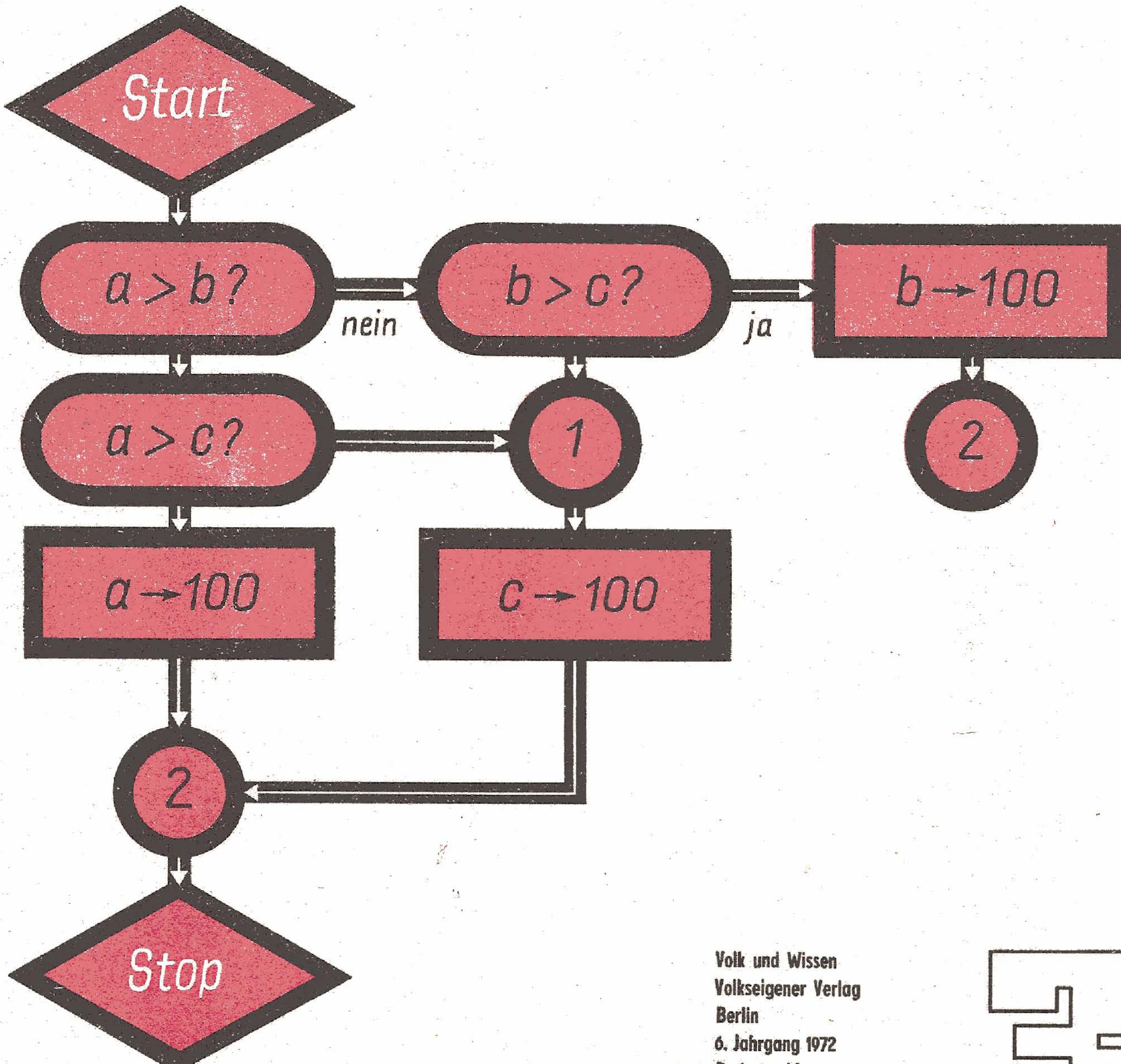
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
6. Jahrgang 1972
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31 059

3

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Technische Zeichnungen J. Tittel, TU Dresden (S. 49/51); J. Lehmann, Leipzig (S. 58); Vignetten: K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 61, S. 63); Vignette: Prof. Dr. Ottescu, Bukarest (S. 63); J. Lehmann, Leipzig (S. 63); Archiv: Klaus Ampler (S. 66); J. Lehmann, Leipzig (S. 67); Graphiken: Parteihochschule „Karl Marx" beim ZK der SED (III. U.-Seite); Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig;
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 22. März 1972

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

49 Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises (8)*
Dozent Dr. E. Schröder, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden

52 Mathematikolympiaden in der VR Polen (8)
Prof. Dr. S. Straszewicz, Universität Warschau

53 Aus der VR Polen berichtet (6)
Eine Aufgabe vom Lektor Andrzej Makowski (10)
Institut für Mathematik der Universität Warschau

54 Rückblick auf die XIII. IMO (10)
Die teilnehmenden Mannschaften und Mitglieder der DDR-Mannschaft stellten Aufgaben für *alpha*

55 Die Arithmetik der Binomialkoeffizienten, Teil 2 (9)
Prof. D. B. Fuchs, Moskau (aus Quant 6/70)

57 Welche, wie viele Möglichkeiten gibt es? (5)
Oberlehrer Dr. W. Türke, Institut für Lehrerbildung „Wilhelm Pieck", Auerbach

59 Fluidkompaß Sport 3 (5)
VEB Freiberger Präzisionsmechanik / Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig

61 *alpha* – Unterhaltsame Mathematik (5)
Mathe-Quiz im Ferienlager
Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig / W. Träger, Schloßbergoberschule Döbeln

63 Mathematikolympiaden in der Republik Kuba (10)
Dr. Luis J. Davidsen, Sektor Mathematik des Kubanischen Ministeriums für Erziehung

64 In freien Stunden *alpha* heiter (5)
Polnisches Informations- und Kulturzentrum Leipzig / Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig

66 aufgepaßt – nachgedacht – mitgemacht (5)
Mathematik und Sport
speziell für Klasse 5/6
Studienrat Th. Scholl, Ministerium für Volksbildung, Berlin
Eine Aufgabe von Klaus Ampler
Deutsche Hochschule für Körperkultur, Leipzig

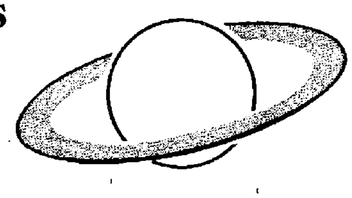
67 *alpha* stellt vor: Kerstin Bachmann (5)

68 Lösungen (5)

III. Umschlagseite: Graphiken zur Direktive des VIII. Parteitages der SED (5)
Parteihochschule „Karl Marx" beim ZK der SED

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises



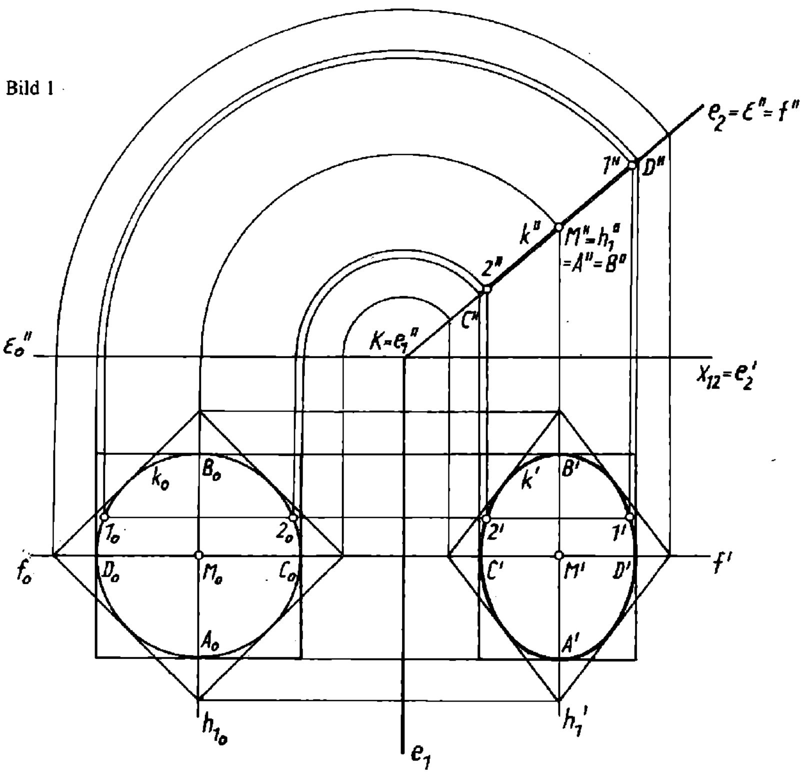
Als die Astronomen zu Beginn des 17. Jahrhunderts (um 1610) über die ersten noch recht primitiven Fernrohre als Arbeitsmittel verfügten, machten sie damit innerhalb unseres Planetensystems für die damalige Zeit einige höchst überraschende Beobachtungen. Neben der Entdeckung der Phasen der Venus nach Art unseres Erdtrabanten und der vier größten Jupitermonde bewegten die Gemüter der Astronomen eigenartige henkelähnliche Ansätze am Saturn, deren Aussehen und Gestalt sich zeitlich änderte. Erst nach mehreren Jahrzehnten vermochte Huygens (1656) diesem am Saturn beobachteten Phänomen die richtige Deutung zu geben. Als vorsichtiger Wissenschaftler teilte er seine Vermutung zunächst nur einigen befreundeten Astronomen in Form eines Anagramms mit, um sich auf diese Weise die Priorität seiner Entdeckung zu sichern. Durch die Verbesserung der optischen Hilfsmittel in der Folgezeit bestätigte sich immer mehr die Huygenssche Hypothese, nach welcher der Saturn von einem ringförmigen Gebilde umgeben ist, dessen Ebene gegen die Ebene der Ekliptik um einen gewissen Winkel (28°) geneigt ist. Infolge der zeitlichen Änderung der Relativstellung zwischen Saturn und Erde innerhalb unseres Sonnensystems entstehen für den Beobachter von unserem Planeten aus zu verschiedenen Zeiten unterschiedliche Eindrücke von diesem ringförmigen Gebilde.

Die von dem menschlichen Auge durch eine angenäherte Parallelprojektion registrierten Bilder des Kreises bezeichnet man als *Ellipse*. Da die Abbildung eines Kreises auf eine Ebene mittels Parallelprojektion nicht nur für Astronomen, sondern auch für Techniker, Naturwissenschaftler und Künstler von Interesse ist, soll dieser Vorgang hier einmal konstruktiv genauer untersucht werden. Das theoretische Rüstzeug dafür ist uns bereits in Heft 4/1968 in dem Beitrag „Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur" gegeben worden. Dort wurde gezeigt, wie man die wahre Gestalt einer durch Grund- und Aufriß vorgegebenen ebenen Figur nach der *Methode des doppelten Zirkelschlages* konstruktiv am einfachsten bestimmt. Die Anwendung des Verfahrens beschränkte sich auf Dreiecke oder Figuren, die sich in Dreiecke zerlegen lassen. Ein Kreis ist jedoch nicht in dieser Weise zerlegbar. Außerdem gehen wir von der uns bekannten wahren Gestalt einer ebenen Figur aus und ermitteln deren Normalprojektion in eine Bildebene. Das uns vertraute Konstruktionsverfahren müssen wir also der neuen Problemstellung und dem andersartigen Objekt unserer Betrachtung anpassen. Zunächst geben wir uns als Träger des Kreises etwa eine zweitprojizierende Ebene durch ihre Spuren e_1 und e_2 in zugeordneten Normalrissen vor. (Bild 1)

Diese spezielle Annahme wird getroffen, um die Konstruktion zu vereinfachen. Ferner legen wir den Kreismittelpunkt M in ε beliebig im ersten Quadranten fest. Da ε zweitprojizierend ist, liegt M'' auf e_2. Nun stellen wir uns die Aufgabe, um M mit dem Radius a einen Kreis zu zeichnen, der ganz in ε liegt. Für den Aufriß ist sie schnell gelöst. Die Aufrisse aller in ε befindlichen Gebilde liegen auf e_2. Folglich brauchen wir nur von M'' aus die Strecke a nach beiden Seiten auf e_2 abzutragen. Die so erhaltene Strecke $\overline{C''D''}$ stellt den Aufriß des Kreises k dar. In diesem Zusammenhang sei erwähnt: auch der Saturn nimmt bezüglich der Erde gelegentlich eine solche Relativstellung an, daß der den Saturn umgebende Ring im Fernrohr nur als feiner Strich sichtbar wird. Über den Grundriß k' des in ε liegenden Kreises k läßt sich allgemein zunächst folgendes sagen:

1. Jeder Kreisdurchmesser (durch M gehende Kreissehne) geht in einen Ellipsendurchmesser über, der von M' halbiert wird, da Teilverhältnisse bei Normalprojektion erhalten bleiben.
2. Tangenten in den Endpunkten eines Kreisdurchmessers gehen in parallele Tangenten der Ellipse über, da Parallelität bei dieser Abbildung erhalten bleibt. Umgekehrt liegen auch die Berührpunkte paralleler Tangenten auf einem Ellipsendurchmesser.
3. Der auf der ersten Hauptlinie durch M liegende Kreisdurchmesser $\overline{AB}$ bildet sich in wahrer Größe ab. Alle anderen Kreisdurchmesser werden bei der Abbildung gestaucht, da ihre Neigungswinkel gegen die Bildebene von 0° verschieden sind. (Unter dem Neigungswinkel einer Geraden g gegen eine Ebene π versteht man denjenigen Winkel, den die Gerade g mit ihrer Normalprojektion g' auf die Ebene π einschließt.)
4. Die stärkste Stauchung erfährt der zur ersten Hauptlinie senkrecht liegende Kreisdurchmesser $\overline{CD}$ bei Normalprojektion auf

Bild 1



π_1, da dessen Neigungswinkel gegen die Bildebene am größten ist. Jene Geraden, aus einer Ebene ε, die mit π_1 den größtmöglichen Winkel einschließen, bezeichnet man als *Fallinien* der Ebene ε. Sie durchsetzen die ersten Hauptlinien von ε senkrecht. Projiziert man die durch M gehende erste Hauptlinie h_1 und die Fallinie f normal auf π_1, so werden sich ihre Projektionen h_1' und f' wieder senkrecht schneiden, da ein Schenkel des abzubildenden rechten Winkels parallel zur Bildebene liegt.

Mit den hier getroffenen Aussagen können wir folgende Definitionen und Zwischenergebnisse festhalten:

1. Der größte Ellipsendurchmesser hat die Länge des Kreisdurchmessers. Man bezeichnet ihn als *Hauptachse* der Ellipse. Die Hauptachse liegt parallel zur ersten Spur e_1 von ε.
2. Der kleinste Ellipsendurchmesser steht senkrecht auf e_1. Man bezeichnet ihn als *Nebenachse* der Ellipse.
3. Haupt- und Nebenachse einer Ellipse stehen aufeinander normal.
4. Die Endpunkte der Hauptachse bezeichnet man als *Hauptscheitel* und die Endpunkte der Nebenachse als *Nebenscheitel* der Ellipse.

Um außer den Scheiteln weitere Ellipsenpunkte zu erhalten, legen wir ε nach π_1 um, wobei e_1 die Drehachse darstellt. Dem umgelegten Kreis k_0 werde nun jenes Quadrat umschrieben, das ein zu e_1 paralleles Seitenpaar besitzt. Führt man dieses Quadrat in die Ausgangslage von ε zurück, stellt sein Grundriß ein Rechteck dar, dessen Seitenlängen mit den Längen von Haupt- und Nebenachse der Bildellipse paarweise übereinstimmen. Man bezeichnet dieses Rechteck als *Achsenrechteck* der Ellipse. Es ist zugleich ein Tangentenrechteck der Ellipse mit den Haupt- und Nebenscheiteln als Berührpunkte. Ferner umschreiben wir dem Kreis k_0 der umgelegten Ebene ε_0 ein Quadrat, dessen Diagonalen parallel bzw. senkrecht zu e_1 liegen. Führt man dieses in die Ausgangslage von ε zurück, so erscheint der Grundriß des Quadrates als ein Rhombus. Seine Seiten stellen gleichfalls Ellipsentangenten mit den Halbierungspunkten als Berührpunkte dar. Nunmehr kennen wir zwei Tangentenvierecke der Ellipse samt ihren Berührpunkten. Damit läßt sich die Ellipse bereits näherungsweise zeichnen. Vor allem bewahren uns die Tangentenvierecke vor dem grundlegenden Fehler, eine Ellipse als Kurve mit zwei Spitzen in ihren Nebenscheiteln darzustellen.

Genügen für unsere Zwecke noch nicht die beiden Tangentenvierecke der Ellipse, so können wir uns – von der Umlegung ausgehend – beliebig viele weitere Ellipsenpunkte wie folgt verschaffen: Eine senkrecht zu e_1 eingezeichnete Ordnungslinie schneidet den umgelegten Kreis k_0 in den Punkten 1_0 und 2_0. Mit Hilfe weiterer Ordnungslinien senkrecht zur Rißachse und Kreisbögen um K als gemeinsamem Mittelpunkt führen wir die Punkte 1 und 2 in den Aufriß.

Bringt man anschließend einander entsprechende Ordnungslinien durch $1''$ und $2''$ bzw. 1_0 und 2_0 zum Schnitt, ergeben sich die Ellipsenpunkte $1'$ und $2'$. Auf diese Art lassen sich weitere Ellipsenpunkte in beliebiger Dichte konstruktiv ermitteln. (Vgl. Bild 1)

Anschließend soll nun mit Hilfe räumlicher Betrachtungen an zugeordneten Normalrissen eine einfache und platzsparende, rein *planimetrische* Ellipsenkonstruktion abgeleitet werden. Dabei geht man von Haupt- und Nebenachse als den vorgelegten Bestimmungsstücken der Ellipse aus. Zunächst werde die Lage von ε bezüglich der Bildebenen π_1 und π_2 wie oben vorausgesetzt. $\overline{AB}$ sei der in der ersten Hauptlinie durch M liegende Kreisdurchmesser. $\overline{CD}$ sei ein in der Fallinie durch M liegender Kreisdurchmesser. (Bild 2)

Wir bestimmen die auf der Fallinie durch N liegenden Kreispunkte. Hierzu drehen wir den Kreis k um h_1 parallel zur Bildebene π_1. Es ergibt sich der Kreis k_0. Die Fallinie f_0'' durch N' schneidet k_0' in den Punkten $1_0'$ und $2_0'$. Mittels einer Ordnungslinie führen wir zunächst nur $1_0'$ in den Aufriß. Durch anschließende Drehung von $1_0''$ um h_1'' findet man $1''$. Die Ordnungslinie durch $1''$ mit dem Grundriß f' der Fallinie f durch N zum Schnitt gebracht, liefert den Punkt $1'$. Dieser ist einerseits der Grundriß eines Punktes von k. Andererseits können wir ihn auch als Punkt einer Ellipse mit $\overline{A'B'}$ als Hauptachse und $\overline{C'D'}$ als Nebenachse ansehen.

Der auf f' liegende Ellipsenpunkt läßt sich auch ohne Verwendung des Aufrisses sehr einfach finden. Die Konstruktion mit Beweis sei für den Punkt $2'$ gezeigt: Um M' zeichnet man zwei Kreise mit den Radien $a = \overline{M'A'}$ (*Hauptscheitelkreis*) und $b = \overline{M'C'}$ (*Nebenscheitelkreis*). Einen der Schnittpunkte von f' mit dem Hauptscheitelkreis (hier $2_0'$) verbindet man mit M'. Durch den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden mit dem Nebenscheitelkreis zieht man eine Parallele zur Hauptachse. Diese schneidet f' in $2'$. Wir behaupten, daß $2'$ ein Punkt von k' ist.

Beweis: Gemäß unserer Konstruktion gilt die Proportion $a : b = \overline{N'1_0'} : \overline{N'1'}$. Ferner ist aus der Zeichnung die Proportion $a : b = \overline{N'2_0'} : \overline{N'2'}$ abzulesen. Da außerdem die Punkte $1_0'$ und $2_0'$ symmetrisch bezüglich der ersten Hauptlinie h_1 liegen, somit N' die Strecke $\overline{1_0'2_0'}$ halbiert, ist N' auch Halbierungspunkt der Strecke $\overline{1'2'}$. $2'$ ist also ein Punkt von k', was zu beweisen war.

Diese Konstruktion erlaubt bei vorgegebener Haupt- und Nebenachse – losgelöst von allen räumlichen Überlegungen – ein einfaches und schnelles Auffinden beliebig vieler Ellipsenpunkte. Da für das Zeichnen der Ellipse nach dieser Art zwei Kreise (Haupt-

Bild 2

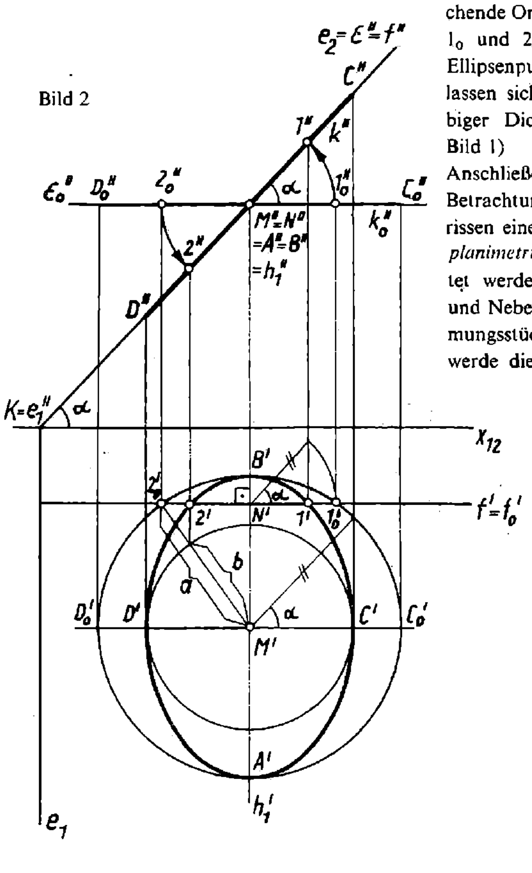
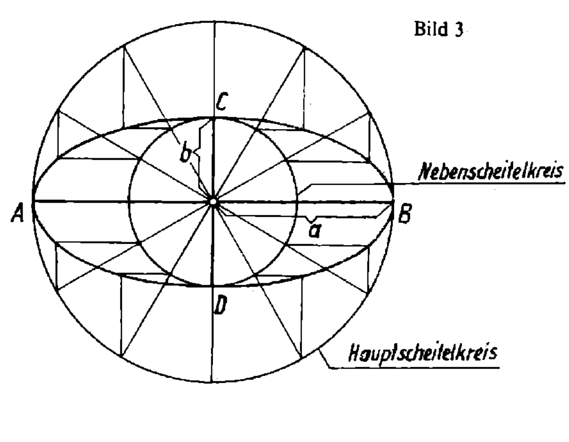


Bild 3



scheitelkreis und Nebenscheitelkreis) die Ausgangselemente bilden, spricht man hier auch von der *Zweikreiskonstruktion* der Ellipse. Diese war bereits in antiker Zeit bekannt. (Bild 3)

Anknüpfend an die letzten Überlegungen des bereits zitierten Aufsatzes aus Heft 4/1968 können wir sagen: Zwischen der Ellipse und ihrem Hauptscheitelkreis besteht die geometrische Verwandtschaft der *perspektiven Affinität*. Die Hauptachse der Ellipse fällt in die *Affinitätsachse* und die Stellung der Nebenachse gibt die *Affinitätsrichtung* an. Auch zwischen Ellipse und zugehörigem Nebenscheitelkreis läßt sich eine Zuordnung mittels perspektiver Affinität herstellen. Durch konstruktive Handhabung dieser geometrischen Verwandtschaft lassen sich beispielsweise von einem außerhalb einer Ellipse liegenden Punkt die Tangenten an die Ellipse allein mit Zirkel und Lineal exakt zeichnen.

Die hier behandelte Normalprojektion eines Kreises, welche uns auf die Ellipse geführt hat, gibt einen kleinen Einblick in die sehr umfangreiche *Lehre von den Kegelschnitten*. Ellipsen entstehen u. a. auch dadurch, daß man einen Drehkegel in gewisser Weise mit einer Ebene zum Schnitt bringt. Diese Betrachtungen führen dann auf andere Definitions- und Konstruktionsmöglichkeiten für Ellipsen.

Nun sollen noch die neu gewonnenen Kenntnisse über die Ellipse an zwei Beispielen ihre Anwendung finden:

1. Gegeben sind ein Drehzylinder (Rohr), der mit einer Mantellinie m die Bildebene π_1 berührt, und eine zweitprojizierende Ebene ε durch ihre Spuren e_1 und e_2. (Bild 4)
Gesucht sind der Grundriß der Schnittkurve von ε mit dem Zylinder und die wahre Gestalt des von dem Zylinder aus der Ebene ausgeschnittenen Flächenstückes. Begründe die Konstruktion und gib dir ähnliche Aufgaben vor!

2. Gegeben sind Haupt- und Nebenachse einer Ellipse und ein Punkt P. Gesucht sind die Tangenten von P an die Ellipse.
Anleitung zum Verständnis der Konstruktion in Bild 5:
Zur gegebenen Ellipse k zeichnet man den Hauptscheitelkreis $\tilde{k}$. Entsprechend der zwischen Ellipse und Kreis bestehenden geometrischen Verwandtschaft bestimmt man den Bildpunkt $\tilde{P}$ von P. Aus $\tilde{P}$ legt man in bekannter Weise (Kreis des Thales!) die Tangenten $\tilde{t}_1$ und $\tilde{t}_2$ mit den Berührpunkten $\tilde{T}_1$ und $\tilde{T}_2$ an $\tilde{k}$. Anschließend transformiert man die gefundenen Kreistangenten samt ihren Berührpunkten in das Ellipsenfeld zurück. Dabei benutzt man die Eigenschaften, daß parallele Geraden in parallele Geraden übergehen und die Punkte der Affinitätsachse bei der Transformation festbleiben.

E. Schröder

Bild 4

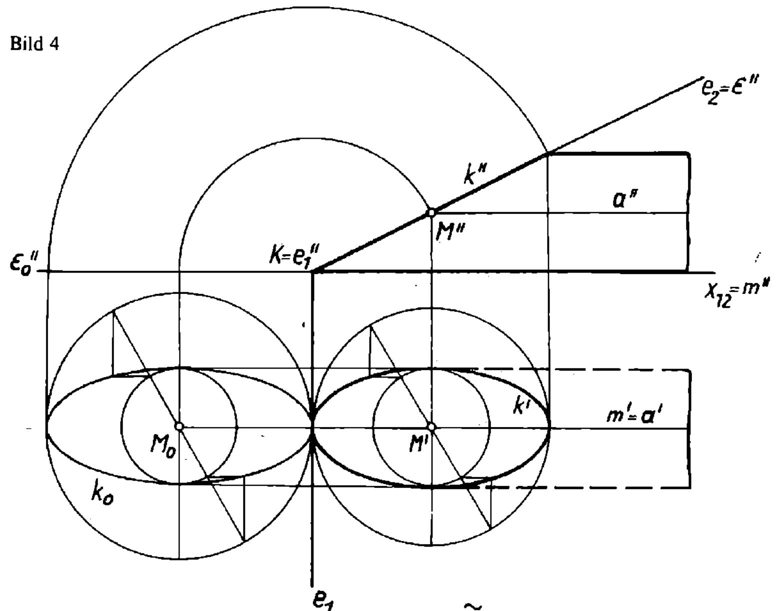
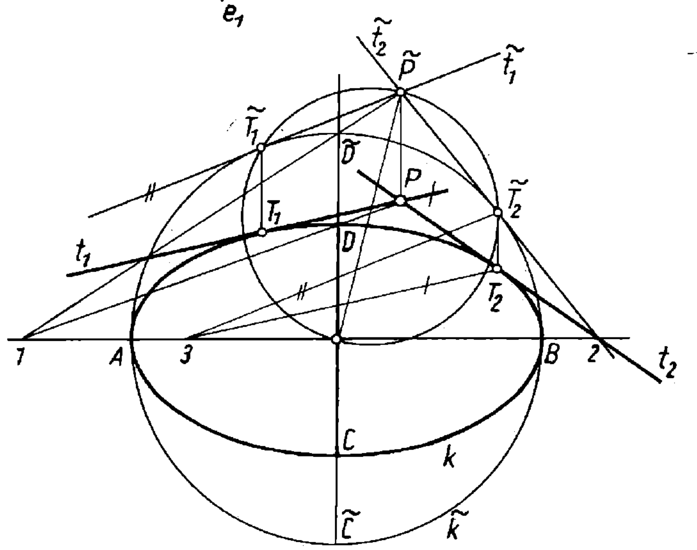


Bild 5



Anagramm von Chr. Huygens (*1629, †1695)

Anagramm von Huygens am Schluß seiner kleinen Schrift über die Entdeckung der ersten (hellsten) Saturntrabanten:
Betrifft die richtige Deutung des Saturnringes:
aaaaaaa ccccc d eeeee g h iiiiiii llll mm nnnnnnnnn oooo pp q rr s ttttt uuuuu
Richtige Anordnung der Buchstaben:
Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato
Das heißt auf deutsch: Er wird von einem dünnen, ebenen, nirgends (mit Saturn) zusammenhängenden, gegen die Ekliptik geneigten Ring umgürtet.

Aufgaben:

▲1▲ Einem Kreis, der in einer zweitprojizierenden Ebene liegt, soll ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben werden.
Was läßt sich über den Grundriß des gleichseitigen Dreiecks aussagen, wenn eine Dreieckseite a) parallel zu π_1, b) parallel zu π_2 liegt?

▲2▲ Einem Kreis, der in einer zweitprojizierenden Ebene liegt, soll ein Quadrat einbeschrieben werden.
Unter welchen Voraussetzungen ist der Grundriß des dem Kreis einbeschriebenen Quadrates
a) ein Rechteck,
b) ein Rhombus,
c) ein von Rechteck und Rhombus verschiedenes Parallelogramm?

Mathematik-olympiaden in der VR Polen

In der VR Polen werden seit 23 Jahren Mathematikolympiaden durchgeführt. Sie rangieren ihrem Alter nach hinter den ungarischen, rumänischen und den sowjetischen.

Als nach dem 2. Weltkrieg der Oberschulunterricht wieder aufgenommen werden konnte, standen wir vor großen Schwierigkeiten, besonders auf dem Gebiet der Mathematik: Während der ersten Jahre nach der Befreiung besaßen viele unserer Oberschullehrer keine abgeschlossene Hochschulausbildung. Das Niveau des Unterrichts war nicht ausreichend. Die von unserem Volksbildungsministerium ergriffenen Maßnahmen – es organisierte zahlreiche Weiterbildungsveranstaltungen – konnten nicht sofort auf den Unterricht wirken. Da beschloß man, den Mathematikunterricht durch eine direkte Aktion zu unterstützen: Man wandte sich an die Schüler selbst. So wurden die Olympiaden eingerichtet. Die *Polnische Mathematische Gesellschaft* erklärte sich bereit, sie zu organisieren. Das sind ihre Ziele:

- Das Interesse der Schüler für die Mathematik zu wecken,
- das Niveau ihrer Kenntnisse in diesem Fach zu erhöhen,
- besonders befähigte Schüler ausfindig zu machen und ihnen den Weg in die Hochschulausbildung zu ermöglichen.

Die Mathematikolympiaden wurden also nicht nur als ein Wettbewerb zwischen den Besten betrachtet, sondern vielmehr als ein Mittel dazu, eine größere Anzahl von Schülern für mathematische Probleme zu interessieren und sie zur persönlichen Beschäftigung mit der Mathematik anzuregen.

Die Olympiaden werden vom Zentralen Komitee in Warschau mit Unterstützung durch die Bezirkskomitees geleitet, die es in unseren acht Universitätsstädten gibt. Ihre Mitglieder sind Hochschullehrer oder Lehrer an Oberschulen.

Jährlich wird eine Olympiade in drei Stufen durchgeführt. Die 1. Stufe läuft vom 1. Oktober bis zum 15. Januar. Anfang Oktober, November und Dezember erhalten alle Schüler des Landes vom Zentralen Komitee den Text von je vier Aufgaben, dazu vier Vorbereitungsaufgaben (zur Einstimmung), die bis zum Ende des betreffenden Monats zu lösen sind. (Es werden nur Aufgaben für Schüler der Klassen 11 und 12 gestellt.)

Während der drei genannten Monate wird die Beschäftigung mit den gestellten Problemen, die völlig freiwillig ist, in keiner Weise kontrolliert. Die Teilnehmer haben die Möglichkeit, sich gegenseitig zu beraten oder sogar gemeinsam zu arbeiten. Der Lehrer soll nicht helfen, kann die Schüler jedoch auf mögliche Fehler aufmerksam machen.

Sobald die Frist für eine Aufgabengruppe abgelaufen ist, werden den Schulen die zugehörigen Lösungen geschickt. Nun tritt der Lehrer stärker in Aktion. Er diskutiert mit den Schülern über die Lösungen. Das Zentrale Komitee gibt jedes Jahr außerdem ein Heft mit ausführlichen Lösungen und Erklärungen aller in der Olympiade gestellten Aufgaben heraus. Darin werden auch im Zusammenhang mit den Aufgaben Fragen geklärt, die über den Schullehrplan hinausgehen.

Die 2. Stufe der Olympiade wird durch die Bezirkskomitees geleitet. Jedes Komitee prüft die Arbeiten der Schüler seines Bezirks und lädt dann alle diejenigen zum Bezirkswettbewerb ein, die zu der Mehrzahl der Aufgaben einwandfreie Lösungen geliefert haben. Diese Wettbewerbe finden im März gleichzeitig in den acht Städten statt, und zwar an zwei Tagen. An jedem Tag müssen drei Aufgaben innerhalb von fünf Stunden gelöst werden. Die Aufgaben, die für alle Bezirke gleich sind, werden vom Zentralen Komitee ausgewählt.

Die 3. Stufe der Olympiade findet im April in Warschau statt. Dazu werden diejenigen *Jungen Mathematiker* eingeladen, die bei den Bezirkswettbewerben am besten abgeschnitten haben. Die Zusammenstellung der Aufgaben entspricht der des Bezirksausscheides, der Schwierigkeitsgrad ist allerdings etwas höher. Diejenigen Teilnehmer, die gute Resultate erreichen, erhalten das Olympiade-Diplom. Es berechtigt sie, sich an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen oder an einer technischen Fakultät immatrikulieren zu lassen, ohne eine Aufnahmeprüfung ablegen zu müssen.

Viele Teilnehmer an Olympiaden haben sich entschieden, Mathematik zu studieren. Sie gehören zu den besten Studenten. Einige von ihnen haben inzwischen promoviert, viele sind Dozenten, Lehrer oder Assistenten an Universitäten oder wissenschaftlichen Instituten. Die Olympiaden haben augenfällig dazu beigetragen, den Nachwuchs unserer jungen Mathematiker zu stellen. Für die Organisatoren der Wettbewerbe ergibt sich jedes Jahr wieder die Frage nach einer guten Aufgabenauswahl. Einerseits sollen die Aufgaben Beziehungen zu den Stoffgebieten des Schullehrplans haben, andererseits müssen sie sich wesentlich von den im Unterricht üblichen Aufgaben unterscheiden. Denn seit Anfang an ist es die Leitidee der Olympiade gewesen, die Schüler für Probleme zu interessieren, die zwar im Rahmen der Grundanforderungen bleiben, aber doch ein gutes Maß mathematischer Phantasie und eine gründliche logische Analyse verlangen. Solche Probleme sollten, um ausreichend attraktiv zu sein, interessante Eigenschaften von Zahlen oder Figuren betreffen. Außerdem müssen sie sich in übersichtlicher Weise formulieren lassen. Der Schwierigkeitsgrad der einzelnen Aufgaben einer Stufe wird unterschiedlich gehalten, weil es uns einmal darum geht, die Schüler nicht durch zu hohe Anforderungen zu entmutigen und zum anderen doch das Leistungsvermögen zu prüfen. Im allgemeinen bereiten die Probleme aus der Geometrie die meisten Schwierigkeiten, während Aufgaben mit kombinatorischem Charakter leichter bewältigt werden.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß der schwächste Punkt in den Schülerarbeiten die Darstellung der Lösungen ist. Richtige Gedanken sind oftmals unzureichend dargelegt. Bisweilen muß man viel Mühe aufwenden, um den Gedankengang des Schülers herauszufinden. Andererseits aber zeigen sich die *Jungen Mathematiker* sehr einfallsreich, und recht oft legen sie originelle Lösungen vor, die sich weit von denen unterscheiden, die die Autoren der Aufgaben ins Auge gefaßt hatten.

S. Straszewicz

Aufgaben der XXIII. Mathematik-Olympiade der VR Polen
(Auswahl)

▲1▲ Es ist der Graph der durch den Ausdruck

$$y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

bestimmten Funktion zu zeichnen, wobei der Definitionsbereich dieser Funktion die Menge aller reellen Zahlen x ist, für die die in diesem Ausdruck auftretenden Wurzeln reell sind.

▲2▲ Es sei p eine Primzahl. Es sollen alle positiven rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$, wobei a und b einander teilerfremde natürliche Zahlen sind, ermittelt werden, so daß

$$\frac{a+p}{b+p}-\frac{a}{b}=\frac{1}{p^2} \text{ gilt.}$$

▲3▲ Es seien t eine reelle Zahl und α, β, γ die Größen der Winkel eines Dreiecks. Man beweise, daß dann stets die Ungleichung

$$\cos\alpha+t(\cos\beta+\cos\gamma)\leq 1+\frac{t^2}{2}$$

erfüllt ist.

▲4▲ Es seien ε eine Ebene und A und B zwei Punkte des Raums, die nicht in dieser Ebene liegen. Es soll die Menge aller Punkte P der Ebene ε ermittelt werden, die die folgende Eigenschaft haben:

Der Winkel, den die Gerade AP mit der Ebene ε bildet, ist gleich dem Winkel, den die Gerade BP mit der Ebene ε bildet.

▲5▲ Wieviel von Null verschiedene natürliche Zahlen, die kleiner als 10^n sind ($n=1, 2, 3, \ldots$), haben eine Darstellung im dekadischen Positionssystem, deren Grundziffern eine nicht fallende Folge bilden?
(Es soll also die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen z mit $0<z<10^n$ ermittelt werden, die eine Darstellung
$z=(a_{n-1}\ a_{n-2}\ \ldots\ a_1\ a_0)_{10}$ im dekadischen Positionssystem mit $a_{n-1} \leqq a_{n-2} \leqq \ldots \leqq a_1 \leqq a_0$ haben.)

▲6▲ Gegeben seien sechs Punkte im Raum, die nicht alle in einer Ebene liegen. Man beweise, daß es dann stets unter den durch je zwei dieser Punkte bestimmten Geraden eine Gerade gibt, die zu keiner der übrigen Geraden parallel ist.

▲7▲ Es sind alle Lösungen (x, y) der Gleichung

$$1+x+x^2+x^3+x^4=y^2$$

im Bereich der natürlichen Zahlen zu ermitteln.

▲8▲ Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 1$ die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$2\sin\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ Wurzeln}}.$$

Aus der VR Polen berichtet

Mathematikzentrum des RGW

top. Aus Warschau kommt die Meldung, daß ein internationales mathematisches Zentrum zur Weiterbildung wissenschaftlicher Kader aus den sozialistischen Ländern gegründet worden ist. Das Institut ist das derzeit einzige seiner Art in der Welt. Es ist zugleich die erste Einrichtung dieses Typs, die auf der Basis eines internationalen Abkommens entstand und von einem paritätisch zusammengesetzten internationalen Rat geleitet wird.
Der Direktor der jüngsten Forschungs- und Lehreinrichtung des RGW, der polnische Wissenschaftler Prof. Dr. *Olech*, erläuterte die Arbeitsweise dieses Zentrums, das 1973 die ersten Hörer aufnehmen wird. Einladungen werden sowohl an führende Experten als auch an junge Mathematiker der Bruderländer ergehen. Sie werden gemeinsam mit polnischen Wissenschaftlern forschen, ihre eigenen Probleme vortragen und mit allen gemeinsam erörtern sowie bestimmte eigene Vorlesungszyklen bieten. Die Fortbildung junger Kader wird im Prozeß breitester Forschungstätigkeit vor sich gehen. Bereits in diesem Jahr wird das Warschauer Mathematik-Zentrum ein Symposium mathematischer Methoden in der Ökonomie veranstalten. Ohne Zweifel wird das eine gute Gelegenheit sein, Erfahrungen für die künftige Forschungsarbeit des Zentrums zu sammeln.
„Die Vertiefung und Vervollkommnung der wirtschaftlichen und wissenschaftlich-technischen Zusammenarbeit und Entwicklung der sozialistischen ökonomischen Integration der Mitgliedsländer des RGW", so heißt es im Komplexprogramm, „sind ein von den kommunistischen und Arbeiterparteien und den Regierungen der Mitgliedsländer des RGW bewußt und planmäßig gestalteter Prozeß der internationalen sozialistischen Arbeitsteilung." Die Gründung des Mathematikzentrums in Warschau gehört zu diesem planmäßig gestalteten Prozeß.

Aus der polnischen Schulreform

Das gegenwärtige gesamte Bildungssystem in Polen umfaßt die allgemeinzugängliche achtklassige Grundschule und das vierjährige allgemeinbildende Lyzeum...
Zur Förderung der vielseitigen Interessen der Schüler dienen im reformierten Lyzeum (entspricht unseren Klassen 9 bis 12) die vier fakultativen Unterrichtsstunden wöchentlich in der vierten Klasse (entspricht unserer 12. Klasse), die der Jugend erlauben, ihre Kenntnisse in den sie interessierenden Wissensgebieten zu vertiefen und zu erweitern...
Der Fortschritt auf dem Gebiet der exakten Wissenschaften wie auch der technische Fortschritt machen es notwendig, die Anzahl der Kandidaten zum Hochschulstudium der mathematisch-physikalischen und technischen Disziplinen zu vergrößern. Zu diesem Zweck wurden in den allgemeinbildenden Lyzeen Klassen mit mathematisch-physikalischem Profil und entsprechend erweitertem Stundenplan für solche Fächer wie Mathematik und Physik organisiert.

Aus einem Interview mit dem Vizeminister für Volksbildung und Hochschulwesen der VR Polen

Wissen, Fortschritt, Modernität

Anläßlich der 25-Jahr-Feier Volkspolens haben wir eine eingehende Beurteilung der von der polnischen wissenschaftlichen Welt erzielten Ergebnisse in allen wissenschaftlichen Bereichen vorgenommen. Wir gingen dabei vom Gesichtspunkt aus, daß die praktische Rolle der Wissenschaft und ihre Wichtigkeit davon abhängt, was sie zur gesellschaftlichen Praxis beiträgt und inwieweit sie den gesellschaftlichen Auftrag erfüllt...
In der Nachkriegszeit, besonders in den ersten Jahren, haben wir trotz des äußerst schwierigen Starts (Zerstörung der wissenschaftlichen Werkstätten, riesige menschliche Verluste, durch den Krieg verursachte Unterbrechung der Forschungsarbeit) und der Notwendigkeit, alles von neuem aufzubauen, uns auf die Erkenntnisse und Leistungen der polnischen Gelehrten der Zwischenkriegszeit gestützt. Wir haben z. B. große Anstrengungen unternommen, um die hohe Position der polnischen Mathematik aufrechtzuerhalten. Die Leistungen der polnischen mathematischen Schule auf dem Gebiet der Topologie, Funktionsanalysis und Mathematischen Logik, Differentialgleichungen, Zahlentheorie und Anwendungen der Mathematik in vielen anderen Bereichen sind doch weltbekannt (Bekannteste Vertreter: *Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Kazimierz Kuratowski*, d. Red.)

Prof. Dr. Janusz Groszkowski, Präsident der Polnischen Akademie der Wissenschaften

Eine Aufgabe von Lektor Andrzej Makowski

Institut für Mathematik, Universität Warschau

▲912▲ Es sind alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n anzugeben, für die die Zahl n^4+4^n eine Primzahl ist.

Aus dem Beschluß des VI. Parteitages der Polnischen Vereinigten Arbeiterpartei zitiert

Der schöpferische Anteil der Jugend am sozialistischen Aufbauwerk hängt von ihrer Beherrschung der beruflichen Fähigkeiten, von dem Mitverantwortungsgefühl für das Heute und die Zukunft der Nation, von der effektiven Arbeit und der Verwirklichung der humanistischen Ideale des Sozialismus im alltäglichen Leben ab...
Aufgabe der Partei ist es, der Jugend die Richtungen der Aktivität aufzuzeigen, von denen vor allem die weitere Entwicklung des Landes sowie die Schritte abhängen, die zu einem dauerhaften Beitrag der jungen Generation zum Werk der Nation werden können.

Rückblick auf die XIII. IMO

Die teilnehmenden Mannschaften stellten Aufgaben für alpha

VR Bulgarien

Kann man die Zahl $A=13^{1971}$ als Summe von Dezimalzahlen darstellen, in denen insgesamt $\underbrace{11\ldots11}_{k}$ Einsen, $\underbrace{22\ldots22}_{k}$ Zweien, ... schließlich $\underbrace{99\ldots99}_{k}$ Neunen und beliebig viele Nullen vorkommen? k sei eine natürliche Zahl.

ČSSR

Gesucht ist die kleinste Primzahl x mit der Eigenschaft, daß x^3-5x^2 eine positive Quadratzahl ist.

DDR

Gesucht sind alle stetigen reellen Funktionen, die für alle $x \neq 0$ die Gleichung $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)^2}{x^2}$ erfüllen.

Frankreich

Man bestimme die kleinste Zahl n mit der Eigenschaft, daß für jede Primzahl p gilt:

$$p \mid n \text{ genau dann, wenn } p-1 \mid n$$

($a \mid b$ bedeutet, daß a ein Teiler von b ist).

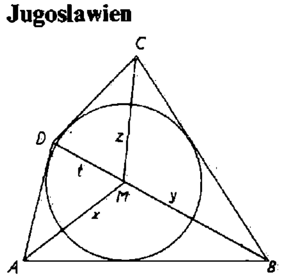
Großbritannien

Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene Zahlen und m eine natürliche Zahl. Weiter sei

$$S=\frac{a_0^m}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_n)}+\frac{a_1^m}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)}+\ldots+\frac{a_n^m}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

Man beweise, daß für $m<n$ $S=0$ und für $m=n$ $S=1$ gilt.

SFR Jugoslawien



In einem Tangentenviereck mit den Seiten a, b, c, d hat der Mittelpunkt des Inkreises von den Eckpunkten die Abstände x, y, z, t (s. Abb.). Man beweise die Gleichung $(xz+yt)^2=abcd$ und leite daraus die Ungleichung $4xyzt \leq abcd$ her.

Republik Kuba

Es ist zu beweisen, daß die Zahl

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$$

keine Quadratzahl ist.

Mongolische Volksrepublik

An einem Schachturnier nahmen zehn Spieler teil; jeder spielte einmal gegen jeden anderen. Keine zwei Spieler erzielten insgesamt die gleiche Punktzahl. Die Spieler auf den ersten beiden Plätzen haben kein einziges Mal verloren. Die Summe ihrer Punktzahlen ist um 10 größer als die Punktzahl des Spielers auf dem dritten Platz. Der Spieler auf dem vierten Platz erzielte ebensoviele Punkte wie die letzten vier Spieler zusammen. Welche Punktzahlen erzielten die Spieler, die die Plätze 1 bis 6 einnahmen?

Niederlande

Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$2^{2^n}+2^{n^2}=2^5.$$

Es ist zu beweisen, daß die Gleichung mindestens eine nicht ganzzahlige Lösung besitzt.

Österreich

Das Gleichungssystem

$$x^2+xy+y^2=a^2$$
$$x^2+xz+z^2=b^2$$
$$y^2+yz+z^2=c^2$$

ist zu lösen.

Hinweis: Zuerst betrachte man $p=x+y+z$ als gegeben und berechne damit x, y, z. Eine Gleichung zur Bestimmung von p erhält man dann durch Einsetzen.

VR Polen

Man beweise, daß 2^n-1 für kein $n>1$ durch n teilbar ist.

SR Rumänien

In der Ebene liegen vier Punkte so, daß der Abstand von je zwei dieser Punkte mindestens $\sqrt{2}$ und höchstens 2 ist. Man beweise, daß die vier Punkte auf einem Kreis vom Radius 1 liegen.

Schweden

Man löse das Gleichungssystem

$a^2+ay+x=0$, $b^2+by+x=0$

(a, b gegeben, $a \neq b$),

ohne eine der üblichen Eliminationsmethoden zu benutzen.

Sowjetunion

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt 0. Auf eine variable Gerade l durch 0 werden von B und C die Lote BB_1 und CC_1 gefällt (B_1 und C_1 liegen auf l). Das Lot von C_1 auf AB möge das Lot von B_1 auf AC in M schneiden. Man beweise, daß der geometrische Ort aller Punkte M auf einem Kreis liegt.

Ungarische VR

Unter dem harmonischen Mittel der positiven Zahlen $a_1, \ldots, a_i$ versteht man die Zahl

$$H_i=\frac{i}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_i}}.$$

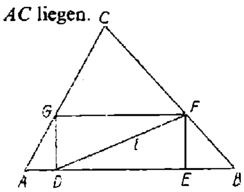
Es ist zu beweisen, daß

$H_1+H_2+\ldots+H_n<2(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ gilt.

Mitglieder der Mannschaft der DDR, die an der XIII. IMO teilnahmen, stellten Aufgaben für die *alpha*-Leser:

- **Wolfgang Burmeister:** Es sei z eine Lösung der Gleichung
$$x^3-3x+1=0.$$
Man beweise, daß $\frac{1}{1-z}$ eine Lösung derselben Gleichung ist.

- **Harald Englisch:** In ein Dreieck ABC ist ein Rechteck $DEFG$ mit vorgegebener Diagonallänge l einzubeschreiben, so daß die Seite DE auf AB, die Punkte F und G auf BC bzw. AC liegen.



Hinweis: Löse die Aufgabe zuerst für ein rechtwinkliges Dreieck ($\alpha=90°$).

- **Arnulf Möbius:** Klaus und Bernd teilen sich ein dreieckiges Stück Kuchen. Klaus gibt auf dem Kuchen einen Punkt an, durch den Bernd gerade schneiden muß. Bernd nimmt sich dann das größere Stück. Welchen Punkt muß Klaus wählen, um möglichst viel vom Kuchen zu bekommen?

- **Thomas Jentsch:** In einem Koordinatensystem sind die Parabel $y=ax^2$ und die Gerade $y=a (a>0)$ gezeichnet. Auf dem Parabelbogen, im Punkt (0; 0), stellen wir uns einen „Hasen" H, auf der Geraden, im Punkt (0; a), einen (sehr gefräßigen) „Fuchs" F vor. Für welche a kann sich H auf der Parabel bewegen, ohne dabei auch nur einen Moment dem Fuchs F näherzukommen, wenn dieser in (0; a) ruht?

- **Rainer Siegmund-Schultze** (IMO-Kandidat 1971): Man zeige, daß man die Zahl 2^n (n sei eine natürliche Zahl) eindeutig als Summe zweier Quadratzahlen darstellen kann!

- **Gerhard Spens:** Man löse die Gleichung
$$\log_2 x^4+\log_x 2^5=9.$$

- **Reinhard Wobst:** Für jede ganze Zahl x sei der Funktionswert
$$f(x)=x^2+px+q$$
(p, q gegebene ganze Zahlen)
eine Quadratzahl. Man beweise, daß man dann eine Zahl a so finden kann, daß für alle x $f(x)=(x+a)^2$ gilt.

Die Arithmetik der Binomialkoeffizienten

Teil 2

§ 2 Der Rest bei der Division der Binomialkoeffizienten durch Primzahlen

In diesem (und auch im nächsten) Paragraphen werden wir oft den Satz gebrauchen „die Zahlen a und b haben gleichen Rest bei der Division durch p". Gewöhnlich drückt man diesen Sachverhalt gekürzt so aus: $a \equiv b \pmod p$, was also bedeutet, daß sich $a \cdot b$ durch p teilen läßt. So ist z. B. $4 \equiv 1 \pmod 3$, $99999 \equiv 22222 \pmod 7$ usw. Wir erinnern euch an zwei offensichtliche Eigenschaften des Symbols „$\equiv$":

1. Wenn $a \equiv b \pmod p$ und k ganzzahlig, so ist $ka \equiv kb \pmod p$.
2. Wenn $a \equiv b \pmod p$ und $b \equiv c \pmod p$, so ist $a \equiv c \pmod p$. Es sei auch noch daran erinnert, daß sich jede natürliche Zahl a durch eine natürliche Zahl p mit Rest dividieren läßt, d. h. a kann man eindeutig in der Form $a = bp + c$ schreiben, wobei b, c ganze Zahlen mit $0 \leqq c < p$ sind.

Das Hauptziel dieses Paragraphen ist der Beweis folgender Aussage.

Satz 4 Sei p Primzahl, m und n natürliche Zahlen. Seien ferner k und l die Quotienten von der Division der Zahlen m und n durch p, und s und t – die Reste (d. h. $m = kp + s$, $n = lp + t$, wobei k, l, s, t – ganzzahlig und $o \leqq s < p$, $o \leqq t < p$). Dann gilt $C_n^m \equiv C_l^k \cdot C_t^s \pmod p$.

Wie wir später sehen werden, gestattet dieser Satz ohne große Berechnungen den Rest von der Division der Binomialkoeffizienten durch Primzahlen zu finden. Dem Beweis dieses Satzes schicken wir drei Hilfssätze voran.

Hilfssatz 1 Für beliebige Zahlen a, b gilt $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1})$.

Der Beweis ist offensichtlich: wenn wir die Multiplikation im rechten Teil ausführen und die möglichen Kürzungen vornehmen, erhalten wir genau den Ausdruck, der im linken Teil steht.

Hilfssatz 2 Wenn p eine Primzahl ist und r eine natürliche Zahl mit $o < r < p$, so läßt sich C_p^r durch p dividieren.

Dies folgt aus Satz 3: da p Primzahl und $r < p$, so sind p und r teilerfremd.

Hilfssatz 3 Das Polynom $(1+x)^p - (1+x^p)$ läßt sich durch p teilen (d. h. jeder Summand dieses Polynoms ist durch p teilbar).

Beweis: Wir haben
$(1+x)^p - (1+x^p) = 1 + C_p^1 x^2 + \ldots + C_p^{p-1} x^{p-1}$
$+ x^p - 1 - x^p = C_p^1 x + \ldots + C_p^{p-1} x^{p-1}$,
und dieser letzte Ausdruck läßt sich nach Hilfssatz 2 durch p teilen.

Gehen wir jetzt zum Beweis des Satzes 4 über. Wir betrachten das Polynom $P(x) = (1+x)^{lp+t} - (1+x)^t (1+x^p)^l$. Auf Grund des Hilfssatzes 1 können wir schreiben
$P(x) = (1+x)^t \cdot [(1+x)^{pl} - (1+x^p)^l] =$
$= (1+x)^t [(1+x)^p - (1+x^p)] [(1+x)^{p(l-1)}$
$+ \ldots + (1+x^p)^{l-1}]$.
(Wir setzen in ihm $a = (1+x)^p$, $b = 1 + x^p$ und $k = l$.)

Der zweite Multiplikator läßt sich gemäß Hilfssatz 3 durch p teilen, also auch das ganze Produkt.

Wir bestimmen jetzt in $P(x)$ den Koeffizienten bei x^{kp+1}. In $(1+x)^{lp+t}$ geht das Glied x^{kp+s}, wie wir schon wissen, mit dem Koeffizienten C_{lp+t}^{kp+s} ein.

Das Produkt $(1+x)^t \cdot (1+x^p)^l$ aber ergibt
$(1 + C_t^1 x + C_t^2 x^2 + \ldots + x^t)(1 + C_l^1 x^p + C_l^2 x^{2p}$
$+ \ldots + x^{lp}) = 1 + C_t^1 x + C_t^2 x^2 + \ldots + x^t + C_l^1 x^p$
$+ C_l^1 C_t^1 x^{p+1} + C_l^1 C_t^2 x^{p+2} + \ldots + C_l^1 x^{p+t}$
$+ C_l^2 x^{2p} + C_l^2 C_t^1 x^{2p+1} + C_l^2 C_t^2 x^{2p+2} + \ldots$
$+ C_l^2 x^{2p+t}$
$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$+ x^{lp} + C_t^1 x^{lp+1} + C_t^2 x^{lp+2} + \ldots + x^{lp+t}$.

Da $t < p$, so tritt in dieser Summe jede Potenz von x höchstens einmal auf. Der Koeffizient bei x^{kp+s} ist, wie man sieht, gleich $C_l^k C_t^s$ (insbesondere ist er gleich Null, wenn $s > t$).

Somit ist der Koeffizient bei x^{kp+s} in $P(x)$ gleich $C_{lp+t}^{kp+s} - C_l^k C_t^s$. Da sich $P(x)$ durch p teilen läßt, ist auch $C_{lp+t}^{kp+s} - C_l^k C_t^s$ durch p teilbar und Satz 4 ist bewiesen.

Wir wollen zum Schluß des Beweises noch folgendes bemerken: obwohl nur im Hilfssatz 2 die Bedingung benutzt wird, daß p Primzahl ist, ist die Behauptung des Satzes 4 für beliebige ganze Zahlen nicht erfüllt.

Wir wollen jetzt zeigen, wie man mit Hilfe des Satzes 4 den Rest von der Division der Binomialkoeffizienten durch eine Primzahl finden kann. Demonstrieren wir das zum Beispiel an der Division des Koeffizienten C_{119}^{33} durch 5 vor (den Rest könnten wir natürlich auch finden, indem wir C_{119}^{33} mit Hilfe der Formel (2) berechnen, aber das ergäbe eine lange Rechnung – immerhin ist C_{119}^{33} eine 24stellige Zahl!)

Die Zahlen 33 und 119 durch 5 teilend, erhalten wir $33 = 6 \cdot 5 + 3$ und $119 = 23 \cdot 5 + 4$. Nach Satz 4 ist $C_{119}^{33} \equiv C_{23}^6 \cdot C_4^3 \pmod 5$. Genauso untersuchen wir die Zahl C_{23}^6: da $6 = 1 \cdot 5 + 1$ und $23 = 4 \cdot 5 + 3$, so ist $C_{23}^6 \equiv C_4^1 \cdot C_3^1 \pmod 5$. Infolge der Eigenschaft 1) des Symbols „$\equiv$" ist
$C_{23}^6 C_4^3 \equiv C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^3 \pmod 5$, und infolge der Eigenschaft 2) haben wir $C_{119}^{33} \equiv C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^3 \pmod 5$.

Somit hat C_{119}^{33} den gleichen Rest bei der Division durch 5 wie $C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$, *d. h.* 3.

Ähnlich findet man den Rest von der Division durch andere Primzahlen; z. B.

$119 = 59 \cdot 2 + 1, \quad 33 = 16 \cdot 2 + 1$
$C_{119}^{33} \equiv C_{59}^{16} C_1^1 = C_{59}^{16} \pmod 2;$
$59 = 29 \cdot 2 + 1, \quad 16 = 8 \cdot 2 + 0,$
$C_{59}^{16} \equiv C_{29}^8 C_1^0 = C_{29}^8 \pmod 2;$
$29 = 14 \cdot 2 + 1, \quad 8 = 4 \cdot 2 + 0,$
$C_{29}^8 \equiv C_{14}^4 \cdot C_1^0 = C_{14}^4 \pmod 2;$
$7 = 3 \cdot 2 + 1, \quad 2 = 1 \cdot 2 + 0,$
$C_7^2 \equiv C_3^1 C_1^0 = C_3^1 = 3 \pmod 2.$

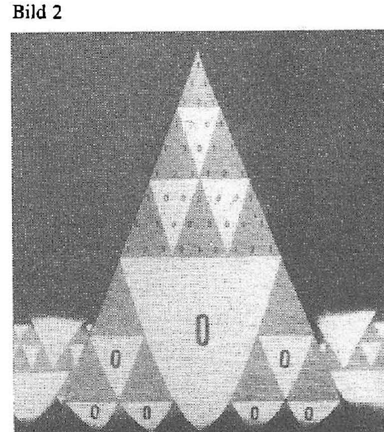
Also hat C_{119}^{33} den gleichen Rest bei der Division durch 2 wie 3, d. h. 1, und C_{119}^{33} ist eine ungerade Zahl.

Ein anderes Beispiel:
$119 = 39 \cdot 3 + 2, \quad 33 = 11 \cdot 3 + 0,$
$C_{119}^{33} \equiv C_{39}^{11} \cdot C_2^0 = C_{39}^{11} \pmod 3;$
$39 = 13 \cdot 3 + 0, \quad 11 = 3 \cdot 3 + 2,$
$C_{39}^{11} \equiv C_{13}^3 \cdot C_0^2 = 0 \pmod 3).$

Wir haben hier benutzt, daß $C_0^2 = 0$ ist. Also ist $C_{119}^{33} \equiv 0 \pmod 3$, d. h. C_{119}^{33} läßt sich durch 3 teilen.

Wir wollen hier bemerken, daß bei der Anwendung des Satzes 4 auf C_n^m mit $n \geqq m$, wenn wir $m = kp + s$ und $n = lp + t$ schreiben, natürlich $l \geqq k$ haben; allerdings können wir nicht voraussehen, welche der beiden Zahlen s, t die größere ist. Wenn gilt $s > t$, so ist $C_n^m \equiv C_l^k C_t^s = 0 \pmod p$ laut Satz 4, d. h. C_n^m ist durch p teilbar. Wie wir sahen, muß man zur Bestimmung des Restes bei der Division

Bild 2



von C_n^m durch p Satz 4 mitunter mehrmals hintereinander anwenden, und jedesmal kann eine der oben beschriebenen ähnliche Situation auftreten, wobei das auch jedesmal bedeutet, daß C_n^m durch p teilbar ist. Auf diesem Wege erhielten wir, daß C_{119}^{33} durch 3 teilbar ist.

Wir sehen, daß je größer n desto wahrscheinlicher C_n^m durch p teilbar ist. Man kann leicht die folgende genauere Aussage beweisen: Zahlen C_n^m mit $0 \leq n \leq p^r$, $0 \leq m \leq n$ gibt es $\frac{p^r(p^r+2)}{2}$; von ihnen sind genau $\frac{p^r(p+1)^r}{2^r}$ nicht durch p teilbar (hier ist p – Primzahl, r – eine natürliche Zahl; der Beweis stützt sich nur auf Satz 3, wir überlassen ihn dem Leser).

Wir wollen unterstreichen, daß für große r die Zahl $\frac{p^r(p+1)^r}{2^r}$ um vieles kleiner als $\frac{p^r(p^r+1)}{2}$ ist. So lassen sich z. B. 26,2 % der Zahlen C_n^m mit $0 \leq n \leq 3^5$, $0 \leq m \leq n$ nicht durch 3 teilen, bei $0 \leq n \leq 3^{10}$ schon nur noch etwa 3,6 % und bei $0 \leq n \leq 3^{15}$ nur 0,45 %.

Zum Schluß noch einige Worte über eine recht anschauliche Interpretation des Satzes 4, die man erhält, wenn man das „Pascalsche Dreieck bezüglich mod p“ betrachtet. So bezeichnet man das aus dem Pascalschen Dreieck hervorgehende Dreieck, indem man in jenem jede Zahl durch seinen Rest bei der Division durch p ersetzt. Wir werden bezüglich dieses Dreiecks keinerlei Sätze beweisen, schlagen euch aber vor, die Zeichnungen (Bild 1, Bild 2) zu betrachten, auf denen die Pascalschen Dreiecke bezüglich mod 2 und mod 3 abgebildet sind. Bild 1 siehe Heft 2/72, Seite 25, Bild 2 siehe vorige Seite unten. Macht euch bitte mal Gedanken über das Aussehen dieser Dreiecke in dem Teil, der auf den Zeichnungen schon nicht mehr zu sehen ist. Bemüht euch, Satz 4 so zu formulieren, daß es ein Satz über den Aufbau des Pascalschen Dreiecks bezüglich mod p wird.

§ 3 Einiges über die Reste bei der Division der Binomialkoeffizienten durch Potenzen von Primzahlen

Wir wollen hier nicht eine in irgendeiner Form allgemeine Frage nach den Resten bei der Division der Binomialkoeffizienten durch zusammengesetzte Zahlen stellen, sondern nur von einer merkwürdigen noch nicht völlig geklärten Erscheinung erzählen. Wir beginnen mit einigen Berechnungen. Mit Hilfe der Formel (2) für die Binomialkoeffizienten erhalten wir

$C_2^1 = 2$, $C_4^2 = 6$, $C_8^4 = 70$, $C_{16}^8 = 12\,870$, $C_{32}^{16} = 601\,080\,390$.

(Ihr alle wißt natürlich, daß 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... aufeinanderfolgende Potenzen von 2 sind). Die erhaltenen Zahlen selber heben sich durch nichts besonders hervor, ihre Differenzen offenbaren allerdings überraschende Eigenschaften. Werfen wir einen Blick auf diese Differenzen:

$6-2=4=2^2$, $70-6=64=2^6$, $12\,870-70 = 12\,800 = 9^9 \cdot 25$, $601\,080\,390 - 12\,870 = 601\,067\,520 = 2^{12} \cdot 146\,745$.

Wir sehen, daß sich diese Differenzen durch recht hohe Potenzen von 2 dividieren lassen, und zwar durch so hohe, daß es sich hier kaum um eine zufällige Erscheinung handeln wird.

Satz 5 Für $n>1$ läßt sich $\alpha_n = C_{2^n+1}^{2^n} - C_{2^n}^{2^{n-1}}$ durch 2^{2n+2} teilen.

Bemerkungen:

1. Die Voraussetzung $n>1$ ist notwendig, da $\alpha_1 = 4$ ist und sich nicht durch $2^{2\cdot 1+2} = 2^4 = 16$ teilen läßt.
2. Es könnte sich durchaus erweisen, daß α_n für $n>1$ sogar durch 2^{3n} teilbar ist: das ist der Fall bei $n=2, 3, 4$. Aber beweisen konnte das bis heute noch niemand.

Beweis: Wir beginnen mit der allgemeinen Bemerkung, daß sich $C_{2^n}^r$ für ungerades r durch 2^n teilen läßt. Tatsächlich, da r ungerade und 2^n außer 2 keine Primteiler hat, so sind r und 2^n teilerfremd und unsere Behauptung folgt aus Satz 3. Wir setzten jetzt $P(x) = (1+x)^{2^{n+1}} - (1-x^2)^{2^n}$.

Das Polynom $P(x)$ enthält x^{2^n} mit dem Koeffizienten

$C_{2^n+1}^{2^n} - C_{2^n}^{2^{n-1}} = \alpha_n$ (Hier benutzen wir, daß $n>1$ ist; beim Erheben von $(1-x^2) = (1+(-x^2))$ in die Potenz 2^n erhalten wir nicht x^{2^n} mit dem Koeffizienten $C_{2^n}^{2^{n-1}}$, sondern $(-x^2)^{2^{n-1}} = (-1)^{2^{n-1}} x^{2^n}$, und $(-1)^{2^{n-1}}$ ergibt genau 1 bei $n>1$ und -1 bei $n=1$).

Wir können aber auch schreiben

$$P(x) = (1+x)^{2^{n-1}} - (1+x)^{2^n}(1-x)^{2^n}$$
$$= (1+x)^{2^n}\left[(1+x)^{2^n} - (1-x)^{2^n}\right].$$

Dabei ist der Ausdruck in eckigen Klammern

$$(1+x)^{2^n} - (1-x)^{2^n} = (1+x)^{2^n} - (1+(-x))^{2^n}$$
$$= 1 + C_{2^n}^1 x + C_{2^n}^2 x^2 + C_{2^n}^3 x^3 + \ldots -$$
$$- x^{2^n} - 1 - C_{2^n}^1(-x) - C_{2^n}^2(-x)^2 -$$
$$- C_{2^n}^3(-x)^3 - \ldots - (-x)^{2^n} =$$

(da $(-x)^k$ gleich x^k bei geraden k und $-x^k$ bei ungeraden k ist)

$$= 2(C_{2^n}^1 x + C_{2^n}^3 x^3 + C_{2^n}^5 x^5 + \ldots +$$
$$+ C_{2^n}^{2^n-1} x^{2^n-1}).$$

Wir weisen noch einmal darauf hin, daß in dieses Polynom x nur mit ungeraden Potenzen eingeht.

Wir möchten wissen, mit was für einen Koeffizienten x in das Polynom $P(x)$ eingeht, d. h. in das Produkt

$$(1+x)^{2^n}\left[(1+x)^{2^n} - (1-x)^{2^n}\right]$$
$$= 2(1 + C_{2^n}^1 x + C_{2^n}^2 x^2 + C_{2^n}^3 x^3 + \ldots + x^{2^n})$$
$$+ (C_{2^n}^1 x + C_{2^n}^3 x^3 + C_{2^n}^5 x^5 + \ldots +$$
$$+ C_{2^n}^{2^n-1} x^{2^n-1}).$$

Hieraus erhält man x^{2^n} offenbar als Produkt von x mit x^{2^n-1}, x^2 mit x^{2^n-2}, x^3 mit x^{2^n-3} usw., wobei der erste Faktor aus der ersten und der zweite Faktor aus der zweiten Summe ist. Also ist der Koeffizient bei x^{2^n} in $P(x)$, der, wie wir bereits wissen, gleich α_n ist, auch gleich

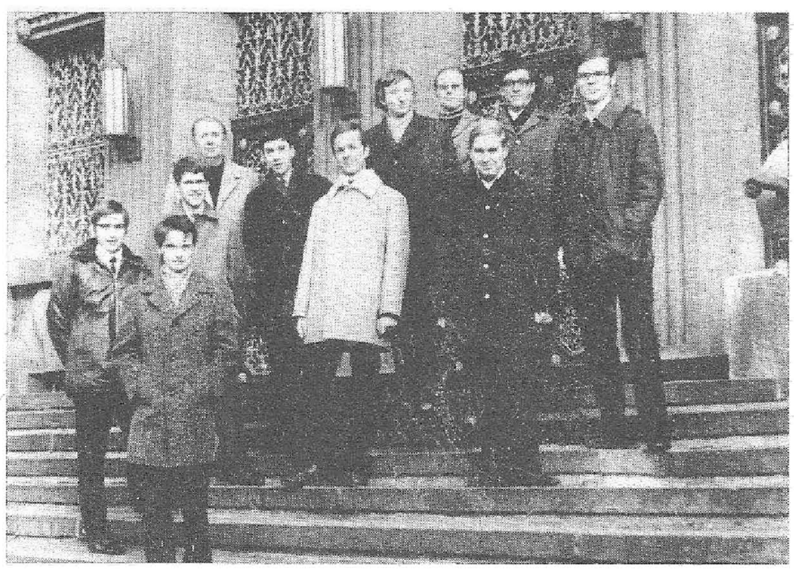
$2(C_{2^n}^1 C_{2^n}^{2^n-1} + C_{2^n}^3 C_{2^n}^{2^n-3} + \ldots + C_{2^n}^{2^n-1} C_{2^n}^1)$.

Wie wir wissen, ist jede der Zahlen $C_{2^n}^1$, $C_{2^n}^2$, ..., $C_{2^n}^{2^n-1}$ durch 2^n teilbar. Also ist jeder Summand in dieser Klammer durch $2^n \cdot 2^n = 2^{2n}$ teilbar. Außerdem steht eine 2 vor der Klammer und jeder Summand ist zweimal in der Klammer enthalten. Hieraus folgt schließlich, daß α_n durch 2^{2n+2} teilbar ist und unsere Behauptung ist bewiesen.

Wir hoffen, daß es dem Leser von *alpha* gelingt, in diese schwierige Frage der Arithmetik der Binomialkoeffizienten etwas Licht zu bringen.

D. B. Fuchs (aus Quant 6/70)

Im Dezember 1971 trafen sich die Mitglieder der DDR-Mannschaft (und Kandidaten) der XIII. IMO in Leipzig zu einem Erfahrungsaustausch. *Unser Foto:* Die FDJler und ihre Gäste nach der Besichtigung der Deutschen Bücherei.



Welche, wie viele Möglichkeiten gibt es?

Teil 3

Wir wiederholen die Aufgabe 4 (aus Heft 6/71):

Aufgabe 4 Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Preise an drei Schüler zu verteilen?

(1) Bei den Preisen kann es sich z. B. um Bücher mit verschiedenen Titeln handeln. Die Preise sind also *unterscheidbar*.

(2) Bei den Preisen kann es sich z. B. auch um wertgleiche Geldprämien handeln. Die Preise sind dann *nicht unterscheidbar*.

(a) Ein Schüler kann *mehrere Preise* erwerben, wie etwa bei einem Sportwettkampf. Er kann z. B. im 60-m-Lauf und im Weitsprung Sieger sein.

(b) Ein Schüler kann *höchstens einen Preis* erwerben, wie etwa bei einer Prüfung für eine besondere Leistung. Diese einzelnen Fälle lassen sich wie folgt verbinden:

(1a), (1b), (2a), (2b).

Wir wollen jetzt Aufgabe 4 allgemein formulieren und unter den genannten Bedingungen ((1a), (1b), (2a), (2b)) lösen.

Aufgabe 8 Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, m Preise (unter den in Aufgabe 4 genannten Bedingungen) an n Schüler zu verteilen?

Versucht, die folgenden vier Übersichten euch weitestmöglich selbständig zu erarbeiten! Wir werden im Anschluß an die letzte Übersicht noch einige Bemerkungen hierzu bringen, die ihr aber auch schon vorher mit lesen könnt.

Fall (1a) Die Preise seien unterscheidbar; ein Schüler kann mehrere Preise bekommen.

Pr.	Sch.	Mög.	verm. Ges.
1	1	1	1^1
1	2	2	2^1
1	3	3	3^1
2	1	1	1^2
2	2	4	2^2
2	3	9	3^2
3	1	1	1^3
3	2	8	2^3
3	3	27	3^3
m	n		n^m

Pr. ≙ Anzahl der Preise
Sch. ≙ Anzahl der Schüler
Mög. ≙ Anzahl der Möglichkeiten
verm. Ges ≙ vermutete Gesetzmäßigkeit

Es gibt n^m Möglichkeiten.

Fall (1b) Die Preise seien unterscheidbar; ein Schüler kann höchstens einen Preis bekommen. Ihr werdet bemerken, daß hier $m \leqq n$ sein muß.

Pr.	Sch.	Mög.	verm. Ges.
1	1	1	$1 = \binom{1}{1} \cdot 1!$
1	2	2	$2 = \binom{2}{1} \cdot 1!$
1	3	3	$3 = \binom{3}{1} \cdot 1!$
2	2	2	$2 \cdot 1 = \binom{2}{2} \cdot 2!$
2	3	6	$3 \cdot 2 = \binom{3}{2} \cdot 2!$
2	4	12	$4 \cdot 3 = \binom{4}{2} \cdot 2!$
3	3	6	$3 \cdot 2 \cdot 1 = \binom{3}{3} \cdot 3!$
3	4	24	$4 \cdot 3 \cdot 2 = \binom{4}{3} \cdot 3!$
3	5	60	$5 \cdot 4 \cdot 3 = \binom{5}{3} \cdot 3!$
4	4	24	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \binom{4}{4} \cdot 4!$
4	5	120	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \binom{5}{4} \cdot 4!$
m	n		$\binom{n}{m} \cdot m!$

Es gibt $\binom{n}{m} \cdot m!$ Möglichkeiten.

Fall (2a) Die Preise seien nicht unterscheidbar; ein Schüler kann mehrere Preise bekommen.

Pr.	Sch.	Mög.	verm. Ges.
1	1	1	$\binom{1}{1} = \binom{1+1-1}{1}$
1	2	2	$\binom{2}{1} = \binom{2+1-1}{1}$
1	3	3	$\binom{3}{1} = \binom{3+1-1}{1}$
2	1	1	$\binom{2}{2} = \binom{1+2-1}{2}$
2	2	3	$\binom{3}{2} = \binom{2+2-1}{2}$
2	3	6	$\binom{4}{2} = \binom{3+2-1}{2}$
3	1	1	$\binom{3}{3} = \binom{1+3-1}{3}$
3	2	4	$\binom{4}{3} = \binom{2+3-1}{3}$
3	3	10	$\binom{5}{3} = \binom{3+3-1}{3}$
m	n		$\binom{n+m-1}{m}$

Es gibt $\binom{n+m-1}{m}$ Möglichkeiten.

Fall (2b) Die Preise seien nicht unterscheidbar; ein Schüler kann höchstens einen Preis bekommen. Hier gilt wieder einschränkend $m \leqq n$.

Pr.	Sch.	Mög.	verm. Ges.
1	1	1	$\binom{1}{1}$
1	2	2	$\binom{2}{1}$
1	3	3	$\binom{3}{1}$
2	2	1	$\binom{2}{2}$
2	3	3	$\binom{3}{2}$
2	4	6	$\binom{4}{2}$
3	3	1	$\binom{3}{3}$
3	4	4	$\binom{4}{3}$
3	5	10	$\binom{5}{3}$
m	n		$\binom{n}{m}$

Es gibt $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten.

Wenn ihr diese vier Übersichten miteinander vergleicht, so könnt ihr für die Lösung weiterer Aufgaben folgendes lernen:

1. Die ersten drei Zeilen stimmen jeweils überein (bis auf Spalte 4). Sie haben also nur geringen Wert. Wir können deshalb den Fall, daß die eine Menge nur ein Element enthält, künftig weglassen.
2. Wir beschränken uns zunächst auf leicht unterscheidbare Fälle ($m=2$, $m=3$) und brechen jeweils nach drei oder vier Zeilen ab, weil dann in Spalte 3 das Bildungsgesetz der betreffenden Folge sichtbar wird. Im Fall (1b) kann man die beiden Zeilen für $m=4$ als „Kontrollzeilen" auffassen.
3. Die in Aufgabe 4 in den Fällen (1b) und (2a) jeweils erhaltenen 6 Möglichkeiten beruhen auf unterschiedlichen Gesetzmäßigkeiten. Man muß sich also davor hüten, vorschnell zu verallgemeinern.
4. Nachdem jeweils die Spalten 1 bis 3 ausgefüllt sind, ist es zweckmäßig, das Aus-

füllen von Spalte 4 mit den Fällen $m=2$ oder auch $m=3$ zu beginnen.

5. Wir haben vereinbart, m und n (oder auch andere kleine Buchstaben) hier als Variable für natürliche Zahlen zu betrachten. Gewisse Einschränkungen, wie $m \leqq n$, müssen dann ausdrücklich noch genannt werden.

Das Stoffgebiet, in das euch hier ein Einblick vermittelt wurde, heißt *Kombinatorik* und gewinnt jetzt im Zusammenhang mit der wissenschaftlich-technischen Revolution immer mehr an Bedeutung. Wer Freude an der Kombinatorik gefunden hat, kann noch einige weitere Aufgaben bearbeiten.

Aufgaben

Aufgabe 9 Wie viele Tipmöglichkeiten gibt es beim VEB Zahlenlotto (5 von 90 Ziffern sind anzukreuzen)?

Sind bei einem solchen Problem insbesondere 2 Elemente auszuwählen, so kann man das Ergebnis auch als Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer bestimmten Zahl auffassen. Überlegt euch das anhand der folgenden drei Aufgaben!

Aufgabe 10 Wie viele Handschläge werden gewechselt, wenn von 5 Freunden je zwei einander ein einziges Mal die Hand geben? Ihr könnt euch die Lösung so überlegen: Trifft beim morgendlichen Schulweg der Schüler A seinen Freund B, so geben sich beide die Hand. Treffen A und B ihren Freund C, so gibt er A und B die Hand; der hinzukommende Schüler D gibt dann A, B und C die Hand usw.

Aufgabe 11 Wie oft klingen die Gläser, wenn bei einer Tischrunde von 8 Personen je zwei ein einziges Mal miteinander anstoßen?

Aufgabe 12 Wie viele Verbindungsgeraden sind zwischen 6 Punkten einer Ebene höchstens möglich, wenn keine drei Punkte auf einer Geraden liegen?

Welche Lösung ist zu erwarten, wenn allgemein aus n Elementen 2 Elemente ausgewählt werden sollen, so wie das etwa bei den Aufgaben 10 bis 12 der Fall ist?

Aufgabe 13 Auf wie viele Arten kann man aus 7 Schülern zunächst 2 Schüler und aus den verbleibenden 5 Schülern 3 Schüler auswählen?

Aufgabe 3 können wir wie folgt abändern (siehe Heft 6/71):

Aufgabe 14 Von 15 Jungen und 10 Mädchen einer Klasse soll eine Delegation aus 3 Jungen und 2 Mädchen gebildet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?

Aufgabe 15 Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, beim Kegelspiel insgesamt 0, 1, 2, 3, ..., 9 Kegel auf die vorgesehenen 9 Felder zu stellen?

Es genügen sicherlich folgende Lösungshinweise:

Zwei Mengen: Kegel, Felder usw. Anzahl verringern, etwa 0, 1, 2, 3 Kegel auf 3 Felder.

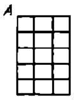
Besetzt man 3 Felder mit 0 Kegeln, so bleiben die Felder frei; es ergibt sich „das leere Kegelbild", also eine einzige Möglichkeit usw.

Aufgabe 15 läßt sich aber auch anders lösen, wenn man sich folgendes überlegt:

Jedes Feld kann entweder (von einem Kegel) besetzt oder nicht besetzt sein. Wir können also die Menge der Felder und eine Zweiermenge („besetzt", „frei") betrachten, wobei vereinbarungsgemäß im Zuordnungsschema die Menge der Felder jetzt oben, die Zweiermenge unten stehen muß.

Aufgabe 16 Auf wie viele Arten kann man entlang der dargestellten Strecken von A nach B gelangen?

A



B

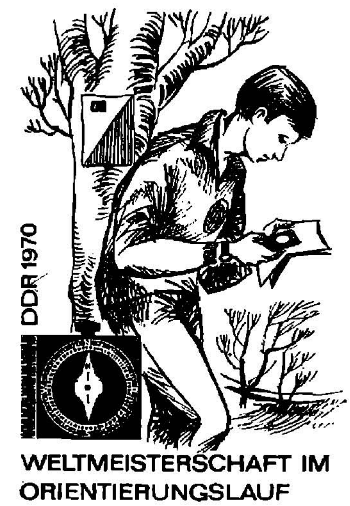
Aufgabe 17 Auf welche bzw. wie viele Arten können sich 3 unterscheidbare Vögel auf 2 Bäume verteilen? (Welche Lösung ist allgemein zu erwarten – k Vögel, r Bäume?)

Aufgabe 18 Auf welche bzw. wie viele Arten könne sich 3 nicht unterscheidbare Vögel auf 2 Bäume verteilen? (Welche Lösung ist allgemein zu erwarten – k Vögel, r Bäume?)

Aufgabe 19 Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, Kraftfahrzeuge – wie bei uns in der DDR üblich – durch zwei Buchstaben und zweimal zwei Grundziffern polizeilich zu kennzeichnen?

Aufgabe 20 Welche bzw. wie viele Dreiecke können $n \geqq 3$ Geraden einer Ebene höchstens bilden, wenn dabei weder drei Geraden durch einen einzigen Punkt gehen noch zwei zueinander parallel sind? *W. Türke*

Nikolaus Kopernikus (Holzschnitt aus dem 16. Jahrhundert) Zu Ehren des 500. Geburtstages (geb. 19. 2. 1473) veröffentlicht *alpha* in Heft 5/72 einen umfassenden Beitrag, d. Red.



Liebe Pioniere und Jugendfreunde!

Besonders die Sommermonate sind dazu angetan, zu wandern, Geländespiele zu organisieren, Orientierungsläufe durchzuführen. Dabei sollte der Kompaß unser treuer Begleiter sein.

In Zusammenarbeit mit dem in aller Welt bekannten Betrieb: *VEB Freiberger Präzisionsmechanik* stellt die Redaktion *alpha* euch den modernsten Kompaß unserer Zeit vor. Er kann zum Preise von 22,50 M in allen Sportgeschäften erworben werden. Eine kleine Anleitung soll euch die Vielfalt dieses mathematikintensiven Arbeitsmittels zeigen. Schneidet an den Linien die Seite auf, legt die Seiten zusammen und fertig ist ein *Begleiter auf euren Wanderungen!*

Wir wünschen euch, sei es in Ferienlagern, Spezialistenlagern oder im Privatcamping frohe Erholung und viel Erfolg mit dem

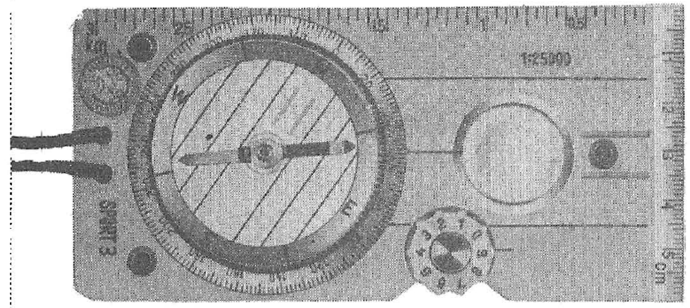
Fluidkompaß Sport 3

Im Jahre 1970 wurden die Weltmeisterschaften im Orientierungslauf durchgeführt. Unsere Fotos zeigen die zu Ehren dieser Weltmeisterschaft herausgegebenen Sonderbriefmarken. Im vergangenen Jahr wurden auch wieder in unserer Republik internationale Wettkämpfe durchgeführt. In der Zeit vom 13. bis 17. 9. 1972 finden die Weltmeisterschaften in der ČSSR statt.

VEB FREIBERGER PRÄZISIONSMECHANIK

DDR 92 Freiberg

Fluidkompaß Sport 3



Trage die Richtungen von A nach C und von B nach C in gleicher Weise ein und bringe sie nötigenfalls durch Verlängern zum Schnitt. Der Schnittpunkt ist C. Die Entfernung $\overline{AC}$ auf dem Papier ergibt maßstäblich umgerechnet die Entfernung in der Natur. Zum Verfolgen bewegter Ziele sind zwei Beobachter notwendig, die auf A und B die Richtungszahlen nach beiden Zielen gleichzeitig messen. Vorher ist jedoch die Standlinie $\overline{AB}$ genau festzulegen.
Verschiebt man den Standpunkt B auf der Standlinie so lange, bis der in B gemessene Richtungsunterschied zwischen A und C gleich 45° ist (Richtungsunterschied bei Gradteilung: 45°), dann wird die zu bestimmende Entfernung zwischen A und C gleich der Länge der Standlinie $\overline{AB}$.
In diesem Falle erübrigt sich die zeichnerische Auswertung durch eine Skizze.

Entfernung auf der Karte – im Gelände:

Maßstab	Karte	Gelände
1 : 25 000	4 cm 1 mm	1 km 25 m
1 : 50 000	2 cm 1 mm	1 km 50 m
1 : 100 000	1 cm 1 mm	1 km 100 m

Handhabung

1. Entnehmen von Marschrichtungszahlen aus der Karte

Das Orientieren der Karte ist dazu nicht erforderlich. Magnetische Gegenstände (Taschenmesser und dergl.) beeinflussen die Messung nicht.
Lege den Kompaß mit der Maßstabsteilung an der Längsseite der Grundplatte so an die Verbindungslinie zwischen Ausgangspunkt und Zielpunkt an, daß die Anlegekante an der linken Längsseite der Grundplatte in die Marschrichtung zeigt. Drehe nun den Teilungsring so, daß die Richtungslinien auf dem Boden der Fluidkapsel parallel zu den

Kartenmeridianen verlaufen und der Kreisteilungs-Nullpunkt nach Kartennord zeigt. Lies am Indexstrich (Mittelstrich auf der Grundplatte) auf dem Teilungsring deine Marschrichtungszahl ab!

Anmerkung: Der Gang des Teilungsringes ist so abgestimmt, daß bei ausreichendem Druck der Grundplatte auf die Kartenunterlage einhändige Bedienung möglich ist und die rechte Hand zum Aufschreiben der Marschrichtungen und Streckenlängen freibleibt.

Kompaß bestimmt werden. Hierzu ist nach Ziffer 3 der Stand der Sonne zu bestimmen. Die genaue Marschrichtungszahl in Grad, geteilt durch 15 ergibt die Uhrzeit (24-Stundenzeit).

7. Messen von Entfernungen in der Karte

Die Karte ist eine Abbildung des Geländes senkrecht von oben. Der Kartenmaßstab ist eine Verhältniszahl, die das Verkleinerungsverhältnis Karte : Gelände angibt. Die Anlegekante der Grundplatte ist in einem der wichtigsten Verkleinerungsverhältnisse, im Maßstab 1 : 25 000 geteilt. Die Querkante besitzt Millimetereinteilung. Sie kann als Maßstab 1 : 1000 verwendet werden.

8. Messen von Entfernungen im Gelände (ohne Benutzung der Karte)

Visiere vom Standpunkt A aus Ziel C an. Lies die Marschrichtungszahl ab und vermerke sie in einer Skizze. Markiere den Standpunkt A im Gelände und schreite annähernd rechtwinklig zu $\overline{AC}$ z. B. 100 m ab (Schrittmaß beachten – Richtungsunterschied 90°). Der erreichte Hilfspunkt ist B. Stelle in B die Marschrichtungszahlen nach A und C fest und vermerke die Werte in der Skizze. (Seite 9)
Die zeichnerische Ermittlung der Entfernung $\overline{AC}$ erfolgt in folgender Weise:
Entsprechend dem Bild auf Seite 9 wird auf einem Blatt Papier (gute ebene Unterlage) – an

2. Aufsuchen des Marschzieles im Gelände

Stelle den Teilungsring auf die vorgegebene Marschrichtungszahl ein. Halte den Kompaß mit annähernd horizontaler Grundplatte etwa in Brusthöhe. Drehe dich mit dem Kompaß so, daß das Nordende der Magnetnadel genau zwischen den Leuchtstrichen auf dem Kompaßboden einspielt. Visiere über die Längskante der Grundplatte einen markanten Geländepunkt an. Dieser Geländepunkt liegt in Richtung deines Marschzieles.

3. Feststellen einer Marschrichtung im Gelände

Halte den Kompaß mit annähernd horizontaler Grundplatte etwa in Brusthöhe. Visiere

über die Längskante der Grundplatte den Richtungspunkt im Gelände an. Drehe den Teilungsring so, daß das Nordende der Magnetnadel genau zwischen den Leuchtstrichen auf dem Kompaßboden einspielt. Lies am Indexstrich auf dem Teilungsring deine Marschrichtungszahl ab.

4. Übertragen einer Marschrichtung in die Karte

Stelle mit dem Teilungsring die gegebene Marschrichtungszahl auf den Indexstrich ein. Lege den Kompaß so auf die Karte, daß die Anlegekante durch den Standpunkt geht, und drehe die Grundplatte um diesen Punkt bis die Richtungslinien auf dem Kapselboden

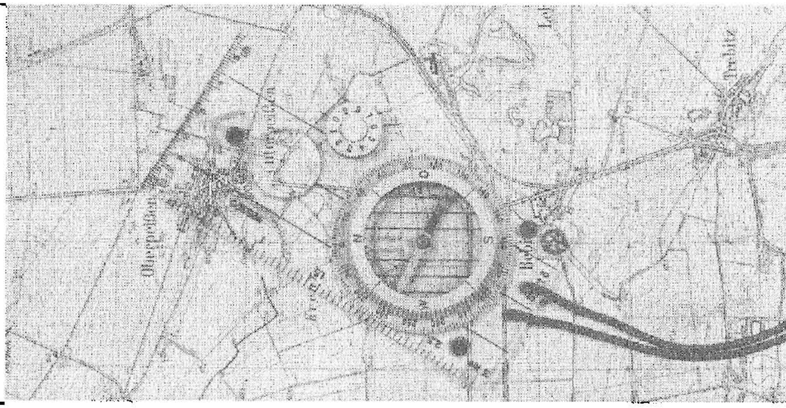
Technische Daten

Teilungsringdurchmesser	56 mm
Skalenwert der Kreisteilung (rechtsläufig)	2°
Schätzung	0,5°
Einschwingdauer der Magnetnadel	7 s
Mittlere Einspielunsicherheit der Magnetnadel	± 0,5°
Längsteilung	1 : 25 000
Skalenwert der Längsteilung	50 m
Schätzung	5 m
Querteilung	60 mm
Skalenwert der Querteilung	1 mm
Schätzung	0,2 mm
Funktionsfähigkeit im Temperaturbereich	−30 °C bis +50 °C

Der Fluidkompaß Sport 3
ist ein Sport- und Touristenkompaß, der insbesondere den Forderungen des Orientierungslaufes angepaßt wurde. Sein Vorteil liegt in der besonders schnellen Meßbereitschaft und einfachen Bedienung.
In die Grundplatte des Sport 3 (Abmessungen: 125 mm × 60 mm × 11 mm, Masse: 55 g) wurde zur Erleichterung des Kartenlesens eine Lupe mit 3,5facher Vergrößerung eingelassen. Eine gleichfalls auf der Grundplatte angeordnete Schrittmerkscheibe dient als Hilfsmittel für die Schrittzählung beim Einhalten der Routenskizze, beim Umgehen von Hindernissen oder beim Kompaßgang in unmarkantem Gelände.

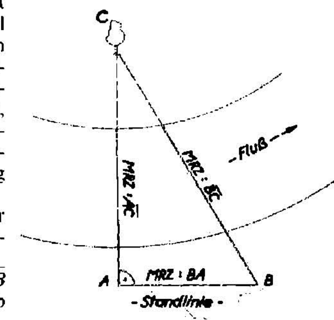
2

Der Fluidkompaß **Sport 3**
ein Sport- und Touristenkompaß,
den Forderungen des Orientierungslaufes angepaßt, besonders schnelle Meßbereitschaft und einfache Bedienung



4

einer seiner Lage im Bestimmungsdreieck ABC entsprechenden Stelle – der Hilfspunkt B markiert. Stelle die Marschrichtungszahl von B und A auf dem Kompaß ein. Lege den Kompaß mit dem Teilungsende des Millimeterstabes der Anlegekante an den Hilfspunkt B an und drehe den Kompaß so lange, bis das Nordende der Magnetnadel (Leuchtmarkierung) zwischen den Doppelleuchtstrichen einspielt. Ziehe von B aus entlang der Anlegekante eine Gerade.
Die Lage des Blattes darf nun während der weiteren Auswertung nicht verändert werden.
Trage an der Geraden die Entfernung $\overline{AB}$ (Standlinie) in einem bestimmten Maßstab ab.



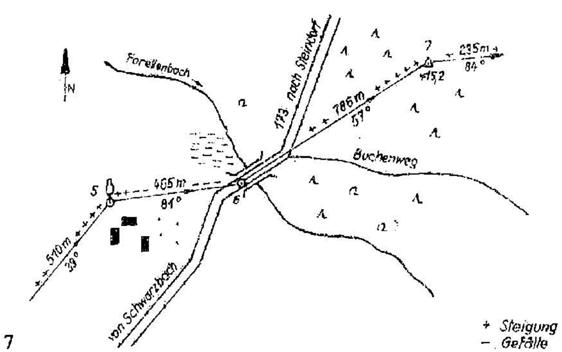
9

parallel zu den Kartenmeridianen (senkrechter Kartenrand) verlaufen und der Doppelleuchtstrich nach Karten-Nord zeigt. Ziehe mit weichem Bleistift eine Hilfslinie entlang der Anlegekante durch den Standpunkt in Richtung der Anlegekante. Diese Hilfslinie gibt Deine Marschrichtung auf der Karte an.

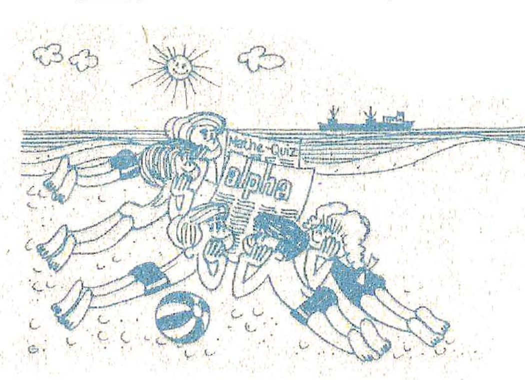
5. *Anlegen der Routenskizze*
Die Routenskizze (Seite 7) enthält eine annähernd maßstäbliche Aneinanderreihung von Marschrichtungszahlen zwischen je zwei Knickpunkten einer Marschroute. An jede Seite des auf diese Weise entstehenden gebrochenen Linienzuges wird die Marschrichtungszahl in Grad und die Streckenlänge in Meter oder im Schrittmaß angeschrieben. Die Knickpunkte werden mit den als Richtungspunkte verwendeten markanten Geländezielen oder Kontrollposten bezeichnet.
Die Routenskizze dient sowohl zur Vorbereitung einer Marschroute und zur Erleichterung der Kompaßarbeit im Gelände als auch zum Fixieren des bereits zurückgelegten Marschweges.

6. *Bestimmen der Uhrzeit mit dem Kompaß*
Ebenso wie gelegentlich Himmelsrichtungen mit der Uhr bestimmt werden müssen, kann beim Versagen der Uhr die Zeit mit dem

6



7



Unterhaltsame Mathematik

Mathematik-Quiz im Ferienlager

„Pannen" zu vermeiden: Sollten bei schwierigeren Aufgaben alle Quiz-Rundenteilnehmer überhaupt nicht mit der Aufgabe zurecht kommen, so muß der Spielleiter helfende Hinweise geben!
Vergeßt nicht, kleine Preise für die Sieger der einzelnen Quiz-Runden zu besorgen!
Sollen wir im nächsten Jahr wieder ein derartiges Heft gestalten? Wer hilft mit, das nächste Heft zusammenzustellen?

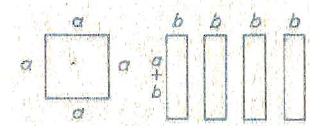
Frohe Ferien wünscht
Eure Redaktion *alpha!*

Autoren dieses Heftes: StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Leipzig) – Mathematikfachlehrer W. Träger (Döbeln)

Klassenstufe 5

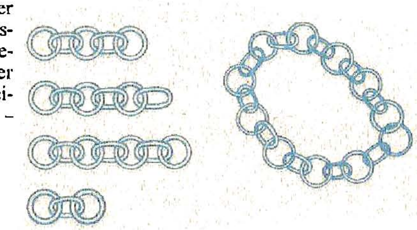
▲1▲ Ein Wurf mit 3 Würfeln zeigt 13 Augen. Gib alle Möglichkeiten für die Augenzahl 13 mit 3 Würfeln an!

▲2▲ Lege die vier kongruenten Rechtecke und das Quadrat so aneinander, daß insgesamt ein Quadrat entsteht. Wer schafft es als Erster?

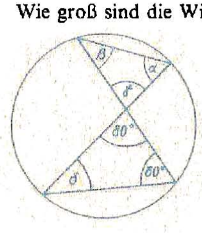


Nachbar hat nunmehr einen weiteren mathematischen Begriff zu nennen, der den zweiten oder dritten Buchstaben des vorgenannten Begriffes als Anfangsbuchstaben hat. Schon genannte Begriffe dürfen nicht ein zweites Mal benutzt werden. Der Mitspieler, der innerhalb 20 Sekunden nicht bedingungsgemäß antworten kann, scheidet aus. Gewinner dieser Quiz-Runde ist der als letzter übrig bleibende Mitspieler. Beispiel: Dreieck – rechter Winkel – Ebene – Eckpunkt – Kathete – Teiler – ....

▲4▲ Aus den vier Papierschlangen ist durch Aufschneiden von weniger als vier Papierringen und Wiederzusammenkleben eine geschlossene Kette herzustellen! Dabei sind alle Ringe zu verwenden!



▲2▲ Wie groß sind die Winkel?



▲3▲ Jeder Mitspieler erhält ein Stück gut biegsamen Draht und soll daraus einen Würfel (oder eine Pyramide) biegen. Wer schafft das beste Modell?

▲4▲ Zur Verfügung stehen 16 gleichgroße quadratische Pappstücke, von denen je vier gelb, grün, blau und rot gefärbt sind. Lege diese 16 Pappstücke so aneinander, daß sie zusammen wieder ein Quadrat bilden.
Dabei sollen in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale jeweils nur verschiedenfarbige Pappstücke liegen.

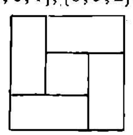
zu bestimmen! Als Hilfsmittel stehen bereit: Schere, Zirkel, Faden und Bleistift.

Lösungen

Klasse 5

▲1▲ {6; 6; 1}, {6; 5; 2}, {6; 4; 3}, {5; 5; 3}, {5; 4; 4}.

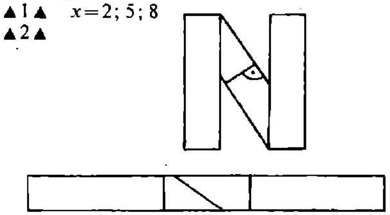
▲2▲



Klasse 6

▲1▲ $x=2; 5; 8$

▲2▲



▲4▲ Die drei Ringe der dreigliedrigen Kette sind aufzuschneiden. Mittels dieser drei Ringe sind die übrigen drei Ketten zu einer geschlossenen Kette zu verbinden.

Klasse 9/10

▲1▲ $26^2 \cdot 10^4$

▲2▲ $x=2a-a\sqrt{2}=a(2-\sqrt{2})$

▲3▲ Es gewinnt der Spieler, der so ziehen kann und stets auch so zieht, daß für die nach Ausführung seiner Züge auf dem Tische liegenden Murmeln entweder die Aussage 1 oder 2 gilt: 1 Die Anzahl der blauen Murmeln auf dem Tisch ist durch 3 teilbar und die Anzahl der roten Murmeln auf dem Tisch ist durch 2 teilbar.
2 Die Anzahl der blauen Murmeln auf dem Tisch läßt beim Teilen durch 3 den Rest 1 und die Anzahl der roten Murmeln auf dem Tisch ist ungerade.

▲4▲ Nach geeignetem Aufschneiden längs einiger Kanten läßt sich der Würfel so aufbiegen, daß seine Flächen in der Ebene liegen. Die Strecke, die die beiden markierten Punkte zu Eckpunkten hat, ist – sofern alle Punkte dieser Strecke dem Würfelnetz angehören – gegebenenfalls die gesuchte kürzeste Verbindung. Die Einschränkung „gegebenenfalls" bedeutet dabei, daß aus diesen Strecken, die sich bei verschiedenartigem Aufschneiden des Würfels ergeben, die kürzeste auszuwählen ist. Ohne Zerschneiden des Würfels kann diese kürzeste Verbindung auch durch einen straff gespannten Faden gefunden werden, der beide Punkte verbindet.

alpha – für frohe Freizeitgestaltung

Die Idee zu unserem kleinen Heft entstand nach einer Ring-frei-Veranstaltung des *Kreisklubs Junger Mathematiker Döbeln.* Ein kleines Arbeitskollektiv stellte euch für Bergfeste, Quiz-Nachmittage, Spezialistenlager oder Gruppennachmittage Material zusammen, das eure Mitspieler zum Nachdenken über mathematische Probleme anregen soll. Eine gewissenhafte Vorbereitung sichert den Erfolg! Jede Aufgabe muß der Spielleiter vorher selbst durchprobieren! Geeignetes Arbeitsmaterial (Stoppuhr, Schere, Papier usw.) muß bereitgelegt werden. Damit auch die Zuschauer der einzelnen Quiz-Runden aktiv mitarbeiten, müssen die einzelnen Aufgaben allen Veranstaltungsteilnehmern bekanntgegeben werden (z. B. mittels Lichtschreiber oder Manipermtafel). Während die Quizrundenteilnehmer knobeln, sollten *alle* Zuschauer mittels mitgebrachter Arbeitsgeräte (Block, Bleistift) sich ebenfalls an der Lösung versuchen. Bevor die nächste Aufgabe gestellt wird, ist jeweils die Lösung der letzten Aufgabe bekanntzugeben. Auch hierbei muß der Spielleiter variabel sein und muß die Zuschauer wieder mit aktiv einschalten. Weiterhin sind jeweils von der Jury die von den einzelnen Quiz-Rundenteilnehmern erreichten Punkte bekanntzugeben. Noch eine Bemerkung sei gemacht, um 2

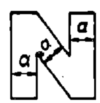
▲3▲ Zwei oder mehrere Schüler werden mit verbundenen Augen vor Wandtafeln gestellt. Wer kann das eleganteste Quadrat, wer den besten Kreis, das schönste Trapez zeichnen? Die Zuschauer entscheiden!

▲4▲ Jeder Mitspieler erhält ein quadratisches Stück Papier (möglichst groß) und soll durch Falten und Reißen ein möglichst schönes Ornament gestalten. Die Jury entscheidet, wer der Beste ist. (Man kann auch eine Schere und evtl. Scherenschnittpapier geben).

Klassenstufe 6

▲1▲ Bestimme die Grundziffer x so, daß die Aussage $3|472x6$ wahr ist!

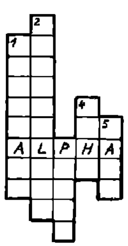
▲2▲ Zerschneide den Buchstaben „N“ geeignet in Teile und setze diese zu einem Rechteck zusammen.



▲3▲ Die Teilnehmer der Quiz-Runde stellen sich in einem Kreis auf. Einer von ihnen nennt einen mathematischen Begriff. Sein 4

Klassenstufe 7

▲1▲ Setze Wörter der angegebenen Bedeutung in die Spalten ein!



1. natürliche Zahl mit genau zwei Teilern, 2. spezielle Bewegung, 3. geometrischer Grundbegriff, 4. besondere Linie im Dreieck, 5. wahre Aussage

▲2▲ Eines der beiden kongruenten Quadrate ist geeignet in Teilflächen zu zerschneiden. Diese Teilflächen sind so an das andere Quadrat anzulegen, daß wieder ein Quadrat entsteht.

▲3▲ Jedem Mitspielenden wird ein Löschblatt überreicht. Die Mitspieler sollen dieses so einreißen, daß sie durch das Löschblatt durchkriechen können.

▲4▲ Die Teilnehmer der Quiz-Runde werden zu Paaren zusammengefaßt. Auf dem Fußboden sind möglichst weit voneinander entfernt zwei Kreidekreise mit dem Durchmesser 0,5 m markiert. Der eine der beiden Spieler wird in den einen Kreis gestellt. 6

Nachdem ihm die Augen verbunden worden sind, wird er vom Spielleiter mehrere Male um seine Körperachse gedreht, so daß er die Orientierung verloren hat. Sein Mitspieler hat ihn durch Kommandos möglichst schnell in den anderen Kreis zu dirigieren. Zugelassen sind nur Kommandos wie: „Drehen um $+30°$, Drehen um $-45°$“, „Laufe $+3\frac{1}{2}$ Schritt“ und „Laufe -2 Schritt“. Erst nachdem der zu dirigierende Schüler ausgerufen hat „Kommando ausgeführt“, darf sein Mitspieler das nächste Kommando geben. Sieger ist das Duett, das diese Aufgabe am schnellsten löst!

Hinweis: Durch ein Pluszeichen sind Drehungen im mathematisch positiven Sinn und Vorwärtsbewegungen gekennzeichnet. Durch ein Minuszeichen sind Drehungen im mathematisch negativen Sinn und Rückwärtsbewegungen gekennzeichnet.

Klassenstufe 8

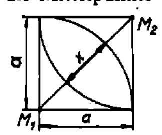
▲1▲ 8 FDJler tragen ein Schachturnier aus. Jeder spielt dabei gegen jeden genau eine Partie. Wieviele Partien werden ausgetragen?

7

Klassenstufe 9/10

▲1▲ Die Kennzeichen für Kraftfahrzeuge haben in der DDR diese Form: AX 08-74. Wieviele Kraftfahrzeuge können in der DDR maximal zugelassen werden, wenn alle Fahrzeuge verschiedene Kennzeichen haben sollen?

▲2▲ Berechne x bei gegebenem a! (M_1 – M_2 sind die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen.)



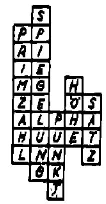
▲3▲ Je zwei Mitspieler sitzen an einem Tisch, auf den vom Spielleiter eine bestimmte Anzahl blaue und eine bestimmte Anzahl rote Murmeln gelegt wurden. Abwechselnd haben beide Spieler Murmeln vom Tisch zu nehmen und zwar bei jedem Zug entweder eine oder zwei blaue Murmeln oder eine rote Murmel. Gewonnen hat der Spieler, der mit seinem letzten Zug die letzte Murmel vom Tisch nimmt.

▲4▲ Auf zwei längs einer Kante zusammenstoßenden Flächen eines Pappwürfels ist je ein Punkt markiert. Der kürzeste auf der Würfeloberfläche verlaufende Streckenzug, der diese beiden Punkte verbindet, ist

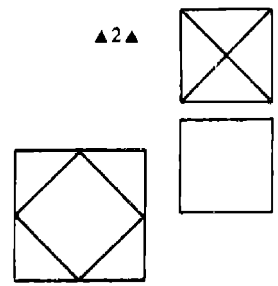
9

Klasse 7

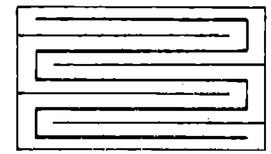
▲1▲



▲2▲



▲3▲ Das Löschblatt kann wie folgt eingerissen werden (Bild).



Klasse 8

▲1▲ $\frac{8 \cdot 7}{2}=7+6+5+4+3+2+1$

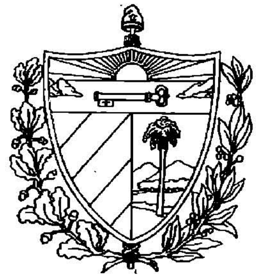
▲2▲ $\alpha=60°$; $\beta=\delta=40°$; $\gamma=80°$

▲4▲

rot	grün	blau	gelb
blau	gelb	rot	grün
gelb	blau	grün	rot
grün	rot	gelb	blau

11

Mathematikolympiaden in der Republik Kuba



Auf der XIII. IMO erstmalig dabei

In Kuba wurde im Jahre 1971 die erste Mathematikolympiade durchgeführt. An der 1. Stufe (Schulolympiade) beteiligten sich 1 100 Schüler. Daraus wurden für die 2. Stufe 25 Schüler ausgewählt und daraus qualifizierten sich wiederum sechs Schüler, von denen vier – also noch eine unvollständige Mannschaft – an der XIII. IMO teilnahmen (siehe Foto).

In diesem Schuljahr wurde in der gesamten Republik Kuba (ähnlich organisiert wie in der DDR) die 2. MO durchgeführt.

Aufgaben der 1. Stufe

Klassenstufe 11/12 (Auswahl)

▲1▲ Es sei E eine nichtleere Menge. Ferner sei zu jeder Teilmenge A von E eine eindeutige Abbildung f_A von der Menge A in die Menge $\{0, 1\}$ definiert, so daß

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } x \in A \\ 0, \text{ wenn } x \notin A. \end{cases}$$

a) Nun seien A, B beliebige Teilmengen von E. Es sollen $f_{A \cap B}(x)$, $f_{E \setminus A}(x)$, $f_{A \cup B}(x)$ durch $f_A(x)$, $f_B(x)$, $f_E(x)$ ausgedrückt werden.

b) Man beweise, daß zu jeder eindeutigen Abbildung f von der Menge E in die Menge $\{0, 1\}$ eine Teilmenge A von E existiert, so daß für alle $x \in E$ $f(x) = f_A(x)$ gilt.

c) Es sei g eine eindeutige Abbildung von der Menge E in die Menge P der reellen Zahlen. Man beweise, daß dann für alle $x \in E$ $g(x) = [g(x)]^2$ genau dann gilt, wenn es eine Teilmenge A von E gibt, so daß

$$g(x) = f_A(x)$$

für alle $x \in E$ gilt, wobei f_A eine eindeutige Abbildung, wie oben definiert, ist.

▲2▲ Es seien ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$.
$2s = a + b + c$ der Umfang dieses Dreiecks und F sein Flächeninhalt. Ferner sei ϱ der Radius des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises, der die Hypotenuse in dem Punkt D berührt, und es sei $\overline{AD} = m$, $\overline{DB} = n$.
Man beweise, daß dann stets gilt

$$F = \varrho s, \quad (1)$$
$$F = mn. \quad (2)$$

▲3▲ Es ist die Basis x mit $x \leqq 10$ eines x-adischen Positionssystems so zu bestimmen, daß es zwei natürliche Zahlen a und b mit $0 < a < x$ und $0 < b < x$ gibt und das Quadrat der Zahl $(aa)_x$ gleich $(bbbb)_x$ ist.

El Orientador

Im Jahre 1971 wurde erstmals ein *Magazin für Mathematiklehrer* herausgegeben. Es enthält auch Mathematikprobleme. Wir veröffentlichen einige Aufgaben für diejenigen *alpha*-Leser, die höhere Klassen besuchen und sich für die Lösung schwieriger Aufgaben interessieren:

▲8▲ In der Menge M aller geordneten Paare (a, b) von reellen Zahlen a und b seien eine Addition und eine Multiplikation von zwei solchen geordneten Paaren wie folgt definiert:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (1)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc + 2bd). \quad (2)$$

a) Man beweise, daß dann das Distributivgesetz der Multiplikation in Verbindung mit der Addition stets erfüllt ist, d. h., daß für alle geordneten Paare (a, b), (c, d), (f, g) aus M

$$(a, b) \cdot [(c, d) + (f, g)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (f, g)$$
und $\quad (3)$
$$[(c, d) + (f, g)] \cdot (a, b) = (c, d) \cdot (a, b) + (f, g) \cdot (a, b) \text{ gilt.} \quad (4)$$

b) Man untersuche, ob in der Menge M ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation existiert, d. h., ein Element $e = (x, y)$, so daß

$$(a, b) \cdot (x, y) = (a, b) \text{ und } (x, y) \cdot (a, b) = (a, b) \quad (5)$$

für alle Elemente (a, b) aus M gilt.
Gegebenenfalls bestimme man dieses neutrale Element e.

▲9▲ Über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC seien nach außen drei gleichseitige Dreiecke ABC', BCA', CAB' konstruiert.
Man beweise, daß dann stets gilt:
a) $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$.
b) Die Geraden AA', BB' und CC' schneiden sich in genau einem Punkt, und jede dieser Geraden halbiert den Winkel, der von den beiden anderen Geraden gebildet wird.

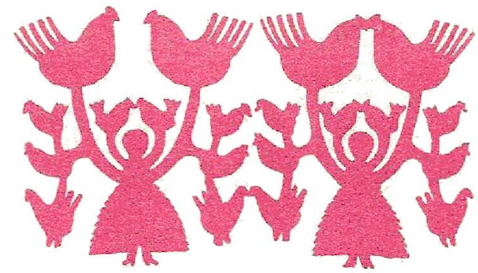
Unser neuer Auslandskorrespondent

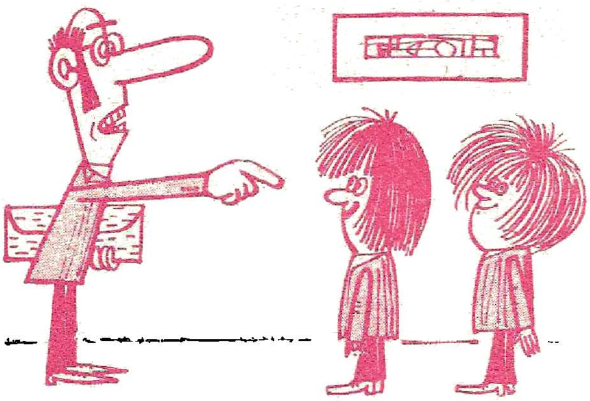
Zwischen dem kubanischen Ministerium für Erziehung, Sektor Mathematik und der Redaktion *alpha* bestehen seit dem „Jahr der Produktivität" (1971) freundschaftliche Verbindungen; *alpha* stellt unseren kubanischen Auslandskorrespondenten vor:

Dr. Luis J. Davidson

Die vier kubanischen Teilnehmer an der XIII. IMO

In freien Stunden alpha heiter



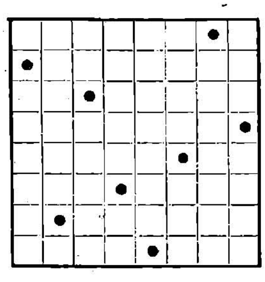


„Mit solchen Haaren kommt ihr in die Schule?"
„Zu Ehren des Kopernikus, Herr Lehrer!"

aus: Karuzela 18 71, Karol Baraniecki

Acht Damesteine

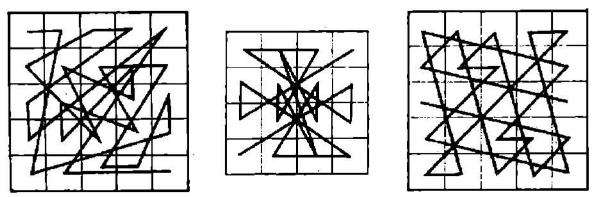
Acht Damesteine stellt man so auf, daß so viele Felder wie nur möglich vom Schach frei bleiben. Hier ist eine der Lösungen, bei der 11 Felder frei bleiben:

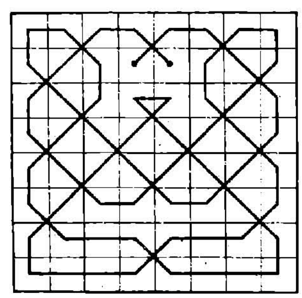


Es gibt noch andere Stellungen der Damesteine. Es ist noch nicht gelungen, eine andere ausfindig zu machen, bei der mehr freie Felder entstehen.

Geometrische Diagramme magischer Quadrate

Den Aufbau eines jeden magischen Quadrates kann man mit Hilfe von Diagrammen darstellen, die die jeweilige Verteilung der Zahlen auf den Feldern darstellen, wobei sich nicht selten diese Linien zu recht interessanten Figuren vereinigen. Als Skizzen geben wir ein Diagramm eines Quadrates von 4×4, zweier Quadrate von 5×5 und ein ungewöhnlich symmetrisches Diagramm des Quadrates von 8×8 an. Den Aufbau des letztgenannten Quadrates sollte man insbesondere untersuchen, indem man die Zahlen von 1 bis 64 in beliebiger Richtung von den Ausgangspunkten nach rechts oder links setzt.





Coś nie coś o 100

$$100=111-11$$
$$100=3\cdot 33+(3:3)$$
$$100=5\cdot(5+5+5+5)$$
$$100=1+2+3+4+5+6+7+8\cdot 9$$

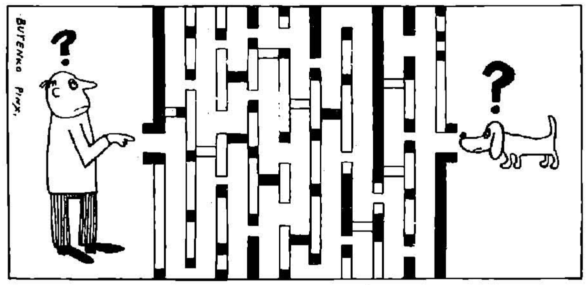
$$\underbrace{\begin{array}{r} 12+4=16 \\ 20-4=16 \\ 4\cdot 4=16 \\ 64:4=16 \end{array}}$$
$$12+20+4+64=100$$

$$100=1+8+27+64=1^3+2^3+3^3+4^3$$
$$100=75+24+\frac{3}{6}+\frac{9}{18}$$
$$100=99\frac{99}{99}$$
$$100=94+5+\frac{38}{76}+\frac{1}{2}$$

Kryptarithmetik

Ersetze Buchstaben durch Ziffern, so daß wahre Aussagen entstehen. (Gleiche Buchstaben entsprechen gleichen Ziffern)

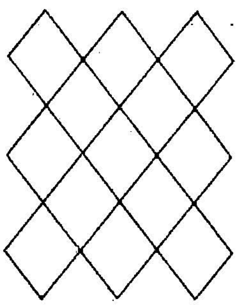
ABCDE			EMA
+EDCBA	ICC·IN	INU·NU	UEMA:MA
FFFFF	NTT	LNU	MA
	ICC	NUS	TM
	IANT	OINU	AS
			EMA
			EMA

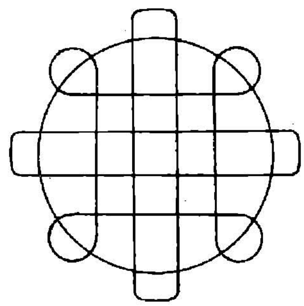


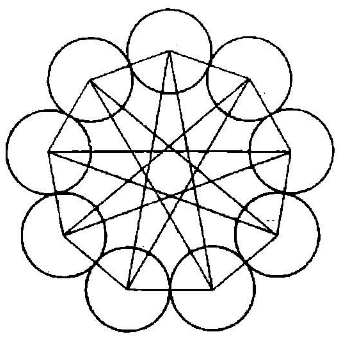
Auf welchem Weg gelangt der Hund zu seinem Herrchen? *aus: Polen 5/69, B. Butenko*

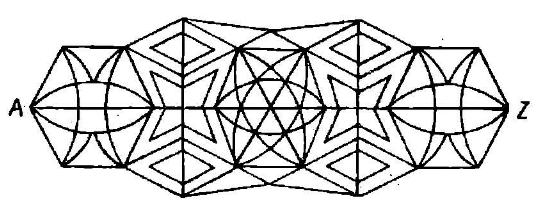
Figuren in einem Zug zu umreißen

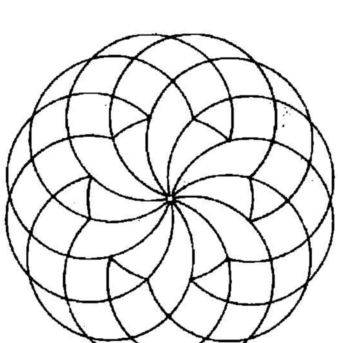
Die folgenden Figuren kann man in einem Zuge umreißen, ohne dabei auf eine schon gezeichnete Linie zurückzukehren:

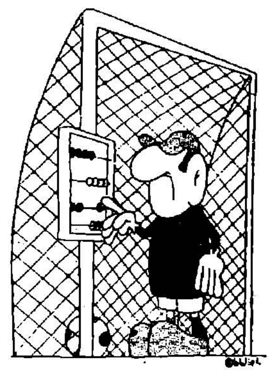




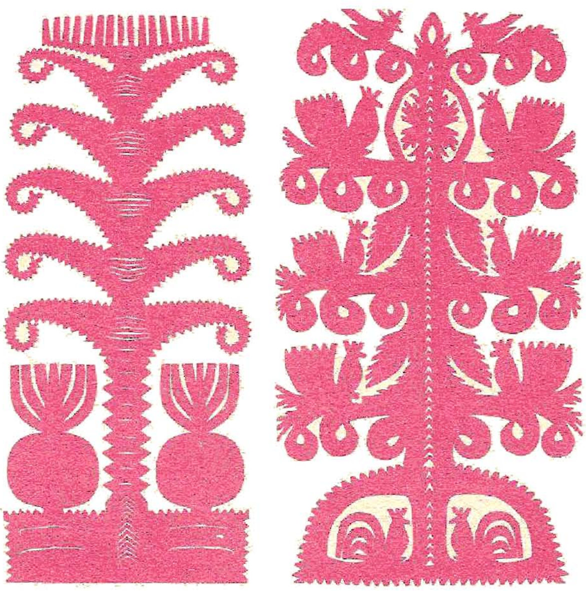








Wieslaw Fuglewicz, Wroclaw aus: Polen 5/71



aus: Der volkstümliche polnische Scherenschnitt Verlag der Kunst, 1960

Mathematik und Sport

Klasse 5

5▲913 Bei einem Skispringen standen die Zuschauer in drei Reihen an der Sprungschanze. In der ersten Reihe standen doppelt soviel Zuschauer wie in der zweiten, in der dritten Reihe standen dreimal soviel wie in der ersten. In der ersten Reihe konnten genau 82 Personen gezählt werden. Wieviel Menschen standen als Zuschauer an der Sprungschanze?

5▲914 Welcher Abstand zwischen den einzelnen Hürden ergibt sich aus den folgenden Wettkampfbestimmungen für den Hürdenlauf?

Gesamtstrecke:	119,14 m
Anlauf:	13,72 m
Auslauf:	14,02 m
Anzahl der Hürden:	10

5▲915 Wieviel Kubikmeter Sand müssen in einer 2,75 m breiten und 9,60 m langen Sprunggrube aufgeschüttet werden, wenn der Sand 40 cm hoch liegen soll?

5▲916 Bei den Fußball-Weltmeisterschaften im Jahre 1954 in der Schweiz wurden in 26 Spielen zusammen 884000 Zuschauer gezählt. Im Verlaufe der Spiele wurden insgesamt 140 Tore geschossen.
a) Berechne die durchschnittliche Zuschauerzahl je Spiel!
b) Zwischen welchen ganzzahligen Werten liegt die durchschnittliche Torquote je Spiel?

5▲917 Das Ergebnis turnerischer Übungen der Meisterklasse ermittelt man in „offener Zehnpunktwertung" durch vier Kampfrichter. Von den vier Wertungen wird die höchste und die niedrigste Wertung nicht gezählt. Aus den beiden verbleibenden Werten wird durch das arithmetische Mittel die endgültige Punktzahl errechnet. Berechne die Punktzahl, wenn die Kampfrichter folgende Urteile abgaben:

9,3; 9,1; 9,2; 9,0 Punkte.

5▲918 Hans und Uwe machen an der Reckstange Klimmzüge. Einer von ihnen schafft genau zehn Klimmzüge. Hans sagt: „Der dritte Teil der Anzahl meiner Klimmzüge ist genau soviel wie zweimal der fünfte Teil der Anzahl deiner Klimmzüge." Wie viele Klimmzüge schafft Uwe, wie viele Hans?

Klasse 6

6▲919 Die Bedingungen für das Sportleistungsabzeichen verlangen im 100-m-Lauf folgende Mindestzeiten:
Männer 12,8 s; Frauen 14,6 s.
Um wieviel leistungsfähiger werden Männer eingeschätzt bzw. welchen Vorsprung müßten sie im Ziel haben?

6▲920 Der Kurzstreckenlauf ist seit den ältesten Zeiten sehr verbreitet. Bei den Spielen zu Ehren der Göttin Hera war der Kurzstreckenlauf der einzige Wettkampf für Frauen; sie mußten die 192,27-m-Bahn des Olympia-Stadions zu $\frac{5}{6}$ durchlaufen. Über welche Strecke ging ihr Lauf?

6▲921 Die Sportler A, B, C und D sind die Wettkämpfer einer $4 \cdot 100$-m-Staffel. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge, in der sie laufen?

6▲922 Eine Übung eines Leichtathleten während des Trainings besteht in rhythmischem Gehen mit anschließendem Nachfedern im Stand. Die Länge der Übungsstrecke beträgt 30 m. Am Anfang und am Ende stehen Fahnenstangen. Der Sportler legt die Strecke auf folgende Weise zurück: Zwei Schritte vor; nachfedern; dann einen Schritt zurück, nachfedern, dann wieder zwei Schritte vor und so fort, bis er die zweite Fahnenstange erreicht. Welches ist die genaue Anzahl von Schritten, die er unter den angegebenen Bedingungen insgesamt macht, wenn seine Schrittlänge genau 50 cm beträgt?

6▲923 Nach einem Scheibenschießen verglichen vier Sportschützen E., R., G. und J. ihre Schußleistungen. Es ergab sich folgendes:
a) J. erzielte mehr Ringe als G.
b) E. und R. erreichten gemeinsam dieselbe Ringzahl wie J. und G. zusammen.
c) E. und J. erzielten zusammen weniger Ringe als R. und G. Es ist auf Grund dieser Angaben die Reihenfolge der Sportschützen nach fallender Ringzahl zu bestimmen!

Unser Foto: Klaus Ampler beim Zeitfahren (Qualifikation 1967) – Erfolge des Friedensfahrtteilnehmers *Klaus Ampler*, der jetzt Student an der *Deutschen Hochschule für Körperkultur* und Übungsleiter für Radsport-Nachwuchs ist:
8× Teilnehmer der Friedensfahrt
1× Gesamtsieger, Einzel 1963
3× Gesamtsieger, Mannschaft 1963, 1964, 1969
5× Etappensieger

Eine Aufgabe von Klaus Ampler

Deutsche Hochschule für Körperkultur Leipzig

▲924a Vier Straßenradrennsportler hatten sich vorgenommen, eine 95 km lange Trainingsstrecke in einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $47 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurückzulegen. Diese Vierergruppe durchfuhr die Trainingsstrecke in einer Fahrzeit von 2:04:08 h (2 Std., 4 Min. und 8 Sek.). Haben diese Sportler ihr Trainingsvorhaben schon erreicht?

▲924b Ein Bahnradsportler hat eine Strecke von 500 m bei einer Übersetzung von 91,1 Zoll in einer Zeit von 36,8 s durchfahren. Welche Trittfrequenz T entwickelte der Sportler?
(*Hinweis:* Die Übersetzung von 91,1 Zoll gestattet es, eine Strecke von 7,26 m bei einer vollen Umdrehung der Tretkurbel zurückzulegen. Unter der Trittfrequenz T verstehen wir die Anzahl der Umdrehungen der Tretkurbel in einer Minute.)

▲924c Einem Bahnradsportler wurde während des Trainings die Trittfrequenz $T = 120 \frac{\text{U}}{\text{min}}$ und die Übersetzung von 91,8 Zoll vorgegeben. Welche Zeit benötigte der Sportler zum Durchfahren der Strecke von 200 m, und mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr er?

alpha stellt vor

Kerstin Bachmann

Ich heiße *Kerstin Bachmann* und bin Schülerin der Klasse 8a der Kröllwitzschule in Halle/Saale.

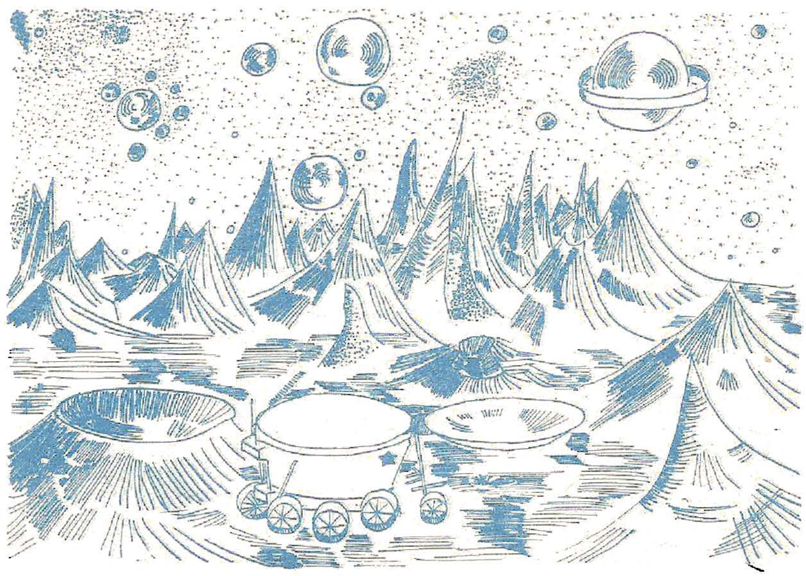
Die Zeitschrift *alpha* lese ich schon seit ihrer Gründung 1967, obwohl ich damals erst die 3. Klasse besuchte. In jedem neu erscheinenden Heft schlage ich zuerst die Seite „alpha heiter" auf, die ihr sicher mit gleicher Spannung wie ich erwartet. Natürlich beteilige ich mich – wie auch mein Bruder – in jedem Jahr am *alpha*-Wettbewerb. Dabei freue ich mich über jede gefundene Lösung, wenn ich mitunter auch länger überlegen und in anderen Büchern nachschlagen muß. Das Lösen dieser Aufgaben hat mir viel geholfen, mein mathematisches Wissen und Können zu erweitern und zu vertiefen. Damit dient es mir zugleich zur Vorbereitung auf die Mathematikolympiaden.

Außer einigen Preisen im *alpha*-Wettbewerb konnte ich bisher bei Kreisolympiaden in der Stadt Halle dreimal einen 1. Platz und einmal einen 2. Platz erringen. Meine schönsten Erfolge sind jedoch die zwei 1. Plätze in Klassenstufe 7 und 8 bei den Bezirksolympiaden 1971 und 1972.

In meiner Freizeit spiele ich Geige im Jugendsinfonieorchester der Bezirksmusikschule Halle (Konservatorium). Zu vielen Anlässen wie z. B. den Händelfestspielen oder der Einweihung des *Hauses des Lehrers* in Halle interpretierten wir Werke von Händel, Haydn, Gerstner u. a. Der „Kunstpreis der Stadt Halle", den wir im Oktober 1971 verliehen bekamen, spornt uns zu weiteren Leistungen an. Natürlich bin ich in Jugend- und Schülerkonzerten auch solistisch tätig. Erst vor kurzem spielte ich das Violinkonzert a-moll von J. S. Bach.

Ausgleich und Entspannung von Mathematik und Musik finde ich beim Malen und Zeichnen. Versuche ich einmal selbst, meine Gedanken und Beobachtungen in einem Bild festzuhalten, so habe ich – wie beim Lösen von Mathematikaufgaben und beim Geigenspiel – das Gefühl schöpferischer Tätigkeit, das ich bei all meiner Arbeit nie missen möchte. Für die Leser von *alpha* lege ich eine Zeichnung und zwei Scherenschnitte bei!

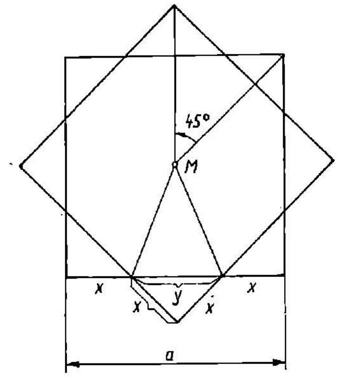
Meine gesellschaftliche Betätigung beschränkt sich aber nicht nur auf die außerschulische Beschäftigung mit Mathematik, Musik und Zeichnen. Im vergangenen Schuljahr war ich Gruppenratsvorsitzende unserer Klasse. Als schönsten Erfolg unserer gesellschaftlichen Arbeit möchte ich die *Ehrenurkunde des Zentralrates der FDJ* nennen, die wir als beste Pioniergruppe unserer Schule erhielten. Inzwischen bin ich als Mitglied der ZGOL unserer Schule gewählt worden und habe neue Aufgaben übernommen.



Den Lesern von *alpha* möchte ich nun an einer (von mir selbst gestellten) Aufgabe zeigen, wie ich vorgehe, um eine Lösung dieser Aufgabe zu finden.

Aufgabe

Einem Quadrat sei ein regelmäßiges 8-Eck so einbeschrieben, daß je zwei Ecken auf einer Quadratseite liegen (s. Figur). Wie verhält sich der Flächeninhalt des Quadrates zum Flächeninhalt des 8-Ecks?



Lösung

1. Ein regelmäßiges 8-Eck der geforderten Art kann man sich erzeugt denken, indem zunächst zwei kongruente Quadrate der Seitenlänge a miteinander zur Deckung gebracht werden. Anschließend dreht man das eine der beiden Quadrate um den gemeinsamen Mittelpunkt M gegen die Ausgangslage um 45°. Die Berandung des beiden Quadraten gemeinsamen Gebietes stellt ein regelmäßiges 8-Eck dar, das bezüglich beider Quadrate die in der Aufgabenstellung geforderten Lagebeziehungen erfüllt.

2. Die 8 überstehenden Dreiecke in der Figur sind nach Konstruktion gleichschenklig rechtwinklig. Die Länge der Katheten werde mit x, die der Hypotenusen mit y bezeichnet. Gemäß der durchgeführten Drehung gelten folgende Gleichungen:

$$y^2 = 2x^2, \qquad (1)$$

$$2x + y = a. \qquad (2)$$

Dies sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten; Gleichung (1) ist quadratisch und Gleichung (2) linear in x und y.

3. Zwecks Bestimmung der Unbekannten löse ich zunächst Gleichung (2) nach y auf und quadriere sie anschließend, also:

$$y=a-2x,\quad y^2=a^2-4ax+4x^2. \qquad (3)$$

Das Quadrieren stellt keine äquivalente Umformung dar. Deshalb ist zu erwarten, daß die weitere Rechnung auch Lösungen liefern wird, die für unsere Aufgabe unbrauchbar sind.

4. Die rechten Seiten von (1) und (3) kann ich gleichsetzen. Das führt auf die quadratische Gleichung

$$2x^2=a^2-4ax+4x^2.$$

Diese bringe ich auf die Normalform

$$x^2-2ax+\frac{a^2}{2}=0.$$

5. Die Wurzeln sind nach der für quadratische Gleichungen bekannten Auflösungsformel

$$x_1=a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad x_2=a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Da nach Konstruktion $0<x<a$ gilt, scheidet x_1 als Lösung aus. Man erhält somit als einzig brauchbare Lösung $x=a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Daraus folgt mit Gleichung (2):

$$y=\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1). \qquad (4)$$

6. Das regelmäßige 8-Eck läßt sich in 8 kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegen. Mit dem für y gefundenen Wert ergibt sich für den Flächeninhalt A eines Dreiecks

$$A=\frac{1}{2}ay=\frac{a^2}{4}(\sqrt{2}-1).$$

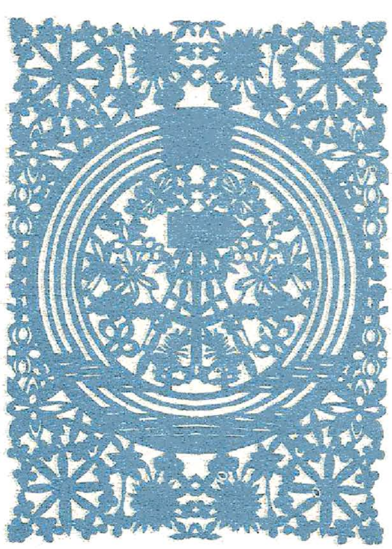
Daraus folgt für den Inhalt des regelmäßigen 8-Ecks

$$A_1=2(\sqrt{2}-1)a^2.$$

7. Ferner hat das umbeschriebene Quadrat mit der Seitenlänge a den Inhalt $A_2=a^2$. Folglich besteht für die Inhalte von Quadrat und regelmäßigem 8-Eck die Proportion

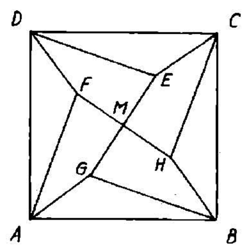
$$A_1 : A_2=(\sqrt{2}+1) : 2.$$

K. Bachmann



Lösungen

* 10/12 * 804 1. Die Dreiecke ABG und CDE sind kongruent, weil sie nach Konstruktion in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Der Punkt G hat also von der Seite $\overline{AB}$ den gleichen Abstand wie der Punkt E von der Seite $\overline{CD}$. (vgl. die Abb.).



Da M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EG}$ ist, hat M von der Parallelen durch G zu $\overline{AB}$ den gleichen Abstand wie von der Parallelen durch E zu $\overline{CD}$; M hat also auch den gleichen Abstand von der Seite $\overline{AB}$ wie von der Seite $\overline{CD}$. Analog beweist man, daß M auch den gleichen Abstand von der Seite $\overline{BC}$ wie von der Seite $\overline{AD}$ hat. M ist daher der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$.

Führen wir nun eine Drehung um M mit dem Drehwinkel 90° im positiven Drehsinn aus, so wird wegen $MG \perp MH$ und $\overline{MG}=\overline{MH}$ der Punkt G in den Punkt H übergeführt; ferner werden die Punkte A und B in die Punkte B und C übergeführt. Daraus folgt $\triangle ABG \cong \triangle BCH$. Analog beweist man, daß auch

$\triangle ABG \cong \triangle CDE \cong \triangle DAF$ gilt.

Daraus folgt die 1. Behauptung:

$$\overline{HC}=\overline{ED}=\overline{FA}=\overline{GB}.$$

2. Bei einer Drehung um M mit dem Drehwinkel 180° geht die Gerade HC in die Gerade FA über; daraus folgt die 2. Behauptung:

$$HC \parallel FA.$$

3. Bei einer Drehung um M mit dem Drehwinkel 90° im positiven Drehsinn geht die Gerade HC in die Gerade ED über; daraus folgt $HC \perp ED$. Analog beweist man, daß auch $FA \perp GB$ gilt, womit die 3. Behauptung bewiesen ist.

* 10/12 * 805 Es ist zweckmäßig, zunächst die Zahl p^2 und dann erst die Zahl p abzuschätzen. Wir erhalten nämlich

$$p^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\ldots\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}\cdot\ldots\cdot\frac{49^2}{50^2}. \qquad (1)$$

Daraus folgt

$$p^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\ldots\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)2n}\cdot\ldots$$
$$\cdot\frac{49^2}{48\cdot 50}\cdot\frac{1}{50}. \qquad (2)$$

Nun gilt für alle natürlichen Zahlen n mit $n>1$

$$\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)2n}=\frac{(2n-1)^2}{(4n^2-4n+1)-1}$$
$$=\frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2-1}>1,$$

weil $(2n-1)^2-1<(2n-1)^2$.

Daher sind in (2) alle Quotienten mit Ausnahme des ersten und des letzten größer als 1, und wir erhalten

$$p^2>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{50}=\frac{1}{100},\text{ also } p>\frac{1}{10}=0{,}1. \qquad (3)$$

Andererseits gilt wegen (1)

$$p^2=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdot\ldots\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\ldots$$
$$\cdot\frac{49\cdot 51}{50^2}\cdot\frac{1}{51}. \qquad (4)$$

Nun gilt für alle natürlichen Zahlen n mit $n\geqq 1$

$$\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}=\frac{(2n)^2-1}{(2n)^2}<1,$$

weil $(2n)^2-1<(2n)^2$.

Daraus folgt wegen (4)

$$p^2<\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{1}{51}<\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{50}=\frac{3}{200}=\frac{6}{400},\text{ also}$$

$$p<\sqrt{\frac{6}{400}}=\frac{1}{20}\sqrt{6}<\frac{1}{20}\cdot 2{,}45<0{,}123. \qquad (5)$$

Aus (3) und (5) erhalten wir $0{,}1<p<0{,}123$, womit die Behauptung bewiesen ist.

von Prof. Dr. Th. Riedrich

▲808 Man überzeugt sich leicht davon, daß es genügt, die Eigenschaft (3) unter den Voraussetzungen zu beweisen, die in der Zeichnung angenommen wurden. Der Satz von Pythagoras liefert sofort die Beziehung $y'=\sqrt{a^2-x^2}$ und, wenn t den Winkel der Strecke QP' gegen die positive x-Richtung bezeichnet, gilt $\tan t=\frac{y'}{x}$. Offensichtlich ist nun $|QP'|=a-e\cos t$.

Aus der bekannten Beziehung

$\cos t=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$ erhalten wir durch Einsetzen von $\tan t$ und von y' die Gleichung

$$\cos t=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y'}{x}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+(y')^2}}=\frac{x}{a}.$$

Also ist $|QP'|=a-\frac{ex}{a}$. Zum anderen ist (wieder nach Pythagoras) $|SP|=\sqrt{(x-e)^2+y^2}$, woraus wir unter Verwendung von (1) und (2) die Gleichungen

$$|SP|=\left[(x-e)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[(x^2-2ex+e^2)+(a^2-e^2)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[a^2-2ex+\frac{e^2}{a^2}x^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\left(a-\frac{ex}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left|a-\frac{ex}{a}\right|=a-\frac{ex}{a}$$

erhalten (letztere Gleichung wegen $0<x<a$ und $0<e<a$), woraus die behauptete Gleichheit $|SP|=|QP'|$ hervorgeht.

Lösungen zu: aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht

Mathematik und Sport

5▲913 In der ersten Reihe standen genau 82 Zuschauer; das waren doppelt soviel wie in der zweiten. In der zweiten Reihe standen demnach $82:2=41$ Zuschauer. In der dritten Reihe standen dreimal soviel Zuschauer wie in der ersten, also $3\cdot 82=246$ Zuschauer. An der Sprungschanze standen insgesamt

$82+41+246=369$ Zuschauer.

5▲914 Wir rechnen $119{,}14\text{ m}-13{,}72\text{ m}-14{,}02\text{ m}=91{,}40\text{ m}$; der Abstand zwischen der ersten und zehnten Hürde beträgt 91,40 m. Zwischen den zehn Hürden liegen neun gleichlange Zwischenräume. Aus $91{,}40\text{ m}:9\approx 10\text{ m}$ folgt, daß der Abstand zwischen zwei benachbarten Hürden rund 10 m beträgt.

5▲915 $V=a\cdot b\cdot c$, $V=2{,}75\cdot 9{,}60\cdot 0{,}40\text{ m}^3=10{,}56\text{ m}^3$; es sind rund $10\frac{1}{2}\text{ m}^3$ Sand aufzuschütten.

5▲916 $884\,000:26=34\,000$; bei jedem Spiel waren durchschnittlich 34 000 Zuschauer zugegen.

$5\cdot 26=130<140<6\cdot 26=156$;

die Torquote bewegt sich zwischen fünf und sechs Toren je Spiel.

5▲917 Die Punktzahlen 9,3 und 9,0 fallen weg. $(9{,}1+9{,}2):2=9{,}15$; es wurden 9,15 Punkte erreicht.

5▲918 Die Anzahl der Klimmzüge kann nur durch eine natürliche Zahl angegeben werden. Die Aufgabe 10:3 ist im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar. Deshalb gilt $(10:5)\cdot 2=4$ und $4\cdot 3=12$; Uwe schaffte zehn, Hans 12 Klimmzüge.

6▲919 Frauen müssen 100 m in 14,6 s zurücklegen, d. h. in 1 s wenigstens $\frac{100}{14{,}6}$ m. In $(14{,}6-12{,}8)\text{ s}=1{,}8\text{ s}$ (nach Erreichen des Zieles durch Männer) müssen sie noch $\frac{1{,}8\cdot 100}{14{,}6}\text{ m}\approx 12{,}3$ m laufen.

6▲920 $\frac{5}{6}\cdot 192{,}27\text{ m}\approx 160{,}22\text{ m}$.

6▲921 Wir nehmen eine lexikographische Anordnung für drei der vier Sportler vor:

A B C; A C B;
B A C; B C A;
C A B; C B A.

Jede dieser sechs Möglichkeiten für die Lauffolge läßt sich mit dem vierten Sportler D derart kombinieren, daß D einmal vor dem ersten Läufer, einmal vor dem zweiten, einmal vor dem dritten und einmal nach dem dritten eingesetzt wird. Wir erhalten insgesamt also $6\cdot 4=24$ Möglichkeiten.

6▲922 Nach drei Schritten (zwei Schritte vor, einen zurück) ist der Sportler um genau einen Schritt, also um 50 cm vorangekommen. Aus $3000:50=60$ und $60\cdot 3=180$ folgt, daß der Sportler bis zum Ziel 180 Schritte machen muß.

6▲923 Bezeichnet man die Ringzahlen der Sportschützen mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen, so erhält man aus den Angaben der Aufgabe folgendes:

(1) $J>G$,
(2) $E+R=G+J$,
(3) $E+J<G+R$.

Aus (2) und (3) ergibt sich durch Addition $2E+J+R<2G+J+R$, also $E<G$.
Hieraus und aus (2) folgt $R-J=G-E>0$, also $J<R$.
Daher gilt $R>J>G>E$.

Lösung zu:
Eine Aufgabe von Klaus Ampler

▲924a Aus $t=2\text{ h }4\text{ min }8\text{ s}=7448\text{ s}$ und $s=95\text{ km}$ folgt $v=\frac{s}{t}=\frac{95}{7448}\frac{\text{km}}{\text{s}}$

$=\frac{95\cdot 60\cdot 60}{7448}\frac{\text{km}}{\text{h}}\approx 45{,}918\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Es wurde eine durchschnittliche Geschwindigkeit von rund $45{,}918\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und somit das Trainingsvorhaben noch nicht erreicht.

▲924b Der Bahnradsportler legt eine Strecke von 7,26 m bei einer Umdrehung der Tretkurbel, also 500 m bei x Umdrehungen der Tretkurbel zurück, und es gilt

$$x=\frac{500}{7{,}26}\text{ Umdrehungen}\approx 68{,}87\text{ Umdrehungen.}$$

In 36,8 s schaffte der Sportler 68,87 Umdrehungen der Tretkurbel, in 1 s somit y Umdrehungen, und es gilt

$$y=\frac{68{,}87}{36{,}8}\frac{\text{U}}{\text{s}}.$$

Die Trittfrequenz beträgt somit

$$T=\frac{6887\cdot 60}{3680}\frac{\text{U}}{\text{min}}\approx 112{,}3\frac{\text{U}}{\text{min}}.$$

▲924c Bei einer Übersetzung von 91,1 Zoll legt der Bahnradsportler bei einer vollen Umdrehung der Tretkurbel 7,26 m, bei der Übersetzung von 91,8 Zoll legt er x m zurück, und es gilt

$$x=\frac{7{,}26\cdot 91{,}8}{91{,}1}\frac{\text{m}}{\text{U}}\approx 7{,}32\frac{\text{m}}{\text{U}}.$$

Bei der vorgegebenen Trittfrequenz werden in 1 min somit $120\cdot 7{,}32\text{ m}=878{,}40$ m, in y min werden 200 m durchfahren, und es gilt

$$y=\frac{200}{878{,}4}\text{ min}\approx 13{,}7\text{ s.}$$

Weiterhin gilt

$$v=\frac{s}{t}=\frac{200\text{ m}}{13{,}7\text{ s}}=\frac{0{,}2\cdot 3600}{13{,}7}\frac{\text{km}}{\text{h}}\approx 52{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Zum Durchfahren von 200 m benötigte der Bahnradsportler rund 13,7 s; er fuhr dabei mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von rund $52{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Lösungen zu: Welche — wie viele Möglichkeiten gibt es?
(Heft 6/71, 1/72)

9. Es gibt $\binom{90}{5}=43\,949\,268$ Tipmöglichkeiten.
10. Es werden $1+2+3+4=\binom{5}{2}=10$ Handschläge gewechselt.
11. Die Gläser klingen $1+2+\ldots+7=\binom{8}{2}=28$mal.
12. Es gibt $1+2+3+4+5=\binom{6}{2}=15$ Verbindungsgeraden.
13. Auf $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{3}=21\cdot 10=210$ Arten.
14. Es gibt $\binom{15}{3}\cdot\binom{10}{2}$ Möglichkeiten.
15. Nach der ersten Lösungsart erhalten wir
$$\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}=$$
$$=2\cdot\left[\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}\right]$$
$=2\cdot(1+9+36+84+126)$
$=2\cdot 256=512$ Möglichkeiten.
Nach der zweiten Lösungsart erhalten wir folgende Ergebnisse:
0 Felder – 1 Möglichkeit
(„das leere Bild")
1 Feld – 2 Möglichkeiten
(„besetzt", „frei", in Zeichen b, f, also b und f)
2 Felder – 4 Möglichkeiten
($b\,b$, $b\,f$, $f\,b$, $f\,f$)
3 Felder – 8 Möglichkeiten
(bbb, bbf, bfb, bff, fbb, fbf, ffb, fff) usw.
1, 2, 4, 8, ... ist die Folge der Zweierpotenzen, wobei $2^0=1$ gesetzt wird.
Wir erhalten also $2^9=512$ Möglichkeiten.
16. Auf $\binom{8}{5}=\binom{8}{3}=56$ Arten.
17. Auf $2^3=8$ (allgemein r^k) Arten.
18. Auf 4 Arten (allgemein $\binom{r+k-1}{k}$).
19. Es gibt $26^2\cdot 10^2\cdot 10^2=6\,760\,000$ Möglichkeiten.
20. $\binom{n}{3}$ Dreiecke.

5▲810 $936:4=234$; auf jedem Beet wurden 234 Pflanzen gesetzt. $234:9=26$; auf einem der Beete gingen 26 Pflanzen ein. $26 \cdot 15=390$; es gehen voraussichtlich 390 Erdbeeren verloren.

5▲811

11	Quersumme	2
+23	„	5
+29	„	11
+41	„	5
+43	„	7
+47	„	11
+61	„	7
+67	„	13
+83	„	11
+89	„	17
494		

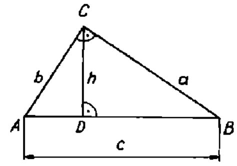
W 5 ■ 812 Abbildung a) Das Quadrat $ABCD$ wurde an der Geraden BC als Symmetrieachse gespiegelt. A' ist Bildpunkt von A, D' Bildpunkt von D. $\overline{CD}=\overline{CD'}$, $\overline{BA}=\overline{BA'}$, $DD' \perp BC$, $AA' \perp BC$.
Abbildung b) Das Quadrat $ABCD$ wurde in Richtung der Geraden AB um den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{AB}$ verschoben. B ist Bildpunkt von A, B' Bildpunkt von B, C Bildpunkt von D, C' Bildpunkt von C.
Abbildung c) Das Quadrat $ABCD$ wurde um B als Drehzentrum um einen Drehwinkel von 90° im mathematisch negativen Sinne gedreht. C ist Bildpunkt von A, D' Bildpunkt von D, C' Bildpunkt von C.

W 5 ■ 813 Gegeben: Länge: $a=325$ m,
Breite: $b=25$ m,
Höhe: $c=4{,}3$ m $-0{,}5$ m $=3{,}8$ m
Gesucht: $V=a \cdot b \cdot c=30\,875$ m³ $\approx 30\,900$ m³

* 5 * 814 Die Abfahrtzeiten in Pillnitz lauten 4.38 Uhr, 4.53 Uhr, 5.08 Uhr, 5.23 Uhr, 5.38 Uhr usw. Die zugehörigen Ankunftszeiten in Radebeul (89 Minuten später) sind 6.07 Uhr, 6.22 Uhr, 6.37 Uhr, 6.52 Uhr, 7.07 Uhr usw. Der um 8.35 Uhr in Radebeul abfahrende Wagenzug trifft um 10.04 Uhr in Pillnitz ein.
Der erste Wagenzug des Gegenverkehrs, dem er begegnet, trifft um 8.37 Uhr in Radebeul ein und ist demnach um 7.08 Uhr in Pillnitz abgefahren; der letzte Wagenzug des Gegenverkehrs, dem er begegnet, fährt um 9.53 Uhr in Pillnitz ab. Zwischen diesen beiden Wagenzügen des Gegenverkehrs liegt bezüglich ihrer Abfahrtzeiten eine Zeitspanne von 165 Minuten. Der in Radebeul abfahrende Wagenzug trifft demnach auf zwölf Wagenzüge des Gegenverkehrs.

* 5 * 815 Aus $8 \cdot 0{,}1$ mm $= 0{,}8$ mm und $48:0{,}8=60$ folgt, daß 60 Bogen A 4 zu Notizzetteln zerschnitten werden müssen.

6▲816 Für den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC gilt einerseits $A=\frac{1}{2}ab$, andererseits aber auch $A=\frac{1}{2}ch$. Durch Gleichsetzen erhalten wir daraus $\frac{1}{2}c \cdot h=\frac{1}{2}a \cdot b$ bzw. $h=\frac{a \cdot b}{c}$.

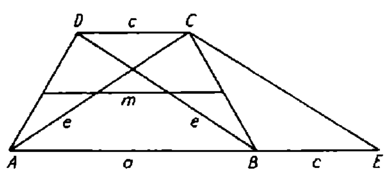


6▲817 Aus 87 ml $-$ 75 ml $=$ 12 ml und 12 ml $:50=0{,}24$ ml folgt, daß jede der Stahlkugeln ein Volumen $V=0{,}24$ ml $=0{,}24$ cm³ $=240$ mm³ besitzt.

W 6 ■ 818 Aus $v=\frac{s}{t}=\frac{200\text{ m}}{10\text{ s}}=20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ folgt $v=0{,}02 \cdot 60 \cdot 60\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}=72\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Nein, der Fahrer hat die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 50 km $\cdot$ h^{-1} überschritten.

W 6 ■ 819 Aus $A_0=6a^2$ und $V=a^3$ folgt wegen $A_0=V$ die Gleichung $a^3=6a^2$. Wegen $a>0$ gilt somit $a=6$. Ein Würfel mit einer Kantenlänge von 6 cm erfüllt die Bedingung der Aufgabe.

* 6 * 820 In dem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ sind die Diagonalen gleich lang; es gilt also $\overline{AC}=\overline{BD}=e$. Wir ziehen durch C eine Parallele zu BD, ihr Schnittpunkt mit der Geraden AB sei E. Das Viereck $BECD$ ist dann ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{BE}=\overline{CD}=c$ und $\overline{EC}=\overline{BD}=e$.



Für die Seiten des Dreiecks $\triangle AEC$ gilt die Beziehung

$$\overline{AC}+\overline{EC}>\overline{AE} \quad \text{bzw.} \quad 2e>a+c.$$

Wegen $m=\frac{1}{2}(a+c)$ folgt aus der Forderung $m=e$ die Gleichung $2e=a+c$, die nicht erfüllbar ist, da stets $2e>a+c$ gilt.

* 6 * 821 Da das Zahlenrätsel nur echte Brüche enthält, folgt aus der Additionsaufgabe der letzten Spalte ◪ = 1. Nunmehr folgt aus der letzten Zeile ◫ = 2. Gemäß der ersten Spalte muß eine von 0 und 1 verschiedene natürliche Zahl k existieren, so daß ⧅ $\cdot k=$ ▚ und ◪ $\cdot k-$ ◪ $=$ ◫, also $k-1=2$ gilt.
Hieraus folgt $k=3$. Wegen ⧅ >2 und ⧅ $\cdot 3=$ ▚ muß ⧅ $=3$ und ▚ $=9$ sein. Aus der ersten Zeile folgt nunmehr ⊟ $=7$, und aus der zweiten Zeile folgt ⬒ $=4$.

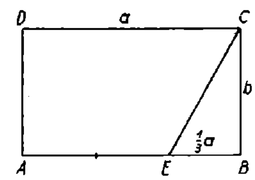
$$2\frac{1}{3} : 3=\frac{7}{9}$$
$$- \quad \cdot \quad +$$
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$
$$2\frac{2}{9}-1=1\frac{2}{9}$$

7▲822 4 t 300 kg $=$ 4 300 kg. Angenommen, die Schüler der Schule C haben x kg Altpapier gesammelt, dann gilt

$$(840+x)+(x-650)+x=4\,300,$$
$$3x+190=4\,300,$$
$$3x=4\,110,$$
$$x=1\,370.$$

Schule	Altpapier in kg	Geldbetrag in Mark
A	2 210	331,50
B	720	108,00
C	1 370	205,50

7▲823 Da der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gleich $a \cdot b$ und der des Dreiecks EBC gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a \cdot b=\frac{1}{6}ab$ ist, gilt für den Flächeninhalt des Trapezes $AECD$ somit $A=ab-\frac{1}{6}ab=\frac{5}{6}ab$.



W 7 ■ 824 Die kleinste, von Null verschiedene, durch 3, 4, 6 und 8 teilbare natürliche Zahl ist 24. Die nächst kleinere Zahl (48) ist bereits größer als 30. An der Leistungskontrolle waren also 24 Schüler beteiligt.
Aus $\frac{1}{3} \cdot 24=8$ und $\frac{1}{4} \cdot 24=6$ und $\frac{1}{6} \cdot 24=4$ und $\frac{1}{8} \cdot 24=3$ und $8+6+4+3=21$ folgt, daß 21 Schüler die Aufgaben fehlerhaft hatten. Demnach hatten 3 Schüler alle Aufgaben richtig.

W 7 ■ 825 Klaus habe n-mal die Note 1 und k-mal die Note 2 erhalten. Dann gilt $\frac{n \cdot 1+k \cdot 2}{n+k}=1{,}4$. Durch Umformungen erhalten wir daraus $n+2k=1{,}4n+1{,}4k$,

$$0{,}6k=0{,}4n,$$
$$3k=2n.$$

Die kleinsten natürlichen Zahlen k und n, die diese Gleichung erfüllen, lauten $k=2$ und $n=3$, also $n+k=5$. Klaus hat mindestens fünf Klassenarbeiten geschrieben; bei fünf Klassenarbeiten erhielt er dreimal die Note 1, zweimal die Note 2.

* 7 * 826 Es wurden $4 \cdot 3=12$ Spiele ausgetragen und damit insgesamt 12 Punkte vergeben. Axel habe a, Bruno b, Dieter d und Ernst e Punkte erzielt, dann gilt:

$$b+d=a+e+1. \quad (1)$$
$$d+e=7, \quad (2)$$
$$b+e=a+d+5. \quad (3)$$

Aus (1)−(3) folgt

$$d-e=e-d-4 \text{ bzw. } e-d=2. \quad (4)$$

Aus (2) und (4) folgt $e=4{,}5$ und $d=2{,}5$.
Durch Einsetzen der bereits errechneten Werte in (1) erhalten wir

$$b-a=3. \quad (5)$$

Fernerhin gilt, da insgesamt 12 Punkte vergeben wurden,

$b+a=5$. (6)

Aus (5) und (6) folgt $b=4$ und $a=1$.

Name	Punktzahl
Axel	1
Bruno	4
Dieter	2,5
Ernst	4,5

* 7 * 827 Die sechs aufeinanderfolgenden Zahlen seien n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ und $n+5$. Dann gilt

$z_1=100(n+2)+10(n+1)+n=111n+210$,

$z_2=100(n+3)+10(n+4)+(n+5)$

$=111n+345$.

Daraus folgt $z_2-z_1=135$ und

$z_1+z_2=222n+555=111(2n+5)$.

8 ▲ 828 1. Von den fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen

$p-2$, $p-1$, p, $p+1$, $p+2$

ist genau eine durch 5 teilbar. Das kann aber nicht die Zahl p sein, da p Primzahl und größer als 5 ist. Also ist einer der vier Faktoren des Produkts durch 5 teilbar: $5 \mid P$.

2. Die Primzahl p ist größer als 5, also eine ungerade Zahl; daher sind die beiden Zahlen $p-1$ und $p+1$ gerade. Nun ist von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen stets eine durch 2 und die andere wenigstens durch 4 teilbar. Daraus folgt, daß das Produkt P durch 8 teilbar ist: $8 \mid P$.

3. Die Primzahl p ist nicht durch 3 teilbar, da sie größer als 5 ist. Daher sind entweder die beiden Zahlen $p-2$ und $p+1$ oder die beiden Zahlen $p-1$ und $p+2$ durch 3 teilbar, mithin gilt $9 \mid P$.

4. Das Produkt P ist also durch 5, 8 und 9 teilbar. Da diese Zahlen paarweise teilerfremd sind, ist das Produkt P auch durch $5 \cdot 8 \cdot 9=360$ teilbar: $360 \mid P$, w.z.b.w.

Bemerkung: $a \mid P$ bedeutet, daß a Teiler von P ist.

8 ▲ 829 Da die Quersumme der Zahl z gleich 300 ist, ist z durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Wäre nun z gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl, also $z=t^2$, so wäre auch t durch 3 teilbar. Dann wäre aber z durch 9 teilbar, was nicht möglich ist, da die Quersumme von z nicht durch 9 teilbar ist. Daher ist die Zahl z niemals eine Quadratzahl.

W 8 ■ 830 Es seien

x die Anzahl der Goldmedaillen,

y die Anzahl der Silbermedaillen,

z die Anzahl der Bronzemedaillen,

die die DDR erhielt.

Dann gilt $x+y+z=32$, (1)

$$y=\frac{39}{3}=13, \qquad (2)$$

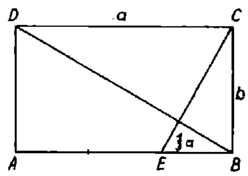
$$\frac{37}{6}<z<\frac{37}{5}. \qquad (3)$$

Aus (3) folgt $6\frac{1}{6}<z<7\frac{2}{5}$,

also gilt, da z ganzzahlig ist, $z=7$.

Aus $y=13$, $z=7$ folgt wegen (1) $x=12$. Die DDR erhielt also 12 Goldmedaillen, 13 Silbermedaillen und 7 Bronzemedaillen.

W 8 ■ 831 Wir zeichnen die Diagonale $\overline{BD}$ des Vierecks $ABCD$ (vgl. die Abb.). Nach Voraussetzung gilt $\overline{AE} : \overline{AB}=\overline{AH} : \overline{AD} =2 : 3$. Daraus folgt nach der Umkehrung des Strahlensatzes $EH \parallel BD$. Ferner gilt $\overline{CF} : \overline{CB}=\overline{CG} : \overline{CD}=2 : 3$ und folglich auch $FG \parallel BD$. Aus $EH \parallel BD$ und $FG \parallel BD$ folgt $EH \parallel FG$. In analoger Weise läßt sich nachweisen, daß auch $EF \parallel HG$ gilt, das heißt, das Viereck $EFGH$ ist ein Parallelogramm.



* 8 * 832 Für $p=2$ erhalten wir $z=2^2+1=5$, also ist in diesem Fall z eine Primzahl.

Nun ist jede von 2 verschiedene Primzahl p eine ungerade Zahl; also ist auch p^2 eine ungerade Zahl und $z=p^2+1$ eine gerade Zahl. Wegen $z>2$ kann daher in diesem Fall z nicht Primzahl sein. Es gibt also genau eine Primzahl p, nämlich $p=2$, für die die Zahl $z=p^2+1$ eine Primzahl ist.

* 8 * 833 Es seien

x die Anzahl der 50-Pf-Stücke,

y die Anzahl der 20-Pf-Stücke,

z die Anzahl der 10-Pf-Stücke,

u die Anzahl der 5-Pf-Stücke,

v die Anzahl der 1-Pf-Stücke,

die beim Wechseln des Betrages von 1 M benötigt werden.

Dann gilt

$$50x+20y+10z+5u+v=100, \qquad (1)$$

wobei x, y, z, u, v natürliche Zahlen mit $x \leqq 2$, $y \leqq 5$, $z \leqq 10$, $u \leqq 20$, $v \leqq 100$ sind.

Wir könnten nun eine Tabelle aufstellen, aus der alle Lösungen von (1) abzulesen sind; das ist aber sehr umständlich, da die Anzahl der Lösungen sehr groß ist.

Wir gehen daher anders vor und beachten zunächst, daß die Summen $5u+v$ und $20y+10z$ durch 10 teilbar sind und daher nur die Werte 0, 10, 20, ..., 100 annehmen können. Ferner kann x nur gleich 0, 1 oder 2 sein.

Nun hat die Gleichung $5u+v=0$ genau eine Lösung, die den obigen Bedingungen entspricht, nämlich $u=v=0$;

die Gleichung $5u+v=10$ genau 3 Lösungen, nämlich $u=0$, $v=10$; $u=1$, $v=5$; $u=2$, $v=0$;

die folgende Tabelle zeigt jeweils die Anzahl der Lösungen, wobei auch die Anzahl der Lösungen für die Gleichung $20y+10z=100$, 90, 80 usw. angegeben ist.

$5u+v$	Anzahl d. Lösungen	$20y+10z$	Anzahl d. Lösungen
0	1	100	6
10	3	90	5
20	5	80	5
30	7	70	4
40	9	60	4
50	11	50	3
60	13	40	3
70	15	30	2
80	17	20	2
90	19	10	1
100	21	0	1

Die Anzahl der Lösungen der Gleichung (1) ist also gleich

$n=1 \cdot (21+19)+2 \cdot (17+15)+3 \cdot (13+11)$
$+4 \cdot (9+7)+5 \cdot (5+3)+6 \cdot 1$
$+1 \cdot (11+9)+2 \cdot (7+5)+3 \cdot (3+1)+1$; (2)

dabei stehen in der ersten und zweiten Zeile der rechten Seite dieser Gleichung die Anzahl der Lösungen für $x=0$, in der dritten Zeile für $x=1$ und für $x=2$ (nur 1 Lösung). Denn im Falle $20y+10z=0$ oder 10 erhalten wir jeweils eine Lösung für diese Gleichung und 21 Lösungen für die Gleichung $5u+v=100$ sowie 19 Lösungen für die Gleichung $5u+v=90$ usw.

Aus (2) erhalten wir weiter

$n=40+64+72+64+40+6+20+24+12+1$,

$n=343$.

Es gibt also genau 343 verschiedene Möglichkeiten, den Betrag von 1 M zu wechseln.

9 ▲ 834 Wir erhalten

$$c^2=a^2+b^2=a^2+\left[\frac{(a-1)(a+1)}{2}\right]^2$$

$$=a^2+\frac{(a^2-1)^2}{4}=\frac{1}{4}(a^4+2a^2+1)=\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{a^2-1}{2}+1\right)^2=\left[\frac{(a-1)(a+1)}{2}+1\right]^2$$

$$=(b+1)^2,$$

womit bewiesen ist, daß $c=b+1$ eine natürliche Zahl ist.

Ferner erhalten wir für

$a=3$: $b=4$, $c=5$, also $3^2+4^2=5^2$;

$a=5$: $b=12$, $c=13$, also $5^2+12^2=13^2$;

$a=7$: $b=24$, $c=25$, also $7^2+24^2=25^2$;

$a=9$: $b=40$, $c=41$, also $9^2+40^2=41^2$ usw.

Bemerkung: Wir haben damit eine Reihe von pythagoreischen Zahlen erhalten, d. h. von natürlichen Zahlen a, b, c die von Null verschieden sind und für die

$$a^2+b^2=c^2$$

gilt. Wir haben aber nicht alle pythagoreischen Zahlen erhalten; denn mit a, b, c sind auch ka, kb, kc pythagoreische Zahlen, wobei k eine natürliche Zahl ist; z. B. sind auch die Zahlen 6, 8 und 10 pythagoreische Zahlen.

Es gibt aber noch weitere solcher Zahlen, z. B. die Zahlen 8, 15 und 17.

Allgemein erhalten wir alle pythagoreischen Zahlen aus den Gleichungen

$$a=uv, \qquad (1)$$

wobei u und v beliebige ungerade natürliche Zahlen mit $u>v$ sind,

$$b=\frac{u^2-v^2}{2}, \qquad (2)$$

$$c=\frac{u^2+v^2}{2}. \qquad (3)$$

Dann gilt nämlich

$$a^2+b^2=u^2v^2+\frac{(u^2-v^2)^2}{4}=\frac{1}{4}(4u^2v^2+u^4-2u^2v^2+v^4)$$
$$=\frac{1}{4}(u^4+2u^2v^2+v^4)=\frac{1}{4}(u^2+v^2)^2=c^2.$$

Für $u=7$, $v=5$ erhalten wir z. B. $a=35$, $b=12$, $c=37$, und es gilt $35^2+12^2=37^2$.

Weiteres zu dem Problem der pythagoreischen Zahlen finden wir in dem folgenden Buch:

W. Lietzmann: Der Pythagoreische Lehrsatz. Mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. 7. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner 1965.

W 9 ■ 835 a) Es seien n und $n+1$ die gesuchten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Dann gilt

$$(n+1)^3-n^3=2611, \qquad (1)$$

also $3n^2+3n+1=2611$,
$3n^2+3n-2610=0$,
$$n^2+n-870=0. \qquad (2)$$

Diese quadratische Gleichung hat genau eine positive Lösung, nämlich

$$n=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+870}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3481}{4}}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{59}{2}=29.$$

Die beiden gesuchten natürlichen Zahlen sind also 29 und 30. Es gilt $30^3-29^3=27000-24389=2611$.

Bemerkung: Die Gleichung (2) läßt sich auch ohne Anwendung der Lösungsformel für die quadratische Gleichung lösen. Wir erhalten nämlich aus (2)

$n(n+1)=870$. Nun gilt
$n^2<n(n+1)<(n+1)^2$, also
$n^2<870<(n+1)^2$. Daraus folgt
$n<30$ und $n+1>29$,

also $n=29$ wie oben. Ein solches Verfahren führt insbesondere dann zum Ziel, wenn wir nicht eine quadratische Gleichung für n, sondern eine Gleichung höheren Grades erhalten, wie das bei der Aufgabe b) der Fall ist.

b) Es seien n und $n+1$ die gesuchten natürlichen Zahlen. Dann gilt

$(n+1)^4-n^4=39775$,
$[(n+1)^2+n^2][(n+1)^2-n^2]=39775$,
$$(2n^2+2n+1)(2n+1)=39775. \qquad (3)$$

Nun gilt aber

$39775=(2n^2+2n+1)(2n+1)>2n^2\cdot 2n=4n^3$,

also $n^3<\frac{39775}{4}<9944$, d. h. $n<22$.

Andererseits gilt

$39775=(2n^2+2n+1)(2n+1)<(2n^2+4n+2)(2n+2)=4(n+1)^3$,

also

$(n+1)^3>\frac{39775}{4}>9943$, d. h. $n+1>21$, also
$$n>20. \qquad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt, da n eine ganze Zahl ist, $n=21$.

Die beiden gesuchten natürlichen Zahlen sind also 21 und 22. Es gilt $22^4-21^4=234256-194481=39775$.

W 9 ■ 836 Nach dem Strahlensatz gilt

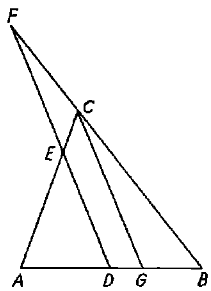
$$\frac{\overline{CG}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AG}}{\frac{c}{2}}=\frac{2\cdot\overline{AG}}{c}$$

und $\frac{\overline{CG}}{\overline{FD}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{BG}}{\frac{c}{2}}=\frac{2\cdot\overline{BG}}{c}$. Daraus folgt

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{ED}}+\frac{\overline{CG}}{\overline{FD}}=\frac{2\cdot\overline{AG}+2\cdot\overline{BG}}{c}=\frac{2(\overline{AG}+\overline{BG})}{c}$$

$=\frac{2c}{c}=2$, also $\overline{CG}\left(\frac{1}{\overline{ED}}+\frac{1}{\overline{FD}}\right)=2$ und somit

$\overline{CG}=\frac{2\cdot\overline{ED}\cdot\overline{DF}}{\overline{ED}+\overline{DF}}$, w. z. b. w.



* 9 * 837 Es seien x bzw. y der Konsumtionsfonds bzw. der Akkumulationsfonds am Ende des 9. Fünfjahrplans. Dann gilt, da das gesamte Nationaleinkommen zu diesem Zeitpunkt 373 Mrd. Rubel beträgt,

$$x+y=373. \qquad (1)$$

Zu Beginn des 9. Fünfjahrplans beträgt der Konsumtionsfonds, da er sich um 41 % erhöht, $\frac{x}{1.41}$ und der Akkumulationsfonds $\frac{y}{1.375}$. Wir erhalten daher die Gleichung

$$\frac{x}{1{,}41}+\frac{y}{1{,}375}=266{,}3. \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) können wir nun x und y bestimmen. Wir erhalten aus (1) $y=373-x$ und aus (2)

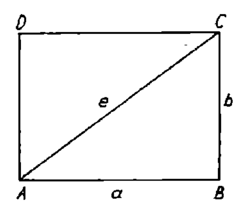
$1{,}375x+1{,}41y=266{,}3\cdot 1{,}41\cdot 1{,}375$, also
$1{,}375x+1{,}41(373-x)=516{,}3$,
$1{,}375x+525{,}9-1{,}41x=516{,}3$,
$0{,}035x=9{,}6$
$x=\frac{9{,}6}{0{,}035}\approx 274$.

Ferner erhalten wir

$y=374-277=99$.

Am Ende des 9. Fünfjahrplanes beträgt also der Konsumtionsfonds rd. 274 Mrd. Rubel und der Akkumulationsfonds rd. 99 Mrd. Rubel.

* 9 * 838 Es seien (vgl. die Abb.)



a die Maßzahl der Länge der Seite $\overline{AB}$,
b die Maßzahl der Länge der Seite $\overline{BC}$,
e die Maßzahl der Länge der Diagonale $\overline{AC}$

(jeweils in cm). Dann gilt nach den Voraussetzungen der Aufgabe

$$a=7-b \qquad (1)$$
$$e=b+2 \qquad (2)$$

und nach dem Satz des Pythagoras

$$a^2+b^2=e^2. \qquad (3)$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$(7-b)^2+b^2=(b+2)^2$,
$b^2-18b+45=0$. Diese

quadratische Gleichung hat die Lösungen

$b_1=9+\sqrt{81-45}=9+6=15$,
$b_2=9-6=3$.

Die Lösung $b_1=15$ entspricht wegen $a=7-b$ nicht den Bedingungen der Aufgabe.

Daher gilt $b=3$, $a=7-3=4$, $e=3+2=5$.

Die Probe zeigt, daß für $a=4$, $b=3$, $e=5$ die Gleichungen (1), (2) und (3) und damit die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Das Rechteck $ABCD$ hat also die Seitenlängen $\overline{AB}=4$ cm, $\overline{BC}=3$ cm und die Länge der Diagonale $\overline{AC}=5$ cm.

Lösungen zu alpha-heiter

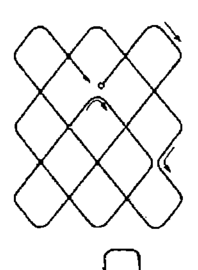
Kryptarithmetik

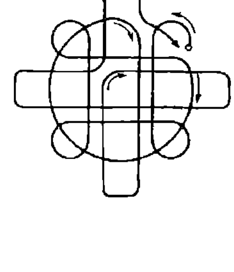
$144\cdot 12=1728$; $125\cdot 25=3125$;
$3125:25=125$

30241	34201	41230	43210
14203	10243	03214	01234
44444	44444	44444	44444

Figuren — in einem Zug zu umreißen

Lösung zu zwei Beispielen als Anleitung für die *alpha*-Leser:





Das vorliegende Material wurde entnommen aus: „Arbeitsmaterial zur Direktive des VIII. Parteitages der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975", herausgegeben von der Parteihochschule „Karl Marx" beim ZK der SED, erschienen im Verlag *Die Wirtschaft*, Berlin.

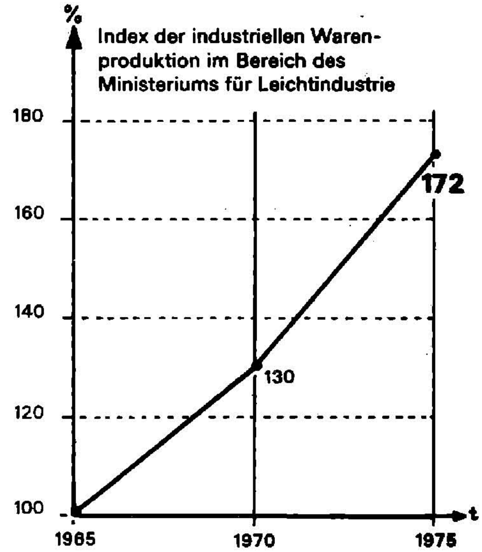
Preis der Mappe 6,20 M geblockt einseitig bedruckt. Auf 62 Tafeln wird mit mehrfarbigen Schaubildern und graphischen Darstellungen die Direktive zum Fünfjahrplan erläutert. Hervorragend für Unterricht, außerunterrichtliche Arbeit, insbesondere für Wandzeitungen geeignet.

Entwicklung der Leichtindustrie

Die industrielle Warenproduktion ist im Bereich des Ministeriums für Leichtindustrie auf mindestens 132%, die Arbeitsproduktivität auf etwa 135% gegenüber 1970 zu steigern.

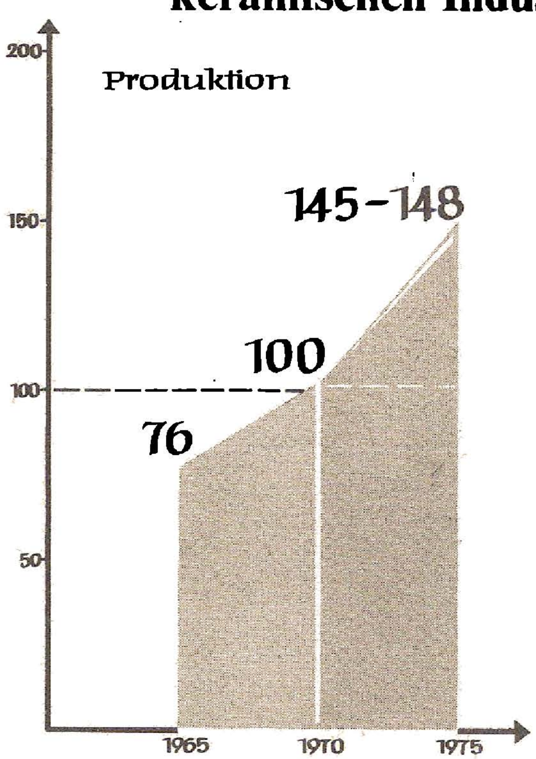
Ausgewählte industrielle Konsumgüter

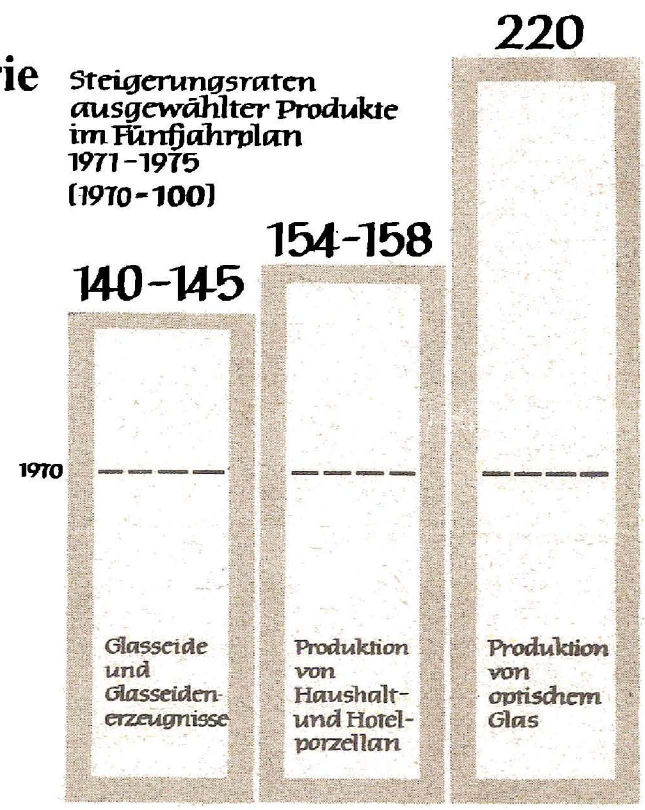
Erzeugnis	1965	1970	1975
Herrenoberbekleidung in Mio Stück	10,2	11,0	13,3
Damenoberbekleidung in Mio Stück	18,8	19,6	23,3
Kinderoberbekleidung in Mio Stück	16,6	18,7	22,1
Möbel in Mio Mark IAP	1760	2697	3800



Die Leichtindustrie hat die Produktion von Konsumgütern für die Versorgung der Bevölkerung und den Export qualitativ und quantitativ so zu steigern, daß eine ständig bessere Übereinstimmung mit dem wachsenden und sich verändernden Bedarf gesichert wird.

Entwicklung der Glas- und keramischen Industrie



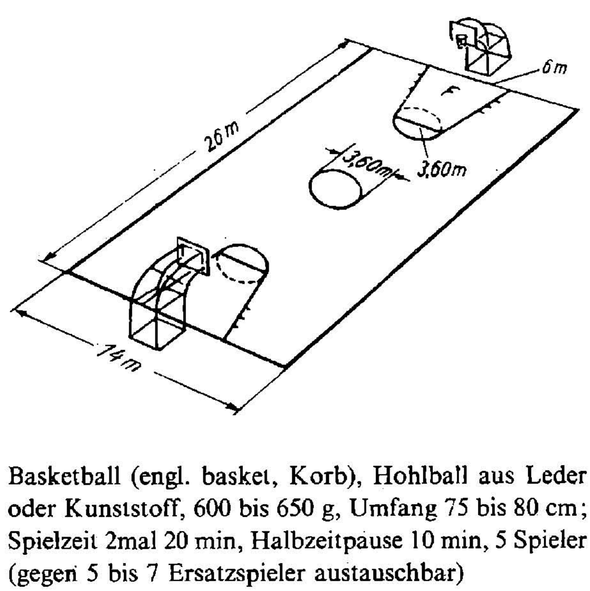


Ergebnisse bei Olympischen Spielen

1948 London: 1. USA 2. Frankreich 3. Brasilien
1952 Helsinki: 1. USA 2. UdSSR 3. Uruguay
1956 Melbourne: 1. USA 2. UdSSR 3. Uruguay
1960 Rom: 1. USA 2. UdSSR 3. Brasilien
1964 Tokio: 1. USA 2. UdSSR 3. Brasilien
1968 Mexiko: 1. USA 2. Jugoslawien 3. UdSSR
1972 München:

Aus der Geschichte des Basketballspiels

Seine ältesten Vorfahren finden wir schon vor fast 1000 Jahren in Frankreich. Als Körbe dienten damals flache, mit einem Loch versehene Steine, die an den die Spielflächen begrenzenden Mauern angebracht waren. – Die Grundlage des heutigen Basketballspiels schuf Prof. *Naismith* (USA) im Jahre 1894. Er ließ in einer Höhe von 10 Fuß = 3,05 m an der Galerie der Sporthalle Pfirsichkörbe befestigen, in die der Ball geworfen und stets wieder mit einer Leiter herausgeholt werden mußte. Die begeisterten Zuschauer auf den Rängen versuchten häufig, auf den Korb geworfene Bälle abzuwehren oder hineinzulenken, so daß später als Schutz vor dem „mitspielenden" Publikum Spielbretter angebracht wurden. Erst 1906 lösten Metallringe mit daran befestigten Korbnetzen die originellen Pfirsichkörbe ab.



Basketball (engl. basket, Korb), Hohlball aus Leder oder Kunststoff, 600 bis 650 g, Umfang 75 bis 80 cm; Spielzeit 2mal 20 min, Halbzeitpause 10 min, 5 Spieler (gegen 5 bis 7 Ersatzspieler austauschbar)