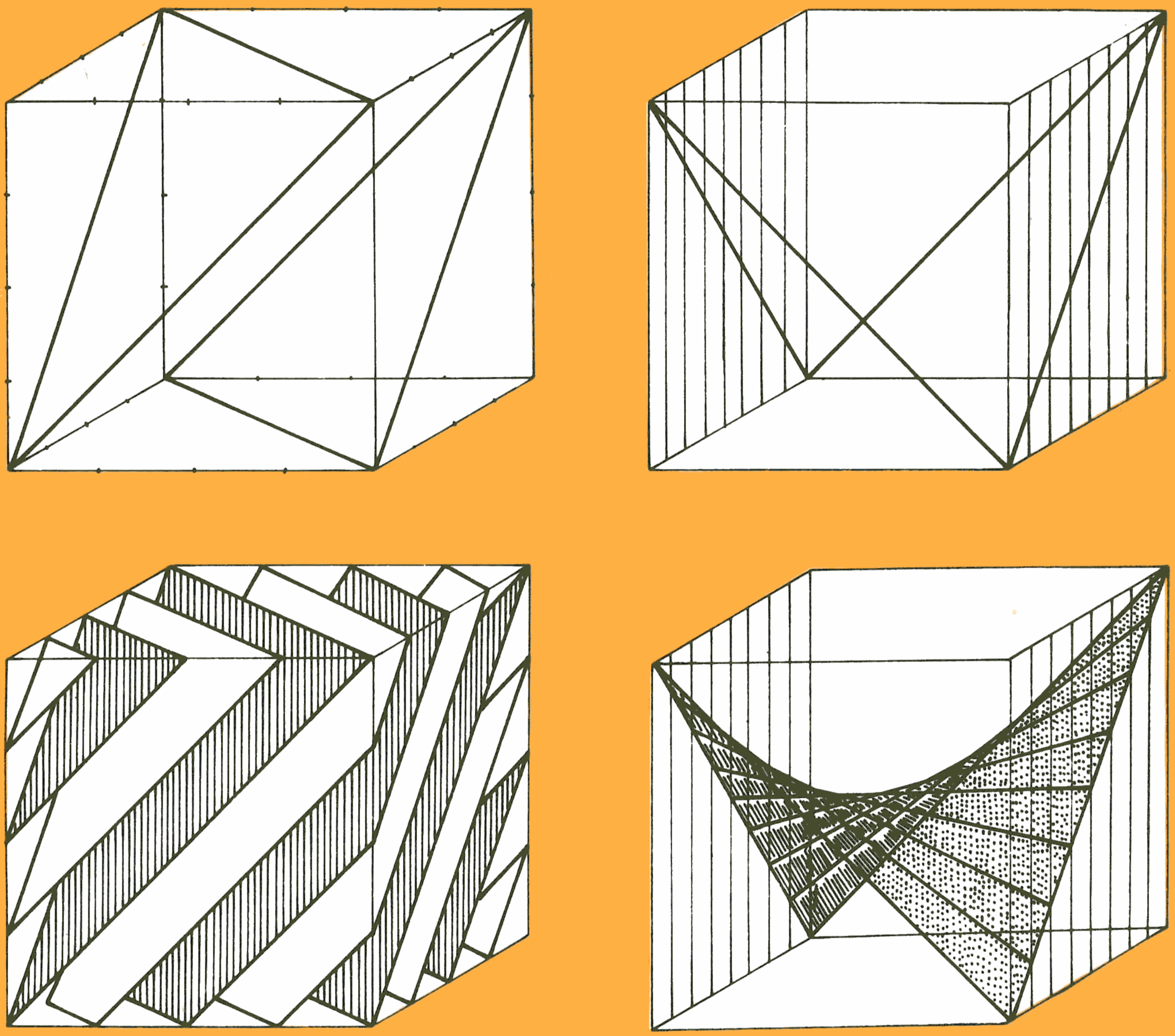
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Verlag GmbH Berlin
25. Jahrgang 1991
Preis 1,50 DM
ISSN 0002-6395

Mach's mal nach

1

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Verlag GmbH
Anschrift des Verlages:
Lindenstr. 54a, PSF 1213, Berlin, 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig, 7027
Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur);

Lizenznummer: 1545
Erscheinungsweise: zweimonatlich

Abonnement für die neuen Bundesländer über die Deutsche Bundespost, Einzelheft 1,50 DM, im Abonnement zweimonatlich 1,20 DM

Abonnement für die alten Bundesländer und das Ausland über:
Friedrich Verlag, Vertrieb
Postfach 100150
W-3016 Seelze
Einzelheft 2,50 DM

Bei Bezugsschwierigkeiten wendet euch bitte direkt an die Redaktion.

Fotos: Wissenschaft und Fortschritt, Berlin (S. 1); J. Fricke, Pasewalk (S. 17)
Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelvignetten); H. Teske, Leipzig (IV. U.-Seite)
Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Satz und Druck: Interdruck Leipzig GmbH
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 10. Dezember 1990
Auslieferungstermin: 12. Februar 1991

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

Die Fields-Medaille – mathematisches Pendant zum Nobelpreis

In jedem Jahr findet die Auswahl der Nobelpreisträger für die Gebiete Physik, Chemie sowie Physiologie und Medizin große Beachtung, insbesondere in der wissenschaftlichen Welt; der Literatur- und Friedensnobelpreis hingegen beanspruchen das Interesse einer noch breiteren Öffentlichkeit. Aber es gibt keinen Nobelpreis für Mathematik. Nobel wollte die Mathematik nicht unter die auszuzeichnenden Gebiete gerechnet wissen. Für den Grund dieses Ausschlusses gibt es keinen dokumentarischen Beweis, doch gibt der Mathematikerklatsch dafür einen persönlichen Konflikt zwischen Alfred Nobel und dem schwedischen Mathematiker Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846–1927) an.

Der irische Mathematiker J. L. Synge schreibt dazu: „Von Fields hörte ich über die Probleme zwischen Nobel und Mittag-Leffler. Ich nehme an, daß es sich um eine Sache persönlicher Eifersucht handelte ...“.

Der kanadische Mathematiker John Charles Fields (1863–1932), ein Freund Mittag-Lefflers, stiftete an Stelle des fehlenden Nobelpreises für Mathematik eine Auszeichnung. Fields legte 1884 an der Universität Toronto sein Bachelor-Examen ab und promovierte 1887 an der John-Hopkins-University in Baltimore. Dort lehrte er bis 1889, dann bis 1892 am Allegheny College (Pennsylvania) und ging schließlich für 10 Jahre nach Europa. Dort entstand seine Freundschaft mit Mittag-Leffler. Von 1902 bis zu seinem Tod 1932 war Fields Professor für Mathematik an der Universität in Toronto.

1923 wurde die Internationale Mathematische Union (IMU) mit der Absicht gegründet, die Internationalen Mathematiker-Kongresse fortzusetzen, deren erster 1897 in Zürich stattgefunden hatte und deren Folge durch den ersten Weltkrieg unterbrochen worden war.

Der zweite Nachkriegskongreß fand 1924 entsprechend Fields Planung in Toronto statt.

Bei einem 1931 durchgeführten Treffen des ehemaligen Komitees für den Internationalen Mathematikerkongreß 1924 unter Vorsitz von Fields wird erstmals die Verleihung einer Mathematik-Medaille öffentlich erwähnt. Über den Charakter der Auszeichnung schrieb Fields: „Wohlgemerkt sollten die Auszeichnungen, wiewohl in Anerkennung bereits geleisteter Arbeit verliehen, gleichzeitig gemeint sein als Ermutigung für weitere Leistungen seitens der Empfänger und als Anreiz für neue Bemühungen seitens anderer“. Sie sollten ein „neuer Anfang in der Sache internationaler wissenschaftlicher Zusammenarbeit sein ... die Medaillen sollten einen rein internationalen Charakter haben, so unpersönlich wie möglich. In keiner Weise sollte mit ihnen der Name des Landes einer Institution oder Person verbunden sein“.

Fields vertrat eine auch heute aktuelle Position. „Sein langer Aufenthalt in Europa hatte ihm Einsichten in die Funktion der Universität und in die Rolle des Universitätsprofessors in der Gesellschaft Nordamerikas gegeben. An diesen Überzeugungen hielt er fest, und er bestand darauf, daß die Forschung eine mindestens ebenso wichtige Funktion sei, wie der Unterricht von Studenten der Anfangssemester ...“ (J. L. Synge). Fields starb 1932 noch vor dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Zürich und stiftete testamentarisch sein Vermögen im wesentlichen für Medaillen, welche auf den Internationalen Mathematiker-Kongressen verliehen werden sollten.

Auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Oslo 1936 wurden die ersten Medaillen vergeben.

Im Unterschied zu den von Alfred Nobel gestifteten Preisen bestand Fields darauf, daß nirgendwo ein Verweis auf den Stifter „seiner“ Medaille zu finden sei.

Vorder- und Rückseite der Fields-Medaille

Der Entwurf der Medaille stammte von dem kanadischen Künstler Robert Tait McKenzie. Die Vorderseite zeigt Archimedes' Kopf im rechtsseitigen Profil und die Inschrift „TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI“ (Für das Überschreiten der Grenzen eines Menschen und für die Bezwingung der Welt), ferner des Künstlers Monogramm RTM und eine Jahresangabe. Die Inschrift der Rückseite heißt „CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE“ (Die aus der ganzen Welt versammelten Mathematiker ehren beachtliche Beiträge zum Wissen); im Hintergrund ist die einem Zylinder einbeschriebene Kugel nach Archimedes zu sehen.

Wegen des zweiten Weltkrieges fand 14 Jahre lang keine Auszeichnung statt, erst 1950 wieder in Cambridge (USA). Die Medaillen werden entgegen den Vorstellungen des Stifters doch als Fields-Medaillen bezeichnet. Eine ungeschriebene Regel – sicher in Fields Sinn – legt fest, daß kein Preisträger zu benennen ist, der älter als 40 Jahre ist.

Trotz beachtlicher Leistungen deutscher Mathematiker findet sich erst 1986 ein Deutscher unter den Preisträgern: nämlich Gerd Faltings, BRD. Die durch zwei Weltkriege entstandenen Emotionen haben sicher zum Fehlen deutscher Mathematiker in der Liste der Fields-Medaillenträger beigetragen. Faltings, 1954 geboren, war zweifacher Preisträger beim Bundeswettbewerb Mathematik und studierte in Münster, 1978 promovierte er und verbrachte anschließend ein Jahr an der Harvard University. 1981 habilitierte er sich und wurde danach ordentlicher Professor an der Gesamthochschule Wuppertal. 1983 trug P. Deligne, selbst Fields-Medaillenträger, auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Warschau in einem Sondervortrag über Faltings Ergebnisse vor, und 1986 wurde jener mit der Fields-Medaille ausgezeichnet. Der Internationale Mathematikerkongreß 1990 fand in Kyoto (Japan) statt.

W. Engel

Redaktionell gekürzter Nachdruck des Beitrages gleichen Titels in: wissenschaft und fortschritt 2/1990, Berlin

K_5 – Der komplette 5er-Graph

1. Ein Spiel auf dem vollständigen 5er-Graphen

Zwei Spieler A und B verabreden folgendes Spiel auf dem vollständigen 5er-Graphen. Beide setzen einen Spielstein auf einen der 5 Eckpunkte. Dabei können sie durchaus den gleichen Eckpunkt wählen.

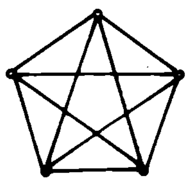
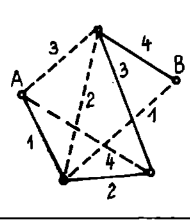
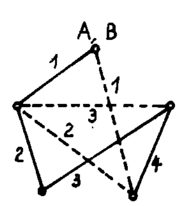
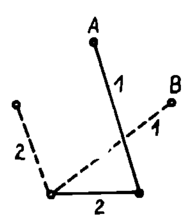


Bild 1
Das 5Eck mit seinen 5 Eckpunkten, 5 Seiten und 5 Diagonalen bildet den kompletten 5er-Graphen K_5

Spieler A und Spieler B ziehen jetzt nacheinander längs der vorhandenen Linien zu einem weiteren Eckpunkt. Durchfahrene Linien werden etwa vom Spieler A stark nachgezeichnet, während sie vom Spieler B gestrichelt markiert sein sollen. Ein Spieler darf nicht die vom Gegenspieler markierten Linien benutzen. Jeder Spieler soll jeden Punkt genau einmal erreichen! Wenn der am Zuge befindliche Spieler nicht mehr fortfahren kann, hat er verloren. Das Spiel gilt als unentschieden, wenn beide Spieler zum Ziele gelangt sind, d. h. alle 5 Punkte nach 4 Zügen angelaufen wurden. In der folgenden Liste notieren wir drei mögliche Spielverläufe.

Spielverlauf			
Spielausgang	Unentschieden	A gewinnt nach 4 Zügen	B gewinnt nach 2 Zügen

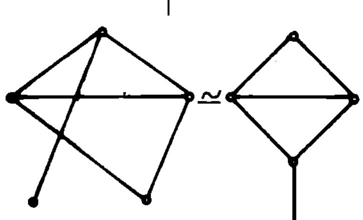


Bild 2
Das Verbindungsnetz der im letzten Spielverlauf nicht benutzten Linien

Bei dem letzten Spielverlauf sind von den 10 Linien (Seiten und Diagonalen) des vollständigen 5er-Graphen 4 durch die erfolgten Züge markiert. Es verbleibt ein Restgraph von 6 Linien. Dieser besitzt das folgende Verbindungsschema:
Das ist nicht der einzige in dem vollständigen 5er-Graphen enthaltene 6kantige „Restgraph“. Es kommen vielmehr noch die nachstehenden Möglichkeiten in Betracht.

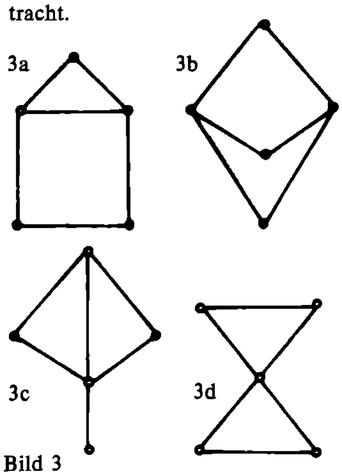


Bild 3
Weitere Verbindungsnetze innerhalb des vollständigen 5er-Graphen, die 6 Kanten besitzen

Wir wollen darüber nachdenken, ob die in Bild 3 dargestellten „Restgraphen“ als nicht benutzte Linienzüge bei Spielverläufen im vollständigen 5er-Graphen entstehen können. Das führen wir beispielsweise

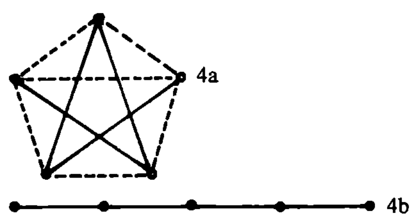


Bild 4
Die Hauskontur als 6kantiger Teilgraph und der Ergänzungsgraph im vollständigen 5er-Graphen

für die „Hauskontur“ (Bild 3a) durch. Die Spielzüge von A und B sind längs der fehlenden Kanten erfolgt. Das liefert ohne Einschränkung der Allgemeinheit die in Bild 4b angegebene Markierung.
In dieser Art kann aber kein Spiel abgelaufen sein, wobei der Spieler B nach 2 Zügen gewinnt. Denn das Spiel müßte in einem Eckpunkt beendet worden sein, in den 2 markierte Linien einmünden.

Der Spieler A käme aber noch sehr wohl um einen Zug weiter, weil mindestens einer der Nachbarpunkte von ihm noch nicht besetzt war.

Aufgabe 1: Der Leser finde heraus, ob noch weitere Fälle von Bild 3 als Restgraphen von Spielverläufen ausscheiden.

2. Systematik der 5er-Graphen

Graphen spielen in den verschiedensten Disziplinen der Mathematik eine wichtige Rolle. Sie stellen ein Verbindungsschema von Punkten (den sogenannten *Knoten*) und Linien (den sogenannten *Kanten*) dar.
In anschaulicher Ausdeutung denke man sich die Knoten als Städte und die Verbindungslinien als Straßen zwischen diesen Städten. Dabei kommt es nicht auf die Länge der Verbindungswege sondern lediglich auf die gegenseitige Erreichbarkeit an. Zwei Städte, die durch eine Kante in Verbindung stehen, sind in diesem Sinne Nachbarstädte. Die Wiedergabe eines solchen Verbindungsschemas kann durch die Menge V der Knoten und die Menge E der Kanten erfolgen. Die Buchstaben V und E erklären sich aus den englischen Wörtern für Knoten bzw. Kanten: „vertex“ (eigentlich: Wirbel) bzw. „edge“. Man versucht dabei der Übersichtlichkeit halber die Kanten möglichst geradlinig zu zeichnen, obwohl das nicht notwendig ist. Ein Graph wird dann oft mit $G(V, E)$ bezeichnet. Es soll von jedem Knoten wenigstens eine Kante ausgehen. Bei unseren Graphen soll es zwischen zwei Knoten höchstens eine Kante geben.
Solche Graphen heißen *schlicht.* Anschaulich gesprochen: Der Fall, daß zwei Nachbarstädte durch zwei Straßen verbunden sind, wie z. B. Stralsund und Greifswald durch die Fernverkehrsstraßen 96 und 96a, soll ausgeschlossen sein. Daß eine Kante zu einem Knoten zurückführt – solche Kanten heißen *Schlingen* – soll auch nicht auftreten. Außerdem beschränken wir uns auf *zusammenhängende* Graphen. Das sind solche, wo je zwei Knotenpunkte durch eine Folge von Straßen (Kanten) untereinander erreichbar sind.
Das Straßensystem zwischen Dörfern der Insel Hiddensee und das Straßensystem zwischen den Städten des übrigen Bezirks Rostock sind zwei verschiedene zusammenhängende Graphen. Das gemeinsame System stellt einen unzusammenhängenden Graphen dar.
Bereits im Abschnitt 1. dieses Artikels hatten wir die dort betrachteten Spielverläufe durch Graphen dargestellt. Wir befassen uns jetzt mit der daraus resultierenden Aufgabe, alle zusammenhängenden, schlichten, schlingenlosen Graphen mit drei, vier und fünf Knoten aufzulisten.
Außerdem interessieren wir uns noch dafür, wie viele Kanten in einem Knoten zusammentreffen. Diese Anzahl nennt man die *Valenz des Knotens.* Bezeichne i_1 die Anzahl der Knoten in einem Graphen mit der Valenz 1, i_2 die mit Valenz 2, usw., so nennen wir das geordnete m-Tupel

$(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ den *Valenzvektor* des Graphen.

Feststellung: Ein schlichter, schlingenloser, zusammenhängender Graph aus n Knoten hat wenigstens $n-1$ Kanten.
Das kann man beispielsweise durch eine Induktionsschlußweise wie folgt begründen:
Induktionsanfang: $n = 2$, $k = 1$ (k Kantenzahl)
Induktionsschritt von n auf $n + 1$: Bei Hinzunahme eines weiteren Knotens kommt mindestens eine Kante hinzu, die (wegen des Zusammenhangs des Graphen) den hinzugekommenen Knoten mit einem Knoten des ursprünglichen Graphen verbindet.

Aufgabe 2: (Für einen mit der vollständigen Induktion vertrauten Leser) Bezeichne k, k' bzw. n, n' die Kantenzahl bzw. Knotenzahl vor bzw. nach Hinzunahme eines weiteren Knotens, so läßt sich die Induktionsbehauptung formulieren durch

$$k' \geqq k + 1.$$

Beweise diese Formel unter Zugrundelegung der Induktionsannahme

$$k \geqq n - 1.$$

Es ist offensichtlich, daß bei einem schlichten, schlingenlosen Graphen von n Knoten der Valenzvektor ein $(n-1)$-Tupel ist, da ein Knoten bestenfalls die übrigen $n-1$ Knoten zu Nachbarn haben kann.
Welche Beziehungen bestehen nun zwischen der Knotenzahl n, der Kantenzahl k und den Valenzwerten? Bildet man die Summe

$$1 \cdot i_1 + 2 \cdot i_2 + \ldots + (n-1) \cdot i_{n-1},$$

so hat man jede Kante des Graphen doppelt gezählt, und deshalb gilt

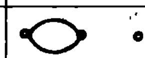
$$1 \cdot i_1 + 2 \cdot i_2 + \ldots + (n-1) \cdot i_{n-1} = 2k. \qquad (1)$$

Summiert man andererseits die Valenzwerte, so erhält man für einen schlichten, schlingenlosen, zusammenhängenden Graphen die Beziehung

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-1} = n, \qquad (2)$$

weil jeder Knoten einen eindeutig bestimmten Valenzwert zwischen 1 und $n-1$ hat. Notwendig für die Existenz eines schlichten, schlingenlosen und zusammenhängenden Graphen von n Knoten und k Kanten ist das Bestehen der beiden diophantischen Gleichungen (1) und (2).
Die Graphen der Spielverläufe, die als Kanten die durchgezogen und gestrichelt markierten Verbindungsstrecken haben, besitzen beispielsweise die folgenden Valenzvektoren:
1. Spielverlauf: (0, 1, 2, 2)
2. Spielverlauf: (0, 2, 2, 1)
3. Spielverlauf: (3, 1, 1, 0)
Nicht jede Lösung der diophantischen Gleichungen legt einen eindeutig bestimmten Graphen fest, wie man an gewissen Beispielen der folgenden Tabellen bemerken kann.
Wir wollen nun mit der Auflistung aller zusammenhängenden, schlichten, schlingenlosen Graphen der Knotenzahl 3, 4 und 5 beginnen.

Tabelle 1: Zusammenstellung möglicher Fälle der Lösungen der diophantischen Gleichung (1) bei einer Knotenzahl $n = 3$

Lfd. Nr.	k	diophantische Gleichung (1)	Lösung von (1)	Valenzvektor	Graph bzw. Kommentar
1	2	$a + 2b = 4$	$a = 0,\ b = 2$	(0, 2)	 keine Realisierung
2			$a = 2,\ b = 1$	(2, 1)	
3			$a = 4,\ b = 0$	(4, 0)	keine Realisierung
4	3	$a + 2b = 6$	$a = 0,\ b = 3$	(0, 3)	
5			$a = 2,\ b = 2$	(2, 2)	keine Realisierungen
6			$a = 4,\ b = 1$	(4, 1)	
7			$a = 6,\ b = 0$	(6, 0)	

Aufgabe 3: Vervollständige die Tabelle 1 und zeichne die zugehörigen Graphen!
Im folgenden werden nur noch die gemeinsamen Lösungen der diophantischen Gleichungen (1) und (2) betrachtet.

Tabelle 2: Die zusammenhängenden, schlichten, schlingenlosen Graphen mit 4 Knoten

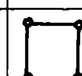
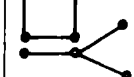
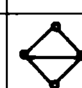
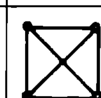
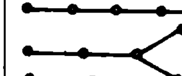
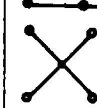
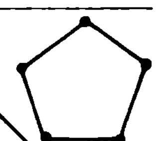
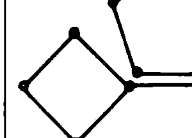
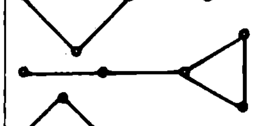
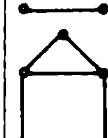
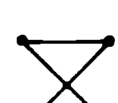
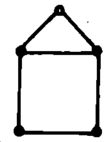
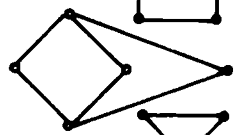
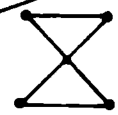
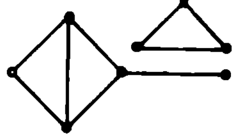
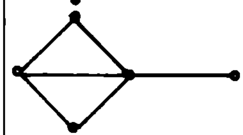
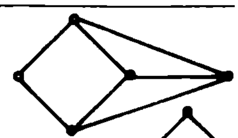
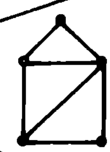
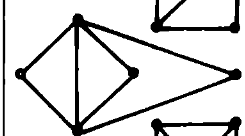
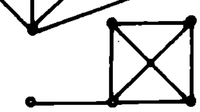
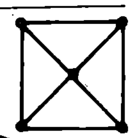
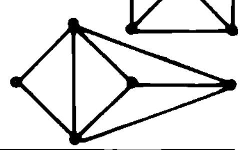
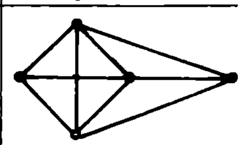
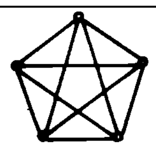
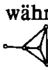
Lfd. Nr.	k	diophantische Gleichung (1)	Valenzvektor	Graph	
1	3	$a + 2b + 3c = 6$	(2, 2, 0)		a
2			(3, 0, 1)		b
3	4	$a + 2b + 3c = 8$	(0, 4, 0)		c
4			(1, 2, 1)		d
5	5	$a + 2b + 3c = 10$	(0, 2, 2)		e
6	6	$a + 2b + 3x = 12$	(0, 0, 4)		f

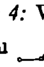
Tabelle 3: Die zusammenhängenden, schlichten, schlingenlosen Graphen mit 5 Knoten

Lfd. Nr.	k	diophantische Gleichung (1)	Valenzvektor	Graph
1	4	$a + 2b + 3c + 4d = 8$	(2, 3, 0, 0)	
2			(3, 1, 1, 0)	
3			(4, 0, 0, 1)	
4	5	$a + 2b + 3c + 4d = 10$	(0, 5, 0, 0)	
5			(1, 3, 1, 0)	
6			(1, 3, 1, 0)	
7			(2, 1, 2, 0)	
8			(2, 2, 0, 1)	

Lfd. Nr.	k	diophantische Gleichung (1)	Valenzvektor	Graph
9	6	$a+2b+3c+4d=12$	(0, 3, 2, 0)	
10			(0, 3, 2, 0)	
11			(0, 4, 0, 1)	
12			(1, 1, 3, 0)	
13			(1, 2, 1, 1)	
14	7	$a+2b+3c+4d=14$	(0, 1, 4, 0)	
15			(0, 2, 2, 1)	
16			(0, 3, 0, 2)	
17			(1, 0, 3, 1)	
18	8	$a+2b+3c+4d=16$	(0, 0, 4, 1)	
19			(0, 1, 2, 2)	
20	9	$a+2b+3c+4d=18$	(0, 0, 2, 3)	
21	10	$a+2b+3c+4d=20$	(0, 0, 0, 5)	

Die Nummern 2 und 4 der Tabelle 1 ergeben die einzigen zusammenhängenden, schlichten, schlingenlosen Graphen der Knotenzahl $n=3$. Die Untersuchung weiterer diophantischer Gleichungen (1) wie $a+2b=0$, $a+2b=2$, $a+2b=8$, ... wurde nicht vorgenommen, da keine Realisierungen in unserem Sinne zu erwarten sind.

Der Graph aus Tabelle 1 mit Nr. 2, die ersten beiden Graphen aus Tabelle 2 und die ersten drei Graphen aus Tabelle 3 heißen *Bäume*, während die anderen Zyklen enthalten.
Die Beispiele 5 und 6 bzw. 9 und 10 aus Tabelle 3 haben denselben Valenzvektor, obwohl die Graphen verschieden sind, während der Graph 17 aus dem Graphen  erhalten wird, indem man den inneren Knoten nach links oben verlegt, so daß er außerhalb des ihn umschließenden Dreiecks zu liegen kommt und mit diesen Knoten ein Viereck bildet. (Die Kanten bleiben in den Knoten befestigt.) Das kann man sich so realisiert denken, als ob die Kanten Gummibänder darstellten, die in den Knoten aneinander befestigt sind. Graphen, die in ähnlicher Weise auseinander hervorgehen, sollen zueinander *isomorph* heißen. Die Definition lautet mittels mengentheoretischer Begriffe wie folgt:
Zwei Graphen $G(V, E)$ und $G'(V', E')$ sind genau dann zueinander *isomorph*, wenn es eine eineindeutige Abbildung F von der Menge V auf die Menge V' gibt mit $F(x)=x'$, so daß für alle x, $y \in V$ Knoten x', $y' \in V'$ mit der Eigenschaft existieren: Die Kante $[x, y]$ gehört genau dann zu E, wenn die Kante $[x', y']$ zu E' gehört.
Isomorphe Graphen haben die gleiche Gestalt im Sinne des abstrakten Verbindungsschemas, können aber geometrisch verschieden realisiert sein.

Aufgabe 4: Weise nach, daß der Graph  zu  isopmorph ist!

Aufgabe 5: Weise nach, daß die Graphen der Beispiele 5 und 6 aus Tabelle 3 nicht isomorph sind, ebenso nicht die der Beispiele 9 und 10!

3. Die 5er-Graphen als Skelette von lustigen Figuren

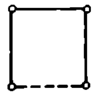
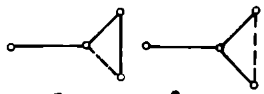
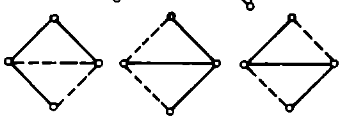
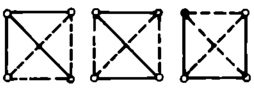
Nach der systematischen Ermittlung aller möglichen zusammenhängenden 5er-Graphen geben wir noch unserer spielerischen Phantasie freien Lauf und stellen aus den Graphen amüsante Figuren her (siehe IV. Umschlagseite). Der Leser nehme die Angebote als Anreiz, um noch weitere Darstellungen zu finden.

4. Aufspannende Bäume und Restgraphen

Kehren wir zum Anfang unserer Untersuchungen zurück! Der Spieler A kommt in den Spielen 1 und 2 genau einmal zu jedem Knoten des 5er-Graphen und zwar längs eines Baumes. Auch der Spieler B kommt im Spiel 1 zu jedem Knoten des 5er-Graphen längs eines Baumes.
Solche Bäume wollen wir aufspannend nennen. Präzis wollen wir sagen: Ein Teil eines Graphen G (Teilgraph) soll ein *aufspannender Baum* des Graphen G heißen, wenn jeder Knoten des Graphen G durch ihn genau einmal längs des Baumes erreicht wird. Den übrigbleibenden Teil des Graphen wollen wir „Restgraphen" nennen.

Unsere Aufgabe soll es nun sein, alle aufspannenden Bäume der Graphen mit 4 bzw. 5 Knoten zusammenzustellen. Die Auflistung soll bis zu einer gewissen Nummer bis auf Isomorphie vollständig erfolgen. Um nochmaliges Zeichnen der Ausgangsgraphen zu vermeiden, verwenden wir die Nummern der Tabellen 2 und 3 von Abschnitt 2 und zeichnen nur die aufspannenden Bäume in ausgezogener Linie, die Restgraphen gestrichelt (Tabelle 4 und 5).

Tabelle 4: Aufspannende Bäume und Restgraphen der Graphen mit 4 Knoten (vgl. Tabelle 2)

Lfd. Nr.	Tabelle 2
3	
4	
5	
6	

In Nr. 11 treten alle drei möglichen Bäume zum ersten Mal als aufspannende Bäume auf. Die Figur 14d ist isomorph zu .

Der aufspannende Baum in 14c ist natürlich isomorph dem von 14d und ebenso sind die entsprechenden Restgraphen isomorph. Aber die Bäume und Restgraphen sind beidesmal in ihrer gegenseitigen Kopplung unterschiedlich gelegen. Denn es gibt keinen Isomorphismus von 14c auf 14b, der die aufspannenden Bäume ineinander und auch gleichzeitig die Restgraphen ineinander überführt. Davon überzeugt man sich wie folgt: Die Knoten seien beginnend mit dem oberen zeilenweise fortlaufend numeriert mit 1, 2, ..., 5.

Wäre ein Isomorphismus vorhanden, so müßte gelten: $1 \mapsto 4$ (Das sind die einzigen Knoten des jeweils aufspannenden Baumes mit der Valenz 3) $5 \mapsto 2$ (Die Wurzelpunkte der entsprechenden Bäume).

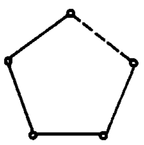
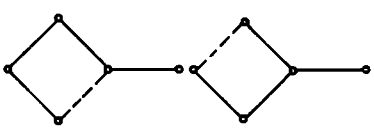
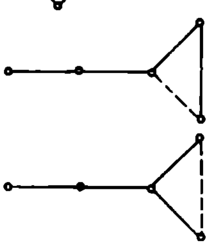
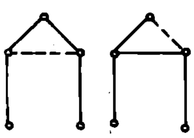
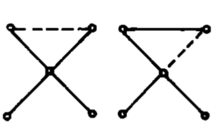
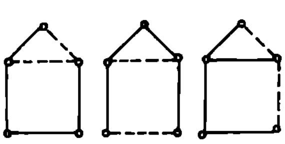
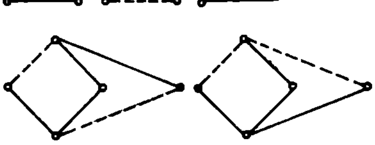
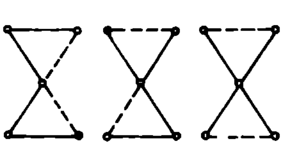
$\{1, 3\} \rightarrow \{2, 5\}$ (Endpunkte der entsprechenden Bäume, die vom Wurzelpunkt verschieden sind).

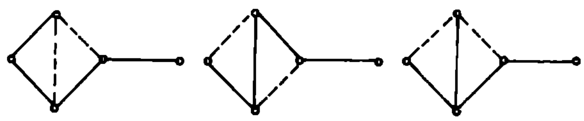
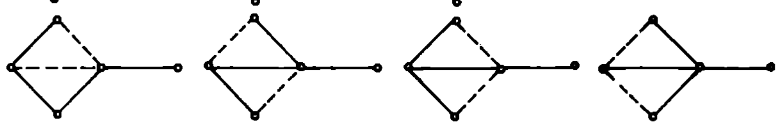
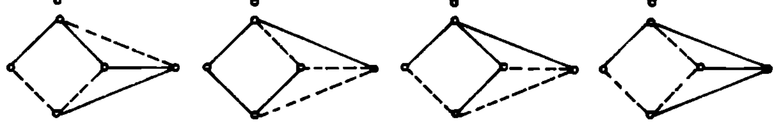
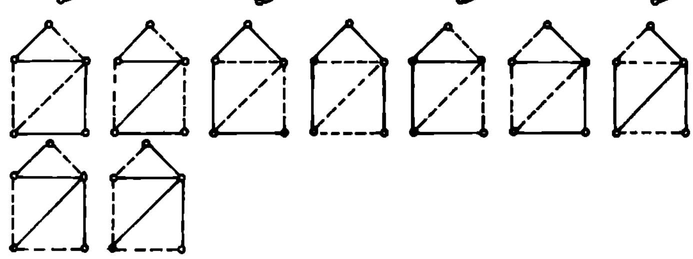
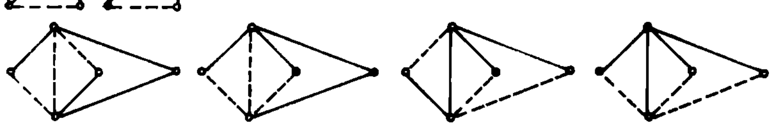
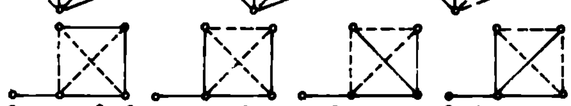
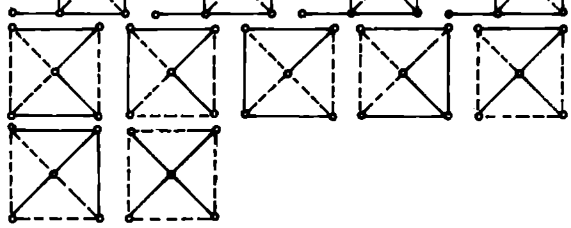
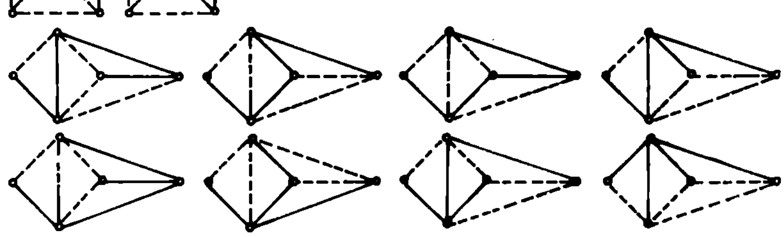
Das liefert aber einen Widerspruch, da in 14d diese Endpunkte des Baumes durch eine Kante des Restgraphen verbunden sind, aber dies nicht für 14c zutrifft.

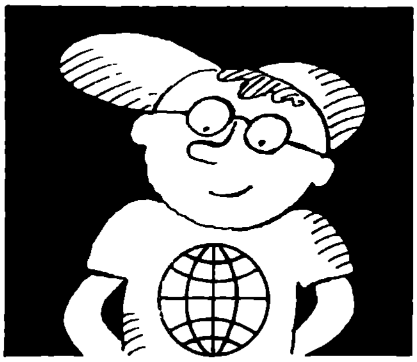
Aufgabe 6: Gib bis auf Isomorphie alle aufspannenden Bäume und Restgraphen der Graphen 20 und 21 auf Tabelle 3 an!

J. Flachsmeyer/W. Schleinitz

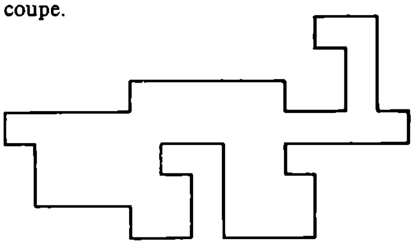
Tabelle 5: Aufspannende Bäume und Restgraphen der Graphen mit 5 Knoten (vgl. Tabelle 3)

Lfd. Nr.	Tabelle 3
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

Lfd. Nr.	Tabelle 3
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	



▲1▲ **Découpage**
Découpez ce polygone en seulement trois morceaux, de façon à pouvoir reconstituer un carré. On se contentera de tracer distinctement sur la figure les lignes de découpe.

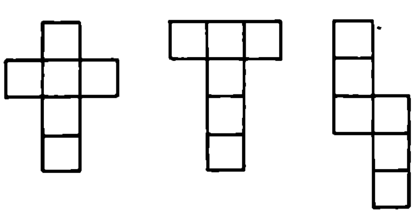


aus: tangente, Paris

▲2▲ Может ли выражение
$a^2 - b^2 + c^2$ делиться на 5, если ни одно из целых чисел a, b и c не делится на 5?

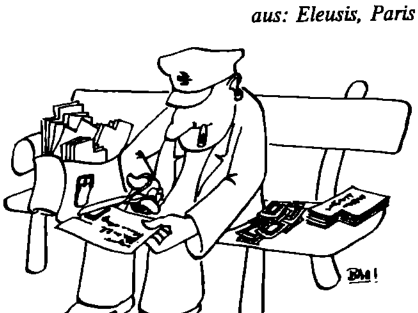
aus: Quant, Moskau

▲3▲ **Nets for cubes**
The drawing shows three nets composed of six quares each. It is easy to see that the two on the left can be folded to form a cube. With slightly more effort, you will see that the net on the right can also be folded to form a cube. How many more nets of six squares can you draw that, when folded, will produce a cube.



aus: Fun with mathematics, Toronto

aus: Eleusis, Paris



Mitstreiter gesucht!

Seit etwa sechs Jahren engagiert sich eine Gruppe von Mathematikern, Lehrern und Mathematikhistorikern für die Bestandsaufnahme aller auf dem Territorium der früheren DDR befindlichen „Sachzeugen" mathematischer Traditionen. Unter Sachzeugen verstehen wir museale Einrichtungen wie den Mathematisch-Physikalischen Salon im Dresdner Zwinger, das Adam-Ries-Haus in Annaberg-Buchholz, einschlägige Museumsgüter von den geodätischen und mathematischen Instrumenten über alte Rechenmaschinen bis zu den ersten Computern, Grabstätten bedeutender Mathematiker, Gedenktafeln an bzw. in ihren ehemaligen Wohn- und Arbeitsstätten, Plastiken, Gemälde und andere Kunstwerke, die Mathematikern oder mathematischen Themen gewidmet sind, Münzen und Medaillen, Archivalien und seltene Bücher, nicht zuletzt auch Benennungen von Straßen, Plätzen, Gebäuden und Institutionen (z. B. Schulen) nach Mathematikern. Ein reich illustriertes Buch, das die Ergebnisse dieser Sammlung allen Freunden der Mathematik präsentieren sollte, war bereits im Entstehen. Es sollte im traditionsreichen Teubner-Verlag in Leipzig erscheinen, der wegen seiner weit zurückreichenden Verdienste um die Herausgabe von mathematischen Büchern und Zeitschriften in gewisser Weise selbst zu unseren Sachzeugen zählt.
Nun, unter den veränderten Bedingungen, ist ein solches Vorhaben natürlich auf gesamtdeutsches Territorium auszudehnen. Wie vorher die Mathematische Gesellschaft der DDR, so wird nun die gesamtdeutsche Mathematiker-Vereinigung das Vorhaben fördern und „beschirmen". Aber von neuem sind wir auf die Hinweise und Material in Wort und Bild von vielen freundlichen Helfern angewiesen. Wie solche Hinweise etwa beschaffen sein könnten, zeigt der nebenstehend abgedruckte Brief von Herrn Dr. Büchel aus Zella-Mehlis.
Alpha wird weiterhin geeignete Zuschriften veröffentlichen.
Hinweise können aber auch direkt an den Leiter des Projektes,
Dozent Dr. Peter Schreiber,
Fachbereich Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald,
F.-L.-Jahn-Str. 15a,
O-2200 Greifswald, eingesandt werden.

Dr. P. Schreiber, Stralsund

Leserpost

Vielen Lesern wird es wie mir gehen. Obwohl an der Mathematik und ihrer Geschichte nicht nur interessiert, sondern von Berufs wegen ständig mit ihr in Berührung, war mir der Name Athanasius Kircher noch nicht begegnet.
Ich stöberte in einem Rhönführer von Justus Schneider aus dem Jahre 1922 (Druck und Verlag der Universitätsdruckerei H. Stürtz A.G., Würzburg) bei der Vorbereitung von Wanderungen in einem Landschaftsgebiet, das durch die Grenzziehung der Vergangenheit und damit verbundenen Sperrzonen nicht zugänglich war.
Auf Seite 211 fand ich unter der Stadt Geisa:
„Geburtsort des berühmten Jesuiten Athanasius Kircher, Professor der Mathematik und Physik zu Rom (geb. 1602)."
Inzwischen habe ich dem Rhönstädtchen Geisa an der Ulster einen Besuch abgestattet. Malerisch ist es am und auf dem Gangolfsberg gelegen, dessen Gipfel u. a. den Friedhof mit Kapelle, das alte Schloß, Steine vom alten Centgericht trägt. Unter herrlichen Lindenbäumen findet man auch den Gedenkstein für Athanasius Kircher mit der Inschrift:

„Dem großen Sohn unserer Stadt
Athanasius Kircher
1602–1680
Der Wissenschaft zum Nutzen, unserer Stadt zur Ehre und allen zur Lehre"

Ich hatte mich darauf eingestellt, nach A. Kircher fragen zu müssen, vielleicht in der Katholischen Kirche, und war überrascht, wie Geisa die Erinnerung an einen Wissenschaftler wach hält.
Eine der Straßen trägt seinen Namen, und neben dem Rathaus in gotischer Bauart ist an einem Haus eine weitere Erinnerungstafel angebracht:

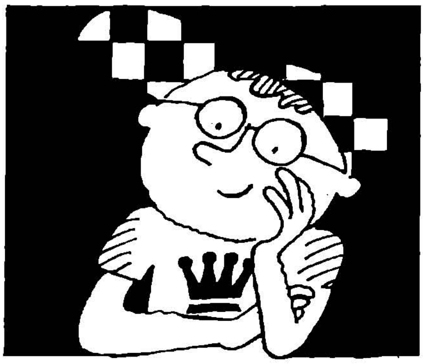
„Auf diesem Grundstück stand das Haus,
in dem der hervorragende Wissenschaftler
Athanasius Kircher
am 2. Mai 1602 geboren wurde.
Berühmt im In- und Ausland."

In Meyers Handlexikon, Bibliographisches Institut, Leipzig 1922, fand ich noch den Hinweis:
„... erfand einen Brennspiegel, Laterna magica; stiftete eine Kunstsammlung (Museo Kircheriano) in Rom."
Abseits der breiten Straßen und nicht in der vorderen Reihe der großen Mathematiker – Athanasius Kircher.

Dr. H. Büchel, Zella-Mehlis

Zu A. Kircher ist noch zu ergänzen, daß er sich (typisch für seine Zeit) sehr um die „Mathematisierung der Geographie" verdient gemacht hat.* Von ihm stammt die erste Karte der Meeresströmungen und der erste Versuch, die Isogonen, d. h. die Linien gleicher Mißweisung des Kompaß, auf einer Karte darzustellen.
Dies mündete später zu Gauß' Zeiten in die weltweite kartographische Erfassung des Erdmagnetfeldes ein. Außerdem werden Kircher zugeschrieben: die Erfindung des Sprachrohres, einer Zeichenschrift für Taubstumme, Beschäftigung mit Phänomenen der Hypnose, mit Paläontologie, Versuche der Entzifferung der ägyptischen Hieroglyphen, was freilich erst 1822 durch Champollion gelang. Kircher starb am 30. 10. 1680 in Rom.

* Mit den Zusammenhängen zwischen Mathematik und Geographie wird sich „alpha" in den Heften 2 und 3/91 beschäftigen.



Schulschach in der BRD und in der Schweiz

Dieser Beitrag bezieht sich auf das Gebiet der Bundesrepublik vor dem 3. 10. 1990. Über Schachaktivitäten in den nun neuen fünf Bundesländern berichteten wir im 90er Jahrgang von alpha.

Im Jahre 1984 fand in Hamburg der zweite internationale Schulschachkongreß der FIDE (Internationale Schachföderation) statt. Hier wurde der Versuch unternommen, sporadisch entstandene Aktivitäten und Ideen aus den einzelnen Mitgliedsländern zu systematisieren und international einen einheitlichen Standpunkt zum Thema Schach in den Schulen zu erarbeiten. Wenn sie auch noch immer in den Kinderschuhen steckt, so hat diese Idee doch weltweit Verbreitung gefunden. Einen groben Überblick gab alpha bereits im Heft 2/90 – heute wollen wir etwas näher auf spezielle Entwicklungen im deutschsprachigen Raum eingehen.

In der Bundesrepublik lassen sich die Wurzeln des Schulschachs bis in die Gründerjahre zurückverfolgen. Dort kann man bereits seit langem von einer Massenbewegung sprechen. An vielen Schulen wird in der einen oder anderen Weise Schach gespielt.

Meist findet das Training nachmittags in Form einer Arbeitsgemeinschaft statt und wird von einem Lehrer geleitet. Die Kinder spielen ausschließlich aus Spaß und Interesse – in die Bildungskonzeption der Schulen ist Schach nur sehr selten eingebunden. Auch funktioniert zumeist der Wechselwirkungsprozeß mit den Klubs noch ungenügend – so kommt es, daß diese beispielhafte Initiative oft losgelöst vom Schachleben der „Profis“ existiert, was Vor- aber auch Nachteile hat.

Im Schuljahr 1987/88 beteiligten sich an der BRD Schulschachmannschaftsmeisterschaft 2590 4er Mannschaften, 1988/89 sogar 2630. Diese Zahlen führen den Massencharakter noch einmal deutlich vor Augen.

Alljährlich bietet Hamburg eine Attraktion besonderer Art – die Schulschachbewegung organisiert hier am letzten Mittwoch im Februar das größte Schachturnier der Welt. Der Wettbewerb „Rechtes gegen linkes Alsterufer“ lockt regelmäßig mehr als 3000(!) Schachkinder ins Congreß-Centrum und hat 1990 seine 32. Auflage erfahren. Dabei steht die Teilnahme allen offen – in diesem Jahr konnten z. B. erstmals 11 Dresdener Mannschaften teilnehmen, wobei die „Uferzugehörigkeit“ nicht so eng gesehen wird. Hauptsache, es macht Spaß! Kleinere Turniere dieser Art finden des öfteren statt, befreien ebenfalls eine große Menge kleiner Weltmeisterkandidaten von einem Tag Schulstreß und bieten dafür den Direktoren die Gelegenheit, ihren Kollegen um einige Plätze voraus zu sein.

So hat das Schach einen festen Platz im Leben vieler Kinder gefunden – gewiß nicht zum Nachteil ihres Leistungsvermögens. Wie auch auf dem Gebiet der ehemaligen DDR gibt es innerhalb der DSJ (Deutsche Schachjugend) einen Schulschachreferenten mit seiner Schulschachkommission, die Zeitschrift Jugendschach (für alle, die am Nachwuchsschach Interesse haben, nur zu empfehlen) berichtet ausführlich über solche Großereignisse und druckt auch von Zeit zu Zeit Unterrichtshilfen.

Als Ausnahme muß hier noch das Schachgymnasium Altensteig erwähnt werden – eine Privatschule mit Internat, finanziert vom Christlichen Jugenddorfwerk. Hier existiert Schach in der 5./6. Klasse als Pflichtfach, in der 7./8. kann es als Wahlfach weiter belegt werden. Wer sich talentiert zeigt, kann von hochrangigen Meistern betreut werden – einige Schüler der Anstalt sind selbst bereits auf dem besten Wege zu diesem Titel. Eine Ausnahme – sicher. Doch auch ein Beispiel, das Schule machen kann.

Szenenwechsel – Alpen – Schweiz.

Hier bemüht sich Schulschachverantwortlicher Beat Ruegsegger bereits seit vielen Jahren sehr erfolgreich um die Einführung und Verbreitung des königlichen Spiels an den Schulen. Von Anbeginn zentralisiert durchgeführt, soll das Schach in der Schweiz auch direkt in den Dienst der Pädagogik gestellt werden. So liegen erste Erfahrungen vor, die Schachfreund Ruegsegger im Rahmen einer sogenannten Projektwoche sammeln konnte. Eine solche Woche ist der alleinigen intensiven Beschäftigung mit einem Thema nach Wahl vorbehalten – in diesem Falle Schach. Nicht nur herkömmliche Mittel wie Figuren und Demonstrationsbretter sowie Schachbücher nutzend, gestaltete der Schachlehrer hier mit Kassetten, Computern und Videofilmen einen Lehrgang, der Schüler aller Leistungsstadien zur weiteren Beschäftigung mit dem Spiel anregte. Seiner Initiative und dem Sponsor – der Schweizerischen Kreditanstalt – ist es auch zu verdanken, daß in der Schweiz ein für Lehrer wie Schüler gleichermaßen interessanter Schulschachlehrgang in 6 Heften erscheinen konnte, der für die erste Beschäftigung mit dieser Sportart gut geeignet ist und durch niedrige Preise allen Kindern zugänglich sein sollte.

Interessenten wenden sich bitte an
Beat Ruegsegger, Luzernstr. 18a,
CH – 4950 Huttwil.

Ebenfalls sehr zu empfehlen wäre die Nr. 1/1990 der Schweizerischen „Schachpraxis“ – hier wurden in einem ganzen Heft für Lehrer vielfältigste Möglichkeiten des Schaches im Unterricht dargelegt, Entwicklungen aufgezeigt und eine gute Zusammenfassung des weltweit bisher Erreichten gegeben. Über einen in vielen Schach- und Schulzeitschriften des Landes veröffentlichten Fragebogen hofft Sportfreund Ruegsegger eine noch weitgreifendere Entwicklung ins Leben rufen zu können.

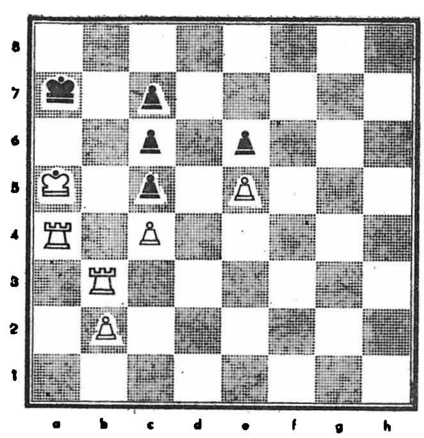
Da bisher Schulschachinitiativen in ihren Ländern organisch gewachsen sind, weisen sie alle eine gewisse Originalität auf, von der es das jeweils Beste zu nutzen gilt. Im September fand deshalb eine erste gemeinsame Sitzung der Schulschachkommissionen der ehemaligen DDR und BRD statt, die sicher neue Impulse geben wird. Bis alle Potenzen dieses uralten Spiels für unser modernes Leben zwischen Punkthochhäusern und Düsenflugzeugen ausgeschöpft sind, wird noch viel Zeit vergehen. Gerade deshalb aber muß diese Aufgabe zügig angegangen werden.

Vielleicht „pauken“ in 30 Jahren unsere Kinder und Enkel nicht mehr in 6 Wochenstunden Logarithmen u. a. m., sondern nutzen einige Zeit davon, um allgemeinere logische Prozesse mittels eines spannenden, interessanten Spiels beherrschen zu lernen – wäre das nicht eine Anstrengung wert?!

M. Spindler

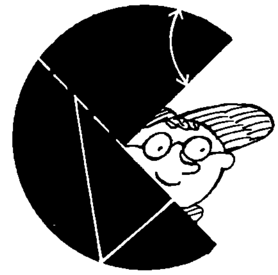
Der Rochade-Trick

Matt in fünf Zügen



Bedingt durch die Zügezahl wird einigen alpha-Schachfreunden die Aufgabe von K. A. Kubbel („Deutsche Schachzeitung“, 1910) als zu schwierig erscheinen. Daher ein Lösungshinweis. Versucht man scheinbar vergeblich mit 1. Ta1 zum Ziel zu kommen, so sollte das Schachbrett nach diesem Zug von der linken Brettseite her betrachtet und an einem Platztausch von König und Turm wie bei einer Rochade gedacht werden.

In freien Stunden · alpha-heiter



Dieses alpha-heiter steht ganz im Zeichen unseres Jubiläums. Für die erste Ausgabe des 25. Jahrgangs haben wir in den sechs Heften des 1. Jahrgangs (1967) geblättert und Aufgaben sowie Vignetten herausgesucht.

Aus den Silben

au – be – can – di – durch – e – ex – hek – in – kan – kel – kreis – li – mes – mit – ne – nent – punkt – po – ra – se – ser – ßen – te – tel – ter – to – tor – us – win

sollen 10 Wörter mit folgender Bedeutung gebildet werden, deren Anfangsbuchstaben, von oben nach unten gelesen, einen bekannten Mathematiker des Altertums ergeben:

1. Winkel am Dreieck
2. Halbmesser des Kreises
3. deutscher Mathematiker (Begründer der Mengenlehre)
4. Hohlmaß
5. einbeschriebener Kreis
6. Ort, der von allen Punkten des Kreisumfangs konstante Entfernung hat
7. Hochzahl
8. größte Sehne im Kreis
9. Begriff aus der Geometrie
10. einen Kreis schneidende Gerade

Magie

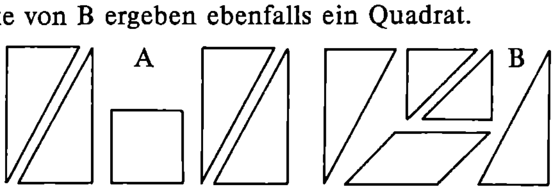
Trage die Zahlen 1, 3, 5, ..., 17 so in die Felder des linken Quadrates ein, daß die Summe in jeder Zeile, Spalte und Diagonale stets 27 beträgt!

$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$

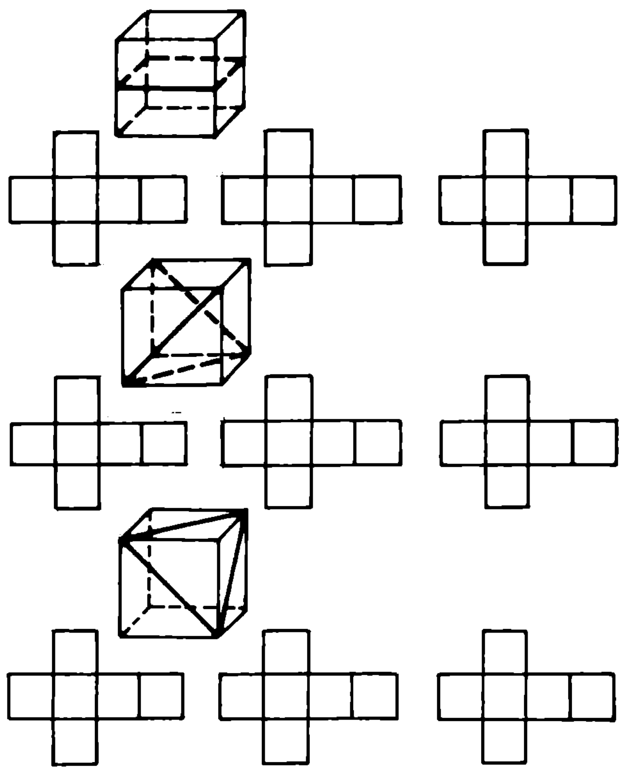
Ergänze die Felder des rechten Quadrates so, daß die Summe in jeder Zeile, Spalte und Diagonale stets $\frac{3}{2}$ beträgt!

Schnell zusammensetzen!

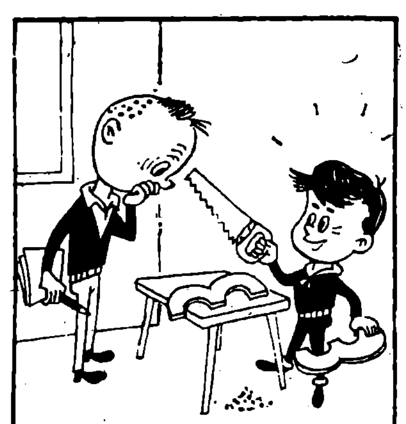
Paust die Figuren von A und B auf Pappe und schneidet sie aus! Die fünf Stücke von A ergeben richtig zusammengesetzt ein Quadrat. Die fünf Stücke von B ergeben ebenfalls ein Quadrat.



Nicht im Netz verfitzen



Tragt in die Würfelnetze (Abwicklungen) je drei verschiedene Möglichkeiten ein, wie die stark eingezeichneten Linien am Würfel in den Abwicklungen erscheinen können!



„Na bitte, Langer, bei mir ist die Hälfte von 8 niemals 4.“ *Fritz Berger, aus: Leipziger Volkszeitung*

Erst Buchstaben, dann Ziffern!

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, daß in den Zeilen und Spalten richtige Ergebnisse entstehen. Wieviel verschiedene Lösungen hat die Aufgabe?

$$\begin{array}{ccccc} ed & + & ce & = & ga \\ - & & - & & - \\ bd & + & ba & = & cd \\ \hline fa & + & be & = & ee \end{array}$$

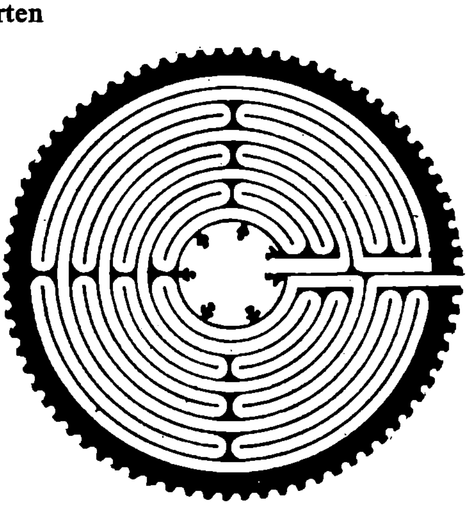
„Bum!“

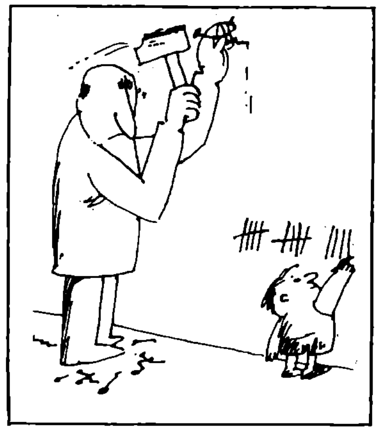
Die Teilnehmer setzen sich in eine Runde und beginnen zu zählen: 1, 2, 3, 4, ... Wer eine Zahl erreicht, die entweder durch 7 teilbar ist oder 7 zur Endziffer hat, ruft: „Bum!“ und sein Nachbar zählt weiter. Wer sein „Bum!“ verpaßt, oder sein „Bum!“ nicht sofort herausplatzt, zahlt eine Strafe, gibt ein Pfand. Aber wir wünschen, daß ihr nicht nur eine sinnvolle Unterhaltung habt, sondern auch einmal nachdenkt:
Wievielmal wird sich das „Bum!“ beim Zählen bis 1000 wiederholen?

Knifflige Fragen

- Welches Zeichen muß man zwischen die Zahlen 4 und 5 setzen, um eine Zahl zu erhalten, die größer als 4, aber kleiner als 5 ist?
- In einer Familie sind 5 Söhne. Jeder Sohn hat eine Schwester.
Wieviel Kinder sind im ganzen in der Familie?
- Ein Balken wurde in drei Minuten in Stücke zu je $\frac{1}{2}$ m Länge zersägt, wobei jeder Schnitt 1 Minute dauerte.
Wie lang war der Balken?
- Aus zwei Zweien und einem Zeichen soll eine Zahl gebildet werden, die gleich $\frac{11}{5}$ ist.

Irrgärten

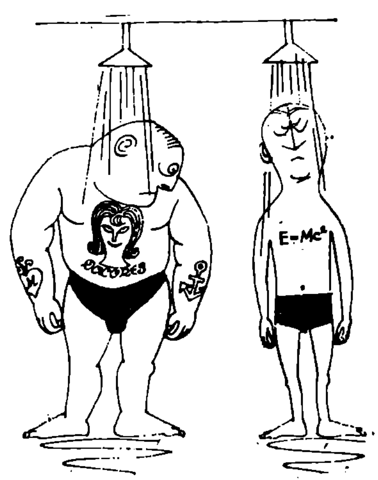




L. Otto, aus: Freie Welt

Chemische Untersuchungen

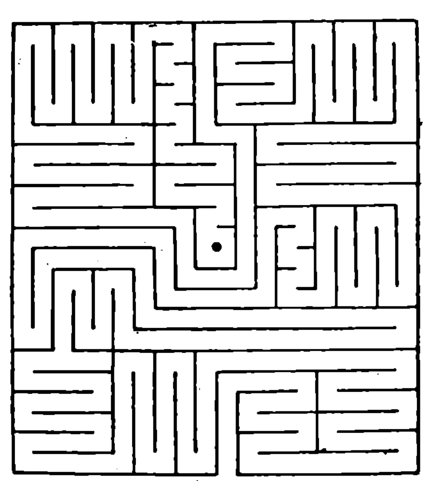
Im Chemieunterricht nehmen Klaus, Peter und Fritz von 320 g einer Substanz nacheinander je 25 % von der jeweils in dem Gefäß vorhandenen Menge weg. Wieviel Gramm verbleiben im Gefäß?



joppy, aus: „Wochenpost“

Haarspaltereien

Ein Mensch hat auf dem Kopf nicht mehr als 150 000 Haare. Es ist zu beweisen, daß in Moskau mindestens 40 Menschen leben, die die gleiche Zahl von Haaren auf dem Kopf haben.



Der Erforscher des „unendlich Fernen“

Zum 400. Geburtstag von Girard Desargues

Viele Sätze der Geometrie, besonders solche, in denen nur von Schnittpunkten gewisser Geraden und Verbindungsgeraden gewisser Punkte die Rede ist, gelten scheinbar nicht ausnahmslos. Ein einfaches und überzeugendes Beispiel dafür liefert der Satz von Desargues. Um ihn bequem formulieren zu können, definieren wir:

Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen **zentralperspektiv** zueinander, wenn es einen Punkt S (das Perspektivitätszentrum der Dreiecke) gibt, so daß S, A, A', S, B, B' und S, C, C' jeweils auf einer Geraden liegen (Bild 1).

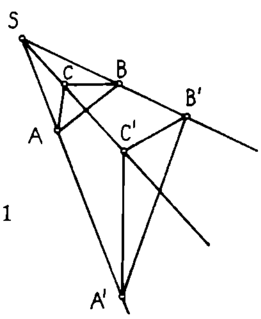
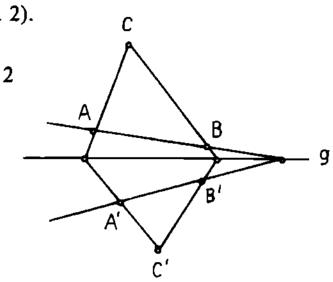


Bild 1

Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen **achsenperspektiv** zueinander, wenn es eine Gerade g (die Perspektivitätsachse der Dreiecke) gibt, so daß sich die Geraden AB mit $A'B'$, BC mit $B'C'$ und AC mit $A'C'$ jeweils in einem Punkt von g schneiden (Bild 2).

Bild 2



Mit diesen Begriffen läßt sich der *Satz von Desargues* wie folgt aussprechen: Zwei Dreiecke sind zentralperspektiv genau dann, wenn sie achsenperspektiv sind.

Prüft dies, indem ihr in Bild 1 nachträglich die Perspektivitätsachse und in Bild 2 nachträglich das Perspektivitätszentrum einzeichnet!

Wie die Bilder 3 und 4 zeigen, ist der Satz jedoch nicht ohne Ausnahme gültig. Die nähere Untersuchung dieser und weiterer Ausartungsfälle lehrt, daß man den Satz

Bild 3

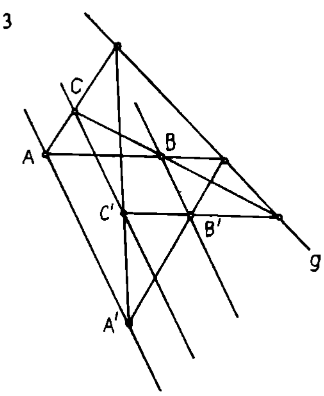
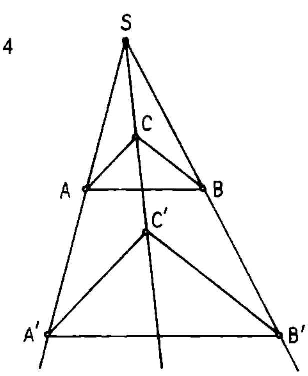
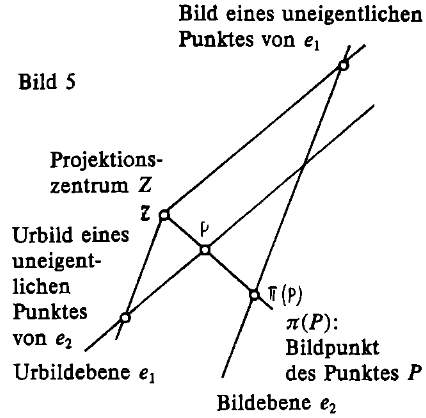


Bild 4



„retten“ könnte, wenn man annimmt, daß parallele Geraden sich in einem der gemeinsamen Richtung dieser Geraden zugeordneten „unendlich fernen“ oder „uneigentlichen“ Punkt schneiden und daß die Gesamtheit aller so der Ebene hinzugefügten uneigentlichen Punkte ihrerseits auf einer „unendlich fernen“ Geraden liegt. Die systematische Ausarbeitung dieser Idee führt zu einer geometrischen Struktur, die man als eine projektive Ebene oder in bezug auf diejenige euklidische Ebene, aus der sie durch Hinzufügen unendlich ferner Objekte entsteht, als deren projektive Abschließung bezeichnet. Was wir zunächst für die Ebene beschrieben haben, läßt sich analog auch für den dreidimensionalen Raum durchführen. Das Studium projektiver Abschließungen bietet gegenüber der gewöhnlichen euklidischen Geometrie viele Vorteile, zum Beispiel bei der mathematischen Behandlung der Zentralperspektive. Das Büschel aller von einem festen Projektionszentrum Z ausgehenden Geraden vermittelt in der projektiven Abschließung stets eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen Urbildebene und Bildebene; auch für den Fall, daß die projizierende Gerade parallel zur Urbildebene oder parallel zur Bildebene wird, gibt es nun den zugeordneten Punkt der anderen Ebene (Bild 5).

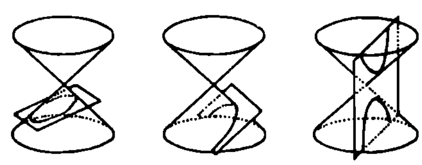
Bild 5



Vor allem aber ist der „projektive Standpunkt“ sachgemäß für das Studium derjenigen Eigenschaften von Kegelschnitten (d. h. von Schnittkurven eines unendlich ausgedehnten geraden Kreis-Doppelkegels mit einer Ebene, Bild 6), die bei beliebigen Zentralprojektionen erhalten bleiben und demzufolge insbesondere einheitlich auf die drei auf den ersten Blick recht unterschiedlichen Grundformen Ellipse, Parabel, Hyperbel von nichtausgearteten Kegelschnitten zutreffen.

Bild 6

Erzeugung von

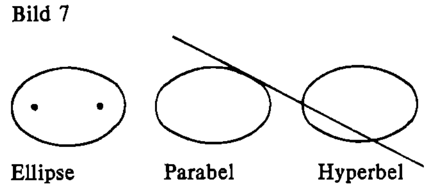


Ellipse Parabel Hyperbel

am geraden Doppel-Kreiskegel

Vom Standpunkt der projektiven Geometrie gibt es nur eine, einfach geschlossene Art von Kegelschnitten. Je nachdem, ob diese Kurve mit der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene keine, einen oder zwei (unendlich ferne) Punkte gemeinsam hat, handelt es sich um eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel (Bild 7).

Bild 7



Ellipse Parabel Hyperbel

in ihrer relativen Lage zur uneigentlichen Geraden

Aus moderner Sicht ist projektive Geometrie nichts anderes als eine zweckmäßige Art, bestimmte Teile der gewöhnlichen Geometrie zu betreiben. Man kann jederzeit jeden Satz der projektiven Geometrie in einen naiv verständlichen Satz der gewöhnlichen Geometrie „zurückübersetzen“

zen", indem man einfach für jeden der beteiligten Punkte die Fallunterscheidung durchführt, ob er unendlich fern ist oder im Endlichen liegt, d. h. ein gewöhnlicher Punkt ist, und dabei noch beachtet, daß eine Gerade, die wenigstens zwei unendlich ferne Punkte enthält, selbst unendlich fern ist. In der projektiven Ebene erweist sich der Satz von Desargues in der ursprünglichen Fassung als uneingeschränkt gültig. Indem man unterscheidet, ob das Perspektivitätszentrum eigentlich oder uneigentlich (Bild 3) ist und ob von den drei Schnittpunkten auf der Perspektivitätsachse keiner, einer oder zwei (und damit die ganze Achse, Bild 4) unendlich fern sind, erhält man insgesamt 6 mögliche Fälle, von denen der ursprünglich beschriebene sozusagen der Regelfall ist. Dies zeigt ganz deutlich, daß durch die projektive Betrachtungsweise komplizierte Sachverhalte übersichtlicher und kürzer beschreibbar werden, daß sie darüber hinaus in gewissem Sinne tiefer in das Wesen der Dinge eindringt, obwohl ihre Aussagen, naiv betrachtet, von nicht existenten Dingen handeln. Im Grunde ist unser Vorgehen ganz analog zum Übergang von einem Zahlbereich zum nächsthöheren durch gedankliche Konstruktion: Wenn man an der Vorstellung festhält, daß natürliche Zahlen Anzahlen von real existierenden Dingen sind, dann wirft die Frage nach der Art der Existenz von negativen ganzen Zahlen genau die gleichen Probleme auf wie die Frage nach dem Wesen der unendlich fernen geometrischen Objekte. Beide Existenzfragen finden durch mengentheoretische Konstruktion der entsprechenden Erweiterungsstrukturen eine Antwort, die den heutigen Mathematiker, aber nicht unbedingt den Philosophen zufriedenstellt.

Uns bleibt hier die Frage nach der historischen Herkunft des projektiven Denkens in der Geometrie. Erste, noch recht unscharfe Vorstellungen von unendlich fernen Punkten finden sich bei Johannes Kepler in seiner Schrift „Ad Vitellionem paralipomena" 1604 und zwar interessanterweise bei dem Versuch, den stetigen Übergang zwischen den drei verschiedenen Formen von Kegelschnitten gedanklich dadurch zu bewältigen, daß der eine Brennpunkt der Ellipse sich immer weiter vom anderen entfernt, wodurch die Ellipse eine immer länglichere Form bekommt, bis der Qualitätsumschlag zur Parabel erfolgt, wenn der wandernde Brennpunkt unendlich fern ist. Darauf kehrt er „von der anderen Seite her" ins Endliche zurück, wodurch die nun entstehende Hyperbel aus endlicher Sicht in zwei getrennte Äste zerfällt, die aber über zwei unendlich ferne Punkte doch wieder zu einer geschlossenen Kurve verbunden sind (Bild 7). Ihre große Blütezeit und nach anfänglichen begrifflichen Unklarheiten auch strenge Begründung erlebte die projektive Geometrie im 19. Jh., beginnend mit dem Buch „Traité des propriétés projectives des figures" (d. h. Abhandlung über die projektiven Eigenschaften von Figuren) des Franzosen Jean-Victor Poncelet aus dem Jahre 1822.

Der eigentliche Ahnherr des projektiven Denkens in der Geometrie ist jedoch der französische Architekt und Ingenieur Girard Desargues, dessen 400. Geburtstag 1991 zu begehen ist. (In manchen Büchern wird irrtümlich 1593 als sein Geburtsjahr angegeben.) Desargues wurde in Lyon als Sohn eines Notars geboren, lebte zwischen 1626 und 1650 überwiegend in Paris und kehrte 1650 nach Lyon bzw. auf sein nahe gelegenes Landgut zurück, wo er 1661 starb. Er nahm als Ingenieur an der Belagerung der Hugenottenfestung La Rochelle 1628 teil, gemeinsam mit seinem Freund René Descartes, der zu den wenigen Gelehrten Frankreichs gehörte, die Desargues' Gedanken schon zu dessen Lebzeiten verstanden und würdigten. Von der Mehrheit der Zeitgenossen wurden seine Schriften (oft nur großformatige Flugblätter, in relativ wenigen Exemplaren gedruckt) scharf kritisiert oder verspottet, zumal er sich eine etwas befremdliche, aus Begriffen der Botanik gebildete Fachsprache geschaffen hatte. Am Rande sei erwähnt, daß Desargues schon 1640, rund 150 Jahre vor Monge, im Besitz des Zweitafelverfahrens der darstellenden Geometrie war. Den eingangs erläuterten „Satz von Desargues", der in den modernen Grundlagen der Geometrie eine zentrale Rolle spielt, veröffentlichte Desargues' Schüler, der Graveur Abraham Bosse 1648, nachdem Desargues selbst infolge vieler Anfeindungen seit etwa 1642 nichts mehr publiziert hatte.

Desargues' Hauptwerk mit dem merkwürdigen Titel „Erster Entwurf eines Versuchs über die Ergebnisse beim Zusammentreffen eines Kegels mit einer Ebene" (1639) beeinflußte stark den jungen Blaise Pascal und regte ihn zur Entdeckung des nach ihm benannten Satzes (1640) über die einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecke an. Durch Mittler wirkten Desargues' Ideen schließlich sogar auf Newton ein. Zu Beginn des 19. Jh. waren jedoch sein Name und sein Lebenswerk nur noch eine verblaßte Legende. Poncelet zollte dem Vorgänger in seinem erwähnten Traité von 1822 Achtung, noch ohne eines seiner Werke gelesen zu haben. Erst 1845 stieß der französische Geometer und Mathematikhistoriker Michel Chasles zufällig auf eine Abschrift des Hauptwerkes von 1639, die Philippe de la Hire 1679 angefertigt hatte. Danach setzten intensive Nachforschungen über Leben und Werk von Desargues ein, und 1864 konnten in Frankreich 2 Bände seiner Schriften neu herausgegeben werden.

P. Schreiber

Wir danken dem Buchverlag Der Morgen für die interessante Literatur, die er uns als Buchprämien für die Preisträger des alpha-Wettbewerbes 1989/90 zur Verfügung stellte.

Alphons logische Abenteuer (3)

Als Alphons aus der Schule kam, wartete seine kleine Schwester schon ganz ungeduldig auf ihn. „Hilf mir doch einmal, ich soll eine Zahl zwischen 5 und 8 angeben und dann die Zahl zwischen 5 und 8, die das Doppelte einer Zahl zwischen 1 und 5 ist."

Alphons versuchte Haltung und Blick seines Mathematiklehrers nachzuahmen und sagte: „Dein Problem ist, was heißt *eine* Zahl und was heißt *die* Zahl?" So sei es, bestätigte seine Schwester. „Na schön, nenne mir eine Zahl zwischen 5 und 8." Die Antwort kam prompt: „6 oder 7". Alphons lobte: „Sehr gut. Doch nun nenne mir die Zahl zwischen 5 und 8!" Seine Schwester gab etwas zögernd dieselbe Antwort. „Eine Zahl zwischen 5 und 8 ist also dasselbe, wie die Zahl zwischen 5 und 8", erwiderte Alphons. Darauf sei sie auch schon gekommen und deshalb fände sie zwischen 5 und 8 keine weitere Zahl außer 6, die das Doppelte einer Zahl zwischen 1 und 5 sei. Alphons dachte nach. Da kam ihm eine Idee. „Wenn eine Zahl und die Zahl wenigstens zwei Zahlen sind, warum sagst du dann, daß die Mutti kommt?" – „Das habe ich doch gar nicht gesagt, sie kommt doch erst am Abend", protestierte seine Schwester.

Alphons präzisierte sich: „Wenn sie heute abend kommt, sagst du dann die Mutti kommt oder eine Mutti kommt?" Schon wollte sie wieder auf ihre gewohnte schnippische Art antworten, da stutzte sie: „Mutti ist zwar keine Zahl, darauf kommt es hier aber nicht an. Sie wünscht sich auch oft vier Arme zu haben, also doppelt zu sein, aber sie ist doch nur die eine ... die eine! Ach so ist das! Eine, das ist *eine*, die, und das können mehrere sein. Dagegen die, das ist *die* eine, und das kann nur eine einzige sein."

Alphons nickte zufrieden. „Somit mußt du nur noch zeigen, daß es außer 3 keine andere natürliche ... hm, also keine Zahl zwischen 1 und 5 gibt, deren Doppeltes zwischen 5 und 8 liegt. Statt:

Die Zahl zwischen 5 und 8, die das Doppelte einer Zahl zwischen 1 und 5 ist, kannst du auch sagen: Die Zahl zwischen 1 und 5, deren Doppeltes eine Zahl zwischen 5 und 8 ist. Es ist immer mit dem bestimmten Artikel die Einzigkeit angezeigt", fügte er dozierend hinzu. „Aber bei Mutti steht fest, daß sie einzig ist", sagte seine Schwester. „Irgendwie muß sie immer das letzte Wort haben", dachte Alphons, nickte aber zustimmend.

L. Kreiser

Schiebespiel im Pentagon

Teil 2

Züge und Zugfolgen des „Schiebespiels im Pentagon“ (Heft 6/90) sollen unter Verwendung von Permutationen (umkehrbar eindeutige Abbildungen einer endlichen Menge auf sich) angegeben werden. Durch das Benutzen von Permutationen und ihren Eigenschaften wird es gleichzeitig mit möglich, dieses Spiel zu analysieren.

In diesem Beitrag sind Permutationen der natürlichen Zahlen von 1 bis 11, der Feldnummern, zu betrachten. Eine solche ist z. B.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 10 & 9 & 6 & 2 & 5 & 7 & 4 & 8 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

In jedem derartigen Symbol stehen in der oberen Zeile stets die Nummern der Originalfelder und in der unteren Zeile die der Bildfelder. Unter der Nummer jedes Originalfeldes steht die des zugehörigen Bildfeldes. Die angegebene Permutation α beschreibt ein mögliches Umsetzen der Spielsteine der Ausgangslage (Bild 1) in die Ziellage.

Bild 1

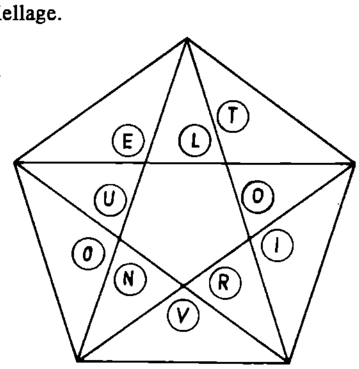
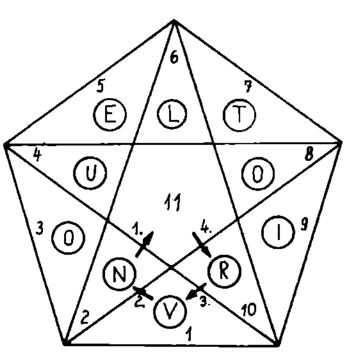


Bild 2

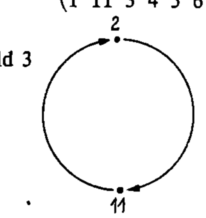


Gemäß α ist der Stein vom Felde 1 auf Feld 3, der vom Felde 2 auf Feld 10 u.s.f. zu transportieren. Um die Ausnahmestellung des unbesetzten Feldes aufzuheben, denken wir uns dieses jeweils mit einem angenommenen, einem fiktiven, einem keinen Buchstaben tragenden Stein besetzt. Die Permutation α läßt den fiktiven Stein auf Feld 11 stehen.

Jede mögliche Lösungszugfolge, die eine Ausgangslage der Steine in die Ziellage überführt, besteht aus Teilzugfolgen, deren jede mit dem Schieben eines Buchstaben von einem spitzwinkligen Randfeld, einem Feld mit gerader Nummer, auf Feld 11 beginnt und mit dem Zurückführen dieses Buchstaben auf ein Randfeld mit gerader Nummer endet. Eine mögliche Lösungszugfolge zur Ausgangslage des Bildes 1 bzw. 2 zerfällt in 5 Teilzugfolgen: Die 1. dieser Teilzugfolgen besteht aus den Zügen $2 \to \mathbf{11}$, $1 \to \mathbf{2}$, $10 \to \mathbf{1}$ und $11 \to \mathbf{10}$ (Bild 2.). Beim Zug $2 \to \mathbf{11}$ wird der reale Stein Ⓝ von Feld 2 auf Feld 11 gezogen (Bild 2). Da der fiktive Stein eingeführt wurde, wird dieser gleichzeitig mit von Feld 11 auf Feld 2 gezogen. Dieser Zug besteht damit aus dem zyklischen Vertauschen der Steine auf den Feldern 2 und 11. Er ist ein Zyklus der Länge 2, der durch das Symbol $(2\ \mathbf{11})$ angegeben wird und im Bild 3 schematisch dargestellt ist. Dieser Zyklus ist auffaßbar als die Permutation der natürlichen Zahlen von 1 bis 11, bei der nur die Zahlen 2 und 11 permutiert werden:

$$(2\ \mathbf{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 11 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

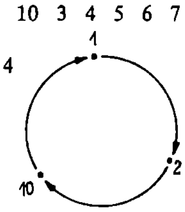
Bild 3



Die drei folgenden Züge sind angebbar durch die Zyklen $(1\ \mathbf{2})$, $(\mathbf{1}\ 10)$ und $(\mathbf{10}\ 11)$. Zur Verdeutlichung soll in jedem einen Zug darstellenden Zyklus der Länge 2 die Nummer des vor dem Ausführen des Zuges mit dem fiktiven Stein besetzten Feldes fett gedruckt werden. Die Nacheinanderausführung dieser 4 Züge, das Produkt der 4 Zyklen der Länge 2, bewirkt ein zyklisches Vertauschen der Steine auf den Feldern 1, 2 und 10. Es realisiert den Zyklus (1 2 10) der Länge 3 (Bild 2):

$$(2\ \mathbf{11}) \circ (1\ \mathbf{2}) \circ (\mathbf{1}\ 10) \circ (\mathbf{10}\ 11) = (1\ 2\ 10) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 10 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Bild 4



Im Bild 4 ist der Zyklus (1 2 10) symbolisch dargestellt. Daß das Nacheinanderausführen der Züge $(2\ \mathbf{11})$, $(1\ \mathbf{2})$, $(\mathbf{1}\ 10)$ und $(\mathbf{10}\ 11)$ in der angegebenen Reihenfolge dasselbe Umsetzen der Steine erfaßt wie der Zyklus (1 2 10), ist auch ohne Bezug auf Bild 2 leicht zu bestätigen: Durch den 1. Faktor $(2\ \mathbf{11})$ wird der Stein von Feld 2 auf Feld 11 transportiert. Durch den 2. Faktor $(1\ \mathbf{2})$ und auch durch den 3. $(\mathbf{1}\ 10)$ wird der Stein von Feld 11 nicht weiter bewegt. Durch den 4. Faktor $(\mathbf{10}\ 11)$ schließlich wird der Stein von Feld 11 auf Feld 10 geschoben. Analog ergibt sich, daß durch das Produkt der Stein von Feld 1 auf Feld 2 und der von Feld 10 auf Feld 1 gebracht wird. Die vier weiteren Teilzugfolgen sind:

2. Teilzugfolge: $(4\ \mathbf{11}) \circ (\mathbf{4}\ 5) \circ (\mathbf{5}\ 6) \circ (\mathbf{6}\ 11) = (4\ 6\ 5)$
3. Teilzugfolge: $(2\ \mathbf{11}) \circ (\mathbf{2}\ 3) \circ (\mathbf{3}\ 4) \circ (\mathbf{4}\ 11) = (2\ 4\ 3)$
4. Teilzugfolge: $(2\ \mathbf{11}) \circ (1\ \mathbf{2}) \circ (\mathbf{1}\ 10) \circ (\mathbf{10}\ 11) = (1\ 2\ 10)$
5. Teilzugfolge: $(8\ \mathbf{11}) \circ (\mathbf{8}\ 9) \circ (\mathbf{9}\ 10) \circ (1\ \mathbf{10}) \circ (\mathbf{1}\ 2) \circ (\mathbf{2}\ 3) \circ (\mathbf{3}\ 4) \circ (\mathbf{4}\ 11) = (1\ 10\ 9\ 8\ 4\ 3\ 2)$

Das Nacheinanderausführen der 1. bis 5. Teilzugfolge bewirkt die eingangs angegebene Permutation α:

$$(1\ 2\ 10) \circ (4\ 6\ 5) \circ (2\ 4\ 3) \circ (1\ 2\ 10) \circ (1\ 10\ 9\ 8\ 4\ 3\ 2) = (1\ 3\ 9\ 8\ 4\ 6\ 5\ 2\ 10) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 10 & 9 & 6 & 2 & 5 & 7 & 4 & 8 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \alpha$$

Diese aus 24 Zügen bestehende Zugfolge führt also die Ausgangslage des Bildes 1 in die Ziellage über.

Bei den weiteren Betrachtungen werden die folgenden Eigenschaften von Permutationen benutzt, über deren Herleitung sich der Leser in zugänglicher Literatur[1]) orientieren kann: Jede Permutation ist darstellbar als Zyklus oder als Produkt von Zyklen. – Jede Permutation ist entweder gerade oder ungerade. – Jeder Zyklus ungerader Länge ist eine gerade und jeder Zyklus gerader Länge eine ungerade Permutation. – Ein Produkt von Zyklen ist genau dann eine gerade Permutation, wenn die Anzahl der Zyklen gerader Länge eine gerade Zahl ist.

Gemäß dieser Mitteilungen ist jeder Zug als Zyklus der Länge 2 eine ungerade Permutation. Die durch die oben angegebene Lösungszugfolge bewirkte Permutation α ist als Produkt von 24 Zyklen der Länge 2 eine gerade Permutation. Das folgt auch aus der Darstellung von α als Zyklus (1 3 9 8 4 6 5 2 10) der Länge 9.

Jede Teilzugfolge läßt sich durch eventuelles Einschieben von Doppelzügen „Schieben eines Buchstaben von einem Randfeld gerader Nummer auf Feld 11“ und des inversen Zuges „Zurückschieben dieses Buchstaben von Feld 11 auf das gleiche Randfeld“ in jeweils aus 4 Zügen bestehende Elementarzugfolgen zerlegen. Die oben betrachteten Teilzugfolgen 1 bis 4 sind Elementarzugfolgen. Die obige 5. Teilzugfolge läßt sich durch Einschieben von zwei Doppelzügen in drei Elementarzugfolgen zerlegen:

$$[(8\ \mathbf{11}) \circ (\mathbf{8}\ 9) \circ (\mathbf{9}\ 10) \circ (\mathbf{10}\ 11)] \circ [(10\ \mathbf{11}) \circ (1\ \mathbf{10}) \circ (\mathbf{1}\ 2) \circ (\mathbf{2}\ 11)] \circ [(2\ \mathbf{11}) \circ (\mathbf{2}\ 3) \circ (\mathbf{3}\ 4) \circ (\mathbf{4}\ 11)].$$

Jede Elementarzugfolge ist als Produkt von 4 Zyklen der Länge 2 eine gerade Permutation. Damit bewirkt auch jede Teilzugfolge und jede mögliche Lösungszugfolge dieses Spieles eine gerade Permutation.

Die obige Permutation α gibt an, daß der Buchstabe *O* von Feld 3 auf Feld 9 und der von Feld 8 auf Feld 4 transportiert wird. Das Umsetzen der Spielsteine der Ausgangslage des Bildes 1 in die Ziellage, bei der das O von Feld 3 auf Feld 4 und das von Feld 8 auf Feld 9 gebracht wird, ist durch die Permutation

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\\ 3 & 10 & 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 9 & 8 & 1 & 11\end{pmatrix}$$

beschrieben. Da α eine gerade Permutation ist, ist

$\beta=\alpha\circ(4\ 9)=(3\ 8)\circ\alpha$ eine ungerade Permutation und damit durch Züge nicht realisierbar.

Nun soll gezeigt werden: Von einer Ausgangslage, bei der die Buchstaben eines Wortes mit 10 Buchstaben, von denen zwei gleich sind (z. B. Revolution, Pythagoras, Schokolade) in beliebiger Anordnung auf die Randfelder gesetzt werden, läßt sich die Ziellage (Beim im Felde 1 beginnenden Lesen im Uhrzeigersinn bilden die Buchstaben das Zielwort) stets durch Züge herstellen. Da das Zielwort genau zwei gleiche Buchstaben hat, ist das Überführen der Ausgangslage in die Ziellage durch Umsetzen der Steine gemäß zweier Permutationen α und β möglich. Durch Multiplikation von rechts der einen dieser beiden Permutationen mit dem Zyklus $(k\ l)$, wobei k und l die Nummern der Zielfelder der beiden gleichen Buchstaben sind, ergibt sich die andere: $\beta=\alpha\circ(k\ l)$.

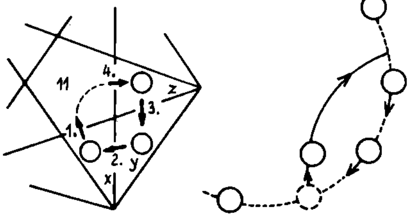
Mithin ist entweder α oder β eine gerade Permutation. Die gerade von beiden sei mit α, die ungerade mit β bezeichnet.

Die Realisierung von β durch Züge ist unmöglich, die von α ist möglich:

Da jede Lösungszugfolge ein Produkt von Elementarzugfolgen ist, ist zunächst festzustellen, welche Permutationen der Spielsteine durch Elementarzugfolgen bewirkt werden. Ist y die Nummer eines stumpfwinkligen Randfeldes und sind x und z die geraden Nummern der benachbarten spitzwinkligen Randfelder, so bewirkt die Elementarzugfolge

$(x\ 11)\circ(x\ y)\circ(y\ z)\circ(z\ 11)$ das zyklische Vertauschen der Steine auf den Feldern z, y und x, den Zyklus $(z\ y\ x)$ (Bild 5).

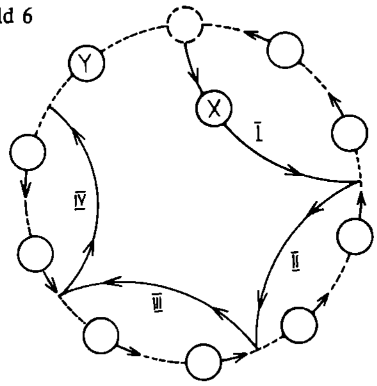
Bild 5



Durch eine Elementarzugfolge springt scheinbar im Buchstabenkreis lediglich ein Buchstabe über zwei Buchstaben hinweg. Dieser Buchstabe rückt von einem spitzwinkligen Randfeld auf eines der beiden nächstgelegenen spitzwinkligen Randfelder und gleichzeitig rücken die beiden „übersprungenen" Buchstaben mit entgegengesetztem Drehsinn um ein Feld weiter.

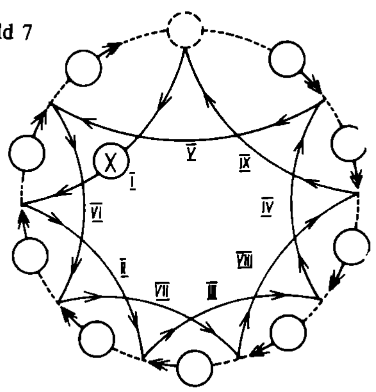
Aus geeignet aneinander gereihten Elementarzugfolgen entstehen zwei Typen von Teilzugfolgen, aus denen dann eine Lösungszugfolge gebildet wird. Eine Teilzugfolge vom Typ I besteht aus vier Elementarzugfolgen I bis IV (Bild 6).

Bild 6



Durch eine solche vertauschen zwei beliebig wählbare benachbarte Buchstaben im Buchstabenkreis ihre Plätze. Wird der von beiden Buchstaben auf einem spitzwinkligen Randfeld liegende mit X und der andere mit Y bezeichnet, so gilt: Bei allen vier Elementarzugfolgen überspringt der Buchstabe X scheinbar mit gleichem Drehsinn im Buchstabenkreis jeweils zwei Buchstaben. Die Richtung für das Weiterrücken von X wird so gewählt, daß der Buchstabe Y nicht bewegt wird.

Bild 7



Eine Teilzugfolge vom Typ II besteht aus neun Elementarzugfolgen I bis IX (Bild 7). Für einen auf einem spitzwinkligen Randfeld liegenden, mit X bezeichneten Buchstaben gilt: Bei jeder dieser Elementarzugfolgen überspringt X scheinbar mit positivem Drehsinn im Buchstabenkreis zwei der übrigen neun Buchstaben, insgesamt also jeden der neun Buchstaben zweimal. Mithin rückt jeder dieser neun Buchstaben und damit auch X als zehnter im negativen Drehsinn um zwei Felder weiter.

Zum Beschreiben der Lösungszugfolge werden noch die Begriffe Vorgänger und Nachfolger für Spielsteine eingeführt: In einer Spielsituation heißt der Stein mit Buchstaben Y Nachfolger des Steines mit Buchstaben X, wenn beide Spielsteine auf benachbarten Randfeldern stehen und das Feld des Steines Y im Uhrzeigersinn auf das des Steines X folgt. Der Stein X heißt dann Vorgänger des Steines Y.

Durch die Permutation α ist jedem einen Buchstaben tragenden Spielstein eindeutig ein Zielfeld i ($i=1, 2, \ldots, 10$) zugeordnet. Ab jetzt wird der reale Spielstein mit Zielfeld i mit A_i bezeichnet. Ist bei der Ausgangslage der Stein A_2 nicht Nachfolger des Steines A_1, so wird durch eine Teilzugfolge vom Typ I der Stein A_2 mit seinem Vorgänger im Buchstabenkreis vertauscht.

Ist nunmehr der Stein A_2 noch nicht Nachfolger des Steines A_1, so wird durch eine weitere Teilzugfolge vom Typ I der Stein A_2 mit seinem jetzigen Vorgänger im Buchstabenkreis vertauscht, usf. Spätestens nach der 8. Teilzugfolge vom Typ I ist A_2 zum Nachfolger von A_1 geworden. Durch weitere, maximal 7 Teilzugfolgen vom Typ I ist zu erreichen, daß zusätzlich A_3 Nachfolger von A_2 wird usf. Nach maximal $8+7+\ldots+1$ Teilzugfolgen vom Typ I ist das Zielwort im Uhrzeigersinn lesbar entstanden. Nur der Anfangsbuchstabe liegt im allgemeinen noch nicht auf Feld 1. Sollte der Stein A_1 nicht auf Feld 1 oder 10 liegen, so wird dies durch Ausführen von maximal vier Teilzugfolgen vom Typ II erreicht. Der Fall, A_1 liegt auf Feld 10, kann nicht eingetreten sein:

Denn dann wäre die bis hierher durch Züge realisierte Permutation γ der Spielsteine eine gerade Permutation. Um endgültig die Ziellage herzustellen, wäre noch die ungerade Permutation

$$\delta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 11\end{pmatrix}$$

$=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$ erforderlich.

Und damit wäre entgegen der Annahme $\alpha=\gamma\circ\delta$ eine ungerade Permutation. Also liegt der Stein A_1 auf Feld 1 und die Ziellage ist hergestellt. Damit ist gezeigt, daß sich jedes Zielwort mit mindestens zwei gleichen Buchstaben aus jeder Ausgangslage seiner Buchstaben stets durch Züge herstellen läßt. Wird hingegen ein Zielwort mit 10 paarweise verschiedenen Buchstaben (z. B. Braunkohle) benutzt, so ist die Ziellage (Anfangsbuchstabe auf Feld 1) nicht von jeder Ausgangslage durch Züge realisierbar.

Bei jeder konkreten Ausgangslage läßt sich die Ziellage bei einem Zielwort mit mindestens zwei gleichen Buchstaben bereits mit einer relativ geringen Zahl von Zügen stets herstellen. Insbesondere zum Üben im Auffinden günstiger Lösungszugfolgen wird die folgende Aufgabe angeboten:

Die Buchstaben des Wortes a) Pythagoras, b) Schokolade, c) Braunkohle und d) Braunkohle sind wie angegeben auf die Randfelder des Pentagons zu legen.

Randfeld-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) aufgelegter Buchstabe	*S*	*P*	*Y*	*T*	*H*	*A*	*G*	*O*	*R*	*A*
b) aufgelegter Buchstabe	*E*	*S*	*C*	*H*	*O*	*K*	*O*	*L*	*A*	*D*
c) aufgelegter Buchstabe	*B*	*E*	*L*	*H*	*O*	*K*	*N*	*U*	*A*	*R*
d) aufgelegter Buchstabe	*B*	*L*	*E*	*H*	*O*	*K*	*N*	*U*	*A*	*R*

Welche dieser vier Ausgangslagen ist durch Züge nicht in die Ziellage überführbar? Zu den drei anderen Ausgangslagen ist jeweils eine Lösungszugfolge anzugeben.

Für Hinweise möchte ich Herrn Prof. Dr. Gronau, Greifswald, Dank sagen.

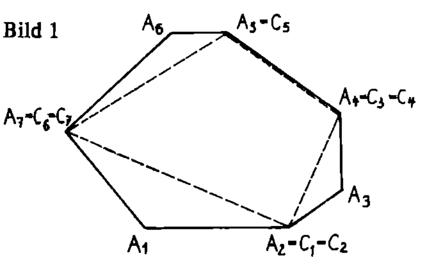
W. Träger

[1]) L. A. Kaloujnie, V. I. Suščanskij, Transformationen und Permutationen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986

Ein geometrisches Optimierungsproblem und seine Lösung mit Hilfe des Kleincomputers

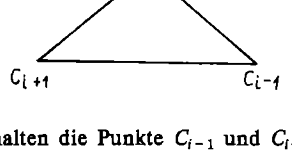
Die Jungen Mathematiker des Bezirkes Leipzig hatten in ihrem Spezialistenlager die Gelegenheit, in einem Vortrag von Prof. Dr. sc. R. Klötzler (Universität Leipzig) einen Überblick über geometrische Optimierungsprobleme zu erhalten. Dabei sprach Prof. Klötzler auch über folgende Aufgabe:
Zu einem gegebenen konvexen Polygon (Vieleck) $P = A_1A_2 \ldots A_n$ soll ein Inpolygon $C_1C_2 \ldots C_n$ mit kleinstem Flächeninhalt konstruiert werden.
Dabei verstehen wir unter einem *Inpolygon* $I_n = C_1C_2 \ldots C_n$ ein solches Polygon, bei dem der Eckpunkt C_i auf der Seite A_iA_{i+1} des Polygons P für jedes $i = 1, \ldots, n-1$ liegt und der Eckpunkt C_n auf der Seite A_nA_1 liegt. Es ist zugelassen, daß C_i mit einem der Punkte A_i bzw. A_{i+1} oder daß C_i mit C_{i+1} zusammenfällt
$(i = 1, \ldots, n;\ A_{n+1} = A_1;\ C_{n+1} = C_1)$.
Das ist in Bild 1 dargestellt.

Bild 1



Wir wollen zeigen, daß zu gegebenem Polygon P stets ein Inpolygon kleinster Fläche existiert und ein solches unter jenen Inpolygonen zu finden ist, deren Eckpunkte mit gewissen Eckpunkten des gegebenen Polygons zusammenfallen. Dabei kann es mehrere Inpolygone mit gleicher kleinster Fläche geben, z. B. kann der Punkt C_4 in Bild 1 beliebig auf der Strecke A_4A_5 gewählt werden.

Bild 2



Wir halten die Punkte C_{i-1} und C_{i+1} fest und lassen den Punkt C_i auf A_iA_{i+1} wandern (Bild 2). Die Fläche des Dreiecks $C_{i-1}C_iC_{i+1}$ und damit des Inpolygons ist am kleinsten, wenn die Höhe im Punkt C_i am kleinsten wird. Dies tritt aber auf jeden Fall in einem der Randpunkte A_i oder A_{i+1} auf. Nur wenn die Gerade $g(A_iA_{i+1})$ parallel zur Geraden $g(C_{i-1}C_i)$ verläuft, ist jeder Punkt der Strecke A_iA_{i+1} von $g(C_{i-1}C_i)$ gleich weit entfernt.
Jetzt betrachten wir nur solche Inpolygone, deren Ecken der Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ angehören. Um die Ecken des Polygons zu finden, die gleichzeitig Ecken des Inpolygons sind, wollen wir diese mit einer „0" markieren (Bild 1), die anderen Ecken erhalten die Markierung „1". Im Beispiel aus Bild 1 haben wir die Markierung $(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$. Für das optimale Polygon muß die Folge (e_i) von Nullen und Einsen folgende Eigenschaften besitzen:

i) Es stehen nie zwei Einsen nebeneinander. Wenn nämlich $e_i = e_{i+1} = 1$ wäre, so hätte das konstruierte Polygon keinen Punkt mit der Seite A_iA_{i+1} gemeinsam und wäre folglich kein Inpolygon.
ii) Es stehen nie drei Nullen nebeneinander. Wäre nämlich $e_{i-1} = e_i = e_{i+1} = 0$, so könnte man ein Inpolygon kleinerer Fläche durch Abschneiden des Dreiecks $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ erhalten.

Da A_n Nachbarpunkt von A_1 ist, müssen diese beiden Bedingungen auch erfüllt sein, wenn e_1 und e_2 an das Ende der Folge $(e_n, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ angehängt werden!
Prof. Klötzler stellte den Jungen Mathematikern drei Aufgaben:
(A) Wieviel Folgen der Länge n von Nullen und Einsen gibt es, die die Bedingungen i) und ii) erfüllen?
(B) Man suche ein Verfahren, mit dem man alle diese Folgen erzeugen kann!
(C) Es ist ein Computerprogramm zu schreiben, welches eine Folge berechnet, die zu einem flächenkleinsten Polygon gehört!
Prof. Klötzler erwähnte, daß man ebenfalls auf die Aufgaben (A), (B) und (C) geführt wird, wenn man zu einem gegebenen konvexen Polygon $P = A_1A_2 \ldots A_n$ ein konvexes Umpolygon $U = B_1B_2 \ldots B_n$ mit größtem Umfang konstruieren will. Dabei nennen wir U ein *Umpolygon* zu P, wenn die Punkte A_i auf den Seiten B_iB_{i+1} liegen, $i = 1, \ldots, n$, wobei $B_{n+1} = B_1$ gesetzt wird.
Die Aufgaben von Prof. Klötzler regten uns zu verschiedenen Überlegungen an. Wir fanden ein Verfahren zur Bestimmung der besten Folge (e_i), bei dem nicht alle zulässigen Folgen, welche die Bedingungen i) und ii) erfüllen, zu überprüfen sind. Daher haben wir uns mit der Aufgabe (B) nicht beschäftigt. Interessierte Leser, die Zugang zu Computern haben, können sich der Aufgabe (B) widmen, um zu sehen, wieviel Rechenzeit ein darauf aufbauendes Computerprogramm benötigt. Wer sich für ein detailliertes Computerprogramm interessiert, wende sich bitte über die Redaktion der „alpha" an die Autoren. Die Aufgabe zeigte uns, daß man erst umfangreiche mathematische Überlegungen anstellen sollte, bevor man den Computer mit Programmen „füttern" kann. Wir waren von der Vielfalt der von uns eingesetzten Ideen, die über den unmittelbaren Schulstoff hinausgehen, überrascht. So verwendeten wir neben Elementargeometrie und einer einfachen Idee aus der Optimierung auch vollständige Induktion, rekursive Folgen, Kombinatorik, komplexe Zahlen, Gleichungen dritten Grades und anderes.
Aus Platzgründen können wir darauf nicht näher eingehen, Einzelheiten sind über die Redaktion bei den Autoren zu erfragen.

Die Anzahl der zulässigen Folgen

Wir wollen Näherungswerte für die Anzahl der Folgen (e_i) aus Nullen und Einsen angeben, die den Bedingungen i) und ii) genügen, d. h., bei denen nie zwei Einsen nebeneinanderstehen und nie drei Nullen aufeinander folgen. Die Zahl aller derartiger Folgen sei Z_n. Wir zeigen

$$Z_n \approx 2^{\frac{n}{2,5}} \approx (1{,}311\,95)^n \text{ für große } n. \qquad (1)$$

Jede zulässige Folge kann, abgesehen vom Anfang und vom Ende, in Abschnitte der Länge 2 oder 3 zerlegt werden, die mit einer „1" beginnen und dann eine oder zwei Nullen haben. Eine typische Folge hat also rund $\frac{n}{2,5}$ solcher Abschnitte.
Nach jedem Abschnitt kann man zwischen zwei Fällen wählen, ob der nächste Abschnitt die Länge 2 oder 3 haben soll. Das ergibt rund $2^{\frac{n}{2,5}}$ Möglichkeiten. Für große n gilt $Z_n > 2^{\frac{n}{2,5}}$. Für kleine n muß die Ungleichung nicht erfüllt sein, was für $n = 4$ sofort nachzuweisen ist.
Wir können beweisen, daß eine positive Konstante c existiert, so daß

$$Z_n \approx c \cdot (1{,}324\,7)^n \text{ ist.} \qquad (2)$$

Auch ohne Kenntnis von c folgt hieraus
$Z_n \approx c \cdot (1{,}324\,7)^n > (1{,}319\,5)^n$
für große Zahlen n.
Zuerst wurde dazu die Beziehung

$$Z_{n+3} = Z_n + Z_{n+1} \qquad (3)$$

gezeigt. Zwei Beweise, die einige Tricks ausnutzen, sind uns zum Nachweis von (3) gelungen. Aus (3) haben wir dann (2) hergeleitet.
Wegen $Z_2 = Z_4 = 2$ (die Folgen sind $(0,1)$, $(1,0)$ bzw. $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,1)$) und $Z_3 = 3$ (die Folgen sind $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$), lassen sich mit Hilfe der Beziehung (3) leicht weitere Werte Z_n ausrechnen, dazu kann ein Computer benutzt werden. Man erhält:

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Z_n	5	5	7	10	12	17	22	29	39	51	68

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Z_n	90	119	158	209	277	367	486	644	853	1130

Die Bestimmung einer optimalen Folge

Mit $F_i > 0$ bezeichnen wir die Fläche des Dreiecks $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Die Fläche des Inpolygons I_n zu einer zulässigen Folge (e_i) ist die Differenz der Fläche des Polygons P und der Fläche $F = e_1F_1 + \ldots + e_nF_n$. Zu einer gegebenen Folge (F_i) suchen wir eine Folge (e_i), welche den Bedingungen i) und ii) genügt, und für die F maximal wird. Es reicht aus, F bezüglich der Bedingung i) zu maximieren, die optimale Folge erfüllt dann die Bedingung ii) automatisch.
Es sei $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ eine optimale Folge. Wir vergleichen sie mit irgendeiner zulässigen Folge $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ mit der Einschränkung $e'_1 = e_1$, $e'_j = e_j$ für $j \geqq i$, wobei der Index i vorerst festgehalten wird. Aus der Optimalität von $(e_1, \ldots, e_n)$ folgt

$$e_2F_2 + \ldots + e_{i-1}F_{i-1} \geqq e'_2F_2 + \ldots + e'_{i-1}F_{i-1}. \qquad (4)$$

Für Variable $j, k \in \{0, 1\}$ bezeichnen wir mit $s_i(j, k)$ den maximalen Wert von $e'_1F_1 + e'_2F_2 + \ldots + e'_iF_i$ unter der Nebenbedingung $e'_1 = j$ und $e'_i = k$. Aus der Ungleichung (4) folgt dann
$s_i(e_1, e_i) = e_1F_1 + \ldots + e_{i-1}F_{i-1} + e_iF_i$.
Die Zahlenwerte $s_i(j, k)$ lassen sich aus s_{i-1} berechnen, falls mit $s_2(j, k) = jF_1 + kF_2$ für $j \cdot k = 0$ gestartet wird. $s_2(1, 1)$ ist nicht definiert, da eine Folge der Länge 2 nicht mit 1 beginnen und enden darf. Deshalb geben wir uns noch $s_3(1, 0) = F_1$ vor.

Nun ist
$s_i(j, 0) = \max\{s_{i-1}(j, 0), s_{i-1}(j, 1)\}$,
falls $i > 3$ oder $j = 0$ ist, und es ist
$s_i(j, 1) = s_i(j, 0) + F_i$ für $i \geqq 3$.
Durch Einsetzen ergibt sich
$s_i(j, 0) = \max\{s_{i-1}(j, 0), s_{i-2}(j, 0) + F_{i-1}\}$.
Weil im optimalen Fall
$e_1 \cdot e_n = 0$ sein muß, folgt
$F = \max\{s_n(0, 0), s_n(1, 0), s_n(0, 1)\}$
$= s_n(0, 0) + F_n$.

Dieser Algorithmus, der die Grundidee der sogenannten *dynamischen Optimierung* ausnutzt, läßt sich leicht in ein BASIC-Programm umsetzen. Aufwendig wird es nur, wenn der Computer das gegebene Polygon sowie das optimale Inpolygon auf dem Bildschirm grafisch darstellen soll. Für diesen Algorithmus spricht, daß sein Zeitaufwand proportional zur Eckenzahl n ist. Beim Überprüfen aller zulässigen Folgen entsprechend Aufgabe (B) nach dem Vorschlag von Prof. Klötzler wäre der Zeitaufwand proportional zu $(1{,}3247)^n$. Bisher lag nur ein Programm für Kleincomputer vor, das sämtliche Folgen aus Nullen und Einsen erzeugt und unter diesen die zulässigen aussondert. Hier ist der Zeitbedarf sogar proportional zu 2^n.
Im folgenden Beispiel sind die Zahlen F_i als Pseudozufallszahlen vom Computer erzeugt worden. Anschließend wurde die optimale Folge berechnet.

i	1	2	3	4
F_i	69,14	44,53	65,62	94,14
e_i	1	0	1	0
i	5	6	7	
F_i	85,93	70,31	82,03	
e_i	1	0	1	
i	8	9	10	11
F_i	32,81	79,68	33,98	32,81
e_i	0	1	0	1
i	12	13	14	
F_i	15,62	91,01	35,93	
e_i	0	1	0	
i	15	16	17	18
F_i	41,79	45,31	0,39	7,81
e_i	0	1	0	0
i	19	20		
F_i	21,48	57,81	$T = 573{,}01$	
e_i	1	0		

H. Englisch/Ch. Eisele

Die Entdeckung der Osterinsel

An einem Ostertag entdeckte der holländische Admiral Jacob Roggeveen im Pazifik eine Insel, der er den Namen Paasch Eyland (Osterinsel) gab. Das Datum (Tag, Monat, Jahr) dieser Entdeckung ist in Form eines Rösselsprungs in die Randfelder eines 3×3-Schachbrettes eingetragen, bei dem der Springer jedes Randfeld genau einmal betritt. Welches ist das Datum dieses Ostertages?

7	6	.
4		2
2	1	.

W. Träger, Döbeln

Walter Träger, Redaktionsmitglied und einer der aktivsten Mitarbeiter unserer Zeitschrift, feierte im November vorigen Jahres seinen 65. Geburtstag.
Wir möchten ihm nachträglich auf das herzlichste gratulieren, wünschen ihm Gesundheit und persönliches Glück sowie, nicht ganz uneigennützig, weiterhin so viele Ideen und Schaffenskraft.

Wo liegt die geographische Mitte im vereinten Deutschland?

Wie soll man den Mittelpunkt eines Landes mit dessen oft verschlungenen Umrissen feststellen? Am einleuchtendsten ist es, wenn die extremen geographischen Koordinaten (Breite, Länge) berücksichtigt werden, um die Differenzen zwischen Nord und Süd sowie Ost und West zu halbieren. Bei der Anweisung dieses Verfahrens kann aber der kuriose Fall eintreten, daß die geographische Mitte eines Landes im benachbarten Land liegt, wie dies z. B. für Norwegen zutrifft, wo die Mitte in Schweden ist.
Bisher lag die Mitte der Bundesrepublik im Wehretal unweit von Oetmannshausen südwestlich von Eschwege.
Der Mittelpunkt der ehemaligen DDR lag bei der kleinen Gemeinde Verlorenwasser bei Belzig im Lande Brandenburg.
Berücksichtigt man das vereinte Deutschland, so befinden sich die äußersten Punkte wie folgt:
Norden: Nordspitze der Insel Sylt. 55°03′ n. Br.
Süden: Stillachtal südlich von Oberstorf. 47°16,5′ n. Br.
Osten: Neiße bei der Gemeinde Deschka nördl. Görlitz. 15°02′ ö. L.
Westen: Westlich der Gemeinde Havert nördl. Aachen. 5°52′ ö. L.
Aus der Halbierung der Breiten- und Längendifferenzen kommt man auf eine Landesmitte mit den geographischen Koordinaten von 51°11′ n. Br. und 10°27′ ö. L. Dieser Punkt befindet sich nur 2 km südlich der Kreisstadt Mühlhausen i. Thür. Mit Recht bezeichnen wir Thüringen als das „grüne Herz Deutschlands"!
Verweilen wir noch ein wenig bei der Geographie Gesamtdeutschlands! Die Ost-West-Ausdehnung unseres Landes von 9°10′ bedingt einen beachtlichen Unterschied in der Ortszeit, der sogenannten wahren Sonnenzeit, von 36 Minuten 40 Sekunden. Um diesen Betrag geht nämlich eine Sonnenuhr im Gebiet von Aachen gegenüber einer in Görlitz nach. Das bedeutet auch, daß die Sonne sowie sämtliche Gestirne um diesen Betrag bei Aachen später im Süden stehen (kulminieren) als in Görlitz. Diese Differenz kann man auch auf die Sonnenauf- und -untergänge beziehen. Interessant ist in diesem Zusammenhang die unterschiedliche Länge des lichten Tages (zwischen Sonnenaufgang und -untergang) im Norden und im Süden Deutschlands. So beträgt auf Sylt der längste Tag (21.6.) 17 h 8 min, in den bayrischen Alpen bei Oberstorf aber nur 16 h 46 min. Am kürzesten Tag des Jahres (21. 12.) liegen die Verhältnisse jedoch genau umgekehrt. Der beachtliche Breitenunterschied von 8°45,5′ hat außerdem zur Folge, daß die Sommernächte im Norden infolge der Mitternachtsdämmerung hell sind. Diese Erscheinung tritt südlich der Linie Mainz – Schweinfurt (50° n. Br.) nicht mehr auf.

StR A. Zenkert, Potsdam

Der Champion und seine Alpträume – oder: Was grüne Männchen so alles anrichten können

Fabian ging nun schon fast ein ganzes Jahr zur Max-Planck-Schule, einer der weiterführenden Schulen der großen Hansestadt, in der er so lange wohnte, wie er denken konnte. Gewissermaßen als besonderer Höhepunkt zum Ausklang des Schuljahres war vom Lehrerkollegium eine Projektwoche angesetzt worden. Fabian hatte sich den „Wettbewerb Kopf- gegen Taschenrechner" ausgesucht – warum wußte er nicht mehr so genau.- Vielleicht hatte ihn sein Verwundern beeinflußt, daß die Frau an der Kasse leicht im Kopf lösbare Rechenaufgaben umständlich in einen Apparat eintippte, als er seiner Mutter beim letzten Großeinkauf helfen mußte. Höchstwahrscheinlich lag der Grund aber noch mehr bei seinem besten Freund Peter, der wie er gerade seinen elften Geburtstag gefeiert hatte und mit dem er auch in der Projektwoche zusammenbleiben wollte. Sie hatten sich nur auf dieses Thema aus dem Angebot einigen können.

Fabian war, wie es sich für Leistungssportler gehört, heute am Vorabend des abschließenden Wettkampftages schon früher als sonst ins Bett gegangen. Aber er konnte nicht einschlafen. Immer mehr Gedanken strömten in seinen Kopf:

Am ersten Projekttag hatten sie sich auf die Regeln für die Durchführung des Wettkampfes geeinigt. Es sollten zweistellige Zahlen miteinander multipliziert werden. Die jeweilige Aufgabenstellung sollte durch einen Computer mit Hilfe seines Zufallsgenerators aus einem Aufgabenpool ausgewählt werden, den die beiden konkurrierenden Gruppen je zur Hälfte eingeben durften. Sie sollte dann, für die beiden jeweiligen Einzelkonkurrenten gut erkennbar, auf einem mittleren Schirm sichtbar werden. Der Kopfrechner sollte sein Ergebnis mit Hilfe eines Overheadprojektors (Polylux) auf einem weiteren Schirm links davon den Zuschauern mitteilen. Der Wettspielpartner aus der anderen Gruppe sollte am rechten Overheadprojektor stehen und sein ertipptes Ergebnis entsprechend aufschreiben. Der stellvertretende Klassensprecher, der Schwierigkeiten hatte, sich bei einer der beiden Gruppen zu engagieren, war schließlich auf Vorschlag des Mathelehrers zum Schiedsrichter gewählt worden.

Zwei Tage lang hatten sie sich dann in der „Kopfgruppe" um Rechenregeln bemüht. Wie man günstig mit 50 oder 25 multipliziert, war ihnen dabei sehr schnell wieder eingefallen. Auch kam ihnen bald in den Sinn, daß man mit Faktoren wie 21, 49, 51, 99 und 81 sehr günstig operieren kann. Bettina erinnerte sich am zweiten Tag der Projektwoche schließlich noch an ihren älteren Bruder, der ihr früher einmal

$15\cdot 15$ — $(1\cdot 2)(5\cdot 5)\rightarrow 225$ und
$65\cdot 65$ — $(6\cdot 7)(5\cdot 5)\rightarrow 4225$ und
$95\cdot 95$ — $(9\cdot 10)(5\cdot 5)\rightarrow 9025$ und
$195\cdot 195$ — $(19\cdot 20)(5\cdot 5)\rightarrow 38\,025$

beigebracht hatte. Und es regte sich zudem ganz vage in ihrem Gedächtnis, daß man da noch manches mehr anstellen kann. Dieser zweite Tag wurde dann mit der Vereinbarung abgeschlossen, in der ganzen Nachbar-, Freund- und Verwandtschaft nach Kopfrechenregeln zu fahnden und sich außerdem noch in einer Stadtbücherei umzusehen.

Zu Beginn des dritten Vormittags war dann einiges zusammengetragen, jedoch verlief die Sitzung langatmig. Es dauerte fast bis zum Mittag, bis plötzlich fast alle Scheuklappen auf einmal fielen.

Sie konnten nun vieles ganz schnell rechnen, z. B.

$24\cdot 26$ — $(2\cdot 3)(4\cdot 6)\rightarrow 624$ und
$31\cdot 39$ — $(3\cdot 4)(1\cdot 9)\rightarrow 1209$ und
$42\cdot 48$ — $(4\cdot 5)(2\cdot 8)\rightarrow 2016$ und
$42\cdot 48 = 45\cdot 45 - 3\cdot 3 = 2025 - 9$ und
$32\cdot 48$ — $(3\cdot 5)(2\cdot 18)\rightarrow 1\,536$ und
$32\cdot 48 = 40\cdot 40 - 8\cdot 8 = 1600 - 64$ und
...

Sie waren von ihren Erfolgen so fasziniert, daß sie sich für den Nachmittag bei Bettina verabredeten, deren Mutter dann viel Mühe hatte, alle unterzubringen und zu beköstigen, da sage und schreibe zehn aus der Zwölfergruppe dafür den sonst freien Nachmittag für weitere vorbereitende Überlegungen opferten.

Der vierte Projekttag begann mit einer selbstbewußten Diskussion. Die Gruppe wurde übermütig und versuchte, Rekorde aufzustellen, indem sie nach der Multiplikationsaufgabe suchte, zu der es die größte Anzahl von verschiedenen Ausrechnungsverfahren gibt. Nicht zu spät wurde die Aufmerksamkeit aber wieder auf das eigentliche Ziel gerichtet. Eine interne Ausscheidung ergab zwar auch für Bettina die Höchstpunktzahl, jedoch wurde er, unser langsam ins Reich der Träume hinübergleitende Fabian zum Champion erkoren, der dann als letzter der drei auszuwählenden Kopfrechner im Wettbewerb für die Gruppe anzutreten hatte. Der Gedanke an die langwierige Diskussion über die Aufgabenvorschläge für den Wettbewerbspool guckte zwar auch noch aus Fabians Unterbewußtsein heraus, verkrümelte sich dann aber wieder.

Er fiel in den Schlaf. Aber wie das mit dem Unterbewußtsein so ist, wenn es angeregt und unkontrolliert ans Laufen kommt. Es brütet die abenteuerlichsten Kombinationen aus. Bei Fabian waren es die kleinen grünen Weltraumknaben aus einer Fernsehreklame, welche ihm zuerst die Selbstsicherheit stahlen, dann Schweißausbrüche hervorriefen und ihn schließlich im Schlaf sprechen ließen.

Sie erschienen nämlich auch am nächsten Tag und forderten zu einem interstellaren Wettbewerb heraus. Das Problem war nur, daß sie zwölf Finger hatten und deshalb im Zwölfersystem operierten.

Ihre Rechnungen wie

$12\cdot 1z = 218$ und $52\cdot 5z = 2618$ und
$z1\cdot ze = 920e$

überforderten ihn restlos. Er protestierte zwar noch lauthals: „Das ist unfair, warum rechnen wir nicht im Zehnersystem". Und es kam noch von einem Schiedsrichter, dessen fünf endloslange Arme gleichzeitig sowohl bis zu den Tasten des Computers als auch bis zu den Einschaltknöpfen der beiden Overheadprojektoren reichten, der Vorschlag, im Elfersystem zu rechnen, da es ja „genau in der Mitte" liegt. Jedoch bewirkte dies nur, daß Fabian sich seltsam leicht in die Luft erhob, plötzlich keinen Halt mehr hatte und in unendliche Tiefen fiel.

Fabians Mutter rettete ihn schließlich dadurch, daß sie ihn, aufgeschreckt durch sein durch die Tür dringendes stöhnendes Reden, aus seinem Traum aufweckte und beruhigend auf ihn einsprach.

Fragen, Anregungen und Aufforderungen an den Leser:

1. Stelle die in diesem Artikel schon verwendeten und möglichst noch weitere Regeln für das schnelle Multiplizieren von zweistelligen Zahlen zusammen und versuche, sie zu beweisen.

2. Für die Aufgabe $22\cdot 28$ sind uns acht wesentlich verschiedene Ausrechnungsmöglichkeiten bekannt. Kannst auch Du so viele (oder vielleicht sogar noch mehr) zusammenstellen?
Gibt es eine Multiplikationsaufgabe mit zweistelligen Zahlen, die noch mehr als acht verschiedene Lösungsmöglichkeiten hat?

3. Welche 200 Aufgaben würdest Du dem Team von Fabian als seinen Beitrag für den Aufgabenpool empfehlen? – und welche der „Taschenrechnergruppe"?

4. Versuche, auf 1 bis 2 Schreibmaschinenseiten (oder gut leserlich handschriftlich im entsprechenden Umfang) den Ablauf des Wettkampfes am letzten Projekttag möglichst originell (und trotzdem realistisch) zu beschreiben. Sende uns diese Deine Fortsetzung zu, wenn sie Dir und Deiner Umgebung gut gelungen scheint.

5. Stelle Dir vor, daß bei dem Wettkampf auch die Eltern der beteiligten Schüler zuschauen und daß danach noch ein gemütliches Zusammensein stattfindet. Dabei könnte dann unser Fabian seinem Mathematiklehrer den Traum von den grünen Männchen erzählen.

Kannst Du mit der Bemerkung dieses Lehrers etwas anfangen, daß auch eine Einigung auf das Elfersystem unfair gewesen wäre und daß man sich unter der vorgegebenen Konstellation eher auf so etwas wie das Achtersystem einigen müßte?

6. Fallen Dir selbst noch weitere Fragen mit mathematischem Hintergrund im Anschluß an unsere Geschichte ein?

K. Kießwetter/M. Stupka

XXXI. Internationale Mathematik-Olympiade in Peking

Vom 8. bis zum 19. Juli 1990 fand in Peking (China) die XXXI. Internationale Mathematik-Olympiade statt. Dafür konnten sich in diesem Jahr nach langer Zeit wieder einmal zwei Mädchen qualifizieren: Ingrid Voigt (Böhlen, 12. Klasse) und Astrid Mirle (Kleindehsa, 12. Klasse). Weiterhin gehörten zur letzten IMO-Mannschaft der DDR: Rüdiger Belch (Freiberg, 10. Klasse, IMO-Teilnehmer '89), Thomas Mautsch (Duben, 12. Klasse, Ersatzmann '89), Torsten Ehrhardt (Chemnitz, 12. Klasse) und Jan Fricke (Pasewalk, 12. Klasse, IMO-Teilnehmer '89). Die Delegationsleitung war wie in den letzten Jahren das bewährte Duo Prof. Burosch (Delegationsleiter, Rostock) und Prof. Gronau (Stellvertreter, Greifswald).

Als wir das Pekinger Flughafengebäude verließen, dachten wir, daß wir in einer Sauna gelandet wären, so heiß und feucht war das Wetter. Unser Bus fuhr dann erst einmal zum Ji Men Hotel. Dort waren die stellvertretenden Delegationsleiter untergebracht, wir wohnten im Pekinger Sprachinstitut. Dort wurden auch die Klausuren geschrieben.

Am ersten Tag stand ein Besuch im Pekinger Zoo auf dem Programm, danach war die Eröffnungsveranstaltung der IMO. Sie fand in einer großen Sporthalle statt. Der offizielle Teil wurde durch eine Artistik-Vorstellung mit den traditionellen Teilen der chinesischen Artistik, so zum Beispiel das Balancieren von Tabletts mit pyramidenartig aufgebauten Gläsern, ergänzt. Abends durften wir dann schon mal einen Blick in die Klausurräume werfen. An den nächsten 2 Tagen schrieben wir die 2 Klausuren. Die schweren Aufgaben machten uns ganz schön zu schaffen. So hatten wir uns die Tage der Erholung redlich verdient!

In den folgenden Tagen hatten wir ein sehr umfangreiches Besichtigungs- und Erholungsprogramm, das uns praktisch an alle bekannten Kulturdenkmäler von Peking und Umgebung führte. Es ging gleich mit der Fahrt zum Sommerpalast, der Sommerresidenz des Kaiserpaares, los. Am nächsten Tag besuchten wir das „China Science and Technology Museum" und den Pekinger Vergnügungspark. Sonnabends trafen sich alle IMO-Teilnehmer zu einem geselligen Beisammensein. Das kleine Kulturprogramm des Veranstalters zeigte einen Querschnitt durch die chinesische Musik – von den traditionellen Tänzen bis zu den populären chinesischen Schlagersängern.

Mit dem Besuch einer Eliteschule begann für uns der Sonntag. Das ist eine Schule, in der man das Abitur ablegen kann, jedoch herrscht hier ein extrem hohes Niveau, so daß 95 % der Schüler studieren, während nur 5 % der Abiturienten der „normalen" Schulen einen Studienplatz erhalten. Außerdem sind diese Schulen hervorragend mit Lehrmitteln ausgestattet. Das Mittagessen gab es auch in dieser Schule. Dort mußten wir zum ersten Mal mit Stäbchen essen, aber unter sachkundiger Anleitung durch die Schüler und unsere Dolmetscherin lernten wir es schnell; wir wurden alle satt.

Eine weitere Station unseres Besichtigungsprogramms war der Biyun Tempel, eine riesige Tempelanlage am Stadtrand von Peking. Vom Biyun Tempel gingen wir direkt zum Fragrant Hill Hotel, hier erfuhren wir von unserer Delegationsleitung unsere Punktzahlen. (Von 42 erreichbaren Punkten: Thomas 33, Jan 30, Torsten 27, Ingrid 25, Astrid 22 und Rüdiger 21.) Wir waren alle sehr erfreut und erstaunt über unser Ergebnis. Wir hatten nicht mit so viel Punkten gerechnet. Abends gingen wir in die Pekinger Oper. Dort sahen wir drei typische chinesische Theaterstücke, die den europäischen Vorstellungen von Theater nun ganz und gar nicht entsprachen. Sie waren eine Mischung aus Pantomime und Akrobatik und wurden musikalisch durch Rhythmusinstrumente umrahmt.

Am Montag besichtigten wir den Kaiserpalast. Das anschließende Mittagessen gab es dann im „He Ping Men", einem Spezialitätenrestaurant für Pekingente. Auch hier wurde natürlich nur mit Stäbchen gegessen. Nachmittags waren wir im Himmelstempel, dort betete früher der Kaiser für eine gute Ernte. Auch das war ein riesiges Gelände. Man hätte viel mehr Zeit benötigt, wenn man alles sehen wollte.

Dienstag machten wir einen Ausflug zur großen chinesischen Mauer, das wohl beeindruckendste Erlebnis unserer Reise. Nachmittags fuhren wir zu den Minggräbern.

Am nächsten Tag fand die Siegerehrung statt, auf der jedem seine Medaille (Silber: Thomas, Jan, Torsten und Ingrid; Bronze: Astrid und Rüdiger) und sein Preis, eine chinesische Vase, überreicht wurde. An die Siegerehrung schloß sich das Abschiedsbankett in der Großen Volkshalle an. Diese Volkshalle liegt direkt neben dem Platz des himmlischen Friedens, den wir bei dieser Gelegenheit noch einmal fotografieren konnten.

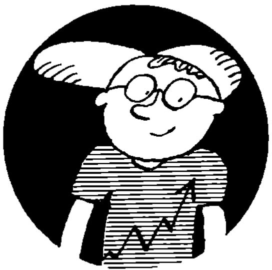
Wir besuchten zum Abschluß traditionell die Botschaft der DDR. Von der Botschaft fuhren wir direkt zum Fragrant Hill Hotel, wo uns der österreichische Delegationsleiter noch einmal mit unseren Medaillen fotografierte, und dann ging es zum Flughafen. Damit war die IMO nun auch für uns beendet.

Im Namen der ganzen Mannschaft möchte ich mich bei allen bedanken, die uns bei unserem Weg zur IMO geholfen und unterstützt haben. Besonders meine ich damit Frau Kessel, unsere Betreuerin auf den vielen Vorbereitungslehrgängen (sie mußte sich mit den ganzen organisatorischen Angelegenheiten 'rumärgern) und die Dozenten und Mentoren einschließlich unserer Delegationsleitung, die uns mathematisch ausgebildet haben.

Jan Fricke

Am Abreisetag vor dem Fragrant Hill Hotel (hinten v.l.n.r.: Prof. Gronau, Astrid, Jan, Ingrid, Torsten, Thomas; vorn sitzend: Rüdiger und Prof. Burosch)

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1991

5/8 In einem Haus mit drei Stockwerken wohnen (wie im Bild angegeben) sechs Familien mit den Nachnamen Anders, Braun, Döring, Engel, Forner und Gerber. Von deren Kindern wissen wir folgendes: Maria wohnt links neben Ingo, Luise rechts neben Hans. Ingo wohnt genau über Jürgen, Hans tiefer als Jürgen.

Engel	Braun
Gerber	Forner
Anders	Döring

Jede der sechs Familien hat genau ein Kind. Es ist der Nachname von Klaus zu ermitteln. *Sch.*

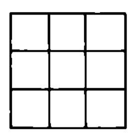
5/9 Es sei $z = 100a + 10b + c$ eine dreistellige natürliche Zahl, für die $a < b < c$ gilt.
Welche Zahlen z erfüllen die Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 56$? *Sch.*

5/10 Auf einer Geraden liegen (in dieser Reihenfolge) die Punkte A, B, C, D. Es gelte:
a) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{CD} = 3$ cm; die Mittelpunkte M_1 und M_2 dieser beiden Strecken sind 8 cm voneinander entfernt.
Wie lang ist die Strecke $\overline{BC}$?
b) $\overline{AB} = \overline{CD}$; die Mittelpunkte dieser beiden Strecken sind 8 cm voneinander entfernt.
Wie lang sind die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, wenn die Strecke $\overline{AD}$ die Länge 14,5 cm hat? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

5/11 Gegeben sei eine dreistellige natürliche Zahl, deren Quersumme 11 beträgt, und deren Hunderterziffer mit deren Zehnerziffer übereinstimmt. Vertauscht man die Zehnerziffer mit der Einerziffer, so erhält man eine Zahl, die um 18 größer ist als die ursprüngliche Zahl. Um welche Zahl handelt es sich? *Sch.*

5/12 Welche und wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Geldbetrag von 0,30 DM auszuzahlen, wenn dafür ausreichend 1-Pf-, 5-Pf-, 10-Pf- und 20-Pf-Münzen zur Verfügung stehen? *Sch.*

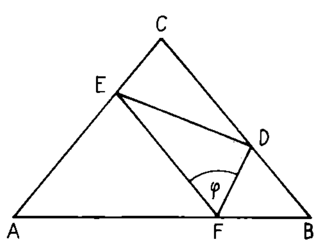
5/13 Die abgebildete Figur ist ein Quadrat, das aus neun kleineren Quadraten besteht. Wie viele Rechtecke findet man in der abgebildeten Figur? *Sch.*



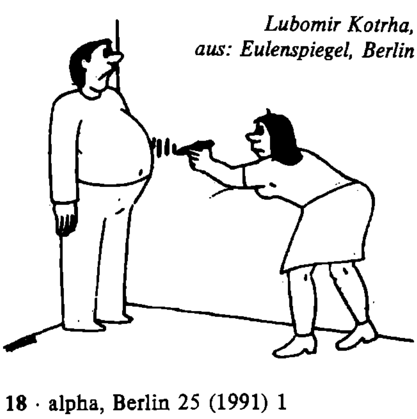
5/14 Gegenwärtig ist Lars 8 Jahre, sein Vater 31 Jahre alt. Nach wieviel Jahren wird der Vater doppelt so alt wie sein Sohn Lars sein?
Schüler Lars Zietschmann, Stolzenburg

6/8 Man hat ein bis zum Eichstrich mit Wasser gefülltes 10-Liter-Gefäß und zwei leere, ebenfalls geeichte Gefäße, die 4 Liter bzw. 3 Liter fassen. Durch Umfüllen will man jede ganzzahlige Literzahl von 1 bis 9 Litern erreichen. Gib eine Möglichkeit der Umfüllungen an, um diese Literzahlen zu erreichen!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/9 Das Bild stellt ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ dar. Der



Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe 80°. Ferner gilt $\overline{AE} \cong \overline{AF}$ und $\overline{BD} \cong \overline{BF}$. Es ist die Größe φ des Winkels $\sphericalangle DFE$ zu bestimmen. *Sch.*



Lubomir Kotrha, aus: Eulenspiegel, Berlin

Wettbewerbsbedingungen

NEU!

1. Der Wettbewerb 1990/91 läuft über nur **zwei Teilwettbewerbe** in den Heften 6/90 und 1/91.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an:

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
O-7027

Die Lösungen sind **in einem Kuvert** und möglichst der Reihenfolge nach fortlaufend, auf Vorder- und Rückseite beantwortet, einzusenden. (Die Lösungen werden zur Korrektur nicht mehr aufgabenweise sortiert!)
Beizulegen ist ein **frankierter* und adressierter Rückumschlag** für die Zusendung der Antwortkarte, auf der alle Ergebnisse des Teilwettbewerbs registriert werden.
Da **Schulen** die Antwortkarten geschlossen zurückerhalten, ist das Porto in entsprechender Höhe zu entrichten.

3. Von dem Teilnehmer sind nur Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer). Schüler ab Klassenstufe 11 und Erwachsene lösen die mit 10 gekennzeichneten Aufgaben.

3. Zu empfehlen ist allen Teilnehmern die **Einsendung der Lösungen vor dem Einsendeschluß**, da in diesem Fall die Korrektur umgehend erfolgt und die Antwortkarte bereits mit Einsendeschluß zurückgesandt werden kann.

5. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

6. Diejenigen Teilnehmer, die insgesamt **mindestens acht Aufgaben gelöst** haben, senden bis zum 10. September 1991 beide Antwortkarten, einen entsprechend **frankierten* und adressierten Rückumschlag** und
a) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde, bzw.
b) bei mit diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die bereits vorhandenen zwei Urkunden ein.
Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die beiden Antwortkarten und der entsprechende Rückumschlag.

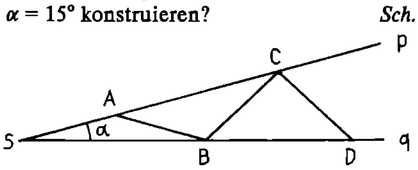
7. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Anerkennungsurkunde und einen alpha-Button.
Pro Klassenstufe 5 bis 10 und unter den Frühstartern werden die 10 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der sehr gut gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen je fünf Teilnehmer ausgelost.
Sie erhalten attraktive Buchpreise.

* *Entsprechend der Portogebühren im Mai bzw. September 1991.*

6/10 Es sei $z = 100a + 10b + c$ eine dreistellige natürliche Zahl, für die
$a^2 + b^2 + c^2 = 49$ gilt. Für welche Zahlen z trifft dies zu? *Sch.*

6/11 Ein Würfel ist aus 125 gleichgroßen kleineren Würfeln von 1 cm Kantenlänge zusammengesetzt. Bestimme die Größe der entstehenden Oberfläche, wenn
a) alle diejenigen kleineren Würfel entfernt werden, die zu genau einer der Kanten des großen Würfels gehören;
b) an jeder Würfelecke des großen Würfels ein kleinerer Würfel entfernt wird;
c) alle diejenigen kleineren Würfel entfernt werden, die zu allen Kanten des großen Würfels gehören!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/12 Das Bild stellt einen Winkel der Größe α mit seinem Scheitelpunkt S und seinen Schenkeln p und q dar. Auf dem Schenkel p wurden Punkte A und C, auf dem Schenkel q Punkte B und D so festgelegt, daß $\overline{AS} \cong \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$ gilt, d. h., daß die Dreiecke $\triangle SBA$, $\triangle CAB$, $\triangle BDC$ gleichschenklig sind. Wie viele solcher gleichschenkligen Dreiecke lassen sich für $\alpha = 15°$ konstruieren? *Sch.*



6/13 Die drei Schüler mit Familiennamen Schulz, Meier und Neumann sind im Ferienlager. Sie haben (in anderer Reihenfolge) die Vornamen Gerd, Horst und Jan. Je einer dieser Jungen ist Schüler der 5., 6. bzw. 7. Klasse. Sie kommen aus verschiedenen Städten, nämlich aus Rostock, Berlin bzw. Schwerin. Von ihnen ist folgendes bekannt:
(1) Der Schüler aus der 6. Klasse, der Schweriner und Horst spielen gern Fußball.
(2) Der Berliner und der Schüler Schulz lernten sich erst im Ferienlager kennen.
(3) Der Schüler aus der 6. Klasse war noch nie in Rostock.
(4) Der Berliner und der Schüler Meier sind im Mathematikzirkel des Ferienlagers.
(5) Gerd und der Schüler Schulz kennen sich bereits vom vorjährigen Ferienlager her.
(6) Der Schüler aus der 7. Klasse und Jan haben zusammen mit dem Rostocker eine Wandzeitung gestaltet.
Es sind von jedem Jungen der Vorname, der Familienname, die Klassenstufe und der Wohnort anzugeben.
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/14 Gegeben ist eine Stahlkugel mit einem Volumen von 15 cm³. Welches Volumen muß ein Quader aus Aluminium haben, damit er die gleiche Masse hat? *R.*

7/8 Susanne will das Lebensalter ihrer Großmutter, die jünger als 100 Jahre ist, errechnen. Sie sagt zur Großmutter: „Subtrahiere von der Zahl, die dein Lebensalter angibt, die Quersumme. Nenne mir das Ergebnis!" (Die Großmutter nennt die Zahl 63.) Susanne fordert nun die Großmutter auf: „Nun kehre die Zahl deines Lebensalters um, vertausche also die beiden Ziffern; subtrahiere davon wieder die Quersumme. Nenne mir auch dieses Ergebnis." (Die Großmutter nennt die Zahl 18.) „Nun weiß ich dein Alter", meint Susanne. Wie findet Susanne das Alter ihrer Großmutter heraus?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

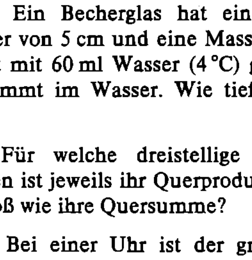
7/9 Von einem Dreieck wird folgendes gefordert: Die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen a, b, c sollen natürliche Zahlen sein; die Seitenlänge a soll 36 %, die Seitenlänge b soll 48 % des Umfanges des Dreiecks betragen.
Es ist zu untersuchen, ob es unter diesen Bedingungen ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u = 25$ cm beträgt! *Sch.*

7/10 Wie viele dreistellige natürliche Zahlen gibt es, die folgende Bedingung erfüllen? Schreibt man eine solche Zahl rückwärts durch entgegengesetzte Anordnung ihrer drei Ziffern, so erhält man eine um 297 größere Zahl. *Sch.*

7/11 Für die Seitenlänge a und b eines Dreiecks gelte $a > b$. Die Längen der zu diesen Seiten gehörenden Höhen seien h_a und h_b. Es ist nachzuweisen, daß in diesem Fall stets
$a + h_b > b + h_a$ gilt! *Sch.*

7/12 Zwei Bagger würden einen Arbeitsauftrag zusammen in 12 Tagen ausführen können. Der erste Bagger würde dazu allein 20 Tage benötigen. In wieviel Tagen würde der zweite Bagger allein die Arbeit ausführen können?
Schüler Andreas Kellner, Halberstadt

7/13 Es gelte $\overline{AB} = \overline{BC}$ bzw. $\widehat{AB} = \widehat{BC}$. Wie groß ist $\sphericalangle ABC$?
OStR J. Kreusch, Löbau

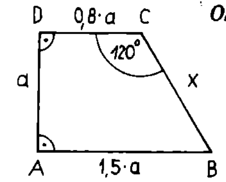


7/14 Ein Becherglas hat einen Durchmesser von 5 cm und eine Masse von 45 g. Es ist mit 60 ml Wasser (4 °C) gefüllt und schwimmt im Wasser. Wie tief taucht es ein?

8/8 Für welche dreistellige natürliche Zahlen ist jeweils ihr Querprodukt fünfmal so groß wie ihre Quersumme? *Sch.*

8/9 Bei einer Uhr ist der große Zeiger 10 cm, der kleine Zeiger 7,5 cm lang. Wieviel Zentimeter legen die Spitzen der Zeiger in jeder Minute zurück?
Schüler Roland Holke, Leipzig

8/10 Ermittle folgende Größen:
a) x b) Umfang des Trapezes
c) Fläche des Trapezes



OStR J. Kreusch, Löbau

8/11 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AV}$ die Längen $a = 8$ cm und $b = 6$ cm haben. Es ist der Radius r des Inkreises dieses rechtwinkligen Dreiecks durch die Längen a und b seiner Katheten auszudrücken und danach zu berechnen. *Sch.*

8/12 Fritz, der Ratekünstler, sagt: „Denke dir eine vierstellige natürliche Zahl! Bilde die Quersumme! Multipliziere diese mit 8! Addiere dieses Ergebnis zu deiner gedachten vierstelligen Zahl! Streiche nun eine Ziffer dieser errechneten Zahl (aber bitte keine Null)! Nenne mir die neue Zahl! Ich sage dir, welche Ziffer du gestrichen hast."
a) Wie macht Fritz das?
b) Begründe, weshalb das so ist!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

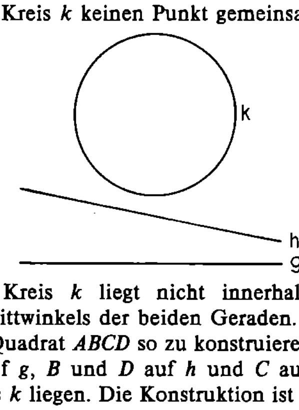
8/13 An einem masselosen Stab hängen im Abstand von 0 cm, 6 cm, 10 cm und 20 cm vom linken Ende Körper mit der Masse $m = 100$ g. In welchem Abstand vom linken Ende muß der Stab unterstützt werden, damit er sich im Gleichgewicht befindet?

8/14 Ein U-Rohr ist auf der einen Seite mit Wasser und auf der anderen mit Quecksilber gefüllt. Wie groß ist der Abstand zwischen beiden Menisken, wenn die Quecksilbersäule 1 cm lang ist (gemessen von der Trennfläche beider Flüssigkeiten)?

9/8 Welches Relationszeichen (<, >, =) ist zwischen $0,\overline{75}$ und $0,7\overline{57}$ zu setzen? Begründung! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

9/9 Die Summe zweier Zahlen beträgt 19, die Summe ihrer Quadrate 205. Um welche Zahlen handelt es sich?
Schülerin Kathrin Zapf, Fambach

9/10 Gegeben sei ein Kreis k und zwei sich schneidende Geraden g und h, die mit dem Kreis k keinen Punkt gemeinsam haben.



Der Kreis k liegt nicht innerhalb des Schnittwinkels der beiden Geraden. Es ist ein Quadrat $ABCD$ so zu konstruieren, daß A auf g, B und D auf h und C auf dem Kreis k liegen. Die Konstruktion ist zu begründen! *Sch.*

9/11 Es ist die kleinste Primzahl zu ermitteln, die bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1 läßt.
Schülerin Rene Schulz, Ribnitz

9/12 Berechnen Sie den Wert des Terms

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}!$$

Nutzen Sie dabei die Identität $n^4+4 = [(n-1)^2+1]\cdot[(n+1)^2+1]$.

nach: Quant, Moskau

9/13 Ein Elektron mit der Anfangsgeschwindigkeit $0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gelangt in ein homogenes elektrisches Feld eines Plattenkondensators mit der Feldstärke $E = 100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{cm}}$.

a) Wie groß ist die Beschleunigung des Elektrons?

b) Welche Geschwindigkeit hat es nach einer Beschleunigungsstrecke von 2 mm?

9/14 Durch eine Doppelleitung aus Aluminium (Länge 100 m, Querschnitt 25 mm²) fließt ein Strom von 80 A. Wie groß ist der Spannungsabfall?

10/8 Setzt man vor eine dreistellige Primzahl p_1 eine Ziffer, so erhält man eine vierstellige Primzahl p_2. Bildet man den Nachfolger des Quadrates der kleineren Primzahl, so erhält man das Doppelte der größeren. Wie lauten die beiden Primzahlen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

10/9 In einem ungleichseitigen und spitzwinkligen Dreieck ABC möge die Winkelhalbierende w_α die Höhe h_c derart in E schneiden, daß $\overline{AE} \cong \overline{CE}$ gilt. Es ist zu zeigen, daß damit die Größe des Innenwinkels α eindeutig bestimmt ist! Wie groß ist α?

OStR J. Kreusch, Löbau

10/10 Untersuche, ob die Ungleichung $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}<\frac{714}{113}$ eine wahre oder eine falsche Aussage darstellt!

Sch.

10/11 Löse nachfolgendes Gleichungssystem.
Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, unterschiedliche Buchstaben bedeuten unterschiedliche Ziffern. Für die Sterne sind Buchstaben zu setzen:

(1) $abc : *^2 = **$

(2) $acb : ad = ad$

(3) $abc - acb = **$

Frank Pampel, Zeulenroda

10/12 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel $\sphericalangle ACB$ seien die Länge der Kathete $\overline{AC}$ mit $b = 10$ cm und die Länge der Höhe $\overline{CD}$ auf die Hypotenuse mit $h_c = 8$ cm bekannt.
Es ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks zu berechnen!

H. Boettcher, Weimar

10/13 Eine Spule und ein Plattenkondensator bilden einen Parallelschwingkreis. Alle Abmessungen der Schaltelemente werden halbiert. Wie ändert sich die Resonanzfrequenz des Schwingkreises? (Formfaktor der Spule unberücksichtigt.)

R.

10/14 Ein Holzkörper (Auflagefläche $A = 10$ cm²) liegt auf einer geneigten Ebene aus Holz. Der Neigungswinkel wird – von 0° beginnend – langsam vergrößert. Er beginnt bei einem Winkel von 33° zu gleiten. Wie groß ist die Haftreibungszahl?

R.

alpha-Wettbewerb 1989/90

Preisträger

Sandra Wiedersberg, Albersroda; Dieter Koch, Arnstadt; Juliane Friedrichs, Martin Friedrich, beide Bergfelde; Gundula Hofer, Ulrich Fahrenberg, Bert Minske, Thomas Trinks, Dana Krüger, alle Berlin; Norbert Schröder, Bernau; Jens Opalka, Bernburg; Marco Fiedler, Bischofferode; Ingo Moldenhauer, Blankenfelde; Roland und Ulrich Voigt, Böhlen; Astrid Neidhardt, Brotterode; Yvonne Kinzel, Bühlow; Anne-Kathrin Richter, Chemnitz; Piere Gehmlich, Clausnitz; Matthias Berse, Cottbus; Oliver Fritsche, Dauban; Almuth Griebel, Deesbach; Georg Kirchner, Dermbach; Christian Vögle, Dingelstädt; Leonhard Karsch, Jürgen Schmerler, Daniel Arndt, Lutz Lauter, Jörg Wagner, alle Dresden; Matthias Stech, Dömitz; Stefanie Steglich, Yvonne Langer, beide Eisenach; Kai Ganskow, Kirsten Siebke, beide Eisenhüttenstadt; Stefan Schwarz, Rumen Iliew, Ulrike Rößner, alle Erfurt; Daniel Häfner, Konstanze Kuhse, beide Fambach; Thomas Morchel, Finsterwalde; Ulrich und Ulrike Müller, Fischheim; Katrin Schünemann, Christiane Dammann, beide Freital; Katja Grande, Friedeburg; Manuel Fey, Gehaus; Clemens Gothert, Gera; Diana Fanghänel, Gersdorf; Ingolf Müller, Geschwenda; Antje Sydow, Glienicke; Juliane Bloß, Görlitz; Michael Gronau, Katja Lißke, Cathrin Kunze, alle Greifswald; Denise Kraus, Großräschen; Silke Rudolph, Großröhrsdorf; Christian Schuster, Grünhain; Manuela Vogel, Halberstadt; Anja Goldschmidt, Thomas Pitzschke, beide Halle-Neustadt; Schulclub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Angela Wiesjahn, Holzendorf; Marcus Krause, Hennigsdorf; Claudia Fach, Nicole Templin, beide Hohen Neuendorf; Rene Schüppel, Hoyerswerda; Carsten Pettig, Jena; Sabine Hüther, Kaltennordheim; Regina Sachse, Kleinmachnow; Matthias Loesdau, Landshut (W); Björn Schoof, Langenweddingen; Steffen Hoffmann, Leegebruch; Andreas Willnow, Jens Gärtner, Lars-Peter Müller, Jörg Schreiber, André Gärtner, Clemens Crucius, alle Leipzig; Gunter Semmler, Limbach-O.; Steffen Winter, Liebenwalde; Stephan Brumme, Luckenwalde; Christiane Czech, Bianca Truthe, beide Magdeburg; AG Math. der OS H. Rau, Mieste; Dirk Habermann, Mühlhausen; Sarah Bardy, Nepthen (W); Martin Anhuth, Neubrandenburg; Susanne Gloth, Maik Daum, beide Neuhaus; Jan Fricke, Pasewalk; Rico Jänicke, Prenzlau; Dirk Jahn, Arlett Prangel, Frank Rodenhagen, Andreas Ahrens, Jan Wunderlich, Mathias Jeschke, Katharina Pierer, alle Rostock; Heinz-Olaf Müller, Schmalkalden; Kathrin Brandt, Susan König, beide Schwallungen; Karsten Andrae, Karin Streck, Thomas Lotze, alle Suhl; Juliane Neubert, Steinbach-Hallenberg; Stephanie Möder, Schmalkalden; Kerstin Reinhardt, Constanze Frötschner, beide Trusetal; Hartmut Boettcher, Weimar; Stefan Herrmann, Wegefarth; Jörg Winterfeldt, Wismar; Steffen Hohmann, Zella-Mehlis

Abzeichen in Gold

Für dreiundzwanzigjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Halberstadt

Für zweiundzwanzigjährige Teilnahme
Guido Blosfeld, Halle

Für zwanzigjährige Teilnahme
Rainer Seifert, Dessau; Frank Aßmus, Oranienburg

Für neunzehnjährige Teilnahme
Arno Feuerherdt, Brandenburg; Kurt Oertel, Gräfenhainichen; Volker Schulz, Ketzin; Gerald Werner, Meiningen; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Lothar Gruber, Wien (Österreich)

Für achtzehnjährige Teilnahme
Eberhard Georgy, Erfurt; Heinz-Olaf Müller, Schmalkalden

Für siebzehnjährige Teilnahme
Dieter Koch, Arnstadt; Ina Büttner, Berlin; Matthias Weser, Großenhain; Rüdiger Düring, Halle; Ruth Jacobs, Halle-N.; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Rolf Kamieth, Leipzig; Udo Kretschmann, Markneukirchen; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf

Für sechzehnjährige Teilnahme
Uwe Maaz, Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Andrea Hengst, Jens Pönisch, beide Chemnitz; Harry Höfer, Dorndorf; Jörn Wittig, Carolin Engel, Karl-Heinz Jünger, Gudrun Thäter, alle Dresden; Thomas Mittelbach, Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Volker Reck, Heiligenstadt; René Schüppel, Hoyerswerda; Horst Fliegner, Jarmen; Christian Tiedt, Jena; Per Witte, Königs Wusterhausen; Claudia Trochold, Reichenbach; Heidrun Tiedt, Teterow; Hans Creutzburg, Thal; Eva-Maria Wabbel, Wolfen

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Marc Schewe, Berlin; Tilman Völzke, Böhlen; Thomas Mader, Chemnitz; Stefan Edelmann, Dresden; Siegfried Obst, Reinhard Weißnicht, beide Eberswalde; Susanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Volker Georgy, Erfurt; Manfred Hille, Riesa; Dieter Seifert, Hagenow; Günter Schielinsky, Halle-N.; Karsten Milek, Hohen-Ndf.; Uwe Würker, Mülsen; Rolf Heubner, Wolfen; Thorsten Eidner, Zeulenroda

Für vierzehnjährige Teilnahme
Uwe Schütze, Camin; Andreas Mann, Cunersdorf; Georg Kirchner, Dermbach; Lutz Lauter, Dresden; Michael Schulze, Halberstadt; Claus Janke, Ilmenau; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Sabine Ansorge, Oschersleben; Kurt Schulze, Schernberg; Hartmut Boettcher, Weimar

Für dreizehnjährige Teilnahme
Kerstin Kantiem, Berlin; Kerstin Müller, Ines Lauter, Gerald Eichler, Stefan Thäter, alle Dresden; Jens Wackernagel, Falkenberg; Jens Grundmann, Gevelsberg; Sonnfried Lätsch, Görlitz; Annett Weißker, Halle-N.; Birgit Seifert, Hagenow; Uta Mersiowsky, Sabine Pohlmann, beide Langewiesen; Uwe Knispel, Prösen; Jana Renner, Röbel; Erhard Zilinske, Stralsund; Irene Michallik, Waren; Erika Schreiber, Norbert Fuchs, beide Zella-Mehlis

Für zwölfjährige Teilnahme
Beate Müller, Bert Minske, beide Berlin; Christian Sitz, Calau; Andreas Israel, Chemnitz; Uwe Martin, Crossen; Carsten und Helmut Schreiber, Ingolf Thurm, alle Dresden; Barbara Voigt, Erfurt; Heike Morgner, Falkenstein; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Friedhelm Reichert, Heiko Witte, beide Königs Wusterhausen; Bernd Fucke; Leipzig; Irma Goßmann, Oranienburg; Katja Uhlemann, Prausitz; Ralf Heidenreich, Roßleben; Ronald Laue, Schleid; Delia Wolfert, Söllichau; Evelin Schott, Thalheim; Horst Rißmann, Wesenberg

Für elfjährige Teilnahme
Ralf und Wolfgang Beukert, Altenburg; Annegret Schädlich, Auerbach; Yvonne Großmann, Matthias Tittel, beide Berlin; Eberhard Balzer, Bern-

burg; Peter Sitz, Calau; Michael Tix, Jürgen und Michael Hoppe, alle Chemnitz; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Ulf Winkler, Frankenberg; Jörg Blaurock, Guben; Henrik Hodam, Kaltennordheim; Steffen Scheithauer, Parey; Annegret Ruser, Rostock; Achim Kröber, Schönbach; Jochen Wetzel, Sömmerda; Johannes Thäter, Weimar; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Antje Ohlhoff, Halberstadt

Für zehnjährige Teilnahme

Marcus Markardt, Bad Salzungen; Frauke Wendt, Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Rainer Werner, Chemnitz; AG Math. der K. Niederkirchner OS, Domersleben; Jens Haufe, Ullrich Hartung, beide Dresden; Ulrike Rößner, Erfurt; Marie-Luise Funk, Greifswald; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Holger Porath, Güstrow; Hanka Pruditsch, Geithain; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Frank Müller, Klaffenbach; Petra Heiliger, Leuna; Karsten Kattner, Pasewalk; Birgit und Dagmar Lenz, Reichenbach; Dirk Jahn, Rostock; Astrid Rogowski, Schwerin; Torsten Marx, Ueckermünde; Frank Goth, Waltersdorf; Edith Boettcher, Weimar; Katrin Neumann, Zella-Mehlis

Für neunjährige Teilnahme

Veneta Türke, Auerbach; Ines Sobanski, Bad Liebenstein; Sven Aßmus, Berlin; Peter Graber, Bibra; Carsten Schmidt, Borna; Angela Maier, Bürgel; Steffen Eisenblätter, Delitzsch; Eva Faßmann, Dessau; André Kratzert, Dürröhrsdorf; Christian Pigorsch, Eisleben; Gerd Kunert, Freiberg; Heinz Seifert, Hagenow; Lutz Eichern, Halle-N.; Schulclub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Charis Förster, Leipzig; Beate Balzer, Lindow; Dirk Welke, Neuruppin; Michael Taeschner, Parchim; Ute und Stefan Warnest, Rostock; Reiner Möwald, Sömmerda; Matthias Klinke, Zeulenroda; Diana Michler, Zschortau

Für achtjährige Teilnahme

Carsten Karl, Aken; Dirk Pandel, Berlin; Detlef Bartmuß, Buhrow; Matthias Buchmann, Eisenberg; Andreas Kupsch, Finsterwalde; René Franke, Gersdorf; Gernot Mersiowsky, Görlitz; Elke Heidemann, Halberstadt; Hans-Hermann Epstude, Kirchheilingen; Jörg Anschütz, Lehesten; Beate Wasner, Leipzig; Norbert Wölfel, Limbach-O.; Hardy Dömpke, Löderburg; Karsten Knothem Merseburg; Gislher Schütze, Ottstedt; Felix Kraenz, Picher; Axel Buerke, Potthagen; Andrea Thiele, Rackwitz; René Schulz, Ribnitz; Markus Spindler, Sangerhausen; Oliver Henze, Schneidlingen; Karin Möwald, Sömmerda; Sven Kannegießer, Wolmiersleben; Andreas Vogt, Worbis; Ralph Schammer, Zerbst; Claudia Heret, Zwickau

Für siebenjährige Teilnahme

Ulrich Egermann, Altenburg; Sven Völker, Bad Salzungen; Monika Döring, Berlin; Wolfram Schubert, Borna; René Aust, Calau; Thomas Freier, Creuzburg; Thomas Prüver, Eberswalde; Rüdiger Hochheim, Erfurt; Werner Ernst, Finsterwalde; Britta Bölter, Greifswald; Britta und Rainer Strawe, Halberstadt; Göran Glockmann, Jena; Werner Unger, Lehesten; Eberhard Schulze, Mildenberg; Kay Pfennighaus, Neubrandenburg; Jürgen Rietz, Pirna; Kilian Kindelberger, Potsdam; Ralf und Dirk Seifert, Rochlitz; Beate Walter, Röbel; Ulrich Rothe, Kirsten Peter, beide Rostock; Uwe Danz, Schmalkalden; Tobias Franke, Schrebitz; Peter Hörnich, Schwedt; Stefan Erb, Schwallungen; Kerstin Schuster, Taubenheim; Stephan Marx, Ueckermünde; Horst Rex, Wählitz

Für sechsjährige Teilnahme

Tilo Kaiser, Aken; Uwe Völker, Bad Salzungen; Thoralf Räsch, Bad Wilsenack; Claudio Groll, Bannewitz; Alexander Golz, Jana Hoffmann, beide Berlin; Jens Opalka, Christian Neufert, beide Bernburg; Andreas Liebmann, Bitterfeld; Ulrich Voigt, Böhlen; Stefan Mader, Chemnitz; Jens Heermann, Beate Schreiber, beide Dresden; Yvonne Gerth, Dürrröhrsdorf; Kornelia Eckert, Effelder; Jan Buchmann, Eisenberg; Karsten Wackernagel, Falkenberg; Steffen Pietsch, Frankfurt/O.; Karl Etourno, Freiberg; Jacqueline Spatke, Gräfenthal; Cornelia Bär, Greifswald; Steffen Vollborth, Greußen; Thomas Henker, Groitzsch; Jan Glaser, Großdeuben; Alois Belter, Hagenow; Antje Stehfest, Havelberg; Michael Puchta, Hecklingen; Steffen Vogler, Ilmenau; Andreas Anders, Jüterbog; Matthias Müller, Klaffenbach; Astrid Mirle, Kleindehsa; Jan Richter, Krostitz; Mario Menger, Lauterbach; Martin Schreiter, Andreas Winter, beide Leinefelde; Mareike Schmidt, Leipzig; Dorit Pinnow, Mügeln; Mirko Teidge, Neubrandenburg; Rigo Hinkelmann, Neuenbeuthen; Christian Rißler, Niederodewitz; Torsten Kaiser, Oranienburg; Jan Fricke, Pasewalk; Susanne Kraenz, Picher; Sylke Ahrend, Rakow; Doris Seifert, Rochlitz; Burkhard Rothe, Rostock; Sören Hader, Schlotheim; Diana Heinrich, Seyda; Michael Lotz, Vacha; Otmar Jaunasch, Wiednitz; Mario Zitek, Weimar; Ronald Peters, Wismar; Holger Beyer, Zschopau

Für fünfjährige Teilnahme

Steffen Siebert, Altenhof; Jan Eska, Bad Sülze; Jan und Jana Strischek, Ingo Maas, beide Berlin; Norbert Schröder, Bernau; Beate Pohler, Brand-Erbisdorf; Alek Opitz, Cottbus; Hendrik Jäger, Dersekow; Falk Baumann, Jörg Wagner, beide Dresden; Anke Lehmann, Eberswalde; Carsten Bundesmann, Eilenburg; Andreas Luleich, Elsterberg; Joachim Suck, Essen (W); Nicole Schüler, Tobias Gerlach, Götz Lothal, Mirco Grasemann, alle Friedeburg; Sylvia Wachholz, Görlitz; Ulrike Schmidt, Greifswald; Stefan Detschner, Greußen; Anja Goldschmidt, Halle-N.; Glenn Hofmann, Hohenstein-E.; Angela Wiesjahn, Holzendorf; Lothar Tischer, Kamenz; Toralf Pusch, Karlsburg; Christian Weber, Katzow; Jürgen Frey, Kipsdorf; Regina Sachse, Kleinmachnow; Torsten Schreiber, André Gärtner, beide Leipzig; Steffen Haas, Leutersdorf; Carsten Herbothe, Löderburg; Matthias Kassner, Meiningen; Matthias Sekatzek, Merseburg; Alexander Blucha, Niederorschel; Klaus Klapproth, Gregor und Alexander Moskau, alle Plauen; Sebastian Clauß, Possendorf; Hendryk Wetzel, Radebeul; Christian Holfeld, Rathenow; Manuela Radtke, Rodewitz; Elko und Willi Jacobs, Saurasen; Kay Herrmann, Schwallungen; Sven Kieselberger, Schwarzenberg; Mario Seelig, Schwerin; Heike Claußnitzer, Senftenberg; Dirk Weber, Steinbach-Hallenberg; Thomas Lotze, Suhl; Klaus Ullmann, Spremberg; Daniel Henkel, Weißenborn-L.; Birgit Elßner, Werneuchen; Mirko Stolle, Wittenberg; Matthias Tötzke, Zehdenick; Jörg Siede, Zepernick; Antje Müller, Zwickau; Andreas Hamm, Suhl

Für vierjährige Teilnahme

Konstanze Kaiser, Aken; René Erler, Ralf Ronneburger, Lars Kreßner, Sylvia Martin, Martina Hebenstreit, Carsten Hergt, alle Altenburg; Mario Wagner, Aschersleben; Michael Karlinsky, Heike Walter, Andrea Höppner, alle Berlin; Marita Fronz, Diana Gehrke, Bettina Gutjahr, Steffi Gudat, Antje Nagel, Antje Kumm, Karina Winkelmann, alle Buhrow; Reinhard Schulze, Carwitz, Antje Berndt, André Lange, Steve Leber, alle Chemnitz; Uta Neumann, Cottbus; Kerstin Stolze, Pia Weißenborn, beide Deuna; Andreas Witkowsky, Dingelstädt; Ute Raußendorf, Dohna; Ulrike Kretschmer, Kristin Schröder, Marcus Heinrich, Frank Wagner, Jürgen Schmerler, alle Dresden; Mattias Hirschfeld, Eilenburg; Karola Rockmann, Eisleben; Beate Kragl, Dirk Borsch, beide Erfurt; Ursula Lenk, Essen (W); Ulrich Müller, Fischheim; Nina Haeckert, Bert Lothal, Dominik Schewski, Janet Goßrau, alle Friedeburg; Mechthild Krause, Görlitz; Beatrice und Michael Gronau, Cathrin Kunze, alle Greifswald; Thomas Müller, Jörg Augner, beide Greußen; Daniel Döring, Großbartloff; Silke Rudolph, Großröhrsdorf; Stefan Krähe, Rainer Künzel, beide Güstrow; Andreas Göpfert, Halle; Danny Schwarzenberger, Silvio Trommer, Sven Baumann, Ronny Rosenbaum, alle Hammerbrücke; Michael Zieger, Jena; Jörg Driesner, Klein Petershagen; Lars Hartmann, Klein-Quenstedt; Matthias Loesdau, Landshut (W); Steffen Berlich, Jens Gärtner, Jörg Schreiber, alle Leipzig; Ronny Ficker, Leubetha; Gunter Semmler, Limbach-O.; Swen Geißler, Lomnitz; Veit Kannegieser, Lübben; Sandra Engelke, Dana Biallas, beide Magdeburg; Franziska Sauer, Merkers; Daniel Wolf, Mittweida; Dagmar Quast, Neuhaus; Thomas Beyer, Frances Ließ, beide Rackwitz; Antje Brämer, Rathenow; Thomas Fischer, Rochlitz; Tobias Soneit, Rostock; Nicole Kirchner, Nico Pehlert, beide Schwallungen; Lars Freitag, Schwarzheide; Beate Hartkopf, Schneidlingen; Katja Fisch, Senftenberg; Lutz Kratzsch, Sömmerda; Mary Brodhagen, Dana und Kati Bockmann, alle Ueckermünde; Nico Eberhardt, Wiesenthal; Ingolf Näther, Heiko Barthel, beide Wilsendorf

Mathematik im Wandel

Unbekannter Verfasser

aus: H.-D. Hornschuh; Humor rund um die Mathematik, Manz Verlag München

Volksschule 1950

Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 20 Mark. Die Erzeugungskosten betragen $\frac{4}{3}$ des Erlöses.

Wie hoch ist der Gewinn?

Realschule 1960

Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 20 Mark. Die Erzeugungskosten betragen 16 Mark.
Berechne bitte den Gewinn!

Gymnasium 1970

Ein Bauer verkauft eine Menge Kartoffeln (K) für eine Menge Geld (G). G hat die Mächtigkeit 20. Für die Menge G gilt, daß jedes Element g eine Mark ist. In Strichmengen müßtest du für die Menge G „zwanzig" (||||| ||||| ||||| |||||) Strichlein machen, für jedes Element g eines. Die Menge der Erzeugungskosten (E) ist um „vier" (||||) Strichlein weniger mächtig als die Menge G. Zeichne das Bild der Menge E als Teilmenge der Menge G und gib die Lösungsmenge (L) an für die Frage:
Wie mächtig ist die Gewinnmenge?

Integrierte Gesamtschule 1980

Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 20 Mark.
Die Erzeugungskosten betragen 16 Mark, der Gewinn beträgt 4 Mark. Aufgabe: Unterstreiche das Wort „Kartoffeln" und diskutiere mit deinem Nachbarn darüber!

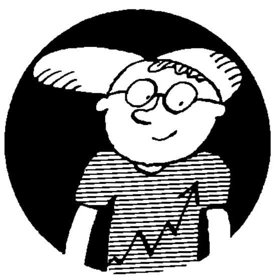
Reformierte Schule 1990

Ein kapitalistisch privilegierter bauer bereicherd sich ohne rechtfärtigunk an einem sak kartoffen um 4 marck.
untersuche den tekst auf inhaldlische gramatische ortogravische un zeichen sätzungsfeler.
koorigiere die aufgabenstälunk und demonstriere gegen die lösunk!

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

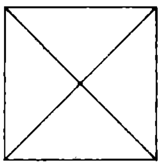
2. Stufe (Kreisolympiade)

Oktober 1990



Olympiadeklasse 5

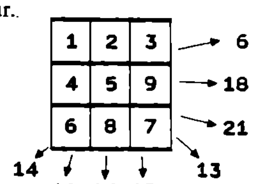
300521 a) Das Bild zeigt eine Zerlegung eines Quadrates durch geradlinige Schnitte in vier Teilfiguren.



Gib an, wie sich aus diesen Teilfiguren zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen!
Als Lösung genügt eine Zeichnung der beiden neu zusammengesetzten Quadrate.
b) Stelle fest, ob man ein Quadrat durch geradlinige Schnitte so in sechs Teilfiguren zerlegen kann, daß sich aus ihnen zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen! Wenn eine solche Zerlegung möglich ist, genügt es als Lösung, eine solche Zerlegung und die beiden neu zusammengesetzten Quadrate zu zeichnen.

300522 Über das Alter der fünf Personen Antje, Dirk, Manuela, Susanne und Thomas werden folgende Angaben gemacht:
(1) Antje ist älter als Manuela, aber jünger als Susanne.
(2) Thomas ist genau so alt wie Antje und Manuela zusammen.
(3) Dirk ist älter als Antje und Susanne zusammen.
a) Zeige, daß aus diesen Angaben eindeutig folgt, wer die jüngste und wer die älteste dieser fünf Personen ist!
b) Stelle fest, ob aus den Angaben auch eindeutig folgt, welche Reihenfolge für die Altersangaben der übrigen drei Personen vorliegt! Begründe deine Feststellung!

300523 a) Die Zahlen 1, 2, ..., 9 lassen sich so in ein Quadrat von 3×3 Feldern eintragen, daß keine zwei der acht Summen in den drei Zeilen, den drei Spalten und den beiden Diagonalen einander gleich sind. Das Bild zeigt ein Beispiel hierfür.



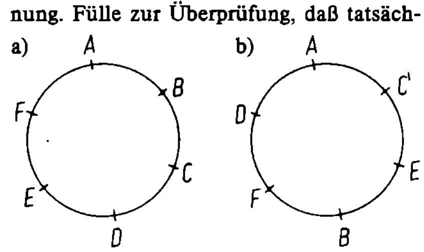
Gib zwei weitere Beispiele an, die aus dem Bild weder durch Spiegeln noch durch Drehen zu erhalten sind und die auch nicht auseinander durch Spiegeln oder Drehen hervorgehen!
b) Ist es möglich, in ein Quadrat von 2×2 Feldern die Zahlen 1, 2, 3, 4 so einzutragen, daß keine zwei der Summen in den Zeilen, den Spalten und den Diagonalen einander gleich sind?
Begründe deine Antwort!

300524 An einem Sportwettkampf sollen 10 Mannschaften teilnehmen. Sie sollen so mit einfarbigen Turnhemden und mit einfarbigen Turnhosen ausgestattet werden, daß sie an den damit erreichbaren Farbkombinationen voneinander zu unterscheiden sind.
a) Welches ist die kleinste Anzahl von Farben, mit der das zu erreichen ist?
b) Wie lautet die Antwort, wenn zusätzlich verlangt wird, daß bei jeder Mannschaft die beiden Farben von Turnhemd und Turnhose voneinander verschieden sind?
Begründe deine beiden Antworten!

Olympiadeklasse 6

300621 a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(1;1)$, $B(5;1)$, $C(5;5)$, $D(1;5)$
und das Quadrat $PQRS$ mit den Eckpunkten $P(9;1)$, $Q(13;1)$, $R(13;5)$, $S(9;5)$ ein!
b) Gibt es eine Spiegelung und auch eine Drehung, bei der das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist? Wenn dies der Fall ist, gib die Koordinaten des Drehzentrums und die Größe des Drehwinkels an! Eine Begründung wird nicht verlangt.
Hinweis: Wenn das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist, so braucht die Reihenfolge P, Q, R, S nicht die Reihenfolge der Bildpunkte A, B, C, D zu sein.

300622 Sechs Personen A, B, C, D, E, F wollen ihre Sitzordnung (Bild a) so ändern, daß in der neuen Sitzordnung jede Person feststellen kann: Unter meinen beiden Nachbarn befindet sich jetzt keiner der beiden, die ich vorher (in Bild a) als Nachbarn hatte.
a) Bild b zeigt eine solche neue Sitzordnung. Fülle zur Überprüfung, daß tatsächlich eine Sitzordnung der geforderten Art vorliegt, die folgende Tabelle aus!



Person	Nachbarn in Bild a	Nachbarn in Bild b
A		
B		
C		
D		
E		
F		

b) Gib alle weiteren Möglichkeiten in einer neuen Sitzordnung der geforderten Art an! Dabei sollen jeweils außer einer schon angegebenen Möglichkeit diejenigen nicht mehr angegeben werden, die aus ihr durch Drehung oder Spiegelung zu erhalten sind. Eine Begründung wird nicht verlangt.

300623 Eine Buchdruckerei habe zum Druck der Ziffern 0, 1, ..., 9 Lettern in folgenden Stückzahlen zur Verfügung:

Ziffer	0	1	2	3	4
Stückzahl	350	340	320	340	360
Ziffer	5	6	7	8	9
Stückzahl	310	300	320	320	340

Unter Verwendung nur dieser Lettern sollen die Seitenzahlen von 1 bis 1020 eines Buches gedruckt werden. Dabei soll keine Letter mehr als einmal benutzt werden. Reichen die Lettern hierfür aus? Begründe deine Antwort!

300624 Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die sich in der Form $n = 5a + 7b$ darstellen lassen, wobei a und b natürliche Zahlen sind!

Olympiadeklasse 7

300721 Über die Schüler einer Schulklasse werden folgende Aussagen gemacht:
(1) Genau 10 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft an.
(2) Genau 8 Schüler gehören einer Sportgemeinschaft an.
(3) Genau 5 Schüler gehören weder einer Arbeitsgemeinschaft noch einer Sportgemeinschaft an.
Gib eine a) möglichst kleine,
b) möglichst große
Schülerzahl der Schulklassen an, bei der die drei Aussaagen wahr sein können! Begründe deine Angaben!

300722 a) Ermittle unter den natürlichen Zahlen a, die größer als 100 und kleiner als 1 000 sind, alle diejenigen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!
(1) a hat genau zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.
(2) a läßt sowohl bei Division durch 11 den Rest 2 als auch bei Division durch 13 den Rest 2.
(3) a ist eine ungerade Zahl.
b) Stelle für jede der drei Bedingungen (1), (2), (3) fest, ob sich am Ergebnis der Aufgabe a) etwas ändert, wenn man diese Bedingung wegläßt und nur jeweils die beiden anderen Bedingungen fordert!

300723 a) Ein an der gesamten Oberfläche gefärbter Holzwürfel soll in gleichgroße Teilwürfel zersägt werden. Dabei

wird gefordert, daß mindestens 40 dieser Teilwürfel völlig ungefärbt sind.
Ermittle die kleinstmögliche Anzahl der Teilwürfel, in die der gesamte Holzwürfel zu zerlegen ist, damit diese Forderung erfüllt wird!
b) Aus 40 so erhaltenen ungefärbten Teilwürfeln soll ein Quader (ohne freibleibende Hohlräume im Innern) zusammengesetzt werden; dabei soll jeder dieser 40 Teilwürfel verwendet werden.
Ermittle das Volumen dieses Quaders, wenn bekannt ist, daß der ursprüngliche Holzwürfel ein Volumen von 27 dm^3 hatte!

300724 In einem Dreieck ABC seien BD bzw. CE die Winkelhalbierenden der Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle ACB$, und S sei der Schnittpunkt von BD mit CE.
a) Beweise: Wird ferner vorausgesetzt, daß der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe $\alpha = 60°$ hat, so folgt, daß dann auch stets der Winkel $\sphericalangle BSE$ die Größe 60° hat!
b) Ermittle eine Formel, mit der sich zu beliebig vorgegebener Größe α des Innenwinkels $\sphericalangle BAC$ die Größe des Winkels $\sphericalangle BSE$ ergibt!

Olympiadeklasse 8

300821 In einem Garten stehen zwei Fässer mit Wasser. Jörg gießt aus dem ersten Faß so viele Liter Wasser in das zweite Faß, wie dort bereits enthalten sind. Anschließend gießt er aus dem zweiten Faß so viele Liter Wasser in das erste, wie sich dort nach dem vorigen Umgießen befinden. Nach diesen beiden Umfüllvorgängen befinden sich in jedem der beiden Fässer genau je 24 Liter Wasser.
Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, wie viele Liter Wasser sich anfangs in jedem der beiden Fässer befanden! Ist dies der Fall, so gib diese beiden Literzahlen an!

300822 Ein Rechteck, dessen Seitenlängen sich wie 1 : 2 zueinander verhalten, soll in acht einander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden.
a) Zeichne und beschreibe eine solche Zerlegung! Begründe, warum die nach deiner Beschreibung entstehenden acht Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig und einander kongruent sind!
b) Ermittle die Länge eines Schenkels dieser Dreiecke in Abhängigkeit von der kleineren der beiden Seitenlängen des Rechtecks!

300823 Jemand möchte in einer Ebene eine Anzahl n von Punkten zeichnen. Sie sollen so gewählt werden, daß keine drei dieser Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Anschließend will er Dreiecke suchen, deren sämtliche drei Ecken zu den gezeichneten n Punkten gehören.
Ermittle die kleinste Anzahl n solcher Punkte, für die es möglich ist, 120 verschiedene derartige Dreiecke zu finden!

300824 Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., 99 999 derart hintereinander aufgeschrieben, daß die Ziffemdarstellung einer Zahl z entsteht.
Der Beginn dieser Darstellung lautet

$$z = 123456789101112131415\ldots;$$

beispielsweise an der elften Stelle steht die Ziffer 0, die Ziffer 2 tritt z. B. an der zweiten Stelle, an der 15ten Stelle und noch an weiteren Stellen von z auf.
Welche Ziffer steht an der 206 788sten Stelle von z?

Olympiadeklasse 9

300921 Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen $x \neq 3$, für die die folgende Ungleichung (1) gilt!

$$\frac{2}{x-3} + \frac{1}{2} < \frac{5}{x-3} - \frac{1}{10} \qquad (1)$$

300922 Man untersuche, ob es ein Rechteck $ABCD$ mit einander gegenüberliegenden Ecken A und C gibt, bei dem im Dreieck ABC die Winkelhalbierende des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ die Seite AB in deren Mittelpunkt schneidet.

300923 a) Wie viele dreistellige natürliche Zahlen, bei denen (wie z. B. 921) die Zehnerziffer größer als die Einerziffer, aber kleiner als die Hunderterziffer ist, gibt es insgesamt?
b) Wie viele sechsstellige Zahlen insgesamt lassen sich dadurch herstellen, daß man zwei verschiedene der unter a) beschriebenen Zahlen auswählt und die größere dieser beiden Zahlen hinter die kleinere schreibt?
c) Die kleinste unter allen denjenigen in b) beschriebenen sechsstelligen Zahlen, bei denen die zweite der genannten dreistelligen Zahlen genau um 1 größer ist als die erste, ist die Telefonnummer des Senders Potsdam. Wie lautet sie?

300924 Für jede natürliche Zahl $m \geqq 2$ sei folgendes Vorhaben betrachtet: Jemand möchte m verschiedene von einem Punkt P ausgehende Strahlen zeichnen. Dann möchte er alle diejenigen Winkelgrößen zwischen 0° und 360° feststellen, die bei Messung eines Winkels jeweils von einem dieser Strahlen in mathematisch positivem Drehsinn zu einem anderen dieser Strahlen auftreten können.
Er möchte die m Strahlen so zeichnen, daß sich dabei
a) möglichst wenige,
b) möglichst viele
verschiedene Winkelgrößen feststellen lassen. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von m die kleinst- bzw. größtmögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen, die so erreichbar sind!

Olympiadeklasse 10

301021 In dem nachstehenden Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, daß gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden und daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Der Buchstabe o braucht nicht durch die Ziffer 0 (Null) ersetzt zu werden.

```
    m o r d
  + r a u b
  = k r i m i
```

a) Beweisen Sie, daß sogar in keiner Lösung des Kryptogrammes der Buchstabe o durch 0 ersetzt wird!
b) Geben Sie vier Ersetzungen an, unter denen sich keine zwei mit gleichem Wert für a befinden! Bestätigen Sie, daß die von Ihnen angegebenen Ersetzungen vier Lösungen des Kryptogramms sind!

301022 Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{n}$ irrational ist!
(Dabei werde wie üblich eine natürliche Zahl n genau dann Quadratzahl genannt, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, mit der $n = k^2$ gilt.)

301023 Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn $ABCD$ ein Rechteck mit $\overline{AB} > \overline{AD}$ ist, so schneidet die Mittelsenkrechte der Diagonale AC die Randlinie des Dreiecks ABC in einem Punkt P, der zwischen B und dem Mittelpunkt Q der Strecke AB liegt.

301024 Für jede ganze Zahl $n > 0$ sei

$$a_n = \left((n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}\right)^{-1};$$

mit dieser Bezeichnung sei

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_{1989} + a_{1990}.$$

Beweisen Sie, daß hieraus $0{,}5 < s < 1$ folgt!

Olympiadeklassen 11/12

301221 Man beweise die folgende Aussage: Wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind, für die

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \qquad (1)$$

gilt, dann gilt auch stets

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}. \qquad (2)$$

301222 Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y, die dem System der folgenden Ungleichungen (1) und (2) genügen:

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0, \qquad (1)$$
$$4x + 2y > 5. \qquad (2)$$

301223 Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}. \qquad (1)$$

Hinweis: Für jede natürliche Zahl $q = 2$ bezeichnet $q!$ wie üblich das Produkt aller derjenigen natürlichen Zahlen i, für die $1 \leqq i \leqq q$ gilt.

301224 Ist ABC ein Dreieck, so bezeichne S den Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden, ferner sei mit U, V bzw. W der Fußpunkt des von S auf die Seite BC, CA bzw. AB gefällten Lotes bezeichnet, und $J(ABC)$ bzw. $J(UVW)$ bezeichne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bzw. UVW.
Man beweise mit diesen Bezeichnungen, daß das Verhältnis

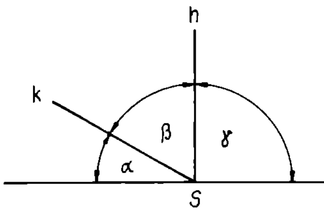
$$r = J(UVW) : J(ABC)$$

in allen rechtwinkligen Dreiecken ABC denselben Wert hat und ermittle diesen Wert r.

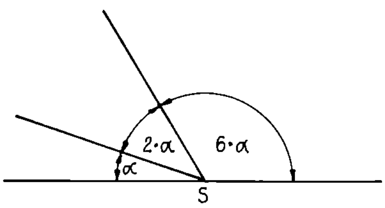
Kurz nachgedacht!

1. Wie groß sind α, β und γ? Begründe!

$g \perp h$
$\beta = 2 \cdot \alpha$

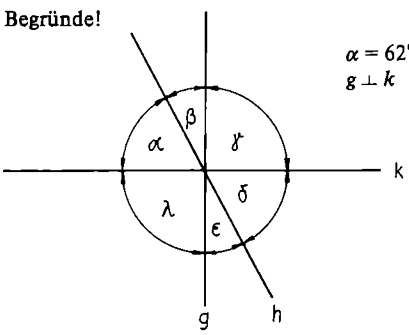


2. Wie groß ist α? Begründe!

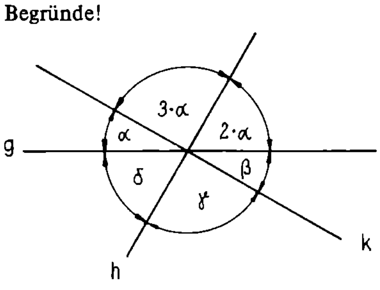


3. Wie groß sind β, γ, δ, ε und λ? Begründe!

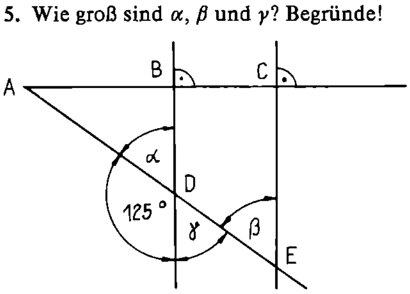
$\alpha = 62°$
$g \perp k$



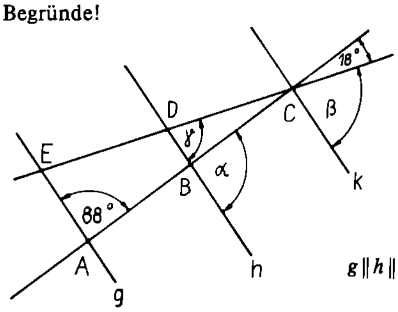
4. Wie groß sind α, β, γ und δ? Begründe!



5. Wie groß sind α, β und γ? Begründe!

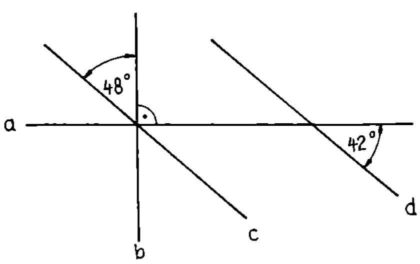


6. Wie groß sind α, β und γ? Begründe!

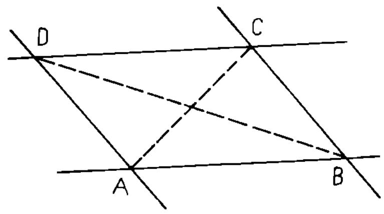


$g \| h \| k$

7. Beweise, daß $c \| d$!

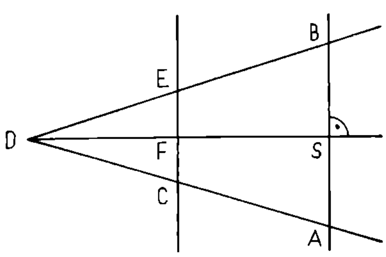


8. Begründe, daß
a) $\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle BCA$,
b) $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle BDC$!



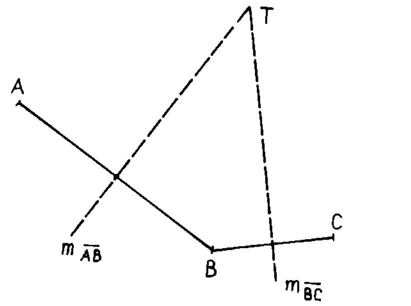
$AB \| CD$ und $AD \| BC$

9. Begründe, daß
a) CE Symmetrieachse zu $\overline{DS}$ ist,
b) $\overline{DC} = \overline{CS}$ und $\overline{DE} = \overline{ES}$ gilt.
Wann gilt $\overline{DC} = \overline{DE} = \overline{ES} = \overline{CS}$?

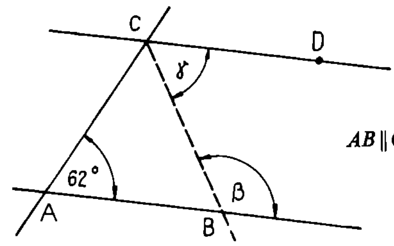


$AB \| CE$ und $\overline{DF} = \overline{FS}$

10. Beweise, daß $\overline{AT} = \overline{CT}$!



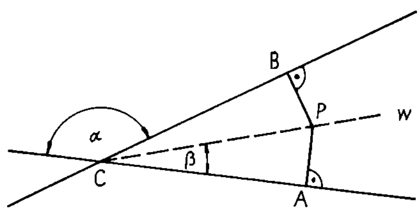
11. Wie groß sind β und γ? Begründe!



$AB \| CD$

CB sei Halbierende des Winkels $\sphericalangle ACD$!

12. Gib eine Gleichung zwischen α und β so an, daß für alle Punkte P auf w gilt: $\overline{PA} = \overline{PB}$!



Lösungen

1. $\gamma = 90°$, da $g \perp h$; $\alpha + \beta + \gamma = 180°$;
$\alpha + \beta = 90°$; $3\alpha = 90°$;
$\alpha = 30°$; $\beta = 60°$

2. $\alpha + 2\alpha + 6\alpha = 180°$;
$9\alpha = 180°$; $\alpha = 20°$

3. $\gamma = 90°$, $\lambda = 90°$,
$\alpha + \beta = \varepsilon + \delta = 90°$, da $g \perp k$; $\beta = \varepsilon$ und $\alpha = \delta$, da Scheitelwinkel;
$\alpha = 62°$; $\delta = 62°$; $\beta = 28°$; $\varepsilon = 28°$

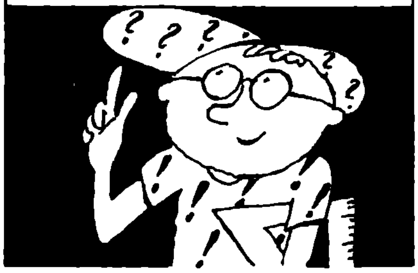
4. $\alpha + 3\alpha + 2\alpha = 180°$; $\alpha = 30°$
$\alpha = \beta$ (Scheitelwinkel), $\beta = 30°$;
$3\alpha = \gamma$ (Scheitelwinkel), $\gamma = 90°$;
$2\delta = \delta$ (Scheitelwinkel), $\delta = 60°$

5. $\alpha = \beta$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen);
$\alpha = \gamma$ (Scheitelwinkel);
$\alpha + \gamma + 2 \cdot 125° = 360°$;
$2\alpha + 250° = 360°$;
$\alpha = 55°$; $\beta = 55°$; $\gamma = 55°$

6. $\alpha = \beta + 18°$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen);
$\alpha = 180° - 88°$ (Stufenwinkel an Parallelen g und h);
$\alpha = 92°$; $\beta = 74°$;
$\beta = \gamma$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen); $\gamma = 74°$

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

Lösungen

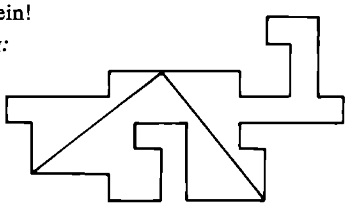


Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Zerlegung

Zerlegt die vorliegende Fläche in genau drei Teile, so daß ihr diese dann zu einem Quadrat zusammensetzen könnt! Zeichnet die entsprechenden Zerlegungslinien in die Figur ein!

Lösung:



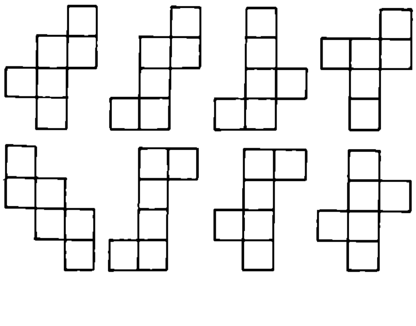
▲2▲ Kann der Ausdruck $a^2 - b^2 + c^2$ (ohne Rest) durch 5 geteilt werden, wenn nicht eine der ganzen Zahlen a, b und c durch 5 teilbar ist?

Lösung: Nein, das ist nicht möglich. *Beweis:* Das Quadrat einer ganzen Zahl, welche kein ganzzahliges Vielfaches von 5 ist, läßt bei Division durch 5 den Rest 1 oder 4. Somit ist $a^2 - b^2$ entweder ohne Rest durch 5 teilbar (Fall 1), oder es entsteht der Rest 2 oder 3 (Fall 2). Da laut Aufgabenstellung c nicht ohne Rest durch 5 teilbar ist, folgt die Richtigkeit der Behauptung im Fall 1. Im Fall 2 errechnet man, daß der gegebene Ausdruck bei Division durch 5 den Rest 1, 2, 3 oder 4 läßt. Somit gilt die Behauptung auch in diesem Falle. Sie gilt damit insgesamt, w. z. b. w.

▲3▲ Würfelnetze

Das Bild zeigt drei, aus je sechs Quadraten bestehende Netze. Es ist leicht zu sehen, daß aus den beiden linken ein Quader gefaltet werden kann. Mit etwas mehr Mühe kannst du erkennen, daß auch das rechte Netz zu einem Quader geformt werden kann. Wieviel Netze aus sechs Quadraten gibt es, die man zu einem Würfel falten kann?

Lösung: Es gibt acht weitere Netze aus sechs Quadraten, die zu einem Würfel gefaltet werden können.



Lösung zur Schachecke

1. Ta1 Ka8 2. Ka4 Ka7 3. Ka3 Ka6 4. Ka2 Ka5 5. Kb1 matt.

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Aus den Silben

Außenwinkel, Radius, Cantor, Hektoliter, Inkreis, Mittelpunkt, Exponent, Durchmesser, Ebene, Sekante – Archimedes.

Magie

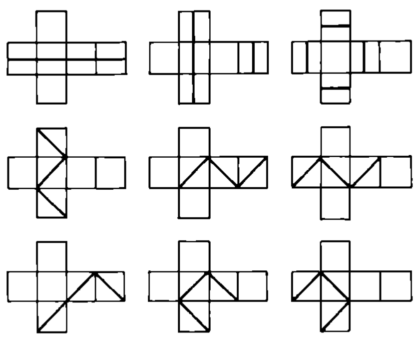
3	17	7
13	9	5
11	1	15

$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$

Schnell zusammensetzen

Die Lösung sei dem Leser überlassen.

Nicht im Netz verfitzen



Erst Buchstaben, dann Ziffern

a = 0; $b = 1$; $c = 2$; $d = 4$; $e = 6$; $f = 5$; $g = 9$.

„Bum!“

142mal

Knifflige Fragen

Komma (4,5); 6 Kinder; 2 m; 2,2.

Irrgärten

Die Lösung sei dem Leser überlassen.

Chemische Untersuchungen

$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 320 = 135$.

Im Gefäß bleiben 135 g der Substanz.

Haarspaltereien

Unter 150 001 Menschen gibt es wenigstens zwei Personen, die die gleiche Anzahl von Kopfhaaren besitzen. Moskau hat über 6 Millionen Einwohner.

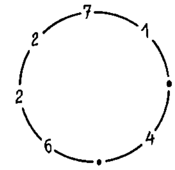
$39 \cdot 150\,001 = 5\,850\,039$.

Aus $5\,850\,039 < 6\,000\,000$ folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Lösung zu: Die Entdeckung der Osterinsel

Die auf diesem Schachbrett möglichen Züge bilden den abgebildeten Zyklus der Länge 8.

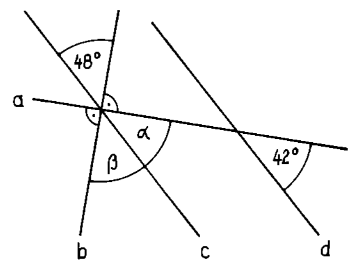
Mittels zulässiger Rösselsprünge ergeben sich damit als mögliche Datumsangabe 1. 4. 6227, 26. 4. 172 und 6. 4. 1722. Die beiden ersten Angaben scheiden aus. Die Entdeckung der Osterinsel kann weder im noch nicht begonnenen 7. Jahrtausend u. Z. noch aus geschichtlichen Gründen im



2. Jahrhundert u. Z. erfolgt sein. Im 2. Jahrhundert war der Seeweg von Europa nach dem Pazifik noch unbekannt, dürften die technischen Voraussetzungen für eine so lange Seereise nicht gegeben gewesen sein und gab es noch keinen niederländischen Staat und keine niederländische Sprache. Das gesuchte Datum ist 6. 4. 1722.

Fortsetzung von Seite 24

7. Behauptung $c \parallel d$ kann nur gelten genau dann, wenn $\alpha = 42°$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen).



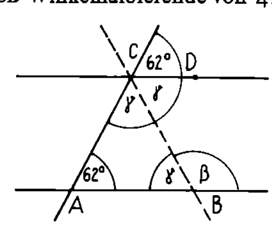
Beweis: $90° + \alpha + \beta = 180°$
$\beta = 48°$ (Scheitelwinkel)
$\alpha = 180° - 90° - 48°$
$\alpha = 42°$ w. z. b. w.

8. $\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle BCA$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen);
$\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle BDC$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)

9. a) $\sphericalangle EFS = 90°$
(Stufenwinkel zu 90°-Winkel in S);
$\overline{DF} = \overline{FS}$ (nach Voraussetzung);
also ist CE Symmetrieachse zu $\overline{DS}$
b) $\triangle DFE \cong \triangle FSE$ (nach sws),
also gilt $\overline{DE} = \overline{ES}$;
$\triangle DCF \cong \triangle CSF$ (nach sws),
also gilt $\overline{DC} = \overline{CS}$.
$\overline{DC} = \overline{DE} = \overline{ES} = \overline{CS}$ gilt genau dann, wenn $\sphericalangle CDF \cong \sphericalangle FDE$

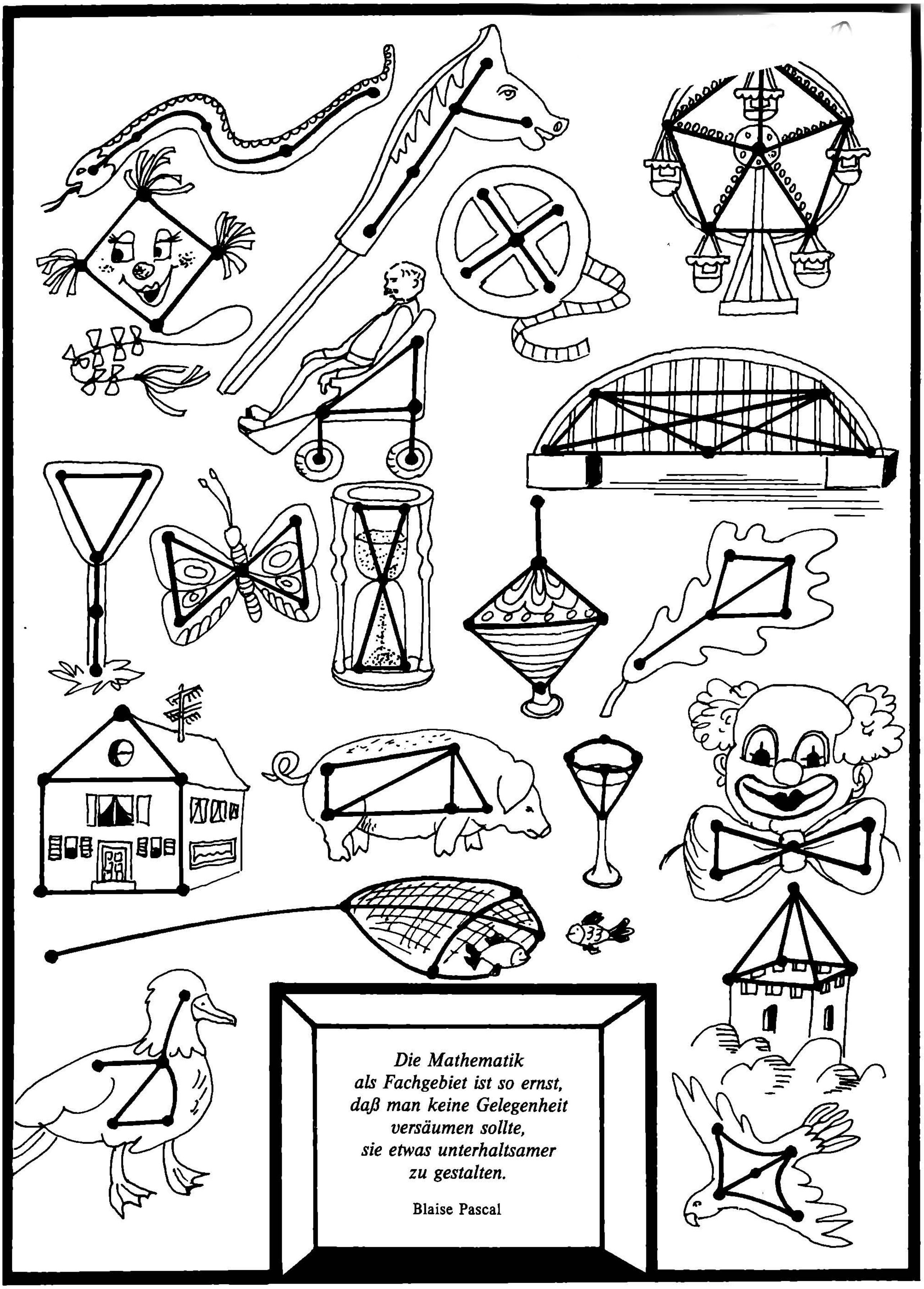
10. $\triangle ATB$ gleichschenklig, da T Punkt auf $m_{\overline{AB}}$; $\triangle BTC$ gleichschenklig, da T Punkt auf $m_{\overline{BC}}$; also $\overline{AT} = \overline{BT} = \overline{CT}$

11. $2\gamma + 62° = 180°$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und CB Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACD$)



$\gamma = 59°$; $\beta = 180° - \gamma$, $\beta = 121°$

12. $\overline{PA} = \overline{PB}$ für alle P auf w genau dann, wenn w Winkelhalbierende von $\sphericalangle BCA$.
Dann gilt: $\sphericalangle BCP = \beta$, also $\alpha + 2\beta = 180°$.



ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 25 (1991) 1 · Seiten 1 bis 24