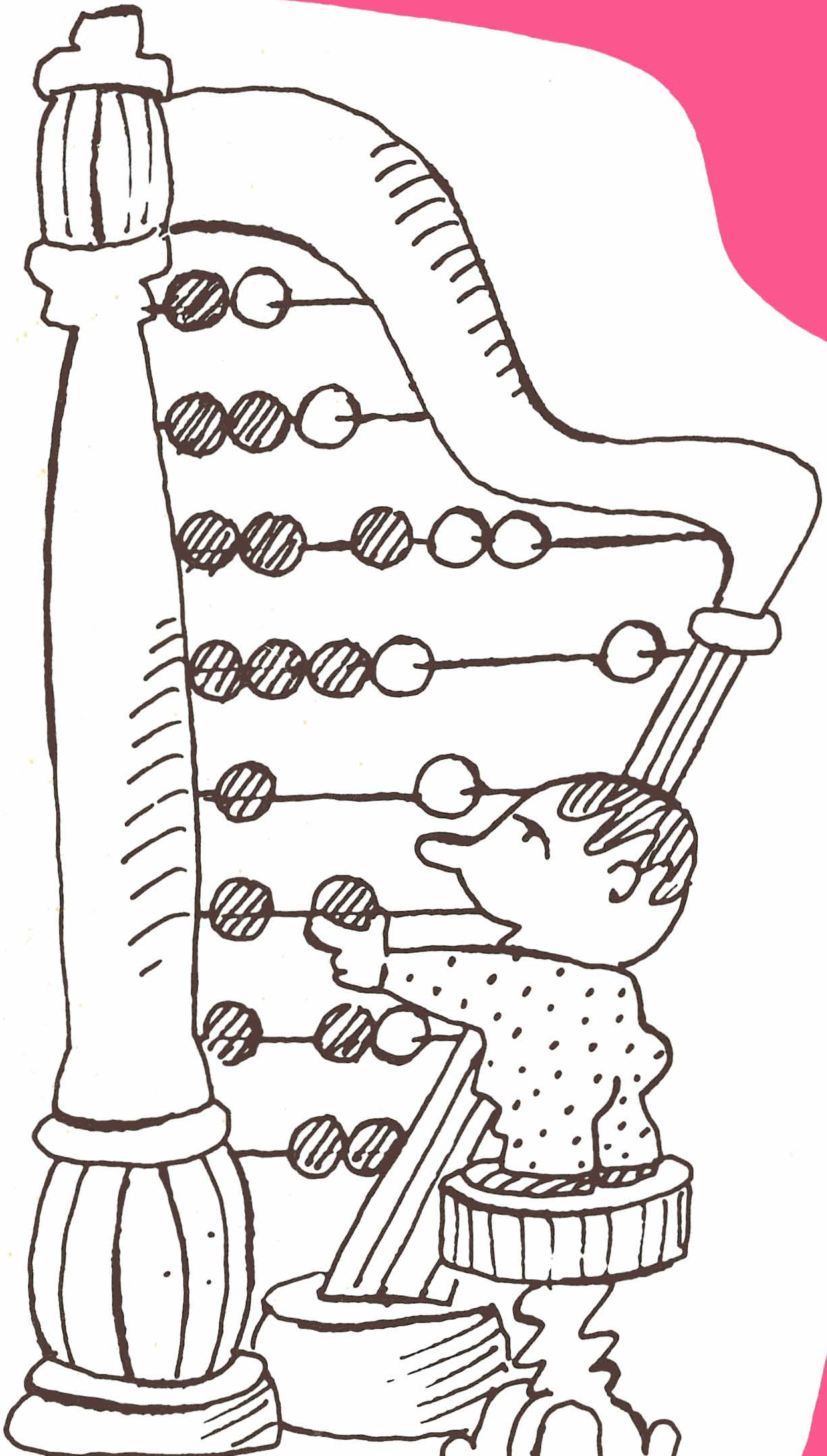
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



5

Volk und Wissen Verlag GmbH Berlin
24. Jahrgang 1990
Preis 1,50 DM
ISSN 0002-6395

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Verlag GmbH
Anschrift des Verlages:
Lindenstr. 54a, PSF 1213, Berlin, 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig, 7027
Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Chemnitz); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Lizenznummer: 1545
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 DM, im Abonnement zweimonatlich 1,20 DM.
Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen.
Außerhalb der DDR kann die Zeitschrift über den internationalen Buch- und Zeitschriftenhandel bezogen werden.
Bei Schwierigkeiten wendet euch bitte direkt an unseren Verlag.

Fotos: R. Voigt (S. 110); aus: H. Wußing: Mathematik in der Antike, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1965 (S. 112); Dr. J. Buhrow (III. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto (Titelvignetten)
Techn. Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von L. Otto, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Aus organisatorischen Gründen können wir den Wettbewerb 1990/91 nur in den Heften 6/90 und 1/91 – **mit neuen Wettbewerbsbedingungen** – durchführen.

Satz und Druck: Interdruck GmbH Leipzig
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 19. Juli 1990
Auslieferungstermin: 10. Oktober 1990

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

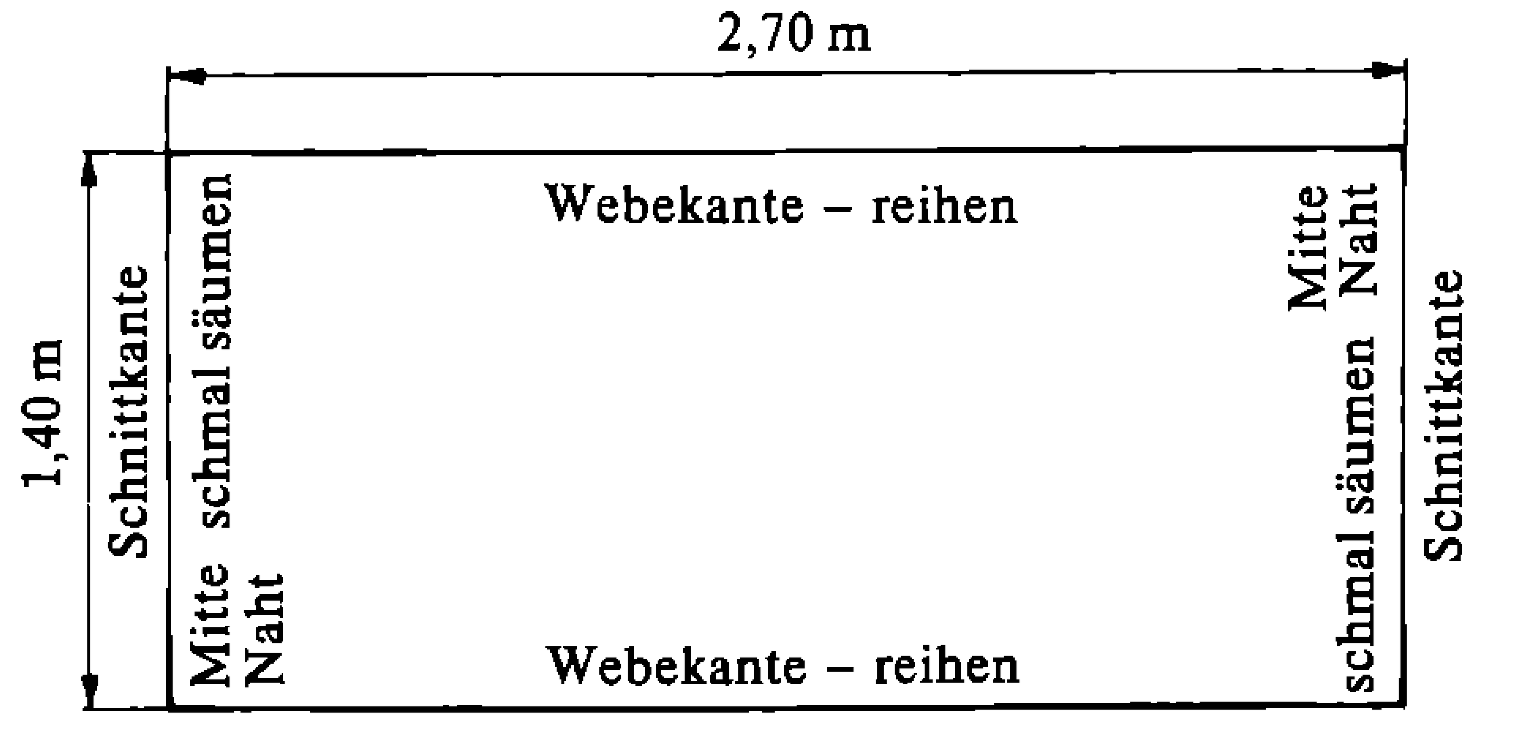
Alphons weist euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

Liebe Leser! In den vergangenen Monaten erreichten uns zahlreiche Leserbriefe, in denen besorgt nach der Zukunft von „alpha“ gefragt wird. Wir haben uns natürlich über diese treue Anhängerschaft gefreut und fühlten uns zugleich in unseren Bemühungen um „alpha“ bestärkt.
Und sie haben sich gelohnt!
Unsere Zeitschrift wird nicht nur weiter bestehen, sondern auch den Sprung zu einer gesamtdeutschen Schülerzeitschrift wagen.
Mit diesem Heft wird „alpha“ mit Unterstützung des Friedrich-Verlages aus Seelze bei Hannover in Westdeutschland eingeführt.
Wir werden euch den Friedrich-Verlag im Heft 6/90 näher vorstellen. Denn seine Zeitschrift „mathematik lehren“ sponsort unseren diesjährigen „alpha“-Wettbewerb und ab Heft 1/91 wird „alpha“ in diesem Verlag erscheinen.
Und dies weiterhin unter der Devise: Rund um die Mathematik für jeden etwas, ob Anfänger, Hobbymathematiker oder Könner. Freuen würden wir uns natürlich über eine auch zukünftig so aktive Mitarbeit, denn die Beiträge, Hinweise, Wünsche und Kritiken unserer Leser helfen uns, eine Zeitschrift für unsere Leser zu machen.

Dr. Gabriele Liebau

Gardinen für ein Blumenfenster – rationell zugeschnitten

Hella Genau bekommt in der neuen Wohnung ein eigenes Zimmer. Für das Fenster, das 1,40 m hoch und 2,10 m breit ist, will sie sich eine Rüschengardine nähen, die die Fenstermitte bogenförmig freiläßt. Üblicherweise rechnet man beim Einkauf: Storebreite gleich Fensterhöhe und Meterzahl gleich zweieinhalb- bis dreimal Fensterbreite. „Das wird zu teuer für mich“, denkt Hella traurig, „und ich wollt’s doch so gern allein finanzieren!
Schade auch um das Stück, das ich im symmetrischen Bogen herausschneiden würde und nicht weiterverwenden könnte; denn eine Rüsche, die aus ungleich langen Streifen zusammengesetzt wäre, sähe gar nicht gut aus.“
Hella zeichnet und rechnet und findet eine rationelle Lösung für den Fall, daß der Gardinenstoff rechts wie links gleich aussieht; denn sie will die Gardine aus zwei gleichen Teilen zusammensetzen, und zwar nicht, indem sie wie üblich vorm Nähen rechts auf rechts legt, sondern links auf rechts. (Die kurze Naht soll später in einem Reihfältchen verschwinden.)



Der von Hella gewählte Gittertüll, der die genannte Bedingung erfüllt, liegt 1,40 m breit und bietet durch sein klares, rechtwinkliges Muster noch den Vorteil, daß zum Messen von Abständen nur das Maßband erforderlich ist. Passende Rüsche gibt es in einer Breite von 0,25 m.
Hella kauft vom Tüll 2,70 m und von der Rüsche ... Aber das wollen unsere Leser wohl lieber selbst ausrechnen.
Hier noch einige Hinweise und Hellas Aufgabenstellung:
Die Schnittlinie, die den Stoff zentralsymmetrisch teilen soll, kann aus zwei Kreisbogen oder einer halben Sinuskurve bestehen. Anfang und Ende dieser Linie sind so zu führen, daß man sich die Tangenten in diesen Punkten senkrecht zu den Schnittkanten vorstellen kann.
Um die optisch und herstellungstechnisch bessere Variante zu finden, ist für jede der beiden Möglichkeiten eine maßstabgerechte Zeichnung anzufertigen.
Dazu sind folgende Aufgaben zu lösen:
1. Wie groß ist in beiden Fällen der Abstand d zwischen der Fensterbank und der kürzesten Stelle der Gardine, wenn diese nach dem Ansetzen der Rüsche an den Seiten wieder 1,40 m lang sein und genau bis zur Fensterbank reichen soll?
2. Nenne die Bestimmungslinien für die Kreisbogenmittelpunkte!
3. Wie lang muß bei der Kreisbogenvariante die Rüsche sein?
4. Stelle für die Sinuskurvenvariante eine Funktionsgleichung auf, und vervollständige die unten begonnene Wertetabelle so weit wie nötig! Beachte dabei, daß x und y hier nicht die Abstände von den (gedachten) Achsen des Koordinatensystems sind, sondern daß x der Abstand von einer Schnittkante und y der von einer Webekante ist.

x	α	y
0,15 m		
0,30 m		
0,45 m		
⋮		

(Verluste für Nähte und Säume sind zu vernachlässigen.)

J. Heller

Leserpost

Die Lösung der Aufgabe 4 des Beitrages „Einige Folgerungen aus dem Eulerschen Polyedersatz“ (Hefte 3 und 4/90) läßt sich wesentlich verkürzen.
Die aufwendige Fallunterscheidung bezüglich der stumpfen Winkel kann entfallen. Dazu sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Kante SC die längste Kante des Tetraeders $ABCS$. (Gibt es mehrere längste Kanten, betrachten wir ebenfalls SC. Diese Kante sei Schenkel eines stumpfen Winkels. Ist der stumpfe Winkel der Winkel BSC (BCS, ACS, ASC), so folgt $|BC| > |SC|$ ($|SB| > |SC|$, $|AS| > |SC|$, $|AC| > |SC|$). Damit haben wir einen Widerspruch zur Maximalität der Kante SC erhalten. Die längste Kante des Tetraeders kann also nicht Schenkel eines stumpfen Winkels sein.

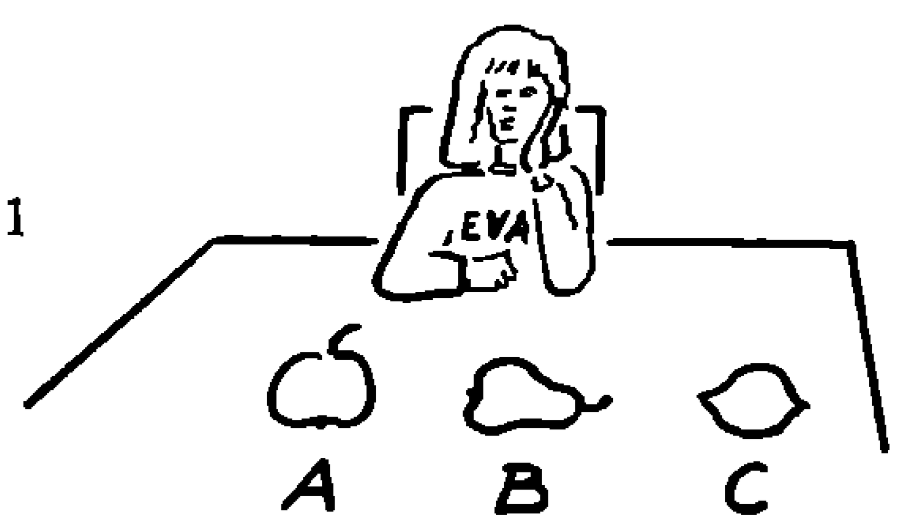
Dr. W. Moldenhauer, Erfurt

Orientierung im Raum: rechts/links

Um sich im Raum zurechtzufinden oder Gegenstände räumlich zu ordnen und sich darüber mit anderen verständigen zu können, muß man ganz sicher hinsichtlich rechts und links sein. Ihr wißt natürlich, wo rechts und wo links ist. Aber könnt ihr die Begriffe auch definieren? „Rechts ist, wo der Daumen links ist" – das geht natürlich nicht. Also denkt mal darüber nach. Wenn euch nichts einfällt, sucht die Begriffe in einem Lexikon auf.
Etwas anderes ist es dann noch, in Streßsituationen ganz schnell über rechts und links entscheiden zu können. Da zeigen sich Erwachsene oft noch unsicher, wie mir Autofahrlehrer berichteten. Wir wollen hier also etwas zur Einübung der Beziehungen tun.

Rechts von ... und links von ...

Bild 1



Vor uns auf dem Tisch liegen ein Apfel, eine Birne und eine Citrone; und zwar kann man hier sehen, wie sie zueinander liegen:
B rechts von A und links von C
A links von B und links von C
C rechts von A und rechts von B
Wie sieht Eva, die uns gegenübersitzt, diese Beziehungen?
Nimm jetzt drei solche Gegenstände und stelle sie so vor dir auf: B rechts von A und rechts von C. Wie liegen dann A und C zueinander?

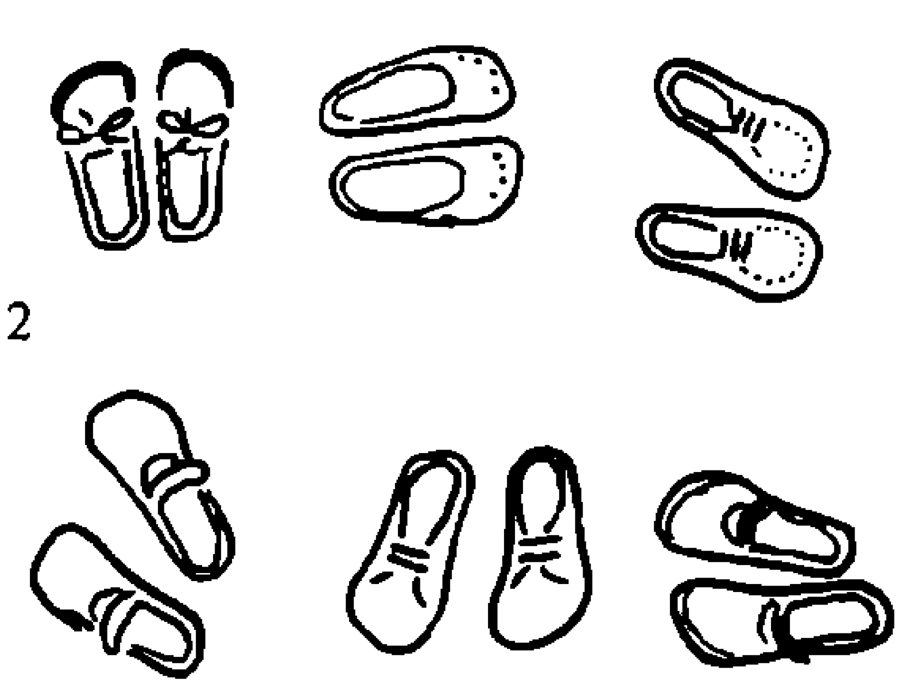


Bild 2

Hier sind Paare von Schuhen abgestellt worden.
Welches ist jedesmal der rechte Schuh?

Bild 3

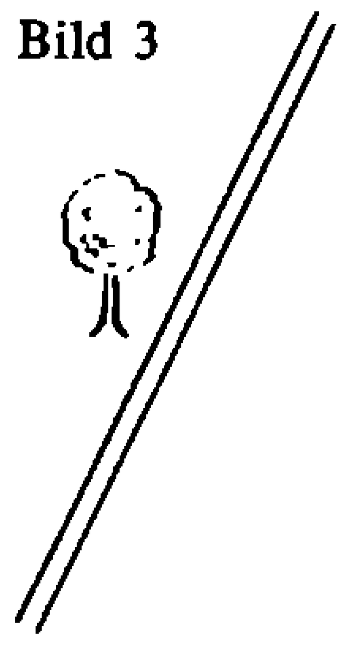


Bild 4

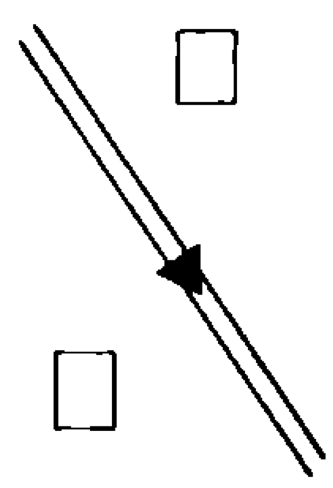


Bild 5

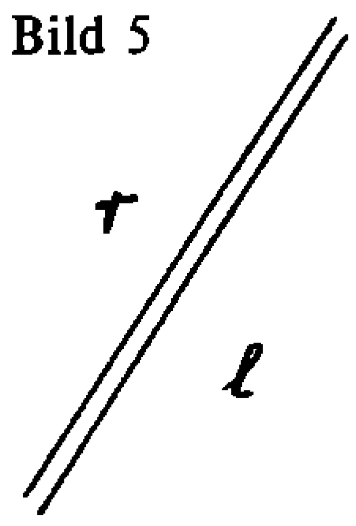


Bild 3: Auf welcher Seite der Straße steht der Baum? (Was muß ich dazu wissen?)
Bild 4: Die Pfeilspitze zeigt, wie ich mich auf der Straße bewege. Welche Straßenseite ist dann rechts, welche links? – Trage r und l richtig ein.
Bild 5: Wie muß ich mich auf dieser Straße bewegen, damit r und l stimmen? (Pfeilspitze zeichnen.)

Bild 6

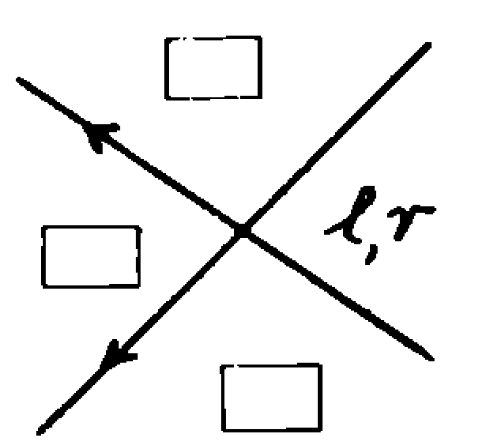


Bild 7

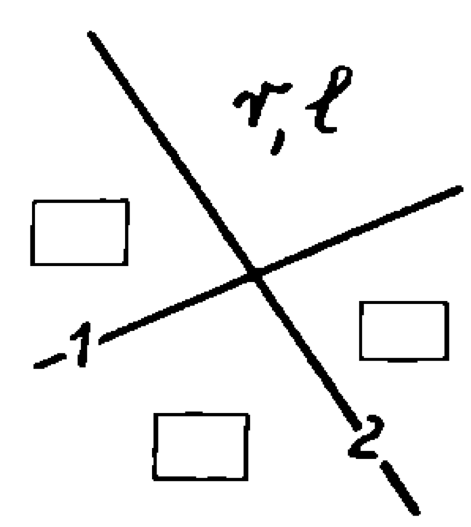
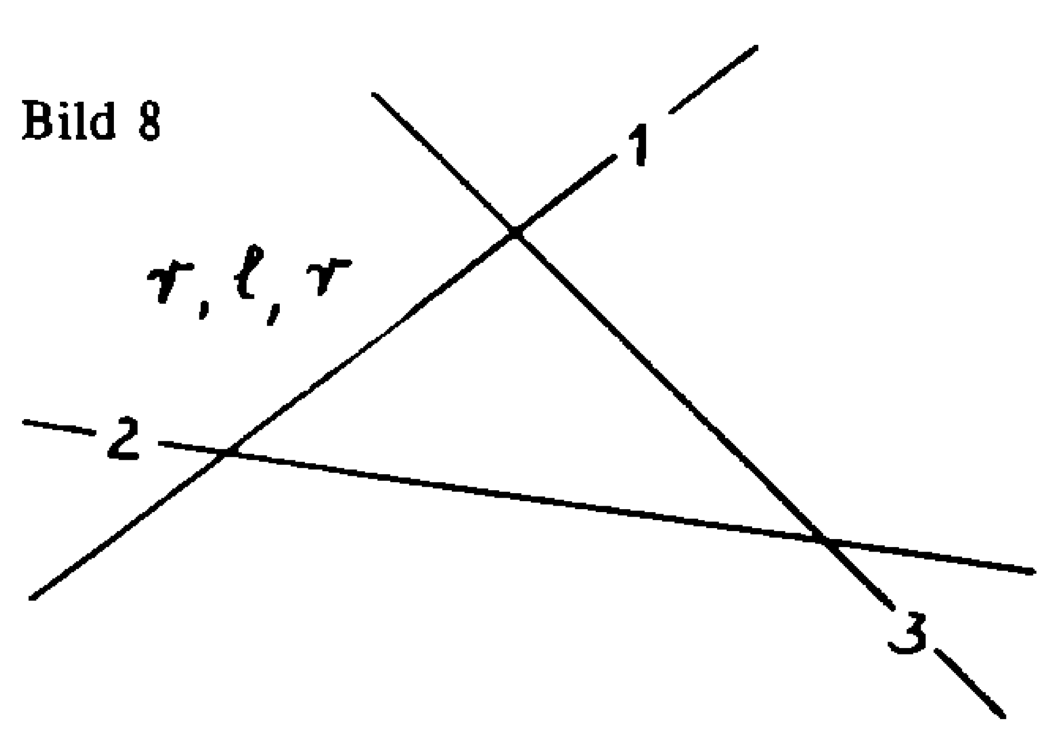


Bild 6: Das Gebiet l, r liegt links der Straße 1 und rechts der Straße 2. Bezeichne die anderen Gebiete entsprechend.
Bild 7: Welche Richtungen müssen diese beiden Straßen haben, damit r, l stimmt? – Pfeilspitzen zeichnen und die anderen Gebiete benennen.

Bild 8

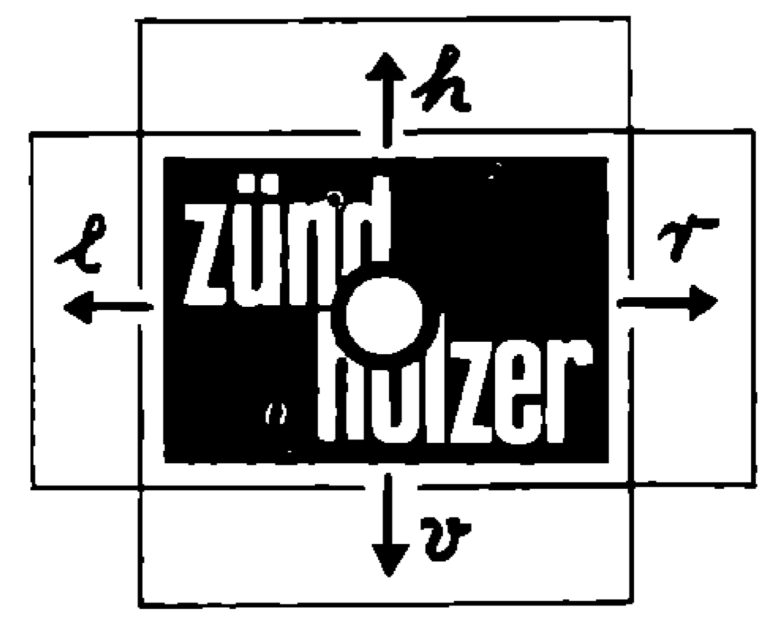


Das Gebiet r, l, r liegt rechts der Straße 1, links der Straße 2 und rechts der Straße 3. Welche Richtungen haben die drei Straßen? Wie müssen die anderen Gebiete bezeichnet werden?
Diese Aufgabe kannst du selbst vielfach verändern und dann deinen Freunden stellen: a) du gibst wie hier die Straßennummern und ein Gebiet an, b) du gibst Straßennummern und Richtungen an und läßt die Gebiete bezeichnen, c) du gibst ein Gebiet und die Straßenrichtungen an und läßt die Straßennummern herausfinden.

Kippen nach rechts und nach links

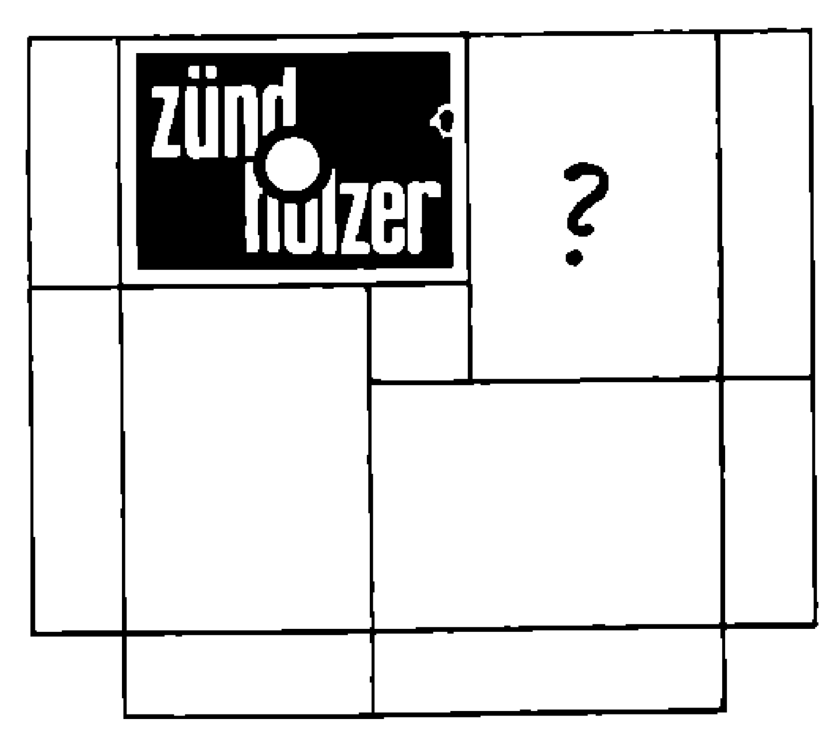
Lege eine Streichholzschachtel vor dir so auf den Tisch, daß du die Aufschrift lesen kannst. Dies ist die Oberseite. Wenn man die Schachtel aus dieser Stellung nach hinten oder nach vorn, nach rechts oder nach links kippt, steht sie jedesmal auf einer der schmalen Seitenflächen.

Bild 9



Man kann sie aber auch mehrmals kippen, bis wieder die Oberseite oder die Unterseite oben liegt. In der folgenden Abbildung sollst du ablesen, ob am Ende bei $\square$, O oder U zu sehen ist. Kippe deine Streichholzschachtel entsprechend auf dem Tisch.

Bild 10



Diese Kippfolge kann man so aufschreiben:

$$O \xrightarrow{l\cdot v\cdot r\cdot v\cdot r\cdot h\cdot r\cdot h\cdot l} \square$$

Im folgenden sind noch einige Kippfolgen notiert. Vollziehe sie mit einer Streichholzschachtel nach und schreibe dann O oder U in das Kästchen am Ende. Vielleicht kannst du dir diese Bewegungen aber auch vorstellen, ohne wirklich zu kippen. Dann schreibe deinen Freunden entsprechende Kippfolgen auf und laß sie die Endlage der Schachtel aus dem Kopf sagen, indem sie sich die Bewegungen also bloß vorstellen.

$$O \xrightarrow{l\cdot h\cdot l\cdot v\cdot r\cdot r\cdot h} \square$$

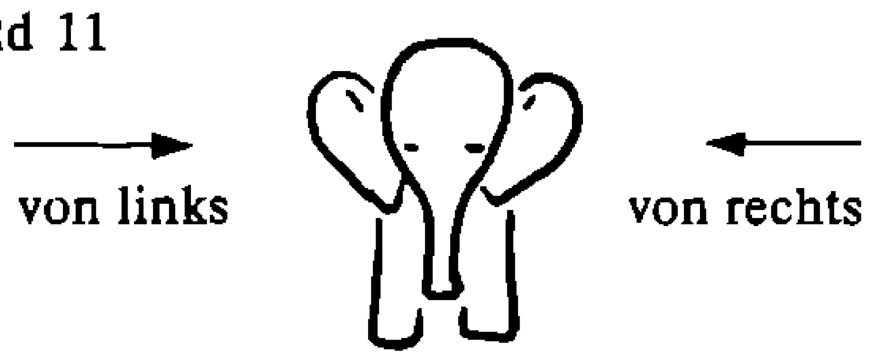
$$O \xrightarrow{r\cdot v\cdot r\cdot r\cdot h\cdot l} \square$$

$$O \xrightarrow{l\cdot v\cdot r\cdot r\cdot v\cdot l} \square$$

$$O \xrightarrow{r\cdot r\cdot r\cdot h\cdot l\cdot l\cdot l} \square$$

Ansichten von rechts und von links

Bild 11



Du hast einen Spielzeugelefanten vor dir stehen, so daß er dich ansieht. An den folgenden Bildern sollst du entscheiden, welches die Ansicht von rechts und welches die von links ist. Welche Seite des Elefanten siehst du von links?

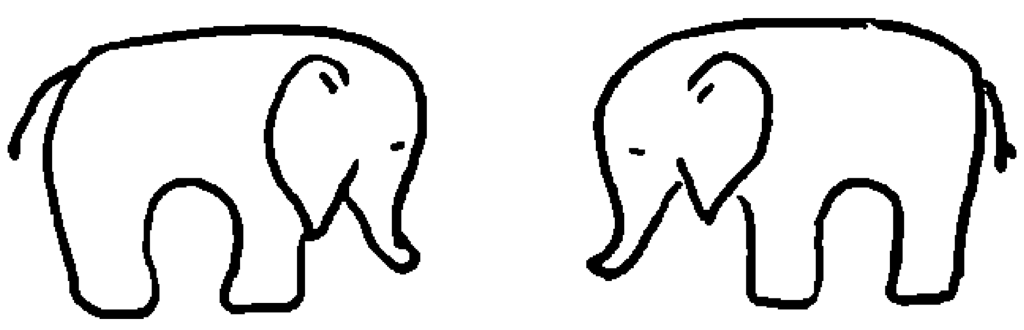
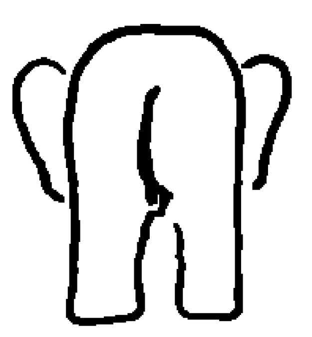


Bild 12

Vielleicht hast du so ein ähnliches Stofftier. Stelle es dann so vor dir auf, daß das folgende Bild die Ansicht von links zeigt:

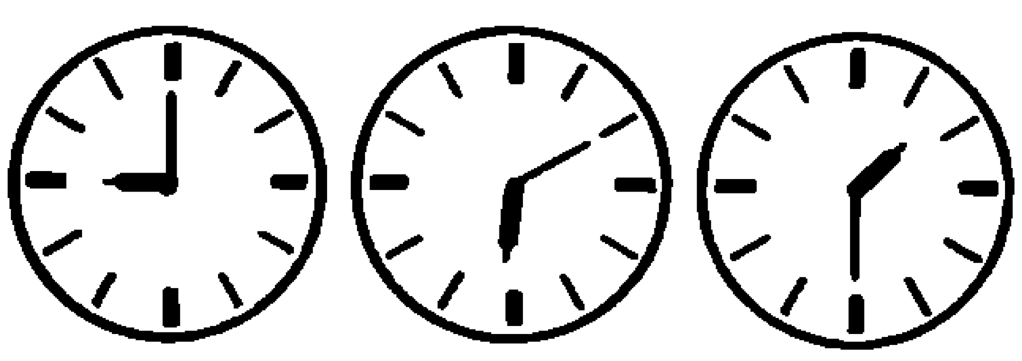
Bild 13



Drehungen rechtsherum und linksherum

Man sagt, die Zeiger der Uhr drehen sich rechtsherum. Manchmal kann man aber auch eine witzige Uhr kaufen (eine „Ostfriesenuhr"), auf der drehen sich die Zeiger linksherum. Welche Uhrzeit zeigen die folgenden Ostfriesenuhren an?

Bild 14



Wie herum mußt du drehen, um einen Wasserhahn zu schließen?
– um einen Marmeladendeckel festzuschrauben? – um eine Heizung abzustellen? – um eine Schraube festzuziehen? – um einen Korkenzieher einzudrehen? Kniffliger: Wie herum dreht sich ein Riesenrad auf dem Jahrmarkt?

Rechts- und Linksschraubungen

Beim Zu- und Aufdrehen in den vorigen Beispielen handelt es sich eigentlich um Schraubungen; denn beim Handrad oder bei der Mutter auf dem Gewinde bewegt man durch Drehen zugleich Rad und Schraube vorwärts oder rückwärts.

Bild 15

Holzschrauben, Metallschrauben und -spindeln haben fast immer Rechtsgewinde. Wenn du das betrachtest, erkennst du, warum man bei Rechtsdrehung etwas hineindreht oder schließt.
Stelle dazu bei nächster Gelegenheit noch einige Beobachtungen an: Wie herum führt eine Wendeltreppe? Wie verläuft die Treppe in einem mehrstöckigen Wohnhaus? Wie windet sich ein spitzzulaufendes Schneckenhaus? Wie ranken Stangenbohnen? – Auch hier noch etwas zum Nachdenken: Wenn du eine Wendeltreppe mit „Rechtsschraubung" hinaufsteigst –, wie herum drehst du dich? Wie ist das beim Hinabgehen? Hat dieselbe Wendeltreppe dann plötzlich „Linksschraubung"? Es macht dir hoffentlich jetzt Spaß, künftig in deiner Umgebung mehr auf rechts und links zu achten. *H. Besuden*

Und nun noch eine Knobelaufgabe für alle, die sich in Sachen „rechts" und „links" sicher sind.

Was vertauscht der Spiegel wirklich?

Bekanntlich vertauscht der Spiegel rechts und links. Aber warum dann nicht auch oben und unten? Logischerweise wäre das doch zu erwarten; und das tut er auch tatsächlich. Den Beweis liefert eine einfache Überlegung:
Ich drehe mich in Gedanken, immer das Gesicht zum Spiegel gewandt, in eine waagerechte Lage, so daß mein rechter Arm oben liegt. Da der Spiegel rechts und links vertauscht, nunmehr auch oben und unten.
Die Frage ist nur, warum bemerkt man das nicht? Ganz einfach:
Weil das Bild auf der Netzhaut wieder umgekehrt wird, wie man in der Physik lernt. Oder ist an dieser Überlegung doch irgendwas falsch? *H. Besuden*

Buchtip

Oskar R. Meseck
Logisch denken leicht gemacht
Weltbild Verlag Augsburg
Über 200 Testfragen und Beispiele aus allen Bereichen der Denkprobleme als systematisches Denktraining

Arithmetik mit 6

Man setze Operationszeichen $+, -, \cdot, :, \sqrt{\ }$ (Quadratwurzel) oder ! (Fakultät) und gegebenenfalls Klammern, so daß die 20 Rechenaufgaben richtig gelöst werden.

0	0	0 = 6	5	5	5 = 6
0	1	2 = 6	7	6	5 = 6
1	1	1 = 6	6	6	6 = 6
1	2	3 = 6	8	7	6 = 6
2	2	2 = 6	7	7	7 = 6
4	3	2 = 6	7	8	9 = 6
3	3	3 = 6	8	8	8 = 6
5	4	3 = 6	10	9	8 = 6
4	4	4 = 6	9	9	9 = 6
6	5	4 = 6	10	10	10 = 6

Dr. W. Schmidt, Greifswald

Alphons logische Abenteuer (1)

Der Schüler Alphons las in einem Buch, daß „nicht wahr" dasselbe bedeute, wie „falsch". Man dürfe deshalb an den Stellen, an denen der eine Ausdruck stehe, den anderen setzen, „falsch" also für „nicht wahr", und umgekehrt. Gleiches gelte für „nicht falsch" und „wahr". Er nahm sich vor, in seiner und der Rede anderer darauf zu achten. Als seine kleine Schwester behauptete, er habe in der Marmelade genascht, erwiderte er, daß das nicht wahr, also logisch zwingend falsch sei. Ihrer Mutter sagte sie dann, so recht überzeugt sei sie zwar nicht, aber gegen logisch Zwingendes sei nichts zu machen.

Was doch Wissen möglich macht, dachte Alphons und überhörte dabei fast, daß er von seiner Mutter angesprochen wurde: „Du hast deine Schularbeiten gemacht, nicht wahr?" Flugs übersetzte er: „Du hast deine Schularbeiten gemacht, falsch?" Gemacht habe ich sie, aber ob falsch? „Das hoffe ich nicht", sagte er laut zur Verwunderung seiner Mutter, die nun drängender wiederholte: „Du hast doch deine Schularbeiten gemacht, nicht wahr?" Wir scheinen uns nicht mehr zu verstehen, stellte Alphons betrübt fest. Vielleicht meint seine Mutter, ob es falsch sei, sich mit dieser Frage an mich zu wenden? Etwas unsicher antwortet er: „Du kannst mich das fragen." Die Mutter verlor die Geduld und forderte Alphons auf, ihr seine Schulhefte zu zeigen, das würde er wohl noch richtig verstehen. Alphons verstand, es kam ja nichts zum Ersetzen vor.

Dann ging er zweifelnd in sein Zimmer und holte sich nochmals das Buch hervor, aus dem er sich hatte belehren lassen. Tatsächlich, er hatte nicht bis zum Ende gelesen. Ersetzbarkeit gilt, wenn einer dieser Ausdrücke zur Behauptung gehört. Der Satzteil „Du hast deine Schularbeiten gemacht" ist für sich ein sinnvoller Aussagesatz, der behauptet werden kann. Aber seine Mutter hatte nicht behauptet, sondern gefragt. Der Ausdruck „nicht wahr" übernimmt hier also die Funktion eines Fragewortes, und auf diesen Fall bezieht sich die Ersetzungsregel nicht. „Ich habe die Schularbeiten gemacht", rief er seiner Mutter zu, worauf sie nickte und das sagte, was ihm eben beruhigend durch den Kopf ging: „Na, wir verstehen uns ja doch, nicht wahr?"

L. Kreiser

Seltsame Sparkassen und die Zahl e

Eine Geschichte

Die ideale Sparkasse

Wir stellen uns vor, daß es in einem Land der Phantasie unendlich viele, mit $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ durchnumerierte Sparkassen gibt. Diese sollen unterschiedliche, in jedem Falle aber sehr günstige Bedingungen bieten:
Sparkasse 1 verzinst jährlich mit 100 %,
Sparkasse 2 verzinst halbjährlich mit 50 %,
Sparkasse 3 verzinst dritteljährlich mit $33\frac{1}{3}$ %
usw. Allgemein soll gelten: Sparkasse Nr. n verzinst n-mal im Jahr mit jeweils $\frac{100}{n}$ %.
Jemand will am Jahresanfang ein Konto eröffnen und eine „Phantasiemark" einzahlen. Wie hoch wird der Kontostand am Jahresende sein? Es handelt sich um ein sogenanntes Zinseszinsproblem. Um es zu lösen, arbeitet man besser mit Bruchteilen anstatt mit Prozentangaben. Es ergeben sich die folgenden Kontostände:
Sparkasse 1: $1 + 1 = 2$ Phantasiemark (kurz: PM)

Sparkasse 2: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2$
$= 2{,}25$ PM

Sparkasse 3: $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)$
$= \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2{,}370\,370\,370\ldots$ PM

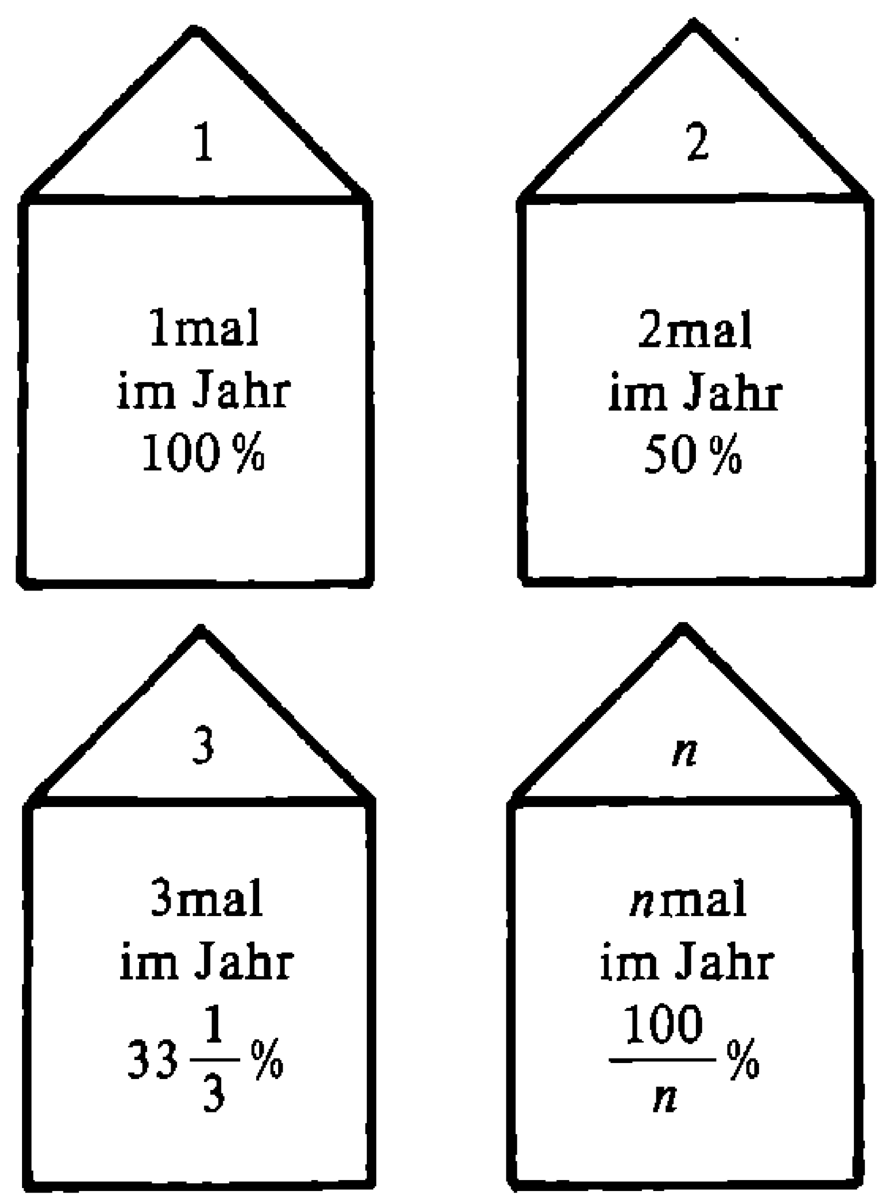
usw. Allgemein gilt:
Auf der Sparkasse Nr. n beträgt das Guthaben am Jahresende

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Phantasiemark. Nach der 1. Verzinsung ist nämlich das Konto von 1 auf $1 + \frac{1}{n}$ angewachsen, nach der 2. Verzinsung ist es um denselben Bruchteil angewachsen, also von $1 + \frac{1}{n}$ auf

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \text{ PM}$$

usw. bis zur n-ten Verzinsung innerhalb eines Jahres.
Wir stellen uns weiter vor: Eigentlich will der Sparer sein Guthaben von $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ am Jahresende abheben. Aus irgendeinem Grunde (vielleicht wegen Silvester?!) komme es nicht dazu und der nächstmögliche Auszahltermin sei unmittelbar nach der nächstfälligen Verzinsung



Die Sparkassen
und ihre Verzinsungsbedingungen

(d. h. der ersten Verzinsung im zweiten Jahr des Sparens). Das Guthaben beträgt dann offenbar

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Etwas Mathematik

Durch die obige Geschichte haben wir zwei sogenannte Zahlenfolgen a_n und b_n definiert. Wir berechnen ihre ersten fünf Glieder und dann einige Glieder mit einer Zehnerpotenz als Nummer n mittels des Taschenrechners. Der Einfachheit halber runden wir auf vier Stellen nach dem Komma.

n	$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$
1	2	4
2	2,2 500	3,3 750
3	2,3 704	3,1 605
4	2,4 414	3,0 518
5	2,4 883	2,9 860
10	2,5 937	2,8 531
100	2,7 048	2,7 319
1 000	2,7 169	2,7 196
10 000	2,7 182	2,7 184

Aus dem Taschenrechner-Experiment leiten wir Vermutungen ab:
a_n ist stets kleiner als b_n, d. h. $a_n < b_n$.
a_n steigt mit wachsendem n, d. h. $a_n > a_{n-1}$.
b_n fällt mit wachsendem n, d. h. $b_n < b_{n-1}$.
$b_n - a_n$ nähert sich mit wachsendem n der Zahl 0.

Die Vermutungen formulieren wir als mathematische Sätze und beweisen diese zum Teil.

Satz 1: Die Zahlenfolge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist echt monoton wachsend, d. h. $a_n > a_{n-1}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$

Beweis: Wir beginnen mit

$$1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{n-1} = \frac{(n-1)+1}{n-1}$$
$$= \frac{n}{n-1}$$

und gehen zu den Kehrwerten über:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir auf beiden Seiten mit der positiven Zahl $1 + \frac{1}{n}$ und benutzen die 2. binomische Formel:

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Die entstandene Gleichung erheben wir auf beiden Seiten in die n-te Potenz:

$$\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Auf die rechte Seite wenden wir die sogenannte Bernoullische Ungleichung
$(1+p)^n > 1 + np$
an. Sie gilt allgemein für $p > -1$; wir setzen hier $p = -\frac{1}{n^2}$ und erhalten

$$\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n > 1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}.$$

Diese Ungleichung multiplizieren wir auf beiden Seiten mit der positiven Zahl $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$. Aufgrund der bekannten Potenzgesetze kann man auf beiden Seiten Kürzungen vornehmen.
Das Ergebnis lautet

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad \text{d.h. } a_n > a_{n-1}.$$

Satz 2: Die Zahlenfolge $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist echt monoton fallend,
d. h. $b_n < b_{n-1}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$

Beweis: Wir übernehmen eine Formel aus dem Beweis von Satz 1 und rechnen weiter:

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}} = 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2}.$$

Wir gehen auf beiden Seiten zum Kehrwert über:

$$\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{(n^2-1)+1}{n^2-1}$$

$$= 1 + \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Die entstandene Gleichung erheben wir auf beiden Seiten in die $(n+1)$-te Potenz:

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^{n+1}.$$

Auf die rechte Seite wenden wir die Bernoullische Ungleichung in der Form

$(1 + p)^{n+1} > 1 + (n+1)\,p$ für $p > -1$

an, indem wir

$$p = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n+1)(n-1)} \text{ einsetzen.}$$

Wir erhalten

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} > 1$$

$$+ (n+1)\frac{1}{(n+1)(n-1)} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Diese Ungleichung multiplizieren wir auf beiden Seiten mit der positiven Zahl $\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n-1}}$. Aufgrund von Potenzgesetzen kann gekürzt werden; das Ergebnis lautet

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \text{d.h.} \quad b_{n-1} > b_n.$$

Satz 3: Es gilt $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$.

Beweis: Der Teil $a_1 < a_n$ folgt aus Satz 1, der Teil $b_n < b_1$ aus Satz 2. Der noch fehlende Teil $a_n < b_n$ folgt aus

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}} = 1 + \frac{1}{n} > 1.$$

Fortsetzung der Geschichte

Kehren wir noch einmal zum Ausgangspunkt zurück: Der Sparer, der am Jahresanfang 1 Phantasiemark einzahlen und am Jahresende a_n Phantasiemark abheben will (wir nehmen jetzt an, daß dies möglich sei), überlegt erst noch: Auf dem Weg zur n-ten Sparkasse befallen ihn Zweifel, denn aufgrund von $a_{n+1} > a_n$ würde er auf der $(n+1)$-ten Sparkasse günstiger sparen. Er wendet sich letzterer zu, überlegt sich aber, daß wegen $a_{n+2} > a_{n+1}$ die $(n+2)$-te Sparkasse noch günstiger wäre usw. Jemand, der die vorteilhafteste Lösung sucht, wird paradoxerweise überhaupt nicht sparen, denn zu jeder Sparkasse gibt es eine noch günstigere. Als Ausweg aus dem Dilemma werde die „ideale Sparkasse" eingeführt, welche nicht zu bestimmten festen Terminen verzinst, sondern ständig, zu jedem Zeitpunkt! Die ideale Sparkasse arbeitet nicht so wie im Bankwesen üblich, sondern die Konten wachsen auf ihr so ähnlich wie die Pflanzen in der Natur.

e als Grenzwert

Die höhere Mathematik verfügt über Begriffe, mit denen sie den Übergang von den Sparkassen mit den Nummern $n = 1, 2, 3, \ldots$ zu der idealen Sparkasse beschreiben kann: Es handelt sich um einen sogenannten Grenzprozeß und das Guthaben am Jahresende auf der idealen Sparkasse ist der sogenannte Grenzwert der Zahlenfolge a_n. Man schreibt dafür

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Wir geben hier auch die exakte mathematische Bedingung für diese Grenzwertbeziehung an, ohne sie weiter zu diskutieren: Für beliebig kleines positives ε existiert eine Nummer n_0, so daß $|a_n - \mathrm{e}| < \varepsilon$ für alle Nummern $n \geqq n_0$. Die Existenz des Grenzwerts wird im vorliegenden Fall durch folgendes Theorem gesichert – so bezeichnet man besonders wichtige mathematische Sätze:

Theorem: Eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Zahlenfolge besitzt einen Grenzwert. Ebenso besitzt eine monoton fallende nach unten beschränkte Zahlenfolge einen Grenzwert.

Aufgrund der Sätze 1, 2, 3 ist das Theorem auf die beiden konkreten Zahlenfolgen a_n und b_n anwendbar. Wir bemerken, daß a_n durch 4 nach oben beschränkt ist und daß b_n durch 2 nach unten beschränkt ist. Man kann leicht zeigen, daß a_n und b_n den gleichen Grenzwert haben, d. h. es gilt auch

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Weiter gilt für jede natürliche Zahl n

$$a_n < \mathrm{e} < b_n.$$

Indem man n hinreichend groß wählt, kann man e beliebig genau annähern, und zwar von unten durch a_n und von oben durch b_n. Beispielsweise erhalten wir für $n = 10\,000$ aus unserer obigen Tabelle e mit einer Genauigkeit von 3 Stellen nach dem Komma:

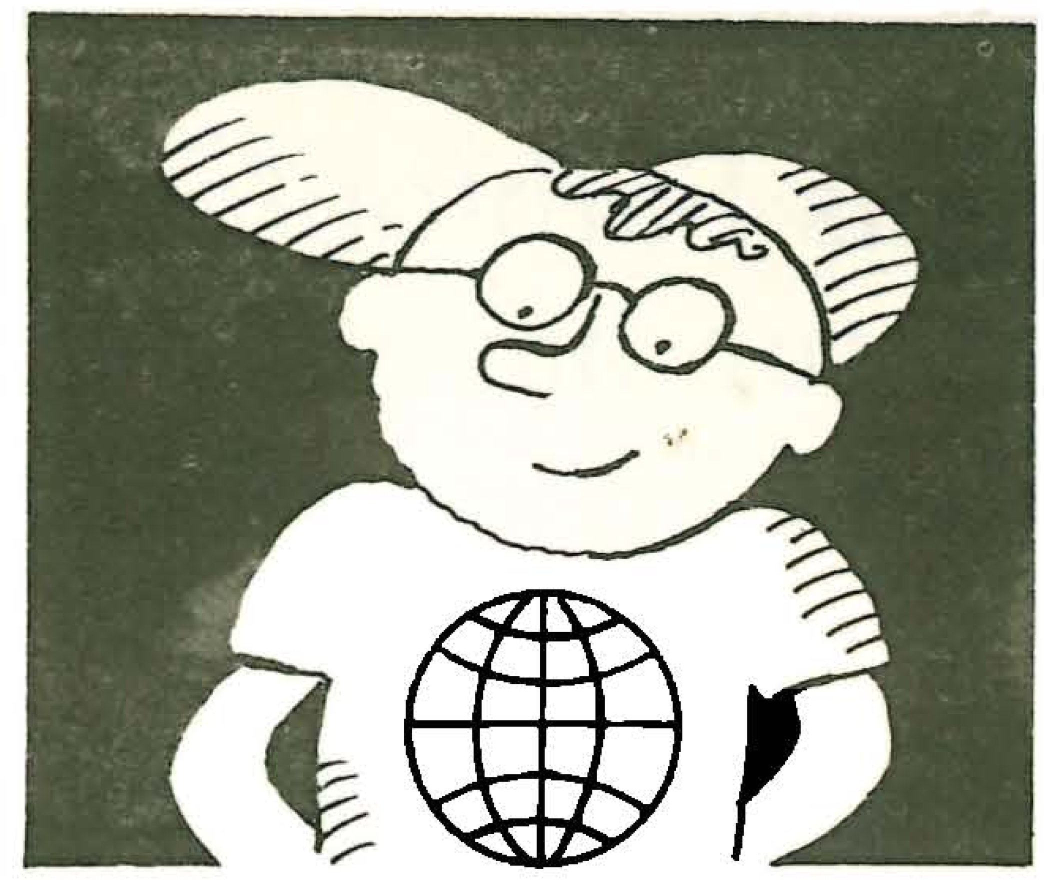
e = 2,718... Mit Computern erreicht man natürlich höhere Genauigkeiten. Wir führen als Beispiel 20 Stellen nach dem Komma an:

e = 2,71828 18284 59045 23536...

Ende der Geschichte

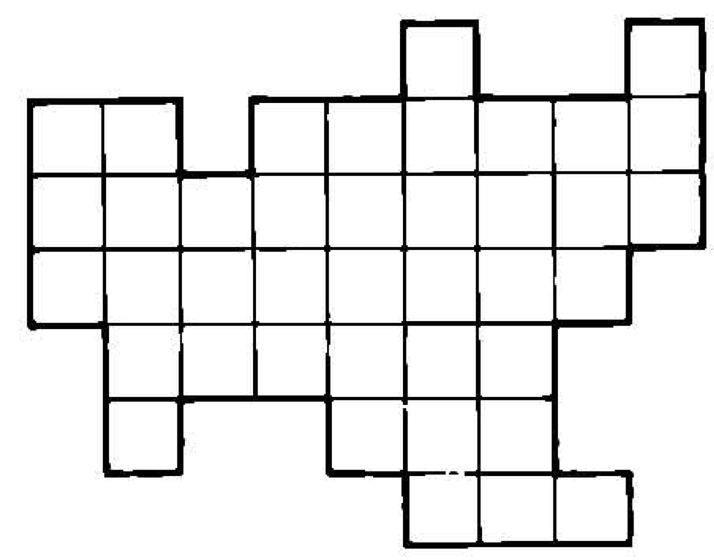
Die Zahl e hat viele interessante Eigenschaften. Unter anderem ist sie irrational, d. h. sie läßt sich nicht als Quotient zweier natürlicher Zahlen darstellen. Daraus folgt für den Sparer in unserer Geschichte: Die ideale Sparkasse kann den Betrag e am Jahresende nicht exakt auszahlen, auch dann nicht, wenn kleinere Untereinheiten der Phantasiemark eingeführt werden. Denn es werden immer kleinere Untereinheiten benötigt, so daß man mit dem Unterteilungsprozeß und Auszahlungsprozeß nie fertig werden würde. Der Sparer muß sich deshalb mit einem rationalen Näherungswert von e zufrieden geben, so daß effektiv für ihn die ideale Sparkasse doch keinen Vorteil gegenüber der Sparkasse mit einer genügend hohen Nummer n aufweist!

R. Schimming



▲1▲ Une succession difficile

Un propriétaire terrien rédige son testament. Il veut répartir son terrain entre quatre fils très pointilleux et très jaloux, de façon à obtenir quatre parties exactement superposables. Voici le plan du terrain.



Pouvez-vous aider le propriétaire en représentant le partage sur le plan?

aus: Tangente, Paris

▲2▲ The number 1990

The basic numerical structure of this number is quite simple $1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$, 199 is a very interesting prime because it is the first prime of a sequence of ten primes that creates an arithmetical progression, with a constant difference of 210: 199, 409, 619, 829, ...2089 – all these are primes. Show that the next integer in this progression is *not* a prime.

aus: Fun with mathematics, Toronto

▲3▲ На лесной поляне собрались друзья: Попугай, Удав, Слоненок, Теленок, Котенок, Мартышка и Верблюжонок. Попугай начал всех мерить. Оказалось, что Слоненок длиннее Теленка на 3 Попугая, Верблюжонок длиннее Мартышки тоже на 3 Попугая, Теленок длиннее Попугая на 7 Попугаев, Верблюжонок длиннее Котенка на 6 Попугаев, а все они укладываются в точности на Удаве, длина которого 38 Попугаев. Выразите длины друзей в Попугаях.

aus: Quant, Moskau

Was Farbtöpfe mit der Mathematik zu tun haben – ein Problem der Linearen Optimierung

Ein überaus interessantes Gebiet mit vielen praktischen Anwendungsmöglichkeiten ist die Optimierung, ein relativ junger Zweig am Baum der Mathematik. Diese Disziplin entwickelte sich im wesentlichen erst in den letzten 40 Jahren. Wie auch viele andere Bereiche der Mathematik verfügt die Optimierung über eine Reihe von Begriffen, Methoden und Herangehensweisen, die gegenüber der „Schulmathematik" völlig neu sind. Es soll deshalb hier versucht werden, ein typisches Problem der Linearen Optimierung vorzustellen und mit einfachsten Mitteln zu lösen, da sich dieses Teilgebiet am besten für eine Darlegung eignet und schon breite Anwendung gefunden hat.

Problem des Malers: Wie kann man aus zwei Sorten weißer Farbe, die sich in ihrer Qualität hinsichtlich Leimanteil, Luftdurchlässigkeit und Helligkeitsgrad sowie im Preis unterscheiden, einen Anstrichstoff mischen, der bestimmten Mindestanforderungen bezüglich der aufgezählten Kriterien genügt und dabei möglichst billig ist?

Zunächst wollen wir uns mit der genauen Formulierung sowie der Modellierung des genannten Problems befassen. Danach werden wir ein grafisches Lösungsverfahren beschreiben.

Das „Problem des Malers" wird etwas allgemeiner als *Mischungsproblem* bezeichnet. Für den vorliegenden Fall zweier Farbsorten I und II stellen wir alle notwendigen Angaben in Form einer Tabelle zusammen:

	Leimanteil (in %)	Luftdurchlässigkeit (in %)	Helligkeitsgrad (in Punkten)	Preis $\left(\text{in } \frac{\text{DM}}{\text{kg}}\right)$
Farbsorte I	15	50	3	6
Farbsorte II	60	15	9	4
Mindestforderungen	30	25	4	

Der Helligkeitsgrad wurde entsprechend einer Punktskala von 1 (ziemlich dunkel) bis 10 (sehr hell) bewertet. Diese Skala sei additiv beschaffen, so daß beispielsweise bei Mischung gleicher Teile von Farben der Helligkeitsgrade 1 bzw. 7 eine Farbe der Helligkeit 4 entsteht.

Schaut man sich die Daten genau an, so erkennt man, daß eine Farbsorte allein den Anforderungen nicht genügt, so daß tatsächlich eine Farbmischung erforderlich ist. Da es in unserer Aufgabe nicht auf die Menge, wohl aber auf das Verhältnis der beiden Sorten ankommt, führen wir die Variablen x und y ein, die den Anteil der Farbsorten I bzw. II an der Farbmischung angeben.

Die Werte dieser beiden Größen sind uns zunächst unbekannt und sollen erst durch das Lösen des Mischungsproblems ermittelt werden. Wir wissen aber nach Definition von x und y, daß

$0 \leqq x \leqq 1$ (d. h. $0\,\% \leqq 100x\,\% \leqq 100\,\%$) (1)

und

$0 \leqq y \leqq 1$ (d. h. $0\,\% \leqq 100y\,\% \leqq 100\,\%$) (2)

gilt. Nun wollen wir untersuchen, welchen Leimanteil der gemischte Anstrichstoff haben wird. Enthielte er nur Farbe der Sorte I, so hätte er 15 % Leim, bestünde er nur aus der Farbsorte II, wären es 60 %. Nehmen wir von jeder der beiden Farben die Hälfte, erhalten wir einen Leimanteil von

$\frac{1}{2} \cdot 15\,\% + \frac{1}{2} \cdot 60\,\% = 37{,}5\,\%.$

Allgemein beträgt die Leimmenge im Anstrichstoff bei einem Anteil x der Sorte I und y der Sorte II gerade

$15\,\% \cdot x + 60\,\% \cdot y.$

Dieser Ausdruck muß, um der Mindestforderung zu genügen, größer oder gleich 30 % sein. Unter Weglassung der „Maßeinheit" Prozent kommen wir somit zu der Ungleichung $15x + 60y \geqq 30.$ (3)

Ähnliche Überlegungen hinsichtlich der Eigenschaften Luftdurchlässigkeit (für die ebenfalls Additivität unterstellt sei) und Helligkeitsgrad führen uns auf die Ungleichungen

$50x + 15y \geqq 25$ (4)

und $3x + 9y \geqq 4.$ (5)

Damit haben wir fast alle Angaben aus der obigen Tabelle genutzt und in Form von Ungleichungen mathematisch beschrieben, d. h., wir haben das *mathematische Modell* des Problems aufgestellt. Es ist allerdings noch nicht vollständig, denn bisher wurden lediglich die *Beschränkungen (Nebenbedingungen)* formuliert, denen die Unbekannten x und y genügen müssen. Das Ziel der Aufgabe aber wurde außer acht gelassen, welches darin besteht, eine möglichst billige Farbe zu mischen. Diese Zielstellung läßt sich mittels der (von den beiden Veränderlichen x und y abhängigen) *Zielfunktion* $K(x,y) = 6x + 4y$ (6)

ausdrücken, die den Preis der Mischung in $\frac{\text{DM}}{\text{kg}}$ angibt. Für konkrete Zahlen x und y nimmt die Kostenfunktion $K(x,y)$ jeweils einen bestimmten Wert an. Die Forderung nach kleinstmöglichen Kosten formuliert man mathematisch so:

$K(x,y) \rightarrow \min,$

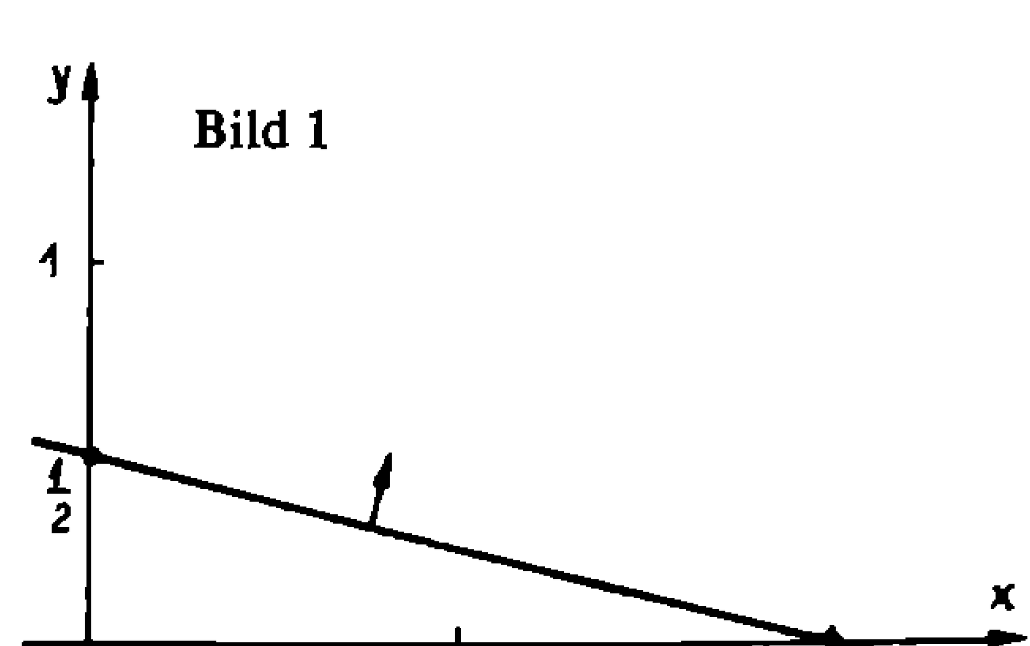
wobei „min" vom Wort *Minimum* („das Kleinste") kommt. Nunmehr können wir die zum „Problem des Malers" gehörige lineare Optimierungsaufgabe wie folgt aufschreiben: Unter allen den Nebenbedingungen (1) bis (5) genügenden Zahlen x und y (diese nennt man *zulässig*) sind diejenigen zu finden, für die die Funktion (6) ihren kleinsten Wert – ihr Minimum – annimmt (die entsprechenden Werte von x und y nennt man *optimale* oder *bestmögliche Lösung*).

Es ist an der Zeit, den bereits mehrfach aufgetretenen Begriff „linear" zu erklären. Dieser bedeutet nichts anderes, als daß die Unbekannten x und y in den Beziehungen (1) bis (6) nur linear, also in der 1. Potenz, vorkommen (und nicht etwa in der Form x^2, $x \cdot y$ oder y^3 usw.).

Wie läßt sich nun die Aufgabe (1) bis (6) lösen? Sicher kann man x und y nicht aus irgendeiner Formel berechnen. Die Unbekannten lassen sich aber algorithmisch bestimmen, ähnlich wie wir es vom Lösen eines linearen (wieder „linear"!) Gleichungssystems her kennen (siehe z. B. den Artikel von W. L. Gutermann in „alpha" 4/85). Allerdings brauchen wir dazu zusätzlich neue Ideen, die ihren mathematischen Ausdruck in der sogenannten *Simplexmethode* finden. Hier wollen wir allerdings auf ein grafisches Verfahren zur Lösung des gestellten Problems zurückgreifen.

Zunächst führen wir ein x,y-Koordinatensystem ein, in welches mehrere Geraden eingezeichnet werden sollen. Wie wir wissen, läßt sich eine Gerade in der Ebene durch eine lineare Gleichung $ax + by = c$ darstellen, und umgekehrt beschreibt jede solche Gleichung eine Gerade in der Ebene.

Nun befassen wir uns mit der Ungleichung (3). Vorerst machen wir aus ihr eine Gleichung, also $15x + 60y = 30$, und zeichnen



die dieser Gleichung entsprechende Gerade in das Koordinatensystem ein. Diese Gerade ist in Bild 1 dargestellt. Alle auf ihr liegenden Punkte erfüllen die Beziehung (3) mit Gleichheit.
Welche Punkte erfüllen jedoch (3) als Ungleichung? Es ist nicht allzu schwer sich zu überlegen (man kann dies selbstverständlich auch streng beweisen), daß das alle Punkte sind, die auf einer Seite der Geraden (3) liegen. Mit anderen Worten, alle der *Ungleichung* (3) genügenden Punkte bilden eine *Halbebene*.
Welche von beiden ist aber die Richtige? Das bekommt man ganz einfach heraus, indem man die Koordinaten eines nicht auf der Geraden liegenden Punktes in die Ungleichung (3) einsetzt. Am leichtesten geht das mit dem Koordinatenursprung (Nullpunkt), weil da am wenigsten zu rechnen ist. Verläuft allerdings die betreffende Gerade durch den Nullpunkt, so muß man einen anderen Punkt wählen.
Nehmen wir also den Punkt $(x,y)=(0,0)$ und setzen wir ihn in (3) ein. Im Ergebnis erhalten wir die offensichtlich falsche Ungleichung $0 \geqq 3$. Wir schließen daraus, daß der Ursprung auf derjenigen Seite der Geraden liegt, die dem Ungleichheitszeichen $<$ entspricht; wir aber benötigen gerade die andere Seite, die „Nordosthälfte" der Ebene. In Bild 1 ist diese durch einen Pfeil gekennzeichnet. Auch für die Ungleichungen (4) und (5) lassen sich ähnliche Überlegungen anstellen, deren Resultat in Bild 2 durch die mit Pfeilen versehenen Geraden (4) und (5) dargestellt ist. Schließlich haben wir noch die Beziehung (1) und (2) zu beachten, die insgesamt vier Ungleichungen verkörpern.

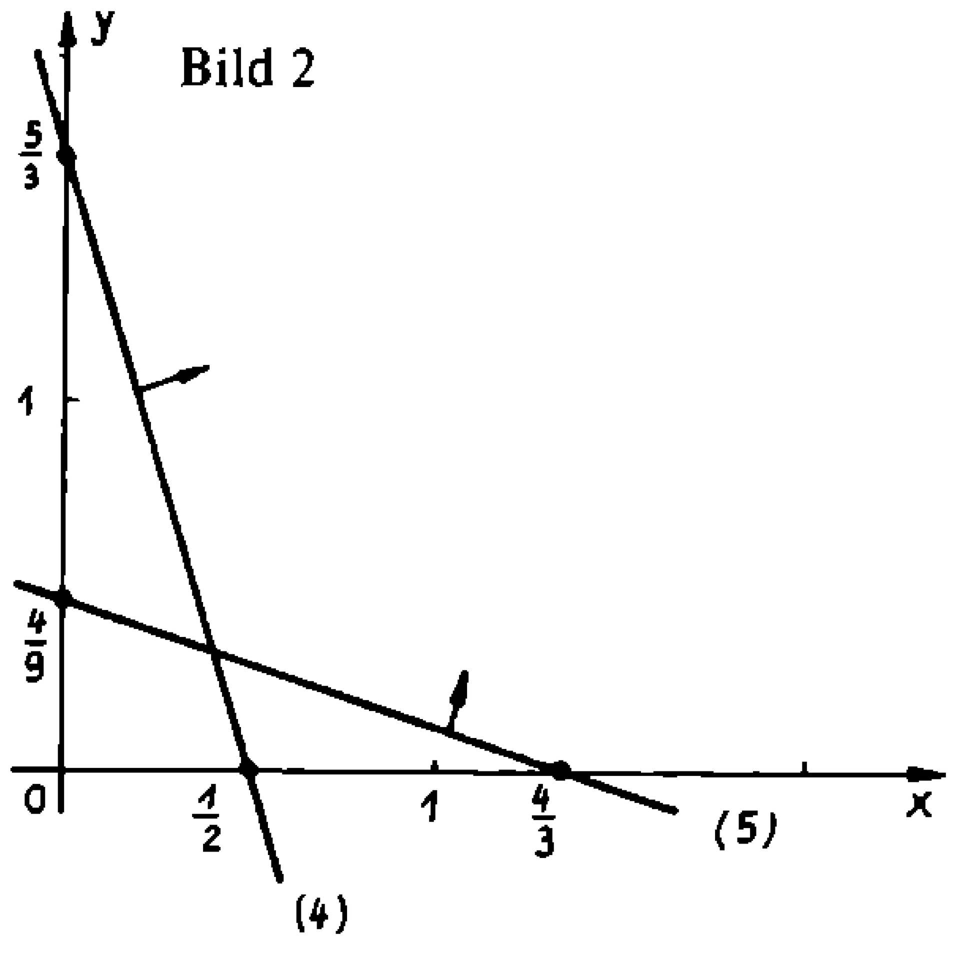


Bild 2

Alle Punkte, die (1) und (2) gleichzeitig erfüllen, liegen in dem in Bild 3 eingezeichneten Quadrat.

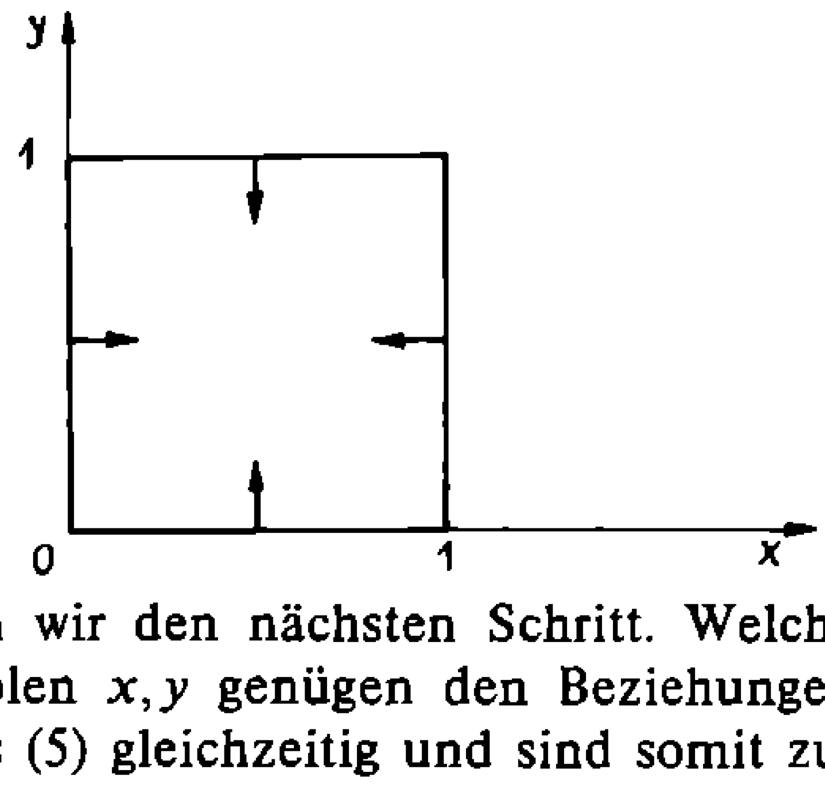


Bild 3

Gehen wir den nächsten Schritt. Welche Variablen x, y genügen den Beziehungen (1) bis (5) gleichzeitig und sind somit zulässig? Das sind diejenigen Veränderlichen x und y, für die die zugehörigen Punkte mit den Koordinaten (x,y) in den (durch Pfeile gekennzeichneten) „richtigen" Halbebenen für *alle* Bedingungen liegen. Die Gesamtheit solcher Punkte ist in Bild 4 als schraffierte Fläche dargestellt.

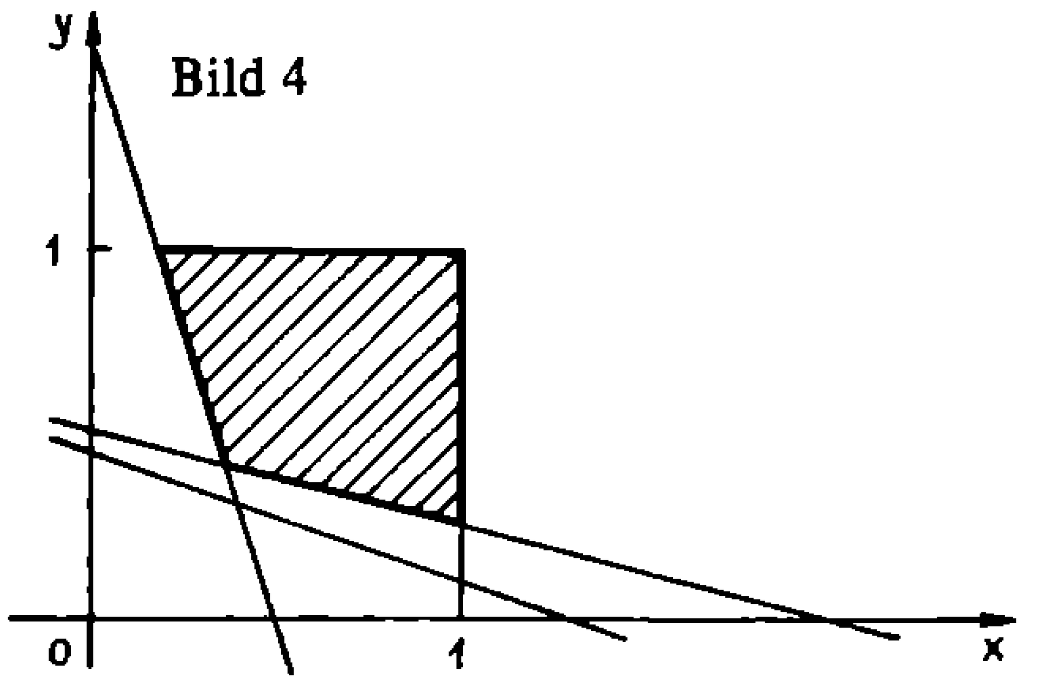


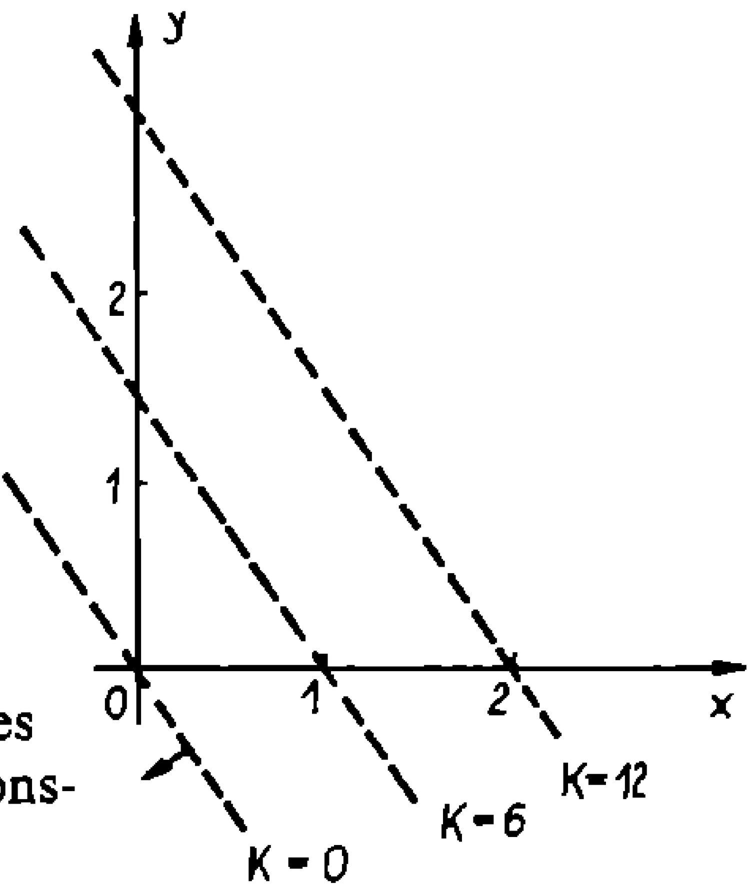
Bild 4

So, jetzt wissen wir, welche Punkte zulässig sind. Wie kann man nun unter ihnen optimale Punkte finden (das waren solche, für die die Funktion $K(x,y)$ ihren kleinsten Wert annimmt)? Zunächst interessieren wir uns für folgende Frage: Wie läßt sich die Menge aller Punkte (x,y) charakterisieren, für die die Funktion (6) einen festen Wert hat (oder, wie man sagt, konstant ist)? Dieser Wert sei z. B. gleich 12. Um die Frage beantworten zu können, müßten wir die Gleichung

$$6x+4y=12 \qquad (7)$$

lösen. Das ist eine Gleichung mit zwei Unbekannten; sie hat unendlich viele Lösungen. Geometrisch ist der Sachverhalt einfacher zu erklären: Gleichung (7) beschreibt eine Gerade in der Ebene (siehe Bild 5), und alle auf dieser Gerade gelegenen Punkte haben die Eigenschaft, daß für sie der Wert der Funktion (6) gleich 12 ist. Man nennt (7) *Höhenlinie (Niveaulinie)* der Funktion K zur Höhe 12. Setzt man die rechte Seite in (7) gleich einer anderen Konstanten, etwa gleich 6, erhält man eine andere Höhenlinie, die ebenfalls in Bild 5 eingetragen ist. Man überlegt sich leicht, daß beide Höhenlinien parallel verlaufen.

Bild 5



Abnahmerichtung des Zielfunktionswertes

Die durch den Ursprung gehende Höhenlinie gehört offenbar zur Höhe Null. Wie wir sehen, nimmt in unserem Beispiel die zu den Linien gehörige Höhe in Richtung „Südwesten" ab, nach „Nordosten" hin nimmt sie zu.
Nunmehr sind wir gerüstet, das „Problem des Malers" mit geometrischen Mitteln vollständig zu lösen. Entsprechend der Aufgabenstellung haben wir unter allen zulässigen Punkten diejenigen (oder denjenigen) zu finden, für die die Funktion $K(x,y)$ ihren kleinsten Wert annimmt. Geometrisch bedeutet das: Nimm eine beliebige Niveaulinie und verschiebe sie so weit wie möglich nach links unten, aber höchstens so weit, daß sie den zulässigen Bereich in noch mindestens einem Punkt schneidet. Im Ergebnis kommen wir zum Punkt $(\bar{x},\bar{y})$ (Bild 6).

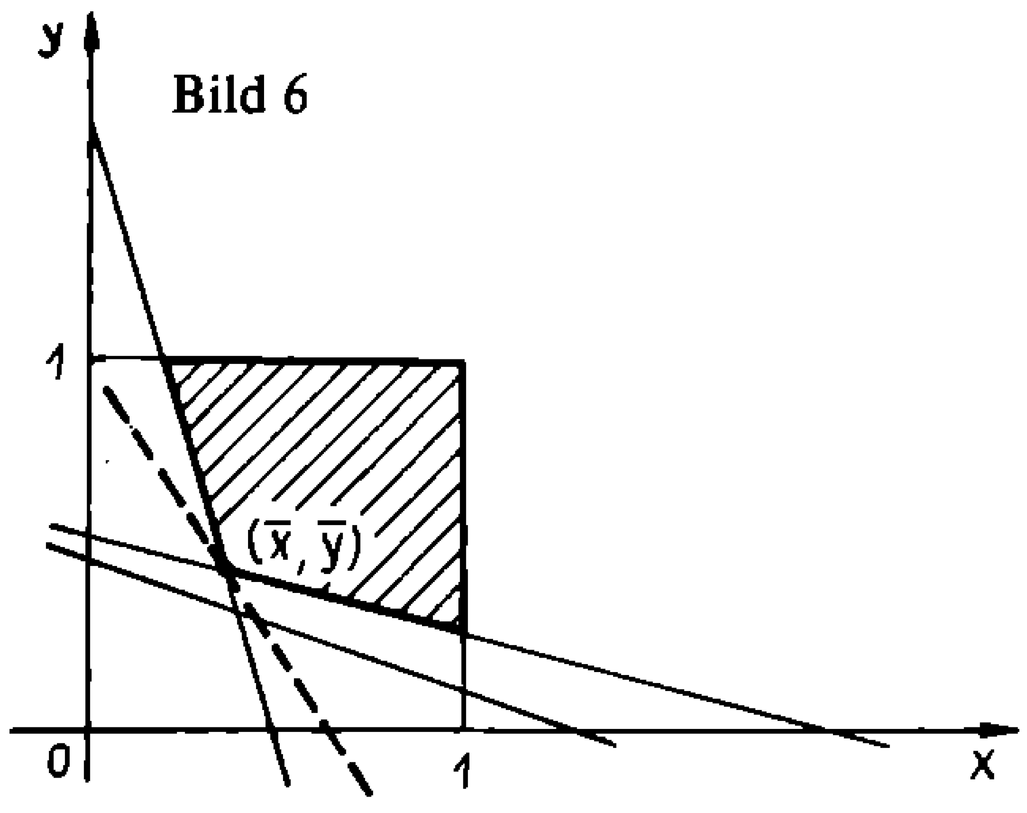


Bild 6

Um seine genauen Koordinaten zu bestimmen, müssen wir in den Beziehungen (3) und (4) anstelle des Ungleichheitszeichens das Gleichheitszeichen setzen (denn diesen Gleichungen entsprechen die sich in $(\bar{x},\bar{y})$ schneidenden Geraden) und das entstehende System mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

$$15x+60y=30$$
$$50x+15x=25$$

lösen, was jeder selbst tun kann.
Das Ergebnis lautet:

$$\bar{x}=\frac{14}{37}\approx 0{,}38, \quad \bar{y}=\frac{15}{37}\approx 0{,}41.$$

Damit müßte unsere Farbmischung zu 38 % aus Sorte I und zu 41 % aus Sorte II bestehen.
„Halt!" werden jetzt aufmerksame Leser rufen. „Hier kann irgend etwas nicht stimmen. Wenn x und y Anteile an der Gesamtmischung bezeichnen, so müssen sie doch in der Summe 100 % ergeben!" Recht haben diese Leser! Eben die Beziehung $x+y=1$, die in jedem Fall gelten muß, haben wir in unserer Modellierung nicht beachtet. (Hier zeigt sich die allgemein bekannte Tatsache, daß man beim Modellieren sehr sorgfältig zu Werke gehen muß, um wirklich alle wesentlichen Momente zu erfassen, sonst stimmt das erhaltene Modell nicht mit der Wirklichkeit überein und die Lösung wird falsch sein. Leider läßt sich Modellieren nicht „lehren", da es einen echt schöpferischen Prozeß darstellt; es ist aber durchaus trainierbar.)
Um nun unser Mischungsproblem endgültig zu lösen, haben wir im Bereich der zulässigen Lösungen nur diejenigen Punkte zu betrachten, die auf der der Gleichung $x+y=1$ entsprechenden Geraden liegen, und genauso vorzugehen, wie oben beschrieben. Durch die Einbeziehung der hinzugekommenen Gleichung verringert sich hierbei die Dimension des zulässigen Bereichs um Eins, so daß aus der schraffierten Fläche eine Strecke wird. Auf dieser suchen wir denjenigen Punkt (x^*,y^*), der den kleinsten Zielfunktionswert liefert, d. h., wir verschieben wiederum die Höhenlinie soweit wie möglich nach „Südwesten" (Bild 7). Die endgültige und tatsächlich optimale Lösung lautet

$$x^*=\frac{2}{7}, \quad y^*=\frac{5}{7}.$$

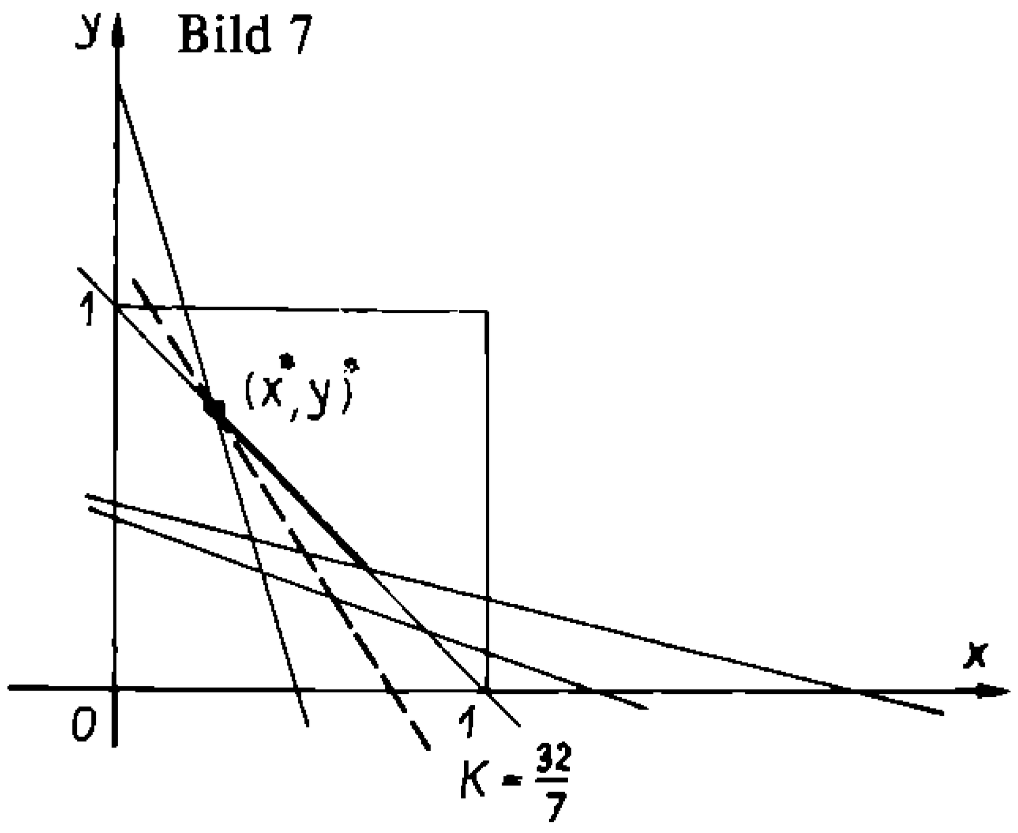


Bild 7

Der zu mischende Anstrichstoff muß damit zwei Teile der Farbsorte I und fünf Teile der Sorte II enthalten; die Kosten belaufen sich dabei auf $\frac{32}{7} \approx 4{,}57$ DM pro Kilogramm Farbe.
Überlegt euch, was sich an dem betrachteten Mischungsproblem ändert, wenn die Preise für die Farbsorten I und II 5,00 DM bzw. 6,00 DM pro Kilogramm betragen.
Obgleich schwieriger, lassen sich auch Aufgaben mit drei Unbekannten eventuell noch grafisch lösen. Für Probleme mit vier und mehr Variablen müssen wir allerdings auf die Geometrie verzichten und andere Mittel zu Hilfe nehmen. Diese sind algebraischer Natur und bestehen in der bereits erwähnten Simplexmethode, die freilich nur bei kleinen Aufgaben für die Rechnung von Hand geeignet ist.
Das behandelte „Problem des Malers" (Mischungsproblem) ist eine ganz typische Aufgabenstellung der Linearen Optimierung. In praktischen Problemen trifft man sie bei der Produktionsplanung, der Fruchtfolgenbestimmung für die Feldbestellung, der langfristigen Investitionsplanung usw. wieder. Dabei können sehr große Probleme mit Hunderten und Tausenden, ja sogar Zehntausenden von Nebenbedingungen und Variablen entstehen, die selbstverständlich nur noch mit Hilfe des Computers gelöst werden können.

Zum Abschluß seien noch einige typische Aufgabenstellungen genannt, die auf lineare Optimierungsprobleme führen:
„Problem des Dispatchers" *(Transportproblem)*: Wie soll man den Transport von Großplatten für den Wohnungsbau zwischen zwei Plattenwerken und drei Baustellen so organisieren, daß die Gesamtfahrstrecke der Schwerlasttransporter so kurz wie möglich wird?
„Problem des Technologen" *(Zuschnittproblem)*: Wie kann man aus rechteckigem Ausgangsmaterial Verkehrszeichen verschiedener Form, die in bestimmten Stückzahlen benötigt werden, so ausstanzen, daß möglichst wenig Originalplatten verwendet werden müssen?
„Problem des Arbeitsplaners" *(Zuordnungsproblem)*: Auf welche Weise sollen m vorhandenen (und flexibel einsetzbaren) Arbeitskräften m Arbeitsaufgaben zugeordnet werden, so daß der durch diese Zuordnung entstehende Gesamtnutzen maximal wird?

B. Luderer

Läßt sich der Zufall berechnen?

Teil 3

Nunmehr sollen Wahrscheinlichkeiten bei zufälligen Mehrfachversuchen betrachtet werden.
Das sind zufällige Versuche, die sich als durch Kopplung von mehreren zufälligen Versuchen entstanden auffassen lassen. Die in einen zufälligen Mehrfachversuch eingebundenen zufälligen Versuche heißen zufällige Teilversuche.
Zur Einführung werden 3 Aufgaben vorgestellt und anschließend analysiert:

▲13▲ Gleichzeitig oder nacheinander wird einmal mit einem Idealwürfel gewürfelt und einmal mit einer Idealmünze geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei diesem Doppelversuch mit dem Würfel 3 Augen gewürfelt werden und daß die Münze das Wappen zeigt? (Eine Münze zeigt nach jedem Wurf entweder Wappen (Elementarereignis $F_1 = \{w\}$) oder Zahl (Elementarereignis $F_2 = \{z\}$).)

▲14▲ Es wird gleichzeitig oder nacheinander einmal mit einem schwarzen gezinkten Würfel und mit einem weißen Idealwürfel gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Doppelwurf mit dem schwarzen Würfel i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ und mit dem weißen Würfel j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ Augen zu würfeln? Die Wahrscheinlichkeiten, mit dem schwarzen Würfel $1, 2, \ldots, 5$ oder 6 Augen zu würfeln, seien
$p_1 = p_2 = 0{,}05$, $p_3 = 0{,}1$, $p_4 = 0{,}2$ und $p_5 = p_6 = 0{,}3$.

▲15▲ In einer Urne befinden sich 7 rote und 4 gelbe Kugeln. Aus dieser Urne wird erst eine und, ohne diese in die Urne zurückzulegen, noch eine zweite Kugel ohne Hinzusehen entnommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit
a) zwei rote,
b) zuerst eine rote und als zweite eine gelbe,
c) als erste eine gelbe und als zweite eine rote und
d) 2 gelbe Kugeln herauszunehmen?

Die zufälligen Versuche dieser drei Aufgaben können als aus zwei zufälligen Teilversuchen bestehend, also als zufällige Doppelversuche aufgefaßt werden:
Der zufällige Doppelversuch der Aufgabe 13 besteht in einer losen Kopplung des zufälligen Versuchs zV_e „einmaliges Würfeln mit einem Idealwürfel" mit den sechs Elementarereignissen
$E_i = \{i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ und des zufälligen Versuchs zV_f „einmaliges Werfen einer Idealmünze" mit den zwei Elementarereignissen
$F_1 = \{w\}$ und $F_2 = \{z\}$. Zum zufälligen Doppelversuch gehören hier 12 Elementarereignisse, die durch die Symbole E_iF_j mit $i = 1, 2, \ldots, 6$ *und* $j = 1, 2$ eindeutig fixiert sind.
Im zufälligen Doppelversuch der Aufgabe 14 sind der zufällige Versuch zV_e „einmaliges Würfeln mit dem schwarzen Würfel" mit den 6 Elementarereignissen
$E_i = \{i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ und der zufällige Versuch zV_f „einmaliges Würfeln mit dem weißen Würfel" mit den 6 Elementarereignissen
$F_j = \{j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ ebenfalls lose gekoppelt. Dieser zufällige Doppelversuch besitzt $6 \cdot 6 = 36$ Elementarereignisse, die eindeutig angebbar sind durch
E_iF_j mit $i = 1, 2, \ldots, 6$ und $j = 1, 2, \ldots, 6$. In diesem Symbol steht das zum zV_e gehörende Elementarereignis stets vor dem zum zV_f gehörenden Elementarereignis.
Der zufällige Doppelversuch der Aufgabe 15 kann als enge Kopplung der beiden folgenden zufälligen Versuche aufgefaßt werden:
zV_e – Entnehmen einer Kugel aus einer weißen Urne mit 7 roten und 4 gelben Kugeln mit den Elementarereignissen $E_1 = R$ und $E_2 = G$
zV_f – Entnehmen einer Kugel aus einer schwarzen Urne mit 7 roten und 4 gelben Kugeln mit den Elementarereignissen $F_1 = R$ und $F_2 = G$.
Die Kopplung legt hier fest, daß die erste Kugel aus der weißen Urne zu entnehmen ist, daß damit automatisch eine mit der entnommenen Kugel gleichfarbige aus der schwarzen Urne verschwindet und daß nunmehr die zweite Kugel aus der schwarzen Urne zu entnehmen ist. Zu diesem zufälligen Doppelversuch gehören die 4 Elementarereignisse
$E_1F_1 = RR$, $E_1F_2 = RG$, $E_2F_1 = GR$ und $E_2F_2 = GG$.
Definition 7: Ein zufälliger Versuch heißt zufälliger Doppelversuch, wenn zwei zufällige Versuche, zV_e mit den Elementarereignissen $E_1, E_2, \ldots, E_v$ und zV_f mit den Elementarereignissen $F_1, F_2, \ldots, F_w$ angebbar sind, so daß die Elementarereignisse des zufälligen Doppelversuchs eindeutig durch die $v \cdot w$ Symbole E_iF_j $(i = 1, 2, \ldots, v;$ $j = 1, 2, \ldots, w)$ festgelegt sind.
Analog wie die Elementarereignisse lassen sich bei einem zufälligen Doppelversuch noch andere Ereignisse vorteilhaft durch Doppelsymbole angeben:

Definition 8: Ist A ein Ereignis des zufälligen Versuchs zV_e, B ein Ereignis des zufälligen Versuchs zV_f und ist der zufällige Doppelversuche eine Kopplung des zV_e und des zV_f, so heißt die Vereinigung aller Elementarereignisse E_iF_j des zufälligen Doppelversuchs, für die gleichzeitig $E_i \subset A$ und $F_j \subset B$ gelten, Ereignis AB des zufälligen Doppelversuchs!

▲16▲ Welche Elementarereignisse des zufälligen Doppelversuchs der Aufgabe 14 sind Teilmengen des Ereignisses AB mit $A = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ und $B = F_2 \cup F_4$?

Ist ein zufälliger Doppelversuch durch Koppeln der zufälligen Versuche zV_e und zV_f mit den sicheren Ereignissen

$\Omega_e = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_v$ und

$\Omega_f = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_w$ entstanden, dann wird jedes Ereignis $A\Omega_f$ des Doppelversuchs (A ist in diesem Symbol gemäß Definition 8 ein Ereignis des selbständigen zufälligen Versuchs zV_e) auch als Ereignis des im Doppelversuch enthaltenen zufälligen Teilversuchs zTV_e bezeichnet. Ebenso wird jedes Ereignis Ω_eB des Doppelversuchs auch als Ereignis des anderen zufälligen Teilversuchs zTV_f bezeichnet.

Abkürzend wird das Ereignis $A\Omega_f$ oft Ereignis A des zufälligen Teilversuchs zTV_e und das Ereignis Ω_eB Ereignis B des zTV_f genannt.

Der Durchschnitt der Ereignisse $A\Omega_f$ und Ω_eB der zufälligen Teilversuche ist übrigens das Ereignis AB *des Doppelversuchs:*

$A\Omega_f \cap \Omega_eB = AB$

(siehe Lösung der Aufgabe 14!).

Für die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses E_iF_j eines zufälligen Doppelversuchs gilt nach Definition 4

$$P(E_iF_j) = P(E_i\Omega_f) \cdot \frac{P(E_iF_j)}{P(E_i\Omega_f)}$$
$$= P(E_i\Omega_f) \cdot P(\Omega_eF_j/E_i\Omega_f).$$

$P(E_i\Omega f)$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_i beim zufälligen Teilversuch zTV_e und $P(\Omega_eF_j/E_i\Omega_f)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis F_j beim zufälligen Teilversuch zTV_f bez. des Ereignisses E_i beim zTV_e.

Bei allen drei Aufgaben 13, 14 und 15 sind die beiden zufälligen Versuche so zu einem zufälligen Doppelversuch gekoppelt, daß für einen zufälligen Teilversuch, mit zTV_e bezeichnet,

$P(E_i\Omega_f) = P(E_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, v$ gilt.

In Worten: Die Wahrscheinlichkeiten für das Elementarereignis E_i beim zufälligen Teilversuch zTV_e und beim selbständig ausgeführten zufälligen Versuch zV_e sind gleich (siehe Lösungen der Aufgaben 13, 14 und 15).

Bei allen drei Aufgaben kann der zufällige Doppelversuch, ohne die Wahrscheinlichkeiten zu verändern, so ausgeführt werden, daß der zufällige Teilversuch zTV_e vor dem zTV_f ausgeführt wird. Dabei läuft der zTV_e ebenso ab, als ob er als selbständiger zufälliger Versuch zV_e ausgeführt wird.

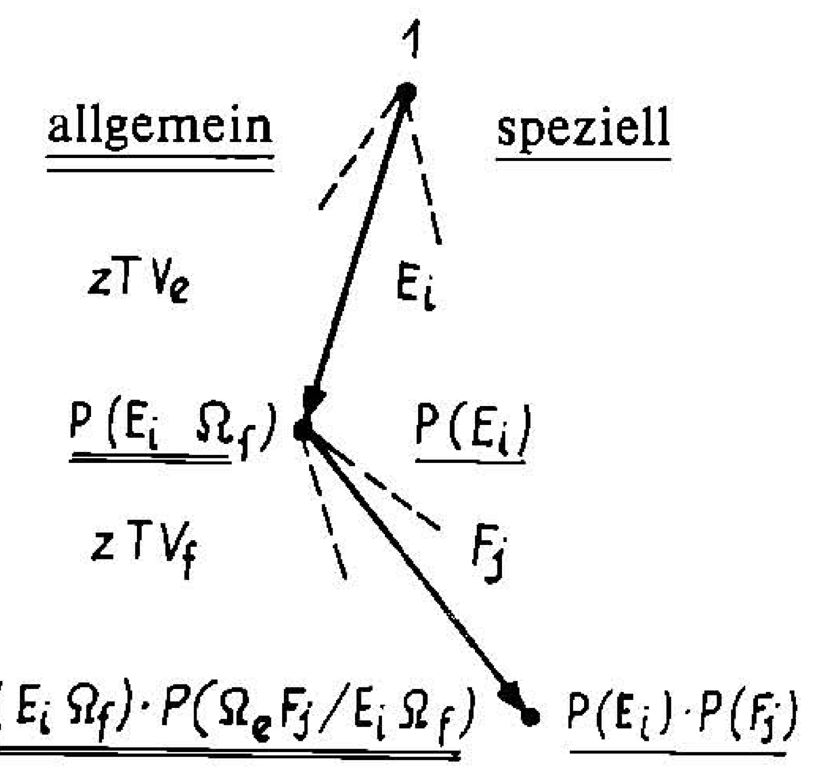
Bei den Aufgaben 13 und 14 kann jeder der beiden zufälligen Teilversuche in dieser Weise als erster ausgeführt werden. Hier gilt auf alle Fälle noch $P(\Omega_eF_j) = P(F_j)$. Bei diesen beiden Aufgaben wird darüber hinaus die Wahrscheinlichkeit, mit der beim zuletzt ausgeführten zufälligen Teilversuch zTV_f ein Ereignis F_j eintritt, nicht dadurch beeinflußt, welches Elementarereignis E_i beim vorher ausgeführten zTV_e eingetreten ist: Es gilt $P(\Omega_eF_j/E_i\Omega_f) = P(F_j)$ und die Ereignisse $E_i\Omega_f$ und Ω_eF_j sind unabhängig (siehe Lösung der Aufgabe 14!). Für jeden zufälligen Doppelversuch gilt wegen

$E_i\Omega_f = E_iF_1 \cup E_iF_2 \cup \ldots \cup E_iF_w$

nach den Grundannahmen

$P(E_i\Omega_f) = P(E_iF_1) + P(E_iF_2) + \ldots$
$+ P(E_iF_w)$. Nach diesen für $i = 1, 2, \ldots, v$ gültigen Gleichungen ist es naheliegend, die Wahrscheinlichkeiten eines zufälligen Doppelversuchs und die zu seinen zufälligen Teilversuchen gehörenden Ereignisse mittels eines gerichteten und bewerteten Graphen darzustellen (siehe Lösung der Aufgabe 15!): Den Pfeilen sind die dem angegebenen zufälligen Teilversuch zugehörigen Ereignisse zugeordnet und den Knoten (Endpunkte der Pfeile) die zu den angegebenen Ereignissen gehörenden Wahrscheinlichkeiten (Bild 9).

Bild 9



▲17▲ Berechne die Wahrscheinlichkeit für das zum zufälligen Doppelversuch der Aufgabe 14 gehörende Ereignis AB mit $A = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ und $B = F_2 \cup F_4$!

Die angegebene, die Grundannahmen benutzende Lösung der Aufgabe 14 läßt die Gültigkeit des folgenden Satzes erkennen:

Satz 8: Ist A ein mit der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ beim zufälligen Versuch zV_e eintretendes Ereignis, B ein mit der Wahrscheinlichkeit $P(B)$ beim zufälligen Versuch zV_f eintretendes Ereignis und sind die beiden zufälligen Versuche zV_e und zV_f lose zu einem zufälligen Doppelversuch gekoppelt, so tritt beim zufälligen Doppelversuch das Ereignis AB mit der Wahrscheinlichkeit $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ ein. Dabei bedeutet „lose Kopplung von zV_e und zV_f“: Für die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse

E_i ($i = 1, 2, \ldots, v$) des zV_e,

F_j ($j = 1, 2, \ldots, w$) des zV_f und

E_iF_j des Doppelversuchs gelten

$P(E_iF_j) = P(E_i) \cdot P(F_j)$.

„Lose Kopplung von zV_e und zV_f“ ist gleichbedeutend mit „Die Elementarereignisse $E_i\Omega_f$ des zufälligen Teilversuchs zTV_e und Ω_eF_j des zufälligen Teilversuchs zTV_f sind paarweise unabhängig. Ein zufälliger Doppelversuch, entstanden durch Koppeln des zV_e und des zV_f, ist selbst ein zufälliger Versuch und kann mit einem weiteren zufälligen Versuch zV_g zu einem zufälligen Dreifachversuch gekoppelt werden“ usf. Für zufällige Mehrfachversuche gilt ein zum Satz 8 analoger Satz.

W. Träger

Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Mandshavidze

Institut für angewandte Mathematik der Universität Tbilissi

Die reelle Funktion $f(x, y)$ sei innerhalb des Kreises

$$K = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$$

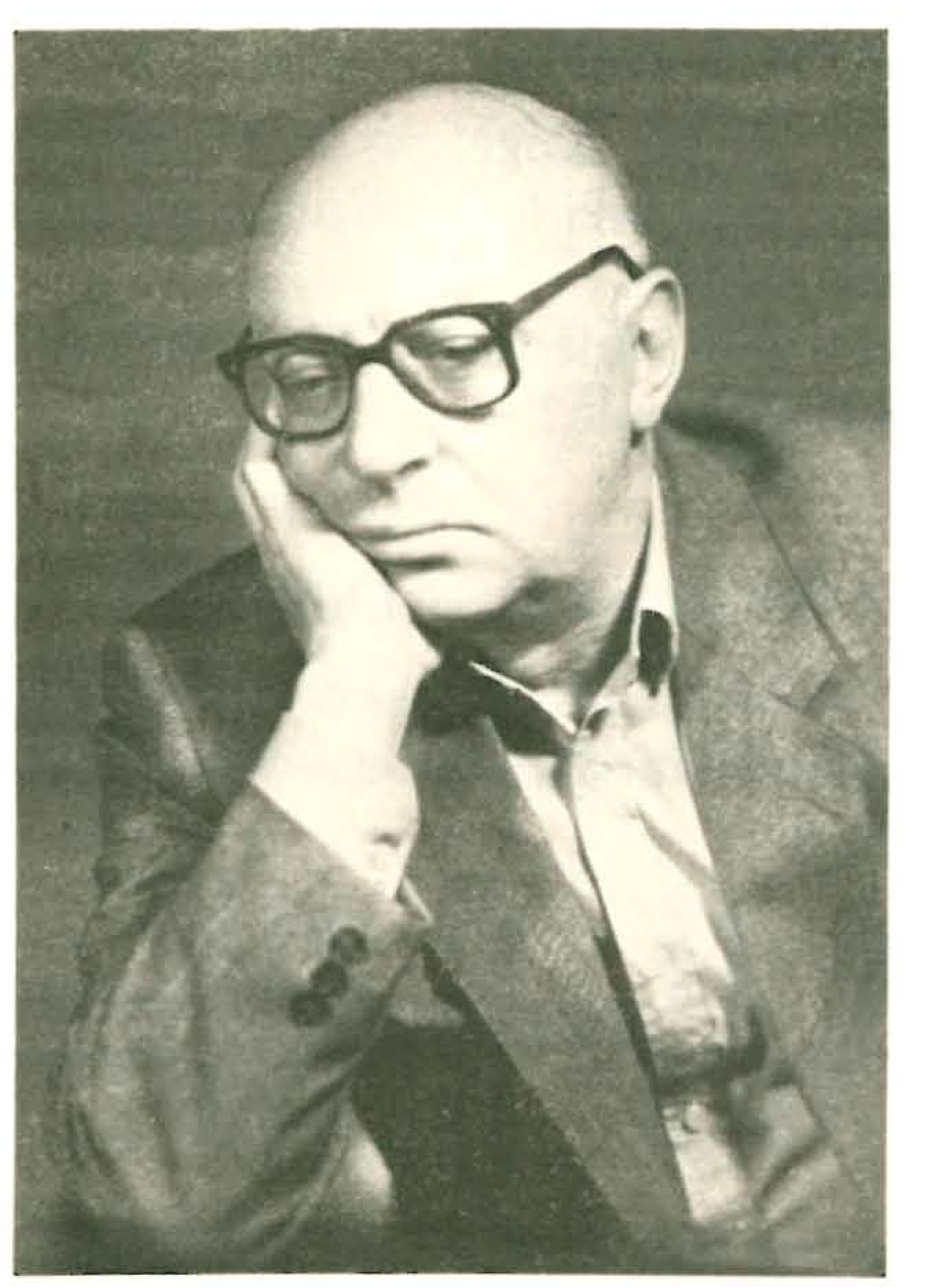
definiert und stetig.

Weiterhin ist bekannt, daß die Funktion im Punkte $(x_1, y_1) \in K$ negativ und im Punkte $(x_2, y_2) \in K$ positiv ist.

Es ist zu zeigen, daß $f(x, y)$ den Wert Null in einer unendlichen Anzahl von Punkten aus K annimmt!

Kurzbiographie

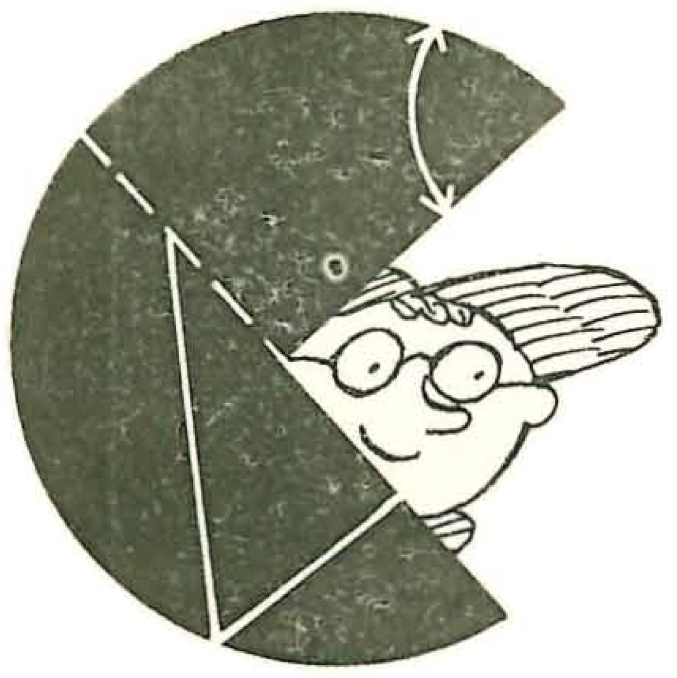
Prof. Mandshavidze wurde am 6. Mai 1924 geboren und studierte 1941 bis 1947 an der Universität Tbilissi. Von 1947 bis 1950 war er Aspirant am mathematischen Institut Tbilissi, zugehörig zur Akademie der Wissenschaften der Georgischen SSR. 1970 wurde er Doktor der Wissenschaften und 1972 erfolgte die Berufung zum Professor. Nach der Tätigkeit als wissenschaftlicher Sekretär und stellvertretender Direktor für Forschung am mathematischen Institut leitet er dort seit 1977 die Abteilung „Komplexe Analysis und deren Anwendung“.



Es gibt kein größeres Hindernis des Fortgangs in den Wissenschaften als das Verlangen, den Erfolg davon zu früh verspüren zu wollen.

Georg Christoph Lichtenberg

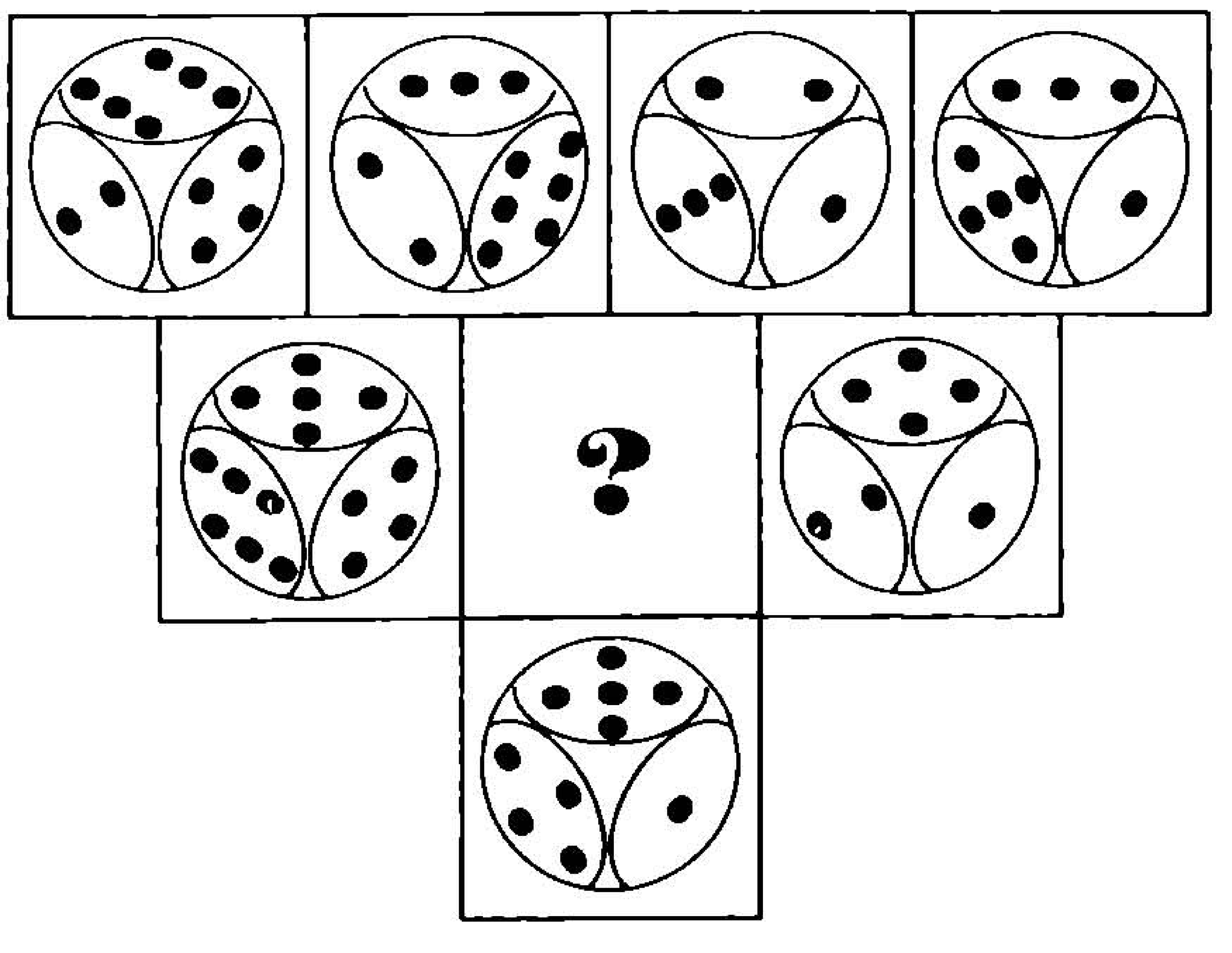
In freien Stunden · alpha-heiter



Zusammengestellt aus unterhaltsamer mathematischer Literatur
von Hermann-Dietrich Hornschuh, erschienen im MANZ-Verlag München

Verflixte Würfel

Die sieben Würfel in der folgenden Anordnung haben alle eine gemeinsame Eigenschaft.
Wie viele Augen muß demzufolge der Würfel haben, der an die Stelle des Fragezeichens gehört?

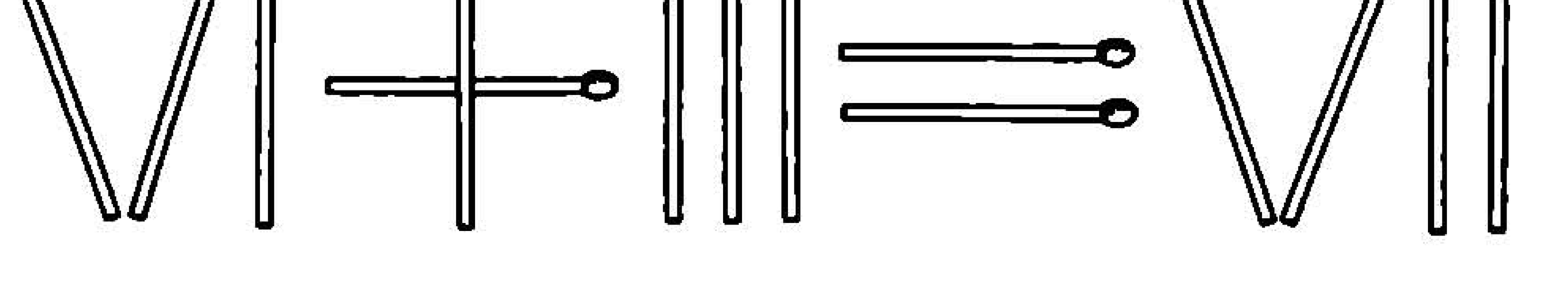


Bunte Kugeln

Eine grüne Kugel ist so schwer wie zwei rote Kugeln und zwei blaue Kugeln sind so schwer wie eine rote Kugel.
Wie viele blaue Kugeln sind so schwer wie drei grüne Kugeln?

Mißbrauchte Streichhölzer

Liest man die folgende Streichholzanordnung ab, dann ergibt sich $6 + 3 = 7$, was offensichtlich falsch ist.



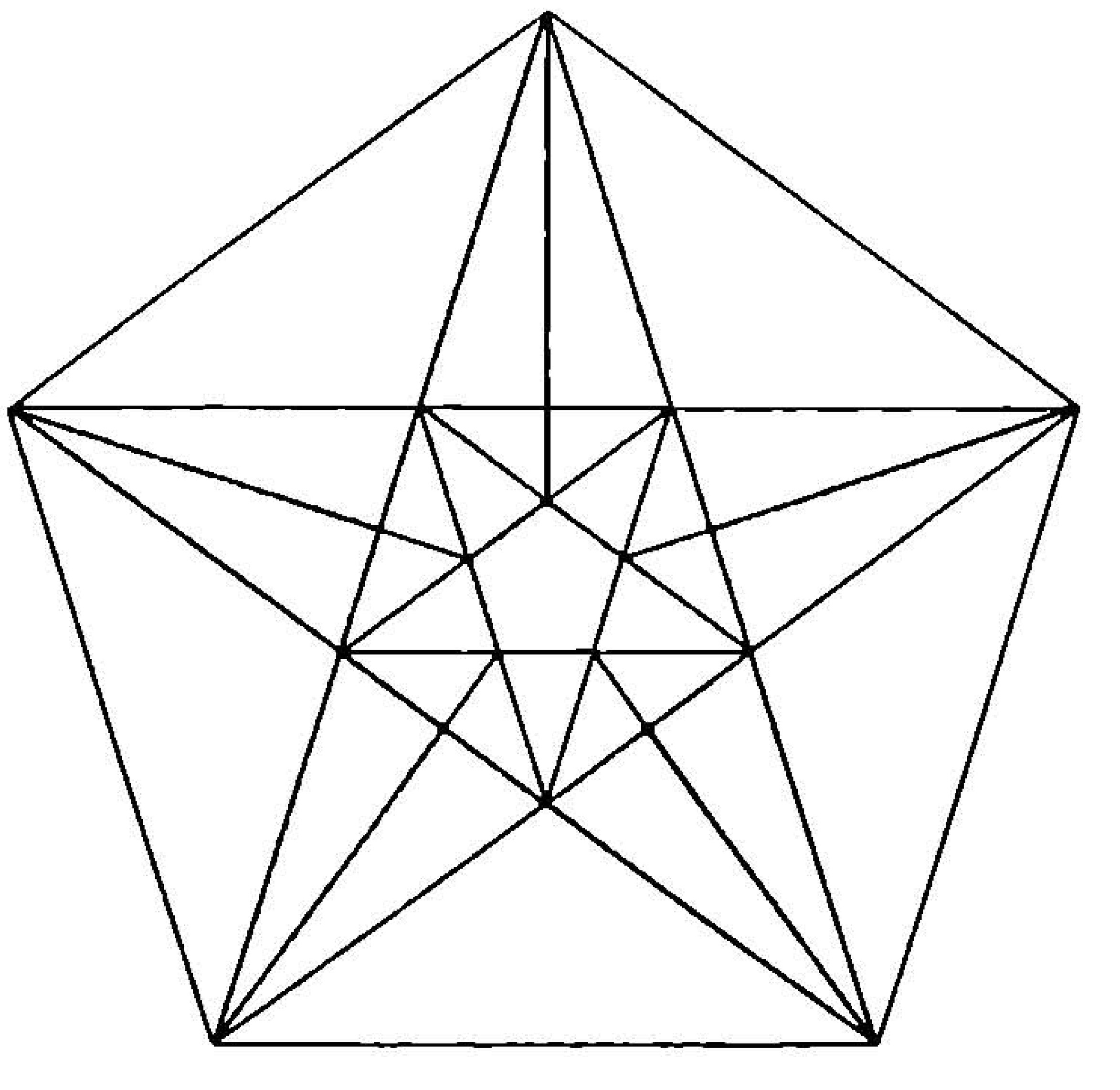
Durch Umlegen eines Streichholzes soll die Anordnung in eine Gleichung umgeformt werden.

Neun Neunen

Ist es möglich, 9 Neunen so durch zwei verschiedene Rechenzeichen zu verknüpfen, daß der entstehende Term genau den Wert 1000 besitzt?

Etliche Dreiecke

In einem Buch hat Herbert die folgende Figur gefunden. Er überlegt nun, wie viele Dreiecke in dieser Figur enthalten sind.



Wie viele Dreiecke kann Herbert höchstens finden?

Die Mathematik ist als Fachgebiet so ernst, daß man keine Gelegenheit versäumen sollte, es möglichst unterhaltsam zu gestalten.

B. Pascal

Fehlende Ziffern

Wie viele Zahlen von 1 bis 1000 gibt es, die weder die Ziffer 0 noch die Ziffer 9 besitzen?

Die Acht

Wenn einer eine 8 sieht
und 8sam in Betr8 zieht,
daß sie auch, wenn sie kopfsteht,
noch 8bar durch die Welt geht,
so ist die 8, wenn auch verkehrt,
hoch8ungsvoller 8ung wert.
Wenn aber einer hergeht
und eine 8, die hochsteht,
roh von der Seite antippt,
so daß sie 8los umkippt,
dann wird durch diese Schändlichkeit
aus einer 8 Unendlichkeit
und bleibt, wie dieses Beispiel lehrt,
hoch8ungsvoller 8ung wert!

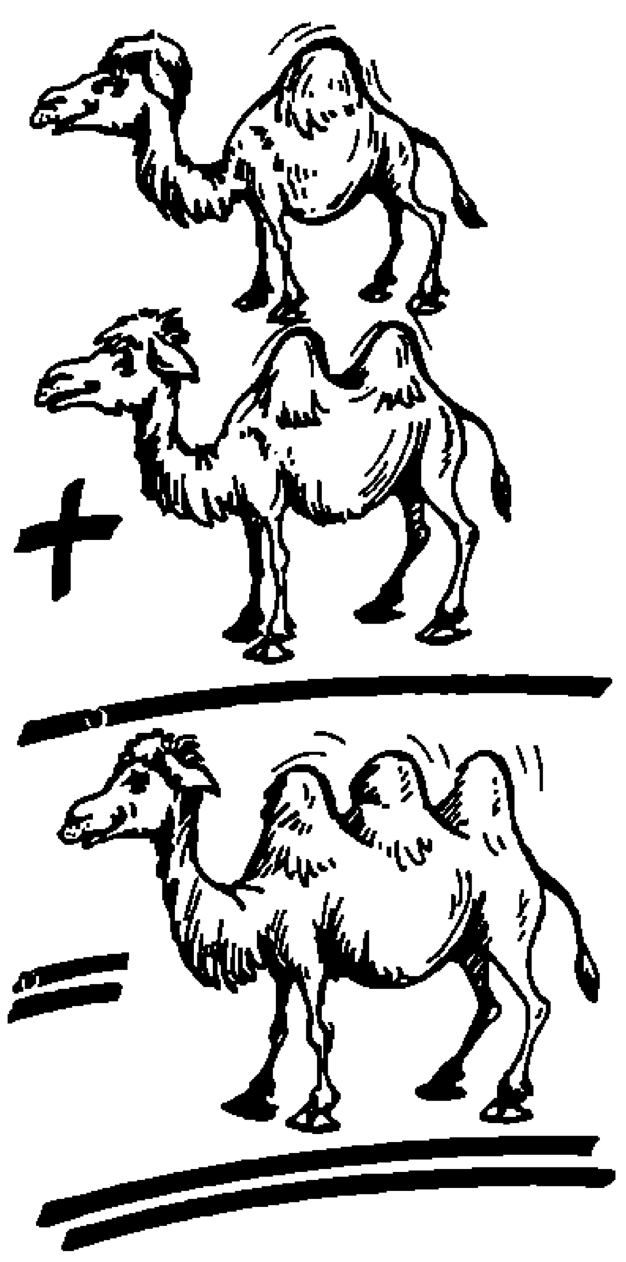
A. Wittmann

Fatale Verwandtschaft

Peter erzählt seinem Freund Paul: „Der Bruder meines Onkels ist der Onkel meines Bruders. Kannst du mir sagen, wie das verwandtschaftlich bei uns zusammenhängt?"
„Nichts leichter als das", antwortet Paul seinem Freund Peter.

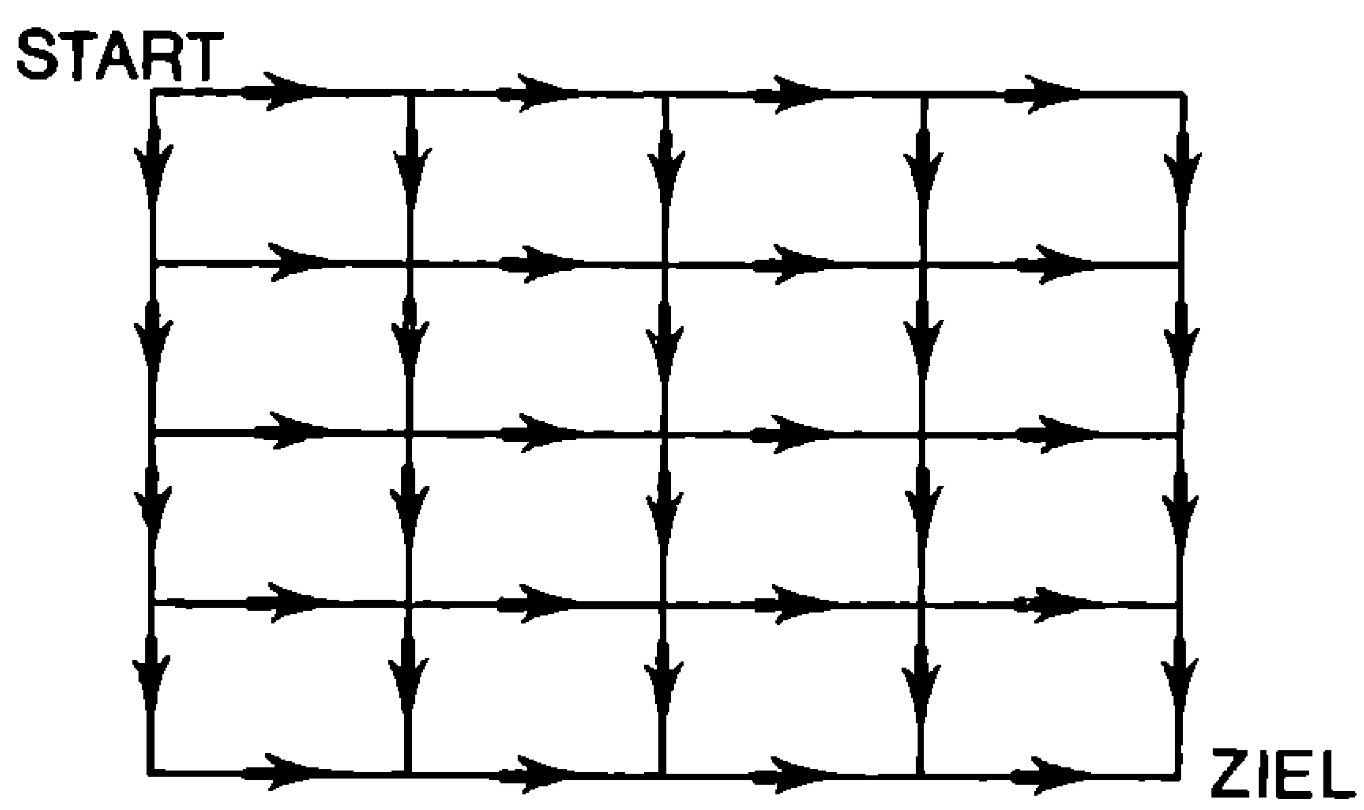
Mathematische Zoologie

Anton Oberfrank



Verschiedene Wege

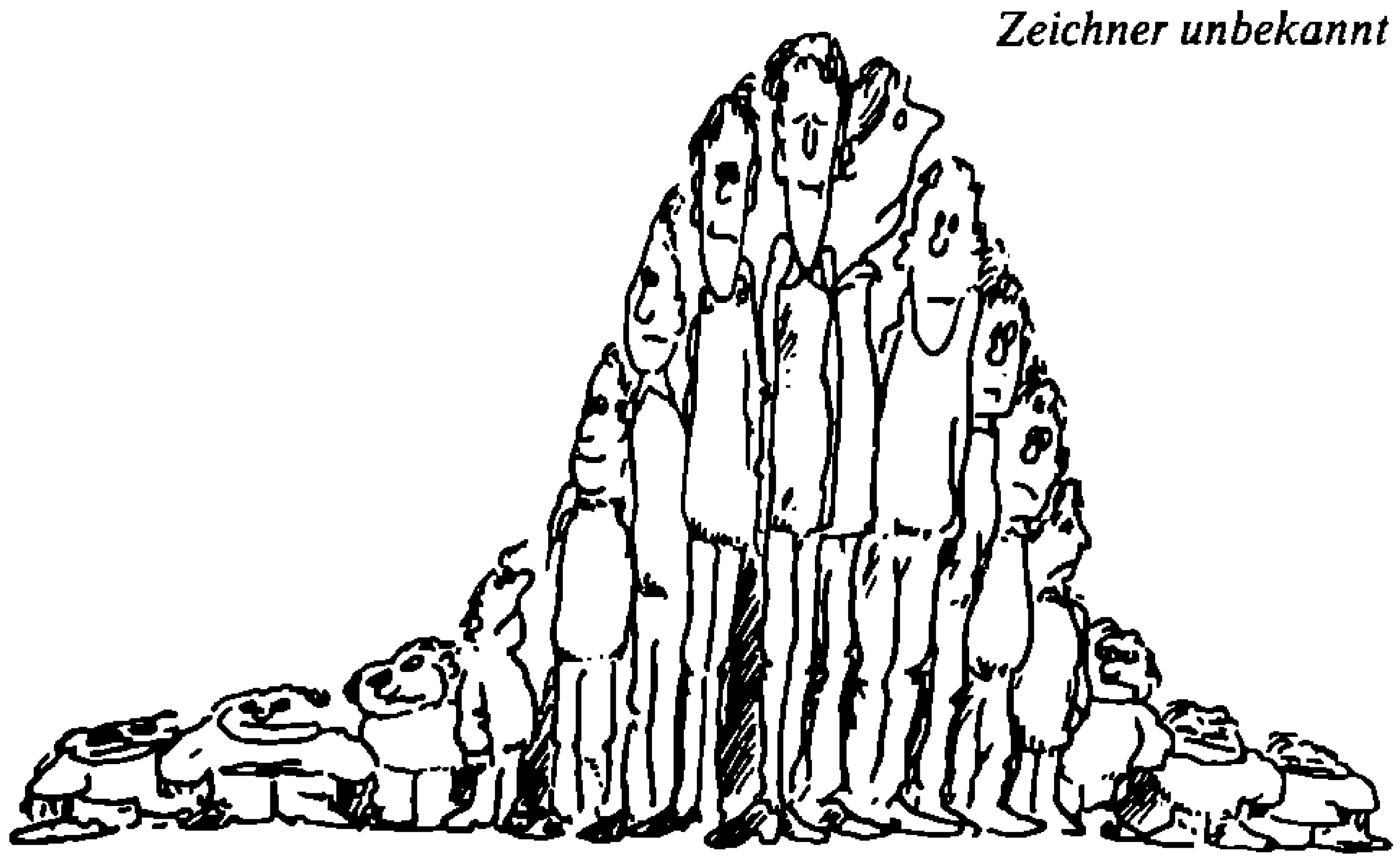
Die folgende Zeichnung zeigt, auf welchen Wegen man vom Start zum Ziel gelangen kann.



Wie viele verschiedene Wege führen vom Start zum Ziel?

Die normalverteilte Klasse

Zeichner unbekannt



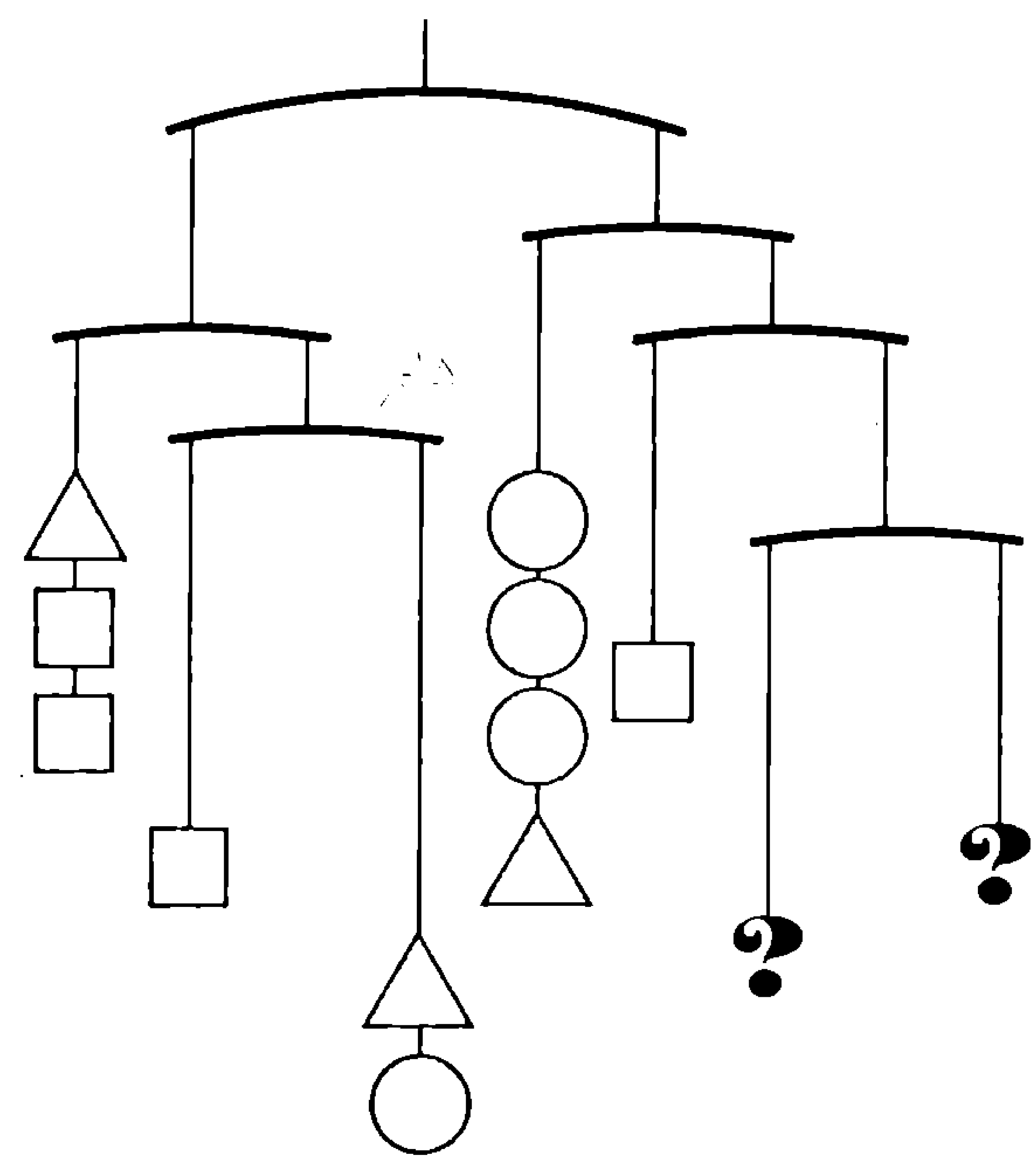
Komischer Kreis

Welchen Radius hat ein Kreis, der ebenso viele Zentimeter Umfang wie Quadratzentimeter Fläche besitzt?

Keiner in der Schule kann mich ausstehen", jammerte der Sohn, „die Lehrer nicht und die Kinder auch nicht. Der Busfahrer haßt mich, der Hausmeister macht mir die Hölle heiß. Ich gehe nicht mehr in die Schule."
„Du mußt aber gehen", sagte die Mutter, „du bist gesund. Du mußt noch viel lernen. Außerdem bist du jetzt fünfundvierzig Jahre alt und der Mathematiklehrer. Du mußt also in die Schule gehen!"

Fatales Mobile

An einem Mobile hängen Dreiecke, Kreise und Quadrate. Stäbe gleicher Größe sind gleich schwer. Die Fäden haben praktisch kein Gewicht.



Welche Symbole müssen an die Stelle des Fragezeichens gehängt werden, damit das Mobile im Gleichgewicht ist?

Für alle, die neugierig geworden sind, die vier Titel, aus denen wir für alpha-heiter „mausen" durften:

Hermann-Dietrich Hornschuh
Mathe mit Köpfchen, Manzbuch 880
Mehr Mathe mit Köpfchen, Manzbuch 881
Noch mehr Mathe mit Köpfchen, Manzbuch 882
Jedes Buch enthält einhundert interessante Denksportaufgaben mit oft überraschenden Lösungen.

Humor rund um die Mathematik, Manzbuch 891
Eine Sammlung heiterer Gedichte, Texte, Zeichnungen um eine ernste Wissenschaft

Warum ist der Kreis nicht rund?

Diese merkwürdige Frage stellte Andreas seinem Vater, nachdem er den Heimcomputer KC85/3 mit dem CIRCLE-Befehl einen Kreis zeichnen ließ. Natürlich ist der Kreis, den der Mathematiker definiert, rund; runder geht es nicht. Anders sieht es vielleicht schon mit dem Kreis aus, den der Mathematiker mit dem Zirkel schlägt. Böse Zungen behaupten, daß sich unter den Mathematikern besonders viele Menschen befinden, die „zwei linke Hände" besitzen. Also ist es nicht verwunderlich, daß nach der Anwendung des Zirkels durch einen Mathematiker kein vollkommen rundes Gebilde auf dem Papier zu sehen ist. Um sich nicht beim Kreiszeichnen zu blamieren, würde der Mathematiker diese Arbeit gern dem Computer überlassen. Doch wir ahnen nun schon, daß auch Computerkreise ihre Ecken haben.

Der Befehl zum Zeichnen eines Kreises für den KC85/3 (bzw. den KC85/2 mit Zusatzmodul M 006 BASIC) lautet

CIRCLE A, B, R

wobei A und B die Koordinaten des Mittelpunkts sind und R der Radius. Damit der Kreis vollständig auf den Bildschirm paßt, wählt man den Radius so, daß

$R \leqq A$, $R \leqq B$ und $A + R \leqq 319$, $B + R \leqq 255$

gilt. Doch der vom Computer gezeichnete Kreis besitzt 4 auffällige Spitzen in den Punkten $(A \pm R, B)$ und $(A, B \pm R)$ (s. Bild 1 und 2).

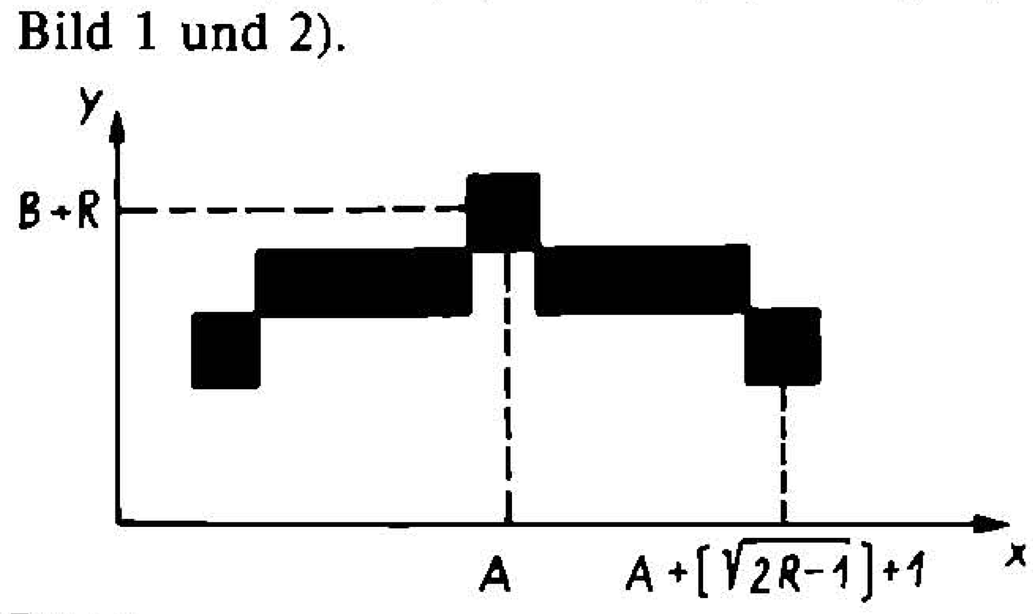


Bild 1
Der vom KC85/3 gezeichnete Kreis in der Umgebung des Punktes (A, B + R) für R = 6 (stark vergrößert)

Wir wollen im folgenden Abschnitt untersuchen, wieso der KC85 eckige Kreise zeichnet und wie man das Programm leicht abändern kann, um rundere Kreise zu erhalten. Außerdem ließ sich Andreas mit der Befehlskette

FOR R=Ø TO 127: CIRCLE 128,128,R: NEXT R

konzentrische Kreise zeichnen, die eigentlich den letzten Kreis mit Radius 127 vollkommen ausfüllen müßten (s. Bild 2).

Bild 2

In Wirklichkeit bleiben einige Punkte weiß, wobei in der Umgebung der beiden Geraden $y = 128$ und $x = 128$ der Kreis sehr gut ausgefüllt wurde. Im übernächsten Abschnitt untersuchen wir, wieso dies der Fall ist und wieviel Prozent der Punkte innerhalb des Kreises mit R=127 vom KC85 nicht geschwärzt wurden. Im letzten Abschnitt wird ein Verfahren angegeben, wie man einfacher als der KC85 bei der Abarbeitung des CIRCLE-Befehls Kreise mit dem Computer zeichnen kann.

1. Die Ecken im Computerkreis

Das Unterprogramm CIRCL ist im KC85/3 in Maschinensprache formuliert und wird bei dem Kommando CIRCLE A,B,R der Sprache BASIC aufgerufen. Die Idee dieses Unterprogramms besteht in der Berechnung des in Bild 3 markierten Achtelkreises in der angegebenen Richtung. Gesetzt werden dann alle 8 symmetrischen Punkte.

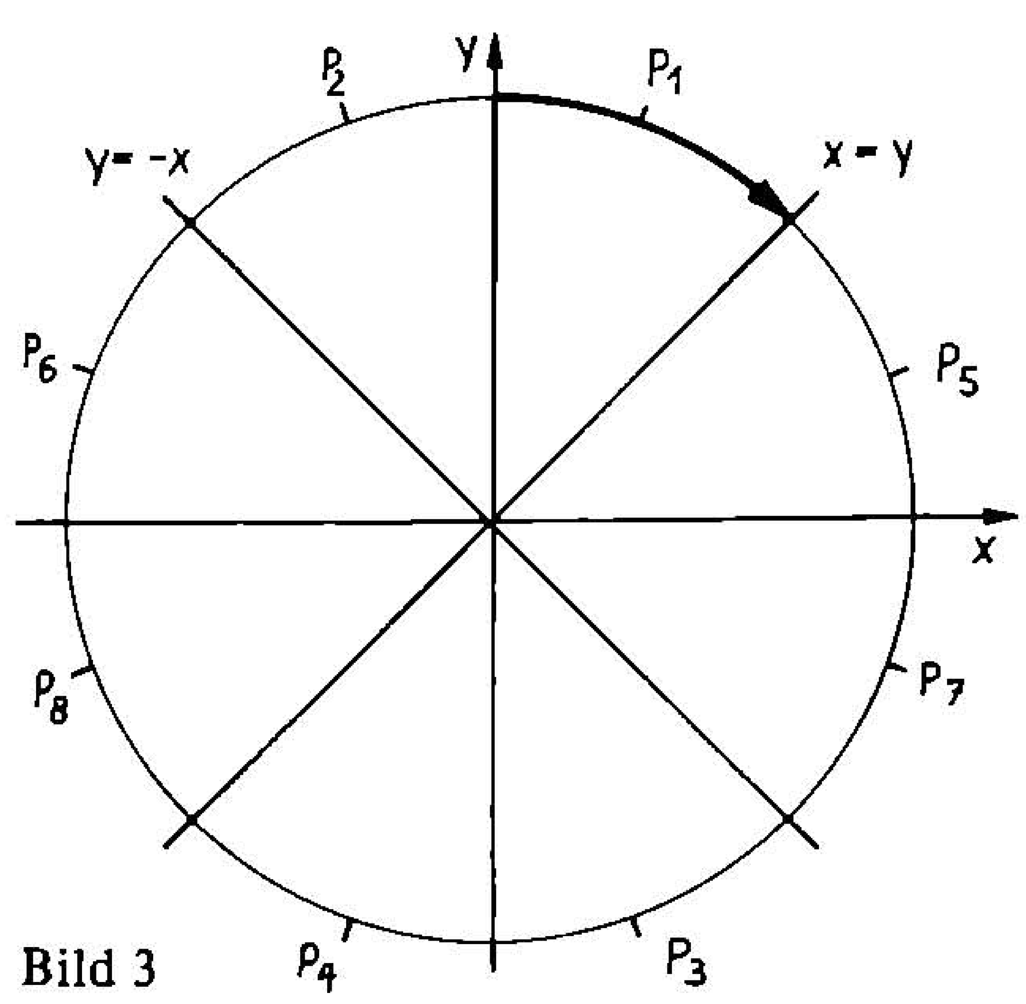


Bild 3

Will man diese Idee in ein BASIC-Programm umsetzen, so könnte es wie folgt aussehen:

Programm P1

```
1Ø FOR X=Ø TO R/SQR(2): Y
   =INT(SQR(R*R-X*X))
2Ø PSET A+X,B+Y: PSET A-X,B+Y
3Ø PSET A+X,B-Y: PSET A-X,B-Y
4Ø PSET A+Y,B+X: PSET A-Y,B+X
5Ø PSET A+Y,B-X: PSET A-Y,B-X
6Ø NEXT X
```

Da die Koordinaten der Bildpunkte ganzzahlig sein müssen, wird Y als die größte ganze Zahl definiert, die kleiner oder gleich $\sqrt{R^2 - X^2}$ ist. Jetzt können wir uns schon erklären, woher der Computerkreis seine Ecken hat: Für X=0 ist Y=R, für X=1 ist

$Y = [\sqrt{R^2 - 1}\,] = R - 1$. ([Z] ist das mathematische Symbol für den ganzen Anteil von Z, d. h. die größte ganze Zahl, die nicht größer als Z ist.) Auch für X=2 ist schon für $R \geqq 3$

$R - 1 \geqq Y = [\sqrt{R^2 - 4}\,] \geqq \sqrt{R^2 - 2R + 1}$ $= R - 1$, d. h. Y=R−1. Ebenso zeigt man, daß für

$1 \leqq X \leqq [\sqrt{2R - 1}\,]$ Y=R−1 ist und für

$X = [\sqrt{2R - 1}\,] + 1$ $Y = R - 2$. Damit sieht der Computerkreis in der Umgebung des Punktes (A,B+R) entspechend dem Punktraster des Bildes 1 aus. Der Grund für die Ecke im Punkt (A,B+R) ist also der, daß der sich aus dem Satz des Pythagoras ergebende Term $\sqrt{R^2 - X^2}$ stets abgerundet wird. Würde man entsprechend den Rundungsregeln auf ganze Zahlen runden, d. h. für $N - 0{,}5 \leqq Z \leqq N + 0{,}5$ (N ganzzahlig) auf N, so wäre $\sqrt{R^2 - 1}$ für R=2 auf R aufzurunden. Denn es gilt

$R^2 - 1 > (R - 0{,}5)^2 = R^2 - R + 0{,}25$.

Gewöhnlich wird für $Z = N + 0{,}5$, für geradzahliges N ab- und ungeradzahliges N aufgerundet. Will man mit dem Computer runden, ist es günstiger, die Regel „Z=N+0,5 wird stets aufgerundet" zu verwenden. Denn diese Regel läßt sich durch INT(Z+.5) einfach realisieren.

Wenn wir nun den Befehl für Y im Programm P1 abwandeln zu

Y = INT(SQR(R*R − X*X) + .5),

so verlieren die Kreise ihre Ecken. Anstelle von Bild 1 würde man z. B. das Bild 4 erhalten.

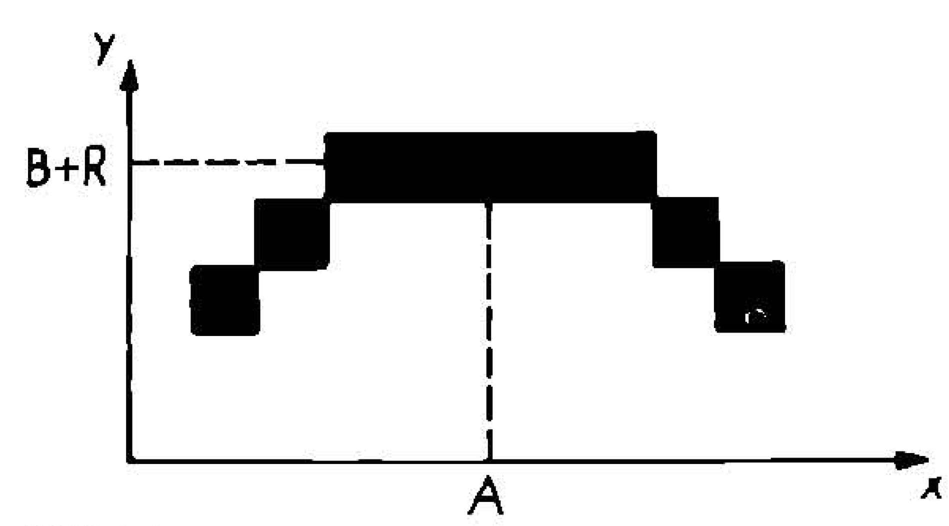


Bild 4
Der mit abgewandelter Rundungsregel gezeichnete Kreis in der Umgebung des Punktes (A, B + R) für R = 6

Ein guter Programmierer macht sich auch Gedanken, wie er sein Programm gestalten kann, damit möglichst wenig Rechenzeit benötigt wird. Zum Beispiel ist das Wurzelziehen eine im Vergleich zum Addieren oder Subtrahieren sehr zeitaufwendige Operation. Deshalb wird im Unterprogramm CIRCL der ganze Anteil $W = [\sqrt{Z}\,]$ einer Wurzel nach folgendem Verfahren, das wir wieder aus der Maschinensprache in BASIC übersetzt haben, berechnet:

Programm P2

```
1Ø W=-1: D=-1
2Ø W=W+1: D=D+2: Z=Z-D
3Ø IF Z> =Ø AND Z<2 ∧ 15 THEN
   GOTO 2Ø
4Ø REM W IST DIE GESUCHTE
   ZAHL
```

Da $Z = R^2 - X^2$ für $R < 128 = 2^7$ stets die Bedingung $Z < 2^{15}$ erfüllt, ist für Kreise, die voll auf den Bildschirm passen, der Test

„$Z < 2 \wedge 15$“ ohne Bedeutung. In dem Befehl „$Z = Z - D$“ nimmt D nacheinander die Werte 1, 3, 5, 7, ... an.
Nun gilt die Formel
$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2N - 1) = N^2$,
wie man dem Bild 5 unmittelbar durch Auszählen der Kästchen in jedem Streifen entnimmt. Damit besteht also die Idee in dem Verfahren zur Berechnung von $[\sqrt{Z}\,]$ darin, daß im Befehl 30 das größte W gesucht wird, für das $Z - W^2 \geqq 0$ gilt.

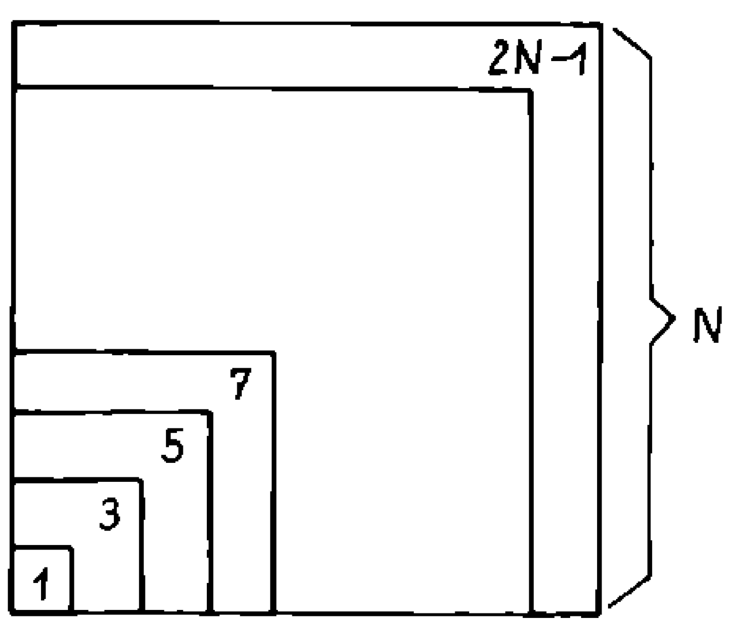


Bild 5
$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2N - 1) = N^2$

Durch Anfügen eines Befehls wollen wir erreichen, daß für $\sqrt{Z} - [\sqrt{Z}\,] > 0{,}5$ $\sqrt{Z}$ aufgerundet wird. (Der problematische Fall $\sqrt{Z} - [\sqrt{Z}\,] = 0{,}5$ kann für ganzzahliges Z nicht auftreten, denn aus
$\sqrt{Z} = 0{,}5 + [\sqrt{Z}\,]$ würde
$Z = 0{,}25 + [\sqrt{Z}\,] + [\sqrt{Z}\,]^2$ folgen. Diese Gleichung stellt aber einen Widerspruch dar, da alle Summanden in ihr außer 0,25 ganzzahlig sind.)
Wir ergänzen das Programm P2 durch den Befehl

```
35 IF Z+W>=0 THEN W=W+1
```

Er entspricht dem Test $Z + W \geqq (W + 1)^2$, nach dem bei positiver Antwort $\sqrt{Z}$ aufgerundet wird.
Nachdem wir gesehen haben, wie sich Programmierer gern um das Wurzelziehen drücken, verblüfft es uns nicht mehr, daß in dem Befehl 10 des Programms P1 nicht wirklich $R/\sqrt{Z}$ berechnet wird. Stattdessen wird $182R/256$ gebildet. Der Computer kann uns sehr schnell die Güte seiner Näherung angeben:
$1/\sqrt{2} \approx 0{,}70710678$ und
$182/256 = 0{,}71093750$.
Wenn man $1/\sqrt{2}$ durch einen Bruch annähern möchte, bieten sich solche mit kleinerem Nenner und Zähler an. Schon $99/140 \approx 0{,}70714286$ ist ein besserer Näherungswert. (Wie man solche Brüche konstruiert, können die Schüler der oberen Klassenstufen in dem Buch von I. M. Winogradow „Elemente der Zahlentheorie“, DVW Berlin 1955, im §I.4 über Kettenbrüche nachlesen.) Aber der Bruch $182/2^8$ hat den großen Vorteil, daß in einer Dualzahldarstellung keine echte Division durch 2^8 vorgenommen werden muß. Es genügt, das Komma einfach 8 Stellen nach links zu verrücken.
Verblüffen kann uns nur, warum nicht $1/\sqrt{2}$ durch $181/256 = 0{,}70703125$ besser angenähert wurde. Dadurch passiert es, daß der Punkt (70,70) auf dem Kreis mit Radius $R = 99$ gezeichnet wird, während er bei der Approximation $1/\sqrt{2} \approx 181/256$ wegen der prinzipiellen Abrundung
$[99 \cdot 181/256] = [69{,}996094] = 69$ verloren ginge.
Und wer noch ein paar Eigenheiten des CIRCLE-Befehls auf dem KC85/3 kennenlernen möchte, zeichne Kreise mit
a) $R > 255$ b) $181 < R \leqq 255$ und
c) $R < 181$, $Y + R > 255$ oder $Y - R < 0$.
Er stellt fest, daß a) der Radius kongruent Modul 256 auf eine Zahl im Intervall $[0; 255)$ verändert wird, b) durch den Test „$Z < 2 \wedge 15$“ statt gewisser Teile des Kreises Strecken gezeichnet werden und daß c) Kreisteile, die oben oder unten aus dem Bildschirm ragen würden, unten bzw. oben auf dem Bildschirm erscheinen. Letzteres bedeutet also, daß auch für die Y-Koordinate Kongruenzrechnung Modul 256 angewandt wird.
Die Eigenschaft b) ließe sich sofort beheben, wenn der Test „$Z < 2 \wedge 15$“ weggelassen oder durch den wirkungslosen Test „$Z < 2 \wedge 16$“ ersetzt wird. Denn wegen $R < 256 = 2^8$ ist stets $R^2 - X^2 < 2^{16}$.

2. Weiße Flecken im Kreis

Nachdem nun Andreas weiß, warum die Kreise auf dem KC85/3 so eckig sind, versteht er aber noch nicht, warum der eckige Kreis mit Radius 127 nicht durch die eckigen Kreise mit Radien $R = 0, 1, \ldots, 126$ vollständig ausgefüllt wird.
Da wir nun wissen, wie der Heimcomputer Kreise berechnet, betrachten wir im Bild 6 nur den markierten Achtelkreis. Wir wählen ein bestimmtes X, z. B. 10, und berechnen R so, daß $X = [182R/256]$ ist.

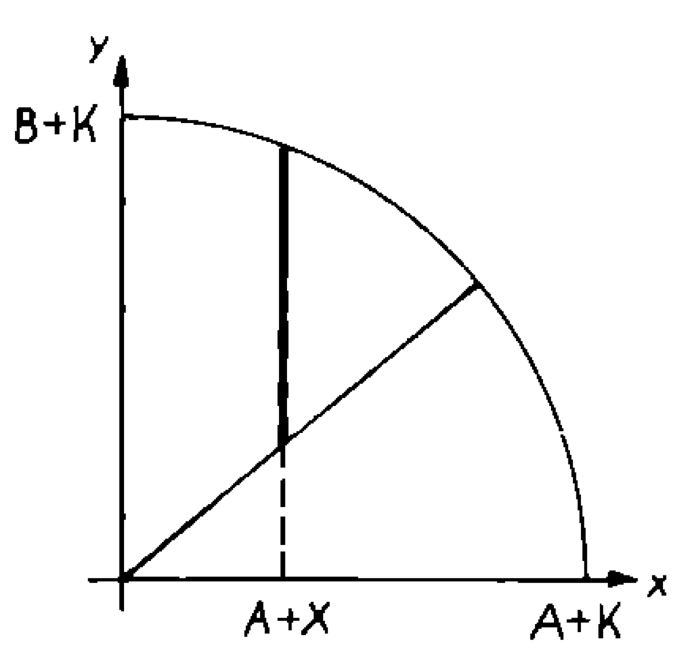


Bild 6

Wir erhalten also $R = 15$ in unserem Beispiel bzw. allgemein $R \approx \sqrt{2}\,X$.
Der durch die Formel $Y = [\sqrt{R^2 - X^2}\,]$ $(=11)$ gegebene Wert erfüllt also $Y \approx X$. Wir stellen für $X = 10$ erstaunt fest, daß der Punkt mit $X = Y = 10$ also weiß bleibt. Nun vergrößern wir bei festem X die R-Werte und erhalten für die zugehörigen Werte $Y = [\sqrt{R^2 - X^2}\,]$ die folgende Tabelle:
$X = 10$
R 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
26 27 ... 49 50 51 52 ...
Y 11 12 13 14 16 17 18 19 20 21 22
24 25 ... 47 48 50 51 ...
Im vorhergehenden Abschnitt haben wir uns ja schon überlegt, daß genau für $[\sqrt{2R - 1}\,] \geqq X$, d. h. für $R \geqq (X^2 + 1)/2$
$Y = R - 1$ gilt.
Also brauchten wir die Tabelle ab $R = 27$ gar nicht mehr zu berechnen, denn wir wissen, daß erst ab $(10^2 + 1)/2 = 50{,}5$ die Differenz $R - Y$ gleich 1 wird. Die Tabelle zeigt uns, daß neben dem Punkt $(A + 10, B + 10)$ auf der Geraden $x = A + 10$ noch die Punkte $(A + 10, B + 15)$, $(A + 10, B + 23)$ und $(A + 10, B + 49)$ weiß bleiben.
Wir können uns nun erklären, warum für kleine Werte von X, d. h. in der Umgebung der Geraden $x = A$, die Färbung vollständig erscheint: Für kleines X gilt
$Y = [\sqrt{R^2 - X^2}\,] = R - 1$ schon für relativ kleines R. Bei Vergrößerung von R um 1 wird Y um 1 vergrößert. Also sind alle Punkte $(A + X, B + Y)$ mit $Y = R - 1 \geqq (X^2 + 1)/2$ geschwärzt. Weiterhin taucht die Frage auf, wieviel Prozent der Rasterpunkte weiß bleiben, wenn der Kreis mit Radius K mit Kreisen vom Radius $R = 0, 1, 2, \ldots, K - 1$ ausgefüllt wird. Natürlich kann man mit dem Computer die einfache Aufgabe lösen, solche Tabellen wie die obige zu entwerfen und die Zahl der ganzzahligen Y-Werte mit
$X \leqq Y \leqq \sqrt{K^2 - X^2}$ zu bestimmen, die in ihnen nicht auftreten. Aber wozu den Computer so bemühen, wenn es nur um die Anzahl der Punkte geht? Da die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Quadratzahlen wachsen, liegt in dem Intervall
$(R^2 - X^2, (R + 1)^2 - X^2]$ mindestens eine Quadratzahl. Also gilt
$[\sqrt{R^2 - X^2}\,] < [\sqrt{(R + 1)^2 - X^2}\,]$ und es ist kein Zufall, daß in der obigen Tabelle nie 2 gleiche Y-Werte auftreten.
Die Zahl der geschwärzten Punkte $(A + X, B + Y)$ für festes X ist also gleich der Zahl der R-Werte in der zugehörigen Tabelle. Für den kleinsten R-Wert gilt $R \approx \sqrt{2}\,X$, für den größten $R = K$. Folglich werden für festes X rund $K - \sqrt{2}\,X$ Punkte geschwärzt. Die Anzahl aller schwarzen Punkte im Achtelkreis ist damit rund
$K + (K - \sqrt{2}) + (K - 2\sqrt{2}) + \ldots$
$+ (K - [K/\sqrt{2}\,]\sqrt{2})$.
Der größte X-Wert im Achtelkreis beträgt nämlich rund $K/\sqrt{2}$.
Wegen der Rundung auf ganze Zahlen ist die obige Summe bis auf eine Abweichung von maximal K die Anzahl der geschwärzten Punkte. Die Summe ist etwa die Zahl der Rasterpunkte in einem Dreieck mit Kathetenlängen $K/\sqrt{2}$ und K, d. h. sie ist ungefähr gleich der Dreiecksfläche $K^2/(2\sqrt{2}\,)$ (s. Bild 7).

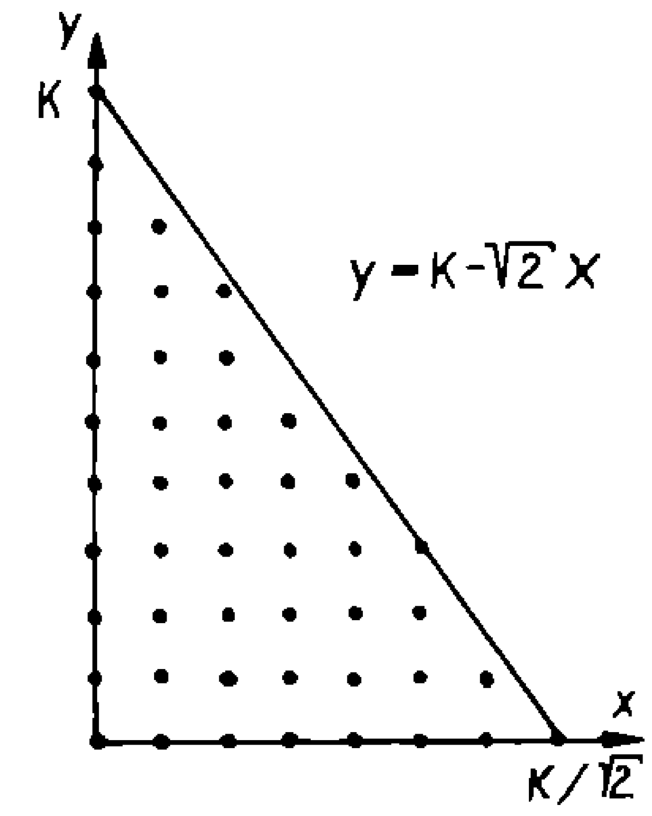


Bild 7
Zur Berechnung von $\sum_{X=0}^{K/\sqrt{2}} K - \sqrt{2}\,X$

Die Zahl aller Rasterpunkte im Achtelkreis mit Radius K ist ungefähr dessen Fläche, d. h. $K^2\pi/8$.
Deshalb ist die Anzahl der weißgebliebenen Punkte rund $K^2(\pi/8 - 1/(2\sqrt{2}))$, d. h. ihr Anteil ist wegen

$$(\pi/8 - 1/(2\sqrt{2}))/(\pi/8) = 1 - \sqrt{8}/\pi \approx 0{,}09968369$$

knapp 10 %. Der Fehler bei der Berechnung der Punktanzahl von der Größenordnung K fällt für große K bei Summen der Größenordnung K^2 nicht mehr ins Gewicht. Würden wir einen Computer mit unendlich großem Bildschirm haben, so würde sich dort der Wert $1 - \sqrt{8}/\pi$ als Grenzwert des Anteils der nichtgeschwärzten Bildpunkte für gegen Unendlich strebendes K ergeben. Wenn wir in dem vorgestellten Programm für die Kreiskonstruktion nur die Rundungsregel für Y abändern, ändern sich die Punkte, die bei der Konstruktion aller konzentrischen Kreise weiß bleiben. Aber die zuletzt angestellten Überlegungen für ihren Anteil treffen weiterhin zu, so daß für große K wiederum knapp 10 % nicht geschwärzt werden.

3. Ein anderes Verfahren für die Kreiskonstruktion

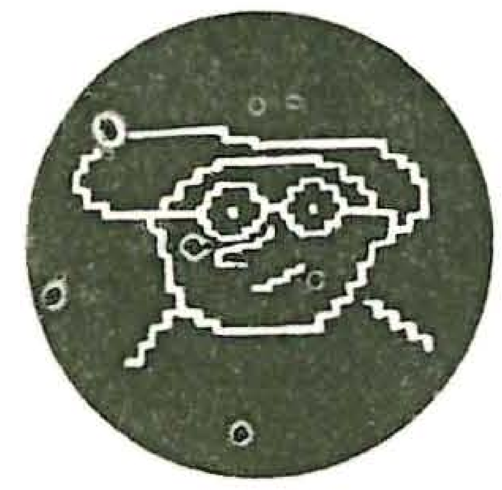
Zeichnet man mit dem vorgestellten BASIC-Programm zum Wurzelziehen einen Kreis mit dem Radius R = 41, so benötigt der KC85/3 etwa 38 Sekunden. Verantwortlich ist vor allem das zeitraubende Verfahren zum Wurzelziehen, das in einem Programm in Maschinensprache viel schneller abgearbeitet wird. Wir wollen nun eine Methode vorstellen, mit der der Computer Kreise zeichnet, ohne eine Wurzel ziehen zu müssen. Für einen Kreis mit Radius 41 benötigt der KC85 in einem BASIC-Programm nur noch 4 Sekunden.
Das Verfahren wurde im Heft 12/1985 der Zeitschrift mc auf Seite 84 vorgestellt und liefert auch „eckige“ Kreise. Wir stellen es gleich abgeändert vor, damit die Kreise runder aussehen:
Programm P3

```
1Ø Y=R: X=Ø: W=R*R+R
2Ø–5Ø wie im Programm P1
6Ø IF Y<=X THEN STOP ELSE
   X=X+1
7Ø IF X*X+Y*Y>W THEN Y=Y-1:
   GOTO 2Ø
```

Die Idee des Programms besteht darin, daß man sich innerhalb des markierten Achtelkreises von Bild 3 von Punkt zu Punkt weitertastet. Ist ein Punkt der Kreislinie gesetzt worden, geht man zum rechten Nachbarpunkt. Ist dieser mehr als 0,5 von der idealen Kreislinie $X^2 + Y^2 = R^2$ entfernt, geht man zum darunterliegenden Punkt. Ansonsten wird dieser Punkt geschwärzt. So einfach geht es!
In Wirklichkeit geht es sogar noch einfacher, nämlich ohne Multiplikation bei der Berechnung von X^2 und Y^2: Da in der Maschinensprache Additionen und Subtraktionen viel schneller als Multiplikationen ablaufen, empfiehlt es sich, nur einmal R^2 zu berechnen und damit $Y^2 = R^2$ und $X^2 = 0$ für den ersten Schritt. Die Werte

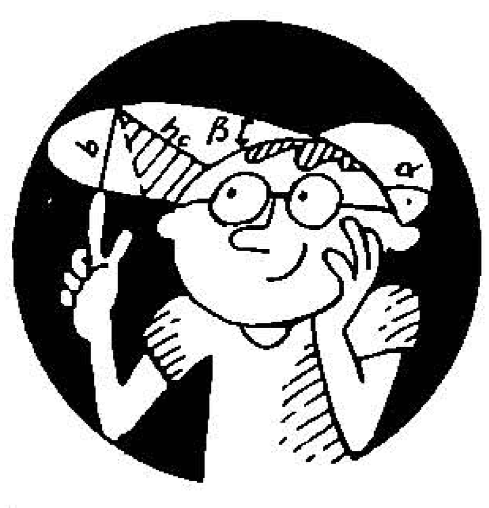
$(Y - 1)^2 = Y^2 - Y - Y + 1$ bzw.
$(X + 1)^2 = X^2 + X + X + 1$
lassen sich aber schnell nur mit Addition bzw. Subtraktion berechnen, wenn Y^2 bzw. X^2 bekannt sind.
Die ursprüngliche Version in der Literatur hatte im Befehl 1Ø W = R*R stehen. Das hatte zur Folge, daß nie Punkte außerhalb der idealen Kreislinie gezeichnet werden und entspricht dem prinzipiellen Abrunden in der Vorschrift $Y = [\sqrt{R^2 - X^2}]$.
Deshalb ergäben sich die gleichen nichtgeschwärzten Punkte beim Zeichnen konzentrischer Kreise wie beim CIRCLE-Befehl des KC85/3.
Wir hoffen, daß ihr an dem von Andreas aufgeworfenen Problem gesehen habt, daß es sehr viele Möglichkeiten gibt, um ein Computerprogramm zu schreiben. Aber um ein elegantes Programm zu schreiben, bedarf es Erfahrung und mathematischer Kenntnisse. Wir wünschen euch viel Spaß am Computer!

H.-J. Herrler



Lösungsvarianten einer Wettbewerbsaufgabe

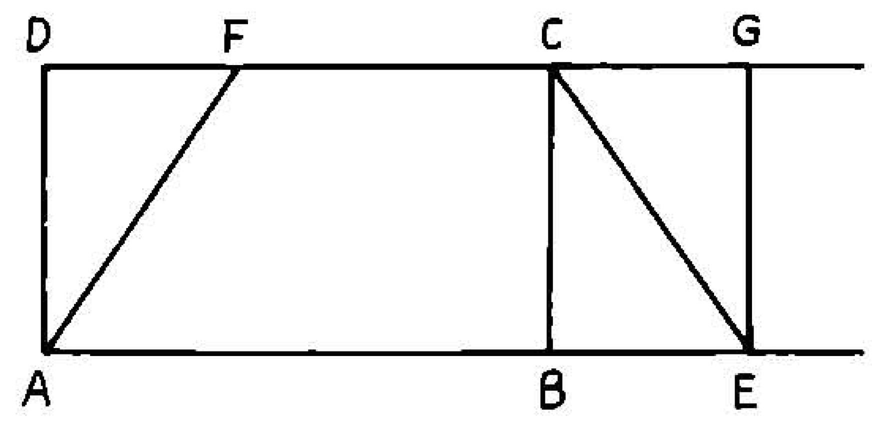
vorgestellt von einem Frühstarter



Ich heiße Roland Voigt und bin 9 Jahre alt. Ich gehe in die 4. Klasse der G.-Dimitroff-Oberschule Böhlen. Mathematik gehört zu meinen Lieblingsfächern. Bei uns zu Hause wird sehr viel geknobelt. Von meinen Geschwistern (9. Klasse und 1. Studienjahr Mathematik) habe ich mir schon viel abgeguckt.
Am alpha-Wettbewerb nehme ich schon seit der 1. Klasse teil.
In meiner Freizeit spiele ich außerdem sehr gern und häufig Schach.

Mit der Aufgabe Ma 7 ■ 3026 (Heft 5/89) habe ich mich einmal ausführlicher auseinandergesetzt.

Zur Erinnerung:
Gegeben sei ein Rechteck *ABCD*. Zeichne ein beliebiges gleichschenkliges Trapez *AECF* so hinzu, daß $AE \parallel CF$ gilt, *F* innerer Punkt von *CD* ist und *E* auf der über *B* hinaus verlängerten Strecke *AB* liegt. Beweise, daß Rechteck und Trapez flächengleich sind.



1. Ich betrachte die Dreiecke *AFD* und *BEC*.
Es ist $\overline{BC} = \overline{AD}$ (gegenüberliegende Seiten des Rechtecks),
$\overline{AF} = \overline{CE}$ (da das Trapez gleichschenklig ist) und
$\sphericalangle \overline{ADF} = 90° = \sphericalangle \overline{CBE}$.
Also gilt nach ssw: Dreiecke *AFD* und *BEC* sind kongruent, also haben sie auch die gleiche Fläche.
$A_{ABCD} = A_{ABCF} + A_{AFD}$
$= A_{ABCF} + A_{BEC} = A_{AECF}$ q. e. d.

2. Ich betrachte wieder die Dreiecke *AFD* und *BEC*.
Es ist wie bei 1. $\overline{BC} = \overline{AD}$,
$\sphericalangle \overline{ADF} = \sphericalangle \overline{CBE}$,
$\sphericalangle \overline{AFD} = \sphericalangle \overline{BAF}$ (Wechselwinkel) und
$\sphericalangle \overline{BAF} = \sphericalangle \overline{BEC}$ (gleichschenkliges Trapez).
Also gilt
$\sphericalangle \overline{AFD} = \sphericalangle \overline{BEC}$, somit auch
$\sphericalangle \overline{DAF} = \sphericalangle \overline{ECB}$.
Es gilt nach wsw: Dreiecke *AFD* und *BEC* sind kongruent. Weiter wie bei 1.

3. Ich betrachte wieder die Dreiecke *AFD* und *BEC*.
Es gilt $\overline{BC} = \overline{AD}$,
$\overline{AF} = \overline{CE}$,
$\sphericalangle \overline{DAF} = 90° - \sphericalangle \overline{BAF}$,
$\sphericalangle \overline{BAF} = \sphericalangle \overline{BEC}$ (gleichschenklig) und
$\sphericalangle \overline{BEC} = 90° - \sphericalangle \overline{BCE}$.
Also gilt: $\sphericalangle DAF = \sphericalangle BCE$.
Es gilt nach sws: Dreieck *AFD* und Dreieck *BEC* sind kongruent. Weiter wie bei 1.

4. Es gilt $\overline{BE} = \overline{CG} = \overline{DF}$ (gleichschenkliges Trapez),
$\overline{AE} + \overline{FC} = \overline{AB} + \overline{BE} + \overline{FC} = \overline{AB} + \overline{CG} + \overline{FC}$
$= \overline{AB} + \overline{DF} + \overline{FC} = \overline{AB} + \overline{DC}$
$= 2 \cdot \overline{AB}$,
$A_{AECF} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AE} + \overline{FC}) \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$
$= A_{ABCD}$. q. e. d.

R. Voigt

Für die Zusendung nicht mehr benötigter „alphas“ bedanken wir uns herzlich bei unseren Lesern:
Juliane Scholz, Heiligenstadt;
T. Eidner, Zeulenroda;
Hannes Püschel, Eiche;
K.-H. Milde, Dresden;
POS Gülow 2041
und Ingolf Thurm, Dresden.

Alphons

Ein Schachklub stellt sich vor

Ob Dienstag, ob Freitag oder Wochenende – im Schülerfreizeitzentrum Pankow ticken die Uhren. Doch handelt es sich hierbei nicht um Wecker oder Kuckucksuhren – die Schachspieler sind am Werke. In den Räumlichkeiten des Freizeithauses Pestalozzistraße 8a wird hart gearbeitet. Seit vielen Jahren trainiert und kämpft hier die Sektion Schach der ehemaligen BSG Stahl Niederschönhausen Berlin – beim Gang durch die Eingangstür fühlen sich Jung und Alt bereits heimisch.

Diese Sektion – im männlichen Nachwuchsbereich ein erfolgreicher Schachklub – nennt rund 100 Mitglieder ihr eigen. Mehr als die Hälfte davon besuchen noch die Schule – die Förderung von Nachwuchstalenten im Alter von 7 Jahren an wird hier groß geschrieben. In vier Arbeitsgemeinschaften können alle, die Lust und Zeit dafür mitbringen, die Regeln des königlichen Spiels erlernen, die Eröffnung und das Mattsetzen üben und so die Grundlagen für eine intensive Beschäftigung mit diesem „Probierstein des Gehirns“ legen. Für die Besten unter ihnen besteht die Möglichkeit, in eine der vier Leistungsgruppen aufgenommen zu werden, die in den Altersklassen 9/10, 11/12, 13/14 und 15/18 am Wettkampfbetrieb des Deutschen Schachverbandes teilnehmen.

Die sechs „Bretter“, aus denen jede Mannschaft besteht, sind heiß umkämpft. Wer möchte nicht gern ganz vorne sitzen, von sich sagen können, er sei der Beste in seinem Team?! Manch anderer jedoch will lieber alle Partien gewinnen und ist mit einem hinteren Platz zufrieden; dort spielen die leichteren Gegner. Den größten Erfolg aber haben natürlich diejenigen, die sich von Verlusten nicht abschrecken lassen und an die Spitze drängen.

Leicht ist die Arbeit oft weder für den Übungsleiter noch für seine Schützlinge; zwei mal zwei Stunden Training pro Woche sind kaum nebenbei zu erledigen, dazu gibt es regelmäßig Hausaufgaben, die auch bei den Kleinen schon eine Stunde zusätzlich beanspruchen können. Die besten Jugendspieler hingegen setzen sich zu Hause bereits freiwillig oft ganze Nachmittage ans Brett, um sich notwendiges Wissen anzueignen. Nicht selten machen sie ihren Trainern dann ernsthaft Konkurrenz.

Doch zur Arbeit gehört auch das Vergnügen. Gemeinsame Freizeitgestaltung, Ferienfahrten ins Ferienlager und viele andere Aktivitäten belohnen die tägliche Mühe. Hinzu kommen die Erfolge. Eine Mannschaft, die sich bis ins Finale der besten Sechs zur DDR-Meisterschaft vorkämpfen konnte, weiß, wofür sie gearbeitet hat. Eine Fahrt zu solchem Wettkampf wird zum Erlebnis, selbst wenn man ohne Medaillen zurückkehren sollte. Und die Chronik des Klubs kann auf Erfolge verweisen. Mit Claudia und Ronny Gaerths z. B. hat er Spieler in seinen Reihen, die schon einmal ganz oben auf dem Siegerpodest gestanden haben. Auch zahlreiche DDR-Vizemeistertitel und andere vordere Plätze lassen aufhorchen. Die heutige Jugendmannschaft konnte 1989 nicht nur DDR-Meister und Pokalsieger in der Altersklasse 13/14 werden, sondern zudem auch noch den DDR-Pokal 15/16 knapp aber sicher nach Hause tragen, ein besonders schöner Erfolg!

Doch der Kampf geht weiter! Neue Ziele werden in Angriff genommen, neue Vorhaben erörtert. Nach neuen Wegen muß vor allem bei der Finanzierung gesucht werden, denn Gelder werden knapp, und kein Kind kann alle Ausgaben selber tragen. In diesem Sinne hoffen wir, daß die gute Zusammenarbeit mit unserem Trägerbetrieb ZIM Berlin auch in Zukunft fortgesetzt werden kann und nicht, wie in vielen Betrieben vorgekommen, alle Mittel für die Jüngsten ausbleiben.

Doch auch viel Positives kann berichtet werden. Erste Vergleichskämpfe gegen Westberliner Mannschaften waren für beide Seiten ein langersehntes Erlebnis. In vielen Dingen ist der Schachverband der BRD anders aufgebaut als der Unsrige – wertvolle Erfahrungen lassen sich austauschen. Auch das Schulschach ist – z. B. in Westberlin – breiter entwickelt (alpha wird in einer der nächsten Nummern darüber berichten). In der Zwischenzeit werden bereits gemeinsame Trainingslager, Turniere und Freundschaftskämpfe absolviert, von denen jeder mit vielen neuen Eindrücken nach Hause geht.

In Zusammenarbeit mit der Schulschachkommission des DSV und dem Stadtbezirksschulrat von Berlin-Pankow möchten wir das Schachspiel vielen Schülern näherbringen. Erste Schritte auf diesem Wege sollen im September getan werden. Dann wird auch an Berliner Schulen der positive Einfluß des Schachspiels auf die mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildung überprüft werden können – nach einer kleinen Umfrage von mir wären die Kinder begeistert.

Bereits jetzt zeigt sich diese Kopplung Mathematik – Schach an den Arbeitsgemeinschaften des Freizeithauses. Nicht wenige, die dienstags und donnerstags zum Schachtraining gehen, sieht man am Montag oder Freitag im Mathematikzirkel. Ganz im Gegenteil scheint der relativ hohe Prozentsatz einer solchen Doppelbelegung symptomatisch. In beiden AG's wird nicht nur für das jeweilige Fach trainiert, sondern jeder Schüler nimmt auch für das andere etwas mit.

Auch die Mathematik-Arbeitsgemeinschaften haben bereits viele Talente hervorgebracht, die dann zur weiteren Betreuung in die Mathematische Schülergesellschaft delegiert werden. „Das Schönste ist“, so verriet mir die Leiterin des Hauses, Renate Neubert, „wenn die Großen dann trotzdem noch unserem Zirkel treu bleiben und immer wieder kommen.“

Dem ist nicht viel hinzuzufügen. Im rasanten Tempo der heutigen Veränderungen dürfen wir die Weiterentwicklung gerade der Pädagogik nicht aus den Augen verlieren. Neue Wege müssen bestritten werden, Gutes, Erprobtes darf nicht verlorengehen. Gerade das Fortschreiten von Wissenschaft und Technik läßt es als notwendig erscheinen, auf diesem Gebiet frühzeitig mit der Ausbildung zu beginnen. Die Aktivitäten in Pankow sind ein nachahmenswertes Beispiel dafür.

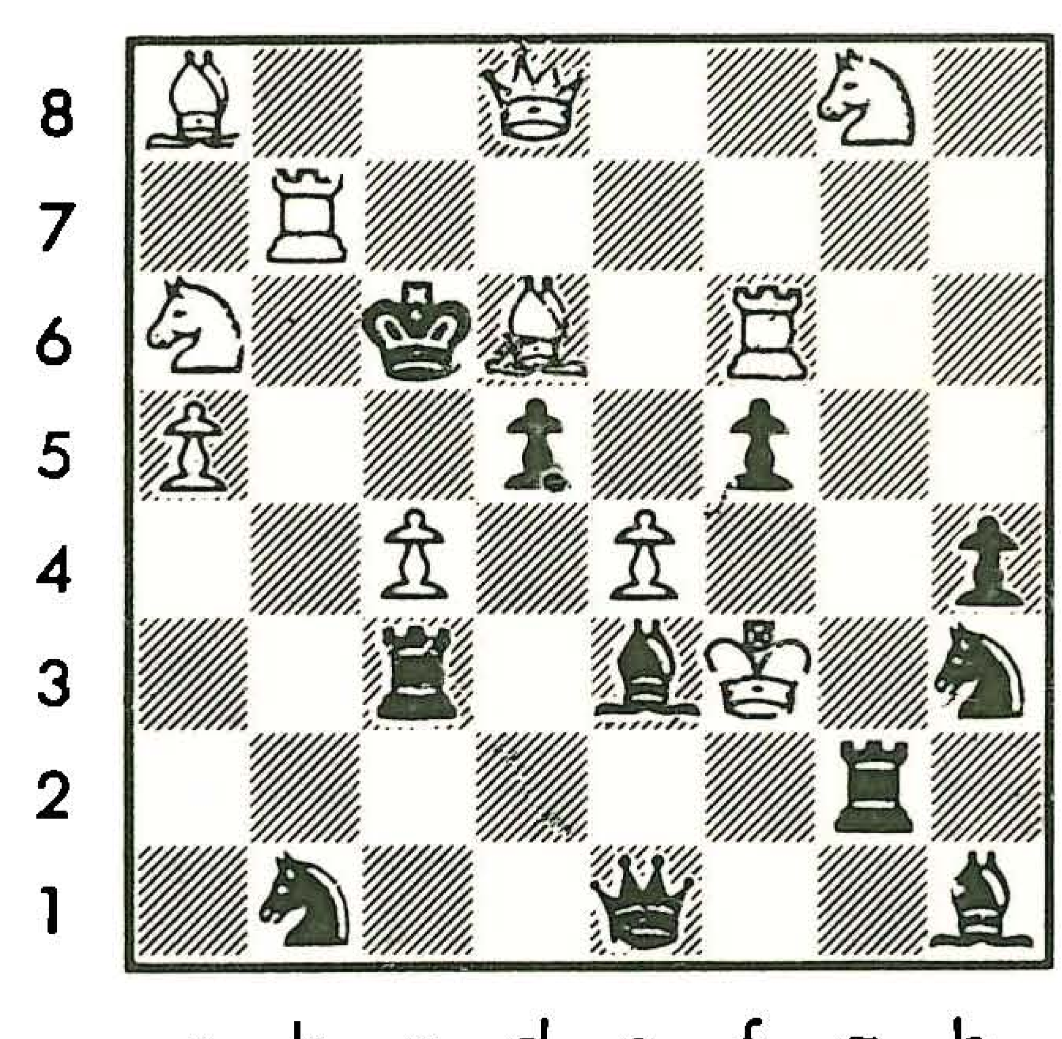
Wir aber möchten uns an dieser Stelle bei ZIM Berlin und unserem Schülerfreizeitzentrum für die vielfältige Unterstützung bedanken und unserer Hoffnung Ausdruck geben, daß sie in dieser neuen Zeit nicht anderen, vielleicht als wichtiger eingestuften Dingen zum Opfer fällt!

Ein ganz herzliches Dankeschön geht aber auch an alle Eltern, die oft weder Zeit noch Mühe scheuen, um ihren Söhnen und Töchtern diese interessante und lehrreiche Freizeitbeschäftigung zu ermöglichen.

M. Spindler

Trotz Auflösung der BSG beschlossen wir, diesen Beitrag zu veröffentlichen. Wir sind der Meinung, daß eine so gute Sache (wenn auch unter anderem Namen) erhaltenswert ist.

Eine Fülle von Mattzügen



Das oberste Ziel im Schachspiel ist bekanntlich der Gewinn einer Partie durch Mattsetzen des gegnerischen Königs. Im abgebildeten Diagramm kann eine maximierte Anzahl von Mattzügen sofort ausgeführt werden.

Wie viele verschiedene Mattzüge (Lösungsbeispiele: Tb6 oder Df2) sind in dieser Stellung für Weiß und Schwarz zu entdekken?

H. Rüdiger

Das Rechnen mit dem römischen Abakus

Der Abakus war das wichtigste Rechenhilfsmittel in der Antike. Die schriftlichen Zahlendarstellungen, die damals üblich waren, erlaubten keine günstigen Berechnungsalgorithmen. So verwendeten die Griechen ihr Alphabet, um Zahlen zu bezeichnen (Bild 1).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Einer	Α	Β	Γ	Δ	Ε	F	Ζ	Η	Θ
	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
Zehner	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Q
	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	q
Hunderter	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	ϡ
	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
Tausender	͵α	͵β	͵γ	͵δ	͵ε	͵ς	͵ζ	͵η	͵θ

Bild 1
Die griechische Buchstabenschrift
(nach Literaturhinweis [2])

Diese Zeichen stellen gewissermaßen die Ziffern dar und man muß für alle die Einmaleins-Regeln auswendig kennen. Die Multiplikation

$\varkappa\gamma \cdot \nu\beta$ (23 × 52) z. B. erfordert folgende Teiloperationen:

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa \cdot \nu = ,\alpha \\ \left.\begin{array}{l} \varkappa \cdot \beta = \mu \\ \gamma \cdot \nu = \varrho\nu \end{array}\right\} \mu + \varrho\nu = \varrho q \\ \gamma \cdot \beta = s \end{array}\right\} ,\alpha + \varrho q + s = ,\alpha\varrho q s$$

Ähnlich ungünstig, obwohl viel weniger Grundzeichen benutzend, sind die römischen Zahlzeichen. Die gleiche Multiplikationsaufgabe besteht dann aus folgenden Schritten:

$$\begin{aligned} \mathrm{XXIII} \times \mathrm{LII} \rightarrow \mathrm{XX} \times \mathrm{L} &= \mathrm{M}, \\ \mathrm{III} \times \mathrm{L} &= \mathrm{CL}, \\ \mathrm{XX} \times \mathrm{II} &= \mathrm{XL}, \\ \mathrm{III} \times \mathrm{II} &= \mathrm{VI}, \end{aligned}$$

$$\mathrm{M} + \mathrm{CL} + \mathrm{XL} + \mathrm{VI} = \mathrm{MCXCVI}.$$

Der Abakus ist eine besondere Art der Zahlendarstellung, und zwar eine gegenständliche. Seine ursprünglichste Form ist die Salaminische Rechentafel. Von den unterschiedlichsten Abakustypen sind der römische Handabakus, die russische Stschoty und der japanische Soroban die bekanntesten. Die Nachbildung eines römischen Abakus ist im Bild 2 gezeigt. Diese Art der gegenständlichen Zahlendarstellung wurde in Japan für den Soroban übernommen, der bis in die fünfziger Jahre unseres Jahrhunderts hinein weit verbreitet war. Abakusrechnen war damals Pflichtfach in der Schulausbildung. In Japan gab es Meisterschaften im Abakusrechnen. Abakusrechner konnten ihre Geschicklichkeit in Tests und Wettbewerben nachweisen und Titel erwerben.

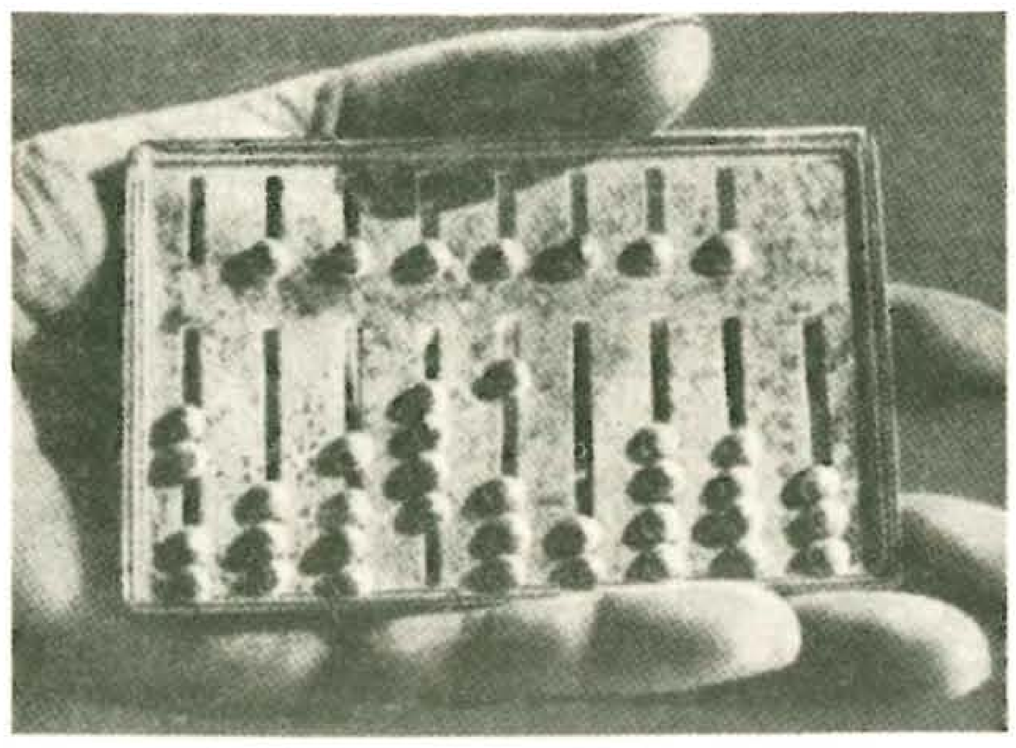
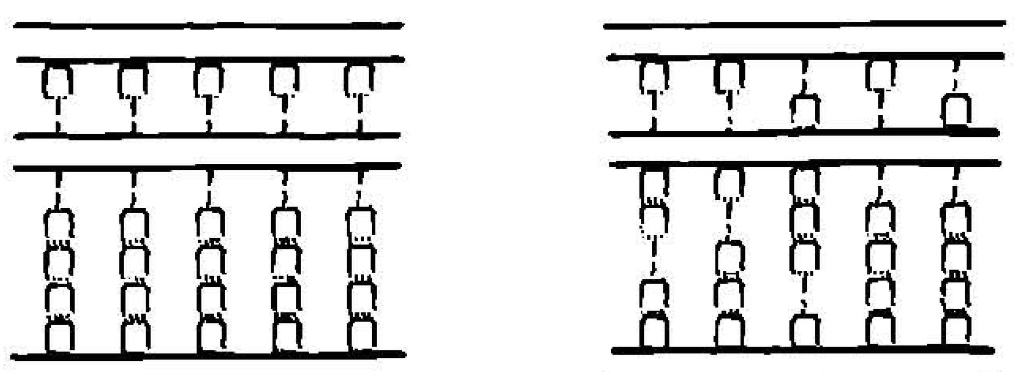


Bild 2
Nachbildung eines römischen Abakus

Das Prinzip der Zahlendarstellung auf dem römischen (bzw. japanischen) Abakus ist im Bild 3 dargestellt.



2 1 8 0 5

Bild 3
Der römische Abakus
a) Ausgangsstellung
b) Darstellung der Zahl 21 805

Der Abakus besteht aus Stäben (bzw. Nuten), die bewegliche Kugeln führen. Die Stäbe sind durch eine Querleiste in einen oberen und einen unteren Teil getrennt. Im oberen Teil befindet sich auf jedem Stab eine einzelne Kugel, im unteren Teil sind es vier. Der Fortschritt der Abakusdarstellung einer Zahl gegenüber den schriftlichen Zeichen besteht in der Verwendung eines dezimalen Positionssystems: in der rechten Spalte wird die Einerziffer angegeben, dann nach links fortschreitend die Zehner, Hunderter usw. In jeder Spalte wird die gewünschte Ziffer durch das Heranführen entsprechender Kugeln an die Querleiste eingestellt, wobei die obere Kugel für eine fünf, die unteren Kugeln für die Ziffern eins bis vier stehen (vgl. die Darstellung von 21 805 in Bild 3b).

Für den konstruktiven Aufbau eines zusammengesetzten Zeichens bei arithmetischen Operationen mit Hilfe des Abakus gibt es jeweils einen Algorithmus, der genau die gleichen Elementaroperationen besitzt, wie wir sie beim schriftlichen Rechnen benutzen:

1. Additions- bzw. Subtraktions-Operationen für die Ziffern,
2. Multiplikations- bzw. Divisions-Operationen für die Ziffern (kleines Einmaleins),
3. Übertragsbildung und Übertragsverrechnung auf der jeweils linken Nachbarposition.

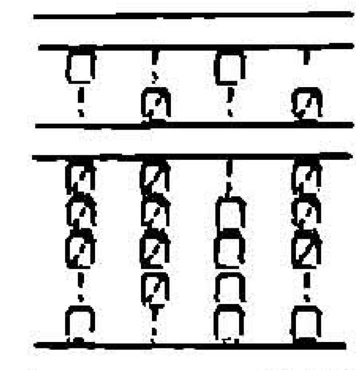
Durch Anwenden dieser Elementaroperationen lassen sich beliebige arithmetische Operationen mit Zahlen (die zusammengesetzte Zahlzeichen besitzen) exakt ausführen.

Zur Verdeutlichung des Rechnens mit dem römischen (bzw. japanischen) Abakus sollen anhand von Beispielen die Addition, Multiplikation und Division erläutert werden.

Die Addition auf dem Abakus

Es sind die beiden Zahlen 3 908 und 279 zu addieren.

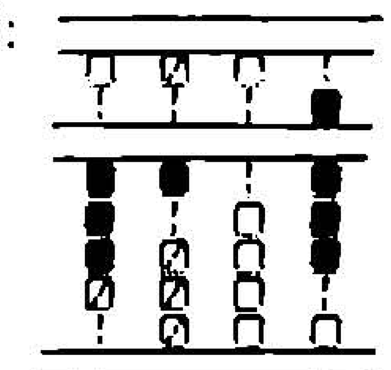
Zunächst wird der erste Summand 3 908 auf dem Abakus eingestellt:



Die Reihenfolge, in der die Ziffern des zweiten Summanden 279 positionsgerecht mit dem ersten Summanden verrechnet werden, ist beliebig. Man kann also z. B. die Ziffern des zweiten Summanden auch so verrechnen, wie sie der sprachlichen Darstellung entsprechen: zweihundert – neun – undsiebzig.

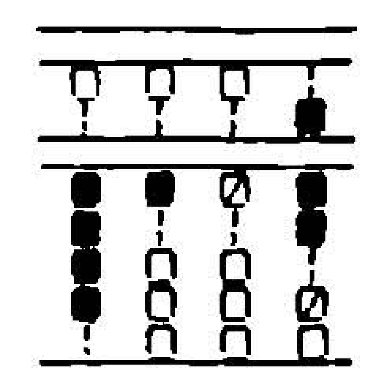
Zur Ziffer 9 auf der Hunderterposition wird 2 addiert. Da sich auf der betrachteten Position 2 nicht addieren läßt, wird auf der links benachbarten 1 hinzugefügt (das entspricht +1000) und von der 9 wird 8 abgezogen (das entspricht −800). Auf diese Weise erhält man die Ziffer 1 und den Übertrag 1.[1])

+200:



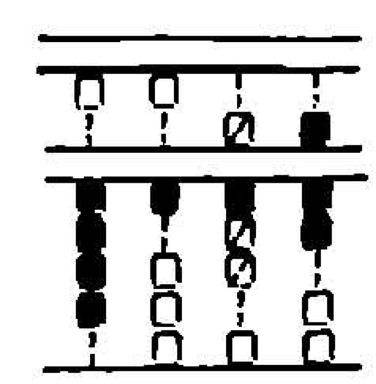
Da die Einerposition größer als Null wird, ist so zu verfahren: Auf der links benachbarten Position wird 1 hinzugefügt (das entspricht +10) und auf der betrachteten Einerposition wird 1 subtrahiert.

+9:



Auf der Zehnerposition wird 7 hinzugefügt, d. h. die obere Kugel und zwei untere werden an die Querleiste geschoben. Damit ist die Addition beendet. Das Ergebnis lautet 4 187.

+70:



Man erkennt an dieser Vorgehensweise, daß die einzelnen Schritte denjenigen des heute üblichen schriftlichen Addierens äquivalent sind. Von Vorteil ist, daß man Summanden, die mündlich genannt werden, sofort, noch während des Sprechens

[1]) Bemerkung zur Darstellungsweise: Die im betrachteten Schritt neu geschobenen Kugeln werden durch Ø angegeben, die gegenüber dem vorherigen Schritt unverändert gebliebenen Kugeln (die sich an der Querleiste befinden) durch ▮.

verrechnen kann. Beim schriftlichen Verfahren muß der gesamte zweite Summand erst ausgesprochen und aufgeschrieben sein, ehe die Rechnung beginnen kann. Außerdem muß die Addition rechts, bei der Einerstelle beginnend nach links in strenger Reihenfolge ausgeführt werden, damit einmal notierte Ziffern der Summe nicht mehr geändert werden müssen.

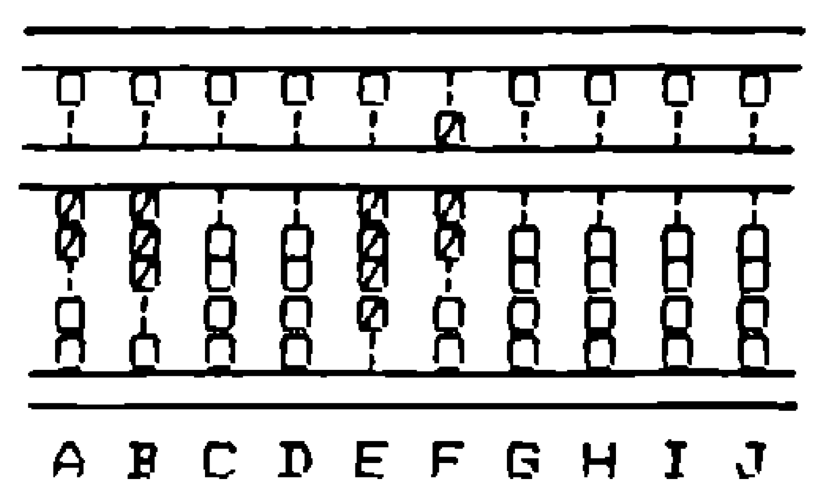
Die Multiplikation auf dem Abakus

Es sind die beiden Zahlen 23 und 47 miteinander zu multiplizieren.
Zur Erläuterung sollen zunächst die Schritte der Abakusmultiplikation denen des schriftlichen Multiplizierens gegenübergestellt werden:

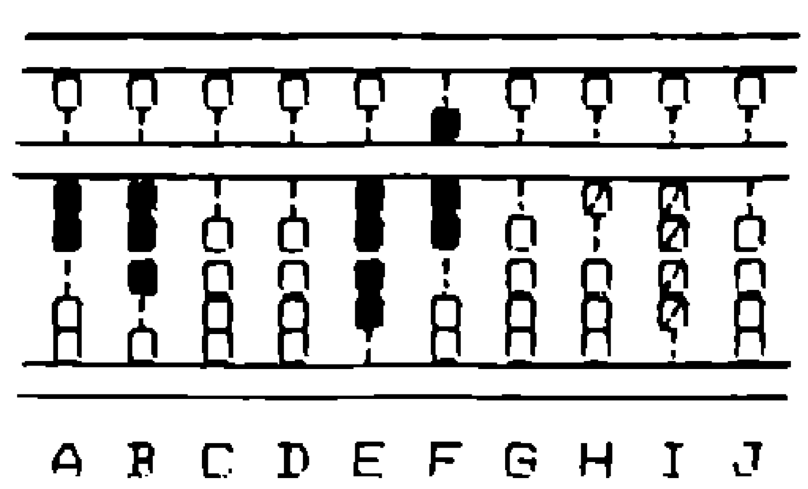
23×47
14 $/2 \times 7$
21 $/3 \times 7$
8 $/2 \times 4$
12 $/3 \times 4$
1081
Abakusmultiplikation

23×47 bzw. 23×47
21 → 161
14 → 98
12
8
1081
schriftliche Multiplikation

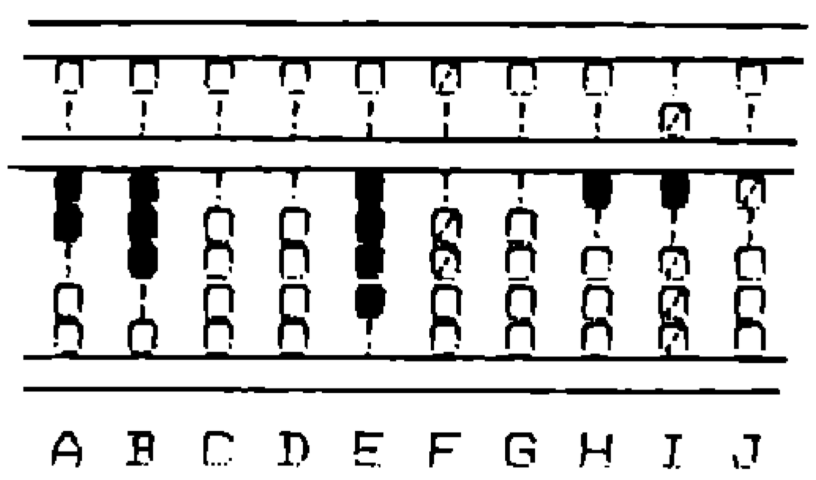
Man erkennt, daß sich beide Verfahren nur in der Reihenfolge der zu bildenden Teilprodukte unterscheiden.
1. Darstellung der beiden Faktoren auf dem Abakus:



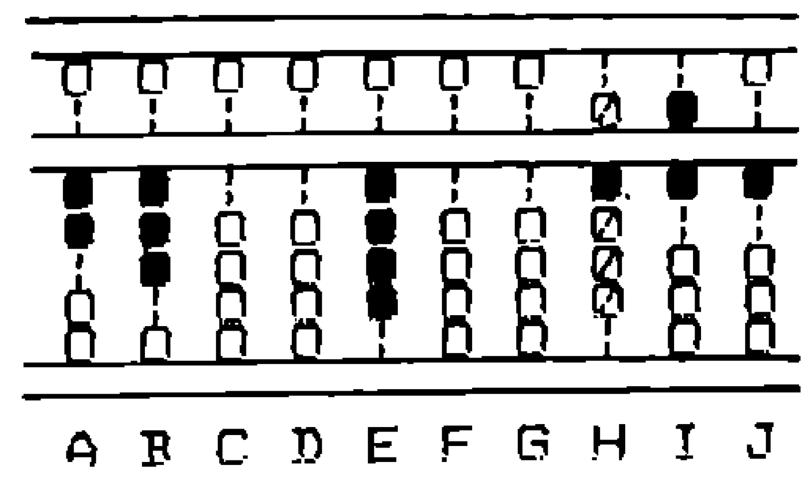
2. Begonnen wird mit der Einerstelle des rechten Faktors, d. h. mit 7. Die 7 wird zunächst mit der höchsten Position des linken Faktors, d. h. mit 2, multipliziert und das Ergebnis in der Position I eingetragen.



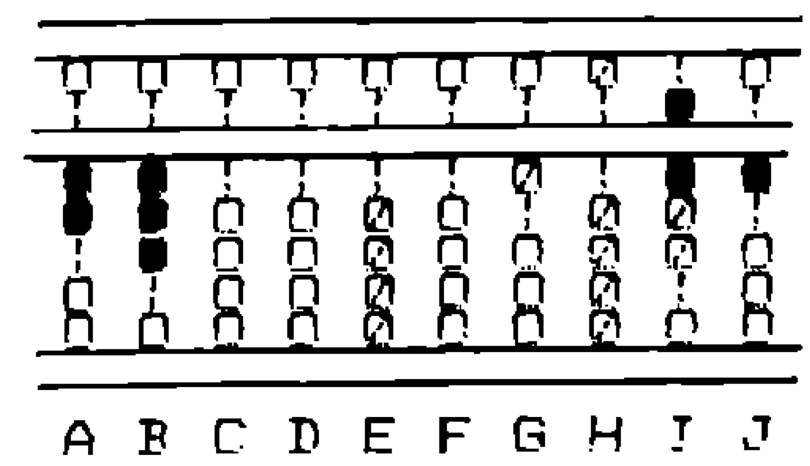
3. Multiplikation von 7 mit der Einerstelle des linken Faktors und Eintragen des Ergebnisses in Position J. Die Einerstelle des rechten Faktors kann damit gelöscht werden.



4. Multiplikation der Zehnerposition des rechten Faktors mit der höchsten Position des linken Faktors. Das Ergebnis wird in die Position H eingetragen.



5. Multiplikation der Zehnerposition des rechten Faktors mit der Einerposition des linken und Eintragen des Ergebnisses in die Position I. Die Zehnerposition 4 kann damit gelöscht werden und die Multiplikation ist beendet. Das Ergebnis lautet 1081.

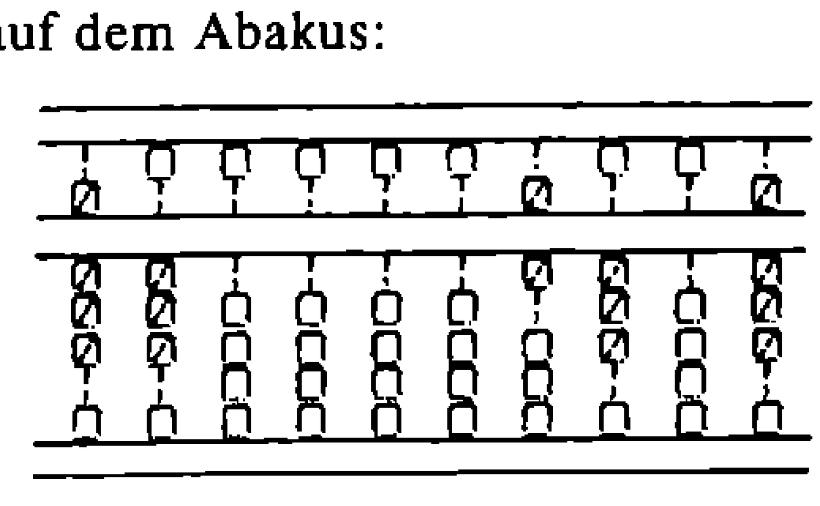


Division mit dem Abakus

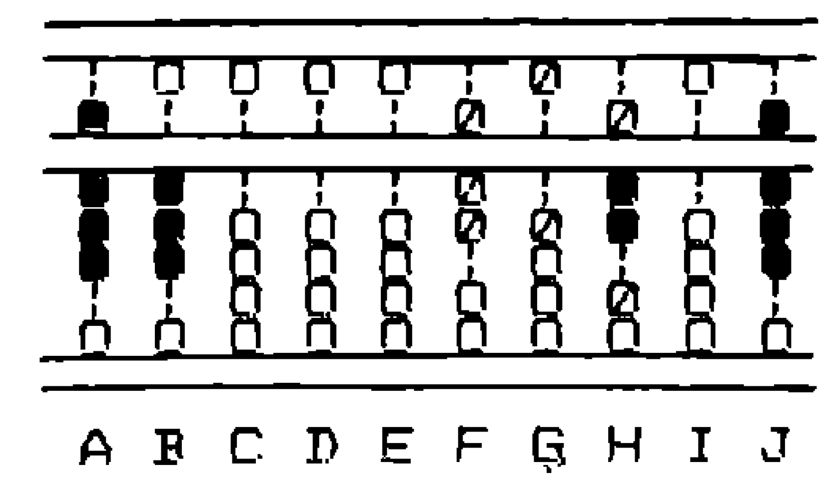
Die Division mit dem Abakus kann prinzipiell genauso erfolgen wie man beim schriftlichen Rechnen verfährt. Die Aufgabe $6308:83$ wird so gelöst, daß man den gesamten Divisor betrachtet:

$6308:83 = 76$
581
498
498
0

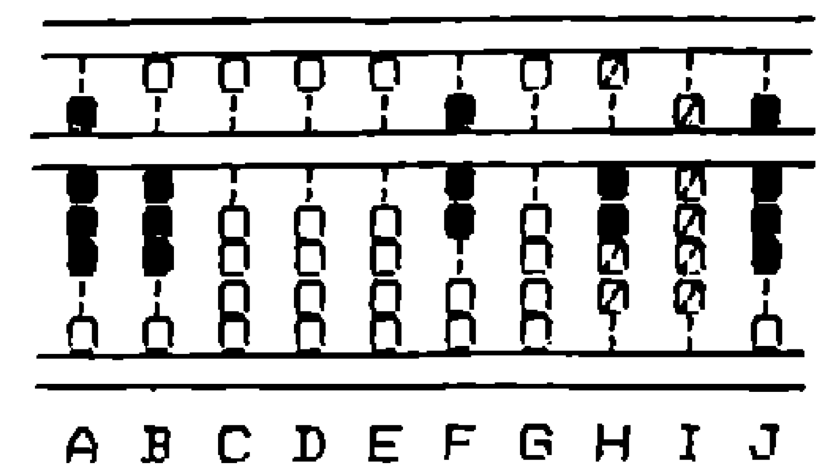
Die erste Teiloperation z. B. lautet $630:83$. Bei diesem Algorithmus muß man die Vielfachen des Divisors im Kopf bilden, um die Teiloperationen ausführen zu können. Die Kürze des Algorithmus wird hier durch den Mehraufwand beim Kopfrechnen (Beherrschen des „großen" Einmaleins) erkauft. Es gibt aber auch einen Divisionsalgorithmus, bei dem nur die Kenntnis des kleinen Einmaleins zur Ausführung der Teiloperationen erforderlich ist. Insbesondere dieser letztgenannte Algorithmus wird beim Abakusrechnen benutzt. Er kann aber ebenso auch dem schriftlichen Rechnen zugrunde gelegt werden.
Die Division $6308:83$ auf dem Abakus geschieht folgendermaßen.
1. Darstellung des Divisors und Dividenden auf dem Abakus:



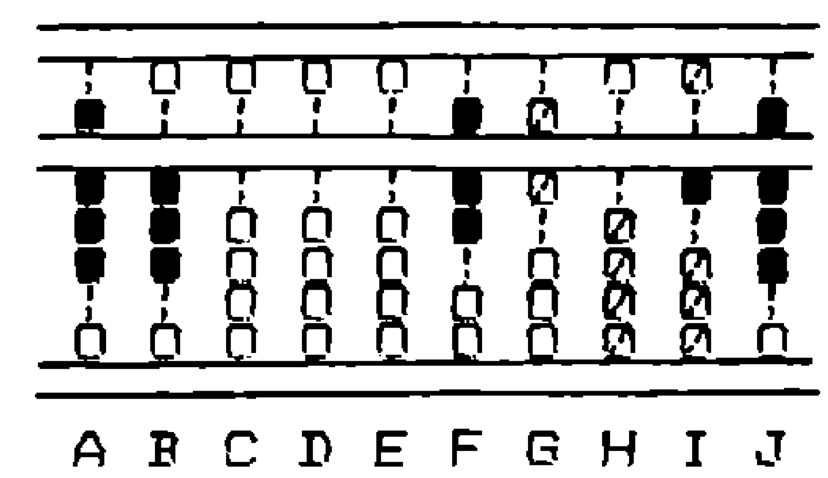
2. Vergleich der 8 in 83 mit der 6 in 6308. Da 8 größer ist als 6, wird sie mit 63 in 6308 verglichen. Sie ist 7mal enthalten und die 7 wird in Position F eingetragen. Nun wird
$7 \times 8 = 56$ von 63 abgezogen und es bleibt 7 in Position H übrig.



3. Die 3 in 83 wird mit 7 multipliziert und von 70 in 708 abgezogen.



4. Vergleich der 8 in 83 mit 49 in 498. Sie ist 6mal enthalten. In Position G wird 6 eingetragen und das Produkt
$6 \times 8 = 48$ wird von 49 abgezogen.



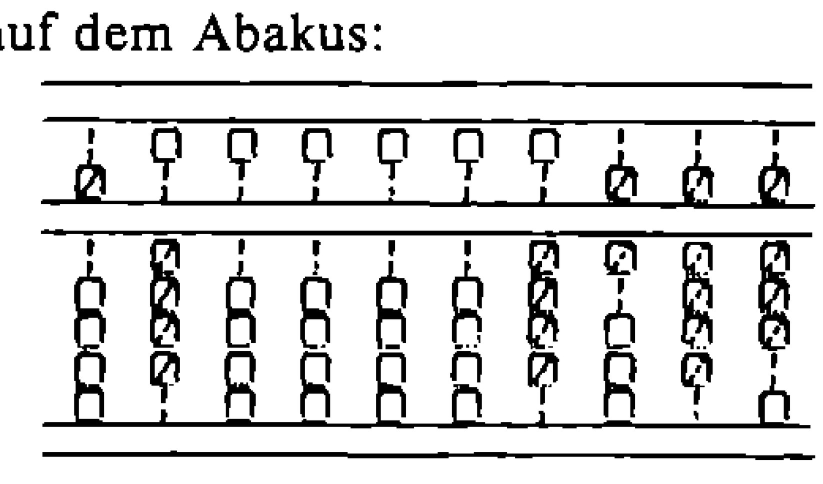
5. Die 3 in 83 wird mit 6 multipliziert und von 18 abgezogen. Es ergibt sich Null an der Stelle, wo der Dividend eingetragen war. Die in den Positionen F und G enthaltene Zahl 76 ist damit das Ergebnis.

Ein weiteres Beispiel soll den Divisionsalgorithmus für einen komplizierteren Fall erläutern. Es ist $4698:54$ zu berechnen. In schriftlicher Form würde der Algorithmus lauten:

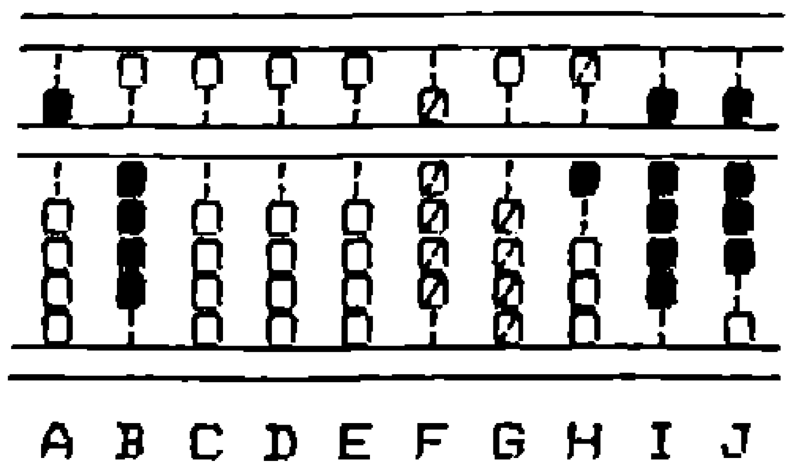
$4698:54 = \cancel{9}87$
~~486~~
432
378
378

1. Vergleich der ersten Ziffer des Divisors (5) mit der ersten Ziffer des Dividenden (4). Da $5 > 4$, wird die erste Ziffer des Divisors mit der Zahl aus den ersten beiden Ziffern des Dividenden (46) verglichen. Sie ist 9mal enthalten; 9 wird als die erste Ziffer des Ergebnisses notiert.
2. Es wird 9×54 gebildet und mit der Zahl verglichen, die aus den ersten drei Ziffern des Dividenden besteht. Da $486 > 469$, wird die 9 im Ergebnis gestrichen und durch die 8 ersetzt.
3. Bildung der Differenz $469 - 8 \times 54 = 37$.
4. Die erste Ziffer des Divisors ist 7mal in 37 enthalten.
5. Mit $378 - 7 \times 54 = 0$ ist die Division beendet. Das Ergebnis lautet 87.

Die Abarbeitung auf dem Abakus verläuft in folgenden Schritten:
1. Darstellung des Divisors und Dividenden auf dem Abakus:

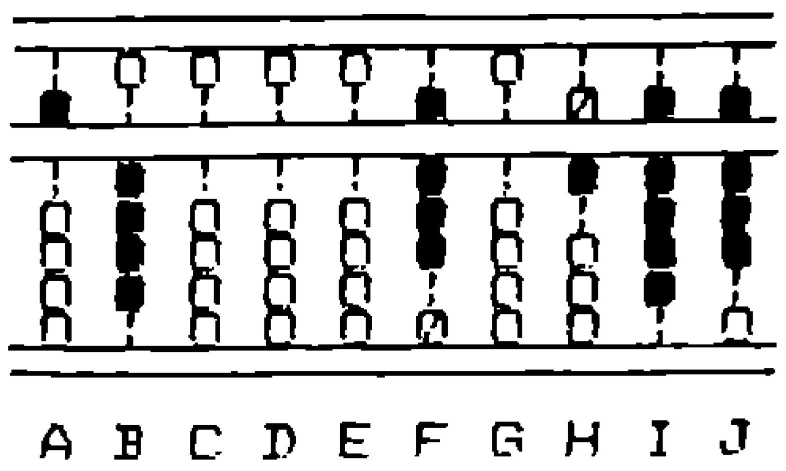


2. Die 5 in 54 ist 9mal in 46 von 4698 enthalten.
In Position F wird 9 eingetragen.
Von 46 wird $5 \times 9 = 45$ abgezogen.

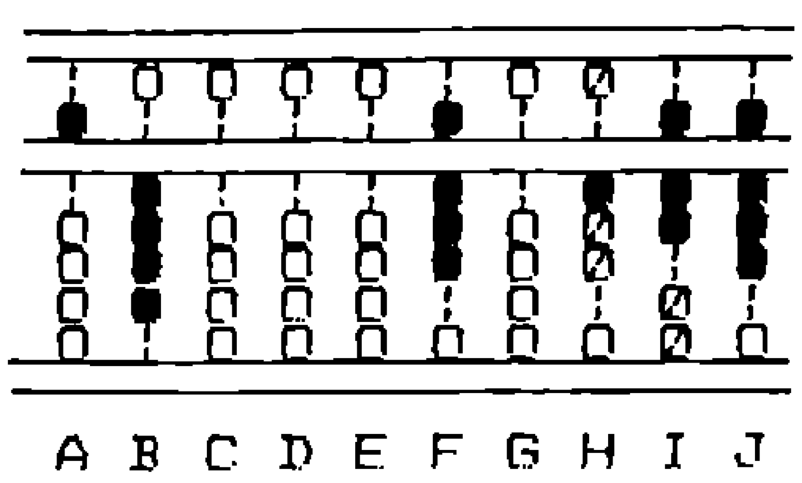


3. Die 4 in 54 wird mit 9 multipliziert, das ergibt 36. 36 läßt sich aber nicht von 19 in den Positionen H und I abziehen.

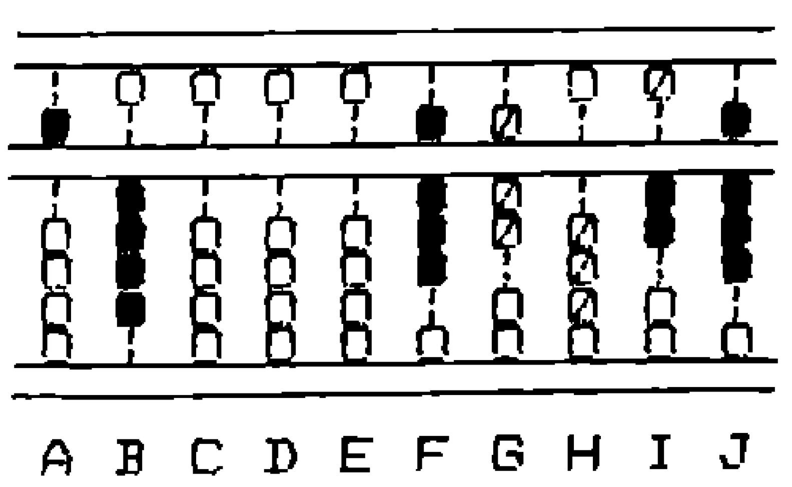
4. Es ist eine Korrektur zu vollziehen. Die 9 in Position F wird um 1 vermindert. Damit ist in Position H 1×5 hinzuzufügen.



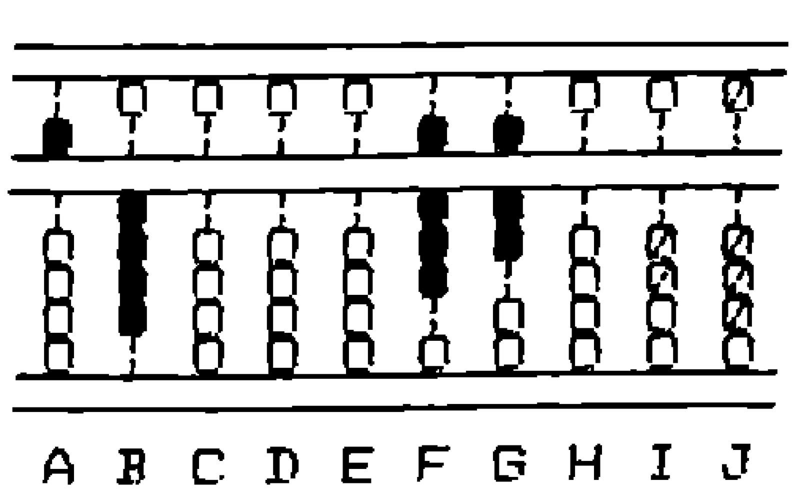
5. Die 4 in 54 wird nun mit 8 multipliziert und das Ergebnis von 69 in den Positionen H und I abgezogen. Man erhält 37 in H und I.



6. Die 5 in 54 wird mit 37 in H und I verglichen, sie ist 7mal enthalten. In Position G wird die 7 eingetragen und von 37 wird $5 \times 7 = 35$ abgezogen.



7. Die 4 in 54 wird mit 7 multipliziert und von 28 in den Positionen I und J abgezogen. Es ergibt sich Null an der Stelle des Dividenden. Damit ist das Ergebnis der Division 87.



Das Wichtigste, worauf beim Multiplizieren und Dividieren mit dem Abakus geachtet werden muß, ist die Eintragung der Teilergebnisse in die richtige Position. Bei etwas Übung im Umgang mit dem Abakus hat man sich jedoch rasch an die Regeln gewöhnt und kann auch komplizierte Rechnungen sicher und schnell ausführen.

Wie ist der Abakus in die Geschichte der Rechentechnik einzuordnen? Kann er als erste mechanische Rechenmaschine betrachtet werden? Die Arbeit mit dem Abakus macht sofort deutlich, daß die eigentlichen Rechenoperationen im Kopf auszuführen sind, d. h. alle drei oben genannten Elementaroperationen muß der Nutzer des Abakus beherrschen, um arithmetische Operationen mit beliebigen Zahlen ausführen zu können. Der Abakus ist lediglich ein Hilfsmittel, die Zwischenergebnisse, die bei der Abarbeitung des Algorithmus anfallen, zu speichern und mit neuen aus Elementaroperationen erhaltenen Teilresultaten zu verrechnen. Der Abakus ist somit nichts anderes als eine Form der Zahlendarstellung, und zwar eine gegenständliche, die dem schriftlichen dezimalen Positionssystem, das von den Indern entwickelt wurde, vollkommen äquivalent ist.

E. Klett

Literatur:
[1] Beauclair, W. de: Rechnen mit Maschinen, Braunschweig 1968.
[2] Klix, F.: Erwachendes Denken, Berlin 1980.
[3] Kojima, T.: The Japanese Abacus, Tokyo 1954.

Interessante Flächenvergleiche

Aufgabenstellungen zur IV. Umschlagseite

1. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_Q des Quadrates *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des Quadrates *PQRS*?

2. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_Q des Quadrates *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des Rhombus *APCQ*?

3. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_Q des Quadrates *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des Dreiecks *AEF*?

4. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_R des Rechtecks *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des Vierecks *BEDF*?

5. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_Q des Quadrates *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des Drachenvierecks *BPQR*?

6. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_R des Rechtecks *ABCD* beträgt der Flächeninhalt $A_s = 2 \cdot (A_x + A_y)$ der schraffiert dargestellten Teilflächen?

7. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_Q des Quadrates *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des Achtecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$?

8. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_S der Sternfigur beträgt der Flächeninhalt A_x des Trapezes?

9. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_Q des Quadrates *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des achtzackigen Sterns *APHQBRESCTFUDVGW*?

J. Lehmann

Unzureichende Informationen?

Stelle dir vor, du wärst Zeuge des folgenden merkwürdigen Gesprächs zwischen einem Mathematikprofessor (M) und zwei seiner Studenten (A und B).
M (zu A und B): „Ich möchte, daß Sie zwei natürliche Zahlen erraten, die beide größer als 1 und voneinander verschieden sind. Herrn A werde ich ihre Summe ins Ohr flüstern, Herrn B ihr Produkt."
Nachdem dies geschehen ist:
A: „Ich weiß die beiden Zahlen nicht."
B: „Ich weiß sie auch nicht."
A: „Jetzt weiß ich sie!"
B: „Jetzt weiß ich sie auch!"
Um welche Zahlen handelt es sich?

An der Sektion Mathematik der Leipziger Universität werden zu Ehren bekannter Mathematiker Aufgabenwettbewerbe veranstaltet.
Anläßlich des 200. Geburtstages von A. L. Cauchy fand der Wettbewerb 1989 universitätsoffen statt. In diesem Rahmen stellte Dr. Brock, an dieser Sektion tätig, die folgende Version der oben gegebenen, vor Jahren in der sowjetischen Schülerzeitschrift „Quant" veröffentlichten Aufgabe und sorgte so für heiße Köpfe und auch verschiedenste falsche Lösungen.

Stelle dir vor, du wärst Zeuge des folgenden merkwürdigen Gesprächs zwischen einem Mathematikprofessor (M) und zwei seiner Studenten (A und B).
M (zu A und B): „Ich möchte, daß Sie zwei natürliche Zahlen erraten, die beide größer als 1 und kleiner als 100 sind. Herrn A werde ich ihr Produkt ins Ohr flüstern, Herrn B ihre Summe."
Nachdem dies geschehen ist:
A: „Ich weiß die beiden Zahlen nicht."
B: „Das wußte ich schon!"
A: „Jetzt weiß ich sie!"
B: „Jetzt weiß ich sie auch!"
Um welche Zahlen handelt es sich?

Übrigens – beide Aufgaben sind trotz scheinbar unzureichender Informationen eindeutig lösbar.
Viel Spaß beim Knobeln und ausreichende Widerstandsfähigkeit gegen das vorzeitige Nachsehen bei den Lösungen wünscht euch

Alphons

Die BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft empfiehlt:

Autorenkollektiv der Sektion Mathematik der Universität Leipzig
Ergänzende Kapitel zu Bronstein/Semendjajew Taschenbuch der Mathematik
Bestell-Nr. 666 456 6 Preis: 19,80 DM

J. Flachsmeyer/U. Feiste/K. Manteuffel
Mathematik und ornamentale Kunstformen
Dieser Band knüpft an bekannte Gegenstände wie Symmetrie, Abstand, Abbildung an und führt den Leser zu ebenen Isometrien, Gruppen ebener Bewegungen, Friesgruppen, Streifenornamenten, Wandmustergruppen und Flächenornamenten. Die behandelten Kongruenzbetrachtungen werden durch zahlreiche Anwendungen und durch Beispiele aus der Erfahrungswelt des Lesers ergänzt.
Bestell-Nr. 666 514 7 Preis: etwa 15,00 DM

F. Kadeřávek
Geometrie und Kunst in früherer Zeit
Das Buch, eine Übersetzung nach dem 1935 in Prag erschienenem Original, behandelt in interessanter und ansprechender Form die Anwendung geometrischer Kenntnisse im Bauwesen: vom alten Ägypten bis zur Etablierung der darstellenden Geometrie als selbständige mathematische Disziplin. Beim Leser werden nur geringe mathematische Kenntnisse vorausgesetzt.
Bestell-Nr. 666 582 5 Preis: etwa 10,00 DM

Nachauflagen der Mathematischen Schülerbücherei:
H. Belkner: **Determinanten** (MSB 33) Preis: 6,00 DM
E. Schröder: **Mathematik im Reich der Töne** (MSB 106) Preis: 8,60 DM
R. Thiele: **Mathematische Beweise** (MSB 99) Preis: 8,60 DM

Der Deutsche Taschenbuch Verlag empfiehlt:

F. Reinhardt/H. Soeder
dtv-Atlas zur Mathematik
Der „dtv-Atlas zur Mathematik" gibt einen Überblick über den Stand der modernen Mathematik und ihre Ergebnisse. Die Gliederung geht vom Gesamtbereich der Mathematik aus und enthält alle wesentlichen Teildisziplinen mit den dazugehörigen Theorien.
Titel-Nr.: 3007/3008 Preis: je 19,80 DM

A. Szabó
Das geozentrische Weltbild
Astronomie, Geographie und Mathematik der Griechen
Titel-Nr.: 4490 Preis: etwa 24,80 DM

Der Ernst Klett Schulbuchverlag empfiehlt:

B. Bolt
Eine mathematische Fundgrube
Ein breites Spektrum an Anregungen bietet diese Sammlung von über 150 Aufgaben, z. B. geometrische Puzzle, Konstruktionen oder Merkwürdiges von Zahlen und Figuren
Klettbuch 72271 Preis: 32,80 DM

P. Eigenmann
Geometrische Denkaufgaben
Geometrie in Reinkultur – ohne viele Worte werden insgesamt fast 300 knifflige Probleme gestellt
Klettbuch 72231 Preis: 16,80 DM

E. Oettinger
Kaleidoskop
Bekannte und weniger bekannte mathematische Problembereiche, zu deren Verständnis Schulkenntnisse genügen, werden dargestellt. In vielfältigen Bezügen zu den schönen Künsten und zur Philosophie. In historischen und anekdotischen Beiträgen. Mit einer Aufgabenbörse samt nachschlagbaren Lösungsverfahren.
Klettbuch 72201 Preis: 31,00 DM

W. Schmidt
Mathematikaufgaben 7–10
Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt
Klettbuch 7111 Preis: 15,50 DM

Der Fachbuchverlag Leipzig empfiehlt:

U. Schmidt/W. Schmidt
Mathematische Knobeleien mit und ohne Kleincomputer
Bestell-Nr. 547 513 0 Preis: 10,80 DM
Einige unserer Leser haben vielleicht bereits im Herbst 1989 das interessante Buch mit dem Titel „Mathematische Knobeleien mit und ohne Kleincomputer" kaufen können. Die Autoren Dipl. Math. Uta Schmidt und Dr. sc. Werner Schmidt von der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald kennt ihr sicher aus der „alpha" als Verfasser von Aufgaben und Artikeln. Erschienen ist soeben eine 2. Auflage des Buches im Fachbuchverlag Leipzig, eine Lizenzausgabe wird vom Aulis-Verlag Deubner & Co in diesen Tagen in die Buchhandlungen ausgeliefert (Mathematische Knobeleien mit und ohne Computer).
In ihrem Buch behandeln die Autoren Denksport- und Knobelaufgaben. Häufig ist deren Lösung nur durch systematisches Probieren zu finden, dieser Weg erfordert jedoch vor allem Rechenfertigkeit und Fleiß (und ist daher langweilig). Da Computer sehr schnell mit jeweils neuen Zahlen die gleiche Folge von Rechenoperationen ausführen können, sind sie bei der Lösung derartiger Aufgaben ein nützliches Hilfsmittel. Die Autoren empfehlen, Computer als ein Werkzeug zum Lösen von Knobelaufgaben anzuwenden. Anhand zahlreicher Beispiele zeigen sie aber auch, daß dieses wunderbare Werkzeug Computer logisches Denken und mathematische Analyse nicht ersetzen kann. Manchmal ist eine klassische Lösung kürzer und eleganter! Sehr schön wird an Beispielen erläutert, daß Computer nicht gänzlich genau rechnen. Die Rundungsfehler sind oft zu vernachlässigen, führen aber manchmal direkt zu „Computerkatastrophen". Das alles könnt ihr selbst in diesem Buch nachlesen, das Lothar Otto aus Leipzig treffend illustriert hat.
Bei der Lektüre sind die Lösungen vieler Aufgaben mit und auch ohne Computer nachzuvollziehen. Das Buch ist auch für Arbeitsgemeinschaften und Computerklubs nützlich. Und hier eine Kostprobe:
Auf einer Reise konnte Sindbad beim König von Sarandib einen wunderbaren Würfel bestaunen, der aus vielen kleinen, untereinander gleich großen Goldwürfeln zusammengesetzt war. Als der König von den Schwierigkeiten bei der Teilung des Mosaiks hörte, bat er Sindbad, ihm zu helfen. Es war sein Wunsch, daß jeder seiner Söhne einen gleich großen Würfel aus den Goldbausteinen gefertigt bekäme. Sindbad zählte schnell die kleinen Bausteine in des Königs großem Würfel, es waren weniger als 500 in jeder Kante. Dann überlegte er lange und sagte, daß eine Teilung ohne Rest auf gar keinen Fall zu machen sei. Sindbad bot sich aber an, die Aufgabe zu lösen, wenn er die übrigbleibenden Bausteine als Andenken an Sarandib behalten dürfe. Es würden auch höchstens 5 kleine Goldwürfel übrigbleiben und jeder zu bauende Würfel bestände aus weit mehr als einhundert kleinen Goldbausteinen. Wieviel Söhne hatte der König und wieviel Goldwürfel erhielt Sindbad? Aus wieviel kleinen Würfeln war des Königs großer Würfel zusammengesetzt? Beachtet, daß der König mindestens zwei und höchstens sieben Söhne besaß.

A. G. Konforowitsch/St. Galina
Logischen Katastrophen auf der Spur
Bestell-Nr. 547 576 3 Preis: 16,00 DM
Dieses Buch umfaßt 178 Aufgaben aus den Gebieten der Arithmetik, Algebra und Analysis, Geometrie und Logik. Jede Aufgabe enthält einen versteckten logischen Fehler, der auf einer Stufe der Überlegungen entstand und widersinnige Ergebnisse bedingte. Der Verfasser analysiert die aus der Geschichte bekanntesten Paradoxa und gibt mögliche Lösungswege an.

Der MANZ-Verlag München empfiehlt:

H.-D. Hornschuh (Hrsg.)
Internationale Mathematikolympiaden
Drei Bände sämtlicher Aufgaben der Olympiaden von 1959 bis 1988 mit ausführlichen Lösungen
Manzbuch 358/359/820 Preis: je 21,80 DM

H. Sewerin (Hrsg.)
Mathematische Klausuraufgaben
Sammlung sämtlicher Aufgaben mit Lösungen, die bei der Auswahl der BRD-Mannschaft für die Internationalen Mathematikolympiaden gestellt wurden (1977 bis 1985)
Manzbuch 821 Preis: 15,80 DM

Der Sportverlag empfiehlt:

Reihe: Schacheröffnungen im Überblick

E. Gufeld/N. Kalinitschenko
Offene Spiele
Spanisch bis Königsgambit
Bestell-Nr.: 671 848 0 Preis: 12,00 DM

Halboffene Spiele
Französisch bis Caro-Kann
Bestell-Nr.: 671 849 9 Preis: 12,00 DM

Halboffene Spiele
Skandinavisch bis Sizilianisch
Bestell-Nr.: 671 860 8 Preis: 13,50 DM

Geschlossene Spiele
Damengambit bis Reti
Bestell-Nr.: 671 850 1 Preis: 15,00 DM

Geschlossene Spiele
Nimzowitsch-Indisch bis Holländisch
Bestell-Nr.: 671 861 6 Preis: 15,00 DM
Preis für alle 5 Bände: 60,00 DM

Im Eigenverlag erschienen:

A. Halameisär
Mathematik? – Amüsant!
Ein unterhaltsames Lesebuch, in dem der Leser neue Begriffe und Tatsachen, ungewöhnliche Methoden zur Lösung von „nichtstandardgemäßen" Aufgaben in lustiger Form kennenlernen kann.
Preis: 13,00 DM (bei Sammelbestellungen ab 10 Exemplaren 8,00 DM)
Zu bestellen bei Dr. M. Röhr, Alte Salzstr. 110, 7062 Leipzig

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, Mai 1990

Olympiadeklasse 10

291041 Gegeben seien drei Geraden g, h, j in einer Ebene; keine zwei dieser Geraden seien zueinander parallel; kein Punkt der Ebene liege auf allen drei Geraden. Gegeben sei ferner eine Länge a. Gesucht ist für jede solche Vorgabe von g, h, j, a die Anzahl aller derjenigen Kreise c, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Der Kreis c schneidet jede der Geraden g, h, j in zwei Punkten G_1, G_2 bzw. H_1, H_2 bzw. J_1, J_2.
(2) Es gilt $\overline{G_1G_2} = \overline{H_1H_2} = \overline{J_1J_2} = a$.

291042 Von zwei reellen Zahlen werde gefordert: Die Summe aus den Reziproken der beiden Zahlen und dem Reziproken des Produktes der beiden Zahlen beträgt 1.

Man ermittle alle diejenigen Werte, die sich als Summe s zweier derartiger Zahlen ergeben können.

Von den nachstehenden Aufgaben 291043A und 291043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

291043A Man beweise die folgende Aussage:
Die Folge $(2^n - 1)$ $(n = 1,2,\ldots)$ enthält für jede beliebige Zahl z einen Abschnitt, dessen Länge größer als z ist und in dem keine Primzahl vorkommt.
Hinweis: Ist (a_n) $(n = 1,2,\ldots)$ eine Folge und sind $k \geqq 1$ und m natürliche Zahlen, so heißt das k-Tupel $(a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{m+k})$ ein Abschnitt der Folge (a_n) und k seine Länge.

291043B Gegeben seien fünf Punkte A, B, C, D, E. Sie seien so im Raum gelegen, daß keine vier dieser fünf Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen und daß keine zwei Verbindungsstrecken von je zwei verschiedenen dieser fünf Punkte einander gleichlang sind.
Ermitteln Sie für jede Lagemöglichkeit derartiger Punkte die Anzahl aller verschiedenen Polyeder, die genau die fünf Ecken A, B, C, D, E haben!
Dabei seien zwei Polyeder genau dann als voneinander verschieden bezeichnet, wenn es keine Drehung und keine Spiegelung gibt, die das eine Polyeder in das andere überführt.
Hinweis: Ein Polyeder ist ein Körper endlicher Größe, dessen Oberfläche aus ebenen Vielecken besteht.

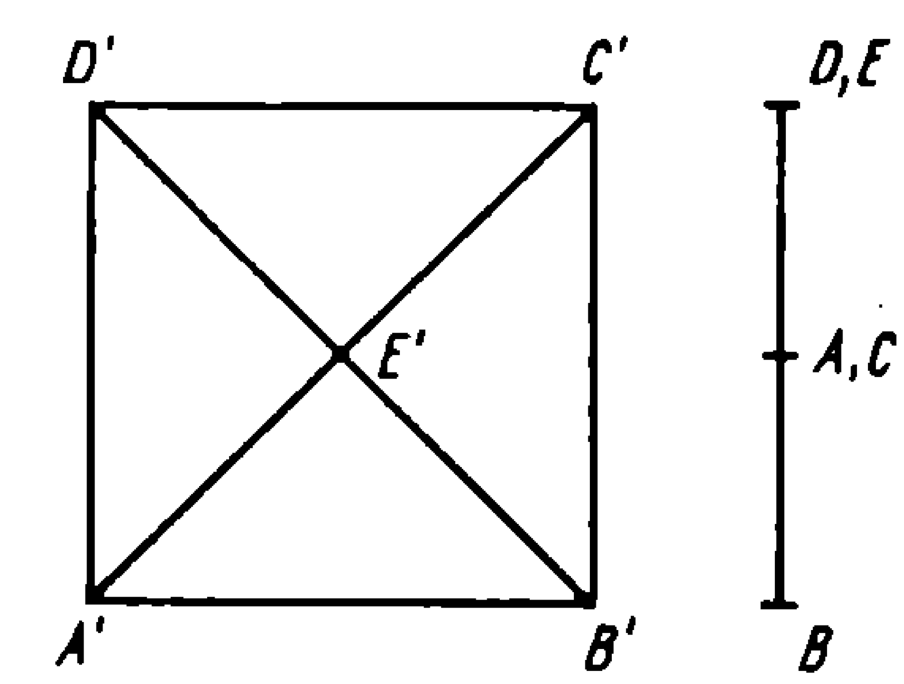
291044 In jedes leere Kästchen des Bildes soll eine natürliche Zahl so eingetragen werden, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte eine (fünfgliedrige) arithmetische Folge steht.

				65
	41			
		81		
1				

Ermitteln Sie alle Eintragungen, die diese Forderung erfüllen!

291045 Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

291046 Das Bild stellt in senkrechter Eintafelprojektion ein Polyeder dar, das genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat. Die Bildpunkte A', B', C', D' sind die Eckpunkte eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a, der Bildpunkt E' ist der Mittelpunkt dieses Quadrates.



Im beigefügten Höhenmaßstab ist a die Höhe von D und E über der von B, und $\frac{a}{2}$ ist die Höhe von A und C über der von B. Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz genau ein Polyeder gibt, auf das diese Beschreibung zutrifft! Ermitteln Sie das Volumen dieses Polyeders!

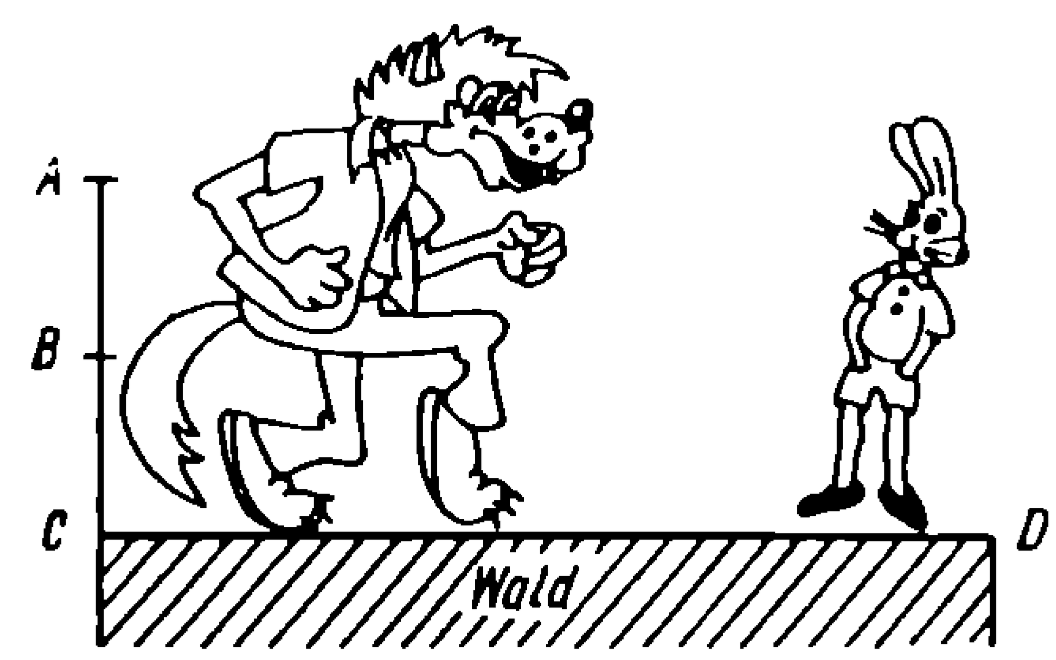
Olympiadeklassen 11/12

291241 Für jede reelle Zahl a untersuche man, ob die Gleichung

$$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} = x \quad (1)$$

(mindestens) eine reelle Lösung x hat, und ermittle alle reellen Lösungen der Gleichung (1).

291242 Ein Waldstück werde durch eine Strecke CD begrenzt (siehe Bild). In derjenigen Halbebene, die von der Geraden durch C und D begrenzt wird und in der das Waldstück nicht liegt, befinde sich auf der durch C senkrecht zu CD gehenden Geraden ein Hase in einem Punkt A und ein Wolf in einem Punkt B zwischen A und C. Dabei sei $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ und $\overline{CD} = 5a$ mit einer gegebenen Länge a.



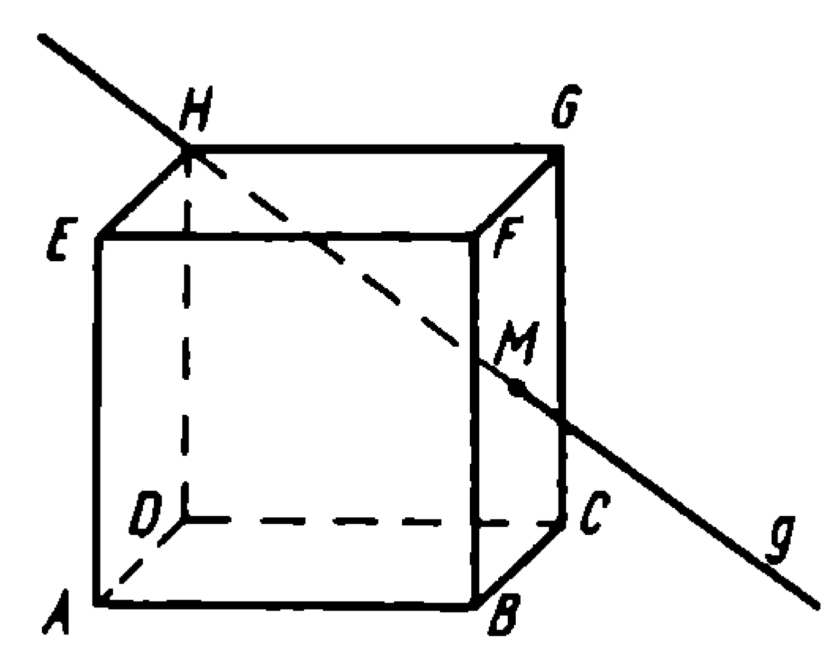
Der Hase laufe geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt A zu einem von ihm gewählten Zielpunkt X der Strecke CD. Der Wolf kann höchstens halb so schnell laufen wie der Hase. Der Hase werde genau dann unterwegs vom Wolf gefaßt, wenn die Strecke AX einen Punkt H enthält, den der Wolf gleichzeitig mit dem Hasen oder sogar eher als der Hase erreichen kann.
Man ermittle alle diejenigen Punkte X auf CD, bei deren Wahl als Zielpunkt der Hase erreicht, daß er nicht unterwegs vom Wolf gefaßt wird.

291243 Man beweise: Zu jedem System (a, b, c, d) von positiven ganzen Zahlen a, b, c, d, die den Bedingungen
$a \cdot b = c \cdot d$ und $a + b = c - d$ genügen,
gibt es ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seitenlängen, in cm gemessen, sämtlich ganze Zahlen als Maßzahlen haben und dessen Flächeninhalt, in cm^2 gemessen, die Maßzahl $a \cdot b$ hat.

291244 Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + 2y^2 - 3z = 17, \quad (1)$$
$$x^2 - 3y + 2z = 9. \quad (2)$$

291245 Die Ecken eines Würfels mit gegebener Kantenlänge a seien wie im Bild mit A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnet. Die Ebene, in der A, B, C, D liegen, sei ε_1; die Ebene, in der B, C, G, F liegen, sei ε_2; die Gerade durch H und den Mittelpunkt M des Quadrates $BCGF$ sei g genannt.



Man beweise, daß es unter allen Strecken, die einen Punkt von ε_1 mit einem Punkt von ε_2 verbinden und deren Mittelpunkt auf g liegt, eine Strecke von kleinster Länge gibt. Man ermittle diese kleinste Länge.

291246A In zwei Urnen A und B befinden sich insgesamt genau m rote und genau n blaue Kugeln. Die Gesamtzahl der Kugeln ist größer als 2; mindestens eine der Kugeln ist rot. Zu Beginn enthält A alle roten und B alle blauen Kugeln.
Indem nacheinander abwechselnd aus A und B jeweils eine zufällig ausgewählte Kugel herausgenommen und in die andere Urne hineingelegt wird, sollen die Kugeln vermischt werden. Begonnen wird mit der Entnahme aus Urne A.
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ von Anzahlen m und n, bei deren Vorgabe die vierte umgelegte Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ rot ist.

Hinweis: Enthält eine Urne genau Z Kugeln, so wird hier unter zufälliger Auswahl einer Kugel verstanden, daß für alle Z Kugeln die Wahrscheinlichkeit ihrer Auswahl gleich $\frac{1}{Z}$ ist. Werden allgemeiner von M möglichen Ereignissen G als „günstig" und $M - G$ als „ungünstig" angesehen, und sind alle M Ereignisse gleichwahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines „günstigen" Ereignisses gleich $\frac{G}{M}$.

291246B Man ermittle für jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ alle diejenigen Funktionen f, die mit dieser Zahl n den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Die Funktion f ist an der Stelle $x = 0$ stetig.
(3) Für jede reelle Zahl x gilt
$n \cdot f(nx) = f(x) + nx.$

Die Lösungen werden im Heft 6/90 veröffentlicht.

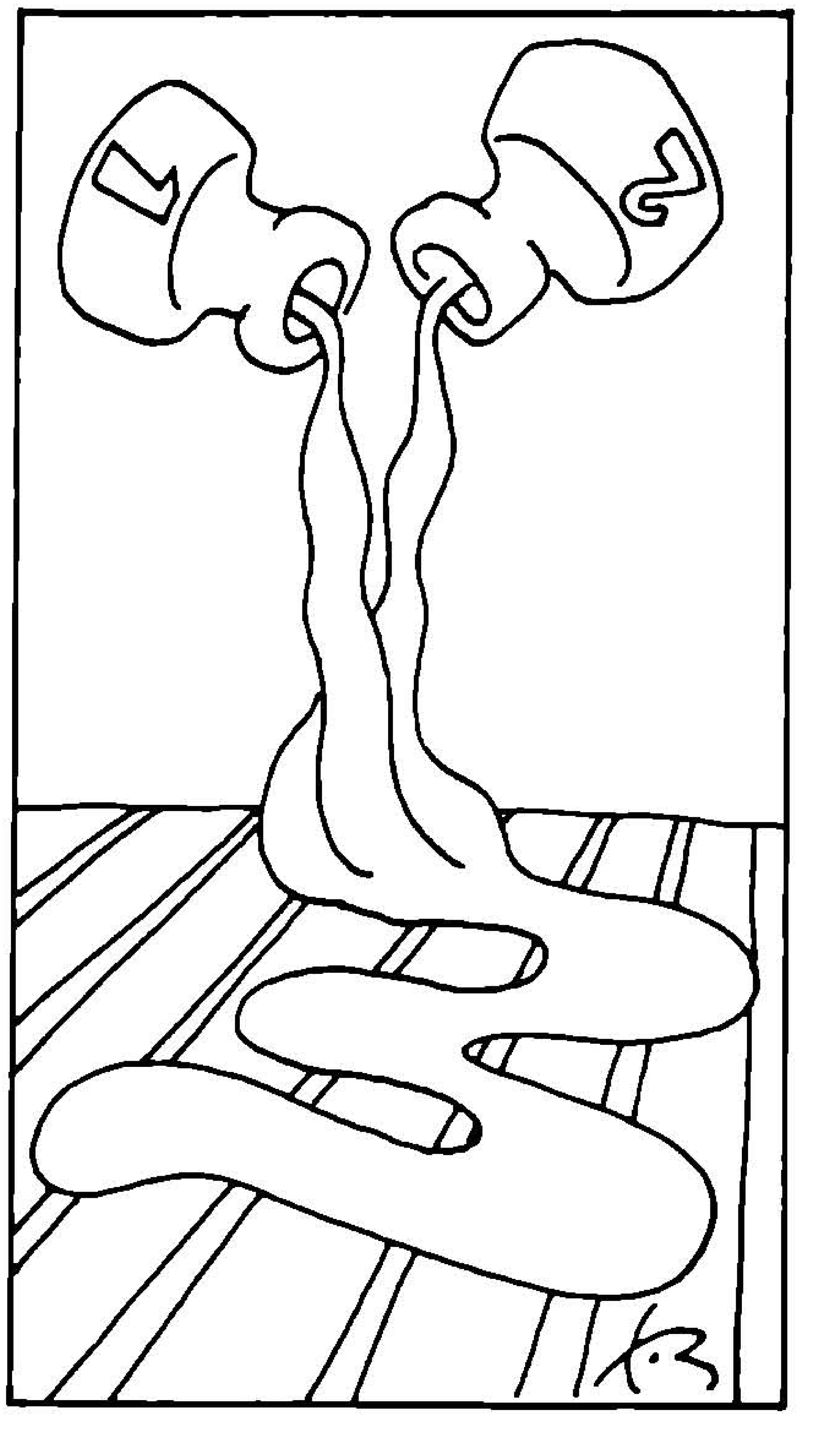
Die XXIX. OJM fand nun schon traditionsgemäß an der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer" Erfurt statt. Diesmal nahmen 174 Teilnehmer, darunter 22 Mädchen an dem Wettstreit teil. Der Vorsitzende der Jury Prof. Dr. G. Burosch (Universität Rostock) gab in seiner Eröffnungsrede einen Überblick über die Geschichte der Olympiadebewegung. Viele namhafte Mathematiker haben ihre ersten Berührungen zur Mathemnatik der Olympiade zu verdanken. In seiner Festrede zur Siegerehrung forderte Prof. Dr. E. Hertel (F.-Schiller-Universität Jena) die Mathematikeleven zum Studium der Mathematik als der Königin der Wissenschaften auf.
Angeregt durch die Delegationsleiter und unterstützt durch die teilnehmenden Schüler wurde durch das Zentrale Komitee Olympiade Junger Mathematiker an den Minister für Bildung und Wissenschaft Prof. Dr. Meyer ein Brief gerichtet, in dem er bei der Durchführung der 30. Olympiade um Unterstützung gebeten wurde. Neben dem „Bundeswettbewerb Mathematik" sollte in Zukunft unser Klausurwettbewerb als eine Möglichkeit eines Leistungsvergleiches erhalten bleiben.
Alle Teilnehmer, Lehrer und Hochschullehrer sprachen sich für die Beibehaltung der Talenteförderung auf mathematischem Gebiet aus.

Erste Preise in der Klassenstufe 10 erhielten: Michael Herrmann (Spezialschule „C. F. Gauß", Frankfurt/O.), Ulrich Müller (E.-Thälmann-OS, Rochlitz, Schüler der Klasse 8), Julia Kempe (Spezialschule „H. Hertz", Berlin), Rüdiger Krauße (Spezialschule „F. Engels", Riesa) und Remo Brandt (Spezialschule Rostock).
Ein erster Preis in Klasse 11 wurde an Michael Dreher (Spezialklasse, M.-Luther-Universität Halle) vergeben.
In Klasse 12 erhielten Tobias Franke, Astrid Mirle (beide Spezialschule „F. Engels", Riesa) und Thomas Mautsch (EOS „J. W. v. Goethe", Lübben) erste Preise.

In den 11köpfigen Kader für die IMO in China wurden die Schüler Rüdiger Belch (Chemnitz), Frank Schneegaß (Erfurt) aus Klasse 10, Raymond Hemmecke (Erfurt) aus Klasse 11 und Michael Dreher (Halle), Tobias Franke (Dresden), Astrid Mirle (Dresden), Thomas Mautsch (Cottbus), Jan Fricke (Neubrandenburg), Ingrid Voigt (Leipzig), Torsten Erhardt (Chemnitz) und Stefan Liebscher (Potsdam) berufen.

Dr. W. Moldenhauer
Inst. f. Math. der Pädag. Hochschule Erfurt

aus: Funktio, Helsinki



Lösungen zu: Kuriose Identitäten
Heft 4/90

1. a) $\sqrt[4]{m} = \frac{1}{4}\sqrt{m}$; $4\sqrt[4]{m} = \sqrt{m}$; $4^4 = m$; $m = 256$

b) $\sqrt[8]{m} = \frac{1}{8}\sqrt{m}$; $8\sqrt[8]{m} = \sqrt{m}$; $8^8 = m^3$; $m = 256$

2. $\sqrt[3]{m} = \frac{1}{3}\sqrt{m}$; $3\sqrt[3]{m} = \sqrt{m}$; $3^3 = \sqrt{m}$; $m = 729$.

Lösung zu: Der Sechs-Bahnen-Rock
Heft 4/90

Vorgegeben war die Gleichung $2S + s = 92\ cm$, in der S die Länge der größeren Sehne ist und s die der kleineren. Um eine zweite Gleichung mit diesen beiden Unbekannten zu bilden, müssen wir die Länge des Lotes a von der oberen Ecke des Schnittes auf die Webekante ermitteln, denn $S + 2s = 92\ \text{cm} - 2a$. Dieses Lot ist die Gegenkathete des Winkels $\alpha = 10°$ im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $l = 70\ \text{cm}$. Also ist $\sin 10° = \frac{a}{70\ \text{cm}}$;
$a = 70\ \text{cm} \cdot \sin 10°$, $a = 12{,}15\ \text{cm}$.
Das Gleichungspaar lautet jetzt:
$2S + s = 92\ \text{cm}$, $S + 2s = 67{,}7\ \text{cm}$.
Für die Schnittkonstruktion ist nur die Länge der größeren Sehne erforderlich, denn sie ist die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Basiswinkeln $\beta = \beta' = 80°$. Die freien Schenkel schneiden sich im Mittelpunkt der beiden konzentrischen Kreisbogen. Man wird deshalb im o. a. Gleichungssystem s eliminieren und erhält, aufgerundet: $S = 38{,}8\ \text{cm}$.
Zum Schluß ein Hinweis für diejenigen, die diese Aufgabe nicht nur mathematisch, sondern auch praktisch lösen wollen:
Man steckt das Papier, aus dem der Schnitt hergestellt werden soll, längs gefaltet so auf dem Teppich fest, daß eine Gerade im Teppichmuster die Bruchkante (= Symmetrieachse des Schnitts) verlängert. Auf einer Senkrechten zur Bruchkante markiert man das Ende der halben Sehne (19,4 cm) und errechnet mit Hilfe der Tangensfunktion die Länge der Mittelsenkrechten:

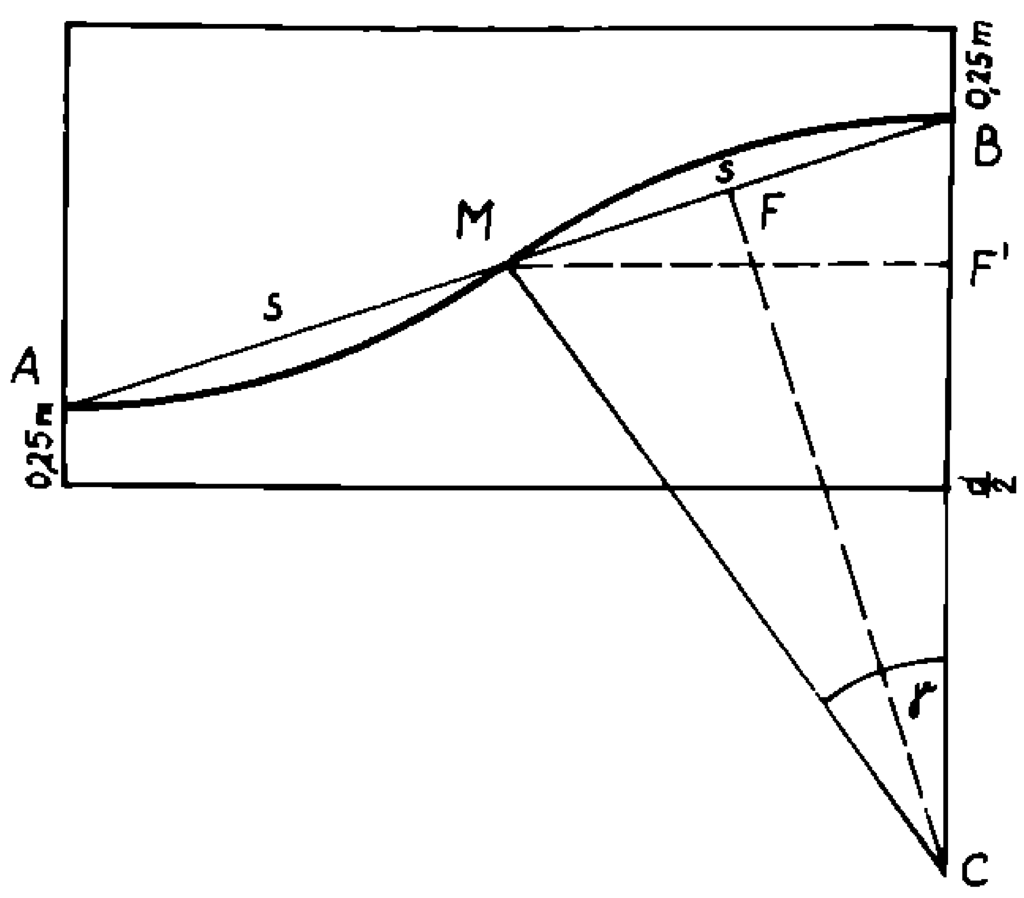
$$\tan 10° = \frac{19{,}4\ \text{cm}}{h};$$

$$h = \frac{19{,}4\ \text{cm}}{\tan 10°} = 110\ \text{cm}.$$

So ist die Gefahr der Ungenauigkeit, die sich aus dem Größenverhältnis zwischen den handelsüblichen Winkelmessern und den Schnittmaßen ergibt, geringer. Als Zirkel fungiert wieder ein Maßband, besser ein Metallmaßband. *Hella Genau*

Lösungen zu:
Gardinen für ein Blumenfenster

1\. Wenn die Gardine mit Rüsche an den Seiten wieder die Länge der Stoffbreite haben soll, muß die Schnittlinie in 0,25 m Abstand (Rüschenbreite) von der einen Webekante beginnen und in ebendiesem Abstand von der anderen Webekante enden. Die erfragte Differenz zwischen der kürzesten und der längsten Stelle der Gardine beträgt demnach:
$d = 1{,}40\text{ m} - 2 \cdot 0{,}25\text{ m} = 0{,}90\text{ m}$.



2\. Bestimmungslinien für den Kreisbogenmittelpunkt sind
– die Verlängerung der seitlichen Schnittkante (als Senkrechte auf einer Tangente im Berührungspunkt),
– die Mittelsenkrechte auf der Kreisbogensehne.

3\. Um die Rüschenlänge l zu berechnen, müssen der Radius r und der Zentriwinkel γ an einem der Kreisbogen ermittelt werden. Verbindet man die beiden Endpunkte der Schnittkurve zur Strecke $\overline{AB}$ und fällt von deren Mittelpunkt M aus das Lot mit dem Fußpunkt F' auf eine Seitenkante, so erhält man mit $\triangle BMF'$ ein rechtwinkliges Dreieck, das dem $\triangle MCF$ ähnlich ist. ($\sphericalangle F'BM$ und $\sphericalangle FMC$ sind als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck kongruent.) Folglich ist auch

$\sphericalangle BMF' = \sphericalangle MCF = \frac{\gamma}{2}$. Im $\triangle BMF'$ sind die Katheten bekannt:

$\overline{MF'} = \frac{2{,}70\text{ m}}{2} = 1{,}35\text{ m}$ und

$\overline{F'B} = \frac{d}{2} = 0{,}45\text{ m}$ (vgl. Aufgabe 1!).

Mithin beträgt die Länge der Hypotenuse $\overline{MB}$, die zugleich Sehne des Kreisbogens ist,

$s = \sqrt{(1{,}35\text{ m})^2 + (0{,}45\text{ m})^2} = 1{,}423\text{ m}$

und für $\frac{\gamma}{2} = \sphericalangle BMF'$ gilt:

$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}45\text{ m}}{1{,}35\text{ m}} = \frac{1}{3}, \ \frac{\gamma}{2} = 18{,}43°;$

$\gamma = 36{,}86°$.

Der Kreisbogenradius läßt sich am einfachsten mit Hilfe der Seitenverhältnisse in den ähnlichen Dreiecken ermitteln.

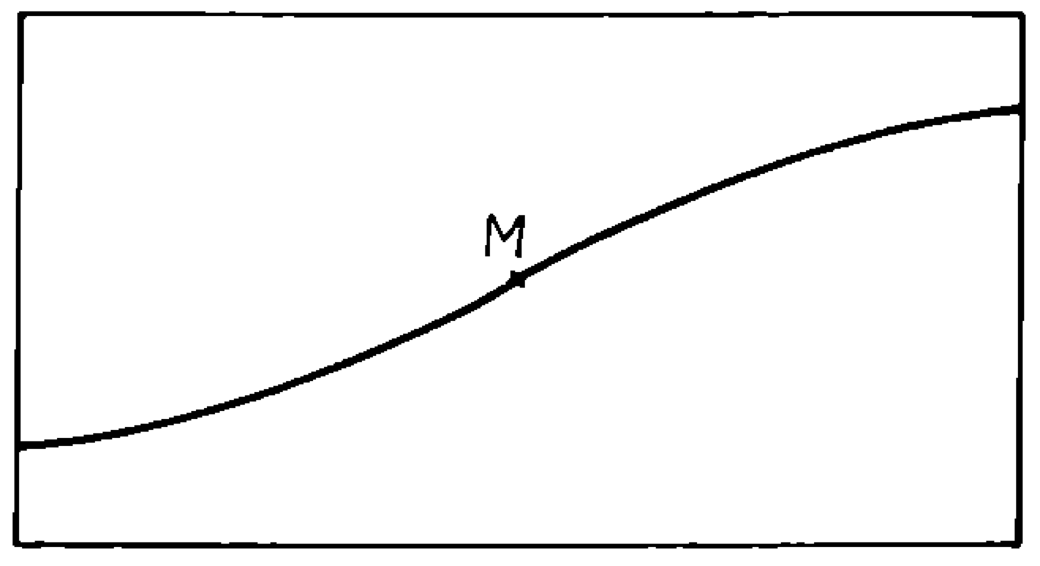
$r : \frac{s}{2} = s : \frac{d}{2}; \ r = \frac{s^2}{d} = \frac{2{,}025\text{ m}^2}{0{,}9\text{ m}};$

$r = 2{,}25\text{ m}$.

Die Länge l der Rüsche ist das Vierfache der Länge des Kreisbogens, also

$l = 4 \cdot \frac{2r\pi\gamma}{360°} \approx 5{,}80\text{ m}$.

4\. Für die Sinuskurvenvariante muß man sich den Koordinatenursprung im Punkt M vorstellen und die Abszissenachse als Parallele zu den Webekanten. Der Bogen von A bis M entspricht dem 4. Quadranten einer Sinuskurve. Für den sich anschließenden ersten Quadranten brauchen wir die Wertetabelle nicht fortzusetzen, sondern nur die für den 4. Quadranten berechneten Abstände von der anderen Schnitt- und der anderen Webekante aus zu messen (Zentralsymmetrie!). Diese Methode ist auch wegen der Länge des Maßbandes – 1,50 m – günstiger.



Ein Abstand von 0,15 m auf der Abszissen-Achse bzw. von der linken Schnittkante – vgl. die begonnene Wertetabelle – bedeutet einen Winkelzuwachs von 10°; und dem Sinuswert 1 in der „Normalkurve" entsprechen $\frac{d}{2} = 0{,}45\text{ m}$ im gegebenen Rechteck.

Damit ist der Koeffizient von $\sin\alpha$ gegeben. Nun ist noch der Abstand der gedachten Abszissenachse von der Webekante zu addieren:
$y = 0{,}45\text{ m} \cdot \sin\alpha + 0{,}45\text{ m} + 0{,}25\text{ m};$
$y = 0{,}45\text{ m} \cdot \sin\alpha + 0{,}70\text{ m}.$

x	α	y
0,15 m	−80°	0,26 m
0,30 m	−70°	0,28 m
0,45 m	−60°	0,31 m
0,60 m	−50°	0,36 m
0,75 m	−40°	0,41 m
0,90 m	−30°	0,48 m
1,05 m	−20°	0,55 m
1,20 m	−10°	0,62 m

Zur Entscheidung für eine der beiden Lösungen

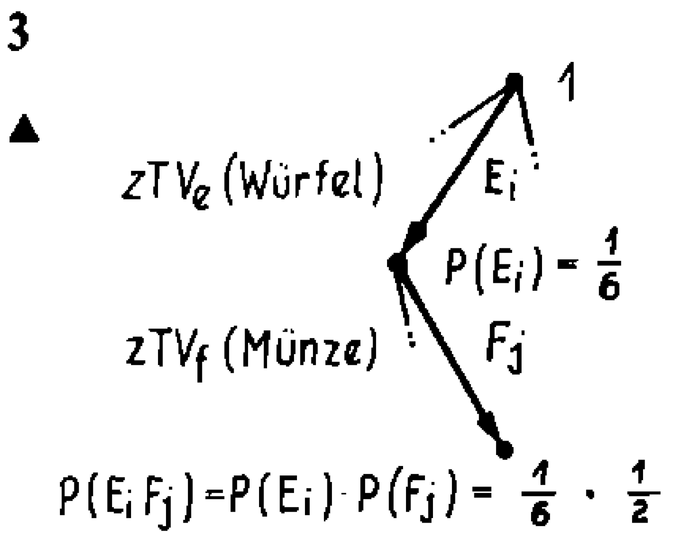
Herstellungstechnisch einfacher ist das Messen der Abstände bzw. der Koordinaten der Punkte auf unserer Sinuskurve. Um die Kreisbogenlinie zu zeichnen, braucht man, selbst wenn man den Stoff quer zu den Webekanten faltet und zum Zeichnen des zweiten Kreisbogens umwendet, eine Arbeitsfläche von mindestens 1,35 m · 2,95 m (Radius + halbe Stoffbreite). Erschwerend kommt hinzu, daß das Maßband als „Zirkel" zu kurz ist.
Auch optisch gebührt der Sinuskurve der Vorzug: Wir empfinden diese Linie als schön, wohl weil mancherlei natürliche Wellen die Form einer immer wiederkehrenden Sinuskurve haben.
Daß Hella die Rüschenlänge für die Kreisbogenlinie berechnet hat, war nicht ganz überflüssig. Beim Vergleich der Zeichnungen sagt ihr das Augenmaß, daß die Sinuskurve keinesfalls länger, sondern ein wenig kürzer ist als die Kreisbogenlinie. Die aufgerundeten 5,80 m werden also ausreichen, aber auch nicht viel Abfall ergeben.
Für welche Variante Hella sich auch entscheidet – sie hat mit ihrer Knobelei fast die Hälfte Stoff eingespart.

Lösung zu: Was vertauscht der Spiegel wirklich?

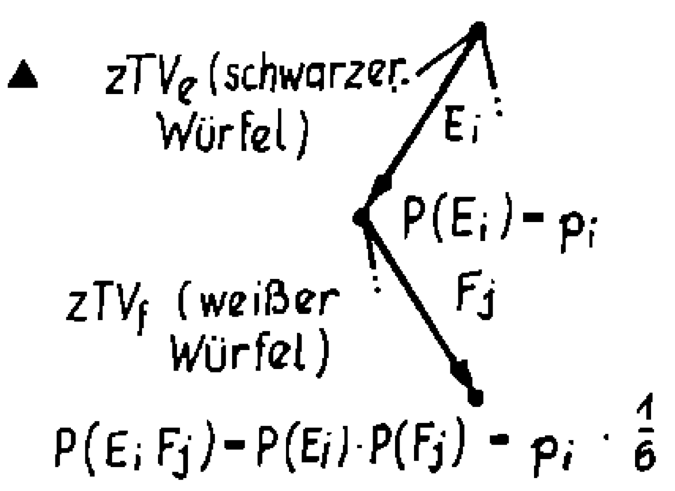
Der Spiegel vertauscht in Wahrheit vorn und hinten. Dagegen bleibt was rechts liegt, und oben bleibt oben.

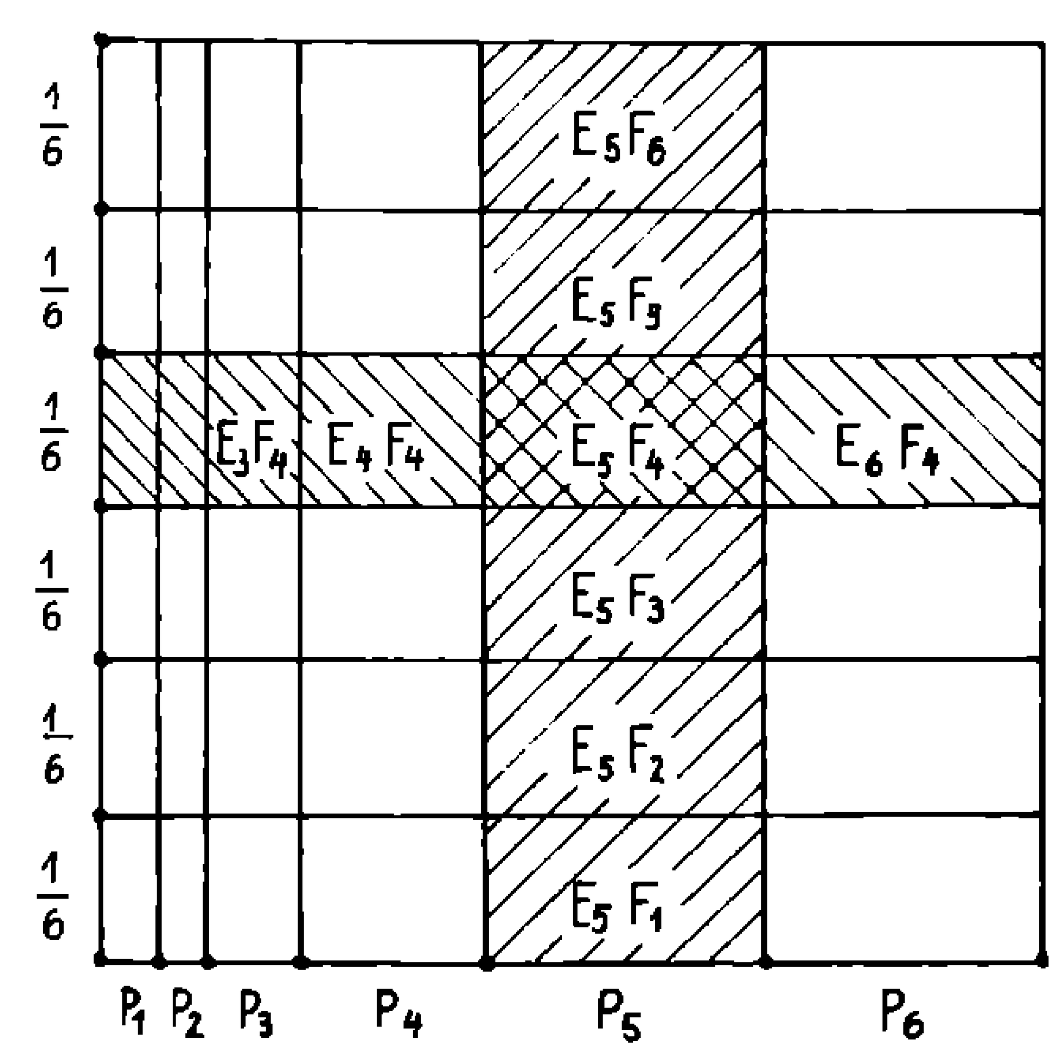
Lösungen zu:
Läßt sich der Zufall berechnen?
Teil 3

▲ 13 ▲



▲ 14 ▲



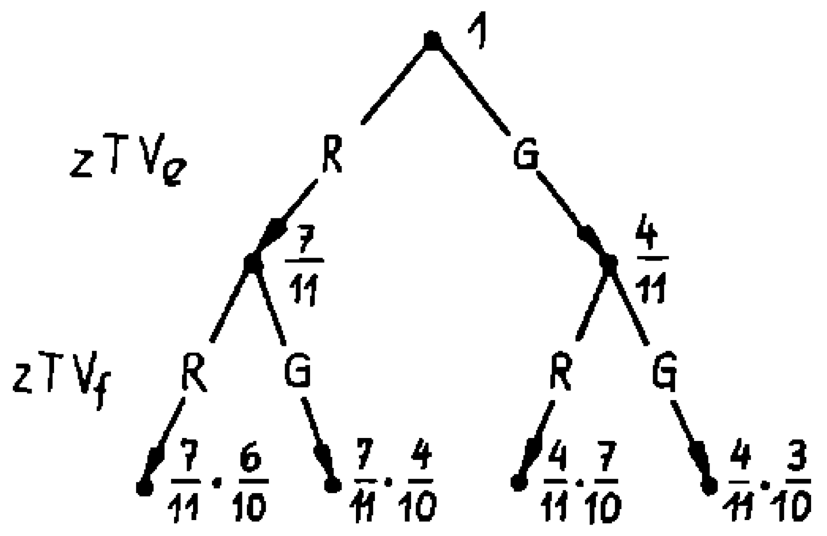


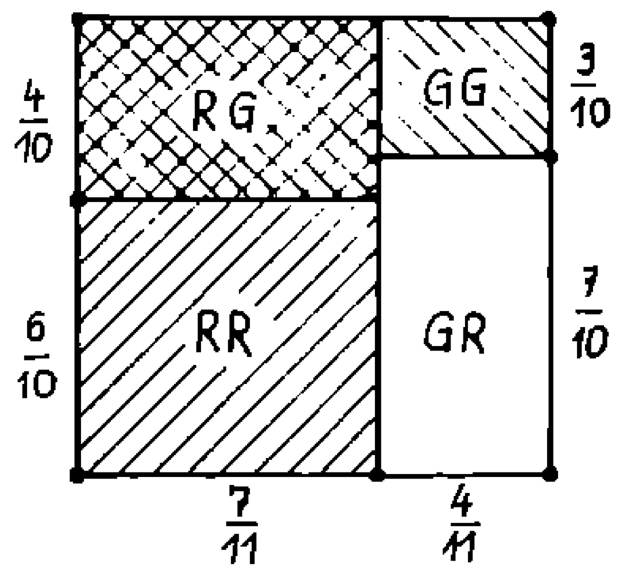
Im Venn-Diagramm sind die Ereignisse $E_5\Omega_f$ *und* $\Omega_e F_4$ durch Schraffieren hervorgehoben.

▲ 15 ▲ Für jede der gerade in der Urne befindlichen Kugeln ist es jeweils gleichwahrscheinlich, herausgenommen zu werden. Da ursprünglich in der Urne 7 rote und 4 gelbe Kugeln sind, ist die Wahrscheinlichkeit, beim 1. Teilversuch eine rote Kugel zu ziehen, gleich $\frac{7}{11}$. Um danach beim 2. Teilversuch eine gelbe Kugel zu ziehen, beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{10}$, denn es sind noch 10 Kugeln in der Urne, von denen 4 gelb sind. Die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine rote und danach eine gelbe Kugel zu ziehen, ist also

$$P(RG) = \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10}.$$

Laut Venn-Diagramm sind die zum zufälligen Doppelversuch gehörenden Ereignisse $E_1\Omega_f = RR \cup RG$ und $\Omega_e F_2 = RG \cup GG$ nicht unabhängig.





▲16▲ E_1F_2, E_2F_2, E_3F_2, E_1F_4, E_2F_4, E_3F_4

▲17▲

$$\begin{aligned}
&P(AB)\\
&= P(E_1F_2) + P(E_2F_2) + P(E_3F_2)\\
&\quad + P(E_1F_4) + P(E_2F_4) + P(E_3F_4)\\
&= P(E_1)\cdot P(F_2) + P(E_2)\cdot P(F_2)\\
&\quad + P(E_3)\cdot P(F_2) + P(E_1)\cdot P(F_4)\\
&\quad + P(E_2)\cdot P(F_4) + P(E_3)\cdot P(F_4)\\
&= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)]\cdot[P(F_2) + P(F_4)]\\
&= P(A)\cdot P(B)\\
&= (0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}1)\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Verflixte Würfel
Bei einem Würfel müssen wenigstens 6 Augen und können höchstens 15 Augen gleichzeitig sichtbar sein. In unserer Anordnung fehlen also die Würfel mit 8 Augen, 13 Augen und 14 Augen. Da es bei keinem Würfel eine Lage gibt, bei der gleichzeitig 8 Augen oder 13 Augen zu sehen sind, weil die Summe der Augen zweier Gegenseiten stets 7 beträgt, fehlt in der Anordnung somit der Würfel mit 14 Augen.

Bunte Kugeln
Wenn eine grüne Kugel so schwer wie zwei rote Kugeln ist, dann sind drei grüne Kugeln so schwer wie sechs rote Kugeln. Wenn eine rote Kugel so schwer wie zwei blaue Kugeln ist, dann sind sechs rote Kugeln so schwer wie zwölf blaue Kugeln. Somit sind zwölf blaue Kugeln so schwer wie drei grüne Kugeln.

Mißbrauchte Streichhölzer
Diese Aufgabe hat, wie die folgenden Abbildungen zeigen, zwei Lösungen.
1. Lösung: VI + II = VIII
2. Lösung: IV + III = VII

Neun Neunen
999 + 999 : 999 = 1000

Etliche Dreiecke
125 Dreiecke

Fehlende Ziffern
Für die Einerziffer, Zehnerziffer und Hunderterziffer stehen die acht Ziffern von 1 bis 8 zur Verfügung. Es gibt
$8 = 8$ einstellige Zahlen,
$8\cdot 8 = 64$ zweistellige Zahlen,
$8\cdot 8\cdot 8 = 512$ dreistellige Zahlen,
zusammen also 584 Zahlen zwischen 1 und 1000, die weder die Ziffer 0 noch die Ziffer 9 enthalten.

Fatale Verwandtschaft
Die Onkel sind entweder zwei Brüder von Peters Vater oder zwei Brüder von Peters Mutter.

Verschiedene Wege
70 Wege

Komischer Kreis
Es gilt $A = u$, also $\pi r^2 = 2\pi r$, woraus $r = 2$ (Zentimeter) folgt.
Die Probe, $A = \pi\cdot 2^2 = 4\pi$ (Quadratzentimeter) und $u = 2\pi\cdot 2 = 4\pi$ (Zentimeter) zeigt, daß die gemeinsame Maßzahl 4π ist.

Fatales Mobile
Werden die Dreiecke, Fragezeichen, Kreise, Quadrate und Stäbe mit D, F, K, Q und S bezeichnet, dann lassen sich aus der Abbildung fünf Gleichungen darstellen:
$D + 2Q = S + 2K + 2F$, $Q = K + S$,
$Q = D + K$, $3K + D = 2S + Q + 2F$,
$Q = S + 2F$, woraus sich $F = D$ ergibt.
An die Stelle des Fragezeichens müssen Dreiecke.

Lösung zur Schachecke

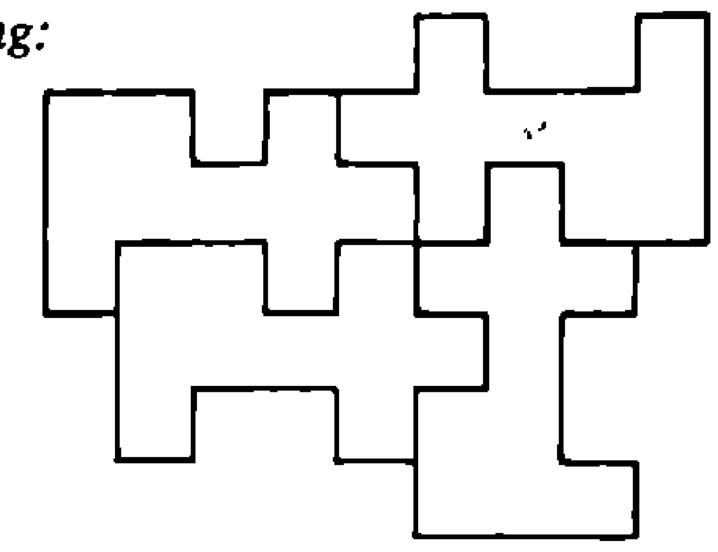
Weiß und Schwarz können aufgrund der spiegelbildlichen Stellung jeweils mit 34 verschiedenen Zügen mattsetzen.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Mandshavidze

Wir verbinden die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) durch einen stückweise geradlinigen Linienzug L mit endlich vielen Richtungsänderungen („gebrochene Strecke"), der vollständig innerhalb von K liegt. Die Funktion $f(x,y)$ kann auf L als Maß des von (x_1, y_1) zurückgelegten Weges s auf L betrachtet werden, d. h.
$f(x,y) = \varphi(s)$. Es ist bekannt, daß $\varphi(0) < 0$ und $\varphi(\lambda) > 0$ gilt, wobei λ die Länge von L ist. Deshalb muß es ein s_0 geben, $0 < s_0 < \lambda$, so daß $\varphi(s_0) = 0$ ist.
Dem entspricht auf L ein Punkt
$(x_0, y_0) \in K$ mit $f(x_0, y_0) = \varphi(s_0) = 0$.
Da wir nun unendlich viele „gebrochene Strecken" von (x_1, y_1) nach (x_2, y_2) im Kreis K finden, die paarweise keine weiteren gemeinsamen Punkte besitzen, so gibt es auch unendlich viele verschiedene Punkte im Kreis K, in denen die Funktion $f(x,y)$ den Wert Null annimmt. q. e. d.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Ein schwieriger Erbfall
Ein Landbesitzer verfaßt sein Testament. Er will sein Gelände unter seine vier Söhne, die sehr kleinlich und eifersüchtig aufeinander sind, aufteilen, und zwar so, daß er vier Teile erhält, die genau deckungsgleich sind. Beiliegend der Geländeplan. Könnt ihr dem Besitzer helfen, indem ihr die Teilung auf dem Plan vornehmt?
Lösung:



▲2▲ Die Zahl 1990
Die arithmetische Grundstruktur dieser Zahl ist sehr einfach:
$1990 = 2\cdot 5\cdot 199$. 199 ist eine sehr interessante Zahl, denn sie ist die erste Primzahl einer Folge von 10 Primzahlen, die eine arithmetische Reihe mit der konstanten Differenz von 210 bilden: 199, 409, 619, 829, ..., 2089.
Zeige, daß die nächste Zahl dieser Reihe keine Primzahl ist.
Lösung: $2089 + 210 = 2999 = 11^2\cdot 19$.

▲3▲ Auf einer Waldlichtung versammelten sich Freunde: Papagei, Boa, Elefantenbaby, Kalb, Kätzchen, Meerkatze und Kamelkind. Der Papagei begann alle zu messen. Es erwies sich, daß das Elefantenbaby 3 Papageilängen länger war als das Kalb. Das Kamelkind war ebenfalls 3 Papageilängen länger als die Meerkatze, das Kalb 7 Papageilängen länger als der Papagei, das Kamelkind 6 Papageilängen länger als das Kätzchen, und alle zusammen waren sie genau so lang wie die Boa, deren Länge 38 Papageilängen betrug.
Drückt die Längen der Freunde in Papageienlängen aus!
Lösung: Es sei p die Papageienlänge, mp die Meerkatzenlänge und np die Kätzchenlänge. Damit ist die

Länge der Boa	$38p$,
Länge des Kalbs	$p + 7p = 8p$,
Länge des Elefantenbabys	$8p + 3p = 11p$,
Länge des Kamelkindes	$(m+3)p = (n+6)p$.

Folglich beträgt die Länge der Meerkatze $mp = (n+3)p$ und damit gilt
$p + 11p + (n+6)p + 8p + (n+3)p + np = 38p$. Also beträgt die Länge des Kätzchens $np = 3p$, der Meerkatze $6p$ und des Kamelkindes $9p$.

Lösungen zu: Interessante Flächenvergleiche

1. $x^2 + (2x)^2 = a^2$, $5x^2 = a^2$, $x^2 = \frac{a^2}{5}$,
$A_x = a^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2x = a^2 - 4x^2$,
$A_x = a^2 - \frac{4a^2}{5} = \frac{a^2}{5}$, $\frac{A_x}{A_Q} = \frac{1}{5} = 0{,}20$.
A_x beträgt 20 % von A_Q.

2. $A_{AHP} = A_{HBP} = A_{BEP} = A_D$,
$3\cdot A_D = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$, $A_D = \frac{a^2}{12}$,
$A_x = a^2 - 8\cdot\frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3}$.

$\frac{A_x}{A_Q}=\frac{1}{3}=0{,}33\bar{3}$. A_x beträgt $33\frac{1}{3}$% von A_Q.

3. $A_x=a^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}$,

$A_x=a^2-\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{8}=\frac{3a^2}{8}$,

$\frac{A_x}{A_Q}=\frac{3}{8}=0{,}375$. A_x beträgt 37,5 % von A_Q.

4. $A_x=2a^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot 2a-\frac{1}{2}\cdot a\cdot a$,

$A_x=2a^2-\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=a^2$, $\frac{A_x}{A_R}=\frac{1}{2}=0{,}50$.

A_x beträgt 50 % von A_R.

5. $\overline{AB}:\overline{AF}=\overline{BR}:\overline{AR}=2:1$;

$\overline{AR}=x$, $\overline{BR}=2x$, $5x^2=a^2$,

$x^2=\frac{a^2}{5}$; $\frac{1}{2}\cdot A_x=A_{ABQ}-A_{ABR}=\frac{1}{2}\cdot a$

$\times\frac{2a}{3}-\frac{1}{2}\cdot 2x^2$, $A_x=\frac{2}{3}a^2-\frac{2}{5}a^2=\frac{4}{15}\cdot a^2$;

$\frac{A_x}{A_Q}=\frac{4}{15}=0{,}2\bar{6}$. A_x beträgt $26\frac{2}{3}$% von A_Q.

6. $A_S=2a^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{2a}{3}\right)$,

$A_S=2a^2-\frac{a^2}{6}-\frac{2a^2}{3}=\frac{7a^2}{6}$, $\frac{A_S}{A_R}=\frac{7}{12}$

$=0{,}58\bar{3}$. A_S beträgt $58\frac{1}{3}$% von A_R.

7. Umkreisradius des Achtecks $r=\frac{a}{4}$;

$A_x=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{4}\cdot\sin 45°$,

$A_x=\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot a^2$,

$\frac{A_x}{A_Q}=\frac{\sqrt{2}}{8}\approx 0{,}17677$.

A_x beträgt rund 17,7 % von A_Q.

8. Die dunkle Fläche der Sternfigur ist gleich der weißen Fläche. Untereinander gleich sind die Flächen 1, 2, 3, 5, 6, 7 sowie die Flächen 4 und 8.
Damit ist die Summe der Flächen 1, 2, 3 und 4 gleich der Summe der Flächen 5, 6, 7 und 8. A_x beträgt 50 % von A_S.

9. $A_x=a^2-8\cdot A_{AHP}$;

$\overline{HP}:\overline{AP}=\overline{BE}:\overline{AB}=1:2$; $\overline{HP}=x$,

$\overline{AP}=2x$, $5x^2=\frac{a^2}{4}$, $x^2=\frac{a^2}{20}$;

$A_x=a^2-8\cdot\frac{a^2}{20}=\frac{3a^2}{5}$, $\frac{A_x}{A_Q}=\frac{3}{5}=0{,}60$.

A_x beträgt 60 % von A_Q.

Lösungen zu:
Unzureichende Informationen?

Wir bezeichnen die gesuchten Zahlen mit a und b $(a<b)$, ihre Summe mit S und ihr Produkt mit P. Ferner bezeichnen wir die Antworten der beiden Studenten entsprechend ihrer Reihenfolge mit (1) bis (4).
Aus (1) folgt, daß $S\geqq 7$ ist. (Für $S=4$, $S=5$ und $S=6$ gibt es höchstens eine Zerlegung!) Wegen (2) enthält die Faktorzerlegung von P mindestens 3 Primfaktoren und es ist $P\neq p^3$ sowie $P\neq p^4$ (p: Primzahl). Ferner besitzt P mindestens zwei Faktorzerlegungen, die auf eine Summe mit mehrdeutiger Zerlegung führen.
Aus (3) schließen wir: Unter den Zerlegungen von S gibt es genau eine „ausgezeichnete" Zerlegung, die auf ein Produkt P' führt, das mindestens 3 Primfaktoren enthält, für das $P'\neq p^3$ und $P'\neq p^4$ (p: Primzahl) ist, und dessen Faktorzerlegungen sämtlich auf Summen führen, die keine eindeutige Zerlegung haben. Diese ausgezeichnete Zerlegung ist die richtige.
Wir nehmen an, daß $S\geqq 13$ ist. Dann besitzt S die beiden ausgezeichneten (disjunkten) Zerlegungen
$S=4+(S-4)=6+(S-6)$.
Somit ist $S\leqq 12$. Mehr als eine ausgezeichnete Zerlegung erhält man auch für $S=9$, $S=11$ und $S=12$, denn es ist
$9=3+6=4+5$, $11=2+9=3+8$
bzw. $12=2+10=4+8$.
Zu untersuchen sind also noch die Fälle $S=7$, $S=8$ und $S=10$.
Nehmen wir zunächst $S=7$ an. Dann folgt $a=3$, $b=4$ und $P=12$. Nach (3) kann B schlußfolgern:
„Angenommen, es wäre $a=2$ und $b=6$, also $S=8$. In diesem Fall hätte A sich folgendes überlegt:
‚8 besitzt die Zerlegungen $S=2+6=3+5$. Die Kombination $a=3$, $b=5$ kommt wegen (2) nicht in Frage. Also ist $a=2$ und $b=6$.'
Ebenso wäre A im Falle $S=7$ in eindeutiger Weise auf $a=3$ und $b=4$ gekommen."
Also kann sich B nach (3) noch nicht entscheiden.
Nehmen wir nun $S=8$ an. Dann folgt $a=2$, $b=6$ und $P=12$.
Nach (3) kann B schlußfolgern:
„Angenommen, es wäre $a=3$ und $b=4$, also $S=7$. In diesem Fall hätte sich A folgendes überlegt:
‚7 besitzt die Zerlegungen $7=2+5=3+4$. Die Kombination $a=2$, $b=5$ kommt wegen (2) nicht in Frage. Also ist $a=3$ und $b=4$.'
Ebenso wäre A im Falle $S=8$ in eindeutiger Weise auf $a=2$ und $b=6$ gekommen."
Also kann sich B nach (3) noch nicht entscheiden.
Endlich nehmen wir $S=10$ an. Daraus folgt $a=4$, $b=6$ und $P=24$.
Nach (3) kann B dann schlußfolgern:
„Angenommen, es wäre $a=2$ und $b=12$, also $S=14$. Dann gäbe es die ausgezeichneten Zerlegungen
$14=2+12=4+10=5+9=6+8$
und A hätte noch keine Entscheidung fällen können.
Angenommen, es wäre $a=3$ und $b=8$, also $S=11$. Dann gäbe es die ausgezeichneten Zerlegungen
$11=2+9=3+8=4+7=5+6$
und A hätte ebenfalls noch keine Entscheidung fällen können.
Also folgt $a=4$ und $b=6$."
Somit ist $a=4$ und $b=6$ die einzige Lösung der Aufgabe.

Lösung der Version:

Wir bezeichnen die gesuchten Zahlen mit a und b, ihre Summe mit S und ihr Produkt mit P. Ferner bezeichnen wir die Antworten der beiden Studenten entsprechend ihrer Reihenfolge mit (1) bis (4).
Der Gang der Lösung läßt sich nun wesentlich abkürzen, wenn man den folgenden, noch unbewiesenen, zahlentheoretischen Satz kennt, der bekannt ist unter dem Namen Goldbachsche Vermutung: Jede gerade natürliche Zahl, die größer als 4 ist, läßt sich als Summe zweier ungerader Primzahlen darstellen. (5)
(Für natürliche Zahlen, die kleiner als 200 sind, überprüft man den Satz ohne weiteres durch Nachrechnen.)
Aus (1) folgt, daß P mindestens 3 Primfaktoren enthält. (6)
Aus (2) folgt, daß S keine Darstellung $S=2+p$ (p: Primzahl) besitzt. (7)
(Anderenfalls wäre ja $P=2\cdot p$, und die Faktorzerlegung von P eindeutig, was (1) widerspräche.)
Wegen (2) ist offenbar $S\geqq 6$. (8)
Wäre S gerade, so gäbe es wegen (5) eine Zerlegung $S=p_1+p_2$, (P_1, P_2: ungerade Primzahlen). Dies widerspricht ebenfalls (2). Also ist S ungerade. (9)
Wäre $S\geqq 55$, so gäbe es die Zerlegung $a=53$, $b=S-53$. P besäße dann wegen der Einschränkung $a, b<100$ nur eine Faktorzerlegung, was (2) widerspräche. Also ist $S\leqq 53$. (10)
Zu untersuchen bleiben wegen (8), (9) und (10) nur die Summen 11, 17, 21, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51 und 53.
Wir haben:
$53=41+12=37+16$, $51=47+4$
$=32+19$, $47=31+16=43+4$,
$37=32+5=29+8$, $35=32+3$
$=19+16$, $27=16+11=19+8$,
$21=16+5=13+8$.
Alle diese Summenzerlegungen führen auf Produkte, die genau eine Faktorzerlegung besitzen, die mit (2) vereinbar ist. Somit kann sich in diesen Fällen B nicht für eine der zwei Summenzerlegungen entscheiden.
Weiter gilt:
$41=37+4=32+9$, $29=16+13$
$=25+4$, $11=7+4=9+2$.
Die rechts stehenden Summenzerlegungen führen auf die Produkte $32\cdot 9$, $25\cdot 4$ und $9\cdot 2$, die außerdem nur noch die Faktorzerlegungen $96\cdot 3$, $20\cdot 5$ bzw. $6\cdot 3$ gestatten. Diese Produktzerlegungen führen auf die Summen 99, 25 und 9, die wegen (7) nicht in Frage kommen. Auch im Falle der links stehenden Summenzerlegungen und den zugehörigen Produkten $37\cdot 4$, $16\cdot 13$ und $4\cdot 7$ hätte A nur je eine Produktzerlegung zur Auswahl. Somit kann in den Fällen $S=41$, $S=29$ und $S=11$ B keine Entscheidung über die Zerlegung treffen.
Jetzt sei $S=17$. Wir betrachten zunächst die Summenzerlegungen
$17=2+15=3+14=5+12$
$=6+11=7+10=8+9$. Es gilt
$2\cdot 15=6\cdot 5$, $3\cdot 14=2\cdot 21$, $5\cdot 12=3\cdot 20$,
$6\cdot 11=2\cdot 33$,
$7\cdot 10=2\cdot 35$ und $8\cdot 9=24\cdot 3$.
Alle diese Produktzerlegungen sind mit (1), (2) und (5) bis (9) vereinbar. A könnte also im Falle dieser Zerlegungen keine Entscheidung fällen, was (3) widerspräche.
Schließlich sei $P=52$. In diesem Falle kann A wegen (9) auf die Zerlegung $4\cdot 13$ schließen. Somit ist $a=4$, $b=13$ die einzige Lösung der Aufgabe.

Die Ludolphsche Kreiszahl π

Ludolph van Ceulen (1540 bis 1610) wurde vor genau 450 Jahren in Hildesheim geboren und starb mit 70 als angesehener Gelehrter an der Universität Leiden in Holland. Nach dem Studium war er als Lehrer für Mathematik in Breda, Amsterdam, Delft, Arnheim und Leiden tätig, bevor ihn Prinz Moritz von Oranien auf die neugeschaffene Professur für Kriegsbaukunst in Leiden berief. Auf seinen ausdrücklichen Wunsch sind in seiner Grabsteinplatte 36 richtige Ziffern der Kreiszahl π eingemeißelt, seine mathematische Meisterleistung, auf die er völlig zu recht sehr stolz war.

Alle seine kleineren und größeren Schriften widmen sich vor allem diesem Thema. Keiner vor ihm kam auf so eine hohe Genauigkeit.

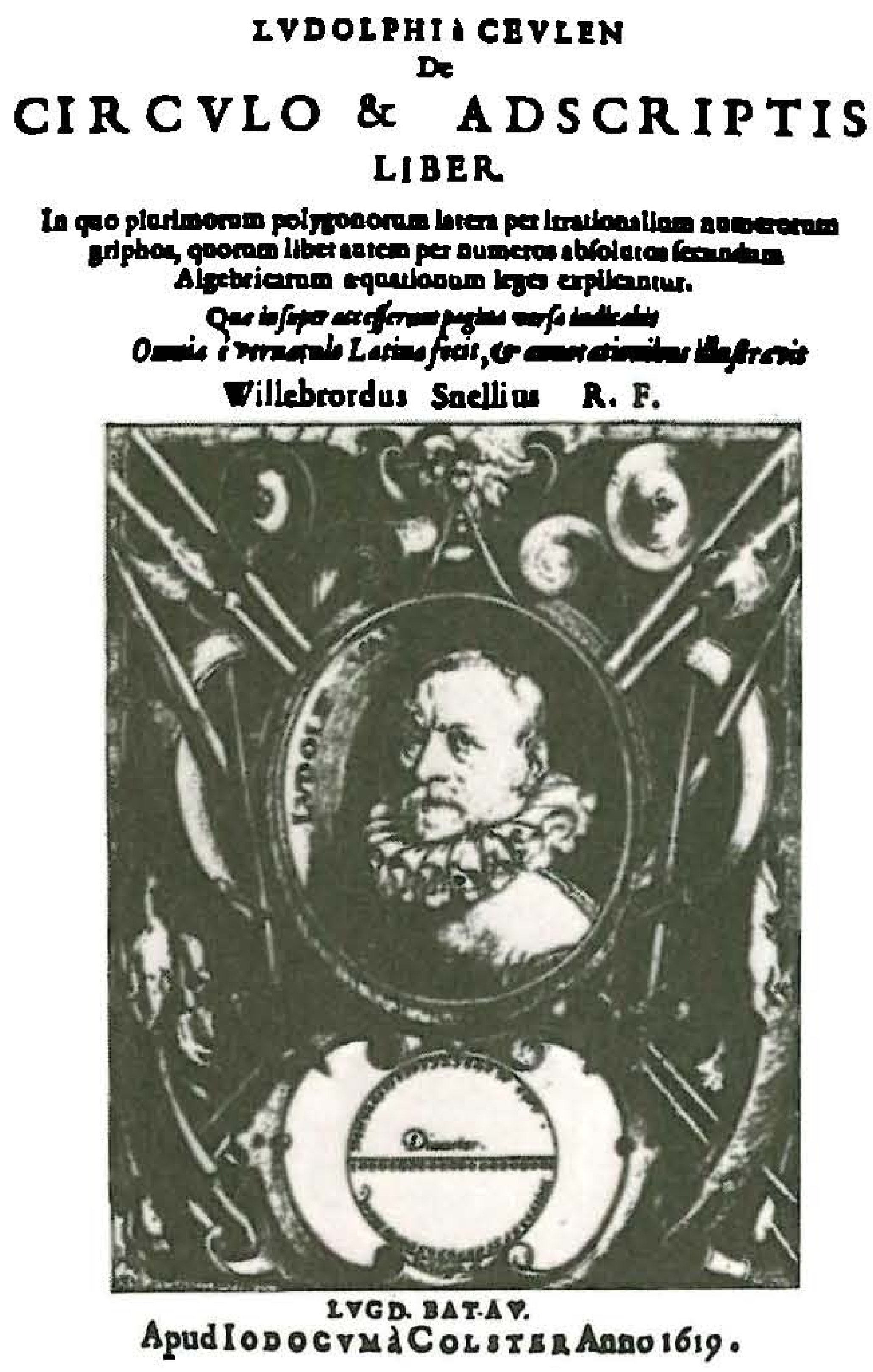
Nur Adriaen van Roomen (1561 bis 1615) konnte in seinem Buch „Ideae mathematicae" von 1593 die Kreiszahl erstmalig immerhin auf 17 Stellen nach dem Komma berechnen. Der Weg dahin ist seit Archimedes stets der gleiche: einem Kreis mit festem Radius werden durch Halbieren der Seiten an der Kreislinie regelmäßige Vielecke ein- und umbeschrieben. Im allgemeinen fängt man mit dem Sechseck, dessen Seite gleich dem Radius ist, an. Mit steigender Zahl der Seiten wird die Kreiszahl, das Verhältnis von Kreisumfang zum Durchmesser, immer besser eingeschachtelt. Während Archimedes bis zum 96-Eck kam, gingen die oben genannten weit darüber hinaus. Sie konnten dabei auf den Leistungen von Vieta (1540 bis 1603) aufbauen, der bereits 9 genaue Dezimalstellen berechnete und die ersten Formeln für π als unendliche Produkte und Kettenbrüche kannte.

Doch immer wieder gab es falsche Propheten für die „Quadratur des Kreises". In mehreren Streitschriften mußte van Ceulen wiederholt die Klinge mit Duchesne und Scaliger kreuzen, die selbst die altbewährte Abschätzung für die Kreiszahl von Archimedes nicht gelten ließen

$$\left(3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}\right).$$

„Van den Circkel" ist dann der Titel seines ersten Buches von 1596, das seine Witwe Adriana van Ceulen 1615 noch einmal drucken ließ. Willebrod van Snell (1580 bis 1626) übersetzte diese und andere Schriften schon 1615 ins Lateinische mit dem zusammenfassenden Titel:

„De circulo et adscriptis liber", d. h. das Buch über den Kreis und Dazugehöriges. Es ist als ein kostbarer Besitz mit einem sehr schönen Titeldruck in der Greifswalder Bibliothek noch vorhanden.



LVDOLPHI à CEVLEN
De
CIRCVLO & ADSCRIPTIS
LIBER.
In quo plurimorum polygonorum latera per irrationalium numerorum griphos, quorum libet autem per numeros absolutos secundum Algebricarum aequationum leges explicantur.
Quae insuper accesserunt pagina versa indicabit
Omnia e vernaculo Latina fecit, & annotationibus illustravit
Willebrordus Snellius R. F.
LVGD. BAT·AV.
Apud IODOCVM à COLSTER Anno 1619.

Mit einem Umfang von 260 Seiten enthält die lateinische Ausgabe zahlreiche schöne geometrische Gedanken, Aufgaben und Beweise. Darunter finden wir die Eigenschaften des Sehnenvierecks mit den speziellen ganzzahligen Seiten 6, 8, 9 und 18 cm. Für seinen Flächeninhalt ist wohl erstmalig in Europa die schon den Indern bekannte Formel genannt:

$$F^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

mit $s = \dfrac{(a+b+c+d)}{2}$, a, b, c und d sind die Viereckseiten. Wir kennen diese Formel mit $d = 0$ als Dreiecksinhalt nach Heron von Alexandria um 75 u. Z.

Eine Fundgrube für den Geometer ist auch das zweite Buch van Ceulens, das mit dem Titel „De arithmetische en geometrische Fondamenten" erst 1615 nach seinem Tode herauskam und 1619 von Snell ins Lateinische übersetzt wurde. Die 36 genauen Ziffern der Kreiszahl finden wir gedruckt auch im Buch von Snell „Cyclometricus" 1621, erst am Ende des 17. Jahrhunderts gab es weiterführende Berechnungen auf der Grundlage von Potenzreihen in England. Die vollständige Berechnung der Kreiszahl van Ceulens hat die Ziffern

$$\pi = 3{,}14159\;26535\;89793\;23846\;26433\;83279\;50288$$

Der Buchstabe π für die Ludolphsche Zahl hat sich erst seit Eulers Bemühungen eingebürgert, zuerst finden wir ihn bei William Jones 1706.

Abschließend soll dem Geometer van Ceulen zu Ehren noch eine geometrische Näherungskonstruktion für π vorgestellt werden, die mit einer einzigen Zirkeleinstellung auskommt und von G. Pfaff stammt.

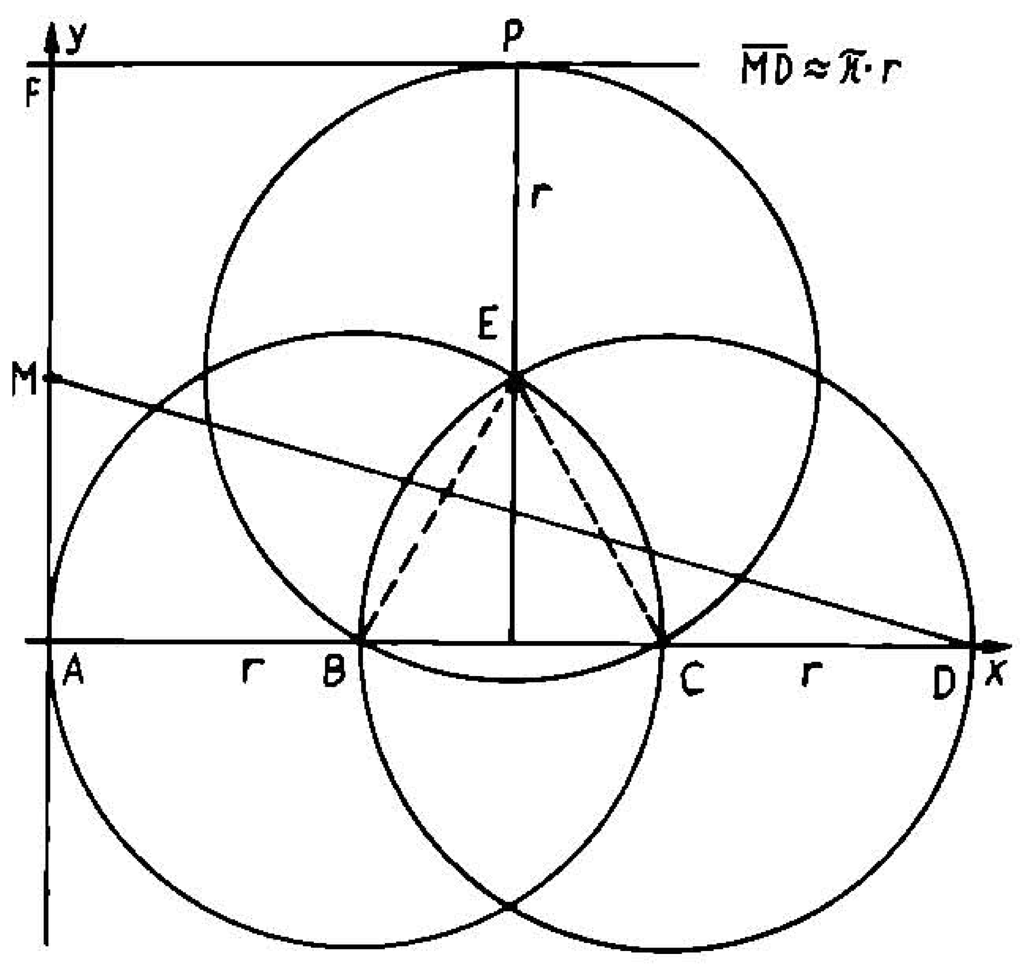
Im Schnittpunkt E zweier Kreise mit gleichem Radius r, deren Mittelpunkte auf der x-Achse im Abstand r liegen, wird der dritte gleich große Kreis gezeichnet. Die Tangente dieses Kreises in P parallel zur x-Achse liefert auf der y-Achse einen Abschnitt

$\overline{AF} = r\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d. h. Höhe im gleichseitigen Dreieck BCE mit der Seite r und dazu $\overline{EP} = r$. Die Länge der Strecke vom Seitenmittelpunkt M zum Punkt D des zweiten Kreises auf der x-Achse ist schon eine recht gute Näherung für die Kreiszahl. Denn nach dem Satz des Pythagoras erhalten wir

$$\overline{MD}^2 = r^2\left(3^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\right)$$

und daraus die Wurzel

$\overline{MD} = r \cdot 3{,}141737 \approx r \cdot \pi$, mit nur weniger als ein Promille als Fehler.



Aufgabe: Läßt man den Punkt D auf der x-Achse stetig nach rechts oder links wandern, ohne die Kreise zu verändern, so wird auch die Konstruktionsstrecke $\overline{MD}$ veränderlich, wir wollen sie y nennen.

1. Welcher Kurventyp wird von y als Ordinate durchlaufen, wenn x sich stetig ändert (dabei muß x nicht nur positiv sein)?
2. Man konstruiere die gesuchte Kurve, indem in jedem Punkt D auf der x-Achse die Lote mit der Länge $\overline{MD}$ gezeichnet werden.
3. Wie groß muß der Wert von x sein, damit die Strecke $\overline{MD}$ die Kreiszahl von Ludolph auf 6 Stellen genau liefert?

J. Buhrow

Wer war näher dran?

Ahmes (ägyptischer Schreiber, wahrscheinlich 18. Jh. v. u. Z.) rechnete mit

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2,$$

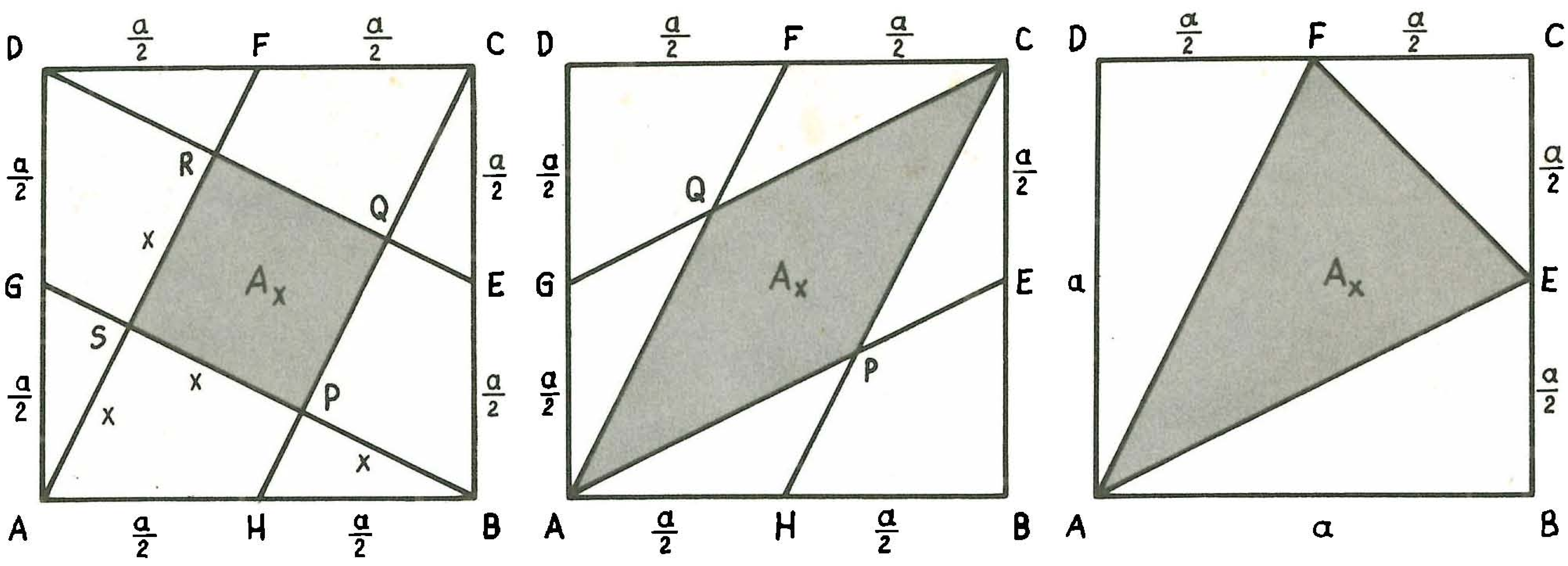
Archimedes (um 287 bis 212 v. u. Z.) mit

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70},$$

Claudius Ptolemäus (um 83 bis 161 u. Z.) mit $\pi = 3 + \dfrac{8}{60} + \dfrac{30}{60 \cdot 60}$ und 700 Jahre später der Chinese Tsu Chhung Chih mit

$$\pi = \frac{355}{113}.$$

Überprüft es!



Interessante Flächenvergleiche

siehe Beitrag auf Seite 114