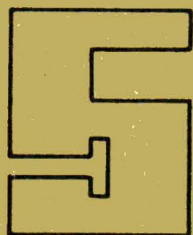
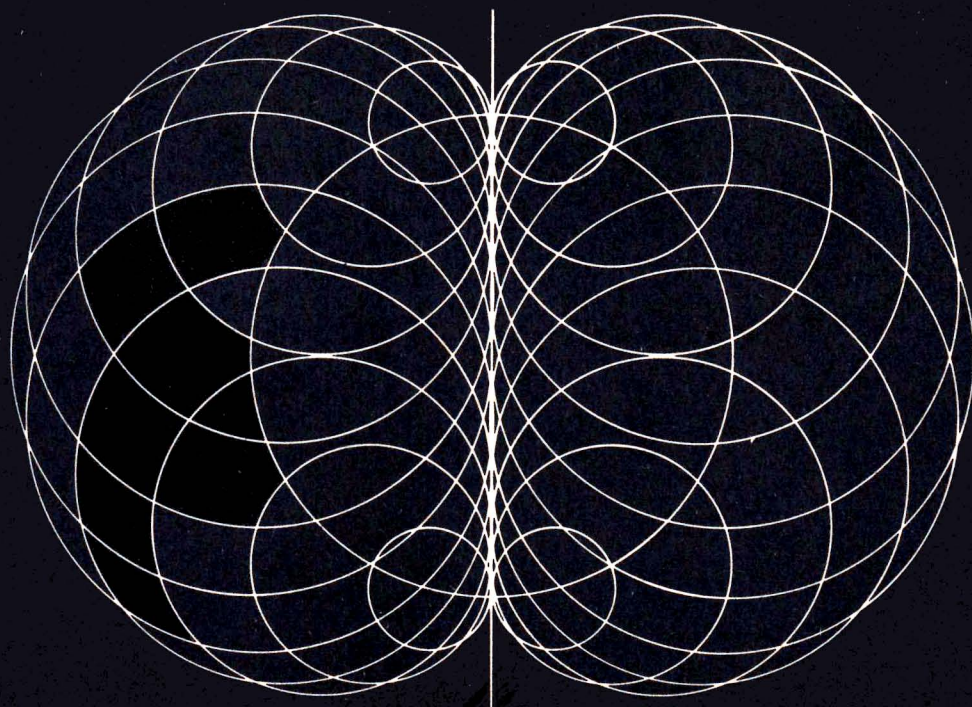
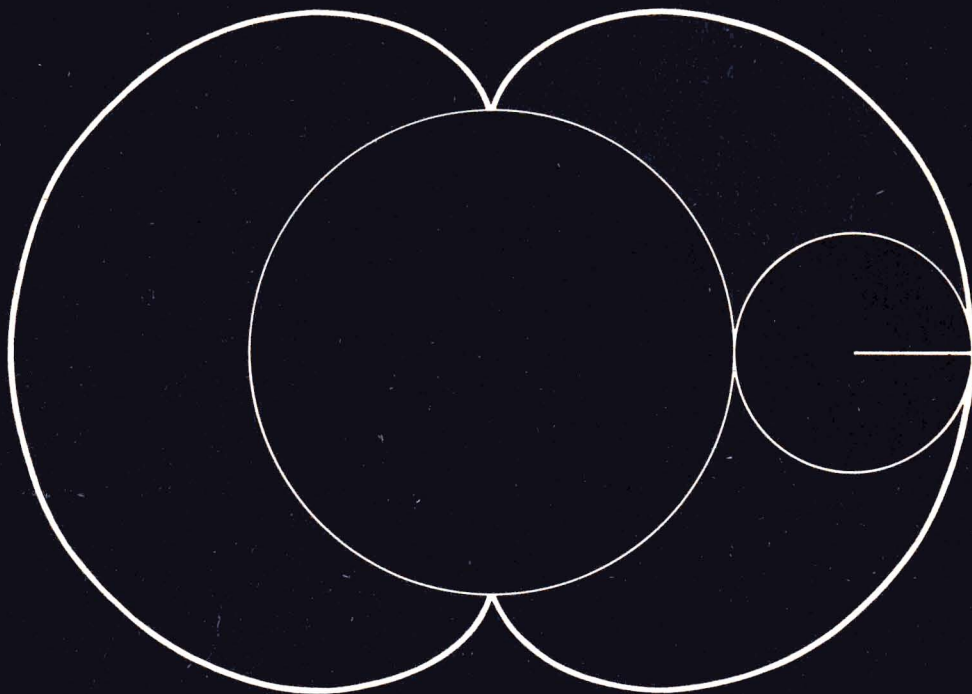


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

alpha



**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
14. Jahrgang 1980
Preis 0,50 M
Index 31059**

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt);
Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig); National-
preisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer
K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes
(Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Ver-
dienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberleh-
rer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); National-
preisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders
(Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Mü-
ritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent
Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat
G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer
Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Ber-
lin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil.
W. Walsch (Halle), Verdienter Lehrer des
Volkes

Redaktion:

StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1080 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 204 30.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Bild aus: Für Dich 1970/S.104; *Vi-
gnette:* Math. in School, London (S.107);
Vignette aus: Füles, Budapest 1980 (III. U.-
Seite)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

AN (EDV) 128–ISSN 0002–6395

Redaktionsschluss: 30. Juni 1980



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 97 Das Berührungsproblem des Apollonios [8]*
Mathematikfachlehrer H. Begander, Leipzig
- 100 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Max Jeger [10]
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
- 101 Johannes Kepler – Astronom und Mathematiker, Teil 1 [8]
Dr. H. Pieper, Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Astro-
physik, Abtlg. Geschichte
- 104 Die Mathematik und die Inquisition [6]
Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau
- 105 Wissenswertes über das Dreieck [9]
Dr. R. Gandel, Kiew/Dr. D. Hetsch, Halle/StR Th. Scholl, Berlin
- 106 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik, Physik, Chemie
- 109 Ordnung ist das halbe Leben [5]
Leseprobe aus: Rund um die Mathematik (Kinderbuchverlag Berlin)
- 110 Symmetrieeigenschaften von Funktionsgraphen [9]
Dr. W. Stoye, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
- 111 Gute Grundkenntnisse gesucht [5]
Aus einem Übungsheft des Kreises Löbau (Abt. Volksbildung)
- 112 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
- 114 XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]
4. Stufe (DDR-Olympiade)
- 117 Lösungen [5]
Aufgaben zu Olympiadeklassen 10 und 11/12 – Lösungen zu Olympiadeklasse 10
(Kl. 11/12 siehe *Mathematik in der Schule*)
- 120 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [7]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin
- III. U.-Seite: Mitgemacht – scharf nachgedacht [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- IV. U.-Seite: Aufgabe 2000 [5]
Alles dreht sich um die Jahreszahl 1980
Zahlenzauber um das Jahr 1980 [5]
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Das Berührungsproblem des Apollonios

Aus der Planimetrie ist uns bekannt, wie man mit Zirkel und Lineal den Außenkreis bzw. den Inkreis eines Dreiecks konstruieren kann. Etwas anders formuliert geht es dabei um die Aufgabe, Kreise zu konstruieren, die durch drei gegebene Punkte gehen bzw. drei gegebene Geraden berühren.

Diese beiden Konstruktionsaufgaben führen uns zu dem Problem, wie man Kreise konstruieren kann, die z. B. durch zwei Punkte gehen und eine Gerade berühren oder durch einen Punkt gehen und zwei Geraden berühren. Erweitern wir die Aufgabenstellung weiterhin dadurch, daß außer Punkten und Geraden noch Kreise gegeben sind, so kommen wir auf ein Berührungsproblem, das Jahrtausende alt ist und schon in der Antike die Mathematiker beschäftigte.

Als erster befaßte sich *Apollonios von Perge* mit diesen „Berührungen“. Dieser Mathematiker lebte etwa 262 bis 190 v. u. Z. und gehört zu den großen griechischen Gelehrten wie *Euklid* und *Archimedes*. In seinen zwei Büchern über „Berührungen“ untersucht er die Lösung der Aufgabe, mit Zirkel und Lineal die Kreise zu konstruieren, die drei gegebene Kreise berühren. In voller Allgemeinheit dieses „Berührungsproblems des Apollonios“ gelten dann auch die Ausartungen der gegebenen Kreise zu Punkten und zu Geraden, so daß wir diese allgemeine Kreisaufgabe auch so ausdrücken können:

Wenn von Punkten, Geraden oder Kreisen irgend drei Stücke gegeben sind, so sind Kreise zu konstruieren, die, wenn Punkte gegeben sind, durch sie hindurchgehen und, wenn Geraden oder Kreise gegeben sind, diese berühren.

Daraus ergeben sich zehn mögliche Aufgaben, die sich wie folgt zusammenstellen lassen:

Es können gegeben sein in der

1. Aufgabe 3 Punkte;
2. Aufgabe 2 Punkte und 1 Gerade;
3. Aufgabe 1 Punkt und 2 Geraden;
4. Aufgabe 3 Geraden;
5. Aufgabe 2 Punkte und 1 Kreis;
6. Aufgabe 1 Punkt, 1 Gerade und 1 Kreis;
7. Aufgabe 1 Punkt und 2 Kreise;
8. Aufgabe 2 Geraden und 1 Kreis;
9. Aufgabe 1 Gerade und 2 Kreise;
10. Aufgabe 3 Kreise.

Gesucht sind in jedem Fall alle möglichen Berührungskreise.

Bei unseren folgenden Untersuchungen wollen wir von vornherein alle Sonderfälle, besondere Lagen und Ausnahmen der gegebenen Stücke ausschließen. Die gegebenen Punkte sollen also z. B. nicht auf einer Geraden liegen, die Geraden nicht parallel laufen, die Kreise sich nicht schneiden, berühren oder durchdringen usw. Diese Determinationen der einzelnen Aufgaben überlassen wir dem interessierten Leser.

In jeder der folgenden zehn Aufgaben wollen wir immer die Anzahl der möglichen Lösungen angeben und, wenn nötig, eine ausführliche Analysis anfügen.

Die Angaben über die Anzahl der Lösungen beziehen sich also immer auf den allgemeinen Fall. Bei speziellen Lagen der gegebenen Stücke kann die Anzahl der Lösungen deshalb auch kleiner sein. Es sind dann natürlich auch andere Arten der Berührungen möglich, d. h., daß die gesuchten Kreise die gegebenen nur von außen oder nur von innen berühren. (Siehe auch ▲5a▲ und ▲5b▲.)

Aufgaben

▲1▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch drei gegebene Punkte P_1 , P_2 und P_3 geht.

Wir verzichten auf eine Analysis, da die Konstruktion allgemein bekannt ist.

▲2▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 geht und eine gegebene Gerade g berührt.

Analysis: Es sei m_1 der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt M_1 , der durch die Punkte P_1 und P_2 geht und die Gerade g in R_1 berührt. Verbindet man P_1 mit P_2 und verlängert die Gerade P_1P_2 , bis sie die Gerade g in T schneidet, so gilt nach dem Sekantentangentensatz $\overline{TP_1} \cdot \overline{TP_2} = \overline{TR_1}^2$, wonach $\overline{TR_1}$ als mittlere Proportionale konstruierbar ist, und demzufolge ist der Punkt R_1 bekannt. Der Mittelpunkt M_1 ergibt sich dann als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{P_1P_2}$ und der Senkrechten in R_1 auf g . Der Radius von m_1 ist dann z. B. $\overline{M_1P_1}$.

Trägt man $\overline{TR_1}$ von T aus auf g noch einmal nach der entgegengesetzten Seite ab, so erhält man den Berührungspunkt R_2 eines zweiten

Kreises mit dem Mittelpunkt M_2 , der ebenfalls durch P_1 und P_2 geht.

Die Aufgabe hat daher zwei Lösungen.

▲2a▲ Führe die Konstruktion an einem selbst gewählten Beispiel aus!

▲3▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Geraden g_1 und g_2 berührt und durch einen gegebenen Punkt P geht.

Analysis: Es sei m_1 der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt M_1 , der die Gerade g_1 in R_1 und die Gerade g_2 in S_1 berührt und durch den Punkt P geht. Dann ist $\overline{M_1P} = \overline{M_1R_1}$. Verlängert man g_1 und g_2 bis zum gemeinsamen Schnittpunkt A und verbindet A mit M_1 , so ist die Gerade AM_1 die Winkelhalbierende des $\sphericalangle (g_1, g_2)$ und somit ein geometrischer Ort für M_1 bekannt.

Verbindet man weiter A mit P und nimmt auf der Geraden AP einen beliebigen Punkt B_1 an und zieht durch B_1 zu M_1P die Parallele, so trifft diese die Winkelhalbierende AM_1 in C . Dann fällt man von C auf g_1 das Lot. Dieses schneidet g_1 in D . Nun gilt nach dem Strahlensatz $\overline{B_1C} : \overline{PM_1} = \overline{AC} : \overline{AM_1}$ und $\overline{AC} : \overline{AM_1} = \overline{CD} : \overline{M_1R_1}$.

Da $\overline{M_1P} = \overline{M_1R_1}$, muß auch $\overline{CB_1} = \overline{CD}$ sein. Nun ist D bekannt (beliebig auf g_1), dann C als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden AM_1 mit der Senkrechten in D auf g_1 , weiterhin B_1 auf AP durch $\overline{CB_1} = \overline{CD}$. Jetzt findet man M_1 als Schnittpunkt zwischen der Parallelen zu CB_1 durch P und der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle (g_1, g_2)$.

Da der um C mit $\overline{CD}$ gezeichnete Kreis AP noch einmal in B_2 trifft, erhält man den Mittelpunkt M_2 eines zweiten Kreises, der g_1 in R_2 und g_2 in S_2 berührt.

Die Aufgabe hat zwei Lösungen.

▲3a▲ Führe die Konstruktion an einem selbst gewählten Beispiel aus!

▲4▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Geraden g_1 , g_2 und g_3 berührt. Auch hier verzichten wir auf eine Analysis. Wir müssen nur darauf achten, daß es noch drei weitere Kreise gibt, die die drei Geraden berühren. Sie sind auch als Ankreise eines Dreiecks oder als äußere Berührungskreise bekannt.

Die Aufgabe hat vier Lösungen.

▲5▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 geht und einen gegebenen Kreis k berührt.

Analysis: (Bild 1) Es sei m_1 bzw. m_2 der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt M_1 bzw. M_2 , der durch P_1 und P_2 geht und den Kreis k mit dem Mittelpunkt K in R_1 von außen bzw. in R_2 von innen berührt, dann haben die Kreise m_1 bzw. m_2 und k in R_1 bzw. R_2 eine gemeinsame Tangente. Zieht man durch P_1 und P_2 eine Gerade, so schneidet diese die gemeinsame Tangente in T . (Überlege, warum hier nicht zwei Schnittpunkte T_1 , T_2 auftreten, je nachdem, ob man m_1 oder m_2 betrachtet! Die folgende Rechnung gibt für diese Überlegung einen Hinweis.)

Zeichnet man von T aus eine beliebige Sekante durch den Kreis k , so schneidet diese k in den Punkten B und C . Dann gilt nach dem Sekantentangentensatz

$$\overline{TP_1} \cdot \overline{TP_2} = \overline{TR_1}^2 \text{ bzw. } \overline{TP_1} \cdot \overline{TP_2} = \overline{TR_2}^2 \\ \text{und } \overline{TB} \cdot \overline{TC} = \overline{TR_1}^2 \text{ bzw. } \overline{TB} \cdot \overline{TC} = \overline{TR_2}^2, \\ \text{also } \overline{TP_1} \cdot \overline{TP_2} = \overline{TB} \cdot \overline{TC},$$

und Viereck P_1P_2CB ist ein Sehnenviereck. Zieht man also durch P_1 , P_2 und Punkt B (beliebig auf k) einen Kreis, so muß er durch C gehen. Es ist demzufolge Punkt C bekannt. Ferner ist T bekannt als Schnittpunkt der beiden Geraden BC und P_1P_2 , dann R_1 bzw. R_2 durch die von T an k gezogene Tangenten. Der Mittelpunkt M_1 bzw. M_2 des gesuchten Kreises liegt also einerseits auf der Mittelsenkrechten von $\overline{P_1P_2}$ und andererseits auf der Geraden R_1K bzw. R_2K .

Die Aufgabe hat zwei Lösungen je nachdem, ob der gesuchte Kreis den gegebenen von außen oder von innen berühren soll.

▲ 5a ▲ Führe die Konstruktion für den Sonderfall aus, wenn K , P_1 und P_2 auf einer Geraden liegen, P_1 und P_2 aber außerhalb des Kreises k !

▲ 5b ▲ Bei welcher Lage von P_1 und P_2 gibt es nur einen Berührungskreis?

▲ 6 ▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt P geht und eine gegebene Gerade g und einen gegebenen Kreis k berührt.

Analysis: (Bild 2) Es sei M_1 der Mittelpunkt des gesuchten Kreises m_1 , der durch P geht, die Gerade g in R_1 und den Kreis k mit dem Mittelpunkt K von außen in S_1 berührt. Man fällt von K auf g das Lot mit dem Fußpunkt A . Dieses schneidet den Kreis k in B und C . Die Gerade CP schneidet m_1 in D_1 . Zieht man dann die Zentrale KM_1 , so geht sie durch S_1 , und verbindet man weiterhin C mit S_1 und R_1 , so müssen C , S_1 und R_1 eine Gerade bilden; denn $\sphericalangle R_1M_1S_1 = \sphericalangle S_1KC$, da $M_1R_1 \parallel CA$. Und weil die Dreiecke

$\triangle M_1S_1R_1$ und $\triangle S_1CK$ gleichschenkelig sind, muß $\sphericalangle M_1S_1R_1 = \sphericalangle CS_1K$ sein.

Verbindet man noch B mit S_1 , so ist $\sphericalangle BS_1C = 90^\circ$ als Winkel im Halbkreis, demzufolge ist auch $\sphericalangle BS_1R_1 = 90^\circ$. Daher gilt $\sphericalangle BS_1R_1 + \sphericalangle R_1AB = 180^\circ$, d. h. R_1S_1BA ist ein Sehnenviereck.

Es gilt also nach dem Sekantensatz $\overline{CB} \cdot \overline{CA} = \overline{CS_1} \cdot \overline{CR_1}$, und da $\overline{CS_1} \cdot \overline{CR_1} = \overline{CD_1} \cdot \overline{CP}$ ist, so muß auch $\overline{CB} \cdot \overline{CA} = \overline{CD_1} \cdot \overline{CP}$ sein, d. h. PD_1BA ist ebenfalls ein Sehnenviereck. Zieht man demzufolge durch die drei bekannten Punkte A , B und P einen Kreis, so ist D_1 bekannt als Schnittpunkt dieses Kreises mit CP .

Es ist also der gesuchte Kreis m_1 so zu konstruieren, daß er durch P und D_1 verläuft und die Gerade g berührt (siehe Analysis ▲ 2 ▲). Man erhält dabei noch einen zweiten solchen Kreis m_2 mit dem Mittelpunkt M_2 , der den Kreis k von außen in S_2 und g in R_2 berührt.

Der gesuchte Kreis kann den gegebenen Kreis auch von innen berühren. Ist z. B. M_3 der Mittelpunkt eines solchen Kreises m_3 , dann berührt dieser den Kreis k in S_3 von innen und die Gerade g in R_3 . Man verbindet in diesem Fall B mit P und verlängert BP , bis die Verlängerung den Kreis m_3 zum zweiten Mal in D_2 schneidet. Es läßt sich dann ebenfalls nachweisen, daß R_3 , B und S_3 auf einer Geraden liegen und das Viereck CS_3AR_3 ein Sehnenviereck ist. (Wegen $\sphericalangle R_3AC = \sphericalangle R_3S_3C = 90^\circ$ über der gleichen Sehne $\overline{R_3C}$.) Dann muß nach dem Sehnensatz wegen $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \overline{BR_3} \cdot \overline{BS_3}$ und $\overline{BR_3} \cdot \overline{BS_3} = \overline{BD_2} \cdot \overline{BP}$ auch $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \overline{BD_2} \cdot \overline{BP}$ gelten, und Viereck PCD_2A ist ebenfalls ein Sehnenviereck. Demzufolge ist Punkt D_2 bekannt als Schnittpunkt dieses Kreises mit BP . Nun sind wieder die Kreise zu finden, die durch P und D_2 gehen und g berühren (siehe Analysis ▲ 2 ▲).

Man erhält also zwei weitere Kreise m_3 und m_4 mit den Mittelpunkten M_3 und M_4 , die g in R_3 bzw. R_4 und k in S_3 bzw. S_4 von innen berühren.

Die Aufgabe hat vier Lösungen, und zwar zwei Kreise, die den gegebenen Kreis von außen und zwei Kreise, die den gegebenen Kreis von innen berühren.

▲ 7 ▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt P geht und zwei gegebene Kreise k_1 und k_2 berührt.

Analysis: (Bild 3) Es sei m_1 der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt M_1 , der durch P geht und die beiden Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten K_1 und K_2 , von denen $k_1 > k_2$ sein soll, von außen berührt, und zwar den Kreis k_1 in R_1 und den Kreis k_2 in S_1 . Man zieht die Gerade K_1K_2 (Zentrale der Kreise k_1 und k_2), die den Kreis k_1 in A und den Kreis k_2 in B_1 schneidet und verlängert R_1S_1 , bis diese Gerade den Kreis k_1 zum zweiten Mal in D_1 , den Kreis k_2 zum zweiten Mal in E_1 und K_1K_2 in Z_1 trifft. Dann verbindet man K_1 mit D_1 und M_1 , ebenso K_2 mit E_1 und M_1 . Somit ist

$\sphericalangle K_1D_1R_1 = \sphericalangle K_1R_1D_1 = \sphericalangle M_1R_1S_1$
 $= \sphericalangle M_1S_1R_1 = \sphericalangle K_2S_1E_1$,
 deshalb gilt $K_1D_1 \parallel K_2S_1$. Folglich ist Z_1 der äußere Ähnlichkeitspunkt der Kreise k_1 und k_2 und daher bekannt.

Verbindet man noch A mit R_1 und B_1 mit S_1 und bezeichnet $\sphericalangle B_1K_2S_1$ mit α , so ist $\sphericalangle K_2B_1S_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ und $\sphericalangle AB_1S_1 = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$; ferner ist der erhabene Winkel $\sphericalangle D_1K_1A = 180^\circ + \alpha$ und $\sphericalangle D_1R_1A = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ und $\sphericalangle AR_1S_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Es ist folglich $\sphericalangle AB_1S_1 + \sphericalangle AR_1S_1 = 180^\circ$, d. h., $AR_1S_1B_1$ ist ein Sehnenviereck. Verlängert man Z_1P bis zum zweiten Schnittpunkt F_1 mit dem Kreis m_1 , so ist $\overline{Z_1A} \cdot \overline{Z_1B_1} = \overline{Z_1R_1} \cdot \overline{Z_1S_1} = \overline{Z_1P} \cdot \overline{Z_1F_1}$, also ist PF_1B_1A ebenfalls ein Sehnenviereck,

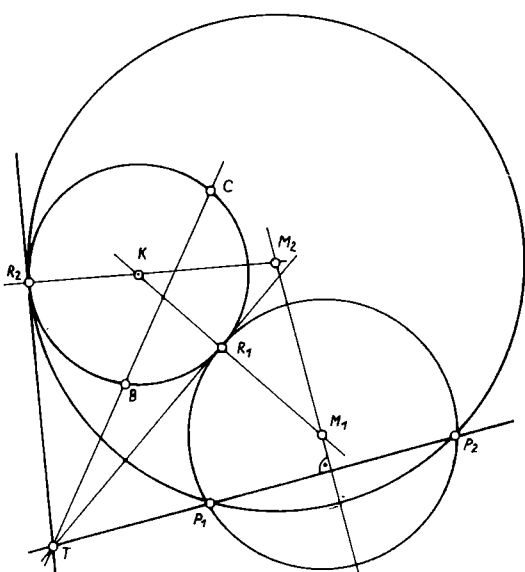


Bild 1

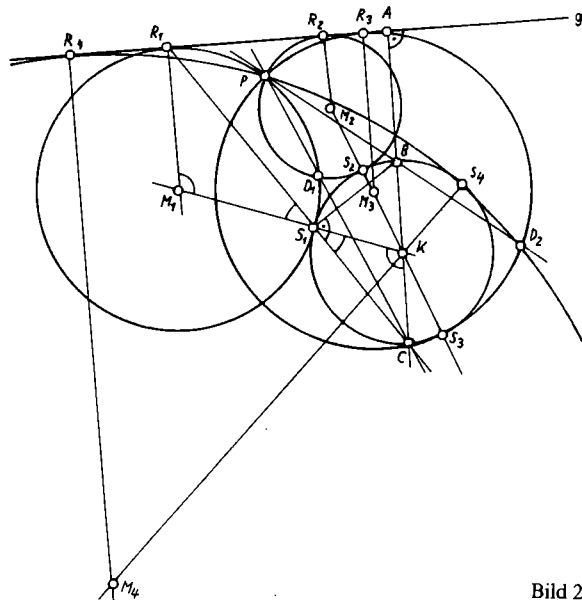


Bild 2

Bild 3

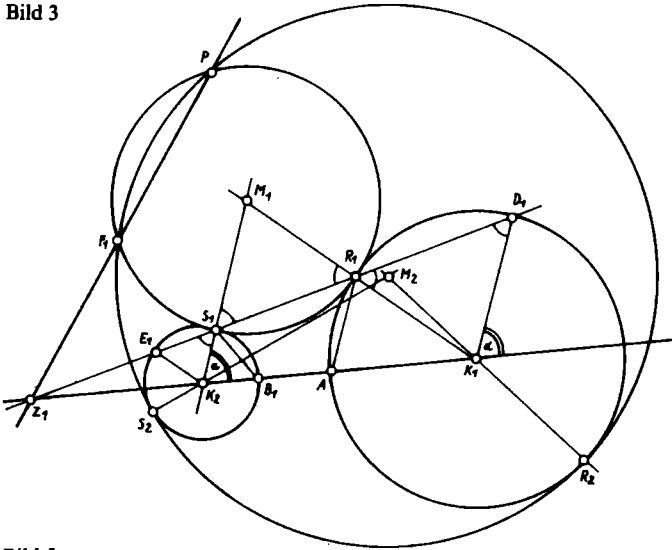


Bild 4

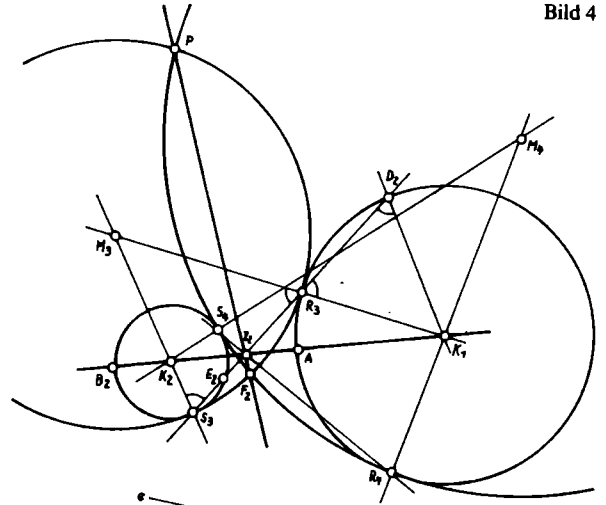


Bild 5a

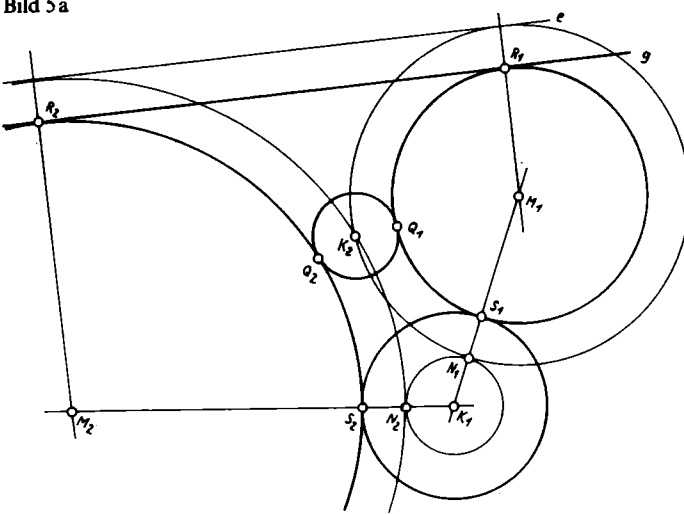
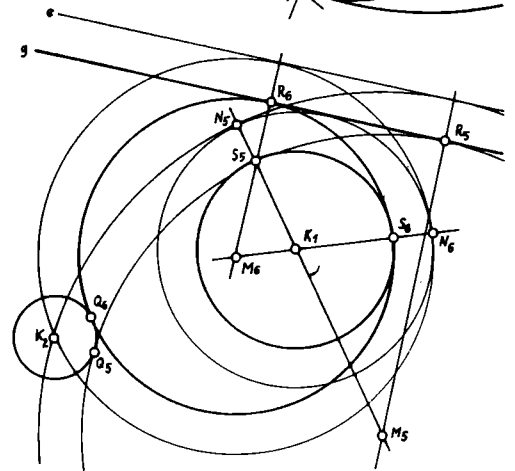


Bild 5b



und F_1 ist bekannt als Schnittpunkt des durch A , B_1 und P gezogenen Kreises mit der Geraden Z_1P .

Es ist somit der gesuchte Kreis m_1 so zu konstruieren, daß er durch P und F_1 geht und einen der gegebenen Kreise berührt (siehe Analysis $\blacktriangle 5 \blacktriangle$). Man erhält bei dieser Konstruktion zwei Kreise m_1 und m_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 . m_1 berührt k_1 in R_1 und k_2 in S_1 von außen, und m_2 berührt k_1 in R_2 und k_2 in S_2 von innen.

Der gesuchte Kreis kann aber auch k_1 in R_3 von außen und k_2 in S_3 von innen berühren (Bild 4). Ist M_3 der Mittelpunkt eines solchen Kreises, dann läßt sich nachweisen, daß Z_2 innerer Ähnlichkeitspunkt der beiden gegebenen Kreise ist. Das Viereck $AR_3B_2S_3$ ist ebenso wie das Viereck APB_2F_2 ein Sehnenviereck, und F_2 ist bekannt als Schnittpunkt des durch A , B_2 und P gezogenen Kreises mit Z_2P .

Es ist somit der Kreis m_3 um M_3 so zu konstruieren, daß er durch P und F_2 geht und k_1 von außen berührt (siehe Analysis $\blacktriangle 5 \blacktriangle$). Man erhält bei dieser Konstruktion einen zweiten Kreis m_4 mit dem Mittelpunkt M_4 , der k_1 in R_4 von innen und k_2 in S_4 von außen berührt.

Die Aufgabe hat vier Lösungen, je nachdem ob äußere oder innere Berührung stattfinden soll.

$\blacktriangle 7a \blacktriangle$ Führe die Konstruktion aus, wenn $k_1 = k_2$, also $r_1 = r_2$ gilt!

$\blacktriangle 8 \blacktriangle$ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Geraden g_1 und g_2 und einen gegebenen Kreis k berührt.

Analysis: Es sei m_1 der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt M_1 , der g_1 in R_1 und g_2 in S_1 und den Kreis k mit dem Mittelpunkt K in Q_1 von außen berührt. Beschreibt man um M_1 mit $\overline{M_1K}$ einen Kreis und zieht an diesen zu g_1 und g_2 die parallelen Tangenten l_1 und l_2 , $l_1 \parallel g_1$ und $l_2 \parallel g_2$, so ist die Lage von l_1 und l_2 bekannt, da ihr Abstand von den gegebenen Geraden gleich dem Radius des gegebenen Kreises ist.

Es ist deshalb zunächst ein Hilfskreis um M_1 so zu zeichnen, daß er die beiden Tangenten l_1 und l_2 berührt und durch den Punkt K verläuft (siehe Analysis $\blacktriangle 3 \blacktriangle$). Man erhält dabei zwei Hilfskreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 . Verkürzt man den Radius dieser beiden Hilfskreise um den Radius des Kreises k , erhält man die gesuchten Kreise m_1 und m_2 . m_2 berührt g_1 in R_2 , g_2 in S_2 und k in Q_2 von außen.

Der gesuchte Kreis kann den gegebenen Kreis auch noch von innen berühren, dann findet man durch entsprechende Überlegung noch zwei weitere Kreise mit den Mittelpunkten M_3 und M_4 .

Die Aufgabe hat vier Lösungen, je nachdem ob äußere oder innere Berührung stattfinden soll.

$\blacktriangle 9 \blacktriangle$ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise k_1 und k_2 und eine gegebene Gerade g berührt.

Analysis: (Bild 5a) Es sei m_1 der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt M_1 , der g in R_1 , den Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt K_1 in S_1 und k_2 mit dem Mittelpunkt K_2 in Q_1 von außen berührt. Weiterhin sei $r_1 > r_2$ für die entsprechenden Radien r_1 und r_2 . Dann zeichnet man um M_1 mit $\overline{M_1K_2}$ einen Kreis, der M_1K_1 in N_1 trifft und an diesen Kreis die zur Geraden g parallele Tangente l . Damit ist die Lage von l bekannt; denn der Abstand zwischen g und l ist gleich dem Radius von k_2 . Zeichnet man weiter um K_1 mit $\overline{K_1N_1}$ einen Kreis, so muß dieser den mit $\overline{M_1K_2}$ beschriebenen Kreis in N_1 berühren.

Es ist daher zuerst ein Hilfskreis so zu konstruieren, daß er durch K_2 geht, die Parallele l berührt und den um K_1 mit $r_1 - r_2 = \overline{K_1N_1}$ gezogenen Kreis berührt (siehe Analysis $\blacktriangle 6 \blacktriangle$). Man erhält bei dieser Konstruk-

tion zwei Hilfskreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 . Verkürzt man die Radien dieser beiden Hilfskreise um den Radius von k_2 , ergeben sich die gesuchten Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 . m_1 bzw. m_2 berührt g in R_1 bzw. R_2 , k_1 in S_1 bzw. S_2 und k_2 in Q_1 bzw. Q_2 von außen.

Da der gesuchte Kreis die gegebenen Kreise auch von innen berühren kann, findet man analog zwei weitere Kreise mit den Mittelpunkten M_3 und M_4 . Die Konstruktion und Analysis überlassen wir dem Leser. Weiterhin kann der gesuchte Kreis den einen gegebenen Kreis von innen und den anderen von außen berühren. Das Bild 5b zeigt das Beispiel mit den Kreisen um M_5 und M_6 . Auch hier können die entsprechende Analysis sowie die beiden letzten Lösungen mit den Kreisen um M_7 und M_8 selbst gefunden werden.

Die Aufgabe hat acht Lösungen, je nachdem ob äußere oder innere Berührung stattfinden soll.

▲10▲ Es ist ein Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise k_1 , k_2 und k_3 berührt.

Analysis: (Bild 6) Es sei m_1 der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkt M_1 , der die gegebenen Kreise k_1 , k_2 und k_3 mit den Mittelpunkten K_1 , K_2 und K_3 von außen berührt, und zwar k_1 in R_1 , k_2 in S_1 und k_3 in Q_1 . Ferner sei $r_1 > r_2 > r_3$ für ihre entsprechenden Radien r_1 , r_2 und r_3 . Man beschreibe um M_1 mit $\overline{M_1K_3}$ einen Hilfskreis, der die Geraden M_1K_1 in N_1 und M_1K_2 in H_1 schneidet. Dann ist $\overline{N_1K_1} = r_1 - r_3$ und $\overline{H_1K_2} = r_2 - r_3$. Zieht man um K_1 mit $\overline{N_1K_1}$ und um K_2 mit $\overline{H_1K_2}$ je einen Kreis, so müssen diese den um M_1 mit M_1K_3 gezogenen Hilfskreis berühren.

Es ist daher der Hilfskreis um M_1 so zu konstruieren, daß er durch den Punkt K_3 geht und den um K_1 mit $r_1 - r_3$ sowie den um K_2 mit $r_2 - r_3$ gezogenen Kreis von außen berührt (siehe Analysis ▲7▲). Man erhält bei dieser Konstruktion zwei Hilfskreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 . Verkürzt man den Radius des ersten um den Radius von

k_3 , findet man den gesuchten Kreis m_1 mit dem Mittelpunkt M_1 , der k_1 in R_1 , k_2 in S_1 und k_3 in Q_1 von außen berührt. Verlängert man den Radius des zweiten Hilfskreises um den Radius von k_3 , so erhält man einen zweiten Kreis m_2 mit dem Mittelpunkt M_2 , der k_1 in R_2 , k_2 in S_2 und k_3 in Q_2 von innen berührt (Bild 7). Der gesuchte Kreis kann den gegebenen Kreis k_3 auch von innen und k_1 und k_2 von außen berühren. Ein solcher Kreis sei m_3 mit dem Mittelpunkt M_3 , der k_1 in R_3 und k_2 in S_3 von außen sowie k_3 in Q_3 von innen berührt. Dann beschreibt man um M_3 mit $\overline{M_3K_3}$ einen Hilfskreis, der die Gerade durch M_3K_1 in N_3 und M_3K_2 in H_3 schneidet. Hier ist nun $\overline{N_3K_1} = r_1 + r_3$ und $\overline{H_3K_2} = r_2 + r_3$.

Es ist daher zuerst der Hilfskreis um M_3 so zu konstruieren, daß er durch den Punkt K_3 geht und den um K_1 mit $r_1 + r_3$ sowie den um K_2 mit $r_2 + r_3$ gezogenen Kreis von außen berührt (siehe Analysis ▲7▲). Man erhält bei dieser Konstruktion zwei Hilfskreise mit den Mittelpunkten M_3 und M_4 . Verlängert man den Radius des ersten Hilfskreises um r_3 , findet man den gesuchten Kreis mit dem Mittelpunkt M_3 , der k_1 in R_3 und k_2 in S_3 von außen und k_3 von innen berührt. Verkürzt man den Radius des zweiten Hilfskreises um r_3 , erhält man einen zweiten Kreis m_4 mit dem Mittelpunkt M_4 , der k_1 in R_4 und k_2 in S_4 von innen und k_3 in Q_4 von außen berührt.

Es gibt noch vier weitere Kreise, die die gegebenen Kreise von innen bzw. außen berühren. Die Konstruktion und Analysis sind ähnlich und vom Leser selbst zu finden.

Die Aufgabe hat acht Lösungen, je nachdem ob äußere oder innere Berührung stattfinden soll.

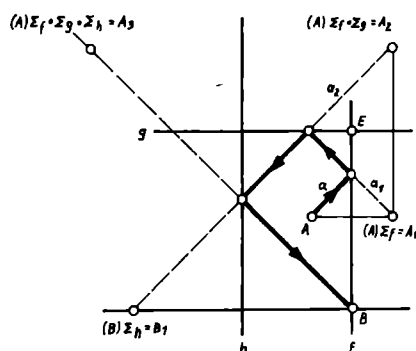
▲10a▲ Überlege, wie die Konstruktion im Falle $r_1 = r_2 = r_3$ verlaufen kann!

H. Begander

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Max Jeger

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

▲1995▲ Ein rechteckförmiger Billardtisch hat bei der Ecke B ein Loch. Wie muß man eine Kugel im Punkte A anstoßen, damit sie nach Reflexion an den Randgeraden f , g und h im Loch B verschwindet? Welchen Weg legt sie dabei zurück?



(Ausgehend von dieser kleinen Aufgabe und ihrer Lösung kann man sich selbst viele schöne „Billard-Aufgaben“ ausdenken. Etwa die Frage, ob man von jedem Punkt am Rande so stoßen kann, daß die Kugel nach Berührung aller anderen Banden wieder zum Ausgangspunkt zurückkommt. Wir wünschen viel Spaß!)

Bild 6

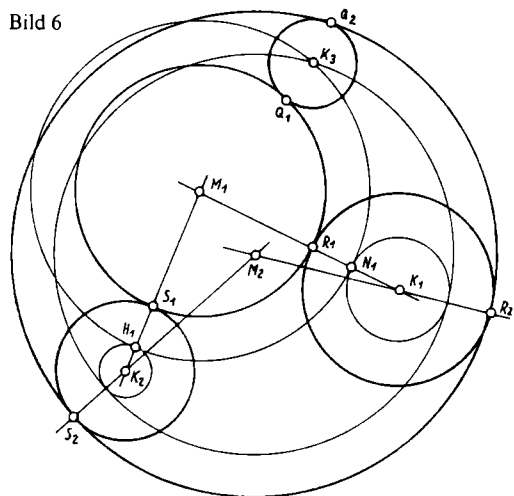
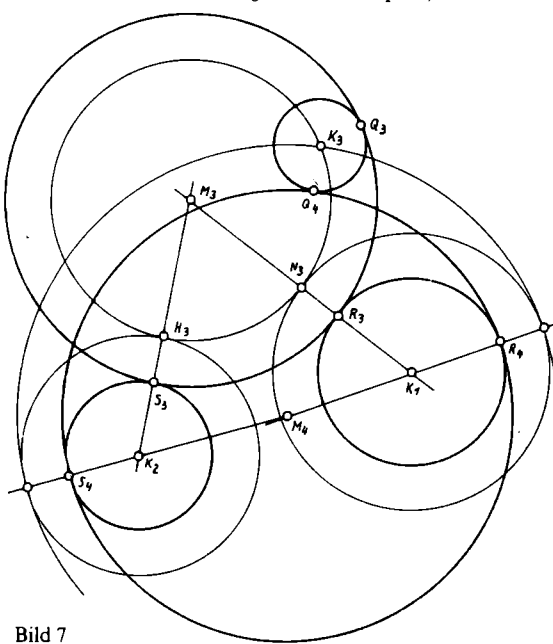


Bild 7



Johannes Kepler – Astronom und Mathematiker

Teil 1

Im November jährt sich zum 350. Male der Todestag des Astronomen, Mathematikers und Physikers *Johannes Kepler*.

Kepler, der stets von der Copernicanischen Planetentheorie überzeugt war, beseitigte deren Mängel, indem er in mathematischer Form drei Gesetze über die Bewegungen der Planeten um die Sonne aussprach. Er schuf darauf aufbauend mit einer bis dahin nicht dagewesenen Genauigkeit Tafeln für die Vorausberechnung der Planetenpositionen. Bei Keplers Berechnungen erlebten die (von Bürgi, Neper und Briggs erfundenen) Logarithmen eine ihrer ersten Anwendungen. Kepler brachte aber nicht nur der Astronomie große Fortschritte. Als Physiker machte er sich verdient beispielsweise um die Entwicklung der Optik und begründete eine Theorie des (astronomischen) Fernrohrs. „Ich glaube, daß Astronomie und Physik so genau miteinander verknüpft sind, daß keine ohne die andere vervollkommen werden kann“, schrieb Kepler an einen dänischen Astronomen. Als Mathematiker lieferte er Beiträge zur Entwicklung der Theorie der Kegelschnitte, zur Entwicklung der Infinitesimalrechnung, zur Theorie der Polyeder, zur Berechnung der Logarithmen. „Als Mathematiker gehört Kepler unzweifelhaft in die Reihe jener Persönlichkeiten, bei denen das anschauliche Element gegenüber den rein logischen überstark in den Vordergrund tritt“, stellte der Mathematikhistoriker J. E. Hofmann zusammenfassend fest.

Im folgenden sollen einige Streiflichter die mathematischen und astronomischen Studien und Forschungen Keplers beleuchten. (S. auch Übersichten 1. und 2.)

Kepler studiert Euklids „Elemente“

Eine der verbreitetsten Schriften der Welt ist die des griechischen Gelehrten Euklid mit dem Titel „Elemente“. Euklid lebte zwischen 350 und 300 v.u.Z. Man weiß, daß er am Hofe des Königs Ptolemaios I. (der von 305 bis 285 v.u.Z. regierte) in Alexandria große Hochachtung genoß. Es wird berichtet, daß Ptolemaios einmal den Euklid fragte, ob es keinen bequemeren Weg zur Geometrie gäbe als die Elemente; und jener antwortete, es gäbe keinen Königsweg zur Geometrie. Er meinte damit, daß auch für Könige der Weg

zur Geometrie, zur Mathematik nicht bequemer gemacht werden könne.

Die Kenntnis des euklidischen Buches verdanken die Europäer den Übersetzungen arabischer Gelehrter (9./10. Jh.). Auf sie geht die erste gedruckte Ausgabe zurück, die dem Giovanni Campano (Mitte des 13. Jh.) zugeschrieben wird und 1482 in Venedig erschienen ist. Während der Renaissance erschienen lateinische Ausgaben, die sich auf griechische Codices stützten, die ihrerseits aus der Bearbeitung der „Elemente“ durch Theon von Alexandria (um 350 u. Z.) hervorgegangen sind. (Ein Codex – Plural: Codices – ist die spätantike und mittelalterliche Buchform, bei der mehrere Lagen von Papyrus-, Pergament- oder Papierblättern in einem Holzdeckelband zusammengefügt wurden.) Eine griechische Ausgabe der „Elemente“ erschien 1533 in Basel, bearbeitet von Simon Gryneaus. Die lateinische Ausgabe des Clavius von 1574 soll 22 Auflagen gefunden haben. Im Jahre 1808 entdeckte man in durch Napoleon der Vatikanischen Bibliothek geraubten Archivalien eine vollständige Handschrift der „Elemente“, die auf ältere und bessere Ausgaben als die des Theon zurückgeht. Hierauf basieren die heutigen Ausgaben. „Es gab in Europa eine Zeit, da man alles, was in Euklids Elementen enthalten war, als bekannt voraussetzen durfte. Die Zeit ist jetzt nicht mehr. Ich sehe mich daher genötigt, den Inhalt ... seines Werkes meinen Lesern etwas ausführlicher vor Augen zu führen, als es vor dreihundert Jahren nötig gewesen wäre“, schrieb G. H. F. Nesselmann, ein Schüler von C. G. J. Jacobi (vgl. *alpha* H. 1/1980), 1842 in seinem Buch „Die Algebra der Griechen“. Im Mittelalter und bis in die Neuzeit wurde die Professur für Geometrie an den Universitäten häufig als die des Euklid bezeichnet (ja, der Name Euklids geradezu mit der Geometrie identifiziert). Die Studenten lasen den Text, vollständig oder auszugsweise, und der Professor kommentierte.

Während seiner zweijährigen allgemeinen Ausbildung an der Tübinger Artistenfakultät, an der die sieben „freien Künste“ (artes liberales: Grammatik, Dialektik, Rhetorik, Arithmetik, Geometrie, Musik, Astronomie) gelehrt wurden, hörte Kepler die Vorlesungen über Geometrie (und Astronomie) beim Mathematiker und Astronomen M. Mästlin (1550 bis 1631). Hier lernte Kepler die „Elemente“ des Euklid kennen. Ob Mästlin in seinen Vorlesungen alle 13 Kapitel des Buches behandelte oder nur Auszüge daraus, ist ungewiß.

Euklids Elemente umfassen dreizehn Kapitel. Man spricht von den „planimetrischen“ (Kapitel 1 bis 6), den „arithmetischen“ (Kapitel 7 bis 10) und den „stereometrischen“ (Kapitel 11 bis 13) Büchern. (Planimetrie – Geometrie der Ebene, Arithmetik – Zahlentheorie, Stereometrie – Geometrie des Raumes.) Den Zweck der Elemente beschrieb Proklos (410

Übersicht 1. Aus der deutschen Geschichte

- 1517 31. Oktober. Beginn der Reformation. (Sie richtet sich gegen die Vorherrschaft der römisch-katholischen Kirche als Zentrum des Feudalsystems.)
- 1524 Beginn des deutschen Bauernkrieges. (Eine Phase der frühbürgerlichen Revolution, mit der der Machtkampf gegen das Feudalsystem einsetzte.)
- 1531 Gründung des Schmalkaldischen Bundes. (Ein von protestantischen Fürsten und Städten zur Verteidigung ihrer religiösen und politischen Ziele gegen den habsburgischen Kaiser Karl V. geschlossener Bund; er wurde im Schmalkaldischen Krieg 1546/47 vom Kaiser besiegt.)
- 1555 Reichstag zu Augsburg. Zwischen Protestanten und Katholiken wird der „Augsburger Religionsfrieden“ abgeschlossen. (Er bestätigte den existierenden Glaubenszustand in den Fürstentümern.)
- 1608 Gründung der protestantischen Union in Ahausen. (Ein Zusammenschluß der deutschen protestantischen Fürsten, außer Kursachsen, unter Kurfürst Friedrich IV. von der Pfalz.)
- 1609 Gründung der katholischen Liga in München als Gegenpartei zur Union. (Ein Zusammenschluß der katholischen Fürsten.)
- 1618 Beginn des Dreißigjährigen Krieges – verursacht durch die konfessionellen Spannungen und politischen Gegensätze.

Übersicht 2.

Johannes Kepler 1571 bis 1630, Lebensdaten

- 1571 27. Dezember (julianischen Stils = 6. Januar 1572, gregorianischen Stils). Geburt Keplers in der württembergischen Stadt Weil.
- 1576 Übersiedlung mit den Eltern nach Leonberg.
- 1588 Nach der Ausbildung, erst auf einer Schreibschule und wenig später auf einer Lateinschule in Leonberg, nach Bestehen des „Landexamens“ dann an den Klosterschulen in Adelberg und Maulbronn legt Kepler das Examen als Baccalaureus in Tübingen ab.
- 1589 Studium in Tübingen. Zunächst an der Artistenfakultät. Unterweisung in Lateinisch, Griechisch, Hebräisch, Mathematik, Astronomie. 1591 Magister artium (Magister an der Artistenfakultät). Studium der Lutherischen Theologie an der theologischen Fakultät.
- 1594 Noch vor Abschluß des Theologiestudiums wird Kepler „Lehrer der Mathematik und der Moral“ an der lutherischen Landständeschule in Graz und Mathematiker der Landesregierung („Mathematiker der Landschaft“) mit der Verpflichtung, Kalender mit Prognostiken zu verfassen.
- 1599 Aus religiösen Gründen wird Kepler aus Graz ausgewiesen. Erst Assistent von Tycho Brahe und dann als Nachfolger von Tycho Brahe Hofastronom und Kaiserlicher Mathematiker in Prag.
- 1612 Die Lage des Protestanten Kepler am Hofe des katholischen Kaisers wird unhaltbar. Kepler geht als Mathematiker der Landschaft Österreich ob der Enns nach (dem protestantischen) Linz.
- 1626 Nach Ausweisung der Protestanten aus Linz: Ständig wechselnder Aufenthalt Keplers (Regensburg, Ulm u. a.)
- 1628 Kepler als Astrologe im Dienste Wallensteins im schlesischen Sagan (heute: Żagań).
- 1630 Im Oktober tritt Kepler eine Reise über Leipzig, Nürnberg nach Regensburg an, um auf dem dortigen Reichstag seine rückständigen Bezüge als Kaiserlicher Astronom einzuklagen. 15. November: Tod in Regensburg.

bis 485 u. Z., zeitweise Leiter der Akademie in Athen) so: Elemente nennt man das, dessen Theorie hinreicht zum Verständnis von allem anderen und mittelst dessen man im Stande ist, die Schwierigkeiten, welche das andere bietet, aus dem Wege zu räumen. Der letzte Satz in den Elementen lautet: „Weiter behaupte ich, daß sich außer den besprochenen fünf Körpern kein weiterer Körper errichten läßt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfaßt würde.“ Das war wohl auch ein Ziel Euklids, in den „Elementen“ den Nachweis zu führen, daß es nicht mehr als fünf regelmäßige Körper gibt. Was sind solche, auch „reguläre Polyeder“ genannten Körper?

Über reguläre Polyeder

Ein von Ebenen begrenzter Körper heißt Polyeder. Die Seitenflächen des Polyeders sind Polygone (Vielecke). Jede Seite eines Polygons gehört zu zwei Seitenflächen. Diese Seiten werden als die Kanten des Polyeders bezeichnet. Jeder Eckpunkt eines Polygons gehört zu wenigstens drei Seitenflächen. Die Eckpunkte werden als Ecken des Polyeders bezeichnet.

Ein Polyeder heißt konvex, wenn es vollständig auf einer Seite der Ebene jeder seiner Seitenflächen liegt. In diesem Fall gehört die Verbindungsstrecke von zwei beliebigen Punkten im Polyeder vollständig dem Polyeder an. Ist e die Anzahl der Ecken, f die Anzahl der Seitenflächen und k die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders, so gilt stets $e + f - k = 2$. (Diesen Eulerschen Polyedersatz kannte Kepler noch nicht. L. Euler, 1707 bis 1783. Der Satz wurde übrigens schon von R. Descartes, 1596 bis 1650, formuliert.)

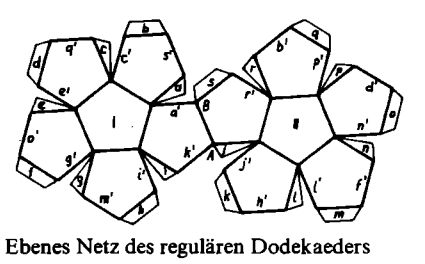
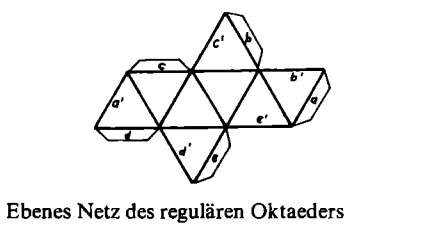
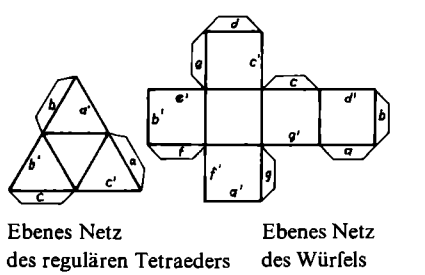
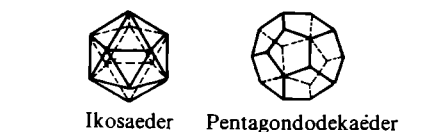
Sind die Seitenflächen eines konvexen Polyeders untereinander kongruente regelmäßige Vielecke derselben Seitenzahl und haben sämtliche Ecken dieselbe Kantenzahl, so heißt das konvexe Polyeder regelmäßig oder regulär. Es gibt, wie man beweisen kann, nur fünf reguläre Polyeder: das Tetraeder mit vier gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen, das Hexaeder (Würfel) mit sechs Quadraten als Seitenflächen, das Oktaeder mit acht gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen (eine Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche), das Ikosaeder mit zwanzig gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen, das Dodekaeder mit zwölf regelmäßigen 5-Ecken als Seitenflächen.

Man kann um ein reguläres Polyeder eine Kugel beschreiben, deren Mittelpunkt im Mittelpunkt des Polyeders liegt und deren Oberfläche durch alle Ecken des Polyeders geht. Wir nennen sie Umkugel. Man kann einem regulären Polyeder auch eine Kugel einbeschreiben, deren Mittelpunkt im Mittelpunkt des Polyeders liegt und deren Oberfläche jede Seitenfläche in ihrem Mittelpunkt

berührt. Wir nennen sie Inkugel. Es bezeichne r den Radius der Umkugel und s den Radius der Inkugel des Polyeders. Für den Quotienten $\frac{r}{s}$ kann man folgende Werte ausrechnen:

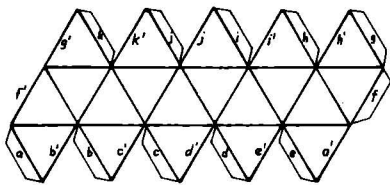
Für das Tetraeder ist $\frac{r}{s} = 3$; für den Würfel und das Oktaeder ist $\frac{r}{s} = \sqrt{3} = 1,7321$ (näherungsweise); für das Ikosaeder und das Dodekaeder ist $\frac{r}{s} = \frac{1}{4}(3\sqrt{3} - \sqrt{15})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 1,2584$ (näherungsweise).

Man nennt Würfel und Oktaeder bzw. Ikosaeder und Dodekaeder duale Polyeder, während das Tetraeder als selbstduales Polyeder bezeichnet wird. Für duale Polyeder ist das genannte Radienverhältnis $\frac{r}{s}$ gleich. Die Anzahl ihrer Kanten ist gleich. Durch Vertauschung von e und f entsteht der duale Körper. Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Ecken eines Oktaeders; die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Oktaeders sind die Ecken eines Würfels. Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Ikosaeders sind die Ecken eines Dodekaeders; die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Dodekaeders sind die Ecken eines Ikosaeders. Für das Tetraeder ist $e = f$. Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Tetraeders sind die Ecken eines (anderen) Tetraeders. Die Pythagoreer (anonyme Mathematiker zw. 500 und 440 v. u. Z.) kannten wahrscheinlich nur drei reguläre Polyeder, nämlich Tetraeder, Würfel und Dodekaeder, während Oktaeder und Ikosaeder wohl erst von Theaitetos (etwa 410 bis 368 v. u. Z.) entdeckt worden sind. Oft werden die regulären Polyeder

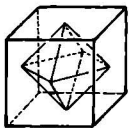


Übersicht 3. Die fünf regulären Polyeder (M. Miller, Stereometrie, Leipzig 1957)

	Tetraeder	Würfel	Oktaeder	Ikosaeder	Dodekaeder
Anzahl der Ecken der Seitenflächen	3	4	3	3	5
Anzahl der Seitenflächen in einer Ecke	3	3	4	5	3
Anzahl f der Seitenflächen	4	6	8	20	12
Anzahl e der Ecken	4	8	6	12	20
Anzahl k der Kanten	6	12	12	30	30
Oberfläche (a – Kantenlänge)	$a^2\sqrt{3}$	$6a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$5a^2\sqrt{3}$	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$
Volumen (a – Kantenlänge)	$\frac{a^3}{12}\sqrt{3}$	a^3	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$	$\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$	$\frac{a^3}{3}(15+7\sqrt{5})$
Radius r der Umkugel	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{4}\sqrt{3(1+\sqrt{5})}$
Radius s der Inkugel	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{3(3+\sqrt{5})}$	$\frac{a}{20}\sqrt{10\sqrt{25+11\sqrt{5}}}$
Radienverhältnis $\frac{r}{s}$	3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ $\cdot (3\sqrt{3}-\sqrt{15})$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ $\cdot (3\sqrt{3}-\sqrt{15})$



Ebenes Netz des regulären Ikosaeders



Dualität zwischen Würfel und Oktaeder

nach dem griechischen Philosophen Platon (427 bis 347 v.u.Z.) bezeichnet, in dessen Dialog „Timaios“ sie vorkommen: Platonische Weltkörper, kosmische Körper. In der griechischen Naturphilosophie, und vor allem bei Platon, spielten die Platonischen Körper eine bedeutende Rolle. Aristoteles (384 bis 322 v.u.Z.) berichtete, daß der Philosoph Empedokles (um 440 v.u.Z.) der erste war, der annahm, daß alles aus vier Elementen – Erde, Luft, Feuer und Wasser – zusammengesetzt sei. Der platonische Dialog „Timaios“ zeigt, daß Platons Lehrer Timaios von Lokri diese Hypothese übernommen hatte. Er gab den vier Grundstoffen besondere Gestalten. Der Würfel wurde der Erde zugeordnet, das Oktaeder der Luft, die Pyramide dem Feuer (die Bezeichnung Tetraeder stammt erst von Heron – um 125 u.Z.), das Ikosaeder dem Wasser. Der Welterschöpfer habe die ganze Welt in Form eines Dodekaeders angelegt.

Kepler findet das „Weltgeheimnis“

Im Juli 1595 glaubte der dreiundzwanzigjährige Kepler in Graz (s. Übersicht 2), das „Weltgeheimnis“ gefunden zu haben. Ein Jahr später erschien darüber sein Erstlingswerk „Weltgeheimnis“ (Mysterium cosmographicum). Danach gäbe es einen Zusammenhang zwischen den Bahnen der sechs damals bekannten Planeten um die Sonne und den In- und Umkugeln der fünf regulären Polyeder.

In einem nachgelassenen Bericht (November 1595) heißt es:

„Wie kommt es zur Sechszahl der Wandler, wie zu dem Abstand dieser Gestirne, warum ist des Jupiters Laufbahn vom Mars so weit entfernt, da im Äußersten beide? Nimm Pythagoras hin, er lehrt's mit seinen fünf Körpern. Zwischen Saturn und Jupiter steht ein Würfel so, daß die Innenfläche der Saturnsphäre die dem Würfel umschriebene, die Außenfläche der Jupitersphäre die eingeschriebene Kugel ist. Ebenso steht zwischen Jupiter und Mars ein Tetraeder, zwischen Mars und Erde das Dodekaeder, zwischen Erde und Venus das Ikosaeder, zwischen Venus und Merkur das Oktaeder. Auch die mittleren Bewegungen stehen in Beziehungen

zueinander. Sie verhalten sich nämlich wie die Quadrate der Abstände.“ Kepler nahm die Planetenbahnen – wie Nicolaus Copernicus (latinisiert aus Kopernik, 1473 bis 1543) – als kreisförmig an. Er dachte sich um die Sonne eine Kugel beschrieben, deren Radius gleich dem Radius der Kreisbahn des Merkur ist. Diese werde als Inkugel eines Oktaeders betrachtet. Die Umkugel dieses Oktaeders habe einen Radius, der gleich dem Radius der Kreisbahn der Venus ist. Diese Umkugel des Oktaeders werde als Inkugel eines Ikosaeders betrachtet. Die Umkugel dieses Ikosaeders habe einen Radius, der gleich dem Radius der Kreisbahn der Erde ist. Diese Umkugel des Ikosaeders wiederum werde als Inkugel eines Dodekaeders angesehen. Die Umkugel dieses Dodekaeders habe einen Radius, der so groß ist wie der Sonnenabstand des Mars, der also gleich dem Radius der Kreisbahn des Marses ist. Diese Umkugel des Dodekaeders werde als Inkugel eines Tetraeders betrachtet. Auf der Umkugel dieses Tetraeders bewege sich der Jupiter auf einer Kreisbahn. Diese Umkugel des Tetraeders werde als Inkugel eines Würfels angesehen. Die Umkugel des Würfels habe dann einen Radius, der gleich dem Radius der Kreisbahn des Saturn ist. Auf ihr bewege sich also der Saturn.

In der Übersicht 4 wird die Hypothese Keplers mit den uns heute genau bekannten Werten verglichen: Die Verhältnisse h von Um- und Inkugelradius werden den wirklichen Verhältnissen w der mittleren Sonnenabstände der aufeinanderfolgenden Planeten gegenübergestellt.

Wir wissen heute, daß die Vorstellung von durch die regulären Polyeder bestimmten Planetenbahnen völlig irreal ist, auch wenn sie in gewisser Weise „schön“ und „harmonisch“ erscheint. Das Buch „Weltgeheimnis“



brachte Kepler jedoch die Anerkennung vieler Gelehrter, darunter Galileo Galilei (1564 bis 1642) und Tycho Brahe (1546 bis 1601). Kepler selbst beschrieb später die Bahnen der Planeten genauer in drei (heute nach ihm benannten) Bahngesetzen.

Nach Brahes Tod 1601 kam Kepler in den Besitz der Braheschen Beobachtungsergebnisse. Er versuchte zunächst, die Beobachtungen mit Copernicus' Vorstellungen von exzentrischen, kreisförmigen Planetenbahnen (um die Sonne) in Einklang zu bringen. Nach vielen Rechnungen fand er schließlich, daß sich eine Übereinstimmung mit den Beobachtungen ergibt, wenn man die Gültigkeit der beiden folgenden Gesetze annimmt, die er 1609 in der „Neuen Astronomie“ veröffentlichte.

Erstes Keplersches Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem

Übersicht 4. Keplers Planetenkugeln und die Wirklichkeit

Planet	Keplers Hypothese: Der Planet bewegt sich auf der	Keplers Hypothese h : Verhältnis der Radien der Kreisbahnen = Verhältnis $\frac{r}{s}$ (Radius r der Umkugel zu Radius s der Inkugel)	Mittlerer Sonnenabstand der Planeten	Verhältnis w der mittleren Abstände	$\frac{w}{h}$
Merkur	Inkugel eines Oktaeders	$\frac{r}{s}$ (Oktaeder) $\approx 1,7321$	0,3871	1,8685	1,0787
Venus	Umkugel des Oktaeders = Inkugel eines Ikosaeders	$\frac{r}{s}$ (Ikosaeder) $\approx 1,2584$	0,7233	1,3826	1,0987
Erde	Umkugel des Ikosaeders = Inkugel eines Dodekaeders	$\frac{r}{s}$ (Dodekaeder) $\approx 1,2584$	1,0000	1,5237	1,2108
Mars	Umkugel des Dodekaeders = Inkugel eines Tetraeders	$\frac{r}{s}$ (Tetraeder) = 3	1,5237	3,4145	1,1382
Jupiter	Umkugel des Tetraeders = Inkugel eines Würfels	$\frac{r}{s}$ (Würfel) $\approx 1,7321$	5,2026	1,8365	1,0603
Saturn	Umkugel des Würfels		9,5548		

Brennpunkt die Sonne steht. (Die Ellipse ist als Kurve definiert, bei der die Summe der Abstände eines beliebigen Kurvenpunktes von zwei bestimmten Punkten, den Brennpunkten, konstant ist.)

Zweites Keplersches Gesetz: Die Verbindungslinie Sonne–Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. (Die Planeten bewegen sich also in Sonnennähe schneller.)

Nun war in gewissem Sinne eine Ordnung am Planetenhimmel gewonnen. Jedoch die Frage nach der Harmonie der Welt blieb in Kepler lebendig. Was war die Ursache für die Bahnformen und ihre Verhältnisse? Kepler versuchte, in seiner „Weltharmonik“ (Harmónices mundi 1619) eine Antwort auf diese Frage zu geben. Seine Harmonielehre basiert auf Geometrie, Musik und Astronomie. Im Laufe der Überlegungen zur „Weltharmonik“ beschäftigte Kepler immer wieder das Problem, wie etwa die Umlaufzeiten der Planeten mit ihren Sonnenabständen zusammenhängen könnten. (Diese Fragestellung geht bis in die Zeit der Arbeit am „Weltgeheimnis“ zurück!) Im Mai 1618 gelang ihm die Lösung; publiziert wurde sie in der „Weltharmonik“: „Nachdem ich in unablässiger Arbeit einer sehr langen Zeit die wahren Intervalle der Bahnen mit Hilfe der Beobachtungen Brahes ermittelt hatte, zeigte sich mir endlich die wahre Proportion der Umlaufzeiten in ihrer Beziehung zur Proportion der Bahnen.“

Drittes Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Abstände von der Sonne. (Als Abstand von der Sonne soll die Länge der großen Halbachse der Bahnellipse genommen werden.) Bezeichnen T_1 , r_1 Umlaufzeit und Abstand des einen Planeten und T_2 , r_2 Umlaufzeit und Abstand eines anderen Planeten, so gilt

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Kepler ermittelte die Gesetze induktiv aus den Beobachtungsergebnissen Brahes. Kepler hat zwar diese Gesetze entdeckt, konnte sie jedoch nicht erklären. Es fehlte ihm der Begriff der Masse und das Wissen um die Anziehung (Gravitation). Später konnte Isaac Newton (1642 bis 1727) die drei Planetengesetze rein logisch aus seinem Gravitationsgesetz herleiten. Ausgangspunkt zur Formulierung des Gravitationsgesetzes waren aber andererseits die Keplerschen Gesetze. In seinen „Mathematischen Prinzipien der Naturphilosophie“ (Principia mathematica ..., 1714) zeigte Newton, daß der Sonnenkörper die Quelle Kraft der Planetenbewegung wäre, wie Kepler es gefordert hatte.

Kepler fiel übrigens bereits die große „Lücke“ zwischen Mars und Jupiter auf. (Fortsetzung im Heft 6/1980)

H. Pieper

Die Mathematik und die Inquisition

Am Ende des 15. Jahrhunderts wurde einmal der berühmte Mathematiker *Paolo Walmes* von einem Adligen in Madrid eingeladen. Man sprach über die Lösung der Gleichungen.

„Ich habe angefangen, das Lösen der Gleichungen 2. Grades zu erlernen“, erklärte stolz der Hausherr, der für seine Zeit als gebildeter Mensch galt. „Es stellte sich heraus, daß das Quadrat der unbekannten Größe kein unüberwindbares Hindernis für die Bestimmung dieser Unbekannten war...“

„Es gibt sogar Verfahren für die Lösung komplizierterer Gleichungen“, bemerkte vorsichtig *Walmes*, der kurz vorher ein Verfahren zur Lösung der Gleichungen 4. Grades gefunden hatte. Vielleicht hätte er mehr gesagt, aber ... unter den Gästen war auch *Torquemada*, der spanische Inquisitor. Könnte er das wohl als Ketzerei auffassen?

Aber *Torquemada* hatte dem Gespräch schon zugehört und kam näher. „Sie haben recht“, gab er einschmeichelnd zu, „man kann auch die Gleichungen 3. Grades lösen. Alles jedoch, was darüber ist, ist dem menschlichen Verstand unzugänglich.“

„Und trotzdem fand ich sogar die Möglichkeit der Lösung von Gleichungen 4. Grades!“ konnte *Walmes* sich nicht enthalten zu sagen. „Und ich hoffe, bei der Diskussion am kommenden Donnerstag, das zu beweisen.“

Torquemada antwortete nicht darauf. Er ging bald weg. Aber im Morgengrauen wurde der Mathematiker aus dem Bett geholt und auf das „heilige Gericht“ geschleppt.

„Also, Ihnen ist ein Verfahren zur Lösung der Gleichungen 4. Grades bekannt?“ wünschte der mächtige Inquisitor zu wissen. „Haben Sie das schon irgend jemandem mitgeteilt?“

„Ich hoffe, daß ich das Verfahren beherrsche“, antwortete der Gelehrte bescheiden. „Auf jeden Fall habe ich damit verschiedene Gleichungen 4. Grades gelöst. Leider konnte ich nicht wissen, daß sich die Kirche auch für Mathematik interessiert; deshalb habe ich mir vorgenommen, darüber während der Diskussion zu reden, die am kommenden Donnerstag stattfinden soll.“

„Nun, wie ist das möglich, Herr Professor?“ fragte sarkastisch lächelnd *Torquemada*. „Der liebe Gott erlaubte den Menschen nur, Gleichungen des 1., 2. sowie 3. Grades zu lösen. Und alles, was darüber ist, auch Gleichungen 4. Grades, kann nur der Teufel verstehen. Oder hat Ihnen der Teufel geholfen?“

„Aber ich bitte Sie!“ entgegnete der Mathematiker, den große Angst erfaßte (denn die Erklärung, daß er mit dem Teufel im Bunde sei, konnte die Folter bedeuten). „Ich habe nur einige mathematische Berechnungen ausgeführt... Wenn Sie und der liebe Gott es erlauben, kann am kommenden Donnerstag jeder Scholar nach meinem Verfahren rechnen...“

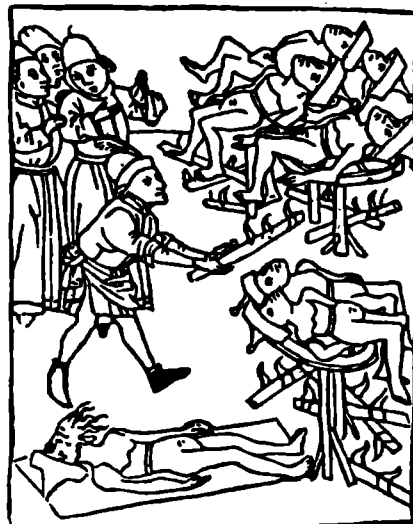
„Jeder Scholar, sagen Sie? Und können Sie darauf auch nach dem heiligen Evangelium schwören?“ fragte *Torquemada* mit hinterlistiger Stimme. „Na gut, wir werden eine Kommission einberufen...“

Die Diskussion am Donnerstag fand nicht statt. *Walmes* wurde dem Gericht übergeben und für schuldig befunden, mit dem Teufel im Bunde zu sein, weil er wider den Willen Gottes die Grenzen des menschlichen Verstandes überschreiten wollte. Er wurde zum Tod auf dem Scheiterhaufen verurteilt und als Ketzer verbrannt. Das Verfahren zur Lösung der Gleichungen 4. Grades wurde ein halbes Jahrhundert später von dem italienischen Mathematiker *L. Ferrari* wiederentdeckt.

Es sei noch bemerkt, daß das Verfahren von dem Lehrer Ferraris, dem Mathematiker *Gerolamo Cardano*, veröffentlicht wurde. Dieser nahm die Entdeckung für sich in Anspruch.

A. Halameisär

Bis in das 19. Jh. brannten die Scheiterhaufen der Inquisition, wurden Männer und Frauen gequält, weil sie sich gegen kirchliche Dogmen wandten.



Wissenswertes über das Dreieck

Wir wollen durch diesen Beitrag unsere *alpha*-Leser in Form von Aufgaben mit geometrischen Zusammenhängen vertraut machen, die nicht Gegenstand des Unterrichts der Schule sind. Dabei soll zugleich das Beweisen geübt werden.

Aufgabe

Es seien A der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC , a , b und c die Längen seiner Seiten, $2s = a + b + c$ die Länge seines Umfangs, h_a , h_b und h_c die Längen seiner Höhen, α , β und γ die Größen seiner Innenwinkel, ϱ die Länge seines Inkreisradius, ϱ_a , ϱ_b und ϱ_c die Längen seiner Ankreisradien; dann gilt

- (1) $A = \varrho \cdot s$
- (2) $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
- (3) $A = \varrho_a \cdot (s-a) = \varrho_b \cdot (s-b) = \varrho_c \cdot (s-c)$
- (4) $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}$
- (5) $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$
- (6) $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$
 $\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$
 $\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

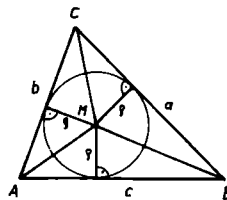
Diese sechs Formeln wollen wir nun am Beispiel eines spitzwinkligen Dreiecks herleiten. Für stumpfwinklige bzw. rechtwinklige Dreiecke gelten diese Formeln ebenfalls. Die Herleitungen dafür wird der interessierte Leser in analoger Weise sicher selbst finden.

Lösungen

(1) Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt

$$\begin{aligned} A &= A_{ABM} + A_{BCM} + A_{CAM}, \\ A &= \frac{1}{2}c \cdot \varrho + \frac{1}{2}a \cdot \varrho + \frac{1}{2}b \cdot \varrho, \\ A &= \frac{1}{2}\varrho \cdot (a + b + c), \\ A &= \frac{1}{2}\varrho \cdot 2s, \\ A &= \varrho \cdot s \text{ (Bild 1).} \end{aligned}$$

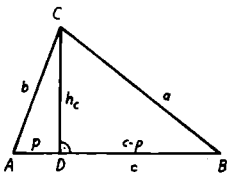
Bild 1



(2) Nach dem Satz des Pythagoras gilt $h_c^2 = b^2 - p^2$ und $h_c^2 = a^2 - (c-p)^2$. Daraus folgt durch Gleichsetzen

$$\begin{aligned} b^2 - p^2 &= a^2 - (c-p)^2, \\ b^2 - p^2 &= a^2 - c^2 + 2cp - p^2, \\ 2cp &= b^2 + c^2 - a^2, \\ p &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \text{ (Bild 2).} \end{aligned}$$

Bild 2



$$\begin{aligned} \text{Aus } h_c^2 &= b^2 - p^2 = (b+p)(b-p) \text{ und} \\ p &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \text{ folgt durch Einsetzen} \\ h_c^2 &= \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right), \\ h_c^2 &= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}, \\ h_c^2 &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c}, \\ h_c^2 &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}{4c^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Aus } a + b + c &= 2s \text{ folgt} \\ a + b - c &= 2(s-c), \quad a + c - b = 2(s-b), \\ b + c - a &= 2(s-a). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir dann

$$\begin{aligned} h_c^2 &= \frac{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)}{4c^2} \\ &= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}, \\ h_c &= \frac{2}{c} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$A = \frac{c}{2} \cdot h_c = \frac{c}{2} \cdot \frac{2}{c} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

also

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

(3) Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt

$$A = A_{ABM} + A_{CAM} - A_{CBM},$$

$$A = \frac{c}{2} \cdot \varrho_a + \frac{b}{2} \cdot \varrho_a - \frac{a}{2} \cdot \varrho_a,$$

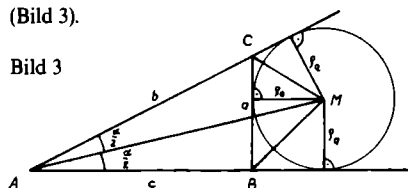
$$A = \frac{1}{2}\varrho_a \cdot (b + c - a),$$

$$A = \frac{1}{2}\varrho_a \cdot 2(s-a),$$

$$A = \varrho_a \cdot (s-a).$$

Analog dazu gilt $A = \varrho_b \cdot (s-b) = \varrho_c \cdot (s-c)$ (Bild 3).

Bild 3



(4) Nach der bereits hergeleiteten Formel (1)

$$\text{gilt } \frac{1}{\varrho} = \frac{s}{A}.$$

Nach Formel (3) gilt $\frac{1}{\varrho_a} = \frac{s-a}{A}$,

$$\frac{1}{\varrho_b} = \frac{s-b}{A} \text{ und } \frac{1}{\varrho_c} = \frac{s-c}{A}.$$

Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} &= \frac{s-a}{A} + \frac{s-b}{A} + \frac{s-c}{A} \\ &= \frac{3s - (a+b+c)}{A} = \frac{3s - 2s}{A} = \frac{s}{A}. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}.$$

$$(5) \text{ Aus } A = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$\text{folgt } \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2A}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2A}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2A}.$$

Durch Addition erhalten wir

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2A} = \frac{2s}{2A} = \frac{s}{A}.$$

Nach Formel (1) gilt $\frac{1}{\varrho} = \frac{s}{A}$.

Durch Gleichsetzen folgt daraus

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

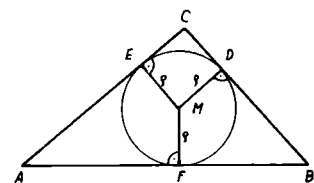
(6) Wegen $\overline{AE} = \overline{AF}$, $\overline{BD} = \overline{BF}$ und $\overline{CD} = \overline{CE}$

gilt $a + b + c = 2 \cdot (\overline{AF} + \overline{BD} + \overline{CD})$

$$= 2 \cdot (\overline{AF} + a),$$

$$2s = 2 \cdot (\overline{AF} + a), \quad \overline{AF} = \overline{AE} = s - a.$$

Bild 4



Analog dazu gilt $\overline{BD} = \overline{BF} = s-b$ und $\overline{CD} = \overline{CE} = s-c$ (Bild 4).

Aus dem nachfolgenden Bild wird folgendes ersichtlich:

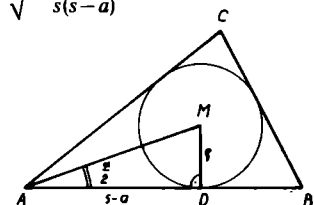
$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}.$$

Wegen $\varrho = \frac{A}{s}$ erhalten wir durch Einsetzen

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{A}{s(s-a)} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s(s-a)},$$

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2(s-a)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}. \end{aligned}$$

Bild 5



Analog dazu gilt

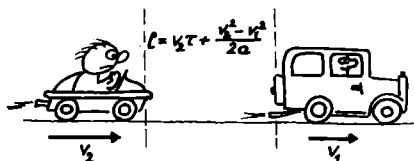
$$\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \text{ und}$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \text{ (Bild 5).}$$

D. Gandel, D. Hetsch, Th. Scholl

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1981



Mathematik

Ma 5 ■ 1996 An einer Arbeitsgemeinschaft *Junge Mathematiker* einer Schule nehmen insgesamt 40 Schüler der 5., 6. und 7. Klasse teil. Der fünfte Teil der Anzahl der AG-Teilnehmer sind Schüler der 5. Klasse. Aus der 6. Klasse nehmen 8 Schüler mehr als aus der 7. Klasse an der AG teil. Wie viele Schüler aus jeder dieser drei Klassen nehmen an dieser AG teil?

Schülerin Sabine Kupczyk, Bad Sulza, Kl. 6

Ma 5 ■ 1997 Ein Holzwürfel mit der Kantenlänge 30 cm, dessen Oberfläche schwarz gefärbt ist, soll so zersägt werden, daß man kleinere Würfel mit einer Kantenlänge von je 10 cm erhält.

a) Wieviel Sägeschnitte sind dazu erforderlich? (Die anfallenden Sägespäne sollen unberücksichtigt bleiben.)

b) Wieviel kleinere Würfel von je 10 cm Kantenlänge erhält man?

c) Wie viele dieser kleineren Würfel haben genau vier, drei, zwei, eine bzw. keine schwarze Begrenzungsfläche?

Schülerin Anke Heymann, Pirna

Ma 5 ■ 1998 Klaus und Peter gehen einkaufen. Klaus kauft 5 Bleistifte und 3 Hefte, Peter 2 Bleistifte und 10 Hefte. Wieviel Mark muß jeder von ihnen bezahlen, wenn 2 Bleistifte genausoviel kosten wie 4 Hefte und wenn Peter 11 Pfennige mehr bezahlen mußte als Klaus?

Schüler Peter Hermann, Hoyerswerda, Kl. 5

Ma 5 ■ 1999 Klaus hat ausreichend Stäbe von 3 dm und 5 dm Länge. Er behauptet, daß er unter Verwendung von genau fünf dieser Stäbe Strecken von

a) 21 dm, b) 9 dm, c) 1 dm

Länge auf einer Geraden abmessen kann. Wie macht er das?

Ma 5 ■ 2000 Sonderwettbewerb – siehe IV. Umschlagseite

Ma 5 ■ 2001 Einer der größten von Menschenhand geschaffenen Seen ist der Zimljansker Stausee in der Sowjetunion. Er hat eine Wasseroberfläche von rund 2600 km². Jemand meint: „Hätte dieser See die Form eines Quadrates, so könnte man auf einer 200 km langen Autostrecke um diesen See herumfahren.“ Begründe, daß diese Aussage falsch ist!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2002 In das nachfolgende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzusetzen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß man sechs richtig gelöste Aufgaben erhält.

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & \cdot & c & d & = & d & f & g & d \\ : & : & & : & & & : & & & \\ s & d & \cdot & s & d & = & s & h & h \\ \hline a & \cdot & b & = & s & p \end{array}$$

Sch.

Ma 6 ■ 2003 Die erfolgreichste Mannschaft bei der VII. Kinder- und Jugendspartakiade der DDR in den Wintersportarten wurde die des Bezirks Karl-Marx-Stadt mit insgesamt 749 erreichten Punkten. Im Skilauf erreichte diese Mannschaft 14mal soviel Punkte wie im Eiskunstlauf. Im Biathlon wurden von dieser Mannschaft 26 Punkte weniger als im Eiskunstlauf, im Rennschlittensport aber 2 Punkte mehr als die zwölffache Anzahl der Punkte aus dem Biathlon erzielt. Im Eisschnellauf erreichte sie 41 Punkte mehr als im Eiskunstlauf. Wieviel Punkte erzielte diese Mannschaft in den einzelnen Disziplinen?

Schülerin Sabine Oestreich, Oschersleben, Kl. 7

Ma 6 ■ 2004 Eine Mutter hat Erdbeeren, Johannisbeeren und Stachelbeeren eingeweckt. Hätte sie ein Glas Johannisbeeren mehr ein-

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1980/81 läuft von Heft 5/80 bis Heft 2/81. Zwischen dem 1. und 10. September 1981 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/80 bis 2/81 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/81 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/80 bis 2/81) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1980/81 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

30	Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr. 22 Kersting-OS, Klasse 7	Ma 7 1369
150	Prädikat:	
	Lösung:	

geweckt, so hätte sie doppelt soviel Gläser Johannisbeeren wie Erdbeeren; sie hat aber dreimal soviel Gläser Stachelbeeren wie Erdbeeren. Wie viele Gläser Erdbeeren, Johannisbeeren bzw. Stachelbeeren hat diese Mutter eingeweckt, wenn sie insgesamt 17 Gläser dieser Obstsorten eingeweckt hat?

Schülerin Marion Reek, Wittstock, Kl. 6

Ma 6 ■ 2005 Rolf kaufte insgesamt 13 Ansichtskarten, und zwar einige zu 20 Pf und einige zu 30 Pf das Stück. Für die Ansichtskarten zum Preise von 30 Pf zahlte Rolf insgesamt 10 Pf weniger als für die Ansichtskarten zum Preise von 20 Pf. Wie viele Ansichtskarten zu 20 Pf und wie viele zu 30 Pf das Stück hat Rolf gekauft?

Schüler Bernd Leifheit, Eigenrieden, Kl. 6b

Ma 6 ■ 2006 Es ist nachzuweisen, daß der Flächeninhalt eines spitzwinkligen Dreiecks ABC stets kleiner als $\frac{1}{2} \cdot ab$ ist, wenn a und b die Längen der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ sind.

Schülerin Angelika Drauschke, Neustrelitz, Kl. 6

Ma 6 ■ 2007 Zeichne ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a=7$ cm, $b=9$ cm und $c=5$ cm! Konstruiere die Winkelhalbierende $\overline{AD}=w$ des Innenwinkels $\sphericalangle CAB$! Auf dieser Winkelhalbierenden ist nun ein Punkt P zu konstruieren, der von der Geraden BC den gleichen Abstand hat wie vom Eckpunkt A des Dreiecks ABC . Die Konstruktion des Punktes P ist zu begründen.

Sch.

Ma 6 ■ 2000 Sonderwettbewerb – siehe IV. Umschlagseite

Ma 7 ■ 2008 Es ist nachzuweisen, daß es in jedem Jahr mindestens einen „Freitag, den 13.“ gibt.

Schüler J. Gräfenstein, Dresden

Ma 7 ■ 2009 Konstruiere einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r=3$ cm! Lege an diesen Kreis zwei Tangenten, die aufeinander senkrecht stehen! Der Schnitt-

punkt der Tangenten sei S , die Berührungspunkte der Tangenten mit dem Kreis k seien P und Q . Von den Tangentenabschnitten $\overline{SP}$ und $\overline{SQ}$ und von dem kürzeren Kreisbogen $\overline{PQ}$ wird eine Fläche begrenzt, deren Flächeninhalt zu bestimmen ist.

Schüler Michael Nitsche, Dresden, Kl. 6

Ma 7 ■ 2010 Es sind alle geordneten Tripel $[a, b, c]$ natürlicher Zahlen anzugeben, die zugleich die Gleichung $a \cdot b + 8 = c$ und die Ungleichung $91 < a + b + c < 94$ erfüllen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2011 Setzt man zwischen die beiden Ziffern einer zweistelligen natürlichen Zahl eine dritte Ziffer, so erhält man eine dreistellige natürliche Zahl, die dreizehnmal so groß ist wie die zweistellige natürliche Zahl. Um welche Zahlen handelt es sich?

Sch.

Ma 7 ■ 2000 Sonderwettbewerb – siehe IV. Umschlagseite

Ma 8 ■ 2012 In einem Dreieck ABC sei die Seite $\overline{AB}$ doppelt so lang wie die Seite $\overline{BC}$, und die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ betrage 60° . Man drücke den Flächeninhalt dieses Dreiecks allein durch die Länge a der Seite $\overline{BC}$ aus!

Schüler Volker Leutheuser, Kl. 10

Ma 8 ■ 2013 Von einer sechsstelligen Telefonnummer weiß man folgendes:

(1) Je zwei aufeinanderfolgende Ziffern bilden in der vorgegebenen Reihenfolge eine Primzahl.

(2) Die von den ersten beiden Ziffern gebildete Primzahl ist kleiner als 29.

(3) Die von der zweiten Ziffer dargestellte Zahl ist gleich dem Quadrat der von der vierten Ziffer dargestellten Zahl.

(4) Es folgen keine zwei gleichen Ziffern aufeinander.

(5) Die dritte Ziffer stellt eine Zahl dar, die gleich der Summe der durch die letzten drei Ziffern dargestellten Zahlen ist.

(6) Die Ziffern 0 und 2 sind nicht in der Telefonnummer enthalten.

Wie lautet die Telefonnummer?

Schüler Rainer Wichmann, Weimar, Kl. 8

Ma 8 ■ 2014 Es ist zu beweisen: Wenn die Differenz zweier natürlicher Zahlen n_1 und n_2 durch 7 teilbar ist, so ist auch die Differenz ihrer Quadrate stets durch 7 teilbar.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 8 ■ 2015 Gegeben sei eine beliebige natürliche Zahl n in dekadischer Schreibweise. Man bilde durch eine beliebige Umstellung von Ziffern der Zahl n eine Zahl n' . Es ist zu beweisen, daß die Differenzen $n - n'$ und $n' - n$ stets durch 9 teilbar sind! (Die Null als erste Ziffer ist auszuschließen!)

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 8 ■ 2000 Sonderwettbewerb – siehe IV. Umschlagseite

Ma 9 ■ 2016 Man konstruiere einen Rhombus, in dem die Länge des Radius seines

einbeschriebenen Kreises kleiner als die halbe Seitenlänge des Rhombus ist. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 9 ■ 2017 Es ist zu beweisen, daß es keine Quadratzahl gibt, die bei Division durch 5 den Rest 2 oder 3 läßt.

Schülerin Sylvia Döring, Gotha, Kl. 10

Ma 9 ■ 2018 Es ist zu beweisen, daß die Summe der Quadrate von vier beliebigen Primzahlen, von denen jede größer als 2 ist, stets durch 4 teilbar ist.

Dipl.-Lehrer f. Math./Phys. R. Otto, Zschopau

Ma 9 ■ 2019 Man berechne den Wert des Terms

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{225}\right)!$$

Sch.

Ma 9 ■ 2000 Sonderwettbewerb – siehe IV. Umschlagseite

Ma 10/12 ■ 2020 Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, von dem die folgenden Stücke bekannt sind:

b (Länge der Seite $\overline{AC}$), α (Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$) und

r_b (Länge des Radius desjenigen Ankreises, der die Seite $\overline{AC}$ berührt).

Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen!

Dipl.-Lehrer f. Math./Phys. R. Otto, Zschopau

Ma 10/12 ■ 2021 Der zehnte Teil der Summe aller Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis 20, vermehrt um 13, ist das Zehnfache der Anzahl der Schüler einer Klasse. Wieviel Schüler gehen in diese Klasse?

Schülerin Claudia Mörhdel und Beatrix Flemming, Halle-Neustadt, Kl. 5

Ma 10/12 ■ 2022 Von einem Dreieck sind gegeben: $\alpha = 74^\circ$, $\beta = 53^\circ$, $h_b = 15$ cm. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks zu berechnen.

Aus einem rumänischen Mathematiklehrbuch

Ma 10/12 ■ 2023 Von einem Quader mit den Kantenlängen a, b, c ($a > b > c$) ist folgendes bekannt:

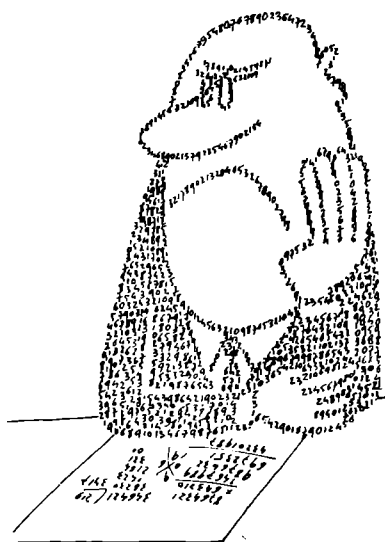
Die Länge f der Diagonalen der Begrenzungsfläche mit dem kleinsten Flächeninhalt beträgt $\sqrt{145}$ cm, die Länge g der Diagonalen der Begrenzungsfläche mit dem größten Flächeninhalt beträgt 15 cm, und die Länge der Raumdiagonalen ist $e = 17$ cm. Es ist das Volumen dieses Quaders zu berechnen.

Schüler Jürgen Seifert, Milkau, Kl. 8

Ma 10/12 ■ 2000 Sonderwettbewerb – siehe IV. Umschlagseite

Physik

Ph 6 ■ 81 Lutz möchte das Volumen eines würfelförmigen Holzklötzchens aus dem Baukasten seines kleinen Bruders bestimmen.



Dazu mißt er die Kante des Würfels mit 44 mm. Er weiß aber, daß sein Meßstab nicht genau ist und sich ein Meßfehler von 1 mm oder weniger ergeben kann.

a) Berechne das größte und das kleinste Volumen des Holzklötzchens, das innerhalb dieser Fehlergrenze möglich ist!

b) Berechne das Volumen mit dem gemessenen Wert! Um wieviel mm² unterscheidet es sich von dem Durchschnittswert der Ergebnisse von a)?

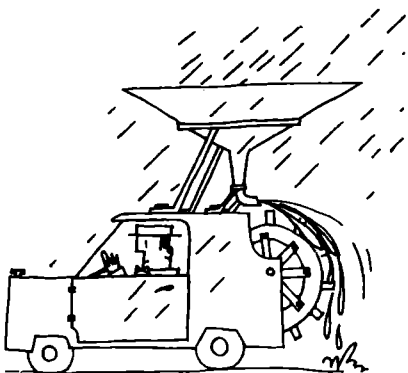
Ph 7 ■82 Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Rundfunkwellen beträgt 300 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Wer hört in einer Intervisionssendung aus Moskau die Musik früher, der Zuhörer in Moskau, der 40 m vom Orchester entfernt im Saal sitzt oder der Fernsehzuschauer in Berlin in einer Entfernung von 1600 km, der 3 m vor seinem Fernsehapparat sitzt? Um wieviel Sekunden wird die Musik früher wahrgenommen? (Schallgeschwindigkeit: 340 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$)

Ph 8 ■83 In einem Industriebetrieb werden die anfallenden Abwässer über vier Rohrleitungen einem Sammelbecken und von dort durch einen offenen Kanal der Abwasserreinigung zugeleitet. Es seien bekannt:

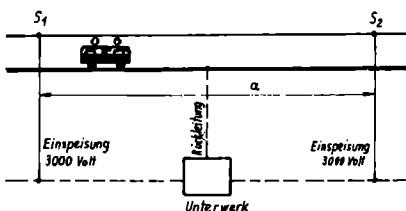
	Rohr 1	Rohr 2	Rohr 3	Rohr 4
Durchmesser (cm)	30	30	50	68
Strömungsgeschwindigkeit ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$)	1,5	2,5	1,8	1,0

Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ im Abflußkanal des Sammelbeckens, wenn der Kanal rechteckigen Querschnitt hat, seine Breite $b=1,25$ m beträgt und das Abwasser darin eine Höhe von $h=50$ cm hat?
Bemerkung: Es wird vorausgesetzt, daß pro Minute aus dem Sammelbecken dieselbe Menge abfließt, die aus den Rohrleitungen zufließt. Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 9 ■84 Bei einer mit Gleichstrom betriebenen elektrischen Bahn beträgt die Fahrleitungsnennspannung $U_n=3000$ Volt. An den Stromabnehmern der Triebfahrzeuge muß bei maximaler Strombelastung eine



minimale Fahrleitungsspannung von $U_{\min}=2800$ Volt gewährleistet sein. Der Fahrdraht hat einen Querschnitt von $A=180$ mm² und einen spezifischen Widerstand von $\rho=0,0178 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$. Die maximale Stromentnahme aus dem Fahrdraht durch das Triebfahrzeug beträgt $I_{\max}=900$ Ampere.

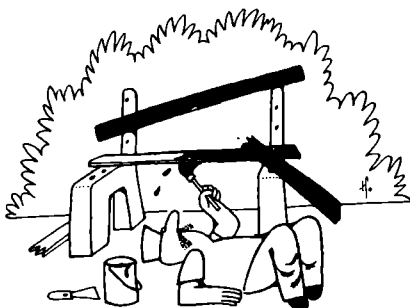


In welchen Abständen a müssen an der Fahrleitung Einspeisungspunkte von den Unterwerken des Bahnkraftwerkes vorgesehen werden, um die minimale Fahrleitungsspannung zu gewährleisten? Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 10/12 ■85 In welcher Höhe muß sich ein Körper über der Erdoberfläche befinden, damit seine Gewichtskraft auf $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{1000000}$ des Wertes auf der Erdoberfläche abgesunken ist? (Erdradius: 6370 km)

Chemie

Ch 7 ■65 Neusilber besteht aus 52% Kupfer, 26% Zink und 22% Nickel. Wieviel Kilogramm von jedem Bestandteil sind in 580 kg der Legierung enthalten?



Ch 8 ■66 Kalziumcyanamid (CaCN_2) findet als wertvolles Düngemittel Verwendung. In den Handel kommt es unter der Bezeichnung Kalkstickstoff.

a) Wieviel Prozent der Elemente sind in diesem Düngemittel enthalten?
b) In der erzeugten Menge Kalkstickstoff im Jahre 1979 sind 16940 t Stickstoff gebunden. Welcher Menge Kalkstickstoff entspricht diese Menge Stickstoff?

Ch 9 ■67 Für die Bauindustrie soll ein Portlandzement, welcher zu 68% aus Trikalziumsilikat (Ca_3SiO_5) besteht, hergestellt werden. Wieviel kg Kalkstein und Sand müssen zur Reaktion gebracht werden, damit 7000 kg dieses Produktes entstehen?

Ch 10/12 ■68 6 kg einer 35,5%igen Salzsäure sollen mit einer 8,2%igen Salzsäure so verdünnt werden, daß eine 25%ige Säure entsteht. Wieviel kg 8,2%ige Salzsäure müssen zugesetzt werden?

In eigener Sache

Die Aufgabe 2000 gibt uns Anlaß, einmal all den fleißigen Helfern zu danken, die seit 1967 in mühevoller Kleinarbeit den alpha-Wettbewerb in hervorragender Weise unterstützen: Für die Bearbeitung der eingegangenen Aufgaben, ihre Zusammenstellung nach Klassenstufen zeichneten bzw. zeichnen verantwortlich: NPT OStR Dr. R. Lüders, Berlin, Klassenstufe 8 bis 10/12 (1967 bis 1977); OL Dr. W. Fregin, Leipzig, Klassenstufe 8 bis 10/12 (ab 1978); StR Th. Scholl, Berlin, Klassenstufe 5 bis 7 (seit 1967); Mathematikfachlehrer H. Begander, Leipzig (Physik); Diplom-Lehrer Christa Reuter, Erfurt (Chemie). Die Korrektur der rund 750 000 Lösungen lag in den Händen von: OStR G. Schulze, Herzberg, Klassenstufe 9 und 10/12 (1967 bis 1977), auch Klassenstufe 8 (1975 bis 1977); Mathematikfachlehrer W. Unze, Leipzig, Klassenstufe 7 und 8 (1967 bis 1974); Diplom-Lehrer Christa Döhler und Diplom-Physiker Christian Döhler, beide Leipzig, Klassenstufe 8 bis 10/12 (ab 1978); StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig (Chefredakteur) Klassenstufe 5 und 6 (ab 1967), auch Klassenstufe 7 (ab 1976).

Unser besonderer Dank gilt Wirtschafts-kaufmann Rosemarie Schubert (Redaktions-assistent), die die ordnungsgemäße und termingerechte technische Bearbeitung der Lösungen vornahm.

Ein MMM-Exponat

Unsere Arbeitsgemeinschaft „Praktisches Rechnen“ wurde 1978 gegründet. Um die Schüler unserer Schule auf unsere Arbeit aufmerksam zu machen und für sie zu interessieren, beschlossen wir, etwas zu entwickeln und zu bauen, das für unsere Schule einen bleibenden Wert hat. Auf der MMM 1979 stellten wir unser Modell „Der Zahlenstrahl“ aus. Mit ihm ist es möglich, Dezimalbrüche, echte und unechte Brüche geometrisch zu veranschaulichen. Nachdem wir uns zunächst theoretisch mit dem Problem beschäftigt hatten, ging es an die praktische Arbeit: Wir stellten eine mit einem Zahlenstrahl versehene Holzleiste (mit eingeschlagenen Nägeln) sowie mit Dezimalzahlen bzw. Brüchen beschriftete Holztäfelchen (mit Loch zum Aufhängen) her. Uns dient das Modell zur Wiederholung, unseren jüngeren Mitschülern als Anschauungsmittel bei der Arbeit mit dem Stoffgebiet „Gebrochene Zahlen“.

AG-R Diesterweg-OS Geringswalde



Ordnung ist das halbe Leben!

Leseprobe aus:
Rund um die Mathematik



Susi feiert ihren dreizehnten Geburtstag und hat dazu noch vier Freundinnen eingeladen: Inge, Helga, Karin und Dagmar. Beim Kaffeetrinken scherzt man miteinander:

- (1) Susi: „Komm du erst mal in meine Jahre, Karin!“
(2) Inge: „Gib doch nicht so an, Susi! Auch wenn du heute Geburtstag hast, fehlen dir immer noch einige Wochen bis zu mir, genau soviel wie mir bis zu Dagmar.“
(3) Karin: „Ich finde, du kannst eigentlich gar nicht mitreden, Helga. Bei euch ist Mathematik doch noch ein Kinderspiel.“
(4) Helga: „Haha, wenn Inge das gesagt hätte, aber du?“

Wir wollen einmal probieren, ob wir aus diesen vier Sätzen die Mädchen nach ihrem Alter ordnen können. Damit wir eine bessere Übersicht behalten, kürzen wir den Namen durch den Anfangsbuchstaben ab, und für „ist älter als“ schreiben wir das Zeichen $>$. Dem ersten Satz können wir entnehmen, daß Susi älter als Karin ist, also kurz:

- (1) $S > K$

Satz (2) gibt uns gleich zwei solche Kurzzeilen:

- (2a) $I > S$

- (2b) $D > I$

Aus Satz (3) können wir erkennen

- (3) $K > H$

Und schließlich zeigt uns Satz (4)

- (4) $I > H$

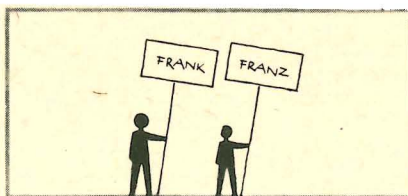
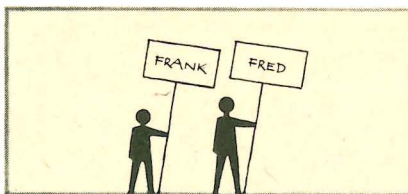
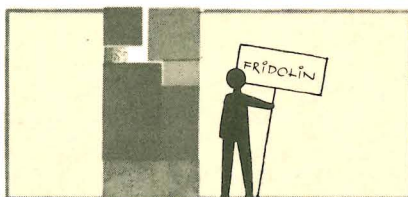
Und nun ist es nicht mehr schwer, die fünf Mädchen dem Alter nach in die richtige Reihenfolge zu bringen:

Offenbar muß diejenige die älteste sein, die in den fünf Zeilen (1) bis (4) niemals rechts steht, denn sie hat dann keine ältere vor sich. Das ist Dagmar. Sie ist nach (2b) älter als Inge; nach (4) und (2a) ist Inge älter als Helga und Susi.

Nach (1) ist Susi älter als Karin, und nach (3) ist Karin wieder älter als Helga. Im ganzen also:

$$D > I > S > K > H.$$

Helga ist also die jüngste. Und das können wir noch überprüfen: H steht in den fünf Zeilen (1) bis (4) niemals auf der linken Seite, Helga ist also nicht älter als irgendeins der anderen vier Mädchen.



Von fünf Jungen haben wir vier Bilder. Leider sind die Jungen auf keinem Bild alle beieinander. Trotzdem kann man die fünf der Größe nach ordnen.

Und nun überlege bitte selbst:

a) Welcher der vier Sätze von Susi, Karin, Helga und Inge war überflüssig?

b) Wenn Karin nichts gesagt hätte, welche Möglichkeiten für die Altersreihenfolge hätten dann bestanden?

Übrigens, wer hat bemerkt, daß wir folgenden Schluß gezogen haben:

„Wenn Dagmar älter als Inge ist und Inge älter als Susi, dann ist Dagmar auch älter als Susi?“

Freilich muß man sich gut überlegen, ob man so schließen darf, denn immer klappt das nicht. Beim Fußball-Toto zum Beispiel kann man damit einen Reinfall erleben. Soll man sich etwa vor dem Spiel Motor Zwickau

gegen Lok Stendal für einen Tip entscheiden, so könnte man möglicherweise denken: Stendal hat vor zwei Wochen FC Hansa Rostock geschlagen. Rostock hat vor vier Wochen Zwickau geschlagen, also muß auch Stendal gegen Zwickau siegreich bleiben. Man darf sich nur nicht wundern, wenn Stendal trotzdem verliert, weil hier nicht gilt:

Wenn A vor B und B vor C , so auch A vor C .

An der folgenden Aufgabe soll jeder allein ein bißchen knobeln.

In einem Schachklub wollen die sechs Spieler Schachner, Schachert, Schachtel, Schachbum, Schachmat und Schachlis versuchen, an einem gemütlichen Abend unter sich ganz zwanglos eine Reihenfolge zu ermitteln. Dazu soll jeder zwei Partien gegen verschiedene Gegner spielen, die unter den übrigen fünf ausgelost werden. Nach einiger Zeit hat sich folgender Spielstand ergeben:

Schachner schlägt Schachtel und unterliegt Schachlis.

Schachtel schlägt Schachbum und unterliegt Schachner.

Schachlis schlägt Schachner und unterliegt Schachert.

Schachbum schlägt Schachmat und unterliegt Schachtel.

Wie viele Spiele wurden bisher ausgetragen? Wie viele fehlen noch? Bisher stehen vier Spieler punktgleich. Für eine Zwischenwertung will man die Reihenfolge von eins bis sechs nach dem Motto „Wer hat wen besiegt?“ festlegen, also genauso, wie wir vorhin die Mädchen nach dem Alter geordnet haben. Wer belegt nun die Plätze eins bis sechs? Welches Resultat muß sich beim Rest der Spiele ergeben, damit diese Reihenfolge bestätigt wird?



Autorenkollektiv

Rund um die Mathematik

160 Seiten, zahlreiche farbige Abb.

Preis 9,80 M, Bestell-Nr. 628 790 1

Der Kinderbuchverlag Berlin

(Mathematische Schülerbücherei Nr. 34)

Symmetrie- eigenschaften von Funktionsgrößen

Ist von dem Graphen einer Funktion bekannt, daß er symmetrisch zur y -Achse liegt, so bietet das sicher Vorteile beim Zeichnen des Graphen. Beispiele solcher Funktionen sind $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^4$ (Bild 1).

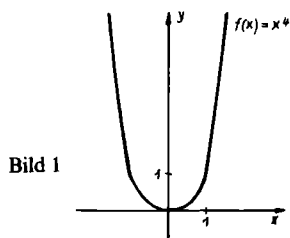


Bild 1

Kann man diese Symmetrieeigenschaft des Graphen einer Funktion formulieren, ohne auf den Graph der Funktion Bezug zu nehmen?

Liegt der Punkt $[x, y]$ auf dem Graphen einer Funktion f , und ist der Graph von f symmetrisch zur y -Achse, so muß auch das Spiegelbild $[-x, y]$ von $[x, y]$ bezüglich der y -Achse auf dem Graphen von f liegen (Bild 2). Bezeichnen wir den Funktionswert an der Stelle x mit $f(x)$, so muß also $f(-x) = f(x)$ gelten, und zwar für beliebiges x aus dem Definitionsbereich von f .

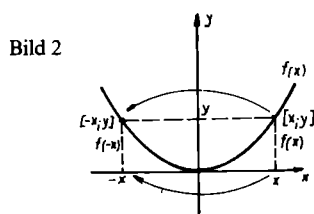


Bild 2

Gilt umgekehrt $f(-x) = f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f , so liegt der Graph von f symmetrisch zur y -Achse.

Wir kommen nun zu den Ausgangsbeispielen zurück.

$$f(x) = x^2$$

Für beliebiges x ist

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

$$f(x) = x^4$$

Für beliebiges x ist

$$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x).$$

Wir finden damit bestätigt, daß die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^4$ symmetrisch zur y -Achse liegen. Ist $f(x) = x^n$

(n eine natürliche Zahl, $n \geq 1$), so gilt im Falle gerader n für alle x

$$f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x).$$

Die Graphen aller Potenzfunktionen mit geradem natürlichem Exponenten liegen symmetrisch zur y -Achse. Man nennt deshalb auch eine Funktion f mit der Eigenschaft, daß $f(-x) = f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich von x gilt, eine *gerade* Funktion.

Aufgaben

▲ 1 ▲ Untersuche, ob folgende Funktionen gerade sind!

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = |x|$

c) $f(x) = x^2 + x$

▲ 2 ▲ Für welche Zahlen m und n ist die Funktion $f(x) = mx + n$ eine gerade Funktion?

▲ 3 ▲ Für welche Zahlen a , b und c ist die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ eine gerade Funktion?

Wie verhalten sich Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit ungeradem natürlichem n ?

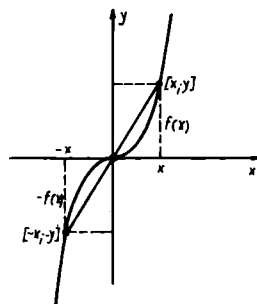
Für alle x gilt

$$f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x).$$

Auch hier liegt eine Symmetrieeigenschaft des Graphen von f vor: mit dem Punkt $[x, y]$ liegt auch der Punkt $[-x, -y]$ auf dem Graphen von f . Der Graph von f liegt zentral-symmetrisch zum Koordinatenursprung (Bild 3). Eine solche Funktion nennt man eine *ungerade* Funktion. So ist zum Beispiel die Funktion $f(x) = x^3$ eine ungerade Funktion, denn für alle x gilt

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Bild 3



▲ 4 ▲ Untersuche, ob folgende Funktionen ungerade Funktionen sind!

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = x^2 + x$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

▲ 5 ▲ Für welche Zahlen m und n ist die Funktion $f(x) = mx + n$ eine ungerade Funktion?

▲ 6 ▲ Für welche Zahlen a , b , c und d ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ eine ungerade Funktion?

▲ 7 ▲ a) Beweise!

Ist f eine ungerade Funktion, die an der Stelle $x = 0$ definiert ist, so gilt $f(0) = 0$.

b) Gibt es Funktionen, die sowohl gerade als auch ungerade (weder gerade noch ungerade) sind?

Aus bekannten Funktionen kann man neue Funktionen zusammensetzen. Sind f und g Funktionen, so verstehen wir unter der Summe der Funktionen f und g jene Funktion s , bei der

$$s(x) = f(x) + g(x)$$

für jedes x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich von f und g gilt.

Ist zum Beispiel $f(x) = x^2$ und $g(x) = |x|$, so ist die Summe von f und g die Funktion s mit $s(x) = x^2 + |x|$. In diesem Falle ist sowohl f als auch g gerade. Für die Summe s gilt $s(-x) = f(-x) + g(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x) + g(x) = s(x)$ für alle x , also ist s ebenfalls eine gerade Funktion.

Diese Aussage können wir verallgemeinern: Sind f und g gerade Funktionen, so ist auch ihre Summe s eine gerade Funktion.

Beweis: Für alle x aus dem Definitionsbereich von s gilt

$$s(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = s(x).$$

▲ 8 ▲ Beweise!

Sind f und g ungerade Funktionen, so ist auch ihre Summe eine ungerade Funktion.

Analog zur Summe definiert man die Differenz d , das Produkt p und den Quotienten q von Funktionen f und g . Es ist

$$d(x) = f(x) - g(x)$$

$$p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ wobei natürlich}$$

$g(x) \neq 0$ gefordert werden muß).

▲ 9 ▲ Untersuche, wie sich die Eigenschaften „gerade“ bzw. „ungerade“ von f und g auf die Funktionen d , p und q vererben! Trage deine Ergebnisse in die Tabelle ein!

f	g	d	p	q
gerade	gerade			
gerade	ungerade			
ungerade	gerade			
ungerade	ungerade			

Sind f und g Funktionen, und ist der Wertebereich von f im Definitionsbereich von g enthalten, so nennt man die Funktion v mit $v(x) = g(f(x))$ die Verkettung von f und g . Ist zum Beispiel $f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^2$, so ist die Verkettung von f und g die Funktion v mit $v(x) = g(f(x)) = (x + 1)^2$.

▲ 10 ▲ Untersuche, wie sich die Eigenschaften „gerade“ bzw. „ungerade“ von f und g auf die Funktion v vererben!

(Für weitere Überlegungen und Aufgaben dieser Art empfehlen wir das Buch „Funktionen und ihre graphische Darstellung“, Math. Schülerbücherei Nr. 58 von I. M. Gelfand, E. G. Glagolega und E. Schnol. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1971)

Lösungen

▲ 1 ▲ a) $f(x) = x^2 + 1$

Für beliebige x gilt $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$,

d. h. f ist eine gerade Funktion.

b) $f(x) = |x|$

Für beliebige x gilt $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, d. h. f ist eine gerade Funktion.

c) $f(x) = x^2 + x$

Wegen $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$ für $x \neq 0$ ist f keine gerade Funktion.

▲ 2 ▲ Es sei $f(x) = mx + n$.

Ist f gerade, so muß $f(-x) = f(x)$ für beliebige x gelten. Aus $f(-x) = f(x)$ folgt $m(-x) + n = mx + n$, also $-mx + n = mx + n$. Gleichwertig damit ist $2mx = 0$ für beliebige x , woraus $m = 0$ folgt.

Damit erhalten wir:

Ist f mit $f(x) = mx + n$ gerade, so gilt $m = 0$. Ist umgekehrt $m = 0$, so gilt $f(-x) = m(-x) + n = n = mx + n = f(x)$, d. h. f ist gerade.

Ergebnis: Die Funktion f mit $f(x) = mx + n$ ist genau dann gerade, wenn $m = 0$ ist.

▲ 3 ▲ Es sei $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ist f gerade, so gilt $f(-x) = f(x)$ für alle x , d. h. $a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 + bx + c$ für alle x . Daraus folgt $ax^2 - bx + c = ax^2 + bx + c$, also $2bx = 0$ für alle x . Folglich ist $b = 0$.

Ist andererseits $b = 0$, so gilt $f(x) = ax^2 + c$ und folglich $f(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = f(x)$ für beliebige x , d. h. f ist gerade.

Ergebnis: Die Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist genau dann eine gerade Funktion, wenn $b = 0$ gilt.

▲ 4 ▲ a) $f(x) = x^3 - 3x$

Für beliebige x gilt

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x),$$

d. h. f ist eine ungerade Funktion.

b) $f(x) = x^2 + x$

Wegen $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq -(x^2 + x)$ für $x \neq 0$ ist f keine ungerade Funktion.

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

Für alle x mit $x \neq 0$ gilt

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x),$$

d. h. f ist eine ungerade Funktion.

▲ 5 ▲ Es sei $f(x) = mx + n$.

Ist f ungerade, so gilt $f(-x) = -f(x)$ für beliebige x . Für die vorliegende Funktion bedeutet das: $m(-x) + n = -(mx + n)$ bzw. $-mx + n = -mx - n$ für alle x . Wir erhalten daraus $2n = 0$ und folglich $n = 0$.

Ist andererseits $n = 0$, so gilt $f(x) = mx$ und deshalb $f(-x) = m(-x) = -mx = -f(x)$ für beliebige x , d. h. f ist ungerade.

Ergebnis: Die Funktion f mit $f(x) = mx + n$ ist genau dann ungerade, wenn $n = 0$ gilt.

▲ 6 ▲ Es sei $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Ist f ungerade, so gilt wegen

$$f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x$$

$$a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + d = -(ax^3 + bx^2 + cx + d) \text{ bzw.}$$

$$-ax^3 + bx^2 - cx + d = -ax^3 - bx^2 - cx - d,$$

woraus $2bx^2 + 2d = 0$ für alle x folgt. Die letzte Gleichung ist nur dann für beliebige x erfüllt, wenn $b = 0$ und $d = 0$ gilt.

Ist umgekehrt $b = d = 0$, so gilt

$$f(x) = ax^3 + cx \text{ und deshalb}$$

$$f(-x) = a(-x)^3 + c(-x) = -ax^3 - cx$$

$$= -(ax^3 + cx) = -f(x)$$

für beliebige x , d. h. f ist ungerade.

Ergebnis: Die Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist genau dann ungerade, wenn $b = 0$ und $d = 0$ gilt.

▲ 7 ▲ a) Es sei f eine an der Stelle 0 definierte ungerade Funktion. Da dann $f(-x) = -f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f gilt, ist insbesondere $f(-0) = -f(0)$. Wegen $-0 = 0$ gilt $f(-0) = f(0)$ und folglich $f(0) = -f(0)$. Wir erhalten daraus $2f(0) = 0$, also $f(0) = 0$.

b) Nur die „Nullfunktion“ $f(x) = 0$ für alle x ist sowohl gerade als auch ungerade. Weder gerade noch ungerade ist z. B. die Funktion $y = x + 3$.

▲ 8 ▲ f und g seien ungerade Funktionen. Für die Summe s gilt dann

$$s(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x)$$

$$= -(f(x) + g(x)) = -s(x)$$

für alle x , also ist s ebenfalls ungerade.

▲ 9 ▲ Wir erhalten folgende Ergebnisse (G – gerade, U – ungerade):

f	g	d	f	g	p	f	g	q
G	G	G	G	G	G	G	G	G
G	U	/	G	U	U	G	U	U
U	G	/	U	G	U	U	G	U
U	U	U	U	U	G	U	U	G

Die Begründungen erfolgen wie bei Aufgabe 8.

▲ 10 ▲ Es sei v die Funktion mit $v(x) = g(f(x))$ für alle x aus dem Definitionsbereich von v . Dann gilt:

$$f \quad g \quad v$$

$$G \quad G \quad G,$$

$$\text{denn } v(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = v(x).$$

$$G \quad U \quad G,$$

$$\text{denn } v(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = v(x).$$

$$U \quad G \quad G,$$

$$\text{denn } v(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = v(x).$$

$$= g(-f(x)) = g(f(x)) = v(x).$$

$$U \quad U \quad U,$$

$$\text{denn } v(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = v(x).$$

$$= g(-f(x)) = g(f(x)) = -v(x).$$

Beachte! Es gilt sogar allgemeiner: Ist f eine gerade Funktion und g eine beliebige Funktion, so ist v stets eine gerade Funktion.

W. Stoye



Gute Grundkenntnisse gesucht

▲ 1 ▲ Kettenaufgabe

a) $75 : 25 \cdot 12 : 9 \cdot 5 : 10 \cdot 6 : 4 \cdot 5 = x$

b) $(12 + 13) \cdot 3 + 25 - 98 + 12 - 14 = x$

▲ 2 ▲ Welchen Winkel bilden die Zeiger einer Uhr? Gib in allen Aufgaben jeweils den kleineren der beiden möglichen Winkel an!

24.00 Uhr, 3.30 Uhr, 6.00 Uhr, 23.30 Uhr, 3.00 Uhr, 7.20 Uhr, 10.00 Uhr, 8.40 Uhr.

▲ 3 ▲ Löse die Gleichungen!

a) $2b + 5 = 55$; $2(b + 5) = 50$

$2b - 5 = 55$; $2(b - 5) = 50$

b) $(42 - 2) : 4 = x$; $(28 - 6) : 2 = z$

$15 : 0 - 10 = y$; $18 : 1 + 3 = v$

▲ 4 ▲ Bestimme x !

a) $3x < 10$; $x \in \mathbb{N}$ $2 < x < 6$; $x \in \mathbb{N}$

b) $x^2 = 25$ $x \in \mathbb{N}$

▲ 5 ▲ $a = 5$; $b = 3$ Berechne: $2a + b^2$!

$a = 12$ Berechne: $(a + 2)^2$!

▲ 6 ▲ Berechne u und A (in mm bzw. mm²)!

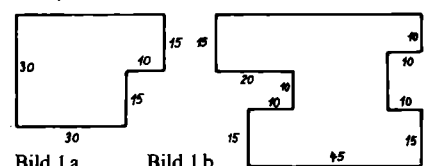


Bild 1 a

Bild 1 b

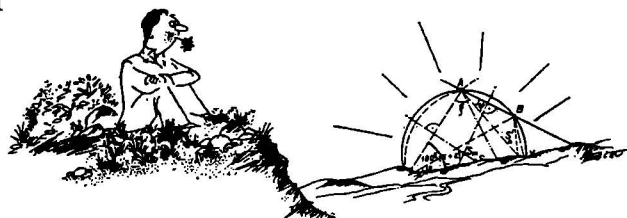
▲ 7 ▲ Bestimme den g.g.T. und das k.g.V.!

g.g.T.		k.g.V.
	10	12
	16	20
	25	30
	6	48
	15	30
	8	16

▲ 8 ▲ Klaus, Uwe, Michael, Hartmut und Lutz wollen wissen, wer von ihnen der Größte und wer der Kleinste ist. Michael ist nicht der Größte, doch er ist größer als Hartmut, Uwe und Klaus. Uwe stellt sich neben Klaus, und so ergibt sich, daß er kleiner ist. Lutz überragt Hartmut um einen ganzen Kopf, jedoch Klaus um etwa 5 cm mehr. Wie ist nun die Reihenfolge der Größe nach?

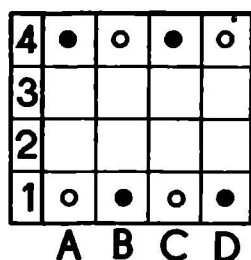
Fortsetzung auf Seite 119

In freien Stunden • alpha-heiter



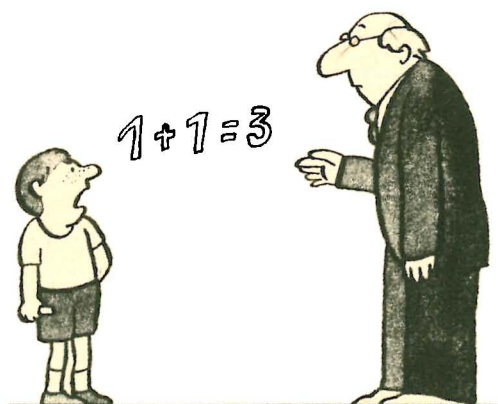
Remis

Für dieses Spiel zu zweit benötigt ihr vier weiße und vier schwarze Steine sowie 16 Spielfelder, die ihr auf Pappe aufzeichnet. Auf unserem Bild seht ihr die Ausgangsstellung der Steine. Beide Spieler ziehen abwechselnd einen Stein ihrer Farbe auf ein unbesetztes Nachbarfeld, und zwar senkrecht oder waagerecht, nach oben oder nach unten, aber nicht diagonal.



Wer beginnt, wird durch Los entschieden. Jeder Spieler muß versuchen, drei Steine seiner Farbe nebeneinander oder diagonal in eine Reihe zu bekommen. Die Züge sind möglichst schnell auszuführen. Sicherlich wird einer der Spieler gewinnen, obwohl mit Hilfe eines Computers ermittelt worden ist, daß es bei fehlerfreiem Spiel keinen Gewinner geben kann und das Unentschieden (Remis) unvermeidlich ist.

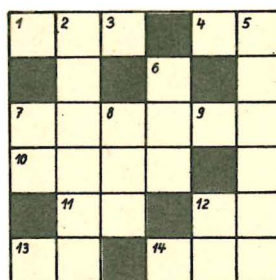
Aus: NBI, Berlin



„Es ist nicht einfach für mich, in meinem Alter noch einmal umdenken zu müssen!“

Kreuzzahlrätsel

Regeln: Es sind analog zu Kreuzworträtsel Zahlen einzutragen, so daß in jedem Feld eine Ziffer steht. Ganze Zahlen beginnen stets mit einer Ziffer ungleich Null. Bei Dezimalbrüchen wird das Komma vernachlässigt und je nach Platz die ersten Ziffern, beginnend mit der ersten von Null verschiedenen Ziffer, eingetragen. (Es wird also nicht gerundet.)



Waagerecht: 1. Summe der ersten natürlichen Zahlen bis zu 13. waagerecht; 4. Quadratzahl; 7. Quadratwurzel aus 9. senkrecht; 10. Quadratwurzel aus 11. waagerecht; 11. Dreifaches von 12. waagerecht; 12. Primzahl; 13. Primzahl; 14. Summe einer natürlichen Zahl mit ihrem Quadrat.

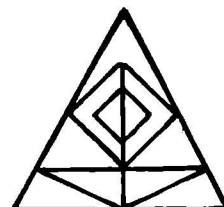
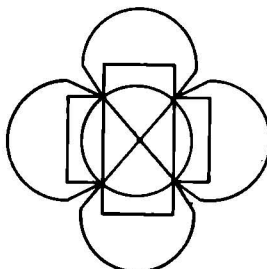
Senkrecht: 2. Kreiszahl; 3. Primzahl; 5. Potenz von 9. senkrecht; 6. Quadrat von 13. waagerecht; 7. dritte Wurzel von 3. senkrecht; 8. Summe aller Ziffern dieses Rätsels plus 11. waagerecht; 9. natürliche Zahl; 12. Summe zweier Quadrate.

Dr. A. Felgenhauer, TH Magdeburg

In einem Zug

Jede der beiden Figuren läßt sich in einem Zug nachzeichnen, ohne daß Linien doppelt gezogen werden oder sich kreuzen.

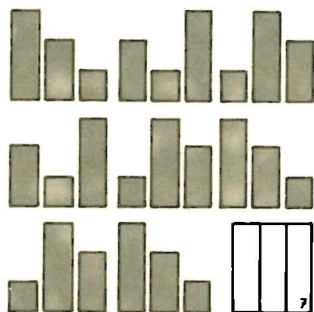
Aus: Troll



Logische Übung

Bei dieser Übung sind in den beiden oberen Reihen die Figuren in einer gewissen logischen Folge. Es ist die rechte Figur der dritten Reihe sinnvoll zu ergänzen.

Aus: Füles, Budapest



Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} \text{HÜLLE} \\ + \text{MINE} \\ \hline \text{STIFT} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A + B = C \quad C \\ + \quad - \quad - \\ C + A = B \\ B - C = A \end{array}$$

Schülerin Ulrike Raddak, Berlin
Schüler Rainer Schültke, Dresden (Kl. 5)

Diophant (um 250 u. Z.)

Die Buchstaben in dem Namen des griechischen Mathematikers sind so durch die Ziffern 1 bis 8 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{ll} DD \cdot DDD = DIID & DH \cdot DDD = DAAH \\ DI \cdot DDD = DOOI & DA \cdot DDD = DNNA \\ DO \cdot DDD = DPPO & DN \cdot DDD = DTTN \\ DP \cdot DDD = DHHP & DT \cdot DDD = D99T \end{array}$$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Heiteres aus der Praxis

- „Was geschah 1759?“ – „Da wurde Schiller geboren!“ – „Gut! Und 1762?“ – „Da wurde Schiller drei Jahre alt!“
- „Herr Ober, bringen Sie mir bitte ein Eisbein!“ – „Wünschen Sie eins zu drei oder zu fünf Mark?“ – „Was ist denn da für ein Unterschied?“ – „Zwei Mark, mein Herr...“
- Ein Gabrovoer kam in ein Hotel. „Wieviel kostet ein Zimmer?“ fragte er. „Im ersten Stock 10 Lewa, im zweiten 8, im dritten 6 und im vierten 4 Lewa.“ Der Gabrovoer überlegte lange und wollte wieder gehen. „Sind Ihnen die Preise zu hoch?“ – „Nein, das Hotel ist zu niedrig.“
- Hör mal“, sagte ein Junge zu seinem Schwesterchen, „die Hälfte von deiner Apfelsine mußt du mir abgeben!“ – „Warum?“ – „Wenn ich dich nicht am Zopf gezogen hätte, dann hättest du nicht geweint, und Mutti hätte dir keine Apfelsine gegeben.“

Verkettungsrätsel

In jeder Zeile des abgebildeten Schemas sind jeweils zwei Wörter der folgenden Bedeutung so einzutragen, daß immer der letzte Buchstabe des ersten Wortes mit dem ersten Buchstaben des zweiten Wortes übereinstimmt. Bei richtiger Lösung ergeben die sechs markierten Buchstaben von oben nach unten gelesen ein Flächenmaß.

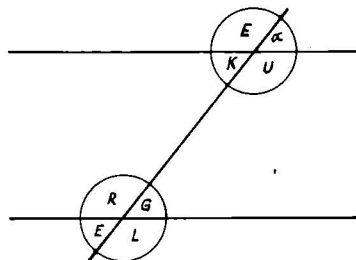
1																			
2																			
3																			
4																			
5																			
6																			

1. Zeile: Name der Funktion dritten Grades – bekannter Mathematiker (1862 bis 1943);
2. Z.: Kegelschnitt – Teil von Größenangaben;
3. Z.: eine Fläche – eine Seite im rechtwinkligen Dreieck;
4. Z.: Ergebnis einer Multiplikation – eine Winkel-funktion;
5. Z.: Teilgebiet der Mathematik – x-Achse;
6. Z.: Uranbatterie – ein Parallelogramm, dessen Seiten alle gleich lang sind.

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

Auf der Suche nach Winkeln

Suche entsprechend der Abbildung zu *alpha*



1. den Scheitelwinkel; 2. einen Nebenwinkel; 3. den Stufenwinkel; 4. den Wechselwinkel; 5. den entgegengesetzt liegenden Winkel!

Schreibe die Buchstaben, mit denen diese Winkel bezeichnet sind, in dieser Reihenfolge auf! Du erhältst den Namen eines geometrischen Körpers.

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, Berlin

Mütter und Töchter

Zwei Mütter und zwei ihrer (erwachsenen) Töchter bestellen jede in einer Gaststätte ein Kännchen Kaffee und ein Stück Kuchen. Die Bedienung brachte drei Kännchen und drei Stück Kuchen, und alle waren zufrieden. Wieso genügten drei Portionen?

Dr. G. Hesse, Radebeul

XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)



Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. Es seien a, b, c und d beliebig gegebene reelle Zahlen. f und g seien die für alle reellen x durch

$$f(x) = c \cdot 10^{ax}, g(x) = 10^{bx+d}$$

definierten Funktionen. Ermitteln Sie (jeweils zu gegebenen a, b, c, d) alle diejenigen Punkte, die der Graph von f mit dem Graph von g gemeinsam hat!

2. Beweisen Sie, daß die folgende Gleichheit gilt!

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{465} - \frac{1}{466} = \frac{1}{234} + \frac{1}{235} + \frac{1}{236} + \dots + \frac{1}{465} + \frac{1}{466}.$$

3. A. Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen x, y die Ungleichung

$$\sqrt{4 \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4 \sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2 \text{ gilt!}$$

3. B. Beweisen Sie, daß es unendlich viele natürliche Zahlen z gibt, für die sich die Gleichung

$$a^{2m} + b^{2n} + c^{2k} = z$$

nicht durch natürliche Zahlen a, b, c, m, n, k erfüllen läßt!

4. Gegeben seien zwei Längen a, b und ein Flächeninhalt $F \leq \frac{1}{2}ab$. Berechnen Sie aus diesen gegebenen Werten a, b, F alle diejenigen Längen r , die die Eigenschaft haben, daß ein Dreieck ABC mit $BC=a, AC=b$, dem Flächeninhalt F und dem Umkreisradius r existiert!

5. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x , für die $\sqrt{x^2+5x+28}$ (als reelle Zahl) definiert ist und die die Gleichung

$$x^2+5x+4=5\sqrt{x^2+5x+28}$$

erfüllen!

6. Vier Kugeln mit gegebenem Radius r seien so im Raum angeordnet, daß jede von ihnen jede der anderen drei von außen berührt. Die vier Tangentialebenen, die jeweils drei dieser Kugeln berühren und die vierte nicht schneiden, erzeugen dann ein reguläres Tetraeder. Berechnen Sie das Volumen dieses Tetraeders in Abhängigkeit von r !

Olympiadeklassen 11/12

1. Man ermittle alle Paare $(f(x), g(x))$ von Polynomen 3. Grades

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$$g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0,$$

deren Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ reelle Zahlen sind und für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jeder der Werte, die $f(x)$ und $g(x)$ für $x=1, 2, 3$ und 4 annehmen, ist eine der Zahlen 0 und 1 .

(2) Wenn $f(1)=0$ oder $f(2)=1$ ist, so ist $g(3)=0$ und $g(4)=1$.

(3) Wenn $f(1)=1$ oder $f(4)=1$ ist, so ist $g(1)=1$ und $g(3)=1$.

(4) Wenn $f(2)=0$ oder $f(4)=0$ ist, so ist $g(2)=0$ und $g(4)=0$.

(5) Wenn $f(3)=1$ oder $f(4)=1$ ist, so ist $g(1)=0$.

2. Es sei M die Menge aller derjenigen Quadratflächen Q , die in einer gegebenen Ebene ε liegen, einen gegebenen Punkt Z der Ebene ε als Mittelpunkt haben und eine gegebene Streckenlänge a als Seitenlänge haben. Für beliebige Quadratflächen Q, Q' aus dieser Menge M bezeichne $u(Q \cap Q')$ den Umfang derjenigen Polygonfläche, die sich als Durchschnitt der Quadratflächen Q und Q' ergibt. Man untersuche, ob es in M Quadratflächen Q, Q' mit kleinstmöglichem $u(Q \cap Q')$ gibt. Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von a) diesen kleinstmöglichen Wert von $u(Q \cap Q')$.

3. Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die

$$2x + x^2y = y,$$

$$2y + y^2z = z,$$

$$2z + z^2x = x \text{ gilt.}$$

Dabei sind x, y und z durch Ausdrücke anzugeben, die aus gegebenen reellen Zahlen durch wiederholte Anwendung von Operationen $+, -, \cdot, :$, von reellwertigen Potenz-, Exponentialfunktionen, trigonometrischen Funktionen oder von deren reellwertigen Umkehrfunktionen gebildet sind.

4. Man beweise, daß es keine natürlichen Zahlen n, m, b mit $n \geq 1, m \geq 2$ und $(2n)^{2n} - 1 = b^m$ gibt.

5. Man beweise:

Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ und jede ganze Zahl $k \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n^k-1} + \frac{1}{n^k} > k \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right).$$

6. A. Eine Folge (x_k) reeller Zahlen heiße genau dann C -konvergent gegen eine reelle Zahl z , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) = z \text{ gilt.}$$

Eine Funktion f heiße genau dann C -stetig an einer Stelle a ihres Definitionsbereiches, wenn für jede Folge (x_k) , die C -konvergent gegen a ist und deren sämtliche Glieder x_k im Definitionsbereich von f liegen, die Folge $(f(x_k))$ stets C -konvergent gegen $f(a)$ ist.

Man zeige:

a) Sind A, B und a beliebige reelle Zahlen, so gilt: Die durch $f(x) = Ax + B$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f ist C -stetig an der Stelle a .

b) Wenn eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f an der Stelle $a=0$ den Funktionswert $f(0)=0$ hat und an dieser Stelle C -stetig ist, so gilt für beliebige reelle p, q die Gleichung $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

6. B. In einer Dunkelkammer liegen ungeordnet 20 einzelne Handschuhe von gleicher Größe, und zwar

5 weiße Handschuhe für die rechte Hand,

5 weiße Handschuhe für die linke Hand,

5 schwarze Handschuhe für die rechte Hand,

5 schwarze Handschuhe für die linke Hand.

Zwei Handschuhe gelten genau dann als ein „passendes Paar“, wenn sie gleiche Farbe haben und der eine von ihnen für die rechte Hand, der andere für die linke Hand ist. Unter einem „Zug“ sei die Entnahme eines einzelnen Handschuhs verstanden, ohne daß dabei eine Auswahl nach Farbe oder Form möglich ist. Ein „Spiel von n Zügen“ bestehe darin, daß man nacheinander n Züge ausführt, die dabei entnommenen Handschuhe sammelt und erst nach diesen n Zügen feststellt, ob sich unter den n entnommenen Handschuhen (mindestens) ein passendes Paar befindet. Genau dann, wenn dies zutrifft, gelte das Spiel als „erfolgreich“.

a) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, daß ein Spiel von n Zügen mit Sicherheit erfolgreich ist!

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl k mit der Eigenschaft, daß ein Spiel von k Zügen mit größerer Wahrscheinlichkeit als 0,99 erfolgreich ist!

Lösungen

Olympiadeklasse 10

1. (Bearbeitung des Vorschlages der Aufgabenkommission)

Gegeben sind die reellen Zahlen a, b, c, d . Die Graphen von f und g haben genau dann den Punkt mit dem Koordinatenpaar (x_0, y_0) gemeinsam, wenn

$$y_0 = c \cdot 10^{ax_0} = 10^{bx_0+d} \quad (1)$$

gilt.

I. (Analyse) Angenommen, es gäbe ein Paar (x_0, y_0) , das (1) erfüllt.

Im Fall $c \leq 0$ ist dies wegen $10^{ax_0} > 0$ und $10^{bx_0+d} > 0$ unmöglich, und somit die Annahme falsch.

Im Fall $c > 0$ existiert $\lg c$, und aus (1) ergibt sich $10^{ax_0+lgc} = 10^{bx_0+d}$.

Hieraus folgt (wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion)

$$ax_0 + \lg c = bx_0 + d. \quad (3)$$

Im Unterfall $a \neq b$ folgt weiter

$$x_0 = \frac{d - \lg c}{a - b}, \quad (4)$$

so daß höchstens das Paar $(x_0, c \cdot 10^{ax_0})$ mit x_0 aus (4) die Gleichungen (1) erfüllen kann.

Ist aber $a = b$ und auch noch $\lg c \neq d$, so stellt (3) einen Widerspruch dar, d. h., die eingangs gemachte Annahme ist falsch.

II. (Synthese, „Probe“) Im Fall $c > 0, a = b, \lg c = d$ ist die Gleichung (2) für beliebiges x_0 erfüllt, so daß die Paare $(x_0, y_0), x_0$ beliebig reell und $y_0 = c \cdot 10^{ax_0}$, die Gleichungen (1) erfüllen.

Im Fall $c > 0, a \neq b$ stellen die Übergänge von der rechten Gleichung (1) über (2), (3) nach (4) äquivalente Umformungen dar, so daß das Paar $(x_0, y_0), x_0$ aus (4) und $y_0 = c \cdot 10^{ax_0}$, die Gleichungen (1) erfüllt.

III. Ergebnis: Im Fall $c \leq 0$ und im Fall $c > 0, a = b, \lg c \neq d$ haben die Graphen von f und g keinen gemeinsamen Punkt.

Im Fall $c > 0, a = b, \lg c = d$ haben die Graphen von f und g die Punkte mit den Koordinatenpaaren $(x, c \cdot 10^{ax}), x$ beliebig reell, gemeinsam (die Graphen fallen zusammen).

Im Fall $c > 0, a \neq b$ haben die Graphen von f und g genau den Punkt mit dem Koordinatenpaar $(x_0, c \cdot 10^{ax_0}), x_0$ aus (4), gemeinsam.

Bemerkungen: Mit dieser Aufgabe wurden die Schüler doch nicht so gut fertig, wie man erwarten konnte. Es mußte zwar damit gerechnet werden, daß gelegentlich die Synthese (Probe) ganz fehlte, aber darüber hinaus wurde deutlich – auch in Analogie zu anderen Aufgaben – daß vielfach wohl Unklarheit über den Stellenwert einer solchen „Probe“ besteht, sie lediglich als Rechenprobe verstanden wird. Eine Reihe von Punktabzügen mußte erfolgen, weil $\lg c$ ohne Rücksicht auf $c > 0$ gebildet oder, falls man (1) bei $c > 0$ umformt zu $10^{(a-b)x_0} = \frac{10^d}{c}$, aus dieser Gleichung

$$x_0 = \log_{10} \frac{10^d}{c} = \left(\frac{10^d}{c} \right) \text{ gefolgert wurde, ohne die}$$

Bedingung $a \neq b$ zu stellen, um die Basis 1 für den Logarithmus auszuschließen. Hierdurch entstanden unvollständige Fallunterscheidungen, oder es wurden Umformungen als äquivalent bezeichnet, die keine solchen waren. Leider trat auch häufiger der Fall auf, daß etwa durch c dividiert wurde, ohne $c \neq 0$ vorauszusetzen.

Bei der Korrektur wurde von vornherein ein strenger Maßstab angelegt, auch z. B. auf eine übersichtliche Angabe des Ergebnisses, eine Angabe der Lösungen als Koordinatenpaare geachtet. So ergab sich – wie gesagt etwas überraschend – eine nahezu gleichverteilte Punkteskala:

Punkte	–	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	2	11	14	15	16	16	33	10

Dr. K.-D. Drews, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

2. Wir formen die Gleichung in der Aufgabenstellung äquivalent um wie folgt:

$$1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{233} = \frac{2}{234} + \frac{2}{236} + \dots + \frac{2}{466}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{233} = \frac{1}{117} + \frac{1}{118} + \dots + \frac{1}{233}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{166} = \frac{2}{118} + \frac{2}{120} + \dots + \frac{2}{232}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{166} = \frac{1}{59} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{116}$$

Entsprechend ergeben sich folgende weitere Zwischenergebnisse

$$1 - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{58} = \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{58}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{29} = \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{29}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{14} = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{14}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{7}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Die letzte Gleichung ist offensichtlich wahr. Da die Umformungen äquivalent sind, ist damit die behauptete Gleichung bewiesen.

Bemerkungen: Der größte Teil der Schüler folgte im wesentlichen dem obigen Lösungsweg. Er bietet sich durch die Form der Gleichung direkt an. Durch ein und denselben Algorithmus kann die Ausgangsgleichung schrittweise in der Anzahl der Summanden reduziert werden. Die Aufgabe war deshalb für die Teilnehmer sehr leicht. Nur wenige vergaßen, bei dem obigen Lösungsweg auf die notwendige Äquivalenz der Umformungen hinzuweisen. – Mit dem gleichen Reduktionsverfahren kann man von der Differenz

$$D = \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{465} - \frac{1}{466} \right) - \left(\frac{1}{234} + \frac{1}{235} + \dots + \frac{1}{465} + \frac{1}{466} \right)$$

ausgehen und erhält $D = 0$. Hier entfällt der Nachweis, daß die Umformungsschritte auch in umgekehrter Folge einander zu Folge haben. Es war zu erwarten, daß einige Teil-

nehmer eine allgemeine Gesetzmäßigkeit hinter der speziellen Gleichung erkennen.

In der Tat gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$:

$$1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\text{oder kurz, } \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}.$$

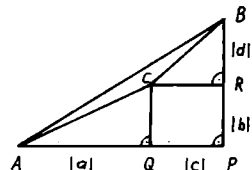
Diese Aussage wird mit der Methode der vollständigen Induktion bewiesen. (Dieses mathematische Beweisverfahren ist erst in der 11. Klasse Unterrichtsgegenstand; man kann es sich aber relativ leicht im Selbststudium anhand des Büchleins J. S. Sominski: „Die Methode der vollständigen Induktion“, Verlag der Wissenschaften (Math. Schülerbücherei Band 8) aneignen.) Da mehr als 10 Schüler derartigen Lösungsgedanken nachgingen, muß hier auf eine namentliche Nennung verzichtet werden.

(In einem speziellen Heft der *alpha* zur XX. OJM (1/81) ist vorgesehen, verschiedene Lösungen zu dieser Aufgabe näher vorzustellen.)

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	4	2	3	–	2	1	9	96

Dr. E. Quaisser, Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam

3. A. Für reelle Zahlen a, b, c, d kann man als Hilfsfigur ein rechtwinkliges Dreieck APB mit Katheten der Längen $\overline{AP} = |a| + |c|$ und $\overline{BP} = |b| + |d|$ betrachten. Q und R seien die Punkte auf den Katheten mit $\overline{AQ} = |a|$ und $\overline{BR} = |d|$. Der Punkt C ergänze das Dreieck QPR zu einem Rechteck (siehe Skizze).



Im Dreieck ABC gilt dann $\overline{AC} + \overline{BC} \geq \overline{AB}$. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich daraus

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(|a| + |c|)^2 + (|b| + |d|)^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}. \quad (1)$$

Wählt man entsprechend der Aufgabe

$$a = 2 \cos x \cos y, \quad c = 2 \sin x \sin y,$$

$$b = d = \sin(x - y),$$

so gilt nach einem Additionstheorem

$$a + c = 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y)$$

$$= 2 \cos(x - y)$$

und nach dem trigonometrischen Pythagoras

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 = 4(\cos^2(x - y) + \sin^2(x - y)) = 4.$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man die Behauptung.

Bemerkungen: Für die erste Wahlaufgabe entschieden sich 47 Schüler. Neben Lösungen, die Ungleichungen für reelle Zahlen verwenden (z. B. (1)), läßt sich die Ungleichung auch

durch gezieltes Umformen unter Verwendung geeigneter Additionstheoreme nachweisen. Diesen Weg versuchten fast alle Schüler. Es gelang jedoch nur sieben Schülern, das Problem zu vereinfachen, zum Ziel kamen nur zwei. Ein Schüler versuchte eine Lösung mit Hilfe der komplexen Zahlen, die der oben angegebenen geometrischen Interpretation entspricht.

Punkte	-	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	1	36	2	-	4	2	-	-	2

Dr. A. Felgenhauer, Technische Hochschule
Otto v. Guericke, Magdeburg

3. B. Da z die Summe dreier Quadratzahlen, nämlich $(a^m)^2 + (b^n)^2 + (c^k)^2$, sein soll, bietet es sich an, Teilbarkeitsbetrachtungen für solche Zahlen anzustellen. Dabei gelangt man – eventuell nach einigen nicht zum Ziel führenden Versuchen – zur Untersuchung der Restklassen von Quadratzahlen bezüglich 8 und erhält:

Falls $x \equiv 0 \pmod{8}$
oder $x \equiv 4 \pmod{8}$, so $x^2 \equiv 0 \pmod{8}$
falls $x \equiv 1 \pmod{8}$
oder $x \equiv 3 \pmod{8}$
oder $x \equiv 5 \pmod{8}$
oder $x \equiv 7 \pmod{8}$, so $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$
falls $x \equiv 2 \pmod{8}$
oder $x \equiv 6 \pmod{8}$, so $x^2 \equiv 4 \pmod{8}$.

Also können die drei Summanden jeweils nur einen der Reste 0, 1 oder 4 lassen, wenn sie durch 8 dividiert werden. Dann ist aber sofort zu sehen bzw. kann systematisch durchprobiert werden:

$0+0+0=0$
 $0+0+1=1$
 $0+1+1=2$
 $1+1+1=3$
 $0+0+4=4$
 $0+1+4=5$
 $1+1+4=6$, daß die Summe
 $(a^m)^2 + (b^n)^2 + (c^k)^2$

in keinem Fall bei Division durch 8 den Rest 7 lassen kann. Hiermit haben wir bereits unendlich viele Zahlen z , nämlich all jene, für die eine natürliche Zahl z' existiert, so daß

$$z = 8z' + 7 \text{ ist, gefunden.}$$

Einem Schüler, Alexander Schmidt, der als Frühstarter aus Klasse 8 teilnahm, gelang eine prinzipiell andere Lösung, die wir hier noch anführen möchten:

Angenommen, es existiert eine natürliche Zahl z_0 und zu diesem z_0 existieren keine natürlichen Zahlen, so daß sich z_0 darstellen ließe als

$$z_0 = a^{2m} + b^{2n} + c^{2k}. \quad (*)$$

Dann wird behauptet, daß auch für die Zahl $4z_0$ keine natürlichen Zahlen existieren, so daß sich $4z_0$ in der Form $(*)$ darstellen läßt. Der Beweis dieser Behauptung wird indirekt geführt. Angenommen $4z_0$ ließe sich in der Form $(*)$ darstellen, es existierten also natürliche Zahlen $a_0, b_0, c_0, m_0, n_0, k_0$, so daß

$$4z_0 = a_0^{2m_0} + b_0^{2n_0} + c_0^{2k_0} \text{ ist.} \quad (**)$$

Nun gilt: Ist x eine natürliche Zahl, so ist falls $x \equiv 0 \pmod{4}$ oder $x \equiv 2 \pmod{4}$,
 $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ und
falls $x \equiv 1 \pmod{4}$ oder $x \equiv -1 \pmod{4}$,
 $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

Damit die Summe $(**)$ durch 4 teilbar ist, muß also jede der Zahlen $a_0^{m_0}, b_0^{n_0}, c_0^{k_0}$ durch 2 teilbar sein. Es sei $a_0^{m_0} = 2d, b_0^{n_0} = 2e$ und $c_0^{k_0} = 2f$, dann folgt für die Summe der Quadrate $(**)$:

$$4z_0 = (2d)^2 + (2e)^2 + (2f)^2 \\ = 4(d^2 + e^2 + f^2) \text{ bzw. } z_0 = d^2 + e^2 + f^2$$

im Widerspruch zur Annahme, daß für z_0 keine Darstellung existiert. Da mit $z_0 = 7$ eine Zahl existiert, die nicht in der Form $(*)$ darstellbar ist, gilt auf Grund der eben bewiesenen Behauptung, daß alle Zahlen der Form

$$z = 7 \cdot 4^t \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

nicht in der Form $(*)$ darstellbar sind.

Bemerkungen: Die Aufgabe war für Schüler, die im Rechnen mit Restklassen ungeübt sind, sicher viel schwieriger zu bewältigen als für jene, die den Umgang mit Restklassen schon im Zirkel oder im Selbststudium erlernt hatten. So erklärt sich auch, daß etwa 10 Schüler überhaupt keinen Ansatz zur Lösung fanden. Gehäuft traten Versuche auf zu beweisen, daß, falls ein gewisses z eine Darstellung besitzt, die Zahl $z+1$ oder $z-1$ oder eine sich ähnlich direkt aus z ergebende Zahl keine Darstellung besitzt, wobei von einer gegebenen Darstellung von z durch gewisse $a(z), b(z), c(z), m(z), n(z), k(z)$ ausgegangen und übersehen wurde, daß etwa $z+1$ sich mit gänzlich anderen natürlichen Zahlen darstellen lassen kann, die in keiner Weise von $a(z), \dots, k(z)$ abhängen müssen.

Unter Nutzung der ersten Beweisidee wurde von einer größeren Anzahl von Schülern die Teilbarkeit bzgl. 16 statt der Teilbarkeit bzgl. 8 betrachtet, was mit einem gewissen Mehraufwand selbstverständlich zum selben Ziel wie bei der 8 führte.

Dr. Monika Noack, Sektion Mathematik
der Humboldt-Universität zu Berlin

4. Die Lösung zerfällt in zwei Teile. Erstens ist r durch a, b und F auszudrücken, und zweitens ist die Existenz eines Dreiecks mit a, b, r und F nachzuweisen.

I. Angenommen, es existiert ein Dreieck ABC mit $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}$, dem Flächeninhalt F und dem Umkreisradius r . Nun gilt mit $c = \overline{AB}$ und $\gamma = \angle ACB$: $\sin \gamma = \frac{c}{2r}$ (Bezirksolympiade

Aufgabe 191034), $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$, (1) $\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}$ und nach dem Kosinussatz $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$.
Damit ergibt sich (3)
 $r = c(2 \sin \gamma)^{-1} = abc(4F)^{-1} = ab(4F)^{-1} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$
 $= ab(4F)^{-1} \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{a^2 b^2 - 4F^2}}$.

II. Wegen $0 < F \leq \frac{1}{2} ab$ ist $a^2 b^2 > a^2 b^2 - 4F^2 \geq 0$

und

$$a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{a^2 b^2 - 4F^2} \geq a^2 + b^2$$

$$-2\sqrt{a^2 b^2 - 4F^2} > a^2 + b^2 - 2ab \geq 0,$$

d. h., jeder der in (3) angegebenen r -Werte existiert. Da $0 \leq (ab)^{-1} \sqrt{a^2 b^2 - 4F^2} < 1$ gilt, existiert ein γ mit $0 < \gamma < \pi$ und

$$(4) \quad \cos \gamma = \pm (ab)^{-1} \sqrt{a^2 b^2 - 4F^2},$$

wobei das obere bzw. untere Vorzeichen entsprechend (3) gewählt wird. Hierzu gibt es ein Dreieck ABC , in dem (2) mit $c = \overline{AB}$ gilt. Wegen $\sin \gamma > 0$ und (4) folgt
 $\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sqrt{1 - (ab)^{-2} (a^2 b^2 - 4F^2)}$
 $= 2F(ab)^{-1}$,

also ist $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ der Flächeninhalt des

Dreiecks ABC . Aus (3), (4) und (2) folgt $r = abc(4F)^{-1}$, d. h., r (mit dem entsprechenden Vorzeichen) ist der Umkreisradius des Dreiecks ABC .

Damit haben genau die durch (3) angegebenen Längen r die geforderte Eigenschaft.

Bemerkungen: Die Aufgabe erscheint angemessen bis schwer. Mehrere Schüler drückten r nicht durch a, b und F aus, sondern hielten ein Ergebnis, in dem a, b und eine Winkel-funktion auftraten, für ausreichend. Nur ein Schüler bemerkte, daß die Existenz des Dreiecks ABC mit den Längen a, b, r und dem Flächeninhalt F nachgewiesen werden mußte. Für diesen Nachweis wurden 2 Punkte erteilt. Ein weiterer typischer Fehler war die fehlende Vorzeichenunterscheidung in (1). Als besonders negativ muß vermerkt werden, daß nur wenige Schüler die Existenz der Wurzeln in (3) absicherten. Dies ist um so bedauerlicher, da die Diskussion praktisch aus dem Ergebnis ablesbar war.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	34	25	22	31	5	0	0

Dr. W. Moldenhauer,
VEB Kombinat Schiffbau Rostock

5. Die Lösung zu Aufgabe 5 erscheint in dem Sonderheft: 20 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, alpha 1/81, d. Red.

6. Die vier Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 der Kugeln sind die Eckpunkte eines regulären Tetraeders mit der Seitenlänge $2r$. Es sei Z der Mittelpunkt dieses regulären Tetraeders, d. h. der Schnittpunkt der Lote, die von jeweils einer Ecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche gefällt werden. Je ein solches Lot hat nach der Formel für die Höhenlänge im regulären Tetraeder die Länge

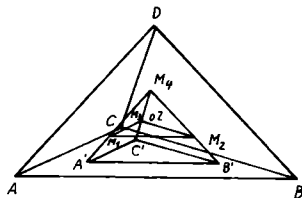
$$h = \frac{2}{3} r \sqrt{6}. \quad (1)$$

Z teilt jedes Lot im Verhältnis 3 : 1. (2)

Den Satz (2) kann man z. B. über Volumenbetrachtungen (bei Zerlegung des Tetraeders in vier kongruente Tetraeder) oder durch Anwendung des Strahlensatzes beweisen. (Man darf (2) auch als bekannt voraussetzen.)

Die vier Seitenflächen des von den vier Tangentialebenen erzeugten Tetraeders $ABCD$ sind jeweils parallel zu den entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders

$M_1M_2M_3M_4$ im Abstand r (siehe Bild). Damit ist $ABCD$ ein reguläres Tetraeder mit dem Mittelpunkt Z . Es kommt nun darauf an, die Höhe h' des Tetraeders $ABCD$ in Abhängigkeit von h zu ermitteln, weil damit dann auch das Volumen V' des Tetraeders $ABCD$ in Abhängigkeit von h und nach (1) in Abhängigkeit von r zu berechnen ist.



Wir geben dafür zwei Möglichkeiten an:

1. $ABCD$ geht durch zentrale Streckung mit dem Streckenzentrum Z aus $M_1M_2M_3M_4$ hervor. Das Streckungsverhältnis K ist wegen (2) (mit (1))

$$K = \left(\frac{1}{6}r\sqrt{6} + r \right) : \frac{1}{6}r\sqrt{6}$$

$$K = 1 + \sqrt{6}. \quad (3)$$

2. Wir verlängern die Kanten M_4M_1 , M_4M_2 , M_4M_3 bis zu den Durchstoßpunkten A' , B' , C' mit der Ebene durch A , B , C (siehe Bild). Das Tetraeder $M_4A'B'C'$ ist wegen der Parallelität der Ebenen durch A , B , C bzw. M_1 , M_2 , M_3 wieder regulär und hat die Höhe $h+r$. Wiederholen wir diesen Prozeß noch dreimal (bzgl. der anderen Flächen), so erhalten wir schließlich das Tetraeder $ABCD$ mit

$$h' = h + 4r. \quad (4)$$

Mit (3) bzw. (4) berechnet man das Volumen

$$V' = \frac{2}{3}r^3\sqrt{2}(1 + \sqrt{6})^3.$$

Bemerkungen: Der Punktspiegel besagt, daß es sich um eine für die Schüler schwierige Aufgabe handelte. Damit zeigt diese Aufgabe einmal mehr, daß es selbst sehr guten Schülern schwerfällt, sich Lagebeziehungen im Raum richtig vorzustellen. Die meisten Schüler scheiterten daran, daß sie falsche Beziehungen zu ebenen Problemen herstellten!

So fand sich bei sehr vielen Schülern die falsche Vorstellung, daß die senkrechte Parallelprojektion der drei Kugeln um M_1 , M_2 bzw. M_3 in die Ebene (durch A , B , C) Kreise ergibt, die die Seiten AB , BC , CA berühren! Zum Teil wurde statt (2) das falsche Verhältnis $2:1$ (aus dem analogen ebenen Sachverhalt) benutzt, es wurde der Schnittwinkel zwischen Ebenen falsch interpretiert und sogar falsche Formeln für das Tetraedervolumen benutzt.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	63	6	9	3	5	2	13	16

Dr. H.-J. Sprengel, Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam

Lösungen



Lösung zu: Sport frei, Heft 4/80, S. 87

Aus $s = 1980$, $n = 9$, $d = 1$ folgt

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d],$$

$$1980 = \frac{9}{2} \cdot (2a_1 + 8 \cdot 1),$$

$$440 = 2a_1 + 8,$$

$$2a_1 = 432,$$

$$a_1 = 216.$$

$$216 + 217 + 218 + 219 + 220 + 221 + 222 + 223 + 224 = 1980$$

(Aufgabe und Lösung von StR Th. Scholl, Berlin)

Lösungen zu: Geometrie pseudo-euklidisch, Heft 4/80, S. 79

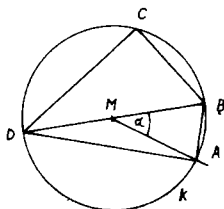
▲ 1 ▲ Alle Strecken, die auf Geraden liegen, die zu e oder f parallel sind, haben die Länge Null, da das pseudo-euklidische Quadrat entartet.

▲ 2 ▲ Zwei Strecken $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ haben die gleiche Länge, wenn A und B auf einer gleichseitigen Hyperbel um O mit den Asymptoten parallel zu e und f liegen.

▲ 3 ▲ Wir zeichnen durch alle Punkte des Dreiecks Parallelen zu e und f und erhalten so ein Rechteck, das in vier kleinere zerteilt ist. Jede Dreiecksseite ist Diagonale in einem Rechteck der Figur. Die Mittelsenkrechte auf der Dreiecksseite ist die zweite Diagonale des gleichen Rechtecks. Der Schnittpunkt O zweier Mittelsenkrechten vergrößert das Muster auf 9 Rechtecke. Mit dem bekannten Satz, daß ein Punkt P genau dann auf der Diagonale eines Rechtecks liegt, wenn die durch die Seitenparallelen durch P erzeugten Nebenrechtecke gleiche Flächen haben, findet man dann, daß durch M auch die dritte Mittelsenkrechte geht.

Lösungen zum α -Wettbewerb, Heft 1/80, Fortsetzung:

Ma 10/12 ■ 1962 Skizze:

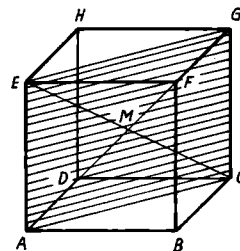


Wenn sich die Längen der Kreisbögen wie $1:2:3:4$ verhalten, so stehen die Größen der entsprechenden Zentriwinkel im gleichen Verhältnis.

Bezeichnet man die Größe des Winkels $\sphericalangle AMB$ mit α , so betragen die Größen der Winkel $\sphericalangle BMC$, $\sphericalangle CMD$ bzw. $\sphericalangle DMA$ $2 \cdot \alpha$, $3 \cdot \alpha$ bzw. $4 \cdot \alpha$. Daraus folgt: $\alpha = 36^\circ$ und $\overline{BD}$ ist Durchmesser des Umkreises von $ABCD$.

Nun läßt sich das Sehnenviereck $ABCD$ mit den geforderten Eigenschaften konstruieren. Man zeichnet einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einem Radius der Länge 3 cm. Ein beliebiger Durchmesser liefert die Punkte D und B . Nun trägt man in M an $\overline{DB}$ einen Winkel der Größe 36° an, dessen freier Schenkel den Kreis in A schneidet. Der Bogen AB wird auf dem Kreis von B aus zweimal abgetragen; man erhält den Punkt C . Man erhält das Sehnenviereck $ABCD$.

Ma 10/12 ■ 1963 Skizze! Kantenmodell!



Wir betrachten den abgebildeten Würfelschnitt. Nach dem Kosinussatz gilt

$$\cos \sphericalangle CMG = \frac{\overline{CM}^2 + \overline{GM}^2 - \overline{CG}^2}{2 \cdot \overline{CM} \cdot \overline{GM}}.$$

Die Länge der Raumdiagonalen des Würfels beträgt $a \cdot \sqrt{3}$.

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\cos \sphericalangle CMG = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}}$$

$$\cos \sphericalangle CMG = \frac{1}{3}.$$

Die Größe des Winkels $\sphericalangle CMG$, unter dem sich die Raumdiagonalen schneiden, beträgt etwa $70,53^\circ$.

Ph 6 ■ 71 Geg.: Entfernung $s = 300\,000$ km

Geschwindigkeit des D-Zuges $v_1 = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Geschwindigkeit des Flugzeuges

$$v_2 = 900 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Geschwindigkeit des Raumschiffes

$$v_3 = 8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Ges.: Die Zeiten t_1 , t_2 , t_3 .

Man rechnet mit der Formel $s = v \cdot t$, also

$$t = \frac{s}{v}. \text{ Dann erhält man für}$$

$$t_1 = \frac{300\,000 \text{ km} \cdot \text{h}}{120 \text{ km}} = 2500 \text{ h} \approx 104 \text{ d.}$$

$$t_2 = \frac{300\,000 \text{ km} \cdot \text{h}}{900 \text{ km}} \approx 333 \text{ h} \approx 14 \text{ d.}$$

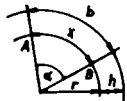
$$t_3 = \frac{300\,000 \text{ km} \cdot \text{s}}{8 \text{ km}} = 37\,500 \text{ s} = 625 \text{ min.}$$

Das Licht braucht für 300000 km die Zeit von 1 Sekunde, der D-Zug rund 104 Tage, das Flugzeug 14 Tage und das Raumschiff 625 Minuten.

Ph 7 ■ 72 Höhe $h = 16 \text{ km}$
 Erdradius $r = 6370 \text{ km}$
 Geschwindigkeit $v = 800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
 Zeit $t = 5 \text{ h}$

Ges.:

Die Entfernung auf der Erdoberfläche: x



Die Länge des Kreisbogens x findet man mit Hilfe der Proportion

$$x : 2\pi r = \alpha : 360, \quad (1)$$

den Winkel α mit Hilfe der Proportion

$$b : 2\pi(r+h) = \alpha : 360$$

$$\alpha = \frac{180 \cdot b}{\pi(r+h)} \quad (\text{siehe Bild}). \quad (2)$$

Nach (1) ist dann

$$x = \frac{\pi r \alpha}{180} \text{ und (2) eingesetzt, ergibt}$$

$$x = \frac{\pi r}{180} \cdot \frac{180 \cdot b}{\pi(r+h)}$$

$$x = \frac{br}{r+h}$$

Nun ist $b = v \cdot t$ und damit ist

$$x = \frac{v \cdot t \cdot r}{r+h}$$

$$x = \frac{800 \text{ km} \cdot 5 \text{ h} \cdot 6370 \text{ km}}{(6370 \text{ km} + 16 \text{ km}) \cdot \text{h}}$$

$$x \approx 3990 \text{ km}.$$

Die Punkte A und B sind rd. 3990 km voneinander entfernt.

Ph 8 ■ 73 Geg.: Anfangstemperatur

$$\vartheta_1 = 20^\circ \text{C}$$

Ringdurchmesser vor dem Erwärmen

$$l_0 = 79,97 \text{ mm}$$

Ringdurchmesser nach dem Erwärmen

$$l_1 = 80,25 \text{ mm}$$

Ausdehnungskoeffizient $\alpha = 0,0000117 \frac{1}{^\circ \text{C}}$

Ges.: Durchmesser des Ringes nach dem Erwärmen: ϑ_2 .

Die Endtemperatur ϑ_2 erhält man aus der Temperaturdifferenz nach $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$. Zuerst jedoch ist die Formel für die Längenausdehnung nach $\Delta\vartheta$ aufzulösen.

$$l_1 = l_0 (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$$

$$1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta = \frac{l_1}{l_0}$$

$$\Delta\vartheta = \left(\frac{l_1}{l_0} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$\Delta\vartheta = \frac{l_1 - l_0}{l_0 \cdot \alpha}$$

$$\Delta\vartheta = \frac{(80,25 - 79,97) \text{ mm} \cdot ^\circ \text{C}}{79,97 \text{ mm} \cdot 0,0000117} \approx 299,26^\circ \text{C}$$

Nun ist $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$,

also $\vartheta_2 = \Delta\vartheta + \vartheta_1$,

und $\vartheta_2 = 299,26^\circ \text{C} + 20^\circ \text{C} \approx 319^\circ \text{C}$.

Der Ring muß auf die Temperatur von rd. 319°C erwärmt werden.

Ph 9 ■ 74 Geg.:

$$t_1 = 0,5 \text{ s}$$

$$t_2 = 0,3 \text{ s (wegen } \Delta t = |t_1 - t_2| = 0,3 \text{ s)}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ges.: Δh

Bezeichnet man mit h_1 den Weg des ersten und mit h_2 den Weg des zweiten Tropfens, dann gilt nach der Formel für die beschleunigte Bewegung $s = \frac{1}{2} g t^2$ des freien Falls

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \text{ und } h_2 = \frac{1}{2} g t_2^2.$$

Außerdem gilt

$$\Delta h = |h_1 - h_2|, \text{ daraus folgt}$$

$$\Delta h = \frac{1}{2} g (t_1^2 - t_2^2) = \frac{1}{2} g (t_1 + t_2) (t_1 - t_2),$$

$$\Delta h = \frac{9,81 \text{ m} \cdot 0,8 \text{ s} \cdot 0,2 \text{ s}}{2 \text{ s}^2}$$

$$\Delta h \approx 0,78 \text{ m}.$$

Der Abstand der zwei Tropfen beträgt rd. 0,78 m.

Ph 10/12 ■ 75 Geg.:

Radius des Ballons $r = 5 \text{ m}$

Dichte der Luft $\rho_L = 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Dichte des Wasserstoffs $\rho_W = 0,089 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Gesamtmasse $m_1 = 300 \text{ kg}$

Fallbeschleunigung $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Ges.: Restauftriebskraft

Bevor die Restauftriebskraft berechnet werden kann, muß die Tragkraft F des Ballons ermittelt werden. Die Auftriebskraft F_A beträgt nach dem Archimedisches Prinzip $F_A = G_0$. Die Tragkraft F des Ballons ist dann gleich dem Gewicht der verdrängten Gasmenge G_0 vermindert um das Gesamtgewicht G des Ballons:

$$F = G_0 - G. \text{ Nun ist} \quad (1)$$

$$G_0 = m_0 \cdot g \text{ mit } m_0 = \rho_L \cdot V$$

$$\text{und } V = \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ also}$$

$$G_0 = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho_L \cdot g. \quad (2)$$

Das Gesamtgewicht des Ballons errechnet man aus der gesamten Masse des Ballons. $G = m \cdot g$ mit $m = m_1 + m_2$ und $m_2 = \rho_W \cdot V$ (Masse des Füllgases), also

$$G = (m_1 + m_2) \cdot g$$

$$\text{bzw. } G = \left(m_1 + \rho_W \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \right) \cdot g. \quad (3)$$

Setzt werden (3) und (2) in (1) eingesetzt, und man erhält für die Tragkraft

$$F = G_0 - G,$$

$$F = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_L \cdot g - (m_1 + \rho_W \cdot \frac{4}{3} \pi r^3) \cdot g,$$

$$F = \left[\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_L - m_1 - \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_W \right] \cdot g,$$

$$F = g \left[\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_L - \rho_W) - m_1 \right], \quad F = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\left[\frac{4}{3} \pi \cdot 125 \cdot (1,29 - 0,089) - 300 \right] \text{ kg},$$

$$F \approx 3223 \text{ N}.$$

Jede Person mit der Masse von 75 kg hat eine Gewichtskraft von

$$G_P = m_P \cdot g,$$

$$G_P = 75 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$G_P \approx 736 \text{ N}.$$

Da $3223 \text{ N} : 736 \text{ N} \approx 4$ beträgt, können also 4 Personen mitfahren. Wegen $4 \cdot 736 \text{ N} = 2944 \text{ N}$ und $3223 \text{ N} - 2944 \text{ N} = 279 \text{ N}$ bleibt eine Restauftriebskraft von 279 N ($\approx 28 \text{ kp}$).

Ch 7 ■ 57

a) 12 g m Gewichtszunahme
 $2\text{Fe} + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{FeO}$ $15,4 \text{ g} - 12 \text{ g} = 3,4 \text{ g}$
 112 g 144 g

$$\frac{12 \text{ g}}{112 \text{ g}} = \frac{m}{144 \text{ g}}$$

$$m = \frac{12 \text{ g} \cdot 144 \text{ g}}{112 \text{ g}} = 15,4 \text{ g}$$

b) 12 g m
 $4\text{Fe} + 3\text{O}_2 \rightarrow 2\text{Fe}_2\text{O}_3$ $17,1 \text{ g} - 12 \text{ g} = 5,1 \text{ g}$
 224 g 320 g

$$\frac{12 \text{ g}}{224 \text{ g}} = \frac{m}{320 \text{ g}}$$

$$m = \frac{12 \text{ g} \cdot 320 \text{ g}}{224 \text{ g}} = 17,1 \text{ g}$$

c) 12 g m
 $3\text{Fe} + 2\text{O}_2 \rightarrow \text{Fe}_3\text{O}_4$ $16,6 \text{ g} - 12 \text{ g} = 4,6 \text{ g}$
 168 g 232 g

$$\frac{12 \text{ g}}{168 \text{ g}} = \frac{m}{232 \text{ g}}$$

$$m = \frac{12 \text{ g} \cdot 232 \text{ g}}{168 \text{ g}} = 16,6 \text{ g}$$

Ch 8 ■ 58

m 0,47 g
 $\text{HCl} + \text{AgNO}_3 \rightarrow \text{AgCl} + \text{HNO}_3$
 36,5 g 143,5 g

$$m = \frac{36,5 \text{ g} \cdot 0,47 \text{ g}}{143,5 \text{ g}}$$

$$m = 0,12 \text{ g}$$

$$290 \text{ cm}^3 \text{ Lösung} \triangleq 29,2 \text{ g}$$

$$15 \text{ cm}^3 \triangleq x$$

$$x = \frac{15 \text{ cm}^3 \cdot 29,2 \text{ g}}{290 \text{ g}}$$

$$x = 1,15 \text{ g}$$

$$0,12 \text{ g} \triangleq x\%$$

$$1,15 \text{ g} \triangleq 100\%$$

$$x = \frac{0,12 \text{ g} \cdot 100\%}{1,15 \text{ g}} = 7,94\%$$

Die eingesetzte Lösung von Salzsäure ist 7,94%ig.

Ch 9 ■ 59

m_1 $m_2 \cdot 0,96$ $m_3 \cdot 0,89$ 34 l
 $2\text{NaCl} + 2\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{MnO}_2 \rightarrow \text{Cl}_2 + \text{Na}_2\text{SO}_4$
 117 g 196 g 87 g 22,4 l
 + $\text{MnSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$

$$\frac{m_1}{117 \text{ g}} = \frac{34 \text{ l}}{22,4 \text{ l}}$$

$$m_1 = \frac{34 \text{ l} \cdot 117 \text{ g}}{22,4 \text{ l}}$$

$$m_1 = 177,6 \text{ g}$$

$$m_2 \cdot 0,96 = \frac{34 \text{ l}}{22,4 \text{ l}}$$

$$\frac{196 \text{ g}}{196 \text{ g}} = \frac{34 \text{ l} \cdot 196 \text{ g}}{22,4 \text{ l} \cdot 0,96}$$

$$m_2 = \frac{34 \text{ l} \cdot 196 \text{ g}}{22,4 \text{ l} \cdot 0,96}$$

$$m_2 = 22,4 \text{ l} \cdot 0,96$$

$$m_2 = 309,9 \text{ g}$$

$$\frac{m_3 \cdot 0,89}{87 \text{ g}} = \frac{34 \text{ l}}{22,4 \text{ l}}$$

$$m_3 = \frac{34 \text{ l} \cdot 87 \text{ g}}{22,4 \text{ l} \cdot 0,89}$$

$$m_3 = 22,4 \text{ l} \cdot 0,89$$

$$m_3 = 148,4 \text{ g}$$

Zur Bildung von 341 Chlor sind 177,6 g Kochsalz, 309,9 g Schwefelsäure und 148,4 g Braunstein einzusetzen.

Ch 10/12 ■ 60

$$\begin{aligned} m \cdot 0,34 & 310 \text{ kg} \cdot 0,96 \\ \text{CaCO}_3 + 2\text{HCl} & \rightarrow \text{CaCl}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2 \\ 73 \text{ g} & 111 \text{ g} \\ m = \frac{310 \text{ kg} \cdot 0,96 \cdot 73 \text{ g}}{111 \text{ g} \cdot 0,34} \end{aligned}$$

$$m = 575,6 \text{ kg}$$

Es müssen 575,6 kg 34%ige Salzsäure eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} m \cdot 0,872 & 310 \text{ kg} \cdot 0,96 \\ \text{CaCO}_3 + 2\text{HCl} & \rightarrow \text{CaCl}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2 \\ 100 \text{ g} & 111 \text{ g} \\ m = \frac{310 \text{ kg} \cdot 0,96 \cdot 100 \text{ g}}{111 \text{ g} \cdot 0,872} \end{aligned}$$

$$m = 307,5 \text{ kg}$$

$$m \cdot 0,872 \quad 0,04 \cdot 310 \text{ kg}$$

$$\text{CaCO}_3 - \text{CaO}$$

$$100 \text{ g} \quad 56 \text{ g}$$

$$m = \frac{0,04 \cdot 310 \text{ kg} \cdot 100 \text{ g}}{56 \text{ g} \cdot 0,872}$$

$$m = 25,4 \text{ kg}$$

307,5 kg + 25,4 kg = 332,9 kg Kalkstein müssen eingesetzt werden.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 2/80:

Ma 5 ■ 1965 Angenommen, der Betonschaft des Fernsehturms hat eine Länge von x Metern; dann ist der Antennenträger $(x - 52)$ m lang. Nun gilt

$$x + (x - 52) = 164,$$

$$2x = 216, \text{ also } x = 108.$$

Der Betonschaft ist 108 m, der Antennenträger 56 m lang.

Ma 5 ■ 1966 Wir rechnen $113 - 11 = 102$; $102 : 3 = 34$; $2 \cdot 34 = 68$; $68 + 11 = 79$. Es nahmen 34 Mädchen und 79 Jungen teil. Oder: Es sei x die Anzahl der teilnehmenden Mädchen; dann haben $(2x + 11)$ Jungen teilgenommen. Nun gilt

$$x + (2x + 11) = 113,$$

$$3x = 102, \text{ also } x = 34.$$

Ma 5 ■ 1967 Aus c) folgt: Der Schüler Blume hat weder den Vornamen Dieter noch den Vornamen Bruno.

Aus e) folgt: Der Schüler Blume heißt mit Vornamen auch nicht Alfons. Deshalb lautet der volle Name Christoff Blume.

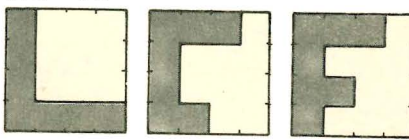
Aus a) folgt: Der Schüler Cramer hat nicht den Vornamen Alfons.

Aus d) folgt: Der Schüler Cramer hat auch nicht den Vornamen Dieter. Da er auch den Vornamen Christoff nicht haben kann, heißt er mit vollem Namen Bruno Cramer.

Aus f) folgt: Der Schüler Decker hat nicht den Vornamen Dieter. Da er auch nicht die Vornamen Christoff oder Bruno haben kann, heißt er mit vollem Namen Alfons Decker. Der vierte Schüler heißt somit Dieter Althoff. Es seien a, b, c bzw. d die ganzen Zahlen der Lebensalter von Alfons, Bruno, Christoff bzw. Dieter. Dann gilt nach c) $d < b < c$. Aus b) folgt: $a = b$. Deshalb gilt: $d < a = b < c$.

Ma 5 ■ 1968 Addieren wir diese drei Gleichungen, so erhalten wir $2a + 2b + 2c = 1552$ mm, also $a + b + c = 776$ mm. Aus $a + b = 464$ mm und $a + b + c = 776$ mm folgt $c = 312$ mm. Aus $b + c = 563$ mm und $c = 312$ mm folgt $b = 251$ mm. Aus $a + c = 525$ mm und $c = 312$ mm folgt $a = 213$ mm.

Ma 5 ■ 1969



a)

b)

c)

Ma 5 ■ 1970 In 1 Stunde befördern 4 Bagger $20 \cdot 18 \text{ m}^3 = 360 \text{ m}^3$ Erde; in 1 Stunde befördert 1 Bagger $360 \text{ m}^3 : 4 = 90 \text{ m}^3$ Erde; in 8 Stunden befördert 1 Bagger $8 \cdot 90 \text{ m}^3 = 720 \text{ m}^3$ Erde.

Nun gilt $144 \cdot 5 \text{ m}^3 = 720 \text{ m}^3$; deshalb können durch einen einzigen Bagger 144 Erdarbeiter ersetzt werden.

Ma 6 ■ 1971 Angenommen, an der Hafenrundfahrt nehmen n Männer teil; dann nehmen noch $4 \cdot n$ Frauen und Kinder daran teil, und es gilt $n + 4n = 75$, $5n = 75$, $n = 15$. An der Hafenrundfahrt nehmen also 15 Männer teil. Angenommen, unter den Fahrgästen sind x Frauen, also $5 \cdot x$ Kinder; dann gilt $x + 5x = 60$, $6x = 60$, $x = 10$. An der Hafenrundfahrt nehmen 10 Frauen und 50 Kinder teil.

Ma 6 ■ 1972 Angenommen, Katja hat $6n$ Mark eingebracht; dann entfallen auf Erik $3n$ Mark, auf Hagen $2n$ Mark, auf Claudia $(80 - 11n)$ Mark. Nun gilt

$$80 - 11n < 35 \text{ und } 6n < 35, \text{ also}$$

$$45 < 11n \quad \text{und} \quad n < 5\frac{5}{6}, \text{ also}$$

$$n \geq 5 \quad \text{und} \quad n \leq 5.$$

Daraus folgt $n = 5$. Auf Claudia entfallen somit $(80 - 11 \cdot 5) \text{ M} = 25 \text{ M}$.

Fortsetzung von Seite 111

▲ 9 ▲ Von den 100 Schülern der Klassen 1 bis 4 nahmen im letzten Sommer viele an den örtlichen Ferienspielen und am Schwimmlager teil.

– Nur 10 Schüler nahmen an keiner der beiden Möglichkeiten teil.

– 75 Schüler waren Teilnehmer der örtlichen Ferienspiele.

– 83 Schüler waren Teilnehmer am Schwimmlager.

Ermittle die Anzahl der Schüler, die an beiden Möglichkeiten teilnahmen!

▲ 10 ▲ Berechne α, β, γ !

Bild 2a

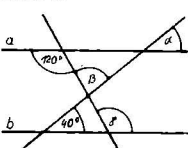
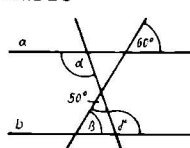


Bild 2b



▲ 11 ▲ 15 Pferde benötigen für 6 Tage 900 kg Hafer. Wieviel Hafer benötigen 20 Pferde für einen Tag und 1 Pferd für 20 Tage?

▲ 12 ▲ Wie alt ist das Mädchen mit dem Mittelscheitel? (obere Gleichung, rechte Seite)

Bild 3 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$a - b =$$

$$b + a = b + b + 5$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 5$$

Aus einer Aufgabensammlung (Klasse 6) für tägliche Übungen des Kreises Löbau

Lösung zu: Eine Aufgabe

von Prof. Dr. Jeger, Zürich, S. 100

▲ 1995 ▲ Das Reflexionsgesetz besagt bekanntlich, daß die Kugel nach dem Stoß unter dem gleichen Winkel von der Kante wegerollt, unter dem sie auf dieselbe aufgetroffen ist. Das bedeutet aber gerade, daß sie sich so bewegt, als würde sie vom Bild des Startpunktes A unter der Geradenspiegelung Σ_f mit der Fixgeraden f herkommen. Setzt man diese Überlegungen fort, so erkennt man, daß die gesuchte Bahn dadurch konstruiert werden kann, daß A nacheinander an den Geraden f, g und h gespiegelt und das entstehende Bild geradlinig mit B verbunden wird, wodurch sich zunächst der Berührungspunkt der Kugel mit der Kante h ergibt. Die Konstruktion entnimmt man am besten der Zeichnung. Dort erkennt man auch, daß man die gleiche Lösung etwas platzsparender bekommt, wenn man auch B spiegelt. Auch die Beantwortung der zweiten Frage lesen wir aus der Zeichnung heraus: Die Länge des Rollweges ist gleich $s = A_3B = A_2B_1$. (Diese Aufgabe wurde aus einem Originalartikel des Verfassers aus „Didaktik der Mathematik, 3/78, München“ entnommen und für die *alpha*-Leser von Dozent Dr. R. Hofmann, Leipzig, bearbeitet.)

Lösungen zu: Rund um die Mathematik – Ordnung ist das halbe Leben, S. 109

● a) Helgas Satz ist überflüssig.

b) Drei Möglichkeiten hätten dann bestanden:

$$D > I > H > S > K$$

$$D > I > S > H > K$$

$$D > I > S > K > H$$

Jetzt ist aber Helgas Satz nicht mehr überflüssig.

● Mit dem größten Jungen beginnend: Fritz, Fridolin, Fred, Frank, Franz.

● Bisher wurden fünf Spiele ausgetragen, eins fehlt noch. Bisherige Reihenfolge: Schachert, Schachlis, Schachner, Schachtel, Schachbum, Schachmat. Sie bleibt erhalten, wenn beim Nachholen Schachert gegen Schachmat gewinnt. Verliert er dagegen, stürzt alles zusammen.

Lösungen zu: alpha-heiter:

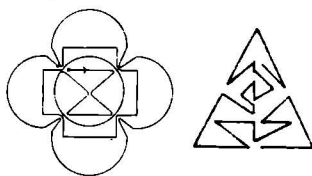
Kreuzzahlrätsel

```

  4 3 5 X 8 1   7 1 4 1 X 0
X 1 X 8 X 3   X 5 1 X 1 7
  1 4 1 4 2 1   2 9 X 1 3 2

```

In einem Zug



Logische Übung



Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r}
 85006 \\
 + 7136 \\
 \hline
 92142
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5 + 6 = 11 \\
 + \quad - \quad - \\
 \hline
 1 + 5 = 6 \\
 6 - 1 = 5
 \end{array}$$

Diophant (um 250 u. Z.)

$$\begin{array}{ll}
 11 \cdot 111 = 1221 & 15 \cdot 111 = 1665 \\
 12 \cdot 111 = 1332 & 16 \cdot 111 = 1776 \\
 13 \cdot 111 = 1443 & 17 \cdot 111 = 1887 \\
 14 \cdot 111 = 1554 & 18 \cdot 111 = 1998
 \end{array}$$

Verkettungsrätsel

1. Zeile: kubisch – Hilbert;
2. Zeile: Ellipse – Einheit;
3. Zeile: Viereck – Kathete;
4. Zeile: Produkt – Tangente;
5. Zeile: Algebra – Abszisse;
6. Zeile: Reaktor – Rhombus;

Lösungswort: Hektar

Auf der Suche nach Winkeln

Kegel bzw. Kugel

Mütter und Töchter

Die drei Frauen gehörten drei aufeinanderfolgenden Generationen an: Oma, Mutti, Tochter. Die Mütter sind: Oma und Mutti; die zwei Töchter sind: Mutti und Tochter.

Lösungen zu: Mitgemacht – scharf nachgedacht, III. U.S.

▲1▲ Das Feld 6-C erfüllt die gestellten Bedingungen.

▲2▲ Unterschiedliche Details: 1. Der Ast über der Dachrinne; 2. ein Blatt der linken Sonnenblume; 3. eine Zaunslatte; 4. ein Zopf des Mädchens; 5. der rechte Strumpf des Mädchens; 6. ihr rechter Arm; 7. das Hemd des Jungen; 8. sein rechtes Hosenbein.

▲3▲ waagrecht: $4 \cdot 3 - 6 = 6$; $2 \cdot 5 - 3 = 7$; $1 + 2 + 1 = 4$.

▲4▲ a) 24,28; b) 5,0; c) 69; d) 67.

▲5▲ Figur B gehört zum Bild ganz links (größer als A, C, D, E).

▲6▲ Die beiden Quadrate 1-C und 4-B stimmen überein.

▲7▲ Bildausschnitte von oben nach unten: 3C, 4F, 9B, 5C, 3E.

Lösungen zu: Zahlenzauber um das Jahr 1980, IV. U.S.

Magisches Quadrat: In die leeren Felder des magischen Quadrates sind folgende Ziffern einzutragen, und zwar jeweils von links nach rechts:

1. Zeile: 202, 213
2. Zeile: 212, 201
3. Zeile: 205, 207, 218
4. Zeile: 210
5. Zeile: 209, 220
6. Zeile: 206, 219, 208
7. Zeile: 200, 211
8. Zeile: 215, 217, 204
9. Zeile: 216, 203, 214

Darstellung der Zahl 1980:

$$1980 = (111 - 1) \cdot (11 - 1 - 1) \cdot (1 + 1)$$

$$1980 = 2222 + 2 - 222 - 22$$

$$1980 = 333 \cdot (3 + 3) - 3 \cdot 3 \cdot \left(3 - \frac{3}{3}\right)$$

$$1980 = \frac{5}{3} \cdot 55 \cdot \left(5 + \frac{5}{5}\right)^{\frac{5+5}{5}}$$

$$1980 = 6^{\frac{6+6}{6}} \cdot \left(66 - 6 - 6 + \frac{6}{6}\right)$$

$$1980 = \left(7 + 7 + 7 - \frac{7}{7}\right) \cdot \left[(7 + 7) \cdot 7 + \frac{7}{7}\right]$$

$$1980 = \sqrt{8^8} : \left(\frac{8}{8} + \frac{8}{8}\right) - 8 \cdot 8 - \sqrt{8 + 8}$$

$$1980 = \left(\frac{99}{9} - 9\right) \cdot \left(999 - \frac{9 \cdot 9}{9}\right)$$

Ein Dreieck $(1 + \sqrt{9 + 8 + 0})$ cm:

Wegen $(1 + \sqrt{9 + 8^0})$ cm = 5 cm, $(1 + \sqrt{9 + 8 + 0})$ cm = 12 cm und $[(1 \cdot 9 + 8 \cdot 0) + (1 + \sqrt{9 + 8^0})]$ cm = 13 cm bilden die Maßzahlen der Seitenlängen dieses Dreiecks ein pythagoreisches Zahlentripel $[5; 12; 13]$, für das $5^2 + 12^2 = 13^2$ gilt. Das vorliegende Dreieck ist somit ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 5 cm und 12 cm und der Hypotenusenlänge 13 cm.

$$\text{Polygon: } (n-2) \cdot 180 = 1980;$$

$$n = 13.$$

Das 13-Eck erfüllt die gestellte Bedingung.

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir stellen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am alpha-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 5/1979 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■ 1895 Drei 7. Klassen einer Schule gehören zusammen 89 Schüler an. In Klasse 7a sind zwei Jungen mehr als Mädchen. In Klasse 7b sind sieben Jungen weniger als Mädchen. In Klasse 7c sind zwei Mädchen mehr als Jungen. Jede Klasse hat höchstens 30 Schüler. Wieviel Jungen sind insgesamt in diesen drei Klassen?

Im Heft 2/1980 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Wir stellen folgende Tabelle auf:

Klasse	Anzahl d. Jungen	Anzahl d. Mädchen
7a	a	$a - 2$
7b	b	$b + 7$
7c	c	$c + 2$
insges.	$a + b + c$	$a + b + c + 7$

$$\text{Nun gilt } 2 \cdot (a + b + c) + 7 = 89, \quad 2 \cdot (a + b + c) = 82, \quad a + b + c = 41.$$

Diesen drei 7. Klassen gehören insgesamt 41 Jungen an.

Wir stellen nun die Lösung von Kai-Uwe Walter aus Döbeln vor, der Schüler der Klasse 7R der Clara-Zetkin-Oberschule ist. Kai-Uwe löste diese Aufgabe wie folgt:

In allen drei Klassen sind zusammen 7 Jungen weniger als Mädchen. Angenommen, den drei Klassen gehören j Jungen und m Mädchen an; dann gilt

$$(1) \quad j + m = 89 \text{ und}$$

$$(2) \quad j + 7 = m. \text{ Aus (1) und (2) folgt}$$

$$j + (j + 7) = 89, \quad 2j + 7 = 89, \quad 2j = 82, \quad j = 41.$$

In diesen drei Klassen sind insgesamt 41 Jungen.

Wir stellen nun die Lösung von Ralf Arnold aus Eisenach vor, der Schüler der Klasse 7c der 9. POS ist. Ralf löste diese Aufgabe wie folgt:

Da jede Klasse höchstens 30 Schüler hat, läßt sich die Anzahl 89 aller Schüler nur auf genau eine Weise in drei Summanden zerlegen; es gilt $30 + 30 + 29 = 89$. Wegen $2 \mid (29 - 7)$ hat Klasse 7b genau 29 Schüler; zur Klasse 7a und 7c gehören jeweils 30 Schüler. Nun gilt $(30 + 2) : 2 = 16$, $(29 - 7) : 2 = 11$, $(30 - 2) : 2 = 14$ und $16 + 11 + 14 = 41$.

In diesen drei Klassen sind insgesamt 41 Jungen.

Wir stellen nun die Lösung von Uwe Schwark aus Ruthen vor, der Schüler der Klasse 7 der Artur-Becker-Oberschule in Passow ist; Uwe löste diese Aufgabe wie folgt:

In Klasse 7a sind zwei Jungen mehr als Mädchen. In Klasse 7c sind zwei Mädchen mehr als Jungen, also zwei Jungen weniger als Mädchen. In Klasse 7b sind 7 Jungen weniger als Mädchen. Deshalb sind in allen drei Klassen 7 Jungen weniger als Mädchen. Aus $(89 - 7) : 2 = 41$ folgt, daß in diesen drei Klassen insgesamt 41 Jungen sind.

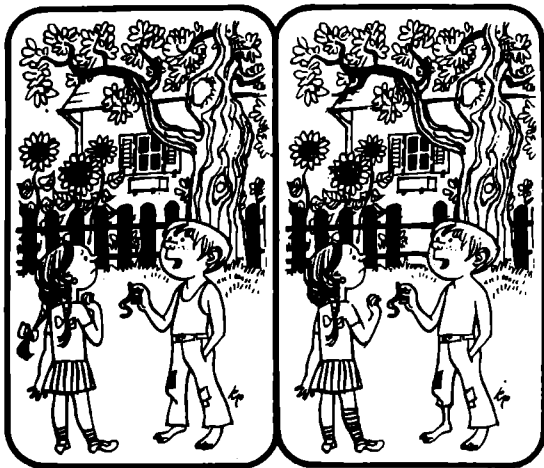


Mitgemacht – scharf nachgedacht!

▲1▲ Man suche dasjenige Feld des Schachbretts mit einem eingezeichneten Quadrat, in dessen Nachbarschaft – also ringsherum – nur Felder mit unterschiedlichen Bildern zu finden sind.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	▲	■	△		□	□	●	○
2	▲	★	■	△	★	●	▲	○
3	★	●	○	○	●	■	▲	■
4	●	○	■	★	○	■	△	
5	○	□	★	■	▲	○	△	○
6	□	△	■	▲	□	●	●	○
7	△	●	○	○	□	■	▲	★
8	●	■	■	○	○	■	★	▲

▲2▲ Die beiden Bilder sehen nur auf den ersten Blick einander ähnlich. In Wirklichkeit unterscheiden sie sich in acht Details. Wer findet sie am schnellsten?



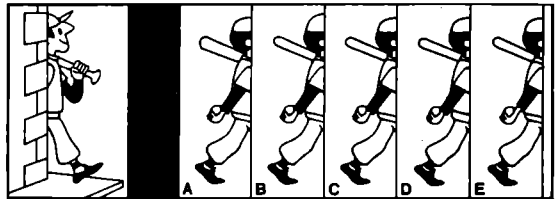
▲3▲ In die leeren Quadrate sind natürliche Zahlen so einzusetzen, daß waagrecht wie senkrecht sinnvolle Aufgaben entstehen.

4	×		–		6
×	■	+	■	+	
	×		–		7
–	■	–	■	–	
	+		+		4
7		6		8	

▲4▲ Ergänze die fehlenden Zahlen in den vier Folgen!

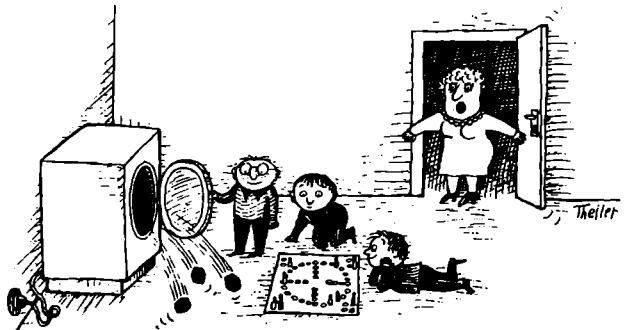
- a) 8 12 16 20 ? ?
 b) 25 20 15 10 ? ?
 c) 4 9 17 35 ? 139
 d) 7 15 32 ? 138 281

▲5▲ Auf dem Bild links verdeckt die Hauswand den Rücken des Mannes. Eine der mit den Buchstaben A bis E bezeichneten Figuren enthält den „richtigen“ Rücken. Welche?

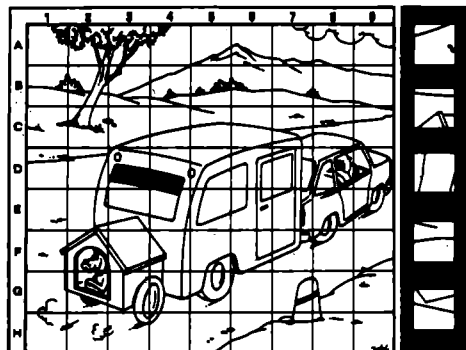


▲6▲ Welches sind die beiden Quadrate, auf denen die gleichen kleinen Bilder wiederzufinden sind?

	A	B	C	D
1	▲	■	△	□
2	▲	★	■	△
3	★	●	○	○
4	●	○	■	★



▲7▲ Die rechts abgebildeten fünf Bildausschnitte stimmen in ihren Einzelheiten mit jeweils einem der durch Buchstaben und Ziffern gekennzeichneten Quadrate des lustigen Campingbildes überein. Mit welchem?





Alles dreht sich um die Jahreszahl 1980

Mit dieser Jubiläumsaufgabe stellen wir unseren Lesern Probleme mit zum Teil ähnlichem Inhalt mit steigendem Schwierigkeitsgrad für die Leser der Klassenstufen 4 bis 10/12 sowie für Erwachsene vor.

Wer eine Lösung zu einer seiner Klassenstufe entsprechenden Aufgabe oder einer höheren oder einer höheren Klassenstufe entsprechenden Aufgabe einsendet, erhält zwei Antwortkarten, die für den *alpha*-Wettbewerb 1980/81 gewertet werden.

Die gestellten Probleme stammen aus der Feder von StR H.-J. Kerber, Neubrandenburg, und StR Th. Scholl, Berlin. Viel Erfolg!

Redaktion *alpha*

Ma 4 ■ 2000 In dem Kryptogramm

$$\begin{array}{r} 9^{**} \\ + 8^{**} \\ + **7 \\ \hline 1980 \end{array}$$

Ist jedes der sechs Sternchen so durch eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu ersetzen, daß

eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll der erste Summand möglichst groß, der zweite Summand größer als der dritte sein.

Ma 5 ■ 2000 In dem Kryptogramm

$$\begin{array}{r} *** \\ + *** \\ \hline 1980 \end{array}$$

sind die Sternchen so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei dürfen aber nur die vier Ziffern 1, 9, 8, 0 der Summe benutzt werden, und der erste Summand darf nicht kleiner sein als der zweite.

Es sind alle Möglichkeiten anzugeben!

Ma 6 ■ 2000 In dem Kryptogramm

$$\begin{array}{r} *8* \\ + 9^{**} \\ + **0 \\ \hline 1980 \end{array}$$

sind die Sternchen unter Verwendung von nur genau zwei verschiedenen Ziffern so zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Es sind alle Möglichkeiten anzugeben!

Ma 7 ■ 2000 In dem Kryptogramm

$$\begin{array}{r} ***** \\ - ***** \\ \hline 1980 \end{array}$$

sind die Sternchen so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Subtraktionsaufgabe entsteht. Dabei dürfen nur drei

der vier Ziffern 1, 9, 8, 0 der Differenz benutzt werden, keine von ihnen mehr als dreimal. Es sind alle Möglichkeiten anzugeben!

Ma 8 ■ 2000 Olaf und Ute sind Zwillinge. Ihr Vater ist gegenwärtig 28 Jahre alt. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter des Vaters und das der Mutter (in ganzen Zahlen) angeben, multipliziert man die so erhaltene Summe zunächst mit der Zahl, die das Lebensalter von Olaf und danach mit der Zahl, die das Lebensalter von Ute angibt, so erhält man als Ergebnis die Jahreszahl 1980. Wie alt war die Mutter, als die Zwillinge geboren wurden?

Ma 9 ■ 2000 Welche natürlichen Zahlen a erfüllen die Gleichung

$$(a+1)(a+2)(a+a)=1980?$$

Ma 10/12 ■ 2000 Zu ermitteln sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen p , für die $p=33p_1$ und $p=2p_2$ gilt. Dabei ist sowohl p_1 als auch p_2 jeweils das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, und der kleinste Faktor von p_2 ist dreimal so groß wie der kleinste Faktor von p_1 . Matthias löste diese Aufgabe mit Hilfe der Gleichung

$$33n(n+1)(n+2)=2 \cdot 3n(3n+1)(3n+2),$$

wobei n eine natürliche Zahl größer als Null ist. Als Lösung fand er $p=1980$. Seine jüngere Schwester Erika löste diese Aufgabe nicht mit Hilfe einer quadratischen Gleichung. Welchen anderen Lösungsweg könnte Erika gefunden haben?

Zahlenzauber um das Jahr 1980

$$\begin{array}{ll} 1=1^9 \cdot 8^0 & 6=1-\sqrt{9}+8+0 \\ 2=1+9-8+0 & 7=-1^9+8+0 \\ 3=1 \cdot \sqrt{9}+8 \cdot 0 & 8=1^9 \cdot 8+0 \\ 4=\sqrt{-1+9+8-0} & 9=1 \cdot 9+8 \cdot 0 \\ 5=1+\sqrt{9}+8^0 & 10=1 \cdot 9+8^0 \end{array}$$

Schüler Andreas Fitke,
EOS Heinrich Hertz, Berlin

Trage in die leeren Felder des abgebildeten magischen Quadrates die natürlichen Zahlen von 200 bis 220 so ein, daß man in den senkrechten Spalten, in den waagerechten Zeilen und in den Diagonalen als Ergebnis der Addition der entsprechenden Zahlen stets die Summe 1980 erhält!

Schuldirektor H. Förg, Schwaz (Österreich)

Die Zahl 1980 ist unter Verwendung von jeweils genau zehnmal der gleichen Ziffer, von Operationszeichen, von Klammern darzustellen!

Beispiel: $1980=4^4 \cdot (4+4) - 44 - 4 \cdot 4 - 4 - 4$
Finde Beispiele für die Ziffern 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 und 9!

$$\begin{array}{l} 1980=0+12^3+45 \cdot 6-7-8-\sqrt{9} \\ 1980=(-1) \cdot 2+34 \cdot 56+78 \cdot 9^0 \\ 1980=-2+345 \cdot 6-78-9+0-1 \\ 1980=345 \cdot 6+(7-8) \cdot 90 \cdot 1^2 \\ 1980=(-4+5+6+7+8) \cdot 90 \cdot 1^2 \\ 1980=(-5) \cdot (67+8-9^0-1)+2345 \\ 1980=678 \cdot \sqrt{9}+0 \cdot 1-2 \cdot 3 \cdot (4+5) \\ 1980=(7+89+0+1+2) \cdot (3\sqrt{4}+5+6) \\ 1980=89+0 \cdot 1-2+3+45 \cdot 6 \cdot 7 \\ 1980=901 \cdot 2+34 \cdot 5-(6-7) \cdot 8 \end{array}$$

Schüler Th. Merten, Stralsund

$$1980 = MCMLXXX$$

$$MC-M=L \cdot XX : X$$

$$(MC-M):I=XX:X$$

$$0891:8019=1089:9801$$

$$1980=44^2+44$$

Ing. H. Decker, Köln

$$1-9+8=0$$

$$1^9=8^0$$

$$\lg 1=9 \cdot 8 \cdot 0$$

$$(\lg \text{ heißt } \log_2) \quad \lg 1+\sqrt{9}=\lg 8+0$$

$$(\lg \text{ heißt } \log_2) \quad \text{Dr. S. Schneider, PH Dresden}$$

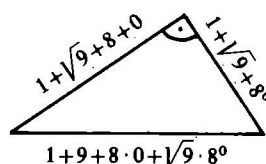
Ein Dreieck hat die Seitenlängen $(1+\sqrt{9}+8+0)$ cm,

$$(1+\sqrt{9}+8^0)$$
 cm und $[(1 \cdot 9+8 \cdot 0+(1+\sqrt{9} \cdot 8^0)]$ cm.

Um was für ein spezielles Dreieck handelt es sich in diesem Falle?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Für welches Polygon ist die Winkelsumme gleich 1980? Johannes Paasonen, Helsinki



226	237		259	180	191	248		224
236	247		188	190		258	223	225
		253	229	240	251		183	194
256	186	232	199		221	197	234	245
185	196	242			231	198	244	255
195		243		230	241		254	184
246	257	222	189			187	233	235
		182	239	250	252	228	193	
	227	192	249	260	181	238		