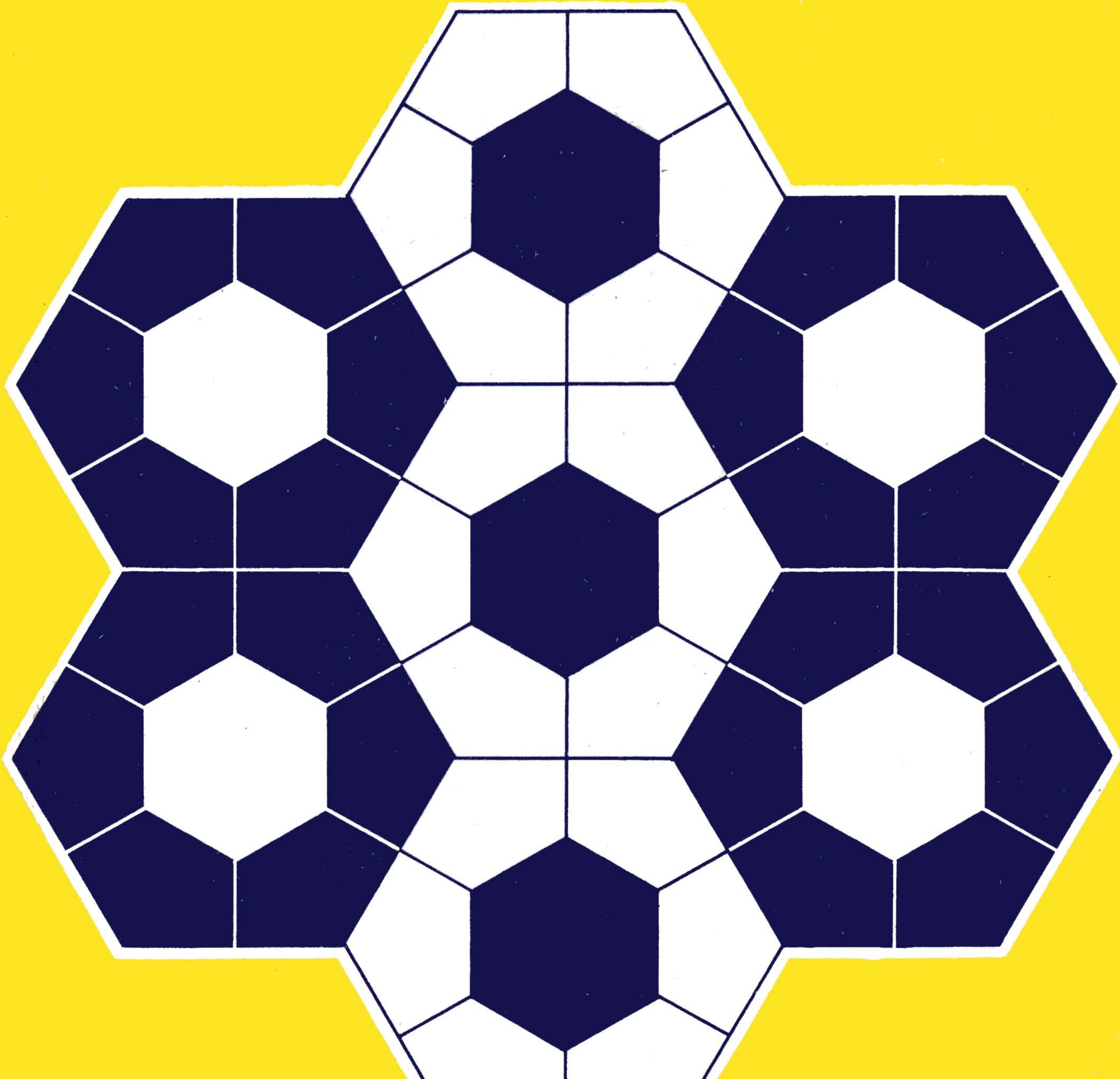
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
12. Jahrgang 1978
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Tracksdorf, Leipzig (S. 1); Kaczmarczyk, Berlin (S. 14); H. Jankofsky, Berlin (S. 15)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 24. Oktober 1977

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Das arithmetisch-geometrische Mittel

Teil 1

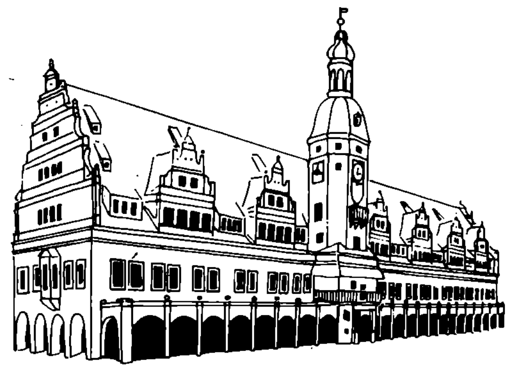


Bild 1

Arithmetisches Mittel

Alexander bekommt die Aufgabe, einen Waldweg gegebener (aber unbekannter) Länge l_0 als Strecke für das Lauftraining auszumessen. Er führt fünf Messungen aus und erhält folgende Meßwerte:

$l_1 = 3189{,}2$ m, $l_2 = 3191{,}8$ m,
$l_3 = 3190{,}6$ m, $l_4 = 3193{,}4$ m,
$l_5 = 3188{,}0$ m.

Es ist naheliegend, die Zahl

$$l = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5}{5} = \frac{15953}{5} = 3190{,}6$$

als den Mittelwert der gemessenen Werte zu bezeichnen und als zuverlässigsten Wert anzusehen. (Das Mittel l wird im allgemeinen von der richtigen Länge l_0 der gemessenen Strecke abweichen.)

Definition: Das arithmetische Mittel m von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist die Zahl

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Daß die Wahl des *arithmetischen Mittels* als zuverlässigster Wert der Messung sinnvoll ist, zeigen die folgenden Überlegungen. Bei n Messungen einer gesuchten Größe (z. B. die Länge einer Waldlaufstrecke) seien die Meßwerte $l_1, l_2, \ldots, l_n$ erzielt worden, die mehr oder weniger voneinander abweichen. (Im Beispiel ist $n = 5$.) Es sei l' ein beliebiger möglicher Wert der gemessenen Größe. Die Differenzen $d_1 = l_1 - l'$, $d_2 = l_2 - l'$, $\ldots$, $d_n = l_n - l'$ sind die Abweichungen der gemessenen Größen von diesem Wert. (Im Beispiel gilt, falls $l' = 3190$ m, $d_1 = -0{,}8$ m, $d_2 = 1{,}8$ m, $d_3 = 0{,}6$ m, $d_4 = 3{,}4$ m, $d_5 = -2{,}0$ m.) Einige Abweichungen sind positiv, andere negativ. Am günstigsten wäre ein Wert l', für den die gesamte Abweichung in gewissem Sinne so klein wie möglich ist. *Gauß* nahm nicht die Abweichungen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ selbst, sondern ihre Quadrate $d_1^2, d_2^2, \ldots, d_n^2$ als Maß für die Ungenauigkeit. Gesucht ist nun der Wert von l', für den die Summe der Quadrate der Abweichungen minimal, also so klein wie irgend möglich, ist: Für welches l' ist

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 = (l_1 - l')^2 + (l_2 - l') + \ldots + (l_n - l')^2$$ minimal?

Es gilt folgende Aussage: Sind $d_1 = l_1 - l'$, $d_2 = l_2 - l'$, $\ldots$, $d_n = l_n - l'$ die Abweichungen von n gegebenen (gemessenen) Zahlen $l_1, \ldots, l_n$ von einer Zahl l', so wird die Summe ihrer Quadrate

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2$$

ein Minimum genau dann, wenn l' das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist,

$$l' = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n}.$$

(Dieser Satz ist der Ausgangspunkt für die „Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate“!)

(Im Beispiel ist, falls $l' = 3190$ m ist, $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 0{,}64 + 3{,}24 + 0{,}36 + 11{,}56 + 4{,}0 = 19{,}8$. Für das arithmetische Mittel $l' = l = 3190{,}6$ der gemessenen Werte ist

$d_1 = -1{,}4$, $d_2 = 1{,}2$, $d_3 = 0$,
$d_4 = 2{,}8$, $d_5 = -2{,}6$ und

$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 1{,}96 + 1{,}44 + 0 + 7{,}84 + 6{,}76 = 18{,}0$.

Wie auch l' gewählt wird, nach dem Satz ist dieser Wert 18,0 für die Summe der Quadrate der Abweichungen der kleinstmögliche Wert. Er ergibt sich, wenn man für l' das arithmetische Mittel $\frac{1}{5}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5)$ der Meßwerte nimmt.)

Wir bemerken, daß für das arithmetische Mittel die Summe der positiven Abweichungen gleich der Summe der negativen ist, d. h. $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 0$. In der Tat, es ist $d_1 = l_1 - l$, $d_2 = l_2 - l$, $\ldots$, $d_n = l_n - l$ und damit

(1) $\quad d_1 + d_2 + \ldots + d_n = l_1 + l_2 + \ldots + l_n - nl = nl - nl = 0.$

Der oben angegebene Satz kann auch leicht bewiesen werden:

Es ist $d_i = l_i - l' = (l - l') + (l_i - l)$ (worin l das arithmetische Mittel sei), i ist dabei eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Dann gilt

$$d_i^2 = (l - l')^2 + 2(l - l')(l_i - l) + (l_i - l)^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Addition dieser n Gleichungen ergibt

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 = n(l - l')^2 + (l_1 - l)^2 + (l_2 - l)^2 + \ldots + (l_n - l)^2.$$

[Die Summe der mittleren Glieder ist Null: $2(l - l')(l_1 + l_2 + \ldots + l_n - nl) = 0$, vgl. (1).]

Somit ist stets $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 = (l_1 - l')^2 + (l_2 - l')^2 + \ldots + (l_n - l')^2 \geqq (l_1 - l)^2 + (l_2 - l)^2 + \ldots + (l_n - l)^2$.

Das Gleichheitszeichen steht aber auch nur für $l' = l$. Damit ist eine Haupteigenschaft des arithmetischen Mittels bewiesen.

Harmonisches Mittel

Svante legt mit seinem Fahrrad eine Strecke von der Länge s mit einer Geschwindigkeit von $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück; den umgekehrten Weg gleicher Länge durchfährt er mit einer Geschwindigkeit von nur $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie groß ist seine mittlere Geschwindigkeit für die Gesamtfahrzeit? (Die Aufenthaltsdauer am Wendepunkt werde vernachlässigt.)

Die mittlere Geschwindigkeit ist hier nicht gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Geschwindigkeiten, also nicht

$$\frac{20 + 12}{2} = 16\,\frac{\text{km}}{\text{h}}!$$

Setzen wir $v_1 = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2 = 12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, so ist (da Geschwindigkeit = Weg : Zeit) $t_1 = \frac{s}{v_1}$ die Zeit für die Hinfahrt und $t_2 = \frac{s}{v_2}$ die Zeit für die Rückfahrt. Die Gesamtfahrzeit ist somit $t = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} = s\frac{v_2 + v_1}{v_1 v_2}$. Die durchschnittliche Geschwindigkeit ist daher

(2) $$v = \frac{2s}{t} = \frac{2s}{s\frac{v_2 + v_1}{v_1 v_2}} = 2 \cdot \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Das Einsetzen der Werte für v_1 und v_2 ergibt $v = 2\frac{20 \cdot 12}{20 + 12} = 15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Die Formel (2) läßt sich auch in der Form

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)$$

schreiben; v ist das *harmonische Mittel* der Zahlen v_1, v_2.

Definition: Das harmonische Mittel h von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Noch ein Beispiel für das harmonische Mittel: *Cornelia* kauft im Selbstbedienungsladen für 3,60 M Apfelsinen, das Stück zu 0,60 M und außerdem auch für 3,60 M Apfelsinen, das Stück zu 0,90 M. Welches ist der mittlere Preis für die gekauften Apfelsinen?

Sie hat 6 Apfelsinen zu 0,60 M und 4 Apfelsinen zu 0,90 M gekauft. Bezeichnet man den mittleren Preis mit h, so muß gelten $6h + 4h = 7{,}20$, also $10h = 7{,}20$, $h = 0{,}72$ M. h ist das *harmonische Mittel* der Preise 0,60 und 0,90:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0{,}6} + \frac{1}{0{,}9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{6} + \frac{10}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{30 + 20}{18}\right) = \frac{25}{18},\ h = \frac{18}{25} = 0{,}72.$$

Geometrisches Mittel

Cornelia und *Svante* weilen in Leipzig. Bei einem Stadtbummel führt ihr Weg vorbei an der Thomaskirche hin zum Markt. An der Ostseite dieses Platzes nimmt sie ein langes zweigeschossiges Haus mit einem stattlichen Satteldach, abgetreppten Giebeln und einem Turm gefangen. Es ist ein reizvolles Gebäude, dieses älteste deutsche Renaissancerathaus (16. Jahrhundert). *Cornelia* erfreut sich an den Zwerchgiebeln im Dachgeschoß. Dem *Svante* fällt besonders die Asymmetrie am Alten Rathaus auf.

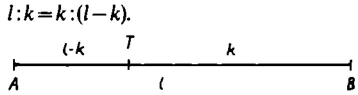
Nicht in der Mitte ist der sehenswerte aus einem viereckigen Unter- und einem achteckigen Oberteil bestehende Turm mit barocker Haube und Laterne errichtet. Zwei der sechs Zwerchgiebel befinden sich nördlich, vier südlich vom Turm. Trotz dieser Asymmetrie finden *Cornelia* und *Svante* das Bauwerk recht harmonisch.

Welche Größenverhältnisse hat der Architekt hier für die künstlerische Gestaltung verwendet?

Bezeichnen wir mit l die Länge der Vorderfront des Rathauses, ferner mit T den Fußpunkt der Turmspitze und mit k die Länge der längeren der beiden durch die Teilung (in T) erhaltenen Teilstrecken, so gilt folgende Proportion:

$$l:k=k:(l-k).$$

Bild 2



Die ganze Strecke hat zum größeren Teil dasselbe Verhältnis wie der größere Teil zum kleineren. Man spricht von der *goldenen Teilung* der Strecke $\overline{AB}$.

Der Turm des Leipziger Alten Rathauses teilt die Vorderfront im Verhältnis des „Goldenen Schnittes"!

(Wird die kleine Strecke auf der großen abgetragen, so wird dadurch die große Strecke wiederum im goldenen Schnitt geteilt. Wegen dieser Fortsetzbarkeit der Teilung spricht man auch von *stetiger Teilung*.)

Das goldene Verhältnis $s=\frac{l}{k}=\frac{k}{l-k}$ läßt sich leicht berechnen. Aus $\frac{l}{k}=\frac{k}{l-k}$ folgt $l^2-lk=k^2$ und damit $\left(\frac{l}{k}\right)^2-\left(\frac{l}{k}\right)=1$. $s=\frac{l}{k}$ genügt somit notwendigerweise der Gleichung

$$s^2-s=1.$$

Alle Lösungen der quadratischen Gleichung

(3) $\quad x^2-x=1$

sind leicht zu bestimmen. Es gilt (3), daher auch $x^2-x+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

Dieses bedeutet

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4},$$

also (indem wir auf beiden Seiten die Quadratwurzeln ziehen)

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Für $x\geqq\frac{1}{2}$ ist $\left|x-\frac{1}{2}\right|=x-\frac{1}{2}$ und damit $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Für $x<\frac{1}{2}$ ist $\left|x-\frac{1}{2}\right|=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$ und damit $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Jede Lösung von (3) hat notwendigerweise diese Form. Daß $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ auch wirklich Lösungen sind, bestätigt man leicht. Da $s>0$ ist, muß $s=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gelten.

Da $\sqrt{5}$ keine rationale Zahl ist, ist auch s irrational. Der unendliche nicht-periodische Dezimalbruch beginnt mit

$s=1{,}61803\ldots$

Bei einer im goldenen Schnitt geteilten Strecke l betragen die Teilstrecken

$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\cdot l=0{,}618\ldots\cdot l$ und

$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\cdot l=0{,}382\ldots\cdot l.$

Aus $\frac{l}{k}=\frac{k}{l-k}$ folgt $k^2=l(k-l)$,

also $k=\sqrt{l(l-k)}$.

Definition: Für n positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ heißt

$$g=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

ihr geometrisches Mittel.

Beim *goldenen Schnitt* ist somit der eine (größere) Abschnitt gleich dem geometrischen Mittel aus der gesamten Strecke und dem anderen (kleineren) Abschnitt.

Für zwei Zahlen $a>0, b>0$ ist das geometrische Mittel $g=\sqrt{ab}$. Daher gilt $g^2=ab$ und damit $a:g=g:b$, d. h. g ist die mittlere Proportionale von a und b.

Beim goldenen Schnitt wird eine Strecke $\overline{AB}$ innen so geteilt, daß der größere Teilabschnitt $\overline{BT}$ mittlere Proportionale zwischen dem kleineren und der gesamten Strecke wird, d. h. daß gilt: $\overline{AB}:\overline{BT}=\overline{BT}:\overline{AT}$.

$h\leqq g\leqq m$

Für das arithmetische Mittel $m=\frac{a+b}{2}$, das harmonische Mittel h (mit $\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$) und das geometrische Mittel $g=\sqrt{ab}$ zweier positiver Zahlen a und b ($a\geqq b>0$) gilt:

$$b\leqq h\leqq g\leqq m\leqq a.$$

In der Tat, es ist

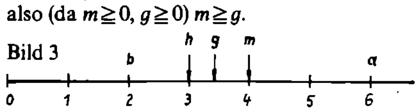
$$(m+g)(m-g)=m^2-g^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$

$$=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geqq 0, \text{ d. h. } m^2\geqq g^2,$$

also (da $m\geqq 0$, $g\geqq 0$) $m\geqq g$.

Bild 3



$b=2, a=3$

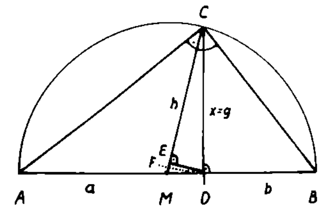
$m=\frac{2+6}{2}=4, h=\frac{2\cdot 2\cdot 6}{2+6}=\frac{24}{8}=3$

$g=\sqrt{2\cdot 6}=3{,}464\ldots$

Es ist ferner

$$h=\frac{2ab}{a+b}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{(\sqrt{ab})^2}{\frac{a+b}{2}}=\frac{g^2}{m}.$$

Bild 4



Über der Gesamtstrecke $\overline{AB}=a+b$ ist der Halbkreis geschlagen. Sein Mittelpunkt sei M. Sein Radius ist $m=\frac{a+b}{2}$. m ist offenbar größer als die Höhe x des rechtwinkligen Dreiecks ABC. Nach dem Höhensatz gilt für die Höhe $x^2=ab$, also $x=\sqrt{ab}=g$. Somit ist $g\leqq m$.

Aufgabe: Zeige, daß $\overline{EC}=h$ ist. (Offenbar ist dann $h\leqq g$.)

Wäre $h>g$, so auch $\frac{g^2}{m}>g$, d. h. $g^2>gm\geqq gg=g^2$ (wegen $m\geqq g$), d. h. $g^2>g^2$, was ein Widerspruch ist. Somit gilt $h\leqq g$. Nebenbei ergab sich $\sqrt{ab}=g=\sqrt{hm}$.

Fortgesetzte Mittelwertbildung

Es seien $a\geqq b>0$ positive Zahlen. Wir bilden

$$a_1=\frac{a+b}{2}, b_1=\sqrt{ab}.$$

Dann gilt auch $a_1\geqq b_1>0$.

Man kann erneut

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}, b_2=\sqrt{a_1b_1} \text{ bilden.}$$

Diese Mittelwertbildung setzen wir beliebig fort:

$$a_3=\frac{a_2+b_2}{2}, b_3=\sqrt{a_2b_2},$$

$$a_4=\frac{a_3+b_3}{2}, b_4=\sqrt{a_3b_3}\ \ldots, \text{ usw.}$$

Betrachten wir einige Beispiele:

$a=6, b=2$

$a_1=4, b_1=3,46410\ldots$

$a_2=3{,}73205\ldots, b_2=3{,}72242\ldots$

$a_3=3{,}72723\ldots, b_3=3{,}72723\ldots$

...

$a=77, b=3$

$a_1=40, b_1=15{,}19868\ldots$

$a_2=27{,}59934\ldots, b_2=24{,}65659\ldots$

$a_3=26{,}12757\ldots, b_3=26{,}08650\ldots$

$a_4=26{,}10724\ldots, b_4=26{,}10723\ldots$

$a_5=26{,}10724\ldots, b_5=26{,}10724\ldots$

...

Die in den Tabellen gegebenen Zahlenbeispiele (mit einer erstaunlich großen Anzahl von angegebenen Dezimalstellen) sind von *C. F. Gauß*.

Durch die *fortgesetzte Mittelwertbildung* erhalten wir zwei Zahlenfolgen:

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$
$$b, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$$

Bild 5a

$a=\sqrt{2},\ b=1$

$a\ =1{,}41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 2$
$a_1=1{,}20710\ 67811\ 86547\ 52440\ 1$
$a_2=1{,}19815\ 69480\ 94634\ 29555\ 9$
$a_3=1{,}19814\ 02347\ 93877\ 20908\ 3$
$a_4=1{,}19814\ 02347\ 35592\ 20744\ 1$
$b\ =1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
$b_1=1{,}18920\ 71150\ 02721\ 06671\ 7$
$b_2=1{,}19812\ 35214\ 93120\ 12260\ 7$
$b_3=1{,}19814\ 02346\ 77307\ 20579\ 8$
$b_4=1{,}19814\ 02347\ 35592\ 20743\ 9$

Die Glieder dieser Folgen sind positive Zahlen und lassen sich beliebig weit berechnen

$$a_1=\frac{a+b}{2},\ b_1=\sqrt{ab},$$
$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ b_2=\sqrt{a_1b_1},$$
$$a_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2},\ b_k=\sqrt{a_{k-1}b_{k-1}}.$$

(für $k=3, 4, \ldots$).

Wir beschreiben einige Eigenschaften dieser Zahlenfolgen. Ist $a=b$, so sind alle Glieder beider Folgen $=a=b$. Es gilt ja $\frac{a+b}{2}=\frac{2a}{2}=a$ und $\sqrt{ab}=\sqrt{a^2}=|a|=a$ (da $a>0$).

Wir setzen im folgenden $a\neq b$, also $a>b$, voraus. (Man vergleiche die folgenden Aussagen mit den angegebenen Zahlenbeispielen.)

1) Es ist $b_1<a_1$, $b_2<a_2$, $b_k<a_k$ (für alle k), d. h., jedes Glied der unteren Folge ist kleiner als das entsprechende der oberen Folge.

Dies folgt aus der schon bewiesenen Größenbeziehung zwischen dem geometrischen Mittel g und dem arithmetischen Mittel m zweier (verschiedener) positiver Zahlen: $g<m$.

2) Es ist $a>a_1>a_2>a_3\ \ldots$, d. h. die Zahlen der oberen Folge nehmen ab.

In der Tat, wegen $b<a$ ist $\frac{b}{2}<\frac{a}{2}$ und damit $a_1=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}<\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$. Ebenso folgt $a_2<a_1$, $a_3<a_2$, usw.

3) Es ist $\ldots>b_3>b_2>b_1>b$, d. h. die Zahlen der unteren Folge nehmen zu.

Es ist ja $a>b$, also $ab>b^2$, und damit $b_1=\sqrt{ab}>\sqrt{b^2}=|b|=b$ (weil $b>0$ ist). Ebenso folgt $b_2>b_1$, $b_3>b_2$, usw.

4) Beim Nachweis von $m\geqq g$ zeigten wir, daß $(m+g)(m-g)=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ ist. Hieraus folgt

$$\frac{m-g}{a-b}=\frac{a-b}{4(m+g)}=\frac{a-b}{2(a+b)+4g}.$$

Aus $0<2b+2g$ folgt $a<a+2b+2g$,

$a-b<a+b+2g$, $\frac{a-b}{a+b+2g}<1$, $\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b+2g}\right)$ $=\frac{a-b}{2(a+b)+4g}<\frac{1}{2}$. Es ist also stets $\frac{m-g}{a-b}<\frac{1}{2}$, d. h.

(4) $\quad m-g<\frac{1}{2}(a-b)$. Hieraus folgt

$$a_1-b_1<\frac{1}{2}(a-b),$$

Bild 5b

$a=1,\ b=0{,}2$

$a\ =1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
$a_1=0{,}60000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
$a_2=0{,}52360\ 67977\ 49978\ 96964\ 1$
$a_3=0{,}52080\ 54052\ 86123\ 66484\ 5$
$a_4=0{,}52080\ 16381\ 12999\ 95414\ 3$
$a_5=0{,}52080\ 16381\ 06187$
$b\ =0{,}20000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
$b_1=0{,}44721\ 35954\ 99957\ 93928\ 2$
$b_2=0{,}51800\ 40128\ 22268\ 36005\ 0$
$b_3=0{,}52079\ 78709\ 39876\ 24344\ 0$
$b_4=0{,}52080\ 16380\ 99375$
$b_5=0{,}51080\ 16381\ 06187$

$$a_2-b_2<\frac{1}{2}(a_1-b_1)<\frac{1}{4}(a-b)$$
$$a_3-b_3<\frac{1}{2}(a_2-b_2)<\frac{1}{8}(a-b),\ \text{usw.},$$

allgemein

$$a_k-b_k<\frac{1}{2^k}(a-b).$$

H. Pieper

Der Beitrag wird in Heft 2/78 fortgesetzt mit: *Das arithmetisch-geometrische Mittel; Lemniskate* und *Ellipse; Das arithmetisch-geometrische Mittel bei C. F. Gauß.*

Dir – Mathematik

Begegnete einst mir ein Schüler.
Der klagte sein Weh mir, sein Leid.
Du seist so schwer ihm verständlich.
Du raubtest ihm Kraft und die Zeit.

Der Schüler gestand es mir ehrlich:
Er sei von Dir wie gebannt.
Doch hat er, so mußt ich ihm sagen,
Dein Wesen ein wenig verkannt.

Wer Dich packt, der hat den Schlüssel
für Zeitgewinn und Kraft.
Der weiß um die Welt der Dinge,
um Deine Meisterschaft.

Du bist so logisch, so strenge.
Doch das ist an Dir grade schön.
Deine Sprache, sie ist so deutlich.
Wie sollt man Dich nicht verstehn?

Du faßt das vielfältige Einzel
so wundersam allgemein,
daß dieses erstrahlet im Lichte,
in hellem, verständlichem Schein.

Der Weg zu Deinen Höhen
er ist gepflastert mit Schweiß,
mit Lust und Liebe zur Arbeit,
mit menschlich forschendem Fleiß.

Doch wer Deine Höhen erklommen,
bereut nicht die Müh, die er gab.
Er blicket von Deinen Gipfeln
in tiefere Welten hinab.

Er sieht das Wesen der Dinge,
den Raum in Vielfalt und Zahl.
Er kennt die Zusammenhänge,
vergessen der Mühe Qual.

Roland Mildner

Das macht Pythagoras verlegen

Teil 2

4. Chemie

In den Naturwissenschaften, die zunächst nur mittelbar mit Mathematik etwas zu tun haben, zeigte sich, daß die pythagoreische Zahlenlehre wenigstens als Arbeitshypothese Berechtigung hat und den Forscher auf fundamentale Erkenntnisse bezüglich seines Faches führen kann. Vor allem ist es die Wertigkeit von Elementen, die bei quantitativen Untersuchungen immer wieder auf das Verhältnis von ganzen Zahlen führt. Eine methodische Voraussetzung zur Aufdeckung dieser Zusammenhänge bestand in der Einführung der Waage als Arbeitsinstrument. Erst sie ermöglichte eine quantitative Analyse chemischer Prozesse. Es war das Verdienst des französischen Chemikers Antoine-Laurent Lavoisier (1743 bis 1794), durch systematische Wägungen Klarheit in die Natur chemischer Reaktionen, z. B. bei der Verbrennung eines Stoffes, gebracht zu haben.

Mittels der von Lavoisier entwickelten methodischen Grundlagen konnte der englische Chemiker und Physiker John Dalton (1766 bis 1844) verschiedene Gesetze aufstellen, die ihn zum wissenschaftlichen Begründer der Atomtheorie werden ließen. Zum Beispiel besagt das von ihm gefundene Gesetz der konstanten multiplen Proportionen: Die Massen, in denen ein Element mit einer anderen bestimmten Menge eines anderen Elementes zu verschiedenen Verbindungen zusammentritt, stehen im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen.

Avogadro (1776 bis 1856) kam auf Grund seiner quantitativen Experimente zu der Erkenntnis: Verschiedenartige Gase enthalten bei gleichem Druck und gleicher Temperatur die gleiche Anzahl Moleküle pro Kubikzentimeter. Der Hinweis auf die Loschmidtsche Zahl und das periodische System der Elemente (Mendelejew, Meyer) mag in diesem Zusammenhang genügen.

5. Biologie

Um 1900 stellte der Botaniker Carl Correns (1864 bis 1933) mit zwei Varietäten der japanischen Wunderblume (Mirabilis Jalapa) folgenden Versuch an: Er kreuzte die rot blühende mit der weiß blühenden Art dieser sonst in allen anderen Merkmalen übereinstimmenden Blume. Die Tochtergeneration dieser Kreuzung wies durchgehend rosa Blüten auf. Sie bildet den sogenannten intermediären Bastard. Durch Bestäubung der Blüten dieser Generation unter sich ergibt sich die Enkelgeneration. Hier war nach dem äußeren Erscheinungsbild eine Aufspaltung in drei Gruppen zu verzeichnen. 25% der Enkelgeneration hatten rote Blüten, 50% rosa Blüten und 25% weiße Blüten. Die Enkelgeneration spaltete sich also im Verhältnis 1:2:1 auf. Daraus ist zu folgern, daß sich die Erbträger (Gene) des Elternpaares nach den Gesetzen der Kombinatorik miteinander verbinden.

Auch mit Erbsen, die sich in genau zwei Merkmalen unterscheiden, wurde experimentiert. Durch Kreuzung einer Sorte, die gelbe und glatte Samen liefert mit einer anderen, die grüne und kantige Samen hervorbringt, ergaben sich in der Enkelgeneration alle möglichen Verbindungen von Erbanlagen. Die auftretenden Zahlenverhältnisse stimmen mit denen überein, die nach den Gesetzmäßigkeiten der Kombinatorik zu erwarten sind. Auf die sich hieraus bietenden Möglichkeiten für die Pflanzenzüchtung soll hier nicht eingegangen werden.

Ähnliche Versuche hatte bereits 1866 der Augustinerabt Gregor Mendel in Brünn (Brno) durchgeführt. Sein Vortrag und eine Veröffentlichung zu diesem Gegenstand fanden damals jedoch keine Beachtung. Die von Correns, Tschermak und de Vries um 1900 wiederentdeckten Vererbungsregeln werden deshalb nach dem Erstentdecker „Mendelsche Gesetze" genannt. Mit diesen Gesetzen hat sich die Zahl im pythagoreischen Sinne in der Botanik ein Heimatrecht erworben.

6. Physik

Schon im Altertum lehrte Demokrit (um 460 bis 370 v.u.Z.), daß die Welt aus unendlich vielen sich im unendlichen leeren Raum bewegenden Atomen besteht. Die Einzeldinge entstehen und vergehen durch Vereinigung und Trennung der Atome. Die Mannigfaltigkeit der Dinge ist bedingt durch die Unterschiedlichkeit von Gestalt, Lage und Anordnung der Atome. Handfeste experimentelle Befunde, die diese Hypothese bestätigt hätten, gab es zu dieser Zeit noch nicht. Im folgenden werden experimentelle Resultate von zwei mikrokosmischen Vorgängen angeführt, zu deren Beschreibung die Zahl im pythagoreischen Sinne erfolgreich anwendbar ist.

Johann Jakob Balmer (1825 bis 1898) stellte 1885 zur rechnerischen Erfassung der den Spektrallinien des Wasserstoffatoms im sichtbaren Teil des Spektrums zugeordneten Frequenzen folgende Formel auf:

$$\nu_n = R\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n^2}\right) \text{ mit } n=3,4,5,\ldots \qquad (*)$$

In der Formel (*) ist R eine konstante Größe (Rydberg-Konstante) mit $R=3291\cdot 10^9\,\text{sec}^{-1}$. Jeder Spektrallinie dieser Balmer-Serie läßt sich daher ein rationales Vielfaches der Rydberg-Konstanten zuordnen.

Joseph John Thomson (1856 bis 1940) stellte zwischen zwei horizontalen Platten eines Kondensators einen mit Wasserdampf übersättigten Raum her und ließ in diesen einen Kathodenstrahl fallen. Dabei darf der Strahl keine der Platten treffen. Ein Kathodenstrahl ionisiert die von ihm durchstrahlte Luft, indem jedes fliegende Elektron genau ein Luftmolekül in ihre Ionen aufspaltet. In Luft, die mit Wasserdampf übersättigt ist, kondensiert sich an den negativen Elektronen der Wasserdampf zu Nebeltröpfchen. Jeder Tropfen umschließt genau ein freies Elektron mit seiner Ladung als Kondensationskern. Läuft der Versuch eine gewisse Zeit, wird die untere Platte durch die auffallenden Tropfen schwerer und zugleich meßbar elektrisch aufgeladen. Durch Division der nach einer gewissen Laufzeit gemessenen Ladung durch die Anzahl der aufgefallenen Nebeltröpfchen erhält man die negative Ladungseinheit eines Luftions. Das Experiment ergibt, daß jedes Ion die Ladung $e=1{,}60\cdot 10^{-19}$ Coulomb (elektrisches Elementarquantum) mit sich führt.

In der Antike war man bereits mit Erscheinungsformen der Elektrostatik vertraut. Zum Beispiel sind elektrostatische Experimente durch Reiben von Harz und Bernstein an Fellen belegt. Ob Pythagoras bei Aufstellung seiner philosophischen Lehre von der Zahl auch an die Abzählbarkeit elektrostatischer Ladungsmengen gedacht hat, ist kaum wahrscheinlich. Hätten den Pythagoreern alle diese experimentellen Befunde bereits zur Verfügung gestanden, wären sie gewiß noch selbstbewußter und vielleicht auch hochmütiger aufgetreten.

Nun wollen wir uns wieder dem unbequemen Schüler Hippasos zuwenden, der noch ein abschließendes Wörtchen in dieser Angelegenheit mitzureden hat. Seine Überlegungen könnten von folgender Art gewesen sein: Nach der Lehre seines Meisters müßte sich für die Strecken d_0 und d_1 am Pentagramm (Abb. 9) ein gemeinsames Maß derart finden lassen, daß die Längen von d_0 und d_1 durch ganze Maßzahlen bezüglich dieser Einheit ausdrückbar sind. Damit ist die Problemstellung auf die Aufgabe zurückgeführt, zu zwei natürlichen Zahlen einen gemeinsamen Teiler zu finden. Als einfachster Algorithmus hierzu bietet sich die Kettendivision an. Aus geometrischer Sicht handelt es sich um eine Wechselwegnahme von Strecken.

Rechnerisch wird hierbei in folgender Weise vorgegangen:

Es seien d_0 und d_1 zwei natürliche Zahlen mit $d_0>d_1$ und $d_1\neq 0$. Unter der Annahme, daß bei der Division $d_0:d_1$ der Rest d_2 bleibt, gilt folgende Darstellung:

$$\frac{d_0}{d_1}=q_0+\frac{d_2}{d_1} \qquad (1)$$

$$\text{oder } d_0=q_0d_1+d_2. \qquad (1')$$

Der nächste Schritt besteht darin, daß man den Divisor aus (1) zum Dividenden und den Rest aus (1) zum Divisor macht, also

$$\frac{d_1}{d_2}=q_1+\frac{d_3}{d_2} \qquad (2)$$

$$\text{oder } d_1=q_1d_2+d_3. \qquad (2')$$

Ist $d_3\neq 0$, kann das Verfahren fortgeführt werden.

$$\frac{d_2}{d_3}=q_2+\frac{d_4}{d_3}. \qquad (3)$$

$$\text{oder } d_2=q_2d_3+d_4 \qquad (3')$$

....

Es werde angenommen, daß das Verfahren bis zum $(k-1)$-ten Schritt durchgeführt werden kann; d. h. es gilt $d_0\neq 0$, $d_1\neq 0 \ldots d_k\neq 0$. Damit folgt für diesen Schritt

$$\frac{d_{k-2}}{d_{k-1}}=q_{k-2}+\frac{d_k}{d_{k-1}} \qquad (4)$$

$$\text{oder } d_{k-2}=q_{k-2}d_{k-1}+d_k. \qquad (4')$$

Sind d_0 und d_1 von Null verschiedene natürliche Zahlen, so muß die hier beschriebene Wechselwegnahme nach einer endlichen Zahl von Schritten ohne Rest ausführbar sein. Wir nehmen an, daß dies für den k-ten Schritt erfolgt. Es gilt also

$$\frac{d_{k-1}}{d_k}=q_{k-1} \qquad (5)$$

$$\text{oder } d_{k-1}=q_{k-1}d_k. \qquad (5')$$

Wir behaupten, daß d_k der größte gemeinsame Teiler von d_0 und d_1 ist. Wendet man zunächst (5') auf (4') an, ergibt sich

$$d_{k-2}=(q_{k-2}q_{k-1}+1)d_k. \qquad (6)$$

Der nächste Schritt führt auf die Gleichung

$$d_{k-3}=[q_{k-3}(q_{k-2}q_{k-1}+1)+q_{k-1}]d_k. \qquad (7)$$

Setzt man das Verfahren fort, gelangt man zu zwei Gleichungen der Form

$$d_1=pd_k \text{ und } d_0=qd_k$$

$$\text{mit } p,q\in N. \qquad (8)$$

Folglich ist d_k gemeinsamer Teiler von d_0 und d_1. Da ferner p und q teilerfremd sind, ist d_k der größte gemeinsame Teiler von d_0 und d_1.

Dieses Verfahren hat bereits Euklid im siebenten Buch seiner „Elemente" beschrieben. Euklid lebte etwa von 365 bis 300 v.u.Z. Seine berühmten Elemente stellen das Sammelwerk des mathematischen Wissens der griechischen Antike dar. Das hier vorgeführte Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen bezeichnet man als euklidischen Algorithmus. Es ist als sicher anzunehmen, daß Hippasos bereits mit dem Verfahren der Wechselwegnahme zur Bestimmung des gemeinsamen Maßes zweier Strecken vertraut war und er sich dieses Algorithmus zu bedienen verstand.

Bevor wir diesen Algorithmus in geometrische Operationen am Pentagramm umsetzen, soll die Brauchbarkeit des Verfahrens an zwei Zahlenbeispielen vorgeführt werden. Gesucht ist der größte gemeinsame Teiler von $d_0=1474$ und $d_1=1155$. Die Anwendung der Kettendivision führt auf folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \frac{1474}{1155}=1+\frac{319}{1155} & \frac{121}{77}=1+\frac{44}{77} \\ \frac{1155}{319}=3+\frac{198}{319} & \frac{77}{44}=1+\frac{33}{44} \\ \frac{319}{198}=1+\frac{121}{198} & \frac{44}{33}=1+\frac{11}{33} \\ \frac{198}{121}=1+\frac{77}{121} & \frac{33}{11}=3. \end{array}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, daß 11 der größte gemeinsame Teiler von 1474 und 1155 ist. Man kann sich – etwas umständlicher – durch Zerlegung in Primfaktoren von der Richtigkeit dieser Aussage überzeugen.

Ist 1 der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen, so bezeichnet man diese als teilerfremd. Auch hierzu möge ein Beispiel vorgeführt werden. Wir setzen $d_0=1474$ und $d_1=1153$.

Es ergeben sich folgende Rechenschritte:

$$\begin{array}{ll} \frac{1474}{1153}=1+\frac{321}{1153} & \frac{59}{13}=4+\frac{7}{13} \\ \frac{1153}{321}=3+\frac{190}{321} & \frac{13}{7}=1+\frac{6}{7} \\ \frac{321}{190}=1+\frac{131}{190} & \frac{7}{6}=1+\frac{1}{6} \\ \frac{190}{131}=1+\frac{59}{131} & \frac{6}{1}=6. \\ \frac{131}{59}=2+\frac{13}{59} & \end{array}$$

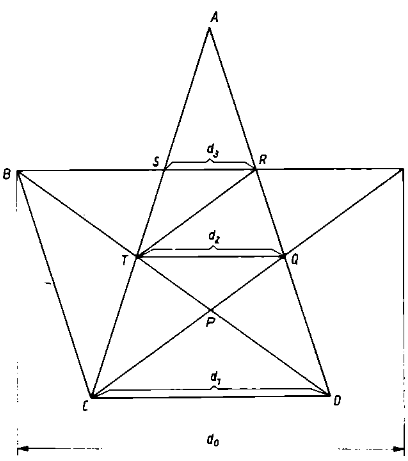


Bild 9
Größenbeziehungen am Pentagramm

Aus der letzten Gleichung folgt, daß 1 der größte gemeinsame Teiler von 1474 und 1153 ist, d. h. die Zahlen sind teilerfremd.

Nun wollen wir mit Hilfe des euklidischen Algorithmus die Gedankengänge des Hippasos am Pentagramm zu rekonstruieren versuchen. In Bild 9 setzen wir $\overline{BE}=d_0$, $\overline{CD}=d_1$, $\overline{TQ}=d_2$ und $\overline{SR}=d_3$. Im regelmäßigen Fünfeck gibt es zu jeder Seite genau eine parallele Diagonale: Es gilt daher $(CD) \parallel (BE)$, $(BC) \parallel (AD)$ und $(CE) \parallel (RT)$. Hieraus folgt, daß die Vierecke $(BCDR)$ und $(ERTQ)$ Parallelogramme darstellen. Daher gilt weiterhin

$$\overline{CD}=\overline{BR}=d_1 \text{ und } \overline{TQ}=\overline{RE}=d_2.$$

Mit diesem Ergebnis kann aus Bild 9 abgelesen werden

$$d_0=d_1+d_2 \text{ oder } \frac{d_0}{d_1}=1+\frac{d_2}{d_1}. \qquad (9)$$

Wegen der Regularität des Pentagramms folgt durch zyklische Vertauschung:

$$\overline{BE}=\overline{AC}=d_0,\ \overline{BR}=\overline{AT}=d_1,$$
$$\overline{ER}=\overline{AS}=d_2.$$

Mit diesen Bezeichnungen resultieren aus Bild 9 folgende Proportionen:

$$\frac{d_0}{d_1}=\frac{d_1}{d_2} \text{ und } \frac{d_1}{d_2}=\frac{d_2}{d_3}. \qquad (10)$$

Diese Proportionen legen es nahe, das Pentagramm bezüglich eines Eckpunktes mit dem Faktor $\lambda=\frac{d_1}{d_0}$ zentrisch zu stauchen. Das Stauchzentrum sei der Eckpunkt A (vgl. Bild 10). Dies führt auf das Pentagramm mit den Eckpunkten $AB'C'D'E'$. Aus diesem läßt sich wieder wie oben ablesen:

$$d_1=d_2+d_3 \text{ und } \frac{d_1}{d_2}=\frac{d_2}{d_3} \text{ oder}$$

$$\frac{d_1}{d_2}=1+\frac{d_3}{d_2} \text{ und } \frac{d_1}{d_2}=\frac{d_2}{d_3}. \qquad (11)$$

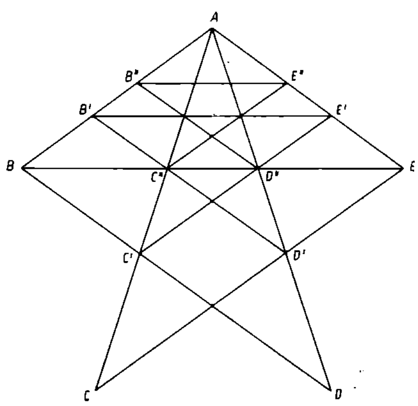


Bild 10
Zentrische Stauchung des Pentagramms

Es werde angenommen, daß die zentrische Stauchung bezüglich A mit dem Stauchfaktor λ $(k-1)$-mal durchgeführt ist. Dem so entstehenden Pentagramm ist das folgende Gleichungssystem zuzuordnen:

$$\frac{d_{k-1}}{d_k}=1+\frac{d_{k+1}}{d_k}, \qquad (12)$$

$$\frac{d_{k-1}}{d_k}=\frac{d_k}{d_{k+1}}. \qquad (13)$$

Sollen d_0 und d_1 ein gemeinsames Maß besitzen, dann muß das Verfahren nach unseren Kenntnissen über den euklidischen Algorithmus an einer gewissen Stelle abbrechen. Wir nehmen an, beim $(k+1)$-ten Pentagramm sei dieser Schritt erreicht.

Es gilt daher $\frac{d_k}{d_{k+1}}=n$ mit $n \in N$ und $n \neq 0$. (14)

Setzt man (14) in (13) ein, folgt $\frac{d_{k-1}}{d_k}=n$. (15)

Mit (15) und (14) folgt aus (12)

$$n=1+\frac{1}{n}. \qquad (16)$$

Äquivalent mit (16) ist die quadratische Gleichung

$$n^2-n-1=0. \qquad (17)$$

Unter den Lösungen $n_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\text{und } n_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad (18)$$

findet sich im Widerspruch zu (14) keine natürliche Zahl. Die Annahme, daß d_0 und d_1 ein gemeinsames Maß besitzen, führt auf einen Widerspruch. d_0 und d_1 sind inkommensurabel. Die philosophische Lehre der Pythagoreer wurde in dieser oder ähnlicher Weise durch logisches Schließen an ihrem eigenen Bundeszeichen widerlegt.

Das Prinzip der Wechselwegnahme (Antanairesis) zum Nachweis der Inkommensurabilität von d_0 und d_1 im regelmäßigen Fünfeck läßt sich auch an einer Folge von ineinandergeschachtelten Fünfecken übersichtlich demonstrieren (vgl. Bild 11). Aus dem k-ten Fünfeck ist die Gleichung

$$d_{k-1}=d_k+d_{k+1}$$

abzulesen. Aus dem $(k-1)$-ten und k-ten Fünfeck resultiert die Proportion

$$\frac{d_{k-1}}{d_k}=\frac{d_k}{d_{k+1}}.$$

Auch an dieser Figur (Bild 11) führt die Annahme eines gemeinsamen Maßes für d_0 und d_1 analog zu den Gleichungen (12) bis (18) auf einen Widerspruch. Es ist denkbar, daß sich Hippasos zum Nachweis der Inkommensurabilität von d_0 und d_1 eines solchen Bildes bedient hat.

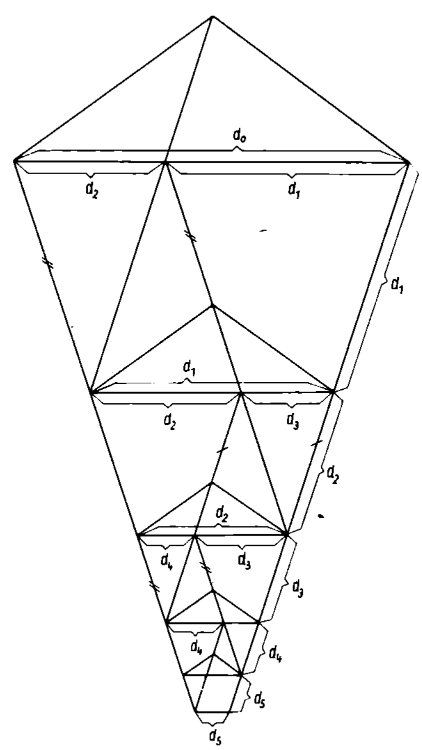


Bild 11
Demonstration der Wechselwegnahme an einer Folge von regulären Fünfecken

Die voreuklidischen Quellen zur Geschichte der Mathematik fließen sehr spärlich, so daß vieles nur vermutet werden kann. Der italienische Geometer Federigo Enriques (1871 bis 1940) hat zur voreuklidischen Epoche der griechischen Geometrie einmal lächelnd bemerkt, sie biete dem Historiker den großen Vorteil, daß seine Phantasie nur wenig durch Quellen behindert wird. Der Leser wird es sicher mit Nachsicht beurteilen, wenn im vorliegenden Beitrag von diesem Vorteil ein wenig Gebrauch gemacht wurde.

E. Schröder

Aufgaben: Das Pentagramm ($ABCDE$) werde so gelegt, daß sich der Eckpunkt A mit dem Mittelpunkt eines Kreises k deckt, der außerdem durch die Eckpunkte C und D geht. Für den Radius r von k gilt: $r=\overline{AC}=\overline{AD}$. Wir bezeichnen mit s_6 die Seitenlänge des k einbeschriebenen regulären Sechsecks, mit s_5 die Seitenlänge des k einbeschriebenen regulären Fünfecks und mit s_{10} die Seitenlänge des k einbeschriebenen regulären Zehnecks. Offensichtlich gilt: $r=s_6$, $\overline{CD}=s_{10}$ und $2\overline{CL}=s_5$.

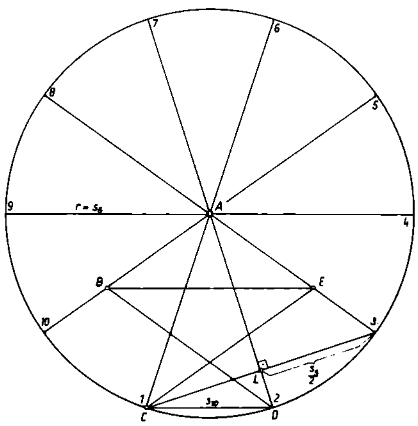


Bild 12
Pentagramm und reguläres Zehneck

Man beweise mittels des vorgelegten Bildes 12:

1. $\frac{s_6-s_{10}}{s_{10}}=\frac{s_{10}}{s_6}$
2. $s_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}s_6$
3. $s_5=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}s_6$
4. $s_5^2=s_6^2+s_{10}^2$
5. Mittels der gefundenen Ergebnisse konstruiere man s_5 und s_{10} aus s_6 unter Verwendung von Zirkel und Lineal.

Zwei Aufgaben aus der mathematischen Fernolympiade 1976

Mongolische Volksrepublik

---

1. Aufgabe

Es seien n eine natürliche Zahl mit $n\geqq 2$ und
$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)-1$ (1)
ein Polynom.
Man beweise, daß man dieses Polynom nicht als Produkt von zwei Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen kann, von denen jedes mindestens den Grad 1 hat.

Lösung:
Angenommen, es gäbe eine Zerlegung
$$P(x)=g(x)\,h(x), \quad (2)$$
wobei $g(x)$ und $h(x)$ Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten sind, die mindestens den Grad 1 haben.
Wegen $P(1)=P(2)=\ldots=P(n)=-1$ (3)
wäre dann wegen (2) für jede Zahl k der Menge $M=\{1,2,\ldots,n\}$
entweder $g(k)=1$ und $h(k)=-1$
oder $g(k)=-1$ und $h(k)=1$.
Gibt es nun in M genau m Zahlen k_i ($i=0,1,2,\ldots,m$), für die
$g(k_i)=1$, also $h(k_i)=-1$,
so gibt es in M genau $n-m$ Zahlen k_i ($i=m+1, m+2,\ldots,n$), für die $g(k_i)=-1$, also $h(k_i)=1$ ist.
Daraus folgt einerseits
$$g(x)=(x-k_1)(x-k_2)\ldots(x-k_m)+1, \quad (4)$$
$$h(x)=(x-k_1)(x-k_2)\ldots(x-k_m)-1, \quad (5)$$
andererseits
$$g(x)=(x-k_{m+1})(x-k_{m+2})\ldots(x-k_n)-1, \quad (6)$$
$$h(x)=(x-k_{m+1})(x-k_{m+2})\ldots(x-k_n)+1. \quad (7)$$
Nun gilt wegen (4) und (5) für $x=k_1,k_2,\ldots,k_m$
$g(x)=1$, $h(x)=-1$, also wegen (6)
$(x-k_{m+1})(x-k_{m+2})\ldots(x-k_n)=g(x)+1=2$.
Wegen (7) gilt aber
$(x-k_{m+1})(x-k_{m+2})\ldots(x-k_n)=h(x)-1=-2$,
was zu einem Widerspruch führt.
Daher ist die Annahme (2) falsch, es gibt also keine Zerlegung des Polynoms $P(x)$ mit den verlangten Eigenschaften, w. z. b. w.

2. Aufgabe

Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit
$$a_1=1^1, a_2=2^{2^2}, a_3=3^{3^{3^3}}, \ldots\ldots a_n=n^{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^n}}}}}$$
(Basis n und n Exponenten n),
......
Ferner sei $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ die Folge der Endziffern im dekadischen Positionssystem der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$,
also $b_1=1$, $b_2=6$, $b_3=7$ usw.
a) Man beweise, daß die Folge $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ periodisch ist, d. h., daß es eine natürliche Zahl s mit $s\geqq 1$ gibt, so daß $b_{n+s}=b_n$ für alle $n=1,2,\ldots$ gilt.
b) Man gebe die kleinste Periodenlänge an, d. h. die kleinste Zahl s, die die unter a) angegebene Eigenschaft hat.

Lösung:
Ist die letzte Ziffer der natürlichen Zahl n gleich 1, 5, 6 bzw. 0, so ist auch die letzte Ziffer der Zahl n^m gleich 1, 5, 6 bzw. 0, wenn m eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist.
Daher gilt für alle natürlichen Zahlen k
$b_{10k+1}=1$, $b_{10k+5}=5$, $b_{10k+6}=6$,
$b_{10k+10}=0$. (1)
Ferner gilt für alle natürlichen Zahlen k und m mit $m\geqq 1$
$(10k+2)^{4m}\equiv 2^{4m}\equiv 16^m\equiv 6 \pmod{10}$,
$(10k+4)^{4m}\equiv 4^{4m}\equiv 6 \pmod{10}$,
$(10k+8)^{4m}\equiv 8^{4m}\equiv 6 \pmod{10}$, also
$b_{10k+2}=6$, $b_{10k+4}=6$, $b_{10k+8}=6$. (2)
Auf Grund von (1) und (2) könnte man nun die Periodenlänge $s=10$ vermuten, da sie für alle Zahlen gilt, die auf 1, 2, 4, 5, 6, 8, 0 enden.
Nun ist aber zu beachten, daß zwar, wenn k, t, m natürliche Zahlen und $r=0,1,2,3$ sind,
$(10k+t)^{4m+r}\equiv t^{4m+r}\equiv t^r \pmod{10}$
gilt, jedoch
einerseits $3^3\equiv 3 \pmod 4$, $3^{3^3}\equiv 3 \pmod 4$,
also $a_3=3^{3^{3^3}}\equiv 3^3\equiv 7 \pmod{10}$,
andererseits $13^{13}\equiv 1^1\equiv 1 \pmod 4$, $13^{13^{13}}\equiv 1 \pmod 4$,
also $a_{13}\equiv 13^1\equiv 3 \pmod{10}$, d. h.
die Periodenlänge beträgt mindestens 20.
Setzt man
$f_n(n)=n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^n}}}}$ (n Zahlen n),
so wird wegen
$(20k+3)^{20k+3}\equiv 3^3\equiv 3 \pmod 4$,
$f_{20k+3}(20k+3)\equiv 3 \pmod 4$,
$a_{20k+3}=(20k+3)^{f_{20k+3}(20k+3)}\equiv 3^3\equiv 7\equiv a_3$ $\pmod{10}$. (3)
Ferner gilt
$(20k+7)^{20k+7}\equiv 7^7\equiv 3^3\equiv 3 \pmod 4$,
also
$a_{20k+7}\equiv(20k+7)^3\equiv 7^3\equiv 3\equiv a_7 \pmod{10}$. (4)
Endlich gilt
$(20k+9)^{20k+9}\equiv 9^9\equiv 1 \pmod 4$,
also
$a_{20k+9}\equiv(20k+9)^1\equiv 9\equiv a_9 \pmod{10}$. (5)
Aus (1), (2), (3), (4) und (5) folgt, daß die Folge der b_n periodisch ist, wobei die kleinste Periodenlänge $s=20$ beträgt.

Wir danken dem mongolischen Studenten *P. Altanzog*, z. Z. stud. math. an der *Martin-Luther-Universität* Halle, für die Übersendung von Aufgabenmaterial. Die vorliegenden beiden Aufgaben (und Lösungen) bearbeitete *Oberstudienrat Dr. R. Lüders, Berlin.*

Niels Henrik Abel

Porträt eines Mathematikers

Der Mathematiker Felix Klein (1849 bis 1925), dem wir eine bedeutende Darstellung der Mathematikgeschichte des 19. Jh. verdanken, nannte Niels Henrik Abel eines „der großen, ursprünglichen Genies" der Mathematik, einen „idealen Typ eines Forschers, wie ihn die Geschichte der Wissenschaft nur selten aufzuweisen hat". Obwohl Abel nur 26 Jahre alt wurde, gehört er zu den bedeutendsten Mathematikern des 19. Jh. In der Theorie der elliptischen Funktionen und in der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen erzielte dieser hochbegabte norwegische Mathematiker grundlegende Resultate.

„Nichs Examen, nur Mathematik"

Niels Henrik Abel wurde am 5. August 1802 als Sohn eines protestantischen Pastors im norwegischen Dorf Finnö geboren. Anfangs erhielt Abel Unterricht vom Vater. Von 1815 bis 1821 besuchte er dann die Domschule in Christiania, dem heutigen Oslo. Er war körperlich und psychisch schwächlich und sensibel. In den meisten Fächern war er mittelmäßig. Doch schon als 16jähriger zeigte er ein außergewöhnliches Talent für die Mathematik. Sein junger, verständnisvoller und intelligenter Mathematiklehrer, *B. M. Holmboe*, leitete seine Studien in ausgezeichneter Weise. *Abel* las Bücher von *Euler*, *Lacroix*, *Francœur*, *Poisson*, *Gauß*, *d'Alembert* und *Newton*.

Als Mathematikstudent an der 1811 gegründeten Universität in Christiania zeichnete er sich in den Jahren 1821 bis 1825 so aus, daß ihm ein Stipendium gewährt wurde, damit er seine Studien in Deutschland und Frankreich fortsetzen könne.

Im Herbst und Winter 1825/26 weilte *Abel* in Berlin. Hier traf er mit *A. L. Crelle* (1780 bis 1855), der später ein fürsorglicher Förderer *Abels* wurde, zusammen. Der schwedische Mathematiker *G. Mittag-Leffler* (1846 bis 1927) schildert den ersten Besuch *Abels* bei *Crelle* folgendermaßen (so wie der Berliner Mathematiker *K. Weierstraß* ihm darüber berichtete und letzterer es von *Crelle* selbst erfahren hatte): „Eines schönen Tages trat ein blonder Jüngling in *Crelles* Zimmer, sehr schüchtern, sehr jugendlich und von sehr intelligentem Aussehen. *Crelle* glaubte, daß er ein Examen zu absolvieren wünsche, um in das Gewerbe-Institut eintreten zu können, und erklärte, daß dies mit großen Schwierigkeiten verbunden sei. Da endlich öffnete der junge Mann seinen Mund und sagte: ‚Nichs Examen, nur Mathematik'. *Crelle* erkannte, daß er es mit einem Ausländer zu tun hatte, und versuchte es mit Französisch, einer Sprache, die *Abel* ganz gut beherrschte, wenn auch nicht ohne Schwierigkeit. Auf die Frage *Crelles* nach seinen Studien antwortete er, daß er unter anderem *Crelles* eigene kürzlich (1823) erschienene Arbeit über „Analytische Facultäten" gelesen habe, die ihn trotz vieler Fehler in höchstem Maße interessiert habe. Bei dem Besprechen dieser Fehler wurde *Crelle* ganz Ohr, und nun entwickelte sich ein Gespräch, das später zu einer engen Freundschaft zwischen *Crelle* und *Abel* führen sollte."

Crelle erkannte das große Genie *Abels* und gewann ihn zum Mitarbeiter am geplanten *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. (Im ersten Band dieses *Crelleschen Journals* erschienen allein fünf Abhandlungen von *Abel*.)

Nach einem Abstecher nach Norditalien kam *Abel* am 10. Juli 1826 in Paris an. „Endlich bin ich jetzt am Brennpunkt aller meiner mathematischen Wünsche angekommen, in Paris", schrieb er an Prof. *C. Hansteen* nach Christiania.

Hier in Paris wirkten damals so bedeutende Mathematiker wie *A. L. Cauchy* (1789 bis 1857), *A.-M. Legendre* und *S.-D. Poisson* (1781 bis 1840). Der Aufenthalt ist für *Abels* wissenschaftliche Entwicklung sehr förderlich gewesen.

Zwar mit hohem mathematischem Gewinn und vielen Anregungen, jedoch zugleich enttäuscht über die reservierte Haltung der französischen Mathematiker verließ *Abel* im Dezember 1826 Paris. Über Berlin kehrte er im Mai 1827 nach Christiania zurück. Dort wurde er 1828 der Vertreter Prof. *Hansteens* an der Universität. Ende 1828 verschlechterte sich *Abels* Gesundheitszustand sehr; am 6. April 1829 starb er an einem Lungenleiden.

Es gibt keine allgemeine Auflösungsformel

Ein berühmtes Resultat, das *Abel* erzielte, soll kurz erläutert werden. Es betrifft ein altes Problem über algebraische Gleichungen.

Quadratische Gleichungen wurden bereits vor über 2000 Jahren von den griechischen Mathematikern behandelt. Für diese Gleichungen gibt es eine seit langem bekannte Lösungsformel. Nachdem in der Renaissance Lösungsformeln auch für kubische und biquadratische Gleichungen gefunden worden waren, haben die Mathematiker im 17. und 18. Jahrhundert bis zu Beginn des 19. Jh. versucht; allgemeine Lösungsformeln für algebraische Gleichungen höheren als vierten Grades zu finden. Sie suchten nach einer Formel, die die Lösungen z. B. der Gleichung fünften Grades

$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

durch deren Koeffizienten ausdrückt (die a_0, a_1, a_2, ..., a_5 sind beliebige reelle Zahlen). Diese können in der Formel durch Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren miteinander verbunden sein; außerdem können darin Wurzelausdrücke aus den so gebildeten Größen auftreten.

Nur für spezielle Gleichungen konnte man bereits Lösungsformeln angeben.

Über 200 Jahre lang wurde um die allgemeinen algebraischen Gleichungen fünften und höheren Grades gerungen. Alle Bemühungen, solche Gleichungen durch Formeln exakt zu lösen, blieben ohne Erfolg. In seiner Doktorarbeit (1799) sprach *C. F. Gauß* die Vermutung aus, daß eine Auflösungsformel überhaupt nicht existiert: „Es dürfte wohl gar nicht so schwer sein, die Unmöglichkeit für den fünften Grad in aller Strenge zu beweisen; ich werde an anderer Stelle meine Untersuchungen über die Frage ausführlicher darlegen." Den Nachweis der Unmöglichkeit hat *Gauß* nicht publiziert. Einen Beweisversuch machte 1799 *Paolo Ruffini* (1765 bis 1822).

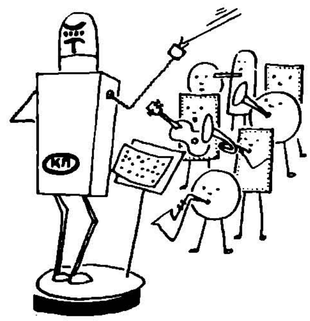
1823 beschäftigte sich der Student *Abel* mit diesem Problem. Er glaubte zunächst, eine Auflösungsformel der allgemeinen Gleichung fünften Grades gefunden zu haben. Doch bald entdeckte er seinen Irrtum. Weitere Untersuchungen führten ihn dann auf das Ergebnis: Für algebraische Gleichungen höheren als vierten Grades gibt es im allgemeinen keine Lösungsformeln. Damit wurde ein klassisches Problem der Algebra gelöst.

Nicht etwa das Unvermögen der Mathematiker ist die Ursache dafür, daß keine Lösungsformel gefunden werden kann. *Abel* bewies, daß eine solche Auflösungsformel unmöglich ist. Um algebraische Gleichungen fünften und höheren Grades zu lösen, ist man daher auf geeignete Näherungsverfahren angewiesen. Der *Satz von Abel* ist auch eine Folgerung eines Theorems der Galois-Theorie.

Es gibt in der Geschichte der Mathematik des 19. Jh. eine tragische Duplizität von Ereignissen: Die klassische Frage nach der Auflösbarkeit von Gleichungen ist unabhängig voneinander von zwei genialen jungen Mathematikern beantwortet worden, dem Norweger *N. H. Abel* und dem Franzosen *Evariste Galois* (1811 bis 1832); beide starben in jungen Jahren, *Abel* an der Tuberkulose im Alter von 26 Jahren, *Galois* in einem Duell im Alter von 20 Jahren.

H. Pieper

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 5. Mai 1978

Mathematik

Ma5 ▪1708 Anke und ihr Bruder Bernd halfen der Mutter vor Ostern beim Färben von Eiern. Anke hat zweimal soviel, die Mutter dreimal soviel Eier gefärbt wie Bernd. Insgesamt wurden mehr als 25, aber weniger als 35 Eier gefärbt. Wieviel Eier haben die Mutter, Anke bzw. Bernd gefärbt?

Schülerin Susanne Blohm, Grabow

Ma5 ▪1709 Wenn man die Summe aus zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit 23 multipliziert und von dem erhaltenen Produkt 343 subrahiert, so erhält man als Ergebnis 968. Um welche Zahlen handelt es sich?

Schüler K. Tietz, Strasburg

Ma5 ▪1710 Jeder Schüler aus den Klassen 5a, 5b und 5c einer Oberschule verpflichtet sich, bis zum Ende des Schuljahres 8 Mark zu erarbeiten und dem Solidaritätskonto für Chile zur Verfügung zu stellen. Zur Klasse 5a gehört ein Schüler mehr als zur Klasse 5c. Während einer Zwischenbilanz stellte sich heraus, daß die Schüler der Klasse 5b mit 128 Mark ihre Verpflichtung schon zur Hälfte erfüllt hatten. Das angestrebte Ziel der Schüler der Klassen 5a und 5c beträgt auf Grund der Selbstverpflichtung insgesamt 440 Mark. Wieviel Schüler gehören jeder dieser drei Klassen an?

Schülerin Birgit Weyh, Fambach, Kl. 8

Ma5 ▪1711 In zwei Großtanks eines Öllagers befanden sich ursprünglich zusammen 500 t Öl. Im ersten Tank lagerten 20 t Öl mehr als im zweiten. Auf Grund eines Lecks mußte der zweite Tank repariert werden. Nach Abschluß der Reparatur lagerten im zweiten Tank nur noch halb soviel Tonnen Öl wie ursprünglich im ersten. Wieviel Tonnen Öl befanden sich im Öllager, wenn nach der Reparatur 90 t Öl durch Tankwagen angeliefert wurden? *Schüler Michael Glockenstein, 8. OS Neubrandenburg, Kl. 5b*

Ma5 ▪1712 In das nachfolgende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzusetzen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.

$$\begin{array}{ccccc} aabc & - & bac & = & def \\ : & & - & & + \\ ghe & - & cbd & = & ach \\ \hline g & \cdot & cbd & = & kdh \end{array}$$

Sch.

Ma5 ▪1713 Es gibt Zahlenfolgen, die eine bestimmte gleichbleibende Differenz haben, so z. B.:

30, 60, 90, 120 (Differenz 30),
2, 7, 12, 17, 22 (Differenz 5),
0, 2, 4, 6, 8, 10 (Differenz 2).

		7		
	7			
				25
	13			

In die leeren Kästchen des nachstehend abgebildeten großen Quadrates sind Ziffern so einzutragen, daß in jeder waagerechten Zeile und senkrechten Spalte Zahlenfolgen enthalten sind, die eine bestimmte gleichbleibende Differenz haben.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma6 ▪1714 Von den Schülern einer Klasse gehören genau 12 Schüler der Arbeitsgemeinschaft „Fotoamateure", genau 14 Schüler der AG „Radiobastler" und genau 15 Schüler der AG „Musikfreunde" an. Genau ein Schüler ist in allen drei AG's tätig. Genau 4 Schüler gehören sowohl der AG „Fotoamateure"

Thies Luther, 26 Güstrow, Werderstr. 22
Kersting-OS, Klasse 7
Ma 7 ▪ 1369
30 150 30
Prädikat:
10
Lösung:

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1977/78 läuft von Heft 5/77 bis Heft 2/78. Zwischen dem 1. und 10. September 1978 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/78 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1977/78 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

als auch der AG „Radiobastler“ an. Genau 3 Schüler gehören sowohl der AG „Fotoamateure“ als auch der AG „Musikfreunde“ an. Genau 5 Schüler gehören sowohl der AG „Musikfreunde“ als auch der AG „Radiobastler“ an. Wieviel Schüler gehören zu dieser Klasse, wenn jeder Schüler in wenigstens einer AG tätig ist?

Schülerin Kerstin Müller, Wernshausen

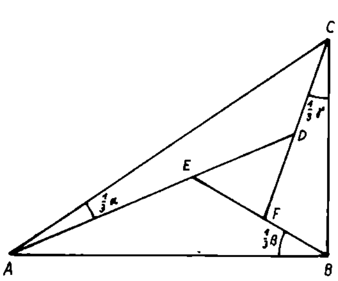
Ma6 ▪1715 Einem Korb mit Äpfeln wurden zunächst 6 Äpfel, danach der dritte Teil der im Korb verbliebenen Äpfel und schließlich nochmals 6 Äpfel entnommen. Nun befand sich im Korb nur noch die halbe Anzahl der ursprünglich vorhandenen Äpfel. Wieviel Äpfel lagen ursprünglich im Korb?

Schülerin Silke Herrmann, Krottorf

Ma6 ▪1716 Entlang eines Wohnblocks stehen genau 12 Bäume in gleichen Abständen. Hans und Werner laufen um die Wette. Sie starten zugleich am ersten Baum; Ziel ist der zwölfte Baum. Hans befand sich 8 s nach dem Start am achten Baum; Werner befand sich 7 s nach dem Start am siebten Baum. Nach wieviel Sekunden erreichte jeder der beiden Läufer das Ziel, wenn ihre Laufgeschwindigkeiten als konstant angenommen werden? Wer hat den Lauf gewonnen?

Schülerin Anke Malsch, Wernhausen

Ma6 ▪1717 Die abgebildete Figur stellt ein Dreieck ABC mit den Innenwinkelgrößen $\sphericalangle CAB = \alpha = 39°$ und $\sphericalangle ABC = \beta = 84°$ dar. In A wurde an AC der Winkel $\frac{1}{3}\alpha$, in B an BA der Winkel $\frac{1}{3}\beta$, in C an CB der Winkel $\frac{1}{3}\gamma$ angetragen, und zwar jeweils so, daß der freie Schenkel im Innern des Dreiecks ABC liegt. Die freien Schenkel der angetragenen Winkel schneiden sich in den Punkten D, E, F. Es sind die Größen der Innenwinkel des Dreiecks DEF zu berechnen! *Sch.*



Ma6 ▪1718 Von den Schülern einer 6. Klasse wurden in einer Klassenarbeit im Fach Mathematik folgende Ergebnisse erzielt:
Der dritte Teil der Anzahl der Schüler dieser Klasse erhielt die Note 1. Die Anzahl der Schüler, die die Note 2 erhielten, war um 6 kleiner als die Anzahl der Schüler, die die Note 1 erhielten. Die Note 3 erhielten soviel Schüler, wie es Schüler mit den Noten 1 oder 2 gab. Ein Schüler erhielt die Note 4; kein Schüler die Note 5. Es haben alle Schüler dieser Klasse die Klassenarbeit mitgeschrieben. Wieviel Schüler erhielten die Noten 1, 2 bzw. 3?

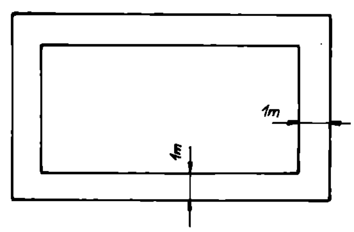
Schüler Ralf-Peter Lorenz, POS Hasenthal, Kl. 6

Ma7 ▪1719 Die Zahl $\frac{3}{35}$ soll als Differenz $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ dargestellt werden, wobei $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ unkürzbare echte Brüche und a, b, c, d paarweise verschiedene natürliche Zahlen sein sollen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma7 ▪1720 Andreas fährt mit seinem Fahrrad vom Ort A nach dem 18 km entfernten Ort B; Matthias fährt ihm von B aus entgegen. Andreas fährt 15 min früher los als Matthias. Beide fahren mit der gleichen konstanten Geschwindigkeit $v = 24\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Wie weit sind beide vom Ort A entfernt, wenn sie sich treffen? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

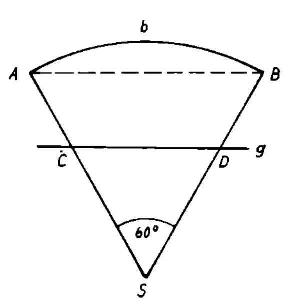
Ma7 ▪1721 Eine Rasenfläche in Form eines Rechtecks, das doppelt so lang wie breit ist, soll von einem 1 m breiten Weg umsäumt werden. Für diesen Weg werden 640 quadratische Betonplatten von 50 cm Seitenlänge benötigt. Welchen Inhalt hat die Rasenfläche?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



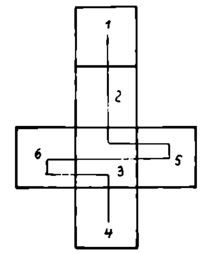
Ma7 ▪1722 Die abgebildete Figur stellt einen Kreissektor $\widehat{ASB}$ mit dem Radius $\overline{SA} = \overline{SB} = r = 12$ cm und dem Zentriwinkel $\sphericalangle ASB = 60°$ dar. Parallel zur Geraden AB wurde eine Gerade g, die $\overline{AS}$ in einem inneren Punkt C und $\overline{BS}$ in einem inneren Punkt D schneidet, so gezogen, daß der Umfang des Dreiecks CSD gleich dem Umfang der Figur ist, die von den Strecken $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ und dem Kreisbogen $b = \widehat{AB}$ gebildet wird. Es ist die Länge der Strecke $\overline{CS}$ zu berechnen!

Sch.



Ma8 ▪1723 Die Abbildung stellt ein Würfelnetz dar. Der eingezeichnete Streckenzug sei der Weg einer Ameise.
a) Zeichne ein Schrägbild des Würfels mit dem Weg der Ameise!
b) Zeichne ein Würfelnetz so, daß die Ameise jeden Flächenmittelpunkt der sechs Quadratflächen genau einmal durchläuft und dabei den kürzest möglichen Weg beschreibt.
c) Zeichne ein Schrägbild dieses Würfels mit dem Weg der Ameise!
d) Wie lang ist der Weg, wenn die Würfelkante 1 cm lang ist?

Fr.



Ma8 ▪1724 Gegeben sei ein Kreis k mit einem Durchmesser von 6 cm Länge. Die Randpunkte des Durchmessers seien mit A und B bezeichnet. Der Punkt D sei Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und zugleich Höhenfußpunkt des Dreiecks ABC. C liege auf der Peripherie von k. Berechne den Umfang des Dreiecks ABC und den Flächeninhalt eines der beiden Kreissegmente!

Gudrun Tappert, Wilhelm-Pieck-Stadt Guben

Ma8 ▪1725 Es werden fünf beliebige aufeinanderfolgende natürliche Zahlen addiert. Mit welcher Ziffer endet eine solche Summe, wenn die erste Zahl a) gerade, b) ungerade ist? Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Summe von zehn aufeinanderfolgenden durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen, wenn die erste Zahl gerade ist?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma8 ▪1726 Gesucht sind alle Brüche aus der Klasse $\frac{1}{5}$, bei denen die Summe aus Zähler und Nenner eine zweistellige Quadratzahl ist.

Andreas Fittge, EOS H. Hertz, Berlin, Kl. 9

Ma9 ▪1727 Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen a und b mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ der Bruch

$$\frac{5a^2 + a^4}{35b^3 + 7b} \text{ durch 6 kürzbar ist!}$$

Ralph Ott, OS Demmin, Kl. 9

Ma9 ▪1728 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ($\sphericalangle ACB = R$) werde die Höhe h_c von einem Strahl geschnitten, dessen Anfangspunkt ein Eckpunkt des Dreiecks ist (nicht C). Die Schnittpunkte des Strahls mit der Höhe h_c bzw. mit der dem Anfangspunkt gegenüberliegenden Seite seien mit D bzw. E bezeichnet. Unter welcher Bedingung ist das Dreieck DEC gleichschenklig? ($\overline{DE}$ sei Basis.)

K. Häfner, Fachberater f. Math. OS Brehme

Ma9 ▪1729 Man wähle eine beliebige dreistellige Zahl, deren Ziffern nicht alle gleich sind. Dann ordne man die Ziffern der Größe nach, indem man mit der größten Ziffer beginnt; man erhält so die dreistellige Zahl x.

Die Zahl y erhält man, wenn man alle Ziffern der Zahl x so ordnet, daß die kleinste am Anfang steht. Nun bilde man die Zahl $x-y$. Man beweise, daß die Zahl $x-y$ stets durch 3, durch 9, durch 11, durch 33 und durch 99 teilbar ist.

Wenn man so weiter verfährt, d. h. die Zahl $x-y$ wieder so behandelt wie die ursprüngliche dreistellige Zahl unserer Aufgabe, so erhält man immer Zahlen mit den gleichen Eigenschaften. Nach endlich vielen Schritten ergibt sich dann stets ein und dieselbe feste dreistellige Zahl. Wie heißt diese?

Marcus Schütz, OS Berlin-Lichtenberg, Kl. 9

Ma 9 ▪1730 In ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b ist ein einbeschriebenes Quadrat $CDEF$ so zu konstruieren, daß D auf $\overline{AC}$, F auf $\overline{BC}$ und E auf $\overline{AB}$ liegt. Der Flächeninhalt A, die Länge der Diagonalen d und der Umfang u dieses Quadrats sind zu berechnen (in a und b auszudrücken)!

Ralph Ott, OS Demmin, Kl. 9

Ma 10/12 ▪1731 In einem Kreis stehen zwei Sehnen senkrecht aufeinander. Die kürzere Sehne $\overline{CD}$ schneidet die längere Sehne $\overline{AB}$ in S. Es ist $\overline{AS}=8$ cm und $\overline{BS}=3$ cm. Ferner gilt: $\overline{AS}=\overline{BS}+\overline{BC}$. Man zeige, daß gilt $\overline{AD}=\overline{CD}$!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ▪1732 In einem unregelmäßigen Tetraeder stehen die drei Seitenflächen paarweise senkrecht aufeinander. Die Grundkanten sind 6,4 cm bzw. 5,83 cm bzw. 5 cm lang. Wie lang sind die drei Seitenkanten? (Sinnvoll runden!)

Jürgen Gräfenstein, Dresden, Kl. 8

Ma 10/12 ▪1733 Man bestimme alle ganzen Zahlen x, für die x^3+x^2-4x+4 Kubikzahl ist!

Dipl.-Math. W. Moldenhauer, W.-Pieck-Universität Rostock

Ma 10/12 ▪1734 Wieviel Prozent der Oberfläche eines Würfels ist als sichtbar zeichnerisch dargestellt, wenn man den Würfel in Kavaliersperspektive

a) mit $\alpha=45°$ und $q=\frac{1}{2}$

b) mit $\alpha=30°$ und $q=\frac{1}{3}$ abbildet? *Fr.*

Zwei Quadratflächen seien parallel zur Bildebene.

Physik

Ph 6 ▪31 Ein Klassenzimmer ist 10,25 m lang, 8,25 m breit und 5,5 m hoch.

a) Welche Masse hat die Luft in diesem Klassenzimmer, wenn die Dichte der Luft $1{,}29\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ beträgt?

b) Könnte man einen Körper gleicher Masse hinaustragen oder brauchte man dazu einen Handwagen?

(Erst schätzen, dann rechnen!)

Ein Handwagen kann mit 150 kg Masse beladen werden. *Adalbert Schatz, Leipzig*

Ph 7 ▪32 Ein Pkw fuhr vom Ort A zum Ort B. Ein Drittel des gesamten Weges legte er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück. Den restlichen Weg fuhr er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der der Pkw von A nach B fuhr?

Birgit Arndt, Diesterweg-OS Loitz, Kl. 7

Ph 8 ▪33 Gegeben sei ein senkrecht stehender Kessel (in Form eines geraden Kreiszylinders) mit einem Innendurchmesser von $d=37$ cm. In der Höhe $h=93$ cm über dem Kesselboden befindet sich eine Überlauföffnung. (Der Kessel ist mit einem Kohlebadeofen vergleichbar.) Der Kessel sei mit Wasser der Temperatur $t_1=15\,°\text{C}$ gefüllt und wurde durch die Heizung auf eine Temperatur von $t_2=70\,°\text{C}$ gebracht. Durch die Erwärmung dehnt sich das Wasser aus und läuft durch die Überlauföffnung ab. Das überlaufende Wasser werde in einem Meßzylinder aufgefangen. Wieviel cm³ Wasser befinden sich in dem Meßzylinder, wenn die gesamte, der Temperatur von 70 °C entsprechende Überlaufmenge aufgefangen und dann auf $t_3=20\,°\text{C}$ abgekühlt wurde?

Anmerkung: Da Wasser keinen konstanten Ausdehnungskoeffizienten hat, sind die folgenden Dichtewerte (ϱ) zu verwenden:

$$t_1=15\,°\text{C};\ \varrho_1=0{,}9990\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$
$$t_2=70\,°\text{C};\ \varrho_2=0{,}9777\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3},$$
$$t_3=20\,°\text{C};\ \varrho_3=0{,}9982\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 9 ▪34 Die defekte Dachrinne eines doppelstöckigen Hauses tropft 120mal in einer Minute. Wenn ein Wassertropfen den Erdboden (gleiche Höhe wie der Fußboden der unteren Etage) erreicht, befindet sich der nächste schon in der Luft, auf halber Höhe des oberen Stockwerkes. In welcher Höhe ist die Dachrinne angebracht? (Luftwiderstand wird vernachlässigt.)

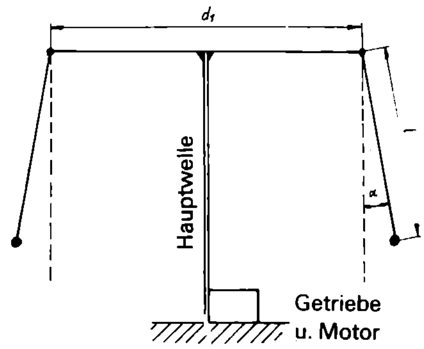
Olaf Raeke, Neubrandenburg

Ph 10/12 ▪35 An einem Kettenkarussell wurde beobachtet, daß die Tragketten der Sitze bei voller Fahrt gegenüber der Senkrechten um 15° nach außen gelenkt wurden. Die Schwerpunkte der Sitze haben vom Aufhängungspunkt der Tragketten einen Abstand von $l=2{,}55$ m, während die genannten Aufhängungspunkte auf einem Kreis mit $d_1=10{,}08$ m Durchmesser liegen.

a) Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die Sitze?

b) Wie groß ist die Drehzahl des Antriebsmotors, wenn zwischen Motor und Karussell-Hauptwelle ein Getriebe mit dem Übersetzungsverhältnis $i=116$ eingeschaltet ist?

Anmerkung: Die Masse der Ketten, Reibung und Luftwiderstand werden nicht berücksichtigt. In der Technik wird unter dem Übersetzungsverhältnis i allgemein das Verhältnis Antriebs- zu Abtriebszahl verstanden. Prinzipskizze:



Ing. A. Körner, Leipzig

Chemie

Ch 7 ▪25 3,4 g Eisen werden oxydiert. Berechne,

a) wieviel Eisen(II)-oxid,

b) wieviel Eisen(II, III)-oxid,

c) wieviel Eisen(III)-oxid

dann daraus entstehen!

d) Ermittle graphisch die Masse Eisen(II)-oxid, die aus 5 g, 8 g und 9,5 g Eisen entsteht!

Ch 8 ▪26 Kalkmörtel ist ein wichtiger Baustoff.

a) Wieviel Kilogramm Kohlendioxid müssen 10 kg Kalkmörtel, die 24% Kalziumhydroxid enthalten, aufnehmen, wenn sich beim Abbinden Kalziumkarbonat bildet?

b) Wieviel Liter des Gases sind das?

c) Wieviel Wasser entsteht dabei?

d) 0,7 g des entstehenden Kalziumkarbonats werden mit Salzsäure versetzt. Wieviel Milliliter trockenes Kohlendioxid von 18 °C und 745 Torr entstehen dabei?

Ch 9 ▪27 In einem Labor soll Äthansäure nach zwei verschiedenen Methoden hergestellt werden. Es stehen jeweils 50 g Äthen und Äthanol als Ausgangsstoffe zur Verfügung. Welche Variante zur Herstellung von Äthansäure liefert die größte Ausbeute?

Ch 10/12 ▪28 In unserer Republik wird Schwefelsäure auf Grund der vielfältigen Verwendung in großen Mengen hergestellt. Im Rahmen der engen wirtschaftlichen Beziehungen der sozialistischen Länder erhalten wir aus der Sowjetunion umfangreiche Lieferungen sulfidischer Erze. Aus 8 t Eisenkies (Eisensulfid) mit 15% Verunreinigungen soll eine 60%ige Schwefelsäure hergestellt werden. Die Ausbeute an Schwefeldioxid beträgt 96%. Wieviel Tonnen 60%ige Schwefelsäure entstehen?

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir wollen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vorstellen, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am alpha-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

In Heft 1/1977 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 5 ■ 1567 Vier Schülerinnen, und zwar Ina, Katrin, Andrea und Carola, bilden einen Timurtrupp. Sie helfen den Rentnerinnen Frau Neumann, Frau Peter, Frau Heller und Frau Weise. Jede dieser vier Schülerinnen hilft genau einer dieser Frauen. Nun wissen wir folgendes:

a) Ina hilft weder Frau Heller noch Frau Peter,
b) Carola hilft Frau Neumann,
c) Andrea hilft nicht Frau Peter.

Wie lauten die Vornamen derjenigen Schülerinnen, die Frau Peter, Frau Heller bzw. Frau Weise helfen?

Schülerin Birgit Weyh, Fambach

In Heft 3/77 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Aus a) folgt: Ina hilft entweder Frau Neumann oder Frau Weise. Da nach b) Carola die Helferin von Frau Neumann ist, so hilft Ina Frau Weise. Aus c) folgt: Andrea hilft Frau Heller. Somit hilft Katrin Frau Peter.

Wir stellen nun die Lösung der Schülerin *Frauke Wagner* aus Güstrow vor, die Schülerin einer 4. Klasse der Kersting-Oberschule ist. Frauke löste diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.

Wir wollen das Vorgehen von Frauke näher erläutern.

In der Aufgabe heißt es unter a): Ina hilft weder Frau Heller noch Frau Peter. Frauke trägt nun in die entsprechenden leeren Felder „Nein“ ein. In der Aufgabe heißt es unter b): Carola hilft Frau Neumann. Frauke trägt in das entsprechende Feld „Ja“ ein. Da jede Schülerin genau eine Rentnerin betreut, trägt Frauke in der Zeile für Carola noch dreimal „Nein“ ein.

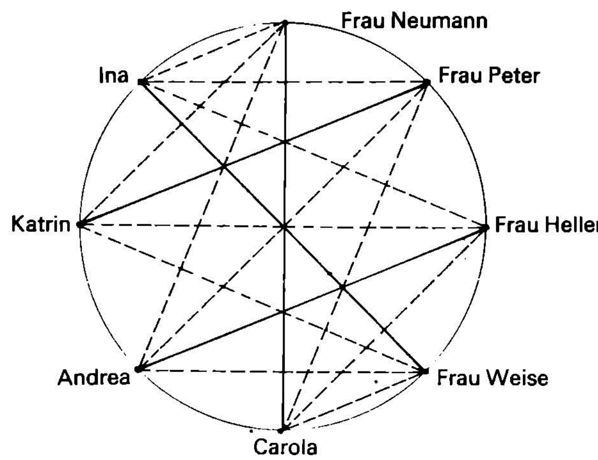
In der Aufgabe heißt es unter c): Andrea hilft nicht Frau Peter. Frauke trägt in das entsprechende Feld „Nein“ ein. In der Spalte unter Peter finden wir jetzt drei Felder mit der Eintragung „Nein“. Folglich muß das noch freie Feld die Eintragung „Ja“ erhalten. In der Zeile für Katrin müssen die freien Felder nun die Eintragung „Nein“ erhalten. Das wird analog fortgesetzt, bis jedes der Felder entweder die Eintragung „Ja“ oder „Nein“ aufweist. Danach läßt sich ablesen, wer von den Schülerinnen welcher Rentnerin hilft.

Für eine Schülerin einer 4. Klasse stellt diese Lösung eine ausgezeichnete Leistung dar.

Der Schüler Tino Heber aus Falkenberg, der die 5. Klasse besucht, sandte uns eine ähnliche Lösung. Auf einem Kreis legt er acht Punkte fest und versieht diese mit den entsprechenden Namen. Trifft der Sachverhalt „x hilft y“ zu, so verbindet er zwei einander entsprechende Punkte durch eine Gerade; trifft dieser Sachverhalt nicht zu, so verbindet er zwei einander entsprechende Punkte durch eine gestrichelt gezeichnete Gerade.

Auch Tino gebührt ein Lob für seine einwandfreie Lösung. *J. Lehmann/Th. Scholl*

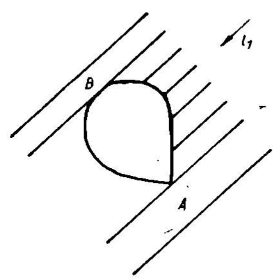
Vorname	Name Neumann	Peter	Heller	Weise
Ina	Nein	a) Nein	a) Nein	Ja
Katrin	Nein	Ja	Nein	Nein
Andrea	Nein	c) Nein	Ja	Nein
Carola	b) Ja	Nein	Nein	Nein



Eine Aufgabe von Leninpreisträger Prof. Dr. Wladimir Boltjanski

Korrespondierendes Mitglied der sowjetischen Akademie der pädagogischen Wissenschaften

▲1705▲ Es seien in einer Ebene eine beschränkte konvexe Figur (eine Figur heißt konvex, wenn für je zwei Punkte der Figur die Verbindungsstrecke dieser Punkte ganz zur Figur gehört, z. B. Kreis, Rechteck) und ein Büschel B paralleler Geraden (Lichtstrahlen) mit der Richtung l gegeben. Ein Randpunkt A der Figur F heißt aus der Richtung l beleuchtet, wenn das Büschel der Richtung l den Randpunkt A und eine volle Umgebung von A (d. h. rechts und links von A befindliche Randpunkte) trifft. In der Abbildung werden z. B. in der Richtung l_1 die Randpunkte A und B nicht beleuchtet.



Wieviel Beleuchtungsrichtungen sind für die vollständige Beleuchtung des Randes
a) eines Kreises,
b) eines Parallelogramms nötig?

Wieviel Beleuchtungsrichtungen benötigt man mindestens für die vollständige Beleuchtung des Randes einer beschränkten ebenen konvexen Figur?

Berufsbild:

Facharbeiter für Eisenbahnbautechnik

Wie oft sehen wir aus dem Eisenbahnfenster entlang dem Schienenstrang fleißige Bauarbeiter am Werk. So eine Gleisbaustelle bietet ein recht interessantes Bild. Sie wird beherrscht von modernen gigantisch aussehenden Maschinen, wie z. B. dem dieselelektrisch angetriebenen Gleisjochverlegekran *Platow UK 25* mit seiner Länge von 44,86 Metern. 720 Meter komplette Gleisanlagen zieht er auf 12 Rollwagen hinter sich her. Er kann mit einer Montagefabrik verglichen werden. Auch wuchtige Spezialkrane sind weithin sichtbar. Schweißarbeiten werden auf diesen Bauplätzen oft direkt an befahrenen Streckenabschnitten ausgeführt. Die moderne Technik ermöglicht es, in einer Schicht bis zu 500 bis 1000 Meter Gleis zu verlegen.

Wenn der Facharbeiter für Eisenbahnbautechnik auch heute nicht mehr mit Stopfhacke und Kronenschlüssel von Schwelle zu Schwelle zieht und kleine Maschinen ihn von der früher vorherrschenden körperlichen Schwerstarbeit weitgehend entlasten, so muß er doch in jeder Beziehung ein ganzer Kerl sein. Nicht nur seine Muskelkräfte müssen entwickelt sein, er muß auch denken können. Ein anwendungsbereites Wissen und Können auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet und technische Interessen sowie Liebe zur Natur sind gute Voraussetzungen für das Erlernen der Berufe *Facharbeiter für Eisenbahnbautechnik* und *Gleisbaufacharbeiter*. Der laufende Fünfjahrplan sieht den Bau von 800 km zweiter Gleise vor. Das ist eine hohe Zielstellung für die Baueisenbahner. Es lohnt sich mitzuarbeiten!

Das nachfolgende Berufsbild soll der Berufsaufklärung über diese volkswirtschaftlich wichtigen Berufe dienen. Vielleicht regen die beiden Beispiele fachkundlicher Mathematikaufgaben ein wenig zum Nachdenken an.

Facharbeiter für Eisenbahnbautechnik sowie Gleisbaufacharbeiter bauen Gleisanlagen und halten Gleise, Weichen und Kreuzungen nach festliegendem Wartungsplan instand. Sie helfen, die Leistungsfähigkeit des Streckennetzes der Deutschen Reichsbahn und der schienengebundenen Nahverkehrsmittel zu erhöhen.

Tätigkeitsmerkmale: Bedienung, Wartung und Pflege von Maschinen, maschinellen Anlagen und Aggregaten, die beim Eisenbahnbau eingesetzt werden, wie Stopfgeräte, Schraubenein- und -ausdrehmaschinen, Schienensägen. Entsprechend der beruflichen Spezialisierung – Gleisbau, Tiefbau oder Baumaschinen – bedienen sie auch Großgeräte für die Gleisbettreinigung, für die Montage und das Verlegen von Gleisjochen sowie Spezialkrane.

Voraussetzungen: Erfolgreicher Abschluß der 10. Klasse; guter allgemeiner Gesundheitszustand, kräftiger Körperbau, Reaktionsfähigkeit, Farbtüchtigkeit, gutes Seh- und Hörvermögen.

Lehrzeit: Zwei Jahre. Während der Ausbildung wird u. a. ein Befähigungsnachweis erworben, z. B. Grundlehrgang für Oberbauschweißer oder Fahrerlaubnis Klasse V oder Erlaubnis zum Bedienen von Hebezeugen bzw. Großbaumaschinen.

Bei Berufsausbildung mit Abitur umfaßt die Lehrzeit drei Jahre.

Einsatzmöglichkeiten: Im Hauptdienstzweig Bahnanlagen der Deutschen Reichsbahn, im Bereich der Reichsbahnbaudirektion, in Nahverkehrsbetrieben der Großstädte sowie in Bergwerken und anderen Großbetrieben, die über werkseigene Bahnanlagen verfügen.

Perspektiven:

- Qualifizierung zum Spezialisten, z. B. zum Fahrer schwerer Hebefahrzeuge/Oberbaugroßmaschinen, Bediener von Kränen, Oberbauschweißer mit Spezialkenntnissen
- Meister
- Ingenieur
- Diplomingenieur.

Abgänger der 8. Klasse können ab 1977 in einer dreijährigen Lehrzeit den Beruf als Gleisbaufacharbeiter erlernen. Ihr Aufgabengebiet erstreckt sich auf das Laden und Transportieren von Gleisbaustoffen, Bauen und Pflegen von Böschungsbefestigungen und Anlagen für die Entwässerung, den Brand- und Schneeschutz.

Weitere Auskünfte erteilen die Abteilungen Berufsbildung/Berufsberatung bei den Räten der Kreise und Bezirke sowie die Dienststellen der Deutschen Reichsbahn.

G. Klemm/R. Wiegand

Aufgabe: a) Bei schienengleichen Fahrzeugen werden bei höheren Geschwindigkeiten in Gleisbögen Überhöhungen eingebaut. Diese Überhöhungen haben die Aufgabe, die Fliehkräfte in den Kurven möglichst zu kompensieren. Dadurch wird eine gleichmäßige Belastung und Abnutzung der Schienen erreicht und die Sicherheit gegen Kippen bei den Fahrzeugen erhöht. Die auf Reisende und Ladungen wirkenden Kräfte werden ausgeglichen und somit Unfälle bei Reisenden und Beschädigungen der Güter verhindert.

Die Regelüberhöhung für Strecken, die mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten befahren werden, wird nach folgender Formel berechnet:

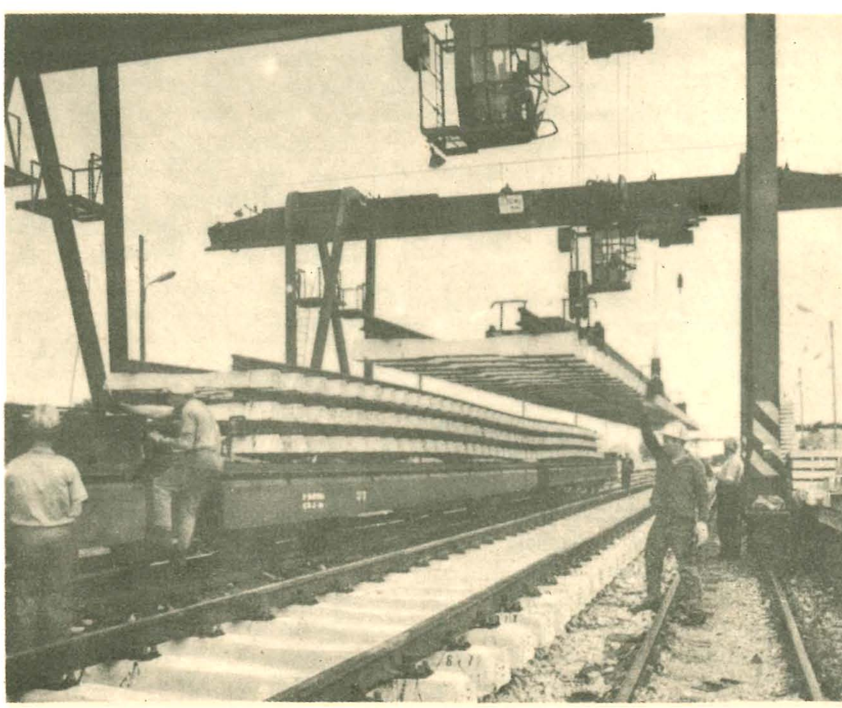
$$\ddot{U}_r = \frac{8 \cdot V^2}{R} \qquad \frac{V \quad R \quad \ddot{U}_r}{\mathrm{km \cdot h^{-1}} \quad \mathrm{m} \quad \mathrm{mm}}$$

Aufgabe: $V = 100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $R = 800\ \mathrm{m}$
(R = Radius des Bogens)

b) Gestatten die örtlichen Verhältnisse nicht den Bau einer Regelüberhöhung, so ist eine Mindestüberhöhung anzuwenden, die für Bögen $R < 300$ m nach folgender Formel zu berechnen ist:

$$U_{min} = \frac{11{,}8 \cdot V^2}{R} - \left(\frac{R}{4} + 25\right) \qquad \frac{V \quad R \quad \ddot{U}_{min}}{\mathrm{km \cdot h^{-1}} \quad \mathrm{m} \quad \mathrm{mm}}$$

Aufgabe: $V = 50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $R = 250\ \mathrm{m}$



ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mathematische Pokalwettbewerbe in Strasburg

Als in Strasburg durch Schulneubau und die Aufteilung aus einer großen Schule drei kleinere entstanden, wurde die Idee geboren, die Jungen Mathematiker der Klassen 4 und 5 aller drei Schulen in einer Stadt-Arbeitsgemeinschaft zusammenzufassen. Um durch zahlreiche Wettbewerbe das Interesse zu erhalten und zu vertiefen, führen wir viermal im Jahr Pokalwettbewerbe durch, zu denen jede Schule mit einer Mannschaft, bestehend aus Schülern der Klassen 4 und 5, startet. Alle Schulen des Kreisgebietes luden wir dazu ein, und bald wurde ein Wettbewerb auf Kreisebene daraus. Dabei erwies sich der Pokal tatsächlich als Wanderpokal.

An einem Vormittag (mittwochs) kommen Schüler und ihre Betreuer sowie die Jury-Mitglieder nach Strasburg. In einer zweistündigen Klausur werden drei Aufgaben gelöst. In die Mannschaftswertung kommen die Punktzahlen der drei erfolgreichsten Mitglieder jeder Mannschaft. In der Einzelwertung erhalten die jeweils zehn Besten eine Urkunde. Seit dem vergangenen Schuljahr führt auch unser Bezirk einen derartigen Wettbewerb durch.

Um die dem Mannschaftswettbewerb entwachsenen Schüler der sechsten und siebenten Klassen weiter zu betreuen, laden wir etwa zehn Junge Mathematiker zum Wettbewerb um die Urkunde „Bester Junger Mathematiker der Klasse 6 bzw. 7 des Kreises Strasburg" ein.

Wir überreichen eine Auswahl von Aufgaben.

Renate Diessner

Pokalwettbewerb Klasse 4

▲1▲ Inge geht für Mutti einkaufen. Sie kauft: 1 Weißbrot zu 500 g, 2 Stück Butter zu je 250 g, 5 Bockwürste zu je 100 g. Sie erhält von Mutti 10 Mark. Inge schaut auf die Preisliste:

Weißbrot	500 g	–,70 M
Butter	250 g	2,50 M
Bockwurst	100 g	–,75 M

a) Wieviel Geld erhält sie zurück?
b) Wie schwer sind die Waren im Netz?

▲2▲ Addiert man zum Siebenfachen einer Zahl 76 und multipliziert die Summe mit 8, so erhält man 696 mehr als das Dreifache von 8.

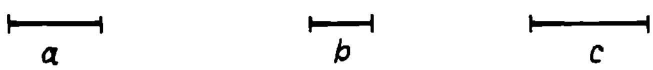
▲3▲ Zeichne einen Punkt S! Von S aus zeichne nun 5 Strahlen! Zeichne ferner zwei Geraden, die gleiche Richtung haben! Die beiden Geraden sollen alle 5 Strahlen schneiden.
Wieviel gezeichnete Dreiecke und wieviel gezeichnete Vierecke sind in der Zeichnung enthalten?

Pokalwettbewerb Klasse 5

▲1▲ Eine Strecke $\overline{AB}$ ist 72 m lang. Durch die Punkte C und D wird sie in drei Teilstrecken geteilt. Die Teilstrecke $\overline{CD}$ ist doppelt so lang wie die Teilstrecke $\overline{AC}$. Die Teilstrecke $\overline{DB}$ dagegen besitzt die dreifache Länge der Teilstrecke $\overline{CD}$.
Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

▲2▲ Unter den Teilnehmern einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik befinden sich genau dreimal soviel Jungen wie Mädchen. Als Ursula einmal fehlte, hatte ein Arbeitsgemeinschaftsmitglied Uwe als Gast mitgebracht. An diesem Tag waren viermal soviel Jungen wie Mädchen anwesend.
Wieviel Jungen und wieviel Mädchen nehmen regelmäßig an der Arbeitsgemeinschaft teil?

▲3▲ Gegeben sind drei Strecken mit den Längen a, b und c.



Konstruiere eine Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge
$2\cdot(a+3\cdot b-c)$!
Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.
Miß die Strecke $\overline{AB}$ nach Abschluß der Konstruktion, und schreibe das Ergebnis auf!

Talentsuche Mathematik

Unter diesem Titel veranstaltete der Rat des Bezirkes Neubrandenburg (Abt. Volksbildung) eine Aktion für Junge Mathematiker der Klassen 4 bis 6. Aus den an die Kreise verschickten Aufgabensammlungen nutzten wir zahlreiche Aufgaben für unsere Pokalwettbewerbe. Wir veröffentlichen eine Auswahl dieser Aufgaben:

Klassenstufe 5

▲1▲ Nach dem Plan sind von einem Zementwerk im 2. Halbjahr 16400 t Zement zu produzieren. Im Juli werden 2430 t, im August 2310 t, im September 2680 t, im Oktober 2830 t, im November 2940 t produziert.
a) Berechne die hinreichend kleinste Anzahl von Tonnen Zement, die im Dezember produziert werden müssen, um den Plan zu erfüllen!
b) Berechne den Preis dieser Menge vom Dezember, wenn eine Tonne Zement 39,– M kostet!

▲2▲ Der Schulgarten einer Stadtschule hat einen Flächeninhalt von 0,15 ha. Der Garten wird in 9 Parzellen aufgeteilt, die einen Flächeninhalt von je 150 m^2 bzw. 200 m^2 besitzen.
Wieviel Parzellen von jeder der beiden Größen befinden sich im Garten?

▲3▲ Eine Strecke von 168 m Länge wurde in drei Teile geteilt. Die zweite Teilstrecke war dreimal so groß wie die erste, dagegen betrug die dritte Teilstrecke das Vierfache der ersten Strecke.
Berechne die Länge der einzelnen Teilstrekken!

▲4▲ Gesucht ist eine natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
Dividiert man 100 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 4, dividiert man 90 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 18.
Wie lautet die gesuchte Zahl?

▲5▲ Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl.
Bestimme diese beiden Zahlen!

▲6▲ a) Wieviel zweistellige natürliche Zahlen gibt es, bei denen die Differenz der beiden Ziffern gleich 5 ist?
b) Bei wie vielen dieser Zahlen ist die Zahl selbst achtmal so groß wie ihre Quersumme, d. h. wie die Summe ihrer beiden Ziffern?

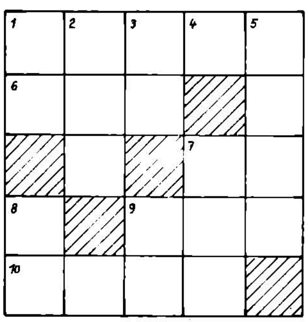
Im Kreis Strasburg (Bez. Neubrandenburg) wird an Stelle des sonst üblichen Stempels der Abteilungen Volksbildung ein Stempel verwendet, der die Idee der Mathematikolympiaden kennzeichnet. Er wird nicht nur für das Klausurpapier verwendet, sondern auch für die Urkunden der Besten der Mathematikolympiaden und der Pokalwettbewerbe (s. Abb.).

In freien Stunden alpha heiter

Kreuzzahlrätsel

Waagerecht:

1. Eine fünfstellige Zahl mit Ziffern in natürlicher Folge
6. durch 9 teilbare Zahl
7. die verdoppelte Zahl von 3. senkrecht
8. Quadratwurzel aus der Zahl 1. senkrecht
9. Quadrat einer Primzahl
10. Zahl aus gleichen Ziffern



Senkrecht:

1. Quadrat einer Primzahl
2. durch 11 teilbare Zahl
3. Quadrat einer Primzahl
4. Primzahl
5. Vierstellige Zahl mit Ziffern in natürlicher Folge
7. durch 9 teilbare Zahl
8. Primzahl
9. Primzahl

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Relativer Schachtelsatz oder geschachtelter Relativsatz

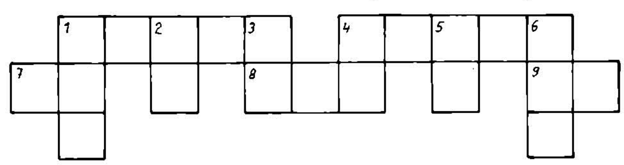
Die Leser, die eine Wettbewerbsaufgabe, die in der *alpha*, die durch den Postzeitungsvertrieb, der jederzeit Bestellungen, die in einer Form, die schriftlich sein muß, entgegennimmt, zugestellt wird, veröffentlicht ist, lösen und an die Redaktion, die sich in Leipzig, das ist die Postleitzahl 7027, befindet, schicken, erhalten eine Antwortkarte.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Silbenkreuzworträtsel

Waagerecht:

1. Zeichengerät im Mathematik-Kabinett
4. Faktor vor einer Variablen
7. norwegischer Mathematiker (1802 bis 1829)
8. Fremdwort für „Begriff"
9. französischer Mathematiker (1601 bis 1665)



Senkrecht:

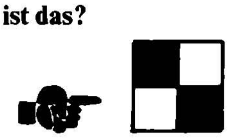
1. Form einer Darstellung von Zahlenpaaren
2. Einheit für das Volumen von Flüssigkeiten
3. Anzahl der Lebensjahre
4. Fremdwort für „Kegel"
5. ebenes geometrisches Gebilde
6. Abstand

OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Auf der Waage

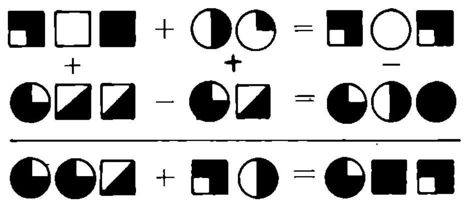
Die kleine Dame betrat die Waage und sagte: „Ich wiege also nicht 20 Kilo zuviel, ich bin laut Tabelle nur 50 Zentimeter zu klein!"

Was ist das?

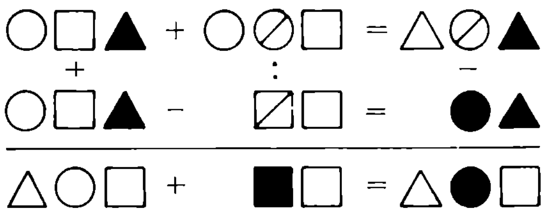


Kombiniere und rechne!

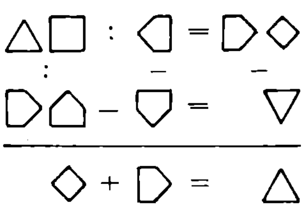
Jedes Zeichen (jeder Buchstabe, jede Figur) bedeutet eine Ziffer, gleiche Zeichen sind gleiche Ziffern.

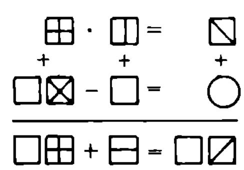


Birgit Wunsch, 107. OS Dresden, Kl. 5



Diplom-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald





Schüler Heiko Müller, Schmalkalden

Magische Zahlenquadrate

● Die Anzahl der Felder jeder (waagerechten, senkrechten und diagonalen) Reihe des untenstehenden Zahlenquadrats beträgt 5, die Gesamtzahl aller Felder $5 \cdot 5 (= 25)$.
Die Summe der Zahlen jeder Reihe ergibt $5 \cdot 5 \cdot 5$ $(= 125)$, die Gesamtsumme aller Zahlen des Quadrats $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 (= 625)$, wenn alle ungeraden Zahlen von 1 bis 49 (diese beiden und zwei weitere Zahlen sind zur Erleichterung der Lösung bereits eingetragen) entsprechend verteilt werden (Bild 1).

		41		
	1		49	
		9		

10			
		20	
	30		
			40

● Alle geraden Zahlen von 10 bis 40 sind in die Felder so zu verteilen, daß sie in jeder waagerechten, senkrechten und diagonalen Reihe die Summe von 100 ergeben.

Um die Lösung der Aufgabe zu erleichtern, sind die „vollen Zehner" bereits eingetragen (Bild 2).

Dr. Chr. Lange, Inst. f. Lehrerbildung N. J. Krupskaja, Leipzig

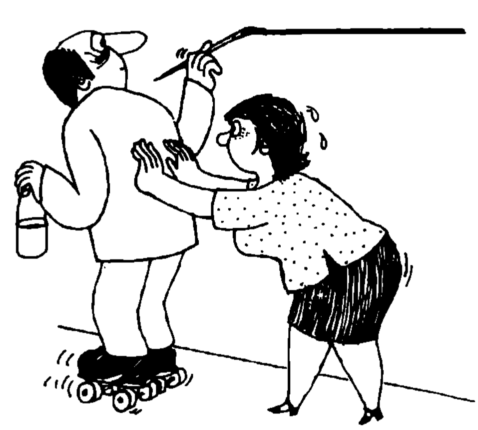
Magisches Quadrat · 1978

Die Summe jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale ergibt 1978. *Ing. H. Decker, Köln*

$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $+1\cdot 9-7-8$	$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $+1+9-7-8$	$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $+1-\sqrt{9}-7-8$	$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $-1\cdot 9+7-8$
$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $+1-\sqrt{9}\cdot 7+8$	$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $-1^9\cdot 7-8$	$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $-1-\sqrt{9}-7+8$	$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $-1\cdot 9-7+8$
$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $-1-9+7-8$	$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ -1^9-7-8	$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $-19+7+8$	$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $-1+9-7-8$
$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $-1-9-7+8$	$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ -1^9+7-8	$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $-1-\sqrt{9}\cdot 7+8$	$1\cdot 9\cdot 7\cdot 8$ $-1+\sqrt{9}-7-8$

Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben sind 13 Begriffe zu bilden. Die Anfangsbuchstaben der gefundenen Wörter ergeben den Namen eines Schweizer Mathematikers.
a – al – bel – bel – ben – bo – chen – dreh – e – e – eu – fang – fläch – hy – jekt – klid – le – li – li – ma – nal – ne – ner – null – o – ob – per – ra – ro – stel – ter – ti – tron – ung – um.
1. Hohlmaß, 2. Mathematiker des Altertums, 3. Begriff aus der Mengenlehre, 4. Schnittpunkt einer Funktion mit der x-Achse, 5. ein Kegelschnitt, 6. norwegischer Mathematiker, 7. Nenner eines Bruches von der Wurzel befreien, 8. eine Bewegung, 9. eine transzendente Zahl, 10. äußere Begrenzung einer Fläche, 11. Zeichengerät, 12. Bezeichnung für Körper mit nur ebenen Begrenzungsflächen, 13. Name eines Rechenautomaten. *Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald*



XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade (16. November 1977)

Olympiadeklasse 5

1. Im Schulgarten steckten Schüler auf einem $8\,m^2$ großen Beet als Saatgut Erbsen, und zwar ebenso dicht, wie dies auf großen Flächen üblich ist. Der Ernteertrag dieses Beetes betrug das Fünfzehnfache des Saatgutes.
Wieviel kg Erbsen ernteten die Schüler von diesem Beet, wenn für eine 1 ha große Fläche 2 dt Erbsen als Saatgut üblich sind?

2. Auf drei Bäumen sitzen insgesamt 56 Vögel. Nachdem vom ersten Baum 7 auf den zweiten und vom zweiten 5 Vögel auf den dritten Baum geflogen waren, saßen nun auf dem zweiten Baum doppelt so viel Vögel wie auf dem ersten und auf dem dritten doppelt so viel Vögel wie auf dem zweiten Baum.
Berechne, wieviel Vögel ursprünglich auf jedem der Bäume saßen!

3. Eine Fläche von $1710\,m^2$ ist in 9 Parzellen eingeteilt. Jede der Parzellen hat entweder die Größe $150\,m^2$ oder die Größe $210\,m^2$. Wieviel Parzellen jeder dieser Größe gibt es insgesamt auf der genannten Fläche?

4. Drei vorgegebene Strecken $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ und drei Strecken gesuchter Längen a, b, c sollen die folgenden Eigenschaften haben:
$\overline{AB}=a+b=5{,}6$ cm;
$\overline{CD}=a-b=1{,}8$ cm;
$\overline{EF}=b+c=6{,}2$ cm.
Zeichne drei derartige Strecken $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, und ermittle aus ihnen durch eine Konstruktion (nur mit Zirkel und Lineal) die gesuchten Längen a, b und c!
Begründe, warum deine Konstruktion die gesuchten Längen a, b, c ergibt, wenn sie die geforderten Eigenschaften haben!

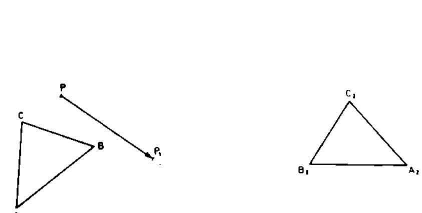
Olympiadeklasse 6

1. Eine Expedition von Wissenschaftlern legte am ersten Tag ein Drittel der geplanten Gesamtstrecke, am zweiten Tag 150 km und am dritten Tag noch einmal ein Viertel der Gesamtstrecke zurück und erreichte damit den Zielort.
Wie lang war die von der Expedition zurückgelegte Strecke?

2. Bei einem Schulsportfest bestritten Christa, Doris, Elke, Franziska und Gitta den 60-m-Endlauf. Auf die Frage, welche Plätze diese fünf Schülerinnen beim Einlauf ins Ziel belegen würden, machten einige der zuschauenden Klassenkameraden folgende Voraussagen:
(1) Christa wird nicht unmittelbar vor Elke ins Ziel kommen.
(2) Elke wird entweder als Vorletzte einlaufen oder sogar einen noch besseren Platz belegen.
(3) Es ist nicht wahr, daß Doris nicht schneller als Gitta laufen wird.
(4) Franziska wird einen anderen als den dritten Platz belegen.
Als der Endlauf vorbei war, wurde festgestellt, daß die fünf Schülerinnen sämtlich verschiedene Zeiten gelaufen waren und daß alle vier Voraussagen über den Einlauf falsch waren. Wie lautet nach diesen Angaben die tatsächliche Reihenfolge des Einlaufs?

3. In der Dreherei eines Betriebes dreht man Einzelteile aus Bleirohlingen. Jeder Bleirohling ergibt ein Einzelteil. Die Abfallspäne, die man bei der Anfertigung von je 6 Einzelteilen erhält, kann man schmelzen und daraus noch einen Bleirohling anfertigen. (Jede kleinere Menge von Abfallspänen ist hierfür zu wenig.)
Welches ist die größte Anzahl von Einzelteilen, die man hiernach insgesamt aus 36 Rohlingen anfertigen kann?

4. Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet. Gesucht ist eine Gerade g mit folgender Eigenschaft: Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Spiegelung an der Geraden g an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal eine Gerade g mit dieser Eigenschaft! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Olympiadeklasse 7

1. Anja hatte zum Geburtstag ihre beiden Freundinnen Cathrin und Eva eingeladen, mit denen sie nicht verwandt ist. Außerdem waren die Jungen Bernd, Dirk, Frank und Gerold eingeladen, von denen jeder ein Bruder eines der drei Mädchen ist. Nachdem diese sieben Personen an einem runden Tisch in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Vornamen Platz genommen hatten, stellte man fest:
(1) Keiner der Jungen saß neben seiner Schwester.
(2) Frank und Gerold sind Zwillinge.
Untersuche, ob aus den vorstehenden Aussagen die Namen der anwesenden Brüder jedes der drei Mädchen zu ermitteln sind; ist das der Fall, so sind diese Namen anzugeben!

2. a) Beweise: Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar!
b) Untersuche, ob auch die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch 6 teilbar ist!
c) Ermittle eine weitere natürliche Zahl n ($n>6$), für die gilt: Die Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch n teilbar!

3. Von einem gleichschenkligen Dreieck sei nur bekannt, daß die Summe der Größen zweier Innenwinkel und eines Außenwinkels genau 300° beträgt. Dagegen sei nicht vorgeschrieben, welche der genannten Innenwinkel Basiswinkel sind und ob der genannte Außenwinkel zu einem dieser Innenwinkel gehört oder nicht.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Größen der drei Innenwinkel dieses Dreiecks!

4. Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 24 teilbar sind und deren Zifferndarstellung die Form $\overline{9x7y}$ hat! Hierbei sind x und y durch je eine der zehn Ziffern (0, ..., 9) zu ersetzen.

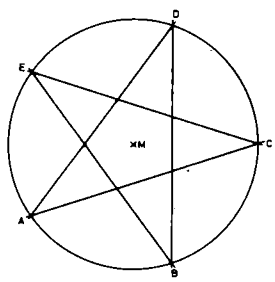
Olympiadeklasse 8

1. Vier Schüler, Anja, Birgit, Christoph und Dirk, spielten folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:
Einer von ihnen, z. B. Dirk, verläßt das Zimmer. Nun nimmt eine der Personen Anja, Birgit oder Christoph einen vereinbarten Gegenstand, etwa einen Fingerhut, an sich, und Dirk wird wieder hereingerufen. Er erhält dann von den Mitspielern Aussagen mitgeteilt, wobei genau derjenige eine falsche Aussage macht, der den Fingerhut bei sich hat.
Bei einer Durchführung dieses Spiels lauteten die Aussagen:
Anja: Ich habe den Fingerhut nicht, und Christoph hat den Fingerhut.
Birgit: Anja hat den Fingerhut, und ich habe den Fingerhut nicht.

Christoph: Ich habe den Fingerhut nicht.
Untersuche, ob mit Hilfe dieser Aussagen eindeutig feststeht, welcher Spieler den Fingerhut genommen hatte!
Ist dies der Fall, so ermittle diesen Spieler!

2. Beweise folgenden Satz: Jede Strecke, die zwei Punkte paralleler Seiten eines Parallelogramms miteinander verbindet und durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, wird von diesem Schnittpunkt halbiert!

3. Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, dessen Spitzen A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.
Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle ADB$!



4. Dieter erzählt seinen Klassenkameraden: „Mein Bruder Fritz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist drei Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 87 Jahre alt."
Ermittle das Alter aller 4 Personen! (Es sind jeweils nur die vollendeten Lebensjahre zu berücksichtigen.)

Olympiadeklasse 9

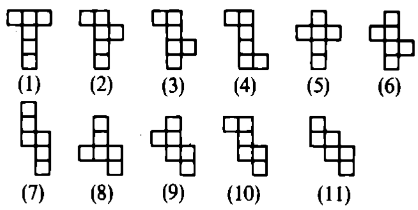
1. Für jede reelle Zahl m und jede reelle Zahl n wird durch $y=f(x)=mx+n$ (x reell) eine Funktion f definiert, deren Graph eine Gerade g ist.

a) Es sei $m=\frac{1}{2}$ und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!
b) Es seien m und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!
(Stellen Sie insbesondere fest, für welche m und n überhaupt ein solcher Punkt auf g existiert!)

2. Jens sagt zu Christa: „Ich kann die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau dreimal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen enthält." Nach kurzem Besinnen sagt Christa: „Man kann sogar für jede natürliche Zahl $n>2$ die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau n-mal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen und Klammern enthält."
Beweisen Sie, daß Christas Aussage wahr ist!

3. Gegeben seien ein Kreis k und ein Durchmesser AB von k. Der Mittelpunkt von k sei M. Sind C und D so auf k gelegen, daß $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $AB \parallel DC$ ist, so sei α die Größe des Winkels $\sphericalangle CMB$ und β die Größe desjenigen spitzen Winkels, den die Sehne DC mit der Tangente t an k in D einschließt. Man ermittle diejenigen Werte des Abstandes zwischen AB und CD, für die
a) $2\alpha=\beta$, b) $\alpha=\beta$ gilt.

4. Die folgende Abbildung zeigt 11 Würfelnetze.



a) Ermitteln Sie davon diejenigen, die sich in einem Zuge zeichnen lassen, d. h. als ein zusammenhängender Streckenzug, bei dem jede im Netz auftretende Strecke genau einmal durchlaufen wird!
b) Geben Sie für diese Netze je einen Anfangs- und Endpunkt eines solchen Streckenzuges an!

Olympiadeklasse 10

1. Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 wird verlangt, daß sie die folgenden beiden Eigenschaften (1), (2) haben:
(1) Der Durchmesser von k_4 ist um 1 cm größer als der Durchmesser von k_3, dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von k_2, und dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von k_1.
(2) Der Flächeninhalt von k_4 ist so groß wie die Summe der Flächeninhalte der anderen drei Kreise.
Untersuchen Sie, für welche Länge des Durchmessers von k_1 diese beiden Forderungen (1), (2) erfüllt sind!

2. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn M der Mittelpunkt eines Kreises k ist und wenn eine Gerade g, die durch einen Punkt A von k geht, auf AM senkrecht steht, dann ist sie eine Tangente des Kreises k, d. h., sie hat mit k genau einen Punkt gemeinsam!

3. Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\lg(x^2+7x-30)$ definiert ist.

4. Wenn eine natürliche Zahl $Z \neq 0$ im dekadischen System durch die Ziffernfolge $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$ (mit $0 \leq a_i \leq 9$ für $i=0, \ldots, n$ und mit $a_n \neq 0$) dargestellt ist, so bezeichnen wir als Quersumme $Q(Z)$ dieser Zahl Z die Summe
$Q(Z)=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1+a_0$
und als Querprodukt $P(Z)$ dieser Zahl Z das Produkt
$P(Z)=a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0$.
Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen Z mit $0<Z<1000$, für die (1) $Q(Z)+P(Z)=Z$ gilt!

Olympiadeklassen 11/12

1. Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a_1, d, b_1, q, für die folgende Aussage gilt: Wenn (1) a_1 das Anfangsglied und d die Differenz einer arithmetischen Folge (a_n) ist und wenn (2) b_1 ($\neq 0$) das Anfangsglied und q der Quotient einer geometrischen Folge (b_n) ist, so haben diese Folgen die Eigenschaften
(3) $a_1=-3b_1$, (4) $a_2=2b_2$,
(5) $a_3=b_3$, (6) d ist eine ganze Zahl.

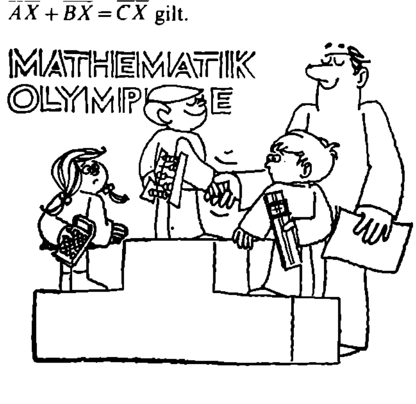
2. Über eine natürliche Zahl x werden von vier Schülern A, B, C, D je drei Aussagen gemacht. Dabei macht der Schüler A genau zwei wahre Aussagen, während die Schüler B, C, D mindestens eine und höchstens zwei wahre Aussagen treffen.
Man ermittle alle natürlichen Zahlen a, die diesen Bedingungen genügen:
($A1$) x ist dreistellig.
($A2$) Es gilt: $500<x<600$.
($A3$) Jede der Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 tritt genau einmal entweder in der dekadischen Darstellung von x oder in der dekadischen Darstellung der Quersumme von x auf; andere Ziffern kommen in beiden Darstellungen nicht vor.
($B1$) In der dekadischen Darstellung von x ist die Anzahl der Zehner das arithmetische Mittel aus der Anzahl der Hunderter und der der Einer.
($B2$) x ist das Produkt dreier voneinander verschiedener Primzahlen.
($B3$) x ist durch 5 teilbar.
($C1$) x ist eine Quadratzahl.
($C2$) Streicht man in der dekadischen Darstellung von x die Hunderterziffer und fügt sie als (neue) Endziffer wieder an, so erhält man die dekadische Darstellung einer Primzahl.
($C3$) Die dekadische Darstellung von x enthält mindestens drei gleiche Ziffern.
($D1$) x ist das Produkt zweier zweistelliger Zahlen.
($D2$) x ist Primzahl.
($D3$) x ist ungerade.

3. Es sind alle ganzen Zahlen zu ermitteln, für die

$$f(x)=\frac{3x^2+x-2}{x^2-2}$$

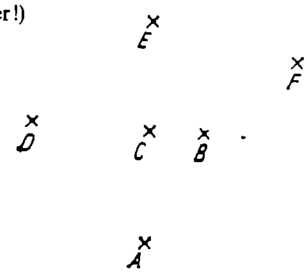
ganzzahlig ist.

4. Gegeben sei in einer Ebene ε ein gleichseitiges Dreieck ABC. Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte X in ε, für die $\overline{AX}+\overline{BX}=\overline{CX}$ gilt.



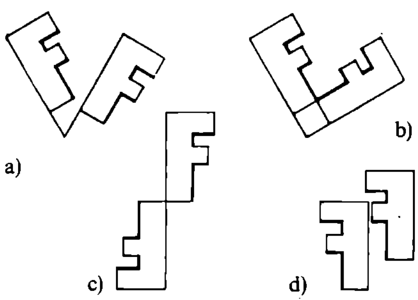
Der richtige Dreh ist zu finden!

▲1▲ Drehe um den Punkt D so, daß B Bild von A ist! (Arbeite mit Transparentpapier!)

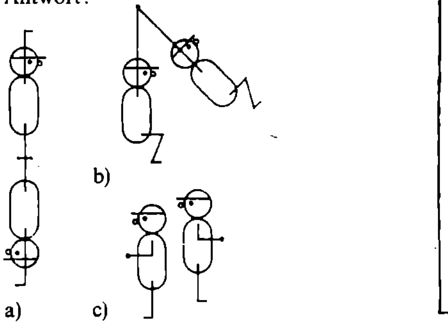


a) Wie groß ist der Drehwinkel?
b) Wo liegen dann die Bilder von B, C, D, E und F?
c) Gibt es Punkte der Ebene, die bei dieser Abbildung keinen Bildpunkt besitzen?
d) Welcher Punkt wird auf F abgebildet?

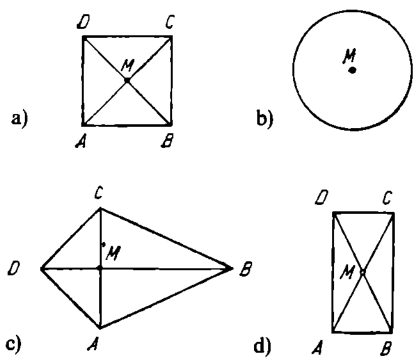
▲2▲ In welchen Beispielen ist es nicht möglich, die eine Figur durch eine Drehung auf die andere abzubilden? Begründe deine Antwort!



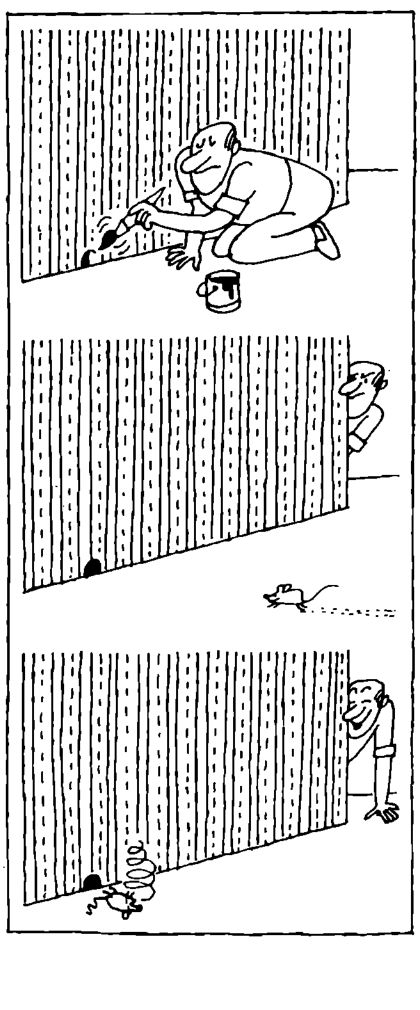
▲3▲ In welchen Beispielen ist es nicht möglich, die eine Figur durch eine Drehung auf die andere abzubilden? Begründe deine Antwort!



▲4▲ Überlege! Wie groß kannst du jeweils den Drehwinkel wählen, damit die Figur bei Drehung um M wieder auf sich selbst abgebildet wird? Überprüfe deine Antwort mit Transparentpapier!



H. Reichenbach

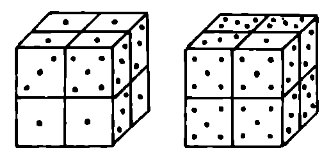


Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/77

Ma 5 ▪1650 Von beiden Jungen wurden zusammen $3+7=10$ Buntstifte und $4+6=10$ Hefte für einen Gesamtbetrag von 1,08 M $+2{,}12$ M $=3{,}20$ M $=320$ Pf gekauft. Folglich kosteten 1 Buntstift und 1 Heft zusammen 32 Pf. Für 3 Buntstifte und 3 Hefte wären insgesamt $3\cdot 32$ Pf $=96$ Pf zu zahlen. Da 3 Buntstifte und 4 Hefte zusammen 108 Pf kosten, beträgt der Preis für 1 Heft 108 Pf $-$ 96 Pf $=12$ Pf. Der Preis für einen Buntstift beträgt demnach 32 Pf $-$ 12 Pf $=20$ Pf.

Ma 5 ▪1651
1. $n=7\cdot 1+4\cdot 3+1\cdot 5=24$



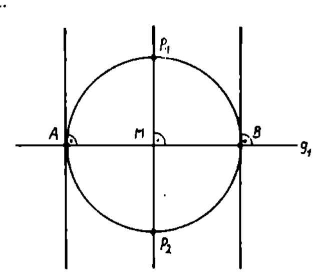
2. $m=7\cdot 5+4\cdot 3+1\cdot 1=48$

Ma 5 ▪1652 Bei dieser Subtraktionsaufgabe ist der Minuend 5stellig, der Subtrahend 4stellig und die Differenz 1stellig. Daher sind die ersten vier Ziffern des Minuenden 1, 0, 0, 0. Der Minuend ist also gleich 1006. Nun gilt

$10006-9999=7$,
$10006-9998=8$,
$10006-9997=9$.

Weitere Lösungen sind nicht möglich.

Ma 5 ▪1653 Halbiere die Strecke $\overline{AB}$! Der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ sei M. Zeichne durch M die Senkrechte auf g_1. Schlage um M als Mittelpunkt einen Kreis mit $\overline{AM}$ als Radius! Dieser Kreis schneide die Mittelsenkrechte m von $\overline{AB}$ in den Punkten P_1 und P_2. Diese beiden Punkte haben die geforderte Eigenschaft.



Ma 5 ■1654 Aus $u=2\cdot(a+b)=14$ cm folgt $a+b=7$ cm.
Wir fertigen eine Tabelle an:

a	b	$a\cdot b$
1	6	6
2	5	10
3	4	12
4	3	12
5	2	10
6	1	6

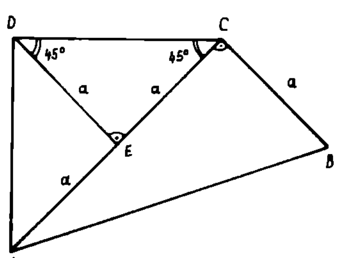
Nur für „$a=2$ und $b=5$“ oder „$a=5$ und $b=2$“ werden die Gleichungen $2\cdot(a+b)=14$ und $a\cdot b=10$ erfüllt. Die Rechteckseiten haben eine Länge von 2 cm und 5 cm.

Ma 5 ■1655 Nach Ablauf einer Woche verblieben von dieser Lieferung noch $45-25=20$ Anzüge. Aus 10825 M − 6725 M = 4100 M und 4100 : 20 = 205 folgt, daß ein Anzug 205,– M kostet. Aus 45 · 205 M = 9225 M und 10825 M − 9225 M = 1600 M und 1600 M : 20 = 80 M folgt, daß ein Kleid 80,– M kostet.

Ma 6 ■1656 Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt

$A_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2a=a^2$.

Die Höhe $\overline{DE}$ im gleichschenkligen Dreieck ACD steht senkrecht auf $\overline{AC}$ und halbiert $\overline{AC}$. Deshalb gilt $\overline{AE}=\overline{CE}=a$. Die Höhe $\overline{DE}$ halbiert aber auch den Winkel $\sphericalangle ADC$; deshalb gilt $\sphericalangle CDE=45°$. Wegen $\sphericalangle DCE=45°$ ist das Dreieck CDE gleichschenklig, und es gilt $\overline{CE}=\overline{DE}=a$.



Für den Flächeninhalt des Dreiecks ACD erhalten wir somit

$A_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{DE}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=a^2$.

Deshalb trifft die Beziehung $A_1=A_2$ zu.

Ma 6 ■1657 a) Es sei d die Differenz; dann gilt

$d=2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 20\cdot 21-2\cdot 21$,
$d=2\cdot 21\cdot(3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 20-1)$,

also ist d durch 7 teilbar, denn $21=3\cdot 7$.
b) Es sei p_1 der Minuend und p_2 der Subtrahend von d; wegen $16=2^4$ und $5=1\cdot 5$, $10=2\cdot 5$, $15=3\cdot 5$, $20=4\cdot 5$ kommen im Produkt p_1 je viermal die Faktoren 2 und 5 vor. Daraus kann $(2\cdot 5)^4=10^4=10000$ gebildet werden. Somit endet p_1 auf vier Nullen. Subtrahiert man von p_1 das Produkt $p_2=42$, so endet die Differenz d auf die Ziffern 9958.

Ma 6 ■1658 Wegen $5+9+9=23<24$ und $6+9+9=24$ kommen als Summanden der Quersumme 24 nur 6, 7, 8 oder 9 in Frage. Deshalb sind zunächst folgende Zahlen zu untersuchen:

699, 789, 798, 879, 897, 978, 987, 969, 996.

Die daraus durch Addition bzw. Subtraktion von 1 hervorgehenden Zahlen lauten:

698, 700, 788, 790, 797, 799, 878, 880, 896, 898, 977, 979, 986, 988, 968, 970, 995, 997.

Von diesen Zahlen sind nur die Zahlen 700 und 896 durch 7 teilbar. Deshalb erfüllen nur die Zahlen 699 und 897 die gestellten Bedingungen, und es gilt

$(699+1):7=700:7=100$,
$(897-1):7=896:7=128$.

Ma 6 ■1659
Wegen $a\cdot b=6=1\cdot 2\cdot 3$ könnte
$a=1$ und $b=6$ oder
$a=2$ und $b=3$ oder
$a=3$ und $b=2$ oder
$a=6$ und $b=1$ sein.
Aus $b=6$ und $b\cdot c=4$ folgt $6\cdot c=4$, was nicht möglich ist. Aus $b=3$ und $b\cdot c=4$ folgt $3\cdot c=4$, was nicht möglich ist. Aus $b=2$ und $b\cdot c=4$ folgt $2\cdot c=4$, also $c=2$, was nicht möglich ist, da $b\neq c$ sein soll.
Aus $b=1$ und $b\cdot c=4$ folgt $c=4$. Die gesuchte Zahl lautet somit $z=\overline{614d}$. Nun muß die Quersumme $q=6+1+4+d=11+d$ durch 3 teilbar sein. Das trifft zu für $d=1$, $d=4$, $d=7$. Wegen $b=1$ und $b\neq d$ entfällt $d=1$. Wegen $c=4$ und $c\neq d$ entfällt $d=4$. Es existiert genau eine Zahl, die die Bedingungen erfüllt; sie lautet 6147.

Ma 6 ■1660 Die zu ermittelnden zweistelligen natürlichen Zahlen lassen sich durch $10a+b$ darstellen; dabei gilt die Einschränkung $1\leqq a\leqq 5$ und $2\leqq b\leqq 9$. Alle möglichen Fälle sind in der folgenden Tabelle erfaßt:

a	b	$a+4$	$b-2$
1	9	5	7
2	8	6	6
3	7	7	5
4	6	8	4
5	5	9	3

Nur für $a=1$ und $b=9$ existiert eine Lösung, und es gilt $19\cdot 3=57$.

Ma 7 ■1661 Die gesuchte sechsstellige natürliche Zahl läßt sich in der Form
$z_1=2\cdot 100000+x=200000+x$
darstellen. Die Zahl z_2 hat dann die Form $z_2=10x+2$, und es gilt $3\cdot z_1=z_2$. Wir erhalten somit folgende Gleichung:

$$3\cdot(200000+x)=10x+2,$$
$$600000+3x=10x+2,$$
$$7x=599998,$$
$$x=85714.$$

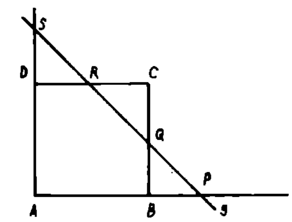
Die ursprüngliche Zahl lautet somit
$z_1=200000+85714$, $z_1=285714$.
Probe:
$z_2=857142$; $3\cdot 285714=857142$.

Ma 7 ■1662 Die dekadische Darstellung einer solchen dreistelligen Primzahl sei $\overline{abc}$, und es seien a, b, c die als Zahlen aufgefaßten Ziffern; dann gilt $a\cdot b\cdot c=252=2^2\cdot 3^2\cdot 7$. Da mit Ausnahme der Primzahl 2 alle weiteren Primzahlen ungerade sind, könnte c nur 1, 3, 5, 7 oder 9 sein.

Wegen $ab\leqq 81$ gilt ferner $c=\frac{252}{ab}\geqq\frac{252}{81}>3$.

Außerdem gilt $c\neq 5$, da eine dreistellige Primzahl nicht auf 5 enden kann.
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
1. Es sei $c=7$; dann gilt $a\cdot b=36$, also $a=4$ und $b=9$ oder $a=9$ und $b=4$ oder $a=6$ und $b=6$. Daraus folgt $z_1=497=7\cdot 71$ oder $z_2=947$ oder $z_3=667=23\cdot 29$. Die Zahlen z_1 und z_3 sind keine Primzahlen; nur die Zahl z_2 ist Primzahl, da z_2 nicht durch 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31 teilbar ist und da $31^2>947$ gilt.
2. Es sei $c=9$; dann gilt $a\cdot b=28$, also $a=4$ und $b=7$ oder $a=7$ und $b=4$. Daraus folgt $z_4=479$ und $z_5=749=7\cdot 107$. Die Zahl z_5 ist keine Primzahl. Nur die Zahl z_4 ist Primzahl, da z_4 nicht durch 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 und 23 teilbar ist und da $23^2>479$ gilt.
Es gibt somit genau zwei solcher Primzahlen, nämlich die Zahlen 479 und 947, und es gilt $4\cdot 7\cdot 9=9\cdot 4\cdot 7=252$.

Ma 7 ■1663 Es seien $ABCD$ ein Quadrat und g eine Gerade, die die verlangten Eigenschaften hat. Dann folgt aus $\overline{RQ}=\overline{QP}$,
$\sphericalangle RCQ=\sphericalangle QBP=90°$ und $\sphericalangle RQC=\sphericalangle BQP$ (Scheitelwinkel)
$\triangle BPQ\cong\triangle QCR$. Somit gilt $\overline{BQ}=\overline{CQ}$.
Analog dazu gilt $\overline{CR}=\overline{DR}$.
Die zu konstruierende Gerade g geht somit durch die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ des Quadrates $ABCD$.



Ma 7 ■1664 Angenommen, dieser Klasse gehören x Jungen an; dann gehören der Klasse $(x+15)$ Mädchen an, und es gilt

$$(x+15):x=5:2,$$
$$5x=2\cdot(x+15),$$
$$5x=2x+30,$$
$$3x=30,$$
$$x=10.$$

Dieser Klasse gehören somit 10 Jungen und 25 Mädchen an. Jeder Teilnehmer hat 875 M : 35 = 25 M aufzubringen.

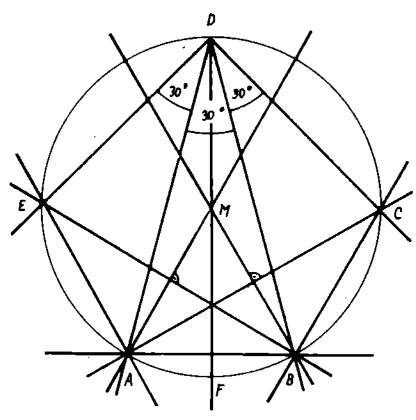
Ma 8 ■1665 Es sei x der zur Verfügung stehende Betrag (in Mark). Dann gab der Vater dem ersten Sohn $\frac{x}{3}+3$. Ihm blieben nun noch $\frac{2}{3}x-3$ übrig. Dem zweiten Sohne gab er dann $\frac{\frac{2}{3}x-3}{3}+3$, dem dritten 35 M. Addiert man diese drei Beträge, so erhält man den Gesamtbetrag x. Es läßt sich also folgende Gleichung aufstellen:

$$\frac{x}{3}+3+\frac{\frac{2}{3}x-3}{3}+3+35=x.$$

Die äquivalente Umformung ergibt $x=90$. Es folgt $L=\{90\}$. Der Vater hat 90 M Taschengeld ausgegeben. Der erste Sohn erhielt 33 M, der zweite 22 M, der dritte 35 M.

Ma 8 ■1666 Die drei Zahlen seien a, $a+1$, $a+2$.
Das Produkt aus der kleinsten und der größten Zahl ist dann $a(a+2)=a^2+2a$; das Quadrat der mittleren Zahl ist
$(a+1)^2=a^2+2a+1$, q. e. d.

Ma 8 ■1667 a) (1) $\sphericalangle EDC$ ist Peripheriewinkel des Kreises k und beträgt nach Voraussetzung 90°. Daraus folgt, daß $\overline{EC}$ Durchmesser von k ist.
(2) Der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ ist doppelt so groß wie der zur Sehne $\overline{AB}$ gehörende Peripheriewinkel $\sphericalangle ADB$ und beträgt somit 60°.
(3) Da $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ Radien sind und Winkel $\sphericalangle AMB=60°$, folgt, daß Dreieck ABM gleichseitig ist, also $\overline{AB}=4$ cm.
(4) Wegen (1) ist $\sphericalangle CME=180°$, und die Dreiecke $\triangle BCM$ und $\triangle AME$ sind gleichseitig.
(5) Aus (4) folgt: $ABCM$ ist ein Rhombus. Da im Rhombus die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, gilt: $AC \perp MB$ und da $ABME$ ebenfalls ein Rhombus ist, gilt: $MA \perp EB$.



b) Berechnung des Umfangs des Fünfecks (u):
Sei $\overline{ED}=y$. Es gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$y^2=2r^2$$
$$y=\sqrt{32}$$
$$y\approx 5{,}66$$
$$u=3\cdot\overline{AB}+2\cdot\overline{ED}$$
$$=12\text{ cm}+2\cdot y$$
$$\approx 12\text{ cm}+2\cdot 5{,}66\text{ cm}$$
$$\approx 12\text{ cm}+11{,}32\text{ cm}$$
$$\approx 23{,}32\text{ cm}.$$

Berechnung des Flächeninhalts des Fünfecks (A):
Der Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ setzt sich zusammen aus den Flächeninhalten von drei paarweise kongruenten gleichseitigen Dreiecken und dem Flächeninhalt des Dreiecks ECD. Es gilt:

$$A=\left(3\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}+8\cdot\frac{4}{2}\right)\text{cm}^2$$
$$A\approx(20{,}78+16)\text{ cm}^2$$
$$A\approx 36{,}78\text{ cm}^2$$

Der Umfang des Fünfecks $ABCDE$ beträgt etwa 23,32 cm, sein Flächeninhalt etwa 36,78 cm².

Ma 8 ■1668 Aus (2) $y+z=11$ folgt $z=11-y$. Das setzt man in (1) ein und erhält:

$$7x+5y-(11-y)=8.$$

Die weitere äquivalente Umformung ergibt

$$7x+6y=19.$$

Da x und y natürliche Zahlen sind, gilt: $0\leq x\leq 2$, denn $7\cdot 3=21>19$. Setzt man für x die Zahl 1 ein, so ergibt sich

$$7+6y=19$$
$$6y=12$$
$$y=2.$$

Es folgt $z=9$.
Da x, y, $z\in N$ erfüllt ist und x den kleinstmöglichen Wert angenommen hat (x also ein ein Minimum ist), gilt:
Es gibt nur ein einziges Zahlentripel, das die geforderten Bedingungen erfüllt. Es ist das Tripel [1, 2, 9].

Ma 9 ■1669 Der Fehler steckt gleich in der ersten Zeile! Die Division durch $2-x$ ist nur möglich, wenn $(2-x)\neq 0$, d. h. wenn $x<2$ oder $x>2$ ist. Ist nun $x<2$, also $x=0$ oder $x=1$, so sind 0 und 1 deshalb keine Lösungen, da die äquivalente Umformung $x>3$ ergibt. Ist nun $x>2$, so ist $2-x<0$, und bei Division durch eine negative Zahl ändert sich das Relationszeichen.
Es ergibt sich dann schließlich $x<3$. Es gibt aber keine natürliche Zahl, die größer als 2 und kleiner als 3 ist; deshalb ist die Lösungsmenge leer.

Ma 9 ■1670 Man formt die Gleichungen zunächst äquivalent so um, wie es an der 1. Gleichung gezeigt werden soll:

(1) $xy+1=x+y$
$xy-y-x+1=0$
$y(x-1)-(x-1)=0$
$(y-1)(x-1)=0.$

Verfährt man mit den anderen Gleichungen analog, so erhält man folgendes System:

(1') $(y-1)(x-1)=0$
(2') $(x-1)(z-1)=0$
(3') $(y-1)(z-1)=0.$

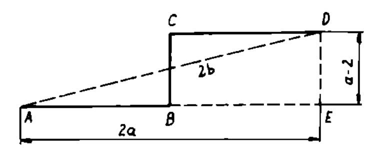
Da ein Produkt genau dann gleich Null ist, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist, ergibt sich:
$(y-1)=0$ oder $(x-1)=0$ und
$(x-1)=0$ oder $(z-1)=0$ und
$(y-1)=0$ oder $(z-1)=0$, d. h.
($y=1$ oder $x=1$) und ($x=1$ oder $z=1$) und ($y=1$ oder $z=1$).
Das heißt aber: Zwei von den drei Variablen nehmen stets den Wert 1 an; die dritte Variable kann jeden beliebigen Wert aus dem Bereich der reellen Zahlen annehmen. Man setzt nun für diese dritte Variable t und bezeichnet t als freien Parameter. Somit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems:
$L=\{[1,1,t],[1,t,1],[t,1,1]\}$, $t\in P$.

Ma 9 ■1671 Die vierstellige Zahl hat die Form $1000a+100b+10c+d$.
Ihre doppelte Quersumme ist dann $2(a+b+c+d)$. Addiert man beides, so erhält man

$$1002a+102b+12c+3d.$$

Da jeder Summand durch 3 teilbar ist, ist auch die Summe durch 3 teilbar, q. e. d.

Ma 9 ■1672 Es sei a die Maßzahl der Länge der Strecke $\overline{AB}$. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras: $(2a)^2+(a-2)^2=26^2$. Die äquivalente Umformung führt zu $a^2-\frac{4}{5}a-\frac{672}{5}=0$.
Daraus folgt, daß die Strecke $\overline{AB}$ 12 m lang ist.
Die Länge des Streckenzuges $\overline{ABCD}$ beträgt $(12+10+12)\text{ m}=34$ m.



Ma 10/12 ■1673 Es sei $444444444444444=a$ und $444444444444445=b$. Es gilt:
$b^2-a^2=(b+a)(b-a)$ und wegen $b-a=1$ gilt dann $b^2-a^2=b+a$. Es ist also zu zeigen, daß $b+a+111111111111111=10^{15}$ ist:

$$\begin{array}{r} 444444444444445 \\ +\,444444444444444 \\ +\,111111111111111 \\ \hline 1000000000000000=10^{15}. \end{array}$$

Ma 10/12 ■1674 Die Endziffern wiederholen sich periodisch.
7^{4n} hat die Endziffer 1 ($n\in N$)
7^{4n+1} hat die Endziffer 7 ($n\in N$)
7^{4n+2} hat die Endziffer 9 ($n\in N$)
7^{4n+3} hat die Endziffer 3 ($n\in N$).
Da $7^{2281}=7^{4\cdot 570+1}$ ist, hat die Zahl 7^{2281} die Endziffer 7 und demzufolge $7^{2281}-2$ die Endziffer 5. Die Zahl ist demnach durch 5 teilbar, d. h. sie ist keine Primzahl, q. e. d.

Ma 10/12 ■1675 Die Strecke $\overline{DC}$ ist gemeinsame Seite der Dreiecke $\triangle ACD$ und $\triangle BDC$. Diese Dreiecke sind kongruent (Nachweis durch Spiegelung an der Geraden DE).
Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ACD:
Der Schnittpunkt des Durchmessers $\overline{DE}$ mit der Sehne $\overline{AB}$ sei F. Zur Grundseite $\overline{DC}$ gehört die Höhe $\overline{AF}$. Es gilt:

$$A=\frac{\overline{DC}\cdot\overline{AF}}{2}$$
$$A=3\text{ cm}^2.$$

Der Flächeninhalt des Deltoids $ACBD$ beträgt 6 cm².
Berechnung der Größe des Winkels $\sphericalangle BDA=\delta$:

Man verbindet M mit A und B. Im rechtwinkligen Dreieck AFM gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AF}}{r} \quad (\alpha \text{ ist die Größe des Winkels } \sphericalangle MAF)$$

$$\cos\alpha = \frac{3\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 0{,}75.$$

Daraus folgt: $\alpha \approx 41{,}4°$.

γ sei die Größe des Winkels $\sphericalangle AMB$, und es gilt:

$$\gamma = 180° - 2\alpha \quad (\text{Dreieck } ABM \text{ ist gleichschenklig})$$

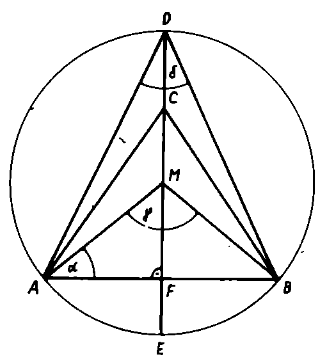
$$\gamma \approx 97{,}2°.$$

Der Winkel $\sphericalangle BDA$ ist ein Peripheriewinkel, der auf der gleichen Sehne steht wie der Zentriwinkel $\sphericalangle BMA$; also gilt:

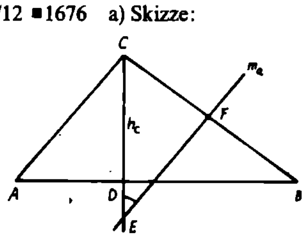
$$\delta = \frac{1}{2}\gamma$$

$$\delta \approx 48{,}6°.$$

Die Größe des Winkels $\sphericalangle BDA$ beträgt etwa 48,6°.



Ma 10/12 ▪1676 a) Skizze:



b) Berechnung der Größe des gesuchten Winkels:

[3, 4, 5] ist ein pythagoreisches Zahlentripel. Es gilt $3^2+4^2=5^2$. Folglich liegt der Seite mit der Länge 5 cm ein rechter Winkel gegenüber.

Wegen $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ gilt $\overline{AC} \parallel m_a$. ($m_a$ ist die Bezeichnung der Mittelsenkrechten auf $\overline{BC}$.)

Daraus folgt:

$\sphericalangle DCA \cong \sphericalangle FEC$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) und $\sphericalangle DCA \cong \sphericalangle DBC$, da die Dreiecke ADC und BCD ähnlich sind. (Sie stimmen in zwei Winkeln überein.)

Sei β die Größe des Winkels DBC, dann gilt:

$$\sin\beta = \frac{3}{5} \text{ und somit } \beta \approx 36{,}9°.$$

Die Mittelsenkrechte auf der Seite $\overline{BC}$ schneidet die Gerade, auf der die Höhe h_c liegt, unter einem Winkel, der etwa 36,9° beträgt.

Ph 6 ▪21 Geg.: $s = 51{,}6\text{ km} - 50{,}2\text{ km} = 1{,}4\text{ km} = 1400\text{ m}$

$t = 70\text{ s}$

Ges.: Geschwindigkeit des Zuges v

Abstand der Telegrafenmasten a

Die Geschwindigkeit des Zuges findet man nach der Formel

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{1400\text{ m}}{70\text{ s}} = \frac{1400\text{ m} \cdot 3600}{1000 \cdot 70\text{ h}}$$

$$v = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Bei 36 gezählten Masten sind 35 Abstände der Länge a vorhanden.

Also $35 \cdot a = 1400\text{ m}$

$a = 40\text{ m}$

Die Telegrafenmasten sind 40 m voneinander entfernt, und der Zug hatte eine Geschwindigkeit von $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ph 7 ▪22 Geg.: $t = \frac{1}{900}\text{ s}$ Ges.: P

$W = 350\text{ kpm}$

$$P = \frac{W}{t}$$

$$P = \frac{350\text{ kpm} \cdot 900}{1\text{ s}}$$

$$P = 315000\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}}$$

Umwandeln von $\frac{\text{kpm}}{\text{s}}$ in kW:

$315000\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}} \cdot \frac{9{,}80665}{1000} \approx 3090\text{ kW}$. In dem Gewehr muß eine Leistung von 3090 kW erzielt werden.

Ph 8 ▪23 Geg.: $P = 60\text{ W}$ Ges.: t

Für 8 Pfennig erhält man 1 kWh = 1000 Wh, also für 1 Pfennig $\frac{1000}{8}$ Wh = 125 Wh.

$$125\text{ Wh} : 60\text{ W} = 2\frac{1}{12}\text{ h} = 2\text{ h } 5\text{ min}$$

Die 60-Watt-Glühlampe kann für einen Pfennig 2 h 5 min in Betrieb genommen werden.

Ph 9 ▪24 Geg.: $x = 1{,}70\text{ m} = 0{,}0017\text{ km}$

$r_m = 1738\text{ km}$

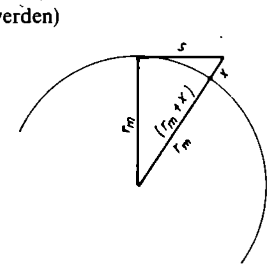
Ges.: Sichtweite s

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$(r_m + x)^2 = r_m^2 + s^2$$

$$r_m^2 + 2r_m x + x^2 = r_m^2 + s^2$$

(x^2 kann wegen seiner Kleinheit vernachlässigt werden)



$$s^2 = 2r_m x$$

$$s = \sqrt{2r_m x}$$

$$s = \sqrt{2 \cdot 1738\text{ km} \cdot 0{,}0017\text{ km}}$$

$$= \sqrt{5{,}9\text{ km}^2} \approx 2{,}431\text{ km}$$

Die Sichtweite für einen erwachsenen Menschen beträgt 2,431 km.

Fortsetzung siehe Heft 2/78.

Lösungen zu alpha-heiter

Kreuzzahlrätsel

1 2	2 3	3 4	4 5	5 6
6 5	4	9	▨	7
▨	1	▨	7 9	8
8 5	▨	9 1	6	9
10 3	3	3	3	▨

Silbenkreuzworträtsel

	TA	FEL	LI	NE	AL		KO	EF	FI	ZI	ENT	
A	BEL		TER		TER	MI	NUS		GUR		FER	MAT
	LE										NUNG	

Was ist das?

„Schachspiel für Anfänger"

Kombiniere und rechne!

$456 + 18 = 474$	$105 + 180 = 285$
$- \quad + \quad -$	$+ \quad : \quad -$
$233 - 23 = 210$	$105 - 60 = 45$
$223 + 41 = 264$	$210 + 30 = 240$
$60 : 4 = 15$	$2 \cdot 4 = 8$
$: \quad - \quad -$	$+ \quad + \quad +$
$12 - 3 = 9$	$10 - 1 = 9$
$5 + 1 = 6$	$12 + 5 = 17$

Magische Zahlenquadrate

Bild 1

29	43	17	31	5
3	27	41	15	39
37	1	25	49	13
11	35	9	23	47
45	19	33	7	21

Bild 2

10	36	38	16
32	22	20	26
24	30	28	18
34	12	14	40

Silbenrätsel

1. Liter, 2. Euklid, 3. Objekt, 4. Nullstelle, 5. Hyperbel, 6. Abel, 7. Rationalmachen, 8. Drehung, 9. e, 10. Umfang, 11. Lineal, 12. Ebenflächner, 13. Robotron.

Lösungswort: LEONHARD EULER

Lösungen zu:

Facharbeiter für Eisenbahnbautechnik

a) $\ddot{U}_r = \frac{8 \cdot 100^2}{800} = 100$

$\ddot{U}_r = 100\text{ mm}$

b) $\ddot{U}_{min} = \frac{11{,}8 \cdot 50^2}{250} - \left(\frac{250}{4} + 25\right)$

$= 118 - (63 + 25)$

$\ddot{U}_{min} = 30\text{ mm}$

alpha-Wettbewerb Abzeichen in Gold

Für zehnjährige Teilnahme
Christoph Scheurer, Glauchau-Gesau; Henrik Frank, Greifswald; Lutz Püffeld, Hennigsdorf; Uwe Lewandovski, Leipzig; Annegret Kirsten, Leuna; Eckhard Schadow, Oranienburg; Ralph Lehmann, Petershagen

Für neunjährige Teilnahme
Michael Schnelle, Calau; Martin Ermrich, Elbingerode; Bernd Hanke, Großschweidnitz; Guido Blosfeld, Halle; Detlef Poppe, Mühlhausen; Astrid Rösel, Rostock; Gerlinde Koch, Schmalkalden; Ines Greiner, Wurzen

Für achtjährige Teilnahme
Hellfried Schumacher, Ahlbeck; Holger Jurack, Burkau; Hermann Tenor, Dessau; Ulf Hutschenreiter, Dresden; Ullrich Riedel, Flöha; Ulrike Bandemer, Freiberg; Angelika Müller, Greifswald; Lars Luther, Güstrow; Birgit Krötenheerdt, Falk Bachmann, beide Halle; Rainer Gutsche, Herzberg; Ilona Drews, Wöbbelin

Für siebenjährige Teilnahme
Regina Kupfer, Belgershain; Borwin Wegener, Berlin; Arno Feuerherdt, Brandenburg; Manfred Seidler, Ralf Mayas, Ingo Fietze, alle Cottbus; Carola Zimmermann, Döbeln; Eva Gerstner, Elke Seidel, Klaus Schlegel, alle Dresden; Bernhard Tschada, Eilenburg; Uwe Beck, Falkensee; Marid Helbig, Frankfurt; Thomas Jakob, Gera; Andreas Illing, Gersdorf; Isolde Kehr, Gospenroda; Ursula Märker, Greifswald; Thies Luther, Güstrow; Matthias Heinevetter, Heiligenstadt; Dietmar Glanz, Keffershausen; Roland Kaschner, Lauchhammer; Ulv Krabisch, Bernd Kreußler, beide Leipzig; Lew Dimenstein, Leningrad (UdSSR); Norbert Littig, Lichtenberg; Sybille Baumgart, Löderburg; Uwe Bormann, Magdeburg; Karl Krause, Mansfeld (Rentner); Berthold Wettengel, Oelsnitz; Frank Aßmus, Oranienburg; Rainer Seifert, Pinnau; Beate Brandtner, Schildau; Volker Lerche, Schmalkalden; Kerstin Utke, Stralsund; Gudrun Drews, Wöbbelin; Manuela Lehmert, Worbis

Für sechsjährige Teilnahme
Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Fittke, Audrey Hoffmann, Jens-Peter Mönch, alle Berlin; Ulf Ritschel, Booßen; Uwe Lumm, Clingen; Jürgen Sägenschnitter, Clemens Jaunich, Frank Mayas, alle Cottbus; Karl-Heinz Jünger, Rainer Grunert, beide Dresden; Arnhild Lorenz, Karin Kramer, beide Görlitz; Dieter Kratsch, Göhren; Sylke Nölting, Bengt Nölting, Michael Fukarek, Irmhild Bittner, alle Greifswald; Cornelia Thiel, Güstrow; Ingo Lenz, Hagenow; Stefan Krötenheerdt, Halle; Uta Gutsche, Herzberg; Claudia Kummer, Uwe Klaus, beide Leipzig; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Rüdiger Tanzke, Hans-Joachim Berger, Andreas Erben, Löderburg; Wolfgang Blachnik, Lübbenau; Gerald Werner, Wolfgang Taubert, beide Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Axel Müller, Oberlungwitz; Iris Schulz, Rotta; Birgit Rosenberger, Suhl; Petra Henkel, Töplitz; Manfred Zimmer, Volkstedt; Roland Löffler, Weida; Manfred Häußler, Westgreußen; Katrin Richter, Wittenberg; Karsten König, Zeuthen; Jörg Brüstel, Ziegelheim; Kurt Oertel, Zschornewitz (Rentner); Andreas Bernert, Zwickau

Für fünfjährige Teilnahme
Christine Stüber, Alsleben; Birgit Oelschlegel, Altenbeuthen; Roger Labahn, Anklam; Volkmar Türke, Auerbach; Peter Möller, Bad Doberan; Torsten Flade, Beierfeld; Andreas Gude, Cordula Becher, Peter Pörs, Frank Thienert, Claudia Ziehm, alle Berlin; Martina Menge, Bernburg; Dirk Markgraf, Peter Wiehe, Michael Feudel, alle Bischofferode; Gudrun Billig, Coswig; Annette Schulz, Uwe Gätzschmann, beide Cottbus; Ralf Ott, Demmin; Carla Bergd, Dittersdorf; Ralf Kretschmer, Werner Jeroch, Reinhard Pohl, Frank Regensburger, Michael Apitz, Uwe Apitz, alle Dresden; Andrea Puchert, Eichicht; Heidelore Stallbohm, Eldena; Sabine Lützkendorf, Eberhard Georgy, alle Erfurt; Wolfhart und Astrid Umlauft, Freital; Dietmar Richter, Garitz; Frank Kratsch, Göhren; Uwe Reimann, Görlitz; Michael Schott, Gräfenthal; Wolfgang Fukarek, Christian Wolf, beide Greifswald; alpha-Zirkel der OS *Juri Gagarin*, Greußen; Jens Negwer, Ramona Zschau, Holger Heydrich, Carola Berger, alle Grimma; Burkhard Rahr, Groß-Naundorf; Günter Mosel, Gülze; Torsten Musiol, Güstrow; Torsten Ueberdiek, Halle; Andrea Herrmann, Hammerunterwiesenthal; Ute Sonnenburg, Hennigsdorf; Ulrike Otto, Ilmenau; Volker Helmert, Reinhardt Rascher, beide Karl-Marx-Stadt; Torsten Busch, Klausdorf; Jürgen Hüttner, Kottengrün; Dirk Markgraf, Peter Wiehe, beide Leinefelde; Armin Körner, Dagmar Laux, beide Leipzig; Steffen Langbein, Lichte; Gabriele Otto, Meißen; Rainer Bauer, Mittweida; Michael Weicker, Mügeln; Andreas Massanek, Neusornzig; Thomas Köhler, Oederan; Michael Monse, Olbersdorf; Michael Thränhardt, Oranienbaum; Bernd Hübner, Oybin; Jürgen Krahl, Plauen; Ulrich Kammer, Pirna; André Wortha, Pleetz; Carmen Henze, Pratau; Wilfried Röhnert, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Christiane Jordan, Reitwein; Armin Hoell, Ribnitz-D.; Michael Zwicke, Riesa; Andreas Matthus, Rostock; Siegfried Müller, Ralf Briesemeister, beide Sachsendorf; Jürgen Rolle, Schlegel; Torsten Löwe, Schleiz; Heiko Müller, Henri Hoffmann, Monika Kaufmann, alle Schmalkalden; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Christine Döll, Steinbach-Hallenberg; Holger Hoppe, Stendal; Andrea Hönemann, Stützerbach; Günter Carlsen, Titschendorf; Dirk Herrmann, Bernd Hübner, Antje Lorenz, alle Töplitz; Katrin Wahn, Ellen Krüger, beide Uebigau; Sylvia Zipf, Waldheim; Bettina Schade, Waren; Gunter Reißig, Jürgen Lehmann, Thomas Weiß, alle Weimar; Sylvia Kunze, Weißenfels; Manuel Richter, Wilthen; Carola Senft, Wingerode; Rolf Kuhn, Wintzingerode; Holger Schnabel, Wismar; Ralf Becker, Wolmirstedt; Andreas Pietsch, Zella-Mehlis; Ute Scharkowski, Zepernick; Steffen Heinrich, Zittau; Birgit Baldauf, Zschornewitz

Für vierjährige Teilnahme
Udo Clemens, Altenberg; Frank Maschke, Altendorf; Dieter Koch, Henri Koch, beide Arnstadt; Olaf Rausch, Aue; Burkhard Maeß, Bad Doberan; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Michael Prescher, Marion Breitschuh, Dagmar Fischer, Birgit Ewald, Katrin Kolliwer, Christina Ziehm, alle Berlin; Werner König, Berlingerode; Volker Wesely, Uwe Weißflog, Cerstin Berger, Sylvia Neubert, alle Bernsbach; Barbara Würth, Bernterode; Annegret Opitz, Borna; Thomas Dittrich, Brand-Erbisdorf; Vera Schulze, Brandis; Heinz-Wilfried Bötticher, Breitenworbis; Peter Krabbe, Britz; Peter Surján, Budapest (Ungarische VR); Adelbert Heddergott, Büttstedt; Iris Grinda, Calbe; Grit Schulze, Ellen Harnath, Iris Grundke, Claudia Kerstan, Jens Purand, Ilka Kohlstock, Andrea Dreyer, Uwe Ring, alle Cottbus; Jens Schumann, Coswig; Jürgen Anders, Dahlewitz; Mario Binkowski, Demmin; Jens Paetzold, Demmin; Peter-Alexander Pöhler, Frank Wittwer, Sabine Rahn, K.-Dieter Cloe, Andreas Schimmang, Uta Oelschlägel, Heike-Karen Bochmann, Annett Körner, Angela Jircik, Matthias Apitz, Lutz Friedmann, Uwe Krebs, Norbert Koksch, Klaus Conrad, alle Dresden; Jörg Bruchertseifer, Dubna (UdSSR); Matthias Arbeiter, Eisenach; Thomas Böhme, Daina Gemper, beide Eisleben; Uwe Kintzel, Erfurt; Thomas Wingeß, Birgit Weyh, Barbara Gehb, Harald Laabs, Marita Heß, Lutz Mittelsdorf, Elke Hüfner, Thomas Kassel, Ellen Reum, Heike Reckenbeil, Cornelia Möller, Steffi Ilgen, alle Fambach; Beret Brabec, Bernd Jäger, beide Frankfurt; Kathrin Meißner, Forst; Steffen Müller, Freital; Heike Brüggemann, Thomas Gerlach, Ute Ribbe, Bernd Hartwig, Mike Liebegott, Stef-

fen Töpfer, Dirk Kramer, alle Friedeburg; Viola Richter, Garitz; Sylvio Klose, Gera; Angela Illing, Gersdorf; Claudia Hartung, Jörg Gärtner, Birgit Thiele, Christina Hesse, alle Gerstungen; Angelika Brose, Görlitz; Christof Herrmann, Kerstin Hiller, beide Greifswald; Matthias Weser, Großenhain; Andrea Potthoff, Groß Wüstenfelde; André Motz, Grünhain; Gudrun Tappert, Uwe Bias, beide Guben; Jens Folgmann, Halle; Ruth Jacoby, Halle-Neustadt; Christine Naß, Hinternah; Doris Planer, Hohendorf; Knut Bauer, Hohenstein; Undine Nathan, Michael Dietrich, Sylvia Fischer, alle Hoyerswerda; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Arnd Rösch, Petra Quasdorf, Marko Hanke, alle Karl-Marx-Stadt; Mario Hoffmann, Kirchberg; Jörg Pöhland, Klingenthal; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Andreas Bernstein, Lehmitz; Heimo Woitek, Thomas Reimann, beide Leinefelde; Karola Näther, Thomas Richter, Jens Rudolf, Uwe Haberlandt, alle Leipzig; Ute-Barbara Heuer, Leisnig; Jörg Steinbach, Limbach-Oberfrohna; Bärbel Wintzler, Lobenstein; Annett und Katleen Weise, Anne Brünner, alle Löderburg; Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretzschmann, Markneukirchen, André Wenzel, Meiningen; Jürgen Wage, Jens Güth, Birgit Wilhelm, Bodo Ußfeller, alle Mittelstille; Peter Stolze, Möhlau; Peter Weingart, Mühlhausen; Volkmar Riemer, Neubrandenburg; Liane Krümmling, Neuenhofe; Matthias Theurich, Uta Rößler, beide Olbersdorf; Rüdiger Düsing, Osterburg; Antje Langer, Uwe Langer, beide Oybin; Ute Möllhoff, Piesau; Jens-Uwe Sprengel, Potsdam; Klaus Beck, Potsdam-Babelsberg; Jens Jacobi, Potsdam; Jens-Peter Planke, Premnitz; Gunter Jürschick, Rackwitz; Ulrike Baumann, Uwe und Frank Hadamik, Falk und Karsten Breuer, Dagmar Herrlich, alle Radebeul; Kerstin Neubert, Ribnitz-D.; Ronald Bracholdt, Riesa; Christine Schober, Birgit und Heiko Lehmann, Dirk Dalische, alle Rostock; Petra Forner, Rotta; Uwe Ebert, Ina Ebert, beide Ruppendorf; Regina Bricks, Saalfeld; Helmut Engelmann, Sachsendorf; Jens-Uwe Otto, Sangerhausen; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Ina Spanaus, Schleusingen; Martin Tengler, Reinhold Beckmann, Almut Beckmann, Ines Semmelrogge, Heinz-Olaf Müller, Corina Eckstein, Volker Siebenhaar, Carmen Güth, alle Schmalkalden; Lutz Möller, Schmiedeberg; Torsten Jeschke, Schwarzheide; Eckart Möbius, Roderich Winkler, beide Schwerin; Christine Kosmehl, Senftenberg; Annelie Meyer, Silberstraße; Barbara Tschada, Simone Mahlow, beide Sondershausen; Gerd Birnbaum, Spitzkunnersdorf; Volker Steuer, Spremberg; Thomas Eichhorn, Steinach; Tamara König, Jens Hoffmann, Petra Kiehm, Heiko Weiner, Angela Bieber, Sabine Munk, Marion Wolf, Frank Bähner, Christine Recknagel, Cornelia Horn, Kathrin Döll, alle Steinbach-Hallenberg; Simone Teichmüller, Stöckey; Michael Hauff, Teuchern; Heike Carlsen, Titschendorf; Michael Rehm, Torgau; Sylke Meier, Torgelow; Dietmar Ulbricht, Velten; Frank Jeschek, Vitte; Bettina Glorius, Wallrode; Jürgen Prestin, Katrin Pech, beide Waren; Sabine Stolpe, Beate Nahler, Beate Seiler, Ralf Kurch, alle Weimar; Steffen Grunewald, Werder; Bianka Schrödter, Wellmitz; Heike Vießmann, Wilkau-Haßlau; Uwe Müller, Wroclaw (VR Polen); Christoph Chojetzki, Jens Mucke, beide Zeithain; Frank Erdmann, Zeitz; Frank Lohmeyer, Steffen Pankow, Regina Kreul, Gabriele Herzig, Stefan Gondlach, Udo Matzner, Gerald Sommer, Michael Steurich, Birgit Thomas, Heike Grigoleit, Angelika Schubert, Uta Hochberger, alle Zittau; Ute Baumann, Zschocken

Für dreijährige Teilnahme

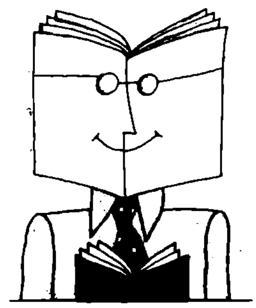
Uwe Maaz, Arnstadt; **Henri Kriechling,** Asbach; **Guntram Türke,** Auerbach; **Thorsten Tonndorf,** Bad Salzungen; **Kerstin Wegner,** Braunsbedra; **Andreas Winkler,** Cossebaude; **Ralf Hortig, Thomas Hoffmann, Andreas Schlecht, Ralf Bernhardt,** alle Cottbus; **Andreas Haubold,** Daasdorf; **Annette Meurer,** Dietzhausen; **Harry Höfer,** Dorndorf; **Carolin Engel, Thomas Hartwig, Jürgen Gräfenstein, Michael Pietschner, Lutz Jeroch,** alle Dresden; **Michael Wagner,** Fambach; **Cornelia Schädlich,** Floh; **Jörg Butter,** Freiberg; **Burkhard Fleck,** Geisa; **Angela Illing,** Gersdorf; **Bodo Heise,** Görlitz; **Yvonne Pforr,** Gräfenhainichen; **Gunnar Möller,** Greifswald; **Michael Katzer,** Greußen; **Heike Arnold,** Grimma; **Susanne Zöllner,** Halle; **Gernot Bernhardt,** Halle-Neustadt; **Heike Macionga,** Hammerbrücke; **Volkmar Liebscher,** Ilmenau; **Christel Mitzenheim,** Jena; **Jens Pönisch, Thomas Mader,** beide Karl-Marx-Stadt; **Ines Bauer,** Leipzig; **Jens Grundmann,** Limbach-Oberfrohna; **Grit Werner,** Magdeburg; **Uwe Zscherpel,** Meerane; **Per Witte,** Mittenwalde; **Heidrun Jänchen,** Mohsdorf; **Sabine Schmidt,** Nauendorf; **Meike Pfützenreuter,** Niederorschel; **Uwe Pauluhn,** Nordhausen; **Anett Rabe, Birgit Uhlmann,** beide Oberlungwitz; **Anett Schulzensohn,** Oberseifersdorf; **Kerstin Johannes,** Oranienbaum; **Peter Seifert,** Pinnau; **Kerstin Zirnstein,** Pirna; **Thomas Mittelbach,** Plessa; **Astrid Wruck,** Rostock; **Wolfgang Stein,** Rudolstadt; **Andreas Hempler,** Rüdnitz; **Birgit Bricks,** Saalfeld; **Jens Collmer, Thomas Gerth,** beide Schmalkalden; **Martin Förster, Silke Mistol,** beide Söllichau; **Bert Hoffmann,** Söllichau; **Bärbel Häfner,** Steinbach-Hallenberg; **Manfred Jahn,** Stralsund; **Peter Pfannschmidt,** Suhl; **Ute Bergmann,** Torgau; **Sabine Ender, Sabine Rommel,** beide Trusetal; **Frank Berner,** Vorbein; **Gudrun Boettcher,** Weimar; **Sebastian Strube,** Wernsdorf; **Eric Link,** Wismar; **Bernd Dunger, Gabriele Schubert,** beide Zittau; Katharina Gose, Ahlum; Holger Herold, Frank Kämpfer, Gunter Thomas, alle Altenburg; Hajo Herbst, Altenpleen; Kathrin Frey, Altwigshagen; Sibylle Heymann, Aschersleben; Uwe Wachtel, Petra Bergander, Sabine Kumineck, Ralph Müller, alle Bad Bibra; Frauke Maeß, Bad Doberan; Jörg Barthelmann, Bad Frankenhausen; Carsten Willing, Elke Herrlich, Steffen Miersch, Petra Hillig, Cornelia Weinhold, alle Bad Gottleuba; Katrin Huß, Bad Langensalza; Kersten Pegesa, Bad Muskau; Jens Mertlik, Bahratal; Caterina Beyer, Beetzendorf; Jens Spyrka, Bergen; Birgit Wollschläger, Steffen Hönicke, beide Bergwitz; Ingrid Wolf, Frank Bendin, Stefan Berg, Andreas Schaale, alle Berlin; Lothar Riemekasten, Bermbach; Hagen Geppert, Bernburg; Karsten Günther, Jörg Günthel, Matthias Neubert, Matthias Mosch, alle Bernsbach; Ulrich Kramer, Gundolf Schilling, beide Bernterode; Petra Keßler, Astrid Markgraf, beide Bischofferode; Carmen Schneider, Bischofswerda; Pia Zimmermann, Kunigunde Schmidt, Inge Beck, alle Bleicherode; Susanne Timmann, Boizenburg; Birgit Rühlemann, Sylvia Schnitter, beide Braunsbedra; Andreas Kraska, Breitenworbis; Hartwig Ranft, Martin Eschrich, Heike Kümpel, Astrid Cimalla, Heike Reckenbeil, alle Breitungen; Birgit Weishaupt, Bülow; Marita Hartleb, Büttstedt; Bärbel König, Annegret Schneider, Kerstin Ziesch, Simone Kahl, Heike Grohmann, alle Burkau; Guido Mehne, Volker Stephan, Ralph Voigtländer, alle Calbe; Olaf Seifert, Camburg; Maik Weide, Callenberg; Dietrich Schmidt, Collmen; Detlef Baur, Susanne Liebelt, Uta Lehmann, Detlef und Eberhard Kerstan, Monika Ludwig, Lutz Graupe, Kathrin Magister, Birgit Schreiber, Uwe Röhl, Jens-Uwe Schlüßler, Jörg Hortig, Verena Braun, Thomas Kolb, Thomas Brendahl, alle Cottbus; Karin Bähr, Crispendorf; Karola Sarodnik, Dallgow; Carsten Lehmann, Gabriele Voigt, beide Dahmsdorf; Gabriele Sehmisch, Dessau; Beate Schrenk, Manfred Kutschank, beide Deutschenbora; Silke Zimpel, Monika Nolte, Manuela Frankenberg, Yvonne Dellner, Eva Wetter, alle Dingelstädt; Andreas Harz, Döbeln; Grit Böttcher, Dorfstadt-Falkenstein; Michael Beetz, Dreetz; Michael Giesecke, Steffen Taut, Helmuth Goldberg, Steffen Rommeck, Titus Ziegler, Michael Berton, Timm Scheidig, Antje Zschock, Peter Hirche, Thomas Schindhelm, Holger Kschichenk, Jörn Wittig, Jens Rotsch, Detlef John, Anett Jünger, Gerlind Bartusch, Heiko Ploß, Peter Roth, Ralph Gruber, Uwe Senf, Hans-Ullrich Mäser, Thomas Süß, Karl Klotzsche, Jörg Baum, alle Dresden; Olaf Niederlein, Ebersbach; Bernhard Unkart, Eckardts; Thomas Marek, Peter Weise, Mandy Rinklin, alle Eisenach; Volkmar Kolleck, Eisenhüttenstadt; Henrik Seifert, Volker Georgy, Renate Lützkendorf, Uwe Strohmeier, Ralf York, Dirk-Thomas Orban, alle Erfurt; Uwe Nagel, Erfurt-Hochheim; Math. Zirkel der Hugo-Joachim-OS, Espenhain; Jan Beck, Falkensee; Jens Büttner, Iris Abt, Elke Schabacker, alle Fambach; Burkhard Büchler, Feldberg; Cornelia Schädlich, Simone Danz, beide Floh; Kathrin Jahn, Fockendorf; Heike Marks, Frankenthal; Gunar Stübner, Ralf Baumhekel, beide Freital; Ralph Krause, Freiberg; Andreas Fintzel, Gottfried Spiegel, beide Friedeburg; Hartmut und Stefan Fritsch, Fürstenwalde; Gerd Hackbarth, Gallentin; Anne-Katrin Schmidt, Gelmeroda; Andreas Lemke, Genshagen; Andrea Rebling, Gerstungen; Frank Scheffler, Gnoien; Rafael Stein, Gödern; Torsten Siebert, Anne-Kathrin Endtricht, Kerstin Dömeland, alle Görlitz; Babett Brehme, Ingo Brehme, beide Goßwitz; Klaus-Dieter Bartl, Gotha; Jens Vader, Grabow; Matthias Kasparek, Birgit Köhler, beide Gräfenhainichen; Stefan Gökkeritz, Katharina Herrmann, Ines Kath, Andreas Wolf, Kathrin Rohland, Pedro Tiesler, Manuela Heims, Astrid Renz, Silvia Falk, Martin Haufe, Johannes Rhein, alle Greifswald; Gabi Kramer, Greiz; Jana Henkel, Greußen; Torsten Weinhold, Andreas Kästner, Andrea Tschiche, alle Grimma; Heike Klitz, Grimmen; Christina Kaufmann, Carola Riesmeyer, beide Großbodungen; Astrid Leuteritz, Heike Schurig, Gerd Hennig, alle Großröhrsdorf; Jürgen Starke, Christine Helm, Cornelia Mewes, Marion Wiepke, alle Guben; Dirk Schreiter, Helgard Dalchow, beide Halle; Jens Matuschek, Regine Binder, Matthias Berle, alle Halle-Neustadt; Holger Unglaube, Hammerbrücke; Steffi Ehring, Christel Henneschen, Petra Bunk, Heike Krämer, alle Hedersleben; Volker und Petra Reck, Heiligenstadt; Jan Pampel, Heinrichsort; Enka Stelzer, Heringsdorf; Bettina Amarell, Dagmar Bartholomäus, Birgit Gärtner, Elke Hanf, Sabine Hegewaldt, Simone Fritz, Heike Hanf, alle Hinternah; Eike Harmel, Hohenferchesar; Thomas Klein, Roland Dietrich, Petra Ziegler, René Schüppel, Falk Neumann, Conchita Schüppel, alle Hoyerswerda; Kerstin Hirsch, Holzdorf; Horst Fliegner, Jarmen; Jens Buckisch, Ina Woytinas, Ulrich Voigt, Sylvio Milch, alle Kamsdorf; Torsten Zahn, Rocco Zieris, beide Kandelin; Birgit Hofmann, Birgit Lang, Andreas Hengst, Anett Märker, Ellen Gluthmann, alle Karl-Marx-Stadt; Christian Saegebarth, Kirchdorf; Anett Sander, Klettenberg; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Gabriele Enigk, Christine Stein, beide Kolochau; Antje Meyer, Krautheim; Kerstin Willek, Kriebitzsch; Jens-Uwe Paprotny, Kühlungsborn; Fred Kleemann, Kyritz; Gunar Schneider, Langenbach; Horst Kügler, Langenleuba-Niederhain; Petra Pluta, Lauchhammer; Angela Schönfelder, Stefan Schippel, beide Lauscha; Joachim Gessert, Leina; Carola Günther, Beate Kistner, Gabi Gold, Karsten Drescher, Bettina Hagemann, alle Leinefelde; Steffen Zopf, Jörg Schwarzer, Katrin Bormann, Holger Laux, Heiko Rudolf, Birgit Haberlandt, Stephan Bönewitz, alle Leipzig; Mario Görmer, Lichtenhain; Carmen Krämer, Lobenstein; Karola Waterstraat, Lubmin; Thomas Kühn, Lübben; Monika Kube, Lübbenau; Andreas Berger, Lüttewitz; Sigrun Oppenheimer, Malliß; Manuela Marpert, Markersdorf; Ina Groll, Meerane; Silke Marquardt, Rüdiger Malsch, Holger Gubitz, Thomas Eller, alle Meiningen; Tobias Lücke, Meißen; Kerstin Graf, Kristin Müller, Kerstin Friedrich, Beate Dutschke, alle Mittelherwigsdorf; Ralf Kausmann, Mittelndorf; Antke Kössel, Mittelschmalkalden; Holger Lehmann, Marion Jacksteit, Andrea Büchner, Evelyn König, Jörg Voigtsberger, Andrea Büchner, Maik Möller, Regina Nattermann, Ramona Meyer, alle Mittelstille; Angelika Radtke, Mittweida; Gudrun Hebestreit, Ralf Schreiber, beide Mühlhausen; Volker Müller, Müllersdorf; Uwe Grasenack, Pierre Beilschmidt, beide Nauendorf; Torsten Kretschmer, Naumburg; Birger Wirth, Nermsdorf; Dirk Säger, Neuenhagen; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Tino Radau, Neukirch; Thomas Schönmuth, Neukirch; Ilka Serbe, Neukloster; Kerstin Feigel, Neundorf; Anne Henker, Neukloster; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woike, Neustadt; Marion Müller, Neustrelitz; Bärbel Kiel, Niederorschel; Reinhard Moser, Nimritz; Uwe Koch, Nordhausen; Jörg Lehnert, Oelsen; Steffi Raabe, Ohrdruf; Tino Steurich, Olbersdorf; Stefan Wust, Osmünde; Ariane Görner, Osternienburg; Andreas Bollmann, Osteroda; Burkhard Ganß, Pappenheim; Evelyn Riemer, Ponickau; Elisabeth Schültke, Frank Treichel, beide Potsdam; Dorit Rheinsberg, Premnitz; Hagen Mrowetz, Prenzlau; Jörg Lobbes, Pritzerbe; Bianka Kappler, Radeberg; Christiane Dobberstein, Rathenow; Claudia Würker, Reichenbach; Lutz Winter, Ingo Bartsch, beide Reuden; Ralph Neumann, Ulrich Zeitzmann, beide Ribnitz-D.; Uwe Mattutat, Riesa, Axel Haubeiß, Ringleben; Torall Buchholz, Rosenow; Bernd und Jens Möhring, Thomas Gramm, alle Roßlau; Susanne Forstreuter, Kirsten Kowalewski, beide Rostock; Christina Reuter, Constanze Behmke, Matthias Teschendorf, Armin Kunze, alle Rüdnitz; Heike Brüning, Saalfeld; Anke Müller, Klaus Weinberg, beide Sachsendorf; Andreas Gießler, Steffen Krümmling, beide Sangerhausen; Birgit Bockholdt, Satow; Eva Schubert, Schalkau; Andreas Ullmann, Scheibenberg; Cornelia Grulke, Schernberg; Jens-Uwe Thiel, Antje Gerbig, Susanne Heuer, Silvio Schmidt, Ines Rieger, Rene Hellmann, Claudia König, alle Schmalkalden; Ines Müller, Schmatzin; Sabine Buß, Schorssow; Udo Schmidt, Schulzendorf; Wolfgang Förg, Schwaz (Österreich); Elke Meißner, Sitzendorf; Rolf Wendler, Gottfried Schubert, beide Sömmerda; Steffen Hildisch, Matthias Schneiderheinze, beide Sondershausen; Kordula Scholz; Spremberg; Gunter Rothämel, Sabine Avemarg, Kerstin Holland-Letz, Christine Häfner, Pia Köllmann, Anette Kaiser, Beate König, Silke König, Cornelia Recknagel, Corina Speck, Andrea Wagner, Knuth Ender, Birgit Jahn, Frank Wurschi, Anette Recknagel, Udo Walther, Christiane Büchel, Frank Dümmke, Sabine Henkel, Heidrun Bäckert, alle Steinbach-Hallenberg; Katharina Grothe, Stöckheim; Beate Doelfs, Roland Goldenbogen, Holger Chamier, Silke Reuscher, Ines Pubanz, Martin Schuster, Barbara Pfuhl, alle Stralsund; Elke Rösner, Strausberg; Ralf-Torsten Scheel, Thomas Hantel, Heidrun Tiedt, alle Teterow; Margrit Creutzburg, Thal; Annekatrin Heuer, Tieckow; Ulf Carlsen, Titschenbach; Katrin Schatz, Volker Barop, beide Torgau; Ilona Tiede, Torgelow; Antje Uhrlaß, Treben; Elke Wahn, Uebigau; Jörg Hoerenz, Vitte; Jan Günther, Voigtsdorf; Kerstin Spiegel, Waldheim; Torsten Winkler, Walldorf; Gisbert Thiere, Wallhausen; Stefan Syring, Warin; Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde; Kerstin Ackermann, Wasungen; Birgit Körner, Wegeleben; Reiner Maschke, Heike Eckardt, beide Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser, Erika Petzelis, Wendisch-Rietz; Kerstin Müller, Karla Kemlein, Anke Malsch, Thomas Krech, Mayk Rehtanz, Heike Kreuter, alle Wernshausen; Torsten Grimm, Uwe Welz, Sven Rißmann, alle Wesenberg; Rudolf Willing, Wien (Österreich); Rainer Enge, Wingerode; Ralf Mahnke, Silke Gabriel, Marita Kalisch, alle Wismar; Karsten Schlutter, Wittstock; Torsten Noack, Wittenberg; Jörg Schleinitz, Wölsickendorf; Eva-Maria Heubner, Wolfen; Birgit Schmidt, Worbis; Mario Noack, Birgit Schultheiß, beide Wüstenbrand; Torsten Ninebuck, Roland Wehmeier, beide Wüsteney; AG Math. OS Zahna; Stefan Langenhan, Zella-Mehlis; Christine Gruhn, Zepernick; Heike Kiehne, Michael Holdys, beide Ziesar; Knut Kretschmar, Peter Wenzel, Heimo Henschelmann, alle Zittau; Ulrich Zurth, Zerpenschleuse

Hinweis: Mit dem alpha-Wettbewerb 1976/77 erhalten unsere aktivsten Einsender (ein-, zweijährige Teilnahme) sowie die vorbildlichsten *Träger des Abzeichens in Gold für dreijährige Teilnahme* neben der Urkunde und dem *alpha*-Abzeichen Buchpreise. Wie seit Beginn des Wettbewerbs (1969) werden weiterhin alle Namen der Träger des Abzeichens in Gold veröffentlicht. Über 250 Einsender erhielten ihre eingesandten Unterlagen zurück, da sie nicht die für den Erwerb geforderte Anzahl von zehn Antwortkarten (richtig gelöst) vorweisen konnten.

Red. *alpha*

Wissen wo

Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1977



Gut gedacht ist halb gelöst