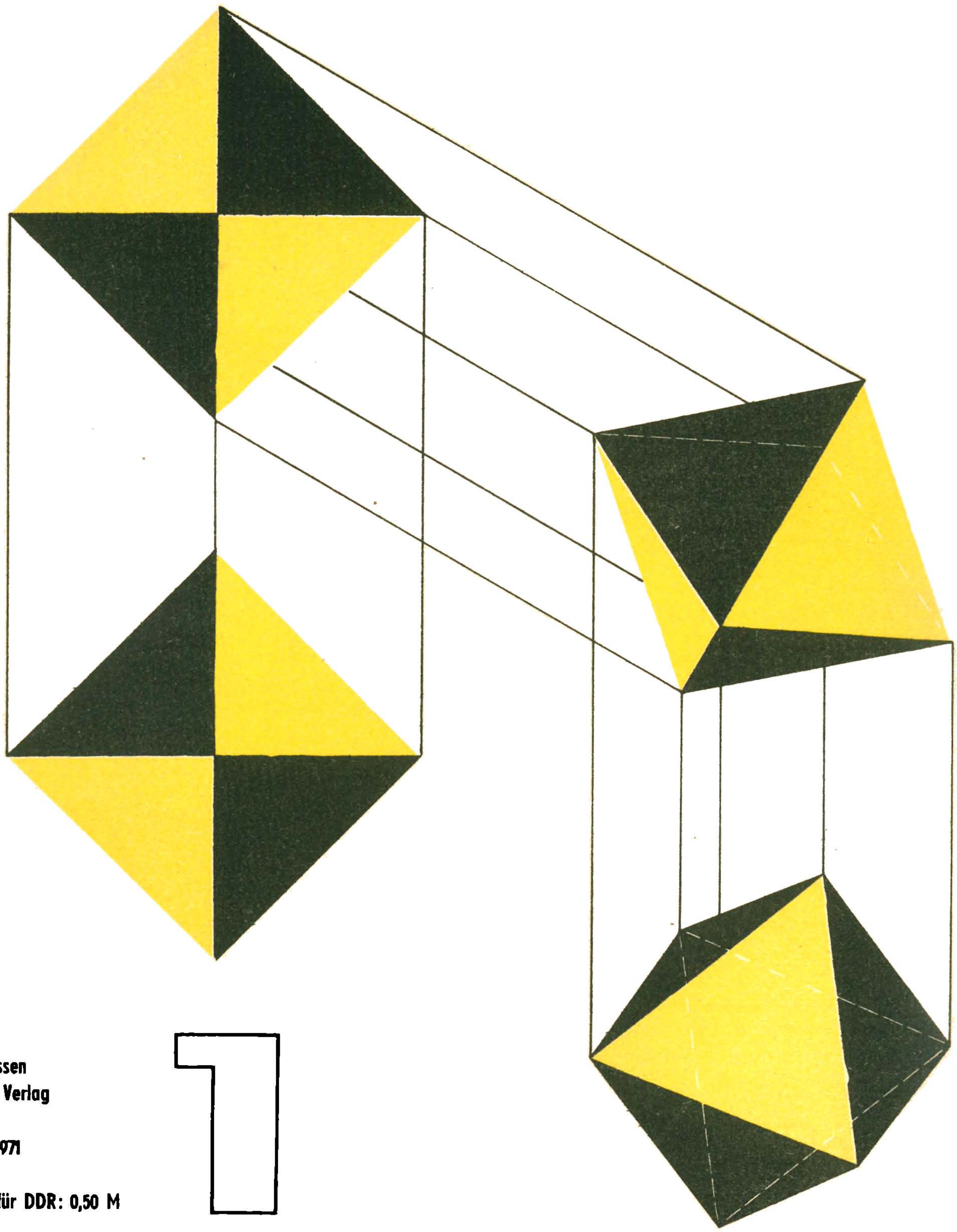
Mathematische Schülerzeitschrift

# alpha



# 1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
5. Jahrgang 1971
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import BmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Ch. Loff, Leipzig (S. 1); J. Lehmann, Leipzig (S. 13/14, S. 15, S. 12); R. Herrmann, Halle (Eigenfoto, S. 6); ADN (S. 11); Titelvignette: F. Fricke (S. 16); L. Klunker, Herzberg (S. 20)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 23. November 1970

# alpha
# Mathematische Schülerzeitschrift

## Inhalt

Dieses Heft wurde zu Ehren des *Internationalen Frauentages* 1971 gestaltet

1 Der Weg eines Talents (5)*
Prof. Dr. Olga Alexandrowna Ladyschenskaja
J. G. Senkjewitsch, Sektion Mathematik des Technologischen Instituts Brjansk (UdSSR)

3 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Käte Boll-Dornberger (10)
Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin

3 Nichtalltägliche Aufgaben erfordern besondere Lösungsmethoden (7)
Dr. Nazla H. A. Khedre, Kairo

4 Die Mathematik ist schön (6)
Prof. Dr. Rózsa Péter, Budapest

6 Relationen, Teil 2 (5)
Dr. Rosemarie Herrmann, Sektion Mathematik, Fachbereich Methodik, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

7 IV. Internationale Physikolympiade, Moskau 1970 (10)
stud. math. Inge Reimann, Friedrich-Schiller-Universität Jena

8 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (5)

10 Berufsbild:
Vermessungsfacharbeiter und Kartographiefacharbeiter (5)

11 Optimale Strategie (7)
W. Träger, Schloßberg-Oberschule Döbeln

12 Taugen Mädchen für die Mathematik? (5)
*Junge Welt* und *alpha* stellen die sechs Teilnehmerinnen der XII. IMO vor

15 Ein mathematisches Kreuzworträtsel (7)
Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders, Institut für Lehrerbildung, Berlin-Köpenick

16 In freien Stunden, *alpha* heiter (5)
Studienrat J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig
Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

18 X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (5)
Aufgaben der Kreisolympiade

20 Lösungen

24 *alpha*-Abzeichen in Gold (5)

III./IV. Umschlagseite: Wissen, wo ... (5)
Inhaltsverzeichnis *alpha* 1967 bis 1970
Oberlehrer H. Herzog, V. L. d. V., 22. OS Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

# Der Weg eines Talents

Olga Alexandrowna Ladyschenskaja wurde am 7. März 1922 geboren. Sie erinnert sich gut an ihre Kindheit, an den Vater und an jene wertvollen Stunden, die er — ein großer Mathematiker — ihr und ihrer mathematischen Entwicklung widmete. Verliebt in die Mathematik, duldete der Vater bei anderen keine Gleichgültigkeit zu ihr und begeisterte sich, wenn er bei jemandem Interesse für diese Wissenschaft feststellte. So war er in der Schule, und so blieb er auch in der Familie. Zu Hause hörte die kleine Olga von allen am liebsten seine Erzählungen über die Mathematik. Die plastischen Erzählungen des Vaters vermittelten ihr ein Bild sowohl von der Romantik der Mathematik als auch von den wirklichen mathematischen Geheimnissen.

Diese Gespräche waren jedoch episodenhaft, und nur einmal gab es eine systematische Beschäftigung mit der Mathematik. Dieses eine Mal war jedoch durch seine Folgen so wichtig, daß man davon erzählen muß.

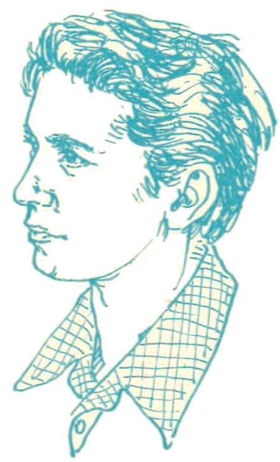
Der Vater beschloß, sich mit seinen älteren Töchtern (sie waren vier bzw. fünf Jahre älter als Olga) zu beschäftigen, weil die in der Schule eingeführte kollektive Lehrmethode (er selbst benutzte sie nicht, obwohl man ihn dafür gerügt hatte) zu einem traurigen Resultat führte: Die beiden von einem anderen Lehrer unterrichteten Töchter wußten nur wenig über die Mathematik, obwohl sie ganz gute Zensuren hatten. Gewöhnlich nahm er das Geometrie-Lehrbuch von Kiszlew (für Gymnasiasten) und ging es mit den Töchtern in den Sommerferien durch. Olga wurde „zur Gesellschaft" mitgenommen.

Der Vater unterrichtete folgendermaßen: Zunächst erzählte er einige Stunden hintereinander über das logische Denken im allgemeinen, über die deduktive und die induktive Methode, über die „Elemente" von Euklid, über die Griechen, die Araber, über die Zeit der Renaissance usw. Die nächsten Stunden wurden dazu verwendet, den Gegenstand der Geometrie zu bestimmen und ihr Grundschema von Definitionen und Sätzen aufzuzeichnen. Danach durften die Kinder selbst Sätze beweisen. Der Vater gab nur die Formulierungen. Ihnen blieb dann auch nichts weiter übrig, als die Sätze zu beweisen, sonst ärgerte sich der Vater sehr und begann ernsthaft zu glauben, daß seine Kinder besonders dumm seien. Aber auch ihnen schien es dann beschämend, den Beweis nicht selbst zu finden. Auf diese Weise ging man in zwei Monaten das ganze Lehrbuch von Kiszlew (Planimetrie und Stereometrie) durch.

Anfangs wandte sich der Vater zunächst an die älteste Tochter und verlangte eine Antwort, aber nach zwei Wochen begann Olga schon mit ihr zu wetteifern und fand oft als erste die richtige Lösung. Sie war damals acht Jahre alt und wurde gerade in die zweite Klasse versetzt.

Sie erinnerte sich natürlich nicht an alle Sätze und Beweise. Aber der Vater verlangte das auch gar nicht. Er erreichte etwas Wichtigeres: Er lehrte sie, logisch zu denken (sowohl in der Mathematik als auch im Leben) und die exakten Wissenschaften zu lieben.

Später lernte Olga viel aus den Arbeiten älterer Schüler, bei deren Korrektur sie dem Vater half. Als er nicht mehr lebte, gab sie zurückgebliebenen Schülern, auch höherer Klassen, sogar Förderunterricht.



Olga beschäftigte sich jedoch keineswegs nur mit Mathematik, sie las auch viel: Puschkin und Lermontow, Turgenjew und Tolstoi, Dostojewski und Tschechow, Tjutschew und Apuchtin, Wladimir Solowjew und Blok, Stendhal und Balzac. Sie hatte nicht wenige interessante Abhandlungen und polemische Artikel über die Entwicklung der russischen Kultur, Literatur und Malerei gelesen. Oft hatte sie Reproduktionen von Gemälden russischer und westeuropäischer Meister, berühmte Kathedralen und Skulpturen, die liebevoll in ihrem Album nachgezeichnet waren, betrachtet.

1939 hatte Olga die zehnte Klasse beendet. Es wurde Zeit, sich von Kologriew, dem Geburtsort, zu trennen und den ersten Schritt in das Leben zu tun. Auf den Rat des Vaters schickte sie ihre Unterlagen an die Leningrader Universität. Aber sie erhielt eine Absage: „Wegen der großen Zahl von Bewerbern mit ausgezeichneten Abgangszeugnissen müssen wir Bewerbern, die ihren Wohnsitz nicht in Leningrad haben, leider absagen.“

Schließlich konnte sie ein Studium am Pädagogischen Institut aufnehmen. Sie erhielt eine Unterkunft und sogar ein Stipendium, auf das sie ganz besonders angewiesen war.

Das Interessanteste für sie waren von Anfang an die Analysisvorlesungen. Es las Dozent S. E. Ljapin nach dem gerade herausgekommenen Buch von Prof. G. M. Fichtenholz „Analysis I“.

Solange der Lektor ein Theorem formulierte, war Zeit, selbst über den Beweis nachzudenken. Bald schon konnte Olga dem Lektor „vorsagen“ und manchmal auch die Beweise an der Tafel vorführen. Aber mit der analytischen Geometrie klappte es nicht so richtig: Sie konnte den Satz hören, ihn beweisen; aber sie konnte ihn nicht noch aufschreiben, sie wurde vom Schlaf überwältigt. Es machten sich die schlaflosen Nächte im Studentenwohnheim bemerkbar, die sie mit der Lösung von schwierigen Aufgaben und dem Studium von mathematischen Büchern verbrachte, um zu verstehen, womit sich denn die Mathematiker beschäftigen.

Bald lag das erste Jahr am Institut hinter ihr. Für den Sommer wurde das dünne Büchlein von I. M. Winogradow „Zahlentheorie“ mit den verzwickten Aufgaben nach jedem Kapitel vorgenommen. Diese mußte sie lösen, um im nächsten Jahr erfolgreich an einem Seminar zur Zahlentheorie teilnehmen zu können. Es wird vier Teilnehmer haben: einen Aspiranten, der sich auf die Zahlentheorie spezialisiert und außerdem Vorlesungen über analytische Geometrie hält, zwei sehr gute Mathematiker, die gerade das Studium beendeten, und Olga.

Im nächsten Jahr lasen zwei bekannte Professoren der Universität, B. A. Wenkow und G. M. Fichtenholz, für die Studenten des vierten Studienjahres die Vorlesungen über moderne Algebra und über die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. So etwas geschieht nicht in jedem Jahr. Wenn nun Olga diese Vorlesung besuchen würde? Eine gewisse Vorstellung über diese Gebiete ist vorhanden; sie müßte den Stoff verstehen. Aber wie steht es mit der Anweisung zum obligatorischen Besuch der festgelegten Vorlesung? Sie durfte doch nicht jede Woche eine Rüge in die Papiere bekommen. Zum Glück hatte der Dekan Verständnis für seine Assistentin. Er gestattete ihr das Fernbleiben von den obligatorischen Vorlesungen unter der Bedingung, daß sie dazu vorfristig die Prüfungen ablegt. Diese Bedingung wurde mit Bravour erfüllt. Außer einem erhöhten Stipendium erhielt sie eine Beurteilung von Fichtenholz und Natason, die ihr den Wechsel vom Pädagogischen Institut zur Universität ermöglichte.

Im Sommer kam der Krieg, und zu Ende war es mit all ihren Plänen.

Das Institut aber arbeitete weiter. Man lernte und schaufelte Schützengräben. Olga hatte die feste Absicht, in Leningrad zu bleiben und ihre Studien weiterzuführen. Sie konnte sich nicht vorstellen, daß der Krieg eine solche große Stadt zwei Jahre in seiner tödlichen Umklammerung halten könne. Nur der Zufall rettete sie vor dem Hungertod: Es war notwendig, sie kurzfristig zu operieren; aber für Zivilisten gab es in den Krankenhäusern keine Plätze mehr. Unter großen Schwierigkeiten gelang es ihr, mit der älteren Schwester aus dem belagerten Leningrad herauszukommen.

Wieder kam sie nach Kologriew und zur Schule, die sie vor kurzem gerade selbst absolviert hatte. Nur war jetzt Olga schon eine Lehrerin. Von Ansehen fast noch ein Kind, ging sie im Winter 1942 als 19jährige Lehrerin zu ihren fast gleichaltrigen Schülern der zehnten Klasse. Erinnerungen an die Kindheit und den Vater werden lebendig. Obwohl krank, gibt er sich seiner geliebten Sache hin. Die Tage widmet er den Schülern, und nachts treibt er Selbststudien. Es ist Mitternacht. Der Vater neigt sich über das Lehrbuch. Aber auch Olga schläft nicht. Sie möchte es zwar gerne, aber der Vater braucht ihre Nähe und den Gedankenaustausch mit ihr, auch über verschiedene Probleme aus der höheren Mathematik.

Für den Vater, einem Fernstudenten, waren diese nächtlichen Gespräche von besonderer Bedeutung, und nachdem ihn sein eigener „Professor“ geprüft hatte, besaß er keine Angst mehr vor anderen Professoren. Wenn auch Olga damals mit der höheren Mathematik begann, diese aber nicht begriff, so erhielt sie doch über ihren Inhalt gewisse Vorstellungen. Das zahlte sich später aus, sowohl im Institut als auch jetzt in der Schule.

Zusammen mit ihrer Mutter und den beiden Schwestern litt Olga unter großen Entbehrungen. Es gab kein Heizmaterial, und das Brot reichte nicht. Aber nichts konnte ihren Willen und ihre Entschlossenheit brechen, sich ständig weiterzubilden. Sie machte sich mit einigen neuen Gebieten der Mathematik bekannt, zunächst mit solchen, die besonders für die Schule nötig waren.

Nun wurde Olga klar, daß sie auf die Moskauer Universität gelangen mußte. Dort waren die besten mathematischen Kräfte des Landes tätig. Aber nach Moskau zu gehen schien fast aussichtslos, denn noch tobte der Krieg. Nachdem sie im Herbst mit den Kindern im Kolchos gearbeitet hatte, durfte Olga im Winter 1943 endlich nach Moskau reisen. (Über ihr Studium in der Hauptstadt der Sowjetunion und ihren weiteren Lebenslauf werden wir in einem zweiten Beitrag berichten.)

*J. Senkjewitsch*

# Eine Aufgabe von Nationalpreisträger Prof. Dr. rer. nat. habil.

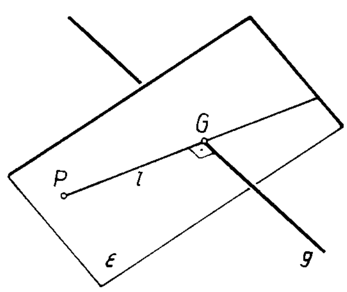
# Käte Boll-Dornberger

*em. Direktor des Forschungsbereichs Strukturforschung im Zentralinstitut für Physikalische Chemie der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*

▲ 646 Welches geometrische Gebilde stellt die Menge aller Punkte im Raum dar, deren Abstände von zwei sich senkrecht kreuzenden Geraden $g$ und $h$ jeweils einander gleich sind?

Verschaffe dir eine anschauliche Vorstellung von diesem geometrischen Gebilde, indem du ebene Schnitte der folgenden Art legst:

1. Schnittebene $\alpha$ durch $g$ senkrecht zu $h$
2. Schnittebene $\beta$ durch $h$ senkrecht zu $g$
3. Schar von Schnittebenen parallel $\alpha$
4. Schar von Schnittebenen parallel $\beta$
5. eine zu $g$ und $h$ parallele Ebene $\gamma$, die das Gemeinlot von $g$ und $h$ halbiert
6. Schar von Schnittebenen parallel $\gamma$
7. Ebenenscharen, die die Geraden $g$ und $h$ unter Winkeln von 45° schneiden




*Erklärungen:*

Unter dem Abstand eines Punktes $P$ von einer Geraden $g$ versteht man die Länge des Lotes von $P$ auf $g$. (Bild 1) Das Lot ($PG$) liegt in einer zu $g$ senkrechten Ebene durch $P$.

Zwei Geraden, die sich nicht schneiden und nicht parallel zueinander sind, bezeichnet man als windschiefe oder sich kreuzende Geraden. Der Kreuzungswinkel zweier windschiefer Geraden ist gleich dem Schnittwinkel zweier hierzu paralleler sich schneidender Geraden. Bei zwei sich senkrecht kreuzenden Geraden schneiden sich entsprechende Parallelen unter einem rechten Winkel.

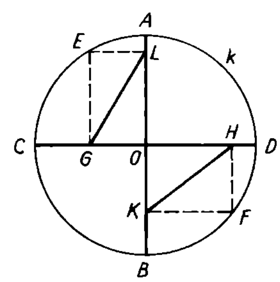
Unter dem Gemeinlot zweier sich kreuzender Geraden versteht man jene Gerade, die die beiden anderen senkrecht schneidet. Zu je zwei sich kreuzenden Geraden gibt es stets genau ein Gemeinlot.

# Nichtalltägliche Aufgaben erfordern besondere Lösungsmethoden

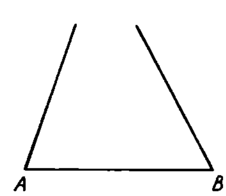
Hallo, liebe Mädchen und Jungen in der DDR!
Ich hatte mich bereits im letzten Jahr (*alpha* 4/69) mit einigen Aufgaben vorgestellt, und ich freue mich sehr, daß ich Euch in diesem Heft wiedertreffe.
Drei Aufgaben sind es diesmal, die ersten zwei geometrischer Natur. Sie können mit ganz verschiedenen Methoden gelöst werden. Denkt an Transformationen, geometrische Örter, Trigonometrie und analytische Geometrie. Die dritte Aufgabe appelliert an Euer Vorstellungsvermögen.
Je mehr Lösungswege Ihr für die Aufgaben 1 und 2 findet, an die vielleicht noch niemand gedacht hat, und je mehr allgemeine Lösungen Ihr für die dritte Aufgabe zusammenstellt, desto sicherer werdet Ihr in Zukunft gute Mathematiker.

*Eure Dr. Nazla H. A. Khedre, Kairo, VAR*

▲ *Aufgabe 1:* Dem abgebildeten Kreis $k$ mit dem Radius $r$ und dem Mittelpunkt 0 wurden zwei Durchmesser $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, die aufeinander senkrecht stehen, eingezeichnet. Es seien $E$ und $F$ zwei voneinander verschiedene Punkte der Peripherie des Kreises $k$. Die Geraden $EL$ und $FK$ verlaufen parallel zur Geraden $CD$ und schneiden die Gerade $AB$ in den Punkten $L$ und $K$. Die Geraden $EG$ und $FH$ stehen senkrecht auf der Geraden $CD$ und schneiden diese in den Punkten $G$ und $H$. Es ist zu beweisen, daß $\overline{GL} = \overline{HK}$ gilt!




▲ *Aufgabe 2:* Unsere Skizze stellt ein unvollständig gezeichnetes Dreieck $ABC$ dar, das heißt, die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind nicht voll ausgezeichnet. Es sind die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks $ABC$ zu konstruieren, ohne zuvor den Schnittpunkt $C$ der Geraden $AC$ und $BC$ zu bestimmen. Die Konstruktion ist zu begründen.




▲ *Aufgabe 3:* Es ist anzugeben, auf welche Weise ein Würfel durch eine Ebene so geschnitten werden muß, daß als Schnittfigur a) ein Rechteck, b) ein Parallelogramm, c) ein Rhombus, d) ein Trapez, e) ein gleichschenkliges Dreieck, f) ein gleichseitiges Dreieck, g) ein Sechseck entsteht.

# Die Mathematik ist schön

Péter Rózsa

Die folgenden Ausführungen sind einem Vortrag, den Frau Prof. Dr. Rózsa Péter am 15. Oktober 1963 an der Universität Rostock vor eingeladenen Lehrern und Schülern der erweiterten Oberschulen gehalten hat, entnommen. Er sollte besonders den Schülerinnen Mut machen, die Mathematik als Studienfach zu wählen. Dazu kann wohl niemand besser sprechen als eine Frau.

Frau Prof. Dr. Rózsa Péter ist eine der Frauen, die auf dem Gebiet der Mathematik große wissenschaftliche Erfolge erzielte. Sie wurde am 4. April 1970, dem 25. Jahrestag der Befreiung Ungarns vom Faschismus, mit dem Staatspreis ausgezeichnet. Der Chefredakteur von *alpha* überbrachte während der XII. IMO der einzigen ungarischen Frau, die Doktor der mathematischen Wissenschaften (1952) ist, Glückwünsche und hatte Gelegenheit zu einem freundschaftlichen Gedankenaustausch.

Rózsa Péter hat seit 1928 sehr enge Verbindungen zu den ungarischen Mittel- und Oberschulen, an denen sie auch bis 1948 unterrichtete. Von 1947 bis 1955 leitete sie den Lehrstuhl Mathematik an der Pädagogischen Hochschule in Budapest. Im Jahre 1955 wurde sie an die Eötvös Loránd Universität Budapest als Professor berufen.

Für ihre didaktischen und populärwissenschaftlichen Leistungen in der Mathematik erhielt sie 1953 den Beke-Preis. Das Buch „Das Spiel mit dem Unendlichen"*, in 20 Auflagen erschienen (davon vier in Ungarn), ist ein Beispiel, wie sie es versteht, Interesse für die Mathematik zu wecken und zu entwickeln, gleichzeitig aber die gemeinsamen Züge der Mathematik mit der Literatur, mit der Kunst spürbar zu machen.

Im Jahre 1951 erhielt Rózsa Péter den Kossuth-Preis (ungarischer Nationalpreis) für ihre Monographie über die rekursiven Funktionen, (Die Theorie der sogenannten *rekursiven Funktionen* ist bis zum heutigen Tag ihr hauptsächliches Forschungsgebiet.) Für die in mehreren Sprachen erschienenen Ausgaben hat sie 1969 den Niveau-Preis der Ungarischen Akademie der Wissenschaften erhalten. Auf die Frage eines ungarischen Rundfunkreporters, ob dieser Themenkreis eigentlich auch einen praktischen Nutzen habe, antwortete sie:

„Ich muß Ihnen gestehen, daß ich während meiner Forschungsarbeiten nie an derartiges denke. Mein Themenkreis entspricht den inneren Notwendigkeiten der Mathematik, und ich hätte nicht einmal im Traum daran gedacht, daß man das auch in der Praxis zu irgend etwas gebrauchen kann. Eben darum liefert mein Forschungsgebiet ein frappantes Beispiel dafür, daß es auch gegen die praktische Nützlichkeit ein Vergehen ist, wenn die sogenannten ‚rein-mathematischen' Forschungen zurückgedrängt werden. Denn siehe: Aus den Werken ungarischer Mathematiker war mein Buch ‚Rekursive Funktionen' das *zweite*, das in der Sowjetunion herausgegeben wurde, und eben wegen seiner praktischen Bedeutung: Neuerdings ist es nämlich in der Theorie der Rechenmaschinen unentbehrlich geworden. Seitdem geben die Probleme im Zusammenhang mit den Rechenmaschinen auch unmittelbar Arbeit auf meinem Gebiet; unter anderem in der mathematischen Sprachwissenschaft, die durch Probleme der maschinellen Übersetzung in den Vordergrund getreten ist. Wenn wir aber schon über Nützlichkeit sprechen, dann noch etwas im allgemeinen über die Mathematik: Die gut unterrichtete Mathematik – und nicht gerade der unmittelbar praktisch anwendbare Stoff darin – entwickelt die Fertigkeit zur Wahrnehmung von Problemen, zu ihrer Ergreifung und zum Suchen der verschiedenen Arten ihrer Lösung. Und wir benötigen in unserer Welt eine Schar von Menschen, die die Probleme wahrnehmen und lösen können."

Nachfolgender Auszug aus dem Vortrag von Frau Prof. Dr. Rózsa Péter wurde der Zeitschrift „Mathematik in der Schule", Heft 2/64, entnommen:

Meine lieben Zuhörer!

Ich bin hier, um zu versuchen, meine Überzeugung weiterzugeben, daß die Mathematik schön ist. Als ich mein Studium begann, hatte ich noch viele Zweifel, ob ich der Mathematik würdig bin. Dann sagte mir ein Kollege das entscheidende Wort: *Nicht ich bin würdig, mich mit der Mathematik zu befassen, sondern die Mathematik ist würdig, daß man sich mit ihr befaßt.* An meiner eigenen Würde zweifle ich, trotz seitdem erhaltener Preise und Professur, oft noch heute, aber ich zweifle nie daran, daß ich nichts Besseres und Schöneres tun könnte, als Mathematik zu treiben.

Gewiß denken schon von Anfang einige: Wie kann man das trockene „Zweimalzwei" schön nennen? Mein Ziel ist zu zeigen, daß die Mathematik nicht trocken und kein „Zweimalzwei" ist, sondern sogar mit der Kunst viel Verwandtschaft hat.

Erstens ist es ein großer Irrtum, daß der Mathematiker hauptsächlich rechnet. Von meinen Schülern vom zehnten Lebensjahr bis zum ersten Jahrgang der Hochschule habe ich die mathematisch eingestellten mit folgender scherzhaften Frage herausgesucht: Wir haben zwei gleiche Gläser; in das eine gießen wir Wein, ins andere Wasser, und zwar bis zur selben Höhe (nicht ganz voll). Dann nehmen wir einen Löffel voll Wein aus dem ersten Glas, gießen das ins andere zum Wasser und vermischen es damit. Dann bringen wir von dieser Mischung einen vollen Löffel in den Wein des ersten Glases. Als Endergebnis ist so etwas Wein ins Wasser geraten und etwas Wasser in den Wein. Welches ist mehr: der reine Wein, der ins Wasser, oder das reine Wasser, das in den Wein gekommen ist?

Das Wesentliche ist hier nicht, ob man die richtige Antwort errät (es steckt hier eine kleine Falle, in die viele hineinfallen: Man denkt, ins Wasser ist ein voller Löffel Wein gelangt, in den Wein aber eine Mischung, also nicht ein voller Löffel reines Wasser), sondern nur darauf kommt es hier an, ob man die folgende Erklärung aufrichtig als beruhigend annimmt:

Es ist genausoviel Wein ins Wasser wie Wasser in den Wein geraten. Denn betrachten wir zu Beginn und zum Schluß z. B. das Weinglas, ohne Rücksicht darauf, was inzwischen geschehen ist. Die Flüssigkeit steht darin genausohoch zum Schluß wie zu Beginn. Der Unterschied ist nur, daß es etwas reinen Wein verloren hat (der jetzt im Wasserglas) und etwas reines Wasser gewonnen hat. Wäre sein Verlust größer oder kleiner als sein Gewinn, so müßte die Flüssigkeit in ihm tiefer oder höher stehen als zu Beginn. Also ist sein Verlust – der ins Wasser gekommene Wein – genausogroß wie sein Gewinn: das erhaltene Wasser.

Die, die weniger mathematisch denken, sagen wir die Physiker, sind von dieser logisch klaren Erklärung noch nicht beruhigt. Sie sind erst dann zufrieden, wenn man zu rechnen beginnt: Sind in einem vollen Löffel Mischung z. B. dreiviertel Teile Wasser und einviertel Teil Wein, dann bringen wir darin vom vollen Löffel Wein, der ins Wasser gekommen ist, einviertel Löffel wieder zurück. Indem also dreiviertel Löffel Wasser in den Wein gebracht werden, bleiben auch im Wasser nur dreiviertel Löffel Wein. Wie man sieht, ist für den Mathematiker nicht das Rechnen, sondern das klare Denken charakteristisch: die Fähigkeit, von unwesentlichen Dingen abzusehen.

Eine andere Aufgabe, in der schon gar keine Zahlen vorkommen, die nur eben die zur Lösung notwendige Abstraktion, die Fähigkeit, abzusehen von für die Frage unwesentlichen Dingen, verlangt und gerade das sie zu einer Aufgabe für mathematisch Denkende macht, lautet: Ein Zug fährt durch einen Tunnel. Der Rauch kommt durch ein offenes Fenster in ein Coupé herein, und die Nasen der drei darin Fahrenden werden rußig. Sie sehen einander an und lachen.

Jeder meint, daß gerade er einen glücklichen Platz genommen und so die Nase rein behalten hat. Wie kommt der Gescheiteste von den dreien darauf, daß auch seine Nase rußig ist? – wenn er sich nur auf folgende drei Annahmen stützen kann: 1. es ist gar nichts anderes zum Lachen da; 2. keiner der beiden anderen will aufhören zu lachen; 3. wenn jemand wüßte, daß er selber lächerlich ist, dann würde er nicht lachen. Die Lösung ist nicht sehr leicht, doch das Entscheidende ist wieder nicht, ob einer allein die Lösung findet, sondern, daß die nicht-mathematisch Denkenden sich nicht auf die gemachten Annahmen beschränken. Man hat mich oft mit solchen Lösungen geärgert: „Der Gescheiteste schaut in einen Spiegel." Oder „Der Gescheiteste meint: die Nasen der anderen sind rußig geworden, warum wäre ich eine Ausnahme." Die richtige Lösung kann ich am besten in erster Person erzählen; verzeihen Sie mir, daß ich mich selbst als Gescheiteste hinstelle. Die beiden anderen sollen z. B. Kurt und Hans heißen. Ich denke folgendes: Kurt hat Grund zum Lachen, er sieht ja die rußige Nase von Hans. Er sieht aber auch, daß Hans lacht. Warum kommt er davon nicht darauf, daß auch seine Nase rußig ist? Sonst sieht ja nach seiner Meinung Hans gar nichts Lächerliches – ausgenommen, falls auch meine Nase rußig ist. Das muß aber der Fall sein, da Hans lacht und Kurt nicht – daraus entnehmend, daß auch seine Nase rußig ist – zu lachen aufhört.

Daß man sich zu einmal festgelegten Annahmen hält, außer denen nichts in den Schlußfolgerungen verwendet werden darf, das ist eben das Wesentliche in dem axiomatischen Aufbau der Mathematik. Ein solch sorgfältiger Aufbau wurde besonders dann wichtig, als in der sogenannten „naiven" Mathematik Widersprüche auftauchen. Darauf werde ich noch zurückkommen. Hier möchte ich nur das hervorheben, daß durch die Axiome nie alle Eigenschaften der behandelten Gegenstände erfaßt werden, sondern nur einige Eigenschaften, und so kann es geschehen, daß auch ganz verschiedene Gegenstände, die nur einige Eigenschaften gemeinsam haben, denselben Axiomen genügen. Man sagt dann, daß es zum betrachteten Axiomensystem verschiedene „Modelle" gibt.*

Die Abstraktion spielt eine wesentliche Rolle in der ganzen Mathematik. Schon unsere natürlichen Zahlen sind durch Abstraktion entstanden. Man kennt primitive Völker, die andere Zahlen zur Abzählung der runden und zur Abzählung der flachen Gegenstände benutzen usw.; sie haben insgesamt z. B. sieben solche Zahlenfolgen, so daß sie, um bis zehn zählen zu können – weiter können sie dann auch nicht –, siebzig Zahlworte schaffen mußten. Mit der Zeit fällt dann die Bedeutung von einer dieser Zahlenfolgen ab, und die so farblos gewordenen Zahlworte werden zu Zahlen. Zum Beispiel waren die Zahlungsmittel eines Stammes flache Muscheln, und anfänglich hat man dort die flachen Gegenstände (in ihrer Sprache) mit folgenden Worten abgezählt: „einmuschel, zweimuschel usw." Mit der Zeit hat sich dann die Muschelbedeutung ganz verwischt, so daß heute „Einmuschel" einfach „eins", „Zweimuschel" einfach „zwei" usw. bedeutet.

Aber auch jedermann kann es beobachten, wie sich der Zahlbegriff im kleinen Kind ausbildet, das sich vor unseren Augen zu einem Kulturmenschen entwickelt. Es braucht eine lange Zeit, bis vor ihm das Gemeinschaftliche in „Zweiaugen", „Zweibeine", „Zweinüsse", nämlich ihre Zahl, klar wird. Das graue Zeichen 2 ist nur ein Symbol der vielen lebendigen Zweien.

Man könnte darauf sagen: Ja, man ist tatsächlich durch lebendige, farbenreiche Dinge zum abstrakten Zahlbegriff gekommen, aber die Mathematik befaßt sich im weiteren schon mit diesem farblosen Zahlenbegriff. Doch was die Mathematik mit der einen Hand wegnimmt, das erstattet sie reichlich mit der anderen Hand: Sie färbt das farblos gewordene Bild mit unerwarteten, neuen Zügen. Sechs Äpfel, sechs Kaninchen sind z. B. viel interessanter als die aus ihnen abstrahierte Sechs, mit der man zählt. Aber welch einen persönlichen, interessanten Zug erhält die Sechs, wenn man entdeckt, daß sie die erste vollkommene Zahl ist! Diesen Begriff kennt vielleicht nicht jeder: Ein echter Teiler einer Zahl ist eine kleinere Zahl, die in ihr restlos aufgeht; und eine Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Zum Beispiel sind sämtliche echte Teiler von 6 die Zahlen 1, 2 und 3, und tatsächlich ist

$$1+2+3=6.$$

Die Freude des Entdeckens, die vielleicht die größte menschliche Freude ist, kann kein anderer Lehrgegenstand in solchem Maße darbieten wie die Mathematik...

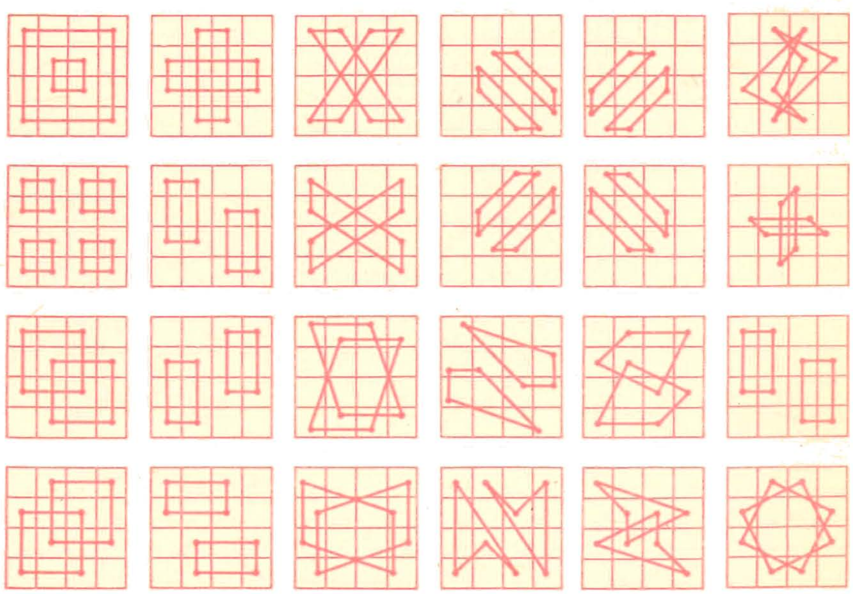
... Auch dadurch werden Entdeckungen hervorgerufen, daß in den mathematischen Schöpfungen immer noch mehr inbegriffen ist, als man von vornherein eingeplant hatte. Das ist ein gemeinsamer Zug mit den literarischen Werken ...

Das Spielerische ist ein gemeinsamer Zug von Mathematik und Kunst. Vielleicht kennen einige z. B. den Kupferstich *Melancholie* des Malers Albrecht Dürer, auf dem das folgende magische Quadrat zu sehen ist:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 3 | 2 | 16 |
| 8 | 10 | 11 | 5 |
| 12 | 6 | 7 | 9 |
| 1 | 15 | 14 | 4 |

Die angedeutete Jahreszahl 1514 ist das Jahr des Entstehens des Bildes. Magisch heißt das Quadrat, da man die gleiche Summe, nämlich 34 erhält, wenn man die Zahlen je einer Zeile oder Spalte oder Diagonale addiert. Aber dieses Quadrat Dürers ist viel magischer. Bildet man z. B. die Summe jener vier Zahlen, die in den Ecken des Quadrats stehen, so erhält man ebenfalls 34. Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man die Summe der vier Zahlen bildet, die in den Ecken je eines der in den Quadraten eingezeichneten Vierecken stehen. Das sollte jeder nachprüfen...

*R. Péter*



* R. Péter, *Das Spiel mit dem Unendlichen.* 4. Auflage 1966, 278 S. mit zahlr. Abb., Format 14,2 cm mal 20 cm, Leinen, 9,80 M. BGT B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.

# Relationen Teil 2

R. Herrmann

## 4. Beziehungen als Menge von geordneten Paaren

Wir wissen nun schon, daß eine Beziehung auf gewisse Elementepaare mit Elementen einer entsprechenden Grundmenge zutrifft und daß diese *Elementepaare* geordnete Paare sind.

Wenn du nun zu einer gegebenen Beziehung $R$ Beispiele suchen sollst, dann wählst du solche Elemente $a$ und $b$ der Grundmenge aus, für die „$a\ R\ b$" oder „$a$ steht in der Beziehung $R$ mit $b$" eine richtige Aussage ergibt.

*Beispiel:* „$a\ R\ b$" bedeute „$a$ ist ein Teiler von $b$" (oder „$a \mid b$"). Grundmenge: Menge aller natürlichen Zahlen.

Nun würdet ihr etwa solche Beispiele angeben: $2|4$, $3|3$, $5|625$, $1|2$ usw., aber nie solche: $2|3$, $3|5$, $5|27$, ..., denn „2 teilt 3" ist eine falsche Aussage, da keine natürliche Zahl $x$ existiert, so daß $2 \cdot x=3$ gilt. Dasselbe trifft für die anderen Beispiele zu.

Inzwischen weißt du schon viel von Beziehungen, und trotzdem haben wir noch nicht genau formuliert, was eine Beziehung eigentlich ist. Wenn du jemandem erklären solltest, was z. B. die „Kleiner-als-Beziehung" ist, so würdest du vielleicht sagen, daß

$0<1$, $1<2$, $2<3$, $3<4$, $4<5$, ...

gilt. Die Pünktchen bedeuten dabei, daß man weitere Beispiele hinzufügen müßte, da die „Kleiner-als-Beziehung" noch auf viele andere geordnete Paare natürlicher Zahlen zutrifft. Da bist du auf dem richtigen Wege. Du gibst nämlich geordnete Paare $[a;b]$ an (also $[0;1]$, $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, $[4;5]$, ...), die zur „Kleiner-als-Beziehung" gehören, d. h. für die die Aussage „$a<b$" richtig ist. Diese geordneten Paare bilden eine Menge. Du könntest also auch sagen:

Die „Kleiner-als-Beziehung" trifft auf folgende Menge von geordneten Paaren zu:

$[0;1]$, $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, $[4;5]$, ..., denn es gilt $0<1$, $1<2$, $2<3$, $3<4$, $4<5$, ....

Nun mußt du aber aufpassen, daß man diese Paare nicht mit einer anderen Beziehung verwechselt. Man muß nämlich aus der Menge der Paare eindeutig erkennen, daß es sich um die „Kleiner-als-Beziehung" und um keine andere handelt. Dieser Irrtum könnte bei den oben angegebenen Paaren aber entstehen, denn die Paare $[0;1]$, $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, $[4;5]$, ... gehören auch zur „Vorgänger-Beziehung".[3] Die Aussagen „0 ist Vorgänger von 1", „1 ist Vorgänger von 2", usw. sind nämlich wahre Aussagen. Wir wollen deswegen genauer sagen:

*Merke dir:* Eine Beziehung $R$ ist die Menge *aller* geordneten Paare $[a;b]$ mit Elementen $a$ und $b$ aus einer Grundmenge $G$, für die die Aussage „$a$ steht in der Beziehung $R$ mit $b$" richtig ist.

Wolltest du deine Aufgabe richtig erfüllen, müßtest du z. B. auch die Paare $[0;2]$, $[0;3]$, $[0;4]$, ... und $[1;3]$, $[1;4]$, ..., $[2;4]$, $[2;5]$, ... usw. hinzufügen. Insgesamt sind es unendlich viele Paare natürlicher Zahlen, die zur „Kleiner-als-Beziehung" gehören.

Um alle Paare wirklich aufschreiben zu können, wollen wir uns zunächst auf eine endliche Grundmenge beschränken. Wir bezeichnen sie im folgenden mit G. In unserem Beispiel sei $G$ die Menge aller natürlichen Zahlen von 0 bis 5.

$$G=\{0,1,2,3,4,5\}$$

Die „Kleiner-als-Beziehung" trifft dann gerade auf folgende geordnete Paare zu:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $[0;1]$ | $[0;2]$ | $[0;3]$ | $[0;4]$ | $[0;5]$ |
| | $[1;2]$ | $[1;3]$ | $[1;4]$ | $[1;5]$ |
| | | $[2;3]$ | $[2;4]$ | $[2;5]$ |
| | | | $[3;4]$ | $[3;5]$ |
| | | | | $[4;5]$ |

denn es gilt:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $0<1$, | $0<2$, | $0<3$, | $0<4$, | $0<5$ |
| | $1<2$, | $1<3$, | $1<4$, | $1<5$ |
| | | $2<3$, | $2<4$, | $2<5$ |
| | | | $3<4$, | $3<5$ |
| | | | | $4<5$ |

Die Paare sind systematisch in Zeilen und Spalten angeordnet, damit wir sofort überblicken können, ob auch kein Paar fehlt.

[3] Gemeint ist hier stets der unmittelbare Vorgänger.

**Aufgaben:**

**▪4▪** Gegeben sei die Beziehung $R_1$: „ist unmittelbarer Vorgänger von". Die Grundmenge sei $G_1=\{0,1,2,3,4,5\}$. Gesucht sind alle Paare, auf die die Beziehung $R_1$ zutrifft. Einige Paare sind: $[0;1]$, denn 0 ist unmittelbarer Vorgänger von 1.
$[1;2]$, denn 1 ist unmittelbarer Vorgänger von 2.
Vervollständige die Menge der Paare! Beachte die angegebene Grundmenge!

**▪5▪** „$a\ R_2\ b$" bedeute „$a$ ist größer als $b$". Gesucht sind alle Paare $[a;b]$, auf die $R_2$ zutrifft, d. h. für die gilt „$a>b$". Vervollständige die Menge der angegebenen Paare! Wähle $a$ und $b$ dabei aus der Grundmenge $G_2=\{0,1,2,3,4,5\}$!

$[1;0]$ $\quad$ $1>0$
$[2;0]$ $[2;1]$ $\quad$ $2>0$, $2>1$
$[3;0]$ ..... denn $3>0$, .....
...........

**▪6▪** „$a\ R_3\ b$" bedeute „$a$ ist ein Teiler von $b$". Die Grundmenge $G_3$ sei die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10, also $G_3=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.
Schreibe alle zu $R_3$ gehörigen geordneten Paare $[a;b]$ auf, wobei $a$ und $b$ jeweils aus $G_3$ stammen.
*Hinweis:* Schreibe erst alle betreffenden Paare auf, die mit 1 beginnen, dann die mit 2 beginnen usw., also:
$[1;1]$, $[1;2]$.... denn $1|1$, $1|2$, ....
$[2;2]$, $[2;4]$.... denn $2|2$, $2|4$,....usw.

**▪7▪** „$a\ R_4\ b$" bedeute „$a+3=b$".
$G_4=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
Einige zu $R_4$ gehörige Paare sind:
$[0;3]$, denn $0+3=3$
$[1;4]$, denn $1+3=4$
Ergänze die fehlenden Paare!

Während du in den Aufgaben 4 bis 7 zu einer gegebenen Beziehung alle Paare gesucht hast, auf die die Beziehung bezüglich einer vorgegebenen Grundmenge zutraf, sollst du in der folgenden Aufgabe einen umgekehrten Weg gehen. Jetzt ist eine Beziehung durch eine Menge von geordneten Paaren und die Grundmenge gegeben. Du sollst herausfinden, welche bekannte mathematische Beziehung dadurch festgelegt wird.

**▪8▪** $R_5$ ist eine Beziehung, die bezüglich $G_5=\{0,1,2,3,4,5\}$ gerade auf folgende Paare zutrifft:
$[5;4]$, $[4;3]$, $[3;2]$, $[2;1]$, $[1;0]$.
Was für eine Beziehung ist mit $R_5$ gemeint?
Schreibe die Lösung wie folgt auf:
„$a\ R_5\ b$" bedeutet „$a$ ............ $b$"
*Hinweis:* Sieh dir noch einmal $R_1$ (Aufgabe 4) an!

*R. Herrmann*

# IV. Internationale Physikolympiade

**(5. bis 14. Juli 1970, Moskau)**

*Inge Reimann*, einziges Mädchen der IV. Internationalen Physikolympiade, berichtet für *alpha*:

Als Mitglied der Delegation der DDR habe ich im Sommer 1970 an der IV. Internationalen Physikolympiade in Moskau teilgenommen. Um eine Mannschaft für diese Olympiade zu stellen, wurde zunächst in allen Spezialschulen eine Arbeit geschrieben. Nach den Ergebnissen richtete sich die Auswahl einiger Schüler, die zu einem Physiklehrgang nach Güstrow delegiert wurden. Dort haben wir unser Wissen in verschiedenen Bereichen der Physik erweitert sowie vertieft und es beim Lösen von theoretischen und experimentellen Aufgaben angewendet. Am Ende dieses sehr arbeitsreichen Lehrganges wurden von 16 Teilnehmern 6 als Mitglieder der Delegation der DDR für die Internationale Physikolympiade benannt. Selbstverständlich habe ich nicht erst in Güstrow angefangen, mich mit Physik zu beschäftigen. Seit der 7. Klasse besuchte ich die Spezialschule des *VEB Carl Zeiss Jena*, eine Schule mit erweitertem Mathematik- und Physikunterricht. Dort habe ich am Mathematik- und in den letzten Jahren auch am Physikzirkel teilgenommen. Viel gelernt habe ich auch bei dem Lehrgang, der ein Jahr vorher zur Vorbereitung der II. Internationalen Physikolympiade durchgeführt wurde.

Am 5. Juli 1970 sind wir dann für 10 Tage nach Moskau geflogen. An der Olympiade nahmen jeweils 6 Schüler aus acht Ländern teil. Für die Klausur waren zwei Tage vorgesehen. Am ersten Tag hatten wir theoretische Probleme zu lösen, am zweiten wurde uns eine experimentelle Aufgabe gestellt. Da die Leistungsvergleiche am 4. und 5. Tage unseres Moskauer Aufenthaltes stattfanden, hatten wir davor und danach Gelegenheit, die Stadt und unsere Gastgeber kennenzulernen. Besonders herzlich war die Gastfreundschaft, der wir überall begegnet sind. Alle, mit denen wir zusammenkamen, wollten uns den Aufenthalt so angenehm und interessant wie möglich machen.

Von Moskau sahen wir sehr viel, wenn auch natürlich nicht alles. Wir waren auf dem Fernsehturm in Ostankino, im Gorkipark, in der Tretjakowgalerie und in der Lomonossow-Universität, haben die Allunionsausstellung besucht und den Kreml besichtigt, das Tschaikowski-Museum und vieles andere mehr. Besonders beeindruckend war der Anblick Lenins im Mausoleum auf dem berühmten Roten Platz. Leider war die Zeit für diese wunderbare Stadt viel zu kurz, und der Abschied ist uns sehr schwer gefallen. Ich glaube, keiner von uns wird diese 10 Tage vergessen können. So hatten sich unsere Anstrengungen also schon deswegen gelohnt.

Jetzt studiere ich seit dem 1. September; nicht Physik, sondern Mathematik in Jena. Es sind, wie wahrscheinlich überall, hier in meinem Studienjahr wesentlich weniger weibliche als männliche Studenten, wenn der Unterschied auch nicht so groß ist wie zur Olympiade in Moskau, wo ich als einziges Mädchen teilgenommen habe. Ich glaube, es gibt viele Mädchen, die sich an die Mathematik und Physik nicht so recht herantrauen. Vielleicht sollten sie mehr Mut zeigen und unter Beweis stellen, daß nicht nur Männer logisch denken können.

**Theoretische Aufgaben**
(Arbeitszeit: 5 Stunden)

1. Auf einer glatten (reibungslosen) horizontalen Fläche kann sich ein Quader mit der Masse $M = 1$ kg bewegen. Auf der oberen horizontalen Fläche des Quaders kann ein Schlitten mit Reibung gleiten. Der Vorderrand des Schlittens befindet sich in einer Entfernung von $l = 50$ cm vom Vorderrand des Quaders im Moment der Freisetzung des Schlittens. Der Gleitreibungskoeffizient beträgt $\mu = 0{,}02$, die Schlittenmasse mit Motor beträgt $m = 100$ g. Auf dem Schlitten ist ein Motor aufgestellt, der auf einer Welle einen Faden mit konstanter

Bild 1

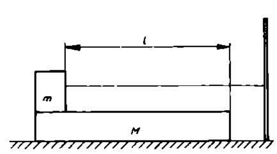
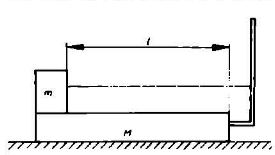



Bild 2

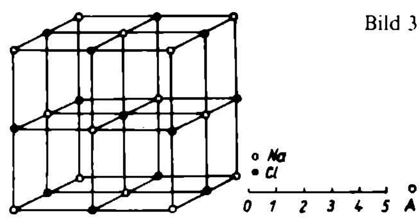



Geschwindigkeit $\gamma_0 = 10$ cm $\cdot$ s$^{-1}$ aufwikkelt. Das zweite Ende des Fadens wird im ersten Fall (Bild 1) an einen weit genug entfernten Pflock angebunden, der auf der Unterlage befestigt ist, und im zweiten Fall (Bild 2) an einen Pflock, der an dem Quader $M$ befestigt ist.

Man hält den Quader $M$ fest und gibt dem Schlitten die Möglichkeit, sich mit $\gamma_0$ zu bewegen. Danach läßt man auch den Quader frei. Bestimmen Sie für beide Fälle die Bewegungsart und Geschwindigkeit des Quaders und des Schlittens nach dem Freilassen! Bestimmen Sie für beide Fälle die Zeit, in der der Schlitten den Vorderrand des Quaders erreicht!

2. Die Elementarzelle des Kristallgitters des Steinsalzes (NaCl) stelle einen Würfel dar; die Länge der Würfelkante beträgt $a = 5{,}6$ Å ($1$ Å $= 10^{-8}$ cm). In Bild 3 sind die Natriumatome und Chloratome in einer Elementarzelle bezeichnet. Das gesamte Kristallgitter des Steinsalzes stellt eine Wiederholung solcher Elementarzellen dar. Das Atomgewicht das Natriums beträgt 23 und das des Chlors 35,5. Die Dichte des Steinsalzes ist $\varrho = 2{,}22\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$.

Bild 3




Berechnen Sie die absolute Masse des Wasserstoffatoms, und erklären Sie den Lösungsweg!

3. In dieser Aufgabe ist das Potential einer Hohlkugel zu bestimmen (d. Red.).

4. In einem Teleskop wird ein sphärischer Hohlspiegel mit einem Krümmungsradius von 2 m verwendet. Im Hauptbrennpunkt des Spiegels befindet sich ein Strahlungsempfänger in Form einer runden Scheibe. Die Scheibe liegt senkrecht zur optischen Achse des Teleskops.

Welche Größe muß der Empfänger haben, damit er die gesamte Strahlung empfängt, die vom Spiegel reflektiert wird, wenn dessen Durchmesser 50 cm beträgt?

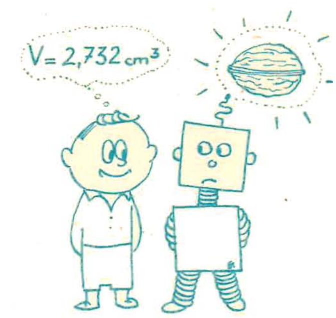
Um wieviel Mal verringert sich die vom Empfänger aufgenommene Strahlung, wenn sich seine Ausmaße auf ein Achtel verringern?

*Anmerkungen:* 1. Bei der Rechnung kann man für kleine $x$ die Näherung $\sqrt{(1-x^2)} \approx \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ verwenden.

2. Die Beugung bleibt unberücksichtigt.

(Zu dieser Aufgabe veröffentlicht *alpha* die Lösung in 3/71, weiteres Informationsmaterial siehe „Physik in der Schule“ 10/70 und 12/70, d. Red.).

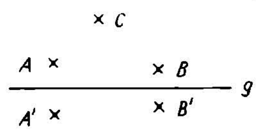
# Wer löst mit?
# alpha – Wettbewerb




*Letzter Einsendetermin 24. April 1971*

5 ▲ 621 Fünf Kinder spielen mit Murmeln. Klaus besitzt die meisten Murmeln. Karin hat vier Murmeln mehr als Ute. Horst hat drei weniger als Ute. Sabine besitzt 8 Murmeln mehr als Horst, aber eine weniger als Klaus. Wieviel Murmeln besitzt jedes dieser Kinder, wenn alle zusammen 97 Murmeln besitzen?

5 ▲ 622 Die Abbildung stellt drei Originalpunkte $A$, $B$, $C$ und zwei Bildpunkte $A'$, $B'$ dar, die durch Spiegelung von $A$ und $B$ an der Geraden $g$ entstanden sind. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Lineal und Bleistift den Bildpunkt $C'$, der symmetrisch zu $C$ bezüglich der Geraden $g$ liegt! Gib eine Konstruktionsbeschreibung an! *Yvonne Kruber, OS Stolpen Kl. 8b*




W 5 ■ 623 Nach der Apfelernte im Schulgarten erhielt jeder der daran beteiligten Schüler aus einem mit Äpfeln gefüllten Korb je vier Äpfel vom Lehrer; es verblieben danach noch 44 Äpfel in diesem Korb. Hätte jeder dieser Schüler aber sechs Äpfel erhalten, dann wären im Korb nur noch zwölf Äpfel verblieben. Wieviel Schüler beteiligten sich an der Apfelernte? Wieviel Äpfel enthielt der Korb? *P.*

W 5 ■ 624 An einer Vorstellung im „Theater der Freundschaft" in Berlin nahmen 29 Mädchen und 115 Jungen einer Landschule teil. Die Anreise erfolgte mit drei Autobussen; in jedem Bus saßen gleich viel Schüler. Im ersten Bus war die Anzahl der Jungen 15 mal so groß wie die der Mädchen. Im zweiten Bus saßen 20 Jungen mehr als Mädchen. Wieviel Jungen und Mädchen reisten mit jedem der drei Autobusse? *Yvonne Kruber, Stolpen, Kl. 8b*

* 5 * 625 Doris, Elke und Helga kaufen zusammen für 15,– M Briefmarken ein, und zwar 20 Briefmarken der Sorte $A$, doppelt soviel von der Sorte $B$ und dreimal soviel von der Sorte $C$. Von diesen Briefmarken erhielt Doris die Hälfte der Sorte $B$ und acht Stück der Sorte $A$; sie hatte dafür 1,70 M mehr zu bezahlen als Elke. Elke erwarb die Hälfte der Briefmarken der Sorte $C$ und fünf Stück der Sorte $A$ und zahlte 3,50 M. Helga kaufte die verbliebenen Briefmarken. Welche Werte besaßen die drei Briefmarkensorten? *StR Hans-Joachim Kerber, Neustrelitz*

6 ▲ 626 Herr Lehmann bestellte im Centrum-Versandhaus Leipzig drei Artikel zu paarweise verschiedenen Preisen. Jeder dieser Artikel kostete mehr als 10,– M. Der Preis jedes Artikels war durch einen vollen Markbetrag angegeben, und zwar jeweils durch eine gerade Zahl. Für jeden der drei Mietbehälter, in denen das Versandhaus dem Kunden die Artikel zustellte, wurde die gleiche Leihgebühr erhoben. Herr Lehmann hatte für die bestellte Ware einschließlich der Leihgebühren für die Mietbehälter den Betrag von 49,10 M zu überweisen. Die Transportkosten gingen zu Lasten des Versandhauses. Es sind die Einzelpreise der drei bestellten Artikel und die Leihgebühr für einen Mietbehälter zu bestimmen. *P.*

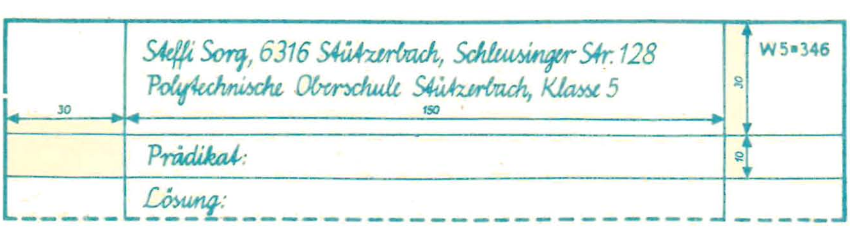
6 ▲ 627 Jens sammelt Briefmarken. Eines Tages stellt er fest, daß er bereits insgesamt 837 Briefmarken besitzt, und zwar dreimal soviel rumänische wie kubanische und viermal soviel sowjetische wie rumänische. An polnischen Briefmarken hat er 9 Marken mehr gesammelt als kubanische und rumänische zusammengenommen. Addiert er die Anzahlen der kubanischen, rumänischen, sowjetischen und polnischen Briefmarken, so erhält er die Anzahl der aus der DDR gesammelten Briefmarken. An ungarischen Briefmarken besitzt Jens 9 Stück weniger als die Hälfte der Anzahl der sowjetischen Marken.
Wieviel Briefmarken jedes dieser Länder hat Jens bereits gesammelt? *Angela Brandt, Kl. 6, 9014 Karl-Marx-Stadt*

W 6 ■ 628 Hans fordert seinen Freund Uwe auf: „Merke dir eine von Null verschiedene natürliche Zahl, multipliziere sie mit 5, addiere zu diesem Produkt 2! Multipliziere die so erhaltene Summe mit 4 und addiere zu diesem neuen Produkt 3! Die nun erhaltene Summe ist noch mit 5 zu multiplizieren. Nenne mir das Endergebnis deiner Rechnung, und ich sage dir, welche Zahl du dir gemerkt hast." Begründe, warum und wie Hans die von Uwe gedachte Zahl ermitteln konnte! *Herbert Biastoch, PH Dresden*

W 6 ■ 629 In ein Stück Flachstahl von $l = 310$ mm Länge sind fünf gleich große Löcher mit einem Durchmesser von $d = 35$ mm zu bohren. Berechne den Abstand $x$ der Bohrlöcher untereinander, wenn das erste Bohrloch $a = 10{,}2$ mm vom linken Rand des Flachstahls entfernt beginnt, das letzte Bohrloch $b = 22$ mm vom rechten Rand entfernt enden soll und je zwei benachbarte Bohrlöcher den gleichen Abstand haben sollen! (Veranschauliche dir den Sachverhalt an Hand einer Skizze!) *W. Unze, Sondersch. f. Körperbehinderte „Dr. Georg Sacke", Leipzig*

* 6 * 630 Drei befreundete Lehrer, und zwar ein Mathematiklehrer, ein Sportlehrer und ein Geschichtslehrer, sitzen auf einer Konferenz in Berlin zusammen. Ihre Familiennamen sind Müller, Palm und Schulz. Ihre Vornamen lauten Otto, Klaus und Kurt. Ihre Wohnorte sind Anklam, Demmin und Neustrelitz. Herr Müller erzählt dem Sportlehrer, daß er den Mathematiklehrer in Anklam besucht habe. „Das weiß ich schon, Klaus", erwiderte Herr Palm, „Kurt erzählte mir davon, daß er Besuch aus Demmin gehabt habe." Ordne jedem Familiennamen den zugehörigen Vornamen, Wohnort und Lehrfach zu! *StR Hans-Joachim Kerber, Neustrelitz*

7 ▲ 631 Ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit den parallelen Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, von denen $\overline{AB}$ länger als $\overline{CD}$ ist, werde durch die Diagonale $\overline{BD}$ in zwei Dreiecke zerlegt, von denen das eine rechtwinklig und das andere gleichschenklig ist. Wie groß sind die Innenwinkel dieses Trapezes, und in welchem Verhältnis stehen seine vier Seiten zueinander? *T.*

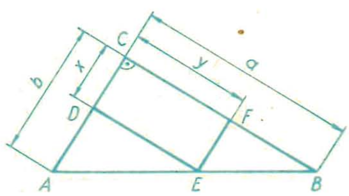



**Achtung!** Nur Lösungen zu W-Aufgaben oder *-Aufgaben einsenden! Jede Lösung auf ein Blatt für sich! Lösungskopf (siehe links) sauber ausfüllen! Postleitzahl beim Absender nicht vergessen! Lösungen rechtzeitig einsenden!

7▲632 Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$ mit der Hypotenuse $\overline{AB}$, dessen Innenwinkel $\sphericalangle CAB$ genau 60° beträgt! Fälle von $C$ das Lot $\overline{CD}$ auf $AB$, danach von $D$ die Lote $\overline{DE}$ und $\overline{DF}$ auf $AC$ und $BC$ sowie von $E$ das Lot $\overline{EG}$ und von $F$ das Lot $\overline{FH}$ auf die Gerade $AB$! Weise nach, daß der Weg von $H$ nach $B$ die gleiche Länge besitzt wie der Weg von $H$ über $A$ nach $E$!

*StR Hans-Joachim Kerber, Neustrelitz*

W 7 ■ 633 Einem rechtwinkligen Dreieck $ABC$ mit den Katheten $a$ und $b$ ist ein Rechteck $CDEF$ mit den Seiten $x$ und $y$ in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise einbeschrieben. Zeige, daß $a$, $b$, $x$ und $y$ der Gleichung $ax+by=ab$ genügen! *T.*




W 7 ■ 634 Bei einer Mathematik-Olympiade wurden drei erste Preise vergeben. Auf die Frage nach den Vornamen der drei Schüler, die einen ersten Preis erhielten, wurden folgende sieben Antworten gegeben:

a) Christiane, Udo, Steffen
b) Evelin, Horst, Udo
c) Gerald, Martina, Bernd
d) Steffen, Jörg, Udo
e) Gerald, Jörg, Bernd
f) Evelin, Martina, Christiane
g) Christiane, Evelin, Horst.

Es ist bekannt, daß in genau einer Antwort alle drei Vornamen richtig sind, in genau einer Antwort genau ein Vorname, in genau zwei Antworten genau zwei Vornamen, in genau drei Antworten alle drei Vornamen nicht zutreffen.
Ermittle die Vornamen der drei Schüler, die einen ersten Preis erhielten.

*Yvonne Kruber, OS Stolpen, Kl. 8b*

* 7 * 635 Sind in einem Sehnenviereck die Diagonalen gleich lang, so ist es ein gleichschenkliges Trapez. *T.*

8▲636 Es ist zu beweisen, daß es kein geordnetes Paar $(a, b)$ natürlicher Zahlen gibt, so daß die Gleichung

$$\frac{b}{4}\left(a+\frac{1}{a-3}+3\right)=\frac{9}{b(a-3)} \qquad (1)$$

erfüllt ist und daß es genau ein geordnetes Paar $(a, b)$ natürlicher Zahlen gibt, so daß die Gleichung

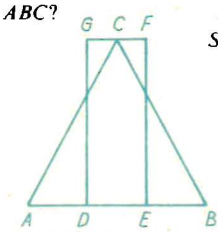
$$\frac{b}{4}\left(a+\frac{1}{a+3}-3\right)=\frac{9}{b(a+3)} \qquad (2)$$

erfüllt ist. *K.*

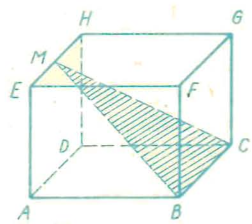
W 8 ■ 637 Bei den Europa-Leichtathletik-Meisterschaften der Männer in Stockholm im August 1970 erhielt die Mannschaft der DDR als beste Mannschaft aller teilnehmenden Länder den Europa-Silber-Pokal. Sie erhielt bei 20 Disziplinen insgesamt 102 Punkte. Dabei wurden in jeder Disziplin für einen 1. Platz 7 Punkte, für einen 2. Platz 6 Punkte, für einen 3. Platz 5 Punkte, für einen 4. Platz 4 Punkte, für einen 5. Platz 3 Punkte, für einen 6. Platz 2 Punkte und für einen 7. Platz 1 Punkt vergeben. Es ist zu ermitteln, wieviel 1. Plätze, wieviel 2. Plätze usw. unsere Mannschaft in Stockholm erkämpfte.
Dabei sei noch als bekannt vorausgesetzt, daß unsere Mannschaft mehr 1. Plätze als 2. Plätze, ebensoviel 4. Plätze wie 2. Plätze, mehr 4. Plätze als 5. Plätze, mehr 5. Plätze als 3. Plätze, mehr 3. Plätze als 7. Plätze und keinen 6. Platz erhielt. *L.*

W 8 ■ 638 Die Basis $\overline{AB}$ des gleichschenkligen Dreiecks $ABC$ sei durch die Punkte $D$ und $E$ in drei gleich lange Teilstrecken geteilt. $DEFG$ sei ein Rechteck, auf dessen Seite $\overline{FG}$ die Spitze $C$ des gleichschenkligen Dreiecks $ABC$ liegt (vgl. die Abb.). Wie verhält sich der Flächeninhalt des Rechtecks $DEFG$ zu dem Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$?

*Herwig Gratias, Sömmerda Kl. 9*




* 8 * 639 Es sei $ABCDEFGH$ ein Quader, dessen Kante $\overline{AB}$ die Länge 4 cm und dessen Kante $\overline{AE}$ die Länge 3 cm hat (vgl. die Abb.). $M$ sei der Mittelpunkt der Kante $\overline{EH}$. Ferner sei das Dreieck $MBC$ rechtwinklig.
Es ist die Länge der Kante $\overline{BC}$ zu berechnen. *T.*




W 9 ■ 640 Drei Freunde, deren Vornamen Rolf, Kurt bzw. Werner und deren Nachnamen Zabel, Wagner bzw. Vogt sind, besitzen je ein Wochenendhaus. Diese Häuser liegen nebeneinander, sie seien der Reihe nach als das linke, das mittlere und das rechte Haus bezeichnet. Sie sind blau, rot bzw. gelb angestrichen.
An jedem Wochenende treffen sich die drei Freunde mit ihren Familien in einem der Häuser zu einer kleinen Feier. Dabei wurde vereinbart, daß jeder Gastgeber stets nur ein und dasselbe Getränk anbietet, und zwar Bier oder Wein oder Kaffee.
Heute haben sich die Freunde wieder getroffen. Dabei ist folgendes bekannt:
(1) Zabel und Rolf sind heute Gäste in dem gelben Haus.
(2) Der Gastgeber heißt nicht Kurt; sein Haus liegt nicht neben dem Haus von Wagner, der ein anderes Haus besitzt.
(3) In dem rechten Haus wird stets Bier angeboten; Kurt bietet seinen Gästen nur alkoholfreie Getränke an.
(4) Das mittlere Haus ist nicht rot angestrichen.
(5) Rolf bietet seinen Gästen stets Wein an.
Wie heißt der heutige Gastgeber? Welches Haus besitzt er? Was trinken seine Gäste heute? Welche Farben haben die Häuser in denen heute nicht gefeiert wird?
Bemerkung: Die Reihenfolgen der Angaben der Vornamen, Nachnamen, Farben und Getränke sind willkürlich gewählt und haben keine Beziehung zu dem Ergebnis.

*Mathematikfachl. Rainer Rösel, Teterow*

W 9 ■ 641 Ein Fernsprechteilnehmer in einem Ortsnetz mit mehr als 10000 Hauptanschlüssen zahlt für seinen Fernsprechanschluß monatlich eine Grundgebühr (einschließlich der üblichen Zusatzeinrichtung) von 9,60 M und außerdem für jedes Ortsgespräche 0,15 M. Würde dieser Fernsprechteilnehmer von einer öffentlichen Sprechstelle aus telefonieren, so hätte er für jedes Gespräch 0,20 M zu bezahlen.
Wieviel Ortsgespräche muß der Fernsprechteilnehmer mindestens monatlich führen, damit der Gesamtpreis für diese Gespräche einschließlich der Grundgebühr geringer als der Gesamtpreis der Gespräche von einer öffentlichen Sprechstelle aus ist. *K.*

* 9 * 642 Es seien $x$ und $y$ beliebige positive reelle Zahlen, für die

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \qquad (1)$$

gilt. Es ist zu beweisen, daß dann stets die Ungleichung

$$x+y\geqq 4 \text{ erfüllt ist.} \qquad (2)$$

Ferner sind die Bedingungen anzugeben, unter denen in (2) das Gleichheitszeichen gilt.

*A. Möbius, Kl. 11, Univ. Halle*

W 10/12 ■ 643 Füllt man in ein leeres trichterförmiges Gefäß, das die Form eines geraden Kreiskegels mit unten liegender Spitze hat, 1 l Wasser, so steigt der Wasserspiegel in dem Gefäß auf 10 cm Höhe.
a) Wie hoch steigt der Wasserspiegel, wenn man nur $\frac{1}{2}$ l Wasser einfüllt?
b) Wieviel Liter Wasser befinden sich in dem Gefäß, wenn der Wasserspiegel 5 cm hoch ist? *Sektion Mathematik, TU Dresden*

W 10/12 ■ 644 Es sind alle positiven reellen Zahlen $x$ anzugeben, so daß die Ungleichung

$$\lg x-1<\lg x^p-p^2 \qquad (1)$$

für keine von 1 verschiedene reelle Zahl $p$ erfüllt ist. *K.*

* 10/12 * 645 Es sind alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1-x_2 &= x_3, \\ x_2-x_3 &= x_4, \quad \ldots \quad x_{n-1}-x_n = x_1, \\ & \qquad\qquad\quad x_n-x_1 = x_2, \end{aligned}$$

wobei $n$ eine natürliche Zahl mit $n\geqq 3$ ist, im Bereich der reellen Zahlen zu ermitteln.

*Reinhard Wobst, Dresden, 12. Kl.*

# Berufsbild: Vermessungsfacharbeiter und Kartographiefacharbeiter

**Der Beruf im Rahmen der Volkswirtschaft**

In der Deutschen Demokratischen Republik arbeiten wir an der Vollendung des Aufbaus des Sozialismus. Äußerer Ausdruck dafür ist unter anderem eine rege Bautätigkeit in Stadt und Land. Zur Durchführung aller Baumaßnahmen sind Vermessungsarbeiten für die Plan- bzw. Kartenherstellung und die Übertragung der Projekte in die Örtlichkeit (Absteckungen) nötig. Dabei denken wir an die Industriegiganten Leuna II und das Eisenhüttenkombinat Ost, an die Wärmekraftwerke in der Lausitz, die Talsperren im Harz und im Erzgebirge, den Überseehafen in Rostock, die Wohnstätten Hoyerswerda und Halle-Neustadt, die Erdölleitung Schwedt-Leuna, die im Wiederaufbau befindlichen Städte Berlin, Dresden und Neubrandenburg, die LPG-Bauten und Meliorationsmaßnahmen der sozialistischen Landwirtschaft, an den Straßen- bzw. Autobahnbau, an die Errichtung von Fernsehtürmen u. a. m. Unser großes friedliches Aufbauwerk durch ständige Einsatzbereitschaft gegen jede Aggressionstätigkeit zu schützen ist Aufgabe unserer Nationalen Volksarmee, zu deren moderner Ausrüstung genaue Karten des gesamten Gebietes unserer Deutschen Demokratischen Republik gehören. Sicher seid ihr selbst schon im Schulunterricht, beim Wandern oder während eines Geländespieles mit Karten in Berührung gekommen. Solche Karten und Pläne entstehen durch Vermessungsarbeiten. Ingenieure und Facharbeiter fahren von zentralen Dienststellen mit ihrem Meßkraftwagen hinaus ins Gelände, wo sie mit modernen Winkel- und Streckenmeßgeräten alle zur Aufnahme nötigen Objekte und Punkte nach Lage und Höhe einmessen. Um sich über größere Entfernungen hinweg verständigen zu können, werden auch Sprechfunkgeräte verwendet.

Die Berechnung und Auswertung der Messungsunterlagen erfolgt dann im Büro. Dabei werden moderne Geräte eingesetzt. Durch die exakte Kartierung der Messungsergebnisse und einer sauberen Tuschezeichnung entsteht ein Plan oder eine Karte.

Mit diesem Beitrag wollen wir die Ausbildungsstufe *Vermessungsfacharbeiter* und *Kartographiefacharbeiter* kennenlernen.

Die Bewerber müssen den Abschluß der 10. Klasse besitzen, gute Leistungen in Mathematik, den naturwissenschaftlichen Fächern und im Technischen Zeichnen vorweisen. Sie müssen außerdem solche Charaktereigenschaften wie Ordnungsliebe, Gewissenhaftigkeit und Verantwortungsbewußtsein entwickeln und als bewußte Staatsbürger der DDR auftreten.

**Vermessungsfacharbeiter**

Im Rahmen des Vermessungswesens hat der Vermessungsfacharbeiter an der Erfüllung folgender Aufgaben (als Mitarbeiter eines Diplom-Ingenieurs oder Ingenieurs im Kollektiv eines Meßtrupps) hohen Anteil:

Er arbeitet im Außen- und Innendienst mit ▪ bei der Schaffung und Erhaltung von Lage- und Höhenfestpunkten einschließlich deren Sicherung ▪ bei Vermessungsarbeiten zur Herstellung topographischer Karten und deren laufenden Nachträge, die sich aus Veränderungen in der Örtlichkeit ergeben ▪ bei der Anfertigung von Lage- und Höhenplänen für die Bau-, Land- und Forstwirtschaft, Wasser- und Energieversorgung sowie für das Verkehrswesen ▪ bei Vermessungsarbeiten zur Dokumentation von Rechtsverhältnissen an Grund und Boden ▪ bei speziellen Vermessungsarbeiten für Wissenschaft und Forschung.

Der Vermessungsfacharbeiter soll körperlich gesund und widerstandsfähig sein. Er soll normale Atmungs- und Kreislauforgane, ein gutes Gehör- und Sehvermögen besitzen sowie über die Fähigkeit verfügen, sich über längere Zeit konzentriert und aufmerksam zu verhalten.

Lehrzeit 2 Jahre; Qualifikationsmöglichkeit: Fachschulreife

Lehrzeit 3 Jahre in Klassen der Berufsausbildung mit Abitur;

Qualifikationsmöglichkeit: Hochschulreife

Dem Lehrling werden für die örtlichen Vermessungsarbeiten Kenntnisse in der Bedienung der Instrumente und über die Führung der Messungsurschriften bei instrumentellen Arbeiten wie bei der einfachen Lage- und Höhenmessung vermittelt. Zu den häuslichen Arbeiten gehören Berechnungen zur Bestimmung von Punkten nach Lage und Höhe sowie das Ermitteln von Flächen und Erdmassen. Neben der praktischen Ausbildung werden Berufstheorie, Staatsbürgerkunde und Sport vermittelt. (Bei der Ausbildung mit Abitur wird außerdem in den allgemeinbildenden Fächern unterrichtet.) Der Einsatz nach erfolgtem Berufsabschluß erfolgt u. a. in der Geodäsie, Topographie, Photogrammetrie, im Ingenieurvermessungswesen, Eisenbahnvermessung, VEB Geologische Forschung und Erkundung.

**Kartographiefacharbeiter**

Der Kartographiefacharbeiter wirkt innerhalb der Produktionsbereiche an den kartographischen und reproduktionstechnischen Arbeiten zur Herstellung und Laufendhaltung topographischer, geographischer und thematischer Karten verantwortlich mit. Er übt eine vorwiegend sitzende Tätigkeit aus. Er soll eine gute Sehschärfe und Farbtüchtigkeit beider Augen haben.

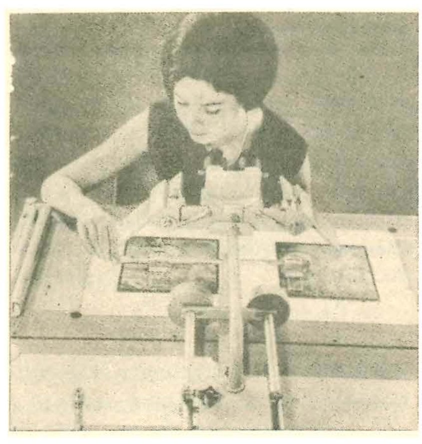
Die Ausbildung erfolgt im kartographischen Zeichnen, Gravieren und Klebemontagearbeiten sowie in der Gestaltung topographischer und thematischer Karten. Zur Ausbildung gehört auch das Erlernen von Wartung und Pflege der Zeichen-, Gravier- und Montagegeräte. Nach Prüfungsabschluß erfolgt der Einsatz wie beim Vermessungsfacharbeiter sowie in kartographischen Betrieben und Verlagen. Wer mehr über die Berufsausbildung von Vermessungs- und Kartographiefacharbeitern erfahren möchte, der wende sich an eine der Ausbildungsstätten:

▪ VEB Topographischer Dienst Dresden, Betriebsberufsschule (ohne und mit Abitur), 8047 Dresden, Altlockwitz 2

▪ VEB Ingenieur-Vermessungswesen Groß-Berlin, Betriebsberufsschule (ohne Abitur), 1603 Eichwalde, Tschaikowskistr. 10

▪ VEB Topographischer Dienst Schwerin, Betriebsberufsschule (ohne Abitur), 27 Schwerin, Karl-Marx-Str. 15

▪ VEB Topographischer Dienst Erfurt, Betriebsberufsschule (ohne Abitur), 58 Gotha, Schloßberg 1



Kartographiefacharbeiterin bei der Auswertung eines Luftbildpaares mit einem einfachen Stereoauswertgerät

# Wir spielen mit optimaler Strategie

**1 Wir wollen zunächst ohne Beweis einen Satz der Spieltheorie und die Definition der optimalen Strategien kennenlernen**

In der Formulierung der Spielregeln des folgenden Spieles, an dem wir uns zunächst orientieren wollen, kommt der Begriff „Gewinn" vor. Darunter verstehen wir folgendes:

*Definition 1:* Ein Spieler beendet eine Partie mit dem Gewinn $+s$, wobei $s$ eine natürliche Zahl ist bedeutet, daß er für diese Partie $s$ Pluspunkte erhält. Ein Spieler beendet eine Partie mit dem Gewinn $-s$, wobei $s$ wiederum eine natürliche Zahl ist, bedeutet, daß er für diese Partie $s$ Punkte abgezogen erhält bzw. daß er $s$ Minuspunkte erhält.

Die Spielregeln unseres ersten Spieles sind:

*Spiel I:*

1′: Zwei Spieler *A* und *B* spielen mit Knöpfen. – Der Spieler *A* eröffnet die Partie, indem er *n* Knöpfe auf den Spieltisch legt. Dabei sind zur Spieleröffnung nur solche Knopfzahlen (Positionen) zulässig, daß gemäß der folgenden Spielregeln mindestens ein Zug ausgeführt werden kann. –

Die Spieler ziehen abwechselnd, wobei der Spieler *B* den ersten Zug ausführt. Solange die Partie nicht beendet ist, besteht Zugzwang. – Erhält am Partieende der eine Spieler den Gewinn *g* zugesprochen, so erhält sein Gegner den Gewinn $-g$ zugesprochen.

2′: Ein Zug besteht im Wegnehmen von 3 oder 4 Knöpfen vom Tisch.

3′: Die Partie ist beendet, sobald weniger als drei Knöpfe auf dem Tisch liegen. Der Spieler, nach dessen letztem Zug noch entweder 0, 1 oder 2 Knöpfe auf dem Tisch liegen, erhält in der angegebenen Reihenfolge entweder $+2$, 0 oder $-1$ als Gewinn zugesprochen.

Der jeweilige Stand bei einer Partie dieses Spieles und der folgenden Spiele wird vollständig beschrieben durch die Anzahl *m* der jeweils noch auf dem Tisch liegenden Knöpfe und den Namen des Spielers, der den letzten Zug ausführte. Diese Anzahlen *m* nennt man die *Positionen* dieser Spiele. Ein Spieler kann seine Spielweise bereits vor dem Spielen einer Partie, etwa auf Grund gesammelter Spielerfahrungen, dadurch festlegen, daß er für jede Position *m* (Knopfzahl *m*) angibt, auf welche Position er ziehen will und mit welcher Position er bei Partiebeginn eröffnen will. Er legt also fest, wieviel Knöpfe er bei jeder Position wegnehmen will. Eine jede derartig fixierte Spielweise, ob vorteilhaft oder unvorteilhaft, wird als *Strategie* bezeichnet. Eine jede Strategie läßt sich zumindest teilweise tabellarisch niederschreiben.

Ein Experte hat auf Grund langer Spielerfahrung die folgenden Strategien als besonders zweckmäßig für das Spiel I erkannt:

Eröffnungspositionen: 7; 14; 21; ...

| Von Position ... | wird gezogen auf Position ... | Von Position ... | wird gezogen auf Position ... | Von Position ... | wird gezogen auf Position ... |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — | 9 | 6 | 18 | 14 |
| 1 | — | 10 | 7 | 19 | 15 |
| 2 | — | 11 | 7 | 20 | 16 |
| 3 | 0 | 12 | 8 | 21 | 17; 18 |
| 4 | 0 | 13 | 9 | | |
| 5 | 1 | 14 | 10; 11 | | |
| 6 | 2 | 15 | 12 | | |
| 7 | 3; 4 | 16 | 13 | | |
| 8 | 5 | 17 | 14 | | |

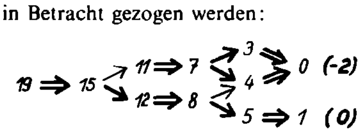
Ein Strich in der 2. Spalte dieser Tabelle bedeutet, daß nicht mehr gezogen werden kann, da das Spiel bereits beendet ist. Das Angeben mehrerer Zahlen in einem Feld der 2. Spalte bedeutet, daß der Experte sich hier von Fall zu Fall für einen der angegebenen Züge entscheidet. Wegen dieser Zugwillkür sind in dieser Tabelle mehr als eine Strategie fixiert.

Eine Partie unseres Experten gegen einen Anfänger sei aufgezeichnet:

$$19 \Rightarrow 15 \rightarrow 11 \Rightarrow 7 \rightarrow 4 \Rightarrow 0$$

Hier sind die Züge des Anfängers durch Pfeile und die des Experten, der natürlich eine seiner Strategien anwendet, durch Doppelpfeile gekennzeichnet. Da er am Partieende auf die Position 0 zieht, erzielt er den Gewinn $+2$ und sein Gegner, der Anfänger, damit gleichzeitig den Gewinn $-2$.

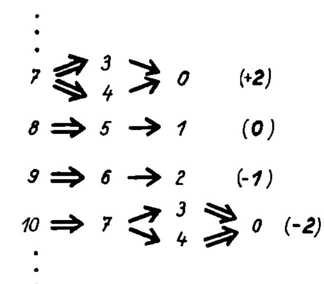
Kann unser Experte bei jeder Strategie des Anfängers, der die Partie mit der Position 19 eröffnet, den Gewinn $+2$ mit seinen Strategien erzwingen? Die Antwort werden wir am folgenden Schema ablesen, in dem alle Spiele dargestellt sind, bei denen sich der Experte stets seiner Strategien bedient und von seinem Gegner, der die Partien mit der Position 19 eröffnet, jeweils alle möglichen Züge in Betracht gezogen werden:



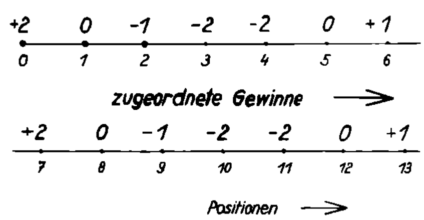

Zusätzlich zu den oben getroffenen Festsetzungen sind hier alle Züge, die gemäß der Strategien des Experten ausgeführt werden, stark markiert worden. Weiterhin ist in Klammern hinter jeder Endspielposition der Gewinn fixiert worden, den der Anfänger bei der jeweiligen Partie erzielt. In dieser Darstellung sind insgesamt 4 Partien zusammengefaßt. Die Antwort auf die gestellte Frage lautet: „Nein. Der eine Partie mit der Position 19 eröffnende Anfänger, der gegen den Experten spielt, erzielt dann den größtmöglichen Gewinn, wenn er sich ebenfalls der Strategien des Experten bedient."

Weitere vom Leser selbst zu betrachtende Beispiele lassen den folgenden Satz als wahr vermuten: *Der die Partie eröffnende Anfänger, der gegen unseren Experten spielt, erzielt bei jeder Eröffnungsposition dann den maximal möglichen Gewinn, wenn er sich ebenfalls der Strategie des Experten bedient.*

Zu einer Reihe von Eröffnungspositionen bestimmen wir nunmehr diesen maximal möglichen Gewinn des die Partie eröffnenden Anfängers, der gegen den Experten spielt:




Durch die Vorschrift, daß alle Züge nach den Strategien des Experten auszuführen sind, wird jeder Eröffnungsposition einer der Gewinne des Spieles zugeordnet. In naheliegender Weise ordnen wir zusätzlich noch den Endpositionen 0, 1 und 2 die Gewinne $+2$, 0 und $-1$ zu. Das auf diese Weise zu erzielende Ergebnis veranschaulichen wir und am Zahlenstrahl:




Nun soll mit dieser Zuordnung von Positionen und Gewinnen gearbeitet werden: Von der Position 9 mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{-1}$ kann laut Spielregeln nur auf die Positionen 5 und 6 mit den zugeordneten Gewinnen $\underline{0}$ und $\underline{+1}$ und von der Position 10 mit zugeordnetem Gewinn $\underline{-2}$ nur auf die Positionen 6 und 7 mit den zugeordneten Gewinnen $+1$ und $+2$ gezogen werden. Diese und weitere Beispiele lassen den folgenden Satz als wahr vermuten:

*Satz 1:* Den Positionen lassen sich die Gewinne eines Spieles so zuordnen, daß gilt:

a) Jeder Endposition ist der Gewinn zugeordnet, den der Spieler laut Spielregeln erhält, der mit seinem letzten Zug am Partieende auf diese Position zieht.

b) Von einer Position mit dem Gewinn $g$, die keine Endposition ist, kann stets auf eine Position mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{-g}$ gezogen werden.
c) Einer beliebigen Position, auf die von einer Position mit dem zugeordneten Gewinn $g$ gezogen werden kann, ist ein Gewinn $g_*$ zugeordnet, für den gilt $g_* \leqq -g$.
Mit der hergestellten Zuordnung zwischen Positionen und Gewinnen erscheinen auch die Strategien unseres Experten in neuem Licht: Laut Tabelle zieht der Experte von der Position 9 mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{-1}$ auf die Position 6 mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{+1}$ und von der Position 7 mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{+2}$ auf die Positionen 3 und 4 mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{-2}$. Offenbar sind bei den Zügen unseres Experten stets die zugeordneten Gewinne der beiden durch einen Zug verknüpften Positionen einander entgegengesetzt gleich. Weiterhin wählt unser Experte zur Spieleröffnung offenbar nur Positionen, denen der Gewinn $\underline{+2}$ zugeordnet ist. Diese Strategien unseres Experten wollen wir ab jetzt *optimale Strategien* nennen.
*Definition 2:* Ist für ein Spiel eine dem Satz 1 genügende Zuordnung von Positionen und Gewinnen hergestellt, so heißt mit optimaler Strategie spielen:
a) Von einer Position mit dem zugeordneten Gewinn $g$, die keine Endposition ist, wird auf eine Position mit dem zugeordneten Gewinn $\underline{-g}$ gezogen.
b) Zur Eröffnung des Spieles werden Positionen gewählt, deren zugeordneter Gewinn der maximal mögliche Gewinn des Spieles ist. Hier sei noch vermerkt, daß gemäß Satz 1 die unter a) geforderte Zugmöglichkeit stets besteht.
In unserem nächsten Beitrag (2/71) werden wir erkennen, daß der Name optimale Strategie für die durch Definition 2 bestimmten Strategien berechtigt ist.
*W. Träger*

# Taugen Mädchen für die Mathematik?

Sechs Mädchen waren unter den 112 Teilnehmern der XII. Internationalen Mathematikolympiade (Ungarische VR, 1970). Eine Bestätigung dafür, daß sich Mädchen in der Mathematik doch nicht behaupten? *Junge Welt* und *alpha* stellten den sechs jeweils fünf Fragen, die wir nachfolgend aufführen. Lest ihre Antworten und entscheidet selbst!

Unsere Fragen

1. Frage:
**Da es nun einmal so wenig Mädchen gibt, die sich für Mathematik begeistern, wie kommt ein Mädchen dazu?**

2. Frage:
**Wenn du nicht gerade Mathematikaufgaben löst, was tust du dann?**

3. Frage:
**Wenn eine Aufgabe sehr schwierig ist, wie verhältst du dich?**

4. Frage:
**Hast du schon feste Vorstellungen von deinem zukünftigen Beruf?**

5. Frage:
**Sehen die Jungen in dir einen gleichberechtigten Partner?**

Die Gespräche führten *Irma Weinreich* (*JW*) und *Johannes Lehmann* (*alpha*).

**Der alpha-Club war in Cottbus dabei**

Sechs vorbildliche Pioniere und Jugendfreunde (siehe Foto) wurden von der Bezirksleitung Leipzig der Pionierorganisation „Ernst Thälmann" zum VII. Pioniertreffen nach Cottbus delegiert. Seite an Seite mit den 15 Stationen Junger Techniker betreuten sie die Gäste des Treffens. Über 1 500 Pioniere nutzten die Möglichkeit, sich an der Wissensstraße Mathematik des *alpha*-Clubs der 29. OS Leipzig zu bewähren.

Auf einigen Bäumen sitzen mehrere Vögel. Hätte sich auf jedem dieser Bäume genau ein Vogel niedergelassen, so hätte einer dieser Vögel keinen Baum zum Ausruhen gefunden. Einer dieser Bäume wäre hingegen unbesetzt geblieben, wenn sich auf jeden der übrigen Bäume genau zwei Vögel gesetzt hätten. Um wieviel Vögel und um wieviel Bäume handelt es sich?

**Das Problem zugunsten der Mädchen gelöst**

*Cevelma Dansansaravin*, 17 Jahre, Mongolische Volksrepublik, besucht in Ulan Bator eine Spezialschule für Mathematik, Schülerin der 10. Klasse. Besondere Kennzeichen: selbstbewußt, ein wenig romantisch.

1. Seit der 8. Klasse besuche ich eine Spezialschule, die einzige, die es in der Mongolischen Volksrepublik gibt. Für diese Schule werden jedes Jahr in einem großen Wettbewerb die Besten ausgewählt. In meiner Klasse sind wir 24 Schüler, 13 davon Mädchen. In den anderen Klassen sieht es ähnlich aus. Bei uns ist die Frage, ob sich ein Mädchen mit Mathematik beschäftigt, zugunsten der Mädchen gelöst.
2. Ich spiele Schach und Tischtennis, lese viel. Wenn dann noch Zeit bleibt, gehe ich in die Oper. Mein Bruder ist in der Nationaloper Sänger.
3. Wenn ich merke, daß ich eine Aufgabe noch nicht beherrsche, lege ich sie beiseite. Mir fehlt manchmal die Energie. Bei anderen bin ich strenger als bei mir selbst.
4. Mein Lieblingsfach ist die räumliche Geometrie. Ich möchte einmal Architekt werden. Eine Aufnahmeprüfung habe ich bereits gemacht, wahrscheinlich studiere ich in Moskau. Ich habe viele schöne Vorstellungen, was in unserem Land alles entstehen wird. Und ich möchte gern sehen, was ich mir erträume. Zum Beispiel die neuen Häuser, die ich mit erbauen will.
5. Die Leistungen der Jungen sind im allgemeinen besser. Trotzdem sind sie nicht überheblich. Sie helfen mir alle. Sie machen mir Mut. Oder: Wir haben hier eine ganze Menge neuer Aufgaben von anderen Teilnehmern erhalten. Jungen und Mädchen werden zu Hause daran weiterarbeiten. Jeder mit gleichem Anteil.

Gegeben seien 12 Blatt Papier. Einige dieser Blätter zerschneiden wir jeweils wieder in 12 kleinere Blätter. Diese kleineren Blätter dürfen wiederum in jeweils 12 Teile zerschnitten werden und so fort. Es ist zu untersuchen, ob auf diese Weise
a) 100 Papierstückchen, b) 1 000 Papierstückchen entstehen können!

**In meinem Leben hatte ich noch keine Zwei**

*Helena Husova*, 18 Jahre, ČSSR, besucht in Prag eine Spezialklasse für Mathematik, Schülerin der 11. Klasse. Besondere Kennzeichen: sachlich, gewann als einziges Mädchen einen Preis.

1. Meine Eltern sind Historiker. Sie wollten gern, daß ich in ihre Fußspuren trete. Zu Hause stehen eine Unmenge historische Bücher, und jedesmal sagten sie, ich solle darin lesen. Aus einem gewissen Trotz heraus beschäftigte ich mich mit etwas ganz anderem. Geschichte finde ich furchtbar langweilig. (Helena hat in Geschichte trotzdem die Note 1, d. R.) Für mich gibt es nichts Schöneres als die Mathematik. Es ist die einzige Wissenschaft, wo man ohne Hilfsmittel beliebig Probleme lösen kann.
2. Ich spiele ein wenig Klavier. Beethoven, Mozart, Bach liebe ich, sammle auch Platten. Im Winter laufe ich Ski und Schlittschuhe. Außerdem schleppe ich immer ein Buch mit mir herum. Im Moment lese ich gerade die Geschichte vom Soldaten Schwejk.
3. Bei mir zu Hause liegen mindestens 12 bis 15 Aufgaben, die ich im Moment nicht lösen kann. Ich bewahre sie so lange auf, bis ich meine, jetzt weißt du alles dazu, das heißt, im Unterbewußtsein beschäftige ich mich schon damit. Für Nachschub ist auch gesorgt. Meist sind es die Jungen unserer Klasse, die mir solche Aufgaben geben. Es ist so eine Art Wettbewerb.
4. Wenn es keine zwingende Notwendigkeit gibt, nach meinem Abitur an einer anderen Stelle zu arbeiten, werde ich Mathematik studieren.
5. Unsere Gesellschaft gibt Mädchen und Jungen die gleichen Voraussetzungen. Leider nutzen die Mädchen noch zuwenig ihre Chance. Für mich ist es meistens so, daß ich alle mathematischen Probleme mit Jungen besprechen muß. Das ärgert mich für uns Mädchen.

Ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, für die $\overline{AB} > \overline{CD}$ gilt, habe einen Inkreis, der die Seite $\overline{AB}$ in $E$, die Seite $\overline{BC}$ in $F$, die Seite $\overline{CD}$ in $G$ und die Seite $\overline{AD}$ in $H$ berührt. Es ist zu beweisen, daß sich die Geraden $AC$, $BD$, $EG$ und $FH$ in einem gemeinsamen Punkt $P$ schneiden!

**Meine Zwillingsschwester macht auch Mathe**

*Agnes Szendrei*, 17 Jahre, VR Ungarn, besucht in Szeged die Mittelschule, Schülerin der 11. Klasse. Besondere Kennzeichen: auffallend zurückhaltend, ziemlich unsportlich (wie sie sagt).

1. Ob man ein Junge oder ein Mädchen ist, das spielt für die Mathematik keine Rolle. Mein Vater ist Mathematiklehrer an der Hochschule, und da liegt es, wie man sagt, wohl in der Familie. Er war es, der mich dazu brachte, mich für die Mathematik zu entscheiden. In der achten Klasse gewann ich zum erstenmal einen Wettbewerb. Ich habe noch eine Zwillingsschwester, sie ist auch jedesmal dabei und wurde in diesem Jahr 11. bei der Landes-Mathematik-Olympiade. Ich wurde dritte.
2. Wir haben in unserer Klasse mehrere Studiengruppen. Ich leite die Gruppe, die sich speziell mit naturwissenschaftlichen Fächern beschäftigt. Dabei geht ein großer Teil meiner freien Zeit drauf. Außerdem übe ich mich in Fremdsprachen. (Agnes spricht perfekt russisch und englisch, d. R.) Und jetzt lerne ich gerade deutsch. Wenn ich ganz ehrlich bin, mir fällt es schwer, nicht hinter Büchern zu sitzen.
3. Ich nehme mir im allgemeinen vor, nicht eher aufzustehen, bis ich eine Lösung gefunden habe. Leider gelingt es mir nicht immer. Wenn ich anschließend merke, daß ich bei irgendeiner Kleinigkeit kapituliert habe, kann ich mich darüber ärgern. Es stört mich nicht, den ganzen Tag und noch länger über einer Aufgabe zu sitzen.
4. Ja, ganz fest. Ich möchte Mathematik studieren, vielleicht um Lehrerin zu werden.
5. Ich bin wohl ein bißchen zu ruhig.

Die Lösungen zu den Aufgaben, welche die Mädchen den alpha-Lesern stellten, veröffentlichen wir in Heft 2/71, d. Red.

Zwei Primzahlen $p$ und $p+2$ nennt man Primzahlzwillinge.
(Beispiel: 29 und 31)
Beweise, daß für $p>3$ die Summe zweier Primzahlzwillinge stets durch 12 teilbar ist!

**Ich bedaure, nicht eher angefangen zu haben**

*Anglika Rindler*, 18 Jahre, Österreich, besuchte das Gymnasium in Spital, Abiturientin. Besondere Kennzeichen: lustig, immer zu irgendwelchen Scherzen aufgelegt.

1. Bekanntlich nimmt Österreich zum ersten Mal an einer internationalen Mathematikolympiade teil. Das brachte auch bei mir den Durchbruch; denn bis vor einem halben Jahr kannte ich mich in meinen Beziehungen zur Mathematik selbst nicht genau aus. Bei uns fanden Wettbewerbe für die Besten statt. Mein Lehrer schlug mir und drei Jungen vor, mitzumachen. Ich wurde die Beste. Ich bedaure, daß ich nicht eher angefangen habe, mich mit Mathematik zu beschäftigen.
2. Es gibt nichts, von dem ich sagen könnte, daß es mich nicht interessiert: Literatur, Sprachen, besonders Latein. Ich schwimme, betreibe Leichtathletik, spiele Handball und auch Fußball, wenn es sein muß. Hobbys habe ich nicht.
3. Ich suche so lange, bis ich meine, eine Lösung gefunden zu haben. Eher nehme ich keine neue Aufgabe zur Hand. Mein System wende ich auch bei Klausuren an. Nicht immer mit dem besten Erfolg. Ist die erste Aufgabe die schwierigste, kann es passieren, daß ich überhaupt nichts löse und eine Vier fange, obwohl ich die anderen Aufgaben bequem geschafft hätte.
4. Der Lateinlehrer ist mein Lieblingslehrer. Fast hätte ich Latein studiert. Buchstäblich in letzter Minute entschied ich mich für Mathematik. Wir haben nur drei Stunden Mathematik in der Woche, das ist einfach zuwenig, um ein eigenes Talent zu entdecken.
5. Wenn ich die Frage auf meinen Freund beziehe – wir besuchten die gleiche Schule –, dann: Es imponiert ihm. Aber selbst macht er sich nicht viel draus. Die Jungen, mit denen ich hier bin, achten mich als gleichberechtigten Partner. In unserer Mannschaft belegte ich den 3. Platz. Die Jungen freuten sich darüber mehr als ich.

Ein innerer Punkt $P$ eines gleichseitigen Dreiecks $ABC$ mit der Seitenlänge $a$ werde mit den drei Eckpunkten des Dreiecks verbunden, und es sei $\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=y$, $\overline{CP}=z$. Es ist zu beweisen, daß dann stets die fortlaufende Ungleichung $a\sqrt{3} \leq x+y+z < 2a$ erfüllt ist!

**Nach dem Erfolg packte mich der Ehrgeiz**

*Virginie Stoinova Hristova*, 18 Jahre, VR Bulgarien, besuchte in Russe eine Spezialklasse für Mathematik, Abiturientin. Besondere Kennzeichen: quicklebendig, kann sich über alles totlachen.

1. Mit 12 Jahren verliebte ich mich in den Sohn meiner Mathematiklehrerin. Ich bin nämlich sehr romantisch. Doch richtig: An und für sich durch den Erfolg. Russe ist bekannt als Zentrum für mathematische Forschungen. Es gibt dort einen sogenannten mathematischen Fachkreis, der auch Wettbewerbe ausschreibt. Ich beteiligte mich, mehr aus Spaß. Als ich aber sah, daß ich mehr bringe, packte mich der Ehrgeiz.
2. Ich habe gerade das Abitur bestanden. In allen Fächern mit der besten Note. Selbstverständlich konnte zu dieser Zeit von freier Zeit nicht die Rede sein. Trotzdem muß man noch etwas mehr tun, als nur zu lernen, wenn man Anspruch erheben will, eine gute Schülerin zu sein. Ich war lange Zeit und auch im letzten Schuljahr Komsomolsekretär. Meine Funktion habe ich durchaus bewältigt. Ganz nebenbei: Ich liebe Katzen, und drei habe ich zu pflegen. Ich höre oft und viel Schlagermusik und tanze leidenschaftlich gern.
3. Eine Aufgabe, die ich nicht lösen kann, versetzt mich in dauernde Unruhe. Ich denke auf dem Nachhauseweg darüber nach, löse sie im Schlaf, deshalb beeile ich mich gewöhnlich, eine Lösung zu finden, und bin heilfroh darüber.
4. Ganz festgelegt habe ich mich noch nicht, was den direkten Beruf betrifft. Ich beginne in diesem Jahr in Sofia mit dem Mathematikstudium.
5. Manche Leute glauben tatsächlich, daß Mädchen von Mathematik weniger verstehen als Jungen. Da Mädchen aber im allgemeinen fleißiger sind und auch klüger – meine ich –, könnten sie durchaus mehr leisten. Ich weiß, das klingt selbstbewußt, aber es ist doch so, daß gerade in der Mathematik Traditionen und Vorbehalte es den Mädchen zusätzlich schwermachen, zu wirklichen Leistungen zu kommen.

---

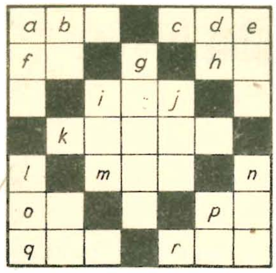
Gegeben seien die vier Zahlen $n-1$, $n^2-n$, $n^3-n^2$, $n^4-n^3$, wobei $n$ eine von 0 und 1 verschiedene natürliche Zahl ist. Bestimme alle $n$, für die man zwei von den obigen vier Zahlen so auswählen kann, daß ihr Produkt gleich dem Produkt der anderen beiden dieser vier Zahlen ist!

**Ich brauche eine Art Selbstbestätigung**

*Ursula Tyl*, 17 Jahre, DDR, besucht die Spezialklasse für Mathematik der Heinrich-Hertz-Oberschule Berlin, Schülerin der 11. Klasse. Besondere Kennzeichen: ein wenig keß, träumt gern.

1. Mein Lehrer in Forst begann damit, mir wiederholt schwierigere Aufgaben zu stellen als den anderen Schülern. Ohne daß ich mir selbst über den Prozeß richtig im klaren war, weckte er mein mathematisches Interesse. Ich bin ihm dafür sehr dankbar.
2. Ich bereite mich auf ein Auslandsstudium vor, und der größte Teil meiner Freizeit ist dem Sprachstudium gewidmet. In meinen Ferien z. B. lese ich einen ganzen Stapel russischer Literatur. Außerdem schreibe ich hin und wieder Gedichte. Meine dichterischen Versuche habe ich bei mir.
3. Allein besitze ich nicht immer die Kraft, um mit den Problemen und Schwierigkeiten, die eine Aufgabe beinhalten kann, fertig zu werden. Ich gehe dann so wie ein Hausierer von Zimmer zu Zimmer und frage die anderen. Ich brauche jedesmal eine Art Selbstbestätigung.
4. Ich werde Mathematik studieren.
5. Manche Jungen denken, daß sie über größere Fähigkeiten verfügen. Im Moment wird es in manchen Fällen so sein. Aber auch Frauen sind zu großen Leistungen auf naturwissenschaftlichem Gebiet fähig. Was ich sage, ist nicht neu. Ich denke nur an Marie Curie. Uns Mädchen hilft man am wenigsten, wenn man uns bevorzugt behandelt. Ich finde, man sollte den Mädchen die gleichen Forderungen stellen, sie begeistern. Aber auch die Eltern sind zu überzeugen – bei mir war das zwar nicht notwendig –, daß Mädchen mathematisches Talent besitzen.

# Ein mathematisches „Kreuzworträtsel"




Während bei den üblichen Kreuzworträtseln in die Felder des gegebenen Schemas Buchstaben so einzutragen sind, daß sie in waagerechter bzw. senkrechter Anordnung jeweils ein Wort ergeben, dessen Bedeutung in dem Rätsel vorgegeben wird, sind bei einem mathematischen „Kreuzworträtsel" in die Felder des Schemas Ziffern einzutragen, und zwar jeweils eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Diese Ziffern ergeben dann jeweils in waagerechter bzw. senkrechter Anordnung eine Zahl oder auch eine Reihe von Zahlen, deren Definition in dem Rätsel vorgegeben wird. Dabei ist im allgemeinen diese Zahl eindeutig bestimmt, d. h., man braucht nicht zu raten, sondern kann die gesuchten Ziffern durch eine geeignete Überlegung bestimmen. Wir bemerken noch, daß die Bezeichnung „Kreuzworträtsel" eigentlich nicht exakt ist, es müßte besser „Kreuzziffernrätsel" heißen, da ja Ziffern in die Felder einzusetzen sind. Die Bezeichnung „Mathematisches Kreuzworträtsel" hat sich aber schon seit längerer Zeit durchgesetzt.

Da bei einem „mathematischen Kreuzworträtsel" in die leeren Felder Ziffern statt Buchstaben einzutragen sind, wählen wir zum Auffinden der Lösungen die Form „a waagerecht" statt wie sonst üblich „1 waagerecht" usw. Aus drucktechnischen Gründen werden die Buchstaben a, b, c, usw. nicht in der linken oberen Ecke des leeren quadratischen Feldes angebracht, sondern sie füllen das Feld aus. Deshalb empfiehlt es sich, vor dem Lösen ein entsprechendes Schema nochmals anzufertigen, damit genügend Platz zum Eintragen der gesuchten Zahlen bzw. der Reihen von Zahlen vorhanden ist.

Wir stellen unseren Lesern das folgende mathematische Kreuzworträtsel:

Dabei bedeuten:

**Waagerecht**

a) Drei Primzahlen, bei denen die Differenz zwischen der zweiten und der ersten Zahl sowie zwischen der dritten und der zweiten Zahl gleich 2 ist.

c) Die kleinste von Null verschiedene natürliche Zahl, die durch 2, 3, 4, 5, 6 und 7 teilbar ist.

f) Die Lösung der Gleichung $4(x-13)+3(x+7)=200$.

h) Die größte natürliche Zahl $x$, für die $16x<1000$ gilt.

i) Die kleinste Primzahl, die größer als 100 ist.

k) Eine fünfstellige Zahl, die gleich der neunten Potenz einer natürlichen Zahl ist.

m) Die Maßzahl der Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Maßzahlen der Längen 120 und 50 haben.

o) Die Anzahl der Diagonalen in einem konvexen Achteck.

p) Eine zweistellige natürliche Zahl, deren Vorgänger durch $4^2$ und deren Nachfolger durch $5^2$ teilbar ist.

q) Die Maßzahl des Flächeninhalts eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Maßzahl 39 und dessen eine Kathete die Maßzahl 15 hat.

r) Das Produkt zweier natürlicher Zahlen, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches gleich 111 und deren größter gemeinsamer Teiler gleich 9 ist.

**Senkrecht**

a) Die größte natürliche Zahl, deren 1000. Teil kleiner als $\frac{1}{3}$ ist.

b) Die kleinste Primzahl, deren Doppeltes größer als 100 ist.

d) Zwei natürliche Zahlen, deren Summe gleich 8 ist und bei denen die Differenz zwischen der zweiten und der ersten Zahl gleich 4 ist.

e) Die ersten drei Ziffern nach dem Komma des Bruches $\frac{1}{37}$ in dezimaler Schreibweise.

g) Die Lösung der Gleichung $\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+3386$.

i) Eine natürliche Zahl, die Lösung der fortlaufenden Ungleichung $39800<209x<40000$ ist.

j) Die Maßzahl des Umfangs eines regelmäßigen Sechsecks, das einem Kreis mit dem Durchmesser 60 cm einbeschrieben ist.

l) Die kleinste dreistellige natürliche Zahl, die durch 2, 3 und 37 teilbar ist.

n) Die größte dreistellige natürliche Zahl.

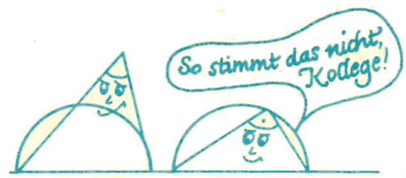
*R. Lüders*

# Kleine Schule – ganz groß

Seit 1964 bestehen an der kleinsten Oberschule des Bezirkes Leipzig, der OS Höfgen im Kreis Grimma, jeweils zwei Arbeitsgemeinschaften (Klassenstufe 5/6 und 7/8). Rund 35% aller Schüler dieser Klassenstufen beteiligen sich an der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik. Ab September 1970 wurde eine Chronik eingerichtet. Sie enthält Arbeitspläne, Protokolle über AG-Nachmittage, zeigt die Erfolge dieser Schule in den Olympiaden. J. Lehmann

*Unsere Fotos:* Beide AGs, hier auf der Fähre über die Mulde (zwischen Höfgen und Kloster Nimbschen), führten an einem AG-Nachmittag Vermessungsarbeiten zur Bestimmung der Breite der Mulde durch.

# In freien Stunden alpha heiter




*Uli Klaus, Erfurt (BS BMK, 1. Lehrjahr)*

## Prüfungsfragen

Als Student der Universität Göttingen legte Max Born bei dem Astronomen Karl Schwarzschild sein Examen ab. Zwischen ihnen kam es zu folgendem Dialog:
Schwarzschild: „Was tun Sie, wenn Sie eine Sternschnuppe sehen?“
Born: „Ich wünsche mir etwas.“
Schwarzschild: „Gut, und was tun Sie dann?“
Born: „Dann schaue ich auf die Uhr, vermerke mir die Zeit, bestimme das Sternbild, aus dem die Sternschnuppe kam, die Richtung, wohin sie sich bewegte, die Länge der leuchtenden Flugbahn usw. Dann gehe ich nach Hause und berechne die angenäherte Flugbahn.“
Der Professor stellte keine weiteren Fragen mehr. Er war mit den Antworten seines Prüflings zufrieden.

*aus: Pythagoras 2/70, Erfurt*

Soφ – μνϱck – ϱdelπste – ηge – ϱling – Geμse – νlon – πϱklammer – μnol – VEβξ – Veϱνka – μνmum – νlδ – Mαbrot – μll – πkiν –

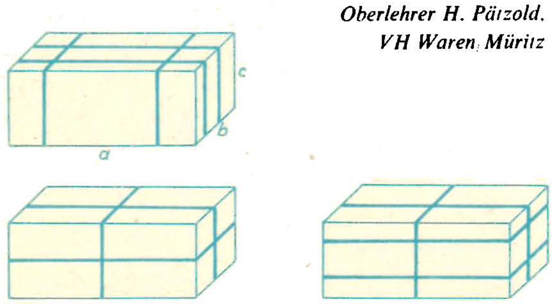
(Griechisches Alphabet siehe Tafelwerk, Seite 50)

*cand. ing. W. Wallmann, TU Dresden*

## Lang, länger, am längsten

Ein Päckchen wurde auf drei verschiedene Arten verschnürt. Für welchen Fall benötigt man am wenigsten, für welchen am meisten Bindfaden? Es gilt $a+b>2c$!

*Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz*




## Der „alpha“-Fimmel

Kommt die neueste *alpha*-Nummer,
macht das Mutti manchen Kummer.
Doch zunächst gibts einen Streit:
Wer kriegt sie als erster heut?
Ist geklärt die Streiterei,
beginnt sofort die Knobelei,
und die Töcher — auch Papa —
sitzen köpferauchend da.
Mutti möchte an den Tisch,
doch die Knobler wehren sich.
Darob sie mit dem Tiegel droht,
und Formeln gibt's zum Abendbrot.
Tags darauf beginnt dann neu
die W-Aufgaben Knobelei.
Es wird um sechs, es wird um sieben,
man tut noch spiegeln und verschieben.
Die Zettel türmen sich zu Bergen.
(Man kann sich doch nicht alles merken.)
Ein Teil liegt hier, ein Teil liegt dort,
doch sucht man einen, ist er fort.
Reicht das Knobeln nicht mehr aus,
liest man *Cantor*, liest man *Gauß*;
dann kommt noch *Galilei* daran;
auch das war ein berühmter Mann.
Ist diese Arbeit auch getan,
schaut man sich *alpha*-heiter an.
Dort gibt es neben ernsten Sachen
auch manchen guten Witz zum Lachen.
Dann folgt eine ruhige Zeit,
aber bald ist es soweit,
und täglich fragt man die Mama:
„Ist denn Post von Leipzig da?“
Die Schwester schon von weitem schreit:
„Wieviel Karten hab' ich heut'?“
Und die Mutti packt der Graus:
Der *alpha*-Fimmel ist im Haus!
Um diese Verse abzuschließen,
möchten wir nun gerne wissen:
Kommt man durch den *alpha*-Fimmel
später in den Mathe-Himmel?

*Regina und Brigitte Hildenbrandt, OS Stützerbach*

**Werterhaltung**

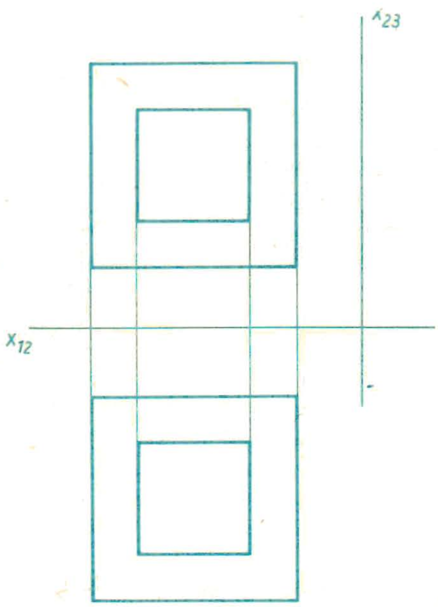
Vater ölt seinen elektrischen Rasierapparat. Er taucht einen langen geraden Draht von kreisförmigem Querschnitt in die Flasche und läßt das Öl in die Lager laufen.
Das am Draht haftende Öl laufe zu einem kugelförmigen Tropfen zusammen. Welchen Durchmesser hat dieser?
Durchmesser des Drahtes $d$
Länge des benetzten Drahtstückes $l$
Dicke der Ölschicht $s$
Zahlenfall. $d=1$ mm; $l=5$ cm; $s=0{,}01$ mm

*Prof. Dr. habil. W. Renneberg*
*Karl-Marx-Universität Leipzig*

**Kreuzriß gesucht**

Gegeben sind Grund- und Aufriß eines ebenflächig begrenzten Körpers.
Gesucht ist der Kreuzriß dieses Körpers bezüglich der $x_{23}$-Achse. Man beachte, daß zwei Lösungen möglich sind!

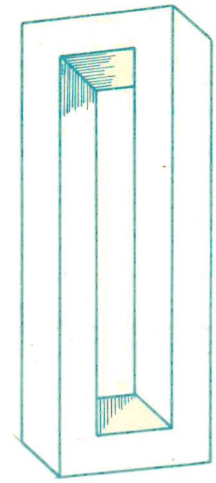
*Elisabeth Siegert, Karl-Marx-Stadt*
*Joh.-R.-Becher-OS. Kl. 6*




Mit *alpha*, sprach der Zirkelleiter,
half ich in Mathe vielen weiter.

*Lehrerin Cilly Schröder, Dresden*

**Ein Körper, den es nicht gibt**

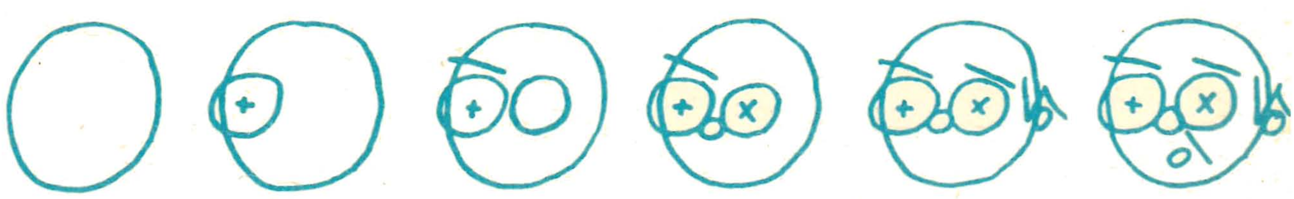


*Baurat h. c. Dipl.-Ing. Dr.*
*M. Skalicky, Wien*

**Niederlande – Sommerbriefmarken 1970**

entworfen nach einer Idee von *R. D. E. Oxemaar* mit Hilfe einer Datenverarbeitungsanlage in Zusammenarbeit mit der Gruppe numerische Steuerung der Abteilung Betriebswissenschaft an der TH Eindhoven.


isometrische Projektion von Kreis nach Quadrat
Parallelflächen in einem Würfel
zwei Skalaeinteilungen
Übergangsphasen von konzentrischen Kreisen mit ansteigendem Durchmesser
vier Spiralen



Null ... plus Null ... minus Null ... multipliziert mit Null ... minus Wurzel aus Null das Ganze geteilt durch Null

aus: Jean Effel, Historio-Grafik (Eulenspiegelverlag)

# X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

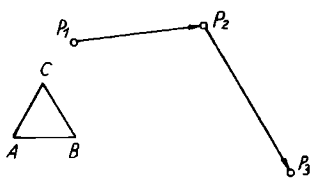
## 2. Stufe (Kreisolympiade)

(*Beachte:* Eine Zahl ist genau dann durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist.)

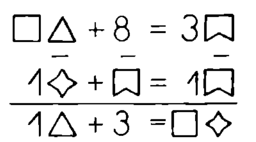
4. Die Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $a = 16$ cm, $b = 9$ cm ist so in fünf Rechtecksflächen zu zerlegen, daß sich diese zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen, wobei sämtliche Teilrechtecke verwendet werden sollen und die gesamte Fläche des Quadrats lückenlos und ohne Überlappungen von den Flächen dieser Teilrechtecke ausgefüllt werden soll.
Gib eine Möglichkeit hierfür an!

**Olympiadeklasse 5**

1. Auf dem umstehenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_2}$ abgebildet. Mit dem Dreieck $\triangle ABC$ sollen nacheinander die Verschiebungen ausgeführt werden, die durch die Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ gegeben sind. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$! (Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)




2. Gib sämtliche Lösungen des nachstehenden Kryptogramms an, d. h. ersetze die geometrischen Figuren so durch je eine der Ziffern 0 bis 9, daß zusammen mit den bereits angegebenen Ziffern sämtliche (waagerecht und senkrecht stehenden) Aufgaben richtig gelöst sind. Dabei bedeuten gleiche Figuren gleiche Ziffern.

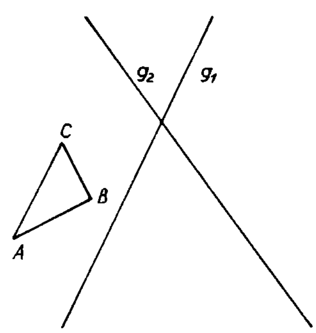


3. Die Mitglieder einer Arbeitsgemeinschaft „Junge Botaniker" unterstützten ihre Paten-LPG beim Obstanbau. Zu diesem Zwecke hielten sie eine 2,6 ha große Obstplantage, auf der je Hektar durchschnittlich 150 Apfelbäume standen, von Schädlingen frei. Danach wurden von jedem Baum durchschnittlich 50 kg Äpfel geerntet. Berechne, wieviel Tonnen Äpfel unter diesen Umständen insgesamt auf der Plantage geerntet wurden!

4. Eine Gruppe Junger Mathematiker führte eine Exkursion durch. Jeder Teilnehmer bezahlte 1,50 Mark für die Fahrkosten. Bei der Bezahlung des Sammelfahrscheines blieb ein Betrag von 1,10 Mark übrig. Hätte jeder Teilnehmer 1,40 Mark eingezahlt, so hätten 1,10 Mark an den Kosten des Sammelfahrscheines gefehlt. Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an dieser Exkursion! Wieviel Geld erhielt jeder dieser Teilnehmer zurück, als der zuviel eingezahlte Betrag gleichmäßig unter ihnen verteilt wurde?

**Olympiadeklasse 6**

1. Auf dem umstehenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Geraden $g_1$ und $g_2$ abgebildet.




Das Dreieck $\triangle ABC$ soll nacheinander an den Geraden $g_1$ und $g_2$ gespiegelt werden. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$!
(Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)

2. Die sowjetischen Raumschiffe Sojus 6, Sojus 7 und Sojus 8 umkreisten im Gruppenflug die Erde. Dabei brauchte die Gruppe der drei Raumschiffe für jede Umkreisung durchschnittlich 88 Minuten und legte in dieser Zeit rund 41 000 km zurück.
Berechne die Länge des Weges, den die Raumschiffgruppe während ihres Fluges durchschnittlich
a) in jeder Stunde,
b) in jeder Sekunde zurücklegte!
Bei der Aufgabe a) soll die Angabe in Kilometern erfolgen und auf volle Tausend Kilometer gerundet werden, bei Aufgabe b) soll die Angabe in Metern erfolgen und auf volle Hundert Meter gerundet werden.

3. In der fünfstelligen Zahl
52*2*
sind an den mit * bezeichneten Stellen zwei (gleiche oder verschiedene) Ziffern so einzusetzen, daß die dadurch entstehende Zahl durch 36 teilbar ist.
Gib alle Möglichkeiten hierfür an!

**Olympiadeklasse 7**

1. In einem Ferienlager der Thälmann-Pioniere erwarben genau 70% aller Teilnehmer das Sportabzeichen und genau 30% aller Teilnehmer das Touristenabzeichen. Vorher besaß kein Teilnehmer eines dieser Abzeichen. Bei den folgenden Aussagen (1) bis (4), die sich sämtlich auf dieses Lager beziehen, ist zu untersuchen, ob sie wahr sind oder falsch sind oder ob das allein aufgrund der gemachten Angaben nicht entschieden werden kann:
(1) Weniger als die Hälfte aller Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, erwarben auch das Touristenabzeichen.
(2) Alle Teilnehmer erwarben entweder das Sportabzeichen oder das Touristenabzeichen.
(3) Unter den Trägern des Sportabzeichens gibt es mehr solche, die auch das Touristenabzeichen erwarben, als solche, die dies nicht taten.
(4) Wenn sich die Anzahl der Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, um 10% erhöhen würde, so gäbe es mehr Träger des Sportabzeichens als Träger des Touristenabzeichens.

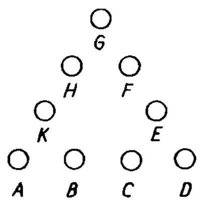
2. In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Größen der Innenwinkel wie üblich mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichnet wobei $\alpha = 60°$ sei. $BB'$ sei die Halbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ und $CC'$ die des Winkels $\sphericalangle ACB$; jede von ihnen schneidet die ihrem Winkel gegenüberliegende Dreieckseite in einem inneren Punkt ($B'$ bzw. $C'$). Ferner seien die Größen der Winkel $\sphericalangle AB'B$ bzw. $\sphericalangle AC'C$ mit $\varepsilon$ bzw. $\delta$ bezeichnet. Beweise, daß für jedes derartige Dreieck $\varepsilon + \delta = 180°$ gilt!

3. Ermittle alle Möglichkeiten eine natürliche Zahl $t$ und eine Ziffer * so anzugeben, daß die folgende Gleichung gilt:
$$9(230 + t)^2 = 492*04$$

4. Konstruiere ein Dreieck $\Delta ABC$ aus
$$\alpha = 70°,\ s_b = 7 \text{ cm},\ h_c = 5 \text{ cm!}$$
Dabei sei $\alpha$ die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, $s_b$ sei die Länge der Seitenhalbierenden der Seite $AC$ und $h_c$ die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch $A$ und $B$ senkrecht steht. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt!

**Olympiadeklasse 8**

1. In die neun Felder $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$, $K$ der untenstehenden Figur sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9, jede genau in eines der Felder, so einzutragen, daß die Summen $s_1$, $s_2$ und $s_3$ der in den Feldern $A$, $B$, $C$, $D$ bzw. $D$, $E$, $F$, $G$ bzw. $G$, $H$, $K$, $A$ stehenden Zahlen einander gleich sind.




a) Welches ist der kleinste und welches ist der größte Wert, den diese (einander gleichen) Summen unter den genannten Bedingungen annehmen können?

b) Gib je eine Möglichkeit an, wie dieser kleinste bzw. dieser größte Wert erreicht werden kann!

2. In einem Dreieck $\Delta\, ABC$ sei $B'$ der Mittelpunkt der Seite $AC$ und $M$ der Mittelpunkt der Strecke $BB'$. Die Gerade durch $A$ und $M$ schneidet $BC$ in einem Punkt, der $A'$ genannt sei. Man beweise, daß

$\overline{BC} = 3 \cdot \overline{BA'}$ gilt!

3. Bei einem 216 kp schweren Stück einer Kupfer-Zink-Legierung wurde in Wasser ein Auftrieb (Gewichtsverlust) von 26 kp gemessen. Bekannt ist, daß Kupfer beim Eintauchen in (destilliertes) Wasser $\frac{1}{9}$ seines ursprünglichen Gewichtes und Zink $\frac{1}{7}$ seines ursprünglichen Gewichtes verliert.

Ermittle den prozentualen Gewichtsanteil des Kupfers und den des Zinks in der angegebenen Legierung!

(Die zu ermittelnden Größen sind auf volle Prozent zu runden).

4. Konstruiere ein Dreieck $\Delta\, ABC$ aus $c = 5$ cm, $h_c = 4$ cm, $a = 6$ cm!

Dabei sei $a$ die Länge der Seite $BC$, $c$ die der Seite $AB$ und $h_c$ die der auf der Geraden durch $A$ und $B$ senkrechten Höhe.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt.

**Olympiadeklasse 9**

1. Vier Freunde $A$, $B$, $C$ und $D$ verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich.

Anschließend macht jeder von ihnen die im folgenden genannten drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei wahr sind.

A (1) Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn C.
(2) Ich habe den Brief nicht.
(3) Mein Freund hat den Brief.

B (1) Entweder A oder C hat den Brief.
(2) Alle Aussagen von A sind wahr.
(3) D hat den Brief nicht.

C (1) Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn B.
(2) Ich habe den Brief.
(3) B macht keine falschen Aussagen.

D (1) Ich habe den Brief nicht.
(2) Entweder hat A den Brief, oder er hat ihn nicht.
(3) B hat das Spiel ausgedacht.

Wer hat den Brief?

2. Jemand behauptet:

Wenn von zwei natürlichen Zahlen $a$ und $b$ jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von $a$ und $b$ diese Eigenschaft.

a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!

b) Beweisen Sie diesen Satz!

3. Gegeben seien zwei reelle Zahlen $m \neq 0$ und $n$. Ferner sei $f$ die durch $f(x) = mx + n$ für alle reellen Zahlen $x$ definierte Funktion.

a) Ermitteln Sie für $m = 1$ und $n = 0$ alle Zahlen $x_0$, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 - 2)$ gilt (d. h. für die der Funktionswert an der Stelle $x_0 + 2$ doppelt so groß ist wie der an der Stelle $x_0$)!

b) Ermitteln Sie bei beliebig gegebenen reellen Zahlen $m \neq 0$ und $n$ alle Zahlen $x_0$, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt!

4. Eine regelmäßige gerade dreiseitige Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche eine gleichseitige Dreiecksfläche ist und deren Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt.

In der regelmäßigen Pyramide mit den Ecken $A$, $B$, $C$, $D$ und der Spitze $D$ sei der Neigungswinkel zwischen jeder der drei Seitenflächen und der Grundfläche $60°$ groß. Die Grundfläche habe die Seitenlänge $a$. Berechnen Sie das Volumen $V$ dieser Pyramide!

*Anmerkung:* Haben zwei ebene Flächen eine gemeinsame Kante und ist $P$ ein von den Endpunkten verschiedener Punkt dieser Kante, dann ist der Winkel, den zwei in $P$ auf der Kante errichtete und in den beiden Flächen gelegene senkrecht stehende Strecken miteinander bilden, gleich dem Neigungswinkel der beiden Flächen zueinander.

**Olympiadeklasse 10**

1. Beweisen Sie, daß jede mehrstellige natürliche Zahl größer ist als das aus ihren sämtlichen Ziffern gebildete Produkt!

2. Vier Personen A, B, C und D machen in einem Spiel je drei Aussagen über denselben Gegenstand, einen einfarbigen Ball. Die Aussagen lauten:

A (1) Der Ball ist weder rot noch gelb.
(2) Der Ball ist entweder rot oder grün.
(3) Der Ball ist schwarz.

B (1) Wenn der Ball nicht gelb ist, ist er weiß.
(2) A macht eine falsche Aussage, wenn er sagt, der Ball ist schwarz.
(3) Der Ball ist grün.

C (1) Der Ball ist entweder schwarz oder grün.
(2) Der Ball ist rot.
(3) Der Ball ist entweder grün oder schwarz oder gelb.

D (1) Der Ball hat die gleiche Farbe wie mein Pullover.
(2) Wenn der Ball gelb ist, ist er nicht schwarz.
(3) Der Ball ist schwarz und grün.

Ermitteln Sie die Farbe des Balles für die folgenden beiden Fälle und untersuchen Sie, ob allein mit den vorliegenden Angaben die Farbe des Pullovers von D ermittelt werden kann! Wenn ja, geben Sie diese Farbe an!

Fall a) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei wahr.

Fall b) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei falsch.

3. In einem gleichseitigen Dreieck $\Delta\, ABC$ mit der Seitenlänge $a$ sei $M$ der Mittelpunkt des Umkreises. $S$ sei ein Punkt der in $M$ auf der Ebene des Dreiecks errichteten Senkrechten, für den

$\overline{AB} : \overline{SM} = 3 : \sqrt{6}$ gilt.

Beweisen Sie, daß das Tetraeder mit den Ecken $A$, $B$, $C$, $S$ regulär ist, d. h. daß alle Kanten dieses Tetraeders gleich lang sind!

4. Es seien $m$ und $n$ beliebige ganze Zahlen. Beweisen Sie, daß mindestens eine der Zahlen $x = 2mn$; $y = m^2 - n^2$; $z = m^2 + n^2$ durch 5 teilbar ist!

**Olympiadeklasse 11/12**

1. Es sind alle geordneten Paare $(x, y)$ reeller Zahlen anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x^2 - y^2 = 1 \qquad (1)$$

$$x^6 + y^6 = \frac{7}{16} \qquad (2)$$

erfüllt ist.

2. Der Binomialkoeffizient $\binom{a}{k}$ wird für jede beliebige reelle Zahl $a$ und jede natürliche Zahl $k \geqq 1$ durch

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot [a-(k-2)] \cdot [a-(k-1)]}{k!}$$

definiert.

a) Untersuchen Sie, ob auch in jedem hier genannten Fall für $a$ und $k$ die für ganzzahlige $a \geqq k$ aus dem Pascalschen Dreieck bekannte Beziehung

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1} \text{ gilt!}$$

b) Zeigen Sie, daß für $k > 2$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2}\, k!\,(k-2)!} \cdot (-1)^{k+1} \text{ gilt!}$$

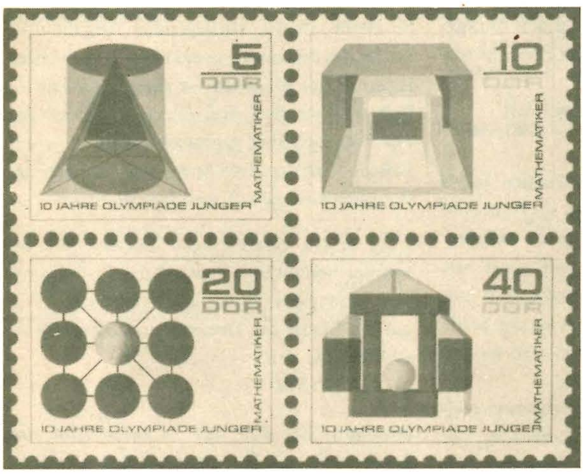
3. Die ersten Zeilen eines (beliebig fortsetzbaren) dreieckigen Zahlenschemas lauten:

| | |
|---|---|
| Zeile 0 | 1 |
| Zeile 1 | 1 1 1 |
| Zeile 2 | 1 2 3 2 1 |
| Zeile 3 | 1 3 6 7 6 3 1 |
| ...... | .............. |

Die allgemeine Vorschrift zur Bildung dieses Zahlenschemas lautet: Die einzige Zahl in Zeile 0 sei die Zahl 1.
Jede weitere Zahl sei gleich der Summe aus der unmittelbar über ihr stehenden Zahl und deren beiden Nachbarzahlen, wobei links und rechts von den Rändern fehlende Zahlen durch Nullen ersetzt zu denken sind. Es ist für jede natürliche Zahl $n$ zu beweisen, daß in diesem Schema die Summe $s_n$ aller Zahlen der Zeile $n$ den Wert $3^n$ hat.

4. Es sei $ABCD$ ein konvexes Tangentenviereck und $S$ der Schnittpunkt seiner Diagonalen, und es seien
$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$,
$\overline{AC}=e$, $\overline{BD}=f$ und $\delta$ die Größe des Winkels $\sphericalangle BSA$. Beweisen Sie, daß dann
$ac-bd=ef\cdot\cos\delta$. gilt!

(Lösungen siehe Heft 6/71 – Sonderbeilage – d. Red.)




Briefmarkenentwürfe, zusammengestellt zu Ehren der X. OJM von L. Klunker, Herzberg (Elster)

# Lösungen

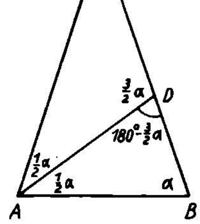
W 5 ■ 563 Der Autobus legt in einem Jahr $2\cdot 365$ Fahrten, also 730 Fahrten, zurück. Auf einer Fahrt werden $2\cdot 200$ m, also 400 m Fahrstrecke eingespart; das sind bei 730 Fahrten $730\cdot 400\text{ m}=292\,000\text{ m}=292\text{ km}$. Aus $292:40=7\frac{3}{10}$ folgt, daß in einem Jahr 7 Stunden und 18 Minuten Fahrtzeit eingespart wird.

W 5 ■ 564 Die gesuchten zweistelligen Zahlen lassen sich durch $10a+b$, ihre Quersummen durch $a+b$ darstellen, wobei $0<a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$ gilt. Entsprechend der Aufgabe erhalten wir dann
$(10a+b)+(a+b)=100$ oder vereinfacht
$11a+2b=100$ bzw. $11a=100-2b$. Wegen $2b<20$ gilt also $11a>80$ und damit $a>7$. Für $a=8$ wird $2b=100-88=12$, also $b=6$. Für $a=9$ erhält man wegen $2b=100-99=1$ für $b$ keine Lösung. Daher wird die Gleichung nur für $a=8$ und $b=6$ erfüllt. Es gibt genau eine Lösung; die Zahl lautet 86.

* 5 * 565 Die zweistellige Zahl sei $z$, dann lautet die fünfstellige Zahl $1\,000z+z=1\,001z$ $=91\cdot 11\cdot z$. Damit gilt auch $1001z:91=11z$, der Quotient ist also stets gleich dem Elffachen der ursprünglichen zweistelligen Zahl $z$.

W 6 ■ 568 Für das rechtwinklige Dreieck $ADC$ gilt $\sphericalangle ACD=90°-\alpha$; nach Voraussetzung gilt $\sphericalangle ACE=\frac{1}{2}\gamma$. Daraus folgt
$\delta=\frac{1}{2}\gamma-(90°-\alpha)$. Wegen $\gamma=180°-\alpha-\beta$ erhalten wir durch Substitution schließlich
$\delta=\frac{1}{2}(180°-\alpha-\beta)-90°+\alpha=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

W 6 ■ 569 In der nachstehenden Abbildung sei $\overline{AD}$ Winkelhalbierende des gleichschenkligen Dreiecks $ABC$ mit den kongruenten Basiswinkeln $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA=\alpha$. Deshalb gilt $\sphericalangle CAD=\sphericalangle DAB=\frac{1}{2}\alpha$.




Nach dem Außenwinkelsatz gilt ferner $\sphericalangle CDA=\sphericalangle ABD+\sphericalangle DAB=\frac{3}{2}\gamma$. Als Nebenwinkel ist Winkel $\sphericalangle ADB=180°-\frac{3}{2}\gamma$. Das Dreieck $ABD$ soll gleichschenklig sein; dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. $\sphericalangle DAB=\sphericalangle ABD$, also $\frac{1}{2}\alpha=\alpha$. Diese Gleichung wird nur für $\alpha=0°$ erfüllt, und das ist nicht möglich.

2. $\sphericalangle DAB=\sphericalangle ADB$, also $\frac{1}{2}\alpha=180°-\frac{3}{2}\gamma$.
Diese Gleichung wird nur für $\alpha=90$ erfüllt. Der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks kann nicht 90° betragen.

3. $\sphericalangle ABD=\sphericalangle ADB$, also $\alpha=180-\frac{3}{2}\alpha$. Diese Gleichung wird nur für $\alpha=72°$ erfüllt.
Die Innenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks $ABC$ betragen somit
$\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA=72°$ und $\sphericalangle ACB=36°$.
Für das zweite Teildreieck ADC gilt
$\sphericalangle CAD=\sphericalangle ACD=36°$, das heißt, auch dieses Dreieck ist gleichschenklig.

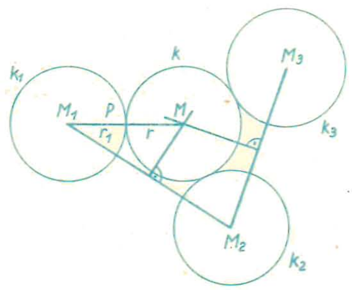
* 6 * 570 Aus $V=a^3$ und $27=3^3$ folgt, daß der angestrichene Würfel eine Kantenlänge von 3 dm bzw. 30 cm besitzt. Bei Aufteilung jeder Kante in $n$ gleiche Teile würde man nach dem Zersägen $(n-2)^3$ rauminhaltsgleiche Würfel erhalten, die völlig ohne Farbanstrich sind. Für $n=5$ erhält man $(5-2)^3=3^3=27$ Würfel; für $n=6$ dagegen $(6-2)^3=4^3=64$ Würfel. Um mindestens 30 Würfel zu erhalten, muß jede Kante in sechs gleiche Teile unterteilt werden. Aus
$30\text{ cm}:6=5\text{ cm}$ folgt, daß jeder der so erhaltenen Würfel eine Kantenlänge von 5 cm besitzt.

W 7 ■ 573 Wegen $t=\frac{s}{v}$ gilt
$t=\frac{0{,}1\text{ km}}{60\frac{\text{km}}{\text{h}}}=\frac{1}{600}\text{ h}=\frac{60\cdot 60}{600}\text{ s}=6\text{ s}$. Es wurde eine Zeit von 6 Sekunden gestoppt.

W 7 ■ 574 Entsprechend der Aufgabe gilt
$a+b+c+d+e+f+g+h$
$=1+2+3+4+5+6+7+8=36$ und
$a+e+h+d=b+f+g+c=18$.
Ferner gilt $a+e+h+d=a+e+f+b$, also $d+h=b+f$ und $a+e+h+d=c+g+h+d$, also $a+e=c+g$. Wir nehmen nun eine Fallunterscheidung vor.
1) Es sei $a+e=3$. Da sich Zahl 3 aus den gegebenen Zahlen nur auf genau eine Weise, nämlich durch $1+2$ als Summe darstellen läßt, scheidet dieser Fall wegen $a+e=c+g$ aus.
2) Es sei $a+e=4$. Auch die Zahl 4 läßt sich aus den gegebenen Zahlen nur auf genau eine Weise, nämlich durch $1+3$ darstellen; deshalb scheidet auch dieser Fall aus.
3) Es sei $a+e=5$. Wegen $a+e=c+g$ und $1+4=2+3=5$ könnte $a=1$, $e=4$, $c=2$, $g=3$ sein. Unter dieser Voraussetzung gilt

dann aber wegen $a+e+h+d=a+e+f+b$ auch $d+h=b+f=13$. Wegen $6+7=5+8=13$ können $d=6$, $h=7$, $b=5$, $f=8$ sein. Damit ist eine mögliche Lösung gefunden; auf die übrigen Fälle sei hier verzichtet.

***7*575** Es sei $k$ der zu konstruierende Kreis, $r$ sein Radius und $M$ sein Mittelpunkt. Ferner seien $r_1$, $r_2$, $r_3$ die Radien der Kreise $k_1$, $k_2$, $k_3$, und es gilt $r_1=r_2=r_3$. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt, daß $\overline{MM_1}=\overline{MM_2}=\overline{MM_3}=r+r_1$ gilt, da $r_1=r_2=r_3$. Der Mittelpunkt $M$ des Kreises $k$ ist als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{M_1M_2}$ und $\overline{M_2M_3}$ eindeutig bestimmt. Die Verbindungsgerade $MM_1$ schneidet den Kreis $k_1$ in $P$; $\overline{MP}$ ist der gesuchte Radius $r$ des zu konstruierenden Kreises $k$.




**W 8 ■ 578** Jede $n$-stellige natürliche Zahl läßt sich in der Form

$z=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10^1+a_0 10^0$

schreiben, wobei $a_n \cdot a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ die den Grundziffern der Zahl $z$ entsprechenden natürlichen Zahlen sind und $a_n>0$ gilt.

Vertauscht man nun in der Zahl $z$ die erste und die letzte Ziffer miteinander, so erhält man die Zahl

$z'=a_0 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10^1+a_0 10^0$.

Ist nun $a_n>a_0$, so erhält man die Differenz

$$\begin{aligned} z-z' &= a_n 10^n-a_0 10^n+a_0-a_n\\ &= a_n(10^n-1)-a_0(10^n-1)\\ &= (a_n-a_0)(10^n-1)\\ &= (a_n-a_0)\cdot \underbrace{999\ldots 9}_{n-1\ \text{Ziffern}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{z-z'}{9}=\frac{(a_n-a_0)\cdot 999\ldots 9}{9}=(a_n-a_0)\cdot \underbrace{111\ldots 1}_{n-1\ \text{Ziffern}}$$

Nun ist wegen $0<a_0<a_n<10$ $0<a_n-a_0<9$.

Also ist $\frac{z-z'}{9}$ eine Zahl, die aus lauter gleichen Ziffern besteht. Ist nun $a_n=a_0$, so erhält man die Differenz Null.

Ist aber $a_n<a_0$, so bildet man die Differenz $z'-z$ und stellt wie oben fest, daß auch $\frac{z'-z}{9}$ aus lauter gleichen Ziffern besteht.

In jedem Falle ist also die gebildete Zahl entweder gleich Null, oder sie besteht aus lauter gleichen Ziffern.

**W 8 ■ 579** Es sei $a$ die Länge der Quadratseite. Dann ist der Radius des einbeschriebenen Kreises gleich $\varrho=\frac{a}{2}$, also sein Flächeninhalt gleich

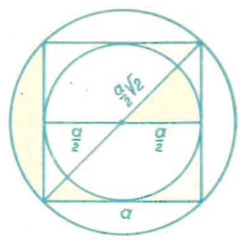
$$A_1=\pi\varrho^2=\frac{\pi}{4}a^2. \qquad \text{(vgl. die Abb.)}$$

Ferner ist der Radius des umbeschriebenen Kreises gleich der halben Länge der Diagonale des Quadrats, also gleich $r=\frac{a}{2}\sqrt{2}$, also sein Flächeninhalt gleich

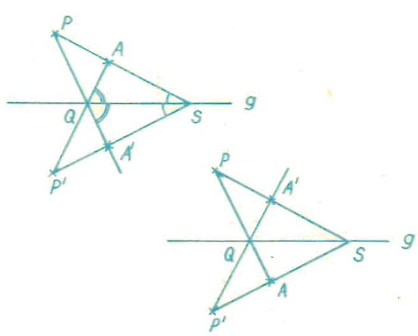
$$A_2=\pi r^2=\frac{\pi}{2}a^2.$$

Die Flächeninhalte der beiden Kreise verhalten sich also wie

$$\begin{aligned} A_1 : A_2 &= \frac{\pi}{4}a^2 : \frac{\pi}{2}a^2=\frac{1}{4}:\frac{1}{2}\\ &= 2:4=1:2. \end{aligned}$$




***8*580** a) $A$ liegt auf derselben Seite von $g$ wie $P$ (vgl. Abb. $a$). Da nach Voraussetzung $A$ nicht den gleichen Abstand von $P$ wie $g$ hat, schneidet die Verbindungsgerade $PA$ die Gerade $g$ in einem Punkt $S$. Wir verbinden $P'$ mit $A$ und erhalten den Schnittpunkt $Q$ dieser Verbindungsgeraden mit der Geraden $g$. Dann verbinden wir $P$ mit $Q$; diese Verbindungsgerade schneidet die Gerade $SP'$ in dem Punkt $A'$. Wir behaupten nun, daß $A'$ der zu $A$ in bezug auf die Gerade $g$ symmetrisch gelegene Punkt ist.




*Beweis:* Da $P$ und $P'$ nach Voraussetzung in bezug auf die Gerade $g$ symmetrisch liegen, gilt

$$\sphericalangle PQS=\sphericalangle P'QS,$$

ferner gilt

$$\sphericalangle PQA=\sphericalangle P'QA' \ \text{(Scheitelwinkel)},$$

also $\sphericalangle AQS=\sphericalangle A'QS$. (1)

Außerdem gilt

$\sphericalangle QSA=\sphericalangle QSA'$ (2)

und $\overline{QS}=\overline{QS}$. (3)

Aus (1), (2) und (3) folgt nach einem Kongruenzsatz ($wsw$)

$\Delta QSA\cong\Delta QSA'$, (4)

also $\overline{SA}=\overline{SA'}$. (5)

Aus (2) und (5) folgt nun, daß $A$ und $A'$ in bezug auf die Gerade $g$ symmetrisch liegen. w.z.b.w.

b) $A$ und $P$ liegen auf verschiedenen Seiten von $g$ (vgl. Abb. $b$). Dann verbinden wir $P$ mit $A$ und erhalten den Schnittpunkt $Q$ mit der Geraden $g$. Wir verbinden $P'$ mit $Q$; diese Verbindungsgerade schneidet die Gerade $SP$ in $A'$. $A'$ ist der zu $A$ in bezug auf die Gerade $g$ symmetrisch gelegene Punkt.

Der Beweis wird analog wie im Falle a) geführt.

**W 9 ■ 582** Die gegebene Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn

$x^3+x^2>0$, d. h., $x^2(x+1)>0$ gilt.

Für $x=0$ ist also die gegebene Ungleichung nicht erfüllt.

Nun gilt für alle $x$ mit $x\neq 0$ $\quad x^2>0$

und für alle $x$ mit $\quad x>-1 \quad x+1>0$,

dagegen für alle $x$ mit $x<-1 \quad x+1<0$.

Daher ist $x^2(x+1)>0$, wenn $x\neq 0$

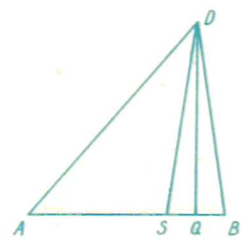
und $x>-1$,

und $\quad x^2(x+1)<0$, wenn $x<-1$.

Die gegebene Ungleichung ist daher für alle $x$ erfüllt, für die

$x>-1$ und $x\neq 0$ gilt.

**W 9 ■ 583** Es sei $Q$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{SB}$ (vgl. die Abb.). Dann gilt wegen $\overline{SB}=2$ cm $\overline{SQ}=\overline{QB}=1$ cm. Da das Dreieck $SBD$ gleichschenklig mit $\overline{DS}=\overline{DB}=9$ cm ist, ist die Strecke $\overline{DQ}$ die Höhe in diesem gleichschenkligen Dreieck. Wir erhalten, wenn wir den Satz des Pythagoras in dem rechtwinkligen Dreieck $SQD$ anwenden,




$\overline{DQ}^2=\overline{DS}^2-\overline{SQ}^2=81\ \text{cm}^2-1\ \text{cm}^2=80\ \text{cm}^2$.

Nun können wir die gesuchte Länge der Strecke $\overline{AD}$ aus dem rechtwinkligen Dreieck $AQD$ berechnen und erhalten

$\overline{AD}^2=\overline{DQ}^2+\overline{AQ}^2=80\ \text{cm}^2+64\ \text{cm}^2$

$=144\ \text{cm}^2$, also $\overline{AD}=12$ cm.

***9*584** Zur Lösung benutzen wir die folgende Formel für die dritte Potenz der Summe $a+b+c$, deren Richtigkeit wir durch Nachrechnung bestätigen können:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2\\ &\quad +b^2c+bc^2+a^2c+ac^2)+6abc. \end{aligned} \qquad (1)$$

Setzen wir in dieser Formel $a=xy$, $b=yz$, $c=zx$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(xy+yz+zx)^3 &= x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\\ &\quad +3(x^2y^3z+xy^3z^2+xy^2z^3+x^2yz^3\\ &\quad +x^3y^2z+x^3yz^2)+6x^2y^2z^2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Andererseits erhalten wir

$$\begin{aligned} xyz(x+y+z)^3 &= xyz\,[x^3+y^3+z^3+3(x^2y\\ &\quad +xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2)+6xyz].\\ xyz(x+y+z)^3 &= xyz(x^3+y^3+z^3)\\ &\quad +3(x^3y^2z+x^2y^3z+xy^3z^2+xy^2z^3\\ &\quad +x^3yz^2+x^2yz^3)+6x^2y^2z^2. \end{aligned} \qquad (3)$$

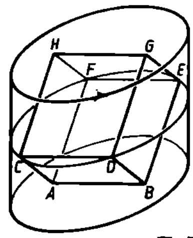
Wir erkennen, daß auf der rechten Seite der

Gleichungen (2) und (3) mit Ausnahme der ersten drei Summanden die Summanden übereinstimmen. Durch Subtraktion erhalten wir daher aus den Gleichungen (2) und (3):

$$(xy+yz+zx)^3 - xyz\,(x+y+z)^3$$
$$= x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 - xyz\,(x^3+y^3+z^3)\,. \quad (4)$$

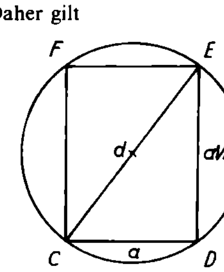
Diese Gleichung ist für alle reellen Zahlen $x, y, z$ erfüllt.

W 10/12 ■ 586 Es sei $ABCDEFGH$ der in das Gefäß hineingestellte Würfel, dessen Kantenlänge wir mit $a$ bezeichnen. Ferner seien $\overline{AB}$ die Kante des Würfels, die den Gefäßboden berührt, $D, E, F, G$ die Ecken des Würfels, die die Gefäßwand berühren, $\overline{HG}$ die Kante des Würfels, die genau in der Wasseroberfläche liegt.




$\overline{CE}=\overline{DF}=\overline{AG}=\overline{BH}=d$

Dann ist das Viereck $CDEF$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{CD}=\overline{EF}=a$ und $\overline{DE}=\overline{FC}=a\sqrt{2}$, weil $\overline{CD}$ eine Kante und $\overline{DE}$ eine Flächendiagonale des Würfels ist. Da die vier Ecken $C, D, E, F$ in gleicher Höhe über dem Gefäßboden liegen, ist dem Rechteck $CDEF$ ein Kreis umbeschrieben, der dem Grundkreis des Gefäßes kongruent ist und dessen Durchmesser gleich $d=30$ cm ist. Daher gilt




$$d^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2\,,$$

also $a^2 = \frac{d^2}{3}$, $a = \frac{d}{3}\sqrt{3}$.

Ferner ist die Länge $h$ der Höhe des zylindrischen Gefäßes bis zur Wasseroberfläche, gleich der Länge der Strecke $\overline{BG}$, die eine Flächendiagonale des Würfels ist; daher gilt

$$h = a\sqrt{2} = \frac{d}{3}\sqrt{6}\,.$$

Nun ist das Volumen $V$ der eingefüllten Wassermenge gleich der Differenz aus dem Volumen eines geraden Kreiszylinders mit dem Durchmesser $d$ und der Höhe $h$ und dem Volumen des Würfels mit der Kantenlänge $a$. Wir erhalten daher

$$V = \frac{\pi}{4}d^2h - a^3 = \frac{\pi}{4}d^2\frac{d}{3}\sqrt{6} - \frac{d^3}{27}3\sqrt{3}$$
$$= \frac{\pi d^3}{12}\sqrt{6} - \frac{d^3}{9}\sqrt{3}\,.$$

Setzt man nun den gegebenen Wert $d=30$ cm ein, so erhält man

$$V = \left(\frac{\pi\, 30^3}{12}\sqrt{6} - \frac{30^3}{9}\sqrt{3}\right)\text{cm}^3$$

$(\pi \cdot 2250\sqrt{6} - 3000\sqrt{3})\ \text{cm}^3 \approx 12\,118\ \text{cm}^3$.

Das Volumen der eingefüllten Wassermenge beträgt also rund 12,1 l.

W 10 12 ■ 587 a) Entnimmt man dem Gefäß $3+3+3+3=12$ Kugeln, so besteht im ungünstigsten Fall die Möglichkeit, daß man 3 weiße, 3 schwarze, 3 rote und 3 blaue Kugeln erhält, also nicht 4 Kugeln von der gleichen Farbe. Die Entnahme von 12 Kugeln reicht also noch nicht aus, um das gewünschte Ergebnis mit Sicherheit zu erreichen.

Entnimmt man jedoch 13 Kugeln, also eine Kugel mehr, so erhält man auch im ungünstigsten Fall 4 Kugeln von einer Farbe. Daher muß die Versuchsperson im Fall a) mindestens 13 Kugeln ziehen.

b) Entnimmt man dem Gefäß $100+9+9+9=127$ Kugeln, so besteht im ungünstigsten Fall die Möglichkeit, daß man 100 Kugeln von einer Farbe und je 9 Kugeln von einer anderen Farbe erhält, also nicht wenigstens je 10 Kugeln von zwei Farben. Die Entnahme von 127 Kugeln reicht also noch nicht aus.

Entnimmt man jedoch noch eine weitere Kugel, so erhält man auch im ungünstigsten Fall 10 Kugeln von einer weiteren Farbe. Daher muß die Versuchsperson im Fall b) mindestens 128 Kugeln ziehen.

c) Entnimmt man dem Gefäß $100+100+100+9=309$ Kugeln, so besteht im ungünstigsten Fall die Möglichkeit, daß man je 100 Kugeln von je drei Farben und 9 Kugeln von der letzten Farbe erhält. Die Entnahme von 309 Kugeln reicht also noch nicht aus. Entnimmt man jedoch noch eine weitere Kugel, so erhält man auch im ungünstigsten Fall 10 Kugeln von jeder der vier Farben. Daher muß die Versuchsperson im Fall c) mindestens 310 Kugeln ziehen.

* 10 12 * 588 Es sei $f(x)=ax+b$ ein Polynom, für das die Bedingung der Aufgabe erfüllt ist. Dann gilt

$$f[f(x)] = a(ax+b)+b$$
$$= a^2x+ab+b\,.$$ Da nun

$f[f(x)] = 2x+1$ gelten soll, erhalten wir die Gleichung

$$a^2x+ab+b = 2x+1\,. \quad (1)$$

Diese Gleichung ist aber nur dann für alle $x$ erfüllt, wenn die Koeffizienten übereinstimmen, wenn also

$a^2=2$ und $ab+b=1$ gilt. Ist nun (2)

$a=\sqrt{2}$ und $b=\frac{1}{a+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$
$=\sqrt{2}-1$,

so sind die Gleichungen (2) und damit auch die Gleichung (1) erfüllt.

Daher hat das Polynom

$f(x)=\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1$ die gesuchte Eigenschaft.

Ist nun $a=-\sqrt{2}$ und (3)

$$b=\frac{1}{a+1}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{1-2}=-\sqrt{2}-1,$$

so sind auch die Gleichungen (2) und (1) erfüllt. Daher hat auch das Polynom

$$f(x) = -\sqrt{2}x-\sqrt{2}-1 \quad (4)$$

die gesuchte Eigenschaft. Wegen (2) gibt es keine weiteren linearen Polynome mit der gesuchten Eigenschaft.

Es gibt daher genau zwei lineare Polynome, für die die gegebene Bedingung erfüllt ist, nämlich

$f(x)=\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1$

und $f(x)=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}-1$.

6 ▲ 595 Es sei $x$ die Anzahl der Fahrten zum Fahrpreis von 15 Pf und $y$ die Anzahl der Fahrten zum Fahrpreis von 20 Pf, dann gilt $15x+20y=200$ bzw. $3x+4y=40$, wobei $x$ und $y$ natürliche Zahlen sind. Genau vier Zahlenpaare $(x,y)$, nämlich die Paare (0,10), (4,7), (8,4) und (12,1) erfüllen die Gleichung.

| Fahrten in Halle | Fahrten in Leipzig |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 4 | 7 |
| 8 | 4 |
| 12 | 1 |

6 ▲ 596 Es sei $x$ die Anzahl der zu Pferde zurückgelegten Kilometer. Dann legte der Forscher mit dem Boot $3\frac{1}{2}$ km und zu Fuß $2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{2}x=\frac{49}{6}x$ km zurück. Die Gleichung $x+\frac{7}{2}x+\frac{49}{6}x=3040$ besitzt die Lösung $x=240$. Der Forscher legte also zu Pferde 240 km, mit dem Boot 840 km und zu Fuß 1960 km zurück.

7 ▲ 600 Wegen $k(a,b)=12$ gilt $a\cdot k=12$ und wegen $k(a,c)=27$ gilt $a\cdot m=27$; dabei sind $k$ und $m$ natürliche Zahlen. Wegen $2^2\cdot 3=12$ und $3^3=27$ und wegen $a>1$ folgt daraus $a=3$. Wegen $k(a,c)=27$ gilt daher $c=27$. Aus $c=27$ und $k(b,c)=108$ folgt, da $b$ wegen $k(a,b)=12$ ein Teiler von 12 sein muß, $b=4$ oder $b=12$. Die Aufgabe besitzt somit zwei Lösungen; die beiden Tripel (3, 4, 27) und (3, 12, 27) erfüllen die gestellten Bedingungen.

7 ▲ 601 Das k.g.V. der Zahlen 8, 6 und 4 ist gleich 24. Die Bedingungen a) bis c) erfüllen alle Zahlen der Form $24n-1$ mit $n=1,2,3,4,\ldots$ Die Bedingung c) erfüllen alle Zahlen der Form $10m+1$ mit $m=0,1,2,3,4,\ldots$ Die kleinste natürliche Zahl, die alle vier Bedingungen erfüllt, ist demnach die Zahl 71; denn aus $n=3$ folgt $24n-1=71$ und aus $m=7$ folgt $10m+1=71$. Das k.g.V. der Zahlen 8, 6, 4 und 10 lautet 120. Alle Zahlen der Form $120k+71$ mit $k=1,2,3,\ldots$, 7 erfüllen die Bedingungen der Aufgabe; es gibt sieben solche Zahlen, sie lauten 191, 311, 431, 551, 671, 791, 911.

8 ▲ 605 Da $p$ eine Primzahl mit $p>3$ ist, läßt sich $p$ in der Form $p=2k+1$ darstellen, wobei $k$ eine natürliche Zahl mit $k>1$ ist. Man erhält daher

$$p^2-1=(p-1)(p+1)=2k(2k+2)$$
$$=4k(k+1),$$

wobei entweder $k$ oder $k+1$ eine gerade Zahl ist. Daher ist $p^2-1$ durch 8 teilbar.

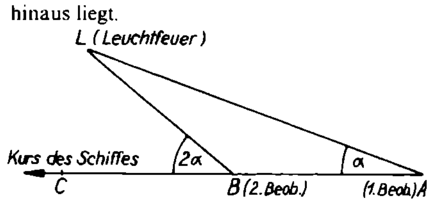
Andererseits läßt sich aber die Primzahl $p$, die größer als 3 ist, auch in der Form $3n+1$ oder $3n-1$ darstellen, wobei $n$ eine natürliche Zahl mit $n>1$ ist; denn $p$ ist nicht durch 3 teilbar, ist also entweder um 1 größer oder um 1 kleiner als ein Vielfaches von 3. Man erhält daher

entweder $p^2-1=(p-1)(p+1)=3n(3n+2)$

oder $\quad p^2-1=(p-1)(p+1)=(3n-2)3n$.

Man erkennt, daß in beiden Fällen $p^2-1$ durch 3 teilbar ist. Da die Zahl $p^2-1$, wobei $p$ größer als 3 ist, sowohl durch 8 als auch durch 3 teilbar ist, ist sie auch durch 24 teilbar, w.z.b.w.

8 ▲ 606 Es seien $A$ der Standort des Schiffes bei der ersten Beobachtung, $B$ der Standort bei der zweiten Beobachtung und $L$ der Standort des Leuchtfeuers (vgl. die Abb.). Ferner sei $C$ ein Punkt auf der Geraden $AB$, der auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ über $B$ hinaus liegt.




Dann gilt nach Voraussetzung

$$\sphericalangle BAL = 20^\circ = \alpha, \quad \sphericalangle CBL = 40^\circ = 2\alpha.$$

Nach dem Satz über die Außenwinkel des Dreiecks gilt daher

$$\sphericalangle CBL = \sphericalangle BAL + \sphericalangle ALB,$$

also $\quad 2\alpha = \alpha + \sphericalangle ALB$, d.h., $\sphericalangle ALB = \alpha$.

Das Dreieck $ALB$ ist also gleichschenklig mit $\overline{LB}=\overline{AB}$. Nun hat das Schiff nach 20 min Fahrt 5 sm zurückgelegt; daher ist $\overline{AB}=5$ sm und auch $\overline{BL}=5$ sm.

Das Schiff ist also bei der zweiten Beobachtung 5 sm von dem Leuchtfeuer entfernt.

Zur Anfertigung einer maßstäblichen Zeichnung zeichnen wir die Strecke $\overline{AB}=5$ sm $\hat{=}5$ cm, tragen an den Strahl $AB$ einen Winkel von 20° und an den Strahl $BC$ einen Winkel von 40° an. Die freien Schenkel dieser Winkel schneiden sich in $L$. Wir entnehmen der Zeichnung $\overline{BL}=5$ cm $\hat{=}5$ sm, womit das obige Ergebnis durch die Zeichnung bestätigt wurde.

9▲610 1. Am schnellsten löst man solche Aufgaben wie die vorliegende mit Hilfe von *Zahlenkongruenzen*. Wir erhalten nämlich

$13 \equiv 4 \pmod 9$, $7 \equiv 7 \pmod 9$,

$13^2 \equiv 7 \pmod 9$, $7^2 \equiv 4 \pmod 9$,

$13^3 \equiv 1 \pmod 9$, $7^3 \equiv 1 \pmod 9$; also

$13^{3k} \equiv 1 \pmod 9$, $7^{3k} \equiv 1 \pmod 9$,

$13^{3k+1} \equiv 4 \pmod 9$, $7^{3k+1} \equiv 7 \pmod 9$,

$13^{3k+2} \equiv 7 \pmod 9$, $7^{3k+2} \equiv 4 \pmod 9$,

wobei $k$ eine beliebige natürliche Zahl ist. Daher gilt

für $n=3k \quad : 2\cdot 13^n+5\cdot 7^n$

$\equiv 2\cdot 1+5\cdot 1\equiv 7 \pmod 9$,

für $n=3k+1 : 2\cdot 13^n+5\cdot 7^n$

$\equiv 2\cdot 4+5\cdot 7\equiv 43\equiv 7 \pmod 9$,

für $n=3k+2 : 2\cdot 13^n+5\cdot 7^n$

$\equiv 2\cdot 7+5\cdot 4\equiv 34\equiv 7 \pmod 9$.

In allen Fällen läßt also die Zahl $2\cdot 13^n+5\cdot 7^n$ bei Division durch 9 den gleichen Rest, nämlich den Rest 7.

2. Wer noch nicht mit Zahlenkongruenzen rechnen kann, kann die Aufgabe auch anders lösen, z. B. wie folgt:

Wir setzen $z_n=2\cdot 13^n+5\cdot 7^n$ und erhalten zunächst

$$z_0=2\cdot 1+5\cdot 1=7,$$
$$z_1=2\cdot 13+5\cdot 7=61,$$
$$z_2=2\cdot 13^2+5\cdot 7^2=583.$$

In diesen drei Fällen erhalten wir bei Division durch 9 den Rest 7.

Um den Beweis allgemein zu führen, untersuchen wir die drei Fälle $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$, wobei $k$ eine natürliche Zahl ist. Ferner setzen wir

$13^3=2197=9\cdot 244+1$, $7^3=343=9\cdot 38+1$

und beachten, daß

$(9\cdot 244+1)^k=9m+1$, $(9\cdot 38+1)^k=9n+1$,

wobei $m$ und $n$ natürliche Zahlen sind; denn führt man die Multiplikation der gleichen Faktoren aus (oder wendet den Binomischen Satz an), so erhält man eine Summe, deren Summanden alle den Faktor 9 enthalten mit Ausnahme des letzten, der gleich 1 ist.

Daher gilt für

$$\begin{aligned}
n=3k : z_n &= 2\cdot(13^3)^k+5\cdot(7^3)^k\\
&= 2\cdot(9m+1)+5\cdot(9n+1)\\
&= 9\cdot(2m+5n)+7;\\
n=3k+1 : z_n &= 2\cdot 13\cdot(13^3)^k+5\cdot 7\cdot(7^3)^k\\
&= 26\cdot(9m+1)+35\cdot(9n+1)\\
&= 9\cdot(26m+35n)+26+35\\
&= 9\cdot(26m+35n)+9\cdot 6+7;\\
n=3k+2 : z_n &= 2\cdot 13^2\cdot(13^3)^k+5\cdot 7^2\cdot(7^3)^k\\
&= 338\cdot(9m+1)+245\cdot(9n+1)\\
&= 9\cdot(338m+245n)+338+245\\
&= 9\cdot(338m+245n)+9\cdot 64+7.
\end{aligned}$$

In allen drei Fällen erhalten wir daher, wenn wir $z_n$ durch 9 dividieren, den Rest 7, w.z.b.w.

**Nachtrag zu Heft 6/70,** S. VI., Aufgabe 3, Klassenstufe 9:

2. *Weg:* Multiplikation von (1) mit $(n+1)$ ergibt

$mnx+mx=ny+nz+y+z$,

Multiplikation von (2) mit $(m+1)$ ergibt

$mny+ny=mx+mz+x+z$,

Multiplikation von (3) mit $(mn-1)$ ergibt

$mnpz-pz=mnx+mny-x-y$.

Nach Addition der drei erhaltenen Gleichungen und Division durch $z\ (\neq 0)$ folgt (4).

Aus (4) folgt wegen $m>0$, $n>0$, $p>0$, daß $mn-1>0$ ist. Daher kann die gesuchte Abhängigkeit nur

(7) $\quad p=\dfrac{m+n+2}{mn-1}$ lauten.

Umgekehrt kann von (1), (2), (7) auf (1), (2), (3) geschlossen werden, und daher erfüllt (7) in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe.

Ein Beispiel für eine mögliche Durchführung des Schlusses von (1), (2), (7) auf (1), (2), (3):

Aus (7) folgt $mn-1\neq 0$ sowie (4) und daraus

$(mn-1)pz=(nz+z)+(mz+z)$

Unter Verwendung der mit $(n+1)$ multiplizierten Gleichung (1) und der mit $(m+1)$ multiplizierten Gleichung (2) folgt weiter

$$\begin{aligned}
(mn-1)pz &= (mnx+mx-ny-y)\\
&\quad +(mny+ny-mx-x)\\
&= (mn-1)(x+y),
\end{aligned}$$

also schließlich (3).

**Lösungen zu alpha-heiter**

**alphaismen**

Sophie – Minirock – Rodelpiste – Etage – Rohling – Gemüse – Nylon – Büroklammer – Minol – VEB Taxi – Veronika – Minimum – Nildelta – Malfabrot – Müll – Bikini

**Lang, länger, am längsten**

(1) $4a+8c+4b$; (2) $4a+4c$; (3) $6a+4c+6b$

a) (1)>(2) und (3)>(2) führt auf : (2) benötigt den wenigsten Bindfaden.

b) $(1)-(2)=4c+4b$; $(3)-(2)=2a+6b$

Voraussetzung:

$a+b>2c \quad |+2b$

$a+3b>2c+2b \quad |\cdot 2$

$2a+6b>4c+4b \quad$ ergo (3)>(1)

Reihenfolge: (2)<(1)<(3)

**Werterhaltung**

1. Weg: Die Ölschicht stellt einen Hohlzylinder dar.

$$V_{HZ}=\left[\frac{\pi(d+2s)^2}{4}-\frac{\pi d^2}{4}\right]l=\pi sl(d+s)$$

Da $s$ gegenüber $d$ klein ist, wird es als Summand weggelassen.

$V_{HZ}\approx \pi dls$

Der Durchmesser der Kugel sei $x$.

$$V_{Ku}=\frac{\pi x^3}{6}$$

$x=\sqrt[3]{6dls}$

2. Weg: Die Ölschicht wird näherungsweise als Quader mit den Kanten $\pi d$, $l$ und $s$ aufgefaßt.

$V_{Qu}=\pi dls$

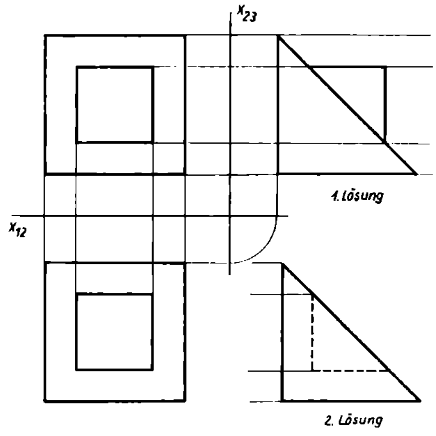
Weiter wie beim 1. Weg.

Zahlenfall

$x=\sqrt[3]{6\cdot 0{,}1\cdot 5\cdot 0{,}001}\approx 0{,}14$

Der Durchmesser des Tropfens beträgt rund 1,4 mm.

**Kreuzriß gesucht**



## alpha-Abzeichen in Gold

Für dreijährige regelmäßige und erfolgreiche Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb erhielten 150 *alpha*-Leser das Abzeichen in Gold sowie eine Anerkennungsurkunde. Die im Druck hervorgehobenen Schüler erhielten Buchprämien. Die in Klammern gesetzten Zahlen geben die Anzahl der im Wettbewerbsjahr 1969/70 eingesandten Lösungen an.

**Klassenstufe 5**

**Sigrun Geyer** Dares-Salaam, Rep. Tanzania (32); **Ole-Andrée** Strzalla 22 Greifswald (30); **Annegret Kirsten** 422 Leuna (27); **Eckhard Schadow** 14 Oranienburg (24); **Matthias Liehm** 172 Ludwigsfelde

**Klassenstufe 6**

**Sabine Anders** 75 Cottbus (49); **Kerstin Bachmann** 402 Halle (36); **Carmen Schneider** 6081 Fambach (25); **Karin Weyh** 6081 Fambach (24); **Wolfgang Richter** 83 Pirna (23); **Ute Heimel** 6081 Fambach; Andrea Messerschmidt 6081 Heßles; Uta Zebisch 6081 Fambach; Gudrun Manske 6088 Steinbach-Hallenberg; Marina Volk 6081 Fambach; Gerd Oberwinter 1503 Potsdam-Bornstedt; Achim Last 6081; Viktoria Weise 48 Naumburg; Detlef Ballerstein 2201 Bandelin; Joh.-Christian Albrecht 1281 Rüdnitz; Matthias Albrecht 1281 Rüdnitz

**Klassenstufe 7**

**Bernd Zaddach** 75 Cottbus (76); **Bernd Mathiszik** 50 Erfurt (50); **Ralph Lehmann** 1273 Petershagen (40); **Christoph Scheurer** 9611 Glauchau-Gesau (30); **Jörg Hutschenreiter** 8020 Dresden (29); **Christian Endter** 6088 Steinbach-Hallenberg (24); **Angelika Kirchhoff** 701 Leipzig (21); **Heike Jurack** 8502 Burkau (19); Dagmar Rißmann 8021 Dresden; Gerd Falk 1522 Kleinmachnow; Uwe Quasthoff 7022 Leipzig; Andreas Gehb 6081 Fambach; Uwe Lewandovski 705 Leipzig; Rita Oswald 8291 Friedersdorf; Hans-Jürgen Förster 1532 Kleinmachnow; Roswitha Schlotte 90 Karl-Marx-Stadt; Ute Rosenbaum 9402 Bernsbach; Bettina Zabel 57 Mühlhausen; Gisela Köhler 926 Hainichen; Edda Günther 6506 Ronneburg; Eveline Wolf 6081 Fambach; Bernd Heymann 7027 Leipzig; Lutz Püffeld 1422 Hennigsdorf; Hans-Jochen Rodner 3014 Magdeburg; Karin Fischer 8036 Dresden; Cornelia Johne 8023 Dresden; Roswitha Leyh 5906 Ruhla; Eugen Büchner 6081 Springstille; Uwe Hafermann, 5801 Gräfenhain; Elke Schneider 50 Erfurt; Christa Linß 6081 Springstille; Bernd Henrich 9402 Bernsbach; Adelheid Ficker 9402 Bernsbach; Georg Linß 6081 Springstille; Eberhard Eff 6088 Steinbach-Hallenberg; Christa Ssyckov 8502 Burkau; Rainer Schwierz 8502 Burkau; Hans-Ulrich Frömmer 208 Neustrelitz; Andre Schübel 6051 Goldlauter; Bernd Bielig 8502 Burkau; Monika Mücke 8312 Heidenau; Wolfgang Herrmann 6088 Steinban- Hallenberg; Bernhard Rabending 301 Magdeburg; Annette Hessenmüller 6081 Fambach; Jost-Michael Fischer 1431 Grüneberg; Annelie Häfner 6088 Steinbach-Hallenberg; Henrik Frank 22 Greifswald; Hans-Peter Heller 608 Schmalkalden; Reinhild Fuhrmann 5801 Nauendorf; Cornelia Neumann 89 Görlitz; Claus Neumann 9402 Bernsbach

**Klassenstufe 8**

**Rainer Zerch** 24 Wismar (51); **Albrecht Heß** 8027 Dresden (40); **Ehrenfried Zschech** 86 Bautzen (27); **Herwig Gratias** 523 Sömmerda (26); **Angela Rohrbeck** 2302 Franzburg (25); **Bernd Klipps** 2051 Boddin (23); **Eberhard Manske** 6088 Steinbach-Hallenberg (22); Claus-Detlev Bauermeister 8019 Dresden; Frank Ihlenburg 22 Greifswald; Volker Lippoldt 7022 Leipzig; Bernd Singer 99 Plauen; Sigrid Jankowski 205 Teterow; Dietlind Kobes 205 Teterow; Rita Koch 6081 Trusetal; Volker Boos 4601 Dabrun; Renate Recknagel 6088 Steinbach-Hallenberg; Steffen Goetz 9201 Dorfchemnitz; Renate Köhler 66 Greiz-Pohlitz; Lothar Bombel 1281 Rüdnitz; Dieter Bornmann 6082 Breitungen; Ralf Suchert 8302 Bad Gottleuba; Frank Baumgartl 9412 Schneeberg; Wilfried Nätebusch 1501 Alt-Töplitz; Elke Wolf 6081 Fambach; Hans-Jürgen Reinsch 171 Luckenwalde; Andreas Eidner 9271 Falken; Hendrik Latwesen 63 Ilmenau; Günter Rieckhoff 2801 Blievenstorf; Regina Neuber 6088 Steinbach-Hallenberg; Peter Linhard 7305 Waldheim; Monika Seiler 53 Weimar

**Klassenstufe 9**

**Andreas Juhl** 425 Eisleben (25); **Jürgen Zabel** 57 Mühlhausen (22); **Gernot Spiewok** 22 Greifswald (19); **Harald Herrmann** 9301 Hammerunterwiesenthal (17); **Peter Mathé** 29 Wittenberge (16); **Gerhard Recknagel** 6088 Steinbach-Hallenberg (16); **Ullrich Tetzlaff** 1553 Friesack; **Sigrid Straßburger** 606 Zella-Mehlis; **Reinhard Liesigk** 44 Bitterfeld; Karin Krüger 453 Roßlau; Peter Mohr 87 Löbau; Ulrike Voigt 9533 Wilkau-Haßlau; Annerose Lehmann 7027 Leipzig; Jörg Lehnert 2034 Tutow; Ingrid Preiß 929 Rochlitz; Rainer Wilde 1953 Fehrbellin; Beate Weise 48 Naumburg; Tilo Stöckert 99 Plauen; Barbara Kiehm 6088 Steinbach-Hallenberg; Hans-J. Karl 612 Eisfeld

**Klassenstufe 10**

**Frank Müller** 798 Finsterwalde (40); **Heinz Marbes** 128 Bernau (38); **Arnulf Möbius** 7124 Holzhausen (27); **Jörg Büchner** 75 Cottbus (25); **Siegfried Kropf** 3251 Hakeborn (23); **Dietmar Wegner** 114 Berlin-Biesdorf (22); **Ilona Boenigk** 94 Aue (20); **Wolfgang Riedel** 90 Karl-Marx-Stadt (17); Detlef Karl 608 Schmalkalden; Klaus Dietze 36 Halberstadt; Rainer Gutjahr 5807 Ohrdruf; Bernd Platzer 4204 Bad Lauchstädt; Frank Kretzschmar 7043 Leipzig; Klaus Schönefeld 53 Weimar; Norbert Köppe 1801 Glienecke; Bernd Hofmann 8808 Niederoderwitz; Jürgen Dubslaff 50 Erfurt; Petra Jauch 59 Eisenach; Christian Philipp 8506 Ohorn; Hans-Dieter Recknagel 6088 Steinbach-Hallenberg; Renate Zimmermann 8036 Dresden; Hans-Jürgen Mehls 5603 Dingelstädt; Jürgen Voigt 9533 Wilkau-Haßlau; Rainer Kutscha 8701 Rennersdorf; Thomas Kühn 5812 Waltershausen; Gudrun Zschocke 9112 Burgstädt

### Vorbildliche Hilfe

Anfang November wurden 120 Päckchen mit Buchprämien für die Preisträger des Wettbewerbs 1969/70 versandt.

Wir danken den Verlagen, welche uns Bücher im Wert von 1 500 M zur Verfügung stellten. Das ist ein echtes Zeichen der Anerkennung für die vielen Tausend aktiven Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb.

Einen wertvollen Beitrag zur weiteren Qualifizierung unserer Leser leisteten:
▪ VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin ▪ VEB Fachbuchverlag, Leipzig ▪ Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin ▪ Transpress, VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin ▪ VEB Verlag Technik, Berlin ▪ Sportverlag, Berlin ▪ Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin ▪ BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig ▪ Der Kinderbuchverlag, Berlin ▪ Verlag Leipziger Volkszeitung, Leipzig ▪ Verlag Die Wirtschaft, Berlin.

### Kollektive Beteiligung

Alle Schulen des Kreises Schmalkalden; OS Rudi Arndt, Geisa; OS Hainrode; Klub Jg. Mathematiker Cottbus; OS Eilenburg; OS Teterow; OS Parkentin; M.-A.-Nexö-OS, Marienberg; OS II Dingelstädt; E.-Thälmann-OS, Stralsund; OS Alt-Töplitz; J.-Brinckman-OS, Goldberg; EOS Worbis/Eichsfeld; TOS Neuenhofe; E.-Weinert-OS, Altkalen; OS Mahlis; *alpha*-Club Stralsund (Triebser Vorstadt); OS Burkau; OS Rüdnitz; OS Leinefelde; OS Greußen; OS Bad Gottleuba; OS Prießnitz; Comenius-OS, Oranienburg; OS Dorfchemnitz; OS Löderburg; OS Karow; OS M.-Kirchner, Rudolstadt; K.-Kollwitz-OS, Bützow; G.-Schumann-OS, Lauchhammer; OS Greiz-Irchwitz; OS Wurzen; F.-Reuter-OS Siedenbollentin; E.-M.-Arndt-OS, Greifswald; OS Altentreptow; H.-Beimler-OS, Rothenkirchen; OS Gusen; C.-Zetkin-OS, Wiehe/Unstruttal; 29. OS Leipzig; OS II Seelow; OS F.-Schmenkel, Schwedt; Klub Jg. Mathematiker, Karl-Marx-Stadt; OS Naunhof; OS Rotta; OS Radis

# Wissen, wo . . .

## Inhaltsverzeichnis 1967/70


**alpha (Zeitschrift alpha)**

2/67, 1/68 Wissen, wo (eine Anleitung zum Selbststudium) — H. Herzog J. Lehmann
6/68 *alpha* berichtet — J. Lehmann
5/69 An die Leser der Zeitschrift „*alpha*" — A. Markuschewitsch
6/69 *alpha* berichtet — J. Lehmann

**alpha-Wettbewerb**

1/67, 4/67, 1/68, 5/69, 5/70 Bedingungen und Hinweise — Redaktion
6/67 Vorstellung der Jury
2/68, 2/69, 6/69, 6/70 Auswertung, Preisträger Statistik der Wettbewerbe 1967, 1968, 1969 1970 — Redaktion
4/69 Pioniere des *alpha*-Wettbewerbs — E. Manske

**Ähnlichkeitslehre**

4/67 Guter Mond, du gehst so stille... — L. Görke

**Aufgaben**

5/67 Aufgaben aus Mathematikbüchern der Estnischen SSR — O. Prinits
6/68 Grüße aus der Demokratischen Republik Vietnam — H. Tang Nguyen lam Son
6/69, 1/70 Prüfungsaufgaben aus Island — G. O. Gestsson
1/70, 4/70 Prüfungsaufgaben aus Tanzania — W. Büchel

**Berichte**

1/67 Internat. Mathematikerkongreß 1966 (Moskau) — D. Ziegler
2/67, 3/69 *alpha* berichtet aus aller Welt
5/67 Nowosibirsk — W. Friedrich
5/67 Aus der Sowjetunion berichtet
6/68 *Junge Mathematiker* erlebten Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft in Rostock — H. Titze

**Berufe**

3/67 Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium — W. Zill
6/67 Als Diplommathematiker in Dubna — G. Laßner
6/67 Als Mathematiklehrer in Tanzania — H. Büchel
2/68 Elektronische Datenverarbeitung – eine Perspektive
2/68 Chemieanlagenbauer mit und ohne Abitur — J. Pönisch
3/68 Facharbeiter für Datenverarbeitung — Ch. Papendorf
4/68 Mathematisch-technischer Assistent — G. Paulin
5/68 Ingenieur für Programmierung — W. Leupold
6/68 Diplom-Mathematiker (Rechentechnik und Datenverarbeitung) — J. Lötzsch G. Seifert
2/69 Spezialklassen an mathematischen Fakultäten
3/69 Ulrich Zähle berichtet — U. Zähle
4/69 Vom IMO-Teilnehmer zum Doktor-Aspiranten — H. Ernst
5/69 Hochbauzeichner – ein Beruf für Mädchen
6/69 Diplom-Mathematiker — H. Girlich
1/70 Diplomlehrer für Mathematik — R. Mildner
5/70 Bauingenieur — W. Wittig
6/70 Hochschulingenieur — G. Burucker

**Beweise**

2/67, 3/67 Beweise durch vollständige Induktion — W. Stoye
1/69 Spieglein, Spieglein an der Wand — W. Träger
4/69 Mathematikprobleme – selbst gemacht — Nazla H. A. Khedre

**Biographien**

2/67 Gottfr. Wilh. Leibniz als Mathematiker — W. Purkert
4/67 Leonard Euler 1707 bis 1783 — H. Bernhardt
4/67 Gaspard Monge 1746 bis 1818 — E. Schröder
5/67 A. J. Chintschin — H. Bernhardt
5/67 Aus der Jugend A. J. Chintschins — A. Artisow Muromzewa
1/68 Gedenktage (G. Cantor – H. A. Lorentz – D. Hilbert – E. Landau
4/68 August Ferdinand Möbius 1790 bis 1868 — H. Wußing
1/69 Lew Danowitsch Landau — B. Zimmermann
4/69 Evariste Galois — E. Hertel O. Stamfort
5/69 Prof. Dr. rer. nat. habil. Frieder Kuhnert — J. Gronitz
6/69 Michael Stifel — J. Schwarz
6/69 Alexander Ossipowitsch Gelfond — H. Boll
1/70 Mathematik in der Familie W. I. Lenins — G. N. Wolkow
3/70 Janos Bolyai — I. Reiman
4/70 Auf den Spuren Jakob Steiners — E. Schröder
5/70 Leninpreisträger Lew Semjonowitsch Pontrjagin
6/70 Albrecht Dürer — E. Schröder
6/70 Die Leninpreisträger Jurij Rczanov und Jurij Prochorov

**Funktionen**

6/70 Was ist eine Funktion? — A. N. Kolmogorow

**Geometrie, darstellende**

6/67 Darstellung von Punkt und Gerade in zugeordneten Normalrissen — E. Schröder
1/68 Abstand zweier Punkte im Raum — E. Schröder
2/68 Darstellung einer Ebene in zugeordneten Normalrissen — E. Schröder
4/68 Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur — E. Schröder
1/70 Auch ein Schlußlicht hat es in sich — E. Schröder
5/70 Ein kleiner Dreh führt zum Ziel — E. Schröder

**Geschichte der Mathematik**

6/68 Der mathematische Wettstreit in der Antike — M. Otto
6/68 „Mathematische Manuskripte" von Karl Marx — R. Sperl
1/69 Die „mathematischen Manuskripte" von Karl Marx — Aus „Nedelja" 10/68
1/69 Was bedeutet eigentlich „x"? — Aus „Po sv'etu" 11/67
1/70 Über die Anfänge der Mathematik, aus: „Die Mathematik in der Antike" — H. Wußing
6/69 bis 5/70 Mathematik-Kalender — W. Heinig J. Lehmann

**Gleichungen/Ungleichungen**

1/68 Eine schwierige Hausaufgabe — R. Lüders
2/68 Der Lucassche Turm — J. Frormann
6/69 Über Funktionsgleichungen mit absoluten Beträgen — W. Träger
4/70 Einige Ungleichungen für Fakultäten — V. I. Levin
6/70 Über Gleichungen mit absoluten Beträgen — W. Träger

**Literatur**

4/68 Formen und Formeln, Fr. v. Krbek, Eine Buchbesprechung — W. Arnold
2/69 „Werk der Millionen" — Redaktion *alpha*
6/70 *Quant* – eine neue physikalisch-mathematische Schülerzeitschrift