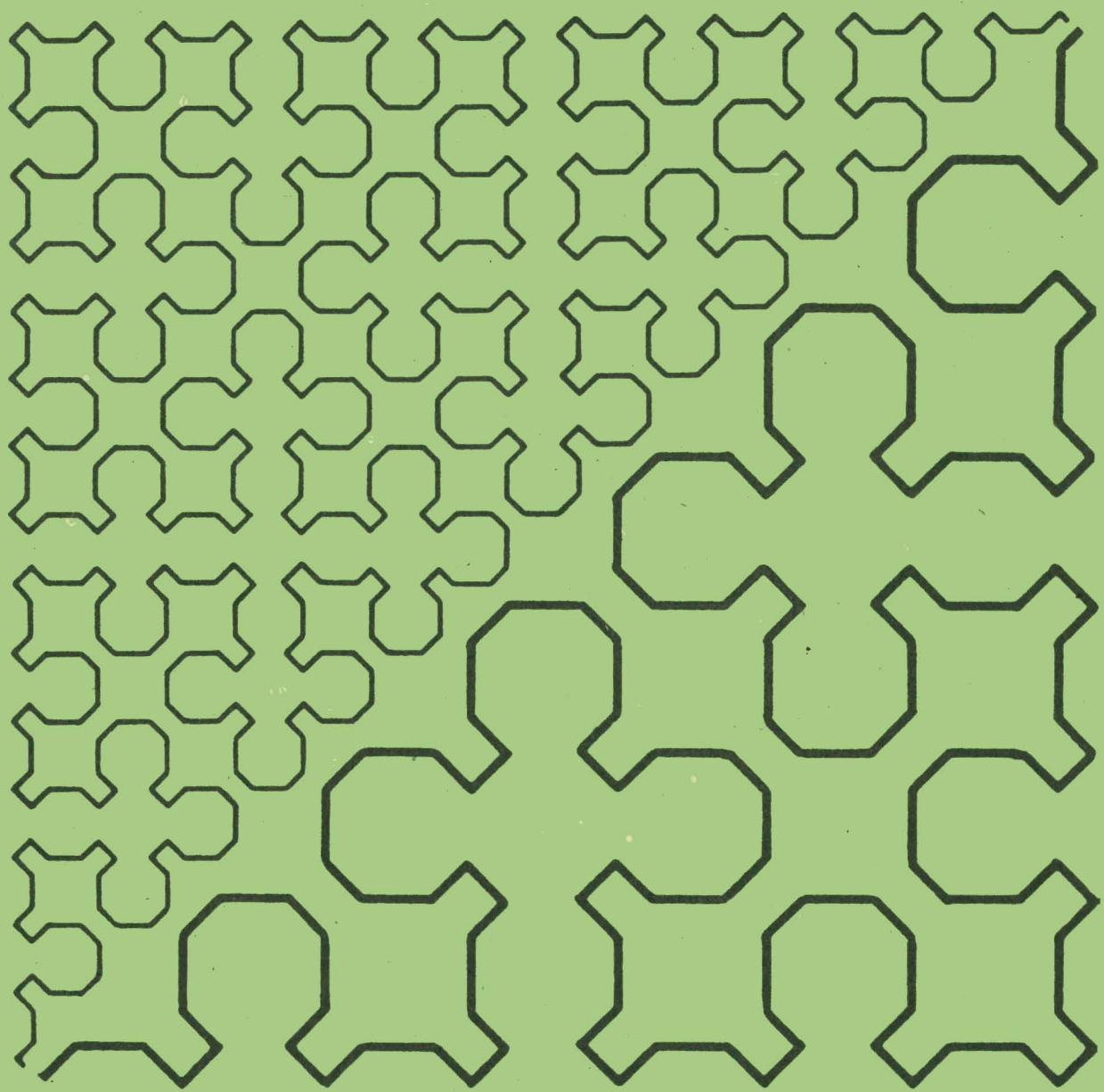
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
20. Jahrgang 1986
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Dozent Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dozent Dr. rer. nat. H. Schulze (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: Tultan Pena aus *urcia*, Bukarest (S. 100); Universitätsbildstelle Halle, M. Hinrichsdorff (2×, S. 102); aus *Normat*, Upsala, Schweden (S. 110); Lothar Otto (2×), *Eulenspiegel*, Berlin; Diens Molnar, Budapest; Frank Lude, *E + S.*, Berlin (S. 112); E. Holz, Paris (S. 114); B. Henniger, *Eulenspiegel*, Berlin (III. U.-Seite)
Titelblatt: W. Fahr nach Vorlagen des polnischen Mathematikers W. Sièrpiński (1882 bis 1969)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 16. Juni 1986
Auslieferungstermin: 16. Oktober 1986

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

97 Pseudozufallszahlen Teil 1 [9][1])
Prof. Dr. L. Bittner/Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald

100 Computer – Algorithmus – Algorithmische Sprache, Teil 3 [9]
Akademiemitglied A. P. Jerschow, aus *Quant*, Moskau

102 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Mini-BASIC für *alpha*-Leser [6]
Dr. L. Flade/Dr. M. Pruzina, Sektion Mathematik der *Martin-Luther*-Universität Halle

104 Der physikalische Glaskasten [8]
Dr. D. Wrobel, aus *technikus*, Berlin

106 Eine Aufgabe von Akademiemitglied Prof. Dr. A. N. Kolmogorow [9]
Sektion Mathematik der Staatlichen Lomonossow-Universität Moskau

107 XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Aufgaben für Klassen 10 und 11/12

108 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
speziell für Klasse 5/7
Ein Besuch in der Knobelwerkstatt
Teil 7: Hölzchen-Knobeleien [5]
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der *Karl-Marx*-Universität Leipzig

110 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik und aus Naturwissenschaft und Technik

113 Wir arbeiten mit Resten, Teil 2 [6]
Dr. C.-P. Helmholz, Sektion Mathematik der *Karl-Marx*-Universität Leipzig

114 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

116 Lösungen [5]

III. *U.-Seite:* Schach – beliebt bei jung und alt [5]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin

IV. *U.-Seite:* Logische Kitty [5]
Graphik, entnommen aus *Factor*, London

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Pseudo-zufallszahlen

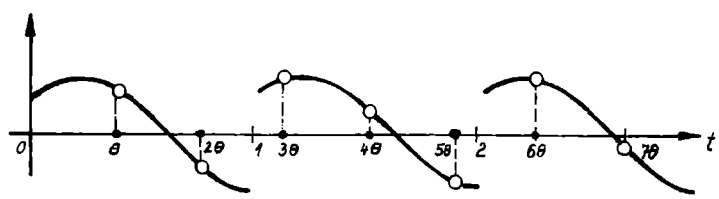
Teil 1

Bei vielen Taschenrechnern und Kleinstcomputern besteht die Möglichkeit, Zahlenfolgen mittels eines „Zufallszahlengenerators" (Kommando „RAND") in einer für den uneingeweihten Benutzer „zufällig" erscheinenden Weise zu erzeugen. Derartige „Zufallszahlen" haben z. B. Bedeutung für Computerspiele, es gibt aber auch zahlreiche Anwendungen in der Mathematik und bei technischen Fragestellungen. Einige Probleme, die bei konkreten praktischen Aufgaben aufgetreten sind, wurden 1984 in einem Kurs der Mathematischen Schülergesellschaft an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald behandelt und sollen hier mitgeteilt werden.

1. Periodische Vorgänge

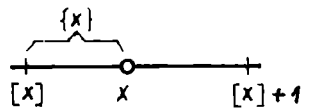
In der Elektrotechnik und in der Elektronik gibt es viele Vorgänge, die sich nach einem bestimmten Zeitabschnitt wiederholen. Man nennt einen solchen Zeitabschnitt *Periode*. Durch eine passende Wahl der Zeiteinheit kann die Periode gleich 1 gesetzt werden. Es bezeichne t die Zeit und $f(t)$ eine zu untersuchende, u. U. formelmäßig nicht bekannte Meßgröße zum Zeitpunkt t. Nun sei eine positive Zahl θ gewählt. Zu den Zeitpunkten $\theta, 2\theta, 3\theta, \ldots$ werde die Meßgröße (Funktion) $f(\bullet)$ „abgetastet", d. h. $f(\theta), f(2\theta), f(3\theta), \ldots$ werde registriert und $f(\bullet)$ daraus „aufgebaut". Es ist auch möglich, daß man sich für bestimmte Eigenschaften, Werte der Meßgröße interessiert, z. B. für die Vorzeichen von $f(\theta), f(2\theta), f(3\theta), \ldots$, für das Integral, den Maximalwert u. a., und dann vor dem Problem steht, diese Werte aus den Abtastergebnissen zu ermitteln. (Bild 1)

Bild 1



Zu jeder reellen Zahl x wollen wir unter dem *Ganzteil* $[x]$ die größte ganze Zahl verstehen, die nicht größer als x ist, d. h. es sei $[x]$ ganz, $[x] \leqq x$, $x < [x] + 1$.

Bild 2



Als *Restteil* $\{x\}$ zu x wird die Zahl $x - [x]$ bezeichnet. (Bild 2)

Da wir die Periode 1 voraussetzen, gehört zu den Zeitpunkten $k\theta$ und $\{k\theta\}$ derselbe Meßwert, d. h. es ist $f(k\theta) = f(\{k\theta\})$ für alle $k \in N$. Wegen $0 \leqq \{k\theta\} < 1$ kann man sich folglich beim Studium der Werte $f(k\theta)$ auf das Intervall $[0,1[$ beschränken und braucht nur die Zeitpunkte $\{k\theta\}$ zu betrachten.

Die erste Frage betrifft die Wahl von θ. *Welche Punkte des Intervalles* $[0,1[$ *sind die Zahlen* $\{k\theta\}$ *für* $k = 1, 2, \ldots$? *Füllen sie das ganze Intervall aus? Liegen die* $\{k\theta\}$ *gleichmäßig verteilt, oder liegen sie an manchen Stellen dichter und an anderen dünner? Gibt es gar „weiße Flecken" in Gestalt von kleinen Intervallen, in welche keine Zahlen* $\{k\theta\}$ *fallen?*

2. Untersuchung der Weyl-Folge

Die Zahlenfolge mit den Elementen $x_k = \{k\theta\}$ werde *Weyl-Folge* genannt – nach dem Mathematiker Hermann Weyl (1885 bis 1955).

Ist θ eine natürliche Zahl, also $\theta \in N$, so ist stets $x_k = 0$ und die Folge ausgeartet, sie nimmt nur den Wert 0 an. Das Verhalten der Weyl-Folge wird wesentlich von der Wahl der Zahl θ abhängen!

Zunächst soll der Fall betrachtet werden, daß θ eine positive rationale Zahl ist. In diesem Fall existieren $p, q \in N$, so daß θ in der Form $\theta = \frac{p}{q}$ dargestellt werden kann.

Die Zahlen kp können (in eindeutiger Weise) als $kp = m_k q + r_k$ mit $m_k, r_k \in N$, $0 \leqq r_k < q$ geschrieben werden. Die r_k sind dabei gerade die Reste bei der Division von kp durch q. Man beachte

$$m_k = \left[\frac{kp}{q}\right] \text{ und } \frac{r_k}{q} = \left\{\frac{kp}{q}\right\} = \{k\theta\},\ k \in N.$$

Zur Untersuchung der Folge $(\{k\theta\})$ ist es nützlich, die Reste r_k zu betrachten. Ist z. B. $p = 3$ und $q = 5$, so findet man $r_1 = 3, r_2 = 1, r_3 = 4, r_4 = 2, r_5 = 0, r_6 = 3, r_7 = 1, r_8 = 4, r_9 = 2, r_{10} = 0, \ldots$

Satz 1: Es gibt eine kleinste natürliche Zahl w, *die (kleinste) Periode der* r_k, *so daß* $w \leqq q$ *und* $r_{k+w} = r_k$ *für alle* $k \in N$ *ist.*

Beweis: Da die r_k nur die Werte 0, 1, ..., $q - 1$ annehmen können, muß es wenigstens ein Paar r_k, r_l mit $r_k = r_l$ und $k \neq l$ geben. Sei r_j die erste Zahl, die mit einem r_i aus der Reihe $r_1, \ldots, r_{j-1}$ übereinstimmt, d. h. $r_i = r_j$ und $r_1, \ldots, r_{j-1}$ sind paarweise verschieden.

Dann muß $j - 1 \leqq q$ sein. Wegen $ip = m_i q + r_i$, $jp = m_j q + r_j$ mit $m_i, m_j \in N$ folgt

$$(i+1)p = m_i q + r_i + p = \left(m_i + \left[\frac{r_i + p}{q}\right]\right)q + \left\{\frac{r_i + p}{q}\right\} = m_{i+1} q + r_{i+1} \text{ sowie}$$

$$(j+1)p = \left(m_j + \left[\frac{r_i + p}{q}\right]\right)q + \left\{\frac{r_i + p}{q}\right\} = m_{j+1} q + r_{j+1}$$

und daher $r_{i+1} = r_{j+1}$ und mithin auch $r_{i+2} = r_{j+2}, \ldots$

Die Annahme $i > 1$ führt analog zu $r_{i-1} = r_{j-1}$, was der Definition von r_j widerspricht. Also ist $i = 1$. Sei $w = j - 1$. Dann sind $r_1, \ldots, r_w$ paarweise verschieden und die Zahlen $r_{w+1}, \ldots, r_{2w}$ bzw. $r_{2w+1}, \ldots, r_{3w}$ usw. bilden Wiederholungen von $r_1, \ldots, r_w$.

Satz 2: Wenn p *und* q *teilerfremd sind, so ist* $w = q$, *und es ist (abgesehen von der Reihenfolge)* $\{r_1, \ldots, r_w\} = \{1, \ldots, q-1, 0\}$. *Die Zahlen* $\{\theta\}, \{2\theta\}, \ldots$ *stimmen (bis auf Umordnungen) mit* $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}, 0$ *überein.*

Beweis: Es ist $p = m_1 q + r_1$ und $(w+1)p = m_{w+1} q + r_{w+1}$. Wegen $r_1 = r_{w+1}$ folgt $(m_{w+1} - m_1)q = wp$, und daher ist q Teiler von pw. Weil p, q teilerfremd sind, kann q nur ein Teiler von w sein. Andererseits ist $0 < w \leqq q$, hieraus folgt $w = q$. Da q Reste $r_1, \ldots, r_q$ auftreten müssen und diese paarweise verschieden sind, kommen die q Werte 0, 1, ..., $q - 1$ auch tatsächlich als Reste vor.

Man überlege sich an einem Beispiel, daß $w = q$ *nicht* gelten muß, falls p und q nicht teilerfremd sind. Man kann folgende Aussage beweisen: *Wenn* t *den größten gemeinsamen Teiler von* p *und* q (Symbol: $\mathrm{ggT}(p, q)$) *bezeichnet, so ist* $w = \frac{q}{t}$ *die Länge der Periode der Folge* $r_1, r_2, \ldots$

Im Fall $\theta = \frac{p}{q} \in R$ werden also durch die Weyl-Folge höchstens die Zahlen $0, \frac{1}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}$ angenommen.

Wir führen einen neuen Begriff ein. Es seien $\alpha, \beta \in P$ mit $0 \leqq \alpha < \beta < 1$. Unter $A_n([\alpha, \beta], \theta)$ wollen wir die *Anzahl* derjenigen x_k aus der Reihe $x_1 = \{\theta\}, \ldots, x_n = \{n\theta\}$ verstehen, die in $[\alpha, \beta]$ liegen. Wenn θ festgehalten wird, soll dafür auch $A_n([\alpha, \beta])$ geschrieben werden.

Sind p, q teilerfremde natürliche Zahlen und $\theta = \frac{p}{q}$, so bezeichnet $A_q([\alpha, \beta])$ im Sinne der obigen Definition also die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe $0, \frac{1}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}$, die in $[\alpha, \beta]$ liegen. (Bild 3)

Man beweist, daß dann

$A_{nq}([\alpha, \beta]) = nA_q([\alpha, \beta])$ sowie

$A_{nq+r}([\alpha, \beta]) = nA_q([\alpha, \beta]) + A_r([\alpha, \beta])$

für $n = 1, 2, \ldots$ und $0 \leqq r < q$, $r \in N$, ist.

Es sei nun M eine große natürliche Zahl, die wir uns wieder darstellen als $M = nq + r$ mit $0 \leqq r < q$. Dann ist

$$\frac{A_M([\alpha, \beta])}{M} = \frac{nA_q([\alpha, \beta]) + A_r([\alpha, \beta])}{nq + r} = \frac{A_q([\alpha, \beta]) + \frac{1}{n}A_r([\alpha, \beta])}{q + \frac{r}{n}}$$

Bei großen Zahlen M wird auch n groß, so daß $\frac{1}{n}$ beliebig klein gemacht werden kann

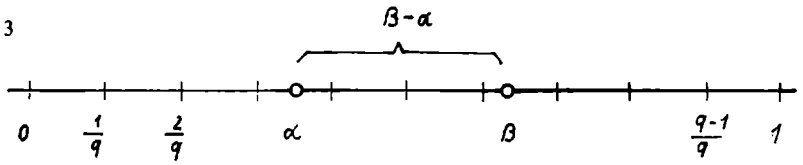
durch die Wahl von genügend großen M. Da $A_r([\alpha,\beta]) \leqq q$ ist, unterscheidet sich $\frac{A_M([\alpha,\beta])}{M}$ für (hinreichend) große M (beliebig) wenig von $\frac{A_q([\alpha,\beta])}{q}$

Benutzt man das Symbol lim für den *Grenzwert*, so kann dafür abkürzend

$$\lim_{M\to\infty} \frac{A_M([\alpha,\beta])}{M} = \frac{A_q([\alpha,\beta])}{q}$$

geschrieben werden.

Bild 3



Wir zählen die Intervalle $\left[\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right]$, die ganz in $[\alpha,\beta]$ liegen, und die Intervalle $\left[\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right]$, welche mit $[\alpha,\beta]$ wenigstens einen Punkt gemeinsam haben, und finden

$$(A_q([\alpha,\beta]) - 1)\frac{1}{q} \leqq \beta - \alpha$$

$$(A_q([\alpha,\beta]) + 1)\frac{1}{q} \geqq \beta - \alpha.$$

Hieraus folgt

$$\beta - \alpha - \frac{1}{q} \leqq \frac{A_q([\alpha,\beta])}{q} \leqq \beta - \alpha + \frac{1}{q}.$$

Dafür können wir auch schreiben

$$\beta - \alpha - \frac{1}{q} \leqq \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M([\alpha,\beta]) \leqq \beta - \alpha + \frac{1}{q}$$

Definition: Wir nennen eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ *gleichmäßig verteilt* auf $[0,1[$, wenn für beliebige α,β mit $0 \leqq \alpha < \beta < 1$ die Beziehung $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M([\alpha,\beta]) = \beta - \alpha$ gilt.

Das bedeutet: Eine Folge (x_n) ist gleichmäßig verteilt, wenn mit wachsendem M die relative Anzahl derjenigen Elemente aus der Menge $\{x_1, \ldots, x_M\}$, die in $[\alpha,\beta]$ liegen, sich dem Wert $\beta - \alpha$ „nähert".

Ist $\theta = \frac{p}{q} \in R$ und hierbei q „groß", so wird $\frac{1}{q}$ klein. Die Folge der $x_k = \left\{k\frac{p}{q}\right\}$ ist somit für „große" q „fast" gleichmäßig verteilt.

Betrachten wir nun den Fall einer irrationalen Zahl $\theta > 0$ (d.h. θ werde durch einen unendlichen, nichtperiodischen Dezimalbruch dargestellt, bzw. es existiere keine Darstellung $\theta = \frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p, q). Es sind sicher einige spezielle irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π, $\sin 15°$, e bekannt; man weiß, daß es „viel mehr" irrationale Zahlen als rationale Zahlen gibt.

Satz 3: Wenn θ irrational ist ($\theta > 0$), so sind alle Elemente der Weyl-Folge $x_k = \{k\theta\}$ paarweise verschieden.

Beweis: Angenommen, es wäre $x_k = x_l$ für $k < l$. Dann gibt es $m_k, m_l \in N$, so daß $x_k = k\theta - m_k$ und $x_l = l\theta - m_l$ ist.

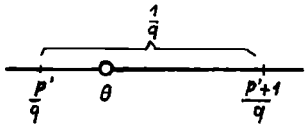
Hieraus folgt

$$(l-k)\theta = m_l - m_k \text{ und } \theta = \frac{m_l - m_k}{l-k}.$$

Damit wäre aber θ rational, was unserer Voraussetzung widerspricht.

In Computern lassen sich keine irrationalen Zahlen und nur endlich viele rationale Zahlen darstellen. Irrationale Zahlen können durch rationale Zahlen angenähert werden. Sei wieder θ eine positive irrationale Zahl und $q \in N$. Dann existiert ein $p' \in N$, so daß $\frac{p'}{q} < \theta < \frac{p'+1}{q}$ ist (siehe Bild 4).

Bild 4



Man setze $p = p'$, falls $\theta - \frac{p'}{q} < \frac{1}{2q}$ ist, und $p = p' + 1$ sonst.

Dann gilt: $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q}$.

Es bezeichne Q eine obere Schranke für die zugelassenen Nenner q. Wir betrachten nun alle rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $1 \leqq q \leqq Q$ und $p = 0, 1, \ldots$ und suchen darunter eine solche, die θ möglichst gut approximiert, d.h. für die $\left|\theta - \frac{p}{q}\right|$ möglichst klein ist. Aus unseren Überlegungen folgt der

Satz 4: Unter den Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $1 \leqq q \leqq Q$ und $p = 0, 1, 2, \ldots$ gibt es stets eine solche Zahl $\frac{p}{q}$, für die $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2Q}$ gilt.

Der Unterschied zwischen θ und $\frac{p}{q}$ kann durch hinreichend groß gewähltes Q vorgegeben klein gemacht werden. Insbesondere existiert zu jedem $n \in N$ ein $\frac{p_n}{q_n}$ mit $\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{n}$.

Das bedeutet: $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \theta$.

Satz 5: Es seien θ eine positive irrationale Zahl und p_n, q_n natürliche Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \theta$. Dann können die Nenner q_n nicht beschränkt sein, es gibt also zu jeder Zahl $z \in P$ einen Index n_z, so daß $q_n \geqq z$ für alle $n \geqq n_z$ ist.

Beweis: Angenommen, es gäbe ein $Q \in N$ und unendlich viele $q_n \leqq Q$, etwa $q_{n_1}, q_{n_2}, \ldots \leqq Q$. Um die Bezeichnung zu vereinfachen, werde q_k statt q_{n_k} geschrieben. Für genügend große k ist sicher

$\left|\frac{p_k}{q_k} - \theta\right| < 1$ und daher $p_k - \theta q_k < q_k$,

also $p_k < (\theta+1)q_k \leqq (\theta+1)Q$.

Man setze $P' = [(\theta+1)Q]$, dann muß $p_k \in \{0, 1, \ldots, P'\}$ sein. Folglich existieren $q^* \in \{1, \ldots, Q\}$ bzw. $p^* \in \{0, \ldots, P'\}$, so daß für unendlich viele Indizes k stets $q_k = q^*$ und $p_k = p^*$ ist. Mithin ist $\theta = \frac{p^*}{q^*}$, also $\theta \in R$. Das widerspricht der Voraussetzung der Irrationalität von θ.

Es sei θ irrational und $\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$.

Vorher wurde

$$\beta - \alpha - \frac{1}{q_n} \leqq \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M\left([\alpha,\beta], \frac{p_n}{q_n}\right) \leqq \beta - \alpha + \frac{1}{q_n} \text{ hergeleitet.}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0$ finden wir

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M\left([\alpha,\beta], \frac{p_n}{q_n}\right) = \beta - \alpha.$$

Diese Aussage läßt vermuten, daß die Beziehung

$$\lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{M} A_M\left([\alpha,\beta], \frac{p_n}{q_n}\right) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M([\alpha,\beta], \theta) = \beta - \alpha \text{ besteht.}$$

Diese durchaus nicht offensichtliche Gleichung ist in der Tat richtig, sie wurde 1914 in einer allgemeineren Fassung von H. Weyl bewiesen.

Definition: Sei $(x_i)_{i=1,2,\ldots}$ eine Zahlenfolge. Es bezeichne wieder $A_M([\alpha,\beta])$ die Anzahl derjenigen Folgeglieder $x_1, \ldots, x_M$, die in $[\alpha,\beta]$ liegen. Dann heißt $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M([\alpha,\beta])$ *Dichte der Folge (x_i) im Intervall $[\alpha,\beta]$*. Ist speziell $x_k = \{k\theta\}$ die Weyl-Folge zu $\theta \in P$, so heißt $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} A_M([\alpha,\beta])$ die *Dichte der Weyl-Folge*.

Wir können das Resultat (Spezialfall) von H. Weyl so formulieren:

Satz 6: Die Dichte der Weyl-Folge $\{\theta\}, \{2\theta\}, \ldots, \{k\theta\}, \ldots$ in einem beliebigen Intervall $[\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$ ist gleich der Intervallänge $\beta - \alpha$, falls θ eine irrationale Zahl ist.

Definition: Eine beliebige Zahlenfolge $x_1, x_2, \ldots$ aus $[0,1]$ heißt *gleichmäßig verteilt*, wenn für jedes Intervall $[\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$ die zugehörige Dichte gleich der Intervallänge ist.

Damit gilt also

Satz 7: Die Weyl-Folge $\{\theta\}, \{2\theta\}, \ldots, \{k\theta\}, \ldots$ zu einer Irrationalzahl θ ist gleichmäßig verteilt.

Dieser Satz beantwortet also die eingangs gestellte Frage nach weißen Flecken in $[0,1]$. Es gibt keine, wenn θ irrational ist! In jedem Teilintervall $[\alpha,\beta]$ positiver Länge liegt wenigstens ein Element der Folge; man sagt, die Folge *liegt dicht* in $[0,1]$.

3. Stückweise konstante periodische Funktionen – eine Anwendung

Es liege wieder die Periode 1 vor. Das Intervall $[0,1[$ zerfalle in links abgeschlossene, durchschnittsfremde Teilintervalle $I_1, \ldots, I_r$ (der Längen $l_1, \ldots, l_r$), über denen eine Funktion f die Werte $w_1, \ldots, w_r$ an-

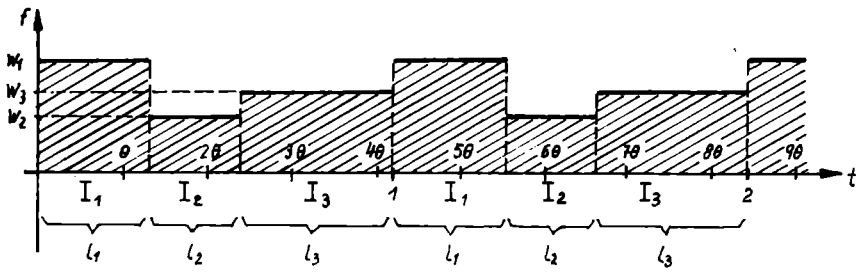


Bild 5

nimmt. Häufig ist nach dem Wert $l_1w_1 + \ldots + l_rw_r$ gefragt, der dem Flächeninhalt der schraffierten Figur in Bild 5 entspricht und mit dem Integral $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ übereinstimmt. Wie kann diese Größe bestimmt werden, wenn die Intervallängen $l_1, \ldots, l_r$ unbekannt sind?

Dazu seien die x_k Elemente einer auf $[0,1]$ gleichmäßig verteilten Zahlenfolge, z. B. der Weyl-Folge $x_k = \{k\theta\}$ mit irrationalem θ. An den Taststellen $x_1, x_2, \ldots$ werden die Werte $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\ldots$ gemessen. Es sei daran erinnert, daß $A_M(\mathrm{I}_j)$ die Anzahl der $x_1, \ldots, x_M$ bezeichnet, die in I_j liegen. Für große M ist daher $\frac{1}{M}A_M(\mathrm{I}_j) \approx l_j$,

genauer: es ist $\lim\limits_{M\to\infty}\frac{1}{M}A_M(\mathrm{I}_j) = l_j$.

Durch Aufsummation erhalten wir

$$l_1w_1 + \ldots + l_rw_r \approx \frac{1}{M}(w_1A_M(\mathrm{I}_1) + \ldots + w_rA_M(\mathrm{I}_r)) = \frac{1}{M}(f(x_1) + \ldots + f(x_M)).$$

Genau genommen, gilt

$$l_1w_1 + \ldots + l_rw_r = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}(f(x_1) + \ldots + f(x_M)).$$

Für die Weyl-Folge ist $f(x_k) = f(k\theta)$ und daher

$$\frac{1}{M}(f(\theta) + f(2\theta) + \ldots + f(M\theta)) \approx l_1w_1 + l_2w_2 + \ldots + l_rw_r.$$

Diese Beziehung wird um so besser erfüllt, je größer M ist!

In der Elektronik ist oft von den Meßgrößen bekannt, daß diese nur die Werte 0 und 1 (und eventuell -1) annehmen können. In diesem Fall lassen sich zur Summation sehr effektiv (*Vor-* und *Rückwärts-*) *Zähler* benutzen. Zum Schluß sei vermerkt, daß auch dann

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}(f(x_1) + \ldots + f(x_M))$$

gilt,

wenn f eine beschränkte (Riemann-) integrierbare Funktion ist. Diese Formel erlaubt, das Integral (näherungsweise) zu berechnen, wenn zu f keine Stammfunktion bekannt ist.

4. Aufgaben

a) Man zeige: $\{\{x\}\} = \{x\}$ *und* $\{x + g\} = \{x\}$
für g ganz und $x \in P$.

b) Sei $\theta \in R$, $\theta > 0$ und n eine ganze Zahl. Wann gilt

$n\{\theta\} = \{n\theta\}$
$n\{\theta\} \geqq \{n\theta\}$
$[n\theta] \geqq n[\theta]$, $\{n\theta\} = \{n\{\theta\}\}$?

c) Man zeige, daß für die Glieder $x_k = \{k\theta\}$ der Weyl-Folge die *Rekursionsbeziehung* $x_{k+1} = \{x_k + \theta\}$, $k = 2, 3, \ldots$ gilt.

d) Es seien a, $\theta \in P$, $\theta > 0$ und $y_k = \{a + k\theta\}$ für $k = 1, 2, \ldots$
Vergleiche mit der Weyl-Folge $x_k = \{k\theta\}$ und zeige:

(I) Wenn $\theta = \frac{p}{q}$ ein nichtkürzbarer Bruch ist, so ist die Folge der y_k periodisch mit der Periode q. Wenn θ irrational ist, so gilt $y_k \neq y_l$ für $k \neq l$.

(II) Wenn sich a, a' und θ, θ' jeweils nur um ganze Zahlen g bzw. h unterscheiden, so ist $\{a + k\theta\} = \{a' + k\theta'\}$.

(III) Es gilt die Rekursionsbeziehung $y_{k+1} = \{y_k + \theta\}$.

(IV) Man berechne $y_1, \ldots, y_6$ für $a = 1{,}5$ und $\theta = 2{,}71$.

e) Gegeben sei ein Winkel $\alpha = \theta 2\pi$, durch dessen Schenkel auf dem Einheitskreis um die Winkelspitze die Punkte P_0, P_1 ausgeschnitten werden. Die Punkte P_2, P_3, ..., P_n, ... zusammen mit P_0 mögen dementsprechend zu den Winkeln 2α, 3α, ..., $n\alpha$, ... gehören. Wann liegen diese Punkte dicht auf dem Einheitskreis?

f) Stelle die Funktionen $y = x$, $y = [x]$, $y = \{x\}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \{\sqrt{x}\}$ und die Werte der Folge $y_k = \{\sqrt{k}\}$ grafisch in einem x-y-Koordinatensystem dar! Zeige, daß die Folge dieser y_k in $[0,1]$ dicht liegt!

Hinweis: Ist $[\alpha, \beta]$ irgendein Teilintervall von $[0,1]$ mit $\alpha < \beta$, so gibt es natürliche Zahlen n, so daß $(\beta + n)^2 - (\alpha + n)^2 > 1$ ist. Dazu braucht nur $n \geqq \frac{1}{2(\beta - \alpha)}$ gewählt zu werden! Folglich existiert $k \in N$, so daß $(\alpha + n)^2 \leqq k < (\beta + n)^2$ und daher $\alpha + n \leqq \sqrt{k} < \beta + n$ ist. Hieraus ergibt sich $[\sqrt{k}] = n$ und $\alpha \leqq \{\sqrt{k}\} < \beta$.

g) Berechne zu $\theta = \frac{3}{5}$ die Weyl-Folge.
Gib die Anzahlen
$A_i\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right)$ für $i = 1, \ldots, 9$ an!

Lösung: Es ist $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = \frac{4}{5}$, $x_4 = \frac{2}{5}$, $x_5 = 0$, $x_6 = \frac{3}{5}$, $x_7 = \frac{1}{5}$, $x_8 = \frac{4}{5}$, $x_9 = \frac{2}{5}$ und daher

$A_i\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) = 0$ für $i = 1, 2, 3$,

$A_i\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) = 1$ für $i = 4, \ldots, 8$,

$A_9\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) = 2$.

h) Eine periodische, stückweise konstante Meßgröße der Periode 1 nehme über den Teilintervallen I_1, I_2 der Längen l_1, l_2 die Werte w_1, w_2 an (siehe Bild 6). An den Stellen θ, 2θ, ... wird $f(\theta)$, $f(2\theta)$, ... gemessen. Der Tastabstand θ sei ein nichtkürzbarer Bruch $\theta = \frac{p}{q}$ mit „großem" Nenner q. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $l_1w_1 + l_2w_2$ und (dem Grenzwert von)

$$\frac{1}{M}(f(\theta) + f(2\theta) + \ldots + f(M\theta))$$

für große M (für $M \to \infty$)?

Hinweis: Es ist bekanntlich

$$l_i - \frac{1}{q} \leqq \lim_{M\to\infty}\frac{A_M(\mathrm{I}_i)}{M} \leqq l_i + \frac{1}{q}, \quad i = 1, 2.$$

Das bedeutet

$$\lim_{M\to\infty}\frac{A_M(\mathrm{I}_i)}{M} - \frac{1}{q} \leqq l_i \leqq \lim_{M\to\infty}\frac{A_m(\mathrm{I}_i)}{M} + \frac{1}{q}.$$

Hieraus erhält man

$$w_i \lim_{M\to\infty}\frac{A_M(\mathrm{I}_i)}{M} - \frac{|w_i|}{q} \leqq l_iw_i \leqq w_i \lim_{M\to\infty}\frac{A_M(\mathrm{I}_i)}{M} + \frac{|w_i|}{q},$$

$i = 1, 2$, und deshalb

$$\lim_{M\to\infty}\frac{w_1A_M(\mathrm{I}_1) + w_2A_M(\mathrm{I}_2)}{M} - \frac{|w_1| + |w_2|}{q} \leqq l_1w_1 + l_2w_2 \leqq \lim_{M\to\infty}\frac{w_1A_M(\mathrm{I}_1) + w_2A_M(\mathrm{I}_2)}{M} + \frac{|w_1| + |w_2|}{q}$$ oder

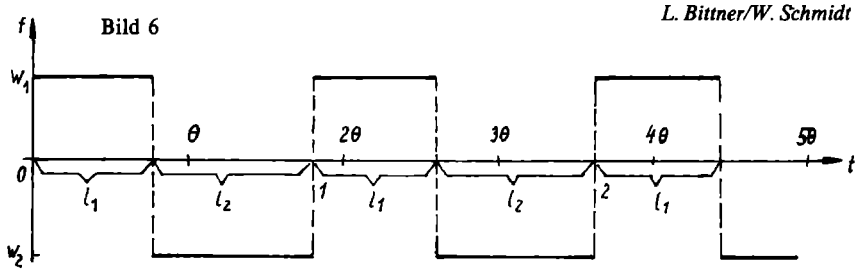
$$\lim_{M\to\infty}\frac{f(\theta) + \ldots + f(M\theta)}{M} - \frac{|w_1| + |w_2|}{q} \leqq l_1w_1 + l_2w_2 \leqq \lim_{M\to\infty}\frac{f(\theta) + \ldots + f(M\theta)}{M} + \frac{|w_1| + |w_2|}{q}.$$

Bei der praktischen Anwendung dieser Abschätzung könnte überall der lim für große M weggelassen werden! Für $w_1 = 1$, $w_2 = 0$ ist der Unterschied zwischen den interessierenden Größen dann $\leqq \frac{1}{q}$.

i) Man berechne das Integral $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ nach Abschnitt 3 mit Hilfe des Taschenrechners, indem man $\theta = \pi$ verwendet!

L. Bittner/W. Schmidt

Bild 6



Computer – Algorithmus – Algorithmische Sprache

Teil 3

Eine Sprache, die ein Computer verstehen soll, darf nur aus einer genau festgelegten Menge von Wörtern und Zeichen bestehen, die nur nach feststehenden Regeln verwendet werden dürfen. Mit solch einer Sprache müssen sich die im Teil 2 dieses Beitrages angegebenen Tätigkeiten beschreiben lassen, andererseits darf ein mit ihrer Hilfe formulierter Algorithmus nicht mehr Tätigkeiten fordern, als der jeweilige Computer ausführen kann.
Die im folgenden aufgeschriebenen Algorithmen sollen einen Eindruck von einer algorithmischen Sprache vermitteln. Diese einfache Sprache reicht zunächst aus, einige Grundprinzipien zu verstehen. Für die tatsächliche Arbeit mit einem Computer sind spezielle Programmiersprachen (z. B. PL-1, PASCAL, BASIC) geschaffen worden, die der Progammierer exakt beherrschen muß.

▲1▲ Seht euch die Algorithmen genau an, und untersucht, wie sie funktionieren! Spielt dabei die Rolle des Computers, und führt den jeweiligen Algorithmus für die gegebenen Daten aus! Wenn das nicht sofort gelingt, lest die nachfolgenden Erläuterungen, und kehrt dann zu den Beispielen zurück!

Lösen quadratischer Gleichungen $ax + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

LÖSEN QUADRATISCHER GLEICHUNGEN
Eingabe a, b, c
Ausgabe C, x1, x2

Beginn
  $d := b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
  wenn $d < 0$
  dann C := „KEINE LOESUNG“
  sonst C := „LOESUNG“
    wenn $d = 0$
    dann $x1 := -b/2/a$
      $x2 := x1$
    sonst $x1 := (-b + \sqrt{d})/2/a$
      $x2 := (-b - \sqrt{d})/2/a$
    Verzweigungsende
  Verzweigungsende
Ende

Hinweis: Das Zeichen / bedeutet „geteilt durch“.

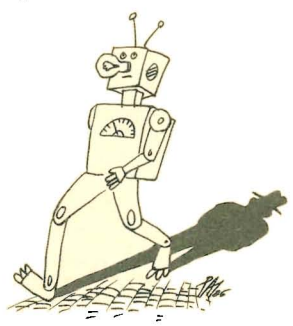
▲2▲ Führt diesen Algorithmus für die folgenden Zahlentripel $(a; b; c)$ aus:
(1; 2; 1), (2; 3; 7), (0; 4; 2)!

Der Roboter auf dem Schachbrett

In den folgenden Beispielen bewegt sich ein kleiner Roboter über ein Schachbrett. Mit $(x; y)$ bezeichnen wir die Koordinaten seines Standortes. Beispielsweise beschreiben wir das Feld e2 durch (5; 2) und das Feld h5 durch (8; 5).
Ein Schritt nach oben erhöht y um 1, ein Schritt nach rechts erhöht x um 1.

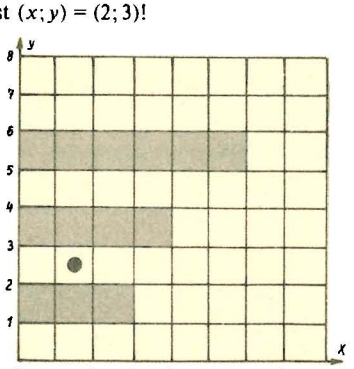
WANDERROBOTER
Eingabe x, y
Ausgabe C

Beginn
  solange $x \leqq 7$
  Zyklenbeginn
    Schritt nach rechts
    $x := x + 1$
  Zyklenende
  solange $y \leqq 7$
  Zyklenbeginn
    Schritt nach oben
    $y := y + 1$
  Zyklenende
  C := „ANGEKOMMEN“
Ende



▲3▲ Wendet den Algorithmus auf die im Bild 1 dargestellte Situation an!
Hier ist $(x; y) = (2; 3)$!

Bild 1

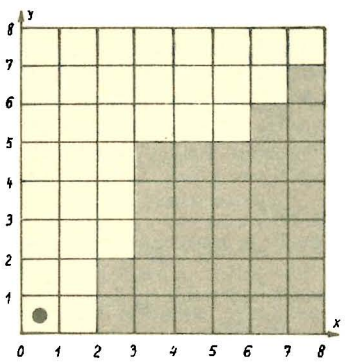


KLETTERROBOTER
Eingabe y
Ausgabe C

Beginn
  solange $y \leqq 7$
  Zyklenbeginn
  solange rechts keine Felswand
  Zyklenbeginn
    Schritt nach rechts
    Zyklenende
    Schritt nach oben
    $y := y + 1$
  Zyklenende
  C := „HURRA, ICH BIN OBEN!“
Ende

▲4▲ Wendet diesen Algorithmus auf die im Bild 2 dargestellte Situation an!

Bild 2



Teilbarkeit

REST BEI DIVISION
Eingabe x, y
Ausgabe C, r

Beginn
  C := „DER REST IST“
  solange $x > y$
  Zyklenbeginn
    $x := x - y$
  Zyklenende
  $r := x$
Ende

▲5▲ Wendet den Algorithmus auf folgende Zahlenpaare $(x; y)$ an!
(14; 5), (100 000; 3), (27; 0)

PRIMZAHLTEST
Eingabe x
Ausgabe E

Beginn
  E := „PRIMZAHL“
  $y := 2$
  solange $y \leqq \sqrt{x}$
  Zyklenbeginn
    REST BEI DIVISION
    wenn $r = 0$
    dann E := „ZUSAMMENGESETZTE ZAHL“
      $y := x + 1$
    sonst $y := y + 1$
    Verzweigungsende
  Zyklenende
Ende

▲6▲ Wendet den PRIMZAHLTEST auf die Zahlen 7, 15 und 49 an!

HINDERNISLAUF-ROBOTER
Eingabe x, y
Ausgabe C, g

Beginn
  solange $y \leq 7$
  Zyklenbeginn
  wenn oben keine Grube
  dann Schritt nach oben
    $y := y + 1$
    $g := y$
  sonst wenn $x \leq 7$
    dann Schritt nach rechts
      $x := x + 1$
    sonst $g := y$
      $y := 8$
    Verzweigungsende
  Verzweigungsende
  Zyklenende
  C := „ICH BIN AUF DER HORIZONTALEN NR."
Ende

Man beachte die Anweisungen $g := y$ und $y := 8$. Sie garantieren einen Ausgang aus dem Zyklus.

▲7▲ Wendet diesen Algorithmus auf die Situation im Bild 1 an, und vergleicht mit dem Algorithmus WANDERROBOTER!

Erläuterungen

Am Anfang der Niederschrift eines Algorithmus steht der KOPF. Dieser beginnt mit dem (in Großbuchstaben geschriebenen) NAMEN des Algorithmus. Nach dem Wort *Eingabe* folgt die Angabe der Variablen, deren Werte man zu Beginn dem Computer mitteilen muß. Der Kopf wird abgeschlossen mit dem Wort *Ausgabe* und der Aufzählung der Variablen, deren Werte mit Hilfe des Algorithmus bestimmt werden sollen. Für Variable, deren Werte Zahlen sind, haben wir kleine Buchstaben benutzt; ein Großbuchstabe zeigt an, daß der Variablen eine Zeichenfolge (ein Text) zugewiesen wird.

Nach dem *Kopf* steht der *Hauptteil* des Programms. Er fängt mit dem Wort *Beginn* an, dann kommen alle *Kommandos*, den Abschluß bildet das Wort *Ende*.

Im Hauptteil des Programms haben wir alle Verzweigungen und Zyklen zusätzlich grafisch hervorgehoben. *Verzweigungen* wurden durch Pfeile gekennzeichnet. Die Niederschrift einer Verzweigung beginnt mit dem Wort *wenn* und endet mit dem Wort *Verzweigungsende*. Nach dem Wort *wenn* steht die *Bedingung*, danach das Wort *dann*, dahinter die erste Folge von *Kommandos*, schließlich das Wort *sonst* und die zweite Folge von *Kommandos*. Wir erinnern uns, daß bei einer Verzweigung das Erfülltsein der Bedingung überprüft und danach entweder die erste Kommandofolge (wenn die Bedingung erfüllt ist) oder die zweite Folge von Kommandos (im entgegengesetzten Fall) ausgeführt wird. Der Computer wählt also die von ihm benötigte Kommandofolge aus. Ist diese ausgeführt, so geht er zum nächstfolgenden Kommando über.

Zyklen haben wir zusätzlich mit grauen Kreisen gekennzeichnet. Jeder Zyklus wird eröffnet durch das Wort *solange* und abgeschlossen durch das Wort *Zyklenende*. Nach *solange* steht die *Zyklenbedingung*, dann das Wort *Zyklenbeginn* und danach die Folge von Kommandos, die im Zyklus zu durchlaufen sind.

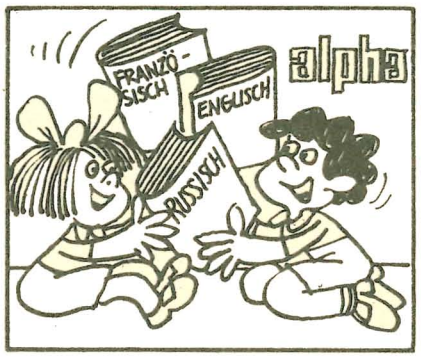
Wir erinnern uns, daß vor dem Abarbeiten eines Zyklus der Computer zunächst das Erfülltsein der Zyklenbedingung überprüft. Ist diese erfüllt, so führt er die Folge der Kommandos des Zyklus aus und überprüft aufs neue das Erfülltsein der Bedingung. Ist diese wiederum erfüllt, so wird der Zyklus nochmals durchlaufen usw. Das geht solange, wie die Bedingung nicht verletzt ist. Anschließend geht der Computer zu dem Kommando über, das auf das Wort *Zyklenende* folgt. Wenn die Bedingung niemals verletzt wird, kommt der Computer aus dem Zyklus nicht heraus, er läuft sich tot. Man muß deshalb stets für einen Ausgang aus dem Zyklus sorgen.

Ein *Hilfsalgorithmus (Unterprogramm)* wird durch seinen Namen aufgerufen. Die Bezeichnungen der in ihm auftretenden Variablen müssen mit den entsprechenden Bezeichnungen im Algorithmus übereinstimmen.

Wenn alle Kommandos des Programms ausgeführt sind (nach dem Wort *Ende*), druckt der Computer der Reihe nach die aktuellen Werte derjenigen Variablen aus, die im Kopf des Algorithmus hinter dem Wort *Ausgabe* stehen (falls sie berechnet wurden).

▲8▲ Schreibt die Algorithmen, die ihr beim Lösen der Aufgabe im Teil 1 gefunden habt, mit Hilfe unserer algorithmischen Sprache auf!

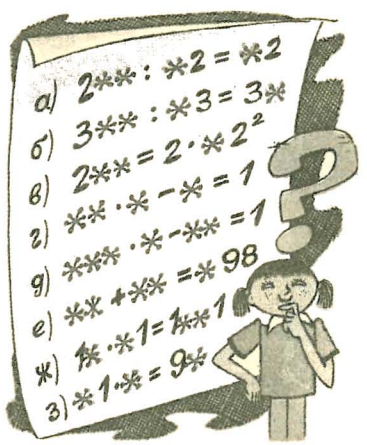
A. P. Jerschow, aus der math. Schülerzeitschrift Quant, Moskau, für alpha bearbeitet von Dr. C.-P. Helmholz, KMU Leipzig



▲1▲ Peter, Paul, Penny, Philip and Patricia are brothers and sisters. Each of them has a savings account.

One evening, they were sitting together, talking about their accounts and complaining how little they had. Suddenly, Penny, who liked to juggle numbers, remarked: "How interesting! Each account shows a different whole number of dollars, and the product of all the numbers is still only 12." Suggest what amounts might be showing in each of the five accounts.

▲2▲ Восстановите продущенные цифры в равенствах на рисунке.



▲3▲ Однажды в Артеке за круглым столом оказались пятеро ребят родом из Москвы, Ленинграда, Горького, Перми и Свердловска – Юра, Толя, Леша, Коля и Витя.

Москвич сидит между свердловчанином и Витей, ленинградец – между Юрой и Толей, а напротив него сидят пермяк и Леша. Коля никогда не был в Ленинграде, Юра бывал в Горьком, но не был в Свердловске, а свердловчанин с Толей регулярно переписываются. Определите, кто из ребят где живет.

▲4▲ On a commandé 1000 bouteilles de jus de pomme pour la fête de l'école. Elles sont livrées en caisses de 12 bouteilles, par une petite voiture qui peut transporter 15 caisses à la fois au maximum.

Combien faudra-t-il de voyages à la petite voiture pour transporter les 1000 bouteilles commandées?

ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser

Die stürmische Entwicklung und breite Anwendung informationsverarbeitender Maschinen ist charakteristisch für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt unserer Zeit. Computer steuern Produktionsprozesse, stellen Fahrkarten aus, berechnen den Kurs von Raumschiffen ....
Neben Großcomputern dringen vor allem Klein- und Bürocomputer immer mehr in unseren Alltag ein und helfen den Menschen, sich von stereotypen geistigen Arbeiten zu befreien.

Seit März 1985 ist an der Sektion Mathematik der *Martin-Luther*-Universität Halle ein Computerkabinett mit Kleincomputern des Typs KC 85/1 eingerichtet worden, in dem auch interessierte Schüler im Rahmen von mathematischen Arbeitsgemeinschaften Kleincomputer zur Lösung von Problemen nutzen können.
Eine wichtige Voraussetzung für eine sinnvolle Nutzung von Kleincomputern ist das Beherrschen einer Programmiersprache.
Im folgenden wollen wir interessierte *alpha*-Leser mit Elementen der Programmiersprache BASIC vertraut machen.
BASIC ist eine Programmiersprache, in der viele Kleincomputer, so auch die in der DDR produzierten Kleincomputer KC 85/1 und KC 85/2 programmiert werden können.

Aller Anfang ist nicht schwer!
Oder: Wie arbeitet ein Computer?

▲1▲

1. Zahl	8	4	5
2. Zahl	3	7	12
Ergebnis			

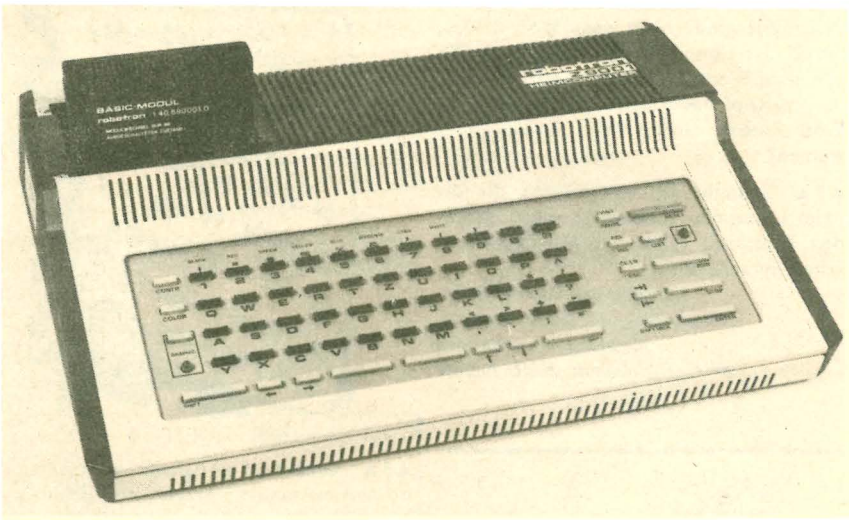
Fülle die letzte Zeile der Tabelle nach folgender Vorschrift aus!

(1) Multipliziere die erste Zahl mit der zweiten Zahl!
(2) Dividiere das Ergebnis durch 2!
(3) Schreibe das so erhaltene Ergebnis in die letzte Zeile der Tabelle!

Mit obiger Vorschrift kann man z. B. den *Flächeninhalt eines Dreiecks* berechnen, wenn der eine Eingabewert der Zahlenwert für die Länge einer Dreiecksseite und der andere der Zahlenwert der zugehörigen Höhe ist. (Die Maßeinheiten der Eingabewerte müssen natürlich vernünftig gewählt werden! Im genannten Fall müssen sie übereinstimmen.)

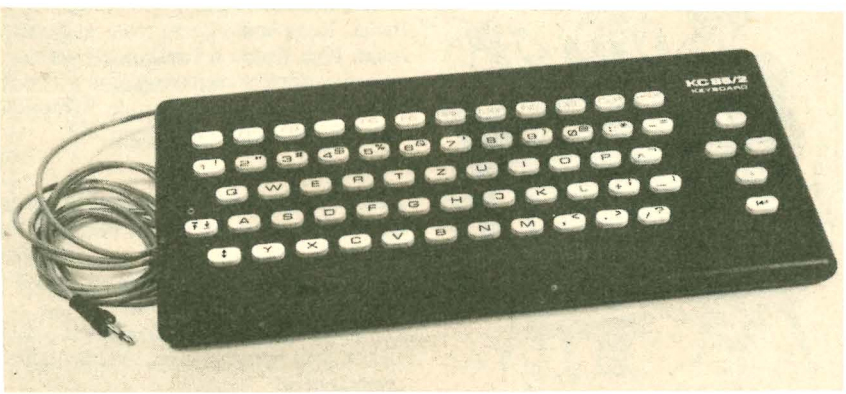
▲2▲ Überlege, was man mit obiger Vorschrift noch berechnen kann! Gib die Bedeutung der Eingabewerte an!

Wenn du die Aufgabe 1 gelöst hast, so hast du Eingabewerte entsprechend einer Vorschrift (Algorithmus) in Ausgabewerte umgeformt. Das kann man, wenn es sich bei den Eingabedaten um Zahlen handelt, in vielen Fällen auch mit Hilfe des Taschenrechners machen. Wenn man z. B. in den Taschenrechner SR 1 [16] [√] „einsetzt", dann berechnet er nach einem bestimmten Algorithmus, den er „kennt" und nicht „vergißt", den Wert von $\sqrt{16}$.
Das Besondere beim Computer besteht nun darin, daß man ihm immer wieder andere Algorithmen „eingeben" kann, die er sich – solange wie wir es wollen – merkt und damit den Ablauf seiner Tätigkeit selbst steuert. Der Algorithmus muß allerdings in einer für den Computer verständlichen Sprache geschrieben sein. Zu diesem Zweck hat man *Programmiersprachen* entwickelt. Als *Programm* bezeichnet man dann einen Algorithmus, der in einer Programmiersprache notiert ist.
Nun wollen wir – wie schon angekündigt – endlich beginnen, den *alpha*-Leser mit Elementen der leicht erlernbaren Programmiersprache BASIC (BASIC – Abkürzung für *B*eginners *A*ll-purpose *S*ymbolic *I*nstruction *C*ode, zu deutsch: Allzweck-Programmiersprache für Anfänger) bekannt zu machen, so daß er kleine Programme in dieser Programmiersprache verstehen und selbst entwickeln kann. Die Wörter dieser Programmiersprache sind dem Englischen entlehnt.



KC 85/1 – hergestellt im VEB ROBOTRON-Meßelektronik *Otto Schön*, Dresden

Key board des KC 85/2 – hergestellt im VEB Mikroelektronik *Wilhelm Pieck*, Mühlhausen



Computer als Taschenrechner

Um z. B. den Kleincomputer KC 85/1 wie einen Taschenrechner zu nutzen, muß man wissen, daß er wie der Taschenrechner SR 1 Vorrangregeln beachtet und man außerdem noch Klammern verwenden kann. Die BASIC-Symbole für einige wichtige Operationen, Funktionen und Konstanten sind nachstehender Übersicht zu entnehmen.
Mit der Anweisung
PRINT 7 + 4 (print (engl.) – drucken), die über die Tastatur des Computers eingegeben wird, „druckt" er nach Betätigung der Taste ENTER (enter (engl.) – eintragen) den Wert des Terms 7 + 4 auf dem Bildschirm des Computers aus. (Der KC 85/1 hat keinen eigenen Bildschirm. Er

Übliche mathematische Darstellung	BASIC Darstellung	Bemerkungen
+	+	
−	−	Kein Unterschied zwischen Vorzeichen und Operationszeichen
·	*	
: oder Bruchstrich	/	
$\sqrt{x}$	$SQR(X)$	Variable werden in BASIC mit Großbuchstaben geschrieben
a^b ·	$A \wedge B$	
π	PI	
$\lvert x \rvert$	$ABS(X)$	

kann mit einem Koaxialkabel an den Bildschirm eines Fernsehgerätes angeschlossen werden.) Auf dem Bildschirm erscheint nun folgendes Bild.

```
OK
> PRINT 7 + 4
  11
OK
> □
```

Will man den Term $\frac{3{,}07 - 0{,}03}{3\pi}$ berechnen, so muß man folgende Anweisung „eintippen":
PRINT (3.Ø7−.Ø3) / (3 * PI)
An den Beispielen ist ersichtlich, daß
– bei Zahlendarstellungen an Stelle eines Kommas ein Punkt zu setzen ist;
– als Null das Zeichen Ø (zur Unterscheidung vom Buchstaben O) verwendet wird;
– für Zahlen zwischen −1 und 1 die Vorkomma-Null weggelassen werden kann;
– das Operationszeichen * stets angegeben werden muß;
– erst die Betätigung der Taste ENTER das Rechnen und die Ergebnisanzeige veranlaßt.
Mit diesem Wissen ausgerüstet, können wir an das Lösen folgender Aufgaben gehen.

Aufgaben

▲3▲ Gib für folgende Ausdrücke eine BASIC-Darstellung an!
a) $9{,}31^3$
b) $\sqrt{24{,}02 \cdot 0{,}32}$
c) $\sqrt{3{,}2^2 + 4{,}3^2}$
d) $\frac{5{,}3}{2{,}3 \cdot 7{,}2}$
e) $2\pi \cdot 2{,}7^2$
f) $-3{,}72 : |2{,}9 - 10{,}8|$

▲4▲ Welchen Term kann man jeweils mit folgender BASIC-Anweisung ermitteln? Gib den Term in mathematischer Schreibweise an!
a) PRINT 3.7 * 9.81 ∧ 2
b) PRINT 2.Ø9/3.7 * .21/7.3
c) PRINT (2.Ø9 * .21)/(3.7 * 7.3)
d) PRINT 4/3 * PI * 2 ∧ 3
e) PRINT SQR (ABS (2.Ø3 * −5.3))
Nun wollen wir noch eine neue Funktion kennenlernen, die uns beim Programmieren große Dienste erweisen wird. Dazu geben wir in einer Tabelle für einige Eingabewerte jeweils die zugehörigen Ausgabewerte an.

Eingabewert	−7,9	−3,1	−2,1	−1,7
Ausgabewert	−8		−3	−2

Eingabewert	−1	0	0,7	1,89
Ausgabewert	−1	0	0	1

	2,1	3,9	5,2	

▲5▲ a) Vervollständige obige Tabelle!
b) Versuche anzugeben, wie man jeweils aus dem Eingabewert den zugehörigen Ausgabewert erhält!
Man nennt diese Zuordnung „Integer-Funktion" (integer (engl.) – ganzzahlig). Als Symbol verwendet man in der üblichen mathematischen Schreibweise eckige Klammern ($y = [x]$).
Beispiele: [1,8] = 1,[4] = 4,
[−7,9] = −8, [−1] = −1
$[x]$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner, höchstens gleich x ist. In BASIC schreibt man für diese Funktion INT(X).

▲6▲ Berechne im Kopf, und gib jeweils eine BASIC-Darstellung für die Berechnung der Terme an!
a) [3,7] : | −6 |
b) [−3,7] : (−6)
c) 4 : 3 − [4 : 3]
d) 8 : 2 − [8 : 2]

▲7▲ Was ist hier falsch?
a) PRINT 3 (4 * 7,5)
b) PRINT 0.2/(7.1−5.89)
c) PRINT SQR 7.2 * Ø.9
d) PRINT 2PI * (−3)

Wir beginnen zu programmieren!

▲8▲ Berechne das Volumen und die Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders, von dem der Grundkreisradius r und die Höhe h bekannt sind!
a) Stelle für den Taschenrechner SR 1 einen entsprechenden Rechenablaufplan auf!
b) Fülle folgende Tabelle aus! (Runde auf Einer!)

Eingabewerte	r (in cm)	3,0	2,7	7,4
	h (in cm)	5,0	4,8	3,2

Ausgabewerte	V (in cm³)			
	A_M (in cm²)			

Um die Ausgabewerte zu ermitteln, muß man den gleichen Rechenablauf mit dem SR 1 stets von neuem, nur mit anderen Eingabewerten abarbeiten.
Bei einem Computer ist das anders. Er kann sich „merken", wie jeweils die Eingabedaten zu „verarbeiten" sind, wenn man ihn mit einem Programm „gefüttert" hat. In einem solchen Computerprogramm treten für die Ein- und Ausgabedaten zunächst Variable auf. (Variable werden in BASIC mit Großbuchstaben bezeichnet.)
Ein BASIC-Programm zur Berechnung des Volumens und der Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders aus Grundkreisradius und Höhe könnte wie folgt aussehen:

Programm 1:

```
1Ø INPUT R
2Ø INPUT H          } Dateneingabe
3Ø LET V = PI * R * R * H
4Ø LET M = 2 * PI * R * H   } Datenbearbeitung
5Ø PRINT V
6Ø PRINT M          } Datenausgabe
7Ø END
```

Dieses Programm besteht aus sieben *Programmzeilen*. Jede dieser Programmzeilen beginnt mit einer *Zeilennummer*.
Den Zeilennummern folgen *Anweisungen*. Die Zeilennumerierung wird gewöhnlich in Zehnerschritten vorgenommen, um bei Bedarf weitere Zeilen einzufügen. Der Computer arbeitet das Programm mit aufsteigenden Zeilennummern ab. Bei der Eingabe des Programms muß man nach jeder Zeile die ENTER-Taste betätigen. Ist das Programm „eingetippt", kann man es mit dem Kommando RUN (run (engl.) – laufen, rennen) „starten". In unserem Falle trifft der Computer als erstes auf eine INPUT-Anweisung (input (engl.) – Eingabe): Er verlangt die Eingabe von Daten, denn auf dem Bildschirm erscheint ein Fragezeichen. Die Eingabe des Zahlenwertes für den Grundkreisradius (z. B. 3,0) wird mit der ENTER-Taste abgeschlossen. Nun erscheint auf dem Bildschirm erneut ein Fragezeichen. Es ist der Zahlenwert für die Zylinderhöhe einzugeben (z. B. 5.Ø). Nachdem die Taste ENTER betätigt wurde, erscheinen auf dem Bildschirm zwei Zahlen. Die erste ist die Maßzahl für das Volumen und die zweite die für die Mantelfläche des Kreiszylinders.

```
? 3.Ø
? 5.Ø
  141.372
  94.2478
CK
> □
```

Was ist passiert?
Auf Grund der zwei LET-Anweisungen (let (engl.) – es sei), hat der Computer den Wert des Terms $\pi r^2 h$ (bzw. $2\pi rh$) ermittelt und diesen Wert der Variablen V (bzw. M) *zugewiesen*. Man spricht in einem solchen Fall von einer *Wertzuweisung*. Durch die PRINT-Anweisungen (Zeile 5Ø, Zeile 6Ø) wird der Computer angewiesen, die *Werte* der jeweils angegebenen Variablen (in unserem Beispiel V und M) auf dem Bildschirm auszudrucken.

L. Flade/M. Pruzina

Der physikalische Glaskasten

Manchem war die Arbeit mit den Fischen zu umständlich, andere haben sich inzwischen einen größeren Swimmingpool für die Stichlinge zugelegt. So kommt es vor, daß hier und da ein Aquarium verstaubt. Für diesen Fall haben wir etwas anzubieten. Wem für die folgenden Beobachtungen und Experimente der Glaskasten fehlt, der kann sich mit einer quaderförmigen Plastdose aus der Küche behelfen.

Wasserwaagenkontrolle

Selbst ein kleines Aquarium hat es in sich, Wasser nämlich. Nehmen wir eine Grundfläche wie ein A4-Blatt (rund 600 cm^2) und eine Höhe von 25 cm an, so faßt dieses Gefäß 15 l oder den Inhalt von anderthalb Wassereimern. Rechnet nach, ob es stimmt! Solch gefüllter Kasten bringt über 15 kg auf die Waage. Wie schön feucht, wenn er uns aus der Hand rutscht, weil die Scheiben noch naß und deshalb glatt waren! Unebenheiten der Unterlage sollte man vermeiden, der Auflagedruck könnte an solchen Stellen Werte annehmen, die der Glasboden verübelt.

Steht das Aquarium schief, so zeigt der Wasserspiegel dies unerbittlich an. Er stellt sich in jedem Fall horizontal, bildet eine waagerechte Ebene. Damit läßt sich sogar eine Wasserwaage prüfen. Halten wir sie exakt an die Wasserlinie (Bild 1), so läßt sich eine Stahlkugel oder Münze darauf legen, ohne daß diese wegrollen. Die Wasserwaage kann auch durch ein Lineal ersetzt werden.

Wandernde Drucksonde

Ein Aquarium ist zumeist aus Glasscheiben zusammengekittet. Man staunt jedesmal über die Festigkeit der schmalen Klebstellen. Hier leistet die Adhäsion ganze Arbeit. Die Belastung der Scheiben ist nicht überall gleich. Der durch die Gewichtskraft des Wassers hervorgerufene Schweredruck nimmt mit der Tiefe zu, vgl. Physiklehrbuch Kl. 7, S. 102 bis 106.

Zur genaueren Untersuchung bauen wir eine Drucksonde mit angeschlossenem U-Rohr-Manometer. Es entsteht eine Kompakt-Anlage aus drei Trinkröhrchen und etwas Wasser. Zuerst stecken wir die drei Röhrchen zusammen. Jeweils ein Ende wird dazu trichterförmig geweitet, indem man einen gespitzten Bleistift hineindrückt und leicht dreht. Ein Tropfen Duosan oder besser Plastkleber (Mökopur) stabilisiert die Verbindungsstelle. Damit das fertige Rohr wie in Bild 2 aussieht, müssen wir es an zwei Stellen biegen. In der Nähe einer Flamme oder in heißem Wasser wird die erforderliche Krümmung vorsichtig hergestellt. Abkühlen in Wasser sorgt für schnelles Erstarren des Plastmaterials.

Wir saugen etwas dunkle Flüssigkeit – Kaffee oder tintengefärbtes Wasser, jeweils mit einem Tropfen Fit – in das U-Rohr. Durch Blasen entfernen wir so viel, daß sie sich etwa auf die eingezeichnete Nullmarke einstellt. Das offene Ende B ist die Drucksonde. Wir tauchen es in Wasser. Nun muß sich ein Druckunterschied p ablesen lassen, wenn die Röhrchen dicht ineinander passen. 1 mm Höhenunterschied zwischen C und D in Bild 2 entspricht einem Druck von 10 Pa bei B. Wir verändern systematisch die Tiefe h des Meßpunktes und erfassen die zugehörigen Druckwerte in einer Tabelle. Mit den Meßwertpaaren zeichnen wir ein Diagramm (Bild 3).

Bei gleicher Tiefe erhalten wir stets gleiche Druckwerte, in welcher Ecke des Gefäßes wir auch die Drucksonde ansetzen. Man könnte das Aquarium gegen eine Weinflasche auswechseln, die mit Wasser gefüllt ist. Nur die Höhe des Wasserstandes, nicht die Gefäßform bestimmt, wie groß der Schweredruck im Wasser ist.

Anders ist die Sache mit den infolge des Druckes wirkenden Kräften. Sie wachsen im gleichen Verhältnis wie die Scheibenfläche. Es gilt für sie $F = p \cdot A$. Da sich p von oben nach unten gleichmäßig ändert, setzen wir den mittleren Druck in die Formel ein, der in halber Wassertiefe wirkt. In Bild 4 wären das 1000 Pa. Beträgt die Fläche der Scheibe z. B. 400 cm^2, so wirkt auf sie eine Gesamtkraft von $F = 1000\,\text{Pa} \times 400\,\text{cm}^2 = 1000\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0{,}0400\,\text{m}^2 = 40\,\text{N}$.

Das hält die Glasscheibe aus, auch die Klebstelle.

Überlisteter Auftrieb

Eine der nützlichsten Wirkungen des Schweredrucks ist der Auftrieb. Wir binden eine Kartoffel an einen Gummifaden (sog. Hutgummi) und messen die Länge des durch die Gewichtskraft der Kartoffel gedehnten Fadens. Wir tauchen dann die Knolle in Wasser (Bild 5). Der Faden verkürzt sich so, als ob nichts mehr an ihm hinge. Er dehnt sich erneut, wenn die Kartoffel an ihm aus dem Wasser gezogen wird.

Die Gewichtskraft F_G der Kartoffel scheint in deren eingetauchtem Zustand kleiner zu werden. Ihr wirkt die Auftriebskraft F_A entgegen. Der Gummifaden hat nur noch die Differenz $F_G - F_A$ auszuhalten. Für dies alles ist der Schweredruck verantwortlich. Unterhalb des Körpers ist der Druck größer als an der Oberseite. So entstehen Kraftwirkungen von unten nach oben (Bild 6a). Schaltet man den Schweredruck unten aus, gibt es keinen Auftrieb mehr.

Dieser Fall tritt ein, wenn sich zwischen Körper und Gefäßboden kein Wasser befindet. Die sich berührenden Flächen müssen dazu genau aneinandergrenzen, möglichst eben sein. Eine leere Filmdose z. B. hat einen ziemlich ebenen Deckel. Wir fetten seine Fläche noch etwas ein. Im wassergefüllten Aquarium drücken wir die Dose fest auf den sauberen Glasboden. Die Verbindung wird durch leichtes Drehen noch verbessert. Die leere Dose bleibt am Boden haften, der Auftrieb ist überlistet (Bild 6b).

Schwimmblase als Auftriebsregler

Der Auftrieb hängt auch von der Dichte der Flüssigkeit ab, in die der Körper eintaucht. Eine Kartoffel, die in normalem Wasser sinkt, kann in Salzwasser schwimmen, da dieses eine größere Dichte hat. Für das Aquarium wäre eine Salzwasserfüllung zu aufwendig. Wir ändern die Dichte mit Hilfe der Temperatur.

Ein Luftballon wird mit warmem Wasser gefüllt, als Verschluß ein Zehnpfennigstück eingeklemmt. Befindet sich im Aquarium Wasser derselben Temperatur, so sinkt der Ballon auf den Gefäßboden. Ist das Wasser im Aquarium deutlich kälter, so schwebt der Ballon unter der Wasseroberfläche (Bild 7).

Ballonflieger erwärmen die Luft im Ballon mit Hilfe eines Brenners. Die Außenluft ist kälter, so kommt ein ausreichender Auftrieb zustande.

Ganz gleich, wodurch der Auftrieb beeinflußt wird, immer gilt das Gesetz des Archimedes: *Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit bzw. des verdrängten Gases.* Wieviel Flüssigkeit ein Körper verdrängt, ist mit einem Überlaufgefäß zu bestimmen. Hängen wir ein gebogenes Trinkröhrchen über den Rand des Aquariums, ist ein solcher Apparat fertig. Wir achten darauf, daß das äußere Rohrstück 3 cm länger als das innere ist. Letzteres muß ins Wasser eintauchen (Bild 8). Wir saugen am äußeren Ende Wasser an. Ist das Röhrchen gefüllt, wirkt es als *Heber*, das Wasser läuft von selbst weiter, bis der Wasserspiegel im Aquarium die Höhe der inneren Rohröffnung erreicht hat. Jetzt ist das Überlaufgefäß betriebsbereit. Wir bestimmen mit seiner Hilfe das Volumen einer großen Kartoffel oder unserer Faust. Beim Eintauchen wird der Wasserspiegel angehoben. Der Heber fängt wieder an zu arbeiten. Die auslaufende Flüssigkeit fangen wir in einem Meßbecher oder -zylinder auf. Ihr Volumen entspricht dem des eingetauchten Körpers. Mit Hilfe dieses Verfahrens könnte man auch das Volumen eines ins Aquarium gesetzten Fisches bestimmen. Der regelt übrigens seinen Auftrieb selbständig. Mit Hilfe der Schwimmblase kann er sein Volumen geringfügig vergrößern oder verringern. Im ersten Fall verdrängt er mehr Wasser, erhält einen größeren Auftrieb und steigt nach oben. Abwärts geht es bei kleinerer Schwimmblase; und dies alles, ohne von Archimedes je gehört zu haben.

Versetzte Kanten

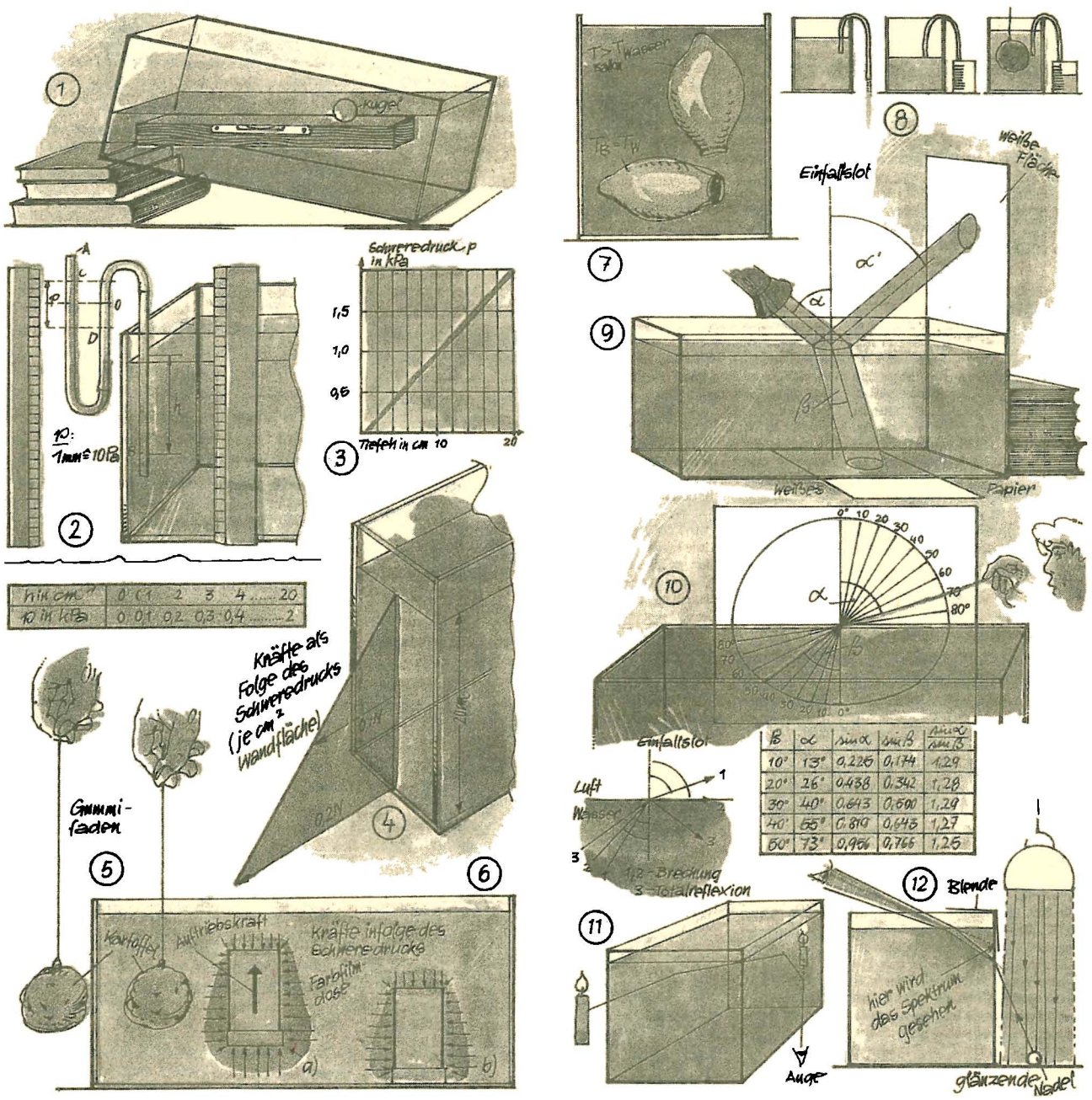
Blickt man von oben in ein Aquarium, scheint es wesentlich flacher als in Wirklichkeit zu sein. Der Boden bzw. die schwimmenden Fische wirken angehoben. Legt man einen langen Stab schräg ins Wasser, wirkt der Unterwasserteil abgeknickt. Auch in der Seitenansicht bietet das Aquarium solche Effekte. Es wirkt viel schmaler. Regelrecht konfus kann man werden, wenn man schräg von oben in ein mit klarem Wasser gefülltes Aquarium blickt, denn alle Kanten unter Wasser sind verschoben, hören irgendwo auf, um seitlich versetzt an anderer Stelle wieder aufzutauchen.

An alldem ist die Lichtbrechung schuld. Mit einer Taschenlampe kann man diese Erscheinung direkt beobachten. Das Wasser im Aquarium soll leicht getrübt sein, z. B. durch etwas eingerührte Milch. Dann ist der Lichtweg gut zu verfolgen. Besonders gelungene Ergebnisse erhalten wir mit einer Versuchsanordnung wie in Bild 9. Man erkennt die Brechung beim Übergang von Luft in Wasser, sieht aber auch, daß ein Teil des einfallenden Lichtes reflektiert wird. Hierbei gilt das Reflexionsgesetz $\alpha = \alpha'$. Das Brechungsgesetz ist mathematisch komplizierter $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$. In unserem Beispiel wäre c_1 die Lichtgeschwindigkeit in Luft und c_2 jene in Wasser. Im Tafelwerk, S. 39, findet man hierfür rund $300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ und $225\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Somit müßte für die Lichtbrechung an der Wasserfläche

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{300\,000\ \text{km/s}}{225\,000\ \text{km/s}} = 1{,}33 \text{ sein.}$$

Diese Zahl überprüfen wir im Experiment (Bild 10). Gebraucht werden ein Stück feste Pappe, zwei Wäscheklammern und Bindfaden. Auf die Pappe zeichnen wir einen Kreis. Zwei gegenüberliegende Viertel erhalten eine in 10°-Schritten geteilte Winkelskale. In den Kreismittelpunkt stechen wir ein Loch ein, stecken den Bindfaden durch und bewahren ihn durch einen Knoten vor dem Durchrutschen. Das Aquarium ist bis dicht unter den Rand mit klarem Wasser gefüllt. Wir stellen die Pappe hinein, klemmen sie am Glasrand fest und beginnen sofort mit der Messung.

Der Faden wird entlang der Pappe leicht gespannt und jeweils einer der unter Wasser befindlichen Skalenstriche anvisiert. Wenn Strich und Faden eine Gerade ergeben, lesen wir am Faden den Winkel ab. In Bild 10 wird z. B. $\beta = 50°$ anvisiert, und der Faden muß dazu bei $\alpha = 70°$ angehalten werden. So ermitteln wir zu den Brechungswinkeln die Einfallswinkel. Die Si-



β	α	sin α	sin β	sin α / sin β
10°	13°	0,225	0,174	1,29
20°	26°	0,438	0,342	1,28
30°	40°	0,643	0,500	1,29
40°	55°	0,819	0,643	1,27
50°	73°	0,956	0,766	1,25

Eine Aufgabe von Akademiemitglied Prof. Dr. A. N. Kolmogorow

Sektion Mathematik der Staatlichen Lomonossow-Universität Moskau

▲2693▲ (1) Die Menge M bestehe aus drei Elementen, die Menge N aus zwei Elementen. Wie viele eindeutige Abbildungen existieren: a) von M in N; b) von M auf N; c) von N in M; d) von N auf M?
(2) Die Menge M besteht aus m Elementen, die Menge N aus n Elementen. Wie viele auf M definierte Funktionen existieren, welche zu N gehörige Werte besitzen?

---

nuswerte liefert das Tafelwerk oder ein Taschenrechner. Wie es das Brechungsgesetz behauptet, ist der Quotient $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ annähernd konstant. Unser Ergebnis kommt dem aus den Tabellenangaben berechneten Wert (1,33) sehr nahe, die Messungen waren nicht schlecht.

Farbiger Abschluß

Blickt man unter größerem Winkel ins Aquarium, kann man nicht aus den Seitenflächen heraussehen. Sie glänzen wie ein Spiegel und zeigen seitenverkehrte Abbildungen von Dingen, die sich hinter dem Aquarium befinden (Bild 11). Verantwortlich hierfür ist die Totalreflexion. Sie entsteht nur, wenn Licht aus Wasser oder Glas in Luft übertritt. Weil hier der Brechungswinkel β immer größer als der Einfallswinkel α ist, erreicht β vor α den Wert 90°. Weiter geht es nicht, und statt aus dem Wasser in Luft überzutreten, wird das Licht wieder nach innen reflektiert.
Blickt man durch eine Kante des Aquariums, kann man helle Gegenstände in allen Regenbogenfarben sehen. Besonders gut läßt sich solch ein Spektrum erzeugen, wenn man wie in Bild 12 eine kräftig beleuchtete, glänzende Stricknadel betrachtet. Der dunkel gezeichnete Teil des Wassers wirkt wie ein Prisma. Die einzelnen Farbanteile des weißen Glühlampenlichtes werden unterschiedlich stark gebrochen und somit voneinander getrennt.

Mit unserem Aquarium ließe sich noch viel Physikalisches anstellen. Die Technik zum Beleuchten, zur Temperaturregelung oder Belüftung des Wassers erfordert z. B. weit mehr als nur jene grundlegenden Kenntnisse, die wir heute aufgefrischt haben. Und was die Fische betrifft – wir sollten uns überlegen, ob sie nicht doch eine prächtige Freizeitbeschäftigung abgeben könnten! *D. Wrobel*

Knobeleien mit dem Taschenrechner

▲1▲ Die Mutter hat vier Zahlen notiert:
91 553 704 3571 0.5
Als die Tochter aus der Schule kommt, nimmt sie schnell ihren Schulrechner SR 1 und *schreibt* vier Wörter, aus denen sie einen Auftrag ihrer Mutter abliest. Wißt ihr, um welchen Auftrag es sich handelt? Wie heißt das Mädchen?

▲2▲ Ermittle die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben, *schreibe* diese auf dem SR 1, und trage die Lösungswörter in einen Rhombus ein:

$98 - (3 \cdot 33 - 2) =$
$3^2 + 2^2 =$
$3 \cdot 5 \cdot 9 =$
$(40^2 + 7 \cdot 9) \cdot 5 =$
$15 \cdot 2581 =$
$49\,945 : 7 =$
$10^3 - (3 \cdot 10^2 - 13) =$
$3 + 4 \cdot 7 =$
$\sqrt{9} =$

▲3▲ *Schreibt* man die Ergebnisse der folgenden Aufgaben mit dem SR 1 (wie in alpha Heft 6/1985, S. 123), so erhält man nacheinander jeweils einen Begriff aus dem Verkehrswesen, der Geographie, der Musik, der Münzkunde, der Chemie, der Literatur und der Zoologie. Die Anfangsbuchstaben dieser Wörter ergeben einen Beruf, die Endbuchstaben dieser Wörter nennen euch eine Versteinerung.

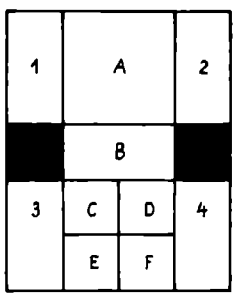
$3 \cdot 17 \cdot 10^3 + 17^2 + 90 =$
$(3 \cdot 13 - 1) \cdot 100 + 9^2 + 2 =$
$3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^1 =$
$12^2 - 7 =$
$302^2 + 526 =$
$100 \cdot \sqrt{12\,602\,500} + 79 =$
$85 \cdot 86 + 6 \cdot 7 + 1 =$

Dr. W. Schmidt, Greifswald

(Lösungen siehe Heft 6/86, d. Red.)

Die Barrikade

Das Spiel *Ohne Fleiß kein Preis* (auch *Schiebefax* genannt) sei in folgender Abwandlung betrachtet:



In einem Rahmen der Größe 5 mal 4 seien Teile A, B, C, D, E, F und 1, 2, 3, 4 wie folgt in Ausgangsposition:
Dabei ist links und rechts vom Teil B je ein freies Feld der Größe 1 mal 1. Durch Verschieben sind diese Teile so umzugruppieren, daß Teil A unten in der Mitte (obige Position der Teile C, D, E, F) erscheint. Das wesentliche Problem ist hierbei, die Teile A und B aneinander vorbei zu bewegen. Entsprechend nenne ich das Spiel *Die Barrikade*.
Ein Zug ist jeweils die Bewegung eines Teiles um *eine* Einheit nach links, rechts, oben oder unten. Zum Beispiel könnten die ersten zehn Züge wie folgt aussehen: *BL* (Teil *B* nach links, *DO*, *DR*, *FO*, *FO*, *4L*, *DU*, *DU*, *FR*, *FU*. Das Spiel erfordert Geduld zu seiner Lösung!
(Dieses Spiel wurde in einem Berliner Schülerzirkel als *Computerspiel* realisiert.) Wer sendet an die Redaktion *alpha* möglichst kurze Lösungen in traditioneller Form oder aber mit einem Computer?

Dr. R. Klette,
Akademie der Wissenschaften der DDR
Zentralinstitut für Kybernetik
und Informationsprozesse, Berlin

Zitiert

- Der echte Schüler lernt aus dem Bekannten das Unbekannte entwickeln.
J. W. v. Goethe

- Drei Dinge richtig begriffen zu haben bedeutet mehr, als von Dutzend Dingen oberflächlich gehört zu haben.
H. Duncker

- Man muß mehr sehen als sich sagen lassen.
G. Chr. Lichtenberg

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, 20. bis 23. Mai 1986

Olympiadeklasse 10

251041 Beweisen Sie, daß

$$\frac{1281^3 + 1282^3 + 1283^3 + 1284^3 + 1285^3 + 1286^3 + 1287^3}{639 \cdot 640 + 641 \cdot 642 + 642 \cdot 643 + 644 \cdot 645}$$

eine durch 7 teilbare natürliche Zahl ist!

251042 Es sei $ABCD$ ein Quadrat; sein Flächeninhalt sei $F(ABCD)$; sein Umkreis sei k. Beschreiben Sie eine Konstruktion für ein (nicht notwendig regelmäßiges) konvexes Sechseck $PQRSTU$, dessen sämtliche Eckpunkte auf k liegen und dessen Flächeninhalt gleich $F(ABCD)$ ist! Beweisen Sie, daß jedes Sechseck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, diese Forderungen erfüllt!

Von den nachstehenden Aufgaben 251043A und 251043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

251043A Kurt möchte auf einer Holzkugel K vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 konstruieren, die die Bedingungen

$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_3} = \overline{P_1P_4} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_2P_4} = \overline{P_3P_4}$

erfüllen. Folgende Hilfsmittel stehen ihm zur Verfügung:

– Ein ebenes Zeichenblatt B, auf dem eine Strecke DE gegeben ist, deren Länge gleich dem Durchmesser d der Kugel K ist,

– ein Zirkel, mit dem man sowohl auf B als auch auf der Oberfläche der Kugel K Kreise zeichnen kann (der Zirkel besitzt zu diesem Zweck einknickbare, genügend lange Schenkel),

– ein Lineal (wie üblich nur zum Konstruieren gerader Linien auf B zu verwenden, nicht zur Skalenbenutzung).

Beschreiben Sie eine Konstruktion, die sich mit diesen Hilfsmitteln ausführen läßt! Beweisen Sie, daß durch die von Ihnen beschriebene Konstruktion vier Punkte der geforderten Art erhalten werden!

Hinweis: Unter $\overline{P_iP_j}$ ist die Länge der im Raum geradlinig (nicht auf der Kugeloberfläche) verlaufenden Verbindungsstrecke der Punkte P_i, P_j zu verstehen. Ebenso wird beim Konstruieren eines Kreises auf K die Zirkelspanne als geradlinige Streckenlänge festgelegt.

251043B Gegeben seien reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4. Man ermittle zu jedem möglichen Fall für diese $a_1, \ldots, a_4$ jeweils alle diejenigen Tripel (b_1, b_2, b_3) reeller Zahlen (bzw. beweise gegebenenfalls, daß es keine solchen Tripel gibt), für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + x_3^2 &= b_1, \\ x_2^2 + a_3x_3^2 &= b_2, \\ x_2^2 + a_4x_3^2 &= b_3 \end{aligned}$$

genau ein Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen als Lösung hat.

251044 Ermitteln Sie alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen r, für die die Gleichung

$$\frac{2x}{r(x+r)} + \frac{1}{x-2r} = \frac{4x-r+6}{r(x-2r)(x+r)}$$

a) genau zwei verschiedene reelle Lösungen,

b) genau eine reelle Lösung,

c) keine reelle Lösung

besitzt!

251045 Stellen Sie fest, ob es möglich ist, einen Würfel mittels einer Ebene so zu schneiden, daß als Schnittfigur

a) ein regelmäßiges Dreieck,

b) ein regelmäßiges Viereck,

c) ein regelmäßiges Fünfeck

entsteht!

251046 Es sei $F = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festsetzungen (1), (2) definiert ist:

(1) Die ersten vier Glieder der Folge F lauten $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 8$, $a_4 = 6$; sie bilden also die Teilfolge $(1, 9, 8, 6)$.

(2) Für jedes $n \geq 5$ ist a_n die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied a_n in der Folge F unmittelbar vorangehen.

Man untersuche, ob es in der Folge F außer der Teilfolge (a_1, a_2, a_3, a_4) noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von F besteht und $(1, 9, 8, 6)$ lautet.

Olympiadeklassen 11/12

251241 Zu einer Feier erschienen fünf Gäste. Der Gastgeber stellte fest, daß unter je drei von diesen Gästen stets zwei sind, die sich wechselseitig kennen, und zwei, die sich nicht kennen.

Man beweise, daß der Gastgeber seine fünf Gäste so an einen runden Tisch setzen kann, daß an beiden Seiten jedes Gastes Bekannte dieses Gastes sitzen.

251242 Es seien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ $(n \geq 2)$ paarweise verschiedene Primzahlen.

Man beweise, daß aus dieser Voraussetzung stets

$$\frac{q_1^3+1}{q_1^3-1} \cdot \frac{q_2^3+1}{q_2^3-1} \cdot \ldots \cdot \frac{q_n^3+1}{q_n^3-1} < \frac{36}{25}$$

folgt.

251243 Gibt es eine Funktion f, die für alle reellen Zahlen definiert ist, reelle Funktionswerte hat und die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt?

(1) Für alle reellen Zahlen x und y gilt

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}.$$

(2) Es gilt $f(1) = \frac{1}{2}$.

251244 Es sei $A_1A_2A_3A_4$ ein Tetraeder mit gegebenen Kantenlängen

$\overline{A_1A_2} = a$, $\overline{A_1A_3} = b$, $\overline{A_1A_4} = c$,

$\overline{A_2A_3} = d$, $\overline{A_2A_4} = e$, $\overline{A_3A_4} = f$.

Man untersuche, ob es einen Punkt P im Raum gibt, so daß die Summe s der Quadrate der Abstände des Punktes P von den Eckpunkten des Tetraeders einen kleinsten Wert annimmt. Falls das zutrifft, ermittle man jeweils zu gegebenen a, b, c, d, e, f diesen kleinsten Wert von s.

251245 Es sei (p_n) die Folge der ihrer Größe nach geordneten Primzahlen, d. h., es sei $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ... Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl N derart gibt, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n > N$ die Ungleichung $p_n > 4_n$ gilt.

Von den nachstehenden Aufgaben 251246A und 251246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

251246A Eine im dekadischen Positionssystem dargestellte natürliche Zahl sei „Spiegelzahl" genannt, wenn ihre Ziffern symmetrisch aufgebaut sind, d. h., wenn die erste und die letzte, die zweite und die vorletzte usw. Ziffer übereinstimmen.

Zum Beispiel sind die Zahlen 358 853, 27 672, 44 444 Spiegelzahlen. Man untersuche, ob es zu jeder zweistelligen natürlichen Zahl a, deren letzte Ziffer von 0 verschieden ist, eine von 0 verschiedene Spiegelzahl gibt, die durch a teilbar ist.

251246B Für jedes Dreieck ABC bezeichne d die Länge des Inkreisdurchmessers, g die größte Seitenlänge und ε die Größe des kleinsten Winkels dieses Dreiecks ABC.

a) Man beweise: Es gibt eine Konstante K, so daß für jedes Dreieck ABC die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{1}{d} < \frac{K}{g \cdot \sin \varepsilon}. \qquad (1)$$

b) Unter allen Konstanten K, für die die in a) zu beweisende Aussage gilt, ermittle man die kleinste Konstante, falls diese existiert.

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 7: Hölzchen-Knobeleien

Liebe Freunde! Wir wollen an unser „Spiel mit Spielen", das im Teil 6 unserer Beitragsserie im Mittelpunkt stand, anknüpfen und Anregungen zum Eigenbau von Hölzchenspielen (oder Streichholzspielen) geben. Ein Bündel gleich langer Hölzchen oder eine Schachtel mit Streichhölzern sind zwar finanziell gesehen sehr billig, aber durchaus nicht billig im Sinne von primitiv sind diejenigen Knobeleien, die man mit den Hölzchen gestalten kann; denn sie erfordern eine gute Auffassungsgabe, logisches Denkvermögen, Findigkeit und Ausdauer. Wir wollen hier nicht eingehen auf die Funktion der Hölzchen als Baumaterial oder als Spielsteine, obwohl sie letztere Funktion etwa bei den interessanten Nimspielen und ihren Varianten ausgezeichnet erfüllen. Wir wollen mit den Hölzchen Knobeleien geometrischer, arithmetischer und wortspielerischer Natur gestalten.

Da man mit den Hölzchen alle möglichen geradlinig begrenzten und unterteilten ebenen Figuren auflegen und diese durch Umlegen, Wegnahme oder Hinzufügen von Hölzchen verändern kann, so sind die Hölzchen-Knobeleien natürlicherweise in der ebenen Geometrie (Planimetrie) angesiedelt. Man kann mit den Hölzchen auch Kongruenz- und Ähnlichkeitsgeometrie betreiben sowie geometrische Konstruktionen ausführen. Die *Grundannahme* dabei ist, daß alle Hölzchen gleich lang und (im Idealfall) vom Querschnitt Null sind, was bei Streichhölzern annähernd erfüllt ist. Dadurch sind sie in einem Punkt zusammenlegbar, und jedes Hölzchen kann die Rolle der Einheitsstrecke übernehmen (1 Hölzchenlänge = 1 LE). Der Flächeninhalt eines Hölzchen-Quadrats der Seitenlänge 1 LE (Einheitsquadrat) wäre dann die Flächeneinheit (1 FE = 1 (LE)^2). Weiterhin fordert man, daß nur ganze (nicht zerbrochene oder geknickte) Hölzchen aufgelegt werden dürfen.

Die häufigsten Vertreter geometrischer Hölzchen-Knobeleien sind solche, bei denen vorgegebene Hölzchen-Figuren, denen man die stilisierte Form realer Objekte (z. B. Häuser, Fahrzeuge, Tiere, Gegenstände) geben kann, in andere (eindeutig zu beschreibende) geometrische Figuren (z. B. bestimmte Vielecke) verwandelt werden sollen, und dies durch Wegnahme, Hinzufügen oder Umlegen einer bestimmten Anzahl Hölzchen *(s. Aufg. 1 bis 4)*. Aufgaben dieser Art lassen sich relativ leicht gestalten, indem man markante Hölzchenfiguren auflegt und Umlegemöglichkeiten durchprobiert. Auf diese Weise kann man auch Teilungsaufgaben *(s. Aufg. 5)* und „Zaubereien" *(s. Aufg. 6)* gestalten. Bei anderen Knobeleien fragt man nach der Anzahl der für eine Figur notwendigen Hölzchen bzw. gibt diese vor: So kann man etwa mit einer bestimmten Anzahl Hölzchen rechtwinklige Dreiecke auflegen, nämlich genau diejenigen, deren (ganzzahlige) Seitenlängen a, b und c der pythagoreischen Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ genügen *(s. Aufg. 7)*. Bei weiteren Aufgaben, z. B. den bekannten „Weideproblemen", verringert man die für das Auflegen bestimmter Figuren erforderliche Hölzchenanzahl schrittweise *(s. Aufg. 8)*. Auch kann man das Problem stellen, wieviel geometrische Figuren einer bestimmten Art mit einer vorgegebenen Anzahl Hölzchen höchstens auflegbar sind *(s. Aufg. 9)*. Bei Aufgaben zur Bewegungsgeometrie fordert man eine Verschiebung, Drehung, Spiegelung, Gleitspiegelung oder irgendeine (daraus zusammengesetzte) Bewegung einer Figur durch Umlegen von Hölzchen *(s. Aufg. 10 und 11)*. Und schließlich kann man auch die Flächeninhalte aufgelegter Hölzchenfiguren ermitteln lassen *(s. Aufg. 12)*.

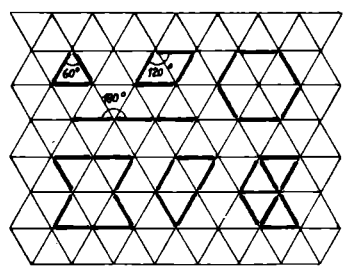


Bild 1
Trigonales Hölzchen-Gitter mit (stark hervorgehobenen) Elementardreieck, Elementarrhombus, Elementarsechseck und anderen Teilfiguren

Es ist wohl leicht einzusehen, daß es prinzipiell unmöglich ist, mit Hölzchen frei Hand einen rechten Winkel, ein aus mindestens 2 Hölzchen bestehendes Geradenstück und somit Quadrate, Rechtecke und andere Figuren mit rechten bzw. gestreckten Winkeln exakt aufzulegen. Offenbar lassen sich aber (abgesehen von Ungenauigkeiten, die aus der Stärke und der leichten Verschiebbarkeit der Hölzchen resultieren) ein aus 3 Hölzchen bestehendes gleichseitiges Dreieck (Elementardreieck) und somit ein Winkel von 60° exakt auflegen (konstruieren), denn die o. g. Grundannahme sichert die Gleichseitigkeit des Dreiecks und damit die 60°-Größe seiner Innenwinkel. Folglich ist jede Hölzchenfigur, die Teilfigur eines (aus Elementardreiecken bestehenden) trigonalen Gitters ist, exakt auflegbar (konstruierbar), z. B. der Elementarrhombus und das Elementarsechseck, ebenso der gestreckte Winkel und somit ein aus mindestens 2 Hölzchen bestehendes Geradenstück *(s. Abb. 1)*. Konstruiert nun einmal in diesem Sinne die in *Aufg. 13* genannten Hölzchenfiguren (als Konstruktionsschritte seien nur das Auflegen von Elementardreiecken erlaubt), indem ihr ausreichend viele Hölzchen als Hilfsmittel verwendet, die ihr nach Ausführung der Konstruktion wieder entfernt! Wir wollen nun noch einige geometrische Konstruktionen, die auch mit Zirkel und Lineal ausführbar sind, „mit Hölzchen und Lineal" (wie üblich mit Bleistift auf einem Blatt Papier) durchführen. Dabei konstruieren wir aus gegebenen Punkten die neuen Punkte mit Hilfe (ausreichend vieler) Hölzchen, und das Lineal dient zum Ziehen einer Geraden durch zwei gegebene Punkte. Bei unserer Konstruktion „mit Hölzchen und Lineal" seien also die folgenden Konstruktionsschritte erlaubt: 1. Das Ziehen einer Geraden durch zwei gegebene Punkte (mit dem Lineal), 2. das Auflegen von Hölzchen auf eine gegebene Gerade an einen gegebenen Punkt dieser Geraden, 3. das Anlegen von 2 Hölzchen an 2 gegebene Punkte A und B mit $\overline{AB} < 2$ LE derart, daß die beiden Hölzchen die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks ABC werden (hieraus folgt auch die Konstruierbarkeit von Elementardreiecken und beliebigen Rhomben der Seitenlänge 1 LE). Versucht nun einmal, die in *Aufg. 14* geforderten geometrischen Grundkonstruktionen „mit Hölzchen und Lineal" auszuführen!

Nun noch zu anderen Hölzchen-Knobeleien: Da man mit den Hölzchen auch die Grundziffern des Dezimalsystems (entsprechend den Anzeigeziffern eines Taschenrechners bzw. einer Digitaluhr), die Grundziffern des römischen Zahlensystems, die Zeichen für die rationalen Rechenoperationen, Relationszeichen, somit Gleichungen und Ungleichungen, aber auch Buchstaben und damit Worte und Sätze auflegen kann, so läßt sich mit ihnen ganz ausgezeichnet Arithmetik und Wortspielerei betreiben *(s. Abb. 2)*. Beispiele für Knobeleien hierzu sind das Richtigstellen falscher Gleichungen *(s. Aufg. 15 und 16)* bzw. Ungleichungen *(s. Aufg. 17)* und das Verwandeln von Brüchen in andere Brüche *(s. Aufg. 18)*.

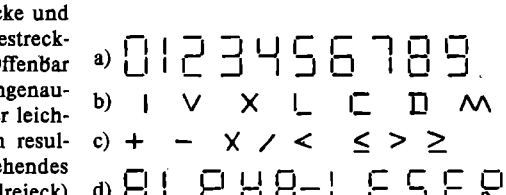


Bild 2
Hölzchenziffern und -zeichen:
a) arabische Ziffern,
b) römische Ziffern,
c) Operations- und Relationszeichen,
d) Hölzchen-Schrift

R. Mildner

Knobel-Wandzeitung

Geometrische Vielfalt

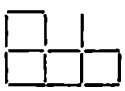
▲1▲ Legt in der Figur 2 Hölzchen so um, daß a) 5 Dreiecke und 2 Quadrate, b) 5 Dreiecke und 1 Rechteck, c) 3 Dreiecke, 1 Rechteck und 1 Rhombus, d) 2 Dreiecke, 3 Quadrate und 1 Trapez sowie e) 2 Dreiecke, 3 Quadrate und 1 Rhombus entstehen!

Hölzchen-Lokomotive

▲2▲

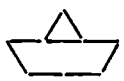
a) Legt in der Figur 3 Hölzchen so um, daß 3 kongruente Rechtecke entstehen! Findet dafür 3 verschiedene Umlegemöglichkeiten!

b) Wieviel Hölzchen müssen in der Figur umgelegt werden, damit die Lokomotive die entgegengesetzte Fahrtrichtung einnimmt?



Schiffchen-Spiel

▲3▲ Legt in der Figur a) 2 Hölzchen, b) 4 Hölzchen und c) 6 Hölzchen so um, daß jeweils 1 Dreieck und 2 Rhomben entstehen!

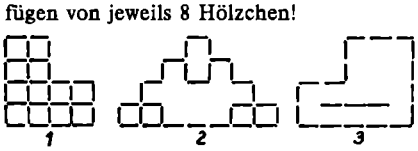


Hölzchen-Tischlampe

▲4▲ Legt in der Figur jeweils 4 Hölzchen so um, daß a) 1 Dreieck und 1 Trapez, b) 1 Dreieck und 2 Trapeze, c) 2 Dreiecke und 1 Trapez, d) 2 Dreiecke und 2 Trapeze, e) 3 Dreiecke und 1 Trapez sowie f) 3 Dreiecke und 1 regelmäßiges Sechseck entstehen!

Gerechte Teilung

▲5▲ Zerlegt die Randpolygone der 3 Figuren in je 4 kongruente Teilfiguren, und zwar bei Figur 1 durch Wegnahme, Figur 2 durch Umlegen und Figur 3 durch Hinzufügen von jeweils 8 Hölzchen!



Aus 2 mach 1

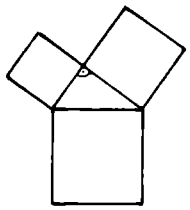
▲6▲ Legt in der Figur 6 Hölzchen so um, damit aus den beiden Weingläsern nur 1 (ähnliches) Weinglas wird!

Rechtwinklige Dreiecke

▲7▲

a) Legt aus 12 sowie aus 30 Hölzchen jeweils ein rechtwinkliges Dreieck (pythagoreisches Dreieck) auf!

b) Wieviel Hölzchen benötigt man mindestens, um die abgebildete Standardfigur zum Satz des Pythagoras auflegen zu können?



Fünf Vierecke

▲8▲ In der Abbildung wurden mit 16 Hölzchen 5 kongruente Quadrate aufgelegt.

a) Wie kann man bereits mit 15 Hölzchen 5 kongruente Quadrate auflegen?

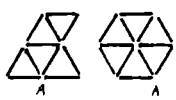
b) Wie kann man schon mit 14 Hölzchen 5 kongruente Rhomben auflegen?

Mit 12 Hölzchen

▲9▲ Wieviel Quadrate kann man mit 12 Hölzchen höchstens auflegen (wobei das Übereinanderlegen von Hölzchen erlaubt ist)?

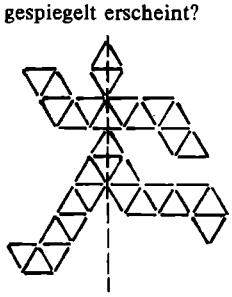
Verschiebung und Drehung

▲10▲ Wieviel Hölzchen muß man in den beiden Figuren mindestens umlegen, damit diese a) um 1 LE nach rechts verschoben werden bzw. b) um 60° in mathematisch negativer Richtung um den Punkt A gedreht werden?



Spiegelung

▲11▲ Wieviel Hölzchen müssen mindestens umgelegt werden, damit die abgebildete Hölzchenfigur an der eingezeichneten Achse gespiegelt erscheint?



Flächenberechnung

▲12▲ Ermittelt die Flächeninhalte der Randpolygone der in den Aufgaben 1, 3, 4, 5, 8, 10 und 11 dieser Knobelwandzeitung angegebenen Hölzchenfiguren!

Geometrische Konstruktionen mit Hölzchen

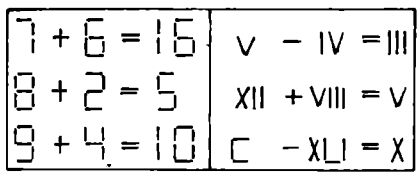
▲13▲ Konstruiert mit Hilfe von Elementardreiecken (s. Text!) die folgenden Hölzchenfiguren: a) eine Strecke der Länge 3 LE, b) ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 3 LE, c) ein regelmäßiges Sechseck der Seitenlänge 2 LE, d) die Figuren der Aufgaben 3 und 4 dieser Knobelwandzeitung, e) die Mittellinie eines gleichschenkligen Trapezes (Grundseiten: 3 LE und 1 LE, Schenkel: 2 LE) und f) mindestens vier verschiedene (nicht kongruente) Polygone, die Teilfiguren eines trigonalen Gitters sind und jeweils 5 Elementardreiecke umfassen!

Grundkonstruktionen mit Hölzchen und Lineal

▲14▲ Führt die folgenden Grundkonstruktionen mit Hölzchen und Lineal (s. Text!) aus und begründet ihre Richtigkeit: a) das Halbieren einer gegebenen Strecke $\overline{AB}$ (für die Streckenlängen 1,5 LE; 3 LE; 4,5 LE), b) das Halbieren eines gegebenen Winkels mit dem Scheitel A, c) das Errichten der Senkrechten in einem Punkt P einer gegebenen Geraden g und d) das Zeichnen einer Parallelen g' zu einer gegebenen Geraden g im Abstand 2 LE.

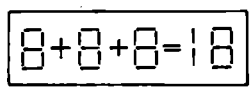
Hölzchen-Gleichungen

▲15▲ Legt in jeder der (offenbar falschen) Gleichungen genau 1 Hölzchen so um, daß diese zu wahren Aussagen werden!



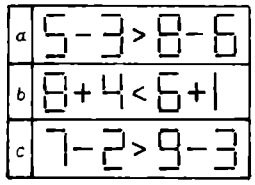
Zerlegung der 18

▲16▲ Die abgebildete Hölzchengleichung ist offenbar falsch. Entfernt nun von 3 Ziffern 8 auf der linken Seite der Gleichung a) 2 Hölzchen, b) 3 Hölzchen, c) 4 Hölzchen, d) 6 Hölzchen, e) 7 Hölzchen und f) 11 Hölzchen derart, daß jeweils wahre Gleichungen entstehen! Wieviel verschiedene Gleichungen, die nicht nur durch Vertauschen derselben Summanden entstehen, sind in jedem Falle erhältlich?



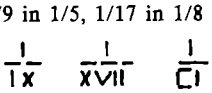
Hölzchen-Ungleichungen

▲17▲ Legt in jeder der (offenbar falschen) Ungleichungen genau 1 Hölzchen so um, daß diese zu wahren Aussagen werden! Dabei darf das Ungleichheitszeichen nicht verändert werden. Findet in jedem Falle mindestens 4 verschiedene Umlegemöglichkeiten!

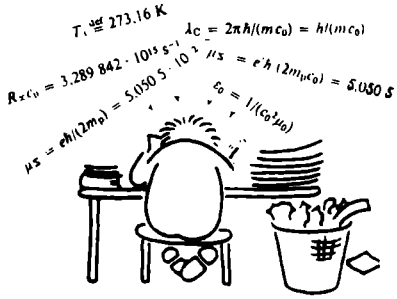


Hölzchen-Brüche

▲18▲ Durch Umlegen von je 1 Hölzchen sollt ihr die drei abgebildeten Brüche (in römischen Ziffern) umwandeln, und zwar 1/9 in 1/5, 1/17 in 1/8 und 1/101 in 2/51.



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1987

Aufgaben aus sowjetischen Mathematikolympiaden

Ma 5 ■ 2694 In ein Pionierlager fuhren drei Freunde: Mischa, Wolodja und Petja. Es ist bekannt, daß jeder von ihnen einen der Familiennamen Iwanow, Semenow, Gerassimow führt. Mischa heißt nicht Gerassimow. Der Vater von Wolodja ist Ingenieur. Wolodja geht in die 6. Klasse. Der Pionier mit dem Familiennamen Gerassimow geht in die 5. Klasse. Der Vater des Pioniers mit dem Familiennamen Iwanow ist Dreher. Welchen Familiennamen haben die Pioniere?

Ma 5 ■ 2695 Eine Mutter beauftragt die Kinder – den Bruder und die Schwester – ein Paket Pralinen so aufzuteilen, daß am nächsten Tag zum Mittag für die Gäste die Hälfte der Pralinen angeboten werden kann und noch drei Stück übrigbleiben. Zum darauffolgenden Frühstück sollten für die ganze Familie die Hälfte der restlichen Pralinen und noch drei Stück und zum darauffolgenden Abendessen die Hälfte der verbleibenden Pralinen und noch drei Stück vorhanden sein. Die Kinder teilten die Pralinen so auf, wie es ihnen die Mutter auftrug, und sie behielten noch vier Pralinen übrig, die sie selber essen durften. Wieviel Pralinen waren im Paket?

Ma 5 ■ 2696 Ergänze die fehlenden Grundziffern, die durch * gekennzeichnet sind, und begründe, wie du sie gefunden hast!

$$\begin{array}{r} 785 \cdot *** \\ \hline *** \\ 1*** \\ *** \\ \hline ***** \end{array}$$

Ma 5 ■ 2697 Eine Raupe kriecht auf einen Apfelbaum. In der ersten Stunde klettert sie 10 cm hoch; in der zweiten Stunde sinkt sie um 4 cm herunter; in der dritten Stunde kriecht sie erneut 10 cm hoch, und in der vierten rutscht sie wieder 4 cm herunter. Auf diese Weise klettert die Raupe weiter. Um wieviel Zentimeter ist die Raupe in 11 Stunden hinaufgeklettert?

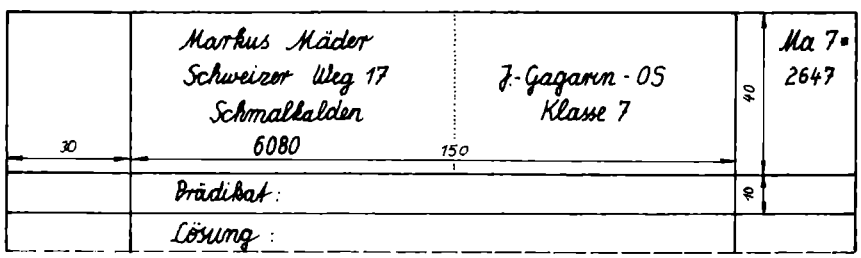
Ma 5 ■ 2698 Ergänze die fehlenden Grundziffern, und begründe, wie du sie gefunden hast!

$$\begin{array}{r} 63 \cdot ** \\ \hline ** \\ ** \\ \hline *** \end{array}$$

Ma 5 ■ 2699 Auf einem Kolchos gab es einige Ferkel gleichen Gewichts und einige Lämmer gleichen Gewichts. Ein Pionier fragte einen Kolchosbauern, wieviel ein Ferkel und ein Lamm wiegen. Der Kolchosbauer antwortete, daß 3 Ferkel und 2 Lämmer 22 kg, aber 2 Ferkel und 3 Lämmer 23 kg wiegen. Wieviel Kilogramm wiegt ein Ferkel, wieviel ein Lamm?

Ma 6 ■ 2700 Aus zwei Neubausiedlungen, die 36 km voneinander entfernt sind, gehen sich zwei Freunde entgegen. Der erste geht mit einer Geschwindigkeit von $5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, der zweite mit $4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Gleichzeitig mit dem ersten fährt ein Junge mit einem Fahrrad aus dessen Stadt dem zweiten entgegen. Er fährt mit einer Geschwindigkeit, die gleich der Summe der Geschwindigkeiten der Freunde ist. Wenn er den zweiten Freund trifft, wendet er und fährt zum ersten zurück. Trifft er den ersten, dann wendet er und fährt zum zweiten zurück usw. Auf diese Weise fährt der Radfahrer zwischen dem ersten und dem zweiten Freund hin und her, bis sie sich treffen. Wieviel Kilometer fuhr der Radfahrer in dieser Zeit?

Ma 6 ■ 2701 Ein Gemüseladen erhielt 5 Kisten Zitronen und Apfelsinen. In jeder Kiste waren nur Früchte einer Sorte. In der ersten Kiste waren 100 Stück, in der zweiten 105, in der dritten 110, in der vierten 115 und in der fünften 130 Stück. Als eine Kiste verbraucht war, waren dreimal weniger Zitronen als Apfelsinen übriggeblieben. Wieviel Früchte waren übriggeblieben?



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1986/87 läuft von Heft 5/1986 bis Heft 2/1987. Zwischen dem 1. und 10. September 1987 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/86 bis 2/87 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/87 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/1986 bis 2/87) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1986/87 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 2702 Zur Ernährung benötigen 6 Pferde und 40 Kühe täglich 472 kg, aber 12 Pferde und 37 Kühe täglich 514 kg Heu. Wieviel Kilogramm Heu benötigten bei dieser Ernährung 30 Pferde und 90 Kühe vom 15. Oktober bis zum 25. März einschließlich?
(Das Jahr ist kein Schaltjahr.)

Ma 6 ■ 2703 Bei der Addition von vier unleserlich geschriebenen Zahlen wurde bei der ersten Zahl die Hunderterziffer 2 als 5, bei der zweiten Zahl die Tausenderziffer 3 als 8, bei der dritten Zahl die Einerstelle 9 als 2 und bei der vierten Zahl die Zehnerziffer 7 als 4 gelesen. Das Ergebnis der Addition war 28 975. Bestimme den Fehler, den das Ergebnis hat, und die richtige Summe!

Ma 6 ■ 2704 Aus einem Korb mit Eiern entnahm man die Hälfte aller Eier, danach die Hälfte des Restes, dann die Hälfte des neuen Restes und zum Schluß noch einmal die Hälfte des letzten Restes. Danach verblieben im Korb 10 Eier. Wieviel Eier waren zu Anfang im Korb?

Ma 7 ■ 2705 Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen beträgt 240, und ihr größter gemeinsamer Teiler ist 8. Bestimme beide Zahlen, wenn bekannt ist, daß die kleinere der Zahlen nur einmal den Faktor 5 enthält und die größere die 5 nicht enthält!

Ma 7 ■ 2706 Von einer Stadt A zu einer Stadt B fuhr ein Zug 16 Stunden. Auf der Rückfahrt fuhr dieser Zug mit einer um $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ höheren Geschwindigkeit und war 4 Stunden schneller. Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Zug von A nach B, und wie weit sind die beiden Städte voneinander entfernt?

Ma 7 ■ 2707 Auf einer Seite einer Waage liegen sechs gleich schwere Teebeutel und ein 50-g-Stück. Auf der anderen Seite der Waage liegen ein gleicher Teebeutel, ein Gewicht von 100 g und ein Gewicht von 200 g. Die Waage befindet sich im Gleichgewicht. Bestimme, wieviel Gramm ein Teebeutel wiegt!

Ma 7 ■ 2708 Rekonstruiere die fehlenden Grundziffern bei folgender Multiplikation!

$$\begin{array}{r} ***\cdot*** \\ \hline *0** \\ **5 \\ *1** \\ \hline *****8 \end{array}$$

Ma 8 ■ 2709 Ein Reisender fährt mit einem Zug, der mit einer Geschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt. Er sieht, daß am Fenster ein entgegenkommender Zug innerhalb von 4 s vorbeifährt. Welche Geschwindigkeit hat der Gegenzug, wenn seine Länge 120 m beträgt?

Ma 8 ■ 2710 In einem konvexen Viereck *ABCD* verbindet man die Seitenmitten nacheinander und erhält das Viereck *EFGH*. Bestimme, welchen Flächeninhalt das Viereck *ABCD* im Vergleich zum Flächeninhalt des Vierecks *EFGH* einnimmt!

Ma 8 ■ 2711 Auf einem Tisch liegen drei Schachteln. In der ersten liegen 2 schwarze Kugeln, in der zweiten eine schwarze und eine weiße, in der dritten zwei weiße Kugeln. Die Schachteln tragen die Aufschriften „Zwei schwarze", „Weiß und schwarz" und „Zwei weiße". Doch ist bekannt, daß keine Aufschrift richtig ist. Wie kann man durch Herausnehmen nur einer Kugel aus einer Schachtel die Verteilung der Kugeln bestimmen?

Ma 8 ■ 2712 Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen, für die der Bruch $\frac{19n+17}{7n+11}$ eine ganze Zahl ist.

Ma 9 ■ 2713 Den Siegern einer Mathematik-Olympiade werden 1., 2. und 3. Preise überreicht. Die Anzahl der 1. Preise ist um 12 kleiner als die der 2. Preise. 3. Preise erhielten genau doppelt so viele Teilnehmer wie erste und zweite zusammen, doch diese Anzahl ist genau um 104 kleiner als das Produkt von den Anzahlen der 1. und 2. Preise. Wie viele Schüler erhielten Preise?

Ma 9 ■ 2714 Um ein gleichseitiges Dreieck *ABC* mit der Seitenlänge $a = 12$ cm wird der Umkreis gezeichnet und diesem wird ein regelmäßiges Sechseck umbeschrieben. Über jeder Seite des Sechsecks wird ein Halbkreis mit der Seitenlänge als Durchmesser nach außen konstruiert. Man berechne den Flächeninhalt der so entstehenden Rosette.

Ma 9 ■ 2715 In einer 8. Klasse sind 40 Schüler. Jeder von ihnen lernt mindestens eine der Fremdsprachen: Englisch, Deutsch, Französisch. 34 Schüler lernen mindestens eine der beiden Sprachen: Englisch, Deutsch. 25 Schüler lernen mindestens eine der beiden Sprachen: Deutsch, Französisch. 6 Schüler lernen nur Deutsch. Genau zwei Sprachen, Englisch und Deutsch, lernen 3 Schüler mehr als Französisch und Deutsch. Kein Schüler lernt Englisch und Französisch. Wie viele Schüler lernen genau eine bzw. genau zwei Sprachen?

Ma 9 ■ 2716 Im Innern eines rechtwinkligen Dreiecks *ABC* mit dem rechten Winkel bei *C* sei ein Punkt *M* derart gegeben, daß die Dreiecke *AMB*, *BMC* und *CMA* flächengleich sind. Man zeige, daß dann $5 \times \overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MA}^2$ gilt.

Ma 10/12 ■ 2717 Zwei Radfahrer fahren zur selben Zeit los und mit konstanter Geschwindigkeit, einer von A nach B und einer von B nach A. Das erste Mal treffen sie sich in einer Entfernung von 40 km von B. Nachdem sie am Endpunkt angekommen sind, fahren sie sofort zurück und treffen sich ein zweites Mal, 8 Stunden nach dem ersten Treffen, in einer Entfernung von 20 km von A. Man ermittle die Entfernung von A und B und die Geschwindigkeit jedes Radfahrers.

Ma 10/12 ■ 2718 In einem Dreieck stehen zwei Seitenhalbierende senkrecht aufeinander und haben eine Länge von 18 cm bzw. 24 cm. Man bestimme den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Ma 10/12 ■ 2719 Man zeige, daß man unter beliebigen 39 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets eine findet, deren Quersumme durch 11 teilbar ist. Man gebe ein Beispiel an, in dem die Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen, deren Quersumme durch 11 teilbar ist, genau 39 ist.

Ma 10/12 ■ 2720 In einem spitzwinkligen Dreieck *ABC* sei $\overline{AH}$, die längste der Höhen, gleich lang der Seitenhalbierenden $\overline{BM}$. Man zeige, daß der Winkel $\measuredangle ABC$ kleiner oder gleich 60° ist.

Aus Naturwissenschaft und Technik

Seit 1974 wurden regelmäßig neben dem Mathematikwettbewerb Aufgaben zu Physik und Chemie veröffentlicht. Insgesamt gingen zu den 361 gestellten Problemen rund 95 000 Lösungen ein.
Mit diesem Wetttbewerb erweitern wir den Inhalt, indem wir Aufgaben aus den Naturwissenschaften und der Technik anbieten. Viel Freude und Erfolg beim Knobeln!

Na/Te 6 ■ 362 30 kg des Materials A und 40 kg des Materials B kosten insgesamt 320 M. Ein Kilogramm des Materials B ist um 1 M teurer als 1 kg des Materials A. Wieviel kostet 1 kg jeden Materials?

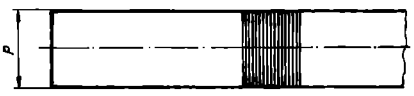
Na/Te 7 ■ 363 Wir haben einen 6 m langen Kupferdraht in zwei Teile zu unterteilen, so daß der eine Teil 60 cm länger ist als der andere.

Na/Te 7 ■ 364 Löse die folgende Aufgabe mit dem Taschenrechner! In welchem Verhältnis steht die relative Atommasse von Silber (Ag) zur relativen Atommasse von Kalium (K)? (Sinnvolle Genauigkeit beachten!)

Na/Te 8 ■ 365 Die Entfernung zwischen den Orten C und D beträgt 174 km. Von C nach D fährt ein Zug mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h, von D nach C ein anderer Zug mit einer Geschwindigkeit von 57 km/h. Beide Züge fahren 10.30 Uhr ab. Wann treffen sie sich?

Na/Te 8 ■ 366 Löse die folgende Aufgabe mit dem Taschenrechner! Es werden 40 g Kupfer(II)-oxid umgesetzt. Berechne die Masse des entstehenden Oxids!

Na/Te 9 ■ 367 Berechnen Sie die Geschwindigkeit v, mit der ein Draht von einer Walze (siehe Bild) mit einem Durchmesser $d = 20$ mm abgewickelt wird, wenn die Drehzahl der Stange, die in die Spindel einer Maschine eingespannt wurde, $n = 160\ \text{min}^{-1}$ beträgt!



Na/Te 9 ■ 368 Bei 300 °C werden 1 g Benzol in einem abgeschlossenen Behälter mit 4 dm^3 Sauerstoff vollständig verbrannt. Welcher Druck herrscht in dem Behälter nach der Verbrennung, wenn der Anfangsdruck 127 kPa und die Anfangstemperatur 0 °C betrugen?

Na/Te 10/12 ■ 369 Auf einer Fotografie hat ein Gebäude eine scheinbare Höhe von 7 cm. Welches ist die tatsächliche Höhe des Gebäudes, wenn es aus einer Entfernung von 80 m fotografiert wurde und das Objektiv des Fotoapparates eine Brennweite von 20 cm aufwies?

$\left(\text{Die Linsengleichung ist } \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.\right)$

Na/Te 10/12 ■ 370 Ammoniummagnesiumphosphat entsteht durch Umsetzung eines Magnesiumsalzes mit Ammoniumphosphat und Ammoniak. Wird Ammoniummagnesiumphosphat erhitzt, bildet sich Magnesiumpyrophosphat. Welche Gleichungen beschreiben diese Reaktionen?

Computer in Tips, Fibeln und Lexika

Kleiner Streifzug durch populäre Angebote 1986 zur Mikroelektronik

Viele Leser fragen uns häufig nach Literatur zur Mikroelektronik und meinen vor allem Populäres über Computer, konkret Kleincomputer. Die Skala der Wünsche ist vielgestaltig. Wir haben uns im für 1986 vorgesehenen Angebot umgesehen und fanden dies:

Viele Bücher werden ausgewiesen *sowohl für Einsteiger als auch für Fortgeschrittene*, wie beispielsweise der Verlag *Volk und Wissen* seinem Titel *Peter Heblik, Wissensspeicher* BASIC (304 S., 13,50 M), nachsagt, der die Programmiersprache beschreibt, Sprachelemente vorstellt und Programme zu Mathematik, Physik, Technik sowie Spiele anbietet. Ausdrücklich zum neuen Rahmenprogramm Mikroelektronik für Schüler bietet der Verlag an:
Burmeister/Höppner, Elektronik (Grundlagen und Anwendung in Meß- und Nachrichtentechnik sowie Digitalrechnung, 160 S., 3,40 M).

Der *Verlag Technik* kündigt an eine systematische Einführung in BASIC samt Methoden der Programmentwicklung und zahlreichen Beispielen für Ingenieure wie Amateure (*Dieter Werner*, BASIC für Mikrorechner; 260 S., 27 M), in der Lexikonreihe außerdem:
Mikroelektronik und deren Bauelemente (240 S., 19,50 M).

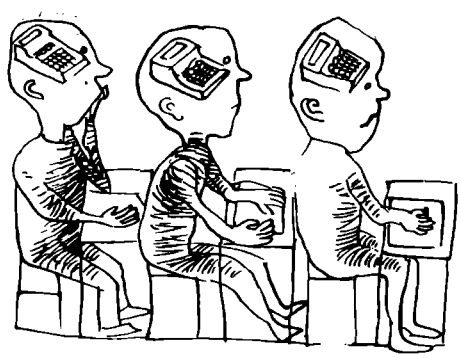
An Leser, die sich noch nicht mit Programmieren befaßt haben, wendet sich der *Fachbuchverlag* mit *Hopfer/Müller*, BASIC – *Einführung in das Programmieren* (160 S., 12 M). Das Buch erläutert die wichtigsten Befehle, an kleinen Beispielen ist zu erleben, wie ein Programm aufgestellt wird.

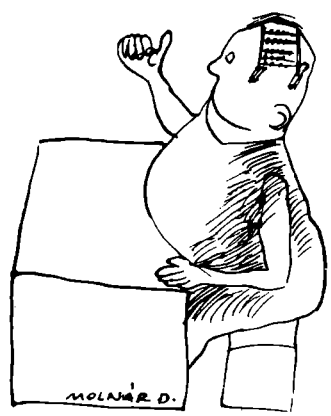
Ein Anhang enthält Programme für mathematische Aufgaben (Funktionen, Gleichungen), Vokabeltrainer, Lottozahlengenerator, die alphabetische Sortierung und Würfelspiele. Selbstverständlich sind auch 1986 zwei Hefte *Kleincomputer-Tips* vorgesehen – mit besonderem Augenmerk auf die in Schule und Berufsausbildung eingesetzten Kleincomputer.

Im *Akademie-Verlag* bringt *Jürgen Groh* eine *Kleincomputer-Fibel* (200 S., 19,80 M), die beim absoluten Neuling beginnt, Ratschläge fürs Strippenlegen zu geben und den KC in Gang zu bringen; ihm dann BASIC beibringt (ausreichend, um selbst ausarbeiten zu können) und neben Programmen, die mathematische Probleme anschaulich machen, auch das einer Mondlandung anbietet.

Mit den Anwendungsmöglichkeiten und eventuellen Grenzen der Mikroelektronik befaßt sich das *akzent*-Heft des *Urania-Verlags Walter Conrad, Chips, Sensoren, Computer* (128 S., 4,50 M) in der für die Reihe typischen Popularität. Um Prinzipien, technologische Verfahren und Anwendung geht es auch bei *Rolf Enderlein, Mikroelektronik* im *Verlag der Wissenschaften*, dazu besonders um die physikalischen Grundlagen und die dadurch gesetzten Grenzen. Im *Verlag Die Wirtschaft* analysiert ein Ökonom Softwareprobleme für Fachleute und Laien (*Eberhard Prager, Software – was ist das?* 80 S., 5,80 M).

Elektronikamateure wissen selbst, daß sie Spezialliteratur beim *Militärverlag* suchen müssen. Wir fanden:
Schlenzig/Bläsing,
Elektronikbasteln mit dem Alleskönner 555, Schlenzig/Jung, Neue Halbleiterbauelemente; Hertzsch, CMOS-*Schaltkreisliste*.





Wir arbeiten mit Resten

Teil 2

Ein Arbeitsmaterial für Schülerzirkel ab Klasse 6

Sind zwei natürliche Zahlen a und b mit $a > b$ und $b \neq 0$ gegeben, so kann man den Rest r bestimmen, den a bei Division durch b läßt. Man erhält dann die Darstellung $a = k \cdot b + r$ ($k \in N$; $r \in N$, $r < b$). Bisher haben wir diese Darstellungsmöglichkeit genutzt, um Beweise zu führen. Jetzt lernen wir ein Verfahren zur *Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers d* zweier gegebener natürlicher Zahlen a und b kennen, das im wesentlichen auf der Bestimmung von Resten beruht. Solch ein Verfahren ist nützlich, wenn wir später z.B. *diophantische Gleichungen* lösen wollen. Zwar habt ihr auch im Unterricht gelernt, wie man den g.g.T. zweier Zahlen bestimmen kann (↗ LB6, S. 23), aber für größere Zahlen wird das recht umständlich.

▲5▲ Erläutere an einem geeigneten Beispiel: Ein gemeinsamer Teiler von a und b ist genau dann der *größte*, wenn er von allen gemeinsamen Teilern von a und b geteilt wird.

Man kann den g.g.T. d zweier natürlicher Zahlen a und b. auch wie folgt definieren: d ist der g.g.T. von a und b. ($d = \text{ggT}(a, b)$) *bedeutet*

1. $d \mid a$ und $d \mid b$ und 2. Für jede Zahl $d' \in N$ gilt:

Wenn $d' \mid a$ und $d' \mid b$, so $d' \mid d$.

In dieser Definition wird nur die Relation *ist Teiler von* benutzt.

Wir beweisen nun:

Ist $a = k \cdot b + r$ ($k \in N$; $r \in N$, $r < b$), so ist jeder gemeinsame Teiler t von a und b auch ein Teiler von r.

Voraussetzung:

1. $a = k \cdot b + r$ ($k \in N$; $r \in N$, $r < b$)
2. $t \mid a$ und $t \mid b$ ($t \in N$)

Behauptung: $t \mid r$

Beweis: Wegen $t \mid a$ gibt es ein $u \in N$, so daß $a = u \cdot t$,
wegen $t \mid b$ gibt es ein $v \in N$, so daß $b = v \cdot t$.
Einsetzen in Voraussetzung 1 liefert $u \cdot t = k \cdot v \cdot t + r$.
Daraus folgt $r = u \cdot t - k \cdot v \cdot t$
(Subtraktion als Umkehrung der Addition), und durch Anwendung des Distributivgesetzes erhält man $r = (u - k \cdot v) \cdot t$, wobei $u - k \cdot v \in N$ ist.
Also gilt $t \mid r$, w.z.b.w.

Beispiel: $345 = 9 \cdot 36 + 21$

Alle Teiler von 345 sind 1, 3, 5, 15, 23, 69, 115, 345. Alle Teiler von 36 sind 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18, 36.

Die gemeinsamen Teiler von 345 und 36 sind 1 und 3. 1 und 3 sind auch Teiler von 21.

Da *alle* gemeinsamen Teiler von a und b ein Teiler von r sind, ist auch der *größte* gemeinsame Teiler von a und b ein Teiler von r: Wenn $a = k \cdot b + r$ ($k \in N$; $r \in N$, $r < b$) und $d = \text{ggT}(a, b)$, so $d \mid r$. Daraus folgt aber: d ist ein *gemeinsamer* Teiler von b und r.

Im Beispiel:

$d = \text{ggT}(345, 36) = 3$, $3 \mid 21$,

3 ist gemeinsamer Teiler von 36 und 21.

Ob d wohl der *größte* gemeinsame Teiler von b und r ist?

Wir überprüfen dies mit Hilfe der Definition:

Es sei t ein weiterer gemeinsamer Teiler von b und r: $t \mid b$ und $t \mid r$.

Wegen $a = k \cdot b + r$ ist t dann auch ein Teiler von a, also ein gemeinsamer Teiler von a und b: $t \mid a$ und $t \mid b$. Dann gilt aber $t \mid \text{ggT}(a, b)$, d.h. $t \mid d$.

Wir haben damit nachgewiesen: $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, r)$.

Im Beispiel: $\text{ggT}(345, 36) = \text{ggT}(36, 21)$

Es ist $a > b > r$. Setzen wir der Übersicht halber $r = r_1$, und bestimmen wir den Rest r_2, den b bei Division durch r_1 läßt, so ist $a > b > r_1 > r_2$, und es gilt $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, r_1) = \text{ggT}(r_1, r_2)$. Je kleiner zwei Zahlen sind, um so leichter findet man i.a. ihren g.g.T. Wir setzen deshalb unser Verfahren weiter fort. Da die entstehenden Reste $r_1, r_2, r_3, \ldots$ immer kleiner werdende natürliche Zahlen sind, muß nach endlich vielen Schritten der Rest 0 auftreten. Der letzte von 0 verschiedene Rest sei r_k. Es ist dann $\text{ggT}(a, b) = \ldots = \text{ggT}(r_k, 0)$.

Der größte gemeinsame Teiler von r_k und 0 ist aber r_k.

Im Beispiel:

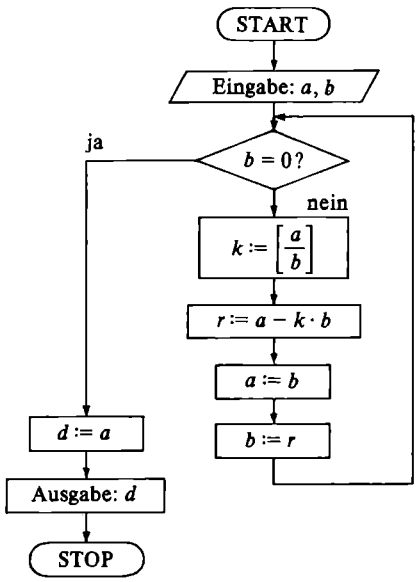
	ggT
$345 = 9 \cdot 36 + 21$	$(345, 36) = \text{ggT}(36, 21)$
$36 = 1 \cdot 21 + 15$	$= \text{ggT}(21, 15)$
$21 = 1 \cdot 15 + 6$	$= \text{ggT}(15, 6)$
$15 = 2 \cdot 6 + \underline{3}$	$= \text{ggT}(6, 3)$
$6 = 2 \cdot 3 + \underline{0}$	$= \text{ggT}(3, 0) = \underline{3}$

Damit haben wir den *Euklidischen Algorithmus*[1] zur Bestimmung des g.g.T. zweier natürlicher Zahlen a und b ($a > b$, $b \neq 0$) erarbeitet.

▲6▲ Bestimme mit Hilfe des *Euklidischen Algorithmus* den g.g.T. von a) 39 und 15, b) 127 und 45, c) 1953 und 168, d) 195 und 15! Für kleine Zahlen a und b ist das Finden der Darstellung $a = k \cdot b + r$ kein Problem. Ansonsten kann man die Algorithmen zur Bestimmung des Restes r benutzen, die in dem der Fußnote 1) angegebenen Artikel beschrieben sind. Steht ein Taschenrechner zur Verfügung, so ist folgendes Vorgehen effektiv; es liefert auch den Faktor k: Bezeichnet man mit $[x]$ die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich x ist

$\left(\text{z.B. } \left[\frac{7}{3}\right] = 2, [4{,}05] = 4, [7{,}91] = 7, [10] = 10\right)$, so ist $k = \left[\frac{a}{b}\right]$ und $r = a - \left[\frac{a}{b}\right] \cdot b$.

Den Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers d zweier natürlicher Zahlen a und b kann man auch durch ein *Flußbild* beschreiben[2]:



Wir nehmen wieder die Zahlen 345 und 36 und arbeiten die im Flußbild angegebenen Schritte ab. Die jeweiligen Werte der Variablen halten wir in einer Tabelle fest:

	1.	2.	3.	4.	5. Durchlauf
k	9	1	1	2	2
r	21	15	6	3	0
a	345	36	21	15	6	3
b	36	21	15	6	3	0
d						3

▲7▲ Arbeite das Flußbild für die Eingabewerte

a) $a = 345$ $b = 60$ b) $a = 7$ $b = 0$ c) $a = 0$ $b = 12$ ab!

Fülle jeweils eine entsprechende Tabelle aus!

Falls eure Arbeitsgemeinschaft über einen Kleincomputer verfügt, könnt ihr ihn den im Flußbild beschriebenen Algorithmus nach folgendem BASIC-Programm ausführen lassen:

```
10 CLS
20 INPUT „Eingabe A und B:"; A, B
30 PRINT
40 IF B = 0 THEN GOTO 110
50 LET K = INT(A/B)
60 LET R = A - K*B
70 PRINT A; „="; K; „*"; B; „+"; R
80 LET A = B
90 LET B = R
100 GOTO 40
110 PRINT
120 PRINT „GGT/:"; A
130 END
```

[1]) Zum Begriff „Algorithmus" siehe Jerschow, A.P.; *Computer – Algorithmus – Algorithmische Sprache, alpha* 3/86

[2]) Die Bedeutung des hier verwendeten Zeichens := ist im Teil 2 des in der Fußnote 1) angegebenen Artikels erläutert.

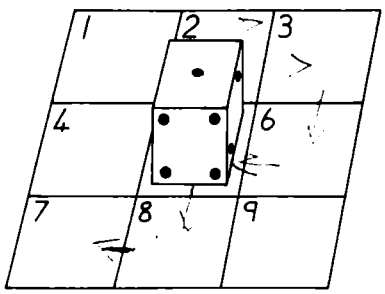
C.-P. Helmholz

In freien Stunden · alpha-heiter

„Hauen Sie endlich ab! Wir sind nicht vom Fernsehen, wir sind Landvermesser!"

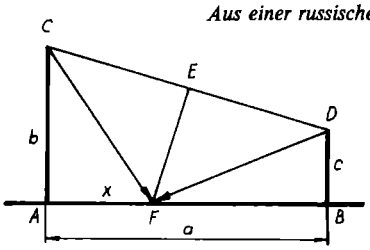
Mit sechs Bewegungen

Man gelange mit dem Würfel durch 6 Vierteldrehungen zum Feld 7 so, daß auf dem oberen Quadrat die Augenzahl sechs steht. Der Würfel darf nach oben und nach unten, nach links bzw. rechts jeweils eine Vierteldrehung machen. Welcher Weg führt zum Ziel? *Aus: Füles, Budapest*



Zwei Raben und ein Käse

Auf den Spitzen der Säulen AC und BD sitzt je ein Rabe. An welcher Stelle auf dem Erdboden AB müßte sich ein weggeworfenes Stück Käse befinden, wenn die Vögel es bei gleicher Fluggeschwindigkeit zur gleichen Zeit erreichen sollen?
Achtung!
Der Satz des Pythagoras ist hier im Spiel!
Aus einer russischen Zeitschrift (1902)



Interessante Logelei

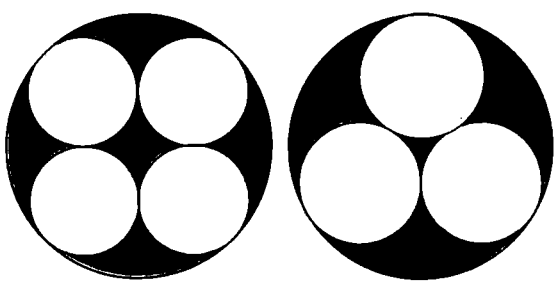
Albert, Bertram, Carol und Denise, deren Familiennamen in anderer Reihenfolge Edwards, Ford, Grant und Hanks lauten, gehen in die Klassen 3, 4, 5 und 6 ihrer Schule. Bei der letzten Prüfungsarbeit im Fach Englisch waren ihre Punktzahlen 55, 60, 65 und 70.
Bestimme aus den folgenden Angaben Klasse, Punktzahl, Vor- und Zuname von jedem der vier Schüler!

1. Grant ist in einer höheren Klasse als Hanks.
2. Die Jungen erhielten zusammen mehr Punkte in Englisch als die Mädchen.
3. Der Schüler bzw. die Schülerin aus der 3. Klasse hatte die höchste Punktzahl in Englisch.
4. Als Albert und Hanks ihre Punktzahlen mit der eines dritten Mitgliedes dieser vier verglichen, erklärten sie: „Wenn jeder von uns seine Klassennummer mit seiner Punktzahl in Englisch multipliziert, dann überschreiten wir beide die Zahl 260."
5. Bei einem Schachwettbewerb spielte Bertram gegen Edwards, und Denise schlug Hanks.

Aus: Parobla, N. S. W./Australien

Unterhaltsame Kreisfiguren

a) Einem Kreis k mit dem Radius r werden vier kongruente Kreise mit dem Radius x so einbeschrieben, daß jeder der vier zwei andere von außen und den Kreis k von innen berührt. Bestimme x und den Flächenanteil für $r = 1$! (Taschenrechner erlaubt!)
b) Löse die analoge Aufgabe für drei Kreise vom Radius x! *Dipl.-Lehrer Ch. Werge, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig*



Spiel mit dem Taschenrechner

In das folgende Lösungsschema sind senkrecht vierbuchstabige Wörter einzutragen, die folgende Bedeutung haben:

1. Küchengerät = $5\,(2^7 \cdot 13 - 1)$;
2. Kleidungsstück = $2^4 \cdot 3 \cdot 73$;
3. Saugwurm = $(2 \cdot 43)^2 - 3$;
4. altes Längenmaß = $7^3 \cdot 11$;
5. svw. Schlag = $2\left[(2^4)^3 + \sqrt{3721}\right]$;
6. Strick, Leine = $(5 \cdot 18)^2 - 5 \cdot 18 - 2 \cdot 5^2 \cdot 18 + 5^2$.

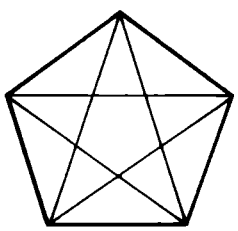
Bei richtiger Lösung ergibt sich in der markierten Waagerechten ein umgangssprachlicher Ausdruck für eine Dummheit
$(= X)$. $X = 52^3 - 5\,(5 - 2)\,(5 + 2)\,(5^2 + 6)$.

Lösungsschema: (Die Lösungswörter ergeben sich, wenn man die Aufgaben ausrechnet und dann den Rechner um 180° dreht.)

1	2	3	4	5	6

Magisches Fünfeck

Setzt in die Teilflächen dieses Fünfecks die Zahlen 1, 2, ..., 11 so ein, daß in allen Dreiecken, in denen eine Höhe gleich der „Höhe" des Fünfecks ist, die jeweils eingetragenen Zahlen dieselbe Summe haben!



Dr. Sawin, Mitglied des Redaktionskollegiums der mathematischen Schülerzeitschrift Quant, Moskau

Wortspiele selbst gefunden

Kennt man bei einem Wortspiel das erste und das letzte Wort (wie im ersten Beispiel HASE und POET), so findet man sehr schnell den Lösungsweg. Man braucht ja nur die letzten Buchstaben der Reihe nach durchzuprobieren.
Nun sind in fünf Wortspielen jeweils das erste Wort vorgegeben. Sucht selbst das letzte Wort! Um zum richtigen Ziel zu kommen, ist das letzte Wort scherzhaft angedeutet.

H	A	S	E
H	O	S	E
P	O	S	E
P	O	S	T
P	O	E	T

Z	E	H	N

Von Zehn zum Fressen

K	A	R	O

Vom Karo zum Zerhacken

E	C	K	E

Von Ecke zu vielen Mädchen

B	I	L	D

Vom Bild zum Aussuchen

B	E	T	A

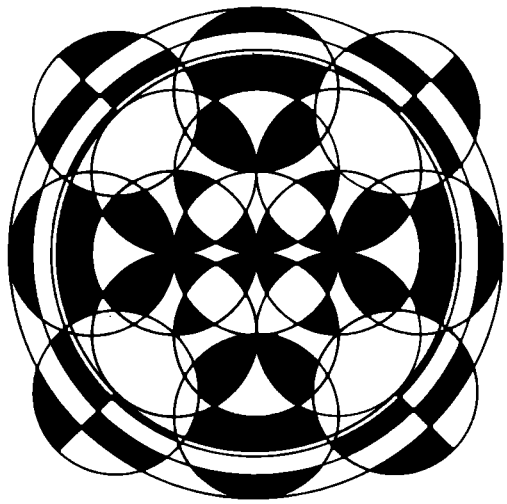
Von Beta bis beinahe

Schüler Matthias Kerber, Saal

Wie viele Kreise?

Finde heraus, wieviel Kreise dieses schöne Ornament enthält!

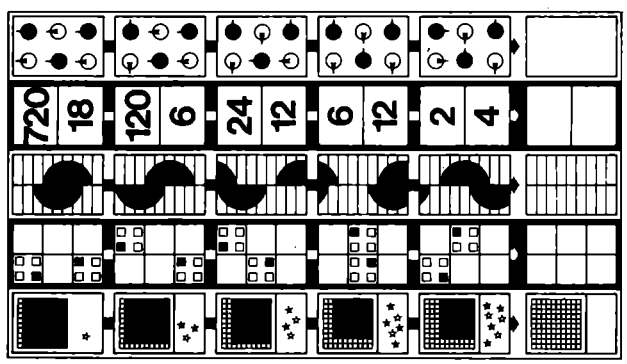
Aus: In freien Stunden, Verlag für die Frau, Leipzig



Video-Logik

Welche Figur muß logischerweise in das jeweils ganz rechts stehende Rechteck eingezeichnet werden?

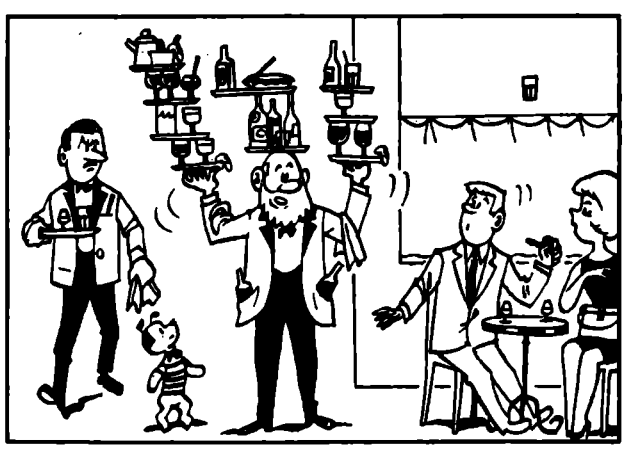
Aus: Füles, Budapest



Sieben mal drei

Auf dem Bild kommen sieben Gegenstände je dreimal vor. Finde diese!

Aus: Troll, Berlin



Lösungen

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Peter, Paul, Penny, Philip und Patricia sind Brüder und Schwestern. Jeder von ihnen hat ein Sparkonto.
Eines Abends saßen sie zusammen, sprachen über ihre Ersparnisse und beklagten sich, wie wenig sie hatten. Plötzlich bemerkte Penny, die gern mit Zahlen jonglierte: „Wie interessant! Jedes Konto zeigt eine andere ganze Zahl von Dollar, und das Produkt aller Zahlen ist doch nur 12." Welchen Betrag könnte jedes der fünf Konten zeigen?

Lösung: Einige von ihnen müssen einen Minusbetrag haben. Die Beträge könnten sein: $-2, -1, 1, 2, 3$.

▲2▲ Ersetzt die fehlenden Ziffern in den Gleichungen auf der Zeichnung.

Lösung: a) $264 : 12 = 22$
oder $264 : 22 = 12$
b) $390 : 13 = 30$
c) $288 = 2 \cdot 12^2$
d) $10 \cdot 1 - 9 = 1$
e) $99 + 99 = 198$
f) $11 \cdot 91 = 1001$
g) $11 \cdot 1 = 9 + 2$

▲3▲ Eines Tages befanden sich in Artek an einem runden Tisch fünf Kinder, aus Moskau, Leningrad, Gorki, Perm bzw. Swerdlowsk:
Jura, Tolja, Ljoscha, Kolja und Witja.
Der Moskauer sitzt zwischen dem Swerdlower und Witja, der Leningrader, zwischen Jura und Tolja, und ihm gegenüber sitzen der Permer und Ljoscha. Kolja war niemals in Leningrad, Jura war schon in Gorki, aber noch nicht in Swerdlowsk, und der Swerdlower schreibt sich regelmäßig mit Tolja. Stelle fest, welches Kind wo wohnt!

Lösung: Jura – Moskau, Tolja – Gorki, Ljoscha – Swerdlowsk, Kolja – Perm, Witja – Leningrad.

▲4▲ Für eine Schulfeier wurden 1000 Flaschen Apfelsaft bestellt. Sie werden in Kisten zu 12 Flaschen mit einem kleinen Wagen, der höchstens 15 Kisten auf einmal transportieren kann, angeliefert. Wievielmal muß der kleine Wagen fahren, um die 1000 bestellten Flaschen zu transportieren?

Lösung: Es können jedesmal
$12 \cdot 15 = 180$ Flaschen befördert werden.
$1000 : 180 = 5$ Rest 100. Der kleine Wagen muß also 6mal fahren.

Lösungen zu: Mini-BASIC für alpha-Leser

▲1▲

1.Zahl	8	4	5
2.Zahl	3	7	12
Ergebnis	12	14	30

▲2▲ *Beispiel:*
1. Zahl: Zahlenwert des Bogens b eines Kreisausschnittes mit dem Winkel α.
2. Zahl: Zahlenwert des Radius r des entsprechenden Kreises.
Ergebnis: Zahlenwert des Flächeninhalts A_α des Kreisausschnittes.

▲3▲
a) PRINT 9.31*9.31*9.31
oder PRINT 9.31 ∧ 3
b) PRINT SQR (24.Ø2*.32)
c) PRINT SQR (3.2*3.2 + 4.3*4.3)
oder PRINT SQR (3.2 ∧ 2 + 4.3 ∧ 2)
d) PRINT 5.3/2.3/7.2
oder PRINT 5.3/(2.3*7.2)
e) PRINT 2*PI*2.7*2.7
oder PRINT 2*PI*2.7 ∧ 2
f) PRINT −3.72/ABS (2.9 − 1Ø.8)
Potenzen x^2 bzw. x^3 sollte man bei Verwendung des Computers als Produkt berechnen lassen, da damit eine größere Genauigkeit erzielt wird.

▲4▲
a) $3{,}7 \cdot 9{,}81^2$
b), c) $\dfrac{2{,}09 \cdot 0{,}21}{3{,}7 \cdot 7{,}3}$ d) $\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3$
e) $\sqrt{|2{,}03 \cdot (-5{,}3)|}$

▲5▲ a)

E	$-3{,}1$	$2{,}1$	$3{,}9$	$5{,}2$
A	-4	2	3	5

b) Den Ausgabewert erhält man, indem man zum Eingabewert x die größte ganze Zahl sucht, die kleiner oder gleich x ist.

▲6▲
a) 0,5; PRINT INT (3.7)/ABS (−6)
b) $\frac{2}{3}$; PRINT INT (−3.7)/−6
c) $\frac{1}{3}$; PRINT 4/3 − INT (4/3)
d) 0; PRINT 8/2 − INT (8/2)

▲7▲
a) Operationszeichen vor der Klammer fehlt! Falsche Darstellung der Zahl 7,5 (in BASIC 7.5).
b) Falsche Eingabe der Null.
c) Nach SQR fehlen Klammern.
d) Operationszeichen vor PI fehlt.

▲8▲
a) [π] [×] [r] [×] [h] [=] [x→M] [×] [r] [=] [MR] [×] [2] [=]
(V bzw. A_M)

b)

r	3,0	2,7	7,4
h	5,0	4,8	3,2
V	141	110	551
A_M	94	81	149

▲9▲ Eine Möglichkeit:
```
1Ø INPUT R
2Ø LET V = 4/3*PI*R*R*R
3Ø LET O = 4*PI*R*R
4Ø PRINT V
5Ø PRINT O
6Ø END
```

Lösung zu: Eine Aufgabe von A. N. Kolmogorow

▲2635▲ (1) a) 8; b) 6; c) 9; d) 0.
(2) n^m

Lösung zu: Barrikade

Lösung in 152 Schritten:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
BL	DU	DR	FU	FU	4L	DD	DD	FR	FD
BR	BR	CU	CL	EU	EU	FL	FL	FD	BD
BR	ER	CR	CR	3U	4U	FL	FL	DL	DL
BD	ED	EL	2D	2D	AR	4U	4U	DU	DU
FR	FU	BL	BL	2D	CR	EU	2L	CD	ER
2U	BR	BR	FD	FL	DD	DD	2L	EL	CU
BU	DR	DR	FR	FR	3D	2D	EL	EL	CL
CL	BU	FU	FR	2R	CD	4D	CD	4D	1R
BU	EU	3U	CL	4D	3U	CU	1D	ER	3U
CU	4L	1D	1D	CR	CU	3D	EL	CU	1U
1U	2L	FL	FD	BD	AD	CR	CR	ER	ER
1U	3U	4U	2U	FL	FL	DL	DL	BD	AD
ED	ER	1R	2U	2U	AL	ED	ED	CD	CD
1R	2R	3R	4U	4U	AL	EL	EU	BU	DR
DR	FR	FR	AD	EL	EL	CL	CL	BU	FU
151.	152.								
FR	AR								

Lösungen zu: Wir arbeiten mit Resten (Teil 2)

▲5▲ Wir wählen $a = 20$ und $b = 12$.
Die gemeinsamen Teiler von 20 und 12 sind 1, 2 und 4. Der größte gemeinsame Teiler von 20 und 12 ist 4. Es gilt $1 \mid 4$, $2 \mid 4$ und $4 \mid 4$.
4 ist der *einzige* gemeinsame Teiler von 20 und 12, der durch jede der Zahlen 1, 2 und 4 teilbar ist.

▲6▲ a) 3 b) 1 c) 21 d) 15

▲7▲
a)

		1.	2.	3.
k		5	1	3
r		45	15	0
a	345	60	45	15
b	60	45	15	0
d				15

b)

k	
r	
a	7
b	0
d	7

c)

		1.	2.
k		0	1
r		12	0
a	0	12	12
b	12	12	0
d			12

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Zwei Raben und ein Käse
Wir verbinden zunächst die Punkte C und D und fällen in der Mitte von $\overline{CD}$ die Senkrechte EF. Der Schnittpunkt F auf der Linie AB ist die Stelle, wo das weggeworfene Stückchen Käse liegen müßte, denn bei den Dreiecken CFE und DFE, die eine gemeinsame Kathete haben, ist auch die zweite Kathete gleich: $\overline{CE} = \overline{ED}$. Folglich

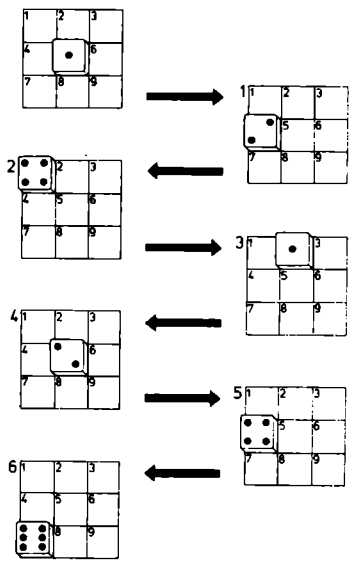
sind die Hypotenusen $\overline{CF}$ und $\overline{FD}$, das heißt die Fluglinien der Raben, ebenfalls gleich. Jetzt kennen wir den Punkt F, auf dem der Käse liegen muß, und wollen die Entfernung vom Punkt A ausrechnen. Wir kennzeichnen die Entfernung $\overline{AB}$ mit a, $\overline{AC}$ mit b, $\overline{BD}$ mit c, $\overline{AF}$ mit x. Dann ergibt sich aus den rechteckigen Dreiecken ACF und BDF, in denen die Hypotenusen $\overline{CF}$ und $\overline{DF}$ gleich sind, daß

$b^2 + x^2 = c^2 + (a - x)^2$ und damit

$x^2 = (a^2 + c^2 - b^2) : 2a$ ist.

Mit sechs Bewegungen

Man kann z. B. den im Bild gezeigten Weg wählen:



Interessante Logelei

Weil die Jungen mehr Punkte als die Mädchen erhielten, bekam einer von ihnen 70 Punkte (2). Dieser Junge ist in der 3. Klasse (3). Das Mädchen, bei dem das Produkt von Klasse und Punktzahl 260 ist, muß in Klasse 4 sein (4). Hanks ist in Klasse 5, weil er in einer niedrigeren Klasse als Grant ist (1), aber in einer höheren Klasse als das Mädchen aus der 4. Klasse (4). Demzufolge ist Grant in Klasse 6, heißt Albert und hat 60 Punkte (4) und (2). Der Schüler aus der 3. Klasse heißt dann Bertram (2). Der Rest ist aus (5) leicht zu erkennen. Klasse 3 Bertram Ford 70 Punkte; Klasse 5 Carol Hanks 55 Punkte; Klasse 4 Denise Edwards 65 Punkte; Klasse 6 Albert Grand 60 Punkte.

Unterhaltsame Kreisfiguren

Mit dem Taschenrechner auf drei gültige Ziffern genau

a) x sei der unbekannte Radius:

$$x^2 + x^2 = (r - x)^2 \qquad 0 < x < \frac{r}{2}$$

$$x^2 + 2rx - r^2 = 0$$

$$x_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 + r^2}$$

$$= -r + r\sqrt{2}$$

$$= (\sqrt{2} - 1)\,r$$

$$A = 4\pi(\sqrt{2} - 1)^2 r^2 \approx 2{,}16$$

$$\approx 68{,}6\,\%$$

b) x sei der unbekannte Radius:

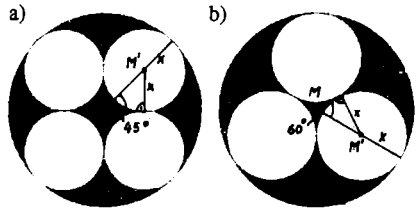
$$x^2 + \left(\frac{r - x}{2}\right)^2 = (r - x)^2 \qquad 0 < x < \frac{r}{2}$$

$$x_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{12})\,r$$

$$A = 3\pi(-3 + \sqrt{12})^2 r^2 \approx 2{,}03$$

$$\approx 64{,}6\,\%$$

a) b)



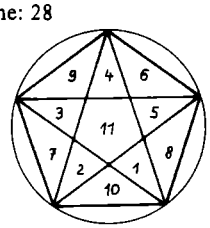
Spiel mit dem Taschenrechner

1. 8315 → SIEB; 2. 3504 → HOSE; 3. 7393 → EGEL; 4. 3773 → ELLE; 5. 8314 → HIEB; 6. 7135 → SEIL.

Markierte Waagerechte: 137353 → ESELEI.

Magisches Fünfeck

Summe: 28



Wortspiele selbst gefunden

Z E H N	K A R O	E C K E
Z A H N	K A R L	E L K E
Z A H L	K E R L	E L L E
M A H L	K E I L	E L L A
M A U L	B E I L	U L L A
B I L D	B E T A	
W I L D	B E T T	
W A L D	F E T T	
W A L L	F E S T	
W A H L	F A S T	

Wie viele Kreise?

Die Figur enthält 21 Kreise.

Video-Logik

Sieben mal drei

1. Schleife am Hals der beiden Kellner und des Hundes;
2. Likörgläser auf dem Tisch und dem Tablett des linken Kellners;
3. Trinkbecher auf diesem Tablett auf dem obersten rechten Tablett des anderen Kellners und auf dem Fenster;
4. Strohhalm im Glas auf dem vorletzten linken Tablett und in der Torte auf dem Kopf des älteren Kellners sowie in der Brusttasche des jüngeren;
5. kleiner Kreis als Knopf des jüngeren Kellners, als Deckelgriff der Teekanne ganz oben in der rechten Hand des älteren und auf dem Etikett der Flasche auf seinem Kopf;
6. Hörnchen auf drei Tabletts des älteren Kellners;
7. Gläser mit hellem Inhalt auf drei Tabletts des älteren Kellners.

Lösung zu: Logische Kitty

IV. Umschlagseite

Für 20 Meilen brauchen die beiden 7 Stunden, also fahren sie mit einer Geschwindigkeit von $\frac{20}{7}$ Meilen/h. Dann sind die Entfernungen

	Start 8.30	1. Schleuse 10.00		
Meilen	$\frac{20}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{30}{7}$ Pizza-stube 12.00		$\frac{20}{7} \cdot 2 = \frac{40}{7}$ Nach-mittag 17.00	Anker-platz 19.00
Meilen	$\frac{20}{7} \cdot 5 = \frac{100}{7}$		$\frac{20}{7} \cdot 2 = \frac{40}{7}$	

$\frac{30 + 40 + 100 + 40}{7}$ Meilen = 30 Meilen.

Kitty und Michelle sind 30 Meilen gefahren.

Lösungen der Aufgaben aus dem Commensurator von Regiomontanus

Heft 4/86, S. 75

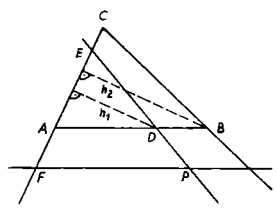
II.9. $d = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}}$ V.131. Es liege etwa P im Inneren des Winkels $\sphericalangle ACB$ (Bild 1). Die gesuchte Gerade durch P schneide $c = \overline{AB}$ in D und $b = \overline{AC}$ in E. Mit A, B, C und P ist auch die Parallele durch P zu c und deren Schnittpunkt F mit der Verlängerung von $\overline{CA}$ bekannt. Ferner bezeichne h_1 die Höhe des gesuchten Dreiecks bezüglich der Grundseite $\overline{AE}$, h_2 die Höhe des gegebenen Dreiecks bezüglich der Grundseite b und x die Strecke $\overline{AD}$. Offenbar genügt es x zu kennen, um die Aufgabe lösen zu können. Nun gilt:

(1) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{x}{c}$,

(2) $h_2 \cdot b = 2 \cdot h_1 \cdot \overline{EA}$,

(3) $\frac{\overline{EA}}{\overline{EF}} = \frac{x}{\overline{PF}}$.

Bild 1

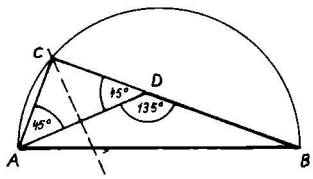


Aus diesen Gleichungen ergibt sich $x^2 = \frac{\overline{PF}}{2 \cdot \overline{EF}} \cdot bc$, woraus sich x nach den Regeln der flächengleichen Verwandlung von Rechtecken und Quadraten leicht mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt.

V.140. Man konstruiere zunächst Dreieck ABD auf übliche Weise aus der Hypotenuse c, der Differenz der Katheten $\overline{DB}$ und dem Winkel von 135° bei D (Bild 2, hier ist der Fall $b < a$ angenommen). Die Verlängerung von $\overline{BD}$ über D hinaus schneidet den Thaleshalbkreis über c (und auch die

Mittelsenkrechte der Punkte A, D) in C. Im Spezialfall $a - b = 0$ erhält man mit $D = B$ so den Punkt C ebenfalls.

Bild 2

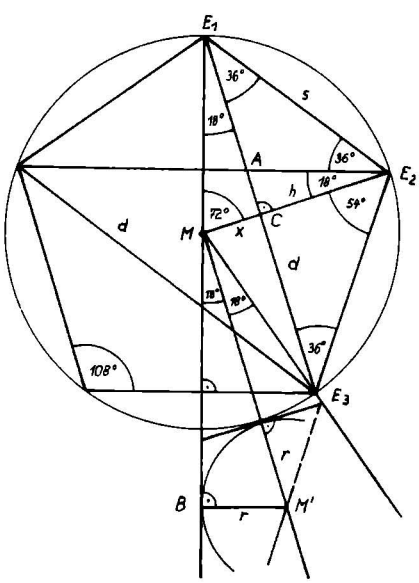


VII.29. Die Berührungspunkte von je drei gleichen, einander berührenden äußeren Kugeln mit der inneren Kugel bilden auf der Oberfläche der inneren Kugel ein gleichseitiges Dreieck. Im Fall einer geschlossenen Hülle von äußeren Kugeln um die innere Kugel müssen sich diese Dreiecke zu einem der inneren Kugel einbeschriebenen regulären, von gleichseitigen Dreiecken begrenzten Polyeder schließen.
Solche Polyeder existieren aber nur für $n = 4$ (Tetraeder), $n = 8$ (Oktaeder) und $n = 20$ (Ikosaeder).

Um die Aufgaben II.14, V.104 und VI.42 zu lösen, ist es nötig, sich zunächst mit den Verhältnissen einiger Strecken am regulären Fünfeck und dem ihm einbeschriebenen Sternfünfeck (Pentagramm) vertraut zu machen. Da der Winkel $\sphericalangle E_1ME_2$, den zwei benachbarte Eckpunkte E_1E_2 mit dem Mittelpunkt M des Umkreises bilden, gleich $\frac{2\pi}{5}$, also gleich 72° ist, findet man leicht die Größe einer Reihe anderer Winkel zu 108°, 36° usw., woraus sich insbesondere die Ähnlichkeit der Dreiecke der Form $E_1E_2E_3$ zwischen drei aufeinanderfolgenden Eckpunkten mit den Dreiecken E_1AE_2 ergibt, die zwei benachbarte Eckpunkte mit einem Diagonalenschnittpunkt A bilden (Bild 3). Daher gilt für die Seitenlänge s des Fünfecks und die Diagonalenlänge d

$$\frac{d-s}{s} = \frac{s}{d}, \text{ woraus folgt}$$

Bild 3



$$d = \frac{s}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Übrigens besagt diese Beziehung, daß die Diagonalen des Sternfünfecks sich gegenseitig harmonisch teilen und daß Sternfünfecke mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Um die absolute Größe von s und d bei vorgegebenem Radius des Umkreises (den wir der Einfachheit halber gleich 1 setzen) zu erhalten, betrachten wir noch die in Bild 3 eingetragenen Hilfsstrecken x und h. Für sie gilt:

$$1 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2, \qquad x = 1 - h,$$

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

Setzt man in die letzte Gleichung die schon gefundene Formel für d ein, so ergibt sich

$$h = \frac{s}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

und daraus

$$s = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \approx 1{,}175 \text{ und}$$

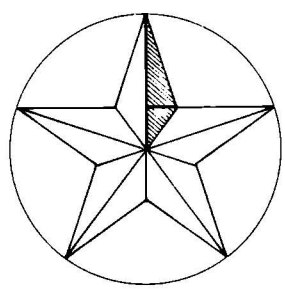
$$d = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\,(1 + \sqrt{5}) \approx 1{,}902.$$

Die Fläche des Sternfünfecks denkt man sich zweckmäßig aus 10 kongruenten Dreiecken zusammengesetzt, von denen in Bild 4 eines schraffiert ist. Seine Grundseite ist gleich dem Radius des Umkreises, also gleich 1, seine Höhe gleich $s - \frac{d}{2}$. Damit ergibt sich für die Gesamtfläche die exakte Formel

$$5\left(s - \frac{d}{2}\right) = \frac{5}{8}(3 - \sqrt{5})\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$\approx 1{,}1226.$$

Bild 4



Der untere Teil von Bild 3 deutet an, wie man den Mittelpunkt M' eines der 10 kongruenten Kreise, die einen gegebenen Kreis umhüllen, als Schnittpunkt eines vom inneren Kreismittelpunkt M ausgehenden Strahls mit der Winkelhalbierenden zwischen dem um 18° benachbarten Strahl und einer Tangente an den inneren Kreis konstruieren kann. Um den Radius r der äußeren Kreise zu berechnen, stellen wir fest, daß wegen des gemeinsamen Winkels von 18° die Dreiecke MBM' und E_1CM ähnlich sind. Daher gilt

$$\frac{r}{r+1} = \frac{x}{1}.$$

(Der Radius des inneren Kreises wurde wieder gleich 1 gesetzt.)
Daraus folgt

$$r = \frac{1-h}{h} = \frac{2\sqrt{5} - 2}{10 - 2\sqrt{5}} \approx 0{,}447.$$

P. Schreiber

Lösung zu: Speed
Heft 4/86, Seite 96

Ist l die Länge der Strecke in Metern und z die in Sekunden gemessene Zeit, so erhält man die Geschwindigkeit v in km/h nach der Formel

$v = \frac{l}{z} \cdot 3{,}6$. Im einzelnen ist
(auf 2 Dezimalstellen gerundet)

$l =$ 50 m $\quad v = 29{,}46$ km/h
$l =$ 60 m $\quad v = 30{,}68$ km/h
$l =$ 100 y $\quad v = 32{,}12$ km/h
$l =$ 100 m $\quad v = 32{,}29$ km/h
$l =$ 200 m $\quad v = 32{,}16$ km/h.

Die größte Geschwindigkeit erreichte Marita Koch demnach über 100 m.

Lösungen zu: Spaß mit Sternchen
Heft 4/86, Seite 84

▲1▲ a) In 5*** ersetzen wir die Sternchen so durch Grundziffern, daß die dargestellte Zahl möglichst klein wird. Das trifft zu für 5000. In 4*** ersetzen wir die Sternchen so durch Grundziffern, daß die dargestellte Zahl möglichst groß wird. Das trifft zu für 4999. Wegen $5000 > 4999$ gilt $5*** > 4***$ für jede beliebige Ersetzung der Sternchen durch Grundziffern.
b) Die größte dreistellige Zahl (999) ist kleiner als die kleinste vierstellige Zahl (1000). Deshalb gilt $9** < 1***$ für jede Ersetzung der Sternchen durch Grundziffern.
c) **** > *99, denn 1000 > 999.
d) Wegen 63 999 < 67 000 gilt 63*** < 67***.
e) Wegen 10 000 > 8 799 gilt ****0 > 87**.
f) Es sind drei Fälle möglich:
(1) Wegen 1991 = 1991
könnte 1**1 = *99* gelten.
(2) Wegen 1001 < 1991
könnte 1**1 < *99* gelten.
(3) Wegen 1991 > 1990
könnte 1**1 > *99* gelten.
Deshalb lassen sich diese Zahlen nicht für jede beliebige Ersetzung der Sternchen durch Grundziffern vergleichen.

▲2▲ a) Die erste und dritte Zahl sind siebenstellig; die zweite und vierte Zahl sind sechsstellig. Wir vergleichen zunächst die beiden sechsstelligen Zahlen. 3**7** < 9*****, denn 399 799 < 900 000. Nun vergleichen wir die beiden siebenstelligen Zahlen. 1*91*** < 2**37**, denn 1 991 999 < 2 003 700. Deshalb gilt für alle möglichen Ersetzungen der Sternchen durch Grundziffern 3**7** < 9***** < 1*91*** < 2*37**.
b) Die dritte Zahl (*2*76*) ist sechsstellig, also größer als die übrigen fünfstelligen Zahlen. Wegen 20 760 < 21 750 und wegen 21 760 > 20 750 lassen sich die Zahlen 2*76* und 2*75* nicht so ordnen, daß für jede mögliche Ersetzung der Sternchen durch Grundziffern nur eines der beiden Zeichen <, >, und zwar stets dasselbe Zeichen gilt.
c) Wegen 193 < 3001 < 10 940 gilt stets 1*3 < 3**1 < **94*.

▲3▲ a) Wir rechnen $1 + \underline{3} = 4$; $5 + 3 = \underline{8}$; $\underline{3} + 1 = 4$; $6 + 9 = \underline{15}$ und erhalten $\overline{15}\,484 - 9133 = 6\,3\overline{51}$.
b) Wir rechnen $7 + 5 = \underline{12}$ (Übertrag 1); $1 + 4 + \underline{1} = 6$; $3 + \underline{7} = 10$ (Übertrag 1); $1 + \underline{3} + \underline{8} = 12$ (Übertrag 1); $1 + \overline{2} + 1 = 4$ und erhalten $42\,062 - 18\,\overline{7}15 = 23\,347$.
c) Wir rechnen $\underline{2} + 1 = 3$; $6 + 8 = \underline{14}$ (Übertrag 1); $1 + \underline{0} + 5 = 6$; $5 + 7 = \underline{12}$ (Übertrag 1); $1 + \underline{6} + 1 = 8$ und erhalten $82\,643 - 17\,581 = \overline{65}\,062$.
d) Wir rechnen $6 + \underline{7} = 12$(Übertrag 1); $1 + 1 + 6 = \underline{8}$; $5 + \underline{8} = 13$ (Übertrag 1); $1 + \underline{3} + 5 = \underline{9}$; $2 + 2 = \underline{4}$ und erhalten $49\,\overline{3}82 - 25\,867 = 23\,5\overline{1}5$.

▲4▲ a) Wegen $8000 \cdot 2 = 16\,000$ kann der zweite Faktor nur 2 sein.
Daraus folgt $8318 \cdot 2 = 16\,636$.
b) Wegen $9 \cdot 1 = 9$ ist die dritte Grundziffer des ersten Faktors 1. Wegen $9 \cdot 2 = \underline{18}$ ist durch zweite Grundziffer des ersten Faktors 2.
Daraus folgt $821 \cdot 9 = 7389$.
c) Wegen $4 \cdot 8 = 32$ endet das Produkt auf die Grundziffer 2. Es bleibt der Übertrag 3. Wegen $4 \cdot \underline{1} + 3 = 7$ ist die dritte Grundziffer des ersten Faktors 1.
Daraus folgt $7618 \cdot 4 = 30\,472$.
d) Wegen $6 \cdot 2 = \underline{12}$ und $6 \cdot 7 = \underline{42}$ könnte der zweite Faktor 2 oder 7 sein. Da das Produkt auf die Grundziffernfolge 42 endet, kann der zweite Faktor nur 7 sein.
Daraus folgt $64\,442 : 7 = 9206$,
also $9206 \cdot 7 = 64\,442$.
e) Wegen $8 \cdot 3 = 24$ endet das Produkt auf die Grundziffer 4. Wegen $8 \cdot \underline{0} + 2 = 2$ und $8 \cdot \underline{5} + 2 = \underline{42}$ könnte die dritte Grundziffer des ersten Faktors 0 oder 5 sein. Wegen $8 \cdot 8 = \underline{64}$ und $4 \neq 8$ entfällt die Grundziffer 0.
Daraus folgt $4853 \cdot 8 = 38\,824$.
f) Wegen $\underline{5} \cdot 7 = 35$ ist der zweite Faktor 5. Wegen $5 \cdot \overline{27} = \underline{135}$ ist die dritte Grundziffer des Produkts 3.
Daraus folgt $6635 : 5 = 1327$,
also $1327 \cdot 5 = 6635$.
g) Wegen $\underline{6} \cdot 4 = 24$ ist der zweite Faktor 6. Wegen $6 \cdot \overline{74} = \underline{444}$ ist die vierte Grundziffer des Produkts 4. Wegen $6 \cdot \underline{5} + 4 = 34$ und $6 \cdot \underline{0} + 4 = 4$ könnte die zweite Grundziffer des ersten Faktors 5 oder 0 sein. Wegen $2574 \cdot 6 = \underline{15}\,444$ entfällt die 5.
Daraus folgt $2074 \cdot \underline{6} = 12\,444$.
h) Wegen $56 \cdot 3 = 168$ kann der zweite Faktor nur 3 sein. Wegen $3 \cdot \underline{9} = 27$ kann die vierte Grundziffer des ersten Faktors nur 9 sein.
Daraus folgt $5629 \cdot 3 = 16\,887$.

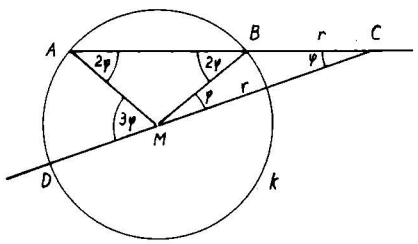
▲5▲ a) Das zweite Teilprodukt endet auf die Grundziffer 4. Wegen $\underline{2} \cdot 7 = 14$ ist die zweite Grundziffer des zweiten Faktors 2.
Daraus folgt $57 \cdot 62 = 3534$.
b) Wegen $\underline{2} \cdot 95 = 190$ kann die erste Grundziffer des zweiten Faktors nur 2 sein.
Daraus folgt $95 \cdot 23 = 2185$.
c) Das zweite Teilprodukt **6 endet auf die Grundziffer 6. Wegen $6 \cdot \underline{1} = 6$ und $6 \cdot \underline{6} = 36$ kann die zweite Grundziffer des ersten Faktors 1 oder 6 sein.
Wir erhalten zwei Lösungen

$\underline{41} \cdot 36$	und	$\underline{46} \cdot 36$
123		138
246		276
1476		1656

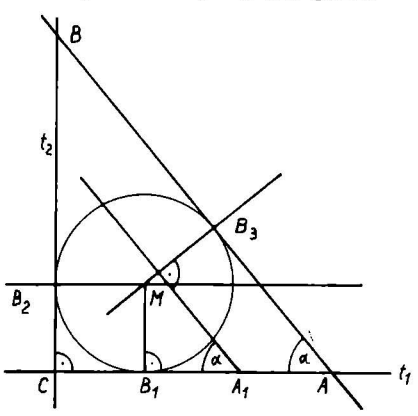
d) Das zweite Teilprodukt **6 endet auf die Ziffer 6. Wegen $7 \cdot 3 = 21$ müßte das zweite Teilprodukt auf die Grundziffer 1 enden. Deshalb besitzt diese Aufgabe keine Lösung.
e) Das Produkt ****4 endet auf die Grundziffer 4. Deshalb endet auch das zweite Teilprodukt auf 2*** auf die Grundziffer 4 und lautet somit 2**4. Wegen $\underline{3} \cdot 8 = 24$ ist die zweite Grundziffer des zweiten Faktors 3.
Daraus folgt $728 \cdot 43 = 31\,304$.

Lösungen zu den Aufgaben von Maik Mühle, Riesa
Heft 4/86, Seite 82

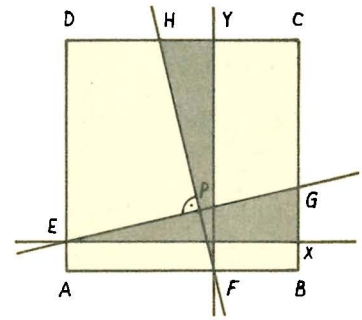
▲1▲ MCB ist ein gleichschenkliges Dreieck, daher ist $\sphericalangle BCM \cong \sphericalangle BMC$. Die Größe des Winkels sei mit φ bezeichnet. Die Größe des Winkels $\sphericalangle MBA$ beträgt dann 2φ (Außenwinkelsatz); die Größe des Winkels $\sphericalangle MAB$ beträgt ebenfalls 2φ (Dreieck AMB ist gleichschenklig).
Für die Größe des Winkels $\sphericalangle AMD$ gilt dann $\varphi + 2\varphi = 3\varphi$ als Außenwinkel des Dreiecks AMC, q. e. d.



▲2▲ Man zeichnet zuerst den Inkreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius der Länge $r = 2{,}5$ cm ($\overline{MB_1}$). Dann zeichnet man an den Inkreis in B_1 die Tangente t_1. Die Parallele zu t_1 durch M schneidet den Inkreis in B_2. Die Tangente t_2 an den Inkreis in B_2 schneidet t_1 in C. Auf t_1 legt man einen Punkt A_1 beliebig fest und trägt in A_1 an den Strahl A_1C den Winkel der Größe $\alpha = 50°$ an. Das Lot von M auf den freien Schenkel des Winkels der Größe α schneidet den Inkreis in B_3. Die Parallele zum freien Schenkel des Winkels der Größe α durch B_3 schneidet t_1 in A und t_2 in B.



▲3▲ Man zeichnet durch E die Parallele zu $\overline{AB}$ und durch F die Parallele zu $\overline{BC}$. Diese schneiden $\overline{DC}$ in Y und $\overline{BC}$ in X. Man führt den Nachweis, daß die Dreiecke EXG und FYH kongruent sind:
(1) $\sphericalangle HYF \cong \sphericalangle EXG$ (rechter Winkel),
(2) $\overline{FY} \cong \overline{EX}$ (Quadratseite),
(3) $\sphericalangle HFY \cong \sphericalangle GEX$ (Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind kongruent: $\overline{FH} \perp \overline{EG}$ und $\overline{FY} \perp \overline{EX}$).
Es folgt die Kongruenz der Dreiecke EXG und FYH (wsw).
Daraus folgt: $\overline{EG} \cong \overline{HF}$, q. e. d.

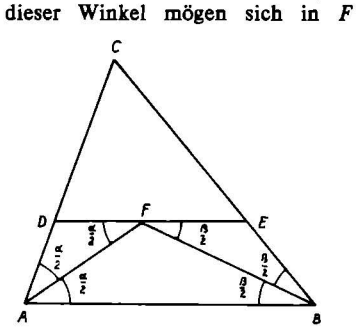


▲4▲ Wegen (2) kommen die Ziffern 2, 3, 5, 7 in Frage. Alle Zusammenstellungen (Variationen) mit den Ziffern 2, 3, 7 und 3, 5, 7 entfallen, da sie alle keine Primzahlen sind (Quersumme 12 bzw. 15!).
Die Ziffern 2 und 5 können nicht an erster bzw. letzter Stelle stehen, da sonst keine Primzahlen entstehen würden. Nun bleiben nur noch die Zahlenpaare 377; 773 und 337; 733 übrig. Da 377 keine Primzahl ist, sind 337 und 733 die einzig möglichen Telefonnummern.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb
Heft 1/86, Fortsetzung

Ma 6 ■ 2645 Angenommen, die Schüler der Klasse 6a erreichten x kg Altpapier, die Schüler der Klasse 6b also $(2x - 40)$ kg, die der Klasse 6c hingegen $(2x - 40)$ kg : 2 = $(x - 20)$ kg.
Das sind zusammen $(4x - 60)$ kg. Nun gilt $4x - 60 = 480$, $4x = 540$, $x = 135$.
Die Schüler der Klasse 6a sammelten 135 kg, die der Klasse 6b 230 kg, die der Klasse 6c 115 kg Altpapier.

Ma 6 ■ 2646 Wir halbieren die Innenwinkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle CBA$; die Halbierungslinien dieser Winkel mögen sich in F



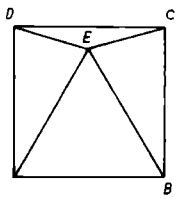
schneiden. Wir zeichnen die Parallele zu $\overline{AB}$ durch F, die $\overline{AC}$ in D und $\overline{BC}$ in E schneide. Auf Grund der Konstruktion gilt $\sphericalangle DAF \cong \sphericalangle FAB$ und $\sphericalangle FAB \cong \sphericalangle DFA$ als Wechselwinkel an geschnittenen Paral-

lelen, also auch $\sphericalangle DAF \cong \sphericalangle DFA$. Deshalb ist das Dreieck AFD gleichschenklig, und es gilt $\overline{AD} = \overline{DF}$. Analog dazu gilt $\overline{BE} = \overline{FE}$, also auch $\overline{AD} + \overline{BE} = \overline{DE}$.

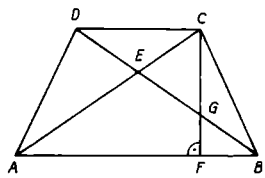
Ma 7 ■ 2647

a) 1 7 2 b) 49 0 1
8 7 0 0 $G = 100$
1 8 1 1 0 49
c) 6 9 1
9 9 $S = 16$
1 9 6

Ma 7 ■ 2648 Winkel ABE hat die Größe 60°, Winkel ABC die Größe 90°; folglich hat Winkel CBE die Größe 30°. Wegen $\overline{BE} = \overline{BC}$ ist das Dreieck CBE gleichschenklig. Jeder der beiden Winkel BEC und BCE hat somit die Größe 75°. Also hat Winkel DCE die Größe 15° und somit Winkel CED die Größe $\varphi = 150°$.



Ma 7 ■ 2649 Winkel FBG habe die Größe φ; dann hat Winkel BGF die Größe $90° - \varphi$. Die Winkel BGF und EGC sind Scheitelwinkel; folglich hat Winkel EGC auch die Größe $90° - \varphi$. Wegen $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle DBA$ hat Winkel CAB die Größe φ, also hat Winkel ACF die Größe $90° - \varphi$. Somit gilt $\sphericalangle ECG \cong \sphericalangle EGC$, also auch $\overline{EC} \cong \overline{EG}$, d. h.,
Dreieck CEG ist gleichschenklig.



Ma 7 ■ 2650 $\overline{AQ}$ habe die Länge x, $\overline{RC}$ die Länge y, also $\overline{QD}$ die Länge $a - x$ und $\overline{DR}$ die Länge $a - y$; dann gilt für den Umfang des Dreiecks QRD

$u_{QRD} = (a - x) + (a - y) + x + y$

$= 2 \cdot a = \frac{1}{2} \cdot u_{ABCD}$;

denn $\overline{QA} \cong \overline{QB}$ und $\overline{RP} \cong \overline{RC}$.

Ma 8 ■ 2651 Nach Voraussetzung gilt $a \in R$, $b \in R$, $a > 0$, $b > 0$ und $a \cdot b = 1$.
Es wird behauptet, daß stets gilt $a + b \geq 2$.

Aus $a \cdot b = 1$ folgt $b = \frac{1}{a}$.

Nun ist zu zeigen, daß $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ist.

Für alle rationalen Zahlen gilt
$(a - 1)^2 \geq 0$ bzw. $a^2 - 2a + 1 \geq 0$,

$a^2 + 1 \geq 2a \mid : a \; (a \neq 0)$, $a + \frac{1}{a} \geq 2$,

w. z. b. w.

Ma 8■ 2652
Offenbar ist ausschlaggebend, wieviel Fruchtfleisch zur Verfügung steht. Das beträgt bei der großen Apfelsine

$V = \frac{1}{6}\pi d^3$; $V = \frac{1}{6}\pi \cdot 10^3 \text{ cm}^3$;

$V = 523{,}6 \text{ cm}^3$.
7 kleine Apfelsinen haben insgesamt ein Volumen von

$V = 7 \cdot \frac{1}{6}\pi \cdot 5^3 \text{ cm}^3$;

$V = 7 \cdot \frac{1}{6}\pi \cdot 125 \text{ cm}^3$; $V = 458{,}1 \text{ cm}^3$.

Es ist also besser, die eine große Apfelsine zu kaufen.

Ma 8 ■ 2653 Angenommen, man erhält x 20-Mark-Scheine, y 50-Mark-Scheine und z 100-Mark-Scheine ausgehändigt;
dann gilt
$20x + 50y + 100z = 500$ und $z < y < x$.
Daraus folgt weiter
$2x + 5y + 10z = 50$,

$5y = 50 - 10z - 2x$,

$y = 10 - 2z - \frac{2x}{5}$.

Da x, y und z natürliche Zahlen sind, muß x ein Vielfaches von 5 sein.
Aus $x = 5$
folgt $y = 8 - 2z = 2(4 - z)$,
also $z = 1$, 2 oder 3.
Aus $x = 10$
folgt $y = 6 - 2z = 2(3 - z)$,
also $z = 1$ oder 2.
Aus $x = 15$
folgt $y = 4 - 2z = 2(2 - z)$,
also $z = 1$.
Wegen der Einschränkung $z < y < x$ besitzt diese Aufgabe drei Lösungen

x	y	z
5	4	2
10	4	1
15	2	1.

Man erhält entweder fünf 20-Mark-Scheine und vier 50-Mark-Scheine und zwei 100-Mark-Scheine oder zehn 20-Mark-Scheine und vier 50-Mark-Scheine und einen 100-Mark-Schein oder fünfzehn 20-Mark-Scheine und zwei 50-Mark-Scheine und einen 100-Mark-Schein.

Ma 8 ■ 2654 Bezeichnet man die Maßzahl der Länge der Quadratseite mit x, so ist $x + 1$ die Bezeichnung für die Maßzahl der Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit der geforderten Eigenschaft.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann
$(x + 1)^2 = x^2 + x^2$ bzw. $x^2 - 2x - 1 = 0$.
Diese quadratische Gleichung hat nur eine positive Lösung, nämlich $x = 1 + \sqrt{2}$.
Der Flächeninhalt dieses Quadrates hat die Maßzahl $3 + 2\sqrt{2}$. Es gibt genau ein derartiges Quadrat; seine Seite ist etwa 2,41 cm lang; sein Flächeninhalt beträgt rund 5,83 cm².

Ma 9 ■ 2655 Es gilt
$\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} = \frac{2n + 3n^2 + n^3}{6}$

$= \frac{n}{6} \cdot (n^2 + 3n + 2) = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n + 1)$
$\cdot (n + 2)$.
Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen n, $n + 1$, $n + 2$ ist genau eine durch 3 und wenigstens eine durch 2 teilbar. Deshalb ist das Produkt $n(n + 1)(n + 2)$ durch 6 teilbar und somit die Summe $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ für jede Belegung von n mit einer natürlichen Zahl ganzzahlig.

Ma 9 ■ 2656 Unter der Voraussetzung, daß eine beliebige natürliche Zahl n die Quersumme 33 hat, behaupten wir, daß es keine natürliche Zahl k mit der Eigenschaft $k^2 = n$ gibt. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, es gäbe ein solches k.
Da die Quersumme 33 durch 3 teilbar ist, müßte nach der bekannten Teilbarkeitsregel auch n und damit auch k^2 durch 3 teilbar sein; also gilt auch $3 \mid k$.
Aus $3 \mid k$ folgt $9 \mid k^2$, also $9 \mid n$. Wenn n durch 9 teilbar ist, so muß auch die Quersumme von n durch 9 teilbar sein. Nun gilt aber $9 \nmid 33$. Damit ist ein Widerspruch zur Annahme, es gäbe ein $k \in N$ mit $k^2 = n$, erreicht. Daraus folgt, daß die Annahme falsch, die Behauptung wahr ist, q. e. d.

Ma 9 ■ 2657
Wegen $31^2 = 961 < 1000$ gilt $n \geq 32$.
Wegen $100^2 = 10\,000 > 999$ gilt
$2 \leq k \leq 3$, also wegen
$(2 \cdot 50)^2 = 10\,000 > 999$ gilt
$32 \leq n \leq 49$. Ferner gilt
$n^2 - (k \cdot n)^2 = 1000a + 100b + 10c$
$+ d - 1000d - 100c - 10b - a$,
$n^2(1 - k^2) = 999a + 90b - 90c - 999d$,
$n^2(1 - k^2) = 9 \cdot (111a + 10b - 10c$
$- 111d)$. Analog dazu gilt
$n^2(1 + k^2) = 11 \cdot (91a + 10b + 10c + 91d)$.
Für $k = 2$ gilt demnach
$n^2 \cdot (-3) = 9(111a + 10b - 10c - 111d)$
und
$n^2 \cdot 5 = 11(91a + 10b + 10c + 91d)$.
Für $k = 3$ gilt
$n^2 \cdot (-8) = 9(111a + 10b - 10c - 111d)$
und
$n^2 \cdot 10 = 11(91a + 10b + 10c + 91d)$.
Daraus folgt weiter, daß n sowohl durch 3 als auch durch 11 teilbar sein muß. Deshalb existiert genau eine Lösung, nämlich $n = 33$,
und es gilt $n^2 = 1089$
und $(3 \cdot 33)^2 = 99^2 = 9801$.

Ma 9 ■ 2658 Der Flächeninhalt des dem gleichschenkligen Dreieck ABC einbeschriebenen Sechsecks $DEFGHK$ beträgt 62,5 % des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

Ma 10/12 ■ 2659

$\sqrt{99 + 70\sqrt{2}} - \sqrt{99 - 70\sqrt{2}}$

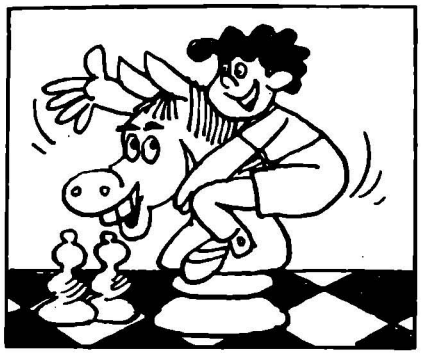
$= \sqrt{49 + 70\sqrt{2} + 50} - \sqrt{49 - 70\sqrt{2} + 50}$

$= \sqrt{(7 + 5\sqrt{2})^2} - \sqrt{(7 - 5\sqrt{2})^2}$

$= 7 + 5\sqrt{2} - 7 + 5\sqrt{2}$

$= 10\sqrt{2}$

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. A. N. Kolmogorow
(1) a) 8; b) 6; c) 9; d) 0.
(2) n^m.



Schach – beliebt bei jung und alt

Die 526 Einsendungen zum 3. *alpha*-Schachwettbewerb erbrachten wiederum den Beweis, daß das Schachspiel gleichermaßen bei jung und alt beliebt ist. Zu den jüngsten Teilnehmern zählten T. Körner (Dingelstädt), A. Märker (Greifswald), beide 6 Jahre, R. Anschütz (Domdorf) und L. Starck (Dresden), beide 8 Jahre. Axel Märker erlernte das Schachspiel bereits mit vier Jahren. Er beteiligt sich aktiv in der AG Schach der *Käthe-Kollwitz*-OS Greifswald. Als älteste Teilnehmer konnten wir S. Hase (Zwickau), 83 Jahre, und O. Götz (Eisenach), 90 Jahre, begrüßen.

Wir danken allen Einsendern herzlich für ihr Mitmachen!

Lösungen

▲1▲ 1. T:e5+ T:e5/S:e5/g5
2. Sf4 matt (1 P.).

▲2▲ 1. D:f7+ K:f7
2. Lc4 matt (1 P.).
1. ... Kh8
2. Dg7/Lg7/Lg5 matt (1 P.).

▲3▲ 1. Le5 S:e5
2. b4 matt (2 P.).
1. ... beliebig
2. Lc7 matt (1 P.).

Der von mehreren Einsendern angegebene Versuch 1. Ld4 (2. Lb6 matt) wird durch die schwarze Verteidigung 1. ... Lb7 pariert.

▲4▲ 1. Sg7 g4
2. Dd8 matt (1 P.).
1. ... Lg4
2. De1 matt (1 P.).
1. ... Lf7
2. Sf5 matt (1 P.).
1. ... beliebig
2. Dh5 matt (1 P.).

In der Aufgabe von *H. le Grand* („Probleemblad", 1953) scheitern die Verführungen 1. Sf6 und 1. Sg3 aufgrund weißer Selbstbehinderung an 1. ... g4 bzw. 1. ... Lg4.

▲5▲ 1. Dg8 D:c6+
2. S:c6 matt (1 P.).
1. ... D:e7+
2. L:e7 matt (1 P.).
1. ... De6
2. De:6 matt (1 P.).
1. ... beliebig
2. Sf5 matt (1 P.).

Dieser preisgekrönte Zweizüger (*Freie Presse*, 1969) stammt von dem ersten DDR-Meister im Problemschach, *Fritz Hoffmann* (Weißenfels).

▲6▲ 1. D:f6 g:f6
2. Lh6+ Kg8 (2 P.).
3. Te4 d4/d:e4/f5
4. Se7 matt (2 P.).
3. ... D:c6/Db7/Ta7
4. Tg4 matt (2 P.).

Das Damenopfer, welches die Mattdrohung 2. D:f7 beinhaltet, erzwingt die Öffnung der schwarzen Stellung für das Läuferschach. Mit dem eleganten Opferzug 3. Te4, der gleichzeitig das Feld e7 für den Springer freimacht, wird die unparierbare Doppeldrohung 4. Se7 und 4. Tg4 aufgestellt.

▲7▲ 1. Tg1 Lg6
2. T:g6 a6/a5
3. T:a6/Ta6 matt (2 P.).
1. ... a6/a5
2. Ta1 L beliebig
3. T:a6/T:a5 matt (2 P.).
1. ... Lf5
2. Tg8+ Lc8
3. T:c8 matt (2 P.).

Interessant ist es, welche verborgene Widerlegungen in dieser sparsamen Stellung von *W. von Holzhausen* (*Deutsches Wochenschach*, 1910) stecken.

Zum Beispiel: 1. Th1? Lg8!; 1. Ta1? Ld3 2. b6? La6!; 1. b6? a5!

▲Z▲ 1. Tb7 (droht 2. Sd4+ e:d4 3. Tb5 matt).
1. ... Sg4
2. Tb5 c2
3. L:e4 matt.
1. ... c2
2. Tbb6 Sg4
3. L:e4 matt.

Die Versuche 1. Tc7 und 1. Td7 führen nach 1. ... c2 bzw. 1. ... Sg4 infolge weißer Selbstbehinderung (der weiße Turm verstellt jeweils dem weißen Läufer auf a8 den Weg nach e4) nicht zum Ziel. Dieses Meisterwerk der Problemkunst komponierte der sowjetische Großmeister für Schachkompositionen Lew I. Loschinski.

Die volle Punktzahl erreichten 163 Einsender. Unter ihnen sowie unter jenen bis zum Alter von 14 Jahren, welche die Aufgaben Nr. 1 bis 4 richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Michael Engel (Thal),
Anne Heyl (Eisenach),
Tanja Kruscha (Greifswald),
Marco Möller (Rotterode),
Michael Potthoff (Dresden).
Weiterhin wurden Preise unter allen Einsendern verlost, die zumindest eine Aufgabe korrekt gelöst hatten:
Petra Gollewsky (Leipzig),
Jana Herrmann (Schorrsow),
Udo Jungnickel (Geithain),
Reiner Mönwald (Sömmerda),
Torsten Schulze (Dahme).
Die zwei Buchpreise für die Teilnehmer, welche alle Aufgaben einschließlich der Zusatzaufgabe richtig gelöst haben, gehen an:

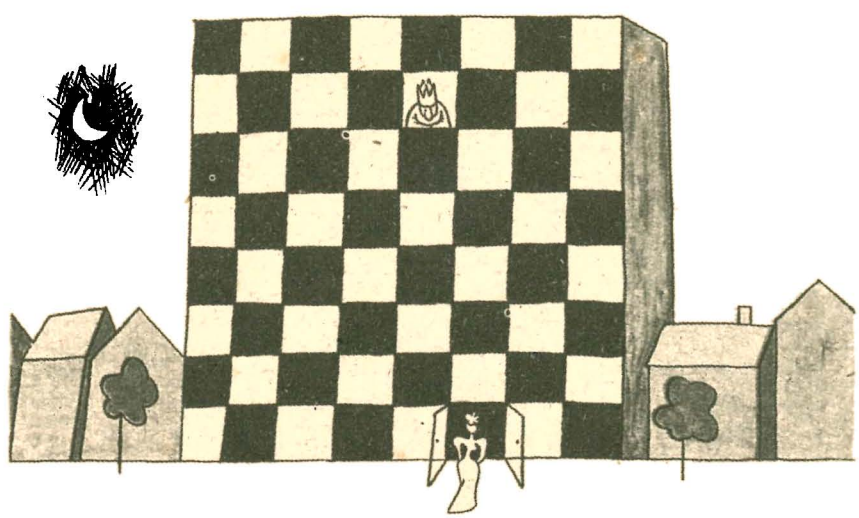
Johannes Böhmer (Görlitz) und
Hartmut Völkel (Pretzschendorf).

Allen Gewinnern unseren herzlichen Glückwunsch!

„Es hat mir sehr großen Spaß gemacht" (S. Hoffmann, Potsdam).
„Ich befasse mich schon seit 40 Jahren mit dem Problemschach, aber dieses Turnier hat mir einen ganz besonderen Genuß verschafft" (K. Pohlheim, Leipzig).
„Macht weiter so, ich freue mich schon auf den nächsten Schachwettbewerb" (M. Kühne, Ortrand).
Diese und ähnliche Fazite zogen viele Teilnehmer, ob sie nun schon zum dritten oder erst zum ersten Mal dabei waren, ob sie nun alle oder nur einige Aufgaben lösten.
„Ein Schachwettbewerb in dieser Zeitschrift – das war, ist und bleibt eine gute Idee!" (M. Würker, Mülsen St. Micheln)

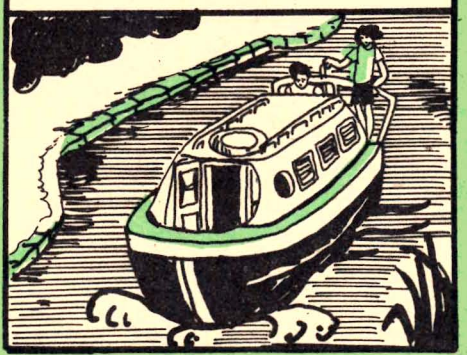
Dieser Idee bleibt die *alpha*-Redaktion treu und startet in Heft 6/1986 den 4. Schachwettbewerb. Alle *alpha*-Leser sind dazu wiederum recht herzlich aufgefordert mitzumachen!

J. Lehmann/H. Rüdiger

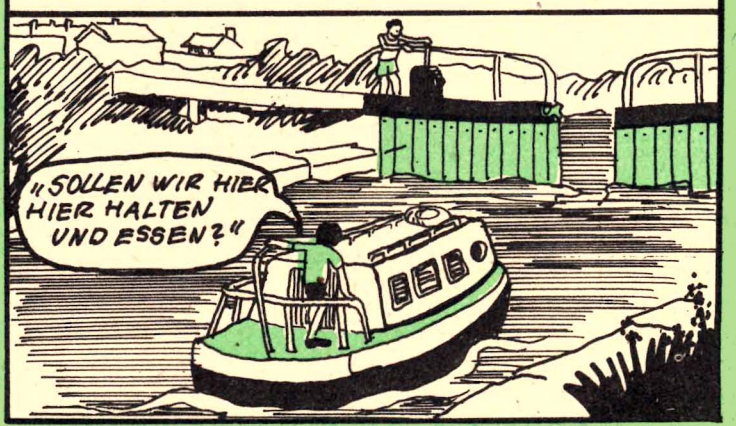


LOGISCHE KITTY

UM 8.30 UHR BEGANN FÜR KITTY UND IHRE FREUNDIN MICHELLE DER ERSTE TAG IHRES BOOTSAUSFLUGES.



UM 10 UHR ERREICHTEN SIE DIE ERSTE SCHLEUSE.



MICHELLE, DIE DEN KANAL ZUVOR SCHON GEKREUZT HATTE, ANTWORTETE..

SIE ERREICHTEN DIE PIZZASTUBE GEGEN MITTAG. KITTY UND MICHELLE ASSEN PILZPIZZA UND TRANKEN EINE GROSSE COLA. DANACH FUHREN SIE WEITER.

GEGEN 17 UHR WAREN SIE 20 MEILEN VON DER SCHLEUSE ENTFERNT.

SIE ERREICHTEN IHREN ANKERPLATZ GEGEN 19 UHR. MICHELLE FRAGTE KITTY:

ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 20 (1986) 5 · Seiten 97 bis 120