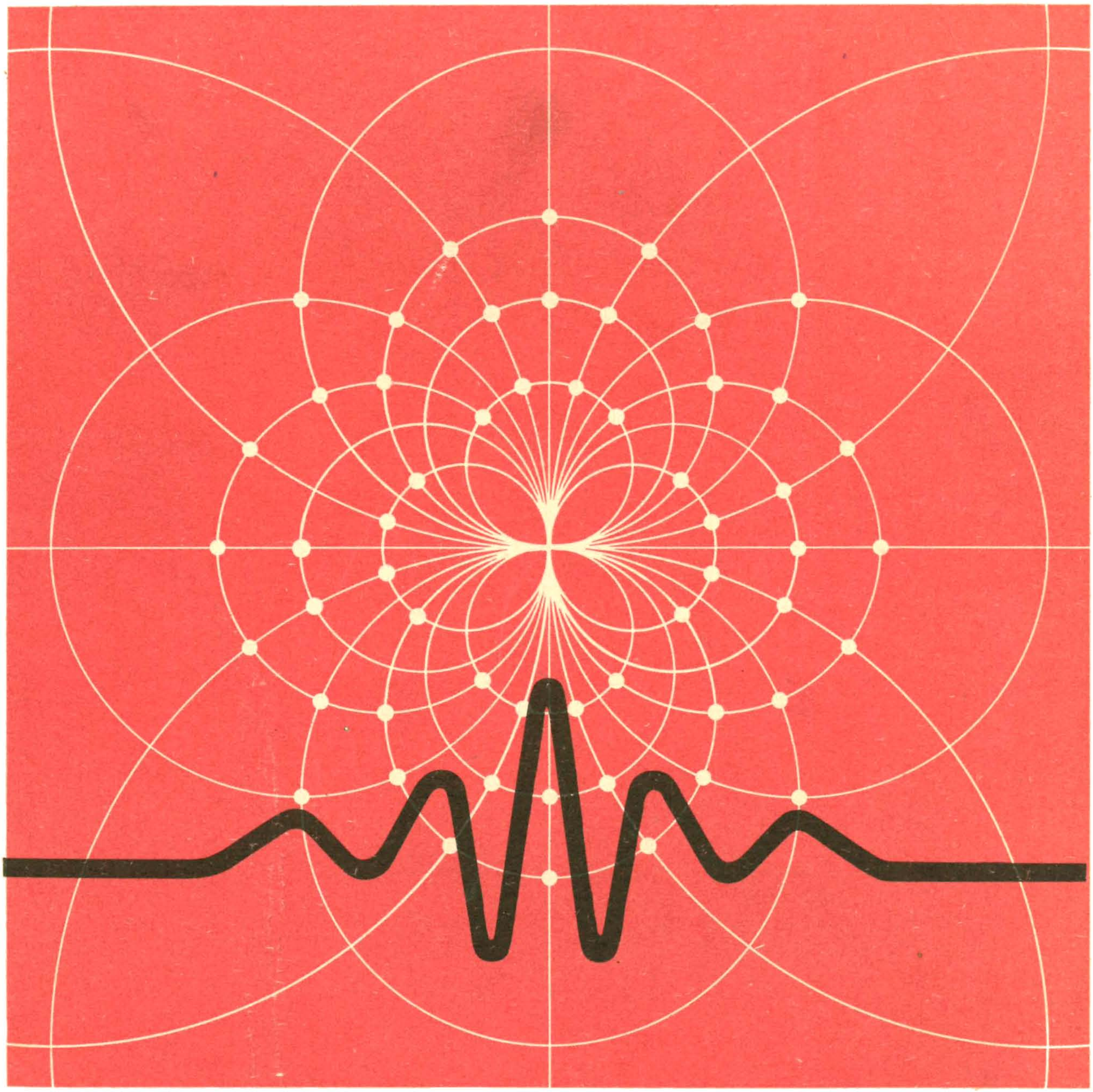
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
8. Jahrgang 1974
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

4

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M. Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann (S. 77); K. Jäntsch, Osternienburg (S. 85); Zentralbild (S. 96; S. VIII); *Vignetten:* H. Büttner, L. Rauwolf (1), aus: Eulenspiegel (S. 84/85); Loriot, aus: Aus dem Diogenesfaß (Eulenspiegelverlag) (S. 84); Lengren, aus: 100 neue Scherze (Eulenspiegelverlag (S. 84); K.-H. Guckuck, Leipzig (S. 86); Zeitschrift π, Wien (S. 88/89)
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 1. Juni 1974

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Die stereographische Projektion

Mit der Problemstellung, eine Kugelfläche auf ein ebenes Flächenstück abzubilden, haben sich die Menschen bereits in der Antike befaßt. Einerseits ging es darum, die scheinbare Himmelskugel mit ihren Sternbildern anschaulich in einer Ebene darzustellen. Andererseits erwachte mit Ausbreitung der Erkenntnis, daß die Erde in erster Näherung die Gestalt einer Kugel besitzt, immer stärker das Verlangen, Abbildungsmöglichkeiten von der Kugel auf die Ebene zu erfinden und wissenschaftlich zu untersuchen. Diese Aufgabenstellung ist sehr problematisch, da sich eine Kugelfläche oder auch nur kleine Ausschnitte davon niemals exakt längentreu auf die Ebene abbilden lassen. Hierbei ist zu beachten, daß die Abstandsbestimmung zwischen zwei Punkten der Ebene längs der Geraden durch diese Punkte erfolgt. Hingegen wird der Abstand zweier auf einer Kugelfläche liegender Punkte längs des Großkreises durch diese Punkte gemessen. Sind auf einem Globus die Küstenlinien eines Kontinents (etwa Australien) mit einigen Städten genau eingetragen, so läßt sich kein Abbildungsverfahren auf die Ebene angeben, nach dem sich die wahren Entfernungen zweier beliebiger Punkte (z. B. Städte) aus dem Bild durch Anlegen eines geeigneten Maßstabes gewinnen lassen. Stets wird die ebene Figur Verzerrungen gegenüber der ursprünglichen sphärischen Figur aufweisen. Den exakten Beweis dafür, daß es in keiner Weise möglich ist, eine Kugelfläche – oder nur Ausschnitte davon – längentreu auf eine Ebene abzubilden, lieferte zuerst Leonhard Euler 1777. Bis dahin gehörte der hier beschriebene Sachverhalt zum unbewiesenen Erfahrungswissen von Geometern und Kartographen. Auch auf anderen Gebieten, zum Beispiel für die Anfertigung von Stoff- oder Lederbällen, läßt sich kein Zuschnittmuster derart finden, daß das Material ohne Längenverzerrungen genau passend auf die Kugel aufgezogen werden kann. Für die Abbildung einer Kugelfläche auf die Ebene existiert nach Euler keine Patentlösung, die die Forderung der globalen Ähnlichkeit von Original und Bild erfüllt.

Im Laufe von Jahrhunderten – vor allem seit der Zeit der Entdeckungen – sind von Geometern und Kartographen eine Fülle von Abbildungsverfahren entwickelt worden, die spezielle Anforderungen optimal befriedigen. Von diesen soll hier ein Verfahren vorgestellt werden, das bereits im Altertum zur Abbildung der scheinbaren Himmelskugel Verwendung fand. Die abzubildende Kugelfläche κ wird auf die in horizontaler Lage befindliche Bildebene π gelegt. Der Berührungspunkt ist der tiefste Punkt von κ und wird mit W bezeichnet. Der auf κ diametral gegenüberliegende höchste Punkt Z ist das Projektionszentrum. Die Abbildung eines Punktes $P \in \kappa$, $P \neq Z$ ist wie folgt erklärt: Die Verbindungsgerade $g = g(PZ)$ schneidet die Bildebene π in einem Punkt P'. P' ist der Bildpunkt von P. Die Eigenschaften dieser Abbildung – man bezeichnet sie als stereographische Projektion – sollen im folgenden mit den Mitteln der Darstellenden Geometrie untersucht werden. (Bild 1)

1. Die Abbildung $P \to P'$ mit $P \in \kappa$ und $P \neq Z$ ist umkehrbar eineindeutig

Beweis: Nimmt man auf κ einen von Z verschiedenen Punkt P an, so gibt es genau eine Gerade $g = g(ZP)$. Diese schneidet die Ebene π in genau einem eigentlichen Punkt P', da der erste Tafelabstand von Z stets größer ist als der erste Tafelabstand von P.
Gibt man einen Punkt $P' \in \pi$ willkürlich vor, so existiert genau eine Gerade $g = g(ZP')$. Diese hat mit κ außer Z genau einen Punkt $P \neq Z$ gemeinsam. Dies ist der Originalpunkt von P'. Damit ist die Eineindeutigkeit der stereographischen Projektion für jeden Punkt $P \in \kappa$ und $P \neq Z$ gesichert. Der Punkt Z ist von der Betrachtung auszuschließen, da für diesen kein Bildpunkt existiert.

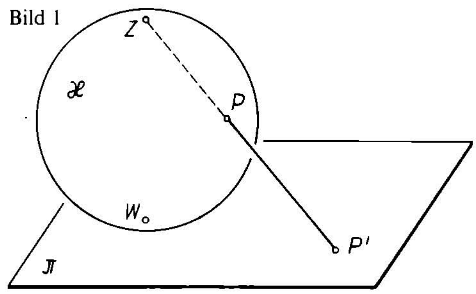
2. Die stereographische Projektion ist winkeltreu

Die Abbildung einer Fläche Φ auf eine Ebene π ist für den Punkt P winkeltreu, wenn folgendes gilt: $P \in \Phi$ sei der Schnittpunkt zweier auf Φ liegender Kurven c und k, denen ein Durchlaufungssinn gemäß der eingetragenen Pfeile in Bild 2 aufgeprägt ist. Ferner lassen sich wenigstens in P an c und k die als orientierte Geraden aufgefaßten Tangenten s bzw. t legen. Von s und t wird die Tangentialebene τ an Φ in P aufgespannt. In τ liegt auch der durch die orientierten Geraden s und t eingeschlossene Winkel α. Dies ist der Schnittwinkel von c und k in P. Die Abbildung führt P in P', c in c', k in k' sowie s in s' und t in t' über. Wegen der Erhaltung der Berührung von Kurve und Gerade sind s' und t' Tangenten an c' bzw. k' in P'. Die Übertragung des Durchlaufungssinnes von Kurven und Tangenten auf die Bilder erlaubt die eindeutige Auswahl des Bildwinkels α'. Gilt $\alpha = \alpha'$ unabhängig von der Wahl des sich in P schneidenden Kurvenpaares $\{c, k\}$, so ist die Abbildung von Φ auf π in P winkeltreu. Läßt sich dies für jedes Punktepaar $\{P, P'\}$ nachweisen, so ist die gesamte Abbildung winkeltreu.

Zum Beweis der Winkeltreue der stereographischen Projektion werden κ und π im Aufriß dargestellt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß der Schnittpunkt P von c und k auf dem scheinbaren Umriß von κ liegt. Dann ist die von s und t aufgespannte Tangentialebene τ an κ zweitprojizierend. Es wird nun gezeigt, daß die Abbildung $P \to P'$ äquivalent ist mit der Umklappung der Tangentialebene τ um ihre erste Spur e nach π. (Bild 3)

Ist 2γ die Größe des Neigungswinkels von τ gegen π (κ liegt außerhalb des betrachteten Neigungswinkels), so gilt auch $\sphericalangle\, WMP = 2\gamma$. Folglich treten in dem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ZMP$ Basiswinkel der Größe γ auf. Da der Berührungsradius MP (M Kugelmittelpunkt) senkrecht auf τ steht, gilt weiterhin $\sphericalangle\, EPP' = 90° - \gamma$. Nach dem Satz über

Bild 1



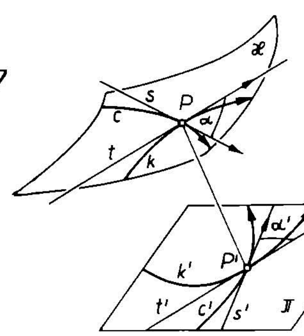


Bild 2

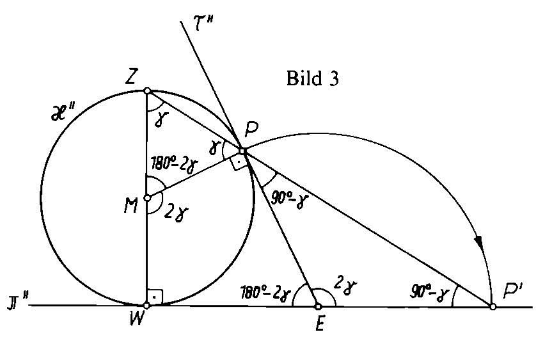


Bild 3

die Winkelsumme im ebenen Dreieck ist außerdem $\sphericalangle\, EP'P = 90° - \gamma$. Aus der Gleichheit $\sphericalangle\, EPP' = \sphericalangle\, EP'P$ folgt endlich, daß das Dreieck $\triangle PEP'$ gleichschenklig ist und somit $\overline{EP} = \overline{EP'}$ gilt. Die Abbildung $P \to P'$ kann daher als Umklappung von τ um e nach π interpretiert werden. Sind S und T die Spurpunkte von s und t, so ändern diese ihre Lage bei der Umklappung nicht. Es gilt also $s = s(PS)$, $t = t(PT)$ sowie $s' = s'(P'S)$, $t' = t'(P'T)$. Damit sind auch die Abbildungen $s \to s'$ und $t \to t'$ der Tangenten als Umlegungen erklärbar. Wegen der Rückführung der Abbildung auf eine Bewegung gilt $\alpha = \alpha'$. Da für jeden Punkt $P \in \kappa$ und $P \neq Z$ die stereographische Projektion als Umklappung der zugehörigen Tangentialebene aufgefaßt werden kann, ist die Winkeltreue dieser Abbildung bewiesen. (Bild 4)

3. Die stereographische Projektion ist kreistreu; d. h., Kugelkreise gehen in Kreise der Bildebene über

Zunächst ist festzuhalten, daß jede Ebene, die mit der Kugelfläche κ wenigstens zwei getrennt liegende Punkte gemeinsam hat, diese nach einem Kreis schneidet. Entstünde eine andere Kurve zweiter Ordnung, etwa eine Ellipse, so ließe sich diese Annahme sofort auf einen Widerspruch zu Eigenschaften der Kugelfläche bringen. Wir fragen nach dem Bild eines Kugelkreises c, von dem wir zunächst voraussetzen, daß er nicht durch Z geht. Hierzu legen wir an κ jenen Tangentialkegel, der die Kugelfläche längs des Kreises c berührt. Der Tangentialkegel ist ein Drehkegel mit dem Punkt C als Spitze. Seine Erzeugenden schneiden den Kugelkreis c senkrecht. Nun wird c samt der Kegelspitze und den Kegelerzeugenden aus Z auf die Ebene π projiziert. Dabei gehen die Erzeugenden in ein Geradenbüschel mit dem Bild C^* von $C \notin \kappa$ als Träger über. Wegen der nachgewiesenen Winkeltreue muß das Bild c' von c jede Gerade des Büschels senkrecht schneiden. Diese Forderung erfüllt nur eine Kreislinie mit C^* als Mittelpunkt. Ist c ein Großkreis, so sind die Erzeugenden des κ längs c berührenden Zylinders zu betrachten. Auch diese gehen bei der Abbildung in ein Geradenbüschel über, das von c' senkrecht durchsetzt wird. Damit ist die Kreistreue für alle nicht durch Z gehenden Kugelkreise nachgewiesen. Umgekehrt läßt sich auch jedem in π liegenden Kreis c' genau ein Kreis c auf κ zuordnen. (Bild 5)

Es werde noch der Fall betrachtet, daß der Kugelkreis durch Z geht. Die Spitze C des zugehörigen Tangentialkegels liegt dann in einer zu π parallelen Ebene durch Z. Die Projektion dieser Kegelspitze (Mittelpunkt des Bildkreises c') ist demnach ein unendlich ferner Punkt. Der Bildkreis entartet daher zu einer Geraden. Diese ist identisch mit der Spur der den Kugelkreis c enthaltenden Ebene. Auch hier ist eine eineindeutige Zuordnung von Geraden in π und Kugelkreisen durch Z gesichert. In dem vorliegenden Zusammenhang können Geraden als entartete Kreise angesehen werden, deren Mittelpunkte unendlich ferne Punkte sind.

4. Abbildung spezieller Kugelkreise und Kurven

Für die folgenden Betrachtungen identifizieren wir Z mit dem Nordpol N, W mit dem Südpol S von κ. Ferner denke man sich die Kugelfläche κ mit einem Netz von Längen- und Breitenkreisen überzogen. Die Längenkreise werden bei der Abbildung, da sie sämtlich durch den Nord- und Südpol gehen, in ein Geradenbüschel mit S als Träger übergeführt. Die Breitenkreise gehen auf Grund der Axialsymmetrie in ein Büschel konzentrischer Kreise mit S als gemeinsamen Mittelpunkt über. In der Kartographie ordnet man diese Abbildung unter den polständigen perspektivischen Azimutalentwürfen ein. Für die Seefahrt spielen sphärische Kurven eine besondere Rolle, die man als Loxodromen bezeichnet. Eine Loxodrome hat die Eigenschaft, daß sie jeden Längenkreis unter einem konstanten Winkel schneidet. Fährt ein Schiff auf einer Loxodromen über ein Weltmeer, so hat dies für die Navigation den Vorteil, daß der Kurs – bezogen auf die Nord-Süd-Richtung – bei der Fahrt unverändert bleibt. (Bild 6)

Nun fragen wir nach der stereographischen Projektion einer Loxodromen. Die Meridiane gehen in ein Geradenbüschel mit S als Träger über. Wegen der Winkeltreue der Abbildung muß die Bildkurve der Loxodromen jede Gerade des Büschels unter konstantem Winkel schneiden. Eine ebene Kurve mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als logarithmische Spirale. Aus der geometrischen Besonderheit dieser Kurve resultieren viele praktische Anwendungsmöglichkeiten. Um z. B. mittels eines Schneidemessers mit festem Drehpunkt einen gleichmäßigen Schnitt zu führen, ist es wichtig, daß die schneidende Fläche in das zu trennende Material unter konstantem Winkel eindringt. Dies leistet eine Schneide von der Form einer logarithmischen Spirale. Die Anwendungen dieser Kurve sind älter als die Logarithmen selbst. Schon Albrecht Dürer beschreibt in seinem Geometrie-Lehrbuch „UNderweysung der messung/mit dem zirckel un richtscheyt in Linien, ebnen und gantzen corporen/...“ aus dem Jahre 1525 eine

Bild 4

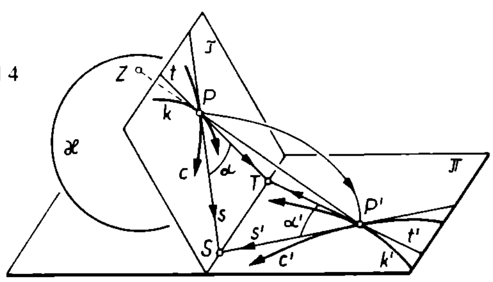
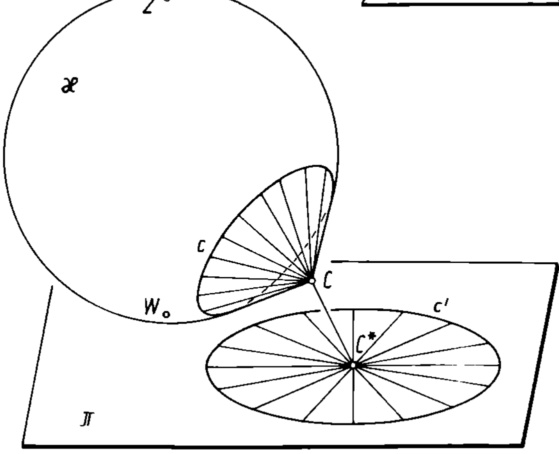


Bild 5



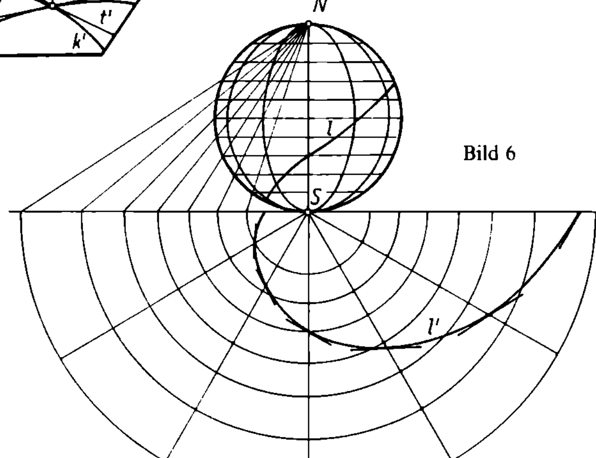


Bild 6

Spirale, die sich auf Grund der gegebenen Konstruktionsvorschrift als logarithmische Spirale identifizieren läßt. Als Bemerkung zu ihrem Bild schreibt er:

„Diese Linie kann man der unendlichen Größe und Kleinheit halber nicht machen; ihr Anfang und ihr Ende sind nicht zu finden. Das faßt allein der Verstand."

Geht die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugelfläche, so entsteht ein Großkreis. Der Radius eines Großkreises ist gleich dem Kugelradius. Der Äquator und sämtliche Meridiane sind Großkreise. Ein vom Äquatorkreis verschiedener Großkreis schneidet den Äquator nach zwei diametral gegenüberliegenden Punkten. Ihre Bilder liegen auf dem Bild des Äquatorkreises gleichfalls diametral gegenüber. Schneidet umgekehrt ein Bildkreis k' das Bild des Äquators in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten, so ist der zugehörige Kugelkreis ein Großkreis von κ.

Großkreise spielen in der sphärischen Trigonometrie die gleiche Rolle wie Geraden in der ebenen Trigonometrie. Zum Beispiel wird die Entfernung zweier Punkte auf der Kugelfläche definitionsgemäß auf dem durch diese Punkte gehenden Großkreis gemessen. Ein durch zwei Punkte gelegter Großkreis stellt auch die kürzeste Verbindung dieser beiden Punkte auf der Kugelfläche dar. Die Sätze der ebenen Trigonometrie lassen sich auch als Grenzfälle von Sätzen (und Formeln) der sphärischen Trigonometrie auffassen, wobei der Radius der Kugelfläche als eine über alle Grenzen wachsende Größe einzusetzen ist.

5. Punktspiegelung an Ebene und Kreis

Wir gehen von einem Punktepaar $\{P,\tilde{P}\}\in\kappa$ aus, das spiegelbildlich zur Äquatorebene von κ liegt, und fragen nach der Lagebeziehung der Bildpunkte $\{P',\tilde{P}'\}$ in π bezüglich des Bildes des Äquatorkreises. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die Kugelfläche um ihre lotrechte Achse wieder so gedreht werden, daß P und $\tilde{P}$ im Aufriß auf dem scheinbaren Umriß von κ liegen. Zusätzlich wird der auf dem Umriß liegende Äquatorpunkt A in die Konstruktion einbezogen. Durch Einzeichnen der Verbindungsgeraden NP, $N\tilde{P}$ und NA findet man die Aufrisse der Bildpunkte P', $\tilde{P}'$ und A'. Nun gilt nach dem Satz vom Peripheriewinkel im Kreis:

$\sphericalangle SNA = 45°$ (Peripheriewinkel über einem Viertel des Vollkreises)

$\sphericalangle \tilde{P}NA = \sphericalangle ANP = \delta$ (Bild 7)

Aus Bild 7 ist ferner abzulesen, daß $\sphericalangle SN\tilde{P}' = \sphericalangle SP'N = 45° - \delta$ gilt. Daraus folgt, daß die Dreiecke $\triangle S\tilde{P}'N$ und $\triangle SNP'$ ähnlich sind, und es besteht die Proportion

$$\overline{S\tilde{P}'} : \overline{SN} = \overline{SN} : \overline{SP'}.$$

Wegen $\overline{SN} = \overline{SA'}$ kann weiterhin geschrieben werden

$$\overline{S\tilde{P}'} : \overline{SA'} = \overline{SA'} : \overline{SP'}$$

$$\text{oder } \overline{S\tilde{P}'} \cdot \overline{SP'} = \overline{SA'}^2. \qquad (1)$$

Setzt man $\overline{SP'} = \rho$, $\overline{S\tilde{P}'} = \tilde{\rho}$ und $\overline{SA'} = a$, so nimmt Gleichung (1) die Form an

$$\rho \cdot \tilde{\rho} = a^2. \qquad (2)$$

Liegen zwei Punkte P' und $\tilde{P}'$ auf dem Durchmesser eines Kreises k'_a und ist dabei die Gleichung (2) erfüllt, so sagt man, P' und $\tilde{P}'$ liegen invers bezüglich des Kreises k'_a. Ist umgekehrt in π ein Punktepaar $\{Q', \tilde{Q}'\}$ gegeben, das invers bezüglich des Bildes des Äquatorkreises liegt, so sind deren Originale $\{Q, \tilde{Q}\}$ Spiegelpunkte bezüglich der Äquatorebene.

Planimetrisch kann die Spiegelung eines Punktes P an einem Kreis i (Inversionskreis) wie folgt konstruiert werden. Zunächst ist P mit dem Mittelpunkt M von i zu verbinden, da der zu P inverse Punkt auf dem Durchmesser von i durch P liegt. Ist P außerhalb i vorgegeben, sind die Tangenten t_1 und t_2 aus P an i zu legen. Die Verbindungsgerade $p = p(T_1T_2)$ der Berührungspunkte T_1 und T_2 steht senkrecht auf dem Kreisdurchmesser und schneidet diesen in dem Punkt $\tilde{P}$. Setzt man in Analogie zur oben gewählten Bezeichnungsweise $\overline{MP} = \rho$, $\overline{M\tilde{P}} = \tilde{\rho}$ und $\overline{MT_1} = a$, so zeigt sich, daß nach dem Lehrsatz des Euklid (Im rechtwinkligen Dreieck ist das Produkt aus Hypotenuse und Kathetenprojektion gleich dem Quadrat über der zugehörigen Kathete) die Beziehung $\rho \cdot \tilde{\rho} = a^2$ erfüllt ist; d. h. P und $\tilde{P}$ liegen invers bezüglich i. Ist P innerhalb i vorgegeben, hat man die Konstruktion sinngemäß umzukehren. Spiegelt man $\tilde{P}$ an i, erhält man P. Die Kreisinversion ist eine involutorische Punktverwandtschaft. (Bild 8)

Aufgaben: Begründe die folgenden Aussagen über die Inversion an einem Kreis i durch Rückführung auf die stereographische Abbildung der Kugel κ:

▲5.1. Ein außerhalb des Inversionskreises i liegender Punkt geht bei der Inversion in einen innerhalb i liegenden Punkt über und umgekehrt.

▲5.2. Ein Durchmesser d von i geht bei der Inversion in sich über, wobei genau die Schnittpunkte von d mit i Fixpunkte der Geraden sind.

▲5.3. Ein Kreis k durch den Mittelpunkt M von i geht bei der Inversion in eine Gerade $\tilde{k}$ über. Schneiden sich k und i, so geht $\tilde{k}$ durch die Schnittpunkte von k und i. Berühren sich k und i, so ist $\tilde{k}$ Tangente an i im Berührungspunkt von k und i.

▲5.4. Eine den Inversionskreis i schneidende Gerade k geht in einen Kreis $\tilde{k}$ über. Dieser geht durch den Mittelpunkt M von i und die Schnittpunkte von k und i.

▲5.5. Ein Kreis k, der den Inversionskreis i senkrecht schneidet, geht bei der Inversion in sich über.

▲5.6. Ein Kreis k, der den Inversionskreis i in einem diametral gegenüberliegenden Punktepaar von i schneidet, geht bei der Inversion in das Spiegelbild von k bezüglich des durch die Schnittpunkte festgelegten Durchmessers von i über.

▲5.7. Der Durchmesser von i durch ein bezüglich i invers liegendes Punktepaar $\{P, \tilde{P}\}$ schneidet den Inversionskreis in den Punkten Q und R. Zeige, daß für das Doppelverhältnis Δ der vier Punkte P, $\tilde{P}$, Q und R gilt: $\Delta(P\ \tilde{P}\ Q\ R) = -1$.

Definition für das Doppelverhältnis Δ:

$$\Delta(P\tilde{P}QR) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} : \frac{\overline{\tilde{P}Q}}{\overline{\tilde{P}R}} \qquad (3)$$

Bemerkung: In der Formel (3) sind die Längen der Strecken als vorzeichenbehaftete Größen zu verstehen. Vier auf einer Geraden liegende Punkte mit der hier vorausgesetzten Besonderheit bezüglich ihrer gegenseitigen Lage bezeichnet man als harmonisches Punktequadrupel.

E. Schröder

Bild 7

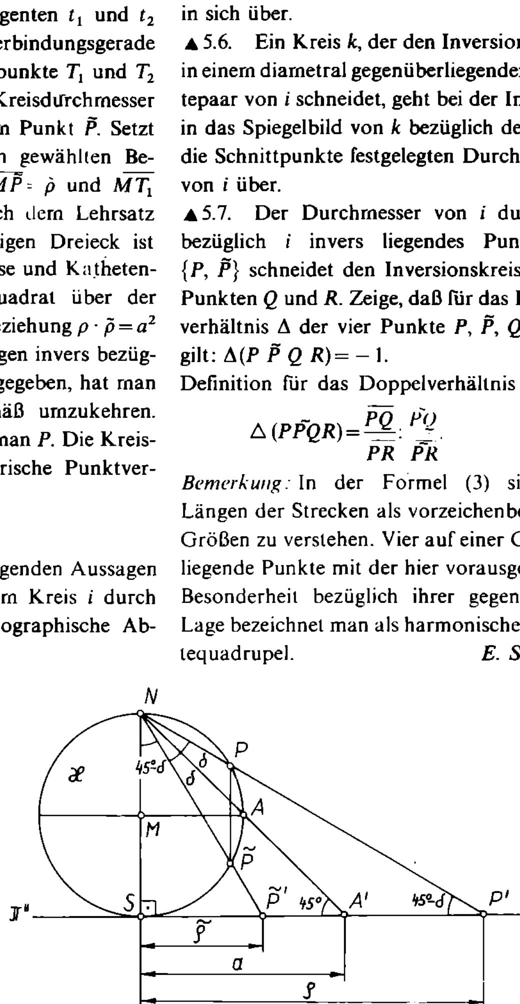


Bild 8

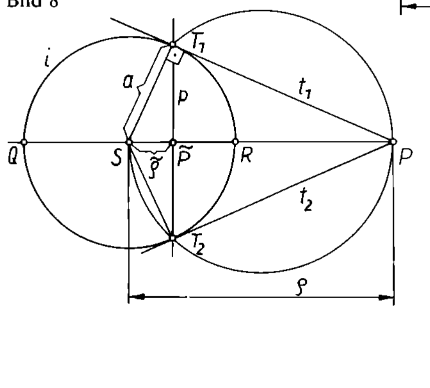
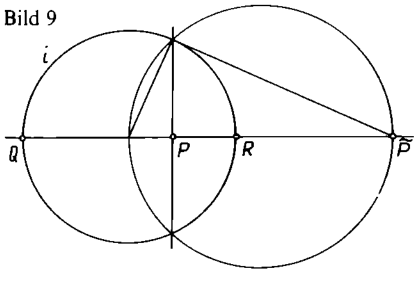


Bild 9



Noch ein Stück durch die Welt der Tetraeder*

In Fortsetzung unseres Streifzuges durch die Welt der Tetraeder** ist heute eine besondere Trainingsstrecke für unser räumliches Vorstellungsvermögen vorgesehen:

6. Die Höhen eines Tetraeders

Bekanntlich schneiden sich die Höhen eines beliebigen Dreiecks in einem Punkt. Von den Höhen eines regelmäßigen oder eines rechtwinkligen Tetraeders kann offenbar das gleiche gesagt werden. Dabei ist wie beim Dreieck so auch beim Tetraeder eine Höhe durch einen Eckpunkt und den Fußpunkt des Lotes aus diesem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Seitenfläche definiert; je nach Zweck ist die durch diese beiden Punkte definierte Gerade, Strecke oder Länge dieser Strecke gemeint (vgl. Bemerkung in „Tetraeder I", Seite 107, linke Spalte).

Nachdem sich die mit den rechtwinkligen Dreiecken verknüpften Sätze recht gut in entsprechende Aussagen für rechtwinklige Tetraeder übertragen ließen (vgl. „Tetraeder II"), dürfte das Schnittverhalten von Tetraederhöhen ein lohnender Untersuchungsgegenstand sein. Überraschenderweise ergibt sich zunächst aber der

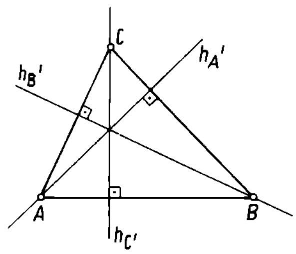
Satz 4: Es gibt Tetraeder, deren vier Höhen nicht durch einen Punkt gehen.

Beweis: Zum Beweis genügt die Angabe eines einzigen Beispiels; wir werden zeigen, wie man beliebig viele Tetraeder konstruieren kann, deren Höhen nicht durch einen Punkt gehen. Zu dem Zweck verwenden wir den schon in „Tetraeder II" zitierten Sachverhalt aus der darstellenden Geometrie:

Ist s die Spur einer Ebene (die somit zur Bildebene nicht parallel ist) und n eine zu dieser Ebene senkrechte Gerade, dann geht bei senkrechter Parallelprojektion die Gerade n in eine zu s senkrechte Gerade n' über.

Wir wählen ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ als eine Seitenfläche des zu konstruierenden Tetraeders $ABCD$. Die Ebene des Dreiecks $\triangle ABC$ werde mit π_1 bezeichnet und sei unsere Zeichenebene. Wo nun auch immer der Punkt D im Raum gewählt wird (natürlich nicht in der Ebene π_1), die senkrechten

Bild 8



Projektionen h_A', h_B', h_C' der Tetraederhöhen h_A, h_B, h_C durch A, B und C auf π_1 bilden sich stets als die Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ ab; Bild 8. Wir wählen nun den Punkt D solcherart, daß seine senkrechte Projektion D' auf π_1 nicht in den Höhenschnittpunkt H und auch auf keine Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ fällt, und unterscheiden zwei Fälle:

a) D' ist Punkt einer der Höhen von $\triangle ABC$, etwa der Höhe h_B'; Bild 9a. Der Abstand des Punktes D von π_1 kann beliebig festgelegt werden. Dann schneiden sich sicher die Höhen h_B und h_D im Raum (es ist $h_D' = D'$), aber es gehen nicht alle vier Höhen des so konstruierten Tetraeders $ABCD$ durch einen Punkt.

Bild 9a

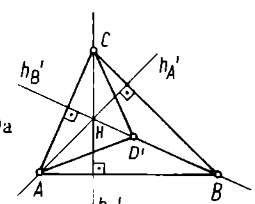
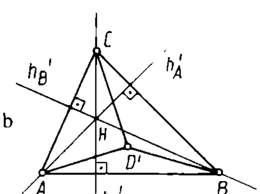


Bild 9b



b) D' ist kein Punkt irgendeiner Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$; Bild 9b. Der Abstand des Punktes D von π_1 kann beliebig festgelegt werden. Dann trifft die Höhe h_D keine andere Tetraederhöhe, so daß es auch in diesem Fall keinen gemeinsamen Punkt der Tetraederhöhen gibt.

▲9▲ Können weitere Beispiele als Beweis des Satzes 4 angegeben werden, wenn D' eine der ausgeschlossenen Lagen einnehmen darf?

▲10▲ Ermittle durch einen geeigneten Seitenriß die gegenseitige Lage der Höhen eines Tetraeders gemäß Bild 9b.

Mit der Erkenntnis, daß die Höhen eines Tetraeders im allgemeinen nicht durch einen Punkt gehen, ergibt sich die Frage, welche Lage die Tetraederhöhen zueinander haben können.

▲11▲ Notiere alle *denkbaren* Möglichkeiten für die Lagen der Höhen eines Tetraeders zueinander!

Licht in diese Angelegenheit wird im wesentlichen schon durch die folgende Aussage gebracht:

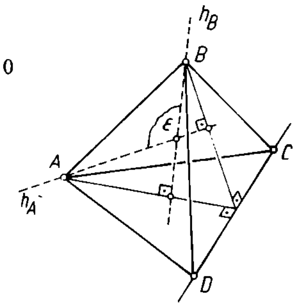
Satz 5: Es sei $ABCD$ ein Tetraeder.
Genau dann schneiden sich die Höhen h_A und h_B in einem Punkt, wenn die Kante AB zur Kante CD senkrecht steht.

Beweis: Er ist in zwei Schritten zu führen.

Behauptung 5.1.: Wenn sich die Höhen h_A und h_B in dem Punkt S schneiden, dann gilt $AB \perp CD$.

Beweis: Die Höhen h_A und h_B spannen eine Ebene ε auf (Bild 10).

Bild 10



Es steht ε senkrecht auf der Ebene BCD (denn ε enthält die Höhe h_A, die senkrecht zur Ebene BCD steht) und auch senkrecht auf der Ebene ACD (denn ε enthält die Höhe h_B, die senkrecht zu ACD steht). Infolgedessen schneiden sich die Ebenen BCD und ACD in einer zu ε senkrechten Geraden s. Diese Gerade s enthält aber die Kante CD, so daß in der Tat $AB \perp CD$ gilt (denn die Kante AB liegt in ε), w. z. b. w.

Behauptung 5.2.: Stehen die Kanten AB und CD senkrecht zueinander, dann schneiden sich die Höhen h_A und h_B in einem Punkt.

Beweis: Aus der Voraussetzung $AB \perp CD$ folgt, daß es eine Ebene ε durch die Gerade AB gibt, die zu CD senkrecht steht, und zwar genau eine. Infolgedessen steht ε auf der

* Während des VI. Zentralen Ferienlehrgangs Junger Mathematiker in Güstrow am 10. 5. 1973 vorgetragen.

** Teile 1 und 2, im Folgenden als „Tetraeder I" und „Tetraeder II" zitiert, siehe diese Zeitschrift: Durch die Welt der Tetraeder. 5 (1971). H. 5, S. 106 bis 107; Weiter durch die Welt der Tetraeder, 3 (1974), H. 2, S. 36.

Ebene ACD senkrecht und enthält daher die Höhe h_B, und ε steht senkrecht auf der Ebene BCD und enthält daher die Höhe h_A. Somit schneiden sich die in der Ebene ε gelegenen Höhen h_A und h_B in einem Punkt, w. z. b. w. (Warum können h_A und h_B nicht parallel zueinander sein?)

Die notwendige und hinreichende Bedingung des Satzes 5 für das Schneiden der Höhen h_A und h_B verknüpft die gleichberechtigten Geraden AB und CD durch eine symmetrische Relation miteinander:

$AB\perp CD$. Daher ist sie zugleich auch genaue Bedingung dafür, daß sich h_C und h_D schneiden; kurzschriftlich kann man dies so notieren:

$(h_A\cap h_B\neq\emptyset)\leftrightarrow(AB\perp CD)\leftrightarrow(CD\perp AB)$
$\leftrightarrow(h_C\cap h_D\neq\emptyset)$.

Somit haben wir eine

Folgerung 1 aus Satz 5: Schneiden sich zwei der vier Höhen eines Tetraeders, so auch die beiden übrigen Höhen.

Damit können wir sofort schließen:

Folgerung 2 aus Satz 5: Gehen drei der vier Höhen durch einen Punkt, so geht auch die vierte Höhe durch diesen Punkt. Demnach haben die vier Höhen eines Tetraeders genau dann einen Punkt gemeinsam, wenn alle drei Paare gegenüberliegender Kanten auf senkrecht zueinander stehenden Geraden liegen.

Diese Aussage ist gleichwertig mit der

Folgerung 2' aus Satz 5: Gilt von zwei der drei Paare windschiefer Kanten eines Tetraeders, daß sie auf senkrecht zueinander stehenden Geraden liegen, dann gilt dies auch für das dritte Paar; kurzschriftlich:

$((AB\perp CD)\wedge(AC\perp BD))\rightarrow(AD\perp BC)$.

Endlich ist noch zu notieren als

Folgerung 3 aus Satz 5: Besitzt ein Tetraeder kein Paar sich schneidender Höhen, gibt es also kein Paar senkrecht zueinander stehender Gegenkanten, dann liegen die Höhen paarweise windschief zueinander.

Zusammenfassend erkennen wir damit die Gültigkeit von

Satz 6: Die Höhen eines Tetraeders haben folgende Lagemöglichkeiten:

1. Keine zwei Höhen treffen sich, sie liegen alle paarweise windschief zueinander. (Keine zwei zueinander windschiefe Tetraederkanten stehen senkrecht zueinander.)
2. Keine drei Höhen treffen sich, aber zwei Höhen gehen durch einen Punkt. Dann treffen sich auch die beiden übrigen Höhen in einem (notwendig von jenem verschiedenen) Punkt. (Genau zwei zueinander windschiefe Kanten stehen senkrecht zueinander.)
3. Drei Höhen gehen durch einen Punkt, dann treffen sich alle Höhen in diesem Punkt. (Irgend zwei zueinander windschiefe Kanten stehen senkrecht zueinander.)

Nach der Ermittlung dieser Möglichkeiten, für deren jede eine notwendige und hinreichende Bedingung (in Klammern) angegeben werden konnte, bleibt noch die Frage zu klären, ob es auch wirklich zu jedem Fall Tetraeder gibt, deren Höhen das angeführte Schnittverhalten zeigen! (Existenzsatz). Aus Bild 9b (Bewältigung der Aufgabe 10) resultieren Beispiele zur Lagemöglichkeit 1, aus Bild 9a Beispiele zur Lagemöglichkeit 2, und Lagemöglichkeit 3 wird bei regelmäßigen, bei rechtwinkligen und bei weiteren Tetraedern, die der angegebenen Kantenbedingung genügen, realisiert.

Es mag bedauerlich erscheinen, daß sich die Höhen eines Tetraeders nicht so einfach verhalten wie die Höhen eines Dreiecks. Und doch gibt es eine besondere Eigenheit der Höhen eines jeden Tetraeders, die der Eigenschaft der Höhen eines Dreiecks, nämlich einen gemeinsamen Punkt zu besitzen, an die Seite gestellt werden kann. Gilt in der Ebene der

Satz: Liegt ein Punkt auf zwei
der drei Höhen eines Dreiecks, so liegt
er auch auf der dritten Höhe, so gilt im Raum der bemerkenswerte und durchaus tiefliegende

Satz: Trifft eine Gerade drei
der vier Höhen eines Tetraeders, dann trifft sie auch die vierte Höhe.

Dieser Satz ist bei den Lagemöglichkeiten 2 und 3 sehr schnell zu beweisen bzw. trivial. Aber bei der Lagemöglichkeit 1? Damit habt ihr zum Schluß ein schwieriges **Problem** vorgelegt bekommen!

G. Geise

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Gustav Burosch

Sektion Mathematik der Universität Rostock

▲1233▲ Jedes Produkt einer gewissen Erzeugnisgruppe wird bezüglich n fixierten Parametern mit dem Prädikat „gut" (Wert 1) oder „schlecht" (Wert 0) ausgezeichnet und daher bezüglich seines Qualitätsverhaltens durch ein n-Tupel $\underline{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i\in\{0, 1\}$ charakterisiert. Jedem derartigen n-Tupel wird im Sinne einer qualitativen Gesamtcharakterisierung eines Erzeugnisses das Prädikat „gut" (Wert 1) oder „schlecht" (Wert 0) zugeordnet. Dabei erscheinen folgende Bedingungen an diese Zuordnung als sinnvoll.

1. Wenn ein Erzeugnis E_1 bezüglich aller n Einzelparameter nicht schlechter abschneidet als ein Erzeugnis E_2, so darf E_1 auch nicht mit einem schlechteren Gesamtprädikat als E_2 bewertet werden.

2. Wenn ein Erzeugnis E_1 bezüglich aller n Einzelparameter entgegengesetzt wie das Erzeugnis E_2 bewertet wird, so muß auch das Gesamtprädikat für E_1 entgegengesetzt zu dem für E_2 sein. Interpretationen ähnlicher Art führen zur Betrachtung folgender Abbildungen (Funktionen).

Sei E_n die Menge $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n);\ \alpha_i\in\{0, 1\}\}$. Mit $\bar{\alpha}_i=0$ (bzw. 1) falls $\alpha_i=1$ (bzw. 0) ist, sei für $\underline{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in E_n$ $\bar{\underline{\alpha}}$ das n-Tupel $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$. Für $0<1$ bedeute für zwei n-Tupel $\underline{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\underline{\beta}=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ aus E_n $\underline{\alpha}\leqq\underline{\beta}$, daß $\alpha_i\leqq\beta_i$ für $i=1, \ldots, n$ gilt.

Problem: Wie groß ist für $n=2, 3, 4, 5$ die Anzahl der voneinander verschiedenen eindeutigen Abbildungen von E_n in die Menge $\{0, 1\}$, die folgenden Bedingungen genügen:

1. Für alle $\underline{\alpha}\in E_n$ gilt $f(\bar{\underline{\alpha}})=\overline{f(\underline{\alpha})}$,
2. für alle $\underline{\alpha}, \underline{\beta}\in E_n$ mit $\underline{\alpha}\leqq\underline{\beta}$ gilt $f(\underline{\alpha})\leqq f(\underline{\beta})$?

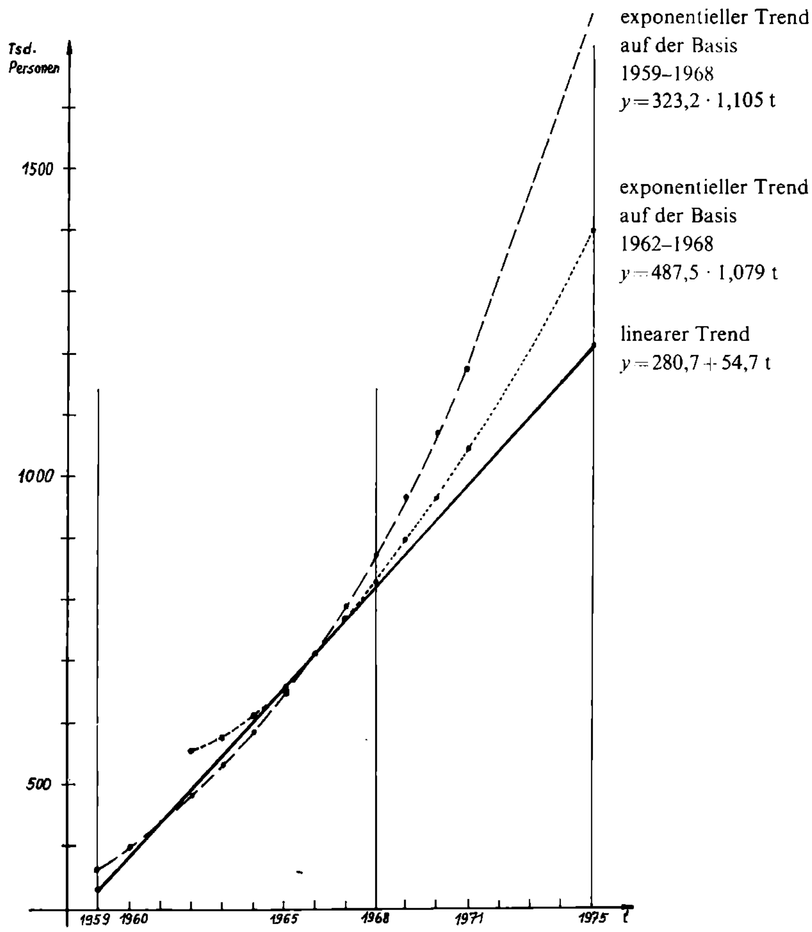
Kurzbiographie

Prof. Dr. G. Burosch, geb. 1938 in Rostock; Vater: Bauhilfsarbeiter, Mutter: Buchhalterin; Besuch der Oberschule; Abitur 1956 „Mit Auszeichnung bestanden"; Mathematikstudium 1956 bis 1961 (Karl-Marx-Stipendium); während des Studiums: zwei Monate Besuch der Universität Debrecen; 1961 bis 1974 Tätigkeit an der Sektion Mathematik der Universität Rostock, seit 1971 ord. Professor; 1962 bis 1964 Zusatzstudium an der Moskauer Lomonossow-Universität; 1968 kurze Studienaufenthalte in der Republik Österreich und der SR Rumänien; 1970 ein halbes Jahr Gastprofessur in der Republik Finnland; 1973 ein halbes Jahr Gastprofessur an der Akademie der Wissenschaften der UdSSR; Fachgebiet: Algebra und Geometrie.

Mathematik in der Gesellschaftsprognostik

Teil 2

Es ist bereits ein ganzes Arsenal von Funktionstypen bei der mathematischen Behandlung von Zeitreihen erprobt worden, die sich hinsichtlich ihres Wachstumsverhaltens unterscheiden. Beispiele für derartige Standardtypen sind neben der Geraden und der Parabel die Exponentialfunktionen, Funktionen vom Typ der logistischen Funktion, die Gompertz-Funktion, die Törnquist-Funktion, die ökologische Funktion und andere mehr.



Die graphische Darstellung unserer Zeitreihe legt nahe zu versuchen, die Zeitreihenwerte durch eine Exponentialfunktion $y=ab^t$ anzunähern. Wenn wir die Funktionsgleichung logarithmieren, erhalten wir wie oben ein lineares Problem,

$$\log y=\log a+t\cdot\log b.$$

Die Bestimmungsgleichungen für log a und log b lauten dann analog zu (1):

$$\sum_{i=1}^{n}\log x_i-n\cdot\log a-(\sum_{i=1}^{n}t_i)\log b=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}t_i\log x_i-(\sum_{i=1}^{n}t_i)\log a-(\sum_{i=1}^{n}t_i^2)\log b=0$$

Es wurden zwei Näherungsfunktionen berechnet, eine auf der Grundlage des Zeitraumes 1959–1968, eine zweite für den Zeitraum 1962–1968.

Wir erhalten

1959–1968: $y=323{,}2\cdot 1{,}105^t$ (2)

1962–1968: $y=487{,}5\cdot 1{,}079^t$ (3)

Die graphische Darstellung zeigt, daß die Zeitreihenwerte 1959–1961 die Berechnungsergebnisse so verzerren, daß die erste Näherungsfunktion bereits für 1968 nur eine wenig befriedigende Näherung darstellt. Die Näherungsfunktion auf der Basis 1962–1968 nähert die Basiswerte außerordentlich gut an, besser als die Gerade.

Wir berechnen die Prognosewerte für 1971 und 1975:

(2): $y_{1971}=1177 \quad y_{1975}=1753$

(3): $y_{1971}=1040 \quad y_{1975}=1395$

Die eben dargestellten Berechnungsmethoden kann jeder selbst leicht anwenden. Man nehme sich ein Statistisches Jahrbuch, wähle eine Zeitreihe aus und berechne die beste Näherung für unterschiedliche Funktionstypen.

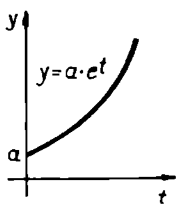
Die mathematische Theorie der Auswertung von Zeitreihen wurde ständig weiterentwickelt. Der meines Erachtens wichtigste Schritt bei der Erweiterung der mathematischen Problemstellung war die Einführung wahrscheinlichkeitstheoretischer und statistischer Betrachtungsweisen bei der Behandlung von Zeitreihen. Gesellschaftlichen Prozessen liegen gesellschaftliche Gesetzmäßigkeiten zugrunde, die die Grundrichtung dieser Prozesse, aber nicht ihren Verlauf im einzelnen

Wertetabelle
der verwendeten Näherungsfunktionen

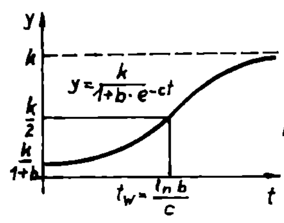
$y_1=323{,}2\cdot 1{,}105^t$
$y_2=487{,}5\cdot 1{,}079^t$

Jahr	t_1	y_1	y_2	t_2
1959	1	357,0	—	—
1960	2	394,1	—	—
1961	3	435,5	—	—
1962	4	481,0	526	1
1963	5	531,4	567	2
1964	6	587,0	612	3
1965	7	648,5	660	4
1966	8	716,0	712	5
1967	9	791,0	768	6
1968	10	874,0	828,5	7
1969	11	965,0	894	8
1970	12	1066,0	964	9
1971	13	1177,0	1040	10
1975	17	1753,0	1395	14

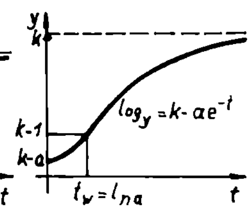
bestimmen. So ist auch jeder einzelne Wert unserer Zeitreihe mit vielen Zufällen behaftet, z. B. der Gründung neuer Institute und Ausbildungsstätten, der Höhe der möglichen materiellen Aufwendungen im konkreten Zeitraum für die Ausbildung und den Einsatz neuer Kader, der raschen Entwick-



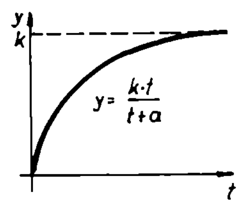
Exponentialfunktion



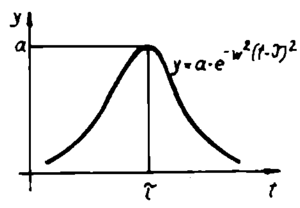
Logistische Funktion



Gompertzfunktion



1. Törnquistfunktion



Ökologische Funktion

lung neuer Wissenschaftsdisziplinen, dem Grad der Automatisierung der materiellen Produktion und vielem anderen mehr. Im einzelnen Institut, das nicht auf Hauptentwicklungsgebieten der Wissenschaften arbeitet, kann die Mitarbeiterzahl sogar rückläufig sein. Diesen Zufallscharakter und die Abhängigkeit der zu prognostizierenden Entwicklungsprozesse von bestimmten Ursachekomplexen versucht die Regressions- und Korrelationsanalyse zu erfassen. Dabei werden die Zeitreihenwerte als zufällige Stichprobe aus einer größeren Gesamtheit aufgefaßt. Die durchschnittlichen Werte derartiger zufälliger Wertverteilungen werden wieder mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate durch mathematische Funktionen abgeschätzt. Mit Hilfe von aus der mathematischen Statistik entlehnten Schätzverfahren werden die Fehler um die Regressionsfunktion abgeschätzt. Man erhält Aussagen derart, daß die prognostizierte Größe mit einer gewissen Sicherheit in einem bestimmten Intervall liegt.

Die Analyse und Prognose der Anzahl der wissenschaftlichen Kader wurde in der UdSSR mit Hilfe der Regressionsanalyse durchgeführt. Es wurden die Koeffizienten einer linearen und einer exponentiellen Schätzfunktion berechnet. In der veröffentlichten Untersuchung heißt es zu den Ergebnissen: „Im Falle der linearen Prognose mit der Basis 1959–1968 kann behauptet werden, daß die Zahl der wissenschaftlichen Kader mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% in den Grenzen

1969: 881,3 ± 39,6
1970: 936,1 ± 42,1

und für die exponentielle Prognose auf der Basis 1962–1968 in den Grenzen

1969: 888,9 ± 13,9
1970: 968,2 ± 15,3

liegen wird. Bei Gegenüberstellung mit den realen Werten sehen wir, daß die lineare Entwicklungstendenz bis 1970 anhält, während das exponentielle Wachstum, das seit 1962 mit sehr geringen Abweichungen beobachtet wurde, 1969 beendet wurde."

Eine weitere Koeffizientenverbesserung, die den zeitlich letzten Werten der Zeitreihe ein größeres Gewicht beimißt, führte zu einer Korrektur der linearen Extrapolation. Der korrigierte Wert für 1970 wurde mit 922,8 bestimmt, womit der reale Wert nur um 0,5% verfehlt wurde.

Dieses Beispiel zeigt, in welcher Art und Weise bestimmte mathematische Theorien für die Bestimmung quantitativer Beziehungen gesellschaftlicher Prozesse herangezogen werden können. Es gibt eine Reihe guter Erfahrungen und Beispiele für die Nutzung von Extrapolationsmethoden in der Prognostik. Für viele kurz- und mittelfristige Prognosen liefert das hier vorgestellte Instrumentarium gute Ergebnisse. So ist auch die von H. Frühauf im Jahre 1957 durchgeführte Analyse und Prognose wissenschaftlich-technischer Daten der historischen Entwicklung der in der Nachrichtentechnik benutzten Wellenbereiche ein solches gutes Beispiel. Er sagte für 1965–1970 „die Ausnutzung des Bereiches kontinuierlich und gebündelt schwingender Lichtwellen mittels elektronischer Mittel sowie ihre Reproduktion und Verstärkung" voraus. Diese Prognosen sowie seine Vorstellungen über die wissenschaftlich-technischen Mittel des Eindringens in das erwähnte Gebiet wurden in der Folge ziemlich gut durch die Praxis der Entwicklung von optischen Quantengeneratoren (Laser) bestätigt.

Es gibt aber weit mehr schlechte Beispiele, Beispiele der formalen Anwendung dieser Methoden. So konnte man vor einigen Jahren in der Prognose der volkswirtschaftlichen Entwicklung eines Bezirkes der DDR Teilprognosen der Entwicklung des Getränkekonsums finden. Die Brauereien extrapolierten den Bierverbrauch, die Molkereien den Milchkonsum, es wurde extrapoliert, wie sich der Brause- und Seltersverbrauch entwickeln wird usw., jeder extrapolierte unabhängig von den anderen. Zusammengefaßt und auf den einzelnen Einwohner aufgeschlüsselt ergaben diese Prognosen für das Ende des Prognosezeitraumes eine täglich zu konsumierende Getränkemenge, an der nicht mehr viel zum täglichen Bad fehlte. Nun gut, ein solches Beispiel erheitert, auf volkswirtschaftlich bedeutsameren Gebieten können derartige Fehlvoraussagen aber sehr schwerwiegende Konsequenzen nach sich ziehen.

Wir konstatieren, es gibt also gute und schlechte Beispiele der Nutzung von Extrapolationsmethoden. Der mathematische Ansatz läßt sich nicht mit gut oder schlecht bewerten, und daß schlechte Beispiele auf Rechenfehler zurückgeführt werden könnten, muß ebenfalls ausgeschlossen werden. Wir sind mit unserer Frage wieder an den Ausgangspunkt, zur Frage nach dem Verhältnis von Gesellschaftsprognostik und Mathematik zurückgekehrt. Gut oder schlecht, das wird entschieden, je nachdem, wie sich die auf den untersuchten gesellschaftlichen Prozeß übertragenen Ergebnisse der mathematischen Berechnungen bewähren. Jede der beiden von uns durchgeführten Prognoserechnungen, die lineare und die exponentielle, sind mathematisch richtig, keine kann der anderen vorgezogen werden. Erst im Vergleich mit dem realen Entwicklungsprozeß zeigt sich, daß die lineare Prognose den Gesetzmäßigkeiten der dem Basiszeitraum nachfolgenden Jahre besser entspricht.

Im Verlauf und bei der Vorbereitung unserer Berechnungen waren Entscheidungen und Bewertungen zu treffen, die die Art und Weise der Nutzung des mathematischen Instrumentariums betrafen, die aber nicht aus der mathematischen Struktur der Zeitreihe selbst ableitbar waren. Wir wollen einige nennen. Der Mathematiker nimmt die Zeitreihe als gegeben an. Ob die aufgeführten Daten vergleichbar sind (wir haben einen Teil unserer Daten korrigieren müssen), das ist nicht aus den Daten selbst ablesbar und erfordert zusätzliche Untersuchungen. Eine zweite Frage; kann man nicht aus der Art und Weise der Annäherung der Basisdaten entscheiden, welche der verwendeten Funktionen die für die Extrapolation geeignetste ist. Die Näherungen im Basiszeitraum unterscheiden sich oft nur geringfügig und klaffen wie in unserem Beispiel erst bei der Extrapolation weit auseinander. Das einzig denkbare mathematische Kriterium, die möglichst gute Anpassung der Basisdaten, führt in unserem Beispiel sogar in die Irre. Es muß das Wachstumsverhalten in seiner Grundtendenz geklärt sein, um die Entscheidung über eine geeignete Auswahl der Näherungsfunktion treffen zu können, und das ist eine gesellschaftswissenschaftliche Fragestellung.

Wir können unseren Exkurs über die Nutzung von Extrapolationsmethoden in der Gesellschaftsprognostik mit der Feststellung schließen, daß die Nutzung mathematischer Methoden der weiteren Entwicklung dieser Wissenschaft dient, daß aber die Anwendung mathematischer Methoden nur bei einer engen Verknüpfung von inhaltlichen, qualitativen Aussagen mit der Nutzung des mathematischen Instrumentariums effektiv werden kann.

B. Noack

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): 13. Oktober 1974

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.
Die Lösungen sowie die Punktbewertungstabellen werden ab 13. Oktober 1974 veröffentlicht.

Olympiadeklasse 5

1. Ermittle die natürlichen Zahlen a, b, c, d, e, von denen folgendes bekannt ist:
(1) a ist die Hälfte von b.
(2) b ist die Summe von c und d.
(3) c ist die Differenz von d und e.
(4) d ist das Dreifache von e.
(5) e ist der vierte Teil von 56.

2. Ein Quader von der Länge $a = 1{,}50$ m, der Breite b und der Höhe c hat eine Grundfläche von 12600 cm^2 und ein Volumen von 1323 dm^3.
Ermittle b und c (in Zentimetern)!

3. Die Schüler Lutz, Dora, Erich, Nina, Bernd und Manja beteiligten sich an der Kreisolympiade *Junger Mathematiker.* Dabei erzielte Bernd mehr Punkte als Erich. Lutz bekam zwar mehr Punkte als Dora, aber weniger als Erich. Nina erhielt eine kleinere Punktzahl als Dora. Manjas Punktzahl war größer als die Punktzahl Bernds.
Ermittle die Reihenfolge der Punktzahlen der genannten Schüler; schreibe sie mit der größten beginnend auf!

4. Einige Schüler einer Klasse 5 trugen ein Schachturnier aus. Jeder Teilnehmer spielte gegen jeden anderen genau zwei Partien. Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an diesem Turnier!

Olympiadeklasse 6

1. In der abgebildeten Tabelle sind statt der Buchstaben a, b, c, d, e Zweierpotenzen so einzutragen, daß die aus den drei Zweierpotenzen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen gebildeten Produkte jeweils einander gleich sind.

2^6	2^2	2^7
e	b	2^4
d	c	a

Beweise, daß es genau eine Möglichkeit für eine derartige Eintragung gibt, und nenne diese Eintragung!

2. Bernd und Monika unterhalten sich über die letzte Zusammenkunft ihrer Arbeitsgemeinschaft *Junger Mathematiker*, bei der genau 6 Jungen mehr anwesend waren als Mädchen. Bernd meint, daß bei dieser Veranstaltung von den 25 Zirkelteilnehmern genau 2 gefehlt hätten. Monika entgegnet nach einigem Überlegen, daß das nicht stimmen könne.
Wer von den beiden hat recht?

3. Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 12 km zurück. Ein zweiter Radfahrer, der denselben Weg von A nach B ebenfalls mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhr, startete am selben Tag um 7.00 Uhr in A und legte in jeder Stunde 15 km zurück. Er traf mit dem ersten Radfahrer zur gleichen Zeit in B ein.
a) Um wieviel Uhr holte der zweite Radfahrer den ersten ein?
b) Wie lang ist der Weg von A nach B?

4. Jemand schreibt 3*6*5 und möchte dann die Sternchen * so durch Ziffern ersetzen, daß eine fünfstellige durch 75 teilbare Zahl entsteht.
Ermittle alle fünfstelligen durch 75 teilbaren Zahlen, die unter diesen Bedingungen entstehen können!

Olympiadeklasse 7

1. Klaus behauptet, er habe in seiner Geldtasche genau 17 Münzen mit einem Gesamtwert von 34 Pfennig. Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte Klaus hiernach besitzen kann! Es sei dabei vorausgesetzt, daß nur Münzen der zur Zeit gültigen Währung der DDR in Betracht kommen.

2. Auf einer horizontalen Ebene steht ein oben offener quaderförmiger Kasten mit den inneren Grundkantenlängen 5 cm und 4 cm, der bis zu einer Höhe von 7 cm mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Über dem Flüssigkeitsspiegel befindet sich ein Würfel mit 2 cm Kantenlänge derart, daß seine untere Fläche den Flüssigkeitsspiegel berührt. Dabei werde der Flüssigkeitsspiegel stets als horizontale Ebene angenommen, und es werde vorausgesetzt, daß eine Würfelfläche stets parallel zum Flüssigkeitsspiegel ist. Ferner soll die Adhäsion nicht berücksichtigt werden. Der Würfel wird nun soweit gesenkt, bis seine Deckfläche mit dem Flüssigkeitsspiegel in derselben Ebene liegt.
Ermittle, um wieviel Zentimeter er zu diesem Zweck insgesamt gesenkt werden muß!

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3{,}2$ cm, $a = 5{,}6$ cm und $h_a = 4{,}4$ cm!
Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, a die Länge der Seite BC und h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe des Dreiecks. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist, wobei die anzufertigende Zeichnung mit verwendet werden darf!

4. Beweise folgende Sätze:
a) Wenn S der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC ist, dann haben die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt.
b) Wenn S ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC ist, für den die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt haben, dann ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.

Olympiadeklasse 8

1. Ermittle sämtliche Lösungen des nachstehenden Kryptogramms, d. h. sämtliche Möglichkeiten, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß alle waagerecht und senkrecht stehenden Gleichungen erfüllt sind! Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.

$$\begin{array}{ccccc} ABC & - & DE & = & AFG \\ : & & - & & - \\ H & \cdot & HA & = & CH \\ \hline BJ & + & AJ & = & AAC \end{array}$$

(*Hinweis:* Die Aufgabe ist nicht nur durch Raten zu lösen, wie häufig in Rätselzeitschriften; sondern es sind Überlegungen zur Vollständigkeit und Richtigkeit der Lösung anzugeben.)

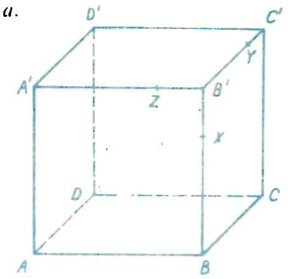
2. Ermittle alle geordneten Paare (x, y) natürlicher Zahlen x, y, für die die Gleichung
$$13x + 5y = 82$$
gilt!

3. Gegeben sei ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und dem Mittelpunkt M. Um M ist ein Kreis k_2 derart zu zeichnen, daß die zwischen k_1 und k_2 gelegene Kreisringfläche einen dreimal so großen Inhalt hat wie die Fläche des Kreises k_1.
Berechne den Radius r_2 des Kreises k_2!

4. Für zwei Sehnen AB und BC $(A \neq C)$ eines Kreises k gelte $\overline{AB} = \overline{BC}$. D sei ein beliebiger Punkt von k, der auf der anderen Seite der Geraden durch A und C liegt, wie B.
Es ist zu beweisen, daß die Gerade durch D und B den Winkel $\sphericalangle ADC$ halbiert!

Olympiadeklasse 9

1. Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten $A, B, C, D, A', B', C', D'$ und der Kantenlänge a.



Auf BB' liege ein Punkt X, auf $B'C'$ ein Punkt Y und auf $A'B'$ ein Punkt Z, wobei diese Punkte beliebig gelegen, aber von B' verschieden sein sollen.
Wir betrachten dann für jede solche Wahl X, Y, Z den geschlossenen Streckenzug $XYZX$. Als Länge dieses Streckenzuges bezeichnet man die Summe der Längen $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ und $\overline{ZX}$.
a) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit größter Länge gibt!
b) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit kleinster Länge gibt!
c) Falls es bei a) oder b) einen solchen Streckenzug gibt, so ermitteln Sie seine Länge! (Bild 9/1)

2. Peter behauptet, man könne bei einem beliebig gegebenen Dreieck ABC, in dem D der Mittelpunkt der Seite AB ist, allein durch Längenvergleich der Seitenhalbierenden CD und der halben Seite AD feststellen, ob das Dreieck bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel hat.
Untersuchen Sie, ob Peters Behauptung richtig ist!

3. An eine im dekadischen System geschriebene natürliche Zahl z werden folgende Forderungen gestellt:
(1) Die Quersumme von z soll 11 betragen.
(2) Die Ziffern von z sollen paarweise verschieden sein.
(3) Die Zahl z soll durch 11 teilbar sein.
Ermitteln Sie alle Zahlen z, die die Forderungen (1) bis (3) erfüllen!

4. Bettina und Axel sind beide Briefmarkensammler, nun schlägt Axel Bettina folgendes Spiel um Briefmarken vor:
Jeder schreibt, unabhängig von dem anderen, (ohne dem anderen Einsicht zu gewähren) genau eine der drei Zahlen 1, 2 oder 3 auf einen Zettel. Danach werden die Zettel aufgedeckt. Ist nun die von Axel notierte Zahl kleiner oder gleich der von Bettina notierten, so wird die von Axel notierte Zahl von der von Bettina notierten Zahl subtrahiert, in den anderen Fällen werden die Zahlen addiert. Ist die so entstandene Zahl kleiner als drei, so darf sich Axel so viele Briefmarken von Bettina nehmen, wie diese Zahl angibt, in den anderen Fällen darf sich entsprechend Bettina von Axel Briefmarken nehmen. Nachdem sich Bettina diese komplizierten Regeln durchdacht hat, sagt sie zu Axel, daß dieses Spiel keinen Zweck hätte.
Es könne nämlich jeder von beiden so spielen, daß er mit Sicherheit nicht verliert. Das würde aber bedeuten, daß keiner vom anderen eine Marke nehmen würde.
Ist diese Meinung Bettinas richtig?

Olympiadeklasse 10

1. Jemand wählt eine natürliche Zahl n; addiert die natürlichen Zahlen von 1 bis n zueinander und erhält als Summe $1 + 2 + \ldots + n$ eine dreistellige Zahl, die (wie z. B. 777) aus lauter gleichen Ziffern besteht.
Man ermittle alle Möglichkeiten, eine Zahl n zu wählen, für die das zutrifft.

2. Ein VEB hat für das Jahr 1975 die Produktion von 10000 Stück seines Haupterzeugnisses vorgesehen. Weiterhin ist geplant, die für die Jahre 1976, 1977, 1978, 1979 vorgesehenen Produktionszahlen so zu steigern, daß die für 1979 vorgesehene Zahl den vierfachen Wert der Zahl für 1975 erreicht. Dabei soll die prozentuale Steigerung von Jahr zu Jahr alle vier Male gleich sein.
a) Wieviel Prozent beträgt bei gerundeter Rechnung, d. h. ohne Berücksichtigung der Stellen nach dem Komma, dieser jährliche Zuwachs?
b) Geben Sie die (entsprechend gerundeten) Produktionsziffern für die Jahre 1976, 1977, 1978 und 1979 an!

3. In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ und $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ gegeben.
a) Beweisen Sie, daß es möglich ist, die Koordinaten von vier Punkten P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ so anzugeben, daß für die Menge dieser vier Punkte die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Die Längen aller Strecken AP_i und BP_i sind ganzzahlig.
(2) Es gibt keine Gerade, auf der drei der Punkte P_i liegen.
b) Beweisen Sie, daß es keine Menge aus mehr als vier Punkten P_i mit den Eigenschaften (1), (2) gibt!

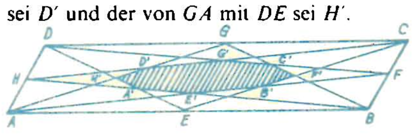
4. In einem konvexen n-Eck $A_1A_2 \ldots A_n$ soll der Innenwinkel bei A_1 die Größe 120 haben, und die Innenwinkel an den Ecken A_2, A_3, ..., A_n sollen in dieser Reihenfolge jeweils um 5° größer sein als der vorhergehende Winkel, also 125°, 130, ... betragen.
Man zeige, daß für $n \neq 9$ ein solches n-Eck nicht existieren kann.

Olympiadeklasse 11/12

1. Am Ende einer größeren Abendgesellschaft zeigte es sich, daß keiner der anwesenden Herren mit weniger als 10 und keiner mit mehr als 12 Damen getanzt hatte, während keine der Damen mit weniger als 12 und auch keine mit mehr als 14 Herren zum Tanz gegangen war. Keiner der Herren hatte dieselbe Dame mehr als einmal zum Tanz geführt. Hätte jeder der Herren mit jeder Dame genau einmal getanzt, so hätten 480 Tänze stattfinden müssen. Dabei zählt jeder Tanz, den ein Herr mit einer Dame ausführt, als ein Tanz. (Wenn z. B. genau 15 Paare gleichzeitig tanzen, so soll das als 15 Tänze und nicht als 1 Tanz verstanden werden.)
a) Man ermittle alle mit diesen Bedingungen vereinbaren Möglichkeiten für die Anzahlen der Damen und Herren, die insgesamt anwesend waren.
b) Man gebe (am einfachsten in der Form eines Rechteckschemas) eine der bei den gefundenen Anzahlen möglichen Zusammenstellungen zu Tanzpaaren an, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

2. Man beweise: Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen m und n durch 7 teilbar ist, so ist die Summe $m^7 + n^7$ durch 49 teilbar.

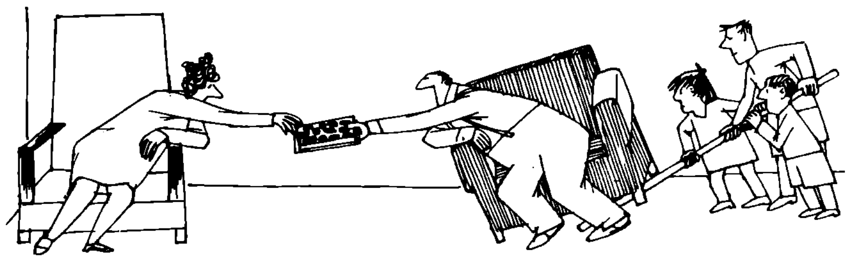
3. In einem beliebigen Parallelogramm $ABCD$ seien E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD bzw. DA. Der Schnittpunkt von DE mit HB sei A', der von HB mit AF sei E', der von AF mit EC sei B', der von EC mit GB sei F', der von GB mit FD sei C', der von FD mit CH sei G', der von CH mit GA sei D' und der von GA mit DE sei H'.



Man beweise, daß der Flächeninhalt des Achtecks $A'E'B'F'C'G'D'H'$ ein Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms $ABCD$ beträgt.

4. Für alle reellen Wertetripel (a, b, c) ist zu untersuchen, ob das Gleichungssystem
$xy^2z^3 = a$ (1) $x^2y^3z = b$ (2) $x^3yz^2 = c$ (3)
1) keine, 2) genau eine, 3) genau zwei, 4) mehr als zwei, jedoch endlich viele, 5) unendlich viele
reelle Lösungen (x, y, z) hat.
Ferner sind sämtliche vorhandenen Lösungen anzugeben.

alpha-Wettbewerb Physik



Letzter Einsendetermin: 1. Oktober 1974

Liebe *alpha*-Leser!
In diesem Heft findet Ihr genau wie im Vorjahr Wettbewerbsaufgaben zur Physik. An der Lösung der Probleme kann sich jeder beteiligen. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden (Richtlinie: Schuljahr 73/74). Schüler der Klassenstufe 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit P 10/12 gekennzeichnet sind. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm mal 297 mm). Am Kopf der Lösung müssen stehen: Name, Vorname, Adresse der Schule und Name des Physiklehrers, der ihn im Schuljahr 1973/74 unterrichtete. Die besten Lösungen werden von der Redaktion prämiiert. Die Namen der aktivsten Teilnehmer werden veröffentlicht. Jeder Einsender erhält eine Antwortkarte, die für den *alpha*-Wettbewerb 1974/75 gewertet wird. Die Lösungen sind einzusenden an:

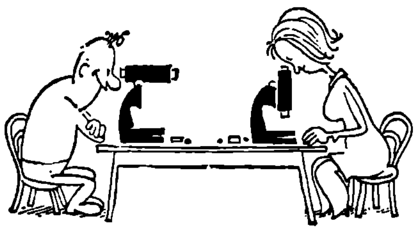
Redaktion alpha
7027 Leipzig
Postfach 14
Kennwort auf Briefumschlag:
Physik-Wettbewerb 1974

P6 ■ 1234 Das Gewicht einer Metallkugel dehnt eine Schraubenfeder um 13,5 cm. Hängt man an die gleiche Feder ein mit Wasser gefülltes Überlaufgefäß, dann beträgt die Längenänderung 12,5 cm. Legt man die Kugel in das Wasser und hängt das Überlaufgefäß an die Feder, nachdem das verdrängte Wasser abgeflossen ist, dann wird die Feder um 21 cm gedehnt. Aus welchem Stoff könnte die Kugel bestehen?

P6 ■ 1235 Ein Kraftfahrer durchfährt den ersten Teil, $\overline{AC}$, einer Strecke $\overline{AB}$ mit der Geschwindigkeit $v_1 = 50\frac{\text{km}}{\text{h}}$, den zweiten Teil, $\overline{CB}$, mit $v_2 = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Die gesamte Fahrzeit beträgt 3 Stunden. Das Ziel könnte in der gleichen Zeit erreicht werden, wenn die ganze Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $v_3 = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$ durchfahren würde. Wie lang sind die Teilstrecken $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$?

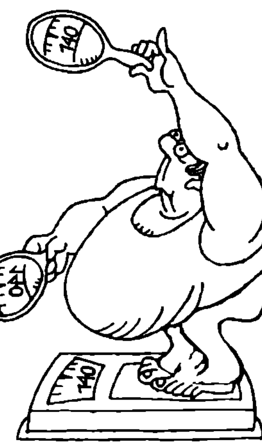
P7 ■ 1236 Wie dick müssen die Wände eines stählernen Hohlzylinders mit der äußeren Länge 50 cm und dem Durchmesser 20 cm sein, damit er in Wasser schwebt? Welche Arbeit muß verrichtet werden, um den Zylinder aufrecht vollständig aus dem Wasser zu heben? (Das Volumen des Stahls läßt sich näherungsweise aus der Zylinderoberfläche und der Wanddicke berechnen.)

P7 ■ 1237 Durch ein Kellerfenster sollen Kohlen in einen Keller geschüttet werden. Die Fensteröffnung verläuft schräg nach unten durch die dicke Mauer und ist 1,5 m lang. Wie groß muß die Höhe dieser geneigten Ebene mindestens sein, damit die Kohlen rutschen? ($\mu = 0,5$)

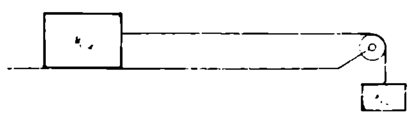


P8 ■ 1238 Das Gewicht eines an eine Feder gehängten Körpers dehnt diese um 2 cm. Taucht man den Körper in Wasser, dann beträgt die Dehnung nur noch 1,2 cm. Wie groß ist die Wichte des Stoffes, aus dem der Körper besteht?

P8 ■ 1239 Zwei Wassermengen mit den Temperaturen $\vartheta_1 = 20\ ^\circ\text{C}$ und $\vartheta_2 = 80\ ^\circ\text{C}$ haben die zugehörigen Rauminhalte $V_1 = 200$ cm^3 und $V_2 = 300$ cm^3. Wie groß ist das Gesamtvolumen nach dem Mischen, wenn keine Wärme nach außen abgegeben wird?



P9 ■ Ein Körper K_1 mit dem Gewicht $G = 100$ N befindet sich auf einer waagerechten Fläche. Er ist über eine Rolle mit einem zweiten Körper K_2 verbunden, dessen Masse 20 g beträgt.



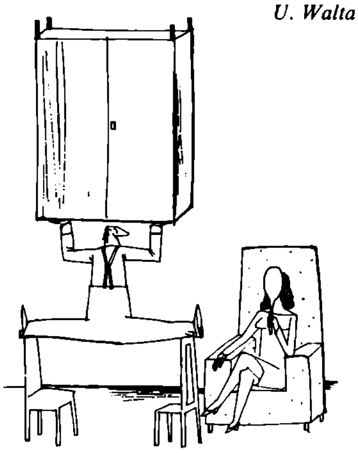
Das System wird zunächst in Ruhe gehalten. Wie groß ist die Geschwindigkeit der beiden Körper zwei Sekunden nach dem Loslassen
a) ohne Reibung?
b) bei Berücksichtigung der Reibung zwischen dem Körper K_1 und der Platte? ($\mu = 0,1$)

P9 ■ 1241 Die Kanten eines Würfels bestehen aus Draht mit einem Widerstand von je 1 Ohm. Wie groß ist der Widerstand zwischen zwei gegenüberliegenden Ecken des Würfels?

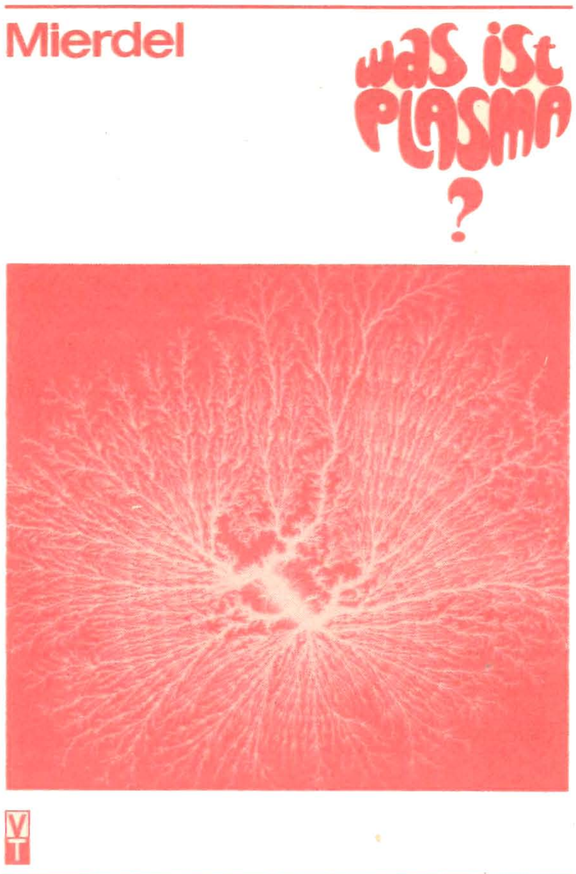
P10/12 ■ 1242 Wie weit läßt sich eine Schraubenfeder der Länge 18 cm bei einer Spannarbeit von 2 Nm auseinanderziehen, wenn beim Anhängen eines Körpers der Masse $m = 0,1$ kg die Schwingungszeit $T = 0,1$ s beträgt?

P10/12 ■ 1243 Ein Widerstand von 10 Ω wird mit einem zweiten zuerst in Reihe dann parallel an die gleiche Spannungsquelle geschaltet. Die Leistung wächst beim Umschalten auf das Achtfache.
a) Wie groß ist der zweite Widerstand?
b) Auf das Wievielfache wächst die Leistung mindestens, wenn man zwei vorher in Reihe geschaltete Widerstände parallel schaltet?

U. Walta



Unser Buchtip



152 Seiten, Leineneinband, zahlreiche farbige Abb. und graphische Darstellungen
Preis 9,50 M
VEB Verlag Technik Berlin

Aus dem Physikunterricht ist uns bekannt, daß alle uns umgebenden Stoffe in die drei bekannten Aggregatzustände eingeteilt werden.
Seit knapp zwei Jahrzehnten aber kennt die moderne Physik einen vierten Aggregatzustand, den sie auf Grund seines eigentümlichen Verhaltens als *Plasma* bezeichnet. Das *Plasma* begründet sogar einen selbständigen Zweig innerhalb der Physik.
Schon im Altertum war man der Auffassung gewesen, daß die Welt aus den vier Elementen Erde, Wasser, Luft und Feuer besteht. Heute, da die Menschheit das kosmische Zeitalter zu betreten begonnen hat, können wir sagen, den ersten der drei genannten „Elemente“ entsprechen der feste, flüssige und gasförmige Zustand der Stoffe, und dem vierten, dem Feuer, entspricht das im kosmischen Raum vorherrschende *Plasma*.
Der Verfasser des Buches führt den Leser in zahlreichen bildhaften Darstellungen aus dem täglichen Leben bis zu den komplizierten Vorgängen im ionisierten Gas.
Ehe man jedoch das Plasma technisch nutzen kann, müssen die Gesetzmäßigkeiten seiner Natur erklärt sein. Deshalb muß sich der Leser zuerst mit den theoretischen Grundlagen auseinandersetzen. Erst dann kann er die Anwendungsgebiete wie Lichttechnik, Schweißen und Schneiden, Schmelzen, Umformen und Steuern elektrischer Leistungen, Energieerzeugung, populär dargestellt, kennenlernen.
Die exakte Beweisführung erfolgt mit Hilfe der Mathematik. Wie bedeutungsvoll für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt die theoretischen und praktischen Arbeiten mit dem *Plasma* sind, beweist allein schon die Tatsache, daß sich um die Beherrschung und Nutzbarmachung der thermonuklearen Reaktion im MHD-Generator (besonders in der Sowjetunion) Physiker, Chemiker, Energetiker, Ingenieure und Mathematiker gemeinsam bemühen.

Prof. Dr. phil. habil. *Georg Mierdel*, 1899 in Rathenow geboren, beschäftigte sich zeit seines Lebens mit Theorie und Praxis der

Elektrotechnik, mit der Atomtheorie, Hochvakuumtechnik und Plasmaphysik.
In den fünfziger Jahren war er als Stellv. Direktor des Instituts für Gasentladung der DAW in Greifswald und zuletzt als Professor mit Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Dresden tätig.
Für sein wissenschaftliches Gesamtwerk, das auch außerhalb der Grenzen der Deutschen Demokratischen Republik bekannt ist, und für sein verdienstvolles Wirken als Hochschullehrer wurde Prof. Dr. Mierdel mit dem Nationalpreis sowie mit dem Vaterländischen Verdienstorden geehrt.

alpha-Wettbewerb 1973/74

Nachtrag

Folgende Teilnehmer des *alpha*-Wettbewerbs erhielten das

Abzeichen in Gold

für

5-jährige Teilnahme
Rita Koch, Schmalkalden
4-jährige Teilnahme
Gisbert Schultz, Dessau
3-jährige Teilnahme
Heiko Tennert, Döbeln; Ursula Garnitz, Zeuthen; Doris Jeschner, Eisleben; Bernhard Tschada, Sondershausen; Michael Lätsch, Reichenbach (O/L); Kornelia Poike, Neukirch; Bianca-Andrea Herrmann, Zahna; Jutta Scharfenberg, Breitungen; Gabriele Schmalz, Breitungen; Norbert Heymel, Volkmar Ilgen, Thomas Fuchs, alle Fambach; Marina Nattermann, Mittelstille; Thomas Storandt, Joachim Bickel, Susanne Schmidt, Bettina Göbel, Marina Peter, alle Schmalkalden; Frank Holland-Moritz, Harald Bickel, Hendrik Martius, alle Oberschönau; Christine Hense, Potsdam; Karin Kusche, Kerstin Menz, Andrea Sänger, Bettina Hoffmann, Waldemar Olk, Claudia Beyer, Eva Baumann, Gerhard Gießler, Angelika Horn, Michael Recknagel, Ulli Kiehm, Petra Rothämel, Eberhard Usbeck, Gabi Huhn, Marina Wahl, Edith Franke, Heiko Vaupel, Inge Pfannschmidt, Hans-Dieter Arends, Rainer König, Kerstin Müller, Martina Henkel, Blanka Paul, Ursula Thomas, Margit Mangold, Silvia Wolff, Brigitte Holland-Moritz, Andrea Recknagel, Carola Voigt, alle Steinbach-Hallenberg; Bernd Haase, Andreas Heller, Sybille Baumgart, alle Löderburg; Hubert Steinmetz, Eva Marx, Sabine Range, Silke Kranhold, Arnd Halecker, Karl-Heinz Wiesemann, Elke Halecker, Astrid Surber, Silke Zimmermann, Karin Bernd, Jörg Wachsmann, alle Clingen.

alpha -Wettbewerb Chemie

Letzter Einsendetermin: 1. Oktober 1974

Liebe *alpha*-Leser!
In diesem Heft findet Ihr zum ersten Mal mathematikintensive Wettbewerbsaufgaben zur Chemie. An der Lösung der Probleme kann sich jeder beteiligen. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe zu lösen und einzusenden (Richtlinie: Schuljahr 1973/74). Schüler der Klassenstufe 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, die mit Ch 10/12 gekennzeichnet sind. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm mal 297 mm).
Am Kopf der Lösung müssen stehen: Name, Vorname, Adresse der Schule, Klasse und Name des Chemielehrers, der im Schuljahr 1973/74 unterrichtete. Die besten Lösungen werden prämiert. Jeder Einsender erhält eine Antwortkarte, die für den *alpha*-Wettbewerb 1974/75 gewertet wird. Die Lösungen sind einzusenden an

Redaktion alpha
7027 Leipzig
PSF 14
Kennwort auf Briefumschlag:
Chemie-Wettbewerb 1974

Ch 7 ▪ 1244 Ein Kohlenzug, bestehend aus 36 Waggons, die mit jeweils 25 t Braunkohlenbriketts beladen sind, transportiert in diesen Briketts 12 % Wasser. Wieviel m^3 Wasser sind das?

Ch 7 ▪ 1245 Zwei verschiedene Salze werden in jeweils 100 g Wasser gelöst. Die Versuche ergeben, daß ihre Löslichkeit unterschiedlich von der Temperatur abhängig ist. Verdeutliche die Meßergebnisse als Diagramm!

Bei 0 °C lösen sich	20 °C	50 °C	100 °C
Salz 1 28,15 g (KCl)	34,35 g	43,1 g	56,2 g
Salz 2 35,5 g (Kochsalz)	35,85 g	36,72 g	39,2 g

Ch 8 ▪ 1246 Im Kalkschachtofen wird kontinuierlich aus Kalkstein Branntkalk gewonnen. Der Kalkstein besteht zu 80 % aus $CaCO_3$. Wieviel Branntkalk kann aus jeder Tonne Kalkstein maximal gewonnen werden? Wieviel m^3 CO_2 entstehen beim Brennprozeß aus dem Kalkstein? (Normzustand)

Ch 8 ▪ 1247 Bei einer Exkursion in eine chemische Anlage wurde unter anderem ein zylindrischer Turm besichtigt. Der Betreuer sagte scherzhaft, als die Frage nach dem Rauminhalt gestellt wurde:
„Ich bin mit 20 Schritten von 0,628 m Länge um den Behälter geschritten und hielt dabei mit dem Arm einen Abstand von 0,5 m. Die Anlage hat eine Höhe von 12 m und eine Wandstärke von 10 cm".

Ch 9 ▪ 1248 Bei Experimenten an Tieren wurde das ausgeatmete CO_2 durch Kalkwasser gebunden. Wieviel l CO_2 wurden ausgeatmet, wenn 15 g $CaCO_3$ abgeschieden wurden?

Ch 9 ▪ 1249 Als fotografisches Unterbrecherbad soll 1 l 2%ige Essiglösung aus 80%iger Essigessenz hergestellt werden. Wieviel H_2O und wieviel Essenz sind abzumessen?

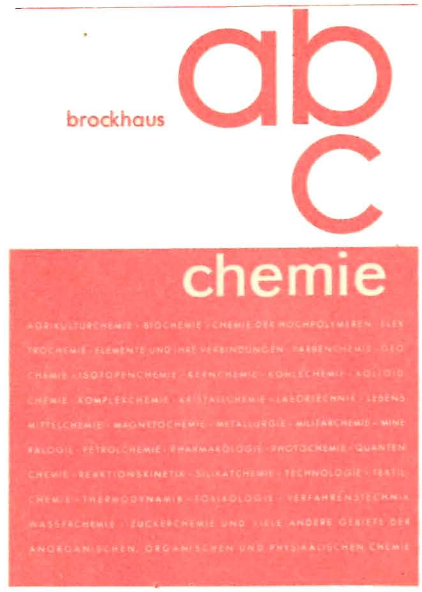
Ch 10/12 ▪ 1250 Wieviel t SO_3 können theoretisch aus 1 360 t Anhydrid gewonnen werden?

Ch 10/12 ▪ 1251 Wieviel m^3 CO (unter Normalbedingungen) werden bei vollständiger Umsetzung für die Gewinnung von 32 t Methanol benötigt? *H. Pelka*

Brockhaus ABC Chemie

VEB F. A. Brockhaus Verlag Leipzig
2 Bände *Preis: 36,–M*

Das umfassende Nachschlagewerk enthält in zwei Bänden auf etwa 1600 Seiten rund 12 000 Stichwörter aus den Gebieten der organischen, anorganischen und physikalischen Chemie mit allen Spezial- und Nebengebieten. Das Werk behandelt ausführlich das allgemeine chemische Grundwissen, daneben vermittelt es die neuesten Erkenntnisse auf theoretischem Gebiet und gibt Auskunft über die modernsten technologischen Verfahren. Zahlreiche Strukturformeln, Tabellen und Übersichten dienen einer raschen Orientierung. 800 Abbildungen im Text und auf 40 schwarzweißen und farbigen Kunsttafeln veranschaulichen die Ausführungen.



„Aus Ihrem Wagen tropft Benzin!"

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

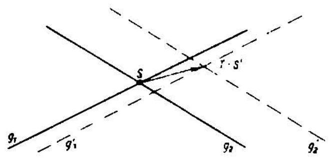
Lösungen

Kreisolympiade

Klassenstufe 5

1. Da die Anzahl der Hechte ein Fünftel der Anzahl der Plötzen betrug, wurden genau 25 Hechte gefangen. Laut Aufgabe waren im Fang doppelt soviel Barsche wie Hechte, also genau 50 Barsche. Wegen $125+25+50=200$ wurden mithin insgesamt 200 Fische der genannten Arten gefangen.

2. Als vollständige Lösung gilt jede Zeichnung mit einer möglichen Lage der beiden Geraden g_1, g_2, der Punkte S und T sowie der beiden Bildgeraden $g'_1 \parallel g_1$ und $g'_2 \parallel g_2$, die einander im Punkt T schneiden.

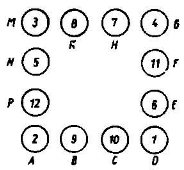


3. a) Die Abb. zeigt ein Beispiel dafür, wie die geforderte Eintragung lauten kann.

b) Es liege eine Eintragung vor und es seien $a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, p$ die in dieser Reihenfolge in den Feldern A, B, C, D, E, F, G, H, K, M, N, P stehenden Zahlen. Ferner sei

$s_1=a+b+c+d$, $\quad s_2=d+e+f+g$,
$s_3=g+h+k+m$, $\quad s_4=m+n+p+a$.

Dann gilt laut Aufgabe $s_1=s_2=s_3=s_4=22$. Daraus folgt $s_1+s_2+s_3+s_4=88$.



Die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 12 beträgt 78. Sie ist also um 10 kleiner als die Summe $s_1+s_2+s_3+s_4$. Nun werden aber die in den Eckfeldern A, D, G, M stehenden Zahlen bei der Bildung der vier Summen s_1, s_2, s_3, s_4 je zweimal berücksichtigt. Daher muß die Summe dieser Zahlen 10 betragen. Wären nun a, g, d, m nicht die Zahlen 1, 2, 3, 4, so wäre mindestens eine von ihnen größer als 4, und die anderen drei wären nicht kleiner als 1, 2 bzw. 3, also wäre ihre Summe größer als 10. Daher müssen bei jeder richtigen Eintragung der genannten Art in den Eckfeldern die Zahlen 1, 2, 3, 4 und keine anderen stehen.

4. Die unterste Schicht besteht aus 9 Reihen, von denen die erste genau 1 Büchse und jede weitere genau eine Büchse mehr als die unmittelbar vorhergehende hat. Die neunte Reihe enthält danach genau 9 Büchsen. Folglich ist die Zahl aller Büchsen dieser Schicht gleich der Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 9, also gleich 45. Die unmittelbar darüberstehende Schicht von Konservenbüchsen enthält genau eine Reihe, nämlich die mit 9 Büchsen, weniger. Entsprechendes gilt auch für alle übrigen Schichten. Somit erhält man:

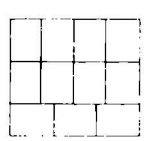
Erste Schicht:	45
zweite Schicht:	$36=45-9$
dritte Schicht:	$28=36-8$
vierte Schicht:	$21=28-7$
fünfte Schicht:	$15=21-6$
sechste Schicht:	$10=15-5$
siebente Schicht:	$6=10-4$
achte Schicht:	$3=6-3$
neunte Schicht:	$1=3-2$
insgesamt	165

Für den Bau der „Pyramide" wurden insgesamt 165 Konservenbüchsen verwendet.

Klassenstufe 6

1. Die gesamte Glasscheibe hat wegen $24 \cdot 22=528$ einen Flächeninhalt von 528 cm^2. Jede der kleinen Glasscheiben hat wegen $6 \cdot 8=48$ einen Flächeninhalt von 48 cm^2. Wegen $528:48=11$ lassen sich also höchstens 11 derartige kleine Scheiben aus der großen schneiden.

Daß dies auch tatsächlich möglich ist, zeigt die Abb. (Der Schüler braucht in seiner Zeichnung keine Bemaßung anzugeben.)



2. Jeder der Würfel hat genau 6 Flächen. Von ihnen ist bei jedem die Fläche, auf der er steht, nicht sichtbar. Außerdem verdeckt der zweitgrößte Würfel mit seiner Standfläche einen gleichgroßen Teil der obersten Fläche des größten Würfels. Entsprechendes gilt für den drittgrößten und für den kleinsten der vier Würfel. Weitere nicht sichtbare Teilflächen kommen nicht vor.

Daher erhält man den gesuchten Gesamtflächeninhalt, indem man von der Summe der Flächeninhalte von jeweils 5 Flächen der vier Würfel die Summe der Flächeninhalte je einer Fläche des zweitgrößten, des drittgrößten und des kleinsten Würfels subtrahiert.

Wegen $5(24^2+12^2+6^2+3^2)-(12^2+6^2+3^2)=3\,636$ beträgt der gesuchte Gesamtflächeninhalt der sichtbaren Oberflächenteile der vier Würfel 3 636 cm^2.

3. Es sei x die Anzahl aller Schüler dieser Klasse. Dann ist x durch 9 teilbar, also wegen $10<x<40$ eine der Zahlen 18; 27; 36. Ferner ist x auch durch 6 teilbar, daher entfällt 27. Für die beiden verbleibenden Möglichkeiten zeigt die nachstehende Tabelle in ihrer 2. bis 4. Spalte die aus den Angaben folgenden Anzahlen von Schülern mit den Noten 1; 2; 4. In der 5. Spalte stehen alle mit den Angaben vereinbaren Anzahlen von Schülern mit der Note „3". Klaus konnte die gesuchte Anzahl also nicht eindeutig ermitteln.

Klassenstärke	Anz. d. Schüler m. d. Note			
	1	2	4	3
18	3	6	2	7
36	6	12	4	14

4. Die Summe der für die Zeichen einzutragenden Ziffern ist mindestens 0 und höchstens 18. Die Quersumme der Zahl ohne diese Ziffern beträgt 10. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist daher mindestens 10 und höchstens 28.

Andererseits gilt: Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Daher entspricht eine Eintragung genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn die Quersumme der entstehenden Zahl entweder 18 oder 27 beträgt, also genau dann, wenn die Summe der beiden einzutragenden Ziffern gleich 8 oder gleich 17 ist.

Folglich gibt es genau die folgenden den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden durch 9 teilbaren Zahlen:

5 000 805, 5 010 705, 5 020 605, 5 030 505, 5 040 405, 5 050 305, 5 060 205, 5 070 105, 5 080 005, 5 080 905, 5 090 805.

Klassenstufe 7

1. Aus (3) folgt, daß die Summe aus der Anzahl der Schachspieler und der Anzahl der Judosportler 4 beträgt. Von allen möglichen Zerlegungen der Zahl 4 in zwei ganzzahlige Summanden erfüllt nur diejenige (5), nach der die Anzahl der Schachspieler 3 und die der Judosportler 1 ist. Daraus folgt nach (4) daß genau 6 Schüler Mitglied der Sektion Tischtennis sind. Nach (1) betreiben mindestens 19 Schüler Leichtathletik und nach (2) mindestens 7 Schüler Schwimmen. Da

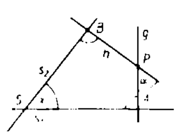
für diese beiden Sportarten nur noch genau 26 Schüler in Betracht kommen, sind 19 und 7 die einzig möglichen Anzahlen. Von den 36 Schülern betreiben mithin genau 19 Leichtathletik, genau 7 Schwimmen, genau 6 Tischtennis, genau 3 Schach, und genau 1 Schüler betreibt Judo.

2. Erfüllen a, b, c die drei genannten Bedingungen über den ggT, so ist a durch 4 und durch 6, also durch das kgV dieser Zahlen d. h. durch 12 teilbar. Ferner ist dann b durch 4 und durch 14, also durch das kgV dieser Zahlen, d. h. durch 28 teilbar. Ebenso ist c durch 6 und 14, also durch 42 teilbar.
Andererseits erfüllt die Wahl von (1) $a=12$, $b=28$, $c=42$ alle drei ggT-Bedingungen. Daher ist die zweite Frage der Aufgabe mit Ja und der Angabe (1) zu beantworten.
Multipliziert man a in (1) mit einer zu b und c teilerfremden Zahl $z>1$ (z. B. mit $z=5$), so erhält man eine andere Wahl dreier Zahlen (im Beispiel 60, 28, 42), die ebenfalls alle drei ggT-Bedingungen erfüllt. Daher ist auch die erste Frage der Aufgabe mit Ja zu beantworten.

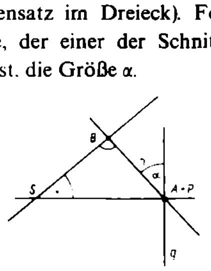
3. Es sei A der Schnittpunkt von g mit dem einen Schenkel s_1 des gegebenen Winkels, und es sei B der Schnittpunkt von h mit dem anderen Schenkel s_2 des gegebenen Winkels, derart, daß sich g, s_1 in A und ebenso h, s_2 in B jeweils unter 90° schneiden. Dann ist $g \nparallel h$. Folglich existiert ein Schnittpunkt P von g und h. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:
Fall 1: P liegt innerhalb des gegebenen Winkels. Dann ist $SAPB$ ein konvexes Viereck. Folglich gilt nach dem Satz über die Winkelsumme im Viereck sowie wegen

$$\sphericalangle SBP = \sphericalangle SAP = 90^\circ:$$
$$\sphericalangle BPA = 180^\circ - \sphericalangle ASB = 180^\circ - \alpha,$$

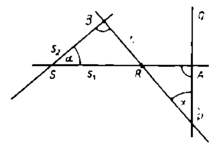
und demnach hat jeder seiner Nebenwinkel, also einer der Schnittwinkel von g und h, die Größe α.



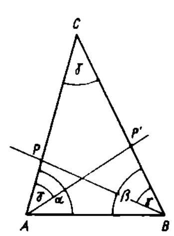
Fall 2: P fällt mit einem der Punkte A, B zusammen, etwa mit A. Dann wird der rechte Winkel, den g mit s_1 bildet, durch h in zwei Winkel zerlegt, deren einer die Größe $\sphericalangle SAB = 180^\circ - \alpha$ hat (nach dem Winkelsummensatz im Dreieck). Folglich hat der andere, der einer der Schnittwinkel von g mit h ist, die Größe α.



Fall 3: P liege außerhalb des gegebenen Winkels, o. B. d. A. nicht auf derselben Seite von s_1 wie B. Der Schnittpunkt von h mit s_1 sei R. Dann gilt:
$\sphericalangle SRB = 180^\circ - \alpha$ (Winkelsummensatz im Dreieck) sowie $\sphericalangle SRB = \sphericalangle PRA$ (Scheitelwinkel) und damit
$\sphericalangle RPA = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$.
Da es keine weiteren Fälle gibt, ist der Satz damit bewiesen!



4. (I) Angenommen, ein Punkt P auf AC habe die verlangte Eigenschaft. Nach dem Außenwinkelsatz für $\triangle BCP$ folgt dann
$\sphericalangle CBP = \sphericalangle BPA - \sphericalangle BCP = \gamma$.
(II) Daher entspricht ein Punkt P auf AC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(1) Man trägt in B an BC nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der A liegt, den Winkel der Größe γ an.
(2) Schneidet sein freier Schenkel die Seite AC, so sei P der Schnittpunkt.
(III) Beweis, daß jeder so konstruierter Punkt P den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion (2) liegt P auf AC. Ferner ist nach dem Außenwinkelsatz und nach Konstruktion (1) auch
$\sphericalangle BPA = \sphericalangle BCP + \sphericalangle CBP = 2\gamma$.
(IV) Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Wegen $\gamma < \beta$ hat der freie Schenkel des in (1) konstruierten Winkels gemeinsame Punkte mit dem Innern des Dreiecks ABC und schneidet die Seite AC zwischen A und C;
Konstruktionsschritt (2) ergibt folglich genau einen Punkt P auf AC, der die verlangte Eigenschaft hat.
Vertauscht man in den Überlegungen (I) bis (IV) überall A mit B, so erhält man: Es gibt genau einen (weiteren) Punkt P' auf BC, der die verlangte Eigenschaft hat. Somit gibt es stets genau 2 derartige Punkte.



Klassenstufe 8

1. Angenommen, es liege eine Eintragung der verlangten Art vor. Dann folgt: Das Produkt aus abc und a ist dreistellig, das aus abc und b vierstellig. Also gilt $a<b$. Wäre nun $a \geqq 3$, so wäre daher $b \geqq 4$ und somit das Produkt aus abc und a vierstellig, im Widerspruch zur Aufgabe. Das Produkt aus abc und a endigt auf a. Wäre $a=1$, so folgte, daß dieses Produkt auf c endigen würde, im Widerspruch zu $a \neq c$. Daher und weil a als Anfangsziffer von abc nicht 0 ist, gilt $a=2$.
Da somit das Doppelte der Zahl abc auf 2 endigt, muß auch das Doppelte von c auf 2 endigen. Das gilt nur für $c=1$ oder $c=6$. Da das Produkt aus abc und c vierstellig ist, ist $c \neq 1$. Also gilt $c=6$.
Da $246 \cdot 4 = 984$ dreistellig ist, das Produkt aus abc und b aber vierstellig sein soll, gilt $b \neq 4$. Unter den hiernach für b verbleibenden Möglichkeiten 1, 3, 5, 7, 8, 9 erfüllt nur die Zahl 8 die Bedingung, daß das Produkt der auf 6 endenden Zahl mit b auf b endigt. Daher gilt $b=8$.
Somit kann nur die Eintragung

$$\begin{array}{r} \underline{286 \cdot 826} \\ 2288 \\ 572 \\ \underline{1716} \\ 236236 \end{array}$$

den Anforderungen genügen. Da sie eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe darstellt und da $a=2$, $b=8$, $c=6$ paarweise verschieden sind, erfüllt sie die Bedingungen der Aufgabe.

2. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, M sei der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden, d. h. der Mittelpunkt seines Inkreises, und E, F seien die Fußpunkte der Lote von M auf die Seiten BC, CD. Dann hat das Viereck $CFME$ rechte Winkel bei E, C und F und ist daher wegen $\overline{ME} = \overline{MF} = \varrho$ ein Quadrat mit der Seitenlänge ϱ.
Die Halbierende des Winkels BAC geht durch M; es gilt $\sphericalangle FMA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus C durch F und zweitens auf dem freien Schenkel eines in M an MF nach der Seite der Geraden durch M und E, auf der C nicht liegt, angetragenen Winkels der Größe $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Punkt B liegt erstens auf dem Strahl aus C durch E und zweitens auf dem freien Schenkel eines in A an AC nach der Seite der Geraden durch A und C, auf der E liegt, angetragenen Winkels der Größe α.
(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(1) Wir konstruieren das Quadrat $CFME$ mit der Seitenlänge ϱ.
(2) Wir zeichnen den Strahl C durch F.
(3) Wir tragen in M an MF einen Winkel der Größe $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ nach der Seite der Geraden durch M und F an, auf der C nicht liegt. Schneidet sein freier Schenkel den Strahl aus C durch F, so sei der Schnittpunkt A genannt.
(4) Wir tragen in A an AC nach der Seite der Geraden durch A und C, auf der E liegt, einen Winkel der Größe α an.

(5) Wir zeichnen den Strahl aus C durch E. Schneidet er den freien Schenkel des in (4) konstruierten Winkels, so sei der Schnittpunkt B genannt.

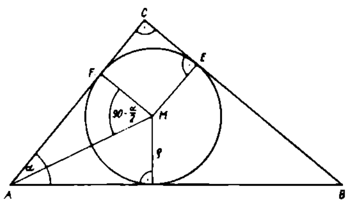
(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion der Winkel bei C ein Rechter. Ebenso hat laut Konstruktion der Winkel BAC die Größe α. M hat laut Konstruktion von AC und BC den Abstand ϱ. Da ferner nach Konstruktion

$\overline{\sphericalangle CAM} = \overline{\sphericalangle FAM} = \frac{\alpha}{2}$ und

$\overline{\sphericalangle MAB} = \overline{\sphericalangle CAB} - \overline{\sphericalangle CAM} = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ist, ist AB ebenso wie AC Tangente an den Kreis mit ϱ um M. Folglich ist M der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist Konstruktionsschritt (2) eindeutig ausführbar. Ferner ist wegen $0^\circ < 90^\circ - \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$ auch (3) eindeutig ausführbar. Danach ist dann (4) und wegen $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ schließlich auch (5) eindeutig ausführbar. Das Dreieck ABC ist also durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.



3. Angenommen, es gibt eine rationale Zahl r, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt: $\frac{3-r}{4+r} = \frac{3}{8}$.

Daraus folgt $24 - 8r = 12 + 3r$. Also kann höchstens $r = \frac{12}{11}$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich ist

$\frac{3-\frac{12}{11}}{4+\frac{12}{11}} = \frac{\frac{21}{11}}{\frac{56}{11}} = \frac{3}{8}$, d. h. $r = \frac{12}{11}$ erfüllt die Bedingungen.

4 Die Vierecke $EBAC$ und $BFDA$ sind Sehnenvierecke. Daher gilt: $\overline{\sphericalangle ACE} + \overline{\sphericalangle ABE} = 180^\circ$ sowie $\overline{\sphericalangle ADF} + \overline{\sphericalangle ABF} = 180^\circ$. Ferner gilt:

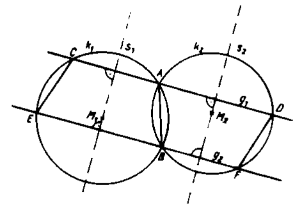
$\overline{\sphericalangle ABE} + \overline{\sphericalangle ABF} = 180^\circ$ (Nebenwinkel).

Daraus folgt

$\overline{\sphericalangle ACE} + \overline{\sphericalangle ADF} = 180^\circ$ und somit $CE \parallel DF$. Also ist $CEFD$ ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{CD} = \overline{DF}$, w. z. b. w.

Anderer Lösungsweg:

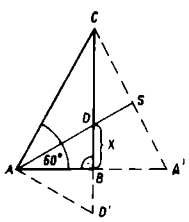
Die zueinander parallelen Geraden g_1 und g_2 schneiden aus den Kreisen k_1 und k_2 je zueinander parallele Sehnen aus. Nun seien s_1 bzw. s_2 die Symmetrieachse dieser beiden Sehnenpaare. Dann gilt $s_1 \parallel s_2$ (wegen $s_1 \perp g_1$ und $s_2 \perp g_1$). Durch Spiegelung an s_2 geht AB in DF über, so daß $CE \parallel DF$ folgt. Somit ist $CEFD$ ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{CD} = \overline{EF}$, w. z. b. w.



Klassenstufe 9

1. In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 Umdrehungen, der Stundenzeiger genau eine Umdrehung. Der Stundenzeiger wird während dieser einen Umdrehung vom Minutenzeiger genau 11 mal überrundet. Zwischen je zwei Überrundungen bilden die Zeiger genau zweimal einen rechten Winkel. In 12 aufeinanderfolgenden Stunden bilden daher die Zeiger 22 mal einen rechten Winkel miteinander.

2. Spiegelt man das Dreieck ABC an BC, wobei das Bild von A der Punkt A' sei, so erhält man das gleichseitige Dreieck $AA'C$. Darin ist BC Halbierende der Seite AA'. Verlängert man AD über D hinaus bis zum Schnittpunkt S mit der Seite $A'C'$, dann ist AS Seitenhalbierende von $A'C'$, da im gleichseitigen Dreieck die Halbierende jedes Winkels mit der Halbierenden seiner Gegenseite zusammenfällt. Da sich nun in jedem Dreieck die Seitenhalbierenden im Verhältnis $1:2$ schneiden, ist die Behauptung bewiesen.



Oder: Spiegelt man D an AB und wird der Bildpunkt D' genannt, so ist das Dreieck $D'AD$ gleichseitig. Sei nun $\overline{BD} = x$, so gilt $\overline{AD} = 2x$. Ferner ist das Dreieck ADC wegen der Kongruenz der Winkel bei A bzw. C (je 30°) gleichschenklig, also gilt $\overline{AD} = \overline{CD}$ und somit $\overline{CD} = 2x$, womit die Behauptung bewiesen ist.

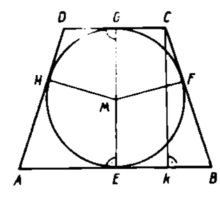
3. (I) Angenommen, ein Trapez $ABCD$ habe die geforderten Eigenschaften. Es seien E, F, G, H die (in dieser Reihenfolge) auf den Seiten AB, BC, CD bzw. DA gelegenen Berührungspunkte der Seiten des Trapezes mit dem Inkreis, also die Fußpunkte der vom Inkreismittelpunkt M auf die Seiten gefällten Lote. Ferner sei $\overline{DG} = x$ und $\overline{AE} = y$. Da GE Symmetrieachse des Trapezes ist, gilt $\overline{CG} = \overline{DG} = x$ und $\overline{AE} = \overline{BE} = y$. Da die Abschnitte der Tangenten, die von einem außerhalb des Kreises gelegenen Punkt an den Kreis gezogen werden, gleichlang sind, gilt $\overline{CF} = \overline{DH} = x$ und $\overline{AH} = \overline{BF} = y$. Somit folgt $u = 4x + 4y$, also (1) $x + y = 25$ cm. Fällt man das Lot von C auf AB, so liegt sein Fußpunkt K wegen $\overline{GC} < \overline{EB}$ zwischen A und B.

Nach dem Satz des Pythagoras, angewendet auf das Dreieck KBC, folgt (2) $y - x = \overline{KB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{KC}^2} = \sqrt{(x+y)^2 - (2r)^2} = 7$ cm.

Aus (1) und (2) ergibt sich $x = 9$ cm, $y = 16$ cm. Daher kann ein Trapez nur dann den gestellten Forderungen genügen, wenn seine Seitenlängen $\overline{AB} = 2y = 32$ cm, $\overline{CD} = 2x = 18$ cm, $\overline{BC} = \overline{AD} = x + y = 25$ cm betragen.

(II) Hat ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ diese Seitenlängen, so hat es die Eigenschaften $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 100$ cm.

Ferner ist es wegen $\overline{AB} + \overline{CD} = 50$ cm $= \overline{BC} + \overline{AD}$ ein Tangentenviereck, es besitzt also einen Inkreis; dieser hat die Strecke EG als Durchmesser, wobei E, G die Mittelpunkte von AB, CD sind. Ist K der Fußpunkt des Lotes von C auf AB, so gilt $\overline{BK} = \overline{BE} - \overline{CG} = 7$ cm, also $\overline{GE} = \overline{CK} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BK}^2} = 24$ cm.



Daher hat der Inkreis den geforderten Radius 12 cm.

Es gibt somit Trapeze der verlangten Art; jedes solche Trapez hat die Seitenlängen $\overline{AB} = 32$ cm, $\overline{CD} = 18$ cm, $\overline{BC} = \overline{AD} = 25$ cm.

4. Beim 1. Umlauf werden alle Zahlen durchgestrichen, die bei Division durch 15 den Rest 1 lassen. Die letzte derartige Zahl ist 991. Beim 2. Umlauf wird wegen $991 + 15 - 1000 = 6$ die Zahl 6 als erste gestrichen, und weiter alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 6 lassen, also 6, 21, 36, 51, ... Die letzte derartige Zahl ist 996.

Beim 3. Umlauf streicht man wegen $996 + 15 - 1000 = 11$ als erste Zahl die 11, und anschließend alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 11 lassen, also 11, 26, 41, 56, ... Die letzte derartige Zahl ist 986.

Beim 4. Umlauf müßte man wegen $986 + 15 - 1000 = 1$ als erste Zahl die 1 streichen, die aber bereits gestrichen ist. Beim Fortsetzen des Verfahrens trifft man deshalb nur auf Zahlen, die bereits beim 1. Umlauf gestrichen worden sind.

Bei allen Umläufen wurden somit insgesamt die Zahlen 1, 6, 11, 21, 26, ..., 986, 991, 996 gestrichen, also alle Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 1 lassen, mithin in der Form $5n + 1$ geschrieben werden können. Da hierbei n alle natürlichen Zahlen von 0 bis 199 durchläuft, gibt es genau 200 Zahlen, die bei dem angegebenen Verfahren durchgestrichen, also genau 800 Zahlen, die nicht durchgestrichen werden.

Klassenstufe 10

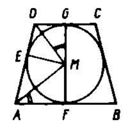
1. Wegen (1) können nur drei der Ziffern 2, 3, 5, 7 vorkommen. Aus diesen vier Ziffern kann man genau die zweistelligen Primzahlen 23, 37, 53, 73 bilden.
Aus ihnen lassen sich in der in der Aufgabe angegebenen Weise (2) genau folgende dreistellige Zahlen bilden:

237, 373, 537, 737.

Nun sind 237 und 537 durch 3 teilbar und 737 ist durch 11 teilbar. Die Zahl 373 dagegen ist weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17 oder 19 teilbar. Wegen $373 < 20^2$ ist sie (dann auch durch keine größere Primzahl teilbar und) somit selbst Primzahl. Folglich ist 373 die einzige dreistellige Primzahl, die (1) und (2) erfüllt.

2. Für die 22 vierten, die 22 fünften und die 23 sechsten Plätze erhielt die DDR-Mannschaft laut Aufgabe
$22 \cdot 3 + 22 \cdot 2 + 23 = 133$ Punkte. Da sie insgesamt 480 Punkte erzielte, bekam sie wegen $480 - 133 = 347$ für die ersten, zweiten und dritten Plätze zusammen genau 347 Punkte.
Es sei nun g die Anzahl der errungenen Gold-, s die der Silber- und b die der Bronzemedaillen. Dann gilt (1) $7g + 5s + 4b = 347$. Ist k die kleinste der Zahlen g, s, b, so ist mit ganzzahligen x, y, z (2) $g = k + x$, $s = k + y$, $b = k + z$, wobei (3) mindestens eine der Zahlen x, y, z gleich 0 und (4) mindestens eine der Zahlen x, y, z gleich 3 ist und (5) $0 = x, y, z = 3$ gilt.
Aus (1), (2) folgt (6) $16k + 7x + 5y + 4z = 347$. Wegen (3), (4), (5) gilt $7 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \geqq 7 + 5y + 4z \geqq 4 \cdot 3$, hieraus und aus (6) folgt (7) $16k + 36 \geqq 347 \geqq 16k + 12$.
Aus der linken Ungleichung in (7) folgt $16k \geqq 311 > 304$, also (8) $k > 19$. Aus der rechten Ungleichung in (7) folgt $16k \leqq 335 < 336$, also (9) $k < 21$. Wegen (8), (9) gilt (10) $k = 20$. Hieraus und aus (6) folgt $7x + 5y + 4z = 27$. Wäre $z = 0$, so müßte $7x = 27 - 5y$ durch 7 teilbar sein, was für alle $y = 0, 1, 2, 3$ nicht zutrifft. Wäre $y = 0$, so müßte $7x = 27 - 4z$ durch 7 teilbar sein, was für alle $z = 0, 1, 2, 3$ nicht zutrifft. Also ist (11) $x = 0$, und $5y = 27 - 4z$ muß durch 5 teilbar sein, was unter den Möglichkeiten $z = 0, 1, 2, 3$ nur für (12) $z = 3$ zutrifft und auf (13) $y = 3$ führt.
Aus (2), (10), (11), (12), (13) folgt die zu beweisende Behauptung, daß g, s, b durch die Bedingungen der Aufgabe eindeutig bestimmt sind (nämlich als $g = 20$, $s = b = 23$).
Hinweis: Eine „Probe", d. h. der Nachweis, daß diese Zahlen alle angegebenen Bedingungen erfüllen, ist zu einer vollständigen Lösung nicht erforderlich, da in der Aufgabenstellung nur der Nachweis der Einzigkeit der Lösung verlangt wird.

3. Da das Trapez gleichschenklig ist, liegt der Inkreismittelpunkt M auf der Symmetrieachse des Trapezes. Diese Symmetrieachse verläuft durch die Mittelpunkte F und G der Seiten AB und CD.
Ferner liegt M auf den Winkelhalbierenden der Winkel CDE und EAF. Wegen $\sphericalangle GDE + \sphericalangle EAF = 180°$ gilt daher (1) $\sphericalangle MDG + \sphericalangle MAF = 90°$. Da die Dreiecke MDG und MAF rechtwinklig sind, gilt (2) $\sphericalangle MDG + \sphericalangle DMG = 90°$. Aus (1) und (2) folgt $\sphericalangle MAF = \sphericalangle DMG$. Folglich sind die Dreiecke MDG und MAF ähnlich.



Wegen $\overline{DG} = 1$ cm, $\overline{AF} = 4$ cm und $\overline{MG} = \overline{MF} = \varrho$ folgt daraus $\overline{DG} : \overline{MG} = \overline{MF} : \overline{AF}$ bzw. 1 cm $: \varrho = \varrho : 4$ cm, woraus man

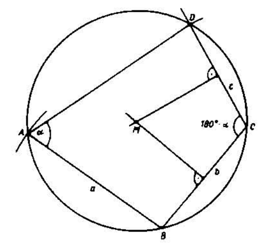
$\varrho^2 = 4$ cm^2 und wegen $\varrho > 0$ schließlich $\varrho = 2$ cm erhält.

Der Inkreisradius ϱ hat die Länge 2 cm.

4. (I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Nach dem Satz über die Summe der Gegenwinkel im Sehnenviereck gilt:

$\sphericalangle DCB = 180° - \alpha$.

Das Dreieck BCD läßt sich damit aus b, c und einem Winkel von $180° - \alpha$ konstruieren.
Der Mittelpunkt M des Umkreises des Sehnenvierecks liegt auf den Mittelsenkrechten der Seiten BC und CD. Der Punkt A liegt erstens auf dem Kreis um M mit dem Radius $\overline{MB}$ und zweitens auf dem Kreis um B mit dem Radius a.
(II) Daraus ergibt sich, daß ein Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann.
(1) Wir zeichnen eine Strecke BC der Länge b.
(2) Wir tragen in C an BC einen Winkel von $180° - \alpha = 110°$ an.
(3) Wir schlagen um C einen Kreis mit dem Radius c. Schneidet dieser Kreis den freien Schenkel des angetragenen Winkels in einem Punkt, so sei dieser D genannt.
(4) Auf BC und CD errichten wir die Mittelsenkrechten; schneiden sie sich, so sei ihr Schnittpunkt M genannt.
(5) Wir schlagen den Kreis um M mit dem Radius $\overline{MB}$.
(6) Wir schlagen den Kreis um B mit dem Radius a. Schneiden sich die beiden Kreise auf derjenigen Seite von BD, auf der C nicht liegt, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.
(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Laut Konstruktion (4), (5), (6) geht der in (5) konstruierte Kreis durch A, B, C, D, also ist $ABCD$ ein Sehnenviereck. Ferner folgt aus der in (6) getroffenen Auswahl von A, daß $ABCD$ konvex ist. Nach den Konstruktionsschritten (1), (3), (6) gilt $\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{CD} = c$. Weiterhin gilt nach Konstruktion $\sphericalangle DCB = 110° = 180° - \alpha$; damit ist nach dem Satz über das Sehnenviereck $\overline{\sphericalangle BAD} = 180° - \overline{\sphericalangle DCB} = \alpha$.



(IV) Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar; hieraus ist (3) dann eindeutig ausführbar. Auch Konstruktionsschritt (4) ist eindeutig ausführbar, da BC und CD nicht parallel zueinander sind. Damit ist auch (5) eindeutig ausführbar. Da mit den gegebenen Größen, wie man der Abb. entnehmen kann, $\overline{BD} > a$ ausfällt, ist auch (6) eindeutig ausführbar.
Das konvexe Sehnenviereck $ABCD$ ist also bis auf Kongruenz durch die gegebenen Größen eindeutig bestimmt.

Bezirksolympiade

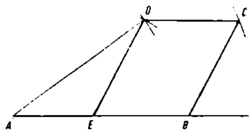
Klassenstufe 7

1. Wegen (1) und (2) ist die vierfache Alterssumme beider Kinder gleich 124; die Kinder sind deshalb zusammen 31 Jahre, die Eltern zusammen 93 Jahre alt.
Da die Lebensalter der vier Personen in ganzen Jahren angegeben werden und da 31 eine ungerade Zahl ist, so ist von den Altersangaben der Kinder die eine gerade, die andere ungerade. Daher ist die Differenz der Lebensalter der beiden Kinder eine ungerade Zahl.
Betrüge sie 3 oder mehr Jahre, so wäre sie bei den Eltern 27 oder mehr Jahre. Dann wäre das eine Kind 17 Jahre oder älter, das andere Kind 14 Jahre oder jünger, die Mutter 33 Jahre oder jünger und der Vater 60 Jahre oder älter.
Wegen $2 \cdot 17 > 33$ und (3) entfällt diese Möglichkeit. Somit beträgt die Differenz bei den Kindern 1 Jahr, bei den Eltern also 9 Jahre.
Daraus folgt:
Der Vater ist 51 Jahre, die Mutter 42 Jahre, das älteste Kind 16 und das andere 15 Jahre alt.

2. Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p - 1$, p, $p + 1$ ist stets eine durch 3 teilbar. Wegen $p \geqq 3$ ist die Primzahl p ungerade. Folglich sind $p - 1$ und $p + 1$ unmittelbar aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Da von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden geraden Zahlen stets eine durch 4 teilbar ist, ist von den Zahlen $p - 1$ und $p + 1$ eine durch 2 und die andere durch 4 teilbar. Somit ist $(p-1)p(p+1)$ durch 3 und durch 8, also, da 3 und 8 teilerfremd sind, auch durch 24 teilbar, w. z. b. w.

3. (I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Punkt E liege zwischen A und B auf AB, und es gelte $\overline{AE}=a-c$.
Dann ist $\overline{EB}=\overline{CD}=c$, und $EBCD$ ist ein Parallelogramm. Nun läßt sich $\triangle AED$ aus $\overline{AE}, \overline{ED}\,(=\overline{BC})$ und $\overline{DA}$ konstruieren. Punkt C liegt erstens auf der Parallelen durch D zu AE und zweitens auf dem Kreis um A mit dem Radius e.



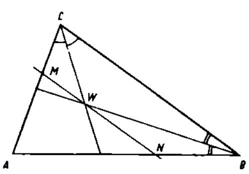
Ferner liegt C auf derselben Seite der Geraden durch A und D wie E. Punkt P liegt erstens auf dem Strahl aus A durch E und zweitens auf der Parallelen durch C zu ED.
(II) Daher entspricht ein Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(1) Wir konstruieren ein Dreieck AED aus $\overline{AE}=3$ cm, $\overline{ED}=4$ cm und $\overline{AD}=6$ cm.
(2) Wir ziehen durch D die Parallele zu AE.
(3) Wir schlagen um A mit dem Radius e einen Kreis. Schneidet er die in (2) gezogene Parallele in einem Punkte, der auf derselben Seite der Geraden durch A und D liegt wie E, so sei dieser C genannt.
(4) Wir zeichnen den Strahl aus A durch E.
(5) Wir ziehen durch C die Parallele zu ED. Schneidet sie den in (4) gezeichneten Strahl, so sei dieser Schnittpunkt B genannt.
(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Trapez $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe genügt: Nach Konstruktion ist $\overline{AD}=d$.
Weiter ist nach Konstruktion $\overline{AC}=e$. Da $EBCD$ nach Konstruktion ein Parallelogramm ist, gilt schließlich $\overline{BC}\,(=\overline{ED})=b$ und, da E zwischen A und B liegt, auch $\overline{AB}-\overline{DC}$ $(=\overline{AB}-\overline{EB}=\overline{AE})=a-c$.
(IV) Mit den gegebenen Größen ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz nach dem Kriterium (s, s, s) eindeutig ausführbar.
Ebenso ist (2) eindeutig ausführbar, Konstruktionsschritt (3) liefert wegen $\overline{AC}>\overline{AD}$ zwei Schnittpunkte, von denen genau einer auf derselben Seite von AD liegt wie E. Schließlich sind auch (4) und (5) eindeutig ausführbar. Daher ist ein Trapez $ABCD$ durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

4. Angenommen, eine Zahl mit der Ziffernfolge xyz entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Dann ist
$a=100x+10y+z$ gleich der Hälfte der Summe von
$b=100y+10z+x$ und
$c=100z+10x+y$. Demnach gilt:
$200x+20y+2z=2a=b+c=$
$=101y+110z+11x$, also $189x=81y+108z$ und daher (1) $7x=3y+4z$.
Folglich ist 7 ein Teiler von $3y+4z$ und daher auch von $3y+4z-7z=3(y-z)$, also von $y-z$.
Wegen $0\leqq y\leqq 9$, $0\leqq z\leqq 9$ folgt hieraus, daß entweder $y=z$ und nach (1) dann $y=z=x\geqq 1$ gilt oder z um 7 größer ist als y.
Daher verbleiben für y und z nur die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten, zu denen jedesmal wegen (1) nur das angegebene x gehört:

y	z	x	y	z	x
1	1	1	8	1	4
2	2	2	7	0	3
·	·		0	7	4
			1	8	5
			2	9	6
9	9	9			

Daher können höchstens die Zahlen 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 592, 481, 370, 407, 518, 629 Lösungen sein. Für 111, ..., 999 ist dies unmittelbar klar; ferner gilt
$\frac{1}{2}(925+259)=1\,184:2=592$; $\frac{1}{2}(814+148)$
$=962:2=481$, $\frac{1}{2}(703+37)=740:2=370$,
$\frac{1}{2}(74+740)=814:2=407$, $\frac{1}{2}(185+851)$
$=1\,036:2=518$, $\frac{1}{2}(296+962)$
$=1\,258:2=629$.
Also erfüllt jede dieser 15 Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

5. Aus $\overline{\sphericalangle CBW}=\overline{\sphericalangle WBN}$ (lt. Voraussetzung) und $\overline{\sphericalangle CBW}=\overline{\sphericalangle NBW}$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) folgt $\overline{\sphericalangle WBN}=\overline{\sphericalangle NWB}$.



Deshalb ist das Dreieck BNW gleichschenklig mit der Spitze N, und es gilt
$\overline{BN}=\overline{NW}$ (1)
Analog beweist man (2) $\overline{CM}=\overline{MW}$.
Aus (1) und (2) folgt $\overline{CM}+\overline{BN}=\overline{MW}+\overline{NW}$, also $\overline{CM}+\overline{BN}=\overline{MN}$, w. z. b. w.

6. Man könnte sich vorstellen, daß der Fußgänger im selben Augenblick die Brücke (entgegengesetzt zur Fahrtrichtung des Zuges) verläßt, in dem die Lok auf die Brücke fährt. Wenn der Fußgänger nach 9 sec 9 m zurückgelegt hat, fährt der letzte Wagen des Zuges an ihm vorbei. Bis zum Verlassen der Brücke benötigt dieser Wagen wegen $27-9=18$ noch 18 sec. In dieser Zeit legt er wegen $225+9=234$ genau 234 m zurück. Folglich betrug wegen $234:18=13$ die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges $13\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, das sind wegen $13\cdot\frac{3\,600}{1\,000}=46{,}8$ genau $46{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Da der Zug zur Brückenfahrt 27 sec benötigte, legte die Lok wegen $13\cdot 27=351$ in dieser Zeit 351 m zurück. Diese Strecke setzt sich aus den 225 m Länge der Brücke und der Länge des Zuges zusammen. Wegen $352-225=126$ hat der Zug mithin eine Länge von 126 m.

Klassenstufe 8

1. Sei z die Gesamtzahl aller Spiele. Da jedes der Mädchen von jeweils 5 Spielen genau 4 mitspielte, spielte jedes Mädchen in $\frac{4}{5}z$ aller Spiele mit. Diese Anzahl ist nach (1) durch 3 und 4, also durch 12 teilbar. Daher gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{4}{5}z=12n$; hieraus folgt $z=15n$. Von den $15n$ Spielen gewann nach (1) Cathrin genau $6n$, Daja genau $4n$, Eva genau $3n$ Spiele.
Somit gewannen Anja und Brigitte zusammen genau $2n$ aller Spiele. Daraus folgt, daß Eva wegen $6n>4n>3n>2n$ das drittbeste Ergebnis erzielte. Da die Anzahl $3n$ von Evas Siegen nach (2) eine Primzahl war, gilt $n=1$.
Es wurden mithin genau 15 Spiele ausgetragen; Cathrin gewann genau 6, Daja genau 4, Eva genau 3 dieser Spiele, und Anja und Brigitte gewannen nach (3) jeweils genau 1 Spiel.

2. Von den fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p-2$, $p-1$, $p+1$, $p+2$ ist eine durch 5 teilbar. Da p Primzahl ist und $p>5$ gilt, ist p nicht durch 5 teilbar. Folglich ist eine der Zahlen $p-2$, $p-1$, $p+1$, $p+2$ durch 4 teilbar.
Da $p\neq 2$ ist, ist p ungerade. Daher ist jede der beiden Zahlen $p-1$ und $p+1$ gerade und eine von beiden ist wenigstens durch 4 teilbar. Folglich ist ihr Produkt durch 8 teilbar.
Da $p\neq 3$ ist, ist p nicht durch 3 teilbar. Mithin sind entweder die beiden Zahlen $p-2$ und $p+1$ oder die beiden Zahlen $p-1$ und $p+2$ jeweils durch 3 teilbar. Also ist ihr Produkt durch 9 teilbar. Aus all dem folgt, daß das Produkt $(p-1)(p-1)(p+1)(p+2)$ durch 5, 8 und 9 und, da diese Zahlen paarweise teilerfremd sind, auch durch $5\cdot 8\cdot 9=360$ teilbar ist, w. z. b. w.

3. Man kann den Flächeninhalt A_8 des Achtecks berechnen, indem man vom Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ den vierfachen Flächeninhalt des Sechsecks $A_2BB_2P_3P_2P_1$ subtrahiert.
Die Fußpunkte der Lote von P_2 auf AB bzw. BC seien E bzw. F. Dann ist $EBFP_2$ ein Quadrat. Bezeichnet man seine Seitenlänge mit x, so gilt nach einem Teil des Strahlensatzes
$\frac{3}{4}a:\frac{a}{2}=\left(\frac{3}{4}a-x\right):x$, woraus man
$\frac{3}{2}x=\frac{3}{4}a-x$ und mithin
$\frac{5}{2}x=\frac{3}{4}a$ bzw. $x=\frac{3}{10}a$ erhält.

Setzt man weiter $P_1A_2=y$, so gilt nach dem Strahlensatz

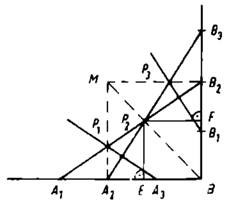
$\frac{3}{4}a : \frac{a}{2} = \frac{1}{4}a : y$, also

$\frac{2}{3}y = \frac{1}{4}a$ bzw.

$y=\frac{1}{6}a$. Folglich gilt für den Flächeninhalt A_8 des Achtecks

$$A_8 = a^2 - 4\left(\frac{\frac{1}{6}a+\frac{3}{10}a}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{10}a\right)\cdot 2+\frac{9}{100}a^2\right)$$

bzw. $A_8 = a^2 - \frac{28}{75}a^2 - \frac{9}{25}a^2 = \frac{4}{15}a^2$. Der gesuchte Flächeninhalt des Achtecks beträgt $\frac{4}{15}a^2$.



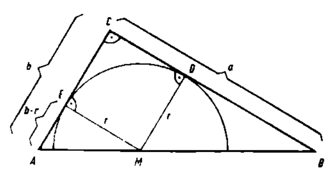
4. Ein Bruch ist genau dann negativ, wenn entweder sein Zähler positiv und sein Nenner negativ oder wenn sein Zähler negativ und sein Nenner positiv ist.

Angenommen, es gäbe eine rationale a mit $3a-2>0$ und $a+1<0$. Dann folgt aus $3a-2>0$ einerseits $a>\frac{2}{3}$ und aus $a+1<0$ andererseits $a<-1$. Da es keine rationale Zahl gibt, die gleichzeitig größer als $\frac{2}{3}$ und kleiner als -1 ist, war unsere Annahme falsch.

Daher ist die gegebene Ungleichung genau für diejenigen rationalen Zahlen a erfüllt, für die $3a-2<0$ und $a+1>0$ gilt. Nun ist $3a-2<0$ gleichbedeutend mit $a<\frac{2}{3}$ und $a+1>0$ mit $a>-1$. Diese beiden Bedingungen werden genau von allen rationalen Zahlen a erfüllt, für die $-1<a<\frac{2}{3}$ gilt.

Folglich sind alle rationalen Zahlen a mit $-1<a<\frac{2}{3}$ und nur diese Lösungen der gegebenen Ungleichung.

5. Der Mittelpunkt des Halbkreises sei M, die Seite BC berühre den Halbkreis in D, die Seite AC berühre ihn in E. Dann gilt: $\overline{MD}=r$ und $MD \| AC$ (rechte Winkel bei D bzw. C) und $\overline{ME}=r$ und $ME \| BC$ (rechte Winkel bei E bzw. C).



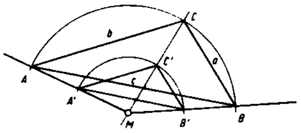
Folglich ist $MDCE$ ein Quadrat mit der Seitenlänge r. Nach dem Strahlensatz gilt nun:

$\frac{a}{r}=\frac{b}{b-r}$, also $ab-ar=br$ bzw. $ab=br+ar$.

Daraus erhält man durch Division mit abr

$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, w. z. b. w.

6. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, der Mittelpunkt seines Umkreises sei M. Dann gibt es ein Dreieck $A'B'C'$, das aus $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M entsteht (A' Bild von A, B' Bild von B, C' Bild von C) und bei dem $\overline{A'B'}=4$ cm beträgt. Dabei gilt weiter $\overline{A'C'}=3$ cm, $\overline{B'C'}=2$ cm. Folglich ist $\triangle ABC$ ähnlich einem Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen $a'=2$ cm, $b'=3$ cm, $c'=4$ cm, das aus $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M hervorgeht.



(II) Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen $\overline{B'C'}=2$ cm, $\overline{C'A'}=3$ cm, $\overline{A'B'}=4$ cm, sowie dessen Umkreismittelpunkt M.

(2) Man zeichnet die Strahlen aus M durch A' bzw. B' bzw. C'.

(3) Man schlägt um M den Kreis mit dem Radius r. Schneidet er die in (2) gezeichneten Strahlen, so seien die Schnittpunkte in dieser Reihenfolge mit A, B, C bezeichnet.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierbare Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion ist $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Zentrum M aus $\triangle A'B'C'$ hervorgegangen. Daher sind beide Dreiecke ähnlich. Das Dreieck ABC hat also ebenfalls das Verhältnis der Seitenlängen $2:3:4$. Ebenso gilt laut Konstruktion $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=r$, d. h., das Dreieck ABC hat einen Umkreis vom Radius r.

(IV) Da wegen $2+3>4$; $2+4>3$ und $3+4>2$ ein Dreieck $A'B'C'$ mit den angegebenen Seitenlängen existiert, ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Die Konstruktionsschritte (2) und (3) sind ebenfalls eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Klassenstufe 9

1.a) Sind a, b die Ziffern einer der gesuchten Zahlen, die also $10a+b$ lautet, so entsteht aus ihr durch die genannten Operationen die Zahl $10b+a+9$. Da auch diese zweistellig ist und da $a\geqq 1$ gilt, folgt

$100>10b+a+9\geqq 10b+10$, also $b<9$. Daher können nur zweistellige Zahlen, die nicht auf 9 enden, die verlangte Eigenschaft haben.

In der Tat hat jede nicht auf 9 endende zweistellige Zahl diese Eigenschaft; denn sind a und b ihre Ziffern, so hat die aus ihr entstehende Zahl $10b+a+9$ wegen $a\geqq 1$ und $b<9$ die Ziffern $b+1$ und $a-1$, und aus dieser Zahl entsteht, da für sie auch $b+1\geqq 1$ und $a-1<9$ gilt, ebenso die Zahl mit den Ziffern $(a-1)+1$ und $(b+1)-1$, d. h. die Ausgangszahl, wie es gefordert war.

b) Genau dann ist eine der in a) ermittelten Zahlen sich selbst zugeordnet, wenn $b+1=a$ gilt. Diese Bedingung wird genau von den Zahlen 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98 erfüllt.

2. Genau dann ist $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = 3n^3+6n = 3n(n^2+2)$ durch 10 teilbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $10 \mid n$

(2) $10 \mid (n^2+2)$

(3) $5 \mid n$ und $2 \mid (n^2+2)$

(4) $2 \mid n$ und $5 \mid (n^2+2)$.

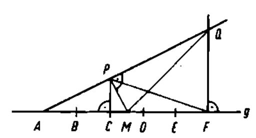
Die Bedingung (1) wird von allen durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen n erfüllt. Die Bedingung (2) könnte nur von solchen natürlichen Zahlen n erfüllt werden, deren Quadrat auf 8 endet.

Derartige Zahlen gibt es nicht.

Angenommen, es gabe natürliche Zahlen n, die (3) oder (4), aber nicht (1) erfüllen. Eine solche Zahl müßte entweder wegen (3) auf 5 enden oder ihr Quadrat müßte wegen (4) auf 3 oder 8 enden. Natürliche Zahlen, deren Quadrat auf 3 oder 8 endet, gibt es nicht. Endet n auf 5, so ist n^2 und damit auch n^2+2 ungerade, also nicht durch 2 teilbar. Folglich erfüllen genau alle durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

3. Die in P auf der Geraden durch A und P errichtete Senkrechte schneide g in M; die in F auf g errichtete Senkrechte schneide die Gerade durch A und P in Q. Nach dem Höhensatz für das bei P rechtwinklige Dreieck AMP ist:

$$\overline{CM}=\frac{\overline{CP}^2}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}\overline{CP}, \text{ also } \overline{MF}=\frac{5}{2}\overline{CP}.$$



Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\overline{FQ}=\frac{\overline{CP}\cdot\overline{AF}}{\overline{AC}}=\frac{5}{2}\overline{CP}.$$

Daher ist das bei P rechtwinklige Dreieck MQF gleichschenklig mit $\sphericalangle FMQ=45°$. Das Viereck $FMPQ$ hat bei F und P rechte Winkel, ist also ein Sehnenviereck; folglich gilt (Peripheriewinkelsatz)

$$\sphericalangle FPQ=\sphericalangle FMQ=45°.$$

Daraus folgt die Behauptung.

4. Jedes regelmäßige n-Eck $(n=3)$ läßt sich in n gleichschenklige Dreiecke zerlegen, indem man seinen Mittelpunkt mit den Eckpunkten verbindet. Die Summe der Winkelgrößen dieser n Dreiecke beträgt $n \cdot 180°$. Die Summe der Größen aller Basiswinkel und damit die Summe der Größen der Innenwinkel des n-Ecks beträgt folglich $(n-2) \cdot 180°$. Daher hat jeder Innenwinkel im regelmäßigen n-Eck eine Größe von $\frac{(n-2)\,180°}{n}$. Also hat n genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn eine natürliche Zahl m mit $\frac{n-2}{n}\,180° \cdot m = 360°$, d. h. mit (1) $m = \frac{2n}{n-2}$ existiert. Ist dies der Fall, so ist $n-2 = (=1)$ Teiler von $2n = 2(n-2)+4$, also auch von 4, also eine der Zahlen 1, 2, 4; somit ist dann n eine der Zahlen 3, 4, 6. Umgekehrt existiert zu diesen Zahlen n je genau ein m mit (1), nämlich der Reihe nach 6, 4, 3. Daher sind diese n und die zugehöringen m alle gesuchten Angaben, d. h., es lassen sich genau 6 regelmäßige Dreiecke bzw. genau 4 regelmäßige Vierecke bzw. genau 3 regelmäßige Sechsecke in der beschriebenen Weise aneinanderlegen. Bei allen anderen regelmäßigen Vielecken ist das Entsprechende nicht möglich.

5. Aus der Voraussetzung folgt durch Multiplikation mit $abc(a+b+c)$:

$$(a+b+c)(bc+ac+ab) = abc,$$

also

$$\begin{aligned}
(a+b)(bc+ac+ab)+bc^2+ac^2+abc &= abc\\
(a+b)(bc+ac+ab)+(a+b)c^2 &= 0\\
(a+b)(bc+ac+ab+c^2) &= 0\\
(a+b)[b(c+a)+c(c+a)] &= 0\\
(a+b)(a+c)(b+c) &= 0.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß mindestens eine der Gleichungen

$a=-b$, $a=-c$, $b=-c$ gilt, w. z. b. w.

6. Wenn ein Punkt D' die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, so liegt er nach (2) in der zu BC mittelsenkrechten Ebene η. Diese geht durch A, D und den Mittelpunkt F von BC. In η liegen auch die Lote DE, $D'E'$ von D, D' auf die Ebene durch A, B, C. Ihre Fußpunkte E, E' liegen also auf der Geraden durch A und F; nach (1) gilt außerdem

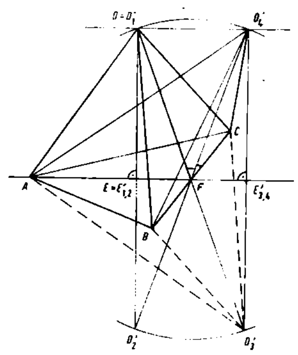
(4) $\quad \overline{DE} = \overline{D'E'}$.

Nach (2) ist ferner $\triangle BCD' \cong \triangle BCD$, also

(5) $\quad \overline{DF} = \overline{D'F}$.

Wegen (4), (5) sind die rechtwinkligen Dreiecke DEF und $D'E'F'$ kongruent, was in η für genau vier Lagemöglichkeiten von D' gilt, nämlich erstens für $D_1' = D$, zweitens für das Spiegelbild D_2' von D_1' bei Spiegelung an der Geraden durch A und F, drittens für das Spiegelbild D_3' von D_1' bei Spiegelung an F, viertens für das Spiegelbild D_4' von D_2' bei Spiegelung an F.

Von diesen Punkten erfüllen genau D_3' und D_4' die Bedingung (3). Da sie auch (2) und wegen (4) auch (1) erfüllen, sind sie alle Punkte der gesuchten Art.



Nun gilt $\overline{AF} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$; ferner liegt E ebenso wie auf AF auch auf den anderen Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, also ist

$\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AF} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, $\overline{EF} = \overline{E'F} = \frac{1}{3}\overline{AF}$, $\overline{AE'}_{3,4} = \frac{4}{3}\overline{AF} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

Somit ergibt sich

$$\overline{DE} = \overline{D'_{3,4}E'_{3,4}} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{1}{3}a\sqrt{6},$$

$$\overline{AD'}_{3,4} = \sqrt{\frac{4}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2} = a\sqrt{2}.$$

Klassenstufe 10

1. Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Dann gilt auf Grund der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABS, BCS, CDS, DAS:

$$\begin{aligned}
\overline{AS}+\overline{BS} &> \overline{AB},\\
\overline{BS}+\overline{CS} &> \overline{BC},\\
\overline{CS}+\overline{DS} &> \overline{CD},\\
\overline{AS}+\overline{DS} &> \overline{DA},
\end{aligned}$$

also

$2(\overline{AS}+\overline{BS}+\overline{CS}+\overline{DS}) > \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA} = u$.

Da wegen der Konvexität von $ABCD$ der Punkt S sowohl auf AC als auch auf BD liegt, gilt $\overline{AS}+\overline{CS} = e$ und $\overline{BS}+\overline{DS} = f$, so daß man

$e+f > \frac{1}{2}u$ erhält. Analog erhält man für die Dreiecke ABC, DAC, ABD, BCD:

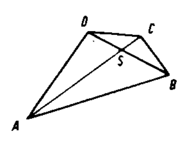
$$\begin{aligned}
\overline{AB}+\overline{BC} &> \overline{AC},\\
\overline{CD}+\overline{DA} &> \overline{AC},\\
\overline{AB}+\overline{DA} &> \overline{BD},\\
\overline{BC}+\overline{CD} &> \overline{BD},
\end{aligned}$$

also $2(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}) > 2(\overline{AC}+\overline{BD})$

bzw. $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA} > \overline{AC}+\overline{BD}$

bzw. $\quad u > e+f$

Aus beiden folgt die Behauptung.



2. Angenommen, $(x; y)$ sei eine Lösung der gegebenen Gleichung mit ganzen Zahlen x, y, dann gilt: $x(2x^2+y) = 7$.

Da 7 Primzahl ist, folgt, daß nur einer der Fälle

$x = 1$, $2x^2+y = 7$ und damit $y = 5$;
$x = 7$, $2x^2+y = 1$ und damit $y = -97$;
$x = -1$, $2x^2+y = -7$ und damit $y = -9$;
$x = -7$, $2x^2+y = -1$ und damit $y = -99$

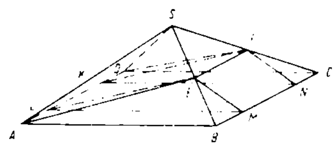
vorliegen kann. Also können höchstens die Zahlenpaare (1; 5), (7; −97), (−1; −9), (−7; −99) Lösungen sein.

Tatsächlich gilt

$$2+5-7=0,\quad 686-679-7=0,$$
$$-2+9-7=0, -686+693-7=0;$$

jedes der genannten Zahlenpaare ist also Lösung.

3. Den Teilkörper $ABCDEF$ (mit dem Volumen V_2) zerlegen wir mit einem ebenen Schnitt durch A, C, E in eine Pyramide mit der Grundfläche $AEFD$ und der Spitze C (ihr Volumen sei V_{21}) und in eine Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze E (ihr Volumen sei V_{22}). Die Volumina der



vorgegebenen Pyramide und des oberen Teilkörpers $AEFDS$ seien V und V_1. Dann gilt

$V_3 = \frac{1}{4}V$ (da neben der Grundfläche auch die Höhe wegen $\overline{EB} = \frac{1}{2}\,SB$ halb so groß ist),

$V_1 = V_{21}$ (da sie gemeinsame Grundfläche und wegen $\overline{SF} = \overline{CF}$ gleiche Höhe haben) und damit $V_1 = \frac{1}{2}(V - V_3) = \frac{3}{8}V$, d. h. $V_1 : V_2 = 3:5$

w. z. b. w.

4. Es sei $\qquad$ dann ist

$a \equiv 0 \pmod 7$	$a^3 \equiv 0 \pmod 7$
$a \equiv 1 \pmod 7$	$a^3 \equiv 1 \pmod 7$
$a \equiv 2 \pmod 7$	$a^3 \equiv 1 \pmod 7$
$a \equiv 3 \pmod 7$	$a^3 \equiv -1 \pmod 7$
$a \equiv 4 \pmod 7$	$a^3 \equiv 1 \pmod 7$
$a \equiv 5 \pmod 7$	$a^3 \equiv -1 \pmod 7$
$a \equiv 6 \pmod 7$	$a^3 \equiv -1 \pmod 7$

Eine Kubikzahl a^3 kann bei Division durch 7 also nur einen der Reste 0, 1, −1 haben.

(Anmerkung: Von Schülern, die das Rechnen mit Restklassen nicht beherrschen, läßt sich dieser Satz wie folgt beweisen:

Es sei $a = 7g+1$ (g natürliche Zahl).

Dann ist $a^3 = 7^3g^3 + 3 \cdot 7^2g^2 + 3 \cdot 7g + 1 = 7(7^2g^3 + 3 \cdot 7g^2 + 3g) + 1$, d. h. a^3 läßt bei Division durch 7 den Rest 1. Entsprechend kann der Nachweis für alle anderen Fälle geführt werden.)

Angenommen keine der drei Kubikzahlen wäre durch 7 teilbar. Dann könnte die Summe der drei Kubikzahlen nur einen der folgenden Reste bei Division durch 7 haben und keinen anderen:

$$1+1+1=3 \qquad 1-1-1=-1$$
$$1+1-1=1 \qquad -1-1-1=-3$$

In keinem dieser Fälle wäre aber die Summe der drei Kubikzahlen durch 7 teilbar, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muß wenigstens eine der drei Kubikzahlen durch 7 teilbar sein, w. z. b. w.

5. Offensichtlich ist der Flächeninhalt der schraffierten Fläche genau dann am größten, wenn die Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2 am kleinsten ist. Bezeichnet x den Abstand zwischen M und dem Mittelpunkt von k, so gilt, da dieser Mittelpunkt auf AM liegt,

$\overline{AM}=\frac{d}{2}+x$ und $\overline{MB}=\frac{d}{2}-x$ sowie $0\leqq x<\frac{d}{2}$.

Für die Summe F_S der Flächeninhalte der Kreise k_1 und k_2 gilt nun

$$F_S=\frac{\pi}{4}((\frac{d}{2}+x)^2+(\frac{d}{2}-x)^2)=\frac{\pi}{4}(\frac{d^2}{2}+2x^2).$$

F_S wird also genau dann am kleinsten, wenn $2x^2=0$, also $x=0$ gilt, d. h. genau für $\overline{AM}=\frac{d}{2}$.

6. Es gilt $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ und folglich auch $|\log_a b|=\frac{1}{|\log_b a|}$ Weiter gilt $(x-1)^2\geqq 0$, für jedes reelle x, also

$x^2-2x+1\geqq 0$, woraus man für $x=0$

$x\ -2\ +\frac{1}{x}\geqq$ *und weiter*

$x+\frac{1}{2}\geqq 2$ (2) *erhält*.

Ferner gilt für $x=|\log_a b|$ wegen (1)

$\frac{1}{x}=\frac{1}{|log_a b|}=|\log_b a|$. Daraus und aus (2) folgt

$|\log_a b|+|\log_b a|\geqq 2$, w. z. b. w.

DDR-Olympiade: Aufgaben (Fortsetzung)

4. Man ermittle alle Paare (f, g) von Funktionen, die für alle von -1; 0 und 1 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und für alle diese x die Gleichungen

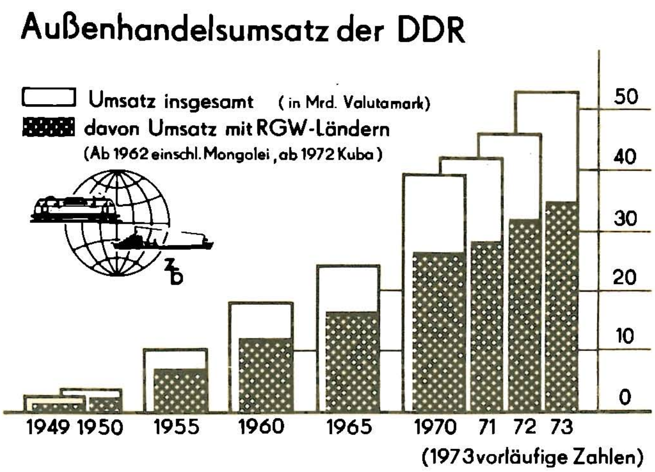
$x\cdot f(x)-\frac{1}{x}\cdot g(\frac{1}{x})=1$ (1) und

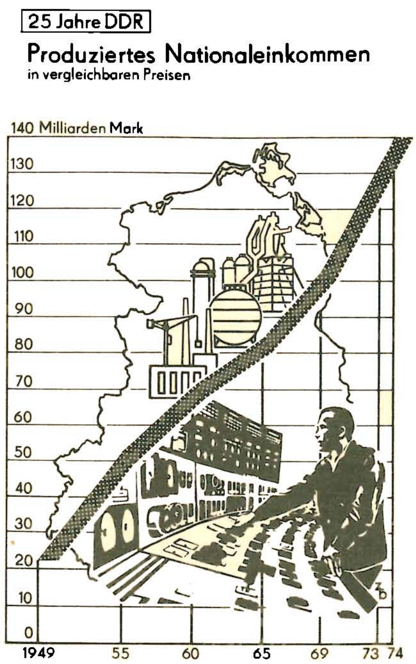
$\frac{1}{x^2}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)x^2\cdot g(x)$ (2) erfüllen.

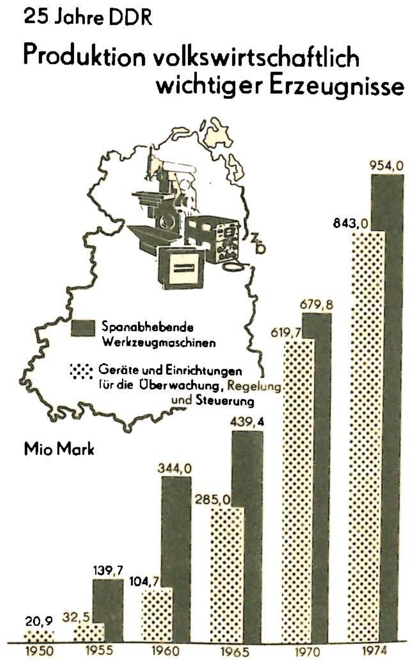
5. a) In einer Ebene sei $P_1P_2...P_n$ ein beliebiges konvexes n-Eck E.
Man beweise folgende Aussage:
Sind n Punkte $Q_1...Q_n$ so im Innern oder auf dem Rande von E gelegen, daß $Q_1Q_2...Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i eine Ecke von E.
b) Gibt es nicht konvexe n-Ecke E, für die die in a) genannte Aussage falsch ist?
c) Ist für jedes nicht konvexe n-Eck E die in a) genannte Aussage falsch?

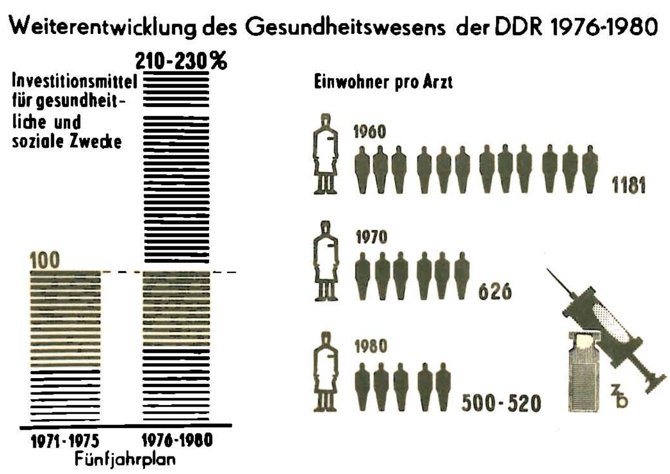
6A. Siehe Heft 4/74, Seite 1

6B. a) Man beweise folgende Behauptung: Es gibt keine ganzrationale Funktion f, bei der für jedes x die beiden Ungleichungen
(1) $f(x)>f''(x)$,
(2) $f'(x)>f''(x)$ gelten.
b) Entsteht eine richtige Behauptung, wenn man in der bei a) gemachten Behauptung die Ungleichung (2) durch
(3) $f(x)>f'(x)$ ersetzt?









Wir sind 25 Jahre jung!

Von Tag zu Tag wächst die Zahl der Kollektive, die mit neuen, wohlbedachten Wettbewerbsinitiativen an die Öffentlichkeit treten.
Zu Ehren des 25. Jahrestages der Gründung der Deutschen Demokratischen Republik übernehmen sie hohe Verpflichtungen, um die dynamische Entwicklung unserer Volkswirtschaft nach dem VIII. Parteitag der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands fortsetzen zu helfen. Aus der Vielzahl an Ideen und Vorhaben von Bürgern der DDR im Jubiläumsjahr unseres sozialistischen Arbeiter- und Bauernstaates haben wir einige ausgewählt und dabei Fakten und Zahlen in Form von Aufgaben zusammengestellt.

Es ist nun schon zu einer guten Tradition geworden, daß der *alpha*-Club der 29. OS zum Pressefest der Leipziger Volkszeitung im Rahmen einer Pionierbastel- und Wissensstraße jährlich an den zwei Tagen dieses Volksfestes rund 2 000 Pioniere, Jugendfreunde und interessierte Erwachsene betreut. Die vorliegenden Aufgaben wurden zu einem Leporello (Faltblatt) zusammengestellt und von der LVZ gedruckt. Nun steht es auch für Wissensstraßen, Wandzeitungsarbeit, den Internationalen Tag des Kindes, die Ferienbetreuung, aber auch für den Unterricht zur Verfügung.
Mit Eifer gingen die Pioniere daran, die ihrer Klassenstufe gestellten Probleme zu lösen. Besondere Freude bereitete es ihnen, in Klasse 1 zu beginnen und zu prüfen, wie weit und wie sicher sie bis hinauf zu ihrer Klassenstufe gelangten.
Wir wünschen unseren *alpha*-Lesern genausoviel Freude und Erfolg wie den *Jungen Mathematikern* der 29. OS, die durch jährlich neu zusammengestelltes Material ihren Beitrag zu einer aktiven Freizeitgestaltung leisten.

Klassenstufe 1

● Die *Jungen Pioniere* einer 1. Klasse haben sich vorgenommen, bei der Betreuung der Rentner mitzuhelfen. Sie wollen den alten Leuten die Kohlen aus dem Keller holen und für sie einkaufen gehen. Von je zwei Schülern der Klassen 1a und 1b wird jeweils ein Rentner betreut. Zur Klasse 1a gehören 28, zur Klasse 1b gehören 26 Schüler.
Wieviel Rentner werden von den *Jungen Pionieren* dieser beiden Klassen betreut?

● Axel, Beate und Christine bereiten sich langfristig darauf vor, ihr Wohnhaus zum 25. Jahrestag der Gründung der DDR festlich zu schmücken.
Christine will 5 Wimpelketten anfertigen.
Axel will 2 Wimpelketten mehr als Beate anfertigen. Christine will 1 Wimpelkette mehr als Beate anfertigen.
Wieviel Wimpelketten wollen diese drei Jungen Pioniere gemeinsam anfertigen?

Klassenstufe 2

● Im Stadtbezirk *Dresden-Nord* sollen im Jahre 1974 zwei neue Schulen mit je 26 Klassenräumen fertiggestellt werden.
Wieviel Schüler werden es mindestens, wie viele höchstens sein, die diese neuen Schulen besuchen können, wenn eine Klasse nicht weniger als 25 und nicht mehr als 30 Schüler umfassen soll?

● Indem *Junge Pioniere* Altpapier in den Haushalten sammeln und den Erfassungsstellen zuführen, tragen sie zur Stärkung der DDR bei, und sie erfüllen zugleich einen Teil ihres Pionierauftrages. Je höher das Altpapieraufkommen ist, desto weniger Holz muß in unseren Wäldern geschlagen werden. (1 Tonne Altpapier entspricht einer Kiefer im Alter von etwa 80 Jahren.) Die Jungen Pioniere einer 2. Klasse sammeln jede Woche durchschnittlich 25 kg Altpapier.
Wieviel Wochen lang müßten sie dieselbe Menge Altpapier der Erfassungsstelle zuführen, um eine Kiefer vor dem Einschlag zu bewahren?

Klassenstufe 3

● Das Wettbewerbsprogramm des *VEB Bekleidungswerke Steppke* in Görlitz für das Jahr 1974 sieht vor, daß im Werk IV zusätzlich zum Staatsplan 5 000 Hosen gefertigt werden. Im Werk II soll die Anzahl an zusätzlich gefertigten Knabenhosen 2 000 Stück mehr betragen als die doppelte Anzahl der im Werk IV zusätzlich gefertigten Hosen.
Wieviel Knabenhosen werden zur besseren Versorgung der Bevölkerung zusätzlich an den sozialistischen Handel ausgeliefert?

● Jedes der beiden *Braunkohlenkombinate Senftenberg und Lauchhammer* will zu Ehren des 25. Jahrestages der Gründung der DDR 125 000 Tonnen Briketts mehr erzeugen als geplant.

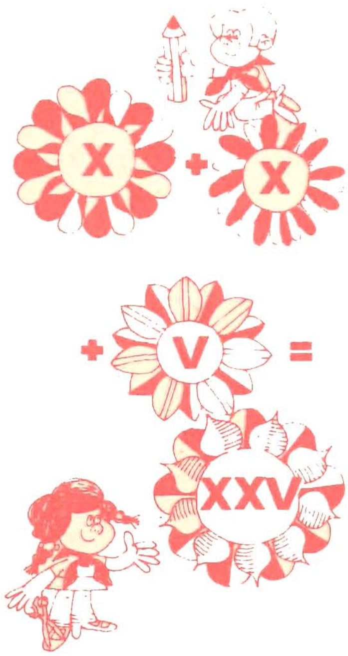
Zu Ehren des *25. Jahrestages der DDR* nehmen sich die Schüler der *OS Osternienburg* vor, ihre Leistungen noch weiter zu verbessern. Die Hälfte aller Schüler dieser Schule (Kl. 5 bis 10) nehmen am *alpha*-Wettbewerb teil. *Unser Bild:* Ausschnitt aus der Demonstration am 1. Mai.

Für wieviel 3-Personen-Haushalte würde diese zusätzliche Produktion an Briketts reichen, wenn die jährliche Zuweisung für einen 3-Personen-Haushalt 1 050 kg Brikett beträgt?

Klassenstufe 4

● Die Werkstattleiter und Ingenieure des *Kreisbetriebes für Landtechnik Strasburg*, Bezirk Neubrandenburg, haben sich im Wettbewerbsprogramm für das Jahr 1974 vorgenommen, im Vergleich zum Jahre 1973 bei jedem von den 855 zur Generalüberholung vorgesehenen Mähdreschern vom Typ E 512 für 170 Mark Material einzusparen und den Höchstpreis der Instandsetzung um 290 Mark zu unterbieten.
Welchen finanziellen Nutzen erwirtschaften diese Werktätigen, wenn für jede Generalüberholung der Höchstpreis zugrunde gelegt wird?

● Die 187 Schiffe der DDR-Handelsflotte sollen im Jahre 1974 eine Transportleistung von 10,8 Millionen Tonnen erreichen. Welche Länge würde ein Güterzug mit der gleichen Transportleistung haben, der aus gedeckten Güterwagen mit einer Tragfähigkeit von je 25 t und einer Länge von je 12 m besteht?



Klassenstufe 5

● Das Wohnschiff *Kuhle Wampe*, das im Berliner Stadtbezirk Köpenick ständig vor Anker liegt, beherbergt seit Anfang des Jahres 1974 FDGB-Urlaubsgäste. Es bietet 41 Plätze in 2- und 3-Bett-Kabinen.
Wieviel 2- und 3-Bett-Kabinen könnten auf dem Wohnschiff vorhanden sein?
Wieviel Feriengäste werden im Jahre 1974 bei einem einwöchigen Aufenthalt und einer ganzjährigen Belegung auf dem Wohnschiff erwartet?

● Im Jahre 1974 wollen die Berliner Bauschaffenden der Bevölkerung neben zahlreichen Wohnungen weitere 42 Objekte übergeben. Es handelt sich um eine Schwimmhalle, zwei Feierabendheime, fünfmal soviel Kindergärten wie Feierabendheime, vier Turnhallen mehr als Kindergärten und viermal soviel Schulen wie Kaufhallen. Wieviel neue Schulen erhält unsere Hauptstadt Berlin im Jahre 1974?

Klassenstufe 6

● Seit dem Jahre 1972 wird in Gladau, Kreis Genthin, industriemäßig Schweinefleisch produziert. Die Anlage, ein 20-Millionen-Objekt, wurde von zehn LPG und einem Volksgut als zwischenbetriebliche Einrichtung (ZBE) geschaffen. Das Kollektiv dieser Anlage beschloß im Jahre 1974 soviel Schweinefleisch zu produzieren, wie die Bevölkerung der DDR an einem Tag verbraucht. Oder anders gesagt: Die 30 000 Schweine, die hier gemästet werden, reichen aus, um 70 000 Bürger ein Jahr lang zu versorgen.
Wieviel Mastschweine werden benötigt, um eine Stadt mit 100 000 Einwohnern einen Monat (30 Tage) lang zu versorgen?

● Die Werktätigen des *Flachglaskombinates Torgau* beschlossen, im Jahre 1974 als Beitrag zum Wohnungsbauprogramm 140 000 m^2 Glas über den Plan hinaus zu produzieren. Die Glasmenge reicht aus für 4 500 Neubauwohnungen.
Wieviel Quadratmeter Glasscheiben werden für 10 000 Neubauwohnungen benötigt?

Klassenstufe 7

● Die *PGH Gas/Wasser* in *Berlin-Lichtenberg* wird den Anteil der Reparaturen für die Bevölkerung an den Gesamtleistungen von 69,5 % im Jahre 1972 auf 80 % im Jahre 1974 erhöhen.
Wieviel Prozent beträgt die absolute Steigerung bei den Reparaturen für die Bevölkerung im Jahre 1974 gegenüber dem Jahre 1972?

● Zur Fortsetzung der dynamischen Entwicklung unserer Volkswirtschaft nach dem VIII. Parteitag der SED sieht der Volkswirtschaftsplan 1974 vor, das Nationaleinkommen auf 105,4 % zu erhöhen. Es wird damit 133 Milliarden Mark erreichen. Das ist fast ein Drittel mehr, als es im Jahre 1969, dem 20. Jahrestag unserer Deutschen Demokratischen Republik, betrug.
Wieviel Mark betrug das Nationaleinkommen in den Jahren 1973 und 1969?

Klassenstufe 8

● Ebenso wie die Werktätigen in Industrie und Landwirtschaft stellen sich die Angehörigen der *Nationalen Volksarmee* anspruchsvolle Ziele im Jahre 1974. Im sozialistischen Wettbewerb *Soldatenauftrag XXV – Wie Thälmann kampfentschlossen – jederzeit gefechtsbereit!* kämpfen Angehörige der NVA um die Erhöhung der Kampfkraft und Gefechtsbereitschaft ihrer Einheiten.
So haben sich die Soldaten einer 200 Mann starken Einheit vorgenommen, daß 85 % von ihnen Träger der Schützenschnur werden. Um das gesteckte Ziel zu erreichen, müßten noch doppelt soviel Schützenschnüre wie bereits getragen werden und weitere 14 Schützenschnüre erkämpft werden.
Wieviel Soldaten dieser Einheit sind bereits Träger der Schützenschnur?

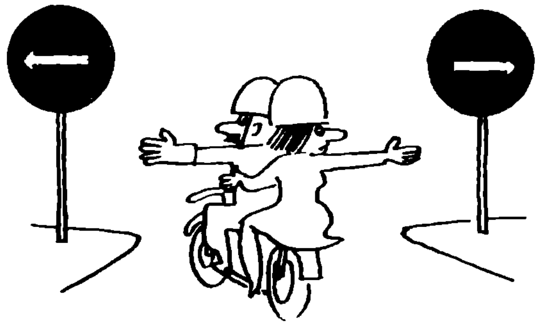
● Der Gegenplan der Werktätigen des *Stahl- und Walzwerkes Brandenburg* sieht vor, den erhöhten Staatsplan des Jahres 1974 noch um 16 000 t Rohstahl zu überbieten. Diese Menge Rohstahl, zu Grobblech ausgewalzt, ergibt rund 30 km Rohr von einem Meter Außendurchmesser. Diese Rohre werden beispielsweise im *Pumpspeicherwerk Merkersbach* gebraucht. Die *Brandenburger Stahlwerker* ersparen uns damit teuer zu bezahlende Importe.
Welche Wandstärke haben diese Rohre bei einer Dichte des Stahls von 7,85 $\frac{g}{cm^3}$?

Klassenstufe 9/10

● Im Staatshaushaltsplan der DDR für das Jahr 1974 sind Ausgaben in Höhe von 99,5 Milliarden Mark vorgesehen. Davon entfallen an Ausgaben für das materielle und kulturelle Lebensniveau des Volkes 26,7 Milliarden Mark, die sich wie folgt aufschlüsseln:
Für den Wohnungsbau (einschließlich der Zuschüsse zur Sicherung der gesetzlich festgelegten Mietpreise) werden 3,7 Milliarden Mark verwendet. Für das Bildungswesen und den Wohnungsbau (einschließlich der Zuschüsse zur Sicherung der gesetzlich festgelegten Mietpreise) sind zusammen 0,3 Milliarden Mark mehr vorgesehen als für Subventionen zur Sicherung stabiler Verbraucherpreise. Für das Bildungswesen und für Subventionen zur Sicherung stabiler Verbraucherpreise werden zusammen 17,6 Milliarden Mark ausgegeben. Die restliche Geldsumme entfällt auf sonstige Ausgaben.
Wieviel Milliarden Mark sind für sonstige Ausgaben vorgesehen?

● Die Schülerinnen einer 9. Klasse beteiligen sich an der militärpolitischen und wehrsportlichen Massenaktion *Signal DDR – 25*. Beim letzten Training der Schülerinnen dieser Klasse im Luftgewehrschießen belegte Monika den dritten Platz; die Siegerin, Bärbel, erzielte vier Ringe mehr als Monika und zwei Ringe mehr als Margit, die auf den zweiten Platz kam. Monika erreichte $\frac{4}{5}$ der Anzahl aller möglichen Ringe. Addiert man die von diesen drei Schülerinnen erreichten Ringzahlen, so erhält man das $2\frac{1}{2}$fache der Anzahl der möglichen Ringe.
Wie groß ist diese Anzahl? Welche Ringzahlen erhielten die drei Mädchen?

Teilbarkeitsbeziehungen



dargestellt für Schüler ab der sechsten Klasse

In diesem Artikel möchten wir Euch einige über den Schulstoff hinausgehende Teilbarkeitssätze erläutern. Dabei werden alle Betrachtungen im Bereich der natürlichen Zahlen ausschließlich der Null geführt, und mit einer Zahl ist daher stets eine natürliche Zahl ungleich Null gemeint.

Gehen wir von einem Beispiel aus. Wenn 1 728 von 36 geteilt wird, dann teilt 36 auch $2 \cdot 1\,728 = 3\,456$, $3 \cdot 1\,728 = 5\,184$ usw. Diese Überlegung läßt uns folgendenden Satz vermuten: Wenn die Zahl a die Zahl b teilt, dann teilt a auch jedes Vielfache (c-fache) von b.

Aus $a|b$ folgt $a|b \cdot c$.

Beim Beweis dieser Aussage stützen wir uns auf die Definition des Teilers. Ihr findet sie im Mathematikbuch der sechsten Klasse. Nach dieser Definition ist $a|b$ gleichbedeutend mit $b = a \cdot x$. Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit c, so erhalten wir $b \cdot c = a \cdot x \cdot c$. Da $x \cdot c$ eine natürliche Zahl ist, folgt aus $b \cdot c = a \cdot (x \cdot c)$, daß $b \cdot c$ das $(x \cdot c)$-fache von a ist, oder anders ausgedrückt $a|b \cdot c$, was zu beweisen war.

▲1▲ Für jedes c gilt:
Aus $a|b$ folgt $ac|bc$.

Beweist diesen Satz! Auch bei diesem Beweis geht man von der Definitionsgleichung $b = a \cdot x$ aus.

▲2▲ Aus $a|b$ und $c|d$ folgt $ac|bd$.

Wählt einige Zahlenpaare $(a; b)$ und $(c; d)$ mit $a|b$ bzw. $c|d$ und prüft, ob für diese Paare die Aussage wahr ist! Beweist anschließend das Gesetz!

Betrachten wir jetzt das Zahlenpaar (12; 276). Es gilt $12|276$. Ferner wissen wir, daß 1 380 ein Vielfaches von 276 ist. Was läßt sich dann über die Zahlen 12 und 1 380 aussagen? Bestimmt habt Ihr festgestellt, daß dann 12 auch ein Teiler von 1 380 ist. Allgemein:

Aus $a|b$ und $b|c$ folgt $a|c$.

Die in der Voraussetzung des Satzes enthaltenen Teilbarkeitsbeziehungen lassen sich als $b = ax_1$ und $c = bx_2$ schreiben. Setzen wir die erste dieser beiden Gleichungen in die zweite ein, so erhalten wir $c = ax_1x_2$. Damit ist c das (x_1x_2)-fache von b, also $b|c$, was bewiesen werden sollte.

Wir kommen jetzt zu einem häufig gebrauchten Satz:

Ist b teilerfremd zu a, und ist bc durch a teilbar, so ist c durch a teilbar. Zwei teilerfremde Zahlen a und b haben den größten gemeinschaftlichen Teiler 1. Schreiben wir dafür $(a, b) = 1$, so erhält man folgende Formulierung des Satzes:

Aus $a|bc$ und $(a, b) = 1$ folgt $a|c$.

Macht Euch auch den Inhalt dieses Satzes an einigen Beispielen klar! Wegen der Voraussetzung $(a, b) = 1$ ist c der größte gemeinschaftliche Teiler der Produkte bc und ac, also $(bc, ac) = c$. Ferner ist a gemeinschaftlicher Teiler von bc und ac. Da aber jeder gemeinschaftliche Teiler im größten gemeinschaftlichen Teiler enthalten ist, ist c durch a teilbar. Damit ist unser Satz bewiesen.

▲3▲ Welcher Satz läßt sich hieraus für $a = p$ folgern, wenn p eine Primzahl ist?

Da 14 ein Teiler von 882 ist und 18 ebenfalls 882 teilt, ist das Produkt $14 \cdot 18$ auch ein Teiler von ... Halt! So darf man nicht schließen. Unter welcher zusätzlichen Bedingung wird ein solcher Trugschluß vermieden? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die Teiler 7 und 18 von 882. Ihr Produkt $7 \cdot 18 = 126$ teilt in der Tat auch 882. Offensichtlich liegt das daran, daß 7 und 18 zueinander tielerfremd sind. Der entsprechende Satz lautet:

Aus $a|c$ und $b|c$ mit $(a, b) = 1$ folgt $ab|c$.

Wegen $a|c$ und $b|c$ ist c ein gemeinschaftliches Vielfache von a und b. Ferner teilt das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen jedes gemeinsame Vielfache dieser Zahlen. Schreiben wir das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen a und b als $[a, b]$, so gilt $[a, b]|c$, also $c = [a, b] \cdot x$. Da nach Voraussetzung a und b teilerfremd sind, ist ihr kleinstes gemeinschaftliche Vielfache gleich ihrem Produkt ab. Somit folgt $c = ab \cdot x$, was gleichbedeutend mit der zu beweisenden Behauptung $ab|c$ ist.

In allen besprochenen Gesetzen waren die Zahlen multiplikativ verknüpft. Wenden wir uns jetzt noch zwei Teilbarkeitssätzen zu, in denen die Zahlen additiv verbunden sind.

Für beliebige m und n gilt:

Aus $a|b_1$ und $a|b_2$ folgt $a|(mb_1 + nb_2)$.

Zum Beweis schreiben wir $a|b_1$ und $a|b_2$ wiederum als Gleichungen:

$$b_1 = ax_1 \text{ und } b_2 = ax_2.$$

Multiplizieren wir die erste der beiden Gleichungen auf beiden Seiten mit m und entsprechend die zweite mit n und addieren anschließend seitenweise, so erhält man:

$$mb_1 + nb_2 = max_1 + nax_2.$$

Wird auf der rechten Seite a ausgeklammert, also $a(mx_1 + nx_2)$, so folgt unmittelbar, daß a ein Teiler von $mb_1 + nb_2$ ist, w. z. b. w. Für $m = n = 1$ liegt ein Sonderfall des Satzes vor:

Aus $a|b_1$ und $a|b_2$ folgt $a|(b_1 + b_2)$.

▲4▲ Bildet zu dem eben bewiesenen Satz die Umkehrung! Ist diese allgemeingültig?

Der obige Satz läßt sich auch für eine Differenz aussprechen. Für beliebige m und n gilt dann:

Aus $a|b_1$ und $a|b_2$ folgt $a|(mb_1 - nb_2)$, falls $mb_1 > nb_2$,
bzw. $a|(nb_2 - mb_1)$, falls $mb_1 < nb_2$.

Während wir bei der Übung 4 die Umkehrung des Satzes gewannen, indem die gesamte Voraussetzung mit der Behauptung ausgetauscht wurde, können wir aber auch so vorgehen, daß nur ein Teil der Voraussetzung in die Umkehrung einbezogen wird. Das führt zu folgendem Satz:

Aus $a|(mb_1 + nb_2)$ und $a|b_1$ folgt $a|nb_2$.

Wenn b_1 von a geteilt wird, so ist a auch Teiler von mb_1. Nach dem eben besprochenen Satz ergibt sich dann $a|[(mb_1 + nb_2) - mb_1]$, also $a|nb_2$, w. z. b. w.

Speziell gilt auch hier wieder:

Aus $a|(b_1 + b_2)$ und $a|b_1$ folgt $a|b_2$.

▲5▲ In der XI. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR, I. Stufe (Schulolympiade) wurde in der Olympiadeklasse 9 folgende Aufgabe gestellt:

Ermittelt alle natürlichen Zahlen a, für die der Term $t = \frac{a+11}{a-9}$ eine natürliche Zahl ist!

Wollt Ihr prüfen, ob Ihr alle Aufgaben richtig gelöst habt, so lest auf Seite 93 nach.

K. Becker

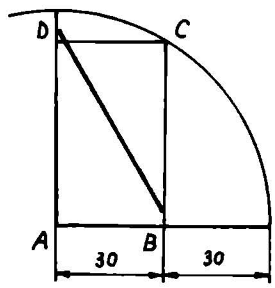
In freien Stunden alpha heiter

Unterhaltungsmathematik aus Österreich

„Und jetzt bitte die Acht üben...“

Schnell nachgedacht

In der Abbildung ist ein Rechteck einem Kreisquadranten einbeschrieben.
Ein guter Denker erkennt in weniger als zwei Minuten, wie lang die farbig gekennzeichnete Strecke $\overline{BD}$ ist.



Sonderbare Additionen

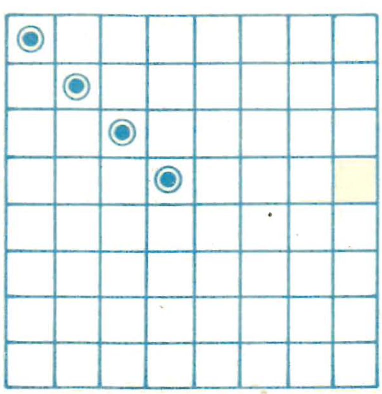
In den folgenden Additionsaufgaben, Summen zweier dreistelliger Zahlen, treten alle Ziffern von 1 bis 9 auf und jede nur einmal:

286 + 173 = 459
784 + 152 = 936

Es gibt noch weitere 19 solcher Additionen. Wer findet noch einige?

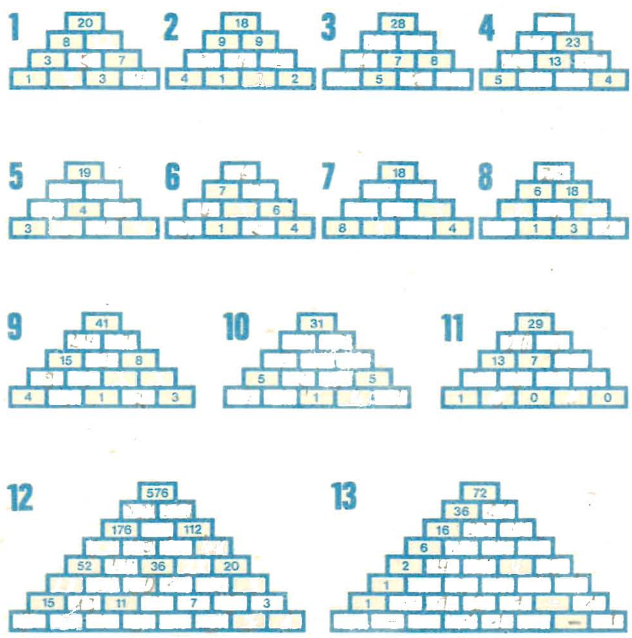
Rund um das Schachbrett

Auf einem 64-feldrigen Schachbrett stehen vier Bauern nebeneinander. Jedem Bauern soll ein gleichgroßes Feld (d. h. eine gleichgroße Fläche) zugeordnet werden. Die vier Felder sind zueinander kongruent.



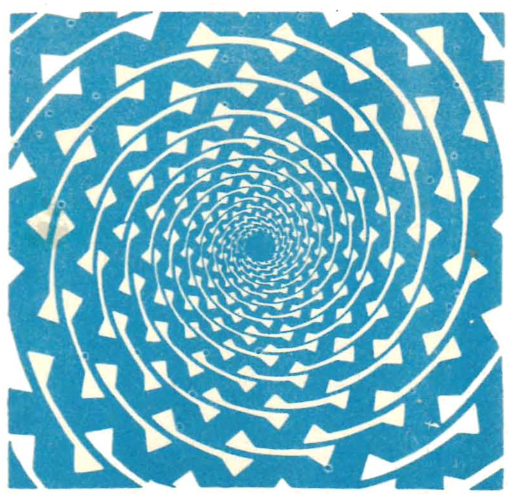
Die mathematische Ziegelmauer

Jeder Ziegel soll so mit einer Zahl versehen werden, daß sie gleich der Summe der links und rechts unter ihr liegenden Zahlen ist. *Beispiel:* Bei Mauer 1 fehlen, von unten beginnend, die Zahlen 2, 4, 5, 12.



Magische Figur

Beschreibe mit einem Satz, was du hier siehst!

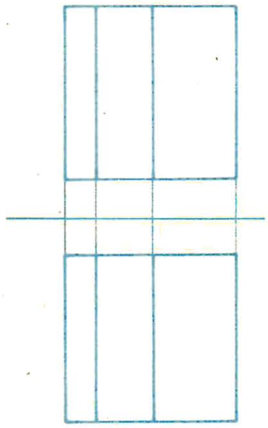


Brüder und Schwestern

Wie viele Söhne und wie viele Töchter hat die Familie? Peter hat doppelt so viele Brüder wie Schwestern; Sigrid hat fünfmal so viele Brüder wie Schwestern.

Schrägbild gesucht

Von einem (nicht notwendig) konvexen Körper sind Grund- und Aufriß gegeben.
Wie sieht das Schrägbild aus?



Kryptarithmetik

■ In $a5b$ sollen a und b durch solche Ziffern ersetzt werden, daß die entstehende Zahl durch 6 teilbar ist ($a \neq 0$).
Wieviel derartige natürliche Zahlen gibt es?

$\boxed{a5b}$

● Die Buchstaben a, b, c, d und e sind so durch rationale Zahlen zu ersetzen, daß in den Reihen, Spalten und Diagonalen jeweils gleiche Summen entstehen.

a	b	13
c	−2	−22
−17	d	e

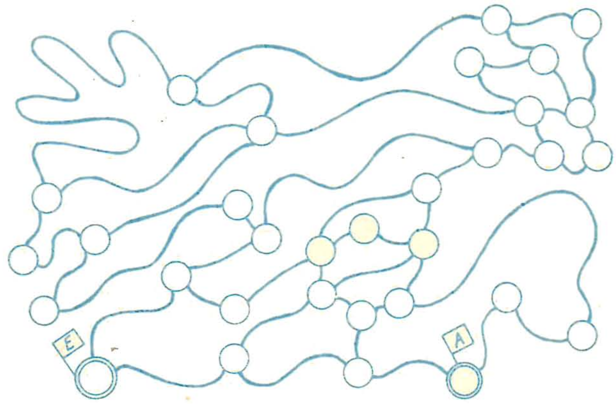
Ersetze die Buchstaben durch Ziffern! (Gleiche Buchstaben entsprechen gleichen Ziffern!)

$$\frac{EVE}{DID} = 0{,}TALK\dot{T}\dot{A}\dot{L}\dot{K}$$

$$z * 17 * d = dddd\ldots$$

Gut versteckt und leicht zu finden

Folgen wir den Spuren des schlauen Maulwurfs. Er hat sich zwischen seiner Schlafhöhle (A) und seinem Ausguck (dem Hügel E) ein verwirrendes System aus Röhren und Höhlen angelegt. Jeden Morgen läuft er von A nach E und passiert dabei sein Vorratslager. Merkwürdig ist nur, daß er es nur nach einem bestimmten Gesetz findet. Erreicht er den Maulwurfshügel nach drei, fünf, sieben, neun oder elf Zwischenhöhlen, hat er das Lager nicht passiert. Erreicht er dagegen E in einer geraden Anzahl von Stationen, hat er sein Lager gefunden.
Zwischen welchen beiden Höhlen liegt das Vorratslager?

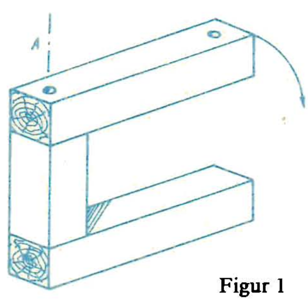


Ordne!

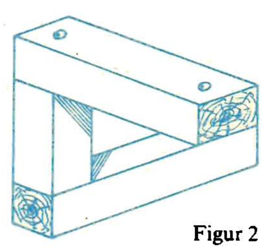
Ordne die Zahlen a, b, c, d, e, f und g nach der Größe!
a ist die drittkleinste Zahl;
b ist größer als c, aber kleiner als d;
e ist kleiner als c, aber nicht die kleinste Zahl;
f ist größer als g.

Paradox

Zu Figur 1: Der obere Balken ist um die Achse A drehbar angeordnet.



Figur 1



Figur 2

Zu Figur 2: Drehen wir den Balken im Pfeilsinn nach vorn und befestigen ihn an dem unteren Balken, so erhalten wir „einen Körper, den es nicht gibt".

Wir danken den österreichischen *alpha*-Lesern, die das vorliegende Material zur Verfügung stellten:
Dr. M. Skalicky, Wien; Dr. H. Scholz, Wien (Zeitschrift π); Prof. Th. Mühlgassner, Eisenstadt; Prof. W. Ratzinger, Linz; E. Kaltofen, Haid

Lösungen

Lösung der Aufgabe von Pawel Kröger

▲1050▲ Wir nehmen an, daß alle Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt sind, und daß es keine Person gibt, die weniger als n Bekannte hat, daß also jede Person mindestens n Bekannte hat. Es sei nun A eine beliebige Person, die genau k Bekannte $B_1, B_2, ..., B_k$ hat. Dann gilt, weil A mindestens n Bekannte hat, $k \geqq n$. Von den Personen $B_1, B_2, ..., B_k$ können dann keine zwei miteinander bekannt sein, da vorausgesetzt war, daß es keine drei Personen gibt, von denen jede mit jeder bekannt ist.

Nun möge die Person B_i genau m Bekannte haben, wobei $m \geqq n$. Unter den Bekannten von B_i können nicht die Personen $B_1, B_2, ..., B_k$ sein, wohl aber alle anderen Personen (und in jedem Falle die Person A).

Es gilt daher $m \geqq 2n-k$.

Wegen $n \geqq m$ folgt hieraus

Es gilt daher $m \leqq 2n-k$.

Wegen $n \leqq m$ folgt hieraus

$2n-k \geqq n$, also $n \geqq k$.

Andererseits gilt aber auch $n \leqq k$,

woraus $k=n$ folgt, d.h. die Person A hat genau n Bekannte. Das gilt aber auch für jede andere Person; denn wir haben die Person A beliebig angenommen. Jede Person hat also genau n Bekannte im Widerspruch zu der Voraussetzung, wonach nicht alle Personen die gleiche Anzahl von Bekannten haben. Aus diesem Widerspruch folgt, daß unsere Annahme, wonach es keine Person gibt, die weniger als n Bekannte hat, falsch ist. Damit ist bewiesen, daß es mindestens eine Person gibt, die weniger als n Bekannte hat.

Lösungen zu Heft 2/74

▲5▲1195 Aus $15<n<85$ folgt, da n ein Vielfaches von 17 ist, $n=17$ oder $n=34$ oder $n=51$ oder $n=68$. Da 51 durch 3 teilbar ist, entfällt 51. Die Zahlen 17, 34 und 68 erfüllen die gestellten Bedingungen.

▲5▲1196 Die gesuchten Zahlen seien a und b. Da die Subtraktion im Bereich der natürlichen Zahlen nur für $a \geqq b$ ausführbar ist, ergeben sich folgende, in der nachstehenden Tabelle angeführten Möglichkeiten.

a	b	$a+b$	$a-b$
8	8	16	0
9	7	16	2
10	6	16	4
11	5	16	6
12	4	16	8
13	3	16	10
14	2	16	12
15	1	16	14
16	0	16	16

Nur die Zahlen $a=10$ und $b=6$ erfüllen die Gleichung $(a+b)=4\cdot(a-b)$;
es gilt $10+6=4\cdot(10-6)$.

W 5 ■ 1197 Es müssen wenigstens 5 Schüler sein. Die Teiler von 96, die gleich oder größer als 5 sind, lauten 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96. Wir stellen eine Tabelle auf.

Anzahl d. Schüler n	Anzahl der Äpfel je Schüler $96:n$	$n-4$	$96:(n-4)$
6	16	2	48
8	12	4	24
12	8	8	12
16	6	12	8
24	4	20	n. l.
32	3	28	n. l.
48	2	44	n. l.
96	1	92	n. l.

Nur die Zahlen in der 3. Zeile der Tabelle erfüllen die gestellten Bedingungen. Genau 12 Schüler teilen sich die Äpfel; jeder von ihnen erhält 8 Äpfel. Wären es nur 8 Schüler gewesen, so hätte jeder von ihnen 12 Äpfel erhalten.

W 5 ■ 1198 Der Umfang des Rechtecks beträgt $u=2\cdot(a+b)=2\cdot(10+16)$ cm $=52$ cm. Ein umfanggleiches Quadrat hat dann die Seitenlänge 52 cm : 4 = 13 cm; sein Flächeninhalt beträgt somit $A=13\cdot 13\,\text{cm}^2=169\,\text{cm}^2$.

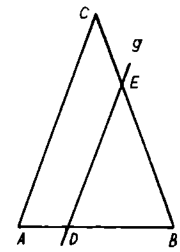
W 5*1199 Aus $V_1=8\cdot 10\cdot 15\,\text{cm}^3$ und $V_2=x\cdot 12\cdot 25\,\text{cm}^3$ und $V_1=V_2$ folgt $300\cdot x=1\,200$, also $x=4$.
Die Länge der dritten Kante des zweiten Quaders beträgt 4 cm.

W 5*1200 Die zweite Zahl sei x, dann ist die erste Zahl $(x-3)$ und die dritte Zahl $(x+3)$, und ihre Summe beträgt $3\cdot x$. Aus $3\cdot x=63$ folgt $x=21$. Die gesuchten Zahlen lauten 18, 21 und 24.

▲6▲1201 Wegen $252=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7=4\cdot 9\cdot 7=6\cdot 6\cdot 7$ lassen sich folgende dreistellige Zahlen bilden, für die das Produkt aus ihren Ziffern 252 beträgt: 479, 497, 749, 794, 947, 974, 667, 676 und 766. Davon sind die Zahlen 794, 974, 676 und 766 durch 2 teilbar, also keine Primzahlen.
Wegen $7\cdot 71=497$, $7\cdot 107=749$ und $23\cdot 29=667$ sind auch die Zahlen 497, 749 und 667 keine Primzahlen.
Dagegen sind die Zahlen 497 und 947 Primzahlen, und es gilt $4\cdot 7\cdot 9=9\cdot 4\cdot 7=252$.
Daher gibt es genau zwei Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

▲6▲1202 Die gesuchte Zahl z hat die Quersumme $7+1+8+4+x=20+x$.
Dabei ist x gleich der Summe der beiden Zahlen, die den einzusetzenden Grundziffern entsprechen, also $0 \leqq x \leqq 18$. Da z durch 18 teilbar ist, ist z durch 9 und durch 2 teilbar. Die Zahl z ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme 27 oder 36 beträgt, d. h., wenn $x=7$ oder $x=16$ beträgt. Wegen der notwendigen Teilbarkeit durch 2 muß die letzte Ziffer von z gerade sein.
a) Aus $1+6=7$ folgt, daß die kleinste dieser durch 18 teilbaren Zahlen 711 846 lautet.
b) Aus $8+8=16$ folgt, daß die größte dieser Zahlen 718 848 lautet.

W 6 ■ 1203 Aus $AC \parallel DE$ folgt $\sphericalangle CAB = \sphericalangle EDB$. Wegen $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$ gilt somit $\sphericalangle EDB = \sphericalangle EBD$ und folglich auch $\overline{DE}=\overline{BE}$, d. h., das Dreieck DBE ist ebenfalls gleichschenklig. Für den Umfang des Dreiecks ABC gilt $\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{BC}=13$ cm, also auch $\overline{AC}+(\overline{AD}+\overline{DB})+(\overline{BE}+\overline{EC})=13$ cm. Wegen $\overline{DE}=\overline{BE}$ erhalten wir daraus durch Einsetzen $(\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EC})+\overline{DB}=13$ cm. Der Klammerausdruck ist gleich dem Umfang des Vierecks $ADEC$; deshalb gilt 11 cm $+\overline{DB}=13$ cm bzw. $\overline{DB}=2$ cm und somit $\overline{AD}=3\text{ cm}-2\text{ cm}=1$ cm.



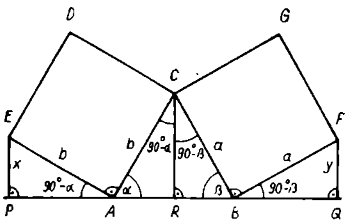
W 6 ■ 1204 Aus $a\cdot b=30{,}2$ und $a\cdot c=19{,}8$ folgt $a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c)=30{,}2+19{,}8=50$.

W 6*1205 Die erste Ziffer des zweiten Faktors muß eine 2 sein; denn nur das Produkt $7\cdot 2$ endet auf die Ziffer 4. Die erste Ziffer des zweiten Summanden muß eine 1 sein; denn $5+1=6$. Die erste Ziffer des ersten Faktors muß eine 2 sein; denn nur dann kann der erste Summand mit der Ziffer 5 beginnen. Die zweite Ziffer des ersten Faktors muß 5, 6, 7, 8 oder 9 sein; nur dann wird die Aufgabe $2{*}7\cdot 2=5{*}4$ sinnvoll. Der erste Faktor der Aufgabe sei x. Setzt man für x die Zahlen 257, 267, 277, 287, 297 ein, so gilt $x<300$, also $4x<1\,200$. Daher kann die zweite Ziffer des zweiten Faktors nicht 4 oder nicht kleiner als 4 sein. Setzt man $x=257$, so gilt $5x=1\,285$, und wir erhalten die Lösung

$$\begin{array}{r} 257\cdot 25=6\,425 \\ \hline 514 \\ 1\,285 \\ \hline 6\,425 \end{array}$$

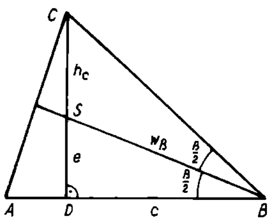
Ist $x \geqq 267$, so wird $5x \geqq 1\,335$, also entfallen die Möglichkeiten, daß die zweite Ziffer des ersten Faktors 6, 7, 8 oder 9 beträgt.

W 6*1206 Wir fällen von C das Lot CR auf die Gerade AB. Für das Dreieck ARC gilt dann $\sphericalangle ACR = 90° - \alpha$, für das Dreieck RBC gilt $\sphericalangle RCB = 90° - \beta$. Aus $\overline{AE} = \overline{AC} = b$, $\sphericalangle EPA = \sphericalangle ARC = 90°$ und $\sphericalangle EAP = \sphericalangle ACR = 90° - \alpha$ folgt $\triangle PAE \cong \triangle ARC$ und somit $\overline{AR} = x$.

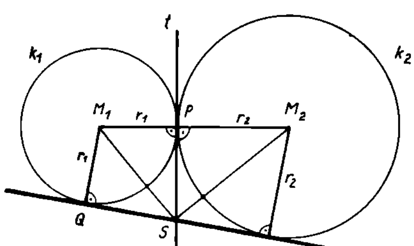


Aus $\overline{BC} = \overline{BF} = a$, $\sphericalangle BQF = \sphericalangle CRB = 90°$ und $\sphericalangle FBQ = \sphericalangle RCB = 90° - \beta$ folgt $\triangle RBC \cong \triangle BQF$ und somit $\overline{RB} = y$. Wegen $\overline{AC} = c$ und $\overline{AC} = \overline{AR} + \overline{RB}$ gilt $x + y = c$.

▲7▲1207 Wir konstruieren zunächst das Teildreieck DBS aus $\sphericalangle SDB = 90°$, $\sphericalangle DBS = \frac{\beta}{2} = 20°$ und $\overline{DS} = e = 2$ cm; dies ist eine bekannte Grundkonstruktion. Danach tragen wir in B an $\overline{BA}$ den Winkel $\beta = 40°$ an; sein freier Schenkel schneidet die über S hinaus verlängerte Strecke $\overline{DS}$ in C. Nun schlagen wir um B mit $c = 7$ cm einen Kreis, der die über D hinaus verlängerte Strecke $\overline{BD}$ in A schneidet und verbinden A mit C.



▲7▲1208 Der Abbildung ist folgendes zu entnehmen:
$\triangle QSM_1 \cong \triangle SPM_1$ ($\sphericalangle SQM_1 = \sphericalangle SPM_1 = 90°$, $\overline{PM_1} = \overline{QM_1} = r_1$, $\overline{SM_1} = \overline{SM_1}$), folglich $\overline{QS} = \overline{PS}$.
$\triangle SRM_2 = \triangle PSM_2$ ($\sphericalangle SPM_2 = \sphericalangle SRM_2 = 90°$, $\overline{PM_2} = \overline{RM_2} = r_2$, $\overline{SM_2} = \overline{SM_2}$), folglich $\overline{SR} = \overline{PS}$.
Aus $\overline{QS} = \overline{PS}$ und $\overline{SR} = \overline{PS}$ folgt $\overline{QS} = \overline{SR}$, d. h. der Punkt S halbiert die Strecke $\overline{QR}$.



W 7 ■ 1209 Der zweite Faktor sei $10a + b$. Wegen $a = 2b$ lautet der zweite Faktor $10 \cdot 2b + b = 21b$. Durch Vertauschen der Ziffern erhalten wir daraus $10 \cdot b + 2b = 12b$. Nun gilt

$$37 \cdot 21b = 37 \cdot 12b + 666,$$
$$21b = 12b + 18,$$
$$9b = 18,$$
$$b = 2.$$

Probe: $37 \cdot 42 = 1\,554$, $37 \cdot 24 = 888$, $1\,554 - 888 = 666$.

W 7 ■ 1210 Die beiden gesuchten natürlichen Zahlen seien a und $b = 3a - 1$. Dann gilt $6a \cdot 4b = 1680$, also $a \cdot b = 70$. Durch Einsetzung erhalten wir daraus $a \cdot (3a - 1) = 5 \cdot 14$, d. h., es gilt $a = 5$ und $b = 14$.
Es ist dies die einzige Lösung; denn jede andere Zerlegung von 70 in ein Produkt von zwei Faktoren $(1 \cdot 70 = 2 \cdot 35 = 7 \cdot 10)$ erfüllt nicht die gestellten Bedingungen.

W 7*1211 Wir stützen uns auf folgenden Satz: „Die Mittelpunkte der Seiten eines konvexen Vierecks sind Eckpunkte eines Parallelogramms". Wir konstruieren zunächst das Dreieck PTQ, dessen Seiten sämtlich gegeben sind. Die Parallele zu $\overline{PT}$ durch Q schneidet die Parallele zu $\overline{QT}$ durch P im Punkte S, der Mitte der Seite $\overline{AD}$ des Trapezes. Die Mittellinie $\overline{ST}$ ist parallel zur Seite $\overline{AB}$. Wir tragen in S an $\overline{ST}$ einen Winkel von 50° an; sein freier Schenkel schneidet die Parallele zu $\overline{ST}$ durch Q im Punkte D. Die Gerade SD schneidet die Parallele zu $\overline{ST}$ durch P in A. Der Kreis um P mit $\overline{AP}$ als Radius schneidet die Gerade AP in B, die Gerade BT schneidet die Gerade DQ in C.

W 7*1212
$$7! - 6! - 5! = 5! \cdot 6 \cdot 7 - 5! \cdot 6 - 5!$$
$$= 5!(6 \cdot 7 - 6 - 1)$$
$$= 5! \cdot 35$$
$$= 120 \cdot 35 = 4200$$

▲8▲1213 Wir berechnen zunächst die Summe s und erhalten
$$s = n^2 + (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 6n + 9)$$
$$= 4n^2 + 12n + 14$$
$$= (2n)^2 + 2 \cdot 2n \cdot 3 + 3^2 + 5$$
$$= (2n + 3)^2 + 5.$$
Die Summe s ist also genau dann ein Vielfaches von 10, wenn die Zahl $(2n + 3)^2$ auf die Grundziffer 5 endet. Das trifft nur zu, wenn die Zahl $2n + 3$ ebenfalls auf die Grundziffer 5 endet. Ist nun $n = 5k + 1$, wobei k eine natürliche Zahl ist, so gilt
$$2n + 3 = 2(5k + 1) + 3 = 10k + 5,$$
d. h., die Zahl $2n + 3$ endet auf die Grundziffer 5. Es gibt also unendlich viele natürliche Zahlen n, die die verlangte Eigenschaft haben, nämlich die Zahlen
$$n = 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \ldots,\ 5k + 1,\ \ldots.$$

▲8▲1214 a) Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß es ein ebenes konvexes n-Eck gibt, das vier spitze Winkel hat. Da jeder dieser spitzen Winkel kleiner als 90° ist, ist ihre Summe kleiner als $4 \cdot 90° = 2 \cdot 180°$. Da das n-Eck konvex ist, ist jeder der restlichen $n - 4$ Winkel kleiner als 180°; ihre Summe ist also kleiner als $(n - 4) \cdot 180°$.
Für die Summe aller Winkel dieses n-Ecks gilt daher die Ungleichung:
$s < 2 \cdot 180° + (n - 4) \cdot 180° = (n - 2) \cdot 180°$.
Diese Ungleichung steht aber im Widerspruch zu der Gleichung für die Winkelsumme des n-Ecks:
$$s = (n - 2) \cdot 180°.$$
Daher ist die obige Annahme falsch, womit bewiesen ist, daß ein ebenes konvexes n-Eck höchstens drei spitze Winkel hat.
b) Die Abbildung zeigt ein konvexes Fünfeck, das die Winkel 60°, 75°, 165°, 165°, 75°, also genau drei spitze Winkel hat.

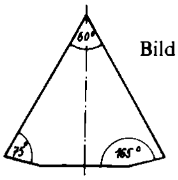


Bild 1

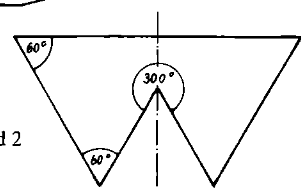


Bild 2

c) Die Abbildung zeigt ein ebenes nichtkonvexes Fünfeck, das die Winkel 60°, 60°, 300°, 60°, 60°, also vier spitze Winkel hat. Dieses Fünfeck ist aber nichtkonvex, da ein Winkel ein überstumpfter Winkel (300°) ist.

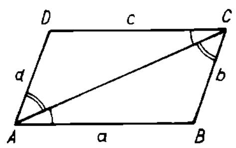
W 8 ■ 1215 Die drei Brüder besaßen zusammen $10 + 10 + 10 = 30$ Ziegen und $10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 60$ Zicklein. Jeder der drei Brüder sollte also 10 Ziegen und 20 Zicklein erhalten, also jeweils doppelt soviel Zicklein wie Ziegen.
Da nun die Zicklein nicht von ihren Müttern getrennt werden sollten, mußte jeder der Brüder entweder zusammen mit einer Ziege, die zwei Zicklein hat, diese beiden Zicklein erhalten oder zusammen mit zwei Ziegen, von denen die eine ein Zicklein und die andere drei Zicklein hat, diese vier Zicklein erhalten. Daraus ergibt sich bereits eine der möglichen Aufteilungen, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Der erste Bruder erhält 10 Ziegen, die je zwei Zicklein haben, also dazu $10 \cdot 2 = 20$ Zicklein. Der zweite Bruder erhält 5 Ziegen, die je ein Zicklein haben, und außerdem 5 Ziegen, die je drei Zicklein haben, zusammen also 10 Ziegen und $5 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 20$ Zicklein. Der dritte Bruder erhält die übrig bleibenden 5 Ziegen, die je ein Zicklein haben, und außerdem die übrig bleibenden 5 Ziegen, die je drei Zicklein haben, zusammen also 10 Ziegen und $5 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 20$ Zicklein.

W 8 ■ 1216 Aus $\overline{AF} = 14$ cm und $\overline{AF} = \overline{AE}$ folgt $\overline{AE} = 14$ cm. Aus $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = 14$ cm $+ 7$ cm $= 21$ cm und $\overline{DC} = \overline{AB}$ folgt $\overline{DC} = 21$ cm. Aus $\overline{DC} = \overline{CE}$ folgt $\overline{CE} = 21$ cm und somit $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE} = 14$ cm $+ 21$ cm

35 cm. Nach dem *Satz des Pythagoras* gilt $\overline{BC}^2+\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$, also $\overline{BC}^2=(35^2-21^2)\ \text{cm}^2 =(1225-441)\ \text{cm}^2=784\ \text{cm}^2$. Daraus folgt $\overline{BC}=28$ cm, d. h., die Rechteckseite $\overline{BC}$ hat eine Länge von 28 cm.

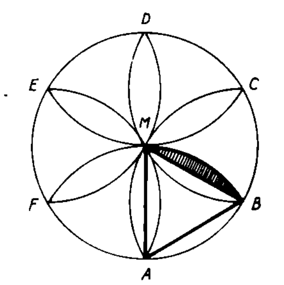
W 8*1217 Aus $d+a=b+c$ folgt $a-b=c-d$. Wegen $a+b=c+d$ folgt weiter durch Addition $2a=2c$, also $a=c$. Ferner folgt durch Subtraktion $2b=2d$, also $b=d$.
Daher gilt wegen $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{BC}=\overline{DA}$, $\overline{AC}=\overline{AC}$

$\triangle ABC\cong\triangle ACD$.



Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt $\sphericalangle CAB=\sphericalangle ACD$ und, da diese Winkel Wechselwinkel an den von AC geschnittenen Geraden AB und CD sind, $AB \parallel CD$. Ferner folgt $\sphericalangle BCA=\sphericalangle CAD$, also $BC \parallel AD$. Also ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm, w. z. b. w.

W 8*1218 Es seien A, B, C, D, E, F die Spitzen der Rosette und M der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, der den Radius r hat. Dann sind wegen $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{AB}=\overline{MC}=\overline{BC}$ usw. die Dreiecke MAB, MBC usw. gleichseitig, und alle sechs Teile der Rosette sind kongruent.



Wegen $\sphericalangle MAB=60$ ist der Flächeninhalt des durch die Radien $\overline{AM}$ und $\overline{AB}$ sowie durch den Kreisbogen $\widehat{MB}$ begrenzten Sektors gleich $\frac{\pi}{6}r^2$. Andererseits ist der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks MAB gleich $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$. Daher ist der Flächeninhalt des durch die Sehne $\overline{MB}$ und durch den Bogen $\widehat{MB}$ begrenzten Kreisabschnitts gleich $\frac{\pi}{6}r^2-\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$.
Da die Rosette aus 12 kongruenten Kreisabschnitten besteht, ist der Flächeninhalt der Rosette gleich

$$A_1=12\left(\frac{\pi}{6}r^2-\frac{r^2}{4}\sqrt{3}\right)=r^2(2\pi-3\sqrt{3})$$
$$\approx 1{,}087\,r^2.$$

Nun ist der Flächeninhalt des umschriebenen Kreises gleich

$$A_2=\pi r^2\approx 3{,}1416\,r^2.$$

Wir erhalten daher

$$\frac{A_1}{A_2}\approx\frac{1{,}087\,r^2}{3{,}1416\,r}\approx 0{,}346>\frac{1}{3}.$$

Der Flächeninhalt der Rosette ist also nur etwas größer als $\frac{1}{3}$ des Flächeninhalts des umbeschriebenen Kreises.

W 9 ■ 1220 a) Es sei $t_1=10$ s die Zeit, in der die Geschwindigkeit

$$v_1=80\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}=\frac{80\,000}{3\,600}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$=\frac{200}{9}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ erreicht wird. Ferner sei a die Beschleunigung. Dann gilt $v_1=a\cdot t_1$, also

$$a=\frac{v_1}{t_1}=\frac{200}{9\cdot 10}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}=\frac{20}{9}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$\approx 2{,}222\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Die Beschleunigung beträgt also rund $2{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.
b) Dabei hat der Kraftwagen eine Strecke von

$$s_1=\frac{a\cdot t_1^2}{2}=\frac{20\cdot 100}{9\cdot 2}\ \text{m}=\frac{1000}{9}\ \text{m}\approx 111{,}11\ \text{m},$$

d. s. rund 111 m, zurückgelegt.
c) Es sei t_2 die Zeit, in der die Geschwindigkeit

$$v_2=150\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}=\frac{150\,000}{3\,600}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$=\frac{125}{3}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ erreicht wird. Dann gilt wegen

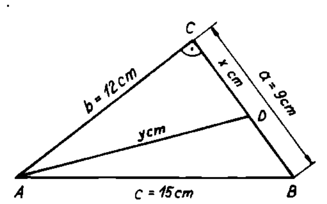
$a=\frac{20}{9}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ und $v_2=a\cdot t_2$

$$t_2=\frac{v_2}{a}=\frac{125\cdot 9}{3\cdot 20}\ \text{s}=\frac{75}{4}\ \text{s}=18{,}75\ \text{s}.$$

Der Kraftwagen erreicht also seine Höchstgeschwindigkeit von $150\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ in 18,75 s, d. s. rund 19 s.
d) Die dabei zurückgelegte Strecke beträgt

$$s_2=\frac{a\cdot t_2^2}{2}=\frac{20\cdot 18{,}75^2}{9\cdot 2}\ \text{m}=10\cdot 6{,}25^2\ \text{m}$$
$$\approx 391\ \text{m}.$$

W 9 ■ 1221 Wegen $9^2+12^2=15^2$ ist nach der Umkehrung des *Satzes des Pythagoras* das Dreieck ABC rechtwinklig, und es gilt $\gamma=90°$.



Da auch das Dreieck ADC rechtwinklig ist, gilt nach dem *Satz des Pythagoras*
$y^2=x^2+144$, also $x^2=y^2-144$.
Da x ganzzahlig sein soll, muß y^2-144 eine Quadratzahl sein. Weil D ein innerer Punkt der Seite $\overline{BC}$ sein soll, muß ferner $12<y<15$ gelten. Da auch y ganzzahlig sein soll, kann nur $y=13$ oder $y=14$ sein.
Für $y=13$ erhält man $x^2=169-144=25=5^2$, also $x=5$.
Für $y=14$ erhält man $x^2=196-144=52$; in diesem Falle ist also x nicht ganzzahlig.
Daher läßt sich auf der Seite $\overline{BC}$ des Dreiecks ABC genau ein Punkt D so finden, daß die Maßzahlen der Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ ganzzahlig sind. Es gilt $\overline{CD}=x$ cm $=5$ cm und $\overline{AD}=y$ cm $=13$ cm.

W 9*1222 Wegen $a+b+c=0$ gilt $(a+b+c)^2=0$, also

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=0,$$
$$a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0,$$
$$ab+ac+bc=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}. \qquad (1)$$

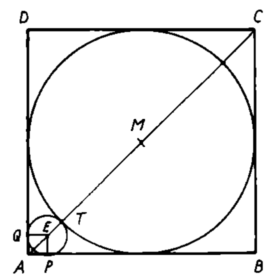
Nun gilt aber für alle reellen Zahlen a, b, c $a^2\geqq 0$, $b^2\geqq 0$, $c^2\geqq 0$, also $a^2+b^2+c^2\geqq 0$.
Daraus folgt

$$-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\leqq 0. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt daher

$ab+ac+bc\leqq 0$, w. z. b. w.

W 9*1223 Es seien $ABCD$ das gegebene Quadrat mit der Seitenlänge a und k_1 der einbeschriebene Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\frac{a}{2}$. Dann gibt es vier Möglichkeiten für die Lage des Kreises k_2, der aus Symmetriegründen in allen Fällen den gleichen Radius x hat. Wir nehmen an, daß der Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt E so liegt, daß er die Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AD}$ des Quadrats in den Punkten P bzw. Q sowie den Kreis k_1 in dem Punkt T berührt.



a) Dann gilt $\overline{ET}=x$;
$\overline{AE}=x\sqrt{2}$, da AE Diagonale des Quadrates $APEQ$ ist;
$\overline{AM}=\frac{a}{2}\sqrt{2}$, da $\overline{AM}$ halbe Diagonale des Quadrates $ABCD$ ist; $\overline{MT}=\frac{a}{2}$.
Daraus folgt
$\overline{AE}+\overline{ET}+\overline{MT}=\overline{AM}$,

$$x\sqrt{2}+x+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{2},\ x(\sqrt{2}+1)=\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1),$$
$$x=\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}+1)}=\frac{a}{2}\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{a}{2}(3-2\sqrt{2})\approx 0{,}0858\,a.$$

b) Der Flächeninhalt des Kreises k_1 ist gleich $A_1=\frac{\pi}{4}a^2=0{,}25\,\pi a^2$. Der Flächeninhalt des Kreises k_2 ist gleich $A_2=\pi x^2\approx 0{,}0858\pi a^2$ $\approx 0{,}00736\,\pi a^2$. Daraus folgt

$$\frac{A_1}{A_2}\approx\frac{0{,}25}{0{,}00736}\approx 34{,}0.$$

Der Flächeninhalt des Kreises k_1 ist also rund 34 mal so groß wie der des Kreises k_2.

W 10/12 ■ 1224 Es sei n die Anzahl der Münzen, die der Vater zu gleichen Teilen an seine Söhne verteilen wollte.

Dann erhielt der 1. Sohn 1 Münze und $\frac{1}{7}$

des Restes, das sind $\frac{n-1}{7}$; insgesamt erhielt also der 1. Sohn

$$s_1 = 1+\frac{n-1}{7}. \qquad (1)$$

Der 2. Sohn erhielt 2 Münzen und dazu $\frac{1}{7}$ des Restes. Dieser Rest beträgt jetzt, nachdem der 1. Sohn s_1 Münzen erhalten hat,
$n-s_1-2=n-1-\frac{n-1}{7}-2$; also erhielt der 2. Sohn

$$s_2=2+\frac{n-1-\frac{n-1}{7}-2}{7}. \qquad (2)$$

Da jeder Sohn den gleichen Anteil erhielt, gilt $s_1=s_2$, also wegen (1) und (2)

$$1+\frac{n-1}{7}=2+\frac{n-1-\frac{n-1}{7}-2}{7}.$$

Daraus folgt

$$7+n-1=14+n-1-\frac{n-1}{7}-2,$$
$$\frac{n-1}{7}=5,$$
$$n-1=35,$$
$$n=36.$$

Der Vater besaß also insgesamt 36 Münzen. Der 1. Sohn erhielt $s_1=1+\frac{35}{7}=1+5=6$ 6 Münzen, der 2. Sohn $s_2=2+\frac{28}{7}=6$ Münzen, der 3. Sohn $s_3=3+\frac{21}{7}=6$ Münzen, der 4. Sohn $s_4=4+\frac{14}{7}=6$ Münzen, der 5. Sohn $s_5=5+\frac{7}{7}=6$ Münzen und der 6. Sohn $6+\frac{0}{7}=6$ Münzen. Damit waren alle Münzen verteilt.
Der Vater hatte also genau 6 Söhne.

W 10/12 ■ 1225 Es sei (x, y, z) eine reelle Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3). Dann sind $x, y, z, x+y, x+z$ und $y+z$ sämtlich von Null verschieden, da sonst die Gleichungen (1), (2) oder (3) nicht erfüllt wären. Daher sind auch die folgenden drei Gleichungen erfüllt, die man erhält, wenn man jeweils auf beiden Seiten die reziproken Werte einsetzt:

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{2} \;(4) \qquad \frac{x+z}{xz}=\frac{4}{3} \;(5) \qquad \frac{y+z}{yz}=\frac{5}{6} \;(6)$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \;(7) \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{4}{3} \;(8) \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \;(9)$$

Durch Subtraktion erhält man aus (7) und (8) $\quad \frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}; \qquad (10)$

Weiter folgt durch Addition aus (9) und (10)

$$\frac{2}{y}=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1, \text{ also } y=2. \qquad (11)$$

Ferner folgt aus (7)

$$\frac{1}{x}=\frac{3}{2}-\frac{1}{y}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1, \text{ also } x=1 \text{ und aus (8)} \qquad (12)$$

$$\frac{1}{z}=\frac{4}{3}-\frac{1}{x}=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}, \text{ also } z=3. \qquad (13)$$

Wenn also das Gleichungssystem (1), (2), (3) überhaupt eine Lösung hat, so kann es nur die Lösung (1, 2, 3) sein. Nun gilt für $x=1, y=2, z=3$

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{1\cdot 2}{1+2}=\frac{2}{3}, \quad \frac{xz}{x+z}=\frac{1\cdot 3}{1+3}=\frac{3}{4},$$
$$\frac{yz}{y+z}=\frac{2\cdot 3}{2+3}=\frac{6}{5};$$

d. h. die Gleichungen (1), (2), (3) sind erfüllt, und dieses Gleichungssystem hat genau eine Lösung, nämlich (1, 2, 3).

W 10/12*1226 Es seien x und y zwei reelle Zahlen, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Dann gilt

$$x+y=xy=x^2-y^2. \qquad (1)$$

Aus (1) folgt

$$x+y=x^2-y^2,$$
$$x+y=(x+y)(x-y). \qquad (2)$$

Die Gleichung (2) ist erfüllt, wenn $x+y=0$ oder wenn $x-y=1$.
1. Ist $x+y=0$, so ist $y=-x$, (3)
also wegen (1)

$$x+y=xy,$$
$$x-x=-x^2,$$
$$x^2=0,$$

also $x=0$ und wegen (3) $y=0$. (4)
Wir haben damit die erste Lösung des Gleichungssystems (1) erhalten; denn für $x_1=0$, $y_1=0$ ist dieses Gleichungssystem erfüllt.
2. Ist $x-y=1$, so ist $y=x-1$. (5)
Wegen (1) folgt dann

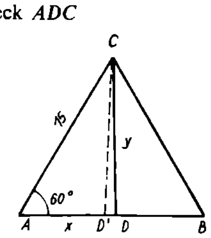
$$x+y=xy,$$
$$x+x-1=x(x-1),$$
$$x^2-3x+1=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau zwei Lösungen, nämlich
$x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; wegen (5) ist dann
$y_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; und $x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$;
wegen (5) ist dann $y_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Das sind aber auch Lösungen von (1); denn es gilt

$$x_2+y_2=x_2y_2={x_2}^2-{y_2}^2=2+\sqrt{5}.$$
$$x_3+y_3=x_3y_3={x_3}^2-{y_3}^2=2-\sqrt{5}.$$

Daher erfüllen genau drei geordnete Paare reeller Zahlen die gestellten Bedingungen, nämlich (0, 0),
$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ und $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

W 10/12*1227 Angenommen, es gibt auf der Seite $\overline{AB}$ einen inneren Punkt D so, daß die Maßzahlen der Längen der Strecken $\overline{AD}=x$ cm und $\overline{CD}=y$ cm ganzzahlig sind. Dann gilt nach dem Kosinussatz für das Dreieck ADC



$$y^2=15^2+x^2-2\cdot 15\cdot x\cdot \cos 60°, \qquad (1)$$

also wegen $\cos 60°=\frac{1}{2}$

$$y^2=225+x^2-15x,$$
$$x^2-15x+225-y^2=0. \qquad (2)$$

Da der Punkt D ein innerer Punkt der Seite $\overline{AB}$ ist, ist y kleiner als 15 und größer oder gleich der Maßzahl der Höhe h des gleichseitigen Dreiecks ABC. Nun gilt
$h=\frac{15}{2}\sqrt{3}>\frac{15}{2}\cdot 1{,}7>12$, also $12<y<15$.
Da aber y ganzzahlig ist, kann nur $y=13$ oder $y=14$ sein. Für $y=13$ erhalten wir aus (2) die quadratische Gleichung

$$x^2-15x+225-169=0,$$
$$x^2-15x+56=0,$$

die die beiden Lösungen
$x_1=\frac{15}{2}+\sqrt{\frac{225}{4}-56}=\frac{15}{2}+\frac{1}{2}=8$ und
$x_2=\frac{15}{2}-\frac{1}{2}=7$ hat. Für $y=14$ erhalten wir aus (2) die quadratische Gleichung

$$x^2-15x+29=0,$$

die die beiden nicht ganzzahligen Lösungen
$x_1=\frac{15+\sqrt{109}}{2}$ und $x_2=\frac{15-\sqrt{109}}{2}$ hat.
Die Gleichung (1) hat also nur zwei Lösungen, nämlich
$x_1=8, y_1=13$ und $x_2=7, y_2=13$,
die den gestellten Bedingungen entsprechen. Daher gibt es auf der Seite $\overline{AB}$ genau zwei innere Punkte D und D' mit $\overline{AD}=8$ cm und $\overline{AD'}=7$ cm, die die geforderten Eigenschaften haben.

Lösungen zu: Teilbarkeitsregeln

▲1▲ $a|b$, das heißt $b=ax$. Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit c und erhalten $bc=axc$. Wegen der Kommutativität der Multiplikation folgt $bc=ac\cdot x$, also $ac|bc$. w. z. b. w.
▲2▲ $a|b$, das heißt $b=ax_1$,
$c|d$, das heißt $d=cx_2$. Beide Seiten der Gleichungen werden multipliziert:

$$bd=ax_1cx_2=ac\cdot x_1x_2.$$

Damit ist bd das (x_1x_2)-fache von ac, woraus unsere Behauptung $ac|bd$ folgt.
▲3▲ Für jede Primzahl p folgt aus $(p, b)=1$ sofort $p \nmid b$. Somit
aus $p|bc$ und $p|b$ folgt $p|c$.
Eine Primzahl p geht in einem Produkt dann und nur dann auf, wenn sie in mindestens einem Faktor aufgeht.
▲4▲ Umkehrung:
Aus $a|(xb_1+yb_2)$ folgt $a|b_1$ und $a|b_2$.
Ein Gegenbeispiel zeigt unmittelbar, daß dieser Satz nicht allgemeingültig ist. Betrachten wir dazu die Zahl 21, die sich durch 3 teilen läßt. Zwar gibt es additive Zerlegungen von 21, bei denen jeder Summand ein Vielfaches von 3 ist (etwa $15+6$), daneben treten aber auch solche auf, in deren Summanden die Zahl 3 nicht enthalten ist (beispielsweise $17+4$).
▲5▲ Wegen $t\in N$ und $a\in N$ folgt für den Nenner $a-9\geq 1$, also $a\geq 10$.

Ferner muß $(a-9)|(a+11)$ gelten. Aus $(a-9)|[(a-9)+20]$ und $(a-9)|(a-9)$ folgt $(a-9)|20$. Ersichtlich muß $a \leqq 29$ sein. Die gesuchten Zahlen a liegen somit im Intervall $10 \leqq a \leqq 29$. Die Teilbarkeitsbedingung $(a-9)|20$ wird erfüllt von den Zahlen $a \in \{10, 11, 13, 14, 19, 29\}$.
Diese Zahlen bilden die Lösungsmenge.

Lösungen zu:
Wir bestimmen die geographischen Koordinaten unseres Heimatortes

1. a) Die Äquatorlänge beträgt

$$u = 2\pi R = 40\,077 \text{ km}.$$

Da es auf jeder Erdhalbkugel 180 Längenkreise gibt, dividieren wir durch 360 und erhalten

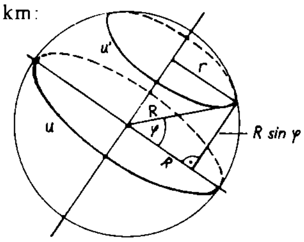
$$a = \frac{u}{360} = 111 \text{ km}.$$

b)
$$r^2 + R^2 \sin^2\phi = R^2$$
$$r^2 = R^2(1 - \sin^2\phi) = R^2 \cos^2$$
$$r = R\cos\phi$$
$$a = \frac{u'}{360} = \frac{2\pi R}{360}\cos\phi$$

c) 1. Ermitteln des Abstandes zweier Längenkreise in der geografischen Breite:

$$a = \frac{2\pi R}{360°} \cdot \cos\varphi \cdot \frac{1'32''}{1'} \approx 1{,}9 \text{ km}$$

2. Proportion zur Berechnung des Fehlers Δa in km:



$$\frac{\Delta a}{\Delta\lambda} = \frac{a}{1}, \quad \Delta a = \frac{a \cdot \Delta\lambda}{1°} = 1.78 \text{ km}$$

Die Differenz der MEZ zur wahren Ortszeit können wir mit folgender Proportion berechnen:

$$\frac{1\text{ h}}{15°} = \frac{\Delta t}{\Delta\lambda}, \quad \Delta t = \frac{1\text{ h} \cdot \Delta\lambda}{15°} = \frac{60\text{ min}\,(15° - \lambda)}{15°}$$

Für die Orte mit $\lambda < 15°$ erhalten wir aus der Proportion positive, für die Orte jenseits des 15. Längenkreises negative Zeitdifferenzen:

Leipzig	+10,4 min	Bratislava	− 8,4 min
Döbeln	+ 7,6 min	Kraków	−19,6 min
Berlin	+ 6,4 min	Warschau	−24,4 min
Dresden	+5,2 min		

Da sich die Sonne auf ihrer scheinbaren täglichen Bahn von Ost nach West bewegt, ist es in Leipzig 12.10, in Döbeln 12.08, in Berlin 12.06, in Dresden 12.05, in Bratislava 11.52, in Kraków 11.40 und in Warschau 11.36 Uhr wahre Ortszeit.

Lösung der Aufgabe zu:
Ein Brief aus Potsdam

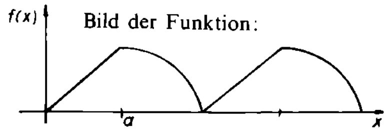
$$g(x) = mx, \quad g(0) = 0, \quad g(a) = ma.$$

Aus (7) folgt dann $m = \frac{\sqrt{A}}{a}$, d. h. $g(x) = \frac{\sqrt{A}}{a}x$.

$$\sqrt{A - [g(x-a)]^2} = \sqrt{A - \frac{A}{a^2}(x-a)^2}$$
$$= \frac{1}{a}\sqrt{Ax(2a-x)}.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{A}}{a}x & \text{für } 0 \leqq x \leqq a \\ \frac{1}{a}\sqrt{Ax(2a-x)} & \text{für } a \leqq x \leqq 2a. \end{cases}$$

Bild der Funktion:



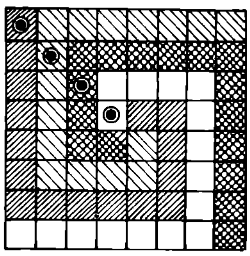
Lösungen zu alpha-heiter 4/74
(Unterhaltungsmathematik aus Österreich)

Schnell nachgedacht

Die Strecke $\overline{BD}$ ist Diagonale des Rechtecks $ABCD$. Sie ist genausolang wie die Diagonale $\overline{AC}$; diese ist, wie aus der Abbildung leicht zu entnehmen ist, gleich dem Radius des Kreises, d. h. 6 cm lang.

Sonderbare Additionen

387 + 162 = 549; 295 + 173 = 468;
394 + 281 = 675; 394 + 182 = 576;
467 + 352 = 819; 397 + 251 = 648;
487 + 152 = 639; 493 + 182 = 675;
576 + 342 = 918; 576 + 243 = 819;
586 + 341 = 927; 586 + 143 = 729;
596 + 142 = 738; 593 + 271 = 864;
675 + 243 = 918; 596 + 241 = 837;
695 + 142 = 837; 683 + 271 = 954;
783 + 162 = 945



Rund um das Schachbrett

Die mathematische Ziegelmauer

12. Ziegelpyramide: 320, 256, 144, 16, 80, 64, 48, 44, 28, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 13, 9, 5, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;
13. Ziegelpyramide: 36, 20, 16, 10, 10, 6, 4, 6, 4, 2, 1, 3, 3, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1.

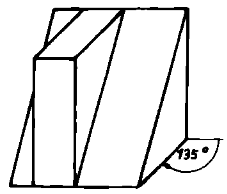
Brüder und Schwestern

In der Familie sind 5 Brüder und 2 Schwestern.

Magische Figur

Man sieht keine Spirale, sondern konzentrische Kreise!

Schrägbild gesucht



Kryptarithmetik

150, 156, 252, 258, 354, 450, 456, 552, 558, 654, 750, 756, 852, 858, 954

DID	303	EVE	242
$TALK$	7986		
Z	65359477124183...		
$Z \cdot 17$	11111111		
d	1 oder 2, 3, ..., 9		

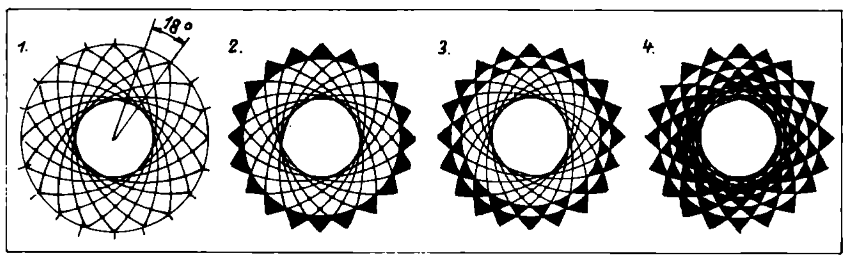
Gut versteckt und leicht zu finden

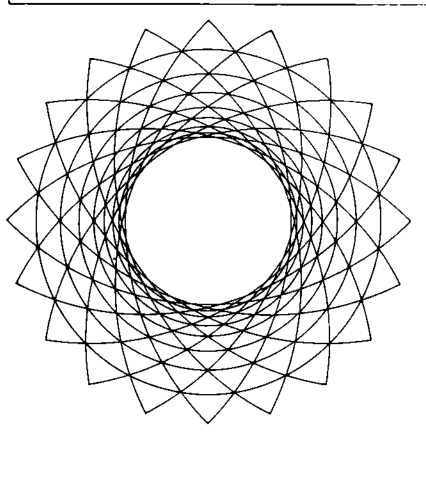
Das Vorratslager liegt zwischen der 10. und 11. Höhle.

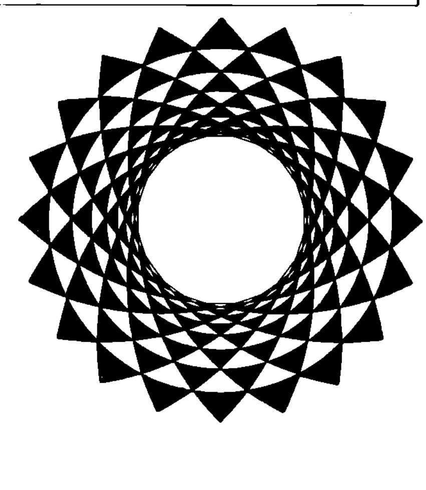
Ordne!

Es gibt mehrere Lösungen, eine davon: $g < e < a < c < b < d < f$

Mit Zirkel und Winkelmesser







Vom Jakobstab zum Sextanten

Der Jakobstab

Bis ins 18. Jahrhundert hin wurde der nach seinem Erfinder genannte „Jakobstab" verwendet, bevor er von dem handlicheren und genaueren *Sextanten* verdrängt wurde.

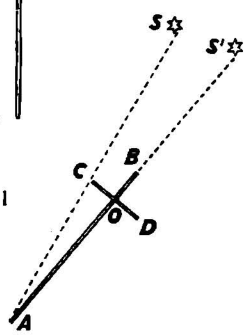


Bild 1

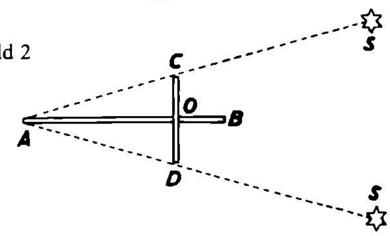


Bild 2

Der *Jakobstab* besteht aus einem etwa 70 bis 100 cm langen Lineal oder einer Latte $\overline{AB}$, an der die Schubleiste $\overline{CD}$ entlanggleitet. Die beiden Arme $\overline{CO}$ und $\overline{OD}$ der Schubleiste sind einander gleich. Will man mit Hilfe dieses Winkelmessers die Winkelentfernung zwischen zwei Sternen S und S' (siehe Bild 1) bestimmen, so hält man das Ende *A* des Lineals dicht an das Auge (am Ende des Lineals ist zum besseren Sehen ein mit einem Schauloch versehenes Brett angebracht) und peilt den Stern mit dem Stab so an, daß der Stern *S'* am Ende *B* des Lineals erscheint.

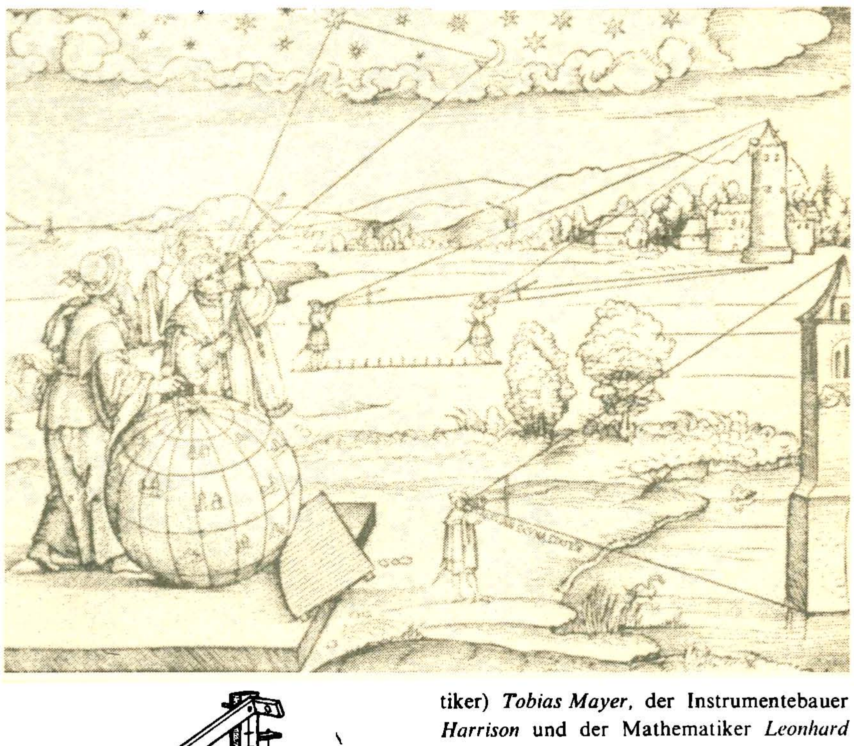
Dann schiebt man die Querleiste $\overline{CD}$ am Lineal entlang, bis der Stern *S* gerade am Ende *C* erscheint. Jetzt braucht man nur noch die Entfernung $\overline{AO}$ zu messen, damit die Größe des Winkels *SAS'* bestimmt werden kann. Die Länge $\overline{CO}$ ist bekannt. Der Tangens des gesuchten Winkels ist gleich dem Verhältnis $\frac{\overline{CO}}{\overline{AO}}$. Die Länge $\overline{AC}$ wird nach dem Lehrsatz des Pythagoras berechnet, worauf der Winkel aus dem Sinus $\frac{\overline{CO}}{\overline{AC}}$ bestimmt wird. Der gesuchte Winkel läßt sich auch graphisch ermitteln. Nachdem man das Dreieck *ACO* in einem beliebigen Maßstab auf dem Papier konstruiert hat, kann der Winkel *CAO* mit dem Winkelmesser gemessen werden.

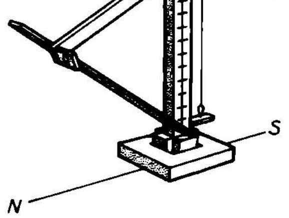
Wozu brauchen wir den zweiten Querleisten von $\overline{OD}$? Er ist für die Fälle vorgesehen, in denen der gesuchte Winkel so groß ist, daß er nach der beschriebenen Methode nicht gemessen werden kann. In diesem Falle wird nicht das Lineal $\overline{AD}$, sondern die Gerade $\overline{AD}$ auf den Stern *S'* gerichtet, indem man die Querleiste so weit schiebt, daß ihr Ende *C* mit dem Stern *S* zusammenfällt. Der Winkel *SAS'* kann nach einem der oben beschriebenen Verfahren ermittelt werden. (Bild 2)

Der Sextant einst

Vor 250 Jahren, in einer Zeit, da sich in den bürgerlichen Nationalstaaten Handel und Hochseefischerei entfalteten, wurde die Bestimmung genauer geographischer Positionen für die Seefahrt ebenso zu einer Notwendigkeit wie die Herstellung genauer Karten, die nicht nur auf den bis dahin nachlässig angefertigten Landaufnahmen der Feldmesser beruhten. Unzureichende Orientierung auf See hatten schon zahlreiche Schiffsverluste zur Folge gehabt und Tausenden von Seeleuten das Leben gekostet. Noch im Jahre 1752 waren auf der gesamten Erde nur etwa 150 Orte mit hinreichender Genauigkeit hinsichtlich geographischer Länge und Breite bekannt.

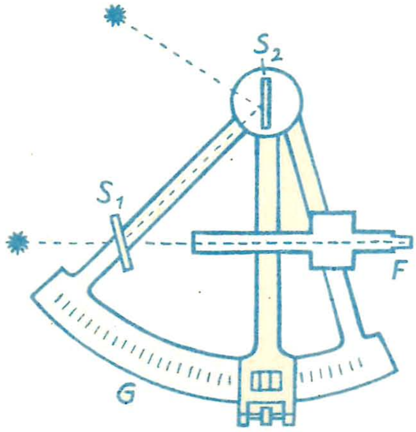
Sowohl einzelne Herrscher als auch Parlamente bekundeten höchstes Interesse am Einsatz der Wissenschaft im Dienste der Lösung dieser Probleme und erteilten gutbezahlte Aufträge an Gelehrte oder wissenschaftliche Institutionen. So bot z. B. das englische Parlament im Jahre 1714 demjenigen 20 000 Pfund, der eine Methode vorweisen konnte, Längenbestimmungen auf See mit einer Genauigkeit von 0,5 Grad durchführen zu können. Den Preis erhielten gemeinsam: der Astronom (und Theoretiker) *Tobias Mayer*, der Instrumentebauer *Harrison* und der Mathematiker *Leonhard Euler*. Die Genauigkeit dieser Berechnungen setzte voraus: die theoretische Beherrschung der Mond- und Planetenbewegungen, genaue mathematische Rechenverfahren, präzis arbeitende Zeitmeß- und Winkelmeßinstrumente. Handelte es sich um Längenbestimmungen auf See, so ist es zudem notwendig, daß diese Geräte ungeachtet der hohen Genauigkeitsansprüche transportabel und unkompliziert in der Handhabung sind.



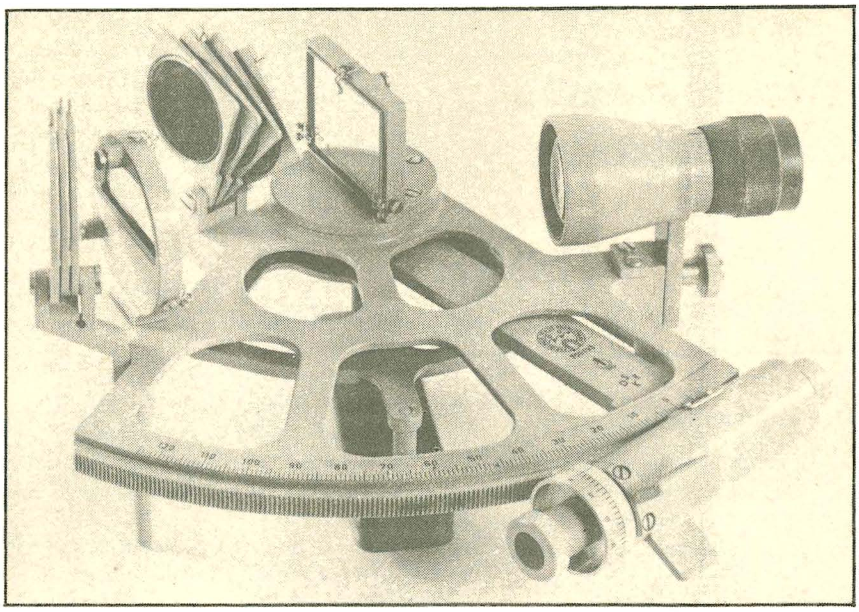


Astronomisches Beobachtungsgerät, ein *Triquetrum* (Dreistab).

Die im 18. Jahrhundert entwickelten Aktivitäten brachten ständig neue Erkenntnisse, Methoden und Verfahren. Die Berechnungen und Messungen zur Ortsbestimmung wurden immer perfekter.



Ein einfaches Winkelmeßinstrument ist der in der Nautik zur Ortsbestimmung viel benutzte *Sextant*. Hier werden die Bilder zweier Sterne (oder eines Sterns und des Horizonts) mit einem festen (S_1) und einem drehbaren Spiegel (S_2) in einem kleinen Fernrohr (F) zur Deckung gebracht. Der Winkelunterschied zwischen beiden Objekten kann an einem geteilten Sechstelkreis (G) abgelesen werden.



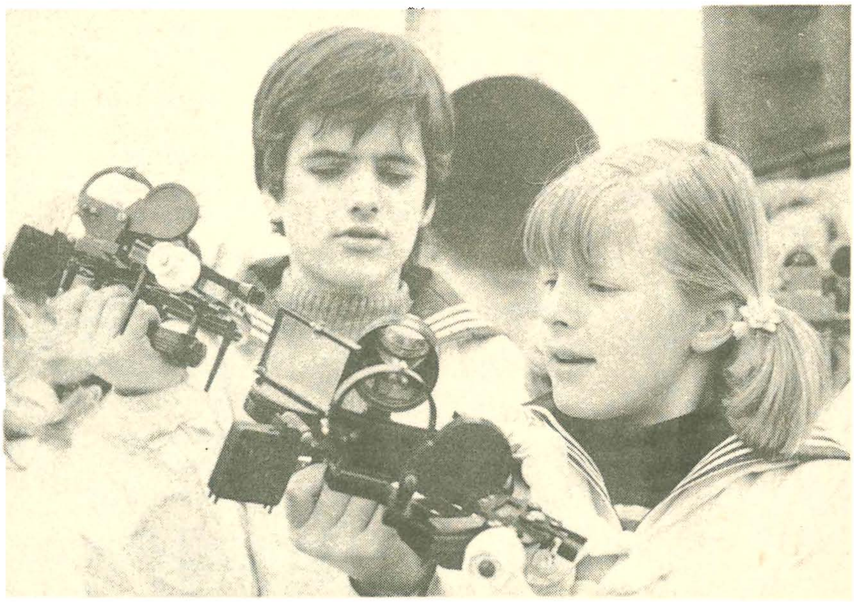
Der Sextant heute - Trommelsextant

Der Trommelsextant des *VEB Freiberger Präzisionsmechanik* dient im Zusammenwirken mit anderen nautischen Geräten zur astronomischen Ortsbestimmung auf See. Durch Messung des Winkels zwischen einem festen und einem beweglichen Spiegel bestimmt man die Kimmabstände von Gestirnen. In Küstennähe kann der Schiffsort auch durch Horizontalwinkelmessung – Einschneiden nach bekannten Punkten – ermittelt werden.

Das Gerät zeichnet sich durch seine schnelle und mühelose Ablesemöglichkeit aus, die ohne jedes optische Hilfsmittel möglich ist. Gute Fernrohroptik, geringes Gewicht und bequeme Handhabung verbürgen zuverlässige Meßergebnisse. Mehrere in den Strahlengang klappbare Filtergläser verschiedener Durchlässigkeit ermöglichen insbesondere bei Sonnenbetrachtungen den erforderlichen Helligkeitsausgleich.

Technische Daten:

Halbmesser des Gradbogens	17 cm
Gradteilung von	5 bis +125°
Skalenwert	1'
Schätzung	0,1
Fernrohröffnung	40 mm
Fernrohrvergrößerung	3,5 ×
Masse des Instruments	1,4 kg
Masse des Instruments mit Kasten	4,5 kg
Preis	550,– M



Rund 500 Mädchen und Jungen, die sich für den Seemansberuf interessieren, verlebten ihre Winterferien auf dem Rostocker Pionierschiff „Vorwärts". Die *Jungen Matrosen* im Alter von 10 bis 16 Jahren eignen sich an Bord nicht nur das ABC der Seefahrt an, sondern sind auch in Zirkeln der Nautiker, Maschinisten, Elektrotechniker, Funker und Elektroniker.

Voraussetzung für eine erfolgreiche Arbeit sind sehr gute Leistungen in Mathematik und den naturwissenschaftlichen Fächern.

Zwei Pioniere lernen die Handhabung eines Sextanten kennen, um damit den Standort des Schiffes zu bestimmen. In diesen Ferien fuhren die besten von ihnen auf dem Pionierschiff nach Leningrad, um mit ihren sowjetischen Freunden zusammenzutreffen und die seit Jahren bestehende Freundschaft zu vertiefen.

Arbeitspläne Mathematik

für die außerunterrichtliche Tätigkeit der Klassen 9/10

In den Nummern 4/72 und 4/73 der Zeitschrift *alpha* wurden Vorschläge für die außerunterrichtliche Tätigkeit in Mathematik für die Klassenstufen 5/6 und 7/8 vorgelegt. Nachfolgend angegebene Stoffgebiete für die Klassenstufen 9/10 bauen organisch auf den in den genannten Artikeln vorgeschlagenen Stoffgebieten und Stoffinhalten auf. Voraussetzung für die Durchführung von außerunterrichtlichen Zirkeln auf der Grundlage des hier unterbreiteten Planvorschlages ist daher, daß die Schüler bereits über grundlegende Kenntnisse und Fähigkeiten insbesondere in den Stoffgebieten Logik, Mengenlehre, Algebra, Zahlentheorie, Analysis und Geometrie verfügen. Wir möchten wiederholt betonen, daß es sich bei unseren Vorschlägen stets um ein Auswahlprogramm handelt. Es ist kaum möglich – und entspricht auch nicht unserer Absicht – alle angebotenen Stoffe im Rahmen einer Arbeitsgemeinschaft zu behandeln. Unsere Vorschläge sollen lediglich Anregungen geben und eine Grundlage dafür sein, unter Berücksichtigung der jeweiligen Bedingungen, Voraussetzungen und Möglichkeiten die inhaltliche Gestaltung einer AG-Tätigkeit zu bestimmen.

Es kommt nicht in erster Linie darauf an, die Schüler mit einer Vielzahl mehr oder weniger abstrakter Begriffe, Definitionen, Sätze und Beweise zu überschütten. Vielmehr sollte angestrebt werden, die Schüler anhand der hier angegebenen Stoffinhalte zu klaren Begriffsbildungen, zum Definieren, zum Umgang mit Definitionen zum Verstehen von Beweisen und zum Beweisen zu befähigen. Daher sollten zum Beispiel Begriffsbildungen nicht vorschnell vorgenommen werden, sondern – wenn auch nicht ausschließlich – anhand einer aus Beispielen und Übungen bestehenden sorgfältigen Vorbereitung erfolgen. Es ist auch nicht erstrebenswert, Begriffsbildungen um ihrer selbst willen vorzunehmen, mit neu eingeführten Begriffen muß weiter gearbeitet werden. Daher sollte man hinsichtlich des Einführens und Definierens von Begriffen eine gewisse Sparsamkeit walten lassen und nur auf solche Begriffe und Definitionen eingegangen werden, für die ein Bedürfnis hinsichtlich weiterführender Anwendungen innerhalb des Zirkels besteht. Andererseits sollte wohl stets noch bedacht werden, daß Mathematik selbstverständlich mehr ist als ein System von Schlüssen aus Definitionen, Axiomen und Sätzen und sich das mathematische Denken nicht nur auf die Deduktion beschränkt, sondern auch andere Methoden nutzt.

Die Grundlage für das hier vorgelegte Auswahlprogramm bildet eine von uns durchgeführte gründliche Analyse des Lehrplanes für das Fach Mathematik. Einige der nachfolgend aufgeführten Stoffinhalte sind Vorgriffe (z. B. Vollständige Induktion). Das wird damit begründet, daß diese Stoffinhalte möglichst frühzeitig an Schüler herangetragen werden sollen, um einerseits eine längere Zeit des Übens zu erreichen, andererseits um darauf aufbauend systematische Olympiadevorbereitungen zu betreiben; insbesondere sind diese Stoffinhalte nützlich bei der Behandlung neuer Stoffe, die zunehmend in Olympiaden an Bedeutung gewinnen, aber nicht Gegenstand des Lehrplanes Mathematik sind (z. B. Funktionalgleichungen). Außerdem wird bei der vorzeitigen Einbeziehung dieser Lehrstoffe in die außerunterrichtliche Tätigkeit von verschiedenen Arbeiten ausgegangen, die die Möglichkeit einer Vorverlegung dieser Lehrstoffe aufzeigten.

Als wesentliche Schwerpunkte in unserem Vorschlag kämen für die Klassenstufe 9 neben der Einführung in das Beweisverfahren der vollständigen Induktion die Erweiterung und Vertiefung der bis zur 8. Klasse erworbenen geometrischen Kenntnisse, da in Klassenstufe 9 laut Lehrplan für das Fach Mathematik an den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen kein Geometrieunterricht vorgesehen ist. Hierzu dienen die *Sätze des Ceva und Menelaos* sowie Konstruktionen in beschränkter Ebene, da hierdurch die Übertragbarkeit und Verallgemeinerungsfähigkeit erworbener geometrischer Kenntnisse und Fertigkeiten erhöht wird. Aber es wird noch in konsequenter Fortsetzung der 8. Klassenstufe die Vermittlung von Grundlagen der Matrizenrechnung vorgeschlagen, wobei insbesondere Anwendungen in der Geometrie aufbauend auf dem Abbildungsbegriff von Bedeutung sind. Von zentraler Bedeutung sind die Begriffe *reelle Zahl* und *Variable*, mit denen vertiefend gearbeitet werden soll.

Als wesentliche Schwerpunkte in unserem Vorschlag können für die Klassenstufe 10 neben der Einführung in das Arbeiten mit Funktionalgleichungen (um die Fertigkeiten im Arbeiten mit Funktionen zu vervollkommnen und auf komplizierte Aufgabenstellungen vorzubereiten) die Anwendung der Gruppentheorie auf die räumliche Geometrie (um das räumliche Vorstellungsvermögen weiter zu entwickeln) angesehen werden. Darüber hinaus wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung durch axiomatische Betrachtungen vertieft. Von zentraler Bedeutung sind die Begriffe *Funktionalgleichung, Mengenalgebra, Axiomatik.*

Im Zusammenhang mit unseren Vorschlägen sei darauf hingewiesen, daß gruppentheoretische Überlegungen und Funktionalgleichungen zunehmend an Bedeutung auch in den Mathematikolypiaden gewinnen.

K. D. Klöpfel/M. Rehm

Klassenstufe 9

1. Logik

1. Vollständige Induktion (in Verbindung damit induktive und implizierte Definitionen sowie Rekursionen)
2. Normalformentheorie, Anwendungen zur Konstruktion logischer Terme

2. Mengenlehre

1. Mächtigkeiten, Kardinalzahlen (insbesondere transfinite), Abbildungen der gesamten Menge auf Teilmengen bei unendlichen Mengen, Ordnungsbeziehungen zwischen Kardinalzahlen, Beziehungen zwischen der Mächtigkeit einer Menge und ihrer Potenzmenge, Operationen mit Kardinalzahlen, insbesondere transfiniten
2. Abzählbarkeit, Nachweis bei verschiedenen Mengen (rat. Zahl u. a.) Diagonalverfahren, Vereinigung abzählbarer Mengen, Überabzählbarkeit des Kontinuums, Mengen höherer Mächtigkeit als Kontinuum (z. B. Menge der Funktionen)

3. Algebra

1. Systeme linearer Gleichungen, Gaußscher Algorithmus
2. Matrizen und Determinanten (Rechenoperationen, Rang, Umkehrung), spezielle Matrizen (Vektoren, Einheitsmatrix, Nullmatrix, symmetrische Matrizen, Dreiecksmatrix), Cramersche Regel
3. Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades mit einer Variablen

4. Zahlentheorie

1. Kettenbrüche und ihre Anwendung zur Lösung Diophantischer Gleichungen
2. Quadratische Diophantische Gleichungen, Pythagoräische Zahlen als Lösung Diophantischer Gleichungen zweiten Grades ($x^2+y^2=z^2$, x, y, z ganze Zahlen)
3. Kleiner Fermatscher Satz – Beweis durch gruppentheoretische Hilfsmittel und Kongruenzen

5. Analysis

1. Operationen mit Funktionen (z. B. Substitutionen, umformen impliziter Vorstellungen), Bestimmung des Definitions- und Wertebereiches, Umkehrungen
2. Algebraische Funktionen (Polynome), Hornersches Schema, Satz von Steiner über Nullstellen, Bestimmung der Funktionen aus vorgegebenen Punkten.
3. Komplexe Zahlen (Rechenoperationen, Betrag, Darstellung in der Ebene, Anwendung bei der Bestimmung der Nullstellen von Polynomen).
4. Lineare Ungleichungssysteme

6. Geometrie

1. Grundlagen

a) Wiederholung Kreislehre, Dreieckslehre, Ähnlichkeitslehre, Satzgruppe des Pythagoras, hierbei Anwendung der Vektoren bei Beweisen aus der ebenen Geometrie

b) Dreieckslehre (Sätze des Ceva, Menelaos, Schnittpunktsätze, Eulersche Gerade, Feuerbachscher Kreis)

c) Satz von Desargues (in der Ebene), Satz von Pappos, Kreis des Appolonius

2. Konstruktionen

a) Konstruktionen in beschränkter Ebene (Komplizierte Konstruktion, Dreiecke u. a.)

b) Konstruktion algebraischer Ausdrücke (z. B. aus a, b zu konstruieren $x=\sqrt{a^2+b^2}$, $x=ab, x=\sqrt{ab}$)

c) Dreieckskonstruktionen auf der Grundlage der Ähnlichkeit (z. B. Dreieck aus drei Höhen)

3. Berechnungen

a) Extremaprobleme (z. B. Figur maximaler Fläche zu vorgegebenem Umfang)

b) Problem der Parkettierungen (Muster aus regelmäßigen Vielecken) durch Diophantische Gleichungen lösen

7. Wahrscheinlichkeitsrechnung/ Kombinatorik

1. Exakte Formeln zu Kombinationen, Permutationen, Variationen, Anwenden der vollständigen Induktion

2. Ereignissysteme mit unendlicher Menge von Elementarereignissen (Anwendung der Mengenalgebra), Vereinigung und Durchschnitt abzählbarer vieler Ereignisse, geometrische Wahrscheinlichkeit

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit, abhängige und unabhängige Ereignisse, Addition und Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten, totale Wahrscheinlichkeit, BAYES-Theorem mit Anwendungen

8. Operationsforschung

1. Einfache Optimierung (ohne Simplexalgorithmus), die in der Ebene graphisch darstellbar und lösbar sind, graphische Lösungen, Zuschneide- und Transportprobleme, Anwendungen in der Spieltheorie (gemischte Strategien)

2. Planung mit Hilfe von Matrizen, Anwendung der Matrizenrechnung in der Ökonomie

9. Graphentheorie/Topologie

1. Ungerichtete Graphen, Klassifizierung der Knoten, vollständige Graphen, endliche Graphen, reguläre Graphen, Teilgraphen, Faktoren

2. Grad eines Knotens, Sätze über Knotensumme, Zusammenhang von Graphen, Eulersche Linien

Klassenstufe 10

1. Logik

1. Überblick über die Grundbegriffe der Aussagenlogik, insbesondere Ausdruck, Ausdrucksstufen, Aussage, aussagenlogische Variable und Konstanten, aussagenlogische Funktionen, allgemeingültige Aussagen, Semantische Äquivalenz, Normalformen, Zusammenstellung von aussagenlogischen Identitäten, Schlußregeln, Prüfen von Schlußregeln

2. Einsatzregel, Abtrennungsregel, Ersetzbarkeitstheorem

3. Ableitbarkeit, Hülleneigenschaften der Ableitbarkeit, das Problem der Axiomatisierbarkeit

2. Mengenlehre

1. Axiome der Mengenbildung, das Problem der Antinomien, Stufenaufbau der Mengen, wichtige Mengen

2. Mengenalgebra (Operationen, Gesetze der Operationen, Dualität)

3. Ordnungstypen, Ordnung, Ordnungszahlen, Wohlordnung, transfinite Induktion

3. Algebra

1. Axiome der Gruppenbildung, Untergruppen, Links- und Rechts-Nebenklassen, Normalteiler, Faktorgruppe, Isomorphie und Homomorphie (Wiederholung der Ergänzung)

2. Ringe, Modul, Restklassenringe, Ideale, Hauptideale, Eulersche Ringe, Teilbarkeit

4. Zahlentheorie

1. Gaußsche Zahlen, Primfaktoren, Faktorzerlegungen, Einheiten, Eindeutigkeiten

2. Struktureigenschaften der Zahlen, Gesetzmäßigkeiten der Struktur von Dezimalbrüchen (Länge der Perioden – Bezug zu Restklassenmodulo einer Zahl)

3. Eulersche Funktionen, Erweiterung des Fermatschen Satzes, Satz von Wilson

5. Analysis

1. Spezielle Funktionsklassen (periodische Funktionen), homogene Funktionen, gerade, ungerade Funktionen

2. Einfache Funktionalgleichungen zu vorgegebenen Funktionen aufstellen

3. Transzendente Gleichungen mit Potenzen. Logarithmen und Exponentialfunktionen

z. B. $\lg(2x+6)-\lg(x-5)=1$

$e^{2x}-e^x+1=0$

4. Goniometrische Gleichungen

a) Umformen, so daß nur noch eine Trigonomie-Funktion auftritt

$2\sin x+\cos x=0$

$\cos 2x \quad =\sin^2 x$

b) Zerlegen in Faktoren

$\sin 5x-\cos 3x=\sin x$

c) $A\cos x+B\sin x=c$, Umformen, indem

$\sin\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\cos\alpha=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ gesetzt wird.

Weitere Lösungsmethoden (Substitution, Einführung von Hilfswinkeln, Produktdarstellung, grafische Lösungen)

5. Einfache Funktionalgleichungen

a) $f(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)=a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\ldots+a_nf(x_n)$

b) $f(ax) \quad =a^nf(x)$

c) $f(x+y)=F(f(x), y)$

6. Geometrie

1. Grundlagen

a) Axiome des Euklid, Problematik des Parallelenaxioms, Kleinsches Modell der Hyperbolischen Geometrie (Hilbertsche Axiome, Erlanger Programm)

b) Vektorprodukt (Skalar), Anwendung auf Trigonometrie (Herleitung von Formeln der Dreiecksberechnung)

c) Räumliche Geometrie – Transformationsgruppe, Ebenenbüschel, Satz von Desargues räumlich, Tetraedergeometrie, Tetraedergleichungen, Berechnungen: Volumen, Oberfläche; Besondere Linien und Schnittebenen des Tetraeders, Satz über die Winkelsumme, Beziehungen zwischen Tetraeder und Kugel, äußere Kugel, innere Kugel u. a., Kongruenzsätze

2. Konstruktionen

a) Konstruktion regelmäßiger Vielecke

b) Konstruktionen, die aus Berechnungen abgeleitet werden

3. Berechnungen

a) Stereometrie (Prisma, Zylinder, Kugel, Kegel, Pyramide, Quader, Stümpfe), Eulerscher Polyedersatz, regelmäßiges Polyeder, Darstellung der Körper, Simpsonsche Regel, Cavalierisches Prinzip, Schnittkörper

b) Kombinatorische Geometrie räumlicher Gebilde

7. Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Axiomatik von Kolmogoroff, Operation mit Wahrscheinlichkeiten, klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff als Spezialfall des allgemeinen

2. Zufällige Größe, Zufallsvariante, diskrete Verteilungsgesetze, Erwartungswerte, Streuungen, Binomialverteilung, Poisson-Verteilung. Tschebyschewsche Ungleichung

3. Markowsche Ketten (diskrete Verteilungen)

8. Operationsforschung

1. Lineare Optimierung mit zwei bis vier Variablen, Simplexalgorithmus

2. Transportoptimierung

9. Kybernetik

1. Numerische Algorithmen, Ableiten der Grundeigenschaften von Algorithmen (Determiniertheit, Allgemeinverwendbarkeit), Beispiele

2. Algorithmische Lösung logischer Probleme (Fünfzehnerspiel, Labyrinth-Problem)

10. Graphentheorie/Topologie

1. Zusammenfassung und Wiederholung ungerichteter Graphen (Definition), Knotengerade, Teilgraphen, Eulersche Linien, Hamiltonsche Kreise, Kantenzusammenhang, Faktoren, reguläre Graphen und Teilgraphen), Ergänzung: Knotenbasen

2. Gerichtete Graphen (Definition, spezielle Typen, Komponenten, reduzierte Graphen) kürzeste Bahnen, kritische Bahnen