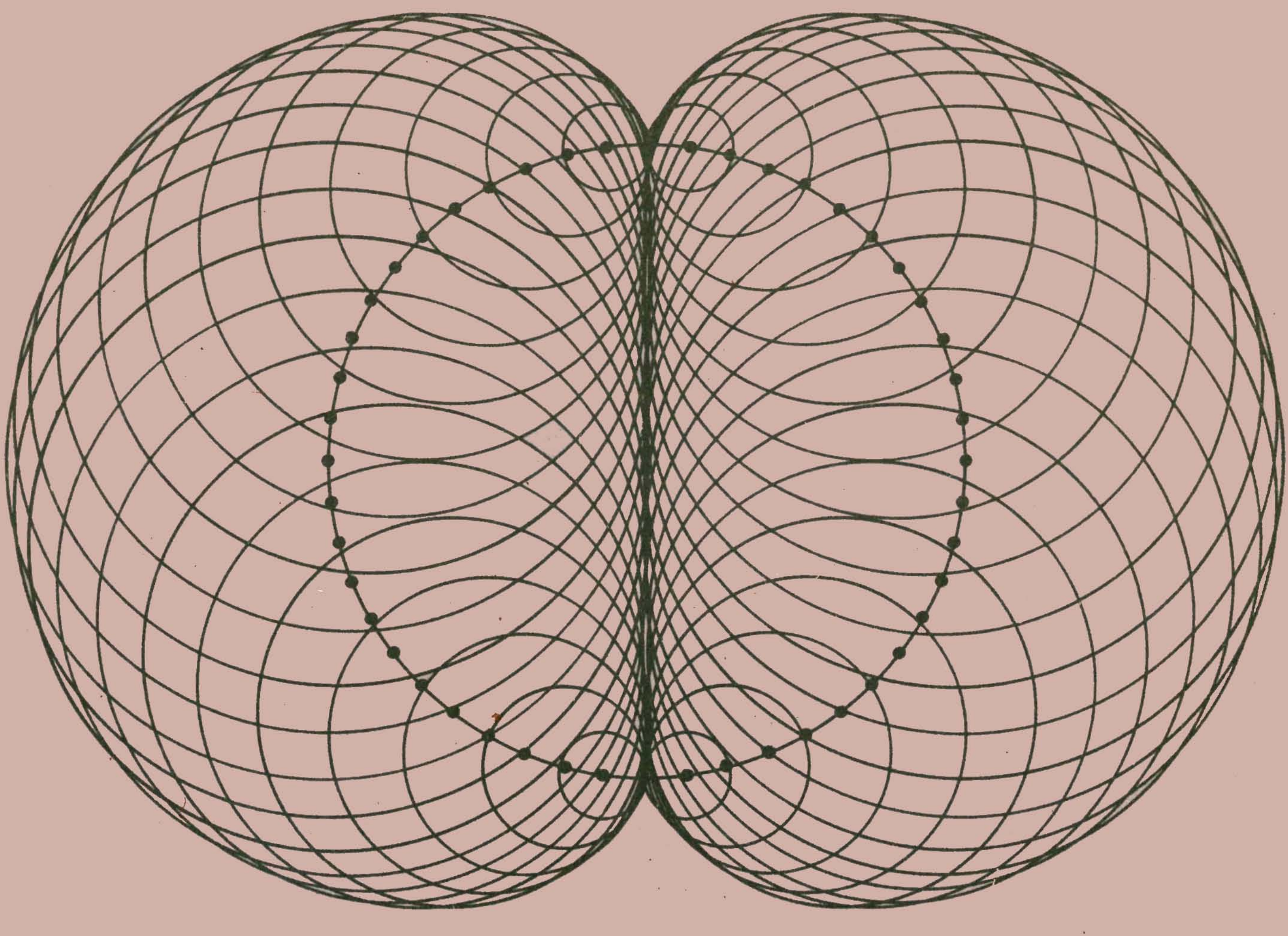
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
12. Jahrgang 1978
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Parschau, Berlin (S. 27); H. Seyferth, Leipzig (S. 29); J. Haunack, TH Magdeburg (S. 30); *Krokodil* 25/77, Moskau (S. 34); B. Henninger, Berlin (S. 35); K. Günter, PH Güstrow; Kaczmarczyk, Berlin (S. 38); C. Otto, Berlin (S. 39).
Das Titelblatt wurde unserer sowjetischen Bruderzeitschrift *Quant* 9/77 entnommen.
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 · ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 20. Dezember 1977

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Eigenschaften von Verknüpfungen

Teil 1

In den beiden Beiträgen „Die ‚Uhr-Addition‘ und andere Verknüpfungen“ sowie „Verknüpfungen in der Ebene“ (alpha 6/1976 und 4/1977) haben wir bereits eine ganze Palette von Verknüpfungsgebilden kennengelernt. Jetzt wollen wir einige Verknüpfungsgebilde näher untersuchen. Betrachten wir z. B. die Addition ganzer Zahlen, so wissen wir aus dem Mathematikunterricht, daß für dieses Verknüpfungsgebilde $(G, +)$ die folgende Eigenschaft erfüllt ist:

Für alle ganzen Zahlen x und y gilt

$$E_1: x+y=y+x.$$

D. h., die Summanden x und y sind vertauschbar. Wir sagen, die Verknüpfung + (Addition) oder das Verknüpfungsgebilde $(G, +)$ ist *kommutativ*. Beide Redeweisen bedeuten dasselbe.

Auch das Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_1)$ mit $x \circ_1 y =_{Df} 2(x+y)$ für alle $x, y \in G$ ist kommutativ; für alle ganzen Zahlen x, y gilt nämlich:

$x \circ_1 y = 2(x+y) = 2(y+x) = y \circ_1 x$.

Weitere kommutative Verknüpfungen sind uns durch die verschiedenen Mittelwerte gegeben:

$x \circ_2 y =_{Df} \frac{x+y}{2}$ über R^* (oder R oder P),

$x \circ_3 y =_{Df} \sqrt{x \cdot y}$ über P^+ (oder $P^+ \cup \{0\}$),

$x \circ_4 y =_{Df} \frac{2xy}{x+y}$ über P^+ (oder $R^* \setminus \{0\}$)

(Begründung?), wobei P^+ die Menge der positiven reellen Zahlen ist.

Die „Uhr-Addition“ ist ebenso kommutativ (vgl. alpha 6/1976, Aufgabe 2b) wie die Konstruktion des Mittelpunktes oder die Streckenhalbierung (vgl. alpha 4/1977, Aufgabe 2). Daß aber nicht jedes Verknüpfungsgebilde kommutativ sein muß, zeigt uns z. B. die Subtraktion ganzer Zahlen (Warum?). D. h., die Eigenschaft der Kommutativität ist für ein Verknüpfungsgebilde keineswegs selbstverständlich.

Aufgabe 1:

a) Untersuche, ob die Verknüpfungen

$x \circ_5 y =_{Df} 2x+y$	über R^*,
$x \circ_6 y =_{Df} x \uparrow y = x^y$	über $N \setminus \{0\}$,
$x \circ_7 y =_{Df} x \sqcap y = \text{ggT}(x, y)$	über N,
$x \circ_8 y =_{Df} \sqrt{x^2+y^2}$	über $P^+ \cup \{0\}$,
$x \circ_9 y =_{Df} x(x+y)$	über R,
$x \circ_{10} y =_{Df} x+y+xy$	über G,
$x \circ_{11} y =_{Df} \lvert x-y \rvert$	über R^*

kommutativ sind.

b) Gib für die nicht-kommutativen Verknüpfungen $\circ$ aus a) alle Lösungen der Gleichung $x \circ y = y \circ x$ an!

c) Stelle fest, welche der über der Ebene ε definierten geometrischen Verknüpfungen $\circ$, $*$, $\square$, $\bullet$, $\blacktriangle$, $\blacksquare$, ∇ kommutativ sind (vgl. alpha 4/1977)!

d) Gib selbst kommutative und nicht-kommutative Verknüpfungen an!

Neben der Kommutativität gibt es nun eine Reihe weiterer interessanter Eigenschaften, die in einem vorgegebenen Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$ erfüllt sein können. Unser Ziel ist es, möglichst viele dieser Eigenschaften aufzudecken. Dabei werden wir aber zugleich festhalten, welche (der uns aus anderen Beispielen schon bekannten) Eigenschaften *nicht* erfüllt sind. Letzteres wird sich insbesondere dann als nützlich erweisen, wenn wir Verknüpfungsgebilde vergleichen bzw. gegenüberstellen wollen.

Eine Eigenschaft, die wir ebenfalls schon aus dem Unterricht kennen, ist die *Assoziativität*. Addition und Multiplikation sind assoziative Verknüpfungen, d. h. für alle reellen Zahlen x, y und z gilt

E_2: $(x+y)+z = x+(y+z)$ bzw.
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Aufgabe 2:

Wir setzen voraus, die Verknüpfungsgebilde $(P, +)$ und $(P, \cdot)$ sind assoziativ.

Zeige, daß dann auch die Verknüpfungsgebilde

a) $(N, +)$, $(G, +)$, $(R^*, +)$, $(R, +)$ und

b) $(N, \cdot)$, $(G, \cdot)$, $(R^*, \cdot)$, $(R, \cdot)$

assoziativ sind!

Für ein Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$ hat der Term $x \circ y \circ z$ zunächst keinen Sinn, da der Definitionsbereich $D\circ$ der Funktion $\circ$ laut Definition aus der Menge aller (geordneten) Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in M$ besteht:

$D\circ = M \times M = \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in M\}$.

Das wird auch anhand unseres Automaten deutlich, der lediglich *zwei* Eingänge besitzt! (Vgl. Abbildung 1, alpha 6/1976.) Erst durch Klammersetzung

$(x \circ y) \circ z$ oder $x \circ (y \circ z)$

erreichen wir, daß jeweils *zwei* Elemente miteinander verknüpft werden; nämlich im 1. Fall:

$(x, y) \rightarrow x \circ y = u$ und daraufhin

$(u, z) \rightarrow u \circ z = (x \circ y) \circ z = v$,

im 2. Fall:

$(y, z) \rightarrow y \circ z = p$ und daraufhin

$(x, p) \rightarrow x \circ p = x \circ (y \circ z) = q$.

Wenn nun das Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$ assoziativ ist, d. h. für alle x, y und $z \in M$ gilt

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

dann bedeutet das demnach, daß die Automaten-„Bäume“ für $(x \circ y) \circ z$ bzw. $x \circ (y \circ z)$ jeweils dasselbe Element liefern:

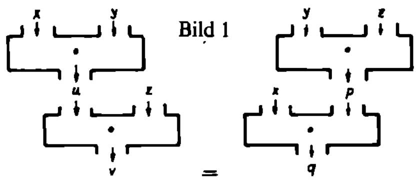


Bild 1

D. h. also, die Assoziativität erlaubt das Versetzen der Klammern:

$(x \circ [y) \circ z]$.

Dann können wir die Klammern aber auch, ohne Mißverständnisse zu befürchten, ganz weglassen:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = x \circ y \circ z.$$

Ein weiteres Beispiel:

Über der Menge G der ganzen Zahlen definieren wir

$$x \circ_{12} y =_{Df} x+y-3.$$

Das Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_{12})$ ist kommutativ und assoziativ, denn für alle ganzen Zahlen x, y und z gilt:

a) $x \circ_{12} y = x+y-3 = y+x-3 = y \circ_{12} x$;

b) $(x \circ_{12} y) \circ_{12} z = (x+y-3)+z-3$
$= x+(y+z-3)-3$
$= x \circ_{12} (y \circ_{12} z)$.

Aufgabe 3:

a) Beweise, daß die Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_{13})$ und $(G, \circ_{14})$ mit

$x \circ_{13} y =_{Df} x+y+c$ bzw. $x \circ_{14} y =_{Df} x \cdot y \cdot c$

kommutativ und assoziativ sind! Dabei sei c jeweils eine beliebige, aber feste ganze Zahl.

b) Wähle c so, daß $(G, \circ_{13})$ bzw. $(G, \circ_{14})$ in dir bereits bekannte Verknüpfungsgebilde übergehen!

Wie im Falle der Kommutativität überzeugen wir uns jetzt, daß auch die Assoziativität nicht immer erfüllt sein muß. So sind die Subtraktion und die Division reeller Zahlen (Welche Einschränkung an die Trägermenge ist bzgl. der Division erforderlich?) weder kommutativ noch assoziativ! (Begründung?)

Aufgabe 4:

a) Zeige, daß auch die Verknüpfungsgebilde $(G, -)$ und $(R, -)$ sowie $R^* \setminus \{0\}, :)$ und $(R \setminus \{0\}, :)$ weder kommutativ noch assoziativ sind!

b) Vgl. deine Begründung mit der für Aufgabe 2! Formuliere die Aufgabe (evtl.) um, daß du analog zu Aufgabe 2 schließen kannst!

Mit unseren nächsten Beispielen wollen wir dem vielleicht entstandenen Eindruck begegnen, daß Kommutativität und Assoziativität in einem Verknüpfungsgebilde entweder beide zugleich gelten müssen oder aber beide zugleich nicht erfüllt sein können. Wir betrachten deshalb das kommutative Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_1)$ mit $x \circ_1 y =_{Df} 2(x+y)$ für

alle ganzen x, y. Es ist nicht assoziativ. Um das zu zeigen, genügt es wieder, ein Gegenbeispiel zu finden:
$(1\circ_1 2)\circ_1 3 = 18$, aber $1\circ_1(2\circ_1 3) = 22$.
Auch die Mittelwerte liefern Verknüpfungen, die zwar kommutativ, aber sämtlich nicht assoziativ sind! (Beweis?)
Eine assoziative Verknüpfung, die nicht kommutativ ist, finden wir über der Menge N der natürlichen Zahlen, wenn wir unter $x\circ_{15}y$ diejenige natürliche Zahl z verstehen wollen, deren Zifferndarstellung durch Hintereinandersetzen der Ziffern von x (zuerst) und der Ziffern von y gewonnen wird. Dieses Verknüpfungsgebilde $(N, \circ_{15})$ ist offensichtlich assoziativ, aber nicht kommutativ; z. B. gilt $1\circ_{15}2 = 12$, aber $2\circ_{15}1 = 21$.

Aufgabe 5:

a) Untersuche, ob die in Aufgabe 1 a) genannten Verknüpfungen assoziativ sind!
b) Gib selbst assoziative und nicht-assoziative Verknüpfungsgebilde an!
Stütze dich dabei auch auf die Beispiele aus alpha 6/1976, und 4/1977!
Unserem Anliegen, neben der Kommutativität (Eigenschaft E_1) und Assoziativität (E_2) weitere Eigenschaften von Verknüpfungen aufzuspüren, kommen wir bereits näher, wenn wir die vier Grundrechenarten einmal vergleichen und gegenüberstellen. Nach unseren bisherigen Überlegungen können wir allerdings lediglich feststellen, daß entweder Assoziativität und Kommutativität erfüllt sind (Addition, Multiplikation) oder aber beide Gesetze nicht gelten (Subtraktion, Division). Bei näherer Untersuchung stoßen wir jedoch im Falle von Subtraktion (über P) und Division (über $P\setminus\{0\}$) z. B. auf die folgenden „Rechengesetze“:
Für alle x, y, z, u und v gilt
E_3: $\quad x\circ x = y\circ y$,
E_4: $\quad (x\circ z)\circ(y\circ z) = x\circ y$,
E_5: $\quad x\circ(x\circ y) = y$ und
E_6: $\quad (x\circ y)\circ(u\circ v) = (x\circ u)\circ(y\circ v)$.
Die Eigenschaft E_3 heißt *Unipotenz*, die Eigenschaft E_6 *Bisymmetrie*. (Auch die beiden restlichen Eigenschaften haben in der Fachliteratur einen Namen, nämlich Rechts-Transitivität bzw. Links-Systemregel.)
Während die drei Gesetze E_3 bis E_5 weder von der Addition noch von der Multiplikation erfüllt werden, überzeugen wir uns ohne Mühe, daß die Bisymmetrie eine Eigenschaft ist, die *alle vier Grundrechenarten* besitzen! Denn für alle reellen x, y, u und v gilt

$$(x+y)+(u+v) = (x+u)+(y+v),$$
$$(x-y)-(u-v) = (x-u)-(y-v),$$
$$(x\cdot y)\cdot(u\cdot v) = (x\cdot u)\cdot(y\cdot v),$$
$$(x:y):(u:v) = (x:u):(y:v),$$

wobei für die Division wieder $P\setminus\{0\}$ als Trägermenge fungiert.
Der Vergleich der vier Grundrechenarten hat demzufolge jetzt dieses Aussehen:

Tabelle 1

Eigenschaft	Verknüpfungsgebilde $(P,+)$ $(P,\cdot)$	$(P,-)$. $(P\setminus\{0\},:)$
E_1	x	–
E_2	x	–
E_3	–	x
E_4	–	x
E_5	–	x
E_6	x	x

Aufgabe 6:

Untersuche die bisher aufgeführten Verknüpfungen in bezug auf diese neuen Eigenschaften (E_3 bis E_6), und stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen!
Gilt für ein Element x eines Verknüpfungsgebildes $(M, \circ)$ $x\circ x = x$, so heißt dieses Element *idempotent*. So sind sowohl 0 als auch 1 idempotente Elemente, wenn wir bei den entsprechenden Grundrechenarten bleiben:
$0+0=0$, $0-0=0$, $0\cdot 0=0$, $1\cdot 1=1$
und $1:1=1$,
dies sind dann auch schon die einzigen idempotenten Elemente. Die Mittelwert-Verknüpfungen hingegen, die einerseits kommutativ und bisymmetrisch sind, andererseits aber keine der Eigenschaften E_2 bis E_5 erfüllen (Beweis?), besitzen die Eigenschaft, daß *alle Elemente* der Trägermenge idempotent sind. Wir sagen dann, die Verknüpfung selbst ist *idempotent*. Für alle x gilt also
E_7: $\quad x\circ x = x$.
Es gilt in der Tat

$$x\circ_2 x = \frac{x+x}{2} = \frac{2x}{2} = x,$$
$$x\circ_3 x = \sqrt{x\cdot x} = \sqrt{x^2} = x$$
(beachte die Trägermenge!),
$$x\circ_4 x = \frac{2x\cdot x}{x+x} = \frac{2x^2}{2x} = x.$$

Aufgabe 7:

Ergänze deine Tabelle aus Aufgabe 6 in bezug auf Idempotenz!
Auch sind – mit einer Ausnahme – alle in *alpha*, 4/1977, aufgeführten geometrischen Verknüpfungen idempotent. (Die Ausnahme, nämlich das Verknüpfungsgebilde $(c, \circ)$ enthält nur entweder einen, drei oder neun idempotente Elemente; das sind gerade die Wendepunkte der Kubik c!) Bleiben wir in der Ebene, so erweist sich z. B. die Mittelpunktskonstruktion oder Streckenhalbierung $\circ_{16}$ (alpha 4/1977) als idempotente und bisymmetrische Verknüpfung. Während die Idempotenz von $(\varepsilon, \circ_{16})$ dabei laut Definition gesichert ist, spiegelt sich die Bisymmetrie in dem folgenden bekannten Satz wider:
Die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.

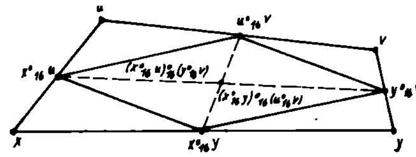


Bild 2

Aufgabe 8:

Beweise diesen Satz!
Von einigen geometrischen Verknüpfungen wissen wir darüber hinaus, daß sie auch die Eigenschaft E_5 erfüllen (vgl. alpha 4/1977, Aufgaben 8 b und 13).

Aufgabe 9:

Überlege und veranschauliche dir, welche Eigenschaften die uns bekannten geometrischen Verknüpfungen besitzen! *I. Lehmann*

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1:
a) Die Verknüpfungen $\circ_7$, $\circ_8$, $\circ_{10}$ und $\circ_{11}$ sind kommutativ: $x\circ_7 y = x\sqcap y = y\sqcap x = y\circ_7 x$ (vgl. dazu die Definition von $\sqcap$ in alpha 4/1977).
$x\circ_8 y = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y^2+x^2} = y\circ_8 x$;
$x\circ_{10} y = x+y+xy = y+x+yx = y\circ_{10} x$;
$x\circ_{11} y = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x|$
$= y\circ_{11} x$.
Die Verknüpfungen $\circ_5$, $\circ_6$ und $\circ_9$ sind nicht kommutativ, z. B. gilt:
$1\circ_5 2 = 4$, aber $2\circ_5 1 = 5$;
$1\uparrow 2 = 1$, aber $2\uparrow 1 = 2$;
$1\circ_9 2 = 3$, aber $2\circ_9 1 = 6$.
b) Die Gleichung $x\circ_5 y = y\circ_5 x$ hat nur die triviale Lösung $x = y$;
die Gleichung $x\circ_6 y = y\circ_6 x$ hat neben der trivialen Lösung $x = y$ noch das Lösungspaar $x = 2$, $y = 4$ (bzw. $x = 4$, $y = 2$) (beachte, daß x und y *natürliche* Zahlen sind);
die Gleichung $x\circ_9 y = y\circ_9 x$ hat neben der trivialen Lösung $x = y$ die Lösung $x = -y$.
c) Nur $\circ$ (bzw. $\hat{}$ mit $a:b = 1$).

Aufgabe 2:
Da *für alle* reellen Zahlen x, y und z $(x+y)+z = x+(y+z)$ bzw. $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ gilt, folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß N, G, R^* und R (echte) Teilmengen von P sind.

Aufgabe 3:
a) Der Beweis verläuft analog zu dem für $(G, \circ_{12})$.
b) $(G, \circ_{13}): c = 0$, $c = -3$; vgl. auch die Definition der „Uhr-Addition“; $(G, \circ_{14}): c = 1$.

Aufgabe 4:
a) $2-1 \neq 1-2$; $(1-2)-3 \neq 1-(2-3)$, d. h. $(G, -)$ und $(R, -)$ sind weder kommutativ noch assoziativ;
$2:1 \neq 1:2$; $(1:2):3 \neq 1:(2:3)$, d. h. auch $(R^*\setminus\{0\}, :)$ und $(R\setminus\{0\}, :)$ sind weder kommutativ noch assoziativ.

b) Aus der Tatsache, daß $(P, -)$ und $(P\backslash\{0\}, :)$ nicht kommutativ und nicht assoziativ sind, können wir nicht – wie in Aufgabe 2 – auf die Behauptung schließen. Wenn wir die Teilmengenbeziehungen ($G \circ R \circ P$ bzw. $R^*\backslash\{0\} \circ R\backslash\{0\} \circ P\backslash\{0\}$) ausnutzen wollen, könnte die Aufgabe wie folgt lauten:
$(G, -)$ und $(R^*\backslash\{0\}, :)$ sind weder kommutativ noch assoziativ. Zeige, daß dies dann auch für die Verknüpfungsgebilde $(R, -)$, $(P, -)$, $(R\backslash\{0\}, :)$ und $(P\backslash\{0\}, :)$ zutrifft!

Aufgabe 5:

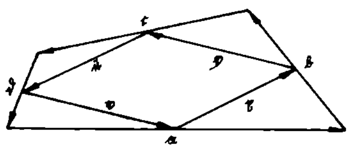
a) Die Verknüpfungen $\circ_5$, $\circ_6$, $\circ_9$ und $\circ_{11}$ sind nicht assoziativ:
$(1 \circ_5 2) \circ_5 3 = 11$, aber $1 \circ_5 (2 \circ_5 3) = 9$;
$(2 \uparrow 3) \uparrow 2 = 64$, aber $2 \uparrow (3 \uparrow 2) = 512$;
$(1 \circ_9 2) \circ_9 3 = 18$, aber $1 \circ_9 (2 \circ_9 3) = 11$;
$(1 \circ_{11} 2) \circ_{11} 3 = 2$, aber $1 \circ_{11} (2 \circ_{11} 3) = 0$;
Die Verknüpfungen $\circ_7$, $\circ_8$ und $\circ_{10}$ sind assoziativ: $(x \circ_7 y) \circ_7 z = (x \sqcap y) \sqcap z =_{Df} t$. Dann folgt $t \mid (x \sqcap y)$ und $t \mid z$. Wegen $(x \sqcap y) \mid x$ und $(x \sqcap y \mid y$ folgt damit auf Grund der Transitivität der Teilbarkeitsrelation auch $t \mid x$ und $t \mid y$. Mit $t \mid y$ und $t \mid z$ folgt andererseits nach Definition des größten gemeinsamen Teilers $t \mid (y \sqcap z)$; entsprechend folgt aus $t \mid x$ und $t \mid (y \sqcap z)$ jetzt $t \mid [x \sqcap (y \sqcap z)]$. Analog zeigt man, daß auch $[x \sqcap (y \sqcap z)] \mid [(x \sqcap y) \sqcap z]$ gilt, so daß der Beweis, nämlich $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$, erbracht ist.
$(x \circ_8 y) \circ_8 z = \sqrt{(x^2 + y^2) + z^2} = \sqrt{x^2 + (y^2 + z^2)}$
$= x \circ_8 (y \circ_8 z)$;
$(x \circ_{10} y) \circ_{10} z = (x + y + xy) + z + (x + y + xy) \cdot z$
$= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) = x \circ_{10} (y \circ_{10} z)$.

Aufgabe 6:

Keine der Verknüpfungen ($\circ_1$ bis $\circ_{15}$) ist rechts-transitiv oder erfüllt die Links-Systemregel. Lediglich die Verknüpfung $\circ_{11}$ ist unipotent. Bis auf die Verknüpfungen $\circ_6$, $\circ_9$, $\circ_{11}$ und $\circ_{15}$ sind alle anderen bisymmetrisch.

Aufgabe 7:

Die Verknüpfungen $\circ_2$, $\circ_3$, $\circ_4$ und $\circ_7$ sind die einzigen idempotenten Verknüpfungen.



Aufgabe 8:

Vektorieller Beweis:

(1) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{o}$,

(2) $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{u} + \mathfrak{v} = \mathfrak{o}$,

(3) $\mathfrak{x} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$, $\mathfrak{y} = \frac{1}{2}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$,

$\mathfrak{u} = \frac{1}{2}(\mathfrak{c} + \mathfrak{d})$, $\mathfrak{v} = \frac{1}{2}(\mathfrak{d} + \mathfrak{c})$.

Damit erhalten wir:

a) $\mathfrak{x} + \mathfrak{u} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = \mathfrak{o}$;

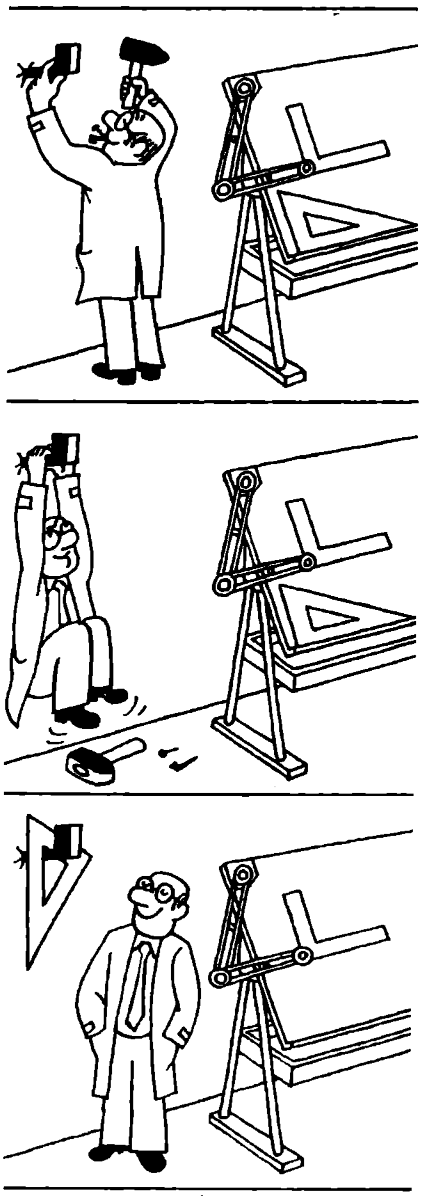
$\mathfrak{x} = -\mathfrak{u}$ und

b) $\mathfrak{y} + \mathfrak{v} = \frac{1}{2}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{d} + \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$;

$\mathfrak{y} = -\mathfrak{v}$.

Aufgabe 9:

Alle in alpha 4/1977 aufgeführten geometrischen Verknüpfungsgebilde sind – mit einer Ausnahme – bisymmetrisch und idempotent. Die Verknüpfung $\circ$ über der Kubik c ist zwar bisymmetrisch, aber nicht idempotent. Keine der Verknüpfungen ist unipotent oder assoziativ. Die Verknüpfungsgebilde $(\varepsilon, \circ)$, $(p, \circ_2)$, $(e\backslash\{A\}, \circ_2)$ und $(c, \circ)$ sind kommutativ, die restlichen nicht. Die Links-Systemregel erfüllen die Verknüpfungsgebilde $(\varepsilon, \square)$, $(k, \circ_2)$, $(p, \circ_1)$, $(e, \circ)$, $(e\backslash\{A\}, \circ_1)$ und $(c, \circ)$, die restlichen wieder nicht.



Das arithmetisch-geometrische Mittel Teil 2

Das arithmetisch-geometrische Mittel

Fassen wir zusammen: Mit wachsendem k werden die a_k immer kleiner (nach (2)), bleiben jedoch größer als b, die b_k werden immer größer (nach 3)), bleiben jedoch kleiner als a, und die Differenzen $a_k - b_k$ werden auch immer kleiner (nach 4)).
Wir erwähnen (ohne Beweis) folgende bemerkenswerte Tatsache:
Setzt man $a = 1$ und b gleich einem echten Dezimalbruch, so stimmen a_2 und b_2 in der ersten Stelle hinter dem Komma, a_3 und b_3 in den ersten $3 = 2^2 - 1$ Stellen hinter dem Komma, a_4 und b_4 in den ersten $7 = 2^3 - 1$ Stellen hinter dem Komma, a_5 und b_5 in den ersten $15 = 2^4 - 1$ Stellen hinter dem Komma, allgemein a_{k+1} und b_{k+1} in den ersten $2^k - 1$ Stellen hinter dem Komma überein! (Vgl. das Gaußsche Zahlenbeispiel $a = 1$, $b = 0, 2$.) Die Ziffern bleiben überdies in allen folgenden Gliedern a_{k+2}, b_{k+2}; a_{k+3}, b_{k+3}; usw. erhalten.
Betrachten wir nun zunächst die (obere) Folge a, a_1, a_2, a_3, ... Es ist eine Folge immer kleiner werdender reeller Zahlen; jedoch gilt $b < a$, $b < a_1$, $b < a_k$ (für alle k). Die Zahl b ist eine untere Schranke für die Glieder der Folge; kleiner als b kann kein Glied werden. Es sei α die größte aller unteren Schranken. (Daß es eine solche reelle Zahl α wirklich gibt, kann hier nicht bewiesen werden.) Dann hat α folgende Eigenschaften:
(1) Es ist stets $\alpha \leq a$, $\alpha \leq a_k$ (für alle $k = 1$, 2, 3, ...).
(2) Jede Zahl α', die größer als α ist, ist keine untere Schranke der Folge mehr (d. h. es gibt mindestens ein Glied der Folge, das kleiner als α' ist).

Die Zahl α heißt untere Grenze der Folge a, a_1, a_2, a_3, ... (Die Zahlen a, a_1, a_2, a_3, ... werden immer kleiner und nähern sich immer mehr dieser reellen Zahl. Wenn wir „genügend weit" in der Folge gehen, können wir sicher sein, daß sich die einzelnen Glieder „beliebig wenig" von α unterscheiden, sich also die Differenzen $a_k-\alpha$ für großes k „beliebig wenig" von 0 unterscheiden. Die Zahlen $a_k-\alpha$ werden nie gleich 0, auch wenn k noch so groß ist. Vielmehr unterscheiden sich die $a_k-\alpha$ von 0 immer weniger. – Diese Aussagen sollen hier nicht weiter präzisiert werden.)

Betrachten wir nun die (untere) Folge b, b_1, b_2, b_3, ... Es ist eine Folge immer größer werdender reeller Zahlen; jedoch gilt $b<a$, $b_1<a$, $b_k<a$ (für alle k). Die Zahl a ist eine obere Schranke für die Glieder der Folge, größer als a kann kein Glied werden. Es sei β die kleinste aller oberen Schranken. (Daß es eine solche reelle Zahl β wirklich gibt, kann hier nicht bewiesen werden.) Dann hat β folgende Eigenschaften,

(1) Es ist stets $b<\beta$, $b_k<\beta$ (für alle $k=1, 2, 3, \ldots$).

(2) Jede Zahl β', die kleiner als β ist, ist keine obere Schranke mehr (d. h. es gibt mindestens ein Glied der Folge, das größer als β' ist).

Die Zahl β heißt obere Grenze der Folge b, $b_1, b_2, b_3, \ldots$ (Die Zahlen $b, b_1, b_2, b_3, \ldots$ werden immer größer und nähern sich immer mehr dieser reellen Zahl β.)

Wir zeigen nun: Es muß $\beta\leq\alpha$ sein, es kann nicht $\beta>\alpha$ sein. Wäre $\beta>\alpha$, so gäbe es nach der Eigenschaft (2) von α ein Glied der Folge $a, a_1, a_2, \ldots$, das kleiner als β ist: $a_i<\beta$ für ein gewisses i.

Nach der Eigenschaft (2) von β gäbe es dann ein Glied der Folge $b, b_1, b_2, \ldots$, das größer als a_i ist:

$a_i<b_j$ für ein gewisses j.

Andererseits gilt $b_j<\beta$. Also

(5) $\quad a_i<b_j<\beta$.

Nun ist

$$b<b_1<b_2<\ldots<b_i<a_i<a_{i-1}<\ldots<a_2<a_1<a,$$

d. h. $\quad b_k<a_i$ für $k=1, 2, \ldots, i$.

Hiernach kann in (5) nicht $j\leq i$ sein, es muß $j>i$ sein. Ferner ist

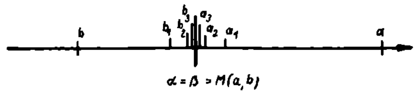
$$b<b_1<b_2<\ldots<b_j<a_j<a_{j-1}<\ldots<a_2<a_1<a,$$

d. h. $\quad b_j<a$ für $k=1, 2, \ldots, j$.

Hiernach kann in (5) doch nicht $i\leq j$ sein, es muß $i>j$ sein. Es muß einerseits $j>i$, andererseits $j<i$ sein. Dies ist ein Widerspruch. Daher kann die Annahme $\beta>\alpha$ nicht richtig sein und somit ist aber die Behauptung $\beta\leq\alpha$ richtig.

Aus $\alpha<a_k$ (für alle k) und $\beta>b_k$, also $-\beta<-b_k$ (für alle k) folgt (da $\alpha\geq\beta$ ist) $0\leq\alpha-\beta<a_k-b_k$.

Nach 4) ist $a_k-b_k<\frac{a-b}{2^k}$. Somit gilt $0\leq\alpha-\beta<\frac{a-b}{2^k}$. Da $\frac{a-b}{2^k}$ für großes k beliebig klein werden kann, $\alpha-\beta$ aber eine bestimmter



Wert ≥ 0 ist, der gar nicht von k abhängt, muß notwendig $\alpha-\beta=0$ sein. Somit gilt

$\alpha=\beta$.

Definition: Der gemeinsame Wert $\alpha=\beta$ der unteren Grenze α der Folge a, a_1, a_2, a_3, ... und der oberen Grenze β der Folge b, b_1, b_2, b_3, ... heißt das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen a und b. Wir schreiben dafür $M(a, b)$.

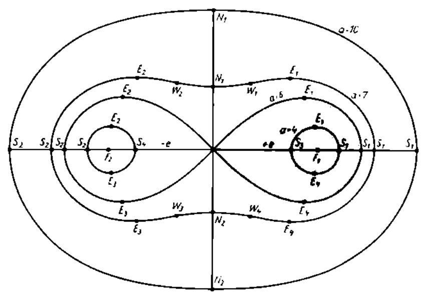
Aufgaben:

Die folgenden Eigenschaften des arithmetisch-geometrischen Mittels sind zu begründen: a) $M(a, b)=M(a_k, b_k)$, b) $M(na, nb)=nM(a, b)$. c) $M(a, b)=aM\left(1, \frac{b}{a}\right)=bM\left(\frac{a}{b}, 1\right)=M(b, a)$.

Lemniskate und Ellipse

Im folgenden werden Anwendungen des arithmetisch-geometrischen Mittels beschrieben (die Resultate werden nicht begründet).

Wir betrachten eine Lemniskate, das ist eine Kurve in Form einer Acht, der geometrische Ort aller Punkte P, für die das Produkt r_1r_2 der Abstände r_1 und r_2 von den festen Punkten F_1 und F_2 stets einen konstanten Wert hat.



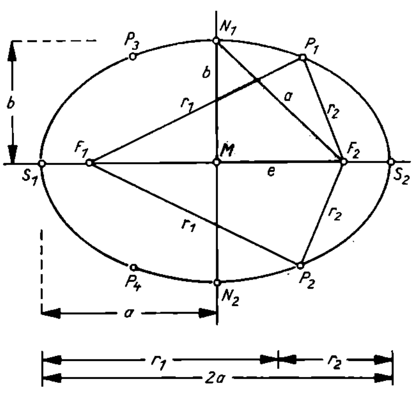
Lemniskate

Ist a der Abstand der Punkte F_1 und F_2 vom Nullpunkt, so gilt

$r_1r_2=a^2$.

Der Flächeninhalt einer Schleife ist $F=a^2$. Die Länge einer Lemniskatenschleife ist $\frac{\pi a\sqrt{2}}{M(\sqrt{2}, 1)}$. Hier tritt die aus der Kreisberechnung bekannte Zahl π auf. (π ist charakterisiert als das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser des Kreises.) Ferner tritt das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen 1 und $\sqrt{2}$ auf! Da $\pi=3{,}14159\ldots$ und $M(\sqrt{2}, 1)=1{,}19814\ldots$ (siehe das Gaußsche Zahlenbeispiel) ist, erhält man für die Länge den Näherungswert $3{,}7081a$.

Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte P, für die die Summe r_1+r_2 der Abstände r_1 und r_2 von den festen Punkten F_1 und F_2 stets einen konstanten Wert hat: $r_1+r_2=2a$. Jede Gerade durch den Mittelpunkt M schneidet die Ellipse in einem Durchmesser. Der größte Durchmesser einer Ellipse



Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten konstant ($2a$) ist.

hat den Wert $2a$. Der kleinste Durchmesser habe den Wert $2b$. Der Flächeninhalt einer Ellipse ist dann $F=\pi ab$. Um ihren Umfang U anzugeben, führen wir für $a>b$ die positive Zahl $k<1$ durch $k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ $\left(\text{also } k=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)$ ein. Ferner setzen wir $k'=\frac{b}{a}$, so daß $k^2+k'^2=1$, also $k'=\sqrt{1-k^2}$ ist. Dann gilt

$$U=2\pi a\left\{\frac{k'^2}{M(1, k')}+\frac{k'k^2M_1(1, k')}{M(1,k')^2}\right\}.$$

Hier erscheint das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen 1 und $k'=\sqrt{1-k^2}$. $M_1(1, k')$ ist eine Größe, die von $M(1, k')$ abhängt. (Genauer gilt: $M_1(1, k')$ ist der Differentialquotient $\frac{dM(1, k')}{d^{k'}}$.)

Man kann den Umfang der Ellipse auch als Summe der Reihe

$$\frac{2\pi}{M(a, b)}\{a_1^2-2(a_2^2-b_2^2)-4(a_3^2-b_3^2)-8(a_n^2-b_n^2)-\ldots\}$$

erhalten. Hierin ist $M(a, b)$ das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen der großen Halbachse a und der kleinen Halbachse b und $a_1=\frac{a+b}{2}$, $b_1=\sqrt{ab}$, $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2=\sqrt{a_1b_1}$, ... usw.

Es sei bemerkt, daß durch

$$\pi\left(3\cdot\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)$$

ein sehr genauer Näherungswert für den Ellipsenumfang U gegeben wird. (Hier erscheint das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$ und das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ der großen Halbachse a und der kleinen Halbachse b.)

Das arithmetisch-geometrische Mittel bei C. F. Gauß

Schon während seiner Schulzeit beschäftigte sich *C. F. Gauß* (in Braunschweig) mit zahlentheoretischen Fragestellungen, mit der *Methode der kleinsten Quadrate*, mit den Grundlagen der Geometrie. In seinen Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert (Teil I erschien als Buch in Berlin 1926) sagte *F. Klein* (1849 bis 1925) darüber: „Ein natürliches Interesse, ich möchte fast sagen eine gewisse kindliche Neugier, führen den Knaben unabhängig von allen äußeren Einflüssen zuerst auf mathematische Fragen. Und zwar ist es das reine Handwerk des Zahlenrechnens, das ihn zunächst anzieht. Er rechnet immerfort mit einem geradezu überwältigenden Fleiß und nicht zu ermüdender Ausdauer. Durch diese fortwährende Übung im Handhaben der Zahlen, z. B. Dezimalbrüchen von unglaublicher Stellenzahl, erwirbt er sich nicht nur die erstaunliche Virtuosität der Rechentechnik, die ihn zeitlebens auszeichnete; er erringt sich auch ein ungeheures Gedächtnismaterial an bestimmten numerischen Werten und damit eine Kennerschaft und einen Überblick im Reiche der Zahlen, wie ihn vorher und nachher wohl kaum jemand besessen hat. Neben dem Zahlenrechnen beschäftigt ihn das numerische Operieren mit unendlichen Reihen. Von den Erfahrungen, die er an Zahlen macht, also auf induktivem, ‚experimentellem' Wege, kommt er dann schon frühe zu der Erkenntnis allgemeiner Beziehungen und Gesetze... Einer der ältesten Gegenstände, der *Gauß'* Entdeckerlust reizte, ist das sog. arithmetisch-geometrische Mittel." Mit 14 Jahren (1791) entdeckte er die Existenz des arithmetisch-geometrischen Mittels und „diese Entdeckung übte einen solchen Reiz auf ihn aus, daß er während der folgenden 10 Jahre ununterbrochen an der Ausgestaltung der Theorie arbeitete" (*H. Geppert*). Ob er von selbst auf das arithmetisch-geometrische Mittel (agM) gekommen ist oder durch Buchstudium oder von irgendeiner anderen Quelle her dazu angeregt wurde, ist nicht feststellbar.

(Bereits 1784/85 hatte der französische Analytiker *J. L. Lagrange* [1736 bis 1813] den Algorithmus des agM aufgestellt. Doch es ist sehr unwahrscheinlich, daß der 14jährige Gymnasiast *Gauß Lagranges* Veröffentlichungen darüber gelesen haben sollte.)

Der junge *Gauß* hatte zu jener Zeit noch keine Kenntnisse in der Infinitesimalrechnung. Sicherlich hatte er die schnelle Annäherung der fortgesetzt gebildeten arithmetischen und geometrischen Mittel aus zwei Zahlen bemerkt und den gemeinsamen Grenzwert geahnt.

„Freilich konnte der wißbegierige Knabe bei seiner mehr spielerischen Beschäftigung mit dem agM nicht ahnen, daß er sich mit diesem unerschöpflichen Problem eine schier unerschöpfliche Quelle reichster und tiefster Erkenntnisse erbohrt hatte, aus der auch der reife Mann bis ins hohe Alter immer wieder schöpfen konnte, aber es scheint doch, als ob ihn ein unbewußtes Gefühl für die eigenartige Bedeutung des agM veranlaßt hätte, den Gegenstand nicht wieder aus den Augen zu lassen" (*L. Schlesinger*).

„Wir begegnen aber hier einer seltsamen und gewiß nicht zufälligen Erscheinung. All diese frühen, nur zu eigner Lust ersonnenen Gedankenspiele sind Ansätze zu dem großen, erst viel später bewußt gewordenen Ziel. Es ist eben die ahnende Weisheit des Genies, selbst bei den halbspielenden Erstlingsproben der Kräfte ohne Bewußtsein des tieferen Sinnes, die Spitzhacke gerade da ans Gestein zu setzen, wo die Goldmine verborgen liegt" (*F. Klein*).

Am 30. Mai 1799 fand er den Zusammenhang des agM mit der Länge der Lemniskate, und zwar nach *F. Klein* „wiederum auf rein rechnerischem Wege, in dem er den Wert $\frac{1}{M(1, \sqrt{2})}$ bis auf 11 Dezimalen bestimmt."

In der Folgezeit gelangte er dann aus diesen Ergebnissen zu einer *Theorie der* sog. *elliptischen Funktionen* und der *Modulfunktionen*. Er fand das erste Beispiel einer sog. *automorphen Funktion*.

(Die Theorie der automorphen Funktionen und Formen ist gegenwärtig wieder ein von zahlreichen Mathematikern bearbeitetes Gebiet.)

„Wie bei allen hervorragenden Genies ist auch bei *Gauß* das Eigentümliche die Sicherheit, mit der er in seinen Arbeiten gerade dort einsetzt, wo – zunächst ihm unbewußt – die schönsten und tiefsten Sätze verborgen liegen. Es ist außerordentlich reizvoll zu verfolgen, wie *Gauß* in seinen Jugendarbeiten drei zunächst scheinbar ganz heterogene Gebiete in Angriff nimmt: die lemniskatischen Funktionen, das agM und die Potenzreihen, deren Exponenten nach einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung fortschreiten, und wie sich diese Untersuchungen plötzlich – man möchte fast sagen: zufällig – zu dem gewaltigen harmonischen Massiv zusammenschließen, das die gesamte Theorie der Modulfunktion und der elliptischen Transzendenten umfaßt... Im Jahre 1800, d. i. mit 23 Jahren, ist *Gauß* im Besitze aller, auch der tiefstliegenden Resultate, die das folgende Jahrhundert erst in harter, zäher Arbeit wiedererringen mußte" (*H. Geppert*).

Von diesen Dingen hat *Gauß* nämlich fast nichts publiziert. In einer Arbeit aus dem Jahre 1818 (in der eine Berechnung der Säkularstörung, welche ein Planet ausübt, erfolgte), verwendet er das agM zur Berechnung sog. elliptischer Integrale.

„Das ist aber auch alles, was *Gauß* der Öffentlichkeit über seine genialen Entdeckungen mitteilte! Sei es, daß er seine Zeit als noch nicht reif genug ansah, um diese tiefliegenden Theorien erfassen und verarbeiten zu können, sei es, daß er selbst seine Schöpfung als noch nicht abgeschlossen und zur höchsten Vollendung getrieben erachtete und daher gemäß seinem Wahlspruch: *pauca sed matura*![1] von einer Publikation Abstand nahm, unsere Kenntnis über die Gaußschen Entdeckungen beruht lediglich auf den Aufzeichnungen des Nachlasses" (*H. Geppert*).

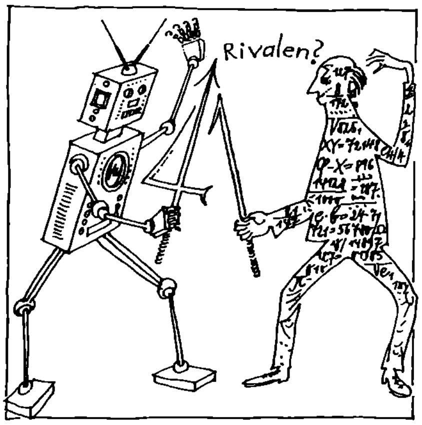
Erst die Bearbeitung und Herausgabe des Nachlasses an handschriftlichen Aufzeichnungen wissenschaftlichen Inhalts, darunter des Tagebuchs 1796 bis 1814, sowie des Briefwechsels von *Gauß* mit seinen Freunden brachte der Nachwelt wichtige Erkenntnisse von *Gauß'* Schaffen. Die Arbeit aus dem Jahre 1818, sowie alles aus dem Nachlaß, was sich auf das agM und die Theorie der elliptischen Funktionen bezieht, hat *H. Geppert* im Band 225 von „Ostwalds Klassikern" (Leipzig 1927) übersetzt und zu einem lesbaren Ganzen gestaltet.

Die von *Gauß* entwickelten Methoden und damit gewonnenen Erkenntnisse hätten, so betont *A. I. Markuschewitsch* (im *C. F. Gauß* Gedenkband anläßlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955 – Hrsg. von *H. Reichardt* [Leipzig 1957]),

„die gesamte Analysis in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts erheblich beeinflußt, wären sie rechtzeitig veröffentlicht worden. *Gauß* hat sich zwar wiederholt bemüht, sie systematisch darzulegen. Seine Versuche hierzu wurden jedoch nicht vollendet, und dadurch blieben wertvollste und tiefste Ergebnisse auf dem Gebiet der Analysis in den vier Wänden seines Arbeitszimmers verborgen. Sie wurden später von *Cauchy*, *Abel*, *Jacobi* u. a. neu entdeckt und gingen unabhängig von *Gauß* in die Wissenschaft ein."

H. Pieper

[1] Weniges, aber ausgereiftes!



Studenten im Wettstreit

Vom 31. Mai bis 2. Juni 1977 fand der 3. zentrale Ausscheid im *Mathematikwettstreit der Studenten technischer und ökonomischer Fachrichtungen* in der Technischen Hochschule Otto von Guericke Magdeburg statt. An dem zentralen Ausscheid nehmen die Sieger und Plazierten der Mathematikwettstreite an den Universitäten und Hochschulen unserer Republik teil. Im vergangenen Jahr waren 76 Studentinnen und Studenten in Magdeburg zusammengekommen. Teilnehmer sind Ökonomiestudenten des 3. Studienjahres und Ingenieurstudenten des 2. Studienjahres; Studenten niedrigerer Studienjahre dürfen ebenfalls am Wettstreit teilnehmen.

Im vergangenen Jahr konnten bei der Siegerehrung, an der der stellvertretende Minister für Hoch- und Fachschulwesen, Dipl.-Ing. Groschupf, der Vorsitzende des Wissenschaftlichen Beirates für Mathematik, Prof. Dr. Winkler, Dresden und der stellvertretende Vorsitzende der Mathematischen Gesellschaft der DDR, Prof. Dr. Manteuffel, Magdeburg, teilnahmen, durch Prof. Dr. Kadner (Dresden), den Vorsitzenden des Wettbewerbskomitees, sechs 1. Preise, fünf 2. Preise und elf 3. Preise vergeben werden.

Mit 97 von 100 erreichbaren Punkten erreichte stud. ing. Peter Zacharias, Student im 1. Studienjahr an der Sektion Technische Kybernetik und Elektrotechnik der TH Magdeburg die beste Leistung. Peter Zacharias hat als Schüler mit Erfolg an Mathematik- und Physikolympiaden teilgenommen. Schon als Schüler arbeitete er in einer internationalen Studentenbrigade in Ufa (UdSSR) mit. Neben der Mathematik und Physik gilt seine Liebe der Musik; er schloß die Oberstufe im Fach Cello an der Musikhochschule in Halle mit der Gesamtnote sehr gut ab! Peter Zacharias ist Absolvent der Spezialklasse der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

Im Rahmenprogramm konnten die Teilnehmer Besichtigungen z. B. des gotischen Domes, des romanischen Klosters und des Schiffshebewerkes durchführen. Eine Vortragsveranstaltung war der mathematischen Behandlung praktischer Probleme gewidmet; dort wurde über Untersuchungen an der Ultraschallsäge, über Probleme der Materialökonomie beim Bau von Elektromotoren und über Optimierung von Walzwerken vorgetragen. Das zweite Thema der Vortragsveranstaltung war dem Leben und Werk von C. F. Gauß gewidmet.

Abschließend seien zwei Aufgaben aus diesem Mathematikwettstreit vorgestellt:

▲1▲ Eine der Pflichtaufgaben für Ingenieurstudenten:

Ein kartesisches x,y,z-Koordinatensystem hat die Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, wobei $\vec{e}_3$ ein lotrechter (senkrecht auf der Erdoberfläche stehender) Vektor ist.

In der Ebene E: $4x+3y+5\sqrt{3}z-40=0$ liegt eine $100\,\text{m}^2$ große Dachfläche eines Gebäudes. Auf dieser Dachfläche liegt eine an allen Stellen gleichstarke Schneedecke mit einem Gesamtgewicht von 4000 kp. In der durch den Einheitsvektor $\vec{w}=-\frac{1}{5}(4\vec{e}_1+3\vec{e}_2)$ gegebenen Richtung greift Wind an, der beim Auftreffen auf eine zu $\vec{w}$ senkrechte Fläche einen Druck von $90\,\text{kp/m}^2$ erzeugen würde.

a) Es ist der Vektor der von Schnee- und Windlast erzeugten, senkrecht zur Dachfläche wirkenden Gesamtdruckkraft $\vec{N}$ zu ermitteln.

b) In welcher Richtung würde bei Tauwetter und Windstille das Schmelzwasser ablaufen? Der Einheitsvektor dieser Richtung ist anzugeben.

Hinweis: Eine Lösungsvariante ergibt sich durch Einführung der Schnittgeraden von Dachebene und x,y-Ebene als Hilfslinie.

▲2▲ Eine der Wahlaufgaben der Ökonomiestudenten:

Einem Stoff B müssen Zuschlagstoffe B_1 und B_2 zugesetzt sein, so daß in der gewünschten Mischung 20% der Masse aus B_1 und 30% der Masse aus B_2 bestehen. Folgende Gemische sind vorhanden:

C_1 mit 20% B_1 und 40% B_2,
C_2 mit 30% B_1 und 20% B_2,
C_3 mit 20% B_1 und 20% B_2,
C_4 mit 10% B_1 und 40% B_2.

a) Geben Sie das mathematische Modell für diese Problemstellung an!

b) Bestimmen Sie die Lösung des Modells!

K. Manteuffel

Zu Ehren von C. F. Gauß

DDR-Studentenkonferenz „Mathematik und Praxis"

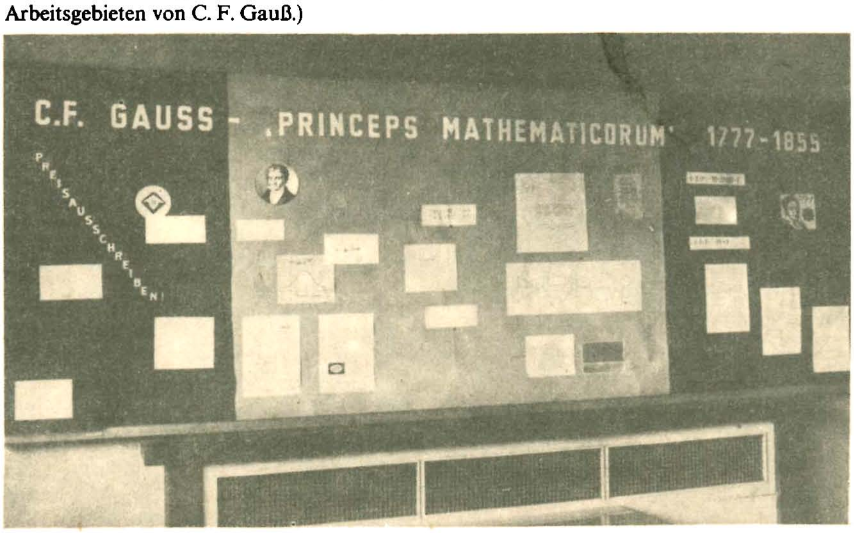
Im Dezember 1977 fand in Leipzig eine *Zentrale Studentenkonferenz* „Mathematik und Praxis" statt, an der Studenten aller zwölf Hochschulausbildungsstätten für Mathematiker in der DDR beteiligt waren. Mit dieser bedeutenden Veranstaltung zeigten die Mathematik-Studenten, wie sie zur Verwirklichung ihrer Disziplin in der gesellschaftlichen Praxis beitragen.

Zugleich ehren sie damit das Andenken des großen Mathematikers, Physikers und Astronomen *C. F. Gauß*. Zu dieser Konferenz hatten Ende 1976 der *Wissenschaftliche Beirat für Mathematik* beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen der DDR, der *Zentralrat der FDJ* und die *Mathematische Gesellschaft der DDR* aufgerufen.

Prof. Dr. *W. Winkler* (TU Dresden) eröffnete die Studentenkonferenz mit einem Vortrag über die Praxiswirksamkeit der Mathematik. In vier Plenarvorträgen wurden Ergebnisse der wissenschaftlichen Arbeit von Mathematik-Studenten vorgestellt, deren Verwirklichung in der Praxis hohen ökonomischen Nutzen bringt.

Insgesamt wurden auf der Konferenz 28 von 80 eingereichten Arbeiten in Vorträgen vorgestellt. In einer Feierstunde erhielten 13 Studenten die *Gauß-Ehrenplakette*. Elf Reisen in die UdSSR und andere Auszeichnungen wurden an die Autoren der besten Arbeiten vergeben.

Wandzeitung der math. Wissenschaftsbereiche der Sektion Math./Phys. der TH anläßlich des 200. Geburtstages von C. F. Gauß. (Das „Preisausschreiben" enthält Aufgaben aus Arbeitsgebieten von C. F. Gauß.)



Vier Aufgaben aus Moskau

Vier Aufgaben der schriftlichen Aufnahmeprüfung 1977 im Fach Mathematik für Studienbewerber des Moskauer Ingenieurinstituts für Bodenbearbeitung

▲1▲ Es ist der folgende Term zu vereinfachen:

$$\frac{1-x^{-1}}{1+x}-\frac{x+x^{-1}}{x-1}.$$

▲2▲ Zu lösen ist die Ungleichung:

$$-5x^2+x+4>0.$$

▲3▲ Man beweise, daß für alle reellen Zahlen x mit $x \neq \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ und $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, wobei k eine ganze Zahl ist,

$$\tan 2x-\tan x=\frac{\tan x}{\cos 2x} \text{ gilt.}$$

▲4▲ Die Basis $\overline{AB}$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC habe die Länge b, der Winkel zwischen der Basis und einem der Schenkel habe die Größe α.
Man ermittle den Umfang des Dreiecks ABC.

▲1▲ Für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ und $|x| \neq 1$ gilt

$$f(x)=\frac{1-x^{-1}}{1+x}-\frac{x+x^{-1}}{x-1}$$
$$=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)(1-x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)(1+x)}{1-x^2}$$
$$=\frac{1-x-\frac{1}{x}+1+x+x^2+\frac{1}{x}+1}{1-x^2}$$
$$=\frac{x^2+3}{1-x^2}.$$

▲2▲ Setzt man $f(x)=-5x^2+x+4$,

so gilt $f(x)=-5\left(x^2-\frac{x}{5}\right)+4.$

Durch Addition und Subtraktion von $-5\cdot\frac{1}{100}=-\frac{1}{20}$ erhält man

$$f(x)=-5\left(x^2-\frac{x}{5}+\frac{1}{100}\right)+4+\frac{1}{20}$$
$$=-5\left(x-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{81}{20}.$$

Nun gilt $f(x)>0$ genau dann, wenn

$$5\left(x-\frac{1}{10}\right)^2<\frac{81}{20}, \text{ also wenn}$$
$$\left(x-\frac{1}{10}\right)^2<\frac{81}{100}, \text{ d. h.,}$$
$$-\frac{9}{10}<x-\frac{1}{10}<\frac{9}{10},$$
$$-\frac{4}{5}<x<1.$$

Die gegebene Ungleichung ist also für alle reellen Zahlen x mit $-\frac{4}{5}<x<1$ und nur für diese erfüllt.

▲3▲ Für alle reellen Zahlen x mit der obigen Einschränkung gilt

$$f(x)=\tan 2x-\tan x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$=\frac{2\sin x\cos x}{\cos 2x}-\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$=\frac{\sin x}{\cos 2x\cos x}(2\cos^2 x-\cos 2x)$$
$$=\frac{\tan x}{\cos 2x}(2\cos^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x)$$
$$=\frac{\tan x}{\cos 2x}(\cos^2 x+\sin^2 x)$$
$$=\frac{\tan x}{\cos 2x}, \text{ w. z. b. w.}$$

▲4▲ Bezeichnet man die Länge jedes der Schenkel mit a, so ist der Umfang des Dreiecks ABC gleich

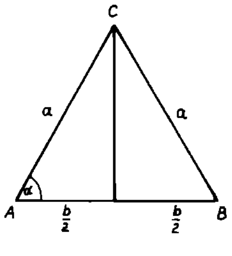
$$u=2a+b.$$

Nun gilt (vgl. die Abb.)

$$\cos\alpha=\frac{b}{2a}, \text{ also}$$
$$a=\frac{b}{2\cos\alpha}.$$

Daher ist der Umfang des Dreiecks ABC gleich

$$u=2a+b=\frac{b}{\cos\alpha}+b,$$
$$u=b\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right).$$



A. Halameisär/R. Lüders

Eine Aufgabe von Sh. B. Linkowski

Fachlehrer für Mathematik, Moskau

Multipliziert man zwei aufeinanderfolgende Zahlen der Folge der ungeraden natürlichen Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 miteinander und addiert die Zahl 1, so erhält man stets das Quadrat einer natürlichen Zahl, wie die folgende Tabelle zeigt:

$$1\cdot3+1=4=2^2$$
$$3\cdot5+1=16=4^2$$
$$5\cdot7+1=36=6^2$$
$$7\cdot9+1=64=8^2$$

Dasselbe gilt, wenn man zwei aufeinanderfolgende Zahlen der Folge der geraden natürlichen Zahlen 2, 4, 6, 8 miteinander multipliziert und die Zahl 1 addiert, wie die folgende Tabelle zeigt:

$$2\cdot4+1=9=3^2$$
$$4\cdot6+1=25=5^2$$
$$6\cdot8+1=49=7^2$$

Es ist zu beweisen, daß das allgemein gilt, daß also für *alle* natürlichen Zahlen gilt:
Die Summe aus dem Produkt zweier aufeinander folgender ungerader bzw. zweier aufeinander folgender gerader natürlicher Zahlen und der Zahl 1 ist stets gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.

Lösung:

a) Es seien $2n+1$ und $2n+3$ ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$) zwei aufeinander folgende ungerade natürliche Zahlen. Dann gilt

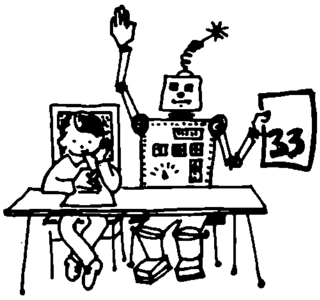
$$(2n+1)(2n+3)+1=4n^2+6n+2n+3+1$$
$$=4n^2+8n+4$$
$$=4(n^2+2n+1)$$
$$=[2(n+1)]^2.$$

b) Es seien $2n$ und $2n+2$ ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$) zwei aufeinander folgende gerade natürliche Zahlen. Dann gilt

$$2n(2n+2)+1=4n^2+4n+1$$
$$=(2n+1)^2.$$

Damit ist bewiesen, daß die Summe aus dem Produkt zweier aufeinander folgender ungerader bzw. zweier aufeinander folgender gerader natürlicher Zahlen und der Zahl 1 stets gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1978

Mathematik

Ma 5 ▪1736 Joachim erhielt nach erfolgreicher Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb als Anerkennung ein Buch. Bereits am nächsten Tag las er den neunten Teil der Anzahl der Seiten dieses Buches durch. Am darauffolgenden Tag las er weitere 63 Seiten dieses Buches durch; das waren dreimal soviel Seiten wie am Tage zuvor. Wie viele Seiten umfaßt dieses Buch? *Schülerin Birgit Weyh, Fambach*

Ma 5 ▪1737 An den Olympischen Sommerspielen 1976 in Montreal beteiligten sich insgesamt 1314 Leichtathleten, und zwar 526 Männer mehr als Frauen. Wieviel Frauen und wieviel Männer nahmen an den Leichtathletikwettbewerben teil?
Schüler Ralf Hortig, Cottbus

Ma 5 ▪1738 Die beiden Freunde Klaus und Mario kaufen in einer Konditorei ein. Klaus kauft zwei Stück Streuselkuchen und ein Schweineohr; er bezahlt dafür 68 Pf. Mario kauft ein Stück Streuselkuchen und zwei Schweineohren; er bezahlt dafür 0,61 M. Wie teuer ist ein Stück Streuselkuchen bzw. ein Schweineohr?
Schülerin Kerstin Kassek, Klosterfelde

Ma 5 ▪1739 Das um 14 vergrößerte Zweifache einer natürlichen Zahl ist gleich dem Achtfachen dieser um 8 verkleinerten natürlichen Zahl. Um welche natürliche Zahl handelt es sich? *Schüler Frank Schlaak, Berlin*

Ma 5 ▪1740 Zeichne vier Rechtecke! Zeichne dann jedesmal zwei Geraden so, daß beide den Rand des Rechtecks schneiden und dabei das Rechteck in folgende Figuren zerlegen:
a) zwei Dreiecke und ein Viereck,
b) ein Dreieck und zwei Vierecke,
c) ein Dreieck und drei Vierecke,
d) ein Dreieck, ein Viereck und ein Fünfeck!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

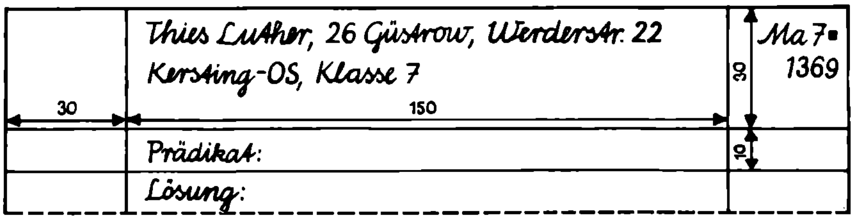
Ma 5 ▪1741 Jemand hebt von seinem Sparkonto 500 M ab. Er erhält zweimal soviel 50-Mark-Scheine wie 100-Mark-Scheine. Die Anzahl der ausgezahlten 20-Mark-Scheine ist um 1 größer als die Anzahl der 50-Mark-Scheine. Wieviel 20-Mark-Scheine, 50-Mark-Scheine bzw. 100-Mark-Scheine erhielt dieser Sparer?
Schülerin Kerstin Müller, Wernshausen

Ma 6 ▪1742 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die ein Vielfaches ihrer Quersumme sind, wobei die Quersumme eine Primzahl ist!
Mathematikfachlehrer Helmut Engelmann, Sachsendorf

Ma 6 ▪1743 Gegeben sei ein Dreieck ABC. Der Außenwinkel bei A sei um 29° kleiner als der Außenwinkel bei C. Der Außenwinkel bei B sei um 49° kleiner als der Außenwinkel bei C. Es ist die Größe der Innenwinkel α, β, γ dieses Dreiecks zu berechnen!
Schülerin Beate Floeter, POS Sachsendorf, Kl. 8

Ma 6 ▪1744 Wenn Frank seinen Ball aus einer bestimmten Höhe senkrecht fallen läßt, so springt der Ball um den dritten Teil der Fallhöhe wieder zurück. Nach dem zweiten Aufprall sprang der Ball um einen Meter weniger hoch als nach dem ersten. Aus welcher Höhe ließ Frank den Ball fallen?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ▪1745 Eine Großmutter wurde nach dem Lebensalter ihrer Enkeltochter gefragt; sie antwortete: „Ich bin genau zwölfmal so alt wie meine Enkeltochter. Die Summe der Zahlen, die das Lebensalter von meiner Enkeltochter und mir angeben, beträgt 65.“ Wie alt sind Großmutter und Enkeltochter, wenn das Lebensalter stets in ganzen Zahlen angegeben wird?
(Aus einer sowjetischen Zeitschrift)



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1977/78 läuft von Heft 5/77 bis Heft 2/78. Zwischen dem 1. und 10. September 1978 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/78 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1977/78 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪1746 Gib für jede der nachstehenden drei Gleichungen alle Paare (x, y) von natürlichen Zahlen an, für die die jeweilige Gleichung zu einer wahren Aussage wird!

a) $x \cdot (x+y)=41$,

b) $x \cdot (x-y)=41$,

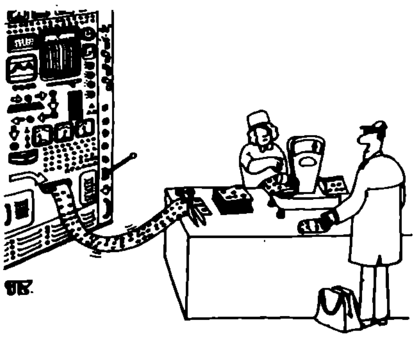
c) $x \cdot (y-x)=41$.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ▪1747 In einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ werde eine beliebige Diagonale gezeichnet. Es ist zu beweisen, daß diese Diagonale parallel zu einer der Fünfeckseiten verläuft!

Klaus Meier, PH „Wolfgang Ratke“ Köthen Sektion Mathematik

Ma 7 ▪1748 Am Wochenende kaufte Hans insgesamt 25 Flaschen Getränke ein, weil die Familie Besuch erwartete, und zwar Limonade zu 0,21 M, Cola zu 0,35 M und Bier zu 0,48 M pro Flasche. Hans hatte ohne Pfandgeld genau 7,61 M zu bezahlen. Wieviel Flaschen Limonade, Cola bzw. Bier hat Hans eingekauft? *Schüler Bodo Heise, Juri-Gagarin-OS Görlitz, Kl. 7*



Ma 7 ▪1749 Gegeben sei eine dreistellige natürliche Zahl, deren drei Ziffern ohne Beachtung ihrer Anordnung drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen entsprechen. Dividiert man diese dreistellige natürliche Zahl durch 9, so erhält man eine Primzahl. Um welche Zahl handelt es sich?

Schülerin Marion Endrigkeit, Jessen, Kl. 6

Ma 7 ▪1750 Man beweise, daß jede vierstellige natürliche Zahl durch 11 teilbar ist, wenn die Summe aus den als Zahlen aufgefaßten Ziffern der ersten und dritten Stelle gleich der Summe aus den als Zahlen aufgefaßten Ziffern der zweiten und vierten Stelle ist! *Schüler Klaus Beck, Potsdam*

Ma 8 ▪1751 Beweise folgenden Satz:
Für alle ungeraden natürlichen Zahlen u gilt: Wenn $u>3$ und kein ganzzahliges Vielfaches von 3 ist, so ist u^2-1 stets durch 24 teilbar.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 8 ▪1752 Drei Behälter haben zusammen ein Fassungsvermögen von 170 Litern. Würde man den Inhalt des ersten Behälters in den zweiten umfüllen, so würden im ersten zwei Neuntel seines Inhalts zurückbleiben. Würde man dagegen den Inhalt der letzten zwei Behälter in den ersten umfüllen, so würden noch 10 Liter fehlen, um den ersten vollständig zu füllen. Wieviel Liter faßt jeder Behälter? *Andreas Fittge, Berlin, EOS „Heinrich Hertz“, Kl. 10*

Ma 8 ▪1753 Einem Kreis sei ein Dreieck ABC derart einbeschrieben, daß der Mittelpunkt M des Kreises im Inneren des Dreiecks ABC liegt. D sei der Fußpunkt der Höhe von C auf $\overline{AB}$. Es ist zu beweisen, daß dann stets gilt: $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle MCB$!

Mathematiklehrer F. Sprang, Rochlitz

Ma 8 ▪1754 Im Viereck $ABCD$ soll gelten: Die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ sind gleichlang. Die Innenwinkel haben die folgenden Größen:

Winkel	Größe
DAB	α
ABC	2α
BCD	3α
CDA	4α

a) Ermittle die Größe jedes einzelnen Innenwinkels in Gradmaß!

b) Welches spezielle Viereck ist $ABCD$? Begründe! Skizziere!

c) Beweise, daß die Diagonale $\overline{AC}$ den Winkel $\sphericalangle DAB$ halbiert!

d) Beweise, daß das Dreieck ABC rechtwinklig ist!

e) Beweise, daß $\overline{BC}$ kürzer als $\overline{AD}$ ist!

f) Beweise, daß $\overline{AB}$ doppelt so lang ist wie $\overline{AD}$! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 9 ▪1755 Es ist zu beweisen:
Wenn a, b, c, d, e reelle Zahlen sind, dann gilt für alle a, b, c, d, e:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqq a(b+c+d+e)$$

stud. math. Susján Peter, Budapest

Ma 9 ▪1756 Ein Stadion verfügt über 25 Sitzreihen. In der untersten Reihe befinden sich 800 Sitzplätze, in der obersten 2504. Wieviel Sitzplätze sind insgesamt vorhanden, wenn die Anzahl der Sitzplätze von Reihe zu Reihe gleichmäßig zunimmt?

Andreas Geipel, Dresden, Lehrling

Ma 9 ▪1757 Beweisen Sie, daß $\log_4 12$ keine rationale Zahl ist! *Andreas Fittge, Berlin, EOS „Heinrich Hertz“, Kl. 10*

Ma 9 ▪1758 In einem beliebigen Trapez $ABCD$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ sei ein Punkt E auf $\overline{AD}$ so gelegen, daß $\overline{AE} \cong \overline{ED}$ gilt.
Beweisen Sie, daß die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ECD und ABE gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks EBC ist!

Frank Berner, POS Sassen, Kl. 8

Ma 10/12 ▪1759 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$.

a) Man beweise: Das über eine der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ errichtete Quadrat hat mindestens einen doppelt so großen Flächeninhalt wie das Rechteck!

b) Ermitteln Sie zwei Seitenlängen a und b für dasjenige Rechteck $ABCD$, das genau ein Drittel des Flächeninhalts des über einer seiner Diagonalen errichteten Quadrats besitzt! *Mathematikfachlehrer K.-H. Glaser, Pritzwalk*

Ma 10/12 ▪1760 Man beweise folgenden Satz: Wenn $\tan(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$ gilt, so gilt auch $\cos(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$!

Schüler Volker Schulz, EOS Nauen, Kl. 11

Ma 10/12 ▪1761 Verbindet man auf der Oberfläche eines regelmäßigen Tetraeders die Mittelpunkte aller Kanten miteinander, so erhält man alle Kanten eines dem Tetraeder einbeschriebenen Körpers.

a) Zeichnen Sie eine Skizze!

b) Wieviel Flächen, Ecken und Kanten hat dieser einbeschriebene Körper?

c) In welchem Verhältnis stehen die Volumina beider Körper?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ▪1762 Zeichnen Sie ein Dreieck ABC mit folgenden Seitenlängen:

Seite	Länge
$\overline{AB}$	4 cm
$\overline{BC}$	6 cm.
$\overline{AC}$	6 cm.

Fällen Sie folgende Lote:

1) von A auf $\overline{CB}$; Fußpunkt sei D,
2) von D auf $\overline{AC}$; Fußpunkt sei E,
3) von E auf $\overline{AD}$; Fußpunkt sei F,
4) von E auf $\overline{BC}$; Fußpunkt sei G.

Wieviel Prozent der Dreiecksfläche nimmt die Fläche des Rechtecks $FDGE$ ein? *Fr.*

Physik

Ph 6 ▪36 Der Stauraum der Rappbode-Talsperre wird mit rund 0,11 km³ Wasser angegeben. Wie dick wäre die Schneedecke (in cm), wenn dieses Wasservolumen als Schnee auf die Bezirke Leipzig, Dresden und Karl-Marx-Stadt fallen würde?
Der Flächeninhalt dieser drei Bezirke beträgt rund 17712 km². Die Dichte von Schnee wird durchschnittlich mit $\varrho_s=0{,}075\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ angenommen. Die Dichte des Wassers ist mit $\varrho_w=1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$ einzusetzen.

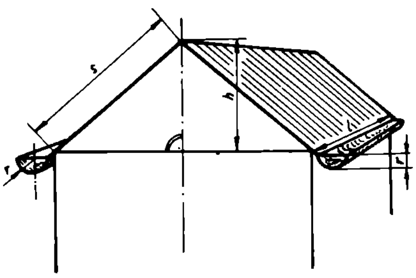
Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 7 ▪37 Bei einem hydraulischen Wagenheber hat der Pumpenkolben einen Durchmesser von $d=3$ cm und einen Hub von $h=6$ cm, während der Lastkolben einen Durchmesser von $D=12$ cm und einen maximalen Hub von $h_{max}=36$ cm hat. Der Pumpenkolben wird durch einen „einseitigen“ Handhebel mit dem Kraftarm $b=100$ cm und dem Lastarm $a=20$ cm betätigt.

a) Welche Last F kann mit einer Handkraft von $F_H = 15$ kp gehoben werden?
b) Wieviel Pumpenhübe n sind notwendig, um diese Last 30 cm hochzuheben?

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 8 ▪38 Auf ein Dach vom skizzierten Querschnitt fällt Regel mit einer Menge von 1 mm pro Stunde. Das Dach habe eine Länge von $l = 18$ m.
a) Wieviel Regenwasser wird vom Dach aufgefangen, wenn die Dauer des Regens 90 Minuten beträgt und vorausgesetzt wird, daß der Regen senkrecht fällt?



b) Nach welcher Zeit würden die beiden Dachrinnen überlaufen, wenn die darin befindlichen Abflußöffnungen verschlossen sind?

Ing. A. Körner, Leipzig

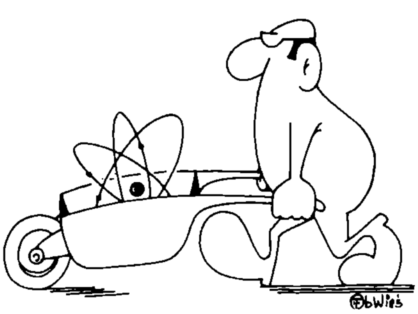
Ph 9 ▪39 Ein Freiballon habe bei vollständiger Füllung einen Durchmesser von $d = 8$ m und werde mit Wasserstoffgas gefüllt. Seine gesamte Leermasse (einschließlich Ballonkorb und Zuladung) betrage $m_g = 282$ kg.
a) Welche Vertikalbeschleunigung erfährt der Ballon unmittelbar bei dem Start? Der Luftdruck betrage 770 Torr, die Temperatur 20 °C.
b) Berechnen Sie die Steighöhe, wenn man annimmt, daß der Luftdruck durchschnittlich mit je 10,5 m Erhebung um 1 Torr abnimmt! Die Temperatur soll dabei als konstant angenommen werden.

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 10/12 ▪40 Wieviel Kilokalorien könnte man aus einem Kubikmeter Wasser mit Hilfe der Kernfusion gewinnen, wenn es gelänge, das darin enthaltene Deuterium etwa nach folgendem Reaktionszyklus zu Helium zu verschmelzen?

$$^{2}_{1}D + ^{2}_{1}D \rightarrow ^{3}_{2}He + ^{1}_{0}n + 3{,}3\ \text{MeV}$$
$$^{2}_{1}D + ^{3}_{2}He \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{1}p + 18{,}3\ \text{MeV}$$

Adalbert Schatz, Leipzig



Chemie

Ch 7 ▪29 In der Direktive des IX. Parteitages der SED zum Fünfjahrplan heißt es: „Aufkommen und Einsatz von Stahlschrott sind auf 114 bis 118% zu erhöhen. Die anfallenden und auf der Halde liegenden Schlakken, insbesondere die Siemens-Martin-Schlacke sind einer verstärkten Verwendung für die Roheisen- und Stahlproduktion zuzuführen."
a) Berechne, wieviel Tonnen Eisen(III)-oxid in einem der Hochöfen im VEB Eisenhüttenkombinat Ost eingebracht werden müssen, um täglich 226 t Roheisen zu erhalten!
b) Wieviel Kohlenstoff wird für die Reaktion benötigt?
c) Wieviel Kilogramm Kohlenstoff sind in der erzeugten Menge an Roheisen enthalten?

Ch 8 ▪30 Ein Kalkstein enthält 10% Gangat. 2 t dieses Kalksteins sollen gebrannt werden. Hierbei gehen 3% Kohlendioxid verloren. Berechnen Sie die Ausbeute an Kohlendioxid in Tonnen!

Ch 9 ▪31 Je 6 g Natronlauge werden mit
a) Salzsäure,
b) Phenol und
c) Essigsäure versetzt.
Wieviel Gramm der Reaktionsprodukte entstehen bei jeder der angegebenen Reaktionen?

„Was ist eigentlich das Gegenteil von ‚Heureka'?"

Ch 10/12 ▪32 Im VEB Schwefelsäure- und Superphosphat-Werk, Coswig, schließt man natürliche tertiäre Kalziumphosphate mit Schwefelsäure auf. Hierbei bildet sich ein Gemisch von $Ca(H_2PO_4)_2 + 2CaSO_4$, das ein hochwertiges Phosphordüngemittel darstellt und unter der Bezeichnung „Superphosphat" in den Handel kommt. Wieviel Prozent Phosphorpentoxid sind in dem Düngemittel enthalten, wenn es die o. g. Zusammensetzung hat?

Leser schreiben an alpha

● ...Im Namen meiner Tochter Elke übersende ich die Lösungskarten. Seit September 1977 studiert sie in Moskau *Ökonomische Kybernetik*. Ihre guten mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten wurden entscheidend mitgebildet durch die 7jährige erfolgreiche Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb... *H. Seidel, Dresden*

● ...Seit 1973 nehme ich schon am *alpha*-Wettbewerb teil, und es macht mir immer noch Spaß. Das ist nicht zuletzt Ihr Verdienst. Selbst Vater und Schwager greifen oft zur *alpha*... *Peter Pörs, Berlin*

● ...Die *alpha* fand bei uns in der ganzen Familie Anklang. Oft saßen wir zusammen und lösten knifflige Aufgaben...
Kerstin Franz, Eisleben

● ...*alpha* hilft mir in der Schule und in der AG!... *Andreas Schaale*

● ...Wir arbeiten auch im Kreisklub mit der *alpha*. Besonders schwierige Aufgaben lösen wir gemeinsam. Großen Spaß machten uns solche Beiträge wie: Kleine Wörter – große Bedeutung; Die russische Rechenmaschine „СЧЕТА"... *Cornelia Reuter, Stadtroda*

● ...Felix und Anita sind Staatsbürger der DDR wie ich, mein Mann sowjetischer Staatsbürger. Für ständig leben wir in Kasan – mein Mann als Elektrochemiker an der hiesigen Universität, ich als Deutschlehrerin. Wir danken Ihnen für die interessanten Aufgaben. *Gudrun Baitalowa, Kasan*

● ...*alpha* ist eine gute und interessante Sache. Ich bleibe dabei!...
Georg Lang, Burg/Spreewald

● ...Der *alpha* herzlichen Dank! Die Beschäftigung mit Ihrer Zeitschrift bringt viel Anregung und Freude. Offensichtlich sind unter den Autoren zahlreiche junge Menschen, die durch die *alpha* zur Mathematik gekommen sind. Ich schlage vor:
In jedem Heft einen Ihrer Autoren mit Foto und Entwicklungsweg vorzustellen...
Gottfried Hoffmann, Sebnitz

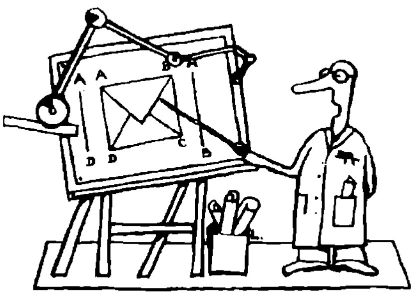
● ...Die *alpha*-Wettbewerbsaufgaben regen zum Nachdenken an, wenn nötig zum Nachschlagen in Fachbüchern. Auch an meinen Erfolgen bei den Kreismathematikolympiaden und am Besuch der Spezialschule (phys.-

techn. Richtung) hat die *alpha* großen Anteil. Herzlichen Dank!...

Ronald Bracholdt, Riesa

● ...Da ich bereits vor 25 Jahren die 8. Klasse und damit den schulischen Mathematikunterricht beendet hatte, versuche ich ständig, meine mathematischen Kenntnisse zu erweitern. Bei diesem „Hobby" hilft mir die *alpha* sehr. Lediglich auf dem Gebiete der Wirtschaftsmathematik könnten die Beiträge zahlreicher sein...

Dieter Koch, Arnstadt



● ...Durch *alpha* kann man sein mathematisches Wissen maximal gründlich auf die Probe stellen...

Bettina Lohmann, Neundorf

● ...Über den Kurswettbewerb (d. i. Kreiswettbewerb) zum Gebietswettbewerb vorgestoßen, trennte mich nur ein Punkt von der Teilnahme am gesamtösterreichischen Bundeswettbewerb. Sicherlich trug zu diesem kleinen Erfolg vor allem das reiche Material an Aufgaben der DDR-Olympiaden bei, das ich regelmäßig in *alpha* vorfand.

Gernot Kubin, Leonding (Österreich)

● ...In den letzten neun Jahren habe ich die *alpha* immer wieder gern gelesen, und mit Freude rechne ich auch heute noch die Aufgaben. In der Schulzeit, während der Armeezeit gab sie mir viel, auch heute gibt sie mir im Studium sehr viel...

Martin Ermrich, Elbingerode

● ...Auch während meiner Dienstzeit bei der NVA werde ich mich am *alpha*-Wettbewerb beteiligen...

Michael Hauff, Teuchern

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Speziell für Klasse 5/6

Mit Heft 5/77 der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* haben wir begonnen, interessante Lösungen von Schülern zu Wettbewerbsaufgaben vorzustellen. Wir hoffen, mit den veröffentlichten Lösungsvarianten unseren jungen Lesern Anregungen in bezug auf das Herangehen an Problemlösungen gegeben zu haben. In unserem heutigen Heft stellen wir zwei bei uns eingegangene vorbildliche Lösungen vor.

In Heft 2/77 wurde von uns folgende Aufgabe gestellt:

Ma 5 ■1622 Zwei Boote fahren auf einem Fluß stromaufwärts. Sie sind gegenwärtig 6 km voneinander entfernt. Nachdem das hintere Boot 5 km weitergefahren ist, hat das vordere Boot in der gleichen Zeit nur 3 km zurückgelegt.

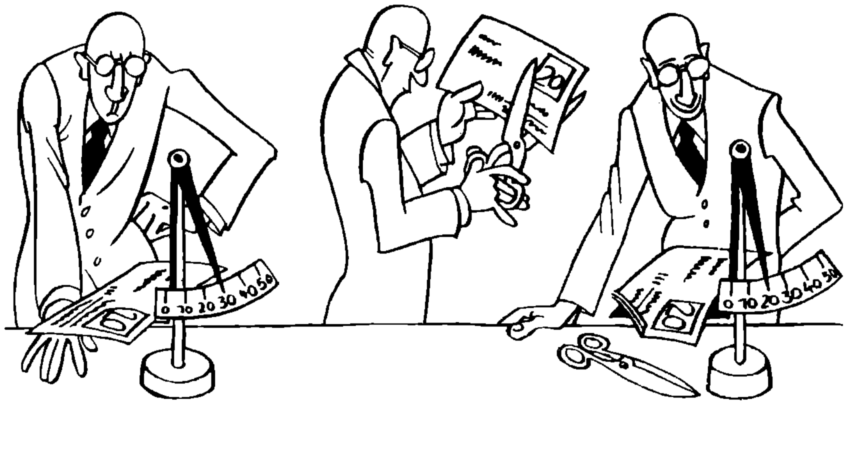
a) Welchen Abstand haben die beiden Boote nun noch voneinander?

b) Wieviel Kilometer müßte das hintere Boot noch zurücklegen, um das vordere einzuholen, wenn beide Boote jeweils mit der gleichen Geschwindigkeit weiterfahren?

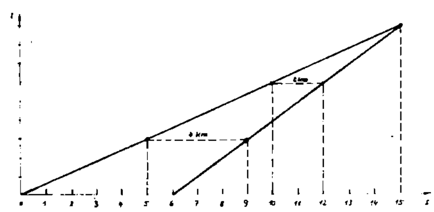
In Heft 5/77 veröffentlichten wir dazu folgende Lösung:

a) Während das hintere Boot 5 km weitergefahren ist, hat das vordere Boot nur 3 km zurückgelegt. Darum gilt $6\,\text{km} - 5\,\text{km} + 3\,\text{km} = 4\,\text{km}$. Die Boote haben nun einen Abstand von 4 km.

b) Während das hintere Boot 5 km zurücklegte, hat sich der Abstand zwischen beiden Booten um 2 km verringert. Um den noch vorhandenen Abstand von 4 km auszugleichen, muß das hintere Boot noch $2 \cdot 5\,\text{km} = 10\,\text{km}$ fahren.



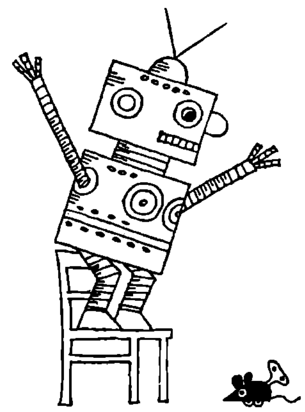
● Unsere Leserin *Gerhild Bochmann*, Schülerin einer 5. Klasse der Heinrich-von-Kleist-Oberschule in Frankfurt (Oder), sandte uns folgende graphische Lösung:



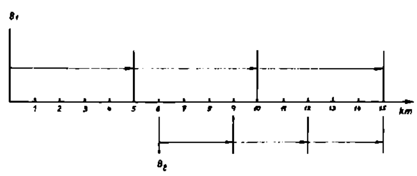
Antwort zu a): Die beiden Boote haben einen Abstand von 4 km.

Antwort zu b): Das hintere Boot müßte noch 10 km zurücklegen, um das vordere einzuholen.

Unser Kommentar: Für eine Schülerin der 5. Klasse eine vorbildliche Leistung.



● Unsere Leserin *Corinna Matzdorff*, Schülerin einer 5. Klasse der Hermann-Matern-Oberschule Klietz, sandte uns ebenfalls eine graphische Lösung:



Antwort zu a): Ich nehme folgendes an: Das hintere Boot (B_1) befindet sich anfangs am Kilometer 0, das vordere (B_2) am Kilometer 6. Wenn B_1 um 5 km weitergefahren ist, befindet es sich am Kilometer 5. In der gleichen Zeit hat B_2 nur 3 km zurückgelegt und befindet sich am Kilometer 9. Beide Boote haben jetzt einen Abstand von 4 km.

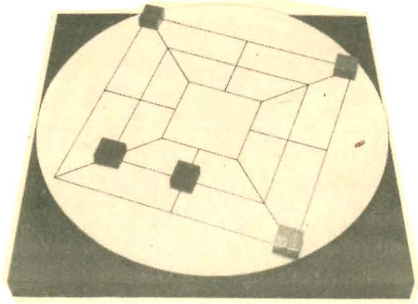
Antwort zu b): Wenn B_1 sich am Kilometer 10 befindet, hat B_2 den Kilometer 12 erreicht. Wenn B_1 sich am Kilometer 15 befindet, hat B_2 ebenfalls den Kilometer 15 erreicht, d. h., B_1 muß noch $2 \cdot 5\,\text{km} = 10\,\text{km}$ zurücklegen, um B_2 einzuholen.

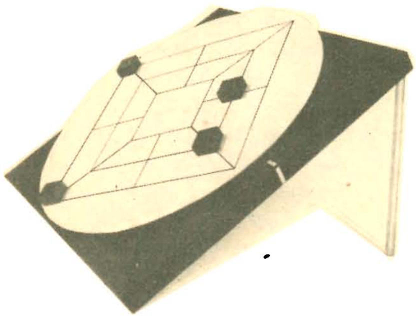
Unser Kommentar: Ebenfalls eine vorbildliche Leistung. Mach weiter so!

Zusammenstellung: J. Lehmann/Th. Scholl

Ein bewegliches Mühlespiel

Dieses Spiel ist eine Weiterentwicklung des herkömmlichen Mühlespiels, dessen Regeln als allgemein bekannt vorausgesetzt werden. Beim beweglichen Mühlespiel müssen die beiden Spieler jedoch wesentlich mehr Faktoren der gegenwärtigen und künftigen Spiellage vergleichen, als das beim herkömmlichen Spiel der Fall ist. Damit üben sie Verhaltensweisen, die auch für praktische Tätigkeiten wichtig sind.
Mit ein wenig Geschick kann man sich dieses Spiel selbst herstellen:
Man braucht dazu eine quadratische Grundplatte mit einer Seitenlänge zwischen 30 cm und 50 cm aus Holz oder einem anderen geeigneten Werkstoff und eine kreisförmige Drehscheibe aus magnetisiertem Eisenblech, deren Durchmesser etwas geringer ist. Im Mittelpunkt der Grundplatte ist ein Dorn anzubringen, im Mittelpunkt der Drehscheibe eine Öse, die den Dorn aufnehmen kann, so daß die Scheibe sich wie der Teller eines Plattenspielers frei drehen kann. Den Spielplan kann man auf Papier zeichnen und dann auf die Drehscheibe aufkleben.
Der Spielplan ist dem des herkömmlichen Mühlespiels ganz entsprechend, nur werden auch die gleichliegenden Eckpunkte der drei konzentrischen Quadrate jeweils durch ein Geradenstück verbunden, Der Abstand der Quadrate voneinander soll genauso groß sein wie der Abstand einer Seitenlinie des innersten Quadrates vom Mittelpunkt der Scheibe. Auf der Abbildung ist das gut zu erkennen.
Zum Spiel gehören außerdem 2 Sätze von jeweils 7 Magnethaftsteinen beliebiger Form in zwei verschiedenen Farben. Vorsichtshalber sollte man einige Ersatzsteine haben. Ein solcher Stein sollte etwa so viel (in g) wiegen, wie die halbe Seitenlänge des innersten Quadrates (in cm) beträgt.
Das Spielbrett kann um etwa 45° gegen die Horizontale geneigt aufgestellt werden, wie es die Abbildung zeigt, man kann es aber auch an die Wand hängen.





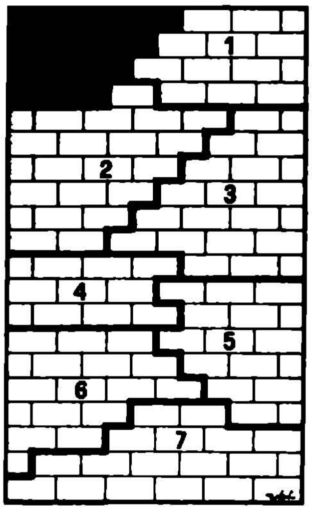
Spielregeln:
Das Ziel der Spieler ist das gleiche wie beim herkömmlichen Mühlespiel, man will also selbst Mühlen schließen (drei Steine auf einem Geradenstück unterbringen) und verhindern, daß das dem Gegner gelingt. Jeder der beiden Spieler erhält 7 Steine einer Farbe, und sie setzen nun zunächst abwechselnd jeweils einen Stein auf die Schnittpunkte der den Spielplan bildenden Geradenstücke. Nach jedem Satz aber verändert sich die Lage der Drehscheibe bei diesem beweglichen Spiel. Gelingt es einem Spieler, eine Mühle im oberen Teil des Spielplans zu schließen, so darf er einen Stein des Gegners vom Plan nehmen. Diese, die herkömmlichen Regeln des Spieles einschränkende Bedingung muß gestellt werden, damit tatsächlich bei jedem Satz eine Drehung der Scheibe hervorgerufen wird.
Was soll nun unter „oberer Teil" verstanden werden?
Wir nennen die beiden durch den Mittelpunkt der Scheibe führenden und senkrecht aufeinander stehenden Geradenstücken, die die Quadratseiten halbieren, die Achsen des Spieles. Kommt nach einem Satz die Drehscheibe wieder zum Stehen, so ist eine der beiden Achsen der horizontalen Lage näher als die andere. Oberhalb dieser Achse befindet sich der obere Teil des Plans.
Ist das Setzen beendet, so wird nicht wie beim herkömmlichen Spiel gezogen, sondern die Spieler nehmen (wieder abwechselnd) einen ihrer Steine vom Plan und setzen ihn an anderer Stelle wieder ein. Dabei verfolgen sie das gleiche Ziel wie beim anfänglichen Setzen. Sieger ist derjenige Spieler, der alle Steine des Gegners vom Brett genommen hat.
Wodurch wird dieses Spiel so interessant und lehrreich?
Die Lage der Drehscheibe ist von der Summe der Gleichgewichte der aufgebrachten Spielsteine abhängig. In der zur Verfügung stehenden Zeit ist es dem Spieler kaum möglich, die künftige Lage nach dem Umsetzen oder Setzen eines Steines zu berechnen, er ist also auf eine Schätzung angewiesen, deren Genauigkeit mit zunehmender Übung wachsen wird. Das stellt hohe Anforderungen an den Spieler. Dabei wird die Fähigkeit entwickelt, das Verhalten beweglicher Systeme zu begreifen.

H. George/G. Maiwald

1 – 2 – 3 Logelei

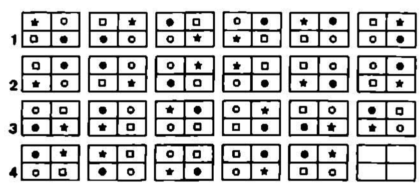
Schwarz malen

Welche der 7 Teile muß man schwarz malen, damit der Anteil schwarzer und weißer Felder gleich wird?



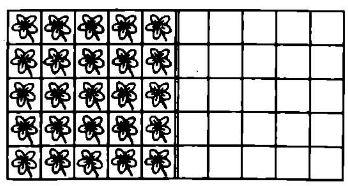
Das ist logisch

Die Bilder folgen einander in einer gewissen Reihenfolge. Suche den Zusammenhang, und trage das fehlende Bild in der vierten Reihe ein!



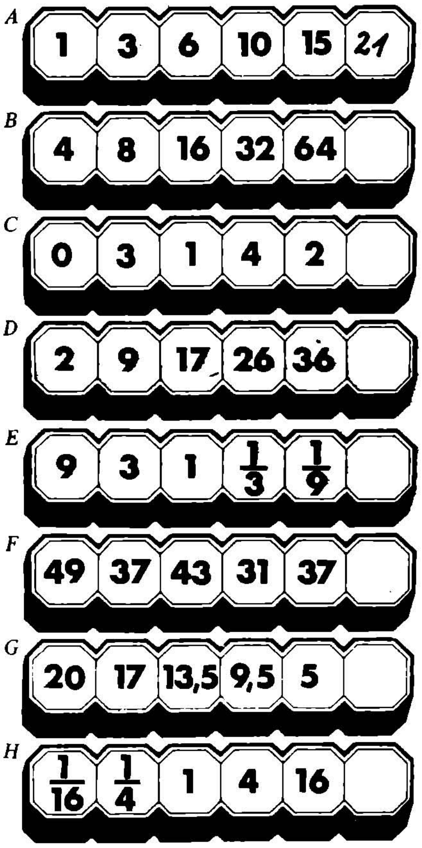
Verwelkte Stecklinge

Von den 25 Blumenstecklingen sind 8 verwelkt. Der Gärtner hat die Aufgabe, die restlichen Stecklinge so anzuordnen, daß 6 Geraden entstehen, von denen jede gerade 5 Stecklinge enthält.
Wie würdest du die Aufgabe lösen?



Zahlenfolgen

Die Folgen der Zahlen in *A* bis *H* haben jeweils eine andere Bildungsregel. Im Beispiel *A*: Zur 1 wird 2 addiert, zur 3 dann 3, zur 6 dann 4 usw., zur 15 wird also 6 addiert, so daß die 6. Zahl 21 heißt.
Man versuche, die Bildungsgesetze der Folgen *B* bis *H* zu formulieren und die jeweils 6. Zahl einzutragen.



Diese fünf Probleme wurden der ungarischen Rätselzeitschrift *Füles* entnommen.

Wegsuche

Welcher Weg führt von unten nach oben (von 1 nach 2)?

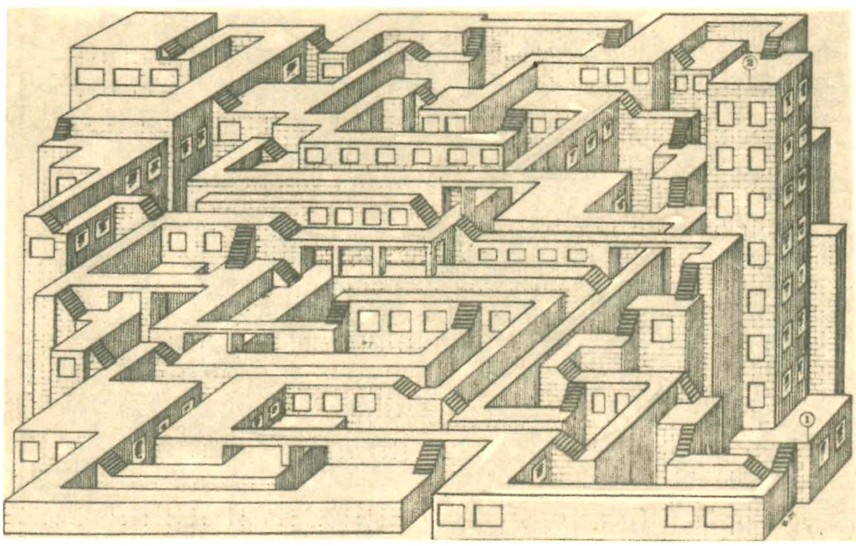
Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Wendt

GÜSTROW

Pädagogische Hochschule „L. Herrmann", Güstrow, Sektion Mathematik/Physik; Wissenschaftsbereichsleiter

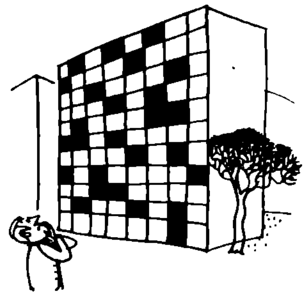
▲1735▲ In einem Kugelbehälter mit einem Durchmesser von 5 m wird Sauerstoff bei 293 K mit einem Druck von 150 kPa eingepreßt. Der Behälter wird dann verschlossen. Welche Gasmasse befindet sich in dem Behälter? Welche Kraft wirkt auf 1 cm^2 Kugelfläche, wenn die Temperatur des Gases auf 893 K erhöht wird?

Prof. Dr. Wendt, seit Jahren Delegationsleiter der DDR-Mannschaft zu den Internationalen Physikolympiaden (II. bis X. IPO), im Kreise der Teilnehmer der X. IPO: H. Schuster, Meißen; Th. Richter, Jena; R. Glaser, Dresden; R. Meinel, Jena; M. Hegner, Berlin; F. Marlow, Berlin



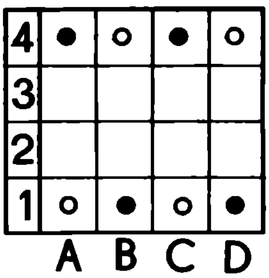
Kurzbiographie: Prof. Dr. Wendt wurde 1927 in Rostock geboren. Er war seit 1949 Lehrer in Roggentin (Kreis Rostock) und später an der EOS in Torgelow, Kr. Ückermünde. Seit 1954 ist er Mitarbeiter an der Päd. Hochschule Güstrow, Bereich Methodik des Physikunterrichts. Die Hochschule unterstützt die außerunterrichtliche Arbeit der *Jungen Physiker* hervorragend. Seit 1973 werden in Güstrow *Olympiaden Junger Physiker* durchgeführt. Im Februar 1978 läuft der VI. Wettbewerb. Im Bereich Methodik des Physikunterrichts werden wissenschaftliche Untersuchungen zur inhaltlichen und methodischen Gestaltung des fakultativen Unterrichts in den *Arbeitsgemeinschaften nach Rahmenprogrammen* und in den Lehrgängen der Abiturstufe durchgeführt.

In freien Stunden alpha heiter



Remis

Für dieses Spiel zu zweit benötigt ihr vier weiße und vier schwarze Steine sowie 16 Spielfelder, die ihr auf Pappe aufzeichnet. Auf unserer Abbildung seht ihr die Ausgangsstellung der Steine. Beide Spieler ziehen abwechselnd einen Stein ihrer Farbe auf ein unbesetztes Nachbarfeld, und zwar senkrecht oder waagerecht, nach oben oder nach unten, aber nicht diagonal.



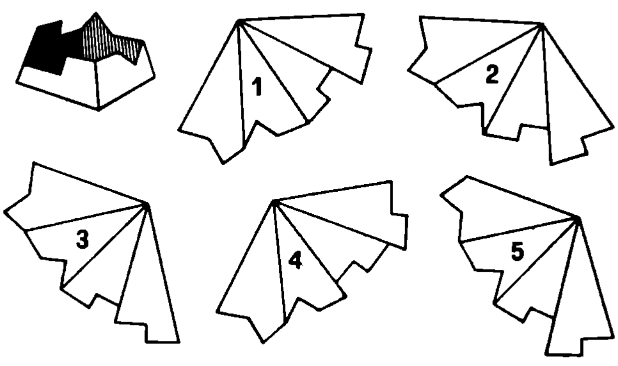
Wer beginnt, wird durch Los entschieden. Jeder Spieler muß versuchen, drei Steine seiner Farbe nebeneinander oder diagonal in eine Reihe zu bekommen. Die Züge sind möglichst schnell auszuführen. Sicherlich wird einer der Spieler gewinnen, obwohl mit Hilfe eines Computers ermittelt worden ist, daß es bei fehlerfreiem Spiel keinen Gewinner geben kann und das Unentschieden (Remis) unvermeidlich ist.

aus: NBI 46/77

Welches Netz?

Durch eines der fünf Netze läßt sich die oben links gezeichnete Basis zu einer Pyramide ergänzen. Durch welches?

aus: „Füles", Budapest



alpha-Gleichungen

Jedem Element der Menge $M_1 = \{\alpha, C, E, G, H, I, L, N, U\}$ ist genau ein Element der Menge $M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ so zuzuordnen, daß die nachstehenden Gleichungen zu wahren Aussagen werden.

(1) $\alpha = \alpha + \alpha \cdot (\alpha - \alpha)$
(2) $G = \alpha + \alpha + \alpha - \alpha$
(3) $L = (\alpha + \alpha + \alpha) : \alpha$
(4) $E = (\alpha + \alpha) : (\alpha + \alpha)$
(5) $I = (\alpha \cdot \alpha + \alpha) : \alpha$
(6) $C = (\alpha + \alpha) : \alpha + \alpha$
(7) $H = \alpha\alpha : \alpha - \alpha$
(8) $U = \alpha + \alpha + \alpha : \alpha$
(9) $N = (\alpha \cdot \alpha) : (\alpha + \alpha)$
(10) $G = \alpha \cdot \alpha - \alpha - \alpha$
(11) $E = (\alpha \cdot \alpha) : (\alpha \cdot \alpha)$
(12) $N = \alpha : \alpha + \alpha : \alpha$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

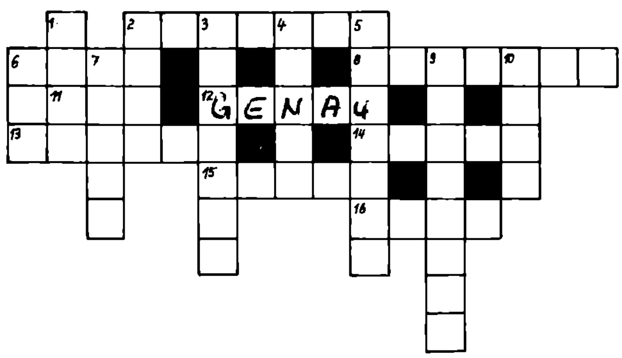
Kreuzworträtsel

Die Wörter haben folgende Bedeutung:

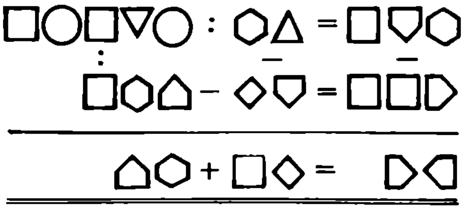
Waagerecht: 2. eine natürliche Zahl; 6. Vorsilbe bei Einheiten (10^6); 8. Problemstellung; 11. Vertiefung im Gelände; 12. soviel wie „exakt"; 13. griechischer Buchstabe; 14. eine Winkelfunktion; 15. Seiten einer Gleichung; 16. aufgewickelte Oberfläche eines Körpers.

Senkrecht: 1. griechischer Buchstabe; 2. ein bestimmter Teil eines Ganzen; 3. Eigenschaft bestimmter rationaler Zahlen; 4. ein Stellenwert; 5. eine natürliche Zahl; 7. griechischer Buchstabe; 9. eindeutige Abbildung; 10. Wendung bei Schlußfolgerungen.

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin



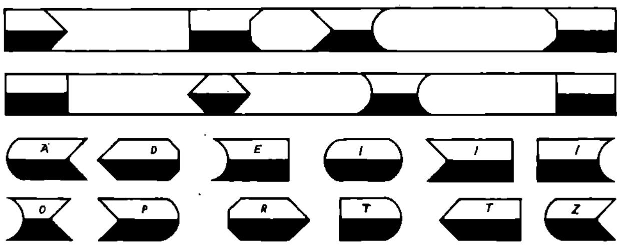
Kryptarithmetik



Schüler Heiko Müller, Schmalkalden

Buchstabenleiste

Die unten abgebildeten Teile sind in die beiden oberen Leisten passend einzufügen. Die Buchstaben ergeben dann eine Eigenschaft, die bestimmte Dezimalbrüche und bestimmte Funktionen besitzen.



Kreuzzahlrätsel

Waagerecht: 1. Geburtsjahr Fermats, 2. Geburtsjahr Keplers, 3. Geburtsjahr von Leibniz.
Senkrecht: 1. Geburtsjahr von Galois, 4. Todesjahr von Leibniz.
Diagonalen: 1. Todesjahr Cardanos, 3. Geburtsjahr Cardanos. *Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden*

1			4
2			
3			

Bilder und Schattenbilder

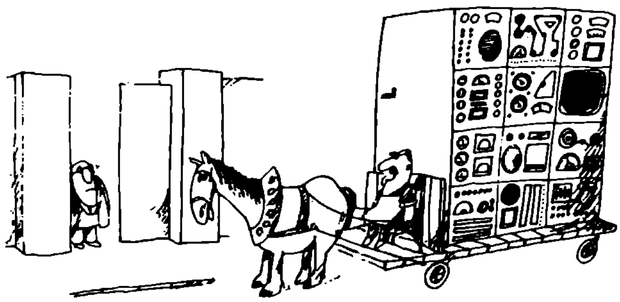
Man suche das Schattenbild eines jeden Kochs. Es bleibt eine Figur übrig, zu der kein Schattenbild und ein Schattenbild, zu der keine Figur gehört.
Welches sind die zusammengehörigen Paare bzw. die alleinstehende Figur und das einzelne Schattenbild?

Füllrätsel

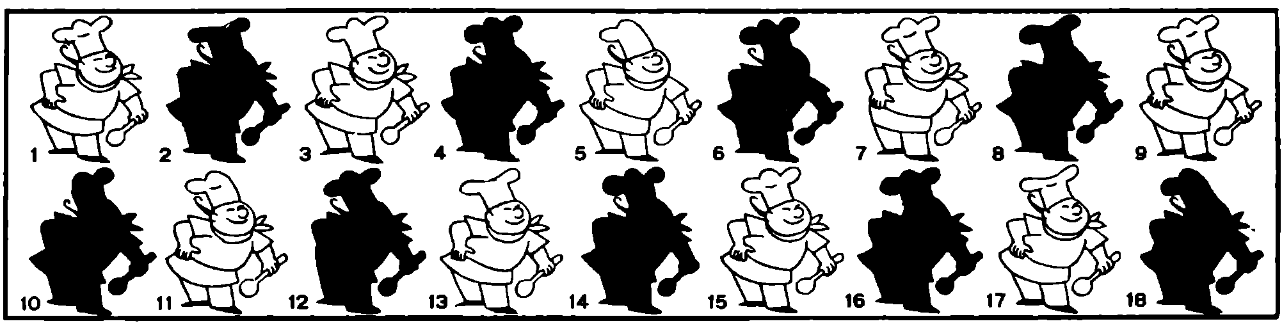
Es sind abwechselnd Wörter mit fünf und sechs Buchstaben zu suchen und nacheinander senkrecht in die Figur einzutragen. Bei richtiger Lösung ergeben die Anfangsbuchstaben von links nach rechts gelesen die Bezeichnung für die Verknüpfung mathematischer Größen.

1. Letzter Buchstabe des griechischen Alphabets.
2. Ein Körper, dessen Grund- und Deckfläche kongruente, in parallelen Ebenen liegende Vieleckflächen und dessen Seitenflächen Parallelogramme oder Rechtecke sind.
3. Grundbegriff der Geometrie.
4. Halbmesser, halber Durchmesser eines Kreises.
5. Erster Buchstabe des griechischen Alphabetes.
6. Griechischer Mathematiker (um 624 bis 547 v. u. Z.), nach dem ein bekannter Satz der Planimetrie benannt ist.
7. Guter Einfall (Plural).
8. Sortieren.
9. Maschinenelement, das in der technischen Zeichnung nicht in Schnittdarstellung gezeichnet wird (Pl.). *Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald*

1 O	2 P	3 E	4 R	5 A	6 T	7 I	8 O	9 N
M	R	B	A	L	H	D	R	
E	I	E	D	P	A	E	D	
G	S	N	I	H	L	E	N	
A	M	E	U	A	E	N	E	
	A		S		S		N	



Wir bringen den neuen Computer!



XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

(4./5. Februar 1978)

Klassenstufe 7

1. Es sei A die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen a, für die

$$1500 \leqq a \leqq 2650 \text{ gilt.}$$

Untersuche, ob es in der Menge A fünfundsechzig verschiedene Zahlen gibt, die gerade und durch 9 teilbar sind!

2. Uli hat vier verschiedene, mit A, B, C und D bezeichnete Sorten Stahlkugeln. Dabei haben Kugeln gleicher Sorte auch stets einander gleiches Gewicht. Mit Hilfe einer Balkenwaage stellt er fest, daß zwei Kugeln der Sorte B genau so schwer sind wie eine Kugel der Sorte A. Drei Kugeln der Sorte C wiegen ebensoviel wie eine Kugel der Sorte B. Fünf Kugeln der Sorte D haben das gleiche Gewicht wie eine Kugel der Sorte C.
a) Wieviel Kugeln der Sorte D muß Uli in die (leere) eine Waagschale legen, wenn sie einer Kugel der Sorte A in der anderen Waagschale das Gleichgewicht halten sollen?
b) In der einen Waagschale liegen 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C. Wieviel Kugeln der Sorte B muß Uli in die andere (leere) Waagschale legen, um Gleichgewicht zu erhalten?

3. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = 9{,}0$ cm; $\overline{BC} = 6{,}0$ cm und $\sphericalangle BCA = 120°$.
Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck $CDEFGH$, derart, daß D auf AC, F auf AB und H auf BC liegen!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob es genau ein Sechseck $CDEFGH$ gibt, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht!

4. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege der Punkt D so, daß $\overline{BD} = \overline{AB}$ ist.
Beweise, daß dann $\sphericalangle DCA = 90°$ ist!

5. Ermittle alle zweistelligen Zahlen, für die sowohl die folgende Aussage (1) als auch die folgende Aussage (2) zutrifft:
(1) Setzt man zwischen Einerziffer und Zehnerziffer der zweistelligen Zahl die Ziffer 5, so erhält man eine Zahl, die um genau 230 größer ist als die ursprüngliche Zahl.
(2) Setzt man die Ziffer 5 vor die zweistellige Zahl, so erhält man ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl.

6. In einem Quadrat $ABCD$ habe die Diagonale AC eine Länge von 10,0 cm.
a) Konstruiere ein solches Quadrat! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
b) Ein Rechteck $EFGH$ heißt dann dem Quadrat $ABCD$ einbeschrieben, wenn bei geeigneter Bezeichnung E auf AB, F auf BC, G auf CD und H auf DA liegt. Dabei gilt $EF \parallel AC$. Ermittle für jedes derartige Rechteck $EFGH$ seinen Umfang!

Klassenstufe 8

1. Es ist zu beweisen: Wenn der Winkel $\sphericalangle CBA$ eines Dreiecks ABC die Größe 30° hat, dann hat die Seite AC des Dreiecks ABC die gleiche Länge wie der Radius des Umkreises k dieses Dreiecks.

2. Gegeben seien ein Punkt S und zwei von S ausgehende Strahlen a und b, die miteinander einen spitzen Winkel bilden. Konstruiere im Innern dieses Winkels einen Punkt P, der folgenden Bedingungen entspricht:
(1) P hat von a den doppelten Abstand wie von b.
(2) Die Länge der Strecke SP beträgt 5,0 cm.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen der Aufgabe ein Punkt P eindeutig bestimmt ist!

3. Die gebrochene Zahl $\frac{9}{91}$ soll als Differenz zweier positiver echter Brüche mit den Nennern 7 und 13 dargestellt werden. Untersuche, ob es eine solche Darstellung gibt, ob es mehr als eine gibt, und ermittle alle derartigen Darstellungen!

4. Eine Pioniergruppe sammelte Altpapier; der gesamte Erlös wurde auf das Solidaritätskonto überwiesen. Die Pioniere bildeten zwei Brigaden, jeder Pionier der Gruppe gehörte genau einer dieser Brigaden an. Über das Sammelergebnis ist folgendes bekannt:
(1) Jeder Pionier der Brigade A sammelte genau 13 kg, außer einem, der nur genau 6 kg mitbrachte.
(2) Jeder Pionier der Brigade B sammelte genau 10 kg, außer einem mit nur genau 5 kg.
(3) Brigade A sammelte insgesamt die gleiche Menge wie Brigade B.
(4) Die gesamte Pioniergruppe sammelte mehr als 100 kg, jedoch weniger als 600 kg Altpapier.
a) Wieviel Pioniere gehörten einer jeden Brigade insgesamt an?
b) Wieviel Mark konnte die Pioniergruppe auf das Solidaritätskonto überweisen, wenn der Altstoffhandel 0,15 Mark pro kg Altpapier bezahlte?

5. Man ermittle alle geordneten Tripel $[P_1, P_2, P_3]$ von Primzahlen P_1, P_2, P_3 mit $P_2 > P_3$, die der Gleichung

$$P_1(P_2 + P_3) = 165 \qquad (1)$$

genügen!

6. Zwei Platten von gleicher Dicke bestehen aus Eichenholz bzw. Stahl. Der Flächeninhalt der Grundfläche der Eichenplatte ist um 20% größer als der Flächeninhalt der Grundfläche der Stahlplatte. Die Dichte des Eichenholzes verhält sich zur Dichte des Stahls wie 1 : 10. Ermittle, um wieviel Prozent die Masse der Stahlplatte größer als die Masse der Eichenplatte ist!

Klassenstufe 9

1. Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 (einschließlich dieser Grenzen), die weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar sind!

2. Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $\overline{AB} = 9$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CD} = 11$ cm, $\overline{AD} = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B die Größe 110° hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist! Von einem Rechteck $EFGH$ werden nun folgende Eigenschaften gefordert:
(1) Das Rechteck $EFGH$ ist flächeninhaltsgleich dem Viereck $ABCD$.
(2) A liegt auf der Rechteckseite EH zwischen E und H, und C liegt auf der Rechteckseite FG.
(3) Die Rechteckseite EH steht auf AC senkrecht.
Begründen und beschreiben Sie, wie sich alle diejenigen Punkte konstruieren lassen, die als Eckpunkt E eines Rechtecks $EFGH$ mit den geforderten Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten können!

3. In einem Dreieck ABC sei $\overline{AC}=b=13$ cm und $\overline{BC}=a=15$ cm. Das Lot von C auf die Gerade durch A und B sei CD, und es gelte $\overline{CD}=h_c=12$ cm.
Ermitteln Sie für alle Dreiecke ABC, die diesen Bedingungen entsprechen, den Flächeninhalt I!

4. Für ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ gelte $\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=a$, sowie $\overline{AB}>a$.
a) Beweisen Sie, daß die Diagonale AC den Innenwinkel $\sphericalangle DAB$ des Trapezes halbiert!
b) Berechnen Sie die Länge von AB für den Fall, daß $\sphericalangle DAB=60°$ gilt!

5. Beweisen Sie folgende Aussage:
Vergrößert man das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl!

6. Für jedes $i=1, 2, 3$ seien x_i und y_i zwei beliebige voneinander verschiedene reelle Zahlen, und es sei mit d_i die größere der beiden Zahlen x_i und y_i bezeichnet.
a) Beweisen Sie:
Wenn $x_1 \leqq x_2+x_3$ und $y_1 \leqq y_2+y_3$ gilt, dann gilt $\quad d_1 \leqq d_2+d_3$.
b) Stellen Sie fest, ob auch die folgende Aussage gilt:
Wenn $d_1 \leqq d_2+d_3$ gilt, dann gilt auch
$$x_1 \leqq x_2+x_3.$$

Klassenstufe 10

1. Es seien a und b positive reelle Zahlen, n eine natürliche Zahl.
Beweisen Sie, daß dann
$$(a+b)^n \leqq 2^n(a^n+b^n) \text{ gilt!}$$

2. Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $\overline{AB}=9$ cm, $\overline{BC}=6$ cm, $\overline{CD}=11$ cm, $\overline{AD}=8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B eine Größe von 110° hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist! Begründen und beschreiben Sie eine Konstruktion derjenigen Länge $\overline{UV}$, die die Seitenlänge eines zu $ABCD$ flächeninhaltsgleichen Quadrates $UVWX$ ist!

3. Jens, Uwe, Dirk und Peter diskutieren darüber, welchem Zahlenbereich die Zahl z angehört, die durch den Term
$$z=\frac{\lg(7-4\cdot\sqrt{3})}{\lg(2-\sqrt{3})}$$
definiert werden soll.
Jens sagt, daß z eine natürliche Zahl ist, Dirk meint, die Zahl z sei eine rationale Zahl, Uwe hält z für irrational, und Peter vermutet, daß der Term überhaupt keine Zahl z definiert.
Entscheiden Sie, wer recht hat!

4. Geben Sie alle Primzahlen p an, für die $3p+4=z^2$ gilt, wobei z eine natürliche Zahl ist!

5. Aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 werden 101 verschiedene Zahlen beliebig ausgewählt.
Es ist zu zeigen, daß bei jeder solchen Auswahl unter den ausgewählten Zahlen mindestens zwei existieren, so daß die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

6. Gegeben sei der Radius r eines Kreises k. Unter allen zu k konzentrischen Kreisen k', deren Radius r' größer als r ist, seien diejenigen betrachtet, für die folgendes gilt:
(1) Es gibt ein gleichseitiges Dreieck ABC so, daß A auf k' liegt und B und C auf k liegen.
a) Beweisen Sie, daß unter allen so entstehenden Dreiecken ABC auch solche mit maximalem Flächeninhalt existieren und daß diese für genau einen Wert r_1' von r' zustandekommen! Drücken Sie diesen Wert r_1' und diesen maximalen Flächeninhalt F_1 durch r aus!
b) Zeigen Sie, daß für den Wert r_1' auch noch Dreiecke ABC existieren, die (1) erfüllen und einen Flächeninhalt $F_0<F_1$ haben! Beweisen Sie, daß es genau einen solchen Flächeninhalt F_0 gibt und drücken Sie ihn durch r aus!
c) Beweisen Sie, daß es genau einen Wert r_2' von r' mit folgender Eigenschaft gibt: Alle Dreiecke ABC, die (1) für dieses r' erfüllen, haben denselben Flächeninhalt! Drücken Sie diesen Wert r_2' und den zugehörigen Flächeninhalt F_2 durch r aus!

Klassenstufe 11/12

1. Gegeben sei die Folge (a_n) durch
$$a_n=\frac{4n}{4n^2+121} \qquad (1)$$
für $n=1, 2, 3, \ldots$
Man ermittle die obere Grenze und die untere Grenze von (a_n), sofern diese existieren.

2. Zu jeder ganzen Zahl a ermittle man alle reellen Lösungen x der Gleichung
$$x^4+x^3+a^2x^2+x+1=0.$$

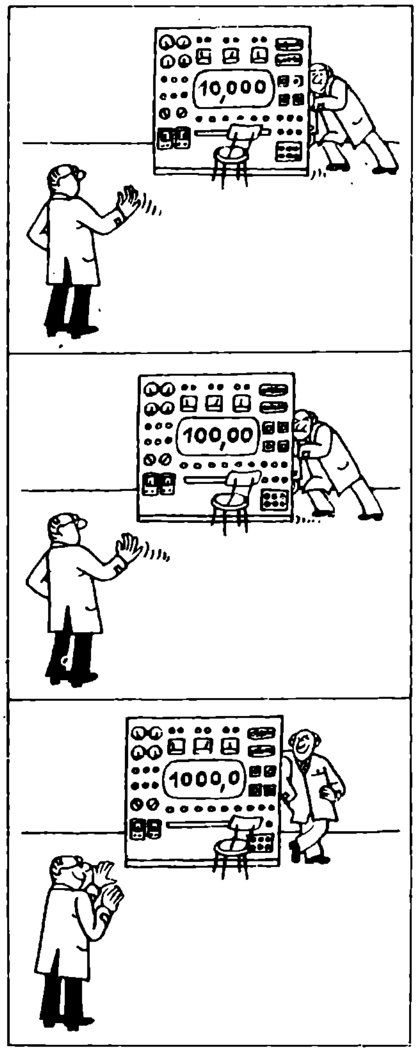
3. Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge s, in dem fünf kongruente Kugeln (mit den Mittelpunkten P, Q, R, S, T) so angeordnet sind, daß gilt:
(1) Die Kugel um P berührt die drei von A ausgehenden Seitenflächen ABC, ACD, ADB des Tetraeders,
(2) die Kugel um Q berührt die drei von B ausgehenden Seitenflächen,
(3) die Kugel um R berührt die drei von C ausgehenden Seitenflächen und
(4) die Kugel um S berührt die drei von D ausgehenden Seitenflächen.
(5) Die Kugel um T berührt die vier übrigen Kugeln von außen. Man ermittle den Radius r dieser fünf Kugeln.

4. Man beweise, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$ die Ungleichung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}$ gilt.

5. Man beweise folgenden Satz:
Sind u der Umfang, r der Radius des Inkreises und R der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC, dann gilt $R>\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{ur}$. Ist das Dreieck insbesondere rechtwinklig, dann gilt sogar $R \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{ur}$.

6A. Es sei n eine natürliche Zahl mit $n>1$.
a) Man ermittle alle diejenigen in der Menge R der reellen Zahlen definierten Funktionen f, die in R stetig sind und die Eigenschaft haben, daß für jede reelle Zahl x die Gleichung
$$f(x^n)=f(x) \text{ gilt.} \qquad (1)$$
b) Man gebe eine in R definierte und unstetige Funktion f an, die die Eigenschaft (1) hat.

6B. Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist. Beispielsweise gilt
$$\left[\frac{7}{2}\right]=3;\ [5]=5;\ [-\pi]=-4.$$
Man beweise: Für jede reelle Zahl x und jede positive ganze Zahl n gilt
$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$



Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 5/77, Fortsetzung:

Ph 10/12 ■25

Geg.: $N_1 = 300$ Windungen
$D = 5\text{ cm} = 0{,}05\text{ m}$
$d = 0{,}1\text{ cm} = 0{,}001\text{ m}$
$I = 10\text{ A}$
$\frac{\varrho}{A} = 2{,}27 \cdot 10^{-2}\,\frac{\Omega}{\text{m}}$

Ges.: 1) Anzahl der Wicklungslagen M
2) Meßfehler in Ohm
3) magnetische Feldstärke H in $\frac{AN}{\text{m}}$
4) Leistung P in Watt

1) Die Länge l_1 des Kupferdrahtes der 1. (äußeren) Lage ist $l_1 = \pi N_l\,(D-d)$, die der zweiten $l_2 = \pi N_l\,(D-2d)$ usw. und schließlich die der M-ten Lage $l_M = \pi N_l(D-Md)$. Die Gesamtlänge des Drahtes bei M Lagen ist somit

$$l(M) = \pi N_l \sum_{m=1}^{M} (D-md) \text{ oder}$$
$$= \pi N_l \left[MD - \frac{d(M+1)M}{2}\right]$$

und nach der Formel $R = \frac{\varrho \cdot l}{A}$

damit der Gesamtwiderstand

$$R(M) = 0{,}0227\pi N_l \left[MD - \frac{d(M+1)M}{2}\right]\Omega,$$

denn $\frac{\varrho}{A} = 2{,}27 \cdot 10^{-2}\,\frac{\Omega}{\text{m}}$; $l = l(M)$ m;
$R = R(M)$.

Die (diskrete) Funktion $R(M)$ nimmt für $M = 9, 10, 11$ die Funktionswerte $R(9) = 8{,}66$ Ohm, $R(10) = 9{,}52$ Ohm und $R(11) = 10{,}35$ Ohm an. Da $R(M)$ eine monoton steigende Funktion ist und R_{gem} zu $(9{,}6 \pm 0{,}1)$ Ohm gegeben ist, kann eindeutig für $M = 10$ entschieden werden. Die Anzahl der Wicklungslagen ist $M = 10$.

2) Der maximal zulässige Meßfehler wird aus
$$MIN\left\{\frac{[R(10)-R(9)]}{2}, \frac{[R(11)-R(10)]}{2}\right\}$$
zu $\pm 0{,}42$ Ohm bestimmt; aus Sicherheitsgründen wird $\pm 0{,}4$ gewählt. Der maximal zulässige Meßfehler ist $\pm 0{,}4$ Ohm.

3) Die Spule hat bei $M = 10$ Lagen $10 \cdot 10$ Windungen je cm bzw. $10 \cdot 10 \cdot 100 = 10^4$ Windungen je m, womit sich nach Formel $H = I \cdot \frac{N}{l}$ bei $I = 10$ A mit $H = \frac{10\text{ A} \cdot 10^4}{\text{m}}$ eine Feldstärke von $H = 10^5\,\frac{AN}{m}$ ergibt. Die magnetische Feldstärke im Spuleninneren ist $10^5\,\frac{AN}{\text{m}}$.

4) Die der Spule zugeführte elektrische Leistung ist $P = U \cdot I$ mit $U = R \cdot I$ (Ohmsches Gesetz), also $P = R \cdot I^2$ und hier $P = R(M)I^2 = 9{,}52 \cdot 10^2$ Watt. Zur Aufrechterhaltung der Spulentemperatur muß diese abgeführt werden. Die abzuführende Leistung des Kühlaggregats ist $P = 952$ Watt.

Ch 7 ■17

a) 1 l Kraftstoff $\hat{=}$ 8430 l Luft
6 l Kraftstoff $\hat{=}$ x l Luft
$$x = \frac{8430\text{ l} \cdot 6\text{ l}}{1\text{ l}}$$
$$x = 50\,580\text{ l} \hat{=} 50\,580\text{ dm}^3$$
50 580 dm³ Luft werden benötigt.

b) $5\text{ m} \cdot 3{,}50\text{ m} \cdot 2{,}50\text{ m} = 43{,}75\text{ m}^3$
$50{,}58\text{ m}^3 > 43{,}75\text{ m}^3$
$50\,580\text{ dm}^3 \hat{=} 50{,}58\text{ m}^3$
Die Luft im Zimmer reicht nicht zur vollständigen Verbrennung aus.

Ch 8 ■18

a) 1 kg Stickstoff $\hat{=}$ 80 kg Grünfutter
3000000 kg Stickstoff $\hat{=}$ x kg Grünfutter
$$x = \frac{3000000\text{ kg} \cdot 80\text{ kg}}{1\text{ kg}}$$
$$x = 240\,000\,000\text{ kg}$$
$$x = 240\,000\text{ t}$$
240000 t Grünfutter können zusätzlich erzeugt werden.

b) 240000 t $\hat{=}$ 4%
$x \hat{=} 100\%$
$x = 6\,000\,000$ t
6000000 t werden jährlich erzeugt.

c) 1 Waggon $\hat{=}$ 60 t
$x \hat{=} 3000$ t
$$x = \frac{1 \cdot 3000\text{ t}}{60\text{ t}}$$
$$x = 50$$
Die Deutsche Reichsbahn muß 50 Waggons zur Verfügung stellen.

Ch 9 ■19 a) 1 mol K_2SO_4 enthält
2 mol Kalium
1 mol Schwefel
4 mol at. Sauerstoff

In 1 g K_2SO_4 sind daher
$$\frac{2\,K \cdot 1\text{ g}}{K_2SO_4} = \frac{2 \cdot 39 \cdot 1\text{ g}}{174} = 0{,}449\text{ g Kalium}$$
$$\frac{S \cdot 1\text{ g}}{K_2SO_4} = \frac{32 \cdot 1\text{ g}}{147} = 0{,}184\text{ g Schwefel}$$
$$\frac{4\,O \cdot 1\text{ g}}{K_2SO_4} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 1\text{ g}}{174} = 0{,}367\text{ g Sauerstoff}$$

b) 44,9% Kalium
18,4% Schwefel
36,7% Sauerstoff
100,0%

c) 20 g einer 10%igen Lösung enthalten
$$\frac{20\text{ g} \cdot 10\%}{100\%} = 2\text{ g Kaliumsulfat}$$

Ch 10/12 ■20 In 100 l Stadtgas sind 50 l H_2, 35 l CH_4, 3 l C_2H_4, 8 l CO, 3 l N_2

Verbrennung der Stoffe nach folgenden Gleichungen:

50 l x
$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$
44,8 l 22,4 l
$x = 25$ l

35 l x
$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$$
22,4 l 44,8 l
$x = 70$ l

3 l x
$$C_2H_4 + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 2H_2O$$
22,4 l 72,2 l
$x = 9$ l

8 l x
$$2CO + O_2 \rightarrow 2CO_2$$
44,8 l 22,4 l
$x = 4$ l

100 l Stadtgas verbrauchen 25 l + 70 l + 9 l + 4 l = 108 l Sauerstoff
1 m³ verbraucht 1080 l Sauerstoff, was 5 · 1080 l = 5400 l oder 5,4 m³ Luft entspricht.
Zur völligen Verbrennung von 1 m³ Stadtgas sind 5400 l oder 5,4 m³ Luft erforderlich.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 6/77:

Ma 5 ■1679 Angenommen, Katrin besitzt a grüne, b gelbe Buntstifte; dann hat sie noch $2 \cdot a$ rote und b blaue Buntstifte. Nun gilt
$a + b + 2a + b = 12,$
$3a + 2b = 12.$
Nur für gerade Zahlen a wird diese Gleichung erfüllt. Für $a = 2$ erhalten wir
$3 \cdot 2 + 2b = 12,$
$2b = 6,$
$b = 3.$
Für $a = 4$ erhalten wir
$3 \cdot 4 + 2b = 12$
$2b = 0,$
was nicht möglich ist.
Somit besitzt Katrin zwei grüne, drei gelbe, drei blaue und vier rote Buntstifte.

Ma 5 ■1680 In diese Aufgabe hat sich ein Fehler eingeschlichen. Die Aufgabe ist nur dann lösbar, wenn es in Punkt b) heißt: „David ist *jünger* als der Erfurter.“
Die Lösung wäre dann:
$$c = d < b < a,$$
wenn a, b, c, d die Zahlen sind, die das Lebensalter von Andreas (Weimar), Bert (Erfurt), Christian (Gotha), David (Sömmerda) angeben. *Alle* Einsender zu dieser Lösung erhielten eine Antwortkarte „richtig gelöst“.

Ma 5 ■1681 Aus $A = a \cdot b = 480 \cdot 360\text{ cm}^2$ und $A_F = 40 \cdot 40\text{ cm}^2$ folgt, daß $(480 \cdot 360) : (40 \cdot 40) = 108$ Teppichfliesen benötigt werden. Der Stapel aus diesen Teppichfliesen ist somit 108 · 4 mm − 20 mm = 412 mm = 41,2 cm hoch.

Ma 5 ■1682 Angenommen, auf der Weide grasen n Pferde: dann sind es noch $2 \cdot n$ Kühe und $8 \cdot n$ Schafe. Nun gilt

$$90 < n+2n+8n < 100,$$
$$90 < 11 \cdot n < 100.$$

Nur $n=9$ erfüllt diese Ungleichungen. Auf der Weide befinden sich somit 9 Pferde, 18 Kühe und 72 Schafe.

Ma 5 ■1683 Wenn in jedem Bus die gleiche Anzahl von Schülern fahren soll, müssen in jedem Bus $87:3=29$ Schüler fahren. Angenommen, im ersten Bus befanden sich ursprünglich a, im zweiten b und im dritten c Schüler, dann befanden sich nach dem Umsteigen im ersten Bus $a-6-3=a-9$ Schüler, im zweiten $b+6-4=b+2$ Schüler und im dritten $c+3+4=c+7$ Schüler. Nun gilt $a-9=29$ und $b+2=29$ und $c+7=29$, also $a=38$, $b=27$ und $c=22$. Vor dem Umsteigen befanden sich im ersten Bus 38, im zweiten 27, im dritten 22 Schüler.

Ma 5 ■1684 Angenommen, n Schüler haben diese Klassenarbeit geschrieben. Aus $20<n<30$ folgt $4<n:5<6$. Da das Ergebnis $n:5$ eine natürliche Zahl ergeben muß, kann nur $n=25$ gelten. Somit haben 5 Schüler die Note 1, 8 Schüler die Note 2, 10 Schüler die Note 3 und 2 Schüler die Note 4 erhalten.

Ma 6 ■1685 Es sei b die Länge der Basis, s die Länge eines Schenkels dieses gleichschenkligen Dreiecks. Für seinen Umfang gilt $b+2s=14$ cm. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

a) Die Basis sei dreimal so lang wie ein Schenkel; wegen $b=3s$ gilt dann $3s+2s=14$ cm, $5s=14$ cm, $s=28$ mm und somit $b=84$ mm. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite. Es muß also $s+s>b$, also $2s>b$ gelten. Wegen $2s=56\text{ mm}<84\text{ mm}=b$ ist dieser Fall nicht möglich.

b) Ein Schenkel sei dreimal so lang wie die Basis; wegen $s=3b$ gilt dann $b+6b=14$ cm, $7b=14$ cm, $b=2$ cm. Die Basis hat eine Länge von 2 cm; jeder Schenkel ist 6 cm lang.

Ma 6 ■1686 Die zweistelligen natürlichen Zahlen haben die Form $z=10a+b$ mit $0<a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$. Für die Quersumme $q=a+b$ dieser Zahlen gilt

$$10a+b=5\cdot(a+b),$$
$$10a+b=5a+5b,$$
$$5a=4b.$$

Nur die Zahlen $a=4$ und $b=5$ genügen den Bedingungen. Somit existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 45, und es gilt $45:5=9$; $4+5=9$.

Ma 6 ■1687 Angenommen, in der ersten Schale lagen anfangs n Äpfel; dann lagen in den beiden anderen Schalen jeweils $2n$ Äpfel. Der ersten Schale wurden 2 Äpfel entnommen und später 6 Äpfel hinzugefügt, so daß sie schließlich $(n+4)$ Äpfel enthielt. Der zweiten Schale wurden 2 Äpfel hinzugefügt und später 4 Äpfel entnommen, so daß sie schließlich $(2n-2)$ Äpfel enthielt. Nun gilt

$$2n-2=n+4,$$
$$n=6.$$

Die erste Schale enthielt sechs, die beiden übrigen enthielten jeweils 12 Äpfel.

Ma 6 ■1688 Angenommen, es waren n Silbermedaillen; dann waren es noch $(n-1)$ Goldmedaillen und $(n+1)$ Bronzemedaillen, insgesamt also $3n$ Medaillen. Nun gilt $3\cdot n=24$ und somit $n=8$. Die Sportler der Volksrepublik Bulgarien errangen 7 Gold-, 8 Silber- und 9 Bronzemedaillen.

Ma 6 ■1689 Angenommen, der Vater sammelte n Pilze; dann hat der Großvater $(n+2)$ Pilze und der Sohn $(n+7)$ Pilze gesammelt. Nun gilt

$$n+(n+2)+(n+7)=78,$$
$$3n+9=78,$$
$$3n=69,$$
$$n=23.$$

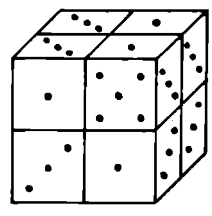
Somit kommen auf den Großvater 25, auf den Vater 23, auf den Sohn 30 Pilze.

Ma 7 ■1690 Von genau einem Würfel sind die Augenzahlen 1, 3 und 5 sichtbar. Aus $30-(1+3+5)=21$ folgt, daß die Summe der Augenzahlen der neun verbleibenden sichtbaren quadratischen Spielwürfelflächen gleich 21 ist. Von diesen neun verbleibenden Spielwürfelflächen mögen x die Augenzahl 1, y die Augenzahl 3 und z die Augenzahl 5 haben; dann gilt

$x+3y+5z=21$ und $x+y+z=9$ bzw.
$z=9-x-y$.

Durch Einsetzen erhalten wir

$$x+3y+5\cdot(9-x-y)=21,$$
$$x+3y+45-5x-5y=21,$$
$$4x+2y=24,$$
$$2x+y=12.$$



Aus $x=1$ folgt $y=10$, was wegen $x+y+z=9$ nicht möglich ist. Aus $x=2$ folgt $y=8$, was wegen $x+y+z=9$ nicht möglich ist. Aus $x=3$ folgt $y=6$ und $z=0$.
Wegen $1+3=4$ muß die Augenzahl 1 mindestens viermal vorkommen.

Ma 7 ■1691 Die Laufzeit für die 100-m-Hürden-Strecke von Tatjana Anissimowa betrug $(12{,}77+0{,}01)\text{ s}=12{,}78$ s. Nun gilt

$$v_1=\frac{s_1}{t_1}=\frac{100\text{ m}}{12{,}78\text{ s}}=\frac{10000\text{ m}}{1278\text{ s}}.$$

Ferner gilt

$$s_2=v_1\cdot t_2=\frac{10000\text{ m}}{1278\text{ s}}\cdot\frac{1}{100}\text{ s}$$
$$=\frac{100}{1278}\text{ m}=\frac{10000}{1278}\text{ cm}\approx 7{,}82\text{ cm}.$$

Johanna Schaller hatte einen hauchdünnen Vorsprung von nur etwa 8 cm gegenüber Tatjana Anissimowa, als sie über den Zielstreifen lief.

Ma 7 ■1692 $7{,}20\text{ M}:3=2{,}40\text{ M}$; $2{,}40\text{ M}:2=1{,}20\text{ M}$; Ute hat zwei Filzstifte gekauft. Es verbleiben noch $7{,}20\text{ M}-2{,}40\text{ M}=4{,}80$ M. Angenommen, Ute hat a Hefte und b Schnellhefter gekauft; dann gilt

$$12a+105b=480,$$
$$4a+35b=160,$$
$$4a=160-32b-3b,$$
$$a=40-8b-\frac{3b}{4}.$$

Nur für $b=4$, also $a=40-8\cdot 4-\frac{3\cdot 4}{4}=5$ wird diese Gleichung entsprechend den einschränkenden Bedingungen erfüllt.
Ute kaufte 5 Hefte und 4 Schnellhefter.

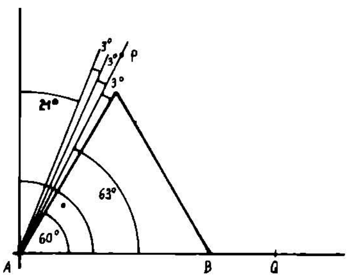
Ma 7 ■1693 Aus $b-a=12$ folgt $b=a+12$ und somit $x=\frac{a}{a+12}$. Nun gilt

$\frac{1}{4}<\frac{a}{a+12}<\frac{1}{3}$, also $\frac{1}{4}<\frac{a}{a+12}$ und $\frac{a}{a+12}<\frac{1}{3}$,
$a+12<4a$ und $3a<a+12$,
$12<3a$ und $2a<12$,
$4<a$ und $a<6$.
Aus $4<a<6$ folgt $a=5$.
Es existiert genau eine solche gebrochene Zahl; sie lautet $x=\frac{5}{17}$.

Ma 8 ■1694 Aus (4) folgt:
Dahlen ist Gärtner.
Aus (2) folgt: Lohe ist Lehrer; daraus folgt: Krüger ist Elektriker.
Aus (3) folgt: Krüger hat den Vornamen Dieter, aus (4) folgt: Dahlen hat den Vornamen Bernd; daraus folgt: Lohe hat den Vornamen Günter.
Dieter Krüger ist Elektriker, Günter Lohe ist Lehrer, und Bernd Dahlen ist Gärtner. Die Angabe (1) ist überflüssig.

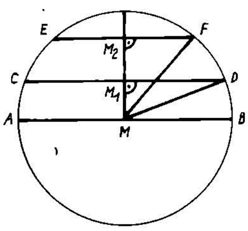
Ma 8 ■1695 Es seien a, b, c, d vier beliebige natürliche Zahlen. Nach Voraussetzung gilt: $a+b+c+d$ ist ungerade.
Das kann nur gelten, wenn entweder genau eine oder drei dieser Zahlen ungerade sind.
Daraus folgt: Mindestens eine dieser Zahlen ist gerade.
Wenn ein Produkt aus beliebig vielen natürlichen Zahlen wenigstens einen geradzahligen Faktor enthält, so ist dieses Produkt eine gerade Zahl, w.z.b.w.

Ma 8 ■1696 a) Es sei $\sphericalangle PAQ$ ein Winkel von 63° mit dem Scheitelpunkt A. Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck mit beliebiger Seitenlänge derart, daß ein Eckpunkt mit dem Scheitelpunkt des Winkels zusammenfällt und eine Seite auf einem Schenkel des Winkels liegt. Man erhält so einen Winkel von 3°, den man noch zweimal antragen kann, so daß sich ein Winkel von 9° ergibt. Nun errichtet man im Punkt A auf der Dreieckseite, die auf dem Schenkel des gegebenen Winkels liegt, die Senkrechte und erhält einen Winkel von 21°. Das ist ein Drittel des gegebenen Winkels. Dieser Winkel läßt sich nun an einen der Schenkel des gegebenen Winkels zweimal antragen.



b) Der bei der Konstruktion a) erhaltene Winkel von 9° ist ein Siebentel des gegebenen Winkels von 63° und läßt sich an einen der Schenkel des gegebenen Winkels sechsmal antragen.

Ma 8 ▪1697 Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:
1. Fall: Beide Sehnen liegen auf derselben Seite des zu ihnen parallelen Durchmessers,
2. Fall: Beide Sehnen liegen auf verschiedenen Seiten des zu ihnen parallelen Durchmessers.
Skizze: (*1. Fall*)



Es seien $\overline{AB}$ der Durchmesser, $\overline{CD}$ die 10 cm lange und $\overline{EF}$ die 5 cm lange Sehne, M_1 und M_2 seien die Mittelpunkte der Sehnen $\overline{CD}$ bzw. $\overline{EF}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\overline{M_1M}^2=\overline{MD}^2-\overline{M_1D}^2$$
$$\overline{M_1M}^2=100\text{ cm}^2-25\text{ cm}^2$$
$$\overline{M_1M}\approx 8{,}660\text{ cm}.$$
$$\overline{M_2M}^2=\overline{MF}^2-\overline{M_2F}^2$$
$$\overline{M_2M}^2=100\text{ cm}^2-6{,}25\text{ cm}^2$$
$$\overline{M_2M}\approx 9{,}682\text{ cm}$$

1. Fall: $\overline{M_1M_2}=\overline{M_2M}-\overline{M_1M}\approx 9{,}682\text{ cm}-8{,}660\text{ cm}\approx 1{,}022\text{ cm}.$
2. Fall: $\overline{M_1M_2}=\overline{M_2M}+\overline{M_1M}\approx 9{,}682\text{ cm}+8{,}660\text{ cm}\approx 18{,}342\text{ cm}.$
Im *1. Fall* beträgt der Abstand der Sehnen etwa 1 cm; im *2. Fall* wenig mehr als 18 cm.

Ma 9 ▪1698 Nach Aufgabenstellung gilt: $s=x+y=xy$. Löst man die Gleichung $x+y=xy$ nach x auf, so erhält man $x=\frac{y}{y-1}$ $(y\neq 1)$. Nun lassen sich leicht solche Zahlenpaare $(x; y)$ mit $x, y\in P$ finden, die die gestellten Forderungen erfüllen; z. B. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$ oder $\left(\frac{8}{7}; 8\right)$ usw.

Betrachtet man nun folgendes Gleichungssystem:
(1) $s=x+y$
(2) $s=xy$, dann führt dessen Lösung auf die quadratische Gleichung $y^2-ys+s=0$ mit den Lösungen

$$y_{1,2}=\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{4s}{4}}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß y nur dann rational ist, wenn s^2-4s eine Quadratzahl ist. Analoges gilt für x, w.z.b.w.

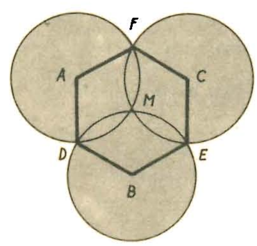
Ma 9 ▪1699 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}$

$$\sqrt{\sqrt{n^2}}=\frac{n}{\sqrt{n}}$$
$$\sqrt{n}=\frac{n}{\sqrt{n}}$$
$$\sqrt{n}=\frac{n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}$$
$$\sqrt{n}=\frac{n\cdot\sqrt{n}}{n}$$
$$\sqrt{n}=\sqrt{n}$$
$$n=n.$$

Da alle Schritte rückwärts äquivalente Umformungen sind, ist der Beweis erbracht.

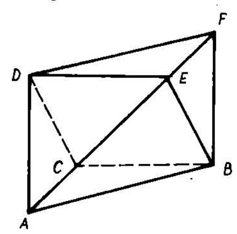
Ma 9 ▪1700 Es sei a^2 eine beliebige Quadratzahl; ihre Wurzel ist a. Man hat drei Fälle zu unterscheiden; denn a läßt bei der Division durch 3 entweder den Rest 0 oder 1 oder 2.
1. Fall: a ist durch 3 teilbar. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, für die gilt: $a=3n$. Es gilt dann $a^2=9n^2$. a^2 ist durch 3 teilbar, läßt also nicht den Rest 2.
2. Fall: a läßt bei der Division durch 3 den Rest 1. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, für die gilt: $a=3n+1$. Es gilt dann $a^2=(3n+1)^2=9n^2+6n+1$. a^2 läßt bei der Division durch 3 den Rest 1, also nicht den Rest 2.
3. Fall: a läßt bei Division durch 3 den Rest 2. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, für die gilt: $a=3n+2$. Es gilt dann $a^2=(3n+2)^2=9n^2+12n+4$. a^2 läßt bei Division durch 3 den Rest 1, also nicht den Rest 2, w.z.b.w.

Ma 9 ▪1701 a) A, B und C seien die Mittelpunkte, M der gemeinsame Randpunkt und D, E und F die gemeinsamen Randpunkte je zweier Kreise. $ADBECF$ ist nach Aufgabenstellung ein regelmäßiges Sechseck. Jedes seiner sechs gleichseitigen Dreiecke hat einen Flächeninhalt von $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$. Jeder der drei Kreissektoren hat einen Zentriwinkel von 240°.



Für den Flächeninhalt A gilt somit:
$$A=6\cdot\frac{r^2}{4}\sqrt{3}+3\cdot\frac{240°}{360°}\cdot\pi r^2$$
bzw. $A=\frac{r^2}{2}(3\sqrt{3}+4\pi)$.
b) Für $A=80\text{ cm}^2$ erhalten wir
$$80\text{ cm}^2=\frac{r^2}{2}(3\sqrt{3}+4\pi).$$
Die Auflösung nach r ergibt:
$$r^2=\frac{2\cdot 80\text{ cm}^2}{3\sqrt{3}+4\pi}$$
$$r\approx 3\text{ cm}.$$

Ma 10/12 ▪1702 Es sei V_K das Volumen des abgebildeten Körpers, V_W das Volumen des Würfels mit der Kantenlänge $\overline{AC}=a$ und V_P das Volumen einer der „abgeschnittenen“ Pyramiden, dann gilt
$$V_K=V_W-2V_P$$
$$V_K=a^3-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a$$
$$V_K=\frac{2}{3}a^3.$$



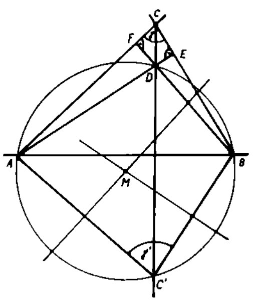
Ma 10/12 ▪1703 Die Voraussetzung läßt sich zu
$$x\geqq y\geqq z>1 \qquad (2)$$
verschärfen. Daraus folgt $\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{y}\leqq\frac{1}{z}$.
Damit (1) gilt, muß also $\frac{1}{z}\geqq\frac{1}{3}$, d. h. $z\leqq 3$ sein.
Wegen (2) sind zwei Fälle möglich:
1. Fall: $z=3$
Das liefert $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$, also $\frac{1}{y}\geqq\frac{1}{3}$, d. h. $y\leqq 3$.
Wegen $y\geqq z$ ergibt dies $y=3$. Somit ist die erste Lösung $x=y=z=3$.
2. Fall: $z=2$
Das liefert $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, also $\frac{1}{y}\geqq\frac{1}{4}$, d. h. $y\leqq 4$.
$y=4$ führt zu $x=y=4$ und $z=2$.
$y=3$ führt zu $x=6$; $y=3$; $z=2$.
$y=2$ liefert einen Widerspruch.
Damit sind alle Lösungen ermittelt, und die Lösungsmenge heißt:
$$L=\{[3;3;3],[4;4;2],[6;3;2]\}.$$

Ma 10/12 ▪1704 1. Nach der Aufgabenstellung gilt
$$\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi r^2 \;\Big|\cdot\frac{3}{4\pi}$$
$$r^3=3r^2 \;\big|:r\ (r\neq 0)$$
$$r=3.$$
2. Der Durchmesser der Kugel ($2r$) ist zugleich Raumdiagonale des Würfels ($a\sqrt{3}$). Aus $2r=a\sqrt{3}$ folgt $a=2\sqrt{3}$.
3. Der Oberflächeninhalt des Würfels ($6a^2$) hat die Maßzahl 72; der Oberflächeninhalt

der Kugel ($4\pi r^2$) hat die Maßzahl 113 (Näherungswert). Das Verhältnis $A_{OK}:A_{OK}$ beträgt etwa 1 : 1,57.

4. Das Volumen des Würfels (a^3) hat die Maßzahl 41,57 (Näherungswert); das Volumen der Kugel $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ hat die Maßzahl 113 (Näherungswert). Das Verhältnis $V_W:V_W$ beträgt etwa 1 : 2,72.

Ma 10/12 ▪1705 Spiegelt man das Dreieck ABC an der Geraden AB, so erhält man $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC'B = \gamma$. $\sphericalangle EDF = 180° - \gamma$ $= \sphericalangle ADB$ (Scheitelwinkel!). Die Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle AC'B$ und $\sphericalangle ADB$ im Viereck $AC'BD$ beträgt 180°. Somit ist das Viereck $AC'BD$ ein Sehnenviereck, q. e. d.



Ph 6 ▪26 Geg.: $l_0 = 200\,\text{m}$

$$\vartheta_0 = +10\,°\text{C}$$
$$\vartheta_1 = -15\,°\text{C}$$
$$\vartheta_2 = +30\,°\text{C}$$
$$\alpha = 0{,}0000117\,\frac{1}{\text{grd}}$$

Ges.: a) Die Längen des Mastes l_1 und l_2.
b) Die Längendifferenz Δl.

Zunächst berechnet man die Temperaturdifferenzen $\Delta\vartheta_1$ und $\Delta\vartheta_2$ nach

$$\Delta\vartheta_1 = \vartheta_1 - \vartheta_0 = -25\,\text{grd}$$
$$\Delta\vartheta_2 = \vartheta_2 - \vartheta_0 = +20\,\text{grd}.$$

a) Man berechnet die Längen nach der Formel

$$l_1 = l_0\,(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta_1).$$
$$l_1 = 200\,\text{m}\left(1 - 0{,}0000117 \cdot 25\,\frac{\text{grd}}{\text{grd}}\right)$$
$$l_1 \approx 199{,}94\,\text{m}$$
$$l_2 = l_0\,(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta_2)$$
$$l_2 = 200\,\text{m}\left(1 + 0{,}0000117 \cdot 20\,\frac{\text{grd}}{\text{grd}}\right)$$
$$l_2 \approx 200{,}05\,\text{m}$$

Die Höhen des Mastes sind 199,94 m bzw. 200,05 m.

b) Die Längendifferenz Δl findet man mit

$$\Delta l = l_2 - l_1$$
$$\Delta l = 200{,}05\,\text{m} - 199{,}94\,\text{m}$$
$$\Delta l = 0{,}11\,\text{m}$$

Die Längendifferenz des Mastes zwischen $-15\,°\text{C}$ und $+30\,°\text{C}$ beträgt 0,11 m.

Ph 7 ▪27 Geg.: $V_Z = \dfrac{\pi a^2 h}{4}$

$$V_P = \frac{a^2 h}{3}$$
$$\varrho_W = 0{,}95\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

Ges.: Dichte ϱ der Pyramide

Da die Massen des Zylinders m_Z und der Pyramide m_P gleich sind, gilt mit $m_Z = V_Z \cdot \varrho_W$ und $m_P = V_P \cdot \varrho$

$$m_Z = m_P$$
$$\frac{\pi a^2 h \varrho_W}{4} = \frac{a^2 h \varrho}{3}$$

Nach ϱ aufgelöst

$$\varrho = \frac{3\pi a^2 h \varrho_W}{4a^2 h}$$
$$\varrho = \frac{3\pi\varrho_W}{4}$$
$$\varrho = \frac{3 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}95\,\text{kg}}{4\,\text{dm}^3} = 2{,}237\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

Die Pyramide besteht aus Quarzglas, da dessen Dichte dem Ergebnis am nächsten kommt.

Ph 8 ▪28 Geg.: $R_1 = 5\,\Omega$, $R_4 = 1\,\Omega$

$R_2 = 50\,\Omega$, $R_5 = 10\,\Omega$

$R_3 = 500\,\Omega$, $R_6 = 100\,\Omega$

$R_7 = 1000\,\Omega$

Ges.: R

Der Gesamtwiderstand setzt sich zusammen als Summe aus den in Reihe geschalteten Widerständen R_1 und R_4 und den zwei Gruppen parallel geschalteter Widerstände R' bzw. R'' mit

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \frac{1}{R''} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}$$
$$R' = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \qquad R'' = \frac{R_5 \cdot R_6 \cdot R_7}{R_5 R_6 + R_5 R_7 + R_6 R_7}.$$

Dann ist der Gesamtwiderstand R gleich

$$R = R_1 + R' + R_4 + R''$$
$$R = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4 + \frac{R_5 \cdot R_6 \cdot R_7}{R_5 R_6 + R_5 R_7 + R_6 R_7}\,\Omega$$
$$R = 5 + \frac{50 \cdot 500}{50 + 500} + 1 + \frac{10 \cdot 100 \cdot 1000}{1000 + 10000 + 100000}\,\Omega$$
$$R \approx 60{,}46$$

Der Gesamtwiderstand beträgt 60,46 Ω.

Ph 9 ▪29 Geg.: $F = 0{,}25\,p = 0{,}00245\,N$

$$= 0{,}00245\,\frac{\text{VAs}}{\text{m}}$$
$$r = 2\,\text{cm} = 0{,}02\,\text{m}$$
$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

Ges.: Ladung Q

Da es sich um kleine Kugeln handelt, verwendet man das Modell der elektrischen Punktladung, und es gilt das Coulombsche Gesetz. Demzufolge ist

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \text{ mit } Q_1 = Q_2 = Q \text{ und}$$
$$F = \frac{Q^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}.$$
$$Q^2 = F \cdot 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2$$
$$Q = r\sqrt{F \cdot 4\pi \cdot \varepsilon_0}$$
$$Q = 0{,}02\,\text{m} \cdot \sqrt{0{,}00245\,\frac{\text{VAs}}{\text{m}} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}}$$
$$Q \approx 10^{-8}\,\text{As}$$

Die Ladung auf jeder der beiden Kugeln beträgt 10^{-8} As.

Ph 10/12 ▪30 Geg.: $\overline{B_1B_2} = a = 18\,500\,\text{m}$

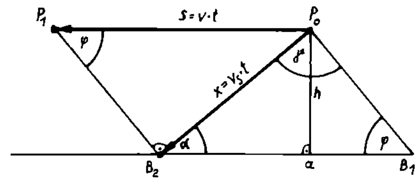
$$t_1 - t_2 = t = 37\,\text{s}$$
$$\alpha = 85{,}2°$$
$$v_s = 340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ges.: a) Geschwindigkeit des Flugzeuges v
b) Flughöhe h

Wenn ein bewegter Punkt P in P_0 einen Druckimpuls erzeugt, habe die Druckwelle nach t Sekunden den Punkt B_2 erreicht und damit einen Weg $x = \overline{P_0B_2} = v_s \cdot t$ zurückgelegt. Der Punkt P_0 ist in der Zeit t jedoch bei P_1 angelangt. Der Weg von P_0 nach P_1 ist dann $s = \overline{P_0P_1} = v \cdot t$, wobei v die Punktgeschwindigkeit und v_s die Schallgeschwindigkeit ist.

Aus der Abbildung folgt für den Winkel ϕ

$$\sin\phi = \frac{P_0B_2}{P_0P_1} = \frac{x}{s} = \frac{v_s t}{v t} = \frac{v_s}{v}.$$



Dabei wird das Verhältnis $\dfrac{v}{v_s}$ als „Machsche Zahl" und der Winkel ϕ als „Machscher Winkel" bezeichnet.

a) Da $a = \overline{B_1B_2}$ und $\overline{B_1B_2} = \overline{P_1P_0}$, ist $\overline{P_1P_0} = a$, und es gilt

$$v = \frac{a}{t} = \frac{18\,500\,\text{m}}{37\,\text{s}} = 500\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Das Flugzeug hat eine Geschwindigkeit von $500\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Für den Machschen Winkel folgt

$$\sin\phi = \frac{v_s}{v} = \frac{340\,\text{m} \cdot \text{s}}{500\,\text{s} \cdot \text{m}} = 0{,}6800$$

und hieraus $\phi = 42{,}84°$. Damit kann man den Winkel γ errechnen nach

$$\gamma = 180° - (\phi + \alpha)$$
$$\gamma = 180° - (85{,}2° + 42{,}8°)$$
$$\gamma = 52°.$$

Nun ist $\sin\alpha = \dfrac{h}{x}$

$$h = x \cdot \sin\alpha. \qquad (1)$$

Nach dem Sinussatz folgt weiter

$$\frac{\sin\phi}{\sin\gamma} = \frac{x}{a}$$
$$x = \frac{a \cdot \sin\phi}{\sin\gamma}. \qquad (2)$$

(2) in (1) eingesetzt ergibt

$$h = \frac{a \cdot \sin\phi \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a \cdot v_s \cdot \sin\alpha}{v \cdot \sin\gamma}$$
$$h = \frac{18\,500\,\text{m} \cdot 340\,\text{m} \cdot \text{s} \cdot 0{,}9965}{500\,\text{s} \cdot \text{m} \cdot 0{,}7880}$$
$$h = 15\,908\,\text{m}$$
$$h \approx 15\,900\,\text{m}.$$

Das Flugzeug fliegt in einer Höhe von 15 900 m.

Ch 7 ▪21

a) 250 kg Braunstein ≙ 140 kg Mangan
x „ ≙ 200 kg „

$$\frac{250\,kg}{x}=\frac{140\,kg}{200\,kg}$$

$x=\frac{250\,kg\cdot 200\,kg}{140\,kg}=357\,kg$. Täglich werden 357 kg Braunstein benötigt.

b) $357\,kg\cdot 30=10714\,kg$
$10{,}7\,t$

Der Betrieb muß monatlich 10,7 t Braunstein erhalten.

Ch 8 ■22 1.

$$\begin{array}{ll} m & 100\,g \\ 3\,Mg+2\,H_3PO_4\rightarrow & Mg_3(PO_4)_2+3\,H_2 \\ 72\,g & 262\,g \end{array}$$

$m=\frac{72\,g\cdot 100\,g}{262\,g}=27{,}5\,g$

Kosten: $1\,kg\ Mg \triangleq 23{,}28\ M$
$27{,}5\,g \triangleq x\ M$

Bei der Herstellung von 100 g Magnesiumphosphat aus Magnesium, betragen die Kosten für Magnesium 0,64 M.

2.

$$\begin{array}{ll} m & 100\,g \\ 3\,MgO+2\,H_3PO_4\rightarrow & Mg_3(PO_4)_2+3\,H_2O \\ 120\,g & 262\,g \end{array}$$

$m=\frac{120\,g\cdot 100\,g}{262\,g}=45{,}9\,g$

Kosten: $1\,kg\ MgO \triangleq 11{,}16\ M$
$45{,}9\,g \triangleq x$

Die Kosten bei der Herstellung von 100 g Magnesiumphosphat aus Magnesiumoxid betragen 0,51 M.

3.

$$\begin{array}{lll} m & 100\,g & \\ 3\,MgCO_3+2\,H_3PO_4\rightarrow & Mg_3(PO_4)_2+3\,H_2O & \\ 252\,g & 262\,g & +3\,CO_2 \end{array}$$

$m=\frac{252\,g\cdot 100\,g}{262\,g}=96\,g$

Kosten: $1\,kg\ MgCO_3 \triangleq 6{,}12\ M$
$96\,g \triangleq x$

Die Kosten bei der Herstellung von 100 g Magnesiumphosphat aus Magnesiumkarbonat betragen 0,59 M.

Die kostengünstigste und ökonomischste Methode zur Herstellung von Magnesiumphosphat ist:
Magnesiumoxid + Phosphorsäure →
Magnesiumphosphat + Wasser

Ch 9 ■23 a)

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & CS_2+2\,S_2Cl_2\rightarrow CCl_4+6\,S \\ \mathrm{II} & CS_2+3\,Cl_2\ \rightarrow CCl_4+S_2Cl_2 \\ & 1{,}5\,t \qquad\quad \rightarrow x \\ & CS_2 \qquad\qquad CCl_4 \\ & 76\,g \qquad\qquad 154\,g \end{array}$$

$x=\frac{1{,}5\,t\cdot 154\,g}{76\,g}=30{,}4\,t$

Die Gesamtmenge des Tetrachlormethans beträgt 3,04 t.

b) Bei einem 58%igen Umsatz werden 42% nicht umgesetzt.

$1{,}5\,t=100\%$
$x=42\%$

$\frac{x}{1{,}5\,t}=\frac{42\%}{100\%}$

$x=\frac{1{,}5\,t\cdot 42\%}{100\%}=0{,}63\,t$

In der 1. Stufe werden 0,63 t Schwefelkohlenstoff nicht umgesetzt.

c)
$$\begin{array}{l} 0{,}63\,t \quad m \\ CS_2+3\,Cl_2\rightarrow CCl_4+S_2Cl_2 \\ 76\,g \quad 213\,g \end{array}$$

$m=\frac{0{,}63\,t\cdot 213\,g}{76\,g}=1{,}76\,t$

Es werden 1,76 t Chlorgas gebraucht, um den in der 1. Stufe nicht umgesetzten Schwefelkohlenstoff zu chlorieren.

Ch 10/12 ■24 a)

$$\begin{array}{ll} m & 1000\,t \\ CaSO_4+2\,NH_3+H_2CO_3\rightarrow & (NH_4)_2SO_4 \\ 34\,g & +CaCO_3 \\ & 132\,g \end{array}$$

$m=\frac{34\,g\cdot 1000\,t}{132\,g}=258\,t$

b)

$$\begin{array}{ll} m & 1000\,t \\ CaSO_4+2\,NH_3+H_2CO_3\rightarrow & (NH_4)_2SO_4 \\ 136\,g & +CaCO_3 \\ & 132\,g \end{array}$$

$m=\frac{136\,g\cdot 1000\,t}{132\,g}=1030\,t$

c)

$$\begin{array}{ll} m & 1000\,t \\ CaSO_4+NH_3+H_2CO_3\rightarrow & (NH_4)_2SO_4 \\ 62\,g & +CaCO_3 \\ & 132\,g \end{array}$$

$m=\frac{62\,g\cdot 1000\,t}{132\,g}=470\,t$

$$\begin{array}{ll} m & 470\,t \\ CO_2+H_2O\rightarrow & H_2CO_3 \\ 44\,g & 62\,g \end{array}$$

$m=332\,t$

Zur Herstellung von 1000 t Ammoniumsulfat werden 258 t Ammoniak, 1030 t Gips und 332 t Kohlendioxid benötigt.

Lösungen zu alpha-heiter:

Welches Netz?

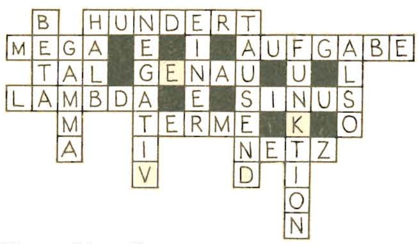
Die Pyramide wird vollständig durch das 2. Netz.

alpha-Gleichungen

Aus Gleichung (12) folgt $N=2$. Gleichung (9) besitzt mit $N=2$ die Lösung $\alpha=4$. $\alpha=4$ in die übrigen Gleichungen eingesetzt, liefert die nachfolgenden Zuordnungen:

α	C	E	G	H	I	L	N	U
4	6	1	8	7	5	3	2	9

Kreuzworträtsel



Kryptarithmetik

$$\begin{array}{ccccc} 10140 & : & 52 & = & 195 \\ : & & - & = & - \\ 156 & - & 39 & = & 117 \\ \hline 65 & + & 13 & = & 78 \end{array}$$

Buchstabenleiste

Periodizität

Kreuzzahlrätsel

1601
8507
1571
1646

Bilder und Schattenbilder

Der Koch 5 hat keinen Schatten, der Schatten 10 hat keine entsprechende Figur. Die Paare sind: 1 und 14, 3 und 16, 7 und 12, 9 und 6, 11 und 18, 13 und 8, 15 und 4 sowie 17 und 2.

Füllrätsel

1. Omega, 2. Prisma, 3. Ebene, 4. Radius, 5. Alpha, 6. Thales, 7. Ideen, 8. Ordnen, 9. Niete; OPERATION

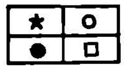
Lösungen zu 1 – 2 – 3 Logelei:

Schwarz malen

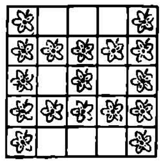
Man muß die Teile mit den Nummern 3, 5 und 6 schwarz malen.

Das ist logisch

Jedes Bild in einer geraden Reihe ist das Spiegelbild des über ihm liegenden. Das fehlende hat also folgende Gestalt:



Verwelkte Stecklinge



Zahlenfolgen

B: Jede folgende Zahl beträgt das doppelte der vorangehenden. Die 6. Zahl heißt also 128.

C: Man erhält die folgende Zahl, indem man abwechselnd 3 addiert und dann 2 subtrahiert. Die 6. Zahl heißt −5.

D: Die Folge entsteht, indem man der Folge nach die natürlichen Zahlen von 8 an addiert. Die 6. Zahl heißt 47.

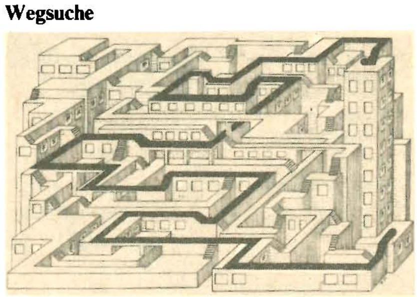
E: Jede folgende Zahl ist $\frac{1}{3}$ der vorangehenden. Die 6. Zahl heißt also $\frac{1}{27}$.

F: Die Folge entsteht, indem man abwechselnd 12 subtrahiert und 6 addiert. Die 6. Zahl heißt also 25.

G: Die Folge entsteht, indem man der Folge nach 3, dann 3,5, dann 4, dann 4,5, dann 5 subtrahiert. Die 6. Zahl heißt also 0.

H: Jede folgende Zahl ist das Vierfache der vorangehenden. Die 6. Zahl heißt also 64.

Wegsuche



Leser fragen – alpha antwortet

Unser Leser *Harald Friesel* aus Hohenstein-Ernstthal stellte eine Anfrage über das folgende zahlentheoretische Problem – hier unsere Antwort:

Beweis eines Satzes über die Darstellung von *n* als Summe von Potenzen

Satz: Für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 1$ gilt

$$n! = (n+1)^n - \binom{n}{1} n^n + \binom{n}{2}(n-1)^n - \binom{n}{3}(n-2)^n + - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot 2^n + (-1)^n.$$

Beweis: Zunächst beweisen wir den folgenden *Hilfssatz:*

Für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 1$ und für alle natürlichen Zahlen k mit $k \leqq n$ gilt

$$f(n,k) = (n+2)^k - \binom{n+1}{1}(n+1)^k + \binom{n+1}{2} n^k - + \ldots + (-1)^n (n+1) \cdot 2^k + (-1)^{n+1} = 0. \qquad (1)$$

Beweis des Hilfssatzes: Für $n=1$ und $k=0$, $k=1$ ist (1) richtig, denn

$f(1,0) = 3^0 - 2 \cdot 2^0 + 1 \cdot 1^0 = 1 - 2 + 1 = 0,$

$f(1,1) = 3^1 - 2 \cdot 2^1 + 1 \cdot 1^1 = 3 - 4 + 1 = 0.$

Angenommen, (1) sei für alle $n \leqq n_0$ und alle $k \leqq n$ richtig. Dann gilt

$f(n,k) = 0$, falls $n \leqq n_0$ und $k \leqq n$.

Daraus folgt

$$(n+2) f(n,k) = (n+2)^{k+1} - \binom{n+1}{1}(n+1)^k \cdot (n+1+1) + \binom{n+1}{2} n^k (n+2) - + \ldots + (-1)^n (n+1) 2^k (2+n) + (-1)^{n+1} \cdot (1+n+1) = 0,$$

$$(n+2)^{k+1} - (n+1)(n+1)^{k+1} + \binom{n+1}{2} n^{k+1} - \binom{n+1}{3}(n-1)^{k+1} + \ldots + (-1)^n \cdot (n+1) 2^{k+1} + (-1)^{n+1} - (n+1) \cdot (n+1)^k + \binom{n+1}{2} n^k \cdot 2 - \binom{n+1}{3}(n-k)^k \cdot 3 + \ldots + (-1)^n (n+1) 2^k \cdot n + (-1)^{n+1} \cdot n = 0,$$

$$f(n,k+1) - (n+1)\left[(n+1)^k - n \cdot n^k + \binom{n}{2}(n-1)^k + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot 2^k + (-1)^n\right] = 0,$$

$$f(n,k+1) - (n+1) f(n-1,k) = 0.$$

Hieraus folgt, da nach Voraussetzung

$f[(n-1),k] = 0,$

$f(n,k+1) = 0.$

Analog beweist man, daß auch $f(n+1,k) = 0$ gilt. Also gilt $f(n,k) = 0$ für alle natürlichen n mit $n \geqq 1$ und alle natürlichen $k \leqq n$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Nun beweisen wir den Satz über $n!$ mit Hilfe der vollständigen Induktion. Der Satz ist für $n=1$ richtig, denn

$$1! = 2^1 - 1 \cdot 1^1 = 2 - 1 = 1.$$

Angenommen, der Satz sei für n richtig; dann folgt

$$(n+1)! = n!(n+1) = (n+1)^{n+1} - (n+1) n \cdot n^n + (n+1)(n)(n-1)^n - + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot (n+1) n 2^n + (n+1)(-1)^n$$
$$= (n+1)^{n+1} - (n+1) n^{n+1} + \binom{n+1}{2} \cdot (n-1)^{n+1} - + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n+1}{2} 2^{n+1} + (n+1)(-1)^n.$$

Nun gilt nach dem Binomischen Satz

$$(n+1)^{n+1} = (n+2-1)^{n+1} = (n+2)^{n+1} - (n+1)(n+2)^n + \binom{n+1}{2}(n+2)^{n-1} + \ldots + (-1)^n (n+1)(n+2)^1 + (-1)^{n+1},$$

$$-(n+1)(n+1-1)^{n+1} = -(n+1)(n+1)^{n+1} + (n+1)(n+1)(n+1)^n - (n+1)\binom{n+1}{2}(n+1)^{n-1} + \ldots + (-1)^{n+1}(n+1)(n+1)(n+1)^1 + (-1)^n (n+1), \ldots,$$

$$+(-1)^n (n+1)(2-1)^{n+1} = (-1)^n \left[(n+1) 2^{n+1} - (n+1)(n+1) 2^n + (n+1)\binom{n+1}{2} 2^{n-1} - \ldots + (-1)^n (n+1)(n+1) \cdot 2^1 + (-1)^{n+1}\right],$$

$$+(-1)^{n+1}(1-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}\left[1^{n+1} - (n+1) \cdot 1^n + \binom{n+1}{2} \cdot 1^{n-1} - \ldots + (-1)^n \cdot (n+1) \cdot 1^1 + (-1)^{n+1}\right].$$

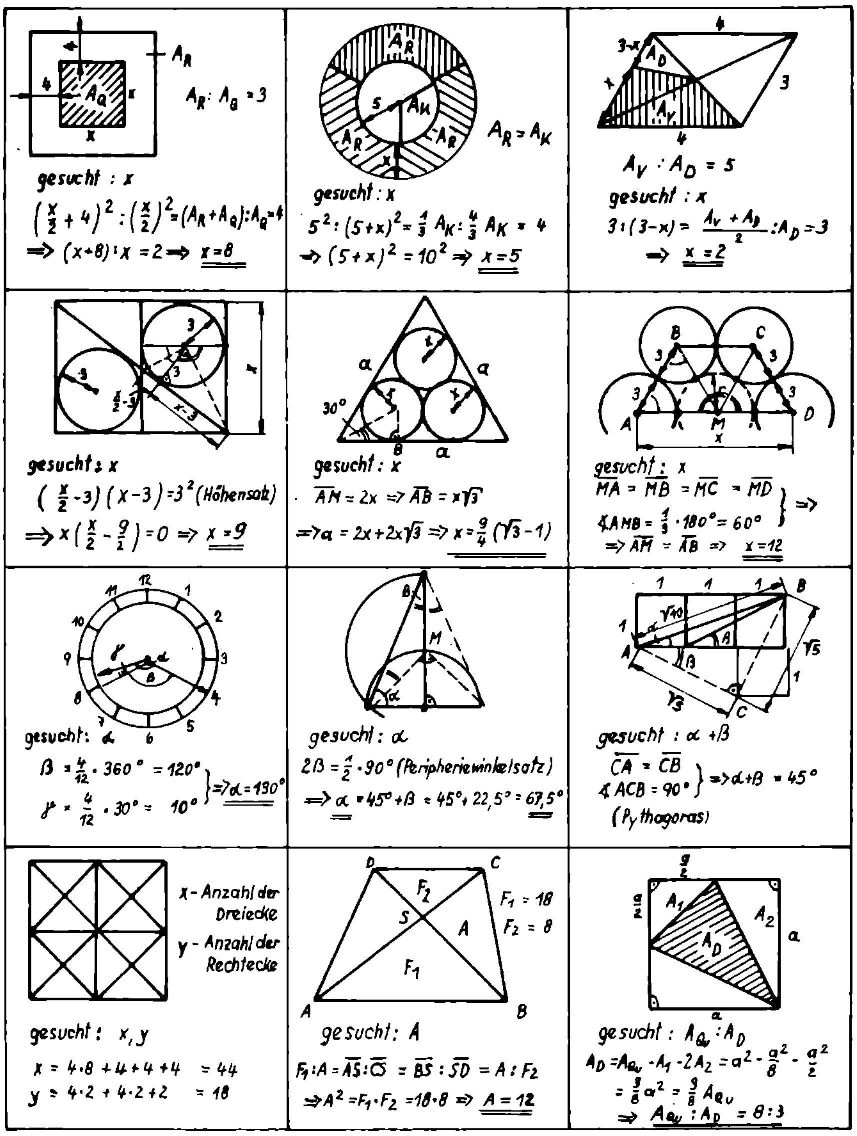
Durch Addition erhält man

$$(n+1)! = (n+2)^{n+1} - (n+1)(n+1)^{n+1} + \binom{n+1}{2} n^{n+1} - \ldots + (-1)^n (n+1) 2^{n+1} + (-1)^{n+1}$$
$$- (n+1)\left[(n+2)^n - (n+1)(n+1)^n + \binom{n+1}{2} n^n - \ldots + (-1)^n (n+1) 2^n + (-1)^{n+1}\right]$$
$$+ \binom{n+1}{2}\left[(n+2)^{n-1} - (n+1)(n+1)^{n-1} + \binom{n+1}{2} n^{n-1} - \ldots + (-1)^n (n+1) 2^{n-1} + (-1)^{n+1}\right]$$
$$+ \ldots$$
$$+ (-1)^{n+1}\left[1 - (n+1) + \binom{n+1}{2} - \ldots + (-1)^n + (-1)^{n+1}\right].$$

Nach dem Hilfssatz sind alle Summen in den eckigen Klammern gleich Null; also ist der Satz auch für $n+1$ richtig. Da er auch für $n=1$ zutrifft, ist der Satz somit für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 1$ bewiesen.

Dr. R. Lüders, Berlin

Lösungen zu: Gut gedacht ist halb gelöst (III)



$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8 = (1 + 9 \cdot 7 - 8)(1 + 9 + 7 - 8)$

- $19+78=1^9+78+19+7-8$
- $19-78=-1\cdot 9+7\cdot 8-1-97-8$
- $19\cdot 78=19\cdot\sqrt{-7+8}\cdot 1^9\cdot 78$
- $19:78=19^{-7+8}:1^9\cdot 78$
- $1+9+7+8=\dfrac{19\cdot 7-8}{-1-9+7+8}$
- $\sqrt{1\cdot 9}+7\cdot 8=-19+78$
- $(1-9-7-8)(1-9-78)=1978$
- $1+9+7+8+19\cdot 7-8=(1+9)(7+8)$
- $(1+\sqrt{9}+7-8)^{1\cdot 9+7-8}=(1+9-7)^8$
- $\sqrt{(1+9+7+8)^{\sqrt{1+9+7-8}}}=19\cdot 7-8$

$1978=2222-222-22$

$1978=9\cdot 8+7\cdot 6+5+43^2+10$

$1978=\mathrm{MCMLXXVIII}$

$\mathrm{MC}-\mathrm{M}-\mathrm{L}=\mathrm{X}\cdot\mathrm{XV}\cdot\mathrm{III}$

$$\begin{array}{rl} & 1+9+7+8 \\ + & 19+7+8 \\ + & 19+7-8 \\ + & 19-7+8 \\ \hline & 19+78 \end{array}$$

$1=1^9\cdot(-7+8)$
$2=1^9-7+8$
$3=1+(9+7):8$
$4=\sqrt{1^9+7+8}$
$5=\sqrt{1+9+7+8}$
$6=1\cdot(-9)+7+8$
$7=1-9+7+8$
$8=(1+9\cdot 7):8$
$9=1+9+7-8$
$10=1\cdot 9-7+8$
$11=1+9-7+8$
$12=\sqrt{1\cdot 9}+7+8$
$13=1+\sqrt{9}+7+8$
$14=-1^9+7+8$
$15=1^9\cdot(7+8)$
$16=1^9+7+8$
$17=-1+\sqrt{9}+7+8$
$18=19+7-8$
$19=19\cdot(-7+8)$
$20=19-7+8$
$21=1\cdot(\sqrt{9})!+7+8$
$22=1+(\sqrt{9})!+7+8$
$23=-1+9+7+8$
$24=(1+9-7)\cdot 8$
$25=1+9+7+8$

Aufgaben

▲1▲ Die Jahreszahl kann man mit 10 Dreien folgendermaßen schreiben:
$1978=333\cdot(3+3)-33:3-3\cdot 3$
Schreibe die Zahl 1978 mit 13 Dreizehnen, zweimal 7 Siebenen!

▲2▲ Vervollständige!

$\dfrac{1}{7}+\dfrac{9}{8}=\dfrac{1\cdot 9\cdot 7+8}{1^9\cdot 7\cdot 8}$ $\qquad \dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{9}{8}=$

$\dfrac{1}{7}-\dfrac{9}{8}=$ $\qquad \dfrac{1}{7}:\dfrac{9}{8}=$

▲3▲ In einer Familie leben vier männliche Mitglieder, nämlich Großvater, Vater und zwei verschieden alte Kinder. Alle vier Familienmitglieder feiern in derselben Woche des Jahres 1978 ihren Geburtstag; dabei stellt sich heraus, daß das Produkt aus den Zahlen, die ihre Lebensalter angeben, genau 1978 ergibt. Wie alt sind die vier Familienmitglieder?

▲4▲ Mit Stichtag 1. 1. 1978 wird festgestellt, daß in den sieben Klassen der fünften Schulstufe einer Schule genau doppelt so viel Elfjährige wie Zwölfjährige sitzen und daß in jeder Klasse gleichviel Zehnjährige sind. Die Lebensjahre der 191 Schüler ergeben zusammen 1978.
Wieviel Zehn-, Elf-, Zwölfjährige sind in diesen 7 Klassen?

▲5▲ Stelle die Zahl 1978 als Summe von zwei Primzahlen dar! Wie viele Möglichkeiten gibt es?

▲6▲ Es sei k eine natürliche Zahl und n diejenige natürliche Zahl, die die Beziehung
$n<(44+\sqrt{1978})^k<n+1$ erfüllt. (1)
Zeige: 1. Ist k eine ungerade Zahl, so ist n gerade.
2. Ist k gerade, so ist n ungerade.

Diese Seite wurde aus umfassenden Einsendungen folgender *alpha*-Leser zusammengestellt: Schüler U. Bähnisch, Bärenstein; Ing. H. Decker, Köln; Schüler A. Fittke, Berlin; Mathematikfachlehrer W. Förg, Schwaz (Österreich); Schüler U. Habler, Potsdam; stud. math. W. Janous, Innsbruck.

Lösungen:

▲1▲
$1978:=13\cdot 13\cdot 13-13\cdot 13-13-13-13-13+13:13+13:13$
$=(7+7+7+7:7+7:7)\cdot(77+7+7:7+7:7)$

▲2▲ $\dfrac{1}{7}-\dfrac{9}{8}=-\dfrac{1\cdot 9\cdot 7-8}{1^9\cdot 7\cdot 8}$

$\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{9}{8}=\dfrac{1+9+7-8}{1^9\cdot 7\cdot 8}$

$\dfrac{1}{7}:\dfrac{9}{8}=\dfrac{1\cdot 9+7-8}{1+(\sqrt{9})!+7\cdot 8}$

▲3▲ $1978=1\cdot 2\cdot 23\cdot 43$. Das Alter der Familienmitglieder ist 1, 2, 23 und 43 Jahre.

▲4▲ 140 Zehnjährige, 34 Elfjährige, 17 Zwölfjährige.

▲5▲

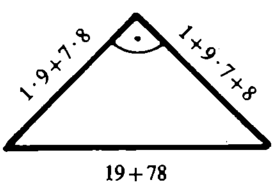
5+1973	359+1619	881+1097
29+1949	419+1559	887+1091
47+1931	467+1511	929+1049
71+1907	479+1499	947+1031
89+1889	491+1487	
101+1877	569+1409	
107+1871	617+1361	
131+1847	659+1319	
167+1811	677+1301	
191+1787	701+1277	
257+1721	719+1259	
269+1709	761+1217	
281+1697	797+1181	
311+1667	827+1151	

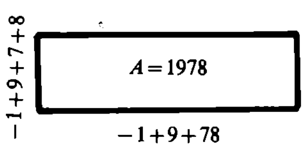
▲6▲ Wie man leicht nachrechnet, ist $44<\sqrt{1978}<45$; also ist $0<\sqrt{1978}-44<1$ und auch (2): $0<(\sqrt{1978}-44)^k<1$ für jede natürliche Zahl k. (Im Folgenden sei $z=(\sqrt{1978}+44)^k$.)
1) Sei nun k eine ungerade Zahl:
dann ist $z-(\sqrt{1978}-44)^k$ eine ganze Zahl, wie folgende Rechnung zeigt: (Man beachte den binomischen Lehrsatz!)

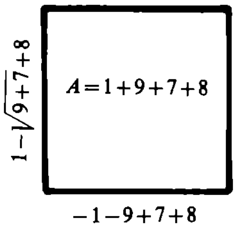
$$(\sqrt{1978}+44)^k-(\sqrt{1978}-44)^k$$
$$=\sum_{j=o}^{k}\binom{k}{j}(\sqrt{1978})^{k-j}\cdot 44^j\cdot(1-(-1)^j)$$
$$=2\cdot\sum_{j=o,\ j\ ungerade}^{k}\binom{k}{j}(\sqrt{1978})^{k-j}\cdot 44^j=2x,$$

wobei x eine ganze Zahl ist ($k-j$ ist immer ungerade, also ist $(\sqrt{1978})^{k-j}$ ganz!)
Nun ist aber $z-(\sqrt{1978}-44)^k=n$ (vgl. (2))
2) Sei k gerade:
Analog 1) zeigt man, daß $z+(\sqrt{1978}-44)^k=n+1$ eine gerade Zahl ist; also ist n eine ungerade Zahl.
Damit ist die Aufgabe gelöst.

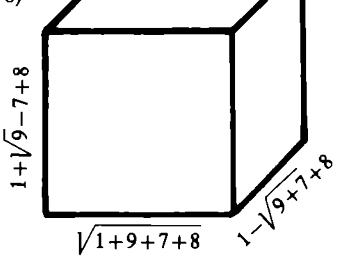
$A=\sqrt{1\cdot 9}\cdot 78\cdot 1(9-7+8)$
$U=(19+7-8)(1-\sqrt{9}+7+8)$
$s=(1+9+7-8)(1+\sqrt{9}+7+8)$

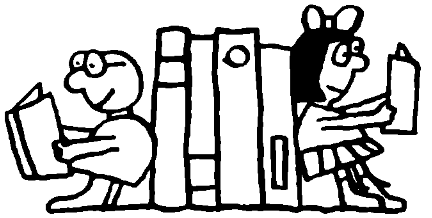






$V=19\cdot 7-8$
$A_O=(1+9)(7+8)$





Bücher aus dem BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

LEIPZIG

N. J. Wilenkin
Methoden der schrittweisen Näherung
108 S. mit 34 Abb., kartoniert 5,90 M
Bestell-Nr. 665 723 5

K.-G. Steinert
Sphärische Trigonometrie
mit einigen Anwendungen aus Geodäsie, Astronomie und Kartographie
160 S., mit 69 Abb., kartoniert 9,50 M
Bestell-Nr. 665 828 9

I. M. Gelfand/E. G. Glagolewa/E. Schnol
Funktionen und ihre graphische Darstellung
128 S. mit 132 Abb. und 9 Tafeln, kartoniert
Bestell-Nr. 665 600 5 7,00 M

I. M. Jaglom
Ungewöhnliche Algebra
95 S. mit 45 Abb., kartoniert 5,50 M
Bestell-Nr. 665 789 2

N. J. Wilenkin
Unterhaltsame Mengenlehre
184 S. mit 82 Abb., kartoniert 6,50 M
Bestell-Nr. 665 636 3

I. J. Bakelman
Spiegelung am Kreis
Grundlagen und Anwendungen
132 S. mit 67 Abb., kartoniert 7,00 M
Bestell-Nr. 665 735 8

A. S. Smogorschewski
Lobatschewskische Geometrie
76 S. mit 43 Abb. kartoniert 6,00 M
Bestell-Nr. 665 842 2

A. W. Butkewitsch/M. S. Selikson
Ewige Kalender
124 S. mit 22 Abb., kartoniert 5,90 M
Bestell-Nr. 665 696 1

F. J. Budden
Zahlensysteme und Rechenautomaten
224 S. mit 34 Abb., kartoniert 8,60 M
Bestell-Nr. 665 633 9

G. P. Makejewa/M. S. Zedrik
Verwunderliches aus der Physik
70 S. mit 45 Abb. (Band 2), kartoniert 4,15 M
Bestell-Nr. 665 527 2

Physikalische Paradoxa und interessante Aufgaben
Experimentelle physikalische Aufgaben zum Nachdenken
170 S. mit 48 Abb., kartoniert 5,60 M
Bestell-Nr. 665 835 0

L. Lovász/K. L. Vesztergombi/J. Pelikán
Kombinatorik
132 S. mit 62 Abb., kartoniert 6,00 M
Bestell-Nr. 665 824 6

Hier eine Leseprobe aus dem Buch, das für Schüler ab Klasse 7 geeignet ist.

Wir wollen zusammenzählen!
– Na, was soll daran schon schwer sein! Zählen erlernen wir schon in den unteren Klassen – wir sehen förmlich, daß ihr dies im Innern denkt. Wir wollen euch jetzt zeigen, daß es oft viel einfacher ist, etwas geschickt zu berechnen, als bloß zusammenzuzählen, weil man hierbei manchmal viel nachdenken muß und damit auch mehr erreicht. Dieser Weg führt in das Reich der Kombinatorik. Wir wollen uns mit den Kindern bekanntmachen, die unsere Reisegefährten sein werden!
Zu Andrea kommen ihre Klassenkameraden zu Besuch: Albert, Achim, Dora, Elisabeth, Fränzchen und Gabriela, alle mit ihren Eltern. – Wieviel werden es denn sein? – fragt Andrea während des Tischdeckens und beginnt bereits aufzuzählen: – Mutti, Vati, ich, Elisabeth, Dora, Onkel Stephan, Tante Käthe, Tante Lisbeth, ...
– Genug, genug! Von jedem Ort kommen jeweils drei, es werden also insgesamt sieben mal drei, d. h. einundzwanzig sein – sagt Mutti, und wenn Andrea mit den Gedanken nicht nur beim Kaffeetrinken wäre, hätte sie sich das schon selbst klargemacht. Die Gäste treffen ein, und die Kinder geben einander zur Begrüßung die Hand. Andrea hat, so scheint es, aus dem vorigen Fall Nutzen gezogen, denn ihr ist etwas eingefallen:
– Wieviel Händedrücke ergibt das? –
Nach kurzem Schweigen ergriff Dora das Wort:
– Ich jedenfalls habe sechsmal die Hand gegeben. –
– Ich desgleichen – sagte Gabi.
– Natürlich hat jeder sechs anderen die Hand gegeben – meldete sich Achim zu Wort. – Da wir sieben sind, ergibt das insgesamt $7 \cdot 6 = 42$ Händedrücke. –
– Das scheint mir zu viel zu sein – sagte Elisabeth. Fränzchen warf gereizt ein:
– So, wie Achim zählt, zählt er jeden Händedruck zweimal, wenn sich zwei Kinder die Hand geben. –
– Achim hat ganz recht – sagte Albert –, er hat nur vergessen, daß an jedem Händeschütteln zwei beteiligt sind und daß wir das Händeschütteln bei beiden berücksichtigt haben. Daher ist die 42 noch durch 2 zu teilen, d. h., wir bekommen 21 Händedrücke. –

Textaufgaben zur Mathematik
mit Ansatz und Lösung

Von Anton Cuninka, Karol Križalković und Dr. rer. nat. Ondrej Šedivý

Übersetzung aus dem Slowakischen
188 Seiten mit 63 Bildern, 16,5 cm × 23 cm, Pappeinband 9,00 M LSV 1002

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Aus dem Inhalt: Lineare Gleichungen (Textaufgaben) / Systeme linearer Gleichungen (Textaufgaben) / Quadratische Gleichungen – Lösen von Textaufgaben mit Hilfe quadratischer Gleichungen / Lösen von Textaufgaben mit Hilfe von Gleichungen und Ungleichungen / Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen
Das Buch enthält Aufgaben aus der Gleichungslehre. Es werden lineare Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten, quadratische, logarithmische und Exponentialgleichungen sowie Ungleichungen behandelt. Der Unterschied dieser Aufgabensammlung zu anderen besteht darin, daß hier die Lösungswege angegeben sind. Die Aufgaben, die dem Niveau der 9. und 10., zum Teil bis zu dem der 12. Klasse entsprechen, sind sinnvoll ausgewählt und führen von einfachen bis zu komplizierten Fällen.

Leserkreis: Oberschüler, Hörer an Volkshochschulen, Teilnehmer an Wiederholungslehrgängen, Studenten an Fachschulen

Gauß und die technische Revolution

Zusammenstellung: Dr. R. Thiele, Leipzig