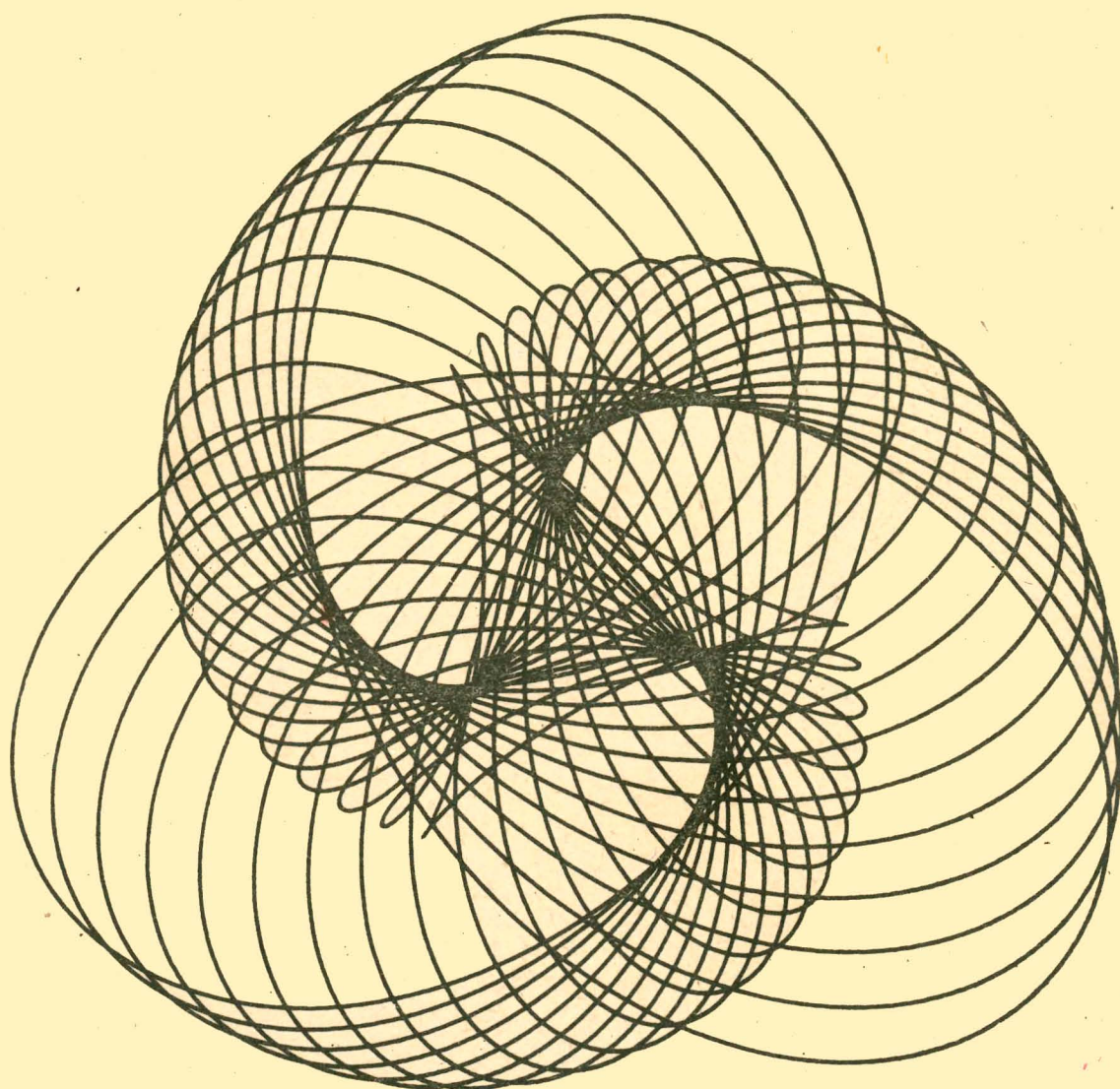
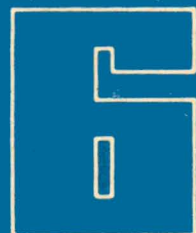


Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
21. Jahrgang 1987
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395



Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:

Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086

Anschrift der Redaktion:

PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:

Gabriele Liebau (Chefredakteur)

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn.

G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr.

W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat.

J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent

Dr. sc. nat. R. Hofmann (Leipzig); Natio-

nalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Stu-

dienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberleh-

rer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstu-

dienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig);

Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leip-

zig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Mü-

ritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam);

Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald);

Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dres-

den); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald);

Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/El-

ster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin);

W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed.

W. Walsch, VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der

Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Univer-*

sität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholtz)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545

des Presseamtes beim Vorsitzenden des

Ministerrates der Deutschen Demokrati-

schcn Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzel-

heft 0,50 M, im Abonnement zweimonat-

lich 0,50 M. Bestellungen werden in der

DDR von der Deutschen Post und dem

Buchhandel entgegengenommen. Der Be-

zug für die Bundesrepublik Deutschland

und Berlin (West) erfolgt über den Buch-

handel; für das sozialistische Ausland über

das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und

für alle übrigen Länder über: Buchexport

Volkseigener Außenhandelsbetrieb der

DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, B. Liebau (S. 121);

P. Schreiber (S. 123); Dallos, aus Eulenspie-

gel (S. 130); aus Funktio, Finnland (S. 132)

Titelblatt: W. Fahr, Berlin

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphi-

scher Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der aus-*

gezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

Artikelnummer (EDV) 128

ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 10. August 1987

Auslieferungstermin: 4. Dezember 1987



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 121 Ein Dank an „Mathe-Lehmann“
Redaktion *alpha* und das Redaktionskollegium
- 122 Die Koordinatenmethode im Wandel der Zeiten, Teil 1 [9]¹
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt-Universität* Greifswald
- 124 Ein Verfahren zur Gewinnung aller teilerfremden
pythagoreischen Zahlentripel aus dem Tripel (3; 4; 5) [8]
W. Schultze, Sektion Informatik der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt
- 126 25 Jahre ABC-Mathematikolympiaden [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 127 Sprachecke [8]
Zusammenstellung: H. Begander/Dr. C.-P. Helmholtz/P. Hofmann/J. Lehmann
(alle Leipzig)
- 128 Fan-Tan – ein mathematisches Spiel [8]
Th. Böhme, Technische Hochschule Ilmenau
- 130 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik, Naturwissenschaft und Technik
Zusammenstellung: Dr. W. Fregin/Dr. W. Riehl, beide Leipzig, OStR Th. Scholl,
Berlin
- 133 XXVIII. Internationale Mathematikolympiade, Havanna
Juli 1987. [10]
Prof. Dr. H.-D. Gronau, *E.-M.-Arndt-Universität* Greifswald
- 133 Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. L. Davidson
Sekretär des Organisationskomitees der XXVIII. IMO, Havanna
- 134 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Mini-BASIC für *alpha*-Leser Teil 7 [6]
Dr. L. Flade/Dr. M. Pruzina, Sektion Mathematik der *M.-Luther-Universität*
Halle
- 136 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 138 Wir arbeiten mit Resten [7]
Dr. C.-P. Helmholtz, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig
- 139 Leserpost: Chancen für Denkfaule [9]
Dr. W. Schmidt, *E.-M.-Arndt-Universität* Greifswald
- 140 *alpha*-Schachwettbewerb 1987 [5]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 141 Buchtips
- 142 *alpha*-Wettbewerb: Kollektive Beteiligung 1986/87 [5]
- 143 Lösungen
- III. U.-Seite: Rund um den SR 1: Wieviel Bonbons sind am
Pfefferkuchenhaus? [7]
S. Schmidt, *E.-M.-Arndt-Oberschule* Greifswald
- IV. U.-Seite: Jahreskalender 1988

¹ bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Ein Dank an „Mathe“-Lehmann



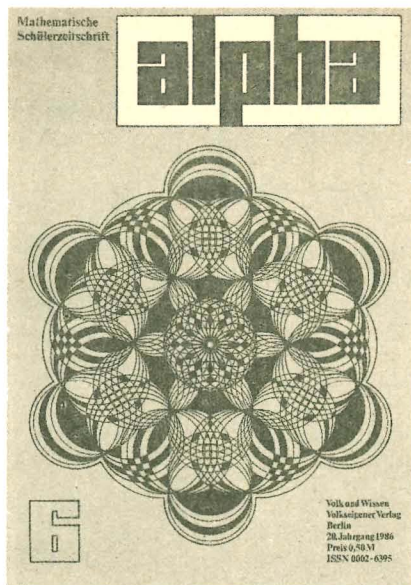
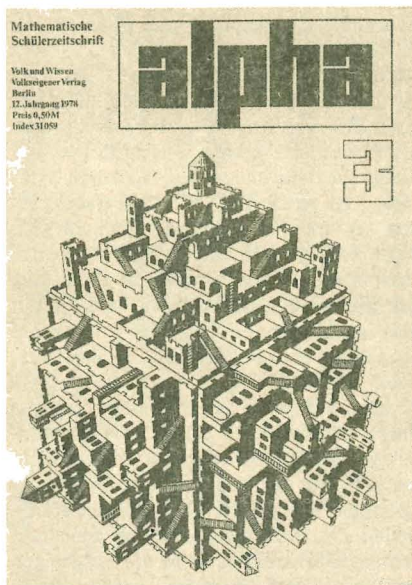
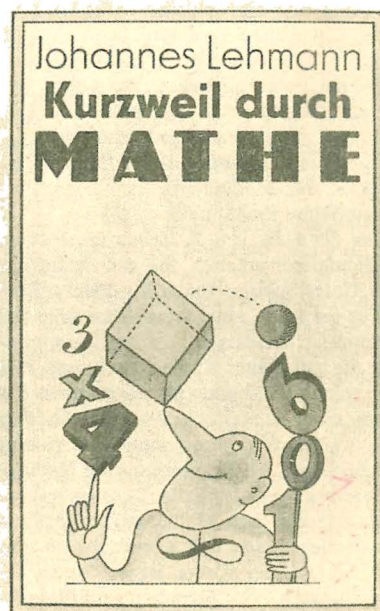
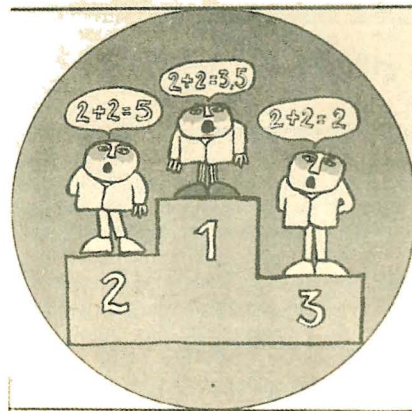
Als Chefredakteur der *alpha* kann der Verdiente Lehrer des Volkes Oberstudienrat Johannes Lehmann auf eine zwanzigjährige erfolgreiche Arbeit zurückblicken. Gemeinsam mit einem aktiven Redaktionskollegium wurde die *alpha* zu einer interessanten mathematischen Schülerzeitschrift entwickelt, die aus dem Zeitschriftenangebot unseres Landes nicht mehr wegzudenken ist. Mit über 120 *alpha*-Heften hat Johannes Lehmann es geschafft, hunderttausende Schüler für die ersten

und heiteren Seiten der Mathematik zu begeistern, Arbeitsgemeinschaften, Kreis- und Bezirksklubs der Mathematischen Schülergesellschaft, Korrespondenzzirkeln u. a. Anregung für ihre Arbeit zu geben. Aber auch für den Mathematiklehrer ist die *alpha* Anregung und Bereicherung seines Unterrichts. Die gesammelten Jahrgänge stellen für ihn eine wahre Fundgrube an mathematischen Denksportaufgaben, Spielen, historischen Betrachtungen, aber auch theoretischen, vertiefenden Beiträgen dar. Die Veröffentlichung der Aufgaben der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, zu deren Initiatoren J. Lehmann gehört, sind fester Bestandteil der *alpha*. Gleichzeitig erhielten zahlreiche Leser und Kollektive die Möglichkeit, ihre Aufgabenvorschläge, Ideen und Erfahrungen bei der Beschäftigung mit der Mathematik einer breiten Öffentlichkeit zugänglich zu machen.

Auf diese Weise hat Johannes Lehmann einen nicht geringen Anteil an der erfolgreichen Entwicklung des Mathematikunterrichts und einer lebendigen, außerunterrichtlichen Tätigkeit, an der Gewinnung junger Kader für eine Wissenschaft, der in der Entwicklung und Anwendung von Spitzentechnologien in unserer Volkswirtschaft ein besonderer Platz zukommt. Neben seiner Arbeit als Chefredakteur agierte J. Lehmann ebenso erfolgreich als Buchautor oder Herausgeber von unterhaltsamer ma-

akzent Johannes Lehmann

Mathe mit Pfiff



thematischer Literatur. 18 Mathe-LVZ (Sonderausgaben der Leipziger Volkszeitung), 12 unterhaltsame Mathe-Hefte, 80 Lesebogen Junger Mathematiker und neun Bücher haben ihn als „Mathe-Lehmann“ auch über die Grenzen unseres Landes hinaus bekannt gemacht. Kein Wunder, daß er auch nach dem 65. Lebensjahr der Mathematik die Treue hält und weitere Veröffentlichungen, natürlich auch in der *alpha*, plant.

Mit Wirkung vom 1.1.1988 scheidet J. Lehmann nach einem Jahr tatkräftiger Unterstützung des neuen Chefredakteurs aus der Redaktion *alpha* aus.

Für das bisher Geleistete sagen wir herzlichen Dank, für die Zukunft wünschen wir Gesundheit, viele neue Ideen und alles Gute im persönlichen Leben.

Die Redaktion *alpha*
und das Redaktionskollegium

Die Koordinatenmethode im Wandel der Zeiten

Zum 350. Jahrestag des Erscheinens von R. Descartes' «La Géométrie»

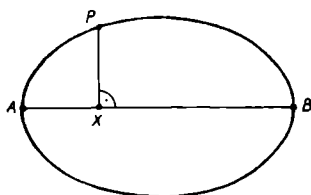
Teil 1

Die Koordinatenmethode der Geometrie gehört seit langem zu den mächtigsten und vielseitigsten Werkzeugen der Mathematik. Es ist üblich, ihre *Geburt* mit den Jahren 1636 bzw. 1637 in Verbindung zu setzen, in denen zwei grundlegende Arbeiten von Pierre de Fermat (1601 bis 1665) bzw. René Descartes (1594 bis 1650) zur Begründung der später als *analytische Geometrie* bezeichneten Koordinatenmethode entstanden. Wie so oft in der Geschichte der Mathematik haben diese Arbeiten eine bis in die Antike zurückreichende Vorgeschichte und eine bis in die Gegenwart wirksame Folgegeschichte. Sie stehen weder am Anfang noch am Ende einer Entwicklung, sondern sie markieren einen gewissen Qualitätssprung in der Behandlung einer in der Mathematik von Beginn an vorhandenen Problematik.

Schon im 4. Jh. v. u. Z. hatten griechische Mathematiker erkannt, daß die Definition und Untersuchung spezieller ebener Kurven es erfordert, eine charakteristische Bedingung für diejenigen Punkte zu formulieren, die auf dieser Kurve liegen, und daß eine solche Bedingung im allgemeinen die Form einer Gleichung zwischen Größen hat, die durch arithmetische Operationen wie Addition, Multiplikation oder Verhältnissbildung (eine explizite Division gab es in der griechischen Mathematik nicht) aus den Entfernungen der Kurvenpunkte von bestimmten, der Kurve zugeordneten festen Punkten oder Geraden gebildet werden. Eine solche Gleichung nannten sie ein Symptom der betreffenden Kurve. Eine Ellipse wurde von ihnen z. B. durch das Symptom

$$\frac{PX \cdot PX}{AX \cdot BX} = \text{const}, \quad (\text{Bild 1})$$

Bild 1



eine Parabel durch das Symptom

$$\frac{PX}{MX} = \frac{AX}{AC} \quad (\text{Bild 2})$$

beschrieben. Eine Parabel definieren wir heute meist durch ihre Gleichung

$$y = ax^2, \quad (1)$$

wobei y bzw. x die Abstände des variablen

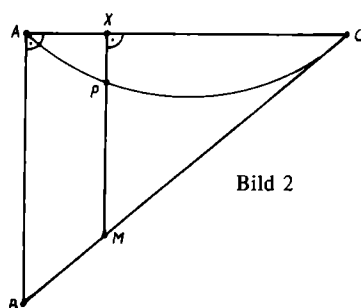
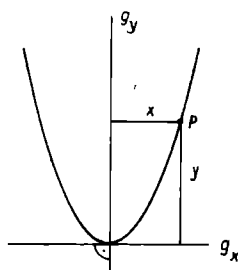


Bild 2

Kurvenpunktes P von zwei zueinander senkrechten, der Parabel zugeordneten Geraden sind: ihrer Symmetrieachse g_y und der dazu im Scheitelpunkt senkrechten Geraden g_x (der Scheitelpunkt ist der gemeinsame Punkt der Parabel mit ihrer Symmetrieachse, Bild 3). Um die geometrische Bedeutung des Koeffizienten a zu ermitteln, hat man $x = 1$ zu setzen: a ist der zu $x = 1$ gehörige y -Wert. Seine Größe gibt also scheinbar die *Steilheit* der Parabel an. Dieser Begriff ist jedoch nur in bezug auf eine gewählte Maßeinheit sinnvoll. In Wirklichkeit sind alle (durch verschiedene Werte von a erzeugten) Parabeln untereinander ähnlich. Verändert man nämlich den Maßstab durch die Transformation $x^* = ax$, $y^* = ay$, so geht (1) bei beliebigem a in die spezielle Form $y^* = x^{*2}$ über.

Bild 3

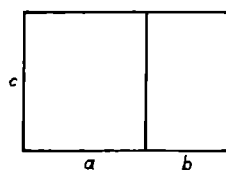


Die Gleichung (1) wäre jedoch für die griechischen Mathematiker sinnlos gewesen. Sie verfügten nicht über den Begriff der reellen Zahl. Da sie andererseits schon im 5. Jh. v. u. Z. bemerkt hatten, daß ganze Zahlen und deren Verhältnisse (d. h. modern: gebrochene Zahlen) zur Beschreibung geometrischer Sachverhalte nicht ausreichen, weil es z. B. keine Maßeinheit gibt, bezüglich derer Seite und Diagonale eines Quadrats gleichzeitig ganzzahlige Längen haben, faßten sie Streckenlängen, Flächen- und Rauminhalte selbst als Größen auf, ohne ihnen Zahlenwerte zuzuord-

nen. Addition solcher Größen wurde durch Aneinanderlegen entsprechender Repräsentanten, Multiplikation von Längen durch Bildung des Rechtecks aus den gegebenen Strecken, Multiplikation dreier Längen als Bildung eines Quaders erklärt. Rechengesetze für die solcherart erklärten Operationen konnten durch geometrische Betrachtungen begründet werden.

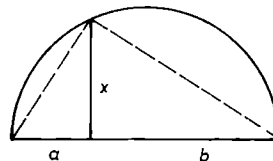
Zum Beispiel gilt für Strecken a , b , c stets $(a + b)c = ac + bc$, weil das Rechteck mit den Seiten $a + b$ und c sich durch Aneinanderlegen aus den Rechtecken mit den Seiten a und c bzw. b und c ergibt (Bild 4).

Bild 4



Unbekannte Strecken konnten nun in vielen Fällen durch geometrische Konstruktion gefunden werden. Ist z. B. von einer gesuchten Strecke x bekannt, daß $x^2 = ab$ (mit gegebenen Strecken a , b) ist, so findet man x nach dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke als Höhe eines solchen Dreiecks mit den Hypotenusenabschnitten a , b (Bild 5). Dies alles konnte genutzt werden, um durch Symptome definierte Kurven zu untersuchen und Sätze über sie zu beweisen.

Bild 5



In der Auffassungsweise der Griechen waren jedoch nur Gleichungen sinnvoll, die folgenden beiden Bedingungen genügen:

(a) Es kommen nur Produkte von höchstens drei Streckenfaktoren vor.

(Wie sollten sie sich einen vierdimensionalen Quader vorstellen?)

(b) Es können nur Größen gleicher Dimension addiert, subtrahiert oder gleichgesetzt werden.

(In diesem Sinne verlangt also Gleichung (1) die Gleichheit eines Rauminhaltes mit einer Strecke.) Obwohl es den griechischen Mathematikern gelang, Kegelschnitte und einige spezielle andere Kurven durch Symptome zu beschreiben, die den Bedingungen (a) und (b) genügten, erwiesen sich diese Bedingungen insgesamt als wesentliches Hemmnis für die weitere Entfaltung der griechischen Mathematik, und die auf den geometrischen Größenbegriff zugeschnittene *geometrische Algebra* der Griechen, die jede Umformung einer Gleichung und jede Lösung einer solchen durch geometrische Betrachtungen rechtfertigen mußte, war sehr schwerfällig. Dennoch bildete die genaue Kenntnis der griechischen Mathematik und ihrer Schwierigkeiten den Ausgangspunkt und eine notwendige Voraussetzung für die Leistungen von Fermat und Descartes.

Fermat war Jurist und Beamter. Die Mathematik betrieb er mit Leidenschaft, jedoch nur als *Hobby*. Er gehört zu den vielseitigsten und bedeutendsten Mathematikern des 17. Jh. Außer der Koordinatenmethode begründete er die Zahlentheorie, die Wahrscheinlichkeitstheorie (gemeinsam mit Blaise Pascal (1623 bis 1662)) und die kalkülmäßige Lösung von Maximum- und Minimaufgaben, aus der sich wenig später die Differentialrechnung entwickelte. Während seines Lebens wurden die meisten seiner Ergebnisse nur durch seinen relativ umfangreichen Briefwechsel bekannt. Ausgangspunkt seiner geometrischen Untersuchungen war das Bemühen, die verlorengegangenen Beweise aus der Kegelschnittslehre des Apollonios von Perge (um 262 bis um 190 v. u. Z.) zu rekonstruieren bzw. die überlieferten Beweise zu vereinfachen oder durchsichtiger zu gestalten. An den antiken Prinzipien (b) und im wesentlichen auch an (a) hielt er fest, benutzte jedoch statt der schwerfälligen geometrischen Terminologie der Griechen die von Francois Viète (Viète 1540 bis 1603) eingeführte algebraische Formelsymbolik, die zwar immer noch viel unhandlicher als unsere heutigen Schreibweisen war, jedoch einen gewaltigen Fortschritt gegenüber der antiken Ausdrucksweise bedeutete. Fermat charakterisierte die Lage von Punkten einheitlich durch ihre Abstände von zwei zueinander senkrechten Achsen und untersuchte nun für alle möglichen Typen von Gleichungen zwischen zwei Unbekannten, die man unter Berücksichtigung der Beschränkungen (a) und (b) aufstellen kann, welche Kurven sich ergeben. Sein Ergebnis: Es kommen außer Geraden genau alle Arten von Kegelschnitten heraus. Die für die weitere Entwicklung wesentlichste, wenn auch noch nicht völlig klar formulierte Erkenntnis Fermats könnte man mit heutigen Worten etwa so aussprechen:

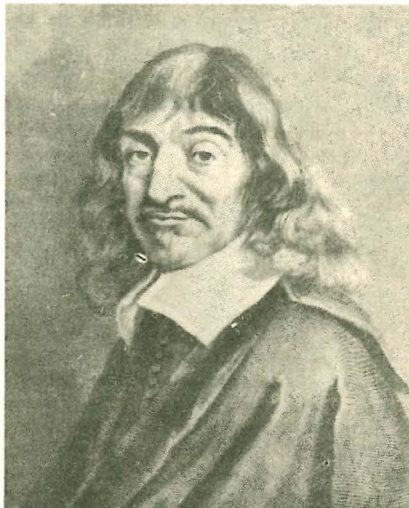
Die Koordinatenmethode erschöpft sich nicht darin, für irgendwelche (z. B. durch mechanische Vorrichtungen erzeugte) Kurven nachträglich Beschreibungen durch Gleichungen aufzufinden und zur weiteren Untersuchung dieser Kurven zu benutzen. Vielmehr definiert nach Wahl eines Paares zueinander senkrechter Achsen jede Gleichung mit zwei Unbekannten eine Kurve, nämlich die Menge derjenigen Punkte, deren Abstände zu den beiden Achsen dieser Gleichung genügen. Von der Gleichung ausgehend, kann man die Form und die sonstigen Eigenschaften dieser Kurve entdecken. Überdies liefert die algebraische Gestalt der Gleichungen Klassifikationsprinzipien für die entsprechenden Kurven. Diese Erkenntnisse sind in Fermats in lateinischer Sprache verfaßter Schrift *Einführung in die ebenen und körperlichen Örter* enthalten, die 1636 geschrieben und bis 1637 in französischen Gelehrtenkreisen bekannt, jedoch erst 1679, nach seinem Tode, erstmals gedruckt wurde. *Ebene und körperliche Örter* bedeutet dabei nicht etwa ebene und räumliche (also in keiner Ebene ganz enthaltene) Kurven, sondern bezieht sich noch auf die antike Auffassung der Grö-

ßen. Ebene Örter sind bei Fermat solche Kurven, in deren Gleichungen nur Produkte zweier Strecken vorkommen. Körperliche Örter sind solche Kurven, in deren Gleichungen Produkte dreier Strecken vorkommen. Kurven, deren Gleichungen von höherem Grade als drei sind, nannte Fermat kurioserweise *lineare Örter*, ohne sich weiter mit ihnen zu beschäftigen.

Ob und wie weit Descartes von Fermats Ergebnissen Kenntnis hatte, bevor 1637 seine Abhandlung *La Géométrie* in Leiden gedruckt wurde, übrigens nicht als selbständige Veröffentlichung, sondern als einer von drei Anhängen seiner berühmten philosophischen Programmschrift *Discours de la méthode* (Erörterung über die Methode), wollen wir unerörtert lassen. Jedenfalls ist sein Beitrag von ganz anderer Art, geradezu komplementär zu Fermats Erkenntnissen, und nur beide gemeinsam konnten wohl die folgende Revolution in der Mathematik auslösen, die innerhalb von 200 Jahren zur vollständigen gegenseitigen Übersetzung geometrischer und arithmetisch-algebraisch-analytischer Begriffe, Sachverhalte und Methoden ineinander führen sollte.

Das Hauptverdienst von Descartes um die Koordinatenmethode besteht aus heutiger Sicht darin, daß er sie von den beiden antiken Beschränkungen (a) und (b) befreite. Descartes erkannte, daß man nach Wahl einer Einheitsstrecke e das Produkt ab zweier Strecken a , b durch diejenige Strecke c repräsentieren kann, für die das Rechteck mit den Seiten e , c flächengleich dem Rechteck mit den Seiten a , b ist. Auf diese Weise fortgehend kann man das Produkt beliebig vieler Strecken stets wieder auf eine Strecke reduzieren und somit jede Gleichung beliebig hohen Grades und mit Summanden unterschiedlicher Grade als Gleichung zwischen Strecken deuten.

Der französische Philosoph, Mathematiker und Physiker René Descartes (1596 bis 1650) gilt gemeinsam mit dem französischen Juristen und Mathematiker Pierre de Fermat (1601 bis 1665) als Begründer der analytischen Geometrie.



Auf eine verwickelte, nicht mit wenigen Sätzen zu erläuternde Weise ist dieses Prinzip gleichbedeutend mit der Möglichkeit, nach Wahl eines 0- und eines 1-Punktes auf einer Geraden die sämtlichen Punkte dieser Geraden umkehrbar eindeutig den sämtlichen reellen Zahlen zuzuordnen, wie jeder es in der Schule lernt und wie es jeder, heute in den verschiedensten Praxisbereichen unentbehrlichen graphischen Darstellung funktionaler Zusammenhänge zwischen physikalischen, ökonomischen oder sonstigen in reellen Zahlen meßbaren Größen zugrundeliegt. Diese Entsprechung zwischen Strecken und ihren bezüglich einer Maßeinheit zahlenmäßig ausgedrückten Längen ist uns heute so selbstverständlich, daß es uns sehr schwer fällt, uns in die antike Denkweise zurückzusetzen, die mit Strecken, Flächen und Körpern umging, ohne damit irgendwelche Vorstellungen von Maßzahlen zu verbinden.

Descartes' in französischer Sprache geschriebene und im Widerspruch zu seinem philosophischen Bekenntnis zur menschlichen Vernunft nicht besonders klare Abhandlung war zur rechten Stunde erschienen, um einem herangereiften dringenden gesellschaftlichen Bedürfnis zu dienen, der uneingeschränkten Behandlung geometrischer und damit auch naturwissenschaftlicher und technischer Fragen mittels algebraischen Formelkalküls. Schon 1646 wurde sie durch Übersetzung ins Lateinische einem breiten gelehrten Publikum zugänglich.

Weitere Übersetzungen und Bearbeitungen folgten rasch, aber es bedurfte noch vieler inhaltlicher Schritte und der Beiträge vieler Mathematiker, um der Koordinatenmethode jene klassische Form zu geben, die sie etwa um die Mitte des 19. Jh. erreicht hatte. Und selbst diese, lange Zeit als vollendet angesehene Form hat in unserem von der Informatik geprägten Zeitalter wesentliche Erweiterungen und Bereicherungen erfahren. Über diese weitere Entwicklung wird im zweiten Teil berichtet.

P. Schreiber

Drei harte Nüsse

▲ 1 ▲ Ein Autofahrer fährt um 12.00 Uhr von A nach B ab, ein zweiter Autofahrer fährt 14.00 Uhr von B nach A. Sie treffen sich um 16.05 Uhr und kommen beide zur gleichen Zeit an ihren Zielorten an. Beide Autos fahren mit konstanter Geschwindigkeit. Wann kamen sie am Ziel an?

▲ 2 ▲ Wie kann man mit Hilfe des Schulrechners SR 1 die Gleichung $x = \cos x$ unter alleiniger Verwendung einer Taste (näherungsweise, mit Rechnergenauigkeit) lösen?

▲ 3 ▲ Wer findet mit Hilfe des SR 1 Fixpunkte von anderen Gleichungen durch ausschließliches Betätigen von SR 1-Tasten?

Mr. Doris Gollé, Apothekerin, Wien

Ein Verfahren zur Gewinnung aller teilerfremden pythagoreischen Zahlentripel aus dem Tripel (3; 4; 5)

Drei positive ganze Zahlen bilden ein *pythagoreisches Zahlentripel* $(a; b; c)$, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

Ist $(a; b; c)$ ein pythagoreisches Zahlentripel, so ist auch für eine beliebige positive ganze Zahl k das Tripel $(ka; kb; kc)$ ein solches, denn es gilt dann $k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2$, also $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$.

Stellt man die Frage nach *allen* pythagoreischen Zahlentripeln, so genügt es deshalb, zunächst nach allen *teilerfremden* zu suchen.

Alle teilerfremden pythagoreischen Zahlentripel ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= u \cdot v, \quad b = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \\ c &= \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \end{aligned} \quad (*)$$

wenn $(u; v)$ die Menge aller Paare teilerfremder ungerader positiver ganzer Zahlen (im folgenden „tupgZ“ abgekürzt) mit $u > v$ durchläuft. Man kann dies z. B. in *Lietzmann: Der Pythagoreische Lehrsatz* (Mathematische Schülerbücherei, Band 6) nachlesen.

Wie kann man aber alle Paare tupgZ mit $u > v$ *systematisch* erhalten? Wir werden eine Möglichkeit dazu angeben und dabei erkennen, daß es möglich ist, *jedes* teilerfremde pythagoreische Zahlentripel durch wiederholtes Anwenden eines Systems von linearen Gleichungen aus dem Tripel (3; 4; 5) zu gewinnen.

Satz 1

a) Ist $(u; v)$ ein Paar tupgZ mit $u > v$, so ist auch jedes Paar $(\bar{u}; \bar{v})$, das mit Hilfe eines der drei Systeme

$$\begin{aligned} (A) \quad \bar{u} &= u + 2v & (B) \quad \bar{u} &= 2u + v \\ \bar{v} &= v & \bar{v} &= u \\ (C) \quad \bar{u} &= 2u - v & \bar{v} &= u \end{aligned}$$

gewonnen wurde, ein solches.

b) Ist $(\bar{u}; \bar{v})$ ein Paar tupgZ mit $\bar{u} > \bar{v}$, das verschieden vom Paar (3; 1) ist, so läßt sich dieses mit Hilfe genau eines der drei Systeme (A), (B), (C) aus einem Paar tupgZ mit $u > v$ erzeugen. Das Paar $(u; v)$ ist durch $(\bar{u}; \bar{v})$ eindeutig bestimmt.

c) Durch wiederholte Anwendung des in a) beschriebenen Schrittes läßt sich jedes Paar tupgZ $(\bar{u}; \bar{v})$ mit $\bar{u} > \bar{v}$ aus dem Paar (3; 1) gewinnen (siehe Bild 1).

Beweis:

a) 1. Da es sich bei den rechten Seiten der Gleichungen in (A), (B) und (C) ausschließlich um Summen von Vielfachen von u und v handelt, gibt es in jedem der drei Fälle genau ein Paar $(\bar{u}; \bar{v})$.

2. Es werden nur *ganze* Zahlen erzeugt, denn das Produkt, die Summe und die Differenz zweier ganzer Zahlen ist stets wieder eine ganze Zahl.

3. Es werden nur *positive* Zahlen erzeugt. Dies ist in (A) und (B) offensichtlich.

Für (C) gilt: Wegen $u > v$ ist $u - v > 0$ und mit $u > 0$ erst recht $2u - v > 0$.

4. Daß nur *ungerade* Zahlen erzeugt werden, ist leicht zu erkennen.

5. $\bar{u}$ und $\bar{v}$ sind stets *zueinander teilerfremd*. Hätten $\bar{u}$ und $\bar{v}$ einen größten gemeinsamen Teiler k mit $k > 1$, so hätten in (A), (B) und (C) auch jeweils die rechten Seiten der zwei Gleichungen diesen g.g.T. Haben aber $2x \pm y$ und x für $x, y \in \mathbb{Z}$ den g.g.T. $k > 1$, so teilt k auch y .

In unseren Fällen würde gelten g.g.T.

$(u, v) = k > 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

6. Wegen $u > v$ gilt $\bar{u} > \bar{v}$. In den Fällen (A) und (B) ist dies wegen der rechten Seiten der Gleichungen sofort einzusehen. Im Fall (C) folgt aus $u > v$ $u - v > 0$, also $2u - v > u$ und damit $\bar{u} > \bar{v}$.

b) 1. Löst man die Gleichungssysteme (A), (B) und (C) jeweils nach u und v auf, so erhält man

$$\begin{aligned} (A') \quad u &= \bar{u} - 2\bar{v} & (B') \quad u &= \bar{v} \\ v &= \bar{v} & v &= \bar{u} - 2\bar{v} \\ (C') \quad u &= \bar{v} & \\ v &= 2\bar{v} - \bar{u} \end{aligned}$$

2. Die rechten Seiten der Gleichungen in (A'), (B') und (C') sind sämtlich Summen von Vielfachen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Deshalb liefert für ein gegebenes Paar $(\bar{u}; \bar{v})$ jedes der

Systeme (A'), (B'), (C') genau ein Paar $(u; v)$.

3. Ganzzahligkeit, Teilerfremdheit und Ungeradheit von u und v können genau wie im Beweis zu a) leicht gezeigt werden.

4. Jedoch ist die Bedingung $u > v > 0$ nur in genau einem der drei Fälle (A'), (B'), (C') erfüllt. Wir zeigen dies:

Es ist erkennbar, daß *entweder* die zweite Gleichung von (B') *oder* die zweite Gleichung von (C') für v eine negative Zahl liefert. Folglich entfällt eines der Systeme (B'), (C').

Entfällt nun (B') wegen $\bar{u} - 2\bar{v} < 0$, so entfällt aus demselben Grunde auch (A'), d. h. es bleibt nur noch das mit (C') gewonnene Zahlenpaar $(u; v)$.

Entfällt aber (C'), so stellen wir weiter fest, daß sich (A') und (B') nur durch Vertauschung von u und v voneinander unterscheiden. Folglich ist nur für eines dieser Systeme die Bedingung $u > v$ erfüllt.

Eine genaue Untersuchung der Erfüllbarkeit der Forderung $u > v > 0$ ergibt

$$\begin{array}{ll} \text{im Falle (A')} & \text{im Falle (B')} \\ \bar{u} - 2\bar{v} > \bar{v} > 0 & \bar{v} > \bar{u} - 2\bar{v} > 0 \\ \bar{u} > 3\bar{v} > 2\bar{v} & 3\bar{v} > \bar{u} > 2\bar{v} \\ \bar{u} > 3\bar{v} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{im Falle (C')} \\ \bar{v} > 2\bar{v} - \bar{u} > 0 \\ -\bar{v} > -\bar{u} > -2\bar{v} \\ 2\bar{v} > \bar{u} > \bar{v} \end{array}$$

Folglich liefert nur (C') das Paar $(u; v)$, wenn $\bar{v} < \bar{u} < 2\bar{v}$ gilt, nur (B') das Paar $(u; v)$, wenn $2\bar{v} < \bar{u} < 3\bar{v}$ gilt und nur (A') das Paar $(u; v)$, wenn $3\bar{v} < \bar{u}$ gilt.

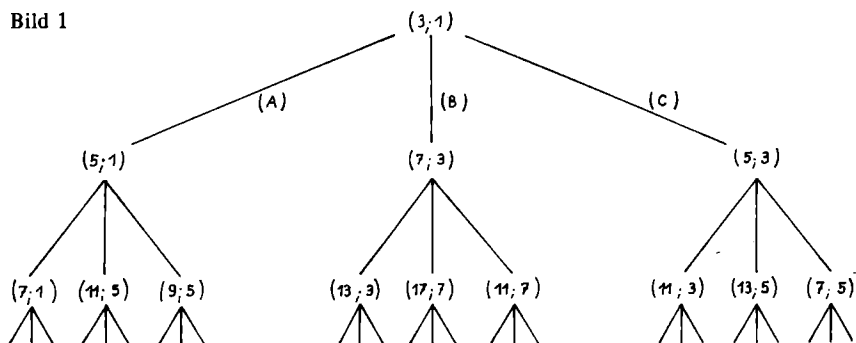
5. Untersucht man die durch die zuletzt gefundenen Bedingungen nicht erfaßten Fälle $\bar{u} = \bar{v}$, $\bar{u} = 2\bar{v}$ und $\bar{u} = 3\bar{v}$, so stellt man fest: Die Fälle $\bar{u} = \bar{v}$ und $\bar{u} = 2\bar{v}$ treten wegen der Teilerfremdheit von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ nur für die Paare (1; 1) bzw. (2; 1) ein. Beide erfüllen nicht die Voraussetzung des Satzes, brauchen also nicht weiter untersucht zu werden.

Ebenfalls wegen der Teilerfremdheit von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ gilt $\bar{u} = 3\bar{v}$ genau für das im Satz erwähnte Paar (3; 1).

Eine Anwendung der Systeme (A'), (B'), (C') würde hier die Paare (1; 1), (1; 1) bzw. (1; -1) liefern.

Bevor wir Teil c) beweisen, vereinbaren wir: Ein Zahlenpaar $(i; j)$ heiße *größer* als

Bild 1



das Paar $(k; l)$ genau dann wenn entweder

$i = k$ und $j > l$
 oder $i = l$ und $j > k$
 oder $j = k$ und $i > l$
 oder $j = l$ und $i > k$ gilt.

Wir schreiben $(i; j) > (k; l)$.

Ein Paar P_1 ist demnach genau dann größer als das Paar P_2 , wenn unabhängig von der Bezeichnung und der Reihenfolge der Komponenten eine Komponente aus P_1 gleich einer Komponente von P_2 ist, die andere Komponente von P_1 aber größer ist als die andere Komponente von P_2 .

Wir stellen fest:

1. Für jedes Paar $(\bar{u}; \bar{v})$, das gemäß Teil a) von Satz 1 aus einem Paar $\text{tupgZ}(u; v)$ mit $u > v$ gewonnen wurde, gilt

$(\bar{u}; \bar{v}) > (u; v)$:

Eine der Komponenten von $(\bar{u}; \bar{v})$ ist entsprechend den zweiten Gleichungen von (A), (B), (C) gleich einer Komponente von $(u; v)$, und wegen

$u + 2v > u$, $2u + v > v$, $2u - v > v$

(letzteres folgt aus

$u - v > 0$, d. h. $2u - 2v > 0$)

stehen die jeweils anderen Komponenten in der geforderten Relation.

2. Für das gemäß Teil b) von Satz 1 durch ein Paar tupgZ

$(\bar{u}; \bar{v}) \neq (3; 1)$, mit $\bar{u} > \bar{v}$ eindeutig bestimmte Paar $(u; v)$ gilt

$(u; v) < (\bar{u}; \bar{v})$: War (A') anzuwenden,

so gilt $v = \bar{v}$ und $u < \bar{u}$, bei Anwendung

von (B') gilt $u = \bar{v}$ und $v < \bar{u}$,

und schließlich gilt bei Anwendung von

(C') $u = \bar{v}$ und mit $\bar{v} < \bar{u}$ auch $2\bar{v} < 2\bar{u}$,

$2\bar{v} - \bar{u} < \bar{u}$, d. h. $v < \bar{u}$.

Beweise von Teil c):

Ist $(\bar{u}; \bar{v})$ ein beliebiges (von $(3; 1)$ verschiedenes) Paar tupgZ mit $\bar{u} > \bar{v}$, so kann man gemäß b) seinen eindeutig bestimmten Vorläufer ermitteln, von diesem wieder den Vorläufer usw. Dieses Verfahren bricht nach höchstens $\bar{u} + \bar{v}$ Schritten ab, da sich mit jedem Schritt eine der beiden Komponenten des Paares mindestens um 1 vermindert. Wie aus den Punkten 4. und 5. des Beweises zu b) ersichtlich ist, liefern (A'), (B'), (C') nur dann keinen Vorläufer, wenn das Paar $(3; 1)$ erreicht ist.

Die von $(\bar{u}; \bar{v})$ ausgehende Folge von gemäß b) ermittelten Paaren endet also beim Paar $(3; 1)$. Das heißt aber umgekehrt: Ausgehend vom Paar $(3; 1)$ kann man durch wiederholtes Anwenden des Schrittes in a) jedes Paar $\text{tupgZ}(\bar{u}; \bar{v})$ mit $\bar{u} > \bar{v}$ erreichen. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Satz 2

Alle teilerfremden pythagoreischen Zahlentripel $(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c})$ und nur diese werden aus dem Tripel $(3; 4; 5)$ durch wiederholte Anwendung der drei Systeme

$$(R) \quad \begin{aligned} \bar{a} &= a - 2b + 2c \\ \bar{b} &= 2a - b + 2c \\ \bar{c} &= 2a - 2b + 3c \end{aligned}$$

$$(S) \quad \begin{aligned} \bar{a} &= a + 2b + 2c \\ \bar{b} &= 2a + b + 2c \\ \bar{c} &= 2a + 2b + 3c \end{aligned}$$

$$(T) \quad \begin{aligned} \bar{a} &= -a + 2b + 2c \\ \bar{b} &= -2a + b + 2c \\ \bar{c} &= -2a + 2b + 3c \end{aligned}$$

erzeugt.

Beweis:

Die eingangs genannten Gleichungen (*) sind unter der Bedingung $u > 0$ äquivalent zu

$$v = \frac{a}{u}, \quad u^2 = 2b + v^2, \quad u^2 = 2c - v^2.$$

Durch Addition ergibt sich aus den letzten beiden Gleichungen

$$2u^2 = 2b + 2c, \text{ also } u^2 = b + c, \text{ und aus}$$

$$v^2 = \frac{a^2}{u^2} \text{ folgt } v^2 = \frac{c^2 - b^2}{b + c} \text{ und damit}$$

$$v^2 = c - b. \text{ Folglich gilt}$$

$$u \cdot v = a, \quad u^2 = b + c, \quad v^2 = c - b. \quad (**)$$

Wir wenden Satz 1 an.

Nach dem Gleichungssystem (A) aus Satz 1 gilt $\bar{v} = v$ und $\bar{u} = u + 2v$.

Durch aufeinanderfolgendes Anwenden der Gleichungen (*), (A) und (**) ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{u} \cdot \bar{v} = (u + 2v) \cdot v = uv + 2v^2 \\ &= a + 2(c - b) = a - 2b + 2c \end{aligned}$$

$$\bar{b} = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 - \bar{v}^2) = \frac{1}{2}((u + 2v)^2 - v^2)$$

$$= \frac{1}{2}(u^2 + 4uv + 3v^2)$$

$$= \frac{1}{2}(b + c + 4a + 3c - 3b)$$

$$= \frac{1}{2}(4a + 4c - 2b) = 2a - b + 2c$$

$$\bar{c} = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) = \frac{1}{2}((u + 2v)^2 + v^2)$$

$$= \frac{1}{2}(u^2 + 4uv + 5v^2)$$

$$= \frac{1}{2}(b + c + 4a + 5c - 5b)$$

$$= \frac{1}{2}(4a - 4b + 6c) = 2a - 2b + 3c.$$

Durch entsprechende Überlegungen erhält man (S) und (T).

● Führt einige Schritte des im Satz 2 beschriebenen Verfahrens aus, und überprüft, ob pythagoreische Zahlentripel entstanden sind!

W. Schultze

Bela Rak, Ungarn



Der Satz des Pythagoras

Ein Dreieck, lebend voll des Dünkels des Habens eines rechten Winkels, sich die Quadrate, arvertraut, sofort auf jede Seite baut.

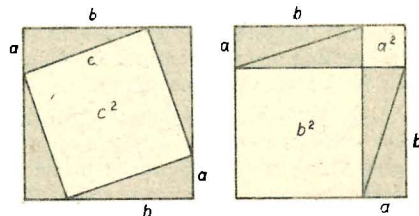
Ganz aufgetakelt tut es stehen und meint, schön sei es anzusehen.

Denn die Katheten, so quadriert und danach beide aufsummiert sind gleich dem – nach des Satzes

Flusse –

Quadrat von der Hypotenuse.

Und der Beweis läuft ohne Mühe ganz einfach unter'm Wörtchen siehe:



Pythagoras, verehrt, bewundert, so lebte v. u. Z. fünfhundert.

Dieses kleine Gedicht sandte uns Frau K. Näther aus Leipzig ein

Der Lehrsatz des Pythagoras zählt wegen seiner großen Bedeutung für Berechnungen und Beweisführungen in der Elementargeometrie mit Recht zu den berühmtesten Lehrsätzen der Planimetrie. Seine Entdeckung wird, was mit dieser Absolutheit sicher nicht richtig ist, meist Pythagoras von Samos zugeschrieben. Historisch belegte Einzelheiten aus seinem Leben sind nur wenige bekannt.

aus: Kleine Enzyklopädie Mathematik

▲ 1 ▲ Für den Satz des Pythagoras sind mehr als 100 Beweise bekannt. Im oben angegebenen Bild wird einer der kürzesten, der Zerlegungsbeweis dargestellt. Vollziehe diesen Beweis nach!

Pythagoras von Samos (um 580 bis 501 v. u. Z.)

Der aus der Schillerschen Ballade bekannte Tyrann Polykrates von Samos soll einstmals bei einem Gastmahl Pythagoras gefragt haben, wieviel Schüler er habe. Dieser antwortete: „Ich will es sagen dir, o Polykrates. Siehe, die Hälfte treibt die treffliche Mathematik, dagegen ein Viertel erforscht die Tiefen der Natur, der unsterblichen, ein Siebentel übt noch schweigend die Kraft der Seele, im Herzen die Lehre wärend.“

Zähl' drei Jungfrauen hinzu, aus denen Theano hervorragt, soviel führ' ich der Schüler zum Born der ewigen Wahrheit.“ Wie viele Schüler hatte Pythagoras?

aus: Kurzweil durch Mathe, J. Lehmann

25 Jahre ABC-Mathematikolympiaden

Jedes Jahr werden die Schüler der Klassen 1 bis 4 im Märzheft der ABC-Zeitung aufgegriffen, sich an der ABC-Mathematikolympiade zu beteiligen. Die Zeitschrift *Die Unterstufe* informiert die Lehrer jeweils zur gleichen Zeit und veröffentlicht die Aufgaben der 2. Stufe (in Klausurform).

Welche Aufgaben haben diese Olympiaden? – Sie sollen bei den Schülern von der ersten Klasse an die Liebe zur Mathematik wecken, vorhandenes Interesse weiter fördern, die Lust an mathematischem Denken und Knobeln entwickeln helfen und damit zu einer sinnvollen Freizeitbeschäftigung beitragen. Alle Schüler der Klassen 1 bis 4 haben somit die Möglichkeit, ihre Kräfte miteinander zu messen, indem sie die gestellten Aufgaben lösen, sich in einer 1. Stufe zu Hause und in einer 2. Stufe in einer Klausur im Rahmen der Schule, in zentralen Veranstaltungen der Pionierhäuser, Stationen der Jungen Naturforscher oder Klubhäusern zu bewähren. Sie geben Gelegenheit, besonders leistungsstarke Schüler zu erkennen und weiterzufördern, stellen eine echte Vorbereitung auf die *Olympiaden Junger Mathematiker der DDR* (für Klassen 5 bis 11/12) dar.

Diese ABC-Mathematikolympiaden können auf eine 25jährige Tradition zurückblicken. Sie wurden im Rahmen des *Mathematikbeschlusses* des ZK der SED vom 17. Dezember 1962 im Jahre 1963 ins Leben gerufen. An dieser Stelle sei den Initiatoren dieser Höhepunkte außerunterrichtlicher Arbeit, besonders aber den „Schöpfern“ der zahlreichen Aufgaben und den Mitarbeitern der *ABC-Zeitung* und der *Die Unterstufe*, den Lehrern, Arbeitsgemeinschaftsleitern und auch den Eltern gedankt. Ist es nicht ein schöner Erfolg, wenn jährlich an rund 180 000 *Junge Mathematiker* Urkunden für vorbildliche Leistungen überreicht werden können?

J. Lehmann

Auswahl von Aufgaben

ABC-Mathematikolympiade Klassen 3 und 4

▲ 1 ▲ Schreibe die größte dreistellige Zahl auf! Welche Zahl mußt du zu dieser Zahl addieren, um 1000 zu erhalten?

▲ 2 ▲ Ordne die folgenden Zahlen der Größe nach, obwohl einige Grundziffern (*) unlesbar sind!
344 * 0; * 9 *; * * * 1; 83; 1000; 354 * 1

▲ 3 ▲ Welche Zahlen erfüllen die folgenden Ungleichungen?

- a) $x + 3 < 10$;
b) $43 < 5x < 68$;
c) $37 > 3x + 27 > 34$.

▲ 4 ▲ Wenn man die Zahl a um 7 verkleinert und das Ergebnis auf das Neunfache erhöht, so erhält man 108. Wie heißt die Zahl a ?

▲ 5 ▲ Setze für A und B Zahlen ein, aber beachte die Zeichen „+“, „-“ und „!“

$$\begin{array}{r} A + A = B \\ + \quad \cdot \quad - \\ A \cdot A = B \\ B - B = 0 \end{array}$$

▲ 6 ▲ Ergänze das Quadrat so, daß die Summe in jeder Zeile und Spalte dieselbe Zahl ergibt!

75	12	57
	48	
39		21

▲ 7 ▲ Subtrahiere von 3 182 100 das Produkt der Zahlen 56 823 und 56! Um wieviel ist die Differenz größer als 10?

▲ 8 ▲ Vervollständige die Tabelle!

e	Nachfolger von e	Vorgänger von e	Nachfolger des Doppelten von e	Doppeltes des Nachfolgers von e
100				
		204		
	18			

▲ 9 ▲

a	b	300	Nachfolger von $a + b$
7	1000		
	0003	15	
		9	10

▲ 10 ▲

$$\begin{array}{l} 34 + a = 40 \\ 40 : 10 = b \\ b \cdot a = c \end{array}$$

$$c : (a - b) + 44 = 56$$

Welche Zahlen mußt du für a , b und c einsetzen?

▲ 11 ▲ Zeichne ein Rechteck, das 7 cm lang und 5 cm breit ist. Unterteile die Länge so, daß ein Quadrat und ein Rechteck entstehen. Das Quadrat zerlege in 4 kleine Quadrate. Wie lang sind die Seiten eines kleinen Quadrates?

▲ 12 ▲ Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 4$ cm.

Verbinde A mit C und B mit D !

Zeichne um jeden Eckpunkt und den Schnittpunkt von $\overline{AC}$ mit $\overline{BD}$ einen Kreis mit dem Radius $r = 2$ cm!

▲ 13 ▲ Zerschneide die Figur mit einem Schnitt so, daß die entstehenden Teile zu einem Quadrat zusammengesetzt werden können! Finde zwei Möglichkeiten!



▲ 14 ▲ Im Schulgarten sollen Sträucher in Reihen von 8 m Länge gepflanzt werden, in jede Reihe 10 Sträucher. Die Schule kaufte 50 Sträucher. Wieviel Meter beträgt die Gesamtlänge der Reihen, die bepflanzt werden können?

▲ 15 ▲ Horst fährt mit dem Fahrrad zur Schule. Um 7.45 Uhr hat er die halbe Strecke zurückgelegt. Der Unterricht beginnt um 8 Uhr. Wenn er mit gleichem

Aus dem Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom 17. Dezember 1962

● In allen Jugend- und Kinderzeitschriften sind regelmäßig nach einem genauen Plan interessante Probleme und Aufgaben sowie geeignete Beiträge über die geschichtliche Entwicklung der Mathematik und über ihre Rolle in Wissenschaft und Technik zu veröffentlichen. Mit Unterstützung des Ministeriums für Volksbildung und der Mathematischen Gesellschaft der DDR sind zu diesem Zweck bei den Redaktionen Fachgruppen zu bilden.

● Die Förderung erfolgreicher Teilnehmer der mathematischen Olympiaden und anderer mathematisch befähigter Schüler ist eine gemeinsame Aufgabe der Schulen und Volksbildungsorgane, der Mathematischen Gesellschaft der DDR, der Wissenschaftler der Hoch- und Fachschulen, der wissenschaftlich-technischen Kader der Betriebe und Forschungsstätten sowie der gesellschaftlichen Organisationen.

Tempo weiterfährt, so ist er 5 Minuten vor Unterrichtsbeginn in der Schule.

- a) Wieviel Minuten Fahrzeit benötigt Horst für die gesamte Wegstrecke?
b) Wann fährt Horst von zu Hause fort?

▲ 16 ▲ In einem Stadtbezirk wurden 260 große Wohnungen renoviert. Der zehnte Teil der Wohnungen hat 56 m^2 Wohnfläche, der vierte Teil der Wohnungen hat 67 m^2 und der Rest 80 m^2 Wohnfläche pro Wohnung. Berechne die Gesamtwohnfläche aller renovierten Wohnungen!

▲ 17 ▲ Aus 30 g Blütennektar entstehen 10 g Bienenhonig.
Wieviel Gramm Blütennektar sind für 1 kg Bienenhonig notwendig?

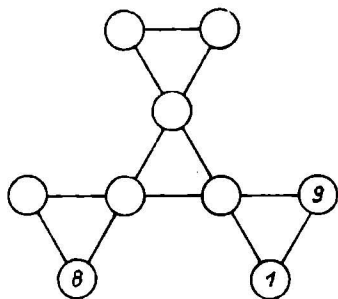
▲ 18 ▲ Für 3 Handtücher vom gleichen Preis bezahlt Mutter 4,62 Mark.
Wieviel Mark würden 7 Handtücher dieser Sorte kosten?

▲ 19 ▲ In einem Korb liegen 5 gelbe und 3 rote Kugeln. Man kann in den Korb hineingreifen, aber die Kugeln nicht erkennen.

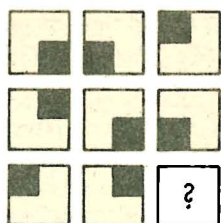
Wie oft muß man in den Korb greifen, um ganz sicher 2 Kugeln herauszuholen, die die gleiche Farbe haben?

▲ 20 ▲ Uwe sagt: „Mein Vater ist 42 Jahre alt. Mein Vater ist zwei Jahre älter als meine Mutter. Meine Mutter ist doppelt so alt wie mein Bruder und ich. Ich bin zwei Jahre jünger als mein Bruder.“
Wie alt sind Uwe, sein Bruder und seine Mutter?

▲ 21 ▲ In einem Bild sollen die Kreise Eckpunkte von Dreiecken darstellen. Die neun Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen so in die neun Kreise eingetragen werden, daß die Summe in jedem Dreieck 15 beträgt. (Die Zahlen 1, 8 und 9 wurden bereits eingetragen.)

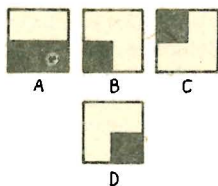


▲ 22 ▲ Die Quadrate sind in dem Bild nach einer Regel angeordnet.

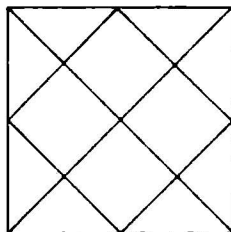


Welches der Quadrate würdest du an Stelle des Fragezeichens setzen? Schau dir genau

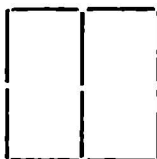
die Zeilen und auch die Spalten an! Erkennst du die Regel?



▲ 23 ▲ Wieviel Quadrate findest du in dieser Zeichnung?
Und wieviel Dreiecke sind es?



▲ 24 ▲ In dem Bild ist eine Figur mit 10 gleichen Hölzchen gelegt. Lege ein Hölzchen so um, daß in der Figur zwei Quadrate entstehen!



▲ 25 ▲ Jeder von vier Brüdern einer Familie sagt: „Ich habe zwei Schwestern.“
Wieviel Kinder gehören zur Familie?

Zitiert

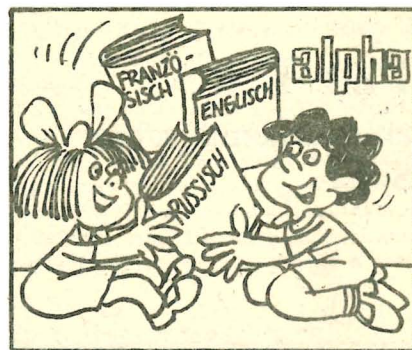
● Man muß den zukünftigen Mathematiker von Kindheit an erziehen, je früher, desto besser.

Niemanden verwundert es, daß die Ausbildung einer zukünftigen Ballerina oder eines zukünftigen Musikers meistens schon in früher Kindheit, im Alter von 6 bis 8 Jahren, beginnt. Das erklärt sich dadurch, daß eine erfolgreiche Beherrschung der Feinheiten der Ballettkunst oder der Musik im jugendlichen Alter unmöglich ist ohne eine spezialisierte Ausbildung in der Kindheit. ... Man darf nicht glauben, daß es in der Wissenschaft und besonders in der Mathematik anders wäre.

W. G. Boltjanski, I. M. Jaglom,
Moskau

● Wir müssen die Vorzüge unseres einheitlichen und zugleich gegliederten Bildungswesens noch besser nutzen, um alle Talente zu entwickeln, darunter vor allem Spitzenbegabungen.

Prof. Dr. G. Neuner, Präsident
der Akademie der Pädagogischen
Wissenschaften der DDR



▲ 1 ▲ Find a digit to replace each letter.

FIVE
- FOUR
ONE

Each letter stands for only one digit.
(There is more than one possible answer.)

▲ 2 ▲ В последнее время я много хожу на лыжах. Правда, позавчера я прошел на 3 км больше, чем вчера, а вчера на 40 км меньше, чем позавчера и сегодня вместе. Сколько километров я прошел на лыжах сегодня?

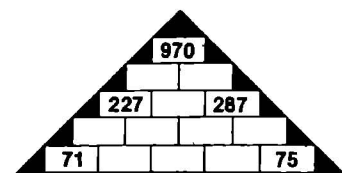


▲ 3 ▲ Un bassin est alimenté en eau par deux robinets; l'un, en coulant seul, remplit ce bassin en 9 heures; l'autre le remplit en 6 heures.

- a) Quelle fraction du volume du bassin chacun de ces robinets remplit-il en 1 heure?
b) On ouvre simultanément les deux robinets. Quelle est la fraction de volume du bassin rempli au bout d'une heure?
c) Au bout de combien de temps le bassin sera-t-il plein?

▲ 4 ▲ La pyramide des nombres
Sachant que chaque nombre est égal à la somme des deux nombres situés dans les rectangles au-dessous de lui, reconstituez cette pyramide arithmétique!

aus: Maximath, Belgien



Fan-Tan

ein mathematisches Spiel

Fan-Tan ist ein Spiel für zwei Personen, für das lediglich einige kleine Steine, Streichhölzer oder ähnliches benötigt werden. Es stammt vermutlich aus China. Die wohl bekannteste Variante des Spiels läßt sich wie folgt beschreiben:

Auf einem Tisch werden 15 Steine in drei Haufen angeordnet.

Der erste Haufen enthält 7 Steine, der zweite Haufen 5 Steine und der dritte Haufen 3 Steine. Die beiden Spieler (nennen wir sie A und B) nehmen nun abwechselnd von einem der drei Haufen eine beliebige Anzahl von Steinen weg. Dabei ist es gleichgültig, von welchem der drei Haufen die Steine weggenommen werden, wichtig ist nur, daß jeweils wenigstens ein Stein weggenommen wird und alle mit einem Mal weggenommenen Steine von ein und demselben Haufen sind. So wird verfahren, bis sich kein Stein mehr auf dem Tisch befindet. Gewonnen hat, wer den letzten Stein nimmt.

Um den Verlauf einer Partie in übersichtlicher Form darstellen zu können, charakterisieren wir jede *Stellung* der Partie durch

ein Zahlentripel $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, dessen Kompo-

nenten a_1 , a_2 und a_3 folgende Bedeutung haben sollen: der erste Haufen enthält genau a_1 , der zweite genau a_2 und der dritte genau a_3 Steine.

An Hand zweier Beispiele soll der Verlauf einer Partie verdeutlicht werden (über dem Pfeil wird jeweils der zum Zug kommende Spieler angegeben):

a)

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im ersten Beispiel gewinnt A; im zweiten dagegen B.

Wir wollen uns bei der mathematischen Untersuchung des Spiels nicht auf den oben beschriebenen Spezialfall von drei

Haufen und der Anfangsstellung $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschränken. Es wird daher vereinbart, daß m Haufen von Steinen gebildet werden, und zwar enthalte der i -te Haufen ($1 \leq i \leq m$) zu Beginn des Spiels n_i Steine. Eine bestimmte *Stellung* des Spiels wird dann in der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

dargestellt, wobei a_i ($1 \leq i \leq m$) die Anzahl der Steine im i -ten Haufen angibt. Das Ziel unserer Untersuchungen ist es, herauszufinden, ob es eine Regel (Gewinnstrategie genannt) gibt, die es einem der beiden Spieler gestattet, den Gewinn zu erzwingen, und zwar unabhängig von der Spielweise seines Gegners. Da eine Partie stets nach einer endlichen Anzahl von *Zügen* beendet ist, muß es immer einen Gewinner und einen Verlierer geben. Es ist also klar, daß eine solche Gewinnstrategie – im Falle ihrer Existenz – nur für einen der beiden Spieler anwendbar ist.

Im Ergebnis unserer Untersuchungen wird sich zeigen, daß stets einer der beiden Spieler, in Abhängigkeit von der Anfangsstellung, den Gewinn erzwingen kann.

Mathematische Theorie des Fan-Tan

Um das Spiel einer mathematischen Untersuchung zugänglich zu machen, ist es erforderlich, daß wir den zur Beschreibung verwendeten Begriffen der Umgangssprache eine wohlbestimmte mathematische Bedeutung geben: Einen konkreten Spielverlauf wollen wir als eine *Partie* bezeichnen. Das Wegnehmen von Steinen durch einen Spieler entsprechend der Spielregel heiße ein *Zug*. Der Einfachheit halber wollen wir denjenigen Spieler, welcher den ersten Zug ausführt, Spieler A und den anderen Spieler B nennen.

Offenbar ist der Stand des Spiels zu jedem Zeitpunkt einer Partie vollständig bekannt, wenn wir wissen:

- welcher Spieler am Zug ist und
- wie viele Steine sich in den einzelnen Haufen befinden.

Das m -Tupel $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, wobei a_i ($i = 1, 2, \dots, m$)

die Anzahl der Steine im i -ten Haufen sei, heiße eine *Stellung* (ungeachtet dessen, welcher Spieler am Zug ist). Mitunter werden wir eine Stellung einfach mit einem unterstrichenen kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen.

Eine Stellung $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ heiße von der

Stellung $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ erreichbar, wenn es

möglich ist, mit einem Zug von der Stel-

lung $\underline{a}$ zur Stellung $\underline{b}$ überzugehen. Aus der Spielregel schließen wir, daß die Stellung $\underline{b}$ genau dann von der Stellung $\underline{a}$ erreichbar ist, wenn es eine Zahl j ($1 \leq j \leq m$) gibt, so daß:

$$a_i = b_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m$$

und

$$a_j > b_j.$$

Dies bedeutet, daß wir Stellung $\underline{b}$ aus der Stellung $\underline{a}$ erhalten können, indem wir vom j -ten Haufen $a_j - b_j$ Steine wegnehmen.

▲ 1 ▲ Welche Stellungen können in einer Partie mit der Anfangsstellung

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix} \quad (\text{mit } n_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m)$$

auftreten? Man bestimme die Anzahl aller möglichen Stellungen!

Wir wollen uns nun der Lösung des in der Einleitung gestellten Problems zuwenden. Hierzu werden wir alle – entsprechend einer vorgegebenen Anfangsstellung

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix} \quad \text{– möglichen Stellungen des}$$

Spiels in zwei Klassen, in Gewinn- und Verluststellungen, einteilen. Dabei wollen wir unter einer Gewinnstellung eine solche Stellung verstehen, die es dem am Zug befindlichen Spieler ermöglicht, unabhängig von der weiteren Spielweise seines Gegners den Gewinn zu erzwingen.

Als Verluststellung wollen wir dann entsprechend eine solche Stellung bezeichnen, die es dem am Zug befindlichen Spieler unmöglich macht zu gewinnen, vorausgesetzt, sein Gegner spielt *vernünftig*.

Mit den hier eingeführten Begriffen Gewinn- bzw. Verluststellung verbunden ist naturgemäß die Frage, ob sie dem Spiel entsprechend überhaupt einen Sinn haben, d. h., ob es solche Stellungen überhaupt gibt, und wenn ja, wie man diese charakterisieren kann. Man beachte, daß wir sogar angekündigt haben, die Menge aller möglichen Spielstellungen in Gewinn- bzw. Verluststellungen zerlegen zu können, d. h. von jeder Spielstellung im Vorhinein entscheiden zu können, ob sie zum Gewinn bzw. Verlust des Spieles führt – besser sollte man wohl sagen: führen kann, denn wir fordern ja immer zusätzlich von dem in einer Gewinnstellung am Zuge befindlichen Spieler, daß er *vernünftig* (auch dies wird im Folgenden zu klären sein) spielt.

Doch wenden wir uns nun endlich der gesuchten Zerlegung zu. Hierzu werden wir ein Verfahren benutzen, welches zurückgeht auf den französischen Mathematiker C. L. Bouton (1902) und eine sehr originelle Anwendung des folgenden mathematischen Sachverhaltes beinhaltet:

Jede natürliche Zahl n läßt sich auf eindeutige Weise als Summe paarweise verschiedener Zweierpotenzen darstellen:

$$n = \alpha_k 2^k + \alpha_{k-1} 2^{k-1} + \dots + \alpha_1 2^1 + \alpha_0 2^0$$

mit

$$\alpha_i = 1 \quad \text{bzw.} \quad \alpha_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k).$$

Denjenigen Lesern, welche sich schon einmal mit der Darstellung von Zahlen in

elektronischen Rechenautomaten beschäftigt haben, ist dieser Sachverhalt als dyadische Darstellung (häufig auch binäre oder duale Darstellung genannt) einer natürlichen Zahl bekannt.

Praktisch erhält man die dyadische Darstellung einer gegebenen natürlichen Zahl durch wiederholtes Dividieren mit Rest (durch 2) und Verwendung der hierbei entstehenden Reste als Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ für die dyadische Darstellung: Beispiel:

$$(1) \quad \begin{aligned} 11 &= 2 \cdot 5 + 1 & \alpha_0 &= 1 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 & \alpha_1 &= 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 & \alpha_2 &= 0 \\ 1 &= 2 \cdot 0 + 1 & \alpha_3 &= 1 \end{aligned} \quad 11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$$

$$(2) \quad \begin{aligned} 8 &= 2 \cdot 4 + 0 & \alpha_0 &= 0 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 & \alpha_1 &= 0 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 & \alpha_2 &= 0 \\ 1 &= 2 \cdot 0 + 1 & \alpha_3 &= 1 \end{aligned} \quad 8 = 2^3$$

Um die gesuchte Zerlegung in Gewinn- bzw. Verluststellungen vorzunehmen, betrachten wir eine beliebige Stellung

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

aus der Menge M aller bezüglich der Anfangsstellung $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}$ möglichen Spielstellungen.

Die Zahl d_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) gebe an, wie oft 2^i in den dyadischen Darstellungen der Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_m$ auftritt. Tritt 2^i in keiner dieser dyadischen Darstellungen auf, so sei $d_i = 0$. Zur Verdeutlichung betrachten wir zwei Beispiele:

$$a) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 \\ 2^1 \\ 0 \\ 2^0 + 2^2 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $d_0 = 2$ und $d_1 = d_2 = 1$. Alle anderen d_i sind null.

$$b) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 + 2^1 \\ 2^0 + 2^1 + 2^2 \\ 2^1 + 2^3 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $d_0 = 2$, $d_1 = 3$ und $d_2 = d_3 = 1$. Alle anderen d_i sind null.

Die Menge der Stellungen wird nun folgendermaßen in zwei Teilmengen G und V zerlegt: Zur Menge V gehören alle Stellungen

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{mit der Eigenschaft,}$$

daß alle d_i geradzahlig sind.

Die restlichen Stellungen bilden die Menge G . Die auf diese Weise in M gebildeten Teilmengen V und G sind offenbar disjunkt und erschöpfen M ganz. Wir wollen nun nachweisen, daß einerseits jede Stellung aus V eine Verlust- und andererseits jede Stellung aus G eine Gewinnstellung ist. Hierzu zeigen wir:

(1) Die Endstellung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört zu V .

(2) Jede von einer Stellung $\underline{a} \in V$ erreichbare Stellung $\underline{a}'$ liegt in G .

(3) Zu jeder Stellung $\underline{a} \in G$ gibt es wenigstens eine von $\underline{a}$ erreichbare Stellung $\underline{a}' \in V$.

Bevor wir den Nachweis der Richtigkeit dieser Aussagen antreten, wollen wir uns vergegenwärtigen, welche Bedeutung sie für das Spiel haben:

● Gelangt ein Spieler (sagen wir A) in einer Stellung $\underline{a} \in G$ zum Zuge, so kann er gemäß (3) seinem Gegenspieler (B) stets eine Stellung aus V vorsetzen; letzterer jedoch bringt (wegen (2)) beim Ziehen den Spieler A wieder in eine Stellung, die notwendig zu G gehört. Somit ist A stets in einer Spielstellung aus G am Zuge und kann in jedem Fall dafür sorgen (indem er (3) wiederholt ausnutzt), daß B stets mit einer Stellung aus V Zugzwang hat. Da einerseits nur endlich viele Steine zur Verfügung stehen und andererseits in jedem Zug des Spielverlaufs wenigstens ein Stein aus einem der Haufen entnommen wird, muß nach endlich vielen Zügen die End-

stellung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ entstehen. Weil diese nach

(1) zu V gehört, wird sie (bei Einhaltung der auf (3) orientierten Spieltaktik durch Spieler A) dem Spieler B vorgesetzt werden. Damit aber verliert B – die Stellung $\underline{a}$ war also eine Gewinnstellung.

● Gelangt dagegen der Spieler A in eine Stellung $\underline{b} \in V$ zum Zuge, so ist dies entweder die Endstellung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{des Spiels und A hat verloren, oder}$$

aber A bringt (gemäß (2)) beim Ziehen seinen Gegenspieler B in eine Stellung aus G . Nach dem oben Gesagten verliert dann jedoch A – vorausgesetzt B benutzt (3) bei der Wahl seiner Spieltaktik. Folglich war $\underline{b}$ eine Verluststellung.

Dies zeigt uns, daß die Aussagen (1)–(3) hinreichend dafür sind, die Stellungen aus G als Gewinn- und die Stellungen aus V als Verluststellungen auszuweisen. Wir wollen uns nun dem Beweis der Aussagen (1)–(3) zuwenden:

Zu (1): Ist $\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, so sind offenbar alle $d_i = 0$ und also geradzahlig.

Die Stellung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört demzufolge zur

Menge V .

Zu (2): Ist eine Stellung $\underline{a}'$ von der Stellung $\underline{a}$ erreichbar, so unterscheiden sich $\underline{a}$ und $\underline{a}'$ in der Anzahl der Steine in genau einem der m Haufen. Da in der dyadischen Darstellung einer Zahl jede Zweierpotenz

2^i höchstens einmal auftritt, unterscheiden sich die zu $\underline{a}$ bzw. $\underline{a}'$ gehörenden Zahlen d_i und d'_i jeweils höchstens um 1. Andererseits ist klar, daß nicht für alle i $d_i = d'_i$ sein kann. Gehört nun die Stellung $\underline{a}$ zur Menge V , so sind alle d_i geradzahlig. Aus dem oben Dargelegten ergibt sich dann, daß bei jeder von $\underline{a}$ erreichbaren Stellung $\underline{a}'$ wenigstens ein ungeradzahliges d'_i auftreten muß, d. h. alle von $\underline{a}$ erreichbaren Stellungen gehören zur Menge G .

Zu (3): Gehört eine Stellung $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$

zur Menge G , so treten gewisse Zweierpotenzen in den dyadischen Darstellungen der Zahlen $a_1, \dots, a_m$ ungeradzahlig oft auf. Die größte dieser Zweierpotenzen sei 2^i .

Es sei a_k ($1 \leq k \leq m$) eine Komponente von $\underline{a}$, in deren dyadischer Darstellung 2^i auftritt. Wir bezeichnen die ungeradzahlig oft auftretenden Zweierpotenzen, welche in der dyadischen Darstellung von a_k vorkommen mit

$$2^i = 2^{i_1}, 2^{i_2}, \dots, 2^{i_k},$$

Die anderen (also nicht in a_k) ungeradzahlig oft auftretenden Zweierpotenzen seien $2^{j_1}, \dots, 2^{j_\mu}$.

Wir betrachten nun die Stellung

$$\underline{a}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_k \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix},$$

mit $a'_\sigma = a_\sigma$ für

$$\sigma = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m \quad \text{und}$$

$$a'_k = a_k - 2^{i_1} - \dots - 2^{i_k} + 2^{j_1} + \dots + 2^{j_\mu}.$$

Wegen

$$2^i = 2^{i_1} > 2^{i_1} - 1 \geq 2^{i_1} + \dots + 2^{i_k},$$

ist $a'_k < a_k$ und somit die Stellung $\underline{a}'$ von $\underline{a}$ erreichbar.

Da sich ferner auf Grund der Bildungsvorschrift für $\underline{a}'$ alle ungeradzahlig oft auftretenden d'_i alle gerade, d. h. $\underline{a}'$ gehört zur Menge V .

Weil der Nachweis der dritten Eigenschaft recht kompliziert ist, soll er noch an einem Beispiel verdeutlicht werden:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 + 2^1 \\ 2^0 + 2^1 + 2^2 \\ 2^1 + 2^3 \end{pmatrix}.$$

Es ist $d_0 = 2$, $d_1 = 3$ und $d_2 = d_3 = 1$. Da d_1 , d_2 und d_3 ungerade sind, gehört $\underline{a}$ zur Menge G . Die größte ungeradzahlig oft auftretende Zweierpotenz ist offenbar 2^3 . Sie tritt in der dyadischen Darstellung von $a_3 = 10$ auf. In der dyadischen Darstellung von a_3 treten 2^3 und 2^1 auf, 2^2 dagegen nicht, und es ist folglich

$$a'_3 = a_3 - 2^3 - 2^1 + 2^2 = 10 - 8 - 2 + 4 = 4.$$

Die neue Stellung ist also:

$$\underline{a}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 + 2^1 \\ 2^0 + 2^1 + 2^2 \\ 2^2 \end{pmatrix}.$$

▲ 2 ▲ Im Beispiel (b) der Einleitung unterläuft dem Spieler A ein Fehler. Finde diesen!

Th. Böhme

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1988



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alpha-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

Ma 5 ■ 2840 Robert las am ersten Tag genau 36 Seiten eines Buches. Am zweiten Tag las er 12 Seiten mehr als am ersten Tag. Er hatte nun noch drei Viertel der Anzahl der Seiten dieses Buches zu lesen. Wieviel Seiten umfaßt dieses Buch?

Schülerin N. König, Klein Krams

Ma 5 ■ 2841 Ich denke mir eine Zahl. Addiere ich 100 dazu, so erhalte ich zehn mehr als das Zehnfache meiner gedachten Zahl.

Welche Zahl habe ich mir gedacht?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

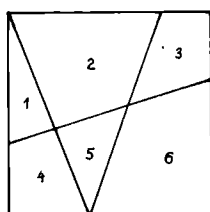
Ma 5 ■ 2842 Egon öffnet seine Sparbüchse, um festzustellen, welchen Geldbetrag er bereits gespart hat. Die Sparbüchse enthält 1-Pf-, 5-Pf-, 10-Pf-, 20-Pf- und 50-Pf-Münzen, keine weiteren Münzen oder Geldscheine. Es sind 18 einzelne Pfennige, zweimal soviel 5-Pf-Münzen und dreimal soviel 10-Pf-Münzen, aber nur halb soviel 50-Pf-Münzen wie 1-Pf-Münzen, außerdem noch neun 20-Pf-Münzen. Welchen Geldbetrag hat Egon gespart?

Schülerin I. Schulze, Zittau

Ma 5 ■ 2843 Jedes der 16 Klassenzimmer einer Schule hat gleich viele Stühle. Aus jedem Klassenzimmer trägt man 8 Stühle in die Aula. Nun sind in den 16 Klassenzimmern noch soviel Stühle, wie vorher in 12 Klassenzimmern waren. In den übrigen Räumen der Schule sind noch weitere 38 Stühle. Über wieviel Stühle verfügt diese Schule?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2844 Das abgebildete Quadrat wurde durch drei Strecken in zwei Drei-



ecke (1) und (5) und in vier Vierecke (2), (3), (4) und (6) zerlegt. Wie viele verschiedene Vierecke enthält das abgebildete Quadrat?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2845 In dem Schema

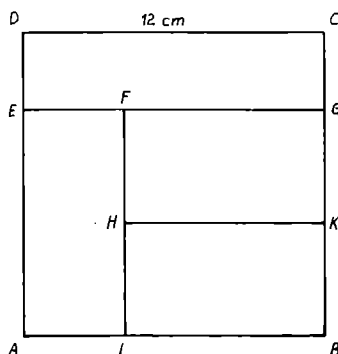
MATHE
+ MATHE
ALPHA

bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Grundziffern. Außerdem darf keine Ziffer mit 0 beginnen. Diese Aufgabe besitzt vier Lösungen. Versuche, alle Lösungen zu finden.

Sch.

Ma 5 ■ 2846 Ein Quadrat $ABCD$ wurde, wie aus dem Bild ersichtlich, in vier Rechtecke $ALFE$, $LBKH$, $HKGF$ und $EGCD$ unterteilt, die sämtlich den gleichen Flächeninhalt besitzen. Wie lang sind die Seiten dieser vier Rechtecke, wenn die Quadratseite 12 cm lang ist?

Sch.



Ma 6 ■ 2847 Die Handballmannschaft einer Schule trug im vorigen Schuljahr 25 Spiele aus. Sie gewann dreimal so viele Spiele wie sie verlor. Es waren weniger unentschiedene als verlorene Spiele. Wie viele Punkte erreichte die Mannschaft, wenn jedes gewonnene Spiel 2 Punkte, jedes unentschiedene 1 Punkt und jedes verlorene 0 Punkte zählte?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

3. Der jeweiligen Aufgabennummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z.B. 7 vorgesetzt (d.h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm $\times$ 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d.h. in einem Zug korrigiert.

Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.

6. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“. Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1987/88 läuft von Heft 5/1987 bis Heft 1/1988. Zwischen dem 1. und 10. September 1988 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/87 bis 1/88 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/88 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/87 bis 1/88) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein alpha-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1987/88 einsenden, erhalten das alpha-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

30	Markus Mäder Schweizer Weg 17 Schmallalden 6080	150	J.-Gagarin - OS Klasse 7	40	Ma 7 2647
Prädikat:					R
Lösung:					

Ma 6 ■ 2848 In dem Schema

$$\begin{array}{r} *9*9 \\ + *9* \\ \hline *0** \end{array}$$

ergibt die Summe aus einer vierstelligen und einer dreistelligen Zahl eine fünfstelligen Zahl. Wie lautet die richtig gelöste Additionsaufgabe?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2849 Es ist die kleinste natürliche Zahl zu ermitteln, die durch 4 und 5 teilbar ist und deren Quersumme 36 beträgt!

Sch.

Ma 6 ■ 2850 Ermittle alle Zahlentripel (a, b, c) , welche die Gleichung $a \cdot b + c = 100$ erfüllen. Dabei sind a, b, c Primzahlen, und es gilt $a < b < c$.

OL W. Melka, Neubrandenburg

Ma 6 ■ 2851 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist die Hypotenuse $\overline{AB}$ doppelt so lang wie die Kathete $\overline{BC}$. Es sind die Größen α und β der beiden spitzen Innenwinkel des rechtwinkligen Dreiecks ABC zu bestimmen!

Schülerin A. Bothe, Manschnow

Ma 6 ■ 2852 Es sind alle Dreiecke zu ermitteln, bei denen die Maßzahlen der Seitenlängen natürliche Zahlen sind, und die folgende Bedingungen erfüllen:

- (1) Für die Seitenlängen a, b, c gilt $a < b < c$.
- (2) Das Sechsfache der kleinsten Seitenlänge ist gleich dem Produkt aus den beiden anderen Seitenlängen.

Schüler Ch. Bölling, Berlin

Na/Te 6 ■ 407 Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat der Motorkolben eines PKW vom Typ *Trabant 601*, wenn der Hub 73 mm beträgt und in 10 s 500 Umdrehungen der Kurbelwelle erfolgen?

aus: *Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen, Berlin*

Ma 7 ■ 2853 Von 32 Schülern gehört jeder wenigstens einer der Arbeitsgemeinschaften Modellbau oder Werken an. In der AG Werken sind doppelt so viele Teilnehmer wie in der AG Modellbau. Ein Drittel der Modellbauer beteiligt sich auch an der AG Werken.

Wie viele Schüler nehmen an beiden Arbeitsgemeinschaften teil?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2854 Werner wurde gefragt, wieviel Antwortkarten des *alpha*-Wettbewerbs er schon erhalten hätte. Er sagte: „Bis auf 3 Karten hatten alle Karten den Vermerk ‚sehr gut gelöst‘.

Bis auf 7 Karten war der Vermerk ‚gut gelöst‘ und bis auf 8 Karten war der Vermerk ‚nicht gelöst‘ angegeben.“ Wieviel Karten von jeder Art hat Werner erhalten?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2855 Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC . Lege einen beliebigen inneren Punkt P fest und verbinde ihn mit den Eckpunkten A, B und C . Das Dreieck ABC habe die Seitenlänge a , die Verbindungsstrecken $\overline{PA}, \overline{PB}$ bzw. $\overline{PC}$ haben die Län-

gen x, y bzw. z . Weise nach, daß stets gilt

$$x + y + z > \frac{3}{2} \cdot a!$$

Sch.

Ma 7 ■ 2856 Einem Kreis k mit dem Radius r wurde ein Quadrat einbeschrieben, d. h., die Ecken des Quadrates liegen auf der Peripherie des Kreises. Wieviel Prozent vom Flächeninhalt des Kreises beträgt der Flächeninhalt des ihm einbeschriebenen Quadrates?

Sch.

Ma 7 ■ 2857 „Sag mir bitte, wann du in diesem Jahr Geburtstag hattest“ wird Jürgen von seinem Freund gefragt. Jürgen lächelt und sagt: „Damit du es gut behältst, berechne die fünfstelligen Zahl für die $***87 = 7 \cdot ****$ gilt. Dabei besteht die vierstellige Zahl aus vier aufeinanderfolgenden Zahlen und ist so groß wie möglich.“

(Bemerkung: Es wäre z. B. 21.9.87 ohne die Punkte eine entsprechende fünfstelligen Zahl.)

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Na/Te 7 ■ 408 Auf einer Kochplatte wird ein Topf mit Wasser erwärmt. Warum geht die Erwärmung von 20°C auf 30°C schneller vor sich als die Erwärmung von 80°C auf 90°C (bei gleicher Wärmeabgabe der Heizplatte)?

aus: *Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen, Berlin*

Na/Te 7 ■ 409 Es soll ein Spiegel an eine senkrechte Wand so aufgehängt werden, daß sich ein Mädchen (Körpergröße 170 cm, Augenhöhe 160 cm) vollständig betrachten kann. Wie hoch muß die Oberkante über dem Erdboden hängen und wie groß muß der Spiegel mindestens sein?

(Lösungshinweis: Beachte bei der geometrischen Lösung, daß Lichtstrahlen sowohl von den Fußspitzen als auch vom Scheitel zum Auge gelangen müssen.)

R.

Ma 8 ■ 2858 Gesucht ist wenigstens eine neunstelligen natürliche Zahl, die aus den Ziffern 1 bis 9 besteht und in welcher jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt. Die gesuchte Zahl hat folgende Eigenschaften:

Die aus den ersten beiden Ziffern gebildete Zahl ist durch 2 teilbar, die aus den ersten drei Ziffern gebildete Zahl ist durch 3 teilbar, die aus den ersten vier Ziffern gebildete Zahl ist durch 4 teilbar, die aus den ersten fünf Ziffern gebildete Zahl ist durch 5 teilbar, die aus den ersten sechs Ziffern gebildete Zahl ist durch 6 teilbar, die aus den ersten sieben Ziffern gebildete Zahl ist durch 7 teilbar, die aus den ersten acht Ziffern gebildete Zahl ist durch 8 teilbar, die aus den ersten neun Ziffern gebildete Zahl ist durch 9 teilbar.

(Hinweis: Benutze den Taschenrechner!)

Fachlehrer W. Bucher, Gerstungen

Ma 8 ■ 2859 Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, für welches

$$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = a = 5 \text{ cm und } \overline{AB} = 2a$$

gilt!

Berechne die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$!

Diplomlehrer J. Kreusch, Löbau

Ma 8 ■ 2860 Einem rechtwinkligen Dreieck ABC , dessen Hypotenuse $\overline{BC}$ die Länge 5 cm und dessen Kathete $\overline{AB}$ die Länge 3 cm besitzt, ist ein Halbkreis einzubeschreiben, dessen Mittelpunkt M auf der Kathete $\overline{AC}$ liegt und der die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ berührt. Es ist die Länge des Radius dieses Halbkreises zu bestimmen! Sch.

Ma 8 ■ 2861 Die Ziffernfolge einer fünfstelligen natürlichen Zahl werde durch deren Multiplikation mit 4 umgekehrt. Welche natürliche Zahl erfüllt diese Bedingung? Dipl.-Ing. H. Miethig, Dresden

Ma 8 ■ 2862 Eine Portion Eis mit Sahne kostet 2,15 M. Eine Portion Ananas mit Sahne kostet 2,55 M. Eine Portion Eis mit Ananas kostet 2,30 M.

a) Wieviel kostet eine Portion Eis mit Ananas und Sahne?

b) Wieviel kostet jeweils eine Portion Eis, Ananas bzw. Sahne? O. Gehring, Dresden

Na/Te 8 ■ 410 Ein Hebel ist 2 m lang. An welcher Stelle muß er unterstützt werden, damit man mit einer Kraft von 20 N eine Last von 140 N anheben kann? (Der Hebel soll als zweiseitiger Hebel wirken!) R.

Na/Te 8 ■ 411 Ein Federkraftmesser, an dem ein Körper aus Blei angehängt ist, zeigt 0,565 N. Nach dem Eintauchen in Wasser zeigt er 0,515 N. Wie groß ist das Volumen des Bleikörpers?

(Beachte, daß auf einen Körper von 100 g Masse eine Gewichtskraft von – annähernd – 1 N auf der Erde wirkt.)

aus: *Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen, Berlin*

Ma 9 ■ 2863 Gegeben seien drei Quadrate. Zwei davon sind zueinander kongruent. Das dritte Quadrat hat eine um 2 cm längere Seite als jedes der zwei kongruenten Quadrate. Sein Flächeninhalt ist um 4 cm² größer als die Summe der Flächeninhalte der beiden kongruenten Quadrate. Wie lang ist jede Quadratseite?

Schüler H. Laabs, Berlin

Ma 9 ■ 2864 Von einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ seien die Höhe $h_c = 4,0$ cm zur Seite $\overline{AB}$ und der Umkreisradius $r = 4,5$ cm gegeben. Es sind Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ABC zu berechnen!

Diplomlehrer J. Kreusch, Löbau

Ma 9 ■ 2865 Das Produkt von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 224mal so groß wie die Summe aus diesen Zahlen. Um welche Zahlen handelt es sich? Sch.

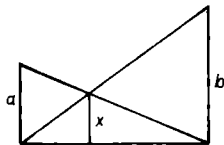
Ma 9 ■ 2866 Ein Kind hat eine bestimmte Anzahl schwarzer und eine bestimmte Anzahl weißer Spielsteine, insgesamt sind es sechs. Das Kind probiert alle Möglichkeiten aus, diese sechs Spielsteine in eine Reihe zu legen, wobei jedesmal die Farben schwarz oder weiß verschieden angeordnet sind.

Nun findet das Kind heraus, daß es genau 15 derartige Möglichkeiten gibt. Wieviel weiße und wieviel schwarze Spielsteine

hatte das Kind, wenn seine Behauptung richtig ist?
Fr.

Ma 9 ■ 2867 In dem Bild seien die Strecken mit den Längen a , b und x paarweise parallel zueinander. Man finde eine Formel, mit der man bei gegebenen Längen a und b die Länge x berechnen kann!

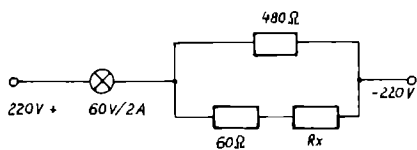
Doris Gollé, Wien (Österreich)



Na/Te ■ 412 Zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität des Kupfers erwärmte ein Schüler einen Körper aus Kupfer (Gewichtskraft 5 N) bis auf eine Temperatur von 100 °C und steckte ihn anschließend in ein Kalorimeter aus Aluminium (Gewichtskraft 0,6 N), das mit 400 ml Wasser gefüllt war. Die Anfangstemperatur des Wassers im Kalorimeter betrug 15 °C, die Endtemperatur 24,4 °C. Welchen Wert erhielt der Schüler für die spezifische Wärmekapazität des Kupfers?
R.

Na/Te 9 ■ 413 Welchen Wert muß der Widerstand R_x haben, damit durch die Lampe bei einer Spannung von 60 V ein Strom von 2 A fließt?

aus: Lindner: Elektroaufgaben



Ma 10/12 ■ 2868 Gesucht sind alle vierstelligen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Die Summe aus der betreffenden Zahl selbst, ihrer Quersumme und der zwei einstelligen Zahlen, die durch die erste und die letzte Ziffer dargestellt werden, beträgt 5900.

Schülerin B. Bremer, Heiligenstadt

Ma 10/12 ■ 2869 Es ist nachzuweisen, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Wenn n eine Primzahl ist, so ist auch $2n - 3$ oder $2n + 3$ eine Primzahl.

W. Träger, Döbeln

Ma 10/12 ■ 2870 Mit je zwei weißen und vier schwarzen Stäben gleicher Länge werden Kantenmodelle eines regelmäßigen Tetraeders hergestellt.

a) Wieviel verschiedene Modelle gibt es, von denen keine zwei durch eine räumliche Bewegung zur Deckung gebracht werden können?

b) Wieviel Aufstellungen mit verschiedenen Ansichten der Tetraeder bezüglich ihrer gefärbten Kanten gibt es?

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 10/12 ■ 2871 Einer Kugel mit dem Radius r wurden zwei kongruente Kegel mit gemeinsamer Kegelgrundfläche so ein-

beschrieben, daß seine beiden Spitzen die Kugeloberfläche berühren.

Das Volumen des Doppelkegels soll halb so groß sein wie das der Kugel. Es ist der Radius der gemeinsamen Kegelgrundfläche zu ermitteln und mit Hilfe von r auszudrücken.

Schüler M. Glück, Jössnitz

Ma 10/12 ■ 2872 In einem konvexen Viereck $ABCD$ mit nichtparallelen Gegenseiten sei E der Schnittpunkt der Geraden AB und CD und F der Schnittpunkt von BC und AD . Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle BEC$ sei mit w_1 , die des Winkels $\angle AFB$ mit w_2 bezeichnet. Es ist zu beweisen:

Wenn w_1 und w_2 senkrecht aufeinander stehen, so ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.

W. Träger, Döbeln

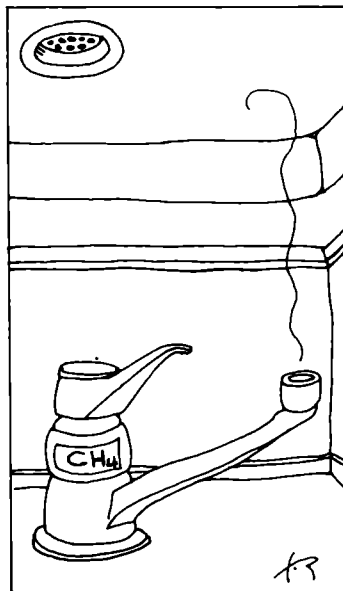
Na/Te 10/12 ■ 414 Ein Güterzug wird 100 m vor einem auf Halt stehenden Signal gleichmäßig mit $0,20 \frac{m}{s^2}$ gebremst. Der Aufenthalt vor dem Signal dauert 75 s. Danach wird er mit $0,15 \frac{m}{s^2}$ gleichmäßig beschleunigt und erreicht eine Geschwindigkeit von $38 \frac{km}{h}$. Mit dieser Geschwindigkeit wird die Fahrt fortgesetzt. Welchen Weg legt der Zug vom Beginn des Bremsens bis zum Erreichen der geforderten Geschwindigkeit zurück? Welche Zeit wird dafür benötigt?

aus: Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen, Berlin

Na/Te 10/12 ■ 415 Mit welcher Geschwindigkeit erreicht ein aus einer Katode emittiertes Elektron die Anode, wenn die Spannung zwischen Katode und Anode einer Röhrendiode 200 V beträgt?

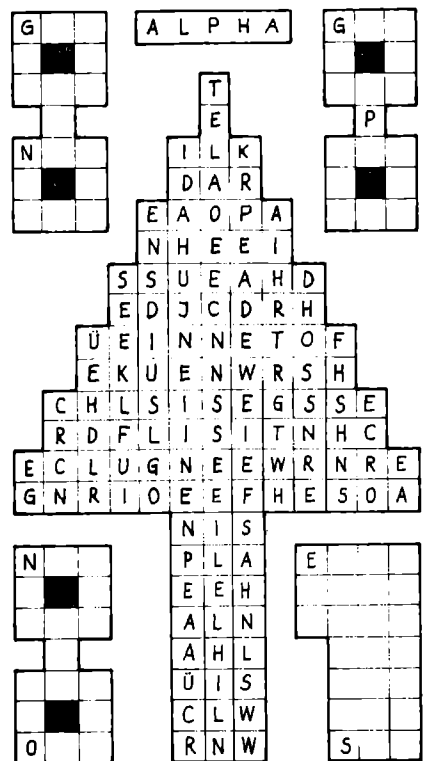
(Hilfe: Von einem elektrischen Feld wird an einem Körper mit der Ladung Q nach Durchlaufen der Spannung U die Arbeit $A = U \cdot Q$ verrichtet.)

aus: Aufgabensammlung Physik, Volk und Wissen, Berlin



Rösselsprung ins Neue Jahr

Die α -Redaktion sendet Euch zum Jahreswechsel einen herzlichen Gruß, der in der Gangart eines Springers beim Schachspiel in die Baumfigur eingetragen wurde. Viel Spaß beim Ermitteln dieses Wunschsatzes! Und anbei noch vier Rösselsprünge zum Selbstbauen: In die 7-Figur ist der Begriff SCHULMATHematikOLYMPIADE, und in die 8-Figuren sind die Begriffe OPERATIONSZEICHEN, NÄHERUNGSRECHNUNG und PROGRAMMSTEUERUNG im Rösselsprung einzutragen, wobei Anfangs- und Endbuchstabe jeweils vorgegeben sind. Viel Spaß auch bei dieser Knebel!



Jahreswechsel

1	9	8	8=1
1	9	8	7=9
1	9	8	8=8
1	9	8	7=7
1	9	8	7=1
1	9	8	8=9
1	9	8	7=8
1	9	8	8=8

Vervollständigt jede Zeile zu einer wahren Gleichung unter Benutzung der Operationszeichen +, -, · und : sowie des Fakultätszeichens ! ($n!$ ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n)! Klammern dürfen nicht benutzt werden.

Dr. R. Mildner, Leipzig

XXVIII. Internationale Mathematikolympiade

Havanna, 5. bis 16. Juli 1987



Eine Aufgabe von
Prof. Dr.
Luis J. Davidson

Havanna, Rep. Kuba
Sekretär des Organisationskomitees
der XXVIII. IMO

Aufgaben

1. Sei $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 1$) und sei $p_n(k)$ die Anzahl der Permutationen von S mit genau k Fixpunkten.

Man beweise:

$$\sum_{k=0}^n k \cdot p_n(k) = n!$$

(Hinweis: Eine Permutation f von S ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung von S auf S . Ein Element $i \in S$ heißt Fixpunkt von f , falls $f(i) = i$ ist.) (BRD)

2. ABC sei ein spitzwinkliges Dreieck. Die Halbierende des Innenwinkels bei A schneidet die Seite BC in L und den Umkreis des Dreiecks in N ($N \neq A$). Seien K und M die Fußpunkte der Lote von L auf AB bzw. AC .

Man beweise:

Die Flächeninhalte des Vierecks $AKNM$ und des Dreiecks ABC sind gleich. (SU)

3. Es seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ reelle Zahlen mit $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

Man beweise:

Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ gibt es ganze Zahlen a_i ($i = 1, 2, \dots, n$), für die

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

gilt, wobei die Nebenbedingungen:

- nicht alle a_i sind gleich Null,
- für alle i gilt $|a_i| \leq k - 1$

erfüllt sind. (BRD)

4. Man beweise:

Es gibt keine Funktion $f: N_0 \rightarrow N_n$, welche für alle $n \in N_0$ die Eigenschaft $f(f(n)) = n + 1987$ besitzt.

($N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$) (Vietnam)

5. Es sei n eine natürliche Zahl ≥ 3 .

Man beweise:

Es gibt eine Anordnung von n Punkten in der Ebene, für die je zwei beliebige Punkte einen irrationalen Abstand haben, und je drei beliebige Punkte ein nicht entartetes Dreieck mit rationalem Flächeninhalt bilden. (DDR)

6. Sei n eine ganze Zahl ≥ 2 .

Man beweise:

Wenn $k^2 + k + n$ für alle ganzen Zahlen k

mit $0 \leq k \leq \frac{\sqrt{n}}{3}$ eine Primzahl ist, dann ist

auch $k^2 + k + n$ für alle ganzen Zahlen k mit $0 \leq k \leq n - 2$ eine Primzahl. (SU)

Arbeitszeit: zweimal 4,5 Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Unsere Mannschaft der IMO 87:

Prof. Dr. Burosch, Delegationsleiter

Prof. Dr. Gronau,

stellv. Delegationsleiter

Frank Göring

Gerd Kunert

Uta Hövel

Jörg Jahnel

Gunter Döge

Ingo Warnke

1. Preis, 42 Punkte

1. Preis, 42 Punkte

2. Preis, 40 Punkte

2. Preis, 39 Punkte

2. Preis, 37 Punkte

3. Preis, 31 Punkte

Inoffizielle Länderwertung – Preisverteilung

Platz	Land	Punkte	1.	2.	3.
1.	SR Rumänien	250	5	1	–
2.	BRD	248	4	2	–
3.	UdSSR	235	3	3	–
4.	DDR	231	2	3	1
5.	USA	220	2	3	1
6.	Ungarische VR	218	–	5	1
7.	VR Bulgarien	210	1	3	2
8.	VR China	200	2	2	2
9.	ČSSR	192	–	4	2
10.	Großbritannien	182	1	2	2
11.	SR Vietnam	172	–	1	5
12.	Frankreich	154	–	3	2
13.	Österreich	150	–	2	3
14.	Niederlande	146	–	1	4
15.	Australien	143	–	3	–
16.	Kanada	139	1	1	1
17.	Schweden	134	–	2	2
18.	Jugoslawien	132	–	1	3
19.	Brasilien	116	1	–	2
20.	Griechenland	111	–	–	4
21.	Türkei	94	–	–	2
22.	Spanien	91	–	–	3
23.	Marokko	88	–	–	3
24.	Kuba	83	–	–	2
25.	Belgien	74	–	–	1
26.	Iran	70	–	–	1
27.	Norwegen	69	–	–	–
	Finnland	69	–	–	2
29.	Kolumbien	68	–	–	1
30.	Mongolische VR	67	–	–	–
31.	VR Polen	55 (3)	–	–	2
32.	Island	45 (4)	–	–	–
33.	Zypern	42	–	–	–
34.	Peru	41	–	–	–
35.	Italien	35 (4)	–	–	1
36.	Algerien	29	–	–	–
37.	Kuweit	28	–	–	–
38.	Luxemburg	27 (1)	–	–	1
39.	Uruguay	27 (4)	–	–	–
40.	Mexiko	17 (5)	–	–	–
41.	Nikaragua	13	–	–	–
42.	Panama	7	–	–	–

▲ 2873 ▲ Es seien a und b reelle Zahlen, für die

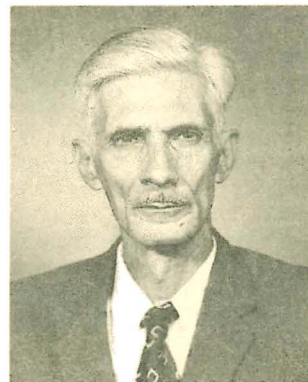
$$-1986 < b + 1 < a$$

gilt.

Man beweise: Die Gleichung

$x^2 + ax + b = 0$ hat keine reelle Lösung x_0 , die $x_0 \geq 1987$ erfüllt.

Kurzbiographie:



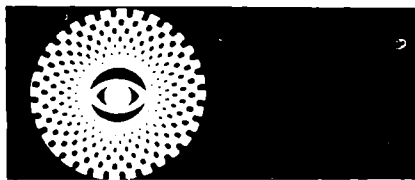
Luis J. Davidson, geboren am 10.9.1921 in Havanna, 1940 Immatrikulation an der Universität Havanna, 1944 Erlangung des Titels *Doktor der physikalisch-mathematischen Wissenschaften*, 1945 bis 1961 Lehrer für Mathematik an der Oberschule von Matanzas, nach dem Sieg der kubanischen Revolution Nationalinspektor für Mathematik, 1974 Übernahme des Lehrstuhls für wissenschaftliche Forschungen am Zentralinstitut für pädagogische Wissenschaften, 1982 Erlangung des Titels *Doktor der pädagogischen Wissenschaften*, zur Zeit Lehrer am pädagogischen Hochschulinstitut *Enrique José Varona*, Förderer der Olympiadebewegung in der Republik Kuba, Initiator der seit 1963 jährlich stattfindenden nationalen Mathematik-Ausschilde, seit der ersten Teilnahme der Republik Kuba an der XIII. IMO 1971 in der ČSSR Delegationsleiter der kubanischen Mannschaft.

Jede Mannschaft bestand aus 6 Schülern bzw. der in Klammern angegebenen Anzahl von Schülern.

1. Preis für 42 Punkte

2. Preis für ≥ 32 und ≤ 41 Punkte

3. Preis für ≥ 18 und ≤ 31 Punkte



ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser, Teil 7

Computerwürfel oder: Zufallszahlen

▲ 44 ▲ Gib folgendes Programm in den Computer ein und starte es mehrmals! Beobachte den jeweiligen Ausdruck auf dem Bildschirm!

Programm 9

```
10 CLS
20 For I = 1 TO 10
30   X = RND (1)
40   PRINT X
50 NEXT I
60 END
```

Mit dem Programm 9 druckt der Computer KC 85/1 zehn nicht vorhersagbare Zahlen zwischen 0 und 1 auf dem Bildschirm. Solche Zahlen nennt man auch Zufallszahlen.

```
.727313
6.83401 E - 03
.96943
1.7514 E - 03
.956225
.0407678
.896609
.660212
.554489
.818675
```

OK

Durch die BASIC-Anweisung `LET X = RND (1)` wird die Variable X mit einer Zufallszahl z zwischen 0 und 1 belegt ($0 < z < 1$). Dabei ist natürlich der Zahlenbereich des jeweiligen Computers zu berücksichtigen. So ist z.B. die betragsmäßig kleinste von Null verschiedene Zahl, die der KC 85/1 anzeigt `9.40396 E - 39`. Mit Hilfe von `RND (1)` kann man einen Computer auch als Würfel nutzen. Dazu müssen wir allerdings die Zeile 30 im Programm 9 so umschreiben, daß zufällig eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 erzeugt wird. Das gelingt mit folgender BASIC-Anweisung:

```
30 X = INT (6 * RND (1) + 1)
```

▲ 45 ▲ Begründe, warum mit der obigen Zeile 30 eine Zufallszahl X mit $X \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ erzeugt werden kann!

Falls der Computer einen idealen Würfel simuliert, müßte er jede der sechs Würfelzahlen etwa gleich häufig ausdrucken. Das

kann man natürlich nur überprüfen, wenn man sehr häufig würfelt bzw. den Computer veranlaßt, viele Würfelzahlen auf dem Bildschirm zu drucken. Damit wir nicht zählen müssen, wie oft eine 1, 2, 3, ..., 6 gewürfelt wurde, lassen wir uns auch das vom Computer angeben.

▲ 46 ▲

a) Erweitere das Programm 9 so, daß es 500 Würfelzahlen ausdruckt und angibt, wie oft dabei eine Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf oder Sechs ausgedruckt wurde.

b) Gib das erarbeitete Programm in den Computer ein und überprüfe, ob der simulierte Würfel den Bedingungen eines idealen Würfels nahekommt!

▲ 47 ▲ Schreibe ein BASIC-Programm zum Ausfüllen eines Teletottoscheines (5 aus 35)!

Der Computer soll aus der Menge

$\{1, 2, 3, \dots, 35\}$

fünf Zahlen zufällig auswählen.

Das Programm ist so zu gestalten, daß die doppelte Ausgabe einer Lottozahl auszuschießen ist.

▲ 48 ▲

a) Gib eine BASIC-Anweisung an, mit der ein Computer eine Zufallszahl Z mit $7 \leq Z \leq 12$ erzeugt!

b) Notiere eine BASIC-Anweisung, mit der ein Computer eine Zufallszahl F mit $A \leq F \leq B$ erzeugt!

(A, B, F sollen natürliche Zahlen sein.)

Computer als Spielpartner

Wir wollen nun ein Spielprogramm erstellen, dem folgende Idee zugrunde liegt: Es ist eine zweistellige natürliche Zahl zu erraten, die mit Hilfe von `RND (1)` vom Computer erzeugt werden soll, aber auf dem Bildschirm nicht ausgedruckt wird.

Nach Eingabe eines Tips soll über den Bildschirm eine Mitteilung erfolgen, ob die Zahl erraten wurde (Treffer) bzw. ob die getippte Zahl zu groß oder zu klein ist. Außerdem soll der Spieler darüber informiert werden, welche Ziffern der getippten Zahl in der zu erratenden Zahl vorkommen. Um die letzte Idee zu realisieren, wird es nützlich sein, die Einer und Zehner der zu erratenden Zahl einzeln erzeugen zu lassen.

Einer: $E = \text{INT} (10 * \text{RND} (1))$

Zehner: $Z = \text{INT} (9 * \text{RND} (1) + 1)$

Die vom Computer zu erzeugende Zahl R erhält man wie folgt:

$$R = Z * 10 + E$$

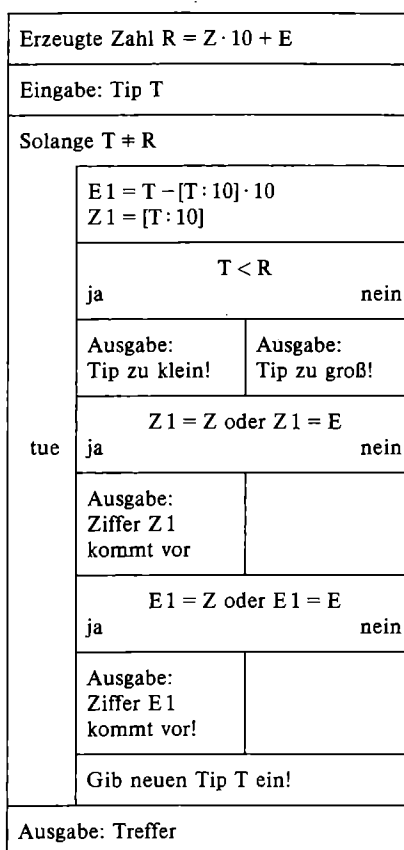
Um anzugeben, welche Ziffer der getippten Zahl T in der zu erratenden Zahl R vorkommt, ist es notwendig, von T zunächst die Einer E1 abzutrennen, um sie mit E bzw. Z vergleichen zu können.

$$E1 = T - \text{INT} (T / 10) * 10$$

Die Anzahl der Zehner Z1 erhält man durch folgende Anweisung:

$$Z1 = \text{INT} (T / 10)$$

Eine Hilfe bei der Erarbeitung unseres BASIC-Programms könnte folgendes Struktogramm sein:



▲ 49 ▲ a) Erstelle nun selbst ein entsprechendes BASIC-Programm für die Realisierung der Spielidee!

Gestalte das Programm so, daß bei einem falschen Tip ein erneuter Versuch möglich ist!

b) Verbessere das Programm so, daß der Computer jeweils mit angibt, der wievielte Versuch gestartet wird!

Der Schwierigkeitsgrad des Spiels kann erhöht werden, wenn man drei- oder sogar vierstellige natürliche Zahlen vom Computer verstecken läßt.

Computer als Trainer

Der Computer soll uns nun helfen, die Quadratzahlen von 10 bis 25 zu lernen. Dazu ist er so zu programmieren, daß auf dem Bildschirm eine Aufgabe, z.B. 23^2 erscheint.

In Abhängigkeit von der eingegebenen Antwort soll er mit *Richtig* oder *Falsch* reagieren.

Hier ein mögliches Druckbild:

Aufgabe: 13^2

Lösung: 149

Falsch!

Das Problem ist eigentlich schnell gelöst. Die Aufgabe läßt man mit Hilfe der Anweisung

$$A = \text{INT} (16 * \text{RND} (1) + 10)$$

durch den KC stellen.

Die Lösung E wird mit dem Quadrat von A verglichen, und die entsprechende Antwort *Richtig* bzw. *Falsch* ist auszudrucken. Mühe macht z.T. die Gestaltung des Bildschirms. So ist es nicht ganz einfach bei der Aufgabenstellung 13^2 die 2 richtig aus-

drucken zu lassen, da sie nicht in derselben Zeile, sondern eine Zeile zuvor gedruckt werden muß.

Hier nun unser Programmvorschlag:

Programm 10

```
10 CLS
20 PRINT
30 A = INT (16 * RND (1) + 10)
40 PRINT : PRINT : PRINT
50 PRINT "□□□□ Aufgabe:" : PRINT
60 PRINT "□□□□... □□□□□ 2"
  (16 Leerzeichen)
70 PRINT "□□□□... □□□□", A
  (13 Leerzeichen)
80 PRINT : PRINT : PRINT
90 INPUT "□□□□ LOESUNG: "; L
100 PRINT : PRINT : PRINT
110 IF L = A * A THEN PRINT
  "□□... □□ RICHTIG"
  (23 Leerzeichen)
120 IF L < > A * A THEN PRINT
  "□□... □□ FALSCH!"
  (23 Leerzeichen)
130 END
```

Unser Programm 10 können wir nun noch weiter verbessern, indem wir jedes falsche Ergebnis auch noch akustisch anzeigen lassen. Das ist mit Hilfe der BASIC-Anweisung BEEP zu realisieren, z. B.:

```
120 IF L < > A * A THEN PRINT "
  FALSCH" : BEEP
```

▲ 50 ▲ Verändere das Programm 10 so, daß es 10 Aufgaben stellt und nach den 10 Aufgaben angibt, wieviel Aufgaben falsch gelöst wurden!

Wenn das entsprechend der Aufgabe 50 veränderte Programm abgearbeitet wird, stellen wir einen wesentlichen Mangel fest. Die Auswertung der Aufgaben und das Stellen einer neuen Aufgabe gehen viel zu schnell. Um das zu verhindern, nutzen wir die BASIC-Anweisung PAUSE n (n > 0; n ∈ N).

Damit kann man eine Pause von 0,1 · n Sekunden in das Programm einbauen.

Die BASIC-Anweisungen

```
130 PAUSE 50 : GOTO 10
```

bewirken, daß der Computer nach einer Pause von 5 Sekunden seine Arbeit in Zeile 10 fortsetzt.

▲ 51 ▲ Entwirf ein Trainingsprogramm für das kleine Einmaleins!

(10 Aufgaben!) *L. Flade/M. Pruzina*

Lösungen

▲ 45 ▲ Der Bereich der Zufallszahlen kann mit der Anweisung LET A = RND (1) * 6 auf das Sechsfache gestreckt werden. Mit der Anweisung LET A = RND (1) * 6 erhält man also Zufallszahlen A mit 0 < A < 6. Durch die Anweisung LET B = INT (RND (1) * 6) erhält man ganzzahlige Zufallszahlen B mit 0 ≤ B < 6, also

B ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

Mit der Anweisung

```
X = INT (RND (1) * 6 + 1)
```

erhält man nun Würfelzahlen X mit X ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

```
▲ 46 ▲ 10 CLS
15 E = 0 : Z = 0 : D = 0 : V = 0 : F
  = 0 : S = 0
20 FOR I = 1 TO 500
30   X = INT (RND (1) * 6 + 1)
40   PRINT X;
50   IF X = 1 THEN E = E + 1
60   IF X = 2 THEN Z = Z + 1
70   IF X = 3 THEN D = D + 1
80   IF X = 4 THEN V = V + 1
90   IF X = 5 THEN F = F + 1
100  IF X = 6 THEN S = S + 1
110 NEXT I
120 PRINT : PRINT : PRINT
130 PRINT E, Z, D, V, F, S
140 END
```

▲ 47 ▲ Eine Möglichkeit:

```
10 A = INT (RND (1) * 35 + 1)
20 B = INT (RND (1) * 35 + 1)
30 IF B = A THEN 20
40 C = INT (RND (1) * 35 + 1)
50 IF C = A OR C = B THEN 40
60 D = INT (RND (1) * 35 + 1)
70 IF D = A OR D = B OR D = C
  THEN 60
80 E = INT (RND (1) * 35 + 1)
90 IF E = A OR E = B OR E = C
  OR E = D THEN 80
100 PRINT "TIP FUER TELELOTTO:"
110 PRINT A, B, C, D, E
120 END
```

▲ 48 ▲

a) Z = INT (6 * RND (1) + 7)
b) F = INT ((B - A + 1) * RND (1) + A)

▲ 49 ▲ a) Eine Möglichkeit:

```
10 CLS
20 Z = INT (9 * RND (1) + 1) : E
  = INT (10 * RND (1))
30 R = Z * 10 + E
40 INPUT "TIP: "; T
45 IF T = R THEN 110
50 E1 = T - INT (T / 10) * 10 : Z1
  = INT (T / 10)
60 IF T < R THEN PRINT "TIP ZU
  KLEIN!"; ELSE PRINT
  "TIP ZU GROSS!"
70 IF Z1 = Z OR Z1 = E
  THEN PRINT Z1; "KOMMT VOR!"
80 IF E1 = Z OR E1 = E
  THEN PRINT E1; "KOMMT VOR!"
90 INPUT "GIB NEUEN TIP EIN!"; T
100 GOTO 45
110 PRINT "TREFFER": END
```

b)

```
1 V = 1
82 V = V + 1
85 PRINT "VERSUCH NR. "; V
```

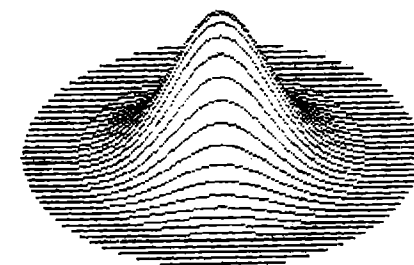
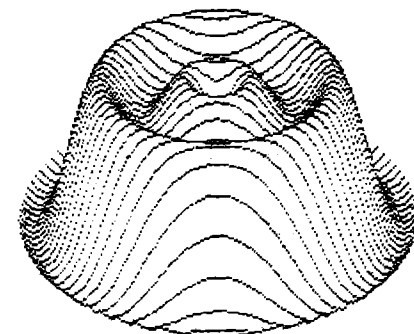
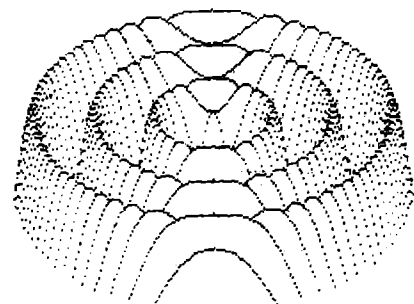
▲ 50 ▲ 1 V = 1 : F = 0

```
130 IF L < > A * A THEN PRINT
  "FALSCH!"; F = F + 1
135 IF V ≤ 10 THEN V = V + 1 :
  GOTO 10
136 PRINT : PRINT
140 PRINT "VON 10 AUFGABEN
  WURDEN"; F; "FALSCH
  GELOEST": END
```

▲ 51 ▲ Eine Möglichkeit:

```
1 A = 0
10 CLS
20 FOR N = 1 TO 10
30 A = INT (RND (1) * 10 + 1)
```

```
40 B = INT (RND (1) * 10 + 1)
50 PRINT "AUFGABE: "; A; "..."; B
60 INPUT "LOESUNG: "; C
70 IF C = A * B THEN PRINT "RICHTIG";
  ELSE PRINT "FALSCH"
80 NEXT N
90 END
```



Computergrafiken
von Bernd Grünler, Bürgel

Der Rechenmann

Ach, könnte ich doch zaubern!
Ich wünscht' mir einen Rechenmann,
ich brauchte nicht zu schwitzen,
noch müßt ich extra ran.

Der Lehrer würde staunen,
wenn ich die Eins geschafft
und jede Gleichung löse –
er denkt, aus eigener Kraft.

Die Eltern würd' es freuen,
was ich so alles weiß.
Dem Rechenmann spendiert ich
dafür ein großes Eis.

Hilke Brüning, Frankfurt (Oder)

In freien Stunden · alpha-heiter

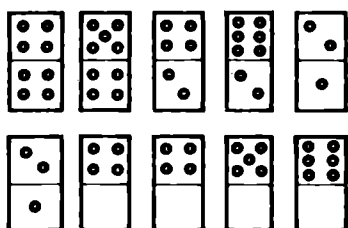


J. Guckuk, LVZ Leipzig

Domino-Quadrat

Lege die abgebildeten Dominosteine so zu einem Quadrat, daß die Augensumme auf jeder Quadratseite 18 beträgt!

aus: ND, Berlin



Information aus Dottershausen und Eiersbach

Im Hühnerdorf Dottershausen legen eineinhalb Hühner in eineinhalb Tagen eineinhalb Eier. Im Hühnerdorf Eiersbach legen zweieinhalb Hühner in zweieinhalb Tagen zweieinhalb Eier. In jedem Dorf sind gleich viele Hühner. In einem der beiden Dörfer sind die Hühner fleißiger. Sie legen an jedem Tag 40 Eier mehr als in dem anderen Dorf. Wieviel Eier werden an jedem Tag in jedem der Dörfer gelegt?

Oberlehrer W. Melka, Neubrandenburg

Mit 1, 2, 3 und 4

Bilde mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 zehn Aufgaben, die 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 als Ergebnis haben! Jede der vier Zahlen (Ziffern) muß dabei genau einmal verwandt werden und Klammern dürfen nicht gesetzt werden.

(Beispiel für 25: $2 \cdot 14 - 3$ oder $31 - 2 - 4$ oder $2 \cdot 3 \cdot 4 + 1$.)

Schüler St. Kerber, Saal

Eine interessante Gleichung

Löse die Gleichung

$$\frac{I}{DO} = 0, \text{SKISKISKISKI...},$$

wobei der rechts stehende Ausdruck einen periodischen Dezimalbruch und wie üblich jeder Buchstabe eine bestimmte Ziffer im Dezimalsystem darstellt!

aus: MATH STUDENT, London

Zwei weihnachtliche Geduldsspiele

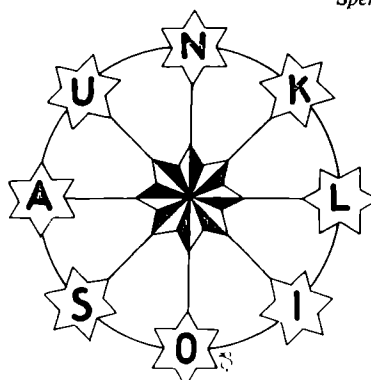
a) Zeichne dir jeweils zwei andersfarbige kleine Sterne und lege diese – wie das Bild zeigt – auf die Ecken des Spielfeldes.

Und nun versuche, durch abwechselndes Ziehen der dunklen und hellen Sterne, deren Platz zu vertauschen. Das soll in 11 Zügen zu bewerkstelligen sein. Versucht's einmal!



b) Schneide dir acht kleine Sterne aus, versieh sie mit den Buchstaben N, I, K, O, L, A, U, S! Durch Rücken der Sterne über die Sternmitte oder auf dem Rand, wenn die Mitte besetzt ist, soll erreicht werden, daß auf dem Rand der Name NIKOLAUS lesbar wird. Das N oben steht bereits auf dem richtigen Platz; das Wort muß im Uhrzeigersinn weiterlaufen.

Sperling, aus: WE, Köln



Abschied von 1987

Die Zahlen 0 bis 50 sind durch die Ziffern der Jahreszahl 1987 darzustellen, und zwar dergestalt, daß bei jeder Zahl mindestens ein Logarithmusausdruck enthalten ist. Die Reihenfolge der Ziffern 1987 ist dabei nicht zu verändern. Einige Beispiele seien aufgeführt:

$$0 = \lg(1+9) - \lg(\lg 8 + 7)$$

$$1 = \lg \sqrt{1+9} + \lg(\lg 8 + 7)$$

$$15 = \lg(1+9)^{8+7}$$

$$29 = -1 + \sqrt{9}(\lg 8 + 7)$$

$$40 = 19 + \lg 8^7$$

$$50 = 19 \cdot \lg 8 - 7$$

Viel Freude und Erfolg wünscht

Ing. K.-H. Milde, Dresden

Kryptarithmetik

Jedes Karo bzw. jeder Buchstabe bedeutet eine Ziffer. Gleiche Karos bzw. Buchstaben bedeuten immer gleiche Ziffern.

a) Es sind an Stelle der Karos Ziffern zu finden, die die waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig lösen.

$$\begin{array}{r} \blacksquare \\ \hline \blacksquare \blacksquare \blacksquare : \blacksquare \blacksquare \blacksquare \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \blacksquare \\ \hline \blacksquare \times \blacksquare \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \blacksquare \blacksquare \blacksquare \\ \hline \blacksquare \blacksquare \blacksquare : \blacksquare \blacksquare \blacksquare \end{array}$$

$$ba \cdot eg - sp = etd$$

$$bg : g + dh = dd$$

$$ed + bs : t = et$$

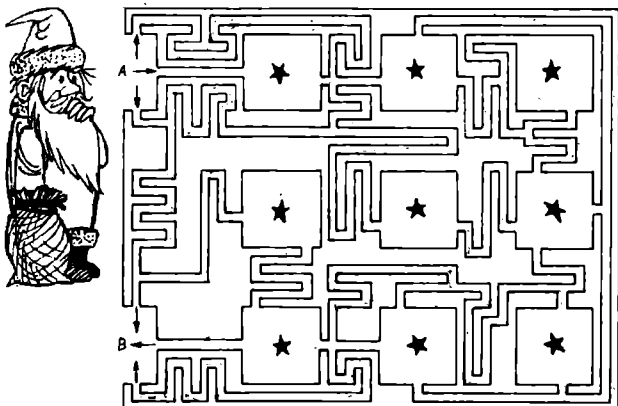
$$bsp - ed + fe = egt$$



b) Es sind an Stelle der Buchstaben Ziffern zu finden, die die waagerechten und senkrechten Aufgaben lösen.

Der Weihnachtsmann ist da!

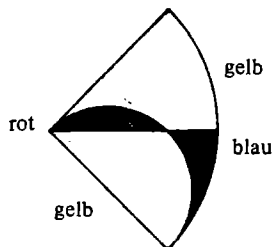
Das Bild stellt neun Einfamilienhäuser in einem großen Park dar. Der Weihnachtsmann steht vor dem Eingang A des Parkes und überlegt, in welcher Richtung er laufen soll, um alle neun Familien so zu besuchen, daß er jedes Haus nur einmal betritt und den Park beim Ausgang B verläßt. Wie muß er entlanggehen?



Mit Kühnheit und Verstand

König Arthur bestellte einen Maler, um seinen Schild bemalen zu lassen. Er bat ihn, den Schild, der die Form eines Viertelkreises hatte, mit drei Farben zu bemalen; mit Gelb als Farbe der Güte, mit Rot als Farbe der Kühnheit und mit Blau als Farbe der Weisheit. Als der Künstler den Entwurf dafür brachte, stellte der Waffenträger des Königs fest, daß auf dem Bild die Kühnheit gegenüber dem Verstand überwiege. Der Maler konnte jedoch beweisen, daß beide zu gleichen Teilen vertreten waren. Wie tat er das?

aus: Quant, Moskau, eingesandt von
Oberlehrer R. Bergmann, Döbeln



Was alles in einem Dreieck steckt

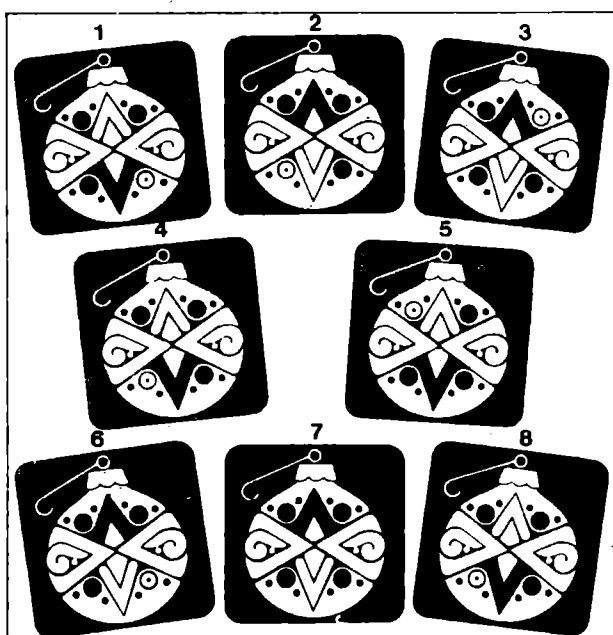
Aus einem Teil der sieben Buchstaben des Wortes DREIECK lassen sich 18 neue Substantive bilden. Wie lauten sie? (Benutze den wichtigen mathematischen Grundsatz und gehe systematisch vor!)

Schülerin S. Kerber, Saal

Auf einen Blick

Welche von den acht Weihnachtsbaumkugeln sind gleichförmig?

aus: Füles, Budapest



Wir arbeiten mit Resten

Ein Arbeitsmaterial für Schülerzirkel
ab Klasse 7

Ihr habt im Mathematikunterricht der Klasse 7 die Menge Q der rationalen Zahlen und – als Teilmenge davon – die Menge Z der ganzen Zahlen kennengelernt. Wir dehnen unsere Betrachtungen zur Teilbarkeit und zu Resten bei Division nun auf die Menge der ganzen Zahlen aus.¹

▲ 8 ▲ Warum hat es wenig Sinn, derartige Untersuchungen in der Menge der rationalen Zahlen zu führen? Überlege, durch welche Zahl z. B. die Zahl 3 dann *nicht* teilbar wäre!

Zunächst definieren wir für ganze Zahlen a und b :

b ist ein Teiler von a , bedeutet es gibt eine ganze Zahl n , so daß $a = b \cdot n$ ist.

a läßt bei Division durch b den Rest r , bedeutet es gibt eine ganze Zahl k , so daß gilt $a = k \cdot b + r$ ($0 \leq r < |b|$).

Die Bedingung $0 \leq r < |b|$ bewirkt, daß auch hier der Rest r , den die ganze Zahl a bei Division durch die ganze Zahl b läßt, eindeutig bestimmt ist.

Beispiele

$$14 = 2 \cdot 6 + 2$$

14 läßt bei Division durch 6 den Rest 2.

$$-14 = (-3) \cdot 6 + 4$$

-14 läßt bei Division durch 6 den Rest 4.

$$-14 = 3 \cdot (-6) + 4$$

-14 läßt bei Division durch -6 den Rest 4.

$$14 = (-2) \cdot (-6) + 2$$

14 läßt bei Division durch -6 den Rest 2.

Man kann nun den Rest einer Summe, eines Produkts oder einer Potenz bei Division durch eine bestimmte Zahl bestimmen, ohne diese Terme zu berechnen. Man benötigt dafür nur die Reste, die die Summanden, die Faktoren bzw. die Basis bei Division durch die gegebene Zahl lassen. Dies ermöglicht oft ein rationelleres Lösen entsprechender Aufgaben (z. B.: Ist $9^{14} \cdot 412 - 2857 \cdot 19 + 4762$ durch 7 teilbar?).

Wir untersuchen, wie man mit Resten rechnen kann.

Dazu teilen wir zunächst die Elemente von Z , also die ganzen Zahlen, in Klassen ein. Ähnlich wurde in Klasse 6 vorgegangen, als mit Brüchen gerechnet werden sollte (→ LB 6, S. 29).

Wir definieren:

a und b liegen (bzgl. m) in derselben Klasse ($a \equiv b(m)$), bedeutet a und b lassen bei Division durch m denselben Rest.

Dies bedeutet aber: Die Differenz $b - a$ ist durch m teilbar ($m | b - a$).

Kurz: $a \equiv b(m)$ bedeutet $m | b - a$.

Beispiele

$$10 \equiv 18(4), \text{ denn } 4 | 18 - 10.$$

$$-7 \equiv 5(4), \text{ denn } 4 | 5 - (-7).$$

$$-3 \equiv 2(5), \text{ denn } 5 | 2 - (-3).$$

$$11 \equiv -3(7), \text{ denn } 7 | -3 - 11.$$

$$6 \equiv 0(3), \text{ denn } 3 | 0 - 6.$$

$$-2 \equiv 2(5), \text{ denn } 5 | 3 - (-2).$$

Wählen wir für m eine feste von 0 verschiedene Zahl, z. B. 4, so können wir Z tatsächlich in Klassen einteilen.

Alle durch 4 teilbaren ganzen Zahlen liegen in derselben Klasse, denn ihre Differenz ist stets durch 4 teilbar. Andere Zahlen liegen nicht in dieser Klasse.

Wir nehmen nun eine in dieser Klasse noch nicht erfaßte ganze Zahl, z. B. 1, und bestimmen alle ganzen Zahlen, die bei Division durch 4 denselben Rest wie diese Zahlen lassen. Wir erhalten eine zweite Klasse. So fahren wir fort, bis keine ganze Zahl mehr übrig bleibt.

Insgesamt erhalten wir die in Bild 1 angegebenen vier Restklassen.

Bild 1

..., -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, ...

..., -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, ...

..., -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, ...

..., -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, ...

Keine dieser Klassen ist die leere Menge (1), keine zwei Klassen haben ein Element gemeinsam (2), und jede ganze Zahl liegt in einer dieser Klassen (3). Deshalb sind wir berechtigt, von Klassen – und nicht nur von Teilmengen – zu sprechen.

▲ 9 ▲ Erläutert, daß die Klassen eurer Schule auch Klassen im mathematischen Sinne sind! Weist dazu die Eigenschaften (1), (2) und (3) nach!

▲ 10 ▲ Man kann jede gebrochene Zahl als Klasse von Brüchen auffassen., Erläutert, wie in Klasse 6 die Menge aller Brüche in Klassen eingeteilt wurde! Weist nach, daß es sich tatsächlich um Klassen handelt!

▲ 11 ▲ Teilt die Menge der ganzen Zahlen in Restklassen bezüglich 5 ein!

▲ 12 ▲ Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Zahl m ($m \neq 0$), bezüglich der Z in Restklassen eingeteilt wird, und der Anzahl dieser Restklassen?

Jedes Element einer Restklasse wird auch als deren Repräsentant bezeichnet. Kennt man einen Repräsentanten einer Restklasse (bei gegebenem m), so lassen sich leicht alle übrigen Elemente dieser Restklasse bestimmen. Man kann deshalb einen Repräsentanten benutzen, um die gesamte Restklasse zu bezeichnen. Wir schreiben ihn dazu in eckige Klammern und fügen als Index das jeweilige m hinzu.

Beispielsweise bezeichnet $[7]_4$ die gesamte Restklasse

$\{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\}$.

Allerdings ist es üblich, zur Bezeichnung Repräsentanten x mit $0 \leq x < |m|$ zu wählen. Es ist demnach $[7]_4 = [3]_4$.

Wie mit Zahlen kann man auch mit Restklassen rechnen. Als Beispiel wählen wir wieder $m = 4$. Zunächst erklären wir, was die Summe zweier Restklassen sein soll:

Die Summe $[2]_4 + [3]_4$ ist diejenige Restklasse, in der die Summe 2 + 3 der Repräsentanten 2 und 3 liegt, also die Restklasse $[1]_4$. Sinngemäß werden auch die übrigen Summen festgelegt. Übersichtlich sind sie in der Verknüpfungstafel im Bild 2 angegeben. Da hier keine Verwechslungen zu befürchten sind, wurden die Indizes an den Klammern weggelassen.

Bild 2

+		2. Summand			
		[0]	[1]	[2]	[3]
1. Summand	[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
	[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
	[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
	[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

▲ 13 ▲ Überprüft die Angaben im Bild 2! Als Produkt zweier Restklassen $[a]_m$ und $[b]_m$ wird diejenige Restklasse $[c]_m$ definiert, in der das Produkt $a \cdot b$ liegt.

▲ 14 ▲ Stellt eine Verknüpfungstafel für die Multiplikation der Restklassen bezüglich 4 auf!

▲ 15 ▲ Erläutert, daß man die Addition bzw. Multiplikation gebrochener Zahlen als Addition bzw. Multiplikation von Klassen, deren Repräsentanten Brüche sind, auffassen kann!

Unsere Festlegungen bedürfen aber noch einer gewissen Rechtfertigung. Was passiert z. B., wenn wir zur Bezeichnung zweier zu multiplizierender Restklassen andere Repräsentanten wählen? Ist das Produkt der Restklassen trotzdem eindeutig bestimmt?

Wir überzeugen uns zunächst an einem Beispiel:

$$[2]_4 \cdot [3]_4 = [2]_4, \text{ denn } 2 \cdot 3 = 6 \text{ und } 6 \in [2]_4.$$

Wir wählen andere Repräsentanten für die zu multiplizierenden Restklassen: $10 \in [2]_4, -5 \in [3]_4$.

Das Produkt $10 \cdot (-5)$ liegt ebenfalls in der Restklasse $[2]_4$, denn $4 | 2 - (-50)$.

Allgemein sei $a' \in [a]_m$ und $b' \in [b]_m$. Wir müssen nachweisen, daß $a' \cdot b'$ in derselben Restklasse bzgl. m liegt wie $a \cdot b$.

Voraussetzung: $m | a - a', m | b - b'$

Behauptung: $m | ab - a'b'$

Beweis:

$$\text{Wegen } -ab' + ab' = 0 \text{ ist } ab - a'b' = ab - ab' + ab' - a'b'.$$

Auf je zwei Summanden läßt sich das Distributivgesetz anwenden:

$$ab - ab' = a(b - b')$$

$$\text{und } ab' - a'b' = (a - a')b'.$$

Es ist also

$$ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b'.$$

Jeder der Summanden auf der rechten Seite der letzten Gleichung ist nach Voraussetzung durch m teilbar, also auch die Summe.

Folglich gilt $m | ab - a'b'$, w. z. b. w.

▲ 16 ▲ Beweist, daß auch die Summe zweier Restklassen unabhängig von den gewählten Repräsentanten für die Summanden ist!

Man kann Restklassen auch mit natürlichen Exponenten ($n \geq 2$) potenzieren.

▲ 17 ▲ Füllt die Verknüpfungstafel im Bild 3 aus!

Bild 3

$[a]_4^n$		Exponent n				
		2	3	4	5	6
Basis $[a]_4$	$[0]_4$					
	$[1]_4$					
	$[2]_4$					
	$[3]_4$					

Beim Ausfüllen der Verknüpfungstafel für das Potenzieren habt ihr sicher bemerkt, daß man nicht unbedingt erst die Potenz des Repräsentanten der als Basis auftretenden Restklasse ausrechnen muß, um dann die Restklasse, in der die Potenz liegt, zu bestimmen. Man kann auch zwischen durch schon zu kleineren Repräsentanten übergehen:

1. Weg: $3^6 = 729 = 182 \cdot 4 + 1$,

also $[3]_4^6 = [1]_4$

2. Weg:

$$[3]_4 \cdot [3]_4 = [1]_4$$

$$[1]_4 \cdot [3]_4 = [3]_4$$

$$[3]_4 \cdot [3]_4 = [1]_4$$

$$[1]_4 \cdot [3]_4 = [3]_4$$

$$[3]_4 \cdot [3]_4 = [1]_4,$$

$$\text{also } [3]_4^6 = [1]_4.$$

Beim 2. Weg wurde das Assoziativgesetz der Multiplikation von Restklassen angewendet. Dieses ist natürlich erst zu beweisen.

Im nächsten Zirkel werden wir uns mit einigen Eigenschaften der Addition und der Multiplikation von Restklassen beschäftigen und daraus weitere Regeln für das Rechnen mit Restklassen ableiten.

C.-P. Helmholz

Lösungen

▲ 8 ▲ Zu je zwei rationalen Zahlen a und b ($b \neq 0$) gibt es immer eine rationale Zahl n , so daß $a = b \cdot n$ ist.

▲ 9 ▲ In jede Schulklasse geht mindestens ein Schüler (1), kein Schüler besucht zugleich zwei Klassen (2), jeder Schüler geht in irgendeine Klasse (3).

▲ 10 ▲

siehe LB 6, S. 29 und Lösungen zu ▲ 15 ▲.

▲ 11 ▲

...	-15	-10	-5	0	5	10	15	...
...	-14	-9	-4	1	6	11	16	...
...	-13	-8	-3	2	7	12	17	...
...	-12	-7	-2	3	8	13	18	...
...	-11	-6	-1	4	9	14	19	...

▲ 12 ▲ Es gibt genau $|m|$ paarweise verschiedene Restklassen bezüglich m .

▲ 13 ▲ ohne Lösung

▲ 14 ▲

		2. Faktor			
		[0]	[1]	[2]	[3]
1. Faktor	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
	[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
	[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
	[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

▲ 15 ▲ Jede gebrochene Zahl ist eine Klasse von Brüchen, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen. Zur Bezeichnung einer solchen Klasse wählt man einen beliebigen Bruch, der in ihr liegt.

Sollen z. B. die gebrochenen Zahlen $\frac{1}{2}$ und

$\frac{1}{3}$ addiert werden, so wählt man zunächst

Repräsentanten aus beiden Klassen, die gleichnamig sind: $\frac{3}{6}$ und $\frac{2}{6}$.

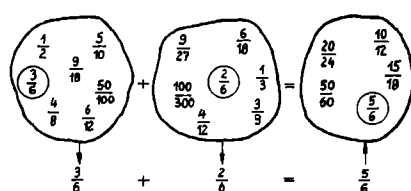
Diese Brüche werden addiert:

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

Summe der gebrochenen Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ist diejenige Klasse von

Brüchen, in der $\frac{5}{6}$ liegt (Bild 4).

Bild 4



▲ 16 ▲ Voraussetzung:

$$a' \in [a]_m, \text{ d. h. } m | a - a'$$

$$b' \in [b]_m, \text{ d. h. } m | b - b'$$

$$\text{Behauptung: } a' + b' \in [a + b]_m,$$

$$\text{d. h. } m | (a + b) - (a' + b')$$

$$\text{Beweis: } (a + b) - (a' + b') =$$

$$(a - a') + (b - b')$$

Jeder Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung ist nach Voraussetzung durch m teilbar, also auch die Summe.

Folglich gilt

$$m | (a + b) - (a' + b'), \text{ w. z. b. w.}$$

▲ 17 ▲

$[a]_4^n$		Exponent n				
		2	3	4	5	6
Basis $[a]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$
	$[1]_4$	$[1]_4$	$[1]_4$	$[1]_4$	$[1]_4$	$[1]_4$
	$[2]_4$	$[0]_4$	$[2]_4$	$[0]_4$	$[2]_4$	$[0]_4$
	$[3]_4$	$[1]_4$	$[3]_4$	$[1]_4$	$[3]_4$	$[1]_4$

¹ Siehe alpha 4/86 und alpha 5/86

Leserpost: Chancen für Denkfale?

Unser Leser Rolf Kamieth aus Kakerbeck wurde durch den Beitrag *Chancen für Denkfale?* (alpha 2, 1985) angeregt, sich näher mit der harmonischen Reihe zu beschäftigen und mit seinem Taschenrechner Zahlenexperimente durchzuführen. Seine Rechenergebnisse führten ihn zu der Vermutung, daß für die n -te und m -te Partialsumme der harmonischen Reihe

$$\left(\text{d. h. für } a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, a_m = \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} \right)$$

bei großen Zahlen n und m gilt:

$$e^{a_n - a_m} \approx \frac{n}{m}.$$

Geht man zu Logarithmen über, so lautet seine Aussage:

$$a_n - a_m \approx \ln n - \ln m.$$

Diese Beziehung ist richtig, sie folgt aus der bekannten Darstellung

$$a_n = \ln n + C + \gamma_n, \quad (*)$$

wobei $C = 0,577\,215\,664\,90\dots$ die sogenannte *Mascheronische Konstante* (nach dem italienischen Mathematiker Lorenzo Mascheroni, 1750 bis 1800) und γ_n Elemente einer Nullfolge sind. (C wird auch Eulersche Konstante genannt!) Die Formel (*) zeigt, daß die Zahlen a_n wie $\ln n$ für große n wachsen. Man erhält als Folgerung aus dieser Formel die Beziehung

$$a_{nk} \approx a_n + a_k - C \text{ für große } n, k \in \mathbb{N}.$$

Die bemerkenswerte Darstellung (*) für a_n ist übrigens gerade der im *alpha*-Artikel erwähnte Trick, um bei Benutzung des Tischrechners K 1002 erst von einem gro-

ßen Index n an die Zahlen $\frac{1}{n}$ addieren zu

müssen. Damit gelangte man schnell zu einer Stelle n_1 , so daß sich die Partialsummen a_n für $n \geq n_1$ nicht mehr änderten.

Es ist oft nützlich, durch konkrete Zahlenrechnungen eine Idee für einen theoretischen Sachverhalt zu finden und dann die gewonnene Aussage exakt zu beweisen. Das geht mit einem Taschenrechner oder einem Computer besonders genau und schnell, weil sich auch viele Beispiele durchrechnen lassen.

W. Schmidt



alpha- Schachwettbewerb 1987

Zum 5. Mal fordert *alpha* alle Schachfreunde zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf!

Wiederum sind acht Schachaufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad vorgegeben. Wenn der eine oder der andere Leser vielleicht auch nicht alle Aufgaben lösen kann, so ist dennoch seine Teilnahme sehr erwünscht und wird auch in der Gewinnverlosung berücksichtigt. Vordringend soll der Wettbewerb Spaß an den reizvollen Knobeilen auf dem Schachbrett vermitteln und als Anregung dienen, sich etwas intensiver mit dem königlichen Spiel zu beschäftigen.

In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt. Die jeweilige Punktzahl, die in etwa den Schwierigkeitsgrad wiedergibt und aus der Bewertung der Abspiele resultiert, ist bei den Aufgaben mit angegeben. Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt werden.

Unter allen Teilnehmern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, werden Bücher verlost.

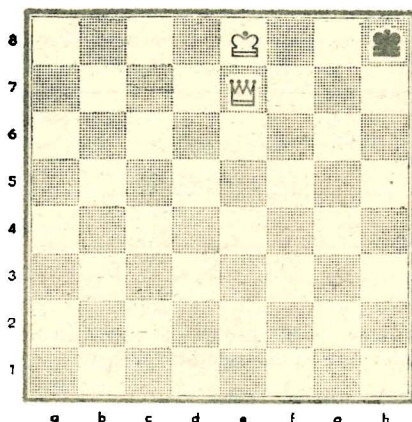
Die Teilnehmer, die die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 7 erreichen, erhalten eine Urkunde und nehmen an einer weiteren Verlosung von Buchpreisen teil. Für Teilnehmer bis zum Alter von 14 Jahren reicht schon die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 4 aus, um in diese Verlosung zu kommen.

Die achte Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe. Sie ist für leistungstärkere Schachspieler gedacht und bleibt ohne Punktbewertung. Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben einschließlich der Zusatzaufgabe richtig gelöst haben, werden zusätzlich zwei Bücher verlost.

Teilnahmeberechtigt sind alle *alpha*-Leser. Die Einsendung der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) ist bitte bis zum 29. Februar 1988 unter Angabe von Name, Vorname, Alter und Adresse zu richten an

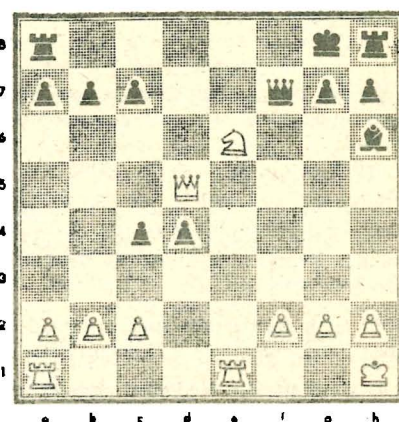
Redaktion alpha
PSF 14, Leipzig, 7027.

Die Lösungen sowie die Gewinner werden in *alpha* 4/1988 veröffentlicht.



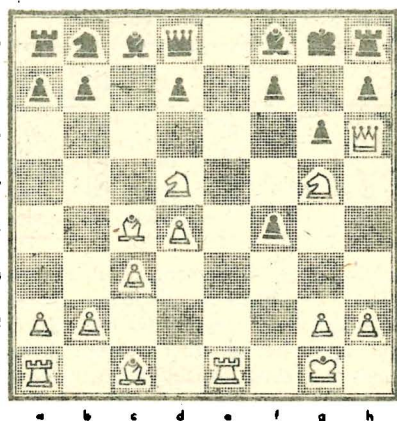
Nr. 1 Matt in zwei Zügen

1 Punkt



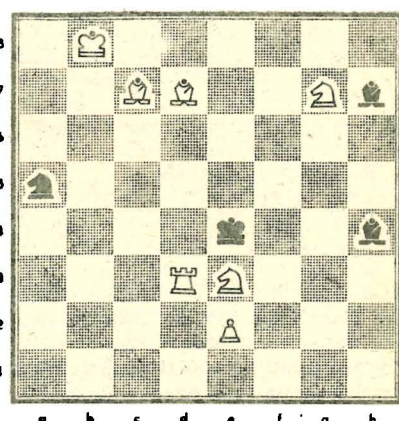
Nr. 5 Matt in vier Zügen

4 Punkte



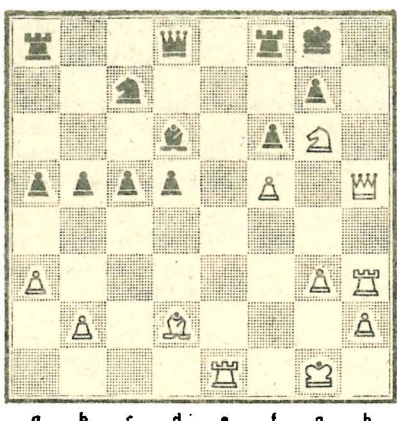
Nr. 2 Matt in zwei Zügen

2 Punkte



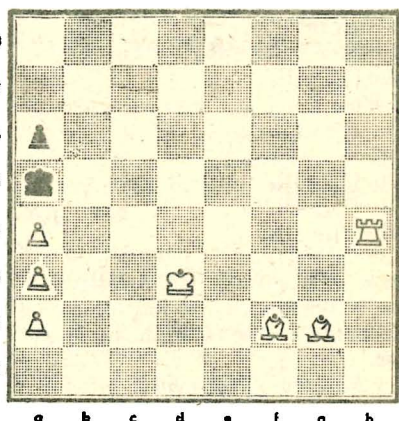
Nr. 6 Matt in zwei Zügen

6 Punkte



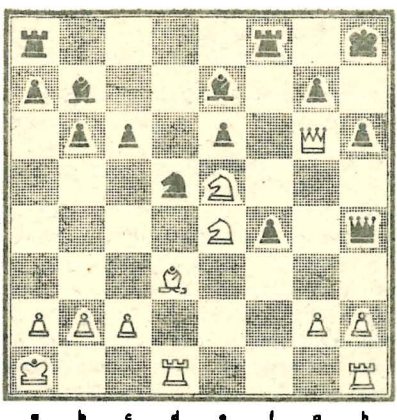
Nr. 3 Matt in zwei Zügen

2 Punkte



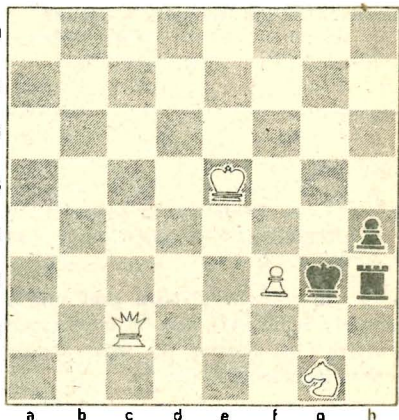
Nr. 7 Matt in drei Zügen

6 Punkte



Nr. 4 Matt in drei Zügen

3 Punkte



Nr. 8- Matt in fünf Zügen

Zusatz

Buchtips



Peter Hebl

Wissenspeicher BASIC

Das Wichtigste für Einsteiger und Fortgeschrittene

302 S., zahlr. Abb.,

Pappband zellophaniert

Bestell-Nr. 709 183 5

Preis: 14,50 M

Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin

Helmut Kahnt/Bernd Knorr

BI-Lexikon

Alte Maße, Münzen und Gewichte

214 Textabb., 24 Farbtafeln, 54 Fotos

Bestell-Nr. 577 825 4

Preis: 27,80 M

VEB Bibliographisches Institut Leipzig

Johannes Lehmann

Mathematik –

Von der Pflicht zur Kür

120 Prüfungsaufgaben aus ehem.
Abschlußprüfungen, Klassenstufe 10
sowie über 200 z. T. unterhaltsame
Aufgaben mit Lösungshinweisen

MSB Nr. 130

1. Aufl. 1987; 2. Aufl. 1988

148 Seiten, 134 Abb.

Bestell-Nr. 666 253 6

Preis: 12,00 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig

Reinhard Zilch

Auf Mark und Pfennig

Aus der Geschichte des Geldes

103 Seiten, zahlr. Illustrationen

Bestell-Nr. 631 860 4

Preis: 7,40 M

Der Kinderbuchverlag Berlin

Wolfgang Gloede

Vom Lesestein zum

Elektronenmikroskop

248 Seiten, 222 Abb., Tafeln, Leinen

Bestell-Nr. 553 593 0

Preis: 29,50 M

VEB Verlag Technik, Berlin

Buchreihe:

Wir wiederholen Physik

Band 7: Felder

Bestell-Nr. 547 231 9

Preis: etwa 6,80 M

Band 8: Wellen und Strahlen

Bestell-Nr. 547 232 7

Preis: etwa 6,80 M

beide Titel: VEB Fachbuchverlag Leipzig

Ernst Bönsch

Schachlehre

für Lehrende und Lernende

Lektionen für die Grundausbildung im Schach, Übungen zur schachtaktischen Vervollkommnung, eine Übersicht über Eröffnungssysteme und Varianten, die Notationsforschung, die Klassifizierungsordnungen, Regelwerke und Spielsysteme – das alles findet der interessierte Leser in der Schachlehre, die erstmalig 1985 erschien und in Fachkreisen bereits viel Aufmerksamkeit fand.

Entsprechend der inhaltlichen Ausrichtung wendet sich das Buch an Schachtrainer, Übungsleiter und Schachlehrer.

Damit liegt erstmalig ein Schachlehrbuch vor, das den hohen Ansprüchen der Anfängerausbildung voll gerecht wird.

Übungsleiter und Schachlehrer mit geringerer schachlicher Qualifikation werden gleichfalls in die Lage versetzt, durch die vielen praktischen Hinweise zur Gestaltung des Schachunterrichts, zur Betreuung der jungen Schachspieler bis hin zur Vorbereitung auf Wettkämpfe das in neun Lektionen konzipierte Stoffangebot mühelos zu vermitteln.

446 Seiten, 944 Diagramme,

Leinen mit Schutzumschlag

Bestell-Nr. 671 699 5

Preis: 24,00 M

Sportverlag Berlin

Hans Kleffe

Roboter reisen zu Planeten

78 Seiten, zahlr. Abb.

Bestell-Nr. 632 356 9

Preis: 8,20 M

Der Kinderbuchverlag, Berlin

Hannelore Kischkewitz

Das Ägypten der Pharaonen

132 Seiten, zahlr. Abb.

Bestell-Nr. 630 773 7

Preis: 19,50 M

Der Kinderbuchverlag, Berlin

G. Deweiß und M. Deweiß

Summa summarum

Kostproben unterhaltsamer Mathematik

92 S., 78 Abb., Festeinband

Bestell-Nr. 666 317 6

Preis: 15,00 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Leipzig

H. Kästner und P. Göthner

Algebra – aller Anfang ist leicht

156 S., 30 Abb., kartoniert

Bestell-Nr. 666 138 1

Preis: 8,40 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Leipzig

M. Müller

Rechenvorteile

96 S., 1 Abb., kartoniert

Bestell-Nr. 665 065 8

Preis: 3,75 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Leipzig

M. Hasse

Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik

Etwa 84 Seiten mit etwa 7 Abb.,

kartoniert

Bestell-Nr. 665 084 1

Preis: 3,30 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig

Ein Teil der Bücher ist durch Vorbestellungen bei den Verlagen vergriffen. Sie sind möglicherweise beim Buchhandel z. Z. noch vorrätig. Wir weisen auf die Möglichkeit der Ausleihe in Bibliotheken hin.

Plaudereien über das Buch

Eine Gruppe von Sachverständigen, die 1460 die Erfindung des Johann Gensfleisch zu Gutenberg untersuchte, kam zu dem Schluß, die Buchdruckerpresse sei unnütz und habe keine Zukunft. Die Begründung war einleuchtend: Die Zahl der Personen, die lesen könnten, sei so gering, daß die Buchproduktion der kopierenden Mönche völlig ausreiche.

aus: Harald Weirich/Otto Wilfert,

Auf dem Weg in

die elektronische Kommunikation

Lesen und leben sind durch mehr als einen Reim verbunden und durch weniger als einen Konsonanten getrennt.

Hermann Kant

Es wäre gut Bücher kaufen, wenn man die Zeit, sie zu lesen, mitkaufen könnte, aber man verwechselt meistens den Ankauf der Bücher mit dem Aneignen ihres Inhalts.

Schopenhauer

Ein Dankeschön an unsere Verlage

Die Redaktion *alpha* konnte in diesem Jahr den Preisträgern des *alpha*-Wettbewerbs 1986/87 wieder viele interessante Bücher senden. Diese stellten uns zahlreiche Verlage zur Verfügung, denen wir an dieser Stelle herzlichen Dank sagen möchten:

Altberliner Verlag, Berlin;

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig;

VEB Domowina Verlag, Bautzen;

VEB Fachbuchverlag, Leipzig;

Der Kinderbuchverlag, Berlin;

Militärverlag der DDR, Berlin;

Mitteldeutscher Verlag, Halle;

Buchverlag Der Morgen, Berlin;

Verlag Neues Leben, Berlin;

VEB Postreiter-Verlag, Halle;

Verlag Philipp Reclam jun., Leipzig;

Sportverlag, Berlin;

VE Verlag Technik, Berlin;

transpress-Verlag, Berlin;

Urania-Verlag, Leipzig;

Verlag Volk und Welt, Berlin;

VE Verlag Volk und Wissen, Berlin;

VE Verlag der Wissenschaften, Berlin.

alpha- Wettbewerb

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1986/87

Fr.-Engels-OS, E.-Mäder-OS, beide Altenburg; Stadtklub Jg. Math., Altentrepow; E.-Schneller-OS, Alt-Sührkow; K.-Marx-OS, Anklam; OS Asbach; Tereschkova-OS, Aschersleben; OS W. Lamberg, Bad Berka; H.-Duncker-OS, Bad Kleinen; H.-Beimler-OS, Bad Köstritz; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; M.-Poser-OS, EOS E. Thälmann, A.-Saefkow-OS, 1. OS Dr. Th. Neubauer, O.-Grotewohl-OS, Stat. Jg. Techn. u. Naturf., alle Bad Salzungen; Zentrale OS H. Beimler, Bärenklau; H.-Heine-OS, Barchfeld; OS Cl. Zetkin, Barby; O.-Nowack-OS, Bentwisch; 33. OS L. Grundig, 44. OS F. Erpenbeck, 25. OS Fr. Mehling, 41. OS L. Weiskopf-Henrich, alle Berlin; Haus der JP, Berlin-Pankow; OS J. R. Becher, Bernburg; OS C. Fugger, Bernau; A.-Becker-OS, Berlingerode; Geschw.-Scholl-OS, Bernsdorf; OS Cl. Zetkin, Bischofferode; WSO, Bismark; OS Fr. Schiller, Bleicherode; F.-Weineck-OS, Blumberg; OS Blumenthal; OS Beuren; G.-Dimitroff-OS, Böhlen; A.-Bebel-OS, Boizenburg; OS Bockau; Kreis-AG Math., Borna; OS J. Schehr, Born; OS W. Komarow, Boxberg; OS W. Pieck, Brand-Erbisdorf; OS H. Beimler, W.-Seelenbinder-OS, beide Breitenungen; B.-Brecht-OS, Brehme; OS Dr. Th. Neubauer, Brotterode; Kl.-Gottwald-OS, Burg-Stargard; W.-Pieck-OS, Burrow; M.-Poser-OS, Bürgel; W.-Estel-OS, Buttlar; O.-Koschewoi-OS, Callenberg; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., 5. OS C. Blecher, beide Cottbus; OS Br. Kühn, Dambeck; Fr.-Reuter-OS, Kreisklub Jg. Math., beide Demmin; OS Dersekow; OS Dermbach; R.-Breitscheid-OS, Dessau; E.-Weinert-OS, Deuna; OS Makarenko, Dingelstädt; M.-Curie-OS, Dohna; OS A. Matrossow, Dornsdorf; K.-Niederkirchner-OS, Domersleben; OS Fr. Engels, Drebbau; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; W.-Pieck-OS, 100. OS, Pionierpalast W. Ulbricht, alle Dresden; OS Dürrohrsdorf; W.-Pieck-OS, Kreisklub Math., beide Eberswalde; W.-Pieck-OS, Eichhof; OS Eichhorst; 1. OS R. Arndt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; OS 56, Goethe-OS, beide Erfurt; 1. OS A. Becker, 2. OS, beide Falkenberg; Th.-Müntzer-OS, Fambach; E.-Weinert-OS, Flessau; B.-Brecht-OS, Floh; W.-Pieck-OS, Fehrbellin; Stat. Jg. Techn. u. Naturf., Dr.-Th.-Neubauer-OS, beide Frankfurt/O.; E.-Thälmann-OS, Freital; E.-Thälmann-OS, Friedeburg; OS I. Friedland; OS G. Dimitroff, Friedrichsthal; OS V. H. Günther, Fürstenwalde; Haus der JP, Gadebusch; K.-Marx-OS, Gebesee; R.-Arnstadt-OS, Geisa; E.-Hoernle-OS, Geismar; K.-Marx-OS, Gera; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; OS Gernrode; J.-Gagarin-OS, Geithain; OS Gielow; 7. OS, Görlitz; OS Goldberg; Kreisklub Jg. Math., Gräfenhainichen; OS J. Gagarin, Grabowhöfe; Pestalozzi-OS, Greiffenberg; E.-Thälmann-OS, Greifswald; OS H. Beimler, Greußen; Kreisklub Jg. Math., Grevesmühlen; A.-Frank-OS, Grimma; OS W. Seelenbinder, Gröden; A.-Walther-OS, Gröditz; OS Cl. Zetkin, Grotzsch; OS Großbottloff; OS A. Kuntz, Großbodungen; R.-Luxemburg-OS, Groß-Nemerow; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Guben; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; OS H. Günther, Hachel-

bich; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. H. Reckmann, Marx-Engels-Schule, beide Halberstadt; M.-Gorki-OS, Hainichen; Kreisklub Math. Halle-Süd; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; J.-Fučík-OS, Hartha; OS Haynrode; J.-Marchlewski-OS, Havelberg; OS B. Koenen, Hedersleben; Schule d. DSF, Heiligenbrücke; EOS W. Pieck, Heiligenstadt; OS M. Gorki, Hillersleben; Goethe-OS, Hohenleipisch; Cl.-Zetkin-OS, Hohenstein-E.; 21. OS Hoyerswerda; OS E. Egert, Hundeshagen; OS W. Seelenbinder, Ilfeld; Goethe-OS, Ilseburg; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; OS M. Poser, OS W. Pieck, beide Jena; Fr.-Engels-Schule, Kaltennordheim; H. Beimler-OS, Karbow; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; OS A. Becker, Kamsdorf; Wl.-Komarow-OS, Fr.-Matschke-OS, E.-Schneller-OS, H.-Menzel-OS, Tschakowskiosk; A. Matrossow-OS, Makarenko-OS, Stadtbzirkspionierhaus, alle Karl-Marx-Stadt; OS Katzow; E.-Bogert-OS, Karlsburg; Cl.-Zetkin-OS, Kaulsdorf; Th.-Neubauer-OS, Kieselbach; OS Kirchworis; OS Kitzin; H.-Matern-OS, Kletitz; OS H. Matern, Klockow; W.-Seelenbinder-OS, Könnitz; OS M. Burwitz, Kritzow; K.-Marx-OS, Kühlungsborn; OS Cl. Zetkin, Laage; OS Langenwolmsdorf; OS R. Breitscheid, Latdorf; Goetheschule, Lauscha; Schulkombinat Lauscha-Ernstthal; Pestalozzi-OS, Leegebruch; OS E. Weinert, Legefeld; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; Dr.-S.-Allende-OS, E.-Thälmann-OS, OS R. Luxemburg, EOS K. Marx, K.-Liebknecht-OS, 4. OS J. C. Fuhlrott, alle Leinefelde; 46. OS L. Fürnberg, Haus der JP A. Saefkow, beide Leipzig; M.-Poser-OS, Lengfeld; Cl.-Zetkin-OS, Leopoldshagen; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; O.-Grotewohl-OS, EOS Prof. Dr. M. Schneider, beide Lichtenstein; OS W. Wallstab, Löderburg; W.-Seelenbinder-OS, Lössau; B.-Brecht-OS, Luckenwalde; Haus der JP Th. Körner, Ludwigslust; Fr.-L.-Jahn-OS, Lübbthe; Goethe-OS, Ludwigslust; Lenin-OS, Magdeburg; Haus der JP Fr. Siemon, Markkleeberg; J.-Gagarin-OS, Meiningen; OS J. Gagarin, Merkers; Fr.-Hecker-OS, Milkau; OS H. Rau, Mieste; OS Mittelstille; E.-Steinfurth-OS, Mittenwalde; Kinderheim Munzig; OS Nachterstedt; O.-Grotewohl-OS, Naumburg; OS J. Fučík, H.-Beimler-OS, beide Naundorf; OS W. Bykowski, Neetzow; 12. OS E. Weinert, Neubrandenburg; F.-Dziarsynski-OS, Neuhaus; M.-Burwitz-OS, Neuenkirchen; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; Fontane-Schule, Neuruppin; Fr.-Schiller-OS, Goetheschule, W.-Pieck-OS, alle Neustadt; W.-Seelenbinder-OS, Niederlichtenau; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; OS J. Gagarin, EOS W. v. Humboldt, beide Nordhausen; OS Nossentiner Hütte; OS E. Weinert, Oberschöna; Fr.-Fröbel-OS, Oberweißbach; OS Olbersdorf; Haus der JP H. Coppi, Kreisklub Mathe, beide Oranienburg; E.-Vogel-OS, Pestalozzi-OS, beide Oschatz; EOS K. Marx, Oschersleben; OS P. Kmieć, Oster-nienburg; OS W. Pieck, Osterwieck; OS O. Grote-wohl, Pappenheim; Haus der JP P. Göring, Parchim; E.-Schneller-OS, Penig; OS Dr. Th. Neu-bauer, Pfaffschwende; OS G. Haak, Pirmas; Herbart-OS, Plauen; Spezialistenlager Plauen-Land; Makarenko-OS, Plessa; OS Pritzerbe; Goetheschule II, Pritzwalk; OS E. Schneller, Polle-ben; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS Pesta-lozzi, O.-Buchwitz-OS, beide Radebeul; P.-Bleichschmidt-OS, Raschau; E.-Weinert-OS, Rei-chenbach; K.-Burger-OS, Reinkenhagen; J.-Ga-garin-OS, Ribnitz; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. E. Hoernle, Richtenberg; H.-Matern-OS, Spezial-schule Fr. Engels, beide Riesa; H.-Matern-OS, Rochlitz; Joliot-Curie-OS, Röbel; Joliot-Curie-OS, Ronneburg; K.-Liebknecht-OS, Rositz; Fr.-Schmenkel-OS, Roskow; Ziolkowski-OS, Roß-dorf; 66. OS O. Buchwitz, Haus der JP, 37. OS, alle Rostock; OS S. Kosmodemjanskaja, Rotte-rode; Kreisklub Jg. Math. Rotta; DSF-OS, Rudol-stadt; OS K. Niederkirchner, Saal; E.-Weinert-

OS, Saalfeld; Stat. Jg. Techn. u. Naturf. E. Thälmann, Salzwedel; Tamara-Bunke-OS, Sa-nitz; W.-Pieck-OS, Sangerhausen, W.-I.-Lenin-OS, Saßnitz; OS H. Matern, Scharnberg; OS M. Gorki, Schkölen; G.-Hauptmann-OS, Schlu-singen; 4. OS, OS K. Marx, OS J. G. Seume, alle Schmalkalden; P.-Göring-OS, Schmiedefeld; Schule der DSF, Schneidlingen; Haus der JP W. Sonneberg, Schönebeck; OS H. Beimler, Schönhausen; E.-Weinert-OS, Schollene; OS Kuba, Schule der DSF, Schorssow; R.-Hartmann-OS, Schönborg; OS Fr. Engels, Schwallungen; Le-nin-OS, Schwarzenberg; OS Schweina; Haus der JP M. Böhme, M.-May-OS, beide Sebnitz; OS A. Wölk, Senftenberg; Fr.-Reuter-OS, Siedenbol-lentin; OS Th. Müntzer, Silkerode; Pionierhaus Förderzirkel Math., Sömmerda; OS Glückauf, OS W. Pieck, OS A. Saefkow, J.-R.-Becher-OS, alle Sondershausen; OS H.-A. Eckelmann, Spon-holz; OS A. Becker, OS K. Marx, beide Sprem-berg; Wittig-OS, Staaken; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Stahnsdorf; II. OS E. Wölk, Stadtröda; J.-Fučík-OS, Steinbach; R.-Luxemburg-OS, Steins-dorf; Haus der JP Fr. Weineck, Strausberg; Las-ker-OS, Schule d. DSF, Ströbeck; M.-Gorki-OS, Stützerbach; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Tange-rhütte; H.-Beimler-OS, Tantow; J.-Gagarin-OS, Teistungen; OS G. Eisler, Teterow; OS Thöbelf; K.-Liebknecht-OS, Teuchern; E.-Schneller-OS, Tölplitz; Pestalozzischule, A.-Einstein-OS, beide Torgelow; OS W. Pieck, Trusetal; E.-Welk-OS, A.-Nitz-OS, beide Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; E.-Schneller-OS, Urnshau-sen; A.-Becker-OS, Urbich; OS J. G. Seume, Va-cha; OS Vierraden; OS Viernau; alpha-Club OS Vitzburg; OS Völkershäuser; A.-Bebel-OS, Vogelsang; Goetheschule, Kreisklub Jg. Math., beide Waren; OS Wechmar; Kreisklub Jg. Math., Weißwasser; OS Weißenborn-L.; R.-Luxemburg-OS, Werbelow; J.-Gagarin-OS, Werneuchen; OS A. Günther, Wernshausen; J.-Harder-OS, Wesen-berg; OS O. Grotewohl, Westerengel; OS Wip-persdorf; K.-Kollwitz-OS, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Wittenberg; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Fr.-Engels-OS, beide Wittstock; OS H. Heine, Wörmilitz; O.-Buchwitz-OS, Wolken-burg; Dr.-R.-Sorge-OS, Wollin; Kreis-Mathema-tiklager, OS W. I. Lenin, OS I. H. Werner, alle Worbis; OS Th. Müntzer, Wulfen; G.-Walter-OS, Wustrow; Pestalozzi-OS, Zeithain; Lutherschule, Zella-Mehlis; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Zembchen; W.-Seng-OS, M.-Lenk-OS, beide Zepernick; F.-Schiller-OS, Zeulenroda; Th.-Müntzer-OS, Ziesar; OS J. H. Pestalozzi, Zschor-nowitz; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhl.

Aus einem Mathematischen Schülerwett-streit der Klassen 4 im Kreis Bernau

$$B \cdot E \cdot R \cdot L \cdot I \cdot N = 750$$

Schreibe 750 als Produkt aus 6 Faktoren derart, daß jeder nächstfolgende Faktor jeweils eine grö-ßere oder mindestens eine gleichgroße Zahl ist wie der vorhergehende Faktor. Dabei soll der Faktor 1 höchstens dreimal in einer Gleichung vorkommen.

Gib möglichst viele Gleichungen an!

*Erika Schwerin,
Fachberater im Kreis Bernau*

Lösung

1. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 125 = 750$
2. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 75 = 750$
3. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 50 = 750$
4. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 25 = 750$
5. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 25 = 750$
6. $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 25 = 750$
7. $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 = 750$
8. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 30 = 750$

Lösungen



Lösung zu: Pythagoras von Samos

Die Anzahl der Schüler des Pythagoras sei x . Dann gilt:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x.$$

Es folgt: $x = 28$.

Pythagoras hatte 28 Schüler.

Lösungen zur Sprachecke

▲ 1 ▲ Ersetze jeden Buchstaben durch einen Einer (d. h. durch eine einstellige Zahl)!

$$\begin{array}{r} \text{FIVE} \\ - \text{FOUR} \\ \hline \text{ONE} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(fünf minus vier} \\ \text{gleich eins)} \end{array}$$

Jeder Buchstabe steht für nur einen Einer. (Es gibt mehr als eine mögliche Antwort.)

Lösung: Zum Beispiel

$$\begin{array}{r} 8671 \quad 8741 \\ -8350 \quad -8350 \\ \hline 321 \quad 391 \end{array}$$

▲ 2 ▲ In letzter Zeit laufe ich viel Ski. Vorgestern bin ich 3 km mehr gelaufen als gestern, und gestern 40 km weniger als vorgestern und heute zusammen. Wieviel Kilometer habe ich heute auf Ski zurückgelegt?

Lösung: Wir bezeichnen mit x die heutige Kilometerzahl, die gestrige mit y . Dann wurden vorgestern $(y + 3)$ km gelaufen. Nach der zweiten Angabe gilt $y + 40 = y + 3 + x$, also $x = 37$.

▲ 3 ▲ Ein Bassin wird durch zwei Wasserhähne mit Wasser gefüllt. Der eine allein füllt das Bassin in 9 Stunden, der andere füllt es allein in 6 Stunden.

a) Welcher Teil des Volumens des Bassins wird von jedem Hahn allein in einer Stunde gefüllt?

b) Man öffnet gleichzeitig beide Hähne. Welcher Teil des Volumens des Bassins ist nach einer Stunde gefüllt?

c) Nach welcher Zeit ist das Bassin voll?

Lösung:

a) Der eine Hahn allein füllt in einer Stunde $\frac{1}{9}$ des Bassins, der andere füllt allein $\frac{1}{6}$ des Bassins pro Stunde.

b) Nach einer Stunde sind $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$ des Bassins gefüllt.

c) Bezeichnet man die gesuchte Zeit (in

Stunden) mit t , so erhält man die Gleichung $\frac{5}{18} \cdot t = 1$. Das heißt, daß in $t = \frac{18}{5}$ Stunden das Bassin gefüllt ist. Also wird das Bassin durch beide Hähne in 3 Stunden 36 Minuten gefüllt.

▲ 4 ▲ Zahlenpyramide

Jede Zahl in einem Rechteck dieser Pyramide ist gleich der Summe der Zahlen, die in den beiden Rechtecken unterhalb von diesem stehen.

Ergänzt die fehlenden Zahlen!

Lösung:

		970		
	455		515	
	227	228	287	
127	100	128	159	
71	56	44	84	75

Lösungen zu: Fan-Tan – ein mathematisches Spiel

▲ 1 ▲ In der Partie mit der Anfangs-

stellung $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}$ können alle Stellungen

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ mit $0 \leq a_i \leq n_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$)

auftreten. Die Anzahl aller möglichen Stellungen (einschließlich der Anfangsstellung) ist

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_m + 1).$$

▲ 2 ▲ Der Fehler unterläuft dem Spieler A im dritten Zug; statt auf

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ müßte er auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ziehen.

Lösung zu: Rösselsprung

In der Baumfigur steht:

WIR WÜNSCHEN ALLEN

ALPHALESERN

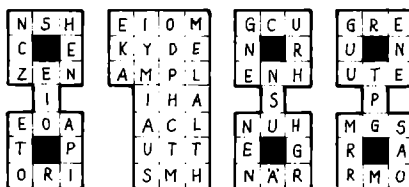
EIN FROHES WEIHNACHTSFEST

SOWIE EIN GESUNDES, GLÜCK-

LICHES UND ERFOLGREICHES

NEUES JAHR!

DIE REDAKTION DER ALPHA



Lösung zu: Jahreswechsel

Je eine Möglichkeit ist:

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 9! : 8! - 8 = 1 \\ 1 + 9 - 8 + 7 = 9 \\ 1 - 9 + 8 + 8 = 8 \\ 1 - 9 + 8 + 7 = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 9 - 8! : 7! = 1 \\ 1 \cdot 9 \cdot 8 : 8 = 9 \\ 1 \cdot 9 - 8 + 7 = 8 \\ 1 \cdot 9 - 8 : 8 = 8 \end{array}$$

Lösungen zu: alpha-heiter

Domino-Quadrat

$$1/2 \quad 2/4 \quad 4/5$$

$$1/2 \quad 5/0$$

$$2/6 \quad 0/4$$

$$6/0 \quad 0/4 \quad 4/4$$

Information aus Dottershausen und Eiersbach

Für Dottershausen gilt: $1\frac{1}{2}$ Hühner legen an 1 Tag 1 Ei.)3 Hühner legen je Tag also 2 Eier.) 1 Huhn legt je Tag $\frac{2}{3}$ Eier.

Für Eiersbach gilt entsprechend: $2\frac{1}{2}$ Hühner legen an 1 Tag 1 Ei. (5 Hühner legen je Tag also ebenfalls 2 Eier.) 1 Huhn legt je Tag $\frac{2}{5}$ Eier. Ist x die Anzahl der Hühner

in jedem Dorf, so gilt:

$$x \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = 40, \quad \frac{4}{15}x = 40,$$

$x = 150$ (Hühner). Wegen

$$150 \cdot \frac{2}{3} = 100 \quad \text{und} \quad 150 \cdot \frac{2}{5} = 60$$

gilt $100 - 60 = 40$.

Also werden 100 bzw. 60 Eier je Tag in den beiden Dörfern gelegt.

Mit 1, 2, 3 und 4

Zum Beispiel: $15 = 1 + 2 + 3 \cdot 4$;

$$16 = 34 : 2 - 1, \quad 17 = 1 \cdot 34 : 2;$$

$$18 = 32 - 14, \quad 19 = 12 + 4 + 3;$$

$$20 = 23 - 4 + 1; \quad 21 = 1 \cdot 24 - 3;$$

$$22 = 2 \cdot 13 - 4; \quad 23 = 3^2 + 14;$$

$$24 = 12 + 3 \cdot 4.$$

Eine interessante Gleichung

Es gibt zwei Lösungen:

$$\frac{8}{74} = 0,108 \quad \text{und} \quad \frac{5}{27} = 0,185.$$

Zwei weihnachtliche Geduldsspiele

a) Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

b) M Mitte; R Rand. I – M, L – R, K – R, I – R, O – M, L – R, O – R, S – M, A – R, U – R, S – R.

Kryptarithmetik

a)

$$224 : 14 = 16$$

$$: \quad : \quad :$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$112 : 28 = 4$$

b)

$$14 \cdot 25 - 87 = 263$$

$$: \quad : \quad + \quad -$$

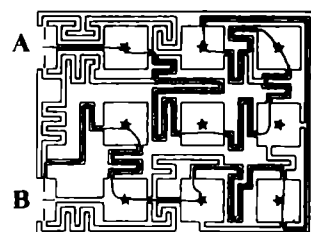
$$15 : 5 + 30 = 33$$

$$- \quad + \quad : \quad +$$

$$23 + 18 : 6 = 26$$

$$187 - 23 + 92 = 256$$

Der Weihnachtsmann ist da!



Mit Kühnheit und Verstand

Der Halbkreis in der Zeichnung hat einen Radius, der halb so groß ist, wie der Radius r des Viertelkreises. Dessen Inhalt A_1 ist

$$A_1 = \frac{\pi}{4} r^2, \text{ der Inhalt des gezeichneten}$$

Halbkreises A_2 ist damit

$$A_2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot r^2}{2 \cdot 4} = \frac{\pi}{8} r^2 = \frac{1}{2} A_1.$$

Die Summe der Flächeninhalte der gerasterten und der gepunkteten Schildhälfte ist somit gleich A_2 , dem Inhalt des gezeichneten Halbkreises. Der Inhalt der gerasterten Teilfläche wird also sowohl durch den Inhalt der schwarz gemalten Fläche des Schildes als auch durch den der gepunkteten Fläche zu A_2 ergänzt. Somit gilt die Behauptung des Malers, w. z. b. w.

Was alles in einem Dreieck steckt

Drei, Dreck, Decke; Deck, Dicker, Recke; Reck, Rede, Ricke; Ede, Ei, Eid; Ecke, Erde, Erik; Idee, Ire, Kreide.

Auf einen Blick

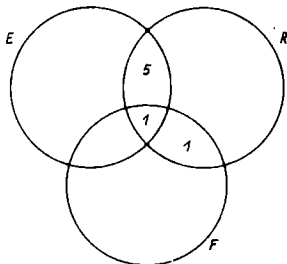
Die Kugeln mit der Nr. 4 und 8 sind dekungs- gleich.

Lösung zu: Wieviel Bonbons sind am Pfefferkuchenhaus?

38 165 172,5 – ein Bonbon hat Hänsel also schon angeknabbert!

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 2/87, Fortsetzung

Ma 10/12 ■ 2801 Es waren 7 Dolmetscher.



Ma 10/12 ■ 2802 Es gilt

- (1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- (2) $2 \sin x \cos x = \sin 2x$,
- (3) $\sin 2x \leq 1$.

Nun ist $(\sin x + \cos x)^2$

$$= \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$= 1 + 2 \sin x \cos x \text{ (wegen (1))},$$

$$= 1 + \sin 2x \text{ (wegen (2))}.$$

Wegen (3) gilt nun $(\sin x + \cos x)^2 \leq 2$.

Es folgt $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ bzw.

$$\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}, \text{ w. z. b. w.}$$

Ma 10/12 ■ 2803 Es mögen beide Körper die Höhe h haben, dann gilt für das Volumen der Pyramide $V_P = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ und für

das des Kreiskegels $V_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ (a sei

die Bezeichnung für die Länge der Grundkante der Pyramide).

Da beide Volumina gleich sein sollen,

$$\text{gilt nun } \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Nach Division durch $\frac{1}{3} h$ und Umstellung

$$\text{nach } r \text{ erhält man } r = \frac{a}{\sqrt{\pi}}.$$

Ma 10/12 ■ 2804 Ein regelmäßiges n -Eck setzt sich aus n gleichschenkligen und paarweise kongruenten Dreiecken zusammen. Der Winkel an der Spitze eines solchen Dreiecks hat die Größe $\frac{360^\circ}{n}$. Be-

zeichnen wir einen jeden Basiswinkel mit α , so gilt nach dem Innenwinkelsatz für Dreiecke

$$\alpha = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2}, \text{ und da sich ein Innen-}$$

winkel des regelmäßigen n -Ecks aus zwei Basiswinkeln eines Dreiecks zusammensetzt, beträgt seine Größe 2α . Es läßt sich nun die folgende Gleichung aufstellen:

$$1440^\circ = n \cdot 2 \cdot \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right),$$

$$1440^\circ = 180^\circ \cdot n - 360^\circ,$$

$$1800^\circ = 180^\circ \cdot n, 10 = n. \text{ Es handelt}$$

sich um ein regelmäßiges Zehneck.

Lösungen zu: Mathematiker in Berlin (von 1708 bis 1855) Heft 5/87

▲ 1 ▲ Platon (427 bis 347 v. u. Z.).

Satz von Pythagoras: Ein Dreieck mit den Katheten a , b und der Hypotenuse c ist genau dann rechtwinklig, wenn

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ ist.}$$

Euklid (4. Jh. v. u. Z.).

▲ 2 ▲ Auf 522 Arten kann die Zahl 50 in sieben verschiedenen Summen zerlegt werden. Leonhard Euler löste das Problem u. a. im 16. Kapitel seines 1748 erschienenen Buches „Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Teil 1“ (deutsche Übersetzung von H. Maser, Berlin 1885).

▲ 3 ▲ Der Mittelpunkt I der Diagonalen $\overline{AC}$ ist $I = \frac{\alpha + \gamma}{2}$, der Mittelpunkt K der

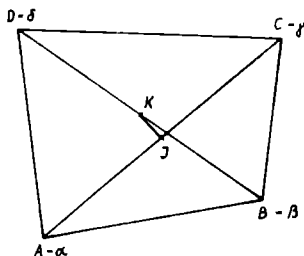
$$\text{Diagonalen } \overline{BD} \text{ ist } K = \frac{\beta + \delta}{2}.$$

$$\text{Dann ist } \overline{IK} = \frac{\beta + \delta}{2} - \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Ferner gilt $\overline{BD} = \delta - \beta$, $\overline{AC} = \gamma - \alpha$,

$$\overline{AB} = \beta - \alpha, \overline{BC} = \gamma - \beta,$$

$$\overline{CD} = \delta - \gamma, \overline{DA} = \alpha - \delta.$$



Hieraus folgt

$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 + |\overline{CD}|^2 + |\overline{DA}|^2$$

$$= |\beta - \alpha|^2 + |\gamma - \beta|^2 + |\delta - \gamma|^2 + |\alpha - \delta|^2$$

$$= (\beta - \alpha)(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta)(\gamma - \beta)$$

$$+ (\delta - \gamma)(\delta - \gamma) + (\alpha - \delta)(\alpha - \delta)$$

und

$$|\overline{AC}|^2 + |\overline{BD}|^2 + (2|\overline{IK}|)^2$$

$$= |\gamma - \alpha|^2 + |\delta - \beta|^2 + |\beta + \delta - \alpha - \gamma|^2$$

$$= (\gamma - \alpha)(\gamma - \alpha) + (\delta - \beta)(\delta - \beta)$$

$$+ (\beta + \delta - \alpha - \gamma)(\beta + \delta - \alpha - \gamma).$$

Weiteres Ausrechnen beider Ausdrücke bestätigt die Gleichheit:

$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 + |\overline{CD}|^2 + |\overline{DA}|^2$$

$$= |\overline{AC}|^2 + |\overline{BD}|^2 + 4|\overline{IK}|^2.$$

Lösungen zu: Mathematiker in Berlin (von 1855 bis 1897) Heft 5/87

▲ 1 ▲ Wir setzen $A = \frac{c_1 + \dots + c_n}{n}$ und

$$a_i = c_i - A \text{ für } 1 \leq i \leq n.$$

$$\text{Dann ist } \sum_{i=1}^n a_i = \left(\sum_{i=1}^n c_i\right) - nA$$

$$= nA - nA = 0. \text{ Damit folgt}$$

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 = \sum_{i=1}^n (A + a_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (A^2 + 2Aa_i + a_i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^n A^2 + 2A \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_i^2$$

$$= nA^2 + \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq nA^2,$$

woraus die Behauptung folgt.

▲ 2 ▲

Zum Beispiel leisten die Funktionen

$$f(x) = c \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{r}x\right) \text{ das Verlangte}$$

(für jede Konstante $c \neq 0$).

▲ 3 ▲ Wir nehmen an, daß $f(x)$ keine beliebigen kleinen positiven Perioden besitzt. Dann existiert ein $c > 0$, so daß $w > c$ für alle positiven Perioden w gilt. Da mit zwei Perioden w' , w auch deren Differenz $w' - w$ eine Periode ist, folgt $|w' - w| > c$. Daher muß unter den Perioden von $f(x)$ eine kleinste positive Periode w existieren. Es sei w' irgendeine weitere positive Periode. Weiterhin sei h die größte natürliche Zahl mit $hw \leq w'$. Wir setzen $w_1 = w' - hw$. Dann ist $0 \leq w_1 < w$. Da aber w_1 auch eine Periode ist, muß $w_1 = 0$ gelten. Folglich sind alle positiven Perioden Vielfache von w . Da mit w' auch $-w'$ eine Periode ist, sind schließlich alle Perioden Vielfache von w und damit ist $f(x)$ einfach-periodisch.

▲ 4 ▲ Nach Voraussetzung existiert eine Folge w_n , $w_n \neq 0$, von Perioden von $f(x)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$. Wenn $f(x)$ differenzierbar ist, gilt

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + w_n) - f(x_0)}{w_n}$$

für jede reelle Zahl x_0 .

Also ist $f'(x_0) = 0$.

Dann ist aber $f(x) = c$ für eine Konstante c . Andererseits hat jede konstante Funktion trivialerweise beliebige kleine Perioden.

▲ 5 ▲ Die Bedingung ist notwendig: es sei d der ggT von m und n . Dann ist

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = 0 \text{ für } a = \frac{m}{d}, b = \frac{n}{d}.$$

Ist also das Kroneckersche Produkt von Null verschieden, muß notwendig $d = 1$ gelten.

Die Bedingung ist hinreichend: Gilt

$\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ für gewisse a, b , so folgt $an = bm$.

Da m und n teilerfremd sind, muß $a \mid m$ und $b \mid n$ gelten. Wegen $0 < a < m$, $0 < b < n$ kann das nicht eintreten.

▲ 6 ▲ Wir bezeichnen das Kroneckersche

Produkt $\prod \left(\frac{a}{m} - \frac{b}{n} \right)$ mit $P(m, n)$.

Es besteht aus $\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$ Faktoren.

Daher ist

$$P(n, m) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} P(m, n).$$

Es folgt dann

$$e(n, m) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} e(m, n),$$

was mit der Behauptung gleichbedeutend ist.

▲ 7 ▲ Zur Berechnung von $e(m, n)$ bestimmen wir die Anzahl der negativen Fak-

toren $\frac{a}{n} - \frac{b}{n}$. Es ist

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} < 0 \Leftrightarrow \frac{a}{m} < \frac{b}{n} \Leftrightarrow a < \frac{bm}{n}.$$

Die Anzahl der natürlichen Zahlen a mit $a < \frac{bm}{n}$ ist aber $\left[\frac{bm}{n} \right]$.

Die Bedingung $a < \frac{m}{2}$ ist auch stets erfüllt,

da aus $b < \frac{n}{2}$ sofort $\frac{bm}{n} < \frac{m}{2}$ folgt.

Daher ist $E = \sum_{b=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{bm}{n} \right]$ die Anzahl der

negativen Faktoren $\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$ im Kronecker-schen Produkt.

Also ist $e(m, n) = (-1)^E$.

▲ 8 ▲ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $l > m$. Nach Voraussetzung ist $l = m + gn$ für eine natürliche Zahl g . Da l, m, n ungerade Zahlen sind, muß g gerade sein: $g = 2h$ für eine natürliche Zahl h . Also ist $l = m + 2hn$. Auf Grund der vorangegangenen Aufgabe gilt

$$e(l, n) = (-1)^E \text{ mit } E = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{kl}{n} \right],$$

$$e(m, n) = (-1)^F \text{ mit } F = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{km}{n} \right].$$

Aus $\frac{kl}{n} = \frac{km}{n} + 2hg$ folgt

$$\left[\frac{kl}{n} \right] = \left[\frac{km}{n} \right] + 2hg.$$

Daher unterscheiden sich E und F um eine gerade Zahl.

Also gilt $(-1)^E = (-1)^F$.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Nietzsch Heft 5/87

Das Schwerpunktviereck ist zum Viereck $ABCD$ ähnlich.

Beweis: Nach der Figur seien die Punkte P, Q, R und S so definiert, daß gilt: P halbiert AC , R halbiert BS und S ist der Schwerpunkt von $\triangle ABC$. Dann gilt: $\triangle BQR$ ist dem $\triangle BSD$ ähnlich, auf Grund des gemeinsamen Winkels $\angle QBR$ und wegen der Seitenverhältnisse $\overline{DB} : \overline{QB} = \overline{SB} : \overline{RB}$.

Rund um den SR 1

Wieviel Bonbons sind am Pfefferkuchenhaus?

Seit September 1985 benutzen wir im Mathematikunterricht den neuen Schulrechner SR 1. Die Arbeit mit diesem Rechner bereitet uns viel Freude, und der SR 1 ist uns ein guter und schneller Helfer. Unsere Mathematiklehrerin, Frau Rupp, hat uns erklärt, daß man mit dem SR 1 auch manche Wörter schreiben kann, indem man den Rechner umdreht und die auf Kopf stehenden Ziffern als Buchstaben deutet. Wir vereinbaren:

$1 \triangleq I, 2 \triangleq Z, 3 \triangleq E, 4 \triangleq h, 5 \triangleq S,$
 $7 \triangleq L, 8 \triangleq B, 9 \triangleq G, 0 \triangleq O.$

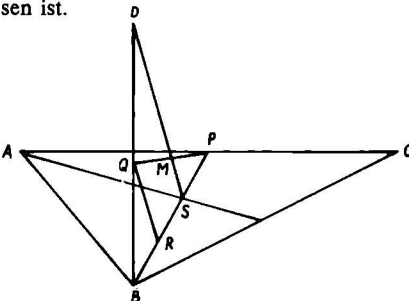
Anstelle des Buchstabens β wollen wir wie auf alten Schreibmaschinen ss schreiben. Groß- und Kleinschreibung beachten wir nicht. Wir haben sehr viele Wörter so darstellen können. In der folgenden Geschichte sind einige versteckt:

Somit ist aber $\overline{QR} \parallel \overline{MS}$ und M halbiert $\overline{PQ}$. Weiterhin gilt

$$\overline{MS} = \frac{1}{2} \overline{QR} = \frac{1}{4} \overline{SD}, \text{ d. h. } \overline{DM} = 3 \overline{MS}.$$

Damit ist gezeigt, daß der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ das Bild von D bei zentrischer Streckung in M mit dem Streckungsfaktor $-\frac{1}{3}$ ist.

Analog schließt man für die Schwerpunkte der anderen eingangs genannten Dreiecke, womit die behauptete Ähnlichkeit bewiesen ist.



Bemerkung: Man kann jede andere Beziehung für die beiden Vierecke zeigen, die bei Ähnlichkeit erhalten bleiben (z. B. ist der Schwerpunkt S_{ABC} der Mittelpunkt des Kreises durch die Schwerpunkte $S_{BCD}, S_{CDA}, S_{DAB}$, so ist D der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$).

Hänsel und Gretel lebten mit ihren Eltern in einem kleinen Haus. Der Vater ging oft mit dem Beil in den Wald, um Holz zu hacken. Weil die Eltern sehr arm waren, schickten sie die Kinder fort. Als es noch hell war, gab es im Wald viel zu sehen. Hänsel beobachtete einen Zobel und einen Igel, Gretel sah einen Zeisig. An einem See erblickten die Kinder eine Seelilie, über der eine Libelle ihre Kreise zog. Als es aber dunkel wurde, bekamen sie Angst. Durch die Bäume schimmerte ein gelbes Licht.

„Ho, ho“, rief Hänsel, aber Gretel meinte: „Sei leise!“ Sie standen vor dem Pfefferkuchenhaus. Hänsel kletterte an einem Seil auf das Dach und biss in einen Kuchen. „Los“, rief er, „hole eine Leiter und eine Bohle, damit wir Schokolade von der Esse abbrehen können.“ Da aber erschien die Hexe, sie hatte stechende, boese Augen, und rief: „Wer hat von meinem Lebkuchen gegessen? Kommt her, liebe Kinder, ich habe Marzipan und Gelee in Hülle und Fülle für euch.“ Die Kinder ließen sich von der Hexe täuschen. Gretel mußte nun im Haus helfen, den Hänsel aber sperrte die boese Hexe in ein Gelaß, das mit einem Riegel verschlossen war. Er bekam leckere Speisen, Sosse und Eis, damit er schnell dick werde. Gretel ahnte Schlimmes, als sie im Backofen Feuer machen sollte. Sie tat so, als ob sie das nicht könne, und bat die Hexe: „Zeige es mir bitte!“ Die Hexe band sich ein Seil um den Leib und kroch in den Ofen.

Hänsel hatte alles beobachtet und rief: „Schnell, schieb die Olle rein, mach die Klappe zu und hol mich aus dem Käfig. Wir haben einen Sieg errungen!“ Die Kinder freuten sich und aßen sich satt. Hänsel stopfte sich Bonbons in die Hose. Dann wollten die Kinder nach Hause. Vater und Mutter freuten sich sehr, der Hofhund aber begrüßte sie mit freudigem Gebell.

*Sucht alle Wörter, die ihr mit dem SR 1 schreiben könnt, heraus (die mehrfach vorkommen werden so oft berücksichtigt, wie sie in der Geschichte vorkommen). Stellt die Wörter mit dem SR 1 dar und addiert die zugehörigen Zahlen. Endet ein Wort auf den Buchstaben O, so wollen wir es als Dezimalzahl 0. * * * darstellen. Dazu kann man den Speicher benutzen (Taste M+). Ich habe mir gedacht, daß die (richtige) Summe die Zahl der Bonbons am Hexenhaus sein soll. Habt ihr die Lösung gefunden?* Susanne Schmidt, Klasse 9, E.-M.-Arndt-OS Greifswald



Jahreskalender 1988

Heft 5/87

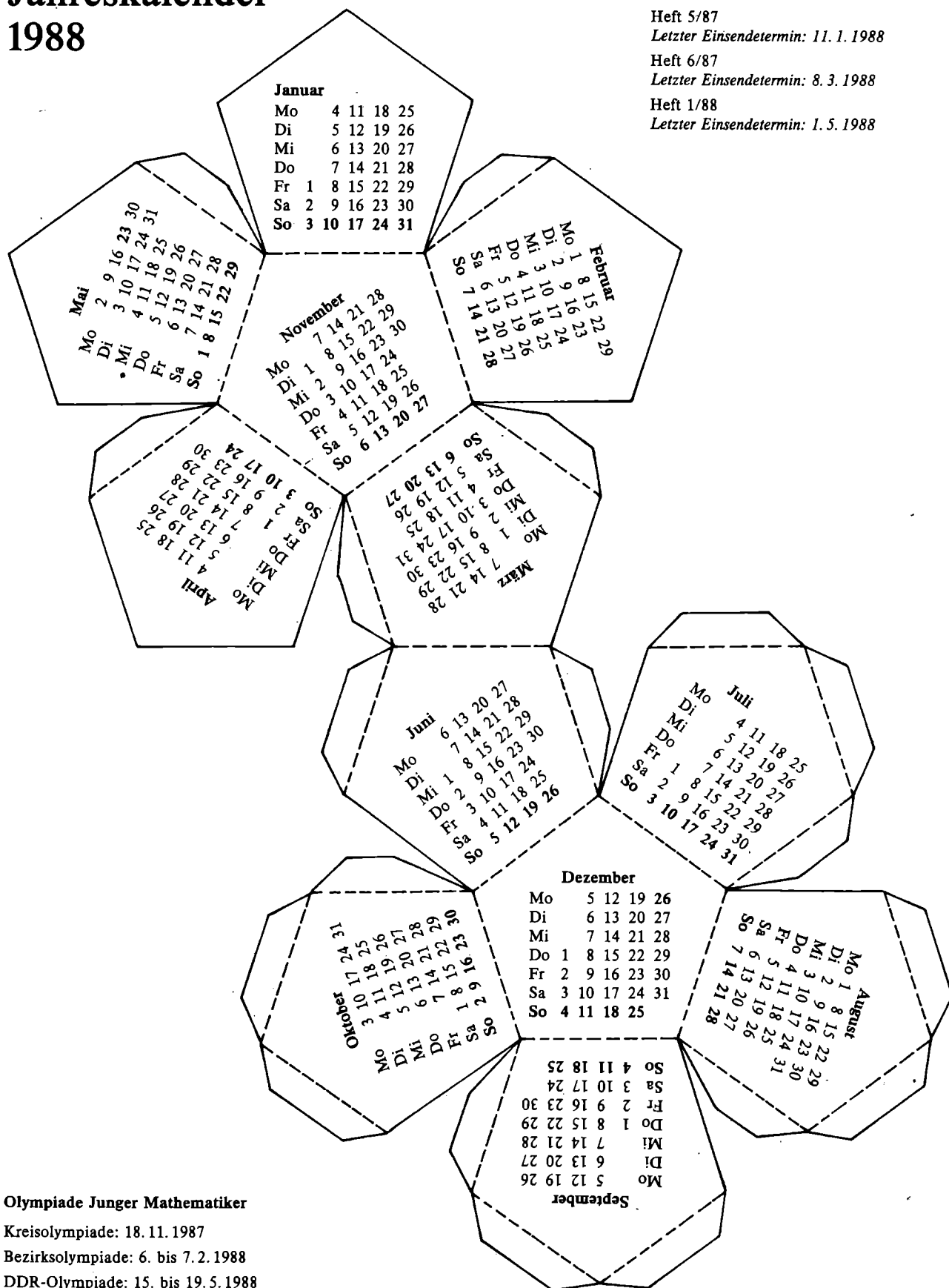
Letzter Einsendetermin: 11. 1. 1988

Heft 6/87

Letzter Einsendetermin: 8. 3. 1988

Heft 1/88

Letzter Einsendetermin: 1. 5. 1988



Olympiade Junger Mathematiker

Kreisolympiade: 18. 11. 1987

Bezirksolympiade: 6. bis 7. 2. 1988

DDR-Olympiade: 15. bis 19. 5. 1988