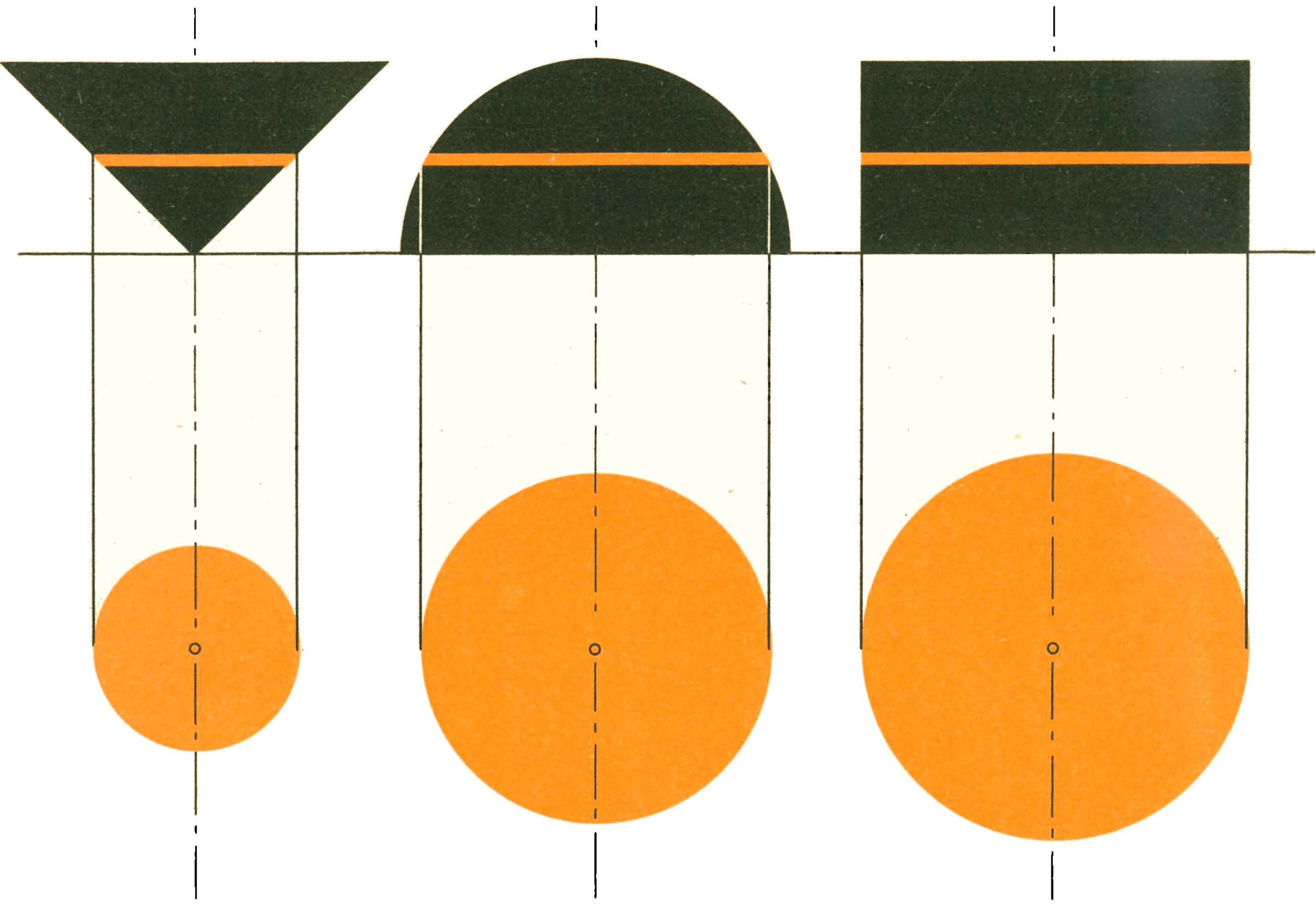
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
5. Jahrgang 1971
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import BmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Novosti (S. 73); E. Hoffmann BBS Suhl (S. 84/85); Vignette Prof. C. Ottescu, Bukarest (S. 88); Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 17. Mai 1971

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klasse geeignet

Der Weg eines Talents
Teil 2

Prof. Dr. Olga Alexandrowna Ladyschenskaja

Nach einigen Schwierigkeiten, bedingt durch den Krieg, gelang es *Olga Ladyschenskaja* Anfang des Winters 1943 auf die Moskauer Universität zu gelangen.

Als obligatorische Vorlesung des zweiten Studienjahres wählte *Olga L.* Algebra. Mit lauter und mächtiger Stimme vermittelte *A. G. Kurosch* Kenntnisse über Gruppen, Ringe, Körper, Ideale, Isomorphismen und Homomorphismen und vieles andere mehr, was bereits die ganze moderne Mathematik durchdrungen hat. Die Vorlesungen waren ausgezeichnet. Um bei den Hörern die neuen Begriffe und die Beziehungen zwischen ihnen zu festigen, führte *Kurosch* am Anfang jeder Vorlesung eine kleine Überprüfung durch. Aber am interessantesten waren seine Berichte darüber, wie und durch wen sich die Algebra in den letzten 20 bis 30 Jahren entwickelt hat und was in der gegenwärtigen Zeit getan wird. Das geringe Alter dieser Wissenschaft und die intensive Arbeit des Professors selbst gestatteten ihm, die Jugend schnell in den Kreis der ungelösten Aufgaben und Probleme einzuführen.

Zur Auswertung der neuesten Fachliteratur und zur Erörterung der in ihr gelösten bzw. noch nicht gelösten Probleme wurde ein Seminar geschaffen, an dem außer qualifizierten Leuten auch Aspiranten und Studenten der höheren Studienjahre, die sich die Algebra als Spezialfach gewählt hatten, teilnahmen. Auch *Olga* hielt in diesem Seminar Vorträge. Die Atmosphäre war ungezwungen und Unklarheiten wurden gleich im Seminar beseitigt.

Am Ende des Jahres schlug *A. G. Kurosch* dem wissenschaftlichen Rat *Olga* als Stipentiatin für das *Stalin*-Stipendium vor. Im nächsten Jahr erhielt sie eine Einladung für das Seminar von *I. M. Gelfand* zur Funktionalanalysis. Das Seminar lief erst ein Jahr. Jung waren die Teilnehmer, einschließlich des Leiters, und jung und voller unterschiedlicher interessanter Aufgaben ist das Gebiet, dem das Seminar gewidmet war.

Die Arbeit des Seminars verlief sogar für die Verhältnisse der Moskauer Universität ungewöhnlich. Zusammenhängende Vorträge gab es fast gar keine. Man diskutierte über wissenschaftliche Ergebnisse der Seminarteilnehmer, oder man sprach über irgendeine interessante Arbeit aus einer Zeitschrift.

Die Beweise wurden nicht ausgeführt, man erläuterte nur die hauptsächlichen Ideen und Methoden. Nicht selten blieb der Vortragende stecken und dann versuchte der Leiter selbst oder einer der Teilnehmer die soeben formulierte Behauptung entweder zu beweisen oder zu widerlegen.

Ein großes Seminar für die „Erwachsenen“ ist gut. Aber dort gibt es vor allem „zufällige“ Vorträge, die nach einem persönlichen Geschmack ausgewählt wurden oder diktiert werden von der Notwendigkeit eines Dissertanten, seine Arbeit vorzutragen. Dort ist aber nicht der geeignete Ort, Zweifel oder Mutmaßungen zu äußern. Deshalb ist es besser, sich sein eigenes kleines Arbeitsseminar zu bilden und dort ein eigenes Programm zusammenzustellen.

Zwei Teilnehmer sind zweifellos schon vorhanden. *Olga* und ihr erster Lehrer für partielle Differentialgleichungen *A. Myschkies.* Aber man könnte doch *I. G. Pokrowski* bitten, die Patenschaft für dieses kleine Seminar zu übernehmen? Wenn die Teilnehmer mit der Lösung der anstehenden Probleme nicht zurechtkommen werden, dann kann seine Hilfe sehr wertvoll sein. Er kann vor der Wahl von unpassenden Arbeiten warnen und auf jene Aufgaben hinweisen, die besonders wichtig und kompliziert sind. Nach anfänglichen Schwankungen geht man zu ihm und äußert die ungewöhnliche Bitte. Er ist erstaunt, aber einverstanden und verfolgt ein ganzes Jahr ihre Erörterungen und nimmt manchmal auch selbst daran teil. Natürlich geht ein großer Teil der Arbeit zu Hause bzw. in den Korridoren und auf dem Hof der Universität vor sich. Im Seminar findet nur ein kleiner Teil davon statt. Das ist auch verständlich, denn das Seminar dauert nur zwei bis drei Stunden in der Woche, aber die restlichen 165 verlaufen außerhalb.

Jetzt erkannte *Olga*, der die Mathematik immer als etwas Vollständiges und Abgeschlossenes erschienen war, die Geheimnisse und Schwächen der Mathematik. Immer klarer trat der Kreis der ungelösten Fragen ihres Gebietes hervor. Es waren schon sehr viele, welche sollte man wählen? Eines der Probleme begann sie immer mehr zu reizen. Die Lösung dieses Problems kann zur Beantwortung einer von *Courant* gestellten Frage beitragen. Aber jetzt, im fünften Studienjahr, muß man erst einmal eine Diplomarbeit zustande bringen. Deshalb werden die nächsten drei Monate für die Abschlußarbeit benutzt, in der sie ein anderes Problem löst.

Die Diplomarbeit wird im „Mathematischen Sammelband“, einer führenden mathematischen Zeitschrift, abgedruckt. Nach Beendigung der Universität wird sie Aspirant. Aber familiäre Umstände zwingen sie, nach Leningrad zu fahren. Ihr wissenschaftlicher

Betreuer, *S. L. Soboljew*, ist in Moskau und weilt nur gelegentlich zur Erfüllung von dienstlichen Pflichten in Leningrad. Die Moskauer Universität ist weit weg und in Leningrad ist alles unbekannt. Hier herrscht noch nicht jene freundschaftliche Atmosphäre, die sich so günstig auf die eigene Arbeit ausgewirkt hatte. Wird die Kraft ausreichen, etwas Interessantes zu tun? Der Zweifel in die eigenen Kräfte ist größer als notwendig. Es gibt nur einen Ausweg – man muß sich an die Arbeit machen. Nach drei Monaten angespannter Arbeit ist die *Methode der endlichen Differenzen* ausgearbeitet und mit ihrer Hilfe ein wichtiges Problem gelöst.

Man sagt ihr, daß das völlig für die Dissertation reicht. Die Furcht und das mangelnde Selbstvertrauen verschwinden für einige Zeit. Die Moskauer hören ihre Arbeit und gratulieren ihr. Es gratuliert auch *S. L. Soboljew* und sagt, daß sie die Arbeit als Dissertation verteidigen müsse. Doch man war der Meinung, daß die Arbeit ein rein theoretisches Interesse verdient, weil die in ihr untersuchten impliziten Differenzschemata kaum für eine wirkliche Berechnung geeignet sind.

Der wirkliche Wert ihrer Arbeit war damals noch nicht verstanden worden, obwohl sie mehrmals in Leningrad und Moskau darüber vortrug. Teilweise kann man das dadurch erklären, daß die Rechentechnik in der Sowjetunion zu dieser Zeit noch nicht so weit entwickelt war und deshalb die Differenzmethode für die wirklichen Berechnungen erst in den fünfziger Jahren ausgenutzt wurde.

Im Herbst 1949 erfolgte die Dissertation. Bis 1953 war sie dann Assistent, danach Dozent und ab 1955 Professor an der Leningrader Universität. Sie hält eine Spezialvorlesung an zwei Fakultäten: der physikalischen und der mathematischen. Diese Vorlesung heißt: *Randwertaufgaben der mathematischen Physik*. Sie ist in ihren Grundbestandteilen auf die Arbeiten von *Ladyschenskaja* aufgebaut. Ihr Inhalt verändert sich von Jahr zu Jahr. Viele ihrer Untersuchungen (besonders in der ersten Zeit) wurden durch den Wunsch, dieses oder jenes noch besser zu verstehen und den Studenten zugänglicher zu machen, hervorgerufen.

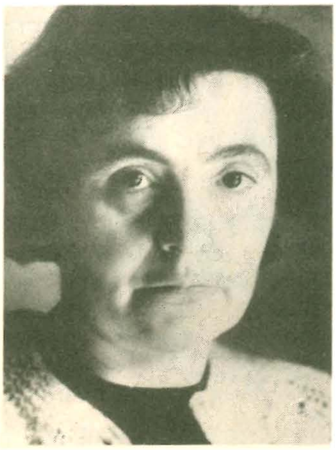
Diese Vorlesungen hörten alle ihre Schüler und hatten Einfluß auf viele Teilnehmer des wissenschaftlichen Forschungsseminars zu Fragen der mathematischen Physik.

In den zwanzig Jahren Universitätsarbeit leitete *Ladyschenskaja* ständig wissenschaftliche Forschungsseminare und Zirkel für Aspiranten, wissenschaftliche Mitarbeiter und Studenten. Ihre direkten Schüler erzog sie in solchen Zirkeln und Seminaren schon vom zweiten und dritten Studienjahr an. Sie bemüht sich, ihre Schüler auf verschiedene Gebiete, die etwas mit partiellen Differentialgleichungen zu tun haben, hinzuleiten. So entsteht ein gutes Kollektiv, das möglichst viele Interessen und Forschungen aller Richtungen erfaßt.

Es gibt noch eine Besonderheit ihrer Arbeit mit den Studenten: Sie beobachtet sie genau und bemüht sich festzustellen, welcher Kreis von Aufgaben am besten für sie geeignet ist. Dann wählt sie für einen Studenten eine entsprechende Aufgabe aus, die sie für interessant hält und für die sie schon den ungefähren Lösungsweg sieht. Dafür braucht man oft eine nicht geringe Vorbereitung. Sie wählt dem Studenten die notwendige Literatur aus, wobei es nicht selten Originalarbeiten sind. Diese Artikel werden von den Studenten studiert und oft auch auf speziellen Seminaren vorgetragen. In der Vorbereitungszeit lehrt *Ladyschenskaja* die Studenten das Durchgearbeitete zu verstehen und es nicht in der Reihenfolge des Artikels darzulegen, sondern so, als ob man es selber gemacht hätte, d. h. erst die hauptsächlichen Ideen und Überlegungen aufzeigen und dann erst die formalen Beweise zu geben. Gewöhnlich betrachtet sie nicht nur eine Aufgabe, sondern mehrere, die miteinander verbunden sind und gemeinsam zur Lösung eines ernsthaften Problems führen. Sie zerlegt die Schwierigkeit dieses Problems in mehrere Teilschritte und der Student bewältigt diese nacheinander, wobei er sich im Prozeß dieser Bewältigung entwickelt. Manchmal studiert sie ein Gebiet nur deshalb, um zu verstehen mit welchen Fragen man sich dort beschäftigt und mit welchen Kenntnissen man dort ausgerüstet sein muß (um ihre jungen Wissenschaftler damit ausrüsten zu können) und wen sie von ihren Schülern in diese Richtung lenken kann. So war es auch mit der Untersuchung von verschiedenen mathematischen Fragen der theoretischen Physik. Einen besonderen Platz in der Tätigkeit von *Ladyschenskaja* nimmt das wissenschaftliche Forschungsseminar zur mathematischen Physik ein. Es vereinigt alle, die in Leningrad auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen arbeiten. Dieser Zirkel begann seine Arbeit im Herbst 1947 und wird von dem bekannten Akademiker *W. J. Smirnow* geleitet. *Ladyschenskaja* ist eine der aktivsten Teilnehmerinnen. Sehr viele Berichte gab sie auf seinen Sitzungen über ihre Ergebnisse. Man sagt jetzt sogar, daß das Seminar drei wissenschaftliche Leiter hat: *W. I. Smirnow*, *O. A. Ladyschenskaja* und *S. G. Michlin*.

Ab 1962 ist *O. A. Ladyschenskaja* Leiterin des geschaffenen Laboratoriums der mathematischen Physik. Alle ihre Mitarbeiter waren ehemals ihre Schüler an der Universität. Zwei von ihnen verteidigen schon ihre Dissertation.

Seit diesem Jahr ist sie auch Angestellte der Universität. Sie erhielt zweimal den Ersten Preis der Universität für ihre Arbeiten, erhielt viele ehrenvolle Einladungen zu Vorlesungen an anderen Universitäten des In- und Auslandes und war auf mehreren internationalen Kongressen. Sie gehört auch zur Redaktion einer der bedeutendsten Zeitschriften der Sowjetunion auf mathematischem Gebiet: *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften der UdSSR* (Mathematische Reihe).



Wann und wo man *Ladyschenskaja* trifft, immer ist sie von Menschen umgeben. Das sind nicht nur ihre Schüler und nicht nur Leningrader Mathematiker. An sie wenden sich auch Wissenschaftler anderer Städte und allen möchte sie helfen. Sie hat eine große Anzahl von Arbeiten durchgesehen, die für die Veröffentlichung vorgesehen sind. Mit ihr berät man sich über die Auswahl von Themen (besonders für die Dissertation) und bespricht seine Arbeiten, wobei nicht nur die Teilnehmer ihres Seminars, sondern auch Wissenschaftler, die tausende Kilometer von Leningrad entfernt sind.

In den ersten fünf bis sechs Jahren ihrer Arbeit an der Universität gab sie viel Kraft und Zeit für die Arbeit mit den Studenten, von denen sie sehr viel forderte. Dabei strebte sie an, daß die Studenten zuerst den Gegenstand verstanden, die wichtigsten Objekte kannten und sich fest die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten und Verbindungen zwischen ihnen einprägten. Sie lehrte sie, das wichtige zu sondieren und es sich anzueignen. Erst danach konnte ein genaueres Studium des Gegenstandes erfolgen. *Ladyschenskaja* war für ihre Prüfungen bekannt. Man konnte sie nicht betrügen. Sie merkte schnell, ob jemand nur etwas auswendig gelernt hatte, oder ob er es wirklich begriffen hatte. Die guten Studenten ließen sich gern von ihr prüfen, da dies eine gute Kontrolle ihrer Fähigkeiten darstellte.

Bei einem persönlichen Gespräch mit *Ladyschenskaja* schaffen ihre Natürlichkeit, ihre herzliche Freundlichkeit und ihr aufmerksames Zuhören eine Atmosphäre der Freundschaft und eine Art geistiger Gemütlichkeit. Ihre Rede ist interessant und logisch, ob es nun ein persönliches Gespräch ist oder eine Vorlesung. Im Gespräch gibt sie Ratschläge, in der Vorlesung diskutiert sie das Dargebotene, als ob sie sich nur Gedanken macht und nicht lehrt. Vielleicht ist es deshalb so einfach, ihr zuzuhören. Obwohl sich ihre Arbeiten auf ein Gebiet beziehen, in dem „die reine Zahl herrscht" und obwohl ihre tägliche Beschäftigung die Untersuchung der weißen Flecke der exaktesten Wissenschaft ist, ähnelt *Ladyschenskaja* nicht dem Gelehrten, der nur dazu in der Lage ist „in jeder Sekunde eine Quadratwurzel zu ziehen" (*W. W. Majakowski*).

Sie hat sehr viele Interessen. Die Musik, die Malerei, das Theater und die Literatur begeisterten sie nicht nur, sondern bildeten einen Bestandteil ihres Lebens. Nicht weniger liebt sie die Natur und die imposante Stadt, in der sie lebt.

J. Senkewitsch

Vorliegender Beitrag wurde dem Buch: *Schicksal eines Talents* (Kurzbiographien von Mathematikerinnen) entnommen.

Дорогие ребята,
позвонили мне и попросили дать вам какую-либо задачу для предстоящей олимпиады. Попробуйте доказать, "что нельзя составить прямоугольник из пяти попарно неравных квадратов".
Далее же подумайте: "из скольких попарно неравных квадратов можно сложить прямоугольник?"
Эти вопросы относятся к серии задач, привлекших внимание сравнительно недавно,

Liebe *alpha*-Leser!

Ich empfehle allen, die sich für die Mathematik interessieren, folgende Aufgabe zu lösen:

Es ist zu beweisen, daß es unmöglich ist, aus fünf paarweise ungleichen Quadraten ein Rechteck zusammenzustellen. Überlegt, aus wieviel paarweise ungleichen Quadraten sich ein Rechteck zusammenstellen läßt!

Dieses Problem gehört zu einer Serie, welche vor relativ kurzer Zeit, vor 70 Jahren, aufgeworfen wurde und nicht nur Geometer, sondern auch die Projektanten komplizierter Stromkreise interessierte. Zur Lösung dieser Aufgabe haben deutsche Mathematiker wesentlich beigetragen.

Ich wünsche Euch Erfolge in der Mathematik. Ihr dürft allerdings andere Wissenschaften und die Kunst nicht vernachlässigen. Die Mathematik allein reicht nicht aus, damit sich der Mensch geistig entwickeln kann.

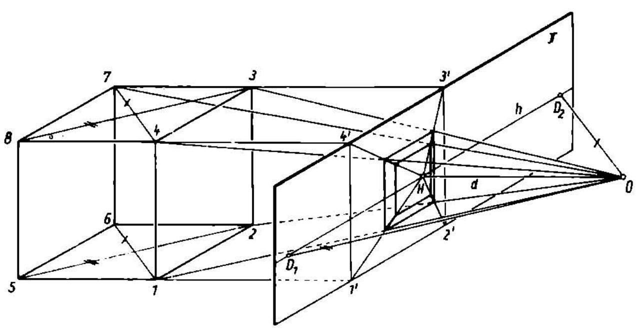
Mit besten Grüßen Olga Ladyschenskaja

Albrecht Dürer

ein Künstler, Humanist und Geometer

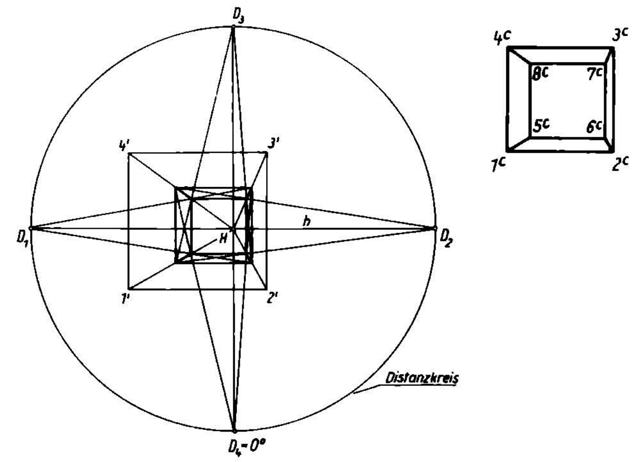
Teil 3

Einen breiten Raum nimmt in der „Underweysung“ das Konstruieren und Zeichnen von Zentralrissen ein. Bei der theoretischen Abhandlung zur Zentralprojektion beschränkt sich Dürer auf das Beispiel eines Würfels. Er führt eine Bildebene π zwischen das Projektionszentrum oder Auge und das abzubildende Objekt, wobei die Bildebene parallel zu einem Seitenpaar des Würfels angenommen wird. Aus didaktischen Gründen werde der Abbildungsvorgang nicht an den entsprechenden Figuren aus der „Underweysung“, sondern an einem hierzu in neuem Stil entworfenen Schrägbild erläutert.



Schrägbild zur Zentralprojektion eines Würfels

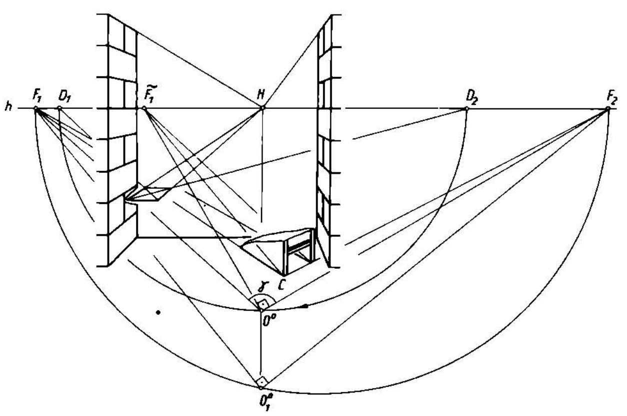
Die von dem Auge O an das Objekt gezogenen Sehstrahlen werden mit der Bildebene π zum Schnitt gebracht. Es genügt in dem vorgelegten Beispiel, die Bilder der acht Eckpunkte des Würfels nach der Durchstoßmethode zu konstruieren. Hierbei ist zu beachten, daß sich die Bilder der vier auf π lotrecht stehenden Würfelkanten (sogenannte Tiefengeraden in der Abbildung) in einem Punkt, dem Hauptpunkt H des Zentralrisses schneiden. Dieser Punkt ist der Fluchtpunkt sämtlicher zur Bildebene π senkrecht liegender Geraden. Die Waagerechte h durch H stellt den Bildhorizont dar. Werden in die Deck- und Basisfläche des Würfels die Diagonalen eingezeichnet, so schneiden sich die Bilder paarweise zueinander paralleler Diagonalen in den auf h liegenden Punkten D_1 und D_2. Dies sind die Fluchtpunkte der Diagonalenpaare. Sie liegen symmetrisch bezüglich H, und die Strecke $\overline{HD_1} = \overline{HD_2}$ gibt den Abstand des Auges (Projektionszentrums) von der Bildebene an. Man bezeichnet diese beiden Punkte deshalb als Diszanzpunkte und nennt die Strecke $\overline{HO}$ die Augdistanz d.
Legt man das in π entstehende Bild auf ein ebenes waagerechtes Zeichenfeld, so ergibt sich bei entsprechender Zuordnung des Auges lotrecht über dem Hauptpunkt H im Abstand d der gewünschte Bildeffekt. Man glaubt, in das Innere eines Würfels hineinzuschauen.



Zentralperspektives Bild eines Würfels

Schlägt man um H einen Kreis mit der Augdistanz d, so erhält man den Distanzkreis. Die Fluchtpunkte sämtlicher Geraden, welche die Bildebene unter einem Winkel von 45° schneiden, liegen auf diesem Kreis, z. B. auch die Fluchtpunkte der in die rechte und linke Seite des Würfels eingezeichneten Diagonalen.
In Dutzenden von Dürer-Bildern läßt sich dieser Aufbau als Rahmenkonstruktion nachweisen (Hieronymus im Gehäuse, Melancholie, Bilder aus dem Marienleben u. a. m.). Die Betrachtung gewisser Dürer-Bilder erfordert eine Technik, deren Anwendung einige elementare Grundkenntnisse in der Zentralperspektive voraussetzt.
Der Künstler ordnet nämlich dem Auge des Beschauers einen ganz bestimmten Punkt im Raum zu, von dem aus er sein Werk betrachtet wissen will. Mit unseren elementaren Voraussetzungen zur Zentralperspektive wollen wir ein Bild Dürers analysieren, bei dessen Erarbeitung er sich eindeutig an die in seiner „Underweysung“ entwickelten Grundlagen gehalten hat. Es handelt sich um das Mittelbild des sogenannten Dresdner Altars, ein Werk aus dem Jahre 1496. Dieses Bild war mit vielen anderen Schätzen der Weltkultur gegen Ende des zweiten Weltkrieges von der Vernichtung bedroht.
Dank der Sicherstellung durch sowjetische Truppen und einer gründlichen Restaurierung ist es nun wieder Gemeingut der Menschen geworden. In diesem Bild, Maria mit dem Kind darstellend, kommt der aus Quadern gefügten Einfassung, dem schachbrettartig gestalteten Fußbodenbelag und selbst den durch das

Mittelbild des Dresdner Altars mit Konstruktionsanalyse



Fenster schwach sichtbaren Häusern eine vom Künstler beabsichtigte Funktion zu. Der Betrachter soll hierdurch den Eindruck gewinnen, ihm sei im Raum gemeinsam mit den dargestellten Personen ein bestimmter Platz zugeordnet. Der Hauptpunkt H des Bildes, in dem sich die Bilder aller Tiefengeraden (hier Steinfugen der Wand und des Fußbodens) schneiden, ist eindeutig rekonstruierbar. Ferner ist der Horizont h, die waagerechte Linie durch H, eine wichtige Orientierungslinie des Bildes.
Um die Distanzpunkte D_1 und D_2 und damit auch die Augdistanz d konstruktiv zu finden, forschen wir auf dem Fußboden nach dem Bild eines geeigneten Quadrates. Durch die Zusammenfassung von 9 quadratischen Steinen haben wir das Bild eines Quadrates von hinreichender Größe, in das sich mit einiger Sicherheit die Diagonalen einzeichnen lassen. Die Schnittpunkte dieser Diagonalen mit dem Horizont h liegen symmetrisch bezüglich des Hauptpunktes. Wir können sie mit gutem Gewissen als Distanzpunkte D_1 und D_2 des Bildes annehmen. Sie gestatten uns, für die Lage des Auges bei der Bildbetrachtung die richtige Stellung anzugeben. Die Messung der Strecke $d=\overline{HD_1}$ führt unter Berücksichtigung der Originalgröße des Bildes (96,5 cm · 107 cm) auf die im Original vorliegende Augdistanz von 85 cm. Nachdem im Bild der Horizont mit Hauptpunkt und Distanzpunkten festgelegt sind, kann der Künstler bei Darstellung quaderförmiger Gebilde nicht mehr freizügig über die Winkel von Kanten im Bild verfügen. In diesem Beispiel möge überprüft werden, ob die Wiedergabe des auf einer horizontalen Tafel stehenden Lesepultes den Gesetzen der Perspektive genügt. Setzt man für das auf dem Pult liegende aufgeschlagene Buch ein rechteckiges Format voraus, so muß nach dieser Darstellung auch die Basis des Lesepultes ein Rechteck sein; d. h., die von C ausgehenden Basiskanten stehen im Raum aufeinander senkrecht. Die Verlängerungen der Basiskanten schneiden den Horizont in den Fluchtpunkten F_1 und F_2. Wie man erkennt, liegen diese beiden Punkte außerhalb der Strecke D_1D_2. Zufolge dieser Darstellung würden die Basiskanten des Pultes einen stumpfen Winkel einschließen, was sicher nicht den Absichten des Künstlers entspricht und auch nicht mit den bekannten Buchformaten in Einklang zu bringen ist. Die wahre Größe des Winkels, den die Basiskanten nach dieser Darstellung miteinander einschließen müßten, ergibt sich durch Verbinden des in die Zeichenebene umgelegten Augpunktes O° mit den Fluchtpunkten F_1 und F_2. Durch Nachmessen finden wir einen Winkel $\gamma=108°$, der von den beiden Fluchtstrahlen eingeschlossen wird. Hält man F_2 fest, so müßte der Fluchtpunkt F_1 nach $\bar{F}_1$ verschoben werden, wenn in C wirklich ein rechter Winkel vorliegen soll. Umgekehrt kann auch der Betrachter des Bildes seinen Standort dem dargestellten Lesepult anpassen. Er müßte dann die Augdistanz auf 118 cm vergrößern. Die Analyse zeigt die Umlegungen O^0 und O_1^0 der beiden Augpunkte in die Bildebene. An diesem Beispiel sieht man, daß die Analyse zu verschiedenen Bildabschnitten auf widersprechende Distanzen für den Augpunkt führt. Die Klarheit im geometrischen Aufbau des Bildes macht es uns heute leicht, an einem Frühwerk des Meisters noch bestehende Inkonsequenzen bei Anwendung der Perspektive aufzuspüren. Unsere Betrachtung ist nicht als Rechthaberei zu verstehen, sondern soll uns an einem handfesten Beispiel das harte Ringen dieses großen Künstlers der Renaissance um Form und Inhalt seiner Werke verdeutlichen.

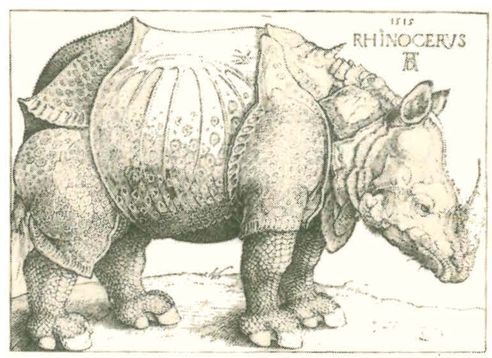
Schwieriger gestaltet sich die Anwendung von Gesetzen der Perspektive auf die zeichnerische Darstellung unregelmäßiger Körper, da hier der Horizont und Fluchtpunkte nicht so leicht auswertbar sind. Dürer zeigt in seiner „Underweysung“, wie sich der Künstler in solchen Fällen mit einigen technischen Mitteln half. Er verwendete einen rechteckigen Holzrahmen, stellte ihn so vor sich auf, daß das gewünschte Blickfeld davon eingefaßt war und spannte in den Rahmen einen durchsichtigen weißen Schirm, den sogenannten Flor. Nun visierte er markante Punkte des darzustellenden Gegenstandes von einem festen Punkt, dem Augpunkt aus an und markierte die zugehörigen Bildpunkte auf dem Flor. Dieses Verfahren läuft auf eine experimentelle Umsetzung der Durchstoßmethode hinaus. Von dem Flor werden anschließend die markierten Bildpunkte in das Zeichenfeld übertragen. Diese sind für den Künstler eine wertvolle Stütze bei Ausführung des Bildes. Ein in dieser Weise entworfenes Bild liefert einen wahrheitsgetreuen Eindruck des dargestellten Objektes, wenn sich das Auge des Betrachters in der vom Künstler durch die Konstruktion vorgeschriebenen Lage bezüglich des Bildes befindet. Soll die gewünschte Augdistanz länger als der Arm des Künstlers sein, so bedient sich der Maler eines Visierrohres, das er mit einer Schnur hinter sich in einem festen Punkt verankert. Nun tastet der Künstler unter fluchtgerechter Führung des Visierrohres bezüglich des festen Haltepunktes ausgezeichnete Punkte des Objektes innerhalb der Grenzen des Bildrahmens ab und trägt sie in dem Flor ein. Auch dazu gibt Dürer in der zweiten Auflage seiner „Underweysung“ ein instruktives Bild mit erläuterndem Text: „Ein Mann zeichnet eine Kanne“ unter Anwendung von Jakob Kesers Durchzeicheninstrument mit der Schnur.

Der Zeichner der Kanne, um 1525

Die Perspektive ist ein von Dürer vielfach aber nicht vielfältig verwendetes Mittel zur Steigerung der Raumwirkung in seinen Bildern. Die Bevorzugung von Tiefengeraden und frontalen Ebenen verleiht seinen Bildern mitunter etwas Strenges und Kulissenhaftes. Beispiele für diese Art des Einsatzes der Perspektive finden sich in den Werken

Hieronymus im Gehäuse, Kupferstich 1514
Weihnachten, Gemälde um 1504
Weihnachten, Kupferstich 1504
Die Verkündigung, Holzschnitt 1500/02
Ruhe auf der Flucht, Holzschnitt 1503/04
Das kleine Pferd, Kupferstich 1505
Melancholie, Kupferstich 1514
Abendmahl, Holzschnitt 1523

Mehr Gelöstheit trifft man bei solchen Bildern an, wo Dürer auf eine Verdeutlichung der Tiefe des Raumes durch Zutaten der Perspektive verzichtet. Bilder von biblischen Gestalten (Adam und Eva, die vier Apostel) und Porträts vieler ihm nahestehender Zeitgenossen (Willibald Pirkheimer, Bilder von Vater und Mutter, Michael Wolgemut, *Philipp Melanchton*, Erasmus von Rotterdam, Hieronymus Holzschuher) erscheinen uns auch nach 450 Jahren noch von einer nicht überbietbaren Aussagekraft und Lebendigkeit.



Seine Tier- und Pflanzendarstellungen bezeugen die Bereitschaft zu liebevoller und selbstloser Hingabe seiner künstlerischen Fähigkeiten auch an scheinbar unbedeutende Objekte der Natur (der Feldhase, *Rhinozeros*, Veilchensträußchen, Rasenstück).

Aus den Ornamentierungen wertvoller Druckerzeugnisse (Randzeichnungen zum Gebetbuch des Kaisers Maximilian, Mitarbeit an Erd- und Himmelsgloben des Mathematikers Johann Stabius, Gedenksäule für die Opfer des Bauernkrieges) sprechen lebendige Phantasie und die Bereitschaft zur Anpassung bei kollektiver Arbeitsweise. Dürers Wirken hat an ausstrahlender Kraft wohl deshalb über viele Jahrhunderte in keiner Weise eingebüßt, weil das von ihm hinterlassene Lebenswerk nicht einer einseitigen außergewöhnlichen Begabung entsprang, sondern das Ergebnis von zähem Fleiß, vielseitiger Begabung und Aufgeschlossenheit und einer ständigen kompromißlosen Auseinandersetzung mit sich selbst und seiner Umwelt darstellt.

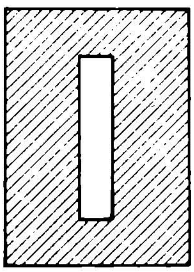
E. Schröder

Eine Aufgabe von Nationalpreisträger Prof. Dr.

Hans Reichardt

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin

▲758▲ Aus einem Teppich, der die Form eines Rechtecks mit den Seitenlängen 9 m und 12 m hat, sei genau in der Mitte ein Stück, das die Form eines Rechtecks mit den Seitenlängen 1 m und 8 m hat, herausgeschnitten, da es verdorben war. Dabei verlaufen die längeren Seiten des herausgeschnittenen Rechtecks parallel zu den längeren Seiten des Teppichs (vgl. die Abb.).



Man zerlege den Teppich durch zwei Schnitte (die nicht geradlinig verlaufen müssen, sondern auch Ecken haben können) so, daß man die Teile wieder zu einem rechteckigen Teppich zusammensetzen kann.

Kreuzfigur

In der Aufgabe 373 in *alpha* Heft 2/1969, S. 38 war die Kreuzfigur (Bild 1) durch vier Strecken in ein inhaltsgleiches Quadrat zu verwandeln.

Eine weitere Beschäftigung mit dieser Aufgabe führte zu folgenden Überlegungen.

Da die fünf Quadrate der Kreuzfigur inhaltsgleich dem großen Quadrat sind, müssen auch die schraffierten Flächen (Bild 2) einander inhaltsgleich sein, da sie jeweils ein Viertel der beiden Figuren sind.

Beide ineinandergezeichnet zeigen sie uns (Bild 3, hier vergrößert), daß sowohl die Flächen I und I' als auch II und II' jeweils kongruente Dreiecke sind (Drehung am A bzw. S).

Wir können also folgende Aufgabe stellen:

Aufgabe 1:

Ein Fünfeck gebildet aus einem Quadrat und einem gleichschenklig-rechtwinkligem Dreieck nach Bild 4 (wir wollen es „Giebel-Fünfeck" nennen), soll so durch zwei zueinander senkrechte Schnitte in drei Teile zerlegt werden, daß sich aus diesen ein Quadrat zusammenfügen läßt.

Diese Schnitte sind in Bild 3 die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{FS}$. Die Lösung führt zur Überlegung, daß die Schnitte die Seiten des gesuchten Quadrates sein könnten; daß sie daher gleich lang sein müssen, und ihr Schnittpunkt (rechter Winkel) am Figurenrand liegen könnte.

Verbinden wir nach Bild 5 die Punkte A und S, so erhalten wir das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck AFS, dessen Flächeninhalt sowohl die Hälfte des Quadrates als auch des „Giebelfünfecks" ist, aber auch der Gesamtfläche der Restdreiecke (schraffiert) entspricht.

Weiter stellen wir fest, daß die Dreiecke ABF und FES kongruent sind. Da die Höhe des Dreiecks DSC gleich der Hälfte der Strecke $\overline{BC}$ ist, muß F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ sein. Dann ist auch $\overline{SG} = \overline{GF}$.

Die schraffierten Restdreiecke haben mit dem Dreieck AFS je eine gemeinsame Seite, aber auch paarweise unter sich gleiche Seiten. Wenn daher die Restdreiecke auf die Fläche des Dreiecks AFS gespiegelt werden, füllen sie dessen Fläche ganz aus. Ihr gemeinsamer Punkt ist K. Er liegt auf der Seitenhalbierenden $\overline{AG}$ und auf $\overline{FH}$. Ferner ist $\overline{FH} \perp \overline{AG}$. Hier stellt sich nun

Aufgabe 2:

Konstruiere zu einem gegebenen gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck AFS das zugehörige „Giebelfünfeck". (Bild 7)

Fälle von F die Senkrechte auf die Seitenhalbierende $\overline{AG}$. Der Schnittpunkt ist K. Die Spiegelung von K an den Dreieckseiten ergibt die restlichen 3 Ecken des Quadrates. Ferner ermöglicht eine Senkrechte von A aus auf eine Gerade durch H und G die Bildung des Quadrates.

K ist außerdem der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $\overline{AG}$ und des Halbkreises über $\overline{AF}$.

Die Überlegungen reichen zu folgendem Satz: Folgende vier Punkte auf dem Umfang eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck liegen auch auf dem Umfang eines Quadrates: die Punkte (A) und (F) der einen Kathete, der Mittelpunkt (G) der anderen Kathete, der Schnittpunkt (H) auf der Hypotenuse mit der Verlängerung der Senkrechten von der Rechtwinkelecke (F) auf die Seitenhalbierende ($\overline{AG}$) der zweiten Kathete.

Dabei ist ein Katheten-Eckpunkt (A) zugleich auch Eckpunkt des Quadrates.

Nun kommen wir wieder zu unserer Ausgangsfigur zurück und sehen uns einen Balken der Kreuzfigur an. Er besteht aus drei kongruenten Quadraten.

In dieses Rechteck (Bild 8) zeichnen wir über beide Hälften einer Diagonale je ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ein. Es stellt sich nun

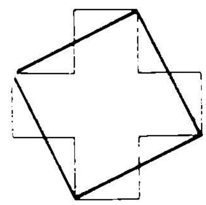


Bild 1

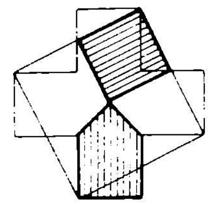


Bild 2

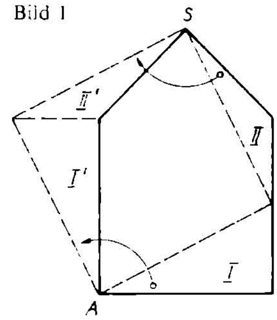


Bild 3

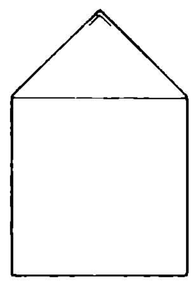


Bild 4

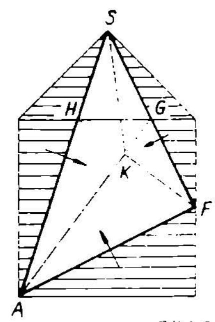


Bild 5

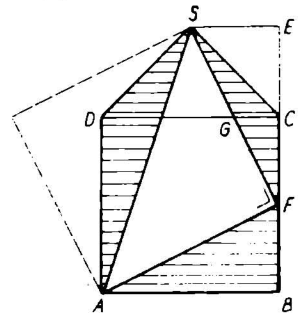


Bild 6

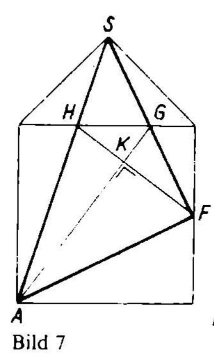


Bild 7

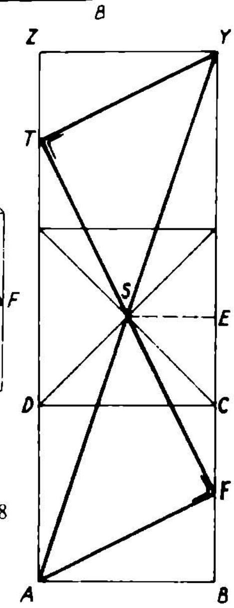


Bild 8

Aufgabe 3:

Den wievielten Teil der Rechteckfläche bedecken die beiden Dreiecke?

Wir sehen aus Bild 8, daß sich der Flächeninhalt des „Giebelfünfecks" $ABCSD$ zur

Rechteckfläche $ABYZ$ wie 5:12 verhält. Nun haben wir oben die Flächeninhaltsgleichheit vom „Giebelfünfeck“ mit zwei der eingezeichneten Dreiecke bewiesen. Also bedecken die beiden Dreiecke $\frac{5}{12}$ der Rechteckfläche.

Aber auch ohne die vorherigen Erkenntnisse läßt sich diese Aufgabe lösen. $\triangle SEF \cong \triangle FBA$ ($\overline{SF} = \overline{FA}$, $\sphericalangle EFS = \sphericalangle BAF$, $\sphericalangle SEF = \sphericalangle ABF = 90°$). Dann ist $\overline{SE} = \overline{FB}$. Die Fläche des Dreiecks SEY ist ein Achtel, die des Dreiecks ABF ein Zwölftel des Rechtecks. Wir müssen also von der Rechteckfläche zweimal das erste Dreieck und viermal das zweite abziehen. Dann bleiben für die beiden Dreiecke AFS und STY $\frac{5}{12}$ des Rechteck-Flächeninhaltes übrig.

H. Decker

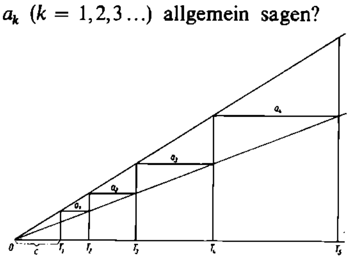
Aufgaben zum Beitrag: Albrecht Dürer

1 In Dürers „Underweysung“ findet sich im Abschnitt über die Zentralperspektive die hier dargestellte Folge von Quadraten mit den Seiten $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$

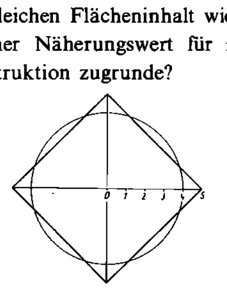
Weise nach, daß die folgenden Proportionen bestehen:

$a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = a_3 : a_4 = \ldots = a_k : a_{k+1}$

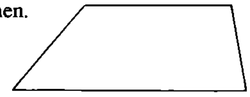
Was läßt sich über die Folge der Quadratseiten a_k ($k = 1,2,3\ldots$) allgemein sagen?



2 Zur Umwandlung eines Kreises in ein flächengleiches Quadrat gibt Dürer sinngemäß die folgende Näherungskonstruktion: Zeichne in den vorgegebenen Kreis ein Paar zueinander senkrechter Durchmesser. Teile den Kreisradius in vier gleiche Teile und trage ein Viertel des Kreisradius über die Enden der Durchmesser hinaus nach außen ab. Verbinde die sich ergebenden vier Punkte zu einem Quadrat. Dieses hat annähernd den gleichen Flächeninhalt wie der Kreis. Welcher Näherungswert für π liegt dieser Konstruktion zugrunde?



3 Von einem Schachbrett liegt das zentralperspektive Bild des Spielfeldrandes vor. Die Bilder der 64 Einzelfelder sind unter Verwendung von Bleistift und Lineal einzuzeichnen.



Was ist eine Funktion? Teil 3

Aufgaben

Mit einer kleinen Null sind die ganz leichten Fragen gekennzeichnet; indem ihr sie beantwortet, könnt ihr überprüfen, ob ihr das in dem Artikel Geschriebene verstanden habt. Schwierigere Aufgaben sind mit einem Stern markiert. Sie brauchen nicht unbedingt sämtlich gelöst zu werden.

1. Einführung

1°. Bestimmt Definitionsbereich und Wertevorrat folgender Funktionen:

a) $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$, b) $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

2. *Ganzer Teil* einer Zahl x heißt die größte Zahl, die x nicht überschreitet. Der ganze Teil von x wird mit $[x]$ bezeichnet.

Z. B. ist

$[0] = 0$, $[7{,}5] = [7] = 7$, $[-0{,}3] = -1$, $[-\pi] = -4$.

Die Differenz $x - [x]$ heißt der *Bruchteil* der Zahl x und wird mit $\{x\}$ bezeichnet. Stellt die folgenden Funktionen graphisch dar und bestimmt ihren Definitionsbereich und ihren Wertevorrat:

a) $f_1(x) = [x]$, b) $f_2(x) = \{x\}$,

c) $f_3(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$, d) $f_4(x) = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$,

e*) $f_5(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$, f*) $f_6(x) = \frac{1}{[x]}$,

g*) $f_7(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}$, h*) $f_8(x) = \frac{1}{\{x\}}$.

3*. Für eine beliebige natürliche Zahl n definieren wir $s(n)$ als die Summe der Teiler der Zahl n (n selbst ausgeschlossen). Beispielsweise ist

$s(1) = 0$, $s(2) = 1$, $s(6) = 6$, $s(12) = 16$, $s(28) = 28, \ldots$

Man beweise, daß $s(n)$ die Werte 2 und 5 nicht annimmt.

2. Funktion

4°. Zwei Menschen (A und B) können sich in zwei Zimmern auf vier verschiedene Weisen niederlassen:

AB		*A*	*B*
	AB	*B*	*A*

Auf wieviel Weisen können sich niederlassen: a) zwei Menschen in drei Zimmern, b) drei Menschen in zwei Zimmern, c) drei Menschen in zwei Zimmern so, daß keines der Zimmer unbesetzt bleibt?

5°. Die Menge M besteht aus drei Elementen und die Menge N aus zwei Elementen. Wieviel a) Abbildungen von M in N, b) Abbildungen von M auf N, c) Abbildungen von N in M, d) Abbildungen von N auf M gibt es?

6. Wieviel siebenstellige Telefonnummern gibt es? Wieviel von ihnen sind nur mit den Ziffern 0, 1, 2 und 3 gebildet?

7. Beweist, daß es mehr als eine Million Funktionen gibt, die nur die zwei Werte 0 und 1 annehmen und auf der Menge der ersten zwanzig natürlichen Zahlen definiert sind.

8. Die Menge M bestehe aus m Elementen, die Menge N aus n Elementen. Wieviel auf der Menge M definierte Funktionen gibt es, deren Werte der Menge N angehören?

Bemerkung: Die Aufgaben 8, 11, 18, 19 gehören zu den Grundaufgaben der Kombinatorik. Wir führen sie hier an, um zu zeigen, daß sich die Kombinatorik zu einem beträchtlichen Teil mit der Berechnung der Anzahl von Abbildungen dieser oder jener Art endlicher Mengen in endliche Mengen befaßt.

9. Auf wieviel Weisen kann man unterbringen: a) zwei Gäste auf zwei Stühlen, b) drei auf drei Stühlen, c) sechs auf sechs Stühlen?

10. Die Menge E bestehe aus sechs Elementen. Man zeige, daß es genau 720 Funktionen gibt, für die E sowohl Definitionsbereich als auch Wertevorrat ist.

11. Eine Abbildung einer endlichen Menge auf sich heißt eine *Permutation*. Die Anzahl der verschiedenen Permutationen einer Menge hängt nur von der Anzahl n ihrer Elemente ab und wird mit $n!$ bezeichnet. Zeigt, daß

$1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$

ist. Gebt ein allgemeines Verfahren zur Berechnung von $n!$ an.

3. Umkehrbare Funktion

12°. Welche der folgenden Funktionen sind umkehrbar und welche nicht?

$f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^4$, $f_3(x) = x^{17}$, $f_4(x) = x^{18}$.

13. In einer Klasse sitzen auf jeder Bank höchstens zwei Personen. Wir ordnen jedem Schüler seinen Banknachbar zu, sitzt er aber allein, so ihn selbst. Was ist die Umkehrabbildung?

14. Jedem Wort der deutschen Sprache werde das mit denselben Buchstaben, aber in umgekehrter Reihenfolge geschriebene Wort zugeordnet (Wort wollen wir eine beliebige endliche Aufeinanderfolge von Buchstaben nennen). Ist diese Funktion umkehrbar? Wenn ja, was ist die Umkehrfunktion?

15. Eine Abbildung einer endlichen Menge auf sich ist stets umkehrbar. Gebt ein Beispiel für eine nichtumkehrbare Abbildung der Menge der natürlichen Zahlen auf sich.

16. Neun Touristen müssen in drei Booten untergebracht werden. Auf wieviel Weisen kann dies geschehen, wenn man fordert, daß

a) in jedem Boot drei Personen sind, b) in jedem Boot höchstens vier und mindestens zwei Personen sind, c) in jedem Boot mindestens ein Tourist fährt? (Die Boote tragen Nummern: Nr. 1, Nr. 2, Nr. 3.)

17*. Wenn die Wirte genügend viel Stühle besitzen, so ist es nicht üblich, auf einen Stuhl mehr als einen Gast zu setzen: die Menge der Gäste wird umkehrbar in die Menge der Stühle abgebildet. Auf wieviel Weisen können sich setzen, wenn es im Zimmer insgesamt sechs Stühle gibt: a) ein Gast, b) zwei Gäste, c) drei, d) vier, e) fünf, f) sechs Gäste?

18*. Umkehrbare Abbildungen einer endlichen Menge M in eine andere endliche Menge N heißen in der Kombinatorik *Variationen* (die Gäste werden auf die Stühle „verteilt"). Die Anzahl der Abbildungen einer Menge M in eine Menge N hängt nur von der Elementezahl m der Menge M und der Elementeanzahl n der Menge N ab und wird mit A_n^m bezeichnet. Zeigt, daß

$$A_1^1=1,\ A_2^1=A_2^2=2,\ A_3^1=3,$$
$$A_3^2=A_3^3=6,\ A_{10}^2=90$$

ist, und stellt eine allgemeine Regel zur Berechnung von A_n^m auf. Zeigt, daß stets $A_n^{n-1}=A_n^n$ ist.

19*. Aufgabe 16c läßt sich abstrakt formulieren: wieviel Abbildungen einer aus neun Elementen bestehenden Menge auf eine dreielementige Menge gibt es? Wir wollen mit D_n^m die Anzahl der Abbildungen einer n-elementigen Menge auf eine m-elementige Menge bezeichnen. Prüft nach, daß

$$D_3^2=6,\ D_4^2=12,\ D_4^3=36,\ D_n^n=n!$$

ist. Versucht, eine allgemeine Regel zur Berechnung von D_n^m zu geben (*das ist eine etwas schwierigere Aufgabe als die Aufgaben 8, 11* und *18*).

20*. Wieviel auf einer aus 28 Elementen bestehenden Menge definierte Funktionen gibt es, die jeden der vier Werte P, K, S und W je sechsmal annehmen?
Das ist die Aufgabe über die Anzahl der Möglichkeiten, im Februar die Dienste zwischen Petja, Kolja, Sascha und Wolodja gerecht zu verteilen (Beispiel 3, Heft 6/70, S. 124).

A. N. Kolmogorow

4. Antworten, Hinweise, Lösungen

1. Natürlicher Definitionsbereich: a) $x \neq 0$, b) $x \leqq -1$; $x \geqq 1$.
4. a) 9; b) 8; c) 6.
5. a) 8; b) 6; c) 9; d) 0.
6. 10^7; 4^7.
8. n^m.
12. Umkehrbar sind f_1 und f_3.
13. und 14. Die Abbildung fällt mit ihrer inversen zusammen.
16. a) 1680; b) 9240; c) $18\,150=3^9-3\cdot 2^9+3$.
18. $A_n^m=n(n-1)\ldots(n-m+1)$, wenn $m \leqq n$; $A_n^m=0$, wenn $m>n$.
20. $\frac{28!}{(7!)^4}$.

alpha fragt – Leser antworten

Bekannt sind die Formeln für die Summe der ersten n von Null verschiedenen natürlichen Zahlen, für die Summe der Quadrate dieser Zahlen und für die Summe der Kuben dieser Zahlen:

$$s_1 = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$s_2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$s_3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

(vgl. z. B. Tafelwerk, 7.–12. Klasse, S. 58).
Unser Leser, Herr *Michael Raschke*, Berlin, fragt nun, ob es eine allgemeine Formel für die Summe

$$s_k = 1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$$

gibt, da man bei der Lösung vieler Probleme solche Summen berechnen muß.
Herr Dr. *K. Rosenbaum*, Pädagogische Hochschule Erfurt-Mühlhausen, beantwortet diese Frage und leitet mit Hilfe des binomischen Satzes eine Formel her, mit deren Hilfe man der Reihe nach die Summen $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ berechnen kann. Es handelt sich dabei um eine sogenannte Rekursionsformel; d. h., man muß zunächst die Summen $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$ ermitteln, um die Summe s_k berechnen zu können.
Nach dem binomischen Satz (vgl. Tafelwerk, S. 57) gilt für alle von Null verschiedenen Zahlen k und n

$$0^k = (1-1)^k = 1^k-\binom{k}{1}1^{k-1}+\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\cdot 1+(-1)^k\cdot 1,$$
$$1^k = (2-1)^k = 2^k-\binom{k}{1}2^{k-1}+\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\cdot 2+(-1)^k\cdot 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n-1)^k = (n-1)^k=n^k-\binom{k}{1}n^{k-1}+\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\cdot n+(-1)^k\cdot 1.$$

Wir setzen zur Abkürzung wie oben

$$s_1 = 1+2+\ldots+n,$$
$$s_2 = 1^2+2^2+\ldots n^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_{k-1} = 1^{k-1}+2^{k-1}+\ldots+n^{k-1}$$

und erhalten durch Addition der Terme auf den linken und rechten Seiten der obigen Gleichungen

$$0^k+1^k+\ldots+(n-1)^k = 1^k+2^k+\ldots+n^k -\binom{k}{1}s_{k-1}+\binom{k}{2}s_{k-2}-\binom{k}{3}s_{k-3}+\ldots +(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}s_1+(-1)^k n.$$

Wegen $\binom{k}{1} = k$, $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$, $\binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}, \ldots, \binom{k}{k-1} = k$
folgt hieraus, weil die Summe auf der linken Seite gleich der Summe der ersten $n-1$ Summanden auf der rechten Seite ist,

$$n^k-ks_{k-1}+\frac{k(k-1)}{2}s_{k-2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{6}s_{k-3}+\ldots+(-1)^{k-1}ks_1+(-1)^k n = 0,$$

$$s_{k-1} = \frac{1}{k}\left\{n^k+\frac{k(k-1)}{2}s_{k-2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{6}s_{k-3}+\ldots+(-1)k^{-1}ks_1+(-1)^k n\right\}.$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir nun aus $s_1, s_2, \ldots, s_{k-2}+(-1)^{k-1}k\,s_1$ s_{k-1} berechnen.
Eine solche Formel nennt man eine *Rekursionsformel*, weil man jeweils die Summe s_{k-1} durch „Zurücklaufen" aus den Summen $s_{k-2}, s_{k-3}, \ldots, s_2, s_1$ berechnen kann.
Wir wenden diese Formel an und berechnen zunächst die schon erwähnten Summen s_1, s_2 und s_3.
Für $k = 2$ erhalten wir

$$s_1 = \frac{1}{2}\{n^2+(-1)^2 n\} = \frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Für $k = 3$ erhalten wir

$$s_2 = \frac{1}{3}\{n^3+3s_1-n\} = \frac{1}{3}\left\{n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n\right\}$$
$$= \frac{n}{6}(2n^2+3(n+1)-2),$$
$$s_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Für $k = 4$ erhalten wir

$$s_3 = \frac{1}{4}\left\{n^4+\frac{4\cdot 3}{2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} -\frac{4\cdot 3\cdot 2}{6}\,\frac{n(n+1)}{2}+n\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\{n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n\}$$
$$= \frac{n}{4}\{n^3+1+(n+1)(2n-1)\}$$
$$= \frac{n(n+1)}{4}\{n^2-n+1+2n-1\}$$
$$= \frac{n(n+1)(n^2+n)}{4},$$
$$s_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Zum Abschluß berechnen wir noch s_4. Für $k=5$ *erhalten wir*:

$$s_4 = \frac{1}{5}\left\{n^5+\frac{5\cdot 4}{2}\,\frac{n^2(n+1)^2}{4} -\frac{5\cdot 4\cdot 3}{6}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} +\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{24}\,\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}$$
$$= \frac{n}{5}\left\{n^4-1+\frac{5}{2}n(n+1)^2-\frac{5}{3}(n+1)(2n+1) +\frac{5}{2}(n+1)\right\}$$
$$= \frac{n(n+1)}{30}\{6(n-1)(n^2+1)+15n(n+1) -10(2n+1)+15\}$$
$$= \frac{n(n+1)}{30}\{6n^3+9n^2+n-1\}.$$

Damit haben wir auch die nicht in dem Tafelwerk enthaltene Formel erhalten:

$$s_4 = 1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.$$

Mathematik und Physik

alpha -Wettbewerb – Physik

Letzter Einsendetermin: 1. Oktober 1971

Liebe *alpha*-Leser!
In diesem Heft findet ihr zum ersten Mal Wettbewerbsaufgaben zur Physik. An der Lösung der Probleme kann sich jeder Leser beteiligen. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Richtlinie: Schuljahr 1970/71) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit P ▪ 10/12 gekennzeichnet sind. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm mal 297 mm). Am Kopf der Lösung müssen stehen: Name, Vorname, Adresse der Schule und Klasse des Teilnehmers und Name seines Physiklehrers, der ihn im Schuljahr 1970/71 unterrichtete.
Die besten Lösungen werden von der Redaktion prämiert. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Teilnehmer werden in Heft 6/71 veröffentlicht. Die Lösungen sind unter dem Kennwort „*alpha*-Wettbewerb" einzusenden an

Pädagogisches Institut Güstrow
Sektion Mathematik/Physik
26 Güstrow
Goldberger Str. 12

Aufgaben

P 6 ▪ 759 Zwischen zwei senkrecht zueinander stehenden ebenen Spiegeln steht ein Bleistift. Wie viele Bilder des Bleistifts erblickst Du
a) in jedem Spiegel,
b) insgesamt (Konstruktion)?
Wie viele Bilder seht man, wenn die Spiegel einen Winkel von 60° einschließen?

P 6 ▪ 760 Wenn man bei Frost nacheinander Holz und Eisen gleicher Temperatur berührt, erscheint das Eisen kälter.
Wie kommt das?

P 6 ▪ 761 Ein Fahrzeug 1 fährt vom Ort A zum Ort B. Seine Geschwindigkeit beträgt 50 km/h. Ein Fahrzeug 2 fährt vom Ort C zum Ort D. Seine Geschwindigkeit beträgt 60 km/h. Die Entfernung von A nach B sei 25 km, von C nach D 24 km. Beide Fahrzeuge starten zur gleichen Zeit.
Welches Fahrzeug ist zuerst am Ziel?

P 7 ▪ 762 In einem Teich schwimmt ein Boot, im Boot liegt ein großer Stein. Wie ändert sich der Wasserstand im Teich, wenn der Stein aus dem Boot in das Wasser geworfen wird?

P 7 ▪ 763 Von zwei gleichen, dünnen und luftdicht abgeschlossenen Glasbehältern ist einer mit Luft und der andere mit Wasser gefüllt. Mit einer Waffe wird zunächst auf das eine und dann auf das andere Gefäß geschossen. Was geschieht mit den Behältern?

P 7 ▪ 764 Eine Waage befindet sich im Gleichgewicht. Auf einer Waagschale stehen ein Glas Wasser und ein Stativ mit der angehängten Last und auf der anderen Wägestücke. Kommt die Waage aus dem Gleichgewicht, wenn man die Last ins Wasser taucht?

P 8 ▪ 765 Bestimme das Verhältnis der Massen eines Kupfer- und eines Aluminiumdrahtes! Beide Drähte haben gleiche Länge und gleichen Widerstand. Der spezifische Widerstand des Aluminiums ist doppelt so groß wie der des Kupfers. Die Dichte des Aluminiums beträgt $\frac{1}{3}$ der Dichte von Kupfer.

aus einem Lehrbuch der VAR

P 8 ▪ 766 Am Kraftwerk beträgt die Spannung zwischen dem Fahrdraht und den Schienen der Straßenbahn 550 V. Auf der Strecke befindet sich ein Triebwagen, der zum Fahren eine Mindestspannung $U = 500$ V braucht. Die Stromstärke beträgt 25 A. Bestimme den Abstand, in dem der Triebwagen vom Kraftwerk fahren kann. Der Widerstand des Fahrdrahtes beträgt je km 0,45 Ω, der Widerstand der Straßenbahnschienen ist 0,05 Ω je km.

aus einem Lehrbuch der VAR

P 8 ▪ 767 In der Mitte eines sehr großen zugefrorenen Sees wird ein Loch in das Eis geschlagen und ein Eisblock von 9 m Dicke herausgenommen. Welche Länge muß ein Seil haben, um vom Rand des Eisblockes bis ins Wasser zu reichen?

$\gamma_{Eis} = 0{,}9\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$ $\quad \gamma_{Wasser} = 1{,}0\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$

P 9 ▪ 768 Ein Radfahrer und ein LKW fahren gleichzeitig von den Endpunkten einer Strecke $\overline{AB}$ los. Der Radfahrer fährt von A nach B, der LKW von B nach A und ohne Aufenthalt zurück. Auf der Hinfahrt begegnet der LKW dem Radfahrer 5 km vor A und überholt ihn 15 Minuten später auf der Rückfahrt 10 km vor B. Beide Fahrzeuge bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit. Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ und die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge sind zu berechnen.

P 9 ▪ 769 Wie groß ist das scheinbare Gewicht eines Körpers mit der Masse m, der bei der Temperatur t in eine Flüssigkeit eingetaucht wird? Gegeben sind mit ϱ_0 die Dichte des Körpers bei 0 °C, mit ϱ'_0 die Dichte der Flüssigkeit bei 0 °C, mit γ der kubische Wärmeausdehnungskoeffizient des Körpers und mit k der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit.

Aus: Gheorghiu, Probleme der Physik, SR Rumänien

P 9 ▪ 770 Von einer Höhe fallen 2 Körper in einem Intervall von 1 s herab. Wie ändert sich der Abstand zwischen ihnen während des Falls.

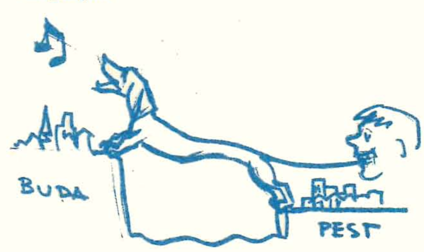
P 10/12 ▪ 771 Ein Pendel mit einem Gewicht von 25 p rückt aus der Ruhelage zur Seite. Dabei beträgt die Spannkraft im Faden 20 p. Berechnen Sie die Kraft, die das Pendel in die Ruhelage zurücktreibt!

P 10/12 ▪ 772 Zwei mathematische Pendel verrichten in einer Minute 10 bzw. 7 Schwingungen. Finden Sie das Verhältnis der Pendellängen!

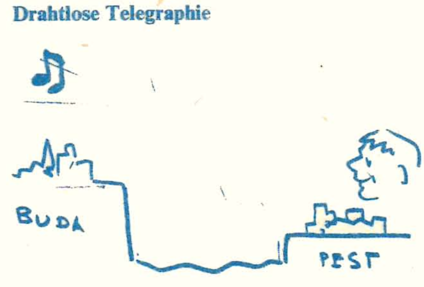
P 10/12 ▪ 773 Ein Körper gleitet ohne Reibung auf einer geneigten Ebene herab, der Winkel der Neigung verändert sich zur Horizontalen von 0° bis 90°. Die Basis b der geneigten Ebene verändert sich nicht.
Es ist die Abhängigkeit der Zeit des Heruntergleitens vom Winkel graphisch darzustellen! Bei welchem Winkel ist die Zeit des Heruntergleitens am kleinsten?

U. Walta

Telegraphie



Drahtlose Telegraphie



Zahlen ermitteln durch systematisches Untersuchen

▲1▲ Ermittle alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, die jeweils zugleich beide Gleichungen der nachfolgenden Aufgaben erfüllen.

1.1. $a+b=8$, $a-b=2$ 1.2. $a+b=19$, $a-b=48$

▲2▲ Ermittle alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen, die jeweils zugleich die drei Gleichungen der folgenden Aufgaben erfüllen.

2.1. $a+b+c=11$, $a+b=6$, $a-b=4$ 2.2. $a+b+c=62$, $b=a+2$, $c=4\cdot a$

▲3▲ Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen beträgt 36. Ermittle diese Zahlen!

▲4▲ Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen beträgt 210. Ermittle diese Zahlen!

▲5▲ Die natürlichen Zahlen a, b, c und d seien paarweise nicht gleich, und es gelte $2<a<b<c<d$ und $a+b+c+d=25$. Welche natürlichen Zahlen erfüllen die gestellten Bedingungen?

▲6▲ Anstatt eine gewisse natürliche Zahl mit 6 zu multiplizieren und zum Produkt 3 zu addieren, multipliziert Udo versehentlich diese Zahl erst mit 3 und addiert dann 6. Trotzdem erhält er dasselbe Ergebnis. Um welche Zahl handelt es sich?

▲7▲ Ermittle alle natürlichen Zahlen a, für die $4\cdot a+1$ durch 5 teilbar und außerdem kleiner als 20 ist!

▲8▲ Auf einer Wiese weiden Gänse und Schafe. Die Tiere haben zusammen 40 Köpfe und 96 Beine. Wieviel Gänse und wieviel Schafe sind es?

▲9▲ Für insgesamt 40 M wurden Artikel eingekauft, und zwar zum Einzelpreis von 5 M oder 7 M. Gib alle Lösungen an!
Statt der 40 M stehen 71 M zur Verfügung.
Statt der 40 M stehen 98 M zur Verfügung.

▲10▲ Beim Durchnumerieren der Seiten eines Buches wurden genau
a) 55 Ziffern,
b) 87 Ziffern,
c) 213 Ziffern gedruckt.
Wieviel Seiten hatte jeweils das Buch?

D. Michels/Th. Scholl

Die Teilbarkeit durch 7

In der Klasse 6 werden verschiedene Teilbarkeitsregeln erarbeitet, und besonders wichtig sind dabei die Teilbarkeitsregeln für Primzahlen (2, 3, 5) und ihre Potenzen (4, 8, 9, 25). Die nächstgrößeren Primzahlen nach 5 sind 7 und 11, und vielleicht hast auch du dich schon gefragt, ob es auch für 7 und 11 solche Teilbarkeitsregeln gibt. In der Artikelserie „Rechnen mit Resten" von *G. Lorenz* in dieser Zeitschrift, deren Inhalt für die folgenden Überlegungen als bekannt vorausgesetzt wird, ist die Teilbarkeitsregel für 11 enthalten (Heft 6/1969, S. 126). Um zu einer Teilbarkeitsregel für 7 zu gelangen, betrachten wir die ziffernmäßige Darstellung einer natürlichen Zahl

$$N = a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1 a_0$$

etwas näher; N ist also $(n+1)$-stellig. Bei der ausführlichen Schreibweise beginnen wir am besten mit den Einern:

(1) $N = a_0 + a_1\cdot 10 + a_2\cdot 10^2 + \dots + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + a_n\cdot 10^n$

Für den angestrebten Satz über die Teilbarkeit durch 7 ist aber eine Zusammenfassung zu Dreiergruppen zweckmäßiger:

(2) $N = A_0 + A_1\cdot 1000 + A_2\cdot 1000^2 + \dots + A_{k-1}\cdot 1000^{k-1} + A_k\cdot 1000^k$

Die Zahlen A_i $(i=0,\dots,k)$ entstehen durch Einteilung der Zahl N von rechts nach links in Gruppen zu je drei Ziffern. Jede der Zahlen A_i selbst kann einstellig, zweistellig oder dreistellig sein, und selbstverständlich gilt $k<n$. (Genauer ist $\frac{n}{3}-1<k\leq\frac{n}{3}$.)

Betrachten wir als Beispiel

$$N = 455\,083\,002\,843,$$

so erhalten wir gemäß (1) die Darstellung

$N = 3+4\cdot 10+8\cdot 10^2+2\cdot 10^3+0\cdot 10^4+{}$
$+0\cdot 10^5+3\cdot 10^6+8\cdot 10^7+0\cdot 10^8+{}$
$+5\cdot 10^9+5\cdot 10^{10}+4\cdot 10^{11}$ (also $n=11$).

Einteilung in Dreiergruppen gemäß (2) liefert $N = 843+2\cdot 1000+83\cdot 1000^2+455\cdot 1000^3$; hier ist also $k=3$.

Die Darstellung (2) einer natürlichen Zahl N ist vorteilhaft, da an Kongruenzen

$10 \equiv 3\ (7)$, $10^7 \equiv 3\ (7)$, $10^{13} \equiv 3\ (7)$,
$10^2 \equiv 2\ (7)$, $10^8 \equiv 2\ (7)$, $10^{14} \equiv 2\ (7)$,
$10^3 \equiv -1\ (7)$, $10^9 \equiv -1\ (7)$, $10^{15} \equiv -1\ (7)$,
$10^4 \equiv 4\ (7)$, $10^{10} \equiv 4\ (7)$, $10^{16} \equiv 4\ (7)$,
$10^5 \equiv 5\ (7)$, $10^{11} \equiv 5\ (7)$, $10^{17} \equiv 5\ (7)$,
$10^6 \equiv 1\ (7)$, $10^{12} \equiv 1\ (7)$, $10^{18} \equiv 1\ (7)$,

erkennbar ist, daß nur die Potenzen 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{15}, ... abwechselnd -1 und 1 als Rest ergeben. Deshalb stellen wir die soeben untersuchten Potenzen, die den Rest -1 und 1 ergaben, anders dar.

$10^3 = 1000 \equiv -1\ (7)$, $10^{12} = 1000^4 \equiv 1\ (7)$,
$10^6 = 1000^2 \equiv 1\ (7)$, $10^{15} = 1000^5 \equiv -1\ (7)$,
$10^9 = 1000^3 \equiv -1\ (7)$, $10^{18} = 1000^6 \equiv 1\ (7)$,

allgemein:

$$1000^{2g} \equiv 1\ (7)$$
$$1000^{2g+1} \equiv -1\ (7) \quad g=1, 2, 3, \dots$$

Die Darstellung (2) und die Gesetzmäßigkeiten über das Rechnen mit Kongruenzen führen uns nun zu einer Teilbarkeitsregel für 7:

$N \equiv A_0 + A_1\cdot(-1) + A_2\cdot 1 + A_3\cdot(-1) + {}$
$+ A_4\cdot 1 + A_5\cdot(-1) + \dots (7)$ oder kürzer
$N \equiv A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - A_5 \dots \quad (7).$

Verwenden wir für den Term auf der rechten Seite der letzten Kongruenz die leicht verständliche Bezeichnung „alternierende Dreiergruppenquersumme (von N)", so können wir den erhaltenen Sachverhalt in folgendem Satz aussprechen:

Jede natürliche Zahl läßt bei Division durch 7 denselben Rest wie ihre alternierende Dreiergruppenquersumme.

Speziell ergibt das die Teilbarkeitsregel: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn ihre alternierende Dreiergruppenquersumme durch 7 teilbar ist.

Für unsere Beispielzahl $n=455\,083\,002\,843$ erhalten wir als Dreiergruppenquersumme
$843-2+83-455=926-457=469$,
und wegen $469\equiv 0\ (7)$ (es ist ja $469=67\cdot 7$) ist N durch 7 teilbar.

Allerdings läßt sich hieraus erkennen, daß die Anwendung der Teilbarkeitsregel für 7 sehr umständlich ist und die Regel mehr theoretischen als praktischen Wert besitzt.

E. Naumann

Mathematische Denkaufgaben

● Meine Handschuhe und Socken lagen in einem dunklen Zimmer durcheinander, und zwar lagen drei Paar Handschuhe von verschiedener Machart und zehn Paar helle und dunkle Socken zusammen. Wieviel Handschuhe und wieviel Socken mußte ich (mindestens) herausgreifen, damit ich ein Paar Handschuhe von gleicher Machart und ein Paar Socken von gleicher Farbe erhielt?

● In einer Kiste liegen vier Sorten Äpfel, von jeder Sorte gleich viel und zusammen 100. Wieviel Äpfel muß man ohne Hinzusehen herausnehmen, damit man sicher ist, daß von jeder Sorte mindestens zehn Äpfel dabei sind?

● Iwanow wurde gefragt, wen denn das Gemälde, das an der Wand hängt, darstellt. Da antwortete er: „Der Vater des auf dem Bilde Dargestellten ist der einzige Sohn des Vaters des Antwortenden." Wer ist portraitiert worden?

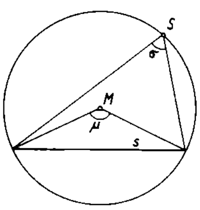
● Ein Lehrer hat die Arbeiten von drei Schülern, Alexejew, Wassiljew und Sergejew, durchgesehen, aber nicht mitgebracht. Er sagte zu den Schülern: „Ihr habt in euren Arbeiten unterschiedliche Leistungen gezeigt („3", „4", „5" – Zensur „5" entspricht unserer Zensur „1", d. Red.). Sergejew hat keine „5" und Wassiljew keine „4". Aber ich glaube, Alexejew hat eine „4". Später stellte sich heraus, daß der Lehrer dem einen Schüler die richtige Zensur gesagt hatte, sich aber bei den beiden anderen geirrt hatte. Welche Zensuren hatten die Schüler?

K. A. Rupassow, Staatliches Pädagogisches Institut Tambow, UdSSR

Ein interessanter geometrischer Beweis

In Olympiadeklasse 10, 4. Stufe (DDR-Olympiade) der IX. OJM wurde die folgende Aufgabe (10;5) gestellt (siehe Heft 3/70):

Es seien k' und k'' zwei voneinander verschiedene Kreise durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks $\triangle ABC$, deren Mittelpunkte M' bzw. M'' beide auf dem Umkreis k von $\triangle ABC$ liegen. Beweisen Sie, daß der Mittelpunkt P des Inkreises von $\triangle ABC$ entweder auf k' oder auf k'' liegt!



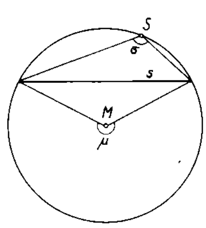


Bild 1 Die Scheitelpunkte M und S liegen in einer gemeinsamen Halbebene bezüglich der Kreissehne s.

Bild 2 Die Scheitelpunkte M und S liegen in entgegengesetzten Halbebenen bezüglich der Kreissehne s.

Lösung der Aufgabe

Vorbemerkung: Bei der Beweisführung ist die Kenntnis des Satzes über Zentri- und Peripheriewinkel im Kreis vorauszusetzen. Er lautet: *Im Kreis ist der Zentriwinkel doppelt so groß wie jeder Peripheriewinkel über der gleichen Sehne;* d. h. es gilt $\mu = 2\sigma$. Für die Messung der Winkel sind die in den Bildern 1 und 2 angegebenen Vorschriften zu den beiden wesentlich verschiedenen Fällen einzuhalten.

Beweisführung: Zunächst zeichnet man eine Planfigur (Bild 3) entsprechend den Vorgaben der Aufgabenstellung. Der Inkreismittelpunkt P des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt im Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden. Wir zeichnen zunächst die Winkelhalbierende w_γ ein. Diese schneidet k' in den Punkten 1 und 2. Wenn die eingangs aufgestellte Behauptung wahr sein soll, dann muß der Punkt 1 mit dem Inkreismittelpunkt P identisch sein. Der Punkt 2 liegt außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$ und scheidet deshalb von der Betrachtung aus.

Der geforderte Beweis ist also erbracht, wenn gezeigt wird, daß der Punkt 1 auf w_α (oder auf w_β) liegt.

γ ist ein Peripheriewinkel von k bezüglich der Sehne $\overline{AB}$. Da M' nach Konstruktion den Kreisbogen $\widehat{AB}$ halbiert, gilt $\overline{AM'} = \overline{M'B}$. Somit liegt M' auf w_γ. Wir setzen $\sphericalangle CAB = \alpha$ und $\sphericalangle CM'B = \mu$. Da α und μ Peripheriewinkel von k bezüglich der gleichen Sehne $\overline{BC}$ darstellen und in der gleichen Halbebene bezüglich dieser Sehne liegen, gilt $\alpha = \mu$. (1)

Ferner setzen wir $\sphericalangle 1AB = \delta$. Nun sind δ ein Peripheriewinkel von k' und μ ein Zentriwinkel von k' bezüglich der gemeinsamen Sehne $\overline{B1}$. Folglich gilt $\mu = 2\delta$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $\alpha = 2\delta$ oder $\delta = \frac{\alpha}{2}$;

d. h. die Verbindungslinie $(1A)$ liegt in der Winkelhalbierenden w_α.

Der auf k' liegende Punkt 1 ist also identisch mit dem Inkreismittelpunkt P, was zu beweisen war.

Hätte man C auf k im Inneren von k' angenommen, wäre der Beweis völlig analog gelaufen. Eine Fallunterscheidung erübrigt sich damit.

Schlußbetrachtung: Unbefriedigend an der Aufgabenstellung erscheint die Tatsache, daß man erst mit Hilfe der Planfigur entscheiden kann, welcher der beiden Kreise k' oder k'' als Ort für den Inkreismittelpunkt P nur in Betracht kommen kann. Auch die Ausschaltung des Punktes 2 von der weiteren Betrachtung läßt sich nicht befriedigend rechtfertigen. Diese nur unzureichend motivierbaren Einschränkungen entfallen, wenn man auch die Ankreise des Dreiecks ABC mit in die Untersuchung einbezieht. Werden der Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks als gleichwertig betrachtet, entfällt die differenzierte Behandlung von k' und k'', und der zyklische Charakter des hier vorliegenden Sachverhaltes tritt deutlicher vor Augen.

In Bild 4 sind zu dem Dreieck $A_1A_2A_3$ der Umkreis k_u sowie die Kreise k' und k'' gemäß der vorgelegten Aufgabenstellung eingezeichnet. Die Verbindungsgerade (A_3M') schneidet k' in den Punkten J_0 (Mittelpunkt von k_0) und J_3 (Mittelpunkt von k_3).

Die Verbindungsgerade (A_3M'') schneidet k'' in J_1 (Mittelpunkt von k_1) und J_2 (Mittelpunkt von k_2). Jeder der vier Kreise k_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ berührt jede der drei Dreieckseiten. Erst in Bild 4 ist jene Aussage geometrisch voll ausgeschöpft, die in der vorliegenden Aufgabe zu beweisen war.

An den Beweisen oder Beweisversuchen der Teilnehmer der Olympiadeklasse 10 der IX. OJM war vielfach zu bemängeln, daß nicht eindeutig auseinandergehalten wurde, was nach Konstruktion vorausgesetzt wurde und was man zu beweisen suchte. Voraussetzung und Behauptung müssen für jeden Schritt einer längeren Beweisführung klar auseinandergehalten werden. Z. B. wurde nach unserem Vorgehen in dem einen Schritt der Punkt 1 mit A verbunden und dann gezeigt, daß $(1A)$ in der Winkelhalbierenden w_α liegt. Im Bild wird dies dadurch zum Ausdruck gebracht, daß man die Bezeichnung w_α in Klammern setzt. In gleicher Weise ist es für den Inkreismittelpunkt P geschehen.

Beweise lassen sich vielfach in verschiedener Richtung aufziehen, jedoch muß die Richtung der Beweisführung klar sein.

E. Schröder

Bild 3

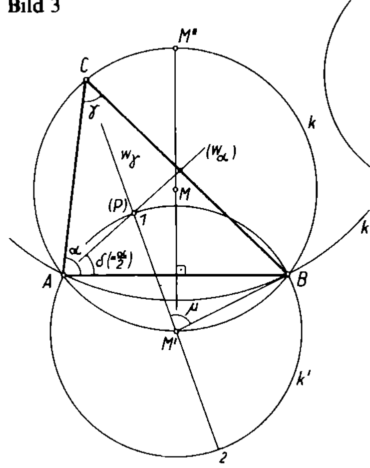
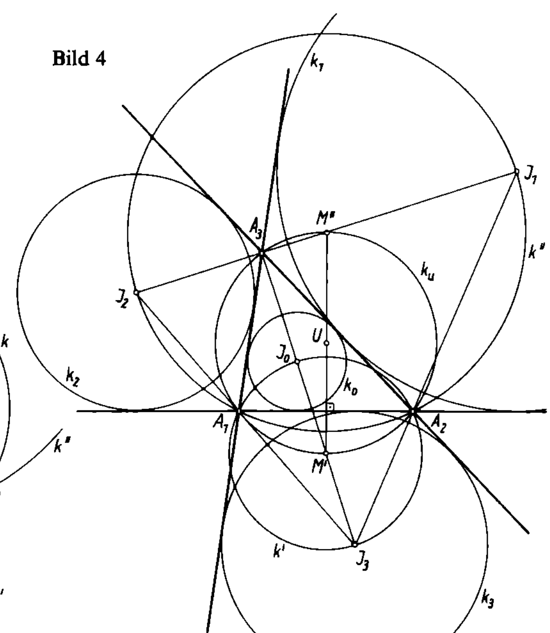


Bild 4



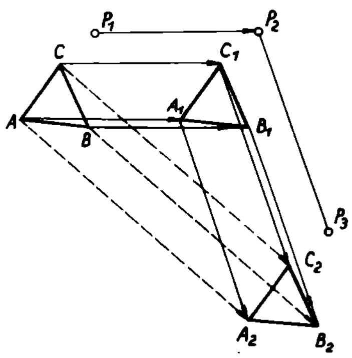
X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreis-, Bezirks- und DDR-Olympiade

Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

1. Es ist auch zulässig, sofort die Verschiebung $\overline{P_1P_3}$ durchzuführen.



2. Aus $8-⌧=3$ folgt $⌧=5$. Setzt man für ⌧ in Spalte 3 jeweils 5 ein, so erhält man $\square=2$ und ✧ $=0$. Schließlich ermittelt man auf diese Weise aus Zeile 1, daß $\triangle=7$ sein muß. Tatsächlich erfüllen die angegebenen Ziffern alle Bedingungen der Aufgabe; denn in

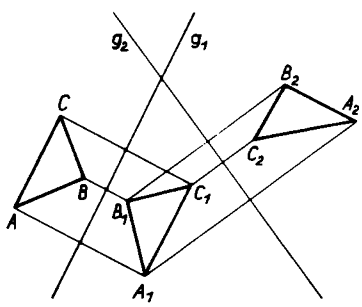
$$\begin{array}{c} 27+8=35 \\ - \quad - \quad - \\ \underline{10+5=15} \\ 17+3=20 \end{array}$$

sind alle waagerecht und senkrecht stehenden Aufgaben richtig gelöst.

3. Es gilt 2,6 ha = 260 a. Da auf 1 ha = 100 a durchschnittlich 150 Apfelbäume standen, standen auf 10 a durchschnittlich 15 Apfelbäume, auf 260 a mithin 26mal soviel, das sind insgesamt 390 Apfelbäume. Diese 390 Apfelbäume trugen 390mal soviel, wie jeder Apfelbaum durchschnittlich trug, das sind wegen $390 \cdot 50 = 19\,500$ insgesamt 19 500 kg Äpfel. Wegen 19 500 kg = 19,5 t wurden somit auf der Plantage 19,5 t Äpfel geerntet.

4. Da bei einem Teilnehmerbeitrag von 1,40 Mark genau 1,10 Mark zuwenig, bei einem Beitrag von 1,50 Mark genau 1,10 Mark zuviel zusammengekommen wäre, so hätte das gesammelte Geld genau das Doppelte der Kosten des einen Sammelfahrscheines betragen, wenn jeder Teilnehmer 2,90 Mark eingezahlt hätte. Folglich wären genau die Kosten des einen Sammelfahrscheines zusammengekommen, wenn jeder der Teilnehmer 1,45 Mark bezahlt hätte. Jeder der Teilnehmer hatte also 0,05 Mark zuviel bezahlt. Dieser Betrag wurde jedem zurückerstattet. Wegen $110:5=22$ handelte es sich um 22 *Junge Mathematiker*, die an dieser Exkursion teilnahmen.

1.



2. a) Da die Raumschiffgruppe in 88 Minuten durchschnittlich 41 000 km zurücklegte, legte sie in jeder Minute wegen $41\,000 : 88 \approx 466$ rund 466 km, in 60 Minuten also rund $60 \cdot 466$ km*, das sind rund 28 000 km* zurück.

* *Anmerkung:* Eigentlich müßte an diesen Stellen mit Hilfe einer Fehlerrechnung bewiesen werden, daß die Rundung richtig ist. Dieser an sich erforderliche Nachweis wird aber vom Schüler nicht verlangt.

b) Da die Raumschiffgruppe in jeder Minute 466 km = 466 000 m zurücklegte, legte sie in jeder Sekunde den 60. Teil davon, also wegen $466\,000 : 60 \approx 7\,767$ rund 7 800 m* zurück.

3. (1) Ist nach Ergänzung der beiden fehlenden Ziffern eine durch 36 teilbare Zahl entstanden, so ist diese sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar.

(2) Ist eine mehrstellige Zahl durch 4 teilbar, so stellen ihre letzten beiden Ziffern (in gleicher Reihenfolge) ebenfalls eine durch 4 teilbare Zahl dar. Daher kann als Einerziffer nur 0; 4 oder 8 eingesetzt werden.

(3) Ist eine Zahl durch 9 teilbar, so ist es auch ihre Quersumme.

Nun beträgt die Summe der drei gegebenen Ziffern 9. Lautet daher die Einerziffer

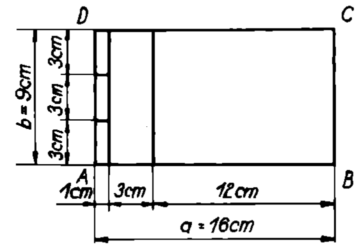
$$\left.\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{matrix}\right\} \text{ so kann die Hunderterziffer nur } \left\{\begin{matrix} 0 \text{ oder } 9 \\ 5 \\ 1 \end{matrix}\right\} \text{ sein.}$$

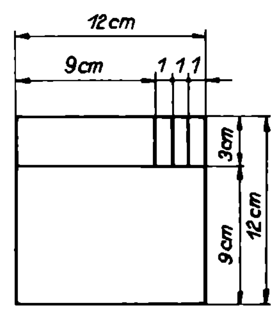
Also können nur die Zahlen 52 020; 52 920; 52 524; 52 128 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Die Probe zeigt, daß sie dies auch sämtlich tun.

4. (Das Rechteck $ABCD$ hat laut Aufgabe einen Flächeninhalt von $9\,\text{cm} \cdot 16\,\text{cm} = 144\,\text{cm}^2$. Da das Quadrat den gleichen Flächeninhalt haben muß, und da 12 die einzige natürliche Zahl ist, deren Quadratzahl 144 beträgt, so muß seine Seite 12 cm lang sein.)

Anmerkung: Da laut Aufgabe nur die Angabe einer Möglichkeit gefordert war, sind derartige Überlegungen für eine vollständige Lösung nicht erforderlich.

Eine mögliche Zerlegung ist die in der Abb. dargestellte.





Olympiadeklasse 7

1. Aussage (1) ist wahr, weil höchstens 30% aller Teilnehmer beide Abzeichen erworben haben konnten und 30% weniger als die Hälfte von 70% sind.

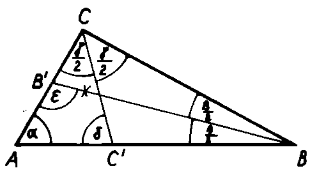
Bei Aussage (2) kann allein mit den vorliegenden Angaben nicht entschieden werden, ob sie wahr oder falsch ist. Sie ist genau dann wahr, wenn jeder Teilnehmer genau ein Abzeichen erworben hat.

Aussage (3) ist falsch, weil höchstens 30% aller Teilnehmer beide Abzeichen erworben haben konnten, also mindestens 40% aller Teilnehmer nur das Sportabzeichen erhielten.

Aussage (4) ist wahr, weil es (bereits vor, also erst recht) nach einer Erhöhung der Anzahl der Sportabzeichenträger von diesen mehr gibt als Träger des Touristenabzeichens.

2. Laut Voraussetzung gilt $\alpha = 60°$. Dann gilt unter Benutzung des Winkelsummensatzes ($\triangle ABC$)

$\beta + \gamma = 180° - 60° = 120°$.



Nach dem Außenwinkelsatz gilt ferner:

$$\varepsilon = \gamma + \frac{\beta}{2} \quad (\triangle B'BC)$$

sowie $\delta = \beta + \frac{\gamma}{2}$. ($\triangle C'BC$) Daraus folgt

$$\varepsilon + \delta = \frac{3}{2}(\beta + \gamma) = \frac{3}{2} \cdot 120° = 180°,$$

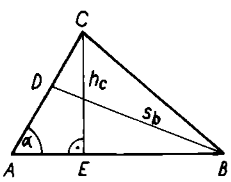
w. z. b. w.

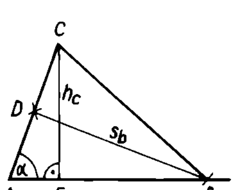
3. Angenommen, die Gleichung hat eine Lösung. Dann müssen beide Seiten durch 9 teilbar sein. Wegen $4+9+2+0+4 = 19$ folgt daraus $* = 8$. Die Zahl auf der rechten Seite der gegebenen Gleichung kann also nur 492 804 lauten. Dann folgt aus der Gleichung weiter $(230+t)^2 = 492\,804 : 9 = 54\,756$, und daher erhält man:

$230+t$ ist eine natürliche Zahl, nicht kleiner als 230 und so beschaffen, daß ihr Quadrat 54 756 beträgt.

Daraus folgt, daß für t nur der Wert 4 möglich ist. Weil nämlich 54 756 auf 6 endet, kann t nur auf 4 oder 6 enden. Wäre $t > 4$, so wäre $(230+t)^2 > 234^2 = 54\,756$. Also ist nur $t = 4$ möglich. Wie die Probe zeigt, ist $t = 4$; $* = 8$ Lösung der gegebenen Gleichung, und zwar die einzige.

4. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.





Der Mittelpunkt von AC sei D, der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe sei E. Dann liegt E wegen $\alpha < 90°$ auf dem von A ausgehenden Strahl durch B, und es läßt sich das Teildreieck $\triangle AEC$ aus h_c, α und dem rechten Winkel $\sphericalangle AEC$ konstruieren. Punkt B liegt erstens auf dem von A ausgehenden Strahl durch E und zweitens auf dem Kreis mit s_b um D.

(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Dreieck $\triangle AEC$ aus h_c, α und dem rechten Winkel $\sphericalangle AEC$.

(2) Wir konstruieren den Mittelpunkt D der Strecke AC.

(3) Wir konstruieren den von A ausgehenden Strahl durch E.

(4) Wir schlagen um D mit s_b den Kreis. Schneidet er den Strahl AE, so sei B einer der Schnittpunkte.

(III) Beweis, daß jedes auf diese Weise konstruierbare Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach Konstruktion ist $\overline{DB} = s_b$, $\overline{CE} = h_c$, und der Winkel $\sphericalangle CAB$ hat die Größe α. Ferner ist D der Mittelpunkt, also BD die Seitenhalbierende von AC. Schließlich ist nach Konstruktion $CE \perp AB$, also CE auf AB und damit die auf der Geraden durch A und B senkrechte Höhe.

(IV) Wegen $\alpha < 90°$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium *sww* eindeutig. Ferner ist (2) stets eindeutig möglich, ebenso (3), da wegen (1) $A \neq E$ ist. Schließlich ist auch (4) nach *sww* eindeutig möglich, da für die gegebenen Größen α und h_c die Strecke DA kleiner als s_b ausfällt. Folglich ist die gesamte Konstruktion mit den gegebenen Stücken eindeutig.

Olympiadeklasse 8

1. Die in die Felder $A, B, C, D, E, F, G, H, K$, eingetragenen Zahlen seien

$a, b, c, d, e, f, g, h, k$, genannt.

Dann gilt für

$$s_1 = a+b+c+d,\quad s_2 = d+e+f+g,\quad s_3 = g+h+k+a \qquad (1)$$

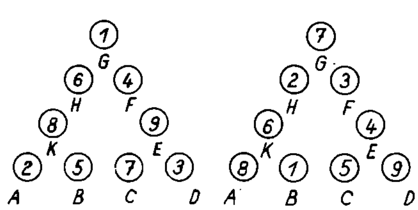
Laut Aufgabenstellung $s_1 = s_2 = s_3$ und (2)

$a+b+c+d+e+f+g+h+k = 45$ (3).

Aus (1), (2) und (3) folgt

$3s_1 = s_1 + s_2 + s_3 = 45 + a + d + g$.

Daher ist $3s_1$ und folglich s_1 dann am kleinsten (bzw. am größten), wenn jeweils dasselbe für die Summe $a+d+g$ gilt. Die kleinste (bzw. größte) Summe, die aus drei verschiedenen der natürlichen Zahlen $1, \ldots, 9$ gebildet werden kann, ist $1+2+3 = 6$ (bzw. $7+8+9 = 24$). Daher kann der kleinste Wert von s_1 nicht kleiner als $(45+6):3 = 17$ sein [bzw. der größte nicht größer als $(45+24):3 = 23$]. Wenn man nun noch je eine der in der Aufgabenstellung beschriebenen Eintragungen finden kann, bei denen $s_1 = 17$ (bzw. $s_1 = 23$) wird, so ist einerseits gezeigt, daß diese beiden Werte schon selbst der kleinste bzw. größte Wert von s_1 sind, und andererseits sind damit auch zwei Möglichkeiten derart gefunden, wie es in b) verlangt war.



2. Laut Aufgabe gilt:

$\overline{AB'} = \overline{B'C}$ und $\overline{MB'} = \overline{BM}$.

Die Parallele durch B' zu AA' ist für das Dreieck $\triangle AA'C$ eine Mittelparallele. Sie schneidet BC in einem Punkt, der zwischen A' und C liegt und A'' genannt sei. Dann gilt nach einem der Strahlensätze

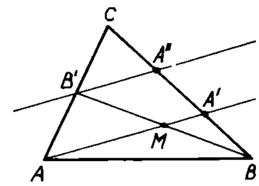
$\overline{BA'} : \overline{A'A''} = \overline{BM} : \overline{MB'} = 1 : 1$ (1)

$\overline{A'A''} : \overline{A''C} = \overline{AB'} : \overline{B'C} = 1 : 1$ (2)

Aus (1) und (2) folgt

$\overline{BA'} = \overline{A'A''} = \overline{A''C}$ und daraus

$\overline{BC} = 3\,\overline{BA'}$, w. z. b. w.



3. Das Gewicht des Kupferanteils in der Legierung sei x kp. Dann beträgt das Gewicht des Zinkanteils $(216-x)$ kp.

Beim Eintauchen in Wasser beträgt der Gewichtsverlust des Kupferanteils $\frac{1}{9}x$ kp und der des Zinkanteils $\frac{1}{7}(216-x)$ kp. Daher gilt:

$\frac{1}{9}x + \frac{1}{7} \cdot (216-x) = 26$, woraus man

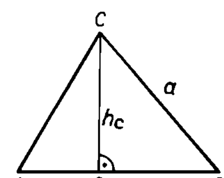
$7x + 9(216-x) = 63 \cdot 26$,

also $2x = 9 \cdot 216 - 63 \cdot 26 = 9 \cdot 34$

und daraus $x = 153$ erhält.

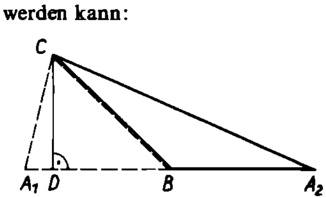
Der Kupferanteil kann daher nur 153 kp, der Zinkanteil nur 216 kp − 153 kp = 63 kp betragen haben. Wegen $153 : 216 \approx 0{,}708$ betrug der prozentuale Anteil des Kupfers rund 71 %, der des Zinks rund 29 %.

4. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



Der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe sei D. Dann enthält das Teildreieck $\triangle CDB$, sofern es nicht mit $D = B$ entartet ist, als bekannte Stücke a, h_c und den rechten Winkel $\sphericalangle CDB$. Punkt A liegt erstens auf der Geraden durch B und D und zweitens auf dem Kreis um B mit c.

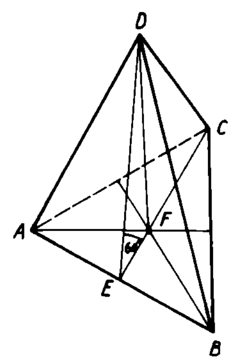
(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(1) Wir konstruieren das Teildreieck $\triangle CDB$ aus $\overline{BC}=a$, $\overline{CD}=h_c$ und dem rechten Winkel $\sphericalangle CDB$. Der Entartungsfall $D=B$ tritt nicht auf, da für die gegebenen Werte $h_c<a$ gilt.
(2) Wir zeichnen die Gerade durch D und B.
(3) Wir schlagen den Kreis um B mit c. Schneidet er die Gerade durch D und B, so sei A einer der Schnittpunkte.
(III) Beweis, daß jedes so erhaltene Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach Konstruktion ist $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=c$, $\overline{CD}=h_c$ und CD die auf der Geraden durch A und B senkrechte Höhe.
(IV) Wegen $h_c<a$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium *ssw* eindeutig möglich, da der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. (Wie sich (1) [und (2)] für $h_c=a$ gestalten würde, braucht bei den gegebenen Werten nicht untersucht zu werden.) Konstruktionsabschnitt (2) ist stets eindeutig möglich, da sich wegen $h_c<a$ bei (1) $D\neq B$ ergeben hatte. Schließlich ergibt (3) stets zwei verschiedene Punkte A_1 und A_2. Da nun der wegen $h_c<a$ spitze Winkel $\sphericalangle DBC$ in dem einen der beiden Dreiecke $\triangle A_1BC$, $\triangle A_2BC$ als Innenwinkel, in dem anderen als Außenwinkel bei B auftritt, so ist das eine dieser Dreiecke bei B spitzwinklig, das andere bei B stumpfwinklig; folglich sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent (bei gleicher Reihenfolge A_1B, C bzw. A_2, B, C homologer Punkte).
Anmerkung: Da nach dem Außenwinkelsatz der Winkel $\sphericalangle DBC$ größer ist als jeder der beiden spitzen Winkel des bei B stumpfwinkligen unter den Dreiecken $\triangle A_1BC$, $\triangle A_2BC$, so sind diese beiden Dreiecke auch nicht kongruent bei anderer Reihenfolge homologer Punkte. Jedoch ist dieser Nachweis im Sinne der Aufgabenstellung nicht erforderlich.
Somit besitzt die Aufgabe genau diese beiden Dreiecke als Lösung.

Olympiadeklasse 9

1. Angenommen, C hätte den Brief nicht. Dann wäre C (2) falsch. Also folgt, da laut Aufgabe von den drei Aussagen, die C gemacht hat, wenigstens zwei wahr sind, daß C (3) wahr sein müßte. Daher wären alle Aussagen von B und wegen B (2) auch alle Aussagen von A wahr. Wegen B (1) und A (2) müßte mithin doch C den Brief haben. Dieser Widerspruch beweist, daß die Annahme, C hätte den Brief nicht, falsch war.
Also verbleibt als einzige Möglichkeit nur die Annahme: C hat den Brief.
2. b) Angenommen, a und b seien zwei derartige natürliche Zahlen. Dann gilt:
$$\left.\begin{aligned} a &= u^2+v^2 \\ b &= x^2+y^2 \end{aligned}\right\} \text{ mit natürlichen Zahlen } u, v, x, y \text{ also}$$
$$\begin{aligned} a\cdot b &= (u^2+v^2)(x^2+y^2)\\ &= u^2x^2+u^2y^2+v^2x^2+v^2y^2\\ &= (u^2x^2+v^2y^2)+(u^2y^2+v^2x^2),\\ &= (u^2x^2+2uvxy+v^2y^2)+(u^2y^2-2uvxy+v^2x^2),\\ &= (ux+vy)^2+(uy-vx)^2 \qquad (1.1)\\ &= (ux+vy)^2+(vx-uy)^2 \qquad (1.2)\end{aligned}$$
Da entweder $(uy-vx)$ oder $(vx-uy)$ und sämtliche der Zahlen u, v, x, y natürliche Zahlen sind, stehen auch in den Klammern von (1.1) bzw. (1.2) natürliche Zahlen, d. h. $a\cdot b$ ist als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellbar.
a) Es gilt z. B. für $a=5$ und $b=13$:
$5=1^2+2^2$; $13=2^2+3^2$
$5\cdot 13=65=1^2+8^2$
3. a) Angenommen, es gäbe ein solches x_0. Dann gilt $2\cdot x_0=x_0+2$, woraus man $x_0=2$ erhält. Tatsächlich ist hierfür die verlangte Bedingung wegen $2\cdot 2=2+2$ erfüllt.
b) Angenommen, es gäbe ein solches x_0. Dann gilt
$2(mx_0+n)=m(x_0+2)+n$, also $mx_0=2m-n$ und daher wegen $m\neq 0$
$$x_0=2-\frac{n}{m}.$$
Tatsächlich ist hierfür die verlangte Bedingung wegen $2\left[m\left(2-\frac{n}{m}\right)+n\right]$ $=m\left(2-\frac{n}{m}+2\right)+n$ erfüllt, da sie dasselbe wie $4m=4m$ besagt.
4. Für das Volumen V der Pyramide mit den Ecken A, B, C, D gilt $V=\frac{1}{3}G\cdot h$, wobei G der Inhalt der Grundfläche und h die Länge der Pyramidenhöhe ist. Laut Aufgabe ist die Grundfläche die Fläche des gleichseitigen Dreiecks △ ABC. Für den Flächeninhalt G dieses Dreiecks gilt $G=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.



Es sei F der Fußpunkt der Pyramidenhöhe. Da F nach Voraussetzung mit dem Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ zusammenfällt, schneidet der von C ausgehende Strahl durch F die Seite AB in deren Mittelpunkt, der E genannt sei. Damit ist CE Seitenhalbierende und wegen der Gleichseitigkeit von △ ABC auch Höhe dieses Dreiecks.
Folglich gilt:
$$\overline{AE}=\overline{EB} \qquad (1)$$
sowie $\overline{FE}=\frac{1}{3}\overline{CE}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$.
Da $\triangle DFA\cong\triangle DFB$ (*sws*) ist, gilt:
$\overline{AD}=\overline{BD}$,
d. h. $\triangle ABD$ ist gleichschenklig.
Wegen (1) ist folglich DE Höhe in diesem Dreieck. Der Winkel $\sphericalangle FED$ ist daher der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche der Pyramide und somit laut Aufgabe 60° groß. Da $\sphericalangle EFD$ ein rechter Winkel ist, läßt sich die Fläche des Dreiecks △ EFD als die Hälfte der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks auffassen.
Folglich gilt $\overline{DE}=2\cdot\overline{EF}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$.
Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt nun
$h=\overline{DF}=\sqrt{\overline{DE}^2-\overline{EF}^2}=\sqrt{\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{12}}=\frac{a}{2}$.
Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide der Wert
$V=\frac{1}{3}G\cdot h=\frac{1}{3}\frac{a^2}{\cdot 4}\sqrt{3}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3}{24}\sqrt{3}$.

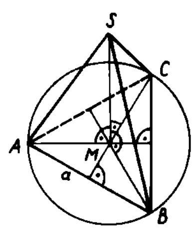
Olympiadeklasse 10

1. Jede n-stellige natürliche Zahl z mit den Ziffern $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ $(n>1)$ im dekadischen System läßt sich folgendermaßen schreiben:
$z=a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\ldots+$ $+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0$. Dabei gilt $0<a_{n-1}\leqq 9$ und $0\leqq a_i\leqq 9$ $(i=0,\ldots n-2)$
Daraus folgt $z\geqq a_{n-1}\cdot 10^{n-1}$
Das aus den sämtlichen Ziffern von z gebildete Produkt P lautet:
$P=a_{n-1}\cdot a_{n-2}\ldots a_2\cdot a_1\cdot a_0$.
Wegen $0\leqq a_i\leqq 9$ $(i=0,\ldots,n-2)$ und $a_{n-1}>0$ sowie $n>1$* gilt:
$P\leqq a_{n-1}\cdot 9^{n-1}<a_{n-1}\cdot 10^{n-1}\leqq z$,
also $P<z$, w.z.b.w.
* *Anmerkung:* Die Voraussetzung $n>1$ verwendet man, um $9^{n-1}<10^{n-1}$ zu erhalten, die Voraussetzung $a_{n-1}>0$, um daraus $a_{n-1}\cdot 9^{n-1}<a_{n-1}\cdot 10^{n-1}$ zu schließen.
2. *Fall a)* Angenommen, C (3) wäre falsch. Dann wäre auch C (1) falsch, und es gäbe im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe höchstens eine wahre Aussage von C. Also kann C (3) nur wahr, der Ball also nur grün oder schwarz oder gelb sein.
Daher muß C (2) falsch, also laut Aufgabenstellung C (1) wahr sein. Der Ball kann mithin nur schwarz oder grün sein. Dann ist B (1) falsch, demnach muß B (3) wahr sein. Der Ball kann also nur grün sein. Die Aussage D (3) ist falsch, da der Ball einfarbig ist. Also ist D (1) wahr. Der Pullover von D kann daher ebenfalls nur grün sein.
Fall b) Angenommen, C (1) wäre wahr. Dann wäre auch C (3) wahr, im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe. Also kann C (1) nur falsch sein. Angenommen, C (3) wäre wahr. Dann wäre der Ball gelb, also wären alle Aussagen von A falsch, im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe. Also kann auch C (3) nur falsch und folglich C (2) nur wahr sein. Der Ball kann somit nur rot sein. Daher müssen B (1), (3) falsch sein. Andererseits gilt: D (2) ist unabhängig von allen Bedingungen stets wahr, also ist laut Aufgabenstellung D (1) falsch. Die Farbe des Pullovers von D läßt sich allein mit Hilfe

der gemachten Aussagen nicht ermitteln. Es steht nur fest, daß der Pullover nicht rot ist.

3. In jedem gleichseitigen Dreieck ist der Umkreismittelpunkt gleichzeitig der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, und jede von diesen ist mit einer Höhe des Dreiecks identisch. Im vorliegenden Fall hat jede von ihnen mithin die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Die Seitenhalbierenden eines jeden Dreiecks teilen einander so im Verhältnis 2:1, daß $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ ist. Ferner ist nach Aufgabenstellung $\overline{SM} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$.

Daher gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras, daß die Länge jeder der Strecken AS, BS, CS gleich $\sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{2a^2}{3}} = a$ ist.



4. Angenommen, eine der Zahlen m, n sei durch 5 teilbar. Dann ist x durch 5 teilbar. Angenommen, keine der Zahlen m, n sei durch 5 teilbar. Dann läßt jede der Zahlen m^2, n^2 bei Division durch 5 entweder den Rest 1 oder den Rest 4.

Beweis: Jede nicht durch 5 teilbare ganze Zahl g läßt sich in der Form $g = 5p+r$ mit ganzzahligen p, r und $1 \leqq r \leqq 4$ *schreiben.* Dann gilt: $g^2 = (5p+r)^2 = 25p^2+10pr+r^2$, d. h. g^2 läßt bei Division durch 5 den gleichen Rest wie r^2.

Daraus ergibt sich:

Läßt bei Division durch 5

eine Zahl den Rest 1, so läßt ihr Quadrat den Rest 1

eine Zahl den Rest 2, so läßt ihr Quadrat den Rest 4

eine Zahl den Rest 3, so läßt ihr Quadrat den Rest 4

eine Zahl den Rest 4, so läßt ihr Quadrat den Rest 1.

Lassen m^2 und n^2 den gleichen Rest, dann ist y durch 5 teilbar. Lassen m^2 und n^2 verschiedene Reste, dann ist wegen $4+1 = 1+4 = 5$ die Zahl z durch 5 teilbar. Damit ist in jedem möglichen Fall gezeigt, daß von den Zahlen x, y, z stets mindestens eine durch 5 teilbar ist.

Bezirksolympiade

Olympiadeklasse 7

1. Die belgischen Fahrer, DDR-Fahrer, polnischen und sowjetischen Fahrer seien der Reihe nach mit B, D_1, D_2, ..., P_1, P_2, ..., S_1, S_2, ... bezeichnet.

Nach (5) waren mindestens zwei sowjetische Fahrer in der Spitzengruppe. Nach (2) fuhr mindestens ein DDR-Fahrer weder am Anfang noch am Ende, wegen (6) waren also mindestens drei DDR-Fahrer in der Spitzengruppe. Wegen (1) müssen diese Mindestzahlen, 2 sowjetische, 3 DDR-Fahrer, auch bereits die genauen Anzahlen der sowjetischen bzw. DDR-Fahrer sein. Sind X, Y Bezeichnungen von Fahrern, so bedeute $X < Y$, daß X vor Y fuhr. Dann gilt

(2) $D_1 < D_2 < B$,

(3) $S_1 < P_1 < P_2$,

(4) $B < S_2$.

Da genau ein Belgier in der Spitzengruppe fuhr, folgt aus (2) und (4)

(7) $D_1 < D_2 < B < S_2$.

Da genau zwei sowjetische Fahrer in der Spitzengruppe und nach (5) unmittelbar hintereinander fuhren, folgt daraus sowie aus (3) und (7)

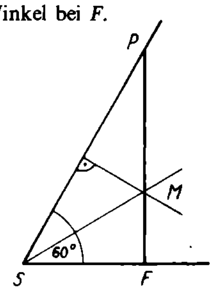
(8) $D_1 < D_2 < B < S_1 < S_2 < P_1 < P_2$.

Aus (6) und (8) folgt

(9) $D_1 < D_2 < B < S_1 < S_2 < P_1 < P_2 < D_3$.

Damit sind bereits 8 Fahrer erfaßt, also ist (9) die einzige Möglichkeit für die gesuchte Reihenfolge.

2. Da F eindeutig bestimmt ist, ist F auf Grund der Voraussetzungen von P und S verschieden. Daher sind P, S, F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel bei F.



Dann schneidet bekanntlich die Halbierende des Winkels $\sphericalangle PSF$ die Strecke PF in einem Punkt, der mit M bezeichnet werde. Dabei hat der Winkel $\sphericalangle MSP$ eine Größe von 30°. Außerdem hat der Winkel $\sphericalangle SPF$ als Komplementwinkel des Winkels $\sphericalangle PSF$ eine Größe von 30° (Winkelsumme im Dreieck $\triangle PSF$). Daher ist $\triangle PSM$ gleichschenklig mit $\overline{PM} = \overline{MS}$. Infolgedessen liegt M auf der Mittelsenkrechten von PS.

3. Laut Aufgabe sind $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$ der Anzahl aller Schüler der Klasse Mitglieder des Chores, aber nicht Mitglieder der SSG; und $\frac{7}{10}-\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$ der Anzahl der Schüler sind Mitglieder der SSG, aber nicht Mitglieder des Chores. Berücksichtigt man noch die $\frac{2}{5}$ der Anzahl der Schüler dieser Klasse, die beiden angehören, so verbleibt wegen $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$ genau $\frac{1}{10}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse, und genau soviel sind weder im Chor noch in der SSG.

4. Ist x die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält, dann bekommt der erste Freier $\left(\frac{x}{2}+1\right)$ Pflaumen. Als Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl $x-\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{x}{2}-1$. Die Anzahl der Pflaumen, die der zweite Freier bekommt, ist hiernach

$\frac{\frac{x}{2}-1}{2}+1=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$, und als nunmehriger Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl

$\left(\frac{x}{2}-1\right)-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x}{4}-\frac{3}{2}$.

Die Anzahl der Pflaumen, die der dritte Freier bekommt, ist dann

$$\frac{\frac{x}{4}-\frac{3}{2}}{2}+3=\frac{x}{8}+\frac{9}{4}.$$

Danach ist der Korb geleert, woraus die Gleichung

$$\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{x}{8}+\frac{9}{4}\right)=0$$

folgt. Aus dieser ergibt sich

$\frac{x}{8}=\frac{15}{4}$, also $x=30$. Daher kann die gesuchte Anzahl nur 30 betragen.

5. Angenommen, es gäbe eine derartige dreistellige Primzahl. Dann könnte sie nur aus drei verschiedenen der Ziffern 1, 3, 7, 9 bestehen, da bei den Vertauschungen jede ihrer Ziffern auch einmal an letzter Stelle stünde und daher, wie man mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln erkennt, die Ziffern 0, 2, 4, 5, 6, 8 entfielen. Also müßte die Primzahl entweder aus den Ziffern 1, 3, 7

oder aus den Ziffern 1, 3, 9

oder aus den Ziffern 1, 7, 9

oder aus den Ziffern 3, 7, 9 bestehen

Nun ist aber z. B. $371 = 7 \cdot 53$

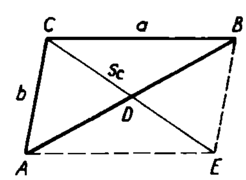
$319 = 11 \cdot 29$

$791 = 7 \cdot 113$

$793 = 13 \cdot 61$

d. h. es gibt in jedem Falle unter den durch Vertauschungen der Ziffern entstehenden Zahlen wenigstens eine, die nicht Primzahl ist. Daher gibt es keine dreistellige Primzahl mit der geforderten Eigenschaft.

6. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.



Der Mittelpunkt von AB sei D; der Punkt E sei derjenige auf dem Strahl CD gelegene von C verschiedene Punkt, für den $\overline{CD}=\overline{DE}$ gilt. Dann ist $AEBC$ ein Parallelogramm, da sich AB und CE gegenseitig halbieren.

Also ist $\overline{AE}=\overline{CB}=a$.

(II) Daher kann ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann der Aufgabenstellung entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir zeichnen die Strecke CD der Länge s_c.

(2) Wir zeichnen den Strahl CD.

(3) Wir schlagen den Kreis um D mit $\overline{CD}=s_c$; der von C verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl CD sei E.

(4) Wir schlagen um C und E die Kreise mit den Radien b bzw. a. Ist A einer ihrer Schnittpunkte, so zeichnen wir den Strahl AD.

(5) Wir schlagen den Kreis um D mit $\overline{AD}$; der von A verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl AD sei B.

(III) Beweis, daß ein so konstruiertes Dreieck der Aufgabenstellung entspricht:

Nach Konstruktion ist $\overline{AC}=b$. Ferner ist $\overline{AD}=\overline{DB}$, also CD Seitenhalbierende, und ihre Länge ist nach Konstruktion $\overline{CD}=s_c$. Schließlich ist $AEBC$ ein Parallelogramm, da sich die Diagonalen AB und CE gegenseitig halbieren. Also ist $\overline{CB}=\overline{AE}=a$.

(IV) Wegen $a-b<2\,s_c<a+b$ sind alle Konstruktionsschritte durchführbar, also gibt es ein Dreieck, das der Aufgabenstellung entspricht. Dieses ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, da der einzige möglicherweise mehrdeutige Konstruktionsschritt (4) dann zu zwei zu der Geraden durch C und E symmetrischen und damit kongruenten Figuren führt.

Olympiadeklasse 8

1. Die Radien der vier Kreise seien von innen nach außen mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet. Die Kreise enthalten der Reihe nach 1, 3, 7 und 15 der genannten jeweils einander inhaltsgleichen Flächenstücke.

Da die Flächeninhalte der Kreise πr_i^2 ($i=1, 2, 3, 4$) betragen, erhält man aus der Aufgabenstellung die Proportion $\pi r_1^2 : \pi r_2^2 : \pi r_3^2 : \pi r_4^2 = 1:3:7:15$ und daraus wegen $r_i>0$ ($i=1, 2, 3, 4$) schließlich, daß $r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{7} : \sqrt{15}$ gelten muß, wenn alle 15 Flächenstücke einander inhaltsgleich sein sollen.

2. Da P_1 das gesamte Becken in genau 4 h 30 min füllt, wurde durch diese Pumpe in 30 min genau $\frac{1}{9}$ des Beckens gefüllt.

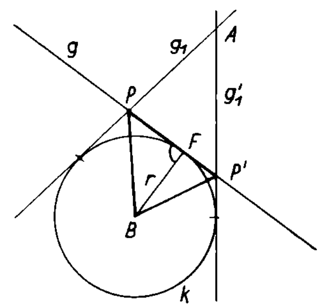
In jeder Minute füllte P_1 mithin genau $\frac{1}{270}$ des Beckens. Da P_2 das gesamte Becken in genau 6 h 45 min, also in 405 min, füllt, füllte diese Pumpe in jeder Minute $\frac{1}{405}$ des Beckens.

In der Zeit, in der beide Pumpen zusammen arbeiteten, füllten sie mithin in jeder Minute wegen $\frac{1}{270}+\frac{1}{405}=\frac{15}{2\,430}=\frac{1}{162}$ genau $\frac{1}{162}$ des Beckens.

Insgesamt wurde von beiden Pumpen gemeinsam $\frac{8}{9}$ des Beckens gefüllt.

Wegen $\frac{8}{9}=\frac{144}{162}$ geschah das in genau 144 min. Infolgedessen wurde das Becken in der in der Aufgabe angegebenen Weise in genau 174 min, das sind 2 h 54 min, gefüllt.

3. (I) Angenommen, P sei ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann hat B als Punkt der Winkelhalbierenden gleiche Abstände zu g und der Geraden g_1 durch A und P, also wird derjenige Kreis um B, der g berührt, auch g_1 berühren.



(II) Daher entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man fällt das Lot BF von B auf g. Dann schlägt man den Kreis k um B durch F und konstruiert die Tangenten von A an k. Ist g_1 eine dieser Tangenten und schneidet sie g, so sei P ihr Schnittpunkt mit g.

(III) Beweis, daß jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe genügt: Die Geraden g und g_1 werden nach Konstruktion beide von k berührt, sie haben also gleiche Abstände von B. Daher liegt B auf einer Winkelhalbierenden dieser beiden Geraden.

(IV) Die Konstruktion von F ist stets eindeutig durchführbar und ergibt $F\neq B$ und $F\neq A$, da A und B nicht auf g liegen.

Ferner liegt k mit Ausnahme des Punktes F ganz auf der anderen Seite von g wie A. Also liegt A außerhalb von k. Somit gibt es genau zwei verschiedene Tangenten g_1 und g_1' von A an k. Da jede von ihnen A und einen Punkt von k, also einen Punkt auf der anderen Seite von g wie A, enthält, schneidet jede von ihnen g, und diese beiden Schnittpunkte P, P' sind auch voneinander verschieden, da sie andernfalls sowohl auf g_1 als auch auf g_1' lägen, also mit dem Schnittpunkt A von g_1 und g_1' zusammenfielen.

Somit hat die Aufgabe genau diese zwei Lösungen P, P'.

4. Wegen $a>b$ gilt $a^2-b^2>0$. Wegen $(a-b)\leqq(a+b)$ ist $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ genau dann Primzahl, wenn $a-b=1$ <u>und</u> $a+b$ Primzahl ist.

5. Angenommen, die Aussagen (1), (2), (3), (4), (5), (6) wären sämtlich wahr. Dann hätte wegen (3) und (4) jedes Ehepaar wenigstens 1 Mädchen. Wegen (1), (4), (5) und (6) müßte folglich die Anzahl der Jungen kleiner sein als die Anzahl der Ehepaare und damit erst recht kleiner als die Anzahl der Mädchen, im Widerspruch zu (2). Brigitte hat also mit ihrem Einwand recht.

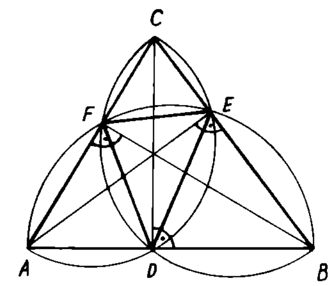
6. Die Fußpunkte der die Punkte A, B bzw. C enthaltenden Höhen des spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien mit E, F bzw. D in dieser Reihenfolge bezeichnet.

Jeder der Punkte E, F, D liegt nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf zweien der drei Kreise, die je eine der Dreiecksseiten als Durchmesser haben (s. Abb.). Sie sind innere Punkte der Strecken BC, AC bzw. AB, da $\triangle ABC$ spitzwinklig ist. Der Strahl FB verläuft folglich im Innern des Winkels $\measuredangle EFD$. Nun gilt

$\measuredangle AEB \cong \measuredangle BDC$ (rechte Winkel)

$\measuredangle ABE \cong \measuredangle DBC$ und mithin wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck

$\measuredangle BAE \cong \measuredangle BCD$. (1)



Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt:

$\measuredangle BAE \approx \measuredangle BFE$ (Bogen $\widehat{BE}$) sowie

$\measuredangle BCD \approx \measuredangle BFD$ (Bogen $\widehat{BD}$).

Hieraus sowie aus (1) folgt

$\measuredangle BFE \cong \measuredangle BFD$, d. h. BF halbiert $\measuredangle EFD$.

Olympiadeklasse 9

1. Die erwähnte Anzahl von Tagen sei x.

Aus (2) folgt:

(5) Es gab keinen Tag, an dem Günter vor- und nachmittags Tischdienst hatte.

Aus (3) folgt:

(6) Günter hatte an genau $(x-13)$ Tagen nachmittags Tischdienst.

Aus (4) folgt:

(7) Günter hatte an genau $(x-11)$ Tagen vormittags Tischdienst.

Aus (1), (5), (6) und (7) erhält man $x-13+x-11=6$ und daraus

(8) $x=15$ als Anzahl der Tage, die Günter im Lager verbrachte. Nach (6) bzw. (7) folgt also weiter als Anzahl der Vormittage bzw. der Nachmittage, an denen Günter Tischdienst hatte, 2 bzw. 4.

Nun gilt weiter:

Da täglich genau vier Schüler Tischdienst hatten, waren insgesamt genau 60 Einsätze notwendig. Da jedes Mitglied der Gruppe gleich oft eingesetzt wurde, und daher wie Günter genau 6mal eingesetzt war, bestand die Gruppe aus genau 10 Schülern.

2. Den gesuchten Flächeninhalt erhält man, indem man vom Flächeninhalt a^2 des Quadrats $ABCD$ die Summe der Flächeninhalte der acht Dreiecke

$\triangle AKE$, $\triangle BLE$, $\triangle BMF$, $\triangle CNF$, $\triangle COG$, $\triangle DPG$, $\triangle DQH$, $\triangle ARH$ subtrahiert.

Nun gilt:

$\triangle ABF \cong \triangle ABH \cong \triangle BCG \cong \triangle BCE \cong \triangle CDH \cong \triangle CDF \cong \triangle DAE \cong \triangle DAG$; denn diese

Dreiecke stimmen sämtlich in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen rechten Winkel überein.
Daher sind die anfangs genannten acht Dreiecke sämtlich untereinander kongruent; denn sie stimmen in den Winkeln und in einander entsprechenden Seiten überein.
Es gilt ferner $\triangle AKE \sim \triangle ABF$ (nach dem Hauptähnlichkeitssatz). Folglich ist $\triangle AKE$ rechtwinklig bei K, entsprechend $\triangle BFM$ bei M. Deshalb gilt $KE \parallel BM$. Aus einem der Strahlensätze folgt:
$\overline{KE} : \overline{MB} = \overline{AE} : \overline{AB} = 1 : 2$, d. h. wegen $\overline{AK} = \overline{MB}$ $\overline{AK} = 2\overline{KE}$. Aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle AKE$, folgt:
$\overline{KE}^2 + (2\overline{KE})^2 = \overline{AE}^2$, d. h.
$5\,\overline{KE}^2 = \frac{a^2}{4}$ bzw. $\overline{KE}^2 = \frac{a^2}{20}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AKE$ beträgt
$\frac{\overline{KE} \cdot 2\,\overline{KE}}{2} = \overline{KE}^2 = \frac{a^2}{20}$.
Mithin ist der gesuchte Flächeninhalt

$$a^2 - 8 \cdot \frac{a^2}{20} = \frac{3}{5}a^2.$$

3. Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x, die die gegebene Gleichung erfüllt.
Dann ist $\frac{5x+3}{7}$ ganzzahlig, und es gibt eine reelle Zahl a mit $0 \leqq a < 1$, so daß $\frac{10+3x}{7} = \frac{5x+3}{7} + a$ gilt.
Daraus folgt
$70 + 21x = 30x + 18 + 42a$, woraus man

$$x = \frac{52-42a}{9} \text{ erhält.}$$

Wegen $0 \leqq a < 1$ folgt daraus

$$\frac{10}{9} < x \leqq \frac{52}{9} \text{ und weiter}$$

$$\frac{\frac{50}{9}+3}{7} < \frac{5x+3}{7} \leqq \frac{\frac{260}{9}+3}{7}$$

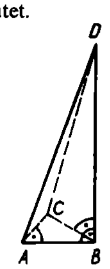
bzw. $\frac{11}{9} < \frac{5x+3}{7} \leqq \frac{41}{9}$, also kann der Ausdruck $\frac{5x+3}{7}$ (da er ganzzahlig ist) nur gleich einer der Zahlen 2; 3; 4 sein.
Aus $\frac{5x+3}{7} = 2$ folgt $x = \frac{11}{5}$
aus $\frac{5x+3}{7} = 3$ folgt $x = \frac{18}{5}$ und
aus $\frac{5x+3}{7} = 4$ folgt $x = 5$.
Also können höchstens $x = \frac{11}{5}$, $x = \frac{18}{5}$, $x = 5$ Lösungen von (1) sein.
Tatsächlich sind dies Lösungen; denn es gilt:

$$\left[\frac{10+\frac{33}{5}}{6}\right] = 2 \quad \text{und} \quad \frac{\frac{55}{5}+3}{7} = 2;$$

$$\left[\frac{10+\frac{54}{5}}{6}\right] = 3 \quad \text{und} \quad \frac{\frac{90}{5}+3}{7} = 3;$$

$$\left[\frac{10+15}{6}\right] = 4 \quad \text{und} \quad \frac{25+3}{7} = 4;$$

4. Angenommen, ein Tripel (x, y, z) sei Lösung von (1), (2). Dann ergibt sich, indem man z. B. $x = 2 - y$ in (2) einsetzt,
$y^2 - 2y + z^2 + 1 = 0$, also
(3) $(y-1)^2 + z^2 = 0$.
Wäre nun $y \neq 1$ oder $z \neq 0$, so folgte $(y-1)^2 > 0$ bzw. $z > 0$, also, da stets $(y-1)^2 \geqq 0$ und $z^2 \geqq 0$ ist, in jedem Falle $(y-1)^2 + z^2 > 0$ im Widerspruch zu (3). Daher folgt aus (3), daß $y = 1$ und $z = 0$ sein muß.
Oder: Es gilt (4) $z^2 \geqq 0$ sowie wegen (3) auch (5) $z^2 = -(y-1)^2 \leqq 0$. Aus (4) und (5) folgt $z^2 = 0$, also $z = 0$. Hieraus und aus (5) ergibt sich $(y-1)^2 = 0$ also $y = 1$.
Aus (1) folgt dann $x = 1$. Also kann höchstens das Tripel (1, 1, 0) Lösung des Gleichungssystems (1), (2) sein. Tatsächlich ist dies Lösung; denn für $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ wird $x + y = 1 + 1 = 2$ und $xy - z^2 = 1 - 0 = 1$.
5. Für das Volumen V der Pyramide mit den Ecken A, B, C, D gilt:
$V = \frac{1}{3} G \cdot h$, wobei G den Inhalt der Grundfläche und h die Länge der zugehörigen Höhe bedeutet.

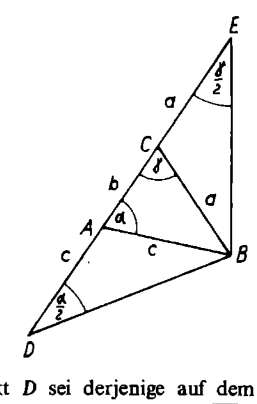


Da 3; 4; 5 und 5; 12; 13 pythagoreische Zahlentripel sind, sind nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BCD$ rechtwinklig mit den rechten Winkeln $\sphericalangle BAC$ bzw. $\sphericalangle CBD$.
Da laut Aufgabe auch $\sphericalangle ABD$ ein rechter Winkel ist, steht BD senkrecht auf der Ebene, in der das Dreieck $\triangle ABC$ liegt. Wählt man nun die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ als Grundfläche der Pyramide, dann ist BD die zugehörige Höhe, und man erhält

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 12 \text{ cm}^3$$

$$V = 24 \text{ cm}^3.$$

6. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



Punkt D sei derjenige auf dem Strahl CA gelegene Punkt, für den $\overline{AD} = \overline{AB}$ mit A zwischen C und D gilt, und Punkt E derjenige auf dem Strahl AC gelegene Punkt, für den $\overline{CE} = \overline{CB}$ mit C zwischen A und E gilt. Dann gilt $\overline{DE} = a + b + c$.
Ferner sind die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle CBE$ gleichschenklig. Daher und unter Berücksichtigung des Außenwinkelsatzes folgt, daß $\sphericalangle CEB$ die Größe $\frac{\gamma}{2}$ und $\sphericalangle ADB$ die Größe $\frac{\alpha}{2}$ hat.
Mithin enthält das Dreieck $\triangle EDB$ als bekannte Stücke die Seite $a + b + c$ und Winkel der Größe $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$. Ferner gilt auch $\overline{\sphericalangle DBA} = \frac{\alpha}{2}$ und $\overline{\sphericalangle EBC} = \frac{\gamma}{2}$ ($\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.).
(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(1) Man konstruiert ein Dreieck $\triangle EDB$ aus $\overline{DE} = a + b + c$,
$\overline{\sphericalangle BDE} = \frac{\alpha}{2}$, $\overline{\sphericalangle BED} = \frac{\gamma}{2}$.
(2) Man trägt in B an den Strahl BD einen Winkel der Größe $\frac{\alpha}{2}$ auf derjenigen Seite der Geraden durch B und D an, auf der E liegt. Schneidet sein freier Schenkel die Strecke DE, so sei der Schnittpunkt A genannt.
(3) Man trägt in B an den Strahl BE einen Winkel der Größe $\frac{\gamma}{2}$ auf derjenigen Seite der Geraden durch B und E an, auf der D liegt. Schneidet sein freier Schenkel die Strecke DE und liegt der Schnittpunkt zwischen A und E, so sei er C genannt.
(III) Der Beweis, daß ein so entstandenes Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich folgendermaßen:
Laut Konstruktion gilt:

$$\overline{ED} = a + b + c.$$

Die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle CBE$ sind gleichschenklig mit $\overline{AD} = \overline{AB}$ bzw. $\overline{CE} = \overline{CB}$.
Ihre Basiswinkel haben die Größe $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $\frac{\gamma}{2}$.
Dann haben die Winkel $\sphericalangle CAB$ bzw. $\sphericalangle BCA$ als Außenwinkel in den Dreiecken $\triangle ADB$ bzw. $\triangle CBE$ die Größen α bzw. γ. Schließlich hat auch (da A zwischen D und E sowie C zwischen A und E liegt) $\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}$ die verlangte Größe ($\overline{EC} + \overline{CA} + \overline{AD} = \overline{DE}$) $= a + b + c$.
(IV) Da in jedem Dreieck mit zwei Innenwinkeln α, γ die Beziehung $\alpha + \gamma < 180°$ gilt, kann die Konstruktion nur möglich sein, wenn diese Beziehung erfüllt ist.
Ist dies der Fall, so gilt:
Konstruktionsschritt (1) ist eindeutig (bis auf Kongruenz) durchführbar, da erst recht $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$ $(< 90°) < 180°$ gilt. Dabei ergibt sich

$$\overline{\sphericalangle DBE} = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) > 180° - 90° = 90°$$

also erst recht $\overline{\sphericalangle DBE} > \frac{\alpha}{2}$, so daß die Konstruktion von A (Konstruktionsschritt [2]) ebenfalls eindeutig möglich ist. Schließlich folgt

$\sphericalangle EBA = \sphericalangle DBE - \frac{\alpha}{2} > 90° - \frac{\alpha}{2} > \frac{\gamma}{2}$, so daß auch C (zwischen A und E) eindeutig bestimmt ist (Konstruktionsschritt [3]). Daher ist für $\alpha + \gamma < 180°$ die gesamte Konstruktion (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar.

Olympiadeklasse 10

1. a) Für jede Zahl k gilt:

(1) $k + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = \frac{4k + k^2 - 2k + 1}{4}$

$= \frac{k^2 + 2k + 1}{4} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2.$

Ist k ganz, so erhält man das Quadrat der rationalen Zahl $\frac{k+1}{2}$ womit der Satz bewiesen ist.

b) Die erhaltene Gleichung (1) führt auf ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn k eine Quadratzahl ist und $\frac{k-1}{2}$ sowie $\frac{k+1}{2}$ natürliche Zahlen sind.

Letzteres ist für alle ungeraden Quadratzahlen $k > 1$ der Fall. Man erhält so z. B. die folgenden pythagoreischen Zahlentripel (x, y, z):

k	$x = \sqrt{k}$	$y = \frac{k-1}{2}$	$z = \frac{k+1}{2}$	Tatsächlich ist
9	3	4	5	$9 + 16 = 25$
25	5	12	13	$25 + 144 = 169$
49	7	24	25	$49 + 576 = 625$
81	9	40	41	$81 + 1600 = 1681$

Für jedes dieser vier Tripel gilt: In je dreien dieser vier Tripel kommt mindestens eine Zahl vor, die durch keine Zahl des vierten Tripels teilbar ist. Daher sind die vier Tripel (in dem angegebenen Sinne) voneinander verschieden.

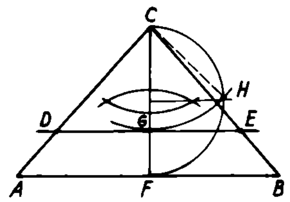
2. (I) Angenommen, die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ sei durch eine Parallele zur Basis AB in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegt und es seien D, E die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Seiten AC bzw. BC. Ferner sei F der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrecht stehenden Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$ und G der Schnittpunkt dieser Höhe mit den genannten Parallelen. Dann gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz

$\triangle ABC \sim \triangle DEC.$

Da sich die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate einander entsprechender Seiten bzw. Höhen verhalten, gilt: $\overline{CG}^2 : \overline{CF}^2 = 1 : 2$, woraus man $CG = \frac{\overline{CF}}{2}\sqrt{2}$ erhält, d. h. CG ist so lang wie eine (also jede) Kathete in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse CF.

(II) Daraus ergibt sich, daß eine Parallele zu AB nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man fällt das Lot CF von C auf AB.
(2) Man schlägt einen Halbkreis über CF.
(3) Man errichtet auf CF die Mittelsenkrechte. Ihr Schnittpunkt mit dem Halbkreis sei H genannt.
(4) Man schlägt den Kreis um C mit $\overline{CH}$. Schneidet er CF in einem Punkte, so sei dieser G genannt.
(5) Man zieht die Parallele durch G zu AB.



(III) Der Beweis, daß eine so konstruierte Parallele den Bedingungen der Aufgabe entspricht, verläuft folgendermaßen:

Laut Konstruktion ist $\triangle CHF$ rechtwinklig-gleichschenklig, wobei CF seine Hypotenuse ist. Daher gilt:

$\overline{CF}^2 = 2\,\overline{CH}^2$, also $\overline{CH} = \frac{\overline{CF}}{2}\sqrt{2}$.

Ferner gilt nach Konstruktion $\overline{CH} = \overline{CG}$.

Sind nun D und E die Schnittpunkte der konstruierten Parallelen mit AC bzw. BC, so gilt $DE \parallel AB$ und daher einerseits $CG \perp DE$, andererseits $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

Die Flächeninhalte I und I_1 dieser Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate einander entsprechender Höhen CF, CG, d. h.:

$I : I_1 = \overline{CF}^2 : \overline{CG}^2 = \overline{CF}^2 : \left(\frac{\overline{CF}}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 2 : 1,$

q. e. d.

(IV) Im Konstruktionsabschnitt (2) gibt es zwei Möglichkeiten, einen Halbkreis zu wählen, und daher führen (2), (3) auf verschiedene Punkte H_1 bzw. H_2. Für diese ist jedoch $\overline{CH_1} = \overline{CH_2}$. Da alle übrigen Konstruktionsschritte eindeutig durchführbar sind (z. B. [4] wegen $\overline{CH} < \overline{CF}$), trifft dies somit auch für die gesamte Konstruktion zu.

3. Angenommen $f(x)$ sei eine lineare Funktion mit der geforderten Eigenschaft.

Dann läßt sich diese Funktion in der Form $f(x) = mx + n$ (m, n reelle Zahlen) schreiben, und es gilt für jedes reelle x die Gleichung $mx + n = m(x+1) + n - a$, also $m = a$.

Daher können nur Funktionen mit einer Gleichung der Form $f(x) = ax + n$ (n eine reelle Zahl) die geforderte Eigenschaft haben.

Tatsächlich gilt für jede solche Funktion und für jedes reelle x:

$f(x) = ax + n = a(x+1) + n - a = f(x+1) - a.$

4. Es gilt: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n;$

daher gilt:

$\log_x(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n) = \log_x n!$

Daraus folgt

$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 4 + \ldots + \log_x n = \log_x n!$ (1)

Nun gilt für alle reellen Zahlen $a, b > 0$ und $a, b \neq 1$:

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (2)

Aus (1) und (2) folgt

$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \ldots + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x}$, w. z. b. w.

5. Wir bezeichnen die Spieler nach ihrer Plazierung mit I, II, III usw.

Aufgrund der gemachten Angaben gelten folgende Aussagen:

(1) Es wurden genau 15 Partien gespielt.
(2) Genau 5 Partien endeten Remis.
(3) Die Gesamtpunktzahlen waren paarweise voneinander verschieden.
(4) II erreichte genau zwei Punkte mehr als der Letze.
(5) A schnitt besser ab als D.
(6) A spielte nicht remis.
(7) D spielte nicht remis.
(8) C = III.
(9) C schlug IV.

Bezeichnet man die Anzahl der Teilnehmer mit n, so gilt $\frac{n(n-1)}{2} = 15$, woraus $n = 6$ folgt.

(10) An dem Turnier nahmen genau 6 Spieler teil.

Bezeichnet man die von VI erreichte Punktzahl mit z, so hat wegen (4) der Spieler II genau $z + 2$ Punkte erreicht. Daraus folgt wegen (3) als einzige Möglichkeit für III, IV, V:

	Spieler	erreichte Gesamtpunktzahl
(11)	V	$z + 0{,}5$
	IV	$z + 1$
	III	$z + 1{,}5$.

Die Summe der von II, III, IV, V, VI erreichten Gesamtpunktzahlen ist somit $5z + 5$.

Bezeichnet man nun die von I erreichte Punktzahl mit t, so gilt also $5z + 5 + t = 15$, woraus $t = 5\,(2 - z)$ folgt. Nun ist $(2 - z)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 0,5 und daher t ein ganzzahliges Vielfaches von $5 \cdot 0{,}5$. Andererseits gilt nach (3), und da I höchstens 5 Partien gewonnen haben kann,

$2{,}5 \leqq t \leqq 5.$

Daher kann t nur 2,5 oder 5 sein. Für $t = 2{,}5$ ergäbe (3), weil I die höchste Punktzahl hat, im Widerspruch zu $t = 10 - 5z$ für z den Wert $z = 0$.

Daher folgt $t = 5$ und $z = 1$.

(12) I gewann also seine sämtlichen Spiele. Damit erhält man unter Berücksichtigung von (8), (9), (10), (11) und (12) folgende Punkttabelle:

	I	II	III	IV	V	VI	Ges. Punktzahl
I	×	1	1	1	1	1	5
II	0	×		·			3
C = III	0		×	1			2,5
IV	0	·	0	×	·		2
V	0			·	×		1,5
VI	0			·		×	1

Nun läßt sich die Plazierung von D ermitteln. Es gilt

$D \neq$ III wegen (8)

$D \neq V$, da die Gesamtpunktzahl D wegen (7) eine ganze Zahl sein muß
$D \neq I$ wegen (5)
$D \neq II$ und $D \neq VI$ aus folgendem Grund:
Wäre $D = II$ oder $D = VI$, so wäre nach (7) in Zeile und Spalte II bzw. in Zeile und Spalte VI überall 1 oder 0 einzusetzen. Danach verblieben noch genau 10 freie Felder, in die wegen (2) überall 0,5 einzusetzen wäre, und hierbei könnte die Gesamtpunktzahl 2,5 von C nicht auftreten.
Also ist $D = IV$. (13)
Die Tabelle enthält noch 18 freie Felder. In genau 10 von ihnen ist wegen (2) die Zahl 0,5 einzusetzen. In genau 8 von ihnen ist demnach 1 oder 0 einzusetzen. Sechs dieser Felder sind wegen (7) schon bestimmt und in der Tabelle durch einen Punkt markiert. Die restlichen beiden Zahlen 1 und 0 müssen bei II und VI auftreten, da diese wegen ihrer ganzzahligen Gesamtpunktzahlen nicht sämtliche noch offenen Partien remis gespielt haben können.
C hat also außer gegen I und IV sämtliche Partien remis gespielt. Wegen (6) und (13) ist somit $A = I$ und hiernach B einer der (von C und) von I und IV verschiedenen Spieler. Daher folgt als einzige Möglichkeit für den gesuchten Spielausgang:
(14) Das Spiel B gegen C endete unentschieden.
6. Die Lösung kann nach dem „Schubfachprinzip" erfolgen. Man denke sich den Würfel durch ebene Schnitte in 27 untereinander kongruente Teilwürfel zerlegt. Die Raumdiagonale jedes dieser Teilwürfel hat die Länge $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.
Da wenigstens einer der Teilwürfel zwei verschiedene der 28 Punkte in seinem Innern oder auf seinem Rand enthält, kann der Abstand dieser beiden Punkte mithin nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ sein, weil die Länge der Raumdiagonalen eines Würfels gleich dem größten Abstand ist, den zwei Punkte ein und desselben Würfels voneinander haben können. (Bekanntlich läßt sich jedem Würfel eine Kugel umschreiben, deren Durchmesser gleich der Raumdiagonalen des Würfels ist.)

DDR-Olympiade

Die Lösungen zu den Aufgaben 1, 2, 4, 5 und 6 veröffentlichen wir in Heft 5/71.

3.1. (entsprechend dem Vorschlag der Aufgabenkommission):
(1) Für $c > 1$ ist $\log_c 4 < \log_c 12$ und damit $\frac{1}{\log_4 c} < \frac{1}{\log_{12} c}$, woraus sich $\log_{12} c < \log_4 c$ ergibt. Also ist (+) *erfüllt.*
(2) Für $c = 1$ ist (+) *erfüllt.*
(3) Für $\frac{1}{4} \leqq c < 1$ gilt $[\log_{12} c] = -1 = [\log_4 c]$, also ist (+) *erfüllt.*
(4) Für $\frac{1}{12} \leqq c < \frac{1}{4}$ gilt $[\log_{12} c] = -1$ und $[\log_4 c] = -2$; also ist (+) *nicht erfüllt.*
(5) Für $\frac{1}{16} \leqq c < \frac{1}{12}$ gilt $[\log_{12} c] = -2 = [\log_4 c]$, also ist (+) *erfüllt.*
(6) Sei $0 < c < \frac{1}{16}$. Setzt man $[\log_{12} c]\ u$ und $[\log_4 c] = v$, so gilt $12^u \leqq c < 12^{u+1}$, $4^v \leqq c < 4^{v+1}$, und wegen $4^v \leqq c < \frac{1}{16}$ ist $v < -2$, d. h. $v \leqq -3$. Dann ist $12^{u+1} > c \geqq 4^v = 12^v \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^v \geqq 12^v \cdot 27 > 12^{v+1}$ und damit $u > v$; also ist (+) *nicht erfüllt.*
Ergebnis: (+) ist genau dann erfüllt, wenn $\frac{1}{16} \leqq c < \frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{4} \leqq c$ ist.
Bemerkungen: Für diese Wahlaufgabe entschieden sich 63 Schüler (d. h. etwa die Hälfte der Teilnehmer). Von ihnen erreichten nur 2 die volle Punktzahl 7; 4 Teilnehmer erzielten 6 Punkte. Dagegen mußten 18 Lösungen mit 0 Punkten bewertet werden. Es ist bemerkenswert, daß sich kaum einer der Schüler durch eine Veranschaulichung der Funktion $f(c) = \log_{12} c$ und $g(c) = \log_4 c$ eine Übersicht über alle Lösungen verschafft hat. Auf diese Weise hätte man sehr leicht und schnell eine Unvollständigkeit und gewisse Fehlschlüsse in der Lösung erkennen können. Die meisten Fehler beruhten auf dem falschen Schluß, daß aus $[x] \leqq [y]$ folgt $x \leqq y$. (Bei der Diskussion von $[x] \leqq [y]$ blieb der Fall $x > y$ unbeachtet.)

Dr. E. Quaisser,
Pädagogische Hochschule Potsdam

3.2. (Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission, leicht abgeändert):
Ist $b > r > 0$, so gibt es ein Flächenstück, wie es die Abbildung zeigt. Ist sein Inhalt F und sein Umfang u, so gilt:
(1) $F = 2br - \frac{1}{2}\pi r^2$
und die wegen $r \neq 0$ mit (1) äquivalente Beziehung
(1') $2b = \frac{F}{r} + \frac{1}{2}\pi r$ sowie
(2) $u = 2r + 2b + \pi r$.
Aus (1') und (2) folgt der Reihe nach, daß dann die folgenden Gleichungen bestehen:
$$u = 2r + \frac{F}{r} + \frac{1}{2}\pi r + \pi r,$$
$$ur = 2r^2 + F + \frac{3}{2}\pi r^2$$
(3) $r^2\left(\frac{3}{2}\pi + 2\right) - ur + F = 0.$
(3) ist eine quadratische Gleichung in r, die eine positive reelle Lösung nach Voraussetzung besitzt. Dann muß notwendig die Diskriminante positiv sein, d. h. es gilt
$$\frac{u^2}{(3\pi+4)^2} > \frac{2F}{3\pi+4} \text{ und folglich}$$
(4) $u \geqq \sqrt{2F(3\pi + 4)}$.
Soll in (4) das Gleichheitszeichen gelten, so muß wegen (3) $r = \frac{u}{3\pi + 4}$ sein, woraus sich unter Beachtung von (4) mit dem Gleichheitszeichen
(5) $r = \sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}}$ und hieraus in Verbindung mit (1')
(6) $b = \sqrt{\frac{2F}{3\pi+4}}(\pi + 1) = r(\pi + 1) \quad (> r)$
ergibt.
Wählt man zu gegebenem $F > 0$ die Zahlen r und b gemäß (5) und (6), so gibt es wegen $b > r$ zu dem Paar (r, b) ein Flächenstück, wie es in der Aufgabe beschrieben ist. Zwischen dessen Inhalt F und dessen Umfang u besteht die Relation
$u = \sqrt{2F(3\pi + 4)}$. Daher genügt das Paar $(r, b) = \left(\sqrt{\frac{2F}{3\pi+4}}, \sqrt{\frac{2F}{3\pi+4}}(\pi+1)\right)$ den Bedingungen der Aufgaben und ist das einzige dieser Art.
Bemerkungen: Diese Aufgabe erwies sich für die Schüler, die die Methoden der Differentialrechnung zur Extremwertbestimmung nicht kannten, als ein echter Prüfstein. Die Gleichungen (1) und (2) konnten die Schüler im allgemeinen aufstellen. Aber bereits den Übergang zu (3) konnten einige nicht mehr vollziehen, und die weiteren Überlegungen schafften nur die besten Schüler. Häufig wurde das richtige Endergebnis in einer Form angegeben, aus der das Erfülltsein der Bedingungen $b > r$ nicht ersichtlich war. Wenn diese Relation dann nicht besonders nachgewiesen wurde, zogen die Korrektoren mit Recht einen Punkt ab. In einer guten Darstellung wurden Lösungen, die im Prinzip dem oben dargestellten Weg entsprechend von *Ursula Baier* (Dresden), *Doris Heckemann* (Dresden) und *Bernd Worel* (Neubrandenburg) abgegeben. Die Schüler, die die Aufgabe unter Anwendung der Differentialrechnung lösten, hatten es zwar bedeutend leichter, erhielten aber durchaus nicht immer die volle Punktzahl, da sie diese Methode nicht immer exakt anwendeten. Trotzdem wäre es m. E. günstiger, bei dieser Aufgabe in der Aufgabenstellung die Anwendung der Differentialrechnung als Lösungsmethode auszuschließen.

Hans-Jürgen Sprengel
Pädagogische Hochschule Potsdam

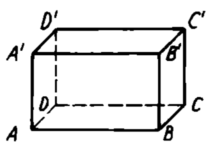
X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade (4. Stufe) · Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. Bilden Sie alle Mengen von fünf ein- oder zweistelligen Primzahlen derart, daß in jeder dieser Mengen jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal auftritt!

2. Von einem Quaderkörper mit den Eckpunkten A, B, C, D, A', B', C', D' (siehe Abb. A 10;2) und den Kantenlängen $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AA'}=c$ seien mit Hilfe der ebenen Schnitte durch die Eckpunkte B', A, D' bzw. A', B, C' bzw. B', C, D' bzw. A', D, C' diejenigen Teile abgetrennt, die jeweils den Eckpunkt A' bzw. B' bzw. C' bzw. D' enthalten.



Das Volumen des verbleibenden Restkörpers sei V_R, das des ursprünglichen Quaders V_Q.

a) Man gebe sämtliche Punkte des Quaderkörpers an, die Eckpunkte des Restkörpers sind, und stelle diesen in einem Schrägbild $\left(\alpha=60°;\ q=\frac{1}{3}\right)$ dar. (Das Schrägbild ist für den Fall $a=5$ cm, $b=2$ cm, $c=2{,}5$ cm zu zeichnen.)

b) Man berechne $V_R : V_Q$.

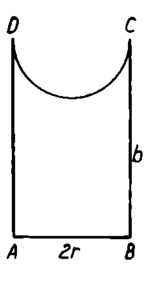
Von den nachstehenden Aufgaben 3.1. und 3.2. ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

3.1. Man ermittle alle positiven reellen Zahlen c, für die

(*) $[\log_{12} c] \leq [\log_4 c]$ gilt.

Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

3.2. Die Abb. A 10; 3.2 zeigt ein Flächenstück, das aus der Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB}=\overline{CD}=2r$ und $\overline{BC}=\overline{AD}=b$, $b>r$, durch Herausschneiden einer Halbkreisscheibe mit dem Durchmesser CD entstanden ist.



Man denke sich nun eine positive reelle Zahl F beliebig gegeben. Dann sind alle geordneten Paare (r, b) positiver reeller Zahlen mit $r<b$ zu ermitteln, für die das entsprechende Flächenstück den Inhalt F und dabei möglichst kleinen Umfang hat.

4. Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung

$$f(x+1) = f(-x) \text{ erfüllen.}$$

5. Es sei r eine von Null verschiedene reelle Zahl. Man ermittle alle reellen Zahlen $x \neq 0$, die die Ungleichung

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2} \text{ erfüllen. Dabei}$$

sind folgende Fälle zu untersuchen:

a) Es sei $r<-6$.
b) Es sei $r=-6$.
c) Es sei $-6<r<0$.
d) Es sei $r>0$.

6. Die Fläche eines Dreiecks $\triangle ABC$ soll folgendermaßen in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden:

Zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks liegen auf AB zwei Punkte E und F so, daß E zwischen A und F liegt. Außerdem sei D derjenige Punkt im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, für den $ED \parallel AC$ und $FD \parallel BC$ gilt. Die Flächen der Trapeze $AEDC$ und $FBCD$ und die des Dreiecks $\triangle EFD$ sollen dann untereinander inhaltsgleich sein.

Konstruieren Sie Punkte E, F, D, für die diese Forderung erfüllt ist! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Olympiadeklasse 11/12

1. Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, zu denen es reelle Zahlen x gibt, so daß $\sqrt{a+x}$ und $\sqrt{a-x}$ reell sind und die Ungleichung

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a \text{ erfüllt ist.}$$

Wie lauten die Werte von x in Abhängigkeit von a?

2. Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn h eine reelle Zahl ist und wenn eine ganzrationale Funktion f vom Grade n mit reellen Koeffizienten keine reellen Nullstellen besitzt, so gilt dasselbe von der ganzrationalen Funktion F, die durch

$F(x)=f(x)+hf'(x)+h^2f''(x)+\ldots+h^nf^{(n)}(x)$

definiert ist.

3. Es ist der folgende Satz zu beweisen: Haben je drei von vier in der gleichen Ebene liegenden konvexen Vielecksflächen jeweils einen Punkt gemeinsam, so gibt es einen Punkt, der jeder der vier Vielecksflächen angehört.

4. Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

In dem Gleichungssystem:

$$x+a_1y=b_1, \qquad (1)$$
$$a_2y+b_2z=a_3, \qquad (2)$$
$$b_3x+a_4z=b_4 \qquad (3)$$

wählt zunächst A für den Koeffizienten a_1, dann B für den Koeffizienten b_1, dann wieder A für a_2, dann B für b_2 usw., zum Schluß B für b_4 je eine beliebige ganze Zahl.

A hat genau dann gewonnen, wenn das System (1), (2), (3) genau eine ganzzahlige Lösung (x, y, z) hat.

a) Kann A so spielen, d. h., kann er die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_4$ jeweils nach der Wahl von $b_1, \ldots, b_3$ durch B so auswählen, daß er gewinnt?

b) Kann A von vornherein für die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_4$ solche Werte angeben, daß er unabhängig von der Wahl der Koeffizienten durch B (in jedem Falle) gewinnt?

5. Es sei $A_0A_1 \ldots A_n$ ($n \geq 2$) ein ebener konvexer Polygonzug der Länge s mit $A_0 \neq A_n$. Die Punkte $A_1 \ldots A_{n-1}$ mögen auf ein und derselben Seite der Geraden g durch A_0 und A_n liegen. (Ein ebener Polygonzug $A_0A_1 \ldots A_n$ heiße konvex, wenn der durch die Strecke A_0A_n geschlossene Polygonzug eine konvexe Fläche begrenzt.)

Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt F der bei Rotation des Polygonzuges um g entstehenden Fläche nicht größer als $\pi\frac{s^2}{2}$ ist, daß also $F \leq \frac{s^2}{2}\pi$ gilt.

Von den folgenden Aufgaben 6.1. und 6.2. ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6.1. Definition: Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen $u, v, w, \ldots$ heißt eine Gruppe bezüglich der algebraischen Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedem geordneten Paar $[u; v]$ von Elementen aus $\mathfrak{M}$ ist vermöge der Operation A ein Element w aus $\mathfrak{M}$ zugeordnet (man schreibt $u \circ v=w$).

(2) Die algebraische Operation A ist assoziativ d. h., für alle Elemente u, v, w aus $\mathfrak{M}$ gilt:

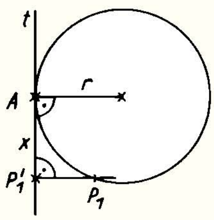
$$(u \circ v) \circ w=u \circ (v \circ w).$$

(3) Zu je zwei Elementen u und v aus $\mathfrak{M}$ existiert mindestens ein Element x aus $\mathfrak{M}$, so daß $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus $\mathfrak{M}$, so daß $y \circ u = v$ gilt.
Es sei nun $\mathfrak{P}$ die Menge aller Polynome 1. Grades
$f(x) = a_0 + a_1 x$, wobei a_0, a_1 rationale Zahlen sind und $a_1 \neq 0$ gilt.
Ferner sei in $\mathfrak{P}$ eine algebraische Operation A wie folgt definiert: Sind $f(x)$ und $g(x)$ Polynome aus $\mathfrak{P}$, so ist

$$f(x) \circ g(x) = g[f(x)].$$

Es ist zu entscheiden, ob $\mathfrak{P}$ eine Gruppe bezüglich A ist.

6.2. In einem ebenen Gelände erfolge das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r, falls außerdem eine Tangente t an diesen Kreisbogen und ihr Berührungspunkt A bekannt sind, dadurch, daß in beliebigen Punkten P' von t (mit $\overline{AP'} = x < r$) Senkrechte auf t errichtet und auf ihnen (nach der Seite von t, auf der der Kreisbogen liegt), Strecken $P'P$ so abgetragen werden, daß die Punkte P Punkte des gesuchten Kreisbogens sind. Dabei gelte $\overline{P'P} = y < r$.



a) Beweisen Sie, daß dann

$$y = \frac{x^2}{2r - y} \text{ gilt!}$$

b) In der Praxis genügt es oft, Näherungswerte für y zu ermitteln. Das geschieht auf folgende Weise:
Einen ersten Näherungswert y_1 erhält man aus der Gleichung

$$y_1 = \frac{x^2}{2r}.$$

Falls dessen Genauigkeit nicht ausreicht, wird ein zweiter Näherungswert y_2 aus der Gleichung

$$y_2 = \frac{x^2}{2r - y_1} \text{ ermittelt.}$$

Analog kann weiter verfahren werden, bis die geforderte Genauigkeit erreicht wurde.
Untersuchen Sie, ob es eine kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft gibt, daß für alle positiven reellen Zahlen

$x \leq \frac{1}{n} \cdot r$ der relative Fehler

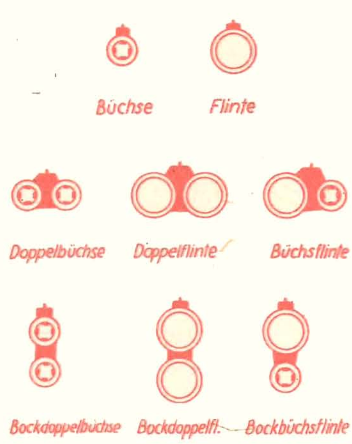
$$\delta = \frac{|y - y_1|}{y}$$

des Näherungswertes $y = \frac{x^2}{2r}$ nicht größer als 0,001 ausfällt, daß also $\delta \leq 0{,}001$ gilt!

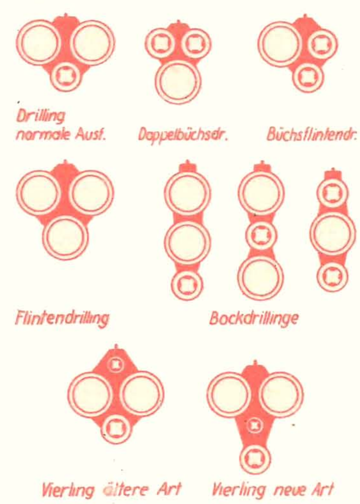
Waffen aus Suhl

Jugendluftgewehr

Der kleinste Bezirk unserer Republik ist der Bezirk Suhl, und die Stadt Suhl die kleinste Bezirksstadt. Nur 3,2 % der Bevölkerung der Republik leben in diesem Bezirk.
Was wissen wir sonst noch von Suhl? Ist Suhl nur eine Stadt im Thüringer Wald, Zentrum einer schönen Urlaubsgegend mit viel Wald und mit Schnee im Winter?
Der VEB Fahrzeug- und Jagdwaffenwerk Ernst Thälmann ist der größte Betrieb des Bezirkes. Die Suhler Moped-Vogelfamilie Star, Schwalbe, Spatz und Sperber kommt ebenso aus diesem Betrieb wie die in aller Welt beliebten Jagd- und Sportwaffen. Wer von euch hat noch nicht mit einem Luftgewehr aus Suhl geschossen? Bei uns in Suhl haben die Schüler ihre eigene Schülerproduktionsabteilung, in der sie im Rahmen des polytechnischen Unterrichts monatlich 700 Jugendluftgewehre montieren und für die Kunden im In- und Ausland verpacken.
Ich möchte euch in diesem Artikel einiges über unsere Waffenproduktion, dabei auftretende mathematische Probleme sowie die in diesem Jahr in Suhl stattfindenden Europameisterschaften im Sportschießen berichten.
Bei Jagdwaffen unterscheidet man zwischen Flinten und Büchsen. Während bei Flinten der Lauf innen glatt ist und mit einer Vielzahl kleiner Bleikugeln – den Schroten – geschossen wird, ist die „Kugel", die aus dem gezogenen Lauf der Büchse verschossen wird, ein längliches Geschoß. Es gibt ein- und mehrläufige Jagdwaffen. Je nach der Art und Anordnung der Läufe unterscheidet man zwischen Doppelflinten, Drillingen, Bockwaffen und Vierlingen. Interessant ist bei Flinten und Büchsen die Art der Kaliberbezeichnung. Sie geht bei Flinten auf eine alte englische Tradition zurück und wird noch heute überall angewandt. Man nimmt 1 engl. Pfund Blei (453,6 g) und teilt es z. B. in 12 gleich große Teile. Aus jedem der 12 Teile gießt man eine Kugel. Der Laufdurchmesser einer Flinte, der dem Durchmesser einer solchen Kugel entspricht, heißt Kaliber 12. Teilt man das Pfund in 16 Teile und stellt entsprechend 16 gleichgroße Kugeln her, so erhält man das Kaliber 16 und so jedes beliebige Flintenkaliber. Gebräuchliche Flintenkaliber sind Kaliber 12 und Kaliber 16 sowie 20 (seltener).



Ein- und doppelläufige Jagdgewehrarten



Drei- und vierläufige Jagdgewehrarten

Bei den Flintenkalibern sieht man deutlich, daß große Zahlen kleine Kaliber bezeichnen

▲1▲ Berechne die Flintenkaliber 12, 16 und 20! Die Dichte von Blei ist $11{,}3\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. Es wird klar, daß bei Flinten die kleinere Zahl ein größeres Kaliber bezeichnet.
Bei Büchsen gibt es zwei Arten von Kaliberbezeichnungen. In den Ländern, die das metrische Maßsystem verwenden (DDR,

BRD, Frankreich, Sowjetunion u. a.), wird der ungefähre Durchmesser der Läufe (innen) und der Geschosse in mm als Kaliber angegeben. So hat z. B. eine Büchse Kaliber 8 mm einen ungefähren Laufinnen- und Geschoßdurchmesser von 8 mm.
In den Ländern des Zollsystems dagegen (USA) gibt das Kaliber an, wieviel Hundertstel (oder Tausendstel) Zoll (1 Zoll = 25,4 mm) der Innendurchmesser des Laufes beträgt. Die Kaliberbezeichnung kann ins metrische System umgerechnet werden, wie z. B. bei der wohl allen von euch bekannten Kleinkaliberbüchse Kaliber 22, deren Lauf mithin einen Innendurchmesser von 5,588 mm hat.

▲2▲ Berechnet den Durchmesser der Geschosse bei einem 38er und einem 45er Revolver!
Wir sehen, daß diese Kaliberbezeichnung nichts mit der Länge der Patronen, der Hülsen oder der Geschosse zu tun hat.
Wie schon erwähnt, ist der Lauf einer Büchse innen nicht glatt. Die wendelförmigen Vertiefungen (Züge) in seinem Innern haben die Aufgabe, dem Lang- oder Spitzengeschoß eine Drehung um seine Längsachse zu geben und so dessen Flugstabilität zu erhöhen.
Die Drehzahl, die dabei zumindest kurzfristig erzielt wird, ist, wie wir sehen werden, recht beachtlich.

▲3▲ Errechnet die ungefähre Drehzahl eines Geschosses in Umdrehungen pro Minute, wenn dasselbe den Lauf mit $800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ verläßt und durch die Züge im Lauf alle 30 cm einmal um seine Längsachse gedreht wird.
Wer von euch hat sich schon einmal Gedanken darüber gemacht, wieviele Schrote einer Ente, einem Fasan oder einem Hasen bei einem Schuß „um die Ohren" fliegen? In einer normalen Schrotpatrone Kaliber 12 sind 35 g Schrote. Die Auswahl der Schrotgröße richtet sich selbstverständlich nach der Wildart, insbesondere nach der Größe der zu jagenden Tiere. So gibt es zum Beispiel 2-mm-Schrote für die Jagd auf Enten und für die Jagd auf den Fuchs benutzt man 4-mm-Schrote.

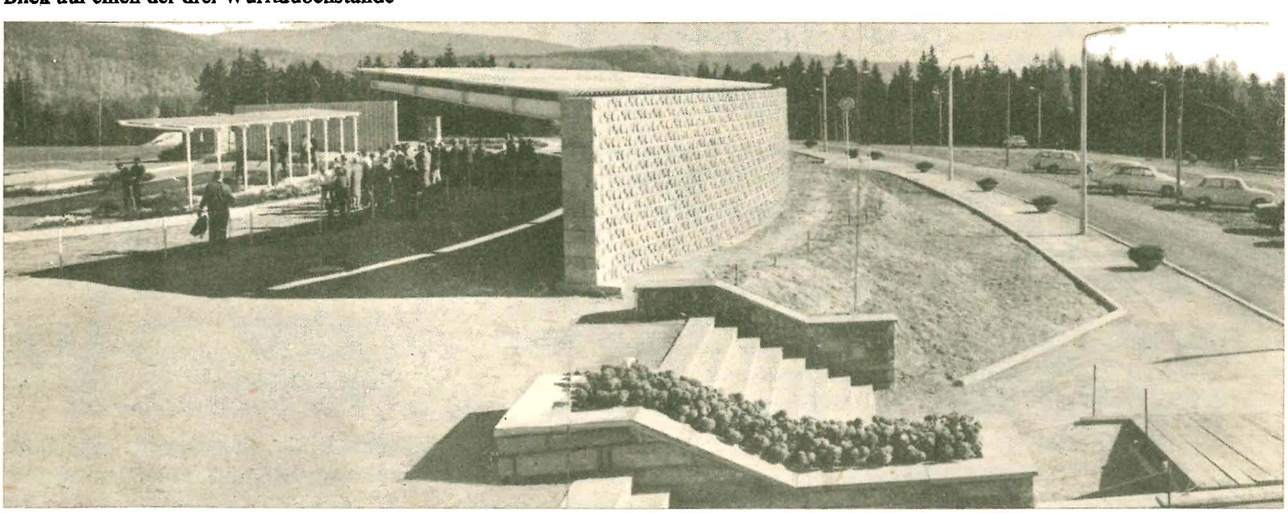
▲4▲ Berechne die Anzahl der Schrote in einer Patrone vom Kaliber 12, wenn der Schrotdurchmesser 2 bzw. 4 mm und die Dichte von Blei $11{,}3 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ beträgt! Vergleiche die Anzahl der Schrote, die sich durch die Durchmesserverdopplung ergibt, miteinander!
In Suhl werden nicht nur Waffen gebaut, es wird mit ihnen auch geschossen. Besonders im August 1971, wenn sich die besten Schützen Europas in Suhl zu ihren Meisterschaften versammeln, wird es eine ganze Woche lang nach Pulver riechen. Auf den zur Zeit schönsten und modernsten Anlagen Europas werden etwa 800 bis 1 000 Schützen aus vielen Ländern im friedlichen Wettstreit ihre Besten ermitteln.
Insgesamt werden 26 Goldmedaillen in 10 verschiedenen Schießdisziplinen vergeben.
Die Vielseitigkeit des Sportschießens kommt nicht nur in den verschiedenen Waffen, sondern auch in den Stellungen (Anschlägen), Entfernungen und Zielobjekten zum Ausdruck. Neben Klein- und Großkalibergewehren, mit denen auf 50 m und 300 m Entfernung feststehende Ringscheiben im Liegen, Knien und Stehen geschossen wird, finden wir Pistolen für das Schießen auf feststehende Ringscheiben auf 50 m Entfernung (Scheibenpistolen) und solche für das Schießen auf nur kurzzeitig sichtbare Figurenscheiben in 25 m Entfernung (Schnellfeuerpistolen).
Zweifellos werden die 3 jagdlichen Schießdisziplinen sehr viele Zuschauer besonders beeindrucken. Beim Wurftaubenschießen (Trap und Skeet) wird aus Flinten nach 12 cm großen Keramikscheiben geschossen, die von Wurfmaschinen auf eine bis zu 80 m weite Luftreise geschleudert werden. Hier kann der Zuschauer unmittelbar den Erfolg oder Mißerfolg der Schützen miterleben.
Schließlich wird von Schützen mit Kleinkaliberbüchsen auf sich in 50 m Entfernung bewegende Wildschweinscheiben geschossen und dabei mit viel Geschick und Können um die höchste Ringzahl gekämpft.
Wir wünschen den DDR-Sportlern bei den Europameisterschaften 1971 in Suhl viel Erfolg!*

E. Hoffmann

Höchste Zuverlässigkeit der Funktion (alle Bockflinten haben das höchste Gütezeichen der DDR) und Gravuren nach Wunsch in künstlerischer Handarbeit haben den Ruf der Suhler Waffen in der Welt begründet.

Der Vizeweltmeister Wurftaube Trap von 1969, *Henke* DDR, auf dem Suhler Stand

Blick auf einen der drei Wurftaubenstände



* Lösungen zu den Aufgaben siehe S. 93!

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

I. Stufe (Schulolympiade)

Letzter Abgabetermin: 18. Oktober (beim Mathematiklehrer)

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen sowie die Punktbewertungstabellen werden am 19. Oktober 1971 veröffentlicht.

Olympiadeklasse 5

5/I/1) Bei einem Manöver unserer NVA legte ein Fahrzeug in 9 Teilstrecken eine Gesamtstrecke von 1 780 km zurück.
Die erste Teilstrecke betrug 220 km. Die restlichen Teilstrecken waren untereinander gleich lang.
Berechne die Länge einer jeden dieser restlichen 8 Teilstrecken.

5/I/2) Rolf behauptet, daß sich eine Additionsaufgabe mit der Summe 1 000 bilden läßt, wobei sämtliche Summanden natürliche Zahlen sind, in deren dekadischer Darstellung ausschließlich die Ziffer 8 auftritt und zwar insgesamt genau 8 mal. Stelle fest, ob Rolfs Behauptung richtig ist! Wenn sie es ist, so gib alle derartigen Additionsaufgaben an und ordne darin die Summanden der Größe nach, beginnend mit dem größten!

5/I/3) Zeichne 5 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, so, daß sie

a) keinen gemeinsamen Punkt,
b) genau einen Schnittpunkt,
c) genau vier Schnittpunkte,
d) genau fünf Schnittpunkte,
e) genau sechs Schnittpunkte,
f) genau sieben Schnittpunkte,
g) genau acht Schnittpunkte,
h) genau neun Schnittpunkte,
i) genau zehn Schnittpunkte miteinander haben!

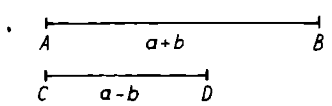
Als Lösung gilt eine jeweilige Zeichnung ohne Begründung. Parallele Geraden sind als solche zu kennzeichnen (z. B. $g_1 \parallel g_2$).

5/I/4) Es soll das Produkt $21 \cdot 12 \cdot 25$ berechnet werden. Manfred will diese Aufgabe schriftlich lösen. Annerose sagt: „Mit Hilfe eines Rechenvorteils kann ich die Aufgabe auch im Kopfe rechnen.“
Gib an, welchen Rechenvorteil Annerose benutzt haben könnte!

Olympiadeklasse 6

6/I/1) Von zwei Autos vom Typ „Wartburg“ legte das eine eine Strecke von 1 200 km zurück, das andere eine Strecke von 800 km. Es sei angenommen, daß jedes der beiden Autos für jeden Kilometer die gleiche Menge Kraftstoff verbrauchte.
Dabei verbrauchte das zweite Auto 36 Liter Kraftstoff weniger als das erste.
Berechne, wieviel Liter Kraftstoff beide Autos zusammen für die oben angegebenen Strecken verbrauchten!

6/I/2) Von den beiden abgebildeten Strecken AB und CD hat die erste die Länge $a+b$, die zweite die Länge $a-b$.



Konstruiere unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge a und eine Strecke der Länge b! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

6/I/3) Vier Flächen eines Holzwürfels von 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die beiden übrigen bleiben ohne Anstrich. Danach wird der Würfel in genau 27 Würfel von je 1 cm Kantenlänge zersägt.
Ermittle von diesen kleinen Würfeln die Anzahl derjenigen, die keine rot angestrichene Fläche,
genau eine rot angestrichene Fläche,
genau zwei rot angestrichene Flächen,
genau drei rot angestrichene Flächen
besitzen!
Unterscheide dabei die folgenden Fälle:
a) Die nicht angestrichenen Flächen haben keine gemeinsame Kante.
b) Die nicht angestrichenen Flächen haben eine gemeinsame Kante.
Als Lösung genügt die Angabe der Anzahlen ohne Begründung.

6/I/4) Zwei Orte A und B seien durch eine 999 km lange Straße miteinander verbunden. Im Abstand von jeweils 1 km seien auf dieser Straße Kilometersteine aufgestellt, die beiderseitig derart beschriftet sind, daß auf der einen Seite jedes Steines seine Entfernung von A und auf der anderen Seite seine Entfernung von B in km angegeben ist. Z. B. trägt der Stein am Ortsausgang von A die Beschriftung 0 und 999, der Stein am Ortseingang von B die Beschriftung 999 und 0.
Ermittle von diesen Steinen die Anzahl derjenigen, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden (z. B. 722 und 277).

Olympiadeklasse 7

7/I/1) Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen Z mit folgenden Eigenschaften:
(1) Die Zahl Z ist durch 8 teilbar.
(2) Die Ziffern von Z sind paarweise voneinander verschieden, d. h. in jeder dieser Zahlen darf jede Ziffer höchstens einmal auftreten.
(3) Alle verwendeten Ziffern bezeichnen, einzeln für sich betrachtet, jeweils Primzahlen.

7/I/2) Beweise folgenden Satz:
Enthält ein rechtwinkliges Dreieck einen Winkel von 30°, so ist seine Hypotenuse (längste Seite) doppelt so lang wie seine kürzeste Kathete (kürzeste Seite).

7/I/3) Günther zeichnet ein Dreieck $\triangle ABC$ und stellt fest: Die Maßzahl des in Zentimetern gemessenen Umfangs u seines Dreiecks $\triangle ABC$ ist eine Primzahl. Ferner gilt:
$\overline{BC}=a=6$ cm, $\overline{AC}=b=2$ cm.
Ermittle $\overline{AB}=c$ und u!

7/I/4) Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus b, c (mit $c>b$) und $\alpha+\beta$!
Dabei sind b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücken stets ein Dreieck eindeutig bestimmt ist.

Olympiadeklasse 8

8/I/1) a) Berechne die Zahl

$$x=-\{-[-(-2)]^2\}^3 \cdot \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\}$$

b) Stelle fest, ob sich x als Potenz einer natürlichen Zahl darstellen läßt!

8/I/2) Ermittle alle rationalen Zahlen x, die folgende Eigenschaft haben:
Addiert man 33 zu x und halbiert die entstandene Summe, so erhält man das Doppelte der zu x entgegengesetzten Zahl.

8/I/3) Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit A als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{AC}<\overline{AB}$. (1)

Der Kreis um A mit $\overline{AC}$ schneidet BC außer in C noch in einem Punkt E, wobei E wegen (1) zwischen C und B liegt. Die im Punkt E an den genannten Kreis gelegte Tangente schneidet AB in einem Punkt D, der zwischen A und B liegt.
Beweise, daß $\overline{ED} = \overline{DB}$ gilt!

8/I/4) Gegeben seien ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ sowie eine beliebige Länge e $(e>0)$.
Konstruiere unter Beibehaltung der Seite AB ein zu $ABCD$ flächengleiches Parallelogramm ABC_1D_1, das auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie $ABCD$ liegt und dessen Diagonale AC_1 die gegebene Länge e hat!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken stets eindeutig ein Parallelogramm der geforderten Art konstruieren läßt! (Eine Untersuchung, ob zwei eventuell entstehende verschiedene Parallelogramme einander kongruent sind, wird hier nicht verlangt.)

Olympiadeklasse 9

9/I/1) Jörg schreibt die folgende Gleichung auf:

$$(1) \qquad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} = \frac{1}{(a+b)(c+d)}.$$

Michael meint, daß sie „falsch" sei. Jörg, der sich nicht so leicht „überzeugen" läßt, wählt für die Variablen a, b, c und d Zahlen, setzt sie in die Gleichung (1) ein und erhält zu Michaels Überraschung eine wahre Aussage. Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, nur aus den Zahlen -1; 0; 1 für a, b, c und d je eine so auszuwählen, daß die Gleichung (1) erfüllt wird!

9/I/2) Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks zerlegt die Dreiecksfläche in zwei Dreiecksflächen, die gleichlange Grundseiten und gleichlange Höhen haben und somit inhaltsgleich sind. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks heißt Schwerpunkt des Dreiecks. Untersuchen Sie, ob jede Gerade durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle ABC$ dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt!

9/I/3) Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen a, für die der Term

$$t = \frac{a+11}{a-9}$$

eine natürliche Zahl ist!

9/I/4) In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$. S sei ein Punkt der Senkrechten in A auf ε. Ermitteln Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle CDS$!
Hinweis: Im Lehrbuch für Mathematik, Klasse 7, finden Sie auf Seite 94 Anregung für eine Lösung dieser Aufgabe.

Olympiadeklasse 10

10/I/1) Ein Raum soll mit 32 Glühlampen so ausgestattet werden, daß sich eine Gesamtleistung von 1 800 Watt ergibt. Es stehen je ausreichend viele Glühlampen von 40 Watt, 60 Watt und 75 Watt, aber keine anderen, zur Verfügung.
Geben Sie alle Möglichkeiten einer derartigen Ausstattung an!

10/I/2) Beweisen Sie den folgenden Satz: Der Durchschnitt aus der Menge aller Drachenvierecke und der Menge aller Trapeze ist die Menge aller Rhomben.

10/I/3) Es sei x eine Variable, die alle von 1 und von -1 verschiedenen reellen Zahlen annehmen kann. Geben Sie eine Möglichkeit an, den Term $\frac{x}{x^2-1}$ so als Summe zweier Brüche darzustellen, daß die Variable x nur in den Nennern dieser beiden Brüche und dort in keiner höheren als der 1. Potenz auftritt!

10/I/4) in

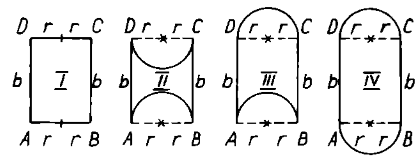
$$\begin{array}{r} \text{D R E I} \\ +\text{D R E I} \\ +\text{D R E I} \\ \hline \text{N E U N} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden!
Geben Sie alle Lösungen dafür an!

Olympiadeklasse 11/12

11/12/I/1) Fünf Soldaten A, B, C, D, E aus fünf sozialistischen Staaten treffen sich auf einem Meeting bei einem gemeinsamen Manöver der befreundeten Armeen. An dem Manöver nehmen nur Angehörige der bulgarischen, polnischen, ungarischen, sowjetischen Streitkräfte und der *Nationalen Volksarmee* der DDR teil. Ferner ist folgendes bekannt:
(1) Jeder der Soldaten A, B, C und D beherrscht außer der Sprache seines Staates als „Zweitsprache" noch genau eine der folgenden Sprachen: Bulgarisch, Polnisch, Ungarisch, Russisch, Deutsch.
(1a) Diese vier Zweitsprachen sind paarweise voneinander verschieden.
(2) E beherrscht keine Fremdsprache.
(3) A beherrscht eine Sprache, die außer ihm auch der Sowjetsoldat beherrscht.
(4) B beherrscht keine slawische Sprache, also weder Bulgarisch, noch Polnisch, noch Russisch.
(5) Der NVA-Angehörige kann sich genau dann mit E verständigen, wenn einer der drei anderen Soldaten, nämlich C, als Übersetzer fungiert.
(6) Der Bulgare kann sich mit dem Ungarn nur über zwei der anderen Soldaten, und zwar D und B, verständigen.
Es ist für jeden dieser Soldaten festzustellen, welchem Staat er angehört und welche Zweitsprache er – wenn überhaupt – beherrscht.

11/12/I/2) a) Es ist für jede der hier abgebildeten Figuren (I bis IV), die sämtlich durch Strecken oder Halbkreise mit dem Radius r begrenzt sind und für die jedesmal $ABCD$ ein Rechteck mit $\overline{AB} = \overline{CD} = 2r$ und $\overline{AD} = \overline{BC} = b$ ist, folgende Untersuchung durchzuführen:
Gibt es Streckenverhältnisse $b : r$, für die der Umfang u der betreffenden Figur bei gegebenem Flächeninhalt A am kleinsten ist? Wenn ja, so sind sämtliche derartige Streckenverhältnisse anzugeben.
Ferner ist dieser Minimalumfang jeweils durch r auszudrücken, und es ist der Quotient aus dem Minimalumfang und der Quadratwurzel des Flächeninhalts zu berechnen.
b) Die Figuren I bis IV sind nach abnehmendem Minimalumfang bei konstantem Flächeninhalt zu ordnen. Dabei wird auch der Fall $b=0$ zugelassen, falls in diesem Falle der Minimalumfang der betreffenden Figur erreicht wird.



11/12/I/3) Es sind alle nicht negativen reellen Zahlen k anzugeben, für die das Polynom

$$f(x) = (x+1)^4 - (kx)^2$$

a) genau eine,
b) genau zwei voneinander verschiedene
c) genau drei paarweise verschiedene
d) genau vier paarweise verschiedene
e) keine

reelle(n) Nullstelle(n) hat.

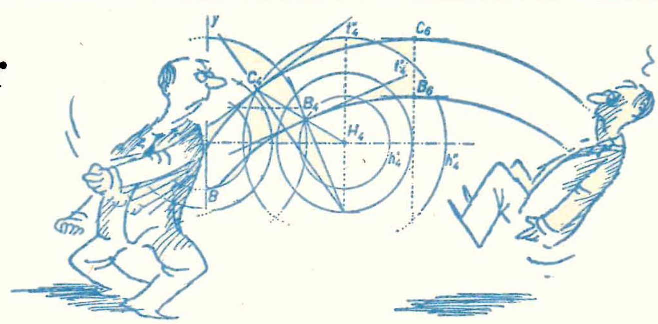
11/12/I/4) In einem Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} \geq \overline{BC} \geq \overline{AC}$ sei P ein im Innern des Dreiecks gelegener Punkt. Man beweise, daß dann stets $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ gilt!

Achtung — alpha-Wettbewerb

Wir bitten, die Antwortkarten des *alpha*-Wettbewerbs erst dann *geschlossen* an die Redaktion einzusenden, wenn die von uns zum Heft 3/71 abgesandten Antwortkarten bei euch eingetroffen sind, also zwischen dem 1. und 10. Oktober 1971. Wer seine Antwortkarten zurückerhalten möchte, der lege einen *richtig frankierten* Umschlag mit seiner Adresse bei.
Wettbewerbs-Teilnehmer, welche zwei oder drei Anerkennungsurkunden mit den Antwortkarten einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold und die Urkunden zurück.
Wir wiederholen: Letzter Einsendetermin für Heft 3/71: 8. 9. 1971

Redaktion *alpha*

In freien Stunden alpha heiter



Vladimir Renčin, Praha

Eine Aufgabe aus dem klassischen Griechenland

„Edler Pythagoras, sage mir an, wie viele Schüler zählt Dein Haus, die dem Dienst sich weihen der unsterblichen Götter?" – „Sagen will ich es Dir, o Polykrates. Siehe, die Hälfte weiht sich der herrlichen Mathematik, ein Viertel erforscht eifrig die Tiefen der ewigen Natur, ein Siebentel übt noch schweigend die Kraft der Seele und horcht der sinnvollen Rede, dann noch der Jungfrauen drei.
So viel führ' ich der Schüler zum Born der ewigen Wahrheit." Wieviel Schüler hatte demnach Pythagoras?

Zahlenrätsel

Den Zahlen entsprechend sind Buchstaben in die Figur einzusetzen. Das Rätsel, richtig gelöst, zeigt eine wertvolle Hilfe für mathematisch interessierte Schüler (ue = ü)

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37

a) 19 1 8 27 Bezeichnung für eine wahre Aussage
b) 3 7 31 32 12 24 franz. Mathematiker (1623 bis 1662)
c) 19 37 26 12 9 24 geometrisches Gebilde
d) 27 35 36 36 18 26 Zeichen zur schriftlichen Darstellung von Zahlen
e) 15 16 17 10 14 30 28 24 gemeinsamer Anfangspunkt zweier Strahlen
f) 34 25 29 33 10 Anordnung von Zahlen nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten
g) 5 20 21 37 Zahl
h) 31 22 6 11 18 Ergebnis einer Addition
i) 13 4 5 2 23 19 Wichtiger Satz aus der Geometrie (Kurzbezeichnung)

Mathematikfachlehrer H. Winkler, OS Hartmannsdorf

Ein Zahlentrick

Klaus führt beim Pioniernachmittag ein „Zauberkunststück" vor. Er nennt drei Städte, z. B. Dresden – Berlin – Leipzig und fordert drei Pioniere auf, eine Stadt verdeckt zu notieren. Klaus darf nicht wissen, wer welche Stadt gewählt hat und es muß von jedem Teilnehmer eine andere Stadt benannt werden.
Angenommen, die 3 Pioniere heißen Ruth, Peter und Inge. Klaus gibt nun der Ruth 1 Pfennig (oder Rechengeld), Peter 2 und Inge 3 Pfennige. Auf dem Tisch liegen 18 weitere Pfennige. Klaus fordert nun die Pioniere auf, sich von den Pfennigen in seiner Abwesenheit welche zu nehmen und zwar soll der, der Dresden wählte, so viele Pfennige nehmen, wie er schon in der Hand hat, der Berlin wählte, nehme zweimal soviel weg, wie er in der Hand hat und der Leipzig wählte, soll viermal soviel nehmen, wie er schon in der Hand hat. Dann verläßt Klaus den Raum. Wenn er wiederkommt, zählt er die verbliebenen Pfennige und kann aus der Tabelle ersehen, wer Dresden, wer Leipzig, wer Berlin notierte!

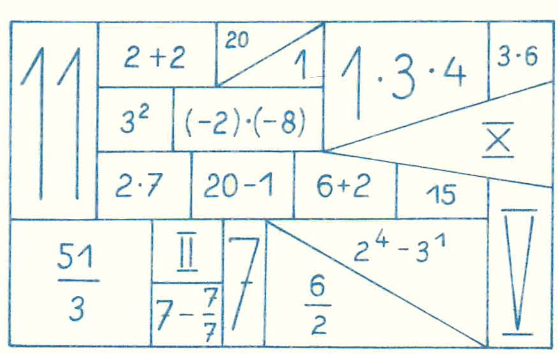
es liegen:	1 Pf	2 Pf	3 Pf	5 Pf	6 Pf	7 Pf
Ruth	Dresden	B	D	B	L	L
Peter	Berlin	D	L	L	D	B
Inge	Leipzig	L	B	D	B	D

Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz

Test für „Adleraugen"

In jedem Feld steht eine Zahl oder ein Term. Sie sind den Zahlen von 1 bis 20 äquivalent. Wer zählt am schnellsten von 1 bis 20? Das entsprechende Feld muß dabei gezeigt werden.
Wer weniger als 30 Sekunden braucht, hat ein scharfes Auge!

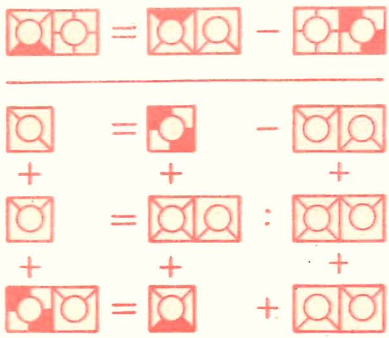
Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz



Kryptarithmetik

Für jedes Zeichen ist eine Ziffer einzusetzen. Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Ziffern. Es sind drei waagerechte und vier senkrechte Aufgaben zu lösen.

Jörg Schubert, Pfaffroda (Kl. 6)

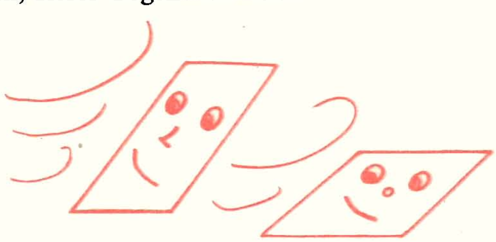


Am besten: halbe — halbe

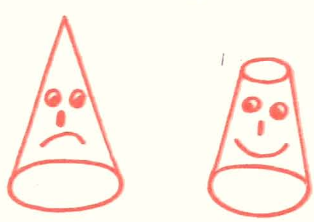
Herr Neumann, ein Mathematiklehrer, zensiert die Hausaufgaben seiner Schüler. Er wundert sich; Klaus rechnete besser als sonst. Er fragt: „Na, Klaus, wem soll ich nun die Zwei geben, dir oder deiner Schwester?" – „Am besten: halbe – halbe, jedem eine Eins!"

Mitgeteilt von Ilse Clauder, Spielberg

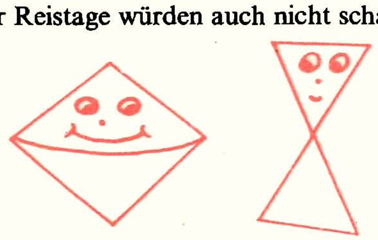
„Nein, dieser Gegenwind heute!"



„Warum nur immer so spitzig?"



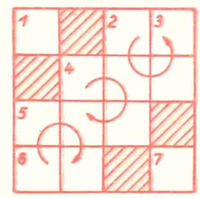
„Ein paar Reistage würden auch nicht schaden!"



Ausgedacht und gezeichnet von der Schülerin Monika Simon, EOS Flöha

Begegnung mit berühmten Mathematikern

Waagerecht: 1. 3!; 2. Potenz von 2; 4. Faktoren sind Primzahlzwillinge; 5. teilbar durch 17; 6. gleiche Quersumme wie 5 senkrecht.



Senkrecht: 2. teilbar durch 7; 3. teilbar durch 9; 5. Potenz von 3.

An folgenden Stellen erscheinen die Lebensdaten berühmter Leipziger Mathematiker, wenn man bei der Lösung berücksichtigt, daß die Jahreszahlen mit 1 beginnen. Die Namen der Mathematiker sollt ihr selbst finden.

Von ... (Diagonale, beginnend bei 6) bis ... (Diagonale beginnend bei 7) lebte ...

Von ... (2 in Pfeilrichtung) bis ... (4 in Pfeilrichtung) lebte ... Von 1790 bis ... (6 in Pfeilrichtung) lebte ...

Christa Riehl, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität, Leipzig

Ist das die Möglichkeit?

Lehrer: „Man durchschneidet mit einer Ebene eine Kugel. Was entsteht dabei?"

Schüler (im Brustton der Überzeugung): „Eine Ellipse!"

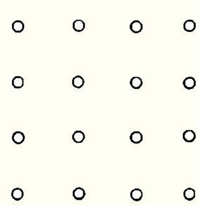
Lehrer: „Wieso – eine Ellipse? – Ein Kreis!!"

Schüler (listig lächelnd): „Aber ich will die Kugel schief durchschneiden!..."

Doz. J. Gaiduk, Charkow (UdSSR)

Nur mit Geduld zu meistern!

Gegeben sind 16 Punkte in der Ebene in folgender Anordnung: Diese 16 Punkte sind durch 6 Streckenzüge ohne abzusetzen derart zu verbinden, daß kein Punkt auf mehr als einer Strecke liegt. (Es sind verschiedene Lösungen möglich)



Nach einer Idee von StR H. J. Kerber, Oberlehrer H. Pätzold Waren/Müritz

6 aus 49 + 1

Ulrich Groß, Marienberg (Kl. 6)

6 aus 50, kennt Ihr das?
6 aus 50 macht viel Spaß.
Welche Sportart kam hinzu?
Der echte Sportler merkt's im Nu!
Mathe heißt die Disziplin,
alpha ist ein Hauptgewinn!

Lösungen

Lösungen zu: aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht (Heft 4/71)

1.1. Aus $a-b=2$ folgt $a\geqq 2$; aus $a+b=8$ folgt $0\leqq a\leqq 8$. Somit gilt $2\leqq a\leqq 8$.

a	b	$a-b$	$a+b$
2	0	2	2
3	1	2	4
4	2	2	6
5	3	2	8
6	4	2	10
7	5	2	12
8	6	2	14

Nur das Zahlenpaar (5, 3) erfüllt zugleich beide Gleichungen.

1.2. Aus $a-b=48$ folgt $a\geqq 48$; aus $a+b=19$ folgt $0\leqq a\leqq 19$. Beide Bedingungen können nicht zugleich erfüllt sein. Die Aufgabe besitzt somit keine Lösung.

2.1. Aus $a-b=4$ folgt $a\geqq 4$; aus $a+b=6$ folgt $0\leqq a\leqq 6$. Somit gilt $4\leqq a\leqq 6$.

a	b	$a+b$	$a-b$
4	0	4	4
5	1	4	6
6	2	4	8

Nur das Zahlenpaar (5, 1) erfüllt zugleich die zweite und dritte Gleichung. Wegen $a+b+c=11$, also $6+c=11$, gilt $c=5$. Es gibt genau ein Zahlentripel (5, 1, 5), das alle gegebenen Gleichungen zugleich erfüllt.

2.2.

a	$b=a+2$	$c=4\cdot a$	$a+b+c$
0	2	0	2
1	3	4	8
2	4	8	14
3	5	12	20
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
9	11	36	56
10	12	40	62
11	13	44	68

Nur das Zahlentripel (10, 12, 40) erfüllt zugleich die gegebenen drei Gleichungen.

3. Aus $36:3=12$ und $12-1=11$ und $12+1=13$ folgt, daß die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 11, 12 und 13 lauten.

4. Aus $210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=5\cdot 6\cdot 7$ folgt, daß die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 5, 6 und 7 lauten.

5. Die nachstehende Tabelle enthält alle möglichen Lösungen.

a	b	c	d	a	b	c	d
3	4	5	13	3	5	8	9
3	4	6	12	3	6	7	9
3	4	7	11	4	5	6	10
3	4	8	10	4	5	7	9
3	5	6	11	4	6	7	8
3	5	7	10				

6. Es sei n die zu ermittelnde natürliche Zahl

n	$6\cdot n$	$6\cdot n+3$	$3\cdot n$	$3\cdot n+6$
0	0	3	0	6
1	6	9	3	9
2	12	15	6	12
3	18	21	9	15

Der Tabelle ist zu entnehmen, daß nur $n=1$ eine Lösung darstellt.

7. Damit $4\cdot a+1$ kleiner als 20 ist muß a entweder 0 oder 1 oder 2 oder 3 oder 4 sein. Damit $4\cdot a+1$ durch 5 teilbar ist, muß $4\cdot a$ entweder 4 oder 9 oder 14 oder 19 betragen. Nur $a=1$ erfüllt die gestellten Bedingungen.

8. Es sei a die Anzahl der Gänse und b die Anzahl der Schafe. Jede Gans besitzt dann $2\cdot a$ Beine, jedes Schaf $4\cdot b$ Beine. Die Tiere besitzen zusammen $a+b$ Köpfe und $2\cdot a+4\cdot b$ Beine.

a	b	$2\cdot a$	$4\cdot b$	$2\cdot a+4\cdot b$
1	39	2	156	158
2	38	4	152	156
.	.	.	.	.
.				
.	.	.	.	.
31	9	62	36	98
32	8	64	32	96
33	7	66	28	94

Der Tabelle ist zu entnehmen, daß auf der Wiese 32 Gänse und 8 Schafe weiden.

9. Es seien a Artikel zum Preise von 5 M und b Artikel zum Preise von 7 M eingekauft worden. Die nachstehende Tabelle enthält alle möglichen Lösungen.

a	$5\cdot b$	b	$7\cdot b$	$5\cdot a+7\cdot b$
1	5	5	35	40
8	40	0	0	40
3	15	8	56	71
10	50	3	21	71
0	0	14	98	98
7	35	9	63	98
14	70	4	28	98

10. a) Zum Drucken der einstelligen Ziffern werden genau 9 Ziffern benötigt. Für die zweistelligen Ziffern verbleiben noch $55-9=46$ Ziffern. Daraus lassen sich 23 zweistellige Ziffern drucken, und zwar die Ziffern von 10 bis 32. Das Buch hatte 32 Seiten.

b) In diesem Falle verbleiben zum Drucken der zweistelligen Ziffern $87-9=78$ Ziffern. Es lassen sich also 39 zweistellige Ziffern drucken, und zwar die Ziffern von 10 bis 48. Das Buch hat 48 Seiten.

c) Für die zweistelligen Ziffern, also für die Ziffern von 10 bis 99 werden $2\cdot 90=180$ Ziffern benötigt. Für die dreistelligen Ziffern verbleiben noch $213-9-180=24$ Ziffern; daraus lassen sich acht dreistellige Ziffern drucken, und zwar die Ziffern 100 bis 107. Das Buch besitzt 107 Seiten.

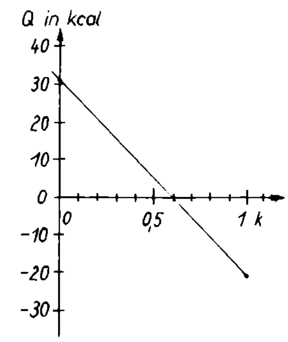
Lösungen zu „Mathematik und Chemie“ (Heft 2/71)

1. a) $Q=Q_1+k\,Q_2$

b) Definitionsbereich: $0\leqq k\leqq 1$

Wertevorrat: $Q_1\geqq Q\geqq Q_1+Q_2$

$(Q_1>0,\ Q_2<0)$



c) $0=Q_1+k_0\,Q_2,\ k_0=-\dfrac{Q_1}{Q_2}$

d) $Q=31{,}4-52{,}8\,k$

e) $k_0=\dfrac{31{,}4}{52{,}8}=0{,}595$

Molares Verhältnis von Wasser und Sauerstoff ist 1 mol:0,595 mol.

2. a) Ist V_m das molare Volumen, so sind die Volumina

H_2	CO	N_2	Gesamt
V_m	$(1+2\,k)\,V_m$	$4\,k\,V_m$	$2(1+3\,k)\,V_m$

Die prozentuale Zusammensetzung ist

H_2	CO	N_2
$\dfrac{50}{1+3\,k}\,\%$	$\dfrac{50\,(1+2\,k)}{1+3\,k}\,\%$.	$\dfrac{200\,k}{1+3\,k}\,\%$

b)	$k=k_0$	$k=1$
H_2	18,0 %	12,5 %
CO	39,3 %	37,5 %
N_2	42,7 %	50,0 %

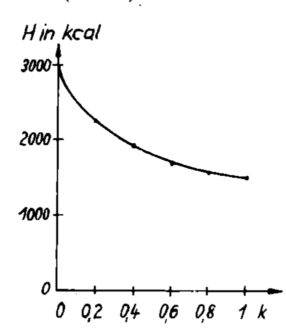
3. a)

Wasser	Kohlenstoff	Luft
$\dfrac{4{,}5\,Q_1}{1+3\,k}\,V$	$0{,}214\,Q_2\,\dfrac{1+2\,k}{1+3\,k}\,V$	$\dfrac{2{,}5\,k}{1+3\,k}\,V$

b)

Wasser	Kohlenstoff	Luft
3,00 t	6,03 t	18 750 m^3

4. a) $H=\dfrac{1}{2\,(1+3\,k)}\,[H_1+(1+2\,k)\,H_2]$



b) $H=\dfrac{5}{1+3\,k}\,[305+302\,(1+2\,k)]$

c) $H=1\,735$ kcal

Lösungen zu: Aufgaben aus Mathematiklehrbüchern der ČSSR (Heft 3/71)

5 ▲ 704 $u=2(a+b)=2\cdot\left(\frac{140\cdot 65}{100}+\right.$
$\left.+\frac{90\cdot 65}{100}\right)\mathrm{m}=\frac{2\cdot 65}{100}(140+90)\,\mathrm{m}$
$u=299\,\mathrm{m}$

5 ▲ 705 Bandlänge $l=85\cdot 2\cdot(0{,}75+0{,}6)\,\mathrm{m}=$
$=170\cdot 1{,}35\,\mathrm{m}=299{,}5\,\mathrm{m}$;
Bandlänge $\approx 230\,\mathrm{m}$

6 ▲ 706 $V=a\cdot b\cdot c=(4{,}3\cdot 2{,}9\cdot 2)\,\mathrm{m}^3=24{,}7\,\mathrm{m}^3\approx 25\,\mathrm{m}^3$; der Preis beträgt daher $25\cdot 14{,}60$ Kcs $=365$ Kcs.

6 ▲ 707 Aus dem Ansatz $x+y+z=313$, $y=x-205$, $z=y-36$ erhalten wir $x=253$, $y=48$, $z=12$; daher ergeben sich: 253 km Bahnfahrt, 48 km Autobusfahrt, 12 km Wanderstrecke.

6 ▲ 708 Aus dem Ansatz $s=v_1t+v_2t$ ergibt sich $t=\frac{s}{v_1+v_2}$; wir erhalten damit $t=4$ min. Aus $s_1=v_1t$ bzw. $s_2=600\,\mathrm{m}$ für den Läufer.

6 ▲ 709 Aus $s=vt$ erhalten wir: in 15 Minuten werden 375 m, in 8 Stunden 12000 m Papierband erzeugt.

7 ▲ 710 Nachdem g und P sowie das geforderte Dreieck ABC gezeichnet sind, werden die Winkel α, β auf g angetragen; es sind zwei Lösungen möglich.

7 ▲ 711 Aus der Formel $b=\frac{2\pi r\cdot\alpha^\circ}{360^\circ}$ erkennt man, daß es zweckmäßig ist, zunächst die Teilaufgabe a) zu rechnen und die Ergebnisse der anderen Teilaufgaben daraus abzuleiten. Wir erhalten bei

a) $b=\frac{2\pi 12\cdot 360^\circ\,\mathrm{cm}}{360^\circ}=24\pi\,\mathrm{cm}\approx 75{,}36\,\mathrm{cm}$;
b) $b=6\pi\,\mathrm{cm}\approx 18{,}84\,\mathrm{cm}$;
c) $b=2\pi\,\mathrm{cm}\approx 6{,}28\,\mathrm{cm}$;
d) $b=\frac{24\pi\cdot 35}{60}\,\mathrm{cm}=14\pi\,\mathrm{cm}\approx 43{,}96\,\mathrm{cm}$.

7 ▲ 712 Aus der Formel $b=\frac{2\pi r\cdot\alpha^\circ}{360^\circ}$ ergibt sich

$b=\frac{2\pi\cdot 6\,375\,\mathrm{km}\cdot(139^\circ-12^\circ)}{360^\circ}, b\approx 14\,120\,\mathrm{km}$.

7 ▲ 713 Wir benutzen den Ansatz $m=m_1-m_2$ und die Formel $m=V\cdot\varrho$; es ergibt sich $m_1\approx 3\,990$ g, $m_2\approx 588$ g, daher $m\approx 3{,}4$ kg.

8 ▲ 714 Der mit Luft gefüllte Teil des Behälter-Volumens hat die Form eines dreiseitigen Prismas mit der Höhe $h=100$ cm, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit der Grundlinie $g=100$ cm und der Höhe h' ist. Dieses Dreieck ist dem Dreieck an der Unterseite des Behälters ähnlich (s. Fig. 2); daher gilt

$\frac{h'}{100}=\frac{12}{\sqrt{100^2-12^2}}$, $h'\approx 12{,}08$ cm,
$V_{Luft}\approx 60\,400\,\mathrm{cm}^3$, $V_{Wasser}\approx 940\,\mathrm{dm}^3$.

8 ▲ 715 Der Term ist sinnvoll für a beliebig reell, $x\neq 0$, $x\neq a$; Ergebnis: $1+a+x$.

Lösungen zu „Mathematische Denkaufgaben“ (Heft 4/71)

● Vier Handschuhe und drei Socken. Unter den vier Handschuhen befinden sich mit Sicherheit zwei von ein und derselben Machart. Andererseits befinden sich unter den drei Socken zwei von gleicher Farbe.

● Es genügt nicht, 36 Äpfel aus der Kiste herauszunehmen, weil sie alle von verschiedenen Sorten sein könnten (je 9 Äpfel von jeder Sorte). Wenn man jedoch noch einen weiteren Apfel herausnimmt, dann sind sicher 10 Äpfel von ein und derselben Sorte unter ihnen. Daher befinden sich unter 37 Äpfeln sicher mindestens 10 Äpfel von ein und derselben Sorte.

● An der Wand hing das Portrait von Iwanows Sohn. Iwanow hatte die spitzfindige Antwort auch so formulieren können: „Der Vater des auf dem Bilde Dargestellten bin ich.“

● Wir nehmen an, daß die ersten beiden Aussagen nicht stimmen und die dritte stimmt. Wenn es nicht stimmt, daß Sergejew keine „5“ hat und Wassiljew keine „4“, dann hat Sergejew eine „5“ und Wassiljew eine „4“. Aus der Richtigkeit der dritten Aussage folgt, daß Alexejew ebenfalls eine „4“ hat. Dies ist aber nicht möglich, da die Zensuren der Schüler nach den Bedingungen der Aufgabe verschieden sind. Aus der Annahme, daß die erste und die dritte Aussage nicht stimmen und die zweite stimmt, ergibt sich, daß Sergejew eine „5“ hat, Wassiljew keine „4“ und Alexejew keine „4“. Dies ist wiederum nicht möglich, weil dann entweder Wassiljew oder Alexejew gewiß eine „4“ haben muß, da Sergejew eine „5“ hat. Die einzige Möglichkeit ist daher:
Die erste Behauptung des Lehrers ist richtig und die anderen beiden Male hat er sich geirrt. Somit erhalten wir: Sergejew hat keine „5“. Wassiljew hat eine „4“ und Alexejew hat keine „4“. Daraus ergibt sich, daß Wassiljew eine „4“ hat, Sergejew hat keine „5“ (und keine „4“), also eine „3“ und Alexejew hat keine „4“, sondern eine „5“.

Lösungen zu den Aufgaben: Waffen aus Suhl

▲ 1 ▲ *Kaliber 12* (Heft 4/71)

$m\cdot z=453{,}6$ g

$\frac{d^3\cdot\pi}{6}\cdot\varrho\cdot z=453{,}6$ g

$\frac{d^3\cdot\pi}{6}\cdot 11{,}3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\cdot 12=453{,}6$ g

$d^3=\frac{453{,}6\,\mathrm{g}\cdot 6}{\pi\cdot 11{,}3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\cdot 12}$

$d=\sqrt[3]{\frac{453{,}6\,\mathrm{g}\cdot 6}{\pi\cdot 11{,}3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\cdot 12}}$

$d=\sqrt[3]{6{,}4\,\mathrm{cm}^3}$

$d\approx 1{,}86$ cm

Kaliber 16 $d\approx 1{,}68$ cm
Kaliber 20 $d\approx 1{,}57$ cm

▲ 2 ▲ $\frac{38}{100}$ Zoll $\cdot\, 25{,}4\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{Zoll}}=9{,}66$ mm

$\frac{45}{100}$ Zoll $\cdot\, 25{,}4\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{Zoll}}=11{,}4$ mm

▲ 3 ▲ $n=\frac{800\,\mathrm{m}}{0{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}=2\,670\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 60\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}$
$=160\,000\,\mathrm{min}^{-1}$

▲ 4 ▲ $n_{92}:n=\frac{35\mathrm{g}}{m_k}$ $n=\frac{35\,\mathrm{g}\cdot 6}{\pi\cdot d^3\cdot\varrho}$

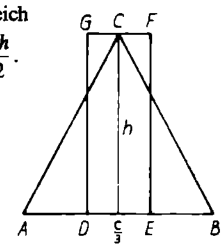
$n=\frac{35\,\mathrm{g}\cdot 6}{0{,}008\,\mathrm{cm}^3\cdot 11{,}3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}\approx 740$

$n\approx 93$

n_{94}

W 8 ■ 638 Es seien c die Länge der Basis $\overline{AB}$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC und h die Länge der zugehörigen Höhe (vgl. die Abb.). Dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich

$A_1=\frac{ch}{2}$.



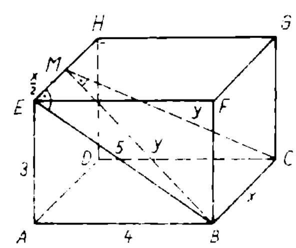
Nach Voraussetzung gilt $\overline{DE}=\frac{c}{3}$, ferner gilt $\overline{EF}=h$; daher ist der Flächeninhalt des Rechtecks $DEFG$ gleich

$A_2=\frac{ch}{3}$.

Der Flächeninhalt des Rechtecks $DEFG$ verhält sich daher zu dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC wie

$A_2:A_1=\frac{ch}{3}:\frac{ch}{2}=2:3$.

* 8 * 639 Wir setzen $\overline{BC}=x$ cm und $\overline{MB}=y$ cm. Dann gilt aus Symmetriegründen $\overline{MB}=\overline{MC}=y$ cm, d. h., das Dreieck MBC ist gleichschenklig; da dieses Dreieck nach Voraussetzung auch rechtwinklig ist, kann nur der Winkel $\sphericalangle CMB$ ein rechter Winkel sein (vgl. die Abb.).



Ferner gilt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck ABE,
$\overline{EB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=(16+9)\,\mathrm{cm}^2=25\,\mathrm{cm}^2$,
also $\overline{EB}=5$ cm.

Wenden wir nun den Satz des Pythagoras auf die Dreiecke MEB und CMB an, so erhalten wir die Gleichungen

$$y^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+5^2, \quad (1)$$

$$x^2=y^2+y^2. \quad (2)$$

Aus (1) erhalten wir durch Multiplikation mit 2

$$2y^2=\frac{x^2}{2}+50 \text{ und aus (2) } 2y^2=x^2.$$

Daraus folgt

$$x^2=\frac{x^2}{2}+50, \text{ also } \frac{x^2}{2}=50,\ x^2=100$$

und, da x positiv ist, $x=10$.

Die gesuchte Länge der Kante $\overline{BC}$ beträgt also 10 cm.

W 9 ■ 640 Aus (1) folgt bereits, daß die Häuser, in denen heute nicht gefeiert wird, blau bzw. rot angestrichen sind.

Ferner folgt aus (1), daß der Gastgeber nicht Rolf und nicht Zabel heißt. Aus (2) folgt, daß der Gastgeber nicht Kurt und nicht Wagner heißt. Daher heißt der Gastgeber *Werner Vogt*.

Aus (2) folgt weiter, daß das Haus von Werner Vogt nicht das mittlere Haus ist.

Aus (3) folgt, daß Kurt nur Kaffee anbietet, daß also Werner Vogt nicht Kaffee anbietet. Ferner folgt aus (5), daß Werner Vogt nicht Wein anbietet. Also wird heute *Bier* getrunken. Wegen (3) besitzt der heutige Gastgeber das *rechte Haus*.

Wir überzeugen uns noch davon, daß die gegebenen Antworten mit den gestellten Bedingungen (1), (2), (3) und (5) im Einklang stehen. Auch die Bedingung (4), die zur Lösung der Aufgabe nicht benutzt wurde, steht nicht im Widerspruch zu den gegebenen Antworten; das mittlere Haus ist nämlich nicht rot und nicht gelb gestrichen, sondern blau.

W 9 ■ 641 Bezeichnen wir die Anzahl der in einem Monat geführten Gespräche mit x, so erhalten wir die Ungleichung

$$0{,}15x+9{,}60<0{,}20x,$$

also $0{,}05x>9{,}60$, d. h., $x>\frac{960}{5}=192$.

Der Teilnehmer muß also mindestens 193 Ortsgespräche in einem Monat führen, damit der Gesamtpreis für diese Gespräche einschließlich der Grundgebühr geringer ist als der Gesamtpreis der Gespräche von einer öffentlichen Sprechstelle aus.

* 9 * 642 Wir stellen zunächst eine Ungleichung für $(x+y)^2$ auf. Es gilt nämlich für alle reellen Zahlen x und y

$$(x-y)^2\geqq 0. \tag{3}$$

Daraus folgt

$$x^2-2xy+y^2\geqq 0,$$
$$x^2+2xy+y^2\geqq 4xy,$$
$$(x+y)^2\geqq 4xy. \tag{4}$$

Weil x und y nach Voraussetzung positiv sind, erhalten wir hieraus durch Division durch xy die Ungleichung

$$(x+y)\frac{x+y}{xy}\geqq 4,$$

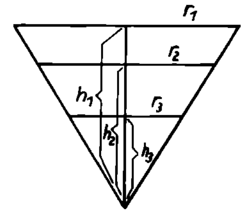
also $$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqq 4. \tag{5}$$

Wegen $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ folgt hieraus

$$x+y\geqq 4, \text{ w.z.b.w.} \tag{6}$$

Nun gilt in der Ungleichung (3) und daher auch in (4), (5) und (6) das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x=y$, wenn also wegen $x+y=4$ $x=2$ und $y=2$ ist.

W 10/12 ■ 643 a) Es seien r_1 der Radius, h_1 die Höhe und V_1 das Volumen des Kegels, den die Wassermenge von 1 l bildet. Ferner seien r_2 der Radius, h_2 die Höhe und V_2 das Volumen des Kegels, den die Wassermenge von $\frac{1}{2}$ l bildet (vgl. die Abb.).



Dann gilt

$$V_1=\frac{\pi}{3}r_1{}^2h_1, \tag{1}$$

$$V_2=\frac{\pi}{3}r_2{}^2h_2. \text{ Ferner gilt} \tag{2}$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{r_2{}^2h_2}{r_1{}^2h_1}=\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Wegen $\frac{r_2}{r_1}=\frac{h_2}{h_1}$, also $\frac{r_2{}^2}{r_1{}^2}=\frac{h_2{}^2}{h_1{}^2}$ folgt aus (3)

$$\frac{h_2{}^3}{h_1{}^3}=\frac{1}{2}, \text{ also } h_2{}^3=\frac{1}{2}h_1{}^3,$$

$$h_2=h_1\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\frac{h_1}{2}\sqrt[3]{4}\approx 0{,}794\,h_1.$$

Wegen $h_1=10$ cm steigt also der Wasserspiegel bei $\frac{1}{2}$ l Wasser auf rund 7,94 cm Höhe.

b) Es seien r_3 der Radius und V_3 das Volumen des Kegels, den die Wassermenge bei einer Höhe von $h_3=5$ cm bildet.

Dann gilt wie oben

$$\frac{V_3}{V_1}=\frac{h_3{}^3}{h_1{}^3}=\left(\frac{h_3}{h_1}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}, \text{ also}$$

$$V_3=\frac{1}{8}V_1=\frac{1}{8}\text{ l}=125\text{ cm}^3.$$

Wenn der Wasserspiegel 5 cm hoch ist, befinden sich daher nun $\frac{1}{8}$ l $=125$ cm^3 Wasser in dem Gefäß.

W 10/12 ■ 644 Die gegebene Ungleichung (1) ist für alle positiven reellen Zahlen x und für alle reellen Zahlen p mit $p\neq 1$ äquivalent mit den folgenden Ungleichungen:

$$\lg x-1<p\cdot\lg x-p^2, \tag{2}$$
$$p^2-1<(p-1)\cdot\lg x, \tag{3}$$
$$(p+1)(p-1)<(p-1)\cdot\lg x. \tag{4}$$

Da nach Voraussetzung $p\neq 1$ gilt, haben wir die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $p>1$, d. h., $p-1>0$ und $p+1>2$. In diesem Falle ist die Ungleichung (4) und daher auch die Ungleichung (1) äquivalent mit der Ungleichung

$$p+1<\lg x. \tag{5}$$

Für $x>100$ ist $\lg x>2$; es gibt also, wenn $x>100$ ist, stets eine reelle Zahl p mit $p>1$, so daß die Ungleichung (5) und damit auch die Ungleichung (1) erfüllt ist.

2. Fall: $p<1$, d. h., $p-1<0$ und $p+1<2$. In diesem Falle ist die Ungleichung (4) und daher auch die Ungleichung (1) äquivalent mit der Ungleichung

$$p+1>\lg x. \tag{6}$$

Für $x<100$ ist $\lg x<2$; es gibt also, wenn $x<100$ ist, stets eine reelle Zahl p mit $p<1$, so daß die Ungleichung (6) und damit auch die Ungleichung (1) erfüllt ist.

Ist aber $x=100$, also $\lg x=2$, so erhalten wir aus (3) die Ungleichung

$$p^2-1<2(p-1), \text{ also } p^2-2p+1<0,$$

also $(p-1)^2<0$.

Diese Ungleichung ist aber für keine reelle Zahl p erfüllt, weil das Quadrat einer reellen Zahl nicht kleiner als Null sein kann. Daher ist die gegebene Ungleichung (1) nur im Falle $x=100$ für keine von 1 verschiedene reelle Zahl p erfüllt.

* 10/12 * 645 Zunächst stellen wir fest, daß alle Gleichungen dieses Systems für $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ erfüllt sind. Wir haben damit eine Lösung erhalten. Wir müssen nun untersuchen, ob es noch weitere Lösungen gibt.

Zu diesem Zwecke könnten wir die sog. Einsetzungsmethode anwenden und den Wert für x_3 in die zweite Gleichung einsetzen, dann die Werte für x_3 und x_4 in die dritte Gleichung usw., bis wir schließlich zwei Gleichungen für x_1 und x_2 erhalten, die wir lösen können. Das ist aber sehr umständlich, und erfordert einen hohen Rechenaufwand. Das folgende Verfahren führt schneller zum Ziel:

Wir formen die Gleichungen zunächst um und erhalten

$$x_2=x_1-x_3,\quad x_4=x_3-x_5,\quad x_n=x_{n-1}-x_1,$$
$$x_3=x_2-x_4,\quad \ldots\ldots\ldots \quad x_1=x_n\quad -x_2.$$

Jetzt multiplizieren wir in der ersten Gleichung auf beiden Seiten mit x_2, in der zweiten Gleichung mit x_3 usw. und erhalten

$$x_2^2=x_1x_2-x_2x_3,$$
$$x_3^2=x_2x_3-x_3x_4,$$
$$x_4^2=x_3x_4-x_4x_5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n^2=x_{n-1}x_n-x_nx_1,$$
$$x_1^2=x_nx_1-x_1x_2.$$

Addieren wir jetzt sämtliche Terme der linken Seiten und sämtliche Terme der rechten Seiten dieser Gleichungen, so erhalten wir, da jeweils der Subtrahend auf der rechten Seite einer Gleichung mit dem Minuenden auf der rechten Seite der folgenden Gleichung übereinstimmt, die Gleichung

$$x_2^2+x_3^2+x_4^2+\ldots+x_n^2+x_1^2=0.$$

Da alle Summanden auf der linken Seite nicht negativ sind, ist diese Gleichung nur dann erfüllt, wenn

$$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n=0$$

gilt. Das gegebene Gleichungssystem hat also nur eine Lösung, nämlich $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

* 5 * 647 a) Ein Schüler heißt mit Sicherheit Lutz Schulz. b) Es gibt vier Schüler, die mit Vornamen Lutz, aber nur drei Schüler, die mit Zunamen nicht Schulz heißen.

* 5 * 648 Es gilt $36=1\cdot 36=2\cdot 18=3\cdot 12=4\cdot 9=6\cdot 6$; demnach gibt es fünf verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Legen wir aus 36 Quadraten ein größeres Quadrat ($6\cdot 6$), so besitzt diese Figur den kleinsten Umfang, wie man leicht nachprüfen kann.

* 6 * 649

Monat	Jan.	Febr.	März	April
Anzahl der Tische	x	$x+10$	$x+20$	$x+30$

Mai	...	Nov.	Dez.
$x+40$	...	$x+100$	$x+110$

Aus $12x+660=1920$ folgt $x=105$. Im Monat Juni wurden 155, im Monat Dezember 215 Tische hergestellt.

* 6 * 650 Hätte Heinz nur Hefte der ersten Sorte gekauft, dann hätte er für 12 Hefte 96 Pf bezahlen müssen. Für jedes Heft der zweiten Sorte zahlte er 7 Pf mehr als für jedes Heft der ersten Sorte. Wegen $131-96=35=5\cdot 7$ hat Heinz 5 Hefte der zweiten Sorte und 7 Hefte der ersten Sorte gekauft.

* 7 * 651 Würde man die Fenster ohne Läden mit je einem Laden der kompletten Fenster versehen, dann fehlte an jedem Fenster ein Laden. Also braucht man 28 neue Fensterläden.

* 7 * 652 Die Anzahl der Schüler pro Autobus muß ein gemeinsamer Teiler, der größer als 1 ist, von 319 und 232 sein. Wegen $319=11\cdot 29$ und $232=8\cdot 29$ ist die Primzahl 29 der einzige gemeinsame Teiler größer als 1 von 319 und 232; denn 8 und 11 sind teilerfremd. Daher fuhren in jedem Bus genau 29 Schüler.

* 8 * 653 Die Augenzahl $3n+4$ muß durch n teilbar sein. $\frac{3n+4}{n}=3+\frac{4}{n}$ liefert nur für n als Teiler von 4, also $n=1$, $n=2$, $n=4$ ganzzahlige Ergebnisse. $n=1$ scheidet aus, da keine 7 gewürfelt werden kann. Für $n=2$ erhält man 10 Augen, das heißt, es wurde zweimal eine 5 gewürfelt. Für $n=4$ ergeben sich 16 Augen, das heißt, es wurde viermal eine 4 gewürfelt. Es wurde also entweder mit zwei oder mit vier Würfeln gewürfelt.

* 8 * 654 Für die Fangergebnisse a, b, c, d gilt:

$$c<d, \tag{1}$$
$$a+b=c+d, \tag{2}$$
$$a+d<b+c. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt durch Addition $2a+b+d<b+2c+d$ und damit $2a<2c$, also $a<c$.
Aus (1) und $a<c$ folgt $a<c<d$.
Aus (2) und $a<c$ folgt $d<b$ und damit auch $a<c<d<b$.
Fischer B hat das größte Fangergebnis erzielt; ihm folgen mit kleiner werdenden Fangergebnissen die Fischer D, C und A.

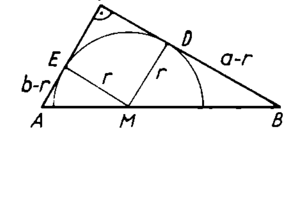
* 9 * 655 Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.
1. Fall: Angenommen, die Aussage a) sei wahr; dann sind die Aussagen b) und c) falsch. Also hätte Brigitte den Ball. Das steht aber im Widerspruch zur Aussage a), da nicht zwei Schülerinnen zugleich den Ball haben können.
2. Fall: Angenommen, die Aussage b) sei wahr; dann sind die Aussagen a) und c) falsch. Also hat Claudia die Schere. Anna hat den Ball nicht. Also müßte Claudia den Ball haben, was zu einem Widerspruch führt.
3. Fall: Angenommen, die Aussage c) sei wahr; dann sind die Aussagen a) und b) falsch. Also hat Brigitte den Ball, Claudia den Bleistift und Anna die Schere.
Da die Fälle 1. und 2. zu einem Widerspruch führen, trifft nur der Fall 3 zu, womit die Frage beantwortet ist.

* 10 * 656 Jeder Teilnehmer spielt genau 7 Partien und kann maximal 7 Punkte erreichen, wenn er alle Partien gewinnt. Die vier Schachspieler, die die letzten vier Plätze belegen, müssen unter sich genau 6 Partien ausspielen. Die dabei zu verteilenden 6 Punkte teilen sie also unter sich auf. Da der Spieler,

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2	0		1	1	1	1	1	1
3	0	0		1	1	1	1	1
4	0	0	0		1	1	1	1
5	0	0	0	0		1	1	1
6	0	0	0	0	0		1	1
7	0	0	0	0	0	0		1
8	0	0	0	0	0	0	0	

der den 2. Platz belegte, laut Aufgabe genau so viel Punkte gewonnen hat wie die letzten vier zusammen, hat er mindestens 6 Punkte erreicht. Er kann aber auch nicht mehr als 6 Punkte erzielt haben; denn er besiegte außer den anderen Spielern auch den Ersten. Würde er Erster, und spielte er gegen diesen (bei Siegen gegen alle übrigen Spieler) unentschieden, so hätten erster und zweiter Spieler entgegen der Voraussetzung die gleiche Punktzahl. Somit müssen die letzten vier Spieler zusammen genau 6 Punkte erzielt haben, das heißt, sie haben alle Partien gegen die ersten vier Spieler verloren. Infolgedessen hat auch der 4. Spieler den 6. Spieler besiegt. Außerdem sind alle Bedingungen der Aufgabe miteinander verträglich, wie z. B. folgendes Schema zeigt:

* 10/12 * 657 Es seien M der Mittelpunkt des Halbkreises mit dem Radius r, D und E die Berührungspunkte dieses Halbkreises mit den Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$. Dann gilt $\sphericalangle MEC=90°$, $\sphericalangle MDC=90°$ und $\overline{ME}=\overline{MD}=r$. Da nach Voraussetzung $\sphericalangle ACB=90°$ ist, gilt ferner $\sphericalangle EMD=90°$. Das Viereck $MDCE$ ist somit ein Quadrat, und es gilt $\overline{CE}=\overline{CD}=r$ und folglich $\overline{BD}=a-r$ und $\overline{AE}=b-r$.



Wegen $EM \parallel BC$ folgt nach dem Strahlensatz $\frac{b-r}{b}=\frac{r}{a}$. Durch weitere Umformungen erhalten wir schließlich

$1-\frac{r}{b}=\frac{r}{a}$, $1=\frac{r}{a}+\frac{r}{b}$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, w.z.b.w.

* 10 * 658 Wir geben unmittelbar die allgemeine Lösung (II.) der Aufgabe an. Wir nehmen an, daß

x_1 Schüler *nur* die Zeitschrift „Technikus“,
x_2 Schüler *nur* die Zeitschrift „Fröhlichsein und Singen“,
x_3 Schüler *nur* die Zeitschrift „Die Trommel“,
y_1 Schüler *nur* die Zeitschriften „Technikus“ und „Fröhlichsein und Singen“,
y_2 Schüler *nur* die Zeitschriften „Technikus“ und „Die Trommel“,
y_3 Schüler *nur* die Zeitschriften „Fröhlichsein und Singen“ und „Die Trommel“

regelmäßig lesen. Dann gilt

$$x_1+y_1+y_2+g=a, \tag{1}$$
$$x_2+y_1+y_3+g=b, \tag{2}$$
$$x_3+y_2+y_3+g=c. \text{ Ferner gilt} \tag{3}$$
$$y_1+g=e, \quad \text{also } y_1=e-g; \tag{4}$$
$$y_2+g=d, \quad \text{also } y_2=d-g; \tag{5}$$
$$y_3+g=f, \quad \text{also } y_3=f-g. \tag{6}$$

a) Die Anzahl der Schüler, die *genau eine* dieser Zeitschriften regelmäßig lesen, ist gleich $x_1+x_2+x_3$. Wir erhalten durch Addition aus (1), (2) und (3)

$$x_1+x_2+x_3+2(y_1+y_2+y_3)+3g=a+b+c. \tag{7}$$

Ferner erhalten wir durch Addition aus (4), (5) und (6)

$$y_1+y_2+y_3=d+e+f-3g. \tag{8}$$

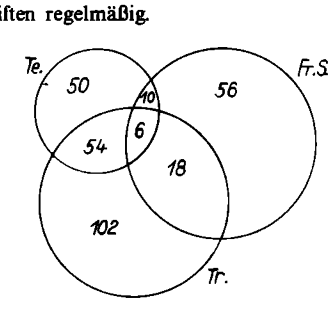
Setzen wir diesen Wert in (7) ein, so erhalten wir

$$x_1+x_2+x_3+2(d+e+f)-6g+3g=a+b+c,$$
$$x_1+x_2+x_3=a+b+c-2(d+e+f)+3g. \tag{9}$$

Für $a=120$, $b=90$, $c=180$, $d=60$, $e=16$, $f=24$, $g=6$ erhalten wir

$$x_1+x_2+x_3=390-2\cdot 100+18=208.$$

Also lesen 208 Schüler *genau eine* dieser Zeitschriften regelmäßig.



b) Die Anzahl der Schüler, die *mindestens eine* dieser Zeitschriften regelmäßig lesen, ist wegen (7) und (8) gleich

$$z=x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+y_3+g$$
$$=a+b+c-2(d+e+f)$$
$$+3g+d+e+f-3g+g$$
$$=a+b+c-(d+e+f)+g.$$

Ist nun s die Anzahl aller Schüler, so erhalten wir die Anzahl der Schüler, die *keine* dieser Zeitschriften regelmäßig lesen,

$$s-z=s-(a+b+c)+d+e+f-g. \tag{10}$$

Am speziellen Fall (I) erhalten wir
$s-z=300-390+100-6=4$.

Also lesen nur 4 Schüler keine dieser Zeitschriften regelmäßig. Die beigefügte Abbildung zeigt sehr anschaulich, wie man die Anzahlen der Schüler in den Fällen a) und b) graphisch ermitteln kann. Wir erhalten nämlich im Falle a)
$50+56+102=208$ wie oben
und im Falle b)
$300-208-54-10-18-6=4$ wie oben.

*** 9 * 659** Wir berechnen die Differenz

$$a-b=\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1}-\frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$$
$$=\frac{(100^{100}+1)(100^{89}+1)-(100^{99}+1)(100^{90}+1)}{(100^{90}+1)(100^{89}+1)}$$
$$=\frac{u}{v}.$$

Nun gilt für den Nenner dieses Bruches $v>0$ und für den Zähler

$$u=100^{189}+100^{100}+100^{89}+1-100^{189}$$
$$-100^{99}-100^{90}-1$$
$$=100^{100}+100^{89}-100^{99}-100^{90}$$
$$=100^{89}+100^{90}(100^{10}-100^{9}-1)$$
$$=100^{89}+100^{90}(99\cdot 100^{9}-1)>0.$$

Daraus folgt $a-b>0$, also $a>b$, womit die geforderte Entscheidung getroffen ist.

Bemerkung: Wir kommen noch schneller zu dem obigen Ergebnis, wenn wir die für alle positiven reellen Zahlen c, d, x, y mit $c>d$ und $x<y$ erfüllte Ungleichung

$$\frac{c+x}{d+x}>\frac{c+y}{d+y} \qquad (1)$$

anwenden. Diese Ungleichung ist nämlich wegen $(c+x)(d+y)-(c+y)(d+x)$
$=cd+cy+dx+xy-cd-cx-dy-xy$
$=c(y-x)-d(y-x)=(c-d)(y-x)>0$
erfüllt. Nun gilt

$$a=\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1}=\frac{100^{99}+\frac{1}{100}}{100^{89}+\frac{1}{100}}>\frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}=b;$$

diese Ungleichung erhalten wir nämlich aus der Ungleichung (1), wenn wir $c=100^{99}$, $d=100^{89}$, $x=\frac{1}{100}$, $y=1$ setzen.

Mit Hilfe der Ungleichung (1) können wir auch die folgende verallgemeinerte Behauptung leicht beweisen:

Für alle reellen Zahlen p, die größer als 1 sind, und für alle natürlichen Zahlen m und n mit $m>n>1$ gilt

$$\frac{p^m+1}{p^n+1}>\frac{p^{m-1}+1}{p^{n-1}+1}.$$

*** 9 * 660** Angenommen, das gegebene Gleichungssystem habe eine Lösung mit $x_i \geqq 0$ $(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Dann gilt wegen (2)

$$x_1+x_2+x_4=3a-x_6 \qquad (5)$$

und wegen (4), da das arithmetische Mittel von drei nicht negativen reellen Zahlen stets größer oder gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen ist,

$$\frac{x_1+x_2+x_4}{3}\geqq\sqrt[3]{x_1x_2x_4}=a. \qquad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt

$$\frac{3a-x_6}{3}\geqq a, \text{ also } 3a-x_6\geqq 3a,\ x_6\leqq 0. \qquad (7)$$

Da nach Voraussetzung andererseits $x_6 \geqq 0$ gilt, folgt $x_6=0$. Aus (3) erhalten wir daher
$x_3+x_5=0$,
also wegen $x_3\geqq 0$, $x_5 \geqq 0$, $x_3=x_5=0$,
d. h., $x_1x_4x_5=0$ im Widerspruch zu (1), wonach
$x_1x_4x_5=a^2>0$ gilt.

Daher hat das gegebene Gleichungssystem *keine* nicht negative Lösung.

W 5 ▪ 661 Die Zahl 19 läßt sich wie folgt als Summe zweier Summanden darstellen:

$19=1+18$	$19=6+13$
$19=2+17$	$19=7+12$
$19=3+16$	$19=8+11$
$19=4+15$	$19=9+10$
$19=5+14$	

Aus $95:19=5$ folgt, daß es genau fünf Zimmerpaare, also zehn Gästezimmer gibt. Da alle Zimmer mit fortlaufenden Nummern versehen sind, gibt es nur eine Lösung; die Zimmer tragen die Nummern von 5 bis 14.

W 5 ▪ 662

$$V=2\cdot 1\cdot 5\,\mathrm{dm}^3+2\cdot\frac{1}{2}\cdot(1\cdot 1\cdot 5)\,\mathrm{dm}^3=15\,\mathrm{dm}^3$$

W 6 ▪ 663 Für das Volumen des Quaders gilt $V=abc=270\ \mathrm{cm}^3$; für die Summe der Maßzahlen aller seiner Kantenlängen gilt ferner $4a+4b+4c=80$ und damit $a+b+c=20$. Aus $a<b<c$ und $a+b+c=20$ folgt $c\leqq 17$. Wegen $270=1\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5=abc$ sind die Möglichkeiten für a, b und c weiter eingeengt, da sie Teiler von 270 sein müssen. Nur für $a=5$, $b=6$, $c=9$ sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Probe: $V=5\cdot 6\cdot 9\ \mathrm{cm}^3=270\ \mathrm{cm}^3$;
$s=5\ \mathrm{cm}+6\ \mathrm{cm}+9\ \mathrm{cm}=20\ \mathrm{cm}$.

W 6 ▪ 664 Allgemein gilt: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a\cdot d<b\cdot c$. Aus $5a>123$ folgt $a\geqq 25$; aus $11a<287$ folgt $a\leqq 26$. Da beide Ungleichungen erfüllt sein müssen, besitzt die Aufgabe genau zwei Lösungen, nämlich $a_1=25$ und $a_2=26$.

W 7 ▪ 665 Es seien $a, b, c \neq 0$ und $a-b+c\neq 0$, dann gilt

$$\frac{ab-ac-bc+ab+ac-bc}{a-b+c}=\frac{2b(a-c)}{a-b+c}.$$

Dieser Term nimmt den Wert Null an, wenn der Zähler Null ist, also $2b(a-c)=0$. Wegen $b\neq 0$ folgt daraus $a-c=0$, also $a=c$. Nun sollen nach Voraussetzung nicht alle drei Variablen einander gleich sein, also gilt $a=c\neq b$. Da $a-b+c\neq 0$, also $a+c\neq b$ sein muß, gilt ferner $2a\neq b$ bzw. $a\neq\frac{b}{2}$. Unter den gegebenen Voraussetzungen nimmt daher der obige Term den Wert Null genau dann an, wenn $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $a=c\neq b$ und $a=c\neq\frac{b}{2}$ gilt.

Der Chefredakteur von *alpha* auf der X. OJM im Gespräch mit Preisträger Th. Jentsch (Halle).

Lösungen zu *alpha*-heiter

Eine Aufgabe aus dem klassischen Griechenland

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x, \quad \text{also } x=28$$

Zahlenfeldrätsel

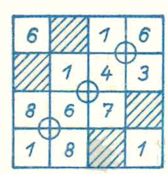
a) Satz, b) Pascal, c) Strahl, d) Ziffer, e) Scheitel, f) Reihe, g) Acht, h) Summe, i) Thales: Alpha
Mathematische Schuelerzeitschrift

Kryptarithmetik

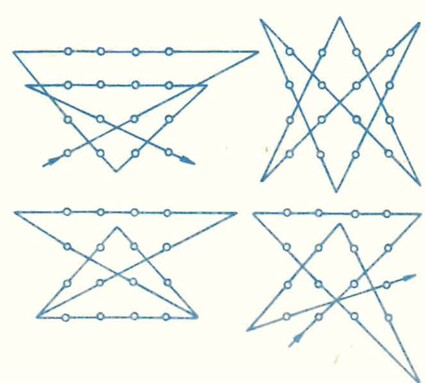
$$\begin{array}{ccccccc} 21 & + & 4 & = & 25 \\ + & & + & & + \\ 20 & : & 10 & = & 2 \\ + & & + & & + \\ 12 & - & 5 & = & 7 \\ \hline 53 & - & 19 & = & 34 \end{array}$$

Begegnung mit berühmten Mathematikern

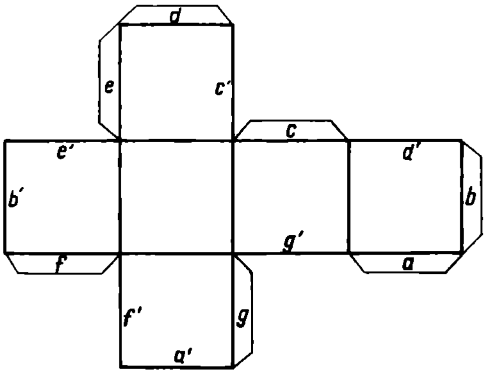
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716)
Johannes Regiomontanus (1436 bis 1476)
August Ferdinand Möbius (1790 bis 1868)



Nur mit Geduld meistern

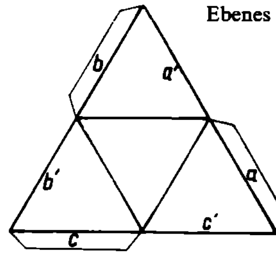


Mit Zirkel und Zeichendreieck

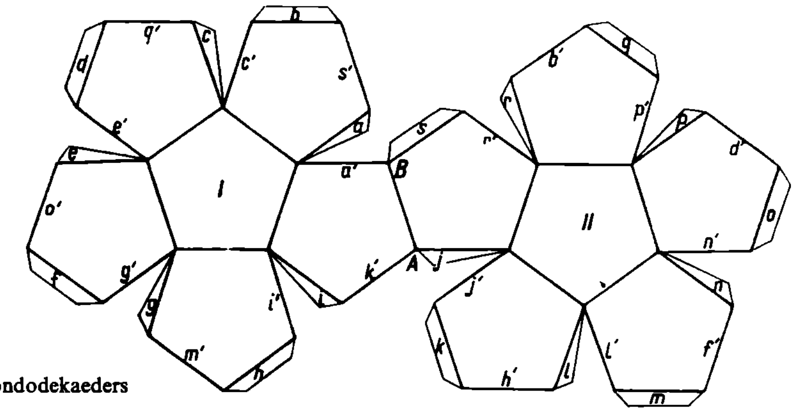


Ebenes Netz des Würfels

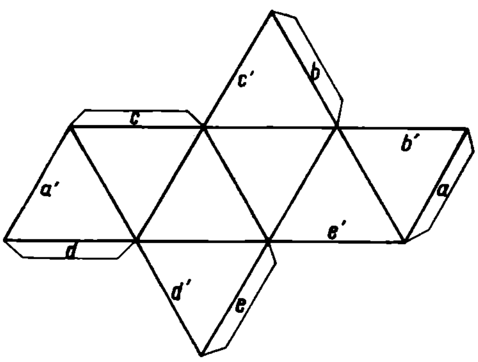
aus T. Roman, Reguläre und halbreguläre Polyeder
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften



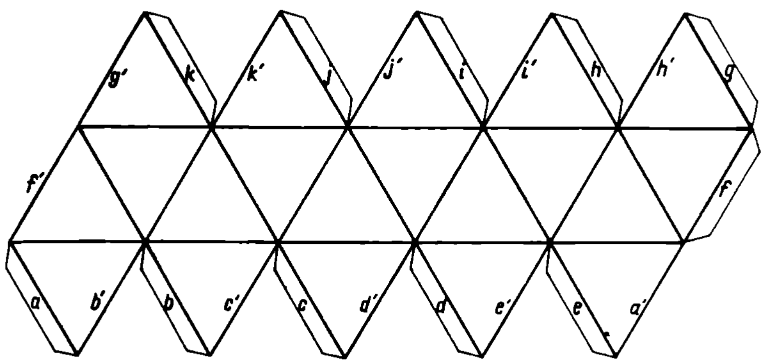
Ebenes Netz des regulären Tetraeders



Ebenes Netz des regulären Pentagondodekaeders



Ebenes Netz des regulären Oktaeders



Ebenes Netz des regulären Ikosaeders

POSTKARTE

Gebühren-
frei!

Postamt

....

(PLZ)

Sofort an den zuständigen
Postzeitungsvertrieb weiterleiten.

VLV Spremberg Ag 310 69 DDR 2761
I 20 8 986 Z 6

Liebe *alpha*-Leser!

Immer wieder erreicht uns Post, daß Schüler und Erwachsene „durch Zufall" ein *alpha*-Heft in die Hände bekommen und begeisterte Leser wurden. Uns wurde auch mitgeteilt, daß aktive *alpha*-Leser in ihrer Klasse geworben haben, um weiteren interessierten Mitschülern die Möglichkeit zu schaffen, sich neben dem Mathematikunterricht durch aktives außerunterrichtliches Selbststudium weiter zu qualifizieren. Wir haben daher einen Bestellzettel abgedruckt. Schneide ihn aus und gib ihn den Schülern, die bestellen wollen! Sollte diese Bestellkarte nicht ausreichen, so wird jedes Postamt helfen.
Berichtet uns, wie Ihr geworben habt, welche Erfolge Ihr hattet!

Eure Redaktion *alpha*

Aus dem Inhalt der Hefte alpha, Heft 5 und 6

Aus der Welt der Tetraeder – Ungleichungen – ein schwieriger, aber interessanter Beweis – Dualspiele – Berufsbild: Facharbeiter für Statistik – Berufsbild: Facharbeiter für BMSR-Technik – Aus dem Leben *J. Keplers* – Bericht über die XIII. Internationale Mathematikolympiade in der ČSSR – Preisträger des *alpha*-Wettbewerbs 1970/71 – Berichte von Arbeitsgemeinschaften – Mathematik und Chemie – *Ramanujan*, das mathematische Genie Indiens – Was ist aus ihnen geworden? *alpha* stellt 20 ehemalige IMO-Teilnehmer aus der DDR vor – Wie entsteht die Schülerzeitschrift *alpha?* – Eine Aufgabe von Prof. Dr. *Riedrich* – Eine Aufgabe von Prof. Dr. *Lewin* – aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht: Aufgaben speziell für Klasse 5/6 – In freien Stunden, *alpha* heiter – *alpha*-Wettbewerbe zu Heft 5 und 6 u. a. m.

Liebe Redaktion *alpha!*

Mit Beginn des Schuljahres 1970/71 haben wir an unserer Schule einen Mathematik-Zirkel für die Klassen 5 und 6 eingerichtet. Der Inhalt unserer Arbeit sieht so aus: Wir erarbeiten gemeinsam die Aufgaben des *alpha*-Wettbewerbs, lösen Knobelaufgaben und spielen Schach. Wir haben das Schachspiel deshalb mit eingeführt, weil wir der Meinung sind, daß es eine gute Erziehung zur Konzentration ist und unser Kombinationsvermögen weckt. Alle Teilnehmer sind begeistert. Sie lesen die *alpha* gern und lösen schon von allein Aufgaben höherer Klassenstufen.
Von 169 Schülern unserer kleinen Landschule (achtklassige Oberschule) abonnieren 27 die *alpha*. Oft lesen auch die Eltern mit und beteiligen sich am Lösen der Aufgaben. Von nun an wollen wir die Lösungen geschlossen an die Redaktion einsenden.
Wir bedanken uns für die interessante Zeitschrift und wünschen uns vor allem viele Knobelaufgaben.

Im Namen des Mathe-Zirkels Brigitte Dittrich

Oberlehrer Brigitte Dittrich
OS Bahratal (Kreis Pirna)

Bestellschein

Empfangsstellennummer des PZV | Zustellbezirk | Einziehbezirk

Ich bestelle hiermit ab ______ zur Zustellung/Abholung *)

Überwiesen wird

Artikelnummer | WGr

Stück ______ Titel der Zeitung/Zeitschrift

Karteinummer

zu den Bezugsbedingungen lt. Postzeitungsliste zum Abonnementspreis von ______ M

In Blockschrift ausfüllen:

Name, Vorname: ______

Anschrift: ______

(Postleitzahl, Wohnort, Straße, Hausnummer, Gebäudeteil, Stockwerk)

Das Abonnementsgeld wird bar bezahlt *)

ist abzubuchen vom Konto Nr. ______ beim ______

(Postscheckamt, Bankinstitut u. a.)

*) Nichtzutreffendes streichen

Ich versichere, daß ich den obengenannten Bezieher geworben habe

______

(Unterschrift des Werbers)

______

(Eigenhändige Unterschrift des Bestellers)

Die stark umrandeten Felder werden von der Deutschen Post ausgefüllt

Bezieherkarte/ Kundenkarte berichtigt	Adreßplatte geprägt/ Z 47 ausgefertigt	Bestellvermerk	Verteilkarte berichtigt	Vermerke