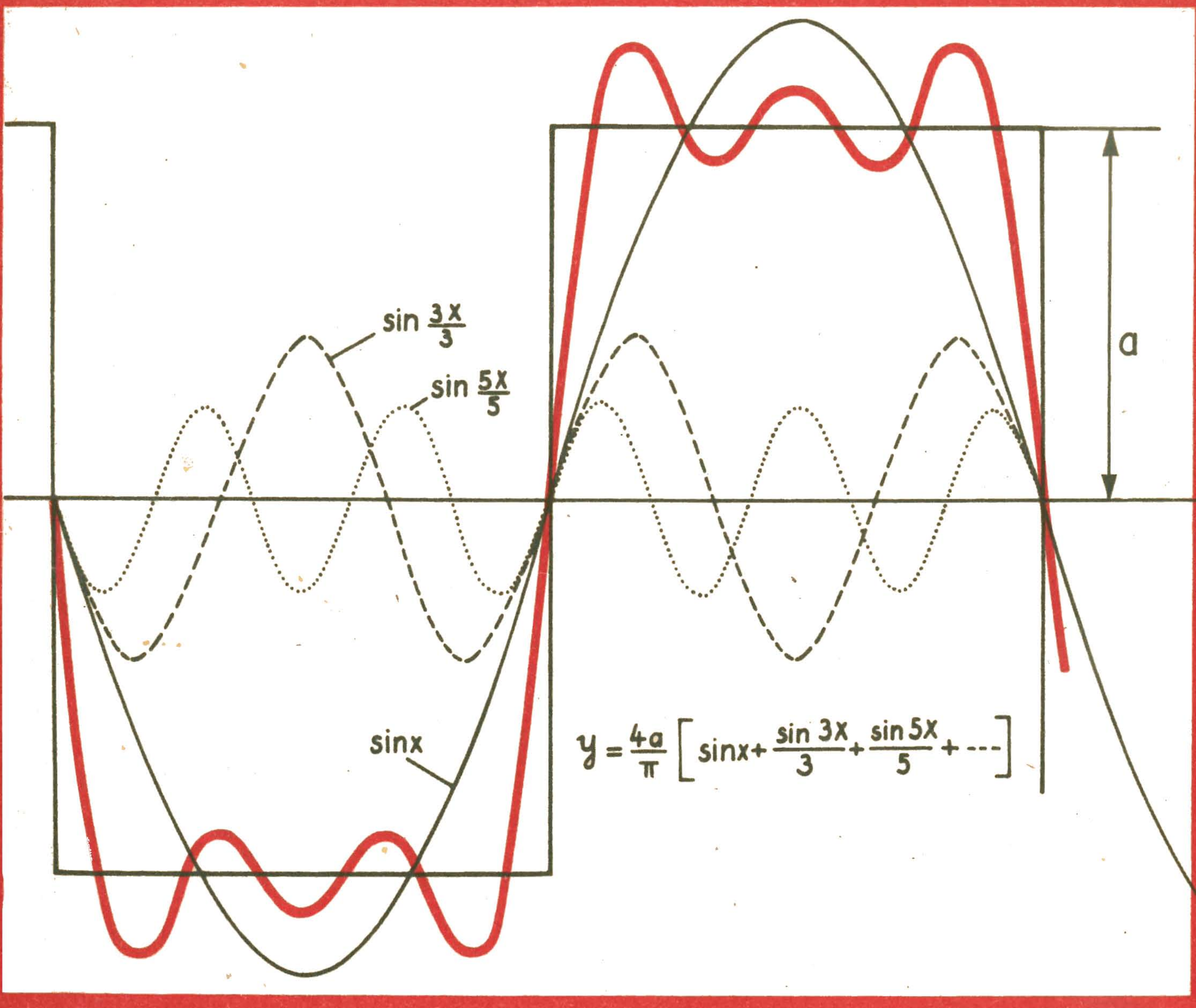
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
10. Jahrgang 1976
Preis 0,50 M
Index 31059

5

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 100); Vignetten: „Wurzel", Jena (S. 108); Horst Alisch, Berlin; H. Fink, Magdeburg; Leneuren, Berlin; B. Zlatanow, Sofia

Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 25. Juni 1976

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mit Zeichenstift und Schablone

Wir lösen Gleichungen mit einer Variablen

1. Problemstellung

Beim Lösen von eingekleideten oder Anwendungsaufgaben stößt man häufig auf Gleichungen mit einer Variablen.

Aufgabe:

Vier Schüler kaufen auf gemeinsame Kosten einen Ball. Der erste steuert die Hälfte des dabei benötigten Betrags bei, der zweite ein Drittel dessen, was die übrigen drei geben, der dritte ein Viertel dessen, was die übrigen drei geben, und der vierte die restlichen 25 Pfennig. Wie teuer ist der Ball? (OJM 1966, Klasse 9) Diese Aufgabe kann mit Hilfe der linearen Gleichung

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+0{,}25=x$$

gelöst werden.

Aufgabe:

Ein Motorboot fährt 28 km stromabwärts, um dann, nach rascher Wendung, zu seinem Ausgangspunkt zurückzukehren. Von der Abfahrt bis zur Ankunft sind (ohne Berücksichtigung der Wendezeit) 7 Stunden vergangen. Mit welcher Geschwindigkeit $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ würde sich das Motorboot in einem stehenden Gewässer fortbewegen, wenn die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt und wenn die Leistung des Motors konstant ist? Die Aufgabe führt auf die quadratische Gleichung

$$x^2-8x-9=0.$$

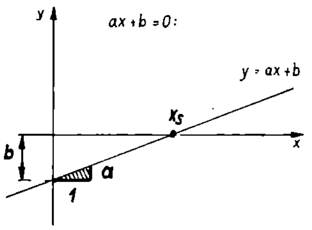
Manche Gleichungen mit einer Variablen (so z. B. auch die in den beiden Aufgaben angegebenen) kann man rechnerisch lösen. Die lineare Gleichung $ax+b=0$ $(a \neq 0)$ liefert als Lösung $x=-\frac{b}{a}$. Als Lösung einer quadratischen Gleichung der Form $x^2+px+q=0$ erhält man $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$, wobei x_1 und x_2 reell sind, falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \geqq 0$ gilt. Solche Lösungsformeln gibt es auch für kubische Gleichungen (*Cardanische Formel*) und für Gleichungen vierten Grades.

Es gibt jedoch auch Gleichungen, die man nicht mit Hilfe von Formeln rechnerisch lösen kann, so z. B. die allgemeine algebraische Gleichung n-ten Grades der Form $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$, $a_n \neq 0$; $a_0, \ldots, a_n$ reelle Zahlen; $n \geqq 5$ (Der Mathematiker Abel hat folgendes Ergebnis bewiesen: Es gibt für die allgemeine Gleichung n-ten Grades, wenn $n \geqq 5$ ist, keine Formel, die die Lösungen der Gleichung durch die Koeffizienten mit Hilfe von Radikalen ausdrückt)
und transzendente Gleichungen, wie z. B. $3\sin x-x=0$, $\tan x-x=0$ oder $e^x-x=0$. Man versucht, solche Gleichungen grafisch zu lösen. Mit Hilfe gewisser Verfahren (Iterationsverfahren) kann man die zeichnerisch gewonnene Näherungslösung verbessern.
In diesem Beitrag wollen wir einfache Gleichungen mit einer Variablen mit Zeichenstift und Schablone lösen und einige praktische Hinweise zur grafischen Lösung solcher Gleichungen zusammenstellen.

2. Wie helfen uns Lineal und Schablone?

Eine lineare Gleichung mit einer Variablen, also eine Gleichung der Form $ax+b=0$, kann man grafisch (mit Lineal und Zeichenstift) lösen, indem man die lineare Funktion $y=f(x)=ax+b$ (Gerade mit dem Anstieg a und dem Schnittpunkt mit der y-Achse bei $y_s=b$) zeichnet. Die Abszisse des Schnittpunktes x_s der Geraden mit der x-Achse, die Nullstelle der Funktion $y=f(x)$, ist die Lösung der Gleichung (Bild 1).

Bild 1



Am Beispiel der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0$; a, b, c sind reelle Zahlen) soll nun die Verwendung der Schablone für die Kurve der Funktion $y=x^2$ erläutert werden. Zur grafischen Lösung der gegebenen Gleichung geht man auch zur Funktion $y=ax^2+bx+c$ über, zeichnet diese mit Hilfe der Schablone und ermittelt die Nullstellen x_s. Das sind, falls solche existieren, die Lösungen der Gleichung. Um die Anwendungsmöglichkeiten der Schablone zu demonstrieren, werden zuerst verschiedene Spezialfälle betrachtet.

1. Fall: $y=x^2$

Die Kurve ist eine Parabel, die nach oben geöffnet ist, mit dem Scheitelpunkt $S(0,0)$. Eine Nullstelle liegt bei $x_s=0$. Die Kurve kann mit der Schablone gezeichnet werden, indem man diese in $S(0,0)$ anlegt. Die Achse der Parabel fällt mit der y-Achse zusammen.

2. Fall: $y=ax^2$

Falls $a>1$ ist, erhält man eine nach oben geöffnete gestreckte Parabel mit $S(0,0)$. Falls $1>a>0$ gilt, ist die Parabel gestaucht. Falls $a<0$ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet (Bild 2).

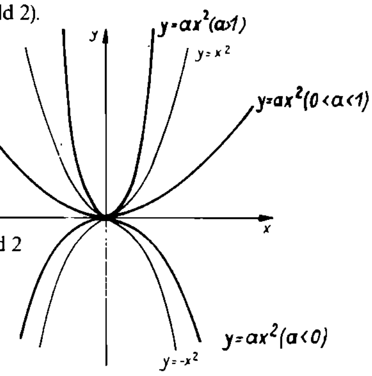
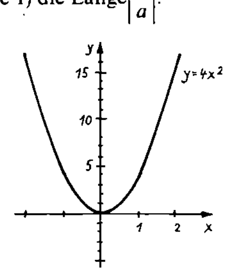


Bild 2

Eine Nullstelle liegt ebenfalls bei $x_s=0$. Das Bild der Funktion $y=ax^2$ kann man mit Hilfe der Schablone $y=x^2$ zeichnen, indem man auf der y-Achse den Maßstab entsprechend ändert, die Parabel in $S(0,0)$ anlegt, und zwar nach oben geöffnet, falls $a>0$ ist, und nach unten geöffnet, falls $a<0$ ist. Die Achse fällt mit der y-Achse zusammen. Der Maßstab auf der y-Achse wird so geändert, daß der Strecke 1 auf der x-Achse die Strecke $|a|$ auf der y-Achse entspricht (Bild 3: $y=4x^2$). Die Einheit auf der y-Achse hat also im Vergleich zur Einheit auf der x-Achse (Länge 1) die Länge $\frac{1}{|a|}$.

Bild 3



Einheit auf der x-Achse: 1 [cm]

Einheit auf der y-Achse: $\frac{1}{|a|} \mathrel{\hat=} \frac{1}{4}$ [cm]

3. Fall: $y=x^2+d$

Die Achse der Parabel fällt mit der y-Achse zusammen, und der Scheitelpunkt liegt bei $(0, d)$. Die Parabel ist also, wenn $d>0$ ist, in Richtung der positiven y-Achse ($(+y)$-Achse), wenn $d<0$, in Richtung der negativen y-Achse ($(-y)$-Achse) verschoben (Bild 4).

4. Fall: $y=(x+e)^2$
Man erhält eine Parabel, deren Achse parallel zur y-Achse verläuft. Die Parabel ist nach oben geöffnet, und der Scheitelpunkt liegt bei $(-e, 0)$.

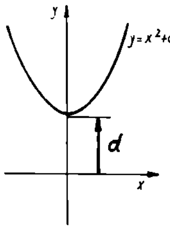


Bild 4

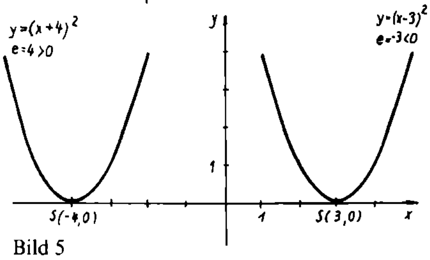


Bild 5

Die Parabel ist bei $e>0$ in Richtung der negativen x-Achse, bei $e<0$ in Richtung der positiven x-Achse verschoben (Bild 5).
Nach Betrachtung dieser Spezialfälle ist es möglich, die Kurve der Funktion

$$y=ax^2+bx+c$$

zu zeichnen.
Eine Umformung ergibt

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a} \text{ oder}$$

$$y=a(x+e)^2+d.$$

$$\text{mit} \quad e=\frac{b}{2a} \text{ und } d=c-\frac{b^2}{4a}.$$

Die Kurve kann mit Hilfe der Schablone gezeichnet werden. Die Achse der Parabel verläuft parallel zur y-Achse. Es muß die Öffnung der Parabel beachtet werden ($a>0$: nach oben geöffnet; $a<0$: nach unten geöffnet) und bei Streckung bzw. Stauchung ist der Maßstab auf der y-Achse entsprechend zu wählen (eine Einheit hat, falls auf der x-Achse die Einheit 1 cm ist, die Länge $\frac{1}{|a|}$cm). Der Scheitelpunkt liegt dann bei $S\left(-\frac{b}{2a}; c-\frac{b^2}{4a}\right)$.
Zusammenfassend ergibt sich:
$y=a(x+e)^2+d$
d: Verschiebung in Richtung der y-Achse
($d>0$: Verschiebung in Richtung $(+y)$-Achse
$d<0$: Verschiebung in Richtung $(-y)$-Achse).
e: Verschiebung in Richtung der x-Achse:
($e>0$ Verschiebung in Richtung $(-x)$-Achse;
$e<0$ Verschiebung in Richtung $(+x)$-Achse).

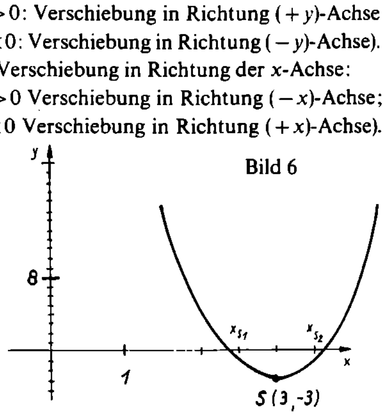


Bild 6

a: Streckung bzw. Stauchung; Öffnung der Parabel
Beispiel: Es ist die Gleichung

$$8x^2-48x+69=0 \text{ mit Hilfe}$$

von Zeichenstift und Schablone zu lösen.
Die Umformung ergibt
$8(x-3)^2+69-72=8(x-3)^2-3=0.$
Es ist die Kurve der Funktion

$$y=8(x-3)^2-3 \text{ zu zeichnen,}$$

also mit Hilfe der Schablone $y=x^2$ die Parabel mit $S(3, -3)$, Öffnung nach oben und Achse parallel zur y-Achse. Der Maßstab auf y-Achse wird entsprechend 1:8 geändert (Bild 6). Als Nullstellen erhält man $x_{S_1}\approx 3{,}6$ und $x_{S_2}\approx 2{,}4$
Das sind die Lösungen der Gleichung.

Aufgaben:

▲1▲ Man zeichne
$y=3x$, $y=-\frac{1}{3}x$, $y=(x-3)^2$, $y=x^2-5$ und $y=-3(x-2)^2+4$!

▲2▲ Man löse die Gleichung
$4x^2+8x+6=0$ grafisch!
Ähnliche Überlegungen wie bei der Darstellung der quadratischen Funktion kann man auch für andere Funktionen anstellen, so u. a. für die Funktionen

$$y=a(x-e)^3+f \text{ und}$$

$$y=a\sin(x-c)+d.$$

Man kann nach diesen Betrachtungen Gleichungen der Form

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \text{ bzw.}$$

$$a\sin(x-c)+d=0$$

unter Verwendung der Schablonen für $y=x^3$ bzw. $y=\sin x$ lösen.

▲3▲ Es sind die Betrachtungen für die Funktionen
$y=a(x-e)^3+f$ und $y=a\sin(x-c)+d$ durchzuführen!

▲4▲ Es sind die Gleichungen
$4x^3-24x^2+48x-30=0$ und
$3\cdot\sin(x-2)+1=0$
grafisch mit Hilfe von Schablonen zu lösen.

3. Wie kann man allgemein Gleichungen mit einer Variablen grafisch lösen?

Es sollen nun allgemein Gleichungen mit einer Variablen der Form

$$f(x)=0 \text{ betrachtet werden.}$$

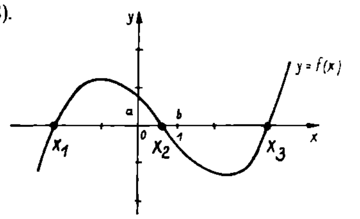
Diese Gleichung kann man grafisch lösen, indem man das Bild der Funktion

$$y=f(x)$$

zeichnet und die Nullstellen x_i bestimmt (Bild 7). Dabei kann man die Betrachtungen des vorhergehenden Abschnittes verwenden und bei der grafischen Darstellung, soweit das möglich ist, auch Schablonen benutzen.
Will man die Genauigkeit der Näherungslösung erhöhen, so kann man das z. B. erreichen durch Veränderung des Maßstabes auf der x-Achse, durch ein *Auseinanderziehen* des Intervalls (a, b), in dem die Nullstelle liegt.

In Bild 7 liegt die Nullstelle x_2 zwischen 0 und 1 (im Intervall (0, 1)). Dieses Intervall wird *auseinandergezogen*. Wenn man jetzt in dem Intervall die Kurve zeichnet, läßt sich die Genauigkeit der Näherungslösung erhöhen (Bild 8).

Bild 7



Nullstellen von $y=f(x)$: x_1, x_2 und x_3
Lösungen der Gleichung $f(x)=0$: x_1, x_2 und x_3

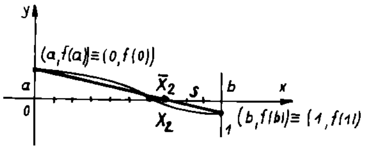
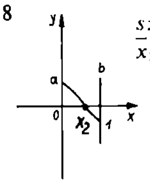


Bild 8



s: Sehne
$\bar{x}_2$: Näherungswert für x_2

Da das Zeichnen der Kurve im jeweiligen Intervall (a, b) meist schwierig ist, kann man auch nach dem *Auseinanderziehen* die Kurve ersetzen durch die Sehne s zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ (Bild 8). Der Schnittpunkt der Sehne s mit der x-Achse liefert einen Näherungswert $\bar{x}$ für die Wurzel. Durch weitere Verkleinerung des Intervalls, in dem der exakte Wert x der Wurzel liegt, durch *Auseinanderziehen* dieses verkleinerten Intervalls, durch Zeichnen der Sehne anstelle der Kurve in dem neuen Intervall erhält man eine weitere Verbesserung. Man kann diesen Prozeß fortsetzen, muß allerdings beachten, daß die Wurzel x im Intervall bleibt (es muß gelten $f(a)\cdot f(b)<0$; d. h., $f(a)$ und $f(b)$ müssen entgegengesetzte Vorzeichen haben).
Manchmal ist es auch zweckmäßig, die Gleichung

$$f(x)=0$$

durch äquivalente Umformung auf die Form

$$x=\phi(x)$$

oder auf die Form

$$\phi_1(x)=\phi_2(x) \text{ zu bringen.}$$

Die Umformung muß allerdings dann so erfolgen, daß die Kurven von $y=\phi(x)$ bzw. $y=\phi_1(x)$ und $y=\phi_2(x)$ einfacher (evtl. mit Schablone) zu zeichnen sind. Die Nullstellen der Funktion $y=f(x)$ (Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$) erhält man dann, indem man die Kurven der Funktionen

$$y=x \text{ und } y=\phi(x) \text{ bzw.}$$

$$y=\phi_1(x) \text{ und } y=\phi_2(x)$$

zeichnet. Die Abszissen der Schnittpunkte sind die gesuchten Wurzeln (Bild 9).
Beispiele:
1. Es ist die Gleichung $x^3-3x-1=0$ grafisch zu lösen!

Bild 9

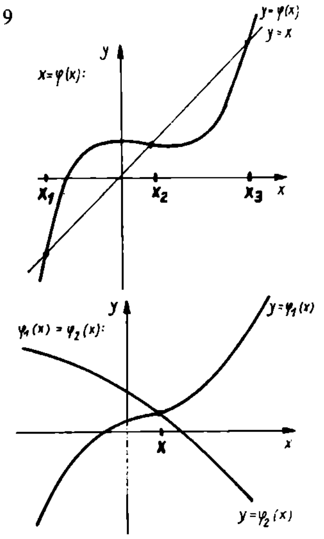
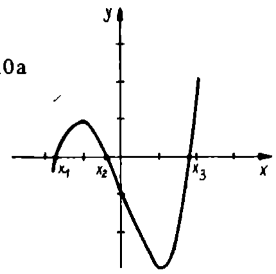


Bild 10a



a) Grafische Darstellung von $y=x^3-3x-1$ unter Verwendung der Wertetabelle

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-19	-3	1	-1	-3	1	17

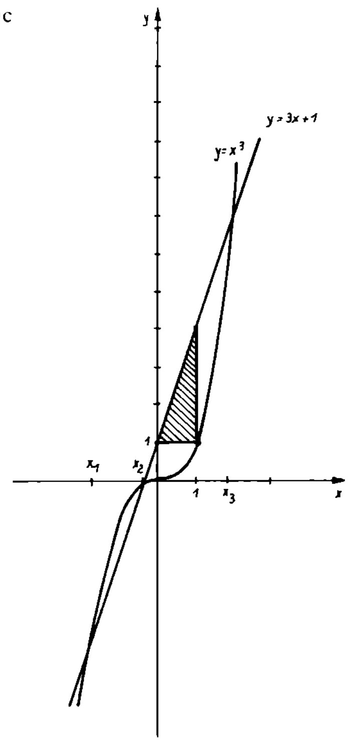
Aus dem Bild 10a ist zu erkennen, daß die Kurve der Funktion die x-Achse in drei Punkten schneidet. Die Gleichung hat also drei reelle Wurzeln x_1, x_2 und x_3, in den Intervallen $(-2, 1)$, $(-1, 0)$ und $(1, 2)$.

b) Auseinanderziehen des Intervalls $(-1, 0)$ zur genaueren Bestimmung der Wurzel x_2. Dabei wird anstelle der Kurve jeweils die Sehne s gezeichnet (Bild 10b).

c) Umformung liefert $x^3=3x+1$. Die Darstellung ist in Bild 10c angegeben.

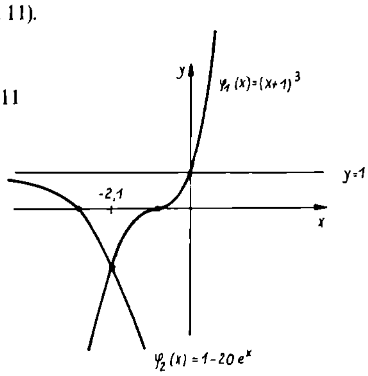
2. Es ist die Gleichung $(x+1)^3+e^{x+3}=1$ zu lösen.
Umformung ergibt
$(x+1)^3=1-e^{x+3}\approx 1-20e^x$.

Bild 10c



Es werden mit Hilfe der Schablone die Kurven der Funktionen $\phi_1(x)=(x+1)^3$ und $\phi_2(x)=1-20e^x$ gezeichnet. Als Abszisse des Schnittpunktes erhält man $x_S\approx -2,1$ (Bild 11).

Bild 11



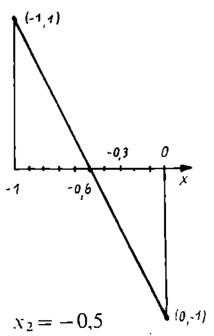
Aufgaben:

▲1▲ Man löse grafisch $x^3-4x^2+2=0$.

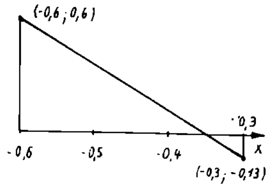
▲2▲ Es sind
a) $x-\tan x=0$,
b) $x-3\sin x=0$
c) $x^2-2-\ln x=0$ grafisch zu lösen!

J. Gronitz

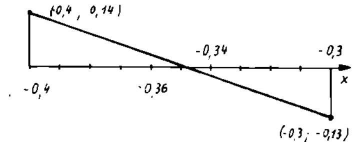
Bild 10b



$x_2=-0,5$
$x_2\in(-0,6; -0,3)$
$f(-0,6)>0$
$f(-0,3)<0$



$x_2\approx -0,35$
$x_2\in(-0,4; -0,3)$
$f(-0,4)>0$
$f(-0,3)<0$



$x_2\approx -0,35$
$x_2\in(-0,36; -0,34)$
$f(-0,35)>0$
$f(-0,34)<0$

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Manfred Schneider

Direktor der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

▲1537▲ Bei der Messung der Spannweite einer Brücke ist die an einem Ufer gelegene Basislinie $200\pm 0,01$ m lang. Gemessen wurden die Winkel zwischen der Basislinie und der Richtung von ihren Enden zu dem auf dem anderen Flußufer gelegenen Punkt. Sie sind $90°\pm 1°$ bzw. $60°\pm 1°$.
Mit welcher Genauigkeit kann man aus diesen Angaben die Länge der Brücke berechnen?

Wir stellen vor:
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

Unsere *Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt* ist noch eine sehr junge Bildungseinrichtung. Sie feierte 1973 ihr 25jähriges Bestehen. Das Mathematische Institut der TH Karl-Marx-Stadt begann 1954 seine Tätigkeit mit einem Hochschullehrer und zwei wissenschaftlichen Mitarbeitern. Heute sind an der Sektion Mathematik 16 Hochschullehrer und 105 wissenschaftliche Mitarbeiter beschäftigt. An der Sektion werden Diplommathematiker mit der Spezialisierungsrichtung *Numerische Mathematik* und *Mathematische Methoden der Operationsforschung* sowie *Diplomlehrer* für die Fachkombination *Mathematik/Physik* ausgebildet. Außerdem ist die Sektion verantwortlich für die Mathematikausbildung aller an unserer Hochschule vertretenen Fachrichtungen. Das sind neben den bereits genannten die Fachrichtungen Maschineningenieurwesen, Elektroingenieurwesen, Wirtschaftswissenschaften, Physik, Lehrer für Physik/Mathematik, Lehrer für Polytechnik und Berufsschullehrer für Maschineningenieurwesen und Elektroingenieurwesen. Im Rahmen der vielseitigen und umfangreichen Ausbildungsaufgaben der Sektion werden in jeder Studienrichtung sowohl in gesellschaftlicher als auch in fachlicher Hinsicht hohe Anforderungen gestellt. Bei der Ausbildung der Mathematikstudenten wird großer Wert auf Beziehungen zur Praxis gelegt. Dazu erge-

ben sich an unserer Technischen Hochschule durch die Zusammenarbeit mit den technischen Sektionen vielfältige Möglichkeiten. Bei der Ausbildung der Lehrerstudenten arbeiten wir eng mit den Organen der Volksbildung des Territoriums zusammen, um bereits vom ersten Tag des Studiums an die Studenten mit den Aufgaben ihres zukünftigen Berufes in Verbindung zu bringen.
Zur Förderung mathematisch begabter Schüler gibt es an unserer Sektion eine Spezialklasse für Mathematik (11. und 12. Klasse), an der jährlich 25 Schüler ihr Abitur erwerben und sich vertieft mit Fragen der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik befassen. Viele ehemalige Schüler dieser Klasse haben durch eine rechtzeitige Einbeziehung in die Forschungsarbeiten der Sektion heute bereits ihre Promotion abgeschlossen und arbeiten als Mitarbeiter an unserer Sektion oder an anderen wissenschaftlichen Einrichtungen.
Unsere Sektion ist in der Forschung verantwortlich für die Leitung der Hauptforschungsrichtung *Numerische Mathematik* in der DDR. Kennzeichnend für die mathematischen Forschungsarbeiten unserer Sektion sind vielfältige und enge Verbindungen zu wissenschaftlichen Einrichtungen der Sowjetunion, z. B. zum Rechenzentrum der *Akademie der Wissenschaften der UdSSR* in Moskau und zur *Fakultät für Numerische Mathematik und Kybernetik der Staatlichen Universität Moskau* und anderer sozialistischer Staaten. Viele Mitarbeiter unserer Sektion absolvierten ein Zusatzstudium oder eine Aspirantur an sowjetischen Einrichtungen.
Unsere Sektion veranstaltet jährlich Tagungen und Weiterbildungsveranstaltungen auf dem Gebiet der Numerischen Mathematik, zu denen wir auch viele ausländische Gäste begrüßen können. Große Aufmerksamkeit schenken wir der Verbindung von mathematischer Forschung mit Problemen der Praxis. Die Sektion arbeitet dazu eng mit einer Reihe von Einrichtungen der Volkswirtschaft der DDR und mit technischen Sektionen unserer Hochschule zusammen.
Neben der mathematischen Forschung beschäftigt sich auch eine Gruppe mit Problemen der Methodik des Mathematikunterrichts.
Eine weitere wichtige Aufgabe der Sektion ist die Weiterbildung von Hoch- und Fachschulkadern sowie die Unterstützung der Lehrerweiterbildung im Bezirk Karl-Marx-Stadt. Im Rahmen eines Jugendobjekts unterstützt die Sektion die außerunterrichtliche Arbeit auf dem Gebiet der Mathematik im Bezirk. Wir beteiligen uns an der Gestaltung der Mathematik-Olympiaden, führen mit mathematisch interessierten Schülern Korrespondenzzirkel durch und beteiligen uns an der Weiterbildung von Arbeitsgruppenleitern auf dem Gebiet der Mathematik.

J. Gronitz

alpha stellt vor: Kerstin Rudorf

W.-Komarow-OS, Karl-Marx-Stadt, Kl. 9

Seit meiner frühesten Jugend habe ich schon immer gern „geknobelt". Viel Anregung erhielt ich durch meine Eltern, die beide einen technischen Beruf ausüben, und oft sitze ich mit meiner gleichaltrigen Schwester und dem ein Jahr jüngeren Bruder über mathematischen Problemen.
Nachdem ich einmal die *alpha* entdeckt hatte und es mir gelungen war, das *alpha*-Abzeichen zu erreichen, begann ich, mich intensiv mit der Mathematik zu befassen. Die *alpha* ist auch heute noch eine große Hilfe für mich. Auch durch meine Mathematik-Lehrerin erhielt ich eine gute Unterstützung. Seit dem 8. Schuljahr nehme ich an den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR teil. Meine guten Leistungen waren Anlaß, mich in das Mathematikzentrum des Pionierhauses *Juri Gagarin* Karl-Marx-Stadt zu delegieren. Außerdem bin ich seit vergangenem Jahr Mitglied des Bezirkskorrespondenzzirkels.
Mein schönster Erfolg war die Teilnahme an der diesjährigen DDR-Olympiade in Berlin-Bogensee. Dort erhielt ich als Frühstarter (aus Klasse 9) in der Olympiadeklasse 10 einen 3. Preis.

Fibonaccische Zahlen

In letzter Zeit habe ich mich oft mit Zahlentheorie beschäftigt. Heute will ich die *alpha*-Leser mit den Fibonaccischen Zahlen vertraut machen. Sie entstanden aus einer Aufgabe von Leonardo von Pisa mit dem Beinamen Fibonacci (um 1170 bis 1250).

Aufgabe:
Jemand sperrt ein Kaninchenpaar in ein Gehege, um zu erfahren, wieviel Nachkommen es im Laufe eines Jahres haben wird. Dabei wird vorausgesetzt, daß jedes Paar monatlich ein neues Paar zur Welt bringt und daß die Kaninchen erst im Alter von 2 Monaten gebären können. Man erhält folgendes Ergebnis:

Monat	1	2	3	4	5
Anzahl d. Kaninchenpaare	2	3	5	8	13

Monat	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl d. Kaninchenpaare	21	34	55	89	144	233	377

Zu diesem Ergebnis kommt man, indem man die 1. Zahl zur zweiten, die zweite zur dritten Zahl usw. addiert. Auf diese Weise erhält man die *Folge der Fibonaccischen Zahlen.*
Für die Folge $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \ldots;\ u_n$ der Fibonaccischen Zahlen gilt:

$$u_n=u_{n-1}+u_{n-2} \text{ und } u_1=u_2=1$$

Einige interessante Eigenschaften dieser Zahlenfolge sind:
1. Wenn man die Summe der ersten n Zahlen berechnen will, erhält man aus
$u_1=u_3-u_2,\ u_2=u_4-u_3,\ \ldots,\ u_n=u_{n+2}-u_{n+1}$
durch Addition der Gleichungen

$$u_1+u_2+\ldots+u_n=u_{n+2}-u_2$$
$$u_1+u_2+\ldots+u_n=u_{n+2}-1$$

2. Die Summe der Fibonaccischen Zahlen mit ungeraden Indizes beträgt:

$$u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2n+1}=u_{2n}$$

Beweis: Es ist
$u_1=u_2,\ u_3=u_4-u_2,\ u_5=u_6-u_4,\ \ldots,$
$u_{2n-1}=u_{2n}-u_{2n-2}$
Man erhält ebenfalls durch Addition der Gleichungen: $u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2n-1}=u_{2n}$
3. Die Summe der Fibonaccischen Zahlen mit geraden Indizes ist
$u_2+u_4+u_6+\ldots+u_{2n}=u_{2n+1}-1$
Zum Beweis subtrahiert man die Gleichung 2. von der Gleichung 1.
$u_2+u_4+u_6+\ldots+u_{2n}=(u_{2n+2}-1)-u_{2n}$
$u_2+u_4+u_6+\ldots+u_{2n}=u_{2n+1}-1$
4. Durch vollständige Induktion kann die Formel $u_{n+m}=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}$
bewiesen werden. Beweis: Für $m=1$ gilt
$u_{n+1}=u_{n-1}u_1+u_nu_2=u_{n-1}+u_n$
Für $m=2$ gilt
$u_{n+2}=u_{n-1}u_2+u_nu_3=u_{n-1}+2u_n=(u_{n-1}+u_n)$
$+u_n=u_{n+1}+u_n$
was beides richtig ist. Wenn man annimmt, daß die Formel für $m=k$ und für $m=k+1$ gilt und daraus folgern kann, daß sie auch für $m=k+2$ gilt, dann ist die Aussage bewiesen.
Durch Addition von
$u_{n+k}\ \ =u_{n-1}u_k+u_nu_{k+1}$ und
$u_{n+k+1}=u_{n-1}u_{k+1}+u_nu_{k+2}$ erhält man
$u_{n+k+2}=u_{n-1}(u_k+u_{k+1})+u_n(u_{k+1}+u_{k+2})$
$u_{n+k+2}=u_{n-1}u_{k+2}+u_nu_{k+3},$
was zu beweisen war.
5. Es ist zu beweisen: Wenn n durch m teilbar ist, dann ist auch u_n durch u_m teilbar. Diesen Satz beweist man ebenfalls durch vollständige Induktion. Es sei $n=mk$, dann gilt für $k=1 \cdot n=m$. Daraus folgt u_n ist durch u_m teilbar. Angenommen, u_{mk} ist durch u_m teilbar, dann gilt für $u_{m(k+1)}=u_{mk+u_m}$ wegen der Gleichung 4.: $u_{m(k+1)}=u_{mk-1}u_m+u_{mk}u_{m-1}$
$u_{mk-1}u_m$ ist durch u_m teilbar. Da u_{mk} durch u_m teilbar ist, ist auch $u_{mk}u_{m+1}$ durch u_m teilbar. Da der Satz, wenn er für $n=k$ gilt, auch für $n=k+1$ gilt, gilt er für alle k.
6. Die Fibonaccischen Zahlen kann man nach der Formel

$$u_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}},$$

die Binetsche Formel heißt, berechnen.

Aus der Kombinatorik

Hochsymmetrische kombinatorische Strukturen

1. Endliche projektive Ebenen

Fügen wir zu jeder Geraden der gewöhnlichen (euklidischen) Ebene einen neuen, sogenannten *unendlichfernen Punkt* hinzu, und zwar so, daß zwei Geraden dann und nur dann derselbe unendlichferne Punkt zugeordnet wird, wenn die beiden Geraden parallel sind, und sagen wir ferner, daß die unendlichfernen Punkte eine Gerade (die sogenannte *unendlichferne Gerade*) bilden, so ist leicht zu sehen, daß die folgenden Aussagen gelten (zwischen den alten und den neu eingeführten Punkten und Geraden soll jetzt nicht mehr unterschieden werden):

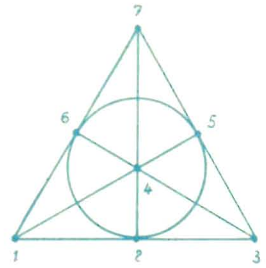
1. Durch je zwei Punkte geht genau eine Gerade.
2. Je zwei Geraden haben genau einen Punkt gemeinsam.
3. Es gibt vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Diese erweiterte Ebene nennen wir reelle projektive Ebene. Die projektive Ebene ist in vielerlei Hinsicht regelmäßiger als die gewöhnliche euklidische Ebene; für letztere gilt beispielsweise nicht die 2. Aussage.

Bisher haben wir die Aussagen 1, 2 und 3 als gewisse Sätze angesehen, die sich auf die reelle projektive Ebene beziehen. Wir wollen sie jetzt unter einem anderen Gesichtswinkel betrachten, indem wir sie als Axiome der projektiven Ebene ansehen! Was bedeutet das? Angenommen, es sei eine Menge M gegeben (eine Gesamtheit gewisser Dinge). Die Elemente der Menge M werden wir Punkte nennen. Wir wollen ferner annehmen, daß gewisse Untermengen der Menge M ausgezeichnet sind; diese Untermengen werden wir Geraden nennen. Die so definierten *Punkte* und *Geraden* sollen projektive Ebene genannt werden, wenn für sie die Aussagen 1, 2 und 3 gelten. Hiernach sehen wir, daß die oben konstruierte reelle projektive Ebene nur ein Beispiel für eine projektive Ebene darstellt, daß aber auch andere Beispiele möglich sind. Uns interessieren im folgenden solche Beispiele, bei denen M eine endliche Menge ist (also nur endlich viele Elemente besitzt). Derartige projektive Ebenen heißen endliche projektive Ebenen.

Gibt es sie überhaupt? Durchaus, und zwar ist die einfachste die in Bild 1 dargestellte. Diese Abbildung ist folgendermaßen zu verstehen: Die Elemente der Menge M (die Punkte) sind die in dem Bild von 1 bis 7 numerierten Punkte. Die Geraden sind dagegen diejenigen dreielementigen Untermengen von M, die in dem Bild auf eine Gerade fallen (also z. B. 123, 145 usw.), sowie noch eine weitere Gerade, nämlich diejenige, die in dem Bild als Kreis erscheint (also 256). Der Leser mag selbst nachprüfen, daß alle drei Axiome erfüllt sind! Eine andere Möglichkeit, dieselbe endliche projektive Ebene vorzugeben, wird mit Bild 2 geliefert: hier werden einfach nacheinander diejenigen Untermengen von M aufgezählt, die Geraden genannt werden sollen.

Bild 1



1	2	3
1	4	5
1	6	7
2	4	7
2	5	6
3	4	6
3	5	7

Bild 2

1	2	3	10
1	4	7	11
1	5	9	13
1	6	8	12
2	4	9	12
2	5	8	11
2	6	7	13
3	4	8	13
3	5	7	12
3	6	9	11
4	5	6	10
7	8	9	10
10	11	12	13

Bild 3

In Bild 3 wird die nächsteinfache endliche projektive Ebene nach einem zu dem Bild 2 ähnlichen tabellarischen Verfahren angegeben. Hier sind die Elemente der Menge M mit den Zahlen von 1 bis 13 bezeichnet, während Geraden diejenigen vierelementigen Untermengen von M genannt werden, die eine Zeile von Bild 3 bilden.

Wenn wir uns diese beiden Beispiele endlicher projektiver Ebenen näher anschauen, so können wir zu der Vermutung gelangen, daß der folgende Satz allgemein gilt:

Satz 1: Zu jeder endlichen projektiven Ebene gibt es eine natürliche Zahl n ($n \geqq 2$), so daß die folgenden Aussagen gelten:

1. Auf jeder Geraden liegen $n+1$ Punkte.
2. Durch jeden Punkt gehen $n+1$ Geraden.
3. Die Gesamtzahl der Punkte beträgt n^2+n+1.
4. Die Gesamtzahl der Geraden beträgt n^2+n+1.

Es ist nicht schwer zu beweisen, daß dieser Satz in der Tat richtig ist. (Der Leser mag sich selbständig daran versuchen.)

Das fragliche n heißt Ordnung der entsprechenden endlichen projektiven Ebene. Die Ordnungen der in Bild 2 und 3 dargestellten endlichen projektive Ebenen sind $n=2$ bzw. $n=3$, also die beiden kleinstmöglichen Werte; deshalb haben wir auch gesagt, daß dies die einfachsten endlichen projektiven Ebenen sind.

Wir weisen darauf hin, daß der Satz 1 zahlreiche nichttriviale Folgerungen besitzt. Beispielsweise sehen wir sofort, daß man aus einer Menge von N Punkten sicher keine endliche projektive Ebene konstruieren kann, wenn N eine natürliche Zahl ist, die nicht die Form n^2+n+1 (mit einer geeigneten natürlichen Zahl $n \geqq 2$) hat. Diese Behauptung ist indessen, für sich allein betrachtet, keineswegs selbstverständlich!

Es liegt die Frage nahe, inwieweit der Satz 1 umkehrbar ist. Satz 1 sagt nämlich nur aus, daß zu jeder endlichen projektiven Ebene eine Zahl n existiert, die die oben formulierten Eigenschaften besitzt. Behauptet wird jedoch nicht, daß zu jeder beliebig vorgegebenen natürlichen Zahl $n \geqq 2$ sicher $(n+1)$-elementige Untermengen einer aus n^2+n+1 Elementen bestehenden Menge gewählt werden können, die eine endliche projektive Ebene bilden. Wir müßten also wissen, für welche natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ tatsächlich eine endliche projektive Ebene n-ter Ordnung existiert. Es läßt sich beweisen, daß es tatsächlich eine endliche projektive Ebene der Ordnung n gibt, wenn n eine Primzahlpotenz $n=p^k$ (p prim, $k \geqq 1$) ist.

(Der Beweis ist nicht schwer, erfordert aber gewisse algebraische Vorkenntnisse.) Ungelöst (und eines der berühmtesten ungelösten Probleme für hochsymmetrische kombinatorische Strukturen) ist dagegen das folgende

Problem 1: Wenn eine endliche projektive Ebene der Ordnung n existiert, ist dann n notwendig Primzahlpotenz?

Wissen wir überhaupt für irgendein n, daß es keine endliche projektive Ebene n-ter Ordnung gibt? Alles, was wir in dieser Hinsicht wissen, wird in dem folgenden Satz zusammengefaßt (der Satz ist von *R. H. Bruck* und *H. J. Ryser* 1949 mittels einer sehr geistvollen algebraisch-zahlentheoretischen Überlegung bewiesen worden):

Satz 2 (Bruck-Ryser): Wenn n eine natürliche Zahl ist, die bei Division durch 4 als Rest 1 oder 2 ergibt, und n nicht als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar ist, so gibt es keine endliche projektive Ebene der Ordnung n.

Aus dem Satz geht beispielsweise hervor, daß keine endliche projektive Ebene der Ordnung $n=6$ existiert. Im Hinblick darauf, daß $n=2$, 3, 4, 5, 7, 8, 9 Primzahlpotenzen sind, ist der nächstfolgende fragliche Fall 10. Hierauf ist der Satz von Bruck-Ryser nicht anwendbar, weil $10=3^2+1^2$ ist.

Problem 2: Gibt es eine endliche projektive Ebene der Ordnung 10?

(Sicher wird mancher Leser meinen, warum probiert man das nicht an einer elektronischen Rechenmaschine aus? Wenn es um eine so kleine Zahl wie 10 geht, könnte doch die Rechenmaschine den ganzen Fall offensichtlich in einigen Minuten oder vielleicht einigen Sekunden durchprobieren. Die Lage ist jedoch die, daß die Anzahl der hierbei durchzuprüfenden Fälle so groß ist, daß es selbst mit den schnellsten heute bekannten Rechenmaschinen hoffnungslos lange Zeit dauern würde.)

Wir wollen uns jetzt einer anderen Frage zuwenden: Sind bei festem n die endlichen projektiven Ebenen allesamt *gleichartig?*

Unter *gleichartig* verstehen wir, daß sie sich nur in der Bezeichnung unterscheiden, d. h., präzis formuliert: Zwei endliche projektive Ebenen der Ordnung n heißen dann *gleichartig*, man sagt auch isomorph, wenn man den Punkten der einen umkehrbar eindeutig die Punkte der anderen so zuordnen kann, daß irgendwelche Punkte in der einen projektiven Ebene genau dann eine Gerade bilden, wenn die ihnen entsprechenden Punkte in der anderen projektiven Ebene eine Gerade bilden.

Der Leser kann ohne sonderliche Schwierigkeit beweisen, daß je zwei endliche projektive Ebenen zweiter Ordnung isomorph sind. Gleichfalls isomorph sind je zwei projektive Ebenen der Ordnung n im Falle $n=3$, 4, 5, 7 und 8 (der Beweis wird aber immer schwerer). Für $n=9$ ist die entsprechende Behauptung jedoch nicht mehr richtig: es gibt 4 wesentlich verschiedene (also paarweise nichtisomorphe) endliche projektive Ebenen der Ordnung 9. Es ist bekannt, daß es für $n=p^k>8$ (p prim, $k>1$) stets wenigstens zwei nichtisomorphe endliche projektive Ebenen n-ter Ordnung gibt. Ungelöst ist jedoch das folgende

Problem 3: Sind je zwei endliche projektive Ebenen der Ordnung p(p prim) isomorph?

Die Frage nach der Existenz und Isomorphie endlicher projektiver Ebenen stellt freilich nur einen kleinen Teil der hier untersuchten Fragen dar. Die am ausgiebigsten untersuchte (und natürlichste) Frage ist die, wie die existierenden endlichen projektiven Ebenen beschaffen sind. Ein solches Problem möchte ich als Kostprobe angeben.

Wir möchten eine solche Teilmenge der Punkte einer endlichen projektiven Ebene n-ter Ordnung auswählen, daß jede Gerade mindestens einen der ausgewählten Punkte enthält. (Wir wollen eine solche Punktmenge repräsentierendes Punktesystem nennen.)

Es ist leicht zu sehen, daß ein repräsentierendes Punktesystem mindestens $n+1$ Punkte enthalten muß. Man sieht auch leicht ein, daß man stets ein aus $n+1$ Punkten bestehendes repräsentierendes Punktesystem finden kann: wir bekommen nämlich ein solches Punktesystem, wenn wir sämtliche Punkte irgendeiner Geraden der Ebene wählen (dies stellt eine unmittelbare Folgerung aus dem 2. Axiom dar). Offensichtlich wird dann auch jede Punktmenge, die eine ganze Gerade enthält, ein repräsentierendes Punktesystem sein. Daher nennen wir ein repräsentierendes Punktesystem nichttrivial, wenn es keine ganze Gerade enthält. Es fragt sich, wieviel Elemente ein nichttriviales repräsentierendes Punktesystem mindestens besitzt. 1969 habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Satz 3: In einer endlichen projektiven Ebene n-ter Ordnung ($n\geqq 3$) ist die Elementezahl eines nichttrivialen repräsentierenden Punktesystems größer als

$$n+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}.$$

2. Orthogonale lateinische Quadrate

Wir nehmen an, in jedes Feld eines Schachbretts von $n\cdot n$ Feldern sei irgendeine der natürlichen Zahlen von 1 bis n so eingeschrieben, daß in jeder Zeile und auch in jeder Spalte jede der Zahlen von 1 bis n genau einmal vorkommt. Ein solches Gebilde heißt *lateinisches Quadrat der Reihenzahl n.* Ein lateinisches Quadrat der Reihenzahl 4 ist in Bild 4 dargestellt.

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2

Bild 4

1	2	3	4
4	3	2	1
3	4	1	2
2	1	4	3

Bild 5

Wir wollen jetzt zwei lateinische Quadrate der Reihenzahl n betrachten. Wir nehmen ein drittes Schachbrett von $n\cdot n$ Feldern und tragen in jedes Feld desselben dasjenige Zahlenpaar ein, dessen erstes Glied die Zahl ist, die im ersten lateinischen Quadrat in diesem Feld steht, während dessen zweites Glied diejenige Zahl ist, die im zweiten lateinischen Quadrat in diesem Feld steht. Wenn wir auf diese Weise jedes der möglichen n^2 Zahlenpaare genau einmal bekommen, so sagen wir, daß die beiden lateinischen Quadrate der Reihenzahl n zueinander orthogonal sind. In Bild 5 ist ein solches lateinisches Quadrat der Reihenzahl 4 dargestellt, das zu dem in Bild 4 dargestellten lateinischen Quadrat orthogonal ist; aus Bild 6 geht hervor, daß sie tatsächlich orthogonal sind.

[1, 1]	[2, 2]	[3, 3]	[4, 4]
[2, 4]	[1, 3]	[4, 2]	[3, 1]
[4, 3]	[3, 4]	[2, 1]	[1, 2]
[3, 2]	[4, 1]	[1, 4]	[2, 3]

Bild 6

Wenn nicht nur zwei, sondern mehrere lateinische Quadrate der Reihenzahl n vorliegen, so heißen diese paarweise orthogonal, wenn je zwei von ihnen orthogonal sind. Es stellt sich die Frage, wieviel lateinische Quadrate der Reihenzahl n sich höchstens angeben lassen, die paarweise orthogonal sind. Die Antwort hierauf gibt der folgende Satz, den der Leser auch selbst leicht beweisen kann:

Satz 4: Die Anzahl paarweise orthogonaler lateinischer Quadrate der Reihenzahl n beträgt höchstens $n-1$.

Wieder stellt sich die Frage, ob sich tatsächlich $n-1$ paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl n angeben lassen. Es ist schon keineswegs trivial, ob es zwei orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl n gibt. Wenn n bei Division durch 4 nicht 2 als Rest gibt (und $n\geqq 3$ ist), so kann man mit ein wenig Geschick beweisen, daß zwei orthogonale Quadrate der Reihenzahl n existieren.

Der große Mathematiker des 18. Jahrhunderts *Leonhard Euler* (1707 bis 1783) hat 1782 vermutet, daß keine zwei orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl n existieren, wenn n bei Division durch 4 als Rest 2 ergibt. Diese Vermutung konnte sogar im einfachsten Falle ($n=6$) erst nach über 100 Jahren bewiesen werden. Erst 1900 ist es *G. Tarry* gelungen nachzuweisen, daß es in der Tat keine zwei orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl 6 gibt. Der folgende Fall $n=10$ blieb noch beinahe weitere 60 Jahre lang ungelöst. Um so größer war die Überraschung, als *E. T. Parker* 1959 zeigte, daß zwei orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl 10 existieren. Später haben *R. C. Bose*, *S. S. Shrikhande* und *E. T. Parker* 1960 nachgewiesen, daß es auch für jede Zahl n größer als 10 von der Form $4k+2$ zwei orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl n gibt. Der große *Euler* hatte sich also diesmal geirrt!

Die berühmte Konstruktion von *Parker*, die beiden orthogonalen Quadrate der Reihenzahl 10, sind in Bild 7 dargestellt. (Anstelle von 10 haben wir in der Abbildung überall 0 geschrieben.) Gibt es drei paarweise orthogonale lateinische Quadrate? Niemand weiß es.

0	4	1	7	2	9	8	3	6	5
8	1	5	2	7	3	9	4	0	6
9	8	2	6	3	7	4	5	1	0
5	9	8	3	0	4	7	6	2	1
7	6	9	8	4	1	5	0	3	2
6	7	0	9	8	5	2	1	4	3
3	0	7	1	9	8	6	2	5	4
1	2	3	4	5	6	0	7	8	9
2	3	4	5	6	0	1	8	9	7
4	5	6	0	1	2	3	9	7	8

Bild 7

0	7	8	6	9	3	5	4	1	2
6	1	7	8	0	9	4	5	2	3
5	0	2	7	8	1	9	6	3	4
9	6	1	3	7	8	2	0	4	5
3	9	0	2	4	7	8	1	5	6
8	4	9	1	3	5	7	2	6	0
7	8	5	9	2	4	6	3	0	1
4	5	6	0	1	2	3	7	8	9
1	2	3	4	5	6	0	9	7	8
2	3	4	5	6	0	1	8	9	7

Der Leser mag sagen: das ist zwar alles interessant, aber doch eigentlich ein Spiel, bloßer Selbstzweck, denn es hat mit anderen mathematischen Problemen nichts zu tun, d. h., es ist nicht *anwendbar*. Vermutlich wird sich jedoch die Meinung des Lesers ändern, wenn er den folgenden Satz durchliest:

Satz 5: Dann und nur dann gibt es eine endliche projektive Ebene n-ter Ordnung, wenn es $n-1$ paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Reihenzahl n gibt.

Die Aussage, daß keine projektive Ebene der Ordnung 6 existiert, folgt also aus dem obenerwähnten Ergebnis von *Tarry*, und auch allgemein stellt die Frage nach der Maximalzahl paarweise orthogonaler lateinischer Quadrate der Reihenzahl n eine Verfeinerung der Frage nach der Existenz einer endlichen projektiven Ebene n-ter Ordnung dar. Das folgende Problem ist dagegen Verfeinerung des 2. Problems:

Problem 4: Wie groß ist die Maximalzahl paarweise orthogonaler lateinischer Quadrate der Reihenzahl 10?

Wie wir nach dem Obigen wissen, ist gegenwärtig nur bekannt, daß die Antwort hierauf mindestens 2 und höchstens 9 lautet.

3. Blockpläne

Wir wollen annehmen, von einer v-elementigen Menge seien gewisse k-elementige Untermengen so ausgewählt, daß je zwei Elemente der v-elementigen Menge in genau λ ausgewählten Teilmengen enthalten sind. Dann ist nicht schwer zu beweisen, daß jedes der v Elemente in ebensoviel ausgewählten Teilmengen liegt. Diese Anzahl bezeichnen wir mit r, die Anzahl der ausgewählten Teilmengen dagegen mit b. (Die ausgewählten Teilmengen werden wir im folgenden Blöcke nennen.) Eine solche Struktur werden wir ***Blockplan*** nennen oder, wenn wir auch die Parameter hervorheben wollen, (v, b, r, k, λ)-Blockplan. Um die trivialen Fälle auszuschließen, wollen wir im weiteren annehmen, daß die Parameter den Ungleichungen $2 \leqq k < v$, $\lambda \geqq 1$ genügen. Dieser Begriff stellt eine Verallgemeinerung des Begriffs einer endlichen projektiven Ebene dar, denn jede endliche projektive Ebene n-ter Ordnung ist zugleich auch ein (v, b, r, k, λ)-Blockplan mit

$$v = b = n^2 + n + 1$$
$$r = k = n + 1$$
$$\lambda = 1.$$

Zwischen den Parametern bestehen die folgenden Beziehungen:

Satz 6: Für jeden (v, b, r, k, λ)-Blockplan gilt:

$$bk = vr$$
$$r(k-1) = \lambda(v-1)$$
$$b \geqq v.$$

Die beiden Gleichungen kann der Leser leicht selbst beweisen, der Beweis der dritten Ungleichung (der sogenannten Fisherschen Ungleichung) ist dagegen schwerer.

Die in Satz 6 genannten Bedingungen stellen wiederum lediglich notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen für die Existenz eines (v, b, r, k, λ)-Blockplans dar. Beispielsweise sind im Falle $v = b = 43$, $r = k = 7$, $\lambda = 1$ die Beziehungen in Satz 6 erfüllt, und doch gibt es keinen (43, 43, 7, 7, 1)-Blockplan (dies folgt aus Satz 2, denn von einem solchen Blockplan kann man unschwer nachweisen, daß er eine endliche projektive Ebene der Ordnung 6 bilden würde, siehe Satz 7). Die Frage nach der Existenz von Blockplänen ist sehr viel untersucht worden, doch auch weiterhin gibt es noch recht viele unentschiedene Fragen. Unbekannt ist beispielsweise (wir wollen ein aus relativ kleinen Parametern bestehendes Beispiel erwähnen), ob ein Blockplan mit den Parametern $(v, b, r, k, \lambda) = (22, 33, 12, 8, 4)$ existiert. Übrigens sind Blockpläne erstmalig in Zusammenhang mit praktischen Anwendungen aufgetreten, und zwar in der mathematischen Statistik, bei der Versuchsplanung.

In einem Blockplan ist die Anzahl der zwei Blöcken gemeinsamen Elemente im allgemeinen nicht für je zwei Blöcke dieselbe. Dagegen gilt der folgende

Satz 7: Wenn in einem (v, b, r, k, λ)-Blockplan $v = b$ ist (dann ist notwendig auch $r = k$), so haben je zwei Blöcke λ Elemente gemein.

Von solchen speziellen Blockplänen handelt

Satz 8: Wenn in einem (v, b, r, k, λ)-Blockplan $v = b$ eine gerade Zahl ist, so ist $k - \lambda$ ein vollständiges Quadrat.

Aus diesem Satz geht hervor, daß zu den Parametern $(v, b, r, k, \lambda) = (22, 22, 7, 7, 2)$ beispielsweise kein Blockplan existiert, obgleich die Parameter den in Satz 6 genannten Bedingungen genügen.

Ähnlich zur Definition der Blockpläne ist die eines t-Blockplans ($t \geqq 2$): Gewisse k-elementige Untermengen (die wir Blöcke nennen) einer Menge von v Elementen bilden einen t-Blockplan, wenn jede Untermenge von t Elementen der v-elementigen Menge in genau λ Blöcken enthalten ist. (Die Blockpläne ergeben sich hieraus im Spezialfall $t = 2$.) Es ist unschwer zu erkennen, daß jeder t-Blockplan zugleich auch für alle Werte $t' < t$ ($t' \geqq 2$) einen t'-Blockplan darstellt (als t'-Blockplan betrachtet hat freilich λ einen anderen Wert). Insbesondere ist jeder t-Blockplan auch ein Blockplan schlechthin. Trivial soll ein t-Blockplan heißen, der sich dadurch ergibt, daß man als Blöcke sämtliche k-elementige Untermengen der v-elementigen Menge wählt ($t \leqq k \leqq v$). Insgesamt sind zwei nichttriviale 5-Blockpläne bekannt (für den einen ist $v = 24$, $k = 8$, für den anderen $v = 12$, $k = 6$); ungelöst ist dagegen das folgende

Problem 5: Gibt es einen nichttrivialen 6-Blockplan?

Oben haben wir nur einen ganz kleinen Bruchteil der sich auf hochsymmetrische kombinatorische Strukturen beziehenden Fragen berührt. Nicht einmal erwähnt haben wir beispielsweise die fehlerkorrigierenden Kodes, die in der Informationstheorie sowie in der Theorie (und der Praxis!) der Nachrichtenübermittlung außerordentlich wichtig sind.

Zum Schluß wollen wir erwähnen, daß der Beweis all derjenigen Sätze, von denen wir nicht besonders angegeben haben, daß sie auch vom Leser leicht bewiesen werden können, ausnahmslos mit algebraischen Methoden zu führen ist (die über den Stoff der Oberschule hinausgehen). Das bedeutet gleichzeitig, daß die kombinatorischen Probleme eng mit anderen Zweigen der Mathematik zusammenhängen.

J. Pelikán

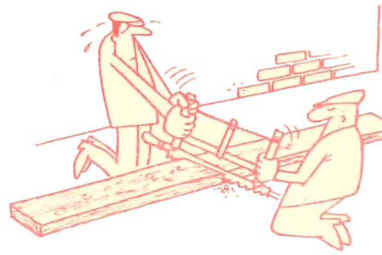
aufgepaßt – mitgemacht

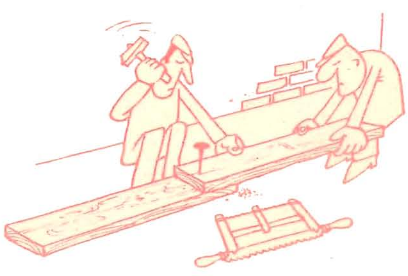
Liebe alpha-Leser!

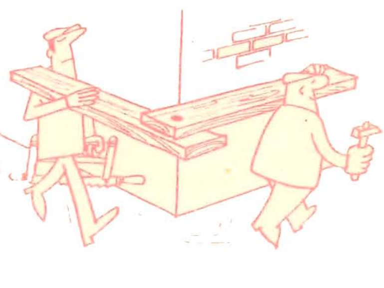
Hier legen wir euch eine lustige Vignette vor. Wer findet dazu eine Mathematikaufgabe aus der gesellschaftlichen Praxis?

Vielleicht sendet ihr uns auch selbst lustige Vignetten (aus Zeitschriften) und dazu ein mathematisches Problem. Die besten Einsender erhalten Buchprämien. Wir wünschen viel Freude und Erfolg!

Redaktion alpha,
7027 Leipzig, PSF 14







XVIII. Internationale Mathematikolympiade Lienz/Wien, Juli 1976

Aufgaben **1. Tag**

1. In einem ebenen konvexen Viereck mit dem Flächeninhalt $32\,\text{cm}^2$ sei die Summe der Länge der einen Diagonale und der Längen zweier einander gegenüberliegenden Seiten gleich 16 cm.
Man bestimme alle möglichen Längen der anderen Diagonale.
(ČSSR, 5 Punkte)

2. Sei $P_1(x) = x^2 - 2$; $P_i(x) = P_1[P_{i-1}(x)]$; $i = 2, 3, \ldots$
Man zeige, daß für beliebiges natürliches n alle Lösungen der Gleichung

$$P_n(x) = x$$

reell und paarweise verschieden sind.
(Finnland, 7 Punkte)

3. Eine quaderförmige Schachtel sei derart, daß sie vollständig mit Einheitswürfeln (Kantenlänge 1) gefüllt werden kann. Legt man möglichst viele Würfel des Volumens 2 so in die Schachtel, daß ihre Kanten parallel zu Kanten der Schachtel liegen, so füllt ihr Gesamtvolumen genau 40% des Hohlraumes der Schachtel.
Man bestimme die Innenmaße aller Schachteln mit dieser Eigenschaft. ($\sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots$)
(Niederlande, 8 Punkte)

2. Tag

4. Man bestimme den größten Wert des Produktes positiver ganzer Zahlen, deren Summe 1976 ist.
(USA, 6 Punkte)

5. Gegeben sei folgendes System von p Gleichungen mit $q = 2p$ Unbekannten

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

wobei $a_{ij} \in \{0, -1, +1\}$, $i = 1, 2, \ldots, p$,
$j = 1, 2, \ldots, q$.
Man beweise, daß eine Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ von (1) mit folgenden Eigenschaften existiert:
a) alle x_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ sind ganzzahlig,
b) mindestens eines der x_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ ist ungleich Null,
c) $|x_j| \leqq q$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$.
(Niederlande, 7 Punkte)

6. Eine Zahlenfolge $u_0, u_1, u_2, \ldots$ sei wie folgt definiert:

$$u_0 = 2,$$
$$u_1 = \frac{5}{2},$$
$$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

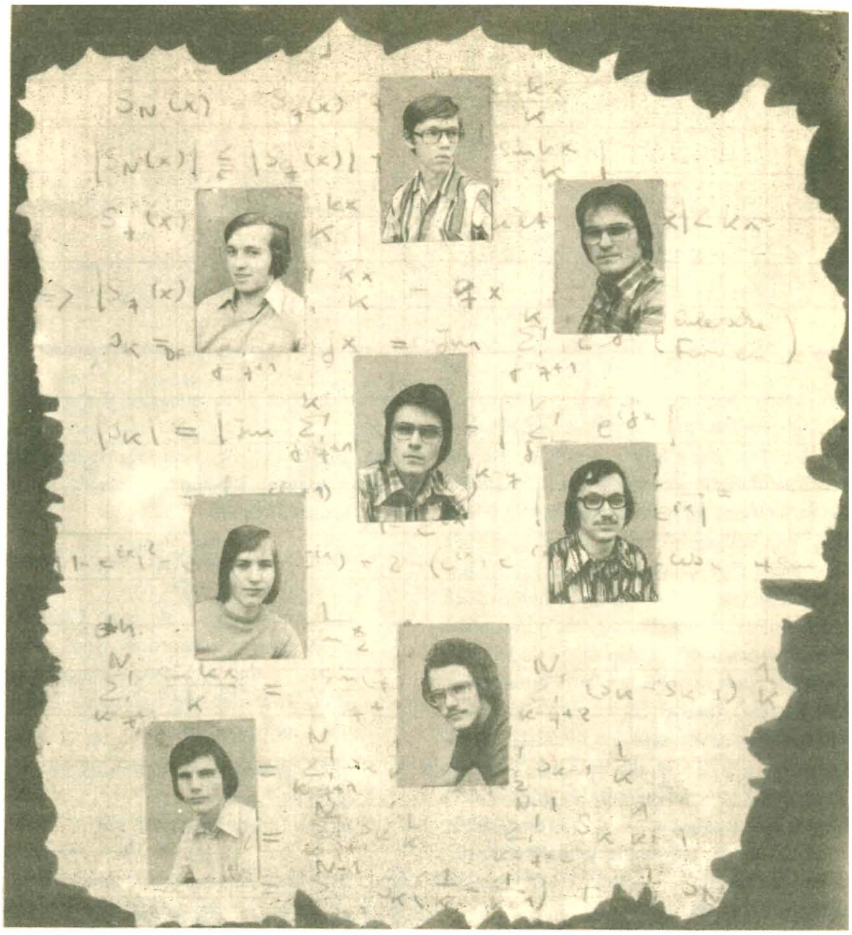
Man zeige, daß

$$[u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} \text{ gilt.} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$[x]$ bezeichnet die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.
(Großbritannien, 7 Punkte)

alpha stellt die DDR-Mannschaft vor:

Michael Marczinek, EOS „Heinrich Hertz", Berlin, Kl. 11 (2. Preis) · oben Mitte;
Thomas Hoffmann, EOS „Geschwister Scholl", Apolda, Kl. 12 · oben links;
Norbert Schieweck, EOS „Otto v. Guericke", Magdeburg, Kl. 12 · oben rechts;
Friedhelm Schieweck, EOS „Otto v. Guericke", Magdeburg, Kl. 12 (3. Preis) · Mitte;
Uwe Risch, EOS „Geschwister Scholl", Burg, Kl. 12 (2. Preis) · Mitte links;
Jens-Uwe Löbus, EOS „Romain Rolland", Dresden, Kl. 12 (3. Preis) · Mitte rechts;
Roger Labahn, EOS „Geschwister Scholl", Anklam, Kl. 11 · unten rechts;
Klaus Brinckmann, EOS „Bertolt Brecht", Dresden, Kl. 12 (3. Preis) · unten links.



● In diesem Jahr wurden 42% der insgesamt erreichbaren Punkte erzielt (1975: 55%). Das zeigt den hohen Schwierigkeitsgrad der gestellten Aufgaben. Preise wurden vergeben:

1. Preis: 40 bis 34 Punkte
2. Preis 33 bis 23 Punkte
3. Preis 22 bis 15 Punkte.

● Die Auszeichnung der Sieger fand in Wien statt. Sie wurde vom Bundesminister für Unterricht und Kunst der Rep. Österreich vorgenommen. Die Preisträger erhielten Medaillen und Sachpreise.

● Die Preisträger der DDR-Mannschaft werden zum Studium delegiert. Sie erhalten für das 1. Studienjahr ein zusätzliches Stipendium.

● Die XIX. IMO findet Anfang Juli 1977 in der SFR Jugoslawien (Belgrad) statt.

In der Osttiroler Stadt Lienz fanden die Klausuren statt (siehe Bild rechts).

Die Gastgeber führten mit den Teilnehmern der IMO zahlreiche Exkursionen durch, z. B. zum Großglockner

● In diesem Jahr nahmen fünf Mädchen teil: Je ein Mädchen aus der Soz. Rep. Vietnam, der UdSSR, der Rep. Frankreich, der SR Rumänien und der Rep. Kuba. Die sowjetische Schülerin erreichte mit 39 Punkten einen ersten Preis, die vietnamesische Schülerin einen 2. Preis. Beide Teilnehmerinnen nahmen bereits an der XVII. IMO teil (siehe alpha 6/75) und waren diesmal die Besten ihrer Mannschaft.

Bilanz der Erfolge

Teilnehmerland	Gesamtpunktzahl	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Diplom
Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken	250	4	3	1	–
Vereinigtes Königreich von Großbritannien und Nordirland	214	2	4	1	1
Vereinigte Staaten von Amerika	188	1	4	1	–
Volksrepublik Bulgarien	174	–	2	6	–
Republik Österreich	167	1	2	5	–
Republik Frankreich	165	1	3	1	–
Ungarische Volksrepublik	160	–	3	4	–
Deutsche Demokratische Republik	142	–	2	3	–
Volksrepublik Polen	138	–	–	6	–
Sozialistische Republik Rumänien	118	–	1	3	–
Königreich Schweden	118	–	1	2	–
Tschechoslowakische Sozialistische Republik	116	–	1	3	–
Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien	116	–	1	3	–
Sozialistische Republik Vietnam	112	–	1	3	–
Königreich der Niederlande	78	–	–	1	–
Republik Finnland	52	–	–	1	–
Republik Griechenland	50	–	–	–	–
Republik Kuba	16 (nur 3 Teilnehmer)	–	–	–	–

Mathematik und Musik

Melodien ordnen

„Schlaf, Kindlein, schlaf…"

Es kommt vor, daß einem eine bekannte Melodie einfällt; nur man weiß gerade nicht, wie der Text dazu heißt oder aus welchem Stück sie stammt oder wer der Komponist ist. Dann wünscht man sich, daß man in einem Buch nachschlagen könnte, in welchem viele Melodien registriert sind und dazu nähere Angaben wie Titel und Herkunft stehen. Jedoch müßten die musikalischen Zitate so geordnet sein, daß man das Gesuchte leicht finden oder gegebenenfalls entscheiden kann, ob es überhaupt darin enthalten ist.

Wörter können wir nach den Buchstaben ordnen, weil jeder Buchstabe im Alphabet einen festen Platz hat. Indem wir also jedem Buchstaben eine natürliche Zahl zuordnen, übertragen wir die Ordnungsrelation der natürlichen Zahlen auf die Menge der Buchstaben und damit auf die der Wörter.

Bei Melodien geht das nicht so einfach. Beim Notieren einer Melodie werden den Tönen Noten zugeordnet. In einer Note sind zwei Aussagen verschlüsselt:

1. die absolute Tonhöhe
2. die relative Tondauer.

Die Tonhöhe erkennen wir an der Stellung des Notenkopfes bezüglich der Notenlinien (in Abhängigkeit vom Notenschlüssel und von der Vorzeichnung); die relative Dauer wird durch den Notenwert ausgedrückt. Die Pausenzeichen kann man als Pseudonoten verstehen: Sie sind Noten ohne Höhe mit Dauer.

Nun suchen wir eine Abbildung, die uns erlaubt, Melodien zu ordnen, indem eine Ordnungsrelation übertragen werden kann. Die im Notenblatt vorhandene Fixierung der Melodien in absoluten Tonhöhen ist für jeden Instrumentalisten Grundlage für sein Spiel. Tatsächlich spielt aber für das hörende Erfassen die absolute Tonhöhe keine Rolle. Der erste Ton ist also frei wählbar, von ihm hängt der weitere Verlauf ab. Dieses Prinzip der Transponierbarkeit (Übertragbarkeit) findet im Musikunterricht durch die relativ orientierten Tonsilben und Handzeichen seine Anwendung; die damit ausgedrückten Tonrelationen widerspiegeln sich in den entsprechenden Lagebeziehungen der Notenköpfe.

Wir müssen uns demzufolge eine Zuordnung wählen, die in bezug auf Transpositionen invariant ist; das bedeutet: Das Ergebnis der Abbildung darf nicht von der Tonart abhängen.

Dafür brauchen wir zwei Komponenten: Tonschritte und Rhythmusfaktoren. Dazu einige Bezeichnungen.

N die absolute Tonhöhe, z. B. der Ton c' oder cis' oder b oder d''

$h(N)$ eine ganze Zahl, die jeder Tonhöhe (jeder Note) zugeordnet wird, und zwar so, daß sich zwei benachbarte Halb-Töne der chromatischen Leiter um 1 unterscheiden, z. B.

$h(\text{c}')=4$, $h(\text{cis}')=5$, $h(\text{d}')=6$,
$h(\text{dis}')=7$, $h(\text{e}')=8$,
$h(\text{c}'')=16$ (*siehe Beispiel 1*)

Definition: Ein Tonschritt, genauer: das Fortschreiten von einem Ton zum folgenden einer Melodie (nämlich Tonwiederholung, Tonschritt oder Tonsprung), $s(N_1, N_2)$ ist das Intervall von N_1 nach N_2.

$$s(N_1, N_2)=h(N_2)-h(N_1).$$

Den Intervallen von der Prime bis zur Oktave entsprechen die Zahlen 0 bis 12 oder 0 bis −12, je nachdem, ob der zweite Ton höher oder tiefer ist.

Tabelle der Intervalle innerhalb einer Oktave

Intervall	Beispiel	s
reine Prime	c' c'	0
kleine Sekunde	h' c''	1
große Sekunde	c' d'	2
kleine Terz	e' g'	3
große Terz	c' e'	4
reine Quarte	c' f'	5
übermäßige Quarte	f' h'	6
verminderte Quinte	h' f''	6
reine Quinte	c' g'	7
kleine Sexte	e' c''	8
große Sexte	c' a'	9
kleine Septime	g' f''	10
große Septime	c' h'	11
reine Oktave	c' c''	12

Mit dieser Abbildung ordnen wir jedem Notenpaar eine ganze Zahl zu, und es gilt

$$s(N_1, N_2)=-s(N_2, N_1).$$

Beispiel 1

(Die Noten des Beispiels 1 heißen:
1) a, 2) ais oder b, 3) h oder ces',
4) his oder c', 5) cis' oder des',
6) d', 7) dis' oder es',
8) e' oder fes', 9) eis' oder f',
10) fis' oder ges', 11) g',
12) gis' oder as', 13) a',
14) ais' oder b', 15) h' oder ces'',
16) his' oder c'',
17) cis'' oder des'' usw.)

$t(N)$ eine positive rationale Zahl, die den (Zeit-)Wert jeder Note und jeder Pause ausdrückt, nämlich die relative Dauer, z. B.

$t(\text{𝅗𝅥})=\frac{1}{2}$, $t(\text{♩})=\frac{1}{4}$, $t(\text{♪})=\frac{1}{8}$,

$t(\text{♩.})=\frac{3}{8}$,

$t(\text{𝅝})=1$, $t(\text{𝄽})=\frac{1}{4}$, $t(\text{𝄾})=\frac{1}{8}$,

$t(\text{𝄿})=\frac{1}{16}$.

$h(N)$ vermittelt eine Abbildung aus der Menge der Noten in den Ring der ganzen Zahlen, $t(N)$ vermittelt eine Abbildung aus der Menge der Noten in den Körper der rationalen Zahlen. Beide Bildmengen sind geordnete Mengen. Nun können wir die folgenden Definitionen verstehen.

Beispiel 2 zeigt ein Melodienstück mit seinen Tonschritten.

Die Tonschritte erhält man so:

$$\begin{array}{ll} h(\text{e}')=8 & \\ h(\text{c}')=4 & s_1=4-8=-4 \\ h(\text{d}')=6 & s_2=6-4=\ \ 2 \\ h(\text{e}')=8 & s_3=8-6=\ \ 2 \end{array}$$

usw.

Zur Kontrolle, ob man richtig gerechnet hat, kann man folgende Tatsache ausnutzen: Die Summe der Tonschritte zwischen dem ersten und dem letzten Ton einer Folge ist gleich dem Tonschritt vom ersten zum letzten Ton

$$\sum_{i=1}^{n-1} s(N_i, N_{i+1})=s(N_1, N_n).$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n-1} s(N_i, N_{i+1})=\sum_{i=1}^{n-1} h(N_{i+1})-h(N_i)$$

$$=h(N_n)-h(N_1)=s(N_1, N_n).$$

Für die ersten vier Noten unseres Beispiels ergibt sich

$$N_1=\text{e}', N_2=\text{c}', N_3=\text{d}', N_4=\text{e}'$$
$$s_1+s_2+s_3=-4+2+2=0$$
$$=h(N_4)-h(N_1)$$

Beispiel 2

Beispiel 3

Definition: Ein Rhythmusfaktor $r(N_1, N_2)$ ist der Quotient der Notenwerte

$$r(N_1, N_2) = \frac{t(N_2)}{t(N_1)}$$

Mit dieser Abbildung ordnen wir eindeutig jedem Notenpaar (eine der beiden Noten darf eine Pause sein) eine positive rationale Zahl zu, z. B.

$N_1 =$ ♩ $\quad t(N_1) = \frac{3}{8}$ $\qquad r = \frac{1}{8} : \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$.

$N_2 =$ ♪ $\quad t(N_2) = \frac{1}{8}$

Für Beispiel 2 ergeben sich folgende Rhythmusfaktoren:

$1, \frac{1}{2}, 1, 2, 1, 1, 2, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, 2, 1, 2.$

Zur Kontrolle kann man hier die analoge Tatsache ausnutzen:

Das Produkt aller Rhythmusfaktoren ist gleich dem Rhythmusfaktor vom ersten zum letzten Ton

$$\prod_{i=1}^{n-1} r(N_i, N_{i+1}) = r(N_1, N_n).$$

Beweis:

$$\prod_{i=1}^{n-1} r(N_i, N_{i+1}) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{t(N_{i+1})}{t(N_i)} = \frac{t(N_n)}{t(N_1)}$$

$$= r(N_1, N_n).$$

Nun können wir eine (pausenlose) Melodie, aufgefaßt als Folge geordneter Notenpaare, mittels einer Vektorfolge beschreiben; die erste Komponente ist der Tonschritt, die zweite Komponente ist der Rhythmusfaktor

$$\mathfrak{m}_i = (s_i, r_i).$$

Für das Thema des Beispiels 2 ergibt sich:

$(-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right), (2, 1), (1, 2), (-1, 1),$

$(-2, 1), (0, 2), \left(2, \frac{1}{2}\right), (-4, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right),$

$(2, 1), (2, 2), (-4, 1), (-2, 2).$

Wenn innerhalb des musikalischen Zitats eine Pause auftritt, nehmen wir als Tonschritt zur Pause den Buchstaben P (oder irgendein anderes Zeichen) und als nächsten Tonschritt den Schritt von der Note vor der Pause zur Note nach der Pause; beim Berechnen der Rhythmusfaktoren jedoch nehmen wir jedesmal den Zeitwert der Pause, als ob da eine Note wäre.

Beispiel 3 ergibt dann:

$\left(P, \frac{1}{2}\right), (-5, 1), (5, 2), \left(P, \frac{1}{2}\right), (-5, 1),$

$(5, 1), (-5, 1), (5, 1), (4, 1), (3, 4).$

Diese Zuordnung – Melodie→Vektorfolge $\{\mathfrak{m}_i\}$ ist eindeutig – zu verschiedenen Melodien gehören verschiedene Vektorfolgen – und invariant – eine Melodie in verschiedenen Tonarten ergibt dieselbe Vektorfolge. Diese Abbildung ist auch umkehrbar eindeutig – verschiedene Vektorfolgen ergeben verschiedene Melodien. Für die Vektoren $\mathfrak{m}_i \in \mathfrak{B}_2$ muß vorausgesetzt werden:

$\mathfrak{m} = (s_i, r_i)$, s_i ganze Zahl oder P, $|s_i| < K$ (die Schranke K hängt vom Tonvorrat ab, etwa $k = 100$), r_i rationale Zahl > 0 (nach meiner Erfahrung $2^{-8} < r < 2^8$).

Die Anfangsnote muß vorgegeben werden, sie ist frei wählbar; von $h(N_1)$ und $t(N_1)$ gelangt man zu den Werten der nächsten Note so:

$$h(N_2) = h(N_1) + s_1$$
$$t(N_2) = t(N_1) \cdot r_1.$$

Falls $s_i = P$ vorkommt $(1 \leq i < n)$, ist N_{i+1} eine Pause mit dem Zeitwert

$$t(N_{i+1}) = t(N_i) \cdot r_i$$

und für die folgende Note gilt dann:

$$h(N_{i+2}) = h(N_i) + s_{i+1}$$
$$t(N_{i+2}) = t(N_{i+1}) \cdot r_{i+1}$$

Ein Beispiel für die Umkehrung.

Gegeben ist die Vektorfolge

$(4, 1), (3, 1), (0, 1), (P, 1),$

$(0, 1), (0, 1), (P, 1), (-3, 1), (0, 3);$

gesucht ist die Melodie.

1. Anfangswerte $N_1 =$ as' als $\frac{1}{16}$-Note
   $h(N_1) = 12$ (ich gebrauche die Werte des Beispiels 1), $t(N_1) = \frac{1}{16}$
2. $h(N_2) = h(N_1) + s_1 = 12 + 4 = 16 = h(\text{c}'')$
   $t(N_2) = t(N_1) \cdot r_1 = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16} = t(\ )$
3. $h(N_3) = h(N_2) + s_2 = 16 + 3 = 19 = h(\text{es}'')$
   $t(N_3) = t(N_2) \cdot r_2 = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16}$
4. $h(N_4) = h(N_3) + s_3 = 19 + 0 = 19$
   $t(N_4) = t(N_3) \cdot r_3 = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16}$
5. $h(N_5) = h(N_4) + s_4 = 19 + P = h(P)$
   $t(N_5) = t(N_4) \cdot r_4 = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16}$
   also: $N_5 =$ 𝄿
6. $h(N_6) = h(N_4) + s_5 = 19 + 0 = 19$
   $t(N_6) = t(N_5) \cdot r_5 = \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16}$

...

9. $h(N_9) = \qquad = 16$
   $t(N_9) = \qquad = \frac{1}{16}$
10. $h(N_{10}) = h(N_9) + s_9 = 16 + 0 = 16 = h(\text{c}'')$
    $t(N_{10}) = t(N_9) \cdot r_9 = \frac{1}{16} \cdot 3 = \frac{3}{16} = t($♪.$)$

Erkennen wir die Melodie? – Es ist das bekannte Motiv des Strauß-Walzers „An der schönen blauen Donau", originalgetreu im *Beispiel 5* notiert (mit den Anfangswerten $h(N_1) = 6$, $t(N_1) = \frac{1}{4}$).

Nun brauchen wir noch eine Ordnungsrelation. Es sei $(s_1, r_1) < (s_2, r_2)$ genau dann, wenn die erste der nicht verschwindenden Differenzen $s_2 - s_1$, $r_2 - r_1$ positiv ist. Mit anderen Worten:

Wenn $s_1 < s_2$, dann sei $(s_1, r_1) < (s_2, r_2)$; und wenn $s_1 = s_2$ und $r_1 < r_2$, dann sei $(s_1, r_1) < (s_2, r_2)$.

Für den Fall $s = P$ setzen wir, damit wir vergleichen können, willkürlich $-\infty$ fest.

Jetzt haben wir unser Ziel erreicht: wir können die angeführten drei Motive ordnen (ansteigend)

1. $\left(P, \frac{1}{2}\right)$ ... Beispiel 3
2. $(-4, 1)$ ... Beispiel 2
3. $(4, 1)$ ... Beispiel 4 und 5.

Darüber hinaus kann man aus gegebenen Melodien neue gewinnen, indem man Operationen mit diesen besonderen Vektoren erklärt:

$\mathfrak{m}_1 = (s_1, r_1)$, $\mathfrak{m}_2 = (s_2, r_2)$,

g ganze Zahl

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 = (s_1 + s_2, r_1 \cdot r_2)$$
$$\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2 = (s_1 - s_2, r_1 : r_2)$$
$$g \cdot \mathfrak{m}_1 \ = \left(g \cdot s_1, r_1^g\right)$$

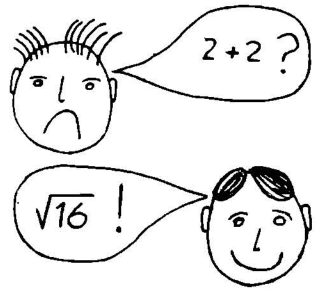
Die Ergebnisse der Verknüpfungen sind (theoretisch) wieder Vektoren des „Melodienbereichs" von $\mathfrak{B}_2$. Dieser Bereich – praktischerweise haben wir uns auf eine endliche Menge von Vektoren beschränkt – läßt sich zu einem kontinuierlichen – und damit unendlichen – Teilbereich erweitern, wenn man als Komponenten beliebige reelle Zahlen zuläßt, die wenigstens nach unten beschränkt sind (durch $-K$ oder 0). Dem entspricht eine kontinuierliche Tonerzeugung mit „maßlosen" Rhythmen. Wenn man r durch $\log r$ ersetzt, kann man mit den Vektoren auf bekannte Weise rechnen.

U. Wilke

Beispiel 4

Beispiel 5

Wer löst mit?
alpha -Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1977

Ma 5 ▪1538 Fußgänger verursachen durch impulsives, unbedachtes Überqueren der Fahrbahn oftmals Verkehrsunfälle, die vermeidbar sind. In der DDR wurde im Jahre 1974 etwa ein Siebentel aller Verkehrsunfälle durch Fußgänger hervorgerufen; dabei fanden 618 Fußgänger den Tod, 8492 Fußgänger wurden verletzt. Wie hoch sind die durchschnittlichen Kosten eines Verkehrsunfalles (Fahrzeugschäden, Krankengeld, medizinische Hilfe, volkswirtschaftlicher Verlust durch Ausfall im Produktionsprozeß), wenn unserer sozialistischen Gesellschaft im Jahre 1974 durch Verkehrsunfälle ein Gesamtschaden von 624946000 M entstand? *Sch.*

Ma 5 ▪1539 Eine Zeitungsmeldung lautete wie folgt: „Statt 10 kg Altpapier, wie es im Pionierauftrag heißt, wird jeder Pionier durchschnittlich 15 kg abliefern. Das sind an unserer Schule 2140 kg mehr.“
Wieviel *Junge Pioniere* gehören dieser Schule an? Wieviel Kilogramm Altpapier werden insgesamt abgeliefert?
Schülerin Gudrun Tappert, Guben

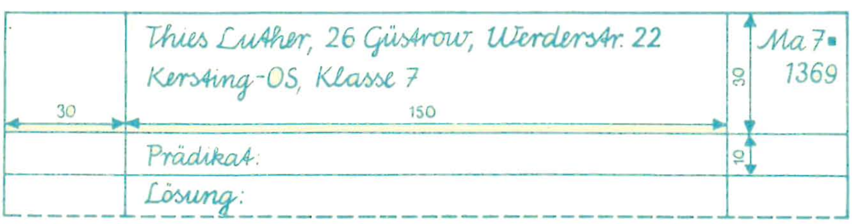
Ma 5 ▪1540 In einem Kasten liegen 100 verschiedenfarbige Kugeln, und zwar 28 rote, 20 grüne, 12 gelbe, 20 blaue, 10 weiße und 10 schwarze Kugeln. Wieviel Kugeln muß man mindestens dem Kasten entnehmen, ohne dabei hineinzuschauen, um mit Sicherheit fünfzehn gleichfarbige Kugeln zu erhalten? *Aus der sowjetischen Broschüre „Mathematische Aufgaben“, übersetzt von Cordula Becher, Moskau*

Ma 5 ▪1541 Die Gruppenratsvorsitzenden und deren Stellvertreter von drei Pioniergruppen beraten ein gemeinsames Arbeitsvorhaben. Wir wissen von ihnen folgendes:
a) Ist der Gruppenratsvorsitzende ein Mädchen, dann ist der Stellvertreter ein Junge oder umgekehrt.
b) Zur Beratung sitzen die sechs Pioniere im Kreis an einem runden Tisch, aber in keinem Falle sitzen die beiden Pioniere aus einer Gruppe nebeneinander.
c) Wilfried sitzt Günter gegenüber.
d) Edith und Günter sind Sigrids Platznachbarn.
e) Monika und Wilfried sind nicht in der gleichen Pioniergruppe.
f) Lutz wird mit der Leitung der Beratung beauftragt.
Welche Pioniere kommen jeweils aus einer Pioniergruppe?
OL Diplomlehrer Karl Becker, Lübtheen

Ma 5 ▪1542 Von zwei von Null verschiedenen natürlichen Zahlen ist die eine um soviel kleiner als 10, wie die andere größer als 10 ist. Die Summe aus den Quadraten dieser Zahlen beträgt 218. Um welche Zahlen handelt es sich? (Stelle eine Tabelle auf!)
Lehrer Dieter Knape, Jessen

Ma 5 ▪1543 Es sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen mit der dekadischen Darstellung $\overline{abcd}$, von denen keine die Ziffer 0 enthält, zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:
Faßt man jede der vier Ziffern für sich als Zahlen auf, dann ist a der Nachfolger von c und d der Nachfolger von a; multipliziert man d mit der Summe aus a und c, so erhält man b. *Rolf Kamieth, Kakerbeck (Kl. 7)*

Ma 6 ▪1544 Von vier Schülern mit den Vornamen Andreas, Christian, Jürgen, Michael und den Familiennamen Anders, Constantin, Jordan, Matuschewski ist uns folgendes bekannt:
a) Genau zwei dieser Schüler sind 10, genau zwei 12 Jahre alt.
b) Bei keinem dieser Schüler beginnt der Vorname mit dem gleichen Buchstaben wie der Familienname.



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1976/77 läuft von Heft 5/76 bis Heft 2/77. Zwischen dem 1. und 10. September 1977 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/77 veröffentlicht. Wer mindestens *10* Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1976/77 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

c) Der Schüler Michael ist nicht so alt wie der Schüler mit dem Familiennamen Anders.
d) Andreas ist jünger als Jürgen.
e) Michael und Jürgen sind gleichaltrig.
f) Bei den gleichaltrigen Schülern beginnt jeweils der Vorname des einen mit dem gleichen Buchstaben wie der Familienname des anderen.
Welchen Vor- und Familiennamen und welches Alter hat jeder dieser vier Schüler?

Christina Bauer, Babst (Kl. 6)

Ma 6 ▪1545 Von zwei Uhren möge die zweite gegenüber der ersten innerhalb einer Stunde um $1\frac{1}{2}$ Minuten vorgehen. Nach welcher Zeit zeigen beide Uhren wieder die gleiche Uhrzeit an, wenn sie beide gegenwärtig die Uhrzeit 12.00 Uhr anzeigen?

Schülerin Ellen Backhaus, Silberhausen

Ma 6 ▪1546 Ein Einweckglas mit einem Inhalt von 720 g Kirschen bzw. Kirschsaft wird von Petra geöffnet. Zum Belegen des Bodens einer Kirschtorte benötigt Petra die Hälfte der Masse des Glasinhaltes. Der Rest wird zu gleichen Teilen in drei Kompottschalen gegeben. Von der in 12 gleiche Teile zerlegten Kirschtorte verzehrte Petra drei Stück und von dem Nachtisch den Inhalt einer Schale. Wieviel Gramm Kirschen bzw. Kirschsaft hat Petra zu sich genommen? (Die Kirschen seien auf dem Tortenboden gleichmäßig verteilt.)

Schülerin Marlies Faupel, OS III Heiligenstadt (Kl. 10)

Ma 6 ▪1547 Bei einem Orientierungsmarsch der GST mußten die Teilnehmer bis zum ersten Kontrollpunkt 2 km weniger als die Hälfte der gesamten Marschstrecke zurücklegen. Nach weiteren 7 km erreichten sie den zweiten Kontrollpunkt. Bis zum Ziel waren es dann noch 3 km. Wieviel Kilometer betrug die gesamte Marschstrecke?

Schülerin Ingrid Wolf, 2. OS Berlin-Köpenick (Kl. 7)

Ma 6 ▪1548 Von den Schülern einer 6. Klasse haben im Monat Januar doppelt soviel, im Monat Mai viermal soviel Schüler Geburtstag wie im Monat März. Im Monat Juli haben vier Schüler weniger Geburtstag als im Monat Mai. Im Monat Oktober haben halb soviel Schüler Geburtstag wie im Monat Juli. In den nicht genannten Monaten hat kein Schüler dieser Klasse Geburtstag. Zur Klasse gehören mehr als 30, aber weniger als 40 Schüler. Wieviel Schüler umfaßt diese Klasse?

Sch.

Und ich bin Euer neuer Chemielehrer!

Ph 6 ▪1 Gegeben sei ein quadratisches Prisma mit der Grundkante $a = 10$ cm und der Körperhöhe $h = 15$ cm. Dieses Gefäß ist mit Schnee gefüllt. Die Dichte von Schnee ist $0{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. (Experimentell bestimmt.)
a) Wieviel Gramm Schnee befinden sich in dem Gefäß?
b) Wie hoch steht nach dem Schmelzen das Wasser im Gefäß?
(Die Dichte des Wassers beträgt $1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.)

Schüler Bernd-Peter Günther, OS Sachsendorf (Kl. 8)

Ma 7 ▪1549 Aus der Bibliotheksreihe „Mathematische Schülerbücherei" wurden von den 85 Schülern der Klassen 7a, 7b und 7c einer Oberschule im Verlaufe eines Monats insgesamt 26 Bücher entliehen. Jeder dritte Schüler der Klasse 7a, jeder dritte Schüler der Klasse 7b und jeder vierte Schüler der Klasse 7c entliehen je eines dieser Bücher. Der 10. Teil der Anzahl der Schüler der Klasse 7b nahm an der Mathematikolympiade des Kreises teil. Wieviele Schüler gehören der Klasse 7a an?

Frank Bergner, OS Großenhain (Kl. 10)

Ma 7 ▪1550 Das Produkt aus fünf aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen beträgt 3840. Wie heißen diese Zahlen?

Schülerin Gabriele Orgis, Bernsbach

Ma 7 ▪1551 Gegeben sei ein rechter Winkel mit seinem Scheitel S und den Schenkeln p und q. Ein innerer Punkt B dieses rechten Winkels habe von p den Abstand $m = 3$ cm und von q den Abstand $n = 4$ cm. Es ist ein gleichseitiges Dreieck ABC zu konstruieren, dessen Eckpunkt A auf dem Schenkel p, dessen Eckpunkt C auf dem Schenkel q des rechten Winkels liegt und dessen Eckpunkt B mit dem gegebenen inneren Punkt B des rechten Winkels zusammenfällt.

Sch.

Ma 7 ▪1552 Welche Zahl ist zu jedem Faktor der beiden Produkte $15 \cdot 20$ und $9 \cdot 32$ zu addieren, damit die so erhaltenen neuen Produkte gleich sind?

Fachlehrer Dieter Knape, Jessen

Ph 7 ▪2 Welche Druckkraft verschließt den Deckel eines Konservenglases, wenn von innen der Dampfdruck des Wassers mit 0,025 at und von außen der Luftdruck mit 765 Torr wirken. Der Durchmesser des Konservenglases beträgt 75 mm.

B.

Ch 7 ▪1 Ein Güterzug mit 40 Waggons Magneteisenstein aus der VR Polen wird im Eisenhüttenkombinat Ost entladen. Gleichzeitig trifft ein Güterzug mit 60 Waggons Roteisenstein ein. Je Waggon sind 40 t Erz geladen. Magneteisenstein besteht aus rund Dreiviertel seiner Masse aus Eisen. Roteisenstein enthält rund ein Drittel Eisen. Wieviel Tonnen Eisen können aus der gelieferten Menge
a) Magneteisenstein,
b) Roteisenstein gewonnen werden?
c) Welche Schlußfolgerung ergibt sich daraus für die Industrie?

Ma 8 ▪1553 Es sind alle negativen ganzen Zahlen k anzugeben, für die die Zahl

$$z = k(k+5)(k+7)$$

nicht negativ ist.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ▪1554 Es seien A und B zwei Punkte der Ebene, die den Abstand $c = 5$ cm voneinander haben.
Es sind zwei parallele Geraden g und h zu konstruieren, von denen die Gerade g durch den Punkt A und die Gerade h durch den Punkt B geht, wobei diese Parallelen den Abstand $a = 4$ cm voneinander haben sollen.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ▪1555 Es ist zu untersuchen, ob es rationale Zahlen a und b gibt, für die die Gleichung

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a+b}{2(a-b)} = \frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{a^2-b^2}{a}$$

erfüllt ist.

Schüler Olaf Raeke, Neubrandenburg

Ma 8 ▪1556 Nach Beendigung einer Fußball-Turnierrunde, an der die Mannschaften A, B, C, D teilnahmen und bei der jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal spielte, ergaben sich die folgenden Punkte- und Tor-Verhältnisse:

	Punkte-Verhältnis	Tor-Verhältnis
A	5:1	4:1
B	4:2	4:1
C	2:4	1:2
D	1:5	0:5

Dabei gibt das Punkte-Verhältnis für jede Mannschaft an, wie viele Spiele diese Mannschaft gewonnen (je 2 Punkte) und unentschieden gespielt (je 1 Punkt) hat bzw. wie viele Spiele sie verloren (je 2 Punkte) und unentschieden gespielt (je 1 Punkt) hat. Das Tor-Verhältnis gibt jeweils an, wie viele Tore die Mannschaft insgesamt erzielt hat bzw. wie viele Tore sie entgegennehmen mußte. Es soll nun aus den obigen Angaben ermittelt werden, wie jedes der 6 Spiele ausfiel und welches Torverhältnis sich dabei ergab.

Andreas Fittke, Rosa-Thälmann-OS Berlin (Kl. 8)

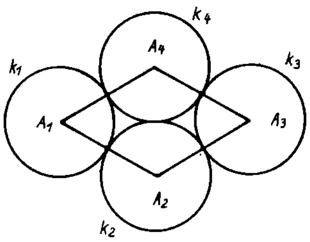
Ph 8 ▪3 Eine Glühlampe trägt die Angabe 6 V und 3 W.
a) Wie groß ist die Stromstärke?

b) Wie groß ist der Widerstand?
c) Wie groß ist die elektrische Arbeit, wenn die Glühlampe 24 Stunden lang in Betrieb war?

Schülerin Ramona Otto, 73. OS Dresden

Ch 8 ▪2 Je 5 g Kupfer(II)-oxid werden durch
a) Wasserstoff,
b) Eisen,
c) Zink reduziert.
Wieviel Gramm der Oxide erhält man bei diesen chemischen Reaktionen?

Ma 9 ▪1557 Es seien k_1, k_2, k_3, k_4 vier kongruente Kreise mit dem Radius $r=2$ cm und den Mittelpunkten A_1, A_2, A_3, A_4. Dabei mögen die Kreise k_2 und k_4 jeweils die anderen drei Kreise von außen berühren (siehe Bild).



Ferner seien K_1, K_2, K_3, K_4 die Mengen der inneren und Randpunkte der Kreise k_1, k_2, k_3, k_4 und M die Menge der inneren und Randpunkte des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$. Man berechne den Flächeninhalt der durch die Punktmenge $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup M$ gegebenen Figur, also des Gebietes, das durch die außerhalb des Vierecks gelegenen Kreisbögen der vier Kreise begrenzt ist.

Andreas Schmidt, Hans-Marchwitza-OS Dahlewitz (Kl. 9)

Ma 9 ▪1558 In dem folgenden Schema ist für jedes Sternchen eine der Grundziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 so einzusetzen, daß eine richtig gelöste Divisionsaufgabe entsteht.
(Dabei darf am Anfang jeder der Zeilen nicht die Grundziffer 0 stehen.)

```
********  :  ***  =  *****
***
 ****
  ***
  ****
  8***
```

Holger Brodmann, OS Paul Herrmann, Hettstedt (Kl. 8)

Ma 9 ▪1559 Man beweise, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck die Summe der Längen der Katheten gleich der Summe der Längen der Durchmesser des Umkreises und des Inkreises ist.

Studienrat H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ▪1560 Man beweise, daß es unendlich viele natürliche Zahlen z gibt, die sich nicht in der Form

$$z=p+n^3,$$

wobei p eine Primzahl und n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, darstellen lassen.

Herwig Gratias, stud. phys., Jena

Ph 9 ▪4 Mit einem 57 cm vom Auge entfernt gehaltenen Lineal wurde ein scheinbarer Durchmesser des Mondes von etwa 5,2 mm gemessen. Der wahre Durchmesser des Mondes sei mit 3476 km gegeben. Man bestimme die Entfernung des Mondes von der Erde und den prozentualen Fehler des ermittelten Wertes. (Die Entfernung Erde–Mond beträgt 384400 km.)

Rainer Maschke, Sprachheil-OS Weimar (Kl. 9)

Ch 9 ▪3 15 ml Salzsäure mit einer Konzentration von $M\% = 1$ reagieren vollständig mit Zink. Berechnen Sie das Wasserstoffvolumen, das bei einer Temperatur von 22 °C und 760 Torr entsteht! ($\varrho \approx 1\ \mathrm{g \cdot ml^{-1}}$)

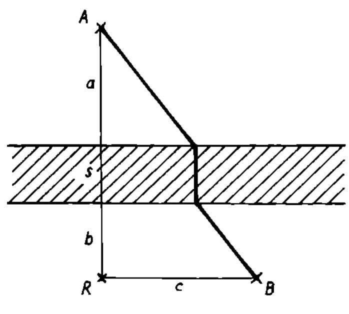
Ma 10/12 ▪1561 Gegeben seien die beiden für alle reellen Zahlen x definierten Funktionen f_1 und f_2 mit

$$f_1(x)=-x+3$$
$$f_2(x)=|(x-2)^2-5|.$$

Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die $f_1(x)=f_2(x)$ gilt.

Mathematikfachlehrer Bruno Herrmann, Alt-Töplitz

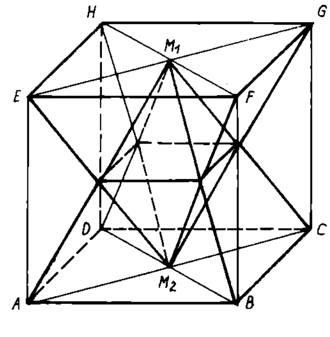
Ma 10/12 ▪1562 Wie kann man auf dem kürzesten Weg von einem Punkt A zu einem auf der anderen Seite eines Flusses liegenden Punkt B gelangen, wenn der Fluß, dessen Uferlinien geradlinig und parallel verlaufen, senkrecht zu den Uferlinien überquert werden soll (siehe Bild)?



a) Man konstruiere mit Zirkel und Lineal den Streckenzug, auf dem der kürzeste Weg verläuft.
b) Man berechne die Länge dieses kürzesten Weges, wenn der Abstand des Punktes A von dem nächstgelegenen Flußufer $a=500$ m, der Abstand des Punktes B von dem anderen Flußufer $b=300$ m, die Flußbreite $s=200$ m und der Abstand des Punktes B von der durch A gehenden Senkrechten zur Uferlinie $BR = c = 600$ m beträgt.

Michael Marczinek, EOS Heinrich Hertz, Berlin (Kl. 12)

Ma 10/12 ▪1563 Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit der Kantenlänge a. M_1 sei der Mittelpunkt der Deckfläche und M_2 der Mittelpunkt der Grundfläche dieses Würfels (siehe Bild).



Die Menge aller inneren und Randpunkte der quadratischen Pyramide $ABCDM_1$ werde mit P_1 und die Menge aller inneren und Randpunkte der quadratischen Pyramide $EFGHM_2$ mit P_2 bezeichnet. Man berechne
a) das Volumen des geometrischen Körpers, der aus allen Punkten der Durchschnittsmenge $P_1 \cap P_2$ besteht und dessen Kanten in dem Bild schwarz gezeichnet sind,
b) das Volumen des geometrischen Körpers, der aus allen Punkten der Vereinigungsmenge $P_1 \cup P_2$ besteht und dessen Kanten in dem Bild rot gezeichnet sind.
c) Wie verhalten sich die Volumina dieser beiden Körper zueinander?

Mathematikfachlehrer Alois Weninger, Knittelfeld, Österreich

Ma 10/12 ▪1564 Man beweise, daß es keine rationalen Zahlen x und y gibt, für die $x^2+y^2=7$ gilt.

Dipl.-Math. Wolfgang Moldenhauer, Rostock

Ph 10/12 ▪5 Man läßt einen Stein in den Brunnen fallen. Der Aufschlag auf das Wasser ist nach 3,8 Sekunden zu hören. Wie tief ist der Brunnen, wenn man eine Schallgeschwindigkeit von $340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ annimmt? $\left(g=9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$

Ch 10/12 ▪4 Wieviel Gramm Essigsäureäthylester kann man aus 16 g Äthansäure herstellen, wenn die Ausbeute 85% beträgt?

Hinweis: Alle Kollektive, die ihre Lösungen geschlossen einsenden, bitten wir, diese vorher nach Aufgabennummern zu sortieren. Damit wird die Arbeit der Redaktion, bestehend aus dem Chefredakteur und der Redaktionsassistentin, wesentlich erleichtert. Außerdem bitten wir alle *alpha*-Wettbewerbsteilnehmer, ihre Lösungen nicht erst zum letzten Wettbewerbstermin einzureichen, und es wäre gewährleistet, daß die aufwendige Sortierarbeit eher abgeschlossen und mit der Korrektur früher begonnen werden kann.

Nobelpreisträger L. W. Kantorowitsch

Mit *Leonid Witaljewitsch Kantorowitsch* erhielt 1975 erstmals ein Wissenschaftler aus einem sozialistischen Land, der UdSSR, einen der beiden Nobelpreise für Wirtschaftswissenschaften. Leninpreisträger Prof. *L. W. Kantorowitsch*, Geburtsjahr 1912, Akademiemitglied, Doktor der physikalisch-mathematischen Wissenschaften, hatte Ende der dreißiger Jahre einen Lösungsweg für einen Aufgabentyp gefunden, der dem *Institut für Mathematik und Mechanik der Leningrader Staatlichen Universität* vom *Laboratorium des Furniertrusts* gestellt worden war. Hierbei handelte es sich, ausgehend von den Zielstellungen des dritten sowjetischen Fünfjahrplans, um Aufgaben der besten Arbeitsverteilung auf Maschinen und mechanische Einrichtungen, der maximalen Verringerung von Abfällen, der bestmöglichen Nutzung von Rohstoffen, Brennstoffen, Transportraum, örtlichen Reserven u. a. Dieser Aufgabentyp ist dadurch charakterisiert, daß stets aus einer Menge möglicher Varianten oder zulässiger Lösungen (z. B. der Belegung von Werkbänken, des Rohstoffeinsatzes, der Ausnutzung unterschiedlicher technologischer Verfahren usw.) jene bestimmt werden, die bezüglich eines definierten Kriteriums die besten sind. Diese besten Lösungen bzw. Varianten werden als optimal bezeichnet. Es ist das Verdienst von Kantorowitsch, das Optimalitätskriterium für einen bestimmten Aufgabentyp in die ökonomisch-mathematische Untersuchung eingeführt zu haben.

Die von ihm 1939 veröffentlichte Arbeit über „Mathematische Methoden bei der Organisation und Planung der Produktion" gilt daher als die Grundlegung einer neuen ökonomisch-mathematischen Richtung, der linearen Optimierung. Sowohl Kantorowitsch als auch Wirtschaftsmathematiker anderer Länder haben in den vierziger und fünfziger Jahren eine umfangreiche Arbeit zur Ausformung dieses neuen mathematischen Gebiets geleistet, das im Arsenal moderner mathematischer Verfahren zur Formulierung und Lösung ökonomischer Aufgabenstellungen einen hervorragenden Platz einnimmt.

Wie der Name sagt, handelt es sich bei der linearen Optimierung um ein Teilgebiet der Mathematik, welche die Theorie und die numerischen Methoden zur Bestimmung von Extremwerten einer linearen Funktion mehrer Variabler mit linearen Restriktionen umfaßt und entwickelt. Ihr Ausgangspunkt war und ihr Anwendungsgebiet ist vorrangig die Wirtschaft auf ihren verschiedenen Ebenen. Der Vorzug der linearen Optimierung gegenüber der bereits in den zwanziger Jahren im Zusammenhang mit der Aufstellung von Volkswirtschaftsplänen in der UdSSR entwickelten Methode der Verflechtungsbilanzierung besteht darin, daß sie die zwischen den einzelnen Zweigen und Sektoren bestehenden ökonomischen Verflechtungen als technisch-technologische Beziehungen im Rahmen der bestmöglichen Ausnutzung der vorhandenen Ressourcen, ausgehend von einem vorgegebenen Kriterium, betrachtet.

Das Standardproblem der linearen Optimierung besteht darin, eine vorhandene Menge von Ressourcen (Arbeitskräfte, Arbeitsmittel, Arbeitsgegenstände) unter Beachtung der technologisch bedingten Aufwandskoeffizienten je Erzeugniseinheit so auszuschöpfen, daß der Erzeugnisvektor im Sinne des definierten Zielkriteriums maximal ist.

Zur Lösung dieses Aufgabentyps entwickelte *Kantorowitsch* zunächst die sogenannte Methode der Auflösungsmultiplikatoren, die später zur Simplexmethode weiterentwickelt wurde. Dieses Lösungsverfahren basiert auf speziellen Optimalitätsbedingungen, die die Existenz von sogenannten mit den Lagrangeschen Multiplikatoren vergleichbaren Dualvariablen implizieren. Mathematisch stellen sie die Ableitungen des optimalen Zielfunktionswertes nach den Ressourcen dar, sie zeigen also an, um wieviel Einheiten sich der optimale Zielfunktionswert bei entsprechender Variierung der Ressourcen um eine Einheit verändert. In diesem Sinne bezeichnet man die Dualvariablen als die optimalen Bewertungen der Ressourcen. Eine wichtige Entdeckung bestand darin, daß zu jedem linearen Optimierungsproblem ein sogenanntes duales Problem existiert, für das die gleichen Optimalitätsbedingungen gelten und dessen Unbekannte die Dualvariablen sind. Von Bedeutung ist hierbei die Tatsache, daß sowohl die Optimalitätsbedingungen als auch das duale Problem zu neuen Erkenntnissen über die Gesetzmäßigkeiten der optimalen Planung führen.

Kantorowitsch hat mit diesen Entdeckungen der ökonomischen Theorie entscheidende Impulse gegeben. Die streng mathematische Abbildung einer typischen wirtschaftlichen Entscheidungssituation und die Entwicklung entsprechender Lösungsverfahren verdeutlichen vor allem: Ein echter Beitrag zur Lösung ökonomischer Probleme im Sinne von Entscheidungsobjektivierung und -vorbereitung ist nur zu erwarten, wenn die entscheidenden Einflußfaktoren des Reproduktionsprozesses in ihrem wechselseitigen Aufeinanderwirken erfaßt und betrachtet werden, wenn die Ziel-Mittel-Relationen hinreichend abgebildet werden und eine einheitliche, aufeinander abgestimmte Betrachtung der Natural- und Wertprozesse erfolgt.

Kantorowitsch hat mit der Entwicklung eines ersten Lösungsverfahrens für lineare Optimierungsaufgaben und der von ihm vorgenommenen ökonomischen Interpretationen maßgeblich den Weg geebnet für die Optimalplanung, die sich seit den fünfziger Jahren in allen sozialistischen Ländern entwickelt, als auch für die sich gegenwärtig konstituierende automatisierte Planberechnung. Zusammen mit den Leninpreisträgern *W. S. Nemtschinow* und *W. W. Nowoshilow* hat er einen entscheidenden Anteil bei der Schaffung effektiver Forschungszentren in Moskau, Nowosibirsk und Leningrad und einer auf alle sozialistischen Länder befruchtend wirkenden sowjetischen Schule.

H. Schilar/K. Schwarz,
aus: Spektrum 3/76

Über das Signet der Mathematischen Gesellschaft der DDR

Das Signet (Handsiegel, Abzeichen) enthält folgende Bestandteile:
den hebräischen Buchstaben Aleph, einen Kreis und die Inschrift MGDDR.

- Der Buchstabe Aleph wurde von *G. Cantor* (1845 bis 1918; ab 1879 ord. Professor für Mathematik an der Universität Halle) als Bezeichnung für die Kardinalzahl einer wohlgeordneten Mengen eingeführt. Aleph soll daher die sogenannte *Reine Mathematik* repräsentieren.

- Der Kreis stellt den Zusammenschluß der Mathematiker aus den verschiedenen Bereichen in unserer Gesellschaft und die Einheit von *Reiner Mathematik* und *Angewandter Mathematik* dar.

- Die Inschrift stellt die neue Form der Abkürzung des Namens der Gesellschaft dar. Aus sprachlichen Gründen wurde ein „d" weggelassen.

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Zirkel für wissenschaftlich-praktische Arbeit

Wir sind sechs Schüler der EOS Greifswald und haben uns $1^1/_2$ Jahre lang im *Zirkel für wissenschaftlich-praktische Arbeit* mit Fragen der Kombinatorik und Graphentheorie beschäftigt. Die Leitung hatte *Dr. Christoph Bandt* von der Sektion Mathematik der Universität Greifswald, IMO-Preisträger 1967 und 1968.

Den Beitrag über das *Käsekästchen-Spiel* haben *Thomas Fiedler* und *Christian Schulz* erarbeitet. Wir haben eine begründete Vermutung über die Gewinnchancen bei diesem Spiel. – *Dr. Schreiber* gab uns dazu einen wichtigen Hinweis – aber wir konnten nur in Sonderfällen eine Gewinnstrategie angeben.

Das Käsekästchenspiel

Auf einem Blatt Papier werden n Punkte beliebig festgelegt, so daß nicht drei auf einer Geraden liegen. Die beiden Spieler I und II machen abwechselnd je einen Zug, der darin besteht, zwei beliebige Punkte durch eine Strecke zu verbinden, so daß bereits vorhandene Strecken nicht geschnitten werden. Spieler I beginnt. Zieht ein Spieler die dritte Seite eines Dreiecks, in dem sich kein Punkt mehr befindet, so gehört es ihm. Das Spiel ist beendet, wenn unter den gegebenen Bedingungen kein Zug mehr möglich ist. Derjenige Spieler, der im Verlauf des Spiels die meisten Dreiecke „erbeutet" hat, gewinnt.

Nach jedem Spiel liegt ein zusammenhängendes Netz (Graph, siehe alpha 6/72) vor, das aus n-Eckpunkten, k Strecken (k ist auch die Gesamtzahl der Züge des Spiels) und d Dreiecksflächen besteht. Von den n Eckpunkten gibt es p äußere Punkte, die ein konvexes Vieleck bilden, in dem die restlichen Punkte liegen.

An einem einfachen Beispiel sei der Spielverlauf erläutert:

$n = p = 4$

—— von I gezogene Kante

----- von II gezogene Kante

* mit diesem Zug schließt der Spieler ein Dreieck

1. Variante (siehe Bild 1)

	I	II
1.	$\overline{AB}$	$\overline{CD}$

Zieht I eine Seite des Vierecks, so ist es für II günstig, die gegenüberliegende Kante zu ziehen

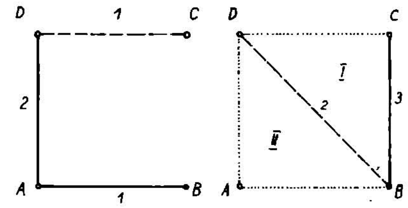


Bild 1

2.	$\overline{AD}$	$\overline{BD}$*

I muß jetzt ein Dreieck anbieten, kann dann aber im nächsten Zug selbst ein Dreieck schließen – Unentschieden

3.	$\overline{CB}$*

2. Variante (siehe Bild 2)

	I	II
1.	$\overline{AC}$	$\overline{AD}$
2.	$\overline{CD}$*	$\overline{AB}$
3.	$\overline{BC}$*	

Zieht I zu Beginn die Diagonale des Vierecks, so muß II mit jedem seiner Züge I ein Dreieck anbieten, das dieser dann schließt – Sieg für I (mit zwei Dreiecken Vorsprung)

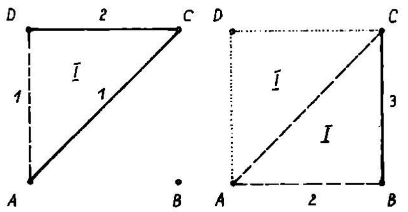


Bild 2

Hier noch zwei Aufgaben:

1. $n = 4 \quad p = 3$ (siehe Bild 3)
II kann immer gewinnen. Überzeugt euch selbst davon!

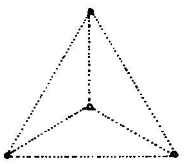


Bild 3

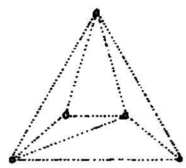


Bild 4

2. $n = 5 \quad p = 3$ (siehe Bild 4)
Wie muß I anfangen, damit er gewinnt? Es gibt für ihn vier günstige Anfangszüge, bei den anderen verliert er.

Es stellt sich nun die Frage, ob d und k bei fest vorgegebenen Punkten vom Spielverlauf abhängen. Für unser Netz gilt der Eulersche Polyedersatz (siehe auch alpha 2/69 und „Kleine Enzyklopädie Mathematik"): Flächenzahl (einschließlich der äußeren Fläche) + Eckpunktzahl = Kantenzahl + 2. Da wir die äußere Fläche nicht mitzählen, ergibt sich für das Netz

$$d + n = k + 1. \qquad (1)$$

Jedes Dreieck wird von genau drei Kanten begrenzt, wobei jede der $k - p$ inneren Kanten zwei Dreiecken gemeinsam ist. Daraus folgt

$3d = 2(k - p) + p$ und daraus

$$3d = 2k - p. \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich durch Einsetzen

$$d = 2n - p - 2 \qquad (3)$$

und $$k = 3n - p - 3. \qquad (4)$$

Es folgt also der

Satz: Die Anzahl d der Dreiecke und die Anzahl k der möglichen Züge sind nur durch die Anzahl und Lage der Punkte bestimmt, sie sind also vom Spielverlauf unabhängig.

Ist p ungerade, so ist auch d ungerade (Gleichung (3)), und es gibt kein Unentschieden, einer der beiden Spieler muß gewinnen. Die folgende Vermutung hat sich bei unseren Untersuchungen bestätigt, wir haben jedoch noch keinen schlüssigen Beweis gefunden.

Vermutung: Wenn d ungerade ist, so gewinnt der Spieler, der den letzten Zug macht. Mit den Gleichungen (3) und (4) bedeutet das

- Wenn n und p ungerade sind, kann Spieler I immer den Gewinn erzwingen.
- Wenn n gerade und p ungerade ist, kann Spieler II immer Gewinner werden.

Es sei noch kurz auf den interessanten Spezialfall $n = p$ hingewiesen (alle Punkte sind Eckpunkte eines konvexen Vielecks).

Aus der Gleichung (4) ergibt sich hier $k = 2n - 3$, die Anzahl der Züge ist also immer ungerade und I macht immer den letzten Zug. Es läßt sich zeigen, daß I immer gewinnt, es gibt sogar mehrere Gewinntaktiken für ihn. Er kann beispielsweise „Ecken abschneiden" (siehe Bild 5). Da I immer den letzten Zug macht, ist II einmal gezwungen, die zweite Kante des „abgeschnittenen" Dreiecks zu ziehen, so daß I es vervollständigen kann. Isoliert I mehrere Eckpunkte, gewinnt er entsprechend viele Dreiecke.

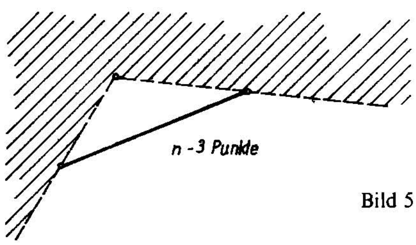


Bild 5

Im schraffierten Teil liegen keine weiteren Punkte.

Es würden den Rahmen dieses Artikels sprengen, wenn wir noch auf weitere Probleme und Fragestellungen eingehen würden, die sich bei diesem Spezialfall ergeben (andere Gewinnstrategien für I, Vorsprung, mit dem I bei festem n gewinnt). Vielleicht knobelt ihr selbst, wir haben jedenfalls viel Spaß an solchen Problemen gehabt.

Th. Fiedler/Ch. Schulz

Ludus sexterni sexanguli

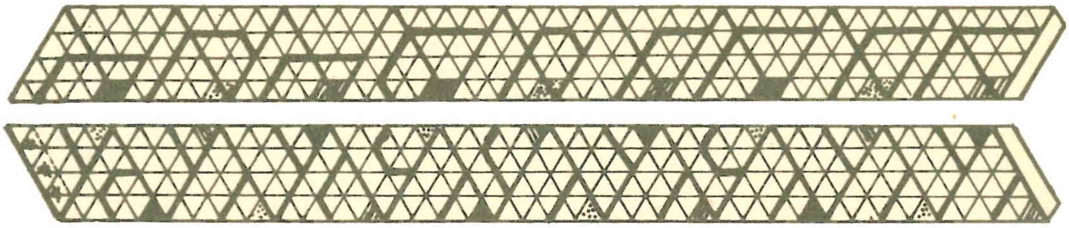
(Das Spiel des sechsfachen Sechsecks)

Bild 3

Bauanleitung

Vorderseite: Bild 1

Rückseite: Bild 2



Bei *Luxusausführung* die 18 Dreiecke nicht in durchgehendes Grundmuster eintragen, sondern einzeln konstruieren und etwa 1 mm breite Falzstreifen zum Umknicken zwischen den einzelnen Dreiecken vorsehen; ferner alle Dreieckseiten ein wenig stutzen, z. B. wie in Bild 3.

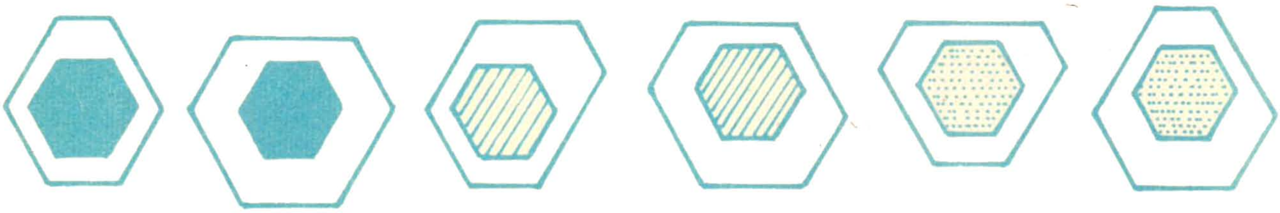
Zusammensetzung

1. Erstes Dreieck nach vorn klappen.
2. Streifen der letzten 15 Dreiecke nach vorn klappen. Wenden.
3. Streifen der letzten 13 Dreiecke nach vorn klappen.
4. Streifen der ersten 2 Dreiecke (= 4 Einzeldreiecke, bereits zu je 2 übereinanderliegend) nach vorn klappen. Wenden.
5. Streifen der letzten 11 Dreiecke nach vorn klappen. Wenden.
6. Streifen der letzten 9 Dreiecke nach vorn klappen. Wenden.
7. Streifen der letzten 7 Dreiecke nach vorn klappen.
8. Streifen der letzten 7 Dreiecke (von denen eines aus 2 übereinanderliegenden Einzeldreiecken besteht) nach vorn klappen.
9. Letztes Dreieck nach vorn klappen.
10. Streifen der letzten 2 Dreiecke (= 3 Einzeldreiecke, von denen 2 bereits übereinanderliegen) nach vorn klappen.
11. Streifen der letzten 3 Dreiecke (= 5 Einzeldreiecke, von denen zweimal je 2 bereits übereinanderliegen) nach vorn klappen.
12. Letztes Dreieck (= 2 übereinanderliegende Einzeldreiecke) nach vorn klappen.
13. Den nach oben herausragenden Anschlußstreifen durch die Lücke nach unten schieben und auf die mit *** gekennzeichnete Stelle kleben.

Frei bearbeitet von Dr. L. Stammler, Halle nach: Lothar Prengel: Geduldsspiel aus Fotografien, Fotokinomagazin 11/75.

Aufgabe: Durch leichtes, gewaltloses Falten sind folgende sechs Sechsecke zu erreichen.

Bild 4



Wenn 250 Kalorien 1046,7 Joule sind

Innerhalb der sozialistischen Staatengemeinschaft des RGW soll bis in die achtziger Jahre die vollständige Einführung und Anwendung eines neuen Maßeinheitensystems mit der Bezeichnung SI (abgeleitet von *Système International d'Unités*) abgeschlossen sein. Natürlich bedeutet die Einführung von SI-Maßeinheiten für jeden von uns einen mehr oder weniger großen Prozeß des Lernens und Umdenkens. Aber die gewaltigen wirtschaftlichen Vorteile, die sich durch die steigende Integration innerhalb des RGW ergeben, machten einheitliche Maße notwendig.

Das internationale Maßeinheitensystem (SI) wird eine Vielzahl von historisch entstandenen Maßeinheiten ablösen. Durch die konsequente Anwendung der SI-Maßeinheiten entfallen viele der oft schwierig zu merkenden Umrechnungsfaktoren, die man bisher beim Rechnen mit Maßeinheiten beachten muß. Als Grundeinheiten des SI wurden schon 1960 von der 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht folgende Maßeinheiten für die ganze Welt bestätigt:

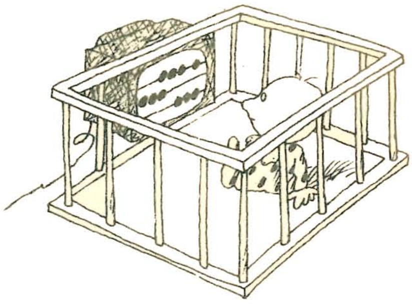
Das Meter (m) für die Länge, das Kilogramm (kg) für die Masse, die Sekunde (s) für die Zeit, das Ampère (A) für die elektrische Stromstärke, das Kelvin (K) für die Temperatur und die Candela (cd) für die Lichtstärke. Ab 1. 1. 1980 sollen dann solche Maßeinheiten wie Kalorie, das Kilopond, das Torr und die Pferdestärke und viele andere heute noch gebrauchte Maßeinheiten abgelöst werden. An Stelle der alten Maßeinheiten treten dann die SI-Maßeinheiten wie das Joule, das Newton, das Pascal und das Watt.

In der DDR sind nur relativ wenige Einheiten, wie das Kilopond, die technische Atmosphäre, die Kalorie und das Curie, betroffen. Um den unvermeidbaren volkswirtschaftlichen Aufwand für die notwendigen Veränderungen so niedrig wie möglich zu halten, werden die Maßnahmen zur schrittweisen Einführung der neuen Maßeinheiten mit allen Ministerien, aber auch mit den Maßmittelherstellern abgestimmt. Für die Umstellung der Einheiten auf allen Gebieten reicht die Zeit bis 1980 nicht aus. Es werden deshalb für einen Zeitraum von etwa 10 Jahren die „alten" und die „neuen" Maßeinheiten nebeneinander zu finden sein.

Umfangreiche Maßnahmen sind bis dahin noch durchzuführen: Veränderungen der Skalen von Meßgeräten, Neuformulierungen von Festigkeitswerten für Werkstoffe und auch die Neuausgaben von Joule-Tabellen für Lebensmittel anstatt der bisher gebräuchlichen Kalorien-Tabellen. 100 Gramm Brot enthalten 250 Kalorien, was in SI-Maßeinheiten ausgedrückt gleichbedeutend mit 1046,7 Joule ist...

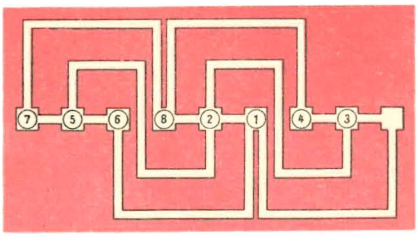
K.-H. Kraass

In freien Stunden alpha heiter



Die Truhen im Keller

Bei der Ausgrabung eines alten verfallenen Schlosses wurden neun unterirdische Kammern entdeckt, die durch Gänge miteinander verbunden sind. In acht Kammern standen Truhen mit wertvollen Dokumenten, die neunte Kammer war leer. Die Truhen waren von 1 bis 8 numeriert und standen in folgender Ordnung:
7, 5, 6, 8, 2, 1, 4, 3 (siehe Bild). Um die Dokumente mit dem anderen Material zu vergleichen, das sich noch in den Kammern befand, war es notwendig, die Truhen in der Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 umzustellen.



Wie ist das mit der geringsten Zahl von Umstellungen möglich? Durch die Gänge kann man jeweils nur eine Truhe tragen, die vorübergehend in der leeren Kammer abgestellt wird. In jeder Kammer darf nur eine Truhe stehen.
Für die Lösung dieser Aufgabe zeichnet man sich die Abbildung in einem vergrößerten Maßstab ab und verwendet am besten Damesteine, die man mit den Nummern 1 bis 8 versieht. Diese kann man dann beliebig auf den Gängen verschieben, bis man die richtige Reihenfolge erhält.

E. Minskin, Moskau

Neues aus Buntstadt

In Buntstadt wohnt jede Familie in einem anderen Haus. Eines schönen Tages wollten alle Familien umziehen. Um diesen Tag zu feiern, beschloß der Rat der Stadt, alle Häuser frisch zu streichen, und zwar rot, blau und gelb. Das sollte so geschehen, daß für keine Familie die Farbe des alten und des neuen Wohnhauses zusammenfiel. Was glaubt ihr, hat der Stadtrat das geschafft?

Aus: Quant 2/75, Moskau

Superluxusseife Rubin

Wie Fritzchen Klug aus Klugsdorf durch geschickten Seifeneinkauf für seine Familie sein Taschengeld erhöhte, seine Erfahrungen an seine Schüler weitergab und sich Florena wunderte, daß in Klugsdorf die 2er und 3er Packungen der Superluxusseife Rubin keinen Absatz fand.
Wer findet den Druckfehler in der Werbe-Annonce der „Jungen Welt“ vom 20. 1. 1976?

ABC der Mathe

Die Buchstaben A, B, C sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß das Potenzieren zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

$$A^B = A$$
$$AA^B = ABA$$
$$ACA^B = ACBCA$$
$$ACCA^B = ACCBCCA$$

3 + 2 = 5

In dem nachfolgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Additionsaufgabe erhält. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

```
  DREI
+ ZWEI
  FÜNF
```

Ramona Werner, OS Buttelstedt, Kl. 5b

Kennst du den?

● Der Lehrer fragt einen Schüler: „Wenn du sieben Stück Schokolade hast, und der Peter verlangt zwei davon, wieviel bleiben dir noch?"
„Sieben, Herr Lehrer!"

● Ein Vater zu seinem Sohn: „Soll ich dir bei den Mathe-Aufgaben helfen?" „Ach laß mal, Vati, der Lehrer sieht es lieber, wenn wir die Fehler selbst machen."

● Fritzchen ist verzweifelt, und schließlich fragt er seinen Papa: „Papa, wie berechnet man einen Kegel?" „Einen Kegel", echot der Papa, „das kommt ganz auf die Kegelbahn an!"

● „Monika hat mir erzählt, daß Du ihr mein Geheimnis verraten hast, obwohl ich Dich darum bat, es ihr nicht zu erzählen." –
„Na, so was! Dabei hatte ich sie doch darum gebeten, daß sie es Dir nicht sagen solle." –
„Ach so! Na dann darfst Du ihr aber auch nicht sagen, daß ich Dir verraten habe, daß sie es mir erzählt hat."

● „Bitte, einen Film für eine Spiegelreflexkamera." –
„Sechs mal Sechs?"
„Sechsunddreißig. Aber wieso fragen Sie mich? Das müssen Sie doch in der Schule gelernt haben."

● „Gestern habe ich Holz gemacht. Da riß sich die Axt los, schlug mir an den Kopf, ich verlor das Bewußtsein. Ich habe auf die Uhr gesehen: genau zwanzig Minuten lag ich besinnungslos am Boden!"

● „Bitte zwei Pfund Tomaten." –
„Das heißt Kilo." –
„Na gut, dann also zwei Pfund Kilo, bitte."

„Zum Lösen komplizierter Mathematikaufgaben muß man geboren sein." –
„Du hast recht, denn, wenn man nicht geboren ist, kann man nicht einmal einfache Mathematikaufgaben lösen."

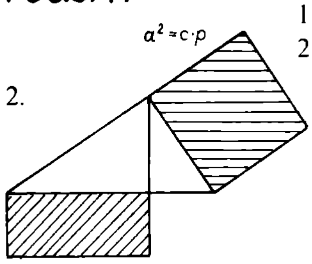
Bilderrätsel

Jedes der folgenden zehn Bilder steht im Zusammenhang mit dem Leben und Werk eines bedeutenden Mathematikers. Die Namen dieser Persönlichkeiten sind (in anderer Reihenfolge) unten angegeben. Ordne jedem Bild den richtigen Namen zu! Die Anfangsbuchstaben ergeben dann als Lösungswort einen dir aus dem Mathematikunterricht bekannten Gegenstand.

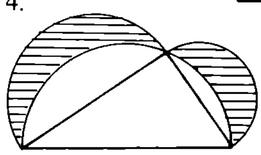
Archimedes – Henry Briggs – Georg Cantor – Eratosthenes – Euklid – Hippokrates – Adam Ries – Isaac Newton – Michael Stifel – Thales

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

1.
Rechenung auff der Linien und Federn

2.


3.
$M_1 \cap M_2 = \emptyset$

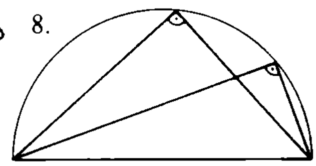
4.


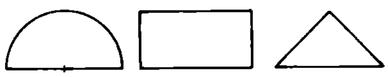
5.
$\underline{2}$ $\underline{3}$ ~~4~~ $\underline{5}$ ~~6~~ $\underline{7}$
~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ $\underline{11}$ ~~12~~ $\underline{13}$ ~~14~~
~~15~~

6.
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

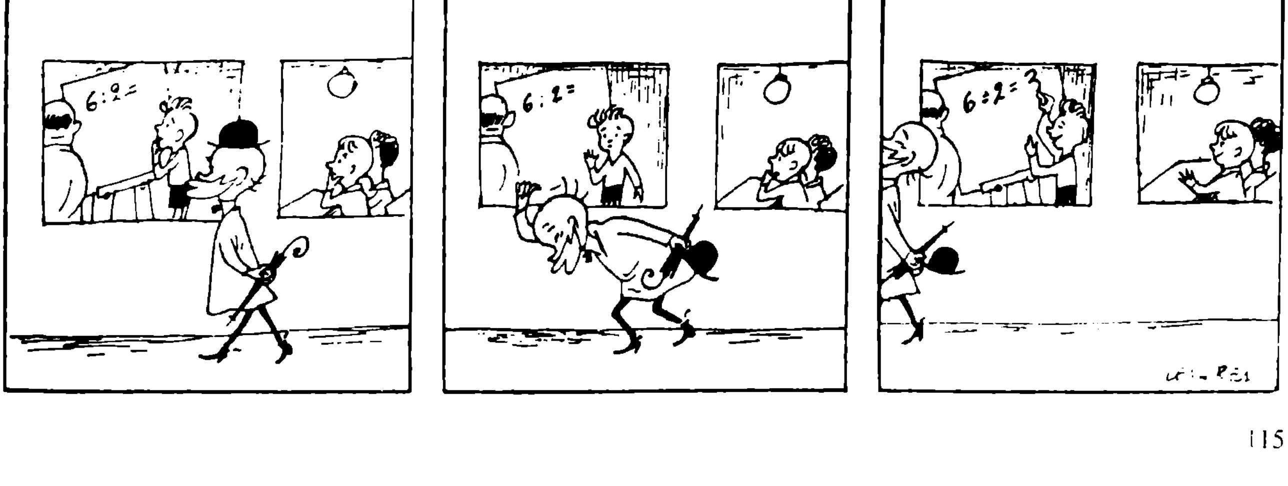
7.

1	2	3	4	5	6	7
2	4	8	16	32	64	128

8.


9.


10.
$x = \log_a b$



Wir arbeiten mit Venn-Diagrammen

Mengendiagramme, die auch als *Venn-Diagramme* bezeichnet werden, sind recht abstrakte Darstellungen, da Mengen als Ovale und ihre Elemente als Punkte dargestellt werden, wobei die Natur der Elemente keine Rolle spielt. Sie bringen aber die Elementbeziehungen sehr anschaulich zum Ausdruck. Zwei Beispiele sollen unsere Leser mit ihrer Verwendung vertraut machen:

1. Beispiel: Gegeben sind

M: Menge aller natürlichen Zahlen;

M_1: Menge aller Teiler von 12;

M_2: Menge aller Teiler von 20.

Man bilde die Durchschnittsmenge, wobei die Grundmenge mit M bezeichnet sei.

$D = M_1 \cap M_2$

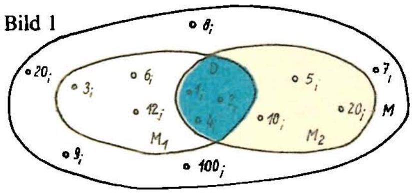
$M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$

$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$M_2 = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

$D = \{1, 2, 4\}$

Bild 1



2. Beispiel: Gegeben sind

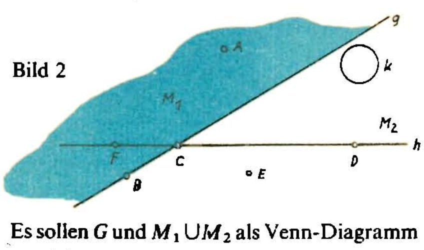
G: alle Figuren einer Zeichenebene.

(Dazu gehören alle Punkte, Geraden, Kreise, Vielecke usw. der Ebene. Alle diese Figuren werden nicht als Punktmengen, sondern als selbständige Gebilde betrachtet.)

M_1: die Punktmenge einer Halbebene, die durch eine Gerade g gebildet wird, indem sie die Ebene in zwei Halbebenen teilt. Die Punkte von g sollen nicht mit zu M_1 gezählt werden.

M_2: die Menge aller Punkte einer Geraden h.

Bild 2



Es sollen G und $M_1 \cup M_2$ als Venn-Diagramm gezeichnet werden. Dann sind die in der Abbildung angegebenen Punkte A, B, C, D, E, F, die Kreislinie k und die Geraden g und h in das Venn-Diagramm einzutragen.

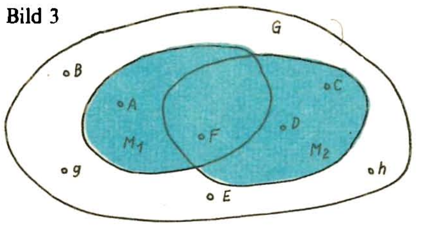
$V = M_1 \cup M_2$

$G = \{A, B, C, D, E, F, k, g, h, \ldots\}$

$M_1 = \{A, F\}$ $M_2 = \{F, C, D\}$

$V = \{A, F, C, D\}$

Bild 3



Nachdem wir uns aus dem Buch von Frau Prof. Dr. Lilly Görke – Mengen, Relationen, Funktionen – mit dem Begriff Venn-Diagramm vertraut gemacht haben, können wir nun sicher den Beitrag „Eine einfachere Lösung bei Venn-Diagrammen", entnommen unserer tschechoslowakischen Schwesternzeitschrift *rozhledy matematicko fyzikálni* (5/75), gut verstehen (übersetzt und bearbeitet von O. Langer, Döbeln).

Venn-Diagrammen begegnen wir oft bei der Lösung von Aufgaben aus der Kombinatorik, bei denen einige endliche Mengen betrachtet werden. In solchen Aufgaben sind teilweise Angaben über die Anzahl der Elemente von Mengen enthalten. Ferner werden aus den gegebenen Mengen mit Hilfe der Operationen *Durchschnitt* und *Vereinigung* weitere Mengen gebildet. Es sollen nun aus den vorhandenen Zahlenangaben die Elementangaben der neugebildeten Mengen bestimmt werden. Ein Lösungsverfahren für solche Aufgaben besteht darin, daß wir die betrachteten Mengen als ebene Punktmengen darstellen, wobei diese Punktmengen innere Punkte einfacher geometrischer Gebilde wie Kreis, Oval u. ä., sind.

Ein solches Gebilde mit den markierten inneren Punkten bezeichnen wir als Venn-Diagramm. Informationen über die Anzahl der Elemente beim Mengendurchschnitt bzw. bei der Vereinigungsmenge sind dann Informationen über die Anzahl der Elemente in den verschiedenen Teilen (Feldern) des zugehörigen Diagramms. Wenn bei einer Aufgabe die Anzahl der beteiligten Mengen gering ist (siehe 1. Beispiel bzw. 2. Beispiel), dann ist so ein Diagramm noch ausreichend übersichtlich, d. h., wir können daraus leicht ablesen, wie die gegebenen Informationen mit den gesuchten zusammenhängen.

Das soeben beschriebene Verfahren ist jedoch bei manchen Aufgaben schwerfällig, es existieren elegantere Lösungswege. Wir betrachten dazu eine Aufgabe der 23. Mathematikolympiade der ČSSR, Kategorie C.

Aufgabe: Einige Schüler einer Schule beteiligten sich an der Biologie-, an der Chemie- und an der Physik-Olympiade. Es gab doppelt soviel Teilnehmer bei der Physik-Olympiade wie bei der Chemie-Olympiade. Bei der Chemie-Olympiade waren es dreimal soviel Teilnehmer wie bei der Biologie-Olympiade. 12 Schüler beteiligten sich nur an einer Olympiade. 4 Schüler nahmen an zwei Olympiaden teil, jedoch nahm davon keiner sowohl an der Physik-Olympiade als auch an der Biologie-Olympiade teil. Die Anzahl der Schüler, die nur an der Biologie-Olympiade teilnahm, war die gleiche wie die Anzahl der Schüler, die Teilnehmer sowohl bei der Chemie-Olympiade als auch bei der Biologie-Olympiade waren.

Es soll bestimmt werden, wieviel Schüler an den einzelnen der drei genannten Olympiaden und wieviel Schüler insgesamt an diesen Olympiaden teilgenommen haben.

Lösung: Bezeichnen wir die Anzahl der Elemente in den einzelnen Teilen (Bereichen) des Diagramms derart, wie in Bild 4 angegeben, so erhalten wir dadurch ein äquivalentes Problem. Es seien $a, b, \ldots, g$ nichtnegative ganze Zahlen; es gelten dann folgende Beziehungen:

$$b+e+f+g=2(c+d+f+g),$$
$$a+b+c=12,$$
$$e+g=0,$$
$$c+d+f+g=3(a+d+e+g),$$
$$d+e+f+g=4$$
$$a=d+g.$$

Es sind zu bestimmen: $a+d+e+g$, $c+d+f+g$, $b+e+f+g$ sowie $a+b+c+d+e+f+g$.

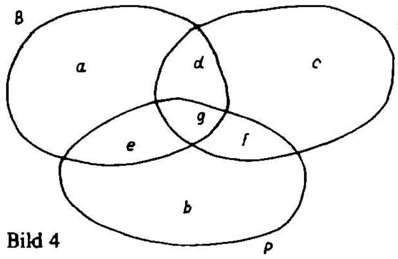


Bild 4

Wir können aber auch anders vorgehen. Wir bezeichnen mit b, c, p die Anzahl der Elemente der Mengen B, C, P sowie mit g_i bzw. m_i die Anzahl der Elemente, die genau bzw. mindestens in i dieser Mengen ($i=1, 2, 3$) liegen. Dann ist u. a. gegeben:

$p=2c$, $c=3b$, $g_1=12$, $m_2=4$;

die übrigen Angaben werden nicht benötigt.

Offensichtlich gilt: $m_1=g_1+m_2=12+4=16$, ferner $p \leqq m_1 \leqq b+c+p$ oder $6b \leqq 16 \leqq 10b$. Diese Ungleichung kann nur durch eine einzige ganze Zahl erfüllt werden, und zwar $b=2$. Daher ist $b=2$, $c=6$, $p=12$.

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst. Zwei Bedingungen haben wir überhaupt nicht benötigt:

- $P \cap B = \emptyset$ (leere Menge).
- Die Anzahl der Elemente der Menge B, die in keiner anderen Menge liegen, ist gleich der Anzahl der Elemente der Durchschnittsmenge $B \cap C$.

Ähnlich ist das folgende Beispiel:

Aufgabe: Ein Reisebüro organisierte vier Arten von Wochenendfahrten, die sämtlich an verschiedenen Wochenenden stattfinden. Wir bezeichnen mit A, B, C, D die genannten vier

Arten von Wochenendfahrten. Die Mitarbeiterin des Reisebüros stellte folgende Teilnehmerzahlen fest:

$A=195$, $B=203$, $C=105$, $D=329$. Davon hatte sich kein Teilnehmer für drei Fahrten gemeldet; an allen vier Fahrten nahmen zwei Personen teil. 267 Personen hatten zwei Fahrten gebucht; dabei gab es folgende Aufgliederung: A und B 64 Personen; A und C 58 Personen; B und C 32 Personen; C und D 14 Personen; B und D 51 Personen.

Kann die Mitarbeiterin aus diesen Angaben feststellen,

a) wieviel Personen genau eine der vier Arten von Wochenendfahrten gebucht hatten;

b) wieviel Personen sich insgesamt für die genannten vier Arten von Fahrten gemeldet hatten?

Lösung: Aus dem Bild 5 entnehmen wir:

$$\begin{aligned}
k+o+s+t+u+v+x+y&=195,\\
l+o+p+q+u+v+w+y&=203,\\
m+q+r+t+u+w+x+y&=106,\\
n+p+r+s+v+w+x+y&=329,\\
u+v+w+x&=0,\\
o+p+q+r+s+t&=267,
\end{aligned}$$

$o=64, t=58, q=32, r=14, p=51, y=2.$

Zu bestimmen sind entsprechend der Fragestellung

a) $k+l+m+n$,

b) $k+l+m+n+o+p+q+r+s+t+u+v+w+x+y$.

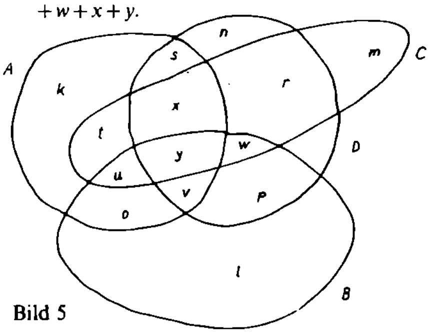


Bild 5

Auch diese Aufgabe wollen wir auf ähnliche Weise lösen wie die erste. Wir bezeichnen mit a, b, c, d die Anzahl der Teilnehmer für die Fahrten A, B, C, D; ferner sollen g_i und m_i ($i=1, 2, 3, 4$) die gleiche Bedeutung besitzen wie bei der ersten Aufgabe. Es sind daher (u. a.) folgende Angaben bekannt:

$a=195$, $b=203$, $c=106$, $d=329$, $g_2=267$, $g_3=0$, $g_4=2$; andere Angaben werden nicht benötigt. Zu bestimmen sind die Zahlen g_1 und m_1. Offensichtlich gilt

$a+b+c+d=g_1+2g_2+3g_3+4g_4$,

also $195+203+106+329=g_1+2\cdot 267+4\cdot 2$; das ergibt $g_1=291$.

Weiterhin ist $m_1=g_1+g_2+g_3+g_4=291+267+2=560$. Damit ist die Aufgabe gelöst; die Angaben über die Anzahl der Teilnehmer, die zwei Fahrten gebucht hatten, wurden nicht benötigt.

Als Schlußfolgerung erkennen wir, daß es sich lohnt, über die verschiedenen möglichen Lösungswege nachzudenken, ehe man die Zahlen in die sich aus dem Venn-Diagramm ergebenden Beziehungen einsetzt. *A. Vrba*

Lösungen

alpha-Wettbewerb aus Heft 2/76 (Fortsetzung)

Ch 9 ■1526 $x:2300=100:0{,}1$

$x=2\,300\,000$

Es müssen täglich mindestens 2300 t Rohsalz gefördert werden.

Ma 10/12 ■1527 Wir setzen

$$z=0{,}35-(a-3{,}5)(4{,}5-a)$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
z&=0{,}35-(4{,}5a-a^2+3{,}5a-15{,}75)\\
&=0{,}35-8a+a^2+15{,}75\\
&=16{,}1+(a^2-8a+16)-16\\
&=(a-4)^2+0{,}1.
\end{aligned}$$

Da das Quadrat einer reellen Zahl niemals negativ ist, gilt stets $(a-4)^2 \geqq 0$, also $z \geqq 0{,}1>0$, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■1528 Da der Oberflächeninhalt A des offenen Blechbehälters gleich der Summe aus dem Flächeninhalt der Grundfläche und dem Inhalt des Mantels ist, gilt

$$A=\frac{\pi}{4}d_1^2+\frac{\pi}{2}s(d_1+d_2). \qquad (1)$$

Ist D der Platinendurchmesser, so gilt für den Flächeninhalt der Platine

$$A'=\frac{\pi}{4}D^2. \qquad (2)$$

Wegen $A=A'$ folgt aus (1) und (2)

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4}D^2&=\frac{\pi}{4}d_1^2+\frac{\pi}{2}s(d_1+d_2),\\
D^2&=d_1^2+2s(d_1+d_2),\\
D&=\sqrt{d_1^2+2s(d_1+d_2)}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Diese Formel ist die in der Aufgabe c) verlangte allgemeine Formel.

a) Wegen $d_1=80\text{ mm}=8\text{ cm}$, $d_2=130\text{ mm}=13\text{ cm}$, $s=140\text{ mm}=14\text{ cm}$ ergibt sich aus (3)

$$D=\sqrt{8^2+2\cdot 14\cdot 21}\text{ cm}=\sqrt{652}\text{ cm},$$
$$D\approx 25{,}53\text{ cm}=255{,}3\text{ mm}.$$

Der Platinendurchmesser beträgt also rund 255 mm.

b) Ist h die Höhe des Kegelstumpfes, so gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$h^2=s^2-\left(\frac{d_2-d_1}{2}\right)^2,$$
$$h=\sqrt{14^2-2{,}5^2}\text{ cm}=\sqrt{189{,}75}\text{ cm},$$
$$h=13{,}77\text{ cm}.$$

Daher gilt für das Volumen des Blechbehälters

$$V=\frac{\pi}{12}h(d_1^2+d_2^2+d_1d_2),$$
$$V\approx\frac{\pi}{12}\cdot 13{,}77(8^2+13^2+8\cdot 13)\text{ cm}^3,$$
$$V\approx\frac{\pi}{12}\cdot 13{,}77\cdot 337\text{ cm}^3,$$
$$V\approx 1215\text{ cm}^3.$$

Das Volumen des Blechbehälters beträgt also 1215 cm³, d. s. 1,215 l.

Ma 10/12 ■1529 Es sei x eine Lösung der Gleichung

$$a^{2x}+(ab)^x-b^{2x}=0. \qquad (1)$$

Wegen $b\neq 0$ kann man durch b^{2x} dividieren und erhält

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+\left(\frac{a}{b}\right)^x-1=0. \qquad (2)$$

Setzt man

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=t, \qquad (3)$$

so ist $t>0$, und man erhält aus (2) die quadratische Gleichung für t

$$t^2+t-1=0. \qquad (4)$$

Diese quatratische Gleichung hat genau eine positive reelle Lösung, nämlich

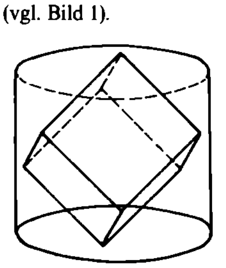
$$t=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \qquad (5)$$

Wäre nun x eine ganze Zahl, so wäre, da a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, $t=\left(\frac{a}{b}\right)^x$ eine rationale Zahl im Widerspruch zu (5). Daher hat die Gleichung (1) keine ganzzahlige Lösung, w. z. b. w.

Bemerkung: Die Gleichung hat aber im Falle $a\neq b$ eine reelle Lösung x, die man aus (3) und (5) erhält. Es gilt nämlich

$$x\lg\frac{a}{b}=\lg t,$$
$$x=\frac{\lg t}{\lg a-\lg b},$$
$$x=\frac{\lg(\sqrt{5}-1)-\lg 2}{\lg a-\lg b}.$$

Ma 10/12 ■1530 a) Es sei $ABCDEFGH$ der Würfel mit der Kantenlänge a, dem ein gerader Kreiszylinder mit dem Radius r und der Höhe h so umbeschrieben ist, daß die Kante $\overline{AE}$ in der Grundfläche, die Kante $\overline{CG}$ in der Deckfläche des Zylinders und die Eckpunkte D, B, F, H auf dem Mantel des Zylinders liegen (vgl. Bild 1).

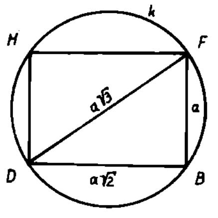


Da die Kanten $\overline{AE}$ und $\overline{CG}$ parallel zu der durch die Eckpunkte D, B, F, H bestimmten Ebene sind und von ihr den gleichen Abstand haben, liegen diese Punkte sämtlich auf einem Kreis k, der in einer der Grundfläche des Zylinders parallelen Ebene liegt und den gleichen Radius r wie der die Grundfläche begrenzende Kreis hat.

Nun sind die Seitenlängen $\overline{BF}$ und $\overline{DH}$ des

Rechtecks $DBFH$ gleich der Kantenlänge a des Würfels, während die Seitenlängen $\overline{DB}$ und $\overline{FH}$ gleich der Länge $a\sqrt{2}$ der Diagonale des Quadrates $ABCD$ sind (vgl. Bild 2). Für den Durchmesser $\overline{DF}=2r$ des Kreises k, der gleich der Länge der Diagonale dieses Rechtecks ist, gilt daher nach dem Satz des Pythagoras

$$2r=\sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2}=\sqrt{a^2+2a^2}$$
$$=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}.$$



Der Radius des Zylinders ist daher gleich

$$r=\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Ferner ist die Höhe des Zylinders gleich der Länge der Diagonale $\overline{AC}$ des Quadrats $ABCD$, also

$$h=a\sqrt{2}.$$

Das Volumen des Zylinders beträgt daher

$$V=\pi r^2 h=\pi\cdot\frac{3}{4}a^2\cdot a\sqrt{2}=\frac{3}{4}\pi\sqrt{2}a^3.$$

Da das Volumen des Würfels gleich $V'=a^3$ ist, erhält man

$$V:V'=\frac{3}{4}\pi\sqrt{2}:1\approx 3{,}33:1.$$

Das Volumen des umbeschriebenen Zylinders ist also mehr als 3mal so groß wie das Volumen des Würfels.

Ph 10/12 ▪1531 Gegeben: $y_{max}=1{,}5$ m; $T=10$ s; $t_1=2$ s; $t_2=5{,}1$ min $=306$ s

Gesucht: a) l b) y_1 und y_2

Es gelten die Gesetze des mathematischen Pendels und der harmonischen Schwingungen.

a)
$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$T^2=4\pi^2\frac{l}{g}$$
$$l=\frac{T^2 g}{4\pi^2}$$
$$l=\frac{100\,s^2\cdot 9{,}81\,m}{4\pi^2\cdot s^2}$$
$$l=24{,}9\,m$$

b)
$$y_1=y_{max}\cdot\cos\omega t_1$$
$$y_1=y_{max}\cdot\cos\frac{2\pi t_1}{T}$$
$$y_1=1{,}5\,m\cdot\cos\frac{2\pi\cdot 2\,s}{10\,s}$$
$$y_1=1{,}5\,m\cdot\cos\frac{2}{5}\pi \qquad \frac{2}{5}\pi=72^\circ$$
$$y_1=0{,}463\,m$$
$$y_2=1{,}5\,m\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot 306\,s}{10\,s}\right)$$
$$y_2=1{,}5\,m\cdot\cos\left(30\cdot 2\pi+\frac{6}{5}\pi\right)$$
$$y_2=1{,}5\,m\cdot\cos\frac{6}{5}\pi$$
$$y_2=-1{,}21\,m$$

Die Länge des Seils beträgt 24,9 m, und die Elongationen sind 0,463 m bzw. $-1{,}21$ m.

Ch 10/12 ▪1532 $FeS_2\rightarrow 2SO_3$

$$119{,}97x=44{,}8\cdot 3\cdot 10^6$$
$$x=1\,120\,028$$

Aus 3 t Pyrit können rund 1120 m³ SO_3 hergestellt werden.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. L. Schmetterer (Heft 3/76)

▲1534▲

Zu 1) Wenn der n-te Verbraucher die Wassermenge $a_n\ge 0$ entnimmt, gilt offenbar

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\ge a_{n+1},\quad 1\le n.$$ Also ist $a_1\ge a_2$

und wenn $a_1\ge a_i$, $1\le i\le n$ schon gezeigt ist, folgt sofort $a_1\ge a_{n+1}$.

Zu 2) Zu zeigen ist für jedes $n\ge 1$ die Ungleichung

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\ge\frac{a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$(n+1)(a_1+\ldots+a_n)\ge n(a_1+\ldots+a_n)+na_{n+1}$$

also mit $a_1+\ldots+a_n\ge na_{n+1}$. Das ist aber die unter 1. formulierte Ausgangsungleichung in anderer Schreibweise.

Zu 3) Man wähle $a_n=10+\frac{C_n}{n}$, $n\ge 1$, $n\neq 2^{3^m}$, $m\ge 1$ und $a_n=1+\frac{C_n}{n}$, $n=2^{3^m}$.

Dabei kann man $C_n=10-1=9$ wählen. Gilt nämlich $2^{3^m}\le n\le 2^{3^{m+1}}$, dann ist $m\le\log\log n/\log 3$, so daß man in der Folge $a_1,\ldots,a_n$ höchstens $\log\log n/\log 3$ Glieder der Gestalt $1+\frac{C_k}{k}$ zählt. Überdies ist $1+\ldots+\frac{1}{n}\ge\log n$.

Für $n\ge 2$ ist die Ungleichung

$$\frac{1}{n}\left(10n+9\log n-9\frac{\log\log n}{\log 3}\right)\ge 10+\frac{9}{n+1}$$

erfüllt, da ja sogar $\log n-\frac{\log\log n}{\log 3}\ge 1$ für $n\ge 2$ gilt. Die Ungleichung $a_1\ge a_2$ folgt aber aus der Definition. ▪

Lösung der Aufgabe von W. Redtenbacher (Heft 3/76)

▲1535▲ a) Es sei (x_1, x_2) eine reelle Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Dann gilt $x_1^4\ge 0$ und $(x_1x_2)^4\ge 0$, also wegen (1)

$$x_1^4=1-(x_1x_2)^4\le 1,$$

$|x_1|\le 1$ und $|x_1x_2|\le 1$, also $|(x_1x_2)^5|\le 1$.

Nun folgt aus (2)

$$x_1^5=1-(x_1x_2)^5\ge 0,\ \text{also}\ x_1\ge 0$$

und wegen (1) sogar $x_1>0$, also $0<x_1\le 1$.

Ist nun $x_1=1$, so folgt aus (1)

$$(x_1x_2)^4=1-x_1^4=0,\ \text{also}\ x_2=0.$$

Dann ist aber auch die Gleichung (2) erfüllt. Damit haben wir eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2) erhalten, nämlich $x_1=1$, $x_2=0$.

Wir zeigen jetzt, daß das Gleichungssystem (1), (2) keine weiteren reellen Lösungen hat. Wäre nämlich $0<x_1<1$, so wäre

$$x_1^5<x_1^4\ \text{und}\ (x_1x_2)^5\le(x_1x_2)^4,$$

wobei die letztere Ungleichung auch für negative x_2 gilt. Daraus folgt

$$1=x_1^5+(x_1x_2)^5<x_1^4+(x_1x_2)^4=1,$$

also ein Widerspruch.

Daher hat das Gleichungssystem (1), (2) genau eine reelle Lösung, nämlich (1, 0).

b) Es sei $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine reelle Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Dann erhält man wie oben $0<x_1\le 1$. Ferner sind die beiden Gleichungen (1), (2) für

$$x_1=1,\ x_2=x_3=\ldots=x_n=0$$

erfüllt; das Gleichungssystem (1), (2) hat also die Lösung

$$(1, 0, 0, \ldots, 0).$$

Wir zeigen jetzt, daß das Gleichungssystem keine weiteren Lösungen hat. Wäre nämlich $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Lösung mit $x_1<1$, so wäre $x_1^{2n}<1$ und $x_1^{2n+1}<x_1^{2n}$. Ferner wäre wegen

$$(x_1x_2)^{2n+1}\le(x_1x_2)^{2n},\ \ldots$$
$$(x_1x_2\ldots x_n)^{2n+1}\le(x_1x_2\ldots x_n)^{2n}$$

analog wie im Falle a)

$$1=x_1^{2n+1}+(x_1x_2)^{2n+1}+\ldots+(x_1x_2\ldots x_n)^{2n+1}$$
$$x_1^{2n}+(x_1x_2)^{2n}+\ldots+(x_1x_2\ldots x_n)^{2n}=1,$$

was einen Widerspruch ergibt.

Daher hat auch im Falle b) das Gleichungssystem (1), (2) genau eine reelle Lösung, nämlich (1, 0, 0, ..., 0).

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Bachmann (Heft 4/76)

▲1536▲ Durch Transformation (vgl. Lösungshinweis) folgt aus den in der Aufgabenstellung gegebenem Produkt und Bedingungen das zu maximierende Produkt

$$2^{2x_1}\cdot 2^{x_2}\cdot 2^{3x_3}\cdot 2^{x_4}\cdot 2^{2x_5}$$

sowie das System der Bedingungen

$$2^{x_1}\cdot 2^{2x_2}\cdot 2^{x_3}\cdot 2^{x_5}\le 2^{100},$$
$$2^{x_2}\cdot 2^{x_3}\cdot 2^{x_4}\cdot 2^{x_5}\le 2^{80},$$
$$2^{x_1}\cdot 2^{x_3}\cdot 2^{x_4}\le 2^{50},$$
$$0\le x_j\ (j=1, 2, 3, 4, 5).$$

Durch Logarithmieren zur Basis 2 ergibt sich das folgende lineare Optimierungsproblem: Es wird das Maximum der Zielfunktion $Z=2x_1+x_2+3x_3+x_4+2x_5$ unter den Bedingungen

$$x_1+2x_2+x_3+0\ +x_5\le 100,$$
$$0+\ x_2+x_3+x_4+x_5\le\ 80,$$
$$x_1+\ 0+x_3+x_4+\ 0\le\ 50,$$
$$0\le x_j\ (j=1, 2, 3, 4, 5)$$

gesucht.

Mit Hilfe der Simplexmethode ergibt sich folgende Lösung:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
u_1	1	2	1	0	1	100
u_2	0	1	1	1	1	80
u_3	1	0	1	1	0	50
	2	1	3	1	2	0

$x_1=0$, $u_1=100$,
$x_2=0$, $u_2=80$,
$x_3=0$, $u_3=50$,
$x_4=0$,
$x_5=0$, $z=0$.

	x_1	x_2	u_3	x_4	x_5	
u_1	0	2	−1	−1	1	50
u_2	−1	1	−1	0	1	30
x_3	1	0	1	1	0	50
	−1	1	−3	−2	2	−150

$x_1=0,\quad u_1=50,$
$x_2=0,\quad u_2=30,$
$x_3=50,\quad u_3=0,$
$x_4=0,$
$x_5=0,\quad z=150.$

	x_1	x_2	u_3	x_4	u_2	
u_1	$\boxed{1}$	1	0	−1	−1	20
x_5	−1	1	−1	0	1	30
x_3	1	0	1	1	0	50
	1	−1	−1	−2	−2	−210

$x_1=0,\quad u_1=20,$
$x_2=0,\quad u_2=0,$
$x_3=50,\quad u_3=0,$
$x_4=0,$
$x_5=30,\quad z=210.$

	u_1	x_2	u_3	x_4	u_2	
x_1	1	1	0	−1	−1	20
x_5	1	2	−1	−1	0	50
x_3	−1	−1	1	2	1	30
	−1	−2	−1	−1	−1	−230

$x_1=20,\quad u_1=0,$
$x_2=0,\quad u_2=0,$
$x_3=30,\quad u_3=0,$
$x_4=0,$
$x_5=50,\quad z=230.$

Weil in der letzten Zeile der Simplextabelle nur negative Zahlen stehen, ist das Maximum erreicht und außerdem eine eindeutige Lösung vorhanden. Das Produkt $a_1^2 \cdot a_2 \cdot a_3^3 \cdot a_4 \cdot a_5^2$ nimmt also seinen größten Wert, d. h. 2^{230}, unter den gegebenen Bedingungen genau für $a_1=2^{20}$, $a_2=1$, $a_3=2^{30}$, $a_4=1$ und $a_5=2^{50}$ an.

Lösungen und Lösungshinweise zu: Kombinatorik und binomischer Satz (Heft 4/76)

▲28▲ C_{20}^2 ▲29▲ V_{20}^2
▲30▲ V_9^5 ▲31▲ C_{10}^4
▲32▲ V_{15}^3 ▲33▲ C_{15}^3
▲37▲ a) $32a^{10}-240a^9+720a^8-1080a^7+810a^6-243a^5$
b) $99-70\sqrt{2}$
▲39▲ Wir lösen diese Aufgabe in drei Etappen:
1. $\frac{C_n^3}{C_n^5}=\frac{5}{8}$, daraus ergibt sich $n=12$
2. $T_{k+1}=C_{12}^k(\sqrt{z})^k\left(\frac{1}{z}\right)^{12-k}=C_{12}^k z^{\frac{k}{2}}\cdot z^{k-12}$

Da das Glied nicht z enthalten soll, ergibt sich: $\frac{k}{2}+k-12=0$.
Hieraus ergibt sich $k=8$.
3. $T_{8+1}=C_{12}^8=495$

▲40▲ *Hinweis:* Weil die Summe der Binomialkoeffizienten gleich $128=2^7$ ist, ergibt sich hieraus $m=7$.

▲41▲ *Hinweis:* Man muß das vierte Glied in der Zerlegung des ersten Binoms, das dritte Glied in der Zerlegung des zweiten Binoms, das zweite Glied in der Zerlegung des dritten Binoms bestimmen und danach diese Glieder jeweils mit x, mit x^2 bzw. mit x^3 multiplizieren. *Lösung:* 550.

▲42▲ *Hinweis:* Wenn man die genannten Glieder aufschreibt, so erhält man drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Dieses System löst man am einfachsten durch gliedweise Division (die linke Seite durch die linke Seite, die rechte durch die rechte).
Lösung: $x=2$, $y=3$, $z=5$.

Lösungen zu: IMO-Teilnehmer der DDR stellen Aufgaben (Heft 3/76)

▲1▲ 1. Es ist $a=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}>0$ wegen $a_i>0$.
Also gilt, weil das geometrische Mittel von m positiven reellen Zahlen nicht größer als deren arithmetisches Mittel ist,

$$\sqrt[m]{\frac{a_1}{a}}=\sqrt[m]{\frac{a_1}{a}\cdot 1^{m-1}}\leqq\frac{\frac{a_1}{a}+(m-1)\cdot 1}{m},$$
$$\sqrt[m]{\frac{a_2}{a}}=\sqrt[m]{\frac{a_2}{a}\cdot 1^{m-1}}\leqq\frac{\frac{a_2}{a}+(m-1)\cdot 1}{m},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sqrt[m]{\frac{a_n}{a}}=\sqrt[m]{\frac{a_n}{a}\cdot 1^{m-1}}\leqq\frac{\frac{a_n}{a}+(m-1)\cdot 1}{m}. \qquad (2)$$

Die Addition dieser n Ungleichungen ergibt

$$\sqrt[m]{\frac{a_1}{a}}+\sqrt[m]{\frac{a_2}{a}}+\ldots+\sqrt[m]{\frac{a_n}{a}}$$
$$\leqq\frac{1}{m}\left[\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{a}+n(m-1)\right],$$
$$\sqrt[m]{a_1}+\sqrt[m]{a_2}+\ldots+\sqrt[m]{a_n}$$
$$\leqq\frac{n+mn-n}{m}\sqrt[m]{a}=n\sqrt[m]{a}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\sqrt[m]{a_1}+\sqrt[m]{a_2}+\ldots+\sqrt[m]{a_n}}{n}$$
$$\leqq\sqrt[m]{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}},\ \text{w. z. b. w.} \qquad (3)$$

2. Das Gleichheitszeichen gilt in (3) und damit auch in (1) genau dann, wenn in allen Ungleichungen (2) das Gleichheitszeichen gilt, wenn also

$$\frac{a_1}{a}=1,\ \frac{a_2}{a}=1,\ \ldots,\ \frac{a_n}{a}=1 \text{ ist,}$$

d. h. $a_1=a_2=\ldots=a_n=a$.

▲2▲ Für alle natürlichen Zahlen k mit $k=1, 2, \ldots, n$ gilt

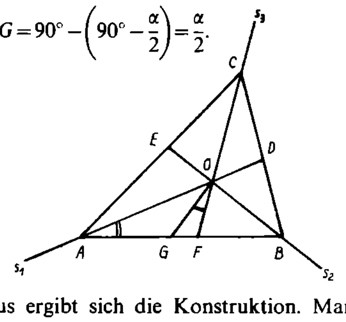
$$\frac{1}{(k-1)m+1}-\frac{1}{km+1}$$
$$=\frac{km+1-(k-1)m-1}{((k-1)m+1)(km+1)}$$
$$=\frac{m}{((k-1)m+1)(km+1)},\ \text{also}$$
$$\frac{1}{((k-1)m+1)(km+1)}$$
$$=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{(k-1)m+1}-\frac{1}{km+1}\right).$$

Daraus folgt

$$s=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2m+1}\right)+\ldots\right.$$
$$+\left(\frac{1}{(k-1)m+1}-\frac{1}{km+1}\right)+\ldots$$
$$\left.+\left(\frac{1}{(n-1)m+1}-\frac{1}{nm+1}\right)\right],$$
$$s=\frac{1}{m}\left[1-\frac{1}{nm+1}\right]=\frac{nm}{m(nm+1)},$$
$$s=\frac{n}{mn+1},\ \text{w. z. b. w.}$$

▲3▲ Es sei ABC ein Dreieck mit den Winkeln α, β, γ, das die verlangten Eigenschaften hat. Dann liegt A auf s_1, und die Winkelhalbierenden $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ liegen auf den Strahlen s_1, s_2 bzw. s_3 (siehe Bild), sie schneiden sich in dem Punkt O, der im Innern des Dreiecks ABC liegt. Die Senkrechte auf BE in O möge die Seite $\overline{AB}$ in G schneiden. Dann ist $\sphericalangle BOF$ ein spitzer Winkel, und es gilt

$$\sphericalangle BOF=\sphericalangle OBC+\sphericalangle BCO=\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}$$
$$=90^\circ-\frac{\alpha}{2}<90^\circ,\ \text{also}$$
$$\sphericalangle FOG=90^\circ-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha}{2}.$$



Daraus ergibt sich die Konstruktion. Man errichtet in O auf dem Strahl s_2 die Senkrechte. Dann ist der Winkel zwischen dieser Senkrechten und der Verlängerung von s_3 über O hinaus gleich $\frac{\alpha}{2}$. Dieser Winkel wird in A an AO nach beiden Seiten angetragen. Die freien Schenkel dieser angetragenen Winkel schneiden s_2 in B und s_3 in C, womit das Dreieck ABC konstruiert ist.
Bemerkung: Die Konstruktion ist unter den angegebenen Bedingungen immer ausführbar. Denn nach Voraussetzung sind $\sphericalangle BOF$ und $\sphericalangle FOA$ spitze Winkel. Setzt man $\sphericalangle GOA=\phi$, so gilt daher $\phi+\frac{\alpha}{2}<90^\circ$, also $\frac{\alpha}{2}+90^\circ+\phi<180^\circ$, d. h., der freie Schenkel des in A an

AO angetragenen Winkels von der Größe $\frac{\alpha}{2}$ schneidet den Strahl s_2, und man erhält den Punkt B. Entsprechendes gilt für den Schnittpunkt C des anderen in A an AO angetragenen Winkels.

▲4▲ Es sei k eine natürliche Zahl, die sich nicht als Potenz von 2 darstellen läßt. Dann läßt sich k als Produkt von Primfaktoren darstellen, wobei mindestens ein ungerader Primfaktor auftritt.

Es gilt also

$$k = 2^r \cdot m, \qquad (1)$$

wobei r eine natürliche Zahl ($r = 0, 1, 2, \ldots$) und m eine ungerade natürliche Zahl mit $m \geqq 3$ ist. Daraus folgt

$$2^k + 1 = 2^{2^r \cdot m} + 1 = (2^{2^r})^m + 1 = x^m + 1 \qquad (2)$$

mit $x = 2^{2^r} \geqq 2$ und $m \geqq 3$.

Da m eine ungerade Zahl ist, gilt

$$x^m + 1 = (x+1)(x^{m-1} - x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + 1) = (x+1)b, \text{ wobei } b \qquad (3)$$

eine natürliche Zahl ist. Dabei gilt

$x + 1 \geqq 2 + 1 = 3$ und wegen $x \geqq 2, m \geqq 3$

$x + 1 < x^m + 1$.

Also sind beide Faktoren $x+1$ und b auf der rechten Seite von (3) größer als 1, d. h., die Zahl $x^m + 1$ und daher auch die Zahl $2^k + 1$ ist nicht Primzahl, w. z. b. w.

Bemerkung: Die Umkehrung des obigen Satzes gilt aber nicht, d. h., nicht jede Zahl von der Form $2^{2^s} + 1$ ist Primzahl. Zwar sind die Zahlen $2^{2^0} = 2^1 + 1 = 3$, $2^{2^1} = 2^2 + 1 = 5$, $2^{2^2} = 2^4 + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$, $2^{2^4} = 2^{16} + 1 = 65537$ Primzahlen, jedoch nicht die Zahl $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$; denn, wie bereits Euler nachgewiesen hat, ist diese Zahl durch 641 teilbar.

▲5▲ a) Setzt man $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

so gilt $0 < a < 2$ und $-1 < b < 0$. (1)

Ferner gilt für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}},$$

$$\frac{u_n}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^n - \left(\frac{b}{2}\right)^n\right], \text{ also} \qquad (2)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^k - \left(\frac{b}{2}\right)^k\right],$$

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b}{2}\right)^k\right]. \qquad (3)$$

Wegen $0 < \frac{a}{2} < 1$ und $-\frac{1}{2} < \frac{b}{2} < 0$

existieren die Summen der folgenden unendlichen geometrischen Reihen

$$s' = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^k = \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a}{2}\right)^k + \ldots$$

$$= \frac{\frac{a}{2}}{1 - \frac{a}{2}} = \frac{a}{2-a}, \qquad (4)$$

$$s'' = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b}{2}\right)^k = \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{b}{2}\right)^k + \ldots$$

$$= \frac{\frac{b}{2}}{1 - \frac{b}{2}} = \frac{b}{2-b}. \qquad (5)$$

Daher existiert auch der Grenzwert

$s = \lim_{n \to \infty}$

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(s' - s'') = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{a}{2-a} - \frac{b}{2-b}\right).$$

Wegen (1) erhält man hieraus

$$s = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} - \frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5-3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{9-5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{8\sqrt{5}}{4} = 2. \text{ Es gilt also}$$

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{2^k} = 2. \qquad (6)$$

b) Wir geben aus Platzmangel hier nur einen Hinweis zur Lösung und das Resultat an.

Man erhält, wenn man $q = \frac{b}{a} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ setzt, nach einigen Umformungen die folgende alternierende Reihe, bei der die Beträge der Glieder streng monoton abnehmen und gegen Null kongruieren und die daher kongruent ist:

$$\bar{s} = \sum_{k=1}^{\infty}$$

$$\frac{1}{u_k} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{\frac{a}{q}-1} + \ldots + \frac{1}{\frac{a}{q^s}-1} + \ldots\right)$$

$\bar{s} = 3{,}36 + \delta$,

wobei für den durch Rundungen und die Berechnung von nur 7 Gliedern der Reihe entstandenen Fehler δ gilt:

$|\delta| < 0{,}015$, d. s. weniger als $\frac{1}{2}$%.

Lösungen zu alpha-heiter, Heft 5/76:

Die Truhen im Keller

Es sind mindestens 26 Züge erforderlich. Die Truhen werden in folgender Ordnung bewegt (jeweils auf den freien Platz):
1, 2, 3, 1, 2, 6, 5, 3, 1, 2, 6, 5, 3, 1, 2, 4, 8, 7, 1, 2, 4, 8, 7, 4, 5 und 6.

Neues aus Buntstadt

Ja. Wenn eine gerade Anzahl von Familien in Buntstadt wohnt, reichen sogar zwei Farben aus. Man tauscht „im Kreis" und streicht die Häuser abwechselnd. Bei einer ungeraden Anzahl muß ein Haus in der dritten Farbe gestrichen werden.

Superluxusseife Rubin

Hier hatte sich der Druckfehlerteufel eingeschlichen. Es muß 3,20 statt 2,30 heißen.

ABC der Mathe

$A = 1;\ B = 2;\ C = 0$

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$101^2 = 10201$

$1001^2 = 1002001$

3 + 2 = 5

Eine Lösung lautet: $1243 + 5743 = 6986$

Bilderrätsel

Lösungswort: Rechenstab

Haupttagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Karl-Marx-Stadt

Die Mathematische Gesellschaft der DDR führte vom 28. 6. bis 2. 7. 1976 ihre Wissenschaftliche Haupttagung unter der Thematik „Mathematische Probleme der Modellbildung" an der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt durch.

Entsprechend der Aufgabenstellung der MGDDR diente die Tagung der Weiterbildung und dem Erfahrungsaustausch der in Forschung, Lehre und Praxis tätigen Mathematiker sowie auch der Weiterbildung der Mathematiklehrer. Ein besonderes Anliegen dieser Tagung war die Erhöhung der Praxiswirksamkeit der Mathematik. Die Mathematiker berieten über ihren Beitrag zur Erhöhung der Effektivität der Wissenschaft, wie sie in der Direktive zum Fünfjahrplan 1976 bis 1980 gefordert wird.

Die Tagung diente der weiteren Annäherung von Theorie und Praxis, indem sie neue Forschungsergebnisse zielgerichtet vermittelte und der Forschung durch Aufgabenstellungen aus der Praxis neue Anregungen gab. Teilnehmer waren etwa 1000 Wissenschaftler und Praktiker aus allen Bereichen der Volkswirtschaft, der Bildungseinrichtungen und der Akademie der Wissenschaften der DDR sowie zahlreiche Gäste aus dem Ausland.

BÜCHER MIT MATHE

aus dem BSB B. G. Teubner

Verlagsgesellschaft Leipzig

I. J. Bakelmann

Spiegelung am Kreis

Grundlagen und Anwendungen

132 S., 67 Abb., kartoniert,
Preis: 7,00 M
Bestell-Nr. 665 735 8

In der Geometrie spielen verschiedene Transformationen von Figuren eine grundlegende Rolle. In der Schule wird sich ausführlich mit den Bewegungen und Streckungen, aber auch mit ihren Zusammensetzungen beschäftigt. Die wichtigste Besonderheit dieser Transformationen besteht darin, daß bei ihnen die einfachsten geometrischen Figuren erhalten bleiben:
Geraden werden in Geraden und Kreise in Kreise überführt. Die Inversion stellt eine kompliziertere Transformation der geometrischen Figuren dar, bei der Geraden in Kreise und umgekehrt überführt werden können. Ein solches Konzept gibt, angewandt auf Aufgaben der Elementargeometrie, eine einheitliche Untersuchungsmethode. Das bezieht sich vor allem auf Konstruktionsaufgaben und auf die Theorie der Kreisbüschel. Wir bemerken dazu, daß eine Betrachtung wesentlicher Teile der Elementargeometrie ohne das Heranziehen der Inversion verbunden ist mit der Benutzung vielfältiger, größtenteils auch oft künstlicher Konstruktionen, die stets nur Teilcharakter tragen. Außerdem wird die Inversion auch auf einige Grenzfragen der elementaren und der sogenannten höheren Geometrie angewandt. Wir meinen damit die Interpretation der Geometrie von Lobatschewski in einer euklidischen Ebene. Es ist auch interessant, die Inversion mit den komplexen Zahlen zu verbinden, genauer, mit den einfachsten Funktionen, deren Argumente und Werte komplexe Zahlen sind.

Das vorliegende Buch widmet sich dem Studium der Inversion und einer Reihe ihrer Anwendungen. Im Interesse einer übersichtlichen Darbietung wurde der Stoff auf Hauptabschnitte aufgeteilt.
Im ersten Hauptteil untersuchen wir die Transformation der Inversion ausführlich und betrachten dazu einige Anwendungen auf Fragen der Elementargeometrie.
Im zweiten Hauptteil zeigen wir, daß die im ersten Teil betrachteten Transformationen in einem engen Zusammenhang mit den linearen und gebrochenen linearen Funktionen einer komplexen Veränderlichen stehen. Wir beweisen ebenfalls, daß auch umgekehrt diese Funktionen diejenigen Transformationen der Ebene beschreiben, die sich zurückführen lassen auf die aufeinanderfolgende Ausführung von Bewegungen, Streckungen und Inversionen. Im dritten Hauptteil schließlich legen wir den gruppentheoretischen Standpunkt für die Begründung der Geometrie dar, mit dessen Hilfe wir, gestützt auf die Ergebnisse der Teile eins und zwei, kurz die ebene euklidische Geometrie und die ebene Geometrie Lobatschewskis aufbauen.

P. Borneleit

Gleichungen

Übungen für Junge Mathematiker, Teil 4
225 S., zahlr. Abb., kartoniert,
Preis: 6,50 M
Bestell-Nr. 665 788 4

Nach einer Einleitung, in der für das Gebiet Gleichungen wichtige Begriffe zusammengestellt werden, folgen Gleichungen verschiedener Typen, für die „Musterlösungen" anschließend an die Aufgaben oder Lösungen in einem besonderen Lösungsteil angegeben werden. Damit wird der Leser aufgefordert, nach dem Studium der Musterlösung ähnliche Aufgaben selbst zu bearbeiten.

Aufgaben

▲1▲ Man bestimme alle reellen x, die der Gleichung
$a+bx=c+dx \quad (a, b, c, d \in P)$
genügen!

▲2▲ Man gebe alle reellen Zahlen x an, die der Gleichung
$\sqrt[3]{25+x}+\sqrt{200-x}=0$
genügen!

▲3▲ Es sind alle rationalen x zu bestimmen, die der Gleichung
$7\cdot 4^{x+1}+4\cdot 5^{x+2}=3\cdot 4^{x+1}+5^{x+3}$
genügen!

▲4▲ Man bestimme alle positiven reellen x, für die
$\log_{81}x+\log_9 x+\log_3 x=\frac{21}{4}$
gilt!

E. Kolman

Die vierte Dimension

64 S., 30 Abb., kartoniert
Preis: 6,50 M
Bestell-Nr. 665 710 4

Aus dem Inhalt:
Empirische und rationale Erkenntnis – Herausbildung des Raumbegriffs – Der reale, perzeptible und konzeptionelle Raum – Übergang zur vierten Dimension – Mobilisierung des räumlichen Vorstellungsvermögens – Hyperkuben und andere Hyperkörper – Andere „anschauliche" Zugänge zur vierten Dimension – Wir phantasieren weiter – „Wunderdinge" des Vierdimensionalen – Nichteuklidische Räume – Weitere Wege der Bildung mehrdimensionaler Räume – Axiomatik – Bemerkungen über einen symbolischen Kalkül – Vorgeschichte der Idee der Mehrdimensionalität – Entwicklungsgeschichte der n-dimensionalen Geometrie – Anwendung der vierdimensionalen Geometrie – Voraussetzungen für die Interpretation – Die vierdimensionale Minkowskische Welt – Noch einmal über die Bedeutung der mehrdimensionalen Geometrie – Die Anregung Kants – Vierdimensionalität und Spiritismus – Der Wissenschaftler Zöllner in der Welt der Geister – Noch einmal „Beweise" – Phantasie, Phantastik und Phantasterei – Wissenschaft ist unvereinbar mit Mystik – Ziehen wir Schlußfolgerungen

N. J. Wilenkin

Methoden der schrittweisen Näherung

108 S., 34 Abb., kartoniert,
Preis: 5,90 M
Bestell-Nr. 665 723 5

Aus dem Inhalt: Schrittweise Näherung – Achilles und die Schildkröte – Wie dividiert eigentlich ein Rechenautomat? – Quadratwurzelziehen durch sukzessive Approximation – Berechnung der Wurzel mit beliebigem Wurzelexponenten – Die allgemeine Iterationsmethode – Kontraktive Abbildungen – Die Sekantenmethode (regula falsi) – Ein verbessertes Sekantenverfahren – Das Newtonsche Verfahren für algebraische Gleichungen – Geometrische Interpretation der Ableitung – Die Ableitung einer nichtalgebraischen Funktion – Wie findet man eine Ausgangsnäherung? – Eine kombinierte Methode zur Lösung von Gleichungen – Die Lösung eines Systems nichtlinearer Gleichungen mit der Methode der sukzessiven Approximation – Aufgaben – Lösungen

Übung macht den Meister

Aus Abschlußprüfungen der Oberschulen der DDR (Kl. 10)

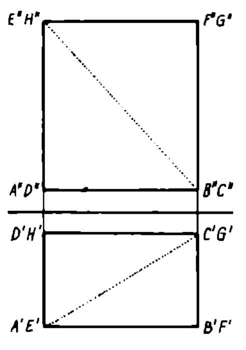
Darstellende Geometrie

1976

Kohlereserven werden in Halden gelagert. Aus Gründen des Brandschutzes hat eine solche Halde angenähert die Form eines geraden Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche. Seine Abmessungen sind:
Seitenlänge der Grundfläche $a_1 = 19{,}0$ m
Höhe des Pyramidenstumpfes $h = 4{,}5$ m
Winkel zwischen Seitenfläche und Grundfläche $\alpha = 45^\circ$.
a) Stellen Sie diesen Pyramidenstumpf in senkrechter Zweitafelprojektion in einem geeigneten Maßstab dar!
b) Berechnen Sie die Seitenlänge a_2 der Deckfläche!
c) Berechnen Sie das Volumen dieses Pyramidenstumpfes! (Hierbei ist die Verwendung der Näherungsformel unzulässig.)

1975

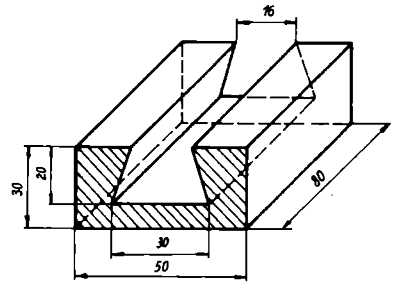
Die nachfolgende Skizze zeigt einen Körper in senkrechter Zweitafelprojektion. Die punktierten Linien stellen eine seiner Raumdiagonalen dar.
Dabei sind
$\overline{AB} = 6{,}5$ cm, $\overline{BC} = 4{,}2$ cm, $\overline{BF} = 8{,}2$ cm



a) Stellen Sie diesen Körper in Kavalierperspektive dar, und bezeichnen Sie alle Eckpunkte!
b) Zeichnen Sie die vorgegebene Raumdiagonale ein!
c) Berechnen Sie die Länge dieser Raumdiagonalen!

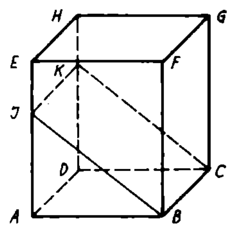
1974

Die Skizze zeigt das Schrägbild eines Werkstücks.
a) Stellen Sie dieses Werkstück in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1 : 1 dar! (Benennen der Eckpunkte ist nicht erforderlich.)
b) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche!



1973

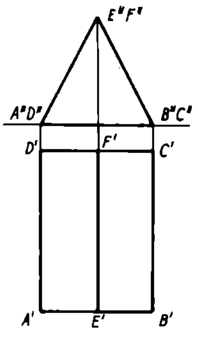
Gegeben ist ein gerades Prisma $ABCDEFGH$ mit quadratischer Grundfläche, das von einer Ebene in den Punkten I, B, C, K geschnitten wird (siehe Bild).
$\overline{AB} = \overline{BC} = 5{,}0$ cm, $\overline{AE} = \overline{DH} = 6{,}0$ cm,
$\overline{AI} = \overline{DK} = 4{,}0$ cm



a) Stellen Sie das Prisma einschließlich der Schnittfigur in Zweitafelprojektion dar!
b) Berechnen Sie die Länge der Seite IB der Schnittfigur!
c) Zeichnen Sie die Schnittfigur in wahrer Größe!

1972

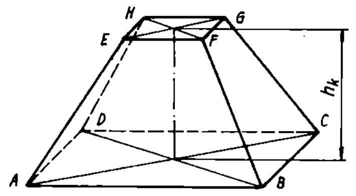
Das Bild zeigt ein gerades Prisma im Grund- und Aufriß. Die Maße des Prismas sind:
$\overline{AB} = a = 5{,}0$ cm, $\overline{AE} = \overline{BE} = s = 6{,}5$ cm,
$\overline{BC} = l = 14{,}0$ cm.



a) Stellen Sie diese Körper in Kavalierperspektive, d. h. in schräger Parallelprojektion mit $\alpha = 45^\circ$ und $q = \frac{1}{2}$ dar!
b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieses Prismas!

1971

Das Bild zeigt das Schrägbild eines geraden Pyramidenstumpfes in wahrer Größe, und und Deckfläche.
$\overline{AB} = \overline{CD} = 72$ mm, $\overline{BC} = \overline{AD} = 48$ mm,
$\overline{EF} = \overline{GH} = 24$ mm, $\overline{FG} = \overline{EH} = 16$ mm,
$h_k = 40$ mm



a) Stellen Sie diesen Pyramidenstumpf im Grund-Aufriß-Verfahren unter Verwendung der angegebenen Originalmaße dar!
Legen Sie zweckmäßigerweise eine Grundkante parallel zur Rißachse!
b) Benennen Sie in beiden Rissen alle Eckpunkte!
c) Konstruieren Sie eine der Seitenflächen des Pyramidenstumpfes in wahrer Größe, und kennzeichnen Sie die wahre Länge einer Seitenkante des Pyramidenstumpfes!

1970

Eine gerade Pyramide mit der Spitze S hat als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ mit einer Seitenlänge von 25 mm; die Körperhöhe beträgt 60 mm.
a) Stellen Sie den Körper im Grund-Aufriß-Verfahren dar! Benennen Sie die Bilder aller Eckpunkte der Pyramide!
b) Ermitteln Sie unter Verwendung Ihrer Zeichnung die wahre Länge einer Seitenkante, und kennzeichnen Sie diese Strecke farbig!
c) Berechnen Sie außerdem die wahre Länge dieser Seitenkante!