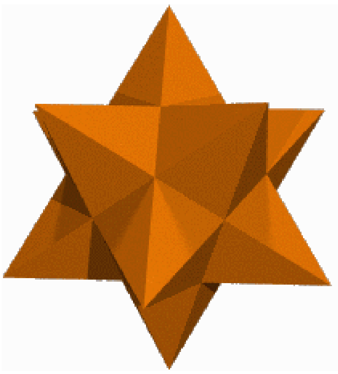
Mathematik



griechisch: μαθημα, mathema = "Wissenschaft"
... ursprüngliche Bezeichnung für Wissenschaft überhaupt
... entstand aus praktischen Problemen des Zählens, Messens, Rechnens und geometrischen Zeichnens

"Merkwürdig ist es immer, dass alle diejenigen, die diese Wissenschaft ernstlich studieren, eine Art Leidenschaft dafür fassen."
Gauß 1808 an Bolyai

Auch heute ist es noch eine wichtige Aufgabe der Mathematik, mathematische Modelle zur Beschreibung von natur-, wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Erscheinungen bereitzustellen, die der numerischen Berechnung durch Computer zugänglich sind

"Hochtechnologie ist im wesentlichen mathematische Technologie."
Enquete-Kommission der US-amerikanischen Akademie der Wissenschaften
"Mathematik ist eine Tätigkeit, die von Tätigkeit handelt. Sie ist nicht an ihr Ende gelangt - ja, sie hat noch kaum begonnen, auch wenn ihre Werke den Glanz von Monumenten haben mögen."
(Robert Kaplan)

Entwicklung der Mathematik

... das mathematische Denken dürfte einerseits aus dem Zählen von Gegenständen (Finger, Hände), andererseits aus praktischen geometrischen Aufgaben (Landvermessung, Häuserbau) entstanden sein. Älteste Urkunde ist das Rechenbuch des Ahmes (1800 v.Chr.) in Ägypten.

Hinter der Mathematik stecken die Zahlen. Wenn mich jemand fragen würde, was mich richtig glücklich macht, dann würde ich antworten: die Zahlen. Schnee und Eis und Zahlen. Und weißt Du warum? Weil das Zahlensystem wie das Menschenleben ist.
Zu Anfang hat man die natürlichen Zahlen. Das sind die ganzen und positiven. Die Zahlen des Kindes. Doch das menschliche Bewusstsein expandiert. Das Kind entdeckt die Sehnsucht, und weißt Du, was der mathematische Ausdruck für die Sehnsucht ist?
Es sind die negativen Zahlen. Die Formalisierung des Gefühls, dass einem etwas abgeht. Und das Bewusstsein erweitert sich immer noch und wächst, das Kind entdeckt die Zwischenräume. Zwischen den Steinen, den Moosen auf den Steinen, zwischen den Menschen. Und zwischen den Zahlen. Und weißt Du, wohin das führt?
Zu den Brüchen. Die ganzen Zahlen plus die Brüche ergeben die rationalen Zahlen. Aber das Bewusstsein macht dort nicht halt. Es will die Vernunft überschreiten. Es fügt eine so absurde Operation wie das Wurzelziehen hinzu.
Und erhält die irrationalen Zahlen. Es ist eine Art Wahnsinn. Denn die irrationalen Zahlen sind endlos. Man kann sie nicht schreiben. Sie zwingen das Bewusstsein ins Grenzenlose hinaus. Und wenn man die irrationalen Zahlen mit den rationalen Zahlen zusammenlegt, hat man die reellen Zahlen. Es hört nicht auf. Es hört nie auf.
Denn jetzt gleich, auf der Stelle erweitern wir die reellen Zahlen um die imaginären, um die Quadratwurzeln der negativen Zahlen. Das sind Zahlen, die wir uns nicht vorstellen können. Zahlen, die das Normalbewusstsein nicht fassen kann.
Und wenn wir die imaginären Zahlen zu den reellen Zahlen dazurechnen, haben wir das komplexe Zahlensystem. Das erste Zahlensystem, das eine erschöpfende Darstellung der Eiskristallbildung ermöglicht.
Es ist wie eine große, offene Landschaft. Die Horizonte. Man zieht ihnen entgegen, und sie ziehen sich immer wieder zurück.
(aus: "Fräulein Smillas Gespür für Schnee", Peter Høeg)

Teilgebiete der Mathematik

„Mathematik ist kein starres Konstrukt aus Grundannahmen und Regeln. Sie hat ihren eigenen, lebendigen Geist. Die Ästhetik des Abstrakten, die Poesie der Fiktionen machen sie zur Lyrik der Wissenschaften"

„Abenteuer Mathematik" Pierre Basieux

Mathematische Logik ... formalisiert die Sprache, in der mathematische Aussagen gemacht werden, stellt Regeln auf, um von Aussagen auf neue schließen zu können, analysiert Aussageformen und entwickelt Beweisverfahren.

Mengenlehre ... präzisiert den Mengenbegriff und behandelt die Verknüpfung von Mengen

Algebra ... untersucht algebraische Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume, ...). Es werden Lösungsmethoden für Gleichungen und Gleichungssystem bereitgestellt. Im Rahmen der linearen Algebra werden Matrizen und Determinanten eingeführt. Mit der Galoistheorie können geometrische Probleme algebraisch untersucht werden.
Abbildung: Titelbild des grundlegenden Algebra-Werkes von al-Hwarizmi

Zahlentheorie ... beschäftigt sich mit Teilbarkeitsfragen im Ring der ganzen Zahlen und in algebraischen Zahlkörpern

Topologie ... untersucht topologische Strukturen

Geometrie ... widmet sich der Untersuchung der Form und Größe von Figuren

Analytische Geometrie ... benutzt zur Untersuchung der Räume und Figuren den Vektorbegriff. Durch diesen und die Einführung von Koordinaten wird die Geometrie algebraisiert.

Algebraische Topologie (analysis sinus) ... bedient sich algebraischer Hilfsmittel zur Beantwortung topologischer Fragen

Graphentheorie ... ist aus der Topologie hervorgegangen und untersucht Probleme, welche auf Ecken und verbindende Kanten zurückgeführt werden können

Differenzial- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung) ... benutzt den Grenzwertbegriff und kann somit besondere Eigenschaften von Funktionen und Kurven untersuchen

Analysis ... Zweig der Mathematik, der hauptsächlich Untersuchungen über Grenzwerte anstellt und die Infinitesimalrechnung nutzt. Der Begriff wurde erstmals von Euler 1748 in "Introductio in analysin infinitorum" verwendet

Theorie der Differenzialgleichungen ... stellt Methoden zur Verfügung, um solche Gleichungen zu lösen

Funktionalanalysis ... ist eine weitgehende Verallgemeinerung der Integralrechnung und wendet topologische Methoden auf Funktionen an

Differenzialgeometrie ... untersucht mit Mitteln der Infinitesimalrechnung geometrische Figuren

Funktionentheorie ... überträgt die Infinitesimalrechnung auf Funktionen im Zahlenbereich der komplexen Zahlen

Kombinatorik ... untersucht Anzahlprobleme endlicher Mengen

Wahrscheinlichkeitsrechnung ... trifft Aussagen über das Eintreten zufälliger Ereignisse und ist die Grundlage der Statistik

Maßtheorie ... untersucht, ob und wie man Punktmengen eine Zahl zuordnen kann

Chaostheorie ... die Chaostheorie untersucht das Verhalten dyamischer Systeme und fraktaler Strukturen

Eine Sprache, die allgemeinverständlicher und einfacher, freier von Irrtümern und Verschwommenheiten... würdiger wäre, die unveränderlichen Beziehungen der natürlichen Dinge auszudrücken als die Mathematik, kann es nicht geben.
Joseph Fourier, 1822

Top Ten der schönsten mathematischen Sätze

Nach einer Leserumfrage des "The Mathematical Intelligencer" von 1990 wurden die zehn schönsten mathematischen Sätze gewählt:

Platz 1 $e^{i\pi} = -1$, Euler 1748
Platz 2 Polyederformel für ein konvexes Polyeder: E-K+F=2 , Euler 1751
Platz 3 Es gibt unendlich viele Primzahlen , Euklid ca. 300 v.Chr.
Platz 4 Es gibt nur 5 reguläre Polyeder, die platonischen Körper , Theaitetos, gest. 396 v.Chr.
Platz 5 Die Summe aller $1/n^2$ ist gleich $\pi^2/6$, James Gregory 1675
Platz 6 Jede stetige Abbildung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in sich hat einen Fixpunkt, Brouwer 1911
Platz 7 $\sqrt{2}$ ist irrational , Euklid
Platz 8 π ist transzendent, Lindemann 1882
Platz 9 Jede ebene Landkarte kann mit höchstens 4 Farben gefärbt werden , Appel, Haken 1976
Platz 10 Jede Primzahl p der Form 4n+1 kann eindeutig als Summe zweier Quadratzahlen geschrieben werden, Euler 1754

Eine heutige Umfrage würde den jetzt bewiesenen letzten Fermatschen Satz wahrscheinlich vor dem Vierfarbensatz rangieren lassen: Für $n > 2$ hat $X^n+Y^n = Z^n$ keine ganzzahligen Lösungen X, Y, Z, alle verschieden von 0. Wiles 1994
Weitere schöne Sätze
Platz 11 Die Ordnung einer Untergruppe teilt die Gruppenordnung , Lagrange
Platz 12 Fundamentalsatz der Algebra , Gauß 1797

10 bedeutendste Gleichungen aller Zeiten

Im Jahre 2001 führte Clifford Pickover eine Internet-Umfrage nach den bedeutendsten Gleichungen aller Zeiten durch. Dort wurde folgendes gewählt:

Platz 1 $E = mc^2$, Masse-Energie-Äquivalenz von Einstein
Platz 2 $a^2 + b^2 = c^2$, Satz des Pythagoras
Platz 3 $\varepsilon_0 \int \vec{E}\, d\vec{A} = \Sigma q$, eine Maxwellsche Gleichung zur Beschreibung elektromagnetischer Felder
Platz 4 $x = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}) / (2a)$, Lösungsformel quadratischer Gleichungen
Platz 5 $\vec{F} = m \vec{a}$, zweites Newtonsches Gesetz
Platz 6 $1 + e^{i\pi} = 0$, Eulersche Beziehung
Platz 7 $u = 2\pi r$, $A = \pi r^2$, Umfang und Flächeninhalt des Kreises
Platz 8 $\vec{F} = G\, m_1\, m_2\, \vec{r}/r^3$, Newtonsches Gravitationsgesetz
Platz 9 $f(x) = \Sigma\, c_n\, e^{in\pi\, x/L}$, eine Fourier-Reihe
Platz 10 $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, Eulers Identität von Exponential- und trigonometischen Funktionen
$a^n + b^n = c^n$, $n \geq 2$, großer Satz von Fermat

Auf den weiteren Plätzen folgten weitere mathematische Gleichungen: 11. $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2!$ ... (Taylor-Entwicklung), 14. $z \rightarrow z^2 + \mu$ (Definition der Mandelbrotmenge), 15. $e = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$ (Definition der Eulerschen Zahl), 16. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$ (Kosinussatz), 17. $\int K\, dA = 2\pi \times \chi$ (Gauß-Bonnet-Beziehung), 18. $d/dx \int f(t)/dt = f(x)$

(Zusammenhang Integration-Differenziation), 19. $1/(2\pi i) \int f(z)/(z-a)\, dz = f(a)$ (Cauchysche Integralformel), 20. $dy/dx = \lim_{h\to 0} (f(x+h) - f(x))/h$ (Differenzialquotient).
Nach Aussage Pickovers gehört jeder, der 5 der ersten 10 Gleichungen indentifizieren kann, zu dem 1% von Menschen auf diesem Planeten, die etwas Ahnung von Mathematik haben.

Griechisches Alphabet

A,α	Alpha	B,β	Beta	Γ,γ	Gamma	Δ,δ	Delta	E,ε	Epsilon	Z,ζ	Zeta
H,η	Eta	Θ,θ,ϑ	Theta	I,ι	Jota	K,κ	Kappa	Λ,λ	Lambda	M,μ	My
N,ν	Ny	Ξ,ξ	Xi	O,o	Omikron	Π,π	Pi	P,ρ	Rho	Σ,σ,ς	Sigma
T,τ	Tau	Y,υ	Ypsilon	Φ,ϕ	Phi	X,χ	Chi	Ψ,ψ	Psi	Ω,ω	Omega

Beispiele

α, β, χ sehr oft Winkelbezeichnung
Δ Bezeichnung einer Differenz
ε oft kleine positive Größen (z.B. ε-Umgebung)
θ Temperatursymbol
λ oft für die Wellenlänge oder als Zerfallskonstante
μ oft für ein Millionstel
π Kreiszahl
ρ die Dichte eines Stoffes, Inkreisradius
ω Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit
Σ sehr oft als Summenbezeichnung

Zahl

... grundlegender Begriff der Mathematik.
Der abstrakte Zahlenbegriff in seiner heutigen Fassung in das Ergebnis eines jahrtausendelangen Entwicklungsprozesses.
Die natürlichen Zahlen entstanden aus dem praktischen Bedürfnis, Gegenstände zu zählen. Sie bedeuten Anzahlen von Gegenständen, die zum Zählen in geeigneter Weise angeordnet und mit den Elementen einer bekannten anderen Menge verglichen wurden.
Das Zählen gehörte bereits zu den Bedürfnissen der Menschen auf einer sehr frühen Entwicklungsstufe. Die Zahlen, mit denen man zählen und abzählen kann, d.h. die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,..., sind folglich sehr alt. Deshalb gehören Zahlwörter zu den ältesten Bestandteilen der Sprachen. Diese Zahlen im ursprünglichen Sinne, die sich ganz natürlich ergeben, sind die natürlichen Zahlen.

Abbildung: Briefmarke zum Internationalen Mathematikerkongress

Kardinalzahl, Grundzahl

Mengentheoretisch gibt die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge ihre Kardinalzahl oder Grundzahl an. Durch Zählen wird einer Menge ihre Kardinalzahl zugeordnet.

Ordinalzahl

während die Bezeichnung der Stelle, die ein Element in einer geordneten Menge einnimmt, durch eine Ordinalzahl bezeichnet wird.

Zahlensystem

... System von Zahlzeichen oder Ziffern, durch die sich nach gewissen Regeln alle natürlichen Zahlen darstellen lassen.

Ziffer, Zahlzeichen

... arabische Ziffern = die jetzt üblichen, ursprünglich indischen Zeichen 1, 2, 3, ..., 9 und 0. Sie stellen gleichzeitig Zahlen dar (Einer), während alle anderen Zahlen durch Kombination mehrerer Ziffern zu einer Ziffernfolge gebildet werden. Dabei ist die Bedeutung der Ziffer durch ihren Platz (Stellenwert) in der Ziffernfolge bestimmt.

Positionssystem

... eine natürliche Zahl B und eine Menge von B Symbolen. B ist die Basis; die Symbole sind die Ziffern des Positionssystems.

Darstellung einer Zahl z im Zahlensystem zur Basis B

$z_{(B)} = \Sigma\ z_i\ B^i$; Summenbildung von i = -m bis n, $B \in N$, $B \geq 2$

Das Positionssystem zur Basis 10 ist die Grundlage der modernen Zahldarstellung und wird Dezimalsystem genannt.
Das System zur Basis 2 wird Binärsystem, Dualsystem oder dyadisches System genannt.
Ein System zur Basis heißt ternär, zur Basis 4 quaternär, zur Basis 5 quinär, zur Basis 8 oktal, zur Basis 12 duodezimal, zur Basis 16 hexadezimal, zur Basis 20 vigesimal und zur Basis 60 sexagesimal.
Die Basis B muss nicht notwendigerweise eine natürliche Zahl sein. Es wurde nachgewiesen, dass sämtliche komplexen Zahlen mit Betrag größer 1 als Basis eines Stellenwertsystems verwendet werden können.

In einem Positionssystem bzw. Stellenwertsystem werden Zahlen mit Hilfe von Ziffern und gegebenenfalls Vorzeichen oder Trennzeichen, dargestellt. Der Wert einer Zahl ergibt sich dann aus der Anordnung der Zeichen.
Die Anzahl der vorhandenen Ziffern wird Basis b des Stellenwertsystems genannt. Man spricht von einem b-adischen Zahlensystem. Oft verwendete Basen sind:
b=2 das in der Digitaltechnik verwendete Dualsystem
b=10 unser vertrautes Dezimalsystem
b=16 das in der Datenverarbeitung wichtige Hexadezimalsystem.

Ziffernvorrat

Bei einer b-adischen Zahldarstellung werden genau b verschiedene Ziffern verwendet. Die Ziffern stehen dabei für die natürlichen Zahlen 0 bis b-1.
Im Dualsystem werden die beiden Ziffern 0 und 1 verwendet und ihnen jeweils die Zahlen 0 und 1 zugeordnet. Im Hexadezimalsystem werden die sechzehn Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E und F verwendet und die Zahlen von 0 bis 15 in der natürlichen Reihenfolge zugeordnet.

Stellenwert

Der Wert einer Zahl ergibt sich durch die Anordnung der Ziffern in einer Reihe. Jeder Stelle wird ein Stellenwert zugewiesen, der einer Potenz der Basis entspricht. Die Stelle mit der niedrigsten Bewertung steht dabei ganz rechts.

Additionssystem, additives Zahlensystem

In einem Additionssystem wird eine Zahl als Summe der Werte ihrer Ziffern dargestellt. Dabei spielt die Position der einzelnen Ziffern keine Rolle.
Beispiele sind das Strichsystem (Unärsystem) und das System der römischen Zahlen.

Gerade Zahl ... natürliche Zahl, welche sich ohne Rest durch 2 teilen lässt
Ungerade Zahl ... natürliche Zahl, welche sich nicht ohne Rest durch 2 teilen lässt, also nicht gerade ist

Anfänge des Zählens und Rechnens

... vor 12000 bis 15000 Jahren mit dem Beginn der Sesshaftigkeit und der Arbeitsteilung
... Herausbildung abstrakter Zahlwörter erfolgte in mehreren Stufen
Beispiel: Indianer West-Kanadas bezeichneten 3 Dinge mit "tcha", 3 Personen mit "tchane", 3mal mit "tchat", an 3 Stellen mit "tchatoen". Aber ! Ein abstraktes Wort für "3" existiert nicht.
... nach Entstehung erster abstrakter Zahlwörter sind diese auf kleine Werte beschränkt
Beispiel: der Indianerstamm der Yankos am Amazonas zählt nur bis 3 ("Poettarrarorincoaroac"). Höher Werte sind einfach "viel".
... das Volk der Mundurukú in einem autonomen Gebiet Brasiliens kennt nur Worte für die Zahlen 1 bis 5. De facto existieren sogar nur klare Begriffe für eins und zwei; die 3 benennen sie sinngemäß zwei plus eins, die 4 dann zwei plus eins plus eins, 5 ist eine Hand. Als eine Hand wird aber auch manchmal 6, 7, 8 oder 9 benannt. Die Mundurukú schätzen größere Zahlen und benennen sie mit Ausdrücken wie manche, viele, mehr als eine Hand, ...
... bei der Entstehung der Zahlsysteme wurden unterschiedliche Grundzahlen genutzt, meist aber 2, 5, 10, 20 oder 60.

Die Einwohner einer Inselgruppe in der Torresstraße südlich Neuguineas sowie eines südaustralischen Stamms rechnen im Zweiersystem; in der neuguinesischen Sprache Wedau ist die 5 die Grundzahl.
In der Tabelle sind die entsprechenden Zahlwörter genannt:

Zahl	**Torresstraße**	**Wedau**	**Südaustralien**
1	urapun	tagogi	enea
2	okosa	ruag'a	petcheval
3	okosa-urapun	tonug'a	petcheval-enea
4	okosa-okosa	riag'a-ma-ruag'a	
5	okosa-okosa-urapun	ura-i-ga	
6	okosa-okosa-okosa	ura-g'ela-tagogi (=5+1)	
11	-	ura-g'a-i-ga-au-ae-tagogi (= 5*2 +1)	

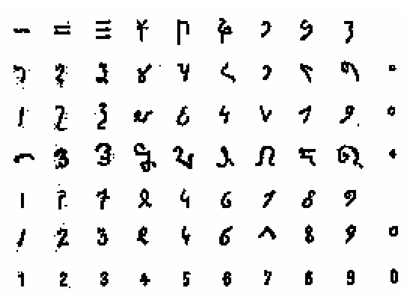
Römische Zahlzeichen

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Regeln

Es wird links mit dem Symbol der größten Zahl begonnen. Die Symbole I, X und C werden höchstens dreimal hintereinander geschrieben, die Symbole V, L und D einmal.
Steht ein Symbol einer kleineren Zahl vor dem einer größeren, so wird sein Wert von dem folgenden größeren subtrahiert. Voranstellen darf man immer nur ein kleineres Grundsymbol.
Ursprünglich schrieben die Römer (|) (abgeleitet von ϕ ... phi) für die 1000. Das Symbol M kam erst im Mittelalter zur Verwendung.
Das Symbol D = 500 entstand aus dem hinteren Teil von (|). Die Zeichen L, X und V sind Ableitungen aus dem chalkidischen Alphabet. Ebenso schrieben die antiken Römer durchaus auch vier mal IIII hintereinander, wie mehrere Inschriften im Forum Romanum beweisen. Die Forderung, die 4 als IV zu schreiben, kam erst später auf.
Von evtl. mehreren möglichen Schreibweisen wählt man heute die kürzere: z.B. MXMVIII an Stelle von MCMXCVIII für 1998
Das römische Zahlensystem stellt mit seinen ungleichen Inkrementen eine unzweckmäßige Seitenentwicklung der Zahlensysteme dar. Es ist zur Multiplikation, Potenzierung und allgemein zum Rechnen mit den in der Astronomie notwendigen großen Zahlen völlig ungeeignet.
Dies ist sicher der Hauptgrund, warum die ansonsten hochstehende Kultur der Römer keinerlei Entdeckungen auf dem Gebiet der Physik, Mathematik oder Astronomie hervorgebracht hat.

1	I	2	II	3	III	4	IV	5	V	6	VI
7	VII	8	VIII	9	IX	10	X	11	XI	12	XII
13	XIII	14	XIV	15	XV	16	XVI	17	VII	18	XVIII
19	XIX	20	XX	21	XXI	22	XXII	23	XXIII	24	XXIV
25	XXV	26	XXVI	27	XXVII	28	XXVIII	29	XXIX	30	XXX



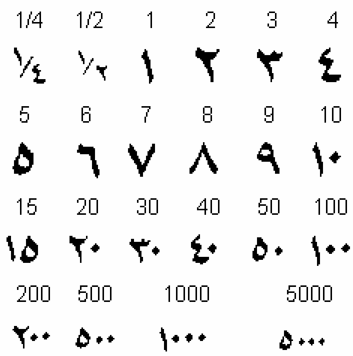
7.Zeile: heutige Schrift

Entwicklung der arabischen Ziffern

1.Zeile: Brahmi-Schrift, 1.Jh.v.Chr.
2.Zeile: Hinduistisch, um 876
3.Zeile: Arabisch, um 970
4.Zeile: Indisch, 12.Jh.
5.Zeile: Europäisch, 12.Jh.
6.Zeile: älteste gedruckte Schrift um 1474

Arabische Zahlzeichen

In der unteren Abbildung sind die aktuellen im arabischen Sprachraum verwendeten Zahlzeichen abgebildet. Im Iran und Afghanistan weichen einige Ziffern etwas ab.
In Marokko werden die europäischen Zahlzeichen benutzt.

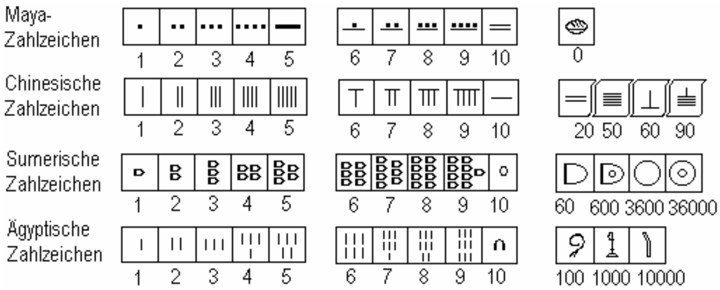


Arabische Zahlen

Die erste Zahlenschrift mit der Basis Zehn wurde in Nordindien vor ca. 1500 Jahren erfunden. D.h. die heute allgemein "arabische" Zahlen oder Ziffern genannten Zeichen sind indischen Ursprungs.

Durch wissenschaftliche Kontakte nach Indien übernahm der arabische Gelehrte Ibrahim al-Fassari in Bagdad um 773 n.Chr. die Zahlzeichen. Dieser übersetzte im Auftrage des Kalifen ein indische Astronomieabhandlung. Die Synthese griechischer und indischer Wissenschaft legte den Grundstein der arabischen Wissenschaft, die in der Zeit vom 8. bis zum 12. Jahrhundert die glänzendste Periode erlebte.
Das arabische Reich teilte sich im 13. Jahrhundert in zwei Teile - der ostarabische Teil mit seinem Zentrum Bagdad und Damaskus und der westarabische Teil mit seinem kulturellem Zentrum in Cordova. So nahmen auch die Zahlen zwei unterschiedliche Entwicklungen. Die westarabische Ausprägung und die ostarabische Ausprägung.
Der deutsche Gelehrte Gerbert de Aurillac rechnete als erster mit arabischen Ziffern, die er in der spanischen Grenzmark kennengelernt hatte, d.h. mit den Zahlen "Westarabiens".
Kurz nach der Übernahme durch Gerbert starb die westarabische Schreibweise der Ziffer aus. Erst einige Jahrhunderte später konnten sich die Zahlen in Europa durchsetzen, abgeleitet nun von den ostarabischen Zeichen.
Araber wundern sich oft, dass die "arabischen Ziffern" Europas sich so stark von den wirklichen arabischen Ziffern unterscheiden. Die Ursache liegt darin, dass die europäischen Zeichen vor allem von den westarabischen abgeleitet wurden.
Die westarabischen Ziffern werden auch Gobar-Ziffern (arab. für Sand, Staub) genannt.

Maya-Zahlzeichen



Eine der faszinierendsten Kulturen in Amerika waren die Mayas. Sie besiedelten breite Gebiete des heutigen Guatemala, Belize, Honduras, El Salvador und Teile im Süden von Mexiko.
Man fand die ersten Siedlungen der Maya an der karibischen und pazifischen Küste datiert auf 5000 v.Chr. Die klassischen Maya-Städte wurden später verlassen und im zehnten Jahrhundert von den Azteken übernommen.
In der klassischen Periode der Maya (300 v.Chr. bis 300 n.Chr.) erfanden die Maya das Schreiben. Das Rechnen beherrschten sie bereits in der vorklassischen Periode. Das Maya-Zahlensystem basiert auf der Zahl 20. Dieses hochentwickelte Volk kannte mehr als 1000 Jahre vor den Europäern die Zahl Null.

Insgesamt benutzten die Maya 3 verschiedene Zeichen, um daraus alle anderen Zahlen zu entwerfen, eine Muschel für die Null, einen Punkt für die Eins und einen Balken für die Zahl Fünf. Das Symbol für die Null variierte aber. Manchmal wurde die Null dargestellt mit Gesichtern, manchmal ganzen Figure, zuweilen eine halbe Blume, ein Schneckenhäuschen oder etwas, wofür wir keinen Namen haben.

Entwicklung der Zahlschreibweise

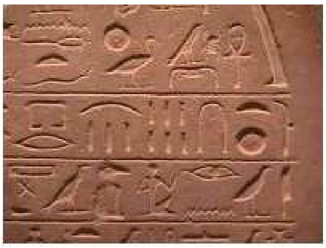
Babylonisch
Ägyptisch
Ägyptisch-Hieratisch
Herodisch
Altrömisch

Zahlzeichen der Inka

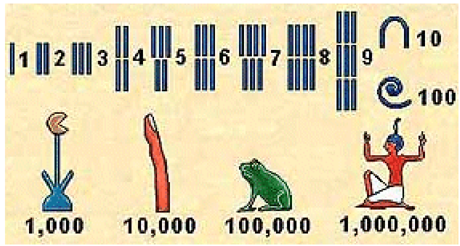
... für die Ziffern und Zahlen 0 bis 11
Das Reich der Inka erstreckte sich im 15. Jahrhundert über die gesamten Anden in Südamerika.

Ägyptische Hieroglyphen für die Zahlen

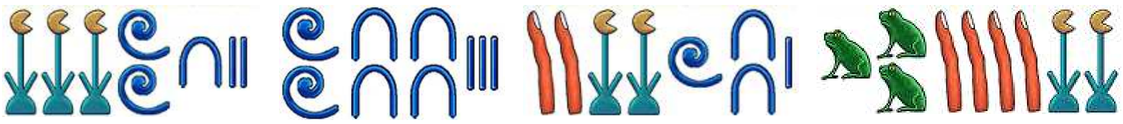
Für ihr dezimales Zahlensystem verwendeten die alten Ägypter 7 Hieroglyphen (griech: hiero = heilig, glyphen = Zeichen):
von links nach rechts:
1, 10, 100, 1000, 10000, 1000000, 1 Million



Jedem Zahlzeichen kommt eine besondere Bedeutung zu. So zeigt das Zeichen der Hundert eine Messleine, welche in 100 Teile geteilt war, die 1000 zeigt eine Lotusblume. Dass der Frosch für die 100000 steht, erklärt sich wohl dadurch, dass Frösche eine regelrechte Plage in Ägypten waren.
Beliebige Zahlen wurden einfach durch Hintereinanderschreiben der Hieroglyphen dargestellt. In den Abbildungen finden sich Beispiele.
Beispiel: Eine Stele des Pharaos Sesostris III. aus der Festung Semna am zweiten Katarakt, der Grenze zwischen dem von Ägypten besetzten Unternubien und dem Königreich von Kerma in Obernubien. Auf der Stele ist das Regierungsjahr des Herrschers angegeben:
"Im Jahr 16, im Wintermonat drei ..."

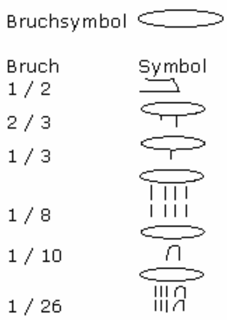


Das Zeichen für Zehn ist ein Bogen, das Zeichen für Eins ist ein I. Im Bild ist zu sehen, dass die Zahl Sechs durch sechs senkrechte Striche dargestellt wurde. Die Schreibweise erfolgte von rechts nach links, nur ausnahmsweise auch schon einmal rechtsläufig. Stellen hinter dem Komma waren den Ägyptern, da sie keine Null kannten, nicht bekannt. Sie schrieben deshalb Reste als Stammbrüche.

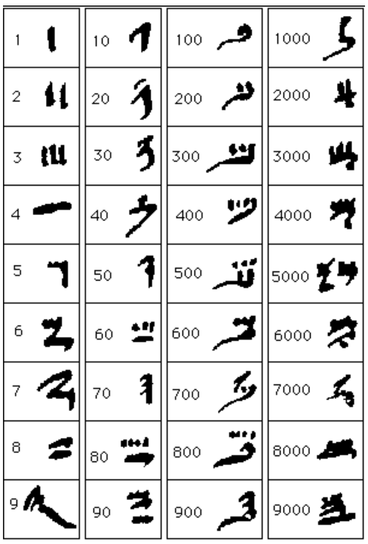


3212 243 22121 342000

Bruch-Hieroglyphen



Das antike Ägypten kannte keine gemeinen Brüche mit einem Zähler größer 1. Vielmehr wurden Stammbrüche zur Darstellung gebrochener Zahlen genutzt. Dabei wurde ein Bruch der Form a/b in eine Summe von Stammbrüchen umgewandelt. z.B. 13/37 = 1/3 + 1/56 + 1/6216
Die Bruchbezeichnung erfolgt durch eine Glyphe, die ein r = Teil bedeutete. Im Hieratischen wurde diese Glyphe durch einen Punkt ersetzt, der über die üblichen Zahlzeichen gesetzt wurde.
Durch diese Schreibweise war es nur möglich, Brüche zu schreiben deren Zähler 1 ist. Besondere Zeichen gab es nur bei 2/3 und 3/4.



Hieratische Schriftzeichen

Mit dem Aufkommen des Papyrus wurde eine geeignetere Schrift entwickelt, die hieratische Schrift. Die hieratischen Zahlensymbole erlauben Zahlen sehr viel kompakter zu schreiben als mit den Hieroglyphen. Allerdings brauchten sie dafür 36 verschiedene Zahlenzeichen.

Mit diesem System können Zahlen mit wenigen Symbolen dargestellt werden. So lässt sich die Zahl 9999 mit 4 hieratischen Zahlzeichen anstatt mit 36 Hieroglyphen schreiben. Der Hauptunterschied zu unserem Zahlensystem liegt darin, dass das

hieratische Zahlensystem kein Positionssystem, wie unseres, ist. Man kann die Zahlen also von links nach rechts oder auch von rechts nach links schreiben oder in beliebiger Anordnung.
Wie auch die Hieroglyphen wechselten die hieratischen Zahlzeichen im Laufe von 2 Jahrtausenden ihre Erscheinungsweise. Man unterscheidet 6 Perioden. Die abgebildeten Zahlzeichen wurden etwa 1800 v.Chr. genutzt.
Die Schreibweise mit Hieroglyphen und die hieratische Schreibweise von Zahlen benutzten die alten Ägypter 2000 Jahre lang nebeneinander.

Zahlbereiche

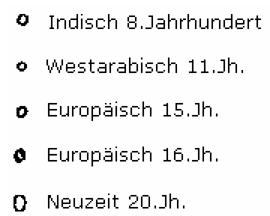
Natürliche Zahlen

... sind die Zahlen, mit denen wir zählen:

1, 2, 3, 4, 5, ... sowie die 0

Auf der Zahlengeraden bilden sie eine Abfolge von Punkten im Abstand 1, von 0 aus nach rechts gehend. Die Menge aller natürlichen Zahlen wird mit N bezeichnet. Weiter verwendet man die Bezeichnung $N^+ = N \setminus \{0\}$ für die natürlichen Zahlen ohne die Zahl 0.
Die natürlichen Zahlen können dazu verwendet werden, Objekte "durchzunumerieren". Dies führt zu den Begriffen der Abzählbarkeit und der Folge.
Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, und jede natürliche Zahl wird getroffen, wenn, von 0 ausgehend, von Nachfolger zu Nachfolger gesprungen wird. Diese Struktur ist sehr wichtig für viele Themen der modernen Mathematik, z.B. für die Methode des Induktionsbeweises.
Genau eine natürliche Zahl, die Null, ist nicht Nachfolger einer anderen natürlichen Zahl, d.h., sie besitzt keinen Vorgänger.

Achtung:
In manchen Lehrbüchern wird die Null nicht zu den natürlichen Zahlen hinzugenommen und als "Menge der natürlichen Zahlen" N das bezeichnet, was oben N^+ genannt wurde. Dies kann zwar historisch begründet werden (Originalaxiome des Peano) und spart bei einer Vielzahl von Beweisen, Aussagen, ... die Betrachtung von Sonderfällen, steht aber seit der Einführung der Gruppentheorie in Widerspruch zu deren Aussagen.
Außerdem ist in Deutschland nach DIN 5473 die Null eine natürliche Zahl.
Allerdings wird in Gullbergs faszinierenden Werk "Mathematics - from the birth of numbers" von 1997 die Null nicht zu den natürlichen Zahlen gezählt.



Ziffer Null

"In der Kulturgeschichte wird die Entdeckung der Null immer als eine der größten Leistungen der Menschheit herausragen"
Tobias Danzig, "Number, The language of science"

Im Laufe der Geschichte wurde die Zahl Null dreimal erfunden:
von den Babyloniern, den Mayas und zuletzt von den Indern.
Der italienische Mathematiker Fibonacci (1170 - 1240) lernte die Null auf seinen Reisen nach Afrika und Byzanz kennen. Dort hatte ihre Genialität bereits in weiten Kreisen Anerkennung gefunden.
In Europa tat man sich schwer mit einer Zahl die gar keine Zahl ist, sondern das Nichts beziffert, gleichzeitig aber jede vor ihr stehende Zahl verzehnfacht. Es dauerte lange bis die Rechenlehrer der frühen Neuzeit dem Volk den hohen Wert dieser "wertlosen" Zahl nahe bringen konnte.
Die Inder nannten die Zahl Null sunya, die Araber as-sifr oder sifr. Sunya bedeutet dabei "leer" und kennzeichnete die leere Spalte auf einem Rechenbrett. Aus sifr wurde bei Fibonacci der Begriff zero.

Das indisch-arabische Zahlensystem

Die von uns verwendeten "arabischen" Ziffern sind indischen Ursprungs. Sie sind im Laufe der Jahrhunderte über Vorderasien und das unter arabischem Einfluss stehende Spanien zu uns gelangt.
Das Kennzeichen dieses Systems sind die Verwendung von zehn verschiedenen Ziffern innerhalb eines Stellenwertsystems. Damit war erstmals ein einfaches und schnelles Rechnen

möglich. Bekannt wurde dieses System in Deutschland, nach anfänglichem Verbot, durch Rechenbücher von Adam Ries (1492 - 1559).

Zahlenpaare, Zahlentripel und n-Tupel

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Ein (geordnetes) Zahlenpaar besteht aus zwei Zahlen, einer ersten und einer zweiten. Es wird entweder als (x, y) oder in der Vektor-Schreibweise angegeben und als ein mathematisches Objekt behandelt. Die Zahlen x und y heißen Komponenten.
Die Menge aller Paare aus reellen Zahlen wird als R^2 bezeichnet und geometrisch als Ebene gedeutet, in ähnlicher Weise wie die Interpretation von R als Zahlengerade. Auch die komplexen Zahlen bilden eine Ebene, die so beschrieben wird.
Das geordnete Paar (a, b) muss von der Zweiermenge {a, b} unterschieden werden. Für Mengen gilt stets {a, b} = {b, a}, während für geordnete Paare nur dann (a, b) = (b, a) ist, wenn a = b.

Analog können Zahlentripel (x, y, z) und, ganz allgemein, n-Tupel (x_1, x_2, ... x_n), wobei n ∈ N, betrachtet werden.
Die Menge aller reellen Zahlentripel heißt R^3 und wird geometrisch als dreidimensionaler Raum gedeutet. Ganz allgemein wird die Menge aller reellen n-Tupel als R^n bezeichnet und stellt einen n-dimensionalen Raum dar.
Elemente von R^4 heißen Zahlenquadrupel, von R^5 Zahlenquintupel usw. Unter R^1 wird analog die Menge der reellen Zahlen verstanden.

Mengenlehre, Logik

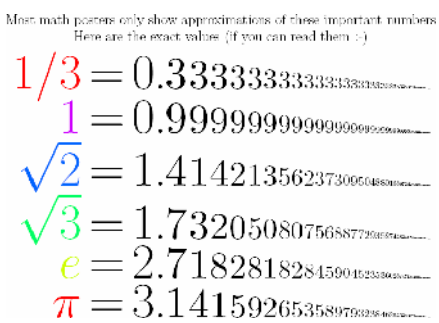
∈	Element von	∉	nicht Element	⊆	Teilmenge
⊂	echte Teilmenge	⊄	nicht Teilmenge	∅	leere Menge
∩	Durchschnitt	∪	Vereinigung	\	Differenzmenge
$C_E A$	Komplementmenge	∀	für alle...	∃	es existiert...
¬	Negation	∧	Konjunktion	∨	Disjunktion
⇔	Äquivalenz	⇒	Implikation	⊗	Produkt
⊕	Summe	:⇔	definitionsgemäß äquivalent		

Analysis, Algebra

→	gegen	=	ist gleich	=/	ungleich
≡	identisch,kongruent	:=	definiert durch	<	kleiner als
>	größer als	≤	kleiner oder gleich	≥	größer oder gleich
≈	rund	≅	kongruent	~	proportional
+	plus	-	minus	*,•	mal
a|b	a teilt b	Σ	Summe	Π	Produkt
∠	Winkel	⊥	senkrecht	↑↑	gleich gerichtet
||	parallel	n!	Fakultät	lim	Grenzwert
f(x)	Funktion	f'(x)	1.Ableitung	Δx	Differenz
dx	Differenzial	∂x	part.Differenzial	| a |	absoluter Betrag
√	Wurzel	ⁿ√	n.te Wurzel	i	imaginäre Einheit
$\log_b$	Logarithmus Basis b	∞	unendlich	∫	Integral
ℵ	Aleph				
^	Potenzbildung (nur, wenn Hochsetzen des Exponenten nicht möglich)				

Zahlenwerte einiger Konstanten

π	3.141 592 653 589 793 238 462 643 383	27 ...
π/2	1.570 796 326 794 896 619 231 321 691	63 ...
π/180	0.017 453 292 519 943 295 769 236 907	...
π²	9.869 604 401 089 358 618 834 490 999	87 ...
√π	1.772 453 850 905 516 027 298 167 483	34 ...
√2π	2.506 628 274 631 000 502 415 765 284	81 ...
1/π	0.318 309 886 183 790 671 537 767 526	...
1/√π	0.564 189 583 547 756 286 948 079 451	...
³√π	1.464 591 887 561 523 263 020 142 527	26 ...
e	2.718 281 828 459 045 235 360 287 471 35 ...	
e²	7.389 056 098 930 650 227 230 427 460 57 ...	
√e	1.648 721 270 700 128 146 848 650 787 81 ...	

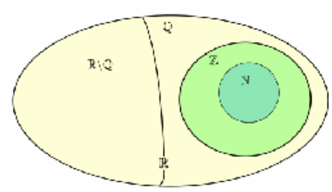


$\sqrt[3]{e}$	1.395 612 425 086 089 528 628 125 319 60 ...
e^{π}	23.140 692 632 779 269 005 729 086 367 9 ...
$e^{\pi}-\pi$	19,999 099 979 189 475 767 266 442 984 669 …
$e^{-\pi}$	0.043 213 918 263 772 249 774 417 737 171 7 ...
$e^{\pi/4}$	2,193 280 050 738 015 456 559 769 659 278 …
$e^{-\pi/2}$	0,207 879 576 350 761 908 546 955 619 834 …
$e^{-\pi/4}$	0,455 938 127 765 996 236 765 921 294 728 …
$e^{-\gamma}$	0,561 459 483 566 885 169 824 143 214 790 …
1/e	0.367 879 441 171 442 321 595 523 770 161 ...
$1/e^{e}$	0,065 988 035 845 312 537 076 790 187 596 …
lg e	0.434 294 481 903 251 827 651 128 918 916 ...
1/lg e	2.302 585 092 994 045 684 017 991 454 68 ...
C	0.577 215 664 901 532 860 606 512 090 082 ... (Eulersche Konstante)
δ	4,699 201 660 910 299 067 185 320 382 046 620 … (Feigenbaumkonstante)
ϕ	$(\sqrt{5}+1)/2$ = 1.618 033 988 749 894 848 204 586 834 36 ... (Goldenes Verhältnis)

Konstante ... Platzhalter für ein ganz bestimmtes Element oder eine eindeutig bestimmte reelle oder komplexe Zahl

Zahlenbereiche

N	Menge der natürlichen Zahlen
$N^{+}=N\setminus\{0\}$	Menge der natürlichen Zahlen, mit Ausnahme der Null
Z	Menge der ganzen Zahlen
Q	Menge der nichtnegativen gebrochenen Zahlen
P	Menge der rationalen Zahlen
R	Menge der reellen Zahlen
R^{+}	Menge der positiven reellen Zahlen
IR	Menge der irrationalen Zahlen
C	Menge der komplexen Zahlen
I	Menge der imaginären Zahlen



Beziehungen zwischen den Zahlbereichen

$N \subset Z \subset P \subset R$ $N \subset Q \subset P \subset R$

Abweichende Bezeichnungen

Rationale Zahlen	Q, R, K	Gebrochene Zahlen	$Q_{>}$, Q_{+}
Ganze Zahlen	G, Γ	Reelle Zahlen	P
Irrationale Zahlen	I, IQ		

Im französischen Sprachraum wird zusätzlich die Menge der endlichen Dezimalzahlen D betrachtet. Für diese gilt $Z \subset D \subset Q$.
Hinweis: In der mathematischen Fachliteratur werden die Zahlenmengen oft besonders durch Hervorheben des ganzen Buchstabens, z.B. N und R, oder eines Teils des Buchstabens gekennzeichnet. Aus programmtechnischen Gründen wird hier darauf verzichtet.

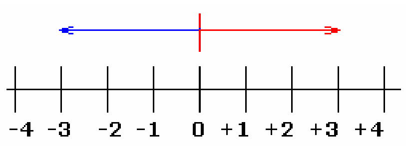
Zahlenstrahl, Zahlengerade

Unter einer Zahlengerade versteht man in der Schulmathematik eine grafische Veranschaulichung der reellen Zahlen als Punkte auf einer Geraden.
Die Zahlengerade ist eine Darstellung des eindimensionalen euklidischen Vektorraums R^1, die verdeutlicht, dass die Menge der reellen Zahlen eine lineare Ordnung bildet. Die Zahlengerade setzt sich in beide Richtungen bis ins Unendliche fort. Der Pfeil an der rechten Seite der Darstellung gibt an, dass die Zahlen in dieser Richtung größer werden.

Zur Darstellung der natürlichen Zahlen im Unterricht wird ein Zahlenstrahl, beginnend bei 0 verwendet. (Abbildung)

In der Grundschule wird der Zahlenstrahl für einfache Operationen der Addition und Subtraktion genutzt.
Soll 5 + 3 demonstriert werden, gehz man von der Zahl 5 um 3 nach rechts und erhält das Ergebnis 8. Analog wird im Bereich der natürlichen Zahlen subtrahiert.

Ganze Zahlen



Erweitert man die natürlichen Zahlen N um die Menge {n | -n ∊ N}, so erhält man die Menge der ganzen Zahlen

Z = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...} .

Z = {n | n ∊ N oder -n ∊ N}

In dieser Menge ist neben der Addition und Multiplikation auch die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar. Für alle n, m ∊ Z ist auch n - m = n' ∊ Z.
Die Menge der natürlichen Zahlen N ist Teilmenge von Z.
Die Division (Umkehrung der Multiplikation) ist in der Menge der ganzen Zahlen nicht immer ausführbar, d.h. das Ergebnis liegt im allgemeinen nicht mehr in der Menge der ganzen Zahlen.

Negative und positive Zahlen

Ganze Zahlen, die kleiner als 0 sind, werden negative Zahlen genannt. Ganze Zahlen, die größer als Null sind, heißen positive Zahlen. Die Null und die positiven Zahlen zusammen bilden die nichtnegativen Zahlen.

Konstruktion der ganzen Zahlen

Die ganzen Zahlen Z können durch eine Zahlbereichserweiterung aus der Menge N der natürlichen Zahlen konstruiert werden.
Dazu betrachtet man die Menge N × N aller Paare (a,b) natürlicher Zahlen.
Für eine Zahlbereichserweiterung werden eine Äquivalenzrelation sowie eine Additon und eine Multplikation definiert:

(a,b) ~ (c,d), wenn a+d = c+b gilt

(a,b) ⊕ (c,d) = (a+c,b+d)

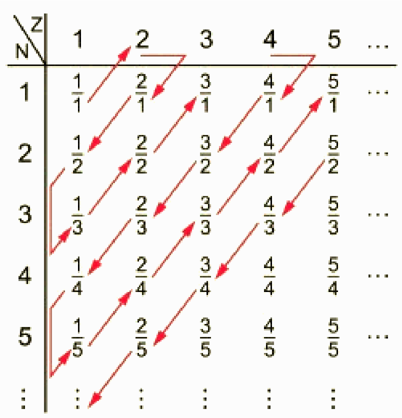
(a,b) ⊗ (c,d) = (a·c,b·d)

Die Menge dieser Äquivalenzklassen wird mit Z = N × N / ~ bezeichnet.
Die Äquivalenzklasse eines Paares (a,b) schreibt man als (a-b), die spezielle Form (0-b) kurz mit -b.

Aus der Konstruktion der Addition ⊕ und Multiplikation ⊗ ergibt sich, dass die Menge Z mit diesen Operationen einen Ring bildet, den Ring der ganzen Zahlen. Jede natürliche Zahl n ist durch die Äquivalenzklasse (n-0) in Z vertreten.
Die Menge N der natürlichen Zahlen mit der Addition bildet eine Halbgruppe, die Menge Z mit der Addition eine Gruppe. Damit ist (Z,+) die sogenannte Grothendieck-Gruppe der Halbgruppe (N,+).
Die Menge der ganzen Zahlen bildet sogar einen euklidischen Ring, d.h. die Division mit Rest ist stets möglich.

Rationale Zahlen

...Zahlen z, welche sich in der Form z = p / q mit p,q ∊ Z und q ≠ 0 darstellen lassen.
Die Menge der rationalen Zahlen P (auch Q) umfasst als Teilmengen die Menge der natürlichen Zahlen, die Menge der ganzen Zahlen und die Menge der gebrochenen Zahlen.
Die Darstellung z = p / q ist nicht eindeutig. Eine reelle Zahl, welche nicht zu P gehört heißt irrational. Beispiel: √2
Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen (d.h. Punkten auf der Zahlengeraden) liegen unendlich viele rationale Zahlen. Daher wird die Menge P als "dicht" bezeichnet. Dennoch gibt es sehr viel mehr reelle Zahlen als rationale:
Die Menge P ist abzählbar, d.h. ihre Elemente können durchnumeriert werden, im Gegensatz zur Menge R der reellen Zahlen.
Da die Menge P die Zahlengerade nicht ganz ausfüllt, wird sie als nicht-vollständig bezeichnet.



Abzählbare rationale Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar. Nach Cantor kann folgendes Abzählverfahren genutzt werden:
In dem abgebildeten unendlichen Schema sind alle Brüche und damit alle gebrochenen Zahlen außer der 0 enthalten.

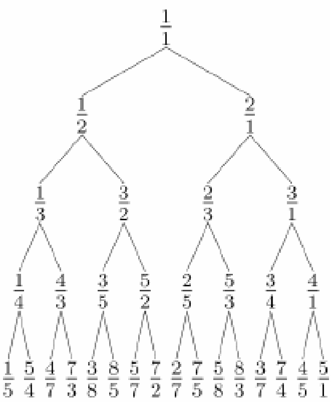
Wenn man das Schema längs der eingezeichneten Diagonalen durchläuft, werden nacheinander alle Brüche einmal erfasst.
Man kann somit die Brüche auf diese Art durchnummerieren, d.h. abzählen. Für die negativen Brüche verwendet man entsprechend ein zweites Schema.

Calkin-Wilf-Abzählverfahren

Das Cantorsche Abzählverfahren gewährleistet das Abzählen aller rationalen Zahlen. Allerdings treten Brüche wiederholt auf, da nicht nur vollständig gekürzte Brüche in das Schema eingetragen werden.
Aufbauend auf dem Stern-Brocot-Baum entwickelten 1999 Neil Calkin und Herbert S.Wilf einen nach ihnen benannten Binärbaum mit dem ebenfalls die Menge der rationalen Zahlen abgezählt werden kann. Dieser Calkin-Wilf-Baum enthält allerdings jede positive, rationale Zahl genau einmal und zwar als gekürzten Bruch.

Der Calkin-Wilf-Baum entsteht aus der Wurzel 1/1 nach der Konstruktionsvorschrift:

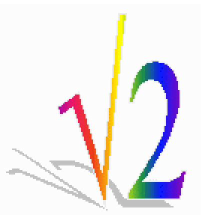
$$a/b \rightarrow (a/(a+b)\ ;\ (a+b)/b)$$



Irrationale Zahlen

... sind jene reellen Zahlen, die nicht rational sind, d.h. die sich nicht als Bruch "ganze Zahl/ganze Zahl" schreiben lassen.
Es sind dies genau jene reellen Zahlen, deren Dezimaldarstellung weder abbricht noch periodisch ist.
Die Menge aller irrationalen Zahlen ist so "groß", dass sie sich nicht "durchnumerieren" lässt. Sie ist (im Gegensatz zur Menge der rationalen Zahlen) überabzählbar.
Die rationalen Zahlen, mit denen man es in der Praxis so oft zu tun hat, und die in so vielen Rechenaufgaben vorkommen, bilden genau genommen nur eine verschwindende Minderheit! Beispiele für irrationale Zahlen sind jene Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen, die selbst keine natürlichen Zahlen sind (also $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ...) sowie die transzendenten Zahlen π und e.

Hippasos von Metapont (5.Jahrhundert v.u.Z.) bewies als Erster am Beispiel von $\sqrt{2}$ die Existenz irrationaler Zahlen. Dennoch dauerte es noch über 2000 Jahre, bis diese Zahlen als "richtige" Zahlen in der Mathematik anerkannt wurden.
Noch 1544 schrieb Michael Stifel in "Arithmetica integra":
"Mit Recht wird bei den irrationalen Zahlen darüber disputiert, ob sie wahre Zahlen sind oder nur fiktive. Denn bei Beweisen an geometrischen Figuren haben die irrationalen Zahlen noch Erfolg, wo uns die rationalen im Stich lassen, und sie beweisen genau das, was die rationalen Zahlen nicht beweisen konnten.
Wir werden also veranlasst, ja gezwungen zuzugeben, dass sie in Wahrheit existieren, nämlich auf Grund ihrer Wirkungen …
Aber andere Gründe veranlassen uns zu der entgegengesetzten Behauptung, dass wir nämlich bestreiten müssen, dass die irrationalen Zahlen Zahlen sind. Nämlich wenn wir versuchen, sie der Zählung zu unterwerfen und sie mit rationalen Zahlen in ein Verhältnis setzen, dann finden wir, dass sie uns fortwährend entweichen, so dass keine von ihnen sich genau erfassen lässt …
Es kann aber nicht etwas eine wahre Zahl genannt werden, bei dem es keine Genauigkeit gibt und was zu wahren Zahlen kein bekanntes Verhältnis hat."



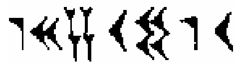
Irrationalität von $\sqrt{2} \approx$ 1,41421356237309504880168872420969807856967187537694807 ...

Es ist seit mehr als zweitausend Jahren bekannt, dass die Diagonale des Quadrats in keinem "rationalen Verhältnis" zur Seitenlänge steht, d.h. dass der Quotient Diagonale/Seitenlänge keine rationale Zahl ist. Diese Erkenntnis geht wahrscheinlich auf die Pythagoräer zurück und dürfte damals eine der ersten Grundlagenkrisen der Mathematik ausgelöst haben.
Der Quotient Diagonale/Seitenlänge im Quadrat ist gerade $\sqrt{2}$. Damit sind die Seite und die Diagonale im Quadrat inkommensurabel.

Hinter dem Satz "√2 ist eine irrationale Zahl" steckt viel Geistesgeschichte. Erst nach dieser Erkenntnis war der Weg frei zur langsamen Herausbildung des Begriffs der reellen Zahlen. Hippasos von Metapont (5.Jahrhundert v.Chr.) bewies als Erster, dass keine natürlichen Zahlen a und b existieren, so dass √2 = a/b ist. Da dies der Proportionenlehre der antiken Griechen widersprach, wurde Hippasos im Meer ertränkt; so die Legende. Allgemein kann der Beweis von Hippasos auf alle Primzahlen p erweitert werden:

Satz: √p ist für alle Primzahlen p eine irrationale Zahl.
Indirekter Beweis:
Sei p > 1 eine beliebige Primzahl und √p eine rationale Zahl.
Dann existieren natürliche Zahlen a und b mit ggT(a,b) = 1 und $a/b = \sqrt{p} \rightarrow p \cdot b^2 = a^2 \rightarrow p$ teilt a^2.
Weil p eine Primzahl ist, folgt damit: p teilt $a \rightarrow a = k \cdot p \rightarrow a^2 = k^2p^2 \rightarrow pb^2 = k^2p^2 \rightarrow b^2 = k^2p \rightarrow$ p teilt $b^2 \rightarrow$ p teilt b → p teilt a und b → ggT(a,b) > 1 - Widerspruch!

Der Quotient Diagonale/Seitenlänge im Quadrat ist gerade √2. √2 wird oft als das Standardbeispiel einer irrationalen Zahl benutzt. Die Besonderheit der Zahl war schon den Pythagoräern bekannt.
Die älteste überlieferte Darstellung eines Bruchs ist zugleich die erste Näherung von √2.
Das babylonische Zahlensystem basiert auf der Zahl 60. Die abgebildete Ziffernfolge wurde auf einer babylonischen Tafel der Yale-Sammlung gefunden.



Die einzelnen Ziffern lauten 1, 24, 51, und 10. Im babylonischen Zahlensystem ist dies

$$1 * 60^0 + 24 * 60^{-1} + 51 * 60^{-2} + 10 * 60^{-3} = 1.414222$$

und damit eine schon sehr gute Näherung von √2.

die ersten 2000 Dezimalziffern von √2

1, ...
41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85696 71875 37694 80731 76679 73799
07324 78462 10703 88503 87534 32764 15727 35013 84623 09122 97024 92483 60558
50737 21264 41214 97099 93583 14132 22665 92750 55927 55799 95050 11527 82060
57147 01095 59971 60597 02745 34596 86201 47285 17418 64088 91986 09552 32923
04843 08714 32145 08397 62603 62799 52514 07989 68725 33965 46331 80882 96406
20615 25835 23950 54745 75028 77599 61729 83557 52203 37531 85701 13543 74603
40849 88471 60386 89997 06990 04815 03054 40277 90316 45424 78230 68492 93691
86215 80578 46311 15966 68713 01301 56185 68987 23723 52885 09264 86124 94977
15421 83342 04285 68606 01468 24720 77143 58548 74155 65706 96776 53720 22648
54470 15858 80162 07584 74922 65722 60020 85584 46652 14583 98893 94437 09265
91800 31138 82464 68157 08263 01005 94858 70400 31864 80342 19489 72782 90641
04507 26368 81313 73985 52561 17322 04024 50912 27700 22694 11275 73627 28049
57381 08967 50401 83698 68368 45072 57993 64729 06076 29969 41380 47565 48237
28997 18032 68024 74420 62926 91248 59052 18100 44598 42150 59112 02494 41341
72853 14781 05803 60337 10773 09182 86931 47101 71111 68391 65817 26889 41975
87165 82152 12822 95184 88472 08960

Zur Berechnung sehr vieler Dezimalziffern von √2 nutzt man u.a. folgende Formeln:

$$\sqrt{2} = (7/5) / (1-1/50)^2 \text{ (Knopp)} = 1.4577259475218658892128279883...$$
$$\sqrt{2} = (239/169) / (1-1/57122)^2 = 1.4142506998466662452362924216...$$
$$\sqrt{2} = (1393/985) / (1-1/1940450)^2 = 1.4142146555843141338632693220...$$
$$\sqrt{2} = (8119/5741) / (1-1/65918162)^2 = 1.4142135945542166004924725473...$$
$$\sqrt{2} = (47321/33461) / (1-1/2239277042)^2 = 1.4142135633204188077454010904...$$
$$\sqrt{2} = (275807/195025) / (1-1/76069501250)^2 = 1.4142135624009816565582303228...$$

Die ersten Ziffern von √2 im Dualsystem sind:
1.011010100000100111100110011001111111001110111100110010010000100010110010111
1110110001001101100110111010101001010101111101001111100011101011011110110000
0010111010100010010011101110101000010011001110110100010111101011001000010110
00000110011001110011001000101010100101011111100100000110000010000111010101100

1000101000101100001110101000101100011111111001101111111011100100000111101101
1001110010000111101110100101010000101111001000011100111000111101101001001001
1110000000001001000011100110110001111011111101000100111011010001101001000100
0000010111010000111010000101010111100011111010011100101001100000101100111100
0110000000001000110111100001100110111101111001010101100011011110010010001000
1011010001000010001011000101001000110000010101011110001110010001011110111111
0001001110001100111100011011010101101010001010001110001011101101111111010011
1011100110010110010101001100011010000110011000111110011110010000100110111111
0101001011110001001000001111100000110110111001011000001011101110101010100010
0101000001000100110010000010000001100101001001010100000000100111...

Testet man die Häufigkeit des Auftretens der Dualziffern '0' und '1', zeigt sich, dass beide etwa gleichhäufig auftreten. Auch √2 ist eine normale irrationale Zahl.

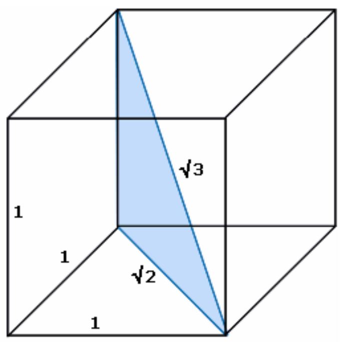
Die ersten Ziffern von √2 im Hexadezimalsystem sind:

1,6A09E667F3BCC908B2FB1366EA957D3E3ADEC17512775099DA2F590B0667322A95F906087
57145875163FCDFB907B6721EE950BC8738F694F0090E6C7BF44ED1A4405D0E855E3E9CA60
B38C0237866F7956379222D108B148C1578E45EF89C678DAB5147176FD3B99654C68663E79
09BEA5E241F06DCB05DD5494113208194950272956DB1FA1DFBE9A74059D7927C1884C9B5
79AA516CA3719E6836DF046D8E0209B803FC646A5E6654BD3EF7B43D7FED437C7F9444260F
BD40C483EF55038583F97BBD45EFB8663107145D5FEBE765A49E94EC7F597105FBFC2E1FA76
3EF01F3599C82F2FE500B848CF0BD252AE046BF9F1EF7947D46769AF8C14BCC67C7C290BE76
929B0578C10B584FB487C924F5B71F82DCD2903609DEE8912983D4EAAD0EEA321F7489F46A
7E9030BE20FB7694EFB58C9984CDD70A1DA9045C3D133A068423D6E38303D901BA9DA3476
684796C5CD5972DC0FF3540C3412942D6406101EF6FC6DE9114A2B4F248C689C600BB40A8B
56B041FD5DE6E0DD0C66D4831FE7FFF5757E4710980CDBD5C268485DA5E91B3E2F205B7272
5B971D60A1F888F08A0A6E100CCEDC2CE5BD98AEE71E42E268D37A6072F220234613FFC224
53439EA97A999B6C9E3CE71F94D6092ACE120AB8E550E0D5511688…

Die ersten Ziffern von √2 im 26er-System sind:

1,KUAFRCBHYMISHEIXYEWQHVSPOPATDCSNZAHHUWZCPMMNMSZUJIRFUZWFHNNCKGGJKOU
DRCIGJJVOVIMEFKLEPZNLCWBTCQWXONIIHOTPCOHPLPGALFGTOVCJMHXDMCEQPCWCBNCOV
IMPSBYSDYSJYAIMROLBUISGMNINIWUYXFFTMBPBBDYLXDPSHZAILUEUKAPNBDQNKPGNKANP
USGLFCECRKMZAABPDLGEKAGZCZNNVFHCOTJIOLQENYARMIRHYEEXUBRXNBIFOQSKJCSUMU
GDCWJVNZPZZFSHZDWMMIIESWUEXTFVRLRVVCJJCMICFOHXYTKJKNXKXMVFDTHIEWYEOPIZO
URMSKBYMTPBAXCMBADRFWUUCFLTJPMNGAIAGRRHUKXAYUITTBKJMZRQFBBVURVOPCOPJKY
NMURKCFWVIVTNUMUTZPNQOWLHTTXFCBKIAIJCTPEQATFYZHKAFBKLFWEZXSSMVXXEPBLYAO
CMEMGGNEAXCTVVTSPKMGUIOHIITZZSVDMPOLUZWJWJTWLLKHJATVRTVDSTJIXKTAEHJLXYM
MVIGSSCOTEOHTBLYIJBKTZUAHJOITKONRBBIMRESFNAZYBEFPDGTIDKQWRJONQQBIJZOPIWP
HLAJHIJPCUTMVGUWRSRSGBNDKLTFLCUPPLGSHRWUWIHGETPSNHRXISKROKLTORHPJKPJAJX
EQOXHCGYAJGGIBGPFQFZTBTTGJPTBBWKENFOBRKTWWUCQYESOCRDLDFBUILAAZMJVXKWD
VVDGXCTPYWUKVDXVBURZFDABMSAXFBUUEEQYCEPFXNREPNMJDRJXMAYRYKUCDEISTDWAYA
AZXOEWWGGSMJKTDTASJPOSLSOKJWHBITSGWLXWABNI…

Nach dem Eisensteinschen Irreduzibilitätskriterium sind alle reellen Wurzeln $\sqrt[n]{p}$, mit p ist Primzahl, irrational. Elementar findet man:
Satz: Für alle natürlichen n und m ist $\sqrt[n]{m}$ entweder ganzzahlig oder ein unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch, d.h. also irrational.
Indirekter Beweis: Angenommen $\sqrt[n]{m}$ sei eine rationale Zahl, so existieren natürliche Zahlen a und b mit ggT(a,b) = 1 und $(a/b)^n = m \rightarrow a^n = b(b^{n-1}m)$. Damit ist b ein Teiler von $a^n \rightarrow ggT(a^n,b) = b$. Aus ggT(a,b) = 1 folgt: $ggT(a^n,b) = 1 \rightarrow b = 1$.



Irrationale Zahl √3 ≈ 1,73205 08075 68877 29352 …
die ersten 100 Nachkommastellen:
1, 7320508075 6887729352 7446341505 8723669428 0525381038 0628055806 9794519330 1690880003 7081146186 7572485756 …

Die Quadratwurzel aus 3; √3; ist die positive, reelle Zahl, die mit sich selbst multipliziert 3 ergibt. √3 ist eine irrationale Zahl. Sie ist auch bekannt unter dem Namen Theodoros-Konstante, benannt nach Theodoros von Kyrene. Ihre Kettenbruchentwicklung ist [1;1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,…].
Anwendung
1) die Länge der Diagonale eines dreidimensionalen Würfels mit der Einheitslänge 1, beträgt √3
2) die Distanz zwischen zwei gegenüberliegenden Seiten eines regulären Sechsecks mit der Seitenlänge 1 beträgt √3
3) die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 1 beträgt 1/2 √3
4) der Verkettungsfaktor, das Verhältnis von Phasenspannung (230 V) zu Außenleiterspannung (400 V), beträgt bei Dreiphasenwechselstrom √3

Algebraische Zahl

Eine algebraische Zahl ist eine Zahl, welche Lösung einer ganzrationalen Gleichung ist, wobei die Koeffizienten des Polynoms rationale Zahlen sind.

Wenn n der kleinstmögliche Grad des Polynoms ist, heißt x algebraisch vom Grad n. Die rationalen Zahlen sind somit algebraisch vom Grad 1. Quadratwurzeln aus Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, sind somit vom Grad 2. Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier algebraischer Zahlen sind wieder algebraisch.
Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar, da sowohl die Koeffizienten der Polynome als auch der Grad der Polynome selbst abzählbar sind.

Die algebraischen Zahlen bilden eine Teilmenge der komplexen Zahlen.
Jedes Polynom mit rationalen Koeffizienten kann durch Multiplikation mit dem Hauptnenner der Koeffizienten in eines mit ganzzahligen Koeffizienten umgewandelt werden. Die Nullstellen sind in beiden Darstellungen des Polynoms identisch.
Polynome mit rationalen Koeffizienten kann man normieren, indem man alle Koeffizienten durch den Koeffizienten a_n dividiert. Nullstellen von normierten Polynomen, deren Koeffizienten ganzzahlig sind, nennt man ganzalgebraische Zahlen.
Man kann den Begriff der algebraischen Zahl zu dem des algebraischen Elements erweitern, indem man die Koeffizienten des Polynoms statt aus Q, aus einem beliebigen Körper entnimmt.

Minimalpolynom einer algebraischen Zahl

Für viele Untersuchungen algebraischer Zahlen ist das Minimalpolynom einer algebraischen Zahl wichtig. Ist x eine algebraische Zahl, die eine algebraische Gleichung

$$f(x) = x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit n ≥ 1, erfüllt, aber keine derartige Gleichung geringeren Grades, dann ist n nicht nur der Grad der algebraischen Zahl x, sondern der Grad des Polynoms f, dem so genannten Minimalpolynom von x.
Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde bewiesen, dass die Kreiszahl π und die Eulersche Zahl e nicht algebraisch sind. Von anderen Zahlen, wie zum Beispiel π+e, weiß man bis heute nicht, ob sie algebraisch oder transzendent sind.

Transzendente Zahl

Eine transzendente Zahl ist eine Zahl, welche nicht algebraisch ist; z.B. π, e; d.h. wenn sie nicht als Lösung einer algebraischen Gleichung beliebigen, endlichen Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

darstellbar ist.
Die Menge der transzendenten Zahlen ist überabzählbar. Die Summe einer algebraischen und einer transzendenten Zahl ist transzendent. Jede transzendente Zahl ist irrational.

1748 behauptete Euler in "Introductio in Analysin Infinitorum", dass bei positivem rationalem a ≠ 1 und natürlichem b, das keine Quadratzahl ist, die Zahl $a^{\sqrt{b}}$ nicht nur nicht rational, sondern auch "nicht mehr irrational" sei.
Tatsächlich wurde diese Transzendenzvermutung 1934 als Spezialfall durch den sowjetischen Mathematiker Alexander Ossipowitsch Gelfond in ihrer Richtigkeit bestätigt.

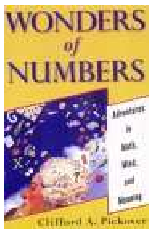
Die Existenz von transzendenten Zahlen wurde 1844 durch Joseph Liouville nachgewiesen. In seiner Arbeit konnte er zeigen, dass es für jede algebraische Zahl x vom Grad $n \geq 2$ eine Konstante c gibt, so dass für jede rationale Approximation p/q: $| x - p/q | > c / q^n$
gilt. Daraus folgt, dass die Liouville-Konstante

$$L = \Sigma_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0{,}110001000000000000000001000..$$

transzendent ist.

Gelfond-Theorem (7. Hilbert Problem, 1934)

Die Zahl a^b ist transzendent, wenn
- a algebraisch und verschieden 0 und 1 ist und
- b algebraisch und irrational ist



Explizit nannte Hilbert in seiner Rede die Zahl $2^{\sqrt{2}} = 2.6651...$, deren Transzendenz 1900 noch unbekannt war und erst durch das Resultat von Gelfond bewiesen wurde; diese Zahl heißt daher *Gelfond-Konstante*. Hätte Hilbert sein 7. Problem weiter gefasst und bei b die Einschränkung "algebraisch" fortgelassen, so wäre das Problem bis heute ungelöst. Nach dem Ergebnis von Gelfond wären dann nur noch transzendente b zu betrachten, aber dieser Fall ist noch immer offen.

Hilberts Zahl $2^{\sqrt{2}}$ =
2,66514414269022518865029724987313984827421131371465949283597959336492044617
870595486760918000519641694198936385423538751467424203143836740781869850548
757489508311478396285835618360834612664317940914891005340143739503428708331
190452711697373159565290565763284572979817743463728483308628193495285499275
8377356318883069338323445961180508097687908126127...

Wichtigste transzendente Zahlen

Durch Clifford Pickover wurden in dem Buch "Wonders of numbers" die wichtigsten transzendenten Zahlen der Mathematik aufgelistet. Diese sind:

1.Platz π = 3,1415 …, Kreiszahl
2.Platz e = 2,718 …, Eulersche Zahl
3.Platz Eulersche Konstante $\gamma = 0{,}577215 \ldots = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n - \ln(n))$
4.Platz Catalan-Konstante G = 1 - 1/9 + 1/25 - 1/49 + …
5.Platz Liouville-Zahl 0,110001000000000000000001000 …
6.Platz Chaitin-Konstante, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zufallsalgorithmus hält. Die Zahl ist unberechenbar.
7.Platz Champernowne-Zahl 0,12345678910111213141516171819202122232425…
8.Platz Werte der Zeta-Funktion wie $\zeta(3)$ = 1,2020569031595942853997381…
9.Platz ln 2 = 0,69314718055994530941723212145817656807550013436025…
10.Platz Hilberts Zahl $2^{\sqrt{2}}$ = 2,665144142690225188650297249873139848274…
11.Platz e^{π} = 23,14069263277926900572908636794854738026610624260021…
12.Platz π^e = 22,4591577183610454734271522045437350275893151339966922…
13.Platz Morse-Thue-Zahl 0,01101001 … (siehe Morse-Thue-Folge)
14.Platz i^i = 0,207879576…, diese Zahl ist reell!
15.Platz Feigenbaum-Konstante 4,669201609102990…

Die Zahlen auf Platz 3, 4, 12 und 15 wurden noch nicht exakt als transzendent nachgewiesen, jedoch von den meisten Mathematikern als solche angenommen.

Reelle Zahlen

... sind Dezimalzahlen mit beliebiger Dezimaldarstellung. Diese Zahlen bilden einen der Grundpfeiler der modernen Mathematik.
Die Menge aller reellen Zahlen wird mit R bezeichnet, die Menge aller positiven reellen Zahlen mit R^+ und die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen mit R_0^+.
Auf der Menge der reellen Zahlen sind die Operationen Addition und Multiplikation definiert, aus denen sich Subtraktion und Division ergeben. Addition und Multiplikation sind durch das Distributivgesetz (Klammern auflösen) miteinander verbunden. Uneingeschränkt ausführbare Rechenoperationen sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (ausgenommen die

Division durch 0). Das Radizieren (Wurzelziehen) bleibt auf nichtnegative Radikanten beschränkt.

Zahlengerade

Geometrisch werden reelle Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden gedeutet.
Zusammenhängende Teilmengen von R, d.h. der Zahlengerade, heißen Intervalle.
Die Menge R wird als vollständig bezeichnet, da sie (im Gegensatz zu der Menge der rationalen Zahlen) die Zahlengerade ganz ausfüllt. Die Menge R ist so groß, dass ihre Elemente nicht durchnumeriert werden können. Daher heißt sie überabzählbar. Wichtige Teilmengen von R sind die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen

2.Definition der reellen Zahlen

Reelle Zahlen sind Klassen äquivalenter Intervallschachtelungen. Das Paar von Folgen rationaler Zahlen (r_n, s_n):
(r_n) ist eine monoton wachsende Folge und (s_n) ist eine monoton fallende Folge. Für alle n gilt:
$r_n \leq s_n$ * $(s_n - r_n)$ ... ist eine Nullfolge
Für zwei Intervallschachtelungen (r_n, s_n), (u_n, v_n) einer Klasse gilt: $r_n \leq v_n$ und $s_n \geq u_n$ für alle n ... (intervallschachtelungsgleich)

Eigenschaften reeller Zahlen

Die wesentlichsten Eigenschaften der Menge der reellen Zahlen sind ...
1. Die Menge der reellen Zahlen ist unendlich.
2. Die Menge der reellen Zahlen ist geordnet , d.h., für je zwei verschiedene reelle Zahlen kann man angeben, welche von beiden kleiner als die andere ist.
3. Die Menge der reellen Zahlen ist überall dicht , d.h., zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen existiert wenigstens eine reelle Zahl. Daraus folgt, dass zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen unendlich viele weitere reelle Zahlen liegen.
4. Die Menge der reellen Zahlen ist stetig , d.h., jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht eine reelle Zahl. Das gilt für die Menge der rationalen Zahlen nicht.
5. Die Menge der reellen Zahlen bildet mit den Verknüpfungen "+" und "*" den Körper der reellen Zahlen.

Überabzählbar viele reelle Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar, d.h. überabzählbar unendlich. Dies bedeutet, dass man keine bijektive Abbildung zwischen den natürlichen und reellen Zahlen angeben kann.
Zum Nachweis soll gezeigt werden, dass schon das Intervall [0,1] überabzählbar ist und somit alle reellen Zahlen.

Angenommen man hätte eine vollständige, d.h. abzählbare, Liste aller reellen Zahlen des Intervalls [0,1], z.B. 0,142345682466
0,163345560011
0,199992445111
0,500000000000 ... usw.
Man konstruiert nun folgende Zahl y aus dem Intervall [0,1]:
y erhält als erste Nachkommastelle eine andere Ziffer als die 1.Nachkommastelle der Zahl aus der 1.Zeile, hier z.B. 2.
Die zweite Nachkommastelle von y soll eine andere Ziffer als die der zweiten Zahl in der Liste sein, z.B. 4.
Fährt man sofort, erhält man eine Zahl, die sich an der n.ten Stelle von der n.ten Zahl der Liste unterscheidet.
D.h., y kommt nicht in der Liste vor.
Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass eine vollständige Liste vorliegt. Somit kann es nie eine vollständige Liste geben und die reellen Zahlen des Intervalls [0,1] sowie alle reellen Zahlen sind nicht abzählbar, d.h. überabzählbar. Diese Nachweismethode wird 2.Cantorsches Abzählverfahren genannt.

Dirichletscher Approximationssatz
Der Dirichletsche Approximationssatz ist eine Aussage über die Qualität der Annäherung reeller Zahlen durch rationale Zahlen.
Er besagt, dass es zu jeder reellen Zahl a und jeder positiven ganzen Zahl n eine ganze Zahl q mit $1 \leq q \leq n$ gibt, so dass der Abstand von qa zur nächsten ganzen Zahl höchsten gleich $1/(n + 1)$ ist, d.h.
Zu $a \in R$ existieren ein $q \in Z$, $1 \leq q \leq n$ und ein $p \in Z$, sodass

$$|qa - p| < 1/(n+1)$$

Bewiesen wird dieser nach Peter Gustav Lejeune Dirichlet benannte Satz mithilfe des Schubfachprinzips.
Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass es zu jedem reellen a unendlich viele Paare (p,q) positiver ganzer Zahlen gibt, die

$$|a - p/q| < 1/q^2$$

erfüllen. Dass diese Abschätzung nicht beliebig verbessert werden kann, besagt der kompliziertere Satz von Thue-Siegel-Roth.

Beispiel: Es seien $a = \sqrt{2}$ und $n = 10$. Dann ist nach dem Dirichletschen Approximationssatz eine der Zahlen $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, …, $10\sqrt{2}$ um höchstens 1/11 von einer ganzen Zahl entfernt.
Tatsächlich ist

$$|5\sqrt{2} - 7| = |7,07106... - 7| = 0,07106 < 0,090909 = 1/11$$

Satz von Thue-Siegel-Roth
Für jede algebraische Zahl a, jedes $\varepsilon > 0$ und zu einander prime p und q hat die Ungleichung

$$|a - p/q| < q^{-(2+\varepsilon)}$$

nur endlich viele Lösungen.
Der Beweis von Roth gibt keine Methode an, solche Lösungen zu finden. Von Bedeutung ist dies, um etwas über die Anzahl der Lösungen Diophantischer Gleichungen zu erfahren.

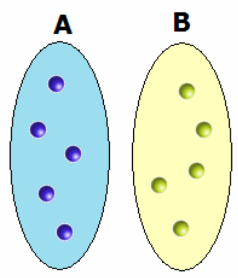
Beste rationale Näherung
Für jede reelle Zahl $r > 0$ kann schrittweise eine Folge immer besserer rationaler Approximationen p/q mit $q < q_{max}$ gefunden werden. Ein einfacher Algorithmus erzeugt zum Beispiel für

$$r = (1+\sqrt{5})/2 = 1,6180339887...$$

als Zähler und Nenner von p/q Paare aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen.

Algorithmus: Starte mit $p = 0$, $q = 1$, $d = r$
Wenn $p/q < r$, dann erhöhe p um 1
Wenn $p/q > r$, dann erhöhe q um 1
Ist die Distanz $d = |r - p/q|$ kleiner als die vorhergehende Distanz, so gib den Bruch aus und verändere d
Stoppe wenn $q > q_{max}$

Mengenlehre



Mengenschreibweise

{1;2;3} endliche Menge
{1;3;5;...} unendliche Menge
[1;2] geordnetes Paar

Menge und Element, Mengenbegriff

... ein streng mathematisch nicht eindeutig definierbarer Grundbegriff der Mathematik; nach Cantor:
"jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens; welche die "Elemente" der Menge genannt werden; zu einem Ganzen"
Schreibweise $x \in M$ x ist Element von M
$x \notin M$ x ist kein Element von M
Sind die Elemente der Mengen Punkte einer Kurve, einer Ebene oder eines Raumes, so werden die Mengen auch Punktmengen genannt. Mengen werden auch durch Aufzählen ihrer Elemente gekennzeichnet, z.B. {a, b, c, d, e}. Die Reihenfolge der Elemente in der Auflistung ist im Allgemeinen ohne Bedeutung.

Diese Erklärung des Mengenbegriffs der "naiven Mengenlehre" hat sich allerdings als widersprüchlich erwiesen. Dennoch wird sie als Einstieg in der Problematik der Mengenlehre gern genutzt.
In der axiomatischen Mengenlehre wird eine widerspruchsfreie, aber wesentlich kompliziertere Mengendefinition gegeben.

Mengenarten

Einelementige Menge

Eine Menge mit nur einem Element wird als einelementige Menge bezeichnet.
Beispiel: Menge der Lösungen der Gleichung $y = 2x + 2$

Leere Menge

Die leere Menge $\varnothing$ enthält keine Elemente, auch nicht die Null. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.
Außer der wissenschaftlichen Schreibweise $\varnothing$ wird in der "vereinfachenden" Schulmathematik auch { } für die leere Menge benutzt. Beispiele: Menge aller echten Teiler einer Primzahl, Menge der Nullstellen der Funktion $y = x^2 + 1$

Endliche Menge

Eine Menge ist endlich, wenn sie endlich viele Elemente besitzt. Ist M die Menge, so gibt z(M) die Elementzahl an, die Mächtigkeit der Menge. Eine endliche Menge mit n Elementen ist gleichmächtig zur Teilmenge der natürlichen Zahlen $\le n$. Die Zahl n mit wird auch Kardinalzahl genannt und es wird card $M = n$ für $A_n \sim M$ geschrieben. Die leere Menge ist damit eine endliche Menge mit der Kardinalität 0.
Beispiele für endliche Mengen: Menge der Teiler einer natürlichen Zahlen, Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung

Hauptsatz über endliche Mengen

Eine endliche Menge kann nicht einer echten Obermenge gleichmächtig sein.

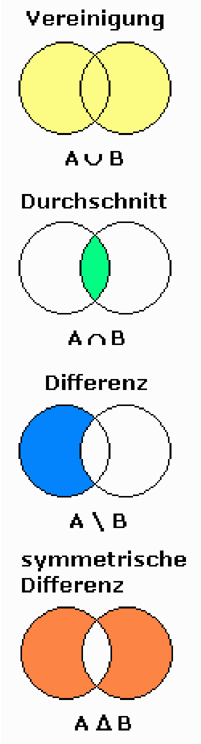
Unendliche Menge

Eine Menge ist unendlich, wenn sie unendlich viele Elemente besitzt, d.h. nicht endlich ist.
Beispiel: Menge der natürlichen Zahlen N, Menge aller Primzahlen, Menge aller Punkte der Ebene oder des Raums
Unendliche Mengen können theoretisch abzählbar sein (z.B. Menge der rationalen Zahlen) oder nicht abzählbar, überabzählbar (z.B. Menge der reellen Zahlen)

Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie beide die gleichen Elemente enthalten

Vereinigungsmenge ... Vereinigung $A \cup B$: alle x, welche aus A oder aus B enthalten sind
Die Menge $V = A \cup B$ umfasst sowohl A als auch B, und jede Menge, die A und B umfasst, umfasst auch V.



Durchschnittsmenge, Schnittmenge
Durchschnitt: alle x, welche gleichzeitig in A und in B enthalten sind
Die Menge $D = A \cap B$ ist Untermenge sowohl von A als auch von B und jede Menge von dieser Eigenschaft ist in D enthalten.
Merkregel für die Verknüpfungszeichen: Schnittbildung (und) ist unten offen $\cap$, Vereinigung (oder) ist oben offen $\cup$.
In analoger Weise definiert man den Durchschnitt und die Vereinigung mehrerer Mengen.

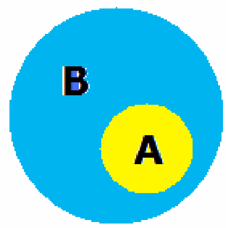
Zueinander fremde Mengen, disjunkte Mengen
Zwei Mengen A,B mit $A \cap B = \varnothing$ heißen disjunkt oder zueinander fremd, d.h. die Mengen A und B haben kein Element gemeinsam. Die Mengen A und B werden dann auch fremd genannt.

Differenzmenge ... Differenz $A \setminus B$: alle x, welche in A aber nicht in B

symmetrische Differenzmenge, Diskrepanz
symmetrische Differenz: alle x, welche entweder in A oder in B enthalten sind: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Beispiele: Der Durchschnitt der Menge aller Rechtecke mit der Menge aller Rhomben ist die Menge aller Quadrate. Die Vereinigung der Menge aller Rechtecke mit der Menge aller Parallelogramme ist die Menge aller Parallelogramme, da jeder Rechteck ein Parallelogramm ist.
$A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, a, d\} \rightarrow A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{a, b\}$, $A \setminus B = \{c\}$, $A \triangle B = \{c, d\}$

Teilmengenbeziehung, Inklusion
Eine Menge A ist Teilmenge von B, wenn alle Elemente aus A auch in B enthalten sind. $A \subseteq B$
Enthaltenseinsrelation: $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$
A wird dann auch Untermenge, B Obermenge genannt. Die Teilmengenbeziehung ist reflexiv und transitiv.
Die leere Menge $\varnothing$ ist in jeder Menge enthalten.



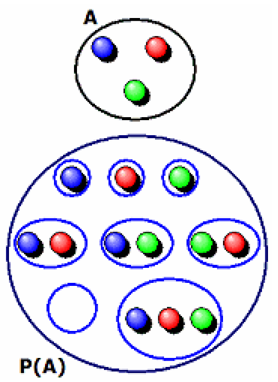
Eigenschaften der Inklusion: für Mengen A und B gilt
Reflexivität $A \subseteq A$
Antisymmetrie $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B$
Transitivität $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$
Auf Grund dieser Eigenschaften bildet die Inklusion eine teilweise Ordnung unter den Mengen.
Eine endliche Menge mit n Elementen besitzt genau 2^n verschiedene Teilmengen.

Echte Teilmenge
Eine Menge A ist echte Teilmenge von B, wenn alle Elemente aus A auch in B enthalten sind und es in B Elemente gibt, welche nicht in A sind. $A \subset B$ $(A \subset B) \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in B) \wedge (\exists x \in B : x \notin A)$
Wenn $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt, sind beide Mengen gleich $A = B$. A ist dann eine unechte Teilmenge von B und umgekehrt.
Nach DIN 5473 sind die Zeichen $\subset$ für echtes Enthaltensein und $\subseteq$ für Enthaltensein zu verwenden. Die umgekehrten Zeichen "$\supset$" und "$\supseteq$" sollten nicht genutzt werden.
Ist eine Menge A keine echte Teilmenge von B, so wird dies durch das Zeichen "$\not\subset$" gekennzeichnet: $A \not\subset B$

Gleichmächtige Mengen
Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig $A \sim B$, wenn eine eineindeutige Abbildung der einen auf die andere Menge existiert.
Beispiel: $N \sim Z$, $N \sim P$, N und R sind nicht gleichmächtig.
Zum Beispiel ist die Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig zur Menge der geraden Zahlen, d.h. eine Menge kann zu einer echten Teilmenge gleichmächtig sein. Endliche Mengen sind gleichmächtig, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen enthalten.
Für endliche Mengen ist die Mächtigkeit der Menge gleich der Anzahl der Elemente der Menge.

Der Begriff der Bijektion kann zur Definition der Gleichmächtigkeit von Mengen genutzt werden. Anschaulich bedeutet, dass zwei Mengen gleichmächtig sind, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen enthalten. Da es bei unendlichen Mengen schwierig ist, von Anzahlen zu sprechen, definiert man:
Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig genau dann, wenn es eine Bijektion von A auf B gibt. Damit ist die Gleichmächtigkeitsrelation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, d.h. eine Äquivalenzrelation.

Komplement einer Menge , Komplementärmenge
Komplement zu A: alle x aus der Grundgesamtheit X, welche nicht in A sind
Schreibweise: A_C, oder X-A oder A^{-}
Es gilt stets: $X^C = \varnothing$ $\qquad \varnothing^C = X (A^C)^C = A$ $\qquad A^C \cap A = \varnothing$ $\quad A^C \cup A = X$



Potenzmenge
Die Potenzmenge P(A) einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. Die leere Menge und die Menge selbst gehören zur Potenzmenge. Für eine endliche Menge mit n Elementen besteht die Potenzmenge aus 2^n Mengen.
Beispiel: Menge A = {1,2,3} → Potenzmenge P(A) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, A}
Menge B = {1,2,3,4}
Potenzmenge P(A) = {∅, {1}, {2}, {3}, {4}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}, B}
Eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge P(A) heißt Mengensystem über A.
Die Potenzmenge P(∅) der leeren Menge ∅ enthält diese als Element, womit P(∅) selbst nicht leer ist.
Weiterhin gilt für zwei Mengen A und B:

$A \subseteq B \rightarrow P(A) \subseteq P(B)$
$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
$P(A \cup B) \supseteq P(A) \cup P(B)$; d.h. nicht notwendig gleich

Produktmenge, Paarmenge, Kartesisches Produkt
Die Produktmenge $A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare, deren erstes Glied zu A und deren zweites zu B gehören. Die Produktmenge wird auch als kartesisches Produkt der Mengen A und B bezeichnet.
Das kartesische Produkt zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. d.h.

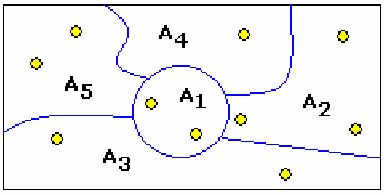
$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$.

Analog ist $A \times B \times C$ die Menge aller Tripel aus Elementen der drei Mengen A, B und C.
Das kartesische Produkt wird z.B. genutzt, um die Ebene (Zeichenebene) als kartesisches Produkt zweier Geraden (Zahlengeraden) zu konstruieren. Mathematisch gesehen ist die Ebene die Menge aller reellen Zahlenpaare, und es gilt $R^2 = R \times R$.
Beispiel: Mengen A = {a,b}, B = {x,y,z} ergeben die Produktmenge $A \times B$ = {(a,x), (a,y), (a,z), (b,x), (b,y), (b,z)}

Siebformel, Prinzip von Inklusion und Exklusion
Die Siebformel ist eine Verallgemeinerung der Summenregel für Mächtigkeiten auf den Fall nicht notwendig disjunkter Mengen.
Seien A_1, A_2 usw. Teilmengen einer Menge A. Dann gilt:
card (A $(A_1 \cup A_2)$) = card A - card A_1 - card A_2 + card $(A_1 \cap A_2)$

card $(A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3))$ = card A - card A_1 - card A_2 - card A_3 + card $(A_1 \cap A_2)$ + card $(A_1 \cap A_3)$ + card $(A_2 \cap A_3)$ - card $(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

Anwendung: Wie viele Primzahlen bis 100 gibt es?
Jede zusammengesetzte Zahl < 100 hat einen Primteiler ≤ 7. Damit zählt man die Zahlen bis 100, die durch keine der Zahlen 2, 3, 5, 7 teilbar sind. Zum Ergebnis muss 4 addiert werden; für die Primzahlen 2,3,5,7; und eins subtrahiert werden für die Nichtprimzahl 1.
Sei also $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ und A_n die Teilmenge der durch n teilbaren Zahlen. Dann gilt card $A_n = [100 / n]$ und $A_m \cap A_n = A_{mn}$, wenn m und n teilerfremd sind. Es folgt
card $(A \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7))$ = card A - card A_2 - card A_3 - card A_5 - card A_7 + card A_6 + card A_{10} + card A_{14} + card A_{15} + card A_{21} + card A_{35} - card A_{30} - card A_{42} - card A_{70} - card A_{105} + card A_{210} = 100 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 = 22
also gibt es genau 22 + 4 - 1 = 25 Primzahlen bis 100.



Zerlegung einer Menge

Die Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ bilden eine Zerlegung einer Menge M, wenn sie paarweise fremd sind und ihre Vereinigung M ist, d.h.

$$A_i \cap A_k = \varnothing \text{ für } i \neq k \text{ und } A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = M.$$

Ein Beispiel für eine Zerlegung einer Menge in fünf Teilmengen ist in der Abbildung zu sehen.

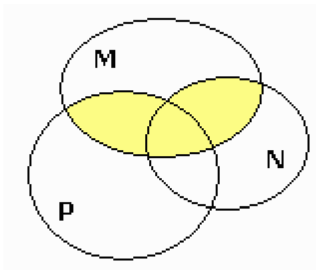
Indikator einer Menge

A sei eine Teilmenge von M. Die Funktion, die auf A den Wert 1 und auf der Komplementärmenge von A den Wert 0 annimmt, wird Indikator der Menge A genannt und mit I_A bezeichnet.
Für eine Element $x \in M$ gilt somit

$I_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $\qquad I_A(x) = 0$ für $x \in A^-$ $\qquad$ und $\quad I_A = 1$ und $I_A = 0$

können somit auch als Bezeichner der Menge A und ihrer Komplementmenge benutzt werden.
Es gilt: $I_A{}^2 = I_A \qquad I_A + I_{A^-} = I_M \quad I_A * I_{A^-} = I_\varnothing \quad I_{A \cap B} = I_A * I_B \quad I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_A * I_B$

Allgemeine Regeln



Die Vereinigung und der Durchschnitt sind kommutativ, assoziativ und zueinander wechselseitig distributiv.

$A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$, Kommutativgesetze
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, Assoziativgesetze
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; Distributivgesetze
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Für die Differenzmengenbildung sind das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz nicht gültig, z.B. $\{1,2,3\} \setminus \{1,2\} = \{3\} \neq \{1,2\} \setminus \{1,2,3\} = \varnothing$.
Abbildung: Euler-Venn-Diagramm des Distributivgesetzes der Vereinigung
$M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$

Idempotenzgesetz $\qquad A \cup A = A \qquad A \cap A = A$
Weitere Gesetze $\qquad A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \setminus B = A \setminus (A \cup B) = (A \cap B) \setminus B$
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
$A \setminus A = \varnothing \qquad (A \setminus B) \cap B = \varnothing$
$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$
$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Absorptionsgesetze, Adjunktivität $\qquad A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$

Abzählbare Menge

Abzählbare Menge heißt eine Menge mit unendlich vielen Elementen, wenn sie sich "durchnumerieren" lässt.
Genauer ausgedrückt heißt das, dass es eine bijektive Funktion von der Menge der natürlichen Zahlen in die gegebene Menge gibt. Das ist genau dann der Fall, wenn diese Menge zur Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.

Beispiele für abzählbare Mengen sind, neben den natürlichen Zahlen, die Menge der ganzen Zahlen und die Menge der rationalen Zahlen. Nicht abzählbar (überabzählbar) sind die Menge der reellen Zahlen und die Menge der irrationalen Zahlen. Die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Beispiel einer nichtabzählbaren Menge:
Die Menge aller abzählbar unendlichen Folgen von natürlichen Zahlen ist nicht abzählbar. Dass sie unendlich ist, ist offensichtlich.
Wenn sie abzählbar unendlich wäre, so hätte jede Folge eine Nummer, und zu jeder Nummer i gehört eine Folge, die man mit $a_{i1}, a_{i2}, \ldots$
bezeichnen könnte. Man konstruiere die Zahlenfolge $a_{11} + 1, a_{22} + 1, \ldots$
Diese müsste auch eine Nummer haben, etwa die Nummer j. Demnach wäre

$$a_{j1} = a_{11} + 1 \; ; \; a_{j2} = a_{22} + 1 \; ; \; \ldots$$

und vor allem $a_{jj} = a_{jj} + 1$, was einen Widerspruch ergibt.

Obermenge

Eine Menge A heißt Obermenge einer Menge B, wenn B Teilmenge von A ist. Man schreibt $A \supseteq B$ (oder $B \subseteq A$).
Zum Beispiel ist die Menge der reellen Zahlen Obermenge der Menge der natürlichen Zahlen oder der Menge der rationalen Zahlen.

Eigenschaften endlicher Mengen

Seien A und B zwei endliche Mengen und C eine beliebige Menge, dann gilt:

- jede Teilmenge von A ist endlich
- $A \cup B$ ist endlich; $\text{card}(A \cup B) \le \text{card } A + \text{card } B$
- $A \cap B$ ist endlich; $\text{card}(A \cap B) \le \min(\text{card } A , \text{card } B)$
- $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$
- $A \backslash C$ ist endlich
- $\text{card } P(A) = 2^{\text{card } A}$

Ungleichmächtigkeit der Potenzmenge

Keine Menge ist mit ihrer Potenzmenge gleichmächtig. Für keine Menge A gilt $A \sim P(A)$.
Insbesondere muss die Unendlichkeit der Potenzmenge einer unendlichen Menge eine andere Art von Unendlichkeit sein.

Abzählbar unendliche Menge

Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, wenn sie zur Menge N der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist. Alle anderen unendlichen Mengen sollen überabzählbar unendlich heißen.
Die abzählbare Unendlichkeit einer Menge M bedeutet also nichts anderes, als dass M mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert werden kann, quasi abgezählt werden kann.
Für die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen wird die Kardinalzahl $\aleph_0$ eingeführt

$$\text{card } N = \aleph_0$$

$\aleph$ (gesprochen "Aleph") ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets.
$\aleph_0$, d.h. "Aleph Null", ist die abzählbare Mächtigkeit der natürlichen, rationalen und algebraischen Zahlen und damit die kleinste transfinite Kardinalzahl.
Unter $\aleph_1$, d.h. "Aleph Eins", wird die Mächtigkeit der reellen Zahlen verstanden.

Schubfachprinzip, Dirichlet-Prinzip

Das Schubfachprinzip oder Dirichlet-Prinzip (im englischen pigeonhole principle = Taubenschlagprinzip) ist eine einfache und effiziente Methode, um Aussagen über eine endliche Menge zu machen.
Das Prinzip kann folgendermaßen formuliert werden:
Falls man n Objekte auf m Mengen ($n,m > 0$) verteilt, und n größer als m ist, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mehr als ein Objekt landet.

Der Name ergibt sich aus der Überlegung: Wenn man eine bestimmte Anzahl von Schubfächern hat, und man mehr Objekte in die Fächer legt als Fächer vorhanden sind, dann sind in irgendeinem Schubfach mindestens zwei dieser Objekte. Das Prinzip geht auf Dirichlet zurück, der es 1834 nutzte.

Der Beweis dieses Prinzips ist einfach und kann mittels Widerspruch geführt werden: Falls das Prinzip nicht stimmt, dann ist in jedem Schubfach höchstens ein Objekt. Damit gibt es höchstens so viele Objekte wie Schubfächer. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, dass es mehr Objekte als Schubfächer gibt.

Trotz der Einfachheit erlaubt das Schubfachprinzip interessante Aussagen, zum Beispiel die, dass es in Berlin mindestens zwei Personen gibt, die exakt dieselbe Anzahl von Haaren auf dem Kopf haben.
Nachweis: Man teilt alle Bewohner von Berlin nach der Anzahl ihrer Haare in "Schubfächer" ein. Typischerweise hat der Mensch etwa 100000 bis 200000, jedoch sicher nicht mehr als 1 Million Haare, damit gibt es maximal eine Million Schubfächer.
Da es aber etwa in Berlin mehr als 1 Millionen Einwohner gibt, hat man mehr Einwohner als Schubfächer.

Erweitertes Schubfachprinzip

Verteilt man n Objekte auf k Mengen (n,k > 0) und ist dabei n > k, so gibt es mindestens eine Menge, in der sich mehr als (n-1)/k Objekte befinden.

Damit kann man zum Beispiel zeigen, dass es in Deutschland mindestens zweiundachzig Einwohner gleicher Haaranzahl gibt.

Schubfachprinzip-Beispiele

Mit Hilfe des Dirchletschen Schubfachprinzips können verschiedene Sachverhalte bewiesen werden, zum Beispiel

1) Es sei a eine irrationale Zahl. Dann existieren unendlich viele rationale Zahlen $r = p/q$, so dass $|a - r| < q^{-2}$ gilt.
2) Werden 55 natürliche Zahlen $x_1, \ldots, x_{55}$ gewählt, so dass $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{55} \leq 100$
gilt, dann unterscheiden sich zwei der Zahlen um 9 bzw. 10, ein Paar mit der Differenz 12 und ein Paar mit der Differenz 13. Erstaunlicher Weise muss kein Paar mit der Differenz 11 existieren.
3) Für eine ungerade natürliche Zahl n mit einer beliebigen Permutation p der Menge {1, 2, …, n} ist das Produkt
$P(p) = (1-p(1)) \cdot (2-p(2)) \cdot \ldots \cdot (n-p(n))$ eine gerade Zahl.
4) In einem Zimmer befinden sich eine beliebige Anzahl von Personen, mindestens 2. Einige der Personen sind sich gegenseitig bekannt, andere nicht.
Dann gibt es stets mindestens 2 Personen, die die gleiche Anzahl von Bekannten im Zimmer haben.
5) Werden die natürlichen Zahlen 1, 2, …, 10 in beliebiger Reihenfolge auf einen Kreis geschrieben, so haben drei aufeinanderfolgende Zahlen eine Summe größer als 16.
6) Werden 5 Punkte in einem gleichseitigen Dreieck mit der Kantenlänge 1 gewählt, so gibt es mindestens ein Punktepaar mit einem Abstand kleinergleich 0,5.
7) In jedem Polyeder gibt es mindestens ein Paar von Seitenflächen mit der gleichen Anzahl von Kanten.
8) Ein 8x8-Schachbrett werde mit 13 Schnitten geteilt. Dann enthält mindestens ein Teilstück mehr als einen Mittelpunkt der 64 Quadrate.

Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. d.h.

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

Analog ist $A \times B \times C$ die Menge aller Tripel aus Elementen der drei Mengen A, B und C.
Das kartesische Produkt wird z.B. genutzt, um die Ebene (Zeichenebene) als kartesisches Produkt zweier Geraden (Zahlengeraden) zu konstruieren. Mathematisch gesehen ist die Ebene die Menge aller reellen Zahlenpaare, und es gilt $R^2 = R \times R$.

Beispiel: Sei $A = \{1;3\}$ und $B = \{1;2\}$ gegeben. Dann ist

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (3,1), (3,2)\} \text{ und } B \times A = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3)\}$$

Damit ist $A \times B \neq B \times A$, d.h. das kartesische Produkt für Mengen ist nicht kommutativ.

Für Mengen A, B, C, D gilt

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ und $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ und $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ und $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$
$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$
$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \rightarrow (A \times C) \subseteq (B \times D)$

Direkte Summe

Unter der direkten Summe $A \oplus B$ zweier Mengen A und B ganzer Zahlen versteht man die Menge $C = A \oplus B = \{a+b: a \in A, b \in B\}$
Beispiel: Die Mengen $A = \{1,2,3\}$ und $B = \{5,6\}$ haben als direkte Summe $A \oplus B = \{6,7,8,9\}$.

Kontinuumshypothese

... besagt, dass zwischen den Kardinalzahlen $\aleph_0$ und $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ keine weitere Kardinalzahl steht. Also jede Teilmenge von R ist endlich, gleichmächtig zu N, d.h. abzählbar, oder gleichmächtig zu R, d.h. überabzählbar. Kann weder bewiesen, noch widerlegt werden. Für die algebraischen Zahlen ergibt sich auch $\aleph_0$. Weiterhin gilt

$\aleph_0^r = \aleph_0$ $\qquad$ $r\, \aleph_0 = \aleph_0$ $\qquad$ $f + \aleph_0 = \aleph_0$

Diese Vermutung wurde 1878 von Cantor aufgestellt und viele bekannte Mathematiker versuchten, sie entweder zu beweisen oder zu widerlegen. Im Jahr 1938 zeigte Gödel, dass sich die Kontinuumshypothese aus der bekannten Axiomatik der Mengenlehre nicht widerlegen lässt.
Weitere 25 Jahre später bewies Cohen, dass dieselbe Axiomatik der Mengenlehre nicht genügt, um die Kontinuumshypothese zu beweisen. Cohen konnte sogar zeigen, dass die Verneinung der Kontinuumshypothese zu keinem Widerspruch in der Mengenlehre führt. Daher kann der Kontinuumshypothese im Rahmen der Mengenlehre kein Wahrheitswert zugewiesen werden. Sie kann, ebenso gut wie ihre Negation, als neues Axiom verwendet werden.

David Hilbert: „Cantors Problem von der Mächtigkeit des Continuums“

„Zwei Systeme, d.h. zwei Mengen von gewöhnlichen reellen Zahlen oder Punkten heißen nach *Cantor* aequivalent oder von gleicher Mächtigkeit, wenn sie zu einander in eine derartige Beziehung gebracht werden können, daß einer jeden Zahl der einen Menge eine und nur eine bestimmte Zahl der anderen Menge entspricht. Die Untersuchungen von *Cantor* über solche Punktmengen machen einen Satz sehr wahrscheinlich, dessen Beweis jedoch trotz eifrigster Bemühungen bisher noch Niemanden gelungen ist; dieser Satz lautet:
Jedes System von unendlich vielen reellen Zahlen d. h. jede unendliche Zahlen- oder Punktmenge ist entweder der Menge der ganzen natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... oder der Menge sämmtlicher reellen Zahlen und mithin dem Continuum, d.h. etwa den Punkten einer Strecke aequivalent; *im Sinne der Aeqivalenz giebt es hiernach nur zwei Zahlenmengen, die abzählbare Menge und das Continuum.*
Aus diesem Satz würde zugleich folgen, daß das Continuum die nächste Mächtigkeit über die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen hinaus bildet; der Beweis dieses Satzes würde mithin eine neue Brücke schlagen zwischen der abzählbaren Menge und dem Continuum. Es sei noch eine andere sehr merkwürdige Behauptung *Cantor*s erwähnt, die mit dem genannten Satze in engstem Zusammenhange steht und die vielleicht den Schlüssel zum Beweise dieses Satzes liefert. Irgend ein System von reellen Zahlen heißt *geordnet*, wenn von irgend zwei Zahlen des Systems festgesetzt ist, welches die frühere und welches die spätere sein soll, und dabei diese Festsetzung eine derartige ist, daß, wenn eine Zahl a früher als die Zahl b und b früher als c ist, so auch stets a früher als c erscheint. Die natürliche Anordnung der Zahlen eines Systems heiße diejenige, bei der die kleinere als die frühere, die größere als die spätere festgesetzt wird. Es giebt aber, wie leicht zu sehen ist, noch unendlich viele andere Arten, wie man die Zahlen eines Systems ordnen kann.
Wenn wir eine bestimmte Ordnung der Zahlen ins Auge fassen und aus denselben irgend ein besonderes System dieser Zahlen, ein sogenanntes Teilsystem oder eine Teilmenge, herausgreifen, so erscheint diese Teilmenge ebenfalls geordnet. *Cantor* betrachtet nun eine besondere Art von geordneten Mengen, die er als *wohlgeordnete* Mengen bezeichnet und die dadurch charakterisirt sind, daß nicht nur in der Menge selbst, sondern auch in jeder Teilmenge eine früheste Zahl existirt. Das System der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... in dieser

seiner natürlichen Ordnung ist offenbar eine wohlgeordnete Menge. Dagegen ist das System aller reellen Zahlen, d. h. das Continuum in seiner natürlichen Ordnung offenbar nicht wohlgeordnet. Denn, wenn wir als Teilmenge die Punkte einer endlichen Strecke mit Ausnahme des Anfangspunktes der Strecke ins Auge fassen, so besitzt diese Teilmenge jedenfalls kein frühestes Element. Es erhebt sich nun die Frage, ob sich die Gesamtheit aller Zahlen nicht in anderer Weise so ordnen läßt, daß jede Teilmenge ein frühestes Element, hat, d.h. ob das Continuum auch als wohlgeordnete Menge aufgefaßt werden kann, was *Cantor* bejahen zu müssen glaubt. Es erscheint mir höchst wünschenswert, *einen direkten Beweis dieser merkwürdigen Behauptung von Cantor zu gewinnen*, etwa durch wirkliche Angabe einer solchen Ordnung der Zahlen, bei welcher in jedem Teilsystem eine früheste Zahl aufgewiesen werden kann."

Supremum und Infimum von Mengen

Jede nach oben beschränkte , nichtleere Teilmenge M von R (Menge der reellen Zahlen) besitzt eine kleinste obere Schranke. Diese wird Supremum von M genannt und mit sup M bezeichnet.
Jede nach unten beschränkte , nichtleere Teilmenge M von R (Menge der reellen Zahlen) besitzt eine größte untere Schranke. Diese wird Infimum von M genannt und mit inf M bezeichnet.
Beispiel: Die Menge aller rationalen Summen $1/1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + ... + 1/n^2$, n = 1,2,3,..., ist nach oben beschränkt. Eine obere Schranke ist zum Beispiel 2. Die kleinste obere Schranke ist allerdings $\pi^2/6$. Überraschend ist, dass hier die obere Schranke einer Menge rationaler Zahlen irrational ist.

Folgerungen:

Für positive Zahlen a und b gibt es eine natürliche Zahl n mit n * a > b.
Zu jeder positiven Zahl r gibt es ein natürliches n mit n > r. Zu jedem positiven ε gibt es eine natürliche Zahl N mit $1/N < \varepsilon$.
In jedem, noch so kleinen, Intervall]a , b[reeller Zahlen gibt es eine, ja sogar unendlich viele rationale Zahlen.
In jedem Intervall]a , b[reeller Zahlen gibt es mindestens eine irrationale Zahl.

Häufungswert

Eine Zahl z heißt Häufungswert der Menge M, wenn für jedes beliebige positive ε die Ungleichung $| a - z | < \varepsilon$ für unendlich viele Elemente a der Menge erfüllt ist. Jede unendliche und beschränkte Zahlenmenge hat mindestens einen Häufungswert.

Mengenbildungsaxiom für Mengen erster Stufe

Es gibt eine Menge M, so dass für jedes Element x gilt: $x \in M$ genau dann, wenn a(x).

Mengenbildungsaxiom für Mengen zweiter Stufe

Es gibt ein Mengensystem M, so dass für jede Menge X gilt: $X \in M$ genau dann, wenn a(X).

Wohlordnungsgesetz

Unter dem Wohlordnungsgesetz versteht man eine Menge M, welche in eine Menge paarweise zueinander elementfremder Teilmengen A, B, C, ... zerfällt, deren jede mindestens eine Teilmenge M1, welche mit jeder der Teilmengen A, B, C, ... genau ein Element gemeinsam hat.
Eine Menge heißt endlich, wenn sie keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist; eine Menge heißt unendlich, wenn sie wenigstens einer echten Teilmenge gleichmächtig ist.

Geordnete Menge

Eine Menge M heißt genau dann durch eine Relation R einfach geordnet, wenn diese Relation irrreflexiv und transitiv ist.
Zwei durch eine gewisse Relation R geordnete Mengen M, N heißen genau dann ähnlich bezüglich der Relation $\propto$, wenn sie sich derart eineindeutig aufeinander abbilden lassen, dass für zwei verschiedene Elemente $x, y \in M$ mit $x \propto y$ auch in N die Ordnungsrelation $f(x) \propto f(y)$ gilt.

Offene Menge ... Eine Menge $E \subseteq R^n$ heißt offen, wenn sie mit jedem ihrer Punkte auch eine ε-Umgebung des Punktes enthält, d.h. $\forall x_0 \in E \ \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon \subseteq E$.

Abgeschlossene Menge

Eine Menge $E \subseteq R^n$ heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Die einzigen Mengen des R^n, die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind, sind $\varnothing$ und R^n. Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Kompliment offen ist. Die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder offen.

Gegeben sei eine Teilmenge A der Menge C der komplexen Zahlen. A ist abgeschlossen, wenn für jede Folge (x_n) in A, die konvergent ist, auch der Grenzwert

$\lim_{n\to\infty} x_n$

ein Element von A ist.
Eine abgeschlossene Menge enthält keine Lücken in ihrem Inneren. Alle Randpunkte sind auch Elemente der Menge.

Beispiel: Das Intervall $I = [-1, 1]$ reeller Zahlen ist abgeschlossen. Auf

$I = \{x \in R \mid -1 \le x \le 1\}$

betrachten wir eine beliebige konvergente Folge (x_n) in I. Dann gilt für jedes Folgenglied x_n

$-1 \le x_n \le 1$ und $-1 \le \lim_{n\to\infty} x \le 1$

d.h., I ist eine abgeschlossene Menge.
Dagegen ist die maximale Definitionsmenge $D = R \setminus \{0\}$ für die Funktion $f(x) = 1/x$ nicht abgeschlossen.
Die Nullfolge $\{1/n\}$ enthält nur Elemente aus D. Allerdings ist der Grenzwert 0 kein Element von D.
Im Allgemeinen muss die Abgeschlossenheit einer Menge rechnerisch geprüft werden.
Dabei ist zu beachten, dass aus $x_n \le a$ auch $\lim_{n\to\infty} x_n \le a$ folgt. Dagegen folgt aus $x_n < a$ nicht $\lim_{n\to\infty} x_n < a$.

Kompakte Menge

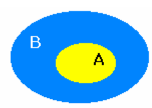
Eine Menge K, Teilmenge der komplexen Zahlen, heißt kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

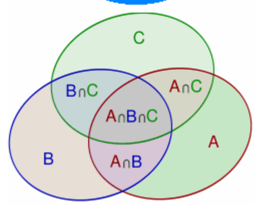
Axiomatische Mengenlehre - Definition

Gegeben sind Variablen x,y,z, ... für Objekte, welche man Klassen nennt. Zwischen ihnen kann eine zweistellige Elementrelation $x \in y$ bestehen. Diejenigen Klassen, die Elemente wenigstens einer Klasse sind, nennt man Mengen. Für diese Menge fordert man axiomatisch:

1. $x = y \Leftrightarrow$ für alle z gilt: $x \in z \Leftrightarrow y \in z$ und $z \in x \Leftrightarrow z \in y$ ... Gleichheit von Mengen
2. für jedes x existiert eine Menge Mg x ... Existenzaxiom
3. für alle z gilt: $(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$ ... Extensionalitätsaxiom
4. für alle x gilt: $(A(x) \Rightarrow \text{Mg } x) \Rightarrow$ es existiert ein y, so dass für x gilt: $(x \in y \Leftrightarrow A(x))$ ... Komprehensionsaxiom
5. Mg $\varnothing$ ... Nullmengenaxiom
6. Mg $x \Rightarrow$ Mg $\{x\}$ ... Einermengenaxiom
7. Mg x und Mg $y \Rightarrow$ Mg$(x \cup y)$ ... 1.Vereinigungsaxiom
8. Mg $x \Rightarrow$ Mg$(\cup_{y\in x}\, y)$ ... 2.Vereinigungsaxiom
9. für alle x gilt: (Mg $x \wedge \varnothing \in x \wedge (y \in x\ y \Rightarrow \{y\} \in x)$) ... Unendlichkeitsaxiom
10. Mg $x \wedge f : x \to y \Rightarrow$ Mg y ... Funktionalaxiom
11. Mg $x \Rightarrow$ Mg P(x) ... Potenzmengenaxiom
12. zu jeder Klasse y nichtleerer Mengen x gibt es eine Funktion f mit $f(x) \in x$ für alle $x \in y$ ... Auswahlaxiom

Bei dieser Mengenerklärung treten die klassischen Probleme der "naiven" Mengenlehre, wie z.B. die Russelsche Antinomie, nicht mehr auf.



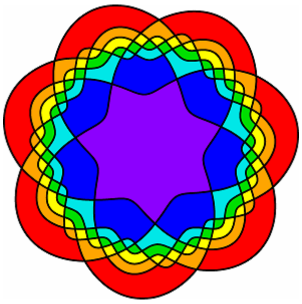


Venn-Diagramm, Mengendiagramm

Zur Veranschaulichung von Mengen und Mengenoperationen benutzt man Venn-Diagramme (nach John Venn, 1834-1923). Dabei werden Mengen durch ebene Figuren dargestellt.
In der oberen Abbildung wird z.B. die Teilmengenbeziehung $A \subset B$ dargestellt, in der unteren Abbildung die Schnittmengen dreier Mengen.
Mitunter werden die Venn-Diagramme auch als Eulersche Kreise bezeichnet.

Symmetrische Venn-Diagramme

Venn-Diagramme werden vor allem für drei Menge mit Kreisen verwendet. Venn hatte jedoch die Absicht, "in sich elegante symmetrische Figuren" zu finden, die eine größere Anzahl an Mengen darstellen, und zeigte ein Diagramm für vier Mengen in Ellipsenform.
Er gab ein Konstruktionsverfahren an, mit dem man Venndiagramme für eine beliebige Anzahl von Mengen darstellen kann, wobei jede geschlossene Kurve mit den anderen verflochten ist.



1960 wurde begonnen, intensiv mit Computereinsatz nach derartigen symmetrischen Venn-Diagrammen zu suchen. Gefunden wurden zuerst Venn-Diagramme mit 7 Mengen, sogenannte 7-Venn-Diagramme. Die Abbildung zeigt eines.
Am 27.Juli 2012 gaben Khalegh Mamakani und Frank Ruskey von der Universität von Victoria (Kanada) die Entdeckung des ersten 11-Venn-Diagramms bekannt.
siehe
http://webhome.cs.uvic.ca/~ruskey/Publications/Venn11/Venn11.html
Abbildung: 11-Venn-Diagramm

Logik

Unter der Logik (griech. λογική [τέχνη] „die denkende [Kunst, Vorgehensweise]") wird heute im Allgemeinen eine teils in der Philosophie, teils in der Mathematik und in der Informatik angesiedelte Theorie verstanden, die sich primär mit den Normen des korrekten Schlussfolgerns beschäftigt. Heute versteht man unter Logik überwiegend formale Logik (auch symbolische Logik oder mathematische Logik genannt), wie man sie zum Beispiel in der Aussagenlogik und in den formalen Systemen findet.

Aussagenlogik
Fachgebiet, welches sich mit mathematischen Aussagen, deren Beziehungen und Operationen beschäftigt.
Im Gegensatz zur Begriffslogik untersucht die Aussagenlogik nicht Verknüpfungen von - und Beziehungen zwischen - Begriffen, sondern Verknüpfungen von - und Beziehungen zwischen - Urteilen. Während sich in der Begriffslogik Urteile als aus Begriffen zwischen denen eine Beziehung besteht, zusammengesetzt darstellen, sind die Urteile in der Aussagenlogik atomare, d.h. nicht weiter zerlegbare Gebilde. Diese atomaren Bestandteile können wahr oder falsch sein. Gegenstand der Aussagenlogik ist, wie sich die ,,Wahrheitswerte`` der atomaren Bestandteile zu Wahrheitswerten komplexer sprachlicher Gebilde fortsetzen lassen.

Aussage
Eine Aussage p ist ein sprachliches Gebilde, dem man einen Wahrheitswert (entweder wahr oder falsch, 0 oder 1, true oder false) zuordnen kann. (tertium non datur)

Aussageform
Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde, das mindestens eine Variable enthält und zur Aussage wird, wenn für die Variable ein Element aus dem Grundbereich eingesetzt wird

Existenzaussagen
$\exists x \in M : A$ ... es existiert (mindestens) ein $x \in M$ mit der Eigenschaft A (ist wahre Aussage).
Der Operator $\exists$ wird auch Partikularisator, Existenzoperator oder Existenz-Quantor genannt.

Generalisator, Allquantor
$\forall x \in M$ gilt A … für alle x Element von M gilt A. Der Operator $\forall$ wird auch Allquantor genannt.
Eine Aussage mit Allquantor wird Allaussage genannt. Die Negation einer Allaussage ist eine Existenzaussage, die Negation eine Existenzaussage eine Allaussage.

Aussagenverknüpfungen, Junktoren, logische Verknüpfungen
Aussagen und Aussageformen können verneint oder durch die Wörter "und", "oder", "entweder ... oder", "wenn ..., dann ...", "genau dann, wenn" miteinander verknüpft werden. Dabei entsteht eine neue Aussage oder Aussageform.

Negation, NICHT, NOT, non	$\neg p$
Konjunktion, UND, AND, et	$p \wedge q$
Disjunktion, Alternative, ODER, OR, vel	$p \vee q$
Antivalenz, Entweder-Oder, XOR, aut	$p \oplus q$
Implikation, Wenn-Dann, seq	$p \Rightarrow q$
Äquivalenz, Genau-Dann-Wenn,äq	$p \Leftrightarrow q$

Die Konjunktion "A und B" ist genau dann wahr, wenn die Teilaussagen A und B zugleich wahr sind. Die Disjunktion "A oder B" ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Teilaussagen A bzw. B wahr ist.
Die Alternative "entweder A oder B" ist genau dann wahr, wenn eine der beiden Teilaussagen wahr und zugleich die andere falsch ist. In der Umgangssprache wird "oder" oft in dieser Art verwendet.
Die Implikation "wenn A, dann B" ist genau dann falsch, wenn A (Voraussetzung oder auch Prämisse genannt) wahr und gleichzeitig B (Schlussfolgerung oder auch Konklusion genannt) falsch ist. Die Äquivalenz "A genau dann, wenn B" ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben. Die Äquivalenz wird auch Biimplikation genannt.
Die Antivalenz wird auch Kontravalenz genannt.

Wahrheitswertetabelle

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \times q$	$p \mid q$	$q \Rightarrow p$
W	W	W	W	F	W	W	F	F	W
W	F	F	W	W	F	F	F	W	W
F	W	F	W	W	W	F	F	W	F
F	F	F	F	F	W	W	W	W	W

Funktionell vollständige Funktionen

Es gibt zwei zweistellige Wahrheitsfunktionen, die einzeln zur Repräsentation aller Wahrheitsfunktionen ausreichen.

Nicodsche Funktion, Weder-noch — NOR: $p \times q = \neg(p \vee q)$

Sheffersche Funktion, Nicht sowohl-als auch — NAND: $p \mid q = \neg(p \wedge q)$

Darstellung aussagenlogischer Funktionen mit NAND

$\neg p \Leftrightarrow (p|p)$

$p \wedge q \Leftrightarrow (p|q) \mid (p|q)$

$p \vee q \Leftrightarrow (p|p) \mid (q|q)$

$p \oplus q \Leftrightarrow [(p|p) \mid (q|q)] \mid (p|q))$

$p \Rightarrow q = p \mid (p|q)$

Darstellung aussagenlogischer Funktionen mit NOR

$\neg p \Leftrightarrow (p \times p)$

$p \wedge q \Leftrightarrow (p \times p) \times (q \times q)$

$p \vee q \Leftrightarrow (p \times q) \times (p \times q)$

$p \oplus q \Leftrightarrow [(p \times q) \times (p \times q)] \times [(p \times q) \times (p \times q)]$

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow [(p \times p) \times q] \times [(p \times p) \times q]$

Weitere Funktion: Inhibition $\Leftrightarrow \neg p \wedge q$

Aussagenfunktionen

Zusammenhang zwischen Aussagefunktionen

Zusammenhänge: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ $\quad (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

$p \oplus q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Prioritäten logischer Operationen: 1. $(\neg)$; 2. $(\wedge)$; 3. $(\vee)$; 4. $(\Leftrightarrow)$; 5. $(\Rightarrow)$

Tautologie

Eine Tautologie ist aussagenlogische Verknüpfung, welche für alle Belegungen der Variablen den Wahrheitswert 1 liefert. Eine Aussage, deren Wahrheitswert unter allen passenden Belegungen gleich ist, nennt man Kontradiktion.

Beispiele für Tautologien:

- $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
- $p \vee \neg p$; Satz vom ausgeschlossenen Dritten
- $\neg(p \wedge \neg p)$; Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$; Abtrennungsregel
- $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
- $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p)$
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
- $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$; Kettenschluss, modus barbara
- $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$; Satz zum modus ponens
- $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$; Satz zum modus tollens
- $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$; Fallunterscheidung, disjunktiver Syllogismus
- $p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow q$; indirekter Schluss
- $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$; ex falso quodlibet

Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch $\quad \neg (p \wedge \neg p)$

Satz vom ausgeschlossenen Dritten $\quad p \vee \neg p$

Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten (lat. principium exclusi tertii) besagt, dass von zwei einander widersprechenden Gegensätzen mindestens einer zutreffen muss.

Kettenschluss (modus barbara)	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	
Satz zum modus ponens	$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$	
Satz zum modus tollens	$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$	
Abtrennungsregel	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	
Fallunterscheidung	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$	
Indirekter Schluss	$p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow q$	
Kommutativität	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Assoziativität $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Doppelte Verneinung

doppelte Verneinung $\neg\neg\, p \Leftrightarrow p$
Anmerkung: In einigen Sprachen stellt die doppelte Verneinung eine Bekräftigung der Verneinung dar. In der deutschen Umgangssprache ist sie als Bekräftigung der Verneinung praktisch verschwunden und bedeutet heute in logischer Hinsicht oft Bejahung.

DeMorgan-Regel

$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Kettenschluss (modus barbara) als disjunktive Normalform

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

Umformulierung von Implikationen (Kontraposition, logischer Umkehrschluss)

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (\neg(p \wedge \neg q)) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

Umformulierung mit zwei Voraussetzungen

$$((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg r \Rightarrow \neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\neg r \wedge q) \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

Wahrheitswertetabelle

p	q	r	$((p\wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg r \Rightarrow \neg(p\wedge q))$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	1
1	1	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
0	0	0	1

"Hinreichend" $a \Rightarrow b$ bedeutet "a ist hinreichend für b"
"Notwendig" $\neg c \Rightarrow \neg d$ bedeutet "c ist notwendig für d"

Disjunktive Normalform

Ein Konjunktionsterm ist ein logischer Ausdruck (Term) einer Konjunktion einfacher oder negierter Variablen, wobei jede Variable höchstens einmal auftritt.
Ein Minterm ist ein Konjunktionsterm, in dem jede Variable genau einmal auftritt.
Unter einer disjunktiven Normalform, DN, versteht man die disjunktive Verknüpfung von Konjunktionstermen.
Enthält die disjuktive Normalform ausschließlich Minterme, so heißt sie ausgezeichnete Disjunktive Normalform, ADN. Jede DN läßt sich zu einer ADN erweitern.
Beispiel: Der logische Ausdruck $(a\wedge b) \Rightarrow c$ lässt sich mit

$$(a\wedge b\wedge c) \vee (\neg a\wedge b\wedge c) \vee (a\wedge\neg b\wedge c) \vee (\neg a\wedge\neg b\wedge c) \vee (\neg a\wedge b\wedge\neg c) \vee (a\wedge\neg b\wedge\neg c) \vee (\neg a\wedge\neg b\wedge\neg c)$$

als ausgezeichnete disjunktive Normalform darstellen. Beide Ausdrück haben identische Wahrheitswertetabellen.

Verknüpfungsbasis

Menge von Verknüpfungen, mit deren Hilfe jede beliebige Boolesche Funktion dargestellt werden kann. Die Mengen

$\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, {NAND}, {NOR}

sind Verknüpfungsbasen. In der Praxis bedeutet dies, dass jede beliebige Boolesche Funktion unter Verwendung von ausschließlich NAND-Gattern oder ausschließlich NOR-Gattern dargestellt werden kann. In den meisten digitalen Schaltkreisfamilien überwiegen NAND- und NOR-Gatter.

Algorithmus zur Konstruktion der Disjunktiven Normalform

1. Aufstellen der Wahrheitstabelle für die Funktion.
2. Streichen aller Zeilen, deren Funktionswert gleich Null ist.
3. Übersetzen jeder verbliebenen Zeile in einen Minterm. Dazu wird in der jeweiligen Zeile jede Eingangsvariable, die in der Wahrheitstabelle eine 0 enthält, negiert und jede

Eingangsvariable, die in der Wahrheitstabelle eine 1 enthält, nicht negiert in einen Minterm übernommen.
4. Die Disjunktion aller so gewonnenen Minterme ergibt die gesuchte ausgezeichnete Disjunktive Normalform.

Algorithmus zur Konstruktion der Konjunktiven Normalform

1. Aufstellen der Wahrheitstabelle für die Funktion.
2. Streichen aller Zeilen, deren Funktionswert gleich Eins ist.
3. Übersetzen jeder verbliebenen Zeile in einen Maxterm. Dazu wird in der jeweiligen Zeile jede Eingangsvariable, die in der Wahrheitstabelle eine 1 enthält, negiert und jede Eingangsvariable, die in der Wahrheitstabelle eine 0 enthält, nicht negiert in einen Maxterm übernommen.
4. Die Konjunktion aller so gewonnenen Maxterme ergibt die gesuchte ausgezeichnete Konjunktive Normalform.

Logik-Aufgabe

Drei Brüder

Du kommst an eine Weggabelung und weißt nicht, ob der linke oder der rechte Weg zu Deinem Ziel führt. Glücklicherweise ist gleich in der Nähe ein Haus, deren Bewohner Du fragen kannst. In dem Haus wohnen drei Brüder. Einer sagt immer die Wahrheit, einer lügt immer, und der dritte lügt manchmal und manchmal nicht. Du weißt aber nicht, wer der drei Brüder wer ist. Du darfst zwei beliebige Fragen stellen, um herauszufinden, wohin du gehen musst, um Dein Ziel zu erreichen. Eine Frage darfst Du nur an jeweils einen der drei Brüder richten; aber nicht notwendigerweise an den selben.
Was musst du wen fragen?

Lösung:
Die erste Frage an einen beliebigen der drei Brüder lautet: "Welcher von deinen Brüdern sagt prinzipiell häufiger die Wahrheit?"
Gerät man an den Wahrheitsliebenden, so zeigt er einem den Wankelmütigen. Gerät man an den Lügner, zeigt er einem auch den Wankelmütigen. Gerät man an den Wankelmütigen, zeigt er je nach Laune einen der beiden anderen. In allen drei Fällen aber ist der, den man weder gefragt hat noch den man gezeigt bekommen hat, nicht der Wankelmütige.

Diesem kann man also erfolgreich die Frage "Welchen Weg würde mir dein Bruder, der das genaue Gegenteil von dir ist, zeigen?"
Die Antwort ist auf jeden Fall der falsche Weg: Der Wahrheitsliebende würde wahrheitsgemäß auf den falschen Weg zeigen, und der Lügner würde lügen und auch auf den falschen Weg zeigen. Also muss man den anderen Weg nehmen.

Problem des Gefangenen

Der Gefangene wird in einen Raum mit zwei Türen geführt. Eine der Türen führt in die Freiheit, die anderen führen in den Tod. Vor den Türen stehen einige Wächter. Jeder von ihnen lügt immer oder sagt immer die Wahrheit; es ist aber unbekannt, welche von ihnen lügen und welche die Wahrheit sagen.
Wie kann man mit einer einzigen Frage an einen beliebigen der Wächter herausfinden, welche Türe in die Freiheit führt?

Lösung: "Welche Tür würde mir ein Wächter, der mit einem anderen Wahrheitsgehalt als du antwortet, nennen, wenn ich ihn nach der Tür in die Freiheit frage?"
Man erhält dann als Antwort immer die Tür in den Tod, muss also die andere wählen.

Am runden Tisch

Um einen runden Tisch sitzen einige Leute. Einige sagen immer die Wahrheit, andere lügen immer. Jeder behauptet über seinen Sitznachbar, er sei ein Lügner.
Eine Frau behauptet, dass 47 Leute an diesem Tisch säßen.
Darauf meint ein Mann verärgert: "Das stimmt nicht, sie ist eine Lügnerin. Es sitzen 50 Leute am Tisch".
Wie viele Leute saßen denn nun am Tisch?

Lösung: Da neben jedem Lügner jemand sitzen muss, der die Wahrheit sagt, muss eine gerade Anzahl an Leuten um den Tisch sitzen. Also lügt die Frau. Da der Mann die Frau als Lügnerin bezeichnet, spricht er die Wahrheit. Es sitzen also 50 Leute am Tisch.

Einstellungstest bei IBM

1. Es stehen fünf Häuser in einer Reihe. 2. Der Engländer bewohnt ein rotes Haus.
3. Der Spanier hat einen Hund. 4. Kaffee wird im grünen Haus getrunken.
5. Der Ukrainer trinkt Tee. 6. Das grüne Haus steht unmittelbar rechts neben dem elfenbeinfarbenen.
7. Der der Winston raucht, kaut Schnecken. 8. Milch wird im dritten Haus getrunken.
9. Krone wird im gelben Haus geraucht. 10. Der Norweger wohnt im ersten Haus.
11. Der Chesterfild raucht, wohnt im Haus neben dem Fuchs.
12. Krone wird neben dem Haus mit dem Pferd geraucht.
13. Der der Milde Sorte raucht, trinkt Orangensaft.
14. Der Japaner raucht Dorel. 15. Das Haus des Norwegers steht neben dem braunen Haus.

Frage A: Wer trinkt Wasser ? Frage B: Wem gehört das Zebra ?

Lösung zum Einstellungstest

Am schnellsten gelangt man mit Hilfe einer Tabelle zur Lösung. Drei Aussagen können direkt eingetragen werden:
1. Milch wird im dritten Haus getrunken. 2. Der Norweger wohnt im ersten Haus. 3. Das Haus des Norwegers steht neben dem braunen Haus.
Anschließend werden paarweise die im Text genannten Fakten eingetragen. Die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Häusern erzeugen eine Ausschlusslogik, welche letztendlich die unten stehende Kombination ergeben.

Haus 1	Haus 2	Haus 3	Haus 4	Haus 5
Norwegen	Ukraine	England	Spanien	Japan
gelb	braun	rot	elfenbein	grün
Wasser	Tee	Milch	Orangensaft	Kaffee
Fuchs	Pferd	Schnecken	Hund	Zebra
Krone	Chester	Whinston	Milde Sorte	Dorel

Demnach trinkt der Norweger Wasser (Frage 1) und das Zebra gehört dem Japaner (Frage 2).

Die drei Professoren

Drei Professoren bewerben sich um eine Anstellung an einer Universität. Der Vorsteher teilt ihnen folgendes mit: "Ich werde jedem von Ihnen, meine Herren, einen roten oder weißen Punkt auf die Stirn malen. Sobald Sie einen roten Punkt auf der Stirn eines Kollegen sehen, heben Sie bitte Ihre rechte Hand. Und wenn Sie Ihre eigene Farbe herausgefunden haben, senken Sie bitte Ihre Hand."
Er versieht alle drei Professoren mit einem roten Punkt und natürlich heben sie alle die Hände. Nach einiger Zeit lässt Professor Sol Hoph die Hand sinken und erklärt: "Ganz klar, ich muss einen roten Punkt haben."
"Woher wissen Sie das?", fragt der Vorsteher?

Lösung:
Die Professoren seien A, B und C. Für die Professoren dürfte klar sein: 3 mal Weiß ist unmöglich, da dann niemand die Hand heben würde. Auch 2 mal Weiß / 1 mal Rot kommt nicht in Frage, da dann nur die beiden mit dem weißen Punkt die Hand heben.
Damit bleibt noch 1 mal Weiß / 2 mal Rot oder 3 mal Rot. In diesen Fällen heben alle die Hand.
A überlegt so: "Hätte ich einen weißen Punkt, so sähe jeder der beiden andern einen weißen und einen roten Punkt und weil Rot mindestens 2 mal vorkommen muss, wüssten sie dann sofort, dass sie es wären, die den roten Punkt hätten. Sie müssten also sofort die Hand hinunternehmen und die richtige Lösung nennen.
Da sie aber die Hand oben behalten, sehen sie beide, B und C, zwei rote Punkte, also hat A einen roten Punkt.

Ableitung in der Logik, Herleitung

Unter einer Ableitung oder Herleitung versteht man in der mathematischen Logik eine formale Folgerung von neuen Aussagen aus einer Menge von gegebenen Aussagen. Die zulässigen Schlussregeln sind in einem Kalkül definiert.
Die einfache Anwendung einer solchen Regel auf Aussagen nennt man einen Ableitungsschritt.

Eine Aussage ϕ heißt ableitbar oder beweisbar aus einer gegebenen Menge Θ von Aussagen, wenn sie durch eine endliche Folge von Ableitungsschritten erreicht werden kann, wobei man von einer ggf. leeren Aussagenmenge Θ, den Prämissen oder Annahmen, ausgeht. Fügt man alle ableitbaren Aussagen zur Aussagenmenge hinzu, d.h. man bildet den deduktiven Abschluss, so erhält man eine Theorie.

Beispiel: $\Theta = \{\phi, \psi, \zeta\}$ sei als Aussagenmenge gegeben und eine Ableitungsregel des Kalküls sei

$\phi\ \psi\ /\ \phi \wedge \psi$,

so können zum Beispiel $\phi \wedge \omega$ und $\zeta \wedge \psi \wedge \phi$ abgeleitet werden.

Bei der Ableitbarkeitsrelation, bzw. dem Ableitbarkeitsbegriff, handelt es sich um eine Relation zwischen einer Menge von Aussagen, den Prämissen, und einer einzelnen Aussage, der Konklusion.
Für die Ableitbarkeit wird oft das Symbol |- verwendet. Θ |- ϕ ist dabei zu lesen als: "aus Θ ist ϕ ableitbar".
Unterschiedliche Logiken definieren jeweils einen unterschiedlichen Ableitbarkeitsbegriff. So gibt es einen aussagenlogischen Ableitbarkeitsbegriff, einen prädikatenlogischen, einen intuitionistischen, einen modallogischen usw.
Obwohl es also unterschiedliche Ableitbarkeitsrelationen gibt, gibt es doch Eigenschaften, die den meisten Ableitbarkeitsrelationen gemeinsam sind:

Inklusion $\Gamma \cup$ A |- A ; jede Annahme ist auch eine Folgerung
Idempotenz wenn Γ |- A und $\Gamma \cup$ {A} |- B, dann Γ |- B ; durch Hinzunahme von Folgerungen zu den Annahmen erhält man keine neuen Folgerungen
Monotonie wenn Γ |- A, dann $\Gamma \cup \Delta$ |- A ; Hinzufügen von Annahmen erhält die bisher möglichen Folgerungen
Kompaktheit Wenn Γ |- A, dann gibt es eine endliche Menge Δ mit $\Delta \in \Gamma$, so dass Δ |- A ; jede Folgerung aus einer unendlichen Annahmenmenge ist bereits aus einer endlichen Teilmenge zu erreichen

Aussagenlogische Paradoxien
Paradoxien sind sprachliche Ausdrücke, welche scheinbare Widersprüche in sich beinhalten.
Semantische Antinomien
Der Widerspruch entsteht durch Missbrauch der Sprache. Es wird nicht zwischen gewöhnlichen Aussagen und Aussagen über Aussagen unterschieden.
Syntaktische Antinomien
Der Widerspruch entsteht durch rein formale Schlüsse, insbesondere durch die Verwendung der Element-Menge-Beziehung der klassischen Mengendefinition.

Paradoxon des Epimenides
Epimenides war Philosoph um 600 v.u.Z.

"Alle Kreter sind Lügner ... einer ihrer Dichter hat dies gesagt..."

Paradoxon: Wenn der Dichter Kreter ist, dann hat er gelogen. Damit ist aber die Aussage falsch. Wenn er nicht gelogen hat, ist die Aussage aber auch falsch, da er ja Kreter ist.

Dieses Paradoxon wurde dem kretischen Dichter Epimenides von Eubulides von Milet von Clemens von Alexandria (150-215) "in den Mund gelegt". Epimenides soll in einen 57jährigen Schlaf gefallen sein. Dies inspirierte Goethe 1814 zu dem Festspiel "Des Epimenides Erwachen".

Das Paradoxon des Epimenides wird gern zur Konstruktion logischer Denkaufgaben genutzt.

Aufgabe: Ein Kreter (K) lügt stets, ein Grieche (G) sagt stets die Wahrheit. Zwei Leibgardisten A und B stehen vor dem Königspalast Wache; jeder von ihnen kann ein K oder ein G sein. Da sie dieselbe Uniform tragen, weiß ein Höfling nicht, welcher Gruppe jeder angehört. Auf eine darauf zielende Frage antwortet A: "Mindestens einer von uns ist ein K." Was sind A und B?
Lösung: Angenommen, A sei ein K, dann ist seine Aussage falsch, folglich wären beide ein G, was sich widerspricht. Also ist A ein G, d.h. seine Antwort ist korrekt und B ist damit ein G.

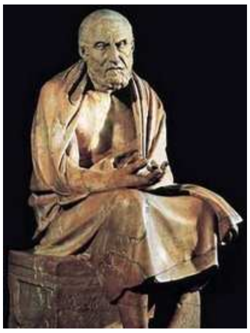
Ein Hinweis auf dieses Paradoxon findet sich auch im Neuen Testament, Titus 1,12:
"Es hat einer von ihnen gesagt, ihr eigener Prophet: Die Kreter sind immer Lügner, böse Tiere und faule Bäuche. Dies Zeugnis ist wahr."

Russelsche Antinomie
Das Barbier-Paradoxon ist eine Antinomie aus dem Bereich der Mengenlehre. In einer Stadt wohnt ein Mann und arbeitet als Barbier. Im Schaufenster seines Geschäfts hängt ein Schild mit folgendem Text:

"Ich rasiere alle Männer dieser Stadt, die sich nicht selbst rasieren - und nur diese!"

Die Männer, die sich selbst rasieren, darf der Barbier also nicht rasieren.
R ist die Menge aller Dorfbewohner, die der Friseur rasiert. Wenn der Friseur sich selbst rasiert, gehört er zu R. Weil er aber alle "Selbstrasierer" nicht rasieren darf, darf er sich nicht rasieren, gehört also doch nicht zu R. Dieser Widerspruch ist nicht aufzulösen.

Poincaré-Russel-Antinomie



Poincaré "Über transfinite Zahlen":
"A sei die kleinste ganze Zahl, deren Definition mehr als hundert deutsche Worte erfordert.
A muss existieren, da man mit hundert Worten jedenfalls nur eine endliche Anzahl von Zahlen definieren kann. Die Definition, die wir eben von dieser Zahl gegeben haben, enthält aber weniger als hundert Worte. Und die Zahl A ist also definiert als undefinierbar."

Paradoxon des Eubulides
Eubulides aus Milet (Mitte des 4.Jh. v.u.Z., Abbildung) war ein griechischer Philosoph und Logiker. Eubulides formulierte eine Vielzahl von Paradoxien. Das bekannteste Paradoxon ist

"Dieser Satz ist falsch."

Ist dieser Satz wirklich falsch, so ist seine Aussage richtig. Andernfalls, sollte der Satz falsch sein, so ist er wiederum richtig. Damit liegt ein Paradoxon vor.

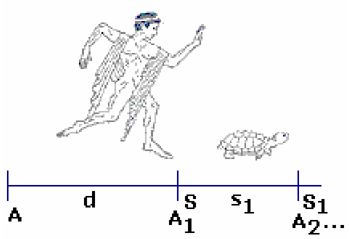
Sophismus vom Gehörnten
"Was du nicht verloren hast, das hast du noch. Hörner hast du nicht verloren. Daraus folgt: Du hast Hörner."
Der Sophismus beruht hier auf der Unbestimmtheit des Mittelbegriffes Verlust. Im Obersatz wird als Verlust das Verschwinden von etwas bezeichnet, das wir haben, im Untersatz wird unter Verlust der Nichtbesitz einer Sache verstanden.

Ein weiteres klassisches Paradoxon des Eubulides ist das vom Lügner.
"Wenn ich lügend sage, dass ich lüge, lüge ich oder sage ich Wahres?"
"Du sagst Wahres."
"Wenn ich Wahres sage und sage, dass ich lüge, lüge ich."
"Du lügst offenbar."
"Wenn ich aber lügnerisch sage, dass ich lüge, sage ich Wahres."
In späteren Versionen wird ausgesagt: "Wenn ein Lügner sagt, dass er lügt, dann bedeutet das, dass er sowohl lügt als auch die Wahrheit sagt. Denn wenn er die Wahrheit sagt, so lügt er, und wenn er lügt, so sagt er die Wahrheit."

Semantische Antinomie des Proklos (um 450)
Protagoras lehrt einen Schüler die Rechte und trifft mit ihm die Verabredung, dass der Schüler die Studienkosten erst zu entrichten hat, nachdem er seinen ersten Prozess gewonnen hat.

Da er nach dem Abschluss seiner Studien keine Prozess übernimmt, verklagt ihn Protagoras schließlich auf Zahlung der Kosten.
Er argumentiert: Gewinne ich den Prozess, so erhalte ich mein Geld auf Grund des Urteilsspruches, verliere ich, so erhalte ich es aufgrund der früheren Verabredung.
Der Schüler argumentiert umgekehrt, dass er die Studienkosten in keinem Fall zu zahlen braucht, entweder wegen der getroffenen Verabredung oder aufgrund des richterlichen Urteilsspruches.

Antinomie von Grelling (1908)
Man teile alle deutschen Adjektive in folgende zwei Klassen ein:
a) heterologische Adjektive, die nicht das sind, was sie bedeuten, z.B. das kurze Adjektiv "lang", das dreisilbige Adjektiv "zweisilbig" ...
b) autologische Adjektive, die das sind, was sie bedeuten, z.B. "kurz" oder "deutsch"
Die Frage, in welcher Klasse das Adjektiv "heterologisch" liegt, führt stets zu einem Widerspruch. Liegt es in a), müsste es aber in b) liegen, und umgekehrt.



Paradoxie des Zenon: Achill und die Schildkröte
Problem: Wettlauf zwischen Achill A und der Schildkröte S: S habe d Vorsprung. Ist A an der Stelle A1(Startposition von S) angelangt, so ist S doch bereits an der Stelle S1. Ist A an der Stelle A2 = S1 angelangt, so ist S doch bereits an der Stelle S2 usw. Wenn A also jeweils an der Stelle ist, wo S vorher war, so ist S immer wieder bereits eine Strecke weiter. Holt also Achill die Schildkröte nie ein??

Das berühmte Paradoxon lässt sich mit Hilfe der Formeln für unendliche geometrische Reihen erklären:
Die Geschwindigkeit von A sei v_A, diejenige der Schildkröte sei v_S mit $v_A > v_S$
A benötige für die Strecke d die Zeit $t_1 = d / v_A$ Strecke $s_1 = v_S \cdot t_1 = v_S / v_A \cdot d$
A benötige für die Strecke s_1 = A1A2 die Zeit $t_2 = s_1 / v_A$ Strecke $s_2 = v_S \cdot t_2 = v_S / v_A \cdot s_1$
A benötige für die Strecke s_2 = A2A3 die Zeit $t_3 = s_2 / v_A$ Strecke $s_3 = v_S \cdot t_3 = v_S / v_A \cdot s_2$
und so weiter ...
Also ist (s_n) eine geometrische Folge mit $q = v_S / v_A < 1$. Daher konvergiert die unendliche geometrische Reihe $s = s_1 + s_2 + s_3 + \dots$ $s = s_1 / (1 - q) = (v_S / v_A \cdot d) / (1 - v_S / v_A) = v_S \cdot d / (v_A - v_S)$
Dies stimmt mit der elementaren Berechnung der Gesamtzeit T überein, bis Achill die Schildkröte einholt:
$v_A \cdot T = v_S \cdot T + d$, also $T = d / (v_A - v_S)$
Quelle: http://www.mathematik.ch

Boolesche Algebra $(B,\cup,\cap,-)$
Eine Boolesche Algebra ist eine nichtleere Menge B mit den zweistelligen Verknüpfungen
$\cup$ und $\cap$
und der einstelligen Verknüpfung - (Komplement-Bildung), die für beliebige Elemente a,b,c aus B erfüllt:

$a \cup b = b \cup a$ $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$
$a \cup 0 = a$ $a \cup -a = 1$
$a \cap b = b \cap a$ $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$
$a \cap 1 = a$ $a \cap -a = 0$
$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$

Eine Zuordnung $B^n \to B$ heißt Boolesche Funktion von n Variablen
Besteht eine Boolesche Funktion aus Konjunktionen in disjunkter Form
$(a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n) \cap (-a_1 \cup a_2 \cup a_3 \cup \dots) \cap \dots$
so heißt sie konjunktive Normalform (KNF)
Jede Boolesche Funktion kann in eine konjunktive Normalform umgewandelt werden.

Allgemeine Boolesche Algebra
Eine boolesche Algebra muss nicht notwendigerweise mit den Operationen $\cup$, $\cap$ definiert werden. Allgemein gilt auch:

Axiome der Booleschen Algebra

Definition: Das 6-Tupel $(B,+,*,\sim,0,1)$ heißt Boolesche Algebra, wenn folgende Axiome gelten:
1. B ist eine nicht leere Menge, genannt Trägermenge, $0 \in B$ und $1 \in B$ und $0 \neq 1$.
2. Die Operatoren +, * bezeichnen binäre, ~ bezeichnet eine unäre Operation auf der Trägermenge B.
3. Die Operatoren +, * sind kommutativ und assoziativ.
4. Die Operatoren +, * sind wechselseitig distributiv zueinander.
5. Für alle $x \in B$ gilt $x + \sim x = 1$ und $x * \sim x = 0$
6. Für alle $x \in B$ gilt $x + 0 = x$ und $x *1 = x$

Aus diesen Axiomen folgen eine Reihe weiterer Sätze:
Satz 1: Die Operatoren +, * sind idempotent, d.h. für alle $x \in B$ gilt $x+x = x*x = x$
Beweis: Es sei $x \in B$ beliebig:
1. $x+x = (x+x)*1 = (x+x)*(x+\sim x) = x+x*\sim x = x+0 = x$
2. $x*x = (x*x)+0 = (x*x)+(x*\sim x) = x*(x+\sim x) = x*1 = x$

Satz 2: Für alle $x \in B$ gilt $x+1 = 1$ und $x*0 = 0$
Beweis: Es sei $x \in B$ beliebig:
1. $x+1 = (x+1)*1 = (x+1)*(x+\sim x) = x+1*\sim x = x+\sim x*1 = x+\sim x = 1$
2. $x*0 = (x+0)+0 = (x+0)+(x*\sim x) = x*0+\sim x = x*\sim x+0 = x*\sim x = 0$

Satz 3: Es gelten die Absorptionsgesetze: für alle $x,y \in B$ gilt $x*(x+y) = x+x*y = x$
Beweis:
$x*(x+y) = (x+0)*(x+y) = x+0*y = x+y*0 = x+0 = x$
$x+(x*y) = (x*1)+(x*y) = x*(1+y) = x*(y+1) = x*1 = x$

Satz 4: Jede endliche Boolesche Algebra ist zu einer Potenzmengenalgebra $(P(M),\cup,\cap,-,\emptyset,M)$ isomorph.

Satz 5: In jeder Booleschen Algebra $(B,+,*,\sim,0,1)$ ist für jedes Element das Komplement eindeutig bestimmt:

für alle $x,y \in B$ gilt: aus $x+y = 1$ und $x*y = 0$ folgt $y = x$

Beweis: Einerseits gilt $y = y+0 = y+x*\sim x = (y+x)*(y+\sim x) = (x+y)*(y+\sim x) = 1*(y+\sim x) = (y+\sim x)*1 = y+\sim x$
anderseits $\sim x = \sim x+0 = \sim x+x*y = (\sim x+x)*(\sim x+y) = (x+\sim x)*(y+\sim x) = 1*(y+\sim x) = y+\sim x$
und insgesamt $y=\sim x$

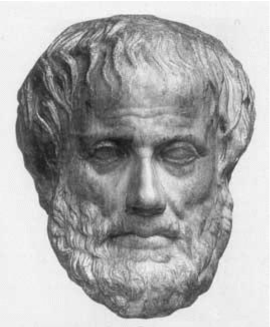
Satz 6: Es gelten die De Morganschen Gesetze für alle $x,y \in B$ gilt $\sim(x+y) = \sim x*y$ und $\sim(x*y) = \sim x+\sim y$
Beweis: Nach Satz 5 genügt es zu zeigen: $(x+y)+(\sim x*\sim y) = 1$ und $(x+y)*(\sim x*\sim y) = 0$
$(x+y)+(\sim x*\sim y) = ((x+y)+\sim x)*((x+y)+\sim y) = (x+\sim x+y)*(y+\sim y+x) = (1+y)*(1+x) = (y+1)*(x+1) = 1*1 = 1$
$(x+y)*(\sim x*\sim y) = (x*(\sim x*\sim y))+(y*(\sim x*\sim y)) = (x*\sim x*\sim y)+(y*\sim y*\sim x) = ((0*\sim y)+(0*\sim x)) = ((\sim y*0)+(\sim x*0)) = 0+0 = 0$
Der andere Teil der Behauptung wird analog bewiesen.

Satz 7: Doppelte Komplementbildung: für alle $x \in B$ gilt $\sim\sim x = x$

Satz 8: Die ausgezeichneten Elemente (0,1) sind wechselseitig komplementär. Es gilt: $\sim 0 = 1$ und $\sim 1 = 0$ in jeder Booleschen Algebra

Satz 9: In jeder Booleschen Algebra gilt: für alle $x,y,z \in B$ gilt $x+z = y+z$ und $x*z = y*z \rightarrow x = y$

Satz 10: In jeder Booleschen Algebra gilt: für alle $x,y,z \in B$ gilt $x+z = y+z$ und $x+\sim z = y+\sim z \rightarrow x = y$
und für alle $x,y,z \in B$ gilt $x*z = y*z$ und $x*\sim z = y*\sim z \rightarrow x = y$



Geschichte der Logik

Als Begründer der Logik gilt Aristoteles. Besonders zu nennen ist seine Syllogistik, ein formales logisches System, in dem Argumente starrer Struktur, Syllogismen genannt, untersucht werden. Die Aussagen, die innerhalb von Syllogismen auftreten, setzen Begriffe zueinander in Beziehung (z.B. "Alles S ist P", d.h. alles, was unter den Begriff S fällt, fällt auch unter den Begriff P). Logische Systeme, in deren Aussagen Begriffe zueinander in Beziehung gesetzt werden, heißen Begriffslogiken. Gleichfalls auf Aristoteles zurück geht die Lehre von einigen fundamentalen Grundsätzen menschlichen Denkens. Hierzu zählen der Satz vom Widerspruch und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten.
In verschiedenen anderen Werken (in *De interpretatione* und der *2. Analytik*) hat sich Aristoteles zudem mit zentralen sprachphilosophisch-logischen Termini wie Urteil und Begriff und mit allgemeinen Regeln des Beweisens und des Widerlegens beschäftigt. Durch Arbeiten von Łukasiewicz ab 1923 und Mates ab 1949 weiß man, dass schon die Stoa eine voll ausgearbeitete Junktorenlogik hatte.
In mittelalterlichen Universitäten hatte die Logik ihren Platz in der sogenannten "Artistenfakultät" (*facultas artium*). Das Studium der *artes* ist Voraussetzung für das Studium an allen anderen Fakultäten. Ab etwa der Mitte des 13. Jahrhunderts umfasst der Unterrichtsstoff der Logik drei separate Textkorpora. Bei der *logica vetus* und der *logica nova* handelt es sich um überlieferte logische Schriften, insbesondere das *Organon* des Aristoteles und die Kommentare des Boëthius und des Porphyrius.
Die *parva logicalia* kann man als Eigenschöpfung der mittelalterlichen Logik ansehen. Hier werden abseits der antiken Vorlagen eine ganze Reihe von neuen Problemstellungen aus dem Grenzbereich zwischen Logik und Semantik entwickelt und in voneinander unabhängigen Traktaten diskutiert. Einige gängige Traktattypen sind

- *De proprietatibus terminorum* befasst sich mit den Eigenschaften der materialen (nicht-logischen) Termini.
- *De syncategorematicis* untersucht dagegen die formalen, d.h. logischen Ausdrücke.
- *De suppositio terminorum* formuliert die mittelalterliche Suppositionstheorie
- Bei *De consequentiis* geht es um Folgerungen.
- *De insolubilibus* hat Paradoxien und Trugschlüsse zum Gegenstand.
- *De Relativis* befasst sich mit den Eigenschaften anaphorischer Ausdrücke.
- *De Modalibus* untersucht Modal-Ausdrücke.
- Bei *De Obligationibus* geht es um die logischen Bedingungen eines kohärenten Disputs

Bedeutende Logiker

Aristoteles: in der Analytica Priora Entwicklung der bis ins 19. Jh. verwendeten Syllogistik, einer Vorform der Prädikatenlogik
Cicero (106-43 v.u.Z.): er übernahm von Aristoteles die Lehre von der Logik und übertrug sie als Ars logica ins Lateinische: *De finibus bonorum et malorum*
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716): Erste Ansätze zu einer symbolischen Logik
George Boole (1815-1864): Entwicklung der Algebra
Georg Cantor (1845-1918): Entwicklung der Mengenlehre
Gottlob Frege (1848-1925): Entwicklung der modernen Aussagen- und Prädikatenlogik
Edmund Husserl (1859-1938): Kritik des Psychologismus in der Logik
Bertrand Russell (1872-1970): Russellsche Antinomie
Kurt Gödel: Vollständigkeit der Prädikatenlogik. Unvollständigkeit der Peano-Arithmetik

Klassische Logik

Von klassischer Logik spricht man, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

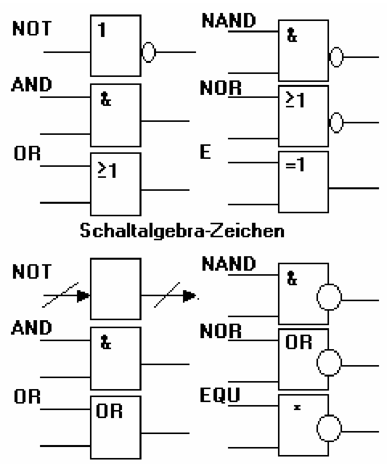
Jede Aussage hat genau einen von genau zwei Wahrheitswerten, die meist als wahr und falsch bezeichnet werden. (Prinzip der Zweiwertigkeit oder Bivalenzprinzip)
Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage ist eindeutig durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen und die Art, wie diese zusammengesetzt sind, bestimmt. (Prinzip der Extensionalität oder Kompositionalität).

Der Begriff klassische Logik ist im Sinn von grundlegender Logik zu verstehen.

Die wichtigsten Teilgebiete der formalen klassischen Logik sind die klassische Aussagenlogik, Prädikatenlogik der ersten Stufe und höherer Stufe sowie Stufenlogik.

In der Aussagenlogik werden Aussagen daraufhin untersucht, ob sie ihrerseits wieder aus Aussagen zusammengesetzt sind, die durch Junktoren (z.B. "und", "oder") miteinander verbunden sind. Besteht eine Aussage nicht aus durch Junktoren verbundenen Teilaussagen, dann ist sie aus Sicht der Aussagenlogik atomar, d.h. nicht weiter zerlegbar.

In der Prädikatenlogik lässt sich auch die innere Struktur von Sätzen darstellen, die aussagenlogisch nicht weiter zerlegbar sind. Der Unterschied zwischen Prädikatenlogik der ersten Stufe und Prädikatenlogik höherer Stufe besteht darin, worüber mittels der Quantoren ("alle", "mindestens ein") quantifiziert wird:
In der Prädikatenlogik erster Stufe wird nur über Individuen quantifiziert, in der Prädikatenlogik höherer Stufe wird auch über Prädikate selbst quantifiziert.
Formal bedarf die Prädikatenlogik einer Unterscheidung zwischen verschiedenen Ausdruckskategorien wie Termen, Funktoren, Prädikatoren und Quantoren. Diese wird in der Stufenlogik, einer Form des typisierten Lambda-Kalküls, überwunden. Dadurch wird zum Beispiel die mathematische Induktion eine gewöhnliche, ableitbare Formel.



Schaltsymbole der Aussageoperationen

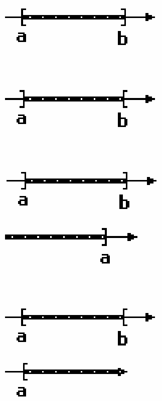
Arithmetik

wörtlich: zum Zählen gehörend.
Das Wort stammt von dem griechischen αριτημετικε, das die beiden Wörter αριθμος = arithmos (Zahl) und τεχνη = techne (Kunst) miteinander verbindet.
Die Arithmetik umfasst die Kenntnisse der Zahlen und des Rechnens.

Im Mittelalter wurde die Arithmetik oft in Form einer Frauengestalt dargestellt.
Links ist die "Arithmetik" des Pinturicchio (1494) zu sehen. Das Gemälde befindet sich in den Räumen der Borgia im Vatikanischen Palast.

Intervalle, Mengen

Eine zusammenhängende Menge reeller Zahlen mit den Endpunkten a und b, wobei a < b ist, wird Zahlenintervall mit den Endpunkten a und b genannt. Wenn der Endpunkt nicht selbst zum Intervall gehört, spricht man vom offenen Intervallende, im entgegengesetzten Falle vom abgeschlossenen Intervallende.



Abgeschlossenes Intervall

[a,b] oder <a,b> ...Menge aller reellen Zahlen x mit $a \le x \le b$

Offenes Intervall

(a,b) oder]a,b[...Menge aller reellen Zahlen x mit $a < x < b$

Links offenes Intervall

(a,b] oder]a,b] ...Menge aller reellen Zahlen x mit $a < x \le b$
(-∞,a] ...Menge aller reellen Zahlen x mit $x \le a$

Rechts offenes Intervall

[a,b) oder [a,b[...Menge aller reellen Zahlen x mit $a \le x < b$
[a,-∞) ...Menge aller reellen Zahlen x mit $a \le x$

Links offene und rechts offene Intervalle werden auch halboffen genannt.
Nach DIN 1302 ist die Verwendung der Symbole "(", ")" für offene und "[", "]" für geschlossene Intervallenden vorgeschrieben.

Unendliches Intervall

Das Intervall (-∞,+∞) oder auch $-\infty < c < \infty$ heißt unendliches Intervall.

Rechnen mit Intervallen

Bei numerischen Rechnungen wird mit einer endlichen Anzahl von Dezimalstellen gerechnet. Mitunter werden eine obere und eine untere Schranke, d.h. ein Intervall, angegeben, zwischen denen sich der exakte Wert mit Sicherheit befindet. Diese Intervalle müssen bei Rechnungen entsprechend verändert werden.

Intervall	$a^{\sim} = [a_{unten}, a_{oben}] = \{ a \mid a \in R, a_{unten} \le a \le a_{oben} \}$
Addition	$a^{\sim} + b^{\sim} = c^{\sim} = [a_{unten} + b_{unten}, a_{oben} + b_{oben}]$
Subtraktion	$a^{\sim} - b^{\sim} = c^{\sim} = [a_{unten} - b_{oben}, a_{oben} - b_{unten}]$
Multiplikation	$a^{\sim} * b^{\sim} = c^{\sim} = [c_{unten}, c_{oben}]$
	$c_{unten} = \text{Minimum}(a_{unten}b_{unten}, a_{unten}b_{oben}, a_{oben}b_{unten}, a_{oben}b_{oben})$
	$c_{oben} = \text{Maximum}(a_{unten}b_{unten}, a_{unten}b_{oben}, a_{oben}b_{unten}, a_{oben}b_{oben})$
Division	$a^{\sim} / b^{\sim} = c^{\sim} = [c_{unten}, c_{oben}]$
	$c_{unten} = \text{Minimum}(a_{unten}/b_{unten}, a_{unten}/b_{oben}, a_{oben}/b_{unten}, a_{oben}/b_{oben})$
	$c_{oben} = \text{Maximum}(a_{unten}/b_{unten}, a_{unten}/b_{oben}, a_{oben}/b_{unten}, a_{oben}/b_{oben})$
	Bedingung: $a_{unten}, b_{unten}, a_{oben}, b_{oben} > 0$

Grundrechenoperationen

Axiome der natürlichen Zahlen (Peano 1891):

1. 0 ist eine natürliche Zahl
2. Jede Zahl n hat genau einen Nachfolger n'
3. 0 ist nicht Nachfolger einer Zahl
4. Jede Zahl ist Nachfolger höchstens einer Zahl
5. (Induktionsaxiom) Von allen Mengen, die die Zahl 0 und mit der Zahl n auch deren Nachfolger n' enthalten, ist die Menge N der natürlichen Zahlen die kleinste.

Anmerkung: Peano selbst hat die 0 nicht als natürliche Zahl gesehen. Auf Grund der Entwicklung der Algebra (Gruppen- und Ringtheorie) wird die Null heute zu den natürlichen Zahlen gezählt. Andersartige, immer wieder vorkommende, Veröffentlichungen sind algebraisch nicht begründbar.
Anmerkung 2: Nach dem Werk "Assiomi di Peano" [da Peano G., Formulario Mathematico, Fratelli Bocca {indicato sul frontespizio come Fratres Bocca} Editore, Torino 1908, pag. 21]) soll Peano „Zero es numero"
formuliert haben. Bis heute konnte nicht geklärt werden, ob die Null für Peano vielleicht doch die erste natürliche Zahl war.

In dem für die Mathematik fundamentalen Werk "Moderne Algebra" nennt van der Waerden als erstes Axiom:
1. 1 ist eine natürliche Zahl
und schließt die Null damit aus.
Aus den Axiomen ergibt sich der für die mathematische Induktion wichtige Satz: Jede nichtleere Menge von natürlichen Zahlen enthält eine kleinste Zahl, d.h. eine solche, die kleiner ist als alle anderen Zahlen der Menge.

Archimedisches Grundgesetz

Ist a eine positive Zahl, so gibt es stets eine natürliche Zahl n mit n>a. Sind a und b zwei positive Zahlen, so gibt es stets eine natürliche Zahl n mit a*n>b.

Nachfolger

Von zwei Elementen n und m ist m Nachfolger von n (n, m $\in$ Zahlenbereich), wenn n<m. Es existiert keine Zahl x mit: n<x<m (auch: m=n+1 für natürliche Zahlen).
Vorgänger ... Von zwei Elementen n und m ist m Vorgänger von n (n, m $\in$ Zahlenbereich), wenn m<n. Es existiert keine Zahl x mit: m<x<n.
Variable ... Buchstaben oder andere Zeichen, für die Zahlen aus einer vorgegebenen Grundmenge eingesetzt werden können. (Platzhalter)

Term ... mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Rechenzeichen oder Variablen besteht
Term ist der Oberbegriff für Zahlen und kompliziertere mathematische Ausdrücke, die keine Gleichheits- oder Relationszeichen enthalten. Sind S und T Terme, so auch S $\wedge$ T und S $\vee$ T; ist S ein Term, so auch $\neg$S. Ist S ein Term, so ist S auch eine Formel.

Formel ... Zeichen des Alphabetes, die auch, mehrfach, mit Indizes oder Exponenten, aus dem Alphabet, versehen sein dürfen. Sind S und T Terme, so sind S $\rightarrow$ T und S $\Leftrightarrow$ T Formeln. Sind A und B Formeln, so auch A $\rightarrow$ B, A $\Leftrightarrow$ B, A $\wedge$ B, A $\vee$ B; ist A eine Formel, so auch $\neg$A.

„Deinde multiplicationis et divisionis praecepta aliquanto plus requirunt diligentiae, sed tamen causae cito perspici possunt ab attentis. Exercitationem et usum requirit haec ars, ut aliae omnes."
"Die Regeln des Vervielfachens und Teilens schließlich erfordern viel mehr Fleiß, aber bei einiger Anstrengung können sie doch bald begriffen werden. Wie alle anderen Künste verlangt auch diese Kunst Übung und Gebrauch."
Philipp Melanchthon

Rechenoperationen 1.Stufe

Addition	$a + b = c$	Summand + Summand = Summe
Subtraktion	$a - b = c$	Minuend - Subtrahend = Differenz

2.Stufe

Multiplikation	$a * b = c$	Faktor * Faktor = Produkt
alte Bezeichnung:		Multiplikand * Multiplikator = Produkt
Division	$a : b = c$, $b \neq 0$	Dividend : Divisor = Quotient

3.Stufe

Potenzieren	$a^b = c$	Basis $^{\text{Exponent}}$ = Potenz
Radizieren	$\sqrt[b]{a} = c$	$^{\text{Wurzelexponent}}\sqrt{\text{Radikand}}$ = Wurzel
Logarithmieren	$\log_a b = c$	$\log_{\text{Basis}}$ Numerus = Logarithmus

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division werden als Grundrechenarten bezeichnet.

Hierarchie der Rechenoperationen

Operationen höherer Stufen werden zuerst ausgeführt

"Punktrechnung geht vor Strichrechnung" **"Punkte binden mehr als Striche"**

Punktrechnung	Multiplikation und Division
Strichrechnung	Addition und Subtraktion

Wichtig: Klammerausdrücke sind stets vor der weiteren Beachtung von Punkt- und Strichrechnung auszuwerten.

Addition

Bei einer Addition (lat. additio = Hinzufügung) werden zwei Zahlen so zusammengefasst, dass das Ergebnis genauso viele Einheiten besitzt wie die beiden gegebenen Zahlen zusammen. Das Ergebnis einer Addition ist die Summe. Die zu addierenden Zahlen oder Terme heißen Summanden. Das mathematische Symbol der Addition ist das Pluszeichen «+». Die Umkehroperation der Addition ist die Subtraktion.

Subtraktion

Die Subtraktion (lat. subtractio = Verminderung) ist die Umkehrrechnungsart der Addition. Bei einer Subtraktionsaufgabe a-b von den gegebenen a Einheiten b Einheiten entfernt. Während die Addition im Bereich der natürlichen Zahlen unbeschränkt ausführbar ist, ist das bei der Subtraktion nicht der Fall.

Grundgesetze der Addition

1. Zu jedem Paar von Zahlen a und b gibt es genau eine dritte Zahl, die die Summe von a und b genannt und mit a+b bezeichnet wird; a,b heißen Summanden.
2. Kommutativität der Addition $a + b = b + a$
3. Assoziativität der Addition $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. Monotonie der Addition aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$

Grundgesetze der Multiplikation

1. Zu jedem Paar von Zahlen a und b gibt es genau eine dritte Zahl, die das Produkt von a und b genannt und mit a*b bezeichnet wird; a,b heißen Faktoren.
2. Kommutativität der Multiplikation $a * b = b * a$
3. Assoziativität der Multiplikation $(a * b) * c = a * (b * c)$
4. Distributivität der Multiplikation $(a + b) * c = a * c + b * c$
5. Monotonie der Multiplikation aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $a * c < b * c$

Division

Die Division (lat. divisio = Teilung) ist die Umkehrrechnungsart der Multiplikation. Während die Multiplikation im Bereich der natürlichen Zahlen unbeschränkt ausführbar ist, ist das bei der Division nicht der Fall.
Grundsätzlich unmöglich ist die Division mit Null und das in jedem Zahlenbereich!

Ausführbarkeit von Rechenoperationen

Innerhalb der Zahlenbereiche gilt für Ausführbarkeit der Grundrechenoperationen:

	Addieren	Subtrahieren	Multiplizieren	Dividieren (außer durch 0)
N	ja	nein	ja	nein
Z	ja	ja	ja	nein
Q	ja	ja	ja	ja
R	ja	ja	ja	ja

Umgekehrte Polnische Notation

Zur schnellen Verarbeitung mathematischer Terme eignet sich eine besondere Schreibweise, die sogenannte umgekehrte polnische Notation (auch Postfixschreibweise). Diese wurde von dem polnischen Mathematiker Lukasiewicz Anfang des 20.Jahrhunderts eingeführt. Das Prinzip besteht darin, die Operatoren erst nach den Operanden zu schreiben und nicht wie in der üblichen Infixschreibweise zwischen den Operanden. Der Vorteil liegt darin, dass man keine Prioritätsvereinbarungen treffen muss sowie vollständig auf Klammern verzichten kann.
Zum Beispiel wird die Aufgabe 7 + 4 * (3 - 2) in UPN-Schreibweise zu 7 4 3 2 - * + , dagegen (7 + 4) * 3 - 2 zu 7 4 + 3 * 2 - . Für den AOS-Term ((3+A)*B-C/4+5)*D ergibt sich in umgekehrter polnischer Notation 3 A + B * C 4 / 5 + - D *.

Schriftliche Addition

	2,	3	5	6	9	2	7	5
+	1,	4	7	8	5	3	6	4
	3,	8	3	5	4	6	3	9

	1,	9	8	4	3	7
+	2,	7	9	5	7	2
	4,	7	8	0	0	9

Das Verfahren der schriftlichen Addition wird üblicherweise von rechts nach links durchgeführt.
Sind nur zwei Summanden vorhanden, so ist es vorteilhaft, die Rechnung auf der linken Seite zu beginnen, da der Übertrag aus der nächstenfolgenden Vertikalreihe höchstens gleich 1 sein kann. Ob dieser Übertrag 1 vorhanden ist, kann in der Regel ohne besondere Rechnung durch einen Blick auf die nächste Vertikalreihe festgestellt werden.

Beispiel (obere Rechnung)
Man beginnt links mit 2 + 1 und stellt fest, dass die nächste Vertikalreihe 3 + 4 keinen Übertrag ergibt. Bei dieser Vertikalreihe ist aus der Kolonne 5 + 7 der Übertrag 1 zu übernehmen und man erhält somit 3,8… usw.
Bei dem zweiten Beispiel wird dieses Verfahren komplizierter. Hier ist es besser von rechts nach links zu rechnen.

Historisch gesehen wurde durch al-Hwarizmi das Verfahren von links nach rechts empfohlen, denn so wäre es nützlicher und leichter. Auch Gauß praktizierte dieses Verfahren.
In den deutschen Grundschulen wird stets von rechts nach links gerechnet. Dies wird so automatisiert, dass der mathematische Grund für einen Übertrag dem Schüler kaum noch klar wird.

Das kleine Ein-Mal-Eins

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Das große Ein-Mal-Eins

	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	121	132	143	154	165	176	187	198	209
12	132	144	156	168	180	192	204	216	228
13	143	156	169	182	195	208	221	234	247
14	154	168	182	196	210	224	238	252	266
15	165	180	195	210	225	240	255	270	285
16	176	192	208	224	240	256	272	288	304
17	187	204	221	238	255	272	289	306	323
18	198	216	234	252	270	288	306	324	342
19	209	228	247	266	285	304	323	342	361

Verfahren der schriftlichen Multiplikation

Sollen mehrstellige Zahlen multipliziert werden, so gibt es schriftliche Rechenverfahren. Auf dieser Seite werden am Beispiel 896*271 verschiedene Methoden zur schriftlichen Multiplikation dargestellt.

Standardmethode

```
8 9 6 · 2 7 1
1 7 9   2
  6 2   7 2
        8 9 6
1 1 1   1
2 4 2   8 1 6
```

Verfahren: 3 mal multiplizieren, 6 mal addieren
Hintergrund: 896*271 = (800+90+6)*271 = 800*271+90*271+6*271

```
8 9 6 · 2 7 1
        8 9 6
  6 2   7 2
1 7 9   2
1 1 1   1
2 4 2   8 1 6
```

älteres Verfahren

```
    8 9 6 · 2 7 1
        1 6 2 6
      2 4 3 9
    2 1 6 8
      1 1 1
    2 4 2 8 1 6
```

selten genutzte Form

```
        8 9 6
      x 2 7 1
      1 6 2 6
    2 4 3 9
  2 1 6 8
  2 4 2 8 1 6
```

englische Schreibweise

Russische, abessinische Bauernmultiplikation

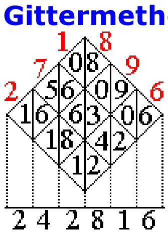
Gerade Zahlen werden gestrichen, denn die abessinischen Bauern sagen: Gerade Zahlen bringen Unglück. Diese Methode heißt auch russische Bauernmethode.

8 9 6	2 7 1
4 4 8	5 4 2
2 2 4	1 0 8 4
1 1 2	2 1 6 8
5 6	4 3 3 6
2 8	8 6 7 2
1 4	1 7 3 4 4
7	3 4 6 8 8
3	6 9 3 7 6
1	1 3 8 7 5 2
	1 2 1 2 1
	2 4 2 8 1 6

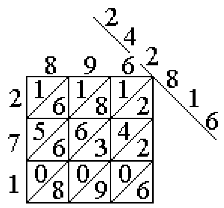
~~8 9 6~~	~~2 7 1~~
~~4 4 8~~	~~5 4 2~~
~~2 2 4~~	~~1 0 8 4~~
~~1 1 2~~	~~2 1 6 8~~
~~5 6~~	~~4 3 3 6~~
~~2 8~~	~~8 6 7 2~~
~~1 4~~	~~1 7 3 4 4~~
7	3 4 6 8 8
3	6 9 3 7 6
1	1 3 8 7 5 2
	1 2 1 2 1
	2 4 2 8 1 6

1) 9 mal halbieren ohne Rest und 9 mal verdoppeln
2) 7 Zeilen mit geraden Zahlen in der 1.Spalte streichen
3) 6 mal addieren
Hintergrund: 896*271 = (512+256+128)*271 = (2^9+2^8+2^7)*271 = 2^9*271+2^8*271+2^7*271 = 34688+69376+138752 = 242816. Der erste Faktor wird zur Dualzahl. Die Multiplikation wird auf Halbieren und Verdoppeln zurückgeführt.

Gittermethode nach Neper

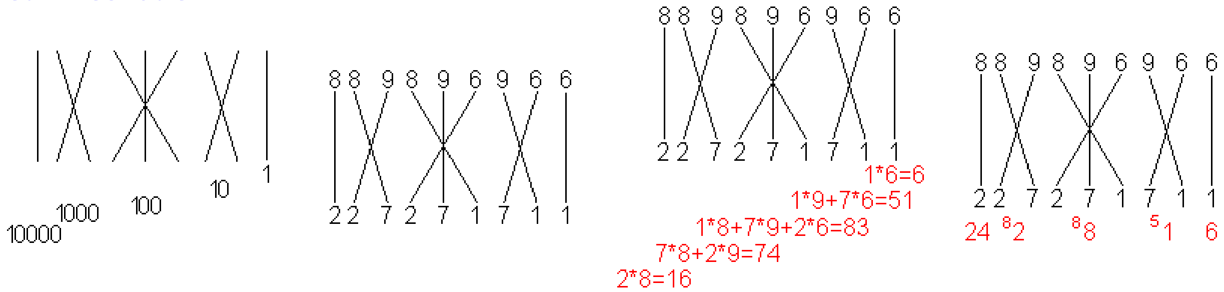


Verfahren (linke Abbildung):
9 mal multiplizieren, die Ergebnisse werden in die kleinen Quadrate geschrieben, erneut 6 mal addieren
Hintergrund: 896*271 = (800+90+6)*(200+70+1)=8*2*10.000+8*7*1000+8*1*100 + 9*2*1000+9*7*100+9*1*10 + 6*2*100+6*7*10+6*1.



Die zweite Abbildung zeigt eine veränderte Form dieses Verfahrens

Kreuzmethode



Stelle die folgende Figur bereit und ordne jeder Teilfigur eine Stelle zu.

Beschrifte die Enden der Strecken mit entsprechenden Ziffern. Das Produkt heißt 896 *271

Bilde aus den Zahlen die unten stehenden Terme und berechne sie. Merke dir die Terme und die Ergebnisse.

Notiere die Ergebnisse wie bei der schriftlichen Addition und beachte dabei den Übertrag. Schreibe bei dieser Methode nur diese Anordnung hin

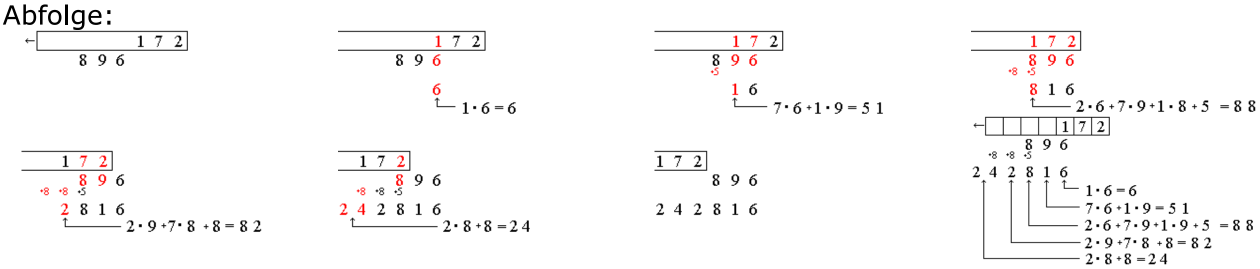
Hintergrund: 896*271 = (800+90+6)*(200+70+1)=8*2*10.000+8*7*1000+8*1*100 + 9*2*1000+9*7*100+9*1*10 + 6*2*100+6*7*10+6*1.

Streifenmethode mit Faktorentransport

Streifen mit der Kehrzahl des 2.Faktors beschriften, Streifen verschieben, multiplizieren und addieren.

Hintergrund: 896*271 = (800+90+6)*(200+70+1)=8*2*10.000+8*7*1000+8*1*100 + 9*2*1000+9*7*100+9*1*10 + 6*2*100+6*7*10+6*1.

Abfolge:



→ halbieren
← verdoppeln

II	I
X	V
XX	X
C	L
CC	C
M	D
MM	M
L	XXV
D	CCL
IV	II
XL	XX
CD	CC
VIII	IV
LXXX	XL
DCCC	CD

Vedische Multiplikation

Dieses Verfahren stammt aus Indien und eignet sich immer dann zu einer Multiplikation auch großer Faktoren, wenn diese knapp unter derselben Zehnerpotenz liegen.

Dem Rechenweg liegt folgende Beziehung zugrunde:

a und b seien zwei Zahlen dicht unterhalb einer Zehnerpotenz 10^n und a* bzw. b* die Differenzen hierzu. Dann ist

$$a \cdot b = (10^n - a^*)\cdot(10^n - b^*) = (10^n - a^* - b^*)\,10^n + a^* b^* =$$
$$=(a - b^*)\,10^n + a^* b^*$$

Falls $a^* b^* < 10^n$ ist, kann man die beiden Zifferfolgen von (a - b*) und a*b* einfach nebeneinander schreiben, um so zur Lösung der Multiplikation zu gelangen. Dabei müssen führende Nullen des zweiten Terms mitgeschrieben werden. Die Vertauschung der Faktoren ergibt das gleiche Ergebnis.

Beispiel: $95\cdot97 = 9215 = (95 - 3)\cdot10^2 + 5\cdot3$

$992\cdot998 = 980096 = (992 - 12)\cdot10^3 + 8\cdot12$

Multiplikation römischer Zahlen

Römische Zahlen erweisen sich beim Multiplizieren als sehr schwierig, was viele Jahrhunderte lang die Kaufleute beim Rechnen behindert hat. Dies liegt daran, dass das römische Zahlensystem kein Stellenwertsystem ist.
Da die russische Bauernmultiplikation mit Verdoppeln bzw. Halbieren der Faktoren die Stellenwerte nicht nutzt, ist das Verfahren auf römische Zahlen anwendbar.
Wichtige Verdopplungen und Halbierungen sind links abgebildet. In den Beispielen werden die zu addierenden Zeilen mit * markiert.

Beispiel 1: 12 × 152 = 1824

	XII	× CL II
	VI	CCC IV
*	III	DC V III
*	I	MCC X V I … = MDCCCXXIV

Beispiel 2: 14 × 17 = 238

	XIV	× XV II
*	VII	XXX IV
*	III	LX V III
*	I	CXX X VI

= C + L + 7×X = CCXX
+3×V + (4-1)×I = XVIII … = CCXXXVIII

Quelle: Manfred Boergens, http://www.fh-friedberg.de/users/boergens/problem/problem052/problem052_roemische_zahlen.htm

Multiplikation mit der Viertelquadrat-Methode

Eine sehr interessante Multiplikationsmethode ist die Viertelquadrat-Methode, die auch in Europa eine Weile in Gebrauch war. Sie verschwand erst, als es mittels dekadischer Logarithentafeln möglich wurde, in einfacher Weise aufwändige Multiplikationen in bequemere Additionen von Logarithmen umzuformen.
Die Viertelquadrat-Methode arbeitet mittels der Beziehung

$$a \cdot b = 1/4\ (a + b)^2 - 1/4\ (a - b)^2$$

Die benötigten Tabellenwerte können aber sehr viel leichter berechnet werden als Logarithmen.
Offensichtlich erreicht auch diese Methode ein Ersetzen der Multiplikation durch drei Strichrechnungen: eine Addition und zwei Subtraktionen. Sie erspart nicht ganz so viel Arbeit wie die Benutzung logarithmischer Tafelwerke.

Viertelquadrat-Methode - Beispiel 27 · 15 = 405
1) man benötigt eine Tabelle, in der für alle Zahlen eines bestimmten Bereichs die Viertelquadrate notiert worden sind
2) die beiden gegebenen Faktoren werden aus praktischen Gründen sortiert, die größte zuerst, hier: 27 und 15
3) man bildet zuerst die Summe der beiden beteiligten Zahlen und dann ihre Differenz, hier: 42 und 12
4) für beide entstandene Zwischenergebnisse schlägt man nun die zugehörigen Viertelquadrate nach, hier: 441 und 36
5) zuletzt wird die Differenz gebildet, sie liefert das gewünschte Produkt, hier: 405

Überraschend ist, dass dieses Verfahren schon im Zweistromlandgebiet bekannt und verbreitet war. Funde belegen die Existenz der notwendigen Tabellenwerke in der Form von Tontafeln.

Aufgaben zur schriftlichen Multiplikation

Aufgabe 1: Schriftliche Multiplikation einfacher Zahlen ohne Übertrag

121·4	2314·2	12 132·2	134 402·2	312·20	1223·30
223·3	1221·4	31221·3	213 321·3	212·40	2443·20
212·4	2212·3	21211·4	210 101·4	404·20	21 221·40
313·3	3432·2	11001·5	111 011·5	333·30	42 442·20

Aufgabe 2: Schriftliche Multiplikation einfacher Zahlen mit Übertrag

123·4	213·4	2316·3	12 733·2	101 312·4	110 171·50
204·3	312·5	1744·2	10 318·5	213 461·2	405 424·20
612·3	609·7	3101·7	21 370·7	103 204·5	107 411·20
811·5	817·4	2709·7	30 972·8	290 004·7	213 673·50
972·4	944·6	4817·6	41 271·9	145 400·9	489·219·60

Aufgabe 3: Schriftliche Multiplikation

76·110	290·53	500·72	138·66	8·63·9	73·5·13
11·482	65·278	8·9712	2001·731	32·5·16	24·36·7
139·13	282·42	6000·43	111·1078	101·5·16	91·0·67
63·160	610·73	2222·179	4040·2135	4·144·25	8·2712·125
47·209	927·0	0·9999	25 000·123	250·3912·40	500·897·200

Aufgabe 4: Textaufgaben

a) Irene hat im Jahr insgesamt 13 Wochen schulfrei. In der restlichen Zeit fährt sie 5 Tage in der Woche die 8 km zur Schule und wieder zurück mit dem Bus. Wie viele km legt sie insgesamt pro Jahr mit dem Schulbus zurück?

b) Ein Fahrrad bekommt kann man in einem Laden zum Barpreis von 868 € kaufen und in einem andere Laden zu 12 Monatsraten von je 75 € Welches Angebot ist günstiger?

c) Eine Sekretärin schafft pro Minute 325 Anschläge auf ihrem Computer. Wie viele Anschläge erreicht sie in 15 Minuten? Wie viele wären es bei gleich bleibender Konzentration in einer Stunde?

d) Die Erde rast mit einer Geschwindigkeit von 1788 km pro Minute um die Sonne. Welchen Weg legt die Erde dabei in einer Stunde bzw. an einem Tag zurück?

Lösungen

Aufgabe 1: Schriftliche Multiplikation einfacher Zahlen ohne Übertrag

484	4628	24264	268 804	6240	36 690
669	4884	93663	639 963	8480	48 860
848	6636	84844	840 404	8080	84 884
939	6864	55005	555 055	9990	84 884

Aufgabe 2: Schriftliche Multiplikation einfacher Zahlen mit Übertrag

492	852	6948	26 166	405 248	5 508 550
612	1560	3488	51 590	426 922	8 108 480
1836	4263	21 707	14 950	516 020	2 148 220
4055	3268	18 963	247 776	2 030 028	10 683 650
3888	5664	28 902	371 439	1 308 600	29 353 140

Aufgabe 3: Schriftliche Multiplikation

8360	15 370	36 000	9108	4536	4745
5302	18 070	77 696	1 462 731	2560	6048
1807	11 844	258 000	119 658	8080	0
10 080	44 530	397 738	8 625 400	14 400	2 712 000
9823	0	0	3 075 000	39 120 000	89 700 000

Aufgabe 4: Textaufgaben

a) Irene legt in 52 - 13 = 39 Schulwochen 39·2·5·8 = 390·8 = 3120 km mit dem Schulbus zurück

b) Der Barpreis von 868 € ist günstiger als die Ratenzahlung von 12·75 € = 900 €.

c) Es wären in 15 Minuten 15·325 = 4875 Anschläge und in einer Stunde 4·4875 = 19 500 Anschläge.

d) Pro Stunde sind es 60·1788 km = 107 280 km und pro Tag 24·107 280 km = 2 574 720 km.

Schriftliches Dividieren, Schriftliche Division

Die Division von Dezimalbrüchen wird auf die Division ganzer Zahlen zurückgeführt.

Zuerst erweitert man beide Brüche so, dass der Divisor eine ganze Zahl ist. Im Dividenden und im Divisor verschiebt man dazu das Komma um so viele Stellen nach rechts, wie der Divisor Dezimalstellen hat.
Danach lässt man das Komma im Dividenden außer Acht und dividiert durch den Divisor, d.h. ganze Zahl durch ganze Zahl.
In einem dritten Schritt überlegt man, wo das Komma im Ergebnis stehen muss. Dabei sind zu unterscheiden:

1) Die Division geht auf. Das Komma wird vor die Stelle gesetzt, bei der es im neuen Dividenden steht. Eventuell sind Nullen zu ergänzen.

1,15 : 0,5 = 11,5 : 5 = 2,3
0,48 : 0,8 = 4,8 : 8 = 0,6

2) Die Division geht nicht auf. Es wird praktisch das Verfahren der schriftlichen Division ganzer Zahlen angewandt und das Komma wird an der Stelle übernommen, in der es beim Dividenden steht.

0,8 : 0,03 = 80 : 3 = 26,666666666…
2,391 : 0,7 = 23,91 : 7 = 3,415714341674…

Zähler Reste	größer gleich?	Doppeln Nenner	Doppeln Zahl 1
500	-	544	32
500	Ja	272	16
228	Ja	136	8
92	Ja	68	4
24	-	34	2
24	Ja	17	1
Rest 7	Quotient	=	29

Binäres Dividieren

Im Gegensatz zum schriftlichen Divisionsverfahren, wie es heutzutage gelehrt wird, kommt auch das Verfahren der binären Division ohne Kenntnis des kleinen 1×1 aus. Es reicht aus, ganze Zahlen verdoppeln und halbieren und größere von kleineren unterscheiden zu können.
Die Sumerer und Babylonier müssen zur Entwicklung des Verfahrens ein großes, aus der Praxis gewachsenes Verständnis für die innere Struktur ganzer Zahlen gehabt haben.

Beispiel: 500 / 17 = 29 Rest 7

1) den gegebenen Nenner in die unterste Zeile einer Tabelle schreiben und getrennt daneben eine 1 notieren
2) beide Zahlen werden jeweils verdoppelt und in die darüberliegende Zeile geschrieben, bis eine Zahl entsteht, die > oder = dem gegebenen Zähler ist
3) den Zähler als ersten Rest links neben die gefundene große Zahl schreiben
4) ist der verbliebene Rest kleiner als die nebenstehende Dopplungszahl, so wird er direkt darunter wieder übernommen
5) in den anderen Fällen wird die nebenstehende Dopplungszahl vom Rest abgezogen und die Differenz als neuer Rest direkt darunter notiert
6) nachdem alle Zeilen abgearbeitet worden sind, hat man den Divisionsrest bereits gefunden, der Quotient ergibt sich aus der Summe der 1-er Dopplungen der Zeilen, in denen vom Rest abgezogen wurde

Elementare Arithmetikaufgaben

Vermischte Aufgaben zur Arithmetik:

1 a) 5·(-3)·4 = -5·3·4 = -60 ; zuerst das Vorzeichen berechnen
b) 4-5 = -1
c) 4:(-6) = -4/6 = -2/3 ; zuerst das Vorzeichen berechnen, kürzen
d) 5+(-3)·4 = 5-12 = -7 ; zuerst multiplizieren
e) 4·(-6+5) = 4·(-1) = -4 ; Klammer zuerst berechnen

2 a) 8·(-3/8)·(-5/12) = +8/1·3/8·5/12 = 54 ; Vorzeichen zuerst; 8 in Bruch verwandeln, 8 gegen 8 und 3 gegen 12 kürzen
b) -8 + 3/4 = -7 1/4
c) 8:(-3/8) = 8·(-8/3) = -8/1·8/3 = -64 ; Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner, nicht gleichnamig machen
d) 8+(-3/8)·(-5/12) = 8+3/8·5/12 = 8+5/32 = 8 5/32 ; 3 gegen 12 kürzen
e) -8·(5/6-3/4) = -8·(20/24-18/24) = -8·2/24 = -2/3

3 a) 10/3·3/4·4/5 = 10/5 = 2 ; kürzen

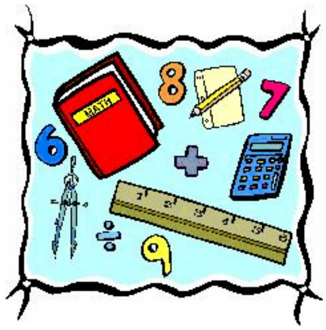
b) 1/2-3/5 = 5/10-6/10 = -1/10
c) 10/3:3/4 = 10/3·4/3 = 40/9
d) 1/2+2/3·3/5 = 1/2+2/5 = 5/10+4/10 = 9/10
e) 10/3·(3/4+4/5) = 10/3·(15/20+16/20) = 10/3·31/20 = 31/(3·2) = 31/6

4. Zerlege 304000 in Primfaktoren.

308000 = 304·1000 = 2·154·10·10·10 = 2·2·77·2·5·2·5·2·5 = 2·2·7·11· 2·5·2·5·2·5 = 2·2·2·2·2·5·5·5·7·11

5. Bestimme ggT und kgV von a = 7000 und b = 300.

7000 =7·1000 = 7·2·5·2·5·2·5 =2·2·2·5·5·5·7
300 = 3·100 = 3·2·5·2·5 = 2·2· 5·5·3
ggT(a,b) = 2·2·5·5 = 100
kgV(a,b) = 2·2·2·5·5·5·7·3 = (2·2·2·5·5·5·7)·3 = 7000·3 = 21000



Kopfrechentricks

1) Multiplikation einer zweistelligen Zahl mit 11

Eine zweistellige Zahl [ab] multipliziert man mit 11, in dem man die Ziffern a, b auseinandernimmt und zwischen diese deren Summe a+b setzt.
Beispiel:
23 · 11 = [2 (2+3) 3] = 253
54 · 11 = [5 (5+4) 4] = 594
Zu beachten ist, dass die Ziffernsumme a+b nicht größer als 9 sein darf. Wird a+b>9, dann wird die erste Ziffer um 1 vergrößert und die Einerstelle von a+b genutzt.
74 · 11 = [7 (7+4) 4] = 814

2) Multiplikation zweistelliger Zahlen [ab] und [ac] mit b+c = 10

Das Ergebnis ist dann
[a·(a+1) b·c]
Die erste Ziffer wird mit der nächstgrößeren multipliziert und an der Ergebnis das Produkt der Einer angehangen.
Beispiel: 34 · 36 = [3·4 , 4·6] = 1224
82 · 88 = [8·9 , 2·8] = 7216
Das Verfahren ergibt automatisch das Quadrieren einer zweistelligen Zahl, die auf 5 endet.
55 · 55 = [5·6 , 5·5] = 3025 usw.

Trugschlüsse

Die nachfolgenden "Beweise" sind fehlerhaft und enthalten typische, immer wiederkehrende Trugschlüsse.

Beispiel 1:

Behauptung: 1 = 2
"Beweis": $x^2 - x^2 = x^2 - x^2 \rightarrow x (x - x) = (x + x)(x - x)$ (linke Seite ausgeklammert, rechte Seite binomische Formel) $\rightarrow x = x + x$ (gekürzt) $\rightarrow 1 = 2$ (durch x)
Trugschluss: Division mit 0 = x - x

Beispiel 2:

Theorem: alle natürlichen Zahlen sind interessant
"Beweis": Angenommen, es wäre nicht so; dann existiert eine kleinste natürliche Zahl, die nicht interessant ist. Diese Zahl ist offensichtlich interessant, was der Annahme, dass sie nicht interessant ist, widerspricht. Dieses ist ein Widerspruch, also muss die Annahme falsch sein, womit die Behauptung gezeigt ist
Trugschluss: Anwendung eines indirekten Beweises auf eine mathematisch nicht exakt definierte Eigenschaft "interessant".

Beispiel 3:

Behauptung: $1 / \infty = 0$
„Beweis“: Wir beginnen mit $1/0 = \infty$, drehen beide Seiten um 90 Grad nach links und erhalten -10 = 8; nun ziehen wir auf jeder Seite 8 ab und erhalten -18 = 0. Nun drehen wir beide Seiten wieder um 90 Grad nach rechts und erhalten $1 / \infty = 0$.

Beispiel 4:
Satz: Alle natürlichen Zahlen sind gleich
"Beweis": Wir zeigen, falls für eine natürliche Zahl m gilt max(a,b) = m, dann folgt a = b (a, b natürliche Zahlen). Daraus folgt offenbar die Behauptung.
Induktionsanfang (m = 1): max(a,b) = 1 → a = b = 1 → o.k.
Induktionsschritt (m → m + 1): Für m sei die Behauptung bewiesen.
max(a,b) = m + 1 → max(a - 1 , b - 1) = m → a - 1 = b - 1 (nach Induktionsannahme) → a = b q.e.d.

Beispiel 5:
Theorem: n=n+1
"Beweis": $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \quad | -(2n+1)$
→ $(n+1)^2 - (2n+1) = n^2 \quad | -n(2n+1)$ → $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1) \quad | +1/4(2n+1)^2$
→ $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + 1/4(2n+1)^2 = n^2 - n(2n+1) + 1/4(2n+1)^2$
→ $[\ (n+1) - 1/2(2n+1)\ ]^2 = [\ n - 1/2(2n+1)\ ]^2$
→ $(n+1) - 1/2(2n+1) = n - 1/2(2n+1)$
→ n+1 = n qed.

Beispiel 6:
Theorem: log(-1) = 0
"Beweis:" $\log[(-1)^2] = 2\ \log(-1)$ Andererseits: b) $\log[(-1)^2] = \log(1) = 0$
Aus a) und b) folgt: 2* log(-1) = 0 und damit log(-1)=0

Beispiel 7:
Behauptung: ln(2) = 0
"Beweis": Bekanntlich ist ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 ...
Umordnen liefert: ln 2 = (1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 ...) - (1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 ...)
Somit: ln 2 = (1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 ...) + (1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 ...) - 2 * (1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 ...)
Aus dieser und der oberen Reihe folgt: ln 2 = (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 ...) - (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 ...)
und somit: ln 2 = 0, qed.

Beispiel 8:
Behauptung: Unendlich=2
„Beweis": Wieviele Symmetrieachsen hat ein Kreis? Antwort: Unendlich viele! Jetzt teilen wir alles durch zwei! Wieviele Symmetrieachsen hat der Halbkreis? Antwort: Eine einzige! Daraus folgt: Unendlich=2. q.e.d.

Beispiel 9:
$x^2 = x \cdot x = x + x + \ldots + x$ (x Summanden)
Differenzieren nach x ergibt
$2x = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ (x Summanden)
2x = x und das bedeutet 2 = 1

Beispiel 10:
Behauptung: Alle Zahlen sind gleich 0.
"Beweis": Sei a=b. Dann gilt: a = b und weiter
$a^2 = ab \rightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2 \rightarrow (a + b)(a - b) = b(a - b)$, d.h.
$a + b = b \rightarrow a = 0$, q.e.d.

Beispiel 11: Alle natürlichen Zahlen sind gleich.
"Lemma": Seien a und b natürliche Zahlen. Gilt für eine natürliche Zahl n: max(a, b) = n ⇒ a = b.
"Beweis des Lemmas" durch Induktion über n:
Induktionsanfang: n = 1: max(a, b) = 1 ⇒ a = b = 1
Induktionsvoraussetzung: max(a, b) = n gilt
Induktionsschritt: max(a, b) = n + 1 ⇒ max(a-1, b-1) = n ⇒ mit Induktionsvoraussetzung gilt:

$a-1 = b-1 \Rightarrow a = b$

Aus diesem "Lemma" ergibt sich auch: Die Voraussetzung, dass das Maximum mit irgendeiner bestimmten natürlichen Zahl übereinstimmt, ist immer erfüllt. Falls das Lemma stimmt, gilt also für zwei beliebige natürliche Zahlen, dass sie gleich sind.

Beispiel 12:

Behauptung: Ein Krokodil ist länger als breit.
"Beweis": Man betrachte ein Krokodil.
1. Es ist oben lang und unten lang, aber nur oben grün. Also ist ein Krokodil länger als es grün ist.
2. Es ist grün entlang Länge und Breite, aber nur breit entlang der der Breite. Also ist ein Krokodil grüner als breit.

Aus 1. und 2. folgt: Das Krokodil ist länger als breit.

Beispiel 13:

Behauptung: $1 = -1$
"Beweis": $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1$
Der Trugschluss entsteht, da die Beziehung $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ nur gültig ist, wenn wenigstens eine der Variable a und b nichtnegativ ist.

Beispiel 14:

Behauptung: $2\pi = 0$
"Beweis": $x = 2\pi$

$\sin x = \sin (2\pi) = 0$
$x = \arcsin (0)$
$x = 0$, d.h. $2\pi = 0$

Der Trugschluss entsteht, da arcsin 0 nicht nur gleich 0 ist, sondern allgemein $0 + 2k\pi$ mit beliebigen ganzzahligen k ergibt.

Beispiel 15

Behauptung: Die Gleichung

$(x - 2)(x + 1) + 2 = 0$

besitzt genau die reelle Lösung $x = 1$.
"Beweis": Die Probe zeigt, dass $x = 1$ der Gleichung genügt. Um nachzuweisen, dass es keine weitere Lösungen gibt, nehmen wir an, dass x_0 eine Lösung von (4.11) ist. Dann gilt

$x_0^2 - 2x_0 + x_0 - 2 + 2 = 0.$
$x_0^2 - x_0 = x_0 (x_0 - 1) = 0$

Division durch x_0 ergibt $x_0 - 1 = 0$. Das bedeutet $x_0 = 1$.
Die Behauptung ist offensichtlich falsch, denn neben $x = 1$ ist auch $x = 0$ Lösung.
Der Fehler im Beweis besteht darin, dass in nur unter der Voraussetzung $x_0 <> 0$ durch x_0 dividiert werden darf.

Beispiel 16

Behauptung: $1 = 0$
Es sei $x = 1$. Dann wird

$x^2 = x$
$x^2 - 1 = x - 1$
$(x - 1) (x + 1) = x - 1 \quad |: (x-1)$
$x + 1 = 1 \quad |- 1$
$x = 0$

d.h. mit Anfangswert $0 = 1$. Der Trugschluss ergibt sich wieder durch eine Division mit 0, da $x-1 = 0$.

Beispiel 17

Behauptung: $4 = 5$
Dazu setzt man $x = 4$ und $y = 5$ und weiter

$x + y = 9 \quad |(x-y)$
$x^2 - y^2 = 9x - 9y \quad |+81/4$
$x^2 - 9x + 81/4 = y^2 - 9y + 81/4 \quad |+81/4$
$(x - 9/2)^2 = (y - 9/2)^2 \quad |\sqrt{}$

$x - 9/2 = y - 9/2$
$x = y$
und somit 4 = 5. Dieser Trugschluss beruht auf der Tatsache, dass das Wurzelziehen keine äquivalente Umformung ist. Die vorletzte Zeile müsste
$|x - 9/2| = |y - 9/2|$
lauten. Damit wäre aber die Reduktion auf $x = y$ nicht möglich.

Mathematische Fehler

Durch Differenzen und durch Summen kürzen nur die Dummen :-)

$(2a + b)/3a$ ist nicht $(2 + b)/3$ sondern $(2a + b)/3a = (2 + b/a)/3$, d.h. keine Vereinfachung!
Kürzen heißt: Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren. Der Wert ändert sich dabei nicht.
Beispiel:

$$\frac{35}{49} = \frac{5}{7} \text{ (gekürzt mit 7)} \qquad \frac{2a^2}{3a} = \frac{2a}{3} \text{ (gekürzt mit a)}$$

Steht im Zähler eine Summe zum Beispiel $ac + bc$, dann muss bei Division durch eine Zahl jeder Summand durch diese Zahl dividiert werden. $(ac + bc): c = (ac):c + (bc):c = a + b$

Bei Wurzeln die Noten purzeln :-)

$\sqrt{(a^2 + b^2)}$ ist nicht $a + b$. Richtig ist: $\sqrt{(a^2 b^2)} = a\, b$ oder $\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)} = a+b$

Problem: Was ist $(-3)^2$ und -3^2?

Es gilt die Klammerersparnisregel: Zuerst Potenzieren, dann Punktrechnung (Multiplizieren und Dividieren) und ganz zum Schluss Strichrechnung (Addieren und Subtrahieren). Klammerausdrücke werden jedoch als erstes ausgewertet.
$(-3)^2$ bedeutet: Multipliziere (-3) mit sich selbst (2 mal), also $(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$
-3^2 bedeutet: Potenziere zuerst 3 mit 2 und nimm davon den negativen Wert, also $-3^2 = -(3^2)$ ("zuerst Potenzieren") $= -9$

Behauptung: Das Quadrat einer beliebigen Zahl ist gleich 1

"Beweis": Es sei $x = y = m^2/4$ (m natürliche Zahl) (1)
Daraus folgt $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ (2)
Wir subtrahieren von der Gleichung (1) die Gleichung (2) und erhalten folgende Kette von Gleichungen: $x-\sqrt{x} = y-\sqrt{y} \rightarrow x-y = \sqrt{x} - \sqrt{y} \rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$
$\rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \rightarrow 2\sqrt{x} = 1$
In die letzte Gleichung setzen wir Gleichung (1) ein: $2\sqrt{(m^2/4)} = 1$, also $m^2=1$ "q.e.d."

Geld-Maßeinheiten

Scheinbar ist $\sqrt{(2500 \text{ Cent})} = \sqrt{(50 \text{ Cent} * 50 \text{ Cent})} = \sqrt{(1/2 € * 1/2 €)} = \sqrt{(1/4 €)} = \sqrt{(25 \text{ Cent})} = 5$ Cent
Der Fehler liegt in der falschen Verwendung der Maßeinheit des Geldes. Gezeigt wurde, dass 5 Cent gleich der Wurzel aus 2500 "Quadrat-Cent" ist, was immer das auch sein mag.

Satz des Pythagoras

"Der Pythagoras lautet: Das Quadrat über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.
Behauptung: Ich behaupte $a^2 = b^2 + c^2$
Beweis: Wenn der Inhalt des Quadrates über der Hypotenuse gleich 2 ist und der der Inhalt der beiden Quadrate über den beiden Katheten je 1 beträgt, so komme ich zu dem Resultat 2 = 1 + 1. 1+1 ist aber 2. Also 2 = 2. Setze ich statt dieser Zahlen a, b und c, so erhalte ich $a^2 = b^2 + c^2$, was zu beweisen war."
Dieser "Beweis" grenzt schon an das Komische, ist aber als schriftliche Reifeprüfungsarbeit eines Lyzeums einer jungen Dame verbürgt. Offensichtlich hat sie den Inhalt sowie die Beweistechnik nicht im Ansatz verstanden. Selbstverständlich kann man von einem "konstruierten" Beispiel nicht auf die Allgemeinheit schließen.

Gleichung $(x + 1)^2 - (x + 2)(x + 3) = (x + 4)(x + 5) - (x + 6)^2$
Lösung $x^2 + 2x + 1 - x^2 - 5x - 6 = x^2 + 9x + 20 - x^2 - 12x - 36$

$-3x - 5 = -3x - 16$

$5 = 16$

Die Schlussfolgerung, dass 5 = 15 gilt, ist natürlich falsch. Der hier auftretende Widerspruch zeigt nur, dass es keinen endlichen Wert für x gibt, der die Gleichung erfüllt.

Gleichung $6/(x - 3) - 9/(x - 2) = 1/(x - 4) - 4/(x-1)$

Lösung $[6(x - 2) - 9(x - 3)] / [(x - 2)(x - 3)] = [(x - 1) - 4(x - 4)] / [(x - 4)(x - 1)]$

$(6x - 12 - 9x + 27) / (x^2 - 5x + 6) = (x - 1 - 4x + 16) / (x^2 - 5x + 4)$

$(15 - 3x) / (x^2 - 5x + 6) = (15 - 3x) / (x^2 - 5x + 4)$

$(x^2 - 5x + 6) / (15 - 3x) = (x^2 - 5x + 4) / (15 - 3x)$

$6 = 4$

Die korrekte Lösung ist 5, d.h. es wurde mit 15 - 3x = 0 dividiert und somit der scheinbare Widerspruch erzeugt.

Summenzeichen

Zur Abkürzung der Schreibweise einer Summe wird das Summenzeichen Σ eingeführt:

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n$$

i heißt Summationsindex, weiterhin ist $m \le n$. Man spricht: Summe über x_i für i gleich m bis n bzw. Summe über x_i für i von m bis n

In Analogie versteht man unter dem Produktzeichen:

$$\prod_{i=m}^{n} x_i = x_m * x_{m+1} * x_{m+2} * \dots * x_n$$

Beispiele:

$\sum_{i=m}^{n} i = m + m+1 + \dots + n$ ... Summe der natürlichen Zahlen von m bis n

$\sum_{i=0}^{n} 2i+1 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n+1$ ... Summe der ungeraden natürlichen Zahlen von 1 bis 2n+1

$\prod_{i=1}^{n} i = 1 * 2 * 3 * \dots *n = n!$ ... n Fakultät

Rechnen mit Summenzeichen, Rechnen mit Produktzeichen

Für das Rechnen mit Summen- und Produktzeichen gelten folgende Regeln:

$\Sigma_{k=0}^{n} a_k = \Sigma_{j=0}^{n} a_j$ Umbenennung des Summationsindex

$\Sigma_{k=0}^{n} a_k = \Sigma_{j=N}^{n+N} a_{j-N}$ Verschiebung des Summationsindex $j = k+N$

$\Sigma_{k=0}^{n} a_k + \Sigma_{k=0}^{n} b_k = \Sigma_{k=0}^{n} (a_k+b_k)$ Additionsregel

$(\Sigma_{j=1}^{m} a_j)(\Sigma_{k=1}^{n} b_k) = \Sigma_{j=1}^{m} \Sigma_{k=1}^{n} a_k a_j b_k$ Distributivgesetz

$\Sigma_{j=1}^{m} \Sigma_{k=1}^{n} a_{jk} = \Sigma_{k=1}^{n} \Sigma_{j=1}^{m} a_{jk}$ Vertauschungsregel

$\Pi_{k=0}^{n} a_k = \Pi_{j=0}^{n} a_j$

$\Pi_{k=0}^{n} a_k = \Pi_{j=N}^{n+N} a_{j-N}$

$(\Pi_{k=0}^{n} a_k)(\Pi_{k=0}^{n} b_k) = \Pi_{k=0}^{n} a_k b_k$

$\Pi_{j=1}^{m} \Pi_{k=1}^{n} a_{jk} = \Pi_{k=1}^{n} \Pi_{j=1}^{m} a_{jk}$

Hyperoperator

Zur Fortsetzung der elementaren mathematischen Operationen Addition, Multiplikation und Potenzierung wirde der Hyperoperator eingeführt. Da man Addition, Multiplikation und Potenzbildung rekursiv

$a + b = 1 + (a + (b-1))$

$a \cdot b = a + (a \cdot (b-1))$

$a^b = a \cdot a^{b-1}$

definieren kann, verallgemeinert man zu einem dreistelligen Operator

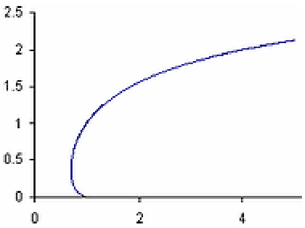
$a^{(n)}b =$ $b + 1$, für $n = 0$ $a + b$, wenn $n = 1$ und $b = 0$

0 , wenn $n = 2$ und $b = 0$ 1 , wenn $n > 2$ und $b = 0$

$a^{(n-1)} (a^{(n)}(b-1))$, sonst
mit hypern(a,b) = hyper(a,n,b) = $a^{(n)}b$
und bezeichnet diesen Operator als Hyperoperator.
Damit sind hyper1 die Addition, hyper2 die Multiplikation und hyper3 die Potenzierung. hyper4 wird als Tetration oder Superpotenz bezeichnet. Für die Tetration werden auch ^{b}a oder a ↑↑ b als Schreibweise für hyper4(a,b) verwendet. Zum Beispiel wird für die Tetration hyper4(4,3)

$^{3}4 = 4^{4^4} = 4^{256}$ = 13407 80792 99425 97099 57402 49982 05846 12747 93658 20592 39337 77235 61443 72176 40300 73546 97680 18742 98166 90342 76900 31858 18648 60508 53753 88281 19465 69946 43364 90060 84096

hyper5(a,b) = a ↑↑↑ b wird Pentation genannt, hyper6(a,b) = a ↑↑↑↑ b Hexation usw.



Superwurzel, Superquadratwurzel

Die Superwurzel ist eine der Umkehroperationen der Tetration. Gilt $^{n}y = x$, so ist y die n-te Superwurzel von x.
Insbesondere wird die 2.Superwurzel $\sqrt{x}_s$ Superquadratwurzel genannt.
Analytisch kann $\sqrt{x}_s$ mit Hilfe der Lambertschen W-Funktion dargestellt werden:

$$\sqrt{x}_s = e^{W(\ln x)}$$

Die linke Abbildung zeigt den prinzipiellen Verlauf der Superquadratwurzel-Funktion. Im Intervall $e^{-1/e} < x < 1$ existieren zwei reelle Superquadratwurzeln, für $x < e^{-1/e}$ keine Wurzel.
Ab dem Argument x = 1 ist die Superquadratwurzel eindeutig.
Erste Werte sind

x	$\sqrt{x}_s$	x	$\sqrt{x}_s$	x	$\sqrt{x}_s$
1	1	2	1.559610…	3	1.825455…
4	2	5	2.129372…	6	2.231828…
7	2.316454…	8	2.388423…	9	2.450953…

Teilbarkeit von Zahlen, Zahlentheorie

Teiler und Vielfaches

a heißt Teiler von b, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so dass a * b = n gilt.
Auch 1 und n selbst sind Teiler von n. Alle Teiler von außer n selbst nennt man "echte Teiler" von n.
Eine Zahl b heißt unteilbar oder auch Primzahl, wenn sie keine echten Teiler besitzt, andernfalls teilbar.
Die Eigenschaft der Teilbarkeit ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

Gemeinsamer Teiler

c = gT(a,b) heißt gemeinsamer Teiler von a und b, wenn c sowohl Teiler von a als auch von b ist

Vielfaches

b = gV(a,b) heißt Vielfaches von a, wenn a Teiler von b ist

gemeinsame Vielfache, gemeinschaftliche Vielfache

$V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sei die Menge aller Zahlen, die durch alle a_i ($a_i \neq 0$) teilbar sind. Dann heißen die Elemente von V gemeinschaftliche Vielfache oder gemeinsame Vielfache der $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Die Menge V^+ positiver Zahlen aus V ist niemals leer. Das Produkt $|a_1a_2\ldots a_n|$ ist Element von V^+. Das kleinste Element von V^+ ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der a_i (kgV).

Vollständige Induktion

Prinzip der vollständigen Induktion (Beweisverfahren)

Die Aussage "Für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt H(n) ist wahr $\Leftrightarrow$

Induktionsanfang, Induktionsverankerung

1. H(n) ist richtig für $n = n_0$

Induktionsschritt, Induktionsschluss

2. Aus der Gültigkeit von H(n) für n=k folgt für beliebiges k die Gültigkeit für n=k+1

Vollständige Induktion, Beweisbeispiele

Satz: Für alle natürlichen Zahlen n gilt 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n+1)/2, d.h. die Summe der ersten natürlichen Zahlen bis n ist gleich n(n+1)/2.

Induktionsanfang, Induktionsverankerung

$n_0 = 1$ dann gilt 1 = 1 = 1*(1+1)/2 = 1

Induktionsvoraussetzung

für n = k gilt 1 + 2 + 3 + ... + k = k(k+1)/2

Induktionsbehauptung

dann gilt auch für n = k+1: 1 + 2 + 3 + ... + k + k+1 = (k+1)(k+2)/2

Induktionsbeweis

1 + 2 + 3 + ... + k + k+1 = Einsetzen der Induktionsvoraussetzung
= k(k+1)/2 + k+1 = Zusammenfassen der Terme
= [k(k+1) + 2(k+1)] / 2 Ausklammern von (k+1) = (k+1) (k+2) / 2

Da der Induktionsanfang und der Induktionsschritt gezeigt werden konnten, gilt die Aussage.

Satz: Für alle natürlichen Zahlen n gilt $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$, d.h. die Summe der ersten ungeraden natürlichen Zahlen bis (2n-1) ist gleich n^2.

Induktionsanfang, Induktionsverankerung

$n_0 = 1$ dann gilt $1 = 1 = 1^2 = 1$

Induktionsvoraussetzung

für n = k gilt $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$

Induktionsbehauptung

dann gilt auch für n = k+1: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$

Induktionsbeweis

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) =$ Einsetzen der Induktionsvoraussetzung
$= k^2 + (2k+1) = k^2 + 2k + 1$ Binomische Formel
$= (k+1)^2$

Da der Induktionsanfang und der Induktionsschritt gezeigt werden konnten, gilt die Aussage.

Satz: Für alle natürlichen Zahlen n gilt $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1}-1$

d.h. die Summe der ersten Zweierpotenzen bis 2^n ist gleich 2^{n+1}-1.
Induktionsanfang, Induktionsverankerung
für n = 1 wird 1 + 2 = 2² - 1 = 3, wahre Aussage
Induktionsvoraussetzung
für n = k gilt $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} -1$
Induktionsbehauptung
dann gilt auch für n = k+1: $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{k+1} = 2^{k+2} -1$
Induktionsbeweis
aus $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ folgt
$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2\cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$
Da der Induktionsanfang und der Induktionsschritt gezeigt werden konnten, gilt die Aussage.

Satz: $1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 -+ \ldots + 1/2^n \geq 1 + n/2$
Induktionsanfang, Induktionsverankerung
für n=1 wird $1 + 1/2^1 \geq 1 + 1/2$, wahre Aussage
Induktionsschritt
Es sei $1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 -+ \ldots + 1/2^n \geq 1 + n/2$
Dann folgt
$1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 -+ \ldots + 1/2^n + 1/(2^n+1) + \ldots + 1/2^{n+1} \geq$
$\geq 1 + n/2 + 1/(2^n+2^n) + \ldots + 1/(2^{n+}2^n)$
$= 1 + n/2 + 2^n\, 1/(2^n+2^n)$
$= 1 + n/2 + 1/2 = 1 + (n+1)/2$
Damit ist gezeigt, dass der Satz auch für n+1 gilt.

Behauptung: Es gilt $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + (5+3\cdot n) = 5(n+1) + 3/2\, n\cdot(n+1)$
Induktionsanfang:
A(1): $5 + 8 = 5\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 2/2$; wahre Aussage
Induktionsschritt:
Es sei $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + (5+3\cdot n) = 5(n+1) + 3/2\, n\cdot(n+1)$
Daraus ist die Induktionsbehauptung herzuleiten:
$5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + (5+3\cdot n) + (5 + 3\cdot(n+1)) = 5(n+2) + 3/2\, (n+1)\cdot(n+2)$
Induktionsschritt:
Aus $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + (5+3\cdot n) = 5(n+1) + 3/2\, n\cdot(n+1)$ folgt
$5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + (5+3\cdot n) + (5+3\cdot(n+1)) = 5(n+1) + 3/2\, n\cdot(n+1) + (5+3\cdot(n+1)) =$
$= 5n + 5 + 3/2\, (n^2 + n) + 5 + 3n + 3 = 3/2\, n^2 + 19/2\, n + 13$
Multipliziert man die rechte Seite der Behauptung aus, ergibt sich der gleiche Term. q.e.d.

Summenformel der arithmetischen Zahlenfolge
Behauptung: Es gilt $a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \ldots + (a + nk) = a(n+1) + k/2\, n\cdot(n+1)$
Induktionsanfang: $a + (a + k) = a\cdot 2 + k$; wahre Aussage
Induktionsschritt:
Es sei $a + (a+k) + (a + 2k) + \ldots + (a + nk) = a(n+1) + k/2\, n\cdot(n+1)$
Behauptung: $a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \ldots + (a + nk) + (a + (n+1)k) = a(n+2) + k/2\, (n+1)\cdot(n+2)$
Herleitung:
Aus $a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \ldots + (a + nk) = a(n+1) + k/2\, n\cdot(n+1)$ folgt
$a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \ldots + (a + nk) + (a + (n+1)k) =$
$= a(n+1) + k/2\, n\cdot(n+1) + (a + (n+1)k) = an + a + k/2\, (n^2+n) + a + nk + k =$
$= k/2\, n^2 + (a + 3/2k)\, n + 2a + k$
Dieser Term entspricht der rechten Seite der Behauptung.

Behauptung $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n-3) = n(2n-1)$
Induktionsanfang n = 1: 1 = 1 (2-1) = 1 ist erfüllt
Induktionsvorausetzung $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n-3) = n\,(2n-1)$ gilt für ein n in N
Induktionsschluss $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n-3) + (4(n+1) - 3) = n\,(2n-1) + (4\,(n+1) - 3) =$
$= 2\,n^2 - n + 4n + 1 = 2\,n^2 + 3n + 1 = (n+1)\,(2n+1)$

Mit Hilfe der vollständigen Induktion soll gezeigt werden, dass $n^5 - n$ durch 5 teilbar ist für alle n in N.

Induktionsanfang $n=1$: $1^5 - 1 = 0$ und somit durch 5 teilbar
Induktionsvorausetzung Es gelte für ein n in N: $n_5 - n$ ist durch 5 teilbar, d.h. es existiert ein m in N, so dass gilt: $5m = n^5 - n$
Induktionsschluss $(n+1)^5 - (n+1) = (n+1)^5 - n - 1 =$

$$= n^5 + 5\,n^4 + 10\,n^3 + 10\,n^2 + 5\,n + 1 - n - 1 =$$
$$= n^5 - n + 5\,(n_4 + 2\,n^3 + 2\,n^2 + n) = 5m + 5\,(n^4 + 2\,n^3 + 2\,n^2 + n) =$$
$$= [m + (n^4 + 2\,n^3 + 2\,n^2 + n)]\,5$$

Und somit folgt, dass $(n+1)^5 - (n+1)$ durch 5 teilbar ist

Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen x und n gilt die Aussage $x^n -1$ ist durch x-1 ohne Rest teilbar.

Dass die Aussage für n=1, (x-1) ist durch (x-1) ohne Rest teilbar, ist offensichtlich richtig. Zu zeigen ist, dass unter der Voraussetzung von "$x^n -1$ ist durch x-1 teilbar" auch "$x^{n+1} -1$ ist durch x-1 teilbar" folgt.

$$x^{n+1} - 1 = x\,(x^n - 1) + (x-1)$$

was sich durch einfaches Ausmultiplizieren bestätigen lässt.
Beide Summanden der rechten Seite sind nach Voraussetzung durch x-1 teilbar, also auch die Summe und damit der Ausdruck links des Gleichheitszeichens.

Behauptung: $n^2 + n$ ist für alle natürlichen Zahlen n eine gerade, d.h. durch 2 teilbare Zahl.

Induktionsanfang: für $n = 0$ wird $0^2 + 0 = 0$ eine gerade Zahl
Induktionsvoraussetzung: es gelte n^2+n ist eine gerade Zahl
Induktionsbehauptung: dann gilt für n+1: $(n+1)^2 + (n+1)$ ist eine gerade Zahl
Induktionsschluss: $(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + 3n + 2 = (n^2+n) + (2n+2) = (n^2+n) + 2(n+1)$
ist eine gerade Zahl, da der erste Summand nach Induktionsvoraussetzung gerade und der zweite Summand ein Vielfaches von 2 sind.

Behauptung: $n^3 + 2n$ ist für alle natürlichen Zahlen n durch 3 teilbar.

Induktionsanfang, -voraussetzung und -behauptung analog zu oben.
Induktionsschluss:

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = n^3 + 3n^2 + 5n + 3 =$$
$$= (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3) = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$$

Behauptung: $4n^3 - n$ ist für alle natürlichen Zahlen n durch 3 teilbar.

Induktionsanfang, -voraussetzung und -behauptung analog zu oben.
Induktionsschluss:

$$4(n+1)^3 - (n+1) = 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n - 1 =$$
$$= 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3 = 4n^3 - n + 3(4n^2 + 4n + 1)$$

Behauptung: $n^3 - n$ ist für alle natürlichen Zahlen n durch 6 teilbar.

Induktionsanfang, -voraussetzung und -behauptung analog zu oben.
Induktionsschluss:

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 2n = n^3 - n + 3n\,(n+1)$$

Der erste Summand ist durch 6 teilbar, der zweite durch 3 und da entweder n oder n+1 gerade ist, auch durch 2 und folglich durch 6.

Satz: Für alle natürlichen Zahlen n und alle reellen Zahlen x gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (Bernoullische Ungleichung)

Induktionsanfang, Induktionsverankerung

für $n_0 = 1$ gilt das Gleichheitszeichen
für $n_0 = 2$ wird $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$

Induktionsvoraussetzung

für $n = k$ gilt $(1 + x)^k \geq 1 + kx$

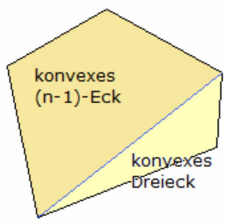
Induktionsbehauptung

dann gilt auch für $n = k+1$: $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\,x$

Induktionsbeweis

$(1 + x)^{k+1} = (1 + x^k)\,(1 + x) >$ Einsetzen der Induktionsvoraussetzung
$> (1 + kx)\,(1 + x) = 1 + (k + 1)\,x + kx^2 > 1 + (k + 1)\,x$

Da der Induktionsanfang und der Induktionsschritt gezeigt werden konnten, gilt die Aussage.



Aufgabe: Zeige, dass die Zahl d(n) der Diagonalen in einem ebenen, konvexen n-Eck durch die Formel

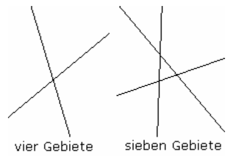
$$d(n) = n/2 \cdot (n-3)$$

berechnet werden kann! Für welche n gilt die Formel?

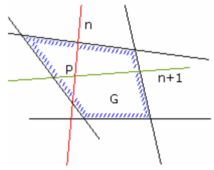
Induktionsanfang für ein Dreieck:
Ein Dreieck hat keine Diagonalen, also $d(3) = 0 = 3/2 \cdot (3 - 3)$. Für $n = 3$ ist die Behauptung richtig.
Induktionsschritt
Gegeben sei ein ein konvexes n-Eck, z.B. ein Fünfeck. In dieses zeichnet man eine Diagonale von einem beliebigen Eckpunkt zu einem übernächsten Eckpunkt, also so, dass ein Dreieck und ein (n-1)-Eck entsteht.
Das Dreieck hat keine und das (n-1)-Eck hat d(n-1) Diagonalen (Induktionsvoraussetzung).

Außerdem muss man noch die Diagonalen von der Ecke des Dreiecks, die nicht eine Ecke des (n-1)-Ecks ist, zu allen Ecken des (n-1)-Ecks, die nicht Eckpunkt des Dreiecks sind, zählen - und nicht zu vergessen die eine Diagonale, mit der das Dreieck abgeteilt wurde. Folgt:

$$d(n) = d(n-1) + (n-3) + 1 = (n-1)/2 \cdot ((n-1)-3) + (n-3) + 1 =$$
$$= (n-1) \cdot (n-4)/2 + n -2 = (n^2-5n+4)/2 + n -2 =$$
$$= (n^2 - 3n)/2 = (n \cdot (n-3)) / 2 \quad \text{qed}$$



Der Induktionsanfang wurde für n = 3 gemacht. Für kleinere n kann man den Induktionsschluß nicht durchführen. Ein Polygon mit weniger als 4 Ecken erlaubt nicht das Einzeichnen einer Diagonale von einer Ecke zu einer übernächsten Ecke.



Behauptung: n Geraden in einer Ebene, die in allgemeiner Position zueinander liegen, bilden

$n \cdot (n+1)/2 + 1$ Gebiete.

dabei verstehen man unter einer allgemeinen Position, dass keine zwei Geraden parallel sind und keine 3 Geraden sich im gleichen Punkt schneiden.

Mit Hilfe der vollständigen Induktion beweist man den Hilfssatz: Durch Hinzufügen einer Geraden zu n-1 Geraden in allgemeiner Position in der Ebene erhöht sich die Anzahl der Gebiete um n.
Beweis:
Angenommen, es gibt n Geraden und die n-te Gerade fügte n Gebiete hinzu. Was passiert, wenn die (n+1)-te Gerade hinzukommt?
Wegen allgemeiner Lage gilt, dass eine Gerade entweder ein Gebiet in zwei Teile schneidet oder das Gebiet nicht einmal berührt. Damit muss gezeigt werden, dass Gerade n+1 genau n+1 Gebiete schneidet.
Angenommen, Gerade n wäre nicht vorhanden. Dann würde die (n+1)-te Gerade n neue Gebiete (Induktionsannahme) hinzufügen. Es muss also nur gezeigt werden, dass die Gegenwart von Gerade n verursacht, dass die (n+1)-te Gerade ein zusätzliches Gebiet addiert.

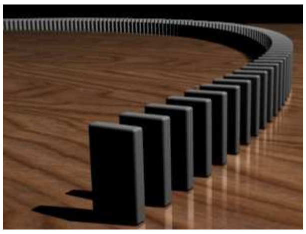
Es existiert genau ein Gebiet, wo sich n-te und (n + 1)-te Gerade schneiden (Schnittpunkt P).
Gerade n + 1 addiert ein neues Gebiet in G; schneidet es in zwei; wenn Gerade n nicht vorhanden, aber addiert zwei neue Gebiete; schneidet G in vier Teile; wenn Gerade n vorhanden ist.
G ist die einzige Region, die so beeinflusst wird. Also gilt: Die Gerade n+1 addiert n Gebiete ohne Gerade n und n+1 Gebiete mit der Geraden n.
Damit folgt unmittelbar: Die Gesamtzahl der Gebiete für n Geraden in allgemeiner Lage ist

$$2 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = n \cdot (n+1)/2 + 1$$

Behauptung: Sei M eine beliebige Menge und $m = |M|$ die Anzahl der Elemente von M. Dann ist $|P(M)| = 2^m$.
Lösung:
Die Potenzmenge P(M) ist die Menge aller Teilmengen von M. Damit ist zu bestimmen, wie viele verschiedene Teilmengen man aus m Elementen bilden kann.

A) Wenn M = ∅, also |M| = 0, dann ist P(M) = {∅}, denn nur die leere Menge ist Teilmenge der leeren Menge. Also |P(M)| = 1 = 2^0.
B) Sei nun |M| = n+1. Sei x ein bestimmtes Element aus M. Man bildet die Teilmengen, indem man die Teilmengen aufteilt:
a) die Teilmengen, die x nicht enthalten,
b) die Teilmengen, die x enthalten.
Nach Induktionsvorausetzung ist die Anzahl der Teilmengen bei a) = 2^n ist, denn es handelt sich um Teilmengen einer Menge mit n Elementen.
In allen Teilmengen aus b) kann man das Element x entfernen. Dann ist die Anzahl dieser Mengen ebenfalls = 2^n, denn es handelt sich auch hier um alle Teilmengen einer Menge mit n Elementen.
Addition der Anzahlen für a) und b): $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

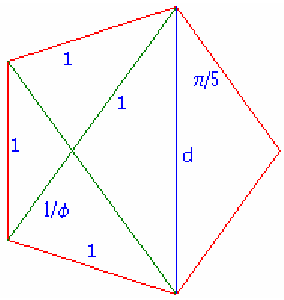
Behauptung: 47 ist ein Teiler von $7^{2n} - 2^n$
Der Induktionsanfang ist offensichtlich. Die Induktionsbehauptung ist dann
A(n+1): 47 ist ein Teiler von $7^{2n+2} - 2^{n+1}$
Induktionsschritt:
$7^{2n+1} - 2^{n+1} = 7^2 (7^2)^n - 2^{n+1}$
$= (7^2)^n \cdot (7^2-2) + 2 \cdot (7^2)^n - 2 \cdot 2^n = (7^2)^n \cdot (7^2-2) + 2 \cdot ((7^2)^n - 2^n)$
Jeder der beiden Summanden enthält einen Faktor, der nach Induktionsvoraussetzung durch 47 teilbar ist. Folglich ist der gesamte Ausdruck durch 47 teilbar.



Geschichte der vollständigen Induktion
Der erste Mathematiker, der einen formalen Beweis durch vollständige Induktion angab, war der italienische Geistliche Franciscus Maurolicus (16.9.1494 - 21./22.7.1575). Er war Abt von Messina und wurde als größter Geometer des 16. Jahrhunderts angesehen. In seinem 1575 veröffentlichten Buch Arithmetik benutzte Maurolicus die vollständige Induktion unter anderem dazu, für jede positive ganze Zahl n die Gültigkeit von 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)=n*n
zu beweisen. Die Induktionsbeweise von Maurolicus waren in einem knappen Stil geschrieben, dem man nur schwer folgen kann.
Eine bessere Darstellung dieser Methode wurde von dem französischen Mathematiker Blaise Pascal angegeben. In seinem 1662 erschienen Buch "Traite du Triangle Arithmetique" bewies er eine Formel über die Summe von Binomialkoeffizienten mittels vollständiger Induktion. Er benutzte diese Formel dann um das heute nach ihm benannte Pascalsche Dreieck zu entwickeln.
Obwohl die Methode der vollständigen Induktion also bereits 1575 bekannt war, wurde der Name dafür erst 1838 erstmalig gebraucht. In jenem Jahr veröffentlichte Augustus de Morgan, einer der Begründer der Mengenlehre, den Artikel Induction (Mathematics) in der Londoner Zeitschrift "Penny Cyclopedia". Am Ende dieses Artikels benutzte er den Namen für die vollständige Induktion erstmals im heute üblichen Sinn. Jedoch fand diese Bezeichnung erst in unserem Jahrhundert ihre weite Verbreitung.
zitiert nach "Vollständige Induktion", Prof. Dr. rer. nat. Udo Hebisch

Grundgleichung der Zahlentheorie
Für alle ganzen Zahlen a und b existiert genau ein Paar ganzer Zahlen q und r, so dass
$a = q * b + r$ und $0 \leq r < b$
∀ a,b ∈ Z, a,b>0 existiert genau ein Paar q, r ∈ Z mit

$a = q * b + r$ und $0 \leq r < b$



Ganzzahliger Anteil q ist der ganzzahlige Anteil der Division von a mit b
Rest r ist der bei der ganzzahligen Division verbleibende Rest

Der Rest r kann mit der Integer-Funktion aus a und b ermittelt werden:
Aus $a = qb + r$ mit $0 \leq r < |b|$ folgt $a/|b| = q\, b/|b| + r/|b| \rightarrow [a/|b|] = q \operatorname{sgn}(b) \rightarrow$

$\to q = [a/|b|] \operatorname{sgn}(b) \to r = a - [a/|b|]\,|b|$

Kommensurabilität

Zwei Zahlen a und b heißen kommensurabel , d.h. mit gleichem Maß messbar, wenn sie ganzzahlige Vielfache einer dritten Zahl c sind, d.h. aus $a = mc$ und $b = nc$ folgt $a/b = x$ (x rational). Im entgegengesetzten Fall sind a und b inkommensurabel.
Im regelmäßigen Fünfeck, dem Pentagramm, sind die Seite und die Diagonale inkommensurable Strecken. Bei einer Seitenlänge von a = 1 wird die Diagonale $d = \phi = 1/2(1 + \sqrt{5})$, also irrational. Man glaubt, dass Hippasos von Metapont an diesem Beispiel die irrationalen Zahlen entdeckt hat. Die Länge einer Diagonale und die Seitenlänge eines Quadrates sind ebenfalls inkommensurabel, da sie die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ als Quotienten bilden.

Größter gemeinsamer Teiler

ggT(a,b) $\Leftrightarrow$ größter gemeinsamer Teiler von a und b
$\exists x,y \in Z$ mit $ggT(a,b) = a*x + b*y$ $\quad\forall\, a>b \Rightarrow ggT(a,b) = ggT(a-b,b)$

Kleinstes gemeinschaftliches Vielfache

kgV(a,b) $\Leftrightarrow$ kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von a und b $\quad kgV(a,b) = a*b / ggT(a,b)$

Eigenschaften des ggT

$ggT(a,b) = ggT(b,a)$ $\qquad ggT(a,b) = ggT(-a,b)$
$ggT(a,0) = |a|$ $\qquad ggT(0,0) = 0$
$ggT(a,b) = ggT(a-b,b)$ falls $a > b$ $\qquad ggT(a,b) = ggT(a,b-a)$ falls $a < b$
$ggT(a,b) = ggT(b,a \bmod b)$ falls $b\neq 0$

Theorem von Séroul, Theorem von Bézout

Für zwei ganze Zahlen a und b existieren stets ganzzahlige u, v, so dass $au + bv = ggT(a,b)$ gilt.
Zwei ganze Zahlen a und b sind relativ prim zueinander, wenn zwei ganze Zahlen u,v existieren, so dass $au + bv = 1$ gilt.

Euklidischer Algorithmus

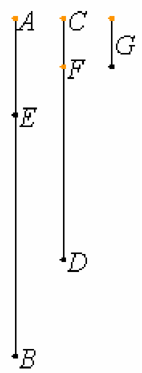
Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen
ggT(a,b) = ggT(b , a mod b), falls b≠0 $\qquad$ ggT(a , 0) = a, falls b=0

Beispiel 2862 : 504 = 5 Rest 342 $\qquad$ 504 : 342 = 1 Rest 162
342 : 162 = 2 Rest 18 $\qquad$ 162 : 18 = 9 Rest 0 d.h. ggT = 18

Ablaufplan x=a; y=b;
Solange y>0 ist, wiederhole r=x mod y ; x=y ; y=r
Ergebnis x

Lamé-Theorem

Die maximal notwendige Schrittzahl des Euklidischen Algorithmus für Paare (a,b) mit a,b < n beträgt $\le 4{,}785 \lg 10 + 1{,}6723$, d.h. die maximale Schrittzahl ist höchstens 5 mal so groß, wie die Ziffernzahl der kleineren Zahl.
mittlere Schrittzahl für (n,b) mit b < n … $0{,}843 \lg n$
Der schlechteste Fall (worst case) tritt für zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen auf!



Euklidischer Algorithmus (2)

Im Buch VII § 2 (A. 1) der "Elemente" gibt Euklid erstmals die Beschreibung des nach ihm benannten Euklidischen Alorithmus zur Bestimmung des ggT zweier Zahlen.
Aufgabe: Zu zwei gegebenen Zahlen, die nicht prim gegeneinander sind, ihr größtes gemeinsames Maß zu finden.

Die zwei gegebenen Zahlen, die nicht prim gegeneinander sind, seien AB, CD. Man soll das größte gemeinsame Maß von AB, CD finden.
Wenn CD hier AB misst - sich selbst misst es auch - dann ist CD gemeinsames Maß von CD, AB. Und es ist klar, dass es auch das größte ist; denn keine Zahl > CD kann CD messen.

Wenn CD aber AB nicht misst, und man nimmt bei AB, CD abwechselnd immer das kleinere vom größeren weg, dann muss schließlich eine Zahl übrig bleiben, die die vorangehende misst. Die Einheit kann nämlich nicht übrig bleiben; sonst müssten AB, CD gegeneinander prim sein (VII, 1), gegen die Voraussetzung.
Also muss eine Zahl übrig bleiben, die die vorangehende misst. CD lasse, indem es BE misst, EA, kleiner als es selbst, übrig; und EA lasse, indem es CD misst, FC, kleiner als es selbst, übrig; und CF messe AE.

Da CF AE misst und AE DF, muss CF auch DF messen, es misst aber auch sich selbst, muss also auch das Ganze CD messen. CD misst aber BE, also misst CF auch BEM es misst aber auch EA, muss also auch das Ganze BA messen.
Und es misst auch CD; CF misst also AB und CD; also ist CF gemeinsames Maß von AB CD. …

Euklidischer Algorithmus Tabelle

Die Tabelle enthält jeweils die kleinsten Paare, für welche k Schritte im Euklidischen Algorithmus notwendig sind:

k	Paare
1	(3,2), (4,3), (5,2), (5,4), (6,4), (6,5), (7,2), (7,3), (7,6), (8,6) ...
2	(5,3), (7,4), (7,5), (8,3), (9,5), (9,7), (10,6), (10,7), (11,3), (11,4) ...
3	(8,5), (11,7), (11,8), (12,7), (13,5), (14,9), (14,11), (15,11), (16,9), (16,10) ...
4	(13,8), (18,11), (18,13), (19,11), (19,12), (21,8), (23,14), (23,18), (25,14), (25,16) ...
5	(21,13), (29,18), (29,21), (30,19), (31,18), (31,19), (34,13), (37,23), (37,29), (39,25) ...
6	(34,21), (47,29), (47,34), (49,30), (49,31), (50,29), (50,31), (55,21), (60,37), (60,47) ...
7	(55,34), (76,47), (76,55), (79,49), (79,50), (80,49), (81,47), (81,50), (89,34), (97,60) ...
8	(89,55), (123,76), (123,89), (128,79), (128,81), (129,79), (129,80), (131,76), (131,81), (144,55) ...
9	(144,89), (199,123), (199,144), (207,128), (207,131), (208,129), (209,128), (209,129), ...
10	(233,144), (322,199), (322,233), (335,207), (335,212), (337,208), (337,209), (338,207), ...
11	(377,233), (521,322), (521,377), (542,335), (542,343), (545,337), (545,338), (546,337), ...
12	(610,377), (843,521), (843,610), (877,542), (877,555), (882,545), (882,547), (883,545), ...
13	(987,610), (1364,843), (1364,987), (1419,877), (1419,898), (1427,882), (1427,885), ...
14	(1597,987), (2207,1364), (2207,1597), (2296,1419), (2296,1453), (2309,1427), (2309,1432), ...

Die Zahlen der jeweils genannten zweiten Paare gehören zu der Lucas-Zahlenfolge, welche mit der Fibonacci-Folge verwandt ist.

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Der euklidische Algorithmus kann zur Lösung einer Diophantischen Gleichung (Theorem von Bézout) der Form

$$s\,a + t\,b = ggt(a,b)$$

genutzt werden. Eine eindeutige, nicht triviale Lösung s und t existiert, wenn a und b teilerfremd sind, d.h. ggt(a,b) = 1.
Der euklidische Algorithmus wird dazu erweitert (Eingabe a, b):

```
s ← 1, t ← 0, b1 ← 0, b2 ← 1
while b ≠ 0 do
   q = a div b, r = a mod b
   a ← b, b ← r
   r1 ← s - q b1, r2 ← t - q b2
   s ← b1, t ← b2, b1 ← r1, b2 ← r2
return(s,t)
```

Die Rückgabewerte s und t sind die Funktionswerte der Bézout-Funktion bézout(a,b). Dabei sind s = bézout(a,b) und t = bézout(b,a).
Für die Bézout-Funktion gilt bézout (x, ±x) = ½ sign(x) bézout(-x,y) = - bézout(x,y) ; bézout(x,-y) = bézout(x,y)

Berlekamp-Algorithmus, Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Der erweiterte Euklidische Algorithmus wird in der Literatur auch Berlekamp-Algorithmus genannt.

Algorithmus: Berlekamp(a, b)

```
if b = 0 then return (a, 1, 0)
(d', x', y') ← Berlekamp(b, a mod b)
(d, x, y) ← (d', y' x' - [a/b] y)
return (d, x, y)
```

Das Tupel (d, x, y) stellt eine Lösung der Gleichung ax + by = ggt(a,b) dar.
Sofern der größte gemeinsame Teiler von a und b gleich 1 ist, ist x das bezüglich b modulare Inverse zu a, welches im RSA-Verfahren zur Bestimmung des privaten Schlüssels benötigt wird. Wie der Euklidische Algorithmus besitzt auch der Berlekamp-Algorithmus eine Bit-Komplexität von $O(n^3)$.

Spezielle ggT-Gleichung

Die Lösung der einfach formulierten, aber sehr komplizierten Ungleichung

$$\mathrm{ggT}((n-1)^a+b,\ n^a+b) \neq 1$$

kann schon für kleine a und b als kleinste ganzzahlige Lösungen n zu extrem großen Zahlen führen. Für a = 17 und b = 9 ist das erste erfüllende n = 8424432925592889329288197322308900672459420460792433.
Die Tabelle enthält die jeweils erste Lösung n für ausgewählte a und b (Dezember 2005, Polster). Der Eintrag *** steht für das oben angegebene Ergebnis.

a	b=1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	2	7	9	2	3	15	2	19
3	6	52	57	211	6	2	321	6	534
4	9	2	4	2	2	49	57	2	2
5	7	40334	30	83	533361	10	675114	5238150	33
6	3	2	97	129	2	2	225	2	289
7	5	435	1159824	>100 Mill.	56	20	14	24748	485
8	6	2	385	2	2	15	6	2	2
9	3	17	10	23	8	2	284	6	365
10	3	2	4	9	2	3	34	2	7
11	11	1235	>21 Mill.	>15 Mill.	>15 Mill.	>15 Mill.	193	>15 Mill.	176428
12	9	2	14	2	2	2	27	2	2
13	7	78608	248	>15 Mill.	42	1944	243	>15 Mill.	31240
14	3	2	7	7785	2	3	6	2	534
15	4	8311	16	101	6	2	3	6	9
16	7	2	4	2	2	6	11	2	2
17	15	817173	1257	>15 Mill.	3776	>6 Mill.	141	9381	***
18	3	2	5	9	2	2	6	2	31
19	38	474	>6 Mill.	180	42297	>6 Mill.	51	87941	16562
20	7	2	16	2	2	10	143	2	2

ggT-Bestimmung mit Primfaktoren

In den Klassenstufe 5 und 6 werden der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen oft nicht mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus bestimmt.
Vielmehr geht man den Weg, ggT und kgV aus den Primfaktorzerlegungen der Zahlen zu bestimmen. Für kleinere Zahlen kann dies einen kleinen Vorteil erbringen, da effektiv auch ggT und kgV mehrerer Ausgangszahlen ermittelt werden. Für größere Zahlen scheidert das Verfahren am Problem der Primfaktorzerlegung, die sehr aufwendig sein kann. Es gilt:

Der ggT zweier oder mehrerer Zahlen ist das Produkt der niedrigsten Potenzen ihrer gemeinsamen Primfaktoren.
Das kgV zweier oder mehrerer Zahlen ist das Produkt aus den höchsten Potenzen aller vorhandenen Primfaktoren.

Beispiele

$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$396 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$
$ggT(168, 180, 396) = 2^2 \cdot 3 = 12$

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$
$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$
$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$kgV(48, 56, 180) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$

Mitunter wird das kleinste gemeinsame Vielfache auch aus der Beziehung
$kgV(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n) / ggT(z_1, z_2, \ldots, z_n)$
gewonnen.

Erweiterter größter gemeinsamer Teiler, eggT

Nach der klassischen Definition des größten gemeinsamen Teilers gilt
$ggT(x \cdot p, x \cdot q) = x \cdot ggT(p, q)$
Damit ist es möglich den ggT auf beliebige rationale Zahlen a/b, c/d zum erweiterten größten gemeinsamen Teiler zu erweitern.
Ist h der Hauptnenner von b und d, so kann dieser aus ggT(a/b, c/d) als Faktor ausgeklammert werden. Die weitere Berechnung erfolgt analog.
Beispiel: $eggT(2/3, 1/2) = eggT(4/6, 3/6) = 1/6 \cdot eggT(4, 3) = 1/6$
Über die Beziehung $p \cdot q = ggT(p, q) \cdot kgV(p, q)$ erhält man das erweiterte kleinste gemeinsame Vielfache ekgV:
$ekgV(a/b, c/d) = a/b \cdot c/d / eggT(a/b, c/d)$
Beispiel: $ekgV(2/3, 1/2) = 2/3 \cdot 1/2 / eggT(2/3, 1/2) = 1/3 / 1/6 = 2$

Für reelle Zahlen r und s definiert man, dass beide kommensurabel sind, wenn diese proportional zu zwei ganzen Zahlen sind. Sind r und s nicht kommensurabel, so definiert man $eggT(r, s) = 0$.
Zur näherungsweisen Überprüfung der Inkommensurabilität zweier reeller Zahlen x und y setzt man eine untere Grenze des eggT, zum Beispiel: $eggT(x, y) < \varepsilon = 10^{-100}$

Teilbarkeitssätze

Für alle ganzen Zahlen a und b existiert genau ein Paar ganzer Zahlen q und r, so dass $a = q * b + r$ und $0 \leq r < b$. Ist $r = 0$, so heißt b Teiler von a, $b \mid a$. Es gilt:

1. $a \mid b$ und $b \mid a \Rightarrow a = b$
2. $a \mid b$ und $b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (Transitivität)
3. $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$
4. $a \mid b$ und $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid c$
5. $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid b*c$
6. $a \mid c$ und $b \mid c$ und $ggT(a,b)=1 \Rightarrow a*b \mid c$
7. $a*b \mid c \Rightarrow a \mid c$ und $b \mid c$

Das "Mäuseproblem"

Eine Stadt wird von einer Mäuseplage heimgesucht.
Deshalb beschließen die Einwohner Katzen anzusiedeln. Jede Katze frisst nun gleichviel Mäuse und mehr Mäuse, als es Katzen sind. Insgesamt werden 10001 Mäuse gefressen und die Stadt von der Plage erlöst.
Frage: Wie viele Katzen waren es?
Lösung: Die Aufgabe verlangt die Suche nach einer natürlichen Zahl K, die Anzahl der Katzen. Ist M die Anzahl der von jeder Katze gefressenen Mäuse, so ist K * M = 10001.
D.h. es sind echte Teiler von 10001 zu suchen. Da 10001 nur die Teiler 1, 73, 137 und 10001 hat, und von mehr als einer Katze die Rede ist, müssen es K = 73 Katzen gewesen sein. Jede Katze beseitigte jeweils 137 Mäuse.
Anmerkung: Diese einfache Aufgabe der Zahlentheorie ist nur eindeutig lösbar, da 10001 genau 2 echte Teiler hat. Z.B. gebe es für 10004 Mäuse fünf verschiedene Lösungen. 10004 = 2 * 2 * 41 * 61 und da K < M mit den Lösungspaaren (K, M) = (61, 164), (41, 244), (82, 122), (4, 2501) und (2, 5002), wobei die letzten beiden ziemlich unrealistisch sind.

Professor Suzuki und seine drei Kinder

Professor Suzuki und Professor Baba begegnen sich in der Mensa der Waseda-Universität.
Suzuki: "Guten Abend, mein Bester. Wie geht es Ihnen?"
Baba: "Hervorragend, danke. Und Ihnen?"
Suzuki: "Sehr gut. Sie wissen, dass ich inzwischen drei Kinder habe ..."
Baba: "Wirklich? Wie alt sind sie denn?"
Suzuki: "Nun, Sie als guter Mathematiker und Logiker dürften es rasch herausbekommen."
Das Produkt ihrer Lebensalter ist 36, und die Summe ihrer Lebensalter ist identisch mit der Nummer des Hauses, das sie in Osaka bewohnten."
Baba (nach einer Pause): "Diese Informationen reichen mir nicht."
Suzuki: "Sie haben recht. Also das älteste Kind spielt Klavier."
Baba: "Aha, jetzt weiß ich, wie alt sie sind."
Wie alt sind die Kinder im einzelnen?

Da Alter der drei Leute soll natürlich als ganzzahlig angenommen werden. Es gibt 8 verschiedene Möglichkeiten, aus einem Produkt von drei natürlichen Zahlen als Ergebnis 36 zu erhalten. Die folgende Tabelle zeigt diese Produkte zusammen mit der Summe:

1 * 1 * 36 = 36;	Summe: 38	1 * 2 * 18 = 36;	Summe: 21
1 * 3 * 12 = 36;	Summe: 16	1 * 4 * 9 = 36;	Summe: 14
1 * 6 * 6 = 36;	Summe: 13	2 * 2 * 9 = 36;	Summe: 13
2 * 3 * 6 = 36;	Summe: 11	3 * 3 * 4 = 36;	Summe: 10

Nur wenn die Summe 13 beträgt, reichen die Informationen noch nicht zur Lösung aus, weil dann das Ergebnis noch nicht eindeutig ist. Da es aber ein ältestes Kind geben soll, kommt nur die folgende Lösung in Frage: 9, 2 und 2

Der Bischof und die drei Kirchenbesucher

Ein Pfarrer sagt zum Organisten: "Heute waren nur drei Leute in der Kirche."
Organist: "Wie alt waren denn die drei?".
Pfarrer: "Also, wenn du die jeweiligen Alter miteinander multiplizierst, dann ergibt das 2450. Zusammen genommen sind sie so alt wie du."
Organist: "Hmm, also mit diesen Informationen kann ich das ja wohl noch nicht lösen!".
Pfarrer: "Ach ja, ich muss noch erwähnen, dass alle drei jünger waren als unser Bischof!"
Organist: "Aha, jetzt hab ich's!"
Wie alt ist der Bischof?

Das Alter der drei Kirchenbesucher soll als ganzzahlig angenommen werden. Es gibt 20 verschiedene Möglichkeiten, aus einem Produkt von drei natürlichen Zahlen als Ergebnis 2450 zu erhalten. Die folgende Tabelle zeigt diese Produkte zusammen mit der Summe, wobei 8 Fälle nur theoretische Bedeutung haben:

1 · 1 · 2450;	Summe: 2452	1 · 2 · 1225;	Summe: 1228
1 · 5 · 490;	Summe: 496	1 · 7 · 350;	Summe: 358
1 · 10 · 245;	Summe: 256	1 · 14 · 175;	Summe: 190
1 · 25 · 98;	Summe: 124	1 · 35 · 70;	Summe: 106
1 · 49 · 50;	Summe: 100	2 · 5 · 245;	Summe: 252
2 · 7 · 175;	Summe: 184	2 · 25 · 49;	Summe: 76
2 · 35 · 35;	Summe: 72	5 · 5 · 98;	Summe: 108
5 · 7 · 70;	Summe: 82	5 · 10 · 49;	Summe: 64 #
5 · 14 · 35;	Summe: 54	7 · 7 · 50;	Summe: 64 #
7 · 10 · 35;	Summe: 52	7 · 14 · 25;	Summe: 46

Da der Organist die Aufgabe mit diesen Informationen noch nicht lösen kann, muss er 64 Jahre alt sein. Denn nur wenn die Summe 64 (mit # gekennzeichnet) beträgt, ist das Produkt nicht eindeutig.
Da die zusätzliche Information besagt, dass der Bischof älter als die Kirchenbesucher ist, muss er mindestens 50 Jahre alt sein.
Wäre der Bischof 51 Jahre oder älter, kämen beide Möglichkeiten für das Alter der Kirchenbesucher in Frage und der Organist könnte die Aufgabe immer noch nicht lösen.
Damit kann der Bischof nur 50 Jahre alt sein. Die Kirchenbesucher sind 5 Jahre, 10 Jahre und 49 Jahre alt.

Luzifer-Rätsel

Das Luzifer-Rätsel ist ein mathematisches Rätsel aus dem Bereich der Zahlentheorie, das auf den Mathematiker Hans Freudenthal zurückgeht.
Das Rätsel demonstriert, wie bereits einfach formulierte und allgemein erscheinende Voraussetzungen der Ausgangspunkt zu komplexen mathematischen Überlegungen sein können und auch eine präzise und eindeutige Lösung liefern.
Es ist deshalb recht weit verbreitet als Übungsaufgabe in der mathematischen Ausbildung oder als intelligentes Preisrätsel.

Rätsel: Eine populäre Fassung, die zur Bezeichnung "Luzifer-Rätsel" führte, lautet in etwa folgendermaßen:
Die berühmten Mathematiker Carl Friedrich Gauß und Leonhard Euler landen nach ihrem Tod in der Hölle. Luzifer verspricht ihnen die Freiheit, wenn sie die beiden ganzen Zahlen zwischen 1 und 100 (d.h. im Bereich 2,3,…,99) erraten, die er sich ausgedacht hat. Er nennt Gauß das Produkt und Euler die Summe der beiden Zahlen; darauf entwickelt sich zwischen den Mathematikern folgender Dialog:

Gauß: "Ich kenne die beiden Zahlen nicht."
Euler: "Das war mir klar."
Gauß: "Jetzt kenne ich die beiden Zahlen."
Euler: "Dann kenne ich sie jetzt auch."

Unabhängig von der Frage, ob Gauß und Euler aus der Hölle entkommen, lautet die Aufgabe, allein aus diesen Angaben die beiden Ausgangszahlen zu ermitteln.

Lösung des Rätsels: http://de.wikipedia.org/wiki/Luzifer-R%C3%A4tsel

Teilerfremde Reste

Die kleinsten positiven Reste (mit Rest 0), welche bei der Division beliebiger natürlicher Zahlen mit der Zahl m auftreten können, sind 0, 1, 2, ..., m-1
Unter diesen finden sich stets Reste, welche zu m relativ prim (teilerfremde Reste) sind, z.B. immer die 1. Die Menge der zum Modul m relativ primen Reste heißt reduziertes Restsystem mod m.
Die Anzahl seiner Elemente wird mit $\phi(m)$ bezeichnet und die eindeutige Abbildung **$m \rightarrow \phi(m)$** als Eulersche Funktion bezeichnet.

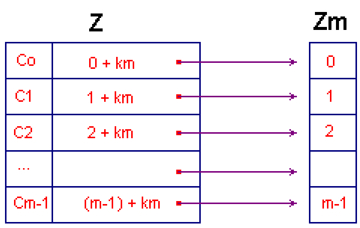
	Zahl m	$\phi(m)$
	Primzahl m	m - 1
	$m = p^a q^b$	$m (1 - 1/p) (1 - 1/q)$
	$m = p^a q^b r^c$	$m (1 - 1/p) (1 - 1/q) (1 - 1/r)$
und allgemein	$m = p_1^{a1}\, p_2^{a2} \dots p_k^{ak}$	$\phi(m) = m (1 - 1/p_1) (1 - 1/p_2) \dots (1 - 1/p_k)$

Tabelle der Funktionswerte $\phi(m)$ der ersten zusammengesetzten Zahlen

$\phi(m)$	m	$\phi(m)$	m	$\phi(m)$	m	$\phi(m)$	m
2	4, 6	4	8, 10, 12	6	9, 14, 18	8	15,16, 20, 24, 30
10	22	12	21, 26, 28, 36	16	32, 34, 16	18	27, 38
20	25, 33	24	35, 39				

Restklassen

Sei p eine natürliche Zahl. Man kann - ohne in Widersprüche zu geraten - beim Addieren und Multiplizieren von ganzen Zahlen jede auftretende Zahl durch den Rest, der sich bei Division durch p ergibt, ersetzen.
Ist etwa p = 3, so wird nicht mehr zwischen 2 und 5 unterschieden !
Das kann auch in der Form 5 = 2 mod(3) ausgedrückt werden. Unter diesem Gesichtspunkt gibt es nur drei verschiedene Zahlen, nämlich 0, 1 und 2. Diese drei Objekte heißen Restklassen modulo 3.



Tatsächlich steht 0 nicht nur für die Zahl 0, sondern für alle ganzzahligen Vielfachen von 3 (1 steht für alle ganzen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 1 ergeben, und 2 steht für alle ganzen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 2 ergeben.) Daher heißen sie ''Klassen''.
Die Menge der Restklassen modulo 3 hat also 3 Elemente und wird als Z_3 bezeichnet. Für eine beliebige natürlichen Zahl p führt dies zur Menge Z_p der Restklassen modulo p. Falls p eine

Primzahl ist, kann innerhalb dieser Menge sogar dividiert werden. Sie hat dann die Struktur eines Körpers (Restklassenkörper).
In der Darstellung wird die Menge der ganzen Zahlen Z in die Restklassen 0, 1, ..., m-1 von Zm aufgeteilt.

Prime Restklassen
Eine Restklasse $[a]_m$ mit ggT(a,m) = 1 nennt man eine prime Restklasse modulo m. Ist p eine Primzahl, dann sind alle von $[0]_p$ verschiedenen Restklassen prime Restklassen modulo p.
Die primen Restklassen modulo p bilden bezüglich der Restklassenmultiplikation eine Abelsche Gruppe, die prime Restklassengruppe modulo m. Die Ordnung dieser Gruppe ist $\phi(m)$.

Kongruenz
Zwei ganze Zahlen a und b, die bei der Division durch eine ganze Zahl m (m>0) denselben Rest lassen, nennt man

kongruent nach dem Modulo m. $a \equiv b \bmod m$ oder $a \equiv b \ (m)$

Eigenschaften
$a \equiv a \ (m)$ Reflexivität

$a \equiv b \ (m) \Rightarrow b \equiv a \ (m)$ Symmetrie

$a \equiv b \ (m) \Rightarrow ka \equiv kb \ (m)$

$a \equiv b \ (m)$ und $b \equiv c \ (m) \Rightarrow a \equiv c \ (m)$

Transitivität

$a \equiv b \ (m)$ und $c \equiv d \ (m) \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \ (m)$

$a \equiv b \ (m)$ und $c \equiv d \ (m) \Rightarrow a*c \equiv b*d \ (m)$

$a \equiv b \ (m) \Rightarrow a^n \equiv b^n \ (m)$

$a*b \equiv 0 \ (p)$ und p ist Primzahl $\Rightarrow a \equiv 0$ oder $b \equiv 0 \ (p)$

$a*c \equiv b*c \ (m)$ und $c \neq 0$ und $ggt(c,m)=d \Rightarrow a \equiv b \ (m/d)$

$a*c \equiv b*c \ (m)$ und $c \neq 0$ und $ggt(c,m)=1 \Rightarrow a \equiv b \ (m)$

Achtung! Folgende Beziehungen gelten im Allgemeinen nicht !

$a \equiv b \ (m)$ und $c \equiv d \ (m) \Rightarrow a^c \equiv b^d \ (m)$ $a \equiv b \ (m) \Rightarrow n^a \equiv n^b \ (m)$

Sätze über Kongruenzen
1. ggT(a,m) = d und $ap \equiv aq \pmod{m} \Rightarrow p \equiv q \pmod{m/d}$
2. ggT(a,m) = 1 und $ap \equiv aq \pmod{m} \Rightarrow p \equiv q \pmod{m}$
3. ggT(b,m) = 1 $\Rightarrow$ es gibt genau ein x mit $bx \equiv 1 \pmod{m}$
4. Wenn ggT(b,m) = 1 gilt, so ist die Kongruenz $bx \equiv a \pmod{m}$ eindeutig lösbar. $x \equiv a/b \pmod{m}$

Hinweis: a/b steht hier für die Restklasse und nicht für die rationale Zahl (Bruch) a:b.

5. $a/b + c/d \equiv (ad+bc)/bd \pmod{m}$
6. $a/b - c/d \equiv (ad-bc)/bd \pmod{m}$
7. $a/b * c/d \equiv ac/bd \pmod{m}$
8. $a/b : c/d \equiv ad/bc \pmod{m}$, für ggT(bc,m) = 1 !
9. $a/b \equiv ac/bc \pmod{m}$

Satz von Wilson: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow$ p ist eine Primzahl
Kleiner Satz von Fermat: Ist p eine Primzahl und a kein Vielfaches von p, so gilt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

10. für jede ungerade Zahl a gilt: $a^2 \equiv 1 \bmod 8$
11. für jede ganze Zahl gilt entweder $a^3 \equiv 0 \bmod 9$ oder $a^3 \equiv 1 \bmod 9$ oder $a^3 \equiv 8 \bmod 9$
12. für jede ganze Zahl gilt entweder $a^3 \equiv 0 \bmod 7$ oder $a^3 \equiv 1 \bmod 9$ oder $a^3 \equiv 6 \bmod 9$
13. für jede ganze Zahl gilt entweder $a^4 \equiv 0 \bmod 5$ oder $a^4 \equiv 1 \bmod 5$
14. sei p eine Primzahl mit n < p < 2n. Dann gilt $({}^{2n}{}_{n}) \equiv 0 \bmod p$
15. sei a eine ungerade ganze Zahl. Ferner sei n > 0. Dann gilt: $a^{2n} \equiv 1 \bmod 2^{n+2}$

Beispielaufgaben zu Kongruenzen

Beispiel 1: Mit welcher Ziffer endet die Zahl 333^{222}?
Es ist $333 \equiv 3 \bmod 10$. Daraus folgt mit der Potenzregel (a = 333, b = 3, m = 10, n = 222):

$333^{222} \equiv 3^{222} \bmod 10$

Es gilt $3^2 \equiv -1 \bmod 10$. Erneute Anwendung der Potenzregel ($a = 3^2$, b = -1, m = 10, n = 111) liefert:

$3^{222} \equiv 3^{2\cdot 111} \equiv (-1)^{111} \equiv -1 \equiv 9 \bmod 10$; die Endziffer lautet 9.

Beispiel 2: Ist 2^{20}-1 durch 41 teilbar?
Es ist 32 = $2^5 \equiv -9$ mod 41. Daraus folgt mit der Potenzregel (a = 2^5, b = - 9):

$(2^5)^4 \equiv (-9)^4 \equiv 81 \cdot 81$ mod 41

Andererseits gilt 81 ≡ -1 mot 41. Die Potenzregel liefert 81² ≡ 1 mod 41 und insgesamt

$2^{20} - 1 \equiv 81 \cdot 81 - 1 \equiv 1-1 \equiv 0$ mod 41 ; 2^{20} - 1 ist durch 41 teilbar.

Beispiel 3: Behauptung, dass 2^{340} - 1 durch 341 teilbar ist. Diese Eigenschaft besagt, dass die Zahl 341 eine Fermatsche Pseudoprimzahl zur Basis 2 ist.

$2^{10} = 1024 = 3 \cdot 341 + 1 \equiv 1$ mod 341 $\Rightarrow 2^{340} \equiv 1$ mod 341 $\Rightarrow 2^{340}-1 \equiv 0$ mod 341

Beispiel 4: Welcher Rest ergibt sich, wenn man die Summe s(9999) := 1! + 2! + 3! + … + 9999! durch 12 teilt?
Gesucht wird ein n mit s(9999) ≡ mod 12. Es gilt

1! + 2! + 3! ≡ 9 mod 12 und 4! ≡ 0 mod 12

Daraus folgt mit der Multiplikationsregel für k > 3

k! = 4! · 5 · 6 · … · k ≡ 0 mod 12

Anwendung der Additionsregel liefert s(9999) = 1! + 2! + 3! + 4! + … + 9999! ≡ 9 mod 12
Wenn man s(9999) durch 12 teilt, bleibt als Rest 9 übrig.

Beispiel 5: Für jede ganze Zahl a gilt $a^3 \equiv a$ mod 6, d.h. teilt man a^3 durch 6, dann bleibt als Rest die Zahl a mod 6 selbst.
Es ist $a^3 - a = a(a^2 -1) = a(a-1)(a + 1)$. Dieses Produkt ist sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar, daher auch durch 6. Damit gilt $a^3 - a \equiv 0$ mod 6

Beispiel 6: Zeige, dass $z = 43^7 - 87^{13}$ durch 44 teilbar ist.
Es genügt $z \equiv 0$ (44) zu zeigen. Da $87 \equiv 43 \equiv -1$ (44) gilt, wird $z \equiv (-1)^7 - (-1)^{13} = (-1) - (-1) = 0$ (44)

Beispiel 7: Auf welche 3 Ziffern endet die Zahl 2^{100}?
Es ist $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} \equiv 24$ (1000), d.h.

$2^{100} \equiv 24^{10} = (24^3)^3 \cdot 24$ (1000)

Da $24^3 = 13824 \equiv 824$ (1000) ist wird

$2^{100} \equiv 824^3 \cdot 24 = (824^2)(824 \cdot 24)$ (1000) $\equiv 976 \cdot 776 = 757376 \equiv 376$ (1000)

Die Zahl endet auf die drei Ziffern 376.
Analog findet man, dass 2^{1000} auf 376 und 3^{1000} auf 001 enden.

Beispiel 8: Zeige, dass eine Quadratzahl bei Division durch 4 nur den Rest 0 oder 1 lassen kann!
Eine Quadratzahl hat immer die Gestalt a² mit einer natürlichen Zahl a. Da es bei ihrem Rest (mod 4) nur auf den Rest von a ankommt, kann man die Aussage durch vollständige Fallunterscheidung lösen:

a (mod 4)	a² (mod 4)
0	0
1	1
2	4 ≡ 0
3	9 ≡ 1

Analog kann man beweisen:
Beispiel 9: Zeige, dass die Summe zweier ungerader Quadratzahlen niemals eine Quadratzahl sein kann.
Beispiel 10: Beweise folgende Aussage: Ist die Summe zweier Quadratzahlen durch 3 teilbar, so auch jeder der beiden Summanden.

Modulares Inverses

Sei m > 1 und sei a eine ganze Zahl. Gibt es eine Zahl b, sodass ab ≡ 1 (mod m), so heißt a invertierbar modulo m und b heißt modulares Inverses von a. Man schreibt

$b = a^{-1}$ (mod m).

Nach dem Lemma von Bézout gilt: Sind a und m teilerfremd, dann gibt es ganze Zahlen x und y mit xa + ym = 1

Dann ist aber $xa = 1 + (-y)m \equiv 1 \pmod{m}$.
Das heißt, der Bézout-Koeffizient x ist das modulare Inverse von a.

Satz von der Existenz des modularen Inversen:
Sei $m > 1$ und sei a eine ganze Zahl. Dann ist a genau dann invertierbar modulo m, wenn a und m teilerfremd sind. Das Inverse von a lässt sich dann mithilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus berechnen.

Neunerprobe

Bei der Division durch 9 sind alle 9 verschiedenen Reste {0, 1, 2, …, 8} möglich. Nach den Rechenregeln für Kongruenzen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) ist damit der Neunerrest einer Summe gleich der Summe der Neunerreste der Summanden.
Daraus ergibt sich die Möglichkeit, relativ leicht Fehler bei Rechnungen zu vermindern. Dazu bestimmt man die Neunerreste der Operanden, deren Rechenergebnis und den Rest der eigentlichen Berechnungsaufgabe.
Stimmen die Reste nicht überein, so ist die Rechnung mit Sicherheit falsch. Bei übereinstimmenden Resten ist die Richtigkeit des Resultates nicht unbedingt sicher, aber wahrscheinlich, da z.B. Zahlendreher mit der Neunerprobe nicht entdeckt werden können.

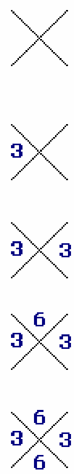
Beispiel:
Aufgabe: $48 + 53 = 101$?
Reste: $48 \equiv 3 \bmod 9$, $53 \equiv 8 \bmod 9$, $101 \equiv 2 \bmod 9$, da $3 + 8 = 11 \equiv 2 \bmod 9$ ist, ergibt die Neunerprobe ein wahrscheinlich richtiges Ergebnis.

Aufgabe: $17 \cdot 23 \cdot 19 = 7439$?
Reste: $17 \equiv 8 \bmod 9$, $23 \equiv 5 \bmod 9$, $19 \equiv 1 \bmod 9$ und $7439 \equiv 7 \bmod 9$. Für das Produkt der Rest wird $8 \cdot 5 \cdot 1 = 40 \equiv 4 \bmod 9$ und damit eine Abweichung vom Neunerrest von 7439. Das Ergebnis ist falsch.
Korrekt ist 7429.

Elferprobe

So wie die Quersumme den Neunerrest einer Zahl liefert, so erhält man durch die alternierende Quersumme den Elferrest, wobei darauf zu achten ist, welche Stellen einen Beitrag zum Minuenden und welche einen zum Subtrahenden der alternierenden Quersumme liefern.

Neunerprobe bei Adam Ries (1492 bis 1559)



```
 7869
 8796
-------
16665
```

"Mach ein creutz zum ersten. Nimm die prob von der obernn Zal, als von 7869 setz die in ein veld des creutz,
Nun nimm die proba von der andernn Zahl, das ist von 8796 ist auch 3; setz vff das ander veldtt neben vber,
Addir nun zusammen 3 + 3 wirtt 6, setz obenn wie hi (siehe Abbildung)
So du nun die prob von beyden Zalnn oben gesatzt genumen und zusammen addirt hast, so Nime alsdann prob auch von dem, das so auß dem addirn komen ist, das ost von der vntersten Zal vnder der linihen akss 16665.
Nim hinweg 9, so offt du magst, pleibn 6 übrig die setz vnden in das ledige feltt. Ist gleich souil sam oben stett.
So weniger oder mer komen wer, so hattest du im nicht recht gethan."

Lineare Kongruenz

Definition: Sind a, b und $m > 0$ ganze Zahlen, dann wird $ax \equiv b\ (m)$ lineare Kongruenz in der Unbekannten x genannt.
Eine ganze Zahl x^*, die die Bedingung $ax^* \equiv b\ (m)$ erfüllt, ist eine Lösung dieser Kongruenz.
Jede ganze Zahl, die zu x^* kongruent modulo m ist, ist ebenfalls eine Lösung. Will man alle Lösungen von $ax \equiv b$ angeben, dann genügt, die paarweise modulo m inkongruenten ganzen Zahlen zu finden, die die Kongruenz erfüllen.

Die Kongruenz ist genau dann lösbar, wenn ggT(a,m) ein Teiler von b ist. Die Anzahl der Lösungen modulo m ist dann gleich ggT(a,m). Ist insbesondere der ggT(a,m)=1, dann ist die Kongruenz modulo m eindeutig lösbar.

Lösungsverfahren: Es gibt verschiedene Lösungsverfahren für lineare Kongruenzen. Z.B. kann man die Kongruenz $ax \equiv b(m)$ in die diophantische Gleichung $ax + my = b$ umformen und zunächst eine spezielle Lösung (x_0,y_0) der linearen diophantischen Gleichung $a'x + m'y = b'$ mit $a' = a/ggT(a,m)$, $m' = m/ggT(a,m)$ und $b' = b/ggT(a,m)$ ermitteln.
Die Kongruenz $a'x \equiv b'(m')$ ist wegen ggT(a',m')=1 modulo m' eindeutig lösbar, und es gilt:

$$x \equiv x_0 \ (m')$$

Die Kongruenz $ax \equiv b \ (m)$ hat modulo m genau ggT(a,m) Lösungen: x_0, $x_0 + m$, $x_0 + 2m$, ..., $x_0 + (ggT(a,m)-1)m$
Beispiel: $114x \equiv 6 \mod 315$ ist lösbar, denn ggT(114,315)=3 ist Teiler von 6; es gibt 3 Lösungen modulo 315.
$38x \equiv 2 \mod 105$ ist eindeutig lösbar, $x \equiv 94 \mod 105$. Also sind 94, 199 und 304 die Lösungen von $114x \equiv 6 \mod 315$.

Vollständiges Restsystem

Die Menge $\{x_0, x_1, ..., x_{m-1}\}$ wird vollständiges Restsystem mod m genannt, wenn die x_i Elemente der Restklassen C_i (mit i =0, 1, ..., m-1) sind und alle Restklassen vertreten sind.
Zum Beispiel ist {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} ein vollständinges Restsystem mod 7, aber {0, 1, -1, 2, -2, 3, -3}.
Dann gilt:
Ist $\{x_0, x_1, ..., x_{m-1}\}$ ein vollständiges Restsystem (mod m) dann ist auch $\{ax_0 + b, ax_1 + b, ..., ax_{m-1} + b\}$ ein vollständiges Restsystem (mod m), wenn ggd(a,m) = 1 und b beliebig.
Sind $\{x_1, ..., x_m\}$ (mod m) und $\{y_1, ..., y_n\}$ (mod n) vollständige Restsysteme, dann ist auch

$$\{ nx_i + my_j \mid i=1, .., m, j = 1, ..., n \}$$

ein vollständiges Restsystem (mod mn), wenn ggd(m,n) =1.

Reduziertes Restsystem

Unter einem reduzierten Restsystem mod m versteht man dann die Teilmenge eines vollständigen Restsystems mod m, die gerade aus den $\phi(m)$ Restklassen besteht, deren Elemente zu m relativ prim sind.
Beispiele:
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} ist ein vollständiges Restsystem mod 7.
{1, 2, 3, 4, 5, 6} ist ein reduziertes Restsystem mod 7, d.h. $\phi(7) = 6$.
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ist ein vollständiges Restsystem mod 10.
{1, 3, 7, 9} ist ein reduziertes Restsystem mod 10, d.h. $\phi(10) = 4$.

Restsystem (2)

Ist $\{x_1, x_2, …, x_{\phi(m)}\}$ ein reduziertes Restsystem mod m, dann ist auch $\{ax_1, ax_2, …, ax_{\phi(m)}\}$ ein reduziertes Restsystem mod m, wenn ggT(a,m) = 1 gilt.
Sind $\{x_1, x_2, …, x_{\phi(m)}\}$ mod m und $\{y_1, y_2, …, y_{\phi(m)}\}$ mod n reduzierte Restsysteme, dann ist

$$\{nx_i + my_j \mid …\}$$

ein reduziertes Restsystem mod mn mit $\phi(mn) = \phi(m) \cdot \phi(n)$ Elementen.

Satz von Euler

Wenn ggT(a, m) = 1, so ist $a^{\phi(m)} \equiv 1 \mod m$.
Beweis:
Es sei $n = \phi(m)$ und $\{x_1, x_2, …, x_n\}$ ein reduziertes Restsystem mod m. Dann ist

$$\{ax_1, ax_2, …, ax_n\}$$

ebenfalss ein reduziertes Restsystem mod m. Für alle x_i und ax_j gilt $x_j \equiv ax_i$ (mod m) für verschiedene i und j. Multiplikation ergibt

$$ax_1 \, ax_2 \dots ax_n \equiv x_1x_2…x_n \pmod m$$
$$a^n \, x_1x_2 \dots x_n \equiv x_1x_2 \dots x_n \pmod m.$$

Mit $ggd(x_1, x_2, …, x_n, m) = 1$ ergibt sich somit

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod m \qquad \text{qed}$$

Kleiner Satz von Fermat

Als Folgerung ergibt sich:
Ist p eine Primzahl und ggT(a, p) = 1, so gilt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ für alle ganzen a
Beweis: Der Satz ergibt sich aus dem Satz von Euler, da für eine Primzahl p stets $\phi(p) = p-1$ ist.

a | n=	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1
2	4	1	2	4	1	2
3	2	6	4	5	1	3
4	2	1	4	2	1	4
5	4	6	2	3	1	5
6	1	6	1	6	1	6

Ordnung einer Zahl

Wenn der ggT(a,m) = 1 ist, dann heißt die kleinste positive ganze Zahl r mit $a^r \equiv 1 \pmod m$ die Ordnung von a modulo m.

Aus dem Satz von Euler folgt, dass $r \le \phi(m)$ ist. Ist der ggT(a,m) größer als 1, so existiert r im Allgemeinen nicht.
In der Abbildung ist die Tabelle a^n mod m für m = 7, $\phi(7) = 6$, zu sehen. Ein reduziertes Restsystem mod 7 ist {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Damit ergibt sich

Ordnung r	für a =	Ordnung r	für a =
1	1	2	6
3	2, 4	6	3, 5

In diesem Beispiel treten alle Teiler von $\phi(m)$ als Ordnung auf. Es gilt: Die Ordnung r einer Zahl a mod m ist ein Teiler von $\phi(m)$.
Die Umkehrung gilt nicht! Für m = 21, $\phi(21) = 21\,(1-1/3)(1-1/7) = 2 \cdot 6 = 12$, ist ein reduziertes Restsystem {1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20}. Auswertung der Tabelle a^n mod 21 ergibt

Ordnung r	für a =	Ordnung r	für a =
1	1	2	8, 13, 20
3	4, 16	4	existiert nicht
6	2, 5, 10, 11, 17, 19	12	existiert nicht

Allgemein gilt:
Ist der ggT(a,m) = 1 und ist r die Ordnung von a (mod m), dann gilt
(1) $1, a, a^2, \ldots, a^{r-1}$ sind inkongruent (mod m)
(2) Für n > 0 existiert eine eindeutige ganze Zahl s mit $0 \le s < r$, so dass $a^n \equiv a^s \pmod m$
(3) $a^n \equiv 1 \pmod m$ genau dann, wenn r | n
(4) Wenn $b \equiv a \pmod m$, dann ist die Ordnung von b (mod m) gleich der Ordnung von a (mod m)
Als Folgerung ergibt sich: Wenn r die Ordnung von a (mod m) ist, so gilt $r \mid \phi(m)$.

Quadratische Reste

p sei eine Primzahl und p > 2. Als quadratische Reste werden die Reste bezeichnet, welche Quadratzahlen bei der Division durch p lassen. Die Reste modulo p, die bei keiner Quadratzahl auftreten, heißen quadratische Nichtreste.
Es gilt: $a^2 \equiv b^2 \pmod p \Leftrightarrow (a \equiv b \bmod p)$ oder $(a \equiv -b \bmod p)$
d.h. es gibt genau (p-1)/2 verschiedene quadratische Reste modulo p. Die Reste sind bis auf Symmetrie verschieden.
Es gilt: Ist p=4k+1 und c ein quadratischer Rest modulo p, so ist -c ebenfalls ein quadratischer Rest modulo p. Hat p die Form p=4k+3, so gilt dies nicht.

Simultane Kongruenzen ganzer Zahlen

Eine simultane Kongruenz ganzer Zahlen ist ein System von linearen Kongruenzen

$$x \equiv a_1 \bmod m_1$$
$$x \equiv a_2 \bmod m_2 \ldots$$
$$x \equiv a_n \bmod m_n$$

Gesucht sind alle x, die sämtliche Kongruenzen gleichzeitig lösen. Wenn eine Lösung x existiert, dann sind mit $M = \mathrm{kgV}(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n)$ die Zahlen $x + k \cdot M$ ($k \in Z$) genau alle Lösungen. Es kann aber auch sein, dass es keine Lösung gibt.

Teilerfremde Moduln

Die Originalform des chinesischen Restsatzes aus einem Buch des chinesischen Mathematikers Ch'in Chiu-Shao aus dem Jahr 1247 ist eine Aussage über simultane Kongruenzen für den Fall, dass die Moduln teilerfremd sind:

Seien $m_1, \ldots, m_n$ paarweise teilerfremde ganze Zahlen, dann existiert für jedes Tupel ganzer Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ eine ganze Zahl x, die die folgende simultane Kongruenz erfüllt:

$x \equiv a_i \bmod m_i$, für $i = 1, \ldots, n$

Alle Lösungen dieser Kongruenz sind kongruent modulo $M = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n$. Das Produkt M stimmt hier wegen der Teilerfremdheit mit dem kgV überein.

Finden einer Lösung

Eine Lösung x kann man wie folgt ermitteln. Für jedes i sind die Zahlen m_i und $M_i = M/m_i$ teilerfremd, also kann man z.B. mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus zwei Zahlen r_i und s_i finden, so dass

$r_i\, m_i + s_i\, M_i = 1$

Setzt man $e_i = s_i\, M_i$, dann gilt

$e_i \equiv 1 \bmod m_i$

$e_i \equiv 0 \bmod m_j$, $i \neq j$

Die Zahl $x = \Sigma_{i=1}^{n}\, a_i\, e_i$

ist dann eine Lösung der simultanen Kongruenz.

Chinesischer Restesatz

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. ggT(m,n) = 1
2. Zu jedem a,b gibt es genau ein natürliches x, $x < m*n$ mit $x \equiv a \bmod n$ und $x \equiv b \bmod m$
3. Es gibt eine ganze Zahl x, so dass $x \equiv 1 \bmod n$ und $x \equiv 0 \bmod m$ ist

Die Originalform des chinesischen Restsatzes stammt aus dem Buch Sun Zi Suanjing ("Sun Zis Handbuch der Arithmetik") des Mathematikers Sun Zi (3.Jahrhundert) und wurde 1247 von Qin Jiushaos in "Mathematische Abhandlung in neun Kapiteln" wiederveröffentlicht.
Es gibt Hinweise, dass dieser Satz schon im antiken Griechenland bekannt war.

Satz über simultane Kongruenzen

Sind s und t teilerfremd, so existiert eine Lösung z des Systems von Kongruenzen $x \equiv a \bmod s \wedge x \equiv b \bmod t$. Man erhält dann alle Lösungen durch $x_k = z+k\cdot s\cdot t$
Es seien die paarweise teilerfremden Zahlen $a_1, a_2,\ldots,a_n$ gegeben.
Um alle Zahlen x mit $x \equiv r_1 \bmod a_1$, $x \equiv r_2 \bmod a_2,\ldots, x \equiv r_n \bmod a_n$ zu finden, bestimme man die Zahl $a = a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$ sowie die Zahlen $b_1 = a/a_1$, $b_2 = a/a_2,\ldots, b_n = a/a_n$.
Dann bestimme man die Zahlen x_i in den Gleichungen $x_i\cdot b_i + y_i\cdot a_i = 1$ für i=1,...,n. Dann gilt:
$x_k = x_1\cdot b_1\cdot r_1 + \ldots + x_n\cdot b_n\cdot r_n + k\cdot a$.

Quadratische Reste modulo m

Die Kongruenzen $ax^2 + bx + c \equiv 0$ (m) sind lösbar, wenn alle Kongruenzen $x^2 \equiv a$ (m) lösbar sind.

$ax^2 + bx + c \equiv 0 \ (m) \Leftrightarrow (2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4\,ac \ (m)$

Man betrachtet zunächst quadratische Reste modulo m: Sei $m \in N$, $m > 1$ und $a \in Z$, ggT(a,m) = 1. Die Zahl heißt a quadratischer Rest modulo m , wenn es ein $x \in Z$ mit $x^2 \equiv a$ (m) gibt. Ist die kanonische Primfaktorenzerlegung von m gegeben, d.h.

$m = \Pi\, p_i^{\alpha_i}$; Produktbildung von i = 1 bis ∞

so ist r genau dann quadratischer Rest modulo m, wenn r quadratischer Rest modulo $p_i^{\alpha_i}$ für i = 1,2,3,... ist.

Legendre-Symbol

Ist a quadratischer Rest modulo einer Primzahl p, dann schreibt man dafür auch kurz $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$.

Ist a nicht quadratischer Rest modulo p, dann schreibt man $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ ... Legendre-Symbol.

Beispiel: Die Zahlen 1, 4, 7 sind quadratische Reste modulo 9.

Modulare Quadratwurzel

Während lineare Gleichungen $a\,x + b \equiv c \pmod p$ im Ring Z_p für ggT(a,p) = 1 eine eindeutige Lösung $x = a^{-1} \pmod p\ (c - b)$ besitzen, ist es nicht mehr so einfach, die quadratische Gleichung $x^2 \equiv a \pmod p$

zu lösen. Eine Lösung x wird modulare Quadratwurzel genannt.
Ist x eine modulare Quadratwurzel, so ist es auch p-x. Zahlen, die eine modulare Quadratwurzel besitzen, werden quadratische Reste genannt.
Für sehr große p ist es durch den hohen Rechenaufwand praktisch unmöglich, eine modulare Quadratwurzel zu bestimmen. Dagegen ist die Umkehrung, die Bestimmung der a für verschiedene x relativ einfach. Dies wird auch in der modernen Kryptografie verwendet.

Quadratisches Reziprozitätsgesetz

(Gauß 1796): Sind p und q zwei verschiedene ungerade Primzahlen, dann gilt

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2 \,*\, (q-1)/2}$$

Beispiel: $\left(\frac{65}{307}\right) = \left(\frac{5}{307}\right) * \left(\frac{13}{307}\right) = \left(\frac{307}{5}\right) * \left(\frac{307}{13}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) * \left(\frac{8}{13}\right) = (-1)^{(5^2-1)/8}\left(\frac{2^3}{13}\right) = -\left(\frac{2}{13}\right) = -(-1)^{(13^2-1)/8} = 1$

Der Satz wurde unabhängig von Euler (1722), Legendre (1785) und Gauß empirisch entdeckt. Den ersten vollständigen Beweis gab Gauß. Dieses Reziprozitätsgesetz gehört mit seinen weitreichenden Verallgemeinerungen auf algebraische Zahlkörper zu den tiefsten Gesetzmäßigkeiten der Zahlentheorie.

Eigenschaften quadratischer Kongruenzen

Ist p kein Teiler von ab und a ≡ b (p) gilt: $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$

$\left(\frac{1}{p}\right) = 1$ $\quad\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$ $\quad\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) * \left(\frac{b}{p}\right)$ $\quad\left(\frac{ab^2}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)$ $\quad\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$

Unitärer Teiler

Eine natürliche Zahl a ist ein unitärer Teiler einer Zahl b, wenn a und b/a zueinander prim sind, d.h. ggT(a, b/a) = 1 gilt.
Zum Beispiel ist 5 ein unitärer Teiler von 60, da 5 und 60/5 = 12 den ggT 1 haben. Dagegen ist der Teiler 6 von 60 nicht unitär, da 6 und 60/6 = 10 den größten gemeinsamen Teiler 2 haben.
Die 1 ist trivialerweise unitärer Teiler jeder Zahl.

Zahlen, deren Summe der unitären Teiler gleich der Zahl selbst ist, heißen unitäre vollkommene Zahlen.
Die Summe der unitären Teiler einer Zahl n wird mit $\sigma^*(n)$ bezeichnet. Für die ersten natürlichen Zahlen n = 1, 2, … ergibt $\sigma^*(n)$ die Werte: 1, 3, 4, 5, 6, 12, 8, 9, 10, 18, 12, 20, 14, 24, 24, 17, 18, 30, 20, 30, 32, 36, 24, 36, 26, 42, 28, 40, 30, 72, 32, 33, 48, 54, 48, 50, 38, 60, 56, 54, 42, 96, 44, 60, 60, 72, 48, 68, 50, 78, 72, 70, 54, 84, 72, 72, 80, 90, 60, 120, 62, 96, 80, 65, 84, 144, 68, 90, 96, 144, …
Die Anzahl der unitären Teiler einer Zahl n ist 2^k, wobei k die Anzahl der Primfaktoren von n ist.

Quadratische Modulgleichung

Die Sicherheit modernen Verschlüsselungsverfahren beruht u.a. auf der schwierigen Lösbarkeit sogenannter quadratischer Modulgleichungen. Ein quadratische Modulgleichung ist eine Gleichung in ganzen Zahlen der Form

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \quad \text{modulo } n$$

Insbesondere für sehr große n ist die Suche nach einer Lösung im Intervall 0 < x < n nur mit extremen Computereinsatz möglich.
Durch Hidenori Kuwakado und Hatsukazu Tanaka von der Universität Kobe wurde 1997 ein Algorithmus angegeben, durch den eine effektive Berechnung möglich wird.

Quersumme

Die Quersumme ist die Summe der Ziffern einer Zahl .
Bildet man von einer mehrstelligen Quersumme erneut die Quersumme und wiederholt dies, bis eine einstellige Zahl vorliegt, so spricht man von einer totalen Quersumme der

Ausgangszahl. Die alternierende Quersumme (auch Wechselquersumme) ergibt sich aus der abwechselnden Addition und Subtraktion der Ziffern der Zahl.
Beispiel: Zahl 123456701 ... alternierende Quersumme = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 0 + 1 = 5
Quersumme 2.Stufe ... $Q_2(n) = (a_1a_0)_{10} + (a_3a_2)_{10} + \ldots$
Alternierende Quersumme 2.Stufe ... $Q'_2(n) = (a_1a_0)_{10} - (a_3a_2)_{10} +- \ldots$

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl a ist durch n teilbar, wenn

a	Regel
2:	die letzte Ziffer (gerade Zahl)
3:	ihre Quersumme
4:	die Zahl aus ihren letzten 2 Ziffern
5:	die letzte Ziffer ist 0 oder 5
6:	diese gerade und durch 3 teilbar ist.
8:	die Zahl aus ihren letzten 3 Ziffern
9:	die Quersumme
10:	die letzte Ziffer ist 0
11:	die alternierende Quersumme
12:	die Zahl durch 3 und 4 teilbar ist
16:	die Zahl aus ihren letzten 4 Ziffern

durch n teilbar ist.

Digitale Wurzel

n sei eine natürliche Zahl. Bildet man von n die Quersumme, von dieser wieder die Quersumme, und so weiter, bis man eine einziffrige Zahl erhält, so heißt diese Zahl digitale Wurzel von n, geschrieben w(n).
Die Anzahl der Quersummenbildungen bis zur digitalen Wurzel heißt additive Hartnäckigkeit (engl. additive persistence).

Beispiel: Für n = 37854 wird $3+7+8+5+4 = 27 \rightarrow 2+7 = 9$
w(37854) = 9 ist digitale Wurzel von 37854 mit der additiven Hartnäckigkeit von 2.

Die digitalen Wurzeln der ersten natürlichen Zahlen n = 1, 2, …, 20 sind
w(n) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, …
Die digitale Wurzel w(n) einer Zahl kann berechnet werden:
w(n) = n mod 9, falls n ungleich n mod 9
w(n) = 9, falls n gleich n mod 9
Durch andere Mathematiker wird der Begriff der additiven Hartnäckigkeit auch additive Beharrlichkeit genannt. Die digitale Wurzel nennt man dann Ziffernwurzel. Die kleinsten natürlichen Zahlen mit einer additiven Hartnäckigkeit von 0, 1, 2, … sind 0, 10, 19, 199, 19999 999999 999999 999999, …

Teilbarkeit durch 7

Eine Zahl mit der Ziffernfolge $a_n \ldots a_3a_2a_1a_0$ ist durch 7 teilbar, wenn die Zahl r mit
$r = (a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5) + (a_6 + 3a_7 + \ldots) + \ldots$ durch 7 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 13

Eine Zahl mit der Ziffernfolge $a_n \ldots a_3a_2a_1a_0$ ist durch 13 teilbar, wenn die Zahl r mit
$r = (a_0 - 3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5) + (a_6 - 3a_7 + \ldots) + \ldots$ durch 13 teilbar ist.
Anmerkung: Dass die Teilbarkeitsregel für 7 so kompliziert ist, liegt an der Wahl des Positionssystems, also am Dezimalsystem. Im Oktalsystem mit der Basis 8 gilt zum Beispiel, dass eine Zahl durch 7 teilbar ist, wenn deren Quersumme durch 7 teilbar ist. Im Achtersystem ist eine Zahl dann restlos durch 9 teilbar, wenn die alterierende Quersumme teilbar ist.

Weitere Sätze

Jede sechsstellige Zahl mit einer Ziffernfolge abcabc ist durch 7, 11 und 13 teilbar.
Jede achtstellige Zahl mit einer Ziffernfolge abcdabcd ist durch 73 und 137 teilbar.
Für alle $n \in N$ gilt:

$2 \mid n^2+n$	$6 \mid n^3- n$	$12 \mid n^4-n^2$	$3 \mid n^3+2n$
$8 \mid 3^{2n}+7$	$9 \mid 10^n+3\cdot 4^{n+2}+5$	$3 \mid 4n^3-n$	$6 \mid n^3-n$
$6 \mid 7^n-1$	$3 \mid n^3-6n^2+14n$	$133 \mid 11^{n+2}+12^{2n+1}$	
$9 \mid n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$		$11 \mid 5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$	

Beweis der Quersummenregel im Zahlensystem zur Basis n

Darstellung der Zahl z mit den Ziffern $z_k, z_{k-1}, \dots, z_2, z_1, z_0$ im Zahlensystem-Basis n:

$z = z_k n^k + z_{k-1} n^{k-1} + \dots + z_2 n^2 + z_1 n + z_0$

$= z_k (n^k - 1) + z_{k-1} (n^{k-1} - 1) + \dots + z_2 (n^2 - 1) + z_1 (n - 1) + (z_k + z_{k-1} + \dots + z_2 + z_1 + z_0)$ (Quersumme)

$= z_k (n - 1) (n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n^2 + n + 1) + z_{k-1} (n - 1) (n^{k-2} + n^{k-3} + \dots + n^2 + n + 1) + \dots + z_2 (n - 1) (n + 1) + z_1 (n - 1) +$ Quersumme

$= (n - 1) (z_k (n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n^2 + n + 1) + z_{k-1} (n^{k-2} + n^{k-3} + \dots + n^2 + n + 1) + \dots + z_2 (n + 1) + z_1) +$ Quersumme

Man erkennt, dass sich jede Zahl als Summe eines Vielfachen von n − 1 und der Quersumme aufspalten lässt. Ist also im Zahlensystem der Basis n die Quersumme einer Zahl z durch n − 1 teilbar, dann ist auch z selbst durch n − 1 teilbar. Ebenso ist z genau dann durch jeden Teiler von n − 1 teilbar, wenn die Quersumme durch diesen Teiler teilbar ist. Beispielsweise kann die Quersummenregel im Hexadezimalsystem für die Zahlen 3, 5 und 15 verwendet werden.

Analog lässt sich zeigen, dass sich jede Zahl als Summe eines Vielfachen von n + 1 und der alternierenden Quersumme aufspalten lässt.

$z = (n + 1) (z_k (n^{k-1} - n^{k-2} + \dots - n^2 + n - 1) + z_{k-1} (n^{k-2} - n^{k-3} + \dots + n^2 - n + 1) + \dots + z_2 (n + 1) + z_1) +$ alternierende Quersumme

Ist also im Zahlensystem zur Basis n die alternierende Quersumme einer Zahl z durch n + 1 teilbar, dann ist auch z selbst durch n + 1 teilbar. Ebenso ist z genau dann durch jeden Teiler von n + 1 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch diesen Teiler teilbar ist. Beispielsweise kann die alternierende Quersummenregel im Hexadezimalsystem nur für die Zahl 17 verwendet werden. Für den Beweis wurde eine ungerade Anzahl von Ziffern vorausgesetzt.

Teilbarkeit-Beispiel

Aufgabe: Zeige, dass der folgende Term f(n), für alle natürlichen Zahlen n stets einen ganzzahligen Wert besitzt!

$f(n) = n^5/120 - n^3/24 + n/30$

Lösung: Im ersten Schritt wird der Faktor n/120 ausgeklammert

$f(n) = n/120 \cdot (4 - 5 \cdot n^2 + n^4)$

Durch systematisches Probieren und Polynomdivision bestimmt man die Nullstelen des Polynoms p(n)

$p(n) = 4 - 5 \cdot n^2 + n^4$

Es wird $n_1 = -2$, $n_2 = -1$, $n_3 = 1$, $n_4 = 2$. Damit kann die Funktion f(n) als fortlaufendes Produkt geschrieben werden

$f(n) = (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) / 120$

Für n = 1 und n = 2 ist die Funktion offensichtlich Null. Setzt man nun n = n + 2 wird, da die Zahl 120 = 5! ist

$f(n) = n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) \cdot (n + 4) / 5!$

Von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist mindestens eine durch 2, durch 3, durch 4 und durch 5 teilbar. Damit ist der Term ganzzahlig.

Beispiele zur Teilbarkeit von Termen

n sei eine natürliche Zahl größer 0. Dann sind nachfolgende Terme stets durch verschiedene Zahlen teilbar. Der Beweis ist durch vollständige Induktion möglich.

$n^2 + n$ ist durch 2 teilbar	$n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar
$4n^3 - n$ ist durch 3 teilbar	$n^3 - n$ ist durch 6 teilbar
$2n^3 + 3n^2 + n$ ist durch 6 teilbar	$n^3 - 6n^2 + 14n$ ist durch 3 teilbar
$3^n - 3$ ist durch 6 teilbar	$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ist durch 9 teilbar
$7^{2n} - 2^n$ ist durch 47 teilbar	$5^n + 7$ ist durch 4 teilbar
$5^{2n} - 3^{2n}$ ist durch 8 teilbar	$2^{3n} + 13$ ist durch 7 teilbar
$n^7 - n$ ist durch 7 teilbar	$3^{n+1} + 2^{3n+1}$ ist durch 5 teilbar
$3n^5 + 5n^3 + 7n$ ist durch 15 teilbar	$3^{2n} + 7$ ist durch 8 teilbar
$n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar	$n^4 - 4n^2$ ist durch 3 teilbar
$10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ ist durch 9 teilbar	$4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar
$5^{2n} + 24n - 1$ ist durch 48 teilbar	$11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar

Gewichtete Quersumme

Eine Verallgemeinerung der Quersummen sind gewichtete Quersummen, bei denen die Ziffern erst mit den Werten einer Zahlenfolge multipliziert und diese Ergebnisse dann addiert werden. Es wird mit der niederwertigsten Ziffer begonnen. Die Wichtungsfolge kann periodisch oder nichtperiodisch sein. Ein Beispiel ist die Folge 1, 3, 2, -1, -3, -2, …

Die gewichtete Quersumme der Zahl 422625 ist dann

$$5·1 + 2·3 + 6·2 - 2·1 - 2·3 - 4·2 = 5 + 6 + 12 - 2 - 6 - 8 = 7$$

Die so gewichtete Quersumme liefert eine Teilbarkeitsregel für die Zahl 7. Auch für andere natürliche Zahlen kann man solche periodischen Folgen finden, z. B.

für 11 die Folge +1, -1, … ; diese liefert die alternierende Quersumme

für 13 die Folge 1, -3, -4, -1, 3, 4, …

Für die meisten Teiler ist es wenig praktikabel, die Teilbarkeit mittels Quersummenbildung zu überprüfen, weil es nur wenige gut merkbare periodische Wichtungsfolgen gibt.

Möchte man eine entsprechende Teilbarkeitsregel für die natürliche Zahl m finden, so betrachtet man die Reste der Zehnerpotenzen bei der Division mit m. Die Reste entsprechen den gesuchten Gewichten.

Beispiel: m = 7

$1 \equiv 1 \bmod 7$	$10 \equiv 3 \bmod 7$
$100 \equiv 2 \bmod 7$	$1000 \equiv -1 \bmod 7$
$10000 \equiv -3 \bmod 7$	$100000 \equiv -2 \bmod 7$

$1000000 \equiv 1 \bmod 7$; ab hier wiederholen sich die Reste

Die Wichtungsfolge lautet damit 1, 3, 2, -1, -3, -2, …

Rechts werden Wichtungsfolge für ungerade n bis 20000 berechnet.

Teilbarkeitsregeln nach Briggs

1999 veröffentlichte C.C.Briggs von der Penn State University neuartige, sehr einfache Teilbarkeitsregeln für alle Primzahlen bis 1000.

Ist eine ganze Zahl M nicht durch 2 oder 5 teilbar, dann teilt M eine beliebige ganze Zahl N, wenn M auch

$$N' = (N - N \bmod 10)/10 + (m + A \times M) \times (N \bmod 10) = (N - M \times (m' - 10 \times A) \times (N \bmod 10))/10$$

mit $m = (1 - m' \times M)/10$ teilt.

A ist eine ganze Zahl und für M > 0

$$m' = [3 \times (M \bmod 10) - 2 \times M] \bmod 10$$

Mit A = 0 ergibt sich dann folgende Teilbarkeitsregeln:

Eine Zahl z ist teilbar durch eine Primzahl p, verschieden 2 und 5, wenn z/10 - k × (letzte Ziffer) durch p teilbar ist. Dabei ist k eine zu p gehörende natürliche Zahl. Es gilt: Die Zahl z ist …

3) durch 3 teilbar, wenn die Subtraktion der 2-fachen letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 3 teilbar ist

7) durch 7 teilbar, wenn die Subtraktion der 2-fachen letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 7 teilbar ist

11) durch 11 teilbar, wenn die Subtraktion der letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 11 teilbar ist

13) durch 13 teilbar, wenn die Subtraktion der 9-fachen letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 13 teilbar ist

17) durch 17 teilbar, wenn die Subtraktion der 5-fachen letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 17 teilbar ist

19) durch 19 teilbar, wenn die Subtraktion der 17-fachen letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 19 teilbar ist

23) durch 23 teilbar, wenn die Subtraktion der 16-fachen letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 23 teilbar ist

Die Tabelle enthält alle von Briggs angegebenen Werte für p und k:

Dieses Ergebnis kann so erweitert werden, dass auch k-fache der letzten Ziffer addiert werden.

Satz: Eine natürliche Zahl $z = 10A+E$ mit $A \in N$, $E \in N$, $0 \le E \le 9$ ist genau dann durch $t \in N$ mit $t=10a+e$ ($a,e \in N$, $0 \le e \le 9$) teilbar, wenn t auch $D = A+F*E$ teilt. F ist eine t-spezifische ganze Hilfszahl.

t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)
3	+1	7	-2	9	+1	43	+13	11	-1	13	+4
17	-5	19	+2	21	-2	23	+7	27	-8	29	+3
31	-3	33	+10	37	-11	39	+4	41	-4	43	+13
47	-14	49	+5	51	-5	53	+16	57	-17	59	+6
61	-6	63	+19	67	-20	69	+7	71	-7	73	+22
77	-23	79	+8	81	-8	83	+25	87	-26	89	+9
91	-9	93	+28	97	-29	99	+10	101	-10	103	+31
107	-32										

Dieser Satz ist auf das Abtrennen von mehr als 1 Ziffer E erweiterbar: Ansatz $z = 100A + K$ mit $0 \le K \le 99$

Hilfszahlen F

t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)
37	+10	43	-3	67	-2	101	-1	157	+11	167	-5
367	-11	1001	-1								

Ansatz $z = 1000A + R$ mit $0 \le R \le 999$ ... t=37 ... F(37) = 1

Primfaktorzerlegung

Ist $n>1$, so heißt $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ mit Primzahlen $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ und $\alpha_i \in N$ die Primfaktorzerlegung von n. α_i heißt die Vielfachheit von p_i. Die Primzahlen p_i werden Primfaktoren der Zahl genannt.

Ist $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ die Primfaktorzerlegung von n, so gilt für die Anzahl t der Teiler von n:

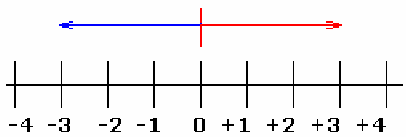
$$t = (\alpha_1 +1)(\alpha_2 +1) \ldots (\alpha_r +1)$$

Die Primfaktorzerlegung einer Zahl wird auch kanonische Darstellung einer Zahl genannt.

Fundamentalsatz der Zahlentheorie

Jede natürliche Zahl n>1 besitzt eine bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutige Primfaktorzerlegung.

Primfaktorzerlegung-Anwendung



Aufgabe:

Ein Onkel und seine Nichte treffen sich auf einer Festlichkeit. Irgendwann kommen sie auf das alte Thema "das Alter". Der Onkel möchte sein Alter nicht direkt verraten und gleichzeitig seine Nichte testen. So erzählt er:

"Ich habe mich gestern mit 3 Personen unterhalten. Wenn man das Alter dieser drei Personen multipliziert, erhält man 2450. Addiert man das Alter der drei Personen, kommt genau das doppelte Deines Alters heraus."

"Nun" sagt die Nichte, "das reicht aber noch nicht, um das Alter der drei Personen herauszubekommen".

Der Onkel stimmt zu. "Eine der drei Personen feierte in diesem Jahr einen ganz besonderen Geburtstag. Ich habe dieses Fest schon fünf Jahre hinter mir."

Wie alt sind Onkel und Nichte?

Lösung: Für das Alter der drei Personen x, y und z gilt

$x \cdot y \cdot z = 2450 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$; Primfaktorenzerlegung

Wir können davon ausgehen, dass die Nichte ihr Alter kennt. Da sie sagt, es reicht noch nicht, ist die Zerlegung der Zahl 2450 in drei Faktoren dergestalt, dass die Summe zwar ihr doppeltes Alter ergibt, aber mehr als eine Zerlegung dieses Ergebnis hat.

Also zerlegt man 2450 in drei Faktoren und bestimmt die Summe:

1	1	2450	2452	2	25	49	76
5	7	70	82	5	10	49	64
7	7	50	64	7	14	25	46

Die anderen Zerlegungen muss man nicht in Betracht ziehen, wenn man bedenkt, dass kaum jemand älter als 120 Jahre wird.

Alle Summen sind eindeutig bis auf die Summe 64.

Das "besondere" Alter, das sich durch Multiplikation der Primfaktoren ergibt, ist $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$. Die drei Personen sind damit 50, 7 und 7 Jahre alt; der Onkel ist $55 = 50+5$; die Nichte ist $32 = (50+7+7)/2$.

Betrag einer rationalen Zahl

Der Betrag (auch absoluter Betrag) ist stets eine positive Zahl

$| a | = a$ für $a \geq 0$

$| a | = - a$ für $a < 0$

In der Skizze haben +3 und -3 den gleichen Abstand vom Nullpunkt und damit den gleichen absoluten Betrag 3. Beide Zahlen heißen zueinander entgegengesetzt.

Entgegengesetzte Zahl

die Zahlen a und -a heißen zueinander entgegengesetzt

Für alle rationalen Zahlen a,b gilt:

"Dreiecksungleichung" $| a | + | b | \leq | \, | a | - | b | \, | \leq | a - b | \leq | a | + | b |$ $| a + b | \leq | a | + | b |$

Wenn $a>0$, dann $a + 1/a \geq 2$

$| a * b | = | a | * | b |$ $| a * b | \leq 1/2 (a^2 + b^2)$ $(a + b)^2 = |a + b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

Für $a < b$ ist $a < (a+b)/2 < b$

$| a |$ ist der Abstand der Zahl a vom Nullpunkt und $| a - b |$ ist der Abstand der Zahl a von der Zahl b

Bernoullische Ungleichung

Für alle reellen x und ganzen Zahlen m gilt $(1 + x)^m > 1 + mx$ für $m \geq 2$ und $x \neq 0$ und $x>-1$

Beweis unter Verwendung vollständiger Induktion

Induktionsanfang $m_0=1 : 1 + x \leq (1+x)^1 = 1+ x$; gilt für $x \geq -1$

Induktionsannahme Die Behauptung gelte für ein $n \in Z$, also $1 + nx \leq (1+x)^n$

Induktionsschluss Zu zeigen ist, dass die Behauptung dann auch für $n + 1$ gilt, also $1 + (n+1)x \leq (1+x)^{n+1}$

Es gilt: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n * (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+ (n+1)x$

Damit ist die Gültigkeit der Bernoullischen Ungleichung bewiesen.

Binomische Ungleichung

für alle reellen Zahlen a und b gilt: $| ab | \leq (a^2 + b^2)/2$

Youngsche Ungleichung

Für alle reellen Zahlen a und b und alle reellen p, q mit $1/p + 1/q = 1$ gilt

$| ab | \leq 1/p \, |a|^p + 1/q \, |b|^q$

Für $p = q = 2$ geht die Youngsche Ungleichung in die binomische Ungleichung über.

Signum-Funktion

Vorzeichenfunktion einer Zahl $\text{sgn } a = 1$ für $a>0$, -1 für $a<0$ bzw. 0 für $a=0$

Beweismethoden

Ein Beweis ist in der Mathematik der formal korrekte Nachweis, dass aus einem Satz von Aussagen eine weitere Aussage folgt.

Ein Beweis ist eine vollständige und folgerichtige Argumentation über die Korrektheit einer Aussage.

In der Mathematik werden vier Beweismethoden betrachtet: direkter Beweis, indirekter Beweis, vollständige Induktion, konstruktiver Beweis.

Behauptung: Eine natürliche Zahl und ihr Nachfolger haben außer 1 keinen gemeinsamen Teiler.

Beweisidee: (indirekt) GA: $a=bx$ und $a+1=by$ und $b \neq 1 \Rightarrow bx+1=by \Rightarrow b=1/(y-x) \Rightarrow b=1$ Widerspruch

Behauptung: Für jedes natürliche n ist auch $n/3 + n^2/2 + n^3/6$ natürliche Zahl.

Beweisidee: $= n/6 (n^2+3n+2) = n/6 (n+1)(n+2) \Rightarrow$ von 3 aufeinanderfolgenden Zahlen ist mindestens eine durch 2 und eine durch 3 teilbar.

Behauptung: Die um zwei verminderte Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender ungerader natürlicher Zahlen ist durch 8 teilbar.
Beweisidee: $(2a-1)^2 + (2a+1)^2 - 2 = 8a^2 \Rightarrow$ 8 teilt die Summe-2
Behauptung: Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist nie Quadratzahl.
Beweisidee: $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) = (n^2+3n+1)^2-1$

Behauptung: Für jede natürliche Zahl n ist der Term (n^3-2n^2-4n+8) durch $(n+2)$ ohne Rest teilbar.
Beweisidee: Partialdivision, Ergebnis $(n-2)^2$

Behauptung: $2x^5 + 3y^5 \geq 5x^2y^3$, wobei x,y positiv rational
Beweisidee: $(2x^5 + 3y^5)/5 \geq \sqrt[5]{x^5x^5y^5y^5y^5} = x^2y^3$ (Satz von Cauchy)

Q.E.D.

... Abkürzung für quod erat demonstrandum, was zu beweisen war.
Erstmals wurde in den "Elementen" des Euklid jeder Beweis mit dem Schlusssatz beendet. Bei Euklid lautet dieser griechisch οπερ εδει δειξαι (hoper edei deiksai).
In einer Euklid-Übersetzung von 1505 verwendet Bartholemew Zamberti erstmals die lateinische Form. Galilei nutzte in den "Dialogen" wahlweise quod erat intentum, quod erat demonstrandum, quod erat probandum, quod erat ostendendum, quod erat faciendum, quod erat determinandum und quod erat propositum. Seit Newton hat sich die Abkürzung q.e.d. durchgesetzt. Im deutschprachigen Raum wird of w.z.b.w. („was zu beweisen war") verwendet.

Direkter Beweis

Beim direkten Beweis beweist man die Behauptung durch Anwenden von bewiesenen Aussagen, Definitionen und durch logische Folgerungen.

Beispiel 1

Behauptung: Das Quadrat jeder geraden natürlichen Zahl n ist gerade.
Beweis: n sei eine gerade natürliche Zahl. Somit lässt sich n eindeutig als $n = 2k$ darstellen (k ist eine natürliche Zahl). Darauf folgert man $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$
n^2 ist daher das Doppelte einer natürlichen Zahl und damit gerade.

Beispiel 2

Behauptung: Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl n ist ungerade.
Beweis: n sei eine ungerade Zahl. Somit lässt sich n eindeutig als $n = 2k+1$ darstellen (k ist eine natürliche Zahl oder 0). Daraus folgert man $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ $\rightarrow$ n^2 ist ungerade.

Beispiel 3

Behauptung: Für jede natürliche Zahl m der Form $m = 2n+1$, $m \in N$, gilt $(m^2) \bmod 8 = 1$
Beweis: Es gilt $m = 2n+1$. Folglich gilt: $m^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1$
Fallunterscheidung:
1) Sei n gerade, dann gilt $4n \bmod 8 = 0$ und damit $4n(n+1) \bmod 8 = 0$. Folglich gilt: $m^2 \bmod 8 = (4n(n+1)+1) \bmod 8 = 1$
2) Sei n ungerade, dann gilt $4(n+1) \bmod 8 = 0$ und damit $4n(n+1) \bmod 8 = 0$. Folglich gilt: $m^2 \bmod 8 = (4n(n+1)+1) \bmod 8 = 1$

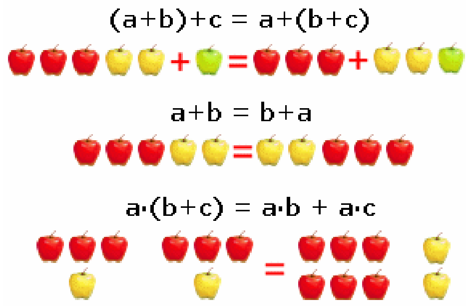
Indirekter Beweis

In einem indirekten Beweis geht man von der Negation $\neg A$ des zu beweisenden Satzes A aus und folgert daraus einen Widerspruch C und $\neg C$. Daraus kann man auf A schließen. Beim indirekten Beweis nimmt man also an, dass das Gegenteil der Behauptung wahr ist. Danach führt man diese Annahme mit den gleichen Folgerungen und Methoden wie beim direkten Beweis zu einem Widerspruch und damit ist die Behauptung bewiesen.

Standardbeispiel

Man beweise den Satz: Es gibt keine rationale Zahl x, für die $x^2=2$ gilt.

Beweis: Wenn der Satz nicht gilt, muss es eine rationale Zahl z mit $z^2=2$ geben. Man kann z sogar als positiv ansehen.
Jede positive rationale Zahl lässt sich durch einen gekürzten Bruch darstellen: $z = p/q$. Da sich der Bruch nicht mehr kürzen lässt, haben p und q keinen gemeinsamen Teiler. Aus $z^2=2$ folgt $p^2/q^2 = 2$ und somit nach Umformung $p^2 = 2 q^2$.
Nun überlegt man sich, wie oft der Primfaktor 2 in die Zahl p^2 passt und wie oft $2q^2$ auftreten kann:
In p kann der Faktor 2 keinmal oder einmal oder zweimal oder dreimal ... vorkommen. In p^2 muss er dann doppelt so oft wie in p auftreten, also keinmal oder zweimal oder viermal oder sechsmal usw... In q^2 kann entsprechend der Primfaktor 2 keinmal oder 2mal oder 4mal oder 6mal usw. auftreten, in $2q^2$ als einmal oder dreimal oder 5mal oder 7mal usw. In p^2 tritt der Primfaktor 2 also in anderer Anzahl auf als in $2q^2$, obgleich $p^2 = 2q^2$ und beide Zahlen links und rechts vom Gleichheitszeichen gleich sind.
Das ist ein Widerspruch.
Es gibt aber nur zwei Möglichkeiten: Entweder der Satz gilt oder er gilt nicht. Die zweite Möglichkeit führt zu einem Widerspruch. Es bleibt nur die erste bestehen. Der Satz ist bewiesen.



Für beliebige reelle Zahlen a, b, c und d gilt:

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

$(a + b) + c = a + (b + c)$ $\qquad$ $(a * b) * c = a * (b * c)$

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

$a + b = b + a$ $\qquad$ $a * b = b * a$

Distributivgesetz (Gesetz der Verteilung)

$a * (b + c) = a * b + a * c$

Klammerauflösung, Ausmultiplizieren

$(a + b) * (c + d) = a * c + a * d + b * c + b * d$

Binomische Formel

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2*a*b + b^2$

$(a + b) * (a - b) = a^2 - b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3*a^2*b + 3*a*b^2 \pm b^3$

Existenz der Einheitselementes

$a + 0 = 0 + a = a$ $\qquad$ $a * 1 = 1 * a = a$

Monotonie

Aus $a > b$ und $c>0$, $d >0 \Rightarrow a+c > b+c \wedge a*c > b*c$

Das Kommutativ- und das Distributivgesetz wurden erstmals von Francois-Joseph Servois (1767-1847), das Assoziativgesetz von William Hamilton (1805-1865) formuliert. Die Bezeichnung distributiv wird vom lateinischen "distributivus" = verteilbar abgeleitet, kommutativ von "commutativus" = vertauschbar.

Vorzeichenregeln

Für das Produkt reeller Zahlen gilt

$(+a)*(+b) = (+ab)$ $\qquad$ $(+a)*(-b) = (-a)*(+b) = (-ab)$ $\qquad$ $(-a)*(-b) = (+ab)$

"plus mal plus = minus mal minus = plus"

"plus mal minus = minus mal plus = minus"

Klammer-Regeln

1. Steht ein Pluszeichen vor der Klammer, so bleibt die Klammer einfach weg. Steht dagegen ein Minuszeichen davor, so sind beim Weglassen der Klammer alle in ihr vorkommenden Vor- und Rechenzeichen umzukehren.
B: $6a - (4a - b) = 6a - 4a + b$
2. Man multipliziert algebraische Summen miteinander, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen multipliziert und diese Produkte zueinander addiert.
$(a + b) * (c + d) = a * (c + d) + b * (c + d) = a * c + a * d + b * c + b * d$
3. Ein Binom wird durch ein Monom dividiert, indem jeder Summand des Binoms durch das Monom geteilt wird.
$(a + b) : c = a : c + b : c$

Ausklammern

In der elementaren Algebra ist es häufig sinnvoll, Summen oder Differenzen in Produkte umzuwandeln. Dies gilt beispielsweise dann, wenn man einen Bruchterm durch Kürzen gemeinsamer Faktoren von Zähler und Nenner vereinfachen will. Eine wichtige Methode in diesem Zusammenhang ist das Ausklammern.
Ausklammern bedeutet, dass man einen gemeinsamen Faktor sucht, der in allen Gliedern der gegebenen Summe oder Differenz enthalten ist, und für diesen Faktor das Distributivgesetz anwendet:
Das Ausklammern ist die Umkehrung des Ausmultiplizierens. Da eine algebraische Summe in ein Produkt verwandelt wird, spricht man auch von Produktzerlegung oder Faktorenzerlegung.

Beispiel 1: $2x^2 + 5x$
Der Faktor x ist in beiden Summanden enthalten und kann daher ausgeklammert werden:

$$2x^2 + 5x = x\,(2x + 5)$$

Die Summanden der Klammer erhält, imdem man die einzelnen Summanden der gegebenen Summe jeweils durch den ausgeklammerten Faktor dividiert.
Durch Ausmultiplizieren lässt sich leicht die Richtigkeit der Umformung überprüfen.

Beispiel 2: $12a^3b^2 + 30a^4bc + 18a^2b^3c^2$
Die Koeffizienten 12, 30 und 18 haben den größten gemeinsamen Teiler 6. Die Variable a tritt in den Potenzen a^3, a^4 und a^2 auf.
Die Potenz mit dem kleinsten Exponenten ist a^2 und wird daher ebenfalls ausgeklammert. Bei den Potenzen von b wählt man die Potenz mit dem kleinsten Exponenten aus. Da c im ersten Summanden nicht auftritt, wird $6a^2b$ ausgeklammert.

$$12a^3b^2 + 30a^4bc + 18a^2b^3c^2 = 6a^2b\,(2ab - 5a^2c + 3b^2c^2)$$

Termumformung-Übung

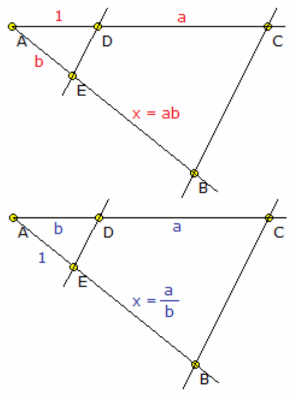
Aufgabe	**Lösung**
$3a + (2b - c) - (2a + 3c - b)$	$= a + 3b - 4c$
$2x + 5y - (y - 3x + 2) + (x - 8)$	$= 6x + 4y - 10$
$3a - 8b + (11a + 4) - (5b - a + 3)$	$= 15a - 13b + 1$
$9 + 3e - 5f - (e + f - 1) + (7 - 4e)$	$= 17 - 2e - 6f$
$2a^2 + 3a - (a + 5) - (1 - 3a^2)$	$= 5a^2 + 2a - 6$
$y^3 - 6y + (2y^2 + 3y - 4) - (y^3 - 5)$	$= 2y^2 - 3y + 1$
$3x^2 + y^2 - (x^2 - xy - y^2) + (5y^2 - 5xy)$	$= 2x^2 - 4xy + 7y^2$
$3ab + 6 + (a^2 - 2ab - 5) - (4b^2 - a^2 + 1)$	$= 2a^2 + ab - 4b^2$
$2(2a + 3b) + 3(3a - 2b)$	$= 13a$
$6(a - 2b) - 2(a - 5b)$	$= 4a - 2b$
$5(3a + 2b - 2) + 3(10 - a) - 5(b - a)$	$= 17a + 5b + 20$
$(-4)\cdot(2b - c + 3a) - 3(a + 3b - 2c)$	$= -15a - 17b + 10c$
$3a(a + 4b) + 2b(6b - 5a)$	$= 3a^2 + 2ab + 12b^2$
$4m(3n + 5) - 7n(m + 8)$	$= 5mn + 20m - 56n$
$2e(e^2 - 2ef) + f^2(5e - 2) - 6f(-e^2 + 3ef)$	$= 2e^3 + 2e^2f - 13ef^2 - 2f^2$
$(-5u)(2u^2 - uv + 3v^2) + 4v(-u^2 + 3uv - 7v^2)$	$= -10u^3 + u^2v - 3uv^2 - 28v^3$
$x^2(x - 2) + x(2x + 1)$	$= x^3 + x$
$2x^2(x^2 + 2x - 1) - 3x(x^2 - x + 2)$	$= 2x^4 + x^3 + x^2 - 6x$
$4y(y^2 - 2) + 3y^2(2y + 1) - 5(3 - y^2)$	$= 10y^3 + 8y^2 - 8y - 15$
$3(z^2 - 4 + 2z) + 5z(2z - 1) - z^2(7 - z)$	$= z^3 + 6z^2 + z - 12$
$(3p + 6)(p - 2)$	$= 3p^2 - 12$
$(-3p + 1)(2 + 4p)$	$= -12p^2 - 2p + 2$
$(5a - 7b)(9a - 2b)$	$= 45a^2 - 73ab + 14b^2$
$(12a + 5b)(3b - 4a)$	$= -48a^2 + 16ab + 15b^2$
$(u^2 + v^2)(2u^2 - v^2)$	$= 2u^4 + u^2v^2 - v^4$
$(3u^2 - 2v)(u - 4v^2)$	$= 3u^3 - 12u^2v^2 - 2uv + 8v^3$
$(g - 5h)(2g + 3h)$	$= 2g^2 - 7gh - 15h^2$
$(2a - 3b)(-3a - b) + (4a - b)(2a + 5b)$	$= 2a^2 + 25ab - 2b^2$

$(2a + 3b)(-3a + b) - (4a - b)(2a + 5b) = -14a^2 - 25ab + 8b^2$
$(10x + 3)(2x - 5) - (8 - 3x)(4x + 9) = 32x^2 - 49x - 87$
$(10x - 3)(2x + 5) + (8 - 3x)(4x - 9) = 8x^2 + 103x - 87$
$(3r^2 - s^2)(2r + 3s) - (2r + 5s)(4r^2 - 2s^2) = -2r^3 - 11r^2s + 2rs^2 + 7s^3$
$(-3r^2 - s^2)(2r - 3s) + (-2r + 5s)(4r^2 - 2s^2) = -14r^3 +29r^2s + 2rs^2 - 7s^3$
$(3z^2 - 5z + 2)(1 - 7z) + (4z - 7)(6z^2 + z) = 3z^3 - 26z + 2$
$(3z^2 + 5z - 2)(1 - 7z) - (4z - 7)(6z^2 - z) = -45z^3 + 14z^2 + 12z - 2$

$(z + 8)^2 = z^2 + 16z + 64$
$(3a + 1)^2 = 9a^2 + 6a + 1$
$(4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9$
$(5b + 3c)^2 = 25b^2 + 30bc + 9c^2$
$(7x + 2y)^2 = 49x^2 + 28xy + 4y^2$
$(10ab - 2a)^2 = 100a^2b^2 - 40a^2b + 4a^2$
$(3a + 5)(3a - 5) = 9a^2 - 25$
$(10x - 3z)(10x + 3z) = 100x^2 - 9z^2$
$(r^2 + 1)(r^2 - 1) = r^4 - 1$
$(7 - x)(7 + x) = 49 - x^2$

$(p + q)^2 + (p - q)^2 = 2p^2 + 2q^2$
$(3p + 2q)^2 - (2p - 3q)^2 = 5p^2 + 24pq - 5q^2$
$(a + 3b)^2 + (3a + b)(3a - b) = 10a^2 + 6ab + 8b^2$
$(5x + z)(5x - z) - (2x - 5z)^2 = 21x^2 + 20xz - 26z^2$
$(2a + 1)^2 - (a - 3)^2 = 3a^2 + 10a - 8$
$(c + 2d)(c - 2d) + (c - d)(2c + d) = 3c^2 - cd - 5d^2$
$(3x + 2)(1 - x) - (x - 4)^2 = -4x^2 + 9x - 14$
$5(y - 2)^2 - 3(y + 2)^2 = 2y^2 - 32y + 8$

Konstruktion eines Produkts



Gegeben seien zwei rationale Zahlen a und b, die durch zwei Strecken der entsprechenden Länge dargestellt sind.
Deren Summe a+b und deren Differenz a-b sind durch einfache Streckenaddition und -subtraktion zu erreichen. Die Konstruktion des Produktes $a \cdot b$ und des Quotienten a/b ist über den Strahlensatz möglich.
In deren oberen Konstruktion wird auf einem Strahl zuerst eine Einheit als Strecke und anschließend a abgetragen. Auf einem zweiten Strahl wird b abgetragen und mit dem Endpunkt der Einheitsstrecke verbunden. Parallelverschiebung durch den Endpunkt von a schneidet den 2.Strahl in einem Punkt. Dieser ist der Endpunkt der gesuchten Strecke der Länge $a \cdot b$.
Nach dem Strahlensatz gilt $1 : a = b : x$, d.h. $x = a \cdot b$

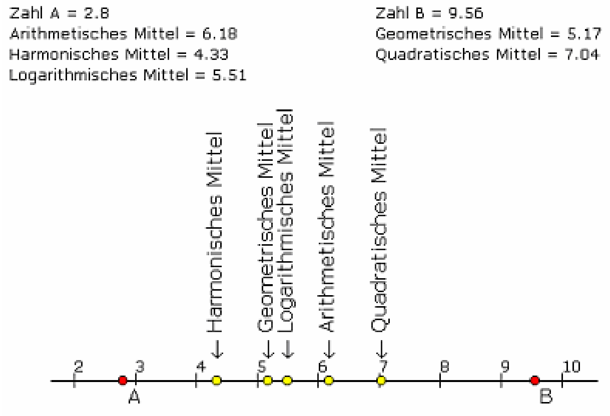
Konstruktion eines Quotienten

Für die Konstruktion einer Strecke der Länge a/b ist die untere Konstruktion zu verwenden. Auf dem 1.Strahl werden a und b angetragen, auf dem zweiten die Einheitsstrecke.
Nach dem Strahlensatz gilt hier $b : a = 1 : x$, d.h. $x = a/b$
Auch bei dieser Konstruktion ist ein Term a/0 unbestimmt. Ist die Strecke b = 0, so ist eine Parallelverschiebung duch den Endpunkt von a nicht möglich.

Mittelwerte

Sind $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ positive rationale Zahlen, so wird definiert:
arithmetisches Mittel AM $= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) / n$
geometrisches Mittel GM $= \sqrt[n]{(a_1 * a_2 * a_3 * \ldots * a_n)}$
harmonisches Mittel HM $= n/ (1/a_1 +1/a_2 +1/a_3 + \ldots + 1/a_n)$
quadratisches Mittel $= \sqrt{[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)/n]}$

Das arithmetische Mittel zweier Zahlen a und b ist die Zahl m, für die gilt: $m - a = b - m$ d.h. m ist von a und b gleichweit entfernt.
Das geometrische Mittel zweier Zahlen a und b ist die Zahl g, für die gilt: $a : g = g : b$. Das harmonische Mittel zweier Zahlen a und b ist die Zahl h, für die gilt: $(h - a) : (b - h) = a : b$, d.h. die Abstände von h zu den Zahlen a und b verhalten sich so wie die ursprünglichen Zahlen.
Das geometrische Mittel zweier Zahlen a und b heißt auch die mittlere Proportionale von a und b.



a, das arithmetische Mittel und b bilden eine arithmetische Folge 1.Ordnung. a, das geometrische Mittel und b ergeben eine geometrische Folge.

Harmonisches Mittel < Geometrisches Mittel < Logarithmisches Mittel < Arithmetisches Mittel < Quadratisches Mittel

Satz vom harmonischen, geometrischen und harmonischen Mittel, Satz von Cauchy

Für alle positiven rationalen Zahlen a, b gilt

$\text{Minimum}(a,b) \le 2/(1/a + 1/b) \le \sqrt{a*b} \le (a+b)/2 \le \sqrt{(a^2+b^2)/2} \le \text{Maximum}(a,b)$

$GM = \sqrt{a*b} = \sqrt{2/(1/a + 1/b) * (a+b)/2} = \sqrt{HM * AM}$

$a-AM=AM-b$; $a/GM = GM/b$; $(a-HM)/(HM-b)=a/b$

logarithmisches Mittel zweier Zahlen = (b - a) / (ln b - ln a)

Es gilt $(a + b) / 2 > (b - a) / (\ln b - \ln a) > \sqrt{ab}$

Arithmetisches Mittel

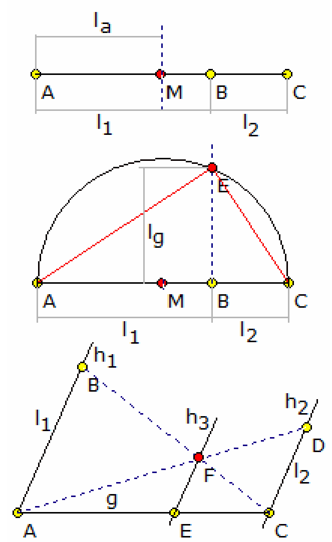
Sind $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ positive rationale Zahlen, so wird definiert:

arithmetisches Mittel $AM = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) / n$

Das arithmetische Mittel wird bei Gleichverteilungen als Erwartungswert genutzt. Der in der Umgangssprache benutzte Begriff "Durchschnitt" ist nicht korrekt.

Es gilt: $AM(a_1+c, a_2+c, \dots, a_n+c) = c + AM(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$AM(a,b) \ge$ Geometrisches Mittel $GM(a,b) \ge$ Harmonisches Mittel $HM(a,b)$



Beweis:

Für a,b > 0 gilt sicher $(1/\sqrt{a} - 1/\sqrt{b})^2 \ge 0$

$1/a - 2/\sqrt{ab} + 1/b \ge 0$ $\qquad 1/a + 1/b \ge 2/\sqrt{ab}$

$\sqrt{ab} \ge 2 / (1/a + 1/b)$ $\qquad GM \ge HM$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \ge 0$ $\qquad (a+b)/2 \ge \sqrt{ab}$

$AM \ge GM$

Die Gleichheitszeichen gelten für a = b.

Anmerkung: Für das arithmetische Mittel gibt es kein Assoziativgesetz, d.h. $AM(a, AM(b, c)) \ne AM(AM(a, b), c)$.

Mittelwerte, Konstruktion

Aufgabe: Das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel zweier Zahlen l_1 und l_2 ist zu konstruieren.

Arithmetisches Mittel

1. Die Strecken $AB = l_1$ und $BC = l_2$ werden auf einer Geraden abgetragen und der Mittelwert der Strecke AC konstruiert. Die Streckenlänge AM ist das arithmetische Mittel.
arithmetisches Mittel $AM = (l_1 + l_2)/2$

Geometrisches Mittel

Konstruktionsgrundlage: Höhensatz
1. Über der Strecke $l_1 + l_2$ wird der Thaleskreis gezeichnet.
2. Im Punkt B der Strecke $AB = l_1$ wird eine Senkrechte errichtet, die den Kreis in E schneidet.
3. Die Streckenlänge BE ist dann das geometrische Mittel.

geometrisches Mittel GM = $\sqrt{(l_1 \cdot l_2)}$

Harmonisches Mittel
Konstruktionsgrundlage: Strahlensatz
1. an zwei Punkten A und C einer Geraden werden die Strecken l_1 und l_2 so abgetragen, dass h_1 und h_2 parallel sind
2. die Geraden BC und AD schneiden sich im Punkt F
3. durch F wird eine Parallele zu den Strecken l_1 und l_2 gezogen. Diese Parallele schneidet die Ausgangsgerade in E.
4. Die Streckenlänge EF entspricht dann dem halben harmonischen Mittel
harmonisches Mittel HM = $2 / (1/l_1 + 1/l_2)$

Harmonisches Mittel (2)
Das harmonische Mittel HM = $n / (1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \ldots + 1/a_n)$ vereinfacht sich bei zwei Werten zu

$$HM = 2 / (1/a_1 + 1/a_2)$$

In der harmonischen Reihe $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$
ist ab dem zweiten Summanden jeder Summand das harmonische Mittel seiner benachbarten Summanden:

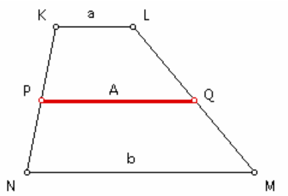
$$2/(1/n + 1/(n+2)) = 2 / (n + n + 2) = 1/(n+1)$$

Damit ist der Name "harmonische Reihe" gerechtfertigt.

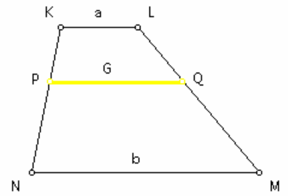
Der Name harmonisches Mittel leitet sich aus der Musiktheorie ab.
Die guten Konsonanzeigenschaften der von Didymus (um 63 v.u.Z.) gefundenen diatonischen oder reinen Tonskala wurden von dem italienischen Musiktheoretiker Gioseffo Zarlino (1517-1590) 1558 damit begründet, dass man fast alle Frequenzverhältnisse, die vom Grundton aus zu als konsonant akzeptierten Intervallen gehörten, mit einem Zahlenpaar aus {1, 2, 3, 4, 5, 6} beschreiben kann. Zum Beispiel ist die 3 das harmonische Mittel von 2 und 6 oder die 4 das harmonische Mittel von 3 und 6. Die diatonische Tonskala wird auch harmonische Tonskala genannt.

Der Begriff harmonische Teilung bezieht sich ebenfalls auf die Musik. Drei gleichartige und gleich stark gespannte Saiten, deren Längen einer harmonischen Teilung unterliegen, ergeben gerade einen harmonischen Wohlklang.
Bei der harmonischen Teilung von 5:1 verhalten sich die Saitenlängen wie 10:12:15 und die Schwingungszahlen wie 1/10:1/12:1/15 = 6:5:4.

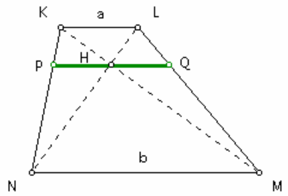
Mittelwerte am Trapez
1992 gab Howard Eves in "An Introduction to the History of Mathematics" (Saunders College Publishing) eine Möglichkeit an, alle bekannten Mittelwerte auch an einem Trapez einzuführen.



arithmetisches Mittel
arithmetisches Mittel A = (a + b)/2
Sind die Seitenlängen der paralellen Seiten des Trapezes a und b, so ergibt sich für das arithmetische Mittel die Mittellinie des Trapezes, d.h. die Strecke zwischen den Mittelpunkten der Seiten NK und LM

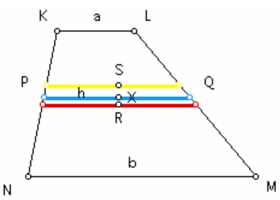


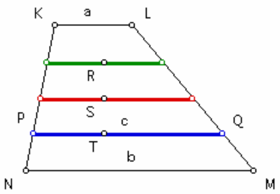
geometrisches Mittel
geometrisches Mittel G = $\sqrt{(a \cdot b)}$
Im Trapez mit den Grundseiten a und b ergibt sich das geometrische Mittel als die Strecke, die das Ausgangstrapez in zwei ähnliche Teiltrapeze teilt.



harmonisches Mittel
harmonisches Mittel H = 2 / (1/a + 1/b) = 2ab / (a+b)
Das harmonische Mittel H ergibt sich als Strecke parallel zu den Grundseiten durch den Schnittpunkt der Trapezdiagonalen NL und KM.

Heronisches Mittel





Das Heronische Mittel h von zwei reellen Zahlen ist der Wert

$$h = (a + \sqrt{(ab)} + b)/ 3.$$

In einem Trapez ist die Strecke h gleich der Parallelen zu den Grundseiten a und b, deren Abstand zur Mittellinie 1/3 des Abstandes zur Parallelen des geometrischen Mittels ist.

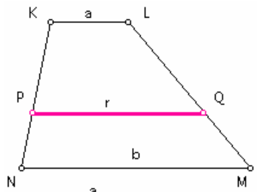
Kontraharmonisches Mittel

Das kontraharmonisches Mittel c zweier reelle Zahlen a und b wird berechnet mit

$$c = (a^2 + b^2)/(a + b).$$

Auch das kontraharmonische Mittel findet man in einem Trapez. Es ist die Parallele zu a, für die die Mittellinie des Trapezes das arithmetische Mittel von harmonischem und kontraharmonischem Mittel ist, d.h. Symmetrieachse.

Quadratisches Mittel

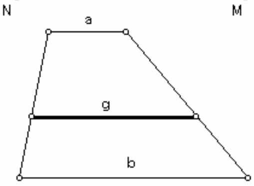


Das quadratische Mittel q zweier reeller Zahlen a und b ergibt sich durch

$$q = \sqrt{((a^2 + b^2) /2)}$$

Dieses quadratische Mittel tritt als Länge der Strecke auf, die parallel zur Grundseite a ist, und die Fläche des Trapezes halbiert.

Zentriertes Mittel



Das zentrierte Mittel g von zwei reellen Zahlen a, b ist der Wert

$$g = 2 (a^2 + ab + b^2) / (3a + 3b)$$

Im Trapez findet man das zentrierte Mittel als die Länge der Strecke, die durch den Schwerpunkt des Trapezes verläuft.

Pythagoreische Mittelwerte

Der Pythagoreer Nikomachos von Gerasa unterschied 10 verschiedene Proportionen bzw. Mittelwerte zweier Zahlen bzw. zweier Strecken. Die wichtigsten waren

das arithmetische Mittel $A = (a + b)/2$
das geometrische Mittel $G = \sqrt{(a \cdot b)}$
das harmonische Mittel $H = 2ab / (a+b)$

Der Zusammenhang der 3 Mittelwerte $G^2 = A \cdot H$ war bekannt. Die Kennzahlen {6, 8, 9, 12} eines Würfels spielten dabei eine besondere Rolle.
Die Eckenzahl 8 und die 9 bilden das arithmetische und harmonische Mittel der Flächenzahl 6 und der Kantenzahl 12.
Außerdem erfüllen sie Proportionen der pythagoreischen Harmonielehre:

$8 / 6 = 12 / 9 = 4 / 3$ = Quarte
$9 / 6 = 12 / 8 = 3 / 2$ = Quinte
$12 / 6 = 2 / 1$ = Oktave

Aus diesem Grund wurden Zahlen und Strecken a, b als harmonisch angesehen, wenn sie $a : H = G : b$ erfüllen.
Iamblichos schrieb später einen Kommentar zu Nikomachos Werk und erweiterte die Mittelwerte um das musikalische Mittel zweier Zahlen a, b. Im musikalischen Mittel befinden sich diese, wenn $a : A = G : b$ gilt.

Tschebyschowsche Ungleichung

Sind $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ positive reelle Zahlen, so gilt für $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ und $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ oder $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$ und $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) / n * (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) / n \le (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) / n$$

sowie für $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ und $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) / n * (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) / n \ge (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) / n$$

Verallgemeinerung: Sind $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ positive reelle Zahlen, so gilt für $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ und $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ oder $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$ und $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$:

$$\sqrt[k]{[(a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k) / n]} * \sqrt[k]{[(b_1^k + b_2^k + \ldots + b_n^k) / n]} \le \sqrt[k]{[((a_1b_1)^k + (a_2b_2)^k + \ldots + (a_nb_n)^k) / n]}$$

sowie für $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ und $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$:

$$\sqrt[k]{[(a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k) / n]} * \sqrt[k]{[(b_1^k + b_2^k + ... + b_n^k) / n]} \geq \sqrt[k]{[((a_1b_1)^k + (a_2b_2)^k + ... + (a_nb_n)^k) / n]}$$

Hölder-Mittel

Das Hölder-Mittel oder der Höldersche Mittelwert (nach Otto Hölder, 1859-1937) ist ein verallgemeinerter Mittelwert. Der Mittelwert wird auch k-tes Mittel, Mittel der Ordnung k genannt.

Das Hölder-Mittel verallgemeinert die Mittelwerte wie das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel durch Einführung eines Parameters p.

Unter dem Hölder-Mittel zur Stufe $p > 0$ der Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ versteht man

$$M_p(x_1, ..., x_n) = (1/n \Sigma_{i=1}^n x_i^p)^{1/p} = \sqrt[p]{((x_1^p + ... + x_b^p) / n)}$$

Für $p = 0$ wird gesetzt $M_0(x_1, ..., x_n) = \lim_{a\to 0} M_a(x_1, ..., x_n)$.

Mittels Wahl eines geeigneten Parameters p ergeben sich die bekannten Mittelwerte

Minimum	$\lim_{p\to -\infty} M_p(x_1, ..., x_n) = \min \{x_1, ..., x_n\}$
harmonisches Mittel	$M_{-1}(x_1, ..., x_n) = n / (1/x_1 + ... + 1/x_n)$
geometrisches Mittel	$M_0(x_1, ..., x_n) = \sqrt[n]{(x_1 ... x_n)}$
arithmetisches Mittel	$M_1(x_1, ..., x_n) = (x_1 + ... + x_n) / n$
quadratisches Mittel	$M_2(x_1, ..., x_n) = \sqrt{((x_1^2 + ... + x_n^2) / n)}$
Maximum	$\lim_{p\to \infty} M_p(x_1, ..., x_n) = \max \{x_1, ..., x_n\}$

Hölder-Ungleichung

Wenn $p > 1$, $q > 1$ und $1/p+1/q = 1$, dann gilt $\Sigma_{k=1}^n |a_kb_k| \leq (\Sigma_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p} (\Sigma_{k=1}^n |b_k|^q)^{1/q}$

und $\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq (\int_a^b |f(x)|^p\, dx)^{1/p} (\int_a^b |g(x)|^q\, dx)^{1/q}$

Stolarsky-Mittel

Der Stolarskysche Mittelwert, kurz das Stolarsky-Mittel, ist ein von Kenneth B. Stolarsky eingeführter Mittelwert, der das logarithmische Mittel verallgemeinert. Für zwei Zahlen x,y und einem Parameter p ist das Stolarsky-Mittel definiert als

$$S_p(x,y) = ((x^p - y^p) / ((x-y)\, p))^{1/(p-1)}$$

Für Werte von p, für die teilweise eine Definitionslücke vorliegt, wird der Grenzwert gegen p betrachtet.

Das Stolarsky-Mittel hat folgende Spezialfälle:

Minimum (Grenzwert)	$S_{-\infty}(x,y) = \min x, y$
geometrisches Mittel	$S_{-1}(x,y) = \sqrt{(xy)}$
logarithmisches Mittel (Grenzwert)	$S_0(x,y) = (x-y) / (\log x - \log y)$
Hölder-Mittel mit 1/2	$S_{1/2}(x,y) = ((\sqrt{x} + \sqrt{y}) / 2)^2$
identric mean (Grenzwert)	$S_1(x,y) = 1/e\, (y^y / x^x)^{1/(y-x)}$
arithmetisches Mittel	$S_2(x,y) = (x+y) / 2$
Maximum (Grenzwert)	$S_\infty(x,y) = \max \{x, y\}$

Der Mittelwert identric mean (nicht identic mean) wurde 1988 von Bullen bei der Lösung verschiedener Ungleichungen eingeführt.

Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung, Cauchy-Schwarz-Ungleichung

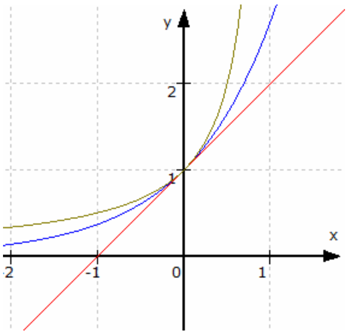
Für reelle x_k, y_k gilt $(\Sigma_{k=1}^n x_k y_k)^2 \leq \Sigma_{k=1}^n x_k^2 \cdot \Sigma_{k=1}^n y_k^2$

Diese Ungleichung wurde von Bunjakowski 25 Jahre vor Cauchy und Schwarz entdeckt und wird deshalb in einigen Fachbüchern als Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung bezeichnet.

Minkowskische Ungleichung

Für reelle x_k, y_k gilt $\sqrt{(\Sigma_{k=1}^n (x_k + y_k)^2)} \leq \sqrt{(\Sigma_{k=1}^n x_k^2)} + \sqrt{(\Sigma_{k=1}^n y_k^2)}$

und allgemein $(\Sigma_{k=1}^n (x_k + y_k)^p)^{1/p} \leq (\Sigma_{k=1}^n x_k^p)^{1/p} + (\Sigma_{k=1}^n y_k^p)^{1/p}$



Ungleichungen für e-Funktion und Logarithmus

$1 + x \leq e^x \leq 1 / (1-x)$; für $x < 1$

$x / (1+x) \leq \ln(1+x) \leq x$; für $x > -1$

Das bedeutet, dass die Exponentialfunktion für Argumente $x < 1$ von den zwei Funktionen

$y = 1+x$ und $y = 1/(1-x)$

$y = e^x$

eingeschlossen wird.

Jensensche Ungleichung

Die Jensensche Ungleichung ist eine elementare Ungleichung für konvexe und konkave Funktionen. Sie ist wegen ihrer Allgemeinheit Grundlage vieler bedeutender Ungleichungen, vor allem in der Analysis und Informationstheorie.
Die Ungleichung ist nach dem dänischen Mathematiker Johann Ludwig Jensen benannt, der sie am 17.Januar 1905 bei einer Konferenz der Dänischen Mathematischen Gesellschaft präsentierte.
Die Jensensche Ungleichung besagt, dass der Funktionswert einer konvexen Funktion an einer endlichen Konvexkombination von Stützstellen stets kleiner oder gleich einer endlichen Konvexkombination von den Funktionswerten der Stützstellen ist. Dies bedeutet insbesondere, dass das gewichtete arithmetische Mittel der Funktionswerte an n Stellen größer oder gleich dem Funktionswert am Mittel dieser n Stellen ist.

Satz: Für eine konvexe Funktion f(x) und für positive λ_i mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ gilt

$f(\Sigma_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \Sigma_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$

Da für konkave Funktionen f(x) die Funktion -f(x) konvex ist, gilt für konkave Funktionen die Jensensche Ungleichung in umgekehrter Richtung, d.h. für jede konkave Funktion f(x) und für positive λ_i mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ gilt

$f(\Sigma_{i=1}^n \lambda_i x_i) \geq \Sigma_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$

Die stetige Variante der Jensenschen Ungleichung für im Inervall [a,b] konvexe Funktion f(x) ist

$f(1/(b-a) \int_a^b y(x)\, dx) \leq 1/(b-a) \int_a^b f(y(x))\, dx$

Die Jensensche Ungleichung ist auch auf Erwartungswerte anwendbar. Ist f(x) konvex und X eine Zufallsvariable, dann gilt

$F(E(X)) \leq E(f(X))$

Mit der Jensenschen Ungleichung gelingt es auch, die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel zu beweisen.

Muirhead-Ungleichung

Die Muirhead-Ungleichung ist eine Verallgemeinerung der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel.
Für einen gegebenen reellen Vektor $a = (a_1, \ldots, a_n)$
wird der Ausdruck $[a] = 1/n!\ \Sigma_\sigma\ x_{\sigma 1}{}^a 1 \cdot \ldots \cdot x_{\sigma n}{}^a n$
wobei über alle Permutationen σ von {1, …, n} summiert wird, als a-Mittel [a] der nichtnegativen reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnet.
Für den Fall a = (1, 0, …, 0), ergibt das genau das arithmetische Mittel der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$; für den Fall a = (1/n, …, 1/n) ergibt sich genau das geometrische Mittel.
Eine $n \times n$ Matrix P wird doppelt stochastisch genannt, wenn sie aus nichtnegativen Zahlen besteht und sowohl die Summe jeder Zeile als auch die Summe jeder Spalte gleich eins sind.

Muirhead-Ungleichung

Die Muirhead-Ungleichung besagt, dass $[a] \leq [b]$ für alle $x_i \geq 0$ genau dann ist, wenn eine doppelt stochastische Matrix P existiert, für die a = Pb gilt.
Quelle: Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood, G. Polya: Inequalities, Cambridge University Press, 1952

Umordnungs-Ungleichung

Satz: Gegeben seien zwei n-Tupel reeller Zahlen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ mit $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ und $y_1 \leq \ldots \leq y_n$.
Das Tupel $x_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$

sei eine Permutation des Tupels x. Fasst man nun die n-Tupel als Vektoren auf und betrachtet deren Skalarprodukt, so besagt die Umordnungs-Ungleichung, dass $x_1y_1 + \dots + x_ny_n \geq x_{\sigma(1)}y_1 + \dots + x_{\sigma(n)}y_n \geq x_ny_1 + \dots + x_1y_n$

Das Skalarprodukt ist also maximal, wenn die Elemente der n-Tupel gleich geordnet sind, und minimal, wenn sie entgegengesetzt geordnet sind. Es sind keine Voraussetzungen für die Vorzeichen von x_i und y_i notwendig.

Nachweis

Die Beweisidee besteht darin, das kleinste i, das $\sigma(i) \neq i$ erfüllt und jenes j mit $i = \sigma(j)$ zu betrachten.

Dann sind $\sigma(i) > i$ und $j > i$ und somit $x_{\sigma(j)} \leq x_{\sigma(i)}$ und $y_i \leq y_j$, d.h. $(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})\ (y_i - y_j) \leq 0$

und daher $x_{\sigma(i)}\ y_i + x_{\sigma(j)}\ y_j \leq x_{\sigma(j)}\ y_i + x_{\sigma(i)}\ y_j = x_i\ y_i\ x_{\sigma(i)}\ y_j$

Solange ein i mit $\sigma(i) \neq i$ existiert, lässt sich die Summe für gleich geordnete Tupel vergrößern.

Analog zeigt man, dass sich die Summe für entgegengesetzt geordnete Tupel verkleinern lässt, solange ein i mit $\sigma(i) \neq i$ existiert.

Viele bekannte Ungleichungen lassen sich aus der Umordnungs-Ungleichung beweisen, beispielsweise die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel, die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die Tschebyschow-Summenungleichung.

Ordnung der reellen Zahlen, Größerrelation

a,b reelle Zahlen: a heißt größer b (a>b), wenn es eine positive reelle Zahl c gibt, mit a = b + c. Die Menge der rationalen bzw. reellen Zahlen ist linear geordnet.

Die Menge der reellen Zahlen lässt sich als Zahlengerade darstellen. Jede reelle Zahl wird durch einen Punkt auf der Zahlengeraden repräsentiert.

Der Nullpunkt, teilt die Zahlengerade in positive und negative reelle Zahlen ein. Positive Zahlen liegen rechts, negative links vom Nullpunkt, Schreibweise: $x > 0$, wenn x positiv und $x < 0$, wenn x negativ. Die Null ist weder positiv noch negativ.

Arithmetisch-harmonisches Mittel

Für zwei reelle Startwerte a_0 und b_0 wird gebildet:

$$a_{n+1} = (a_n + b_n) / 2$$
$$b_{n+1} = 2\ a_n\ b_n / (a_n + b_n)$$

Dann wird das arithmetisch-harmonische Mittel zu $A(a_0, b_0) = \lim a_n = \lim b_n = \sqrt{a_0 b_0}$

also dem geometrischen Mittel von a_0 und b_0.

Bruchrechnung

Bruch-Definition

Eine gebrochene Zahl ist die Klasse aller Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen. Der Kürzungs- bzw. Erweiterungsfaktor ist eine natürliche Zahl.
Für 2 Brüche einer Klasse gilt: a * d = b * c (wobei a, b, c, d $\in$ N)
Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der gebrochenen Zahlen.
Uneingeschränkt ausführbare Rechenoperationen sind: Addition, Multiplikation und Division (ausgenommen ist die Division durch 0).

Bruchrechnung , Gebrochene Zahlen

$\frac{a}{b}$ heißt Bruch; a ... Zähler, b ... Nenner

Reziprokes $\frac{b}{a}$ heißt Kehrwert (Reziprokes) von $\frac{a}{b}$ **Erweitern** $\frac{a}{b} = \frac{a * c}{b * c}$ mit c≠0

Schreibweise: Zur Erleichterung der Schreibweise von Brüchen wird sehr oft der waagerechte Strich durch einen Schrägstrich ersetzt, z.B. a/b.

Kürzen

... Umkehrung des Erweiterns. Zähler und Nenner werden durch denselben mathematischen Ausdruck dividiert.

Echter Bruch Ein Bruch heißt echter Bruch, wenn | a/b | < 1 ist, andernfalls unechter Bruch.
Gleichnamige Brüche Brüche mit gleichen Nennern heißen gleichnamig, andernfalls ungleichnamig.
Hauptnenner Der Hauptnenner zweier Brüche ist das kgV der beiden einzelnen Nenner

Rechnen mit Brüchen

Addition und Subtraktion

Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie durch Erweitern und/oder Kürzen auf einen gemeinsamen Nenner (Hauptnenner) bringt, die neuen Zähler addiert bzw. subtrahiert und den Nenner beibehält.
Beispiel: 2/6 + 7/4 = ? Der Hauptnenner beider Brüche ist 12, das bedeutet 2/6 + 7/4 = 4/12 + 21/12 = 25/12.

Multiplikation

Brüche werden multipliziert, indem jeweils Zähler und Nenner miteinander multipliziert werden.
Regel: "Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner"

Division

Brüche werden durcheinander dividiert, indem mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert wird.

Doppelbruch

Zähler und Nenner von Brüchen können selbst Brüche sein, zum Beispiel 3 / (7/5); (1/3) / 9; (2/5) / (3/8).
Wegen der umständlichen Schreibung führt man solche Doppelbrüche auf einfache zurück, indem man den Hauptbruchstrich durch das Divisionszeichen ersetzt. Es ist wichtig, dass man den Hauptbruchstrich hervorhebt, indem man ihn etwas länger macht und bei Rechnungen in Höhe von Gleichheits- und Rechenzeichen setzt.
Doppelbrüche können als Division zweier Brüche aufgefasst werden. Doppelbrüche werden aufgelöst, indem man das Produkt der Außenglieder (a und d) durch das Produkt der Innenglieder (b und c) dividiert.

(a / b) / (c / d) = (ad) / (bc)

Merkregel: Durch Differenzen und durch Summen kürzen nur die Dummen.

(a + c) / (b + c) ≠ a / b

Dezimalbruch
Darstellung eines Bruches in der Form $n, a_1 a_2 a_3 \ldots a_m \ldots$
sind ab einem m alle weiteren Dezimalstellen 0, so heißt der Bruch endlich oder abbrechend.

Sprechweise
Die Nachkommastellen von Dezimalbrüchen sollen ziffernweise gesprochen werden, d.h. zum Beispiel für

3,75

"drei Komma sieben fünf" und nicht "drei Komma fünfundsiebzig", wie die Scherzfrage deutlich macht:
"Welche Zahl ist größer, drei-Komma-elf oder drei-Komma-neun?"

Periodische Dezimalbrüche
Ist p/q ein gekürzter Bruch, und enthält q auch von 2 und 5 verschiedene Primzahlen, so ist der zugehörige Dezimalbruch periodisch, und seine Periode hat höchstens q-1 Ziffern.
Sofortperiodische Dezimalbrüche ... Ziffernfolge bricht nicht ab, wiederholt sich aber ständig
Beispiel: 1/11 = 0,090909090909...
Nichtsofortperiodische Dezimalbrüche ... unregelmäßige Ziffernfolge, gefolgt von sich wiederholender Sequenz von Ziffern
Beispiel: 19/15 = 1,2666666666...
Alle rationalen Zahlen sind als abbrechende, sofortperiodische oder nichtsofortperiodische Dezimalbrüche darstellbar.

Midy's Theorem
Ist a/p ein vollständig gekürzter Bruch, p eine Primzahl und hat die Periode eine geradzahlige Länge, so kann die Periode in zwei Hälften zerlegt werden, deren Ziffernaddition eine Folge von '9' ergibt.
Zum Beispiel ist 1/7 = 0,142857142857… mit der Periode 142857. Halbierung ergibt 142 und 857 und die Addition 999.

Umrechnung periodischer Dezimalbrüche
1. Sofortperiodischer Dezimalbruch der Periodenlänge m mit der Periode $a_1a_2...a_m$
$0,a_1a_2...a_m = [a_1a_2...a_m] / [9999....9999]$; m mal eine 9
2. Nichtsofortperiodischer Dezimalbruch der Periodenlänge m mit der Periode $a_1a_2...a_m$ und der Vorperiode $b_1b_2...b_n$
$0,b_1b_2...b_na_1a_2...a_m =$
$= [b_1b_2...b_na_1a_2...a_m - b_1b_2...b_n] / [9999....99990000....0000]$; m mal eine 9, n mal die 0

```
 24:7 = 3,428571...
-21
  30
 -28
   20
  -14
    60
   -56
     40
    -35
      50
     -49
       10
      - 7
        30
```

Bestimmung der Periode
Die Periode eines Bruchs wird durch schriftliche Division bestimmt.
Erscheint während des Algorithmus ein Rest auf, der schon einmal auftrat, so kann man die Division beenden. Die Dezimalziffern, die zwischen den gleichen Resten berechnet wurden, bilden dann die Periode des Bruchs.
Im Beispiel hätte 24/7 eine Periode 428571 der Länge 6.
Anmerkung: Zur Kontrolle der Rechnung prüft man, ob die gefundene Periodenlänge ein Teiler des Zählers-1 ist. Ist dies nicht der Fall, war die rechnung fehlerhaft.

Neunerperiode


Im Dezimalsystem sind für periodische Brüche alle Perioden, bis auf die Neunerperiode, möglich. Es gilt:

0,9999999… = 1

Nachweis: 1/3 = 0,3333… |·3
3/3 = 0,9999…
1 = 0,9999…
bzw. x = 0,9999… |·10
10x = 9,9999…
Subtraktion beider Gleichungen ergibt 9x = 9, d.h. x = 1
Ebenso wird $0,9999\ldots = \lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n} 9/10^k = \lim_{n\to\infty} (1 - 1/10^n) = 1 - \lim_{n\to\infty} (1/10^n) = 1$

Allgemein gilt, dass in einem Positionssystem zu einer Basis b der g-adische Bruch 0,[b-1][b-1][b-1][b-1]… gleich 1 ist.

Darstellung von Dezimalzahlen

Es ist üblich, Dezimalzahlen in der Form

$$a_0 , a_1 a_2 a_3 \ldots a_m \ldots * 10^n$$

anzugeben, wobei a_0 eine Ziffer von 1 bis 9 darstellt.
Dies wird erreicht, indem das Komma so lange nach links bzw. rechts verschoben wird, bis genau eine Ziffer von 1 bis 9 auf der linken Seite vom Komma steht.
Die Anzahl der Verschiebungen stellt die Zahl n der abgetrennten Zehnerpotenzen dar. Die Ziffern rechts vom Komma sind sogenannte Dezimalziffern. Ist die Zahl z < 1 erfolgt die Verschiebung nach rechts und n wird negativ.
Im englischsprachigen Raum wird das Dezimalkomma durch einen Dezimalpunkt ersetzt. Diese Schreibweise verbreitet sich durch den Einsatz von Computern sehr stark und wird auch in diesem Text genutzt.

Achtung !

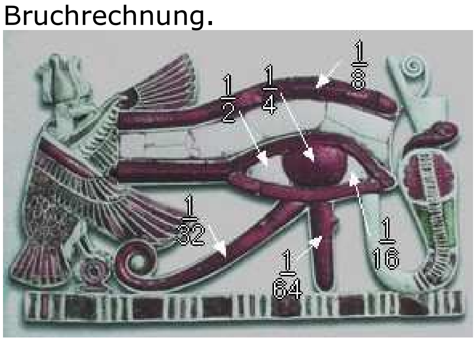
Bei verschiedenen Taschenrechnern und in Computerprogrammen wird für $x * 10^n$ die Schreibweise x E n genutzt;

z.B. -4.67E+0013 für $-4{,}67*10^{13}$.

Ist in einem Computerprogramm die Potenzschreibweise 10^n gestattet, so ist sehr oft das "Hochstellen" des Exponenten durch das "Potenzzeichen" ^ (Computersprache !) zu kennzeichnen, d.h. zum Beispiel 3.45*10^5 für die Zahl $3{,}45*10^5$.

Auge des Horus

Schon auf altägyptischen Papyri der 6.Dynastie (um 2200 v.u.Z.) finden sich besondere Zeichen für Stammbrüche, wie 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 und 1/64 und somit die Anfänge der Bruchrechnung.



Im Papyrus Rhind wurden diese Zeichen noch als Zeichen für Getreidehohlmaße verwendet.
Berühmt ist das Horus-Auge, auch Udschat-Auge = heiles Auge, das zum Beispiel auf einer Kette des Pharaos Tutenchamun gefunden wurde. Dieses Auge war neben dem Skarabäus das wichtigste Amulett.

In diesem Auge sind die Stammbruchzeichen für 1/2 bis 1/64 vereinigt.
Die etwas blutrünstige, mythologische Legende erzählt, dass Horus, der Sohn des Osiris und der Isis, mit seinem Onkel Seth um die Herrschaft in Ägypten kämpfte. Seth riss in Gestalt eines schwarzen Schweins seinem Neffen Horus das Auge aus und zerstückelte es in sechs Teile.
Thot, der Gott der Weisheit, der auch die Zahlen und die Mathematik erfunden hatte, setzte aus den gefundenen Bruchteilen das Auge wie abgebildet zusammen.
Die Summe der Einzelteile ergibt 63/64. Das fehlende 1/64 fügte auch Thot auf magische Weise hinzu und ergänzte es damit zu einem "heilen Auge".
In der Abbildung wird das Horus-Auge links von der Geiergöttin Nechbet von Elkab, der Göttin Oberägyptens, und rechts von der Schlangengöttin Uto mit der unterägyptischen Krone flankiert.

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \ldots \frac{1}{b_n}}}}$$

Kettenbruch

Seien $b_0, b_1, b_2, \ldots , b_n$ ganze Zahlen mit $b_k>0$ für $k>0$. Unter dem Kettenbruch n-ter Ordnung

$$[b_0;b_1;b_2;\ldots;b_n]$$

mit den Teilnennern $b_1, b_2, \ldots, b_n$ und dem Anfangsglied b_0 versteht man … (siehe Abbildung)

Sätze

Jede rationale Zahl lässt sich durch einen Kettenbruch darstellen.
Jede reelle Zahl lässt sich durch einen Kettenbruch approximieren. Quadratische Irrationalzahlen haben periodische Kettenbrüche.
Jede Quadratwurzel ist in einen unendlichen, periodischen Kettenbruch entwickelbar.

Kettenbruchkonstruktion

Ist a_0/a_1 = (siehe Abbildung)
ein Kettenbruch, so können die b_i mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus konstruiert werden:

$a_0 / a_1 = b_0 + a_2/a_1$ mit $0 < a_2/a_1 < 1$
$a_1 / a_2 = b_1 + a_3/a_2$ mit $0 < a_3/a_2 < 1$ ...
$a_{n-2} / a_{n-1} = b_{n-2} + a_n / a_{n-1}$ mit $0 < a_n/a_{n-1} < 1$

Dabei müssen die a_k natürliche Zahlen verschieden 0 sein.
Beispiel: 15/94 = 0 + 15/94 → 94/15 = 6 + 4/15 → 15/4 = 3 + 3/4 →
4/3 = 1 + 1/3 → 3/1 = 3 + 0, d.h. 15/94 = [0, 6, 3, 1, 3]

Kettenbrüche der Quadratwurzeln von n

Jede Quadratwurzel ist in einen unendlichen, periodischen Kettenbruch entwickelbar. Die Liste enthält für die ersten Quadratwurzeln natürlicher Zahlen diese Kettenbruchzerlegung.

√n	b_0	Periode	√n	b_0	Periode	√n	b_0	Periode
2	1	2	3	1	1, 2	5	2	4
6	2	2, 4	7	2	1, 1, 1, 4	8	2	1, 4
10	3	6	11	3	3, 6	12	3	2, 6
13	3	1, 1, 1, 6	14	3	1, 2, 1, 6	15	3	1, 6
17	4	8	18	4	4, 8	19	4	2,1, 3, 1, 2, 8
20	4	2, 8	21	4	1, 1, 2, 1, 1, 8	22	4	1, 2, 4, 2, 1, 8
23	4	1, 3, 1, 8	24	4	1, 8	26	5	10
27	5	5, 10	28	5	3, 2, 3, 10	29	5	2, 1, 1, 2, 10

Längere Perioden (Länge l) treten z.B. auf, für

√n	l	b0, Periode
166	22	12; 1, 7, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 3, 2, 12, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 1, 7, 1, 24
151	20	12; 3, 2, 7, 1, 3, 4, 1, 1, 1, 11, 1, 1, 1, 4, 3, 1, 7, 2, 3, 24
139	18	11; 1, 3, 1, 3, 7, 1, 1, 2, 11, 2, 1, 1, 7, 3, 1, 3, 1, 22
163	18	12; 1, 3, 3, 2, 1, 1, 7, 1, 11, 1, 7, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 24
157	17	12; 1, 1, 7, 1, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 5, 1, 7, 1, 1, 24
94	16	9; 1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18
124	16	11; 7, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 4, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 7, 22
133	16	11; 1, 1, 7, 5, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 5, 7, 1, 1, 22
109	15	10; 2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 20
134	14	11; 1, 1, 2, 1, 3, 1, 10, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 22

Näherungsbruch k-ter Ordnung

Mit $A_0 = b_0$, $A_{-1} = 1$, $A_{-2} = 0$, $B_0 = 0$, $B_{-1} = 0$, $B_{-2} = 1$ wird $A_k = b_k * A_{k-1} + A_{k-2}$ und $B_k = b_k * B_{k-1} + B_{k-2}$
Die Näherungsbrüche A_k/B_k approximieren den Endbruch abwechselnd von unten und von oben mit wachsender Genauigkeit. Es wird

$P_1 / Q_1 = a_1/1$
$P_2 / Q_2 = a_1 + 1/a_2 = (a_1a_2 + 1)/a_2$
$P_3 / Q_3 = (a_3 (a_1a_2 + 1) + a_1)/(a_2a_3 + 1) = (a_3 P_2 + P_1) / (a_3 Q_2 + Q_1)$
... $P_k / Q_k = (a_k P_{k-1} + P_{k-2}) / (a_k Q_{k-1} + Q_{k-2})$

Beispiel: Für den Kettenbruch A = [3,7,2,5,11] ergeben sich damit als Näherungsbrüche

k	0	1	2	3	4	5
a_k	3	7	2	5	11	
P_k/Q_k	1/0	3/1	22/7	47/15	257/82	2874/917

und somit A = 2874/917
Für $A = P_n / Q_n$ ergibt sich aus $P_k/Q_k - P_{k+1}/Q_{k+1} = (-1)^k/(Q_kQ_{k+1})$
weiterhin $P_n / Q_n = a_1 + 1/(Q_1Q_2) - 1/(Q_2Q_3) +- ... + (-1)^n\, 1/(Q_{n-1}Q_n)$

Nichtabbrechende Kettenbrüche

Die Näherungsbrüche nichtabbrechender Kettenbrüche $[b_0;b_1;b_2;...]$ konvergieren gegen eine reelle Zahl

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

Goldener Schnitt als Kettenbruch

Der Goldene Schnitt ist eine Lösung der quadratischen Gleichung

$x^2 - x - 1 = 0$.
Die Lösungen sind $x_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ $x_2 = (1 - \sqrt{5})/2$
$x_1 = 1.61803...$ $x_2 = -0.61803...$
wobei x_1 den Wert des Goldenen Schnitts ϕ darstellt.
Die quadratische Gleichung lässt sich umformen zu
$x^2 = x + 1$ und $x = 1 + 1/x$
Indem jetzt immer wieder x in den Nenner dieses Bruchs eingesetzt wird, entwickelt sich langsam ein unendlicher Kettenbruch (siehe Abbildung) bzw. in Kurzform **[1; 1; 1; 1; 1; ...]**
Dieser Kettenbruch ist die Lösung x_1 der genannten quadratischen Gleichung und entspricht damit ϕ.

Dieser goldene Kettenbruch ist die Lösung x_1 der genannten quadratischen Gleichung und entspricht damit ϕ. Entwickelt man den Kettenbruch in Näherungsbrüche, so erhält man wie zu erwarten
3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, …
d.h. gemeine Brüche, deren Zähler und Nenner aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen sind.

Taschenrechnerberechnung
Aus der Struktur dieses Kettenbruches kann man eine einfache Methode zur Berechnung von ϕ auf dem Taschenrechner angeben.
Ausgehend von 1; oder jeder anderen beliebigen positiven Zahl; werden abwechselnd das Reziproke gebildet (Taste 1/x) und zum Reziproken 1 addiert, wieder das Reziproke gebildet usw. Das Ergebnis nähert sich dann immer weiter ϕ an.

Kettenbruchkonstante
Für einen unendlichen Kettenbruch dessen Komponenten eine arithmetische Reihe bilden, gilt:
$$[A+D, A+2D, A+3D, \dots] = I_{A/D}(2/D) / I_{1+A/D}(2/D)$$
wobei $I_n(x)$ die modifizierte Bessel-Funktion 1.Art darstellt. Insbesondere gilt:
$$[0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots] = I_1(2)/I_0(2) = 0.697774658... = C$$
C heißt Kettenbruchkonstante.

Satz von Lochs
Der Satz von Lochs gibt eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit von Kettenbruchdarstellungen reeller Zahlen. Der Satz wurde 1964 von Gustav Lochs bewiesen.

Es gilt: Für fast alle reellen Zahlen in dem Intervall (0,1) gilt für die Anzahl der Terme m der Kettenbruchdarstellung einer Zahl, die dazu benötigt wird, die ersten n Stellen der Dezimaldarstellung der Zahl darzustellen:
$$\lim_{n\to\infty} m/n = 6 \ln 2 \ln 10 / \pi^2 = 0{,}97027011439203392574025\dots$$
Dieser Grenzwert wird Lochs Konstante genannt.

Da dieser Grenzwert kleiner ist als 1, gilt, dass jeder neue Term in der Kettenbruchdarstellung einer typischen reellen Zahl die Genauheit der Darstellung um etwa eine Dezimalstelle erhöht. Das Dezimalsystem ist das letzte Stellenwertsystem, in dem eine neue Ziffer weniger Wert bringt als ein neuer Quotient der Kettenbruchdarstellung; im Elfersystem ist Lochs Konstante mit 1,0104321 etwas größer als 1.
Für ein Stellenwertystem der Ordnung k gilt für die Konstante
Lochs Konstante $L_k = 6 \ln 2 \ln k / \pi^2$
Der Kehrwert des Grenzwertes $\pi^2 / (6 \ln 2 \ln 10)$ ist das Doppelte des Zehner-Logarithmus der Lévyschen Konstante und wird dezimale Kettenbruchkonstante genannt:
$\pi^2 / (6 \ln 2 \ln 10)$ = 1,030 640 834 100 712 935 881 776 094 116 936 840 925 920 311 120 726 281 770 060 952 234 954 428 004 799 767 518 360 808 395 658 654 762 632 898 370 773 717 620 963 045 016 167 826 875 528 903 211 607 189 244 …

Zum Beweis des Satzes von Lochs siehe:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{\dots \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}}$$

$$b_0 + \frac{a_1 |}{| b_1} + \frac{a_2 |}{| b_2} + \dots + \frac{a_n |}{| b_n}$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \dots + \frac{a_n}{b_n}$$

http://books.google.de/books?id=66CkhlamuNoC&printsec=frontcover#PPA174,M1

Allgemeiner Kettenbruch

Sind die Zähler der Teilbrüche eine beliebige ganze Zahl a_i und nicht immer gleich 1, so spricht man von einem allgemeinen Kettenbruch.
Für diese hat man kürzere Schreibweisen entwickelt, die als zweite und dritte Abbildung zu sehen sind.
Die Zähler a_i dieses Kettenbruchs heißen Teilzähler, die Nenner b_i heißen Teilnenner. Alle Teilzähler und Teilnenner sind ganzzahlig, aber verschieden von Null. Das erste Glied b_0 wird freies Glied genannt. Sind alle a_i = 1 liegt ein Kettenbruch im eigentlichen Sinne vor, der auch regelmäßiger oder einfacher Kettenbruch genannt wird.

Kettenbrüche einiger Konstanten

Konstante	reeller Wert	Kettenbruch
π	3.141 592 653 59	[3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,...]
π/180	0.017 453 292 519 94	[0,57,3,2,1,1,1,2,40,2,1,1,5,1,2,1,7,2,2,1,...]
π^2	9.869 604 401 089	[9,1,6,1,2,47,1,8,1,1,2,2,1,1,8,3,1,10,...]
√π	1.772 453 850 906	[1,1,3,2,1,1,6,1,28,13,1,1,2,18,1,1,1,83,...]
√2π	2.506 628 274 631	[2,1,1,37,4,1,1,1,1,9,1,1,2,8,6,1,2,2,1,3, ...]
1/π	0.318 309 886 183 8	[0, 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, ...]
1/√π	0.564 189 583 547 8	[0,1,1,3,2,1,1,6,1,28,13,1,1,2,18,1,1,1,83,...]
$\sqrt[3]{\pi}$	1.464 591 887 562	[1,2,6,1,1,3,1,1,1,2,2,1,1,2,7,1,5,5,53,3,...]
e	2.718 281 828 459	[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,1, ...]
e^2	7.389 056 098 931	[7, 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, 6, 30, 8, 1, 1, 9, ...]
√e	1.648 721 270 7	[1,1,1,1,5,1,1,9,1,1,13,1,1,17,1, 1,21,1,1, ...]
e^{π}	23.140 692 632 78	[23, 7, 9, 3, 1, 1, 591, 2, 9, 1, 2, 34, ...]
$e^{-\pi}$	0.043 213 918 263 77	[0, 23, 7, 9, 3, 1, 1, 591, 2, 9, 1, 2, 34, ...]
1/e	0.367 879 441 171 4	[0,2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,...]
1/(e-1)	0.581976706	[0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 2i, ...]
$1/(\sqrt[k]{e} +1)$		[0, k-1, 3k-1,..., (2i-1)k-1, ...]
1/2(√10 -2)		[0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ...]
1/2(√((k+1)²+1)-k)		[0, k, k, k, k, k, k, k, k, ...]
(√5+1)/2	Goldener Schnitt	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...]
(√5-1)/2		[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...]

Stammbruch

Ein gemeiner Bruch, dessen Zähler = 1 ist, heißt Stammbruch. Für einen Stammbruch der Form 1/p, wobei p eine Primzahl ist, ist die Länge l dieser Periode ein Teiler von p-1, d.h. l kann maximal gleich p-1 werden.
Stammbrüche wurden vor allem im antiken Ägypten zur Darstellung gebrochener Zahlen genutzt.
Dabei wurde ein Bruch der Form a/b in eine Summe von Stammbrüchen umgewandelt. z.B.

13/37 = 1/3 + 1/56 + 1/6216

1880 bewies James J.Sylvester, dass jeder Dezimalbruch in mindestens eine Zerlegung als Summe von Stammbrüchen dargestellt werden kann. Die Frage, ob für Dezimalbrüche mit

ungeradem Nenner stets eine Zerlegung mit nur ungeraden Stammbruchnennern existiert, konnte bis heute weder bewiesen noch widerlegt werden.
Die ersten derartigen Zerlegungen findet man schon im berühmten Papyrus Rhind (1650 v.Chr.). Dort wird die Zerlegung von 1/8 demonstriert:

$$1/8 = 1/25 \cdot 25/8 = 1/5 \cdot 25/40 = 1/5 \cdot (3/5 + 1/40) = 1/5 \cdot (1/5 + 2/5 + 1/40)$$
$$= 1/5 \cdot (1/5 + 1/3 + 1/15 + 1/40) = 1/25 + 1/15 + 1/75 + 1/200$$

Zwei Brüchen 1/a und 1/b werden benachbart genannt, wenn deren Differenz gerade ein Stammbruch ist, z.B. ½ und 1/3 mit ½ - 1/3 = 1/12.

Stammbruchsumme

Ein gemeiner Bruch, dessen Zähler = 1 ist, heißt Stammbruch. Stammbrüche wurden vor allem im antiken Ägypten zur Darstellung gebrochener Zahlen genutzt.
Dabei wurde ein Bruch der Form a/b in eine Summe von Stammbrüchen umgewandelt. z.B.

$$13/37 = 1/3 + 1/56 + 1/6216$$

Während auf der vorhergehenden Seite Stammbruchsummen mit beliebigem Nenner betrachtet werden, kann man auch nach Zerlegungen fragen, bei denen alle Nenner ungerade Zahlen sind.
Rechts können gemeine Brüche, deren Zähler echt kleiner als der Nenner ist, in eine derartige Summe von Stammbrüchen umgewandelt werden.
Dabei stellt man schnell fest, dass derartige Summen oft sehr viel mehr Summanden enthalten und deren Zähler auch schnell sehr groß werden.
Zum Beispiel erhält man für 3/179 mit dem hier implementierten Standardalgorithmus nur eine "kürzeste" Summendarstellung mit 19 Brüchen, von denen der größte Nenner mehr als 500000 Ziffern besitzt (hier nicht berechenbar).
Durch Eppstein wurde mit einem anderen Verfahren

$$3/179 = 1/171 + 1/209 + 1/285 + 1/895 + 1/1611 + 1/1969 + 1/2685$$

gefunden.

Einige gemeine Brüche erweisen sich bei der Zerlegung in eine Summe von Stammbrüchen mit dem einen oder anderen Verfahren als problematisch.
Zum Beispiel erhält man für 3/179 mit dem Standardalgorithmus (siehe Stammbruchsumme (2)) nur eine "kürzeste" Summendarstellung mit 19 Brüchen, von denen der größte Nenner mehr als 500000 Ziffern besitzt.
Durch Eppstein wurde mit einem anderen Verfahren

$$3/179 = 1/171 + 1/209 + 1/285 + 1/895 + 1/1611 + 1/1969 + 1/2685$$

gefunden. Weitere Zerlegungen sind zum Beispiel

$$3/179 = 1/105 + 1/189 + 1/525 + 1/33831 + 1/93795$$
$$3/179 = 1/105 + 1/189 + 1/525 + 1/31325 + 1/120825$$
$$3/179 = 1/105 + 1/175 + 1/675 + 1/33831 + 1/93795$$
$$3/179 = 1/105 + 1/175 + 1/675 + 1/31325 + 1/120825$$
$$3/179 = 1/75 + 1/525 + 1/675 + 1/33831 + 1/93795$$
$$3/179 = 1/75 + 1/525 + 1/675 + 1/31325 + 1/120825$$
$$3/179 = 1/75 + 1/315 + 1/4725 + 1/33831 + 1/93795$$
$$3/179 = 1/75 + 1/315 + 1/4725 + 1/31325 + 1/120825$$
$$3/179 = 1/63 + 1/1575 + 1/4725 + 1/33831 + 1/93795$$
$$3/179 = 1/63 + 1/1575 + 1/4725 + 1/31325 + 1/120825$$

Ägyptische Zahlen

Eine natürliche Zahl n heißt ägyptische Zahl, wenn sie als Summe der Nenner einer Zerlegung der 1 in eine Summe von Stammbrüchen dargestellt werden kann.
Zum Beispiel ist 11 eine ägyptische Zahl, da $1 = 1/2 + 1/3 + 1/6$ und $11 = 2 + 3 + 6$
Nichtägyptische Zahlen sind 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19, 21 und 23.
Eine Zahl heißt streng ägyptisch, wenn die Nenner der Stammbruchsumme aller Brüche verschieden sind. 1963 bewies Graham, dass alle natürlichen Zahlen > 77 streng ägyptisch sind.
Weitere streng ägyptische Zahlen sind: 11, 24, 30, 31, 32, 37, 38, 43, 45, 50, 52 bis 55, 57, 59 bis 62, 64 bis 67, 69, 71, 73 bist 76, ... Gegenbeispiele: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12. Die

Liste enthält für die ersten natürlichen Zahlen jeweils eine Zerlegung als streng ägyptische Zahl.

Zahl n	Nenner der Stammbrüche	Zahl n	Nenner der Stammbrüche
11	6, 3, 2	24	12, 6, 4, 2
30	15, 10, 3, 2	31	20, 5, 4, 2
32	18, 9, 3, 2	37	24, 8, 3, 2
38	20, 6, 5, 4, 3	43	15, 12, 10, 4, 2
45	20, 12, 6, 5, 2	50	24, 12, 8, 4, 2
52	18, 12, 9, 6, 4, 3	53	30, 10, 6, 5, 2
54	42, 7, 3, 2	55	28, 14, 7, 4, 2
57	24, 12, 8, 6, 4, 3	59	20, 18, 9, 5, 4, 3
60	18, 15, 10, 9, 6, 2	61	28, 21, 6, 4, 2

Ägyptische Zerlegung

Die Zerlegung einer Zahl n in eine ägyptische oder streng ägyptische Darstellung wird auf der rechten Seite durchgeführt.
Diese Berechnung kann auch auf schnellen Computern sehr lang dauern und liefert mitunter sehr viele verschiedene Zerlegungen.
In der Liste sind 16 mögliche Zerlegungen der Zahl 100 zu finden, darunter nur drei streng ägyptische. Zur Berechnung mussten 810 Millionen Partitionen untersucht werden.

Nenner der Stammbrüche

60, 12, 6, 6, 6, 5, 5		56, 21, 8, 7, 6, 2	Streng ägyptische Zerlegung
56, 14, 8, 7, 7, 4, 4		55, 11, 11, 10, 5, 4, 4	
48, 16, 12, 12, 4, 4, 4		45, 24, 9, 8, 6, 5, 3	Streng ägyptische Zerlegung
45, 18, 18, 6, 5, 4, 4		45, 14, 9, 7, 7, 7, 6, 5	
45, 12, 12, 10, 10, 9, 2		45, 10, 10, 10, 9, 6, 5, 5	
45, 10, 10, 9, 8, 8, 6, 4		44, 22, 11, 11, 4, 4, 4	
42, 24, 12, 8, 7, 4, 3	Streng ägyptische Zerlegung	42, 18, 9, 7, 6, 6, 6, 6	
42, 15, 12, 12, 10, 7, 2		42, 15, 10, 10, 7, 6, 5, 5	

Die Darstellung gebrochener Zahlen als Summe von Stammbrüchen kann auch auf irrationale Zahlen erweitert werden.
Für die gebrochenen Anteile nachfolgender irrationaler Zahlen erhält man als Nenner der Stammbrüche

Konstante	Nenner der Stammbrüche
$\sqrt{2}$	3, 13, 253, 218201, 61323543802, 5704059172637470075854, 178059816815203395552917056787722451335939040, …
$\sqrt{3}$	2, 5, 32, 1249, 5986000, 438522193400489, 3126430743599145840898147625516, 10008815260914521335142941393259537613217919681721512170785592, …
$1/\sqrt{2}$	2, 5, 141, 68575, 32089377154, …
e	2, 5, 55, 9999, 3620211523, 25838201785967533906, 3408847366605453091140558218322023440765, …
1/e	3, 29, 15786, 513429610, 339840390654894740, …
γ	2, 13, 3418, 52016149, 153922786652714666, …
ϕ	2, 9, 145, 37986, 2345721887, 26943815937041299094, 811625643619814151937413504618770581764, 697120590223140234675813998970770820981012350673738243594006422610850113672220, …
ln 2	2, 6, 38, 6071, 144715221, 58600453312405245, 28261174043083404192255923187258021, …
π	8, 61, 5020, 128541455, 162924332716605980, 28783052231699298507846309644849796, 871295615653899563300996782209332544845605756266650946342214549769447, …
$1/\pi$	4, 15, 609, 845029, 1010073215739, 1300459886313272270974271, 1939680952094609786557359582286462958434022504402, …

Guys ägyptische Zerlegungen

Durch Richard K. Guy wurde in "Unsolved Problems in Number Theory" folgendes Problem gestellt.
Gesucht sind Zerlegungen der 1 in eine Summe von Stammbrüchen der Form

$$1 = 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n$$

Dabei sollen die a_i paarweise verschieden sein und außerdem eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen bilden.
Gesucht ist die Zerlegung, bei der das a_n den kleinst möglichen Wert annimmt. Diese Zerlegung wird optimal genannt.
Durch Milo Gardner wurden folgende Ergebnisse als optimal nachgewiesen:

n	Nenner der Stammbrüche
3	2 3 6
4	2 4 6 12
5	2 4 10 12 15
6	3 4 6 10 12 15
7	3 4 9 10 12 15 18
8	3 5 9 10 12 15 18 20
9	4 5 8 9 10 15 18 20 24
10	5 6 8 9 10 12 15 18 20 24
11	5 6 8 9 10 15 18 20 21 24 28
12	6 7 8 9 10 14 15 18 20 24 28 30

Hinweis: Die Berechnung der optimalen Lösungen ist extrem aufwendig und nur unter massivem Computereinsatz in realistischer Zeit durchführbar.

Papyrus Rhind-Bruchzerlegungen

Ein gemeiner Bruch, dessen Zähler = 1 ist, heißt Stammbruch. Stammbrüche wurden vor allem im antiken Ägypten zur Darstellung gebrochener Zahlen genutzt. Durch Milo Gardner wurden Zerlegungen von Brüchen der Form 2/n in Stammbruchsummen im Papyrus Rhind gefunden. Die besten sind:

2/3 = 1/2 + 1/6
2/5 = 1/3 + 1/15
2/7 = 1/4 + 1/28
2/9 = 1/6 + 1/18
2/11 = 1/6 + 1/66
2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104
2/15 = 1/10 + 1/30
2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68
2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114
2/21= 1/14 + 1/42
2/23 = 1/12 + 1/276
2/25 = 1/15 + 1/75
2/27 = 1/18 + 1/54
2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232
2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155
2/33 = 1/22 + 1/66
2/35 = 1/25 + 1/30 + 1/42
2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296
2/39 = 1/26 + 1/78
2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328
2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301
2/45 = 1/30 + 1/90
2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470
2/49 = 1/28 + 1/196
2/51 = 1/34 + 1/102
2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795
2/55 = 1/30 + 1/330
2/57 = 1/38 + 1/114
2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531
2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610
2/63 = 1/42 + 1/126
2/65 = 1/39 + 1/195
2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536
2/69 = 1/46 + 1/138
2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710
2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365
2/75 = 1/50 + 1/150
2/77 = 1/44 + 1/308
2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790
2/81 = 1/54 + 1/162
2/83 = 1/60 +1/332 +1/415 +1/498
2/85 = 1/39 + 1/195
2/87 = 1/58 + 1/174
2/89 = 1/60 +1/356 +1/534 +1/890
2/91 = 1/70 + 1/130
2/93 = 1/62 + 1/186
2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570
2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776
2/99 = 1/66 + 1/198
2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606

Gardner vermutet, dass der ägyptische Schreiber Ahmes die Zerlegungen über 2/pq = (1/q + 1/pq)·2/(p + 1) und

$2/pq = 2/A \cdot A/pq$ mit $A = (p + 1)$ und $(p + q)$ gefunden hat.

Über die Zerlegungstabelle von Brüchen der Form 2/n in Stammbrüche gelang es den ägyptischen Mathematikern, auch Brüche mit größerem Zähler in eine Summe von Stammbrüchen zu verwandeln. Zum Beispiel wird für 7/29 mit 7 = 1 + 2 + 2 + 2

7/29 = 1/29 + (1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232) + (1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232) + (1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232)
= 1/29 + 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 + (2/24 + 2/58 + 2/174 + 2/232)
= 1/29 + 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 + 1/12 + 1/29 + 1/87 + 1/116
= 2/29 + 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 + 1/12 + 1/87 + 1/116
= 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 + 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 + 1/12 + 1/87 + 1/116
= 2/24 + 2/58 + 2/174 + 2/232 + 1/12 + 1/87 + 1/116
= 1/12 + 1/29 + 1/87 + 1/116 + 1/12 + 1/87 + 1/116
= 2/12 + 1/29 + 2/87 + 2/116
= 1/6 + 1/58 + 1/174 + 1/58 + 1/29
= 2/58 + 1/6 + 1/29 + 1/174
= 1/29 + 1/6 + 1/29 + 1/174
= 2/29 + 1/6 + 1/174
= 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 + 1/6 + 1/174
= 2/174 + 1/24 + 1/58 + 1/232 + 1/6
= 1/87 + 1/24 + 1/58 + 1/232 + 1/6
= 1/6 + 1/24 + 1/58 + 1/87 + 1/232

Diese Vorgehensweise ist zwar nicht elegant, führt aber zum gewünschten Ergebnis. Beachtet man, dass dies vor mehr als 3500 Jahren gefunden wurde, kann man die ägyptischen Mathematiker nur bewundern.
Allerdings können die kürzeren Formen 7/29 = 1/5 + 1/29 + 1/145 = 1/5 + 1/25 + 1/725 nicht ermittelt werden.

Ägyptische Brüche

Ein gemeiner Bruch, dessen Zähler = 1 ist, heißt Stammbruch oder ägyptischer Bruch, da diese vor allem im antiken Ägypten zur Darstellung gebrochener Zahlen genutzt wurden.
Gesucht sind Zerlegungen eines Bruchs p/q in eine Summe von Stammbrüchen der Form

$p/q = 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n$

Der einfachste Algorithmus ist ein Zerlegungsalgorithmus (engl. splitting method) auf der Grundlage von

$1/x = 1/(x+1) + 1/(x (x+1))$

Verfahren: p/q sei kleiner 1 und vollständig gekürzt.
1) p/q wird als Summe von p Stammbrüchen der Form 1/q geschrieben
2) Treten gleiche Stammbrüche auf, so werden, bis auf den ersten, alle anderen mit der obigen Gleichung zerlegt
3) Schritt 2 wird so lange wiederholt, bis nur verschiedene Stammbrüche auftreten

Beispiel: 3/7 = 1/7 + 1/7 + 1/7
= 1/7 + (1/8 + 1/56) + (1/8 + 1/56)
= 1/7 + 1/8 + 1/8 + 1/56 + 1/56
= 1/7 + 1/8 + (1/9 + 1/72) + 1/56 + (1/57 + 1/3192)
= 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/56 + 1/57 + 1/72 + 1/3192

1977 wurde von Campbell bewiesen, dass der Algorithmus immer endet. Allerdings ist die gefundene Zerlegung eine der schlechtesten, da sie sehr viele Stammbrüche enthält.

Fibonacci-Sylvester Algorithmus

Erneut sind Zerlegungen eines Bruchs p/q in eine Summe von Stammbrüchen der Form

$p/q = 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n$

gesucht. Durch Fibonacci wurde 1202 nachfolgender Algorithmus angegeben, welcher zwar effektiver als der Zerlegungsalgorithmus ist, jedoch nicht optimal. 1880 bewies Sylvester, dass der Algorithmus korrekt ist und stets terminiert.
Verfahren: p/q sei kleiner 1 und vollständig gekürzt.
1) Ist p = 1, stoppt der Algorithmus, andernfalls wird q = s p + r mit r < p berechnet

2) Dann ist $p/q = 1/(s+1) + (p-r)/(q\ (s+1))$, d.h. $s+1$ Nenner eines der gesuchten Stammbrüche
3) Mit $p = p - r$ und $q = q\ (s+1)$ und vollständiger Kürzung von p/q wird bei Schritt 1 wieder begonnen

Beispiel: $3/7 = 1/3 + 2/21 = 1/3 + 1/11 + 1/231$

Zwar ist der Fibonacci-Sylvester Algorithmus für eine Vielzahl von Brüchen einsetzbar, liefert aber sehr große Nenner, wenn mehr als 5 Stammbrüche auftreten.
Für 5/121 würde man erhalten = 1/25 + 1/757 + 1/763309 + 1/873960180912 + 1/1527612795642093418846225
und nicht die optimale Zerlegung 5/121 = 1/33 + 1/121 + 1/363

Der Fibonacci-Sylvester-Algorithmus liefert im Allgemeinen nicht die beste Zerlegung des Bruchs.
Fibonacci selbst fand als Zerlegung 4/49 = 1/13 + 1/319 + 1/637
Günstiger ist 4/49 = 1/14 + 1/98
Der Fibonacci-Sylvester-Algorithmus ermittelt nur 4/49 = 1/13 + 1/213 + 1/67841 + 1/9204734721

Die kleinsten Brüche, für die der Algorithmus mindestens n Teilbrüche ergibt, sind

n	kleinster Bruch	n	kleinster Bruch
1	1/2	2	2/3
3	3/7	4	4/17
5	5/31	6	6/109
7	7/253	8	8/97
9	9/271	10	10/1621
11	11/199		

Golomb Algorithmus

Erneut sind Zerlegungen eines Bruchs p/q in eine Summe von Stammbrüchen der Form

$$p/q = 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n$$

gesucht. Durch Golomb wurde 1962 in "An Algebraic Algorithm For The Representation Problems of the Ahmes Papyrus" ein Algorithmus angegeben, welcher wesentlich leistungsstärker als der von Fibonacci-Sylvester ist.
Verfahren: p/q sei kleiner 1 und vollständig gekürzt.
1) Ist $p = 1$, stoppt der Algorithmus, andernfalls wird $p\ s = q\ r + 1$ mit $0 < s < q$ berechnet, d.h. s ist das multiplikativ Inverse zu p modulo q
2) Dann ist $p/q = 1/(s\ q) + r/s$, d.h. $s\ q$ Nenner eines der gesuchten Stammbrüche
3) Mit $q = s$ und $p = r$ wird bei Schritt 1 wieder begonnen
Beispiel: $3/7 = 1/3 + 2/21 = 1/3 + 1/15 + 1/35$

Srinivasan-Algorithmus

Eine positive ganze Zahl m wird praktische Zahl genannt, wenn jede natürliche Zahl $n < m$ als Summe von verschiedenen, positiven Teilern von m dargestellt werden kann. Praktische Zahlen können zur Bestimmung ägyptischer Zerlegungen genutzt werden.
Liegt ein Bruch p/q vor, dessen Nenner q praktische Zahl ist und $p<q$, so kann eine Zerlegung in ägyptische Brüche angegeben werden. Zum Beispiel ist 20 ein praktische Zahl und damit $9/20 = (4+5)/20 = 1/5 + 1/4$.
Ist n eine praktische Zahl und ein ungerades $q < 2n$ eine zu n relativ prime Zahl, dann ist auch $q \cdot n$ praktisch. Ist q gerade, so muss die praktische Zahl $n > q$ sein.

Algorithmus: Man wählt eine praktische Zahl n, die den Bedingungen entspricht.
Zähler und Nenner werden mit der praktischen Zahl erweitert und für den Zähler die entsprechende Summendarstellung ermittelt.
Die Zähler und Nenner der Teilbrüche sind vollständig kürzbar, so dass eine ägyptische Zerlegung entsteht.

Beispiel: Für 5/23 wird die praktische Zahl 12 gewählt. Dann wird

$$5/23 = 5 \cdot 12 / (23 \cdot 12) = (46 + 12 + 2) / (23 \cdot 12) = 1/6 + 1/23 + 1/238$$

Binärer Algorithmus

Es sei ein Bruch p/q gegeben, der ägyptisch zerlegt werden soll.
Ist q eine Zweierpotenz n^k, so wird p als Summe von k oder weniger Teilern von q geschrieben.
Beispiel: 5/16 = (1 + 4)/16 = 1/16 + 4/16 = 1/16 + 1/4
Ist q keine Zweierpotenz, so wählt man die kleinste Zweierpotenz $N = n^k$ mit $q < n^k$ und erweitert p/q mit dieser. Dann wird für natürliche Zahlen s und r

$$p/q = N p / (N q) = (q s + r)/(N q) = s/N + r/(N q)$$

Der Teilbruch s/N wird wie oben beschrieben als Summe von Stammbrüchen geschrieben.
Auch der zweite Bruch r/(N q) ist als Summe von Teilern von N nun darstellbar und damit zum Stammbruch kürzbar.
Beispiel: 5/21: 16 < 21 < 32

$$5/21 = 5 \cdot 32 / (21 \cdot 32) = (7 \cdot 21 + 13) / (21 \cdot 32) = 7/32 + 13 / (21 \cdot 32) =$$
$$= (1 + 2 + 4)/32 + (1 + 4 + 8) / (21 \cdot 32) =$$
$$= 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/84 + 1/168 + 1/672$$

Dieser Algorithmus garantiert eine Zerlegung in Stammbrüchen mit Nennern von maximal $q \cdot (q-1)$.

Farey-Algorithmus

Es sei ein Bruch p/q gegeben, der ägyptisch zerlegt werden soll. Grundlage der Zerlegung sind hier die Farey-Reihen.
Ist p/q vollständig gekürzt, so wird in der q-ten Farey-Folge der Bruch r/s gesucht, der unmittelbar vor p/q auftritt. Dann ist $p/q = 1/(qs) + r/s$
und 1/(qs) ist ein Summand der Zerlegung. Nun wird p/q = r/s gesetzt und das Verfahren solange wiederholt bis r = 1 ist.

Beispiel für 5/21: In der 21.Farey-Reihe steht 4/17 vor 5/21, d.h.

$$5/21 = 4/17 + 1/(21 \cdot 17)$$

In der 17.Reihe findet man vor 4/17 den Bruch 3/13 und bei weiterer Wiederholung der gebrochenen Zahlen 2/9 und 1/5.

$$5/21 = 3/13 + 1/(17 \cdot 13) + 1/(21 \cdot 17)$$
$$5/21 = 2/9 + 1/(13 \cdot 9) + 1/(17 \cdot 13) + 1/(21 \cdot 17)$$
$$5/21 = 1/5 + 1/(9 \cdot 5) + 1/(13 \cdot 9) + 1/(17 \cdot 13) + 1/(21 \cdot 17)$$
$$5/21 = 1/5 + 1/45 + 1/117 + 1/221 + 1/357$$

Dieser Algorithmus garantiert eine Zerlegung in Stammbrüchen mit Nennern von maximal $q \cdot (q-1)$ und erzeugt die gleiche Zerlegung wie der Golomb Algorithmus.

Ägyptische Zerlegung (3)

Bei der Suche nach ägyptischen Zerlegungen werden vor allem Darstellungen mit möglichst wenig Stammbruchsummanden gesucht. Für Brüche der Form 2 / (2i+1) existiert stets eine Zerlegung in genau zwei Summanden. Es ist

$$1/(i+1) + 1/[(i+1)(2i+1)] = (2i+1+1)/[(i+1)(2i+1)] = (2i+2)/[(i+1)(2i+1)] = 2(i+1)/[(i+1)(2i+1)]$$
$$= 2/(2i+1)$$

und damit zum Beispiel

2/3 = 1/2 + 1/6	2/5 = 1/3 + 1/15
2/7 = 1/4 + 1/28	2/9 = 1/5 + 1/45 = 1/6 + 1/18
2/11 = 1/6 + 1/66	2/13 = 1/7 + 1/91
2/15 = 1/8 + 1/120 = 1/9 + 1/45 = 1/10 + 1/30 = 1/12 + 1/20	
2/17 = 1/9 + 1/153	2/19 = 1/10 + 1/190

Ägyptisches 4/n-Problem

Eine offene Frage der ägyptischen Zerlegungen ist es, ob für Brüche der Form 4 / (2i+1) stets eine ägyptische Darstellung mit höchstens 3 Stammbrüchen gefunden werden kann.

$$4 / n = 1/a + 1/b + 1/c$$

Erdös und Straus gaben als erste diese Vermutung an. Durch Nicola Franceschine wurden alle Zähler $n \le 10^8$ erfolgreich getestet.
Mordell gab 1969 einen ersten Beweis, allerdings nicht für prime Zähler n, die kongruent 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2 oder 23^2 modulo 840 sind.

Ägyptisches k/n-Problem

Außer der Frage nach der Zerlegung von Brüchen der Form 2/n und 4/n in eine ägyptische Darstellung mit höchstens 3 Stammbrüchen interessiert man sich auch für den allgemeinen Fall k/n.

$$k / n = 1/a + 1/b + 1/c$$

Sierpinski vermutete, dass 5/n als Summe von drei Stammbrüchen dargestellt werden kann. Durch Stewart wurden alle $n \leq 1057438801$ erfolgreich geprüft.
Im Fall 6/n gab Webb zumindest einen Teilbeweis für alle $n \equiv 1$, 61 oder 541 modulo 660.

Allgemein wird vermutet, dass für alle $4 \leq k \leq 7$ nur 3 Brüche benötigt werden, für $8 \leq k \leq 12$ vier Brüche.
Nach Sierpinski existiert für jedes k ein N, so dass die ägyptische Zerlegung von k/n mit n > N stets nur 3 Stammbrüche benötigt.
Der kleinste Bruch, der nicht mit 3 Summanden darstellbar ist, ist 8/11. Die kleinsten Brüche mit mindestens 5, 6 und 7 Summanden sind 16/17, 77/79 und 728/739.

Kürzeste ägyptische Zerlegungen

Je nach Wahl des Algorithmus zur Zerlegung in ägyptische Brüche:

Fibonacci-Sylvester Algorithmus, Golomb Algorithmus, Srinivasan-Algorithmus

erhält man unterschiedliche Summendarstellungen, jedoch nicht unbedingt die kürzeste.
Die nachfolgende Übersicht zeigt die kürzesten Zerlegungen für p/q und q bis 11. Als Schreibweise werden die Zähler der Stammbrüche in eckige Klammern gesetzt, z.B. 4/5 = 1/2 + 1/4 + 1/20 = [2,4,20]:

2/3 = [2,6]   2/5 = [3,15]   2/7 = [4,28]
2/9 = [5,45] = [6,18]   2/11 = [6,66]
3/4 = [2,4]   3/5 = [2,10]
3/7 = [3,11,231] = [3,12,84] = [3,14,42] = [3,15,35] = [4,6,84] = [4,7,28]
3/8 = [3,24] = [4,8]   3/10 = [4,20] = [5,10]   3/11 = [4,44]
4/5 = [2,4,20] = [2,5,10]   4/7 = [2,14]   4/9 = [3,9]
4/11 = [3,33]
5/6 = [2,3]   5/7 = [2,5,70] = [2,6,21] = [2,7,14]   5/8 = [2,8]
5/9 = [2,18]   5/11 = [3,9,99] = [3,11,33] = [4,5,220]
6/7 = [2,3,42]   6/11 = [2,22]
7/8 = [2,3,24] = [2,4,8]   7/9 = [2,4,36] = [2,6,9]   7/10 = [2,5]
7/11 = [2,8,88] = [2,11,22]
8/9 = [2,3,18]
8/11 = [2,5,37,4070] = [2,5,38,1045] = [2,5,40,440] = [2,5,44,220] = [2,5,45,198] = [2,5,55,110] = [2,5,70,77] = [2,6,17,561] = [2,6,18,198] = [2,6,21,77] = [2,6,22,66] = [2,7,12,924] = [2,7,14,77] = [2,8,10,440] = [2,8,11,88] = [3,4,7,924]
9/10 = [2,3,15]   9/11 = [2,4,15,660] = [2,4,16,176] = [2,4,20,55] = [2,4,22,44] = [2,5,10,55]
10/11 = [2,3,14,231] = [2,3,15,110] = [2,3,22,33]

Orientalisches Kamelproblem

Problem: Ein orientalischer Kaufmann verfügt in seinem Testament, dass seine 17 Kamele unter seinen drei Söhnen wie folgt aufgeteilt werden. Der erste Sohn erhält 1/2 der Herde, der zweite Sohn 1/3 und der dritte 1/9.
Da der Testamentsvollstrecker keine "armes" Kamel teilen will, stellt er eines seiner Kamele zu den 17 und teilt nun die die Herde von 18 Kamelen nach dem Testament auf. Der erste Sohn erhält 9 Kamele, der zweite 6 Kamele und der dritte 2 Kamele. Am Ende bleibt ein Kamel übrig, welches der Testamentsvollstrecker wieder nimmt.
Alle sind zufrieden, da jeder Sohn mehr erhielt, als ihm nach dem Testament zustand. Zum Beispiel erhielt der erste Sohn 9 Kamele anstelle von 8 1/2 Kamelen usw. Wie ist dies möglich?
Der scheinbare Widerspruch löst sich, wenn man beachtet, dass nach dem Testament gar nicht die ganze Herde aufgeteilt wird. Denn es ist   1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18.
Allgemein besteht bei dieser Problemart die Forderung, dass drei Stammbrüche 1/a, 1/b, 1/c mit unterschiedlichen Nennern gerade eine Summe der Form d/(d+1) ergeben. Entsprechend den orientalischen Gepflogenheiten sollte 1/a > 1/b > 1/c gelten, da der älteste Sohn natürlich am meisten erhält. Beschränkt man die Gesamtzahl der Kamele auf ein normales Maß (<

10000 Kamele), so existieren erstaunlicherweise nur sieben mögliche Lösungen für a, b, c. Lässt man gleiche Werte für a, b, c zu, so kommen noch 5 weitere Möglichkeiten hinzu. In allen Fällen kann durch Hinzufügen eines Kamels zur Herde die Verteilung durchgeführt werden, wobei dieses eine Kamel am Ende wieder übrig bleibt.

Kamelzahl	1.Sohn	2.Sohn	3.Sohn	Kamelzahl	1.Sohn	2.Sohn	3.Sohn
41	2	3	7	23	2	3	8
17	2	3	9	11	2	3	12
19	2	4	5	11	2	4	6
7	2	4	8				
Möglichkeiten mit gleichen Anteilen							
9	2	5	5	5	2	6	6
11	3	3	4	3	4	4	4
5	3	3	6				

Kamelproblem bei Brecht

Bertold Brecht: Freundschaftsdienste

Als Beispiel für die richtige Art, Freunden einen Dienst zu erweisen, gab Herr K. folgende Geschichte zum besten:
"Zu einem alten Araber kamen drei junge Leute und sagten ihm:´Unser Vater ist gestorben. Er hat uns siebzehn Kamele hinterlassen und im Testament verfügt, daß der Älteste die Hälfte, der Zweite ein Drittel und der Jüngste ein Neuntel der Kamele bekommen soll.
Jetzt können wir uns über die Teilung nicht einigen; übernimm Du die Entscheidung!´
Der Araber dachte nach und sagte: ´Wie ich sehe, habt ihr, um gut teilen zu können, ein Kamel zu wenig. Ich habe selbst nur ein einziges Kamel, aber es steht euch zur Verfügung. Nehmt es und teilt dann, und bringt mir nur, was übrigbleibt.´
Sie bedankten sich für diesen Freundschaftsdienst, nahmen das Kamel mit und teilten die achtzehn Kamele nun so, daß der Älteste die Hälfte, das sind neun, der Zweite ein Drittel, das sind sechs, und der Jüngste ein Neuntel, das sind zwei Kamele bekam. Zu ihrem Erstaunen blieb, als sie ihre Kamele zur Seite geführt hatten, ein Kamel übrig. Dieses brachten sie, ihren Dank erneuernd, ihrem alten Freund zurück."
Herr K. nannte diesen Freundschaftsdienst richtig, weil er keine besonderen Opfer verlangte.
(aus Gesammelte Werke, Band 12, Prosa I)

Allgemeines Kamelproblem

Das orientalische Kamelproblem der vorhergehenden Seite kann verallgemeinert werden.
Der Kaufmann verfügt in nun seinem Testament, dass seine n Kamele unter seinen m Söhnen aufgeteilt werden sollen. Dabei können nun auch 2, 4 oder mehr Söhne vorhanden sein. Erneut sollen die Söhne entsprechende Anteile erhalten, wobei der erste wieder mehr erhält als der zweite, der zweite mehr als dritte usw.
Soll das Problem wieder durch Hinzufügen eines Kamels, dass nach der Aufteilung wieder übrig geteilt, gelöst werden, so gibt es für 2 Söhne nur genau zwei Lösungen. Für mehr als 3 Söhne steigt die Anzahl der Lösungen stark an.
Die Liste enthält alle gefundenen Zerlegungen bis zu einer Maximalzahl von 250 Kamelen.
Angegeben werden die Herdenstärke und als Summe die Anteile der Söhne; ab 6 Brüdern nur noch eine Lösung je Herdenstärke.

Ausgewählte Lösungen
2 Brüder: 3 : 1/4 + 1/2 5 : 1/3 + 1/2
4 Brüder: 15 : 1/16 + 1/8 + 1/4 + 1/2
5 Brüder: 23 : 1/12 + 1/8 + 1/6 + 1/4 + 1/3
6 Brüder: 35 : 1/36 + 1/12 + 1/9 + 1/6 + 1/4 + 1/3
7 Brüder: 59 : 1/30 + 1/15 + 1/12 + 1/10 + 1/6 + 1/5 + 1/3
8 Brüder: 59 : 1/60 + 1/30 + 1/20 + 1/12 + 1/10 + 1/6 + 1/5 + 1/3
9 Brüder: 89 : 1/90 + 1/45 + 1/30 + 1/18 + 1/15 + 1/10 + 1/6 + 1/5 + 1/3
10 Brüder: 119 : 1/60 + 1/40 + 1/30 + 1/20 + 1/15 + 1/12 + 1/10 + 1/6 + 1/5 + 1/4
11 Brüder: 119 : 1/60 + 1/40 + 1/30 + 1/24 + 1/20 + 1/15 + 1/12 + 1/10 + 1/8 + 1/5 + 1/4

12 Brüder: 179 : 1/90 + 1/60 + 1/45 + 1/36 + 1/20 + 1/18 + 1/15 + 1/12 + 1/10 + 1/9 + 1/5 + 1/4
13 Brüder: 179 : 1/90 +1/60 +1/45 + 1/36 + 1/30 + 1/20 + 1/18 + 1/15 + 1/12 + 1/10 + 1/9 + 1/6 + 1/4
14 Brüder: 239 : 1/120+1/80+1/48+1/40 +1/30 +1/24 +1/20 +1/16 +1/15 +1/12 +1/10 +1/8 +1/6 +1/5
15 Brüder: 239 : 1/240+1/120+1/80+1/60+1/40+1/30+1/24+1/20+1/16+1/15+1/12+1/10+1/8+1/6+1/5

Räuber-Beute-Stammbrüche

Aufgabe: Drei Räuber wollen ihre Beute aufteilen. Der zweite Räuber soll weniger als der erste und der dritte weniger als der zweite bekommen. Ihre Anteile sollen aber Stammbrüche der gesamten Beute sein, also 1/2, 1/3, 1/4, usw.. Wie viel bekommt jeder?

Lösung:

Wenn alle Räuber gleich viel erhielten, betrüge jeder Anteil 1/3. Da aber der erste Räuber mehr als die anderen bekommen soll, muss sein Anteil an der Beute 1/2 betragen. Würden die beiden anderen Räuber vom Rest jeweils die Hälfte bekommen, betrüge ihr Anteil 1/4. Da der zweite aber mehr als der dritte und weniger als der erste bekommen soll, kommt für ihn nur 1/3 in Frage. Für den dritten Räuber bleibt dann nur 1/6, was tatsächlich auch ein Stammbruch ist. Die Anteile und damit die Stammbrüche lauten also: 1/2, 1/3 und 1/6

Wollten vier Räuber die Beute nach den gleichen Regeln unter sich aufteilen, hätten sie die Auswahl unter insgesamt sechs Kombinationen von jeweils vier Stammbrüchen:

1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42 = 1   1/2 + 1/3 + 1/8 + 1/24 = 1   1/2 + 1/3 + 1/9 + 1/18 = 1
1/2 + 1/3 + 1/10 + 1/15 = 1   1/2 + 1/4 + 1/5 + 1/20 = 1   1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/12 = 1

Mit steigender Anzahl der Räuber vermehrt sich die Anzahl der Lösungen rasch. Fünf Räuber könnten schon auf 72 Arten jeweils fünf verschiedene Stammbrüche so kombinieren, dass ihre Summe eins ergäbe. Der Liste der Nennerkombinationen:

2 , 3 , 7 , 43 , 1806	2 , 3 , 7 , 44 , 924	2 , 3 , 7 , 45 , 630	2 , 3 , 7 , 46 , 483
2 , 3 , 7 , 48 , 336	2 , 3 , 7 , 49 , 294	2 , 3 , 7 , 51 , 238	2 , 3 , 7 , 54 , 189
2 , 3 , 7 , 56 , 168	2 , 3 , 7 , 60 , 140	2 , 3 , 7 , 63 , 126	2 , 3 , 7 , 70 , 105
2 , 3 , 7 , 78 , 91	2 , 3 , 8 , 25 , 600	2 , 3 , 8 , 26 , 312	2 , 3 , 8 , 27 , 216
2 , 3 , 8 , 28 , 168	2 , 3 , 8 , 30 , 120	2 , 3 , 8 , 32 , 96	2 , 3 , 8 , 33 , 88
2 , 3 , 8 , 36 , 72	2 , 3 , 8 , 40 , 60	2 , 3 , 8 , 42 , 56	2 , 3 , 9 , 19 , 342
2 , 3 , 9 , 20 , 180	2 , 3 , 9 , 21 , 126	2 , 3 , 9 , 22 , 99	2 , 3 , 9 , 24 , 72
2 , 3 , 9 , 27 , 54	2 , 3 , 9 , 30 , 45	2 , 3 , 10 , 16 , 240	2 , 3 , 10 , 18 , 90
2 , 3 , 10 , 20 , 60	2 , 3 , 10 , 24 , 40	2 , 3 , 11 , 14 , 231	2 , 3 , 11 , 15 , 110
2 , 3 , 11 , 22 , 33	2 , 3 , 12 , 13 , 156	2 , 3 , 12 , 14 , 84	2 , 3 , 12 , 15 , 60
2 , 3 , 12 , 16 , 48	2 , 3 , 12 , 18 , 36	2 , 3 , 12 , 20 , 30	2 , 3 , 12 , 21 , 28
2 , 3 , 14 , 15 , 35	2 , 4 , 5 , 21 , 420	2 , 4 , 5 , 22 , 220	2 , 4 , 5 , 24 , 120
2 , 4 , 5 , 25 , 100	2 , 4 , 5 , 28 , 70	2 , 4 , 5 , 30 , 60	2 , 4 , 5 , 36 , 45
2 , 4 , 6 , 13 , 156	2 , 4 , 6 , 14 , 84	2 , 4 , 6 , 15 , 60	2 , 4 , 6 , 16 , 48
2 , 4 , 6 , 18 , 36	2 , 4 , 6 , 20 , 30	2 , 4 , 6 , 21 , 28	2 , 4 , 7 , 10 , 140
2 , 4 , 7 , 12 , 42	2 , 4 , 7 , 14 , 28	2 , 4 , 8 , 9 , 72	2 , 4 , 8 , 10 , 40
2 , 4 , 8 , 12 , 24	2 , 4 , 9 , 12 , 18	2 , 4 , 10 , 12 , 15	2 , 5 , 6 , 8 , 120
2 , 5 , 6 , 9 , 45	2 , 5 , 6 , 10 , 30	2 , 5 , 6 , 12 , 20	3 , 4 , 5 , 6 , 20

Für sechs Räuber konnten mittels Computer 2035 Möglichkeiten berechnet werden, zum Beispiel als 6-Tupel der Nenner

1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/46 + 1/484 + 1/233772 = 1
1/3 + 1/4 + 1/6 + 1/10 + 1/12 + 1/15 = 1

2 , 3 , 7 , 46 , 490 , 33810   2 , 3 , 7 , 46 , 492 , 26404   2 , 3 , 7 , 47 , 395 , 779730
2 , 3 , 7 , 47 , 396 , 130284   2 , 3 , 7 , 47 , 399 , 37506   2 , 3 , 7 , 47 , 402 , 22043
2 , 3 , 7 , 47 , 420 , 6580   2 , 3 , 7 , 47 , 423 , 5922   2 , 3 , 7 , 47 , 434 , 4371
2 , 3 , 7 , 47 , 483 , 2162   2 , 3 , 7 , 48 , 337 , 113232   2 , 3 , 7 , 48 , 338 , 56784
2 , 3 , 7 , 48 , 339 , 37968   2 , 3 , 7 , 48 , 340 , 28560   2 , 3 , 7 , 48 , 342 , 19152
2 , 3 , 7 , 48 , 343 , 16464   2 , 3 , 7 , 48 , 344 , 14448   2 , 3 , 7 , 48 , 345 , 12880

2 , 3 , 7 , 48 , 348 , 9744	2 , 3 , 7 , 48 , 350 , 8400	2 , 3 , 7 , 48 , 352 , 7392
2 , 3 , 7 , 48 , 354 , 6608	2 , 3 , 7 , 48 , 357 , 5712	2 , 3 , 7 , 48 , 360 , 5040
2 , 3 , 7 , 48 , 364 , 4368	2 , 3 , 7 , 48 , 368 , 3864	2 , 3 , 7 , 48 , 372 , 3472
2 , 3 , 7 , 48 , 378 , 3024	2 , 3 , 7 , 48 , 384 , 2688	2 , 3 , 7 , 48 , 385 , 2640

Für sieben Räuber ergaben sich zum Beispiel

2 , 3 , 7 , 68 , 196 , 250 , 624750	2 , 3 , 7 , 69 , 189 , 249 , 103086
2 , 3 , 7 , 69 , 190 , 247 , 198835	2 , 3 , 7 , 69 , 196 , 238 , 76636
2 , 4 , 5 , 25 , 167 , 250 , 83500	2 , 4 , 5 , 25 , 168 , 248 , 65100
2 , 4 , 5 , 25 , 168 , 250 , 21000	2 , 4 , 5 , 25 , 169 , 245 , 828100
2 , 5 , 6 , 9 , 55 , 248 , 122760	2 , 5 , 6 , 9 , 55 , 249 , 41085
2 , 5 , 6 , 9 , 55 , 250 , 24750	2 , 5 , 6 , 9 , 56 , 230 , 57960
2 , 6 , 7 , 8 , 17 , 152 , 13566	2 , 6 , 7 , 8 , 17 , 153 , 8568
2 , 6 , 7 , 8 , 17 , 168 , 1428	2 , 6 , 7 , 8 , 17 , 238 , 408

Anomal kürzbare Brüche

Durch R.P.Boas wurde 1979 in "Mathematical Plums" folgendes Problem gestellt:
Gesucht sind alle Brüche mit zweistelligen Nenner und Zähler, die durch Wegstreichen einer gleichen Ziffer im Nenner und Zähler ihren Wert nicht verändern. Außer den trivialen Fällen 33/11 = 3/1 usw. existieren im Dezimalsystem genau 4 derartige anomal kürzbare Brüche:

16 / 64 = 1 / 4   26 / 65 = 2 / 5   19 / 95 = 1 / 5   49 / 98 = 1 / 2

und deren Reziproke.
Erweitert man die Fragestellung auf beliebige Positionssysteme zu verschiedenen Basen, so zeigt sich, dass für eine Primzahlbasis keine Lösung existiert, für Nichtprimzahlen jedoch mehrere. Bis zur Basis 36 sind die Ziffern größer als 9 in der üblichen Schreibweise (A=10, B=11, ...) angegeben. Für höhere Basen bedeutet ein Eintrag <xx> die Ziffer xx in diesem Positionssystem.

Basis	**Bruch**	**Dezimalbruch**	
4	13 / 32	7 / 14 = 1 / 2	Anzahl = 1
6	15 / 53	11 / 33 = 1 / 3	
6	25 / 54	17 / 34 = 1 / 2	Anzahl = 2
8	17 / 74	15 / 60 = 1 / 4	
8	37 / 76	31 / 62 = 1 / 2	Anzahl = 2
9	14 / 43	13 / 39 = 1 / 3	
9	28 / 86	26 / 78 = 1 / 3	Anzahl = 2
10	16 / 64	16 / 64 = 1 / 4	
10	26 / 65	26 / 65 = 2 / 5	
10	19 / 95	19 / 95 = 1 / 5	
10	49 / 98	49 / 98 = 1 / 2	Anzahl = 4
12	1B / B6	23 / 138 = 1 / 6	
12	2B / B8	35 / 140 = 1 / 4	
12	3B / B9	47 / 141 = 1 / 3	
12	5B / BA	71 / 142 = 1 / 2	Anzahl = 4

Geschichte der Bruchrechnung

Die Lehre von den gemeinen Brüchen und dem Rechnen mit ihnen ist das Werk der Inder (Brahmagupta, um 600). Von hier nahmen die Brüche ihren Weg über die Araber und die italienischen Kaufleute. Jedoch zeigt schon das Rechenbuch des Ahmes eine erstaunlich gut entwickelte Bruchrechnung. Die Babylonier nutzten Sechzigerbrüche. Die Griechen haben kein eigenes Bruchsystem entwickelt. Dürftig war das Bruchsystem der Römer, das eigentlich nur Brüche mit dem Nenner 12 kennt, abgeleitet von dem Gewichtsmaß 1 As = 12 Unzen. In Deutschland bürgerten sich die gemeinen Brüche erst im Mittelalter ein; es dauerte jedoch bis etwa 1700, ehe die Bruchrechnung zum Unterrichtsgegenstand allgemeinbildender Schulen wurde.
Als Begründer der Lehre von den Dezimalbrüchen gilt allgemein der holländische Kaufmann und Ingenieur Simon Stevin. In seinem Werk, das den Dezimalbrüchen in Anlehnung an das dekadische Positionssystem zum Durchbruch verhalf, forderte er u.a. die Einführung dezimal geteilter Münz-, Maß- und Gewichtssysteme in den Ländern.

Punktierbare Brüche (engl. dottable fractions)

Ein punktierbarer Bruch ist in gemeiner Dezimalbruch, z.B. 416/21879, für den es möglich ist, zwischen die Ziffern des Zählers und Nenners Multiplikationspunkte einzuführen, ohne dass sich der Wert ändert, zum Beispiel

$$416 / 21879 = 4 \cdot 16 /(2 \cdot 187 \cdot 9)$$

Lässt sich ein Bruch mit N Zählerziffern und D Nennerziffern mittels Multiplikationspunkte in n_1 n_2 ... n_k stellige Zählerfaktoren und d_1 d_2 ... d_m stellige Nennerfaktoren zerlegen, so wird vom Typ N/D und dem Untertyp n_1 n_2 ... n_k / d_1 d_2 ... d_m gesprochen. Das obere Beispiel ist vom Typ 3/5 und Untertyp 12/131.

Für einen Typ N/D sind theoretisch maximal $(2^{N-1} - 1)(2^{D-1} - 1)$ Untertypen möglich. Ein punktierbarer Bruch heißt zusätzlich primitiv, wenn er kleiner als 1 ist und sowohl Nenner als auch Zähler nicht als letzte Ziffer eine Null besitzen.

Zur Bestimmung punktierbarer Brüche sind nichtlineare diophantische Gleichungen zu lösen. Für den Untertyp 12/112 mit den Zählerziffern a,b,c und den Nennerziffern d,e,f,g ergibt sich

$$(100a + 10b + c) / (1000d + 100e + 10f + g) = a \cdot (10b + c) / (d \cdot e \cdot (10f + g))$$

die diophantische Gleichung

$$1000adef + 100adeg + 100bdef + 10bdeg + 10cdef + cdeg = 10000abd + 1000acd + 1000abe + 100aec + 100abf + 10acf$$

für welche alle natürlichen Lösungen zu suchen sind, wobei a, c, d und g zwischen 1 und 9, b, e und f zwischen 0 und 9 liegen.

Durch Computereinsatz ermittelt man zum Beispiel für den Typ 3/3 die möglichen Untertypen

Untertyp	Anzahl der Brüche	Untertyp	Anzahl der Brüche	Untertyp	Anzahl der Brüche
12 / 12	8	12 / 21	12	12 / 111	37
21 / 12	23	21 / 111	17	111 / 12	16
111 / 21	1	111 / 111	59		

Insgesamt findet man 173 Möglichkeiten und da einige Brüche mehrfach auftreten genau 156 primitive punktierbare Brüche des Typs 3/3. Überraschend ist, dass es keinen Untertyp 21/21 gibt. Auch für andere Typen D/N gibt es nicht auftretende Untertypen:

N	D	fehlende Untertypen	N	D	fehlende Untertypen
2	2	keine	2	3	keine
2	4	keine	2	5	11/41
2	6	11/51, 11/411	3	3	21/21
3	4	21/31	3	5	21/41, 12/41, 111/41
4	4	31/31, 121/31, 1111/31	4	5	31/41, 31/32, 11111/41
5	5	32/41, 32/32, 41/41, 41/32, 41/311, 41/11111, 311/41, 311/32, 1121/41, 2111/41, 11111/41			

Für die Anzahl primitiver punktierbarer Brüche findet man

N=	2	3	4	5
D=2	7			
3	53	156		
4	127	1219	3364	
5	323	2856	22754	58472
6	458			

Punktierbare Brüche sind sehr selten. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bruch mit einem fünfziffrigen Zähler und fünfziffrigen Nenner punktierbar ist, beträgt nur 0.00002. Die nachfolgende Aufstellung enthält alle primitiven punktierbaren Brüche des Typs 3/3:

Untertyp 21/12

124/248 = 12*4/2*48	128/784 = 12*8/7*84	147/675 = 14*7/6*75
147/972 = 14*7/9*72	165/264 = 16*5/2*64	166/664 = 16*6/6*64
184/345 = 18*4/3*45	186/372 = 18*6/3*72	189/896 = 18*9/8*96
198/495 = 19*8/4*95	199/995 = 19*9/9*95	214/642 = 21*4/6*42
217/775 = 21*7/7*75	243/432 = 24*3/4*32	248/496 = 24*8/4*96
249/996 = 24*9/9*96	266/665 = 26*6/6*65	285/456 = 28*5/4*56
424/742 = 42*4/7*42	486/864 = 48*6/8*64	499/998 = 49*9/9*98
545/654 = 54*5/6*54	637/975 = 63*7/9*75	

Untertyp 21/111

102/255 = 10*2/2*5*5	123/984 = 12*3/9*8*4	153/357 = 15*3/3*5*7

164/287 = 16*4/2*8*7 166/498 = 16*6/4*9*8 181/362 = 18*1/3*6*2
182/364 = 18*2/3*6*4 182/637 = 18*2/6*3*7 183/366 = 18*3/3*6*6
184/368 = 18*4/3*6*8 204/459 = 20*4/4*5*9 243/648 = 24*3/6*4*8
322/483 = 32*2/4*8*3 324/486 = 32*4/4*8*6 326/489 = 32*6/4*8*9
424/795 = 42*4/7*9*5 565/678 = 56*5/6*7*8

Untertyp 12/21

142/213 = 1*42/21*3 165/264 = 1*65/26*4 166/664 = 1*66/66*4
196/245 = 1*96/24*5 198/495 = 1*98/49*5 199/995 = 1*99/99*5
235/423 = 2*35/42*3 266/665 = 2*66/66*5 284/426 = 2*84/42*6
421/842 = 4*21/84*2 484/847 = 4*84/84*7 499/998 = 4*99/99*8

Untertyp 12/12

132/825 = 1*32/8*25 172/645 = 1*72/6*45 175/448 = 1*75/4*48
175/945 = 1*75/9*45 225/324 = 2*25/3*24 325/624 = 3*25/6*24
448/945 = 4*48/9*45 675/972 = 6*75/9*72

Untertyp 12/111

102/612 = 1*02/6*1*2 105/315 = 1*05/3*1*5
106/371 = 1*06/3*7*1 108/162 = 1*08/1*6*2 108/324 = 1*08/3*2*4
116/145 = 1*16/1*4*5 116/435 = 1*16/4*3*5 118/236 = 1*18/2*3*6
118/944 = 1*18/9*4*4 125/175 = 1*25/1*7*5 148/666 = 1*48/6*6*6
164/287 = 1*64/2*8*7 204/714 = 2*04/7*1*4 205/615 = 2*05/6*1*5
208/624 = 2*08/6*2*4 215/344 = 2*15/3*4*4 218/436 = 2*18/4*3*6
218/763 = 2*18/7*6*3 225/864 = 2*25/8*6*4 232/348 = 2*32/3*4*8
236/295 = 2*36/2*9*5 256/768 = 2*56/7*6*8 305/915 = 3*05/9*1*5
306/816 = 3*06/8*1*6 308/924 = 3*08/9*2*4 315/735 = 3*15/7*3*5
318/636 = 3*18/6*3*6 324/864 = 3*24/8*6*4 345/368 = 3*45/3*6*8
408/918 = 4*08/9*1*8 416/728 = 4*16/7*2*8 418/836 = 4*18/8*3*6
432/648 = 4*32/6*4*8 475/798 = 4*75/7*9*8 524/655 = 5*24/6*5*5
632/948 = 6*32/9*4*8 742/795 = 7*42/7*9*5

Untertyp 111/21

388/485 = 3*8*8/48*5

Untertyp 111/12

123/205 = 1*2*3/2*05 129/215 = 1*2*9/2*15
164/615 = 1*6*4/6*15 195/325 = 1*9*5/3*25 195/624 = 1*9*5/6*24
229/916 = 2*2*9/9*16 249/332 = 2*4*9/3*32 265/424 = 2*6*5/4*24
273/416 = 2*7*3/4*16 288/648 = 2*8*8/6*48 328/615 = 3*2*8/6*15
378/648 = 3*7*8/6*48 466/932 = 4*6*6/9*32 492/615 = 4*9*2/6*15
498/664 = 4*9*8/6*64 693/924 = 6*9*3/9*24

Untertyp 111/111

116/232 = 1*1*6/2*3*2 123/615 = 1*2*3/6*1*5
124/217 = 1*2*4/2*1*7 126/525 = 1*2*6/5*2*5 127/762 = 1*2*7/7*6*2
128/672 = 1*2*8/6*7*2 129/344 = 1*2*9/3*4*4 135/144 = 1*3*5/1*4*4
138/184 = 1*3*8/1*8*4 138/345 = 1*3*8/3*4*5 139/973 = 1*3*9/9*7*3
145/435 = 1*4*5/4*3*5 147/945 = 1*4*7/9*4*5 148/185 = 1*4*8/1*8*5
161/322 = 1*6*1/3*2*2 162/324 = 1*6*2/3*2*4 163/326 = 1*6*3/3*2*6
164/328 = 1*6*4/3*2*8 164/492 = 1*6*4/4*9*2 165/264 = 1*6*5/2*6*4
166/664 = 1*6*6/6*6*4 168/448 = 1*6*8/4*4*8 168/784 = 1*6*8/7*8*4
178/267 = 1*7*8/2*6*7 182/819 = 1*8*2/8*1*9 183/244 = 1*8*3/2*4*4
183/427 = 1*8*3/4*2*7 184/345 = 1*8*4/3*4*5 186/248 = 1*8*6/2*4*8
186/465 = 1*8*6/4*6*5 187/748 = 1*8*7/7*4*8 198/495 = 1*9*8/4*9*5
199/995 = 1*9*9/9*9*5 216/432 = 2*1*6/4*3*2 218/981 = 2*1*8/9*8*1
236/944 = 2*3*6/9*4*4 244/427 = 2*4*4/4*2*7 248/465 = 2*4*8/4*6*5
266/665 = 2*6*6/6*6*5 273/728 = 2*7*3/7*2*8 276/575 = 2*7*6/5*7*5
285/684 = 2*8*5/6*8*4 288/378 = 2*8*8/3*7*8 316/632 = 3*1*6/6*3*2
318/424 = 3*1*8/4*2*4 318/742 = 3*1*8/7*4*2 327/872 = 3*2*7/8*7*2
328/492 = 3*2*8/4*9*2 364/637 = 3*6*4/6*3*7 412/721 = 4*1*2/7*2*1
416/832 = 4*1*6/8*3*2 424/742 = 4*2*4/7*4*2 436/763 = 4*3*6/7*6*3
448/784 = 4*4*8/7*8*4 455/546 = 4*5*5/5*4*6 484/847 = 4*8*4/8*4*7
499/998 = 4*9*9/9*9*8 545/654 = 5*4*5/6*5*4 618/824 = 6*1*8/8*2*4

Die zweite Tabelle enthält für ausgewählte Typen und Untertypen jeweils ein existierendes Beispiel:

Typ 2/2:	14/63 = 1*4/6*3		
11/11			
Typ 2/3:	28/126 = 2*8/12*6	11/12	13/325 = 1*3/3*25
11/21			
11/111	13/195 = 1*3/1*9*5		
Typ 2/4:	79/2528 = 7*9/252*8	11/22	15/1734 = 1*5/17*34
11/31			
11/211	13/1664 = 1*3/16*6*4	11/13	15/3375 = 1*5/3*375
11/121	13/3328 = 1*3/3*32*8	11/112	11/2816 = 1*1/2*8*16
11/1111	14/2688 = 1*4/2*6*8*8		
Typ 2/5:	-	11/32	27/18252 = 2*7/182*52
11/41			
11/311	43/14147 = 4*3/141*4*7	11/23	11/91091 = 1*1/91*091
11/221	12/53424 = 1*2/53*42*4	11/212	11/11616 = 1*1/11*6*16
11/2111	15/96768 = 1*5/96*7*6*8	11/14	17/74375 = 1*7/7*4375
11/131	13/64116 = 1*3/6*411*6	11/122	14/16275 = 1*4/1*62*75
11/1211	21/33075 = 2*1/3*30*7*5	11/113	12/37296 = 1*2/3*7*296
11/1121	13/86528 = 1*3/8*6*52*8	11/1112	12/48384 = 1*2/4*8*3*84
11/11111	22/78848 = 2*2/7*8*8*4*8		
Typ 2/6:	-	11/42	58/138069 = 5*8/1380*69
11/51			
11/411	-	11/33	13/231231 = 1*3/231*231
11/321	11/137137 = 1*1/137*13*7	11/312	11/191191 = 1*1/191*1*91
11/3111	14/123984 = 1*4/123*9*8*4	11/24	13/312325 = 1*3/31*2325
11/231	11/119911 = 1*1/11*991*1	11/222	13/315146 = 1*3/31*51*46
11/2211	13/156975 = 1*3/15*69*7*5	11/213	11/111925 = 1*1/11*1*925
11/2121	18/138996 = 1*8/13*8*99*6	11/2112	18/149688 = 1*8/14*9*6*88
11/21111	31/218736 = 3*1/21*8*7*3*6	11/15	11/309375 = 1*1/3*09375
11/141	14/155568 = 1*4/1*5556*8	11/132	11/135135 = 1*1/1*351*35
11/1311	11/370128 = 1*1/3*701*2*8	11/123	11/111925 = 1*1/1*11*925
11/1221	13/297596 = 1*3/2*97*59*6	11/1212	12/141696 = 1*2/1*41*6*96
11/12111	32/297984 = 3*2/2*97*9*8*4	11/114	14/275625 = 1*4/2*7*5625
11/1131	12/774396 = 1*2/7*7*439*6	11/1122	22/898128 = 2*2/8*9*81*28
11/11211	11/437976 = 1*1/4*3*79*7*6	11/1113	11/893376 = 1*1/8*9*3*376
11/11121	22/869616 = 2*2/8*6*9*61*6	11/11112	21/777924 = 2*1/7*7*7*9*24
11/111111	41/247968 = 4*1/2*4*7*9*6*8		
Typ 3/3:	-	21/12	124/248 = 12*4/2*48

21/21			
21/111	102/255 = 10*2/2*5*5	12/21	142/213 = 1*42/21*3
12/12	132/825 = 1*32/8*25	12/111	102/612 = 1*02/6*1*2
111/21	388/485 = 3*8*8/48*5	111/12	123/205 = 1*2*3/2*05
111/111	116/232 = 1*1*6/2*3*2		
Typ 3/4:	-	21/22	105/6048 = 10*5/60*48
21/31			
21/211	101/2525 = 10*1/25*2*5	21/13	104/1625 = 10*4/1*625
21/121	103/5665 = 10*3/5*66*5	21/112	101/2525 = 10*1/2*5*25
21/1111	103/5768 = 10*3/5*7*6*8	12/31	285/1026 = 2*85/102*6
12/22	119/7616 = 1*19/76*16	12/211	101/1111 = 1*01/11*1*1
12/13	105/6048 = 1*05/6*048	12/121	101/1111 = 1*01/1*11*1
12/112	101/1111 = 1*01/1*1*11	12/1111	103/1236 = 1*03/1*2*3*6
111/31	187/1683 = 1*8*7/168*3	111/22	117/2106 = 1*1*7/21*06
111/211	117/5616 = 1*1*7/56*1*6	111/13	127/7112 = 1*2*7/7*112
111/121	114/7182 = 1*1*4/7*18*2	111/112	115/9315 = 1*1*5/9*3*15
111/1111	114/1824 = 1*1*4/1*8*2*4		
Typ 3/5:	-	21/32	115/13248 = 11*5/132*48
21/41			
21/311	115/18768 = 11*5/187*6*8	21/23	126/72576 = 12*6/72*576
21/221	105/76608 = 10*5/76*60*8	21/212	121/51425 = 12*1/51*4*25
21/2111	122/10675 = 12*2/10*6*7*5	21/14	113/14125 = 11*3/1*4125
21/131	101/45652 = 10*1/4*565*2	21/122	112/18144 = 11*2/1*81*44
21/1211	122/96075 = 12*2/9*60*7*5	21/113	101/12625 = 10*1/1*2*625
21/1121	123/49815 = 12*3/4*9*81*5	21/1112	121/45375 = 12*1/4*5*3*75
21/11111	141/17766 = 14*1/1*7*7*6*6	12/41	-
12/32	147/37632 = 1*47/376*32	12/311	119/13328 = 1*19/133*2*8
12/23	115/11132 = 1*15/11*132	12/221	116/19285 = 1*16/19*28*5
12/212	105/28224 = 1*05/28*2*24	12/2111	105/21168 = 1*05/21*1*6*8
12/14	156/24375 = 1*56/2*4375	12/131	103/14111 = 1*03/1*411*1
12/122	108/12636 = 1*08/1*26*36	12/1211	101/21816 = 1*01/2*18*1*6
12/113	105/16128 = 1*05/1*6*128	12/1121	103/46144 = 1*03/4*6*14*4
12/1112	105/77175 = 1*05/7*7*1*75	12/11111	101/43632 = 1*01/4*3*6*3*2
111/41	-	111/32	154/13013 = 1*5*4/130*13
111/311	117/11232 = 1*1*7/112*3*2	111/23	126/12096 = 1*2*6/12*096

111/221	118/58174 = 1*1*8/58*17*4	111/212	114/12312 = 1*1*4/12*3*12
111/2111	112/17136 = 1*1*2/17*1*3*6	111/14	135/91125 = 1*3*5/9*1125
111/131	115/11224 = 1*1*5/1*122*4	111/122	114/77805 = 1*1*4/7*78*05
111/1211	118/23364 = 1*1*8/2*33*6*4	111/113	114/21375 = 1*1*4/2*1*375
111/1121	115/13248 = 1*1*5/1*3*24*8	111/1112	115/14352 = 1*1*5/1*4*3*52
111/11111	111/42624 = 1*1*1/4*2*6*2*4		
Typ 3/6: 21/51	-	21/42	158/114076 = 15*8/1140*76
21/411	245/184877 = 24*5/1848*7*7	21/33	104/385385 = 10*4/385*385
21/321	104/557557 = 10*4/557*55*7	21/312	104/577577 = 10*4/577*5*77
21/3111	106/470799 = 10*6/470*7*9*9		

Für alle Zahlenmystiker: Es existieren genau sieben primitive punktierbare „Beast"-Brüche mit N, D ≤ 5.
148/666 (Untertyp 12/111), drei des Typs 3/4 sind 666/1998, 666/4995 (beide Untertyp 111/1111) und 666/3478 (Untertyp 111/121). Drei Brüche des Typs 3/5 sind 666/27972 (Untertyp 111/1112), 666/38665 (Untertyp 111/221), und 666/64676 des Untertyps 111/122.

Pandigitaler Bruch

Ein Bruch, der in Zähler und Nenner jedes Ziffer von 1 bis 9 genau einmal enthält, heißt pandigitaler Bruch. Gesucht werden vor allem pandigitale Brüche, die gekürzt Stammbrüche ergeben.
Die Tabelle enthält alle solche pandigitalen Brüche bis 1/12.

Stammbruch	Anzahl	pandigitaler Bruch
1/2	12	6729 / 13458, 6792 / 13584, 6927 / 13854, 7269 / 14538, 7293 / 14586, 7329 / 14658, 7692 / 15384, 7923 / 15846, 7932 / 15864, 9267 / 18534, 9273 / 18546, 9327 / 18654
1/3	2	5823 / 17469, 5832 / 17496
1/4	4	3942 / 15768, 4392 / 17568, 5796 / 23184, 7956 / 31924
1/5	12	2697 / 13485, 2769 / 13845, 2937 / 14685, 2967 / 14835, 2973 / 14865, 3297 / 16485, 3729 / 18645, 6297 / 31495, 7629 / 38145, 9237 / 46185, 9627 / 48135, 9723 / 48615
1/6	3	2943 / 17658, 4653 / 27918, 5697 / 34182
1/7	7	2394 / 16758, 2637 / 18459, 4527 / 31689, 5274 / 36918, 5418 / 37926, 5976 / 41832, 7614 / 53298
1/8	46	3187 / 25496, 4589 / 36712, 4591 / 36728, 4689 / 37512, 4691 / 37528, 4769 / 38152, 5237 / 41896, 5371 / 42968, 5789 / 46312, 5791 / 46328, 5839 / 46712, 5892 / 47136, 5916 / 47328, 5921 / 47368, 6479 / 51832, 6741 / 53928, 6789 / 54312, 6791 / 54328, 6839 / 54712, …
1/9	3	6381 / 57429, 6471 / 58239, 8361 / 75249
1/10	0	-
1/11	0	-
1/12	4	3816 / 45792, 6129 / 73548, 7461 / 89532, 7632 / 91584

Man kennt für die Brüche 1/1, 1/2, 1/3, … genau
0, 12, 2, 4, 12, 3, 7, 46, 3, 0, 0, 4, 3, 8, 2, 3, 27, 1, 2, 0, 0, 1, 3, 2, 0, 9, 4, 1, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 5, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 5, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, …
pandigitale Brüche.

Außer der Betrachtung einzelner pandiagonaler Brüche untersucht man auch Summen von Brüchen, die alle Ziffern von 0 bis 9 genau einmal enthalten, und fragt nach dem kleinst möglichen natürlichen Ergebnis.
Für A/BC + D/EF + G/HI = 1
wobei BC, EF und HI zweistellige Zahlen darstellen, erhält man eine Lösung (A,B,C,D,E,F,G,H,I) = (5,3,4,7,6,8,9,1,2).
Durch Gary Darby wurden weitere Summen geprüft. Durch kontinuierliches Testen aller Möglichkeiten ergaben sich

A/(B·C) + D/(E·F) + G/(H·I) f(A,B,C,D,E,F,G,H,I) = f(1,3,6,5,8,9,7,2,4) = 1

(A/B)·C + (D/E)·F + (G/H)·I f(A,B,C,D,E,F,G,H,I) = f(1,2,4,3,9,7,5,6,8) = 11
f(A,B,C,D,E,F,G,H,I) = f(1,2,5,3,9,6,4,8,7) = 8
f(A,B,C,D,E,F,G,H,I) = f(1,4,5,2,8,7,3,9,6) = 5

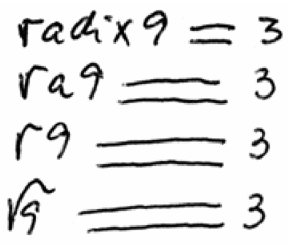
(A/B)^C + (D/E)^F + (G/H)^I f(A,B,C,D,E,F,G,H,I) = f(2,1,6,8,4,7,9,3,5) = 435
f(A,B,C,D,E,F,G,H,I) = f(4,2,7,5,8,1,9,6,3) = 132
f(A,B,C,D,E,F,G,H,I) = f(5,9,1,7,3,2,8,4,6) = 70

Spiegelzahl
Eine Zahl heißt Spiegelzahl, wenn sie von vorne und hinten gelesen dieselbe Zahl ergibt.
Beispiele: 13731, 2552, 744939447

Aufgabe
Wie viele dreistellige und wie viele vierstellige Spiegelzahlen gibt es? Berechne die Summe aller dreistelligen und die Summe aller vierstelligen Spiegelzahlen. (Fürther Mathematikolympiade 1995, Klasse 5, 1.Stufe).
Lösung
Dreistellige Spiegelzahlen haben die Form xyx mit x von 1 bis 9, y von 0 bis 9. Es gibt 90 Stück.
(101+111+121+131+...191)+(202+212+222+...+292)+....999=
=(101+101+10+101+20+101+30+...101+90)+(202+202+10+202+20+...202+90)+...=
=10*101+10*(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+10*202+10*(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+....=
=10*101+10*45+10*202+10*45+...10*909+10*45=
=10*101*(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+10*45*9=
=10*101*45+10*45*9=45450+4050=49500 ... Summe der dreistelligen Spiegelzahlen
Vierstellige Spiegelzahlen haben die Form xyyx mit x von 1 bis 9, y von 0 bis 9. Auch hier gibt es 90 Stück.
(1001+1111+1221+1331+...1991)+(2002+2112+...)+...9999=
=(1001+1001+110+1001+220+...1001+990)+(2002+2002+110+...2002+990)+...=
=10*1001+110*(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+10*2002+110*(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+...=
=10*1001*(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+110*45*9=
=10*1001*45+110*45*9=450450+44550=495000 ... Summe der vierstelligen Spiegelzahlen
Anmerkung: Als Spiegelzahlen werden auch Zahlen mit folgender Eigenschaft bezeichnet

$12^2 = 144$ und $21^2 = 441$	$102^2=10404$ und $201^2=40401$	$1012^2=1024144$ und $2101^2=4414201$
$13^2 = 169$ und $31^2 = 961$	$103^2=10609$ und $301^2=90601$	$1112^2=1236544$ und $2111^2=4456321$
	$112^2=12544$ und $211^2=44521$	$1212^2=1468944$ und $2121^2=4498641$
	$113^2=12769$ und $311^2=96721$	$2012^2=4048144$ und $2102^2=4418404$

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen



Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

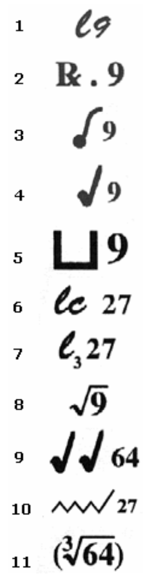
$a^k = a * a * \ldots * a$ (k Faktoren, $k > 1$, $k \in N$)
$0^k = 0$, $\forall\ k \neq 0$, 0^0 ist nicht erklärt !
$a^1 = a$ $a^0 = 1$ $a^{-k} = 1/a^k$

Potenzen mit rationalen Exponenten / Wurzeln

Definition: $\sqrt[n]{a}$, $a \geq 0$, $n \in N$, $n \geq 1$, ist diejenige nichtnegative reelle Zahl b, für die $b^n = a$ gilt.
$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, für $n \in N$, $n > 0$, $a \in R$, $a \geq 0$
Das Wurzelzeichen √ entstand aus einem r, dem ersten Buchstaben von lateinisch radix = "Wurzel". siehe Abbildung

Entstehung des Wurzelzeichens

Jahr Autor Schreibweise Quelle
1145 Palto De Trivoli latus quadratum 9 Liber Embadorum
1427 Petri Ramus Abb. 1 Arithmetica Libri duo et Geometrie
1465 Regiomontanus Radix quadratum 9 Carta de Regiomontanus
1490 Johann Widman ra. 9 Deutsche Algebra
1494 Luca Pacioli Abb. 2 Summa de Arithmetica
1520 Andreas Alexander Abb. 3 Algebrae Arabis Arithmetici Göttingen Codex
1525 Christoff Rudolff Abb. 4 Coss
1550 Raffaele Bombelli R.q.9 L'Algebra 1572
1577 Guillaume Gosselin L 9 De Arte Magna
1580 Bernardus Salignacus Abb. 1 Algebrae Libri
1591 John Napier Abb. 5 De Arte Logistica
1592 Lazarus Schonero Abb. 6, latus cubicum Arithmetica Logarithmica
1624 Henry Briggs Abb. 7 Arithmetica Logarithmica
1635 James Hume Quarré de quarré 16 Algèbre
1637 René Descartes Abb. 8 La Géométrie
1670 Johann Caramuel Abb. 9, Radix cubica Joannis Caramvelis Mathesis Biceps
1696 Samuel Jeake Abb. 10, 3.Wurzel Arithmetick
1732 Simon de la Loubère Abb. 11, racine cubique De La Résolution Des Équations



Potenzgesetze

Gültigkeitsbereich: $a,b,m,n \in R$ und $a,b>0$ oder $m,n \in R$, $a,b \in R\backslash\{0\}$

1. Basen gleich

$a^m * a^n = a^{m+n}$ $a^m / a^n = a^{m-n}$
Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.
Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

2. Exponenten gleich

$a^m * b^m = (a * b)^m$ $a^m / b^m = (a / b)^m$
Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und der Exponenten gleich bleibt.
Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und der Exponenten gleich bleibt.

3. Zwei Exponenten

$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$
Potenzen werden potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

Näherungsformeln für a >> b

$\sqrt{a^2 + b} \approx a + b/(2a)$ $\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + b/(3a^2)$
Anmerkung: Die größte mit 3 Ziffern und den Grundrechenarten aufschreibbare Zahl ist $9^{(9^\wedge 9)} = 9^{387420489}$. Diese Zahl hat

369693100 Stellen, beginnt mit der Ziffernfolge 428124773175747048036511046881... und würde rund 33 Bücher mit je 800 Seiten und 14000 Ziffern je Seite füllen oder eine Streifen Papier, der etwa von Leipzig bis Helsinki reicht.

Allgemeine Beziehungen

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ $\quad x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ $\quad x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Null hoch Null

In der Definition der Potenz wird $a^0 = 1$ für alle $a > 0$ gesetzt, wodurch

$0^0 = 1$

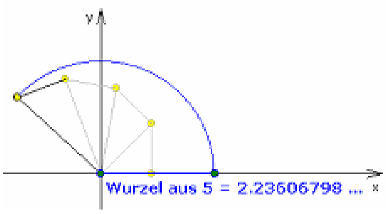
nicht gilt! Da 0^x für alle positiven x den Wert 0 hat, wäre auch der Wert 0 denkbar. Wie die Festlegung, dass 1 keine Primzahl ist, ist die Festlegung des Wertes von 0^0 eine Ansichtssache.

Bis Anfang des 19.Jahrhunderts setzten Mathematiker $0^0 = 1$, ohne diese Festlegung genauer zu hinterfragen. Augustin Louis Cauchy listete allerdings 0^0 gemeinsam mit anderen Ausdrücken wie 0/0 in einer Tabelle von unbestimmten Ausdrücken.
Er wies daraufhin, dass man zu jeder reellen Zahl $w \geq 0$ Funktionen f, g so angeben kann, dass $f(0) = g(0) = 0$ und

$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = w$

ist. Grenzwertargumente sind zur Festlegung von 0^0 somit ungeeignet.
1833 veröffentlichte Guillaume Libri eine Arbeit, in der er $0^0 = 1$ präsentierte. Zur Verteidigung von Libri veröffentlichte August Ferdinand Möbius einen Beweis seines Lehrers Johann Friedrich Pfaff, der im Wesentlichen zeigte, dass $\lim_{x\to 0+} 0^0 = 1$ ist. Weitere Ausführungen zu Grenzwerten waren aber fehlerhaft.
In der Folge verstummte die Kontroverse und in Analysislehrbüchern verbreitete sich immer mehr die Konvention, 0^0 undefiniert zu lassen.

Donald Ervin Knuth lehnte 1992 die Schlussfolgerung entschieden ab, dass 0^0 undefiniert gelassen wird. Wenn man $0^0 = 1$ nicht voraussetzen kann, verlangen viele mathematische Theoreme wie z.B. der binomische Satz $(x+y)^n$ eine Sonderbehandlung für die Fälle $x = 0$ oder $y = 0$.
In der Potenzreihe für die Exponentialfunktion $e^x = \Sigma_{x=0}^{\infty} x^n / n!$ erweist sich an der Stelle $x = 0$ die Idee $0^0 = 1$ als sinnvoll.
Die Konvention $0^0 = 1$ ist für einige Anwendungen aus praktischen Gründen sinnvoll, da sie die Formulierung der mathematischen Ausdrücke vereinfacht.
Im Allgemeinen wird aber $0^0 = 1$ nicht anerkannt, dieser Ausdruck gilt als unbestimmt.
Nutzt man $0^0 = 1$, so bedeutet dies aber keineswegs, dass die Funktion x^y an der Stelle $x = y = 0$ stetig wäre.



Konstruktion irrationaler Wurzeln

Spezielle irrationale Zahlen, (nicht natürliche) Wurzeln aus natürlichen Zahlen, können mit Hilfe des Satzes von Pythagoras konstruiert werden.
Nutzt man für die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks die Länge 1, d.h. $c^2 = 1^2 + 1^2$, so erhält man für die Länge der Hypotenuse die irrationale Länge $\sqrt{2}$. Konstruiert man nun auf dieser Hypotenuse ein weiteres rechtwinkliges Dreieck, so dass diese Hypotenuse zur Kathete wird und die zweite Kathete erneut die Länge 1 hat, so ergibt sich für die Hypotenuse des neuen Dreiecks $c^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3^2$ und somit die Länge $\sqrt{3}$. Kontinuierliches Fortsetzen des Verfahrens erzeugt so alle Wurzeln $\sqrt{n}$ natürlicher Zahlen.

Iteratives Wurzelziehen

Schrittweises Wurzelziehen der zweiten, dritten, vierten Wurzel usw. ...
Für die n-te Wurzel einer reellen Zahl $a > 0$ gilt; nachdem Newton-Verfahren :
1. Bestimmung einer Näherungslösung des Polynoms $x^n - a$
2. Iterative Berechnung von : $x_{k+1} = x_k - [(x^n_k - a) / (n\, x^{n-1}_k)] = [(n-1)\, x^n_k + a] / (n\, x^{n-1}_k)$

Die Folge der x_k ist für einen Startwert x_1 mit $x^n_1 > a$ streng monoton fallend und konvergiert gegen die gesuchte n-te Wurzel aus a. Beispiel: Iteratives Wurzelziehen der Quadratwurzel von 2 bei Startwert 1:

Iteration Näherung

Iteration	Näherung
1	1.50000000000000000000000000000000000000000000000000 = 3 / 2
2	1.41666666666666666666666666666666666666666666666667 = 17 / 12
3	1.41421568627450980392156862745098039215686274509803922 = 577 / 408
4	1.41421356237468991062629557889013491011655962211574404 = 665857 / 470832
5	1.41421356237309504880168962350253024361498192577619743
6	1.41421356237309504880168872420969807856967187537723400
7	1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807
8	1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807

Das iterative Wurzelziehen einer Quadratwurzel war schon vor 4000 Jahren babylonischen Mathematikern bekannt.

Für die Quadratwurzel aus 2 ergeben sich als Näherungsbrüche: 3/2, 17/12, 577/408, 665857/470832, 886731088897 / 627013566048, 1572584048032918633353217 / 1111984844349868137938112, 4946041176255201878775086487573351061418968498177 / 3497379255757941172020851852070562919437964212608, 48926646634423881954586808839856694558492182258668537145547700898547222910968507268117381704646657 / 34596363615919099765318545389014861517389860071988342648187104766246565694525469768325292176831232, ...
Die Tabelle enthält die ersten rationalen Näherungsbrüche für √n:

Iteration	n = 3	n = 5	n = 7	n = 10
1.	2 / 1	3 / 1	4 / 1	11 / 2
2.	7 / 4	7 / 3	23 / 8	161 / 44
3.	97 / 56	47 / 21	977 / 368	45281 / 14168
4.	18817 / 10864	2207 / 987	1902497 / 719072	4057691201 / 1283082416
5.	708158977 / 408855776	4870847 / 2178309	7238946623297 / 2736064645568	32927862745156792961 / 10412704459122043232
6.	1002978273411373057 / 579069776145402304	23725150497407 / 10610209857723	104804696428033056657448577 / 39612451854313553433195392	2168488286494085478154... 297235187389205761 / 6857362064717054830228... 31680917430579904

Beispielprogramm zur Bestimmung der Näherungsbrüche für √n bis zur q.ten Iteration:

```
function w2(q,n:integer):integer;
var g,i,a,b,aalt:integer;
begin    a:=1; b:=1;
   for i:=1 to q do       aalt:=a;       a:=a*a+n*b*b;       b:=2*aalt*b;       g:=gcd(a,b);
        a:=a div g;
                b:=b div g;    writeln(i,".Näherungsbruch für Wurzel ",n);
        writeln("Zähler");    writeln(a);    writeln("Nenner");          writeln(b);
end; end;
```

Quadratwurzeln

n	√n	n	√n	n	√n	n	√n
2	1.41421356	3	1.73205081	4	2.00000000	5	2.23606798
6	2.44948974	7	2.64575131	8	2.82842712	9	3.00000000
10	3.16227766	11	3.31662479	12	3.46410161	13	3.60555128
14	3.74165739	15	3.87298335	16	4.00000000	17	4.12310562
18	4.24264069	19	4.35889894	20	4.47213595	21	4.58257569
22	4.69041576	23	4.79583152	24	4.89897949		

Heronsche Wurzelformel, Näherungsberechnung von n.ten-Wurzeln

Die numerische Berechnung von Quadratwurzeln hat eine lange Geschichte. Vor etwa 4000 Jahren kannten die Sumerer und Babylonier die iterative Gleichung $x_{n+1} = ½ (x_n + a/x_n)$ zur Berechnung der Quadratwurzel von a. Verallgemeinert man diese Formel auf beliebige n.te Wurzel, so erhält man die schon dem griechischen Mathematiker Heron von Alexandria (um 130) bekannte einfache Rechenvorschrift

$$x_{n+1} = 1/p\ ((p-1)\ x_n + a/x_n^{p-1})$$

Babylonisches Wurzelziehen

Vor 4000 Jahren kannten die Sumerer und Babylonier die iterative Gleichung $x_{n+1} = 1/2\ (x_n + a/x_n)$
zur Berechnung der Quadratwurzel von a. Diese Beziehung wird heute nach Heron benannt.
Alternativ dazu wurde von babylonischen Mathematikern eine Quadratwurzel zwischen 0 und 2 durch folgendes Verfahren berechnet. Soll aus a = 1-x die Quadratwurzel w = 1-y ermittelt werden, wird

$$(1 - y)^2 = 1 - 2y + y^2 = 1 - x \qquad 2y = x + y^2$$

und als Iterationsformel $y_{n+1} = 1/2\ (x + y_n^2)$
Beginnend mit $y_1 = 0$ können damit Quadratwurzeln approximativ berechnet werden.
Allerdings konvergiert das Verfahren nur, wenn y zwischen -1 und 1 liegt.

Beispiel: Gesucht ist $\sqrt{(1/2)}$. Mit 1/2 = 1 - 1/2 wird x = 1/2 und die Rekursionsformel zu

$$y_{n+1} = 1/2\ (1/2 + y_n^2) = 1/4 + 1/2\ y_n^2$$

Die ersten Näherungswerte sind

$$y_2 = 0{,}25\ ;\ y_3 = 0{,}28125\ ;\ \dots\ ;\ y_9 = 0{,}29289$$

Mit w = 1-y wird $w_9 = 0{,}70711$; eine gute Näherung für $\sqrt{(1/2)}$.
Scheinbar versagt das Verfahren zum Beispiel bei $\sqrt{10}$. Mit $3\ \sqrt{(10/9)} = \sqrt{10}$ rechnet man mit x = -1/9 und multipliziert die Näherungswurzel am Ende mit 3.

Das Verfahren des babylonischen Wurzelziehens kann auch alternativ genutzt werden. Dazu wird die Zahl w in die Form $a^2 + b$ gebracht und iterativ die Näherung $\sqrt{(a^2 + b)} \approx a + b/(2a)$
wiederholt genutzt. Die natürliche Zahl b sollte dabei im ersten Schritt möglichst klein sein.
Ergibt sich für die Wurzel $\sqrt{w}$ im n-ten Schritt der Näherungsbruch $x/y = a + b/(2a)$
so erhält man nach der nächsten Iteration $x_{neu}/y_{neu} = (x^2 + wy^2) / (2xy)$
mit einer ständig besseren Näherung an $\sqrt{w}$.

Eulersches Wurzelverfahren

Durch Leonhard Euler wurden 1802 in "Vollständige Anleitung zur Algebra" Näherungsformeln zur Bestimmung von n-ten Wurzeln aus den Taylor-Entwicklungen der Potenzfunktionen hergeleitet.
Im Allgemeinen ergeben sich die gleichen Iterationsalgorithmen, wie bei einer Herleitung mittels Newton-Verfahren, zum Beispiel für die dritte Wurzel $\sqrt[3]{a}$ (1) $x_{n+1} = 1/3\ (2\ x_n + a / x_n^2)$
Die Zahlen x_n und a/x_n^2 werden dabei im Verhältnis 2:1 gewichtet.
Vertauscht man die Gewichte und passt die Formel entsprechend an, wird
(2) $x_{n+1} = 1/3\ (x_n + 2\ \sqrt{(a / x_n)})$
Dieses Verfahren ist schneller als die Ausgangsgleichung, hat aber den großen Nachteil, dass in der Rekursion die Quadratwurzel benötigt wird.

Schulmethode aus früheren Zeiten zur Berechnung einer Quadratwurzel

Von der Form her ist es eine Art schriftliches Dividieren.

1.	$\sqrt{1'74'24}$	Teile die Zahl von rechts aus in Ziffernpaare.
2.	$\begin{array}{l} \sqrt{1'74'24} = 1 \\ \underline{1} \\ 0 \end{array}$	Suche die Quadratzahl, die unter oder gleich dem linken Paar liegt. Das ist hier trivialerweise 01. Subtrahiere die Quadratzahl. Die Differenz ist 0.
3.	$\begin{array}{l} \sqrt{1'74'24} = 1 \\ \underline{1} \\ 074 \\ 74 : 20 = 3 + \mathrm{Rest} \end{array}$	Hole das nächste Zahlenpaar ähnlich wie beim schriftlichen Dividieren herunter. Dividiere in einer Nebenrechnung 074 durch das Zehnfache der verdoppelten Quadratzahl, die oben rechts in der ersten Zeile steht. Diese Zahl ist 20. Der Quotient ist 3. Der Rest bei der Division interessiert nicht.

4. $\sqrt{1'74'24} = 13$
$$\begin{array}{l} 1 \\ \overline{0}74:23 \end{array}$$
Die Nebenrechnung oben nimmt man normalerweise im Kopf vor. Addiere die dabei gefundene Zahl 3 zum letzten Divisor (20), und es ergibt sich 23. Schreibe die 3 der Nebenrechnung auch in die ersten Zeile.

5. $\sqrt{1'74'24} = 13$
$$\begin{array}{l} 1 \\ \overline{0}74:23 \\ \underline{\ 69} \\ \quad 5 \end{array}$$
Bilde wie beim schriftlichen Dividieren 3*23, schreibe das Produkt in die nächste Zeile und subtrahiere. Es ergibt sich 5.

6. $\sqrt{1'74'24} = 13$
$$\begin{array}{l} 1 \\ \overline{0}74:23 \\ \underline{\ 69} \\ \quad 524 \end{array}$$
Hole das nächste Paar 24 herunter. Dividiere in einer Nebenrechnung die entstehende Zahl 524 durch das Zehnfache des doppelten Produkts der Zahl 13 der ersten Zeile. Das ist 260. Es ergibt sich 2, ein Rest bleibt.

$\underline{524:260} = 2 + \text{Rest}$

7. $\sqrt{1'74'24} = 132$
$$\begin{array}{l} 1 \\ \overline{0}74:23 \\ \underline{\ 69} \\ \quad 524:262 \\ \quad \underline{524} \\ \qquad 0 \end{array}$$
Schreibe die Zwei in die erste Zeile rechts und addiere sie zu 260. Divdiere die Zahl 524 unten durch 262 wie beim schriftlichen Dividieren. Bilde die Differenz. Sie ist Null.
Es gilt also sqrt(17424)=132.

$$\begin{array}{llll} & \sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc} = a+b+c & & \\ a\cdot a \longrightarrow & \underline{a^2} & & \\ & 0 \quad b^2 & 2ab & \\ (2a+b)b \longrightarrow & \underline{\quad\ b^2} & \underline{2ab} & \\ & \quad 0 \quad c^2 & 0 & 2ac+2bc \\ [2(a+b)+c]c \longrightarrow & \underline{\qquad\ c^2} & \underline{0} & \underline{2ac+2bc} \\ & \qquad 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die Erklärung dieser Methode ergibt sich aus der "trinomischen Formel" (a+b+c)²=a²+b²+c²+2ab+2ac+2bc. Setzt man a=100, b=30 und c=2, so erhält man das Zahlenbeispiel.
Bevor es Taschenrechner gab, war diese Methode die Standard-Methode in der Schule und wurde ausgiebig geübt. Heute wird sie in manchen Lehrbüchern noch als Unikum geführt.

Quadratwurzel-Aufgaben

Einfache Übungsaufgaben zum Vereinfachen von Termen, die Wurzeln enthalten:

1) (√11 - √7)·(√11 + √7) - (√11 - √7)² = 2√77 - 14
2) (√2 - √5 + √7)·(√2 - √5 - √7) - (√2 - √5)² = -7
3) (√(a+b) + √(a-b))² - (√(a+b) - √(a-b))² = 4 √(a² -b²)
4) (3 - 1/√3)² - (3 + 1/√3)² = -4 √3
5) (3/2 - √(2/3))² - (3/2 + √(2/3))² = -2 √6
6) ((3 √2 - 2 √3)/√6 - (3 + √6)/√3)² = 8
7) ((√27 - √8)/√12 - 3/2)² - (√(2/3) - 1/√2) (√(2/3) + 1/√2) = 1/2
8) (25 - 5√5)/√5 - √80/(3 + √5) - 10 √(1/5) = 0
9) (12 + 2√3)/√3 - 6 √(1/3) - √48/(√3 - 1) = -4
10) (15 - 7√6)/√6 - √54/(√6 + 3) + 3 √(1/6) = -1
11) 1/√2 + 1/(2 √2 - 4) - (1 - √2)/(2 √2) = 0
12) (-(√3 - √6)/√2 - (√6 + √2)/√3 - 1/√6) (1/√2 - 3/√12) = 1/2
13) $a^{3/4} : (a^{2/3} : a) = a^{3/4} : (a^{2/3-1}) = a^{3/4} : a^{-1/3} = a^{13/12}$
14) $(a^{1/4} : a^{1/5})\cdot a^{1/10} = a^{1/20}\cdot a^{1/10} = a^{3/20}$
15) $12^{2/3}\cdot 12^{3/2} = 12^{13/6}$
16) $7^{1,4}\cdot 7^{1,5}\cdot 7^{0,6} = 7^{3,5} = 7^3\cdot\sqrt{7}$
17) $\sqrt[4]{2^9}\cdot\sqrt[5]{2^9} = 2^{81/20} = 16\cdot\sqrt[20]{2}$
18) $(2n)^{0,25}\cdot(8n^2)^{0,25}\cdot n^{1,25} = 2n^2$
19) $(24^{1/3} + 2\cdot 81^{1/3} - 3\cdot 192^{1/3}) : 31/3 = -4$
20) $(2a^4b^2)^{1/3}\cdot(4a^8b^7)^{1/3} = 2a^4b^3$

Quadratwurzeln durch Intervallschachtelung

Zur Berechnung der Quadratwurzeln können Näherungsverfahren herangezogen werden. Eine einfache Methode besteht in dem Verfahren der Intervallschachtelung.
Das Verfahren sei am Beispiel 2 erläutert. Nach einer ersten Schätzung liegt 2 zwischen 1 und 2, d.h. im Intervall [1 ; 2]. Jetzt unterteilt man dieses Intervall in 10 Teile und prüft, für welchen Intervallwert das Quadrat kleiner bzw. größer als 2 ist. Man findet

$1,4^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = 1,5^2$,

d.h. 2 liegt im Intervall [1.4 ; 1.5]. Unterteilung dieses Intervalls und prüfen der Intervallgrenzen liefert

$1,41^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = 1,42^2$,

Setzt man dies fort, so gewinnt man je Intervall eine weitere Dezimalziffer Genauigkeit hinzu.

Dezimalstellen von √2

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503875343276415727350138462309122970249248360558507372126441214970999358314132226659275055927557999505011527820605714701095599716059702745345968620147285174186408891986095523292304843087143214508397626036279952514079896872533965463318088296406206152583523950547457502877599617298355752203375318570113543746034084988471603868999706990048150305440277903164542478230684929369186215805784631115966687130130156185689872372352885092648612494977154218334204285686060146824720771435854874155657069677653720226485447015858801620758474922657226002085584466521458398893944370926591800311388246468157082630100594858704003186480342194897278290641045072636881313739855256117322040245091227700226941127573627280495738108967504018369868368450725799364729060762996941380475654823728997180326802474420629269124859052181004459842150591120249441341728531478105803603371077309182869314710171111683916581726889419758716582152128229518488472089694633862891562882765952635140542267653239694617511291602408715510135150455381287560052631468017127402653969470240300517495318862925631385188163478001569369176881852378684052287837629389214300655869568685964595155501644724509836896036887323114389415576651040883914292338113206052433629485317049915771756228549741438999188021762430965206564211827316726257539594717255934637238632261482742622208671155839599926521176252698917540988159348640083457085181472231814204070426509056532333398436457865796796519267292399875366617215982578860263363617827495994219403777753681426217738799194551397231274066898329989895386728822856378697749662519966583525776198939322845344735694794962952168891485492538904755828834526096524096542889394538646625744927556381964410316979833061852019379384940057156333720548068540575867999670121372239475821426306585132217408832382947287617393647467837431960001592188807347857617252211867490424977366929207311096369721608933708661156734585334833295254675851644710757848602463600834449114818587655554286455123314219926311332517970608436559704352856410087918500760361009159465670676883605571740076756905096136719401324935605240185999105062108163597726431380605467010293569971042425105781749531057255934984451126922780344913506637568747760283162829605532422426957534529028838768446429173282770888318087025339852338122749990812371892540726475367850304821591801886167108972869229201197599880703818543332536460211082299279293072871780799888099176741774108983060800326311816427988231171543638696617029999341616148786860180455055539869131151860103863753250045581860448040750241195184305674533683613674597374423988553285179308960373898915173195874134428817842125021916951875593444387396189314549999906107587049090260883517636224749757858858368037457931157339802099986622186949922595913276423619410592100328026149874566599688874067956167391859572888642473463585886864496822386006983352642799056283165613913942557649062065186021647263033362975075697870606606856498160092718709292153132368281356988937097416504474590960537472796524477094099241238710614470543986743647338477454819100872886222149589529591187892149179833981083788278153065562315810360648675873036014502273208829351341387227684176678436905294286984908384557445794095986260742499549168028530773989382960362133539875320509199893607513906444495768456993471276364507163279154701597733548638939423257277540038260274785674172580951416307159597849818009443560379390985590168272154034581581521004936662953448827107292396602321638238266612626830502572781169451035379371568823365932297823192986064679789864092085609558142614363631004615594332550474493975933999125419532300932175304476533964706627611661753518754646209676345587386164880198848497479264045065444896910040794211816925796857563784881498986416854994916357614484047021033989215342377037233353115645944389703653166721949049351882905806307401346862641672470110653463493916407146285567980177933814424045269137066609777638784866238003392324370474115331872531906019165996455381157888413808433232105337674618121780142960928324113627525408873729051294073394794330619439569367020794295158782283493219316664111301549594698378977674344435393377099571349884078908508158923660700886581054709497904657229888808924612828160131337010290802909997456478495815456146487155163905024198579061310934587833062002622073724716766854554999049940857108099257599288932366154382719550057816251330381531465779079268685008069844284 7

9152424275441026805756321565322061885751225113063937025362927161968251259192
0252160587011895967322442392674237344907646467273753479645988191498079317180
0242385545388603836831080077918246646275411744425001872777951816438345146
3461299020763343017968554385631667723518389336667042222110939144930287963812
8398893117313084300421255501854985065294556377660314612559091046113847682823
5959247722862904264273616326458544339287726386034314980489639736332975488
5925681149296836126725898573833216436663487023477302610106130507298611534129
9488087744731112295426527516536659117301423606265258690771982170370981046443
6047722673928298741525930695620638471082740821849067372330587430297092428
9948173924407869375284401044399048520878851914193541512900681735170306938697
0590047425157655248078447362144105016200845444122255956202984725940352801906
7980680983003964539856859304586252606377974535599277472990648887454512424
9607637801086390019105809287476472075110923860595019543228160208879621516233
8521612875228518025292876183257037172857406763944909825464422184654308806610
5802015847284067126302545937989065081685713716566859413005331970365964033
7667414610495637651030836613489310947802681293557331890551970520184515039969
0986631525124116111925940552808564989319589834562331983683494880806171562439
1128663127978483719789533690152776005498055166350197855571101405552976338
4127504468604647663183266116518206750120476699109872191044474403268943641595
9427921994423553718704299559240314091712848158543866005385713583639816309452
4075570093251682434416824083619792733728252154622469615332170268299509790
8903459485887834943961620435842249739718711395892730509219705491717696160044
5580899427878880369169432894595147226722926124850696173163809410821860045286
1026965475763043102560271523139694821355198214097165490973199928349256740
9749039229712634869341457493319804171807611196390227866407592243416776246623
6238913110270343304576368141128321326308582239456219598086612939996201234156
1763181743124200890149838485604808798646083935964923665142968125773143229
1456871682762199611827826953157498380262465175905410397618128760421638613450
2213262727756612441133610775195557749508656360673786650623185640699122801875
7417854946612532759976979605977605907564891066610158384172028185304321190
4465775255427754379872605488173619826758168628329526078993222668360283851351
2281059318591028641508157056319717315183136250243590414632122392176633982689
3682531505300598915470290953719326620734112349474336788469020139049784285
2163414429214589558287847669394646426781221904978563635526336827805186009869
9248937786002398769169807656621943898544370805946433362333810587458162354756
0013659243524265714308346554576800237081467573252547025507476374716350678
5159917369379325103268276062864591461820472148637037077192692682362333472037
9245964691810526139153086280291440965482563873092730426544662929045896063751
9187114693453619733247895727070315309309019211991999936157650035039840540
6742538792752792272473356677060783791138448893626136765706026360031513295209
5395202854897384486256134924414708607086602676349978793420875836121947116994
2238484825959143045281070626015089691353030177200627170544020906695149152
7459771970594769547409521028787255785688002219371774355811079393088338455864
8277291008629554566141306721230848740227121058686323388237413884428938155444
6471057556514684357029466350628938735698686883764803265195284146535173953
0273612013742030098673983851432190043602898269829352939941412923058038456502
2707216815161941011449826301364900877048398488386090653368599054583895203185
6480414932721423908651649994316592079659535694307231129116292867975171566
8890543932203569129332457020806719444049730494398140822782960279942454108316
6675921424835182723817205041039274288801556223380796147512433514731021284545
9448994449960007524375195701166834174474907958820995178367680232365176749
7230148745774272599476096219843271483529861119027287358490521797590837419748
6026706053746231530039375212367867752848692195857137554269684827836317861109
9336801439159059748428580545161302301439790570161088986277796107506733326
7604865492925139978139053588227689373220494148394013556035656044214017612060
5131806891989962606184831853401836237821726637580455247196266174925422852804
5714420485783421132280085287042054889923412785548123676153770710425446986
8521991122835426634999712748366076246241820736466617128394748473280474430403
3441072004287271275670279567582429262719454580530026664899650795697781786219
42172005237165369467704195111912704624836051130289046437751148694887 84...

Rationalmachen des Nenners

... des Nenners; bei Ausdrücken der Gestalt

$Z/N = Z / (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$

können die Wurzeln aus dem Nenner entfernt werden. Dazu wird mit $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ bzw. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ erweitert

Grundregeln zum Rationalmachen des Nenners

$1 / \sqrt{a} = \sqrt{a} / a$ $\qquad$ $1 / \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{n-1}} / a$

$1 / (b + \sqrt{a}) = (b - \sqrt{a}) / (b^2 - a)$ $\qquad$ $1 / (b - \sqrt{a}) = (b + \sqrt{a}) / (b^2 - a)$

$1 / (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) / (a - b)$ $\qquad$ $1 / (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) / (a - b)$

Wurzelvereinfachung

Ineinander verschachtelte Wurzelterme der Form $\sqrt{a \pm b \sqrt{c}}$

können mitunter vereinfacht werden zu $\sqrt{a \pm b \sqrt{c}} = \sqrt{d} \pm \sqrt{e}$

Quadrieren ergibt $a \pm b \sqrt{c} = d + e \pm \sqrt{d e}$ und somit $a = d + e$ und $b^2 c = 4 d e$:

$d,e = 1/2 (a \pm \sqrt{a^2 - b^2 c})$

Zum Beispiel ergeben sich

$\sqrt{5 + 2 \sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ oder $\sqrt{3 - 2 \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

Wurzelvereinfachung

Ineinander verschachtelte Wurzelterme der Form

$\sqrt{a \pm b \sqrt{c}}$

können mitunter vereinfacht werden zu

$\sqrt{a \pm b \sqrt{c}} = \sqrt{d} \pm \sqrt{e}$

Quadrieren ergibt $a \pm b \sqrt{c} = d + e \pm \sqrt{d e}$ und somit $a = d + e$ und $b^2 c = 4 d e$:

$d,e = 1/2 (a \pm \sqrt{a^2 - b^2 c})$

Zum Beispiel ergeben sich

$\sqrt{5 + 2 \sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ oder $\sqrt{3 - 2 \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

Die Tabelle enthält eine Vielzahl von ganzzahligen a, b, c und d, e, für die diese Transformation möglich ist.

a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
2	1	4	1	1	3	1	8	2	1
3	2	2	2	1	4	1	12	3	1
4	1	16	2	2	4	2	3	3	1
4	2	4	2	2	5	1	16	4	1
5	1	24	3	2	5	2	4	4	1
5	2	6	3	2	6	1	20	5	1
6	1	32	4	2	6	1	36	3	3
6	2	5	5	1	6	2	8	4	2
6	2	9	3	3	6	3	4	3	3
6	4	2	4	2	7	1	24	6	1
7	1	40	5	2	7	1	48	4	3

Wurzelterme der Form $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ bzw. $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ können u.U. zu einer Wurzel zusammengefasst werden. Dazu können die Umrechnungsformeln $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2 \sqrt{ab}}$ für $0 \leq a \leq b$ genutzt werden.

Diese waren in geometrischer Form schon Euklid bekannt, die im Buch X der "Elemente" aufgenommen sind. In algebraischer Form sind sie im Euklid-Kommentar des al-Nayrizi (gest. 922) und im indischen "Bidscha-ganita" ("Samen der Rechenkunst") von Bhaskara dem II. zu finden. Ist der Term a b eine Quadratzahl, so gelingt die Umwandlung in eine Wurzel.

Historisch verbürgt sind auch komplexere Umwandlungen:

$\sqrt{3 - 2 \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

$\sqrt{4 \sqrt{5} + 9} = \sqrt{5} + 2$

$\sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{2}$

Abu Kamil (um 850-920) in "al-kitab fi al-dschabr wa-'l-muqabala"

$\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{50}$

$\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{2 \sqrt{3} - 2}$ arabisch um 1100

$(\sqrt{\sqrt{40} + 6} + \sqrt{\sqrt{40} - 6})^2 = 4 \sqrt{10} + 4$ Luca Pacioli 1494 in "Summa"

$(\sqrt{12 + \sqrt{6}} + \sqrt{12 - \sqrt{6}})^2 = 2 \sqrt{138} + 24$

Michael Stifel 1544 in "Arithmetica integra"

Zweierpotenzen

Werden die Zweierpotenzen 2^n berechnet, so ergeben sich in deren Ziffernfolgen interessante Gruppierungen.
Zum Beispiel enthält die Potenz 2^{6801} hintereinander sieben Nullen; oder 2^{9933} in allen Ziffern 342 mal eine Null, also mit 11,4 % wesentlich mehr als die zu erwartenden 10 %.
n Wiederholungen von Ziffern ergeben sich erstmals bei der Potenz 2^n (gesucht bis n = 50000, Juni 2013 Polster):

Ziffer	n bei 1, 2, 3, … aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern
0	10, 53, 242, 377, 1491, 1492, 6801, 14008, …
1	4, 40, 42, 313, 485, 1841, 8554, 8554, …
2	1, 43, 43, 314, 314, 2354, 8555, 13326, …
3	5, 63, 83, 219, 221, 2270, 11020, 18843, …
4	2, 18, 44, 192, 315, 3396, 8556, 13327, …
5	8, 16, 41, 41, 973, 973, 6838, 25265, …
6	4, 46, 157, 220, 220, 2269, 18842, …
7	15, 24, 24, 181, 317, 972, 972, 25264, …
8	3, 19, 39, 180, 316, 971, 6836, 13328, 25263, …
9	12, 33, 50, 421, 422, 2187, 15554, 42483, 42485, 42486, …

Zweierpotenzensumme

Die Summe zweier aufeinanderfolgender Zweierpotenzen ist immer durch drei teilbar.
Beispiele: $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24 = 3 \cdot 8$ $2^6 + 2^7 = 64 + 128 = 192 = 3 \cdot 64$

Die Summe dreier aufeinanderfolgender Zweierpotenzen ist immer durch sieben teilbar.
Beispiele: $2^3 + 2^4 + 2^5 = 8 + 16 + 32 = 56 = 7 \cdot 8$ $2^6 + 2^7 + 2^8 = 64 + 128 + 256 = 448 = 7 \cdot 64$
Die Summe zweier mittelbar aufeinanderfolgender Zweierpotenzen (eine Zweierpotenz übersprungen) ist immer durch fünf teilbar.
Beispiele: $2^4 + 2^6 = 16 + 64 = 80 = 5 \cdot 16$ $2^5 + 2^7 = 32 + 128 = 160 = 5 \cdot 32$
Soll die Summe von verschiedenen Zweierpotenzen durch eine Zahl n teilbar sein, so transformiert man n in die Binärdarstellung und multipliziert diese mit der Zweierpotenz 2^n. Die Einsen in der Binärdarstellung geben an, welche aufeinader folgende Zweierpotenzen zu addieren sind.
Zum Beispiel wird für n = 11

$$11 = 1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$2^n \cdot 11 = 2^n (1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+3}$$

Damit ist die Summe, bestehend aus einer Zweierpotenz, der Nachfolgerin sowie deren übernächster Nachfolgerin immer durch elf teilbar.

Dreierpotenzen

Werden die Dreierpotenzen 3^n berechnet, so ergeben sich in deren Ziffernfolgen interessante Gruppierungen.
Zum Beispiel tritt in 3^{7721} die Ziffer Drei 8 mal hintereinander auf.
n Wiederholungen von Ziffern ergeben sich erstmals bei der Potenz 3^n (gesucht bis n = 25000, Juni 2013 Polster):

Ziffer	n bei 1, 2, 3, … aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern
0	10, 35, 148, 332, 540, 540, 7723, 22793, …
1	4, 30, 93, 334, 841, 3404, 7271, 7720, …
2	3, 19, 148, 253, 330, 2124, 2124, 22791, 22791, …
3	1, 31, 119, 185, 511, 2341, 7721, 7721, …
4	5, 12, 55, 308, 510, 2340, 7286, 9670, …
5	8, 27, 33, 33, 274, 2076, 5173, 8880, …
6	8, 33, 34, 275, 539, 539, 8881, 22792, …
7	3, 11, 112, 184, 721, 3520, 6643, 12793, …
8	4, 23, 32, 215, 538, 538, 4797, 17612, …
9	2, 34, 35, 276, 1520, 2342, 8882, …

Fünferpotenzen
Werden die Fünferpotenzen 5^n berechnet, so ergeben sich in deren Ziffernfolgen interessante Gruppierungen.
Zum Beispiel tritt in 5^{2225} die Ziffer Sechs 6 mal hintereinander auf.
n Wiederholungen von Ziffern ergeben sich erstmals bei der Potenz 5^n (gesucht bis n = 25000, Juni 2013 Polster):

Ziffer	n bei 1, 2, 3, ... aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern
0	8, 39, 67, 228, 1194, 3374, 10065, 19699, …
1	5, 23, 53, 121, 185, 2440, 7683, …
2	2, 13, 52, 126, 197, 1087, 2788, 2794, 2800, 2800, …
3	5, 35, 52, 161, 653, 3746, 11474, 23048, …
4	11, 12, 51, 125, 125, 2277, 2787, 2793, 2799, 2799, …
5	1, 23, 54, 122, 186, 2274, 2790, 2790, 2796, 2802, 2802, …
6	4, 31, 102, 146, 652, 2225, 9356, 19636, …
7	7, 24, 56, 95, 187, 2275, 2791, 2791, 2797, 2797, 2803, 2803, …
8	7, 11, 50, 96, 454, 2276, 2786, 2792, 2798, 2798, 2804, …
9	8, 44, 117, 120, 1265, 2861, 15843, 17388, …

Siebenerpotenzen
Werden die Siebenerpotenzen 7^n berechnet, so ergeben sich in deren Ziffernfolgen interessante Gruppierungen.
Zum Beispiel tritt in 7^{175} die Ziffer Sieben 6 mal hintereinander auf.
n Wiederholungen von Ziffern ergeben sich erstmals bei der Potenz 7^n (gesucht bis n = 25000, Juni 2013 Polster):

Ziffer	n bei 1, 2, 3, ... aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern
0	5, 20, 74, 154, 510, 4412, 6985, 21195, …
1	4, 6, 34, 162, 308, 2362, 6176, 6176, …
2	4, 14, 69, 80, 357, 1239, 3041, 18737, …
3	3, 16, 45, 194, 1191, 1558, 1961, …
4	2, 18, 33, 144, 176, 1461, 5360, 17946, …
5	7, 21, 47, 153, 172, 1375, 5220, 8451, …
6	5, 20, 70, 148, 846, 1857, 2308, 17233, …
7	1, 11, 31, 163, 175, 175, 6177, …
8	5, 13, 48, 79, 309, 1426, 5482, 22229, …
9	2, 15, 71, 71, 1677, 2633, 6263, 10986, …

Elferpotenzen
Werden die Elferpotenzen 11^n berechnet, so ergeben sich in deren Ziffernfolgen interessante Gruppierungen.
Zum Beispiel tritt in 11^{1293} die Ziffer Eins 6 mal hintereinander auf.
n Wiederholungen von Ziffern ergeben sich erstmals bei der Potenz 11^n (gesucht bis n = 25000, Juni 2013 Polster):

Ziffer	n bei 1, 2, 3, ... aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern
0	5, 20, 20, 73, 99, 482, 2983, 2983, 24277, …
1	1, 11, 22, 91, 400, 1293, 6220, 14086, …
2	2, 13, 42, 211, 397, 2419, 6480, 6480, …
3	3, 14, 51, 168, 190, 1324, 5263, 10848, …
4	4, 17, 38, 202, 739, 1074, 5175, 13953, 16158, …
5	5, 18, 40, 217, 239, 501, 3589, 12359, 24535, …
6	4, 34, 42, 50, 156, 918, 1323, 17361, …
7	6, 15, 39, 184, 488, 2258, 4177, 12358, …
8	7, 8, 30, 169, 450, 961, 4184, 11440, …
9	7, 17, 20, 281, 531, 1254, 4055, 9443, 9443, …

Dreizehnerpotenzen

Werden die Dreizehnerpotenzen 13^n berechnet, so ergeben sich in deren Ziffernfolgen interessante Gruppierungen.
Zum Beispiel tritt in 13^{5482} die Ziffer Acht 8 mal hintereinander auf.
n Wiederholungen von Ziffern ergeben sich erstmals bei der Potenz 13^n (gesucht bis n = 25000, Juni 2013 Polster):

Ziffer	n bei 1, 2, 3, … aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern
0	6, 20, 64, 295, 434, 2038, 5906, 24206, …
1	1, 15, 29, 123, 376, 728, …
2	3, 12, 50, 177, 327, 327, 3560, 13946, …
3	1, 17, 26, 26, 426, 2116, 6559, 15191, …
4	6, 9, 54, 54, 227, 997, 4760, 16186, …
5	4, 18, 46, 258, 258, 1210, 1544, 14624, …
6	2, 16, 25, 25, 512, 512, 512, 16457, …
7	3, 19, 72, 75, 727, 727, 3220, 5905, 5905, …
8	4, 20, 49, 105, 726, 1209, 1209, 5482, 16661, …
9	2, 9, 30, 189, 477, 1631, 3445, 11666, …

Logarithmen

Abbildung: Napiers Logarithmentafel
Definition: $\log_a b$ ist diejenige reelle Zahl c, für die gilt $a^c = b$. ($a>0$, $a \neq 1$, $b>0$)
a heißt Basis, b Numerus (Logarithmand) und c Logarithmus.

Logarithmengesetze

$a^{(\log_a b)} = b$ $\qquad$ $\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$ $\qquad$ $\log_1 a$ nicht erklärt
Wenn $b,c > 0$, $r \in R$, $a > 0$, $a \neq 1 \Rightarrow$
$\log_a(b*c) = \log_a b + \log_a c$ $\qquad$ $\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$
$\log_a b^r = r * \log_a b$ $\qquad$ $\log_a {}^n\sqrt{b} = 1/n * \log_a b$
Wenn $a,b,c > 0$, aber ungleich $1 \Rightarrow$
$\log_b c = \log_a c / \log_a b$ $\qquad$ $\log_a c = 1 / \log_c a$
$\log_{1/a} c = - \log_a c$ $\qquad$ $\log_a c = \lg c / \lg a$
$a^x = e^{x \ln a}$
1.Logarithmengesetz: Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.
2.Logarithmengesetz: Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus dem Logarithmus des Dividenden und dem des Divisors.
3.Logarithmengesetz: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem mit dem Potenzexponenten multiplizierten Logarithmus der Potenzbasis.
4.Logarithmengesetz: Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem durch den Wurzelexponenten geteilten Logarithmus des Radikanden.

Herleitung der Logarithmengesetze

Der Logarithmus von a zur Basis b ist diejenige Zahl x, mit der b potenziert werden muss, um a zu erhalten. Wenn $b^x = a$ gilt, dann ist somit $\log_b a = x$. Wegen $a = b^x$ ist daher $\log_b b^x = \log_b a = x$

Analogie zum 1.Potenzgesetz

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ beide Seiten werden zur Basis a logarithmiert
$\log_a (a^m \cdot a^n) = \log_a (a^{m+n})$
$\log_a (a^m \cdot a^n) = m + n$
Setz man nun $u = a^m$ und $v = a^n$, so wird $\log_a u = m$ und $\log_a v = n$, und somit (7)
$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
Der Logarithmus eines Produktes ist die Summe der Logarithmen der Faktoren.
Analog folgt aus dem 2.Potenzgesetz
$\log_a (u/v) = \log_a u - \log_a v$
Der Logarithmus eines Bruchs ist die Differenz aus den Logarithmen von Zähler und Nenner.

Analogie zum 3.Potenzgesetz

$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ Logarithmieren zur Basis a

$\log_a ((a^m)^n) = \log_a a^{m\cdot n}$

$\log_a ((a^m)^n) = m \cdot n$

Ersetzen von a^m durch u und m durch $\log_a u$ und n durch v ergibt

$\log_a u^v = v \cdot \log_a u$

Der Logarithmus einer Potenz mit der Basis b und dem Exponenten x ist das Produkt aus dem Logarithmus der Basis und dem Exponenten.

Basiswechsel

Für die Berechnung von Logarithmen findet man auf einem handelsüblichen Taschenrechner den dekadischen Logarithmus (zur Basis 10) und den natürliche Logarithmus zur Basis e = 2,71828182845905…. Häufig muss man aber Logarithmen zu anderen Basen berechnen.
Als Vorüberlegung interessiert der Term $b^{\log_b x}$. Die Definition des Logarithmus besagt, dass $\log_b x$ diejenige Zahl ist, mit der man b potenzieren muss, um x zu erhalten. Da hier b eben genau damit potenziert wird, folgt sofort, dass gilt: $b^{\log_b x} = x$

Logarithmiert man den Term $b^{\log_b x}$ zu einer anderen Basis a, d.h. $\log_a (b^{\log_b x})$
so wird zum einen $\log_a (b^{\log_b x}) = \log_a x$
und außerdem $\log_a (b^{\log_b x}) = \log_b x \cdot \log_a b$
Damit ergibt sich $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$
und somit $\log_b x = \log_a x / \log_a b$
Rechts stehen nur Logarithmen zur Basis a, links steht ein einzelner Logarithmus der Zahl x zur Basis b. Steht irgendein Logarithmus zur Verfügung, so kann mit diesem Zusammenhang jeder andere Logarithmus berechnet werden.
Man berechnet einfach den Logarithmus der gesuchten Zahl zur vorhandenen Basis und teilt das Ergebnis durch den vorhandenen Logarithmus der nicht vorhandenen Basis.

Basis der natürlichen Logarithmen

Eulersche Zahl $e = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \ldots$
Modul der dekadischen Logarithmen $M_{10} = \lg e = 1/(\ln 10) = 0.43429\ldots$
Modul der natürlichen Logarithmen $\ln 10 = 1/M_{10} = 2.30259$
Cologarithmus $\text{colog } x = \log (1/x) = - \log x$

Spezielle Logarithmen

1. Logarithmen zur Basis 10 heißen dekadische oder Briggsche Logarithmen. Man schreibt $\log_{10} x = \lg x$.
Das Symbol lg x ist nach DIN 1302 als Bezeichnung des Zehnerlogarithmus vorgeschrieben.
2. Logarithmen zur Basis e heißen natürliche oder Nepersche Logarithmen. Man schreibt $\log_e x = \ln x$.
3. Logarithmen zur Basis 2 heißen Duallogarithmen oder binäre Logarithmen. Man schreibt $\log_2 x = \text{lb } x$ nzw. $\log_2 x = \text{ld } x$.
Logarithmen ohne Basisangabe beziehen sich im allgemeinen auf den natürlichen Logarithmus.

Dekadische Logarithmen der ersten Zahlen

n	lg(n)	n	lg(n)	n	lg(n)	n	lg(n)
2	0.301029996	3	0.477121255	4	0.602059991	5	0.698970004
6	0.778151250	7	0.845098040	8	0.903089987	9	0.954242509
11	1.04139268	12	1.07918125	13	1.11394335	14	1.14612804
15	1.17609126	16	1.20411998	17	1.23044892	18	1.25527250
19	1.27875360	20	1.30103000	21	1.32221929	22	1.34242268
23	1.36172784	24	1.38021124	25	1.39794001	26	1.41497335

Natürliche Logarithmen der ersten Zahlen

n	lg(n)	n	lg(n)	n	lg(n)	n	lg(n)
2	0.693147180	3	1.09861229	4	1.38629436	5	1.60943791
6	1.79175947	7	1.94591015	8	2.07944154	9	2.19722458
10	2.30258509	11	2.39789527	12	2.48490665	13	2.56494936
14	2.63905733	15	2.70805020	16	2.77258872	17	2.83321334
18	2.89037176	19	2.94443898	20	2.99573227	21	3.04452244
22	3.09104245	23	3.13549422	24	3.17805383	25	3.21887582

Binäre Logarithmen der ersten Zahlen

n	lb(n)	n	lb(n)	n	lb(n)	n	lb(n)
3	1.58496250	4	2.00000000	5	2.32192810	6	2.58496250
7	2.80735492	8	3.00000000	9	3.16992500	10	3.32192809
11	3.45943162	12	3.58496250	13	3.70043972	14	3.80735492
15	3.90689060	16	4.00000000	17	4.08746284	18	4.16992500
19	4.24792751	20	4.32192810	21	4.39231742	22	4.45943162
23	4.52356196	24	4.58496250	25	4.64385619	26	4.70043972

ln(10) = 2.30258509299404568401799145468436420760110148862877297603332790096...
lg(2) = 0.30102999566398119521373889472449302676818988146210854131042746112 7...
ln(2) = 0.69314718055994530941723212145817656807550013436025525412068000949 3...
ln²(2) = 0.48045301391820142466710252632666497173055295159454558686686413362...
ln(2π) = 1.83787706640934548356065947281123527972279494727556682563430308096...
ln(3) = 1.09861228866810969139524523692252570464749055782274945173469433363 7...
ln(π) = 1.14472988584940017414342735135305871164729481291531157151362307147 2...

Näherungen

für $3/4 \leq x \leq 4/3$ gilt $\ln(x) \approx (x - 1)/\sqrt{x}$
für $1/2 \leq x \leq 2$ gilt $\ln(x) \approx (x - 1)\,(6 / (1+ 5x))$

Logarithmusreihen

Zur exakten Berechnung von speziellen natürlichen Logarithmen wurden verschiedene Gleichungen gefunden, deren einzelne Terme durch unendliche Reihen entwickelt werden können. U.a. gilt nach Sebah (1997):

$\ln 10 = 6 \operatorname{arctanh}(1/3) + 2 \operatorname{arctanh}(1/9)$
$\ln 10 = 46 \operatorname{arctanh}(1/31) + 34 \operatorname{arctanh}(1/49) + 20 \operatorname{arctanh}(1/161)$
$\ln 2 = 4 \operatorname{arctanh}(1/6) + 2 \operatorname{arctanh}(1/99)$
$\ln 2 = 4 \operatorname{arctanh}(1/7) + 2 \operatorname{arctanh}(1/17)$
$\ln 2 = 18 \operatorname{arctanh}(1/26) - 2 \operatorname{arctanh}(1/4801) + 8 \operatorname{arctanh}(1/8749)$
$\ln 2 = 10 \operatorname{arctanh}(1/17) + 4 \operatorname{arctanh}(13/449)$
$\ln 2 = 144 \operatorname{arctanh}(1/251) + 54 \operatorname{arctanh}(1/449) - 38 \operatorname{arctanh}(1/4801) + 62 \operatorname{arctanh}(1/8749)$
$\ln 2 = 14 \operatorname{arctanh}(1/31) + 10 \operatorname{arctanh}(1/49) + 6 \operatorname{arctanh}(1/161)$

Über eine MacLaurin-Reihe können die arctanh-Terme beliebig genau berechnet werden:

$\operatorname{arctanh} x = x + 1/3\, x^3 + 1/5\, x^5 + 1/7\, x^7 + \ldots$

Logarithmuseigenschaften

Für den natürlichen Logarithmus ln x und den dekadischen Logarithmus lg x einer reellen Zahl x gelten:

$x / (1+x) < \ln (1+x) < x$; für $x > -1$ und verschieden von 0
$x < -\ln (1-x) < x / (1-x)$; für $x < 1$ und verschieden von 0
$|\ln (1-x)| < 3/2\, x$; für $0 < x < 0{,}5828$
$\ln x \leq x - 1$; für $x > 0$
$\ln x \leq n\,(\sqrt[n]{x} - 1)$; für $x > 0$ und beliebiges $n > 0$
$|\ln (1+x)| \leq -\ln (1 -|x|)$; für $|x| < 1$

Näherungsformeln

für $1/\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$

$\lg x = 0{,}86304\, t + 0{,}36415\, t^3 + R(x)$; $t = (x-1)/(x+1)$; $R(x) < 6 \cdot 10^{-4}$

für $1/\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$

$\lg x = 0{,}868591718\, t + 0{,}289335524\, t^3 + 0{,}177522071\, t^5 + 0{,}094376476\, t^7 + 0{,}191337714\, t^9 + R(x)$

$t = (x-1)/(x+1)$; $R(x) < 10^{-7}$

für $0 \leq x \leq 1$

$\ln (1+x) = 0{,}99949556\, x - 0{,}49190896\, x^2 + 0{,}28947478\, x^3 - 0{,}13606275\, x^4 + 0{,}03215845\, x^5$; $R(x) < 10^{-5}$

für $0 \leq x \leq 1$

$\ln (1+x) = 0{,}9999964249\, x - 0{,}4998741238\, x^2 + 0{,}3317990258\, x^3 - 0{,}2407338084\, x^4 + 0{,}1676540711\, x^5 - 0{,}0953293897\, x^6 + 0{,}0360884937\, x^7 - 0{,}0064535442\, x^8$; $R(x) < 3 \cdot 10^{-8}$

Approximation mit Tschebyschow-Polynomen
für $0 \leq x \leq 1$

$T_n(x) = \cos n\theta$, $\cos \theta = 2x-1$

$\ln (1+x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} A_n T_n(x)$

für n = 0, 1, 2, … wird
A_n = 0,476452813; 0,343145750; -0,029437252; 0,003367089; -0,000433276; 0,000059471; -0,000008503; 0,000001250; -0,000000188; 0,000000029; -0,000000004; 0,000000001

Goldener Logarithmus

Der Logarithmus zur $\log_a b$ zur Basis $a = \phi = (\sqrt{5} + 1)/2$ mit $b > 0$ wird goldener Logarithmus genannt und mit

$l\phi\ b = \log_\phi b = \ln(b) / \ln(\phi)$

bezeichnet.
Spezielle Funktionswerte

n	lϕ(n)	n	lϕ(n)	n	lϕ(n)	n	lϕ(n)
2	1,4404200	3	2,2830118	4	2,8808401	5	3,3445518
6	3,7234319	7	4,0437704	8	4,3212602	9	4,5660236
10	4,7849719	11	4,9830348	12	5,1638520	13	5,3301877
14	5,4841905	15	5,6275637	16	5,7616803	17	5,8876635

Eine spezielle Eigenschaft des goldenen Logarithmus ergibt sich für Fibonacci-Zahlen, da

$\lim_{n\to\infty} (F_{n+1} / F_n) = 1/2\ (1+ \sqrt{5})$

gilt, wird $\lim_{n\to\infty} l\phi(F_{n+1} / F_n) = 1$, d.h. $l\phi(F_{n+1}) \approx 1 + l\phi(F_n)$
goldener Logarithmus einer Fibonacci-Zahl

$l\phi(F_n) = l\phi(1/\sqrt{5}\ (((1 + \sqrt{5})/2)^n - ((1 - \sqrt{5})/2)^n))$

Beispiel zur Logarithmenrechnung

Aufgabe: Bestimme das Alter eines Fossils, dessen gemessener C14-Anteil 1,4% des ursprünglichen Anteils ist! (Halbwertszeit von C14: 5730 Jahre.)

1.Lösung:
Ansatz: $B(t) = A\cdot e^{-kt}$; B Bestand an C14, t Jahre
Aus $B(0) = A$ und $B(5730) = A\cdot e^{-5730k} = 1/2\cdot A$ folgt $e^{-5730k} = ½$
$\to -5730k = \ln 1/2 = -\ln 2 \to k = \ln 2 / 5703 \approx 0{,}000121$
Für das Alter wird:
$B(t) = Ae^{-kt} = 1{,}4\%$ von $B(0) = 0{,}014\cdot A \to e^{-kt} = 0{,}014 \to -kt = \ln 0{,}014$, also $t = -\ln 0{,}014 / \ln 2 \cdot 5730 = 35\ 288$ Jahre.

2.Lösung:
Ansatz: $B(t) = A\cdot 2^{-kt}$; B Bestand an C14, t Jahre
Aus $B(0) = A$ und $B(5730) = A\cdot 2^{-5730k} = 1/2\cdot A$ folgt: $2^{-5730k} = ½ \to -5730k = \text{lb } 1/2 = -1 \to k = 1/5730 \approx 0{,}000175$
Somit ist $B(t) = A\cdot 2^{-kt}$ und $B(5730) = A\cdot 2^{-1} = A/2$. $B(t) = A2^{-kt} = 1{,}4\%$ von $B(0) = 0{,}014\cdot A \to 2^{-kt} = 0{,}014 \to -kt = \text{lb } 0{,}014$, also $t = -\text{lb } 0{,}014\cdot 5730 = -\lg 0{,}014 / \lg 2 \cdot 5730 = 35\ 288$ Jahre
Ergebnis: Das Fossil ist rund 35 Tausend Jahre alt.

Aufgabe: Eine Kultur von ursprünglich 1000 Bakterien wächst exponentiell und verdoppelt ihre Größe jede Stunde. Zu welcher Zeit weist sie 7000 Bakterien auf?
Lösung: Die Zahl der Bakterien nach t Stunden beträgt $A = 1000\cdot 2^t$. Die Frage, wann 7000 Bakterien vorhanden sind, führt auf die Gleichung $1000 \cdot 2^t = 7000$
die nach t zu lösen ist. Die Gleichung $2^t = 7$
wird auf beiden Seiten zur Basis 10 logarithmiert. Da der Logarithmus eine umkehrbare Funktion ist, handelt es sich um eine Äquivalenzumformung:

$\lg (2^t) = \lg 7$ $\qquad t \lg 2 = \lg 7$

und $t = \lg 7/\lg 2 = 2{,}807...$
Nach 2,807 Stunden (2 Stunden und 48,4 Minuten) sind 7000 Bakterien vorhanden.

Aufgabe 2: Die Intensität eines radioaktiven Stoffs fällt in 5 Jahren auf 1/3 ihres ursprünglichen Werts ab. Wie groß ist die Halbwertszeit?
Lösung: Die Intensität I sinkt nach t Jahren um den Faktor $2^{-t/T}$, wobei T die Halbwertzeit in Jahren ist. Nach 5 Jahren beträgt dieser Faktor $2^{-5/T}$, d.h. $2^{-5/T} = 1/3$

Beide Seiten logarithmieren zur Basis e $\ln(2^{-5/T}) = \ln(1/3)$,
und $T = 5 \ln 2/\ln 3 \approx 3155$ Jahre.

Binärer Logarithmus

Für den binären Logarithmus $\log_2 x = \mathrm{lb}\, x$ bzw. $\log_2 x = \mathrm{ld}\, x$
gibt es eine einfache Möglichkeit, nacheinander die Ziffern der Binärdarstellung des Logarithmus zur Basis 2 zu bestimmen. Dieses Verfahren ist einfach zu implementieren, da es Divisionen vermeidet und auch leicht in Festkomma-Arithmetik umsetzbar ist.

Zunächst werden die Vorkommastellen des Zweierlogarithmus im Dualsystem der Zahl x bestimmt, und die Zahl x durch Schieben auf Werte zwischen 1 und 2 normiert.
Der Logarithmus von x hat danach die Darstellung

$\log_2 x = 0{,}b_1b_2b_3 \ldots$

$\log_2 x^2 = b_1{,}b_2b_3b_4 \ldots$, da $\log x^2 = 2 \log x$

Quadrieren von x schiebt den Logarithmus um eine Binärstelle nach links, wodurch die Vorkommastelle möglicherweise Eins wird. Dies ist der Fall, wenn $x^2 \geq 2$ ist. In diesem Falle wird x durch Division durch 2 wieder normiert.

Additionslogarithmus, Subtraktionslogarithmus

Logarithmen wurden historisch zur schnellen Berechnung von komplizierten Rechenoperationen genutzt. Das klassische Beispiel ist der Rechenstab und ähnliche Geräte.
Bei numerischen Berechnungen mit Logarithmen mussten häufig der Logarithmus einer Summe lg (a+b) ermittelt werden. Wurden a und b logarithmisch bestimmt, war es mühevoll, erst den Numerus von a und b zu ermitteln.
Aus diesem Grund wurden sogenannte Additionslogarithmen eingeführt. Mit der Umformung

(*) $\lg(a+b) = \lg a + \lg(1+b/a)$

wird lg (1+b/a) als Additionslogarithmus bezeichnet und tabelliert.
Kennt man lg a und lg b, so wurde lg (1+b/a) abgelesen und mit (*) weitergerechnet.

Additionslogarithmus = lg (1+b/a)

Analog ergibt sich aus $\lg(a-b) = \lg a - \lg(1/(1-b/a))$
der Subtraktionslogarithmus lg (1/ (1-b/a)) mit a > b.

Subtraktionslogarithmus = lg (1/ (1-b/a))

Logarithmus als Kettenbruch

Ausgehend von der Potenzreichenentwicklung

$\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - + \ldots$

können Kettenbruchentwicklungen für ln(1+x) und ln[(1+x) / (1-x)] entwickelt werden. (siehe Abbildung)

$$\ln(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x}{2+\cfrac{1^2x}{3+\cfrac{2^2x}{4+\cfrac{2^2x}{5+\cfrac{3^2x}{6+\cfrac{3^2x}{7+\ldots}}}}}}}$$

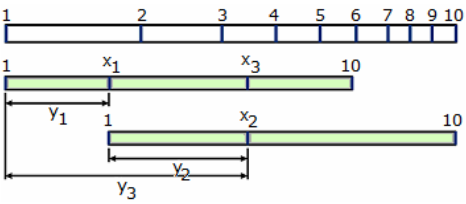
$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \cfrac{2x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{4x^2}{5-\cfrac{9x^2}{7-\cfrac{16x^2}{9-\ldots}}}}}$$

Spezielle Funktionswerte

Wird die Definition des natürlichen Logarithmus auf den komplexen Zahlenbereich erweitert, ergeben sich folgende spezielle Funktionswerte:

$\ln(-1) = i\pi$ $\ln 0 = -\infty$
$\ln 1 = 0$ $\ln i = 1/2\, \pi i$
$\ln(-i) = -1/2\, \pi i$ $\ln(-\pi) = \ln \pi + \pi i$

Skalen



Grundlage einer Skala ist eine Funktion y = f(x). Zu dieser Funktion konstruiert man eine Skala, indem man auf einer Kurve, z.B. einer Geraden, die Funktionswerte y als Längen abträgt, aber mit dem Argument x beziffert. Man kann somit eine Skala als eindimensionale Darstellung der Wertetabelle einer Funktion auffassen.
Die Skalengleichung zur Funktion y = f(x) lautet: $y = l[f(x) - f(x_0)]$
Durch x_0 wird der Anfangspunkt der Skala festgelegt. Mit dem Maßstabsfaktor l wird berücksichtigt, dass für eine konkrete Skala nur eine bestimmte Länge zur Verfügung steht.

Logarithmische Skala

Für $l = 10$ cm und $x_0 = 1$ lautet ihre Skalengleichung $y = 10(\lg x - \lg 1) = 10 \lg x$ in cm. Man erhält die abgebildete Skala.
Ihre wichtigste Anwendung, historisch gesehen, fand die logarithmische Skala beim logarithmischen Rechenschieber. Bei diesem werden Multiplikation und Division mit Hilfe zweier logarithmischer Skalen, die den gleichen Maßstabsfaktor haben und gegeneinander verschiebbar angebracht sind, durchgeführt. Aus der Abbildung liest man ab:

$y_3 = y_1 + y_2$, d.h. $\lg x_3 = \lg x_1 + \lg x_2 = \lg x_1x_2$, also $x_3 = x_1x_2$
$y_1 = y_3 - y_2$, d.h. $\lg x_1 = \lg x_3 - \lg x_2 = \lg x_3/x_2$, $x_1 = x_3/x_2$

Logarithmenanwendung

Anwendungen des Logarithmus finden sich vielfach in der Wissenschaft, wenn der Wertebereich viele Größenordnungen umfasst. Daten werden entweder direkt mit einer logarithmischen Skala dargestellt, oder die Einheiten selbst sind logarithmisch.
Beispiele:
1) Logarithmische Spirale
In der Natur finden sich zahlreiche Beispiele logarithmischer Spiralen, so z.B. das Wachstum von Schneckenhäusern oder die Anordnung der Kerne auf der Sonnenblume.
2) pH-Wert
Der Säurewert von Lösungen. In der Chemie erkennt man logarithmische Skalen am vorangestellten p, z.B. beim pKs- oder pKb-Wert.
3) Dezibel (dB)
Messung von Lautstärke, elektronischer Dämpfung
4) Empfindlichkeit der Sinnesorgane
Die Empfindlichkeit der Sinnesorgane folgt dem logarithmischen Weber-Fechner-Gesetz der Psychophysik, wonach eine Vervielfachung der Reizstärke nur eine lineare Zunahme des wahrgenommenen Reizes bewirkt.
5) Sternhelligkeiten
Sternhelligkeiten werden in astronomischen Größenklassen angegeben, die ein logarithmisches Maß der tatsächlichen Strahlungsstärke darstellt.
6) Rechenstab, Rechenschieber
7) Benfordsches Gesetz
Die Verteilung der Ziffern von Zahlen in empirischen Datensätzen folgt einer logarithmischen Verteilung, dem Benford'schen Gesetz.
8) Informationseinheit
Messung der Informationsmenge; die Informationstheorie sagt, dass, wenn etwas mit Wahrscheinlichkeit p auftritt, das Wissen über das tatsächliche Auftreten davon eine Informationsmenge von $\log_2 1/p$ bit ergibt.
9) Kryptographie
Der diskrete Logarithmus ist in endlichen Körpern und darauf definierten elliptischen Kurven erheblich aufwändiger zu berechnen als seine Umkehrfunktion, die diskrete Exponentialfunktion.

Richter-Skala, Erdbeben-Skala

Durch den US-amerikanischen Seismologen Charles Francis Richter wurde 1935 eine nach ihm benannte Skala zur Messung der Stärke von Erdbeben vorgeschlagen.
Diese Erdbebenskala ist eine Magnitudenskala, die nach dem dekadischen Logarithmus aufgebaut ist. Eine Erhöhung um Magnitude 1 bedeutet damit eine zehnfach höhere Energie des Erdbebens. Die Bestimmung der Magnitude eines Bebens erfolgt durch seismografische Messungen.

Ursprünglich endete die Richterskala bei 6. Zum Vergleich mit früheren Erdbeben und aus Gründen der Bekanntheit werden heute Messungen auf die Richterskala umgerechnet.
Sind M die Magnitude und E die äquivalente Energie in Tonnen TNT, so gilt $M = 2 + 2/3 \lg E$, $E = 10^{3/2(M-2)}$

Stärke	Wirkung
M 0	nicht fühlbar
M 1	unmerklich

M 2 kaum merklich
M 3 von einigen Menschen bemerkt
M 4 von den meisten Menschen im betroffenen Gebiet beobachtet
M 5 aufweckend
M 5,3-5,9 erschreckend, erste Schäden
M 6,0-6,9 Gebäudeschäden, einige Gebäudezerstörungen
M 7,0-7,3 allgemeine Gebäudeschäden, verbreitete Gebäudezerstörungen
M 7,4-7,7 allgemeine Gebäudezerstörungen. Ab M 7,5 reicht die Energie zur Auslösung von Tsunamis aus.
M 7,8-8,4 Verwüstungen, katastrophenartige Zerstörungen (San Francisco 1906: M 8)
M 8,5-8,9 landschaftsverändernde Vernichtungen
M 9,0 Am 26.12.2004 löste ein Seebeben der Stärke M 9,0 vor der indonesischen Insel Sumatra einen Tsunami aus, der mehr als 230000 Todesopfer forderte.
M 9,5 gilt nach heutigen Erkenntnissen als höchster zu erreichender Wert. (Chile 1960: M 9,5)
Quelle: http://www.code-knacker.de/erdbeben.htm

Logarithmus-Geschichte

1544 wies Michael Stifel im Werk "Arithmetica integra" (Gesamte Arithmetik) darauf hin, dass der Vergleich von

1	a	a^2	a^3	a^4	…
0	1	2	3	4	…

es erlaubt, anstelle der Multiplikation der Zahlen der ersten Reihe, die zugehörigen Exponenten der zweiten Reihe zu addieren.
Dies ist die Grundidee des logarithmischen Rechnens. Dazu bemerkte Stifel:
"Man könnte ein ganz neues Buch über die wunderbaren Eigenschaften dieser Zahlen schreiben, aber ich muss mich an dieser Stelle bescheiden und mit geschlossenen Augen vorübergehen"

1614 veröffentlichte der schottische Mathematiker Neper die ersten noch unvollkommenen Logarithmentafeln. Er benutzte eine zu 1/e proportionale Basis. Diese Tafeln wurden schrittweise verbessert. Neper und Briggs einigten sich auf die Basiszahl 10. Im Jahre 1617 veröffentlichte Briggs eine 14stellige Logarithmentafel zur Basis 10.
Das Erscheinen von Logarithmentafeln war u.a. 1624 eine große Hilfe für Johannes Kepler bei der Fertigstellung seiner astronomischen "Rudolphinischen Tafeln". Heute sind Logarithmentafeln nur noch eine historische Episode, da Computer und Taschenrechner die aufwendigen Berechnungen (Multiplikation, Division, Radizieren) erleichtern.

Iterierter Logarithmus

Der iterierte Logarithmus einer positiven Zahl n, bezeichnet mit log* n (gesprochen „log Stern von n"), ist die Anzahl der wiederholten Anwendung der Logarithmusfunktion auf das Argument x bis das Ergebnis kleiner oder gleich 1 ist.
Definition: log* n := 1 + log* (log n) für n > 1 ; andernfalls = 0
Für die Basis 2 des Logarithmus wird auch lg* n verwendet.
Der iterierte binäre Logarithmus ist eine sehr langsam steigende Funktion:

x	lg* x
$(-\infty, 1]$	0
(1, 2]	1
(2, 4]	2
(4, 16]	3
(16, 65536]	4
$(65536, 2^{65536}]$	5

Eulersche Zahl, Zahl e

Die Eulersche Zahl ist die Basis der natürlichen Logarithmen. Benannt durch Leonhard Euler als Einheit der natürlichen Logarithmen.

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \ldots$$

oder $e = \Sigma\, 1/k! = (\Sigma\, (-1)^k/k!\ )^{-1}$; Summe über alle k = 0, 1, 2, ..., ∞

Die Eulersche Zahl ist irrational (Euler) und transzendent (Hermite 1873). Es ist unbekannt, ob π+e und π/e irrational sind. Die Zahlenfolge $(1 + 1/n)^n$ wird auch Eulersche Zahlenfolge genannt.
Durch Bailey wurde nur nachgewiesen, dass π+e und π/e keine Lösungen einer ganzrationalen Gleichung maximal 8.Grades für ganzzahlige Koeffizienten $< 10^9$ sind.

Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und mit $x=\pi$ --> $e^{i\pi} + 1 = 0$
Die Beziehung **$e^{i\pi} = -1$**
wurde zum wichtigsten mathematischen Satz aller Zeiten gewählt!

Kettenbrüche e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, ...] (e - 1)/(e + 1) = [2, 6, 10, 14, ...]
e - 1 = [1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, ...] (e - 1)/2 = [0, 1, 6, 10, 14, ...]
$\sqrt{e}$ = [1, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 9, 1, 1, 13, ...]
Die Abbildung zeigt die ersten Glieder der Kettenbruchentwicklung von e als Folge von Binärzahlen.

Näherungsbrüche für e
3 , 8/3 , 11/4 , 19/7 , 87/32 , 106/39 , 193/71 , 1264/465, 1457/536, 2721/1001, 23225/8544, 25946/9545, 49171/18089, 517656/190435, 566827/208524, 1084483/398959, 13580623/4996032, 14665106/5394991, 28245729/10391023, 410105312/150869313, 438351041/161260336, ...

Reihenentwicklung der Eulerschen Zahl
Nach Definition der Eulerschen Zahl gilt $e = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$
Entwickelt man den Grenzwert in eine Reihe, so ergibt sich

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = \lim_{n\to\infty} \Sigma_{i=0}^n \binom{n}{i} 1/n^i = \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 + n/n + n\cdot(n-1) / (1\cdot2\cdot n^2) + n\cdot(n-1)\cdot(n-2) / (1\cdot2\cdot3\cdot n^3) + \ldots) \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 + 1 + 1/(1\cdot2)\ (1 - 1/n) + 1/(1\cdot2\cdot3)\ (1 - 1/n)\ (1 - 2/n) + \ldots) \\ &= 1 + 1 + 1/(1\cdot2) + 1/(1\cdot2\cdot3) + 1/(1\cdot2\cdot3\cdot4) + \ldots \\ &= 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \ldots \end{aligned}$$

Wird zur näherungsweisen Berechnung von e die Reihe bei dem Term 1/n! abgebrochen, so ist das Restglied R_n stets kleiner als $1/n\cdot1/n!$. Für den Exponentialterm e^x wird analog

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n = \lim_{n\to\infty} \Sigma_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i/n^i = \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 + x + 1/(1\cdot2)\ (1 - 1/n)\ x^2 + 1/(1\cdot2\cdot3)\ (1 - 1/n)\ (1 - 2/n)\ x^3 + \ldots) \\ &= 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \ldots \end{aligned}$$

Erklärung: Die Zahl e soll bis auf 6 Dezimalstellen genau berechnet werden. Dazu geht man von der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion bei $x_0 = 0$ aus

$$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \ldots + x^n/n! + \ldots$$

Man berechnet e^1 durch das Taylor-Polynom der Ordnung n

$$e^1 \approx p_n(1) = 1 + 1 + 1/2!\ 1^2 + \ldots + 1/n!\ 1^n$$

Der Fehler ist nach dem Lagrangen Restglied

$$R_n(1) = 1/(n+1)!\ e^\xi \leq 1/(n+1)!\ e^1 < 3/(n+1)!\ ,\ \text{da } e^\xi \leq e^1 < 3.$$

Damit der Fehler kleiner als 6 Dezimalstellen wird, muss

$$R_n(1) < 3/(n+1)! < 0{,}9\cdot10^{-6}$$
$$(n+1)! > 3/(0{,}9\cdot10^{-6}) \approx 3\,333\,333.$$

Dies ist für $n \geq 9$ erfüllt, da $(9 + 1)! = 3628800$ ist.
Für n = 9 ist e_1 bis auf 6 Dezimalstellen genau berechnet: $e^1 \approx 2{,}7182815$.

Vergleicht man diese Methode zur Berechnung der Zahl e mit der Folge $(1 + 1/n)^n$, so ist die Reihendarstellung sehr schnell konvergent. Es werden für eine Genauigkeit von 6 Dezimalstellen nur 9 Summenglieder benötigt, im Vergleich zu n > 105 bei der Folgendarstellung.

Eulersche Zahl Ziffern
e ist eine unendliche, nicht-periodische, irrationale Dezimalzahl, deren Transzendenz durch Hermite nachgewiesen wurde. Die ersten Dezimalziffern von e:
Aktueller Rekord: Durch den japanischen Mathematiker Shigeru Kondo wurden 2002 über 12,8 Milliarden Dezimalziffern von e auf einem normalen PC (Pentium III 1000) berechnet. Der Computer benötigte dafür 22 Tage.

Untersucht man das Auftreten aller n-stelligen Zahlen in der Ziffernfolge von e, so sind für n = 1,2,3,... die zuletzt auftretenden n- stelligen Zahlen 6, 12, 548, 1769, 92994, 513311, ..., die an der Position 21, 372, 8092, 102128, 1061613, 12108841, ... enden.
Mit dem Freeware-Programm PIFAST gelingt es auf einem normalen PC (1,7 GHz) in nur 50 Sekunden immerhin 20 Millionen Stellen der Eulerschen Zahl zu berechnen.

Eulersche Zahl, Tröpfelalgorithmus

Für die Berechnung der Ziffern von e existiert ein Tröpfelalgorithmus.
Als Tröpfelalgorithmus bezeichnet man einen Algorithmus zur Berechnung mathematischer Konstanten wie π oder e, bei dem die Ziffern eine nach der anderen berechnet und anschließend nicht mehr benötigt werden, also "herauströpfeln".

Tröpfelalgorithmus für die Eulersche Zahl

1. Bestimme m so, dass m! mindestens n Stellen besitzt.
2. Notiere zwei Zeilen A und B mit je m Spalten. Die erste Spalte bleibt jeweils frei, Zeile A wird mit m-1 Zahlen 1 gefüllt, Zeile B mit den Zahlen von 2 bis m.
3. Notiere eine weitere Zeile, in der ersten Spalte eine 2, anschließend m-1 Mal die 1. Die 2 ist bereits die Ziffer vor dem Komma.
4. Füge eine weitere Zeile unten an, und fülle sie mit den folgenden Schritten von rechts nach links:

4.1. Bestimme die nächste Zahl durch folgende Schritte:
1. Multipliziere die Zahl, die in der aktuellen Spalte in der vorherigen Zeile steht mit 10 und addiere den Übertrag von der vorherigen Spalte (rechts außen ist der Übertrag 0).
2. Dividiere das Ergebnis mit Rest durch die Zahl, die in der Zeile B steht, und notiere den Rest. Der ganzzahlige Quotient ist der nächste Übertrag. Wiederhole Schritt 4.1, bis die zweite Spalte gefüllt ist.

4.2. Notiere den Übertrag aus der zweiten Spalte in der ersten Spalte, es ist die nächste Ziffer von e. Wiederhole Schritt 4, bis du n Stellen berechnet hast.

Eulersche Zahl Näherung

Werte für $(1 + 1/n)^n$ für unterschiedliche n (ungültige Ziffern von e sind durch Leerzeichen getrennt).
Anmerkung: Für höhere n genügt die verwendete 192 bit-Arithmetik nicht mehr. Die nachfolgenden Werte weichen auf Grund
von Rundungsfehlern wieder stärker von e ab.

n	$(1 + 1/n)^n$	Abweichung von e
10^0	2. 0	0.71828182
10^1	2. 5937424601	0.12453936
10^2	2.7 048138294215260932671947108075308336 7	0.01346799
10^3	2.71 692393223589245738308812194757718896	0.00135789
10^4	2.718 145926825224864037664674913146536 11	$1.35901633 \cdot 10^{-4}$
10^5	2.7182 682371744896680350648244260464479 7	$1.35912845 \cdot 10^{-5}$
10^6	2.71828 046931937688381979970845435639275	$1.35913966 \cdot 10^{-6}$ ...
10^{27}	2.718281828459045235360287 4 6999278868470	$1.35987381 \cdot 10^{-27}$
10^{28}	2.7182818284590452353602874 7 121158476369	$1.41077734 \cdot 10^{-28}$

Eulerscher Beweis der Irrationalität von e

1737 gab Euler einen elementaren Beweis für die Irrationalität von e, basierend auf der unendlichen Reihe

$$e = 1 + 1/1! + 1/2! + \ldots + 1/n! + \ldots$$

Angenommen e = p/q wäre rational mit q > 1, dann ist die Zahl

$$q!\,(e - 1 - 1/1! - 1/2! - \ldots - 1/q!) = q!\,(1/(q+1)! + 1/(q+2)! + \ldots + 1/(q+n)! + \ldots)$$

eine von Null verschiedene ganze Zahl. Andererseits ist aber

$$1/(q+1) + 1/((q+1)(q+2)) + \ldots + 1/((q+1)\ldots(q+n)) + \ldots < ½ + 1/2^2 + \ldots 1/2^n + \ldots = 1$$

und so garantiert kleiner als 1. Dieser Widerspruch führt dazu, dass e irrational sein muss.

Eulersche Zahl - Weitere Beziehungen

Stirlingsche Formel $\lim_{n\to\infty} \left((n!)^{(1/n)} / n \right) = 1/e$

Näherungsformeln für e (nach Castellanos 1988)

$e \approx 2 + (54^2 + 41^2)/80^2$ Genauigkeit 6 Ziffern

$e \approx (\pi^4 + \pi^5)^{1/6}$	7 Ziffern
$e \approx 271801/99990$	9 Ziffern
$e \approx (150 - (87^3+12^5)/83^3)^{1/5}$	10 Ziffern
$e \approx 4 - (300^4 - 100^4 - 1291^2 + 9^2) / 91^5$	12 Ziffern
$e \approx (1097 - (55^5 + 311^3 - 11^3) / 68^5)^{1/7}$	15 Ziffern
Besonderer Grenzwert	$\lim_{n\to\infty} (e^n\, n! / (n^n \sqrt{n})) = \sqrt{(2\pi)}$

Konstante Größen

$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$
$e/2 = 1.35914091422952261768014373567633124887862354684997...$
$2e = 5.43656365691809047072057494270532499551449418739991...$
$e^2 = 7.38905609893065022723042746057500781318031557055184...$
$e^3 = 20.0855369231876677409285296545817178969879078385541 5...$
$1/e = 0.36787944117144232159552377016146086744581113103176...$
$\sqrt{e} = 1.64872127070012814684865078781416357165377610071014...$
$1/\sqrt{e} = 0.60653065971263342360379953499118045344191813548718...$
$e^{\pi} = 23.1406926327792690057290863679485473802661062426002 1...$
$e^{-\pi} = 0.04321391826377224977441773717172801127572810981063...$
$e^{\pi/2} = 4.81047738096535165547303566670383312639017087466453...$
$e^{-\pi/2} = 0.20787957635076190854695561983497877003387784163176...$
$e^{e} = 15.1542622414792641897604302726299119055285485368561 3...$
$e^{-e} = 0.0659880358453125370767901875968464249385770482527 96$

Mnemonics (engl.)

... die Länge jedes Wortes gibt die in e auftretende Ziffer an

"By omnibus I traveled to Brooklyn" (6 Ziffern)
"To disrupt a playroom is commonly a practice of children" (10 Ziffern)
"I'm forming a mnemonic to remember a function in analysis" (10 Ziffern)
"He repeats: I shouldn't be tippling, I shouldn't be toppling here" (11 Ziffern)

Bezeichnung der Eulerschen Zahl

Im Laufe der Geschichte wurde die Eulersche Zahl e = 2,71828... von verschiedenen Mathematikern unterschiedlich bezeichnet. Explizit berechnet wurde sie erstmals 1618 von Edward Wright.

Jahr	Bezeichnung	Mathematiker, Werk ...
1690	b	Leibniz, Brief an Huygens
1691	b	Leibniz, Brief an Huygens
1703	a	A reviewer Acta eruditorum
1727/8	e	Euler, Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta
1736	e	Euler, Mechanica sive motus scientia analytice exposita
1747	c	D'Alembert, Histoire de l'Académie
1747	e	Euler, verschiedene Artikel
1751	e	Euler, verschiedene Artikel
1760	e	Daniel Bernoulli, Histoire de l'Académie r. d. sciences
1763	e	J. A. Segner, Cursus mathematici
1764	c	D'Alembert, Histoire de l'Académie
1764	e	J. H. Lambert, Histoire de l'Académie
1771	e	Condorcet, Histoire de l'Académie
1774	e	Abbé Sauri, Cours de mathématiques
1775	e	J. A. Fas, Inleiding tot de Kennisse en het gebruyk der Oneindig Kleinen
1782	e	P. Frisi, Operum tomus primus
1787	c	Daniel Melandri, Nova Acta Helvetica physico-mathematica

Euler benannte die Konstante nicht mit "e" als Anspielung auf den ersten Buchstaben seines Namens, sondern als Abkürzung für "Einheit". Ursprünglich wurde e Napiers-Konstante genannt. Erst nach Eulers Tod setzte sich die neue Bezeichnung allmählich durch.

Eulersche Zahl und Zinsrechnung

Angenommen man verleihe einen Betrag G an einen Bekannten und erhebe einen (Wucher-)Zins von 100% je Jahr. Dann erhält man nach einem Jahr den Betrag von

$$G_1 = G + 100/100\ G = 2\ G$$

zurück.
Senkt man den Zinssatz auf "nur" 50 %, erhebt aber halbjährlich die Zinsen, d.h. 2 Zinsperioden, so wird der Gesamtbetrag G_2 größer als G_1:

$$G_2 = G\ (1 + 50/100)\ (1 + 50/100) = G\ (1 + 1/2)^2 = 2{,}25\ G$$

Wird der Zinssatz auf 33 1/3 % mit drei Zinsperioden verändert wird

$$G_3 = G\ (1 + 1/3)^3 = 2{,}370370\ldots\ G$$

Als Frage ergibt sich nun, ob man bei weiterem Absenken der Zinssätze und dem gleichzeitigen Verkürzen der Verzinsungszeiten, jeder beliebiger Betrag erzielt werden kann.
Es zeigt sich, dass dies nicht der Fall ist. Allgemein ist $G_n = G\ (1 + 1/n)^n$
Strebt n nun gegen Unendlich, so strebt der Wert $(1 + 1/n)^n$ gegen die Eulersche Zahl e.
Für sehr viele Verzinsungsabschnitte wird $G_n = G\ (1 + 1/n)^n \approx 2{,}718281828\ldots\ G$

Ziffern der Eulerschen Zahl

2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035
3547594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295 26
0595630738132328627943490763233829880753195251019011573834187930702154089 14
9934884167509244761460668082264800168477411853742345442437107539077744992 06
9551702761838606261331384583000752044933826560297606737113200709328709127 44
3747047230696977209310141692836819025515108657463772111252389784425056953 69
6770785449969967946864454905987931636889230098793127736178215424999229576 35
1482208269895193668033182528869398496465105820939239829488793320362509443 11
7301238197068416140397019837679320683282376464804295311802328782509819455 81
5301756717361332069811250996181881593041690351598888519345807273866738589 42
2879228499892086805825749279610484198444363463244968487560233624827041978 62
3209002160990235304369941849146314093431738143640546253152096183690888707 01
6768396424378140592714563549061303107208510383750510115747704171898610687 39
6965521267154688957035035402123407849819334321068170121005627880235193033 22
4745015853904730419957777093503660416997329725088687696640355570716226844 71
6256079882651787134195124665201030592123667719432527867539855894489697096 40
9754591856956380236370162112047742722836489613422516445078182442352948636 37
2141740238893441247963574370263755294448337998016125492278509257782562092 62
2648326277933386566481627725164019105900491644998289315056604725802778631 86
4155195653244258698294695930801915298721172556347546396447910145904090586 29
8496791287406870504895858671747985466775757320568128845920541334053922000 11
3786300945560688166740016984205580403363795376452030402432256613527836951 17
7883863874439662532249850654995886234281899707733276171783928034946501434 55
8897071942586398772754710962953741521115136835062752602326484728703920764 31
0059584116612054529703023647254929666938115137322753645098889031360205724 81
7658511806303644281231496550704751025446501172721155519486685080036853228 18
3152196003735625279449515828418829478761085263981395599006737648292244375 28
7184624578036192981971399147564488262603903381441823262515097482798777996 43
7308997038886778227138360577297882412561190717663946507063304527954661855 09
6666185664709711344474016070462621568071748187784437143698821855967095910 25
9686200235371858874856965220005031173439207321139080329363447972735595527 73
4907178379342163701205005451326383544000186323991490705479778056697853358 04
8966906295119432473099587655236812859041383241160722602998330535370876138 93
9639177957454016137223618789365260538155841587186925538606164779834025435 12
8439612946035291332594279490433729908573158029095863138268329147711639633 70
9240031689458636060645845925126994655724839186564209752685082307544254599 37
6917041977780085362730941710163434907696423722294352366125572508814779223 15
1974778060569672538017180776360346245927877846585065605078084421152969752 18
9087401966090665180351650179250461950136658543663271254963990854914420001 45
7476081930221206602433009641270489439039717719518069908699860663658323227 87
0937650226014929101151717763594460202324930028040186772391028809786660565 11
8326004368850881715723866984224220102495055188169480322100251542649463981 28
7367765892768816359831247788652014117411091360116499507662907794364600585 19

4199856016264790761532103872755712699251827568798930276176114616254935649590
3798045838182323368612016243736569846703785853305275833337939907521660692380
5336988795651372855938834998947074161815501253970646481719467083481972144
8889879067650379590366967249499254527903372963616265897603949857674139735944
1023744329709355477982629614591442936451428617158587339746791897571211956187
3857836447584484235555810500256114923915188930994634284139360803830916628
1881150371528496705974162562823609216807515017772538740256425347087908913729
1722828611515915683725241630772254406337875931059826760944203261924285317018
7817729602354130606721360460003896610936470951414171857770141806064436368
1546444005331608778314317444081194942297559931401188868331483280270655383300
4693290115744147563139997221703804617092894579096271662260740718749975359212
7560844147378233032703301682371936480021732857349359475643341299430248502
3573221459784328264142168487872167336701061509424345698440187331281010794512
7223737886126058165668053714396127888732527373890392890506865324138062796025
9303877276977837928684093253658807339884572187460210053114833513238500478
2716937621800490479559795929059165547050577751430817511269898518840871856402
6035305583737832422924185625644255022672155980274012617971928047139600689163
8286652770097527670697770364392602243728418408832518487704726384403795301
6690546593746161932384036389313136432713768884102681121989127522305625675625
4701725086349765367288605966752740868627407912856576996313789753034660616669
8042182677245605306607738996242183408598820718646826232150802882863597468
3965435885668550377313129658797581050121491620765676995065971534476347032085
3215603674828608378656803073062657633469774295634643716709397193060876963495
3288468336130388294310408002968738691170666661468000151211434422560238744
7432525076938707777519329994213727721125884360871583483562696166198057252661
2206797540621062080649882918454395301529982092503005498257043390553570168653
1205264956148572492573862069174036952135337325316663454665885972866594511
3644137033139367211856955395210845840724432383558606310680696492485123263269
9514603596037297253198368423363904632136710116192821711150282801604488058802
3820319814930963695967358327420249882456849412738605664913525267060462344
5054922758115170931492187959271800194096886698683703730220047531433818109270
8030017205935530520700706072233999463990571311587099635777359027196285061146
5148375262095653467132900259943976631145459026858989791158370934193704411
5512192011716488056694593813118384376562062784631049034629395002945834116482
4114969758326011800731699437393506966295712410273239138741754923071862454543
2220395527352952402459038057445028922468862853365422138157221311632881120
5214648980518009202471939171055539011394331668151582884368760696110250517100
7392762385553386272553538830960671644662370922646809671254061869502143176211
6681400975952814939072226011126811531083873176173232352636058381731510345
9573653822353499293582283685100781088463434998351840445170427018938199424341
0090575376257767571118090088164183319201962623416288166521374717325477727783
4887743665188287521566857195063719365653903894493664217640031215278702223
6646363575550356557694888654950027085392361710550213114741374410613444554419
2101336172996285694899193369184729478580729156088510396781959429833186480756
0836795514966364489655929481878517840387733262470519450504198477420141839
4773120281588684570729054405751060128525805659470304683634459265255213700806
8752009593453607316226118728173928074623094685367823106097921599360019946237
9934342106878134973469592464697525062469586169091785739765951993929939955
6754271465491045686070209901260681870498417807917392407194599632306025470790
1774527513186809982284730860766536866855516467702911336827563107223346726113
7054907953658345386371962358563126183871567741187385277229225947433737856
9553845624680101390572787101651296663676445187246565373040244368414081448873
2957847348490003019477888020460324660842875351848364959195082888323206522128
1041904480472479492913422849519700226013104300624107179715027934332634079
9596053144605323048852897291765987601666781193793237245385720960758227717848
3361613582612896226118129455927462767137794487586753657544861407611931125958
5126557597345730153336426307679854433857617153334623252705720053039882894
9903425956623297578248873502925916682589445689465599265845476269452878051650
1720674785417887982276806536650641910973434528878338621726156269582654478205
6729877564263253215942944180399432170000905426507630955884658951717091476

0743713689331946909098190450129030709956622662030318264936573369841955577696
3787624918852865686607600566025605445711337286840205574416030837052312242587
22343885412317948138855007568938112493538631863528708379984569261998179452
3364087429591180747453419551420351726184200845509170845682368200897739455842
679214273477560879644279202708312150156406341341617166448069815483764491573
90012121704154787259199894382536495051477137939914720521952907939613762110
72384942906163576045962312535060685376514231153496656837151166042207963944
666211632551577290709784731562782775987881364919512574833287937715714590910
648416426783099497236744201758622694021594079244805412553604313179926967391
575424192966073123937635421392306178767539587114361040894099660894714183406
983629936753626215452472984642137528910798843813060955526227208375186298370
667872244301957937937860721072542772890717328548743743557819665117166183308
811291202452040486822000723440350254482028342541878846536025915064452716577
000445210977355858976226554849416217149895323834216001140629507184904277892
585527430352213968356790180764060421383073087744601708426882722611771808426
643336517800021719034492342642662922614560043373838683355553434530042648184
739892156270860956506293404052649432442614456659212912256488935696550091543
064261342526684725949l431...

Lichtabsorption und Eulersche Zahl

Gegeben sei eine nicht vollkommen lichtdurchlässige Platte mit parallelen Flächen. Fällt ein Bündel paralleler Lichtstrahlen der Intensität I_0 senkrecht auf eine Fläche, so tritt auf der anderen Seite Licht der Intensität pI_0 aus.
p ist von der Wellenlänge des Lichts abhängig, jedoch nicht von I_0. Die Lichtabsorption ist proportional zur Lichtintensität.
Ist die Platte hinreichend dünn, so ist die Absorption proportional zur Plattendicke d, d.h. $p = \alpha d$. α ist ein materialabhängiger Absorptionskoeffizient. Betrachtet man eine Platte der Dicke x, so kann diese in x/d Schichten geteilt werden. Die Intensität ist nach dem Durchgang von n Schichten $I = I_0 (1 - \alpha d)^n$
d.h. für die ganze Platte $I = I_0 (1 - \alpha d)^{x/d}$
Das Ergebnis wird für eine zunehmende Anzahl von Schichten genauer, und somit
$I = I_0 \lim_{d\to 0} (1 + \alpha d)^{-x/d}$
und mit $\alpha d = -\varepsilon$ $I = I_0 \lim_{\varepsilon\to 0} (1 + \varepsilon)^{-\alpha x/\varepsilon} = I_0 \lim_{\varepsilon\to 0} [(1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}]^{\alpha x}$
$\lim_{\varepsilon\to 0} (1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}$ entspricht der Eulerschen Zahl e, so dass sich insgesamt ergibt $I = I_0 e^{\alpha x}$

E-Code-Tabelle

In Analogie zum sogenannten PI-Code kann man auch die Dezimalzifferfolge von e im 26er-System darstellen. Auch hier kann man nach dem Auftreten bestimmter Buchstabenfolgen suchen, die ein deutsches Wort darstellen. Nachfolgend sind solche drei- bis fünfbuchstabigen Worte mit ihrem erstmaligen Auftreten aufgelistet (Stand: Juni 2006, St.Polster).

5buchstabige Wörter
WANGE (2268), ANGEL (2269), VALID (17889), ESSIG (21212), ARITE (27381), PUMPE (28866)

4buchstabige Wörter
INCH (2249), GELB (2271), ZAHM (2338), TAUB (2962), PILZ (3232), WURM (3894), LAUT (4883), HELM (6006), DUFT (7051), TREU (8419), GIFT (8627), IDEE (9625), TORR (9639), EDAM (10027), EHRE (10045), RUHE (10209), JUDE (10608), STAB (10740), BOOT (11137), NAME (11178), FIRM (11271), PARK (12152), BIER (12484), HEXE (12801), NEST (12833), NACH (14282), GENF (15245), BROT (15358), VIEL (15393), KLAR (16470), BYTE (18371), GELD (20017), ZEUG (20049), ROBE (22376), HEHR (23060), HERR (23181), PUFF (24296), TIEF (24777), ZINS (25646), LAMM (27438), GANZ (27607), TRIO (29215), HOHL (30957), BAUM (31542), ECHT (31670), REIN (31736), WOLF (32251), KUBA (32413), VERB (33101), DIEB (33974), FEST (34406)

3buchstabige Wörter
HEU (382), ENG (507), HUF (693), JUX (785), ABT (855), TUN (983), JOD (1026), LKW (1029), EIS (1140), TAL (1176), NUN (1537), DER (1541), ERZ (1542), LOB (1641), TAG (1706), NUR (1714), ICH (1762), FIX (1771), TAT (1896), NOT (2345), GIN (2564), ALT

(2730), OHM (2820), AUS (2915), TAU (2962), AXT (3022), IHR (3572), MIT (3583), TON (3710), TOD (3909), AKT (4223), TOR (4242), SEE (4424), AUF (4522), GUT (4809), WIR (4954), ROH (5676), EIN (5752), TOT (5783), HAI (5887), BAR (6026), PIK (6104), AUE (6280), IHN (6301), UND (6371), SIE (7136), BUG (7362), GAR (7682), EKG (7886), ZUG (8447), PIA (9015), BUS (9540), WAS (10176), WEG (10471), RUF (10773), ARG (10979), KGV (11247), ARM (11490), IST (11762), ACH (12078), ALS (12200), UHR (12574), AMT (12849), ODE (12935), WAL (13107), WEH (13270), GGT (13483), VOR (13612), WUT (13717), IHM (13766), FEE (14292), SEX (14322), AHN (14677), GON (15122), BEI (15305), ROT (15359), BIS (15397), OHR (15414), MAL (15793), ORT (16154), KOT (16185), TEE (17085), BIT (18247), UHU (18436), REH (18691), BAI (18923), MUT (19293), BOA (19450), MAI (19567), HOF (19777), DIE (20371), PRO (20988), ROM (20989), ZAR (22984), RAD (23266), EID (23379)

e im 26er-System des E-Codes

Die Ziffernfolge der Eulerschen Zahl im Positionssystem zur Basis 26 mit der zusätzlichen Kodierung 0 = A, 1 = B, …, 25 = Z lautet:

SRONOMLBJZWCUWZWHGRTWGJXKEZSRLNYTLNVRYPOXJGTMLTFFDPEENWKNGCRPRLLJMRMF
MERTNTKQFPGFPTHRLWIPNZZKAHBJBHNGKYONJHIMVTGFVEPOQLYTQMCHDKGWQMEVJMZFZC
JQOUQHTNTTLETMTNSZIAKVTKBKHYKGJSZMJMSYEIVMNOHOOCZFEMKNTYXKJAODVYMFSIXO
DSUTDMUCGZEOLTOWRANZLWIZODBAXGLGFREUOLXXRIMPEUKHYTFGZTRGXAQBMFSRXUJML
FNSHXKCVXRQBIGWFKHJRTMBRFFDYDJVPFYVXNJRYTQRLDVEEKQARKRPORDVAJMVLLLVEGLN
GQPFCWEJVEAKKVETZNWMZTQPEWVQPEIOHEUVVLIHBPAMQHBTRIFLTGVCMPORSTADJXWOAK
MDJXEADPTOZBHNJHWVCRRFRMBBCXAUNUXVTIUUXNUTRFKBGXXCAGMRXILKFRLSOFRRDQW
NCAWVYDEXVDWSDXIPOENGGPPBJQCEWDKSLMNNQYKLWKQZDMQZPXZTLEQROECUSKHNKA
KGBZSDGMUJOATAACOGIBMCOZNNJGGNSWTZMPAANDINFZNJQZLZCMZLXPHHXOUCQODHOK
BGXIJNPOONZOFLGSCEYRGRUQCDCPXDDPZXMLBLBOWGHZRMIHTPLMFETIBSGTDJIDJLAKFHU
FOUFXIMVPFDAFGCTFIGGMWMIGCAUASJJOVZBHPWOLPZAWSWYNVCUUPGHLFICBLIULJUJVZW
WCBSUBXGWGLGZEGLUYCJUXAVOSJRSTFRKCMGZGGWNZCBPQIHBQEHJAVPQRVTXDZDNMAQ
DAGBCLVRVSKRMAEVHOJSNABTPTOZVKAXWONQQTKADDHOXOSOPYAICJESVVUVMXUFSJIZBP
PVOYFQRVIXTVGSJYHLQUQZLWINIQCWLFIYHREKNSJVSIMOQGGIWHLTYEZZTJQGGSNWQVCD
WEBLLDAVFTUNCDRJTPPUIMQTYBZESFVOLVQZPCZEJXQUNPTVNQAKJODLKWOAIAQWGYRVVV
QHXMCXFVIZZQJTUOEKQCHBRTDJHAALCINKCTCQFWQGJMPHIQNNIFNNPNAGGLYZRTSXYPRFO
HFVZJCFYZXIWHDVRYUCRZIQPWEISPHJPRNGTQBUIZCXVRAHFDEYGOHKPYDTEYTALRWGFYTR
VWPSYMAADYRLSLSZGXWAZLWKLUYCDMLXNCRMWEMWPTENIGURVZIYBMPPZNCRKWSKTLMM
PJTKNXWTPHXUPLBHUJRMSSJXFJPLHIEWXTRXNEDQCIZPMPKFYQJYSUWOZWOQRVPAAJEDIPD
XHCLKQWOQGLGERLWVESZIMSFVRBNMPDBKLZYCBKLVPPRBJQSNCEPYHBPFCGGPSQKNBTOPV
RKSJXBOQTEUNXKBYQGWFSGEWRJDDXXSBSPWOMACCULMPIOSMRXPOWBWOEMZMKRCEIRM
AHITQFYOKYEHIYPZSCSFRYRBNZVEUAAJZWEVIIFQBOTOZXOMHLIUEGGUDUIGBWNJKYSCPSC
NOEQNUNWDERZWXSQZJMEGECLQDGNVDGUCHDRVXLZSXBEPWONUOZREXRMJZVQEPCRIIGC
LJKVWFQUSGGIDZFQJIYRDQXWMYZPCVIVMUFOHJYYLOBAQHKLDHNWOZXVLZECCVGVOCRCQ
DRTTJMLRNGPZPBLDOQWPDJJIFYOFZNXWRNQKTAGFTURZNURETTKPLUBFXUFFXLZBAMVJWRS
TKHHFJCNFCPAXLMAGJSHYICHYMWQJBFIXFUGILJCVKXAUYEMSWUHWPFANYCUMRNTNXUSXJC
SLZWUPGNBEACMXXVQAQLRXWLXVGVBGDQMMXGVATXRLTHBNCDREXYRTFLRRTDOULGM...

Eulersche Zahl im Dualsystem

die ersten Dezimalziffern von e als 2-adischen Bruch sind:
1011011111100001010100010110001010001010111011010010101001101010101111111011
1000101011000100000000100111001111010011110011110001110110001011100111000101
1000001111001110001011010011011010010101101010011110000100110110010000001000
101000110010000110011111110111100110010010011100111011100111000100100100110
1100111110111110010111110100101111111100011011000110110001100001100011101011
1011000111101101000000110110010000000010101011101100010001100000101111010101101
0011110111110001111011010101110101011111110101100101011000010010010000011001
1111101010001111101011111000001100110111011010000100001010110001101100101011
0101010011110111101101000110101111001110110101010101110001001101011110011111
1110101011111001001001101011001100001001111000011000111000011100000111001101
1000101101110111111000101010011010001001110110101111001111101111111010000111
1001000011101111100010101100010100001001101101010110111100111001101010011000
0010101100110010100100111101001000001110100111100101111010101111000000101011

0110001100000101011001100100100111110110110000111010001000010001010100101001011101100101100100011100011111110111011100101101010110101011011101100000011010111111101000110100000011101010011110100001010100011110111100011100101001101111101001010111001010110111011011110011101100011011...

In der Dualdarstellung von e findet man natürlich die verschiedensten Dualzahlen, zum Beispiel ab Position 3 die Ziffern 1101, d.h. die Zahl 13. Die letzte auftretende einstellige Zahl ist die 9 ab Position 48, die letzte zweistellige Zahl die 80 ab Stelle 389, die letzte dreistellige Zahl ist die 549 ab Position 8642; die letzte vierstellige Zahl ab der 159955.Position ist die 9537. Die zu 272213 gehörige Dualzahl findet man unter den ersten 5 Million Dualstellen von e nicht. Die Tabelle enthält die wachsenden Dualzahlen, die in in den Kommastellen der eulerschen Zahl an einer späteren Stelle auftreten. (Polster, Juni 2006)

n	Position	n	Position	n	Position	n	Position
1	1	3	3	4	11	9	48
19	55	25	101	35	122	36	213
67	236	73	260	75	315	80	389
129	391	135	730	145	1064	255	1525
269	1859	293	3523	515	4330	549	8642
1098	11670	1107	12652	2066	12711	2092	16482
2197	16880	2258	18369	2301	21377	2411	23982
2475	31099	2970	45560	4395	46617	4677	58514
5941	67716	7569	72567	8325	78970	8619	111318
9537	159955	15399	164181	16484	201188	16549	224116
17034	231213	21024	253623	21928	278964	23557	292070
29152	315756	32855	353423	32941	362033	33153	421741
33501	454318	33917	454582	34096	485593	35391	519137
35984	589101	36825	832910	66557	1008020	67015	1055265
72144	1272280	81491	1470696	100462	1584032	131326	2079307
131993	2520535	148200	2808843	162615	3285753	262355	4762734

e^e =
15.15426224147926418976043027262991190552854853685613976914074640591483097373093443260845696835787346051158726885285229584108349266426657649118779479704154810461761622938836845482194326518823698067581131232299035461333833518596595421652507204871131694841248837028298101630940495747791991372453217285387321910680977914733658187699967694174778649038163390505612049776125348054466629607940201952987727518553087967772818052753593112397590600518880880415176415426322765396936941928168141804881105016228571312512573686084170502475372551625472847514104579964933464925837773299779952674620708856662577940458954490095164618850324515554327610255137933371808546841479177132354705069221261463601385181048529506633592057554140009372881327566117797604186973016967248716534292099367010215040882 9...

e^π =
23.14069263277926900572908636794854738026610624260021199344504640952434235069045278351697199706754921967595270480108777314442804441469383584471744587960984936532796586366924223026899101374176468440141039518386847724306805958816244984449143096677841367163196341478403821651128763773147034735383316282129404789193622482022100603206544336273655727182374498961885805959168487264547901339783402659510149964379242296816079956538142353620695760077059046089988300225430487121179130084932737958072942730193104260169193932585320342896866189528329052171115718518550680225419720456637086556838683054479927817040749776854036755653495721886788256399438471822458588942853524726056821027107601849153451846806488738677443963051400516944054066526543096886906393731535983731104217443302396789669003 5...

1/e =
0.367879441171442321595523770161460867445811131031767834507836801697461495744899803357147274345919643746627325276843995208246975792790129008626653589494098783092194367377338115048638991125145616344987719978684475957939747302 54

989249545323936620796481051464752061229422308916492656660036507457728370553
28537383881068047876119568298934544973507393185992166174330035699372082071022775180215849942337816907156676717623366082303761229156237572094700070405097334256775762525280303768861651570936537995427406370717878445419467490931306980560163702111389774228214017380232832465287291389004660986659512444097699851459164287803720202510224578732111059537776807437112206240005167965280975444780286486006838564200433684662484349386918262062518994821970992423425207510492093445285124486022451...

e^2 =
7,389056098930650227230427460575007813180315570551847324087127822522573796079057763384312485079121794773753161265478866123884603692781273374478392213398077774900122895607410753702391330947550682086581820269647868208404220982255234875424625414146799281293318880707633010193378997407299869600953033075153208188236846947930299135587714456831239232727646025883399964612128492852096789051388246639871228137268610647356263792951822278429484345861352876938669857520015499601480750719712933694188519972288826362559719410958661914798715043283976932646102351163123899900105137834067644986638926856158218642155772484920111935316211719517317472697968293451998505418486319713568594702291255739835611051497936814502…

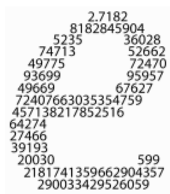
$e^{1/e}$ =
1,4446678610097661336583391085964302230585954532422531658205226643038549377186145055735829230470988511429523184485575419803227050644507431903824515434045323348299589354600565058450155229216855356115763888979191269527071068690455441925402327632452829115155531294480526395191779440816753200019244730489909867275405109516334654321860031956702982909430158801267338033175228207912837451102704873260814978988983190463351143854405447262816274799749460481270356697908366707436286857745469285242239557660491219676478966504162461997038023839327097318593376749353786144331818222839808355940598080149837715987730914221376657228893083038653373796085635927418524207501700955503473378672633650172532071964633094039805…

e^{γ} =
1,78107241799019798523650410310717954916964521430343020535766587651284107681358829370757421648841828033482224522514574200105579457424819650088156857512645001158459572674035828196794290950691578445244410495062474946467395442249392061297366718992961181781716528644204919638814841221685979211079334642491962473558822697919096702915015433548608693369337054694559016232743529532598372576605703618599152243917780024686606635861172879278371923113677573939410409975164020364734843523863820212265066424769625002147263444914484348856424178974964672272861347388162990813399863760165095122593047034574475595061889144856992396607397516215634262865495513739092581419623107855112020801918897490327624494653995917320023…

e-Primzahl

Unter einer e-Primzahl versteht man die von den Ziffern der Eulerschen Zahl e gebildeten natürlichen Zahlen, die Primzahl sind. Dabei wird stets mit der ersten Ziffer "2" begonnen.
Bekannt sind bis heute (Februar 2012):
2, 271, 2718281, 27182 81828 45904 52353 60287 47135 26624 97757 24709 36999 59574 96696 76277 24076 63035 35475 94571, …
Die Ziffernanzahl der bekannten e-Primzahlziffern sind 1, 3, 7, 85.

Die größte dieser Primzahlen wurde am 12.Mai 2003 durch Hisanori Mishima gefunden. Bis n = 250 gibt es keine weitere.



Euler-Mascheroni-Konstante

Die Euler-Mascheroni-Konstante ist eine wichtige Konstante der Analysis und Zahlentheorie.
Wert

γ = 0,57721566490153286060651209008240243104215933593992…
$1/\gamma$ = 1,73245471460063347358302531586082968115577655226680…

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \ln x\,dx$$
$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\,dx$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right) dx$$
$$= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k} + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)\right]$$
$$= \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \ln m\right)$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n}$$
$$= \ln\left(\frac{4}{\pi}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n+1)}{2^n (n+1)}$$

Kettenbruchentwicklung

γ = [0, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 4, 3, 13, 5, 1, 1, 8, 1, 2, 4, 1, 1, 40, …]

Näherungsbrüche

1, 1/2, 3/5, 4/7, 11/19, 15/26, 71/123, 228/395, 3035/5258, 15403/26685, 18438/31943, 33841/58628, 289166/500967, 323007/559595, 935180/1620157, 4063727/7040223, 4998907/8660380, …
Es ist nicht bekannt, ob die Konstante irrational bzw. transzendent ist.
U.a. gelten die links dargestellten Beziehungen.

1781 berechnete Euler 16 Stellen der Konstanten und benutzte das Symbol γ. 1790 ermittelte Mascheroni 32 Stellen, wobei nur die ersten 19 korrekt waren. Der Fehler wurde 1809 von Johann von Soldner korrigiert.
1974 waren 7000 Ziffern, 1980 schon 20000 Stellen (R.P.Brent) bekannt.
Am 9.April 2007 veröffentlichte der 19jährige Alex J.Yee 116580041 berechnete Dezimalstellen. In 38½ Stunden gelang ihm auf einem Laptop der gegenwärtige Rekord (November 2007).

Gamma-Primzahl

Unter einer Gamma-Primzahl versteht man die von den Ziffern der Euler-Mascheroni-Konstanten γ gebildeten natürlichen Zahlen, die Primzahl sind.
Bekannt sind bis heute (Mai 2012): 5, 577, 5772156649015328606065120900824024310421, …
Die Ziffernanzahl der bekannten Gamma-Primzahlziffern sind 1, 3, 40, 185. Die nächste Gamma-Primzahl muss mehr als 250 Stellen besitzen.

Kettenbrüche Eulerscher Zahlen

Durch J.L. Davison wurden 1978 in "An algorithm for the continued fraction of $e^{l/m}$" allgemeine Kettenbruchentwicklungen von Potenzen der Eulerschen Zahl e veröffentlicht.
Es gilt: $e^{2/k}$ = [1, (k-1)/2 + 3λ k, 6 + 12λ k, (5k-1)/2 + 3λ k, 1, …] für k > 1
= [7, 2+ 3λ, 1, 1, 3 + 4λ, 18 + 12λ, …] für k = 1
$e^{1/k}$ = [1, (1 + 2λ) k - 1, 1, …] für k > 1
= [2, 1, 2 + 2λ, 1, …] für k = 1
Dabei ist λ ein Parameter der ab 0 läuft.

Kombinatorik

Zweig der Mathematik, der die verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung von Gegenständen und Zahlen untersucht. Sie ist Grundlage vieler Gebiete der Mathematik, insbesondere der beschreibenden Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Die Anordnungen oder Zusammenstellungen endlich vieler Elemente werden Komplexionen genannt. Dazu gehören die Permutationen, Variationen und Kombinationen.

Fakultät, Fakultätsfunktion

$n\,! = 1 * 2 * 3 * \ldots * (n-1) * n$

Zusatzfestlegung $1\,! = 1$ und $0! = 1$

n	Fakultät n!	n	Fakultät n!	n	Fakultät n!	n	Fakultät n!
1	1	2	2	3	6	4	24
5	120	6	720	7	5040	8	40320
9	362880	10	3628800	11	39916800	12	479001600
13	6227020800	14	87178291200	15	1307674368000	16	20922789888000

Fakultätsbegriff n !

engl. Factorial, Übersetzung: Faktorielle
Für hinreichend große Fakultäten n ! enden diese mit einer Vielzahl von Ziffern 0.
Für deren Anzahl Z wird: $Z = \text{Summe}\,[\,n / 5^k\,]$ von k=1 bis k = [ln n / ln 5]
wobei [ ] den größten ganzzahligen Anteil des Terms darstellt.
Es gilt: $n\,! = \Gamma(n+1)$, wobei $\Gamma(x)$ die Gaußsche Gammafunktion ist
Erweiterung des Fakultätsbegriffs n! auf reelle Zahlen x (x!) und Einführung der Doppelfakultät x!! ergibt:

$(-0{,}5)\,! = \sqrt{\pi}$ $\qquad$ $(0{,}5)\,! = 1/2\,\sqrt{\pi}$

$(n - 0{,}5)\,! = \sqrt{\pi}/2^n\,(2n - 1)!!$ $\qquad$ $(n + 0.5)\,! = \sqrt{\pi}/2^{n+1}\,(2n + 1)!!$

Reihenentwicklung

$$z\,! = \sqrt{(2\pi)}\, z^{(z+1)/2}\, e^{-z}\, (\,1 + 1/12\, z^{-1} + 1/288\, z^{-2} - 139/51840\, z^{-3} + \ldots)$$

$$\ln(z!) = 1/2\,\ln(2\pi) + (z + 1/2)\ln z - z + 1/12\, z^{-1} - 1/360\, z^{-3} + 1/1260\, z^{-5} - \ldots$$

Doppelfakultät

Verallgemeinerung der Fakultät n!
$n!! = n * (n-2) * \ldots * 5 * 3 * 1$; für ungerade n
$n!! = n * (n-2) * \ldots * 6 * 4 * 2$; für gerade n
$n!! = 1$; für n = -1 und 0
Für n = 0,1,2,3,... sind die ersten Werte n!! = 1, 1, 2, 3, 8, 15, 48, 105, 384, ...
Es gilt $\Gamma(n + 1/2) = (2n - 1)!! / 2^n * \sqrt{\pi}$ $\qquad$ $(2n+1)!! = (2n+1)! / (2^n\, n!)$

$(2n)!! = 2^n\, n!$ $\qquad$ $(2n-1)!! = (2n)! / (2^n\, n!)$ $\qquad$ $n! = n!!\,(n-1)\,!!$

Die Zahl n!!-1 ist für folgende n Primzahl: n = 1, 3, 4, 6, 8, 16, 26, 64, 82, 90, 118, 194, 214, 728, 842, 888, 2328, 3326 (5137 Ziffern), ... das nächste n ist größer als 4103 (Polster, Juni 2006)
Die Zahl n!!+1 ist für folgende n Primzahl: n = 1, 2, 518, ... das nächste n ist größer als 4103

Mehrfachfakultät

Den Begriff der Doppelfakultät kann auch auf mehrfache Fakultäten erweitert werden, z.B.

$n!!! = n * (n-3) * \ldots * 7 * 4 * 1$ für $n \equiv 1 \pmod 3$
$n!!! = n * (n-3) * \ldots * 8 * 5 * 2$ für $n \equiv 2 \pmod 3$
$n!!! = n * (n-3) * \ldots * 9 * 6 * 3$ für $n \equiv 0 \pmod 3$
$n!!! = 1$ für n = -2, -1 und 0

Analog definiert man auch Mehrfachfakultäten höherer Ordnung. Eine Liste der n, so dass diese Mehrfachfakultäten Primzahlen sind findet sich im Abschnitt *Multifaktorprimzahlen* unter *Primzahlen*.

Partielle Fakultät

Die Idee der partiellen Fakultät (engl. falling factorial) ist, beginnend ab einem reellen oder komplexen Wert x für einen natürlichen Wert n das Produkt $(x)_n = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot \ldots \cdot (x - n + 1)$ zu bilden.
Mitunter wird $(x)_n$ auch exakt übersetzt von einer fallenden Faktoriellen gesprochen.
Zum Beispiel ist $(6)_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Damit wird $(n)_n = n!$ und $(n)_{n+j} = 0$ für jedes positive, natürliche j.
Auch für nicht ganzzahlige x kann die partielle Fakultät berechnet werden, z.B.

$(2½)_3 = (2½)\cdot(1½)\cdot(½) = 15/8$ oder

$(2½)_4 = (2½)\cdot(1½)\cdot(½)\cdot(-½) = -15/16$

$(i+1)_3 = (i+1)\cdot i\cdot(i-1) = i\cdot(i^2-1) = -2i$

Für die partielle Fakultät werden auch andere als die hier genannte Schreibweise genutzt.

In Analogie wird in der Fachliteratur $(x)_n = x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot \ldots \cdot (x + n - 1)$ als steigende Faktorielle bezeichnet.

Hyperfakultät

Unter der Hyperfakultät H(n) einer natürlichen Zahl n versteht man den Term

$H(n) = \Pi_{i=1}^{n} i^i = 1^1 2^2 3^3 \ldots n^n$

Diese Zahl wächst auf Grund ihrer Definition sehr schnell. Die ersten Werte von H(n) für n = 1, 2, … sind

1, 4, 108, 27648, 86400000, 4031078400000, 3319766398771200000, 5569643794172655697920000, …

Eine Verallgemeinerung stellt die K-Funktion K(n) dar, für die

$K(n+1) = H(n)$

gilt und die auf auf die komplexen Zahlen erweiterbar ist.
siehe dazu http://mathworld.wolfram.com/K-Function.html

Alternierende Fakultät

Die alternierende Fakultät (engl. alternating factorial) ist definiert als Summe aufeinanderfolgender Fakultäten mit alternierenden Vorzeichen. $a(n) = \Sigma_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k!$
Als rekursive Gleichung ergibt sich $a(n) = n! - a(n-1)$
Die ersten Werte von a(n) für n = 1, 2, … sind
1, 1, 5, 19, 101, 619, 4421, 35899, 326981, 3301819, 36614981, 442386619, 5784634181, 81393657019, 1226280710981, 19696509177019, 335990918918981, 6066382786809019, 115578717622022981, 2317323290554617019, 48773618881154822981, …

Die ersten Indizees n, für die a(n) Primzahl wird, sind
3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 15, 19, 41, 59, 61, 105, 160, 661, 2653, 3069, 3943, 4053, 4998, 8275, 9158, 11164, …
Durch P.Jobling wurden 2004 bis n = 20331 keine weiteren Primzahlen gefunden.
1999 bewies Živkovic, dass es nur endliche viele Primzahlen unter den alternierenden Fakultäten gibt.

Permutation

Anzahl der Permutationen von n Elementen (Anzahl unterschiedlicher Reihenfolgen dieser Elemente)

Anzahl = n!

Permutationen sind damit Bijektionen einer endlichen Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ auf sich. Die identische Permutation entspricht der identischen Abbildung. Unter einer Permutation ohne Wiederholung ist der hier definierte Begriff zu verstehen.

Stirlingsche Näherungsformel

$n! \approx \sqrt{(2\pi n)} * n^n * e^{-n}$

n	10	100	1000
n!	3628800	$9.33262154439\cdot 10^{157}$	$4.02387260077\cdot 10^{2567}$
Stirling-Wert	3598695.6	$9.32484762528\cdot 10^{157}$	$4.02353729207\cdot 10^{2567}$

Inversion

Werden Elemente in einer bestimmten Anordnung permutiert, dann bilden zwei Elemente der Permutation eine Inversion, wenn die Reihenfolge gegenüber der ursprünglichen Reihenfolge umgekehrt ist.
gerade Permutation ... gerade Anzahl von Inversionen
ungerade Permutation ... ungerade Anzahl von Inversionen
Anzahl der möglichen geraden Permutationen = Anzahl der möglichen ungeraden Permutationen = n!/2

Permutation von k Elementen

Ist eine Menge M = (1, 2, ..., k} von k Elementen gegeben, so lässt sich jede Permutation dieser Elemente als zweizeilige Matrix schreiben: $P_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ s1 & s2 & s3 & \ldots & sk \end{pmatrix}$

Dadurch wird es auch möglich, das Produkt zweier Permutationen als Nacheinanderausführung zweier Abbildungen zu definieren.

Dazu schreibt man beide Permutationen als Matrix und vertauscht die Spalten des zweiten Faktors so, dass die erste Zeile der zweiten Faktors mit der zweiten Zeile des ersten Faktors übereinstimmt. Die Matrix des Produktes besteht dann aus der ersten Zeile des ersten Faktors und der zweiten Zeile des zweiten Faktors:

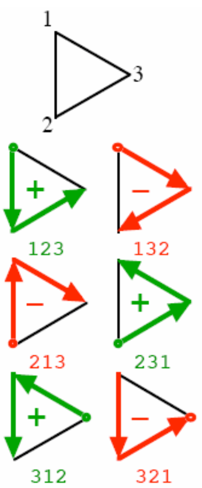
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ s1 & s2 & s3 & \ldots & sk \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s1 & s2 & s3 & \ldots & sk \\ t1 & t2 & t3 & \ldots & tk \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ t1 & t2 & t3 & \ldots & tk \end{pmatrix}$$

Es gilt:
1) Zu je zwei Permutationen von k Elementen ist das Produkt eine eindeutig bestimmte Permutation.
2) Das Produkt ist eine assoziative, aber nicht kommutative, binäre Operation.
3) Die identische Permutation ist das neutrale Element des Produktes von Permutationen.
4) Zu jeder Permutation existiert eine inverse Permutation, die durch Vertauschung der zwei Zeilen entsteht.

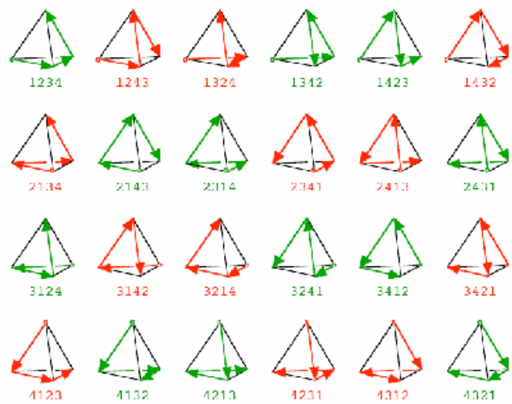
Damit bilden alle Permutationen von k Elementen mit dem Produkt eine Gruppe der Ordnung k!, die Permutationsgruppe oder symmetrische Gruppe S_k.
Die Menge aller geraden Permutationen von {1, ..., k} bildet eine Untergruppe von S_k von der Ordnung k!/2. Diese Untergruppe heißt alternierende Gruppe A_k.

Permutation (2)

Für n = 3 existieren 3! = 6 verschiedene Permutationen: 123 132 213 231 312 321
Diese lassen sich im Dreieck illustrieren. Man nummeriert die Dreiecksecken und zeichnet für jede Permutation einen Vektorzug (Abbildung).



Bei den geraden Permutationen (grün) haben die beiden aufeinander folgenden Vektoren einen Zwischenwinkel von 2π/3, es geht im positiven Drehsinn herum; bei den ungeraden Permutationen (rot) haben die beiden aufeinander folgenden Vektoren einen Zwischenwinkel von -2π/3 und es geht im negativen Drehsinn herum.
Alle grünen Vektorzüge lassen sich durch eine Drehung aufeinander abbilden, sie sind also gleich orientiert. Zwischen einen grünen und einem roten Vektorzug braucht es zusätzlich eine Geradenspiegelung.



Zur Kennzeichnung der 24 Permutationen von 4 Elementen kann man einen Tetraeder verwenden. Die entsprechenden Vektorzüge zeigt die nachfolgende Abbildung:
Abbildung: 24 Vektorzüge auf einem Tetraeder

Permutationen mit Wiederholung

... Permutationen mit k Gruppen gleicher Elemente, Anzahl der Elemente je Gruppe p_i

$$\text{Anzahl} = n!/(p_1! * p_2! * \ldots p_k!)$$

Beispiel: Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 2, 3, 3, 5, 5 bilden?

$$P_{2,2}(5) = 5! / (2!\ 2!) = 30$$

Die bei Permutationen mit Wiederholung gebildeten Zahlen werden auch Multinomialzahlen genannt.

Permutationen mit Fixpunkt

Ist P eine Permutation von n Elementen {1,2,...,i,...,n}, so heißt jedes i aus dieser Menge Fixpunkt, wenn dieses Element innerhalb der Permutation an i.ter Stelle auftritt.

genau ein Fixpunkt:

$$P = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} i*(k-i)!$$

mindestens ein Fixpunkt:

$$P = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (k-i)!$$

k-Permutationen

Ordnet man die k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge in beliebiger Reihenfolge an, so ergeben sich die k-Permutationen dieser Menge.
Diese entsprechen den Variationen zur k-ten Klasse. Da es $\binom{n}{k}$ k-Teilmengen gibt, die je auf k! Arten angeordnet werden können, gibt es insgesamt $\binom{n}{k} k! = n!/(n-k)!$ k-Permutationen.

Einen Spezialfall der k-Permutationen stellen die Zeilen eines Primzahldreiecks dar.
Ein Dreieck, dessen Zeilen {1, 2, …, n} mit einer 1 beginnen und auf n enden, heißt Primzahldreieck, wenn die Summe benachbarter Zahlen stets eine Primzahl bildet. Dabei darf jede der Zahlen {1, 2, …, n} genau einmal in der Zeile auftreten, d.h., die Zahlen bilden eine Permutation.
Im Lexikon finden Sie unter Primzahldreieck für n = 4, …, 14 die Lösungen.

k-Permutationen-Aufgabe

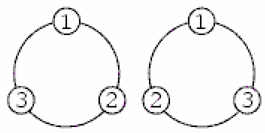
Gegeben ist eine Ausgangsmenge von nicht notwendig verschiedenen Ziffern, z.B. {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen a und b, die aus genau den gegebenen Ziffern bestehen und einen Quotienten q besitzen. Jede der gegebenen Ziffern muss dabei verwendet werden.
Ist q = 2, so findet man für {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} zum Beispiel die Zahlenpaare

(13485, 26970), (13548, 27096), …, (48651, 97302), usw.

Für {0,1,1,2,2,3,3,4,4,6} und q = 3 ergeben sich u.a. die Lösungen

(11342, 34026), (12134, 36402), …, (20441, 61323)

Für die Mehrzahl der Eingaben ergeben sich allerdings keine Lösungen.

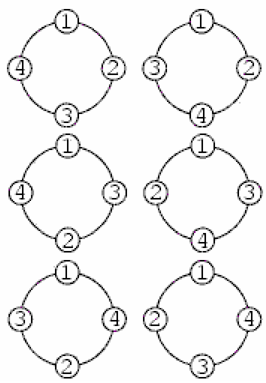


Kreispermutation

... oder zyklische Permutation
Auf wie viel verschiedene Arten der Reihenfolge können n Elemente auf einer Kreisperipherie angeordnet werden ?

Lösung

für 3 Elemente ... obere Abbildung
für 4 Elemente ... untere Abbildung
Allgemein gibt es $P_n = (n-1)!$ Möglichkeiten
Bei Ausschluss der spiegelsymmetrischen Möglichkeiten reduziert sich die Anzahl der Lösungen auf
$P'_n = 1/2 * (n-1)!$
d.h. für n=3,4,5,6,... 1, 3, 12, 60, 360, 2520, ... Kreispermutationen

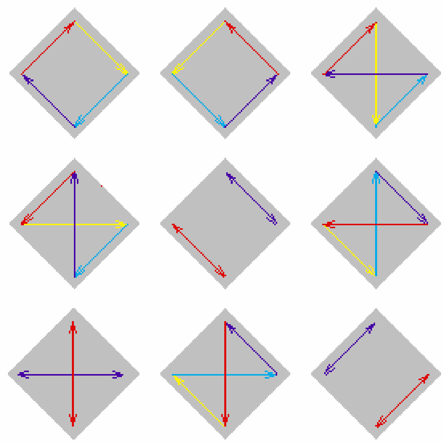


Vollständige Permutationen

Eine vollständige Permutation ist eine Permutation einer Menge, bei der kein Element auf seinem Ausgangsplatz verbleibt.
Die Anzahl D_n der vollständigen Permutationen von n Elementen ergibt sich zu $D_{n+1} = n (D_n + D_{n-1})$
Explizite Darstellung $D_n = n! (1/2! - 1/3! +- \dots + (-1)^n/n!)$
Im englischsprachigen Raum wird die Anzahl vollständiger Permutationen auch Subfactorial genannt und mit !n gekennzeichnet.

Für n = 3, 4, 5, ... wird dann

D_n = 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, 2290792932, 32071101049, 481066515734, 7697064251745, 130850092279664, 2355301661033953, 44750731559645106, 895014631192902121, ...
In der Abbildung (nächste Seite) sind alle vollständigen Permutationen für 4 Elemente veranschaulicht.
Die Bestimmung der Anzahl fixpunktfreier Permutationen ist auch unter dem klassischen Namen "Problème des rencontres" bekannt.



Subfactorial, Subfakultät

Unter dem Begriff Subfactorial !n; Subfakultät; versteht man die Anzahl vollständiger Permutation einer n-elementigen Menge, d.h. Permutationen, bei der kein Element auf seinem Ausgangsplatz verbleibt. Es gilt die explizite Darstellung

$$!n = n!\ (1/2! - 1/3! +- \ldots + (-1)^n/n!)$$

Der Begriff wurde 1867 von Whitworth eingeführt; schon Euler berechnete 1809 die ersten 10 Terme.
Die ersten Werte von !n sind für n = 0, 1, 2, …

1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, 2290792932, 32071101049, 481066515734, 7697064251745, 130850092279664, 2355301661033953, 44750731559645106, 895014631192902121, 18795307255050944540, …

Weiterhin ist: $!n = n \cdot !(n-1) + (-1)^n = (n-1)\ (!(n-2) + !(n-1))$

$!n = [n! / e]$, wobei [ ] die nächste ganze Zahl ist

$!n = {}_{-1}\int^{\infty} x^n\ e^{-(x+1)}\ dx$

Die einzige Subfakultätsprimzahl ist !3 = 2. Die einzige Zahl, die Summe der Subfakultäten ihrer Ziffern ist, ist

148349 = !1 + !4 + !8 + !3 + !4 + !9

Problem der falschaddressierten Briefe, Sekretärinnen-Problem

Das Problem der falschaddressierten Briefe besteht in der Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, n Briefe in n Briefumschläge zu stecken, so dass kein einziger Brief im richtigen Umschlag ist.
Praktisch ist dies die Frage nach der Anzahl vollständiger Permutationen. siehe
Ist n die Anzahl der Briefe, so ergibt sich für die Anzahl der vollständigen fehlerhaften Addressierungen

$$A_n = n!\ (1/2! - 1/3! +- \ldots + (-1)^n/n!)$$

Für n = 3, 4, 5, … ergeben sich als erste Lösungen 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, 2290792932, 32071101049, 481066515734, 7697064251745, 130850092279664, 2355301661033953, 44750731559645106, 895014631192902121, … Möglichkeiten.
Mit wachsendem Wert von n nähert sich die Wahrscheinlichkeit p, dass alle Briefe fehlerhaft addressiert sind

$$p = A_n / n! \approx e^{-1} = 0{,}367\ 879\ 441\ 171\ 442\ 321 \ldots$$

Variation

Jedes geordnete k-Tupel von voneinander verschiedenen Elementen einer n-elementigen Menge M ist eine Variation ohne Wiederholung V_k^n von n Elementen der Ordnung k.
Jede Variation ohne Wiederholung V_k^n ist eine eineindeutige Abbildung von der geordneten Menge M {1, 2, …, k} in die Menge M.
Aus der Definition folgt $k \leq n$. Für k = n erhält man die Permutationen von M. Die Auswahl von k Elementen aus n Elementen erfolgt mit Berücksichtigung der Anordnung.

Variation ohne Wiederholung Anzahl = n!/(n-k)!

Jedes geordnete k-Tupel von Elementen einer n-elementigen Menge M heißt Variation mit Wiederholung von n Elementen der Ordnung k. Hier ist auch k > n möglich.

Variation mit Wiederholungen Anzahl = n^k

Beispiel: Die Anzahl voneinander verschiedener; nicht unbedingt sinnvoller; Wörter mit drei Buchstaben eines Alphabets mit 26 Buchstaben beträgt: $26^3 = 17576$.

Kombination
Eine Kombination ist eine Auswahl von k Elementen aus n Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung.

Kombination ohne Wiederholung Anzahl = n!/((n-k)!*k!)

Kombination mit Wiederholungen

jede Kombination darf dasselbe Element mehrfach enthalten
Anzahl = (n+k-1)!/(k!*(n-1)!)

jede Kombination darf von den n Elementen m vorgeg-bene enthalten
Anzahl = (n-m)!/((k-m)!*(n-k)!)

jede Kombination darf von den n Elementen m vorgegebene nicht enthalten
Anzahl = (n-m)!/(k!*(n-m-k)!)

jede Kombination darf mindestens eines von den m vorgegebenen Elementen aus den n Elementen enthalten Anzahl = n!/(k!(n-k)!)) - (n-m)!/(k!*(n-m-k)!)

Kombinatorische Explosion
Ein verblüffendes Phänomen der Kombinatorik ist, dass sich oftmals wenige Objekte auf vielfältige Weise kombinieren lassen. Bei Rubiks Würfel können beispielsweise die 26 Elemente auf rund 43 Trillionen Arten kombiniert werden.
Dieses Phänomen wird als kombinatorische Explosion bezeichnet und ist zum Beispiel auch die Ursache für das sogenannte Geburtstagsparadoxon.

Beispiele
Beispiel 1: n=56; n!=710 998 587 804 863 451 854 045 647 463 724 949 736 497 978 881 168 458 687 447 040 000 000 000 000 bzw. n=99999; n!=2.8241463805 * 10^456568 (eine Zahl mit 456569 Stellen !!)
Beispiel 2: n=56, k=14 ergibt für Variation ohne Wiederholung = $5.0604661348 * 10^{23}$, ... mit Wiederholung $2.9828566195 * 10^{24}$
Beispiel 3: n=56, k=14 ergibt für Kombination ohne Wiederholung = 5 804 731 963 800 , mit Wiederholung $1.5460300554 * 10^{14}$

Eiskugeln
Ein Eis-Café bietet 10 verschiedene Sorten Eis an. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Kugeln zu wählen, wenn auch mehrere Kugeln von einer Sorte sein können?
Lösung: Es liegt eine Kombination mit(!) Wiederholung vor, d.h. mit n = 10 und k = 5
(n+k-1)!/(k!·(n-1)!) = (10+5-1)! / (5!·9!) = 14! / (5!·9!) = 2002 Möglichkeiten.

Würfel
n=3 maliges Würfeln mit Würfel mit k=6 unterscheidbaren Flächen; entspricht Ziehung von n=3 Kugeln mit Zurücklegen bei k=6 unterscheidbaren Kugeln. Reihenfolge soll keine Rolle spielen.
Zahl der Möglichkeiten (nicht gleich wahrscheinlich!)
$N_k^{(n)} = (k+n-1)! / (n!*(k-1)!)$ (Kombinationen mit Wiederholung) = (6+3−1)! / (3!*(6−1)!) = 8! / (3!*5!) = 56
6 Möglichkeiten mit 3 gleichen Flächen Häufigkeit = 1
30 Möglichkeiten mit 2 gleichen Flächen Häufigkeit = 3
20 Möglichkeiten mit verschiedenen Flächen Häufigkeit = 6 → 6*1 + 30*3 + 20*6 = 216
Weitere Beispiele: $N_6^{(1)}=6$; $N_6^{(2)}=21$; $N_6^{(3)}=56$; $N_6^{(4)}=126$; $N_6^{(5)}=252$; $N_6^{(6)}=462$; $N_6^{(7)}=792$; $N_6^{(8)}=1287$; $N_6^{(9)}=2002$; $N_6^{(10)}=3003$; $N_6^{(11)}=4368$

Lotto 6 aus 49
Ziehung von n=6 Kugeln (ohne Zurücklegen) bei k=49 unterscheidbaren Kugeln. Reihenfolge soll keine Rolle spielen, d.h. Lotto 6 aus 49
Zahl der Möglichkeiten (alle gleich wahrscheinlich): $N = k! / (n!*(k-n)!) = ({}^{k}{}_{n})$ (Kombinationen ohne Wiederholung)
= 49! / (6!*43!) = 49 * 48 * 47 *...* 44 / (6 * 5 * 4 *...* 1) = 13983816
Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten dieser Kombinationen: P = 1/N = 1/13983816

Blindenschrift

Die Blindenschrift besteht aus 6 Punkten, welche erhaben oder gelocht in Papier gedruckt werden. Mit den 2 variierenden Elementen "Buckel" oder "Loch" zur 6.Klasse mit Wiederholungen können auf diese Weise $2^6 = 64$ verschiedene Zeichen dargestellt werden.

Skatspiel

Eine Skatkarte enthält 32 Karten, die zu Gruppen von 3 mal 10 Karten und 2 Karten für den "Skat" ausgegeben werden. Da es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge ein Spieler seine Karten erhält (die Permutationen innerhalb der 10 Karten eines Spielers bedeuten dasselbe Spiel), ist die Anzahl aller möglichen Kartenverteilungen beim Skat eine Permutation von 32 Karten mit 10, 10, 10 und 2 gleichen Elementen. Damit existieren $2.7532944082 * 10^{15}$ Kartenverteilungen. Schafft ein Spieler täglich 200 Spiele, so kann er in 100 Jahren jedoch nur 7,3 Millionen Möglichkeiten spielen.

Sitzordnung

Fünf Personen nehmen an einem Tisch Platz, ohne die aufgestellten Tischkarten zu beachten. Insgesamt gibt es 5! = 120 verschiedene Sitzanordnungen, darunter 76 mit mindestens einem Fixpunkt, d.h. mindestens eine Person sitzt auf dem richtigen Platz, sowie 45 mit genau einem Fixpunkt, d.h. genau eine Person sitzt richtig.

Grundfrage der klassischen Statistik

Auf wieviel verschiedenen Arten kann man n numerierte Teilchen so in g Zeilen legen, dass in der i-ten Zeile gerade n_i Teilchen liegen? Die Anordnung der Teilchen innerhalb jeder Zeile sei beliebig.
Lösung: Alle Anordnungen, die bei festgehaltenen Teilchenzahlen n_i möglich sind, ergeben sich durch Permutationen der n Teilchen. Vertauschungen innerhalb einer Zeile ergeben keine neue Anordnung, d.h.

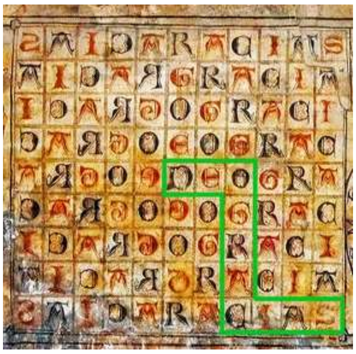
$$\text{Anzahl} = n! / (n_1!\ n_2!\ \dots\ n_g!)$$
$$\text{mit } n = n_1 + n_2 + \dots + n_g$$

Grundfrage der Fermi-Statistik

Auf wieviel Arten kann man n nicht unterscheidbare Teilchen auf g fest angeordnete Zellen verteilen, wenn jede Zelle höchstens höchstens ein Teilchen aufnehmen kann? Dabei ist $n < g-1$.
Lösung: Von g gegebenen Zellen erhalten n ein Teilchen, d.h. Anzahl = $\binom{g}{n}$

Grundfrage der Bose-Einstein-Statistik

Auf wieviel Arten kann man n nicht unterscheidbare Teilchen auf g fest angeordnete Zellen verteilen, wenn jede Zelle beliebig viele Teilchen aufnehmen kann?
Lösung: Anzahl = $(g + n - 1)! / (n!\ (g-1)!)$



Ein Wandgemälde in der Wismarer Heiligen-Geist-Kirche zeigt in der Mitte den Buchstaben "D" und links unten ein "S". Bewegt man sich nach links bzw. unten, ergibt sich immer der Text "DEOGRACIAS" (deutsch: "Gott sei Dank").
Insgesamt geht man neun Schritte, davon muss man fünfmal einen Schritt nach rechts und viermal einen nach unten gehen, d.h.

$\binom{9}{5} = 126$ Möglichkeiten.

Nach links oben, rechts unten oder rechts oben kann ebenfalls das Wort gebildet werden. Damit ergeben sich insgesamt 504 verschiedene Wege.

Kombinatorisches Wortproblem

Aus k Buchstaben kann man genau k^n verschiedene Wörter der Länge n bilden.
Bezeichnet man zwei Wörter genau dann als äquivalent, wenn sie sich nur um eine Permutation der Buchstaben unterscheiden, dann ist die Anzahl der Klassen äquivalenter Wörter gleich $\binom{n+k-1}{n}$ … modifiziertes Wortproblem

Beispiel: Aus den beiden Zeichen 0 und 1 kann man $2^2 = 4$ Wörter der Länge 2 bilden: 00, 01, 10, 11. Die Anzahl A der Klassen äquivalenter Wörter ist mit n = k = 2, also $A = \binom{3}{2} = 3$, z.B.: 00, 01, 11.
Wörter der Länge 3 gibt es $2^3 = 8$: 000, 100, 001, 101, 010, 110, 011, 111.
Die Anzahl der Klassen äquivalenter Wörter ist $A = \binom{4}{3} = 4$. Mögliche Repräsentanten sind 000, 001, 011, 111.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}$$
$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \quad \pi_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}$$
$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} \quad \pi_6 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}$$

Hintereinanderausführung von Permutationen

Die Hintereinanderausführung von Permutationen wird auch als Multiplikation bezeichnet. Allerdings ist zu beachten, dass das Produkt von rechts nach links gebildet wird, da die Permutationen Abbildungen sind. In der Abbildung sind alle Permutationen von drei Elementen zu sehen. Dort ist

$$\pi_2 \cdot \pi_5 = \pi_4$$

Die Multiplikation von Permutationen ist im Allgemeinen nicht kommutativ:

$$\pi_5 \cdot \pi_2 = \pi_6$$

Bahn einer Permutation, Zyklus einer Permutation

Sei π eine Permutation. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ heißt $\{i, \pi(i), \pi^2(i), \ldots\}$ die Bahn oder der Zyklus von π.
Beispiel: Die Permuation $\binom{1\,2\,3\,4}{3\,1\,2\,4}$ liefert die Bahn $1 \to 3 \to 2 \to 1 \to \ldots$
Je zwei Bahnen sind entweder disjunkt oder gleich.

Zyklenschreibweise einer Permutation

Eine Permutation π können wir daher als Menge von Zyklen schreiben. Damit die Darstellung eindeutig wird, werden die Bahnelemente in ihrer Reihenfolge geschrieben.
Beispiel:

$$\pi = \binom{1\,2\,3\,4\,5}{3\,1\,5\,4\,2} = (1\ 3\ 5\ 2)$$
$$\pi = \binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}{3\,5\,1\,4\,6\,7\,2} = (1\ 3)(2\ 5\ 6\ 7)(4)$$

Zyklen der Länge 1 können auch weggelassen werden: (1 3)(2 5 6 7)(4) = (1 3)(2 5 6 7).
Damit bei der identischen Permutation nicht alle Zyklen wegfallen, schreibt man (1).
Jede Permutation lässt sich als Produkt von elementfremden Zyklen darstellen.

Für die Anzahl A(k, s) der Permutationen π von k Elementen, die eine Darstellung als Produkt von genau s Zyklen besitzen, gilt die Rekursionsformel: $A(k, k) = 1$

$$A(k, 1) = (k-1)! \text{ für } k \geq 1$$
$$A(k, s) = A(k-1, s-1) + (k-1)\, A(k-1, s) \text{ für } k > s \geq 2$$

Beispiel: Es gibt $A(3, 3) = 1$ Permutationen der S_3 mit 3 Zyklen; $A(3, 1) = 2$ Permutationen mit einem Zyklus und $A(3, 2) = A(2, 1) + 2\, A(2, 2) = 3$ Permutationen mit 2 Zyklen.

Transposition einer Permutation

Eine Vertauschung von zwei Elementen in einer Permutation von n Elementen heißt Transposition. Jede Permutation von n Elementen kann in eine andere Permutation dieser Elemente mit endlich vielen Transpositionen umgewandelt werden.
Eine Transposition ist ein Zyklus der Länge 2, wie z.B. (24).
Die Transpositionen sind für die Permutationen das, was die Primzahlen für die natürlichen Zahlen sind, denn es gilt:

Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen darstellen.

Im Gegensatz zur Primzahlzerlegung ist die Zerlegung einer Permutation in ein Produkt von Transpositionen nicht eindeutig. Jedes solches Produkt kann durch Multiplikation mit einem Transpositionspaar der Form $(\pi_k \pi_l)(\pi_l \pi_k)$ in ein weiteres Produkt überführt werden.
Das Signum (sgn) ist eine Vorzeichenfunktion für Permutationen, vergleichbar dem Vorzeichen von reellen Zahlen. Die Anzahl der Transpositionen, in der eine Permutation zerlegt wird, ist trotz der Mehrdeutigkeit dieser Produkte für eine feste Permutation immer gerade oder ungerade.

Man definiert das Signum oder Vorzeichen einer Permutation π als + 1, wenn sich π als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen darstellen lässt und -1, wenn die Anzahl der Faktoren ungerade ist. Nach Anzahl der Faktoren heißen die Permutationen auch gerade bzw. ungerade Permutationen.
Beispiel: Für π = (1423) wird sgn π = -1, da (1234) = (14)(13)(12).

Für zwei Permutationen π und σ gilt: $\operatorname{sgn}(\pi\sigma) = \operatorname{sgn}\pi \cdot \operatorname{sgn}\sigma$
Für eine Permutation π einer n-elementigen Menge gilt: $\operatorname{sgn}\pi = \Pi_{1\le i<j\le n} (\pi(i) - \pi(j)) / (i - j)$

Euler-Zahlen (Kombinatorik)

Die nach Leonhard Euler benannte Euler-Zahl $A_{n,k}$ in der Kombinatorik, auch geschrieben als E(n,k) oder $<^n{}_k>$, gibt die Anzahl der Permutationen von 1, …, n an, in denen genau k Elemente größer als das vorhergehende sind, die also genau k Anstiege enthalten.
Nach einer zweiten Definition sind die Euler-Zahlen a(n,k) die Anzahlen der Permutationen von 1, …, n mit genau k maximalen monoton ansteigenden Abschnitten, wodurch der zweite Parameter gegenüber der hier verwendeten Definition um eins verschoben ist: $a(n,k) = A_{n,k-1}$.

$$\alpha = \frac{1}{1(p-1)}$$
$$\beta = \frac{p+1}{1.2(p-1)^2}$$
$$\gamma = \frac{pp+4p+1}{1.2.3(p-1)^3}$$
$$\delta = \frac{p^3+11p^2+11p+1}{1.2.3.4(p-1)^4}$$
$$\varepsilon = \frac{p^4+26p^3+66p^2+26p+1}{1.2.3.4.5(p-1)^5}$$

Wie die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck können die Euler-Zahlen im Euler-Dreieck angeordnet werden (erste Zeile n = 1, erste Spalte k = 0):

1
1 1
1 4 1
1 11 11 1
1 26 66 26 1
1 57 302 302 57 1
1 120 1191 2416 1191 120 1 …

Mit der folgenden Rekursionsformel kann jeder Eintrag aus den beiden darüberstehenden berechnet werden

$A_{n,k} = (n-k)\, A_{n-1,k-1} + (k+1)\, A_{n-1,k}$

für n > 0 mit $A_{0,0} = 1$ und $A_{0,k} = 0$ für k > 0.

Für die Euler-Zahlen mit $A_{n,k} = (n-k)\, A_{n-1,k-1} + (k+1)\, A_{n-1,k}$
für n > 0 mit $A_{0,0} = 1$ und $A_{0,k} = 0$ für k > 0 ergeben sich aus der Definition

$A_{n,0} = 1$ für $n \ge 0$ $\qquad$ $A_{n,n-1-k} = A_{n,k}$ für $n > 0, k \ge 0$

$\Sigma_{k=0}^n A_{n,k} = n!$ für $n \ge 0$

Aus den Binomialkoeffizienten können die Euler-Zahlen mit der Formel

$A_{n,k} = \Sigma_{i=0}^k (-1)^i \binom{n+1}{k} (k+1-i)^n$

für n, k ≥ 0 berechnet werden. Insbesondere sind

$A_{n,1} = 2^n - (n + 1)$ $\qquad$ $A_{n,2} = 3^n - 2^n (n+1) + n/2\,(n+1)$

Es gilt die Worpitzky-Identität; nach Julius Worpitzky;

$\Sigma_{k=0}^n A_{n,k} \binom{n+k}{n} = x^n$

für n ≥ 0, wobei x eine Variable und $\binom{x+k}{n}$ ein verallgemeinerter Binomialkoeffizient ist.
Eine Beziehung zu den Bernoulli-Zahlen β_m wird durch die alternierende Summe

$\Sigma_{k=0}^{m-1} (-1)^k A_{m-1,k} = (-2)^m (2^m-1)\, \beta_m / m$

für m > 0 hergestellt.

Schulmädchen-Problem von Kirkman

Son	Mon	Die	Mit	Don	Fre	Sam
ABC	ADE	AFG	AHI	AJK	ALM	ANO
DHL	BIK	BHJ	BEG	BDF	BEF	BDG
EJN	CMO	CLN	CMN	CLO	CIJ	CHK
FIO	FHN	DIM	DJO	EHM	DKN	EIL
GKM	GJL	EKO	FKL	GIN	GHO	FJM

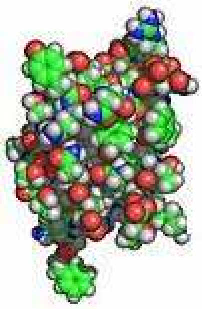
Aufgabe: 15 Schülerinnen gehen täglich den Weg zur Schule (auch Sonntags !) in Gruppen von jeweils 3 Mädchen.
Gibt es eine Möglichkeit, dass jedes Mädchen genau einmal in einer Woche mit jeder anderen Schülerin den Weg absolviert ?

Eine Lösung, von genau sieben bis auf Permutation der Buchstaben verschiedenen Lösungen, siehe Tabelle.

Dieses Problem ist äquivalent zur Konstruktion eines Kirkman Triple-Systems der Ordnung 2. Thomas Penyngton Kirkman (1850):

"Fifteen young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succession: it is required to arrange them daily, so that no two shall walk twice abreast."
"Fünfzehn Schulmädchen spazieren sieben Tage hintereinander in Dreiergruppen, man teile sie täglich so ein, dass keine zwei Schulmädchen zweimal zusammen spazieren."
Die Verallgemeinerung fragt nach n Mädchen (für eine Lösung muss n durch 3 teilbar sein), die für (n-1)/2 Tage jeweils zu dritt zur Schule gehen. Die Lösungen für n = 9, 15 und 27 wurden 1850 gefunden; eine allgemeine Lösung existiert noch nicht.

Kombinatorik-Beispiele



Insulin-Struktur

Das Insulin-Molekül besteht aus zwei Peptidketten, der A-Kette mit 21 und der B-Kette mit 30 Aminosäuren, welche durch zwei Disulfidbrücken verbunden sind.
Die B-Kette besteht aus den Aminosäuren: 3 mal Glyzin, 1 Alanin, 3 Valin, 4 Leuzin, 1 Serin, 2 Threonin, 1 Asparginsäure, 2 Glutaminsäure, 1 Glutamin, 1 Lysin, 1 Arginin, 2 Cystein, 3 Phenylalanin, 2 Tyrosin, 2 Histidin und 1 Prolin.
Allein für diese Aminosäuren existieren dann

$$30! / (3!\ 1!\ 3!\ 4!\ 1!\ 2!\ 1!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1!\ 2!\ 3!\ 2!\ 2!\ 1!) = 1{,}598988 \cdot 10^{27}$$

verschiedene Permutationen. Und genau eine ist Insulin.

Llanfairpwllgwyngyllgogerychwyrndrobwll-llantysiliogogogoch

In Süden der Insel Anglesey im Nordwesten von Wales gibt es einen Ort mit dem oben genannten Namen. Mit 58 Buchstaben hat das Dorf den längsten Ortsnamen Europas.
Übersetzt bedeutet dies in etwa
"Marienkirche in einer Mulde weißer Haseln in der Nähe eines schnellen Wirbels und in der Gegend der Thysiliokirche, die bei einer roten Höhle liegt".
Für die 58 Buchstaben gibt es auf Grund der Mehrfachheit $58! / (2!\ 2!\ 3!\ 3!\ 4!\ 4!\ 4!\ 5!\ 6!\ 7!\ 11!) = 6{,}793215 \cdot 10^{55}$
Möglichkeiten der Anordnung.
Testet ein Computer je Sekunde 1 Billion Möglichkeiten, so würde er für alle über 10^{36} Jahre benötigen.

Golf-Kurse

Ein Golf-Kurs besteht im Normalfall aus 18 "Löchern", für die 3, 4 oder 5 Schläge als Vorgabe geplant sind. Insgesamt werden für den ganzen Kurs 72 Schläge veranschlagt. Erreicht man dies wird von "Par" gesprochen.
Allerdings ist die Reihenfolge und die Anzahl der 3-Par, 4-Par und 5-Par Löcher nicht vorgegeben. Damit ergeben sich sehr viele unterschiedliche Möglichkeiten.

Bowling

Bowling ist eine Ende des 19.Jahrhunderts in den USA Staaten entstandene Variante des Kegelns. Dabei wird ein mit Bohrungen für die Finger versehener Ball auf zehn Pins genannte Kegel geworfen.
Ein Spiel besteht aus zehn Durchgängen (Frames). Ziel ist es, in jedem Frame alle zehn Pins umzuwerfen. Dazu hat ein Spieler je Frame maximal zwei Würfe.
Räumt ein Spieler beim ersten Wurf alle zehn Pins ab, nennt man dies Strike. Werden alle Pins erst mit Hilfe des zweiten Wurfes in einem Frame abgeräumt, so ist das ein Spare.

Für die Punkte werden pro Frame die umgeworfenen Pins gezählt. Bei einem Spare werden zusätzlich zu den 10 Punkten auch die Punkte des nächsten Wurfs gezählt. Beim Strike werden sogar die nächsten zwei Würfe mitgezählt.
Wird im letzten Frame des Spiels ein Spare erzielt, darf noch ein dritter Ball geworfen werden, um das Ergebnis zu ermitteln. Wird ein Strike geworfen, folgen noch zwei Extrawürfe. Das höchste zu erreichende Ergebnis ist damit 300 Pins.
Durch die komplizierte Regel im 10.Frame gibt es insgesamt

$$11^9 \cdot 6^9 \cdot (55 + 10 \cdot 11 + 65 + 11) = 5726805883325784576$$

mögliche Spielverläufe im Bowling.

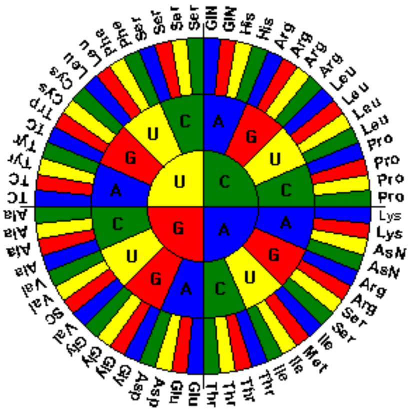
Anzahl verschiedener n-Tupel

Die Tabelle enthält die Anzahl verschiedener, nicht geordneter, Paare, Tripel und Quadrupel natürlicher Zahlen mit p>q>r>s>0.

Tupel	Anzahl	Tupel	Anzahl	Tupel	Anzahl
(p,0)	2	(p,q)	2	(±p,0)	4
(±p,±p)	4	(±p,±q)	8	(p,0,0)	3
(p,p,0)	3	(p,q,0)	6	(p,p,q)	3
(p,q,r)	6	(±p,0,0)	6	(±p,±p,0)	12
(±p,±q,0)	24	(±p,±p,±p)	8	(±p,±p,±q)	24
(±p,±q,±r)	48	(p,0,0,0)	4	(p,p,0,0)	6
(p,q,0,0)	12	(p,p,p,0)	4	(p,p,q,0)	12
(p,q,r,0)	24	(p,p,p,q)	4	(p,p,q,q)	6
(p,p,q,r)	12	(p,q,r,s)	24	(±p,0,0,0)	8
(±p,±p,0,0)	24	(±p,±q,0,0)	48	(±p,±p,±p,0)	32
(±p,±p,±q,0)	96	(±p,±q,±r,0)	192	(±p,±p,±p,±p)	16
(±p,±p,±p,±q)	64	(±p,±p,±q,±q)	96	(±p,±p,±q,±r)	192
(±p,±q,±r,±s)	384				

Genetischer Code

Proteine und Nukleinsäuren sind die Grundlage der Vererbung. Nachdem der prinzipielle Ablauf der Eiweißsynthese entdeckt wurde, ergab sich ein Problem, dass als Problem des genetischen Codes bezeichnet wurde. Proteine sind aus 20 verschiedenen Aminosäuren aufgebaut, die in wechselnder Häufigkeit und Reihenfolge miteinander kettenförmig verbunden sind. Demgegenüber sind aber am Aufbau der Nucleinsäuren nur vier Nucleotidsorten beteiligt.



Genetische Code-Sonne

Die Zuordnung beider Makromolekülsorten kann also nicht eineindeutig erfolgen, da dann nur vier Aminosäuren in der DNA (Desoxyribonucleinsäure bzw. –acid) codiert werden könnten. Vielmehr ist ein sogenanntes "Codon" zur Verschlüsselung nötig, eine Folge von verschiedenen Nucleotidsorten. Da eine Zweiergruppe nur 16 Aminosorten beschreiben könnte, sind für die 20 tatsächlich vorkommenden Dreiergruppen notwendig. Ein Codon besteht damit aus drei aufeinanderfolgenden Nucleinsäuren, welche 64 verschiedene Säuren codieren könnten.

In der Jahren 1961 bis 1966 befanden sich weltweit mehrere Laboratorien im Wettstreit, diesen genetischen Code zu entschlüsseln. 1968 erhielten Nirenberg, Holley, und Khorona den Nobelpreis. Das Ergebnis dieser jahrelangen Suche ist eine Tabelle, in welcher für jede mögliche Folge der Nucleinsäuren die entsprechende Aminosäure zugeordnet wird.

Durch die Kodierung mit jeweils 3 Nucleinsäuren könnten 64 verschiedene Aminosäuren bestimmt werden. Da aber nur für 20 die Notwendigkeit besteht, ergeben verschiedene Codons teilweise gleiche Aminosäuren. Zum Beispiel erhält man für die Folgen GGA, GGU, GGG, GGC jeweils Glyzin, für AGA, AGG, CGA, CGC, CGG und CGU Arginin.

Aus welchem Grund z.B. für Arginin 5 verschiedene Codons existieren, für Methionin jedoch z.B. nur ein Codon (AUG) ist eine offene Frage der Genetik. Welche Codons zu welcher Aminosäure führen, kann man an der „Genetischen Code-Sonne" ablesen.

Faszinierend ist, wenn man sich einmal veranschaulicht, welcher Informationsgehalt durch diese "einfache" Anordnung der Nucleinsäuren erreicht werden kann. Eine einfache Amöbe enthält in ihrer DNS Informationen von rund 400 Millionen Bits, d.h. Informationen, welche achtzig 500seitige Bände füllen würden. Für einen Menschen braucht die DNA 5 Milliarden Bits, was einer tausendbändigen Bibliothek entspricht. Und diese Informationsmenge ist in jedem Zellkern einer menschlichen Zelle gespeichert !

Binomialkoeffizient

Definition $\binom{n}{k} = n! / (k! * (n-k)!) = [n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)] / k!$

Gesetze

$\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; Symmetrie

$\binom{n}{k} = 0$; für $k > n > 0$ (Definition) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} * (n-k) / (k+1)$

$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ $\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+n}{n} = \binom{k+n+1}{n}$

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots = 2^n$ $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$

$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$ $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \dots = 0$

$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots = \binom{2n}{n}$

Die Binomialkoeffizienten bilden die Einträge im Pascal-Dreieck und damit die Koeffizienten im binomischen Satz. Die Anzahl der möglichen Gitterwege vom Ursprung zum ganzzahligen Punkt (a,b) im Koordinatensystem ist zum Beispiel $\binom{a+b}{a}$.

Binomialkoeffizient - Weitere Beziehungen

$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$ $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \dots = 0$

$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots = \binom{2n}{n}$ $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$

$\Sigma_k \binom{j-k}{k} = F_{j+1}$, wobei F_n die n-te Fibonacci-Zahl ist

$\binom{n+5}{5} - \binom{n+2}{5} = H_3(n)$

$H_3(n)$ ist die Anzahl aller nichtnegativen, ganzzahligen 3x3-Matrizen, bei denen alle Zeilen- und Spaltensummen gleich n sind

$\Sigma_{k<m} \binom{-2}{k} = (-1)^{m-1} [m/2]$, wobei [x] die kleinste ganze Zahl $n \geq x$ ist

$1 + \Sigma_{j=0}^{k-1} \Sigma_{i=0}^{n-k-1} \binom{i+j}{j} = \binom{n}{k}$ $\Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2\, \Sigma_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$

$\Sigma_{k=0}^{l} \binom{n}{k} = \Sigma_{k=0}^{l} \binom{n-1}{k} + \Sigma_{k=0}^{l-1} \binom{n-1}{k}$ $\Sigma_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = (n-k+1)/(k+1)\, \Sigma_{j=0}^{k} \binom{n-j+k}{j}$

$\binom{4n^2-2}{2n^2-1} - \binom{4n^2-2}{2n^2-2} = \binom{4n^2-2}{2n^2-n} - \binom{4n^2-2}{2n^2-n-1}$

Nach "Table of integrals, series, and products" von Gradshteyn und Ryzhik

$\Sigma_k \binom{n}{3k} = 1/3\, (2^n + 2 \cos(n/3\, \pi))$ $\Sigma_k \binom{n}{3k+1} = 1/3\, (2^n + 2 \cos((n-2)/3\, \pi))$

$\Sigma_k \binom{n}{3k+2} = 1/3\, (2^n + 2 \cos((n-4)/3\, \pi))$ $\Sigma_k \binom{n}{4k} = 1/2\, (2^{n-1} + 2^{n/2} \cos(n/4\, \pi))$

$\Sigma_k \binom{n}{4k+1} = 1/2\, (2^{n-1} + 2^{n/2} \cos(n/4\, \pi))$ $\Sigma_k \binom{n}{4k+2} = 1/2\, (2^{n-1} - 2^{n/2} \cos(n/4\, \pi))$

$\Sigma_k \binom{n}{4k+3} = 1/2\, (2^{n-1} + 2^{n/2} \sin(n/4\, \pi))$

Für alle positive, ganzen Zahlen m und k existiert eine Darstellung

$m = \binom{m_k}{k} + \binom{m_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{m_t}{t}$ mit $m_k > m_{k-1} > \dots > m_t \geq t \geq 1$

Nach "Proofs that Really Count" von Benjamin und Quinn; F_n … n.te Fibonacci-Zahl

$\Sigma_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k+1} = F_{2n}$ $\Sigma_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k} = F_{2n+1}$

$T_n = \Sigma_{j=1}^{n} j = \binom{n+1}{2}$; T_n ist die n.te Dreieckszahl

$\Sigma_{j=0}^{n} 9^j = \binom{(3n+1+1)/2}{2}$ $\Sigma_{j=1}^{n} (2j-1)^3 = \binom{4n-3}{2}$

$\Sigma_{j=1}^{n} (2j-1) = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2}$ $\Sigma_{i=0}^{n} \binom{i}{k-1} = (n+1)/(n-k+1) \binom{n}{k}$

$\Sigma_{i=0}^{n} \binom{i}{k-1} = (n+1)/k \binom{n}{k-1}$ $\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$

Davidsternregel, Sechseckregel

Nach "Concrete Mathematics" gilt für Binomialkoeffizienten

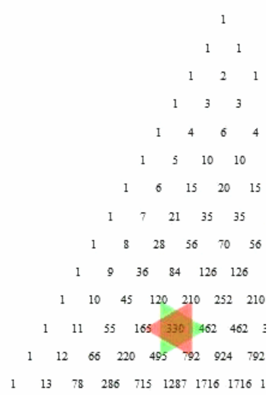
$\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k-1}\binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}$

Für die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck bedeutet dies, dass je drei der sechs Zahlen um einen Eintrag im Pascal-Dreieck in Form eines Davidssterns das gleiche Produkt besitzen.

In der Abbildung gilt für die 6 Zahlen um 330:

$120 \cdot 462 \cdot 495 = 27442800$

$210 \cdot 165 \cdot 792 = 27442800$



Binomialkoeffizient - Weitere Beziehungen

$\Pi_{k=1}^{n} \binom{2n-k}{k} = \Pi_{k=1}^{n} \binom{2k-1}{k}$ $\Pi_{k=1}^{n} \binom{2n-k+1}{k} = 2^n\, \Pi_{k=1}^{n} \binom{2k-1}{k}$

$\binom{n}{k+1} = (n-k) / (k+1) \binom{n}{k}$ $\binom{n+1}{k} = (n+1) / (n-k+1) \binom{n}{k}$

$\binom{n+1}{k+1} = (n+1) / (k+1) \binom{n}{k}$ $\binom{2n}{n} = (4n-2) / n \binom{2n-2}{n-1}$

$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}$

Verallgemeinerte binomische Reihe

$B_t(z) = \Sigma_{k\geq 0} \binom{tk+1}{k} \frac{1}{tk+1} z^k$

Catalansche Zahlen für t=2 wird $C_n = 1/(2n+1) \binom{2n+1}{n} = 1/(n+1) \binom{2n}{n}$

Narayana Zahlen $N(n,k) = 1/n \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$

Die Summe der n.ten Reihe des Narayana-Dreiecks ist gleich der n.ten Catalanschen Zahl C_n.

Narayana-Dreieck

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
n=1	1					
n=2	1	1				
n=3	1	3	1			
n=4	1	6	6	1		
n=5	1	10	20	10	1	
n=6	1	15	50	50	15	1

Binomialkoeffizient - Weitere Beziehungen

$\Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

$\Sigma_{i+j+k=n} \binom{i+j}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+k}{k} = \Sigma_{0\leq j\leq n} \binom{2j}{j}$

$\Sigma_k \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}$

$\Sigma_{k=0}^{m} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$; Spezialfall

$\Sigma_k \binom{r}{m+k}\binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r-m+n}$

$\Sigma_k \binom{r}{k}\binom{s}{k} = \binom{r+s}{r}$; Spezialfall

$\Sigma_{k=0}^{l} \binom{l-k}{m}\binom{q+k}{n} = \binom{l+q+1}{m+n+1}$ für alle nichtnegativen $n \geq q$

$\Sigma_{k=0}^{l} \binom{l-k}{m}\binom{k}{n} = \binom{l+1}{m+n+1}$

$\Sigma_{k\geq 0} \binom{2n+1}{2k}^2 = 1/2 \binom{4n+2}{2n+1}$

$\Sigma_{k\geq 0} \binom{2n}{2k}^4 = 1/2 \left(\binom{4n}{2n}+(-1)^n\binom{2n}{n}\right)$

$\Sigma_{k\geq 0} \binom{2n}{2k+1}^2 = 1/2 \left(\binom{4n}{2n}-(-1)^n\binom{2n}{n}\right)$

$\Sigma_{m=0}^{k} \binom{2n}{2m+1}\binom{n-m-1}{k-m} = 2^{2k+1} \binom{n+k}{2k+1}$

$\Sigma_{m=0}^{k} \binom{2n+1}{2m}\binom{n-m-1}{k-m} = 2^{2k} \binom{n+k}{2k}$

$\Sigma_{m=0}^{k} \binom{2n+1}{2m+1}\binom{n-m-1}{k-m} = (2n-1)/(2k+1)\ 2^{2k} \binom{n+k-1}{2k}$

$\Sigma_{m=0}^{k} \binom{2n}{2m}\binom{n-m}{k-m} = n/k\ 2^{2k-1} \binom{n+k-1}{2k-1}$

$\Sigma_k \binom{n}{k}\binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}$

$\Sigma_k \binom{n}{2k}\binom{2k}{m} = 2^{n-m-1} \binom{n}{m}$

$\Sigma_k \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}$

$\Sigma_k \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$

$\Sigma_{k=0}^{m} \binom{m}{k}/\binom{n}{k} = (n+1)/(n+1-m)$, für $n \geq m$

$\Sigma_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{k}/\binom{x+k}{k} = x/(x+n)$

$\Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^4 = \Sigma_{r,s} (-1)^{n+r+s} \binom{n}{r} \binom{n}{s} \binom{n+r}{r} \binom{n+s}{s} \binom{2n-r-s}{n}$

$\Sigma_{j=2}^{\infty} 1/\binom{j}{2} = 2$

$\Sigma_{i\geq 0} \Sigma_{j\geq 0} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i} = f_{2n+2}$, wobei f_n die n-te Fibonacci-Zahl ist

$\Sigma_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{n}{j-k} = \binom{n-1}{j}$

$\Sigma_{k=0}^{i} (-1)^{k+1} \binom{n}{j+k} = \binom{n-1}{j}$

$3 \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} = \binom{2n}{2}$

$3 \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = \binom{2n+1}{2}$

$(2k+1)^2 \binom{n}{2} + \binom{k+1}{2} = \binom{(2k+1)n-k}{2}$

$\Sigma_{k=0}^{n} k \binom{m-k-1}{m-n-1} = \binom{m}{n+1}$

$\binom{n}{m-k} \equiv \binom{[n/p]}{[m/p]} \binom{n_0}{m_0-k}$ mod p ; Lucas-Regel 1878

Dabei sind n_0, m_0 die kleinsten nichtnegativen Reste von n mod p und m mod p. [x] gibt die größte ganze Zahl $\leq$ x an.

$1/z! = \lim_{n\to\infty} 1/n^z \binom{n+z}{n}$ für alle komplexen z und positiven natürlichen n (Euler)

$D(n,n) = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$, wobei D(n,n) zentrale Delannoy-Zahlen sind

$\Sigma_{k\geq 0} \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} (-1)^k/(k+1) = \binom{n-1}{m-1}$, m, n > 0

$\Sigma_{k\geq 0} \binom{x+1}{2k+1} \binom{x-2k}{n-k} 2^{2k+1} = \binom{2x+2}{2n+1}$

$\Sigma_k (-2)^{2n-k} \binom{2n}{k} \binom{2k}{k} = \binom{2n}{n}$

$\Sigma_{k\geq 0} (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{2k}{k} \binom{4n-2k}{2n-k} = \binom{2n}{n}^2$

$\Sigma_k \binom{n}{k}^2 = n/2 \binom{2n}{n}$

$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\left(\binom{n}{4} + \binom{n}{3} \right)$

$\Sigma_k \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{n-2k} = \binom{2n}{n}$

$\Sigma_k \binom{l}{m+k} \binom{s+k}{n} (-1)^k = (-1)^{l+m} \binom{s-m}{n-l}$

$\Sigma_{k<l+1} \binom{l-k}{m} \binom{s}{k-n} (-1)^k = (-1)^{l+m} \binom{s-m-1}{l-m-n}$

$\Sigma_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{r}{k} \binom{r}{2n-k} = (-1)^n \binom{r}{n}$

$\Sigma_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$

$\Sigma_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{0n}$; Kronecker Delta-Funktion bei 0

$\Sigma_{k=n}^{m} (-1)^{n+k} \binom{m}{k} \binom{k}{n} = \delta_{mn}$; Kronecker Delta-Funktion über m und n

$\Sigma_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \binom{ki}{j} = \delta_{nj} k^n$; für j = 0, 1, …, n und nichtnegatives k

$\Sigma_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-k}{k} = 1$ für n = 0 oder 1 mod 6 ; = 0 für n = 2 mod 3 ; = -1 für n = 3 oder 4 mod 6

$\Sigma_{k>=0} (-1)^{n-k} \binom{n-k}{k} = 1$ für n = 0 mod 3 ; = 0 für n = 2 mod 3 ; = -1 für n = 1 mod 3

$\Sigma_k (-1)^k \binom{a+b}{a+k} \binom{b+c}{b+k} \binom{c+a}{c+k} = \binom{a+b+c}{a,b,c} = (a+b+c)! / (a!b!c!)$; Dixon Identität 1903

$\Sigma_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n (3n)! / n!^3$

$\Sigma_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{z}{i} = (-1)^n/n!\ \Pi_{i=1}^{n} (z-i)$ für alle komplexen z

$\Sigma_k \binom{n}{k} \binom{s}{k} k = s \binom{n+s-1}{n-1}$ wenn n nichtnegativ

$\Sigma_{k>=0} \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} (-1)^k / (k+m+1) = (-1)^n m!n / (m+n+1)! \binom{m}{n}$ für positive m und n

$\Sigma_{k>=0} \binom{n}{k} (-1)^k/(x+k) = 1/ \left(x \binom{x+n}{n}\right)$ für x verschieden von 0, -1, -2, …, -n

$\Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x/(x+k) = 1/ \binom{x+n}{n}$

$\Sigma_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) 2^{n-2} = \binom{n+1}{2}) 2^{n-1}$

$\Sigma_{m>=k} \binom{m-k}{n} \binom{m+n+1}{k} (-1/2)^k = 2^{n-m} \binom{(m+n)/2}{n}$ für gerades m+n

$(x+m+1) \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{x+y+n}{m-n} \binom{y+2n}{n} = \sum_{n=0}^{m} (-4)^n \binom{x+n}{m-n} + (x-m) \binom{x}{m}$

$(x+(m+1)z) \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{x+y+nz}{m-n} \binom{y+n(z+1)}{n} = z \sum_{0<=l<=n=<m} (-1)^n \binom{n}{l} (1+z)^{n+l} + (x-m) \binom{x}{m}$

$\sum_k (-1/2)^k \binom{2p-m}{m+k} \binom{2p+k}{k} = (-1/4)^p \binom{2p-m}{p}$

$\sum_k \binom{n}{k} (x+k)^k (y+n-k)^{n-k} = \sum_k \binom{n}{k} k! (x+y+n)^{n-k}$; Cauchy-Formel

$\sum_{j=0}^{n} 1/2^{2j} \binom{2j}{j} = (n+1)/2^{2n} \binom{2n+1}{n}$

$\sum_{k>=0} (-1)^k n/(n-k) \binom{n-k}{k} = 2$ für $n = 0 \bmod 6$; 1 für $n^2 = 1 \bmod 6$; -1 für $n^2 = 0 \bmod 6$, sonst -2

$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}$

$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}/k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} 1/k$; binomialharmonische Identität

$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (x-i)^n = n!$ für alle komplexen x

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{i} (n-k)^k (n-k-1)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/k!$; Umordnungsformel

$\sum_{k>=0} \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} (-1)^k/(k+1) =$ 1 für n = 0, anderfalls für n>0 gleich 0

$n^k = \sum_{i=1}^{k} i! \binom{n}{i} {}^{k}_{i}$, wobei ${}^{k}_{n}$ eine Stirling-Zahl 2.Art ist

Beispiele: $n^2 = \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2}$

$n^3 = \binom{n}{1} + 6 \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3}$

$n^4 = \binom{n}{1} + 14 \binom{n}{2} + 36 \binom{n}{3} + 24 \binom{n}{4}$

$n^5 = \binom{n}{1} + 30 \binom{n}{2} + 150 \binom{n}{3} + 240 \binom{n}{4} + 120 \binom{n}{4}$

$\sqrt{(1+x)/(1-x)} = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} (x^{2n} + x^{2n+1}) / 4^n$

$2 (\arcsin x/2)^2 = \sum_{n\geq 1} x^{2n} / (n^2 \binom{2n}{n})$ Sonderfall x=1: $\sum_{n\geq 1} 1/ (n^2 \binom{2n}{n}) = \pi^2/18$

$1/(1-2n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 4^k/ \binom{2k}{k}$ $1/(1-z)^{n+1} = \sum_{k\geq 0} z^k \binom{n+k}{n}$

$z^n/(1-z)^{n+1} = \sum_{k\geq 0} z^k \binom{k}{n}$ $\sum_{k\geq n} 2^{-k} \binom{n+k}{k} = 2^n$

$\sum_{k\geq n} z^k \binom{n-k}{k} = 1/\sqrt{1+4z} \left(((1+\sqrt{1+4z})/2)^{n+1} - ((1-\sqrt{1+4z})/2)^{n+1} \right)$

$\sum_{k\geq 0} 2^k \binom{2n-k}{n} = 2^{2n}$ $\binom{2n}{n}$ $\sum_{k\leq n} (-2)^k \binom{n}{k} (2n+1)/(2n+1-k) = (-4)^n$

$\sum_k (-1/2)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} / \binom{n+b+k}{k} = 2^{-n} (b/2)! (b+n)! / (b! (b/2+n)!)$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{m} \left\{ {n \atop k} \right\} k! (-1)^{n-k-m} = \left\langle {n \atop k} \right\rangle$, Zusammenhang von Stirling-Zahlen 2.Art und Euler-Zahlen

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (m+1-k)^n (-1)^k = \left\langle {n \atop m} \right\rangle$ $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{n-m} \left\langle {n \atop k} \right\rangle = m! \left\{ {n \atop m} \right\}$

$\sum_k \binom{k}{m} \left[{n \atop k} \right] = \left[{n+1 \atop k+1} \right]$, rekursive Beziehung von Stirling-Zahlen 1.Art

$\sum_k \binom{k}{m} \left[{n+1 \atop k+1} \right] (-1)^{m-k} = \left[{n \atop m} \right]$ $\sum_k \binom{n}{k} \left[{n-k \atop m} \right] \left[{k \atop l} \right] = \left[{n \atop l+m} \right] \binom{l+m}{m}$

$\left[{n \atop n-m} \right] = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} {}^{m+k}_{k}$; Stirling-Zahlen 1. und 2.Art

$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}$ $\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k}$

$m! \left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}$ $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k^n (-1)^k = 0$, für $0 < n < m$

$\left\{ {n \atop l+m} \right\} \binom{l+m}{m} = \sum_k \left\{ {k \atop l} \right\} \left\{ {n-k \atop m} \right\} \binom{n}{k}$ $\left\{ {n \atop n-m} \right\} = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} \left[{m+k \atop k} \right]$

$\sum_k 2^k n/(n-k) \binom{n-k}{2k} = 2^{n-1} + \cos(n\pi/2)$ $\sum_k (-1)^{k+1} k \binom{n}{k} = 0$; für $n > 1$

$\sum_k (-1)^k (a+k)^n \binom{n}{k} = (-1)^n n!$ $\sum_k (-1)^k k^n \binom{n}{k} = (-1)^n n!$

$\binom{n}{2} + 6 \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{2} = (2n+1)^2$

$\sum_k \binom{n}{k} a^{k+1}/(k+1) = ((a+1)^{n+1} - 1)/(n+1)$, für a nicht -1

$\sum_k \binom{n}{k} (-1)^{k+1}/(k+1) = n/(n+1)$ $\sum_{k<m+1} (-1)^k (a+k)^{n-1} \binom{m}{k} = 0$

$n+1 = \sum_k (-1)^k 4^{n-k} \binom{2n-k+1}{k}$ $2n+1 = \sum_k (-1)^{n-k} 4^k \binom{n+k}{2k}$

$\sum_k (-1)^k n/(n-k) \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} = 2$ $(\sum_{j\geq 0} x^j)^n = \sum_k \binom{n+k-1}{k} x^k$

$\sum_k \binom{n}{k} f_t^k f_{t-1}^{n-k} f_{m+k} = f_{m+nt}$; wobei die f_t Fibonacci-Zahlen sind

Abelsche Identität

$A_n(x, y; p, q) = \sum_k \binom{n}{k} (x+k)^{k+p} (y+n-k)^{n-k+q}$

$A_n(x, y; -1, 0) = 1/x\, (x+y+n)^n$ $A_n(x, y; -1, -1) = (1/x + 1/y) (x+y+n)^{n-1}$

$\binom{p}{k} \equiv 0 \bmod p$, für $1 < k < p$ $\binom{p+j}{k} \equiv 0 \bmod p$, für $j < k < p$

$\binom{2p}{p} \equiv 2 \bmod p$ $\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \bmod p^2$

$\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \bmod p^3$, für $p > 4$ $\binom{p^2}{p} \equiv p \bmod p^5$, für $p > 4$

$\binom{n}{k} \equiv \prod_{i\geq 0} \binom{n_i}{k_i} \bmod p$, mit $k = \sum_{i\geq 0} k_i p^i$ und $n = \sum_{i\geq 0} n_i p^i$

$8 \binom{3p}{2p} \equiv 3 \binom{2p}{p}^3 \bmod p^5$, für $p > 6$ $3 \binom{4p}{2p} \equiv 2 \binom{3p}{p}^2 \bmod p^5$, für $p > 6$

$3^4 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \binom{26p}{13p} \equiv 46 \binom{21p}{8p}^2 \bmod p^5$, für p ungleich 2, 3, 5, 7, 17, 19

$\binom{n}{k} \equiv \binom{[n/2]}{[k/2]} \bmod 2$ $\binom{m}{p} \equiv [m/p] \bmod p$

$\binom{n}{k} \binom{n}{k+1} \equiv 0 \bmod n$

Primzahl und Binomialkoeffizient

Satz: p sei eine Primzahl. Dann gilt

(a) Wenn $0 < k < p$ ist, so ist $\binom{p}{k}$ durch p teilbar

(b) für alle ganzen Zahlen a und b ist $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \mod p$

Nachweis (a):

Es gilt $p! = \binom{p}{k} k! (p-k)!$. Dividiert man p! mit p, so teilt p die Terme k! und (p-k)! nicht, d.h. den Binomialkoeffizienten $\binom{p}{k}$.

Nachweis (b): Nach dem binomischen Satz gilt

$$(a+b)^p = \Sigma_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{n-k}$$

Nach dem Teil (a) sind alle Summanden für $0 < k < p$ durch p teilbar.

Damit ist $(a+b)^p$ kongruent modulo p zur Summe der zwei Terme für k = 0 und k = p. Diese Summe ist gerade $a^p + b^p$.

Aus diesem Satz folgt der kleine Satz von Fermat: Ist p eine Primzahl, so gilt

(a) für alle ganzen Zahlen a ist $a^p \equiv a \mod p$

(b) Wenn a nicht durch p teilbar ist, dann $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Nachweis: Der Fall a = 1 ist offensichtlich. Für a > 1 wird mit $(a-1)^p \equiv (a-1) \mod p$ und dem obigen Satz

$$a^p = ((a-1) + 1)^p \equiv (a-1)^p + 1 \mod p \equiv (a-1)^p + 1 \mod p = a$$

Kombinatorische Identitäten

Für alle natürliche n,k mit $n \geq k$ gilt:

$$\binom{a+b}{a+n} \binom{a+c}{c+n} \binom{b+c}{b+n} = = \Sigma\, (a+b+c-k)! / [(a-k)! (b-k)! (c-k)! (k+n)! (k-n)!] ,$$

Summenbildung über k = 0,...,n

$$\binom{m+n}{k} = \Sigma \binom{m}{k-l} \binom{n}{l}, \text{ Summenbildung über } l = 0, ..., \text{Maximum}(k,n)$$

Pochhammer-Symbol $((a))_n = a (a-1) ... (a-n+1)$

Chu-Vandermonde-Identität $((x+a))_n = \Sigma \binom{n}{k} ((a))_k ((x))_{n-k}$,

Summenbildung für k = 0, 1, ..., ∞

Allgemeiner Binomialkoeffizient

$\binom{r}{k} = [r(r-1)(r-2) ... (r-k+1)] / k!$, für reelles r und natürliches k

d.h. $\binom{1/2}{k} = (-1)^{k+1} (2k)! / (2^{2k} (k!)^2 (2k-1))$

$\binom{-1/2}{k} = (-1)^k (2k)! / (2^{2k} (k!)^2)$

Binomische Formel

Binomischer Satz

Für alle reellen Zahl a und b und natürliche Zahlen n > 1 gilt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 - + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

$$(a^n-b^n) = (a-b) * (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Die bei diesem Satz benötigten Werte des Binomialkoeffizienten bilden jeweils eine Zeile im Pascalschen Dreieck.

Für a = b = 1 wird als Sonderfall $(a+b)^n = 2^n = \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k}$

Auf der Briefmarke San Marinos wird Isaac Newton als Entdecker des binomischen Satzes gewürdigt.

Binomischer Satz von Newton, allgemeiner binomischer Satz

1665 wurde durch Isaaac Newton eine verallgemeinerte Form des binomischen Satzes angegeben. Die ursprüngliche Form

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots +$$

gilt nur für natürliche Exponenten n. Nach Newton gilt allgemein

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + m/n\ AQ + (m-n)/(2n)\ BQ + (m-2n)/(3n)\ CQ + (m-3n)/(4n)\ DQ + \dots$$

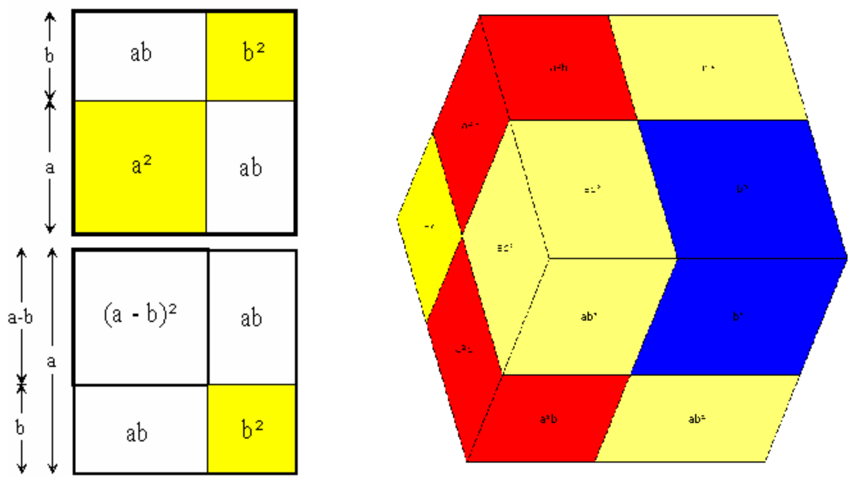
Dabei sind die A, B, … Koeffizienten, die schrittweise ermittelt werden

$$A = P^{m/n}$$
$$B = m/n\ AQ = m/n\ P^{m/n}Q$$
$$C = \dots = (m/n)(m/n - 1)/2\ P^{m/n}Q^2$$
$$D = \dots = (m/n)(m/n - 1)(m/n - 2)/(2 \cdot 3)\ P^{m/n}Q^3$$

Einsetzen und Ausklammern von $P^{m/n}$ ergibt

$$(1 + Q)^{m/n} = 1 + m/n\ Q + (m/n)(m/n - 1)/2\ Q^2 + (m/n)(m/n - 1)(m/n - 2)/(2 \cdot 3)\ Q^3 + \dots$$

Für natürliche m und n = 1 ergibt sich der klassische binomische Satz.



obere Abbildung: grafische Veranschaulichung des 1. und 2.binomischen Formel

1.binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der Zahlen, vermehrt um das doppelte Produkt.

2.binomische Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der Zahlen, vermindert um das doppelte Produkt.

3.binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Quadrate der beiden Zahlen.

Weitere binomische Formeln

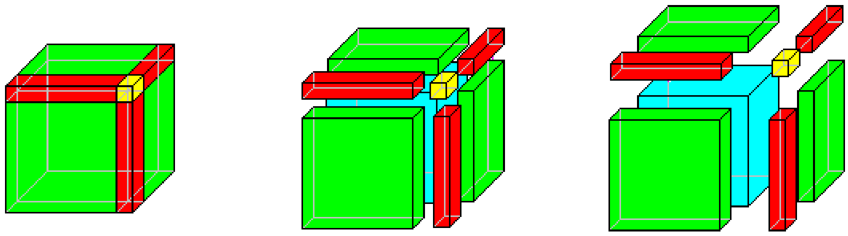
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

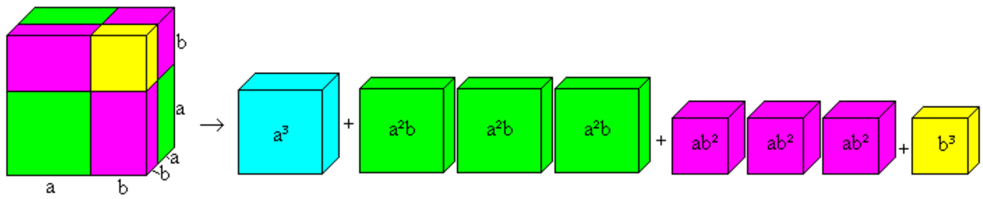
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

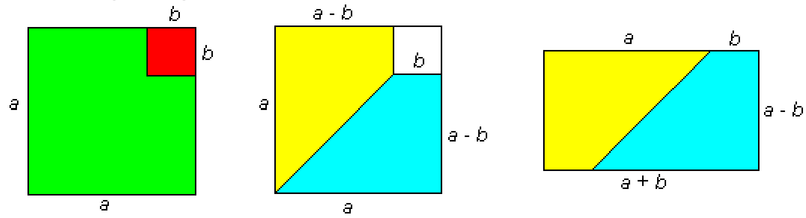
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$
$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$
$(a+b)^2 (a-b)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

Zur grafischen Veranschaulichung der binomischen Formel $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ benötigt man eine räumliche Darstellung. Hier wird ein Würfel der Kantenlänge a+b aus einem Würfel der Länge a, einem Würfel der Länge b und jeweils 3 Quadern mit den Kantenlängen a, a, b bzw. a, b, b zusammengesetzt. Diese Zusammensetzung erkennt man auch gut in den nachfolgenden Abbildungen

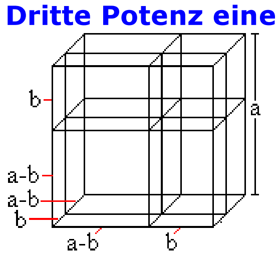




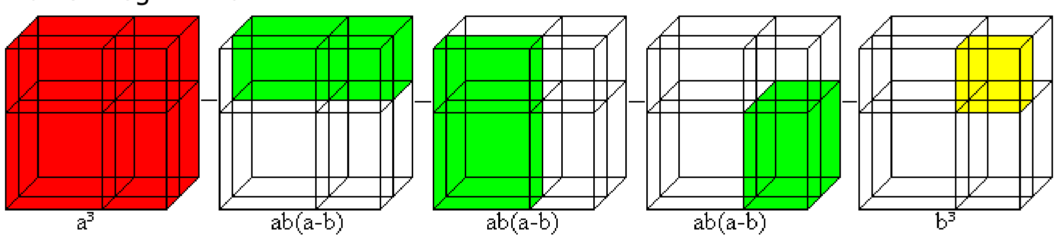
Auch die dritte binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
kann geometrisch veranschaulicht werden.
Die rechte Gleichungsseite stellt die Differenz zweier Quadrate dar, d.h. von einem Quadrat a^2 ist ein Quadrat b^2 zu entfernen (erste und zweite Abbildung).
Die Restfläche wird in zwei kongruente Trapeze geteilt, welche die Seitenlängen a, b und a-b haben.
Wird eines der Trapeze gespiegelt und wie in der dritten Abbildung angelegt, so entsteht ein Rechteck mit den Seitenlängen a+b und a-b. Dessen Flächeninhalt ist (a+b)(a-b), womit die dritte binomische Formel gezeigt ist.



Dritte Potenz einer Differenz



Die Formel ist $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
Für eine Veranschaulichung wandelt man sie um in
$(a-b)^3=a^3-3ab(a-b)-b^3$.
Man gibt die Zeichnung zur Formel für $(a+b)^3$ vor und setzt an Stelle von a die Differenz a-b. Dann ergeben sich im Würfel a^3 die Kanten (a-b)+b in verschiedenen Variationen (links). Der Term $(a-b)^3$ wird durch einen anderen Würfel dargestellt.
Man erhält diesen Würfel auch, wenn man vom roten Würfel die drei grünen Quader und den gelben Würfel wegnimmt:



Binomische Formeln, Aufgaben

Einfache Aufgaben zum Kürzen von Brüchen unter Verwendung von binomischen Formeln:

1 $(x^2-25) / (x^2+10x+25) = (x+5)(x-5) / (x+5)^2 = (x-5) / (x+5)$
2 $(x^2-2x+1) / (x^2-x) = (x-1)^2 / (x\ (x-1)) = (x-1) / x$
3 $(a^4-1) / (a^2+1) = (a^2+1)(a^2-1) / (a^2+1) = a^2-1$
4 $(x^2-2xy+y^2) / (2x-2y) = (x-y)^2 / (2\ (x-y)) = (x-y) / 2$
5 $(4a^2-20ab+25b^2) / (2ac-5bc) = (2a-5b)^2 / (c\ (2a-5b)) = (2a-5b) / c$
6 $(x^2-y^2) / (x^4-y^4) = (x^2-y^2) / ((x^2+y^2)(x^2-y^2)) = 1 / (x^2+y^2)$
7 $(9x^2-16y) / (28y-6x) = (3x+4y)(3x-4y) / (-2\ (-4y+3x)) = -\ (3x+4y) / 2$
8 $(5x-5z) / (x^2-z^2) = 5(x-z) / ((x+z)(x-z)) = 5 / (x+z)$
9 $(x^3-2x^2+x) / (2x-2) = x\ (x^2-2x+1) / (2\ (x-1)) = x(x-1)^2 / (2\ (x-1)) = x(x-1) / 2$
10 $(x^4-2x^2+1) / (x^3-x) = (x^2-1)^2 / (x\ (x^2-1)) = (x^2-1) / x$
11 $(4x-4ax) / (4a^2-4) = 4x\ (1-a) / (4\ (a^2-1)) = -4x\ (-1+a) / (4\ (a+1)(a-1)) = -x / (a+1)$
12 $(x^4-16) / (x+2) = (x^2+4)(x^2-4) / (x+2) = (x^2+4)(x+2)(x-2) / (x+2) = (x^2+4)(x-2)$

Binomische Formel höheren Grades

Binomische Formeln können auch für das Produkt von mehr als Binomen aufgestellt werden:

2.Grades $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

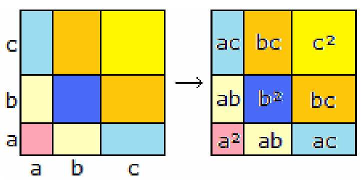
3.Grades $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b)^2(a-b) = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$
$(a+b)(a-b)^2 = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$

4.Grades $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^3(a-b) = a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4$
$(a+b)^2\ (a-b)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$
$(a+b)(a-b)^3 = a^4 - 2a^3b + 2ab^3 - b^4$

Höheren Grades

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$
$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$
$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$
$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$
$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$
$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$
$(a-b)^9 = a^9 - 9a^8b + 36a^7b^2 - 84a^6b^3 + 126a^5b^4 - 126a^4b^5 + 84a^3b^6 - 36a^2b^7 + 9ab^8 - b^9$

Trinomische Formel



Ersetzt man in den binomischen Formeln die Summe a+b bzw. Differenz durch dreigliedrige Summen a+b+c und Differenzen, so entstehen die trinomischen Formeln

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$
$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$
$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$
$(a+b+c)(a+b-c) = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$
$(a+b+c)(a-b+c) = a^2 - b^2 + c^2 + 2ac$
$(a+b+c)(a-b-c) = a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$

Für die 1.Gleichung ergibt sich eine grafische Herleitung (siehe Abbildung) bzw. die analytische

$((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2c\ (a+b) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Analog kann man tetranomische Gleichungen und noch höheren Grades entwickeln

$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2\ cd$

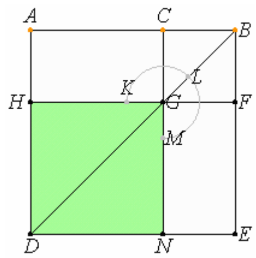
Polynomischer Satz

Für jedes r-Tupel reeller Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_r$ und jede natürliche Zahl n gilt:

$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{k1+k2+\dots+kr=n} \binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_r} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}$

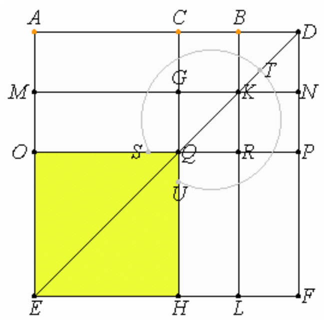
Dabei ist die Summe über alle r-Tupel natürlicher Zahlen (k_1, …, k_r) zu erstrecken, für die $\Sigma_{i=1}^{r} k_i = n$ ist.
Für r = 2 erhält man den binomischen Satz, für r = 3 den trinomischen Satz.

Beispiel:
$(a+b+c)^3 = \binom{3}{3,0,0} a^3 + \binom{3}{2,1,0} a^2b + \binom{3}{2,0,1} a^2c + \binom{3}{1,2,0} ab^2 + \binom{3}{1,1,1} abc + \binom{3}{1,0,2} ac^2 + \binom{3}{0,3,0} b^3 + \binom{3}{0,2,1} b^2c + \binom{3}{0,1,2} bc^2 + \binom{3}{0,0,3} c^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$
Sind alle $a_i = 1$, so ergibt sich $\Sigma_{k1+k2+\ldots+kr=n} \binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_r} = r^n$



Euklids „Elemente“, Buch II § 7 (L. 7):
Teilt man eine Strecke, wie er gerade trifft, so sind die Quadrate über der ganzen Strecke und über einem ihrer Abschnitte beide zusammen gleich zweimal dem Rechteck aus der ganzen Strecke und dem genannten Abschnitt und dem Quadrat über dem anderen Abschnitt zusammen.

Eine Strecke AB teile man beliebig, im Punkte C. Ich behaupte, dass AB² + BC² = 2 AB · AC + CA².
Man zeichne über AB das Quadrat ADEB und zeichne die Figur fertig. Hier ist Parallelogramm AG = GE (I, 43); man füge daher CF beiderseits hinzu; dann ist das ganze Parallelogramm AF dem ganzen CE gleich; also AF + CE = 2 AF.
Andererseits bilden AF + CE Gnomon KLM + Quadrat CF; also sind Gnomon KLM + CF = 2 AF. 2 AF ist aber auch 2 AB · BC; denn BF = BC. Also sind Gnomon KLM + Quadrat CF = 2 AB · BC. Man füge DG, d.h. AC² beiderseits hinzu; dann sind Gnomon KLM und die Quadrate BG, GD zusammen = 2 AB · BC + AC². Gnomon KLM und Quadrate BG, GD bilden aber zusammen ADEB + CF, d.h. AB² + BC². Also sind AB² + BC² = 2 AB · BC + AC². – S.
Anmerkung: Wenn a = b + c, so wird $a^2 + b^2 = 2 ab + c^2$, d.h. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, also die zweite binomische Formel.



Euklids „Elemente“, Buch II § 8 (L. 8):
Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist viermal das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Abschnitte zusammen mit dem Quadrat über dem anderen Abschnitt dem über der ganzen Strecke und genanntem Abschnitt vereint gezeichneten Quadrat gleich.

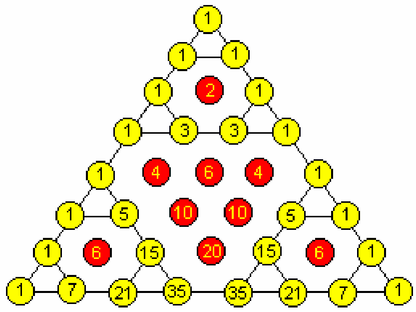
Eine Strecke AB teile man beliebig, im Punkte C. Ich behaupte, dass 4 AB · BC + AC² = (AB + BC)². Man setze nämlich BD an AB gerade an, mache BD = CB, zeichne über AD das Quadrat AEFD und zeichne die Doppelfigur fertig.
Da hier CB = BC, andererseits CB = GK und BD = KN (I, 34), so ist auch GK = KN. Aus demselben Grunde ist auch QR = RP. Und da sowohl BC = BD als auch GK = KN, so ist auch sowohl Parallelogramm CK = KD als auch Parallelogramm GR = RN (I, 36). Andererseits ist CK = RN; denn sie sind Ergänzungen im Parallelogramm CP (I, 43). Also ist auch Parallelogramm KD = GR (Axiom 1); also sind DK, CK, GR, RN alle vier einander gleich. Alle vier zusammen sind also = 4 CK. Ebenso ist, da CB = BD, andererseits BD = BK, d.h. = CG, und CB = GK, d.h. = GQ, auch CG = GQ. Und da sowohl CG = GQ also auch QR = RP, ist auch sowohl Parallelogramm AG = MQ als auch Parallelogramm QL = RF. Andererseits ist MQ = QL ; denn sie sind Ergänzungen im Parallelogramm ML. Also ist auch Parallelogramm AG = RF; also sind AG, MQ, QL, RF alle vier einander gleich. Alle vier zusammen sind also = 4 AG.
Wie oben bewiesen, sind CK + KD + GR + RN = 4 CK; also sind die acht Flächenstücke, die den Gnomon STU bilden, = 4 AK. Da AK hier AB · BD ist, weil BK = BD, so ist 4 AB · BD = 4 AK. Wie oben bewiesen, ist auch Gnomon STU = 4 AK; also ist 4 AB · BD = Gnomon STU. Man füge OH = AC² beiderseits hinzu; dann sind 4 AB · BD + AC² = Gnomon STU + OH.
Andererseits bilden Gnomon STU + OH das Quadrat AEFD, d.h. AD²; also sind 4 AB · BD + AC² = AD². Aber BD = BC; also sind 4 AB · BC + AC² = AD², d.h. = (AB + BC)² - S. Anmerkung: Hier wird die erste binomische Formel in der Form $4 ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$ behandelt.

Pascalsches Dreieck

... einfaches Schema zur Berechnung von Binomialkoeffizienten
Das Pascalsche Dreieck beschreibt die Koeffizienten des aufgelösten Binoms $(a+b)^n$

n=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n=0	1															
n=1	1	1														
n=2	1	2	1													
n=3	1	3	3	1												
n=4	1	4	6	4	1											
n=5	1	5	10	10	5	1										
n=6	1	6	15	20	15	6	1									
n=7	1	7	21	35	35	21	7	1								
n=8	1	8	28	56	70	56	28	8	1							
n=9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
n=10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
n=11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
n=12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
n=13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
n=14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
n=15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

Die Konstruktion des Pascal-Dreiecks basiert auf der Beziehung $({}^{n}{}_{k}) + ({}^{n}{}_{k+1}) = ({}^{n+1}{}_{k+1})$. Es wird
$({}^{n}{}_{k}) + ({}^{n}{}_{k+1}) = n!/((n-k)!\ k!) + n!/((n-k-1)!\ (k+1)!) = n!\ [(k+1) + (n-k)]/[(n-k)!\ (k+1)!] = (n+1)!/[(n-k)!\ (k+1)!] = ({}^{n+1}{}_{k+1})$

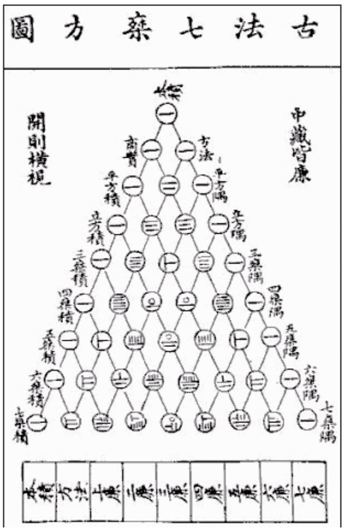


Beziehung von Landau

Der Quotient aus der größten Zahl in der n.ten Reihe des Pascal-Dreiecks und der Summe der n.ten Reihe konvergiert mit wachsendem n gegen $2 / \sqrt{2 n \pi}$.

Pascalsches und Sierpinski Dreieck

Zwischen dem Pascalschen Dreieck der Binomialkoeffizienten und dem aus der Chaostheorie bekannten Sierpinski-Dreieck besteht eine unmittelbare Beziehung.
Mit Hilfe vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass das Sierpinski-Dreieck gerade aus den ungeraden Knoten des Pascalschen Dreiecks besteht.



Lucas-Theorem

Nummeriert man von oben nach unten die Zeilen mit n=0,1,2,... und von links nach rechts die Elemente einer Zeile mit m=0,1,2,... , so ist das Element C(n,m) des Pascalschen Dreiecks ungerade, wenn $A_m \subset A_n$ gilt.
Dabei ist A_n die Menge der Position der Nicht-Null-Ziffern in der Darstellung von n im Dualsystem.
Beispiel: C(5,2) = 10
$[2]_{10} = [10]_2$, d.h. $A_2 = \{1\}$;
$[5]_{10} = [101]_2$, d.h. $A_5 = \{0,2\}$
A_2 ist keine Teilmenge von A_5, wodurch C(5,2) gerade ist C(6,4) = 15
$[4]_{10} = [100]_2$, d.h. $A_4 = \{2\}$
$[6]_{10} = [110]_2$, d.h. $A_6 = \{1,2\}$
A_4 ist Teilmenge von A_6, wodurch C(6,4) ungerade ist

Beziehung von Landau

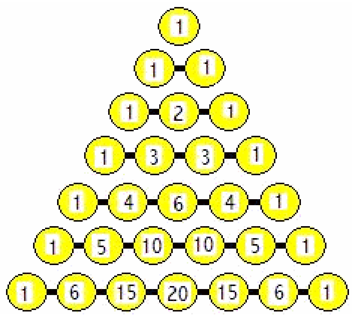
Der Quotient aus der größten Zahl in der n.ten Reihe des Pascal-Dreiecks und der Summe der n.ten Reihe konvergiert mit wachsendem n gegen $2 / \sqrt{2 n \pi}$.

Pascalsches Dreieck, Arithmetisches Dreieck

... nach Zhu-Shi-Lie

In jedem Dreieck gilt, dass die Summe der Zellen einer Basis eine Zahl ist, die gleich dem Doppelten einer mit Eins beginnenden Progression ist. D.h., dass die Summe der Zahlen in der n-ten Zeile 2^n ergibt (die oberste Zeile wird eigentlich weggelassen, sie ist die 0. Zeile).

Die erste Diagonale enthält Einsen, die zweite die natürlichen Zahlen, die dritte die Dreieckszahlen, die vierte die Tetraederzahlen (1, 4, 10, 20, 35...). Die nachfolgenden Diagonalen lassen sich als höherdimensionale Anordnungen interpretieren, beginnend mit der vierten Dimension.
Die Einträge in p-ten Zeile sind mit Ausnahme der Einsen nur dann durch p teilbar, wenn p eine Primzahl ist. Die "kurzen Diagonalen" 1, 1-1, 1-2, 1-3-1, 1-4-3, 1-5-6-1 ... ergeben summiert die Fibonacci-Folge 1-1-2-3-5-8-13...
Es gibt unendlich viele Zeilen , die drei Zahlen in arithmetischer Progression enthalten (z.B. 7-21-35), die nächsten sind 1001-2002-3003 und 490314-817190-1144066. Allerdings gibt es keine Zahlentripel, die in geometrischer oder harmonischer Progression stehen.
In China wird das Pascalsche Dreieck Yanghui-Dreieck genannt. 1261 berechnete der chinesische Mathematiker Yang Hui die Koeffizienten für $(a+b)^1$ bis $(a+b)^6$.



Pascalsches Dreieck

Problem: Welche Zahl größer 1 tritt am häufigsten im Pascalschen Dreiecke auf?
Während die 1 in jeder Zeile zweimal auftritt, findet man jede natürliche Zahl n zweimal in der n.ten Zeile, $\binom{n}{1}$ und $\binom{n}{n-1}$.
Einige Zahlen treten auch in zwei Zeilen auf, wie zum Beispiel die 10:

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \binom{10}{1} = \binom{10}{9}$$

Zahlen, die in drei Reihen vorhanden sind, können über eine Beziehung der Fibonacci-Zahlen gefunden werden. Die ersten Fibonacci-Zahlen ab Index 1 sind

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

wobei die Zahlen alternierend markiert sind. Betrachtet werden

$$n = F_{2k} \cdot F_{2k+1} \text{ und } m = F_{2k-1} \cdot F_{2k}$$

Aus diesen Zahlen wird die natürliche Zahl r gebildet mit

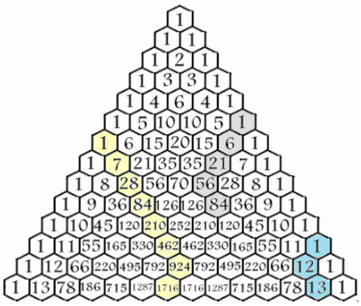
$$r = \binom{r}{1} = \binom{n}{m-1} = \binom{n-1}{m}$$

wodurch r in drei Zeilen des Pascalschen Dreiecks auftritt. Die Gleichheit der drei Binomialkoeffizienten ergibt sich aus den Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen.
Die ersten Zahlen sind $n = 3 \cdot 5 = 15$, $m = 2 \cdot 3 = 6$ und somit $r = 3003 = \binom{15}{5} = \binom{14}{6} = \binom{3003}{1}$
Die zweite Zahl ergibt sich aus $n = 8 \cdot 13 = 104$ und $m = 5 \cdot 8 = 40$ und r = 61218182743304701891431482520
Das dritte r ist
57279 23611 03685 77113 44639 38331 92585 15644 97000 65899 29649 88127 41776 75943 26796 55153 86221 28587 56528 61414 50652 74397 83272 66310 57157 52847 58237 90184 70859 00520 20001 83503 21491 13840 09457 38691 63880 55479 95567 77926 41200
Da es unendlich viele Fibonacci-Zahlen gibt, treten auch unendliche viele Zahlen im Pascal-Dreieck in drei verschiedenen Zeilen auf.
Eine Besonderheit ist die $3003 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Diese Zahl tritt in der 14., 15. und 3003. Zeile auf, aber auch in der 78.
Trotz intensiver Suche; bis 10^{23}; konnte keine weitere natürliche Zahl größer 1 gefunden werden, die auch in vier oder mehr Reihen im Pascal-Dreieck auftritt.

Schreibt man die Zahlen in den Zeilen des Pascalschen Dreiecks nebeneinander und fasst diese zu einer Zahl zusammen, so entsteht stets eine durch 11 teilbare Zahl.
Zu beachten ist dabei, dass von rechts nach links bei mehrstelligen Zahlen die Überträge durchgeführt werden müssen:

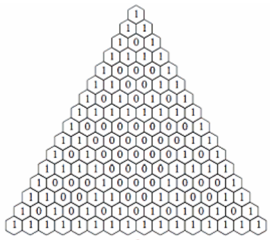
$11^0 = 1$
$11^1 = 11$
$11^2 = 121$

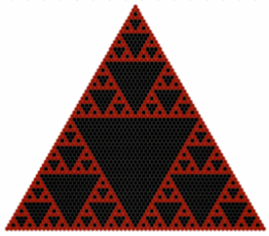
$11^3 = 1331$
$11^4 = 14641$
$11^5 = 161051$ = [1 5 10 10 5 1]
$11^6 = 1771561$ = [1 6 15 20 15 6 1]
$11^7 = 19487171$ = [1 7 21 35 35 21 7 1]
$11^8 = 214358881$ = [1 8 28 56 70 56 28 8 1]
$11^9 = 2357947691$ = [1 9 36 84 126 126 84 36 9 1]
$11^{10} = 25937424601$ = [1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1]
$11^{11} = 285311670611$ = [1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1] usw.



Zahlenfolgen im Pascalschen Dreieck

Eine weitere interessante Eigenschaft der Zahlen im Pascalschen Dreiecke ist folgende:
Beginnt man bei einer Rand-1 und bildet eine Zahlenfolge, in dem man entweder links oder nach rechts längs einer Diagonelen weitergeht, so ist die Summe der auftretenden Zahlen gleich der Zahl, die in der nächsten Zeile aber nicht in der gleichen Diagonalen liegt, d.h. zum Beispiel

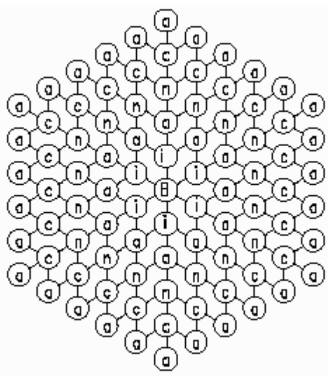




1 + 6 + 21 + 56 = 84
1 + 7 + 28 + 84 + 210 + 462 + 924 = 1716
1 + 12 = 13

Pascalsches Dreieck modulo m

Wie schon unter Pascalsches Dreieck (3) gezeigt, besteht ein Zusammenhang zwischen Pascalschen Dreieck und Sierpinski-Dreieck.
Da das Pascalsche Dreieck die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ enthält, werden diese modulo einer natürlichen Zahl m betrachtet und in Form eines Pascalschen Dreiecks eingetragen.
Ist m = 2, d.h. gerade und ungerade Binomialkoeffizienten werden unterschieden, so ergibt sich die obere Darstellung. Färbt man 0 = schwarz und 1 = rot und vergrößert den Darstellungsbereich, so erhält man eine Darstellung des Sierpinski-Dreiecks (untere Abbildung).



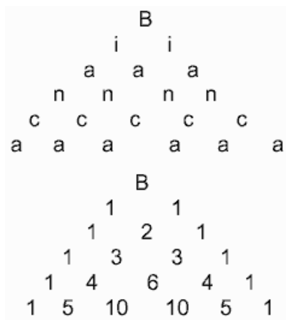
Pascalsches Dreieck, Anwendung

Fürther Mathematikolympiade 1995, Klasse 10, 2.Stufe:

In einer niederländischen Zeitschrift war das nebenstehende Exlibris abgebildet, das der holländische Graphiker W. van Strens für seine Tochter entworfen hat. Ein Exlibris ist ein auf die Innenseite des vorderen Buchdeckels geklebter, künstlerisch gestalteter Zettel mit einem Hinweis auf den Eigentümer.
Auf wie viele Arten lässt sich in der Abbildung nun der Name Bianca lesen? Man beschreibe eine Methode, wie man ohne mühsames Auszählen die Anzahl der Lesemöglichkeiten relativ schnell bestimmen kann.

Lösung

Man kann das Problem auf die zweite abgebildete Figur reduzieren, ein Pascalsches Dreieck. Die verschiedenen Lesemöglichkeiten ergeben sich aus der analogen Anordnung der dritten. Figur. Das sind zusammen 1+5+10+10+5+1 = 32 verschiedene Möglichkeiten. Für die vollständige Figur erhalten wir somit : 6×30 + 6 = 186 unterschiedliche Lesarten.



Programmtext zum Pascalschen Dreieck

Programm zur Berechnung der ersten n Zeilen des Pascalschen Dreiecks.

```
program Pascal;
const  MaxArray = 32;
var    i, j, n: integer;        a: array [0..MaxArray] of integer;
begin  writeln('Berechnung eines Pascalschen Dreiecks');        writeln;
```

```
writeln('Bis zur wievielten Zeile soll das Dreieck berechnet werden?'); readln(n);
if n > MaxArray then begin writeln('n ist zu groß'); halt end;
for i:=1 to n do begin        a[i] := 1;
for j:=i-1 downto 2 do begin        a[j] := a[j] + a[j-1] end;
for j:=1 to i do begin        write(a[j], ' ');        end;
writeln;        end end.
```

Pascalsches Dreieck

Zwischen dem Pascalschen Dreieck und den Abständen der Planeten in unserem Sonnensystem besteht ein merkwürdiger, empirischer Zusammenhang.
Nummeriert man die Planeten beginnend bei Merkur mit n = 0, 1, … durch, so gilt für die Abstände der Himmelskörper zur Sonne in Astronomischen Einheiten in etwa $d(n) = (3 a_n + 4) / 10$
wobei a_n = 0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 zu setzen ist. Setzt man als 5.Planeten den größten Planetoiden Ceres und für n = 8 vorerst 9.Planet, so erhält man

Planet	n	Summe der n.ten Zeile im Pascalschen Dreieck	Abstand in AE
Merkur	0	0 = 0	0,4
Venus	1	1 = 1	0,7
Erde	2	1 + 1 = 2	1
Mars	3	1 + 2 + 1 = 4	1,6
Ceres	4	1 + 3 + 3 + 1 = 8	2,8
Jupiter	5	1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16	5,2
Saturn	6	1+ 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32	10
Uranus	7	1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64	19,6
9.Planet	8	1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128	38,8

Bis n = 7 stimmen die Werte mit den realen erstaunlich gut überein. Für den Planeten Neptun ergibt sich keine Übereinstimmung, jedoch für den Kleinplaneten Pluto, dessen Werte dem hier 9.Planet genannten entsprechen.
Da die Neptun- und Plutobahn, nach der Theorie, aber vor langer Zeit gestört wurden, und Neptun aus seiner ursprünglichen Bahn abwich, könnte auch dieser Wert früher günstig gewesen sein.
Die verblüffende Beziehung der Planetenbahnen zum Pascalschen Dreieck ergibt sich aus der Titius-Bode-Reihe.
Warum diese Reihe aber so gut die Planeten beschreibt, weiß man nicht. Vielleicht ist es purer Zufall.

$i \backslash j$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
n^1	1				
n^2	1	2			
n^3	1	6	6		
n^4	1	14	36	24	
n^5	1	30	150	240	120

Potenzendreieck

Für Potenzen mit beliebiger Basis existiert ein Zahlendreieck, ähnlich dem Pascalschen Dreieck, anderer Art. (siehe Abbildung)
Zu dieser Dreiecksmatrix gelangt man durch Inversion der Matrix der Koeffizienten der Terme, die die Kombinationen ohne Wiederholung der Form $\binom{n}{k}$ für k = 1, 2, 3, … usw. darstellen.

Beispiel $n^5 = 1\cdot\binom{n}{1} + 30\cdot\binom{n}{2} + 150\cdot\binom{n}{3} + 240\cdot\binom{n}{4} + 120\cdot\binom{n}{5}$, d.h.
$6^5 = 1\cdot6 + 30\cdot15 + 150\cdot20 + 240\cdot15 + 120\cdot6 = 7776$

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten lautet für den Koeffizienten in Zeile i und Spalte j:
$E(i, j) = [E(i-1, j-1) + E(i-1, j)] \cdot j$

Mit Hilfe dieses Dreiecks gewinnt man unmittelbare Einblicke in die Teilbarkeit von Potenzen. So ist jede Primzahlpotenz n^p für p > 3 äquivalent n modulo 6p. Dies ist im Wesentlichen der Inhalt des kleinen Fermatschen Satzes. Zusätzlich wird jedoch gezeigt, dass der Ausdruck $a^p - a$ für alle a nicht nur durch p, sondern für p > 3 auch durch 6 teilbar ist. Der größte gemeinsame Teiler der Matrixkoeffizienten ab dem zweiten Koeffizienten der Primzahlexponenten für n entspricht stets dem Nenner der jeweiligen Bernoullischen Zahl.

Bernoulli-Dreieck, Quadratzahlendreieck

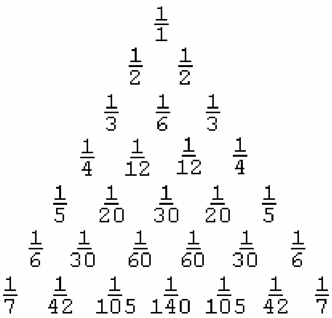
Ein weiteres Zahlendreieck wurde erstmals von Bernoulli angegeben und heute Bernoulli-Dreieck oder Quadratzahlendreieck genannt. Die Einträge dieses Zahlendreiecks bestehen aus den Summen der Binomialkoeffizienten $a_{n,k} = \Sigma_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$

Bernoulli-Dreieck

1					
1	2				
1	3	4			
1	4	7	8		
1	5	11	15	16	
1	6	16	26	31	32

Damit ergibt sich für die letzte Zahl jeder Reihe eine Zweierpotenz. Bis auf diese letzte Zahl und den Zeilanfang 1 sind auch hier die Glieder Summe der beiden darüberliegenden Werte.
Eine alternative Darstellung der $a_{n,k}$ mit Hilfe der Gamma-Funktion $\Gamma(x)$ und der hypergeometrischen Funktion $_2F_1(a,b;c;a)$ ist

$$a_{n,k} = 2_n - \Gamma(n+1)\ {}_2F_1(1,k-n+1;k+2;-1) / (\Gamma(k+2)\ \Gamma(n-k))$$



Harmonisches Dreieck, Leibniz-Dreieck

Gegeben sei die harmonische Zahlenfolge $a_n = 1/n$. Aus dieser bildet man die Differenzenfolge

$$b_n = a_n - a_{n+1}$$

davon die erneute Differenzenfolge usw. Man erhält

a_n 1 1/2 1/3 1/4 1/5 1/6 … 1/n
b_n 1/2 1/6 1/12 1/20 1/30 … 1/[n(n+1)]
c_n 1/3 1/12 1/30 1/60 …2/[n(n+1)(n+2)]
d_n 1/4 1/20 1/60 … 6/[n(n+1)(n+2)(n+3)]

Dann gilt $b_1 + b_2 + … + b_n = a_1 - a_{n+1}$. Die Folge a_n und die anderen Folgen konvergieren gegen 0. Die Summe der unendlichen Reihe $b_1 + b_2 + … + b_n + …$ ist daher gleich a_1:

$$1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + 1/30 + … = 1$$

Dasselbe gilt auch für alle anderen Zeilen.
weitere Eigenschaften siehe

Gottfried Wilhelm Leibniz untersuchte diese Folgen bei der Ausarbeitung seines Differenzial- und Integralkalküls. U.a. versuchte er die Summe der reziproken Dreieckszahlen zu berechnen.
Ordnet man die Glieder der Zahlenfolgen wie in der Abbildung an, ergibt sich das harmonische Dreieck.
Es ist mit dem Pascalschen Dreieck verwandt - die Zahlen in der n-ten Zeile sind die Kehrwerte der entsprechenden Zahlen des Pascalschen Dreiecks, dividiert durch (n+1). Jede Zahl ist die Summe der beiden darunterliegenden Zahlen; im Gegensatz zum Pascalschen Dreieck. siehe auch http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/LeibnitzTriangle.shtml

Die n-te Zeile des Dreiecks beginnt und schließt am Rand mit 1/n. Jede Zahl ist die Summe der beiden unter ihr stehenden Zahlen.
Die Einträge werden mit dem Symbol $[^n{}_k]$ bezeichnet, wobei die Nummerierung der Zeilen und Spalten mit 1 beginnt.
Es gilt die Rekursion $[^n{}_1] = [^n{}_n] = 1/n$ $[^n{}_k] = [^{n+1}{}_k] + [^{n+1}{}_{k+1}]$; $n > 0$
Der Zusammenhang mit den Binomialkoeffizienten ist $[^n{}_k] = 1 / (k \binom{n}{k}) = 1 / (n \binom{n-1}{k-1})$
womit die Einträge Stammbrüche sind. Für die Summe der Nenner in der n-ten Zeile wird $n\ 2^{n-1}$.

Teleskopsumme

Für die Summe einer Diagonale ergibt sich die Teleskopsumme $[^{n+k}{}_k] = [^{n+k-1}{}_k] - [^{n+k}{}_{k+1}]$

Lozanitsch-Dreieck

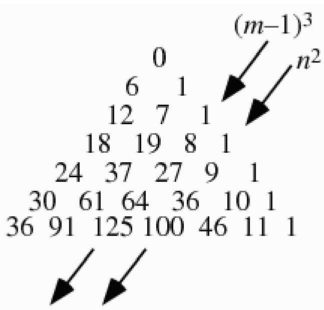
Das Lozanitsch-Dreieck ist eine Anordnung von Binomialkoeffizienten in ähnlicher Form wie das Pascalsche Dreieck. Es ist nach dem serbischen Chemiker Sima Lozanic benannt. Die ersten Zeilen des Dreiecks sind

1
1 1
1 1 1
1 2 2 1
1 2 4 2 1
1 3 6 6 3 1
1 3 9 10 9 3 1
1 4 12 19 19 12 4 1
1 4 16 28 38 28 16 4 1
1 5 20 44 66 66 44 20 5 1
1 5 25 60 110 126 110 60 25 5 1
1 6 30 85 170 236 236 170 85 30 6 1
1 6 36 110 255 396 472 396 255 110 36 6 1
1 7 42 146 365 651 868 868 651 365 146 42 7 1
1 7 49 182 511 1001 1519 1716 1519 1001 511 182 49 7 1
1 8 56 231 693 1512 2520 3235 3235 2520 1512 693 231 56 8 1

Wie im Pascal-Dreieck sind Zahlen meist die Summe der beiden darüberliegenden Werte. Allerdings wird für die Zahl mit geradem Index k in einer Zeile mit ungerader Nummer n von der Summe noch der Zahlenwert an Position (k - 1)/2 in der Zeile n/2 - 1 des Pascalschen Dreiecks subtrahiert.
In der dritten Diagonale wechseln sich Quadratzahlen und Proniczahlen ab. In der nachfolgenden Diagonalen findet man die Alkan-Zahlen l(6, n), l(7, n), … ,welche die Anzahl der Isomeren von Alkan-Verbindungen beschreiben.
Die Summe der n.Zeile des Lozanitsch-Dreiecks ist $2^{n-2} + 2^{[n/2]-1}$. Die Summen der Diagonalen wechseln zwischen

$$(F_{2n-1}\, F_{n+1}) / 2 \text{ und } (F_{2n}\, F_n) / 2$$

wobei die F_i Fibonacci-Zahlen sind.



Clark-Dreieck

Das Clark-Dreieck ist ein Zahlendreieck, dessen Spitze die 0 enthält, eine Diagonale mit Einsen und die zweite Diagonale mit Vielfachen einer natürlichen Zahl f gefüllt werden. Die anderen Einträge des Dreiecks ergeben sich als Summe der beiden darüber befindlichen Zahlen.
Wird die erste Spalte mit n = 0 und die letzte mit m = n bezeichnet, so wird

$c_{m0} = f\, m$ $\qquad$ $c_{mm} = 1$

und die Rekursion $\qquad$ $c_{mn} = c_{m-1n-1} + c_{m-1n}$

Analytisch wird $\qquad$ $c_{mn} = f \binom{m}{n+1} + \binom{m-1}{n-1}$

wobei $\binom{m}{n}$ der Binomialkoeffizient ist.
Für f = 6 ergeben sich überraschender Weise

$c_{m2} = (m-1)^3$ $\qquad$ $c_{m3} = 1/4\, (m-1)^2\, (m-2)^2$

d.h. aufeinanderfolgende Kuben $(m-1)^3$ und nicht aufeinanderfolge Quadrate $n^2 = ((m-1)(m-2)/2)^2$. Für die Summe der m-ten Reihe (m > 0) ergibt sich $\Sigma_{n=0}^{m} c_{mn} = 2^{m-1} + f\,(2^m - 1)$

Zentraler Binomialkoeffizient

... spezieller Binomialkoeffizient mit $\binom{n}{[n/2]}$
wobei unter [n/2] der ganzzahlige Anteil der Division von n mit 2 verstanden wird. Die ersten Werte für n = 1,2,3,... sind 1, 2, 3, 6, 10, 20, 35, 70, 126, 252, ...

Alternativer Binomialkoeffizient, mittlerer Binomialkoeffizient

Der alternative Binomialkoeffizient ist ein spezieller Binomialkoeffizient mit $\binom{2n}{n} = (2n)! / (n!)^2$
Der Name "mittlerer Binomialkoeffizient" wird genutzt, dass diese Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck genau in der Zeilenmitte liegen.
Die ersten Werte für steigendes n sind 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620, 184756, …

Erdös-Vermutung: Der alternative Binomialkoeffizient ist für alle n > 4 nicht quadratfrei.
Die Erdös-Vermutung wurde 1996 von Granville und Ramare bewiesen.
Weiterhin gilt (alle Summen werden für n = 1,2,3, ... , ∞ gebildet):

$\Sigma\ 1/\binom{2n}{n} = 1/27\ (2\pi\sqrt{3} + 9) = 0.7363998587$ ...

$\Sigma\ 1/(n*\binom{2n}{n}) = \pi/9\ \sqrt{3} = 0.6045997881$...

$\Sigma\ 1/(n^2*\binom{2n}{n}) = 1/3\ \zeta(2) = \pi^2 / 8$

$\Sigma\ 1/(n^4*\binom{2n}{n}) = 17/36\ \zeta(4) = 17/3240\ \pi^4$

Polynomialkoeffizient, Multinomialkoeffizient

Der Polynomialkoeffizient oder Multinomialkoeffizient ist eine Erweiterung des Binomialkoeffizienten.
Für nichtnegative ganze Zahlen n, k_1, ..., k_r mit $k_1 + ... + k_r = n$ ist er definiert als

$\binom{n}{k_1, ..., k_r} = n! / (k_1! \cdot ... \cdot k_r!)$

Dieser ist stets eine natürliche Zahl. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist ein Sonderfall des Polynomialkoeffizienten mit $\binom{n}{k_1, k_2}$ und $k_1 = k$, $k_2 = n-k$. Ist r = 3 spricht man vom Trinomialkoeffizienten.

In Verallgemeinerung des binomischen Satzes gilt der sogenannte Polynomialsatz oder Multinomialsatz

$(x_1 + ... + x_r)^n = \Sigma_{k1+...+kr=n} \binom{n}{k_1, ..., k_r} x_1^{k_1} \cdot ... \cdot x_r^{k_r}$

Anwendung findet der Multinomialkoeffizient in der Multinomialverteilung, einer Wahrscheinlichkeitsverteilung diskreter Zufallsvariablen.
Beispiele:
1) $\binom{9}{4, 3, 1, 1} = 9! /(4!\ 3!\ 1!\ 1!) = \binom{9}{4} \binom{5}{3} \binom{2}{1} \binom{1}{1} = 2520$
2) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die 32 Karten eines Skatspiels zu je 10 Karten an die 3 Spieler sowie zu 2 Restkarten in den Skat zu legen?
Die Antwort liefert der Polynomialkoeffizient: $\binom{32}{10,10,10,2} = 32! / (10!\ 10!\ 10!\ 2!) = 2\ 753\ 294\ 408\ 504\ 640$

Pascalsche Pyramide, Trinomialkoeffizient

Die Pascalsche Pyramide ist eine dreidimensionale Verallgemeinerung des Pascalschen Dreiecks. Sie enthält die Multi- bzw. Polynomialkoeffizienten dritter Ordnung, die Trinomialkoeffizienten, d.h. die Koeffizienten von $(a + b + c)^n$ stehen auf Ebene n+1.
Wie im Pascalschen Dreieck beginnt die Pascalsche Pyramide mit einer einzelnen 1 auf der obersten Ebene, der Spitze der Pyramide. Jede weitere Zahl ist die Summe der drei über ihr stehenden Zahlen. Alle besonderen Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks lassen sich sinngemäß auch auf die Pascalsche Pyramide anwenden.

Die Trinomialkoeffizienten sind gegeben durch $(i + j + k)! / (i!\ j!\ k!)$
mit i+j+k = n. Die Identität $(i + j + k)! / (i!\ j!\ k!) = (i + j + k)! / ((i!+j!)\ k!) \cdot (i + j)! / (i!+j!)$
ergibt die Konstruktionsvorschrift für die (n+1)-te Ebene

1) Bilde zunächst die drei Seiten des Dreiecks. Diese entsprechen der (n+1)-ten Zeile im Pascalschen Dreieck.

2) Fülle die m-te Zeile mit den Einträgen aus der m-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks, multipliziert mit dem an den Seiten bereits eingetragenen Faktor.

Die Summe aller Zahlen der n-ten Ebene ist 3^n-1. Die Summe aller Zahlen von der ersten bis zur n-ten Ebene ist gleich $(3^n - 1)/2$.

Bell-Dreieck

Zahlendreieck, welches die Bell-Zahlen enthält.

$B_n = \Sigma_{k=1}^{n}\ {}^{n}{}_{k}$

$\{^n{}_k\}$ ist die Stirlingsche-Zahl 2.Art

```
1   2   5   15   52   203   877 ...
  1   3   10   37   151   674 ...
    2   7   27   114   523 ...
      5   10   87   409 ...
        15   67   322 ...
          52   255 ...
            203 ...
```

Rekursion: $B_{n+1} = \Sigma_{k=0}^{n} B_k \binom{n}{k}$
Die ersten Bell-Zahlen sind
1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, 27644437, 190899322, 1382958545, 10480142147, 82864869804, 682076806159, 5832742205057, 51724158235372, 474869816156751, 4506715738447323, 44152005855084346, 445958869294805289, 4638590332229999353, …

Ackermann-Zahl

Ein Zahl der Form n ↑ ... ↑ n (mit n-mal ↑-Operator) heißt Ackermann-Zahl. Dabei stellt ↑ die Pfeil-Notation dar. Die ersten Ackermann-Zahlen sind damit:

1 ↑ 1 = 1 2 ↑↑ 2 = 4 3 ↑↑↑ 3 = $3^{3^\wedge 3^\wedge \ldots ^\wedge 3}$, d.h. 7625597484987 mal eine „3"

Bell-Zahl

Diese Zahlen wurden nach Eric Temple Bell benannt. Die Bellzahl bezeichnet die Anzahl möglicher Partitionen über eine Menge mit n Elementen. Es gilt $B_n = \Sigma_{k=1}^{n} \{^n{}_k\}$
wobei $\{^n{}_k\}$ die Stirlingsche-Zahl 2.Art ist.

Rekursion: $B_{n+1} = \Sigma_{k=0}^{n} B_k \,(^n{}_k)$

Beispielsweise ist die Bellzahl für eine 3-elementige Menge die 5, da sich die Menge {a,b,c} in folgende 5 Möglichkeiten partitionieren lässt:

1. {a,b,c}; 2. {a,b} und {c}; 3. {a,c} und {b}; 4. {b,c} und {a}; 5. {a} und {b} und {c}.

Die ersten Bell-Zahlen sind

1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, 27644437, 190899322, 1382958545, 10480142147, 82864869804, 682076806159, 5832742205057, 51724158235372, 474869816156751, 4506715738447323, 44152005855084346, 445958869294805289, 4638590332229999353, …

Die größte bekannte prime Bellzahl B_{2841} hat 6539 Ziffern und wurde 2004 von Canestro gefunden.

Stirling-Zahlen

In der Mathematik kennt man zwei verschiedene Typen von Stirling-Zahlen, die erster und zweiter Art; benannt nach James Stirling. Die Stirling-Zahl erster Art oder Stirling-Zyklus-Zahl

$s(n,r) = [^n{}_r]$

beschreibt die Anzahl der unterschiedlichen Möglichkeiten eine Permutation mit n Elementen in r Zyklen zu zerlegen. Dabei gilt

$s(n,r) = s(n - 1,r - 1) + (n - 1) \cdot s(n - 1,r)$

mit den Anfangswerten $s(0,0) = 1$; $s(n,n) = 1$; $s(n,0) = 0$ für $n > 0$; $s(0,r) = 0$ für $r > 0$

Zum Beispiel ist s(4,2) = 11, da die Menge M{a,b,c,d} auf 11 verschieden Arten in zwei Zyklen (r = 2) zerlegt werden:

a,b,c,d | a,c,b,d | a,b,d,c | a,d,b,c | a,c,d,b | a,d,c,b | a,b,c,d | a,b,d,c | a,b,c,d | a,c,b,d | a,d,b,c

Die Stirling-Zahl zweiter Art oder Stirling-Mengen-Zahl $S(n,r) = \{^n{}_r\}$
beschreibt die Anzahl der unterschiedlichen Möglichkeiten aus einer Menge mit n Elementen r nichtleere, disjunkte Teilmengen zu bilden. Jede solche Möglichkeit ist eine Partition mit r Teilmengen. Hier gilt:

$S(n,r) = S(n - 1,r - 1) + r \cdot S(n - 1,r)$

mit den Anfangsbedingungen $S(0,0) = 1$; $S(n,n) = 1$; $S(n,0) = 0$ für $n > 0$; $S(0,r) = 0$ für $r > 0$

Für das Beispiel gilt S(4,2) = 7. Die Menge M = {a,b,c,d} kann auf sieben verschiedenen Arten in 2 nichtleere, disjunkte Teilmengen zerlegt werden: {a,b},{c,d} | {a,c},{b,d} | {a,d},{b,c} | {a,b,c},{d} | {a,b,d},{c} | {b,c,d},{a} | {a,c,d},{b}

n	Stirling-Zahlen	Bell-Zahl
1	1	1
2	1 1	2
3	1 3 1	5
4	1 7 6 1	15
5	1 15 25 10 1	52
6	1 31 90 65 15 1	203

Für die Stirling-Zahlen existiert eine Analogie zu den Binomialkoeffizienten. Es gilt

$[^n{}_k] = [^{n-1}{}_{k-1}] + (n-1) \cdot [^{n-1}{}_k]$

und $\{^n{}_k\} = \{^{n-1}{}_{k-1}\} + k \cdot \{^{n-1}{}_k\}$

Die Stirling-Zahlen 2.Art können in einem dem Pascalschen Dreieck ähnlichen Muster angeordnet werden.

Im Stirling-Dreieck der Stirling-Zahlen 2.Art $\{^n{}_k\}$ ergibt sich damit eine Zahl, in dem die links darüberstehende Zahl mit dem k-fachen der rechts darüberstehenden Zahl addiert wird. Die Summe der Zahlen einer n.ten Spalte ergibt gerade die n.te Bell-Zahl B_n.

Für die Stirling-Zykluszahlen gilt: $[^n{}_1] + [^n{}_2] + \ldots + [^n{}_n] = n!$

Langford-Problem

Durch den englischen Mathematiker C.Dudley Langford wurde folgendes Problem veröffentlicht:
Gesucht sind alle Zahlen, die jede Ziffer von 1 bis n genau zweimal enthalten, und bei denen zwischen den beiden Einsen eine andere Ziffer steht, zwischen den beiden Zweien zwei andere Ziffern, zwischen den beiden Dreien drei Ziffern usw.
Für n = 1, 2, 5 und 6 existieren derartige Zahlen nicht. Für n = 3 und 4 gibt es, abgesehen von den beiden Umkehrzahlen, nur die Lösungen 231213 und 23421314.

Für n = 7 existieren 26 Lösungen (Umkehrung nicht berücksichtigt):

17125623475364	17126425374635	23726351417654	24723645317165
26721514637543	27423564371516	35723625417164	35743625427161
36713145627425	37463254276151	41716425327635	51716254237643
52732653417164	57141653472362	57236253471614	57263254376141
57416154372632	62742356437151	71316435724625	71416354732652
72452634753161	72462354736151	72632453764151	73161345726425
73625324765141	74151643752362		

Das Langford-Problem ist nur für solche n lösbar, die bei der Division mit 4 keinen Rest oder einen Rest von 3 lassen.
Bis n = 22 sind alle möglichen Lösungen bekannt. Für n = 23 konnten 2004 mit Computerhilfe insgesamt 3 799 455 942 515 488 verschiedene Lösungen berechnet werden.

Das Langford-Problem kann für kleinere n relativ schnell mittels Computer gelöst werden. Dazu bietet sich vor allem ein rekursiver Algorithmus an. Eine mögliche Umsetzung in Pascal/Delphi ist:

```
procedure langfordberechnen;
var feld:array[1..32] of integer;  n,n2:integer;
procedure setzen(ziffer:integer);
var position,pE : integer;
begin
   IF Ziffer = 1 then position := n  else position :=1;
   pE :=position+ziffer+1;
   repeat
     if feld[position]=feld[pE] then begin
       feld[position]:=ziffer;  feld[pE]:=ziffer;
       IF Ziffer < n then setzen(ziffer+1)
                  else ...   //hier Ausgabe der Ergebnisse
       feld[position]:=0;  feld[pE]:=0;
     end;
     inc(pE); inc(position);
   until pE > n2;
end;
begin
   n:=... //Eingabe von n
   n2:= 2*n;
   fillchar(feld,SizeOf(Feld),#0);
   setzen(1);
end;
```

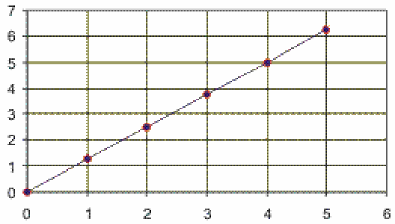
Proportionen

Aber du hast alles geordnet mit mas, zahl und gewicht.
(Weis. 11,21, übersetzt von Martin Luther)

... Verhältnis a : b zweier Zahlen ; lat. proportio = Ebenmaß
Es gilt a / b = c / d ist äquivalent zu a * d = b * c ; b und d $\neq$ 0
Die Gleichung a / b = c / d wird Verhältnisgleichung genannt. a und d heißen Außenglieder, b und c Innenglieder, a und c Vorderglieder, b und d Hinterglieder.
Seien a, b, c, d Variable und a/b bzw. c/d Verhältnisse, dann heißen a/b und c/d zueinander proportional, wenn in der Gleichung a/b = k * c/d, k eine Konstante ist.

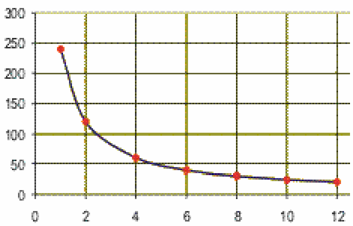
Produktgleichung
In jeder Proportion ist das Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder.

Vertauschungssätze
In jeder Proportion führt das Vertauschen der beiden Außenglieder, der beiden Innenglieder oder der Innenglieder mit den Außengliedern wieder zu wahren Proportionen.



Direkte und indirekte Proportionalität
Eine Zuordnung von Größen heißt direkte Proportionalität, wenn zwei veränderliche Größen x und y immer den gleichen Quotienten k bilden, d.h. eine Größe y heißt direkt proportional zu x, wenn y = k · x oder y / x = k gilt.
Man schreibt: y ~ x
Der Faktor k heißt dann Proportionalitätsfaktor.

Merkmale der direkten Proportionalität: Je größer die eine Größe ist, desto größer ist auch die andere Größe. Wird eine Größe verdoppelt, so verdoppelt sich auch die andere Größe. Wird die Größe halbiert, so halbiert sich auch die andere.
Alle Quotienten einander zugeordneter Paare sind gleich.
Man kann alle Werte der einen Größe mit demselben Faktor, dem Proportionalitätsfaktor k, multiplizieren und erhält stets den zugeordnten Wert.



Wird der Zusammenhang zwischen den beiden Größen grafisch dargestellt, so liegen alle Punkte auf einer Geraden. Diese verläuft durch den Koordinatenursprung, aber sie fällt mit keiner der beiden Achsen zusammen.
Der Anstieg der Geraden entspricht dem Proportionalitätsfaktor.

Indirekte Proportionalität, Antiproportionalität
Eine Zuordnung von Werten heißt indirekte Proportionalität, wenn zwei veränderliche Größen x und y stets das gleiche Produkt k bilden, d.h. eine Größe y heißt indirekt proportional oder antiproportional zu x, wenn y = k / x oder y · x = k gilt und k eine Konstante ist.
Man schreibt: y ~ 1/x

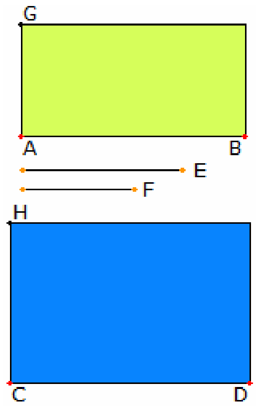
Merkmale der indirekten Proportionalität: Je größer die eine Größe ist, desto kleiner ist die andere Größe. Wird eine Größe verdoppelt, so halbiert sich die andere Größe.
Wird eine Größe halbiert, so verdoppelt sich die andere. Alle Produkte einander zugeordneter Paare sind gleich.
Wird der Zusammenhang zwischen den beiden Größen grafisch dargestellt, so liegen alle Punkte auf einer gekrümmten Linie. Diese Linie nennt man einen Hyperbelast.

Historische Proportionen
In der darstellenden und bildenden Kunst der Renaissance spielten Proportionen eine wichtige Rolle. Um als "schön" zu gelten, mussten folgende Proportionen in Gemälden und Plastiken eingehalten werden.
Mensch Kopf : Körperlänge = 1 : 8 ; Kopf : Gesicht = 5 : 4 ; Rumpf : Oberschenkel = Oberschenkel : Unterschenkel
Gebäude Höhe eines Gebäudes : Breite eines Gebäudes = 3 : 7

Proportionen bei Euklid

Im VI.Buch der "Elemente" zeigt Euklid mehrere Beziehungen für Proportionen, u.a. dass aus a : b = c : d auch a · d = b · c folgt.

c = a · d / b   d = b · c / a



Euklids "Elemente" Buch VI: § 16 (L. 11):

Stehen vier Strecken in Proportion, so ist das Rechteck aus den äußeren dem Rechteck aus den mittleren gleich. Und wenn das Rechteck aus den äußeren Strecken dem Rechteck aus den mittleren gleich ist, dann müssen die vier Strecken in Proportion stehen.

AB, CD, E, F seien vier in Proportion stehende Strecken, AB : CD = E : F.
Ich behaupte, dass AB · F = CD · E. Man ziehe AG, CH von den Punkten A, C aus rechtwinklig zu den geraden Linien AB, CD, mache AG = F, CH = E und vervollständige die Parallelogramme BG, DH.
Da AB : CD = E : F, während E = CH, F = AG, so ist AB : CD = CH : AG. In den Parallelogrammen BG, DH sind also die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional. Winkelgleiche Parallelogramme, in denen die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional sind, sind aber gleich (VI, 14); also ist Parallelogramm BG = Parallelogramm DH.
Hier ist BG = AB · F; denn AG = F; und DH ist CD · E; denn E = CH. Also ist AB · F = CD · E.
Zweitens sei AB · F = CD · E. Ich behaupte, dass die vier Strecken in Proportion stehen, AB : CD = E : F. Man konstruiere ebenso.
Dann ist, da AB · F = CD · E, während AB · F wegen AG = F das Parallelogramm BG und CD · E wegen CH = E das Parallelogramm DH ist, BG = DH; und sie sind winkelgleich.
In gleichen winkelgleichen Parallelogrammen sind aber die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional (VI, 14); also ist AB : CD = CH : AG. Nun ist CH = E, AG = F. Also ist AB : CD = E : F - S.
Anmerkung: Übersetzung des Originaltextes von Clemens Thaer (1937)

Korrespondierende Addition und Subtraktion

Aus a : b = c : d folgt

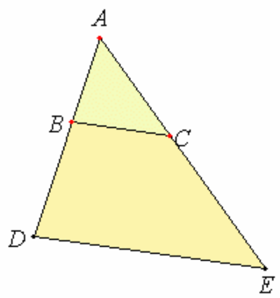
(a ± b) : a = (c ± d) : c   (a ± b) : b = (c ± d) : d
(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)   (pa ± qb) : (ra ± sb) = (pc ± qd) : (rc ± sd)

Stetige Proportion	a : b = b : c ; gleiche Innenglieder	
3.Proportionale	$x = b^2/a$	
Vierte Proportionale	x = bc/a	
Mittlere Proportionale	$x = \sqrt{ab}$	
Stetige harmonische Proportion	(a - x) : (x - b) = a : b	
	x = 2ab /(a+b)	1/x = 1/2 (1/a + 1/b)

Fortlaufende Proportion

Für die Zahlen A, B, C, p, q und r gelte: A : B = p ; B : C = q ; C : A = r
Dann gilt
$A : B : C = \sqrt[3]{p/r} : \sqrt[3]{q/p} : \sqrt[3]{r/q}$
$A : B : C = \sqrt[3]{p^2 q} : \sqrt[3]{q^2 r} : \sqrt[3]{r^2 p}$

Dritte Proportionale bei Euklid

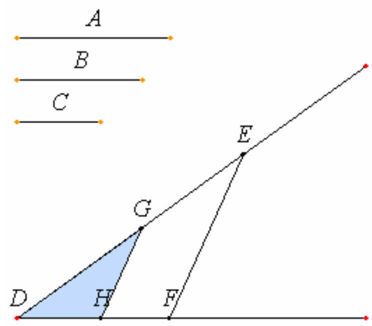


"Elemente" Buch VI: § 11 (A. 3):

Zu zwei gegebenen Strecken die Dritte Proportionale zu finden.

Die gegebenen Strecken seien BA, AC; man habe sie so gelegt, dass sie einen beliebigen Winkel umfassen. Man soll zu BA, AC die Dritte Proportionale finden.
Man verlängere die Strecken nach den Punkten D, E, mache BD = AC, ziehe BC und hierzu parallel DE durch D (I, 29, 16, Post. 5).
Da man im Dreieck ADE BC || DE, einer der Seiten gezogen hat, so stehen in Proportion AB : BD = AC : CE (VI, 2). Nun ist BD = AC; also

ist AB : AC = AC : CE. Also hat man zu zwei gegebenen Strecken AB, AC ihre Dritte Proportionale gefunden, nämlich CE - dies hatte man ausführen sollen.

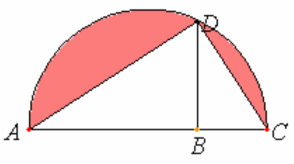


Vierte Proportionale bei Euklid

"Elemente" Buch VI: § 12 (A. 4):

Zu drei gegebenen Strecken die Vierte Proportionale zu finden.

Die drei gegebenen Strecken seien a, b, c. Man soll zu a, b, c die Vierte Proportionale finden.
Man ziehe zwei gerade Linien DE, DF, die einen beliebigen Winkel EDF umfassen, trage DG = a, GE = b, und DH = c ab, ziehe GH und hierzu parallel EF durch E (I, 29, 16, Post. 5) Da man im Dreieck DEF GH || EF, einer der Seiten gezogen hat, ist DG : GE = DH : HF (VI, 2). Nun ist DG = a, GE = b, DH = c, also ist a : b = c : HF.
Also hat man zu drei gegebenen Strecken a, b, c die Vierte Proportionale gefunden, nämlich HF - dies hatte man ausführen sollen.



Mittlere Proportionale bei Euklid

"Elemente" Buch VI: § 13 (A. 5):

Zu zwei gegebenen Strecken die Mittlere Proportionale zu finden.

Die zwei gegebenen Strecken seien AB, BC. Man soll zu AB, BC die Mittlere Proportionale finden.
Man habe die Strecken in gerade Fortsetzung voneinander gelegt. Dann zeichne man über AC den Halbkreis ADC, ziehe BD vom Punkte B aus rechtwinklig zur geraden Linie AC und ziehe AD, DC. Als Winkel im Halbkreis ist ADC ein Rechter (III, 31). Und da man im rechtwinkligen Dreieck ADC aus dem rechten Winkel auf die Grundlinie das Lot DB gefällt hat, so ist DB Mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Grundlinie, AB und BC (VI, 8, Zus.). Also hat man zu zwei gegebenen Strecken AB, BC die Mittlere Proportionale gefunden, nämlich DB - dies hatte man ausführen sollen.

Allgemeine Proportionen

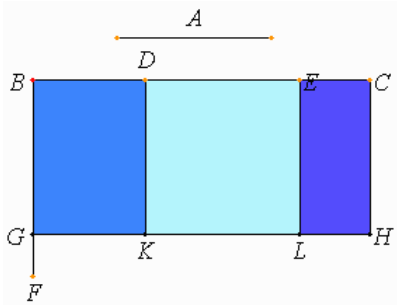
Entsprechend ihrer Philosophie "Alles ist Zahl" untersuchten die Pythagoreer ganze Zahlen und deren Proportionen. Neben dem arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel sind auch andere Verhältnisse konstruierbar.
Im 1.Jahrhundert v.u.Z. lebte die pythagoreische Bewegung in Form der Neupythagoreer wieder auf. Diese betrachteten zehn mögliche Proportionen von drei Zahlen a, b und c:

Proportion		Beispielfolge
(1)	$(c - b)/(b - a) = c/c \Rightarrow b = (a+c)/2$, arithmetisches Verhältnis $\Rightarrow c = 2b - a$	(1, 2, 3, 4, ...)
(2)	$(c - b)/(b - a) = c/b \Rightarrow b = \sqrt{(ac)}$, geometrisches Verhältnis $\Rightarrow c = b^2/a$	(1, 2, 4, 8, ...)
(3)	$(c - b)/(b - a) = c/a \Rightarrow b = 2ac/(a+c)$, harmonisches Verhältnis $\Rightarrow c = ab/(2a-b)$	(2, 3, 6)
(4)	$(b - a)/(c - b) = c/a \Rightarrow b = (a^2+c^2)/(a+c)$ $\Rightarrow c = (\sqrt{(b^2+4ab-4a^2)}+b)/2$	(3, 5, 6, $3+\sqrt{14}$, ...)
(5)	$(b - a)/(c - b) = b/a \Rightarrow b = (\sqrt{(5a^2-2ac+c^2)}-a+c)/2$ $\Rightarrow c = -(a^2-ab-b^2)/b$	(2, 4, 5, 29/5, ...)
(6)	$(b - a)/(c - b) = c/b \Rightarrow b = (\sqrt{(a^2-2ac+5c^2)}+a-c)/2$ $\Rightarrow c = (b-\sqrt{(5b^2-4ab)})/2$	(1, 4, 6, $3+\sqrt{21}$, ...)
(7)	$(c - a)/(b - a) = c/a \Rightarrow b = a\,(2c-a)/c$ $\Rightarrow c = a^2/(2a-b)$	(6, 8, 9, 64/7, ...)
(8)	$(c - a)/(c - b) = c/a \Rightarrow b = (a^2-ac+c^2)/c$ $\Rightarrow c = (\sqrt{(b^2+2ab-3a^2)}+a+b)/2$	(6, 7, 9, $8+\sqrt{15}$, ...)
(9)	$(c - a)/(b - a) = b/a \Rightarrow b = (\sqrt{(4ac-3a^2)}+a)/2$ $\Rightarrow c = (a^2-ab+b^2)/a$	(4, 6, 7, 43/6, ...)
(10)	$(c - a)/(c - b) = b/a \Rightarrow b = c-a$, Fibonacci-Reihe $\Rightarrow c = a+b$	(3, 5, 8, 13, 21, ...)

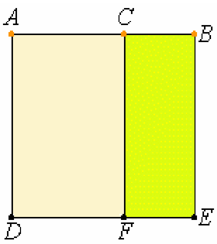
Überraschend ist, dass das letzte Verhältnis die Fibonacci-Reihe ergibt.

Arithmetik bei Euklid

Im Buch II der "Elemente" gibt Euklid grundlegende Regeln der Arithmetik an; in der damals üblichen geometrischen Behandlungsweise.

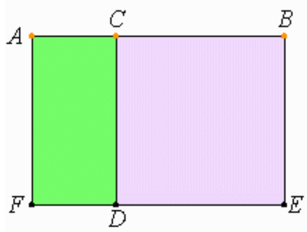


"Elemente" Buch II: § 1 (L. 1):
Hat man zwei Strecken und teilt die eine von ihnen in beliebig viele Abschnitte, so ist das Rechteck aus den beiden Strecken den Rechtecken aus der ungeteilten Strecke und allen einzelnen Abschnitten zusammen gleich.
Die zwei Strecken seien A, BC; man teile BC beliebig, in den Punkten D, E. Ich behaupte, dass A * BC = A * BD + A * DE + A * EC.
Man ziehe nämlich von B aus BF ⊥ BC, trage BG = A ab, ziehe durch G GH || BC und durch D, E, CD K, EL, CH || BG.
Hier ist Parallelogramm BH = BK + DL + EH. BH ist nun A * BC; denn es wird von GB, BC umfasst (II, Definition 1), und BG = A. Und BK ist A * BD; denn es wird von GB, BD umfasst, und BG = A. Und DL ist A * DE; denn DK, d.h. BG (I, 34) = A. Ähnlich ist EH schließlich A * EC. Also ist A * BC = A * BD + A * DE + A * EC – S.



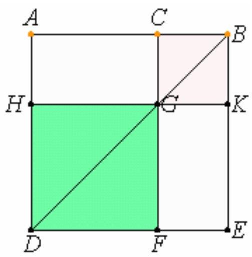
Moderne Schreibweise: a(b + c + d + ...) = ab + ac + ad + ...

"Elemente" Buch II: § 2 (L. 2):
Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so sind die Rechtecke aus der ganzen Strecke und den beiden einzelnen Abschnitten zusammen dem Quadrat über der ganzen Strecke gleich.
Man teile die Strecke AB beliebig, im Punkte C. Ich behaupte, dass AB * BC + BA * AC = AB².
Man zeichne nämlich über AB das Quadrat ADEB und ziehe durch C CF || AD oder BE. Hier ist Parallelogramm AE = AF + CE; AE ist nun AB². Und AF ist BA * AC; denn es wird von DA, AC umfasst, und AD = AB. Und CE ist AB * BC; denn BE = AB. Also sind BA * AC + AB * BC = AB² - S.
Moderne Schreibweise: $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$



"Elemente" Buch II: § 3 (L. 3):

Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Abschnitte dem Rechteck aus den Abschnitten und dem Quadrat über vorgenanntem Abschnitt zusammen gleich.



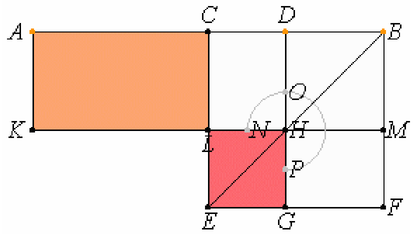
Man teile die Strecke AB beliebig, in C. Ich behaupte, dass AB * BC = AC * CB + BC². Man zeichne nämlich über CB das Quadrat CDEB, verlängere ED nach F und ziehe durch A AF || CD oder BE. Hier ist Parallelogramm AE = AD + CE. AE ist nun AB * BC, denn es wird von AB, BE umfasst, und BE = BC. Und AD ist AC * CB; denn DC = CB. Und DB ist CB². Also ist AB * BC = AC * CB + BC² - S. Moderne Schreibweise: $(a + b)a = a^2 + ab$

Klammergesetze bei Euklid

Euklids "Elemente" Buch II: § 4 (L. 4):
Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke den Quadraten über den Abschnitten und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten zusammen gleich.

Man teile die Strecke AB beliebig, in C. Ich behaupte, dass AB² = AC² + CB² + 2 AC * CB. Man zeichne nämlich über AB das Quadrat ADEB, ziehe BD, ferner durch C CF || AD oder EB und durch G HK || AB oder DE.
Da CF || AD, und BD sie schneidet, so ist der äußere Winkel CGB dem innen gegenüberliegenden ADB gleich (I, 29). Aber ADB = ABD, da die Seite BA = AD (I, 5); also ist auch ∠ CGB = GBC (Ax. 1), so dass auch die Seite BC = der Seite CG (I, 6). Andererseits ist

CB = GK (I, 34) und CG = KB; also ist auch GK = KB (Ax. 1); also ist CGKB gleichseitig. Ich behaupte, dass es auch rechtwinklig ist. Da nämlich CG || BK und die gerade Linie CB sie schneidet, so sind ∠ KBC + GCB = 2 R. (I, 29). KBC ist aber ein Rechter; also ist auch BCG ein Rechter (Ax. 3); daher sind auch die gegenüberliegenden Winkel CGK, GKB Rechte (I, 34). CGKB ist also rechtwinklig. Die Gleichseitigkeit ist oben bewiesen. Also ist es ein Quadrat, und zwar über CB.

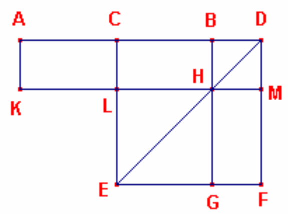


Aus demselben Grunde ist auch HF ein Quadrat, und zwar über HG, d.h. über AC (I, 34); HF, KC sind also AC^2, CB^2. Da ferner Pgm. AG = GE (I, 43) und AG = AC * CB, weil GC = CB, so ist auch GE = AC * CB, also AG + GE = 2 AC * CB. Man hat aber auch AC^2, CB^2, nämlich HF, CK; also sind HF + CK + AG + GE = $AC^2 + CB^2$ + 2 AC * CB. HF, CK, AG, GE bilden aber zusammen ADEB, d.h. AB^2. Also ist $AB^2 = AC^2 + CB^2$ + 2 AC * CB.
Zusatz: Hiernach ist klar, dass in jedem Quadrat die Parallelogramme um die Diagonale Quadrate sind.
Hinweis: In moderner algebraischer Schreibweise beweist Euklid in § 4 die Gleichung

$$(a + b + c + \ldots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + 2ab + 2ac + \ldots + 2bc + \ldots$$

Euklids "Elemente" Buch II: § 5 (L. 5):
Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über der Strecke zwischen den Teilpunkten dem Quadrat über der Hälfte gleich.

Eine Strecke AB teile man in gleiche Abschnitte in C und in ungleiche in D. Ich behaupte, dass AD * DB + $CD^2 = CB^2$.
Man zeichne über CD das Quadrat CEFB, ziehe BE, ferner durch D DG || CE oder BF, ebenso durch H KM | |AB oder EF, und ebenso durch A AK || CL oder BM.
Hier ist die Ergänzung CH der Ergänzung HF gleich (I, 43); man füge daher DM beiderseits hinzu; dann ist das ganze Pgm. CM dem ganzen DF gleich. Andererseits ist Pgm. CM = AL, da AC = CB (I, 36); also ist auch Pgm. AL = DF. Man füge CH beiderseits hinzu; dann ist das ganze Pgm. AH = Gnomon NOP (II, Def. 2).
AH ist aber AD * DB; denn DH = DB (II, 4); also ist Gnomon NOP = AD * DB. Man füge LG = CD^2 beiderseits hinzu; dann sind Gnomon NOP + LG = AD * DB + CD^2. Gnomon NOP und LG bilden aber zusammen das Quadrat CEFB, d.h. CB^2. Also sind AD * DB + CD^2 = CB^2.



Hinweis: Setzt man AD = a, BD = b, so wird in moderner algebraischer Schreibweise CB = (a+b)/2 und CD = (a-b)/2 und folglich
$a * b + [(a-b)/2]^2 = [(a+b)/2]^2$. Wird nun $a = 2n^2$ und b = 2 gesetzt, ergibt sich $(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$
Für $a = m^2$ und b = 1 ergibt sich $m^2 + [(m-1)/2]^2 = [(m+1)/2]^2$
und somit die platonische bzw. pythagoreische Regel zur Erzeugung von pythagoreischen Zahltripeln.

Binomische Formel bei Euklid

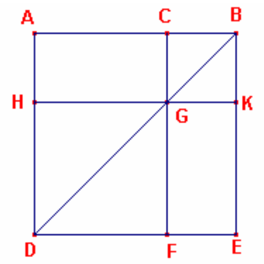
Euklids "Elemente" Buch II: § 6 (L. 6):
Halbiert man eine Strecke und setzt ihr irgendeine Strecke gerade an, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke mit Verlängerung und der Verlängerung zusammen mit dem Quadrat über der Hälfte dem Quadrat über der aus der Hälfte und der Verlängerung zusammengesetzten Strecke gleich.

Eine Strecke AB halbiere man im Punkte C und setze ihr eine Strecke BD gerade an. Ich behaupte, dass AD * DB + $CB^2 = CD^2$.
Man zeichne über CD das Quadrat CEFD, ziehe DE, ferner durch Punkt B BG || EC oder DF, durch Punkt H KM || AB oder EF, schließlich durch A AK CL oder DM.
Da hier AC = CB, ist auch Pgm. AL = CH (I, 36). Andererseits ist Pgm. CH = HF (I, 43); also ist auch Pgm. AL = HF. Man füge CM beiderseits hinzu; dann ist das ganze Pgm. AM = Gnomon NOP.

AM ist aber AD * DB; denn DM = DB; also ist Gnomon NOP = AD * DB. Man füge LG = BC^2 beiderseits hinzu; dann sind AD * DB + CB^2 = Gnomon NOP + LG. Gnomon NOP und LG bilden aber zusammen das Quadrat CEFD, d.h. CD^2. Also sind AD * DB + CB^2 = CD^2. Hinweis: Setzt man AC = a, CD = b, so wird in moderner algebraischer Schreibweise

$(a + b)(b - a) + a^2 = b^2$ $\qquad$ $(a + b)(b - a) = b^2 - a^2$

und somit die heute 3.binomische Formel genannte Gleichung.



Euklids "Elemente" Buch II: § 7 (L. 7):

Teilt man eine Strecke, wie er gerade trifft, so sind die Quadrate über der ganzen Strecke und über einem ihrer Abschnitte beide zusammen gleich zweimal dem Rechteck aus der ganzen Strecke und dem genannten Abschnitt und dem Quadrat über dem anderen Abschnitt zusammen.

Eine Strecke AB teile man beliebig, im Punkte C. Ich behaupte, dass AB^2 + BC^2 = 2 AB * AC + CA^2.

Man zeichne über AB das Quadrat ADEB und zeichne die Figur fertig. Hier ist Pgm. AG = GE (I, 43); man füge daher CF beiderseits hinzu; dann ist das ganze Pgm. AF dem ganzen CE gleich; also AF + CE = 2 AF.

Andererseits bilden AF + CE Gnomon KLM + Quadrat CF; also sind Gnomon KLM + CF = 2 AF. 2 AF ist aber auch 2 AB * BC; denn BF = BC. Also sind Gnomon KLM + Quadrat CF = 2 AB * BC.

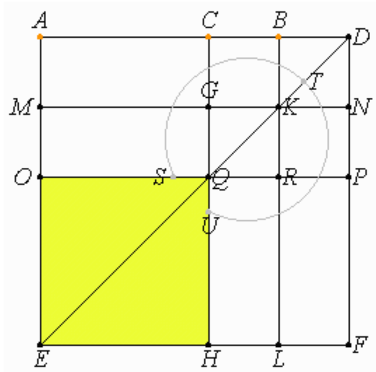
Man füge DG, d.h. AC^2 beiderseits hinzu; dann sind Gnomon KLM und die Quadrate BG, GD zusammen = 2 AB * BC + AC^2. Gnomon KLM und Quadrate BG, GD bilden aber zusammen ADEB + CF, d.h. AB^2 + BC^2.

Also sind AB^2 + BC^2 = 2 AB * BC + AC^2.

Hinweis: Setzt man AB = a, BC = b, so wird in moderner algebraischer Schreibweise

$a^2 + b^2 = 2\,a\,b + (a - b)^2$ $\quad$ $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b$

und somit die heute 2.binomische Formel genannte Gleichung.

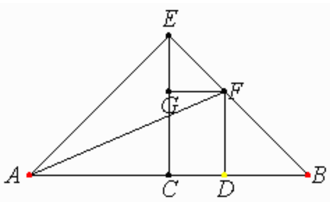


"Elemente" Buch II: § 8 (L. 8):

Teil man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist viermal das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Abschnitte zusammen mit dem Quadrat über dem anderen Abschnitt dem über der ganzen Strecke und genanntem Abschnitt vereint gezeichneten Quadrat gleich.

Eine Strecke AB teile man beliebig, im Punkte C. Ich behaupte, dass 4 AB * BC + AC^2 = $(AB + BC)^2$. Man setze nämlich BD an AB gerade an, mache BD = CB, zeichne über AD das Quadrat AEFD und zeichne die Doppelfigur fertig.

Da hier CB = BC, andererseits CB = GK und BD = KN (I, 34), so ist auch GK = KN. Aus demselben Grunde ist auch QR = RP. Und da sowohl BC = BD als auch GK = KN, so ist auch sowohl Pgm. CK = KD als auch Pgm. GR = RN (I, 36). Andererseits ist CK = RN; denn sie sind Ergänzungen im Parallelogramm CP (I, 43). Also ist auch Pgm. KD = GR (Ax. 1); also sind DK, CK, GR, RN alle vier einander gleich. Alle vier zusammen sind also = 4 CK. Ebenso ist, da CB = BD, andererseits BD = BK, d.h. = CG, und CB = GK, d.h. = GQ, auch CG = GQ. Und da sowohl CG = GQ also auch QR = RP, ist auch sowohl Pgm. AG = MQ als auch Pgm. QL = RF. Andererseits ist MQ = QL ; denn sie sind Ergänzungen im Parallelogramm ML. Also ist auch Pgm. AG = RF; also sind AG, MQ, QL, RF alle vier einander gleich. Alle vier zusammen sind also = 4 AG.

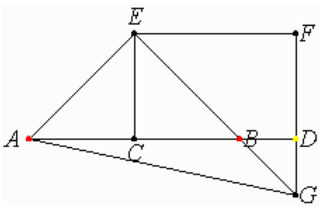


Wie oben bewiesen, sind CK + KD + GR + RN = 4 CK; also sind die acht Flächenstücke, die den Gnomon STU bilden, = 4 AK. Da AK hier AB * BD ist, weil BK = BD, so ist 4 AB * BD = 4 AK. Wie oben bewiesen, ist auch Gnomon STU = 4 AK; also ist 4 AB * BD = Gnomon STU. Man füge OH = AC^2 beiderseits hinzu; dann sind 4 AB * BD + AC^2 = Gnomon STU + OH. Andererseits bilden Gnomon STU + OH das Quadrat AEFD, d.h. AD^2; also sind 4 AB * BD + AC^2 = AD^2. Aber BD = BC; also sind 4 AB * BC + AC^2 = AD^2, d.h. = $(AB + BC)^2$ - S. Moderne Schreibweise: $4\,a\,b + (a - b)^2 = (a + b)^2$

"Elemente" Buch II: § 9 (L. 9):

Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so sind die Quadrate über den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke doppelt so groß wie die Quadrate über der Hälfte und über der Strecke zwischen den Teilpunkten zusammen.

Eine Strecke AB teile man in gleiche Abschnitte in C und in ungleiche in D. Ich behaupte, dass $AD^2 + DB^2 = 2\,(AC^2 + CD^2)$. Man ziehe CE von C aus $\perp$ AB und mache es sowohl AC als auch CB gleich, ziehe ferner EA, EB sowie durch D DF $\parallel$ EC und durch F FG $\parallel$ AB, und ziehe AF.
Da hier AC = CE, ist auch $\angle$ EAC = AEC (I, 5). Und da der Winkel bei C ein Rechter ist, so sind die übrigen $\angle$ EAC + AEC = 1 R. (I, 32); dabei sind sie gleich; also ist jeder der beiden $\angle$ CEA, CAE = ½ R. Aus demselben Grunde ist auch jeder der beiden $\angle$ CEB, EBC = ½ R.; der ganze $\angle$ AEB ist also ein Rechter. Und da GEF = ½ R., EGF aber ein Rechter, weil dem innen gegenüberliegenden $\angle$ ECB gleich (I, 29), so ist der letzte $\angle$ EFG = ½ R. (I, 32); also ist $\angle$ GEF = EFG; folglich auch die Seite EG = GF (I, 6). Ebenso ist, da der Winkel bei B = ½ R. und FDB ein Rechter, weil wieder dem innen gegenüberliegenden $\angle$ ECB gleich, der letzte $\angle$ BFD = ½ R.; also ist der Winkel bei B = DFB; folglich auch Seite FD = Seite DB. Und da AC = CE, ist auch $AC^2 = CE^2$; also sind $AC^2 + CE^2 = 2\,AC^2$. Aber $AC^2 + CE^2 = EA^2$; denn $\angle$ ACE ist ein Rechter (I, 47); also ist $EA^2 = 2\,AC^2$.
Ebenso ist, da EG = GF, auch $EG^2 = GF^2$; also $EG^2 + GF^2 = 2\,GF^2$. Aber $EG^2 + GF^2 = EF^2$; also ist $EF^2 = 2\,GF^2$. Aber GF = CD (I, 34); also ist $EF^2 = 2\,CD^2$. Aber auch $EA^2 = 2\,AC^2$; also sind $AE^2 + EF^2 = 2\,(AC^2 + CD^2)$. Aber $AE^2 + EF^2 = AF^2$; denn $\angle$ AEF ist ein Rechter (I, 47); also ist $AF^2 = 2\,(AC^2 + CD^2)$. Aber $AF^2 = AD^2 + DF^2$; denn der Winkel bei D ist ein Rechter (I, 47); also sind $AD^2 + DF^2 = 2\,(AC^2 + CD^2)$. Aber DF = DB; also sind $AD^2 + DB^2 = 2\,(AC^2 + CD^2)$ - S. Moderne Schreibweise: $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2\,(a^2 + b^2)$



"Elemente" Buch II: § 10 (L. 10):

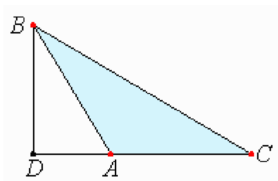
Halbiert man eine Strecke und setzt ihr irgendeine Strecke gerade an, so sind die Quadrate über den ganzen Strecke mit Verlängerung und über der Verlängerung beide zusammen doppelt so groß wie das Quadrat über der Hälfte und das über der Hälfte und Verlängerung vereint gezeichnete Quadrat zusammen.

Moderne Schreibweise: $x^2 + (x + 2\,b)^2 = 2\,(b^2 + (b + x)^2)$ und damit

$$[(2b + x)^2 - 2\,(b + x)^2] = -\,(x^2 - 2\,b^2)$$

Setzt man in diese Gleichung x : b = 1 : 1 ein, so ergibt (2 b + x) : (b + x) = 3 : 2.
Wiederholt man diesen Vorgang ergeben sich die Verhältnisse 7/5 , 17/12, 41/29, 99/70, ...
Diese Folge konvergiert gegen $\sqrt{2}$. Nach Proklos soll dieses Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung von $\sqrt{2}$ schon Pythagoras bekannt gewesen sein.

"Elemente" Buch II: § 12 (L. 11):



An jedem stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite größer als die Quadrate über den den stumpfen Winkel umfassenden Seiten zusammen um zweimal das Rechteck aus einer der Seiten um den stumpfen Winkel, nämlich der, auf die das Lot fällt, und der durch das Lot außen abgeschnittenen Strecke an der stumpfen Ecke.

ABC sei ein stumpfwinkliges Dreieck mit dem stumpfen Winkel BAC; und vom Punkte B sei auf die Verlängerung von CA das Lot BD gefällt. Ich behaupte, dass BC^2 um 2 CA * AD größer ist als $BA^2 + AC^2$. Da die Strecke CD im Punkte A beliebig geteilt ist, so ist $DC^2 = CA^2 + AD^2 + 2$ CA * AD (II, 4). Man füge DB^2 beiderseits hinzu; dann sind $CD^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2$ CA * AD. Aber $CD^2 + DB^2 = CB^2$; denn der Winkel bei D ist ein Rechter (I, 47); und $AD^2 + DB^2 = AB^2$ (I, 47); also ist $CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2$ CA * AD. Folglich ist CB^2 um 2 CA * AD größer als $CA^2 + AB^2$ - S.

"Elemente" Buch II: § 13 (L. 12):

An jedem spitzwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der einem spitzen Winkel gegenüberliegenden Seite kleiner als die Quadrate über den diesen spitzen Winkel umfassenden Seiten zusammen um zweimal das Rechteck aus einer der Seiten um diesen spitzen Winkel, nämlich der, auf die das Lot fällt, und der durch das Lot innen abgeschnittenen Strecke an dieser spitzen Ecke.

Mischungsrechnung, Konzentration einer Mischlösung

Die Grundaufgabe besteht darin zwei Substanzen A und B, deren Konzentration bekannt ist, so zu mischen, dass die entstehende Lösung M eine gewünschte Konzentration besitzt.
Das Programm ermittelt das Verhältnis, in welchem die Substanzen A und B gemischt werden müssen. Tragen Sie zur Rechnung die drei Konzentrationen ein und betätigen Sie den Schalter Berechnung.

Beispiel: 30 % Salzsäure soll durch Vermischung mit reinem Wasser auf eine Konzentration von 12 % reduziert werden. Eintragen der Werte 30, 0 und 12 in den Eingabezeilen ergibt ein Verhältnis: A : B = 12 : 18 = 2 : 3 , d.h. auf 2 Teile Salzsäure kommen 3 Teile Wasser.

Achtung beim Experimentieren!

Bei der Verdünnung von Säuren ist unbedingt darauf zu achten, dass niemals das Wasser in die Säure gegeben wird. Dabei kann es zu extremer Wärmeentwicklung kommen, welche die Ursache von sehr gefährlichen Verletzungen sein kann. Es ist stets die Säure vorsichtig in das Wasser zu gießen.

Mischungsrechnung - Aufgaben

Aufgabe 1

Ein Kaufmann will aus zwei Kaffeesorten eine Mischung von 100 kg zu 15 € je kg herstellen. Sorte I kostet 12 € je kg. Sorte II 17 € je kg. Wie viel kg muss er von jeder Sorte nehmen?
Lösung: x kg von I
12 x + (100 - x) 17 = 100*15 ... x = 40, d.h. I 40 kg, II 60 kg

Aufgabe 2

Es werden zwei Teesorten gemischt: Sorte I 30 kg zu 25 € je kg und Sorte II 60 kg zu 22 € je kg. Wie viel € kostet 1 kg der Mischung?
Lösung: x € je kg der Mischung
30*25 + 60*22 = 90 x ... x = 23, d.h. 23 € je kg

Aufgabe 3

Ein Kaufmann mischt 20 kg einer Sorte mit 40 kg einer zweiten Sorte. 1 kg der Sorte II kostet 3 € weniger als 1 kg der Sorte I. Wie viel € kostet 1 kg jeder Sorte, wenn der Mischungspreis 9 € beträgt?
Lösung: x € je kg von I → 20 x + 40 (x-3) = 60*9 ... x = 11, d.h. für I 11 € je kg, für II 8 € je kg

Aufgabe 4

Ein Feinkostgeschäft mischt 40 kg Rosinen mit Mandeln und Nüssen zu Studentenfutter. 1 kg Mandeln kostet 12 €, 1 kg Nüsse 10 €, 1 kg Rosinen 4 €. Die Mischung soll 9 € je kg kosten. Wie viel kg sind von den Mandeln und Nüssen zu nehmen, wenn von beiden Sorten gleich viel kg genommen werden?
Lösung: x kg Mandeln, x kg Nüsse
12 x + 10 x + 40*4 = (2x + 40) * 9 ... x = 50, d.h. je 50 kg Mandeln und Nüsse

Aufgabe 5

Es werden gemischt: 50 Liter 60%iger Alkohol, 60 Liter 75 %iger Alkohol und 10 Liter Wasser. Wie viel prozentig wird die Mischung?
Lösung: 50 * 60/100 + 60*75/100 + 10*0/100 = 120*x/100 → x = 62,5 %iger Alkohol

Aufgabe 6

Ein Kaufmann soll 75 Liter 60 %igen Alkohol liefern. Er hat nur 40 %igen und 70 %igen Alkohol vorrätig. Wie viel Liter muss er von jeder Sorte für die Mischung nehmen?
Lösung: x Liter von Sorte I, 75-x Liter von Sorte II
x*40/100 + (75-x)*70/100 = 75*60/100 ... x = 25 → 25 Liter der 1.Sorte und 50 Liter der 2.Sorte

Aufgabe 7

90 Liter einer 40 %igen Fruchtsaftlösung sollen durch Entzug von Wasser eine 60 %ige Lösung ergeben. Wie viel Liter Wasser sind durch Verdampfen zu entziehen?

Lösung   90*40/100 - x*0/100 = (90-x)*60/100 ... x = 30 Liter Wasser

Aufgabe 8

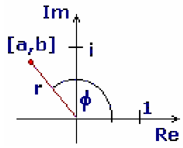
Aus zwei Sorten Messing (Legierung aus Zink und Kupfer) mit 60 % und 70 % Kupfergehalt sollen 150 kg Messing mit 64 % Kupfergehalt hergestellt werden. Wie viel kg sind von jeder Sorte zu nehmen?

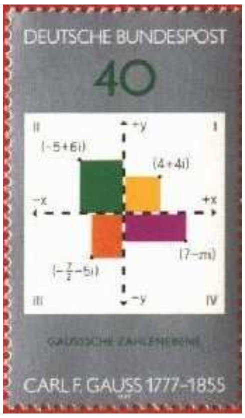
Lösung: x kg von Sorte I; 150-x kg von Sorte II

x*60/100 + (150-x)*70/100 = 150*64/100 ... x = 90 kg von Sorte I

Komplexe Zahlen

"Die abstrakte Mathematik von heute ist die Theoretische Physik von morgen und die Technik von übermorgen."





Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung des Zahlenbereichs der reellen Zahlen dar, welche man durch die Forderung nach uneingeschränkter Radizierung der reellen Zahlen; speziell der negativen; erhalten kann.
Eine komplexe Zahl z ist ein geordnetes Paar [a,b] reeller Zahlen.
a ... Realteil Re(z) (auch als maginärer Teil bezeichnet), b ... Imaginärteil Im(z)

imaginäre Einheit i mit $i^2 = -1$

Darstellungsformen

... untere Darstellung

geordnetes Paar $z = [a,b]$ linear $z = a + b * i$

trigonometrisch $z = r * (\cos \phi + i * \sin \phi)$

Exponentialform $z = r * e^{i\phi}$

Umrechnungsformeln

$a = r \cos \phi$; $b = r \sin \phi$ $r^2 = a^2 + b^2$

$\cos \phi = a/r$; $\sin \phi = b/r$

$| r |$ ... Betrag, ϕ ... Argument für $z = 0$ ist ϕ unbestimmt

Abbildung: Gaußsche Zahlenebene der komplexen Zahlen
Die Gaußsche Zahlenebene wird in den englischsprachigen Ländern auch Argand-Diagramm genannt.

Imaginäre Einheit

Als imaginäre Einheit wird eine Zahl i eingeführt, deren Quadrat -1 ist.
Die Einführung der imaginären Einheit führt zu einer Verallgemeinerung des Zahlbegriffs, zu den komplexen Zahlen, die in der Algebra und Analysis eine große Rolle spielen und in Geometrie und Physik eine Reihe konkreter Interpretationen bzw. neuer Beschreibungsmöglichkeiten ergaben.

i mit $i^2 = -1$

Zahlen der Form i y (y ... reell) heißen imaginäre Zahlen. Zahlen der Form x + i y (x,y ... reell) sind komplexe Zahlen. Für i gilt: $\sqrt{i} = \pm (i+1) / \sqrt{2}$ $i = e^{i\pi/2}$

$i^i = e^{-\pi/2} = 0.207879$ ... und ist damit reell !

In Physik und Technik wird j als Bezeichner für die imaginäre Einheit verwendet um Verwechslung mit der Stromstärke zu vermeiden.
Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung des Zahlenbereichs der reellen Zahlen dar, welche man durch die Forderung nach uneingeschränkter Radizierung der reellen Zahlen; speziell der negativen; erhalten kann.
Die Gaußsche Zahlenebene wird in den englischsprachigen Ländern auch Argand-Diagramm genannt.

Eulersche Formel

... beschreibt Zusammenhang zwischen trigonometrischer und exponentieller Darstellungsform komplexer Zahlen

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i * \sin \phi = e^{i(\phi+2k\pi)},\ k \in Z$$

Potenzen der imaginären Einheit

$i^{4k} = 1$ $i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$ $i^{4k+3} = -i,\ k \in Z$

Spezielle Werte

$e^{2i\pi} = 1$ $e^{i\pi} = -1$

$e^{i\pi/2} = i$ $e^{3i\pi/2} = -i$

Abgeschlossenheit

Der Bereich der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen, d.h. jede algebraische Gleichung mit komplexen Koeffizienten ist in ihm auflösbar.

Ordnungsrelation
Die Punkte einer Ebene lassen sich nicht hintereinander anordnen wie die reellen Zahlen, deshalb gibt es keine Ungleichungen in C, d.h. es ist sinnlos!

Gleichheit von komplexen Zahlen $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a=c) \wedge (b=d)$

Geschichte der komplexen Zahlen
1572 ... erste Begründung durch Raffaele Bombelli ; Weiterentwicklung durch: Johann Bernoulli, Leonhard Euler und Carl Friedrich Gauß

Herleitung der Eulerschen Formel
Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i * \sin x = e^{i(x + 2k\pi)}$, $k \in Z$

Aus der Taylor-Entwicklung von e^x $e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + ...$

unter Einsetzen des Arguments ix ergibt sich

$e^{ix} = 1 + ix/1! - x^2/2! - ix^3/3! + x^4/4! + - -... =$

$= 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + - ... + i(x/1! - x^3/3! + x^5/5! - ...)$ (*)

Die Potenzreihen der trigonometrischen Funktionen sin x und cos x sind

$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + - ... = x (1 -x^2/(2*3)) (1 -x^2/(4*5)) (1 -x^2/(6*7)) ...$

$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + - ... = 1 - x^2/(1*2) (1 -x^2/(3*4)) (1 -x^2/(5*6)) ...$

Vergleich mit der Gleichung (*) ergibt somit $e^{ix} = \cos x + i * \sin x$

Betrag einer komplexen Zahl, Modul einer komplexen Zahl
Die reelle Zahl $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ einer komplexen Zahl $z = a + bi$ wird Betrag oder Modul der komplexen Zahl genannt.

Für den Betrag gilt

$-|z| \leq Re(z) \leq |z|$ und $-|z| \leq Im(z) \leq |z|$

$|z| \leq 0$ für alle komplexen Zahlen z ; $|z| = 0$ gilt nur für $z = 0$

Konjugiert komplexe Zahl

$|z| = |-z| = |\bar{z}|$; $\bar{z}$ ... konjugiert komplex zu z $|z + 1| \geq 1/\sqrt{2}$ und $|1 + z^2| < 1$

$|z^n| = |z|^n$; n ganzzahlig $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

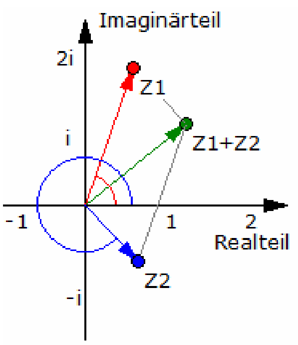
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$, wenn $z_2 \neq 0$

$|z^{-1}| = |z|^{-1}$, wenn $z \neq 0$ $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

Dreiecksungleichung

$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 (|z_1|^2 + |z_2|^2)$

In der Ungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ gilt das Gleichheitszeichen, wenn $Re(z_1\bar{z_2}) = |z_1||z_2|$, d.h. $z_1 = t \cdot z_2$, wobei t eine nichtnegative reelle Zahl ist. Wenn $|z_1| = |z_2| = 1$ und $z_1z_2 \neq -1$ sind, dann ist $(z_1 + z_2) / (1 + z_1z_2)$ reelle Zahl.



Rechenoperationen komplexer Zahlen
Addition
$z_1 \pm z_2 = [a_1 \pm a_2 , b_1 \pm b_2]$

Graphische Addition entspricht der Vektoraddition

Es gilt: $| z_1 + z_2 | \leq | z_1 | + | z_2 |$

Da komplexe Zahlen als zweidimensionale Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden können, führt das grafische Addieren von komplexen Zahlen auf eine Vektoraddition. An den Vektor $\vec{z_1}$ wird durch Parallelverschiebung der Vektor $\vec{z_2}$ angefügt. Der Summenvektor ist $\vec{z_1} + \vec{z_2}$.

Multiplikation
$z_1 * z_2 = [a_1a_2 - b_1b_2 , a_1b_2 + b_1a_2]$

Es gilt: $| z_1 * z_2 | = | z_1 | * | z_2 |$

Graphische Multiplikation

1. Addition der Winkel α und β 2. Ermittlung des Winkels ω in 1   3. Antragen von ω in z

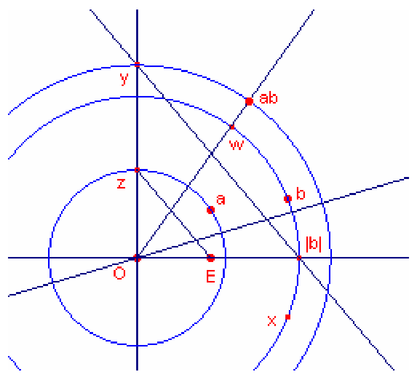
goniometrisch $= r_1r_2 [\cos(\phi_1+\phi_2) + i \sin(\phi_1+\phi_2)]$

exponentiell $= r_1r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$

Es gilt: $z^2 = a^2 + 2ab\, i - b^2$

$z^3 = a^3 + 3a^2b\, i - 3ab^2 - b^3 i$

$z^4 = a^4 + 4a^3b\, i - 6a^2b^2 - 4ab^3 i + b^4$



Konstruktion des Produktes komplexer Zahlen

... 2.Konstruktionsmöglichkeit

Gegeben: Komplexe Zahlen a, b, Einheit E = (1;0) Gesucht: Produkt a*b

Konstruktion:

1. Strecke OE zeichnen, Senkrechte zu OE in O zeichnen
2. Kreise um O mit Radius a (Kreis 1) und Radius b (Kreis 2) konstruieren
3. |b| ist der Schnittpunkt des Strahls OE mit dem Kreis 2
4. z ist der Schnittpunkt der Senkrechte in OE mit dem Kreis 1
5. Konstruktion der Parallelen zur Strecke Ez durch |b|
6. y ist der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Senkrechten
7. Kreis um O durch y zeichnen
8. Konstruktion der Winkelhalbierenden h des Winkels aOE
9. x ist der Spiegelpunkt von b an OE
10. w ist der Spiegelpunkt von x an der gezeichneten Winkelhalbierenden

Das gesuchte Produkt a*b ist dann der Schnittpunkt des Strahls Ow mit dem Radius durch y.
Diese Multiplikation entspricht einer Drehstreckung, d.h., die Längen der entsprechenden Vektoren werden multipliziert und die entsprechenden Winkel addiert.

Division komplexer Zahlen

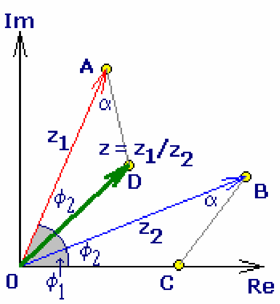
Gegeben $z_1 = [\ a_1\ ;\ a_2\ ]$ und $z_2 = [\ b_1\ ;\ b_2\ ]$

$$z_1 / z_2 = [\ (\ a_1a_2 + b_1b_2\ ) / (\ a_2^2 + b_2^2\ )\ ,\ (\ b_1a_2 - b_2a_1\ ) / (\ a_2^2 + b_2^2\ )\ ]$$

Für diese Art der Division wird der Bruch praktisch mit der konjugiert komplexen Zahl von z_2 erweitert.

goniometrisch $z_1 / z_2 = r_1/r_2\ [\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)]$

exponentiell $z_1 / z_2 = r_1/r_2\ e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$



Grafische Division komplexer Zahlen

Aus $z_1 / z_2 = r_1 / r_2\ e^{i(\phi_1 - \phi_2)}1 = z = r\ e^{i\phi}$ ergibt sich für den Winkel $\phi = \phi_1 - \phi_2$ und für den Modul $r = r_1 / r_2$. Die letzte Gleichung lässt sich umformen in $r : r_1 = 1 : r_2$.

Konstruktion:

1.Schritt: Zeichnen der den komplexen Zahlen entsprechenden Vektoren OA und OB.

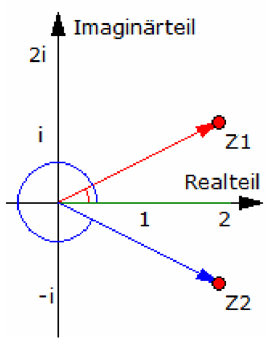
2.Schritt: Antragen des Winkel ϕ_2 an den Vektor OA im negativen Sinne gemäß $\phi = \phi_1 - \phi_2$

3.Schritt: Von O aus auf der reellen Achse die Strecke 1 abtragen (Punkt C)

4.Schritt: Verbinden von B und C

5.Schritt: Antragen des Winkels OBC = α an die Strecke OA im Punkt A.

Der Schnittpunkt D seines freien Schenkels mit dem freien Schenkel des angetragenen Winkels ϕ_2 bestimmt den Vektor des Ergebnisses.



Konjugiert komplexe Zahlen

z_2=a-bi ist zu z_1=a+bi konjugiert komplex und es gilt

$z_1 + z_2 = 2a$ $z_1 - z_2 = 2b\ i$

Die komplexe Zahl wird in der Gaußschen Zahlenebene an der reellen Achse gespiegelt. In der Abbildung sind die komplexen Zahlen z_1 und z_2 zueinander konjugiert komplex.

Norm einer komplexen Zahl

$z_1 * z_2 = a^2+b^2$ (Norm) $1/z_1 = z_2/|z_1|^2$

Schreibweise: $z_2 = \overline{z_1}$

Für komplexe Zahlen gilt auch der Satz von Vieta:

$z^2 + pz + q = 0\ ;\ p,q \in C$

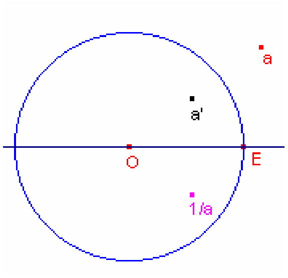
Für die komplexen Lösungen z_1, z_2 gilt dann

$z_1 + z_2 = -p$ $z_1 * z_2 = q$

$z^2 + pz + q = (z - z_1)\ (z - z_2)$

Für vier beliebige komplexe Zahlen a, b, c, d gilt $(a - b)(c - d) + (a - d)(b - c) = (a - c)(b - d)$

Reziprokes einer komplexen Zahl

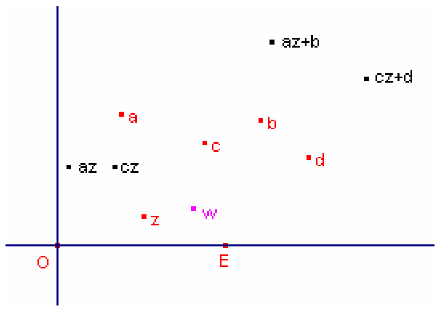


Konstruktion des Reziproken einer komplexen Zahl.
1. Konstruktion eines Einheitskreises um den Koordinatenursprung. Der Schnittpunkt mit der reellen Achse sei E.
2. Konstruktion des inversen von a bezüglich des Kreises (Kreisinversion)
3. Spiegeln des Punktes a' an der reellen Achse
Rechnerisch ergibt sich: $1/z = 1/r\, [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$
Der Wert von a' entspricht dem Reziproken der zu a konjugiert komplexen Zahl.

Quotient komplexer Zahlen

Zur grafischen Konstruktion des Quotienten Z1/Z2 zweier komplexer Zahlen wird zuerst mit dem obigen Verfahren das Reziproke 1/Z2 konstruiert. Mit der Konstruktion des komplexen Produktes wird anschließend Z1 * 1/Z2 erzeugt.

Möbius-Transformierte



Unter der Möbius-Transformatierten einer komplexen Zahl z versteht man den Ausdruck
$w = f(z) = (az + b)/(cz + d)$,
wobei a, b, c und d selbst komplexe Zahlen darstellen und $ad\text{-}bc \neq 0$ sein muss.
Mit Hilfe der konstruktiven Verfahren zur Ermittlung des Produktes (Produkt komplexer Zahlen, Konstruktion), des Quotienten (Quotient komplexer Zahlen) und der Summe der komplexen Zahlen, kann auch die Möbius-Transformierte konstruiert werden.

Abfolge:
1. Produkt von a z 2. Summe az+b
3. Produkt cz 4. Summe cz+d
5. Quotient aus den beiden Summen az+b und cz+d

Abbildung: Menge (blau) der Möbius-Transformierten der auf dem Rechteck liegenden komplexen Zahlen der Gaußschen Zahlenebene

Multiplikation und Division komplexer Zahlen mit Hilfe von Polarkoordinaten

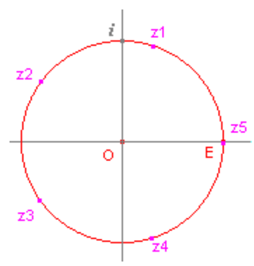
geg.: Komplexe Zahlen $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$; $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

Multiplikation

$z_1 * z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)\, r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$
$= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2\, i + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2\, i) =$
$= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)] =$
$= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1+\varphi_2) + i \sin (\varphi_1+\varphi_2)]$
$z_1 * z_2 = (r_1; \varphi_1)\, (r_2; \varphi_2) = (r_1*r_2; \varphi_1+\varphi_2)$
Beim Multiplizieren von komplexen Zahlen werden die Radien multipliziert und die Winkel addiert.

Division

$z_1/z_2 = [r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] / [r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] =$
$= [r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)] / [r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)] = = [r_1 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)] / [r_2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)] = [r_1 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]] / [r_2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)] = r_1/r_2 [\cos (\varphi_1-\varphi_2) + i \sin (\varphi_1-\varphi_2)]$
$z_1/z_2 = (r_1; \varphi_1)/(r_2; \varphi_2) = (r_1/r_2; \varphi_1-\varphi_2)$
Beim Dividieren von komplexen Zahlen werden die Radien dividiert und die Winkel subtrahiert.



Moivresche Formel

... beschreibt die Potenz einer komplexen Zahl

$$z^n = r^n * [\cos (n\phi) + i * \sin (n\phi)] = r^n e^{in\phi}$$

da n nichtganzzahlig sein muss, existiert damit eine Möglichkeit des Radizierens einer komplexen Zahl

$\sqrt{z} = \sqrt{r} * [\cos(\phi/2) + i * \sin(\phi/2)] = \sqrt{r}\, e^{i\phi/2}$
$\sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot [\cos(\phi/2) + i \cdot \sin(\phi/2)] = \sqrt{r}\, e^{i\phi/2}$
$\sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot [\cos(\phi/2+\pi) + i \cdot \sin(\phi/2+\pi/2)] = \sqrt{r}\, e^{i(\phi/2+\pi/2)}$
$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r} \cdot [\cos(\phi/3) + i \cdot \sin(\phi/3)] = \sqrt[3]{r}\, e^{i\phi/3}$
$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r} \cdot [\cos(\phi/3+\pi/3) + i \cdot \sin(\phi/3+\pi/3)] = \sqrt[3]{r}\, e^{i(\phi/3+\pi/3)}$
$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r} \cdot [\cos(\phi/3+2\pi/3) + i \cdot \sin(\phi/3+2\pi/3)] = \sqrt[3]{r}\, e^{i(\phi/3+2\pi/3)}$
$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{r} \cdot [\cos(\phi/4) + i \cdot \sin(\phi/4)] = \sqrt[4]{r}\, e^{i\phi/4}$
$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{r} \cdot [\cos(\phi/4+\pi/4) + i \cdot \sin(\phi/4+\pi/4)] = \sqrt[4]{r}\, e^{i(\phi/4+\pi/4)}$
$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{r} \cdot [\cos(\phi/4+2\pi/4) + i \cdot \sin(\phi/4+2\pi/4)] = \sqrt[4]{r}\, e^{i(\phi/4+2\pi/4)}$
$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{r} \cdot [\cos(\phi/4+3\pi/4) + i \cdot \sin(\phi/4+3\pi/4)] = \sqrt[4]{r}\, e^{i(\phi/4+3\pi/4)}$

und allgemein

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot [\cos(\phi/n + k\pi/n) + i \cdot \sin(\phi/2 + k\pi/n)] = \sqrt{r}\, e^{i(\phi/2}+k\pi/n)$

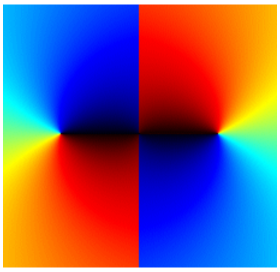
mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Einheitswurzel

$\sqrt[n]{1} = \cos((2\pi k)/n) + i \sin((2\pi k)/n) = e^{(2\pi k)/n\ i}$

Die Einheitswurzeln können mittels Grundkonstruktionen grafisch erzeugt werden. Für $z^5 = 1$ wird zum Beispiel als Konstruktion:

z = z1	z2 = CQuadrat(z1, O, E)	z3 = CProduct(z1, z2, O, E)
	z4 = CQuadrat(z2, O, E)	z5 = CProduct(z2, z3, O, E)



Natürlicher komplexer Logarithmus

$z = {}_1\int^z dt/t = r\, e^{i\phi},\ z\neq 0 \Rightarrow \ln z = \ln[r(\cos\phi + i \sin\phi)] = \ln r + i(\phi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

Der Logarithmus ist periodisch. ln r wird der Hauptzweig genannt.
Für den komplexen Logarithmus gelten die im Reellen gültigen Operationsgesetze analog.
Die Abbildung zeigt einen Phasenplot von f(z) = ln z.
Reihenentwicklungen:

$\ln(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 -+ \ldots;\ |z| \leq 1,\ z \neq 1$
$\ln z = (z-1)/z + 1/2\,(z-1)^2/z^2 + 1/3\,(z-1)^3/z^3 + \ldots;\ \mathrm{Re}(z) \geq 1/2$
$\ln z = (z-1) - 1/2\,(z-1)^2 + 1/3\,(z-1)^3 -+ \ldots;\ |z-1| \leq 1,\ z \neq 0$
$\ln z = 2(z-1)/(z+1) + 2/3\,(z-1)^3/(z+1)^3 + 2/5\,(z-1)^5/(z+1)^5 + \ldots;\ \mathrm{Re}(z) > 0$

Übungen zu komplexen Zahlen

1. Berechne die Summe $z_1 + z_2$ und die Differenz $z_1 - z_2$:

		Lösungen
a.	$z_1 = 7 + i,\ z_2 = 1 + 3i$	8 + 4i; 6 - 2i
b.	$z_1 = 4 + 3i,\ z_2 = 1 - 2i$	5 + i; 3 + 5i
c.	$z_1 = 7 - 4i,\ z_2 = 3 + 2i$	10 - 2i; 4 - 6i

2. Berechne das Produkt $z_1 \cdot z_2$:

a.	$z_1 = 5 - 7i,\ z_2 = -2 + 4i$	18 + 34i
b.	$z_1 = -3 + 5i,\ z_2 = -2 - 2i$	16 - 4i
c.	$z_1 = 1{,}5i,\ z_2 = 0{,}6 + 0{,}8i$	-1,2 + 0,9i

3. Berechne den Quotienten z_1/z_2:

a.	$z_1 = 5 - 7i,\ z_2 = -2 + 4i$	-1,9 - 0,3i
b.	$z_1 = -3 + 5i,\ z_2 = -2 - 2i$	-0,5 - 2i
c.	$z_1 = 1{,}5i,\ z_2 = 0{,}6 + 0{,}8i$	1,2 + 0,9i

4. Berechne mit Hilfe der Binomischen Formeln:

a.	$(3 + i)^2$	8 + 6i
b.	$(-1 + 5i)^2$	-24 - 10i
c.	$(2 + i)^3$	-24 - 10i

5. Löse die folgenden Gleichungen über der Grundmenge C:

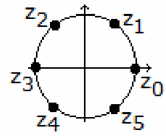
a.	$x^2 + 16 = 0$	{±4i}
b.	$5x^2 - 12x + 20 = 0$	{1,2 ± 1,6i}
c.	$x^3 - 1 = 0$	{1, -0,5 ± 0,866i}
d.	$x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$	{2, 1 ± 2i}

6. Schreibe in Polarform:

a.	4 + 3i ;	Lösung (5; 36,87°)
b.	-5 + 12i ;	Lösung (13; 112,62°)
c.	-2 - 2i ;	Lösung (2,828; 225°)

7. Schreibe in Komponentenform (a + bi):

a.	(3; 90°) ;	Lösung 3i
b.	(5; 180°) ;	Lösung -5
c.	(4; 135°) ;	Lösung -2,828 + 2,828i



Komplexe Einheitswurzel, Einheitswurzel

Abbildungsbeispiel: $\sqrt[6]{z}$ mit Betrag … 1 und Winkel … k · 60°

Die Lösungen, Wurzeln der komplexen Gleichung $z^n + 1 = 0$ werden n.te Einheitswurzeln odr Moivre-Zahlen n-ter Ordnung genannt. Ausgehend von der Formel von Moivre wird

$\sqrt[n]{1} = \cos((2\pi k)/n) + i \sin((2\pi k)/n) = e^{(2\pi k)/n\ i}$ mit k = 0, 1, …, n-1

Dabei wird

$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

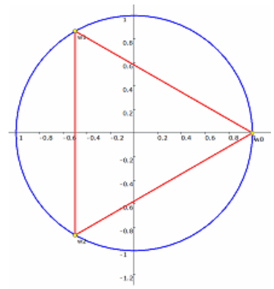
$\varepsilon_1 = \cos 2\pi/n + i \sin 2\pi/n = \varepsilon$

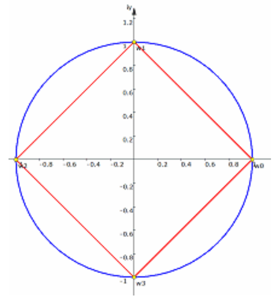
$\varepsilon_2 = \cos 4\pi/n + i \sin 4\pi/n = \varepsilon^2$ …

$\varepsilon_{n-1} = \cos 2(n-1)\pi/n + i \sin 2(n-1)\pi/n = \varepsilon^{n-1}$

Die Menge $U_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, …, \varepsilon^{n-1}\}$ der komplexen Einheitswurzeln kann von der Einheitswurzel ε erzeugt werden.

Die zu den n.ten Einheitswurzeln gehörenden Punkte in der komplexen Ebene bilden ein regelmäßiges N-Eck, das in den Einheitskreis eingeschrieben ist. Eine Ecke des N-Ecks liegt bei 1.





Quadratische Einheitswurzeln

Ausgehend von der Wurzelformel komplexer Zahlen

$\sqrt[n]{1} = \cos((2\pi k)/n) + i \sin((2\pi k)/n) = e^{(2\pi k)/n\ i}$ mit k = 0, 1, …, n-1

ergeben sich für die Gleichungen $z^n + 1 = 0$ mit n = 2, 3, 4, 5 die Lösungen:

$z^2 - 1 = 0$

quadratische Einheitswurzeln: 1 und -1

$z^3 - 1 = 0$

kubische Einheitswurzeln: $\varepsilon_0 = 1$ (obere Abbildung)

$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3) = -1/2 + i/2\ \sqrt{3} = \varepsilon$

$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3) = -1/2 - i/2\ \sqrt{3} = \varepsilon^2$

$z^4 - 1 = 0$

Einheitswurzeln 4.Grades: $\varepsilon_0 = 1$ (untere Abbildung)

$\varepsilon_1 = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i = \varepsilon$ $\quad$ $\varepsilon_2 = -1 = \varepsilon^2$ und $\varepsilon_3 = -i = \varepsilon^3$

$z^5 - 1 = 0$

Einheitswurzeln 5.Grades: $\varepsilon_0 = 1$

$\varepsilon_1 = 1/4\ (\sqrt{5} - 1) + i \sqrt{(5 + \sqrt{5})/8} = \varepsilon$ $\quad$ $\varepsilon_2 = 1/4\ (-\sqrt{5} - 1) + i \sqrt{(5 + \sqrt{5})/8} = \varepsilon^2$

$\varepsilon_3 = 1/4\ (-\sqrt{5} - 1) - i \sqrt{(5 + \sqrt{5})/8} = \varepsilon^3$ $\quad$ $\varepsilon_4 = 1/4\ (\sqrt{5} - 1) - i \sqrt{(5 + \sqrt{5})/8} = \varepsilon^4$

$z^6 - 1 = 0$

Einheitswurzeln 6.Grades: $\varepsilon_0 = 1$

$\varepsilon_1 = 1/2 + i \sqrt{3} / 2 = \varepsilon$ $\quad$ $\varepsilon_2 = -1/2 + i \sqrt{3} / 2 = \varepsilon^2$

$\varepsilon_3 = -1 = \varepsilon^3$ $\quad$ $\varepsilon_4 = -1/2 - i \sqrt{3} / 2 = \varepsilon^4$

$\varepsilon_5 = 1/2 - i \sqrt{3} / 2 = \varepsilon^5$

$z^8 - 1 = 0$

Einheitswurzeln 8.Grades: $\varepsilon_0 = 1$

$\varepsilon_1 = \sqrt{2} / 2 + i \sqrt{2} / 2 = \varepsilon$ $\quad$ $\varepsilon_2 = i = \varepsilon^2$

$\varepsilon_3 = -\sqrt{2} / 2 + i \sqrt{2} / 2 = \varepsilon^3$ $\quad$ $\varepsilon_4 = -1 = \varepsilon^4$

$\varepsilon_5 = -\sqrt{2} / 2 - i \sqrt{2} / 2 = \varepsilon^5$ $\quad$ $\varepsilon_6 = -i = \varepsilon^6$

$\varepsilon_7 = \sqrt{2} / 2 - i \sqrt{2} / 2 = \varepsilon^7$

Primitive Einheitswurzel

n.te Einheitswurzeln ε_k werden primitive Einheitswurzeln n.ten Grades genannt, wenn für alle natürlichen $m < n$ die Beziehung $\varepsilon_k^m \neq 1$ gilt, d.h. die Wurzel ε_k bei keinem Polynom kleineren Grades als n schon einmal auftritt.
Die primitiven Einheitswurzeln von $z^m - 1 = 0$
sind die $\varepsilon_k = \cos 2k\pi/m + i \sin 2k\pi/m$
mit $0 \leq k \leq m$ und $ggT(k,m) = 1$.

Weiterhin gilt: 1) Wenn q Teiler von n ist, so ist jede Einheitswurzel von $z^n - 1 = 0$ auch Einheitswurzel von $z^q - 1 = 0$.
2) Die gemeinsamen Einheitswurzeln von $z^m - 1 = 0$ und $z^n - 1 = 0$ sind die Wurzeln von $z^d - 1 = 0$, wobei d der größte gemeinsame Teiler von m und n ist.
3) Die Gleichungen $z^m - 1 = 0$ und $z^n - 1 = 0$ haben nur dann nur die 1 als gemeinsame Wurzel, wenn m und n teilerfremd sind.

Kreisteilungspolynom, zyklotomisches Polynom

Die primitiven Einheitswurzeln des Polynoms $z^m - 1 = 0$
sind die $\varepsilon_k = \cos 2k\pi/m + i \sin 2k\pi/m$ mit $0 \leq k \leq m$ und $ggT(k,m) = 1$
Unter dem n-ten Kreisteilungspolynom bzw. dem n-ten zyklotomischen Polynom versteht man dann

$$\phi_n(x) = \Pi\ (x - \varepsilon_n^k)$$

wobei das Produkt über $1 \leq k \leq n-1$ und $ggT(k,n) = 1$ gebildet wird.

Der Grad des Kreisteilungspolynoms $\phi_n(x)$ ist gleich der Eulerschen Funktion von n, d.h. gleich der Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen unterhalb n. Das Polynom ist über den rationalen Zahlen irreduzibel. Es gilt

für ungerade $q > 1$ ist $\phi_{2q}(x) = \phi_q(-x)$

wenn $n > 1$, so ist $\phi_n(1) = p$, wenn n Potenz einer Primzahl p ist, andernfalls gleich 1

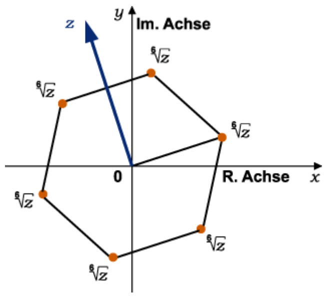
Die Bezeichnung Kreisteilungspolynom stammt vom geometrischen Problem der Kreisteilung, d.h. der Konstruktion eines regelmäßigen Vielecks mit Zirkel und Lineal.
Die ersten Kreisteilungspolynome sind

$\phi_1(z) = z-1$ $\qquad$ $\phi_2(z) = (z^2-1)/(z-1) = z+1$
$\phi_3(z) = (z^3-1)/(z-1) = z^2+z+1$ $\qquad$ $\phi_4(z) = (z^4-1)/(z^2-1) = z^2+1$
$\phi_5(z) = (z^5-1)/(z-1) = z^4+z^3+z^2+z+1$
$\phi_6(z) = (z^6-1)/((z^3-1)\cdot(z^2-1)-1\cdot(z-1)) = z^2-z+1$
$\phi_7(z) = (z^7-1)/(z-1) = z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$ $\qquad$ $\phi_8(z) = z^4+1$
$\phi_9(z) = z^6+z^3+1$ $\qquad$ $\phi_{10}(z) = z^4-z^3+z^2-z+1$
$\phi_{11}(z) = z^{10}+z^9+\ldots+z^3+z^2+z+1$ $\qquad$ $\phi_{12}(z) = z^4-z^2+1$

Potenzen einer komplexen Zahl

Für die Potenz $(a + bi)^n$ ergibt sich

N	Zahl
2	$a^2-b^2 + 2*i*a*b$
3	$a*(a^2-3*b^2) + i*b*(3*a^2-b^2)$
4	$a^4-6*a^2*b^2+b^4 + 4*i*a*b*(a^2-b^2)$
5	$a*(a^4-10*a^2*b^2+5*b^4) + i*b*(5*a^4-10*a^2*b^2+b^4)$
6	$(a^2-b^2)*(a^4-14*a^2*b^2+b^4) + 2*i*a*b*(3*a^4-10*a^2*b^2+3*b^4)$
7	$a*(a^6-21*a^4*b^2+35*a^2*b^4-7*b^6) + i*b*(7*a^6-35*a^4*b^2+21*a^2*b^4-b^6)$
8	$a^8-28*a^6*b^2+70*a^4*b^4-28*a^2*b^6+b^8 + 8*i*a*b*(a^2-b^2)*(a^4-6*a^2*b^2+b^4)$
9	$a*(a^8-36*a^6*b^2+126*a^4*b^4-84*a^2*b^6+9*b^8) + i*b*(9*a^8-84*a^6*b^2+126*a^4*b^4-36*a^2*b^6+b^8)$
10	$(a^2-b^2)*(a^8-44*a^6*b^2+166*a^4*b^4-44*a^2*b^6+b^8) + 2*i*a*b*(5*a^8-60*a^6*b^2+126*a^4*b^4-60*a^2*b^6+5*b^8)$
11	$a\cdot(a^{10}-55\cdot a^8b^2+330\cdot a^6\cdot b^4-462\cdot a^4\cdot b^6+165\cdot a^2\cdot b^8-11\cdot b^{10}) + i\cdot b\cdot(11\cdot a^{10}-165\cdot a^8b^2+462\cdot a^6\cdot b^4-330\cdot a^4\cdot b^6+55\cdot a^2\cdot b^8-b^{10})$



Wurzelziehen (Radizieren) von komplexen Zahlen

Radizieren oder Ziehen der n-ten Wurzel aus einer komplexen Zahl ist eine zum Potenzieren inverse Operation.

Definition: $\zeta \in C$ heißt n-te Wurzel aus $z \in C$, wenn $\zeta^n = z$ ist
Schreibweise: $\zeta = \sqrt[n]{z}$ mit $n \in N$, $n \neq 1$
Während Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzieren mit ganzzahligen Exponenten zu eindeutigen Ergebnissen führen, liefert das Ziehen der n-ten Wurzel stets n verschiedene Lösungen ω_k.
Geometrisch interpretiert sind die Punkte ω_k die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. In der Abbildung sind die 6 Werte für $\sqrt[6]{z}$ dargestellt.

Radizieren mit Binomialform

$\sqrt{(2i)} = a+bi \quad | ^2$
$2i = a^2 + 2abi - b^2 \qquad 0 + 2i = (a^2-b^2) + 2abi$ .... Koeffizientenvergleich
$0 = a^2-b^2 \qquad \rightarrow \qquad 2 = 2ab \Rightarrow a = 1/b$
$0 = 1/b^2 - b^2 \quad | *b^2 \qquad \rightarrow \qquad 1-b^4 = 0$
$b^4 = 1 \Rightarrow b^2 = +/(-)\ 1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \qquad \rightarrow$
$b1=1$, $a1=1$ und $b2=-1$, $a2=-1$
d.h. $\sqrt{(2i)} = 1+i$ bzw. $= -1-i$

Radizieren mit Polarkoordinaten

$\zeta 1 = \sqrt{(2i)} = \sqrt{[(2;90°)]} = (\sqrt{2};90°/2) = (\sqrt{2};45°) = 1+i$
$\zeta 2 = (\sqrt{2};(360°+90°)/2) = (\sqrt{2};450°/2) = (\sqrt{2};225°) = -1-i$
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{[(r;\varphi)]} = (\sqrt[n]{r}\ ;\ (\varphi+0*360°)/n)$ .... 1. Nebenwert
$= (\sqrt[n]{r}\ ;\ (\varphi+1*360°)/n)$ .... 2. Nebenwert
$= (\sqrt[n]{r}\ ;\ (\varphi+2*360°)/n)$ .... 3. Nebenwert
$= (\sqrt[n]{r}\ ;\ (\varphi+(n-1)*360°)/n)$ .... n. Nebenwert
$= (\sqrt[n]{r}\ ;\ (\varphi+(k-1)*360°)/n) \quad k=1,2,3,\ldots,n$
Eine Wurzel aus einer komplexen Zahl ist wieder eine komplexe Zahl.

Beispiel zum Wurzelziehen komplexer Zahlen

Berechne $\sqrt{(-1/2 - i\sqrt{3}/2)}$ auf zwei Arten (mit, ohne Polarkoordinaten) und zeige, dass eine Lösung eine dritte Einheitswurzel ist.

$\sqrt{(-1/2 - i\sqrt{3}/2)} = a + bi \quad |^2 \qquad \rightarrow \qquad -1/2 - i\sqrt{3}/2 = a^2 + 2abi - b^2$
$-1/2 = a^2 - b^2 \qquad \rightarrow \qquad -\sqrt{3}/2 = 2ab \Rightarrow a = -\sqrt{3}/(4b)$
$-1/2 = 3/(16b^2) - b^2 \quad | *16b^2 \qquad \rightarrow \qquad -8b^2 = 3 - 16b4$
$16b4 - 8b^2 - 3 = 0$ Substitution $b^2 = u \qquad \rightarrow \qquad 16u^2 - 8u - 3 = 0$
$u_{1,2} = (8 \pm \sqrt{(64 + 192)})/32 = (8 \pm \sqrt{(256)})/32 = (8 \pm 16)/32$
$u_1 = 24/32 = 3/4$ und $u_2 = -8/32 = -1/4$
$b^2 = 3/4 \Rightarrow b_{1,2} = \pm \sqrt{3}/2 \qquad \rightarrow \qquad b^2 = -1/4 \Rightarrow b_{3,4} = \pm i/2 \notin R$
$a_{1,2} = \pm \sqrt{3}/(2\sqrt{3}) = \pm 1/2$
$L = \{-1/2 + \sqrt{3}/2\, i\ ;\ 1/2 - \sqrt{3}/2\, i\}$

$r = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(1/4 + 3/4)} = \sqrt{1} = 1$
$\varphi = \arctan(b/a) = \arctan((-\sqrt{3}/2)/(-1/2)) = \arctan\sqrt{3} = 240°$
$\sqrt{(-1/2 - i\sqrt{3}/2)} = \sqrt{[(1;240°)]} = (\sqrt{1};\ 240°/2) = (1;120°) = -1/2 + \sqrt{3}/2\, i$
$\sqrt{[(1;240°)]} = (\sqrt{1};\ (240°+360°)/2) = (\sqrt{1};\ 600°/2) = (1;300°) = 1/2 - \sqrt{3}/2\, i$
$L = \{-1/2 + \sqrt{3}/2\, i\ ;\ 1/2 - \sqrt{3}/2\, i\}$
$z^3 - 1 = 0 = (z - 1)(z^2 + z + 1) \qquad \rightarrow \qquad z_1 = 1$
$z^2 + z + 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad z_{2,3} = -1/2 \pm \sqrt{(1/4 - 1)} = -1/2 \pm \sqrt{(-3/4)} = -1/2 \pm \sqrt{3}/2\, i$
$z_2 = -1/2 + \sqrt{3}/2\, i \qquad \rightarrow \qquad z_3 = -1/2 - \sqrt{3}/2\, i$

Funktionen komplexer Zahlen

Exponential- und Logarithmusfunktion

$e^{x+iy} = e^x * \cos x + i\, e^x * \sin y = (\cosh x + \sinh x) * (\cos y + i \sin y)$
$\log(x+iy) = 1/2\ [\log(x^2 + y^2) + i \arctan(y/x)]$
$\ln(x+iy) = 1/2 \ln(x^2+y^2) + i* [\arctan(y/x) + 2k\pi]$
$z^z = e^{z * \log z}$

Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Der Sinus, Kosinus, hypoerbolischer Sinus und Kosinus im Komplexen sind definiert durch die der reellen Funktion analogen Potenzreihenentwicklung:

Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

$\sin(x+iy) = \sin x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y$
$\sin(z) = 1/(2i) (e^{iz} - e^{-iz})$
$\cos(x+iy) = \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y$
$\cos(z) = 1/2 (e^{iz} + e^{-iz})$
$\tan(x+iy) = \sin 2x / (\cos 2x + \cosh 2y) + i \sinh 2y / (\cos 2x + \cosh 2y)$
$\cot(x+iy) = (\sin 2x - i \cdot \sinh 2y) / (\cosh 2y - \cos 2x)$
$\sinh(x+iy) = \sinh x \cdot \cos y + i \cosh x \sin y$
$\sinh(z) = 1/2 (e^{z} - e^{-z})$
$\cosh(x+iy) = \cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \sin y$
$\tanh(x+iy) = \sinh 2x / (\cosh 2x + \cos 2y) + i \sin 2y / (\cosh 2x + \cos 2y)$
$\coth(x+iy) = (\sinh 2x - i \cdot \sin 2y) / (\cosh 2x - \cos 2y)$
$|\sin z| = \sqrt{(\sin^2 x + \sinh^2 y)} = \sqrt{(1/2 (\cosh 2y - \cos 2x))}$
$|\cos z| = \sqrt{(\cos^2 x + \sinh^2 y)} = \sqrt{(1/2 (\cosh 2y + \cos 2x))}$
$|\tan z| = \sqrt{((\cosh 2y - \cos 2x) / (\cosh 2y + \cos 2x))}$

Die Periode von Sinus und Kosinus ist 2π. Die Nullstellen liegen wie im Reellen, durch die Fortsetzung ins Komplexe kommen keine weiteren Nullstellen dazu. Die Periode des hyperbolischen Sinus und Kosinus ist $2\pi i$. Die Nullstellen liegen bei

sinh z: $0, \pm i\pi, \pm 2i\pi, \pm 3i\pi, \ldots$ cosh z: $\pm i\, \pi/2, \pm 3i\, \pi/2, \pm 5i\, \pi/2, \ldots$

Die Periode des hyperbolischen Tangens und Kotangens ist πi. Inverse trigonometrische Funktionen und inverse hyperbolische Funktionen im Komplexen werden analog zum Reellen definiert.

Additionstheoreme

Für komplexe Zahlen z, u, z_1, z_2 gelten die Beziehungen

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ $\tan z = \sin z / \cos z$
$\sec^2 z + \tan^2 z = 1$ $\csc^2 z - \cot^2 z = 1$
$\sin (-z) = - \sin z$ $\cos (-z) = \cos z$ $\tan (-z) = - \tan z$
$\sin z/2 = \pm \sqrt{((1 - \cos z)/2)}$ $\cos z/2 = \pm \sqrt{((1 + \cos z)/2)}$
$\tan z/2 = \pm \sqrt{((1 - \cos z)/(1 + \cos z))} = (1 - \cos z) / \sin z = \sin z / (1 + \cos z)$
$\sin (z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
$\cos (z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
$\tan (z_1+z_2) = (\tan z_1 + \tan z_2) / (1 - \tan z_1 \tan z_2)$
$\cot (z_1+z_2) = (\cot z_1 \cot z_2 - 1) / (\cot z_1 + \cot z_2)$
$\sin 2z = 2 \sin z \cos z = 2 \tan z / (1 + \tan^2 z)$
$\cos 2z = 2 \cos^2 z - 1 = 1 - 2 \sin^2 z = \cos^2 z - \sin^2 z = (1 - \tan^2 z) / (1 + \tan^2 z)$
$\tan 2z = 2 \tan z / (1 - \tan^2 z) = 2 \cot z / (\cot^2 z - 1) = 2 / (\cot z - \tan z)$
$\sin 3z = 3 \sin z - 4 \sin^3 z$ $\cos 3z = -3 \cos z + 4 \cos^3 z$
$\sin 4z = 8 \cos^3 z \sin z - 4 \cos z \sin z$ $\cos 4z = 8 \cos^4 z - 8 \cos^2 z + 1$
$\sin z_1 + \sin z_2 = 2 \sin (z_1 + z_2)/2 \cos (z_1 - z_2)/2$
$\sin z_1 - \sin z_2 = 2 \cos (z_1 + z_2)/2 \sin (z_1 - z_2)/2$
$\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos (z_1 + z_2)/2 \cos (z_1 - z_2)/2$
$\cos z_1 - \cos z_2 = -2 \sin (z_1 + z_2)/2 \sin (z_1 - z_2)/2$
$\tan z_1 \pm \tan z_2 = \sin (z_1 \pm z_2)/ (\cos z_1 \cos z_2)$

Wenn $\tan u/2 = z$ ist, so gilt

$\sin u = 2z / (1 + z^2)$; $\cos u = (1 - z^2) / (1 + z^2)$; $du = 2 / (1 + z^2)\, dz$

Funktionswerte für das Argument x = i

Funktion	sin(i)	cos(i)	tan(i)	sinh(i)	ln(i)
Funktionswert	$(e/2 - e^{-1}/2)\, i$	$e/2 + e^{-1}/2)$	$(e^2-1)/(e^2+1)\, i$	$\sin(1)\, i$	$\pi/2\, i$

Logarithmus komplexer Zahlen

Positive imaginäre Zahl b*i (a = 0, b > 0) $\ln (b*i) = \ln b + i (\pi/2 + 2 k \pi)$; $k \in G$

Logarithmen positiver imaginärer Zahlen sind komplexe Zahlen.

Negative imaginäre Zahl -b*i (a = 0, b > 0) $\ln (-b*i) = \ln b + i (3\pi/2 + 2 k \pi)$; $k \in G$

Positive reelle Zahl a (a > 0 , b = 0) ln (a) = ln a + 2 k π i ; k ∈ G
Negative reelle Zahl -a (a > 0 , b = 0) ln (-a) = ln a + (π + 2 k π) i ; k ∈ G
Sonderfälle:
ln 1 = 2 k π i ln (-1) = (π + 2 k π) i ln i = (π/2 + 2 k π) i ln (-i) = (3π/2 + 2 k π) i

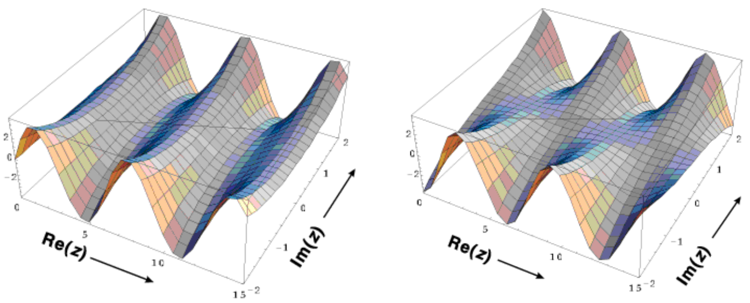
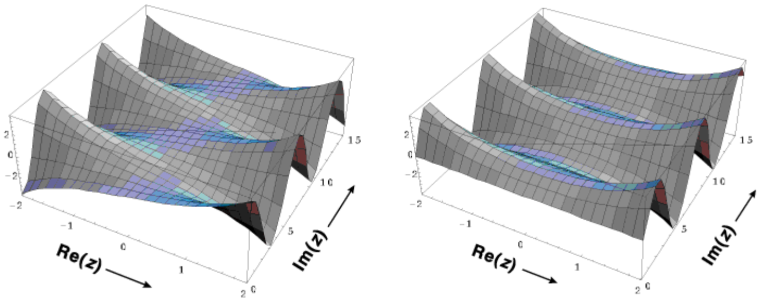


Abbildung:
Realteil und Imaginärteil des komplexen Sinus, erzeugt mit Mathematica



Realteil und Imaginärteil des komplexen hyperbolischen Sinus, erzeugt mit Mathematica

Berechnungsbeispiel für eine komplexe Zahl

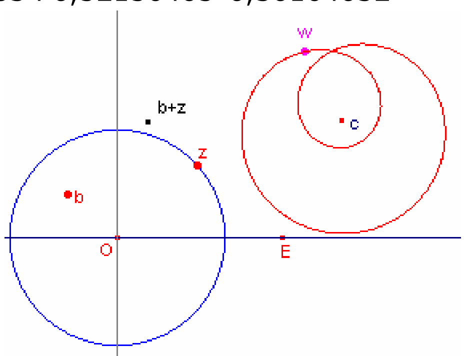
Hinweis zur Schreibweise: Zur Abkürzung der trigonometrischen Form wird mitunter auch CIS(w) = cos(w) + i sin(w) genutzt.

	Zahl	Betrag	Winkel w
Komplexe Zahl z1	1 – i	1,41421356	-0,78539816
Absoluter Betrag |z|	1.41421356		
Konjugierte Zahl	1 + i	1,41421356	0,78539816
Reziprokes 1/z	0,5 + 0,5 i	0,70710678	0,78539816
Komplexe Zahl z^2	0 – 2 i	2,00000000	-1,57079633
Komplexe Zahl z^3	-2 - 2 i	2,82842712	-2,35619449
Komplexe Zahl $\sqrt{(z^3)}$	0,64359425 - 1,55377397 i	1,68179283	-1,17809725
Komplexe Zahl z^i	0,42882901 - 0,15487175 i	0,45593813	-0,34657359
Komplexe Zahl i^z	0 - 0,20787958 i	0,20787958	-1,57079633
Komplexe Zahl z^z	0,27395725 - 0,58370076 i	0,64479388	-1,13197175
Komplexe Zahl $\sqrt{z}$	1,09868411 - 0,45508986 i	1,18920712	-0,39269908
Komplexe Zahl $\sqrt{z}$	-1,09868411 + 0,45508986 i	1,18920712	2,74889357
Komplexe Zahl $\sqrt[3]{z}$	1,08421508 - 0,29051456 i	1,12246205	-0,26179939
Komplexe Zahl $\sqrt[3]{z}$	-0,29051456 + 1,08421508 i	1,12246205	1,83259571
Komplexe Zahl $\sqrt[3]{z}$	-0,79370053 - 0,79370053 i	1,12246205	-2,35619449
Logarithmus ln(z)	0,34657359 - 0,78539816 i	0,85846580	-1,15522494
Potenz e^z	1,46869394 - 2,28735529 i	2,71828183	-1,00000000
Kosinus cos(z)	0,83373003 + 0,98889771 i	1,29345446	0,87032742
Sinus sin(z)	1,29845758 - 0,63496391 i	1,44539658	-0,45482023
Tangens tan(z)	0,27175259 - 1,08392333 i	1,11747002	-1,32514766
Sekans sec(z)	0,49833703 - 0,59108384 i	0,77312347	-0,87032742
Kosinus hyperbolicus cosh(z)	0,83373003 - 0,98889771 i	1,29345446	-0,87032742
Sinus hyperbolicus sinh(z)	0,63496391 - 1,29845758 i	1,44539658	-1,11597609
Tangens hyperbolicus tanh(z)	1,08392333 - 0,27175259 i	1,11747002	-0,24564867
Gamma-Funktion GAMMA(z)	0,49801567 + 0,15494983 i	0,52156405	0,30164032

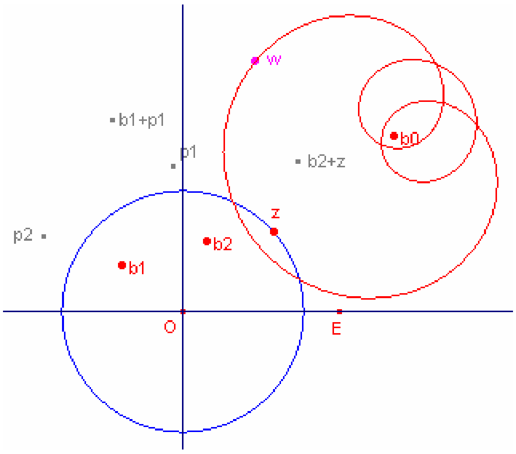
Polynom komplexer Zahlen

Grafische Veranschaulichung eines Polynoms komplexer Zahlen. Der Definitionsbereich wird auf die Menge der komplexen Zahlen mit dem Betrag |z| = konstant gesetzt.

w = f(z) = c + b z + z² = c + z (b + z)



In der Gaußschen Zahlenebene bildet dann der Definitionsbereich einen konzentrischen Kreis um (0;0). Der Wertebereich ist eine geschlossene Kurve um c. Die Form der Kurve hängt von den beiden komplexen Konstanten b und c ab.
Grafische Veranschaulichung eines kubischen Polynoms komplexer Zahlen. Der Definitionsbereich wird auf die Menge der komplexen Zahlen mit dem Betrag |z| = konstant gesetzt.



$w = f(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + z^3 = b_0 + z (b_1 + z (b_2 + z))$
In der Gaußschen Zahlenebene bildet dann der Definitionsbereich einen konzentrischen Kreis um (0;0). Der Wertebereich ist eine geschlossene Kurve um d. Die Form der Kurve hängt von den drei komplexen Konstanten b, c und d ab.

Körper der komplexen Zahlen C

C ist ein Körper

(1) (C;+) ist kommutative Gruppe
a) Abgeschlossenheit: ∀ z1,z2 ∈ C: z1 + z2 = z3 ∈ C
b) Assoziativgesetz (AG): ∀ z1,z2,z3 ∈ C: (z1+z2)+z3 = z1+(z2+z3)
c) neutrales Element n: ∀ z ∈ C ∃ n ∈ C mit z + n = n + z = z
n = 0 = 0 + 0i ∈ C
d) inverses Element z*: ∀ z ∈ C ∃ z* ∈ C mit
z + z* = z* + z = n = 0 z* = -z ∈ C
e) Kommutativgesetz (KG): ∀ z1,z2 ∈ C: z1 + z2 = z2 + z1
(2) (C\{n=0};*) kommutative Gruppe
a) Abgeschlossenheit: ∀ z1,z2 ∈ C\{0}: z1 * z2 = z3 ∈ C\{0}
b) Assoziativgesetz (AG): ∀ z1,z2,z3 ∈ C\{0}: (z1*z2)*z3 = z1*(z2*z3)
c) neutrales Element n1: ∀ z ∈ C\{0} ∃ n1 ∈ C\{0} mit
z * n1 = n1 * z = z n1 = 1 = 1 + 0i
d) inverses Element z*: ∀ z ∈ C\{0} ∃ z* ∈ C\{0} mit
z * z* = z* * z = n1 = 1 z * z* = 1 /:z ≠ 0
z* = 1/z = 1/[a+bi]
e) Kommutativgesetz (KG): ∀ z1,z2 ∈ C\{0}: z1 * z2 = z2 * z1
(3) es müssen die beiden Distributivgesetze (DG) gelten
∀ z1,z2,z3 ∈ C: z1*(z2+z3) = z1*z2 + z1*z3
(z1+z2)*z3 = z1*z3 + z2*z3
⇒ C ist ein nicht geordneter Körper

Kreisteilungszahl, zyklotomische Zahl

... sind ganze Zahlen und eng verbunden mit den Zahlen der Lucas Folgen $U_n(P, Q)$.
Sind P, Q, D und die Wurzeln definiert wie bei der Lucas Folge, dann sind die Kreisteilungszahlen

$Q_n = \Pi (\alpha - \xi^r \beta)$; Produktbildung über r

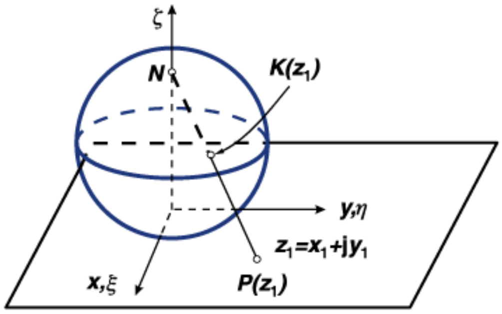
dabei ist $\xi = \cos(2 \pi) / n + i \sin(2 \pi)/n$
eine primitive Wurzel der 1 und r erfüllt folgende Bedingungen 0 < r < n
ggT(r, n) = 1, d.h. r und n sind teilerfremd
r ist eine natürliche Zahl.
Der Zusammenhang zu den Lucas Zahlen besteht dann in der Relation $U_n = \Pi Q_d$; Produkt über alle d | n

Riemannsche Zahlenkugel

Kugel im euklidischen Koordinatensystem (ξ, η, ζ) (mit ξ-Achse x-Achse der komplexen Ebene, η-Achse = y-Achse der komplexen Ebene) um den Punkt (0, 0, ½) mit Radius 1/2. Die Kugeloberfäche erfüllt die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - ½)^2 = ¼$.

Die komplexe Ebene lässt sich auf die Oberfläche der Riemannschen Zahlenkugel abbilden:
Abbildung eines Punktes $P(z_1) = (x_1, y_1, 0)$, $z_1 = x_1 + i y_1$, auf der komplexen Ebene auf einen Punkt $K(z_1) = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ auf der Oberfläche der Riemannschen Zahlenkugel:

Schnittpunkt der Geraden zwischen $P(z_1)$ und dem Nordpol N der Riemannschen Zahlenkugel mit der Oberfläche der Zahlenkugel. Ist $P(z_1) = (x_1, y_1, 0)$ gegeben, dann ist
$K(z_1) = (x_1/(1+ x_1^2 + y_1^2) , y_1/(1+ x_1^2 + y_1^2) , (x_1^2 + y_1^2)/(1+ x_1^2 + y_1^2)$.
Ist $K(z_1) = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \neq N$ gegeben, dann ist $P(z_1) = (\xi_1/(1 - \zeta_1) , \eta_1/(1 - \zeta_1), 0)$, wobei $z_1 = (\xi_1 + i\, \eta_1) / (1 - \zeta_1)$. Dem Nordpol N wird formal der Punkt $z = \infty$ zugeordnet. ∞ ist keine komplexe Zahl. Es gelten durch Definition die Rechenregeln:
$z + \infty = \infty$, $z * \infty = \infty$, $z / \infty = 0$, $z / 0 = \infty$.
Wird eine Figur der komplexen Zahlenebene auf die Riemannsche Kugel abgebildet, so spricht man von einer Riemann-Projektion.

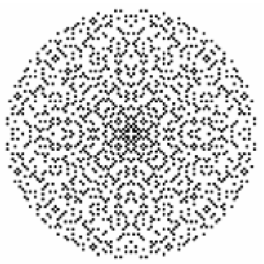


Gaußsche ganze Zahlen, Gaußsche Zahlen

Eine Gaußsche ganze Zahl oder Gaußsche Zahl ist eine komplexe Zahl
$$z = a + bi,$$
wobei a und b ganze Zahlen sind.
Gaußsche Zahlen gehören zum imaginären quadratische Körper $Q(\sqrt{-1})$ und bilden einen Ring Z[i]. Die Summe, Differenz und das Produkt zweier Gaußscher Zahlen ist wieder eine Gaußsche Zahl.
Der Quotient zweier Gaußscher Zahlen a + bi und c + di ist nur dann Gaußsche Zahl, wenn es ein e + fi gibt, so dass $(a + bi) (e + fi) = c + di$
gilt.
Gaußsche Zahlen können eindeutig in ein Produkt von Gaußschen Primzahlen faktorisiert werden. Die Einheiten von Z[i] sind ±1 und ±i.
Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Gaußsche Zahl zueinander relativ prim sind, ist
$$P_{Gauß}((a, b) = 1) = 6 / (\pi^2 K) = 0{,}66370\ldots$$
wobei K die Catalansche Konstante ist.

Gaußsche Primzahlen

Eine Gaußsche Primzahl ist eine Gaußsche ganze Zahl a + b·i, d.h. a und b sind ganze Zahlen, die eine der nachfolgenden Bedingungen erfüllen muss:

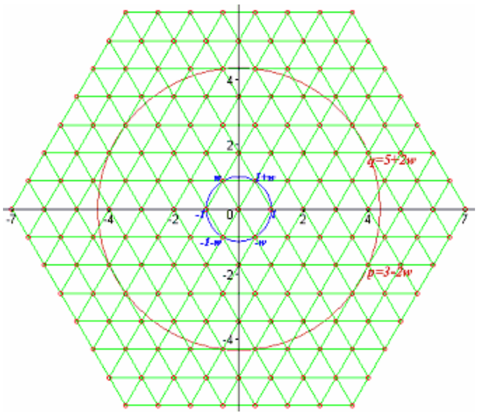


1. Sind a und b verschieden von Null, dann ist a + b·i Gaußsche Primzahl genau dann, wenn a^2+b^2 in den natürlichen Zahlen gewöhnliche Primzahl ist.
2. Ist a = 0, dann ist b·i Gaußsche Primzahl, wenn |b| gewöhnliche Primzahl ist und $|b| \equiv 3 \bmod 4$ gilt
3. Ist b = 0, dann ist a Gaußsche Primzahl, wenn |a| gewöhnliche Primzahl ist und $|a| \equiv 3 \bmod 4$ gilt

In der Abbildung wurden in die komplexe Zahlenebene Gaußsche Primzahlen in der Nähe von 0 eingetragen. Die ersten natürlichen Primzahlen, die auch Gaußsche Primzahlen sind, sind 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, … Gaußsche Primzahlen mit $|a|, |b| \leq 4$ sind ±4 ±i, ±3 ±2i, ±3, ±2 ±3i, ±2 ±i, ±1 ±4i, ±1 ±2i, ±1 ±i, ±3i. Die Anzahl der Gaußschen Primzahlen z mit dem komplexen Betrag $|z| \leq 10^n$ für n = 1, 2, … sind 0, 100, 4928, 313752, 23046512, …
Die größte (2008) bekannte Gaußsche Primzahl ist $(1 + i)^{991961} - 1$, welche 149305 Ziffern hat (Caldwell).

Gaußscher Primzahlzyklus

Eine Gaußsche Primzahl ist eine Gaußsche ganze Zahl a + b·i, die nicht in andere Gaußsche Primzahlen zerlegbar ist.
Ist $z_1 = a_1+b_1\cdot i$ eine Gaußsche Primzahl so kann ein interessanter Zyklus betrachtet werden. Ausgehend von z_1 wird die nächste Gaußsche Primzahl $z_2 = a_2+b_2\cdot i$ gesucht, die den gleichen Realteil jedoch einen höheren Imaginärteil besitzt.
Von z_2 ausgehend, wird die Primzahl z_3 ermittelt, deren Imaginärteil kleiner ist, der Realteil gleich. Nach z_3 sucht man z_4 mit kleinerem Realteil, z_5 mit höherem Imagniärteil, usw.
In der komplexen Gaußschen Zahlenebene bedeutet dies, dass beim Erreichen einer Primzahl die Suchrichtung um 90° nach rechts gedreht wird. Der Zyklus stoppt, sobald man die Ausgangszahl z_1 erreicht und der Graph symmetrisch ist.



Eisenstein-Zahlen

Die Eisenstein-Zahlen sind eine Verallgemeinerung der ganzen Zahlen auf die komplexen Zahlen. Sie sind nach dem deutschen Mathematiker Ferdinand Eisenstein, einem Schüler von Gauß, benannt.
Die Gaußschen Zahlen sind eine andere Verallgemeinerung der ganzen Zahlen auf die komplexen Zahlen.
Die Eisenstein-Zahlen sind der Ganzheitsring des quadratischen Zahlkörpers Q(√-3). Sie treten beispielsweise bei der Formulierung des kubischen Reziprozitätsgesetzes auf.
Eine Zahl E ist eine Eisenstein-Zahl, wenn sie sich in der Form

$E = a + b\,\omega$ mit $\omega = e^{2\pi i/3} = -1/2 + i/2\,\sqrt{3}$

und ganzen Zahlen a und b darstellen lässt.
ω ist eine primitive dritte Einheitswurzel und erfüllt damit die Gleichung

$\omega^2 + \omega + 1 = 0.$

Die Eisenstein-Zahlen bilden ein Dreiecksgitter in der gaußschen Zahlenebene. Sie entsprechen den Mittelpunkten einer dichtesten Kugelpackung in zwei Dimensionen.
Auf den Eisenstein-Zahlen lässt sich Zahlentheorie betreiben. Man kann Primzahlen definieren und zeigen, dass die Primfaktordarstellung einer Eisenstein-Zahl eindeutig ist.
Ganze Zahlen der Form $m^2 + 3n^2$ sind in den Eisenstein-Zahlen immer zerlegbar. Daher sind die Zahlen 3, 7, 13, 19, … keine Primzahlen in den Eisenstein-Zahlen.

Blum-Zahlen

Eine natürliche Zahl n wird Blum-Zahl genannt, wenn sie die Form n = pq besitzt und p und q verschiedene Primzahlen kongruent 3 mod 4 sind. Eine Blum-Zahl ist damit semiprim.
Da die Faktoren p und q die Form 4t+3 besitzen, sind sie Gaußsche Primzahlen ohne imaginären Teil.
Die ersten Blum-Zahlen sind
21, 33, 57, 69, 77, 93, 129, 133, 141, 161, 177, 201, 209, 213, 217, 237, 249, 253, 301, 309, 321, 329, 341, 381, 393, 413, 417, 437, 453, 469, 473, 489, 497, 501, 517, 537, 553, 573, 581, 589, 597, 633, 649, 669, 681, 713, 717, 721, 737, 749, 753, 781, 789, …
Die Zahlen wurden nach dem venezuelanischen Computerwissenschaftler Manuel Blum (geb. 1938) benannt. 1984 veröffentlichte er das asymmetrische Verschlüsselungssystem Blum-Goldwasser-Kryptosystem.
http://en.wikipedia.org/wiki/Blum-Goldwasser_cryptosystem

Ist n = pq Blum-zahl, Q_n die Menge aller quadratischen Reste modulo n sowie $a \in Q_n$, dann gilt
1) a besitzt genau vier quadratische Wurzeln modulo n, von denen genau eine in Q_n liegt
2) die Einheitswurzel von a in Q_n ist die Hauptwurzel von a modulo n
3) die Funktion f: $Q_n \to Q_n$ mit $f(x) = x^2 \bmod n$ ist Permutation. Die Umkehrfunktion von f ist: $f^{-1}(x) = x^{((p-1)(q-1)+4)/8} \bmod n$.
Vor der Einführung moderner Faktorisierungsverfahren wurden Blum-Zahlen gern als Grundzahlen des RSA-Verfahrens genutzt.
Da Blum-Zahlen aber heute (2009) genau so schnell faktorisiert werden können, wie jedes andere Primzahlprodukt, ist ihre Bedeutung für Verschlüsselungsverfahren zurückgegangen.

Heegner-Zahlen

In den Gaußschen Zahlen und den Eisenstein-Zahlen existiert eine eindeutige Primfaktorzerlegung. Die Frage entstand, für welche anderen Erweiterungen der ganzen Zahlen dies ebenfalls der Fall ist. Schränkt man sich auf Ganzheitsringe von Erweiterungen Q(√d) der rationalen Zahlen durch Adjunktion der Quadratwurzel aus einer quadratfreien negativen ganzen Zahl d ein, so zeigt sich, dass die Primfaktorzerlegung genau dann eindeutig ist, wenn d eine Heegner-Zahl ist.

Heegner-Zahlen (nach Kurt Heegner) sind die Zahlen -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67 und -163. Genau diese neun Zahlen führen als Diskriminante in einem imaginären quadratischen Zahlkörper zu einer eindeutigen Primzerlegung.
Die Gaußschen Zahlen und die Eisensteinzahlen sind dabei die Fälle d = -1 bzw. d = -3.
Die Lösung des Problems vermutete schon Carl Friedrich Gauß. Vor 1952 war bekannt, dass es höchstens 10 solche Zahlen geben kann. Kurt Heegner bewies 1952, dass es genau 9 solche Zahlen gibt.
Die Tatsache, dass $((2x+1)/2)^2 + (1/2\ \sqrt{-163})^2 = x^2 \pm x - (1 - (-163)/4 = x^2 \pm x + 41$ für x = 0, 1, 2, …, 40 nur Primzahlen liefert, hängt unmittelbar mit den Heegner-Zahl -163 zusammen.
Auch die zu den kleineren Heegner-Zahlen gehörenden Polynome

$x^2 - x + 17,\ x^2 - x + 11,\ x^2 - x + 5,\ x^2 - x + 3,\ x^2 - x + 2$

liefern für alle n von 1 bis dem Absolutglied-1 nur Primzahlen.
Da es nur 9 Heegner-Zahlen gibt, existieren auch nur 9 solcher Polynome der Form $x^2 \pm x + a$, für die von x = 0, …, a-1 nur Primzahlen auftreten.
Erstaunlich ist, dass $e^{\pi\sqrt{n}}$ gerade für die Heegner-Zahlen n die Ramanujan-Zahlen liefern, d.h. fast ganze Zahlen. So ist

$e^{\pi\sqrt{43}}$ = 884736743 , 999 777466 …
$e^{\pi\sqrt{67}}$ = 147197952743 , 99999 8662454 …
$e^{\pi\sqrt{163}}$ = 262537412640768743 , 999999999999 250072 …

Gleichungen im Komplexen

Gleichungen, die im Bereich der reellen Zahlen, unlösbar sind, können im Bereich der komplexen Zahlen durchaus korrekte Lösungen haben:

cos x = 2

$\cos x = 2 = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ und mit $e^{ix} = t$ wird
$4 = t + 1/t$, d.h. $0 = t^2 - 4t + 1$
$e^{ix} = 2 \pm \sqrt{3}$
$x = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi,\ k \in Z$

$1^x = 2$

Es gilt $e^{2k\pi i} = 1$, , $k \in Z$
mit $2 = e^{\ln 2}$ wird
$1^x = (e^{2k\pi i})^x = e^{x\,2k\pi i} = 2 = e^{\ln 2}$
Exponentenvergleich ergibt $x\,2k\pi i = \ln 2$ und somit
$x = -i/(2k\pi) * \ln 2,\ k \in Z$, also unendlich viele Lösungen

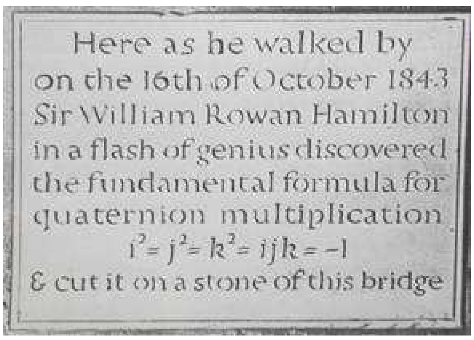
Bikomplexe Zahlen

Unter einer bikomplexen Zahl versteht man eine Zahl der Form $a + b\,i_1 + c\,i_2 + d\,j$ wobei a, b, c, d reelle Zahlen und i_1, i_2, j imaginäre Einheiten sind.
Sind $A = a + b\,i_1$ und $B = c + d\,i_1$ komplexe Zahlen, so kann eine bikomplexe Zahl in der Form $A + B\,i_2$ geschrieben werden.
Damit sind bikomplexe Zahlen denn komplexen ähnlich, wobei aber die Komponenten A und B im Allgemeinen keine reellen Zahlen sind. Sind A und B reell, so wird die bikomplexe Zahl zu einer komplexen.

Die Menge der bikomplexen Zahlen bildet einen kommutativen Ring mit Einselement. Die Multiplikation bikomplexer Zahlen ist kommutativ, assoziativ und distributiv zur Addition. Für die Multiplikation der drei imaginären Einheiten gilt

$i_1 \cdot i_1 = -1 \quad i_2 \cdot i_2 = -1 \quad j \cdot j = 1 \quad i_1 \cdot i_2 = j \quad i_1 \cdot j = -i_2 \quad i_2 \cdot j = -i_1$

Eine Division kann auf den bikomplexen Zahlen nicht definiert werden, da das Produkt zweier bikomplexer Zahlen Null werden kann, zum Beispiel für 1 + j und $i_1 + i_2$.
$(1 + j)\cdot(i_1 + i_2) = i_1 + i_2 + j\cdot i_1 + j\cdot i_2 = i_1 + i_2 - i_2 - i_1 = 0$



Quaternionen

Täglich führte der Weg Hamilton an der Brougham Bridge vorbei, die heute Broombridge heißt. An dieser Stelle hatte Hamilton den Geistesblitz, der längst zur Folklore der Mathematikgeschichte gehört: Er fand geeignete Multiplikationsregeln für Quaternionen. Und sogleich ritzte

er sie mit einem Taschenmesser in einen Stein der Brücke. Leider sind diese Zeichen längst verwittert. An der Brücke ist eine Gedenktafel angebracht:
Die Quaternionen bilden eine Ausweitung des Konzepts der komplexen Zahlen: Statt einer imaginären Einheit i gibt es hier drei (i, j, k), so dass ein Quaternion eine Zahl der Form a + b·i + c·j + d·k ist.
Die Addition von Quaternionen ist wie bei den komplexen Zahlen komponentenweise definiert. Hamilton hatte lange Zeit nach einer geeigneten Multiplikation gesucht:

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$	$i \cdot j = k$	$j \cdot k = i$	$k \cdot i = j$
$j \cdot i = -k$	$k \cdot j = -i$		$i \cdot k = -j$

Diese Multiplikation ist nicht kommutativ. Einer Gedenktafel an der Brücke ist zu entnehmen, dass Hamilton die kürzere Version $i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$ in den Stein geritzt hat.
In Mathematik und Physik gibt es Anwendungen der Quaternionen, aber sie haben nicht die Bedeutung erlangt, die Hamilton ihnen vorhergesagt hat. Ein aktuelles Anwendungsbeispiel sind 3D-Rotationen; diese lassen sich auch mit Quaternionen beschreiben, wovon in der Computergraphik Gebrauch gemacht wird.

Quaternionen sind eine vierdimensionale Divisionsalgebra über dem Körper der reellen Zahlen mit einer nicht kommutativen Multiplikation. Als vierdimensionale reelle Algebra sind die Quaternionen ein vierdimensionaler reeller Vektorraum. Daher ist jedes Quaternion durch vier reelle Komponenten x_0, x_1, x_2, x_3
eindeutig bestimmt. Als Basiselemente dieses Vektorraums werden vier Elemente mit der Länge 1 gewählt, die senkrecht aufeinander stehen; sie werden mit 1, i, j, k bezeichnet. Die Linearkombination der vier Komponenten mit den vier Basiselementen ist

$$x_0 + x_1\, i + x_2\, j + x_3\, k$$

Dabei ist R eingebettet als Elemente der Form x_0, d.h. mit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
Die Menge der komplexen Zahlen kann auf verschiedene Weisen in die Quaternionen eingebettet werden; die Quaternionen sind jedoch keine C-Algebra.

Rechenregeln

Überträgt man die aus den Körpern R und C bekannten Operationen + (Addition) und · (Multiplikation) auf die Quaternionen H, erhält man einen Schiefkörper.
Die Addition ist dabei identisch mit der Addition des Vektorraums und die Skalarmultiplikation des Vektorraums wird für die Multiplikation übernommen. Dadurch ist zur Definition der Multiplikation nur noch das Produkt von Basiselementen des Vektorraums anzugeben.
Addition $(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) + (y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k) = (x_0+y_0) + (x_1+y_1)i + (x_2+y_2)j + (x_3+y_3)k$
Multiplikation nach Graßmann
$(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) \cdot (y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k) = (x_0 \cdot y_0 - x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3) + (x_0 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_0 + x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2)\, i +$
$= (x_0 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_0 + x_3 \cdot y_1)\, j + (x_0 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_0)\, k$
Die Addition ist assoziativ und kommutativ, die Multiplikation ist assoziativ, aber nicht kommutativ.

Die besondere Stellung der Komponente x_0 bezeichnet man analog zu den Komplexen Zahlen als Realteil oder Skalarteil $s = x_0$, während die Komponenten x_1, x_2 und x_3 Imaginärteil $x_1 i + x_2 j + x_3 k$ oder Vektorteil $v = (x_1, x_2, x_3)$ genannt werden. Ein Quaternion, dessen Realteil 0 ist, nennt man reines Quaternion.

Für Quaternionen sind verschiedene Arten der Multiplikation definiert. Man unterscheidet grundsätzlich zwischen der Multiplikation nach Graßmann (siehe vorhergehende Seite) und der Multiplikation nach Euklid, sowie dem Produkt, dem Geradenprodukt und dem Ungeradenprodukt.
Geraden sind definiert durch die Gleichung $\text{Geraden}(q_1, q_2) = (q_1\, q_2 + q_2\, q_1) / 2$
und die Ungeraden durch $\text{Ungeraden}(q_1, q_2) = (q_1\, q_2 - q_2\, q_1) / 2$

Graßmann-Geradenprodukt

Das Graßmann-Geradenprodukt der Quaternionen wird selten verwendet. Dieses Produkt ist kommutativ, d.h. es gilt $\text{Even}(q_1, q_2) = \text{Even}(q_2, q_1)$.
$\text{Even}(q_1, q_2) = (q_1\, q_2 + q_2\, q_1)/2 = (a_1\, a_2 - b_1\, b_2 - c_1\, c_2 - d_1\, d_2) + i\,(a_1\, b_2 + b_1\, a_2) + j\,(a_1\, c_2 + c_1\, a_2) + k\,(a_1\, d_2 + d_1\, a_2)$

Graßmann-Ungeradenprodukt

Das Kreuzprodukt oder auch Graßmann-Ungeradenprodukt zweier Quaternionen ist das Äquivalent zum Vektorprodukt. Es entspricht dem Vektorprodukt der beiden Vektorteile dieser Quaternionen

$$q_1 \times q_2 = (q_1\, q_2 - q_2\, q_1)/2 = i\,(c_1\, d_2 - d_1\, c_2) + j\,(d_1\, b_2 - b_1\, d_2) + k\,(b_1\, c_2 - c_1\, b_2)$$

Euklidisches Produkt $\mathrm{EuklidProd}(q_1, q_2) = (a_1\, a_2 + \vec{u}\vec{v},\ a_1\, \vec{v} - \vec{u}\, a_2 - \vec{u} \times \vec{v})$

Euklidisches Geradenprodukt

Das Punktprodukt, auch Skalarprodukt, Euklidisches Geradenprodukt oder inneres euklidisches Produkt genannt, entspricht dem Punktprodukt eines 4-wertigen Vektors: $\langle q_1, q_2 \rangle = a_1\, a_2 + b_1\, b_2 + c_1\, c_2 + d_1\, d_2$

Man kann das Punktprodukt in das Graßmann-Produkt, d.h. die ursprüngliche Multiplikation, umformen

$$\langle q_1, q_2 \rangle = (q_1^{-}\ q_2 + q_2\, q_1^{-}\ ) / 2$$

mit q_1^{-} … Konjugation des Quaternions q_1. Punktprodukte sind nützlich, wenn man ein einzelnes Element eines Quaternions isolieren möchte: $\langle q, i \rangle = b$

Euklidisches Ungeradenprodukt

Das Euklidische Ungeradenprodukt, auch äußeres euklidsches Produkt genannt, wird nur selten benötigt. Es ist ähnlich zum inneren euklidischen Produkt und wird deshalb als Paar mit diesem behandelt

$\mathrm{Outer}(q_1, q_2) = i\,(a_1\, b_2 - b_1\, a_2 - c_1\, d_2 + d_1\, c_2) + j\,(a_1\, c_2 + b_1\, d_2 - c_1\, a_2 - d_1\, b_2) + k\,(a_1\, d_2 - b_1\, c_2 + c_1\, b_2 - d_1\, a_2)$

Division von Quaternionen

Die Division zweier Quaternionen wird nicht mit einem Bruchstrich, sondern unter Verwendung eines negativen Exponenten dargestellt, da die Multiplikation von Quaternionen nicht kommutativ ist und man daher zwischen $q_1\, q_2^{-1}$ und $q_2^{-1}\, q_1$ unterscheiden muss. Wenn das Quaternion normalisiert wurde, so gilt: $q^{-1} = q^{-}$

Wobei q^{-} die Konjugation des Quaternions q ist. Daher gilt $q\, q^{-} = 1$

Besitzt das Quaternion eine andere Einheit, teilt man das konjungierte Quaternion durch einen skalaren Wert, welcher sich aus dem Quadrat der Amplitude des Quaternions ergibt, um den reziproken Wert zu erhalten. Damit ergibt sich die Form:

$$(a + i\, b + j\, c + k\, d)^{-1} = (a - i\, b - j\, c - k\, d) / (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

Hurwitzquaternion

Hurwitzquaternionen oder Hurwitz-Ganzzahlen sind spezielle Quaternionen, deren Koeffizienten entweder alle 4 ganzzahlig oder alle 4 halbzahlig, d.h. Hälften einer ungeraden ganzen Zahl; sind. Die Menge aller Hurwitzquaternionen ist

$$H = \{a + bi + cj + dk \mid a,b,c,d \in Z \text{ oder } a,b,c,d \in Z + 1/2\}$$

Der Ring H der Hurwitz-Quaternionen ist ein nichtkommutativer Unterring des Rings aller Quaternionen.

Lipschitzquaternionen oder Lipschitz-Ganzzahlen sind Quaternionen, deren Koeffizienten alle ganzzahlig sind. Der Ring der Lipschitzquaternionen ist ein nichtkommutativer Unterring der Hurwitzquaternionen H.

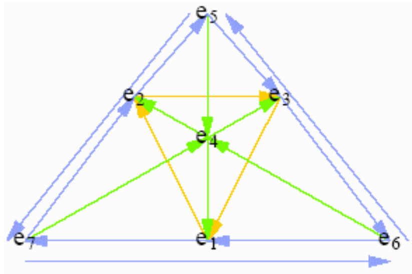
Die Norm einer Hurwitzquaternion $a^2+b^2+c^2+d^2$ ist eine ganze Zahl. Aus dem Vier-Quadrate-Satz von Lagrange folgt, dass jede nicht negative, ganze Zahl Norm einer Lipschitz-Quaternion ist.

Eine Hurwitzquaternion ist in H genau dann prim, wenn ihre Norm prim ist. Der Ring der Hurwitzquaternionen ist euklidisch. Die Gruppe H hat ein Erzeugendensystem $\{½(1+i+j+k), i, j, k\}$.

Oktaven, Cayley-Zahlen

Bildet man ein Paar von Quaternionen, so entstehen die Cayley-Zahlen oder Oktaven. Die Multiplikations- und Konjugationsregel ist mit denen für die Quaternionen definierten identisch. So wie die komplexen Zahlen und Quaternionen können auch Oktaven als Linearkombination der imaginären Einheiten geschrieben werden. Diese werden mit e_1 bis e_7 bezeichnet.

Wie bei den Quaterionen ist $e_i^2 = -1$, und sie sind bezüglich der Multiplikation antikommutativ, d.h. $e_i\, e_k = -e_k\, e_i$.
Zum schnellen Bestimmen des Produktes zweier e_i nutzt man die Fano-Ebene, ein Gebilde der projektiven Geometrie.
Die Einheiten werden multipliziert, in dem man den Pfeilen der Fano-Ebene folgt, z.B. $e_7\, e_2 = e_5$ oder $e_6\, e_4 = e_2$.



Alle vier Zahlenbereichen (reelle Zahlen, komplexe Zahlen, Quaternionen und Oktaven) sind Divisionsalgebren, d.h. zu einer Zahl existiert ein multiplikativ inverses Element. Bildet man Paare von Oktaven, so ist dies nicht mehr der Fall.
Die reellen und komplexen Zahlen sind kommutativ bezüglich der Multiplikation, Quaternionen und Oktaven sind dies nicht. Während die Quaternionenmultiplikation nicht assoziativ ist, gilt dies für die Oktaven nicht mehr.

Sedenionen

Die Sedenionen sind 16-dimensionale hyperkomplexe Zahlen, die mittels Verdopplungsverfahrens aus den Oktakven (Oktonionen) entstehen.
Die Multiplikation der Sedenionen ist weder kommutativ noch assoziativ und auch nicht alternativ. Sie ist nur noch potenz-assoziativ und flexibel.
Die Sedenionen bilden eine nichtkommutative Jordan-Algebra und besitzen Nullteiler.

Jedes Sedenion ist eine reelle Linearkombination der Einheiten e_i ($i = 0, ..., 15$), wobei $e_0 = 1$ ist.
Eine mögliche Multiplikationstafel der Einheiten ist:

	1	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10	e11	e12	e13	e14	e15
1	1	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10	e11	e12	e13	e14	e15
e1	e1	-1	e3	-e2	e5	-e4	-e7	e6	e9	-e8	-e11	e10	-e13	e12	e15	-e14
e2	e2	-e3	-1	e1	e6	e7	-e4	-e5	e10	e11	-e8	-e9	-e14	-e15	e12	e13
e3	e3	e2	-e1	-1	e7	-e6	e5	-e4	e11	-e10	e9	-e8	-e15	e14	-e13	e12
e4	e4	-e5	-e6	-e7	-1	e1	e2	e3	e12	e13	e14	e15	-e8	-e9	-e10	-e11
e5	e5	e4	-e7	e6	-e1	-1	-e3	e2	e13	-e12	e15	-e14	e9	-e8	e11	-e10
e6	e6	e7	e4	-e5	-e2	e3	-1	-e1	e14	-e15	-e12	e13	e10	-e11	-e8	e9
e7	e7	-e6	e5	e4	-e3	-e2	e1	-1	e15	e14	-e13	-e12	e11	e10	-e9	-e8
e8	e8	-e9	-e10	-e11	-e12	-e13	-e14	-e15	-1	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
e9	e9	e8	-e11	e10	-e13	e12	e15	-e14	-e1	-1	-e3	e2	-e5	e4	e7	-e6
e10	e10	e11	e8	-e9	-e14	-e15	e12	e13	-e2	e3	-1	-e1	-e6	-e7	e4	e5
e11	e11	-e10	e9	e8	-e15	e14	-e13	e12	-e3	-e2	e1	-1	-e7	e6	-e5	e4
e12	e12	e13	e14	e15	e8	-e9	-e10	-e11	-e4	e5	e6	e7	-1	-e1	-e2	-e3
e13	e13	-e12	e15	-e14	e9	e8	e11	-e10	-e5	-e4	e7	-e6	e1	-1	e3	-e2
e14	e14	-e15	-e12	e13	e10	-e11	e8	e9	-e6	-e7	-e4	e5	e2	-e3	-1	e1
e15	e15	e14	-e13	-e12	e11	e10	-e9	e8	-e7	e6	-e5	-e4	e3	e2	-e1	-1

Hyperreelle Zahl

Quelle: http://mathforum.org/dr.math/faq/analysis_hyperreals.html
In der Mathematik sind hyperreelle Zahlen ein Untersuchungsgegenstand der Nichtstandardanalysis. Die Menge der hyperreellen Zahlen wird meist als *R geschrieben; sie erweitert die reellen Zahlen um ihre infinitesimal benachbarten Zahlen sowie um unendlich große, infinite, Zahlen.
Abraham Robinson (1918-1974) zeigte in den 1960ern, auf welche Weise unendlich große und kleine Zahlen streng formal definiert werden können und eröffnete so das Gebiet der Nichtstandard-Analysis. Durch die hyperreellen Zahlen ist eine Formulierung der Differenzial- und Integralrechnung ohne den Grenzwertbegriff möglich.

Die hyperreellen Zahlen *R bilden einen geordneten Körper, der R als Teilkörper enthält. Im Gegensatz zu den reellen Zahlen bilden die hyperreellen Zahlen keinen metrischen Raum. Dennoch tragen sie eine Ordnungstopologie.
Eine logische Aussage der Prädikatenlogik erster Stufe heißt im Kontext der Nichtstandard-Analysis wohlgeformt, wenn sie nur bestimmte grundlegende Verknüpfungen

(Grundrechenarten, Vergleich) und natürliche Zahlen enthält und nur über reelle Zahlen quantifiziert (Allquantor, Existenzquantor).
Die hyperreellen Zahlen sind auf eine solche Weise definiert, dass jede wohlgeformte Aussage auch zutrifft, wenn man sie über hyperreelle Zahlen quantifiziert.
In *R gibt es Zahlen, die in R nicht existieren. Zum Beispiel gibt es ein Element w mit der folgenden Eigenschaft:

$1 < w, 1+1 < w, 1+1+1 < w, 1+1+1+1 < w, \ldots$

Eine hyperreelle Zahl wie w nennt man infinit, der Kehrwert einer unendlich großen Zahl ist eine infinitesimale Zahl.
Die hyperreellen Zahlen sind gleichmächtig zu den reellen Zahlen.

Man konstruiert die hyperreellen Zahlen als Folgen reeller Zahlen. R wird durch die Identifikation einer reellen Zahl r mit der konstanten Folge (r, r, r, …) in die so konstruierten Zahlen eingebettet, d.h.

$0 = (0,0,0,0,\ldots), 1 = (1,1,1,1,\ldots), \ldots$

Rechenoperationen werden gliedweise definiert

$(a_0,a_1,a_2,\ldots) + (b_0,b_1,b_2,\ldots) = (a_0 + b_0,a_1 + b_1,a_2 + b_2,\ldots)$

Analog wird die Multiplikation erklärt. Für jede Folge $a = (a_0,a_1,a_2,\ldots)$ gilt dann z.B. $a + a = 2a$.

Damit wurde das abzählbar unendliche direkte Produkt R^n des Körpers R mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation gebildet. Dieses $(R^n,+,\cdot)$ ist kein Körper, sondern ein kommutativer unitärer Ring. Zum Beispiel gibt es zu jeder Folge, die auch nur an einer Stelle eine 0 aufweist, kein multiplikatives Inverses.

Um eine Ordnungsrelation einzuführen, wird ein freier Ultrafilter U auf den natürlichen Zahlen eingeführt. Ein solches U existiert nach dem Auswahlaxiom, wobei die Wahl des Ultrafilters keine Rolle spielt. Dann ist

$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \leq (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, falls $\{n : a_n \leq b_n\}$ in U.

Damit ist die Menge der reellen Zahlenfolgen total geordnet. Mit der Äquivalenzrelation

$a = b$, falls $a \leq b$ und $b \leq a$.

ist die Ordnungsrelation eine totale Ordnung. Addition und Multiplikation der Äquivalenzklassen sind wohldefiniert, womit der Körper der hyperreellen Zahlen konstruiert ist.

Eine hyperreelle Zahl e heißt infinitesimal, wenn sie kleiner ist als jede positive reelle Zahl, aber größer als jede negative reelle Zahl. Die Zahl Null ist die einzige infinitesimale reelle Zahl, aber es gibt andere hyperreelle infinitesimale Zahlen, z.B. a = (1;0,1;0,01;0,001;0,0001;…)
Eine hyperreelle Zahl x heißt endlich, wenn es eine natürliche Zahl n gibt mit $-n < x < n$, anderenfalls heißt x unendlich. Die Zahl a = (1,10,100,1000,…) ist eine infinite Zahl. Eine von 0 verschiedene Zahl x ist genau dann unendlich, wenn 1/x infinitesimal ist.

Hyperkomplexe Zahlen

Hyperkomplexe Zahlen sind Verallgemeinerungen der komplexen Zahlen. Hyperkomplexe Zahlen bilden algebraische Strukturen über den reellen Zahlen mit Addition und Multiplikation. Man fordert die folgenden Eigenschaften:

für die Addition gelten das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz.
die Addition ist invertierbar.
das linksseitige und das rechtsseitige Distributivgesetz gilt.
die Multiplikation von hyperkomplexen Zahlen ist bilinear über den reellen Zahlen, also gilt $(ax)(by) = ab\,(xy)$ für alle $a,b \in R$ und x,y hyperkomplexe Zahlen.

Nicht gefordert werden: für die Multiplikation von hyperkomplexen Zahlen braucht weder das Kommutativgesetz noch das Assoziativgesetz zu gelten.
die Multiplikation braucht nicht nullteilerfrei zu sein.
die Multiplikation ist im Allgemeinen nicht invertierbar.

Hyperkomplexe Zahlen lassen sich wie folgt als Summe darstellen: $a = a_0\,1 + a_1\,i_1 + \ldots + a_n\,i_n$
Die Größen i_k heißen imaginäre Einheiten. Die zu a konjugierte Zahl entsteht, indem alle imaginären Einheiten durch ihr negatives ersetzt werden. Die zu a konjugiert komplexe Zahl wird durch a* dargestellt. Ihre Summendarstellung ist

$a^* = a_0\,1 - a_1\,i_1 - \ldots - a_n\,i_n$

Beispiele: Die Komplexen Zahlen C sind ein hyperkomplexes Zahlensystem, das durch $z = a + bi$ mit $i^2 = -1$ definiert ist.
Die binären Zahlen sind definiert durch $z = a + b E$ mit $E^2 = 1$. Die dualen Zahlen sind definiert durch $z = a + b \Omega$ mit $\Omega^2 = 0$. Dies sind keine(!) Dualzahlen.
Die Quaternionen H sind vierdimensionale hyperkomplexe Zahlen mit Division und assoziativer, nicht kommutativer Multiplikation. Die Quaternionen bilden einen Schiefkörper.
Die Oktonionen O sind achtdimensionale hyperkomplexe Zahlen mit Division und alternierender Multiplikation.
Die Sedenionen S sind sechzehndimensionale hyperkomplexe Zahlen. Ihre Multiplikation ist weder kommutativ, assoziativ oder alternativ. Auch besitzen sie keine Division; stattdessen haben sie Nullteiler.
Jede Clifford-Algebra ist ein assoziatives hyperkomplexes Zahlensystem.

Duale Zahlen

In der algebraischen Geometrie ist der Ring der dualen Zahlen über einem Körper ein algebraisches Objekt, das eng mit dem Begriff des Tangentialvektors zusammenhängt. Es sei A ein Ring. Dann ist der Ring der dualen Zahlen über A der Faktorring $A[\varepsilon] = A[X]/(X^2)$
ε ist das Bild der Unbestimmten X im Quotienten $A[X]/(X^2)$.

Erklärung und Eigenschaften : Es sei k ein Körper. $k[\varepsilon]$ ist ein lokaler artinscher Ring, der als Vektorraum über k die Dimension 2 hat. Jedes Element hat eine eindeutige Darstellung
$a + b\varepsilon$ mit $a, b \in k$
Das maximale Ideal wird von ε erzeugt; der Restklassenkörper ist k. (ε) und k sind als $k[\varepsilon]$ - Moduln isomorph. Für jeden Ring A ist $A[\varepsilon] = A \otimes Z[\varepsilon]$

Biquaternionen

Die Biquaternionen sind ein hyperkomplexes Zahlensystem, das von William Kingdon Clifford in der zweiten Hälfte des 19.Jahrhunderts beschrieben wurde.
Die Biquaternionen sind ein 8-dimensionales hyperkomplexes Zahlensystem mit den Einheiten 1, i, j, k, ω, ωi, ωj, ωk. Hierbei sind i, j, k die Einheiten der Quaternionen, $\omega^2 = 1$, und ω kommutiert mit i, j, k.
Die Biquaternionen bilden einen Ring mit Nullteilern. Jedes Biquaternion p lässt sich als Summe zweier Quaternionen q und r darstellen: $p = q + \omega r$
Die Biquaternionen sind die Clifford-Algebra Cl(3, 0, R). Die Verbindung entsteht durch $i_1 = i$, $i_2 = j$, $i_3 = k$ und $i_1 i_2 i_3 = \omega$
Die Biquaternionen sind die direkte Summe der Quaternionen mit sich selbst, $H \oplus H$.

p-adische Zahlen

Für jede Primzahl p bilden die p-adischen Zahlen einen Erweiterungskörper Q_p der rationalen Zahlen; sie wurden 1897 erstmals von Kurt Hensel beschrieben.
Diese Körper werden benutzt, um Probleme in der Zahlentheorie zu lösen, oftmals unter Verwendung des lokal-global-Prinzips von Helmut Hasse, welches vereinfacht aussagt, dass eine Gleichung genau dann über den rationalen Zahlen Q gelöst werden kann, wenn sie über den reellen Zahlen R und allen Q_p gelöst werden kann.
Als metrischer Raum ist Q_p vollständig, und erlaubt so die Entwicklung einer p-adischen Analysis analog zur reellen Analysis.

Ist p eine fest gewählte Primzahl, dann kann jede ganze Zahl in einer p-adischen Entwicklung geschrieben werden, d.h. die Zahl wird "zur Basis p geschrieben": $\pm \Sigma_{i=0}^{n} a_i p^i$
wobei die a_i Zahlen aus {0, 1, …, p-1} sind. Zum Beispiel ist die 2-adische Entwicklung die Binärdarstellung.

Eine Verallgemeinerung dieser Beschreibung auf größere Zahlmengen ist die Zulassung unendlicher Summen dieser Form $\pm \Sigma_{i=-\infty}^{n} a_i p^i$
Diese Reihen sind konvergente Partialsummenfolgen bezüglich des gewöhnlichen Absolutbetrags.
Man kann dann zum Beispiel 1/3 zur Basis 5 darstellen als Grenzwert der Reihe $0{,}13131313\ldots_5$.
In diesem System sind die ganzen Zahlen genau diejenigen, für die $a_i = 0$ ist für alle $i < 0$.
Alternativ kann man die Summen am anderen Ende ins Unendliche verlängern, und erhält Reihen $\pm \Sigma_{i=k}^{\infty} a_i p^i$

wobei k eine beliebige ganze Zahl ist. Damit ergibt sich der Körper Q_p der p-adischen Zahlen. Diejenigen p-adischen Zahlen, für die $a_i = 0$ für alle $i < 0$ ist, heißen p-adische ganze Zahlen. Mit diesen Reihen kann wie gewohnt gerechnet werden: Addition von rechts nach links mit Übertrag, Multiplikation nach Schulmethode. Dabei können sich Überträge ins Unendliche fortsetzen. Zum Beispiel ergibt die Addition von $\ldots 44444_5$ und 1_5 die Zahl 0_5.

Positionssysteme

P-adische Darstellung reeller Zahlen
Der Bruch 22/7 = 3,142857 142857,... entspricht in Potenzschreibweise der unendlichen Reihe

$$22/7 = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + \ldots$$

Dabei liegt das Dezimalsystem, also Basis B = 10, zugrunde. Statt B = 10 kann jede natürliche Zahl ≥ 2 als Basis verwendet werden. $B \in \aleph$, $B \geq 2$ und $Z_B = \{0, 1, 2, \ldots, B-1\}$ eine Menge von B Elementen, denen wir in der angeschriebenen Reihenfolge die Zahlenwerte 0,1,2,...,B-1 zuordnen. Dann konvergiert nach dem Majorantenkriterium jede Reihe der Form

$$b_n \cdot B^n + \ldots + b_0 \cdot B^0 + b_{-1} \cdot B^{-1} + b_{-2} \cdot B^{-2} + \ldots, n \in \aleph, b_k \in Z_B$$

für alle $n \leq k$, und ihre Summe ist eine positive reelle Zahl.

Komplementärzahl
Gegeben sei ein Zahlensystem zur Basis g mit den Ziffern {0, 1, 2, …, g-1}. Unter der Komplementaritätsbeziehung versteht man die Tatsache, dass es zu jeder Zahl a < g dann eine Komplementärzahl

$$(g - a - 1)$$

existiert.
Zum Beispiel hat die 6 im Dezimalsystem die Komplementärzahl 3. Im Binärsystem entspricht die Null der Komplementärzahl 1 und die 1 entspricht der Null. Allgemein ist die Komplentärzahl der Null stets die Zahl g-1, die Komplementärzahl von 1 entsprechend g-2.
Die vierstellige Zahl 10(g-2)(g-1)
wird Repräsentantin des Zahlensystems zur Basis g genannt. Die 1089 ist die Repräsentantin des Dezimalsystems, die 1001 die im Dualsystem. Jede andere vierstellige Zahl im System zur Basis g, bei der die Summen aus erster und vierter sowie zweiter und dritter Ziffer gerade g-1 ergeben, wird Mutuante genannt.
Im Dezimalsystem sind zum Beispiel 2178, 3267, 4356, … Mutuanten.

Dualsystem, Zweiersystem
Das Zweiersystem ist eine Stellenschreibweise der Zahlen, bei der nur die beiden Ziffern 0 und 1 verwendet werden.

Grundziffern	0, 1		
Stellenwert	Potenzen von 2		
Darstellungsform	$b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0$, $b_{-1} b_{-2} \ldots$		
Addition	0 + 0 = 1	0 + 1 = 1	1 + 1 = 10
Multiplikation	0 * 0 = 0	0 * 1 = 0	1 * 1 = 1

Komplementdarstellung (für negative ganze Zahlen) $-Z = \neg Z + 1$
positive Dualzahl Z, $\neg$ bitweise Negation, d.h. -Z wird als Differenz 2^n - Z dargestellt
Die Darstellung im Zweiersystem ist ungewöhnlich, schon weil die Anzahl der Stellen schnell wächst, aber im Zeitalter der Informationstechnik hat sie eine große Bedeutung erlangt. 1 und 0 können gedeutet werden als an-aus, wahr-falsch, ja-nein, geschlossen-offen. Das Zweiersystem heißt auch Dualsystem, dyadisches System, Binärsystem oder binäres System.

Tabelle der ersten Dualzahlen

Dezimal	Dual	Dezimal	Dual	Dezimal	Dual	Dezimal	Dual
1	1	2	10	3	11	4	100
5	101	6	110	7	111	8	1000
9	1001	10	1010	11	1011	12	1100
13	1101	14	1110	15	1111	16	10000
17	10001	18	10010	19	10011	20	10100
21	10101	22	10110	23	10111	24	11000

Dyadik
Die Dyadik (dyo, griech. = Zwei), d.h. die Darstellung von Zahlen im Dualsystem wurde schon Ende des 17.Jahrhunderts von Leibniz entwickelt. Er sah darin ein so überzeugendes Sinnbild des christlichen Glaubens, dass er damit den chinesischen Kaiser Kangxi überzeugen wollte. Dazu schrieb er an den französischen Jesuitenpater Bouvet, der als Missionar in China tätig war:

"Zu Beginn des ersten Tages war die 1, das heißt Gott. Zu Beginn des zweiten Tages die 2, denn Himmel und Erde wurden während des ersten geschaffen. Schließlich zu Beginn des siebenten Tages war schon alles da; deshalb ist der letzte Tag der vollkommenste und der Sabbat, denn an ihm ist alles geschaffen und erfüllt, und deshalb schreibt sich die 7 111, also ohne Null.
Und nur wenn man die Zahlen bloß mit 0 und 1 schreibt, erkennt man die Vollkommenheit des siebenten Tages, der als heilig gilt, und von dem noch bemerkenswert ist, dass seine Charaktere einen Bezug zur Dreifaltigkeit haben."

Vom Zweiersystem zum Zehnersystem

Es stellt sich die Aufgabe, eine Zahl wie $(100111)_2$ ins Zehnersystem zu übertragen.

...	256er	128er	64er	32er	16er	8er	4er	2er	Einer
...	0	0	0	1	0	0	1	1	1

Man trägt die Zahl in die Tabelle ein und liest $(100111)_2 = 1+2+4+32=39$ ab. Man beginnt bei der Summenbildung auf der rechten Seite. Weitere Beispiele: $(111000)_2 = 8+16+32=56$, $(110011)_2 = 1+2+16+32=51$, $(11111111)_2 = 1+2+4+8+16+32+64+128=255$.

Vom Zehnersystem zum Zweiersystem

Das umgekehrte Problem, zu einer Zahl wie 38 die Schreibweise im Zweiersystem zu finden, erfordert eine Vorbereitung. Man muss 38 in eine Summe von Zweierpotenzen zerlegen. Dabei beginnt man mit der größten Potenz, die kleiner ist als die gegeben Zahl, und zerlegt dann weiter. 38=32+6=32+4+2. Das führt in der Tabelle zu folgendem Eintrag

...	256er	128er	64er	32er	16er	8er	4er	2er	Einer
...	0	0	0	1	0	0	1	1	0

Die Zahl 38 hat also die Darstellung $38=(100110)_2$. Weitere Beispiele:
$56=32+16+8=(111000)_2$, $51=32+16+2+1=(110011)_2$,
$255=128+64+32+16+8+4+2+1=(11111111)_2$.

Halbierungsverfahren mittels Euklidischem Verfahren

In der Schule wird im Allgemeinen gelehrt, dass man eine Liste der Potenzen von 2 erstellt (siehe oben), und nun beginnend mit der größten Potenz von 2, welche noch kleiner ist als die Zahl, durch wiederholte Subtraktion eine Summe von Potenzen zu ermitteln, welche gerade gleich der Zahl ist. So schön wie dieser Algorithmus aussieht, so unpraktisch, langsam und aufwendig ist er. Gerade die Berechnung der Potenzen der Basis ist mühevoll.
Viel eleganter ist der Weg mittels Euklidischen Verfahren. Da hier ausschließlich dividiert wird, erhält man sehr schnell das Gewünschte. Einziger Nachteil: Man erhält die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge. Das wird am Beispiel der Zahl 116 erklärt:

	Stelle drei Spalten bereit.
116...58...0	Schreibe oben links in die erste Spalte die gegebene Zahl 116.
058...29...0	Dividiere sie durch 2 und schreibe die halbe Zahl 58 in die zweite Spalte und in
029...14...1	die dritte Spalte den Rest 0.
014...07...0.....	Schreibe die mittlere Zahl 58 in die nächste Zeile und wiederhole das
007...03...1	Halbieren.
003...01...1	Führe das Halbieren fort, bis in der mittleren Spalte Null steht.
001...00...1	Notiere die Reste von unten nach oben. Das ist in diesem Falle 1110100. Das ist die Darstellung im Zweiersystem.

Erklärung: Die Zeilen kann man schreiben als 116=58*2, 58=29*2, 29=14*2+1, 14=7*2, 7=3*2+1, 3=1*2+**1**.
Man ersetzt die halben Zahlen nacheinander: 116=58*2=(29*2)*2= ...
=(((((1*2+1)*2+1)*2)*2+1)*2)*2
Im Term steckt die dritte Spalte: ((((((0*2+1)*2+**1**)*2+**1**)*2+**0**)*2+**1**)*2+**0**)*2+**0**
Multipliziert man diesen Term aus, so erhält man $116=2^6 +2^5 +2^4 +2^2$.

Rechenoperationen im Dualsystem

An Hand der beiden Zahlen $(100011)_2$ und $(111)_2$ werden die schriftlichen Rechenverfahren erklärt:

```
  100011
+    111
  ------
  101010
```

Addition

Man schreibt die Zahlen untereinander und addiert stellenweise von rechts nach links. Man beginnt mit 1+1=2=10. Die Ziffer 0 schreibt man hin und 1 als Übertrag. Dann folgt 1+1+1=3=11. Man schreibt 1 hin und notiert den Übertrag 1.

```
  100011
-    111
  ------
   11100
```

Subtraktion

Wieder schreibt man die beiden Zahlen untereinander. Die ersten beiden Einsen führen unten zu 0. Dann muss man 1+x=10 lösen. Es ist 1+1=10. Man schreibt 1 hin und vermerkt den Übertrag 1. Die gleiche Überlegung erfordern die nächsten beiden Spalten.

```
100011·111
----------
 100011
  100011
   100011
----------
 11110101
```

Multiplikation

Nach dem üblichen Verfahren schreibt man die Faktoren nebeneinander und beginnt mit der Viererstelle ("Hunderter"): 100011 *1=100011.
Dann folgt die gleiche Zeile noch zweimal, wird aber nach rechts verschoben. Die spaltenweise Addition schließt sich an.

```
100011:111=101
 111
------
000111
   111
   ---
     0
```

Division

Die erste Division ist 1000:111="1". Die zweite Zeile heißt dann 111. Die Differenz ist 1. Holt man die nächste 1 herunter, so ist 11:111 nicht möglich. Also steht oben rechts die Zahl 0. Die nächste Stelle, die man herunterholt, führt zu 111:111=1. Also ist 101 der gesuchte Quotient.

Dualbruch

Unter einem Dualbruch versteht man die Darstellung einer gebrochenen Zahl z/n, mit $0 < z/n < 1$, im Dualsystem.
Da die Basis 2 des Dualsystems nur dem Primteiler 2 besitzt, sind ausschließlich die Brüche mit einer Zweierpotenz als Nenner endlich. Alle anderen Brüche sind periodisch, zum Beispiel

1/3 = $[0{,}01$, Periode $01]_2$
1/5 = $[0{,}0011$, Periode $0011]_2$
1/6 = $[0{,}001$, Periode $01]_2$
1/7 = $[0{,}001$, Periode $001]_2$

Das nachfolgende, einfache Programm berechnet die Ziffern des Dualbruchs. Die Stellenzahl n ist dabei unbeschränkt.

Eingabe: Stellenzahl s
Bruch z/n

```
Programm:   x1:= z/n;
        for i:=1 to s do begin
        if x1<1/2 then begin write('0'); x1:=2*x1;
        end else begin y[i]:=1; x1:=2*x1-1; end;
        end;
```

Zweierkomplement, Einerkomplement

Berechnung des Zweierkomplements einer Zahl

Das Zweierkomplement erhält man, indem man das Einerkomplement bildet und anschließend 1 addiert.
Das Einerkomplement erhält man durch bitweises Vertauschen der Werte 0 und 1.

Beispiel: Zweierkomplementdarstellung von -6
Die Binärdarstellung von +6 ist 0110_2. Das Einerkomplement ist nun 1001_2. Mit der Addition von 1 wird dann für die Zweierkomplementdarstellung der Zahl -6
1010_2

Addition von Zweierkomplementzahlen

Da das Bilden des Negativen einer Zahl einfach ist, kann die Subtraktion auf eine Negation mit anschließender Addition zurückgeführt werden.
Zur Berechnung von 2 - 6, wird die Addition 2 + (-6) ausgeführt.

0010 || = 2_{10}

+ 1010 || Zweierkomplement von -6_{10}

Ergebnis 1100

Das erste Bit (1xxx) zeigt, dass das Ergebnis negativ ist. Den Betrag erhält man, indem das Zweierkomplement gebildet wird.

Einerkomplement von 1100 = 0011

Zweierkomplement … 0011 + 0001 = $0100_2 = 4_{10}$

Mit der Vorzeicheninformation wird als Ergebnis der Rechnung -4_{10}

Negabinäre Darstellung

Die binäre Darstellung einer Dezimalzahl z ist die Faktorfolge der $f_i \in [0, 1]$ mit

$$z = \ldots + f_m 2^m + f_{m-1} 2^{m-1} + \ldots + f_2 2^2 + f_1 2^1 + f_0 2^0$$

d.h. die zugehörige Dualzahl.

Unter der negabinären Darstellung versteht man nun die endliche Summe, bei der die Basis 2 durch -2 ersetzt wird. Damit sind alle Summanden mit ungeradem Index negativ.

Zum Beispiel ergibt sich

$$2010 = [1100000101110]_{-2} = (-2)^{12} + (-2)^{11} + (-2)^5 + (-2)^3 + (-2)^2 + (-2)^1$$

Zahlen, die die gleiche binäre und negabinäre Darstellung haben, gehören zur Moser-de Bruijn-Folge:

0, 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21, 64, 65, 68, 69, 80, 81, …

Zur Umwandlung einer Dualzahl in die Negabinärzahl addiert man, nach Schroeppel, die Dualzahl …1010101010 und bildet ziffernweise die XOR-Verknüpfung mit …1010101010.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Karte 1

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

Karte 3

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Karte 2

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

Karte 4

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Karte 5

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Karte 6

Binärkartenspiel

Eine einfache Anwendung des Dual- bzw. Binärsystems ist das als Binärkartenspiel (engl. Binary Card Game) bezeichnete Problem.

Auf sechs Karten sind jeweils 32 natürliche Zahlen von 1 bis 63 notiert. Aufgabe ist es, alle die Karten auszuwählen, auf der eine gedachte Zahl von 1 bis 63 notiert ist.

Die gedachte Zahl ergibt sich, indem man die ersten Zahlen der gewählten Karten addiert.

Zum Beispiel ergibt sich für die natürliche Zahl 39 die Dualzahl 100111 = 25 + 2² + 21 + 20 = 32 + 4 + 2 + 1. Auf Grund der Dualdarstellung ist die Zahl 39 auf den Karten mit den ersten Zahlen 1, 2, 4 und 32 notiert.

Ein analoges Spiel, das Ternärkartenspiel, ergibt sich, wenn Karten auf der Basis des Ternärsystems verwendet werden.

Ternärsytem

Das Ternärsystem, auch Dreiersystem genannt, ist ein Stellenwertsystem zur Basis 3. Es kommt in zwei Arten vor, als gewöhnliches Ternärsystem mit den Ziffern 0, 1 und 2 sowie als balanciertes Ternärsystem mit den Ziffern 0, 1 und -1.

Eine ternäre Ziffer wird, in Analogie zum Bit, als Trit bezeichnet. 1958 wurde in der Sowjetunion der Setun-Computer entwickelt, der mit ternären Zahlen rechnete.

Gewöhnliches Ternärsystem

Eine Zahl im gewöhnlichen Ternärsystem wird mit den Ziffern 0, 1, und 2 dargestellt. Falls Verwechslungen auftreten können, wird eine Ternärzahl durch eine angehängte tiefgestellte 3 gekennzeichnet.

Beispiel: $12_3 = 5$

Balanciertes Ternärsystem

Eine Zahl im balancierten Ternärsystem wird mit den Ziffern 0, 1, und -1 dargestellt. Die Ziffer -1 wird hier durch Überstreichen $\overline{1}$ dargestellt. Mitunter wird die 1 auch unterstrichen bzw. vertikal gespiegelt. Falls Verwechslungen auftreten können, wird eine balancierte Ternärzahl durch ein angehängtes tiefgestelltes "3bal" gekennzeichnet.

Beispiel: $1\bar{1}\bar{1}_{3bal} = 5$
Im balancierten Ternärsystem benötigt man keine Vorzeichen. Um zur negativen Zahl überzugehen, vertauscht man alle Ziffern 1 mit $\bar{1}$ und umgekehrt.
Beispiel: $\bar{1}11_{3bal} = -5$

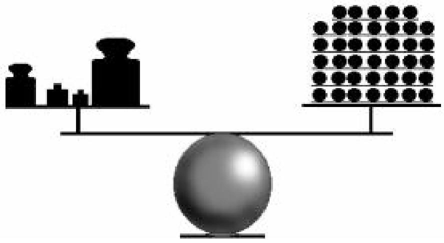
Ternäre Darstellung

Jede natürliche Zahl kann aus dem Dezimalsystem in ein Positionssystem zur Basis 3 transformiert werden
So findet man für die Dezimalzahl 143 im Dreiersystem 12022, für 38 die Darstellung 1102, was $38 = 1*3^3+1*3^2+0*3^1+2*3^0$ bedeutet.
Ersetzt man nun in der Ziffernfolge des Dreiersystems von rechts nach links jede 2 durch -1 und erhöht die links davon stehende Ziffer um einen Wert (0 wird zu 1, 1 wird zu 2, 2 wird zu 0 mit erneutem Übertrag), so kann jede Zahl als Summe von Dreierpotenzen mit den Faktoren -1, 0 und 1 geschrieben werden.
Für die Beispiele wird $38 = 3^3+3^2+3^1-3^0$ und $143 = 3^5-3^4-3^3+3^2-3^0$.
Da bei dieser Darstellungsform, der ternären Darstellung einer Zahl, jede natürliche Zahl bis 40 nur mit den Potenzen 3^0 bis 3^3 geschrieben werden kann, ergibt sich, das mit Massestücken 1g (3^0), 3g, 9g und 27g jede beliebige Masse von 1g bis 40g gewogen werden kann. Benutzt man zusätzlich noch ein Massestück von 81g, wird der Bereich von 1g bis 121g vollständig abgedeckt.
Soll z.B. eine Masse von 38g gewogen werden, legt man die in der ternären Darstellung $38 = 3^3+3^2+3^1-3^0$ mit dem Faktor 1 versehenen Massestücke auf die andere Waagschale, die mit dem Faktor -1 zur zu wiegenden Masse. Dann ergibt sich 27g + 9g + 3g = 39g und auf der anderen Seite der Waage 38g + 1g, also Gleichgewicht.
Anmerkung: Erstmals wurde ein exakter Nachweis 1748 durch Leonhard Euler im §330 von "Introductio in Analysin Inifitorium" gegeben. Der beschriebene Wägesatz ist auch unter dem Namen „Wägesatz von Bachet de Méziriac" bekannt.

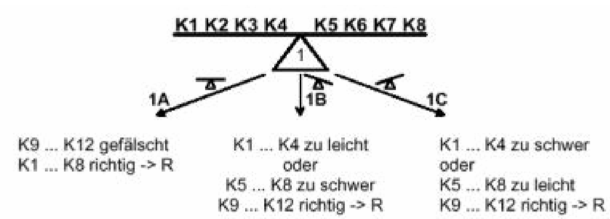
Tabelle der ersten Ternärzahlen

Dezimal	Ternär	Dezimal	Ternär	Dezimal	Ternär
1	1	2	2	3	10
4	11	5	12	6	20
7	21	8	22	9	100
10	101	11	102	12	110
13	111	14	112	15	120
16	121	17	122	18	200
19	201	20	202		

Kugelproblem

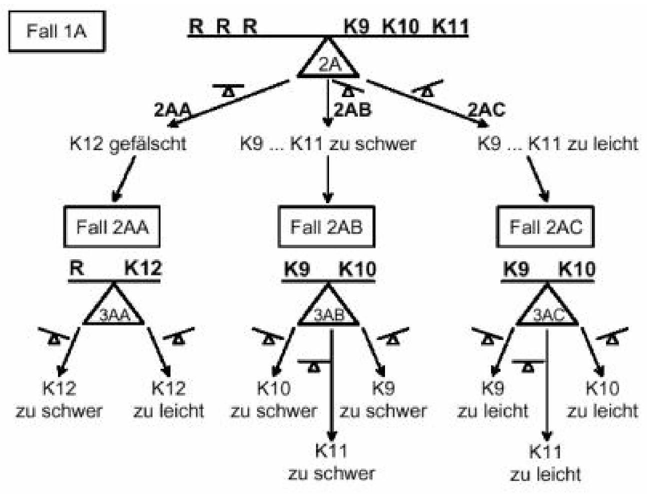


Klassisches Problem: Gegeben sind 12 Kugeln, von denen eine leichter oder schwerer als die anderen 11 ist. Es ist nicht bekannt, ob die Kugel leichter ist. Mit nur 3(!) Wägungen ist die abweichende Kugel zu ermitteln und außerdem die Art der Abweichung festzustellen.

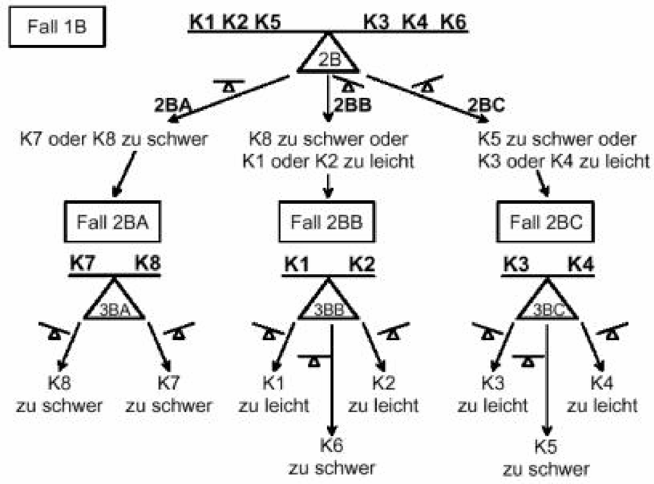


Strategie:
Die Auswahl der Kugel ist so durchzuführen, dass die Wägungen für die drei Fälle (links zu schwer, gleichschwer, rechts zu schwer) möglichst dieselbe Wahrscheinlichkeit von p = 1/3 bzw. die gleiche Häufigkeit haben.
Es werden zuerst je vier Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4 links und K_5, K_6, K_7, K_8 rechts auf der Balkenwaage verglichen:
Alle drei Wägeresultate haben diesselbe Wahrscheinlichkeit 1/3. Die restlichen Kugeln werden in der ersten Wägung nicht verwendet und seien K_9, K_{10}, K_{11} und K_{12}.
Das Ergebnis der ersten Wägung ist dargestellt.
Fall 1: bei Gleicheit befindet sich die gezinkte Kugel in der dritten Gruppe K_9 bis K_{12}. Die ersten acht Kugeln dienen als Referenzkugeln R.
Fall 2: bei Ungleichheit der Messung ist die falsche Kugel entweder aus $K_1...K_4$ mit der Aussage zu leicht oder zu schwer bzw. aus $K_5...K_8$ mit der entsprechenden Aussage.

Fall A: l = r: eine der Kugeln K_9...K_{12} weicht ab
2.Wägung: 3 echte und drei unbekannte Kugeln K_9, K_{10}, K_{11} der dritten Gruppe:
Fall 2AA: = | = die Kugel K_{12} ist die abweichende und mit der letzten Wägung mit einer beliebigen Kugel K_1...K_{11} zu untersuchen
Fall 2AB und 2AC: die Waage zeigt, dass die gefälschte Kugel K_9, K_{10} oder K_{11} zu leicht oder zu schwer ist. Welche abweicht ergibt die



3.Wägung: je 1 echte und eine gefälschte Kugel K_9 und K_{10} vergleichen:
Wenn die 2.Wägung "zu schwer" ergab, so sagt die 3.Wägung "links zu schwer", dass K_9 zu schwer ist, "rechts zu schwer", dass K_{10} zu schwer ist. Bei Gleichheit ist K_{11} zu schwer.
Der Fall 2.Wägung "zu leicht" ergibt sich analog.
Fall B: 1.Wägung ergab "links leichter":



Dies bedeutet, dass entweder eine von K_1...K_4 leichter oder eine von K_5...K_8 schwerer ist.
2.Wägung: 3 Kugel K_1, K_2, K_5 mit 3 Kugeln K_3, K_4, K_6 vergleichen:
Fall 2.1 Gleichheit: Die Kugel K_7 oder K_8 ist zu schwer. Die dritte Wägung von K_7 und K_8 gibt das Ergebnis.
Fall 2.2 links leichter: Die Kugel K_1 oder K_2 ist zu leicht oder die Kugel K_6 ist zu schwer. Die dritte Wägung mit K_1 und K_2 ergibt die zu leichte Kugel oder bei Gleichheit, dass K_6 zu schwer ist.
Fall 2.3 rechts leichter: Die Kugel K_3 oder K_4 ist zu leicht oder die Kugel K_5 zu schwer.
Analog weiter wie bei Fall 2.2

Fünfersystem

Das Zweiersystem benötigt zur Darstellung einer Zahl nur zwei Ziffern. Im Fünfersystem kommt man mit den Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4 aus. Das Fünfersystem hat die Stufenzahlen 5, $5^2=25$, $5^3=125$,..., die zu folgender Tabelle führen.

3125	625	125	25	5	1
1	4	4	1	2	3

Die Zahl 144123 ist eingetragen. Man liest ab:
$(144123)_5=\mathbf{1}*3125+\mathbf{4}*625+\mathbf{4}*125+\mathbf{1}*25+\mathbf{2}*5+\mathbf{3}=6163$.

Tabelle der ersten Zahlen im Fünfersystem

Dezimal 5er-System

1	1	2	2	3	3	4	4
5	10	6	11	7	12	8	13
9	14	10	20	11	21	12	22
13	23	14	24	15	30	16	31
17	32	18	33	19	34	20	40

Oktalsystem
... Positionssystem auf der Basis der 8

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	10	11	12	13	14	15	16	17
2	20	21	22	23	24	25	26	27
3	30	31	32	33	34	35	36	37
4	40	41	42	43	44	45	46	47
5	50	51	52	53	54	55	56	57
6	60	61	62	63	64	65	66	67
7	70	71	72	73	74	75	76	77

Duodezimalsystem
... Positionssystem auf der Basis der 12
1944 wurde in den USA die Duodezimal-Gesellschaft gegründet, mit dem Ziel, das öffentliche Rechnungswesen und die mathematische Ausbildung zu untersuchen mit besonderer Berücksichtigung der Basis Zwölf beim Zählen, in der Mathematik, bei Maßen und Gewichten und in allen anderen Sparten der reinen und angewandten Naturwissenschaft.
Sie schlug vor, den Buchstaben X für die Ziffer 10 und den Buchstaben E für die Ziffer 11 zu verwenden. Jeder könne in einer halben Stunde lernen mit Dutzenden zu zählen. Sie vertrat die Auffassung, die Bezeichnungen Dezimalkomma und -punkt seien, wenn es um andere Basen als Zehn ginge, vollkommen unangebracht. Trotz des Enthusiasmus wurde nie ein Ansatz zur Einführung des Duodezimalsystems gemacht.

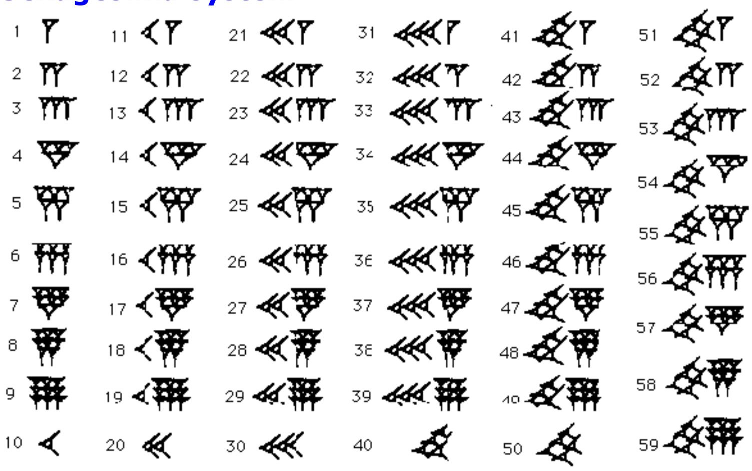
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
3	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
4	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
5	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
6	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
7	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
8	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107
9	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
A	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131
B	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143

Hexadezimalsystem

Grundziffern ... 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
Stellenwert ... Potenzen von 16
Darstellungsform $h_m h_{m-1} \ldots h_1 h_0 \, , \, h_{-1} h_{-2} \ldots$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
2	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
3	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
4	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
5	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
6	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111
7	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127
8	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143
9	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
A	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175
B	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191
C	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207
D	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223
E	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239
F	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255

Sexagesimalsystem



Zahlsystem zur Basis 60 ; vor etwa 5000 Jahren zuerst von den Sumerern eingeführt
Wahrscheinliche Ursachen für die Verwendung der 60 als Grundzahl:
1. für die viel verwendeten Bruchteile 1/2, 1/3 und 2/3 wird man runde, ganze Vielfache der kleineren Einheit zu erhalten suchen
2. die Umwandlungszahl soll sich möglichst an das schon in geringem Umfang ausgebaute Zehnersystem anschließen
3. für alle Anwendungsgebiete (Massen, Längen, Flächen, ...) soll möglichst die gleiche Umwandlungszahl gelten bzw. ein kleiner Bruchteil dieser Zahl

Abbildung: Zahldarstellung der Sumerer im Sechzigersystem

Eine günstige Zahl war die 60, da sie zugleich eine runde Zahl für die Anzahl der Tages eines Jahres ergab. Das Jahr wurde zu 360 Tagen und fünf oder sechs Festtagen angesetzt.
Beispiele: Gewichtsmaße und damit zugleich Geldmaße, die bestimmte Gewichte von Silber nutzten:
60 Sekel (1 Sekel etwa 9,5 g) = 1 Mine ; 60 Minen = 1 Talent
Längenmaße 60 Gar (1 Gar etwa 6 m) = 1 us-gis ; 30 Fingerbreiten = 1 Elle = 1/12 Gar
Flächenmaße 60 Sekel = 1 Sar
Flächenmaße waren ursprünglich Saatmaße, d.h. die Flächengröße wird durch die zu seiner Bestellung nötige Getreidemenge bestimmt, und deshalb wie die Gewichtsmaße mit "Sekel" bezeichnet. Im Laufe der Zeit wurde bei den Sumerern das Sexagesimalsystem auf das ganze Zahlensystem ausgedehnt. Überreste finden wir heute noch in den Winkel- und Zeitmaßen.

Sexagesimalsystem (2)

Der Übergang zur Sechziger-Zählung durch die Sumerer war eine leistungsfähige Idee, dass sich diese über Indien bis nach China für lange Zeit durchsetzte. Auch griechische Astronomen benutzten das Sexagesimalsystem später in abgewandelter Form. Selbst die heute

gebräuchlichen Zeit- und Winkel-Einteilungen gehen auf diese Kulturleistung zurück, ebenfalls die gebräuchlichen Packmaße: das Dutzend (12), das Schock (60) und das Gros (12×12).
Diese Untergliederung betrifft sowohl die gehandelten Mengen als auch das Geldwesen und findet sich z.B. aktuell in den 60 Sternzacken einiger Euro-Münzen wieder.

Die Zahl 60 scheint eine natürliche Obergrenze für reguläre Gruppierungen zu sein. Alle Versuche, den Ursprung des 60er Systems als ein 6×10-er System herzuleiten, scheiterten ebenso wie die haltlose Idee einer Verschmelzung zweier hypothetischer Kulturen: einer mit einem 10-er- und einer anderen mit einem 6-er-System.

Im Tennis geschieht die Punktezählung eines Spiels noch heute in Viertelschritten im Sexagesimalsystem: 15 - 30 - 40 - 60 (Spiel), wobei man die Extra-Silben 'fünf-und-' der Zahl 45 irgendwann einfach hat entfallen lassen.
Der letzte Tribut an die Leistung der Sumerer war die Unterteilung des Wechselstroms in den USA durch Nikola Tesla in 60 Schwingungen pro Sekunde, womit die sexagesimale Unterteilung der Zeit ihre konsequente Fortsetzung fand.
Die Europäer haben es anders gesehen und sich mit 50 Hertz begnügt.

Unärsystem

Das Unärsystem ist ein Additionssystem, das lediglich ein Symbol mit der Wertigkeit 1 besitzt. Jeder Einer wird durch einen variablen Gegenstand repräsentiert, üblicherweise durch einen senkrechten Strich:

$$[8]_{10} = [||||||||]_{\text{unär}}$$

Das Unärsystem ist für einfache Zählaufgaben geeignet, da das Erhöhen einer Zahl um 1 durch einfaches Anhängen eines weiteren Symbols geschieht.
Anwendung findet es zum Beispiel als Strichliste, bei der oft zur besseren Lesbarkeit jeder fünfte Strich quer durch die vier vorherigen gezogen wird. Die entstehende Zahl ist so in Fünferblöcke gruppiert dargestellt und damit leichter überschaubar.
Daneben wird das Unärsystem gelegentlich in der Informatik, insbesondere in der theoretischen Informatik verwendet, z.B. als eine Möglichkeit der Darstellung von Zahlen auf dem Band einer Turingmaschine.

Die Zahl Null ist in einem Unärsystem nicht explizit darstellbar, da es kein entsprechendes Symbol gibt.
Die Verwendung eines unären Systems findet man zum Beispiel in Daniel Defoes "Robinson Crusoe" ("The life and strange surprising adventure of Robinson Crusoe of York, Mariner" 1719). Dort heißt es:

"I cut every day a notch with my knife, and every seventh notch was as long again as the rest, and every first day of the month as long again as that long one;
and thus I kept my calendar, or weekly, monthly, and yearly reckoning of time."

Robinson schnitt also senkrechte Markierungen in einen Stock, um so die Tage auf der Insel zu zählen. Allerdings kennzeichnete er jeden siebten Tag (Wochenanfang) und jeden Monats- und Jahresanfang extra.

Weitere Positionssysteme

Eine Zahl kann prinzipiell in jedem anderen Positionssystem als dem Dezimalsystem dargestellt werden. Die Tabelle enthält das Beispiel „143":

Dezimalsystem	143				
Einhundertdreiundvierzig		Hexadezimalsystem	8F		
Dualsystem	10001111	Ternärsystem	12022	Oktalsystem	217
BCD-Format	0001 0100 0011		Römische Zahldarstellung	CXLIII	
System zur Basis 4		2033	System zur Basis 5		1033
System zur Basis 6		355	System zur Basis 7		263
System zur Basis 9		168	System zur Basis 11		120
System zur Basis 12		BB	System zur Basis 13		B0

System zur Basis 14	A3	System zur Basis 15	98
System zur Basis 17	87	System zur Basis 18	7H
System zur Basis 19	7A	System zur Basis 20	73
System zur Basis 21	6H	System zur Basis 22	6B
System zur Basis 23	65	System zur Basis 24	5N
System zur Basis 25	5I	System zur Basis 26	5D
System zur Basis 27	58	ystem zur Basis 28	53
System zur Basis 29	4R	System zur Basis 30	4N
System zur Basis 31	4J	System zur Basis 32	4F
System zur Basis 33	4B	System zur Basis 34	47
System zur Basis 35	43	System zur Basis 36	3Z

Behauptung: Es gibt nur eine neunstellige Zahl, bei der jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal vorkommt, und bei der die Zahl aus ihrer ersten und zweiten Ziffer, die Zahl aus ihrer zweiten und dritten Ziffer, ... und die Zahl aus ihrer achten und neunten Ziffer alle ein Ergebnis des kleinen Einmaleins darstellen. Welche Zahl ist das?

Lösung:

Es gibt kein Ergebnis des kleinen Einmaleins, das mit 9 anfängt. Also muss die 9 ganz hinten stehen. Davor geht es nur mit der 4 (49 = 7 * 7). Auf die 7 kann nur die 2 folgen (72 = 9 * 8). Vor der 7 kann aber auch nur die 2 stehen (27 = 3 * 9). Also muss die 7 ganz vorne stehen. Auf die 8 kann nur die 1 folgen (81 = 9 * 9). Vor der 8 kann dann nur noch die 2 stehen, weil die 1 und die 4 schon verwendet wurden. Also steht die 8 auf Platz 3 und die 1 auf Platz 4. Die 3 kann weder auf die 1 folgen, noch kann sie vor der 4 stehen. Also muss sie auf Platz 6. Vor der 3 auf Platz 5 passt nur die 6. Dann bleibt für die 5 nur Platz 7 und dort passt sie tatsächlich. Damit gibt es nur diese eine Lösung: **728163549**

In anderen Zahlensystemen gibt es entsprechende Lösungen:

03er-Zahlensystem: – 04er-Zahlensystem: – 05er-Zahlensystem: –
06er-Zahlensystem: – 07er-Zahlensystem: **513426** 08er-Zahlensystem: **5243617**
09er-Zahlensystem: **54627138**, **71546238** und **46271538**
10er-Zahlensystem: **728163549**
11er-Zahlensystem: **739158264A**
Danach explodiert die Anzahl der Lösungen. Im Duodezimalsystem gibt es elf und im 13er-Zahlensystemystem schon 51 Lösungen.

Vergleich von Zahlensystemen

Im täglichen Leben verwenden wir das Dezimalsystem. Die Frage ist, ob das Dezimalsystem gegenüber anderen Positionssystemen Vorteile besitzt. Die folgenden Kriterien erscheinen für geeignete Zahlensysteme sinnvoll:

1. Die Anzahl der Ziffern des Zahlensystems sollte nicht größer sein als etwa die Anzahl der Buchstaben des Alphabets, damit man sich nicht so viele Ziffern merken muss: Geignete Zahlensysteme sollten also höchstens die Basis 30 haben.
2. Das kleine Einmaleins der Zahlensysteme sollte nicht mehr Multiplikationen haben als das große Einmaleins (1 * 1 bis 20 * 20) des Dezimalsystems, damit das schriftliche Multiplizieren für einen Menschen mit durchschnittlichem Gedächtnis noch möglich ist:
Geignete Zahlensysteme sollten also höchstens die Basis 20 haben.
3. Die Zahlendarstellung sollte nicht mehr als doppelt so lang sein wie im Dezimalsystem, damit man nicht so viele Ziffern schreiben muss. Im Binärsystem und im 3er-System haben die Zahlen im Durchschnitt mehr als die doppelte Darstellungslänge des Dezimalsystems. Erst das 4er-System hat eine weniger als doppelt so lange Zahlendarstellung: Geignete Zahlensysteme sollten also mindestens die Basis 4 haben.
4. Es sollte einfache Teilbarkeitsregeln lückenlos für möglichst viele Zahlen ab 2 geben.
Einfache Teilbarkeitsregeln sind solche, bei denen man von der zu untersuchenden Zahl entweder nur die letzte Ziffer (Z), die beiden letzten Ziffern (ZZ) oder die Quersumme (Q) prüfen muss.
Die folgenden Tabelle zeigt, welche der erwähnten Teilbarkeitsregeln für welche Zahlen der Zahlensysteme mit einer Basis zwischen 4 und 20 angewendet werden können:

	teilbar durch												
Basis	2	3	4	5	6	7		2	3	4	5	6	7
4	Z	Q	Z	–	ZQ	–	5	Q	–	Q	Z	–	–
6	Z	Z	ZZ	Q	Z	–	7	Q	Q	–	–	Q	Z
8	Z	–	Z	–	–	Q	9	Q	Z	Q	–	QZ	–
10	Z	Q	ZZ	Z	ZQ	–	11	Q	–	–	Q	–	–
12	Z	Z	Z	–	Z	–	13	Q	Q	Q	–	–	–
14	Z	–	ZZ	–	–	Z	15	Q	Z	–	Z	–	Q
16	Z	Q	Z	Q	ZQ	–	17	Q	–	Q	–	–	–
18	Z	Z	ZZ	–	Z	–	19	Q	Q	–	–	Q	–
20	Z	–	Z	Z	–	–							

Die einzigen Zahlensysteme mit einer Basis zwischen 4 und 20, die einfache Teilbarkeitsregeln für die Zahlen von 2 bis 6 haben, sind: das 6er-, das 10er- und das 16er-System. Nur das Hexalsystem, das Dezimalsystem und das Hexadezimalsystem erfüllen also alle oben genannten Kriterien und sind somit für den täglichen Gebrauch gut geeignet.
Von den ausgewählten Zahlensystemen kann nur im Hexalsystem die Teilbarkeit durch 2 und 3 mit der einfachsten Teilbarkeitsregel Z geprüft werden. Das bedeutet gleichzeitig, dass man die Brüche 1/2 und 1/3 als Zahlen mit nur einer Nachkommastelle darstellen kann: $1/2 = 0.3_6$ und $1/3 = 0.2_6$.
Soll die Anzahl der Finger des Menschen mit der Basis des benutzten Zahlensystems übereinstimmen, muss man sich für das Dezimalsystem entscheiden. Heute dürften allerdings immer weniger Menschen mit den Fingern zählen, da meistens andere Dinge wie Papier und Bleistift zur Verfügung stehen. Die oben genannte Bedingung hat aber vermutlich die Wahl des Dezimalsystems maßgeblich beeinflusst.

Wenn man ein Geldsystem einführen möchte, dass nur die Werte mit einer von Null verschiedenen Ziffer verwendet (wie z.B. 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, ... im Dezimalsystem), bei dem außerdem alle Potenzen der Basis auftauchen (1, 10, 100, ...) und wobei man außerdem möglichst wenig Münzen und Scheine mitzunehmen braucht, um jeden Geldbetrag bezahlen zu können, funktioniert das nur mit einem 2^ner-Zahlensystem. Dann müsste man sich für das Hexadezimalsystem entscheiden.
Sowohl das Hexalsystem als auch das Duodezimalsystem (12er-System) schneiden gut ab, wenn man nur die einfachste Teilbarkeitsregel (Z) betrachtet. Im Duodezimalsystem kann sie sogar auf die Zahlen 2, 3, 4 und auch auf die 6 angewendet werden. Entsprechend gilt im Duodezimalsystem: 1/2 = 0.6; 1/3 = 0.4; 1/4 = 0.3; 1/6 = 0.2. Das Hexalsystem und das Duodezimalystem können dabei davon profitieren, dass 6 und 12 hochzusammengesetzte Zahlen sind. Das Duodezimalsystem wäre also auch ein geeigneter Kandidat für den täglichen Gebrauch.

Beweis der Quersummenregel im Zahlensystem zur Basis

Darstellung der Zahl z mit den Ziffern $z_k, z_{k-1}, \dots, z_2, z_1, z_0$ im Zahlensystem-Basis n:

$z = z_k\, n^k + z_{k-1}\, n^{k-1} + \dots + z_2\, n^2 + z_1\, n + z_0$

$= z_k\, (n^k - 1) + z_{k-1}\, (n^{k-1} - 1) + \dots + z_2\, (n^2 - 1) + z_1\, (n - 1) + (z_k + z_{k-1} + \dots + z_2 + z_1 + z_0)$ (Quersumme)

$= z_k\, (n - 1)\, (n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n^2 + n + 1) + z_{k-1}\, (n - 1)\, (n^{k-2} + n^{k-3} + \dots + n^2 + n + 1) + \dots + z_2\, (n - 1)\, (n + 1) + z_1\, (n - 1)$ + Quersumme

$= (n - 1)\, (z_k\, (n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n^2 + n + 1) + z_{k-1}\, (n^{k-2} + n^{k-3} + \dots + n^2 + n + 1) + \dots + z_2\, (n + 1) + z_1)$ + Quersumme

Man erkennt, dass sich jede Zahl als Summe eines Vielfachen von n − 1 und der Quersumme aufspalten lässt. Ist also im Zahlensystem der Basis n die Quersumme einer Zahl z durch n − 1 teilbar, dann ist auch z selbst durch n − 1 teilbar. Ebenso ist z genau dann durch jeden Teiler von n − 1 teilbar, wenn die Quersumme durch diesen Teiler teilbar ist. Beispielsweise kann die Quersummenregel im Hexadezimalsystem für die Zahlen 3, 5 und 15 verwendet werden.

Beweis der alternierenden Quersummenregel im n-er-Zahlensystem

Darstellung der Zahl z mit den Ziffern $z_k, z_{k-1}, \dots, z_2, z_1, z_0$ im n-er-Zahlensystem:

$z = z_k\, n^k + z_{k-1}\, n^{k-1} + \dots + z_2\, n^2 + z_1\, n + z_0$

$= z_k\, (n^k - 1) + z_{k-1}\, (n^{k-1} + 1) + \dots + z_2\, (n^2 - 1) + z_1\, (n + 1) + (z_k - z_{k-1} + \dots + z_2 - z_1 + z_0)$ (alternierende Quersumme)

$= z_k\, (n + 1)\, (n^{k-1} - n^{k-2} + \dots - n^2 + n - 1) + z_{k-1}\, (n + 1)\, (n^{k-2} - n^{k-3} + \dots + n^2 - n + 1)$

$+ \ldots + z_2 (n + 1) (n - 1) + z_1 (n + 1) +$ alternierende Quersumme
$= (n + 1) (z_k (n^{k-1} - n^{k-2} + \ldots - n^2 + n - 1) + z_{k-1} (n^{k-2} - n^{k-3} + \ldots + n^2 - n + 1) + \ldots + z_2 (n - 1) + z_1) +$ alternierende Quersumme

Man erkennt, dass sich jede Zahl als Summe eines Vielfachen von n + 1 und der alternierenden Quersumme aufspalten lässt. Ist also im n-er-Zahlensystem die alternierende Quersumme einer Zahl z durch n + 1 teilbar, dann ist auch z selbst durch n + 1 teilbar. Ebenso ist z genau dann durch jeden Teiler von n + 1 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch diesen Teiler teilbar ist. Beispielsweise kann die alternierende Quersummenregel im Hexadezimalsystem nur für die Zahl 17 verwendet werden. Für den Beweis wurde eine ungerade Anzahl von Ziffern vorausgesetzt. Wenn die Anzahl der Ziffern gerade ist, müssen nur einige Vorzeichen am Ende einiger Summandenreihen ausgetauscht werden.

Fakultätsdarstellung

Eine weitere Möglichkeit, Zahlen in einer anderen Form darzustellen, besteht in der Zerlegung in eine Summe von Vielfachen von Fakultäten. Zum Beispiel ergibt sich

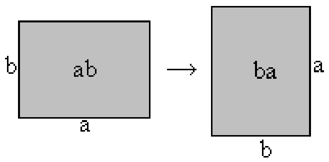
$2000 = (2*6!) + (4*5!) + (3*4!) + (1*3!) + (1*2!) + (0*1!) = 2*720 + 4*120 + 3*24 + 1*6 + 1*2$

Damit ist die Fakultätsdarstellung für 2000 = 243110ƒ. Das Zeichen ƒ kennzeichnet diese Darstellungsart. Um eine eindeutige Darstellung zu gewährleisten, fordert man noch, dass die Koeffizienten einer höheren Fakultät größtmöglich ist.

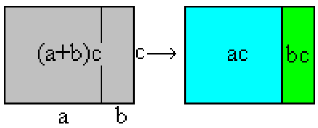
2	10ƒ = 1·2! +0·1!	6	100ƒ = 1·3! +0·2! +0·1!
10	120ƒ = 1·3! +2·2! +0·1!	20	310ƒ = 3·3! +1·2! +0·1!
50	2010ƒ = 2·4! +0·3! +1·2! +0·1!	100	4020ƒ = 4·4! +0·3! +2·2! +0·1!
200	13110ƒ = 1·5! +3·4! +1·3! +1·2! +0·1!		
400	31220ƒ = 3·5! +1·4! +2·3! +2·2! +0·1!		
500	40310ƒ = 4·5! +0·4! +3·3! +1·2! +0·1!		
1000	121220ƒ = 1·6! +2·5! +1·4! +2·3! +2·2! +0·1!		

Mathematische Gleichungen im Bild

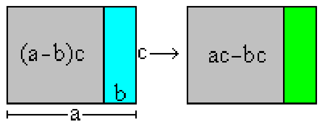
Gleichungen sind Aussageformen der Algebra, die für Zahlen einer Definitionsmenge zu richtigen Aussagen werden. Bis auf die Axiome können sie bewiesen werden. Beweisen heißt, aus bekannten Formeln neue Formeln durch logisches Schließen herzuleiten.
Die Beweisideen und auch die Beweisgänge können anschaulich durch Bilder dargestellt werden.



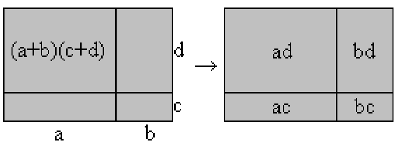
Kommutativgesetz der Multiplikation
ab = ba



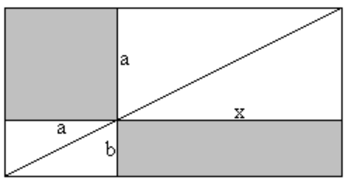
Distributivgesetz
(a+b)c = ac+bc



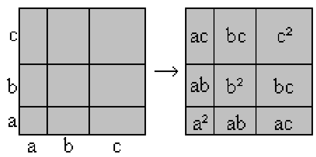
Produkt aus einer Differenz und einer Zahl
(a-b)c = ac-bc



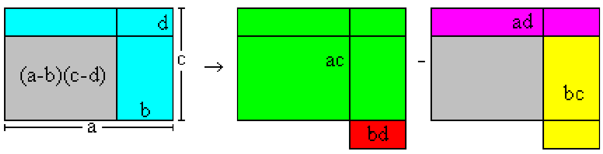
Produkt zweier Summen
(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd



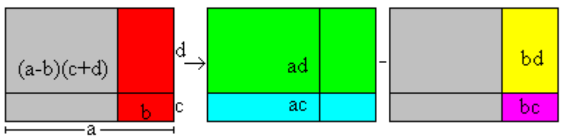
Flächengleiche Ergänzungsparallelogramme
a² = bx



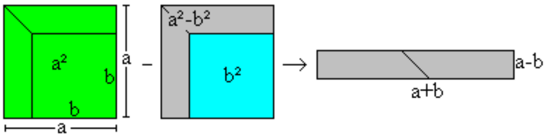
Trinomische Formel
(a+b+c)² =
a²+b²+c²+2ab+2ac+2bc



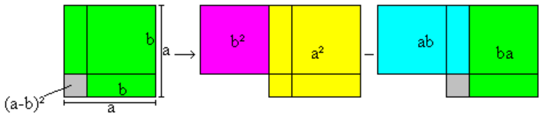
Produkt zweier Differenzen (a-b)(c-d)
= ac+bd -ad-bc



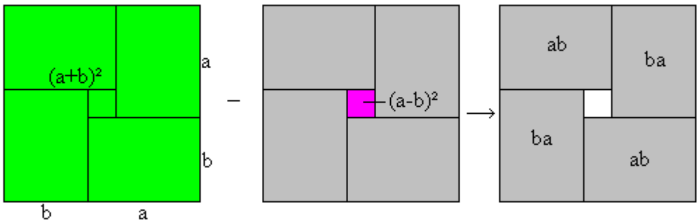
Produkt aus einer Summe und einer Differenz
(a-b)(c+d) = ac+ad -bc-bd



Dritte binomische Formel $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$



Zweite binomische Formel $(a-b)^2 = b^2+a^2 - 2ab$



Differenz der Quadrate aus Summe und Differenz
$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$

Ungelöste mathematische Probleme

Gegenwärtig existieren eine Vielzahl ungelöster mathematischer Probleme. Zu den wichtigsten bzw. bekanntesten gehören:

1. Nachweis die Riemannschen Hypothese
2. Nachweis der Goldbachschen Vermutung
3. Nachweis der unendlichen Anzahl von Primzahlzwillingen
4. die Rückführung von NP-Problemen auf P-Probleme
5. die Collatz-Folge
6. Nachweis der Unlösbarkeit des 196-Algorithmus
7. Nachweis der Zahlen, die als Summe von drei oder mehr Kubikzahlen dargestellt werden können
8. Beweis, dass die Euler-Mascheroni-Konstante irrational ist
9. Suche nach ungeraden vollkommenen Zahlen
10. Catalansche Vermutung usw...

Durch das Clay Mathematics Institute von Cambridge, Massachusetts, wurde für den Nachweis der Riemannschen Vermutung ein Preis von 1 Million Dollar ausgesetzt.
Weitere offene Fragen wurden schon 1900 von David Hilbert aufgestellt, die allgemein als Hilbertsche Probleme bekannt wurden.

Forschungsergebnisse

Der Programmautor beteiligt sich seit Jahren an der intensiven Suche nach verschiedenen besonderen Zahlenarten. Der aktuelle Stand der gefundenen Ergebnisse:

Größte Primzahl, größte Prothsche Primzahl	$400719 \cdot 2^{121061}+1$ … (36449 Ziffern, 19.11.2002)
Größte prime Kerstin-Zahl	$14^{24468} + 8^{24468} + 3^{24468}$ … (28044 Ziffern,30.5.2008)
Größte Primzahl der Form $m^n + n$	$99^{10042}+10042$ … (20041 Ziffern, 27.6.2011)
Größte Palindrom-Primzahl	$10^{(2 \cdot 7820)}+3 \cdot 10^{7280}+1$ … (15641 Ziffern, 12.2.2002)
Größte verallgemeinerte Cullen-Primzahl	$12509 \cdot 14^{12509}+1$ … (14342 Ziffern, 2.7.2001)
Größte verallgemeinerte Woodall-Primzahl	$8281 \cdot 108^{8281}-1$ … (16843 Ziffern, 27.1.2016)
Größte Primzahl der Form 1000…000z	$10^{10470} + 3$ … (10471 Ziffern, 27.11.2005)
Größte verallgemeinerte Repunit-Primzahl	$(178^{4523}-1)/177$ … (10177 Ziffern, 15.4.2014)
Größter Primzahlzwilling	$51315 \cdot 2^{32430}-1$, $51315 \cdot 2^{32430}+1$ … (9768 Ziffern, 22.8.2008)
Größte Cunningham-Reihe 2.Art	$326565 \cdot 2^{31720}+1$, $326565 \cdot 2^{31721}+1$ … (9555 Ziffern, 16.1.2007)
Größte Primzahl der Form $n^m + m^n$	$70^{5041}+5041^{70}$ … (9302 Ziffern, 20.8.2013)
Größte Compositorial-Primzahl	2532! / 2532# - 1 … (6453 Ziffern, 25.2.2012)
Größte Sophie-Germain-Primzahl	$433377 \cdot 2^{8901}-1$, $433377 \cdot 2^{8902}-1$ … (2686 Ziffern)
Größter Primzahlvierling	$10^{291} + 38618869111 + 0,2,6,8$ … (292 Ziffern)