist die Frage zu beantworten, in wieviel Tagen diese zwei Gesellen zusammen ankommen.

Eine Lösung erhält man durch Aufstellung einer Tabelle:

Tag	1. Geselle	2. Geselle
1.	7 Meilen	1 Meile
2.	14 Meilen	+ 2 Meilen = 3 Meilen
3.	21 Meilen	+ 3 Meilen = 6 Meilen
4.	28 Meilen	+ 4 Meilen = 10 Meilen
5.	35 Meilen	+ 5 Meilen = 15 Meilen
6.	42 Meilen	+ 6 Meilen = 21 Meilen
7.	49 Meilen	+ 7 Meilen = 28 Meilen
8.	56 Meilen	+ 8 Meilen = 36 Meilen
9.	63 Meilen	+ 9 Meilen = 45 Meilen
10.	70 Meilen	+ 10 Meilen = 55 Meilen
11.	77 Meilen	+ 11 Meilen = 66 Meilen
12.	84 Meilen	+ 12 Meilen = 78 Meilen
13.	91 Meilen	+ 13 Meilen = 91 Meilen

Zusammenkunft also nach 13 Tagen.

Oder auch so:

Am 7. Tag der Reise stimmt die täglich zurückgelegte Anzahl der Meilen zwischen beiden Gesellen überein, nämlich 7 Meilen. Der zweite Geselle muß nun die gleiche Anzahl der zunächst zurückgebliebenen Meilen nachholen, d. h. es ergibt sich die Gleichung:

$$(7-6)+(7-5)+(7-4)+(7-3)+(7-2)+$$
$$+(7-1)+7+(7+1)+(7+2)+(7+3)+$$
$$+(7+4)+(7+5)+(7+6)=7x \text{ bzw.}$$
$$91=7x \text{ und}$$
$$x=13$$


JOHANNIS HEMELINGII Käyserl. gekrönten Poëten und bestallten Schreib- und Rechen-Meisters der Stadt Hannover, ARITHMETISCHER Anfang/ Oder Kleines Rechen-Buch Das ist: Kurtze/ doch gründliche Abfassung/ welcher gestalt die edle Rechen-Kunst einem begierigen Liebhaber derselben gründlich und bald anzulehren; Nunmehro aber aufs neue revidiret, und nach itzigem Handels-Stylo und Gebrauch mit einigen neuen Regulen und vielen nützlichen Aufgaben, samt der Italiän- oder Welschen Practica, und sonst der Jugend dienlichen Sachen kurtz und deutlich vermehret Von GERHARD Meyer/ Verordnetem Schreib- und Rechen-Meister der alten Stadt Hildesheim.

Hildesheim, Gedruckt und verlegt bey Just Henning Matthäi, Eines Hoch-Edlen Raths Buchdr. 1729.

▲3▲ Practic-Rechnung

Not. Weilen der Divisor 12 ein Numerus Compositus, oder geschickte Zahl ist, so zerstreue ihn nach dem Einmahl Eins in 2 mahl 6. oder 3 mahl 4. mit jedem dividiere absonderlich, und mache jedesmahl einen Strich: fac.

Exempla zur Übung.

Mit 135 Theile 133 110. fac. 986.

Nota: 135 zerfälle in 9·5·3 mit jedem dividiere absonderlich. fac.

Lösung:

$133\,110 : 135 = \frac{133\,110}{135}$ da QS durch 9 teilbar

$= \frac{14\,790}{45}$ da QS durch 3 teilbar

$= \frac{4\,930}{5}$ letzte Ziffer 0 bzw. 5, durch 5 teilbar

$= 986$

▲4▲ Von der Regel Detri.

(Universalregel zur Berechnung aller Exempel in Brüchen)

Beispiel:

Z. E. Für $\frac{3}{4}$ Rthl. bekommt man 8 ℔, wieviel für 5 Rthl.?

Dieses stehet also:

$\frac{4}{3} - \frac{8}{1} - \frac{5}{1}$ Antwort $\frac{160}{3}$ oder $53\frac{1}{3}$ ℔

Nämlich, wenn ihr alle Glieder eingerichtet und *A* verkehret habt, so multipliciret (weil allhier keine obere Zahl gegen eine untere zu kleinern,) sofort die oberen Zahlen $4 \times 8 \times 5$, desgleichen auch besonders die unteren Zahlen $3 \times 1 \times 1$ in einander, so giebt jenes Product den Zähler, und dieses den Nenner in dem verlangten Facit, nämlich $\frac{160}{3}$ oder im Ganzen $53\frac{1}{3}$ ℔

Lösung: Rthl. Reichsthaler (Riksdaler), bis 1845 schwedische Geldeinheit.

℔ Pfund (ältere Gewichtseinheit), lateinisch libra, abgekürzt lb, aus dem das Zeichen entstand.
Wir rechnen so:

$$\frac{3}{4} : 8 = 5 : x \text{ und } \frac{3}{4}x = 40.$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{40 \cdot 4}{3} = 53\frac{1}{3}, \text{ d.s. } 53\frac{1}{3} \text{ ℔}.$$

Anfangsgründe
der kaufmännischen
Rechenkunst,
Oder
gründliche Anweisung, kurz und mit
Vortheil zu rechnen;
Welche
nicht nur die gemeinen Rechnungsarten
auf eine vortheilhafte Art, sondern auch die
Ketten- und andern kaufmännischen Rechnungen
nebst einer compendiösen Probe in sich
fasset,
nach Clausbergischen Regeln entworfen,
und
zum bequemen Gebrauche derer, die sich der Handlung widmen,
mit vielen Exempeln erläutert
von
Christoph Pflugbeil,
Arithmeticus bey der Schule zu St. Nicolai in Leipzig.

Leipzig,
bey Adam Friedrich Böhmen, 1773.

Aufgabe.

Es sollen sich vier Brüder in eine Erbschaft von 1000 Thaler dergestalt theilen, daß der zweite 100 Thaler weniger bekommt als der älteste, der dritte 75 Thaler mehr als der zweite, und der vierte 60 Thaler mehr als der dritte; Man verlanget zu wissen, wie viel ein jeder bekommt.

Vorbereitung.

Wenn man den Theil wüste, den der erste bekommt, so wäre es leicht zu bestimmen, wie viel ein jeder bekommt. Denn wenn man diesen Unbekannten Theil x nennt; so ist $x - 100$ der Theil des zweiten $x - 100 + 75$ der Theil des dritten, $x - 100 + 75 + 60$ den Theil des vierten. Nun ist offenbar, daß alle diese Theile zusammen genommen so groß seyn müssen, als das ganze Capital 1000 Thl.

Auflösung.

Also ist
$1000 = x + x - 100 + x - 100 + 75 + x - 100 + 75 + 60$
Aus dieser Gleichung muß x bestimmt werden.
Nun ist $x + x + x + x = 4x$
$-100 - 100 - 100 = -300$
$75 + 75 + 60 = 210$
Dieses kann man nun in der Gleichung setzen, und alsdenn dieselbe kürzer so schreiben
$1000 = 4x - 300 + 210$
und weil $-300 + 210 = -90$ ist
so wird $1000 = 4x - 90$
Nachdem man diese Gleichung so weit gebracht hat, muß man x nur allein auf die eine Seite, und alle bekannte Zahlen auf die andre bringen.
Um dieses zu bewerkstelligen folgt man der (§. 62.) gegebenen Regel, man schreibe nemlich die Zahl -90 mit dem umgekehrten Zeichen auf die andere Seite, so wird $1000 + 90 = 4x$
oder $1090 = 4x$
Der Theil des ersten viermahl genommen, ist also so groß als 1090 Thlr. Folglich muß der vierte Theil so gros seyn als x oder $\frac{1090}{4} = x$
und wenn man die Division würklich verrichtet
$272\frac{2}{4}$ Thlr. $= x$

▲5▲ *Lösung:* Wir rechnen so:
Der erste Bruder sei x, dann gilt:
$x + (x - 100) + (x - 100 + 75) + (x - 100 + 75 + 60) = 1\,000$
Nach Auflösen der Klammern, Zusammenfassen und Ordnen erhält man

$$4x = 1\,090$$
$$x = 272\frac{1}{2}$$

Die Aufteilung der Erbschaft geschieht daher folgendermaßen:

1. Bruder	$272\frac{1}{2}$ Taler
2. Bruder	$172\frac{1}{2}$ Taler
3. Bruder	$247\frac{1}{2}$ Taler
4. Bruder	$307\frac{1}{2}$ Taler
Zusammen	1 000 Taler

G. F. Tempelhoffs
vollständige
Anleitung
zur
Algebra.
Neue Auflage.

Berlin,
verlegts Arnold Wever, 1773.

Aufgabe.

Zwey Kaufleute haben ein Capital von 1800 Thlr. zusammengelegt. Nach Verlauf von einiger Zeit haben beyde gleichviel gewonnen, und der Gewinnst des ersten ist dreymahl so groß als die Summe die er einlegte, der Gewinnst des zweiten aber 5 mahl so groß als das Geld, welches er eingelegt. Man will wissen, wie viel ein jeder zu der Summe von 1800 Thlr. gegeben.

▲6▲ *Lösung:* Wir rechnen so:
Der erste Kaufmann sei x; der zweite $(1\,800 - x)$. Dann gilt:

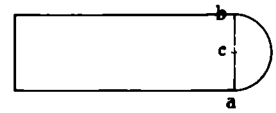
$$3x = 5(1\,800 - x)$$

bzw. $x = 1\,125$
Es folgt daraus, daß der erste Kaufmann 1 125 Taler einbrachte und der zweite (1 800 − 1 125) Taler = 675 Taler.
Zur Probe führt: $1\,125 \cdot 3 = 3\,375$
und $675 \cdot 5 = 3\,375$,
d. h. beide hatten gleichviel Gewinn aus ihrem Kapital erzielt.

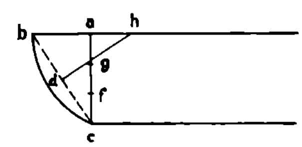
Der praktische Geometer
oder
Anleitung
zur gewerblichen Geometrie.

Langensalza 1857

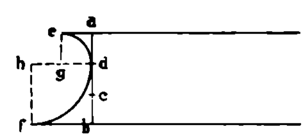
Der Stab: Man theilt die Höhe ab in 2 gleiche Theile und beschreibt mit dem Halbmesser *ac* aus *c* einen Halbbogen.



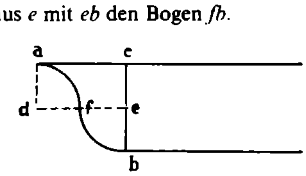
Der Viertelstab oder Wulst: Man theile die Höhe *ac* in 3 gleiche Theile; 2/3 davon = *ab*, was man die Ausladung nennet; man verbinde *b* und *c* durch eine Hülfslinie und errichte auf der Mitte derselben eine Normale nach *h*. Von *h* aus beschreibe man mit der Zirkelöffnung bis *b* den Bogen *bc*.



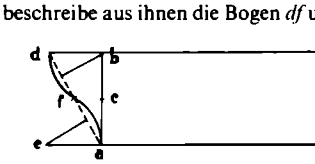
Die Doppelhohlkehle: Man theile *ab* in 3 gleiche Theile, so daß *ad* = 1/3 und *db* = 2/3 ist; mache *ac* = *ad* und *bf* = *bd*; ziehe *eg* parallel mit *ad* und *bd* parallel mit *fb*; beschreibe aus *g* mit *gd* den Bogen *dc* und aus *h* mit *hd* den Bogen *df*.



Die Karnies oder die Kehlleiste: Man theile *cb* bis *e*; mache die Ausladung *ac* = *cb* und ziehe aus *e* eine punktierte Parallele *de* mit *ac*; beschreibe aus *d* mit *ad* den Bogen *af* und aus *e* mit *eb* den Bogen *fb*.



Ein Karnies: Man theile *ab* in *c*, trage 1/2 von *b* nach *d* und 1/2 von *a* nach *e*, ziehe die Hülfslinie *ad* und theile sie in *f*, errichte aus den Mittelpunkten die Normalen *b* und *e*, und beschreibe aus ihnen die Bogen *df* und *fa*.



Zusammenstellung: J. Lehmann;
Lösungen: W. Unze

Aus der Graphentheorie

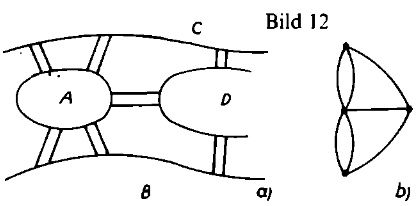
Teil 3

Nachdem wir das bisher Dargebotene etwas geübt haben, wollen wir uns wieder der Theorie widmen. Wir wollen uns mit gewissen offenen oder geschlossenen Kantenzügen von Graphen befassen:

Eulersche und Hamiltonsche Linien

Zu einer seiner Arbeiten (es handelt sich um die eingangs genannte, 1736 erschienene) wurde der geniale Mathematiker *Leonhard Euler* (1707 bis 1783) durch eine Fragestellung angeregt, die in den Bereich der Unterhaltungsmathematik gehört und über die viele seiner Zeitgenossen nachdachten:
Es handelt sich um das Problem der *Königsberger Brücken.* Mit einigen Resultaten Eulers, die auch dieses Problem lösten, aber weit darüber hinausgingen, nahm (wie bereits erwähnt) die systematische Graphentheorie ihren Anfang.
Bild 12a veranschaulicht die Lage der sieben Königsberger Brücken.

Bild 12



Dem Bild 12a können wir den Graphen des Bildes 12b zuordnen. Seine Knotenpunkte stellen die Festlandteile A, B, C, D dar. Zwei Knotenpunkte sollen durch soviel Kanten verbunden werden, wie die ihnen entsprechenden Festlandteile durch Brücken verbunden sind.

▲11▲ Sicher wird es euch nicht sehr viel Mühe bereiten, mittels Durchprobieren aller Möglichkeiten herauszufinden, daß es nicht möglich ist, in einem der Gebiete A, B, C, D beginnend, alle sieben Brücken in einem einzigen – zum Ausgangspunkt zurückführenden – Spaziergang genau einmal zu passieren.

Der Satz 3, den wir jetzt formulieren und beweisen wollen geht auf *Euler* zurück. Er liefert die Aussage, die auch eine Antwort auf den in Aufgabe 11 erläuterten *Spaziergang über die Königsberger Brücken* gibt.

Satz 3: Man kann sämtliche Kanten eines zusammenhängenden (endlichen) Graphen G dann und nur dann in einem geschlossenen Kantenzug durchlaufen, wenn G nur Knotenpunkte gerader Valenz enthält.
Zum Beweis des Satzes 3 benutzen wir eine Aussage, die wir in einem Hilfssatz formulieren wollen.
(Die Bezeichnung „Hilfssatz" bezieht sich, das sei bemerkt, nur auf seine Stellung zum Satz 3.)

Hilfssatz: Enthält ein zusammenhängender Graph G (mit mehr als einem Knotenpunkt) nur Knotenpunkte gerader Valenz, so ist jeder seiner Knotenpunkte in (mindestens) einem Kreis von G enthalten.

Beweis des Hilfssatzes: x sei ein beliebiger Knotenpunkt aus G und (x, y) sei eine der mit x inzidenten Kanten. G^* sei der Graph, den wir aus G durch Entfernung der Kante (x, y) erhalten. G^* ist zusammenhängend, denn andernfalls enthielte die Komponente von G^*, in der der Knotenpunkt x liegt, einen einzigen Knotenpunkt ungerader Valenz, nämlich x. Das widerspräche aber Satz 2.
Da G^* also zusammenhängend ist, gibt es in G (mindestens) einen Weg, der x und y verbindet. Dieser Weg, zusammen mit der Kante (x, y), liefert uns einen Kreis in G, der x enthält.
Wir wollen nun zum Beweis des Satzes 3 schreiten:
Der Beweis erfolgt in zwei Schritten; wir beweisen die Aussagen, die wir mit 1 und 2 bezeichnen.
Zunächst noch eine Definition.

Definition 10: Ein geschlossener (offener) Kantenzug, der jede Kante eines Graphen G enthält, heißt eine *geschlossene (offene) Eulersche Linie* des Graphen G.

Aussage 1: Wenn alle Knotenpunkte des Graphen G gerade Valenz haben, dann enthält G eine geschlossene Eulersche Linie.

Beweis der Aussage 1: Aus allen x enthaltenden geschlossenen Kantenzügen von G (einen gibt er nach dem Hilfssatz sicher) wählen wir einen aus, der die meisten Kanten enthält. Wir nennen ihn Z.
Wir bilden den Graphen G_1, der alle Kanten enthält, die nicht auf Z liegen, und alle mit diesen Kanten inzidierten Knotenpunkte. Offensichtlich enthält G_1 nur Knotenpunkte gerader Valenz. (G_1 ist im allgemeinen nicht zusammenhängend!) Da G zusammenhängend ist, muß G_1 mit Z mindestens einen Knotenpunkt gemeinsam haben, sagen wir den Knotenpunkt y. Nach dem Hilfssatz gibt es in G_1 einen Kreis K, der y enthält. Wir bilden nun in G einen Kantenzug Z_1 nach folgender Vorschrift:
In y beginnend durchlaufen wir Z ganz und gelangen wieder zum Knotenpunkt y; nun setzen wir – wiederum in y beginnend – den Kantenzug mit den Kanten und Knotenpunkten des Kreises K fort.
Z ist ein den Knotenpunkt x enthaltender geschlossener Kantenzug, der mehr Kanten enthält als Z. Das steht aber im Widerspruch zur vorausgesetzten Maximalität von Z. Z ist also bereits eine geschlossene Eulersche Linie des Graphen G.

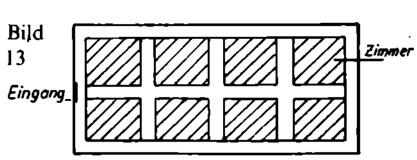
Aussage 2: Wenn G eine geschlossene Eulersche Linie besitzt, so hat jeder Knotenpunkt von G gerade Valenz.
(*Bemerkung:* Die Aussagen 1 und 2 gemeinsam erfassen die Aussagen „dann und nur dann" in Satz 3.)

Beweis von Aussage 2: Wir „wandern auf der Eulerschen Linie entlang", bis wir zum Ausgangspunkt zurückkehren. In jeden beliebigen Knotenpunkt P von G gehen wir dabei ebensooft hinein wie aus ihm heraus. Da wir bei unserer Wanderung jede Kante genau einmal durchlaufen, schließen wir sofort, daß p mit einer geraden Anzahl von Kanten inzidiert, d. h. gerade Valenz hat.
Eng verwandt mit Satz 3 ist der folgende Satz, dessen einfacher Beweis euch als Aufgabe überlassen bleiben kann.

Satz 4: Ein zusammenhängender endlicher Graph G kann genau dann in einem offenen Kantenzug – der jede Kante von G enthält – durchlaufen werden, wenn er genau zwei Knotenpunkte ungerader Valenz hat. Die beiden Knotenpunkte ungerader Valenz sind dabei Anfangs- und Endpunkt des Kantenzuges.
Mit Hilfe des Satzes 4 erkennen wir sofort, daß es auch nicht möglich ist, über jede der sieben Königsberger Brücken genau einmal hinwegzuspazieren, ohne den Spaziergang an seinem Ausgangspunkt beenden zu können. An dieser Stelle wird es wieder angebracht sein, eine kleine Pause zu machen, in der wir uns mit einigen Übungsaufgaben befassen wollen.

▲12▲ Eine Schau moderner Wohnraumgestaltung – untergebracht in acht Räumen – wurde kombiniert mit einer Ausstellung zeitgenössischer Graphiken und Malereien. Diese wurden zu beiden Seiten der Wandelgänge des Gebäudes plaziert. (Bild 13)

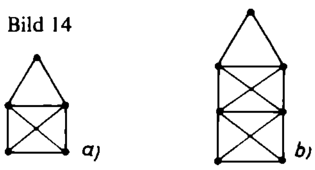
Bild 13



Ihr wollt die Graphiken und Malereien beider Wandseiten betrachten, ohne von einer Seite zur anderen springen und ohne Umwege machen zu müssen. Ihr möchtet einen Spazierweg durch die Ausstellung finden, der euch – am Eingang beginnend und endend – jede Stelle des Ganges genau zweimal passieren läßt. Beim ersten Passieren wird die eine Wandseite betrachtet, beim zweiten die andere. Bild 13 soll euch eine Vorstellung von den Gängen vermitteln. Könnt ihr einen solchen Spazierweg finden?

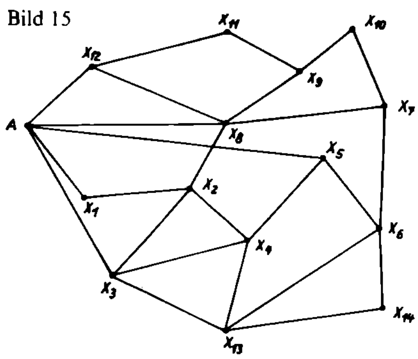
▲13▲ Welcher der Graphen des Bildes 14 kann in „einem Zug" gezeichnet (d. h. in einer offenen oder geschlossenen *Eulerschen Linie* beschrieben) werden?

Bild 14



▲14▲ Jürgen besucht die 9. Klasse einer Spezialschule. Aus den Schulen der umliegenden Dörfer war jeweils der geeignetste Schüler zu dieser Schule geschickt worden. In jedem der Dörfer X_i wohnt einer von Jürgens Klassenkameraden. In den Ferien will Jürgen eine Radtour machen. Er will möglichst viele der Ortschaften X_i erreichen und dem dort wohnenden Kameraden einen Kurzbesuch abstatten. Dabei will er kein Straßenstück doppelt passieren und am Ende der Tour wieder in seinem Heimatort A angelangt sein. In Bild 15 sind die Lage der Orte und das sie verbindende Straßennetz skizziert. Welchen Weg wird Jürgen wählen? Zeichnet ihn in Bild 15 ein!

Bild 15



Bei der Lösung einer der Aufgaben werdet ihr eine Aussage benötigt haben, die wir als Satz 5 formulieren und beweisen wollen.

Satz 5: Jeder (endliche) zusammenhängende Graph G kann in einer solchen geschlossenen Kantenfolge durchlaufen werden, daß jede Kante genau zweimal beschrieben wird.

Beweis: Zu jeder Kante (x, y) des Graphen G führen wir vorübergehend eine Kante $(x, y)_1$ ein, die ebenfalls die Knotenpunkte x und y miteinander verbindet. In dem so erhaltenen Graphen G^* haben alle Knotenpunkte gerade Valenz. Nach Satz 3 läßt sich G^* in einer geschlossenen Eulerschen Linie E durchlaufen. In dem E entsprechenden Kantenzug ersetzen wir alle mit dem Index 1 versehenen Kanten durch die entsprechende nicht indizierte Kante (beispielsweise $[x, y]_1$ durch $[x, y]$). So erhalten wir eine Kantenfolge, in der jede Kante genau zweimal vorkommt.

Erinnern wir uns noch einmal des ebenen Graphen des Bildes 4, den wir dem Dodekaeder zugeordnet hatten bzw. der das Dodekaeder darstellt.

1859 beschäftigte sich der bedeutende irische Mathematiker *W. R. Hamilton* (1805 bis 1865) mit einem Spiel, das darin besteht, den (eben erwähnten) Graphen des Bildes 4 in einem geschlossenen Kantenzug so zu durchlaufen, daß jede Kante des Graphen höchstens einmal darin vorkommt, aber jeder Knotenpunkt berührt wird. (Zwei Lösungen zeigt das Bild 16.) Wir wollen einen neuen Begriff einführen:

Definition 11: Ein Kreis eines zusammenhängenden (endlichen) Graphen G, der alle Knotenpunkte des Graphen enthält, heißt Hamiltonsche Linie von G.

Äußerlich ähnelt das Problem der Existenz einer Hamiltonschen Linie der Frage nach einer Eulerschen Linie, es ist aber mit viel größeren Schwierigkeiten verknüpft, so daß bisher bei weitem nicht ein solches abschließendes Ergebnis erzielt werden konnte wie bei dem Problem der Eulerschen Linie.

Ein von *Dirac* gefundenes Resultat besagt, daß ein zusammenhängender Graph mit n Knotenpunkten sicher dann eine *Hamiltonsche Linie* besitzt, wenn die Valenz eines jeden seiner Knotenpunkte größer als $\frac{n}{2}$ ist.

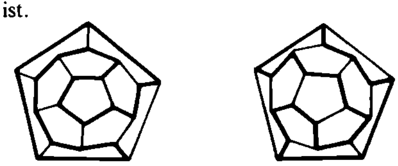


Bild 16

Eine bekannte Aufgabe verlangt, mit dem Rössel alle Felder des Schachbrettes in „einem geschlossenen Zug" genau einmal zu überstreichen und mit dem letzten Sprung das Ausgangsfeld zu erreichen (Problem des Rösselsprungs).

Die Lösung dieser Aufgabe besteht – wie man sich leicht überlegt – im Auffinden einer Hamiltonschen Linie in einem speziellen Graphen G, den man wie folgt erhält:

Den 64 Feldern des Schachbrettes entspricht je ein Knotenpunkt des Graphen G. Zwei Knotenpunkte a_i, a_j werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn das Rössel gemäß den Regeln des Schachspiels von dem a_i entsprechenden Feld nach dem a_j entsprechenden springen kann (bzw. von a_j nach a_i). Dieser Graph G kann in der Ebene wohl kaum in übersichtlicher Weise dargestellt werden – das leuchtet wegen der recht großen Knotenpunkt- und Kantenzahlen sofort ein.

In Bild 17 geben wir drei Lösungen des Rösselsprungproblems in der üblichen Weise an.

Bemerkung zu Bild 17: Wir beginnen im mit „1" bezeichneten Feld, springen von dort nach „2", von „2" nach „3" usw. – Die aus Bild 17a ersichtliche Lösung wurde von *Euler* gefunden. Die von *Jaenisch* 1862 angegebene Lösung (Bild 17c) weist eine Besonderheit auf: Die Tafel des Bildes 17c ist ein magisches Quadrat; die Summe der in jeder ihrer Zeilen und Spalten auftretenden Zahlen ist 260.

Man kann sich auch fragen, ob man, in einem Feld des Schachbrettes beginnend, in einer aufeinanderfolgenden Reihe von Zügen – die jeden möglichen Zug genau einmal enthält – zum Ausgangsfeld zurückkehren kann. Jetzt haben wir eine geschlossene Eulersche Linie des Graphen G zu suchen. Die Frage nach der Existenz einer solchen können wir sehr leicht beantworten. Wir müssen uns überlegen, welche Valenz die Knotenpunkte von G haben, und können dann Satz 3 anwenden.

Aus Bild 18 sind die Valenzen zu entnehmen:

Bild 18

2	3	4	3	2
3	4	6	4	3
4	6	8	6	4
3	4	6	4	3
2	3	4	3	2

Eine geschlossene Eulersche Linie gibt es laut Satz 3 nicht. (Satz 4 liefert, daß auch keine offene Eulersche Linie zu finden ist.)

Die beiden zuletzt behandelten Aufgaben können einer Gattung von Spielen zugeordnet werden, die wir als „Solospiele" („Einmannspiele") bezeichnen.

Diesen wollen wir uns im nächsten Beitrag – anhand weiterer Beispiele – zuwenden.

W. Voß

Bild 17

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	29	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

50	59	48	33	22	31	12	5
41	34	51	58	13	6	23	30
60	49	40	47	32	21	4	11
35	42	57	52	7	14	29	24
56	61	46	39	20	25	10	3
43	36	53	64	15	8	17	28
62	55	38	45	26	19	2	9
37	44	63	54	1	16	27	18

63	22	15	40	1	42	59	18
14	39	64	21	60	17	2	43
37	62	23	16	41	4	19	58
24	13	38	61	20	57	44	3
11	36	25	52	29	46	5	56
26	51	12	33	8	55	30	45
35	10	49	28	53	32	47	6
50	27	34	9	48	7	54	31

Kleine Worte – Große Wirkung Teil 4

Entweder „Nicht alle ..."
oder „Alle ... nicht"
Heute wollen wir dem letzten Fehler, den Klaus in seiner Mathematikarbeit gemacht hat, zu Leibe gehen. Es war die Aufgabe gestellt worden, eine falsche Aussage durch Verneinung in eine wahre Aussage zu überführen.

Zur Klärung sei erst einmal folgendes festgestellt:
- Die logische Verneinung einer falschen Aussage ergibt eine wahre Aussage.
- Durch logische Verneinung einer wahren Aussage erhält man eine falsche Aussage.

Verneint nun selbst einmal folgende Sätze!
a) 247 ist eine Primzahl.
b) $2^4+2^2=2^5$
c) a ist größer als 7.
d) Das Produkt $17 \cdot 11$ ist eine gerade Zahl.
e) Alle Primzahlen sind ungerade.

Die Verneinung der Sätze a) bis d) ist schnell aufgeschrieben:
a') 247 ist **keine** Primzahl.
b') $2^4+2^2 \neq 2^5$
c$_1$') a ist **nicht** größer als 7.
oder:
c$_2$') a ist kleiner als 7 **oder** gleich 7.
d') Das Produkt $17 \cdot 11$ ist eine **un**gerade Zahl.

Wie man sieht, sind die Verneinungen recht unterschiedlich gebildet worden. Also ist es gar nicht so einfach, eine feste Vorschrift für das Verneinen von Aussagen zu finden. Um jedoch bei der Bildung einer Verneinung ganz sicherzugehen, kann man stets die Wendung „Es gilt nicht, daß ..." vor die Aussage schreiben. So wäre z. B. der Satz „Es gilt nicht, daß alle Primzahlen ungerade sind" eine richtige Verneinung der Aussage e). Von mir befragte Schüler gaben als Verneinung des Satzes „Alle Primzahlen sind ungerade" folgende Antworten:

Ralf: Alle Primzahlen sind **nicht** ungerade.
Inge: **Nicht** alle Primzahlen sind ungerade.
Petra: **Keine** Primzahl ist ungerade.
Bernd: Es gibt mindestens eine Primzahl, die **nicht** ungerade ist. Wir wissen, daß die Allaussage „Alle Primzahlen sind ungerade" falsch ist. Also muß die Verneinung dieser Aussage wahr sein (siehe oben).

Bei der Überprüfung der Aussagen von Ralf, Inge, Petra und Bernd stellen wir fest, daß nur die Sätze von Inge und Bernd wahre Aussagen sind.
Für den Satz von Ralf „Alle Primzahlen sind nicht ungerade" kann man auch schreiben „Alle Primzahlen sind gerade".
Hier wird offensichtlich, daß der Satz falsch ist. (Somit ist auch der Satz von Petra falsch.)
Die Aussagen von Inge bzw. Bernd sind logisch richtige Verneinungen des Satzes „Alle Primzahlen sind ungerade". Damit ist auch klar, daß die logische Verneinung des Satzes „Alle natürlichen Zahlen haben einen Vorgänger" nicht heißen kann „Alle natürlichen Zahlen haben keinen Vorgänger", sondern „Nicht alle natürlichen Zahlen haben einen Vorgänger" oder „Es gibt mindestens eine natürliche Zahl, die keinen Vorgänger besitzt".

Nun wollen wir noch folgende falsche Sätze verneinen:
1) **Für alle** natürlichen Zahlen a, b, gilt $a-b=b-a$.
2) **Jedes** Dreieck hat zwei stumpfe Winkel.
3) **Alle** Drachenvierecke sind Rhomben.

Die Verneinungen könnten folgendermaßen formuliert werden:
1') **Nicht für alle** natürlichen Zahlen a, b gilt $a-b=b-a$.
Oder auch: **Es gibt** natürliche Zahlen a, b, **für die nicht** gilt, daß $a-b=b-a$.
2') **Nicht jedes** Dreieck hat zwei stumpfe Winkel.
Oder auch: **Es gibt** Dreiecke, **die nicht** zwei stumpfe Winkel haben.
3') **Nicht alle** Drachenvierecke sind Rhomben.
Oder auch: Mindestens ein Drachenviereck ist **kein** Rhombus.
Die Verneinung von Allaussagen kann man demnach sowohl mit den Wendungen „Nicht alle ...", „Nicht jede..." als auch mit den Redeweisen „Mindestens eine... nicht", „Es gibt..., die nicht..." ausdrücken.

Neben den Allaussagen kennen wir aus dem Mathematikunterricht auch schon Existentialaussagen.
Z. B.: **Es gibt** rechtwinklige Dreiecke.

Es gibt mindestens ein Rechteck, das ein Quadrat ist.
Man verneint Existentialaussagen mit Hilfe der Wendung „Es gibt kein..." oder „Alle ... nicht".
So lautet die Verneinung der Aussage „Es gibt eine natürliche Zahl, die die Gleichung $13-a=17$ erfüllt":
Es gibt keine natürliche Zahl, die die Gleichung $13-a=17$ erfüllt.
Oder auch: **Alle** natürlichen Zahlen erfüllen **nicht** die Gleichung $13-a=17$.
Die letzten beiden Sätze bringen denselben Sachverhalt zum Ausdruck.
Verneine selbst alle falschen Aussagen!
a) Die Gleichung $a \cdot 0=17$ hat im Bereich der natürlichen Zahlen mindestens eine Lösung.
b) Alle durch 17 teilbare Zahlen sind ungerade.
c) Jede natürliche Zahl, die die Ungleichung $3^2<x<72$ erfüllt, erfüllt auch die Ungleichung $3<x<2^4$.
d) Es gibt Zahlenpaare a, b, für die gilt: $a^b=b^a$
e) Mindestens ein gleichseitiges Dreieck ist rechtwinklig.
f) Alle Rhomben sind Drachenvierecke.

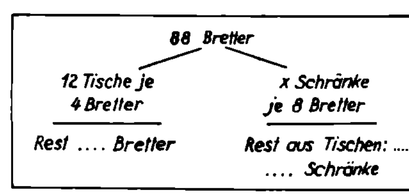
Wenn wir in Zukunft bei der sprachlichen Formulierung von mathematischen Sachverhalten auch auf die **große** Bedeutung der **kleinen** Wörter achtgeben, werden wir uns klarer ausdrücken können, wir werden uns sicherer fühlen und weniger Fehler machen.

L. Flade

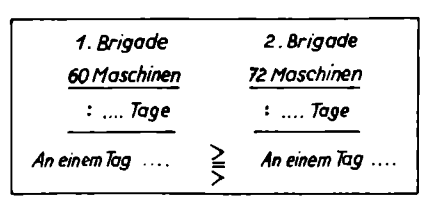
Gut gedacht ist halb gelöst

(Lösungen siehe Seite 48)

▲1▲ Aus 88 Brettern werden 12 Tische und einige Schränke hergestellt. Für einen Tisch brauchte man 4 Bretter, für einen Schrank 8.
Wieviel Schränke wurden hergestellt?

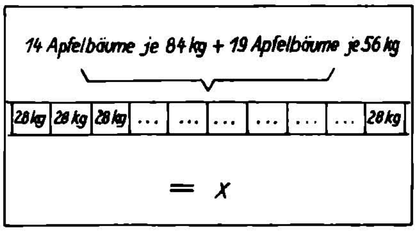


▲2▲ Zwei Brigaden arbeiten an der Montage von Maschinen. Die erste Brigade montiert 60 Maschinen in 4 Tagen, die zweite Brigade 72 Maschinen in 6 Tagen.
Wieviel Maschinen montiert die eine Brigade täglich mehr als die andere?

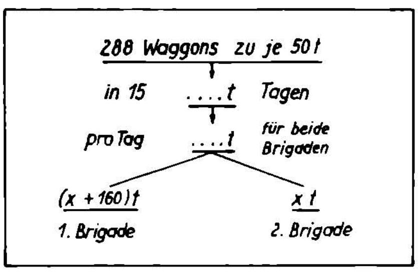


▲3▲ Im Schulgarten ernteten Schüler Äpfel. Von 14 Apfelbäumen ernteten sie durchschnittlich je 84 kg Äpfel, von 19 weiteren Bäumen durchschnittlich je 56 kg Äpfel.

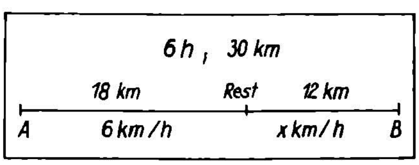
Die eingebrachte Ernte wurde in Kästen zu je 28 kg verteilt.
Wieviel Kästen wurden benötigt?



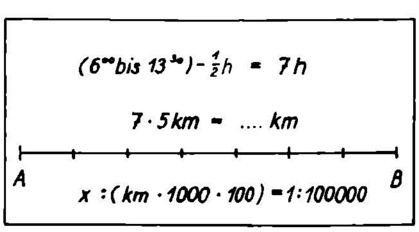
▲4▲ Zwei Bergmannsbrigaden förderten gemeinsam in 15 Tagen 288 Waggons Kohle zu je 50 t. Dabei förderte die erste Brigade 160 t täglich mehr als die zweite Brigade. Welche Fördermenge erreichte die zweite Brigade?



▲5▲ Ein Tourist ging 30 km in 6 Stunden. Vor der Rast ging er 18 km mit einer Geschwindigkeit von 6 km/h.
Mit welcher Geschwindigkeit legte der Tourist den restlichen Weg zurück?



▲6▲ Eine Einheit der NVA führt einen Übungsmarsch durch. Sie verläßt um 6.00 Uhr die Kaserne und kehrt um 13.30 Uhr zurück. Die durchschnittliche Marschgeschwindigkeit beträgt 5 km in der Stunde. (Bei der Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit wurde die reine Marschzeit berücksichtigt.)



Wie lang ist diese Marschstrecke auf einer Karte mit dem Maßstab 1 : 100000, wenn man beachtet, daß unterwegs eine halbstündige Pause eingelegt wurde?

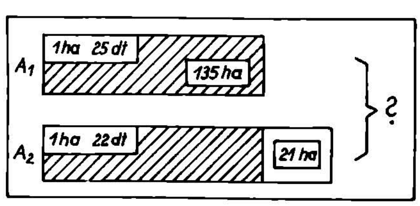
▲7▲ Ein Kindergarten kauft für 1130 M zwei Karussells und 6 Kletterstangen. Ein Karussell kostet 340 M.
Wieviel kostet eine Kletterstange? Fertige dazu ein Lösungsbild an!

▲8▲ Ein Schüler braucht im Jahr etwa 15 Hefte. Aus einer Tonne Papier können 25000 Hefte hergestellt werden.
a) Wieviel Schüler kann man für ein Jahr mit Heften aus 3 t Papier versorgen?
b) Welches Gewicht (welche Masse) hat im Durchschnitt ein Heft?
c) Bilde selbst ähnliche Aufgaben unter Benutzung anderer Tatsachen.

▲9▲ Die Parallelklassen einer Schule stehen bei der Spendenaktion „Hilfe für Vietnam" miteinander im Wettbewerb. Die Klasse 5a hat 33,75 M gesammelt. Die Klasse 5b hat durch eine Altstoffsammlung das Vierfache des von der Klasse 5a gesammelten Betrages erreicht. Die Klasse 5c kam bisher auf den dritten Teil des Betrages, den die Klasse 5a gespendet hat.
a) Wieviel Mark hat die Klasse 5a mehr gespendet als die Klasse 5c?
b) Wieviel Mark haben die drei Klassen bisher insgesamt gespendet?
c) Wieviel Mark im Durchschnitt betrug die Spende einer Klasse dieses Schuljahres?
d) In welchem kleinsten ganzzahligen Verhältnis befinden sich die Spendenbeträge der drei Klassen?
Bilde selbst weitere ähnliche Aufgaben, indem du den Wettbewerb der Spendenaktion unter vier oder mehr Schülern zugrunde legst!
Lege dazu eine Tabelle an und trage zueinander zugehörige Werte unter Benutzung von „wenn – dann" ein.

▲10▲ In einem Berliner Stadtbezirk wurden 160 große Wohnungen renoviert. Der zehnte Teil davon hat 55 m² Wohnfläche je Wohnung, der vierte Teil von der Gesamtzahl der renovierten Wohnungen hat 67 m² Fläche pro Wohnung und die restlichen Wohnungen je 80 m² Wohnfläche.
Berechne die Gesamtwohnfläche aller renovierten Wohnungen!

▲11▲ Versuche aus der nachstehenden Zeichnung eine Aufgabe zu erkennen und löse sie!



J. Lehmann/W. Unze
(Zusammenstellung für einen AG.-Nachmittag der Klassenstufe 5/6 des *alpha*-Clubs der 29. OS, 7027 Leipzig)

In freien Stunden alpha heiter

Aus: *Starchel*, bulgarische Zeitschrift für Humor und Satire

Das Verschiebespiel

Das im folgenden beschriebene Brettspiel ist in seiner Konzeption auf dem Verschiebebegriff aufgebaut; dabei ist es nötig, nicht nur jeweils einen Stein zu bewegen, sondern Figurationen von Steinen zu verschieben. Schon bei der ersten Partie merkt man, wie wenig man die Möglichkeiten, die im Begriff der Verschiebung liegen, *übersieht*, und wieviel Chancen man eben dadurch *übersieht*.

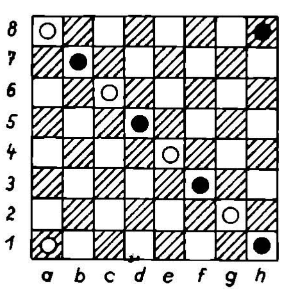


Fig. 1 Ausgangsstellung

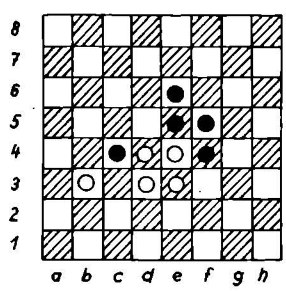


Fig. 2 Gewinnstellung für Weiß.

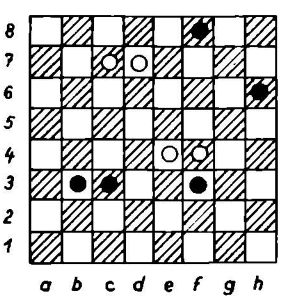


Fig. 3 Weiß kann durch folgende Züge gewinnen:
a) b4 nach d6
b) c7 nach e5, d7 nach f5

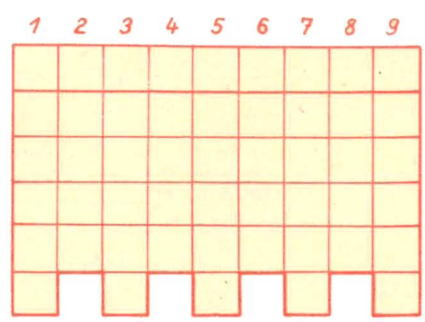
Spielregeln: Die beiden Partner setzen vier Damesteine abwechselnd in die Diagonale eines Schachbrettes. Ein freier Stein wird in die freie Ecke gesetzt (Ausgangsstellung Fig. 1).
Es wird abwechselnd verschoben. Dabei darf der ziehende Spieler beliebig viele Steine (aber mindestens einen Stein) seiner Farbe in einer Richtung und um dieselbe Anzahl von Feldern, also mit gleichem Verschiebevektor, bewegen. Zulässige Richtungen sind die Richtungen, die eine Dame im Schachspiel ziehen darf. Weder fremde noch eigene Steine dürfen übersprungen werden. – Gewonnen hat, wem es gelingt, vier Steine zu einem Quadrat unmittelbar nebeneinander zusammenzuführen (Fig. 2). – Mit diesem Spiel können in einem kleinen Turnier die Anschauung und der Überblick über Konfigurationen einzelner Punkte ganz erheblich entwickelt werden. Fig. 3 zeigt eine Spielsituation.

K.-H. Hürten, aus „Praxis der Math.", Köln

Füllrätsel

Es sind abwechselnd Wörter mit sechs und fünf Buchstaben zu suchen, deren Anfangsbuchstaben einen Begriff aus der Mengenlehre ergeben.
1. deutsches Wort für Divisor, 2. Schweizer Mathematiker, 3. Begriff aus der Geometrie, 4. Hohlmaß, 5. Anschauungsmittel, 6. Geometrisches Grundgebilde, 7. Teil eines Bruches, 8. deutscher Mathematiker, 9. Vieleck.

Oberlehrer Annelies Helwes, OS Burkhardtsdorf



Welchen Beruf übt Frau Kimmer aus?

Oberlehrer Annelies Helwes, OS Burkhardtsdorf

HERTA KIMMER
THALE

Permutationsrätsel

In jedem der abgedruckten Wortbilder ist jeweils ein Buchstabe durch einen anderen des Alphabetes zu ersetzen. Wird dieser erste Schritt geeignet ausgeführt, so lassen sich aus den in jeder Zeile stehenden Buchstaben durch Permutieren die Bilder von Worten mit folgender Bedeutung bilden: geometrischer Grundbegriff – Name einer der beiden Zahlen, die einen

Bruch bestimmen – Zahlwort – Zeichen für Rechenoperationen – Länge einer geschlossenen Kreislinie – Zahlwort – Name für eine bestimmte Seite eines rechtwinkligen Dreiecks – Name für eine natürliche Zahl in bezug auf eine andere, die ein Vielfaches der ersten ist.

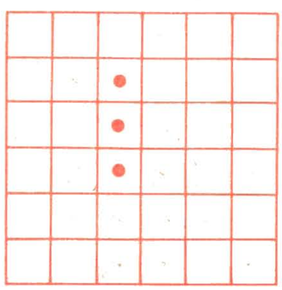
B I E N E
K E N N E R
R E D E
L A U S
G A U M E N
N U T E
T H E A T E R
R E I T E R

Die ersten Buchstaben der Lösungswörter bilden *von oben nach unten* gelesen das Wortbild eines mathematischen Begriffes.

Magisches Quadrat

Setze in die Figur noch 15 Spielsteine so ein, daß diagonal, senkrecht und waagerecht jeweils drei Steine liegen.

M. Schneider, OS Hartha



Kombination mit alpha

Wievielmal läßt sich das Wort *alpha* zusammenstellen, wobei jeweils nur in Einerschritten nach rechts, unten bzw. diagonal gelesen werden darf?

R. Schulz, Leiter des alpha-Clubs Rotta-Bergwitz und des Kreis-Klubs Junger Mathematiker Gräfenhainichen

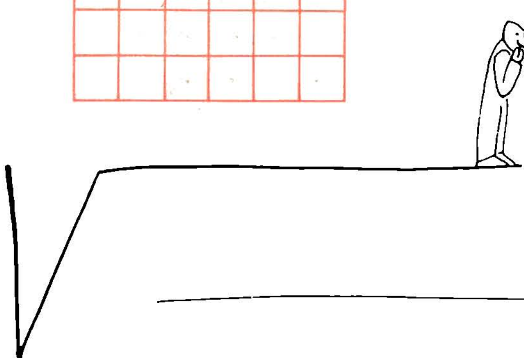
A	L	P	H	A	H
L	P	H	A	H	E
P	H	●	●	E	I
H	A	●	●	I	T
A	H	E	I	T	E
H	E	I	T	E	R

A	L	P	H	A
L	L	P	L	L
P	P	P	P	P
H	H	P	H	H
A	L	P	H	A

1. $\sqrt{\pi r^2}$
Da sitze ich also und rechne!
Buchstaben tanzen,
Zahlen verwischen die Gedanken an Dich
Die Lösung aber
bringt sie mir wieder!

2.
„Ich liebe Dich!"
Bin bei Dir, bin glücklich!
Ich möcht Dir soviel sagen,
öffne den Mund und frage ...
nach der Lösung von $\sqrt{\pi r^2}$

Sylvia Grätsch, Berlin (20 J.)
(Aus: Neues Leben 7/71)



Jean-Michel Folon, aus: *Magazin* 12/72

$$\frac{1}{\dfrac{\dfrac{2(\alpha+i\beta)}{(1+\alpha+i\beta)} - \dfrac{\gamma_T^2+4\gamma_L^2-\frac{3}{2}\mu-\frac{ick}{\omega}+\gamma_T^4(1+\alpha)^2}{1+\alpha+i\beta\pm\sqrt{\dfrac{\gamma_T^4}{(1+\alpha+i\beta)^2}+4\gamma_L^2}} \pm 2(\alpha+i\beta)^2-\dfrac{\frac{4(\gamma_T^2+4)^2}{(1+i\beta)^2}}{1-\alpha+i\beta}}{\alpha-\dfrac{\gamma_T^2}{2(1+\alpha)}\pm\sqrt{\dfrac{\gamma_T^4}{4(1+\alpha)^2}+\left(\sum_{i=1}^{k} x_i-w a_{ik}\right)\pm\dfrac{\gamma_T^2+4\gamma_L^2}{(2+\alpha-i\beta)^2}-\gamma_T^2\pm\sqrt{\gamma_T^4}}}}$$

Symmetrie

Volkskunst aus der VR Polen: Scherenschnitte

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

10./11. Februar 1973

Olympiadeklasse 7

1. An einer Oberschule mit genau 500 Schülern bestehen mathematisch-naturwissenschaftliche, künstlerische und Sport-Arbeitsgemeinschaften. Über die Teilnahme von Schülern an diesen Arbeitsgemeinschaften ist folgendes bekannt:

(1) Genau 250 Schüler sind Mitglied mindestens einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.

(2) Genau 125 Schüler gehören mindestens einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft an.

(3) Genau 225 Schüler nehmen mindestens an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitsgemeinschaft teil.

(4) Genau 25 Schüler besuchen mindestens sowohl eine künstlerische als auch eine Sport-Arbeitsgemeinschaft.

(5) Genau 75 Schüler sind mindestens sowohl Mitglied einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.

(6) Genau 25 Schüler nehmen mindestens sowohl an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch an einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft teil.

(7) Genau 5 Schüler gehören allen drei genannten Arbeitsgemeinschaftsarten an.

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Schule, die

a) an genau einer Art dieser Arbeitsgemeinschaften,

b) an keiner dieser Arbeitsgemeinschaften teilnehmen!

2. Beweise, daß es unter 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste nicht kleiner als 1 und deren größte nicht größer als 100 ist, stets mindestens zwei Zahlen gibt, von denen die eine gleich dem Doppelten der anderen ist!

3. Konstruiere ein konvexes Fünfeck $ABCDE$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) $\overline{AB}=\overline{CD}=5$ cm,

(2) $\sphericalangle EAB=\sphericalangle ABC=95°$,

(3) $\overline{BC}=\overline{CE}=\overline{BE}$,

(4) $\overline{AE}=\overline{ED}$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen (1) bis (4) ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Als die Klasse 7a den Fachunterrichtsraum für Mathematik betrat, war an der Wandtafel eine Multiplikationsaufgabe angeschrieben. Jemand hatte jedoch die Ziffern derart verwischt, daß nur noch vier „Einsen" leserlich geblieben waren und von den unleserlichen Ziffern lediglich noch die genaue Stellung zu erkennen war.
Das Bild an der Wandtafel hatte folgendes Aussehen:
(Die unleserlichen Ziffern sind hier durch die Buchstaben $a, b, c, \ldots$ angegeben. Dabei können also verschiedene Buchstaben auch die gleiche Ziffer, möglicherweise auch nochmals die Ziffer 1, bezeichnen.)

$$\begin{array}{rrrrr}
1 & a & b & \cdot\, c & d \\ \hline
 & e & f & g & 1 \\
h & i & j & 1 & \\ \hline
k & m & n & 1 & p \\ \hline\hline
\end{array}$$

Einige Schüler versuchten sofort, die fehlenden Ziffern zu ermitteln, und schon nach kurzer Zeit rief Bernd: „Ich weiß genau, wie die beiden Faktoren hießen!" Doch Gerd entgegnete ihm: „Es läßt sich nicht eindeutig feststellen, wie die beiden Faktoren lauteten." Stelle fest, ob Bernd oder Gerd recht hatte! Gib in jedem Falle alle Lösungen (Realisierungen) des Multiplikationsschemas an!

5. Ermittle alle nicht negativen rationalen Zahlen x, die die Gleichung

$x+|x-1|=1$ erfüllen!

6. Beweise den folgenden Satz:
Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gilt: Zieht man bei zwei beliebigen Höhen dieses Dreiecks jeweils durch deren Mittelpunkt die Parallele zu der zur Höhe gehörenden Dreieckseite, so schneiden sich diese Parallelen in einem Punkt, der auf der dritten Dreieckseite liegt.

Olympiadeklasse 8

1. Die FDJ-Gruppe der Klasse 8a einer Oberschule führte einen Sportwettkampf durch. Vor Beginn des Wettkampfes sollte jeder Teilnehmer einen Tip darüber abgeben, welche drei Teilnehmer in welcher Reihenfolge das beste Gesamtergebnis erzielen würden. Als man die Tipscheine auswertete, stellte es sich heraus, daß ausschließlich Annekatrin, Bernd und Claudia auf den ersten drei Plätzen erwartet wurden. Dabei wurden die Reihenfolge Bernd – Annekatrin – Claudia genau fünfmal getippt. Außerdem wurden noch die Reihenfolgen Bernd – Claudia – Annekatrin und Claudia – Annekatrin – Bernd erwartet, und zwar einer dieser beiden Tips genau vier- und der andere genau dreimal. Eine andere Reihenfolge wurde nicht getippt.
Für die Voraussagen wurden Punkte vergeben, und zwar für jeden richtig vorausgesagten Platz ein Punkt. Maximal waren also drei Punkte mit einem Tipschein erreichbar. Die Summe aller so vergebenen Punkte betrug 17.
Bernd gewann, entgegen den meisten Voraussagen, nicht den Wettbewerb, aber die ersten drei Plätze wurden tatsächlich von Annekatrin, Bernd und Claudia belegt.
Wer gewann den Wettbewerb? Wer belegte den zweiten und wer den dritten Platz? Wie oft wurde der Tip Bernd – Claudia – Annekatrin insgesamt abgegeben?

2. Beweise den folgenden Satz:
Sind a, b, c ($a\geqq b\geqq c$) drei beliebige natürliche Zahlen, dann ist die Summe dieser Zahlen oder eine der aus zweien dieser Zahlen gebildeten Differenzen durch 3 teilbar.

3. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Über der Seite $\overline{AB}$ sei ein Parallelogramm $ABDE$ so errichtet, daß dessen Seite $\overline{DE}$ mit C auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegt, daß dabei aber die Punkte D und A nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und C liegen und daß außerdem die Punkte E und B nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen. Ferner seien über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ je ein Parallelogramm $CBIH$ bzw. $ACKL$ derart errichtet, daß D auf der Geraden durch I und H sowie E auf der Geraden durch K und L liegt.
Beweise, daß dann der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ ist!

4. Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ein Durchmesser dieses Kreises sei $\overline{AB}$. Zwei Punkte P_1 und P_2 mögen sich vom gleichen Zeitpunkt an gleichförmig auf je einer der beiden Halbkreislinien von A nach B bewegen, wobei die Bewegung des Punktes P_1 viermal so schnell erfolgen soll wie die des Punktes P_2. Gibt es zwischen dem Start und der Ankunft von P_1 (in B) einen Zeitpunkt, zu dem die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ gleichen Flächeninhalt haben? Wenn ja, dann ermittle für jeden solchen Zeitpunkt die Größe des Winkels $\sphericalangle AMP_2$!

5. Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{MP}=\overline{MR}=9$ cm und einem Zentriwinkel $\sphericalangle PMR$ der Größe 50°.

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ so, daß A auf $\overline{MP}$ liegt, B und C auf dem Bogen $\widehat{PR}$ liegen und D auf $\overline{MR}$ liegt!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion (Eine Untersuchung, ob es genau ein derartiges Quadrat gibt, wird nicht verlangt.)
Hinweis: Es empfiehlt sich, zur Lösung Eigenschaften von zentrischen Streckungen zu benutzen.

6. Untersuche, ob es eine kleinste positive rationale Zahl a gibt, zu der man eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft

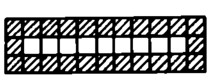
$$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142$$ finden kann!

Wenn es ein solches kleinstes a gibt, so ermittle, welchen Wert x hierfür annimmt!

Olympiadeklasse 9

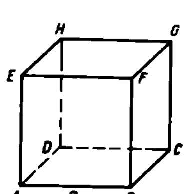
1. Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n die Zahl $n^6 - n^2$ durch 10 teilbar ist!

2. Karlheinz will aus gleichgroßen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, daß sämtliche an den Rand dieses Rechteckes grenzenden Quadratflächen rot sind (im Bild gestrichelt gezeichnet), während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der der weißen sein.



Geben Sie (durch Angabe der Anzahlen der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden könnte!

3. Ein Würfel mit der Kantenlänge a und den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Bild) wird von sechs Ebenen geschnitten, die jeweils durch die Punkte A, B, G, H; D, C, F, E; A, D, G, F; B, C, H, E; A, E, G, C und B, H, F, D gehen. Man ermittle die Anzahl der Teilkörper, in die der Würfel dadurch zerlegt wird. Außerdem gebe man das Volumen der einzelnen Teilkörper an.



4. Zwei Fußgänger A und B legten dieselbe Strecke zurück. Sie starteten zur gleichen Zeit. Ein Beobachter stellte fest:
A ging die Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h, den Rest mit 5 km/h.
B ging während der Hälfte der von ihm für die ganze Strecke aufgewandten Zeit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h, während der übrigen Zeit mit 5 km/h. Wer von den beiden erreichte zuerst das Ziel?

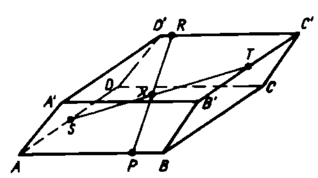
5. Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, k sein Umkreis, und es gelte für die Bogenlänge derjenigen zwischen den Eckpunkten des Sehnenvierecks liegenden Kreisbögen von k, auf denen jeweils kein anderer Eckpunkt liegt, die Gleichung $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{BC} + \widehat{DA}$. Beweisen Sie, daß dann $AC \perp BC$ gilt!

6. Man ermittle die Anzahl aller verschiedenen Tripel (k, n, m) natürlicher Zahlen k, n, m, für die $k \cdot n^2 \cdot (2m+1) = 3808$ gilt.
b) Man gebe alle Tripel an, für die das Produkt knm den kleinsten Wert annimmt.

Olympiadeklasse 10

1. Für ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ sei die Höhenlänge $\overline{CD} = h$ und die Basislänge $\overline{AB} = g$ genannt. Ferner sei dem Dreieck ein Quadrat $EFGH$ derart einbeschrieben, daß $\overline{EF}$ auf $\overline{AB}$, G auf $\overline{BC}$ und H auf $\overline{AC}$ liegen.
Ermitteln Sie alle Verhältnisse $h:g$, für die sich die Flächeninhalte von Dreieck $\triangle ABC$ und Quadrat $EFGH$ wie $9:4$ verhalten!

2. Es sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Parallelepiped, d. i. ein nicht notwendig gerades vierseitiges Prisma mit einem Parallelogramm $ABCD$ als Grundfläche.



Es ist die Menge aller derjenigen Punkte X zu ermitteln, die als Schnittpunkte von Strecken $\overline{PR}$ und $\overline{ST}$ auftreten können, wenn P ein Punkt auf $\overline{AB}$, R ein Punkt auf $\overline{C'D'}$, S ein Punkt auf $\overline{AD}$ und T ein Punkt auf $\overline{B'C'}$ ist.

3. Man denke sich alle Primzahlen, beginnend mit der Primzahl 5, der Größe nach fortlaufend numeriert, es mögen also numeriert sein:

Primzahl	5	7	11	13	17	19	...
Nummer	1	2	3	4	5	6	...

Es ist zu beweisen, daß dann jede Primzahl größer als das Dreifache ihrer Nummer ist.

4. Ein Lokomotivführer bemerkte am Anfang eines 20 km langen Streckenabschnitts s, daß er eine Verspätung von genau 4 min hatte. Er fuhr daraufhin diese Strecke s mit einer um 10 km/h höheren Durchschnittsgeschwindigkeit, als sie der Fahrplan vorsah. Am Ende der Strecke s war erstmalig wieder Übereinstimmung mit dem Fahrplan erreicht.
Wie groß war die für s vorgesehene fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit?

5. Beweisen Sie, daß

$$lg\left(1-\frac{1}{25^2}\right)+lg\left(1-\frac{1}{26^2}\right)+\ldots+lg\left(1-\frac{1}{99^2}\right)+lg\left(1-\frac{1}{100^2}\right)=lg\frac{606}{625}$$ gilt!

6. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Hat der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks eine Größe von 36°, so ist die Basis des Dreiecks genau so lang wie der größere Abschnitt auf einem nach dem „Goldenen Schnitt" geteilten Schenkel des Dreiecks.
Anmerkung: Eine Strecke heißt nach dem „Goldenen Schnitt" in zwei Abschnitte geteilt, wenn die Länge des größeren Abschnitts die mittlere Proportionale zwischen der Länge des kleineren Abschnitts und der Länge der gesamten Strecke ist.

Olympiadeklasse 11/12

1. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und die Gleichung $\tan x + \cot x = 4$ erfüllen.
(Eine Ausrechnung der Zahlenwerte als Dezimalbrüche wird nicht verlangt.)

2. Im Raum seien vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 gegeben, die nicht in einer und derselben Ebene liegen. Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Ebenen, die von diesen vier Punkten gleichweit entfernt sind.

3. Drei Schulen, je eine aus Adorf, Bedorf und Cedorf, führten bei einem Kreissportfest einen Leichtathletikwettkampf durch. In jeder Disziplin stellte jede Schule genau einen Teilnehmer. Ein Reporter interviewte nach dem Wettkampf einen Zuschauer:
Reporter: „Wer hat den gesamten Wettkampf gewonnen?"
Zuschauer: „Adorf gewann den Weitsprung, aber den gesamten Wettkampf gewann Bedorf, und zwar mit 22 Punkten. Adorf und Cedorf erreichten je 9 Punkte."
Reporter: „Wie wurden die Punkte verteilt?"
Zuschauer: „In jeder der Disziplinen erhielt der Erste eine bestimmte Punktzahl, der Zweite eine kleinere, der Dritte eine noch kleinere, aber mindestens einen Punkt. Diese Verteilung war für alle Disziplinen dieselbe. Alle Punktzahlen waren ganzzahlig."
Reporter: „In wieviel Disziplinen fand der Wettkampf insgesamt statt?"
Zuschauer: „Ich weiß es nicht."
Reporter: „Wer hat das Kugelstoßen gewonnen?"
Zuschauer: „Ich weiß es nicht, aber Kugelstoßen war dabei."

Ermitteln Sie, ob die folgenden beiden Fragen auf Grund dieser (sämtlich als wahr vorausgesetzten) Aussagen eindeutig beantwortet werden können, und geben Sie alle Antworten, die mit diesen Aussagen vereinbar sind, an!

a) Welche der drei Schulen gewann das Kugelstoßen?

b) Welche Schule belegte beim Weitsprung den zweiten Platz? (Es sei bekannt, daß in jeder der Disziplinen eine eindeutige Reihenfolge der Wettkampfteilnehmer ermittelt wurde.)

4. Es seien a und b natürliche Zahlen, für die $0 \leqq b < a$ gilt. Ferner sei durch $z_n = an + b$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) eine Folge natürlicher Zahlen gegeben. Ein Element z_m dieser Folge habe mit a den größten gemeinsamen Teiler d. Es ist festzustellen, ob dann alle Elemente dieser Folge mit a den größten gemeinsamen Teiler d haben.

5. Man untersuche, ob es regelmäßige n-Ecke gibt, bei denen die Differenz der Längen einer größten und einer kleinsten Diagonale gleich der Seitenlänge des n-Ecks ist. Wenn ja, so gebe man alle natürlichen Zahlen $n (n \geqq 4)$ an, für die das gilt.

Von den folgenden Aufgaben 6a und 6b ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

6a. Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgende Eigenschaft hat:

(1) Für alle x gilt $f(x) = x f(x+1)$;

(2) Es gilt $\quad f(1) = 1$.

a) Man ermittle alle ganzen Zahlen n, für die $f(n) = 0$ gilt.

b) Es seien m und n beliebige ganze Zahlen, und es sei $f(x+m)$ gegeben. Man berechne $f(x+n)$.

c) Man gebe eine spezielle Funktion f_o an, die die obigen Eigenschaften besitzt, und zeichne den Graph dieser Funktion im Intervall $-3 \leqq x \leqq 4$.

6b Ist n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, so seien auf einer Strecke $\overline{AB}$ Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2n-1}$ in dieser Reihenfolge so gelegen, daß sie die Strecke $\overline{AB}$ in $2n$ Teile gleicher Länge zerlegen.

a) Man gebe (als Funktion von n) die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß zwei aus den Punkten $P_1, \ldots, P_{2n-1}$ ausgewählte Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ die Strecke $\overline{AB}$ derart zerlegen, daß sich aus den drei Teilstrecken $\overline{AP_k}$, $\overline{P_kP_m}$, $\overline{P_mB}$ ein Dreieck konstruieren läßt.

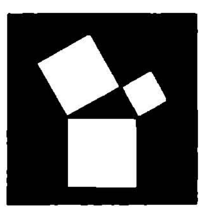
b) Man untersuche, ob diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert konvergiert, und ermittle, wenn dies der Fall ist, diesen Grenzwert.

Anmerkung: Die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit ist folgendermaßen definiert:

Jede Auswahl zweier Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ sei als ein „Fall" bezeichnet. Ein „Fall" heiße ein „günstiger Fall", wenn P_k und P_m so gewählt sind, daß sich aus den Strecken $\overline{AP_k}$, $\overline{P_kP_m}$ und $\overline{P_mB}$ ein Dreieck bilden läßt. Ist dann z die Anzahl aller möglichen „Fälle" und z_1 die Anzahl aller „günstigen Fälle" so wird die genannte Wahrscheinlichkeit als der Quotient $\frac{z_1}{z}$ definiert.

Mathematikolympiaden in den Niederlanden

Auch in Holland gibt es eine Olympiade. Sicher interessiert es die alpha-Leser, etwas davon zu lesen. Es sei aber vorausgeschickt: Die holländische Olympiade ist eine kleine! Im Vergleich zur DDR kann man sie sogar „winzig klein" nennen. Erstens hat sie nur zwei Stufen. Zweitens nehmen nur Schüler aus der Mittelschule teil und zwar aus den letzten zwei Jahren vor dem Abitur. Die erste Stufe kann man als Vorstufe bezeichnen, als Weg, eine Vorauswahl zu treffen. An alle Schulen werden Aufgaben versandt. Die Schüler des vorletzten (11. Schuljahres) erhalten eine Kostprobe, nämlich die Aufgaben des Vorjahres mit nach Hause. So können sie in aller Ruhe beurteilen, ob sie es wagen können mitzumachen. Haben sie Mut gefaßt, arbeiten sie in einer Klausur an den offiziellen Aufgaben. In drei Stunden Arbeitszeit sind zehn Aufgaben zu lösen, natürlich keine vollständigen Lösungen, sondern nur die Antworten auf die gestellten Probleme. Die Aufgaben sind sehr verschieden von dem in der Schule gebotenen Stoff. Erfahrung nützt wenig, man muß etwas Originelles leisten, um Erfolge zu erzielen!



Drei Beispiele sollen das zeigen:

▲999a▲ Jemand zeichnet n Geraden $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n$ ($n > 3$), die in derselben Ebene liegen, die paarweise nicht parallel sind und von denen keine drei einen Punkt gemeinsam haben.

Die Anzahlen der Schnittpunkte in den beiden Halbebenen, die von der Geraden g_1 erzeugt werden, seien gleich.

Die Anzahlen der Schnittpunkte in den beiden Halbebenen, die von der Geraden g_2 erzeugt werden, sollen sich wie 1 : 6 verhalten.

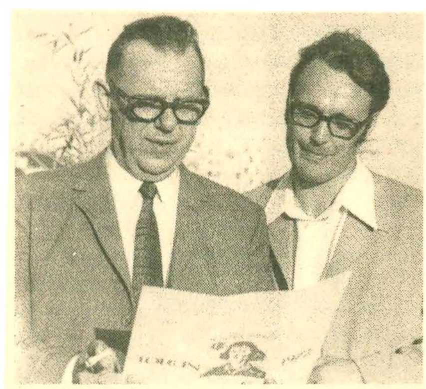
Es ist die kleinste Anzahl der Geraden zu ermitteln, die zu zeichnen sind.

▲999b▲ Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB} = a = 4$ cm, $\overline{BC} = b = 3$ cm, $\overline{CD} = c = 3$ cm und $\overline{AD} = d = 2$ cm. Es ist der größtmögliche Flächeninhalt zu bestimmen, den dieses Viereck haben kann!

▲999c▲ Zu jeder positiven ganzen Zahl n existieren eindeutig bestimmte nichtnegative ganze Zahlen $a(n)$ und $b(n)$, die die Gleichung
$$n = 2^{a(n)} \cdot [2 \cdot b(n) + 1]$$ erfüllen.

Für positive ganze Zahlen k sei $S(k)$ durch
$$S(k) = a(2^1) + a(2^2) + a(2^3) + \ldots + a(2^k)$$
definiert.

Man schreibe $S(k)$ als Funktion von k.



Bildunterschrift: *Prof. A. von Tooren* (links) und *Prof. A. A. Hoogendoorn*, langjährige Delegationsleitung der niederländischen Mannschaft bei internationalen Mathematikolympiaden

Die Lösungen der Wettbewerbsteilnehmer werden sehr sorgfältig geprüft. Aus den 60 „Klugen" werden die 10 Klügsten ausgewählt. Mit ihren Eltern und Lehrern sind sie Gast des holländischen Erziehungsministeriums. Erst dort wird die Reihenfolge der zehn Preisträger bekanntgegeben, jeder wird mit einem Paket wertvoller mathematischer Lehrbücher belohnt. Selbstverständlich ist die Presse dabei und jeder kann sich am Abend im Fernsehen bewundern. Fast ist es das Ende dieses Berichts. Nun aber kommt noch eine „Kleinigkeit ..., die IMO." Die acht Besten werden ausgewählt. Jedes Mitglied dieser Mannschaft ist stolz darauf, den hervorragenden Jungen Mathematikern aus der DDR und aus vielen anderen Ländern zu begegnen; denn die Mathematik kennt keine Grenzen und das ist gut!

A. v. Tooren

Lösungen

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. König

▲1002▲ $P(A)$ $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

$P(C)=\frac{2\cdot 3\cdot 3}{36}=\frac{1}{2}$.

$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{3\cdot 3}{36}=\frac{1}{4}$

$P(ABC)=\frac{0}{36}=0$

$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}=P(AB)$, folglich A, B stochastisch unabhängig. Genau so ergibt sich, daß A und C sowie B und C stochastisch unabhängig sind.

$P(ABC)=0$, jedoch $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, folglich sind A, B, C nicht „insgesamt" stochastisch unabhängig.

D. h. in diesem Beispiel sind je zwei der drei Ereignisse A, B, C stochastisch unabhängig (die Ereignisse A, B, C sind also paarweise unabhängig), jedoch sind die drei Ereignisse nicht „insgesamt" stochastisch unabhängig.

Das Beispiel gibt daher Anlaß, für mehr als zwei Ereignisse eine weitere, stärkere Unabhängigkeitseigenschaft zu definieren: n zufällige Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen vollständig stochastisch unabhängig $=_{\text{Def}}$ für jede beliebige Auswahl von r der n Ereignisse, genau dann, wenn $1 \leqq r \leqq n$, gilt, daß die Wahrscheinlichkeit des Produkts der r ausgewählten Ereignisse gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeit der r Ereignisse ist.

Das obige Beispiel erlaubt somit folgende allgemeine Aussage: Aus der paarweisen stochastischen Unabhängigkeit von n zufälligen Ereignissen folgt nicht deren vollständige stochastische Unabhängigkeit (trivialerweise gilt aber die Umkehrung).

▲925▲ Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. O. Krötenheerdt (4/72)

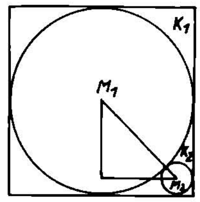
Man denke sich zunächst ein flächenkleinstes Quadrat Q, welches K_1 im Inneren enthält. Für die Radiusmaßzahl r_2 eines größtmöglichen Kreises K_2, welcher K_1 von außen berührt und ebenfalls noch im Inneren von Q liegt, gilt nach dem Satz des Pythagoras

$(r_1+r_2)^2=2\cdot(r_1-r_2)^2$, das heißt

$r_2^2-6\cdot r_1 r_2+r_1^2=0$, also

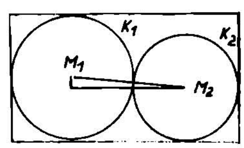
$r_2=(3\pm 2\cdot\sqrt{2})\cdot r_1$.

(Für den vorliegenden geometrischen Sachverhalt ist nur das Minuszeichen von Bedeutung.) Zur Lösung der Aufgabe erweist sich nun die folgende Fallunterscheidung als zweckmäßig.



a) Ist $r_2 \leqq (3-2\cdot\sqrt{2})\cdot r_1$, so ist jedes flächenkleinste Rechteck R, welches K_1 und K_2 im Inneren enthält, ein Quadrat der Seitenmaßzahl $2r_1$. Gilt das Kleinerzeichen, so existieren unendlich viele derartige Quadrate; gilt das Gleichheitszeichen, so existiert genau ein derartiges Quadrat.

b) Ist $r_2 > (3-2\cdot\sqrt{2})\cdot r_1$, aber $r_2 < r_1$, so existieren genau zwei flächenkleinste Rechtecke, welche K_1 und K_2 im Inneren enthalten; dabei wird K_1 von genau 3 und K_2 von genau 2 Rechtecksseiten berührt. Diese beiden Rechtecke R und R' liegen symmetrisch zur Geraden durch M_1 und M_2. Jedes andersgelegene Rechteck R_0 (mit K_1 und K_2 im Innern) besitzt einen größeren Flächeninhalt. Um dies einzusehen, denke man sich K_2 auf K_1 abgerollt, und dabei verfolge man das jeweils flächenkleinste, zu R_0 seitenparallele Rechteck R_φ, welches K_1 und K_2 im Inneren enthält. In wenigstens einer der beiden Abrollrichtungen tritt gegenüber der Ausgangslage zunächst eine Flächenverkleinerung von R_φ ein.



Im Rechteck R ist die kleinere Seitenmaßzahl offenbar gleich $2r_1$. Für die größere Seitenmaßzahl folgt mit dem Satz des Pythagoras

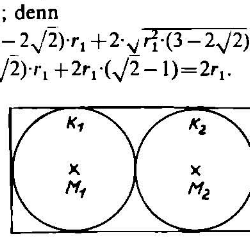
$r_1+r_2+\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}$

$=r_1+r_2+2\cdot\sqrt{r_1 r_2}$.

Dieser Ausdruck gilt auch noch für den Fall $r_2=(3-2\cdot\sqrt{2})\cdot r_1$ und nimmt dann den Wert $2r_1$ an; denn

$r_1+(3-2\sqrt{2})\cdot r_1+2\cdot\sqrt{r_1^2\cdot(3-2\sqrt{2})}=$

$(4-2\sqrt{2})\cdot r_1+2r_1\cdot(\sqrt{2}-1)=2r_1$.



c) Ist $r_2=r_1$, so gibt es genau ein flächenkleinstes Rechteck R, welches K_1 und K_2 im Inneren enthält; dieses Rechteck hat die Seitenmaßzahlen $2r_1$ und $4r_1$. Daß jedes andersgelegene Rechteck R_0 (mit K_1 und K_2 im Inneren) einen größeren Flächeninhalt besitzt, kann mit denselben Überlegungen wie im Fall b) begründet werden. Der im Fall b) gefundene Ausdruck für die größere Seitenmaßzahl gilt auch noch für den Fall $r_2=r_1$.

O. Krötenheerdt

Lösungen zu: Mathematikern über die Schultern geschaut (5/72)

▲926▲ Falls eine Lösung existiert, muß gelten

$$a=\frac{n}{\sin\alpha} \text{ und } a=\frac{m}{\cos\beta}$$

Dabei ist $\beta=180°-60°-(90-\alpha)=30°+\alpha$

Man erhält:

$$\frac{n}{\sin\alpha}=\frac{m}{\cos(30+\alpha)} \text{ mit } 0<\alpha<90°$$

Das ist äquivalent mit

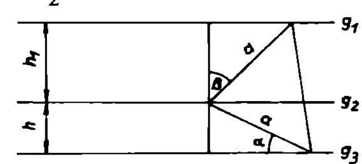
$$\frac{\cos(30°+\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{m}{n}$$

Daraus erhält man:

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\cot\alpha+\frac{1}{2}=\frac{m}{n}$ (wegen $\cos(30+\alpha)=$ $=\cos 30\cdot\cos\alpha-\sin 30\sin\alpha$)

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cot\alpha=\frac{m}{n}+\frac{1}{2}=\frac{2m+n}{2n}$

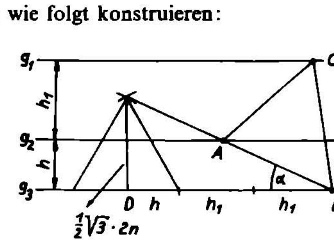
$$\cot\alpha=\frac{2m+n}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 2n}$$



a: Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks

Damit ist α konstruierbar. Da der Kotangens für Winkel zwischen 0° und 90° alle Werte von 0 bis ∞ genau einmal annimmt, existiert für jedes gegebene Zahlenpaar (m, n) für α genau eine Lösung. Unter den angegebenen Bedingungen waren alle Umformungen äquivalent, also ist die Aufgabe eindeutig lösbar.

Konstruktion: Der Ausdruck $\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 2n$ ist die Länge der Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $2n$. Daher kann man wie folgt konstruieren:



Auf g_3 wählt man B beliebig. Von B aus trägt man $2m+n$ auf g_3 ab. Man erhält D. Nun konstruiert man ein gleichseitiges Dreieck, so daß eine Seite auf g_2 fällt und D der Mittelpunkt dieser Seite ist (Seitenlänge $2n$).

Die D gegenüberliegende Ecke verbindet man mit B. Damit ist bei B der Winkel α konstruiert.

Die Verbindungslinie schneidet g_2 in A. Mit $\overline{AB}$ hat man eine Seite des gleichseitigen Dreiecks und damit läßt sich die Ecke C leicht konstruieren. Das $\triangle ABC$ erfüllt auch die gestellten Bedingungen, da der Innenwinkel bei A sich aus $180° - \alpha - \beta$ ergibt und α und β so bestimmt worden sind, daß dieser Winkel 60° beträgt, wenn $\overline{AB} = \overline{AC}$ ist. Außerdem liegt wegen $a = \frac{m}{\cos\beta}$ der Punkt C auf g_1.

Zur Lösung der Aufgabe W 10 ■ 908/(2/72)

Bemerkung: Bei der Darstellung der Zahl Z in der Aufgabe 908 in *alpha* 2/72, S. 37 muß es heißen:

$$Z = \underbrace{1\,000\ldots001}_{1970 \text{ Nullen}}$$

Zusatz zur gleichen Aufgabe (Lösung):
x^2 ist also durch 2^5 teilbar, also auch durch $2^4 = 2^2 \cdot 2^2$. Daher ist x durch 2^2 teilbar. Nun ist aber x sogar durch 2^3 teilbar. Wäre das nämlich nicht der Fall, so wäre $x = 2^2 \cdot y$, wobei y ungerade ist, also $x^2 = 2^4 \cdot y^2$, wobei y^2 ungerade ist. x^2 wäre also nur durch 2^4 und nicht durch 2^5 teilbar, was der Voraussetzung widerspricht.
Analog zeigt man, daß x auch durch 3^2 teilbar ist. Daher ist x, da 2 und 3 teilerfremd sind, teilbar durch $2^3 \cdot 3^2 = 72$.

---

9 ▲ 952 Bezeichnen wir den Divisor in der ersten Zeile der Aufgabe mit x, so ist x eine dreistellige Zahl, und es gilt $x < 1000$. Da die letzte Ziffer des Quotienten gleich 2 ist, steht in der 6. Zeile der Aufgabe die Zahl $2x$, und es gilt $2x \geqq 1000$. In der 2. und 4. Zeile kann also nur die Zahl $1 \cdot x$ stehen.
Wegen $x < 1000$ gilt $2x < 2000$. Bezeichnen wir nun die in der 3. Zeile stehende vierstellige Zahl mit a, so gilt

$$a - x < 2,$$

weil in der letzten und vorletzten Zeile eine Zahl steht, die kleiner als 2000 ist. Daraus folgt

$$x > a - 2$$

und wegen $a \geqq 1000$

$x > 1000 - 2 = 998$. Andererseits gilt $x < 1000$, also ist $x = 999$.
Damit sind der Divisor und die Zahlen in der 2., 4. und 6. Zeile eindeutig bestimmt. Wir können daher, von der sechsten Zeile ausgehend, auch die noch fehlenden Ziffern bestimmen und erhalten die folgende Lösung:

```
1000000998 : 999 = 1001002
 999
 ---
   1000
    999
   ----
      1998
      1998
      ----
         0
```

W 9 ■ 953 Angenommen, x sei eine reelle Lösung der Gleichung

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3. \qquad (1)$$

Dann gilt

$$x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$
$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27,$$
$$2x^3 - 12x - 18 = 0,$$
$$x^3 - 6x - 9 = 0. \qquad (2)$$

Wir setzen $f(x) = x^3 - 6x - 9$ und erhalten

$$f(0) = -9,\ f(1) = -14,\ f(2) = -13,$$
$$f(3) = 0.$$

Die Gleichung (2) und damit auch die Gleichung (1) ist also für $x = 3$ erfüllt.
Wir müssen nun noch nachweisen, daß die Gleichung (2) und damit auch die Gleichung (1) keine weiteren reellen Lösungen hat. Aus (2) erhalten wir

$$x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x + 3x - 9 = 0,$$
$$x^2(x-3) + 3x(x-3) + 3(x-3) = 0,$$
$$(x^2 + 3x + 3)(x-3) = 0. \qquad (3)$$

Nun gilt für alle reellen x

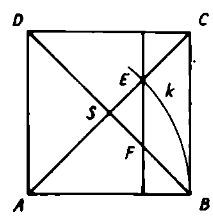
$$x^2 + 3x + 3 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} + 3 - \frac{9}{4} =$$
$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

d. h. der erste Faktor auf der linken Seite von (3) ist für alle x von Null verschieden, die Gleichung (3) ist also nur für $x = 3$ erfüllt. Daher hat auch die gegebene Gleichung genau eine reelle Lösung, nämlich $x = 3$.
Wir überzeugen uns noch durch die Probe davon, daß die Gleichung (1) für $x = 3$ erfüllt ist. Wir erhalten

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3,$$
$$27 + 64 + 125 = 216,$$
$$216 = 216,$$

also eine wahre Aussage.

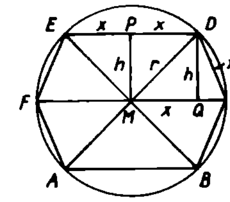
W 9 ■ 954 Aus $\sphericalangle ECB = \sphericalangle FBC = 45°$ und $EF \parallel BC$ folgt, daß das Viereck $BCEF$ ein gleichschenkliges Trapez ist; somit gilt $\overline{CE} = \overline{FB}$.



Aus $\overline{AE} = a$ und $\overline{AS} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ folgt $\overline{SE} = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}$ $= \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$. Ferner gilt $\overline{EF} = \overline{SE} \cdot \sqrt{2}$ $= \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = a(\sqrt{2} - 1)$. Aus $\overline{AC} = a\sqrt{2}$ und $\overline{AE} = a$ folgt $\overline{CE} = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$.
Deshalb gilt $\overline{CE} = \overline{EF} = \overline{FB}$.
$BCEF$ gleichschenkliges Trapez: $\overline{CE} = \overline{FB}$.

$$\overline{SE} = a - \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$$
$$\overline{EF} = \overline{SE}\sqrt{2} = a(\sqrt{2} - 1)$$
$$\overline{CE} = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1) \quad \overline{CE} = \overline{EF} = \overline{FB}.$$
$$BCEF: A = \frac{1}{2}(a + a\sqrt{2} - a) \cdot \frac{1}{2}(a - a\sqrt{2} + a),$$
$$= \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} a(2 - \sqrt{2}) =$$
$$= \frac{a^2}{4}(2\sqrt{2} - 2) = \frac{a^2}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

W 9 * 955 Es sei $ABCDEF$ das gegebene, einem Kreis einbeschriebene Sechseck. Wir setzen $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{FA} = x$. Dann gilt nach Voraussetzung $\overline{AB} = \overline{ED} = 2x$ (vgl. die Abb.).
Um x zu berechnen, müssen wir zunächst nachweisen, daß die Diagonalen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ durch den Mittelpunkt M des Umkreises des Sechsecks gehen. Dann folgt nämlich $AB \parallel FC \parallel ED$. Wir verbinden den Mittelpunkt M des Kreises mit den sechs Eckpunkten. Dann gilt $\triangle BMA \cong \triangle EMD$, da diese Dreiecke in den drei Seiten übereinstimmen. Daraus folgt $\sphericalangle BMA = \sphericalangle EMD$.



Ferner gilt
$\triangle CMB \cong \triangle DMC \cong \triangle FME \cong \triangle AMF$.
Daraus folgt
$\sphericalangle CMB = \sphericalangle DMC = \sphericalangle FME = \sphericalangle AMF$.
Mithin gilt
$\sphericalangle CMB + \sphericalangle DMC + \sphericalangle EMD$
$= \sphericalangle FME + \sphericalangle AMF + \sphericalangle BMA$, also, da diese Winkel zusammen 360° betragen,
$\sphericalangle CMB + \sphericalangle DMC + \sphericalangle EMD = 180°$, d. h. die Punkte B, M, E liegen auf einer Geraden, die Diagonale $\overline{BE}$ geht also durch den Mittelpunkt M des Kreises. Analog beweist man, daß auch die Diagonalen $\overline{AD}$ und $\overline{CF}$ durch M gehen.
Jetzt fällen wir das Lot $\overline{MP}$ von M auf $\overline{ED}$ und das Lot $\overline{DQ}$ von D auf $\overline{MC}$. Wir setzen $\overline{MC} = \overline{MD} = r$, $\overline{MP} = \overline{DQ} = h$.
Es gilt $\overline{PD} = \overline{MQ} = x$, und wir erhalten nach dem Satz des Pythagoras

$$h^2 = r^2 - x^2, \qquad (1)$$
$$h^2 = x^2 - (r - x)^2 = 2rx - r^2, \qquad (2)$$

also $\quad 2rx - r^2 = r^2 - x^2,$

$$x^2 + 2rx - 2r^2 = 0. \qquad (3)$$

Die quadratische Gleichung (3) hat genau eine positive Lösung, nämlich

$$x = -r + \sqrt{r^2 + 2r^2} = -r + r\sqrt{3} =$$
$$= r(\sqrt{3} - 1) \approx 0{,}732r. \qquad (4)$$

Aus (1) und (4) folgt nun
$h^2 = r^2 - x^2 \approx r^2 - 0{,}732^2 r^2 \approx 0{,}464 r^2$,
$h \approx 0{,}681 r$.
Für den Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$ gilt daher

$$A_1 = 4\left(xh + \frac{r - x}{2} h\right) = 2(r + x)h,$$
$$A_1 \approx 2(0{,}732r + r)0{,}681r$$
$$\approx 2 \cdot 1{,}732 \cdot 0{,}681 r^2$$
$$A_1 \approx 2{,}359 r^2.$$

Für den Flächeninhalt des umbeschriebenen Kreises gilt

$A_2 = \pi r^2 \approx 3{,}142 r^2$. Wir erhalten

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2{,}359}{3{,}142} \approx 0{,}7508,$$

d. h. der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$ ist nur etwas größer als 0,75, d. s. $\frac{3}{4}$ des Flächeninhalts des umbeschriebenen Kreises.

W 9*956 Angenommen, a und b seien zwei natürliche Zahlen, für die die Gleichung

$$10a+(a-9)b^2=88+(6a-54)b$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$10a+ab^2-9b^2=88+6ab-54b,$$
$$ab^2-6ab+10a=9b^2-54b+88,$$
$$a(b^2-6b+9+1)=9b^2-54b+81+7,$$
$$a[(b-3)^2+1]=9(b-3)^2+7.$$

Wir setzen $b-3=t$, wobei t eine ganze Zahl ist, und erhalten wegen $t^2+1>0$

$$a=\frac{9t^2+7}{t^2+1}=\frac{2t^2}{t^2+1}+7.$$

a ist also nur dann eine natürliche Zahl, wenn $\frac{2t^2}{t^2+1}$ ganzzahlig ist.

Nun gilt für alle ganzen Zahlen t

$$0\leq\frac{2t^2}{t^2+1}=\frac{2(t^2+1)}{t^2+1}-\frac{2}{t^2+1}<2.$$

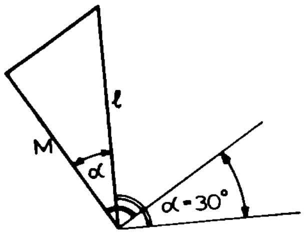
Also gibt es, da $\frac{2t^2}{t^2+1}$ ganzzahlig ist, nur die folgenden Möglichkeiten:

1. $\frac{2t^2}{t^2+1}=0$, d. h. $t=0, b=3, a=7.$
2. $\frac{2t^2}{t^2+1}=1$, d. h. $t=1, b=4, a=8$
   oder $t=-1, b=2, a=8.$

Es können also nur die geordneten Paare (7, 3), (8, 4), (8, 2) Lösungen der gegebenen Gleichung sein. Die Probe zeigt, daß diese Paare tatsächlich Lösungen der gegebenen Gleichung sind.

Lösungen zu: Aufgaben aus der Markscheidekunde (2/72, S. 25)

▲1▲ $M=l\cdot\cos\alpha$
$M=1{,}80\text{ m}\cdot 0{,}8660=1{,}56\text{ m}$

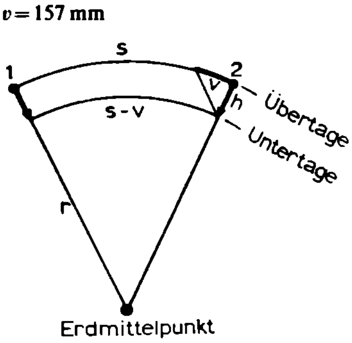


▲2▲ Nach der Skizze ist

$$\frac{v}{h}=\frac{s}{r},\quad v=\frac{s\cdot h}{r}$$

$$v=\frac{1\text{ km}\cdot 1\text{ km}}{6370\text{ km}}=0{,}000\,157\text{ km}$$

$v=157$ mm



Der Abstand der beiden Lote in 1000 m Tiefe ist 157 mm kleiner als Übertage.

1 und 2 = Aufhängepunkte der Lote
s = Abstand der Lote Übertage
$s-v$ = Abstand der Lote Untertage
r = Erdradius 6730 km
h = Höhenunterschied zwischen Übertage und Untertage
v = Verbesserung

▲3▲ $c=b-a$

$$b=\frac{h}{\tan\alpha_2};\quad a=\frac{h}{\tan\alpha_1}$$

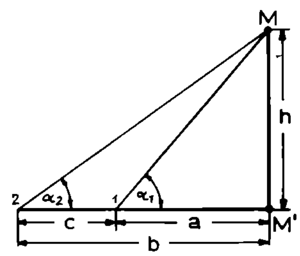
$$c=\frac{h}{\tan\alpha_2}-\frac{h}{\tan\alpha_1}$$

$$c=h\left(\frac{1}{\tan\alpha_2}-\frac{1}{\tan\alpha_1}\right)$$

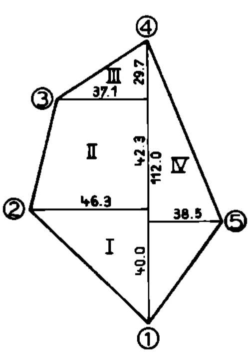
$$h=c\,\frac{1}{\frac{1}{\tan\alpha_2}-\frac{1}{\tan\alpha_1}}=c\,\frac{1}{\frac{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}{\tan\alpha_2\cdot\tan\alpha_1}}$$

$$h=c\,\frac{\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}$$

$$h=57{,}65\,\frac{0{,}7673\cdot 0{,}4913}{0{,}7673-0{,}4913}=78{,}74\text{ m}$$



▲4▲ In dieser Form aufgemessene Grundstücke werden in Dreiecke und Trapeze zerlegt.

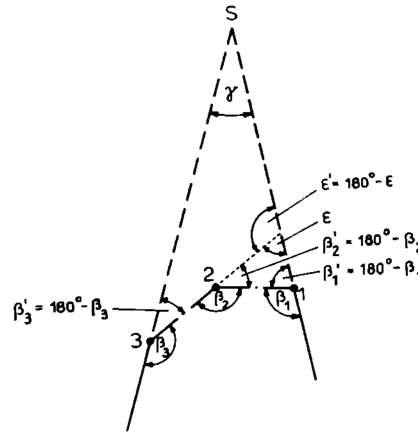


I	Dreieck	$\frac{1}{2}\cdot 40{,}0\cdot 46{,}3$	$= 926\text{ m}^2$
II	Trapez	$\frac{1}{2}\cdot(46{,}3+37{,}1)\cdot 42{,}3$	$=1\,764\text{ m}^2$
III	Dreieck	$\frac{1}{2}\cdot 29{,}7\cdot 37{,}1$	$= 551\text{ m}^2$
IV	Dreieck	$\frac{1}{2}\cdot 112{,}0\cdot 38{,}5$	$=2\,156\text{ m}^2$
		F	$=\underline{5\,397\text{ m}^2}$

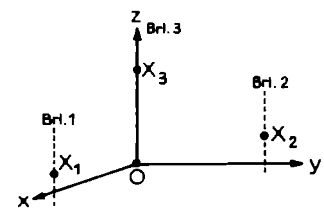
▲5▲ $\varepsilon=180°-\beta_1'-\beta_2'$

$$\varepsilon=180°-(180°-\beta_1)-(180°-\beta_2)$$
$$\varepsilon=\beta_1+\beta_2-180$$
$$\gamma=180°-\varepsilon'-\beta_3'$$
$$\gamma=180°-(180°-\varepsilon)-(180°-\beta_3)$$
$$\gamma=180°-(180°-\beta_1-\beta_2+180°)-(180°-\beta_3)$$
$$\gamma=\beta_1+\beta_2+\beta_3-360°$$

$$\begin{aligned}\beta_1&=106°20'\\ \beta_2&=141°52'\\ \beta_3&=142°29'\\ &\underline{-360°00'}\\ \gamma&=\ \ 30°41'\end{aligned}$$



▲6▲ In die gegebene Skizze wird ein Koordinatennetz gelegt. O (Origo) für x und y im Bohrloch 3 und für z Normal Null.



Die Koordinaten der Punkte, an denen das Flöz von den Bohrlöchern getroffen wurde, sind:

bei Bohrloch 1 X_1 (100; 0; 35)
bei Bohrloch 2 X_2 (0; 100; 45)
bei Bohrloch 3 X_3 (0; 0; 85)

Für die vektorielle Parameterdarstellung einer Ebene durch 3 Punkte X_1, X_2, X_3 kann u. a. geschrieben werden:

$$\varepsilon_1\ \ldots\ \mathfrak{e}=\mathfrak{e}_1+(\mathfrak{e}_2-\mathfrak{e}_1)\sigma+(\mathfrak{e}_3-\mathfrak{e}_1)\tau$$

Die 3 entsprechenden äquivalenten skalaren Gleichungen lauten dann:

$$\varepsilon_1\ldots\begin{cases}x=x_1\ (x_2-x_1)\sigma+(x_3-x_1)\tau\\ y=y_1\ (y_2-y_1)\sigma+(y_3-y_1)\tau\\ z=z_1\ (z_2-z_1)\sigma+(z_3-z_1)\tau\end{cases}$$

$$\varepsilon_1\ldots\begin{cases}x=100-100\sigma-100\tau\\ y=\quad\ +100\sigma\\ z=\ 35+\ 10\sigma+\ 50\tau\end{cases}$$

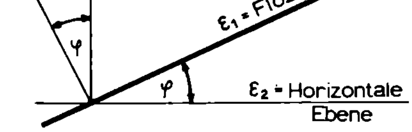
Durch Eliminierung von σ und τ erhält man die Ebenengleichung

$$\varepsilon_1\ldots 5x+4y+10z-850=0$$

Es muß nunmehr der Schnittwinkel mit einer horizontalen Ebene

$$\varepsilon_2\ldots z=0$$

berechnet werden.



Die beiden Flächen schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie ihre Stellungsvektoren $\mathfrak{a}$, wobei hier gilt

$\varepsilon_1 \ldots \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{e} + k_1 = 0$

$\varepsilon_2 \ldots \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{e} + k_2 = 0$

$\mathfrak{a}_1 = (a_1; b_1; c_1) = (5; 4; 10)$

$\mathfrak{a}_2 = (a_2; b_2; c_2) = (0; 0; 1)$

Der Winkel φ zwischen zwei Vektoren berechnet sich aus

$$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1|\,|\mathfrak{a}_2|}$$

Hierzu die skalare Darstellung

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{10}{\sqrt{25+16+100}\,\sqrt{1}} = \frac{10}{\sqrt{141}} = 0{,}8425$$

$$\varphi = 32°36'$$

Lösungen zu „Gut gedacht ist halb gelöst“ (2/72, S. 38)

▲1▲ Die Lösung führt auf die Gleichung $4 \cdot 12 + x \cdot 8 = 88$ bzw. $(88 - 4 \cdot 12) : 8 = 5$, d. h. es wurden 12 Tische und 5 Schränke hergestellt.

▲2▲ Die Lösung führt auf die Ungleichung $60 : 4 > 72 : 6$ bzw. $15 > 12$ und $15 - 12 = 3$, d. h. die Mehrleistung erfolgt durch die erste Brigade mit täglich drei montierten Maschinen.

▲3▲ Die Lösung führt auf die Gleichung $(84 \cdot 14 + 56 \cdot 19) : 28 = x$ und $x = 80$, d. h. es konnten 80 Kästen mit je 28 kg Äpfel gefüllt werden.

▲4▲ Die Lösung führt auf die Gleichung

$50 \cdot 288 : 15 - (x + 160) = x$

bzw. $800 = 2x$

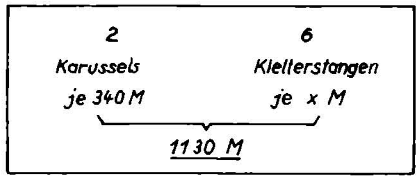
und $x = 400$, d. h.

die zweite Brigade förderte täglich 400 t Kohle.

▲5▲ Die Lösung führt auf die Gleichung $(30 - 18) : \left(6 - \frac{18}{6}\right) = x$ und $x = 4$, d. h. der Tourist legte den restlichen Weg von 12 km mit einer Geschwindigkeit von 4 km/h zurück.

▲6▲ Die Lösung führt auf die Gleichung $7 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 1000 \cdot 100}{100000} = x$ bzw. $x = 35$, d. h. die Marschstrecke auf der Karte 1 : 100000 beträgt 35 cm.

▲7▲ Das Lösungsbild ist:
Die Lösung führt auf die Gleichung
1. Variante: $2 \cdot 340 + 6 \cdot x = 1130$
2. Variante: $(1130 - 2 \cdot 340) : 6 = x$ und $x = 75$,
d. h. eine Kletterstange kostet 75 M.



▲8▲ Zur Lösung führen für a) und b) je zwei Varianten:

a) $(3 \cdot 25000) : 15 = x$ oder $15x = 3 \cdot 25000$; $x = 5000$, d. h. 5000 Schüler können aus diesem Altpapier mit Heften versorgt werden.

b) $1 \cdot 1000 \cdot 1000 : 25000 = x$, oder $25000x = 1 \cdot 1000 \cdot 1000$; $x = 40$ d. h. ein Heft hat durchschnittlich eine Masse von 40 g.

▲9▲ Alle Gegebenheiten werden in einer Tabelle niedergeschrieben. Die Lösungen ergeben sich aus der Vervollständigung der Tabelle.

Klasse	Anteil am Sammelergebnis		Sammelergebnis der Klasse	Lösung der Aufgaben	d)
5a	33,75		= 33,75	a) 33,75 − 11,25 = 22,50	3
5b	4 · 33,75		= 135,00		12
5c	33,75 : 3		= 11,25		1
		b)	= 180,00	c) 180 : 3 = 60	
			.		
			.		
			11,25		
			16		

a) Die Klasse 5a spendete 22,50 M mehr als Klasse 5c.

b) Die drei Klassen spendeten insgesamt 180,00 M.

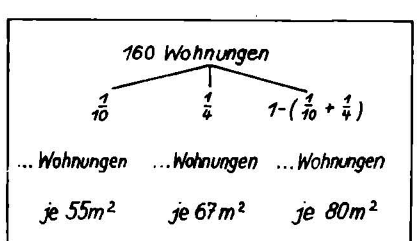
c) Im Durchschnitt spendete jede Klasse 60,00 M.

d) Die Spenden der Klassen 5a : 5b : 5c standen im Verhältnis 3 : 12 : 1

▲10▲ Die Lösung führt auf die Gleichung:

$$\frac{160}{10} \cdot 55\,\mathrm{m}^2 + \frac{160}{4} \cdot 67\,\mathrm{m}^2 + \frac{160}{1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\right)} \cdot 80\,\mathrm{m}^2 = x$$

bzw. $(880 + 2680 + 8320)\,\mathrm{m}^2 = 11880\,\mathrm{m}^2$ Wohnraum insgesamt.



▲11▲ Lösung:

Aufgabe: Auf einem Feld von 135 ha wird ein Ernteertrag von 25 dt/ha erwartet; auf einem 21 ha größeren Feld ein solcher von 22 dt/ha.

a) Welches der beiden Felder wird den größeren Gesamtertrag erreichen bzw. wieviel dt mehr sind das?

b) Wieviel dt/ha wird der Durchschnittsertrag beider Felder zusammen sein?

Lösung:

a) $25\,\mathrm{dt} \cdot 135 = 3375\,\mathrm{dt}$
$22\,\mathrm{dt} \cdot (135 + 21) = 3432\,\mathrm{dt}$,
d. h. $A_1 < A_2$ das sind $(3432 - 3375)\,\mathrm{dt} = 57\,\mathrm{dt}$ Mehrertrag.

b) $(3375 + 3432)\,\mathrm{dt} : (135 + 135 + 21)\,\mathrm{ha} = 23{,}39\ldots \approx 23{,}4\,\mathrm{dt/ha}$.

Rechne *nicht* so: $\left(\frac{25 + 22}{2}\right)\mathrm{dt} = 23{,}5\,\mathrm{dt}$ Durchschnitt. Warum nicht? Begründe!

Lösungen zu alpha-heiter

Füllrätsel

1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	E	I	L	M	E	N	G	E
E	U	N	I	O	B	E	A	L
I	L	H	T	D	E	N	U	F
L	E	A	E	E	N	N	S	E
E	R	L	R	L	E	E	S	C
R		T		L		R		K

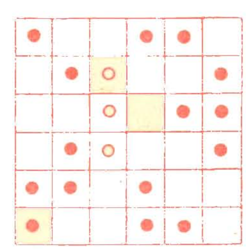
Welchen Beruf übt Frau Kimmer aus?

Frau Kimmer ist *Mathematiklehrer.*

Permutationsrätsel

Ebene – Nenner – drei – plus – Umfang – neun – Kathete – Teiler: ENDPUNKT

Magisches Quadrat



Kombination mit alpha

Es gibt 28 Möglichkeiten.

	1	1	1	1	1	6
1	2	3	4	5	6	5
1	3	•	•	5	11	4
1	4	•	•	5	16	3
1	5	5	5	10	26	2
1	6	11	16	26	52	1
a	b	c	d	e	f	

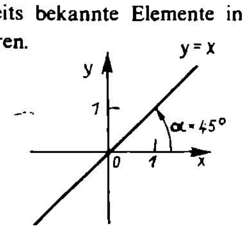
Das vorliegende Büchlein wendet sich an einen breiten Leserkreis, kann Schülern von der 8. oder 9. Klasse an empfohlen werden und will der mathematischen Allgemeinbildung dienen.

An Hand des recht anschaulichen Stoffes werden das allgemeine logische Schließen, die Verallgemeinerung beziehungsweise Spezialisierung, das Schaffen von Querverbindungen sowie die Systematik bei der Lösung mathematischer Probleme geübt und fast unmerklich gefestigt. Allerdings handelt es sich nicht um eine Sammlung von Knobelaufgaben oder Kuriositäten, sondern um ein systematisches kleines Lehr- und Übungsbuch in Form einer Vorstufe programmierten Lehrmaterials. Es wird deshalb vom Leser der Wille zum Mitdenken erwartet, und der volle Erfolg kann sich nur bei intensivem Durcharbeiten – dann aber auch bei nicht speziell mathematisch talentierten Schülern – einstellen.

Leseprobe

Lineare Funktionen

Wir gehen nun zu einem systematischen Studium des Verhaltens verschiedener Funktionen und der Konstruktion ihrer graphischen Darstellungen über. Dabei werden wir nicht nur charakteristische Züge des Verhaltens dieser Funktionen und die Besonderheiten ihrer Graphen, sondern auch eine Menge weiterer Beispiele kennenlernen. Bei der Konstruktion komplizierterer graphischer Darstellungen werden wir stets versuchen, bereits bekannte Elemente in ihnen aufzuspüren.



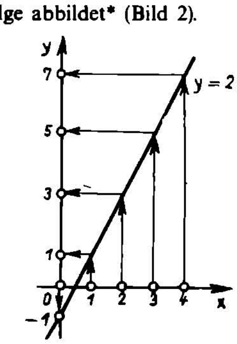
Die einfachste Funktion ist sicher die Funktion $y=x$. Der Graph dieser Funktion ist eine Gerade, nämlich die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten des Koordinatensystems (Bild 1).

Sicher wißt ihr auch bereits, daß die graphische Darstellung jeder beliebigen linearen Funktion $y=kx+b$

immer eine gewisse Gerade ist. Umgekehrt ist auch jede Gerade, die nicht zur y-Achse parallel ist, das Bild einer gewissen linearen Funktion.

Der Verlauf einer Geraden ist bereits vollkommen bestimmt, wenn zwei ihrer Punkte gegeben sind. Dementsprechend ist jede lineare Funktion bereits vollkommen festgelegt, wenn zwei ihrer Werte zu zwei gegebenen Argumentwerten bekannt sind.

Die typische Eigenschaft der linearen Funktion besteht darin, daß y sich gleichmäßig ändert, wenn x gleichmäßig, das heißt jeweils um die gleiche Zahl zunimmt. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $y=3x-2$. Es soll x die Werte 1, 3, 5, 7, ... annehmen, von denen jeder folgende um 2 größer als der vorhergehende ist. Die entsprechenden Funktionswerte sind 1, 7, 13, 19, ... Sie sehen, daß jeder Wert um ein und dieselbe Zahl, nämlich 6, größer als der vorangegangene ist. Eine Zahlenfolge, die aus einer beliebigen Zahl durch wiederholte Addition einer beliebigen, aber festen Zahl gebildet wird, ist eine sogenannte arithmetische Zahlenfolge. Demnach besteht die oben beschriebene charakteristische Eigenschaft der linearen Funktion darin, daß jede lineare Funktion eine arithmetische Zahlenfolge eindeutig auf eine andere arithmetische Zahlenfolge abbildet* (Bild 2).



In unserem Beispiel bildet die Funktion $y=3x-2$ die arithmetische Folge 1, 3, 5, 7, 9, ... auf die arithmetische Zahlenfolge 1, 7, 13, 19, 25, ... *ab*, während Bild 2 zeigt, daß die Funktion $y=2x-1$ die arithmetische Zahlenfolge 0, 1, 2, 3, ... auf die arithmetische Folge -1, 1, 3, 5, ... abbildet.

Die beschriebene charakteristische Eigenschaft läßt sich aber auch noch anders beschreiben.

Bei jeder linearen Funktion sind nämlich die Differenzen zweier beliebiger Argumentwerte und der dazugehörigen Funktionswerte zueinander proportional:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k.$$

Der Proportionalitätsfaktor k ist dabei gleich dem Anstieg der Geraden, die das Bild der gegebenen linearen Funktion ist.

Dem Leser der Zeitschrift *alpha* bietet das Buch eine Fülle von Anregungen, Beispielen und Aufgaben, die zum Teil recht originell sind und überraschende Anwendungen der im ganzen völlig elementaren Überlegungen aufzeigen.

▲1▲ Überlegen Sie sich eine lineare Funktion, die die arithmetische Folge -3, -1, 1, 3, ... auf die arithmetische Folge -2, -12, -22, -32, ... abbildet. Welche lineare Funktion bildet die zweite auf die erste Folge ab?

▲2▲ Es mögen zwei arithmetische Folgen a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, ... und c, $c+t$, $c+2t$, $c+3t$, ... gegeben sein. Kann man dann immer eine lineare Funktion $y=kx+b$ finden, welche die eine Folge auf die andere abbildet?

▲3▲ Man konstruiere die graphische Darstellung der Funktion $y=\sqrt{3}x$.

a) Es ist zu beweisen, daß dieselbe außer durch (0, 0) durch keinen weiteren Punkt mit ganzzahligen Koordinaten gehen kann. Wenn Sie als Maßeinheit die Kantenlänge eines Kästchens wählen, dann sind alle Eckpunkte von Kästchen solche „ganzzahligen" Punkte. Wählen Sie den Koordinatenanfang in der linken unteren Ecke der Seite und zeichnen Sie die Gerade $y=\sqrt{3}x$ so genau wie möglich ein! (Unter welchem Winkel zur x-Achse muß sie gezeichnet werden?)

Einige der ganzzahligen Gitterpunkte befinden sich recht nahe bei dieser Geraden. Geben Sie unter Ausnutzung dieser Tatsache einen gemeinen Bruch an, der ein Näherungswert für $\sqrt{3}$ ist. Vergleichen Sie den gefundenen Wert mit dem Tabellenwert $\sqrt{3}\approx 1{,}7321$.

b) Etwas schwieriger ist folgende Aufgabe: Man zeige, daß es einen ganzzahligen Gitterpunkt gibt, der von der Geraden $y=\sqrt{3}x$ einen kleineren Abstand als $\frac{1}{1000}$ hat.

Es wäre zu wünschen, daß dieses kleine Buch ebenso wie in der Sowjetunion auch bei uns recht viele aufgeschlossene Leser findet.

* Unter Abbildung versteht man in der Mathematik eine Zuordnung von Elementen zweier verschiedener Mengen.

Vorliegendes Buch (Nr. 58 der Mathematischen Schülerbücherei) – Preis 7,00 M erschienen bei

LEIPZIG

BSB B. G. TEUBNER

Leseprobe

Die Teilbarkeit von Summen und Produkten

Bei der Division mit Rest kommt es in vielen Fällen gerade darauf an, den Rest der Division einer Zahl a durch eine Zahl b zu finden, während die Größe des unvollständigen Quotienten dabei keine Rolle spielt.

Wir wollen zum Beispiel feststellen, auf welchen Wochentag der 1. Januar des Jahres 2000 fällt (natürlich unter der Voraussetzung, daß der gegenwärtig gültige Kalender auch dann noch gültig ist). Ein Blick auf den Kalender zeigt, daß der 1. Januar 1973 ein Montag war. Die 27 Jahre, die diese beiden Daten voneinander trennen, bestehen aus $27\cdot 365+6$ Tagen (der zweite Summand ist die Anzahl der Tage, welche durch die Anzahl der in diesem Zeitraum liegenden Schaltjahre dazu kommen); also beträgt der gesamte Zeitraum 9 861 Tage. Diese Tage bilden 1 408 vollständige Wochen und fünf Tage. Nach Ablauf dieser 1 408 Wochen kommt also wieder ein Montag, so daß nach den noch verbleibenden Tagen ein Sonnabend kommen muß, welcher der 1. Januar 2000 ist. Offenbar ist es für die Lösung dieser von uns selbst gestellten Aufgabe völlig unerheblich, wieviel vollständige Wochen in diesen 27 Jahren vergehen. Entscheidend ist lediglich, wieviel Tage über die Anzahl der vollständigen Wochen hinaus vorhanden sind.

Mit Aufgaben dieser Art werden vor allem Historiker – besonders die Orientalisten – konfrontiert, wenn sie Daten verschiedener Kalender miteinander vergleichen sollen. Es hat den Anschein, als würde man den Rest bei Division einer Zahl durch eine andere am leichtesten erhalten, indem man die Division tatsächlich ausführt. Bei der praktischen Durchführung einer solchen Division stellt man jedoch recht oft fest, wie umständlich ein solches Verfahren vor allem dann ist, wenn der betreffende Dividend nicht in unserem vertrauten Dezimalsystem, sondern als komplizierter Ausdruck, etwa in der Form $2^{1000}+3^{1000}$ gegeben ist. Außerdem beansprucht gerade die Berechnung des unvollständigen Quotienten den Löwenanteil der Arbeit, obwohl uns dieser an und für sich gar nicht interessiert. Deshalb ist es notwendig, Verfahren zu entwickeln, mit deren Hilfe man den Rest unmittelbar erhält, ohne erst den unvollständigen Quotienten berechnen zu müssen.

Wir führen ein solches Verfahren an Hand des oben dargestellten Beispiels vor. Dabei überlegen wir folgendermaßen: Jedes Jahr, das kein Schaltjahr ist, besteht aus 365 Tagen, hat also 52 ganze Wochen und einen Tag. Ein Schaltjahr dagegen hat ebenso viele ganze Wochen und zwei Tage. Das heißt, der Zeitraum vom 1. Januar 1973 bis zum 1. Januar 2000 enthält eine gewisse Anzahl (es ist völlig unwichtig zu wissen wieviel) ganzer Wochen plus eine Anzahl von Tagen, die gleich der Zahl der Jahre dieses Zeitraumes ist, wobei für die Schaltjahre jeweils ein zusätzlicher Tag hinzukommt. Diese Anzahl der Tage ist $27+6=33$. Ziehen wir davon wieder die Anzahl der Tage für ganze Wochen ab, so erhalten wir noch fünf übrigbleibende Tage, die wir zu unserem Montag dazuzählen. Es zeigt sich, daß ein solches „Ersetzen eines Jahres durch einen Tag" das Modell eines äußerst allgemeinen Verfahrens ist, mit welchem wir uns im folgenden beschäftigen wollen.

Definition: Wir nennen die Zahlen a und b restgleich hinsichtlich der Division durch m, wenn die Reste bei Division von a und b durch m einander gleich sind.

Wir wollen einige Eigenschaften restgleicher Zahlen ermitteln.

Satz 1: Die Zahlen a und b sind dann und nur dann restgleich hinsichtlich der Division durch m, wenn ihre Differenz $a-b$ durch m teilbar ist.

Satz 2: Sind die Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ den Zahlen $b_1, b_2, \ldots b_n$ hinsichtlich der Division durch m restgleich, so sind es auch die Summen $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ und $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$ sowie die Produkte $a_1 a_2 \ldots a_n$ und $b_1 b_2 \ldots b_n$.

Folgerung: Sind die Zahlen a und b hinsichtlich der Division durch m restgleich, so sind es auch die Zahlen a^n und b^n für jedes natürliche n.

Der Satz 2 und seine Folgerung liefern schon viele Möglichkeiten, Reste bei der Division zu erhalten. Wir führen einige Beispiele an.

Beispiel 1: Man bestimme den Rest bei Division der Zahl
$A=13^{16}-2^{25}\cdot 5^{15}$ durch 3.

Offenbar sind hinsichtlich der Division durch 3 die 13 mit der 1, die 2 mit der -1 und die 5 ebenfalls mit der -1 restgleich. Aufgrund des bisher Bewiesenen heißt das: Die Zahl A ist hinsichtlich der Division durch die Zahl 3 restgleich mit der Zahl $1^{16}-(-1)^{25}\cdot(-1)^{15}=1-1=0$. Das heißt, der gesuchte Rest ist Null und A demzufolge durch 3 teilbar.

Beispiel 2: Man bestimme den Rest bei Division derselben Zahl A durch 37. Dazu stellen wir die Zahl A in folgender Form dar:

$$A=(13^2)^8-(2^5)^5\cdot(5^3)^5.$$

Bei Division durch 37 ist $13^2=169$ restgleich mit -16, ferner $2^5=32$ restgleich mit -5 und $5^3=125$ restgleich mit 14. Somit ist die gesamte Zahl A restgleich mit

$$(-16)^8-(-5)^5\cdot(+14)^5$$

oder, was das gleiche ist, mit

$$(16^2)^4+70^5.$$

Da $16^2=256$ restgleich mit -3 und 70 restgleich mit -4 ist, heißt das, A ist restgleich mit

$$(-3)^4+(-4)^5$$

oder, was das gleiche ist, mit

$$81-(2^5)^2, \text{ also mit}$$

$$81-(-5)^2=81-25=56.$$

Schließlich ist 56 hinsichtlich der Division durch 37 restgleich mit 19; diese Zahl ist nicht negativ und kleiner als 37, also der gesuchte Rest.

Aufgabe: Man bestimme den Rest bei Division von
a) $A=(116+17^{17})^{21}$ durch 8;
b) $A=14^{256}$ durch 17.

Aufgabe: Man beweise, daß für jedes n die folgenden Teilbarkeitsbeziehungen gelten:
a) $6|(n^3+11n)$;
b) $9|(4^n+15n-1)$;
c) $3^{n+2}|(10^{3^n}-1)$;
d) $(a^2-a+1)|(a^{2n+1}+(a-1)^{n+2})$ für beliebiges a.

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Aus der kleinen Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik (MSB) empfehlen wir in diesem Zusammenhang

I. N. N. Worobjow
- **Die Fibonaccischen Zahlen** 4,80 M

V. A. O. Gelfond
- **Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen** 3,80 M

E. B. Dynkin/W. A. Uspenki
- **Aufgaben aus der Zahlentheorie** 6,10 M

(Mathematische Unterhaltungen, Teil II)

L. A. Kaloujnine
- **Primzahlzerlegung** 2,40 M