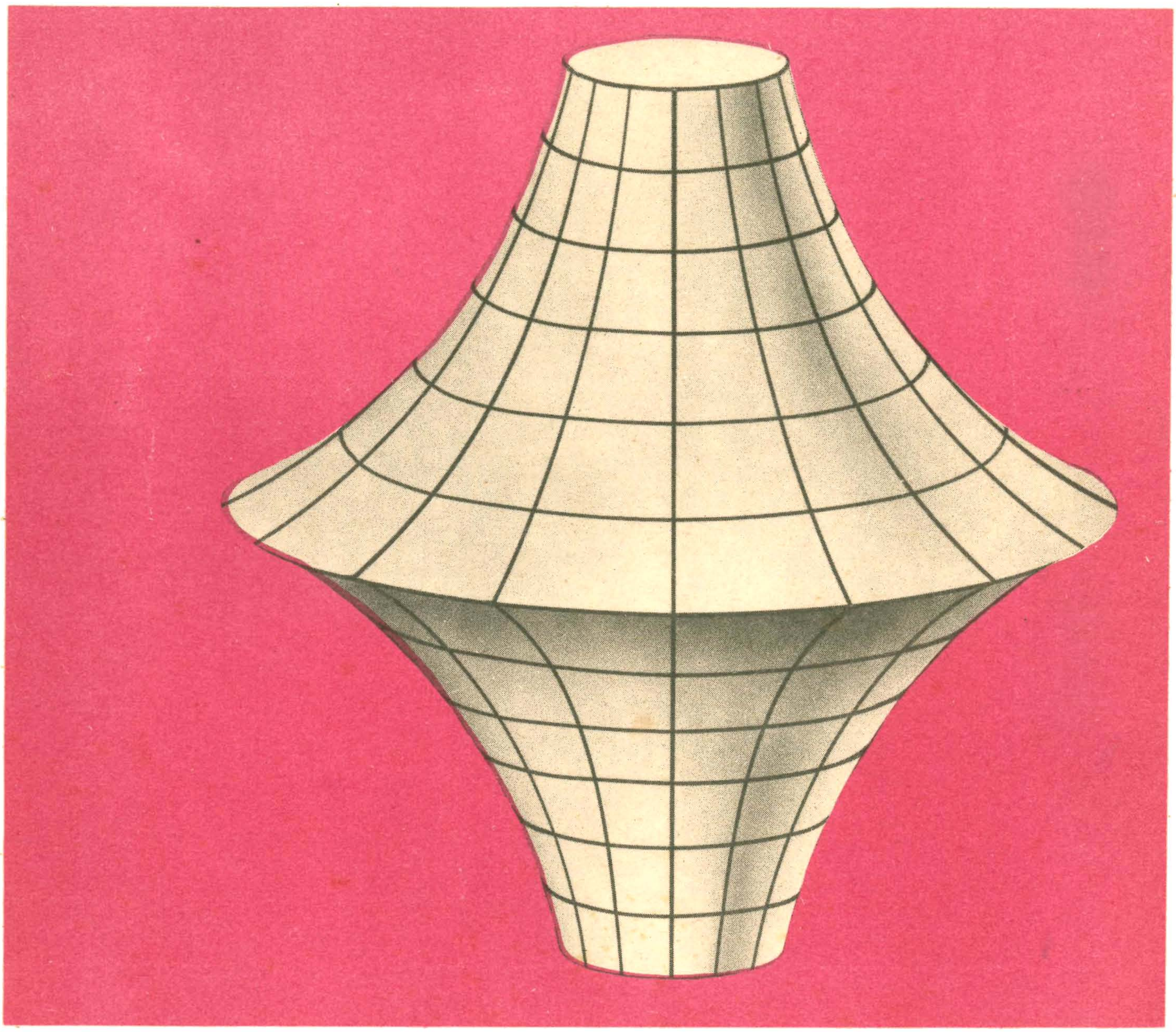
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
7. Jahrgang 1973
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31 059

6

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: aus Quant 12/72, Moskau; PH Güstrow S. 124/25, (2 Abb.); J. Lehmann, Leipzig S. 124/25, 4 Abb.; Zentralinst. f. Metallurgie (S. 125); F. Fricke, Berlin (S. 128); E. Zschech, Bautzen (S. 132); Zentralschule der JP, Droyßig (S. 133);
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 27. September 1973

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Über den Schöpfer einer neuen Geometrie

Zum 180. Geburtstag von N. J. Lobatschewski

Die Entdeckung der *nichteuklidischen Geometrie* durch *N. J. Lobatschewski* erschütterte zum ersten Male die jahrhundertalte Meinung, daß die von *Euklid* formulierten geometrischen Gesetze unveränderlich und im Kosmos gültig sind. Die alten Raumvorstellungen wurden auch physikalisch unhaltbar durch die Ergebnisse des bekannten Versuches von *Michelson* zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit. Schließlich brach *A. Einstein* in der allgemeinen Relativitätstheorie endgültig mit der Vorstellung eines absoluten Raumes, den es nach seiner Auffassung ebensowenig gibt, wie die absolute Zeit.

Und wie das *Kopernikanische System* das Rätsel des Aufbaus des Planetensystems löste, welches die Astronomen gequält hatte, so war die *Lobatschewskische Geometrie* die Lösung eines Problems, mit dem sich die Geometer jahrhundertlang abgemüht hatten.

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski wurde am 1. Dezember 1792 als Sohn eines kleinstädtischen Beamten geboren. Zehn Jahre später besuchte er gemeinsam mit seinen beiden Brüdern *Alexander* und *Alexej* das staatliche Gymnasium in Kasan. Schon hier zeigte

Lobatschewski ungewöhnliche Fähigkeiten vor allem für Mathematik und Physik. Der junge Lehrer *G. J. Kartaschewski* spielte für die Entwicklung von *Lobatschewskis* Talent eine große Rolle. Seit 1807 war *Nikolai* Student an der Kasaner Universität. Die Professoren wunderten sich über die Leichtigkeit, mit der er die Wissenschaften aufnahm, und über die Fähigkeiten und die Originalität seines Denkens. *Nikolai* wurde der „Stolz der Universität". Aber er blieb trotz allem ein richtiger Junge, der bald Raketen steigen ließ, bald auf einer Kuh durch den städtischen Garten ritt oder anderen Unfug anstellte.

1811 wurde *Lobatschewski* nach einem glänzenden Abschluß seines Studiums Magister. Seit 1814 war er Adjunkt und ab 1816 Professor. (Magister und Adjunkt waren untere akademische Grade an den russischen Universitäten (bis 1863)).

Im November 1820 wurde *Lobatschewski* zum Dekan der physikalisch-mathematischen Fakultät gewählt und im Jahre 1827 Rektor der Universität. Dieses Amt bekleidete er fast 20 Jahre. Lange Zeit leitete *Lobatschewski* die Bibliothek der Universität. Er suchte die Lehr- und Forschungsliteratur aus, deren Kauf er dann auch persönlich vornahm.

Seit 1822 war *Lobatschewski* Mitglied der Baukomitees und ab 1827 dessen Vorsitzender. Er begnügte sich nicht mit der Einstellung der besten Architekten jener Zeit, sondern er studierte selbst ernsthaft Architektur. Unter seiner Leitung wurden mehrere Lehrgebäude, die Bibliothek, das astronomische Observatorium, die Klinik und die Druckerei neu erbaut oder rekonstruiert.

Lobatschewski übernahm das Amt des Rektors in einer schwierigen Zeit. Viele Professoren lehrten im Stile des Mittelalters, und *Lobatschewski* übernahm die Aufgabe, die Universität gegen den Widerstand reaktionärer Kreise von solchen Lehrern zu säubern. In seiner bedeutsamen Rede „Über die wichtigen Dinge der Erziehung", die er am 17. Juli 1828, ein Jahr nach seiner Amtsübernahme hielt, forderte er, daß an der Universität keine leeren Worte gepredigt, sondern echte Wissenschaft vermittelt werden sollte:

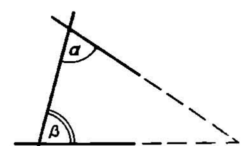
„Fragt die Natur! Sie enthält alle Wahrheit und wird alle Fragen ausreichend beantworten."

Die Kasaner Universität wurde zu einer erstklassigen Lehranstalt, die durch die ebenfalls von *Lobatschewski* gegründete Zeitschrift „Wissenschaftliche Beiträge der Kasaner Universität", die noch heute erscheint, weithin bekannt wurde. In Kasan studierten in der Folgezeit so bekannte Persönlichkeiten wie *L. N. Tolstoi*, die Chemiker *Sinin* und *Butlerow*, *Ilja Nikolajewitsch Uljanow* und am Ende des 19. Jahrhunderts *Wladimir Iljitsch Uljanow-Lenin*.

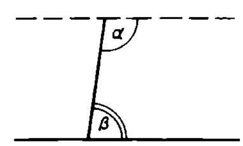
Viel Energie wandte der Rektor auf, um ein in Kasan im Jahre 1842 ausgebrochenes Feuer zu bekämpfen. (Es brannten auch die Universitätsbibliothek und das neuerbaute Observatorium.) *Lobatschewski* leitete die Rettungs- und Löscharbeiten. Das Observatorium fiel den Flammen zum Opfer; es konnten aber alle Einrichtungen gerettet werden. Das Feuer in der Bibliothek konnte rechtzeitig gelöscht werden. Unterdessen verbrannte das Haus von *Lobatschewski* und ebenso seine Universitätswohnung. Darüber hinaus kamen das gesamte Eigentum und die unschätzbaren Handschriften von *Lobatschewski* im Feuer um.

Die Kühnheit seiner Urteile und sein aufrechter Charakter waren Ursachen dafür, daß man gegen *Lobatschewski* zu intrigieren begann. Schließlich kam es zu seiner Entlassung von der aktiven Leitung und von der pädagogischen Tätigkeit. Seine Kräfte verließen ihn jetzt schnell. Aber er glaubte trotz allem an die große Zukunft seiner Entdekkung. Sein wissenschaftliches Testament *Pangeometrie* konnte noch kurz vor seinem Tod erscheinen. Schon in seiner Jugend interessierte sich *Lobatschewski* für die Grundlagen der Geometrie und unterzog die Elemente *Euklids* einer kritischen Prüfung. Besonders das 5. Postulat zog ihn in seinen Bann:

„Bringt man zwei Geraden mit einer dritten zum Schnitt und beträgt die Winkelsumme auf einer Seite weniger als zwei rechte Winkel, so schneiden sich die beiden Geraden."



$\alpha + \beta < 180°$



$\alpha + \beta = 180°$

Die Geometer versuchten seit vielen Jahrhunderten, das 5. Postulat als Theorem zu beweisen, doch stets führte man dabei unbebeweisen, doch stets führte man dabei unbewußt irgendeine offensichtlich richtige Voraussetzung ein. „... *In der Ebene ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einer Geraden den gleichen Abstand haben, wieder eine Gerade.*" Das schrieb *Posidoni* (Rom, 1. Jh. v. u. Z.).

Omar Chaijam (Mittelasien, 11. Jh.) behauptete: „... *zwei sich nähernde Geraden schneiden sich stets.*"

„... *Zu jeder Figur kann man eine ähnliche konstruieren.*" Das schrieb *John Wallis* (Engl., 17. Jh.).

Alexis Claude Clairaut (Frankreich, 18. Jh.) entwickelte eine *Theorie der parallelen Linien* auf der Grundlage der Existenz eines Rechtecks.

Wolfgang Bolyai (Ungarn, Ende des 18., Beginn des 19. Jh.) bewies das 5. Postulat unter der Annahme, daß man durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, stets einen Kreis legen kann.

Aber alle diese Voraussetzungen erwiesen sich als äquivalent zum 5. Postulat von *Euklid* oder sie waren sogar noch stärker als das Postulat. So ist zum Beispiel die Behauptung, daß durch einen Punkt, der außerhalb einer gegebenen Geraden liegt, eine und nur eine Gerade geht, die die gegebene Gerade nicht schneidet, äquivalent damit, daß die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt.

Bereits 1828 wurde *Lobatschewskis* Geometrievorlesung gedruckt. Im ersten Teil entwickelte er die absolute Geometrie, die das Parallelenaxiom nicht benützte. *Lobatschewski* war fest davon überzeugt, daß alle Axiome *Euklids* ohne das Parallelenaxiom sich nicht widersprechen.

Eine wichtige Rolle spielte für *Lobatschewskis* Entdeckung seine kritische Einstellung zu der Überzeugung, daß unser geometrisches Wissen angeboren ist. Aus dieser seiner Auffassung heraus entstand ein einzigartiges geometrisches System.

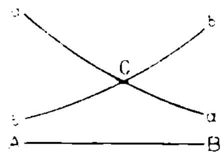
Das Akademiemitglied *Nikolai Iwanowitsch Fuß*, ein Schüler des großen *Euler*, äußerte sich sehr negativ über *Lobatschewskis* Arbeit. *Fuß* war besonders über die Einführung des Meter als Maßeinheit und über die Unterteilung des Kreises in 400 Grad statt in 360 Grad empört. Er schrieb in seiner Rezension:

„Diese neuen Einheiten wurden während der französischen Revolution ausgedacht, aber wegen der offensichtlichen Unbequemlichkeit werden diese Neuheiten bald wieder vergessen sein . . .“.

Diese Rezension war zweifach falsch. Erstens erwiesen sich die genialen Ideen *Lobatschewskis* nicht nur *Fuß*, sondern auch vielen anderen talentierten Gelehrten jener Zeit als unzugänglich. Und zweitens wurde das Meter ein in der gesamten Welt gebräuchliches Längenmaß.

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski ließ sich nicht durch die vernichtende Rezension von *N. I. Fuß* beirren, sondern er entwickelte seine Ideen weiter und machte in den folgenden Jahren einen genialen, aber einfachen Schritt. Er löste sich vom 5. Postulat, das das Denken der Geometer während fast zweitausend Jahren beherrschte und das von keinem Vorgänger oder Zeitgenossen *Lobatschewskis* angezweifelt wurde.

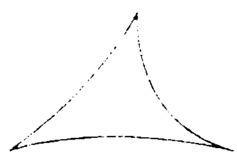
Er nahm an, daß man durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nicht weniger als zwei Geraden legen kann, die die vorgegebene Gerade nicht schneiden. Aus dieser auf den ersten Blick sinnlosen Voraussetzung zog *Lobatschewski* weitere Schlüsse. Dabei gelangte er zu keinerlei Widersprüchen. Darüber hinaus erhielt er ein in sich abgeschlossenes logisches geometrisches System, das er als scheinbare Geometrie bezeichnete analog zu den imaginären Zahlen, die er auch scheinbar nannte. Ebenso wie die imaginären Zahlen die allgemeinsten Zahlen sind für die die Gesetze der gewöhnlichen Algebra gelten, so ist die scheinbare Geometrie das allgemeinste geometrische System, für die alle Axiome Euklids bis auf das Parallelenaxiom zutreffen.



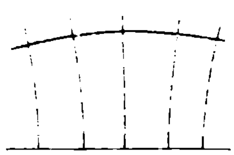
Lobatschewski nahm an, daß man durch einen Punkt C, der außerhalb der Geraden AB liegt, mindestens zwei Geraden a und b legen kann, die die Gerade AB nicht schneiden.

Und ebenso wie die reellen Zahlen ein Spezialfall der komplexen Zahlen sind, so ist auch die gewöhnliche euklidische Geometrie ein Spezialfall eines allgemeinen geometrischen Systems. Die *Scheingeometrie* unterscheidet sich wesentlich von der *euklidischen Geometrie*.

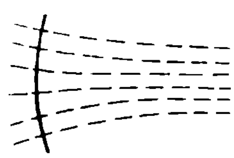
Zunächst ist die Winkelsumme im Dreieck kleiner als 180°. Dann ist die Punktmenge der Ebene, die von einer gegebenen Geraden, der Basis, den gleichen Abstand hat, im allgemeinen keine Gerade mehr. Man nennt sie *Äquidistante*. In dieser Geometrie kann man durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, einen Kreis oder eine Äquidistante oder auch einen Grenzkreis legen.



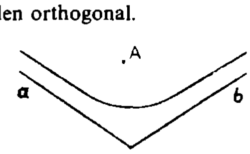
Die Winkelsumme im Dreieck ist kleiner als 180°.



Die Äquidistante ist zu allen Geraden orthogonal, die auf der Basis senkrecht stehen.



Der Grenzkreis ist zum Büschel paralleler Geraden orthogonal.



Durch den Punkt A kann man i. allg. keine Gerade legen, die die Strahlen a und b schneidet.

Weiterhin kann man im allgemeinen durch einen Punkt, der im Inneren derjenigen Fläche liegt, die zwei sich schneidende Geraden bilden, keine Gerade legen, die die beiden anderen Geraden schneidet. Schließlich gibt es in dieser Geometrie keine ähnlichen Vielecke.

Lobatschewski leitete die trigonometrischen Beziehungen in den Dreiecken seiner Geometrie her. Er führte Koordinaten ein und konnte damit erstmals eine große Anzahl von Aufgaben der analytischen Geometrie, der Flächen- und Umfangsberechnung und viele bestimmte Integrale lösen.

Durch ein Experiment versuchte *Lobatschewski* herauszufinden, ob in der realen Welt die *euklidische* oder die *scheinbare Geometrie* gilt. Dazu berechnete er die Winkelsumme im Dreieck. Das Dreieck bildeten dabei zwei diametral entgegengesetzte Punkte der Erdbahn und ein Fixstern. *Lobatschewski* fand, daß die berechnete Winkelsumme innerhalb der Fehlergrenzen des Experiments nicht von 180° abwich, und er folgerte deshalb, daß man die Geometrie in der realen Welt als euklidisch ansehen kann. Er war aber trotzdem der Ansicht, daß man bei großen kosmischen Dreiecken eine Abweichung der Winkelsumme von 180° feststellen kann.

Unabhängig von *Lobatschewski* entdeckten zwei weitere Mathematiker die nichteuklidische Geometrie. Schon Ende des 18. Jahrhunderts kam *Gauß* auf die Idee, eine nichteuklidische Geometrie zu betrachten. Er beschäftigte sich einige Jahrzehnte hindurch mit dieser Frage, aber er veröffentlichte seine Ergebnisse nicht. Wenig später entdeckte *Johann Bolyai* die nichteuklidische Geometrie. Seine Ergebnisse erschienen als Anhang zum mathematischen Werk seines Vaters *Wolfgang Bolyai*, das 1832 gedruckt wurde. Man spricht nun *Lobatschewski* die Priorität der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie zu, da *Gauß* seine Ergebnisse nicht veröffentlichte und weil *Bolyai* seine Entdeckung nach *Lobatschewski* publizierte.

Am 23. Februar 1826 hielt der 33jährige *Lobatschewski* einen Vortrag über seine Geometrie auf der Sitzung der physikalisch-mathematischen Abteilung der Kasaner Universität, und er bat darum, seine Ergebnisse zu veröffentlichen. Die Anwesenden verstanden die Darlegungen von *Lobatschewski* nicht. Sie wählten deshalb eine Kommission aus drei Spezialisten, die sich ausführlich mit der Arbeit beschäftigen sollte. Jedoch verstand die Arbeit weder der Adjunkt *Nikolai Dimitriwitsch*, der später ein großer Gelehrter wurde und die Moskauer Mathematische Gesellschaft begründete, noch Professor *Alexander Jakowlewitsch Kupfer*. Auch *Lobatschewskis* alter Freund und Schulkamerad *Iwan Michailowitsch Simonow*, der in jener Zeit ein angesehener Gelehrter war, erkannte die große philosophische Bedeutung der neuen Geometrie nicht. Es vergingen viele Jahre; aber es traf kein Gutachten der wissenschaftlichen Kommission ein. Die unschätzbare Arbeit wurde im Archiv der Universität abgelegt.

Lediglich 1829 erschien eine erste Fassung der Entdeckung *Lobatschewskis* unter dem Titel *,Über die Grundlagen der Geometrie* in der Universitätszeitschrift *Kasaner Bote.* In den 30iger Jahren des 19. Jahrhunderts erschienen einige weitere Aufsätze und Memoiren, in denen die Hauptresultate dargelegt wurden.

Im Jahre 1840 erschien in Berlin *Lobatschewskis* Buch *„Geometrische Untersuchungen zur Theorie der parallelen Linien"* in deutscher Sprache. Es enthielt eine systematische Darstellung seiner Entdeckungen. Dieses Buch las auch *Karl Friedrich Gauß.* Er war der einzige Mahtematiker jener Zeit, der in der Lage war, die Genialität von *Lobatschewskis* Entdeckungen zu erkennen. Er erkannte sie auch. *Gauß* schrieb 1841 an eine seiner Schüler: *„Wie man mir mitteilte, sind in den Veröffentlichungen der Kasaner Universität viele Aufsätze von Lobatschewski in russischer Sprache enthalten. Mein Wunsch ist es, diese Aufsätze dieses geistreichen Mathematikers zu lesen."* Mit 63 Jahren begann er die russische Sprache zu lernen. *Gauß* schrieb später: *„Ich kann jetzt schon recht fließend russisch lesen und das bereitet mir große Freude."*

Lobatschewski wurde auf Initiative von *Gauß* zum korrespondierten Mitglied der *Göttinger königlichen Gesellschaft* gewählt. Das Diplom wurde *Lobatschewski* nach Kasan zugeschickt. Darin wird er als einer der vortrefflichsten Mathematiker des russischen Staates bezeichnet.

Aber auch der König der Mathematiker verschaffte *Lobatschewski* keine öffentliche Anerkennung für seine Entdeckung. *Gauß* fürchtete das Unverständnis seiner Zeitgenossen. Lediglich ein Kollege von *Lobatschewski,* der Professor der Kasaner Universität *P. I. Kotelnikow,* trat öffentlich für die wissenschaftliche und erkenntnistheoretische Bedeutung der Entdeckung von *Lobatschewski* ein. Die wirkliche Anerkennung kam erst einige Jahre nach seinem Tode dank der Arbeiten von *Eugenio Beltrami* (Italien), *Felix Klein* (Deutschland) und *Henri Poincaré* (Frankreich).

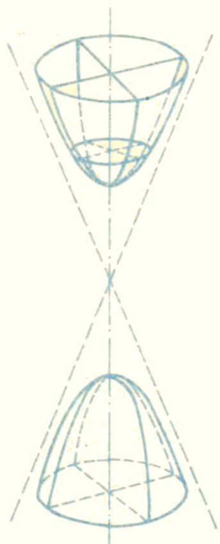
Lobatschewski schrieb mehrere Arbeiten über andere Gebiete der Mathematik. Einige Veröffentlichungen bezogen sich auf seine neue Geometrie wie zum Beispiel ein Aufsatz über die Berechnung bestimmter Integrale. Ein anderer beschäftigte sich mit dem zufälligen Fehler bei der Berechnung der Winkelsumme in Dreiecken mit großen Seiten. Andere Arbeiten betrafen Gebiete der Algebra und Analysis: *Algebra oder das Rechnen mit endlichen Größen* (1834), *Über das Verschwinden trigonometrischer Reihen* (1834), *Über die Konvergenz unendlicher Reihen* (1841) u. a.

Lobatschewski gab mit als einer der ersten eine allgemeine Definition der *Funktion.* Ebenso formulierte er die Begriffe der *Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion* und zeigte den Unterschied auf. Aber *Lobatschewskis* Hauptverdienst war die Überwindung der gewohnten und intuitiven Vorstellung in der Geometrie. Das war der Verzicht auf das 5. Postulat und die Schaffung einer verallgemeinerten Geometrie, in der die euklidische Geometrie nur ein Spezialfall ist. Damit bereicherte *Lobatschewski* den Schatz der Weltwissenschaft um einen wertvollen Beitrag.

„Die Ideen unseres genialen Landsmannes, die noch vor hundert Jahren als unzulässiges Paradox angesehen wurden, sind heute, weiterentwickelt und verallgemeinert, wichtige Bausteine in der allgemeinen Wissenschaft."

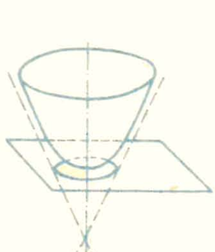
Das sind die Worte des angesehenen sowjetischen Geometers *P. K. Raschewski.*

A. J. Halameisär/B. A. Rosenfeld



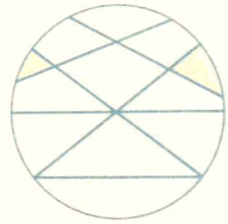
Auf jeder Fläche des Hyperboloids kann man die Lobatschewskische Geometrie realisieren, wenn man die Entfernung d zwischen zwei Punkten $A(x_1, y_1, z_1)$ und $B(x_2, y_2, z_2)$ durch

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ definiert. Einen Raum mit einer solchen Abstandsdefinition bezeichnet man als *pseudoeuklidisch.*

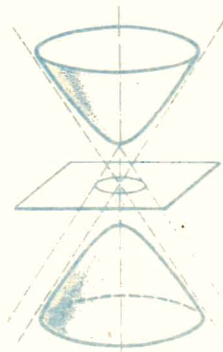


Die *Beltrami-Kleinsche Interpretation* erhält man, wenn die Kugel mit imaginärem Radius im pseudoeuklidischen Raum auf diejenige Ebene projeziert wird, die die Kugel im Zentrum berührt.

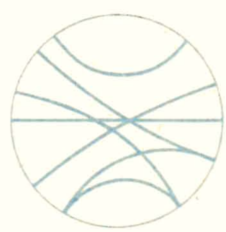
Auf dem Umschlag:
Die pseudosphärische Fläche von Beltrami.



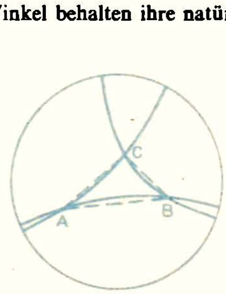
Nach der Beltrami-Kleinschen Interpretation ist die gesamte Lobatschewskische Ebene eine Kreisfläche. Die Geraden sind die Sehnen des Kreises.



Die *Pioncarésche Interpretation* erhält man, wenn die Kugel mit imaginärem Radius des pseudoeuklidischen Raumes von einem Pol aus auf die Äquatorialfläche projeziert wird.



Nach der Pioncaréschen Interpretation ist die Lobatschewskische Ebene ebenfalls eine Kreisfläche. Die Geraden stehen senkrecht auf dem Kreis und sie sind ebenfalls Kreise. Die Winkel behalten ihre natürliche Größe.



Ein Dreieck in der Pioncaréschen Interpretation. Offensichtlich ist die Winkelsumme des Dreiecks kleiner als 180°.

Solidarität in Aktion

Liebe junge Freunde!

Seit Jahren führten die amerikanischen Imperialisten einen barbarischen Krieg gegen unser Volk. Ihre Ziele waren nicht nur Kraftwerke, Betriebe und Bewässerungsanlagen, sondern auch Kulturbauten und Bildungseinrichtungen. Hunderte Bildungseinrichtungen, von Kinderkrippen bis zu Hochschulen, die in den Augen der Aggressoren sogenannte militärische Ziele waren, wurden zerstört, zahlreiche Kinder getötet noch bevor sie ihre neuen Schulhefte geöffnet hatten. Lehrer kamen ums Leben, bevor sie alle ihre ihnen anvertrauten Schüler richtig kennengelernt hatten.

Der Aggressionskrieg ist beendet. Für uns beginnt eine neue Zeit, die Zeit, da der Wiederaufbau unseres Landes eine unserer wichtigsten Aufgaben ist.

Wir kämpfen nun nicht nur an den Ökonomie- und Verkehrsfronten, sondern auch an der Bildungsfront. Unser hochverehrter Präsident *Ho-Chi-Minh* hat gesagt: „Was immer geschehen mag — wir müssen den Wettbewerb für gutes Lehren und Lernen fortsetzen." und „Die Herausbildung und Erziehung der kommenden revolutionären Generation ist eine überaus wichtige und notwendige Aufgabe."

Die Kinder von heute sind die Herren von morgen, die einen wichtigen Beitrag zum Aufbau des Sozialismus und zur Verteidigung unseres Landes leisten werden. Die Herausbildung der Menschen neuen Typus, die die Liebe zum Vaterland und das sozialistische Bewußtsein in sich vereinen, die die Wissenschaft und Technik beherrschen, ist eine große Aufgabe der Partei und des ganzen Volkes. Trotz Bomben und Krieg hat sich unser Bildungswesen in raschem Tempo sowohl qualitativ als auch quantitativ entwickelt. Folgende Zahlen belegen das:

1965 lernten 3 670 000 Schüler in 9 295 Schulen.

1969 erhöhte sich die Zahl der Schüler auf 4 000 000 und die der Schulen auf 11 362.

1972 wurden trotz barbarischem Bombardement die Schulen mit 4 700 000 Schülern wieder feierlich eröffnet. Wir sind sehr stolz auf diese Zahlen, die neben der Anzahl der abgeschossenen USA-Flugzeuge ein Symbol für den Sieg unseres Volkes ist.

Zerstörte Schulen werden durch Hütten aus Bambusmaterial ersetzt — von Schülern und Lehrern selbständig aufgebaut — bis neue feste Bauwerke an ihre Stelle treten können. Unsere Schüler verstehen sehr wohl wofür und wozu sie lernen. Eine neunjährige Schülerin schreibt:

Mein großer Traum ist es
Eine Arbeiterin zu werden;
Um liebe Schulen und Städte
wieder schöner aufzubauen.

Ein anderer Schüler schrieb:

In meiner kleinen Schule lerne ich,
in die weite Welt zu schauen.

Im Wettbewerb *Für gutes Lehren und Lernen* bemühen sich alle Schüler, zu allseitig entwickelten Persönlichkeiten zu werden. Die Mathematik spielt dabei eine große Rolle. Heute ist es schwierig, ein Gebiet zu finden, sei es in der Praxis, in Wissenschaft oder Technik, auf dem man ohne Mathematikkenntnisse gut arbeiten kann. Unter der Losung *Keine Angst vor der Mathematik* dringen viele junge Freunde in dieses Schwerpunktfach mehr und mehr ein. Die Liebe zur Mathematik wird zu einem der Ziele der Schüler.

Gute Grundkenntnisse, festes theoretisches Wissen soll gepaart sein mit der Kenntnis über mathematische Probleme aus der gesellschaftlichen Praxis. Zahlreiche Schüler bemühen sich, mit ihren in der Schule erworbenen Mathematikkenntnissen praktische Probleme in den landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaften zu lösen.

Zur Erfüllung dieser großen Aufgaben leistet die mathematische Schülerzeitschrift „TOAN HOC VA TUOI TRE" (Mathematik und Jugend) einen wichtigen Beitrag. Jährlich erhalten viele Leser, die die zahlreich gebotenen Aufgaben gut gelöst haben, wertvolle Preise. In Mathematikolympiaden haben alle *Jungen Mathematiker* Gelegenheit, ihr Können zu beweisen. Sehr gute Schüler werden in Spezialschulen für Mathematik aufgenommen. So bieten sich zahlreiche Möglichkeiten, sich für die Mathematik zu interessieren und immer tiefer in ihre Probleme einzudringen.

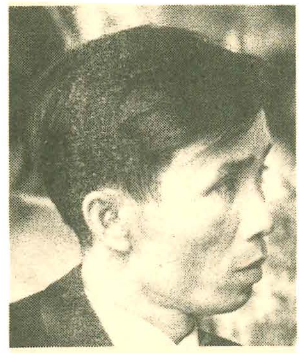
Immer mehr Kinder unseres Volkes interessieren sich für die Mathematik. Sie prägen sich die Worte unseres Ministerpräsidenten *Phan-Van-Dong* ein:

Mathematik ist der Sport des Gehirns. Sie hilft, uns zu Methoden des Denkens, des Lernens, des Lösens verschiedenartigster Probleme und zur schöpferischen Intelligenz zu erziehen.

Liebe junge Freunde in der DDR!

Wir bedanken uns bei Euch für Eure Sympathie und Solidarität für unser Volk und unser Vaterland. Wir beglückwünschen Euch zu Euren steten, sehr guten Leistungen bei Internationalen Mathematikolympiaden.

Freundschaft



Tran-Khanh-Hung
und Nguyen-Ba-Kim

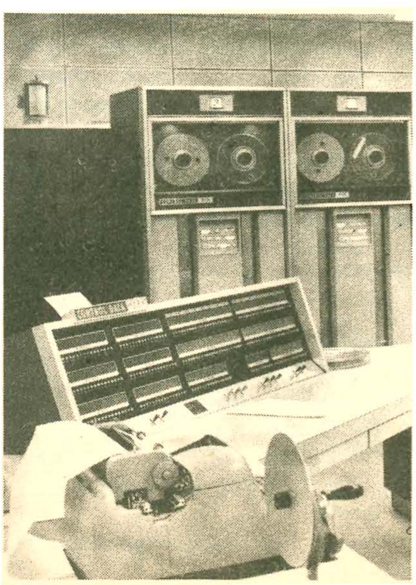
Über die Botschaft der DRV in Berlin erhielt die Redaktion *alpha* die vietnamesische mathematische Zeitschrift *Mathematik und Jugend* (im Austausch mit unserer Zeitschrift).

Wir danken der mathematischen Gesellschaft der DDR, insbesondere Herrn Prof. Dr. Wintgen, Berlin. Durch sie wurden direkte freundschaftliche Verbindungen zu vietnamesischen Aspiranten und Studenten in Berlin und Halle sowie mit dem Sekretär der mathematischen Schülerzeitschrift *Mathematik und Jugend* geschaffen (siehe S. 127). Unser Bildbericht soll einen kleinen Einblick in die herzlichen Kontakte mit unseren Freunden aus der DRV geben.

Das Foto zeigt die Eröffnung der 2. Tagung der Fachsektion Unterricht und Ausbildung (9. bis 12. 5. 1973) der mathematischen Gesellschaft der DDR an der Päd. Hochschule *Lieselotte Herrmann* in Güstrow.

Unter den 600 Teilnehmern befanden sich — als Gäste der MG der DDR — die beiden Aspiranten, welche obigen Beitrag überreichten. Es kam zu einem umfassenden freundschaftlichen Erfahrungsaustausch mit dem Chefredakteur von *alpha*.

Als Abschluß und Höhepunkt der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik lud der *alpha-Club* der 29. OS Leipzig beide Aspiranten zu einem Besuch in die Messestadt ein. *Unser Foto:* Die beiden Freunde bei einem Stadtbummel, begleitet von den Jugendfreunden des *alpha-Clubs* und Mitgliedern ihrer Patenbrigade, dem *Wartungskollektiv des Rechenzentrums des Zentralinstituts für Metallurgie*, Leipzig.



Die Mitglieder des *alpha-Clubs* besuchen gemeinsam mit den beiden vietnamesischen Freunden das Rechenzentrum des Zentralinstituts für Metallurgie. In einem anschließenden Forum berichten sie über den Kampf des vietnamesischen Volkes gegen die Aggressoren und über den Wiederaufbau ihres Landes. Die FDJler des *alpha-Clubs* berichten, daß die Schüler der 29. OS im ersten Halbjahr 1 530 M und das Lehrerkollektiv 1 750 M für den Wiederaufbau in der DRV gespendet haben. Die Patenbrigade des *alpha-Clubs* überreicht 200 M.

▶

Herzliche Aussprache über enge Zusammenarbeit zwischen dem Redaktionssekretär der vietnamesischen Schülerzeitschrift *Mathematik und Jugend* und dem Chefredakteur von *alpha* in Potsdam.

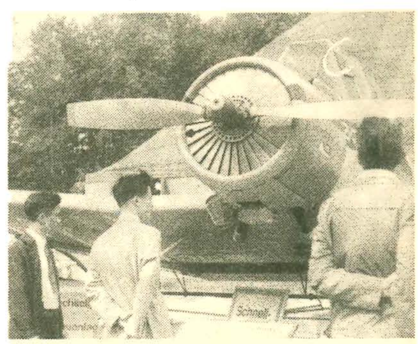
Eine Aufgabe von
Tran Khanh Hung und Nguyen Ba Kim

Demokratische Republik Vietnam

▲1131a▲ Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl gibt, die die folgenden Eigenschaften hat:
Bei der Division dieser Zahl
durch 3 ergibt sich der Rest 1,
durch 4 ergibt sich der Rest 2,
durch 5 ergibt sich der Rest 3,
durch 6 ergibt sich der Rest 4.
Bejahendenfalls ist die kleinste natürliche Zahl anzugeben, die diese Eigenschaften hat.

▲1131b▲ Auf einem Tisch liegen 30 Hölzchen. Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
Zunächst nimmt A von dem Haufen mindestens 1, aber höchstens 6 Hölzchen weg; dann nimmt B von den verbleibenden Hölzchen mindestens 1, aber höchstens 6 Hölzchen weg; dann folgt wieder A, dann B usw. Wer die letzten Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen.
Wie kann der Spieler A, der die ersten Hölzchen wegnimmt, erreichen, daß er unter allen Umständen gewinnt?

Besuch der Agra 1973



Millionen auf der Bleistiftspitze

Teil 2

Aufgabe:

▲2▲ Ein Werk kann Geräte zweier verschiedener Typen *B* und *M* herstellen. Für jedes Gerät *B* werden 15 Dioden und 12 Trioden, für jedes Gerät M — 2 Dioden und 6 Trioden gebraucht. Eine Überprüfung am Prüfstand des Gerätes *B* dauert 3 Minuten, des Gerätes *M* — 12 Minuten. Beim Verkauf erhält das Werk für ein Gerät *B* — 9 Mark Gewinn (nicht gerechnet die Unkosten), für ein Gerät *M* — 6 Mark. Die Materialien zur Herstellung der Geräte sind beschränkt; während jeder Schicht kann das Werk über nicht mehr als 300 Dioden und 306 Trioden verfügen, und der Prüfstand kann in jeder Schicht nicht mehr als 6 Stunden (360 Minuten) zuverlässig arbeiten.
Wie viele Geräte *B* und *M* muß das Werk herstellen, damit der Gewinn (in einer Schicht) maximal wird?
Im Teil I wurde die Lösung dieser Aufgabe dargestellt. Die dort auch zitierten Tabellen 5, 6 und 7 holen wir an dieser Stelle nach.

Wir werden jetzt zur Lösung dieser Aufgabe eine andere, die sogenannte *Simplex-Methode* betrachten. Wir führen nichtnegative Veränderliche X_3, X_4 und X_5 ein, um die Bedingungen (1) bis (3) durch folgende Gleichungen zu ersetzen:

$$15\,X_1 + 2\,X_2 + X_3 = 300 \qquad (6)$$
$$12\,X_1 + 6\,X_2 + X_4 = 306 \qquad (7)$$
$$3\,X_1 + 12\,X_2 + X_5 = 360. \qquad (8)$$

Wir drücken die neueingeführten Größen (*Basisgrößen*) X_3, X_4 und X_5 durch die Anfangsgrößen (*freie Größen*) X_1 und X_2 aus:

$$X_3 = 300 - 15\,X_1 - 2\,X_2 \qquad (9)$$
$$X_4 = 306 - 12\,X_1 - 6\,X_2 \qquad (10)$$
$$X_5 = 360 - 3\,X_1 - 12\,X_2. \qquad (11)$$

Die *Simplex-Methode* besteht in der schrittweisen Verbesserung der vorhandenen Lösungen. Deshalb muß man zuerst irgendeine zulässige Lösung (entsprechend den Bedingungen (1) bis (5))[3] finden, die nicht unbedingt optimal ist. Das leichteste ist, man setzt

$$X_1 = X_2 = 0.$$

Dabei ist der Gewinn $T = 9\,X_1 + 6\,X_2$ natürlich auch gleich Null.
Eine *Verbesserung* der Lösung soll in der Vergrößerung des Gewinns bestehen. Man kann dazu z. B. X_1 vergrößern[4], nur müssen wir beachten, daß alle Veränderliche nur nichtnegative Werte annehmen können. Aus Bedingung (9) ist zu ersehen, daß

$$X_1 = \frac{300}{15} = 20.$$

Ähnlich erhalten wir aus (10) und (11)

$$X_1 \leqq \frac{306}{12} = 25{,}5 \text{ und } X_1 < \frac{360}{3} = 120,$$

d. h. X_1 kann nicht größer als 20 sein. Wir setzen $X_1 = 20$.
Dann erhalten wir aus (9) bis (11)

$$X_2 = X_3 = 0;\ X_4 = 66;\ X_5 = 300.$$

Alle Veränderlichen erwiesen sich als nichtnegativ, die Lösung also als zulässig. Wir berechnen den entsprechenden Wert der Zielfunktion (Gewinn):

$$T_1 = 9 \cdot 20 + 6 \cdot 0 = 180.$$

IV. Die gefundene Lösung ist *besser* als die anfängliche, es ist ein Gewinn von 180 Mark zu verzeichnen. Wir werden uns bemühen, diese Lösung noch zu *verbessern*. Dazu vertauschen wir die Rollen der Unbekannten: X_2 und X_3, die in unserer Lösung Null waren, werden wir als freie ansehen und alle übrigen Unbekannten sowie die Zielfunktion durch sie ausdrücken[5]:

$$X_1 = 20 - \frac{2}{15}X_2 - \frac{1}{15}X_3 \qquad (12)$$
$$X_4 = 66 - \frac{22}{5}X_2 + \frac{4}{5}X_3 \qquad (13)$$
$$X_5 = 300 - \frac{58}{5}X_2 + \frac{1}{5}X_3 \qquad (14)$$
$$T = 180 + \frac{24}{5}X_2 - \frac{3}{5}X_3. \qquad (15)$$

Aus der letzten Gleichung ist zu ersehen, daß T gleichzeitig mit X_2 wächst. Auch hier müssen wir uns allerdings wieder daran erinnern, daß alle Veränderliche nur nichtnegative Werte annehmen können. Die Bedingung (12) führt zur Einschränkung $X_2 \leqq 150$; ähnlich ergeben (13) und (14)

$$X_2 \leqq 15 \text{ und } X_2 \leqq \frac{1500}{58} \approx 25,$$

d. h. X_2 kann nicht größer als 15 sein. Wir setzen $X_2 = 15$. Dann erhalten wir aus den Bedingungen (12) bis (14):

$$X_1 = 18;\ X_3 = X_4 = 0;\ X_5 = 126.$$

Die Werte aller Veränderlicher sind wirkwirklich nicht negativ, die Lösung also zulässig. Der entsprechende Wert der Zielfunktion beträgt

$$T_2 = 9 \cdot 18 + 6 \cdot 15 = 252^6$$

V. Zur weiteren *Verbesserung* werden wir die Größen X_3 und X_4 als freie ansehen (bei der vorhergehenden Lösung nahmen sie den Wert 0 an!), und alle übrigen Unbekannten und die Zielfunktion durch sie ausdrücken

$$X_1 = 18 - \frac{1}{11}X_3 + \frac{1}{33}X_4 \qquad (16)$$
$$X_2 = 15 + \frac{2}{11}X_3 - \frac{5}{22}X_4 \qquad (17)$$
$$X_5 = 126 - \frac{21}{11}X_3 + \frac{29}{11}X_4 \qquad (18)$$
$$T = 252 + \frac{3}{11}X_3 - \frac{12}{11}X_4. \qquad (19)$$

Aus der letzten Gleichung ist zu ersehen, daß T gleichzeitig mit X_3 wächst. Ähnlich wie oben finden wir die Bedingung $X_3 \leqq 66$. Als nächste *Verbesserung* erhalten wir:
$X_1 = 12$; $X_2 = 27$; $X_3 = 66$, $X_4 = X_5 = 0$.

[3] Diese Bedingungen sind gleichbedeutend damit, daß unsere fünf Unbekannten nicht negativ sein sollen.

[4] Da der Koeffizient bei X_{11} in der Zielfunktion größer ist als der Koeffizient bei X_2.

[5] Hier wie auch im weiteren Verlauf führen wir die Umwandlungen der Gleichungen nicht aus, sondern geben nur das Endresultat an. Der Leser sollte aber alle Umwandlungen ausführlich ausführen. Gerade hier braucht man also auch den eingangs erwähnten Bleistift.

[6] Diesen Wert kann man auch aus der Gleichung (15) erhalten.

Beschränkungen	Bedarf		Bemerkungen	Gewinn je Gerät		
Vorräte	B	M		B	M	
300	15	2	Dioden (Stück)			
306	12	6	Trioden (Stück)	9	6	Tab. 5
360	3	12	Arbeitszeit des Prüfstandes			
225	15	4				
100	5	3		6	8	Tab. 6
192	4	8				
333	9	9				
360	5	12		9	12	Tab. 7
400	16	4				

Die Werte aller Veränderlichen sind nichtnegativ, die Lösung also zulässig. Als entsprechenden Wert der Zielfunktion erhalten wir

$$T_3=9\cdot 12+6\cdot 27=270.$$

Um die nächste *Verbesserung* zu erhalten, wählen wir X_4 und X_5 als freie Unbekannte und drücken mit ihrer Hilfe die Zielfunktion aus:

$$T=270-\frac{1}{7}X_5-5X_4. \qquad (20)$$

Bei $X_4=X_5=0$ erhalten wir offensichtlich $T=270$. Bei positiven Werten dieser Veränderlicher wird $T<270$, und negative Werte der Veränderlichen sind nicht zulässig. Eine weitere *Verbesserung* ist also unmöglich, der gefundene Wert der Zielfunktion ist maximal und die Lösung selber $X_1=12$ und $X_2=27$ – optimal

Interessant ist die Feststellung, daß die aufeinanderfolgenden verbesserten Werte der Zielfunktion mit den Werten T_0, T_1, T_2 und T_3 zusammenfallen, die wir bei der graphischen Lösungsmethode erhielten.

VI. Das Wesen der *Simplex-Methode* besteht also in der schrittweisen Veränderung der Basis und, folglich, im schrittweisen Übergang von einer Ecke des Vielecks zur anderen. Im Fall von drei Unbekannten erhalten wir anstelle eines Vielecks, das durch Geraden begrenzt ist, ein durch Flächen begrenztes Polyeder (Vielkant). Wenn es noch mehr Unbekannte sind, muß man sich ein n-dimensionales Polyeder zulässiger Lösungen vorstellen; die schrittweise Verbesserung der Lösung wird dabei zum Übergang von einer Ecke des Polyeders zu einer anderen geführt. Man kann auch ein Programm der nächstfolgenden Verbesserung für eine elektronische Rechenmaschine aufstellen.

Die Notwendigkeit der Anwendung mathematischer Methoden bei der Lösung ökonomischer Aufgaben steht schon längst außer jedem Zweifel. Nur ist es zur Einführung dieser Methoden in die Volkswirtschaft notwendig, daß sie von einem großen Kreis von Ökonomen beherrscht wird. Übrigens sind zur Ausführung von Berechnungen in Verbindung mit solchen Aufgaben mathematische Kenntnisse im Umfang der 8. Klasse durchaus ausreichend. Und nur bei einer sehr großen Anzahl von Ausgangsgrößen ist die Hilfe eines Mathematikers, eines Programmierers und die Anwendung einer elektronischen Rechenmaschine notwendig.

Zum Schluß geben wir euch die Möglichkeit, selbständig zwei Aufgaben zu lösen, ähnlich den oben besprochenen. Die Bedingungen dieser Aufgaben findet ihr in Kurzform in den Tabellen 6 und 7, die der Tabelle 5 ähnlich sind.

A. Halameisär

Die mathematische Schülerzeitschrift

Toan hoc va tuoi tre

Die mathematische Schülerzeitschrift *Toan hoc va tuoi tre* (Mathematik und Jugend) ist als Organ der *Vietnamesischen Mathematischen Gesellschaft* im Jahre 1964 ins Leben gerufen worden. Unter den Bedingungen des schwierigen Kampfes gegen den USA-Imperialismus ist die Zeitschrift regelmäßig alle zwei Monate einmal erschienen und hat damit das Lerninteresse der Schüler für die Mathematik wesentlich gefördert.

Schwerpunkte der Zeitschrift:

Gespräche mit *Jungen Mathematikern* – Biographien bekannter Mathematiker – Einführung in die moderne Mathematik – Mathematik und Praxis – Mathematik-Olympiaden der DRV – Mathematik-Olympiaden in den sozialistischen Bruderländern und IMO – Mathematische Aufgaben und Lösungen.

Die Schüler nehmen mit großer Begeisterung an den Wettstreiten zur Lösung der gestellten Aufgaben teil. Neben den Aufgaben, die von den Mathematikern, Fachlehrern und Schülern der DRV gestellt wurden, übernehmen wir auch Aufgaben aus den mathematischen Schülerzeitschriften der sozialistischen Länder, z. B. *Quant* (UdSSR) und *alpha*. Die vietnamesischen Schüler haben große Freude beim Lösen solcher Aufgaben und finden dafür manche sehr interessante Lösungen.

Wir möchten die *alpha*-Leser mit einigen Aufgaben aus *Toan hoc va tuoi tre* bekanntmachen. Manche Aufgaben sind den *alpha*-Lesern vielleicht schon bekannt, jedoch deren neuen Lösungswege werden noch gesucht. Nun wünschen wir viel Freude beim Knobeln!

Hiermit bringen wir die Hoffnung zum Ausdruck, daß in Zukunft die mathematischen Schülerzeitschriften unserer Länder eine regelmäßige Beziehung miteinander unterhalten. Es wird sicherlich für die *alpha*- und *toanhocvatuoitre*-Leser nützlich sein.

Hoang Chung

Aufgaben

▲1▲ Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a, b, c mit

$$a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ a+b\geq 0,\ a+c\geq 0,\ b+c\geq 0$$

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$$

genau dann gilt, wenn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

▲2▲ Man beweise, daß für alle ganzen Zahlen a, b, c und für alle von Null verschiedenen ganzen Zahlen n gilt:

Wenn $a+b+c$ und $a^2+b^2+c^2$ durch n teilbar sind, so ist auch $a^4+b^4+c^4$ durch n teilbar.

▲3▲ Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und n eine natürliche Zahl mit $n\geqq 2$.

Man ermittle alle reellen Lösungen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_n&=a,\\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2&=a^2,\\ &\ldots\ldots\\ x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n&=a^n. \end{aligned}$$

▲4▲ Man ermittle alle natürlichen Zahlen k mit $k\geqq 3$, für die die Gleichung

$$x^3+(x+1)^3+\ldots+(x+k-2)^3=(x+k-1)^3$$

eine Lösung x hat, die eine natürliche Zahl ist.

▲5▲ Man beweise ohne Benutzung eines Tafelwerkes, daß

a) $\cos 36^\circ > \tan 36^\circ$;

b) $\cos 37^\circ 30' > \tan 37^\circ 30'$;

c) $\cos 38^\circ > \tan 38^\circ$.

▲6▲ Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck, über dessen Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ nach außen die Quadrate $CBDE$ und $CAFG$ konstruiert sind.

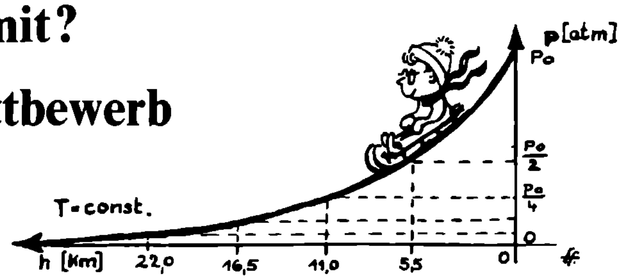
Man beweise, daß die Mittelpunkte P und Q dieser Quadrate und der Mittelpunkt M der Seite $\overline{AB}$ die Eckpunkte eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks sind.

Aus schaffensreicher Arbeit wurde unser Redaktionsmitglied, Mathematikfachlehrer *W. Unze*, am 29. 9. 1973 aus unserer Mitte gerissen. Wir verlieren in ihm einen gewissenhaften, pflichtbewußten Pädagogen, der seit Gründung der *alpha* mit Herz und unermüdlichem Fleiß mitarbeitete und damit einen aktiven Beitrag für die außerunterrichtliche Arbeit der Jugend leistete. Unser Foto: *W. Unze* im Unterricht.

Wer löst mit?

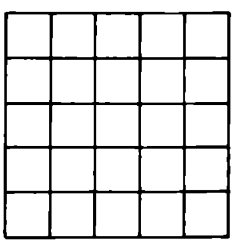
alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 7. März 1974



▲5▲1132 Die Schüler der Klassen 5a und 5b einer Schule halfen bei der Obsternte. Alle 31 Schüler der Klasse 5a pflückten an 9 Tagen jeweils nachmittags und schafften zusammen insgesamt 2232 Körbe mit Äpfeln. Die 33 Schüler der Klasse 5b ernteten an 8 Nachmittagen zusammen insgesamt 2210 Körbe mit Äpfeln; ein Schüler dieser Klasse hat dabei nur an 4 Nachmittagen geholfen. Welche dieser beiden Klassen erzielte die bessere Leistung, d. h. das höhere Durchschnittsergebnis je Schüler und je Nachmittag? *Albrecht Opitz, 825 Meißen*

▲5▲1133 Auf zehn Felder des abgebildeten Spielfeldes ist je ein Spielstein so zu setzen, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonale des Spielfeldes jeweils genau zwei Spielsteine liegen. Es ist eine mögliche Anordnung der zu setzenden zehn Spielsteine anzugeben! *T.*



W 5 ■ 1134 Einer 5. Klasse einer Schule gehören weniger als 30 Schüler an. Die letzte Klassenarbeit im Fach Mathematik hatte folgendes Ergebnis: Es erhielten doppelt so viel Schüler die Note 4 wie die Note 5, und doppelt so viel Schüler die Note 3 wie die Note 4. Es wurden genau so viel „Einsen" wie „Zweien" erreicht. Die Anzahl der „Dreien" war halb so groß wie die Anzahl der „Zweien". Wieviel Schüler gehören dieser Klasse an, wenn zwei Schüler wegen Erkrankung die Klassenarbeit nicht mitgeschrieben haben? *Andreas Fittke, 1035 Berlin, Rosa-Thälmann-OS, Klasse 5*

W 5 ■ 1135 Eine Mutter hat ihren Kindern Äpfel mitgebracht. Gibt sie jedem Kind 5 Äpfel, so bleiben 3 Äpfel übrig. Will sie aber jedem Kind 6 Äpfel geben, so hat sie einen Apfel zu wenig. Wieviel Kinder und wieviel Äpfel waren es? *Sch.*

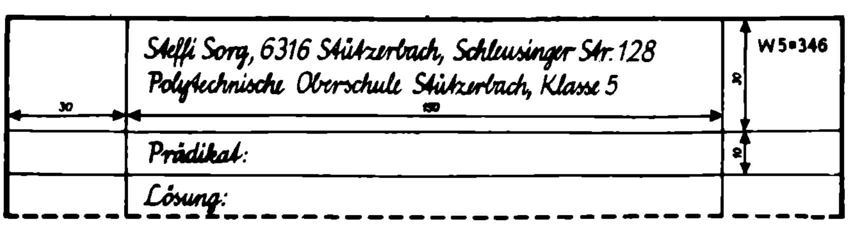
W 5*1136 Hans und Peter gehen über den Schulhof. Vor einer großen Linde bleibt Peter plötzlich stehen und sagt zu Hans: „Ich werde jetzt auf geradlinigem Wege bis zum 80 m vom Baum entfernten Zaun gehen und dabei in einem Abstand von jeweils einem Meter je eine Murmel auf die Erde legen, die letzte lege ich genau am Zaun nieder. Ich wette, daß du nicht in der Lage bist, innerhalb einer viertel Stunde jede Murmel einzeln zum Baum zurückzubringen." Hans nimmt die Wette an, da er davon überzeugt ist, dies zu schaffen. Wer von den beiden behält recht? *Albrecht Opitz, 825 Meißen*

W 5*1137 Die Familien Krause, Meier und Schmidt besitzen je ein Kraftfahrzeug vom Typ „Wartburg", „Skoda" bzw. „Trabant". Genau einer dieser PKW war von roter, genau einer von blauer und genau einer von grauer Farbe. Uns ist ferner folgendes bekannt:

a) Familie Krause erhielt weder einen blauen PKW noch ein Fahrzeug vom Typ „Trabant".
b) Familie Schmidt wurde Besitzer eines grauen PKW.
c) Der PKW vom Typ „Wartburg" ist nicht von roter Farbe.
d) Familie Meier wurde nicht Besitzer eines „Trabant".

Es sind jeweils der Fahrzeugtyp und die Fahrzeugfarbe für die Familien anzugeben. *Cornelia Linz, 75 Cottbus, Kl. 7*

▲6▲1138 Ein Junge hatte einen Fisch geangelt und wurde gefragt, wie schwer dieser sei. Scherzhaft antwortete er: „Der



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha, 7027 Leipzig, Postfach 14.
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.
4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W* 10/12 gekennzeichnet sind.
5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

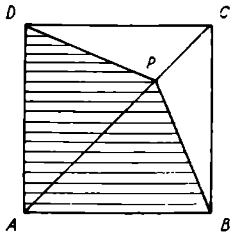
Der Jahreswettbewerb 1973/74 läuft von Heft 5/73 bis Heft 2/74. Zwischen dem 1. und 10. September 1974 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/74 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1973/74 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Fisch wiegt $\frac{3}{4}$ kg mehr als drei Viertel seines Gewichtes." Wieviel Kilogramm wiegt der Fisch? *Volker Zillmann, 801 Dresden*

▲6▲1139 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ dar. Ein innerer Punkt P der Diagonale $\overline{AC}$ wurde mit den Punkten B und D verbunden. Welchen Abstand muß P von der Geraden BC haben, wenn der Flächeninhalt des nicht schraffierten Flächenstückes (Viereck $BCDP$) gleich dem dritten Teil des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$ sein soll? *Sch.*



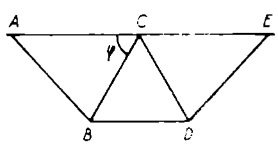
W 6 ■ 1140 Die Summe von fünf natürlichen Zahlen, von denen die folgende stets um 1 größer als das Doppelte der vorhergehenden ist, beträgt 243. Wie lauten diese fünf Zahlen?

Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch, 7404 Meuselwitz

W 6 ■ 1141 Der Bruch $\frac{1}{7}$ läßt sich bekanntlich als unendlicher Dezimalbruch darstellen. Es ist anzugeben, welche Grundziffer in diesem unendlichen Dezimalbruch an der 100. Stelle rechts vom Komma steht, ohne zuvor alle Stellen zu notieren.

Reinhard Schulz, 4401 Rotta

W 6*1142 Die Abbildung stellt zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDE$ dar. Die Punkte A, C und E liegen auf einer Geraden, und es gilt $\overline{AC}=\overline{CE}$, $\overline{AB}=\overline{DE}$ und $\overline{BC}=\overline{DC}$. Welche Bedingungen muß der Winkel $\sphericalangle ACB=\varphi$ erfüllen, damit das Dreieck BDC



a) spitzwinklig, b) rechtwinklig, c) stumpfwinklig, d) gleichseitig ist. Die Antworten sind zu begründen!

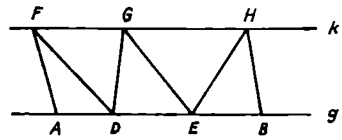
Mathematiklehrer Peter Brack, 5702 Großengottern

W 6*1143 In dem Schema

$$\begin{array}{r} \text{ZWEI} \\ +\ \text{ZWEI} \\ \hline \text{VIER} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Grundziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischen System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Ferner darf die Ziffer 0 nicht am Anfang einer Zahl stehen. Es ist von den möglichen Lösungen genau diejenige zu ermitteln, für welche „ZWEI" durch die kleinstmögliche Zahl belegt wird! *T.*

▲7▲1144 Die abgebildete Figur stellt zwei zueinander parallele Geraden g und k dar. Auf g wurden vier sämtlich voneinander verschiedene Punkte A, D, E und B, auf k drei sämtlich voneinander verschiedene Punkte F, G und H festgelegt, und es wurde F mit A und D, G mit D und E, H mit E und B verbunden. Es ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Flächeninhalt gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ADF$, $\triangle DEG$ und $\triangle EBH$ ist, so zu konstruieren, daß die Strecke $\overline{AB}$ der abgebildeten Figur zur Dreiecksseite $\overline{AB}$ wird, und daß der Eckpunkt C mit dem Punkt G auf derselben Seite von g liegt. *L. L.*



▲7▲1145 Zwei Touristen mieten ein Faltboot, um für vier Stunden auf einem Fluß zu paddeln. Sie erreichen mit dem Boot eine durchschnittliche Eigengeschwindigkeit von 4,5 km · h^{-1} (bei stehendem Gewässer). Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses beträgt jedoch 1,5 km · h^{-1}.

a) Wie weit können sich die Touristen vom Anlegepunkt entfernen, wenn sie pausenlos paddeln und pünktlich zurück sein wollen?

b) Nach wieviel Stunden sind sie am Wendepunkt angelangt, wenn sie zunächst stromaufwärts fahren?

W 7 ■ 1146 Es ist ein Dreieck ABC aus den Stücken $\sphericalangle CAB=\alpha=50°$, $\overline{BE}=h_b=3$ cm und $\overline{AD}=s_a=2{,}5$ cm zu konstruieren; die Konstruktion ist zu begründen.

Nach E. Hameister, Geometrische Konstruktion und Beweise, mitgeteilt von Christine Kohlmann 8701 Lawalde, Kl. 11

W 7 ■ 1147 Das Café im Berliner Fernsehturm, das Plätze für 200 Gäste hat, ist täglich von 9.00 Uhr bis 24.00 Uhr geöffnet. Der Eintrittspreis für einen einstündigen Aufenthalt beträgt für Erwachsene 5,— M und für Kinder die Hälfte. Wieviel Erwachsene und Kinder besuchten während eines Tages das Turmcafé, wenn es stets ausverkauft war und die Tageseinnahme der Eintrittspreise 12 000 M betrug?

Claudia Busse, POS Bischofferode, Kl. 8

W 7*1148 Es sind alle sechsstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende Eigenschaften besitzen:

a) Die Grundziffern der ersten und vierten Stelle von links gerechnet stimmen überein, ferner die Grundziffern an der zweiten und fünften Stelle, aber auch die Grundziffern an der dritten und sechsten Stelle.

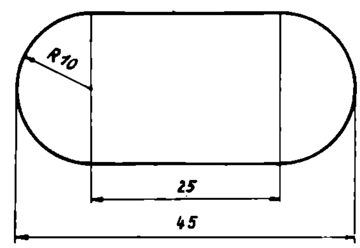
b) Die gesuchte Zahl ist gleich dem Siebenfachen einer Quadratzahl.

Volker Zillmann, 801 Dresden

W 7*1149 Die Summe der Innenwinkel eines konvexen n-Ecks ($n \geq 4$) beträgt $s=(n-2)\cdot 180°$. Es ist nachzuweisen, daß ein konvexes n-Eck höchstens vier rechte Innenwinkel besitzen kann. *T.*

W 7 ■ 1109: s. S. 130

▲8▲1150 Traglufthallen sind Konstruktionen aus mit Kunststoff beschichteten synthetischen Geweben, die frei von tragenden Konstruktionen im Innern sind und nur von dem durch Kompressoren erzeugten Überdruck gehalten werden. Solche Traglufthallen finden Verwendung im Bauwesen zum witterungsunabhängigen Bauen, als Montage-, Lager- und Messehallen usw.



Die beigefügte Abbildung zeigt den Grundriß einer Traglufthalle vom Typ B 43 des VEB Textil- und Veredlungsbetriebes Neugersdorf. Dieser Grundriß besteht aus einem Rechteck und zwei angesetzten Halbkreisen. Die Traglufthalle hat die Form eines Halbzylinders mit zwei angesetzten Viertelkugeln, ihre Höhe beträgt 10 m. Man berechne

a) die Grundfläche der Traglufthalle (in m^2),

b) den Rauminhalt der Traglufthalle (in m^3),

c) die Oberfläche der Traglufthalle (in m^2), also die Fläche des Gewebes, das für die Halle benötigt wird. *L.*

▲8▲1151 Die im Mai 1973 fertiggestellte 2 200 km lange Erdölleitung Ust-Balyk-Ufa-Almetjewsk hat eine maximale Durchlaßfähigkeit von 90 Mill t jährlich, d. h. bei einem ununterbrochenen Betrieb (365 Tage) können durch diese Leitung, die einen Rohrdurchmesser von 1 220 mm hat, in einem Jahr 90 Mill. t Erdöl fließen.

a) Wie groß ist unter diesen Bedingungen die mittlere Geschwindigkeit des transportierten Erdöls (in km · h^{-1} bzw. in m · s^{-1})?

b) Wieviel Stunden beträgt die Zeit, in der das Erdöl von Ust-Balyk bis Almetjewsk fließt? *L.*

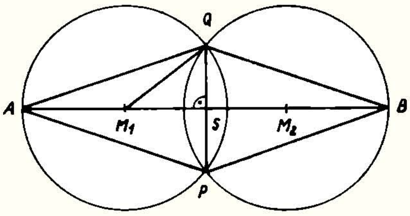
W 8 ■ 1152 Wieviel verschiedene siebenstellige natürliche Zahlen kann man im dekadischen System mit Hilfe von sieben verschiedenen Grundziffern bilden,

a) falls alle diese sieben Grundziffern von Null verschieden sind,

b) falls eine dieser sieben Grundziffern gleich Null ist? *Dr. Gerhard Hesse, Radebeul*

W 8 ▪ 1153 a) Es ist zu beweisen, daß es in einem n-Eck ($n \geqq 3$) höchstens $n-3$ überstumpfe Winkel (d. h. Winkel, die größer als 180° sind) gibt.
b) Es soll für $n=5$ ein spezielles n-Eck mit genau $n-3$ überstumpfen Winkeln gezeichnet werden.
Anleitung zu Lösung: Der Beweis zu a) wird am besten indirekt geführt; dabei kann die Formel für die Summe s der Winkel eines n-Ecks benutzt werden: $s=(n-2)\,180°$. *T.*

W 8*1154 Die abgebildete Figur stellt zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2, den Radien $r_1=r_2=3$ cm und dem Mittelpunktsabstand $\overline{M_1M_2}=e=5$ cm dar. Die Schnittpunkte A und B der Geraden M_1M_2 mit den Kreisen k_1 und k_2 wurden mit den Schnittpunkten P und Q der beiden Kreise verbunden. Es ist der Flächeninhalt des Vierecks $APBQ$ zu ermitteln. *Sch.*



W 8*1155 Man beweise, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck ABC, dessen Hypotenuse die Länge $\overline{AB}=c$, dessen Katheten die Längen $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ und dessen Höhe auf AB die Länge h hat, die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

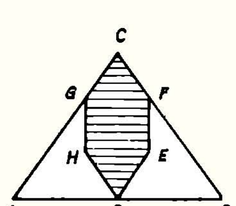
Thomas Maiwald, POS Olbersdorf, Kl. 7

W 9 ▪ 1156 Es sind alle geordneten Paare (x, y) von natürlichen Zahlen anzugeben, für die die Gleichung

$$x^2-y^2=1972$$

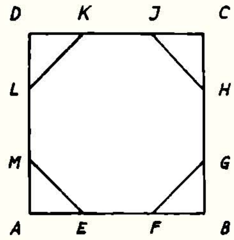
erfüllt ist. *Sch.*

W 9 ▪ 1157 Die abgebildete Figur stellt ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}=a=6$ cm und den Schenkeln $\overline{AC}=\overline{BC}=b=5$ cm dar, dem ein gleichseitiges konvexes Sechseck $DEFCGH$ so einbeschrieben wurde, daß der Eckpunkt D die Basis $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC halbiert und die Seiten $\overline{EF}$ und $\overline{GH}$ parallel zur Höhe $\overline{CD}$ des Dreiecks ABC sind. Es ist der Flächeninhalt des Sechsecks zu ermitteln. *Sch.*



W 9*1158 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=a=4$ cm dar, dem ein regelmäßiges Achteck $EFGHJKLM$ mit der Seitenlänge $\overline{EF}=s$ einbeschrieben ist. Es ist der Flächeninhalt dieses Achtecks zu berechnen.

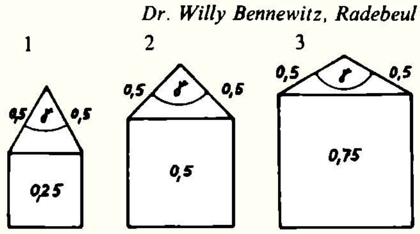
Roland Schlesinger, Saßnitz



W 9*1159 In dem Kombinat VEB Lokomotivbau Elektrotechnische Werke *Hans Beimler* in Hennigsdorf werden Elektrotriebwagen für den Vorortverkehr entwickelt, die bereits 1974 den Versuchsbetrieb aufnehmen werden. Diese Elektrotriebwagen haben eine verhältnismäßig hohe Anfahr- und Bremsbeschleunigung von $a=1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ und erreichen eine Höchstgeschwindigkeit von $v_1=120\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Welche Zeit benötigt ein solcher Elektrotriebwagen
a) für eine Strecke von einer Haltestelle bis zu der nächsten 4 km entfernten Haltestelle?
b) für eine Strecke von 20 km, wenn auf dieser Strecke Haltestellen im Abstand von jeweils 4 km vorgesehen sind und der Zug jeweils 30 s hält?
c) Welche Zeit benötigt für die Strecke von 20 km im Falle b) ein Vorortzug, der nur eine Beschleunigung von $0{,}6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ hat und nur eine Höchstgeschwindigkeit von $90\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ erreicht?
Anleitung zur Lösung:
Man nehme zunächst eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung bis zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit an, dann die konstante Höchstgeschwindigkeit und endlich bis zur Erreichung der nächsten Haltestelle eine gleichmäßig verzögerte Bewegung. Dazu benutze man die Formeln für den Weg und die Zeit bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung (vgl. Tafelwerk, 7. bis 12. Klasse, S. 74). *L.*

W 10/12 ▪ 1160 In den Abbildungen 1, 2 und 3 sind drei gleichschenklige Dreiecke gezeigt, bei denen die Länge der Schenkel jeweils gleich 0,5 ist und das über der Basis konstruierte Quadrat den Flächeninhalt 0,25 bzw. 0,50 bzw. 0,75 hat. Man berechne in allen drei Fällen die Größe des Winkels γ.

Dr. Willy Bennewitz, Radebeul



W 10/12 ▪ 1161 Es ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$|x-10|+|x-2|=|x^2-10x+16|$$

im Bereich der reellen Zahlen zu ermitteln.

Andreas Schwarzig, Görlitz

W 10/12*1162 Es sei $ABCDEFGH$ ein gerades Prisma mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$ (Seitenlänge a) und der Höhe h. Dabei sollen die Punkte E, F, G, H senkrecht über den Punkten A, B, C bzw. D liegen. Die Flächendiagonale $\overline{EG}$ sei durch die Punkte P_1 und P_2 in drei gleichlange Teile geteilt, so daß $\overline{EP_1}=\overline{P_1P_2}=\overline{P_2G}$ ist. Es ist das Volumen des Körpers $ABCDP_1P_2$ zu berechnen, der durch die Kanten $\overline{P_1A}$, $\overline{P_1B}$, $\overline{P_1D}$, $\overline{P_2B}$, $\overline{P_2C}$, $\overline{P_2D}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ und $\overline{P_1P_2}$ begrenzt ist. *Detlef Tolksdorf (Kl. 11) und Frank Burghardt (Kl. 10), Spezialschule Frankfurt (Oder)*

W 10/12*1163 Es sei

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, und es sei
$f(0)=f(1)=f(2)=1$, $f(3)=100$.
Man ermittle die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 dieses Polynoms. *L.*

W 7 ▪ 1109 Viele Leser haben bemerkt, daß sich in diese Aufgabe ein Fehler eingeschlichen hat:
Es muß heißen: 47 Kopeken (nicht 46 k.). Wir verlängern den Einsendetermin für diese Aufgabe bis 7. März 1974.

- Im Wettbewerbsjahr 1972/73 gingen 44300 Lösungen ein. (Heft 5/72, 6/72, 1/73, 2/73). 1010 Einsendungen wurden als Nichtwettbewerbslösungen zurückgewiesen, 4242 mit falsch gelöst bewertet (das sind 9,5%).
- Einsendungen aus dem Ausland:

Österreich:	197	Schweiz:	9
UdSSR:	86	Algerien:	3
Ungarische VR:	28		

- Zur Durchführung des Wettbewerbs stellt der *Volkseigene Verlag Volk und Wissen* jährlich ca. 10000 M zur Verfügung (Postgebühren, Druck der Antwortkarten und Urkunden, Herstellung der Abzeichen, Schreibarbeiten u. a.).
- Unser besonderer Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 2000 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten:
BSB B. G. Teubner, Leipzig; Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig; VEB Fachbuchverlag, Leipzig; Der Kinderbuchverlag, Berlin; Militärverlag der DDR, Berlin; transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin; Verlag Die Wirtschaft, Berlin; Der Sportverlag, Berlin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; VEB Verlag Die Technik, Berlin; Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin; Urania-Verlag, Leipzig; Polnisches Informationszentrum, Leipzig

alpha-Wettbewerb 1972/73

Preisträger

Dittmar Kurtz, Friedrichsrode; **Andrea Nießen,** Berlin; **Roger Labahn,** Leipzig; **Audrey Hoffmann,** Berlin; **Berthold Möbius,** Dresden; **Andreas Kasparek,** Gräfenhainichen; **Thomas Luschtinetz,** Stralsund; **Martin Blümlinger,** Linz (Österreich); **Andreas Fittke,** Berlin; **Uwe Hanisch,** Dresden; **Heinz Ernst,** Linz (Österreich); **Steffen Hanisch,** Dresden; **Wolfgang Taubert,** Meiningen; **Michael Winks,** Berlin; **Iris Schulz,** Rotta; **Thomas Kaatz,** Gräfenhainichen; **Oberschule Friedeburg (Kollektiv); Monika Schöbe,** Rotta; **Uwe Trautvetter,** Neuenhofe; **Heiko Müller,** Schmalkalden; **AG Jg. Mathematiker,** Lichte; **Franz Sander,** Görlsdorf; **Dagmar Lorenz,** Görlitz; **Cordula Becker,** Moskau (UdSSR); **Ing. A. Körner,** Leipzig; **Andreas Philipp,** Rochlitz; **Roland Schlesinger,** Saßnitz; **Stefan Krötenheerdt,** Halle; **Klaus Baumgart,** Dresden, **Bernd Bojahr,** Greifswald, **Viktor Chatschtschanski,** Dzerschinsk (UdSSR).

Vorbildliche Leistungen

Ulf Ritschel, Booßen; Ute Busch, Lobenstein; Eckhard Liebscher, Ilmenau; Andreas Feige, Mühlhausen; Michael Reissig, Halle; Rüdiger Schultz, Bergen (Rg.); Arnhild Lorenz, Görlitz; Torsten Ueberdick, Halle; Bengt Nölting, Greifswald; Angela Gebhardt, Bernsbach; Gudrun Billig, Coswig; Klaus Heving, Halle; Cornelia Thannhausser, Linz (Österreich); Udo Fechner, Spremberg; Peter Herrmann, Zahna; Karsten und Frank Richter, Herzberg; Sylvia Schmidt, Buchholz; Wolfgang Huschmann, Oelsnitz; Heike Manthey, Ribnitz-Damgarten; Jürgen Sägenschnitter, Cottbus; Dagmar Laux, Leipzig; Frank Zschörnig, Meißen; Gunter Reißig, Weimar; Claudia Riemer, Ponickau; Dieter Kratsch, Göhren; Claudia Kummer, Leipzig; Pamela Teubner, Leipzig; Frank Seidel, Radebeul; Wilfried Röhnert, Radebeul; Christiane Mallek, Berlin; Birgit Rosenberger, Suhl; Holger Stehfest, Havelberg; Atzel Müller, Oberlungwitz; Uta Weidauer, Bernsbach; Andreas Kopf, Berlin; Heiner Schulz, Strausberg; Bernd Bräutigam, Astrid Pflaum; Andreas Goldhahn, Bernsbach; Andrea Hönemann, Stützerbach, Stephan Jung, Berlin; Frank Bergner, Großenhain; Clemens Jaunich, Cottbus; Martina Menge, Bernburg; Volkamr Türke, Auerbach; Regina Bohr, Berlin; Bettina Müller, Bannewitz; Ronald Rösch, Karl-Marx-Stadt; Michael Minx, Berlin; Ralf Kretschmar, Dresden; Peter Burkhardt, Steinbach-Hllg.; Michael Kaufmann, Linz (Österreich); Annekatrin Elsner, Ponickau; Kathrin Kotzner, Radebeul; Manuel Richter, Wilthen; Birgit Arnhold, Radebeul; Torsten Löwe, Schleiz; Birgit Oelschlegel und Arndt Gläßer, beide Altenbeuthen; Frank Bräuer und Frank Macher, Bahratal; Kurt Schulze, Himmelsberg; Hartmut Rommel, Niederspier; Ulrich Crinesura, Weida; Stefan Borchhardt, Worbis; Rainer Grimm, Breitenbach, Martin Obst und Sylvia Czarratzki, beide Zaatzke; Bettina Schulz, Rotta; Frank Billert, Manfred Häußler, Uwe Lumm, Andreas Hempel, Uta Steinmetz, Katrin Steinmetz, alle Clingen; Dirk Herrmann, Alt-Töplitz (aus Kl. 2); Karin Rasche und Jürgen Gäber, beide Stolpen; Barbara Höpfner, Wolgast; Frauke Apel, Klausdorf; Thomas Lenz und Norbert Behnke, beide Greußen; Iris Schwerdt, Zörnigall; Bernd Pauli, Pfaffroda; Tino Puppe und Claudia Barthel, beide Burkau; Christina Grau, Falk Oelschläger, Constanze Prause, alle Schmalkalden; Torsten Flade, Beierfeld; Ute Busch, Lobenstein; Claudia Riemer, Ponkau.

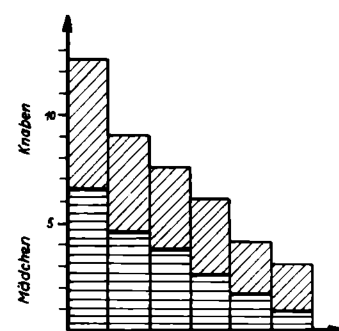
Weitere 2400 Wettbewerbsteilnehmer erhielten Urkunde und Abzeichen in Silber. Alle, die das *Abzeichen in Gold* erworben haben, veröffentlichen wir in Heft 1/74.

Kollektive Beteiligung von Schulen am alpha-Wettbewerb

OS Rüdnitz; OS Kuhfelde; OS Fambach; J. G. Seume-OS Schmalkalden; OS Mahlis; OS Clingen; OS I Saßnitz; OS Groß Wüstenfelde; Wille-Wallstab-OS Löderburg; OS II Hainichen; OS I Teterow; OS Stolpen; OS Pfiffelbach; OS Bornstedt; 3. OS Weida; J.-Brinckmann-OS Goldberg; Goethe-OS Gnoin; Hugo-Jacobi-OS Zella-Mehlis; Geschw.-Scholl-OS Wittenberg; OS Neuenhofe; EOS Worbis; Egon-Schultz-OS Grimma; Klub *Junger Mathematiker* Cottbus; Pionierhaus *Juri Gagarin*, Karl-Marx-Stadt; OS Klausdorf; OS Oberschönau; Juri-Gagarin-OS Greußen; E.-Thälmann-OS Karl-Marx-Stadt; OS Lössau; 3. OS Neustrelitz, Fritz-Reuter-OS Siedenbollentin; OS I und II Breitungen; OS Güsen; OS Beierfeld; OS Wolkenburg; Karl-Marx-OS Wilkau-Haßlau; OS Wohlmirstedt; Hegel-OS Magdeburg; OS Wellmitz; Hanno-Günter-OS Fürstenwalde; OS Großbartloff; Th.-Neubauer-OS Bad Salzungen; OS Viernau; Comenius-OS Oranienburg; OS Ziegelheim; OS Teistungen; OS Bischofferode; C.-Zetkin-OS Wiehe; Egon-Schultz-OS Berlin; OS Wernshausen; E.-Hartsch-OS Gersdorf; OS Schorssow; G.-Hauptmann-OS Obercunewalde; OS Altentreptow; OS Sachsendorf; Max-Lenk-OS Zepernick; Fr.-Engels-OS Effelder; A.-Becker-OS Spremberg; A.-Diesterweg-OS Spremberg; OS Ahlbeck; OS Asbach; F.-Schiller-OS Eilenburg; OS Steinbach-Hallenberg; OS Burkau; OS Zaatzke; E.-Schneller-OS Hoyerswerda; OS Naundorf; OS Bahratal; OS Gr. Schwarzlosen; A.-Diesterweg-OS Lobenstein; OS Mittelstille; OS Jördenstorf; OS Blumberg; OS Schernberg; OS Alt-Töplitz; 22. OS Rostock; K.-Kollwitz-OS Dingelstädt; OS Rotta; E.-Rietschel-OS Pulsnitz; OS Zörnigall; OS Neukloster; OS Oßling; OS Löwenberg; OS Cossebaude; A.-Becker-OS Kamsdorf; OS Vockerode; OS Treben; M.-Poser-OS Drognitz; OS Lichte; F.-Dettmann-OS Stralsund; OS Spora; L.-Fürnberg-OS Wegeleben; OS Olbersdorf; Pestalozzi-OS Oberlungwitz; *alpha*-Club 29. OS Leipzig; H.-Beimler-OS Hirschfeld; Karl-Marx-OS Schmalkalden; OS Wernshausen; OS Friedeburg; OS Neetzow; K.-Liebknecht-OS Karl-Marx-Stadt; OS Breitenbach; OS Wingerode; Lenin-OS Wolgast; OS Brehme; OS Beierfeld; OS Leinefelde; OS Wohlmirstedt; OS Menterode; E.-Hartsch-OS Gersdorf; OS Lichte

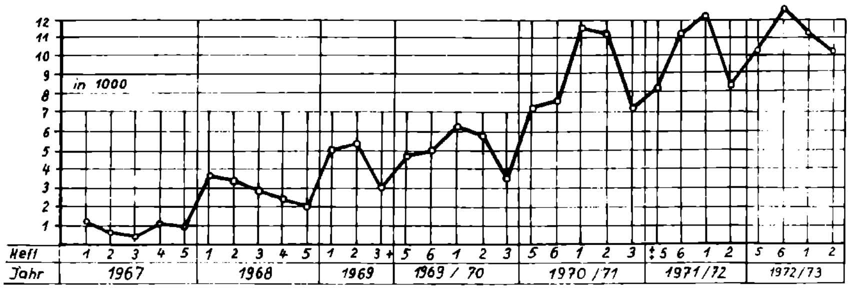
---

Im Wettbewerbsjahr 1972/73: 44300 Lösungen



Kl.	5	6	7	8	9	10
Kn. in %	47	49	50	56	58	68
Mä. in %	53	51	50	44	42	32

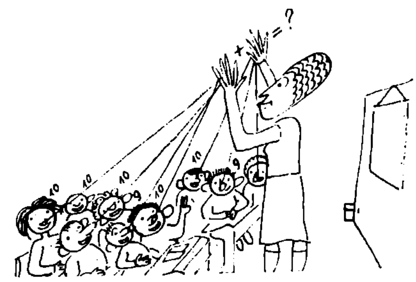
Entwicklung des alpha-Wettbewerbs 1967/73



+ umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr

‡ ab Wettbewerbsjahr 1971/72 nur noch 4 Wettbewerbe im Jahr

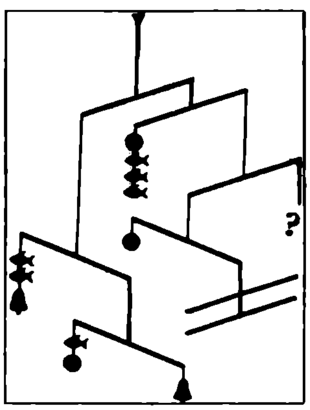
In freien Stunden alpha heiter



„Achtung, alle im Chor“
Utschitelsko delo, Sofia

Der Äquilaber

Barnard, englischer Publizist für unterhaltsame Mathematik, nannte dieses bei uns als „Windspiel“ bekannte System aus „Äquilibristik“ und „Kandelaber“. *Barnards* Äquilaber hing in seinem Zimmer und befand sich im Gleichgewicht.
Welche beiden Gegenstände halten das System (bestehend aus Fischen, Kugeln, Glöckchen und Waagebalken bzw. Kombinationen davon) anstelle des Fragezeichens ($\hat{=} x$) in der Schwebe? Das Gewicht der Fäden bleibt dabei unberücksichtigt, nicht aber das der Waagebalken. *(Aus NBI, Arithmetische Gymnastik 30)*



Eine Zahl fehlt

In jeder Reihe fehlt eine Zahl, die in den zur Auswahl stehenden Zahlen enthalten ist. Die Zahl kann gefunden werden, wenn eine Beziehung zwischen den Zahlen innerhalb der Reihen erkannt wird.

Oberlehrer H. Pätzold, Waren/Müritz

a) 3 21 8 32 ○ 7
4; 6; 8

b) 21 11 ○ 15 17 18
8; 13; 25

c) 5 625 3 ○ 2 4
8; 24; 361

Läufersprung

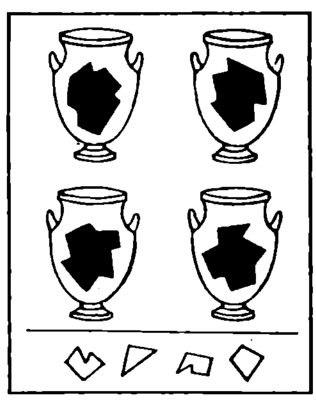
Für eine geeignete Folge von Läuferzügen gilt: Die Felder der obigen Figur, auf denen der Läufer nacheinander steht, tragen Silben, die in dieser Reihenfolge einen aus dem Mathematikunterricht der Klasse 6 bekannten Satz darstellen.

Irmgard Träger, Dr.-R.-Sorge-OS, Ebersbach

	den		nes		in		hen
ein		ecks		ei		die	
	an		schnei		ei		punkt
drei		der		hö		nem	

Der zerbrochene Krug

Einer der zerbrochenen Krüge läßt sich mit den vier Bruchstücken wieder reparieren.



Das hab ich mir ausgedacht

$$\begin{array}{ccccc} dh & - & d & = & hg \\ : & & \cdot & & - \\ j & + & i & = & ha \\ \hline i & + & e & = & g \end{array}$$

Elke Schönemann, AG-Mathe (Kl. 7), Elbingerode

Magisches Quadrat

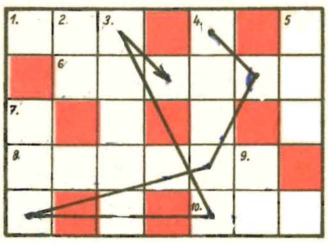
Es sind drei Ziffern so zu vertauschen, daß ein magisches Quadrat entsteht, d. h. die Summen in jeder Spalte, Reihe und Diagonale übereinstimmen.

Lutz Gärtner, Pestalozzi-OS Wismar (Kl. 9)

7	13	3	6
11	8	10	5
14	1	15	4
2	12	16	9

Kreuzworträtsel

Waagerecht: 1. Zeichen für *Sinus*; 6. halber Durchmesser eines Kreises; 8. Körper mit paralleler Grund- und Deckfläche; 10. Zeichen für *Arkus*.



Senkrecht: 2. Vorsilbe für *nicht, un...*; 3. dem Zenit gegenüberliegender Punkt der scheinbaren Himmelskugel; 4. griechischer Buchstabe (Zeichen für Summe); 5. griechischer Buchstabe; 7. Kurzzeichen einer Arbeitseinheit; 9. Flächenmaß.
Die Buchstaben entlang des Pfeiles ergeben ein Glied der Aditionsaufgabe. *Frank Berger, Großenhain (Kl. 8)*

Einen „Weltrekord im Kopfrechnen" erzielt

81jähriger zog 19. Wurzel aus 133stelliger Zahl

Mexiko-Stadt. Der 81jährige Deutscnmexikaner Herbert Freiherr Grote hat nach seinen Angaben einen neuen Weltrekord im Kopfrechnen aufgestellt.

Ohne Bleistift und Papier zog er die 19. Wurzel aus einer 133stelligen Zahl. Das mexikanische National-Institut für Kernenergie bestätigte, daß Grote diese Leistung dort vor mehreren Wissenschaftlern in einer knappen halben Stunde vollbracht hat.

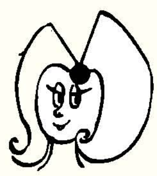
Grote hat am Donnerstag in Mexiko-Stadt einen Preis von 5000 Dollar für denjenigen ausgesetzt, der ihm diese Leistung noch in diesem Jahr nachmacht. Der pensionierte Dolmetscher aus Berlin, der 1939 nach Mexiko auswanderte, hatte bereits 1969 die siebte Wurzel aus einer 53stelligen Zahl und 1970 die 13. Wurzel aus einer 100stelligen Zahl durch Kopfrechnen ermittelt. Seine Erfolge werden im Londoner „Guines book of records" veröffentlicht.

Die Zahl, aus der Grote im mexikanischen National-Institut für Kernenergie die 19. Wurzel zog, lautete: 1760 185 682 853 945 889 025 317 892 532 435 069 724 025 004 269 817 133 517 292 723 416 744 847 428 630 182 920 842 612 948 934 301 581 468 616 708 530 771 118 899 154 386 944.
Nach Grotes Kopfrechnen-Kunststücken ist dies das gleiche wie 9 126 254 insgesamt 19mal mit sich selbst multipliziert.

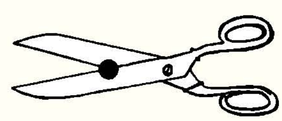
Wasserhähne unter sich

Mathematikfachlehrer K. Koch, Schmalkalden

Punkt, Punkt, Punkt

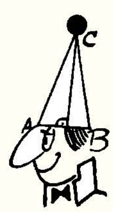


Scheitelpunkt

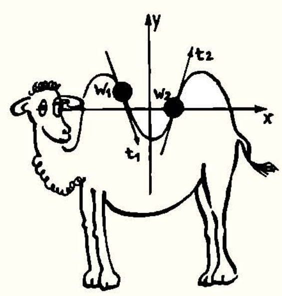


Schnittpunkt

Mittelpunkt



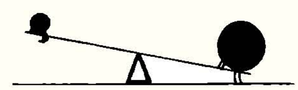
Eckpunkt



Wendepunkt

Siedepunkt

Punkt 8 Uhr



Schwerpunkt

F. Fricke, Berlin

Die Anekdote — Das beste Werk

Abraham Gotthelf Kästner (1719 bis 1800), Mathematiker und Epigrammdichter, lernte als Student so spielend leicht, daß er es sich vor seinem Staatsexamen leisten konnte, mit der bildhübschen Tochter seines Professors spazierenzugehen, anstatt die Nase in die Bücher zu stecken. Als ihn der Professor deswegen zur Rede stellte, erwiderte *Kästner* schlagfertig: „Herr Professor, Sie haben uns Studenten als Vorbereitung für das Examen das Studium Ihrer eigenen Werke empfohlen. Ihre Tochter halte ich für Ihr bestes."

Zum 25. Geburtstag der Pionierorganisation

Ernst Thälmann

Sei stolz auf deine Organisation, Junger Pionier!

- Über 6 Millionen Menschen in unserer Republik waren in den 25 Jahren des Bestehens der Pionierorganisation Mitglieder dieser Organisation.
- *Pionierrepublik Wilhelm Pieck* heißt das größte und schönste Pionierlager in der DDR. 60 km von Berlin entfernt, empfängt die Pionierrepublik (1952 errichtet) jeweils 800 bis 1 000 Pionierräte für 8 bis 10 Wochen.
- Der Verlag *Junge Welt* gibt 9 Zeitungen und Zeitschriften für die Jugend heraus.
- Unsere Pionierorganisation *Ernst Thälmann* ist mit mehr als 40 Pionier- und Kinderorganisationen auf allen Kontinenten freundschaftlich verbunden.
- Fast 4 000 Pioniere aus 25 Ländern sind Jahr für Jahr zu Gast in der Pionierrepublik, im Pionierlager Prerow an der Ostsee und in anderen schönen Lagern.
- Bis zum Sommer 1971 rollten bereits 36 Freundschaftszüge — besetzt mit Lenin- und Thälmann-Pionieren, FDJ-Mitgliedern und Komsomolzen — über die Grenzen der UdSSR und der DDR.
- Das Abzeichen für gute Arbeit in der Schule ist die älteste Auszeichnung der Pionierorganisation *Ernst Thälmann*. Es wurde im Verlauf von 25 Jahren an über eine Million vorbildlich und aktiv in ihrer Gruppe tätige Pioniere verliehen.
- Der Kinderbuchverlag, das Berliner *Theater der Freundschaft* und fünf weitere Kindertheater, 50 zentrale Pionierlager und 367 Häuser der Jungen Pioniere, Stationen Junger Touristen, Techniker und Naturforscher gehören in unserer Republik den Kindern.
- Jede Woche lesen fast eine halbe Million Pioniere ihre Pionierzeitung *Trommel*.

Rechenzentrum alpha begeisterte in der Berliner Wuhlheide

„Immer lebe die Sonne“ — Das war das Motto des *Internationalen Kinderfestes* zu den X. Weltfestspielen, das am 1. August 1973 in der Berliner Wuhlheide stattfand. Zehntausende Kinder aus 46 Ländern hatten in Stadien, auf Bühnen, in Kabinetten, am Badesee und an den Bastel- und Knobelstraßen unvergeßliche Erlebnisse.
Großen Zuspruch hatte das unweit von der Station *Junger Techniker* aufgebaute *Rechenzentrum alpha* des Hauses der Jungen Pioniere Bautzen. Etwa 500 Pioniere überprüften ihr Wissen und erhielten ein Souvenir und einen von Bautzener Pionieren geschriebenen Kartengruß. Das *Rechenzentrum alpha* bereitete den Pionieren viel Spaß. Darüber freuten wir Betreuer des Rechenzentrums uns am meisten. Das war der verdiente Dank an die Pioniere und FDJler in sieben Arbeitsgemeinschaften des Pionierhauses Bautzen, die in den vergangenen zwei Schuljahren in fleißiger Arbeit das Rechenzentrum entwickelt, projektiert und gebaut haben.
Die Stunden des Festivals waren Anlaß, einmal zurückzublicken. Wie haben wir damals vor zwei Jahren angefangen? Das *Haus der Jungen Pioniere Bautzen* erhielt den Auftrag, bis zum *1. Zentralen Rätetreffen* im August 1972 ein mathematisches Objekt zu gestalten, um viele Pioniere der Klassen 1 bis 7 durch interessante Formen für die Mathematik zu begeistern.
In den folgenden Monaten trugen Pioniere und FDJler der Arbeitsgemeinschaften der Bereiche *Mathematik / Naturwissenschaften* und *Technik* ihre Gedanken zusammen und entwarfen Skizzen. In enger Zusammenarbeit der Arbeitsgemeinschaften *Mathematik, Elektronik, Elektrotechnik, BMSR-Technik* und *Technisches Basteln* entstand das ursprüngliche *Rechenzentrum alpha*, das beim 1. Zentralen Rätetreffen in Dresden seine Generalprobe bestand.
Bis zu den X. Weltfestspielen wurde das Rechenzentrum *alpha* wesentlich erweitert. So wurden beispielsweise im vergangenen Schuljahr von den Pionieren der Arbeitsgemeinschaft Mathematik Klasse 7 (jetzt Klasse 8) für zwei Computer PIKO-dat Programme entwickelt und gesteckt. Diese Computer wurden mit einer bereits vorhandenen Arbeitstafel über eine Relaisschaltung verbunden. Dadurch wurde das Niveau der bereits vorhandenen Arbeitstafel wesentlich erhöht. Heute können die Pioniere an sieben Arbeitstafeln (1972 waren es nur vier) logisches Denken, Kombinieren und Rechnen üben. Da am Rechenzentrum *alpha* gleichzeitig sieben Schüler arbeiten können, beträgt der Durchlauf pro Stunde etwa 80 Schüler. Für die Betreuung des Rechenzentrums

Pionierorganisation „Ernst Thälmann“	1969	1970	1971	1972
Mitglieder	1 826 136	1 852 443	1 907 566	1 957 980
Jungpioniere (Klassenstufe 1 bis 3)	833 007	822 619	832 802	831 398
Thälmannpioniere (Klasse 4 bis 7)	993 129	1 029 824	1 074 764	1 126 582
Gruppenpionierleiter	68 786	66 173	67 751	72 125

alpha sind nur drei Pioniere erforderlich. Die Tafeln können auch einzeln von Pioniergruppen eingesetzt werden. Alle Tafeln von *alpha* werden elektromechanisch und elektronisch gesteuert und zeigen die Ergebnisse der Denkoperationen optisch oder akustisch an. Mit Hilfe von Tasten und Schaltern werden die Aufgaben von dem am Rechenzentrum *alpha* arbeitenden Schüler eingegeben und nach erfolgter Rechenoperation auf ähnliche Weise auf ihre Richtigkeit hin ausgewertet.

Nun möchte ich noch eine Tafel näher beschreiben: Auf einer Sperrholztafel ist die Landkarte der Sowjetunion mit acht Großstädten eingezeichnet. Je zwei Großstädte sind durch Glühlampenketten miteinander verbunden. Durch Betätigen eines Drehschalters mit vier Ebenen leuchten zwei (durch Glühlampen verbundene) Städte der Sowjetunion auf. Dreht man den prismenförmigen Drehschalter um 90° weiter, so ist eine neue Aufgabe zu lösen und es leuchten zwei andere entsprechende Glühlampen auf. Nach schriftlicher Lösung der Aufgabe wird das dreistellige Ergebnis auf einem Schaltpult mit den Ziffern 0 bis 9 durch vierpolige Stecker gesteckt und der Stromkreis durch einen Schalter geschlossen. Bei richtiger Lösung leuchten die Anzeige „Richtig" (grün) und die Glühlampenkette zwischen den zwei Städten auf. Bei falscher Lösung leuchtet die Anzeige „Falsch" (rot) auf und die Glühlampenkette blinkt rot.

Zum Schluß noch eine Aufgabe von dieser Tafel:

Im Jahr 1970 flossen 8,5 Mill. Tonnen Erdöl durch die Pipeline *Freundschaft* in die DDR. 1975 werden es bereits 16,5 Mill. Tonnen sein. Die Länge der Ölleitung von Kuibischew bis Schwedt beträgt 1200 km. Diese Strecke durchfließt das Erdöl in 20 Tagen.

Wieviel Kilometer legt es in 8 Tagen zurück?

(Lösung: 480) *Ehrenfried Zschech*

(*E. Zschech* ist langjähriger Leser der *alpha*, mehrfach Preisträger und Träger des *alpha*-Abzeichens in Gold, d. Red.)

Aus der Zentralschule der Pionierorganisation „Ernst Thälmann" berichtet

In den letzten Tagen und Wochen bereiteten wir uns — Studenten und Lehrer der Zentralschule der Pionierorganisation *Ernst Thälmann* in Droyßig (bei Zeitz) — auf den 15. Geburtstag unserer Schule und den 25. Jahrestag der Gründung der Pionierorganisation *Ernst Thälmann* vor. Wir haben mit dem Politbürobeschluß vom Juli 1973 einen Kompaß für unsere politische und pädagogische Arbeit erhalten. Mit neuen Initiativen werden wir zur Ausbildung klassenbewußter Freundschaftspionierleiter beitragen. Vor allem das Studium des Marxismus-Leninismus und der Erziehungswissenschaften bildet die solide Basis der Ausbildung unserer Studenten.

Im Prozeß der Ausbildung erwerben sie unter anderem auch die Lehrbefähigung für die unteren Klassen. Ziel der Ausbildung im Fach *Methodik des Mathematikunterrichts* ist es, die Studenten zu befähigen, einen lehrplangetreuen Unterricht in den Klassen 1 bis 4 zu erteilen. Besondere Berücksichtigung findet dabei die Anwendung der in diesem Fach erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten in der späteren Arbeit auf außerunterrichtlichem Gebiet.

Unser Grundsatz ist, die außerunterrichtliche Tätigkeit in den gesamten Bildungs- und Erziehungsprozeß der Schule einzuordnen, damit sie ein breites Betätigungsfeld der FDJ und Pionierorganisation bildet. Dabei sind besonders die Aspekte einer politisch-ideologisch niveauvollen, interessanten und vielseitigen Massenarbeit und einer zielgerechten Förderung von Neigungen, Interessen und Begabungen zu beachten.

So fertigten unsere Studenten des 2. Studienjahres im Schuljahr 1972/73 viele Knobelwandzeitungen mit gesellschaftlichen Themen an. An der Lösung der Aufgaben dieser Knobelwandzeitungen beteiligten sich 170 Pioniere und Schüler der Klassen 1 bis 4 unserer Übungsschule, der Oberschule Droyßig.

Den Höhepunkt der außerunterrichtlichen Tätigkeit auf mathematischem Gebiet bildete im Mai (nach Beteiligung der Pioniere und Schüler an der 1. und 2. Stufe der ABC-Mathematik-Olympiade) die 3. Stufe — die ABC-Schulolympiade der Klassen 1 bis 4 der OS Droyßig, durchgeführt als Klausur (mit anschließender kultureller und sportlicher Tätigkeit und Auszeichnung der Besten.

Die Weiterführung dieser Arbeit betrachten wir als einen konkreten Beitrag zur Verwirklichung des Politbürobeschlusses *Für ein hohes Niveau der sozialistischen Erziehung in der Pionierorganisation Ernst Thälmann.*

I. Koch

Quiz für helle Köpfe

Heitere Mathematik für Pioniernachmittage

Für die folgenden sieben Fragen sind jeweils drei Antworten zur Auswahl angegeben. Für jede Frage ist genau eine Antwort (entweder *a* oder *b* oder *c*) in der abgebildeten Tabelle anzukreuzen. Alle Aufgaben sind im Kopf zu lösen, d. h. Notizen, Zwischenergebnisse und dergleichen sind nicht statthaft. Die Zeit von 15 Minuten sollte für das Lesen der Aufgabentexte und das Ankreuzen der gewählten Antworten nicht überschritten werden.

1. Ein Zug wird von zwei Lokomotiven gezogen und fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit fährt jede der beiden Lokomotiven?

a $25\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **b** $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **c** $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2. Von zwei Würfeln W_1 und W_2 hat Würfel W_2 die doppelte Kantenlänge von W_1.

Wieviel mal so groß ist der Rauminhalt des Würfels W_2 wie der des Würfels W_1?

a zweimal so groß

b viermal so groß

c achtmal so groß

3. In einem Kasten befinden sich genau drei rote und drei blaue Kugeln.

Wieviel Kugeln muß man bei verbundenen Augen wenigstens herausnehmen, um mit Sicherheit drei rote Kugeln zu haben?

a 3 Kugeln **b** 4 Kugeln **c** 6 Kugeln

4. Die Summe aus allen natürlichen Zahlen von 0 bis 9 ist

a kleiner als das Produkt

b gleich dem Produkt

c größer als das Produkt

aus diesen Zahlen?

5. Ein Balken wurde mit drei Schnitten in Stücke zu je einem halben Meter Länge zersägt.

Wie lang war dieser Balken?

a 1,5 m **b** 2,0 m **c** 3,0 m

6. Ein Eis mit Früchten kostet 80 Pf. Die Früchte kosten 20 Pf mehr als das Eis.

Wie teuer ist das Eis ohne Früchte?

a 20 Pf **b** 30 Pf **c** 60 Pf

7. Jemand will ein Buch kaufen. Auf die Frage nach dem Preis des Buches antwortet die Verkäuferin scherzhaft: „Zahlen Sie die Hälfte des Preises, und legen Sie noch eine Mark hinzu; dann stimmt es."

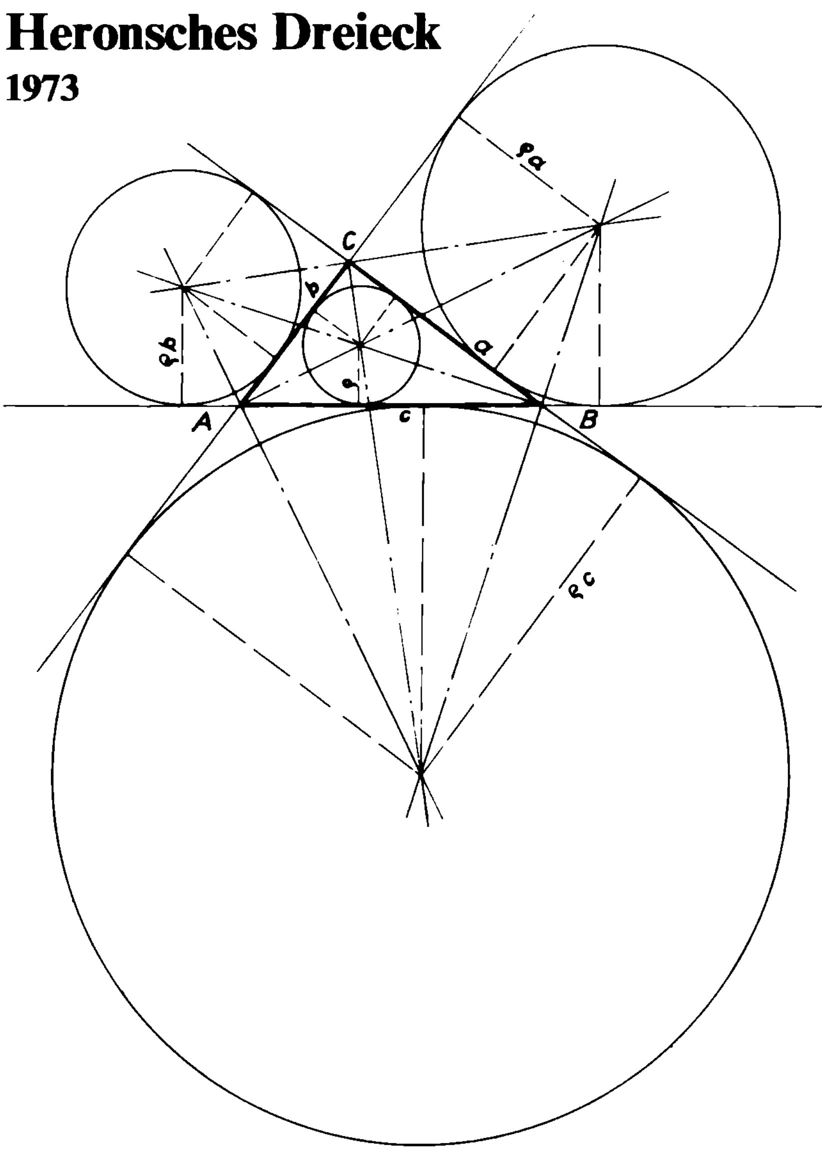
Wieviel Mark kostet das gewünschte Buch?

a 1 M **b** 2 M **c** 4 M

	1	2	3	4	5	6	7
a							
b							
c							

Diplomlehrer W. Henker, Pionierhaus Juri Gagarin, Karl-Marx-Stadt

Heronsches Dreieck
1973



In Heft 6/72 wurde mit einer originellen Vignette allen Lesern ein frohes 1973 gewünscht. Mir hat sie Anlaß zu weiteren Knobeleien gegeben:
Es zeigt sich, daß das pythagoreische Dreieck mit den Seitenlängen $c=10$, $a=8$, $b=6$ nebst seinem Um- und Inkreis sowie seinen Ankreisen noch weitere Spielereien mit den Ziffern der Jahreszahl 1973 zuläßt.
Der halbe Dreiecksumfang läßt sich nämlich in der Form

$$s=\frac{a+b+c}{2}=-1+9+7-3$$

schreiben. Mit den Differenzen

$$(s-a)=-1+9-7+3$$
$$(s-b)=\ \ 1+9-7+3$$
$$(s-c)=\ \ 1-9+7+3$$

ergibt die Heronsche Dreiecksformel den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\sqrt{(-1+9+7-3)(-1+9-7+3)}\\&\quad\cdot\sqrt{(1+9-7+3)(1-9+7+3)}\\&=(1-9+7+3)(-1+9+7-3)\\&=1^2+9^2-7^2-3^2.\end{aligned}$$

Weiter beträgt der Radius des Umkreises (der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf den drei Seiten)

$$r=\frac{abc}{4A}=1(9-7+3).$$

der Radius des Inkreises (der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel)

$$\varrho=\frac{A}{s}=1-9+7+3.$$

Die Radien der Ankreise (jeweiliger Mittelpunkt als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der beiden Außenwinkel und der Winkelhalbierenden des nicht benachbarten Innenwinkels) sind

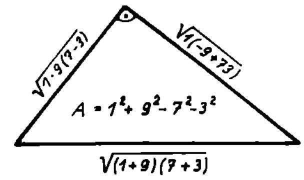
$$\varrho_a=\frac{s}{(s-a)}\varrho=1+9-7+3$$

$$\varrho_b=\frac{s}{(s-b)}\varrho=-1+9-7+3$$

$$\varrho_c=\frac{s}{(s-c)}\varrho=-1+9+7+3.$$

Schließlich ist die Summe der Flächeninhalte des Inkreises und der drei Ankreise (siehe die △ Fig. 1973) noch proportional dem Ausdruck

$$\varrho^2+\varrho_a^2+\varrho_b^2+\varrho_c^2=(1+9)^2+(7+3)^2.$$



Das Jahr 1973 scheint demnach in besonders innigem Zusammenhang mit der Mathematik zu stehen! Viel Spaß bei der Kontrolle des Zahlenspiels.
Zeige, daß

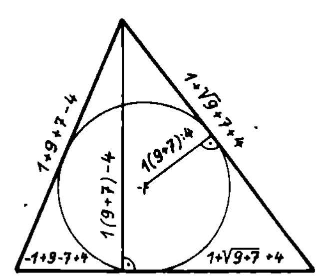
$$\varrho^2+\varrho_a^2+\varrho_b^2+\varrho_c^2=a^2+b^2+c^2 \text{ ist.}$$

F. Klar

Das ist sie, die **Seite 1000** der Schülerzeitschrift *alpha.*

1973/74

Welch ein Zufall! Unabhängig von der obigen Leserzuschrift sendet unser westdeutscher Mitarbeiter die nachfolgende Figur mit dem folgenden Text:
Als *Heronsche Dreiecke* bezeichnet man solche Dreiecke, deren Seiten rationale Maßzahlen haben und deren Flächeninhalt ebenfalls durch eine rationale Zahl angegeben werden kann (nach dem griechischen Mathematiker *Heron von Alexandria*, ca. 100 v. u. Z.)



$s=1+9+7+4$

$A=1+9+74$

Ganzzahlige Werte im dargestellten Dreieck		Maßzahl
drei Seiten	a, b, c	15, 13, 14
halber Umfang	s	21
Flächeninhalt	A	84
Höhe	h_c	12
Höhenabschnitte	p_c, q_c	5, 9
Inkreisradius	ϱ	4

H. Decker

Lösungen

W 9*1030 Nach dem Satz des Pythagoras gilt, da a, b, c die Längen der Katheten bzw. der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sind,

$$a^2+b^2=c^2.$$

Hieraus folgt wegen $c \neq 0$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

Ferner gilt, da jede Kathete kürzer als die Hypotenuse ist,

$$\frac{a}{c}<1 \text{ und } \frac{b}{c}<1.$$

Daraus folgt, weil $n-2$ nach Voraussetzung eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, $\left(\frac{a}{c}\right)^{n-2}<1$ und $\left(\frac{b}{c}\right)^{n-2}<1$.

Daher gilt

$$\left(\frac{a}{c}\right)^n=\left(\frac{a}{c}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{n-2}<\left(\frac{a}{c}\right)^2$$

und $$\left(\frac{b}{c}\right)^n=\left(\frac{b}{c}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{n-2}<\left(\frac{b}{c}\right)^2,$$

also $$\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n<\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1,$$

d. h. $a^n+b^n<c^n$, w. z. b. w.

W 9*1031 1. Wir erhalten

$$a^2-b^2+ab=a^2+ab+\frac{b^2}{4}-b^2-\frac{b^2}{4}$$
$$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{5}{4}b^2$$
$$=\left(a+\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\,b\right)\left(a+\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\,b\right), \text{ also}$$
$$a^2-b^2+ab$$
$$=\left[a+\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)b\right]\left[a-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)b\right],$$

womit die geforderte Faktorenzerlegung gegeben ist.

2. Angenommen, es gäbe auch für die Summe a^2+b^2+ab eine solche Zerlegung in Linearfaktoren. Dann hätten diese Linearfaktoren die Form $a+xb$ bzw. $a+yb$, wobei x und y reelle Zahlen sind, und es würde gelten

$$a^2+b^2+ab=(a+xb)(a+yb)$$
$$=a^2+(x+y)ab+xyb^2.$$

Hieraus folgt, da die Koeffizienten von ab und b^2 auf beiden Seiten übereinstimmen müssen, $x+y=1$

und $xy=1$, also wegen $x \neq 0$

$$y=\frac{1}{x}.$$

Daraus folgt weiter $x+\frac{1}{x}=1$,

also $x^2-x+1=0$.

Nun gilt aber für alle reellen x

$$x^2-x+1=x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqq\frac{3}{4},$$

was zu einem Widerspruch führt.

Daher läßt sich die Summe a^2+b^2+ab nicht in zwei Faktoren von der geforderten Art zerlegen.

10/12▲1032 Angenommen, (x, y) sei eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Dann gilt wegen (1) $y=5-x$, also wegen (2)

$$x^5+(5-x)^5=275, \qquad (3)$$
$$x^5+5^5-5\cdot5^4x+10\cdot5^3x^2-10\cdot5^2x^3$$
$$+5\cdot5x^4-x^5=275,$$
$$25x^4-250x^3+1250x^2-3125x+2850=0,$$
$$x^4-10x^3+50x^2-125x+114=0. \qquad (4)$$

Wir setzen

$$f(x)=x^4-10x^3+50x^2-125x+114.$$

Dann gilt $f(0)=114, f(1)=30, f(2)=0, f(3)=0$, d. h. die Gleichung (4) hat die reellen Lösungen $x_1=2$ und $x_2=3$.

Weitere reelle Lösungen hat diese Gleichung nicht; denn wir erhalten durch Division

$$\frac{f(x)}{(x-2)(x-3)}=x^2-5x+19.$$

Und es gilt für alle reellen x

$$x^2-5x+19=x^2-5x+\frac{25}{4}+19-\frac{25}{4}$$
$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{51}{4}>0.$$

Wegen (1) erhalten

wir für $x_1=2$ $y_1=3$

und für $x_2=3$ $y_2=2$.

Wenn also das gegebene Gleichungssystem überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Lösungen (2, 3) und (3, 2) sein. Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß für diese Werte die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind, daß also genau diese Paare Lösungen des gegebenen Gleichungssystems sind.

10/12▲1033 a) Angenommen, es sei (x, y) ein geordnetes Paar reeller Zahlen mit $y \geqq 0$, für das die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2=x-y^2 \qquad (1)$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$x^4+2x^2y^2+y^4-x+y^2=0,$$
$$y^4+(2x^2+1)y^2+x^4-x=0. \qquad (2)$$

Diese quadratische Gleichung für y^2 hat die folgenden Lösungen

$$y^2=-x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+\frac{1}{4}-x^4+x}$$
$$=-x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}$$
$$=-x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \qquad (3)$$

und $$y^2=-x^2-\frac{1}{2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}. \qquad (4)$$

Wegen $y^2 \geqq 0$ kommt nur die Lösung (3) in Frage.

Für $x \geqq -\frac{1}{2}$ gilt $x+\frac{1}{2}\geqq 0$,

und wir erhalten

$$y^2=-x^2-\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}=x(1-x). \qquad (5)$$

Daher ist $y^2 \geqq 0$ nur dann, wenn $x \geqq 0$ und $x \leqq 1$, d. h. nur für

$$0 \leqq x \leqq 1. \qquad (6)$$

In diesem Falle gilt

$$y=\sqrt{x(1-x)} \qquad (7)$$

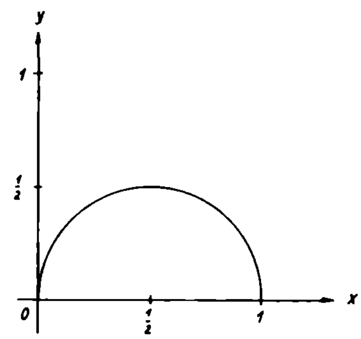
Für $x<-\frac{1}{2}$ gilt $x+\frac{1}{2}<0$, also

$$y^2=-x^2-\frac{1}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)=-x^2-x-1$$
$$=-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}$$
$$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0,$$

d. h., wir erhalten keine reellen Werte für y. Wegen (6) besteht daher der Definitionsbereich von f aus allen reellen x mit $0 \leqq x \leqq 1$.

b) Wegen (7) gilt

$$y=f(x)=\sqrt{x(1-x)}. \qquad (8)$$



c) Wegen (8) gilt $y=0$ genau dann, wenn $x=0$ oder $x=1$. Die Funktion hat also die Nullstellen $x_1=0$ und $x_2=1$.

Ferner gilt

$$y^2=x-x^2=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=$$
$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqq\frac{1}{4}$$

und $y^2=\frac{1}{4}$, d. h. $y=\frac{1}{2}$, genau dann, wenn $x=\frac{1}{2}$. Daher ist der größte Funktionswert (das Maximum) $\frac{1}{2}$.

d) Wir können den Graph dieser Funktion punktweise konstruieren, indem wir aus (8) die Funktionswerte für $x=0$; $x=0{,}1$; $x=0{,}2$; ...; $x=1$ berechnen (vgl. die Abb.). Zu unserer Überraschung stellen wir fest, daß der Graph ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ und dem Radius $r=\frac{1}{2}$ ist.

Das ergibt sich aber auch aus der Gleichung (5). Wir erhalten nämlich aus dieser Gleichung

$$y^2=x-x^2,$$
$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2=\frac{1}{4},$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Für $y \geqq 0$ ist das die Gleichung eines Halbkreises mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ und dem Radius $r=\frac{1}{2}$.

W 10/12 ■ 1034 1. Es sind für Verzinsung und Tilgung der Kredite zu a) und b) jährlich zu zahlen

1 °/₀ von 32 000,– M, d. s.	320,– M,
und 5 °/₀ von 13 500,– M, d. s.	675,– M,
zusammen also	995,– M,

d. s. monatlich 82,92 M, also rund 83,– M.

2. Die Tilgungszeit t (in Jahren) für den Kredit zu b) erhalten wir aus der Gleichung

$$5 \cdot \frac{q^t-1}{q-1}=100 \cdot q^t.$$

Wegen $q=1{,}04$ erhalten wir weiter

$$5(q^t-1)=100 \cdot 0{,}04 \cdot q^t,$$
$$5q^t-5=4q^t,$$
$$q^t=5, \text{ also } 1{,}04^t=5.$$

Hieraus erhalten wir durch Logarithmieren

$t \cdot \lg 1{,}04=\lg 5$,

$$t=\frac{\lg 5}{\lg 1{,}04}=\frac{0{,}69\,90}{0{,}01\,703}=41{,}04.$$

Die Tilgungszeit für den Kredit zu b) beträgt also rund 41 Jahre.

3. Nach 41 Jahren verbleibt für den Kredit zu a) noch ein Restkredit von

32 000,– M – 41 · 320,— M = 18 880,— M.

Da alle Zahlungen von jährlich 995,— M nunmehr auf die Tilgung des zinslosen Kredits verrechnet werden, erhalten wir die restliche Tilgungszeit

$$t'=\frac{18\,880}{995}=19{,}0.$$

Die restliche Tilgungszeit beträgt also 19 Jahre, so daß die beiden Kredite nach insgesamt 60 Jahren getilgt sind.

W 10/12 ■ 1035 Da beide Seiten der Ungleichung (1) nicht negativ sind, ist diese Ungleichung genau dann erfüllt, wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$(ac+bd)^2 \leqq (a^2+b^2)(c^2+d^2), \quad (2)$$
$$a^2c^2+2abcd+b^2d^2 \leqq a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2, \quad (3)$$
$$0 \leqq a^2d^2+b^2c^2-2abcd, \quad (4)$$
$$0 \leqq (ad-bc)^2. \quad (5)$$

Nun ist aber die Ungleichung (5) für alle reellen Zahlen a, b, c, d erfüllt, da das Quadrat einer reellen Zahl stets größer oder gleich Null ist.

Daher sind auch die im Bereich der reellen Zahlen äquivalenten Ungleichungen (4), (3), (2) und (1), also die gegebene Ungleichung für alle reellen Zahlen a, b, c, d erfüllt, w.z.b.w.

W 10/12 * 1036 1. Für alle reellen x gilt

$$f_1(x)=\sin x \cdot \cos x=\frac{1}{2}\sin 2x \leqq \frac{1}{2}, \quad (3)$$

da $\sin 2x \leqq 1$ ist.

Nun gilt $f_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$; daher hat die Funktion f_1 den größten Funktionswert $\frac{1}{2}$.

2. Für alle reellen x gilt

$$[f_2(x)]^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x \cdot \cos x$$
$$=1+2\sin x \cdot \cos x. \quad (4)$$

Nun gilt wegen (3) $\sin x \cdot \cos x \leqq \frac{1}{2}$, also

$$[f_2(x)]^2 \leqq 1+2 \cdot \frac{1}{2}=2, \quad (5)$$

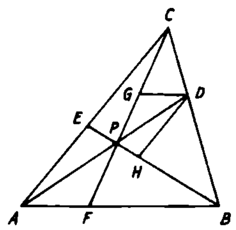
mithin $f_2(x) \leqq \sqrt{2}$.

Da nun $f_2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$, hat die Funktion f_2 den größten Funktionswert $\sqrt{2}$.

W 10/12 * 1037 Es soll bewiesen werden, daß stets gilt

$$\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE}=\overline{FB} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{EA}. \quad (1)$$

Zum Beweis ziehen wir zunächst durch D zu AB eine Parallele, die die Gerade CF im Punkt G schneidet, und durch D zu CA eine Parallele, die die Gerade BE im Punkt H schneidet (vgl. die Abb.).



Nun wenden wir den Strahlensatz an und stellen Proportionen auf, in denen die in der behaupteten Gleichung (1) auftretenden Strecken vorkommen. Dabei beachten wir, daß der Strahlensatz auch dann gilt, wenn der Scheitelpunkt des Winkels zwischen den beiden Parallelen liegt. Es gilt

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{DG}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}, \quad (2)$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DH}}{\overline{CE}}. \quad (3)$$

Ferner stellen wir Proportionen auf, in denen die Strecken $\overline{DG}$ und $\overline{DH}$ vorkommen:

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}, \quad (4)$$

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{AP}}. \quad (5)$$

Aus den Gleichungen (2), (3), (4) und (5) erhalten wir durch Multiplikation

$$\frac{\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{DG} \cdot \overline{DH}}{\overline{DG} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{EA}}=\frac{\overline{AP} \cdot \overline{DH} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{PD}}{\overline{PD} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AP}}$$

und hieraus durch Kürzen bzw. Multiplikation mit den Nennern beider Seiten der Gleichung

$\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE}=\overline{FB} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{EA}$, w.z.b.w.

5 ▲ 1039 Aus $30 : 5=6$ und $6+2=8$ folgt, daß der Fußgänger für den Weg von A nach B einschließlich der Rast acht Stunden benötigt. Aus $3 \cdot 5=15$ und $30 : 15=2$ folgt, daß der Radfahrer dafür nur zwei Stunden benötigt. Er muß also sechs Stunden, d. s. 360 Minuten, später als der Fußgänger in A abfahren.

5 ▲ 1040 Wenn in einer dreistelligen natürlichen Zahl die Null nicht als Grundziffer vorkommt, so können jeweils an der Einer-, Zehner- und Hunderterstelle nur die Grundziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 auftreten. Es können also an jeder Stelle genau neun verschiedene Grundziffern vorkommen. Daher gibt es genau $9 \cdot 9 \cdot 9=729$ dreistellige natürliche Zahlen, die nicht die Null als Grundziffer enthalten.

W 5 ■ 1041 Sowohl die Summe zweier gerader als auch die Summe zweier ungerader natürlicher Zahlen ist stets gerade. Deshalb ist X wegen $Y+Y$ eine gerade Zahl. Da die Summe $ZX<100$ ist, muß $X \leqq 4$ sein. Für $X=0$ wäre XY keine zweistellige natürliche Zahl; deshalb muß $X>0$ sein. Also gilt $X=2$ oder $X=4$.

Aus $X=2$ folgt $Y=1$ oder $Y=6$ bzw. $Z=4$ oder $Z=5$.

Aus $X=4$ folgt $Y=2$ oder $Y=7$ bzw. $Z=8$ oder $Z=9$.

Die gesuchten Lösungen lauten somit

21	26	42	47
+21	+26	+42	+47
42	52	84	94

W 5 ■ 1042 a) Fläche des Fußbodens:

6 m = 600 cm, 4,5 m = 450 cm,

$A_1=600 \cdot 450\ \text{cm}^2=270\,000\ \text{cm}^2$.

Fläche einer quadratischen Fliese:

$A_2=15 \cdot 15\ \text{cm}^2=225\ \text{cm}^2$.

Es werden $270\,000 : 225=1\,200$ Fliesen benötigt.

b) Fläche einer rechteckigen Fliese:

$A_3=120 \cdot 225\ \text{mm}^2=27\,000\ \text{mm}^2=270\ \text{cm}^2$.

Von dieser Sorte werden $270\,000 : 270 = 1\,000$ Stück benötigt.

W 5 * 1044 Es sei h die Anzahl der verkauften Hühner, e die der Enten, g die der Gänse, p die der Puten und k die der Kaninchen.

Aus $100-(h+e)-(p+k)=100-52-30=g$ folgt $g=18$.

Aus $(e+g)-18=43-18=e$ folgt $e=25$.

Aus $52-25=h$ folgt $h=27$; aus $34-18=p$ folgt $p=16$;

aus $30-16=k$ folgt $k=14$.

An diesem Tage wurden 27 Hühner, 25 Enten, 18 Gänse, 16 Puten und 14 Kaninchen verkauft.

W 5 * 1043 Da die gesuchte natürliche Zahl durch 6 teilbar ist, läßt sie sich durch $z=6 \cdot n$ ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$) darstellen. Die Hälfte von z lautet dann $3 \cdot n$; der dritte Teil von z lautet $2 \cdot n$.

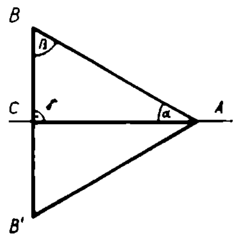
Aus $3 \cdot n-5=2 \cdot n$ folgt $n=5$ und damit $z=6 \cdot 5=30$.

6 ▲ 1045 Aus $s_1=130$ m und $s_2=220$ m folgt $s=130\ \text{m}+220\ \text{m}=350$ m. Deshalb gilt

$$t=\frac{s}{v}=\frac{350\ \text{m} \cdot \text{h}}{42\ \text{km}}=\frac{350 \cdot 60}{42\,000}\ \text{min}=\frac{1}{2}\ \text{min}.$$

In einer halben Minute hat der Güterzug den Tunnel in seiner ganzen Länge durchfahren.

6 ▲ 1046 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit
$\sphericalangle ACB=\gamma=90°$ (vgl. die Abb.).



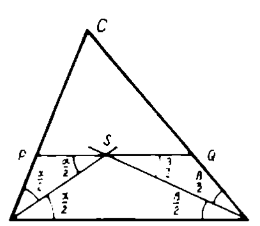
Aus $\alpha+\beta=90°$ und $\beta=2\alpha$ folgt dann $3\alpha=90°$, also $\alpha=30°$ und $\beta=60°$. Wir spiegeln das rechtwinklige Dreieck ABC an der Geraden AC als Symmetrieachse; dann gilt für die Winkel des Dreiecks ABB' $\sphericalangle ABB' = \sphericalangle BB'A = \sphericalangle BAB' = 60°$, d. h. das Dreieck ist gleichwinklig und damit auch gleichseitig. Aus $\overline{BB'}=\overline{AB}$ und $\overline{BC}=\overline{CB'}$ folgt dann $2\cdot\overline{BC}=\overline{AB}$. Die Hypotenuse $\overline{AB}$ ist somit doppelt so lang wie die Kathete $\overline{BC}$.

W 6 ■ 1047 Die Ziffern 1, 2, 3 und 4 lassen sich wie folgt anordnen:

1 2 3 4, 2 1 3 4, ..., 4 1 2 3
1 2 4 3, 2 1 4 3, ..., 4 1 3 2
1 3 2 4, · ..., ·
1 3 4 2, ...,
1 4 2 3, · ..., ·
1 4 3 2, 2 4 3 1, ..., 4 3 2 1.

Es lassen sich also $4\cdot 6=24$ verschiedene Zahlen bilden. Jede Ziffer steht genau je sechsmal an der Einer-, Zehner- bzw. Hunderterstelle. Die Quersumme der Ziffern beträgt 10, das Sechsfache der Quersumme somit $6\cdot 10=60$. Damit ergibt sich folgende Rechnung:
60 Einer sind 6 Zehner, 60 Zehner sind 6 Hunderter, 60 Hunderter sind 6 Tausender, 60 Tausender sind 6 Zehntausender; wir erhalten als Summe aller dieser Zahlen demnach 66660.

W 6 ■ 1048 Nach Voraussetzung gilt $\sphericalangle PAS = \sphericalangle SAB = \frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle QBS = \sphericalangle SBA = \frac{1}{2}\beta$.
Ferner gilt $\sphericalangle PSA = \sphericalangle SAB = \frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle QSB = SBA = \frac{1}{2}\beta$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Die Dreiecke $\triangle ASP$ und $\triangle SBQ$ sind somit gleichschenklig, da gleichen Winkeln eines Dreiecks gleiche Seiten gegenüberliegen, und es gilt $\overline{AP}=\overline{PS}$ und $\overline{BQ}=\overline{SQ}$.
Daraus folgt
$\overline{AP}+\overline{BQ}=\overline{PS}+\overline{SQ}=\overline{PQ}$.



W 6 * 1049 Da die Summe $ZX<100$ ist, muß $X\leq 3$ sein. Für $X=0$ wäre XY keine zweistellige natürliche Zahl; deshalb muß $X>0$ sein. Also gilt $X=1$ oder $X=2$ oder $X=3$.
Es sei $X=1$; dann ist $Y=7$ und $Z=5$.
Es sei $X=2$; dann ist $Y=4$ und $Z=7$.
Es sei $X=3$; dann ist $Y=1$ und $Z=9$.
Die gesuchten Lösungen lauten somit

$$\begin{array}{rrr} 17 & 24 & 31 \\ +17 & +24 & +31 \\ +17 & +24 & +31 \\ \hline 51 & 72 & 93. \end{array}$$

W 6 * 1050 Für z_1 gilt $z_1=1\cdot 100000+x$, für z_2 gilt $z_2=10\cdot x+1$. Wegen $3\cdot z_1=z_2$ gilt dann

$$3\cdot(100000+x)=10x+1,$$
$$300000+3x=10x+1,$$
$$7x=299999,$$
$$x=42857.$$

Die Zahl z_1 lautet somit 142857, und die Zahl z_2 lautet 428571, und es gilt $3\cdot 142857 = 428571$.

7 ▲ 1051 Da die Summe $zy<100$ ist, muß $x\leq 3$ sein. Für $x=0$ wäre xy keine zweistellige natürliche Zahl; deshalb muß $x>0$ sein. Also gilt $x=1$ oder $x=2$ oder $x=3$. Wegen $y\leq 9$ gilt $3\cdot y\leq 27$; somit gilt für die Einerstellen $3\cdot y=0\cdot 10+y$ oder $3\cdot y=1\cdot 10+y$ oder $3\cdot y=2\cdot 10+y$.
Aus $3\cdot y=0\cdot 10+y$, also $3\cdot y=y$ folgt $y=0$.
Aus $3\cdot y=10+y$, also $2\cdot y=10$ folgt $y=5$.
Aus $3\cdot y=20+y$, also $2\cdot y=20$ folgt $y=10$; das ist wegen $y\leq 9$ nicht möglich.
Die gesuchten Lösungen lauten somit

$$\begin{array}{rrrrr} 10 & 20 & 30 & 15 & 25 \\ +10 & +20 & +30 & +15 & +25 \\ +10 & +20 & +30 & +15 & +25 \\ \hline 30 & 60 & 90 & 45 & 75 \end{array}$$

7 ▲ 1052 Es seien $s_1, s_2, \ldots, s_6$ die erzielten Sprungweiten (gemessen in cm); dann folgt aus den Angaben von Klaus:
$s_4=410$ cm (Quersumme 5);
300 cm $<s_1<400$ cm (Quersumme 5); von den Zahlen 311, 302 und 320 ist nur 320 durch 5 teilbar, folglich gilt $s_1=320$ cm;
$s_3=s_1+\frac{1}{2}s_1=320\text{ cm}+160\text{ cm}=480\text{ cm}$;
s_2+44 $cm=s_3$; s_2+44 cm $=480$ cm, also $s_2=436$ cm; s_5 war ein ungültiger Sprung;
also gilt, da die Summe der Sprungweiten s_1, s_2, s_3, s_4 und s_6 gleich 2118 cm war,
$s_6=2118\text{ cm}-(s_1+s_2+s_3+s_4)$
$=2118\text{ cm}-1646\text{ cm}=472$ cm.

W 7 ■ 1053 Angenommen im Aufenthaltsraum stehen x Bänke, dann gilt

$$6\cdot(x-1)+3=5\cdot x+4,$$
$$6x-6+3=5x+4,$$
$$x=7.$$

Für den ersten Fall gilt $6\cdot(7-1)+3\cdot 1=39$ Personen; für den zweiten Fall $5\cdot 7+4=39$ Personen.
Im Aufenthaltsraum befinden sich 7 Bänke und 39 Personen.

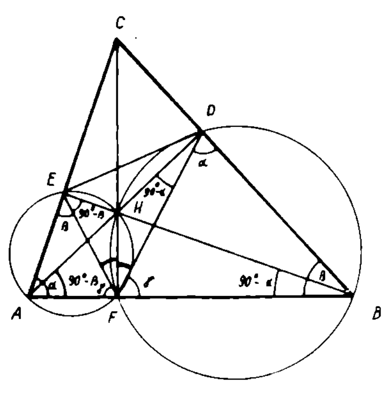
W 7 ■ 1054 Aus $p_1\cdot p_2+1$ und $p_2=p_1+2$ erhalten wir durch Einsetzen
$p_1\cdot(p_1+2)+1=p_1^2+2p_1+1=(p_1+1)^2$.
Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen p_1, p_1+1, p_1+2 ist eine durch 3 und eine durch 2 teilbar. Da p_1 und p_1+2 beide Primzahlen und beide größer als 3 sind, muß p_1+1 sowohl durch 3, als auch durch 2 und deshalb durch 6 teilbar sein. Ihr Quadrat ist darum durch $6\cdot 6=36$ teilbar.

W 7 * 1055 Es sei q die Quersumme einer vierstelligen natürlichen Zahl mit der geforderten Eigenschaft; dann gilt

$$999<q^4\leq 9999,$$
$$961=31^2<q^4\leq 99^2=9801,$$
$$31<q^2\leq 99,$$
$$5<q<9.$$

Die Quersumme q könnte also gleich 6, 7 oder 8 sein. Nun gilt
$6^4=1296$ und $q=1+2+9+6=18\neq 6$,
$7^4=2401$ und $q=2+4+0+1=7$,
$8^4=4096$ und $q=4+0+9+6=19\neq 8$.
Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung; die einzige natürliche Zahl mit der geforderten Eigenschaft lautet 2401.

W 7 * 1056 Es sei H der Schnittpunkt der drei Höhen. Für das rechtwinklige Dreieck ABE gilt $\sphericalangle ABE = \sphericalangle FBH = 90°-\alpha$. Da jeder der beiden Punkte D und F Scheitel eines rechten Winkels ist, die über derselben Sehne $\overline{BH}$ stehen, liegen D und F auf dem Kreis mit $\overline{BH}$ als Durchmesser. Dann gilt auch $\sphericalangle FBH = \sphericalangle FDH = 90°-\alpha$ als Peripheriewinkel über der gleichen Sehne $\overline{FH}$. Aus $\sphericalangle ADB=90°$ und $\sphericalangle FDH=90°-\alpha$ folgt $\sphericalangle FDB=\alpha$. Wegen $\sphericalangle FDB=\beta$ folgt daraus ferner $\sphericalangle BFD=\gamma$. Somit gilt $\sphericalangle HFD=90°-\gamma$.



Für das rechtwinklige Dreieck ABD gilt $\sphericalangle BAD = \sphericalangle FAH = 90°-\beta$. Die Scheitel E und F der rechten Winkel liegen auf dem Kreis mit $\overline{AH}$ als Durchmesser. Deshalb gilt $\sphericalangle FAH = \sphericalangle FEH = 90°-\beta$ als Peripheriewinkel über der gleichen Sehne $\overline{FH}$. Daraus folgt $\sphericalangle AEF=\beta$ und somit $\sphericalangle AFE=\gamma$, also $\sphericalangle HFE = 90°-\gamma$. Die Höhe $\overline{CF}$ des Dreiecks ABC halbiert somit den Innenwinkel EFD des Dreiecks DEF.
Der Nachweis, daß auch die übrigen Höhen die Innenwinkel des Dreiecks DEF halbieren, erfolgt in analoger Weise.

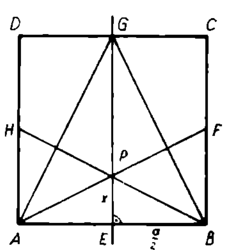
8▲1057 Für $n=0$ und $n=1$ trifft die Behauptung wegen $z=0$ zu, da die Zahl 0 durch 6 und durch 24 teilbar ist. Es sei nun n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist. Dann gilt $z=n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$.
Die Zahl z ist also in jedem Falle durch 3 teilbar; denn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets eine Zahl durch 3 teilbar, und daher ist auch ihr Produkt durch 3 teilbar.
a) Ist nun n eine gerade natürliche Zahl, so ist sie durch 2 teilbar, also ist auch das Produkt $z=(n-1)n(n+1)$ durch 2 teilbar. Da z durch 2 und durch 3 teilbar ist und da 2 und 3 teilerfremde natürliche Zahlen sind, ist z auch durch 6 teilbar, w.z.b.w.
b) Ist aber n eine ungerade natürliche Zahl, so gilt $n=2k+1$, wobei k eine natürliche Zahl ist. In diesem Falle erhalten wir
$z=(n-1)n(n+1)=2k(2k+1)(2k+2)$
$=4k(k+1)(2k+1)$. Nun ist das Produkt $k(k+1)$ durch 2 teilbar, weil von den beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen k und $k+1$ eine Zahl durch 2 teilbar ist. Also ist z durch 8 teilbar. Da, wie oben gezeigt wurde, z auch durch 3 teilbar ist und da 3 und 8 teilerfremd sind, ist in diesem Falle z durch $3\cdot 8=24$ teilbar, w.z.b.w.

8▲1058 Die abgebildete Figur ist axialsymmetrisch bezüglich der Geraden GP als Symmetrieachse. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle ABH$ und $\triangle EBP$ folgt $\overline{AH}:\overline{AB}=\overline{EP}:\overline{EB}$ bzw. $\frac{a}{2}:a=x:\frac{a}{2}$, also $x=\frac{a}{4}$. Für den Flächeninhalt des konkaven Vierecks $APBG$ gilt demnach

$$A_0=A_{ABCD}-A_{ABP}-2\cdot A_{BCG},$$

$$A_0=a^2-\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{2}=\frac{3}{8}a^2,$$

also $A_0=24\ \text{cm}^2$.



W 8 ■ 1059 1. Das Fährschiff „Saßnitz“ legt die 107,4 km lange Strecke von Saßnitz nach Trelleborg in 3 h 50 min $=\frac{230}{60}$ h zurück; daher beträgt seine mittlere Geschwindigkeit

$v_1=\frac{107{,}4\cdot 60}{230}$ km/h $\approx 28{,}0$ km/h.

Nun ist 1 sm = 1,852 km, also 1 km $=\frac{1}{1{,}852}$ sm.
Daraus folgt

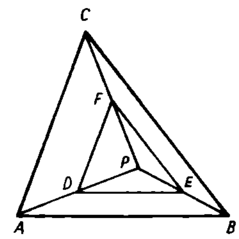
$v_1\approx\frac{28{,}0}{1{,}852}$ sm/h $\approx 15{,}1$ kn.

Die mittlere Geschwindigkeit dieses Fährschiffes beträgt also 15,1 kn.
2. Das neue Fährschiff „Rügen“ legt die Strecke von 107,4 km mit einer mittleren Geschwindigkeit von $v_2=20{,}6$ sm/h zurück. Da 1 sm = 1,852 km, beträgt die Geschwindigkeit
$v_2=20{,}6\cdot 1{,}852$ km/h $\approx 38{,}15$ km/h. Die Strecke von 107,4 km wird also in der Zeit

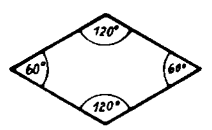
$t=\frac{107{,}4}{38{,}15}$ h $\approx 2{,}815$ h ≈ 2 h 49 min

zurückgelegt.

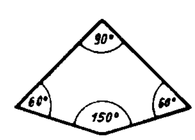
W 8 ■ 1060 Aus $\overline{PD}:\overline{PA}=\overline{PE}:\overline{PB}=1:2$ folgt nach dem Strahlensatz $DE\parallel AB$ und $\overline{AB}=2\cdot\overline{DE}$. Entsprechend gilt $EF\parallel BC$ und $\overline{BC}=2\cdot\overline{EF}$ bzw. $DF\parallel AC$ und $\overline{AC}=2\cdot\overline{DF}$. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ sind somit einander ähnlich. Aus der Ähnlichkeit folgt $A_{DEF}:A_{ABC}=\overline{DE}^2:\overline{AB}^2=\overline{DE}^2:4\cdot\overline{DE}^2=1:4$. Der Flächeninhalt des Dreiecks DEF ist somit genau ein Viertel so groß wie der des Dreiecks ABC.



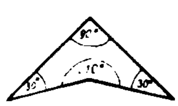
W 8 * 1061 Nach Voraussetzung gilt $x=2$. Da ein Viereck vier Winkel hat, gilt $x+y+z+t=4$, also $y+z+t=2$.
Es könnte also höchstens die Typen
(2; 2; 0; 0), (2; 0; 2; 0), (2; 0; 0; 2), (2; 1; 1; 0), (2; 1; 0; 1) und (2; 0; 1; 1)
geben. Nun beträgt die Winkelsumme eines Vierecks stets 360°. Daher scheidet der 1. Typ aus; denn dann wäre die Winkelsumme kleiner als 360°. Ferner scheidet auch der 3. Typ aus; denn hier wäre die Winkelsumme größer als 360°. Es verbleiben also nur die folgenden vier Typen von ebenen Vierecken mit genau zwei spitzen Winkeln:



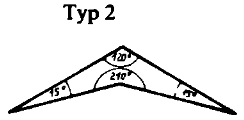
Typ 1



Typ 2



Typ 3



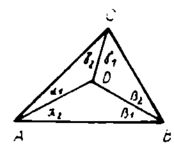
Typ 4

(2; 0; 2; 0), (2; 1; 1; 0), (2; 1; 0; 1) und (2; 0; 1; 1). Für diese Typen kann die Bedingung, daß die Winkelsumme 360° beträgt, erfüllt werden. Die beigefügte Abbildung zeigt Beispiele für diese vier Typen.
W 8 * 1062 a) 1. Im Falle der ersten Zerlegung (vgl. die Figur 1) gilt, da die Winkelsumme des Dreiecks ABC gleich 180° ist, $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=180°$.
Nun sei der kleinste der Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ gleich φ.
Dann gilt $\alpha_1\geqq\varphi$, $\alpha_2\geqq\varphi$, $\beta_1\geqq\varphi$, $\beta_2\geqq\varphi$, $\gamma_1\geqq\varphi$, $\gamma_2\geqq\varphi$; also

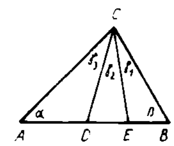
$$180°=\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2\geqq 6\varphi,$$

d. h. $\varphi\leqq\frac{180°}{6}=30°$.

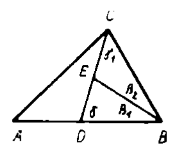
Der kleinste dieser Winkel ist also nicht größer als 30°, also auch nicht größer als 45°; daher ist auch der kleinste der Winkel der Teildreiecke nicht größer als 45°.



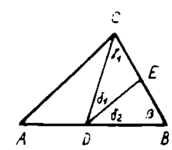
Figur 1



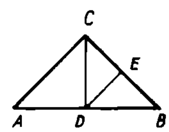
Figur 2



Figur 3



Figur 4



Figur 5

2. Im Falle der zweiten Zerlegung (vgl. die Figur 2) gilt, da die Winkelsumme des Dreiecks ABC gleich 180° ist,

$$\alpha+\beta+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=180°.$$

Nun sei analog wie oben der kleinste dieser Winkel gleich φ, dann gilt

$$180°=\alpha+\beta+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\geqq 5\varphi,$$

d. h. $\varphi\leqq\frac{180°}{5}=36°$.

Auch in diesem Falle ist also der kleinste der Winkel der Teildreiecke nicht größer als 45°.
3. Im Falle der dritten Zerlegung (vgl. die Figur 3) gilt, da die Winkelsumme des Dreiecks CDB gleich 180° ist,

$$\delta+\beta_1+\beta_2+\gamma_1=180°.$$

Nun sei der kleinste dieser Winkel gleich φ, dann gilt

$$180°=\delta+\beta_1+\beta_2+\gamma_1\geqq 4\varphi,$$

d. h. $\varphi\leqq\frac{180°}{4}=45°$.

Auch in diesem Falle ist also der kleinste der Winkel der Teildreiecke nicht größer als 45°.
4. Im Falle der vierten Zerlegung (vgl. die Figur 4) erhalten wir analog wie in Ziff. 3

$$\delta_1+\delta_2+\beta+\gamma_1=180°,$$

$$180°=\delta_1+\delta_2+\beta+\gamma_1\geqq 4\varphi,$$

$$\varphi\leqq\frac{180°}{4}=45°.$$

In allen vier Fällen ist also der kleinste der Winkel der Teildreiecke nicht größer als 45°, w.z.b.w.
b) Die Figur 5 zeigt ein gleichschenkligrechtwinkliges Dreieck ABC, das in die ebenfalls gleichschenklig-rechtwinkligen Teildreiecke ADC, DBE, CDE zerlegt worden ist. Jedes dieser Teildreiecke hat einen rechten

Winkel und zwei Winkel von je 45°. In diesem Falle ist also der kleinste der Winkel der Teildreiecke genau gleich 45°.

9▲1063 Es seien a, b zwei nichtnegative reelle Zahlen, für die

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b} \qquad (1)$$

gilt. Dann folgt durch Quadrieren auf beiden Seiten der Gleichung (1)

$$(\sqrt{a+b})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2,$$
$$a+b=a+2\sqrt{ab}+b,$$

also
$$2\sqrt{ab}=0. \qquad (2)$$

Die Gleichung (2) ist aber nur dann erfüllt, wenn $a=0$ oder $b=0$ gilt. Daher kann die Gleichung (1) höchstens dann erfüllt sein, wenn $a=0$ oder $b=0$. Andererseits erhalten wir für $a=0$

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{0+b}=\sqrt{b}=\sqrt{0}+\sqrt{b}$$
$$=\sqrt{a}+\sqrt{b} \text{ und für } b=0$$
$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a+0}=\sqrt{a}=\sqrt{a}+\sqrt{0}$$
$$=\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

d. h., die Gleichung (1) ist erfüllt, wenn $a=0$ oder $b=0$. Die gesuchten geordneten Paare, für die (1) erfüllt ist, sind also alle Paare $[0;b]$ und $[a;0]$, wobei a und b beliebige reelle Zahlen sind.

9▲1064 Wir beweisen zunächst, daß der Punkt P auf der Seitenhalbierenden $\overline{CD}$ des Dreiecks ABC liegt. Nun gilt nach Voraussetzung für die Flächeninhalte der Dreiecke CAP und CPB

$$A_{CAP}=A_{CPB}. \qquad (1)$$

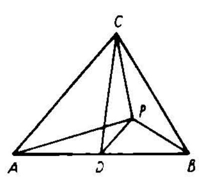
Ferner gilt, da wegen $\overline{AD}=\overline{DB}$ die Grundlinien und die Höhen der Dreiecke PAD und PDB gleichlang sind,

$$A_{PAD}=A_{PDB}. \qquad (2)$$

Endlich gilt wegen $\overline{AD}=\overline{DB}$ auch

$$A_{CAD}=A_{CDB}=\frac{A}{2}, \text{ wobei} \qquad (3)$$

A der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.



Würde nun P nicht auf der Seitenhalbierenden $\overline{CD}$ liegen, z. B. wie in der Abbildung innerhalb des Dreiecks CDB, so wären wegen (1) und (2) die Vierecke $ADPC$ und $CPDB$ flächengleich, und der Flächeninhalt A_1 des Vierecks $CPDB$ wäre gleich

$$A_1=\frac{A}{2}.$$

Andererseits gilt aber, da P innerhalb des Dreiecks CDB liegt,

$$A_1<A_{CDB},$$

also
$$A_1<\frac{A}{2}.$$

Das ist aber ein Widerspruch; daher ist die Annahme, daß P nicht auf der Seitenhalbierenden $\overline{CD}$ liegt, falsch. Damit ist bewiesen, daß P auf $\overline{CD}$ liegt.

Analog beweisen wir, daß P auch auf den Seitenhalbierenden $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ liegt. Der Punkt P ist also der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, w.z.b.w.

W 9▲1065 Es sei x eine reelle Lösung der gegebenen Gleichung; dann gilt

$$\frac{2ax}{x+a}+\frac{2ax}{x-a}-\frac{a}{x^2-a^2}=2$$

und $x\neq a$, $x\neq -a$, da sonst die Nenner in (1) nicht von Null verschieden wären. Nun folgt aus (1) durch Multiplikation mit x^2-a^2

$$2ax(x-a)+2ax(x+a)-a=2(x^2-a^2), \qquad (2)$$
$$2ax^2-2a^2x+2ax^2+2a^2x-a=2x^2-2a^2,$$
$$4ax^2-2x^2+2a^2-a=0,$$
$$2(2a-1)x^2+a(2a-1)=0,$$
$$(2a-1)(2x^2+a)=0. \qquad (3)$$

1. Nun sei $2a-1=0$, also $a=\frac{1}{2}$.

Dann ist die Gleichung (3) und damit auch die Gleichung (2) für alle reellen x und daher die Gleichung (1) für alle reellen x mit $|x|\neq\frac{1}{2}$ erfüllt.

2. Es sei $2a-1\neq 0$. Dann folgt aus (3)

$$2x^2+a=0,$$
$$x^2=-\frac{a}{2}. \qquad (4)$$

2. a) Ist nun $a>0$ und $a\neq\frac{1}{2}$, so hat die Gleichung (4) und daher auch die Gleichung (1) wegen $-\frac{a}{2}<0$ keine reelle Lösung.

2. b) Ist aber $a<0$, also $-\frac{a}{2}>0$, so hat die Gleichung (3) und damit auch die Gleichung (2) genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1=\sqrt{-\frac{a}{2}}$ und $x_2=-\sqrt{-\frac{a}{2}}$.

Dann hat aber auch die Gleichung (1) diese beiden Lösungen unter der Voraussetzung, daß $|x|\neq a$, also $a\neq-\frac{1}{2}$ gilt.

2. c) Ist $a=0$, so hat zwar die Gleichung (3) genau eine reelle Lösung, nämlich $x=0$, aber die Gleichung (1) ist wegen $x=a$ nicht erfüllt, weil alle Nenner gleich Null sind.

Zusammenfassung: Die Gleichung (1) hat also

a) keine reelle Lösung, wenn $a\geqq 0$ und $a\neq\frac{1}{2}$ oder wenn $a=-\frac{1}{2}$;

b) genau eine reelle Lösung in keinem Falle;

c) genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1=\sqrt{-\frac{a}{2}}$ und $x_2=-\sqrt{-\frac{a}{2}}$, wenn $a<0$ und $a\neq-\frac{1}{2}$;

d) mehr als zwei reelle Lösungen, und zwar unendlich viele Lösungen, wenn $a=\frac{1}{2}$. In diesem Falle ist die Gleichung für alle x mit $|x|\neq\frac{1}{2}$ erfüllt.

W 9■1066 Es sei $\overline{AC}=d$, $\overline{GC}=x$ und $\overline{FG}=y$; dann ist nachzuweisen, daß $x=y$ gilt. Aus $\overline{AC}=d=a\sqrt{2}$ und $\overline{AG}=a$ folgt $\overline{GC}=x=a\sqrt{2}-a$, also $x=a(\sqrt{2}-1)$. Ferner gilt $\overline{SG}=\frac{a}{2}\sqrt{2}-a(\sqrt{2}-1)=\frac{a}{2}(2-\sqrt{2})$.

Aus der Ähnlichkeit der Figuren folgt

$$\overline{SG}:\overline{SC}=\overline{FG}:\overline{BC}, \text{ also}$$

$$\frac{\frac{a}{2}(2-\sqrt{2})}{\frac{a}{2}\sqrt{2}}=\frac{y}{a}, \text{ also } y=\frac{a(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=a(\sqrt{2}-1)$$

und damit $x=y$.

W 9*1067 Für $p=2$ ist die Zahl $14+p=16$ nicht Primzahl. Für $p=3$ ist die Zahl $32+p=35$ nicht Primzahl. Für $p=5$ sind die Zahlen $14+p=19$, $26+p=31$, $32+p=37$ und $38+p=43$ sämtlich Primzahlen.

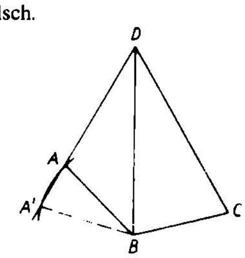
Damit haben wir bereits eine Primzahl, nämlich $p=5$, erhalten, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Wir wollen nun zeigen, daß es keine weitere solche Primzahl gibt. Angenommen, es gäbe eine solche Primzahl p mit $p>5$. Dann ist p nicht durch 5 teilbar. Man kann daher p in einer der Formen $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$ darstellen, wobei k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist.

Für $p=5k+1$ erhalten wir die Zahl $14+p=5k+15=5(k+3)$, die nicht Primzahl ist; für $p=5k+2$ erhalten wir die Zahl $38+p=5k+40=5(k+8)$, die nicht Primzahl ist; für $p=5k+3$ erhalten wir die Zahl $32+p=5k+35=5(k+7)$, die nicht Primzahl ist, für $p=5k+4$ erhalten wir die Zahl $26+p=5k+30=5(k+6)$, die nicht Primzahl ist.

Damit haben wir nachgewiesen, daß es keine Primzahl, die größer als 5 ist, gibt, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Es gibt also genau eine Primzahl, nämlich $p=5$, so daß die Zahlen $14+p$, $26+p$, $32+p$, $38+p$ wieder Primzahlen sind.

W 9*1068 Nach dem Kongruenzsatz (ssw) sind zwei Dreiecke immer dann kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen. In dem vorliegenden Fall sind aber die Dreiecke ABD und BDC nicht notwendig kongruent, wenn die Seite $\overline{AB}$ kleiner als die Seite $\overline{BD}$ und daher auch die Seite $\overline{BC}$ kleiner als die Seite $\overline{BD}$ ist. In diesem Falle stimmen nämlich die Dreiecke ABD und BCD in zwei Seiten und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel überein, woraus nicht notwendig die Kongruenz dieser Dreiecke folgt. Daher ist auch das Viereck $ABCD$ nicht immer ein Drachenviereck, und die aufgestellte Behauptung ist falsch.



Das wird durch die beigefügte Abbildung veranschaulicht. Obwohl in dieser Abbildung $\overline{DB}=\overline{DB}$, $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\sphericalangle BDA=\sphericalangle CDB$ gilt, sind die Dreiecke ABD und BCD nicht kongruent, und das Viereck $ABCD$ ist kein Drachenviereck.

W 10/12 ▲ 1069 Wir setzen
$a-c=x$, $b-d=y$.
Dabei gilt nach Voraussetzung $x>0$, $y>0$ und $a+b-c-d=x+y>0$. Nun ist die Ungleichung (1) genau dann erfüllt, wenn die Ungleichung

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{8}{(x-y)^2} \qquad (2)$$

erfüllt ist.
Zum Beweis der Richtigkeit der Ungleichung (2) leiten wir zunächst eine Ungleichung für $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$ ab. Für alle positiven reellen Zahlen x, y gilt nämlich

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2\geq 0,\quad \frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}\geq 0, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{2}{xy}.$$ Andererseits gilt

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=$$
$$=x^2-2xy+y^2+4xy$$
$$=(x-y)^2+4xy\geq 4xy,$$

also $(x+y)^2\geq 4xy$. (4)

Aus (4) erhalten wir durch Division

$$\frac{1}{xy}\geq\frac{4}{(x+y)^2},\ \text{also}\ \frac{2}{xy}\geq\frac{8}{(x+y)^2}.$$

Daraus folgt wegen (3)

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{8}{(x+y)^2},$$

womit die Ungleichung (2) und damit auch die Ungleichung (1) bewiesen ist.

W 10/12 ■ 1070 Mit Hilfe einer geschickten Umformung können wir die Summe s_n leicht berechnen. Es gilt nämlich für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen k

$$\frac{1}{(2k)^2-1}=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right).$$

Daraus folgt

$$s_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}+\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}+\frac{1}{6-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{6+1}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$
$$s_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$
$$s_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{2n+1-1}{2n+1}=\frac{2n}{2(2n+1)}.$$
$$s_n=\frac{n}{2n+1},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.
Für $n=1$ erhalten wir

$$s_1=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

Ferner erhalten wir für $n=2$, 3, 10 *bzw.* 100

$$s_2=\frac{2}{4+1}=\frac{2}{5},$$
$$s_3=\frac{3}{6+1}=\frac{3}{7},$$
$$s_{10}=\frac{1}{20+1}=\frac{10}{21},$$
$$s_{100}=\frac{100}{200+1}=\frac{100}{201}.$$

Wir erkennen, daß die Summe s_n sich um so mehr der Zahl $\frac{1}{2}$ nähert, je größer n wird.
Es gilt nämlich

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

Lösungen zu alpha-heiter 6/73:

Der Äquilaber
Bezeichnen wir mit Buchstaben $F\triangleq$ Fisch, $K\triangleq$ Kugel, $G\triangleq$ Glöckchen, $W\triangleq$ Waagebalken, dann ergibt sich anhand der Zeichnung:

$K=2\,W$ (1)
$F+K=G$ (2)
$2\,F+G=F+K+G+W$ (3)
oder $F=K+W$ (4)
aus (1) und (4) $F=3\,W$ (5)
aus (1), (2) und (5) $G=5\,W$ (6)
$x=3\,W+K=5\,W$

Mit zwei Gegenständen (laut Aufgabenstellung) läßt sich dieses Gewicht durch eine Kugel und einen Fisch aufbringen [nach (6) und (2)].

Ein statt kein
Heft 5/73, S. 106: In Aufgabe 5 muß es heißen: ... Es gibt ein k, ...

Eine Zahl fehlt
Es fehlt
a) die 4; denn $3\cdot 7=21$ und $4\cdot 8=32$
b) die 13, denn 11, 13, 17 sind Primzahlen und 15, 18, 21 sind durch 3 teilbar
c) die 8; denn $2^3=8$ und $5^4=625$.

Läufersprung
Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

Der zerbrochene Krug
Es ist der Krug unten rechts.

Das hab ich mir ausgedacht

21	−	2	=	19
:		·		−
7	+	3	=	10
3	+	6	=	9

Magisches Quadrat

2	13	3	16
11	8	10	5
14	1	15	4
7	12	6	9

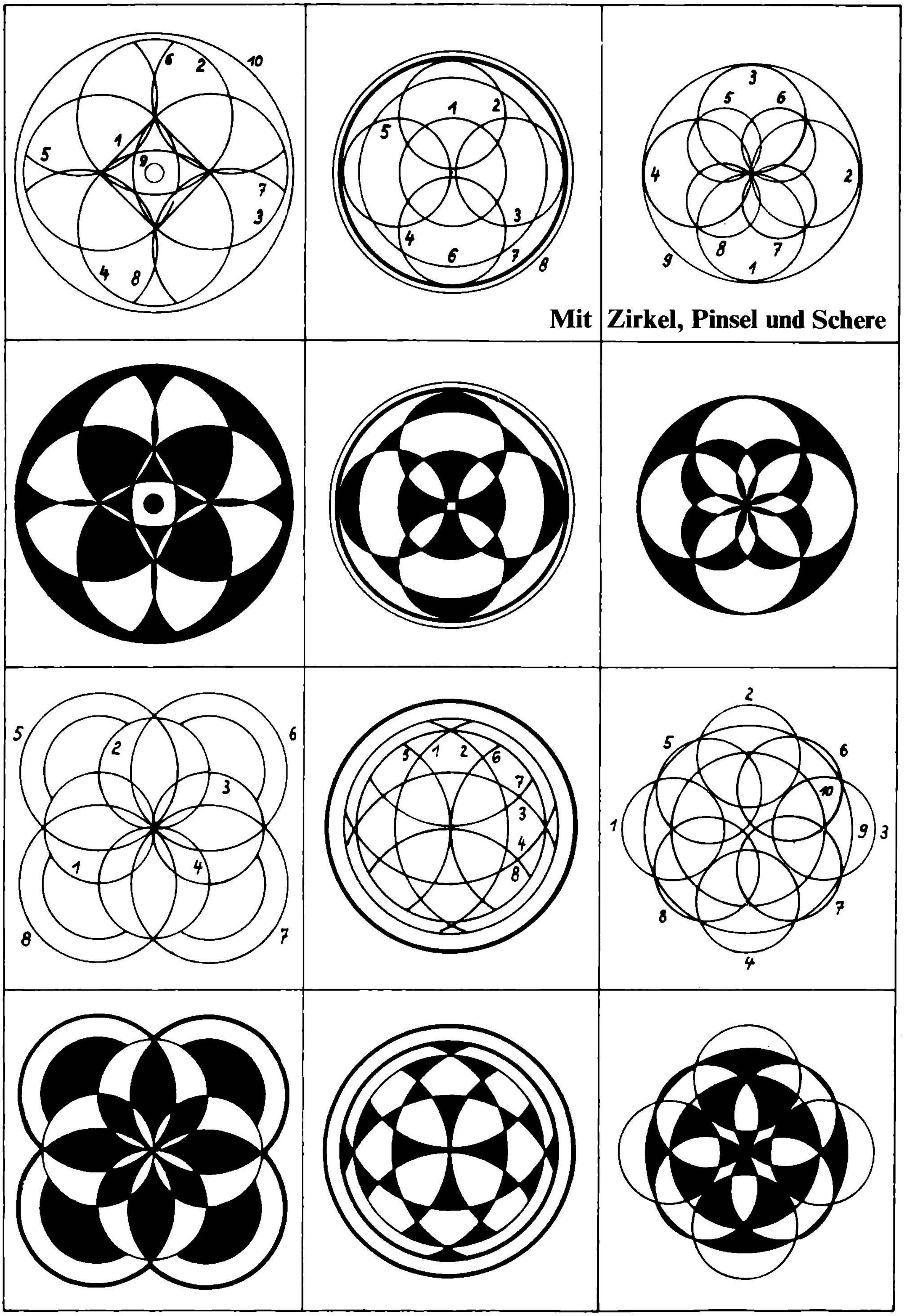
Kreuzworträtsel

1. S	2. I	3. N		4. S		5. P
	6. R	A	D	I	U	S
7. K		D		G		I
8. P	R	I	S	M	9. A	
M		R		10. A	R	C

Summand

Lösungen zu: Quiz für helle Köpfe
1. b 2. c 3. c 4. c 5. b
6. b 7. b

Mit Zirkel, Pinsel und Schere



BÜCHER MIT MATHE

M. J. Wygnosdski
Höhere Mathematik — griffbereit
782 Seiten, Lederin 24,80 M
Akademie-Verlag Berlin

W. Walsch
Zum Beweisen im Mathematikunterricht
192 Seiten, 43 Abb., Pappband 8,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

W. Engel/U. Pirl
Aufgaben und Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR,
Band 1
178 S., Pappband 6,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Autorenkollektiv
Mathematik in Übersichten
270 S. mit zahlr. Abb., Pappband 3,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

K. Lemnitzer
Einführung in die Technik des Integrierens
(Lehrprogrammbücher Hochschulstudium, Band 2)
136 S., kartoniert 8,50 M
Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig Leipzig

J. Sedlaček
Keine Angst vor Mathematik
167 S., 71 Abb. 4,80 M
Mathematische Schülerbücherei: Nr. 67
VEB Fachbuchverlag Leipzig

M. Kovács
Rechenautomaten und logische Spiele
211 S., 114 Abb., Broschur 8,00 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

H. Almeroth
Räumliche Vorstellungsfähigkeit
139 S., 180 Zeichnungen, eine Kontrollschablone als Beilage
Broschur 6,80 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Dietrich/Stahl
Grundzüge der Matrizenrechnung
313 S., 10 Bilder, 57 Kontrollfragen und Antworten, 66 Übungen und Lösungen,
Halbgewebe 8,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

V. Mangold/Knopp
Einführung in die höhere Mathematik
Band I: Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre
564 S., 116 Abb. 22,00 M
Band II: Differentialrechnung, Unendliche Reihen, Elemente der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie
624 S., 114 Abb., Leinen 22,00 M
S. Hirzel Verlag Leipzig

H. Vieregge
Einführung in die klassische Algebra
319 S., zahlr. Abb., Pappband 19,80 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Baltjanski/Gochberg
Sätze und Probleme der Kombinatorischen Geometrie
127 S., Pappband 6,80 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Autorenkollektiv
Lehrgang der Elementarmathematik
(zur Vorbereitung auf die Fachschulreife)
583 S., 523 Abb., 857 Aufgaben mit Lösungen, Ganzgewebeeinband 12,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

T. Pszczolowski
Schlüssel zum Ziel
Vom zweckmäßigen Handeln und von kybernetischen Prinzipien
199 S., Pappband mit Folie 4,50 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

H. Tucholski
Bildfläche und Maß
62 S., zahlr. Abb., Pappband 4,50 M
VEB Verlag der Kunst Dresden

Autorenkollektiv
Technisches Grundwissen für Lehrer der polytechnischen Oberschule
Technik und Technologie (der metallverarbeitenden Industrie, der chemischen Industrie, des Bauwesens und der Landwirtschaft)
448 S., 295 Abb., cellophaniert, Halbleinewand 18,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Christian Heermann
Das Einmaleins genügt nicht mehr
Mathematik im Alltag
144 S., zahlr. mehrfarbige Abb., 3,00 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

H. Lohse/R. Ludwig

Statistik für Forschung und Beruf

Ein programmierter Lehrgang

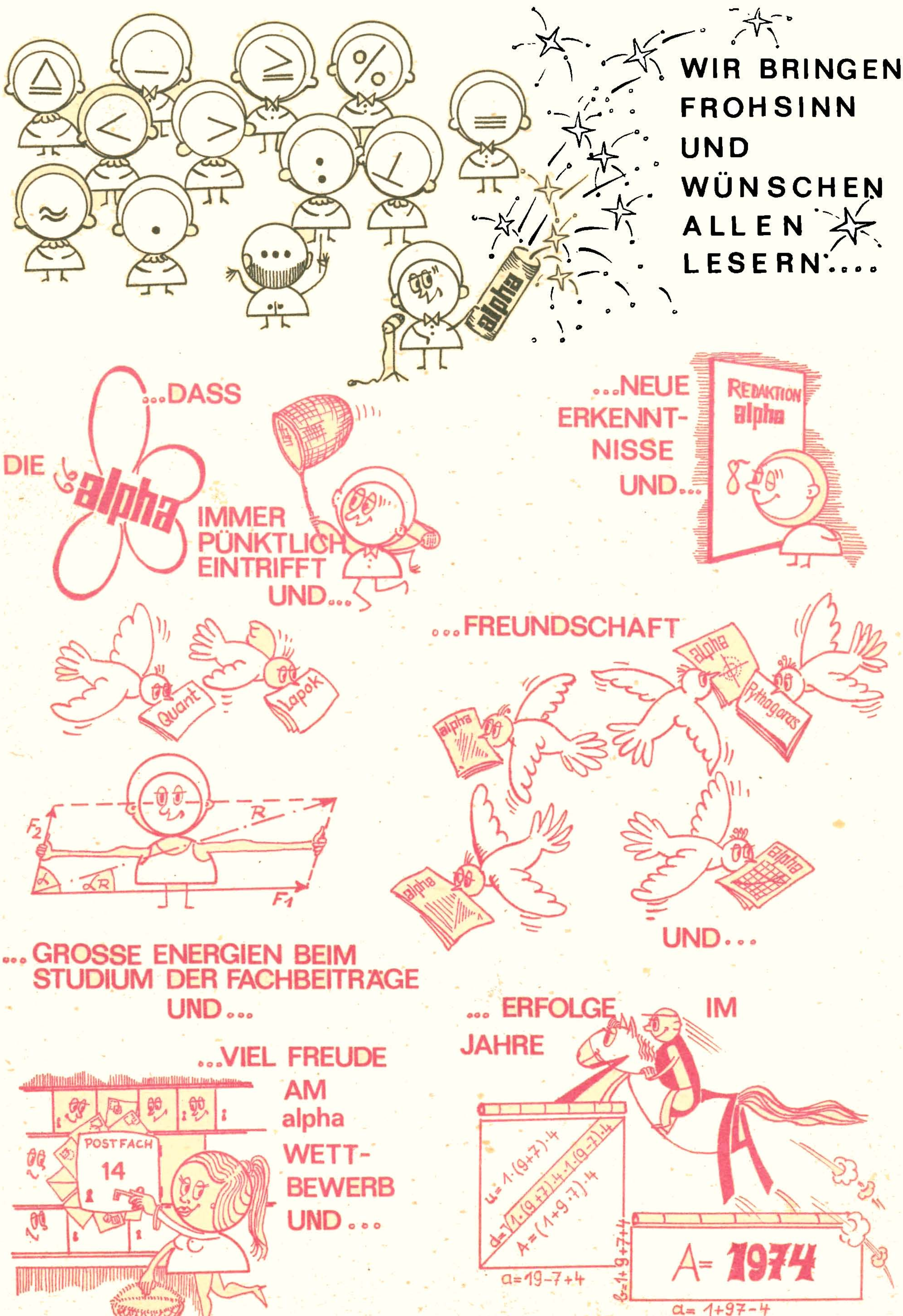
Etwa 360 Seiten mit 185 z. T. farbigen Bildern, 3 Selbstleistungskontrollen und 16 Zusammenfassungen in einem Beiheft, 22,00 M

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Statistische Auffassungen und Gesetzmäßigkeiten sind in unseren Tagen nicht nur für irgendwelche besonderen Spezialisten erforderlich — den Arbeiter und den Arzt, den Ingenieur und den Lehrer, für den Ökonomen und den Offizier, den Biologen und Agronomen, den Bankfachmann und den Produktionsorganisator.

Prof. B. V. Gnedenko, Moskau

Das Hauptanliegen des Buches ist die Entwicklung des statistischen Denkens, das in vielen Bereichen der Forschung und Praxis eine immer bedeutendere Rolle spielt. Der Inhalt erfaßt die Datenerfassung, Aufbereitung und die Darstellung der Daten sowie die mathematischen Grundlagen. Das bereits in Tests erprobte Werk ist vollständig programmiert und besonders für Leser geeignet, die noch keine Vorkenntnisse auf dem Gebiet der Statistik haben.


WIR BRINGEN
FROHSINN
UND
WÜNSCHEN
ALLEN
LESERN....
alpha
...DASS
DIE
alpha
IMMER
PÜNKTLICH
EINTRIFFT
UND...
...NEUE
ERKENNT-
NISSE
UND...
REDAKTION
alpha
...FREUNDSCHAFT
Quant
Lapok
alpha
Pythagoras
alpha
alpha
alpha
R
F2
F1
UND...
...GROSSE ENERGIEN BEIM
STUDIUM DER FACHBEITRÄGE
UND...
...VIEL FREUDE
AM
alpha
WETT-
BEWERB
UND...
POSTFACH
14
... ERFOLGE IM
JAHRE
A= 1974