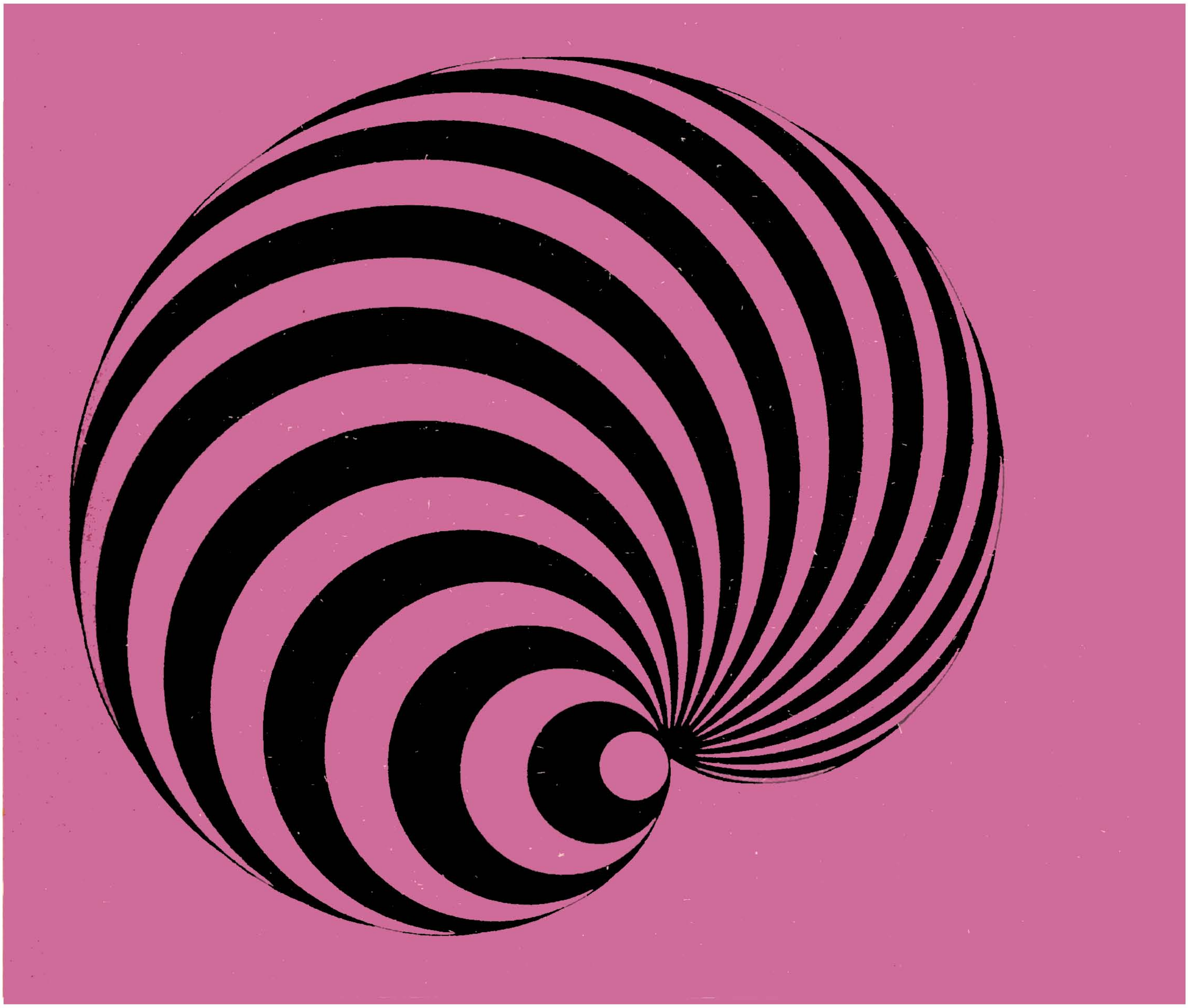
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
7. Jahrgang 1973
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

5

Redaktionskollegium:
Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); W. Unze (Leipzig); Prof. Dr. habil. W. Walsch (Halle);

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignetten: K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 100, 101, 110, 111); F. Fricke, Berlin (S. 112); Archiv *alpha* (S. 97); J. Lehmann (S. 97); Eigenfoto: A. Ljapunow, Nowosibirsk (S. 102); A. Vilenkin, Moskau, 3 Fotos (S. 106/107); J. Lehmann, 7 Fotos (S. 106/107); AG-Mathematik Burkau (III. Umschlagseite); Vignetten aus: Studenten in der Sowjetunion, APN-Verlag, Moskau (S. 108/109), Briefmarken: W. Unze, Leipzig (S. 102)
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 23. Juli 1973

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Dieses Heft wurde zu Ehren der XV. Internationalen Mathematikolympiade in der UdSSR ausschließlich aus Material unserer sowjetischen Freunde zusammengestellt.

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

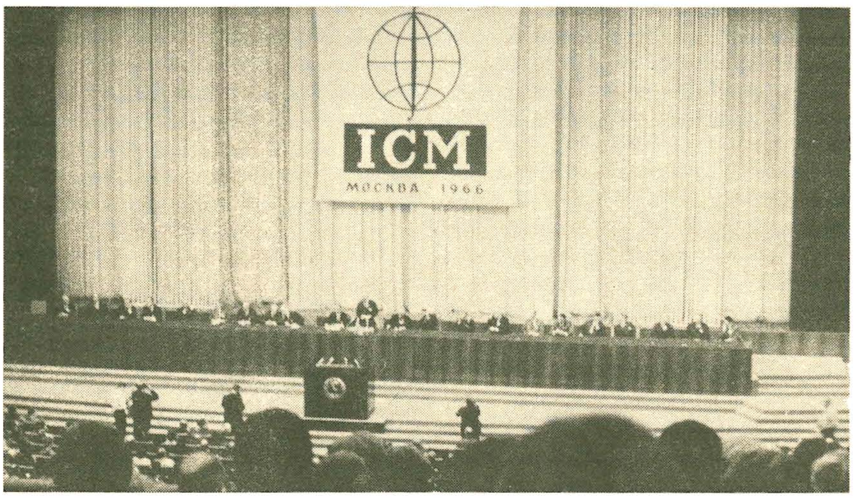
Millionen auf der Bleistiftspitze

Teil 1

Я. Я. Халамайзер

Im 16. Jahrhundert kannten sich nur wenige Menschen in der Mathematik aus. Etwas war den Seefahrern bekannt, noch weniger den Landvermessern. Das Häuflein Gelehrter, das sich auf die Universitäten verteilte, beschäftigte sich mit der *reinen* Mathematik und zollte ihrer Anwendung im alltäglichen Leben keine Aufmerksamkeit ....

Im August 1966 erörterten mehr als 5000 führende Mathematiker der ganzen Welt eineinhalb Wochen lang in Moskau die wichtigsten Fragen der Anwendung der Mathematik. Und das nicht nur in der Technik und Ökonomie, sondern auch in der Medizin,



in der Biologie und sogar in einer von der Mathematik entfernt scheinenden Wissenschaft wie der Sprachwissenschaft. 1967 wurde im Ministerium für Gesundheitswesen der Sowjetunion ein Rechenzentrum geschaffen, und in der Akademie der Landwirtschaftswissenschaften *K. A. Timirjasew** begann man mit der Ausbildung von Mathematikern – Kybernetikern für die Arbeit in der Landwirtschaft. Im Herbst 1970 befanden sich unter den Gelehrten auf dem Mathematikerkongreß in Nizza (Frankreich) allein über hundert aus der Sowjetunion. Besondefs oft ergeben sich im Leben Aufgaben des Auffindens von *optimalen Bedingungen*: eines Maximums an Nutzeffekt, eines Minimums an Ausgaben, eines Maximums an Produktion oder Gewinn, eines Minimums an Arbeitskräften, Ausrüstung, Transportmitteln....

Als Beispiel betrachten wir zunächst eine *Hausaufgabe*.

„Was meint ihr, wenn wir in diesem Jahr Erdbeeren anpflanzen würden", fragte Natascha während des Mittagessens.

„Jaja, die pflanzen wir an, und dann plündern sie die Jungen nach und nach alle weg", widersprach Lena.

„Man müßte sie einzäunen", bemerkte der Vater.

„Womit denn? Außerdem würde man immer noch drüberklettern ..."

„Morgen frag ich im Werk. Ich glaube es gibt Zaunfelder aus Abfällen", versprach der Vater.

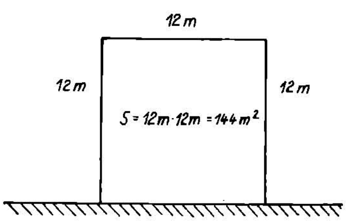
Am nächsten Tag stand fest, daß man 36 Meter festen Zaunes bekommen könnte.

„Über den klettert niemand drüber", sagte der Vater. „Übrigens, wir können eine Parzelle längs der Werkmauer nehmen, dann brauchten wir sie von einer Seite nicht einzuzäunen."

„Aber, daß die Beete gerade werden", erinnerte die Mutter.

„So ..., wenn wir eine quadratische Parzelle nehmen .... Gib mir mal einen Bleistift, Natascha." Und die Mutter zeichnete: (Bild 1).

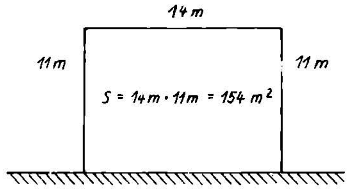
Bild 1



* Kliment Arkadjewitsch Timirjasew (1843 bis 1920) – russ. Pflanzenphysiologe

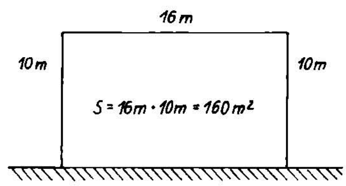
„Etwas wenig ergibt das, insgesamt nur 144 m²", sagte Natascha. „Wir machen eine Seite lieber etwas länger, so .... (Bild 2)

Bild 2



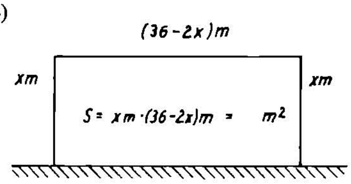
„Man kann die Seite noch länger machen", erwiderte Lena und nahm den Bleistift (Bild 3). „Seht mal, so wird die Parzelle größer, und Erdbeeren werden es mehr."

Bild 3



„Und die Seite kann man noch größer machen", lächelte spöttisch der Vater. „Nur ist es besser nicht zu raten, sondern exakt die Aufgabe zu formulieren und sie zu lösen." (Bild 4)

Bild 4



▲1▲ Die zur Werksmauer senkrechten Seiten der Parzelle seien je x Meter lang; dann ist die zur Werksmauer parallele Seite $26-2x$ Meter lang, und die Fläche S des eingeschlossenen Rechtecks beträgt

$$S = x \cdot (36-2x)\ \mathrm{m}^2.$$

Wir formen den Ausdruck um, um ein volles Quadrat herauszulösen:

$$S = x \cdot (36-2x) = -2(x^2-18x) =$$
$$= -2(x^2 - 2 \cdot 9x + 9^2 - 9^2) =$$
$$= -2(-9^2) - 2(x-9)^2 =$$
$$= 162 - 2 \cdot (x-9)^2.$$

Die Fläche der Parzelle ist also gleich der Differenz zwischen der konstanten Größe 162 und der veränderlichen Größe

$$2 \cdot (x-9)^2.$$

Dafür, daß die Fläche möglichst groß wird, muß man von der Zahl 162 möglichst wenig abziehen. Natürlich wäre es gut, von 162 eine negative Zahl abzuziehen (dann würde die Fläche sogar größer als 162), nur kann $2 \cdot (x-9)^2$ nie negativ werden. Also, um eine möglichst große (maximale) Fläche zu erhalten, muß der Subtrahend Null sein:

$$2\cdot(x-9)^2=0.$$

Hieraus folgt sofort $x=9$, d. h. die Länge der Parzelle (längs der Werkmauer) müßte 18 Meter und ihre Breite 9 Meter betragen. Unter dieser Bedingung wird die Fläche der rechteckigen Parzelle maximal und beträgt 162 m².

Und jetzt lieber Leser, wirst du zum Direktor der Transportabteilung des Brothandels in einer kleinen Stadt ernannt. Deine Aufgabe – die Lieferung von Brot aus 3 Bäckereien in 5 Geschäfte zu gewährleisten. In Tabelle 1 sind die Produktionskapazitäten der Bäckereien und der Bedarf der Geschäfte angegeben (je Tag). Als Maßeinheit haben wir die Tragfähigkeit eines Brotautos angenommen.

Die Ziffern in den Kästchen der Tabelle 1 bedeuten die Transportkosten je Brotauto (in Mark); so gibt die Ziffer 4 im linken oberen Kästchen an, daß die Transportkosten eines Brotautos aus der Bäckerei B_1 in das I. Geschäft 4 Mark betragen.

Als erstes muß der Transportplan aufgestellt werden. Von der Produktion aus der Bäckerei B_1 gehen in das I. Geschäft 25 Autos, in das II. – 20 und in das III. – 5. Von der Produktion B_2 gehen in das III. Geschäft 10 und in das IV. – 30 Autos. Schließlich gehen von der Produktion B_3 in das IV. Geschäft 25 und in das V. – die übrigen 35 Autos. Der entsprechende Transportplan ist in der Tabelle 2 angegeben.

Wir füllten – indem wir diesen Plan aufstellten – eine Tabelle (man nennt sie oft *Matrix*) aus, und zwar angefangen mit dem oberen linken Kästchen. Auf einer geographischen Karte entspricht die obere linke Ecke der nordwestlichen, deshalb bezeichnet man solch einen Transportplan als *Nordwestecken-Plan.*

Es ist nicht schwer, die täglichen Gesamttransportkosten entsprechend diesem Plan zu berechnen:

$4\cdot25+5\cdot20+2\cdot5+5\cdot10+4\cdot30+7\cdot25+4=695$ (Mark).

Es taucht die Frage auf, ob man das Brot nicht nach einem anderen Plan billiger ausfahren könnte. Wenn man nun das I. Geschäft nicht aus A, sondern aus B beliefern würde, und entsprechend in das IV. Geschäft 25 Autos aus A schickt (Tabelle 3)? Jetzt betragen die täglichen Gesamttransportkosten $5\cdot20+2\cdot5+2\cdot25+5\cdot10+4\cdot30+2\cdot25+4\cdot35=520$ (Mark).

Durch eine kleine Änderung des Transportplanes könnten wir täglich 175 Mark einsparen. Für das ganze Jahr ergibt das mehr als 50000 Mark Nutzen!

Man könnte übrigens noch mehr einsparen. Tabelle 4 zeigt eine optimale (billigste) Variante des Transportplanes. Die täglichen Transportkosten nach diesem Plan betragen nur 385 Mark – anstatt 695 Mark nach der ersten Variante. Auf diese Art und Weise gelang es nur mit Hilfe eines Bleistiftes die täglichen Transportkosten um 310 Mark bzw. um 45% gegenüber den Anfangskosten zu senken.

Die oben behandelte sogenannte *Transportaufgabe* ist nur eine aus einer ganzen Reihe von Aufgaben der *linearen Programmierung*, deren Ausarbeitung in den letzten Jahrzehnten besonders intensiv betrieben wird. Hier noch eine Reihe verwandter Aufgaben: die optimale Auslastung der vorhandenen Produktionsausrüstung, der Plan der Standortverteilung von Produktions- und Handelseinrichtungen, die Landverteilung im Gartenbau .... Viele dieser Aufgaben sind gut erforscht und in allgemeiner Form ausgearbeitet.

In unserem Beispiel hatten wir 3 Bäckereien (Produzenten) und 5 Geschäfte (Verbraucher). Unsere Tabelle – *Matrix* – hatte insgesamt $3\cdot5=15$ Kästchen. Es war nicht schwer, alle möglichen Varianten des Transportplanes zu berechnen und die effektivste (optimalste) auszuwählen. Beim Vorhandensein von 10 Produzenten und einem halben Hundert Verbraucher wird die Matrix schon $10\cdot50=500$ Kästchen enthalten. Die Menge der möglichen Varianten wird so groß, daß es unmöglich ist, sie alle zu berechnen. Sogar mit Hilfe von elektronischen Rechenmaschinen! Es sind jedoch Methoden ausgearbeitet worden, die es gestatten, von einem gegebenen Plan (z. B. Nordweststecken-Plan) zu einem anderen *effektiveren* überzugehen. So kann man z. B. mit der *Simplex-Methode* Schritt für Schritt jeden vorhandenen Plan so lange verbessern, bis er optimal wird.

Bäckereien und ihre Produktionskapazität	Die Geschäfte und ihr Bedarf I:25	II:20	III:15	IV:55	V:35	
B_1 : 50	4	5	2	2	3	
B_2 : 40	3	6	5	4	2	Tab. 1
B_3 : 60	2	5	3	7	4	
B_1 : 50	^{4}25	^{5}20	^{2}5	2	3	
B_2 : 40	3	6	^{5}10	^{4}30	2	Tab. 2
B_3 : 60	2	5	3	^{7}25	^{4}35	
B_1 : 50	4	^{5}20	^{2}5	^{2}25	3	
B_2 : 40	3	6	^{5}10	^{4}30	2	Tab. 3
B_3 : 60	^{2}25	5	3	7	^{4}35	
B_1 : 50	4	5	2	^{2}50	3	
B_2 : 40	3	6	5	^{4}5	^{2}35	Tab. 4
B_3 : 60	^{2}25	^{5}20	^{3}15	7	4	

▲2▲ Ein Werk kann Geräte zweier verschiedener Typen B und M herstellen. Für jedes Gerät B werden 15 Dioden und 12 Trioden, für jedes Gerät M – 2 Dioden und 6 Trioden gebraucht. Eine Überprüfung am Prüfstand des Gerätes B dauert 3 Minuten, des Gerätes M – 12 Minuten. Beim Verkauf erhält das Werk für ein Gerät B – 9 Mark Gewinn (nicht gerechnet die Unkosten), für ein Gerät M – 6 Mark. Die Materialien zur Herstellung der Geräte sind beschränkt; während jeder Schicht kann das Werk über nicht mehr als 300 Dioden und 306 Trioden verfügen, und der Prüfstand kann in jeder Schicht nicht mehr als 6 Stunden (360 Min.) zuverlässig arbeiten.

Wie viele Geräte B und M muß das Werk herstellen, damit der Gewinn (in einer Schicht) maximal wird? Die Bedingungen der Aufgabe können gekürzt in Form der Tabelle 5* geschrieben werden.

Lösung: I. Wir bezeichnen die Menge der Geräte B und X_1 und die Menge der Geräte M mit X_2. Nun kann unsere Aufgabe mathematisch folgendermaßen formuliert werden: es sind zwei unbekannte Größen X_1 und X_2

zu finden, die folgenden Ungleichungen genügen

$$15 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 \leqq 300 \quad (1)$$
$$12 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 \leqq 306 \quad (2)$$
$$3 \cdot X_1 + 12 \cdot X_2 \leqq 360 \quad (3)$$
$$X_1 \geqq 0 \quad (4)$$
$$X_2 \leqq 0, \quad (5)$$

und zwar so, daß die Größe $T = 9 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2$ einen möglichst großen Wert annimmt.
Die Bedingungen unserer Aufgabe sind jetzt in der Form von *linearen* Ungleichungen aufgeschrieben. Die *Zielfunktion T* ist auch eine *lineare* Funktion. Deshalb nennt man solch eine Aufgabe gewöhnlich eine Aufgabe der *linearen Programmierung.***
II. Da in der Aufgabe nur zwei unbekannte Größen X_1 und X_2 figurieren, kann man versuchen, sie graphisch zu lösen: es ist in der (X_1, Y_2)-Ebene ein Punkt mit den nötigen Koordinaten X_1 und X_2 zu finden (anstelle X_1 und X_2 schreibt man oft X und Y).
Wir geben uns ein System von rechtwinkligen Koordinaten mit den Achsen X_1 und X_2 vor. Wegen der Ungleichungen (4) und (5) sind nur Lösungen im ersten Quadranten möglich (Bild 5). Dann zeichnen wir die Gerade $15X_1 + 2X_2 = 300$.

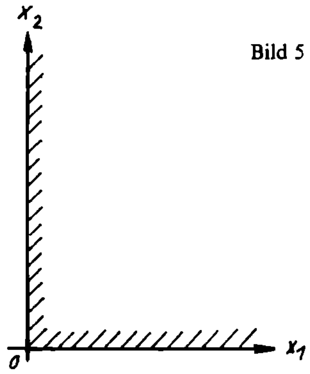


Bild 5

Wegen der Ungleichung (1) ist eine Lösung unserer Aufgabe nur in den Punkten des ersten Quadranten möglich, die unter (links) dieser Geraden liegen (Bild 6). Weiterhin zeichnen wir die Geraden

$$12X_1 + 6X_2 = 306$$
und $$3X_1 + 12X_2 = 360.$$

Ähnlich wie oben ist nun wegen der Ungleichungen (2) und (3) eine Lösung nur in den Punkten möglich, die unter diesen Geraden liegen, d. h. im abgeschlossenen Vieleck *OABCE* (Bild 7).

* Die Tabellen 5 bis 7 siehe in Heft 6/73 (Teil 2), d. Red.
** Unter Programmierung versteht man oft die Aufstellung eines Programms für die Arbeit einer elektronischen Rechenmaschine. Der Begriff „Programmierung" ist hier nicht sehr passend gewählt, er ist aber allgemein üblich. Besser wäre die Bezeichnung „lineare Planung".

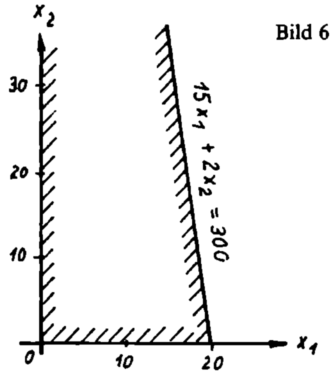


Bild 6

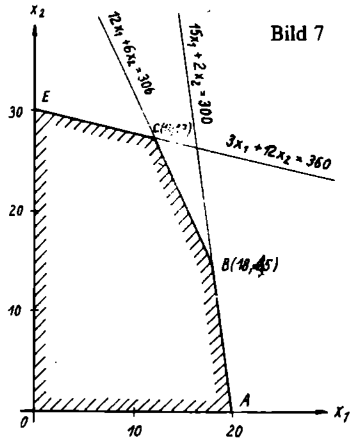


Bild 7

Der Wert der Zielfunktion auf jeder der Geraden $9X_1 + 6X_2 = K$ (K – beliebige Zahl) ist konstant. Da diese Geraden keiner einzigen Seite des Vielecks parallel sind, so verläuft durch jede Ecke des letzten Vielecks nur eine solche Gerade und fällt dabei mit keiner Seite des Vielecks zusammen. Wir bestimmen diese Geraden:

$T_1: 9X_1 + 6X_2 = 0$
(durch den Punkt 0);
$T_2: 9X_1 + 6X_2 = 180$
(durch die Punkte A und E);
$T_3: 9X_1 + 6X_2 = 252$
(durch den Punkt B);
$T_4: 9X_1 + 6X_2 = 270$
(durch den Punkt C).

Die aufgezählten Geraden seht ihr auf Bild 8. Es ist leicht zu sehen, daß die Zielfunktion ihren maximalen Wert im Punkt C erreicht:

$$T(c) = T(12, 27) = 9 \cdot 12 + 6 \cdot 27 = 270.$$

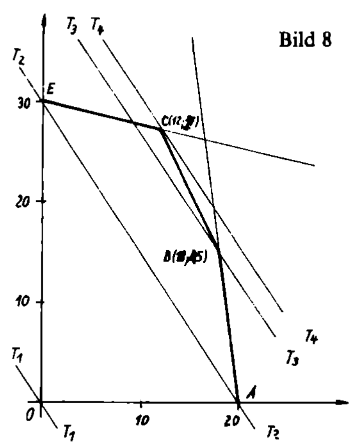


Bild 8

Nach rechts kann man die Gerade $9X_1 + 6X_2 = 270$ nicht verschieben, da sie dann keinen einzigen Punkt des Vielecks *OABCE* enthalten würde; wenn man sie nach links verschiebt, nimmt sie kleinere als 270 Werte an.

Antwort: Die Zielfunktion erreicht ihren maximalen Wert, gleich 270, bei $X_1 = 12$ und $X_2 = 27$, d. h. maximalen Gewinn (und zwar 270 Mark) erreicht das Werk, wenn es 12 Geräte *B* und 27 Geräte *M* herstellt.

III. Die graphische Lösung der Aufgabe war möglich, da in ihr nur zwei unbekannte Größen X_1 und X_2 figurierten. Reale Aufgaben der linearen Programmierung enthalten nicht selten ... zig, ja manchmal Hunderte Unbekannte.
Zur Lösung dieser Aufgabe kann man auch die sogenannte Simplex-Methode anwenden. Das soll in einem zweiten Beitrag in Heft 6/73 geschehen.

A. Halameisär

Mathematikstunde

von der wüste
ziehen wir die wüste ab
und bekommen
das feld

das feld
nehmen wir in die dritte potenz
und bekommen
den wald

aus dem wald
ziehen wir die wurzel
und bekommen
den garten

die früchte addieren wir
und bekommen
brot

das brot teilen wir
und bekommen
freundschaft
dann multiplizieren wir alles
und bekommen
das leben

Wjatscheslaw Kuprijanow
Nachdichtung: Axel Schulze

Primzahlen

Primzahlen haben schon die Menschen im Altertum interessiert. Über diese Zahlen wurden viele interessante Fragen gestellt. Es ist bemerkenswert, daß einige dieser Fragen bis heute nicht beantwortet wurden.

1. Wir nehmen die Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... In dieser Folge gibt es keine größte Zahl. Wie groß man auch eine natürliche Zahl n wählt, es gibt stets eine größere, z. B. die folgende natürliche Zahl $n+1$. Folglich gibt es keine größte natürliche Zahl. Diese Tatsache haben die Mathematiker im Auge, wenn sie sagen, daß die Menge der natürlichen Zahlen unendlich ist.

2. Wir kommen zur Folge der natürlichen Zahlen zurück. Die Zahl 1 ist die kleinste Zahl der Folge. Sie hat nur einen Teiler, die 1. Die nächste Zahl ist 2. Diese Zahl besitzt zwei Teiler, und zwar 1 und 2. Die Zahl 3 hat auch zwei Teiler 1 und 3. Die nächste Zahl 4 besitzt dagegen drei Teiler, 1, 2 und 4. Die Zahl 5 hat zwei Teiler, 6 hat vier Teiler usw. Eine Zahl kann aber auch noch mehr Teiler besitzen, so hat die Zahl 60 z. B. die 12 Teiler 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Alle Zahlen, die genau 2 Teiler haben (1 und sich selbst), nennt man Primzahlen. Bei mehr als 2 Teilern spricht man von zusammengesetzten Zahlen. So sind z. B. 2, 3, 5, 7, 11 Primzahlen, 4, 6, 8, 9, 10 dagegen zusammengesetzte Zahlen. Und was für eine Zahl ist 1? Sie besitzt doch nur einen Teiler. Deshalb ist sie weder Primzahl noch zusammengesetzte Zahl.

Dadurch wird die Menge der natürlichen Zahlen in 3 Teile – oder wie man auch sagt, in 3 Untermengen – aufgeteilt. Die erste Untermenge besteht nur aus einer Zahl, und zwar aus der Zahl 1. Die zweite Untermenge enthält alle Primzahlen, und die dritte enthält alle zusammengesetzten Zahlen. Dabei sei hervorgehoben, daß jede natürliche Zahl in einer und nur in einer Untermenge enthalten ist. Dazu sagt man auch, diese drei Untermengen sind einander elementfremd.

3. Man errät leicht, daß die Menge der zusammengesetzten Zahlen unendlich ist. In der Tat gibt es bereits unendlich viele Zahlen der Form 2^n, wo n die Werte 2, 3, 4, ... durchläuft, darüber hinaus gibt es aber noch weitere zusammengesetzte Zahlen!

Was kann man nun aber von den Primzahlen sagen, bilden sie eine endliche oder eine unendliche Menge? Der bekannte altgriechische Mathematiker Euklid, der im dritten Jahrhundert unserer Zeitrechnung gelebt hat, hat bewiesen, daß die Menge der Primzahlen unendlich ist.

Schauen wir uns an, wie scharfsinnig Euklid beim Beweis dieser Tatsache überlegt hat! Es sei p eine gewisse Primzahl. Wir wollen beweisen, daß es zu ihr noch eine größere gibt. Dazu multiplizieren wir alle Primzahlen bis p, p eingeschlossen, miteinander, und addieren zu diesem Produkt eine Eins. Wir erhalten die folgende Zahl:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p+1.$$

Diese Zahl, die offensichtlich größer als p ist, ist entweder Primzahl oder zusammengesetzt. Wenn sie Primzahl ist, so haben wir damit bereits bewiesen, daß es eine Primzahl gibt, die größer als p ist. Ist diese Zahl jedoch zusammengesetzt, so muß sie durch eine gewisse Primzahl teilbar sein; sie wird jedoch von keiner der Primzahlen 2, 3, 5, ..., p geteilt, denn bei der Division durch diese Zahlen erhält man als Rest stets 1. Das bedeutet, daß sie durch eine Primzahl teilbar sein muß, die größer als p ist. Somit müssen wir auch in diesem Falle zugeben, daß es eine Primzahl gibt, die größer als p ist. Wegen der Willkür in der Wahl von p bedeutet das indessen, daß es keine größte Primzahl gibt, und daraus folgt sogleich die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen.

4. Die Menge der Primzahlen ist somit unendlich. Dabei ist klar, daß die Menge der Primzahlen, die kleiner oder gleich einem gewissen n ist, endlich ist. Wie kann man diese Zahlen finden? Am einfachsten geht man dazu nach einer Methode vor, die ein Zeitgenosse von *Archimedes,* der griechische Mathematiker *Eratosthenes,* vorgeschlagen hat. Wir wollen dieses Verfahren näher erläutern. Es seien alle Primzahlen zu bestimmen, die kleiner oder gleich n sind. Wir schreiben dazu die Teilfolge der Zahlen von 1 bis n auf: 1, 2, 3, 4, 5, ..., n.

Als erstes steht hierin eine 1. Sie ist, wie wir bereits wissen, nicht Primzahl. Daher streichen wir sie weg. Die nächste Zahl ist 2. Sie ist Primzahl. Wir behalten diese Zahl bei und streichen alle Zahlen weg, die Vielfaches von 2 sind. Dazu brauchen wir bloß von 3 ab, jede zweite Zahl zu streichen. Fahren wir fort! Die erste nichtweggestrichene Zahl ist 3. Sie ist Primzahl. Wir behalten sie bei und streichen alle Zahlen, die Vielfache von ihr sind, d. h. von 4 ab jede dritte Zahl (Bei der Zählung muß man auch die bereits weggestrichene Zahl berücksichtigen: 6, 12, 18, ...) Nach dieser Operation ist die erste Zahl, die nicht weggestrichen und die damit Primzahl ist, 5. Wir behalten sie bei und streichen alle Zahlen weg, die Vielfaches von 5 sind, d. h. von 6 ab jede fünfte Zahl. Wir gehen weiter zur folgenden nichtweggestrichenen Zahl (diese ist 7) über usw.

Schließlich haben wir alle zusammengesetzten Zahlen weggestrichen, und uns verbleiben nur noch die Primzahlen. So erhalten wir z. B., wenn $n=60$ ist, die untenstehende Tabelle mit allen Primzahlen von 1 bis 60. Bei der Anwendung des Verfahrens von *Eratosthenes* haben wir gewissermaßen die Zahlen durchgesiebt, und dabei sind alle zusammengesetzten Zahlen durch das Sieb gedrungen und nur die Primzahlen übriggeblieben. Diese Methode heißt *Sieb des Eratosthenes.*

Zum Schluß wollen wir noch für unsere älteren Leser bemerken, daß man bei der Anwendung des *Siebes des Eratosthenes* mit dem Wegstreichen aufhören kann, sobald man bei einer Primzahl p angelangt ist, die größer als $\sqrt{n}$ ist. Zu diesem Zeitpunkt sind alle nicht weggestrichenen Zahlen Primzahlen. So bricht der Prozeß des Wegstreichens im Falle $n=60$ ab, wenn man alle Zahlen weggestrichen hat, die Vielfache von 7 sind.

A. D. Bendukidse

Wir schlagen euch vor, euch einmal mit der folgenden kleinen Aufgabe zu befassen: Beweist, daß p^2-1 durch 24 teilbar ist, wenn p eine Primzahl ist, die größer als drei ist.

alpha zu Gast bei Квант

Quant — die physikalisch-mathematische Schülerzeitschrift der UdSSR

Freundschaftlicher Austausch

Im Januar 1970 erschien Heft 1 dieser populärwissenschaftlichen Schülerzeitschrift. Zwischen den beiden stellv. Chefredakteuren von *Quant* und dem Chefredakteur von *alpha* bestehen enge freundschaftliche Verbindungen. Immer mehr Artikel beider Zeitschriften werden ausgetauscht. Bei der Zusammenstellung dieses Heftes wurden wir von unseren sowjetischen Freunden umfassend beraten.

Welches Grundanliegen hat Quant?

Einen bedeutenden Teil des in der Zeitschrift enthaltenen Materials muß man mit dem Bleistift in der Hand lesen. In einer Reihe von Artikeln werden Fragen der modernen Mathematik und Physik behandelt. Eine Reihe von Artikeln haben gleiche Titel wie die in Schullehrbüchern. Sie enthalten bedeutendes Zusatzmaterial und bereichern so die Lehrabschnitte mit neuen Aufgaben. In der Zeitschrift finden die Leser auch interessante Mitteilungen aus der Geschichte der Wissenschaft. Bei den jungen Lesern wird durch anschaulich illustrierte Beiträge die Liebe zum Experimentieren geweckt. *Quant* bietet besonders für Hochschulbewerber Mathematik- und Physikaufgaben. Genau wie in *alpha* finden wir lustige Anekdoten, aktuelle Informationen, Briefmarken. Der Astronomie und der Technik wird auch Beachtung geschenkt.

Aus dem Inhalt des Heftes 5/73:

Ballistische Probleme im Kosmos – Der Kybernetiker sucht nach unterirdischen Lagerstätten – Fundamentale physikalische Konstanten – Versuche mit infraroter Strahlung – Summen gleicher Potenzen natürlicher Zahlen – Reguläre Polyeder – Mathematische und physikalische Aufgaben – Praktikum für Abiturienten: Aufgaben über periodische Funktionen – Heitere Probleme – Aufgaben über Maxima und Minima (ohne Verwendung der Differential- und Integralrechnung) – Die Nowosibirsker Staatsuniversität stellt Aufgaben für Abiturienten – Buchrezensionen – Leserbriefe – Aufgaben aus *Abschlußprüfungen Mathematik* der DDR, Klassenstufe 10 – *Quant* für junge Leser – Über die Verteilung von Primzahlen – Briefmarken über das Internationale Jahr der Meteorologie – Lösungen

Umfang des Heftes: 64 Seiten, Format 23 cm × 16 cm, 12 Hefte pro Jahr, Preis für Leser der DDR: 3,25 M vierteljährlich. Zu bestellen bei jedem Postamt unter Nr. 13101.

J. Lehmann

Die Kardioide

Die auf der ersten Umschlagseite des Heftes 1/72 der sowjetischen mathematischen Schülerzeitschrift *Quant* abgebildeten Figur – von *alpha* als Titelblatt übernommen – stellt eine bemerkenswerte Kurve dar, die *Kardioide*. Das Wort *Kardioide* stammt aus dem Griechischen und bedeutet so viel wie Herzförmige (Herzlinie). Die Eigenschaften dieser Kurve wurden erstmalig 1674 von dem dänischen Gelehrten *Ole Römer* untersucht.

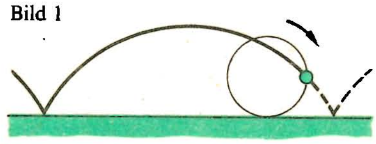
Die *Kardioide* besitzt viele Verwandte. Das sind vor allem die verschiedenen Zykloiden, Epizykloiden und Hypozykloiden. Rollt ein Kreis auf einer Geraden ab, so hinterläßt ein auf diesem Kreis befestigter Punkt in der Ebene eine Spur, eine Kurve, die Zykloide heißt (Bild 1).

Läßt man einen beweglichen Kreis auf der Innenseite eines festen Kreises abrollen, so beschreibt ein auf dem ersteren befestigter Punkt in der Ebene eine Kurve, die Hypozykloide heißt (Bild 2).

Rollt dagegen der bewegliche Kreis auf der Außenseite eines festen Kreises ab, so nennt man die Kurve, die ein auf dem beweglichen Kreis liegender Punkt beschreibt, Epizykloide (Bild 3). Die *Kardioide* ist diejenige Epizykloide, bei der der Rollkreis und der Festkreis ein und denselben Radius besitzen (Bild 4). Über die Besonderheiten aller dieser Zykloiden, darunter der Kardioide, könnt ihr in dem Buch von *G. N. Berman*: Zykloiden (Gostechizdat 1954) nachlesen.

In Bild 5 ist eine der Möglichkeiten wiedergegeben, eine *Kardioide* zu konstruieren. Man zerlegt den festen Kreis durch einzelne Punkte in Abschnitte. Um jeden dieser Punkte als Mittelpunkt schlägt man je einen Kreis, der außerdem durch einen festen Punkt des Festkreises hindurchgeht. Versucht selbst zu beweisen, daß ihr bei dieser Konstruktion tatsächlich eine *Kardioide* bekommt (die allen diesen Kreisen umbeschrieben ist).

Bild 1



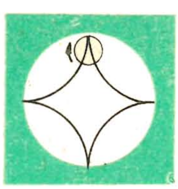


Bild 2

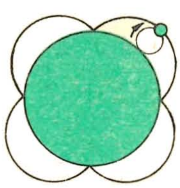


Bild 3

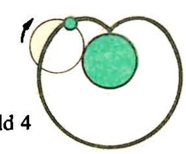
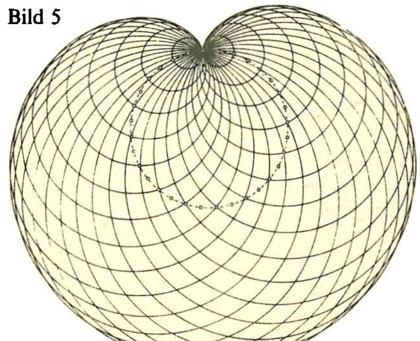


Bild 4

Bild 5



Zum Schluß sei noch eine lustige Deutung der *Kardioide* erwähnt:

Wir betrachten eine im Querschnitt kreisförmige nicht gleitfähige unbewegliche Taille. Um sie rotiert ein *Hulareifen* von doppelt so großem Radius. Dann beschreibt jeder Punkt des Reifens um die Taille eine *Kardioide*.

M. L. Smoljanskij
stellv. Chefredakteur von Quant

Mathematiker auf Briefmarken der Sowjetunion

Euler, Leonhardt (15. 4. 1707 Basel bis 18. 9. 1783 Petersburg) Schweizerischer genialer Mathematiker, höchst produktiv auf allen Gebieten der Mathematik und Astronomie, besonders bei seinem Wirken in Rußland. Besonders erwähnenswert sind seine Arbeiten auf dem Gebiet der Algebra, der Analysis der Unendlichen. In der Kreisberechnung führte er die Zahl π ein.

Ljapunow, Alexander Michailowitsch (1857 bis 1918)
Bedeutender russischer Mechaniker und Mathematiker. Maßgebende Arbeiten über die Stabilität der Bewegung mechnischer Systeme sowie auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Lobatschewski, Nikolai Iwanowitsch (1. 12. 1792 bis 24. 2. 1856) Russischer Mathematiker und materialistischer Denker. Entwikkelte eine Nichteuklidische (d. h. das Parallelenpostulat nicht voraussehende) Geometrie.

Lomonossow, Michail Wassijewitsch (19. 11. 1711 in Mischaninskaja, Gouvernement Archangelsk bis 15. 4. 1765 Petersburg) Hervorragendster russischer Gelehrter, Denker und Dichter.

Ostrogradski, Michail Wassilowitsch (1801 bis 1861)
Russischer Mathematiker und Schullehrer einer Hochschule. Er arbeitete über mathematische Analyse und gründete die mathematische „Petersburger Schule".

Torricelli, Evangelista (25. 10. 1608 Modiglina bis 25. 10. 1647 Florenz)
Italienischer Mathematiker und Physiker. Wichtig sind seine Berechnungen zum atmosphärischen Luftdruck, nach ihm wird die Maßeinheit des Luftdrucks benannt:

1 Torr $\triangleq$ 1 mm Hg-Säule bei 0 °C.

Ziolkowski, Konstantin Eduardowitsch (17. 9. 1857 bis 19. 9. 1935) Russischer Mathematiker. Entwarf 1887 das Projekt eines Ganzmetallluftschiffes und schuf die wissenschaftliche Grundlage zur Bearbeitung des Raketenproblems, die theoretischen Arbeiten zum Weltraumflug.

Eine Aufgabe von Leninpreisträger Prof. Dr. A. Ljapunow

Nowosibirsk

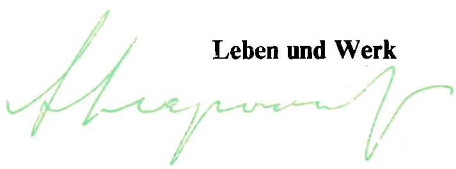
Liebe *alpha*-Leser!
Mit freundlichen Grüßen sende ich Euch einige mathematische Probleme, deren Aufstellung mir großes Vergnügen bereitete.

▲1084▲ Es sei E eine Ellipse und A ein Dreieck, das in diese Ellipse einbeschrieben ist. Die Ellipse E sei in ein Dreieck B einbeschrieben.
Es stellen sich folgende Fragen:
1. In welchen Verhältnissen stehen die Flächen der Figuren A und E, bzw. E und B?
2. Zu beweisen, daß für jeden Punkt I der Ellipse zwei extremale Dreiecke existieren, nämlich ein Dreieck A maximalen Umfangs (maximaler Fläche), dessen einer Eckpunkt I ist, und ein Dreieck B minimalen Umfangs (minimaler Fläche), dessen eine Seite durch den Punkt I geht.
3. Welches sind die charakteristischen geometrischen Eigenschaften der genannten extremalen Dreiecke?
4. Was kann man über die Flächen aller solchen extremalen Dreiecke sagen?
5. Es sei auf einer Ebene eine Ellipse gezeichnet und ein Punkt dieser Ellipse markiert. Mit Hilfe von Zirkel und Lineal sollen die beiden extremalen Dreiecke für den markierten Punkt konstruiert werden.
6. Analoge Fragen für den Fall von Vierecken, Sechsecken und Fünfecken (schwierig!).
7. Was kann man in analoger Weise für beliebige n-Ecke aussagen, für $n>6$. (Das ist schon mit der *Theorie von Galois* verknüpft.)

Im Oktober 1971 waren *Armin Beck* vom Akademieverlag und ich vom VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (DVW) in Akademgorodok bei Nowosibirsk. Dort unterstützten wir die Deutsche Buch-Export- und Import GmbH bei der Durchführung einer Buchausstellung.
Zu unseren unvergeßlichen Eindrücken gehörte die Festsitzung im *Hydrodynamischen Institut* der Sibirischen Abteilung der Akademie der Wissenschaften der UdSSR zum 60. Geburtstag von Leninpreisträger *Prof. Dr. A. A. Ljapunow*. Der Institutsdirektor, Akademiemitglied und Präsident der Sibirischen Abteilung der Akademie, *Prof. Dr. M. A. Lawrentjew*, hielt die Festansprache, in der er Leben und Werk des Jubilars würdigte. Vertreter vieler Institute aus der ganzen Sowjetunion überreichten Glückwunschadressen

und Geschenke; wir überreichten Bücher. Es herrschte eine fröhlich-feierliche Stimmung, die nach den bewegten Dankesworten des Geburtstagskindes und einer Würdigung seiner eigens aus Moskau angereisten, hochbetagten, aber noch sehr rüstigen Mutter ihren Höhepunkt erreichte.

Die Zeitungen *Nowosibirsk am Abend* und *Sowjet-Sibirien* brachten Geburtstagsartikel, aus denen *F. Rehak*, Berlin, die folgenden, stark gekürzten Ausführungen zusammenstellte. *L. Boll*



Leben und Werk

Alexej Andrejewitsch Ljapunow begann seine wissenschaftliche Tätigkeit im Jahre 1929 als Laborant im Staatlichen Geophysikalischen Institut von Moskau. Im Jahre 1934 wechselte er in das W. A. Steklow-Institut für Mathematik über, dessen Mitarbeiter er für lange Jahre bleiben sollte. Im Jahre 1939 verteidigte er seine Dissertation über ein Thema aus der Mengenlehre.

All seine neuen Vorhaben und Pläne und die weitere Vertiefung seiner Arbeit wurden jedoch durch den Krieg jäh unterbrochen. Er ging an die Front. Aber auch an der Front, in den Kampfpausen, dachte er weiter nach und zeichnete in seinen Frontnotizbüchern das auf, was später zu Grundsteinen in einer Reihe seiner Nachkriegsarbeiten werden sollte.

Im Jahre 1944 trat *Ljapunow* der KPdSU bei. Für seine Verdienste an der Front wurde er mit dem Orden *Roter Stern* und mit einer Reihe von Medaillen ausgezeichnet. Gegen Ende des Krieges berief man ihn von der Front an die Artillerieakademie, an der er eine Lehrtätigkeit aufnahm. Besonders hier und in der Folgezeit in der Staatlichen Moskauer Universität trat seine ausgeprägte pädagogische Begabung zutage. Mit seiner persönlichen Anziehungskraft, seiner Kunst, klar und verständlich, gleichzeitig aber auch konzentriert und präzise den Stoff darzulegen, eroberte er sich die Achtung jedes Auditoriums. Hier arbeitete er als erster völlig neue Vorlesungen für eine Reihe von mathematischen Disziplinen aus.

Nach der Demobilisierung kehrte *Ljapunow* in das vertraute W. A. Steklow-Institut zurück. Im Jahre 1956 wurde ihm für seine wissenschaftliche und pädagogische Tätigkeit der *Rotbannerorden der Arbeit* verliehen.

Im Jahre 1961 kam *A. A. Ljapunow* in das Nowosibirsker wissenschaftliche Zentrum. Hier wurde er zum Korrespondierenden Mitglied der Akademie der Wissenschaften gewählt.

A. A. Ljapunow war einer der ersten Wissenschaftler in der Sowjetunion, der sofort die außerordentliche Bedeutung der elektronischen Rechenautomaten und der Ideen der Kybernetik erkannte und sein wissenschaftliches Interesse auf diese neuen Gebiete verlegt hat. Seine Tätigkeit auf diesem Gebiet förderte die intensive Entwicklung und die schnelle Anerkennung dieser wichtigen wissenschaftlichen Richtungen, die von großer prinzipiell-theoretischer und praktischer Bedeutung sind. Der Enthusiasmus, die Energie, die hohe Meisterschaft der Darlegung, die wissenschaftliche Kühnheit und seine begeisternde Persönlichkeit haben eine sehr wichtige Rolle bei der Verbreitung und Entwicklung dieser Gebiete gespielt. Deshalb reicht das Ergebnis seiner Tätigkeit hier weit über den Rahmen jener wichtigen Forschungen und Arbeiten hinaus, die er selbst geleistet hat.

Auch seine umfangreiche Arbeit zur Ausbildung von Kadern darf nicht unerwähnt bleiben. Eine intensive Arbeit hat er in der Artillerieakademie und in der Moskauer Universität geleistet, wo von ihm völlig neue Vorlesungen eingeführt wurden, und zwar Programmierung und Kybernetik. Gegenwärtig setzt er diese Arbeit in der Nowosibirsker Universität fort. Seine Tätigkeit hat auch auf die Ausbildung der sowjetischen Militärfachleute ihren Einfluß ausgeübt. Unter seinen Schülern befinden sich sieben habilitierte Doktoren und ungefähr fünfzig Kandidaten der Wissenschaften. Drei seiner Schüler sind Korrespondierende Mitglieder der Akademie der Wissenschaften der UdSSR.

A. A. Ljapunow verwendet viel Kraft darauf, das Niveau der mathematischen Ausbildung in der Mittelschule und der Arbeit in den Spezial-Schulen zu erhöhen. Sehr bekannt ist die Physikalisch-Mathematische Schule von Akademgorodok, an deren Gründung und an deren Arbeit er aktiven Anteil hat. Darüber hinaus leistet er eine umfangreiche Arbeit bei der Ausbildung von Spezialisten mit hoher Qualifikation in allen Gegenden der Sowjetunion. Die Abteilung Fernstudium der mathematischen Fakultät der Nowosibirsker Staatlichen Universität ist unter unmittelbarer Beteiligung *A. A. Ljapunows* entstanden.

Für die aktive Beteiligung an der Arbeit des in Nowosibirsk geschaffenen wissenschaftlichen Zentrums wurde *A. A. Ljapunow* im Jahre 1968 mit dem *Rot-*

bannerorden der Arbeit und im Jahre 1970 mit der *Jubiläumsmedaille* ausgezeichnet. Zum 60. Geburtstag erhielt er den *Leninorden.*

In seiner fast vierzigjährigen wissenschaftlichen Tätigkeit lassen sich drei Hauptrichtungen feststellen — die Mengenlehre, die Kybernetik und die Methodologie der Naturwissenschaft. Die erstere gehört zu den grundlegenden Teilgebieten der Mathematik. Die zweite umfaßt den mit der Programmierung und Modellierung auf elektronischen Rechenautomaten, mit der Regelungstheorie, mit der maschinellen Übersetzung von Sprachen und mit verschiedenen Zweigen der Biologie zusammenhängenden Problemkreis. Die dritte Richtung berührt die Natur unserer Erkenntnis selbst. Insgesamt stellt das Schaffen *A. A. Ljapunows* eine Einheit dieser drei Richtungen dar. Sie äußert sich in einem tiefen Eindringen in das, was gewissermaßen hinter diesen Richtungen steht, was ihre ideelle Gemeinsamkeit bildet und was die Bearbeitung einer jeden dieser Richtungen befruchtet.

Nachruf

Aus Nowosibirsk wurde uns mitgeteilt, daß *Prof. Dr. Ljapunow* während eines Aufenthalts in Moskau am 23. Juni 1973 verstorben ist.

Wir verlieren in ihm einen bedeutenden Wissenschaftler unserer Zeit. Der Förderung der Jugend hat er bis in sein Alter hinein stets große Aufmerksamkeit geschenkt. *Ein* Beweis sind die uns handschriftlich in deutscher Sprache zur Verfügung gestellte Aufgabe und ein Brief mit herzlichen Grüßen an die Leser der Schülerzeitschrift *alpha.*

Nebenstehende Leseprobe aus:
J. I. CHURGIN
Formeln — und was dann?
VEB VERLAG TECHNIK
252 Seiten, 140 Abb., 12 Tafeln
Halbleinen, Preis: 9,— M

Gespräche eines Mathematikers mit Biologen und Nachrichtentechnikern, Ärzten und Technologen, Geologen und Ökonomen, mit Menschen verschiedener Fachgebiete und Interessen über die Mathematik und ihre Beziehungen zu den anderen Wissenschaften

Zum Autor:

Der Doktor der physikalisch-mathematischen Wissenschaften *Jakov Isserie Churgin* war sowohl Dispatcher eines Großbetriebes als auch wissenschaftlicher Mitarbeiter mehrerer führender Institute für Nachrichtentechnik sowie Lehrer an verschiedenen Hochschulen. Zur Zeit ist er Professor am Moskauer Gubin-Institut für Elektrochemie und Gasindustrie.

Figuren auf einem Stück Gummi

Beginnen wir mit dem sicher schon oft verwünschten Dreieck. Wenn man eine Menge bestimmter Objekte studieren will, so sucht man entweder nach gemeinsamen Eigenschaften dieser Objekte oder man versucht zu verstehen, wodurch sie sich unterscheiden.

Was haben die beiden im Bild 1 dargestellten Dreiecke gemeinsam? Eigentlich nur, daß beide Dreiecke sind, d. h. sie haben drei Winkel, die von drei Strecken gebildet werden. Aus dieser Gemeinsamkeit folgen weitere gemeinsame Eigenschaften: Die Summe ihrer Innenwinkel ist gleich zwei rechten Winkeln; ihre Fläche läßt sich ausdrücken als das halbe Produkt einer beliebigen Seite mit der entsprechenden Höhe. Sicher erinnern Sie sich von ihrer Schulzeit her noch an eine ganze Reihe von Sätzen über Dreiecke.

Bild 1

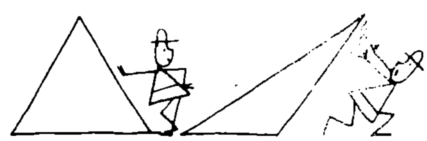
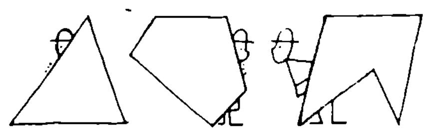


Bild 2



Was haben nun die Figuren im Bild 2 gemeinsam? Sie sind aus Strecken gebildet, sie haben eine ungerade Anzahl von Ecken, und das ist offenbar auch schon alles. Und wie ist es mit den Figuren im Bild 3? Obwohl sie durch irgend etwas einander ähnlich sind, ist es bereits schwieriger, ihre gemeinsamen Eigenschaften herauszustellen.

Bild 3

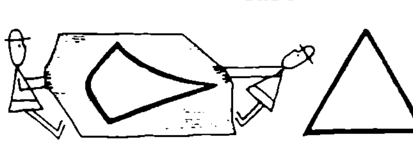
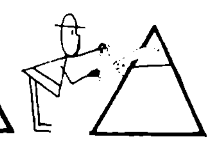


Bild 4



Kehren wir zurück zum Dreieck. Im Bild 4 ist von einem Dreieck ein ähnliches Dreieck abgeschnitten, d. h. ein Dreieck, das ebenso große Winkel wie das ursprüngliche hat. Die beiden Dreiecke besitzen dann außer den gemeinsamen Eigenschaften aller Dreiecke auch noch Ähnlichkeit. Wir nehmen ein Stück Gummi und zeichnen unsere ähnlichen Dreiecke darauf (Bild 5).* Wenn man den Gummi in seiner Länge dehnt, so ändern sich zwar die Dreiecke; sie bleiben aber immer noch einander ähnlich (Bild 6). Somit ist die Ähnlichkeit eine Eigenschaft, die bei gleichmäßiger Ausdehnung in einer bestimmten Richtung erhalten bleibt. Wenn der Gummistreifen jedoch inhomogen (d. i. ungleichmäßig zusammengesetzt) ist oder nicht gleichmäßig ausgezogen wird, so kann aus dem Dreieck so etwas werden, wie im Bild 7 zu sehen ist. Seine Seiten sind schon nicht mehr geradlinig, doch irgend etwas Gemeinsames mit den vorangehenden Figuren ist geblieben. Dieses „Etwas" zu erfassen, wäre interessant.

Doch warum sollten wir den Gummi nur nach einer Richtung ausziehen? Wir nehmen ein Stück dünnen ebenen Gummi und zeichnen unsere ähnlichen Dreiecke darauf (Bild 8). Nun ziehen wir an verschiedenen Seiten unterschiedlich stark, so als ob wir z. B. eine Trommel bespannen wollten. Was wir erhalten, ist etwas, das der Zeichnung eines dreijährigen Kindes ähnelt (Bild 9). Eine gewisse Gemeinsamkeit zwischen den Bildern 8 und 9 ist aber immerhin erhalten geblieben. Die Figuren im Bild 9 sind gewissermaßen eine Karikatur der Dreiecke von Bild 8, aber auch sie haben Ecken, und die Dreiecke haben sich nicht etwa übereinandergeschoben. Und was wird, wenn wir auf dem Gummi zwei amöbenförmige (also unregelmäßig umrandete) Figuren aufmalen, eine kompakte und eine mit einem Loch in der Mitte (Bild 10), und den Gummi wieder „auf eine Trommel spannen"? Die „Amöben" bleiben „Amöben", doch auch das Loch bleibt; wenn wir nichts zerreißen, kann uns keine Dehnung davon befreien.

Nach diesen Beobachtungen müßten wir nun versuchen, zu verstehen, wodurch sich alle diese Transformationen des Gummistücks auszeichnen.

Mathematik und Kunst

Die Mathematik geht so ähnlich vor wie die Kunst; sie greift Erscheinungen der realen Umwelt auf, vereint analoge Ereignisse, Prozesse oder Fakten und verallgemeinert sie. Der bekannte Schauspieler und Künstler *Sergej W. Obraszow* führt manchmal Puppen vor. Hündchen, Kätzchen, Löwen oder Hasen veranschaulichen irgendwelche komischen, rührenden oder schlechte Eigenschaften der Menschen. Die Puppen werden durch Kugeln auf den Fingern oder einfach durch die Finger selbst dargestellt. Mit Hilfe dieser primitiven Mittel unterstreicht *S. Obraszow* das Markante im Benehmen und im Charakter der Menschen, in ihren Beziehungen zueinander. Nachdem die Kunst solcherart die Analogie gezeigt hat, hält sie ein und sagt den Zuschauern, daß sie sich den Rest selbst hinzudenken mögen.

Doch beim Mathematiker beginnt die Arbeit erst, wenn er in einer mitunter langen und schwierigen Beobachtung etwas Wichtiges oder Allgemeines bemerkt hat, das eine ganze Klasse von Erscheinungen charakterisiert. Er hat genau zu formulieren, welche Eigenschaften ihn interessieren, ein Schema zu schaffen und dieses genau zu studieren, um dann schließlich noch nachzuprüfen, ob die von ihm geschaffene Theorie der Wirklichkeit entspricht.

Stetige Verformungen

Im vorigen Beispiel haben wir festgestellt, daß bei Verformungen der Ebene wie etwa der willkürlichen Verzerrung eines Stücks Gummi gewisse Eigenschaften der Figuren erhalten bleiben. Der Mathematiker nennt derartige Verformungen stetige Transformationen. Das Wort stetig bedeutet dabei, daß nahe beieinander gelegene Punkte nach der Transformation wieder nahe beieinander liegen und daß eine Linie wieder in eine Linie übergeht. Es ist leicht einzusehen, daß zwei sich schneidende Linien sich auch nach der Transformation schneiden werden; sich nicht schneidende werden sich auch nach der Transformation nicht schneiden. Eine Figur mit einem Loch kann nicht in eine Figur ohne Loch oder eine mit zwei Löchern übergehen, denn dazu wäre eine Klebestelle oder ein Riß nötig, also eine Verletzung der Stetigkeit.

Diese Betrachtungen sind ein Ausgangspunkt der Topologie, einer Wissenschaft, die die Eigenschaften der geometrischen Figuren herausstellt, die sich bei stetigen Transformationen nicht ändern.

* Wir wollen hier davon absehen, daß das Gummistück etwas schmaler wird, wenn wir es in die Länge ziehen.

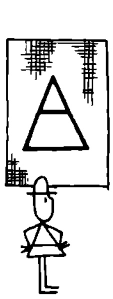
Bild 5


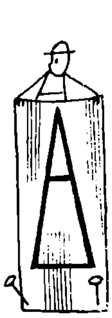
Bild 6


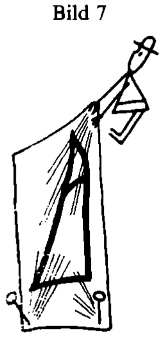
Bild 7


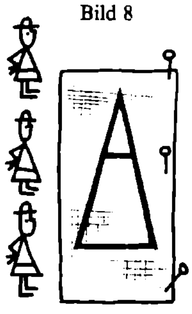
Bild 8


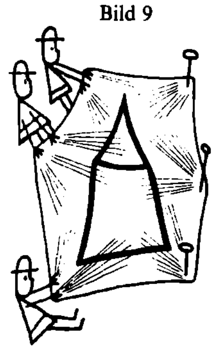
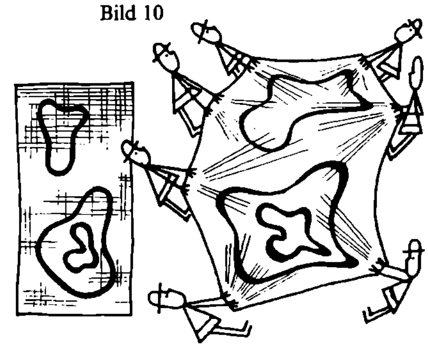
Bild 9


Bild 10


XV. Internationale Mathematikolympiade

Moskau 7. bis 17. 7. 1973

MOCKBA XV IMO 1973

Aufgaben

1. Es sei O ein Punkt auf einer Geraden g. $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, ..., $\overrightarrow{OP_n}$ seien Einheitsvektoren, wobei alle Punkte P_i in einer Ebene, die g enthält, auf derselben Seite von g liegen.
Man zeige: Ist n ungerade, so gilt

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP_n}| \geqq 1$$

(Dabei bedeutet $|\overrightarrow{OM}|$ die Länge eines Vektors $\overrightarrow{OM}$.) (ČSSR, 6 Punkte)

2. Man prüfe, ob es im dreidimensionalen Raum eine endliche Menge M von nicht in einer Ebene gelegenen Punkten gibt mit der Eigenschaft, daß für beliebige zwei Punkte $A, B \in M$ zwei andere Punkte $C, D \in M$ existieren, so daß die Geraden AB und CD parallel und verschieden sind.
(VR Polen, 6 Punkte)

3. Es seien a und b reelle Zahlen, für welche die Gleichung

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

wenigstens eine reelle Lösung hat. Man bestimme den kleinsten möglichen Wert der Summe a^2+b^2.
(Schweden, 8 Punkte)

4. Ein Soldat hat sich zu überzeugen, daß im Innern oder auf dem Rand eines Gebietes, das die Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich des Randes) hat, keine Mine vorhanden ist. Der Wirkungsgrad seines Detektors ist gleich der halben Höhe des Dreiecks. Der Soldat beginnt seinen Weg in einem der Eckpunkte des Dreiecks.
Welchen Weg muß er wählen, damit die Länge seines Marsches zur Überprüfung des gesamten Gebietes am kürzesten wird?
(SFR Jugoslawien, 6 Punkte)

5. Gegeben sei eine nicht leere Menge G von nicht konstanten Funktionen f der Gestalt $f(x)=ax+b$ (Nachweisen, daß wenn $a=1$, dann $b=0$.)
a, b sind reelle Zahlen mit $a \neq 0$, x ist eine reelle Variable. G habe die folgenden Eigenschaften:
(1) Ist $f, g \in G$, dann gilt auch $g \circ f \in G$ (wobei $(g \circ f)(x)=g(f(x))$ ist).
(2) Ist $f \in G$ mit $f(x)=ax+b$, dann gehört auch die inverse Funktion f^{-1} der Menge G an (wobei $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$ ist).
(3) Für jedes $f \in G$ gibt es ein x_f, so daß $f(x_f)=x_f$. Man zeige: Es gibt kein k, so daß $f(k)=k$ für alle $f \in G$.
(VR Polen, 6 Punkte)

6. Es seien n positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben, sowie eine reelle Zahl q mit $0<q<1$. Man gebe solche n reellen Zahlen $b_1, \ldots, b_n$ an, daß
a) $a_k<b_k$ für alle k von 1 bis n.
b) $q<\frac{b_{k+1}}{b_k}<\frac{1}{q}$ für alle k von 1 bis $n-1$.
c) $b_1+b_2+\ldots+b_n<\frac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$
gilt. (Schweden, 8 Punkte)

Preisträger der XV. IMO

Land	Punkte	1. Preis	2. Preis	3. Preis
Sowjetunion	254	3	2	3
Ungarische VR	215	1	2	5
DDR	188	—	3	4
VR Polen	174	—	2	4
Großbritannien	164	1	—	5
Frankreich	153	—	3	1
ČSSR	149	—	1	4
Österreich	144	—	—	6
SFR Jugoslawien	137	—	—	5
SR Rumänien	131	—	1	3
Schweden	99	—	1	1
Niederlande	96	—	—	2
VR Bulgarien	96	—	—	1
Finnland	86	—	—	2
Mongolische VR	64	—	—	1
Cuba	42	—	—	1*
	2192**	5	15	48

* Aus der Republik Kuba nahmen nur 5 Schüler teil.
** Insgesamt wurden von der Jury 2192 Punkte vergeben, das sind 43,8% der erreichbaren Gesamtpunktzahl (Zum Vergleich: XIII. IMO: 28%; XIV. IMO: 47%)
*** 1. Preis: 40 bis 35 Punkte; 2. Preis: 34 bis 27 Punkte; 3. Preis: 26 bis 17 Punkte.

DDR-Teilnehmer der XV. IMO

Elias Wegert 2. Preis
Spezialklasse für Mathematik an der TH Karl-Marx-Stadt, Klasse 12

Albrecht Böttcher 2. Preis
Spezialklasse für Mathematik an der TH Karl-Marx-Stadt, Klasse 12

Pawel Kröger 2. Preis
49. Oberschule Leipzig, Klasse 8

Gerd Weißenborn 3. Preis
EOS „Heinrich Hertz", Berlin, Klasse 11

Reinhard Schuster 3. Preis
EOS „Hermann von Helmholtz", Leipzig, Klasse 11

Albrecht Heß 3. Preis
EOS Dresden-Süd, Klasse 11

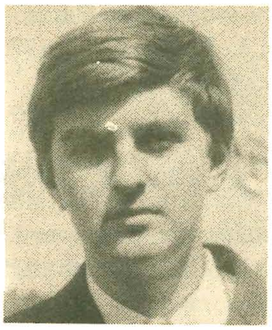
Jürgen Roßmann 3. Preis
EOS „Friedrich Engels", Neubrandenburg, Klasse 12

Helmut Roßmann
Antonin-Zapotocky-Oberschule, Neubrandenburg, Klasse 10

Eröffnung der XV. IMO in der 68. Oberschule in Moskau kurz vor Beginn der 1. Klausur

Einen ersten Preis erhielten:

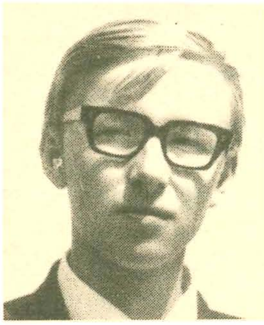
1 Sergej Konjagin, Saratow (UdSSR)
2 Pawel Grosmann, Moskau
3 Georgy Jegorow, Moskau
4 János Kollár, Budapest
5 David Goto, London


1


2

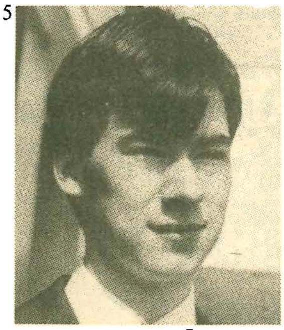
Mitglieder der Jury bei der Korrektur der Lösungen

3



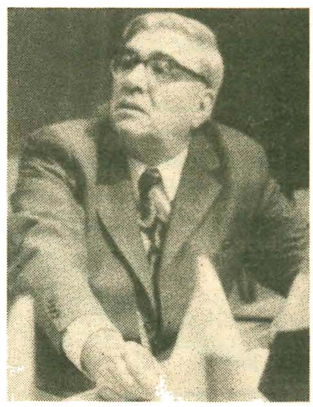
4

5



Prof. Ottescu, stellv. Delegationsleiter der rumänischen Mannschaft, zeichnete für *alpha* die beiden Mädchen, welche an der XV. IMO teilnahmen (bei 125 Schülern):
Joke Brinkhuis, Gorinchem, Niederlande (links) und Gudrun Brattström, Helsingborg, Schweden

Wettbewerbsatmosphäre



Prof. Dr. Alexej Markuschewitsch nimmt im Pionierpalast an den Leninbergen die Auszeichnung der Preisträger vor

DDR-Mannschaft

Fakten — Zahlen — Fakten

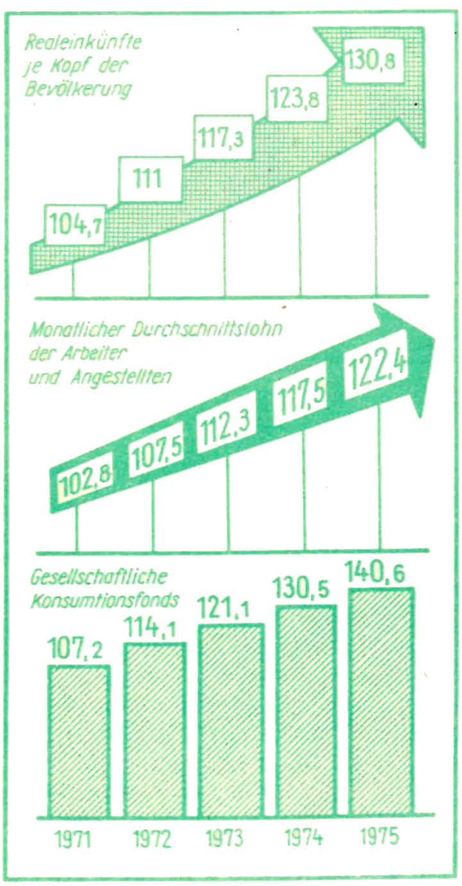
- Die beiden Klausuren fanden am 9. und 10. Juli 1973 in der 68. Schule Moskaus statt (reine Arbeitszeit: je 4 Stunden).
- *Sergej Konjagin* (UdSSR) bereits 1. Preisträger der XIV. IMO, erreichte als einziger Schüler die volle Punktzahl (40 Punkte). Seine der Redaktion *alpha* überreichte Aufgabe (siehe S. 114) wurde gleichzeitig als eine der Aufgaben der Moskauer Stadtolympiade gestellt.
- Die XVI. IMO findet vom 4. bis 17. 7. 1974 in der DDR statt (Klausuren an der Päd. Hochschule in Erfurt, Abschlußfeier in der Hauptstadt der DDR).

Porträt in Zahlen

Die Wirtschaft der UdSSR im neunten Planjahrfünft

Industrieproduktion
1970: 69,1 Mrd. Rubel 1975: 528—544 Mrd. Rubel
Landwirtschaft
1970: 80,3 Mrd. Rubel 1975: 96—98 Mrd. Rubel
Elektroenergie
1970: 740 Mrd. kWh 1975: 1 030—1 070 Mrd. kWh
Erdöl
1970: 349 Mio t 1975: 480—500 Mio t
Erdgas
1970: 198 Mrd. m^3 1975: 300—320 Mrd. m^3
Steinkohle
1970: 624 Mio t 1975: 685—695 Mio t
Stahl
1970: 116 Mio t 1975: 142—150 Mio t

Entwicklung des Lebensniveaus des Sowjetvolkes
(in Prozent zum Jahre 1970)

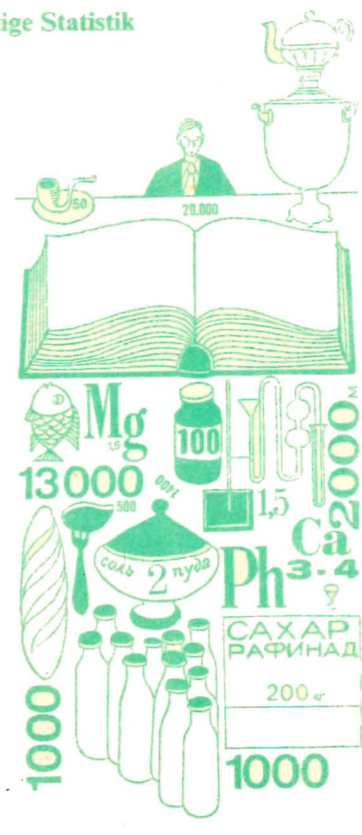


Plaste, synthetische Harze
1970: 1,672 Mio t 1975: 3,457 Mio t
Chemiefasern
1970: 623 000 t 1975: 1,05—1,1 Mio t
Pkw
1970: 344 000 Stück 1975: 1,2—1,3 Mio Stück

Leichtindustrie, Kultur- und Haushaltwaren
1970: 76,5 Mrd. Rubel 1975: 112,4 Mrd. Rubel
Möbel
1970: 2,8 Mrd. Rubel 1975: 4,55 Mrd. Rubel

Haushaltkühlschränke
1970: 4,140 Mio St. 1975: 6,686 Mio St.
Stoffe
1970: 8,9 Mrd. m^2 1975: ca. 11 Mrd. m^2

Lustige Statistik



In fünf Studienjahren verbraucht ein Chemiestudent im Laboratorium durchschnittlich 100 Kilo chemischer Reagenzien.
In einem Jahr legt ein Student im Universitätsbereich im Durchschnitt 1000 Kilometer zurück.
An der Hochschule muß der Student mindestens 20 000 Buchseiten durchlesen.
In fünf Studienjahren besucht ein Student im Durchschnitt 400 Mal das Kino, wo er 1500 Kilometer Film sieht. Der Student gibt doppelt soviel Geld für Piroggen (15 000 Stück) oder für Kefir (über 1 000 Flaschen) aus wie für den Kinobesuch.
In fünf Studienjahren verbraucht ein Student mehr als zwei Pud (32 Kilo) Salz, rund 200 Kilo Zucker, rund eine Tonne Brot und trinkt eine Zisterne Wasser aus. Diese Nahrung enthält 3 bis 4 Kilo Phosphor, etwa anderhalb Kilo Kalzium und fast ebenso viel Magnesium.

Schule in Zahlen

In der UdSSR gibt es heute über 220 000 allgemeinbildende Schulen, mehr als 4 200 Fachschulen und über 800 Hochschulen und Universitäten.

Seit Gründung der UdSSR hat sich die Zahl der sowjetischen Wissenschaftler alle sechs bis sieben Jahre verdoppelt (im gleichen Zeitraum in den USA alle zehn, in Westeuropa alle fünfzehn Jahre).

Vor der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution ging im zaristischen Rußland nur jedes fünfte Kind entsprechenden Alters zur Schule. Fast 75 Prozent aller Männer und Frauen waren des Lesens und Schreibens unkundig. Noch schlechter war die Situation in den kolonial unterdrückten Gebieten: etwa 97 Prozent der Kirgisen, Turkmenen, Tadschiken, Usbeken und Jakuten waren Analphabeten, 48 nationale Minderheiten besaßen nicht einmal eine eigene Schriftsprache. Die Sowjetmacht sorgte auch im Bildungsbereich für eine schnelle Veränderung. Für alle Kinder in der UdSSR soll bis 1975 der Übergang zur allgemeinen Zehnklassen-Oberschulpflicht abgeschlossen werden.

Gegenwärtig arbeiten in den sowjetischen Schulen etwa drei Millionen Lehrer aller Nationalitäten. Allein in diesem Jahr wurden ihre Reihen um 150 000 Absolventen von Hochschulen und pädagogischen Lehranstalten verstärkt. 1,1 Millionen künftige Lehrer bereiten sich derzeit auf ihre Arbeit in der Praxis vor.

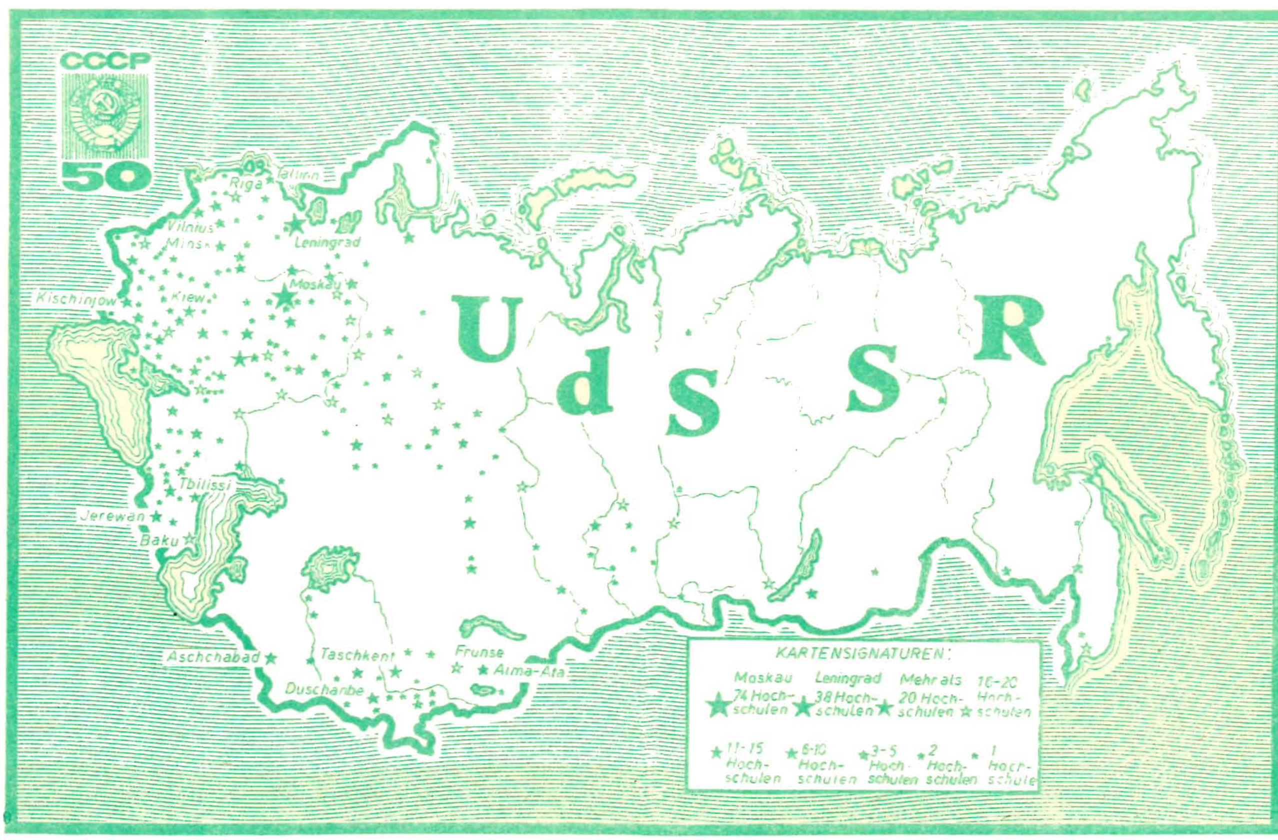
In der UdSSR gibt es etwa 3 600 Pionierpaläste und -häuser, 560 Stationen Junger Techniker und 330 Stationen Junger Naturforscher. Allein in diesem Jahr erhöhte sich die Platzkapazität an sowjetischen Schulen um 1,5 Millionen.

Studenten in der Sowjetunion

Die Karte der UdSSR ist mit Sternen versehen. Jeder kleine Stern bedeutet eine Hochschule, der größte Stern in Moskau symbolisiert 74 Hochschulen. Insgesamt zählen wir 247 Sterne, d. h. 247 „Studentenstädte“ mit 805 Hochschulen.

Vor reichlich 200 Jahren, als es längst die Sorbonne und Cambridge gab, besaß Rußland keine einzige Hochschule. Wer eine Hochschule besuchen wollte, mußte nach Europa gehen. Die erste Universität wurde am 12. Januar 1755 in Moskau eröffnet. 1915 gab es im Russischen Reich nur 105 Hochschulen mit insgesamt 127 000 Studenten, hauptsächlich aus vermögenden Familien, da die Studiengelder für Werktätige zu hoch waren. So sah das Erbe aus, das die junge Sowjetrepublik vor 50 Jahren antrat.

Heute studieren in der Sowjetunion fünf Millionen in 805 Hochschulen. 94 % von ihnen sind Mitglied des 27 Millionen zählenden Leninschen Kommunistischen Jugendverbandes.

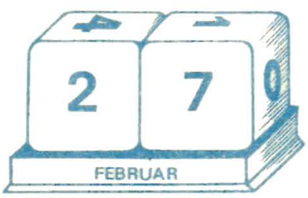


In freien Stunden alpha heiter

Letzte Chance, die Zwischenprüfung zu bestehen!
K. Muschkin, Moskau

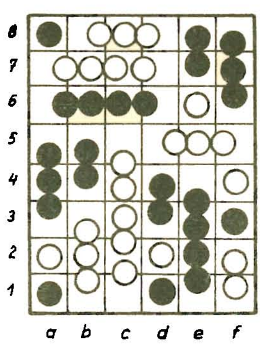
Kalender aus Würfeln

Auf dem Tisch der Redaktion Quant steht ein Kalender, wie ihn das Bild zeigt. Er besteht aus zwei Würfeln. Überlegt, wie er angefertigt wurde: In welcher Weise muß man die Grundziffern auf die Seitenflächen der beiden Würfel kleben, damit man jedes beliebige Monatsdatum darstellen kann. Es ist offensichtlich, daß es mehrere Lösungen gibt. Was meint ihr wohl, wie viele?



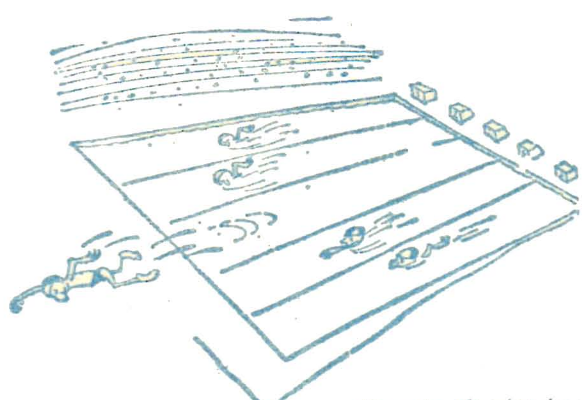
Kamsolow

Für dieses Spiel, dem wir den Namen nach seinem Erfinder *Juri Kamsolow* (UdSSR) gaben, wird ein 6×8-Felder-Brett mit 24 weißen und schwarzen Steinen benötigt. Es kann zu zweit und zu viert gespielt werden.
ZU ZWEIT. Wer beginnt, wird ausgelost.
Man setzt abwechselnd jedesmal zwei Steine der eigenen Farbe auf beliebige Felder. Jeder bemüht sich, waagerechte und senkrechte Reihen zu bilden sowie den Gegner, der die gleiche Absicht hat, daran zu hindern. Je länger die Reihe wird, um so besser ist die Position.



Sind alle Felder besetzt, werden die Punkte errechnet. Wer die meisten errang, hat gewonnen. Für die kleinste Reihe aus zwei gleichfarbigen Steinen werden 4 Punkte, für die Dreier 9, für einen Vierer 16 Punkte usw. vergeben. Vereinzelte Steine zählen nicht. Steine, die zugleich in zwei Reihen stehen, dürfen nur einmal berücksichtigt werden. Die Steine sind so aneinanderzureihen, daß die Höchstpunktzahl herauskommt. Der Anschaulichkeit halber rückt man die Steine am besten zusammen; siehe Abbildung, die eine mögliche Schlußstellung zeigt. Wie man sieht hat Weiß einen Fünfer, einen Vierer, drei Dreier und einen Zweier. Das ergibt $25+16+(3 \cdot 9)+4=72$ Punkte. Die Steine auf den Feldern a2, d2, e6 und f3 sind „Isolanis" und fallen nicht unter die Wertung. Schwarz schaffte $(16 \cdot 2)+(9 \cdot 2)+(4 \cdot 3)=62$ Punkte. Falls sich gleiche Punktezahlen ergeben, ist die Partie remis.

ZU VIERT. Es spielen zwei gegen zwei mit je 12 Steinen. Die Paare sitzen einander gegenüber und setzen reihum. Auch hier setzt jeder Spieler wieder zwei Felder. Punkterechnung wie beim Spiel zu zweit.
Falls weder Brett noch Steine vorhanden sind, nimmt man einfach Pappe oder einen Bogen Papier und zeichnet den Spielplan mit 48 Feldern auf, und anstelle von Spielsteinen werden Kreise (Weiß) und Kreuze (Schwarz) eingetragen. Und weil man sie am Ende nicht zusammenrücken kann, streicht man einfach die für die Wertung in Betracht kommenden Gewinnreihen durch. *aus: NBI 19/73*



Alexander Aljoschitschew

Aus einem Bericht eines Korrespondenten der Literarischen Zeitung

„Erst drei Wochen sind seit dem Beginn des Jahres 1973 vergangen, aber der große elektronische Rechenautomat in unserem wissenschaftlichen Zentrum hat schon mit einer Genauigkeit von 10^{-9} ausgerechnet, daß das nächste Jahr die Jahreszahl 1974 tragen wird.“

mitgeteilt von Prof. Ju. I. Sokolowskij, Nowosibirsk

Rational oder nicht?

Die Summe

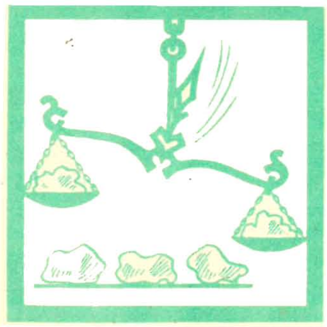
$S=10^{-1}+10^{-4}+10^{-9}+\dots+10^{-n^2}+\dots$

hat unendlich viele Summanden. Ist S eine rationale oder eine irrationale Zahl?

Prof. Ju. I. Sokolowskij, Nowosibirsk

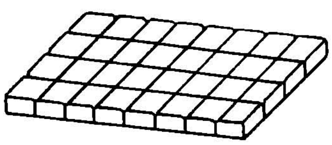
Wir wägen

Wir haben fünf Kieselsteine verschiedenen Gewichts und eine Hebelwaage. In jede Wägeschale paßt nur ein Kieselstein. Es sollten nicht mehr als 7 Wägungen vorgenommen werden, um die Kieselsteine ihrem Gewicht nach zu ordnen.



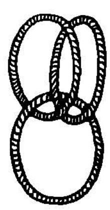
Eine Tafel Schokolade

Wie viele Male muß man mindestens brechen, um die Tafel Schokolade in die auf dem Bild angegebenen Teile zu zerlegen? Dabei darf nur gradlinig in den Vertiefungen der Schokolade gebrochen werden.



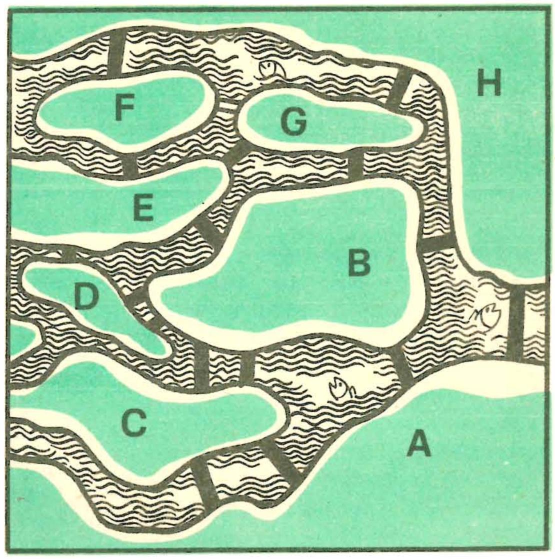
Ein Schnitt genügt

Auf dem Bild sind drei Ringe dargestellt. Wenn man den oberen Ring zerschneidet, sind alle Ringe voneinander getrennt, zerschneidet man einen der unteren, bleiben die anderen aneinandergekettet. Versucht die drei Ringe so zu verketten, daß beim Zerschneiden eines beliebigen von ihnen alle drei voneinandergetrennt werden!



Ein interessanter Spaziergang

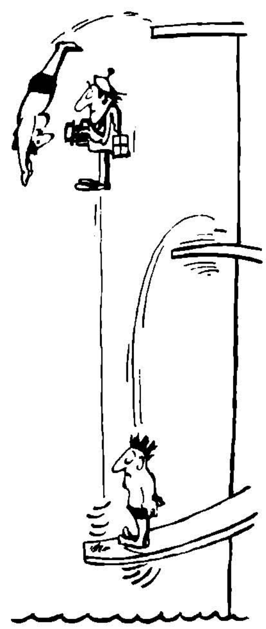
Vor euch seht ihr einen Stadtplan. Wie kann man einen Spaziergang so durchführen, daß man über jede Brücke genau einmal geht?



Modell des Fernsehturms

Der Fernsehturm in Ostankino hat eine Höhe von 530 m und wiegt 30000 Tonnen. Wieviel würde ein genaues Modell dieses Turmes wiegen, das eine Höhe von 53 cm besitzt?

Kopfsprung



Die Schülerzeitschrift *Quant* übernahm diese Vignette eines ausländischen Karikaturisten aus „Sowjetski Sport“ — Der Künstler schrieb unter seine Zeichnung: Ohne Worte. Wir (d. h. *Quant*) schlagen eine andere Unterschrift vor:

Ist das möglich? Geht das? — Versucht, die Karikatur unter diesem Gesichtspunkt zu beurteilen!

W. Alexandrow, Moskau

Wer löst mit?
alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 6. Januar 1974

Die folgenden Aufgaben für die 5. bis 10. Klasse stellen einerseits eine Auswahl aus den Aufgaben für die II. Stufe der Mathematischen Schülerolympiade 1973 der UdSSR dar, andererseits sind die der sowjetischen Populärwissenschaftlichen Mathematisch-physikalischen Zeitschrift *Quant* entnommen, insbesondere der Rubrik *Quant für jüngere Schüler*. Wir danken der Leitung der *Sowjetischen Schule* in Altenburg und der Redaktion der Zeitschrift *Quant*, die uns dieses Material zur Verfügung stellten.

▲5▲1095 Gegeben seien drei Teller mit Nüssen. Auf dem ersten Teller liegen 22, auf dem zweiten 14 und auf dem dritten 12 Nüsse. In jeweils einem Schritt dürfen von einem dieser Teller genau soviele Nüsse in einen anderen Teller gelegt werden, wie dort bereits vorhanden sind. Wie kann man in nur drei Schritten erreichen, daß auf allen drei Tellern gleichviel Nüsse liegen?

▲5▲1096 Es ist zu zeigen, daß die Summe von vier beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen keine Primzahl sein kann!

W 5 ■ 1097 Ein Becken mit einer horizontalen Bodenfläche von 1 Hektar enthält 1 Million Liter Wasser. Läßt sich in diesem Becken ein Schwimmwettkampf austragen?

W 5 ■ 1098 Zwei Familien wollen sich 16 l Kwaß teilen, der sich in einem Faß befindet. Zum Abfüllen stehen ihnen aber nur zwei Eimer mit dem Fassungsvermögen von 6 l bzw. 11 l zur Verfügung. Auf welche Weise ist das Getränk umzufüllen, damit jede Familie 8 l erhält?

W 5 * 1099 „Wenn ich für jeden meiner Enkel zwei Würstchen heiß mache", dachte Oma, „dann bleiben vier Würstchen übrig. Wenn aber jeder drei Würstchen erhalten soll, müßte ich erst noch ein Würstchen zukaufen." Wieviel Enkel hat diese Großmutter, und wieviel Würstchen sind vorrätig?

W 5 * 1100 Unter den Teilnehmern einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik befinden sich genau dreimal soviel Jungen wie Mädchen. Als Ursula einmal fehlte, hatte ein Arbeitsgemeinschaftsteilnehmer Uwe als Gast mitgebracht. An diesem Tage waren viermal soviel Jungen wie Mädchen anwesend. Wieviel Jungen und wieviel Mädchen nehmen regelmäßig an der Arbeitsgemeinschaft teil?

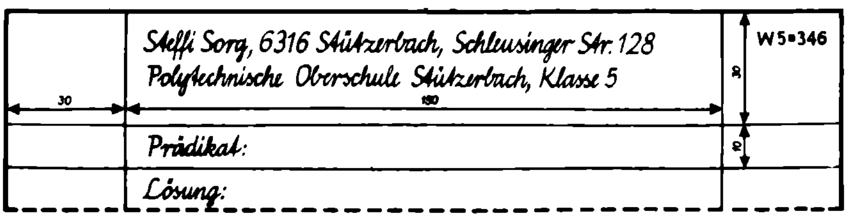
▲6▲1101 Es ist die kleinste natürliche Zahl zu ermitteln, die größer als 3 ist und die bei Division durch 4, 17 bzw. 29 stets den gleichen von Null verschiedenen Rest ergibt!

▲6▲1102 Die Maßzahl des Umfangs eines Rechtecks *ABCD* (gemessen in cm) sei gleich der Maßzahl seines Flächeninhalts (gemessen in cm^2). Die Seitenlängen dieses Rechtecks (gemessen in cm) seien ferner ganzzahlig. Wieviel mögliche Lösungen gibt es?

W 6 ■ 1103 Ein Maultier und ein Pferd trugen einige Säcke. Das Pferd ermüdete schneller und sagte zum Maultier: „Hilf mir bitte, nimm einen Sack von meinem Rücken und trage du ihn weiter!" „Würde ich das machen," erwiderte das Maultier, „so wäre meine Last doppelt so groß wie deine. Wenn du mir aber einen Sack abnimmst und ihn trägst, werden wir gleiche Lasten tragen." Wieviel Säcke trug das Maultier, wieviel das Pferd?

W 6 ■ 1104 Zwei Seiten eines Dreiecks *ABC* haben die Seitenlängen 5 cm bzw. 2 cm. Die Länge der dritten Dreieckseite (gemessen in cm) sei ebenfalls ganzzahlig. Welche Länge könnte die dritte Seite haben?

W 6 * 1105 Es ist zu untersuchen, ob die Zahl $z = 10^{1973} + 2$ durch 3 teilbar ist. Die Antwort ist zu begründen.



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W* 10/12 gekennzeichnet sind.
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

Der Jahreswettbewerb 1973/74 läuft von Heft 5/73 bis Heft 2/74. Zwischen dem 1. und 10. September 1974 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/74 veröffentlicht.
Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1973/74 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).
Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.
Redaktion *alpha*

W 6 * 1106 Gegeben sei ein Rhombus $ABCD$ mit dem spitzen Winkel $\sphericalangle BAD=\alpha=60°$. Eine Gerade g schneide die Seite $\overline{AB}$ in einem inneren Punkt M und die Seite $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt N so, daß $\overline{BM}+\overline{BN}=\overline{AB}=a$ gilt. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck MND gleichseitig ist!

▲7▲1107 Bezogen auf seine Masse enthält Meerwasser 5 % Salz. Mit wieviel Kilogramm Süßwasser muß man 80 kg Meerwasser mischen, damit der Salzgehalt der Mischung 2 % beträgt?

▲7▲1108 Für die Fahrt auf dem Dnepr von Kiew nach Dnepropetrowsk benötigt ein Schiff 48 Stunden, für die Rückfahrt hingegen 72 Stunden. In wieviel Stunden würde ein Floß von Kiew nach Dnepropetrowsk treiben? (Dabei wird vorausgesetzt, daß die Strömungsgeschwindigkeit des Dnepr und die Eigengeschwindigkeit des Schiffes konstant sind.)

W 7 ■ 1109 Ein Schüler zählt sein restliches Taschengeld und stellt fest, daß er noch über einen Geldbetrag von 46 Kopeken verfügt, der sich aus genau 20 Münzen und zwar aus 3-Kopeken-Münzen und 1-Kopeken-Münzen zusammensetzt. Weise nach, daß diesem Schüler beim Zählen des Geldes ein Fehler unterlaufen ist! Kann man diese Feststellung auch treffen, wenn er 48 Kopeken oder 49 Kopeken gezählt hätte? Welche Geldbeträge lassen sich aus zwanzig Münzen, unter denen sich nur 3-Kopeken-Münzen und 1-Kopeken-Münzen befinden, bilden?

W 7 ■ 1110 Eine LPG verkauft in den Monaten von Juli bis November Äpfel. Der Preis für 1 kg Äpfel ist im September um 20 % niedriger als im Juli, im November hingegen um 20 % höher als im September. Sind die Äpfel im November billiger, gleich teuer oder teurer als im Juli? Falls die Äpfel im November billiger oder teurer als im Juli sind, ist anzugeben, um wieviel Prozent.

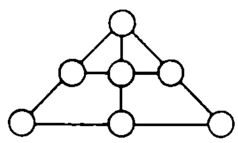
W 7 * 1111 In einem Dorf in der Nähe der Bahnstation D. befindet sich ein Volkseigener Betrieb. Der Direktor dieses Betriebes, der in L. wohnt, fährt an jedem Arbeitstag mit der Bahn von L. nach D. und kommt dort pünktlich um 7.00 Uhr an. Ein Dienstwagen fährt ihn um 7.00 Uhr von D. direkt in den Betrieb. An einem Tage erreichte der Direktor D. bereits um 6.00 Uhr. Da er vergessen hatte, den Kraftfahrer zu verständigen, ging er zu Fuß in seinen Betrieb. Er begegnete unterwegs dem Dienstwagen, der ihn unverzüglich in den Betrieb brachte, wo er genau 12 Minuten früher als gewöhnlich ankam. (Dabei wird vorausgesetzt, daß der Kraftfahrer auch an diesem Tage zu derselben Zeit von dem Betrieb abfuhr und daß die Geschwindigkeit des Kraftwagens stets gleichbleibend war. Ferner fuhr der Kraftfahrer an den anderen Tagen so, daß er genau um 7.00 Uhr am Bahnhof D. eintraf.) Zu welchem Zeitpunkt begegnete der Direktor dem Dienstwagen?

W 7 * 1112 Gegeben seien ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=6$ cm und ein innerer Punkt E der Seite $\overline{AB}$, für den $\overline{EB}=2$ cm gilt. Dem Quadrat ist ein gleichseitiges Dreieck EFG so einzubeschreiben, daß auch die Eckpunkte F und G dieses Dreiecks auf den Seiten des Quadrates liegen. Die Konstruktion ist zu begründen.

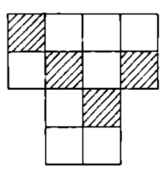
▲8▲1113 Wieviel natürliche Zahlen bis zu der Zahl 1973 sind durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar?

▲8▲1114 Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:
Schreibt man links zu der dreistelligen Zahl drei weitere Grundziffern hinzu, so erhält man das Quadrat dieser Zahl.

W 8 ■ 1115 In jeden der Kreise der abgebildeten Figur soll genau eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so eingetragen werden, daß alle Summen von je drei Zahlen, die auf einer Geraden liegen, gleich sind.



W 8 ■ 1116 Die abgebildete Figur, die aus 12 Quadraten besteht, soll so in genau vier, von Quadratseiten begrenzte kongruente Teilfiguren zerlegt werden, daß jede Teilfigur genau ein schraffiertes Quadrat enthält.



W 8 * 1117 Kann man 50 Steine, deren Massen 370 kg, 372 kg, 374 kg, ..., 466 kg, 468 kg betragen, mit sieben Dreitonnern befördern? Dabei darf jedoch jeder der sieben Lastkraftwagen mit höchstens 3 t beladen werden; eine Überschreitung dieser Belastung — auch nur um wenige Kilogramm — ist unzulässig.

W 8 * 1118 Drei Seeräuber wollen die Beute teilen, die aus 10 Piastern, 10 Dublonen und einem Faß Wein besteht. Sie haben zwar Gefäße zur Abfüllung und genauen Aufteilung des Weines, aber, o weh! jeder Seeräuber hat seine eigene Meinung darüber, wieviel Wert der Wein im Verhältnis zu den Piastern bzw. Dublonen beträgt. Alle sind sich aber darüber einig, daß das Faß Wein mehr als 4 Piaster und mehr als 4 Dublonen kostet. Es ist zu beweisen, daß die Seeräuber die Beute so teilen können, daß jeder von ihnen einen Anteil erhält, der nach seiner Ansicht keinen geringeren Wert hat als der Anteil eines jeden anderen.

▲9▲1119 Man zerlege in Faktoren
$(a^2+b^2)^3+(c^2-a^2)^3-(b^2+c^2)^3$.

▲9▲1120 Auf welche Grundziffern kann das Quadrat einer zweistelligen natürlichen Zahl enden, wenn dieses Quadrat eine ungerade Anzahl von Zehnern enthält?

W 9 ■ 1121 Sechs Schüler, die an einem Subbotnik teilnahmen, wurden in drei Brigaden eingeteilt. Die Brigadiere waren Wolodja, Petja und Wasja. Wolodja und Mischa erhielten 2 m lange Holzstämme, Petja und Kostja $1\frac{1}{2}$ m lange, aber Wasja und Aljoscha 1 m lange. Sie hatten jeden Stamm in $\frac{1}{2}$ m lange Stämme zu zersägen. An der Wandzeitung wurde mitgeteilt, daß der Brigadier Lawrow mit Roshkow insgesamt 26 Stämme von je $\frac{1}{2}$ m Länge fertiggestellt hatte, der Brigadier Galkin mit Komkow 27 Stämme und der Brigadier Koslow mit Jewdokimow 28 Stämme. Wie lautet der Vorname Komkows?

W 9 ■ 1122 Der Flächeninhalt eines Rechtecks sei gleich der doppelten Differenz der Flächeninhalte zweier gleichseitiger Dreiecke, deren Seiten ebenso lang wie zwei anliegende Seiten dieses Rechtecks sind. Es ist das Verhältnis des Umfanges des Rechtecks zu dem Umfang des größeren der beiden gleichseitigen Dreiecke zu ermitteln.

W 9 * 1123 Es ist zu entscheiden, ob die folgende Behauptung richtig ist:
Der Rest bei der Division des Quadrats einer Primzahl, die größer als 3 ist, durch 24 ist stets gleich 1.

W 9 * 1124 Nach einer Kinoveranstaltung fuhren mehr als 150 Zuschauer mit 6 Autobussen nach Hause. In jedem Autobus waren gleichviele Zuschauer. Die anderen Kinobesucher — es waren genau um 15 % mehr — gingen zu Fuß nach Hause.
Wieviel Zuschauer waren im Kino, wenn das Kino nicht mehr als 400 Plätze hatte und alle Zuschauer einen Platz erhielten?

▲10/12▲1125 Man untersuche, ob die Zahl

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

eine rationale Zahl ist, und gebe, falls das zutrifft, diese Zahl an.

Eine Aufgabe von Sergej Konjagin

Der Repetitor

Aus der sowjetischen Zeitschrift:

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

МОСКОВСКИЙ КОМСОМОЛЕЦ

Газета издается с 11 декабря 1919 года

ОРГАН МК и МГК ВЛКСМ

Der sowjetische Student Sergej Konjagin, Saratow, UdSSR, der bei der XIV. Internationalen Mathematikolympiade 1972 die volle Punktzahl erzielte und einen I. Preis erhielt, stellt uns die folgende interessante, aber schwierige Aufgabe zur Verfügung:

▲1082▲ Gegeben sei ein gleichseitiges konvexes Fünfeck $ABCDE$.

a) Man beweise, daß ein solches Fünfeck stets zwei an derselben Seite liegende Innenwinkel hat, die größer als 60° und kleiner als 120° sind.

b) Man beweise ferner, daß stets ein gleichseitiges Dreieck mit den folgenden Eigenschaften existiert:

Eine Seite dieses gleichseitigen Dreiecks fällt mit einer Seite des Fünfecks $ABCDE$ zusammen, und der dieser Seite gegenüberliegende Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks liegt im Innern des Fünfecks.

▲10/12▲1126 Es seien x und y reelle Zahlen mit $x>y>0$. Man beweise, daß dann stets die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\frac{x^4-y^4}{4y^3}>x-y>\frac{x^4-y^4}{4x^3}.$$

W 10/12 ■ 1127 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$|2x-3|+|x-3|-|4x-1|=0$$

zu ermitteln.

W 10/12 ■ 1128 Es sei $\log_{14}7=a$ und $\log_{14}5=b$. Es soll die Zahl $z=\log_{35}28$ durch die Zahlen a und b ausgedrückt werden.

W 10/12 * 1129 Die Längen der Seiten eines Sehnenvierecks $ABCD$ seien

$$\overline{AB}=a,\ \overline{BC}=b,\ \overline{CD}=c,\ \overline{DA}=d.$$

Es soll die Länge der Diagonale $\overline{BD}$ dieses Sehnenvierecks ermittelt werden.

W 10/12 * 1130 Man beweise, daß die natürliche Zahl

$$(10^{1973}+10^{1972}+\ldots+10+1)\cdot(10^{1974}+5)+1$$

gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Vorliegende Aufgaben wurden sowjetischer Literatur entnommen

Und hier richtet sich die bekannte Zeitung *Der Moskauer Komsomolze* an Euch, liebe Schüler.

Nur ein leichtfertiger Mensch kann glauben, daß ja noch viel, viel Zeit bis zur Abschlußprüfung sei. Es ist allgemein bekannt, daß das letzte Vierteljahr bei weitem nicht so lang ist, wie es erscheint. April, Mai — und im Juni sind schon Prüfungen. Na und dann beginnt ein ruheloses Leben. Viele von Euch möchten Abiturienten werden. Welch beunruhigender Titel! Stöße von Büchern, Konspekten, vorbereitende Übungen ..., und vielleicht hilft dies alles gar nichts, denn kann man alle verzwickten Fragen kennen, die der Prüfende stellt?

„Es ist gut“, behauptet er, „daß Du alle Formeln kennst, fehlerfrei schreibst, Dich auszudrücken vermagst. Aber wie ist Dein logisches abstraktes Denken entwickelt?“ Hier liegt möglicherweise der Hund begraben. Damit Ihr nicht den Kopf verliert, sondern gewappnet in die Prüfungen geht, eröffnet der „Altersgenosse“ eine neue Rubrik, den „Repetitor“. Wir hoffen, daß Aufgaben und Fragen, die hier veröffentlicht werden, Euch aus der schwierigen Lage heraushelfen, in die Euch der Prüfende bringen kann. Es versteht sich, daß wir keine volle Garantie geben können. Diejenigen, die als erste nicht nur die richtigen Antworten, sondern auch den Lösungsweg einsenden, werden in unserer nächsten Ausgabe genannt. Auf diejenigen, die die einfallsreichste, eine originelle oder elegante Lösung finden, warten unsere Preise.

Aufgaben (Auswahl)

▲1▲ Wie gehen die Uhren? „An einem der letzten Tage des Aufenthaltes im Erholungsheim“, erzählte mir ein Freund, „hörten wir nach dem Abendbrot das Zeitzeichen. Es war genau 19.00 Uhr. Auf meiner Uhr war es fünf vor 19.00 Uhr. Aber die Uhr geht vor, wußte ich, und zum Zeitpunkt meiner Abfahrt wird sie die genaue Abfahrtszeit des Zuges anzeigen. Die Uhr meiner Nachbarin war vier Minuten vor 19.00 Uhr. Ihre Uhr geht am Tag drei Minuten mehr vor als meine,“ setzte mein Freund fort. „Die Nachbarin mußte den gleichen Zug wie ich benutzen, nur einen Tag eher. Ihre Uhr wird zum Zeitpunkt ihrer Abfahrt auch die genaue Zeit angeben. Wieviel Minuten geht jede der beiden Uhren am Tage vor?

▲2▲ Von Moskau nach Bykow fuhr ein Radfahrer. 25 Minuten später startet ein Auto, das den Radfahrer nach 15 Minuten einholt. Es fuhr bis Bykow und kehrte sofort wieder um, und 55 Minuten nach der Abfahrt aus Moskau traf es denselben Radfahrer wieder. Zu bestimmen ist die Geschwindigkeit des Radfahrers und des Autos, wenn die Entfernung von Moskau bis Bykow 34 km beträgt.

▲3▲ Finde den Familiennamen! Sidorow, Iwanow und Petrow sind Kapitän, Maschinist und Steuermann eines Passagierschiffes. Unter den Passagieren befinden sich auch ein Sidorow, Iwanow und Petrow. Über sie ist bekannt:

a) Der Passagier Sidorow wohnt in Ismailow.

b) Der Maschinist wohnt in Kunzew.

c) Der Passagier Petrow hat längst vergessen worin sich Kosinus und Sinus unterscheiden.

d) Der Fahrgast, der den gleichen Familiennamen wie der Maschinist hat, wohnt in Malachowok.

e) Einer der Passagiere, ein bekannter Physiker, wohnt in derselben Straße wie der Maschinist.

f) Während des Aufenthaltes des Passagierschiffes spielen die beiden Besatzungsmitglieder Iwanow und der Steuermann oft Schach. Wie heißt der Kapitän mit Familiennamen?

▲4▲ Am Bau eines Hauses nehmen Zimmerleute und Maler teil. Beide erhielten ein und dieselbe Summe Arbeitslohn, aber es waren zwei Maler mehr als Zimmerleute, und deshalb erhielt jeder Maler einen Rubel mehr als ein Zimmermann. Wieviel Zimmerleute und wieviel Maler waren es, wenn bekannt ist, daß die Summe der Rubel, die ihnen allen gezahlt wurde, um 26 größer war, als das Dreifache der Anzahl aller Arbeiter?

Lösungen

Lösungen zu den Aufgaben der XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade (aus Heft 4/73)

1. Teil a) und b) löste der Schüler Michael Schaper, Magdeburg, so: Die Summe der Außenwinkelgrößen in einem konvexen Vieleck ist 360°. (Ein einmaliger Umlauf auf den Kanten des Vielecks bewirkt z. B. eine einmalige volle Umdrehung.)

Sind x Innenwinkel spitz, so haben die Größen der entsprechenden Außenwinkel eine Summe, die größer als $x \cdot 90°$ ist, während die Summe der übrigen Außenwinkelgrößen jedenfalls positiv ist. Daher folgt

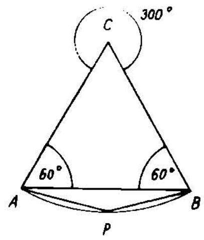
$$x \cdot 90° < 360°, \text{ d. h. } x < 4.$$

Somit ist für a) gezeigt, daß es eine größte Zahl m der behaupteten Art gibt, und zwar ist $m \leqq 3$.

Da es außerdem Vielecke (z. B. Dreiecke) mit genau 3 spitzen Innenwinkeln gibt, lautet die Antwort für b): $m = 3$.

Folgendes Beispiel eines Schülers zeigt, daß Frage c) zu bejahen ist:

In einem gleichseitigen Dreieck ABC wird ein Kreisbogen um C durch die beiden Punkte A und B gelegt. Ist P ein Punkt dieses Bogens, so gilt nach dem Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz $\sphericalangle \overline{APB} = 150°$. Dann sind (in $\triangle ABP$) $\sphericalangle \overline{BAP}$ und $\sphericalangle \overline{ABP}$ kleiner als 30°, und daher $\sphericalangle \overline{CAP}$ und $\sphericalangle \overline{CBP}$ spitz.



Legen wir also die $n-3$ Punkte $P_1, \ldots, P_{n-3}$ auf den Kreisbogen $\widehat{AB}$, so hat das n-Eck $BCAP_1 \ldots P_{n-3}$ genau 3 spitze Winkel. ($\sphericalangle CAP_1$ und $\sphericalangle CBP_{n-3}$ sind neben $\sphericalangle ACB$ nach der letzten Überlegung spitz!)

Bemerkungen: Der Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe kann für die 4. Stufe einer Olympiade als angemessen angesehen werden, obwohl die 2fache Existenzaussage in a) für die Altersstufe hohe Anforderungen stellt. Die meisten Schüler fanden einen Zugang zur Aufgabe, wobei jedoch exakte bzw. nahezu exakte Lösungen auch nur relativ selten erbracht wurden.

Häufige Fehler waren: Aus $m<4$ wurde aus rein zahlentheoretischen Gründen auf $m=3$ geschlossen (fehlender Nachweis der Existenz von Vielecken mit $x=3$).

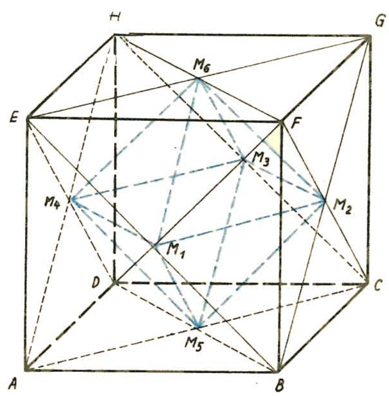
Für c) wurden Winkelbetrachtungen in n-Ecken durchgeführt, jedoch kein Existenzbeweis erbracht. Aus einer wahren Conclusio wurde auf wahre Prämisse geschlossen. Verteilung der Punktstufen:

0	1	2	3	4	5	6
6	10	16	38	8	9	10.

Dr. K. D. Drews, Universität Rostock

2. Lösung zu a)

1. Man merkt sofort, daß keine der 8 Schnittebenen durch den Mittelpunkt des Würfels hindurchgeht. Folglich liegt „in der Mitte" des Würfels einer der gesuchten Teilkörper. Wir suchen zunächst die Form dieses Teilkörpers. Die Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels seien mit $M_1, M_2, \ldots, M_6$ bezeichnet. Jede der 8 gegebenen Schnittebenen



enthält genau 3 dieser Punkte M_j. Jeder Würfelecke kann man nun diejenigen 3 Punkte M_j zuordnen, die die Mittelpunkte der in der betrachteten Würfelecke zusammenstoßenden Seitenflächen des Würfels sind, also z. B. der Würfelecke E die 3 Punkte M_1, M_4, M_6. So entspricht auch jeder Würfelecke ein Dreieck mit den dieser Würfelecke zugeordneten Punkten M_j als Ecken. Z. B. entspricht der Würfelecke E das Dreieck $M_1M_4M_6$. Diese Dreiecke sind gleichseitig. Die Seitenlänge ist $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, wie man durch einfache Anwendung des Satzes von Pythagoras feststellt. Der Körper mit den Ecken $M_1, M_2, \ldots, M_6$ wird folglich von 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzt; es handelt sich um ein Oktaeder. Jedes der 8 begrenzenden Dreiecke liegt in genau einer der 8 Schnittebenen. Daher wird das Oktaeder $M_1M_2M_3 M_4M_5M_6$ von keiner der Schnittebenen durchsetzt. Es ist also einer der gesuchten Teilkörper.

2. An jeder Würfelecke findet man ein Tetraeder, dessen Ecken die betreffende Würfelecke und die drei dieser Würfelecke wie in 1. zugeordneten Mittelpunkte von Würfelseitenflächen sind. Z. B. liegt an der Würfelecke E das Tetraeder $EM_1M_4M_6$. Die vier ein solches Tetraeder begrenzenden Dreiecke liegen in vier Schnittebenen. Es ist leicht einzusehen, daß ein solches Tetraeder durch die übrigen Schnittebenen nicht mehr zerlegt wird, d. h. daß es sich um einen weiteren der gesuchten Teilkörper handelt. Jede Schnittebene, die keines der begrenzenden Dreiecke eines betrachteten Tetraeders enthält, ist nämlich zu einer Schnittebene, in der ein solches Dreieck liegt, parallel. Die durch A, H, C und E, B, G bestimmten Ebenen bilden z. B. ein derartiges Paar paralleler Ebenen. Enthielte nun die durch A, H, C bestimmte (also eine zu EM_1M_6 parallele) Ebene innere Punkte des Tetraeders $EM_1M_4M_6$, so müßte sie die Strecke EM_4 in einem von M_4 verschiedenen Punkt schneiden. Da sie den Punkt M_4 enthält, würden auch die Punkte E und D in dieser Ebene liegen. Die Ebene müßte folglich die fünf Punkte A, D, E, H, C enthalten, was aber unmöglich ist. In ähnlicher Weise könnte man zeigen, daß überhaupt keine Schnittebene durch das Tetraeder $EM_1M_4M_6$ hindurchgeht. Entsprechend den acht Würfelecken gibt es acht derartige Teilkörper. Man erkennt durch einfache Anwendungen des Satzes von Pythagoras, daß es sich um regelmäßige Tetraeder mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ handelt.

3. An jeder Würfelkante findet man ein Tetraeder, dessen Ecken die auf der betreffenden Würfelkante liegenden Würfelecken und die Mittelpunkte der beiden Würfelseitenflächen, die sich in dieser Würfelkante schneiden, sind. Z. B. ist EFM_1M_6 ein solches Tetraeder. Ähnlich wie in 2. oder auch rein anschaulich kann gezeigt werden, daß diese Tetraeder durch die Schnittebenen nicht weiter zerlegt werden. Entsprechend den 12 Würfelkanten gibt es 12 solche Tetraeder, die aber im Gegensatz zu den unter 2. gefundenen nicht regelmäßig sind. Fünf ihrer Kanten haben die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, eine Kante hat die Länge a.

4. Insgesamt wurden somit 21 Teilkörper gefunden. Zwei beliebige unter ihnen haben keine inneren Punkte gemeinsam.

Lösung zu b)

5. Das in 1. beschriebene Oktaeder kann als aus 2 kongruenten Pyramiden mit der gemeinsamen quadratischen Grundfläche $M_1M_2M_3M_4$ und den Spitzen M_5 bzw. M_6 zusammengesetzt aufgefaßt werden. Der Flächeninhalt der Grundfläche ist $\frac{1}{2}a^2$, die Höhe hat die Länge $\frac{a}{2}$. Daher beträgt das Volumen des Oktaeders

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{6}a^3.$$

Jedes der in 2. beschriebenen regelmäßigen Tetraeder (Kantenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$) *hat eine* Grundfläche vom Inhalt $\frac{1}{8}a^2\sqrt{3}$ und eine Höhe der Länge $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$. Sein Volumen ist daher

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}a^2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}a\sqrt{3}=\frac{1}{24}a^3.$$

Jedes der in 3. beschriebenen Tetraeder läßt sich als eine Pyramide auffassen, deren Grundfläche den Inhalt $\frac{1}{4}a^2$ (nämlich ein Viertel des Inhalts einer Würfelseitenfläche) und deren Höhe die Länge $\frac{a}{2}$ hat. Sein Volumen ist also $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{24}a^3$.

6. Addiert man die Volumina sämtlicher gefundener Teilkörper, so erhält man

$$\frac{1}{6}a^3+8\cdot\frac{1}{24}a^3+12\cdot\frac{1}{24}a^3=a^3.$$

Daraus folgt, daß der Würfel durch die angegebenen Teilkörper wieder vollständig zusammengesetzt werden kann. Es wurden also sämtliche entstehenden Teilkörper gefunden.

Einige Bemerkungen zu den Schülerlösungen: Die Grundlage für die Behandlung der Aufgabe bildete bei allen Schülern eine Zeichnung. War diese übersichtlich und klar, wurde auch die Lösung meistens gefunden. Die Aufgabe ist sicher für die 4. Stufe der Olympiade als „leicht" zu bezeichnen. Das wird auch durch die verhältnismäßig große Anzahl von Schülern, die 6 oder 7 Punkte erreichten, belegt:

0	1	2	3	4	5	6	7
10	7	8	11	5	7	14	35

Die Schüler, die sich mit gewissem oder vollem Erfolg an der Aufgabe versuchten (nur vier Schüler bearbeiteten die Aufgabe überhaupt nicht), gingen im Prinzip den hier dargestellten Weg, der in seinen wesentlichen Teilen auch mit dem Vorschlag der Aufgabenkommission übereinstimmt. Die Punktabzüge hatten meist ihren Grund darin, daß nicht sämtliche Typen von Teilkörpern erkannt worden sind.

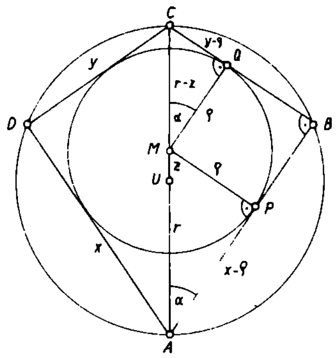
Oft wurde bei Teil b) auch so vorgegangen, daß die Volumina nur von Teilkörpern zweier Typen explizit berechnet worden sind. Das Volumen der übrigen Teilkörper läßt sich dann aus der in 6. angegebenen Gleichung bestimmen, nachdem man sich (z. B. anschaulich) davon überzeugt hat, daß tatsächlich sämtliche Teilkörper gefunden worden waren.

Dr. G. Seifert, Ingenieurhochschule Berlin

3 A. a) (entsprechend dem Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission). Ist $ABCD$ ein konvexes Drachenviereck mit $\overline{AB}=\overline{AD}$ und $\overline{CB}=\overline{CD}$, so ist AC Symmetrieachse. Folglich ist $\overline{AC}$ Halbierende der Innenwinkel bei A und C, und die Halbierenden der Innenwinkel bei B und D schneiden $\overline{AC}$ in ein und demselben Punkt M. Also hat M den gleichen Abstand von den Seiten des Vierecks. Zusammen mit der Konvexität von $ABCD$ folgt daraus, daß dieses Viereck einen Inkreis besitzt.

b) (entsprechend dem Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission). Nach der Umkehrung des Satzes des Thales geht der Kreis mit der Strecke $\overline{AC}$ als Durchmesser durch die Punkte B und D. Folglich hat $ABCD$ einen Umkreis.

c) (siehe dazu die Abb.)



Die Fußpunkte P und Q der Lote von M auf $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ liegen auf den zugehörigen Seiten von $ABCD$ (wegen der Konvexität von $ABCD$). Das Viereck $MPBQ$ ist ein Rechteck und wegen $\overline{MP}=\overline{MQ}=\varrho$ sogar ein Quadrat. Für $\overline{MU}$ schreiben wir kurz z.

Wir können o.B.d.A. $x\geqq y$ voraussetzen. Dann gilt nach dem pythagoreischen Satz (bzgl. der Dreiecke ABC, APM und CQM)

$$x^2+y^2=4r^2 \qquad (1),$$
$$(r+z)^2=\varrho^2+(x-\varrho)^2 \qquad (2)$$
und $$(r-z)^2=\varrho^2+(y-\varrho)^2 \qquad (3).$$

Aus (2) und (3) folgt
$$2r^2+2z^2=4\varrho^2+x^2+y^2-2\varrho(x+y)$$
und zusammen mit (1) dann
$$z^2=2\varrho^2+r^2-\varrho(x+y) \qquad (4).$$
Nach dem Strahlensatz ist
$$(x-\varrho):x=\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{MP}:\overline{CB}=\varrho:y;$$
also $$\varrho(x+y)=xy \qquad (5).$$
Mit (1) und (5) ist
$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=4r^2+2\varrho(x+y)$; und aus dieser quadratischen Gleichung für $(x+y)$ folgt wegen $x+y>0$
$$x+y=\varrho+\sqrt{\varrho^2+4r^2} \qquad (6).$$
Setzen wir schließlich (6) in (4) ein, so erhalten wir die Behauptung
$$z^2=r^2+\varrho^2-\varrho\sqrt{\varrho^2+4r^2}, \text{ w.z.b.w.}$$

Bemerkungen: Für diese geometrische Wahlaufgabe hatte sich zwar die Hälfte der Teilnehmer entschieden, doch nur zwei konnten die volle Punktzahl erreichen. Einer von diesen ist Gernot Förster (Bezirk Cottbus), dessen Lösungsweg zu c) wir hier im wesentlichen wiedergegeben haben. (Dieser Schüler leitet (5) über Flächeninhalte ab.)

Drei Schüler wählten folgenden günstigen trigonometrischen Lösungsweg für c), den nur Jörg Schulze (Bezirk Potsdam) erfolgreich zu Ende führen konnte: Es ist $\sin=\frac{\varrho}{r+z}$ und $\cos\alpha=\frac{\varrho}{r-z}$ (siehe Abb.). Aus der Identität $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ergibt sich eine quadratische Gleichung für z^2, für die wegen $z^2<r^2$ nur die Behauptung als Lösung in Frage kommt.

Die meisten Lösungswege für c) führten im wesentlichen auch zu dieser biquadratischen Gleichung für z. Viele waren nicht in der Lage, zweckmäßige und zielstrebige Umformungen vorzunehmen und die erhaltene Gleichung für z richtig auszuwerten. Den Überlegungen wurde häufig eine bestimmte Größenbeziehung zwischen x und y zugrunde gelegt, ohne daß dies erkannt bzw. genügend diskutiert wurde.

Zum Beweis von a) und b) wurde vielfach gezeigt, daß die bekannten Charakterisierungen für Tangenten- bzw. Sehnenviereck erfüllt sind. (Für a) und b) wurden 2 bzw. 1 Punkt vergeben.) Abschließend kann eingeschätzt werden, daß die beiden Wahlaufgaben eine ungünstige Zusammenstellung waren. Ein Vergleich der Ergebnisspiegel unterstreicht das nachdrücklich. Die sehr leichten Teile a) und b) von 3 A. haben sicherlich viele Schüler zur Wahl dieser Aufgabe verleitet. Die Hälfte der vorgelegten Arbeiten kam aber über diese Teile nicht hinaus.

0	1	2	3	4	5	6	7
0	3	6	17	8	6	5	2

Dr. E. Quaisser, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam

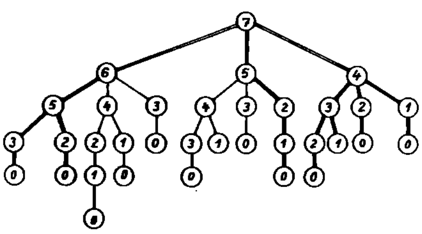
3 B. Dirk und Jens spielen ein Spiel mit folgenden Regeln: Es werden genau 7 Hölzchen hingelegt. Abwechselnd machen die Spieler jeweils einen „Zug". Ein „Zug" besteht aus dem Wegnehmen von einem, zwei oder drei Hölzchen. Dabei darf keiner der Spieler den gleichen Zug zweimal hintereinander ausführen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen. Das Spiel endet unentschieden, wenn zwar noch Hölzchen vorhanden sind, der am Zug befindliche Spieler aber keinen Zug nach den Spielregeln ausführen kann.

Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler, bei jeder Spielmöglichkeit des anderen, den Gewinn erzwingen?

Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission: Wenn der Anziehende A im ersten Zug 1 Hölzchen nimmt, so kann der andere Spieler den Gewinn erzwingen, nämlich indem er ebenfalls 1 Hölzchen nimmt, so daß beim zweiten Zug von A 5 Hölzchen vorhanden sind. Von ihnen muß er laut Spielregeln 2 oder 3 Hölzchen nehmen, und dann bleiben 3 bzw. 2 Hölzchen übrig, die der zweite Spieler nunmehr nehmen kann.

Wenn A im ersten Zug 2 Hölzchen nimmt, so kann der zweite Spieler ebenfalls den Gewinn erzwingen, nämlich indem er 3 Hölzchen nimmt, so daß genau 2 Hölzchen übrig bleiben. Von ihnen darf der erste Spieler laut Spielregeln nur 1 Hölzchen nehmen, und das restliche Hölzchen kann dann wieder der zweite Spieler nehmen. Nimmt aber der erste Spieler im ersten Zug 3 Hölzchen, so kann er den Gewinn erzwingen, falls der Nachziehende nun 2 oder 3 Hölzchen nimmt; denn dann bleiben 2 bzw. 1 Hölzchen übrig, die A vollständig fortnehmen kann. Falls jedoch der zweite Spieler nun 1 Hölzchen nimmt, so verbleiben drei Hölzchen. Von ihnen kann der erste Spieler in seinem zweiten Zug laut Spielregel nur 1 oder 2 Hölzchen nehmen. Nimmt er 1 Hölzchen, so verliert er. Nimmt er dagegen 2 Hölzchen, so kann der zweite Spieler das verbleibende Hölzchen nach den Spielregeln nicht nehmen; das Spiel endet also unentschieden.

Damit ist gezeigt, daß es keinen Spieler gibt, der bei jeder Spielmöglichkeit des anderen den Gewinn erzwingen kann. Viele Schüler realisierten auch ihre Lösungen in etwa in dieser Art. Besonders sorgfältige und gut formulierte Lösungen gaben ab: Klaus Altmann (Berlin), Hagen Meltzer (Bezirk Potsdam), Peter Reuter (ein Frühstarter aus dem Bezirk Dresden) und Eckard Widgrube (Bezirk Halle). Eine besonderes gute Übersicht über alle oben geschilderten Spielsituationen erhält man durch einen „Spielbaum", wie er z. B. von dem Schüler Peter Erward (Bezirk Magdeburg) benutzt wurde:



In diesem Spielbaum sind die Fälle, in denen ein Spieler einen in einem Zug zu realisierenden Sieg „verschenkt" nicht mit aufgenommen. Die in der obigen Lösung betrachteten Zugfolgen sind hervorgehoben. Weitere Erläuterungen sind wohl nicht notwendig.

Wenn auch die Aufgabe vom Typ her ungewohnt war, so muß sie doch als relativ leicht eingeschätzt werden, das wird auch bestätigt durch das Ergebnis:

0	1	2	3	4	5	6	7
4	–	2	4	5	4	9	21

Nur wenige Schüler wurden also mit wesentlichen Punktabzügen bedacht, diese Schüler hatten dann entweder eine unvollständige Fallunterscheidung durchgeführt oder die Spielregeln nicht immer beachtet bzw. falsch interpretiert.

Verwunderlich bleibt nur, daß etwa die Hälfte der Schüler nicht diese leichte, sondern die viel schwierigere andere Wahlaufgabe bearbeitete.

Dr. H.-J. Sprengel
Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam

4. Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

$$P \in k \rightarrow \overline{PF} = \overline{PQ} \qquad (1)$$
$$P \notin k \rightarrow \overline{PF} \neq \overline{PQ}, \qquad (2)$$

dabei sei $P=(x, y)$ das Zeichen für einen beliebigen Punkt der Ebene und Q sei das Zeichen für den Punkt der Menge g, der dieselbe x-Koordinate hat wie P, d. h. es ist $Q=(x, -1)$. Aus der Abstandsformel ergibt sich

$$\overline{PQ} = \sqrt{(y+1)^2} = |y+1| \text{ bzw.}$$
$$\overline{PF} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}.$$

Da (2) die Umkehrung von (1) ist, sind (1) und (2) bewiesen, wenn nur äquivalente Umformungen durchgeführt werden:

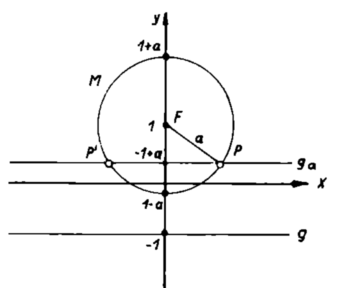
$$P \in k \leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2 \leftrightarrow (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$$
$$\leftrightarrow |y+1| = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \leftrightarrow \overline{PQ} = \overline{PF}.$$

Dieser (von der Aufgabenkommission vorgeschlagene) Weg, der durch Kürze ausgezeichnet ist, wurde von keinem Schüler gegangen. Es wurde von den Schülern (1) isoliert von (2) nachgewiesen. Dabei beachteten viele nicht, daß auch die Umkehrung bewiesen werden muß. Die Abstandsformel zweier Punkte

$$A=(x_1, y_1), \; B=(x_2, y_2)$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

war nur wenigen Schülern geläufig. Das hatte zur Folge, daß Fallunterscheidungen getroffen werden mußten. Bei der analytischen Formulierung von $\overline{PF}$ sind das die Fälle $y>1$, $y=1$, $y<1$; bei der analytischen Formulierung von $\overline{PQ}$ die Fälle $y>-1$, $y=-1$, $y<-1$. Zu bemerken ist folgendes:

1. Besonders elegante Lösungen wurden nicht gegeben; wahrscheinlich ist das bei dieser Aufgabenstellung auch gar nicht möglich.
2. Nur ein Schüler benutzte die Definitionsmöglichkeit einer Parabel als Menge der Punkte, die von einem festen Punkte (Brennpunkt F) denselben Abstand haben wie von einer festen Geraden (Leitlinie g).



3. Von mehreren Schülern wurde (2) (besser die Kontraposition $\overline{PF}=\overline{PQ} \rightarrow P \in k$) durch Konstruktion der Parabel nachgewiesen. Um $F=(0, 1)$ wird ein Kreis M mit dem Radius $a=\overline{PF}=\overline{PQ}$ geschlagen und zu g werden die Parallelen $g_a: y=-1+a$, $g'_a: y=-1-a$ gezogen. Offensichtlich ist

$$M \cap (g_a \cup g'_a) = M \cap g_a,$$

da $M \cap g'_a = \emptyset$ ist (Der kleinste y-Wert eines Punktes von M ist $1-a$; die y-Werte der Punkte von g'_a sind stets $-1-a$ und die Gleichung $1-a=-1-a$ ist nicht lösbar).

Für $a>1$ ist $M \cap g_a = \{p, p'\}$, bei $a=1$ fallen P und P' zusammen, ist $a<1$, dann ist $M \cap g_a$ die leere Menge. Genügen die Koordinaten von $P=(x, y)$ der Gleichung $y=\frac{1}{4}x^2$, dann auch die Koordinaten von $P'=(-x, y)$.

α) $a=1 \Rightarrow x=0, y=0 \Rightarrow y=\frac{1}{4}x^2$

β) $a=2 \Rightarrow x=2, y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{4}x^2$

γ) $a=1, a \neq 2 \Rightarrow y=-1+a$

$$x=\sqrt{a^2-|1-(-1+a)|^2}$$
$$=\sqrt{4a-4}$$
$$y=\frac{1}{4}x^2$$

4. Punkte mußten abgezogen werden
a) bei Nichtbehandlung von (1) und (2)
b) bei unvollständiger Fallunterscheidung durch Nichtkenntnis der Abstandsformel.

Dipl.-Math. P. K. Kobelt,
Ingenieurhochschule Berlin

5. Geben Sie alle g-adischen Zahlensysteme an, in denen die folgende Aufgabe wenigstens eine Lösung hat, und ermitteln Sie für diese Zahlensysteme alle Lösungen der Aufgabe: Welche im g-adischen Zahlensystem zweistellige Zahl hat die Eigenschaft, daß sich erstens durch Vertauschen der beiden Ziffern wieder eine g-adische-zweistellige Zahl ergibt, und daß man zweitens bei deren Subtraktion von der ersten Zahl die im gleichen Zahlensystem geschriebene Zahl 12 erhält?

Da von den 97 beteiligten Schülern 58 die Aufgabe lösten (29 erhielten die volle Punktzahl und weitere 29 nur einen Punkt weniger), kann sie für die Klassenstufe 10 als recht einfach angesehen werden. Unsicherheiten traten vor allem beim logischen Aufbau der Lösungsvorschläge auf. So waren Formulierungen der Art „also ist $a=3$ und $b=1$ im 4-adischen System eine Lösung und die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung", nachdem gezeigt worden war, daß höchstens im 4-adischen Zahlensystem eine Lösung existieren kann, die nur die Form $a=3$ und $b=1$ hat, häufig anzutreffen. Diese Schüler erkannten offenbar nicht, daß erst die Probe bestätigt, daß die für die Lösung ermittelten notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind. Die unten angegebene Lösung entspricht den Gedanken, die eine Reihe von Startern in ihren Lösungsvorschlägen entwickelten.

Lösung: Wir nehmen an, daß ein g-adisches Zahlensystem existiert, in dem es eine Lösung z der Aufgabe gibt. Die g-adischen Ziffern der Zahl z seien in dieser Reihenfolge a und b. Da auch nach Vertauschung der Ziffern a und b eine zweistellige Zahl z' vorliegen soll, sind a und b von 0 verschieden. Laut Aufgabenstellung treten in dem g-adischen Zahlensystem wenigstens die Ziffern 1 und 2 auf, folglich gilt

$$g=3. \qquad (1)$$

Aus $z-z'=1 \cdot g+2$ ergibt sich $\qquad (2)$

$$ag+b-(bg+a)=g+2. \qquad (3)$$

Durch Umformung von (3) erhält man

$$(a-b)(g-1)=g+2. \tag{4}$$

Wegen (1) ist die Division durch $g-1$ möglich, und es folgt

$$a-b=1+\frac{3}{g-1}>0. \tag{5}$$

Als Primzahl hat 3 nur die Teiler 3 und 1 im Bereich der natürlichen Zahlen. Der Fall $g=2$ entfällt wegen (1), und es bliebt nur $g=4$ übrig. Wegen (2) sind a und b verschieden voneinander und mit $g=4$ ergibt sich aus (5) $a=3$ und $b=1$. Wenn es also überhaupt eine Lösung gibt, dann kann es nur die in der Form 31 im 4-adischen System geschriebene Zahl sein. Da durch das Vertauschen der Ziffern wieder eine zweistellige 4-adische Zahl entsteht und

$$\begin{aligned}31_{(4)}-13_{(4)}&=3\cdot 4+1-(1\cdot 4+3)\\&=5\\&=12_{(4)}\end{aligned}$$

gilt, ist das 4-adische Zahlensystem das einzige g-adische Zahlensystem, in dem die Aufgabe eine Lösung besitzt, nämlich genau die Zahl $z=31_{(4)}$.

H.-J. Vogel, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht", Potsdam

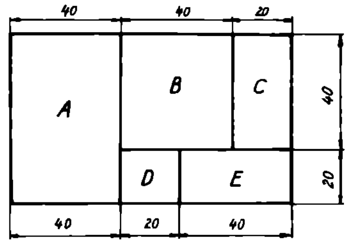
Auf die Lösung der Aufgabe 6 muß aus Platzgründen verzichtet werden.

Kreisolympiade (XII. OJM)
Klassenstufe 5

1.
```
415 · 382
 1245
  3320
    830
 158530
```

2. Günter konnte z. B. folgendermaßen schließen: Die Differenz der Anzahl der Mädchen zu der der Jungen war eine gerade Zahl. Daher mußten die Anzahlen der Mädchen und die der Jungen entweder gerade oder beide ungerade sein. In jedem dieser Fälle ist aber die Summe eine gerade Zahl, kann also nicht 325 sein.
Oder: Die Anzahl aller Teilnehmer ist gleich der Summe aus der doppelten Anzahl der teilnehmenden Jungen und 24, und damit eine gerade Zahl. Günters Meinung ist also richtig.
3. Im ungünstigsten Falle kann Ulrike zunächst 8 rote, 8 blaue, 8 schwarze, 8 weiße und die beiden grünen Kugeln herausnehmen. Nimmt sie zu diesen 34 Kugeln nun noch eine weitere heraus, dann kann diese Kugel nur eine der vier Farben rot, blau, schwarz oder weiß tragen. In diesem Fall erhält Ulrike also 9 Kugeln gleicher Farbe. Die kleinste Anzahl von Kugeln, bei denen das mit Sicherheit der Fall ist, beträgt daher 35.
4. a) Bei dem angegebenen Maßstab 1 : 100 entspricht 1 cm auf der Zeichnung 1 m in der Wirklichkeit.
Daher ergibt sich folgende Zeichnung:
b) Der Grundriß läßt sich in der aus der Abb. ersichtlichen Weise in Quadrate von je 1 cm Kantenlänge, also von 1 cm² Flächeninhalt, einteilen. Wegen des Maßstabes 1:100 entspricht mit der Kantenlänge 1 m, also mit dem Flächeninhalt 1 m². Die Fußböden der Räume haben folgenden Flächeninhalt:

Raum A: 24 m²	Raum D: 4 m²
Raum B: 16 m²	Raum E: 8 m²
Raum C: 8 m²	

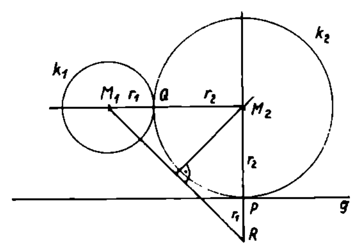


Zu streichen sind wegen $24+16=40$ insgesamt 40 m² Fußbodenfläche.
Auszulegen sind wegen $8+4+8=20$ insgesamt 20 m² Fußbodenfläche.

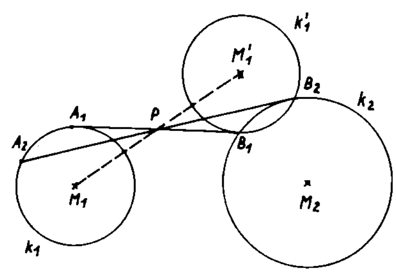
Klassenstufe 6

1. Auf die Abbildung muß aus Platzgründen verzichtet werden.
2. Da jede Prämienstufe mindestens einmal vertreten war, gibt es mindestens 1 Werktätigen, der 150 M, einen, der 250 M, einen, der 350 M, einen der 400 M und einen, der 500 M erhalten hatte. An diese fünf Werktätigen wurden daher insgesamt 1650 M ausgezahlt.
Für die restlichen 6 Werktätigen stehen mithin noch genau 1000 M zur Verfügung. Hätte jeder dieser Werktätigen genau 150 M erhalten, dann wären das zusammen 900 M. Also muß mindestens einer der 6 Werktätigen mehr als 150 M Prämie bekommen haben. Laut Aufgabe hat er dann aber mindestens 250 M Prämie bekommen. Für die restlichen 5 Werktätigen verbleiben nun höchstens 750 M, es konnte also kein weiterer der fünf Werktätigen mehr als 150 M Prämie erhalten haben. Folglich beträgt die gesuchte Anzahl 6.
3. Die von den Pionieren erzielten Sammelergebnisse seien mit r, w, m, b, j (in Mark) bezeichnet.
Dann gilt laut Aufgabe:
(1) $w>b>j$
(2) $j>r$; $r=13$
(3) $b=r+4$
(4) $w=m+2$ $m=j+1$
Aus (2) und (3) folgt $b=17$. Aus (1) und (2) folgt $w>b>j>r$, aus (4) $w>m>j$ und daraus sowie aus (5) $m=b$, also $m=17$.
Daher sammelten: Werner 19 M, Beate und Margot je 17 M, Jan 16 M und Rita 13 M.
4. Die Anzahl der in der DDR beheimateten Schiffe beträgt laut Aufgabe $\frac{1}{3}$ der Gesamtzahl, also stammten 7 Schiffe aus der DDR. Die restlichen 14 Schiffe stammten aus den anderen vier Ländern.
Nun hat Manfred laut Aufgabe mindestens 1 indisches Schiff sowie infolgedessen mindestens 3 finnische, 4 bulgarische und 6 sowjetische Schiffe gesehen. Da das zusammen bereits 14 Schiffe sind, sind damit die gesuchten Anzahlen gefunden.

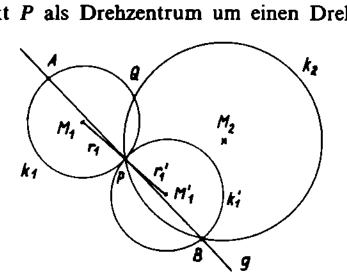
W 7 ■ 1018 Nach Voraussetzung gilt $\overline{M_1Q}=r_1$, $\overline{QM_2}=r_2$ und $\overline{M_1M_2}=r_1+r_2$. Tragen wir auf der Geraden PM_2 von P bis R den Radius r_1 (wie aus der Zeichnung ersichtlich) ab, so gilt $\overline{M_2R}=\overline{M_1M_2}=r_1+r_2$, d. h. das Dreieck M_1RM_2 ist gleichschenklig. Spiegeln wir nun k_1 an der Mittelsenkrechten von $\overline{M_1R}$ als Symmetrieachse, so fällt das Bild M'_1 von M_1 mit R und das Bild Q' von Q mit P zusammen. Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion: Wir zeichnen durch P eine Senkrechte zu g, tragen auf ihr r_1 von P bis R so ab, daß R und M_1 auf verschiedenen Seiten von g liegen. Wir verbinden R mit M_1. Die zu konstruierende Mittelsenkrechte von $\overline{RM_1}$ schneidet die Gerade RP in M_2. Der Kreis um M_2 mit $\overline{M_2P}=r_2$ als Radius ist der zu konstruierende Kreis k_2.



W 7 * 1019 Wir drehen den Kreis k_1 um den Punkt P als Drehzentrum um den Drehwinkel von 180°. Das Bild k'_1 von k_1 schneidet k_2 in den Punkten B_1 und B_2. Die Gerade PB_1 möge k_1 in A_1, die Gerade PB_2 möge k_1 in A_2 schneiden. Auf Grund der Konstruktion und der vorliegenden Symmetrieeigenschaften (Punktspiegelung an P) gilt $\overline{A_1P}=\overline{PB_1}$ und $\overline{A_2P}=\overline{PB_2}$. Die Aufgabe besitzt somit zwei Lösungen.



W 7 * 1020 Wir drehen den Kreis k_1 um den Punkt P als Drehzentrum um einen Dreh-



winkel von 180°. Das Bild k_1' von k_1 schneide den Kreis k_2 außer im Punkt P noch in B. Die Gerade BP schneide k_1 in A. Dann gilt auf Grund der Konstruktion und der vorliegenden Symmetrieeigenschaften (Punktspiegelung an P) $\overline{AP}=\overline{PB}$.

8 ▲ 1021 Es sei n eine beliebige ganze Zahl. Dann folgen ihr die drei weiteren ganzen Zahlen $n+1$, $n+2$, $n+3$. Wir erhalten für die um 5 verminderte Summe der Quadrate dieser vier Zahlen

$$z=n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2-5$$
$$n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4+n^2+6n$$
$$+9-5$$
$$=4n^2+12n+9=(2n+3)^2.$$

Daher ist z gleich dem Quadrat der ganzen Zahl $2n+3$, w. z. b. w.

Bemerkung: Wir weisen darauf hin, daß die vier aufeinanderfolgenden Zahlen nicht notwendig positive ganze Zahlen sein müssen. Sie können auch sämtlich oder teilweise negativ sein. So gilt z. B.

$$(-5)^2+(-4)^2+(-3)^2+(-2)^2-5$$
$$=25+16+9+4-5=49=7^2;$$
$$(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2-5=4+1+0+1-5$$
$$=1=1^2.$$

W 8 ■ 1022 Es sei x die Maßzahl der Zeit (in h), die der zweite Kraftwagen benötigt, um den ersten einzuholen. Dann legt der zweite Kraftwagen bis zum Einholen $85x$ km zurück und der erste $80x$ km. Da der erste Kraftwagen 2 km mehr zurücklegen muß, gilt die Gleichung

$85x=80x+2$. Daraus folgt

$$85x-80x=2,$$
$$5x=2,$$
$$x=\frac{2}{5}.$$

Der zweite Kraftwagen hat also den ersten nach $\frac{2}{5}$ h $=24$ min eingeholt. In dieser Zeit hat er eine Entfernung von

$$85\cdot\frac{2}{5}\text{ km}=34\text{ km zurückgelegt.}$$

Bemerkung: Wir können diese Aufgabe noch schneller lösen, wenn wir beachten, daß die Relativgeschwindigkeit des zweiten Kraftwagens (bezogen auf den ersten) 5 km · h^{-1} beträgt. Da der Abstand zwischen den Kraftwagen ursprünglich 2 km betrug, erhalten wir durch Division die Zeit bis zum Einholen

$$x=\frac{2\text{ km}}{5\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}}=\frac{2}{5}\text{ h}=24\text{ min.}$$

W 8 ■ 1023 Bei einem Weg von der Länge a (in Metern) und einer Zeit t (in Sekunden) erhalten wir die mittlere Geschwindigkeit

$$v=\frac{a}{t}\ (\text{in m}\cdot\text{s}^{-1})$$

und $$v_1=\frac{a}{t}\cdot\frac{3600}{1000}=\frac{a\cdot 3{,}6}{t}\ (\text{in km}\cdot\text{h}^{-1}).$$

Ferner ergeben sich für die einzelnen Teilstrecken von je 500 m Länge die folgenden Zeiten: 91,61 s, 98,55 s, 99,90 s, 94,21 s.

Für die Gesamtstrecke von 2000 m Länge ergibt sich die Zeit 384,27 s. Daher erhalten wir für die erste Teilstrecke

$$v=\frac{500}{91{,}61}\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}=5{,}46\text{ m}\cdot\text{s}^{-1},$$

$$v_1=\frac{500\cdot 3{,}6}{91{,}61}\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}=19{,}6\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

Analog erhalten wir die weiteren in der folgenden Tabelle angegebenen Werte:

	Weg in m	Zeit in s	Geschwindigkeit in m · s^{-1}	Geschwindigkeit in km · h^{-1}
1. Teilstrecke	500	91,61	5,46	19,6
2. Teilstrecke	500	98,55	5,07	18,3
3. Teilstrecke	500	99,90	5,01	18,0
4. Teilstrecke	500	94,21	5,31	19,1
Gesamtstrecke	2000	384,27	5,20	18,7

Der größte Betrag der Abweichung der mittleren Geschwindigkeit auf einer Teilstrecke von der mittleren Geschwindigkeit auf der Gesamtstrecke beträgt (19,6 − 18,7) km · h^{-1} $=0{,}9$ km · h^{-1}.

Daher ist der größte Betrag der protentualen Abweichung gleich

$$\frac{0{,}9\cdot 100}{18{,}7}\,\%=4{,}8\ .$$

W 8 * 1024 Wir setzen $\overline{AB}=c$, $\overline{CD}=h$ und erhalten nach Voraussetzung $\overline{AD}=\frac{h}{2}$ (vgl. Abb.). Dann gilt $\overline{DB}=c-\frac{h}{2}$ und nach dem Höhensatz

$$h^2=\frac{h}{2}\left(c-\frac{h}{2}\right),\ \text{also wegen } h\neq 0$$

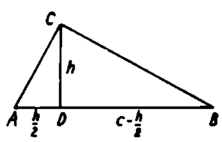
$$h=\frac{c}{2}-\frac{h}{4},\ \frac{c}{2}=\frac{5}{4}h,\ c=\frac{5}{2}h.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist daher gleich

$$A=\frac{1}{2}ch=\frac{5}{4}h^2.$$

Für $h=4$ cm erhalten wir den Flächeninhalt

$$A=\frac{5}{4}\cdot 16\text{ cm}^2=20\text{ cm}^2.$$



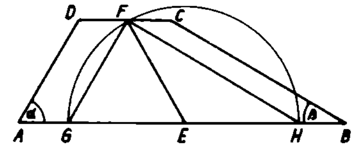
W 8 * 1025 Die Parallelen durch den Punkt F zu den Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ mögen die Grundseite $\overline{AB}$ in den Punkten G und H schneiden (vgl. die Abb.). Dann sind die Vierecke $AGFD$ und $HBCF$ Parallelogramme, und es gilt

$$\overline{AG}=\overline{DF}=\frac{c}{2},\ \overline{HB}=\overline{FC}=\frac{c}{2}.$$

Wegen $\alpha+\beta=90°$ gilt $\alpha<90°$ und $\beta<90°$, also $a>c$, $\frac{a}{2}>\frac{c}{2}$. Daher liegt G zwischen A und E und H zwischen E und B. Da $AGFD$ ein Parallelogramm ist, gilt $\sphericalangle GFD=\alpha$, und da $HBCF$ ein Parallelogramm ist, $\sphericalangle CFH=\beta$. Daraus folgt

$$\sphericalangle GFD+\sphericalangle CFH=\alpha+\beta=90°,$$

also $$\sphericalangle HFG=90°,$$



das Dreieck GHF ist daher rechtwinklig.

Nun gilt $\overline{GE}=\overline{AE}-\overline{AG}=\frac{a}{2}-\frac{c}{2}$,

$$\overline{EH}=\overline{EB}-\overline{HB}=\frac{a}{2}-\frac{c}{2}.$$

Daher ist E der Mittelpunkt der Hypotenuse GH des rechtwinkligen Dreiecks GHF und gleichzeitig Mittelpunkt des Umkreises dieses Dreiecks (Umkehrung des Satzes des Thales).

Daraus folgt $\overline{EF}=\overline{EG}=\overline{EH}=\frac{a}{2}-\frac{c}{2}$,

also $$\overline{EF}=\frac{a-c}{2}.$$

9 ▲ 1026 Es seien $n-1$, n, $n+1$ mit $n\geqq 1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Dann ist die Summe ihrer dritten Potenzen gleich

$$s=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$$
$$=n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1$$
$$=3n^3+6n=3n(n^2+2).$$

Um nun nachzuweisen, daß s stets durch 9 teilbar ist, müssen wir die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1. n ist durch 3 teilbar, d. h. $n=3k$.
2. n läßt bei der Division durch 3 den Rest 1, d. h. $n=3k+1$.
3. n läßt bei der Division durch 3 den Rest 2, d. h. $n=3k+2$, wobei in allen Fällen k eine natürliche Zahl ist. Wir berechnen jetzt s in allen drei Fällen.

1. Für $n=3k$ erhalten wir

$$s=3n(n^2+2)=3\cdot 3k[(3k)^2+2]$$
$$=9k[(3k)^2+2];$$

s ist also durch 9 teilbar.

2. Für $n=3k+1$ erhalten wir

$$s=3(3k+1)[(3k+1)^2+2]$$
$$=3(3k+1)(9k^2+6k+1+2)$$
$$3(3k+1)3(3k^2+2k+1).$$

s ist also auch in diesem Fall durch 9 teilbar.

3. Für $n=3k+2$ erhalten wir

$$s=3(3k+2)[(3k+2)^2+2]$$
$$=3(3k+2)(9k^2+12k+6)$$
$$=3(3k+2)3(3k^2+4k+2).$$

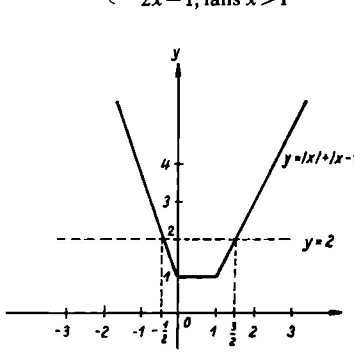
s ist also auch in diesem Fall durch 9 teilbar.

Damit haben wir nachgewiesen, daß in jedem Fall die Summe s durch 9 teilbar ist, w. z. b. w.

Bemerkungen: 1. Wer mit Zahlenkongruenzen rechnen kann, kommt noch etwas schneller zum Ziel.
Ist $n\equiv 0 \pmod 3$, so gilt $s=3n(n^2+1)\equiv 0 \pmod 9$.
Ist $n\equiv 1 \pmod 3$, so gilt $n^2+2\equiv 1+2\equiv 0 \pmod 3$, also $s\equiv 0 \pmod 9$.
Ist $n\equiv 2 \pmod 3$, so gilt $n^2+2\equiv 4+2\equiv 0 \pmod 3$, also $s\equiv 0 \pmod 9$.
In allen drei Fällen gilt also $s\equiv 0 \pmod 9$, w. z. b. w.
2. Der Satz gilt auch, wenn es sich um drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen handelt; denn bei dem Beweis haben wir nur vorausgesetzt, daß die Zahlen $n-1$, n, $n+1$ ganze Zahlen sind. Z. B. ist
$(-4)^3+(-3)^3+(-2)^3=-64-27-8=-99$
durch 9 teilbar.

9 ▲ 1027 Wir unterscheiden die Fälle $x>1$, $0\leqq x\leqq 1$, $x<0$.
1. Im Falle $x>1$ *erhalten wir*
$f(x)=|x|+|x-1|=x+x-1=2x-1$.
Nun gilt $2x-1>2$ genau dann, wenn $2x>3$, also $x>\frac{3}{2}$. In diesem Falle ist also die Ungleichung (1) für alle $x>\frac{3}{2}$ erfüllt.
2. Im Falle $0\leqq x\leqq 1$ gilt wegen $x-1\leqq 0$
$f(x)=|x|+|x-1|=x-(x-1)=1$.
In diesem Falle ist also die Ungleichung (1) niemals erfüllt.
3. Im Falle $x<0$ gilt $|x|=-x$ und $|x-1|=-x+1$, also
$f(x)=|x|+|x-1|=-x+(-x+1)=-2x+1$.
Nun gilt $-2x+1>2$ genau dann, wenn $2x<-1$, also $x<-\frac{1}{2}$. In diesem Falle ist also die Ungleichung (1) für alle $x<-\frac{1}{2}$ erfüllt.
Die Ungleichung (1) ist also genau dann erfüllt, wenn
$x<-\frac{1}{2}$ oder $x>\frac{3}{2}$ gilt.

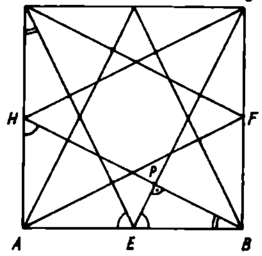
Wegen $f(x)=\begin{cases}-2x+1, & \text{falls } x<0,\\ 1 & \text{, falls } 0\leqq x\leqq 1,\\ 2x-1, & \text{falls } x>1\end{cases}$

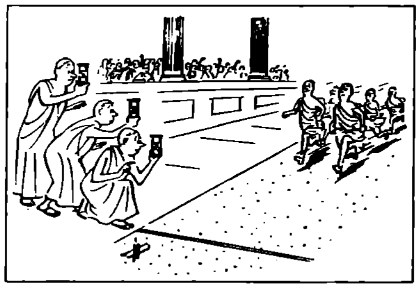


besteht der Graph dieser Funktion aus drei linearen Teilstücken, die wir leicht zeichnen können, indem wir die Punkte $(-1;\ 3)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 1)$, $(2;\ 3)$ in das Koordinatensystem einzeichnen (vgl. die Abb.). Ferner entnehmen wir der Zeichnung, daß die Lösungsmenge der Ungleichung (1) aus allen reellen Zahlen x mit $x<-\frac{1}{2}$ oder $x>\frac{3}{2}$ *besteht.*

W 9 ■ 1028 Es seien $x_1=20$, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 die Anzahlen der Gold-, Silber-, Bronzemedaillen, 4., 5. bzw. 6. Plätze, die die DDR erhielt. Dann gilt
$$7\cdot 20+5x_2+4x_3+3x_4+2x_5+x_6=480. \quad (1)$$
Nun gilt nach Voraussetzung
$$x_2=x_3=x_6 \quad x_4=x_5 \quad 20. \quad (2)$$
Aus (1) und (2) folgt daher
$140+5x_2+4x_2+3x_4+2x_4+x_2=480$,
$10x_2+5x_4=340$,
$$2x_2+x_4=68. \quad (3)$$
Wegen (2) gilt $x_2>x_4$; daher folgt aus (3)
$68>2x_4+x_4=3x_4$,
$x_4<\frac{68}{3}=22\frac{2}{3}$,
also, da x_4 ganzzahlig ist, $x_4\leqq 22$.
Andererseits ist wegen (2) $x_4>20$, also ist $x_4=21$ oder $x_4=22$. Wäre nun $x_4=21$, so wäre wegen (3) $2x_2=68-x_4=47$, was zu einem Widerspruch führt, weil x_2 ganzzahlig ist. Daher gilt $x_4=22$, und wir erhalten weiter $2x_2=68-22=46$, also $x_2=23$. Aus (2) erhalten wir ferner $x_2=x_3=x_6=23$, $x_4==x_5=22$. Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß mit diesen Werten die Gleichung (1) und auch die Beziehung (2) und damit alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Die DDR erhielt also 23 Silbermedaillen, 23 Bronzemedaillen, 22 vierte Plätze, 22 fünfte Plätze und 23 sechste Plätze.

W 9 ■ 1029 Es sei P der Schnittpunkt der Geraden BH und CE (vgl. die Abb.). Das Quadrat $ABCD$ ist axialsymmetrisch bezüglich der Symmetrieachse EG. Daraus folgt $\sphericalangle AED=\sphericalangle BEC$.
Aus $\sphericalangle ABH=\sphericalangle EBP$ und $\sphericalangle AHB=\sphericalangle AED=\sphericalangle BEP$ folgt $\triangle ABH\sim\triangle EBP$. Somit gilt $\overline{BH}:\overline{AH}=\overline{EB}:\overline{EP}$. Ferner gilt
$\overline{BH}^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5}{4}a^2$, also $\overline{BH}=\frac{a}{2}\sqrt{5}$.
Durch Einsetzen erhalten wir
$\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right):\frac{a}{2}=\frac{a}{2}:\overline{EP}$, also $\overline{EP}=\frac{a}{10}\sqrt{5}$.
Aus $\overline{EP}:\overline{BP}=1:2$ folgt weiter
$\overline{BP}=2\cdot\overline{EP}=\frac{a}{5}\sqrt{5}$. Für den Flächeninhalt des achtzackigen Sternes gilt somit
$A_S=A_{ABCD}-8\cdot A_{EBP}=a^2-8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{10}\sqrt{5}\cdot\frac{a}{5}\sqrt{5}$
$=\frac{3}{5}a^2$, also $A_S=60\ \text{cm}^2$.





Lösungen zu alpha-heiter

Zu den Beiträgen
Kalender aus Würfeln — Wir wägen —
erwarten wir zahlreiche Lösungsvorschläge, d. Red.

Rational oder nicht?

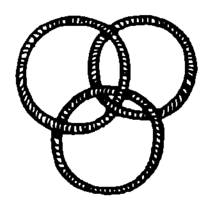
$S=0{,}1001000010000001000000001\ldots$. Der Bruchteil dieser Zehn (dezimal geschrieben) hat eine regelmäßige Struktur: er besteht nach dem Komma aus Nullen, die mit Einsen in Gruppen eingeteilt sind. Die erste Gruppe hat keine Null, die zweite hat zwei Nullen. Die n-te hat $2n-1$ Nullen. [So groß ist die Differenz zwischen n^2 und $(n-1)^2$.] Ein solcher Bruch ist nicht periodisch und deshalb irrational.

Eine Tafel Schokolade

Wir stellen fest, daß wir bei jedem Brechen die Anzahl der Stücke um eines vergrößern. Die Anzahl der Stücke ist $4\cdot 8=32$. Vor dem Brechen hatten wir ein Stück, nach dem ersten Brechen waren es zwei, nach dem zweiten drei ..., nach dem 31. waren es 32. Ganz gleich, wie wir die Schokolade brechen, immer sind es 31mal.

Ein Schnitt genügt

Die geforderte Verkettung der drei Ringe ist auf dem Bild dargestellt.



Modell des Fernsehturms

Das Modell wiegt 30 g.

Abbildungen vertauscht

In dem Beitrag: *Inversion oder Spiegelung am Kreis* (3/73) wurden versehentlich die Abbildungen der Seiten 52 und 53 vertauscht. (1 und 4, 2 und 5, 3 und 6)

Junge Mathematiker bei Freunden am Baikalsee

Seit sechs Jahren laufen an der Oberschule Burkau für die Klassen 5 bis 10 Mathematikarbeitsgemeinschaften, die monatlich zweimal zusammen kommen. Sie werden in vorbildlicher Weise von Frau *Hannelore Jurack* betreut. Seit fünf Jahren ist dieser Klub eifriger

Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb, das zeigen die Erfolge: Im Jahre 1971/72 nahmen 48 Schüler am *alpha*-Wettbewerb teil. Sie erhielten 433 Antwortkarten.

5 Jahre Teilnahme: Heike Jurack, Rainer Schwierz; 4 Jahre: Regine Katzer, Gabriele Gnauck, Rainer Woger, Harald Anders;
3 Jahre: Rainer Sturm, Olaf Kylau, Sabine und Ingolf Puppe, Matthias Vincentini, Doris Kuban, Holger Jurack, Annegret Wobst, Ulrike Gnauck, Elke Sturm, Marlies Dorgel, Thilo Feidt, Andrea Gerlach;
2 Jahre: 17 Schüler; 1 Jahr: 10 Schüler.

Als Auszeichnung unternahmen die Schüler im vergangenen Jahr — wie *alpha* bereits berichtete — eine Exkursion nach Liberec (ČSSR).

In diesem Jahr erhielten wir von den 12 vorbildlichen AG-Teilnehmern einen Gruß aus Irkutsk am Baikalsee. Insgesamt 20 Schüler der Schule waren Gast einer sowjetischen Schule in Irkutsk, der Patenschule der OS Burkau.

Unsere Anerkennung gilt diesem fleißigen Kollektiv von Burkau. Auf weiterhin gute Zusammenarbeit

J. Lehmann, Chefredakteur

Mathematik im Moskauer Pionierpalast auf den Leninbergen

Schon länger als zehn Jahre besteht auf den Leninbergen, am steilen Flußufer, der allen Moskauern wohlbekannte Pionierpalast. Sein *Mathematikzirkel* jedoch besteht kaum halb so lange. Anfangs bestanden lange Zeit Zweifel, ob es angebracht sei, die Mathematik neben den *Studios für künstlerische Laientätigkeit*, der *Tanzschule* und solch unterhaltsamen Beschäftigungen wie *Kosmonautik* oder *Flugmodellbau* einzuführen. Dann aber wurde beschlossen, daß es richtig sei (immerhin befinden wir uns jetzt im Zeitalter der wissenschaftlich-technischen Revolution und Mathematisierung der Kenntnisse), und es erhob sich die Frage: Was soll man die Teilnehmer im Mathematikzirkel lehren? Zu wiederholen, um die Kenntnisse zu vervollständigen, könnte dazu führen, daß das in der Schule Gelernte nicht mehr das nötige Interesse fände. Den Stoff der Oberschule zu vermitteln, bedeutet vorwegzunehmen; und das zu tun, ist nicht immer empfehlenswert. Die Praxis zeigt, daß Studenten, die bereits in der Schule mit der Differentialrechnung bekannt gemacht wurden, lustlos die Mathematikvorlesungen besuchten, da sie glaubten, doch nur das geboten zu bekommen, was ihnen schon bekannt sei, und in der Endkonsequenz blieben sie oft hinter denen zurück, die erst begannen, die Mathematik zu studieren, erstmalig, aber ernsthaft und voller Begeisterung.

Wenn man es aber trotzdem für richtig hält, vorzugreifen, sollte man sich dann nicht auf Gebiete beziehen, die an den Schulen und sogar Hochschulen wenig behandelt werden, aber für die Zukunft von großer Bedeutung sind, wie beispielsweise: Maschinelle Rechentechnik? Genau diese Entscheidung wurde letzten Endes getroffen.

Auch eine solch reiche Einrichtung wie der Pionierpalast konnte nicht aus eigener Kraft bestehen. Hilfe von seiten der Akademie der Wissenschaften der UdSSR war nötig. Wissenschaftler kamen den Kindern zu Hilfe. Den Zirkelteilnehmern wurde die ausgezeichnete elektrische Rechenmaschine MIR, die im Rechenzentrum der Akademie der UdSSR aufgestellt ist, zur Verfügung gestellt.

Der Anfang war gemacht ...

Vor vier Jahren traten die ersten Zirkelteilnehmer schüchtern an das elektronische Gehirn heran. Im Verlauf der Jahre beendeten viele von ihnen die Schule und studieren jetzt an Instituten. Der Zirkelteilnehmer *Brailow* macht sich bereits einen Namen, obwohl er noch die Schule besucht. Er wurde Sieger der Allunions-Mathematikolympiade. Champion Moskaus in Physik wurde sein Zirkelkamerad *Sascha Schen. Andrej Formanowski*, der den Zirkel sogar noch besuchte, nachdem er an der Universität immatrikuliert worden war, siegte in der zehnten Klasse auf der Allunions-Chemieolympiade und wurde erster Chemiker unter den Schülern des ganzen Landes. *Sascha Strigaljew*, einer der ersten Zirkelteilnehmer, leistet schon im ersten Studienjahr am Institut für Nachrichtentechnik ernsthafte wissenschaftliche Arbeit.

Allein diese Beispiele unterstreichen hinreichend den Nutzen dieses Zirkels. Trotzdem scheint uns, daß das Wesentliche nicht darin besteht, daß aus dem Zirkel einige Stars hervorgingen, sondern darin, daß in den Jahren seines Bestehens Hunderte von Jungen und Mädchen lernten, Probleme zu stellen, sie in die Sprache von Maschinenprogrammen zu übersetzen und die erhaltenen Ergebnisse auszuwerten. Diese Jugendlichen werden nicht unbedingt Berufsmathematiker, — der Zirkel ist nicht auf diejenigen orientiert, für die die Mathematik später einmal das Hauptsächlichste im Leben sein wird, — aber in ihrer zukünftigen Arbeit wird sie das Vermögen zu denken, das im Zirkel anerzogen wurde, und die kurze Bekanntschaft mit der Rechentechnik begleiten. Wenn es gilt, irgend eine wichtige Aufgabe rasch zu lösen, werden sie sich erinnern, wie sie im Pionierpalast und im Rechenzentrum der Akademie der Wissenschaften der UdSSR mit den Elementen der numerischen Mathematik konfrontiert wurden.

▲ Und hier einige Beispiele zu diesem „Sicherinnern“:

... Anfangs, ungefähr zwei Monate lang, beschäftigten wir uns nur im Pionierpalast. Um an die Maschine heranzutreten, war es noch zu früh. Man machte uns mit den Grundlagen der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannt und stellte interessante Aufgaben. Einige von ihnen konnten bereits hier gelöst werden, andere, die umfangreiche Berechnungen erforderten, wurden beiseite gelegt, bis am Komputer gearbeitet werden durfte ...

● Kommentar: Die Wahrscheinlichkeitstheorie und die ihr vorangegangene Kombinatorik wurden im Zirkel deshalb als Hauptrichtung behandelt, weil sie erstens jetzt in vielen Gebieten der Wissenschaft eine wichtige Rolle spielen, die humanitäre eingeschlossen, und zweitens die Aufgaben hier in der Regel ihrem Aufbau nach einfach sind, zur Lösung aber eine große Anzahl von Rechnungen erfordern, d. h. an ihnen kann man den Nutzen von elektronischen Rechenmaschinen besonders klar erkennen.

▲ ... Im Hörsaal des Palastes beschäftigen sich nicht nur Lehrer mit den Neulingen, sondern auch Schüler als Instrukteure, Zirkelteilnehmer des zweiten und dritten Lehrjahres. Sie erklärten den jüngeren Kameraden, wie Formeln hergeleitet werden, Programme zu schreiben sind, wie man an den im Palast vorhandenen elektronischen Rechenmaschinen arbeite. Und dann brach der lang erwartete Tag an. Voller Spannung hatten wir gewartet, bis wir an der Reihe waren, und jeder von uns gab mit noch ungeschickten Fingern eine Information in die Maschine. Nach einigen Sekunden ratterte diese die Antwort selbst auf den Lochstreifen. Das war ein Erlebnis!

● Kommentar: Die Maschine MIR, auf der die Zirkelteilnehmer arbeiten, benutzt als Maschinensprache die russische Variante des ALGOL.

▲ ... Nach einigen Jahren beherrschten wir sie vollständig. Wir fühlten uns an der Maschine wie zu Hause. Jeder wußte, was er zu tun hatte. Die Maschinenzeit ist teuer, und alle bemühten sich, sie maximal zu nutzen. Aber diejenigen, die darauf warteten an der Reihe zu sein, versäumten es nicht, sich über die am Lochstreifen Sitzenden lustig zu machen, und manchmal Wetten bezüglich des Resultats abzuschließen. Es kam vor, daß irgend jemand bat: „Kinder, stellt mir fünfzehn Minuten zur Verfügung, ich habe ein ausgezeichnetes Programm für ein Spiel, eine fehlerfreie Strategie!“

● Kommentar: Obwohl im Zirkel Standardaufgaben in mathematischer Statistik gegeben werden, sind der Initiative der Zirkelteilnehmer keine Grenzen gesetzt. Jeder, der ein interessantes Programm aufgeschrieben hatte, das vom Lehrer gebilligt worden war, kann zwanzig bis dreißig Minuten Maschinenzeit für die Realisierung erhalten.

▲ ... Und da vergehen drei Stunden. Schon andere Anwärter warteten darauf, an der Reihe zu sein und schauten auf die Uhr. Der Lochstreifen muß ausgewechselt werden, und für eine Woche muß man sich von der Maschine trennen. Schade! Fünf Minuten reichten nicht! Kann das Programm schlecht gewesen sein? Das muß man zu Hause überprüfen, oder man muß es nach zwei Tagen während der Übungen im Palast mit dem Lehrer und den anderen Kindern untersuchen. Solche Fehler müssen nicht sein ...

W. Trostnikow, Moskau

In Heft 1/74 bringt *alpha* den Inhalt einer Übung des Mathematikzirkels des Moskauer Pionierpalastes, d. Red.