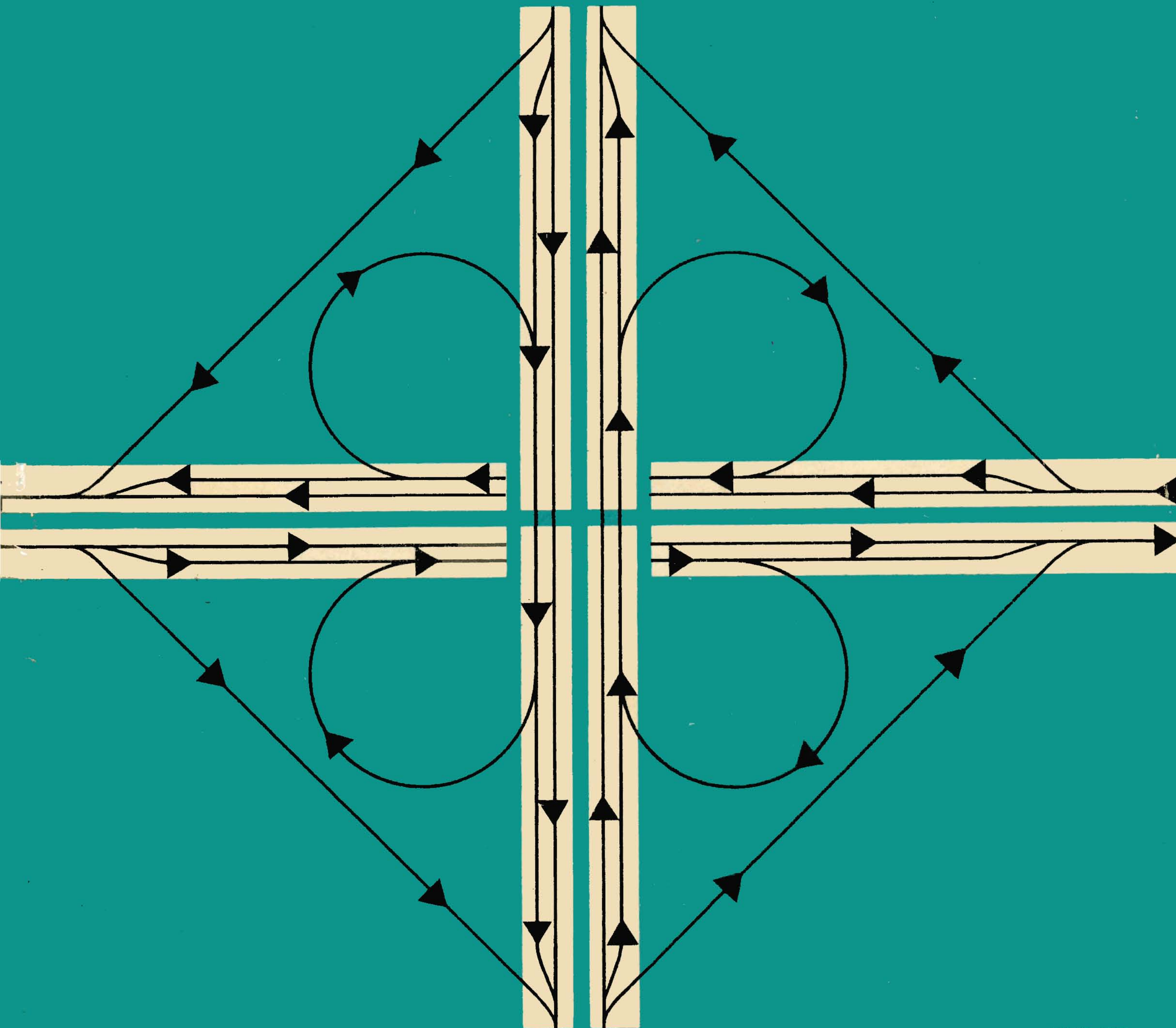
alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
11. Jahrgang 1977
Preis 0,50 M
Index 31059

6

Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 129, 131, 134/135, 140)
Vignetten: R. Schwalme aus „Für Dich“ 8/74; Horst Schrade, Berlin (S. 127); Duvan, Beograd (S. 130); D. Sowa, Leipzig, Eigenfoto (S. 137); H. Büttner, L. Otto, beide Berlin (S. 138).
Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig
alpha – Träger der Artur-Becker-Medaille in Gold

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 24. August 1977

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alle Titelblätter des Jahrgangs 1977 gestaltete W. Fahr, Berlin. Das Titelblatt zu Heft 6/77 wurde aus dem *Lexikon der Technik* entnommen. Es stellt ein Autobahnkreuz dar.

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Das macht Pythagoras verlegen

Teil I

So lange es auf der Welt lehrende und lernende Menschen gibt, besteht bei den Lernenden wohl auch die Neigung, den Lehrenden einmal in Verlegenheit zu bringen. Dies läßt sich zuweilen schon mit unbequemen Fragestellungen herbeiführen. Vielfach kann eine solche Verlegenheit der Ausgangspunkt einer für beide Seiten anregenden Diskussion sein. Ist die Differenz zwischen Lehrendem und Lernendem nicht zu beheben, dann wird das gegenseitige Mißverstehen manchmal als ein Generationenproblem abgetan. Der Ältere meint vom Jüngeren, er wird es später noch einsehen. Hingegen denkt der Jüngere, dem „Alten“ ist nicht mehr zu helfen.

Für schwerwiegende Meinungsverschiedenheiten zwischen Lehrendem und Lernendem gibt es auch auf „höherer Ebene“ treffende Beispiele. Von einem für die geschichtliche Entwicklung der Mathematik recht interessanten soll hier berichtet werden. Der Lehrmeister ist kein geringerer als Pythagoras von Samos (um 580–496 v. u. Z.). Mit seinem Namen verbindet sich untrennbar der pythagoreische Lehrsatz. Er lautet: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenusenlänge gleich der Summe der Quadrate der Kathetenlängen.

An dieser konkreten Aussage gibt es nichts zu rütteln. Neben der Mathematik beschäftigte sich Pythagoras auch mit Politik und Philosophie. Nach seiner philosophischen Lehre ist die (natürliche) Zahl das Urprinzip aller Dinge. Alles läßt sich auf natürliche Zahlen oder das Verhältnis von natürlichen Zahlen zurückführen. Der Lehrsatz über das rechtwinklige Dreieck bietet hierzu einige leicht nachprüfbare Beispiele. Verhalten sich in einem Dreieck die Seitenlängen wie $3:4:5$, so ist das Dreieck rechtwinklig. Auch bei Vorgabe der Seiten im Verhältnis $5:12:13$ ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck. Drei natürliche Zahlen a, b, c, die die Gleichung $a^2+b^2=c^2$ erfüllen, nennt man ein pythagoreisches Zahlentripel. Die Pythagoreer waren überzeugt, daß sich für jedes rechtwinklige Dreieck ein derartiges Zahlentripel (a, b, c) bei geeigneter Festlegung der Maßeinheit finden läßt.

Zunächst sei noch einiges über Pythagoras selbst und die von ihm begründete Schule berichtet. Auf der Insel Samos geboren, wandte sich Pythagoras wegen der in seiner Heimat herrschenden Tyrannei nach dem in Süditalien liegenden Kroton, das in dieser Zeit zu Großgriechenland gehörte. Pythagoras und sein Schülerkreis bildeten eine verschworene Gemeinschaft, die zu jedem Opfer füreinander bereit waren. Zum Beispiel waren Damon und Phintias aus Syrakus Pythagoreer. Der Freundestreue in diesem Kreis hat Schiller in seinem Gedicht „Die Bürgschaft“ ein literarisches Denkmal gesetzt. (Ich lasse den Freund dir als Bürgen, ihn magst Du, entrinn' ich, erwürgen.) Dabei darf jedoch nicht übersehen werden, daß die Mitglieder dieser Gemeinschaft hochmütig auf das Volk herabsahen, das seinen Lebensunterhalt durch mühselige Arbeit verdienen mußte. Ideell unterstützte diese politisch-religiöse Gemeinschaft die damals herrschende Sklavenhaltergesellschaft, zu deren Aristokratie sich ihre Mitglieder rechneten. Dieser Hochmut gegenüber dem Volk sollte den Pythagoreern später teuer zu stehen kommen.

Für die griechische Führungsschicht der damaligen Zeit waren Handwerker und Bauern Banausen, während der freie Mann grübelte, diskutierte, lehrte und spekulierte. Er beschäftigte sich zunächst mit den drei Künsten Grammatik, Rhetorik und Dialektik. Ergänzend zu diesem Unterbau der Wissenschaft, dem Trivium, pflegten die Pythagoreer die vier Mathemata Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie. Diese vier Fächer bildeten das Quadrivium ihres Lehrgebäudes. Die Bezeichnung der Angehörigen dieser Philosophenschule als Pythagoreer geht auf Aristoteles zurück. Bis dahin hatte man jede sich um einen Meister scharende Schule nach dem Ort ihres Wirkens benannt. Auch dies ist ein Zeichen für die Autorität, welche Pythagoras im Kreise seiner Schüler und geistigen Mitstreiter besaß.

Ein Paradebeispiel für die Tragfähigkeit der pythagoreischen Lehre bot die Akustik. Den experimentellen Befund dazu lieferte ein Monochord. Es besteht aus einem Kasten mit hoher Resonanzwirkung und einer darüber gespannten Saite der Länge l. Im Ausgangszustand ertönt beim Anzupfen der Saite der Grundton. Halbiert man die Länge der Saite durch Einschieben eines Steges, ohne dabei die Spannung der Saite zu ändern, so ergibt sich die Oktave zum Grundton. Setzt man $\frac{2}{3}l$ zur Schwingung frei, ergibt sich die Quinte. Setzt man $\frac{3}{4}l$ zur Schwingung frei, ergibt sich die Quarte. Das Verhältnis zwischen der zwölften Quinte und der siebenten Oktave heißt in der Musiktheorie „pythagoreisches Komma“. Erst viel später erkannte man, daß auch für die Schwingungszahlen der Töne entsprechende Proportionen bestehen, da die Frequenz einer Saite im reziproken Verhältnis zu ihrer Länge steht. Halbiert man etwa die Länge der schwingenden Saite, so verdoppelt sich die Schwingungszahl. Der Aufbau einer klangvollen Tonleiter aus 8 Tönen ließ sich nun mathematisch durch ganze Zahlen fassen. Den sieben Tonschritten der pythagoreischen Tonleiter sind folgende Proportionen von Schwingungszahlen zugeordnet:

$$\frac{9}{8}-\frac{9}{8}-\frac{256}{243}-\frac{9}{8}-\frac{9}{8}-\frac{9}{8}-\frac{256}{243}\text{*)}$$

Wesentlich war hierbei für die Pythagoreer eine Bestätigung ihrer philosophischen Grundhaltung, daß sich harmonische Zusammenklänge von Tönen auf Verhältnisse kleiner ganzer Zahlen zurückführen lassen.

Die Pythagoreer wollten ihre philosophische Lehre von den Zahlen im Sinne einer Allaussage verstanden wissen. Für den Beweis einer Allaussage ist jedoch die Bestätigung durch eine auch noch so große Anzahl von Beispielen nicht hinreichend. Als Erfinder einer Allaussage muß man sich davor hüten, daß eines Tages ein vom Wahrheitsdrang besessener Schüler ein Gegenbeispiel aufsticht. Ein solcher Schüler fand sich – allerdings nicht mehr zu Lebzeiten von Pythagoras – im unteritalienischen Metapontion. Pythagoras war in diese Stadt gezogen und hatte auch dort einen Schülerkreis um sich geschart.

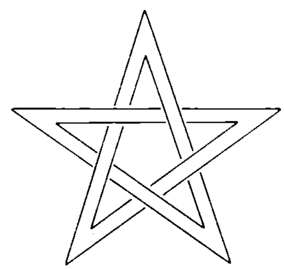


Bild 1
Pentagramm, Geheimzeichen der Pythagoreer

Der Bund der Pythagoreer, dessen Mitglieder in verschiedenen Städten Unteritaliens lebten, besaß ein geheimes Zeichen der Zusammengehörigkeit. Es war ein regelmäßiger Fünfstern. Hippasos von Metapontion mag als Neuling in dem Bunde einmal das Geheimzeichen in sein Wachstäfelchen eingeritzt haben. Hierbei kann ihm der Gedanke gekommen sein, gemäß der Lehre seines Meisters jenes Paar natürlicher Zahlen aufzusuchen, welches das Verhältnis der Längen von Diagonale zu Seite im regelmäßigen Fünfeck erfaßt. Heute ist nicht mehr rekonstruierbar, mittels welcher Hilfslinien am Pentagramm Hippasos klar wurde, daß sich für die Längen dieser beiden Strecken kein gemeinsames Maß finden läßt. Im heutigen Sprachgebrauch würden wir sagen: Hippasos

*) Man vergleiche hierzu auch den Aufsatz „Mathematik im Reich der Töne“, 6. Jahrgang (1972), Heft 6, und 7. Jahrgang (1973), Heft 2.

entdeckte die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck. Vermutlich hat ihn das Prinzip der Wechselwegnahme (Kettendivision) von Strecken zu dieser umwälzenden Erkenntnis geführt. Dies mag sich um 430 v. u. Z. ereignet haben.

Pythagoras war inzwischen in Metapontion verstorben, aber die Autorität des Meisters blieb über seinen Tod hinaus unter seinen Jüngern bestehen. Erschreckt, aber auch von Wahrheitsdrang besessen, verbreitete Hippasos die Kunde über seine Entdeckung, die der philosophischen Lehre des Meisters den Todesstoß versetzte. Am meisten verübelten ihm die Bundesmitglieder, daß er seine Erkenntnis auch Fremden mitteilte, die dem Bunde nicht angehörten. Sie reagierten damit, daß sie den Hippasos aus ihrem Orden verstießen. Man errichtete ihm symbolisch eine Grabstätte, und eine spätere Sage weiß zu berichten, daß Hippasos auf einer Seefahrt in dem vom Sturm aufgewühlten Meer untergegangen sei.

Unabhängig davon blieb diese neue Erkenntnis nicht ohne Rückwirkungen auf den Orden der Pythagoreer. Er spaltete sich in zwei Gruppen auf. Die eine Gruppe, Akusmatiker genannt, schwor weiterhin auf die philosophischen Lehren des Meisters. Sie trieb rationale Arithmetik an Spielsteinen. Die Mathematiker hingegen zogen die Konsequenzen aus der unbequemen Entdeckung des Hippasos. Sie pflegten vor allem die Geometrie und waren bereit, neue Abenteuer mit künftigen mathematischen Entdeckungen auf sich zu nehmen. Die Entdeckung des Hippasos löste die erste Grundlagenkrise in der Mathematik aus.

Mit den uns zur Verfügung stehenden mathematischen Schulkenntnissen stellt sich die Frage, wo die Pythagoreer ihr Selbstbewußtsein und ihre Selbstsicherheit bezüglich ihrer philosophischen Lehre hernahmen. Die natürlichen Zahlen lassen sich auf der Zahlengeraden durch Punkte veranschaulichen. Als Bild ergibt sich eine gleichabständige Punktreihe. Daraus kann man sich mittels des Strahlensatzes die Punkte jeder beliebigen rationalen Zahl konstruieren.

Hat man nun zwei rationale Punkte r_1 und r_2, so läßt sich stets ein weiterer rationaler Zwischenpunkt konstruieren. Zum Beispiel ist $r_3 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ ein solcher Punkt. Aber auch $r_3 = \frac{8r_1 + 5r_2}{13}$ ist ein zwischen r_1 und r_2 liegender rationaler Punkt, der nach dem Strahlensatz aus r_1 und r_2 konstruierbar ist. Dabei können r_1 und r_2 schon beliebig dicht benachbart sein. Man sagt auch, die rationalen Punkte liegen auf der Zahlengeraden dicht. Derartige Gedankengänge waren den Pythagoreern bereits geläufig. Daher erschien es ihnen unbegreiflich, daß zwischen diesen rationalen Punkten noch „Lücken" bestehen, die sich nicht mit rationalen Zahlen schließen lassen. Erst Hippasos wies von dieser auf den ersten Blick sehr plausibel erscheinenden Überlegung nach, daß sie auf einem Trugschluß beruhte. Die noch bestehenden Lücken in der Menge der rationalen Zahlen bezüglich der reellen Zahlen werden von den irrationalen Zahlen geschlossen. Diese kann man nicht auf konstruktivem Wege mittels des Strahlensatzes aus den natürlichen Zahlen gewinnen. Sie lassen sich daher auch nicht durch Division zweier auch noch so großer ganzer Zahlen erzeugen. Als Schulbeispiel für den Nachweis der Existenz irrationaler Zahlen muß in der Regel die Zahl $\sqrt{2}$ herhalten.

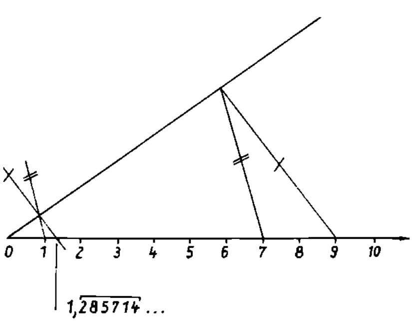


Bild 2
Konstruktion der Zahl 1,$\overline{285714}$... mittels des Strahlensatzes aus ganzen Zahlen

Die große Zeit der Pythagoreer, die von sich glaubten, den Schlüssel zur Erkenntnis der Welt zu besitzen, nannte man auch das Goldene Zeitalter der Griechen. Sie deckte sich etwa mit der Regierungszeit des Perikles (500–429 v. u. Z.). Mit der Entdeckung irrationaler Zahlen war der Glaube an die eigene Stärke erschüttert. Eine Vorstellung von der Resonanz, die bei den Zeitgenossen durch die Feststellung der Unhaltbarkeit der pythagoreischen Lehre ausgelöst wurde, kann man an dem Reisebericht des Platon von Athen (427–347 v. u. Z.) ermessen. Dieser war zunächst noch ein Anhänger der Lehren des Pythagoras. Als er um 400 v. u. Z. bei dem Mathematiker Theodoros in Kyrene (Nordafrika) weilte, demonstrierte ihm dieser die Inkommensurabilität der Zahlen $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$. Die Kunde von der Existenz irrationaler Zahlen hatte Platon als mathematischen Laien offenbar sehr erregt. Er schrieb darüber: „Ich habe ja wohl auch selbst erst recht spät etwas davon vernommen und mußte mich über diesen Übelstand bei uns höchlich wundern. Es kam mir vor, als wäre das gar nicht bei Menschen möglich, sondern nur etwa bei Schweinevieh. Und da schämte ich mich, nicht nur für mich selbst, sondern auch für alle Hellenen."

Bevor wir die Gedankengänge des Hippasos am Pentagramm und regelmäßigen Fünfeck zu rekonstruieren versuchen, sollen einige Ergebnisse aus der naturwissenschaftlichen Forschung angeführt werden, die weniger zur Verlegenheit sondern mehr zur Bestätigung der pythagoreischen Lehre beizutragen scheinen.

1. Kalenderrechnung

Als die Völker damit begannen, ihre Geschichte aufzuzeichnen, boten sich vor allem die Umlaufzeiten von Sonne, Mond und Sternen – aus geozentrischer Sicht – als Zeiteinheiten an. Die Sonne lieferte den Tag, der Mond den Monat und die Fixsterne das (siderische) Jahr als Zeiteinheiten. Da die Umlaufbewegung der Erde um die Sonne, die Eigenrotation der Erde und die Umlaufbewegung des Mondes um die Erde nicht wie durch die Räder eines Uhrwerkes miteinander verzahnt sind, boten sich bei der Einteilung des Jahres als längste Zeiteinheit in Monate und Tage einige Schwierigkeiten. Zum Beispiel war in Ägypten an den jährlich sehr regelmäßig einsetzenden Nilüberschwemmungen zu beobachten, daß sich einem (tropischen) Jahr weder eine ganze Zahl von Monaten noch eine ganze Zahl von Tagen zuordnen läßt. Der Mond spielte jedoch bei den Anrainern des Mittelmeeres eine wichtige Rolle zur Festlegung von Festen und ritualen Handlungen. Andererseits war die Länge des Jahres mit dem Wechsel der Jahreszeiten und dem Eintreten von Überschwemmungen und Dürreperioden für die Bauern zur Feldbestellung und Einbringung der Ernten von lebenswichtiger Bedeutung.

Bereits im fünften Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung lagen über die Umlauf- und Rotationszeiten der Gestirne so genaue Beobachtungen vor, daß man ein recht brauchbares Zeitmaß als kleinstes gemeinsames Vielfaches von Monat und Jahr berechnen konnte. Der von Meton eingeführte Zyklus umfaßt 19 (tropische) Jahre. In diesem Zeitraum finden 235 Mondwechsel (Lunationen) statt. Zwischen beiden besteht eine Zeitdifferenz von 2 Stunden. Allerdings läßt sich diesem Zyklus nicht eine ganze Zahl von Tagen zuordnen. 19 tropische Jahre (Zeit zwischen zwei Frühjahrsäquinoktien) umfassen 6939 Tage und 14,5 Stunden. 235 Lunationen entsprechen 6939 Tagen und 16,5 Stunden.

Zur Zeit Cäsars (100–44 v. u. Z.) war bekannt, daß ein tropisches Jahr etwa 365,25 Tagen gleichzusetzen ist. Der auf dieser Erkenntnis fußende Julianische Kalender galt über 16 Jahrhunderte. Da das tropische Jahr jedoch in Wirklichkeit 11,25 Minuten kürzer ist, kam dieser Kalender im Laufe der Jahrhunderte ins Rutschen. Der 1582 eingeführte Gregorianische Kalender differenzierte noch genauer die Verteilung der 366 Tage umfassenden Schaltjahre. Das aus dem Gregorianischen Kalender resultierende Jahr ist noch 26 Sekunden zu lang gegenüber dem tropischen Jahr. Diese Differenz ist jedoch belanglos und bewirkt erst in 3000 Jahren eine Verschiebung um einen Tag.

Jede noch so kluge künftige Kalenderreform kommt an der Aufgabe nicht vorbei, eine den astronomischen Gegebenheiten möglichst gut angepaßte rationale Beziehung zwischen der

Dauer eines tropischen Jahres und eines Tages herzustellen. Der vor fast 2500 Jahren aufgestellte Metonische Zyklus leistet noch heute zur Festlegung des Ostertermins seine Dienste.

2. Astronomie

Kalenderrechnung und Astronomie sind eng miteinander verquickt. Der Aufbau des Kalenders fußt auf astronomischen Beobachtungen. Hier soll an zwei Beispielen gezeigt werden, wie die philosophische Lehre der Pythagoreer bewußt oder unbewußt die astronomische Forschung nach zweitausend Jahren noch beeinflußte.

Das Hauptwerk des Astronomen und Mathematikers Johannes Kepler (1571–1630) trägt den Titel „Harmonices mundi", zu deutsch „Weltharmonien". Von den darin enthaltenen drei Keplerschen Gesetzen ist hier das dritte von Interesse. Es lautet: Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne. Kepler fand dieses Gesetz auf spekulativem Wege durch Auswertung der von Tycho Brahe vorliegenden Beobachtungsdaten. Begeistert über seine Entdeckung schreibt er selbst: „Endlich habe ich das ans Licht gebracht und über all mein Hoffen und Erwarten als wahr befunden, daß die ganze Natur der Harmonien in ihrem ganzen Umfang und nach all ihren Einzelheiten in den himmlischen Bewegungen vorhanden ist..." Die Übereinstimmung des dritten Keplerschen Gesetzes mit der Wirklichkeit zeigt die folgende Tabelle, in der die mittleren Planetenentfernungen auf die Einheit der mittleren Erdentfernung und die Umlaufzeiten auf das Erdenjahr bezogen sind.

Planeten	T	r	T^2	r^3
Merkur	0,241	0,387	0,058	0,058
Venus	0,615	0,723	0,378	0,378
Erde	1,000	1,000	1,000	1,000
Mars	1,881	1,524	3,538	3,540
Jupiter	11,86	5,203	140,7	140,8
Saturn	29,46	9,539	867,9	868,0

Der Quotient $T^2:r^3$ stimmt für die zu Keplers Lebzeiten bekannten Planeten fast exakt überein. Heute sind wir Erdbewohner in der Lage, Raumsonden nach anderen Planeten zu schicken. Vielfach schwenken diese Sonden nach Erfüllung ihrer Aufgabe in selbständige Umlaufbahnen um die Sonne ein. Bei störungsfreiem Umlauf um unser Zentralgestirn ist auch für künstliche Sonden die Zahl $T^2:r^3$ mitbestimmend für die Art ihrer Umlaufbewegung.

An dem von Kepler auf spekulativem Wege gefundenen Gesetz ist noch eine Korrektur anzubringen. Wie sich mittels der von Newton begründeten Himmelsmechanik zeigen läßt, fließen auch die Massen der an der Bewegung beteiligten Körper mit ein. Ist M die Masse der Sonne, m_i die Masse, r_i der mittlere Abstand und T_i die Umlaufzeit des i-ten Planeten, so ist die Zahl

$$\varrho = \frac{r_i^3}{T_i^2(M+m_i)}$$

unabhängig von i, das heißt, sie ist für sämtliche Planeten des Sonnensystems gleich. Der Fehler tritt in unserer Übersicht nicht in Erscheinung, weil die Sonnenmasse außerordentlich groß gegenüber der Masse der Planeten ist.

Auch die Planetenabstände waren für viele Astronomen der Neuzeit noch Gegenstand spekulativer Überlegungen. Ein Schönheitsfehler bezüglich der Abstandsskala von der Sonne paßte zunächst nicht in die Vorstellungen vom harmonischen Aufbau des Planetensystems. Zwischen Mars und Jupiter klaffte eine weite Lücke. So suchte man gegen Ende des 18. Jahrhunderts diesen fraglichen Gürtel um die Sonne systematisch nach einem vielleicht verborgen gebliebenen kleineren Planeten ab. Am 1. Januar 1801, dem ersten Tag des neunzehnten Jahrhunderts, wurde endlich ein sehr kleiner Himmelskörper in diesem Bereich entdeckt und auf den Namen Ceres getauft. Der Entdecker dieses Planetoiden, Piazzi, verfolgte Ceres noch sechs Wochen lang und mußte dann die Beobachtung wegen einer schweren Erkrankung abbrechen. Bis dahin hatte kein zweiter Astronom die Entdeckung von Piazzi bestätigen können. Gauß berechnete auf Grund der Beobachtungsdaten nach einem von ihm entwickelten Verfahren die Bahn des Himmelskörpers. Dank dieser Berechnungen konnte Ceres nach einem Jahr mit dem Fernrohr genau anvisiert und gesichtet werden. Nun begann eine regelrechte Jagd nach gleichartigen Himmelskörpern, da man Ceres als das Bruchstück eines vor langer Zeit in Trümmer gegangenen größeren Planeten ansah.

Heute kennt man die Bahnen von über 4000 Planetoiden, welche die Hypothese über den zerborstenen größeren Planeten zwischen Mars und Jupiter zu stützen scheinen. Mit diesem Ersatzplaneten ließ sich nun auch die Abstandslücke zwischen Mars und Jupiter zwanglos schließen. Der Wittenberger Professor Titius stellte die folgende Zahlenfolge als Hypothese für die Planetendistanzen auf.

Planet	hypothetische Distanz	wirkliche Distanz
Merkur	$0+4=4$	3,9
Venus	$3+4=7$	7,2
Erde	$6+4=10$	10,0
Mars	$12+4=16$	15,2
Planetoiden	$24+4=28$	15–53
Jupiter	$48+4=52$	52,0
Saturn	$96+4=100$	95,5
Uranus	$192+4=196$	192,2
Neptun	$384+4=388$	301,1

Die hypothetischen Distanzen bilden – von der Venus ausgehend – eine Zahlenfolge, die durch Zufügen einer additiven Konstanten zu den Gliedern einer geometrischen Folge konstruierbar ist. Bis zum Uranus halten sich die Abweichungen von den tatsächlichen Distanzen in angemessenen Grenzen. Diese Reihe wurde von Bode (1747–1826) veröffentlicht und ist unter dem Namen Titius-Bodesche Reihe in die Fachliteratur eingegangen.

Bemerkenswert ist noch, daß Titius bei Aufstellung der Reihe im Jahre 1766 noch nichts von der Existenz der Planeten Uranus und Neptun wußte. Diese wurden erst 1781 bzw. 1846 entdeckt. Die Suche nach dem Neptun, der zunächst nur indirekt durch Bahnstörungen am Uranus registriert worden war, konnte mittels der Titius-Bodeschen Reihe gezielter angesetzt werden. Auch die Jagd der Astronomen nach Planetoiden vor allem im 19. Jahrhundert ließ sich bei Kenntnis dieser Reihe auf einen beschränkten Raum konzentrieren. Für die Distanz des sonnenfernsten, erst 1930 entdeckten Pluto ergibt sich eine wesentliche Abweichung von der Titius-Bodeschen Regel.

3. Geometrie und Stereometrie

In das sogenannte Goldene Zeitalter fallen drei Problemstellungen, an deren Lösungsbemühungen die griechische Mathematik wuchs. Dies sind 1. die Quadratur des Kreises; 2. die Dreiteilung eines beliebigen Winkels; 3. die Verdoppelung des Würfels. Die Unmöglichkeit der Lösung dieser drei Probleme mit Zirkel und Lineal wurde erst im 19. Jahrhundert zwingend bewiesen. Versagten in der Antike diese elementaren Mittel zur Lösung, so wurden neue erfunden. Dies trug zur Bereicherung der Kenntnisse über ebene Kurven bei.

In diesem Zusammenhang soll unser Interesse der Kreisrektifikation gelten. Gleichwertig damit ist die Fragestellung nach der Verhältniszahl von Umfang zu Durchmesser eines Kreises, also $\pi = U:d$. Die gesuchte Zahl π tritt zwangsläufig auch beim Problem der Kreisquadratur $\left(A=\frac{1}{4}\pi d^2\right)$ auf. Ein bemerkenswertes Ergebnis lieferte Hippokrates (um 400 v. u. Z.), der nachwies, daß es Kreismöndchen gibt, deren Inhalte auf die Inhalte von Dreiecken zurückführbar sind. Dies mag ermutigend für die unmittelbaren Nachfolger gewesen sein, für die Verhältniszahl π einen rationalen Zugang ausfindig zu machen. Von Archimedes läßt sich nachweisen, daß er die Zahl π in folgende Grenzen eingeschlossen hat:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Nach einem Bericht von Heron soll Archimedes sogar folgende verschärfte Abschätzung gegeben haben:

$$\frac{211872}{67441} < \pi < \frac{195882}{62351}$$

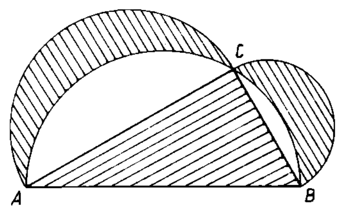


Bild 3
Möndchen des Hippokrates

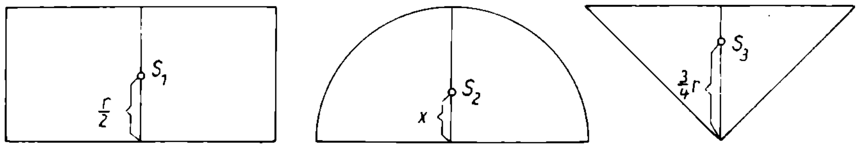


Bild 6
Schwerpunktbestimmung bei der Halbkugel

Hierdurch ist π bis auf fünf Stellen nach dem Komma festgelegt. Jedoch wurden schon in dieser Zeit Vermutungen laut, daß der exakte Wert für π unter den rationalen Zahlen nicht zu finden sei.

Archimedes wagte sich auch an die Aufgabe, die Inhalte krummlinig begrenzter Flächenstücke zu bestimmen. An derartige Problemstellungen wurde erst im 17. Jahrhundert wieder angeknüpft. Zum Beispiel berechnete er den Inhalt des Parabelsegmentes und setzte es in Beziehung zum Inhalt des dieses Segment einschließenden Parallelogramms. Diese Untersuchung führte ihn auf das Zahlenverhältnis

$A_{Parabelsegment} : A_{Parallelogramm} = 2:3.$

Er zog auch Vergleiche zwischen den Volumina der Halbkugel mit dem umbeschriebenen Drehzylinder und dem einbeschriebenen Drehkegel (s. Bild 5). Durch Anwendung eines Zerlegungsverfahrens, das man als Schichtenmethode bezeichnen kann, kam er zu folgendem Ergebnis:

$V_{Zylinder} : V_{Halbkugel} : V_{Kegel} = 3:2:1.$

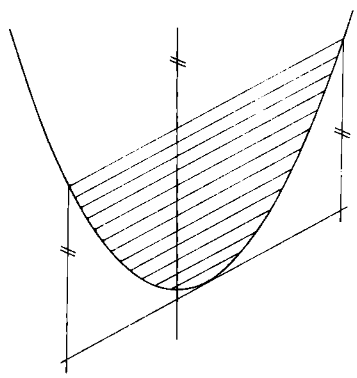


Bild 4
Inhalte von Parabelsegment und umbeschriebenem Parallelogramm

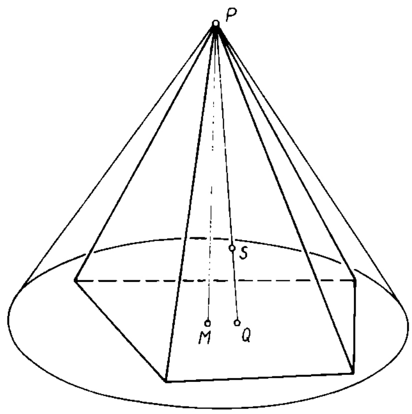


Bild 7
Schwerpunktbestimmung bei der Pyramide

Zu beachten ist hierbei, daß die Inhalte der Basisflächen und die Längen der Höhen für alle drei Drehkörper gleich sind.

Archimedes wandte seine Schichtenmethode auch erfolgreich auf statische Probleme an. Zum Beispiel teilt der Schwerpunkt S des Drehkegels die Körperhöhe r im Verhältnis 1:3. Da der Zylinderschwerpunkt die Körperachse halbiert, ergibt sich nach statischen Überlegungen für den Abstand x des Schwerpunktes S der Halbkugel von der Basis folgende Gleichung:

$$\frac{r}{2} = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{3}{4}r\right)$$

Hieraus folgt $x = \frac{3}{8}r$. Der Schwerpunkt S der Halbkugel teilt also die Drehachse des Körpers im Verhältnis 3:5 (s. Bild 6).

Die Schichtenmethode gestattet auch eine Verallgemeinerung der Aussage über die Lage des Schwerpunktes beim Drehkegel. Legt man mehrere ebene Schnitte durch die Kegelspitze P, so bleibt als Restkörper eine schiefe Pyramide. Die Inhalte der Schichten der Pyramide sind proportional zu den Schichten des Drehkegels. Folglich hat der Schwerpunkt des Restkörpers von der Basisfläche gleichfalls den Abstand $r/4$. Außerdem liegt er auf der Schwerelinie des Körpers durch die Körperspitze P. Diese ausgezeichnete Schwerelinie von Pyramiden und Kegeln findet man durch Verbinden des Schwerpunktes Q der Basisfläche mit der Kegelspitze P (s. Bild 7).

Archimedes bewältigte mit seiner Schichtenmethode auch die Volumenbestimmung des Drehparaboloides. Er erkannte, daß die Volumina der Schichten gleicher Stärke eines Drehparaboloides eine arithmetische Folge bilden, deren Glieder sich leicht summieren lassen. Mittels einbeschriebener und umbeschriebener Zylinderschichten schätzte er das Volumen des Drehparaboloides nach unten und oben ab. Durch Grenzbetrachtung schloß Archimedes weiter, daß das Volumen eines Drehparaboloides gerade halb so groß ist wie das Volumen des dem Paraboloid umschriebenen Drehzylinders. Es gilt also

$V_{Paraboloid} : V_{Zylinder} = 1:2.$

Aus statischen Überlegungen läßt sich mittels der Schichtenmethode weiter folgern, daß der Schwerpunkt S des Drehparaboloides die Drehachse im Verhältnis 1:2 teilt (s. Bild 8).

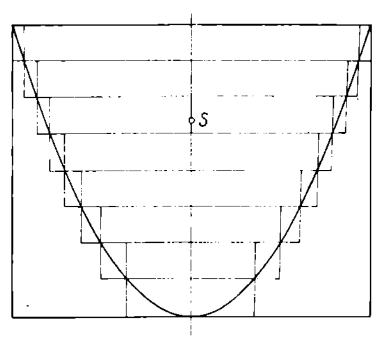
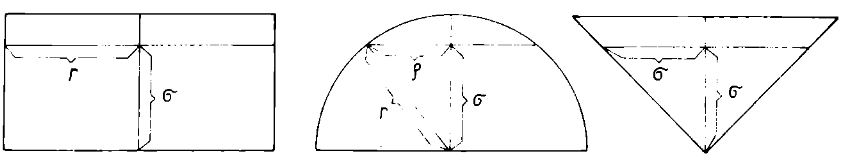


Bild 8
Volumen des Drehparaboloids

Die Beispiele zeigen, daß sich auch in der Geometrie viele Größenbeziehungen durch kleine ganze Zahlen erfassen lassen. Der zahlentheoretische Gehalt, der im Problem der Kreisrektifikation und damit auch der Kreisquadratur verborgen liegt, konnte erst mit den Mitteln der modernen Mathematik im 19. Jahrhundert voll aufgedeckt werden.

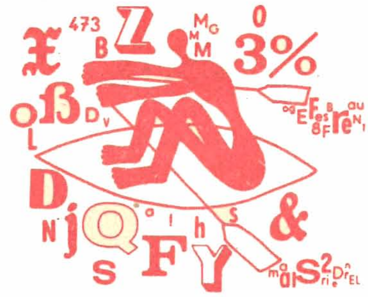
E. Schröder



$$r^2 = \rho^2 + \sigma^2 \Rightarrow \pi r^2 = \pi\rho^2 + \pi\sigma^2 \Rightarrow v_1 = v_2 + v_3$$

Bild 5
Anwendung der Schichtenmethode zur Ermittlung der Inhaltsbeziehung von Drehzylinder, Halbkugel und Drehkegel

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 8. März 1978

Mathematik

Ma 5 ■1679 Katrin besitzt 12 Buntstifte, und zwar doppelt soviel rote wie grüne, genau soviel gelbe wie blaue.
Wieviel Buntstifte jeder dieser Farben sind es? *Schülerin Birgit Weyh, Fambach, Kl. 7*

Ma 5 ■1680 In einem Ferienlager bewohnen Andreas, Bert, Christian und David gemeinsam ein Zelt. Sie kommen aus verschiedenen Orten, und zwar aus Gotha, Erfurt, Sömmerda und Weimar. Aus ihren Gesprächen erfahren wir folgendes:

a) Der Junge aus Weimar ist älter als die Jungen aus Erfurt und Sömmerda.

b) David ist älter als der Erfurter.

c) Andreas, der älteste von ihnen, wohnt nicht in Gotha.

d) Christian ist noch nicht so alt wie der Junge aus Erfurt, aber mit dem Jungen aus Sömmerda gleichaltrig.

Ordne jedem Vornamen den richtigen Wohnort zu! Ordne die Jungen nach ihrem Lebensalter; beginne mit dem Jüngsten!

Schüler T. Weiß, Weimar

Ma 5 ■1681 Ein Zimmer von 4,80 m Länge und 3,60 m Breite, dessen Fußboden die Form eines Rechtecks hat, soll mit quadratischen Teppichfliesen, die eine Seitenlänge von 40 cm besitzen, ausgelegt werden. Die dafür benötigten Teppichfliesen, die 4 mm dick sind, werden übereinander gestapelt. Wie hoch wird dieser Stapel aus Teppichfliesen, wenn sie sich insgesamt durch ihr Eigengewicht um 2 cm zusammenpressen?

Schüler Holger Nörenberg, Teltow, Kl. 7

Ma 5 ■1682 Auf einer Weide grasen Pferde, Kühe und Schafe; zusammen sind es mehr als 90, aber weniger als 100 Tiere. Es sind doppelt soviel Kühe wie Pferde, und viermal soviel Schafe wie Kühe. Wieviel Pferde, Kühe bzw. Schafe befinden sich auf dieser Weide?

Schüler Thomas Böhme, Eisleben, Kl. 7

Ma 5 ■1683 Bei einer Exkursion sollen 87 Schüler mit drei Bussen befördert werden. Nachdem alle Schüler eingestiegen waren, stellte man fest, daß die Busse ungleichmäßig besetzt waren. Da in jedem Bus die gleiche Anzahl von Schülern fahren sollte, stiegen aus dem ersten Bus sechs Schüler in den zweiten und drei Schüler in den dritten Bus um. Außerdem stiegen noch vier Schüler vom zweiten in den dritten Bus um. Wieviel Schüler befanden sich vor dem Umsteigen in jedem dieser drei Busse?

Fachlehrer H. Kampe, Neuseddin

Ma 5 ■1684 An einer Klassenarbeit im Fach Mathematik waren mehr als 20, aber weniger als 30 Schüler beteiligt. Der fünfte Teil der Anzahl dieser Schüler erhielt die Note 1. Die Note 2 erhielten drei Schüler mehr als die Note 1. Die Note 3 erhielten doppelt soviel Schüler wie die Note 1. Die restlichen Schüler erhielten die Note 4. Wieviel Schüler erhielten die Note 1, 2, 3, 4?

Schülerin Martina Ullrich, Guben, Kl. 7

Ma 6 ■1685 Ein gleichschenkliges Dreieck habe einen Umfang von 14 cm. Eine der Seiten ist dreimal so lang wie eine zweite der drei Seiten. Welche Länge hat jede Dreieckseite? *Schüler Thomas Böhme, Eisleben, Kl. 7*

Ma 6 ■1686 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, deren fünfter Teil gleich ihrer Quersumme ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■1687 Auf einem Tisch stehen drei Schalen mit Äpfeln. In der ersten Schale sind halb so viele Äpfel, wie in jeder der beiden anderen. Nimmt man aus der ersten Schale zwei Äpfel und legt sie in die zweite, nimmt

30	Thies Luther, 26 Güstrow, Werderstr. 22 Kersting-OS, Klasse 7 150	30 Ma 7■ 1369
	Prädikat:	10
	Lösung:	

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm · 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1977/78 läuft von Heft 5/77 bis Heft 2/78. Zwischen dem 1. und 10. September 1978 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/78 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1977/78 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

man danach aus der zweiten Schale vier Äpfel und legt sie in die dritte, nimmt man schließlich aus der dritten Schale sechs Äpfel und legt sie in die erste, so sind in jeder Schale gleich viele Äpfel. Wieviel Äpfel waren anfangs in jeder dieser Schalen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

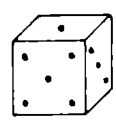
Ma 6 ▪1688 Die Sportler der Volksrepublik Bulgarien errangen bei den Olympischen Sommerspielen 1976 in Montreal insgesamt 24 Medaillen, und zwar eine Goldmedaille weniger, aber eine Bronzemedaille mehr als Silbermedaillen. Wieviel Gold-, Silber- bzw. Bronzemedaillen waren es?

Schüler Uwe Würker, POS Mülsen St. Micheln

Ma 6 ▪1689 Großvater, Vater und Sohn gingen in den Wald, um Pilze zu sammeln. Der Großvater fand zwei Pilze mehr als der Vater, der Sohn fünf Pilze mehr als der Großvater. Insgesamt brachten sie 78 Pilze mit nach Hause. Wieviel Pilze haben Großvater, Vater bzw. Sohn gefunden?

Schüler Frank-Michael Wegner, Lenin-OS Greifswald, Kl. 5

Ma 7 ▪1690 Das Bild stellt die Anordnung der ungeraden Augenzahlen auf einem Spielwürfel dar. Acht solche Spielwürfel werden zu einem größeren Würfel zusammengesetzt. Ein Betrachter dieses Würfels möge genau drei in einer Ecke zusammenstoßende quadratische Flächen sehen. Jede sichtbare quadratische Fläche der ursprünglichen Spielwürfel habe nur ungerade Augenzahlen. Die Summe aus allen dem Betrachter sichtbaren Augenzahlen betrage 30. Es ist zu zeigen, daß die Augenzahl 1 mindestens viermal vorkommt! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*



Ma 7 ▪1691 Während der Olympischen Sommerspiele 1976 in Montreal bewältigte die Athletin *Johanna Schaller* aus der DDR den 100-m-Hürdenlauf der Damen in 12,77 Sekunden. Sie war damit um nur $\frac{1}{100}$ Sekunde schneller als *Tatjana Anissimowa* aus der UdSSR. Wieviel Meter Vorsprung hatte *Johanna Schaller* gegenüber *Tatjana Anissimowa*, als sie über die Ziellinie lief, wenn die Laufgeschwindigkeiten beider Läuferinnen als konstant angenommen werden?

stud. chem. Annegret Kirsten, Leuna/Merseburg

Ma 7 ▪1692 Ute kaufte in einem Schreibwarengeschäft Hefte, Schnellhefter und Filzstifte, wofür sie zusammen 7,20 M bezahlen mußte. Der Preis für einen Filzstift beträgt 1,20 M, für ein Heft 12 Pf und für einen Schnellhefter 1,05 M. Der Preis für die gekauften Filzstifte macht den dritten Teil des Gesamtpreises aus. Wieviel Hefte, Schnellhefter bzw. Filzstifte hat Ute eingekauft?

Schüler Heiko Lehmann, Herderschule Rostock, Kl. 6b

Ma 7 ▪1693 Es sind alle gebrochenen Zahlen $x=\frac{a}{b}$ zu ermitteln, für die $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$ und $b-a=12$ gilt! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ▪1694 Drei Männer heißen mit Vornamen Bernd, Günter und Dieter. Ihre Familiennamen sind Krüger, Dahlen und Lohe; ihre Berufe Elektriker, Lehrer und Gärtner. Über sie ist folgendes bekannt:
(1) Krüger ist mit Bernd befreundet.
(2) Der Elektriker und Bernd helfen Lohe beim Hausbau.
(3) Der Lehrer, Dieter und Dahlen spielen gern Skat.
(4) Dahlen, der von Beruf Gärtner ist, und Günter haben einen Garten.
Wie heißt jeder einzelne mit vollem Namen, und welchen Beruf übt er aus? Welche der vier Angaben ist überflüssig?

Sabine Neumann, Wusterwitz, Kl. 6

Ma 8 ▪1695 Es ist zu beweisen:
Wenn die Summe von vier beliebigen natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist das Produkt aus diesen vier Zahlen eine gerade Zahl. *Schüler Frank Erdmann, Zeitz, Kl. 9*

Ma 8 ▪1696 Gegeben sei ein Winkel von 63°. Man teile diesen Winkel mit Zirkel und Lineal
a) in drei gleiche Teile
b) in sieben gleiche Teile!

Schüler Andreas Fittke, EOS H. Hertz, Berlin

Ma 8 ▪1697 In einen Kreis k mit einem Durchmesser von 20 cm Länge seien zwei zueinander parallele Sehnen von 10 cm und 5 cm Länge gezeichnet. Es ist der Abstand dieser beiden Sehnen zu berechnen.

Schüler Wolfgang Hensel, Fambach

Ma 9 ▪1698 Finden Sie reelle Zahlen x und y, deren Summe gleich ihrem Produkt ist, und beweisen Sie, daß x und y nur dann rationale Zahlen sind, wenn das Quadrat ihrer Summe vermindert um das Vierfache dieser Summe eine Quadratzahl ist!

Schüler Michael Schreckenbach, Remtengrün, Kl. 11

Ma 9 ▪1699 Es ist zu beweisen, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n \neq 0$ gilt:

$$\frac{n\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}}}{n}=\frac{n}{\sqrt{n}}$$

Schüler Ralf Kröner, Vetschau, Kl. 8

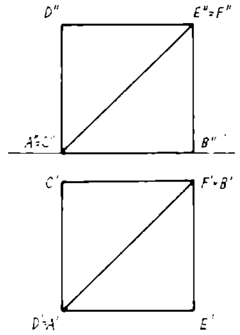
Ma 9 ▪1700 Es ist zu beweisen:
Es gibt keine Quadratzahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 läßt!

Schüler Horst Szillat, Berlin, Kl. 9

Ma 9 ▪1701 Gegeben sind drei kongruente Kreise k_1, k_2, k_3 mit den Radien $r_1=r_2=r_3=r$ und genau einem gemeinsamen Randpunkt. Die Mittelpunkte der Kreise bilden ein gleichseitiges Dreieck. Die Vereinigungsmenge der Menge aller Randpunkte und der Menge aller inneren Punkte dieser drei Kreise wird durch ein Flächenstück dargestellt, dessen Inhalt mit A bezeichnet sein soll.
a) Wie groß ist A?
b) Wie groß ist r, wenn $A=80\ \text{cm}^2$ beträgt?

Schüler Heiko Müller, Schmalkalden

Ma 10/12 ▪1702 Stellen Sie den in senkrechter Zweitafelprojektion abgebildeten Körper in Kavalierperspektive dar, und entwickeln Sie eine Formel für die Berechnung seines Volumens!



Dipl.-Lehrer f. Math. Helmut Engelmann, Sachsendorf

Ma 10/12 ▪1703 Man ermittle alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \text{ mit } x \neq 0 \text{ und } x \geqq y \geqq z \qquad (1)$$
$$y \neq 0$$
$$z \neq 0$$

in natürlichen Zahlen! *U. Spittel, Jena*

Ma 10/12 ▪1704 Gegeben sei eine Kugel, deren Oberflächeninhalt (in cm^2) die gleiche Maßzahl besitzt wie ihr Volumen (in cm^3). Dieser Kugel sei ein Würfel derart einbeschrieben, daß jeder seiner Eckpunkte auf der Kugeloberfläche liegt.
In welchem Verhältnis stehen
a) die Maßzahlen der Oberflächeninhalte dieses Würfels und dieser Kugel?
b) die Maßzahlen der Volumina dieses Würfels und dieser Kugel?
(Das Verhältnis soll stets in der Form $1:x$ angegeben werden.)

Schüler Frank Erdmann, Zeitz, Kl. 9

Ma 10/12 ▪1705 In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sei D der Schnittpunkt der Höhen. Spiegelt man das Dreieck ABC an der Geraden, die durch A und B geht, so erhält man das Dreieck ABC'.
a) Man beweise, daß die Punkte A, C', B und D auf einem Kreis liegen!
b) Veranschaulichen Sie den Beweis durch eine entsprechende Konstruktion!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Physik

Ph 6 ▪26 Der stählerne Antennenmast eines Rundfunksenders ist bei einer Temperatur von +10 °C genau 200 Meter hoch.

a) Berechne die Höhe des Mastes bei einer Temperatur von $-15\,^\circ\mathrm{C}$ und $+30\,^\circ\mathrm{C}$!

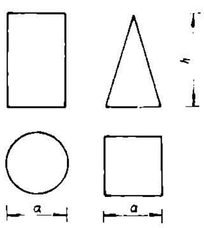
b) Berechne die Längendifferenz des Mastes zwischen den unter a) genannten Temperaturen!

Hinweis: Entnimm die Formel zur Berechnung der Längenänderung dem Buch „Tabellen und Formeln"! Der Längendehnungskoeffizient für Stahl ist $\alpha = 0{,}0000117 \frac{1}{\mathrm{grd}}$. Die Maße sind auf volle Zentimeter zu runden.

Ing. A. Körner, Leipzig

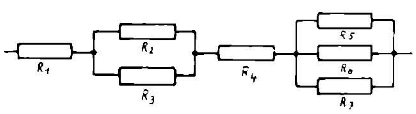
Ph 7 ■27 Ein Zylinder und eine quadratische Pyramide haben die gleiche Masse. Ebenfalls sind die dargestellten Abmessungen gleich. Der Zylinder besteht aus Wachs $\left(\text{Dichte } 0{,}95 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}\right)$.

Ist die Pyramide aus Nadelholz, Aluminium, Quarzglas oder Marmor?



Ph 8 ■28 Berechne den Gesamtwiderstand der nach dem Bild geschalteten Teilwiderstände!

$R_1 = 5\,\Omega$; $R_2 = 50\,\Omega$, $R_3 = 500\,\Omega$;
$R_4 = 1\,\Omega$; $R_5 = 10\,\Omega$; $R_6 = 100\,\Omega$;
$R_7 = 1000\,\Omega$.

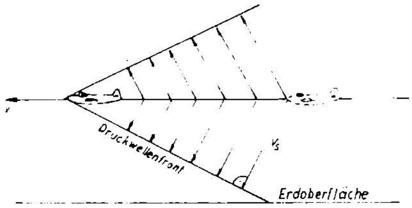


Ph 9 ■29 Zwei kleine Kugeln tragen eine Ladung gleichen Vorzeichens, und ihre Mittelpunkte sind 2 cm voneinander entfernt. Die Abstoßungskraft beträgt 0,25 p. Berechnen Sie die Ladung der einzelnen Kugeln!

Ph 10/12 ■30 Ein Flugzeug überfliegt mit Überschallgeschwindigkeit in einer Höhe von h (Meter) zwei Beobachtungspunkte B_1 und B_2, die mit einer unmittelbaren Nachrichtenverbindung (Funk oder Telefon) ausgerüstet sind und voneinander die Entfernung $a = 18{,}5$ km haben. Der Beobachter B_2 mißt laufend den Höhenwinkel α des sich nähernden Flugzeuges. In dem Moment, als der Beobachter B_1 dem Beobachter B_2 das Wahrnehmen des vom Flugzeug hervorgerufenen „Überschallknalles" meldet (Zeitpunkt t_1), betätigt B_2 eine Stoppuhr und liest gleichzeitig einen Höhenwinkel von $\alpha = 85{,}2^\circ$ ab. Als der Überschallknall bei B_2 zu hören ist (Zeitpunkt t_2), liest B_2 auf der Stoppuhr eine Zeit von 37 Sekunden ab.

a) Wie schnell flog das Flugzeug?

b) In welcher Höhe flog das Flugzeug? Die Schallgeschwindigkeit sei $v_s = 340 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.



Hinweis: Ein mit Überschallgeschwindigkeit fliegendes Flugzeug ruft in der Luft eine ständige Druckwelle hervor, die sich von der Flugzeugspitze kegelförmig im Raum ausbreitet, der sogenannte Machsche Kegel, und beim Auftreffen auf das Ohr als Knall wahrgenommen wird. Diesen Druckkegel schleppt das Flugzeug während des Überschallfluges ständig hinter sich her.

Ing. A. Körner, Leipzig

Chemie

Ch 7 ■21 In einem Betrieb sollen täglich 200 kg Mangan aus Braunstein (MnO_2) gewonnen werden. In 250 mg des angelieferten Braunsteins sind 140 mg Mangan enthalten.

a) Wieviel kg Braunstein müssen dem Betrieb täglich für die Produktion zur Verfügung stehen?

b) Wieviel t Braunstein muß der Betrieb monatlich erhalten, wenn täglich gearbeitet wird (1 Monat = 30 Tage)?

Ch 8 ■22 In einem Labor müssen 100 g reinstes Magnesiumphosphat hergestellt werden. Es stehen Phosphorsäure, Magnesium, Magnesiumoxid und Magnesiumkarbonat zur Verfügung. Errechnen Sie unter Berücksichtigung der Kosten die ökonomischste Methode! (Kosten für Phosphorsäure werden nicht einbezogen.)

Kosten: Magnesium: 23,28 M je kg, Magnesiumoxid: 11,16 M je kg, Magnesiumkarbonat: 6,12 M je kg.

Ch 9 ■23 Das für unsere Landwirtschaft als Dünger sehr wichtige Ammoniumsulfat kann im VEB Leunawerke „Walter Ulbricht" völlig aus einheimischen Rohstoffen hergestellt werden. Hierzu wird Gips mit Ammoniak und Kohlensäure versetzt. Berechnen Sie,

a) wieviel Tonnen Ammoniak,

b) wieviel Tonnen Gips und

c) wieviel Tonnen Kohlendioxid zur Herstellung von 1000 t Ammoniumsulfat gebraucht werden!

Ch 10/12 ■24 Tetrachlormethan wird durch Chlorieren von Schwefelkohlenstoff gewonnen. Nebenprodukt ist hierbei Dischwefeldichlorid (S_2Cl_2). Die Chlorierung von Schwefelkohlenstoff wird in zwei Stufen durchgeführt.

I $CS_2 + 2S_2Cl_2 \rightarrow CCl_4 + 6S$

II $CS_2 + 3Cl_2 \rightarrow CCl_4 + S_2Cl_2$

Dabei wird aber nur ein 58%iger Umsatz in der ersten Stufe erreicht. Es sollen 1,5 t Schwefelkohlenstoff vollständig zu Tetrachlormethan umgesetzt werden. Berechnen Sie

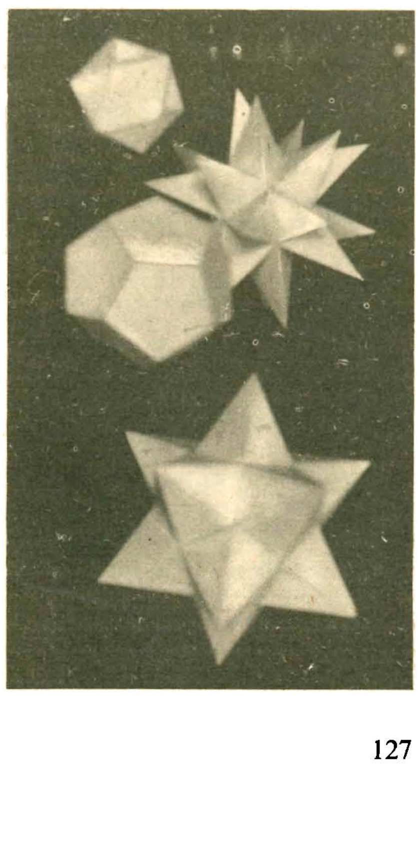
a) die Gesamtmenge des entstehenden Tetrachlormethans in Tonnen,

b) die Menge des in der ersten Stufe nicht umgesetzten Schwefelkohlenstoffs in Tonnen,

c) die Chlorgasmenge in Tonnen, die zur Chlorierung der unter b) ermittelten Schwefelkohlenstoffmenge erforderlich ist!

Zusammenstellung der vier Chemieaufgaben: Diplomlehrer Christel Reuter, 29. OS Leipzig

Sternpolyeder (siehe Beitrag S. 128/129)

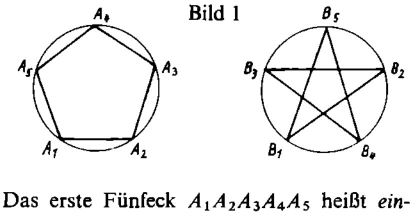


Wir bauen zwei Sternpolyeder

In der Weihnachtszeit verwendet man als Raumschmuck häufig regelmäßig geformte geometrische Körper, die nach außen von einer großen Anzahl regelmäßiger Pyramiden begrenzt werden (siehe Foto Seite 127 rechts unten). In der Mathematik bezeichnen wir diese Körper als Sternpolyeder. Wir werden in diesem Beitrag für zwei reguläre Sternpolyeder eine einfache Bauanleitung angeben. Zum Basteln der Modelle benötigen wir Zeichenkarton im Format A 3, Zeichengeräte, Schere und Klebstoff. Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen sind regelmäßige Fünfecke. Als *Fünfeck* bezeichnen wir einen geschlossenen Streckenzug, d. h. eine Menge von Strecken $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_1}$, wobei A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 paarweise verschiedene Punkte einer Ebene sind, von denen nicht drei auf einer Geraden liegen. Die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 heißen Ecken, die Strecken $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_1}$ heißen Seiten des Fünfecks. Die Winkel des Fünfecks sind $\sphericalangle A_1A_2A_3$, $\sphericalangle A_2A_3A_4$, $\sphericalangle A_3A_4A_5$, $\sphericalangle A_4A_5A_1$, $\sphericalangle A_5A_1A_2$. Wir nennen das Fünfeck *regelmäßig*, wenn alle seine Winkel gleich groß und alle seine Seiten gleich lang sind.

Zur Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks brauchen wir nur den Umfang eines Kreises in fünf gleiche Teile zu zerlegen und die Teilpunkte miteinander zu verbinden. Dafür gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten.

Bild 1



Das erste Fünfeck $A_1A_2A_3A_4A_5$ heißt *einfach*. Zwei Seiten besitzen höchstens einen gemeinsamen Eckpunkt. Das zweite Fünfeck $B_1B_2B_3B_4B_5$ ist nicht einfach. Die Seiten überschneiden sich. Es gibt außer den Eckpunkten gemeinsame Punkte verschiedener Fünfeckseiten. Wir bezeichnen dieses Fünfeck als *Sternfünfeck*.

Aufgabe 1

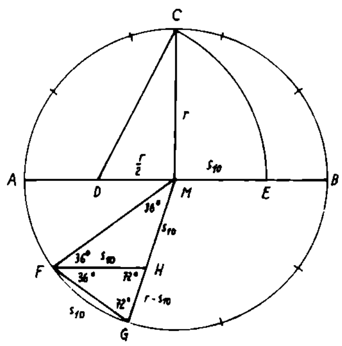
Zeichnet einen Kreis mit dem Radius $r=4$ cm! Konstruiert durch Teilung des Kreises die beiden verschiedenen regelmäßigen Fünfecke!

Anleitung: Zur Konstruktion könnt ihr mit dem Winkelmesser fünf Zentriwinkel von je 72° aneinander abtragen. Die Schnittpunkte der Schenkel mit dem Kreis ergeben die Eckpunkte der gesuchten Fünfecke.

Die Konstruktion ist aber auch auf folgende Weise unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal möglich:

Tragt in den Kreis mit dem Mittelpunkt M einen Durchmesser $\overline{AB}$ ein! Zeichnet in M einen zu $\overline{AB}$ senkrechten Radius $\overline{MC}$! Konstruiert den Mittelpunkt D der Strecke $\overline{AM}$! Schlagt um D mit $\overline{DC}$ einen Kreisbogen, der $\overline{MB}$ in E schneidet! Dann ist die Strecke $\overline{ME}$ gleich der Seite des dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen einfachen Zehnecks. Tragt diese Strecke auf den Umfang des Kreises ab! Jeder zweite Schnittpunkt liefert die Eckpunkte der gesuchten Fünfecke.

Bild 2



Die angegebene Konstruktion können wir folgendermaßen begründen:

Nach dem Satz des Pythagoras ist
$\overline{DM}^2+\overline{MC}^2=\overline{DC}^2$.

Hieraus folgt $\overline{DC}=\sqrt{r^2+\frac{r^2}{4}}=\frac{r}{2}\sqrt{5}$ und

$\overline{ME}=\overline{DE}-\overline{DM}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Verbindet man eine Zehneckseite $\overline{FG}$ mit dem Mittelpunkt und zeichnet die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle GFM$, so sind die Dreiecke $\triangle GFM$ und $\triangle HGF$ ähnlich, da die sich entsprechenden Winkel gleich groß sind. Also ist $s_{10}:r=(r-s_{10}):s_{10}$.

Als positive Lösung der quadratischen Gleichung $s_{10}^2+rs_{10}-r^2=0$ erhalten wir

$s_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)=\overline{ME}$. Damit ist obiges Konstruktionsverfahren bewiesen.

Hinweis: Die Seitenlänge im einfachen Fünfeck beträgt $a=2r\cdot\sin 36°$, also für $r=4$ cm ist $a\approx 4{,}7$ cm.

Die Seitenlänge im Sternfünfeck beträgt
$b=2r\cdot\sin 72°$,
also für $r=4$ cm ist $b\approx 7{,}6$ cm.

Wir wollen nun aus einfachen regelmäßigen Fünfecken das Modell eines Körpers zusammensetzen.

Aufgabe 2

Zeichnet das folgende Körpernetz, und fertigt ein Modell des zugehörigen Körpers an! Schneidet hierzu das bereits konstruierte einfache regelmäßige Fünfeck aus, und verwendet es als Schablone!

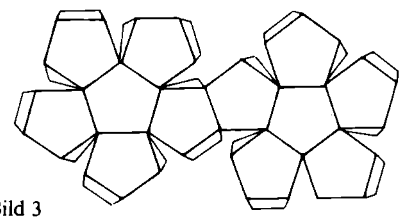
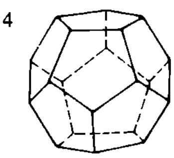


Bild 3

Wir erhalten einen Körper, der von 12 einfachen regelmäßigen Fünfecken begrenzt wird, den *Dodekaeder.*

Bild 4



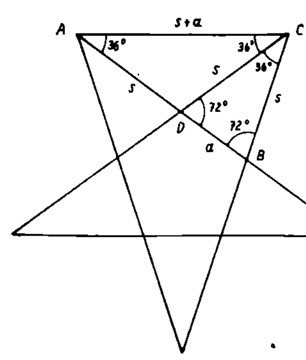
Aus regelmäßigen Sternfünfecken lassen sich in analoger Weise zwei verschiedene Sternpolyeder zusammensetzen. Da sich die einzelnen Sternfünfecke hierbei gegenseitig durchdringen, ist es zweckmäßig zur Anfertigung eines Modells dieser Körper etwas anders vorzugehen.

Im ersten Fall gehen wir vom Modell unseres Dodekaeders aus und setzen auf jede seiner Flächen eine fünfseitige Pyramide, so daß die Fünfeckflächen des Dodekaeders durch die Seitenflächen der Pyramiden jeweils zu Sternfünfecken ergänzt werden.

Aufgabe 3

Ermittelt zeichnerisch die Länge s der Seitenkanten der Pyramiden! Zeichnet dazu eine Fläche des Dodekaeders, und bringt die Verlängerungen der Seiten zum Schnitt!

Bild 5



Hinweis: Betrachten wir die Winkel in obiger Figur, so folgt $\triangle ABC\sim\triangle CDB$. Also ist $(s+a):s=s:a$. Daraus berechnen wir $s=a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Für $a=4{,}7$ cm erhalten wir $s\approx 7{,}6$ cm.

Aufgabe 4

Zeichnet das Netz des Mantels der gleichseitigen Pyramiden, und klebt auf alle zwölf Seitenflächen des Dodekaeders je eine solche Pyramide!

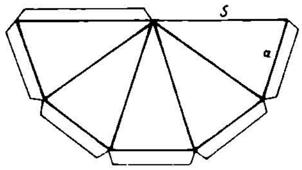


Bild 6

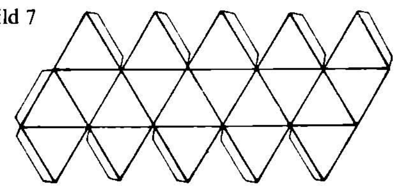
Damit erhalten wir einen Sternpolyeder. Es ist das *zwölfeckige Sterndodekaeder*, dessen Seitenflächen zwölf regelmäßige Sternfünfecke sind (siehe Foto auf Seite 127 unten).

Einen weiteren Sternpolyeder erhalten wir, wenn wir vom Ikosaeder ausgehen und auf jede Seitenfläche eine dreiseitige Pyramide setzen.

Aufgabe 5

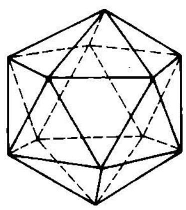
Zeichnet das folgende Körpernetz, verwendet als Seitenlänge der gleichseitigen Dreiecke $a = 4{,}7$ cm und fertigt ein Modell des Ikosaeders an!

Bild 7



Der Ikosaeder wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Bild 8



Wir betrachten einen Eckpunkt des Ikosaeders. In ihm treffen je zwei Seiten von fünf aneinandergrenzenden gleichseitigen Dreiecken zusammen. Die dritten Seiten dieser Dreiecke bilden jeweils ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seitenlänge $a = 4{,}7$ cm.

Wir setzen nun auf jede Ikosaederfläche eine dreiseitige Pyramide, so daß diese Fünfecke des Ikosaeders durch die Seitenflächen der Pyramiden zu Sternfünfecken ergänzt werden. Dann sind die Pyramidenkanten Verlängerungen der Kanten des Ikosaeders. Die Kantenlänge der dreiseitigen Pyramiden beträgt für $a = 4{,}7$ cm wiederum $s = 7{,}6$ cm.

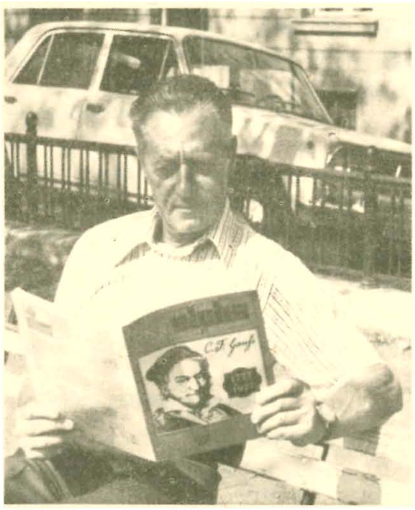
Aufgabe 6

Klebt auf alle zwanzig Seitenflächen des Ikosaeders dreiseitige Pyramiden!

Eine Aufgabe von Prof. Dr.
Laśló Fejes Tóth

Direktor des Mathematischen Instituts der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest

▲1678▲ Wie groß ist die sphärische Abstandssumme zwischen den Ecken eines einer Einheitskugel einbeschriebenen regelmäßigen Dodekaeders?



L. Fejes Tóth wurde 1915 in Szeged geboren. Er besuchte in Budapest Grundschule und Gymnasium und studierte von 1933 bis 1938 Mathematik und Physik an der Universität Budapest. Dort legte er auch die Lehramtsprüfung ab und promovierte 1938 zum Doktor. Anschließend leistete er in der ungarischen Armee seinen Militärdienst ab und war 1941 bis 1944 Assistent am geometrischen Institut der Universität Klausenburg.

Von 1945 bis 1948 wirkte er als Gymnasiallehrer in Budapest. 1946 wurde er Privatdozent an der Universität Budapest. Von 1948 bis 1964 war er Professor für Mathematik an der Universität Veszprém. Seit 1965 ist er Professor am Mathematischen Institut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und seit 1970 Direktor dieses Institutes.

Er nahm mehrfach Gastprofessuren an auswärtigen Hochschulen wahr, so an den Universitäten Freiburg i. Br., Heidelberg, Salzburg und Ilmenau, sowie an verschiedenen Hochschulen der Vereinigten Staaten von Amerika und Kanadas.

1957 wurde ihm der Ungarische Nationalpreis, der Kossuth-Preis, 1973 der Ungarische Staatspreis, 1977 die Carl-Friedrich-Gauß-Medaille der Braunschweigischen wissenschaftlichen Gesellschaft verliehen. 1964 erhielt er einen Ruf auf ein Ordinariat der Universität Zürich, das er jedoch nicht annehmen konnte.

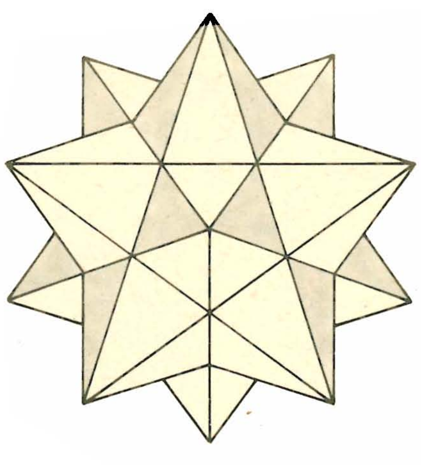
L. Fejes Tóth ist ordentliches Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und auswärtiges Mitglied der Akademie der Wissenschaften der DDR sowie der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig.

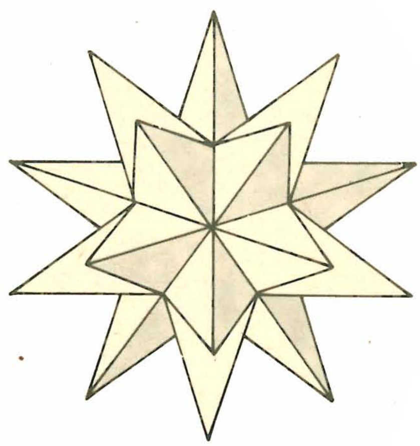
Wir erhalten das *zwanzigeckige Sterndodekaeder*, dessen Seitenflächen ebenfalls zwölf regelmäßige Sternfünfecke sind.

Die beiden von uns gebastelten Sternpolyeder wurden bereits 1619 von Johannes Kepler beschrieben, der von der Harmonie dieser Körper stark beeindruckt war.

Außer den beiden Sterndodekaedern gibt es weitere Sternpolyeder. Für ein weiterführendes Studium empfehlen wir das in die mathematische Schülerbücherei aufgenommene Buch von T. Roman: „Reguläre und halbreguläre Polyeder".

U. Sonnemann





XIX. Internationale Mathematikolympiade Beograd, Juli 1977

XIX IMO
BEOGRAD 1977

Aufgaben **1. Tag**

1. Gegeben sei ein Quadrat *ABCD*. Auf seinen Seiten werden nach innen die gleichseitigen Dreiecke *ABK*, *BCL*, *CDM*, *DAN* errichtet. Man beweise, daß die Mittelpunkte der vier Strecken *KL*, *LM*, *MN* und *NK* zusammen mit den Mittelpunkten der acht Strecken *AK*, *BK*, *BL*, *CL*, *CM*, *DM*, *DN* und *AN* die Eckpunkte eines regelmäßigen 12-Ecks sind.
(Niederlande, 6 Punkte)

2. In einer endlichen Folge reeller Zahlen ist die Summe von jeweils sieben unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern negativ, während die Summe von jeweils elf unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern negativ, wäh-
Bestimme die größte Anzahl der Glieder in einer solchen Folge!
(Soz. Republik Vietnam, 6 Punkte)

3. Es sei n eine vorgegebene natürliche Zahl mit $n>2$. Wir betrachten die Menge V_n mit den Elementen $1+kn$ mit $k=1, 2, \ldots$ Eine Zahl $m \in V_n$ heißt *unzerlegbar in* V_n, wenn es *in* V_n keine Zahlen p, q gibt, so daß $m=p\cdot q$ ist.
Man beweise, daß es in V_n eine Zahl r gibt, die man auf mehr als eine Weise als Produkt von in V_n unzerlegbaren Faktoren darstellen kann. (Zerlegungen, die sich nur in der Reihenfolge der Faktoren aus V_n unterscheiden, gelten als gleich.)
(Niederlande, 7 Punkte)

2. Tag

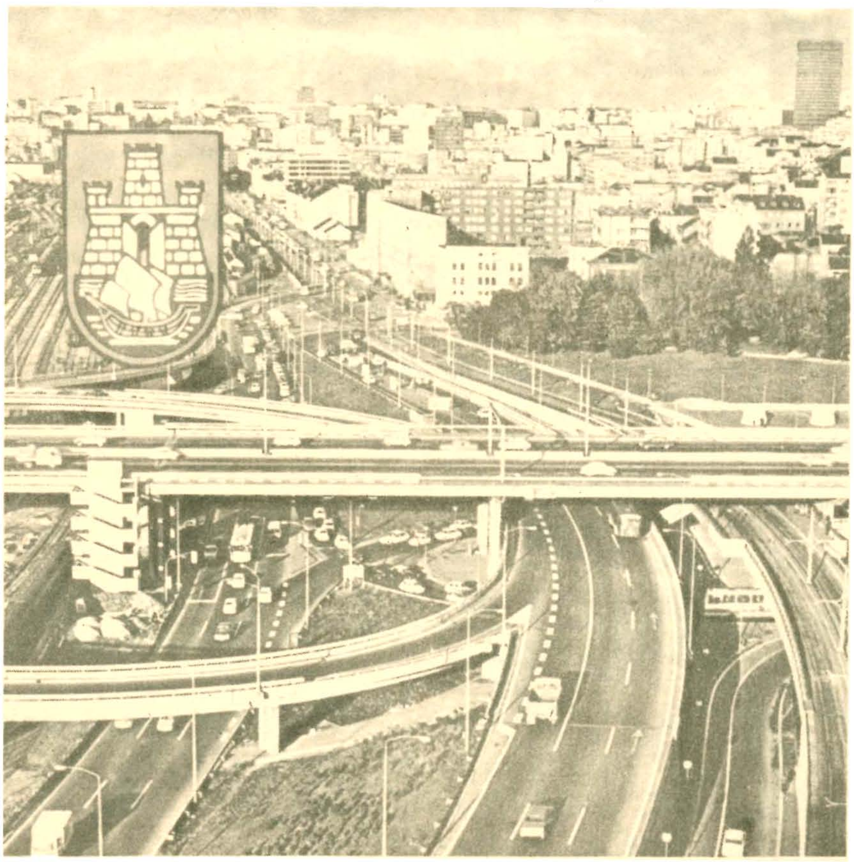
4. Seien a, b, A und B gegebene reelle Zahlen und
$f(x)=1-a\cdot\cos x-b\cdot\sin x-A\cdot\cos 2x$
$-B\cdot\sin 2x$.
Es sei bekannt, daß $f(x)\geqq 0$ für alle reellen x ist.
Man beweise, daß dann
$a^2+b^2\leqq 2$ und $A^2+B^2\leqq 1$ gilt.
(Großbritannien, 6 Punkte)

5. Es seien a, b positive ganze Zahlen. Dividiert man a^2+b^2 durch $a+b$, dann erhält man den Quotienten q und den Rest r.
Man bestimme alle Paare (a, b), für die
$q^2+r=1977$ gilt. (BRD, 7 Punkte)

6. Es sei f eine Funktion, die für alle natürlichen Zahlen n definiert ist und deren Funktionswerte natürliche Zahlen sind. Es gelte
$f(n+1)>f(f(n))$
für alle n.
Man beweise, daß dann
$f(n)=n$
für jede natürliche Zahl n gilt.
(VR Bulgarien, 7 Punkte)

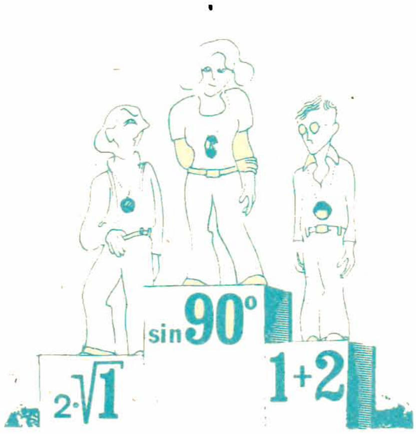
alpha stellt die DDR-Mannschaft vor:

Peter Dittrich, Spezialklasse der Humboldt-Universität Berlin, Kl. 11 (3. Preis);
Lutz Gärtner, Spezialklasse der Humboldt-Universität Berlin, Kl. 12 (1. Preis);
Werner Hoffmann, ABF „W. Ulbricht" der MLU Halle, Kl. 12
Roger Labahn, EOS „Geschwister Scholl", Anklam, Kl. 12;
Michael Marczinek, EOS „Heinrich Hertz", Berlin, Kl. 12 (1. Preis);
Bernd Mulansky, EOS „Martin Andersen Nexö", Dresden, Kl. 11 (2. Preis);
Ilja Schmelzer, Spezialklasse der MLU Halle, Kl. 11
Steffen Thiel, EOS Königs Wusterhausen, Kl. 10.



- In diesem Jahr wurden 44% der insgesamt erreichbaren Punkte erzielt (1975: 55%, 1976: 42%). Das zeigt den Schwierigkeitsgrad der gestellten Aufgaben. Preise wurden vergeben:
  1. Preis: 40 bis 34 Punkte
  2. Preis: 33 bis 24 Punkte
  3. Preis: 23 bis 17 Punkte.
- Erstmalig wurde ein Symposium „Jugend und Mathematik" durchgeführt.
- Die Teilnehmer der DDR-Mannschaft (12. Klasse) werden zum Studium delegiert. Die Preisträger unter ihnen erhalten für das 1. Studienjahr ein zusätzliches Stipendium.
- Die XX. IMO findet Anfang Juli 1978 in der Sozialistischen Republik Rumänien statt.
- Unter den 155 Teilnehmern der XIX. IMO waren zwei Mädchen, eins aus der Mongolischen Volksrepublik und eins aus der Volksrepublik Bulgarien.
- Die Abschlußfeier der XIX. IMO fand in der Universität Beograd statt. Zu Ehren der XIX. IMO gab der Bürgermeister von Beograd für die Delegationsleiter im Rathaus einen Empfang.
- Exkursionen wurden durchgeführt in die erst kürzlich eröffnete Höhle *Revaska Pecina* und eine zum mittelalterlichen Kloster Manasija, das wertvolle Fresken enthält.

● Alle Teilnehmer unternahmen einen Tagesausflug mit Tragflügelbooten zum „Eisernen Tor“.
● Die Klausuren (je 4 Stunden Arbeitszeit) fanden in den Räumen der Pionirski Grad, der Pionierstadt am Rande von Beograd bei hochsommerlichen Temperaturen statt. Die Pionierstadt war gleichzeitig Unterkunft für die IMO-Teilnehmer.
● Es wurden 7 Spezialpreise für die ausgezeichnete Lösung einer Lösung vergeben, und zwar an zwei amerikanische, zwei englische, je einen ungarischen, bulgarischen und tschechischen Teilnehmer.
● Fünf der beteiligten Schüler erreichten die volle Punktzahl.



Hobby und Beruf

Porträt des IMO-Teilnehmers Michael Marczinek (DDR)

Die Klausur ist beendet. Einzeln oder in Grüppchen, in sich gekehrt oder lebhaft diskutierend, verlassen die *Jungen Mathematiker* die Wettkampfstätte.
Die acht Jungen unserer DDR-Mannschaft tauschen erst mal ihre Ergebnisse aus, bevor sie zu Tischtennisschlägern greifen oder durch *Pionirski Grad*, die Pionierstadt am Rande Belgrads, die für mehrere Tage Austragungsort der XIX. Internationalen Mathematikolympiade ist, streifen. Wie bist du an die zweite Aufgabe herangegangen? Primzahlen, Plus und Minus, endliche und unendliche Reihen, Minimal- und Maximalwerte. Erleichterung bei *Steffen Thiel*, dem jüngsten unserer Mannschaft, er hat bei der zweiten Aufgabe das gleiche Ergebnis wie *Michael Marczinek*, und *Michael* hat immerhin von den acht die meisten Olympiadeerfahrungen. In Belgrad ist er zum dritten Mal dabei. Sein Tip für die anderen am Abend vor dem Wettbewerb: „Lest euch die Aufgaben richtig durch, bevor ihr anfangt.“ Micha spricht aus Erfahrung. Durch falsches Verstehen einer Aufgabe hatte er sich bei der IMO im vergangenen Jahr einen ersten Preis verpatzt.

Für *Michael*, der gerade sein Abitur an der Spezialschule *Heinrich Hertz* in Berlin mit Auszeichnung bestanden hat, ist die Mathematik Hobby und späterer Beruf. Er wird ab September an der Moskauer Lomonossow-Universität Mathematik studieren. Die Vorbereitung auf ein Studium in der Sowjetunion hat für den Agitator der ehemaligen 12/1 eigentlich schon im Schulungslager für FDJ-Funktionäre im vergangenen Jahr angefangen. Dort waren auch Ehemalige seiner Schule, die jetzt in der Sowjetunion studieren. „Wir haben sie über das Leben und Treiben an der Universität ausgefragt“, sagt Michael. „Sicher ist es schwer, das Studium, aber aufgegeben hat noch keiner.“

Mathematik?
Er hätte jeden für verrückt erklärt

Wenn zu Michael jemand in der 9. Klasse gesagt hätte, daß er sich einmal so der Mathematik verschreiben würde, er hätte ihn für verrückt erklärt. Einer, der seine Fähigkeiten erkannte, war Mathelehrer Bernd Fein. Er hat Michael in der 9. Klasse dazu überredet, in der Klassenstufe 10 zu starten. Er bestärkte ihn darin, es in der 10. Klasse als „Frühstarter“ bei der XVII. IMO in Bulgarien zu versuchen. Von dort brachte Michael Marcinek einen dritten Preis mit.
Der blonde lang aufgeschossene FDJler ist selbstbewußter geworden, weiß, was er kann und wo er seine Stärken und Schwächen hat. In einem Kollektiv, in dem man sich untereinander gut versteht, in dem jeder offen seine Meinung sagt und jeder auf den anderen achtgibt, auf den anderen achtet, fühlt er sich wohl. „Das hilft einem auch, Durchhänger zu überwinden, daß bei Leuten, die der Mathematik frönen, besonders wichtig ist, den Anschluß an das Kollektiv nicht zu verlieren.“

Elke Schilling (JW)

Bilanz der Erfolge

Teilnehmerland	Gesamtpunktzahl	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Diplom
Vereinigte Staaten von Amerika	202	2	3	1	–
Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken	192	1	2	4	1
Vereinigtes Königreich von Großbritannien und Nordirland	190	1	3	3	2
Ungarische Volksrepublik	190	1	3	2	1
Königreich der Niederlande	185	1	2	3	–
Volksrepublik Bulgarien	172	–	3	3	1
Bundesrepublik Deutschland	165	1	1	4	–
Deutsche Demokratische Republik	163	2	1	1	–
Tschechoslowakische Sozialistische Republik	161	–	3	2	1
Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien	159	–	3	3	–
Volksrepublik Polen	157	1	2	2	–
Republik Österreich	151	1	1	2	–
Königreich Schweden	137	1	1	2	–
Republik Frankreich	127	1	–	–	–
Sozialistische Republik Rumänien	122	–	1	2	–
Republik Finnland	88	–	–	1	–
Mongolische Volksrepublik	48	–	–	–	–
Republik Kuba (4)*	38	–	–	–	–
Königreich Belgien (7)	32	–	–	–	–
Republik Italien (5)	22	–	–	–	–
Republik Algerien (3)	17	–	–	–	–

* Diese Länder delegierten keine volle Mannschaft, sondern nur die angegebene Anzahl von Teilnehmern

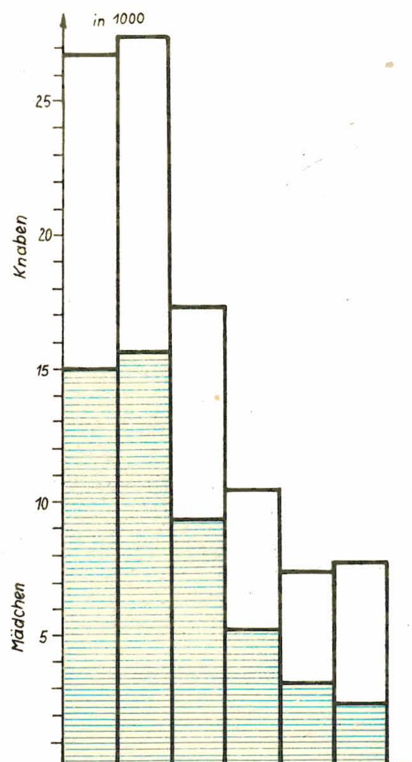
alpha-Wettbewerb 1976/77

Preisträger

Achim Saft, Bad Liebenstein; **Kathrin Hintz, Katrin Wießner,** beide Bernburg; **Uta Boldt,** Burg Stargard; **Steffen Grützner,** Burkau; **Dietmar Berthold,** Crimmitschau; **Petra Sarodnik,** Dallgow; **Astrit Kullmann, Astrit Schunck,** beide Dingelstädt; **Gabriele Sprotte,** Döbeln; **Olaf Hein,** Eisenach; **Jürgen Tosse,** Engerda; **Cornelia Voigt, Ronald Voigt,** beide Friedeburg; **Torsten Knaust,** Gossa; **Hartmut Hildebrandt,** Hainichen; **Kerstin Frank,** Hammerbrücke; **Kerstin Wickner,** Hermannsdorf; **Sabine Sentker,** Hettstedt; **Frank Thümmler,** Horka; **Karsten Ihlenburg,** Kairo (AR Ägypten); **Angela Hoyer,** Kamsdorf; **Andreas Berner,** Karl-Marx-Stadt; **Manuela Wohlfahrt,** Kieselbach; **Hannes Kubr,** Klosterneuburg (Österreich); **Jens Dette,** Leinefelde; **Doris Grünler,** Lössau; **Michael Seifert,** Menteroda; **Delia Krech,** Mittelstille; **Heidi Teidge,** Neubrandenburg; **Liane Helmbold, Heike Meinecke,** beide Neuenhofe; **Sabine Hartung,** Niederorschel; **Uwe Schulze,** Pirna; **Anne Klausnitzer, Petra Baldauf,** beide Potsdam; **Karsten Gischer,** Rotta; **Claudia Lieske,** Saalfeld; **Petra Zachert,** Sachsendorf; **Michael Gerth,** Schmalkalden; **Michael Hruschka,** Senftenberg; **Astrid Keller, Christine Mangold, Manuela Recknagel, Corina Kaiser,** alle Steinbach-Hallenberg; **Antje Wulf,** Teltow; **Dagmar Streit,** Vacha; **Ralph Nemitz,** Wittenförden

Vorbildliche Leistungen

Simone Kitscha, Ahlbeck; Wolfgang Federwisch, Bad Frankenhausen; Andreas Gedat, Bad Liebenstein; Margret Detsch, Bad Salzungen; Kerstin Pöthig, Bernburg; Karin Gröger, Berlin; Uwe Fischer, Grit Köder, Elke Schubert, Gabi Roth, Hans-Jörg Schubert, Heike Espig, Bernd Förster, Jens Zille, Ina Ficker, Heike Berger, alle Bernsbach; Christine Fischer, Breitungen; Karola Ernst, Britz; Petra Edelmann, Büttstedt; Carmen Schwab, Buhla; Georg Lang, Burg; Kristine Roeke, Andreas Harnath, Katrin Pannewitz, alle Cottbus; Uwe Sauerbrei, Dietlas; Petra Bülow, Mario Dette, Gabi Stöber, alle Dingelstädt; Elmar Hartenstein, Matthias Liebig, Frank Eiselt, alle Dresden; Petra Menches, Kerstin Manß, beide Eisenach; Thomas Schmidt, Erfurt; Simone Oetzel, Fambach; Sabine Körtnig, Frankfurt (Oder); Carla Müller, Ralf Vater, beide Friedeburg; Angela Illing, Gersdorf; Birgit Reilinger, Goldberg; Christian Madeja, Lydia Lange, Yveth Daetz, alle Greifswald; Kerstin Steinecke, Großbodungen; Kerstin Tresemer, Ute Bräuer, Sabine Nebe, alle Greußen; Andreas Thiele, Güterglück; Peggy Unger, Michaela Jakob, beide Hammerbrücke; Hardy Kastius, Hennigsdorf; Frank Eberlein, Hermannsdorf; Christiane Berg, André Holubek, beide Horka; Marion Endrigkeit, Jessen; Christiane Kümpel, Bettina Dreßler, beide Kaltennordheim; Katrin Oelert, Simone Heublein, AG Math. (Unterstufe), alle Kamsdorf; Birgit Georgi, Eske Röhrich, Frank Winzer, alle Karl-Marx-Stadt; Thomas Baer, Evelyn Schmidt, beide Kieselbach; Axel Schüler, Kleinmachnow; Gabi Paschold, Lauscha; Susanne Stadler, Carola Durner, beide Leimbach; Jörg Drechsel, Leinefelde; AG Mathe (Kl. 5b), Lichte; Bettina Grabs, Anett Rechenberger, beide Lichtenhain; Heike Nowara, Lössau; Ute Fischer, Lübbenau; Torsten Harnisch, Lützen; Torsten Schulz, Merseburg; Stefan Schöbe, Menteroda; Sven Winkler, Minkwitz; Andrea Dietz, Manuela Möller, beide Mittelstille; Jörg Schmidt, Kathrin Scholl, beide Neubrandenburg; Annett Jennrich, Anne-Kathrin Pätz, Beatrice Pätz, alle Neuenhofe; Kerstin Paul, Nordhausen; Michael Döll, Oberschönau; Dieter Seifert, Pinnau; Ines Freyholdt, Axel Schulz, Michael Hänsch, alle Potsdam; Katrin Ungethüm, Reinsdorf; Andrea Tisch, Jürgen Schmalisch, beide Reuden; Gitta Schöne, Ulrike Martin, beide Rostock; Steffi Lehmann, Rothschönberg; Mathias Brandt, Detlef Christ, Sonja Gramann, Heiko Weiner, alle Schmalkalden; Fred Radau, Thomas Tiedtke, beide Schorssow; Ralf Wenig, Schweina; Thomas Pfennigschmidt, Schwerin; Jens Hoffmann, Sebnitz; Claudia Häfner, Katrin Danz, Silke Albrecht, Iris Campesato, alle Steinbach-Hallenberg; Ute Siebert, Trusetal; Annette Stephan (Kl. 3), Silke Raßmann (Kl. 4), beide Unterbreizbach; Katrin Haring, Vacha; Evelin Beyer, Wegefarth; Beate Hentschke, Weißwasser; Birgit Wenderott, Wingerode; Guid Köhnke, Wittstock; Steffen Heyn, Wolgast; Michael Mönch, Zittau; Viola Nakoinz, Zschornewitz



Kl.	5	6	7	8	9	10/12
Kn. in %	44,2	43,2	46,4	48,9	55,4	67,9
Mä. in %	55,8	56,8	53,6	51,1	44,6	32,1

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1976/77

P.-Neruda-OS Ahlbeck; Zetkin-OS Altenburg; Haus der JP Altenburg; OS Alsleben; W.-Ulbricht-OS Altwigshagen; Karl-Marx-Schule Anklam; OS Asbach; OS Bad Bibra; OS Bad Gottleuba; H.-Duncker-OS Bad Kleinen; EOS Ernst Thälmann, Otto-Grotewohl-Schule, Th.-Neubauer-OS, M.-Poser-OS, alle Bad Salzungen; R.-Schwarz-OS Bad Liebenstein; *alpha*-Zirkel OS Bahratal; C.-Blenke-OS, Berlin; 10. OS Berlin-Mahlsdorf; OS Fr. Mehring, 11. OS V. Tereschkowa, beide Bernburg; OS Bernsbach; OS der Orthopäd. Klinik Birkenwerder; OS Birkungen; OS Cl. Zetkin, Bischofferode; M.-Planck-OS Bleicherode; OS Blowatz; Fr.-Weineck-OS Blumberg; H.-Matern-OS Boizenburg; K.-Marx-OS Borna; 19. OS AG Math. Booßen; AG Math. OS Bregenstedt; OS II Breitungen; OS Breitenworbis; P.-Neruda-OS Britz; OS Brotterode; M.-Poser-OS Bürgel; TOS Büttstedt; AG Math. OS Burkau; H.-Grundig-OS Cossebaude; Klub Jg. Math. Cottbus; Station Jg. Naturf. Cottbus; OS Culitzsch; M.-Gorki-OS Dermbach; OS Deuna; OS Deutschenbora; Oberschulkombinat Diedorf–Fischbach–Klings; OS K. Kollwitz, OS Makarenko, beide Dingelstädt; OS K. Bürger Dobbertin; OS Dolgelin; OS H. Rothbarth, Pionierpalast-Klub Jg. Math., beide Dresden; G.-Dimitroff-OS Drevesskirchen; OS Dubna (UdSSR); F.-Wolf-OS Ebersdorf; OS Fr. Engels Effelder; OS Eichhof; 9. OS Geschw. Scholl Eisenach; OS Ellrich; OS E. André Elsterwerda; H.-Joachim-OS Espenhain; OS Fambach; OS Floh; OS Frauensee; OS Friedeburg; OS Fr. Reuter Friedland; R.-Arnstadt-OS Geisa; E.-Hartsch-OS Gersdorf; H.-Beimler-OS Glasin; E.-u.-Ch.-Garske-OS Görsdorf; J.-Brinckmann-OS Goldberg; OS Gossa; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; 10. OS O.

Drews Greifswald; H.-Beimler-OS Greiz; OS J. Gagarin, EOS Karl Marx, OS H. Beimler, alle Greußen; A.-Müller-OS Grimma; OS Großbodungen; G.-Dimitroff-OS Groß Köris; Lessingschule Großpostwitz; Dr.-S.-Allende-OS AG Math. Großweitzschen; OS Grünhain; Diesterweg-OS Guben; Th.-Müntzer-OS Gumpelstadt; AG Math. OS Gutenswegen; OS II Hainichen; Diesterwegschule Halle; K.-E.-Ziolkowski-OS Halle-Neustadt; Friedens-OS Halberstadt; OS Hammerbrücke; OS Harbke; OS Haynrode; Schule der DSF Heiligengrabe; P.-Schreier-OS Hennigsdorf; OS Th. Müntzer Hermannsdorf; 1. OS H. Beimler, EOS E. Weinert, 2. OS, alle Herzberg; Goethe-OS Hohenleipisch; Math.-Zirkel OS Horka; N.-Kopernikus-OS 17, OS IV E. Schneller, beide Hoyerswerda; OS Hundeshagen; OS Ilmenau; Goethe-OS Ilsenburg; G.-Dimitroff-OS Immelborn; AG Math. der Botschaft der DDR in Kairo; OS Kaltennordheim; OS A. Becker Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS Kandelin; Pionierhaus J. Gagarin AG Math. Karl-Marx-Stadt; P.-Tschaikowski-OS Karl-Marx-Stadt; Th.-Neubauer-Schule Kieselbach; Dr.-Th.-Neubauer-OS Kirchberg; Br.-Tesch-OS Klausdorf; EOS Kleinmachnow; OS Th. Müntzer Klettenberg; OS Könitz; Station Jg. Naturf. u. Techniker Köthen; K.-Kresse-OS Kriebitzsch; OS Küllstedt; AG Math. OS Kuhfelde; L.-Fürnberg-OS Laage; G.-Schumann-OS Lauchhammer; Schulkombinat Lauscha–Ernstthal; R.-Teichmüller-OS Leimbach; K.-Liebknecht-OS, Dr.-S.-Allende-OS, beide Leinefelde; 27. OS, 29. OS, 146. OS, alle Leipzig; Math.-Zirkel OS Leutersdorf; W.-Pieck-OS Lichte; OS Lichtenhain; OS Liebstadt; OS I, EOS A. Becker, OS A. Diesterweg, alle Lobenstein; Pestalozzi-OS Löbau; E.-Schneller-OS Löbnitz; OS W. Wallstab Löderburg; *alpha*-Club OS Lössau; OS Löwenberg; OS Lubmin; OS IV Lübbenau; Spezialschule Glückauf, OS J. Gagarin, beide Merkers; A.-Dürer-OS I Merseburg; Geschw.-Scholl-OS Meyenburg; AG Math. OS Mittelherwigsdorf; OS Mittel-Springstille; OS Naundorf; Schulklub Math. OS Neetzow; W.-Pieck-OS, OS 10, 13. OS, alle Neubrandenburg; TOS Neuenhofe; OS Neukloster; 3. OS Neustrelitz; Dr.-Th.-Neubauer-Schule Niederorschel; EOS W. Humboldt Nordhausen; OS Nordhausen-Niedersalza; Pestalozzischule Oberlungwitz; OS E. Weinert Oberschönau; OS Olbersdorf; Comeniusschule Oranienburg; *alpha*-Club OS Osternienburg; Goethe-OS AG Math., E.-André-OS Ferien-AG, Pionierhaus P. Göring, Station Jg. Naturf. u. Techniker, alle Parchim; EOS R. Fetscher AG Math. Kl. 9 Pirna; OS 16 Potsdam; A.-Becker-OS Prenzlau; E.-Rietschel-OS Pulsnitz; OS Quitzöbel; Dr.-Th.-Neubauer-OS Rackwitz; Geschw.-Scholl-OS Rathenow; J.-Gagarin-Schule Ribnitz-D.; Spezialschule Riesa; K.-Liebknecht-Schule Ringleben; Tagesschule Roßdorf; Haus d. JP Rostock; *alpha*-Club Rotta; OS Rüdnitz; AG Math. OS II Saalfeld; *alpha*-Club OS Sachsendorf; W.-Pieck-OS Sangerhausen; OS Sanitz; OS H. Matern Schernberg; OS M. Gorki Schkölen; OS Schlatkow; EOS Dr. K. Duden AG Prakt. Math. Schleiz; OS Karl Marx, EOS, OS H. Danz, J.-Gottfried-Seume-OS, alle Schmalkalden; J.-R.-Becher-OS Schneeberg; Station J. Naturf. u. Techniker Schönwalde; OS Schorssow; OS VII, Haus d. JP E. Schneller, beide Schwedt; Fr.-Reuter-OS Siedenbollentin; Fr.-Schiller-Schule Solpke; OS A. Saefkow Sondershausen; OS Stadtlengsfeld; EOS Staßfurt; OS E. Thälmann Steinbach-Hallenberg; OS Steinsdorf; Klub Jg. Math. Haus d. JP, W.-Heinze-OS, O.-Grotewohl-OS, alle Stralsund; OS Sünna; E.-Thälmann-OS Suhl; EOS Karl Marx, Heinrich-Rieke-Schule, beide Tangerhütte; OS Teistungen; *alpha*-Club OS Timmenrode; OS Titschendorf; OS Töplitz; *alpha*-Zirkel OS Treben; E.-Thälmann-OS Trebsen; OS W. Pieck Trusetal; OS Unterbreizbach; OS J.-G.-Seume Vacha; OS Viernau; OS Vitte; EOS J. Fucik Waldheim; Mathe-Club Fr.-Engels-OS, Goetheschule, beide Waren; OS Wedendorf; H.-Matern-OS Weida; OS Weilar; E.-Thälmann-OS, Sprachheil-OS, beide Weimar; OS Weißenborn-Lüderode; Goethe-OS Welzow; OS Wernshausen; J.-Harder-OS Wesenberg; OS Westgreußen; Cl.-Zetkin-OS Wiehe; OS Wingerode; Haus d. JP AG Math. Kl. 5 Wismar; A.-Bebel-OS Wittenberg; Goethe-OS Wittenberg-Piesteritz; OS IV Wittstock; OS Wörmlitz; Dr.-Th.-Neubauer-OS Wohlmirstedt; EOS, Spezialistenlg. Jg. Math., beide Worbis; Th.-Müntzer-OS Wulfen; H.-Eisler-OS AG Math. Wusterhusen; Pestalozzi-OS Zeithain; Lutherschule Zella-Mehlis; Pestalozzi-OS, EOS, 1. OS, 5. OS, Prof.-Dr.-W.-Du-Bois-OS, alle Zittau; Goethe-OS Zossen; OS Zschornewitz

Eingegangene Lösungen (pro Wettbewerb)

1967	5100	
1968	14100	
1969	12400	
1970	25400	
1971	44800	
1972	39500	
1973	44300	
1974	58000	
1975	58800	
1976	87400	(davon 9400 Ph (11%); 6600 Ch (7%))
1977	97500	(davon 5400 Ph (6%); 4400 Ch (5%))
	487300	

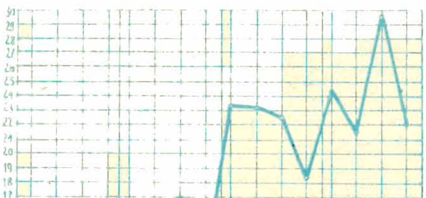
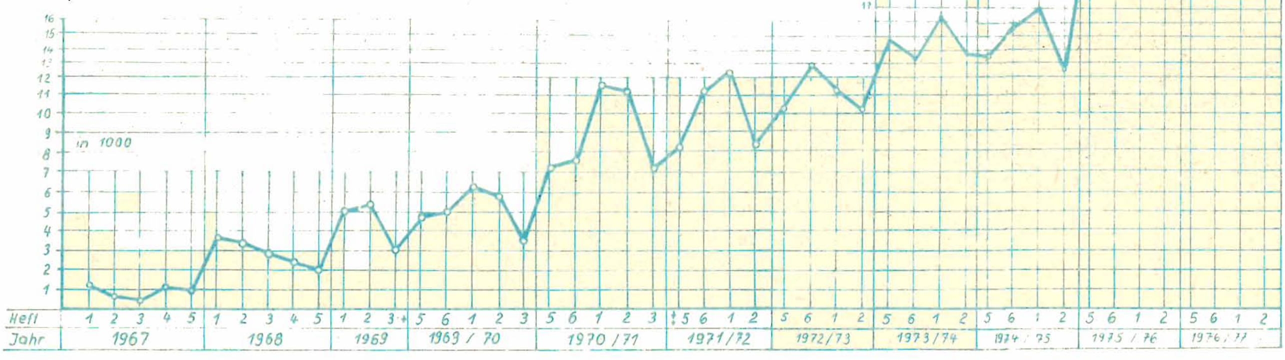
Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2000 Mark für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten:

BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Uraniaverlag, Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig; Leipziger Volkszeitung.

Abzeichen in Gold

Alle Träger des alpha-Abzeichens in Gold werden in Heft 1/78 veröffentlicht.

+ umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr
! ab Wettbewerbsjahr 1971/72 nur noch 4 Wettbewerbe im Jahr

Entwicklung des „alpha"-Wettbewerbes (absolut)

Mädchen meistern Mathe


Brathuhn, Heike


Spilecke, Bärbel


Kolbatz, Marlies


Roy, Antje


Böhme, Christine


Helbig, Kirsten


Herbst, Sigrun


Grinda, Iris


Werner, Grit


Starke, Uta


Lang, Beate


Prietzel, Andrea


Rudorf, Kerstin


Mitzenheim, Christel


Lehmert, Manuela


Kühmstedt, Birgit


Krüger, Ute


Schubert, Sibylle

alpha-aktuell

An der XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR nahmen Junge Mathematiker aus allen Teilen der DDR teil. Mit dieser Doppelseite stellt *alpha* die 18 Mädchen vor, welche im Wettbewerb ihre Kräfte mit den Jungen gemessen haben.

Name	Brathuhn, Heike	Spilecke, Bärbel	Kolbatz, Marlies	Roy, Antje
Bezirk	Cottbus	Cottbus	Neubrandenburg	Potsdam
Schule	EOS A. Becker, Jena (Kl. 10)	EOS W. Komarow, Elsterwerda (Kl. 11)	3. OS Neustrelitz (Kl. 10)	EOS G. Dimitroff, Falkensee (Kl. 10)
Berufswunsch	Math.-Physik-Lehrer	Dipl.-Mathematiker	Zootechniker	Ing. f. Verfahrenstechnik
Beruf d. Vaters	Dipl.-Lehrer f. Geographie	Notar	Maschinenmeister	Hochschullehrer
Beruf d. Mutter	Dipl.-Lehrer f. Biologie	Hausfrau	Poststellenverwalterin	Dipl.-Lehrer f. Deutsch
Preise (Bez.-Olymp.)	77: 3. Preis	74/75: 3. Preis 75/76: 2. Preis 76/77: Anerkennung	74/75: 3. Preis 75/76: 2. Preis 76/77: 2. Preis	76/77: 2. Preis
Hobbys	Philatelie	Musik, Sport	Reiten	Chor, Leichtathletik

Name	Böhme, Christiane	Helbig, Kirsten	Herbst, Sigrun	Grinda, Iris
Bezirk	Frankfurt	Frankfurt	Magdeburg	Magdeburg
Schule	Spezialschule ph.-techn. Richtung, Frankfurt (Kl. 10)	Spezialschule ph.-techn. Richtung, Frankfurt (Kl. 10)	EOS B. Brecht, Halberstadt (Kl. 11)	EOS Karl Marx, Calbe (Kl. 10)
Berufswunsch	Dipl.-Mathematiker	Dipl.-Mathematiker	Statistiker	Physiker
Beruf d. Vaters	Dipl.-Lehrer Math./Physik	Lehrer	Dipl.-Lehrer f. Musik	Kraftfahrer
Beruf d. Mutter	Lehrerin (Betriebsök.)	Sekretärin	Dipl.-Lehrer f. Musik	Dipl.-Lehrer f. Ch/Bio
Preise (Bez.-Olymp.)	73/74: 3. Preis 75/76: 3. Preis 76/77: 1. Preis	74/75: 2. Preis 75/76: 3. Preis 76/77: 4. Preis	72/73: 2. Preis 73/74: 2. Preis 74/75: 3. Preis	76/77: 2. Preis
Hobbys	Musik	Sport, Nähen, Musik	Klassische Musik	Sport

Name	Werner, Grit	Starke, Uta	Lang, Beate	Prietzel, Andrea
Bezirk	Magdeburg	Karl-Marx-Stadt	Karl-Marx-Stadt	Karl-Marx-Stadt
Schule	OS Komarow, Magdeburg (Kl. 8)	EOS Th. Neubauer, Karl-Marx-Stadt (Kl. 10)	V.-Tereschkowa-OS, Karl-Marx-Stadt (Kl. 9)	OS Frohnau (Kl. 10)
Berufswunsch	ohne	Rechtsanwalt	Studium: Informationstechnik	Transporttechnik
Beruf d. Vaters	Dipl.-Ing. (wiss. Mitarb.)	Ing. (wiss.-techn. Mitarb.)	Programmentwerfer (Dipl.-Math.)	Fahrdienstleiter (DR)
Beruf d. Mutter	Organisator (Ing. f. Inf.-Verarbeitung)	Verkäuferin	Wiss. Oberass. (Dr. rer. nat.)	Expedient (Reichsbahn)
Preise (Bez.-Olymp.)	75/76: 1. Preis 76/77: 1. Preis	76/77: 3. Preis	74/75: 1. Preis 76/77: 2. Preis	74/75: 3. Preis 75/76: 1. Preis 76/77: 2. Preis
Hobbys	Musik	Literatur	Elektronik	Literatur, Kunst

Name	Rudorf, Kerstin	Mitzenheim, Christel	Lehmert, Manuela	Kühmstedt, Birgit
Bezirk	Karl-Marx-Stadt	Gera	Erfurt	Erfurt
Schule	W.-Komarow-OS, Karl-Marx-Stadt (Kl. 10)	Spezialschule Carl Zeiß, Jena (Kl. 9)	EOS Worbis (Kl. 10)	BS H. Jahn, Funkwerk Erfurt (2. Lj.)
Berufswunsch	Bauingenieur	Dipl.-Mathematiker	Medizin	Dipl.-Ing. f. Elektronik
Beruf d. Vaters	Bauing. (Hauptabtl.-Ltr.)	Hochschullehrer	Fachl. f. Math. (Bauing.)	Lehrer im Hochschuldienst
Beruf d. Mutter	Arbeitshygieneinspektor	Direktor einer OS	Kontoristin	Hausfrau
Preise (Bez.-Olymp.)	75/76: 1. Preis 76/77: 1. Preis 74/75: DDR-Olymp. 3. Preis	74/75: 1. Preis 75/76: 2. Preis 76/77: 1. Preis	74/75: 3. Preis 75/76: 2. Preis 76/77: 2. Preis	71/72: 3. Preis 74/75: 3. Preis 76/77: 3. Preis
Hobbys	Sport, Lesen	Musik, Literatur	Schwimmen	Elektrotechnik

Name	Krüger, Ute	Schubert, Sibylle
Bezirk	Berlin	Halle
Schule	EOS H. Hertz, Berlin (Kl. 10)	Goethe-EOS, Roßleben (Kl. 10)
Berufswunsch	Veterinärmedizin	Wirtschaftsmathematiker
Beruf d. Vaters	Dipl.-Ökonom, Vertriebsdirektor	Ltr. einer Ökon.-Gruppe (Dipl.-Landwirt)
Beruf d. Mutter	Organisator masch. Rechnen	Mitgl. d. Koop.-Rates VEG (Dipl.-Landwirt)
Preise (Bez.-Olymp.)	76/77: 3. Preis	74/75: 3. Preis 75/76: 1. Preis 76/77: 2. Preis
Hobbys	Kaninchenzucht	Naturwissenschaften

Porträt eines Mathematikers und Naturwissenschaftlers
Isaac Newton

Im 17. und 18. Jahrhundert wurde England zur größten Kolonialmacht der Welt. Damit war eine stürmische Entfaltung der kapitalistischen Produktionsweise verbunden. Das aufstrebende Bürgertum erfaßte schnell die Bedeutung der Naturwissenschaften als Instrument zur Produktionssteigerung. In dieser Zeit wurden auch die lange von der Kirche bekämpften neuen wissenschaftlichen Lehren Copernicus', Galileis und Keplers gesellschaftlich anerkannt. Das moderne Weltbild, das die Sonne in den Mittelpunkt unseres Planetensystems gerückt hatte, hatte sich durchgesetzt, und das Problem der Kräfte und Bewegungen am Himmel und auf der Erde wurde auf verschiedene Weise untersucht und diskutiert.

In diese Zeit wurde am 4. Januar des Jahres 1643 der Pächterssohn *Isaac Newton* hineingeboren. Der Vater war schon vor der Geburt des Jungen gestorben. Bereits als Kind unterschied sich der kleine *Isaac* von seinen Altersgenossen durch einen unbezähmbaren Experimentier- und Basteltrieb. Er entzückte seine Spielgefährten mit selbstgebasteltem kompliziertem mechanischen Spielzeug und einer hölzernen Uhr. Gemeinsam erschreckten die Kinder nachts die Dorfbewohner mit *Isaacs* leuchtendem Drachen.

Zum Kummer seiner Mutter interessierte sich der kleine *Newton* kaum für die Landwirtschaft und las und bastelte lieber. Glücklicherweise ermöglichte ein verständnisvoller Onkel Isaac eine gute Schulbildung im Nachbarstädtchen Grantham. 1661 finden wir den jungen *Newton* als frischgebackenen Studenten an der berühmten Universität Cambridge. Da *Newton* nur wenig bemittelt war, wurde er als „subserver" immatrikuliert. Das bedeutete, daß er reicheren Studenten viele Dienste erweisen mußte, dafür aber ohne Bezahlung essen und wohnen durfte.

In Cambridge führte ihn sein Lehrer *Isaac Barrow* in die Geheimnisse der Naturwissenschaften und der Mathematik ein. Schon in den ersten Studienjahren trat *Isaacs* große Begabung ans Licht. Als *Newton* in den Jahren 1666/67 eine zweijährige „Zwangspause" vom Studium in seinem Heimatdorf Woolsthorpe verbringen mußte, da in Cambridge eine verheerende Pestepedemie wütete, fand er Zeit und Muße, sich mit vielen ungelösten wissenschaftlichen Problemen zu beschäftigen. Der Legende nach soll Newton durch einen vom Baum fallenden Apfel im Garten seines Heimathauses zu ersten Überlegungen über die Schwerkraft angeregt worden sein, die ihn zu solchen Fragen, wie z. B.:

„Welche Kraft hält die Planeten auf ihrer Bahn?" und „Ist diese Kraft vergleichbar mit der Schwerkraft auf der Erde?" führten (siehe Stempel auf Ersttagsbrief). Inwieweit *Newton* diese Fragen schon beantworten konnte, wissen wir heute nicht genau. Bekannt ist uns aber, daß er in den Jahren 1666/67 zu vielen mechanischen, optischen und mathematischen Problemen seine Grundideen entwickelt hatte und beispielsweise schon in der Lage war, das Gravitationsgesetz aus den von *Kepler* gefundenen Gesetzen der Planetenbewegung abzuleiten.

Wieder nach Cambridge zurückgekehrt, beschäftigte sich *Newton* neben dem fleißigen Studium der Naturwissenschaften auch mit der experimentellen Tätigkeit, die er ebenfalls meisterhaft beherrschte. Für die erstmalige Konstruktion eines Spiegelteleskopes wurde er sogar 1672 zum Mitglied der *Royal Society*, der englischen Akademie, gewählt.

Als *Newton* 1669 mit 26 Jahren Professor in Cambridge wurde, gehörte er bereits zu den bedeutendsten Gelehrten seiner Zeit. 1687 krönte er sein wissenschaftliches Werk mit seinen „Mathematischen Prinzipien der Naturwissenschaften", in denen er unter anderem die Gravitationstheorie und die klassische Mechanik mit den bekannten Axiomen darlegte. Noch heute bildet die klassische Mechanik die Grundlage für die Berechnung der Kräfte und Bewegungen in der Technik.

Zu seinen herausragenden physikalischen Erkenntnissen wäre *Newton* wohl kaum gelangt, wenn er nicht auch ein hervorragender Mathematiker gewesen wäre und die Mathematik als „Werkzeug" seiner physikalischen Forschungen nicht ständig weiterentwickelt hätte. Besonders bei seinen mechanischen Untersuchungen benötigte *Newton* die Vorstellung zeitabhängiger Variablen, die er „fließende Größen" nannte. Er erarbeitete so die Methode der Differential- und Integralrechnung, die sich von der heute benutzten nur durch ihre kompliziertere Symbolik unterscheidet. In *Newtons* 1671 veröffentlichtem mathematischem Hauptwerk finden wir auch seine bedeutenden Ergebnisse zur Reihenlehre. Hervorzuheben ist seine *Theorie der unendlichen Reihen*, die u. a. die Reihenentwicklung der Funktionen $y = \sin x$, $y = \cos x$ und $y = e^x$ ermöglicht. *Newton* selbst betrachtete die *Binomialreihe* als seine größte mathematische Leistung. Die Formel dieser Reihe schmückt deshalb sein berühmtes Grabmal in der Londoner Westminsterabtei.

Aufgabe

Folgende kleine Aufgabe, die zu *Newtons* Lebzeiten noch an Universitäten gerechnet

Ersttagsbrief aus der Ungarischen VR

wurde, soll uns *Newton* auch als Algebraiker zeigen. Versucht euch doch einmal an der Lösung!

Newtons Aufgabe von den Wiesen und Kühen:
a Kühe weiden b Wiesen in c Tagen ab,
a' Kühe weiden b' Wiesen in c' Tagen ab,
a'' Kühe weiden b'' Wiesen in c'' Tagen ab;
welche Beziehung besteht zwischen den neun Größen a bis c''? (*Voraussetzung:* Alle Wiesen liefern gleich viel Gras; das tägliche Wachstum der Wiesen ist gleich; alle Kühe fressen täglich gleich viel.)

Newtons mathematische Forschungen zeigen uns ihn auch als einen Mathematiker von erstem Rang. Trotzdem war *Newton* vor allem Physiker. Seine große Leistung besteht darin, daß er dem Aufschwung der Naturwissenschaften in England sowohl wissenschaftlich als auch organisatorisch, letzteres besonders als langjähriger Präsident der *Royal Society*, große Impulse geben konnte. Zu seinem Todestag, der sich in diesem Jahre zum 250. Male jährt, ehren wir ihn besonders als den Begründer der klassischen Mechanik, um deren Ausbau sich die Physiker und Mathematiker zweier Jahrhunderte bemühten. Erst um 1900 erkannte A. Einstein die bis dahin uneingeschränkt geltende Mechanik als Grenzfall eines weitaus umfassenderen Systems der Relativitätstheorie.

Dorit Sowa

Kurzbiographie der Autorin
Dorit Sowa, geb. 1951 in Nordhausen, verheiratet, zwei Kinder
- Besuch der OS und EOS in Nordhausen, Abitur 1970

Interesse für Naturwissenschaften und Sprachen
- Ab 1970 Physik-Studium an der Karl-Marx-Universität Leipzig, Abschluß als Diplom-Physiker
- Ab 1975 wissenschaftliche Mitarbeiterin am Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften der Karl-Marx-Universität Leipzig

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Liebe Leser der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*!
In Heft 5/77 haben wir unter dieser Überschrift bereits unterschiedliche Aufgabenlösungen von Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb vorgestellt. Da das Kennenlernen von Lösungsvarianten von großem Nutzen und sicherlich auch von Interesse für alle *Jungen Mathematiker* ist, setzen wir diese begonnene Artikelserie fort.

In Heft 1/1977 stellten wir die Aufgabe Ma 6 ▪ 1573, die wie folgt lautet:
Im Jahre 1970 war Peter 8 Jahre, sein Vater 31 Jahre alt. In welchem Jahr wird Peters Vater doppelt so alt sein wie Peter selbst?

Die von uns in Heft 3/1977 veröffentlichte Lösung lautet:
Angenommen, nach n Jahren ist Peters Vater doppelt so alt wie sein Sohn; dann ist Peter $(8+n)$ Jahre, sein Vater $(31+n)$ Jahre alt, und es gilt
$2\cdot(8+n)=31+n,$
$16+2n\ =31+n,$
$n=15.$
Nach 15 Jahren, also im Jahre 1985, wird Peters Vater 46 Jahre, Peter selbst 23 Jahre alt sein, das heißt, Peters Vater wird doppelt so alt sein wie sein Sohn Peter.

Unserer Redaktion gingen zu dieser Aufgabe insgesamt 2102 Lösungen zu, 1237 Lösungen von Mädchen (bravo!) und 865 Lösungen von Jungen.

- Die Schülerin der 6. Klasse, *Carola Dumer*, Leimbach, übersandte uns folgende Lösung:

Der Altersunterschied zwischen Peters Vater und dessen Sohn beträgt 31 Jahre–8 Jahre = 23 Jahre. Also ist Peters Vater doppelt so alt wie Peter selbst, wenn Peter 23 Jahre alt ist. Nun gilt $8+x=23$, also $x=15$. Das heißt, Peter wird nach 15 Jahren, also im Jahre 1985, das Alter von 23 Jahren erreichen. Sein Vater wird nach 15 Jahren, also im Jahre 1985, dann 46 Jahre $(31+15=46)$ alt sein, also doppelt so alt wie Peter.
Unser Kommentar: Eine lobenswerte Denkleistung! Carola, mach weiter so.

- Die Schülerin der 6. Klasse, *Manuela Schicht*, Zittau, übersandte uns folgende Lösung:

Wir gehen am besten von den Geburtsjahren aus. Wegen $1970-31=1939$ wurde Peters Vater im Jahre 1939 geboren. Wegen $1970-8=1962$ wurde Peter selbst im Jahre 1962 geboren. Wegen $1962-1939=23$ war Peters Vater 23 Jahre alt, als Peter geboren wurde. Folglich ist der Vater nach weiteren 23 Jahren, also im Jahre 1985 doppelt so alt wie Peter, denn $1962+23=1985$.
Unser Kommentar: Eine verblüffend einfache Lösung bei zwingender Logik. Sie verdient besonderes Lob.

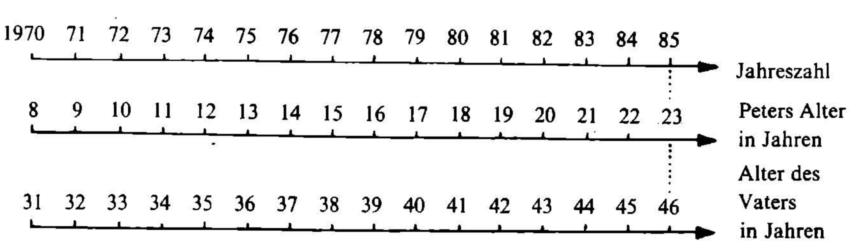
- Die Schülerin der 6. Klasse, *Monika Storch*, Hintersee, übersandte uns folgende Lösung:

Jahr	Alter des Vaters in m Jahren	Alter von Peter in n Jahren	$2\cdot n=m$ Bedingung
1970	31	8	$2\cdot 8=16<31$
1971	32	9	$2\cdot 9=18<32$
.			
.			
.	.	.	
1984	45	22	$2\cdot 22=44<45$
1985	46	23	$2\cdot 23=46$
1986	47	24	$2\cdot 24=48>47$

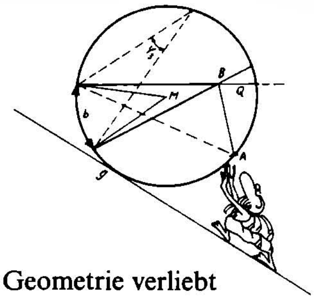
Im Jahre 1985 wird Peters Vater genau doppelt so alt sein wie Peter selbst.
Unser Kommentar: Probieren gehört zum Studieren! Eine zeitaufwendige, aber exakte Lösung.

- Der Schüler der 5. Klasse, *Torsten Kühn*, Potsdam-Babelsberg, übersandte uns folgende graphische Lösung:

Die Bedingung, daß der Vater doppelt so alt ist wie sein Sohn Peter, wird im Jahre 1985 erfüllt. Peter ist dann 23 Jahre, sein Vater 46 Jahre alt.
Unser Kommentar: Unsere Hochachtung! Eine vorbildliche Leistung für einen Schüler der Klassenstufe 5.



In freien Stunden alpha heiter



Sisyphus, in die Geometrie verliebt

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} \text{NEWTON} \\ \text{NEWTON} \\ +\text{NEWTON} \\ \hline \text{GENIUS} \end{array}$$

D. Völzke, Greifswald

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A & + & L & \cdot & P & \cdot & H & \cdot & A & = & A \\
+ & & + & & - & & - & & : & & \cdot \\
A & \cdot & L & + & P & \cdot & H & \cdot & A & = & L \\
- & & - & & + & & \cdot & & + & & + \\
A & - & L & + & P & + & H & + & A & = & P \\
\cdot & & + & & + & & \cdot & & \cdot & & + \\
A & \cdot & L & - & P & + & H & + & A & = & H \\
: & & - & & - & & + & & - & & + \\
A & \cdot & L & \cdot & P & \cdot & H & + & A & = & A \\
\hline
A & + & L & + & P & - & H & \cdot & A & = & X
\end{array}$$

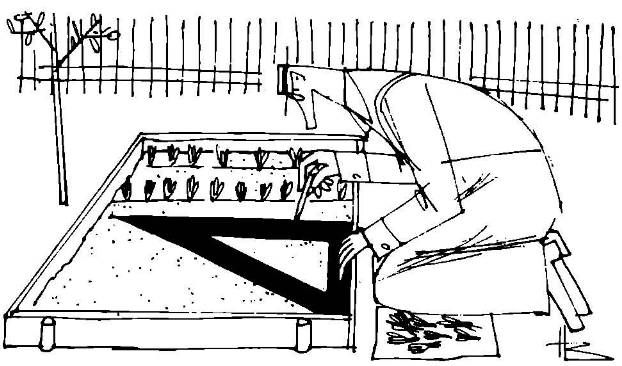
Ellen Raeck, OS Wolmirstedt, Kl. 9

Nicht begriffsstutzig werden!

Von den in jeder Zeile angegebenen fünf Begriffen paßt jeweils einer nicht in die Gruppe hinein. Schreibt man diese Begriffe heraus, so ergeben ihre Anfangsbuchstaben den Namen eines deutschen Mathematikers.

A: Differenz, Quotient, Summand, Produkt, Summe S
B: Strecke, Tangente, Strahl, gerade Linie, Gerade T
C: Vollwinkel, spitzer Winkel, Innenwinkel, rechter Winkel, gestreckter Winkel i
D: Abstand, Länge, Höhe, Flächeninhalt, Breite F
E: Ries, Cantor, Gauß, Leibniz, Euklid E
F: Meter, Lichtjahr, Längeneinheit, Seemeile, Zentimeter L

OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin



Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben bilde man 21 Wörter, deren erste und dritte Buchstaben jeweils von oben nach unten gelesen, den größten englischen Mathematiker und einen Teil seiner Verdienste nennen.

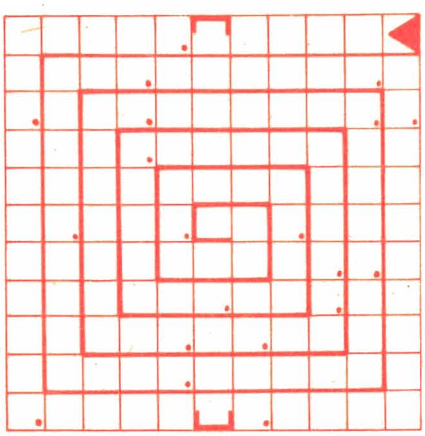
an – an – ber – ce – che – del – der – dif – druck – ei – ei – elch – en – ex – fe – fen – flä – gat – gen – go – gung – hang – in – kel – kel – kel – kel – ker – ku – la – las – leit – ler – li – ma – me – ment – na – när – ne – nei – nei – nen – ner – nie – no – non – o – on – or – ques – renz – ri – ri – ta – ta – ta – te – the – ti – tri – tri – trie – tung – um – ve – waf – win – win – win.

1. Er wird gebildet von einer Geraden und einer Ebene, wenn sie genau einen Punkt gemeinsam haben.
2. Stellenwert im Dezimalsystem
3. Bezeichnung für die Hauptteile der Land-, Luft- und Seestreitkräfte
4. Lehre von der Dreiecksberechnung
5. Schmuckwerk, besonders an Bauwerken und Möbeln
6. Sie existiert bei der schiefen Ebene
7. Tierarzt
8. Begriff der Stereometrie
9. Mathematiker (1868 bis 1941), bedeutendster deutscher Schachmeister
10. Feste Gerade, die bei der Ortsdefinition der Parabel auftritt
11. Streichung aus der Matrikel, d. h. aus der Liste der Studierenden
12. Altsteinzeitlicher Mensch
13. Griech. Buchstabe
14. Italienischer Geometer (1871 bis 1946)
15. Griech. Buchstabe
16. Ein Hirsch
17. Cape
18. Zeitungsanzeige
19. Kraft, die senkrecht auf eine Flächeneinheit wirkt
20. Ihre Summe beträgt bei jedem Dreieck 180°
21. Begriff, der beim Interpolieren auftritt

D. Völzke, Greifswald

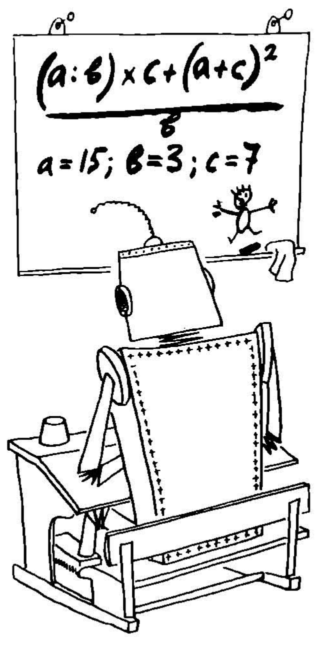
Rätselschlange

Rechts oben beginnend sind die erforderlichen Lösungswörter von Punkt zu Punkt in das Schema einzutragen. Dabei steht in den mit einem Punkt versehenen Feldern der letzte Buchstabe des einen Wortes, der zugleich der erste Buchstabe des folgenden Wortes ist. Richtig gelöst ergibt die angedeutete Senkrechte den Namen eines hervorragenden Mathematikers, der sich u. a. mit der Approximation von Funktionen durch Polynome befaßte.



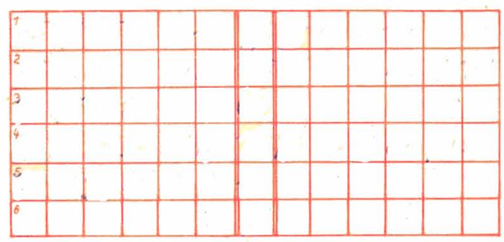
Math. des Altertums – eine Bewegung – Teilgebiet der Mathematik – Begriff aus der Mengenlehre – Lehre von der Dreiecksberechnung – griech. Buchstabe – x-Achse – ein Kegelschnitt – Teil einer Potenz – Teilgebiet der Geometrie – schweizerischer Mathematiker – Mathematiker (1826 bis 1866), auf den der Integralbegriff zurückgeht – Schnittpunkt einer Funktion mit der x-Achse – griech. Buchstabe – weiblicher Vorname – Flächenmaß – Addition – Stadt im Bezirk Neubrandenburg, die durch das Bergringrennen bekannt ist – Trinkbranntwein – im Altertum benutztes Rechenbrett – Zahlwort.

D. Völzke, Greifswald



Verkettungsrätsel

In jede Zeile des abgebildeten Schemas sind jeweils zwei Wörter der folgenden Bedeutung so einzutragen, daß immer der letzte Buchstabe des ersten Wortes mit dem ersten Buchstaben des zweiten Wortes übereinstimmt. Bei richtiger Lösung ergeben die sechs markierten Buchstaben von oben nach unten gelesen den Namen des größten englischen Mathematikers.



1. Griech. Buchstabe – kleiner als Null
2. Ein Kegelschnitt – Teil von Größenangaben
3. Stadt im Bezirk Neubrandenburg, die durch das Bergringrennen bekannt ist – er verwendete in seinem Rechenbuch erstmals die Rechenzeichen + und –
4. Ergebnis der Multiplikation – eine Winkelfunktion
5. Beethovens einzige Oper – griech. Buchstabe
6. Vieleck (lat.) – Begriff der Logarithmenrechnung

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

Aus der Skatwelt

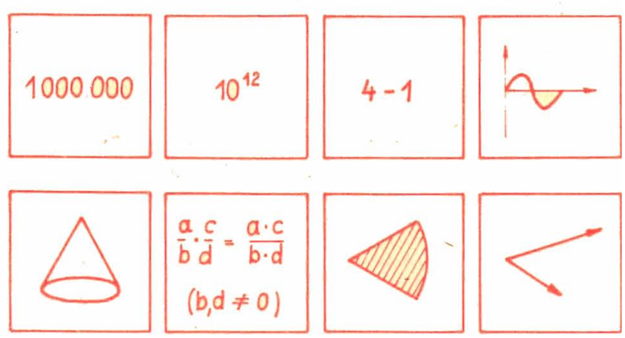
Der niedrigste Augenstich beim Skat beträgt 2 Augen (1 Bube, 2 leere Karten) und der höchste 33 Augen (3 Dause). Sind Augenstiche von 2 bis 33 durchgehend möglich?

Fachlehrer O. Dietze, Wöhlitz

Begriffspaare gesucht!

Es gibt mathematische Begriffe, die sich ausschließlich im ersten Buchstaben ihrer Bezeichnung unterscheiden. Die folgenden Bilder sollen euch helfen, vier derartige Paare von Begriffen zu finden.

OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin



X. Internationale Physikolympiade

Juli 1977, Hradec Králové

Am 15. Juli ging mit der Siegerehrung in Prag die 10. *Internationale Physikolympiade* zu Ende. Sie fand vom 8. bis 15. Juli 1977 in der ostböhmischen Bezirksstadt Hradec Králové statt. An die 60 Teilnehmer aus 12 Ländern wurden von der Jury insgesamt sieben 1., sechzehn 2. und siebzehn 3. Plätze vergeben. Die fünf Jungen der DDR-Mannschaft holten sich zwei 1. Plätze, die Reinhard Meinel von der Spezialschule Carl Zeiss Jena und Ralf Glaser von der Spezialschule „Martin Andersen Nexö" in Dresden errangen. Zwei 3. Plätze kommen auf das Konto von *Mathias Hegner* aus der Berliner Heinrich-Hertz-EOS und *Stefan Schuster* aus Meißen. Stefan erhielt von der Jury den Sonderpreis für den jüngsten Olympiadeteilnehmer.

In der inoffiziellen Länderwertung belegten die DDR-Olympioniken mit insgesamt 177 Punkten einen 5. Platz. Die ersten drei Plätze erzielten die ČSSR, die Sowjetunion und die BRD.

Am 16. Juli wurden unsere vier Preisträger auf einem kleinen Empfang in Dresden für ihr hervorragendes Endergebnis mit dem Titel „Jungaktivist" geehrt. Ein Leistungsstipendium erhalten ferner die Abiturienten *Ralf Glaser, Mathias Hegner* und *Reinhard Meinel.* Alle drei waren bereits im letzten Jahr bei der 9. *Internationalen Physikolympiade* in Budapest erfolgreich.

IX. Internationale Chemieolympiade

Juli 1977, Bratislava

Am 12. Juli 1977 wurden die 48 Teilnehmer der IX. *Internationalen Chemie-Olympiade* im Spiegelsaal des Bratislaver Rathauses empfangen. Hier überreichte der Minister für Volksbildung der Slowakischen Sozialistischen Republik, Prof. Dr. *Juraj Busa* und der Präsident der Internationalen Jury, Prof. Dr. *Jan Gazo*, den Siegern die Medaillen.

Insgesamt konnten – durch den hohen Wissensstand der Schüler – sechs Goldmedaillen, zehn Silbermedaillen und 23 Bronzemedaillen vergeben werden. Als stärkste Mannschaft erwies sich die des Gastgeberlandes. Sie erkämpfte drei Goldmedaillen. Für unsere Republik holten *Thomas Wandlowski*, Erweiterte Oberschule Pirna, eine Silbermedaille und *Michael Schulz*, Technische Hochschule Merseburg, *Thomas Luschtinetz*, Erweiterte Oberschule Stralsund, Bronzemedaillen. *Lutz Krischauski*, Erweiterte Oberschule Stralsund, erhielt ein Diplom.

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 2/77:

Ph 9 ■19

Gegeben: $F=65000$ kp Gesucht: v

$s=4{,}5$ m

$G=25$ Mp $=25000$ kp

$g=9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

Die Gesamtenergie des Förderkorbes während des Abbremsens setzt sich zusammen aus seiner Bewegungsenergie W_{kin} und seiner Lageenergie W_{pot}. Diese Energie setzt sich um in Reibungsarbeit W_R. Nun ist $W_{kin}=\frac{mv^2}{2}$, $W_{pot}=Gs$ und $W_R=Fs$.

Es gilt also

$$W_R=W_{kin}+W_{pot}$$

$$Fs=\frac{mv^2}{2}+Gs$$

$$\frac{mv^2}{2}=Fs-Gs$$

$$v^2=\frac{2s(F-G)}{m}\quad \text{mit } m=\frac{G}{g}$$

$$v^2=\frac{2s(F-G)g}{G}$$

$$v=\sqrt{\frac{2s(F-G)g}{G}}$$

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot 4{,}5\ \mathrm{m}(65000-25000)\ \mathrm{kp}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m}}{25000\ \mathrm{kp}\cdot \mathrm{s}^2}}$$

$$v\approx 11{,}89\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Die Fänger griffen bei einer Geschwindigkeit von $11{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ein.

Ch 9 ■15

162 g	180 g	
$(C_6H_{10}O_5)_n + n\ H_2O \rightarrow n\ C_6H_{12}O_6$		$n=1$
m	260 · 100 g	

NR: $1\ \mathrm{mol}\cdot 162\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}=162$ g,

$1\ \mathrm{mol}\cdot 180\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}=180$ g

$m=234$ kg

234 kg $\triangleq$ 95%

$m_1 \triangleq 100\%$, $m_1=246$ kg

246 kg Stärke müssen verwendet werden.

Ma 10/12 ■1645 Es sei a die Kantenlänge des Würfels. Das Volumen des dem Würfel einbeschriebenen Kegels beträgt dann

$$V_1=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot a=\frac{1}{12}\pi a^3.$$

Das Volumen der dem Würfel einbeschriebenen Kugel beträgt

$$V_2=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3=\frac{1}{6}\pi a^3.$$

Das Volumen des dem Würfel einbeschriebenen Zylinders beträgt

$$V_3=\pi r^2 h=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot a=\frac{1}{4}\pi a^3.$$

Nun gilt $V_1:V_2=6:12=1:2$ und $V_2:V_3=4:6=2:3$ und folglich $V_1:V_2:V_3=1:2:3$.

Ma 10/12 ■1646 Wegen der für alle reellen α und β gültigen Beziehungen $\sin\alpha=2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ist $\sin(x+y)=\sin x+\sin y$ äquivalent mit

$$2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2},$$

$$2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}-2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=0,$$

$$2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\left(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)=0. \quad (1)$$

Da ferner für alle reellen α und β auch $\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ gilt, ist (1) äquivalent mit

$$2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot(-2)\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}=0,$$

$$-4\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}=0.$$

Die letzte Gleichung gilt genau dann, wenn wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$\sin\frac{x+y}{2}=0$, d. h., $x+y=2k\pi$ oder

$\sin\frac{x}{2}=0$, d. h. $x=2k\pi$ oder

$\sin\frac{y}{2}=0$, d. h., $y=2k\pi$.

Ma 10/12 ■1647 Die Ungleichungen bzw. die Gleichung sind nur für $x\neq 0$, $x\neq -\frac{1}{2}$ und $x\neq -1$ definiert.

Zu b): Durch Umformen erhalten wir aus

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{2x+1}=0,$$

$$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)}=0.$$

Der linke Term dieser Gleichung wird für keinen Wert von x gleich Null; also besitzt die Gleichung b) keine reellen Lösungen.

Zu a): $\frac{1}{x(x+1)(2x+1)}>0$ genau dann, wenn „$x>0$" oder „$x>-1$ und $x<-\frac{1}{2}$", d. h., die Ungleichung gilt für alle x mit $-1<x<-\frac{1}{2}$ oder $0<x$.

Zu c): Es gilt $\frac{1}{x(x+1)(2x+1)}<0$ genau dann, wenn „$x<1$“ oder „$x<0$ und $x>-\frac{1}{2}$“, d. h., die Ungleichung gilt für alle x mit $-\frac{1}{2}<x<0$ oder $x<-1$.

Ma 10/12 ■1648 Aus der gegebenen Ungleichung erhalten wir durch äquivalentes Umformen

$$4(a^3+b^3)\geqq(a+b)^3,$$
$$4(a^3+b^3)\geqq a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$3(a^3+b^3)\geqq 3ab(a+b),$$
$$a^3+b^3\geqq ab(a+b),$$
$$a^3-a^2b+b^3-ab^2\geqq 0,$$
$$a^2(a-b)-b^2(a-b)\geqq 0,$$
$$(a-b)(a^2-b^2)\geqq 0,$$
$$(a-b)(a-b)(a+b)\geqq 0.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $a+b\geqq 0$ oder wenn $a=b$ ist.

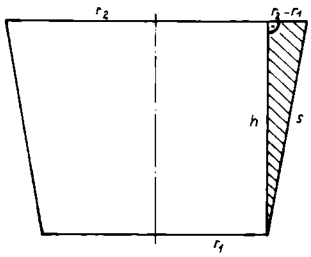
Ph 10/12 ■20

Gegeben: a) $d_1=1000\,\text{mm}$ b) $h_0=50\,\text{cm}$
$r_1=50\,\text{cm}$ $d_1=1000\,\text{mm}$
$d_2=1130\,\text{mm}$ $r_1=50\,\text{cm}$
$r_2=56{,}5\,\text{cm}$
$h=1150\,\text{mm}=115\,\text{cm}$

Gesucht: a) A_1 b) V

a) Der Flächeninhalt der Innenseite A_1 ergibt sich aus

$A_1=A_M=\pi s(r_1+r_2)$ und
$A_G=\pi r_1^2$.
$A_1=A_M+A_G$
$A_1=\pi s(r_1+r_2)+\pi r_1^2$ $\quad s=\sqrt{h^2+(r_2-r_1)^2}$ (nach Pythagoras)

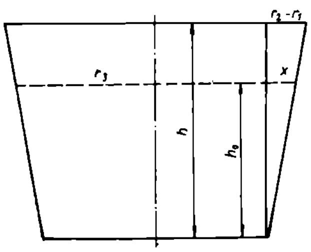


$$A_1=\pi[(r_1+r_2)\sqrt{h^2+(r_2-r_1)^2}+r_1^2]$$
$$A_1=3{,}14[(50+56{,}5)\,\text{cm}\cdot\sqrt{115^2+6{,}5^2}\,\text{cm}+50^2\,\text{cm}^2]$$
$$A_1\approx 46\,369\,\text{cm}^2\approx 4{,}64\,\text{m}^2.$$

Es müssen $4{,}64\,\text{m}^2$ mit Schamottesteinen ausgekleidet werden.

b) Das Füllvolumen ist ebenfalls ein Kegelstumpf. Um den oberen Radius zu berechnen, gilt nach dem Strahlensatz

$$h:h_0=(r_2-r_1):x$$
$$115:50=6{,}5:x$$
$$x=2{,}8.$$



Dann ist der obere Radius $r_3=r_1+x$

$$r_3=50\,\text{cm}+2{,}8\,\text{cm}$$
$$r_3=52{,}8\,\text{cm}.$$

Das Volumen berechnet man nach

$$V=\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_3^2+r_1r_3)$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot 3{,}14\cdot 50\,\text{cm}\,(50^2+52{,}8^2+50\cdot 52{,}8)\text{cm}^2$$

$V=0{,}415\,\text{m}^3$.

Das Füllvolumen des Behälters beträgt $0{,}415\,\text{m}^3$.

Ch 10/12 ■16

$98{,}08\,\text{g}$ $\qquad 233{,}4\,\text{g}$
$H_2SO_4+BaCl_2\rightarrow BaSO_4+2HCl$
m $\qquad 0{,}4669\,\text{g}$

NR: $1\,\text{mol}\cdot 98{,}08\frac{\text{g}}{\text{mol}}=98{,}08\,\text{g}$,

$1\,\text{mol}\cdot 233{,}4\frac{\text{g}}{\text{mol}}=233{,}4\,\text{g}$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:
$m=0{,}1962\,\text{g}$

In 1 l Schwefelsäure sind $100\cdot 0{,}1962\,\text{g}$ $=19{,}62\,\text{g}$ H_2SO_4 enthalten.

$98{,}08\,\text{g}$ sind 1 mol H_2SO_4
$19{,}62\,\text{g}$ sind x mol H_2SO_4

$$x=\frac{1\,\text{mol}\cdot 19{,}62\,\text{g}}{98{,}08\,\text{g}}=0{,}2\,\text{mol}$$

In einem Liter Schwefelsäure sind etwa 0,2 mol H_2SO_4 enthalten.

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Lösungen

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10

1. Hat ein Polygon die Ecken $E_1, E_2, \ldots, E_n$ und den Flächeninhalt F, so setzen wir

$$F=A_{E_1E_2\cdots E_n}.$$

Es gilt:

(1) $A_{OPY}+A_{OXR}=2A_{OPSR}+A_{RSY}+A_{PXS}$.

Da die Dreiecke $\triangle OPY$ und $\triangle OQY$ gleiche Grundlinie und wegen $\overline{PQ}\parallel\overline{OY}$ gleiche zugehörige Höhe haben, erhalten wir

$$A_{OPY}=A_{OQY}$$

und analog

$$A_{OXR}=A_{OXQ},$$

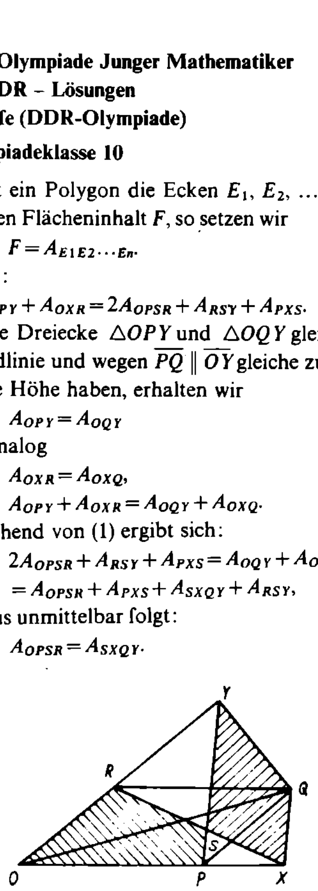
also $A_{OPY}+A_{OXR}=A_{OQY}+A_{OXQ}$.

Ausgehend von (1) ergibt sich:

$$2A_{OPSR}+A_{RSY}+A_{PXS}=A_{OQY}+A_{OXQ}$$
$$=A_{OPSR}+A_{PXS}+A_{SXQY}+A_{RSY},$$

woraus unmittelbar folgt:

$$A_{OPSR}=A_{SXQY}.$$



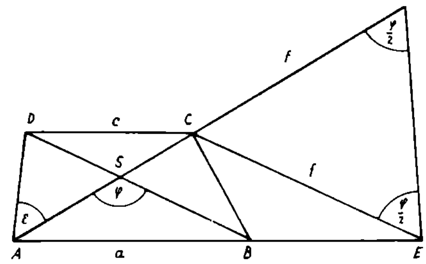
Bemerkungen: Mit 23 ist die Anzahl der Schüler ohne Lösungsversuche sehr groß. Dennoch muß der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe als angemessen bezeichnet werden.

Punkte	0	1	2	3	4	5
Anzahl	54	6	2	3	9	44

Dr. Ingeborg Bartsch,
Institut für Lehrerbildung Rostock

2. *I Analysis*

Sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB\parallel CD$, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.



E liege

1. auf der Verlängerung von AB über B hinaus und
2. auf der Parallelen zu BD durch C.

Dann gilt nach dem Satz über Stufenwinkel
$\overline{\sphericalangle ASB}=\overline{\sphericalangle ACE}=\phi$. Da $BECD$ ein Parallelogramm ist, gilt weiter
$\overline{BE}=\overline{CD}=c$,
also $\overline{AE}=a+c$ und $\overline{CE}=\overline{BD}=f$.

F liege

1. auf der Verlängerung von AC über C hinaus und
2. auf dem Kreis um C mit f.

Dann gilt
$\overline{AF}=e+f$,
und nach dem Satz über gleichschenklige Dreiecke und dem Außenwinkelsatz ist

$$\overline{\sphericalangle CFE}=\overline{\sphericalangle FEC}=\frac{\phi}{2}.$$

Daraus ergibt sich folgende Konstruktionsvorschrift:

II Konstruktionsbeschreibung

(1) Man zeichnet eine Strecke AF der Länge $e+f$.

(2) Man trägt an FA in F einen Winkel der Größe $\frac{\phi}{2}$ an.

(3) Man zeichne den Kreis mit dem Radius $a+c$ um A. Schneidet dieser Kreis den freien Schenkel des Winkels, so sei E einer der Schnittpunkte.

(4) Man trägt an EF in E einen Winkel der Größe $\frac{\phi}{2}$ nach der Seite an, auf der A liegt.

(5) Man zeichnet die Parallele zu AC durch C.

(6) Man trägt AF in A einen Winkel der Größe ε nach der Seite an, auf der E nicht liegt. Schneidet der freie Schenkel dieses Winkels die Parallele, so sei D der Schnittpunkt.

(7) Man zeichnet die Parallele zu EC durch D. Schneidet sie AE, so sei B der Schnittpunkt.

III Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck ABCD den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Laut Konstruktion gilt $AB\parallel CD$ und $\overline{\sphericalangle DAC}=\varepsilon$. Aus der Konstruktion und aus den Sätzen über gleichschenklige Dreiecke, Dreiecksaußenwinkel und Stufenwinkel folgt

$$\overline{\sphericalangle ASB}=\overline{\sphericalangle ACE}=2\cdot\overline{\sphericalangle AFE}=2\cdot\frac{\phi}{2}=\phi.$$

Schließlich ergibt sich aus der Konstruktion, daß $BECD$ ein Parallelogramm ist; also gilt:
$\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AB}+\overline{BE}=\overline{AE}=a+c$,
$\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{AC}+\overline{CE}=\overline{AC}+\overline{CF}=\overline{AF}=e+f$.

IV Determination

Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Ein rechnerischer Vergleich der entstehenden Strecken ergibt, daß das Lot von A auf den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels eine Länge l mit

$l=15\text{ cm}\cdot\sin 50°<15\text{ cm}\cdot 0{,}8$
$<13\text{ cm}=a+c$ hat.

Da für die gegebenen Werte $a+c<e+f$ ist, führt Konstruktionsschritt (3) zu genau zwei verschiedenen Punkten E_1, E_2. Für beide ergibt Konstruktionsschritt (4) je genau einen Punkt C_1 bzw. C_2. Konstruktionsschritt (5) ist jeweils eindeutig durchführbar. Da für die gegebenen Werte $\varepsilon<\phi$, also erst recht

$$\varepsilon<\frac{\phi}{2}+\sphericalangle FE_iA \qquad (i=1,2)$$

ausfällt, ergibt sich auch in Konstruktionsschritt (6) je genau ein Schnittpunkt D_i $(i=1,2)$. Ferner folgt aus $\varepsilon<\phi$:
Trägt man wie in (6) anstelle von ε einen Winkel der Größe ϕ an, so ergibt sich mit der Parallelen aus (5) ein Schnittpunkt Z_i $(i=1,2)$ auf der Verlängerung von C_iD_i über D_i hinaus. Für ihn ist $AE_iC_iZ_i$ ein Parallelogramm, also gilt

$\overline{C_iZ_i}=\overline{AE_i}$,

und es folgt

$\overline{C_iD_i}<\overline{AE_i}$.

Folglich schneidet die in (7) zu konstruierende Parallele jeweils AE_i in einem zwischen A und E_i gelegenen Punkt B_i.
Somit existieren bis auf Kongruenz genau die Trapeze $AB_1C_1D_1$ und $AB_2C_2D_2$, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Beide sind zueinander nicht kongruent, denn

$\overline{\sphericalangle C_1AB_1}\neq\overline{\sphericalangle C_2AB_2}$.

Dabei sind B_1, B_2 bzw. C_1, C_2 als gleichliegende Punkte aufgefaßt. Auch bei anderer Auffassung folgt die Inkongruenz der beiden Trapeze aus

$\overline{\sphericalangle C_2D_2A}<\overline{\sphericalangle B_1DA_1}$.

Bemerkungen: Alle Schüler haben eine Lösung versucht. Obwohl die Aufgabenstellung allen Schülern verständlich war, traten eine Reihe erheblicher Schwierigkeiten auf, die sich in folgenden typischen Fehlern äußerten:

1. Vielen Schülern war der Lösungsmechanismus (Analysis, Konstruktion, Determination) entweder nicht bekannt oder sie konnten ihn auf die gegebene Situation, die durch die Aufgabe 161036 der Bezirksolympiade vorbereitet worden war, nicht anwenden.
2. Etwa 20% der Teilnehmer beschränken sich bei der Analysis auf eine Planfigur und gingen dann ohne Kommentar sofort zur Konstruktion über, wobei die einzelnen Schritte mitunter nicht motiviert oder sogar falsch waren.
3. Der Nachweis, daß die Konstruktion mit den gegebenen Stücken zwei nicht kongruente Trapeze liefert, bereitete in fast allen Fällen Schwierigkeiten und führte zu Punktabzügen. Hier wird die Notwendigkeit, bei ähnlichen Aufgaben besonderes Gewicht auf eine vollständige Determination zu legen, deutlich.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	42	8	6	17	19	16	6	4

Dr. K. Rosenbaum, Päd. Hochschule Erfurt

3A. Nach den Angaben über die Punktbewertung gibt es ganze Zahlen a, b, $c>0$ so, daß die Punktbewertung folgendermaßen lautet:

Platzziffer:	1	2	3	4	5
Punktzahl	$a+3b+c$	$a+3b$	$a+2b$	$a+b$	a

Wenn ein Sportler in zwei Sportarten die in der folgenden Tabelle genannten Platzziffern erreichte, so erhält er demnach die hierbei genannte Punktzahl:

Platzziffern	Punktzahl
1,1	$2a+6b+2c$
1,2	$2a+6b+c$
1,3	$2a+5b+c$
2,2	$2a+6b$
2,3	$2a+5b$
3,3	$2a+4b$

Nur dann können zwei Punktzahlen, die hier in verschiedenen Zeilen stehen, einander gleich sein, wenn dies die Zahlen $2a+5b+c$ und $2a+6b$ sind; dann aber ist diese Zahl gerade. Daher können A und C nur dadurch je 17 Punkte erreicht haben, daß sie in den beiden Sportarten dasselbe Paar von Platzziffern hatten, nur in entgegengesetzter Reihenfolge. Dies kann nicht der 2. und 3. Platz gewesen sein; denn dann hätte C zweimal den 1. Platz, also eine höhere Punktzahl erreicht. Es kann auch nicht der 1. und 2. Platz gewesen sein; denn dann hätte C zweimal den 3. Platz, also eine nicht nur um 1 kleinere Punktzahl erreicht. Daher hatten A und C (zweimal, nur in entgegengesetzter Reihenfolge) die Plätze 1 und 3 erreicht, und C kam zweimal auf Platz 2. Hiernach gilt

$$2a+5b+c=17. \qquad (1)$$
$$2a+6b\quad=16. \qquad (2)$$

Aus (2) folgt $3b=8-a<9$, also $b<3$; daher und wegen (2), (1) verbleiben genau die folgenden Möglichkeiten

Fall I) $b=1$, $a=5$, $c=2$:

Platzziffer	1	2	3	4	5
Punktzahl	10	8	7	6	5

Fall II) $b=2$, $a=2$, $c=3$:

Platzziffer	1	2	3	4	5
Punktzahl	11	8	6	4	2

Fall I: Da C noch A und B in der Gesamtpunktzahl übertraf, muß er im 3. Wettkampf Punkte bekommen haben. Die geringste Punktzahl, die vergeben wurde, betrug 5. Also hatte C insgesamt mindestens $16+5=21$ Punkte. D mußte folglich mindestens 22 Punkte haben. D kann in den ersten beiden Wettkämpfen höchstens zweimal den vierten Platz (12 Punkte) und im 3. Wettkampf höchstens den ersten Platz (10 Punkte) belegt haben. Damit konnte er höchstens 22 Punkte erhalten. Also hatte er genau 22 Punkte, und C hatte genau 21 Punkte.

Fall II: Mit der analogen Begründung (zu Fall I) mußte C mindestens $16+2=18$ Punkte haben. D konnte höchstens $4+4+11=19$ Punkte haben. Da er C in der Gesamtpunktzahl übertraf, mußte er also 19 Punkte haben und C genau 18 Punkte; als Platzverteilung ergibt sich wieder die unten angegebene.
In beiden Fällen erhalten wir also als einzig mögliche Angabe über die gesuchten Platzziffern:

Platzziffern: Wettkampf	1	2	3
Vom Sieger D belegter Platz	4.	4.	1.
Vom Zweiten C belegter Platz	2.	2.	5.

Lösungsvorschlag von der Jury der OJM

3B. Die Gleichung

$$\frac{x^2-p+3p^2}{x-p}+2x=3 \qquad (1)$$

kann nur eine Lösung besitzen, wenn x von p verschieden ist. Wegen

$$\frac{x^2-p+3p^2}{x-p}=x+p+\frac{4p^2-p}{x-p}$$

(Division mit Rest) ist Gleichung (1) äquivalent mit

$$3x+p+\frac{4p^2-p}{x-p}=3. \qquad (2)$$

α) Für $4p^2-p=0$ ist Gleichung (2) äquivalent mit der linearen Gleichung

$$3x+p=3, \qquad (3)$$

die genau die Lösung $x=1-\frac{p}{3}$ besitzt.
$4p^2-p=0$ ist aber genau für $p=0$ oder $p=\frac{1}{4}$ erfüllt.

β) Es sei nun $4p^2-p\neq 0$. Unter Berücksichtigung von $x\neq p$ ist Gleichung (1) äquivalent mit

$$x^2-p+3p^2+2x^2-2px=3x-3p. \qquad (4)$$

Diese quadratische Gleichung wird auf die sogenannte Normalform

$$x^2-\left(\frac{2}{3}p+1\right)x+\frac{2}{3}p+p^2=0 \qquad (5)$$

gebracht, aus der die Diskriminante

$$D=\left(\frac{1}{3}p+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{3}p+p^2\right)=-\frac{8}{9}p^2-\frac{1}{3}p+\frac{1}{4}$$

abgelesen wird.
Eine quadratische Gleichung besitzt keine reelle Lösung im Falle $D<0$, also für

$$p^2+\frac{3}{8}p-\frac{9}{32}=\left(p+\frac{3}{16}\right)^2-\frac{81}{256}<0.$$

Das ist jeweils äquivalent mit

$$\left|p+\frac{4}{16}\right|<\frac{9}{16}.$$
$$-p-\frac{3}{16}<\frac{9}{16}<p+\frac{3}{16}.$$
$$p>\frac{3}{8}\quad p<-\frac{3}{4}.$$

Gleichung (5) besitzt genau eine Lösung im Falle $D=0$, also für $p=\frac{3}{8}$ oder $p=-\frac{3}{4}$.
Schließlich besitzt (5) genau dann zwei verschiedene reelle Lösungen, wenn $D>0$, also $-\frac{3}{4}<p<\frac{3}{8}$ ist.

Die Zusammenfassung der Fälle α) und β) liefert:

a) Die Lösungsmenge L der Gleichung (1) in der Menge der reellen Zahlen ist genau dann leer, wenn $p>\frac{3}{8}$ oder $p<-\frac{3}{4}$ zutrifft.

b) L besteht genau dann aus einem Element, wenn p Element der Menge $\left\{-\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right\}$ ist.

c) L besteht genau dann aus zwei Elementen, wenn p Element der Menge

$\left\{z \mid z\in R \wedge -\frac{3}{4}<z<\frac{3}{8} \wedge z\neq 0 \wedge z\neq\frac{1}{4}\right\}$ ist.

Bemerkungen: Von den 118 Startern wählten 93 diese Aufgabe. Die volle Punktzahl erreichten nur 5 Schüler. 15 Schüler erhielten je 6 bzw. 7 Punkte und 54 Schüler je 4 bzw. 5 Punkte. Das zeigt, daß die meisten Schüler über die Lösungsmöglichkeiten einer quadratischen Gleichung Bescheid wußten, aber nicht beachteten, daß für gewisse Werte des Parameters p die gegebene Gleichung in eine lineare entarten kann.

Dr. Hans-Jürgen Vogel, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam

4. (Entsprechend der Lösung von Lutz Möller, *EOS Dippoldiswalde*, Kl. 9, die mit einem Diplom ausgezeichnet wurde):

Angenommen, es gibt ein ganzzahliges Zahlenpaar (x, y), das die vorgegebene Gleichung

(1) $xy+3x-2y-3=0$

erfüllt. Dann ist

(2) $x(y+3)=2y+3.$

Mit der Annahme $y+3=0$ folgt daraus die Aussage $0=-3$, die falsch ist; folglich ist $y\neq-3$.

Wir können nun $y=-3+a$ setzen, wobei a eine von Null verschiedene ganze Zahl ist. Dann geht (2) über in

$$x-2=\frac{-3}{a}.$$

Da x ganzzahlig ist, muß auch $\frac{-3}{a}$ ganzzahlig und demnach a ein Teiler von -3 sein; d. h., es ist a genau eine der Zahlen $1, -1, 3, -3$. Damit erhalten wir

a	1	−1	3	−3
x	−1	5	1	3
y	−2	−4	0	−6

Eine Lösung kann nach unseren bisherigen Überlegungen nur eine dieser vier Zahlenpaare sein. Durch eine Probe bestätigt man, daß alle diese Paare auch Lösungen sind.

Bemerkungen: Ein geringer Teil der Schüler formte (1) äquivalent um in

$$(x-2)(y+3)=-3.$$

Demnach müssen dann $x-2$ und $y+3$ Teiler von -3 sein; und daraus ergibt sich das obige Tabellenergebnis. Diese Lösung ist durchaus naheliegend, wenn man mit diophantischen Gleichungen der obigen Art etwas vertraut ist. Die meisten Schüler lösten (1) nach x bzw. y auf, etwa

(3) $y=\frac{-3(x-1)}{x-2}.$

Dabei wurde oft übersehen, daß dazu $x-2\neq 0$ vorausgesetzt werden muß, und damit (1) für den Fall $x=2$ gesondert zu diskutieren ist. Von vielen Teilnehmern wurden gleich an (3) Teilbarkeitsuntersuchungen angeschlossen. Damit wird der Lösungsweg unnötig verkompliziert. Zum Teil wurde eine unvollständige Fallunterscheidung durchgeführt, indem nur die Fälle $(x-2)\mid 3$ und $(x-2)\mid(x-1)$ diskutiert wurden. (Das reicht offenbar nicht aus, denn beispielsweise gilt $153\cdot 25$, jedoch weder $15\mid 3$ noch $15\mid 25$.)

Die Untersuchung von (3) wird wesentlich einfacher durch die Umformung

$$y=\frac{-3(x-1)}{x-2}=\frac{-3(x-2)-3}{x-2}$$
$$=-3-\frac{3}{x-2}, \text{ denn danach}$$

muß $x-2$ ein Teiler von 3 sein.

Kritisch zu bemerken ist noch die unzureichende Darstellung des logischen Gangs einiger vorgelegter Lösungen: es fehlt eine deutliche Hervorhebung von Voraussetzungen und Ergebnissen (Folgerungen) sowie von Äquivalenzen. Dann hätten u. a. einige Schüler bemerkt, daß ihre Untersuchung erst durch eine Probe vollständig ist.

Die Aufgabe war leicht; der Ergebnisspiegel unterstreicht dies nachdrücklich. Es ergab sich folgende Punkteverteilung:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	1	5	7	17	20	21	47

Dr. Erhard Quaisser, Päd. Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam

5. Von den Schülern wurden zwei verschiedene Lösungswege beschritten. Einmal wurde der gesuchte Flächeninhalt als $\overline{FD}\cdot\overline{FE}$ berechnet, zum anderen als Differenz aus der Fläche des Rechtecks und den entsprechenden Dreiecksflächen dargestellt.

Zunächst muß $q>1$ gefordert werden, damit $\overline{AC}>\overline{BC}$ ist. Nach dem Kathetensatz ist im Dreieck ACD $\overline{AD}^2=a^2=\overline{AF}\cdot aq$, also $\overline{AF}=\frac{a}{q}$ und damit aus Symmetriegründen auch $\overline{CE}=\frac{a}{q}$. Ist $\overline{AB}>\overline{BC}$, also $q>\sqrt{2}$, so liegen die Punkte A, F, E und C in dieser Reihenfolge auf $\overline{AC}$, und es ist $\overline{FE}=aq-\overline{AF}-\overline{CE}$
$=a\left(q-\frac{2}{q}\right)$.

Ist jedoch $\overline{BC}>\overline{AB}$, also $1<q<\sqrt{2}$, so lautet diese Reihenfolge A, E, F und C, und es ist $\overline{FE}=\overline{AF}+\overline{CE}-aq=a\left(\frac{2}{q}-q\right)$. Für $\overline{BC}=\overline{AB}$ wird $ABCD$ ein Quadrat. E und F fallen mithin zusammen, da die Diagonalen eines Quadrates senkrecht aufeinander stehen.

Zusammenfassend ist also: $\overline{EF}=a\left|\frac{2}{q}-q\right|$.

Für $\overline{DF}$ ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras im Dreieck AFD:

$\overline{DF}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AF}^2}=\frac{a}{q}\sqrt{q^2-1}$. Somit ist

$A(FBED)=\overline{FD}\cdot\overline{FE}=\frac{a^2}{q^2}\sqrt{q^2-1}\,|q^2-2|$,

wobei $A(\ldots)$ den Flächeninhalt der jeweiligen Figur bezeichnet.

Beim zweiten Lösungsgedanken wird hier nur der Fall $\overline{AB}>\overline{BC}$ dargestellt. Die Überlegungen im Fall $\overline{AB}>\overline{BC}$ verlaufen analog, und der entartete Fall ist bereits oben betrachtet worden. Es ist $A(FBED)=A(ABCD)$ $-A(AFB)-A(BCE)-A(ECD)-A(AFD)$.

Aus Symmetriegründen ist $A(AFB)=A(ECD)$ bzw. $A(BCE)=A(AFD)$. Weiterhin gilt sogar $A(AFB)=A(BCE)$, denn beide Dreiecke haben wegen $\overline{AF}=\overline{EC}$ eine gleichlange Grundseite und die Höhe $\overline{BE}$. Damit ist $A(FBED)$ $=A(ABCD)-4A(AFD)$. Die konkreten Größen zur Berechnung sind bereits im ersten Lösungsgedanken bestimmt worden. Ergänzt werden muß noch $\overline{AB}=a\sqrt{q^2-1}$.

Bemerkungen: Die Aufgabe erscheint angemessen. Als typischer Fehler muß das Nichterkennen der Fallunterscheidungen angegeben werden, den die Punkteverteilung deutlich widerspiegelt. Ja nicht einmal die Forderung, daß der Radikand nicht negativ sein darf, wurde von vielen Schülern erkannt. Dies ist um so bedauerlicher, da die Fallunterscheidung praktisch aus dem Ergebnis ablesbar ist.

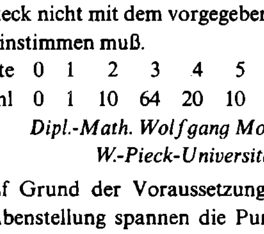
Kritisiert werden muß ferner die Unsitte, die in der Aufgabenstellung vorgegebenen Bezeichnungen individuell abzuändern, da im strengen Sinne ein individuell bezeichnetes Rechteck nicht mit dem vorgegebenen $ABCD$ übereinstimmen muß.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	0	1	10	64	20	10	3	10

Dipl.-Math. Wolfgang Moldenhauer, W.-Pieck-Universität Rostock

6. Auf Grund der Voraussetzungen in der Aufgabenstellung spannen die Punkte A, B, C, D, E, F, A', B', C', E', F' ein gerades sechseckiges Prisma mit der Höhe h und dem Volumen V_0 auf. Um das gesuchte Volumen V des in der Aufgabe beschriebenen Polyeders zu erhalten, genügt es offenbar, die Volumina der dreiseitigen Pyramiden $AB'F'A'$, $CD'B'C'$, $EF'D'E'$, $B'ABC$, $D'CDE$ und $F'EFA$ von V_0 zu subtrahieren. Auf Grund der Regelmäßigkeit der Sechsecke sind die in den Ebenen ε bzw. ε' liegenden Grundflächen dieser Pyramiden paarweise zueinander kongruent. Da die Höhe jeder Pyramide auf die entsprechende Grundfläche gleich der Höhe h des Prismas ist, haben die genannten sechs Pyramiden das gleiche Volumen V_p. Damit ergibt sich:

$$V=V_o-6V_p.$$



Sei A_o der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$ und A_p der Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Dann gilt

$$V=A_oh-6\cdot\frac{1}{3}A_ph=(A_o-2A_p)h.$$

Die Differenz $A_o - 2A_p$ entspricht offenbar dem Flächeninhalt des Drachenvierecks $ABCE$, wobei $\overline{BE}$ gleich dem Durchmesser $2r$ des Umkreises des Sechsecks ist. Dann gilt:

$$A_o - 2A_p = a \cdot \frac{\overline{BE}}{2} = ar.$$

Da im regelmäßigen Sechseck $ABCDEF$ $\sphericalangle EAB = 90°$ und $\overline{AB} = r$ gilt, ergibt sich

$$a^2 + r^2 = (2r)^2,$$

$$r = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$$

und somit für das gesuchte Volumen V

$$V = \frac{1}{3}a^2h\sqrt{3}.$$

Bemerkungen: Das gute Ergebnis dieser Aufgabe – 74 der 118 Teilnehmer erreichten die volle Punktzahl – belegt, daß hier eine leichte Aufgabe zu lösen war.

Ein offensichtlicher Vorzug der Aufgabe bestand darin, daß man das gesuchte Volumen auf verschiedenste Weise darstellen und berechnen konnte. In den Schülerlösungen wird eine breite Palette von Lösungsvarianten angegeben, Die Mehrzahl der Schüler entschied sich jedoch dafür, entsprechend obiger Lösung das gesuchte Volumen V als Differenz des Volumens des Prismas und der Volumina abgetrennter Teilpyramiden darzustellen. Nur einige wenige Schüler zerlegten den angegebenen Polyeder in Teilkörper. Punktabzüge hatten bei dieser leichten Aufgabe ihre Ursache fast nur in Rechenfehlern, das aber in einem bedenklich hohen Anteil an der Gesamtzahl der Lösungen.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	1	0	3	3	7	9	21	74

Dipl.-Math. Bernd Noack, Amt für Erfindungs- und Patentwesen, Berlin

Die Lösungen zu den Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12 werden in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule", Heft 12/77 veröffentlicht.

Aus dem Programm der DDR-Olympiade:

- Vortrag von Nationalpreisträger Prof. Dr. Reichardt, Berlin: Theorie und Praxis bei Gauß
- Forum mit Prof. Dr. W. Engel, Vors. der Mathematischen Gesellschaft der DDR und Dipl.-Math. J. Geburtig: Über die Studienrichtung Diplom-Lehrer für Mathematik/Physik
- Vortrag von Dipl.-Math. Oberleutnant Wasic Nasie, Kriminalistisches Institut der Deutschen Volkspolizei, Berlin: Die Anwendung der Mathematik in der Kriminalistik
- Forum mit Oberleutnant H.-G. Aschenbach, Olympiasieger und Weltmeister im Spezialsprunglauf: Die Sportpolitik unserer DDR
- Simultanschach mit dem Internationalen Großmeister stud. math. Rainer Knaack, Leipzig
- Kulturveranstaltung mit der Gruppe „Neue Generation"
- Besuch der Mahn- und Gedenkstätte Sachsenhausen
- Abschlußfeier im Auditorium maximum der Humboldt-Universität zu Berlin.
- 70 Wissenschaftler und Lehrer nahmen die Korrektur der 204 Arbeiten (d. h. der 1224 Lösungen) vor. Unter den Wissenschaftlern waren neun ehemalige IMO-Teilnehmer.

Unser Schnappschuß: Mitten aus der Korrektur kamen sie – bei wildem Aprilwetter – um sich durch dieses Foto den *alpha*-Lesern vorzustellen (v. l. n. r.):

Dr. *Wolfgang Burmeister*, Technische Universität Dresden, Sektion Mathematik (IX., X., XI., XII., XIII. IMO); Dr. *Hans-Ulrich Schwarz*, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Sektion Mathematik (V. IMO); Dr. *Hans-Görg Roos*, Technische Hochschule Magdeburg, Sektion Math./Phys. (X. IMO); Dr. *Monika Noack* (geb. *Titze*), Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik (VI., VII. IMO); Dr. *Manfred Krüppel* (VII. IMO), Päd. Hochschule „Liselotte Herrmann", Sektion Mathematik; Dipl.-Math. *Hans-Dietrich Gronau*, W.-Pieck-Universität Rostock, Sektion Mathematik (XI. IMO); Dipl.-Math. *Bernd Noack*, Amt für Erfindungs- und Patentwesen der DDR, Berlin (V. IMO).

Lösungen zu alpha-heiter, Heft 6/77

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} 250812 \\ +250812 \\ +250812 \\ \hline 752436 \end{array}$$

A = 1; L = 2; P = 3;
H = 0; X = 6

Nicht begriffsstutzig werden!

Summand – Tangente – Innenwinkel – Flächeninhalt – Euklid – Längeneinheit – STIFEL

Silbenrätsel

1. Neigungswinkel, 2. Einer, 3. Waffengattung, 4. Trigonometrie, 5. Ornament, 6. Neigung, 7. Veterinär, 8. Oberfläche, 9. Lasker, 10. Leitlinie, 11. Exmatrikulation, 12. Neandertaler, 13. Delta, 14. Enrique, 15. Theta, 16. Elch, 17. Umhang, 18. Annonce, 19. Druck, 20. Innenwinkel, 21. Eigendifferenz. Newton vollendete u. a. die Infinitesimalrechnung.

Rätselschlange

Euklid – Drehung – Geometrie – Element – Trigonometrie – Eta – Abszisse – Ellipse – Exponent – Topologie – Euler – Riemann – Nullstelle – Eta – Anna – Ar – Rechenart – Teterow – Wodka – Abakus – Sieben.
Isaak Newton

U	H	E	R	D	I	L	K	U	E	◀
N	L	L	E	S	S	I	Z	B	A	T
G	I	U	N	N	A	M	E	I	R	E
E	P	L	T	R	A	N	E	H	E	I
O	S	L	E	U	K	A	B	C	L	R
M	E	S	T	S	N	E	A	E	U	T
E	X	T	E	I	E	B	K	R	E	E
T	P	E	R	O	W	O	D	A	I	M
R	O	L	L	E	T	A	N	N	G	O
I	N	E	N	T	O	P	O	L	O	N
E	L	E	M	E	N	T	R	I	G	O

Verkettungsrätsel

1. Epsilon – Negativ
2. Ellipse – Einheit
3. Teterow – Widmann
4. Produkt – Tangens
5. Fidelio – Omikron
6. Polygon – Numerus

NEWTON

Aus der Skatwelt

27, 28 und 29 Augen sind nicht möglich.

Begriffspaare gesucht!

Million – Billion; Kegel – Regel; Minus – Sinus; Sektor – Vektor.

Die geometrischen Konstruktionen eines regelmäßigen 17-Ecks

$$\cos\frac{360^\circ}{17}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$
$$+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

Beweise für mathematische Sätze sind stets zwingend, jedoch gibt es viel Freiheiten in der Art des Beweisens. Für den bekannten *Satz des Pythagoras* gibt es bis heute über 100 Beweise. Auch für die geometrische Konstruktion eines regelmäßigen 17-Ecks gibt es eine Reihe von verschiedenen Möglichkeiten. Die strenge griechische Auffassung einer *geometrischen* Konstruktion, die auf Plato zurückgeht, läßt als Konstruktionsmittel nur Zirkel und (maßstabloses) Lineal zu. *C. F. Gauß* hat 1796 theoretisch die Frage beantwortet, welche regelmäßigen n-Ecke mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind; er hat sich aber zunächst nicht um die tatsächliche Konstruktion gekümmert.

Die erste Konstruktion mit Zirkel und Lineal wurde 1802 durch *von Pfleiderer* ausgeführt. *Legendre* wiederum war der erste, der die Siebzehnteilung durch Rechnung ausführte. Alle geometrischen Konstruktionen, die sich mit Zirkel und Lineal ausführen lassen, können auch bereits mit dem Zirkel durchgeführt werden (*Mohr-Mascheronische Geometrie*). Ein Lineal allein reicht dazu andererseits nicht aus. Ist jedoch neben dem Lineal noch ein fester Kreis gegeben, so lassen sich wieder alle mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen erledigen (*Steinersche Geometrie*). Die entsprechenden Konstruktionen für das regelmäßige 17-Eck gaben 1896 *Gérard* und 1842 *von Staudt*. Eine Konstruktion ist praktisch um so genauer, je weniger und einfachere Konstruktionsschritte erforderlich sind. Eine in diesem Sinn ausgeführte Konstruktion gab 1903 *Güntsch* an. *Gauß* selbst führte schließlich auf Drängen seines Freundes *Gerling* ebenfalls eine Konstruktion durch. Die Koordinaten des Eckpunkts P_1 des regelmäßigen 17-Ecks in einem Koordinatensystem (vgl. Bild 6) sind $\left(\cos\frac{360^\circ}{17}, \sin\frac{360^\circ}{17}\right)$. *Gauß* zeigte

$$\cos\frac{360^\circ}{17}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$
$$+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

und alle in diesen Formeln vorkommenden Ausdrücke lassen sich elementar konstruieren (vgl. „Grundkonstruktionen"). Wir geben nachfolgend eine sehr einfache Konstruktion eines regelmäßigen 17-Ecks an, die auch auf den obigen Formeln beruht und 1909 von dem Engländer *Richmond* angegeben worden ist.

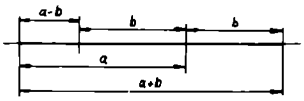
R. Thiele

Konstruktionsbeschreibung:

1. Durch den Mittelpunkt O des Kreises werden zwei zueinander senkrechte Durchmesser x und y gezeichnet, die den Kreis A bzw. C schneiden. Auf OC wird die Strecke $\overline{OB}=\frac{\overline{OC}}{4}$ von O aus abgetragen.
2. Der Winkel ABO wird geviertelt. Der Schenkel, der mit der Geraden y ein Viertel des Winkels ABO ($=\alpha$) einschließt, schneide OA in D. An den Schenkel BD werden nach links 45° angetragen, wodurch sich E ergibt.
3. Über $\overline{EA}$ wird der Halbkreis errichtet. Er schneide OC in F.
4. Um D wird ein Kreis mit dem Radius DF geschlagen, der die Gerade x in Q_3 und Q_5 schneide.
5. In Q_3 und Q_5 werden die Senkrechten bezüglich x errichtet, die den Kreis in P_3 und P_{14} sowie P_5 und P_{12} schneiden.
6. Der Winkel P_3OP_5 wird halbiert, wodurch sich P_4 ergibt. $\overline{P_3P_4}=\overline{P_4P_5}$ ist die gesuchte Seitenlänge des regelmäßigen 17-Ecks.

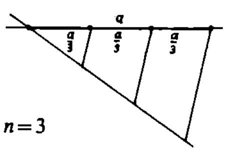
Geometrische Grundkonstruktionen

1. Addition und Subtraktion von Strecken (Bild 1)



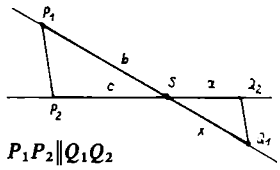
Sonderfall: $x=m\cdot a$ (m natürliche Zahl)

2. Teilung von Strecken (Bild 2)
$x=\frac{1}{n}a$ (n natürliche Zahl)



Sonderfall: $x=m\cdot\frac{a}{n}=\frac{m}{n}\cdot a$
(m, n natürliche Zahlen)

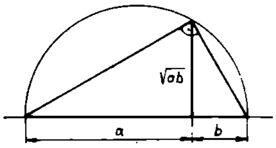
3. Vierte Proportionale
$x=\frac{ab}{c}$ (bzw. $x:a=b:c$) (Bild 3)



$P_1P_2 \| Q_1Q_2$

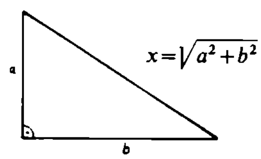
Sonderfälle:
a) für $c=1$ ist $x=ab$
b) für $b=1$ ist $x=\frac{a}{c}$

4. Mittlere Porportionale
$x=\sqrt{ab}$ (bzw. $x:a=b:x$) (Bild 4)

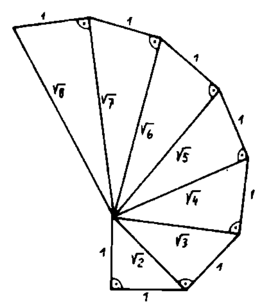


Sonderfälle:
a) $x=a\sqrt{n}$ ($=\sqrt{a\cdot an}$) (n natürliche Zahl), d. h. x ist mittlere Proportionale zu a und an.
b) $x=a\sqrt{\frac{m}{n}}$ (m, n natürliche Zahlen)

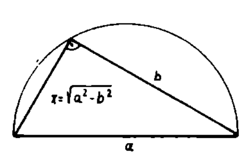
5. $x=\sqrt{a^2+b^2}$ (Satz des Pythagoras) (Bild 5)



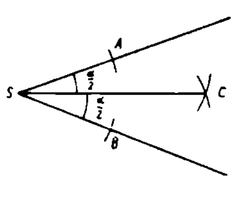
Sonderfall: sukzessive Konstruktion von $a\sqrt{n}$ (im Bild 6 ist $a=1$)



6. $x=\sqrt{a^2-b^2}$ (Satz des Pythagoras) (Bild 7)



7. Winkelhalbieren (Bild 8)



Konstruktion eines regelmäßigen 17-Ecks

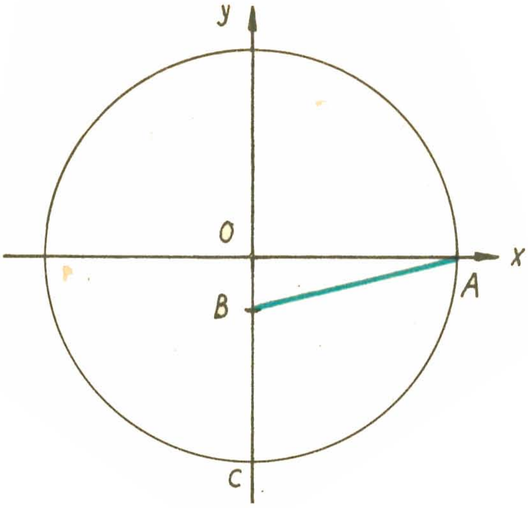


Bild 1

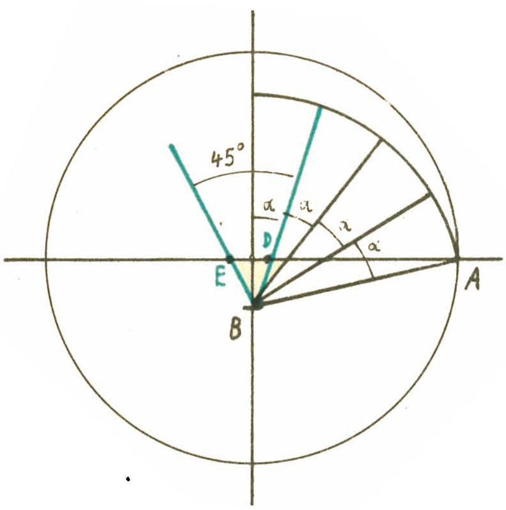


Bild 2

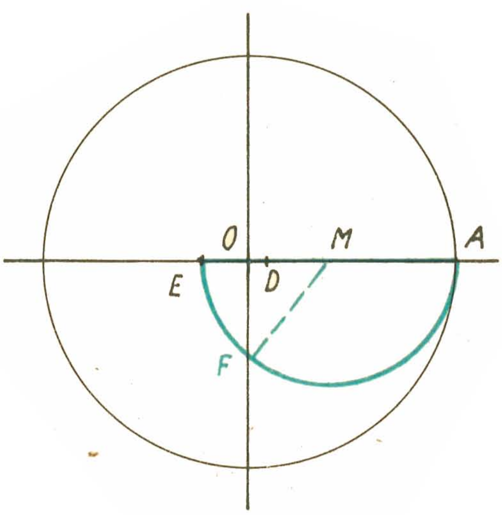


Bild 3

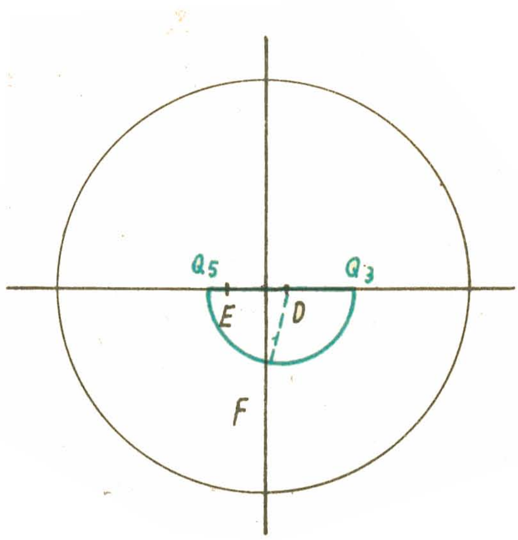


Bild 4

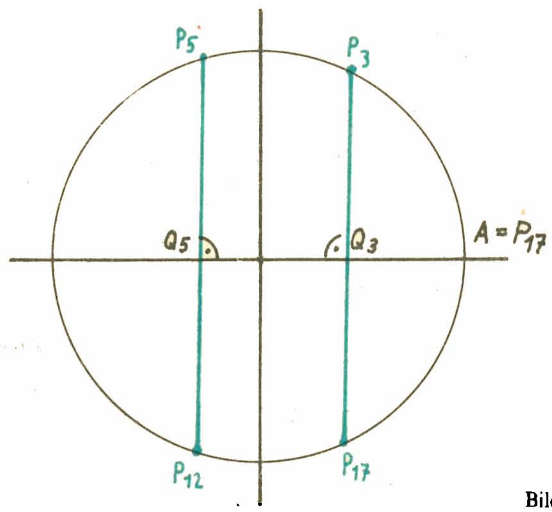


Bild 5

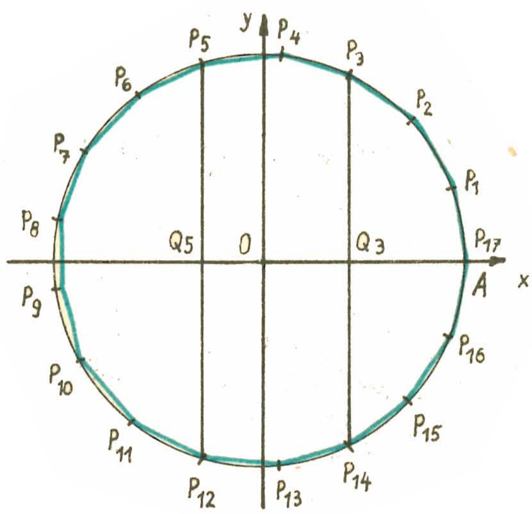


Bild 6