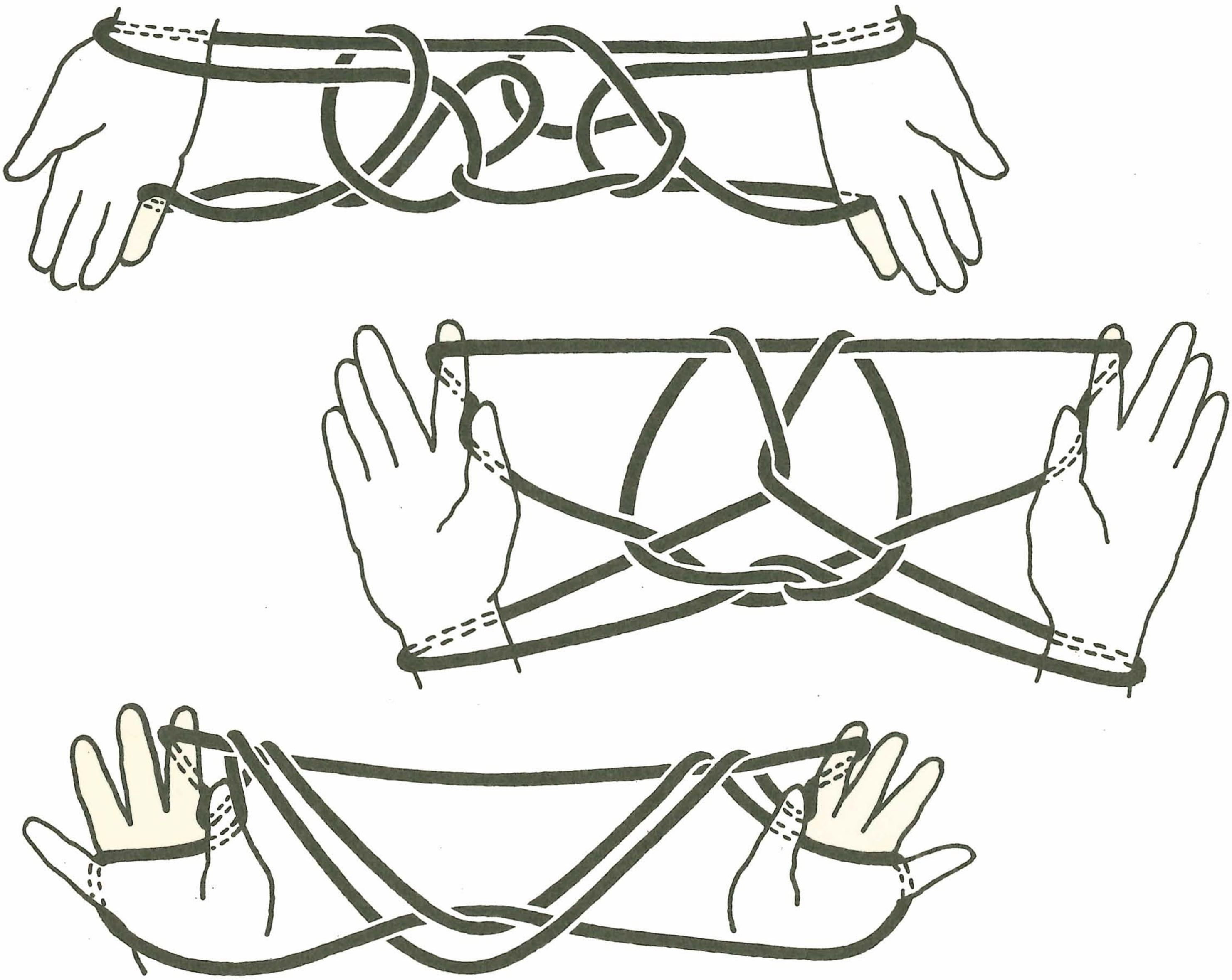
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



6
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
16. Jahrgang 1982
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: R. Schulz, Rotta (S. 123); J. Lehmann, Leipzig; IMO-Abzeichen, H. Teske, Leipzig; dunatours, Visegrád; L. Kemény, Budapest; Georgi Anasztaszov, Sofia (S. 128); Füles, Budapest (S. 130); Archiv: J. Lehmann (S. 132); Schröder, Karl-Marx-Stadt (S. 135); H. Tracksdorf (IV. U.-Seite).
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN(EDV) 128–ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 24. August 1982
Erscheinungstermin: 18. Dezember 1982

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Die Kreiszahl π
Zum 100. Geburtstag des Beweises der Transzendenz von π
Teil 1

Eine Sitzung in der Berliner Akademie

Am 22. Juni 1882 trug auf der Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse der Berliner Akademie der Wissenschaften der Mathematiker Karl Weierstraß (1815 bis 1897) vor. Die Klasse hatte ein Schreiben des Ordinarius Ferdinand von Lindemann (1852 bis 1939) aus Freiburg i. B. erhalten, in dem dieser ein mathematisches Resultat mitteilte, durch das ein berühmtes Problem gelöst wurde. Die anwesenden Akademiker, darunter der Mathematiker Leopold Kronecker (1823 bis 1891), der Arzt Rudolf Virchow (1821 bis 1902) und der Physiologe und Physiker Emil du Bois-Reymond (1818 bis 1896), erfuhren durch Weierstraß' Vortrag erstmals von Lindemanns Erkenntnis, die sich auf die zahlentheoretische Natur der Kreiszahl π bezieht.

Der junge Freiburger Professor Lindemann hatte seine Arbeit der Berliner Akademie vorgelegt, ein durchaus nicht unübliches Vorgehen. Durch die Wirksamkeit von Weierstraß, Kronecker und Ernst Eduard Kummer (1810 bis 1893) galt die Berliner Akademie zusammen mit der Universität (der heutigen Humboldt-Universität) als ein Zentrum der Mathematik.

In den Sitzungsberichten der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1882, S. 679 bis 682, wurden die von Weierstraß in der Klassensitzung vorgetragenen Resultate von F. Lindemann unter der Überschrift „Über die Ludolph'sche Zahl" veröffentlicht. Eine ausführliche Abhandlung „Über die Zahl π" publizierte Lindemann im von Felix Klein (1849 bis 1925) und Adolph Mayer (1839 bis 1908) herausgegebenen 20. Band der seit 1869 im Leipziger Teubner-Verlag erscheinenden Zeitschrift „Mathematische Annalen".

Die Transzendenz von π

Das Hauptergebnis von Lindemann lautet: „Ist a eine von Null verschiedene algebraische Zahl, so ist e^a immer transzendent." Die hierin auftretende Zahl e ist spätestens seit der Mitte des 18. Jahrhunderts insbesondere durch die Forschungen von Leonhard Euler (1707 bis 1783) aus der Mathematik nicht mehr wegzudenken. Es ist eine irrationale Zahl, die sich durch die Summe $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ bis zu jeder gewünschten Genauigkeit (wenn nur n hinreichend groß gewählt wird) berechnen läßt. (Die Schreibweise „$n!$" – sprich: n Fakultät – ist eine Abkürzung für das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ der natürlichen Zahlen von 1 bis n.) Die Dezimalbruchdarstellung von e beginnt mit 2,71828183. (Auf die Definition der Potenz e^a kann hier nicht eingegangen werden.)

Was sind algebraische, was sind transzendente Zahlen?

Eine algebraische Zahl ist jede Zahl, die irgendeiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt:

$$k_nx^n+k_{n-1}x^{n-1}+\ldots+k_1x+k_0=0, \qquad (1)$$

worin $n\geqq 1$ eine natürliche Zahl, $k_0, k_1, \ldots, k_n$ rationale Zahlen und $k_n\neq 0$ ist.

Alle rationalen Zahlen sind algebraisch (der Fall $n=1$ in (1)). $\sqrt{2}$ ist algebraisch, weil $\sqrt{2}$ der algebraischen Gleichung $x^2-2=0$ genügt. (Die Koeffizienten $k_2=1, k_1=0, k_2=-2$ sind ganze Zahlen.) Die Goldene-Schnitt-Zahl $\tau=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (vgl. *alpha*, Heft 6/1981, S. 121) ist algebraisch, weil sie der Gleichung $x^2+x-1=0$ genügt. Die Zahl $\sqrt[3]{2}$ ist algebraisch, weil sie der Gleichung $x^3-2=0$ genügt.

Zahlen, die nicht algebraisch sind, werden transzendente Zahlen genannt. Das Wort „transzendent" leitet sich vom lateinischen Verb „transcendere" (übersteigen, überschreiten) ab.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) erklärte 1686:

„Transzendente sind solche Größen, die durch keinerlei Gleichungen bestimmten Grades erklärt werden, vielmehr über jede algebraische Gleichung hinausgehen." Euler sagte, daß sie „die Wirksamkeit algebraischer Methoden überschreiten (transzendieren)".

Eine transzendente Zahl α genügt keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten. Wie man auch endlich viele rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_m$ wählt, stets ist $a_m\alpha^m+a_{m-1}\alpha^{m-1}+\ldots+a_1\alpha+a_0\neq 0$.

Für eine algebraische Zahl β hingegen gibt es gewisse rationale Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_k$ (die nicht alle gleich 0 sind), so daß $b_k\beta^k+b_{k-1}\beta^{k-1}+\ldots+b_1\beta+b_0=0$ wird, β genügt der algebraischen Gleichung $b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\ldots+b_1x+b_0=0$ mit rationalen Koeffizienten.

Bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts kannte man noch überhaupt kein Beispiel von transzendenten Zahlen! Erst 1844 entdeckte Joseph Liouville (1809 bis 1882), Professor am Collège de France in Paris, die ersten transzendenten Zahlen. Diese sogenannten Liouvilleschen Zahlen lassen sich auf Grund eines Satzes von Liouville konstruieren, der aussagt, daß die irrationalen algebraischen Zahlen solche sind, die nur dann mit hoher Genauigkeit durch rationale Zahlen angenähert werden können, wenn die Nenner der Näherungsbrüche sehr groß sind. (Eine präzise Formulierung und den Beweis findet man im 7. Kapitel des Buches „Zahlentheorie – Ausgewählte Methoden und Ergebnisse" von H. Koch und H. Pieper; Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976.)

Einen neuen Beweis für die Existenz transzendenter Zahlen gab Georg Cantor (1845 bis 1918) in Halle am 7. Dezember 1873 in einem Brief an Richard Dedekind (1831 bis 1916) in Braunschweig.

Er konnte überdies zeigen, daß es mehr transzendente als algebraische Zahlen gibt, ähnlich wie es mehr irrationale als rationale Zahlen gibt. (Es gibt jeweils unendlich viele solcher Zahlen. Das „mehr" kann man trotzdem genau präzisieren. Es sei verwiesen auf das 5. Kapitel des Buches „Die Begriffswelt der Mathematik" von I. Ruzsa; Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1976.)

Ebenfalls im Jahre 1873 konnte der französische Mathematiker Charles Hermite (1822 bis 1901) die Transzendenz der Zahl e nachweisen.

Die Transzendenz von e folgt natürlich auch sofort aus dem Satz von Lindemann ($a=1$). Aus dem Satz von Lindemann folgt aber auch die Transzendenz der Kreiszahl π.

Hierzu benötigt man eine der merkwürdigsten Gleichungen der Mathematik. Euler formulierte sie in einem Brief vom 10. Dezember 1728 an seinen Lehrer Johann Bernoulli (1667 bis 1748).

Man schreibt sie heute in der Form

$$e^{i\pi}=-1. \qquad (2)$$

Hierin gehen ein: die Eulersche Zahl e, die Kreiszahl π, die sogenannte imaginäre Einheit $i=\sqrt{-1}$ und die Einheit 1. (Auf die Definition der Wurzel $\sqrt{-1}$ und der Potenz e^{ix} kann hier nicht eingegangen werden. Es sei verwiesen auf das Buch „Die komplexen Zahlen. Theorie – Praxis – Geschichte" von H. Pieper; Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1982.) Die Zahl $i=\sqrt{-1}$ ist übrigens algebraisch, weil sie der Gleichung $x^2+1=0$ genügt.

Angenommen, π ist algebraisch. Dann wäre (wie man sich überlegen kann) auch das Produkt πi algebraisch. Daher müßte nach dem Lindemannschen Satz $e^{\pi i}$ transzendent sein. Andererseits ist $e^{\pi i}$ nach (2) aber gleich -1, also rational, und somit algebraisch. $e^{\pi i}$ müßte gleichzeitig transzendent und algebraisch sein, was ein Widerspruch ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme falsch ist. π ist also nicht algebraisch, sondern transzendent: π genügt keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten.

Der Beweis des Satzes von Lindemann kann hier nicht dargestellt werden.

Der ursprüngliche Beweis für die Transzendenz von π, also der Beweis des Satzes von Lindemann, war recht kompliziert. Lindemann stützte sich wesentlich auf die Untersuchungen, die Hermite 1873 beim Beweis der Transzendenz von e gemacht hat. Die Beweise der Transzendenz der Zahlen e und π wurden bereits 1882 von Karl Weierstraß und später noch von David Hilbert (1862 bis 1943), Adolf Hurwitz (1859 bis 1919) und Paul Gordan (1837 bis 1912) erheblich vereinfacht. Den Gordanschen Beweis hat Heinrich Weber (1842 bis 1913) noch durchsichtiger gemacht und in sein „Lehrbuch der Algebra" (2. Auflage 1899) aufgenommen. Einen noch einfacheren, fast schon elementaren Beweis hat Weber dann in der „Enzyklopädie der Elementar-Mathematik" (Band 1, 1903) gegeben. (Es sei auch verwiesen auf das Buch „Quadratur des Kreises und Transzendenz von π" von G. I. Drinfel'd; Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980.)

Die Zahl π

Mit dem Lindemannschen Beweis wurde erstmals die arithmetische „Natur" der Zahl π erkannt. Es sei daran erinnert, wie die Zahl π definiert ist.

Es seien zwei Kreise mit den Durchmessern d_1, d_2 gegeben.

Man kann beweisen:

Satz A. Die Umfänge U_1, U_2 zweier beliebiger Kreise verhalten sich wie ihre Durchmesser,

$$U_1 : U_2 = d_1 : d_2.$$

Das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser ist somit für alle Kreise dasselbe: $\frac{U_1}{d_1} = \frac{U_2}{d_2}$. Diese Konstante wird mit π bezeichnet. Für den Umfang U eines Kreises mit dem Durchmesser d gilt mit dieser Konstanten

$$U = \pi d.$$

Man kann ferner beweisen:

Satz B. Die Flächeninhalte F_1, F_2 zweier beliebiger Kreise verhalten sich wie die Quadrate über den Durchmessern bzw. die Quadrate über den Radien,

$$F_1 : F_2 = d_1{}^2 : d_2{}^2 = r_1{}^2 : r_2{}^2.$$

Das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Radius ist somit für alle Kreise dasselbe: $\frac{F_1}{r_1{}^2} = \frac{F_2}{r_2{}^2}$.

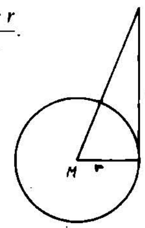
Diese Konstante werde mit ς bezeichnet. Für den Flächeninhalt F eines jeden Kreises mit dem Radius r gilt mit dieser Konstanten

$$F = \varsigma r^2.$$

Man kann überdies beweisen:

Satz C. Die Fläche F eines Kreises ist gleich der Fläche eines Dreiecks, das den Umfang U des Kreises zur Basis und den Radius r des Kreises zur Höhe hat, also

$$F = \frac{U \cdot r}{2}.$$

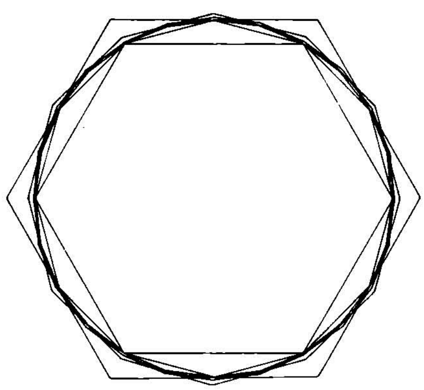


Über Satz C lassen sich die Sätze A und B auseinander herleiten. Aus $F = \varsigma r^2 = \frac{r}{2} U$ und $U = \pi d = 2\pi r$ folgt

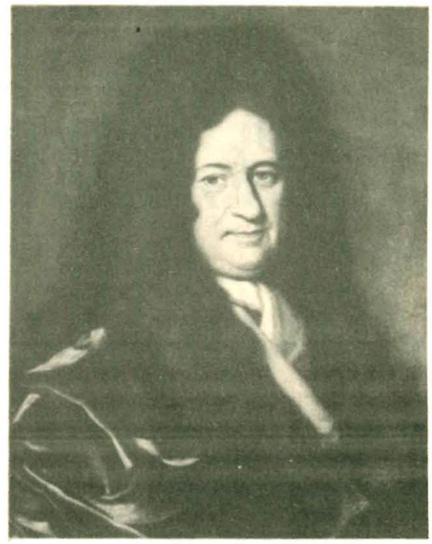
$$\varsigma = \pi.$$

Die Sätze A, B, C lassen sich leichter aussprechen, als sie bewiesen werden können, zumal vorher die Begriffe „Kreisumfang" und „Flächeninhalt eines Kreises" erklärt werden müssen.

Legt man einer willkürlich gelegten Strecke die Länge 1 zu, so kann jeder Strecke eindeutig eine reelle Zahl (ihre Länge) zugeordnet werden. Hierdurch lassen sich auch die Umfänge geradlinig begrenzter Figuren, wie etwa regelmäßiger Vielecke, erklären. Der Umfang eines Kreises kann nun als der Grenzwert einer Folge von Umfängen regelmäßiger Vielecke mit wachsender Seitenzahl definiert werden.



Es sei dem Kreis etwa ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben. Die Seitenlänge des Sechsecks ist gleich dem Radius des Kreises. Der Umfang ist also $p_1 = 6r$. Durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl erhält man eine Folge dem Kreis einbeschriebener regelmäßiger Vielecke mit 12, 24, 48, 96, ... Seiten. Die Folge der Umfänge p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, ... nähert sich mit dem Wachsen der Seitenzahl einer bestimmten Grenze. Die Grenze ist größer als der Umfang eines jeden Vielecks der Folge. Ebenso kann man von einem dem Kreise umbeschriebenen regelmäßigen Vieleck, etwa einem regelmäßigen Sechseck, ausgehend durch Verdopplung der Seitenzahl eine Folge dem Kreis umbeschrie-



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716)

Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813)

Christian Huygens (1629 bis 1695)

bener Vielecke erhalten. Die Folge der zugehörigen Umfänge $q_1, q_2, q_3, \ldots$ nähert sich mit wachsender Seitenzahl einer bestimmten Grenze. Die Grenze ist kleiner als der Umfang eines jeden dabei erhaltenen Vielecks.
Die Grenzen, denen sich die Umfänge der ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke mit wachsender Seitenzahl nähern, stellen dieselbe Strecke dar. Als *Kreisumfang* bezeichnet man diese Grenze, der sich die Umfänge der ein- und umbeschriebenen Vielecke des Kreises mit wachsender Seitenzahl nähern. Der Satz A ist nun eine Folge davon, daß sich (wie man beweisen kann) die Umfänge zweier ähnlicher Vielecke wie zwei entsprechende Seiten oder Diagonalen verhalten.
Die Konstante 2π ist der Kreisumfang U eines Kreises vom Radius 1.
Es gilt für jedes n

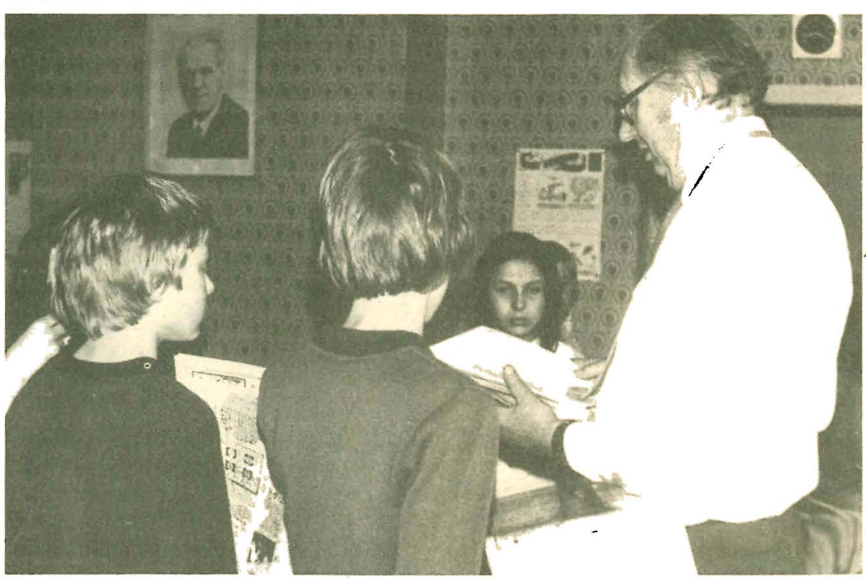
$$p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_n < U < q_n < \ldots < q_3 < q_2 < q_1.$$

Aus der Zahlengeraden ist somit eine Folge von Intervallen $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_n, q_n), \ldots$ gegeben, so daß für jedes n das Intervall (p_{n+1}, q_{n+1}) in (p_n, q_n) enthalten ist und die Längen der Intervalle immer kleiner werden. Es gibt genau einen Punkt der Zahlengeraden, nämlich der gesuchte Umfang U, der allen Intervallen dieser Intervallschachtelung angehört. Die reelle Zahl $U = 2\pi$ wird somit durch die beschriebene Intervallschachtelung definiert.
Ausgehend von der Längeneinheit 1 wird nun eine Flächeneinheit durch ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 definiert. Die Flächenmessung geradlinig begrenzter Fläche besteht dann in der Feststellung, wie viele dieser Einheitsquadrate in der betreffenden Fläche vorhanden sind. Durch Unterteilung der Längen- und Flächenmaße lassen sich schließlich auch Flächeninhalte von Rechtecken berechnen, deren Seite rationale, dann aber auch solche (Intervallschachtelung!), deren Seiten irrationale Maße besitzen. Die Berechnung anderer Vielecksflächen erfolgt über das Rechteck. Für krummlinig begrenzte Figuren ist der Flächeninhalt mit Hilfe von Grenzwerten definierbar. Man kann beweisen: Die Flächeninhalte der einem Kreis ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke nähern sich mit wachsender Seitenzahl demselben Grenzwert. Dieser heißt *Flächeninhalt* des Kreises.
Die Konstante $\varsigma = \pi$ ist der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1.
Die Definition von π als halber Kreisumfang eines Kreises vom Radius 1 oder als Flächeninhalt eines Kreises vom Radius 1 gibt keine Auskunft über die „Natur“ von π als reeller Zahl. Ist π rational oder irrational, algebraisch oder transzendent?
Die Frage nach der Natur der Zahl π ist mit dem Lindemannschen Satz beantwortet: π ist transzendent, also insbesondere irrational.
(Teil 2 folgt.) *H. Pieper*

Junge Mathematiker feierten Jubiläum

Schlüssel für die erfolgreiche Entwicklung des Kreisklubs *Junger Mathematiker* Gräfenhainichen ist jahrelange intensive Trainingsarbeit.
Vor kurzem beging der Kreisklub der *Jungen Mathematiker* Gräfenhainichen sein zehnjähriges Bestehen. An der Veranstaltung in den Räumen der Station Junger Naturforscher und Techniker nahmen fünfzig Mitglieder des Kreisklubs teil, darunter auch einige ehemalige, wie Andreas und Matthias Kasparek, Peter Stolze und Elke Witt. Herzlich begrüßt wurde ferner der Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, Oberstudienrat Lehmann, Leipzig, und der mit 78 Jahren wohl älteste aktive *alpha*-Löser, Diplomingenieur Kurt Oertel, Zschornewitz. In seiner Ansprache würdigte der Vertreter der Abteilung Volksbildung die erfolgreiche Entwicklung des Kreisklubs. Im Ergebnis der intensiven jahrelangen Trainingsarbeit sowohl im Klub als auch in den regelmäßig stattfindenden Spezialistenlagern während der Sommerferien konnten bisher nicht weniger als 17 erste und mehrere zweite sowie dritte Plätze bzw. Preise bei Bezirksolympiaden erkämpft werden. Jahrelang belegte der Kreis Gräfenhainichen ebenfalls in der Mannschaftswertung den ersten Rang. In diesem Zeitraum qualifizierten sich auch fünf *Junge Mathematiker* für die DDR-Olympiade, wo sie zum Teil ebenfalls sehr gute Ergebnisse erzielten.
Nach diesen Ausführungen hielt Andreas Kasparek, Teilnehmer an der Internationalen Mathematikolympiade 1979 in London, einen interessanten Lichtbildervortrag über seine Reiseeindrücke. Anschließend stellte Chefredakteur Johannes Lehmann in Wort und Bild den Werdegang der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* vor und wertete den *alpha*-Wettbewerb aus, an dem ja auch aus unserem Kreis jährlich etwa 50 bis 60 *Junge Mathematiker* teilnehmen. So ist gerade diese mathematische Schülerzeitschrift in all den Jahren zu einem unentbehrlichen Helfer bei der Entwicklung junger Talente geworden, und das ist wiederum Ansporn zu Überlegungen, wie die Arbeit im Kreisklub weiter verbessert und noch intensiver gestaltet werden kann. Erste Maßnahmen dazu wurden übrigens bereits durch das Kreiskomitee zur Vorbereitung der Mathematikolympiaden in die Wege geleitet.
R. Schulz
Volkskorrespondent der halleschen Tageszeitung „Freiheit“ – Leiter des Kreisklubs Junger Mathematiker (seit seiner Gründung)

Junge Mathematiker im Gespräch mit dem Chefredakteur der *alpha*.



XXIII. Internationale Mathematikolympiade

Budapest, 7. Juli bis 14. Juli 1982

Aufgaben

1. Tag 9. Juli 1982
Arbeitszeit: 4 Stunden 30 Minuten

1. Es sei f eine Funktion, die für alle positiven ganzen Zahlen n definiert ist und nur nichtnegative ganze Werte annimmt.
Es gelte für alle m und n:
a) $f(m+n)-f(m)-f(n)$ nimmt nur die Werte o oder 1 an.
b) $f(2)=0$, $f(3)>0$ und $f(9999)=3333$.
Man bestimme $f(1982)$.
(Großbritannien, 7 Punkte)

2. Gegeben sei ein nichtgleichschenkliges Dreieck $A_1A_2A_3$ mit den Seiten a_1, a_2, a_3 (a_i ist die gegenüberliegende Seite zu A_i). Für alle $i=1, 2, 3$ sei M_i der Mittelpunkt der Seite a_i, und T_i sei der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite a_i. Die Spiegelung an der Halbierenden des Innenwinkels des Dreiecks mit dem Scheitel A_i überführe den Punkt T_i in den Punkt S_i.
Man beweise:
Alle drei Geraden M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 gehen durch einen gemeinsamen Punkt.
(Niederlande, 7 Punkte)

3. Man betrachte nur Folgen $\langle x_n \rangle$, $n=0, 1, 2, \ldots$ von positiven reellen Zahlen, die die Bedingungen erfüllen:
$x_0=1$ und für alle $i \geqq 0$ ist $x_{i+1} \leqq x_i$.
a) Man beweise, daß für jede solche Folge für ein geeignetes $n \geqq 1$ gilt:
$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqq 3{,}999$$
b) Man gebe eine solche Folge an, so daß für alle $n \geqq 1$ gilt:
$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$
(Sowjetunion, 7 Punkte)

2. Tag 10. Juli 1982
Arbeitszeit: 4 Stunden 30 Minuten

4. Es sei n eine positive ganze Zahl.
Man beweise:
Falls die Gleichung $x^3-3xy^2+y^3=n$ eine Lösung (x, y) mit ganzen Zahlen x, y hat, so hat sie mindestens drei derartige Lösungen.
Zeige außerdem, daß die Gleichung für $n=2891$ keine Lösung (x, y) mit ganzen Zahlen x, y hat!
(Großbritannien, 7 Punkte)

5. Die Diagonalen AC bzw. CE eines regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ werden durch innere Punkte M bzw. N derart geteilt, daß
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{CE}}=\lambda \text{ gilt.}$$
Man bestimme λ, falls B, M und N auf einer Geraden liegen.
(Niederlande, 7 Punkte)

6. Es sei S ein Quadrat mit der Seitenlänge 100, und es sei L ein in S gelegener Streckenzug, der sich selbst weder schneidet noch berührt und der aus den Strecken A_0A_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ mit $A_0 \neq A_n$ gebildet wird. Außerdem gebe es für jeden Punkt P des Randes von S einen Punkt auf L, für den der Abstand von P nicht größer als $\frac{1}{2}$ ist. Man zeige, daß es zwei Punkte X und Y auf L gibt, deren Abstand nicht größer als 1 ist und für die der zwischen X und Y gelegene Teil von L nicht kürzer als 198 ist.
(Sozialistische Republik Vietnam, 7 Punkte)

Die Mannschaft aus Tunesien (links oben die Dolmetscherin der Mannschaft)

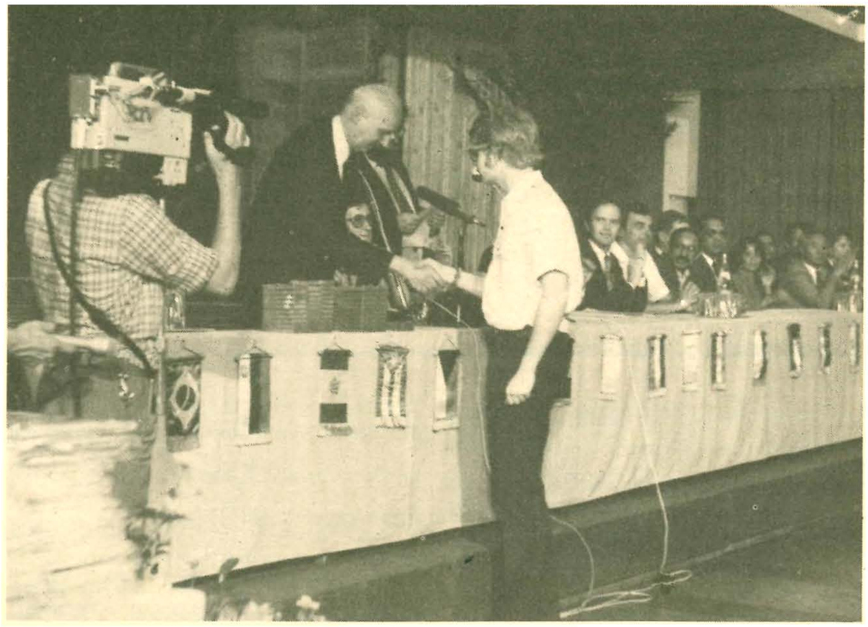
Alter Bekannter: Lazlo Pelikan, einst erfolgreichster ungarischer IMO-Teilnehmer, jetzt Mathematiker, Mitglied der Jury der IMO, hier im Gespräch mit Prof. Dr. Rosenbaum (DDR)

Wettbewerbsatmosphäre

Die erfolgreiche Mannschaft der Bundesrepublik Deutschland

Die erfolgreiche sowjetische Mannschaft und ihre drei Betreuer (Bildmitte)

Wir stellen die erfolgreiche DDR-Mannschaft vor (v.l.n.r.): Bodo Heise (Görlitz), Spezialklasse Mathematik der TH Karl-Marx-Stadt, 1. Preis – 37 Punkte; Bernd Kirchheim (Weimar), BBS „H. Jahn“, Funkwerk Erfurt, 3. Preis – 21 Punkte; Jochen Lattermann, EOS Pestalozzi, Dresden (Kl. 11), 2. Preis – 32 Punkte; Ralf Hortig, 1. EOS „Dr. Th. Neubauer“, Cottbus, 1. Preis – 40 Punkte.



Der feierliche Abschluß der IMO fand in der Universität Budapest statt. Die Festrede hielt der ungarische Volksbildungsminister.

Unser Foto: Bodo Heise empfängt aus der Hand des Vorsitzenden der Jury, Prof. Dr. Casar (Universität Budapest) seinen 1. Preis.

Preisträger

Einen ersten Preis erhielten:
Bruno Haible, Bundesrepublik Deutschland; Grigorij Perelman, Sowjetunion; Le Tu Quoc Thang, Vietnam; Noam Elkies, USA; Ralf Hortig, Deutsche Demokratische Republik; Josef Schicho, Österreich; Jean Louis Bertin, Frankreich; Bodo Heise, Deutsche Demokratische Republik; Michael Stoll, Bundesrepublik Deutschland; Konstantin Matvejev, Sowjetunion.
Weitere 20 Schüler erhielten einen 2. Preis, 31 Schüler einen dritten Preis, 61 Schüler eine ehrende Anerkennung für gute mathematische Leistungen.

Ergebnisspiegel

Land	Schüler (Punktzahl) 1	2	3	4	Summe d. Punkte	Preise 1. Pr.	2. Pr.	3. Pr.
Bundesrepublik Deutschland	42	35	31	37	147	2	2	–
Sowjetunion	37	42	30	28	137	2	1	1
Deutsche Demokratische Republik	37	40	27	32	136	2	1	1
USA	40	35	29	32	136	1	2	1
Vietnam	42	30	32	29	133	1	2	1
Ungarn	21	36	33	35	125	–	3	1
ČSSR	29	21	31	34	115	–	2	2
Finnland	16	35	28	34	113	–	2	1
Bulgarien	26	29	26	27	108	–	–	4
Großbritannien	23	23	28	29	103	–	–	4
Rumänien	26	14	26	33	99	–	1	2
Jugoslawien	30	20	18	30	98	–	2	–
Polen	30	23	16	27	96	–	1	2
Niederlande	17	22	34	19	92	–	1	1
Frankreich	38	17	14	20	89	1	–	–
Österreich	11	11	38	22	82	1	–	1
Kanada	14	12	23	29	78	–	–	2
Israel	22	18	17	18	75	–	–	1
Schweden	23	15	11	25	74	–	–	2
Australien	20	23	10	13	66	–	–	1
Brasilien	24	10	19	13	66	–	–	1
Mongolei	21	12	13	10	56	–	–	1
Griechenland	14	19	9	13	55	–	–	–
Belgien	7	2	22	19	50	–	–	1
Kuba	17	7	17	3	44	–	–	–
Kolumbien	3	9	18	4	34	–	–	–
Algerien	11	10	2	–	23	–	–	–
Venezuela	11	10	1	1	23	–	–	–
Tunesien	7	8	1	3	19	–	–	–
Kuweit	2	1	1	0	4	–	–	–

Wir finden Gesetzmäßigkeiten

In der Physik werden häufig Experimente durchgeführt, um Gesetze zu erkennen. Will man z. B. bei einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung den Zusammenhang zwischen zurückgelegtem Weg s und dafür benötigter Zeit t untersuchen, so entstehen bei einem entsprechenden Versuch endlich viele Paare von Meßwerten, die, bezüglich festgelegter Maßeinheiten, in Tabellen wie in Beispiel 1 notiert werden können.

Beispiel 1:

t in sec	5	12	20	30	50
s in cm	20	48	80	120	200

Im Beispiel 1 gehört z. B. zum Meßwert 30 sec für die Zeit der Meßwert 120 cm für den Weg. Allgemein gehört zur Zeit t der zurückgelegte Weg s. Bei der Auswertung der Paare $[t;s]$ geht es darum, einen für alle t geltenden Zusammenhang zwischen t und s zu finden.

Sieht man von der Art der gemessenen Größen und von in der Praxis stets auftretenden Meßfehlern ab, so läßt sich folgendes *mathematisches* Problem formulieren:

Durch eine Wertetabelle sind zwei (endliche) Zahlenmengen gegeben, deren Elemente paarweise einander zugeordnet sind. Um die Zusammengehörigkeit deutlich zu machen, führen wir eine entsprechende Bezeichnung ein. Das dem Element x der ersten Menge entsprechende Element der zweiten Menge nennen wir $m(x)$ (lies: m von x, als Abkürzung für Meßwert von x). Zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen beiden Zahlenmengen ist eine (möglichst einfache) Gleichung zu finden, die von den gegebenen geordneten Paaren $[x;m(x)]$ erfüllt wird. (Bei der physikalischen Interpretation der so erhaltenen Gleichung geht man von der Annahme aus, daß sie innerhalb gewisser Grenzen von *allen möglichen* Paaren von Meßwerten – nicht nur von den in der Tabelle erfaßten – erfüllt wird.)

Beispiel 1 a:

x	5	12	20	30	50
$m(x)$	20	48	80	120	200

Im Beispiel 1a ist nicht nur $\frac{m(30)}{30}=\frac{120}{30}=4$, sondern für *alle* in der Tabelle aufgeführten Paare $[x;m(x)]$ gilt $\frac{m(x)}{x}=4$.

Daher haben wir mit $m(x)=4x$ einen für alle Elemente x der ersten Zahlenmenge geltenden Zusammenhang gefunden. Es liegt also Proportionalität vor. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem, auf dessen Abszissenachse die x-Werte und auf dessen Ordinatenachse die $m(x)$-Werte abgetragen werden, liegen alle Punkte mit den Koordinaten $(x;m(x))$ auf ein und derselben Geraden, die durch den Schnittpunkt der Koordinatenachse verläuft.

Beispiel 2:

x	11	17	23
$m(x)$	10,65	11,55	12,45
x	27	32	38
$m(x)$	13,05	13,80	14,70

▲1▲ Besteht zwischen x und $m(x)$ in Beispiel 2 Proportionalität? Zeichnet man die Punkte mit den Koordinaten $(x;m(x))$ aus Beispiel 2 in ein Koordinatensystem ein, so ergibt sich, daß alle diese Punkte auf ein und derselben Geraden liegen. Die Gerade verläuft aber nicht durch den Schnittpunkt der Koordinatenachse (siehe Bild 1), es liegt also keine Proportionalität vor.

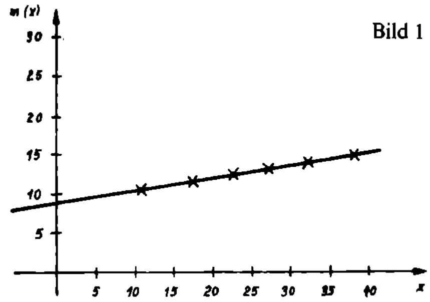


Bild 1

Wir gehen nun zu einem Koordinatensystem über, dessen Achsen sich auf der soeben erhaltenen Geraden schneiden. Das kann beispielsweise dadurch geschehen, daß wir eine Verschiebung vornehmen, die den Punkt $P(0;0)$ in den Punkt $Q(11;10{,}65)$ überführt (siehe Bild 2). In dem neuen Koordinatensystem ist für jeden Punkt die Abszisse um 11 und die Ordinate um 10,65 kleiner als in dem alten Koordinatensystem. Somit ergibt sich die folgende Tabelle:

$x-11$	0	6	12	16
$m(x)-10{,}65$	0	0,90	1,80	2,40
$x-11$	21	27		
$m(x)-10{,}65$	3,15	4,05		

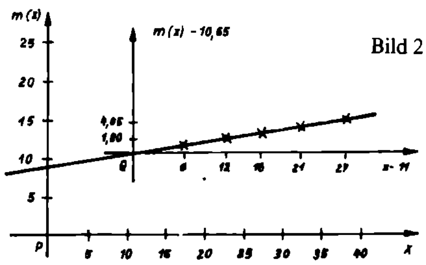


Bild 2

Man erkennt jetzt Proportionalität mit dem Proportionalitätsfaktor 0,15. Es gilt daher $\frac{m(x)-10{,}65}{x-11}=0{,}15$ für $x\in\{17;23;27;32;38\}$, aber nicht für $x=11$. Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit $(x-11)$ ergibt $m(x)-10{,}65=0{,}15(x-11)$, also $m(x)-10{,}65=0{,}15x-1{,}65$, woraus sich $m(x)=0{,}15x+10{,}65-1{,}65$ bzw. $m(x)=0{,}15x+9$ ergibt.

Durch Einsetzen der Paare $[x;m(x)]$ aus der Tabelle im Beispiel 2 stellt man fest, daß $m(x)=0{,}15x+9$ wirklich den Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ beschreibt (auch für $x=11$). Wir nennen einen Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ *linear*, wenn es eine von Null verschiedene Zahl a und eine Zahl b gibt, so daß für alle x gilt $m(x)=ax+b$.

▲2▲ Man überprüfe, ob sich im Beispiel 2 dieselbe Gleichung für den Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ ergibt, wenn man das Koordinatensystem so verschiebt, daß sich die Achsen im Punkt $R(23;12{,}45)$ schneiden.

▲3▲ Man wähle aus der ersten Tabelle von Beispiel 2 irgend zwei voneinander verschiedene Paare $[x_1;m(x_1)]$ und $[x_2;m(x_2)]$ und bilde $\frac{m(x_1)-m(x_2)}{x_1-x_2}$.

Was kann man feststellen?

Was läßt sich nun allgemein über den Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ sagen, wenn es eine Zahl a gibt, so daß für alle x_1 und x_2 mit $x_1 \neq x_2$ $\frac{m(x_1)-m(x_2)}{x_1-x_2}=a$ gilt?

Da die genannte Gleichung für *alle* Zahlen x_1 und x_2 gelten soll, gilt sie auch für $x_2=0$, solange $x_1 \neq 0$ ist. Somit erhalten wir speziell $\frac{m(x_1)-m(0)}{x_1-0}=a$. Daraus ergibt sich durch

Multiplikation mit x_1
$m(x_1)-m(0)=ax_1$, d.h. $m(x_1)=ax_1+m(0)$.
Falls $a\neq 0$ ist, erhalten wir also einen linearen Zusammenhang mit $b=m(0)$. Für $b=0$ tritt als Spezialfall Proportionalität ein.
Bilden wir nun umgekehrt für einen linearen Zusammenhang, der durch die Gleichung $m(x)=ax+b$ mit $a\neq 0$ beschrieben wird, wieder Quotienten von Differenzen, so finden wir.

$$\frac{m(x_1)-m(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_1-x_2}$$
$$=\frac{a(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=a.$$

Diese Quotienten sind also unabhängig von der Wahl der Zahlen x_1 und x_2.
Damit gilt
Satz 1: Ein Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ ist genau dann *linear* (d.h., er läßt sich durch eine Gleichung der Form $m(x)=ax+b$ mit $a\neq 0$ beschreiben), wenn $m(0)=b$ ist und es eine Zahl $a\neq 0$ gibt, so daß für alle Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1\neq x_2$ gilt

$$\frac{m(x_1)-m(x_2)}{x_1-x_2}=a.$$

▲4▲ Besteht in der folgenden Tabelle zwischen x und $m(x)$ ein linearer Zusammenhang?

x	2	3,5	5	17	21
$m(x)$	10,5	21	31,5	115,5	143,5

Nun wollen wir quadratische Zusammenhänge untersuchen.
Wir nennen einen Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ *quadratisch*, wenn es eine von Null verschiedene Zahl a und Zahlen b und c gibt, so daß für alle x gilt $m(x)=ax^2+bx+c$.
Für einen quadratischen Zusammenhang, der durch die Gleichung $m(x)=ax^2+bx+c$ mit $a\neq 0$ beschrieben wird, bilden wir wieder Quotienten von Differenzen und erhalten

$$\frac{m(x_1)-m(x_2)}{x_1-x_2}$$
$$=\frac{ax_1^2+bx_1+c-ax_2^2-bx_2-c}{x_1-x_2}$$
$$=\frac{a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$
$$=\frac{a(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2}+\frac{b(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$
$$=a(x_1+x_2)+b.$$

Gilt nun umgekehrt für einen Zusammenhang $\frac{m(x_1)-m(x_2)}{x_1-x_2}=a(x_1+x_2)+b$ für alle Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1\neq x_2$, so erhalten wir für

$$x_2=0\quad \frac{m(x_1)-m(0)}{x_1-0}=ax_1+b,$$

also $m(x_1)-m(0)=ax_1^2+bx$,
d.h. $m(x_1)=ax_1^2+bx_1+m(0)$ für alle $x_1\neq 0$.
Damit gilt *Satz 2:* Ein Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ ist genau dann *quadratisch* (d.h. er läßt sich durch eine Gleichung der Form $m(x)=ax^2+bx+c$ mit $a\neq 0$ beschrieben), wenn $m(0)=c$ ist und es Zahlen $a\neq 0$ und b gibt, so daß für alle Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1\neq x_2$ gilt

$$\frac{m(x_1)-m(x_2)}{x_1-x_2}=a(x_1+x_2)+b.$$

Beispiel 3: Wir wollen feststellen, welcher Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ durch folgende Tabelle beschrieben wird:

x	0	1	3	−1	−3
$m(x)$	3	6	18	2	6

Dazu bilden wir einige Quotienten von Differenzen:

$$\frac{m(1)-m(0)}{1-0}=3;\quad \frac{m(3)-m(1)}{3-1}=6;$$
$$\frac{m(3)-m(0)}{3-0}=5;\quad \frac{m(-1)-m(1)}{-1-1}=2.$$

Wegen Satz 1 steht fest, daß kein linearer Zusammenhang besteht, denn die Quotienten sind nicht alle gleich. Mit Hilfe von Satz 2 stellen wir fest, ob ein quadratischer Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ vorliegt. Dazu prüfen wir, ob zwischen x_1+x_2 und $\frac{m(x_1)-m(x_2)}{x_1-x_2}$ ein linearer Zusammenhang besteht. Für die eben gebildeten Quotienten ergibt sich folgende Tabelle:

x_1+x_2	1	4	3	0
$\frac{m(x_1)-m(x_2)}{x_1-x_2}$	3	6	5	2

Bilden wir aus dieser Tabelle einige Quotienten von Differenzen, z.B. $\frac{6-3}{4-1}$, $\frac{5-3}{3-1}$, $\frac{2-3}{0-1}$, $\frac{5-6}{3-4}$, so ergibt sich immer 1.
Es liegt also die Vermutung nahe, daß gemäß Satz 1 ein linearer Zusammenhang zwischen x_1+x_2 und $\frac{m(x_1)-m(x_2)}{x_1-x_2}$ mit $a=1$ und $b=2$ besteht.
Wegen $m(0)=3$ würde sich dann $m(x)=x^2+2x+3$ ergeben. Da diese Gleichung – wie man leicht überprüft – für *alle* gegebenen Paare $[x;m(x)]$ gilt, haben wir einen quadratischen Zusammenhang gefunden.

▲5▲ Kann man in folgender Tabelle mit Hilfe von Satz 1 oder Satz 2 einen Zusammenhang zwischen x und $m(x)$ erkennen?

x	1	2,5	5	4	−3	0
$m(x)$	1	11,5	49	31	17	−1

Unser Verfahren funktioniert auch noch für einige Zusammenhänge, die sich durch Gleichungen der Form $m(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$) beschreiben lassen. Untersucht solche Zusammenhänge selbständig! *W. Schulz*

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Im Heft 2/1980 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 6 ■1973 Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die gleich dem Vierzigfachen ihrer Quersumme sind.

Im Heft 6/1980 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Eine dreistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $100a+10b+c$ mit $1\leqq a\leqq 9$, $0\leqq b\leqq 9$ und $0\leqq c\leqq 9$; ihre Quersumme beträgt $a+b+c$. Nun gilt

$$100a+10b+c=40(a+b+c),$$
$$100a+10b+c=40a+40b+40c,$$
$$30b=60a-30c-9c,$$
$$b=2a-c-\frac{3c}{10}.$$

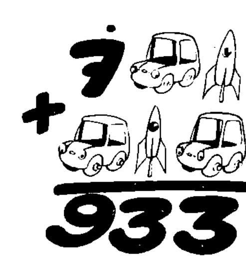
Nur für $c=0$, also für $b=2a$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Es gibt genau vier Zahlen mit der geforderten Eigenschaft; sie lauten 120, 240, 360, 480.
Wir stellen nun die Lösung von *Thomas Schleiff* aus Halle vor, der Schüler der Klasse 6 der POS Kröllwitz ist; Thomas löste diese Aufgabe wie folgt:
Auf Grund der Aufgabenstellung gilt

$$100a+10b+c=40(a+b+c).$$

Beide Seiten der Gleichung sind durch 40, also auch durch 10 teilbar. Wegen $c<10$ folgt daraus weiter $c=0$. Somit gilt

$$100a+10b=40(a+b),$$
$$100a+10b=40a+40b,$$
$$60a=30b,\text{ also } b=2a.$$

Für $a=1$ gilt $b=2$, für $a=2$ gilt $b=4$, für $a=3$ gilt $b=6$, für $a=4$ gilt $b=8$. Da $b<10$ gilt, sind größere Werte für a nicht zulässig.
Die gesuchten Zahlen lauten 120, 240, 360 und 480.



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1983

Mathematik

Ma 5 ▪2266 Eine Familie besteht aus fünf Personen, und zwar dem Vater, der Mutter und den drei Söhnen. Der jüngste Sohn ist 24 Jahre, der zweite Sohn 22 Jahre, der älteste Sohn 20 Jahre jünger als die Mutter. Der Vater hingegen ist sechs Jahre älter als die Mutter. Die Familienmitglieder sind zusammen 80 Jahre alt. Wie alt ist jedes Familienmitglied?

Schüler Olaf Karger, Wittenberge

Ma 5 ▪2267 Von fünf befreundeten Familien mit den Nachnamen Kunz, Schulz, Ludwig, Müller und Richter wissen wir folgendes:

a) Jede dieser fünf Familien hat mindestens ein Kind und höchstens vier Kinder.

b) Die Familie Schulz hat mehr Kinder als die Familie Kunz.

c) Die Familie Richter hat die meisten Kinder.

d) Die Familie Müller hat genausoviel Kinder wie die Familie Kunz.

e) Die Familie Kunz hat mehr Kinder als die Familie Ludwig.

f) Diese fünf Familien haben zusammen 12 Kinder.

Wie viele Kinder gehören zu jeder dieser fünf Familien?

Schüler V. Groh, Dresden

Ma 5 ▪2268 Karl hat ein Buch, das mehr als 160 Seiten, aber weniger als 170 Seiten umfaßt, in genau drei Tagen durchgelesen. Weil seine Spannung von Seite zu Seite wuchs, schaffte Karl am zweiten Tag dreimal soviel Seiten, am dritten Tag sogar fünfmal soviel Seiten wie am ersten Tag. Wieviel Seiten umfaßt dieses Buch?

Schülerin Ute Richter, Karl-Marx-Stadt

Ma 5 ▪2269 Großvater, Vater und Sohn sind zusammen 80 Jahre alt. Der Vater ist fünfmal so alt wie der Sohn, der Großvater doppelt so alt wie der Vater. Wie alt ist jede dieser drei Personen?

Schülerin Claudia Pleyer, Eisenach

Ma 5 ▪2270 Frau Meier wird nach dem Lebensalter ihrer drei Kinder gefragt. Sie antwortet scherzhaft: „Wenn man die (ganzen) Zahlen, die das Alter meiner Kinder angeben, miteinander multipliziert, so erhält man als Ergebnis 24. Wenn man diese Zahlen aber addiert, so erhält man meine Hausnummer, die eine Primzahl ist." Wie alt sind die Kinder von Frau Meier? Wie lautet ihre Hausnummer?

Schülerin Heike Riehle, Gottleuba

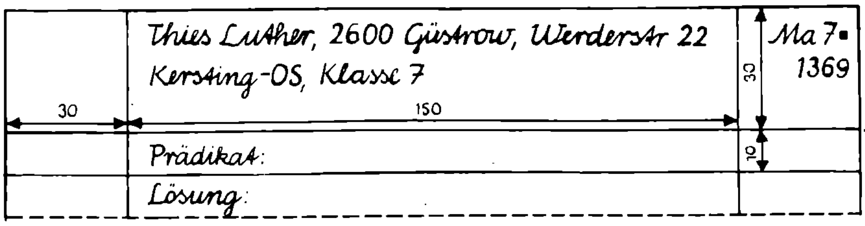
Ma 5 ▪2271 Wie kann man aus einem Brunnen genau 6 Liter Wasser abfüllen, wenn als Meßgefäße nur zwei Eimer vorhanden sind, einer mit einem Fassungsvermögen von 4 Litern, der andere von 9 Litern?

Ma 6 ▪2272 Katrin fordert ihre Mitschüler auf: „Denkt euch jeder eine beliebige von Null verschiedene natürliche Zahl! Schreibt nun alle natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich der gedachten auf! Streicht nun alle geraden Zahlen! Bei jedem von euch bleibt nicht weniger als die Hälfte aller zuvor notierten Zahlen übrig." Stimmt Katrins Aussage? Begründe deine Behauptung!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ▪2273 Welche geordneten Zahlentripel $[a, b, c]$ aus natürlichen Zahlen a, b und c erfüllen zugleich die Gleichung $a \cdot b + 8 = c$ und die Ungleichung $a + b + c < 10$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

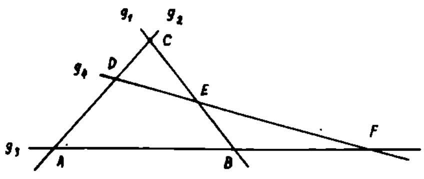
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1982/83 läuft von Heft 5/1982 bis Heft 2/1983. Zwischen dem 1. und 10. September 1983 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/83 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1982/83 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ■2274 Vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 schneiden einander, wie aus dem Bild ersichtlich, in sechs Punkten A, B, C, D, E, F. Bekannt sind folgende Winkelgrößen:



$\sphericalangle CAB=45°$, $\sphericalangle ACB=35°$, $\sphericalangle BFE=20°$. Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle CEF$ zu bestimmen; die Lösung ist zu begründen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■2275 Berechne das Produkt

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)!$$

Sch.

Ma 6 ■2276 Bei einem Handballspiel erzielte Christian weniger Tore als Dieter. Axel und Bruno erzielten zusammen genau so viele Tore, wie Christian und Dieter zusammen Bälle ins gegnerische Tor brachten. Bruno und Dieter erzielten zusammen nicht ganz so viele Tore, wie Axel und Christian zusammen verbuchen konnten. Wer dieser vier Jungen erzielte die wenigsten, wer die meisten Tore?

Sch.

Ma 7 ■2277 Klaus, Jens und Gisela sind Geschwister. Vor drei Jahren war Klaus dreimal so alt wie Gisela und Jens doppelt so alt wie Gisela. Wie alt sind die Geschwister gegenwärtig, wenn die Summe aus den Zahlen ihrer Lebensalter 27 beträgt?

Schülerin Karin Graf, Plauen (Kl. 7)

Ma 7 ■2278 Zeichne einen spitzen Winkel mit seinem Scheitelpunkt S und den Schenkeln s_1 und s_2! Lege im Innern des Winkels zwei Punkte A und B so fest, daß die Gerade AB zu keinem der beiden Schenkel parallel ist und nicht durch S geht!
Konstruiere auf s_1 einen Punkt C und auf s_2 einen Punkt D so, daß der abgeschlossene Streckenzug $ABCD$ ein Parallelogramm ist!

Sch.

Ma 7 ■2279 Welche geordneten Paare $[x,y]$ natürlicher Zahlen x und y erfüllen die Gleichung $x^2+xy+y^2=7$?

Sch.

Ma 7 ■2280 Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleich der vierten Potenz ihrer Quersumme sind!

Sch.

Ma 8 ■2281 Man denke sich die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, daß eine Zahl z der Form
$z=12345678910111213 14\ldots9899100$
entsteht. Durch welche der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 ist z teilbar, durch welche nicht?

Schüler Thomas Kayser, Eisleben (Kl. 8)

Ma 8 ■2282 Es sei z eine dreistellige natürliche Zahl mit drei gleichen Grundziffern. Man beweise,
a) daß der Quotient aus z und ihrer Quersumme immer 37 beträgt und
b) daß die Quersumme von z stets ein Vielfaches von 3 und genau dann ein Vielfaches von 6 ist, wenn z eine gerade Zahl ist.

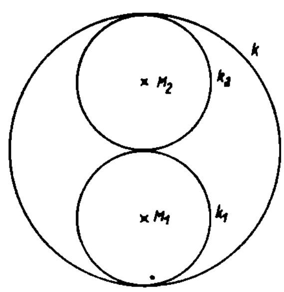
Schüler Thomas Kayser, Eisleben (Kl. 8)

Ma 8 ■2283 Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$; die Größen der Innenwinkel seien mit α, β, γ, δ bezeichnet.
a) Welches spezielle Viereck liegt vor, wenn β doppelt so groß, γ dreimal so groß und δ viermal so groß ist wie α?
b) Welches spezielle Viereck liegt vor, wenn β doppelt so groß, γ viermal so groß und δ dreimal so groß wie α ist?

OStR K. Lehmann, VLdV, Berlin

Ma 8 ■2284 In einen Kreis k sind zwei Kreise k_1, k_2 mit gleichlangen Radien so eingezeichnet, daß sie sich gegenseitig und den größeren Kreis k berühren. Wieviel Prozent des Flächeninhalts des Kreises k nehmen die Flächeninhalte der Kreise k_1 und k_2 zusammen ein?

Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar



Ma 9 ■2285 Gibt es reelle Zahlen x, für die gilt $(x+a)^{-1}=x^{-1}+a^{-1}$
mit $a.\ x\neq 0$ und $x\neq -a$?

Sven Saar, Mühlhausen (Kl. 11)

Ma 9 ■2286 Gegeben sei die Gleichung $x^2-2x+k=0$, $(x\in P)$. Man ermittle alle reellen Zahlen k, so daß die eine Lösung der Gleichung gleich dem Quadrat der anderen Lösung ist!

Andreas Israel, Karl-Marx-Stadt (Kl. 10)

Ma 9 ■2287 Welche geordneten Paare (a,b) natürlicher Zahlen a und b erfüllen die Gleichung $a^4-b^4=65$?

Sch.

Ma 9 ■2288 In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sei c die Länge der Basis $\overline{AB}$ und $a=5\,\text{cm}$ die Länge von $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$.
D sei ein beliebiger Punkt der Basis. Die Abstände des Punktes D von den Schenkeln des Dreiecks seien mit e bzw. f bezeichnet. Es gelte $e+f=4\,\text{cm}$.
a) Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC zu berechnen.
b) Es ist zu beweisen, daß $e+f$ für alle Punkte D, die auf $\overline{AB}$ liegen, konstant ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ■2289 „Mein Bruder ist im Jahre $x\cdot y$ geboren. Im Jahre x^2 wird er x Jahre und im Jahre $(x+1)\cdot y$ wird er y Jahre alt sein. Wie alt war mein Bruder im Jahre x^2+y^2-xy?"

Das schrieb und fragte Schüler Ints Intricsons aus Riga (Sowjetunion), (Kl. 7)

Ma 10/12 ■2290 Gegeben sei ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c. Die Längen der Diagonalen seiner Seitenflächen seien $d_1=5\,\text{cm}$, $d_2=\sqrt{34}\,\text{cm}$, $d_3=\sqrt{41}\,\text{cm}$. Man berechne das Volumen dieses Quaders!

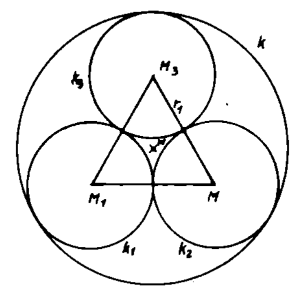
Sven Saar, Mühlhausen (Kl. 11)

Ma 10/12 ■2291 Es ist nachzuweisen, daß für jedes Dreieck ABC die Beziehung $9\varsigma=h_a+h_b+h_c$ zwischen der Länge des Inkreisradius ς und den Längen der Höhen h_a, h_b und h_c gilt!

Sch.

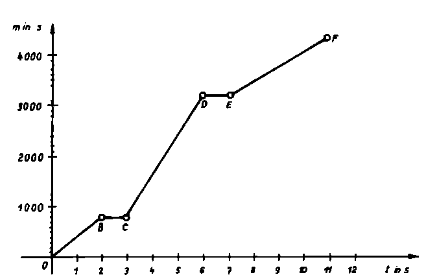
Ma 10/12 ■2292 In einem Kreis k sind drei gleich große Kreise k_1, k_2, k_3 so eingezeichnet, daß sie sich gegenseitig und den größeren Kreis berühren. Welchen Anteil der Fläche des größeren Kreises nehmen die Flächen der drei eingezeichneten Kreise ein?

Dipl.-Landwirt H. Boettcher, Weimar



Physik

Ph 6 ■126 Das folgende Weg-Zeit-Diagramm zeigt grafisch die Durchschnittsgeschwindigkeiten eines Omnibusses zwischen einigen Haltestellen. Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ zwischen den Strecken $\overline{OB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{OD}$, $\overline{CF}$ und $\overline{OF}$ in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, indem du die erforderlichen Werte dem Diagramm entnimmst!



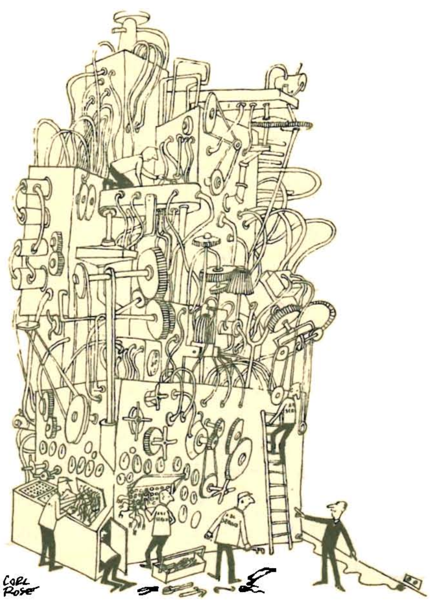
Ph 7 ■127 Die zulässigen Achslasten für den Škoda sind vorn 515 kp ($\approx$ 5150 N) und hinten 665 kp ($\approx$ 6650 N). Die Entfernung zwischen den beiden Achsen beträgt 2,40 m. Wie groß ist die Entfernung des Punktes von den Achsen, über dem sich der Schwerpunkt befindet?

Ph 8 ■128 Eine alte Münze habe eine Masse von 13 Gramm und einen Durchmesser von 31 mm. Berechne ihre Dicke, wenn die Münze aus Aluminiumbronze besteht!
(Aluminiumbronze besteht aus 94% Kupfer und 6% Aluminium.)

Schüler Olaf Parchmann, Blankenheim

Ph 9 ■129 In einem Stahlwerk wird zum Verladen von Stahlblöcken ein Kran mit einem Lasthebemagneten eingesetzt. Dieser Magnet hat eine maximale Haftkraft von $F_{max} = 60\,000$ N.
Zu wieviel Prozent wird die maximale Haftkraft des Magneten höchstens ausgenutzt, wenn damit ein Stahlblock mit einer Masse von $m = 4000$ kg in einer Zeit von $t = 7{,}5$ Sekunden auf eine Höhe von $h = 3{,}5$ Meter gehoben wird und die konstante Hubgeschwindigkeit $v_k = 30\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$ beträgt?
Beachten Sie: Zum Erreichen der konstanten Hubgeschwindigkeit muß die Last erst auf v_k beschleunigt werden!

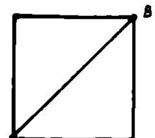
Ing. A. Körner, Leipzig



Ohne Worte

Carl Rose, aus: The New Yorker

Ph 10/12 ■130 Ein Draht aus gleicher Stärke und gleichem Material habe einen Widerstand von 1 Ω. Er werde zu einem Quadrat mit einer Diagonalen gebogen und an den



Punkten A und B zusammengelötet, wie es das Bild zeigt. Berechnen Sie den Gesamtwiderstand, der zwischen den Punkten A und B besteht!

Chemie

Ch 7 ■101 Zur Herstellung von Portlandzement wird ein Rohmehl, welches folgende Zusammensetzung besitzt, eingesetzt.

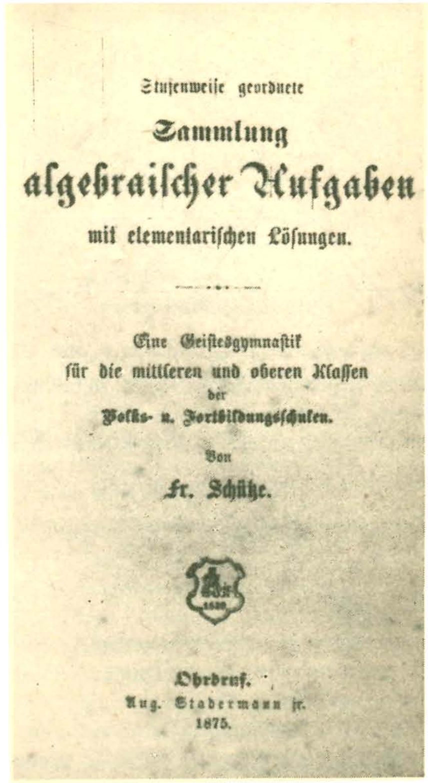
66,2% Kalziumoxid
20,6% Siliziumoxid
6,6% Aluminiumoxid
3,1% Eisen(III)-oxid

Wieviel Kilogramm von jedem Bestandteil sind in 720 kg des Rohmehls enthalten?

Ch 8 ■102 Eine Kalziumhydroxid-Lösung ist gesättigt, wenn sie bei 20 °C 1,65 g Kalziumhydroxid je Liter Lösung enthält. (Da die Masse an gelöster Substanz gering ist, soll ein Liter Lösung gleich 1000 g gesetzt werden.)
a) Wieviel %ig ist die gesättigte Kalziumhydroxid-Lösung?
b) Wieviel Gramm dieser Lösung müssen zur Reaktion gebracht werden, damit 24 g 2%ige Kalziumchlorid-Lösung entstehen?

Ch 9 ■103 Zur Zersetzung von Kalziumkarbonat sind bei 900 °C 165,3 kJ/mol und von Magnesiumkarbonat bei 600 °C 105 kJ/mol notwendig. Berechnen Sie die Wärmemenge in Kilojoule, die zur Zersetzung von 2 kg Dolomit ($CaCO_3 \cdot MgCO_3$) aufgebracht werden muß!

Ch 10/12 ■104
Zur Bildung der Kalziumaluminate
$3CaO \cdot Al_2O_3$ und $12CaO \cdot 7Al_2O_3$
müssen Kalziumkarbonat und Aluminiumoxid zur Reaktion gebracht werden. Setzt man 419,1 g Kalziumkarbonat und 172,9 g Aluminiumoxid ein, reagieren diese Stoffe vollständig miteinander. Wieviel Kilogramm der Kalziumaluminate werden gebildet?



Stufenweise geordnete
Sammlung
algebraischer Aufgaben
mit elementarischen Lösungen.

Eine Geistesgymnastik
für die mittleren und oberen Klassen
der
Volks- u. Fortbildungsschulen.

Von
Fr. Schütze.

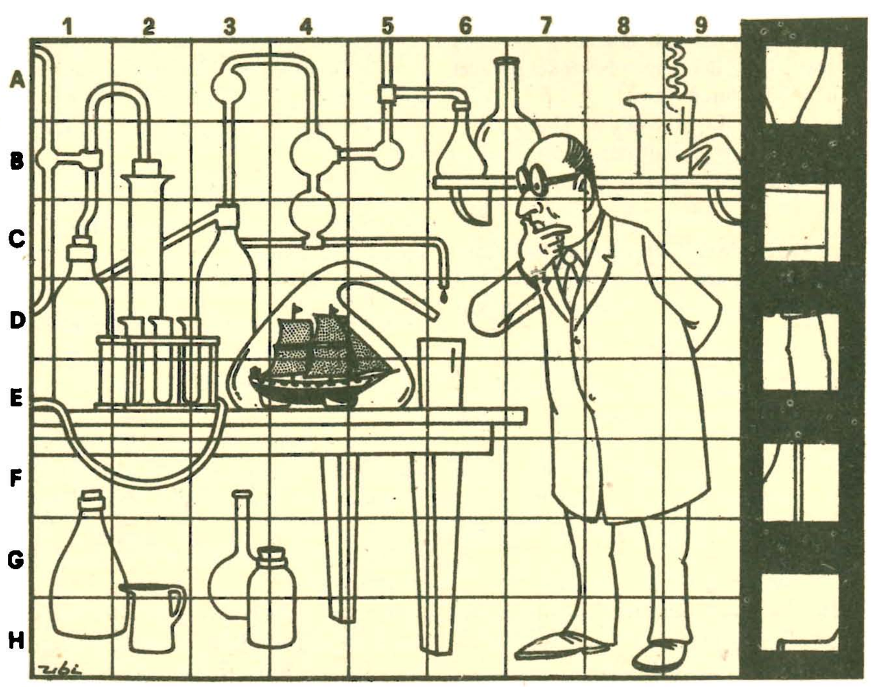
Ohrdruf.
Aug. Stadermann jr.
1875.

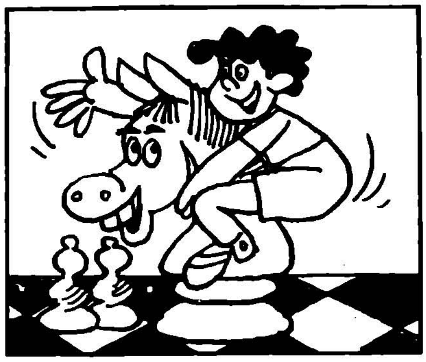
Auf Seite 132 veröffentlichen wir 16 Aufgaben aus diesem unterhaltsamen Rechenbuch aus dem Jahre 1875.
Viel Freude und Erfolg beim Knobeln!

Gut beobachten!

Die auf der rechten Seite des Bildes gezeigten 5 Bilddetails sind irgendwo auf dem großen Bild wiederzufinden, in der gleichen Stellung. Mit Hilfe von Koordinaten kann man ihren Platz genau bestimmen.

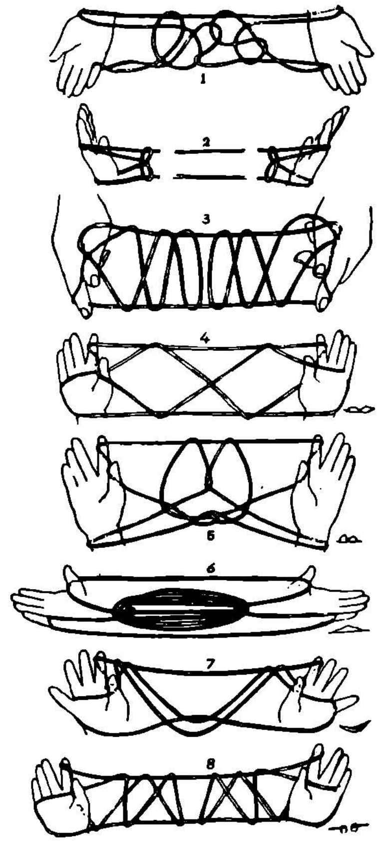
▼

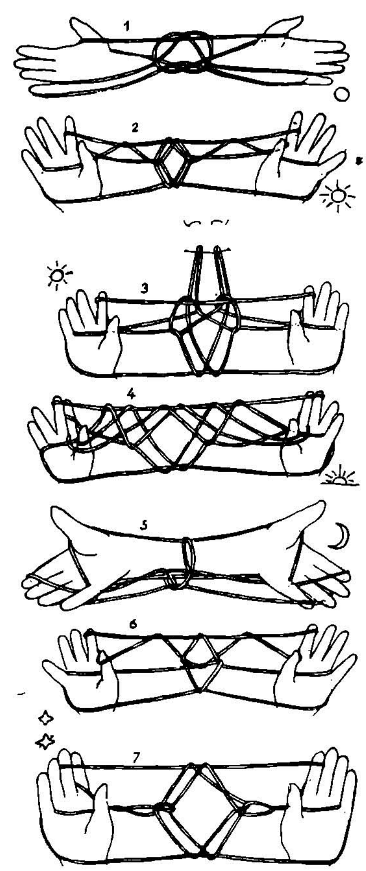




Zum Titelbild

Im Jahre 1902 schrieb W. Roth in North Queensland ein Buch über Fadenspiele. Anbei einige Beispiele.





Квадрат из фишек

▲1▲ Фишки с номерами от 1 до 9 включительно выложены в ряд в порядке их возрастания. Какое наименьшее количество фишек нужно убрать, чтобы вновь образованное число стало квадратом целого числа?
Какие фишки убираются при этом?

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)

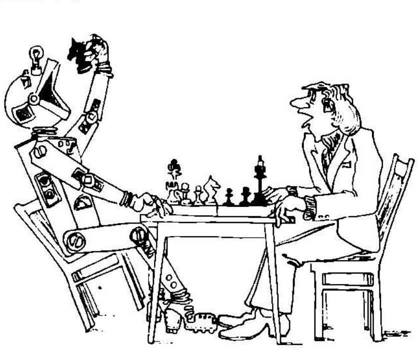
What is It?

▲2▲ Given an equilateral triangle, make a fold on each midline (line joining midpoints of two sides), bringing all vertices together at one point.
What geometric figure results?

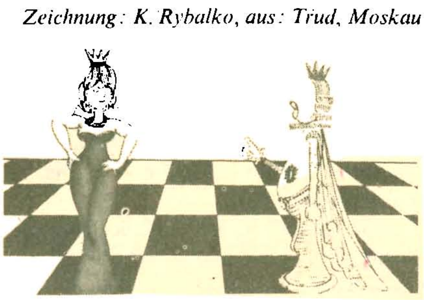
Novelle façade

▲3▲ On veut blanchir la façade d'une école. Cette façade a 18 m de longuer et 12 m de hauteur; on y voit 12 fenêtres et une porte. Les dimensions, en m, de chaque fenêtre sont 2,5 et 1,5; celles de la porte 3 et 2. Calcule l'aire en m^2 de la surface à blanchir.

H. Begander/Dr. C.-P. Helmholz/J. Lehmann

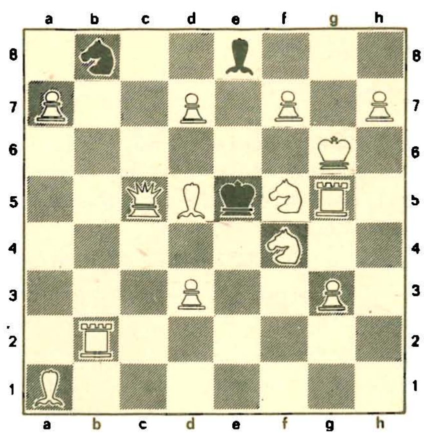


Zeichnung: K. Rybalko, aus: Trud, Moskau



Matt dem König!

Nachdem die Gangart von König, Dame, Springer und Bauer schon erklärt wurden, nun noch die Zugweise der restlichen Figuren des Schachspiels – Turm und Läufer.
Der Turm bewegt sich stets vertikal (Linien) oder horizontal (Reihen). Dame und Türme bezeichnet man auch als Schwerfiguren. Hingegen sind Springer und Läufer auf Grund ihrer schwächeren Wirkungskraft die Leichtfiguren.



Der Läufer zieht nur auf den Diagonalen des Schachbretts, vorwärts und rückwärts. Jede Partei (Weiß und Schwarz) verfügt in der Ausgangsposition über zwei Läufer, der eine bewegt sich nur auf weißen Diagonalen, der andere nur auf schwarzen.
In der abgebildeten Diagrammstellung kann Weiß den schwarzen König in einem Zug mattsetzen. Wie viele Matts sind hierbei u. a. durch Abzugsschach, Damenangriffe, Attacken des Bauern d3 und Verwandlungen der Bauern a7, d7, f7 und h7 in verschiedene Figuren möglich?
Anmerkung: Zieht man eine Figur, die bisher den Wirkungsbereich einer zweiten Figur auf den feindlichen König nichtig machte und ergibt sich daraus ein Schachgebot, so liegt ein Abzugsschach vor!

Ich warne Sie, meine Dame! Wenn Sie sich ungehörig benehmen, werde ich Sie opfern!
aus: Urania

Gute Grundkenntnisse gesucht

Sieben Geometrieaufgaben auf einen Streich

Wir betrachten Körper

▲1▲ Ergänze die Tabelle!

Quaderlänge (cm)	5			
Quaderbreite (cm)	6	7		
Quaderhöhe (cm)				
Quadervolumen (cm^3)	240	140	100	5

(Die Zahlenwerte der Kantenlängen sollen natürliche Zahlen sein.)

▲2▲ Wieviel Quader unterschiedlicher Form lassen sich aus a) 36, b) 7, c) 25 Einheitswürfeln zusammensetzen?

▲3▲ In einer Kiste mit den Kantenlängen 24 cm, 36 cm, 48 cm sollen Päckchen mit den Kantenlängen
a) 4 cm, 12 cm, 16 cm;
b) 5 cm, 7 cm, 12 cm verpackt werden.
Wieviel Päckchen passen höchstens in die Kiste?

▲4▲ a) Das Volumen einer (quaderförmigen) Schachtel ist dreimal so groß wie das einer anderen Schachtel. Beide haben die gleiche Länge und die gleiche Breite.
Was weißt du über die Höhen der Schachteln?
b) Die Länge einer Schachtel ist doppelt so groß wie die Länge einer anderen Schachtel. Beide haben die gleiche Breite und die gleiche Höhe.
Was weißt du über die Rauminhalte der Schachteln?
c) Länge, Breite und Höhe einer Schachtel sind jeweils doppelt so groß wie Länge, Breite und Höhe einer anderen Schachtel. Was weißt du über die Rauminhalte der beiden Schachteln?

▲5▲ Ermittle die Kantenlänge eines Würfels, dessen Volumen sich von dem eines Quaders mit den Seitenlängen
a) 2 cm, 4 cm, 8 cm;
b) 2 cm, 2 cm, 7 cm möglichst wenig unterscheidet!
Der Zahlenwert (die Maßzahl) der Kantenlänge soll eine natürliche Zahl sein.

▲6▲ Bei einem Quader, dessen Volumen 200 cm^3 beträgt, haben zwei gegenüberliegende Flächen zusammen einen Flächeninhalt von 100 cm^2.
Wie groß ist deren Abstand?

▲7▲ Aus einem rechteckigen Blech mit den Seitenlängen 12 cm und 8 cm wird an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge
a) 1 cm, b) 2 cm, c) 3 cm, d) 4 cm
herausgeschnitten und der Rest zu einem oben offenen Kästchen gebogen. Ermittle dessen Volumen! *M. Rehm*

Geistesgymnastik

Wir stellen unseren *alpha*-Lesern einige Aufgaben vor, die dem Buch *Sammlung algebraischer Aufgaben* von *Fr. Schütze* aus dem Jahre 1875 entnommen wurden. Das Lösen dieser Aufgaben möge zum Wiederholen und Auffrischen von Grundkenntnissen im Lösen von Gleichungen und Sachaufgaben dienen. (Siehe Bild auf Seite 130 rechts oben.)

Aufgaben · Klasse 5

▲1▲ Jemand kauft eine Mandel Leinwand, von der das Schock 48 M kostet. Er gab dafür 7,50 M in bar und eine fette Gans. Welcher Preis wurde für die Gans angerechnet? (1 Mandel sind 15 Stück, 1 Schock sind 4 Mandeln.)

▲2▲ Wenn man von einer Zahl 30 subtrahiert, so ist die Differenz gleich der Summe aus 28 und 32.
Wie lautet diese Zahl?

▲3▲ Eine Bäuerin brachte Eier auf den Markt zum Verkauf. Nachdem sie durch Unvorsichtigkeit elf Eier zerbrochen hatte, konnte sie die übrigen Eier noch zum Gesamtpreis von 1,70 M verkaufen.
Wieviel Eier hatte sie anfangs, wenn sie zwei Eier für 10 Pf verkaufte?

▲4▲ Die Zahl 45 ist so in fünf Summanden zu zerlegen, daß jeder folgende Summand stets um 1 größer ist als der vorhergehende Summand.
Um welche fünf Summanden handelt es sich?

Klasse 6

▲1▲ Subtrahiert man vom Vierfachen einer Zahl 10, so erhält man das Sechsfache von 11. Um welche Zahl handelt es sich?

▲2▲ Nenne eine Zahl, deren achter Teil um 42 kleiner ist als die Zahl selbst!

▲3▲ Karl hatte acht Walnüsse. Würde Karl noch den fünften Teil der Anzahl der Walnüsse, die Heinz hat, erhalten, so würde Karl eine Mandel Walnüsse besitzen.
Wieviel Walnüsse hatte Heinz?
(1 Mandel sind 15 Stück.)

▲4▲ Addiert man zum Zweifachen einer Zahl 64, so erhält man das Sechsfache dieser Zahl.
Um welche Zahl handelt es sich?

Klasse 7

▲1▲ Beim Lichten eines Waldes wurden insgesamt 357 Bäume gefällt, und zwar $\frac{1}{3}$mal soviel Buchen wie Tannen, $\frac{3}{5}$mal soviel Eichen wie Buchen, $\frac{2}{3}$mal soviel Lärchen wie Eichen, $\frac{1}{4}$mal soviel Ahorne wie Lärchen.
Wie viele Bäume jeder Art wurden gefällt?

▲2▲ Jemand verwendete den dritten Teil seines Jahreseinkommens für Ernährung und Miete, den sechsten Teil für Kleidung, den achten Teil für unvorhergesehene Ausgaben. Ihm verblieben danach noch 480 M Ersparnisse. Auf wieviel Mark belief sich das Jahreseinkommen?

▲3▲ Drei Zahlen, deren Summe 35 beträgt, verhalten sich wie 2 : 3 : 5.
Um welche Zahlen handelt es sich?

▲4▲ Meister Roth ist gegenwärtig siebenmal so alt wie sein Sohn Karl. Der Altersunterschied zwischen beiden beträgt 36 Jahre. Wie alt ist jeder von ihnen?

Klasse 8

▲1▲ Für eine mehrklassige Schule wurden zusammen 300 Lesebücher und Fibeln für 180 M gekauft. Ein Lesebuch kostet 0,80 M, eine Fibel 0,50 M. Wie viele Lesebücher bzw. Fibeln wurden gekauft?

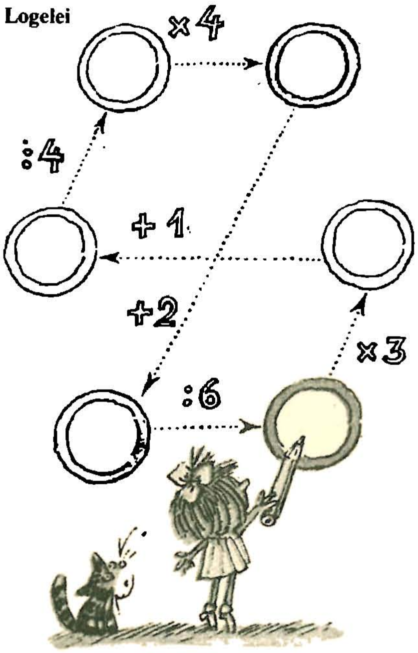
▲2▲ Eine Buchhandlung verkaufte von den vorhandenen Exemplaren eines neu erschienenen Romans am ersten Tag den achten Teil und 10 Stück, am zweiten Tag vom Restbestand die Hälfte und 15 Stück. Es verblieben danach noch 50 Exemplare.
Wieviel Exemplare wurden anfangs zum Verkauf angeboten?

▲3▲ Jemand hatte sich verpflichtet, ein Darlehen in vier Terminen zu tilgen. Beim ersten Termin wurden der vierte Teil der Schuld und noch 50 M getilgt. Beim zweiten Termin wurden von der Restschuld der fünfte Teil und noch 60 M getilgt. Beim dritten Termin wurden von der nun verbliebenen Restschuld die Hälfte und noch 50 M getilgt. Mit dem vierten Termin wurden durch den Restbetrag von 200 M die Schulden vollständig getilgt.
Wie hoch belief sich das Darlehen?

▲4▲ Ein Fleischer kaufte fünf Kälber mit unterschiedlichem Gewicht für insgesamt 100 M. Der Preis jedes Kalbes richtete sich nach der Rangfolge ihres Gewichtes. Jedes schwerere Tier kostete 2 M mehr als das zunächst leichtere Tier.
Wieviel Mark kostete das leichteste Tier, wenn alle 5 Tiere ein unterschiedliches Gewicht haben?

Knobeleien am laufenden Band

Logelei



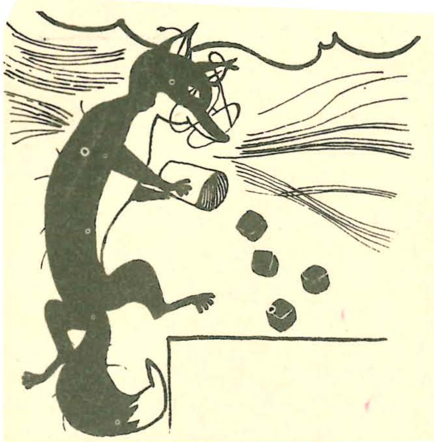
Trage in die Kreise Zahlen so ein, daß die in Pfeilrichtung folgende Zahl aus der vorhergehenden mit Hilfe der Rechenoperation. die neben den Pfeilen steht, erhalten wird.

Quant, Moskau

Würfelei

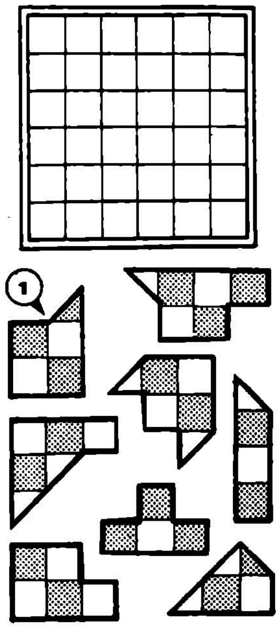
Vier Spielwürfel stehen aufeinander. Die oberste Fläche des obersten Würfels zeigt 3 Augen. Wie groß ist die Summe der Augen aller verdeckten Würfelflächen?

technikus, Berlin



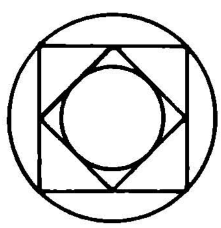
Legespiel

Zeichne die acht Flächen nach, und lege sie auf das Quadrat so, daß sie dessen Fläche vollkommen bedecken! *delta, Warschau*



In einem Zug

Kisdobos, Budapest

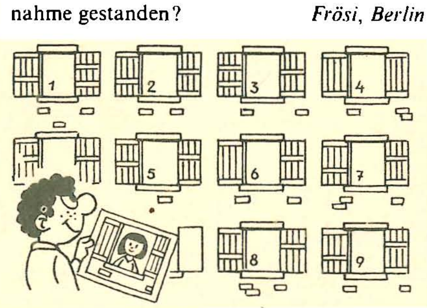


Vexierbild

Katrin hat einen Hund bei sich. Wißt ihr, wo er steckt? *NBI (NUK)*

Augen auf!

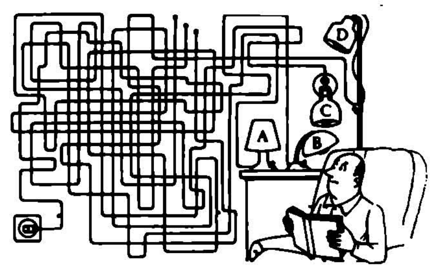
An welchem Fenster hat Karin bei der Aufnahme gestanden? *Frösi, Berlin*



Vier Lampen und nur ein Kontakt

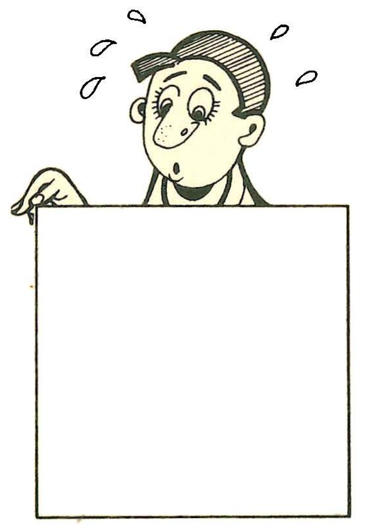
Von den vier Lampen *A*, *B*, *C* und *D* ist nur eine mit der Steckdose verbunden (siehe Bild). Welche ist es?
Versuche es herauszufinden, ohne die Linien mit dem Bleistift nachzuziehen!

Urania Leipzig · Jena · Berlin



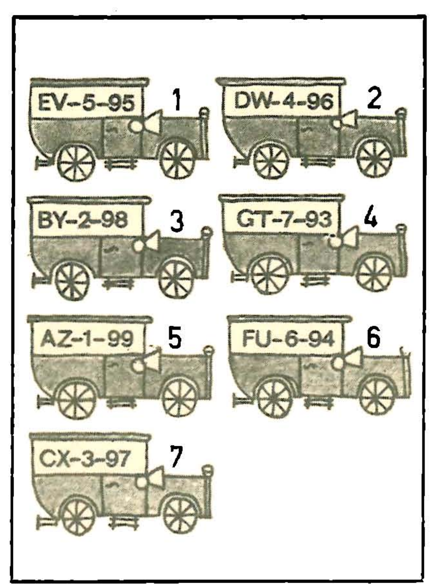
Streckenteilung

Zeichne vier Strecken so ein (von einer Seite des Quadrats zur gegenüberliegenden), daß elf Flächen entstehen! *Füles, Budapest*



Park-Prüfung

Ordne die Autos nach der logischen Reihenfolge! *Für Dich*



Ernst Abbe

Er wußte, was er der Technik zutrauen konnte

„Man muß wissen, welche Mittel die Technik zur Verfügung hat, um das zu erreichen, was die Theorie als möglich erweist, was man der Technik zutrauen kann und was nicht." Dieser Anspruch an den Naturwissenschaftler stammt von Ernst Abbe.

Der hervorragende Wissenschaftler, der Begründer des wissenschaftlichen Gerätebaus und Bahnbrecher auf dem Gebiet der Optik war dank seiner gewaltigen Berechnungen in der Lage, rein theoretisch die kompliziertesten optischen Instrumente aller Art zu konstruieren: Fotoobjektive, die mit ihrer großen Lichtstärke und Bildschärfe eine neue Epoche der Fotografie einleiteten, Refraktometer, Reflektometer, Spektrometer, Fotometer, Fokometer und viele andere Meßgeräte. Ohne diese Instrumente und ohne die von Abbe erkannten Gesetze der Strahlenoptik könnte heute keine Klinik, kein chemisches oder technisches Institut, kein Laboratorium der Industrie, kein Bergwerk arbeiten, wären mikroelektronische und Weltraumforschungen undenkbar.

Ernst Abbe war am 23. Januar 1840 als einziger Sohn eines Spinnereiarbeiters geboren worden. Durch größte Sparsamkeit der Eltern konnte er die Realschule besuchen und 1857 mit dem Studium der Mathematik und der Physik in Jena beginnen, bei dem er sich vor allem mit den Erkenntnissen auf dem Gebiet der Optik vertraut machte.

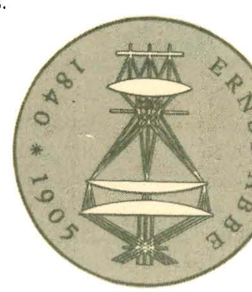
1857 konstruierte er ein kleines Taschen-Trichinenmikroskop mit etwa 50facher Vergrößerung. Der einfache Apparat war die erste seiner vielen Neuschöpfungen auf dem Gebiet der instrumentellen Optik. Als Ernst Abbe 1863 von Studium und Assistententätigkeit an der Sternwarte aus Göttingen nach Jena zurückgekehrt war, begann die Blütezeit seiner wissenschaftlichen Entwicklung. In Zusammenarbeit mit Carl Zeiss widmete er sich mehr als zehn Jahre der Verbesserung von Herstellung und Eigenschaften der Mikroskope.

1876 übernahm der Forscher die Teilhaberschaft an der optischen Werkstatt von Zeiss. Auf der Suche nach geeigneten optischen Gläsern begann Ende der 70er Jahre des vorigen Jahrhunderts seine Zusammenarbeit mit dem jungen Chemiker Dr. Otto Schott. In dem glastechnischen Laboratorium „Schott und Genossen" wurden Gläser nach Abbes Plänen hergestellt, die eine neue Ära auf dem Gebiet der Optik einleiten.

Drei Jahre, nachdem auf Abbes Kosten der Bau der Jenaer Sternwarte begann, starb 1889 Carl Zeiss, und Ernst Abbe wurde alleiniger Leiter der Zeiss-Werkstätten. Er erweiterte die Werkstatt zum Zeisswerk.

Die Geschichte der von Abbe 1889 ins Leben gerufenen Carl-Zeiss-Stiftung widerspiegelt die Grenzen kapitalistischer Eigentumsverhältnisse. An der Schwelle des vorigen Jahrhunderts hatte der geniale Erfinder, der Humanist und Besitzer der Zeiss-Werke erkannt, daß sein Unternehmen ohne die Förderung von Wissenschaft und Technik und die Bildung eines Stamms von qualifizierten Facharbeitern keine Zukunft hat. So trat anstelle des Unternehmens das entpersonifizierte Stiftungskapital der Carl-Zeiss-Stiftung. Der private Besitz an Produktionsmitteln blieb dabei nach wie vor erhalten.

Am 14. Januar 1905 starb Ernst Abbe. Sein Name ist mit dem nach dem zweiten Weltkrieg entstandenen Volkseigenen Betrieb Carl Zeiss Jena eng verbunden. Wenn heute Zeiss-Geräte in mehr als 100 Länder exportiert werden und dort geschätzt und geachtet sind, ist das nicht zuletzt auch ein Verdienst Ernst Abbes.



Zum 75. Todestag des Physikers, Mathematikers und Astronomen gab die Staatsbank der DDR eine Gedenkmünze heraus.
Ernst Abbe (1840 bis 1905), Auflage 45000 Stück, 20 Mark · 1980, Legierung: Silber, Durchmesser 33 mm, Masse 20,9 g

Ein Gewichtsproblem des Leonardo Fibonacci

Der allgemeine Stand des mathematischen Wissens und Könnens war im mittelalterlichen Europa bis ins 12. Jahrhundert sehr niedrig. Die Rechenmethoden waren primitiv. Die Kaufleute bedienten sich eines Rechenbrettes, des sogenannten *Abakus*. Die „indische" Zahlenschreibung, den Gelehrten in den Ländern des Islam seit langem geläufig, war noch unbekannt. In einem 1202 erschienenen Werk „Liber abaci" (Buch vom Abakus) gab der Italiener Leonardo Fibonacci (der um 1170 wahrscheinlich in Pisa geboren wurde) eine systematische Darstellung des Rechnens mit den 10 indisch-arabischen Ziffern. Dessen Vater lebte einst als Kaufmann in Algier. Dort lernte der Sohn von einem muslemischen Lehrer das neue Verfahren. Er reiste durch den Orient, studierte arabische Werke, lernte die Schriften des Euklid, Archimedes und anderer griechischer Mathematiker kennen. Seine umfangreichen mathematischen Erkenntnisse hat er in mehreren Büchern aufgeschrieben. Sie sind für die Entwicklung der Mathematik sämtlich von großer Bedeutung gewesen. Spätere Gelehrte schöpften aus seinen Werken sowohl Aufgaben als auch Lösungsmethoden.

Die folgende Aufgabe aus dem „Liber abaci" findet man in ähnlicher Form beispielsweise in einem byzantinischen Rechenbuch aus dem 15. Jahrhundert, ferner bei Nicolas Chuquet (1484), Michael Stifel (1553), Tartaglia (1556), Bachet (1612), van Schooten (1657) und auch bei Leonhard Euler (1748):

Jemand hat 4 Gewichte, mit denen er die ganzen Pfunde seiner Waren von einem Pfund an bis 40 Pfund wiegen will; gefragt ist nach dem Gewicht der einzelnen Gewichtssteine. (Dabei dürfen wenn erforderlich – beide Waagschalen mit Gewichtssteinen belastet werden.)

H. Pieper

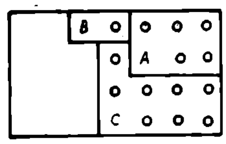
ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

20 Jahre Mathematikzentrum Karl-Marx-Stadt

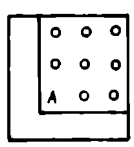
In unserem Zentrum treffen sich in 15 Arbeitsgemeinschaften der Klassenstufen 4 bis 10 die besten *Jungen Mathematiker* der Stadt. Sie werden betreut von Mitarbeitern und Studenten der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule und von Lehrern. Durch kontinuierliche Arbeit mit den AG-Programmen, die von Studenten als Diplomarbeiten angefertigt wurden, konnten die AG-Mitglieder in den letzten Jahren immer über 40 % der Preise zur Bezirksolympiade und mehrere Preise zur DDR-Olympiade erringen. Jens Pönisch erhielt nach seinem 1. Preis als „Frühstarter“ in der Olympiadeklasse 10 der XX. DDR-Olympiade den Auftrag, einen Beitrag für *alpha* zu schreiben.
Erwähnenswert ist noch unsere *AG Frühstarter*, die die erfolgreichsten Schüler der Klasse 5 von März bis Februar des nächsten Schuljahres neben der normalen AG zusätzlich fördert. Diese Schüler starten als Frühstarter zur Kreis- und Bezirksolympiade in der Olympiadeklasse 7. Auch hierzu ist das AG-Programm in der Erprobung.
Das Aktiv des Mathematikzentrums ist ständig bemüht, neue Knobeleien und Spiele für unsere Experimentierstraße anzufertigen. Besonders beliebt ist bei uns der siebenteilige Soma-Würfel, aus dem unsere Besucher zu Pionierfesten schon viele neue Figuren entwickelt haben. *W. Henker*

Knack – ein mathematisches Spiel

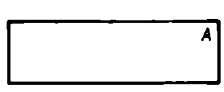
In einem sowjetischen Buch fand ich das Spiel „Knack“, das ich den *alpha*-Lesern vorstellen möchte. Sein Erfinder ist David Geyl, der schon viele mathematische Spiele entwickelt hat.
Man spielt zu zweit auf Kästchenpapier, auf dem ein Rechteck mit $m \cdot n$ Kästchen abgegrenzt wird. Um das Spiel interessant zu gestalten, sollten m und n verschieden und nicht zu klein sein.
Ein Spieler wählt ein Kästchen A des Spielfeldes und streicht dieses und alle, die in der gleichen Zeile rechts und in der gleichen Spalte oberhalb liegen, außerdem die Kästchen, die rechts oben eingeschlossen sind. Die entstandene Figur rechts oben wird nun „herausgeknackt“ und gehört nicht mehr zum Spielfeld. Danach wählen die beiden Spieler abwechselnd weitere Kästchen B, C, ... und knacken die zugehörige Figur heraus (Bild 1, die gestrichenen Kästchen sind durch Punkte markiert).

Bild 1


Es gewinnt der Spieler, der seinen Gegner zwingt, das „vergiftete“ Kästchen in der linken unteren Ecke zu wählen und damit das ganze verbliebene Spielfeld zu „verschlukken“. Interessant ist nun die Frage: Kann der erste Spieler stets so spielen, daß er gewinnt?
Dazu betrachte man zunächst das Kästchen rechts oben. Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder die Wahl dieses Kästchens ist verantwortlich für den Sieg, oder sie bringt dem Gegner die Möglichkeit, den Sieg zu erringen. Angenommen, sie ist für die Niederlage des ersten Spielers verantwortlich, kann der Gegner mit einem optimalen Zug parieren. Diesen Zug hätte aber auch schon der erste Spieler machen können. Das heißt, er kann in jedem Falle mit einem Zug beginnen, der zum Sieg führt. Dieser Beweis zeigt allerdings nicht, *wie* man spielen muß, um zu gewinnen. Das Interessante an „Knack“ ist, daß noch keine allgemeine optimale Strategie gefunden wurde. Nur für einige Spezialfälle sind Gewinnstrategien bekannt:
1. Man spielt auf einem Quadrat. Der erste Spieler muß ein solches Quadrat herausknacken, daß genau eine Zeile und eine Spalte mit dem „vergifteten“ Kästchen übrigbleiben (Bild 2).

Bild 2


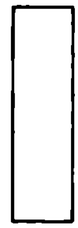
Nun ist der zweite Spieler am Zug, und der erste pariert immer symmetrisch, d. h., er knackt immer ein gleichgroßes Stück von der anderen Seite ab. Am Ende bleibt für den Gegner nur noch das „vergiftete“ Kästchen übrig.
2. Wenn das Spielfeld ein liegendes Rechteck der Form $n \cdot 2$ $(n > 2)$ ist, kann der erste Spieler den Sieg erzwingen, wenn er das Kästchen in der rechten oberen Ecke wählt (Bild 3).

Bild 3


Die Form einer solchen Treppe muß er nach jedem Zug des Gegners wieder erreichen. Wie man leicht sieht, ist dies möglich.

Aufgaben

▲1▲ Wie gewinnt der erste Spieler bei einem stehenden Rechteck der Form $2 \cdot n$ (Bild 4)?

Bild 4


Auch kompliziertere Formen, wie sie häufig beim Spielen entstehen, kann man mit Hilfe der beschriebenen Strategien untersuchen.

▲2▲ Finde den Gewinnzug (Zug des ersten Spielers, der zum Sieg führt) für die Figuren der Abbildungen 5a bis f!

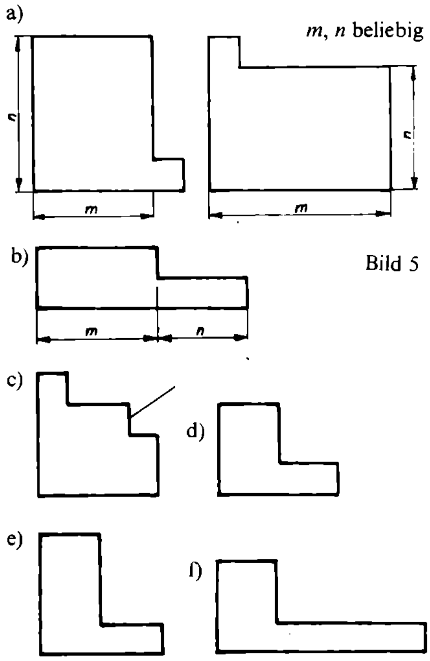


Bild 5

▲3▲ Man finde mit Hilfe von Bild 5d den Gewinnzug für ein Rechteck der Form $4 \cdot 3$!
Zum Schluß seien noch die Gewinnzüge für einige ausgewählte Figuren angegeben (Bild 6a bis f).

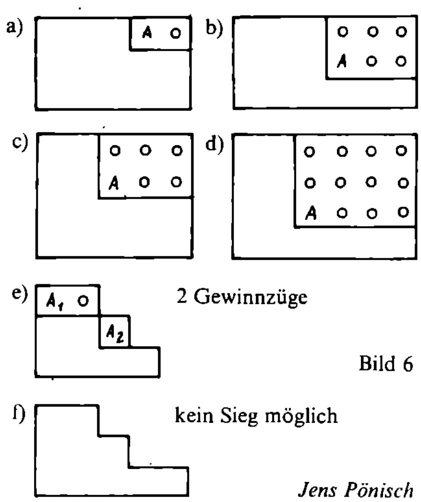


Bild 6

Jens Pönisch

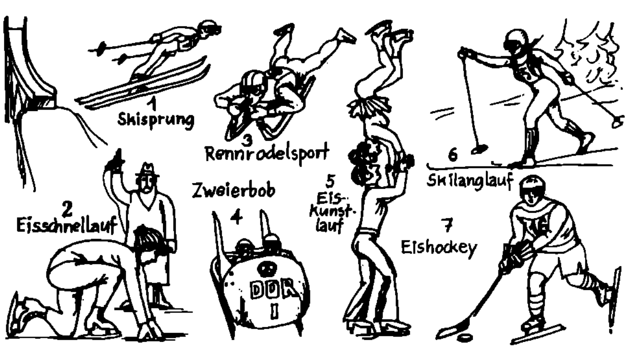
In freien Stunden · alpha-heiter

Winterfreuden

Die beiden Bilder scheinen auf den ersten Blick ganz verschieden. Aber es gibt sechs Einzelheiten, die sich auf beiden Bildern finden. Wo? *Aus: Füles, Budapest*

Falsche Ansichten

Jede Sportart enthält einen Fehler oder eine Regelwidrigkeit, eine sogar zwei Fehler.



Vexierbild

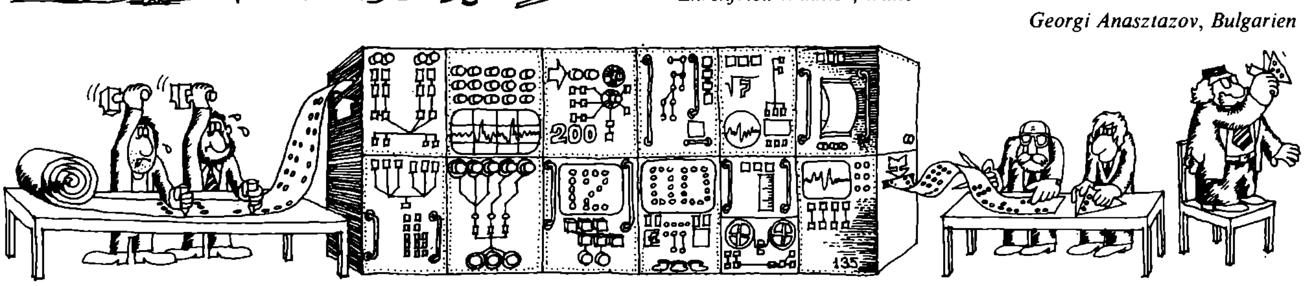
Auf dem Bild (aus dem 19. Jahrhundert) sehen wir eine Dame, welche auf ihren Verehrer wartet. Wo hat er sich versteckt?

Ellipse

Ein hoffnungsvoller junger Kreis
lief Schlittschuh auf dem blanken Eis.
Sich rühmend, daß er kerngesund
und außerdem – natürlich rund –
wollt' er besonders hoch hinaus
und führte tolle Sprünge aus.
Der ungestüme Übermut
bekam ihm aber gar nicht gut.
Am Sturz, den er sodann gebaut,
hat er sein Leben lang gekaut. Der
Mittelpunkt war ihm verrückt,
sein Radius in zwei zerstückt.
Als Kreis war's nun mit ihm vorbei,
er glich jetzt eher einem Ei
und hieß Ellipse als Figur,
die niemals mehr auf Schlittschuh'n fuhr.

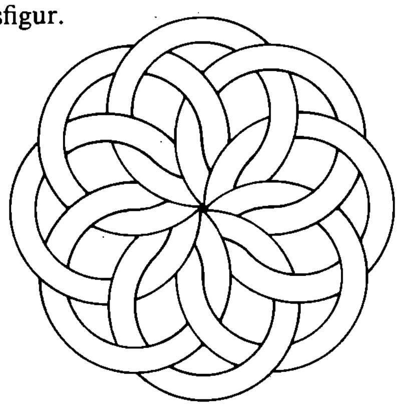
Ehrenfried Winkler, Halle

Georgi Anasztazov, Bulgarien



Drunter und drüber

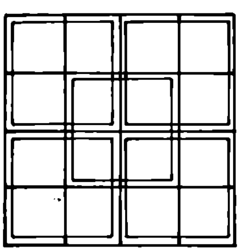
Susann Reichel aus Cottbus sandte uns diese schöne Kreisfigur.



Mathematische Grüße – 1982 –

■ Die Summe von 16 aufeinanderfolgenden Zahlen beträgt 7928. Ordne die Zahlen in das Quadrat dergestalt ein, daß die Summe jeder Waagerechten, jeder Senkrechten, jeder Diagonalen und jedes der inneren Quadrate jeweils 1982 beträgt!

Ing. Klaus-Horst Milde, Dresden



■ Bestimme das Minimum von $|1 + 9^x + 8^y - 2^z|$, wobei x, y und z positive ganze Zahlen sind!

Dr. W. Moldenhauer, Eisenach

● So sahen Sabine Möckel, Zwickau (Kl. 7), Gerd Gruner, Zwickau (Kl. 11), stud. math. A. Fittke, Berlin und Ing. H. Decker, Köln das Jahr 1982:

$1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2 = (19 - 8 - 2)(1 + 9 + 8 - 2)$

$19 + 82 = 1 + 98 + 2$

$1^2 + 9^2 - 8^2 - 2^2 = \sqrt{198 - 2}$

$1982^{1+9-8-2} = \dfrac{1+9}{8+2}$

$\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{(1 + 98 : 2)(1 \cdot 9 - 8 : 2)}{1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2}$

$20 = 1 + 9 + 8 + 2 = (1 + 9) \cdot \sqrt{8 : 2}$

$19 = 1 \cdot 9 + 8 + 2 = 1 \cdot \sqrt{9} + 8 \cdot 2$

$18 = (1^9 + 8) \cdot 2 = (-1) + 9 + 8 + 2$

$17 = 1^9 + 8 \cdot 2 = 1\sqrt{(9 + 8)^2}$

$16 = 1 + 9 + 8 - 2 = (1 + \sqrt{9}) \cdot (8 : 2)$

$4 = 1^9 \cdot 8 : 2 = (1 + 9) - (8 - 2)$

$3 = (1 \cdot 9 - 8) + 2 = \sqrt{(1 + 9 + 8) : 2}$

$2 = 1 - 9 + 8 + 2 = (1 - 9) + 8 + 2$

$1 = 1 \cdot \sqrt{9} - \sqrt{8 : 2} = (1 + 9 - 8) : 2$

$0 = (1 + 9) - (8 + 2) = (1 - 9 + 8) \cdot 2$

Dialoge

■ „Vater, ich habe heute Nacht geträumt, du hättest mir für 5 Lewa Schokolade gekauft!"
„Wenn du artig bist, darfst du zu Neujahr träumen, ich hätte dir ein ganzes Kilo gekauft!"

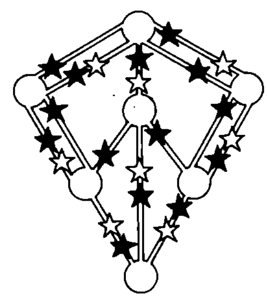
■ Der Mathematiklehrer schreibt an die Tafel 2 : 2. „Was bedeutet das, Gerald?" Gerald antwortet: „Unentschieden."

■ Auf dem Heimweg erzählt Horst seinem Freund, daß er von einer 12 Meter hohen Leiter gestürzt sei. Jochen staunt. „Und du hast dich nicht verletzt?" fragt er.
„Nein, ich stand doch auf der ersten Sprosse!"

■ „Fritz, wollen wir uns heute um fünf Uhr treffen?"
„Gern, und wann kommst du?"

Wanderung zwischen Sternen

Wandere auf den Geraden so, daß dabei jeder Stern getroffen wird, ohne den bereits beschrittenen Weg nur einmal gekreuzt zu haben! Start und Ziel sollen jeweils ein weißer Stern sein.



Silvesterscherze

Nicht ganz ernst gemeint: Aus den Silben
bruch – chen – di – fer – fol – ge – gel – grund – ka – kel – kel – kon – läu – lier – mal – mes – on – on – per – pez – re – re – schei – ser – si – spek – spit – stamm – strich – struk – tel – ti – ti – tra – va – ve – vi – wert – win – ze – zir
sollen Wörter der folgenden Bedeutung gebildet werden. Es handelt sich jeweils um Begriffe aus dem Mathematikunterricht, die hier scherzhaft umschrieben sind:

1. Vorschrift für Harken (1); 2. militärische Einheit mathematischen Charakters (2); 3. geknicktes Schneidegerät (3); 4. Preis für den Boden (1); 5. Gestell eines Geräts für Artisten (4); 6. Serie von Werken eines bildenden Künstlers (2); 7. Startlinie zum Wettlauf (6); 8. Blickwinkel eines höflichen Mannes (2); 9. Knick im Hauptteil des Baumes (6); 10. die Besten einer Arbeitsgemeinschaft (5); 11. gerade Linie quer durchs Haar (8).

Entnimmt man jedem Wort den in Klammern angegebenen Buchstaben, so erhält man das Bild einer geschmückten Funktion zweiten Grades.

OStR K. Lehmann, VLdV, Berlin

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Aufgaben

Olympiadeklassen 11/12

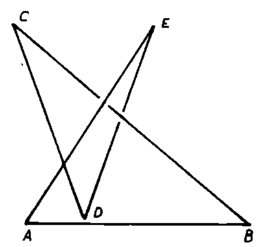
1. Man untersuche, ob sich aus 1982 Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_{1982}$, die der Bedingung $|a_k|=1$ ($k=1, 2, \ldots, 1982$) genügen, aber sonst beliebig vorgegeben sind, stets Zahlen so auswählen lassen, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k ausgewählt.
(2) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k nicht ausgewählt.
(3) Die Summe aller ausgewählten Zahlen ist gleich der Summe aller nicht ausgewählten Zahlen.

2. Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
In dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=1,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=1, \qquad (1)\\ a_3x+b_3y+c_3z&=1 \end{aligned}$$

belegt zunächst A einen der Koeffizienten a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, 3$) mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl. Dann belegt B einen der verbleibenden Koeffizienten mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl, dann wieder A, dann B usw., bis endlich A den letzten (neunten) Koeffizienten mit einer natürlichen Zahl belegt.
A hat gewonnen, wenn nach diesen Belegungen das Gleichungssystem (1) genau eine reelle Lösung (x, y, z) besitzt.
B hat gewonnen, wenn nach den Belegungen das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele reelle Lösungen besitzt.
Man untersuche, ob B durch geeignete Belegungen in jedem Falle den Gewinn erzwingen kann.

3. Man beweise, daß sich aus fünf geraden „Stäben" kein räumlicher Streckenzug $ABCDEA$ bilden läßt, der die folgenden Eigenschaften (1) und (2) besitzt:
(1) Keine vier der fünf Punkte A, B, C, D, E liegen in einer gemeinsamen Ebene.
(2) Aus einer geeigneten Blickrichtung betrachtet, gilt (siehe Bild): Keine zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E werden genau hintereinander (also scheinbar miteinander zusammenfallend) gesehen; ein innerer Punkt der Strecke CD verdeckt einen inneren Punkt von AE, ein innerer Punkt von BC verdeckt einen inneren Punkt von DE, ein innerer Punkt von AE verdeckt einen inneren Punkt von BC.



Hinweis: Unter einem inneren Punkt P einer Strecke XY versteht man einen von X und Y verschiedenen, d. h. zwischen diesen Punkten liegenden Punkt P der Strecke XY.

4. Es sei $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, wobei $n\geqq 1$ und $a_n\neq 0$ gelten. Man setze

$$r=\frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|}{|a_n|}$$

und beweise:
a) Ist $r\geqq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-r\leqq x\leqq r$.
b) Ist $r\leqq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-1\leqq x\leqq 1$.

5. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle BCA=90°$.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte P des Raumes, für die $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2\leqq\overline{PC}^2$ gilt.

Von den nachstehenden Aufgaben 6A und 6B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

6A. a) Man beweise: Wenn
$a=\overline{BC}, b=\overline{AC}, c=\overline{AB}, d=\overline{AD}, e=\overline{BD}, f=\overline{CD}$ (1)
die Kantenlängen eines Tetraeders $ABCD$ sind, dann gilt für den Oberflächeninhalt A_0 dieses Tetraeders die Ungleichung

$$A_0<\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2). \qquad (2)$$

b) Man untersuche, ob sich die Aussage über (2) noch zu folgender Aussage verschärfen läßt: Es gibt eine kleinste reelle Zahl λ mit $\lambda<\frac{1}{3}$, so daß für den Oberflächeninhalt A_0 jedes Tetraeders $ABCD$, wenn man dessen Kantenlängen wie in (1) bezeichnet, die Ungl. $A_0\leqq\lambda(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$ (3) gilt. Wenn das der Fall ist, so ermittle man diese Zahl λ.

6B. Man ermittle alle diejenigen Funktionen f und g, die für alle nichtnegativen reellen Zahlen x definiert sind, reelle Funktionswerte haben und folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Für alle $x\geqq 0$ gilt $f(x)\geqq 1$ und $g(x)\geqq 0$.
(2) Für alle $x\geqq 0$ gilt $(f(x))-(g(x))^2=1$.
(3) Für alle $x\geqq 0$ und alle $y\geqq 0$ gilt $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)\cdot f(y)+g(x)\cdot g(y)$.
(4) Für alle $x\geqq 0$ und alle $y\geqq 0$ gilt $g(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)\cdot g(y)+g(x)\cdot f(y)$.

Lösungen

Lösungen zu:
Wir finden Gesetzmäßigkeiten

▲4▲ Ja. $m(x)=7x-3{,}5$
▲5▲ Ja. $m(x)=2x^2-1$

Lösungen zu: alpha-Sprachecke

Eine Quadratzahl

▲1▲ Spielsteine mit den Nummern 1 bis 9 sind so in eine Reihe gelegt, daß die auf ihnen stehenden Zahlen der Größe nach geordnet sind.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Welche kleinste Anzahl von Steinen muß man wegnehmen, damit die aus den Ziffern auf den zurückbleibenden Steinen gebildete Zahl eine Quadratzahl ist?
Welche Steine werden dabei weggenommen?
Lösung: Man muß die drei Steine mit den Nummern 2, 5 und 7 wegnehmen. Dabei erhält man die Zahl $134689=367^2$.

Was ist das?

▲2▲ Schneide dir aus Papier ein gleichseitiges Dreieck! Falte es an jeder Linie, die die Mittelpunkte zweier Seiten verbindet! Dann füge alle drei Ecken an einem Punkt zusammen!
Welcher geometrischer Körper ergibt sich daraus?
Lösung: Es entsteht ein regelmäßiges Tetraeder.

Neue Fassade

▲3▲ Man will die Fassade einer Schule weißen. Diese Fassade hat eine Länge von 18 m und eine Höhe von 12 m; man sieht weiterhin 12 Fenster und eine Tür. Die Ausmaße jedes Fensters, in m, sind 2,5 und 1,5; diejenigen der Tür 3 und 2. Berechne die Fläche der zu weißenden Fassade in m²!
Lösung: Die Fläche der Fassade einschließlich der Fenster beträgt $18\,\text{m}\cdot 12\,\text{m}=216\ \text{m}^2$. Die Fläche der Tür ist $3\,\text{m}\cdot 2\,\text{m}=6\,\text{m}^2$, die der Fenster $2{,}5\,\text{m}\cdot 1{,}5\,\text{m}\cdot 12=45\,\text{m}^2$. Dann beträgt die Fläche der zu weißenden Fassade $216\,\text{m}^2-45\,\text{m}^2-6\,\text{m}^2=165\,\text{m}^2$.

Lösung zu: Matt dem König!

Auf 47(!) verschiedene Arten kann Weiß den schwarzen König in einem Zug mattsetzen!
1. Ta2, 1. Tc2, 1. Td2, 1. Te2, 1. Tf2, 1. Tg2, 1. Th2, 1. Tb1, 1. Tb3, 1. Tb4, 1. Tb5, 1. Tb6, 1. Tb7, 1. T:b8, 1. Lh1, 1. Lg2, 1. Lf3, 1. Le4, 1. Lc6, 1. Lb7, 1. La8, 1. La2, 1. Lb3, 1. Lc4, 1. Le6, 1. Sg7, 1. Sh6, 1. Sh4, 1. Se3, 1. Sd4, 1. Sd6, 1. Se7.
Das waren 32 Matts durch Abzugsschachs. Die weiße Dame kann 6 verschiedene Matts herbeiführen: 1. Dc7, 1. Dd6, 1. De7, 1. Dc3, 1. Dd4, 1. De3. Durch Verwandlungen der weißen Bauern ergeben sich 8 weitere Matts: 1. a:b8L, 1. a:b8D, 1. d:e8T, 1. d:e8D, 1. f:e8T, 1. f:e8D, 1. h8L und 1. h8D. Schließlich kann der weiße Bauer d3 mit 1. d4 auch noch den schwarzen König mattsetzen.

Lösung zu: Gut beobachten!

Von oben nach unten:
G – 1, F – 5, G – 8, C – 5, A – 7.

Lösungen zu: Wir betrachten Körper

▲1▲ (1) 8 cm; (2) es gibt verschiedene Möglichkeiten; 1 cm und 20 cm, 2 cm und 10 cm, 4 cm und 5 cm; (3) es gibt verschiedene Möglichkeiten: 1 cm, 1 cm und 100 cm; 1 cm, 2 cm und 50 cm; 1 cm, 4 cm und 25 cm; 1 cm, 5 cm und 20 cm; 1 cm, 10 cm und 10 cm; 2 cm, 2 cm und 25 cm; 2 cm, 5 cm und 10 cm; 5 cm, 5 cm und 4 cm; (4) 1 cm, 1 cm und 5 cm.

▲2▲ Es gibt a) 8, b) 1, c) 2 (verschiedene) Quader.

▲3▲ a) 54 Päckchen; b) 90 Päckchen. (Dabei muß die jeweils längste Kante der Päckchen parallel zu den Kistenkanten der Länge 24 cm, die jeweils kleinste Kante der Päckchen parallel zu den Kistenkanten der Länge 48 cm sein.)

▲4▲ a) Die Höhe der einen Schachtel ist dreimal so groß wie die der anderen. b) Der Rauminhalt der einen Schachtel ist doppelt so groß wie der der anderen. c) Der Rauminhalt der einen Schachtel ist achtmal so groß wie der der anderen.

▲5▲ Die Würfelkantenlänge beträgt a) 4 cm, b) 5 cm.

▲6▲ Der Abstand beträgt 4 cm.

▲7▲ Das Volumen beträgt a) $60\,cm^3$, b) $64\,cm^3$, c) $36\,cm^3$, d) Es entsteht kein Kästchen; also $0\,cm^3$.

Lösungen zu: Geistesgymnastik

Klasse 5

▲1▲ $48\,M : 4 = 12\,M$; eine Mandel Leinwand kostet 12 M.
$12{,}00\,M - 7{,}50\,M = 4{,}50\,M$; für die Gans wurden 4,50 M angerechnet.

▲2▲ Angenommen, x ist die gesuchte Zahl; dann gilt $x-30=28+32$, $x-30=60$, $x=90$. Es handelt sich um die Zahl 90.

▲3▲ $1{,}70\,M = 170\,Pf$; $17 \cdot 10\,Pf = 170\,Pf$; $17 \cdot 2$ Eier $= 34$ Eier; 34 Eier + 11 Eier = 45 Eier. Die Bäuerin hatte anfangs 45 Eier.

▲4▲ $45:5=9$; $9-1=8$; $9-2=7$; $9+1=10$; $9+2=11$. Die fünf Summanden lauten 7, 8, 9, 10 und 11.

Klasse 6

▲1▲ Es sei x die gesuchte Zahl; dann gilt $4\cdot x-10=6\cdot 11$, $4\cdot x-10=66$, $4\cdot x=76$, $x=19$. Es handelt sich um die Zahl 19.

▲2▲ Es sei x die zu nennende Zahl; dann gilt $x=\frac{1}{8}\cdot x+42$, $\frac{7}{8}\cdot x=42$, $x=\frac{42\cdot 8}{7}$, $x=48$. Es handelt sich um die Zahl 48.

▲3▲ $15-8=7$; Karl fehlen noch 7 Walnüsse von einer Mandel. $7\cdot 5=35$; Heinz hatte 35 Walnüsse.

▲4▲ Es sei n die zu ermittelnde Zahl; dann gilt
$2\cdot n+64=6\cdot n$, $4\cdot n=64$, $n=16$.
Es handelt sich um die Zahl 16.

Klasse 7

▲1▲ Angenommen, es wurden x Tannen gefällt, also $\frac{1}{3}x$ Buchen, $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}x=\frac{1}{5}x$ Eichen, $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}x=\frac{2}{15}x$ Lärchen, $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{15}x=\frac{1}{30}x$ Ahorne.
Nun gilt $x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x+\frac{2}{15}x+\frac{1}{30}x=357$,
$30x+10x+6x+4x+x=30\cdot 357$,
$51x=30\cdot 357$, $x=210$.
Es wurden 210 Tannen, 70 Buchen, 42 Eichen, 28 Lärchen und 7 Ahorne gefällt.

▲2▲ $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$; $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$.
Aus $\frac{3}{8}\cdot x=480$ folgt $x=1280$.
Das Jahreseinkommen betrug 1280 M.

▲3▲ Aus $a:b:c=2:3:5$ folgt $b=\frac{3}{2}\cdot a$ und $c=\frac{5}{2}\cdot a$. Durch Einsetzen in $a+b+c=35$ erhalten wir
$a+\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}a=35$, $5a=35$, $a=7$. Daraus folgt $b=\frac{3}{2}\cdot 7=10\frac{1}{2}$, $c=\frac{5}{2}\cdot 7=17\frac{1}{2}$. Es handelt sich um die Zahlen 7, $10\frac{1}{2}$ und $17\frac{1}{2}$.

▲4▲ Angenommen, Karl ist x Jahre, sein Vater also $7x$ Jahre alt. Nun gilt $7x-x=36$, $6x=36$, $x=6$. Karl ist gegenwärtig 6 Jahre, sein Vater 42 Jahre alt.

Klasse 8

▲1▲ Angenommen, es waren x Lesebücher, also $(300-x)$ Fibeln; dann gilt $0{,}8x+0{,}5\cdot(300-x)=180$, $8x+5\cdot(300-x)=1800$. $8x+1500-5x=1800$, $3x=300$, $x=100$. Es wurden 100 Lesebücher und 200 Fibeln gekauft.

▲2▲ Angenommen, anfangs waren es n Exemplare. Am ersten Tag wurden $\left(\frac{n}{8}+10\right)$ Exemplare verkauft. Es verblieb ein Rest von $\left[n-\left(\frac{n}{8}+10\right)\right]=\left(\frac{7}{8}n-10\right)$ Exemplaren. Am zweiten Tag wurden $\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{8}n-10\right)+15\right]$ $=\left(\frac{7}{16}n+10\right)$ Exemplare verkauft. Nun gilt $n=\left(\frac{n}{8}+10\right)+\left(\frac{7}{16}n+10\right)+50$, $n=\frac{9}{16}n+70$, $\frac{7}{16}n=70$, also $n=160$. Anfangs wurden 160 Exemplare des Romans angeboten.

▲3▲ Angenommen, das Darlehen belief sich auf x Mark. Zum ersten Termin wurden $\left(\frac{x}{4}+50\right)$ M getilgt. Es verblieb eine Restschuld von $\left[x-\left(\frac{x}{4}+50\right)\right]=\left(\frac{3}{4}x-50\right)$ M.
Zum zweiten Termin wurden $\left[\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}x-50\right)+60\right]$ M $=\left(\frac{3}{20}x+50\right)$ M getilgt.
Es verblieb eine Restschuld von
$\left[\left(\frac{3}{4}x-50\right)-\left(\frac{3}{20}x+50\right)\right]$ M $=\left(\frac{3}{5}x-100\right)$ M.
Nun gilt
$x=\left(\frac{x}{4}+50\right)+\left(\frac{3}{20}x+50\right)+\frac{3}{10}x+200$,
$x-\frac{1}{4}x-\frac{3}{20}x-\frac{3}{10}x=300$,
$20x-5x-3x-6x=6000$, $6x=6000$,
$x=1000$.
Das Darlehen belief sich auf 1000 M.

▲4▲ Angenommen, das leichteste Kalb kostete n Mark; dann kosteten die vier übrigen Kälber $(n+2)$ M, $(n+4)$ M, $(n+6)$ M, $(n+8)$ M. Nun gilt
$n+(n+2)+(n+4)+(n+6)+(n+8)=100$,
$5n+20=100$, $5n=80$, $n=16$. Das leichteste Kalb kostete 16 M.

Lösungen zu:
Knack – ein mathematisches Spiel

1. Zahl: senkrechte Spalte von links, 2. Zahl: waagerechte Zeile [(vgl. Bild 1: A hat die Koordinaten (5;3)]

▲1▲ $(2;n)$

▲2▲ a) (1;3) bzw. (3;1)
b) $(m+2;1)$
c) (2;2)
d) Sieg nicht zu erzwingen, aber möglich
e) (1;4)
f) (5;1)

▲3▲ (3;2)

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Winterfreuden

1. Bergrücken links und Kleid der Frau;
2. Besenstiel und Teppichstreifen;
3. Schneespur und Hundeleinenstück;
4. Kotelette des Skiläufers und Fliege des Mannes;
5. Umschlag der Skisocke und Türklinke;
6. Skistockteller links und Pantoffel am rechten Hinterfuß des Hundes.

Falsche Ansichten

1. Skisprung – ohne Stöcke; 2. Eisschnellauf – Starthaltung u. Schlittschuhe; 3. Rennrodelsport – sitzend; 4. Zweierbob – hintereinan-

der sitzend; 5. Eiskunstlauf – keine Artistik; 6. Skilanglauf – ohne Brille und Sturzhelm; 7. Eishockey – Schlittschuhe für Eisschnellauf

Vexierbild

Wenn du das Bild auf den Kopf stellst, siehst du den Verehrer auf der linken Seite.

Mathematische Grüße – 1982 –

● Die Zahlen lassen sich über die Formeln der arithmetischen Reihe

$$s=\frac{n}{2}(a_1+a_n),$$

$$a_n=a_1+(n-1)d,$$

$$a_1=\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2}$$

ermitteln und lauten:

$$a_1=488,\quad a_{16}=503.$$

Eine mögliche Lösung:

500	490	489	503
495	497	498	492
499	493	494	496
488	502	501	491

● Es sei N^+ die Menge der positiven ganzen Zahlen.

Es gilt $\min\limits_{x,\,y,\,z\in N^+} |1+9^x+8^y-2^z|=2$

Beweis: Für $x=y=1$, $z=4$ gilt $1+9^x+8^y-2^z=2$.

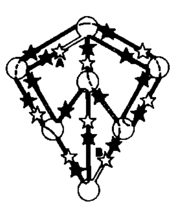
Da $1+9^x+8^y-2^y\equiv 1+1^x\equiv 2 \bmod 2$ ist, kommt als mögliches Minimum nur noch 0 in Betracht.

Annahme: $1+9^x+8^y-2^z=0$, also $1+9^x=2^z-8^y\geqq 2>0$. Damit gilt $z=3y+a$ mit $a\in N^+$ und somit

$1+9^x=8^y(2^a-1)\equiv 0(8)$, aber es ist $1+9^x\equiv 2(8)$ Widerspruch.

Wanderung zwischen Sternen

Eine mögliche Lösung:



Silvesterscherze

1. *R*echenregel; 2. D*i*vision; 3. Wi*n*kelmesser; 4. *G*rundwert; 5. Tr*a*pezkonstruktion; 6. Mal*f*olge; 7. Läuf*e*rstrich; 8. K*a*valierperspektive; 9. Stamm*b*ruch; 10. Zirk*e*lspitze; 11. Scheite*l*. *Ringparabel*

Lösung zu: Die historische Mathematikaufgabe:
Ich hab's gefunden! Heft 4/82, III. US.

Ein fester Körper, der vollständig in Wasser getaucht wird, verdrängt vom Wasser so viel, wie sein eigenes Volumen beträgt. Bei gleichem Volumen haben verschiedene Stoffe eine unterschiedliche Masse. (So hat $1\,\text{cm}^3$ Gold die Masse 19,3 g und $1\,\text{cm}^3$ Silber 10,5 g.) Bei gleicher Masse werden verschiedene Stoffe somit ein unterschiedliches Volumen haben. (So hat 1 kg Gold ein Volumen von etwa $52\,\text{cm}^3$ und 1 kg Silber ein Volumen von etwa $95\,\text{cm}^3$.) Fertigt man nun etwa zwei Würfel von genau gleicher Masse wie der Weihkranz, den einen aus reinem Gold, den anderen aus reinem Silber, und taucht die drei Gegenstände jeweils in ein bis zum Rand mit Wasser gefülltes Gefäß, so wird beim Würfel aus reinem Silber am meisten Wasser überlaufen, beim Würfel aus reinem Gold am wenigsten. Ist der Kranz aus Gold und Silber gemischt, so wird die bei ihm überlaufende Wassermenge geringer sein als beim Silberwürfel, aber immer noch größer sein als beim Goldwürfel.

Die vom Silberwürfel, vom Goldwürfel bzw. vom Weihkranz verdrängte Wassermenge betrage s, g, bzw. $k\,\text{cm}^3$. Der Weihkranz habe (wie auch der Silberwürfel und der Goldwürfel) die Masse a kg, davon seien b kg Silber und c kg Gold, also

(1) $\quad b+c=a.$

Der Silberanteil des Kranzes verdrängt dann $\frac{b}{a}s\,\text{cm}^3$ Wasser. (In unseren Bezeichnungen verdrängen ja a kg Silber $s\,\text{cm}^3$ Wasser. Daher verdrängt 1 kg Silber $\frac{s}{a}\text{cm}^3$ Wasser und somit verdrängen b kg Silber $b\frac{s}{a}\text{cm}^3$ Wasser.)

Der Goldanteil des Kranzes verdrängt $\frac{c}{a}g\,\text{cm}^3$ Wasser. Der Weihkranz verdrängt somit einerseits $k\,\text{cm}^3$, andererseits $\frac{b}{a}s+\frac{c}{a}g\,\text{cm}^3$ Wasser, also $\frac{b}{a}s+\frac{c}{a}g=k$, d. h.

(2) $\quad bs+cg=ak.$

Aus (1) und (2) folgt $c=a-b$, $bs+(a-b)g=ak$, also $bs-bg=ak-ag$, d. h.

$$b=\frac{k-g}{s-g}a.$$

Dies ergibt auch $c=a-b=\left(1-\frac{k-g}{s-g}\right)a$ $=\frac{s-k}{s-g}a$. Damit sind die Anteile b und c an der Gesamtmasse a aus den bekannten Größen s, g, k, a bestimmt, und es ist

$$\frac{c}{b}=\frac{s-k}{k-g}.$$

Lösung zu: Olympiade-Kryptogramm
Heft 5/82, S. 115

Angenommen, es gäbe eine Lösung des Gleichungssystems, dann muß $YY\cdot YYIA=111111$ sein. Das folgt aus den Gleichungen (1)...(9) wegen $000000:0=EEEEEE:E=111111$.

Die Zerlegung von 111111 in Primfaktoren ergibt $111111=3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$. Der Faktor YY in $YY\cdot YYIA$ kann deshalb nur 11, 33 oder 77 sein. Die Faktoren $YY=11$ und $YY=77$ scheiden aus, wegen $111111:11=10101$ bzw. $111111:77=1443$ und weil $YYIA$ vierstellig ist und die beiden ersten Ziffern gleich sind. Also kann YY nur 33 sein, woraus $YYIA=3367$ und $Y=3$, $I=6$ und $A=7$ folgen. Die restlichen Buchstaben O, L, M, P, D, E sind unabhängig von ihrer Reihenfolge durch genau eine der Ziffern 1, 2, 4, 5, 8, 9 zu ersetzen. Für die Abbildung der Elemente der Menge $M=\{O, L, M, P, D, E\}$ auf die Elemente der Menge $N=\{1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ gibt es insgesamt $6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$ Möglichkeiten. Eine dieser 720 Möglichkeiten ergibt sich aus $O=1$, $L=2$, $M=4$, $P=5$, $D=8$, $E=9$.

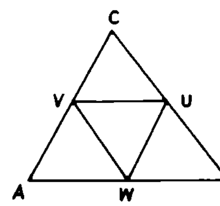
$$1\cdot 33\cdot 3367=111111$$
$$2\cdot 33\cdot 3367=222222$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$9\cdot 33\cdot 3367=999999$$

Lösungen zu: Ungleichungen von Erdös-Mordell, Heft 4/82, S. 76

▲1▲ Nach Strahlensatz gilt wegen

$AC\parallel UW$ $\overline{AW}:\overline{WB}=\overline{CU}:\overline{UB}$, wegen
$UV\parallel AB$ $\overline{VC}:\overline{VA}=\overline{CU}:\overline{UB}$, wegen
$VW\parallel BC$ $\overline{VC}:\overline{VA}=\overline{WB}:\overline{AW}$.

Bild 6



Daraus folgt $\overline{AW}:\overline{WB}=\overline{WB}:\overline{AW}$ und damit $\overline{AW}=\overline{WB}$, d. h., der Punkt W halbiert die Strecke $\overline{AB}$. Weiter ergibt sich $\overline{CU}=\overline{UB}$ und $\overline{VC}=\overline{VA}$, d. h. auch die Punkte U und V halbieren die entsprechenden Dreiecksseiten, w. z. b. w.

▲2▲ Nach Substitution der Größen R'_A durch R_A, d'_c durch d_b sowie d'_b durch d_c ergibt sich die Ungleichung $aR_A\geqq cd_b+bd_c$ und damit $R_A\geqq\frac{c}{a}d_b+\frac{b}{a}d_c$. Aus Symmetriegründen sind auch die analogen Beziehungen gültig: $R_B\geqq\frac{a}{b}d_c+\frac{c}{b}d_a$ und $R_C\geqq\frac{b}{c}d_a+\frac{a}{c}d_b$. Addiert man die letzten drei Ungleichungen und faßt entsprechende Glieder zusammen, dann erhält man $R_A+R_B+R_C\geqq d_a\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+d_b\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+d_c\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$ und daraus gemäß Hilfssatz 1 $\left(\text{d. h. } \alpha+\frac{1}{\alpha}\geqq 2\right)$ schließlich die Behauptung $R_A+R_B+R_C\geqq 2(d_a+d_b+d_c)$.

Wenn das Gleichungszeichen gelten soll, muß $\frac{c}{b}=\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}=\frac{a}{c}$ sowie $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$ gelten und damit $a=b=c$, d. h. das Dreieck ist notwendigerweise gleichseitig. Da auch im Hilfssatz 3 Gleichheit bestehen muß, gilt $AM\perp BC$ und $BM\perp AC$, d. h. M ist Mittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

▲3▲ Im Hilfssatz 3 haben wir die Beziehung $aR_A \geqq cd_c + bd_b$ nachgewiesen. Aus der Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der Größen cd_c und bd_b folgt

$\sqrt{cd_c bd_b} \leqq \frac{1}{2}(cd_c + bd_b) \leqq \frac{1}{2}aR_A$, also $aR_A \geqq 2\sqrt{bcd_bd_c}$ und analog $bR_B \geqq 2\sqrt{acd_ad_c}$ sowie $cR_C \geqq 2\sqrt{abd_ad_b}$.

Durch Multiplikation der letzten drei Ungleichungen erhält man schließlich die Behauptung $R_AR_BR_C \geqq 8d_ad_bd_c$, w.z.b.w.

▲4▲ Wir betrachten die Behauptung des Hilfssatzes 3 $aR_A \geqq bd_b + cd_c$ und die analogen Beziehungen $bR_B \geqq ad_a + cd_c$ sowie $cR_C \geqq ad_a + bd_b$. Addition der drei Ungleichungen führt unmittelbar zur Behauptung $aR_A + bR_B + cR_C \geqq 2(ad_a + bd_b + cd_c)$.

▲5▲ Die Flächensumme der Dreiecke $\triangle AMB$, $\triangle BMC$ sowie $\triangle CMA$ ist gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, so daß gilt $\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a}{2}d_a + \frac{a}{2}d_b + \frac{a}{2}d_c$ (denn es ist $a=b=c$), damit $d_a + d_b + d_c = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Setzt man die letzte Beziehung in die Ungleichung von Erdös-Mordell ein, führt dies sofort zur Behauptung $R_A + R_B + R_C \geqq a\sqrt{3}$.

▲6▲ Aus der Flächengleichung $S(\triangle ABC) = S(\triangle AMB) + S(\triangle BMC) + S(\triangle CMA)$ folgt in den Bezeichnungen $2S = ad_a + bd_b + cd_c$. Es gelte o.B.d.A. $a \geqq b \geqq c$. Daraus folgt $h_a = \min(h_a, h_b, h_c)$ und $h_c = \max(h_a, h_b, h_c)$, da die Produkte ah_a, bh_b und ch_c sämtlich gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ und damit untereinander gleich sind. Daraus folgern wir $ad_a + ad_b + ad_c \geqq 2S \geqq cd_a + cd_b + cd_c$ (wegen $a \geqq b \geqq c$) und $\min(h_a, h_b, h_c) = h_a = \frac{2S}{a} \leqq d_a + d_b + d_c \leqq \frac{2S}{c} = h_c = \max(h_a, h_b, h_c)$, worin bereits die Behauptung steckt, w.z.b.w.

▲7▲ Aus der in Aufgabe ▲6▲ ermittelten Identität $2S = ad_a + bd_b + cd_c$ folgt nach Anwendung der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der drei Größen ad_a, bd_b und cd_c

$$\frac{2S}{3} = \frac{ad_a + bd_b + cd_c}{3} \geqq \sqrt[3]{abcd_ad_bd_c},$$

$$d_ad_bd_c \leqq \frac{8S^3}{27abc}, \text{ q.e.d.}$$

▲8▲ Die Hilfsbeziehung

$$\sqrt{x+y} \geqq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}}$$

kann man aus der Beziehung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel der Größen $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$ herleiten. Nach dieser Ungleichung und dem in Beweisvariante 3 bewiesenen Resultat $R_A \geqq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$ läßt sich schließen:

$$\sqrt{R_A} \geqq \sqrt{\frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\sqrt{d_b} + \sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{d_c}\right)$$

und in entsprechender Weise auf analoge Abschätzungen der übrigen Größen R_B und R_C. Addiert man wieder die drei Ungleichungen und wendet dann Hilfssatz 1 an, ergibt sich unmittelbar die Behauptung

$$\sqrt{R_A} + \sqrt{R_B} + \sqrt{R_C} \geqq \sqrt{2}(\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c}).$$

▲9▲ Wir schließen zunächst $x^2 + y^2 < x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ für positive x, y. Durch Anwendung der so erhaltenen Beziehung auf das in Beweisvariante 3 erhaltene Resultat $R_A \geqq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$ erhält man weiter

$$R_A^2 \geqq \left(\frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c\right)^2 > \frac{c^2}{a^2}d_b^2 + \frac{b^2}{a^2}d_c^2.$$

Analoge Beziehungen gelten für R_B^2 und R_C^2; das übrige verläuft auf die bereits bekannte Weise (Addition der symmetrischen Ungleichungen und Anwendung von Hilfssatz 1).

▲10▲ Wir gehen von den Beziehungen $aR_A \geqq bd_c + cd_b$ (2) und $aR_A \geqq bd_b + cd_c$ (Hilfssatz 3) aus.

Nach Addition folgt $2aR_A \geqq b(d_b + d_c) + c(d_b + d_c) = (b+c)(d_b + d_c)$. Jetzt multipliziert man diese Ungleichung mit den analogen für R_B und R_C und erhält nach Anwendung der Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der Dreiecksseitenlängenpaare

$$8abcR_AR_BR_C \geqq (a+b)(a+c)(b+c)(d_a+d_b)(d_a+d_c)(d_b+d_c)$$

$$\geqq 8\sqrt{ab}\sqrt{ac}\sqrt{bc}(d_a+d_b)(d_a+d_c)(d_b+d_c),$$

woraus sofort die behauptete Ungleichung folgt

$R_AR_BR_C \geqq (d_a+d_b)(d_a+d_c)(d_b+d_c)$, q.e.d.

▲11▲ Nach der Flächenformel im Dreieck gilt

$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ sowie

$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$

(Betrachtung der drei Teildreiecke, in die das Dreieck $\triangle ABC$ durch den Inkreismittelpunkt zerfällt und Einbeziehung der Tatsache, daß der Inkreisradius zu den Berührungspunkten mit den Dreiecksseiten rechte Winkel bildet). Daraus folgt $\frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ und unter Verwendung der Beziehung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel der drei Höhenlängen im Dreieck erhält man weiter

$$\frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c) \geqq \frac{3}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}} = 3r$$

und damit endlich $h_a + h_b + h_c \geqq 9r$. (4)

Da h_a der kürzeste Abstand des Punktes A zur Geraden BC ist, gilt mit Sicherheit $h_a \leqq \overline{AM} + \varsigma(M, BC)$, wobei mit $\varsigma(M, BC)$ der kürzeste Abstand des Punktes M von der Geraden BC bezeichnet wurde. Hieraus ergibt sich dann $d_a + R_A \geqq h_a$. (5)

Unter Verwendung der Ungleichung (4) sowie (5) und den analogen Beziehungen für h_b und h_c formen wir die Ungleichung von Erdös-Mordell in geeigneter Weise um:

$$\frac{3}{2}(R_A + R_B + R_C) \geqq R_A + R_B + R_C + d_a + d_b + d_c$$

$$\geqq (R_A + d_a) + (R_B + d_b) + (R_C + d_c)$$

$$\geqq h_a + h_b + h_c,$$

damit nach (4) $R_A + R_B + R_C \geqq \frac{2}{3}\cdot 9r = 6r$, w.z.b.w.

▲12▲ Das quadratische Mittel der Größen R_A, R_B und R_C ist nicht kleiner als ihr arithmetisches Mittel, so daß gilt

$$\sqrt{\frac{R_A^2 + R_B^2 + R_C^2}{3}} \geqq \frac{R_A + R_B + R_C}{3}$$

$\geqq$ (nach Aufgabe 11) $\geqq \frac{6r}{3}$ und damit

$R_A^2 + R_B^2 + R_C^2 \geqq 12r^2$, w.z.b.w.

Lösung zu: Eine Aufgabe von D. Bernoulli, Heft 4/82, III. US.

(1) $A_{\triangle ABC} + A_1 = A_{ges}$.

$A_{ges} = \frac{1}{2}a\cdot b + \frac{1}{4}\pi\cdot\frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}c^2$

$A_{ges} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b + \frac{1}{4}c^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right)$

(2) $A_{ges} - A_2 - A_3 = A_{schraff.}$

(2a) $A_2 = \frac{1}{4}\pi\cdot\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2$

(2b) $A_3 = \frac{1}{4}\pi\cdot\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}b^2$

(3) $A_{schraff.} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b + \frac{1}{4}c^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) - A_2 - A_3$

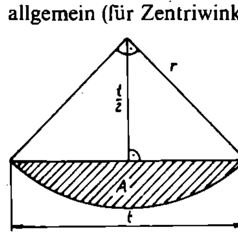
$A_{schraff.} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b + \frac{1}{4}c^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) - \frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) - \frac{1}{4}b^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right)$

$A_{schraff.} = \frac{1}{2}a\cdot b + \left(\frac{1}{2}\pi - 1\right)\left(\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2\right)$

wegen der Rechtw. des Dreiecks ABC und dem daraus folgenden Satz des Pythagoras ist dieser Ausdruck gleich Null.

damit: $A_{schraff.} = \frac{1}{2}a\cdot b = A_\triangle$

allgemein (für Zentriwinkel = 90°):



$A = \frac{1}{4}\cdot r^2 - A_\triangle$

$A = \frac{1}{4}\pi\cdot\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^2$

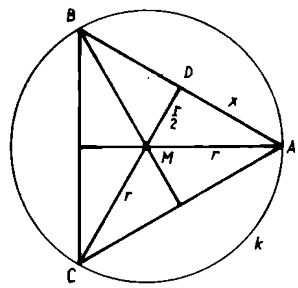
$r = \sqrt{\frac{2}{4}t^2}$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/82

Ma9 ■2199 Für den Flächeninhalt des Kreises $k(M;r)$ gilt: $A_k = \pi r^2$. Im rechtwinkligen Dreieck ADM gilt nach dem Satz des Pythagoras: $x^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$. ($x$ sei die Länge von $\overline{DA}$; $\frac{r}{2}$ ist die Länge von DM, da sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1 schneiden.) Nach Umformung erhalten wir für die Länge von $\overline{AB}$: $2x = r\sqrt{3}$.

Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks ist $A_D = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, wobei a die Länge einer Dreieckseite bezeichnet. In unserem Falle gilt: $A_D = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$.

Für das Verhältnis $A_k : A_D$ ergibt sich $A_k : A_D = \pi r^2 : \frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$ bzw. $A_k : A_D \approx 1 : 0{,}413$.



Ma 9 ■2200

Man zerlegt $1211^{100} - 1211^{98}$ in

$$\begin{aligned} &1211^{98}(1211^2 - 1)\\ &= 1211^{98}(1211 + 1)(1211 - 1)\\ &= 1211^{98} \cdot 1212 \cdot 1210\\ &= 1211^{98} \cdot 101 \cdot 12 \cdot 110 \cdot 11\\ &= 1211^{98} \cdot 12 \cdot 110 \cdot 101 \cdot 11\\ &= 1211^{98} \cdot 12 \cdot 110 \cdot 1111. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Ma 9 ■2201 Man wendet die Potenzgesetze an und erhält

$$\begin{aligned} 7^{2n} - 4^{2n} &= (7^2)^n - (4^2)^n\\ &= 49^n - 16^n. \end{aligned}$$

49^n läßt bei Division durch 33 denselben Rest wie 16^n; daraus folgt, daß $49^n - 16^n$ bei Division durch 33 den Rest Null läßt. Da alle Schritte äquivalente Umformungen sind, gilt: aus $33 \mid 0$ folgt $33 \mid 7^{2n} - 4^{2n}$ für alle $n \in N$, q. e. d.

Ma 10/12 ■2202 Zweistellige natürliche Zahlen lassen sich in der Form $10a + b$ mit $a, b \in N$, $0 \leqq b \leqq 9$, $0 < a \leqq 9$ darstellen.

Nun gilt nach den Bedingungen der Aufgabe

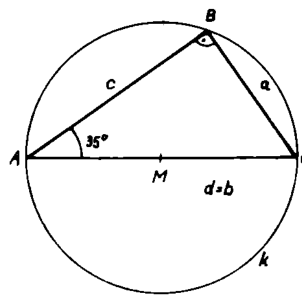
$$\begin{aligned} 10a + b &= (a + b)b,\\ 10a + b &= ab + b^2,\\ a(10 - b) &= b^2 - b,\\ a &= b \cdot \frac{b-1}{10-b}. \end{aligned}$$

Setzt man nacheinander für b alle möglichen Ziffern ein, so ist nur für $b = 4$ und $b = 5$ $a \in N$ und $a < 10$. Für $b = 4$ ist $a = 2$; für $b = 5$ ist $a = 4$.

Somit erfüllen nur die Zahlen 24 und 45 die Bedingungen der Aufgabe.

Ma 10/12 ■2203 Der Winkel $\sphericalangle BFA$ habe die Größe α; im Dreieck ABF gilt dann $\tan\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{3}} = 1{,}5$ und folglich $\alpha \approx 56{,}3$. Wenn das Dreieck EFG gleichseitig wäre, müßte dieser Winkel die Größe 60° haben. Damit ist gezeigt, daß das Dreieck EFG nicht gleichseitig ist.

Ma 10/12 ■2204 Skizze: (nicht maßgerecht)

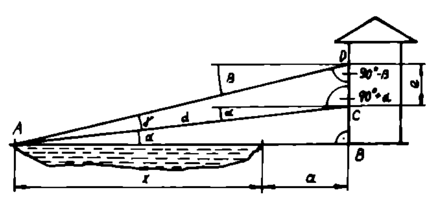


Wenn $\overline{AC}$ Durchmesser von k ist, so ist das Dreieck ABC rechtwinklig (Satz des Thales).

Aus $A_k = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 19{,}63\,\text{cm}^2$ folgt $d \approx 5\,\text{cm}$. Für die Länge c von AB gilt $c = \frac{u}{4} = \frac{\pi \cdot d}{4} \approx 3{,}9\,\text{cm}$ und $\sin 35° = \frac{a}{5}$; $a \approx 2{,}9\,\text{cm}$.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt: $A_D \approx \frac{3{,}9 \cdot 2{,}9}{2}\,\text{cm}^2$; $A_D \approx 5{,}7\,\text{cm}^2$, das sind etwa 29 % der Kreisfläche.

Ma 10/12 ■2205 Skizze (nicht maßstäblich)



Es gilt $\alpha + \gamma = \beta$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen), also $\gamma = \beta - \alpha = 24{,}6° - 18{,}4° = 6{,}2°$.

Nun gilt im Dreieck ACD

$e : \sin\gamma = d : \sin(90° - \beta)$ bzw.

$$d = \frac{e \cdot \sin(90° - \beta)}{\sin\gamma} = \frac{e \cdot \cos\beta}{\sin\gamma} \qquad (1)$$

Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt

$$\cos\alpha = \frac{x + 4}{d};\ x = d \cdot \cos\alpha - a. \qquad (2)$$

Wir setzen (1) in (2) ein und erhalten

$$x = \frac{e \cdot \cos\beta}{\sin\gamma} \cdot \cos\alpha - a;$$

$$x = \frac{8\,\text{m} \cdot \cos 24{,}6° \cdot \cos 18{,}4°}{\sin 6{,}2°} - 10\,\text{m};$$

$x \approx 54\,\text{m}$.

Der Fluß ist etwa 54 m breit.

Ph 6 ■111 Die Strecken und Kreisbögen scheinen unterschiedliche Längen zu haben. Die Messung beweist, daß die Längen gleich sind. Unsere Sinne können uns sehr leicht täuschen. Deshalb müssen wir immer durch eine Messung genau prüfen.

Ph 7 ■112 Auf die Oberfläche des Tauchers wirkt eine Druckkraft von 74 Mp ($\approx$ 726 kN).

Ph 8 ■113 Die ersten beiden Widerstände sind 64 Ω, der dritte 252 Ω.

Ph 9 ■114 Es sind 20 Scheiben erforderlich.

Ph 10/12 ■115 Die Schwingungsdauer der beiden Pendel steht im Verhältnis $\sqrt{2} : 1$.

Ch 7 ■89 a) Aus 60 kg Kupfer entstehen durch Oxydation 75 kg Kupfer(II)-Oxid;

b) 15 kg Sauerstoff sind der angegebenen Kupfermenge äquivalent;

c) bei einer monatlichen Planerfüllung von 104 % werden 208 t Kupfer(II)-Oxid produziert.

Ch 8 ■90 a) 1,867 m^3 Wasserdampf sind zur Umsetzung von 1 kg Hüttenkoks erforderlich;

b) es entstehen 3,36 m^3 Wasserglas;

c) eine moderne Anlage produziert stündlich 19488 m^3 Wasserglas.

Ch 9 ■91 Der Verbrauch an Kohlendioxid beträgt 0,242 m^3. Zum Abbinden von 2,4 kg Kalkmörtel, der zu einem Drittel aus Löschkalk besteht, sind 806,7 m^3 Luft erforderlich.

Ch 10/12 ■92 Aus 6 t Anhydrit, welches 20 % Verunreinigungen enthält, entstehen 3,46 t 100 %ige Schwefelsäure. Aus 6 t Anhydrit mit 20 % Verunreinigungen entstehen bei einer Schwefeldioxidausbeute von 94 % 5 t 60 %ige Schwefelsäure.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 2/82

Ma 5 ■2208 Aus b) und c) folgt:

Das Mädchen mit dem Nachnamen Mayer gehört der Klasse 5a an. Deshalb gehört Doris der Klasse 6a, Andrea der Klasse 5b an.

Aus a) folgt:

Das Mädchen mit dem Nachnamen Schulz gehört der Klasse 6b an.

Aus d) folgt:

Carola gehört der Klasse 6b an, sie hat den Nachnamen Schulz, da sie nicht zur Klasse 5b gehört. Deshalb gehört Beate zur Klasse 5a und hat den Nachnamen Mayer. Andrea hat den Nachnamen Lehmann, also Doris den Nachnamen Becker.

Vorname	Nachname	Klasse
Beate	Mayer	5a
Andrea	Lehmann	5b
Doris	Becker	6a
Carola	Schulz	6b

Ma 5 ■2209 Die Mutter wendete auf alle von Uwe genannten Rechenoperationen die Umkehroperationen an. Sie begann mit der letzten und endete mit der ersten von Uwe genannten Operation. Die Mutter rechnete wie folgt:

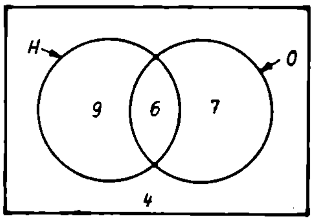
$4 + 44 = 48$; $48 : 4 = 12$; $12 - 4 = 8$.

Uwe hatte auf dem Zeugnis 8 Einsen.

Ma 5 ■2210 Wegen $1111 = 11 \cdot 101$ und weil sich die Faktoren 11 und 101 nicht in weitere

Produkte zerlegen lassen, deren Faktoren von 1 verschieden sind, existiert genau eine solche Zahl, sie lautet 11101.

Ma 5 ■2211 Wir rechnen $13-6=7$, $15-6=9$, $7+9+6+4=26$. Dieser Klasse gehören genau 26 Schüler an. Das abgebildete Diagramm veranschaulicht diese Lösung.



H bedeutet: Menge der Schüler, die im Harz waren.
O bedeutet: Menge der Schüler, die an der Ostsee waren.

Ma 5 ■2212 Angenommen, Ottos Schwester Inge ist n Jahre alt; dann gilt $(n \cdot 6+2):4=11$, also $6 \cdot n+2=44$, $6 \cdot n=42$, $n=7$. Inge ist somit 7 Jahre, Axel 1 Jahr alt.

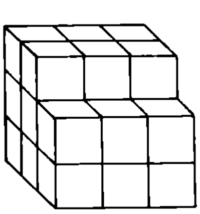
Ma 5 ■2213 Für die gesuchten Zahlen n gilt $10 \leqq n \leqq 99$. Die Zahlen 11, 16, 21, 26, ..., 91, 96 lassen bei Division durch 5 den Rest 1. Von diesen Zahlen lassen aber nur die ungeraden bei Division durch 2 den Rest 1. Von den nunmehr verbleibenden Zahlen 11, 21, 31, ..., 91 sind nur die Zahlen 21, 51 und 81 durch 3 teilbar.

Ma 6 ■2214 Angenommen, es müssen noch x Mark eingesammelt werden. Von n Schülern sind noch 2 M, von weiteren n Schülern 6 M, von 4 Schülern noch 3 M, von $(25-2n)$ Schülern noch 4 M einzusammeln. Deshalb gilt

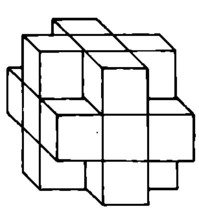
$$2n+6n+3 \cdot 4+4(25-2n)=x,$$
$$8n+12+100-8n=x,$$
$$x=112.$$

Es müssen insgesamt noch 112 M eingesammelt werden.

Ma 6 ■2215 Die Oberfläche des Restkörpers von Ralf wird aus $6 \cdot 9-2=52$ kleinen Quadraten, die Oberfläche des Restkörpers von Rita wird aus $6 \cdot 9=54$ kleinen Quadraten gebildet. Also hat Ralf recht.



Restkörper von Ralf



Restkörper von Rita

Ma 6 ■2216 Da es sich um gerade natürliche Zahlen handelt, kann die letzte Ziffer nur 0 oder 6 sein. Es existieren genau 12 solcher Zahlen: 300, 306, 330, 336, 360, 366, 600, 606, 630, 636, 660, 666.

Ma 6 ■2217 (1) Jede Zahl ist um 3 größer als die vorangehende, also $a=16$.
(2) Jede Zahl ist doppelt so groß wie die vorangehende, also $b=4$.
(3) Die zweite Zahl ist um drei größer als die erste, die dritte um vier größer als die zweite, die vierte um fünf größer als die dritte usw., also $c=13$.
(4) Die zweite Zahl ist um $1 \cdot 2$ größer als die erste, die dritte um $2 \cdot 2$ größer als die zweite, die vierte um $4 \cdot 2$ größer als die dritte, die fünfte um $8 \cdot 2$ größer als die vierte usw., also $d=4$.
(5) 1, $1 \cdot 2$, $1 \cdot 2 \cdot 3$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, also $e=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6=720$.
(6) 1, $1+3^1=4$, $4+3^2=13$, $13+3^3=40$, $40+3^4=121$, $121+3^5=365$, also $f=4$.

Ma 6 ■2218 Peter hat $(11 \cdot a+3)$ Nüsse bzw. $(13 \cdot b+11)$ Nüsse, dabei sind a und b natürliche Zahlen. Nun gilt

$$11a+3=13b+11,$$
$$11a=13b+8,$$
$$11a=11b+2b+8,$$
$$a=b+\frac{2(b+4)}{11}.$$

Ferner gilt $400<13b+11<600$, $389<13b<589$, also $30 \leqq b \leqq 45$. Nur für $b=40$, also für $a=48$ wird die Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Peter hat somit $(13 \cdot 40+11)$ Nüsse; das sind 531 Nüsse. Probe: $13 \cdot 40+11=531$.

Ma 7 ■2219 Die Gleichung $\overline{aa}^2=\overline{bbcc}$ läßt sich auf folgende Form bringen:

$$(10a+a)^2=1000b+100b+10c+c,$$
$$(11a)^2=1100b+11c,$$
$$121a^2=11 \cdot (100b+c),$$
$$11a^2=100b+c,$$
$$11a^2=99b+b+c,$$
$$a^2=9b+\frac{b+c}{11}.$$

Wegen $1 \leqq b \leqq 9$ und $1 \leqq c \leqq 9$ erhalten wir nur für $b+c=11$ das Quadrat einer natürlichen Zahl. Daraus folgt weiter $a^2=9b+1$. Nur für $b=7$ erhält man eine Quadratzahl, nämlich $a^2=64$, also $a=8$ und somit $c=4$. Es existiert genau eine Lösung; sie lautet $88^2=7744$.

Ma 7 ■2220 Es seien $m-1$, m und $m+1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen; die Summe dieser Zahlen beträgt $3m$. Nun gilt $(m-1) \cdot m \cdot (m+1)=85 \cdot 3m$, und wegen $m \geqq 2$ gilt

$$(m-1) \cdot (m+1)=255,$$
$$m^2-1=255,$$
$$m^2=256,$$
$$m=16.$$

Die gesuchten Zahlen lauten somit 15, 16 und 17, und es gilt

$$15 \cdot 16 \cdot 17=85 \cdot (15+16+17),$$
$$4080=4080.$$

Hinweis: Aus Platzgründen müssen wir auf die restlichen Lösungen Mathematik, Physik und Chemie verzichten, d. Red.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Georg Pólya

Zürich

Können Sie folgende drei Aufgaben lösen? Sehen Sie eine Ähnlichkeit zwischen den Lösungen?

▲2265▲ a) Wie alt ist der Kapitän, wie viele Kinder hat er, und wie lang ist sein Boot? Gegeben ist das Produkt der drei natürlichen Zahlen. Die Länge des Bootes ist in Metern (mehrere Meter) angegeben, der Kapitän hat Söhne und Töchter, und er ist älter als die Anzahl seiner Kinder, aber noch nicht 100 Jahre alt.
b) Alfred, Bernd und Christian planen ein großes Picknick.
Jeder Junge bezahlt 9 Mark. Jeder kauft belegte Brote, Eis und Brause. Jeder gibt 9 Mark aus, bezahlt aber für jede Ware einen unterschiedlichen Betrag. Kein Junge bezahlt für eine Ware den gleichen Betrag wie ein anderer. Die größte Summe gibt Alfred für Eis aus. Bernd bezahlt zweimal so viel für Brote wie für Eis. Wieviel muß Christian für Brause bezahlen?
c) Die drei Ehepaare Lehmann, Schmidt und Müller kaufen Süßigkeiten für die benachbarten Kinder. Jeder kauft so viele gleiche Süßigkeiten, wie er (oder sie) Pfennig für eine Süßigkeit bezahlen muß. Jede Frau gibt 75 Pfennig mehr aus als ihr Mann. Ann kauft ein Stück mehr als Bernd Lehmann, Betty ein Stück weniger als Johannes Schmidt. Wie lautet Marions Zuname?

Kurzbiografie
Universitätsstudium in Budapest und Wien vor und in Göttingen und Paris nach der Promotion, welche 1912 in Budapest erfolgte. Unterrichtete an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich von 1914 bis 1940, von 1928 an als ordentlicher Professor. Seit 1942 an der Universität Stanford (USA), seit 1953 als Professor emeritus, jedoch noch tätig im Unterricht, insbesondere in der Weiterbildung von Mathematiklehrern. Korrespondierendes Mitglied der Académie des Sciences in Paris, Ehrenmitglied der Londoner und der schweizerischen mathematischen Gesellschaften und des Bureaus de la Société Mathématique de France, Ehrendoktor der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich und der Universität von Alberta (Kanada).

alpha-Wettbewerb 1980/81

Kollektive Beteiligung

Pablo-Neruda-OS, Ahlbeck; Fr.-Engels-OS, Haus der Jungen Pioniere, beide Altenburg; W.-Pieck-OS, Altenweddingen; OS Fr. Weineck, Alsleben; W.-Pieck-OS, Anklam; OS Asbach; E.-Thälmann-OS, Bad Bibra; S.-Rädel-OS, Bad Gottleuba; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; OS Bad Wilsnack; M.-Poser-OS, Bad Salzungen; Zentrale OS H. Beimler, Bärenklau; OS H. Warnke, Bergwitz; OS A. Becker, Berlingerode; 37. OS, 39. OS, beide Berlin; OS E. Thälmann, Fr.-Mehring-OS, beide Bernburg; Cl.-Zetkin-OS, Bischofferode; Math.-Kreiszirkel, Bischofswerda; OS Fr. Schiller, Bleicherode; Fr.-Weineck-OS, Blumberg; OS L. Herrmann, Blumenhagen; OS Blumenthal; OS K. Burger, Bredenfelde; OS B. Brecht, Brehme; W.-Seelenbinder-OS, OS H. Beimler, beide Breitungen; OS Breitenworbis; OS Freundschaft u. Frieden, Brieselang; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; TOS Büttelstedt; Th.-Müntzer-OS Choren; Th.-Müntzer-OS, Cochstedt; N.-Ostrowski-OS, Coswig; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Cottbus; OS Dambeck; M.-Gorki-OS, Dermbach; 4. OS, Dessau; OS Deutschenbora; AG Math., Diesdorf; OS K. Kollwitz, OS Makarenko, beide Dingelstädt; OS K. Bürger, Dobbertin; OS A. Matrossow, Dorndorf; 42. OS, 39. OS Fr. Schulze, 106. OS, alle Dresden; Fr.-Wolf-OS, Ebersdorf; OS Fr. Engels, Effelder; W.-Pieck-OS, Eichhof; Geschw.-Scholl-OS, Eisenach; OS Fr. Heckert, OS J. Schehr, beide Eisleben; OS H. Grundig, Ellrich; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; OS Geschw. Scholl, Falkensee; Päd. Kreiskabinett, Falkenstein; OS Th. Müntzer, Fambach; B.-Brecht-OS, Floh; Zentrale OS, Frankenheim; 19. OS Frankfurt; Lenin-OS, Freiberg; BBS VEB Edelstahlwerk 8. Mai 1945, Freital; OS K. Marx, Freyburg; Math. Zirkel, OS Friedenshorst; OS Friedeburg; OS Fr. Reuter, Friedland; OS H. Günther, Fürstenwalde; Spezialschule C. F. Gauß, Frankfurt; Haus d. Pioniere, Gadebusch; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; OS Diesterweg, Geringswalde; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; K.-Kräpler-OS, Gnoien; OS Görzke; OS Goßwitz; Kalinin-OS, Geschwenda; Kreisklub Jg. Math., Gräfenhainichen; E.-Thälmann-OS, Greifswald; OS H. Beimler, Greußen; OS W. I. Lenin, Gröbers; OS W. Seelenbinder, Gröden; III. OS, Gröditz; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbodungen; Lessingschule Großpostwitz; Kreiszirkel Math., Großröhrsdorf; OS Großschönau; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Haus der Jungen Pioniere, A.-Gaidar-OS, beide Hagenow; M.-Gorki-OS, Hainichen; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Halberstadt; OS f. Körperbehinderte, Halle; W.-Koenen-OS, Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; OS Hanshagen; OS u. TEOS, Havelberg; OS Haynrode; OS B. Koenen, Hedersleben; Schule d. DSF, Heiligengrabe; EOS W. Pieck, Heiligenstadt; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; OS Hiddensee; OS Hillersleben; OS Horka; OS 21, Hoyerswerda; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; E.-Weinert-OS, Jocketa; Fr.-Engels-Schule, Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow; Wl.-Komarow-OS, E.-Thälmann-OS, E.-Schneller-Schule, P.-Tschaikowski-OS, K.-Bobach-OS, alle Karl-Marx-Stadt; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; OS Kelbra; OS E. Schneller, Kirchberg; Th.-Neubauer-Schule, Kieselbach; EOS G. Thiele, Kleinmachnow; H.-Matern-OS, Klietz; OS Th. Müntzer, Klettenberg; OS E. Thälmann, Klosterfelde; OS W. Seelenbinder, Könitz; Bachschule, Station Jg. Naturf. u. Techniker, beide Köthen; OS Krossen; OS Küllstedt; OS Latdorf; Schulkombinat Lauscha-Ernstthal; O.-Engert-OS, O.-Schön-OS, 146. OS, alle Leipzig; OS IV J.-C.-Fuhlrott, E.-Thälmann-OS, K.-Liebknecht-OS, EOS K. Marx, alle Leinefelde; M.-Poser-OS, Lengfeld; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; OS Liebenwalde; Pestalozzi-OS, Löbau; OS W. Wallstab, Löderburg; OS W. Pieck, Lichte; W.-Seelenbinder-OS, Lössau; OS J. Schröder, Lubmin; OS K. Marx, Stat. Jg. Naturf. u. Techniker, beide Lübz; Fr.-L.-Jahn-OS, Lübtheen; Stat. Jg. Techniker, Luckau; Haus d. Jungen Pioniere Th. Körner, Ludwigslust; Haus d. Jungen Pioniere, Magdeburg; OS Marisfeld; G.-Eisler-OS, Martinroda; 7. OS M. I. Kalinin, Meiningen; Geschw.-Scholl-Schule, Meyenburg; OS Mittelstille; OS Mittelherwigsdorf; E.-Thälmann-OS, Mittweida; OS H. Danz, Möser; OS-Kombinat, Molschleben; Kinderheim Munzig; OS J. Fučik, Naundorf; W.-Bykarski-OS, Neetzow; OS Neundorf; Goethe-OS, Neupetershain; H.-Beimler-OS, Neustrelitz; OS W. Seelenbinder, Neverin; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; W.-Pieck-OS, Niederwiesa; OS J. Gagarin, Nordhausen; OS E. Weinert, Oberschönau; OS Ockrilla; Pestalozzi-OS, Oschatz; OS Osternienburg; OS H. Matern, W.-Pieck-OS, beide Osterwieck; O.-Grotewohl-OS, Pappenheim; Stat. Jg. Naturf. u. Techn., Parchim; OS K. Kollwitz, Peißen; OS III Geschw. Scholl, Perleberg; OS Petersdorf; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Pfaffschwenda; Spezialistenlager Math. Plauen; Kreis-AG Plauen-Land; A.-Becker-OS, Prenzlau; OS Pritzerbe; Goetheschule II, Pritzwalk; E.-Rietschel-OS, Pulsnitz; Makarenko-OS, Plessa; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; Pestalozzi-OS, OS H. Matern, beide Radebeul; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Raguhn; H.-Zille-Schule, Radeburg; Geschw.-Scholl-OS, Rathenow; J.-Gagarin-OS, OS U. Steinhauer, beide Ribnitz-Damgarten; Spezialschule Fr. Engels, Riesa; J.-Curie-OS, Röbel; OS Römhild; J.-Curie-OS, Ronneburg; Ziolkowski-OS, Roßdorf; 34. OS M. Reichpietsch, Rostock; W.-Pieck-OS Rotta; OS Rüssen; OS Saal; OS E. Weinert, Saalfeld; W.-Pieck-OS, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Sangerhausen; OS Schafstädt; OS Schlagsdorf; OS H. Matern, Schernberg; OS M. Gorki, Schkölen; W.-I.-Lenin-OS, Schkopau; OS Schleiz; OS Schlottwitz; 4. OS, J.-G.-Seume-OS, EOS G. Dimitroff, alle Schmalkalden; OS Schule d. DSF, Schneidlingen; OS Kuba, Schorssow; HBOS Schönhausen; OS Fr. Engels, Schwallungen; OS S. Kosmodemjanskaja, Schweikershain; M.-May-OS, Sebnitz; OS W. Seelenbinder, Sitzendorf; Kreisklub Math., Senftenberg; OS J. R. Becher, OS W. Pieck, beide Sondershausen; OS A. Becker, OS K. Marx, K.-Liebknecht-OS, alle Spremberg; K.-Liebknecht-OS, Stadtlengsfeld; II. OS E. Wölk, Stadtroda; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; OS Straßgräbchen; Mathe-Klub, O.-Grotewohl-OS, beide Stralsund; 11. OS A. S. Schumanzow, 12. OS Dr. R. Sorge, beide Suhl; OS E. Schneller, Taubenheim; J.-Gagarin-OS, Teistungen; K.-Kollwitz-OS, Thale; Fr.-Mehring-OS, Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; E.-Thälmann-OS, Trebsen; OS W. Pieck, Trusetal; E.-Welk-OS, Goetheschule, A.-Nitz-OS, alle Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; A.-Hennecke-OS, Untermaßfeld; E.-Schneller-OS, Urnshausen; OS G. Seume, Vacha; OS VITTE; alpha-Club, Vitzenburg; Th.-Müntzer-OS, Walsleben; Goetheschule, Päd. Kreiskabinett, beide Waren; OS L. Fürnberg, Wegeleben; Sprachheilschule Weimar; E.-Thälmann-OS, Weinböhla; Berditz-OS, Weißenfels; Kreisklub Jg. Math., Weißwasser; OS O. Grotewohl, Westerengeln; Cl.-Zetkin-OS, Wiehe; H.-Rau-OS, Wildau; Dittesschule Wilkau-Haßlau; OS Wittenförden; E.-Thälmann-OS, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Wittstock; Haus der Jungen Pioniere, Wismar; OS I, H. Werner, Worbis; Station J. Techn., Wolfen; OS Fr. Gießner, Woffleben; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Wolmirstedt; OS H. Heine, Wörmlitz; OS Th. Müntzer, Wulfen; H.-Eisler-OS, Wusterhusen; P.-Lamberz-OS, Zehdenick; Lutherschule, Fr.-Schiller-OS, beide Zella-Mehlis; EOS Zittau; OS Zschornewitz.

Preisträger

Beatrice List, Altenburg; Veneta Türke, Auerbach (Kl. 2); Stefan Müller, Birk Schulze, Wilko Wohlauf, alle Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Jens Baumann, Bernsbach; Thomas Gerlach, Buhla; Karsten Kehler, Cottbus; Mario Schubert, Thomas Hübner, Gerald Eichler, alle Dresden; Jörg Simon, Engelsdorf; Susanne Heller, Fambach; Thomas Scheibe, Ferdinandshof; Dorothee und Annemarie Heidrich, Freiberg; Kerstin Thiele, Astrid Gebauer, Sinilga Kleindienst, alle Friedeburg; Ingmar Hellhoff, Friedersdorf; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Thomas Nicklisch, Falkenberg; Andreas Tille, Halle; Judith Krippner, Mathias Schädlich, Mandy Probst, Simone Pötzsch, Heike Reichelt, alle Hammerbrücke; Clemens Unger, Hasselfelde; Ingo Müller, Hermannsdorf; Maik Otto, Holzthaleben; Claudia Schwartz, Ilmenau; Henrik Hodam, Kaltennordheim; Jens Weber, Karl-Marx-Stadt; Ralf Laue, Uwe Werner, beide Leipzig; Andreas Hübler, Mittelbach; Christian Eisele, Mölkau; Steffen Scharnowski, Möser; Torsten Linß, Nordhausen; Matthias Dalitz, Obhausen; Steffen Scheithauer, Parey; Birgit Seifer, Pinnau; Michael Taeschner, Parchim; Ralf Bauer, Riesa; Anne und Heiner Ruser, Oliver Eidam, alle Rostock; Jeannette Schmücker, Bianka Schweiger, Irena Thiele, Katja Klotsch, alle Rotta; Knut Marzisch, Rudolstadt; Sabine Schwelgien, Schönhausen; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Jens Gerstenberger, Stadtroda; Olaf Otto, Stolpe; Wolfgang Vogel, Thalheim; Helga Tasch, Timisoara (Rumänien); Jana Rönnicke, Uthausen; Andreas Döring, Wiederitzsch; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Simone Keil, Julia Armbrecht, beide Worbis; Christine Thomas, Zittau; Harald Hempel, Zschoppach; Annett Hellwig, Zschornewitz.

Vorbildliche Leistungen

Thomas Heilfort, Bad Gottleuba; Andreas Schneider, Badingen; Ute Partsch, Christiane Böttger, beide Bad Salzungen; Silvia Holzmüller, Bergwitz; Ulrich Zülicke, Bergwitz; Jens-Uwe Jaeschke, Kerstin Kantiem, Beate Müller, Bernd Trappe, alle Berlin; André Lorenz, Marco Weißflog, beide Bernsbach; Karsten Kühne, Blankenfelde; Annerose Schmidt, Bleicherode; Michael Kremmer, Breitungen; Kathleen Riemichen, Burgkemnitz; Peter Strempel, Karsten Mittag, Rolf Roßius, Martin Leitel, alle Cottbus; Jörg Uhlig, Charis Förster, beide Crimmitschau; Uwe Martin, Crossen; Kay Mengel, Lars Kliesche, beide Dahme; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; Thomas Kaufhold, Dingelstädt; Annett Runze, Dölitz; Frank Kunert, Ebersbach; Lutz Küch, Erlau; Ulrich Wenschuh, Falkenstein; Anke Mittag, Fischbeck; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Ansgar Heise, Kristina Böttger, beide Görlitz; Kathrin Pohle, Görzke;

Katja Friebel, Gossa; Ramona Falke, Susan Meinel, beide Hammerbrücke; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Ulf Graubner, Hermannsdorf; Hagen Reimann, Horka; Heidrun Schmidt, Hoyerswerda; Claudia Docter, Ilsenburg; Steffi Gebauer, Jena; Carla Umlauf, Hildegard Geisler, Michael Hoppe, alle Karl-Marx-Stadt; Jens Voigt, Kleinmachnow; Sylvia Hofmann, Langenlueba-Ndr.; Thomas Rademacher, Lübben; Carsten Behling, Frank Görisch, beide Magdeburg; Eike Kretzschmar, Mittweida; Detlef-Sven Saar, Mühlhausen; Stefan Warnest, Neuruppin; Antje Flechsig, Obercrinitz; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Ilka Lange, Osterwieck; Michael Struch, Parchim; Ingo Schubert, Pfaffroda; Annette Holzmann, Prenzlau; Wolfgang Schneider, Radeberg; Antje Ballmann, Rotta; Ronald Bojarski, Saßnitz; Thomas Habel, Schönewalde; Anja Bohne, Schönhausen; Uta Möbius, Schwerin; Reiner Möwald, Sömmerda; Steffen Lieschke, Stadtroda; Anja Reumschüssel, Steinbach-Hallenberg; Thomas Heublein, Steinach; Sven Janssen, Tornau; Viola Krause, Uthausen; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Hartmut Boettcher, Weimar; Daniel Schlott, Gereon Begau, Frank Schräpel, alle Worbis; Markus Lehmann, Zittau

Abzeichen in Gold für fünfzehnjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Hennigsdorf

Für vierzehnjährige Teilnahme
Bernd Hanke, Großschweidnitz; Guido Blosfeld, Halle

Für dreizehnjährige Teilnahme
Ullrich Riedel, Flöha

Für zwölfjährige Teilnahme
Arno Feuerherdt, Brandenburg; Thomas Jakob, Gera; Ursula Märker, Greifswald; Rainer Seifert, Kamenz; Norbert Littig, Lichtenberg; Sybille Baumgart, Löderburg; Uwe Bormann, Magdeburg; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Frank Aßmus, Oranienburg; Bernhard Tschada, Sondershausen

Für elfjährige Teilnahme
Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Fittke, Berlin; Wolfgang Seeber, Gehren; Bengt Nölting, Greifswald; Rolf Kuhn, Leipzig; Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Katrin Richter, Wittenberg; Kurt Oertel, Zschornewitz

Für zehnjährige Teilnahme
Andrea Nießen, Andreas Gude, beide Berlin; Frank Regensburger, Werner Jeroch, beide Dresden; Andrea Ziegenbein, Eichicht; Regina Bricks, Eberhard Georgy, beide Erfurt; Wolfhart Umlauft, Freital; Claudia Endtricht, Görlitz; Steffen Langbein, Lichte; Rainer Bauer, Mittweida; Wilfried Röhnert, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Torsten Löwe, Schleiz; Heinz-Olaf und Haiko Müller, beide Schmalkalden; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Sylvia Kunze, Weißenfels; Ralf Becker, Wolmirstedt

Für neunjährige Teilnahme
Dieter und Henri Koch, Arnstadt; Hans-Jürgen Kopf, Bad Frankenhausen; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Werner König, Berlingerode; Jens Purand, Cottbus; Angela Jircik, Annett Körner, Peter-Alexander Pöhler, Klaus Schlegel, alle Dresden; Diana Semper, Eisleben; Uwe Kintzel, Erfurt; Silvio Klose, Gera; Mathias Weser, Großenhain; Hubert Steinmetz, Grüningen; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Doris Planer, Hohendorf; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Marko Hanke, Karl-Marx-Stadt; Jörg Pöhland, Klingenthal; Bärbel Wintzler, Lobenstein; Martin Wolf, Magdeburg; Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Volkmar Riemer, Neubrandenburg; Rüdiger Düsing, Osterburg; Antje Langer, Oybin; Jens-Peter und Sigrid Planke, Premnitz; Ronald Bracholdt, Riesa; Jana Walter, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Ina Spanaus, Schleusingen; Torsten Jeschke, Schwarzheide; Bernd Hartwig, Thaldorf; Dietmar Ulbricht, Velten; Christoph Chojetzki, Zeithain; Frank Erdmann, Zeitz; Bernd Dübe, Forst

Für achtjährige Teilnahme
Guntram Türke, Auerbach; Thorsten Tonndorf, Bad Salzungen; Claudia Ziehm, Frank Bendin, beide Berlin; Ulrich Kramer, Bernterode; Maik Weide, Callenberg; Andreas Winkler, Cossebaude; Kathrin Magister, Cottbus; Harry Höfer, Dorndorf; Thomas Schindhelm, Jörn Wittig, Karl-Heinz Jünger, Carolin Engel, Lutz Jeroch, Susanne Müller, alle Dresden; Birgit Bricks, Volker Georgy, Thomas Mittelbach, Dirk-Thomas Orban, Renate Lützkendorf, alle Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Steffi Haucke, Ralf Baumhekel, beide Freital; Gerd Hackbarth, Gallentin; Angela Illing, Gersdorf; Frank Scheffler, Gnoien; Stefan Göckeritz, Gunnar Boll, beide Greifswald; Michael Katzer, Greußen; Enka Stelzer, Heringsdorf; Volker Reck, Heiligenstadt; Eike Harmel, Hohenferchesar; René Schüppel, Mathias Grundmann, beide Hoyerswerda; Bernd und Horst Fliegner, Jarmen; Thomas Mader, Andreas Hengst, Birgit Hofmann, alle Karl-Marx-Stadt; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Per Witte, Königs Wusterhausen; Heike Rudolf, Leipzig; Tobias Lükke, Meißen; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Thomas Möller, Meiningen; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woike, Neustadt; Torsten Kretschmer, Naumburg; Birgit Uhlmann, Oberlungwitz; Anett Schulzensohn, Oberseifersdorf; Birgit Seifert, Peter Seifert, beide Pinnau; Hagen Mrowetz, Prenzlau; Karsten Schlutter, Potsdam; Claudia Würker, Reichenbach; Hartmut Lipke, Ribnitz; Astrid Wruck, Rostock; Roland Goldenbogen, Stralsund; Peter Pfannschmidt, Suhl; Heidrun Tiedt, Teterow; Margit Creutzburg, Thal; Annekatrein Heuer, Tieckow; Gisbert Thiere, Wallhausen; Stefan Syring, Warin; Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde; Olaf Seidel, Weißwasser; Birgit Schmidt, Worbis; Gudrun Boettcher, Weimar; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand; Eva-Maria Heubner, Wolfen; Jens Pönisch, Conchita Röske, beide Karl-Marx-Stadt.

Diese Kryptogramme stammen aus der Feder von: Dirigent Jindřich Penčik, Praha; Beatrix Rost, Riesa (Kl. 10); Kathrin Müller, Bad Wilsenack (Kl. 9); Schülerin S. Schwabe, Olbersdorf (Kl. 6); Thomas Rademacher, Lübben (Kl. 8); Andrea Nessau, Berlin (Kl. 8); Ing. H. Decker, Köln; J. Lehmann, Chefredakteur alpha

❶ MATHE+IST+MEINE = LIEBE

❷ PLUS+PLUS+PLUS+PLUS+PLUS = MATHE

❸ MINUS+MINUS+MINUS+MINUS+MINUS = HOBBY

❹ IHR+LERNT+GERN=MATHE

❺
MATHE
+MACHT
FREUDE

❻
abab
+baba
cccc

❼
X : Y = Y
− + +
Q · V = EN
V+EO=EV

❽
2∗∗ · 3∗∗
5∗∗
∗4∗
∗∗3
∗∗∗∗∗

❾
BD+BC=CC
+ : :
BC : A = C
CC : C = BB

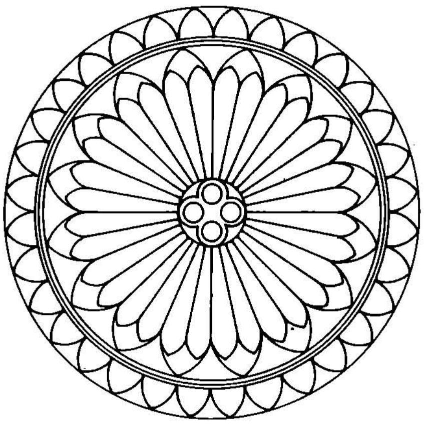
❿
□○+△=□■
− + −
○● −▲=○△
△△ +● =○○

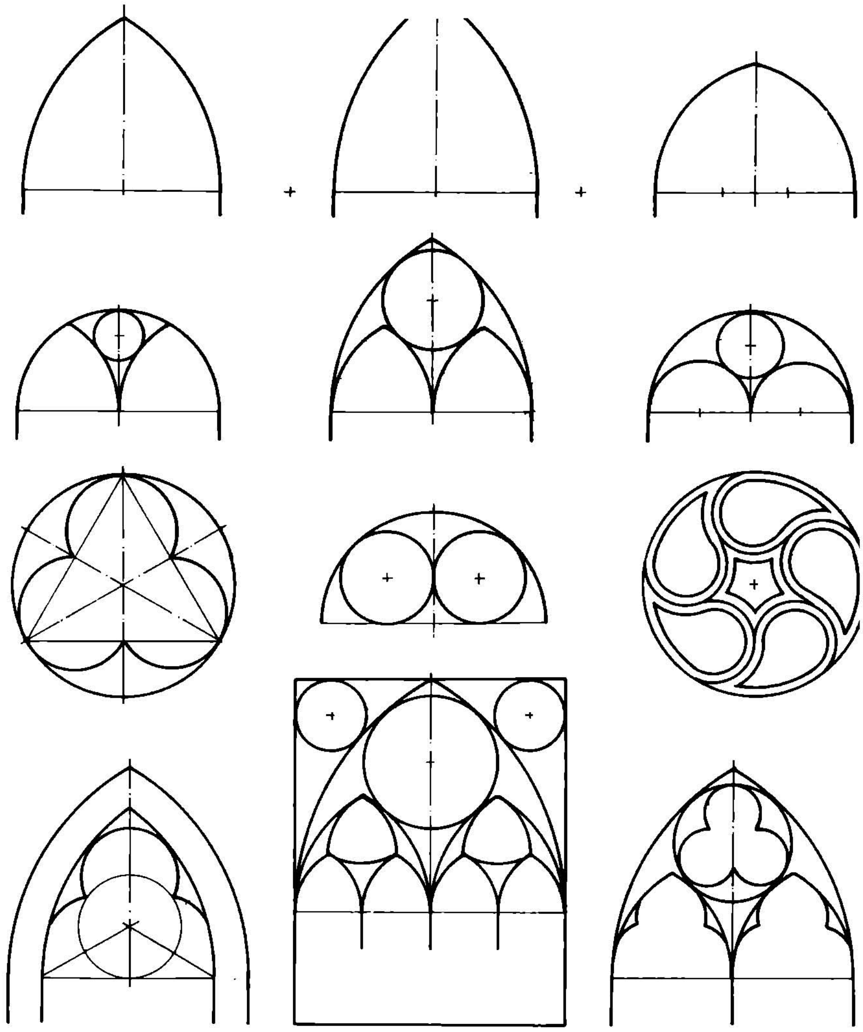
⓫
OPA
+OMA
PAAR

⓬ 2∗∗ : ∗∗ = ∗∗
∗7
∗1∗
∗∗∗
0

⓭ $\sqrt{ALPHA}$=HHA

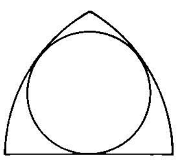
Geometrie und Architektur



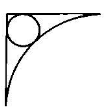


Aufgaben

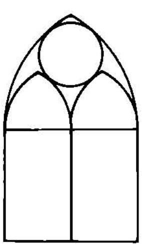
▲1▲ Die Figur zeigt die Skizze eines einfachen Maßwerkes. Gib eine Konstruktionsbeschreibung!



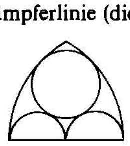
▲2▲ Die Figur zeigt einen einfachen Träger mit Kreisverzierung. Gib eine Konstruktionsbeschreibung!

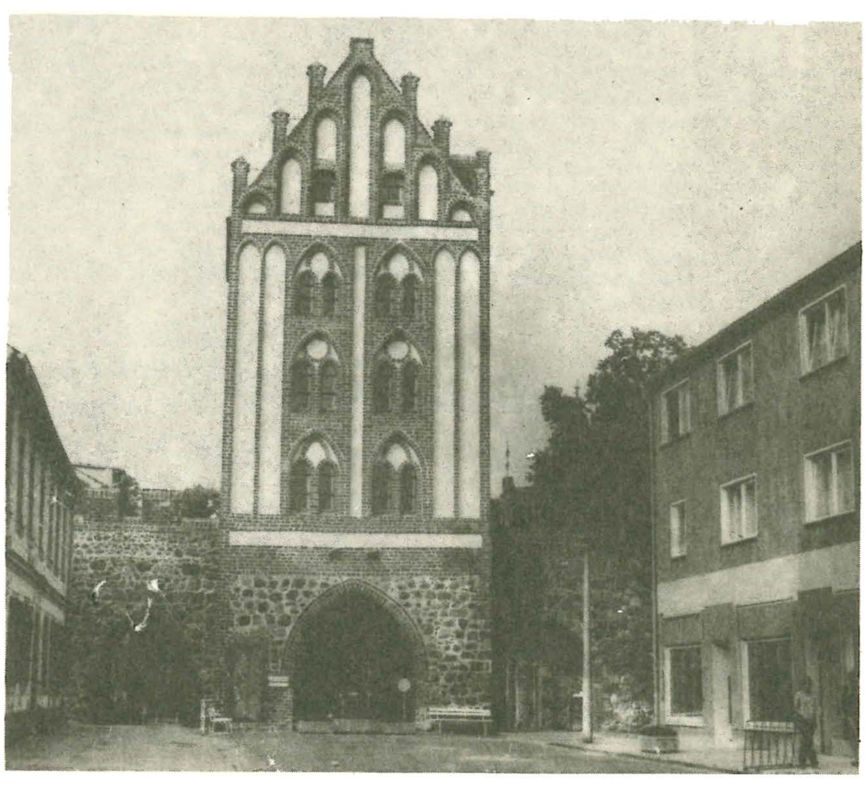


▲3▲ Die Figur zeigt die Skizze eines gotischen Kirchenfensters. Gib eine Konstruktionsbeschreibung! Wo liegt der Mittelpunkt des kleinen oberen Kreises?



▲4▲ Die Figur zeigt ein Maßwerk, das sich z. B. am Rathaus in Braunschweig befindet (nach Gerlach).
Berechne den Radius des Vollkreises, wenn die Kämpferlinie (die Fensterbreite) gegeben ist!





Stadttor in Templin