Geometrie

"Die Geometrie ist vor der Erschaffung der Dinge, gleich ewig wie der Geist Gottes selbst und hat in ihm die Urbilder für die Erschaffung der Welt geliefert."
Johannes Kepler, Harmonice Mundi, 1619

griech. = Erdmessung
Gebiet der Mathematik, das die gestaltlichen Gesetzmäßigkeiten und Größenbeziehungen an und zwischen Linien, Flächen und Körpern behandelt.
Je nachdem, ob metrische Beziehungen (Länge, Winkelgrößen, Flächen- oder Rauminhalte) benutzt werden oder ob nur die gegenseitige Lage der Gebilde betrachtet wird, spricht man von metrischer Geometrie oder von Geometrie der Lage (projektiver Geometrie).
Metrische Geometrien: Euklidische Geometrie
Bólyai-Lobatschewskische (hyperbolische) Geometrie
Riemannsche (elliptische) Geometrie
Allgemein beschreibt die Geometrie eine Menge von Punkten ohne spezifische Struktur. Eine Unterscheidung kann aufgrund der lokalen Dimensionalität einer Geometrie getroffen werden:
Eine Kurve beschreibt eine Geometrie, die lokal eine eindimensionale Struktur besitzt. Eine Fläche beschreibt eine Geometrie, die lokal eine zweidimensionale Struktur besitzt. Ein Körper bzw. ein Volumen beschreibt eine Geometrie, die lokal eine dreidimensionale Struktur besitzt.

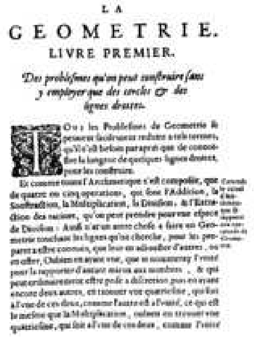

LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.

Abbildung: La Géometrie von René Descartes, 1637

Planimetrie, Stereometrie, Analytische Geometrie
Die Geometrie der ebenen Gebilde heißt Planimetrie, die der körperlichen Gebilde Stereometrie. Die rechnende Geometrie (analytische und Koordinatengeometrie) und die Differenzialgeometrie benutzen Verfahren der Algebra und Analysis.
Unter absoluter Geometrie versteht man alle aus dem Axiomensystem ohne (!) das Parallelenaxion ableitbare geometrische Beziehungen.

Zitate:
Kein der Geometrie Unkundiger trete unter mein Dach. (Plato)
Die Bedeutung der Geometrie beruht nicht auf ihrem praktischen Nutzen, sondern darauf, dass sie ewige und unwandelbare Gegenstände untersucht und danach strebt, die Seele zur Wahrheit zu erheben. (Plato)
Ich weiß, dass ich an der Geometrie das Glück zuerst kennen gelernt habe. (Rudolf Steiner)
Die Geometrie ist vor der Erschaffung der Dinge, gleich ewig wie der Geist Gottes selbst und hat in ihm die Urbilder für die Erschaffung der Welt geliefert. (Johannes Kepler, Harmonice Mundi, 1619)

Abbildung: Allegorische Darstellung der "Geometrie" als Statue vor dem Zeughaus in der Straße "Unter den Linden" in Berlin. Die zugehörige Putte entrollt ein "Pergament", auf dem u.a. der Beweis des Kathetensatzes von Euklid zu finden ist.

Anfänge der Geometrie
Nach dem griechischen Historiker Herodot entstand die Geometrie im alten Ägypten. Er schreibt:

"Dieser König Sesostris habe das Land auch unter alle Bewohner aufgeteilt - so erzählt man - und jedem ein gleich großes, viereckiges Stück gegeben. Die jährliche Abgabe, die er davon erhob, bildete seine Einkünfte.
Riss aber der Strom [der Nil] von einem Ackerstück etwas weg, dann ging sein Besitzer zum König und meldete ihm dies. Der sandte Leute hin, die untersuchen und ausmessen sollten, wieviel kleiner die Fläche geworden war, damit der Besitzer die ursprünglich auferlegte Abgabe nur im Verhältnis zum Rest zu bezahlen brauchte. Mir scheint, dass hierbei die Kunst der Landvermessung erfunden wurde, die dann nach Griechenland kam."

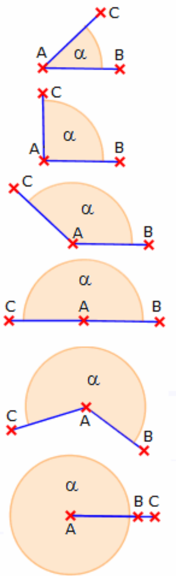
Abbildung: Nil

Winkel, Strahlensatz

Winkel

Ein Winkel ist ein Teil der Ebene, der von zwei in der Ebene liegenden Strahlen, Halbgeraden, mit gemeinsamem Anfangspunkt begrenzt wird, d.h. ein geordnetes Paar zweier von einem Punkt (Scheitel) ausgehender Halbgeraden (Schenkel). Die Größe des Winkels ist der Richtungsunterschied zwischen den beiden Schenkeln.
Ein Winkel entsteht durch Drehung eines Strahls um seinen Anfangspunkt aus einer festen Lage in eine neue Lage. Der Drehsinn wird als mathematisch positiv bezeichnet, wenn die Drehung entgegen der Uhrzeigerdrehung erfolgt, andernfalls als mathematisch negativ, d.h. im Uhrzeigersinn.

$0° < \alpha < 90°$ … spitzer Winkel
$\alpha = 90°$ … rechter Winkel
$90° < \alpha < 180°$ … stumpfer Winkel
$\alpha = 180°$ … gestreckter Winkel
$180° < \alpha < 360°$ … überstumpfer Winkel, erhabener Winkel
$\alpha = 360°$ … Vollwinkel
$\alpha = 0°$ … Nullwinkel



Zur Unterscheidung vom Raumwinkel wird der hier definierte Winkel auch als ebener Winkel bezeichnet.
Ein ungerichteter Winkel wird durch eine vorzeichenlose Winkelweite gekennzeichnet. Der gerichtete Winkel verfügt über eine Orientierung.

Winkelpaare

In geometrische Figuren, an sich schneidenden Geraden, bei Körpern usw. treten oft Paare von Winkeln auf, zwischen denen besondere Beziehungen bestehen. U.a. unterscheidet man:

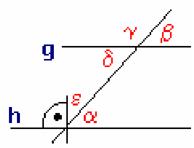
Zwei sich schneidende Geraden g und h ergeben am Schnittpunkt A vier Winkel. In der Darstellung sind β und γ Nebenwinkel, β und δ Scheitelwinkel. α und β sind Stufenwinkel sowie α und δ Wechselwinkel.

Schneiden sich zwei Geraden, so bezeichnet man ein Paar benachbarter Winkel als Nebenwinkel. Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°. Nebenwinkel $\beta + \gamma = 180°$

Zwei Winkel heißen Supplementwinkel, Supplementärwinkel oder Ergänzungswinkel, wenn sie sich zu 180° ergänzen. Supplementwinkel $\beta + \gamma = 180°$

Zwei Winkel heißen Komplementwinkel oder Komplemtärwinkel, wenn sie sich zu einem rechten Winkel 90° ergänzen. Komplementwinkel $\alpha + \varepsilon = 90°$

Schneiden sich zwei Geraden, so bezeichnet man das Paar gegenüberliegender Winkel als Scheitelwinkel oder Gegenwinkel. Scheitelwinkel sind immer gleich groß.
Die Bezeichnung Scheitelwinkel kommt daher, dass die beiden Winkel durch Punktspiegelung am Scheitelpunkt aufeinander abgebildet werden. Scheitelwinkel $\beta = \delta$



Geschnittene parallele Geraden

An geschnittenen Parallelen g || h gilt

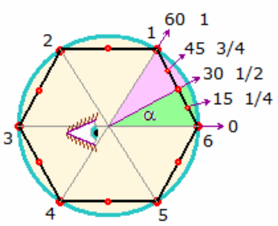
Schneidet eine Gerade a zwei Geraden g und h, so heißen die Winkel, die auf der selben Seite von a und beide entweder ober- oder unterhalb von g bzw. h liegen, Stufen- oder F-Winkel. Stufenwinkel an Parallelen sind gleich groß. Aus der Winkelgleichheit kann umgekehrt auf die Parallelität von Geraden geschlossen werden. Stufenwinkel $\alpha = \beta$

Schneidet eine Gerade a zwei Geraden g und h, so heißen die Winkel, die auf unterschiedlichen Seiten von a und unterschiedlichen Seiten von g bzw. h liegen, Wechsel- oder Z-Winkel.
Wechselwinkel an Parallelen sind gleich groß. Aus der Winkelgleichheit kann auch hier auf die Parallelität von Geraden geschlossen werden. Wechselwinkel $\alpha = \delta$

Schneidet eine Gerade a zwei weitere parallele Geraden g und h, so bezeichnet man die Winkel, die auf der selben Seite von a aber auf unterschiedlichen Seiten von g und h liegen, als entgegengesetze Winkel, Nachbarwinkel oder E-Winkel. Nachbarwinkel ergänzen sich zu 180°.
entgegengesetzte Winkel $\alpha + \gamma = 180°$
Werden Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei der Winkel gleich oder ergänzen sich zu 180°.

Winkelmaße

Gradmaß 1° = 60' (Minute) = 3600" (Sekunde)
Bogenmaß 1 rad (Radiant); x arc = α
α / arc α = 180° / π 1° = 0.01745 rad 1 rad = 57,29578°
Achtung ! Die Begriffe Bogenminute und Bogensekunde sind kein Bogenmaß, sondern Gradmaß und den angegebenen "Minute" und "Sekunde" äquivalent.
Neugrad 1^g (Gon), 90° = 100^g
Merkregel: 1 rad entspricht dem Winkel (knapp 60°), bei dem der Kreisbogen der Drehung gerade gleich dem Radius des Kreises ist. Der Winkel im Bogenmaß ist eine Größe der Dimension 1. Die Ergänzung "rad" dient nur zur Unterscheidung von anderen Größen, die ebenfalls die Dimension 1 haben.
Historische Winkelmaße sind der nautischer Strich (32 = Vollwinkel) und der artilleristischer Strich (6400 mil = Vollwinkel).
Historische Anmerkung: Griechische Astronomen zu Zeiten von Archimedes führten zur Kennzeichnung des Gradmaßes das Zeichen ° ein. Es ist erstaunlich, dass dieses Zeichen 2200 Jahre lang unverändert blieb.

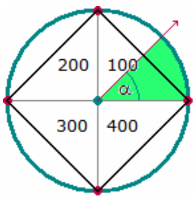


Kreis mit 360°

Für die Einführung eines Winkelmaßes konnten die Sumerer auf keine Erfahrungen zurückgreifen.
Noch gab es weder Bogen- noch Gradmaß, und die spätere äquigonale Unterteilung des Kreises war zunächst völlig nebensächlich.
Man griff auf etwas Bekanntes zurück: das gleichmäßig unterteilte Längenmaß.
Von Dreiecken fasziniert gingen die Sumerer von dem offensichtlichen Sachverhalt aus, dass sich einem Kreis ein Sechseck einbeschreiben lässt, ganz so, wie sich mittels 6 Ellen die Horizontlinie abgreifen lässt.

In jedem dieser Sehnen sahen sie ein Einheitsmaß, so dass die Kreislinie insgesamt einem Streckenzug der Gesamtlänge 6 gegenübergestellt wurde. Um einen Winkel zu identifizieren, reichte es aus, die zugehörige Länge entlang des 6-Ecks zu bestimmen.
Man konnte so über beliebige Winkel kommunizieren, nicht mehr nur über Steigungen wie z.B. in Ägypten.
So ordneten sie dem Halbwinkel α des ersten Dreiecks eine Strecke der Länge 0,5 zu, was im Sexagesimal-System einer 0,30 entsprach. Mangels Komma schrieben sie 30. Dem Vollkreis stand 6,0 gegenüber, was 360 entsprach.
Die 360° des Vollkreises waren damit gefunden und ebenso seine sexagesimale Unterteilung in Minuten und Sekunden.

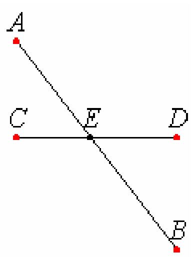
Wenn die Sumerer den Kreis mit 6 identifizierten, wurde oft gefolgert, dies sei eine sehr grobe Schätzung für 2π. In Wirklichkeit waren aber zumeist genau 360° gemeint. Dieser unberechtigte Vorwurf ignoriert zudem die bahnbrechende geistige Leistung der Sumerer an dieser Gegenüberstellung.
Weiter steht zu vermuten, dass sie auch das Jahr in 6 Jahreszeiten unterteilt haben; ähnlich wie im Indus-Gebiet.
Quelle: http://www.chessbox.de/



Neugrad

Nach dem Ende der französischen Revolution gab es unter Napoleon zahlreiche energische Versuche, das Dezimalsystem in jeder Beziehung durchzusetzen.
Es schien, als ob die Zeit der Dreiecke als Grundbestandteile des geometrischen Denkens endgültig durch das Quadrat und den rechten Winkel abgelöst werden sollten.
Also brachte man das Quadrat in den Einheitskreis und stellte seine Seiten der Kreislinie gegenüber.
In jedem dieser Sehnen sahen man ein in hundert Teile gegliedertes Einheitsmaß, so dass dem Kreisumfang insgesamt eine Anzahl von insgesamt 400 Einheiten gegenübergestellt wurde. So ordnete man z.B. dem Halbwinkel α des ersten Quadranten genau 50 g (Gon) zu.

Es fand jedoch keine direkte Identifizierung von Quadratsehne und Bogen mehr statt, da sich die Idee einer äquigonalen Unterteilung des Kreisbogens in Winkeleinheiten bereits seit Jahrhunderten als klarer und praktikabler erwiesen hatte.
Die Reform der geänderten Winkeleinteilung in 400 Neugrad (Gon) scheiterte; bis auf Nischenanwendungen; ebenso wie die einer dezimalen Zeitrechnung, da die Menschen lieber an ihren Jahrtausende alten Gewohnheiten festhalten wollten.
Quelle: http://www.chessbox.de/

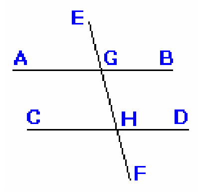


Scheitelwinkel, Gleichheit

Euklids "Elemente": § 15 (L. 8): **Zwei gerade Linien bilden, wenn sie einander schneiden, Scheitelwinkel, die einander gleich sind.**

Zwei gerade Linien AB, CD mögen einander im Punkt E schneiden. Ich behaupte, dass

∠ AEC = DEB und CEB = AED. Da nämlich die gerade Linie AE auf der geraden Linie CD steht und dabei die Winkel CEA, AED bildet, so sind ∠ CEA + AED = 2 R. (I, 13). Da ebenso die gerade Linie DE auf der geraden Linie AB steht und dabei die Winkel AED, DEB bildet, so sind ∠ AED + DEB = 2 R. Wie oben bewiesen, sind auch CEA + AED = 2 R.; also sind CEA + AED = AED + DEB (Post. 4, Ax. 1).
Man nehme AED beiderseits weg; dann sind die Reste CEA = BED (Ax. 3); ähnlich lässt sich zeigen, dass auch CEB = DEA - S.
Zusatz: Hiernach ist klar, dass zwei gerade Linien, wenn sie einander schneiden, am Schnittpunkte Winkel bilden müssen, die zusammen vier Rechten gleich sind.
Der Beweis der Gleichheit der Scheitelwinkel soll schon Thales bekannt gewesen sein.



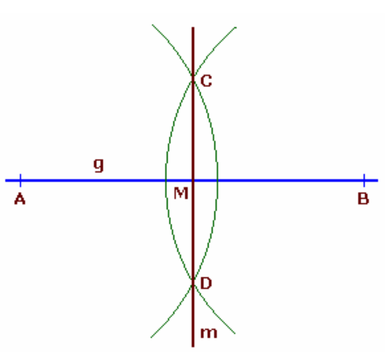
Wechselwinkel, Gleichheit

Euklids "Elemente": § 29 (L. 20): **Beim Schnitt einer geraden Linie mit (zwei) parallelen geraden Linien werden (innere) Wechselwinkel einander gleich, jeder äußere Winkel wird dem innen gegenüberliegenden gleich, und innen auf derselben Seite entstehende Winkel werden zusammen zwei Rechten gleich.**

Man bringe nämlich die gerade Linie EF mit den parallelen Geraden AB, CD zum Schnitt. Ich behaupte, dass dann die Wechselwinkel AGH, GHD gleich werden, der äußere Winkel EGB dem innen gegenüberliegenden GHD gleich und die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel BGH + GHD = 2 R.
Wäre nämlich AGH ungleich GHD, so müsste einer der Winkel größer sein. AGH sei der größere; man füge BGH beiderseits hinzu; dann wären AGH + BGH > BGH + GHD. Aber AGH + BGH = 2 R. (I, 13); also wären BGH + GHD < 2 R.
Von Winkeln aus, die zusammen < 2 R. sind, uns unendliche verlängerte treffen sich aber (Post. 5); also müssten AB, CD sich bei der Verlängerung ins unendliche treffen; sie treffen sich aber nicht, da sie nach Voraussetzung parallel sind (I, Def. 23). AGH ist also nicht ungleich GHD, also ihm gleich. Weiter ist AGH = EGB (I, 15), also auch EGB = GHD. Man füge BGH beiderseits hinzu; dann sind EGB + BGH = BGH + GHD; aber EGB + BGH = 2 R. (I, 13); also sind auch BGH + GHD = 2 R.- S.

Konstruktion eines 90°-Winkels

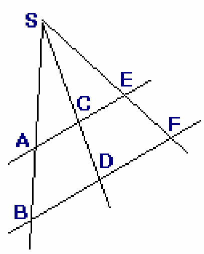
Zur Konstruktion eines 90°-Winkels in einem Punkt M konstruiert man die Mittelsenkechte einer Strecke AB mit dem Mittelpunkt M.
Lösung:
1. Zeichne eine Gerade g. Wähle einen Punkt M auf g. Zeichne einen Kreis bzw. Kreisbogen um M mit beliebigem Radius r. Dieser Kreis schneidet g in zwei Punkten A und B.



2. Zeichne um diese beiden Punkte jeweils einen Kreis mit einem Radius größer als r. Verbinde die beiden Schnittpunkte C und D dieser Kreise und verlängere sie in beide Richtungen.
3. Die entstandene Gerade schneidet g im rechten Winkel und zwar genau im Punkt M.
Die Konstruktion ist so möglich, da im Rhombus ABCD die Diagonalen AB und CD senkrecht aufeinander stehen.
Hinweis: Je größer die Radien der Kreise, desto genauer wird der rechte Winkel.

Strahlensatz

Wird ein Strahlenbüschel von einer Parallelenschar geschnitten, so gilt:



1. Die Abschnitte auf einem Strahl verhalten sich zueinander wie die gleichliegenden Abschnitte auf einem anderen Strahl.
z.B.: SA / SB = SE / SF
2. Gleichliegende Parallelenabschnitte verhalten sich zueinander wie die zugehörigen Strahlenabschnitte auf ein und demselben Strahl.
z.B.: BD / AC = SB / SA
3. Parallelenabschnitte auf einer Parallelen verhalten sich zueinander wie die zugehörigen Parallelenabschnitte auf einer anderen Parallele.
z.B.: AC / CE = BD / DF

Beweis des 1.Strahlensatzes

Voraussetzung: g(A,C) || g(B,D) Behauptung: SA : SB = SC : SD
Beweis: A(Δ SAC) = ½ SA h_1 → SA h_1 = SC h_2 (1)
Die Dreiecke Δ CAB und Δ CAD haben den gleichen Flächeninhalt: A(Δ CAB) = A(Δ CAD) = ½ AC h_3, da AC || BD, d.h. gleiche Höhe h_3 und außerdem gleiche Grundseite AC. Die Dreiecke Δ SBC und Δ SAD haben den gleichen Flächeninhalt, d.h. ½ SB h_1 = ½ SD h_2 (2). Aus (1) und (2) wird (SA h_1)/(SB h_1) = (SC h_2)/(SD h_2) → SA : SB = SC : SD q.e.d.

Strahlensatz, Anwendung

Jules Verne: Die geheimnisvolle Insel. Verlag Neues Leben. Berlin, 1977, S. 102 f.

Die Beobachtungsmomente der verflossenen Tage waren nunmehr durch die Berechnung der Plateauhöhe über dem Meeresspiegel zu vervollständigen....
Cyrus Smith hatte eine gerade, zwölf Fuß lange Stange mitgenommen, die er an seiner eigenen, ihm bekannten Körperlänge gemessen hatte. Harbert trug ein Lot oder Senkblei; es bestand aus einem einfachen Stein, der an eine geschmeidige Pflanzenfaser gebunden war. Etwa zwanzig Fuß vom Küstensaum und etwa fünfhundert Fuß von der senkrecht aufsteigenden Granitwand entfernt, grub Cyrus Smith die Stange zwei Fuß tief in den Sand und brachte sie durch sorgfältiges Absteifen mittels des Lotes in eine senkrechte Stellung zur Himmelsebene. Darauf ging er so weit zurück, bis er, im Sande liegend, die Spitze der Stange mit dem Grate der Granitwand zugleich sah. Diesen Punkt kennzeichnete er durch einen Pflock. "Du kennst doch die Grundlehren der Geometrie?" fragte er Harbert.
"Einigermaßen, Herr Cyrus", antwortete Harbert, der nie mehr sagte als er wusste. "Welche Eigenschaften ähnliche Dreiecke haben, weißt du doch noch?" "O ja", erwiderte Harbert, "die entsprechenden Seiten derselben sind einander proportional." "Richtig, mein Sohn", sagte der Ingenieur. "Sieh, ich habe hier soeben zwei einander ähnliche rechtwinklige Dreiecke konstruiert, das erste, kleinere hat als Seiten oder Schenkel die senkrechte Stange, die Entfernung zwischen Pflock und Basis der Stange und als Hypotenuse meinen Gesichtswinkel; das zweite Dreieck hat als Seiten die senkrechte Wand, deren Höhe noch gemessen werden soll, die Entfernung zwischen Pflock und Basis der Wand und meinen Gesichtswinkel wieder als Hypotenuse, die als Verlängerung der des ersten Dreiecks zu betrachten ist."
"Ach, Herr Cyrus, ich verstehe!" rief Harbert. "Da die Entfernung zwischen Pflock und Stange der Entfernung zwischen Wandbasis und Pflock proportional ist, so ist auch die Höhe der Stange der Höhe dieser Wand proportional."
"Sehr richtig, Harbert", antwortete der Ingenieur, "und wenn wir die ersten beiden Entfernungen gemessen haben, so brauchen wir nur, da uns die Höhe der Stange bekannt ist, eine Verhältnisrechnung aufzustellen, um die Höhe der Felswand zu ermitteln. Wir sparen uns dadurch die Mühe, die Wand direkt zu messen."
Die beiden Horizontalen wurden mit Hilfe der Stange ermittelt, deren Höhe über dem Sand genau zehn Fuß betrug.
Die erste Horizontale beziehungsweise die Entfernung zwischen dem Pflock und dem Standpunkt der Stange betrug fünfzehn Fuß, die Entfernung zwischen dem Pflock und der Mauerbasis nur fünfhundert Fuß. Als das Ergebnis der Messung festlag, kehrten Cyrus Smith und Harbert zu den Schloten zurück.
Dort suchte der Ingenieur einen flachen Stein hervor, den er auf einem seiner früheren Wege gefunden hatte, eine Art Schieferstein, auf den er mit einer scharfen Muschel leicht schreiben konnte, und er stellte folgende Proportion auf:

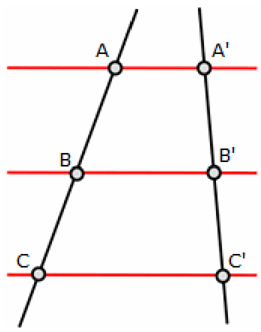
$15 : 500 = 10 : x \qquad 500 * 100 = 15 * x$

$5000 = 15 * x \qquad x = 5000 / 15$

$x = 333{,}33$

Diese Berechnung ergab für die Granitwand eine Höhe von dreihundertdreiunddreißig Fuß (1 ft = 12 Zoll = 0,3048 m).

Verallgemeinerter Strahlensatz



Werden drei parallele Geraden von zwei Sekanten geschnitten, so entstehen homologe Strecken, gleichliegende Strecken. Diese homologen Strecken sind proportional zueinander.
Werden die Schnittpunkte auf den Sekanten d und d' mit A, B, C bzw. A', B', C' bezeichnet, dann gilt:

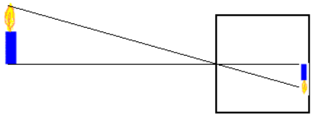
A'B' / AB = B'C' / BC = A'C' / AC
A'B' / B'C' = AB / BC
B'C' / A'C' = BC / AC
A'B' / A'C' = AB / AC

Daraus folgt, dass bei einer senkrechten einer Geraden auf eine zweite Gerade die Streckenverhältnisse erhalten bleiben.
Für A = A' geht der Satz in den klassischen Strahlensatz über.

Strahlensatz oder Satz des Thales?

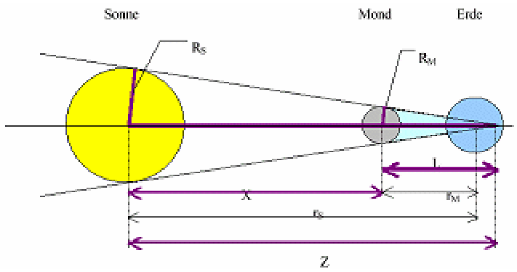
Der Strahlensatz wird in fast allen Sprachen als Satz des Thales gekannt, da Thales als erster den Satz formulierte und bewies. Bis vor wenigen Jahren wurde im angelsächsischen Sprachraum unter dem Satz des Thales die Aussage über den Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises verstanden. Dies hat sich mittlerweile verändert. Auch im Englischen wird der Strahlensatz heute Satz des Thales genannt.

Nur im Deutschen wird an der alten Sprechweise festgehalten: der Satz des Thales beschreibt eine Beziehung am Kreis und der Strahlensatz ist eben etwas anderes.
Eine Alternative ist aber, den Strahlensatz "Ähnlichkeitssatz des Thales" zu nennen, da er zum einen die Ähnlichkeit von Dreiecken zur Grundlage hat, zum anderen von Thales gefunden wurde.

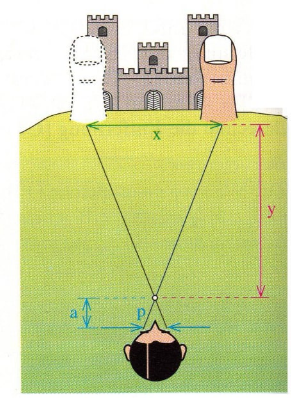


Lochkamera
Ein typisches Beispiel für die Strahlensatzfigur ist die Lochkamera (Camera obscura), bei der das Bild kopfstehend und seitenverkehrt entsteht.

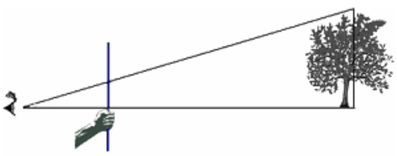
Strahlensatz: Kernschatten des Mondes
Gleichung zur Berechnung der Kernschattenlänge des Mondes:
geg.: R_M Radius des Mondes, R_S Radius der Sonne, r_S Abstand Erde-Sonne, r_M Abstand Erde-Mond, X Abstand des Mondes von der Sonne, Z Abstand der Spitze des Kernschattenkegels vom Sonnenmittelpunkt, L Länge (Höhe) des Kernschattenkegels
Annahme: Sonne, Mond und Erde liegen genau auf einer Geraden, die durch die Mittelpunkte der drei Körper verläuft.



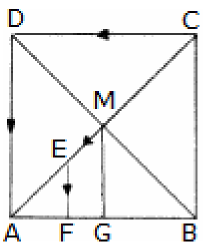
Herleitung: $R_S / R_M = Z / L$ $R_S / R_M = (X + L) / L$
$L = X R_M / (R_S - R_M)$
Für die Sonnenfinsternis vom 11.August 1999 ergab sich damit eine Kernschattenlänge von 378590 km. Weitere Größen: B Hälfte der Schattenbreite auf der Erdoberfläche
$B = R_M (L - r_M + R_E) / L$
Für den 11.August 1999 wird B = 52 km, d.h. der Kernschattenkegel hatte einen Durchmesser von 104 km.



Daumensprungmethode
Streckt man seinen Arm aus und visiert den Daumen zunächst mit dem linken Auge, dann mit dem rechten Auge an, so macht der Daumen einen „Sprung" im Gelände macht. Diese Tatsache benutzt man, um Entfernungen in der Landschaft zu schätzen. Es gilt:
Entfernung y : Armlänge a = Streckenlänge x : Augenabstand p?



Stockpeilung
Die Stockpeilung ist ein Verfahren zur Schätzung der Höhe eines relativ nahen Objektes. Sie wird vorwiegend von Förstern zur Größenbestimmung von Bäumen verwendet.
Diese Methode nutzt ebenso wie die Daumensprungmethode die Streckenverhältnisse an der Strahlensatzfigur.
Der angepeilte Messstab am ausgestreckten Arm ist zwischen 50 und 70 Zentimeter vom Gesicht entfernt. Bei bekanntem Abstand zum Baum lässt sich so die Höhe des Baumes mit relativer Genauigkeit am Stock ablesen. Die Daumensprungmethode ist hier nicht geeignet, da dort nur eine horizontale Schätzung möglich ist.
Verfahren:
1) Entfernung zum Baum bestimmen
2) ein Holzstab mit Messmarkierungen wird am ausgestreckten Arm hochgehalten
3) über die unterste Stabmarkierung wird der Baum am Boden angepeilt
4) die Markierung des Holzstabes, über welcher die Baumspitze angepeilt werden kann, zeigt die Baumhöhe direkt oder nach einfacher Umrechnung
In den USA wird die Stockpeilung mit dem Biltmore Stick auch zur Bestimmung von Baumdurchmessern verwendet.



Strahlensatz-Anwendungsaufgabe
Aufgabe
In der Mitte eines quadratischen Schwimmbeckens paddelt eine vorlaute Schülerin, deren Lehrerin (die nicht schwimmen kann!) an einer Ecke des Pools steht.
Die freche Göre ärgert ihre Aufsichtsperson mit einigen schnippischen Bemerkungen. Die droht ihr daraufhin eine Zurechtweisung an, wenn sie die Schülerin denn zu fangen kriegte. Da die Schülerin im Lauf der Zeit ermüdet, muss sie irgendwann das Becken verlassen.
Kann die Lehrerin die Schülerin ergreifen? Die Lehrerin soll dabei dreimal so schnell rennen, wie das Mädchen schwimmen kann. An Land dagegen ist die Schülerin die Flinkere.

Lösung

Das Mädchen kann der Lehrerin entwischen. Gemäß Zeichnung gilt nämlich: Die Lehrerin stehe an der Ecke C. Folgender Fluchtweg ist für die Schülerin günstig: Es schwimmt in M diagonal in Richtung A los. Im selben Moment läuft die Lehrerin in Richtung Ecke D (oder B). Wenn sie Ecke D erreicht hat, soll sich die Schülerin in E befinden. Danach schwimmt sie rechtwinklig auf den Beckenrand AB zu.

Begründung

Es sei CD =1 $\Rightarrow$ BC = 1/3, da $v_L = 3v_S$. CA = 2 (Diagonalenlänge) $\Rightarrow$ EA = $\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1/3 > 0$.
Bestimmung von EF mit Strahlensatz (denn EF $\perp$ AB): EF/MG = EA/MA $\Rightarrow$ EF = $\frac{1}{2} - 1/(3\sqrt{2})$.
Die Lehrerin kann nur nach A rennen. Aber sie erreicht Ecke A nicht bevor die Schülerin am Beckenrand in F bereits angekommen ist, denn nach Zeitvergleich gilt (mit $v_L = 3v_S$):
$t_L - t_S = 1/(3\,v_S) - (1/2 - 1/(3\sqrt{2}))/v_S = 1/v_S\,(\sqrt{2} - 1)/6 > 0$

Flussbreiten bestimmen

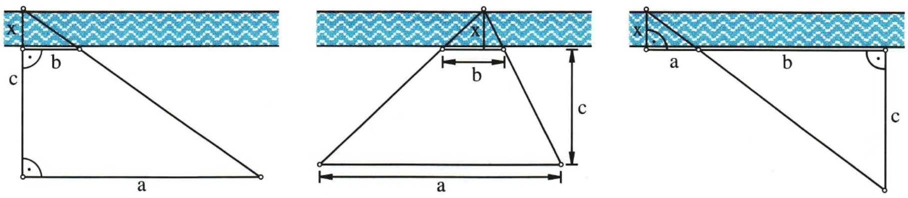
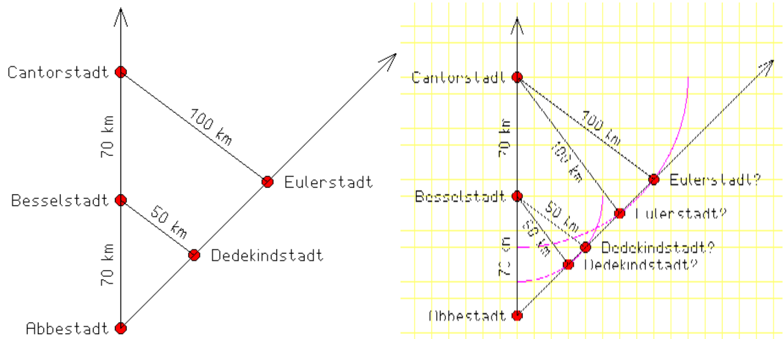


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

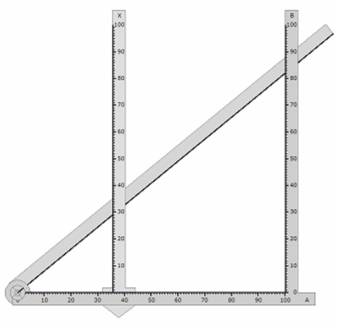
Will man die Breite x eines Flusses von einer Uferseite aus bestimmen, so kann man vier Punkte wie in Fig. 1, Fig.2 oder Fig. 3 wählen. Aus den Abständen a, b und c lässt sich x berechnen. Es gilt stets x / (x+c) = b / a

Strahlensatz – Anwendung: Die Gabelung in Abbestadt

In einem von Mathematikern besiedelten Land gibt es besonders viele gerade Straßen und angemessene Ortsnamen.
Von Abbestadt gibt es eine Straße, die führt genau nach Norden, 70 km nördlich liegt Besselstadt und weitere 70 km nördlich Cantorstadt. Eine andere Straße führt schnurgerade von Abbestadt genau nach Nordosten durch Dedekindstadt und Eulerstadt.
Von Besselstadt gibt es eine gerade 50 km lange Straße nach Dedekindstadt und eine ebenfalls gerade, aber 100 km lange Straße von Cantorstadt nach Eulerstadt. Um welchen Faktor ist es von Abbestadt nach Eulerstadt weiter als nach Dedekindstadt?



Lösung: Scheinbar ist die Aufgabe einfach, da ihre Zahlen ganzzahlig bzw. als einfache Brüche aufgehen. Die Lösung "um den Faktor 2" ist keineswegs falsch, aber nur eine von drei richtigen. Die anderen beiden sind 3/2 und 8/3.
Die Ursache ist die Nicht-Umkehrbarkeit des 2.Strahlensatzes, der von den Längen auf den Parallelen handelt. Nach dem Kongruenzsatz "Ssw" gilt: Dreiecke, von denen zwei Seitenlängen und ein Winkel bekannt sind, sind nur dann eindeutig beschrieben, wenn der Winkel zwischen den beiden Seiten oder der nicht-kleineren der beiden Seiten gegenüber liegt.



Cashmore-Proportionsrechner

Der Cashmore-Proportionsrechner ist ein einfaches Gerät, mit dem auf der Grundlage des Strahlensatzes Aufgaben zur Multiplikation, Division und Proportionalität näherungsweise gelöst werden können.

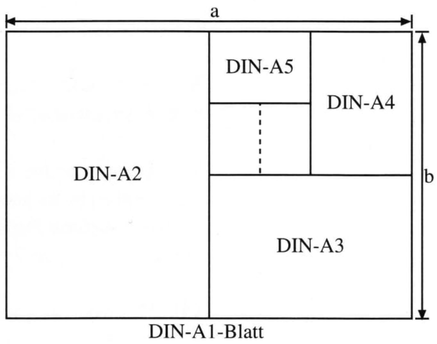
Die Teile des Gerätes bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Eine Kathete A ist mit der Hypotenuse H an einem Drehpunkt fixiert. Die zweite Kathete B ist mit A im rechten Winkel verschraubt. Parallel zu B ist eine in zwei Richtungen verschiebbare und skalierte Flachstange X angebracht.

Im Original waren die Skalen in 500 Einheiten geteilt. Nach dem Strahlensatz gilt dann hier

a : 500 = x : b

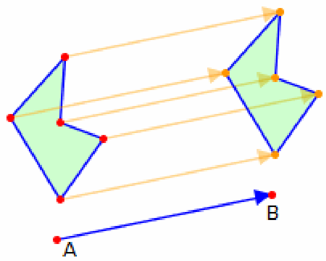
Soll die Aufgabe 340 : 500 = x : 180 gelöst werden, wird der senkrechte Arm X auf dem Grundarm A auf die Marke 340 verschoben. Der Hypotenusenarm wird auf B zum Wert 180 bewegt. Auf X kann dann in vertikaler Richtung der gesuchte Wert abgelesen werden, hier 122,4.
Teilt man die Achsen in 100 Teile, ergibt sich die Möglichkeit Multiplikations- und Divisionsaufgaben zu lösen.
Für die Multiplikation x = a·b wird die Hypotenuse so bewegt, dass der Faktor b auf der Kathete B eingestellt ist. Die Stange X wird so verschoben, dass sie auf dem Wert a der Kathete A steht. Am Schnittpunkt von X mit H kann das Produkt abgelesen werden.
Eingestellt und abgelesen werden nur Ziffernfolgen. Ein Überschlag ist stets notwendig. Für eine Division ist das Verfahren umgekehrt anzuwenden.

DIN-Formate



Für DIN-A Formate gelten folgende Bedingungen:
Die Rechtecke sind einander ähnlich. Durch Halbieren der längeren Seite erhält man das nächstkleinere DIN-A Format, z.B. aus DIN A4 entsteht DIN A5. Ein Rechteck des Formats DIN A0 ist $1m^2$ groß.

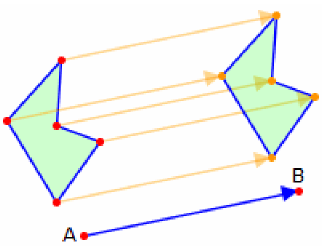
DIN Ax	Länge	Breite	DIN Ax	Länge	Breite
0	118,92	84,09	1	84,09	59,46
2	59,46	42,04	3	42,04	29,73
4	29,73	21,02	5	21,02	14,87
6	14,87	10,51			



Kongruenzabbildungen

Unter einer Kongruenzabbildung; lat. congruens = übereinstimmend, passend; oder Kongruenzbewegung versteht man eine geometrische Abbildung, bei der Form und Größe der abgebildeten Objekte gleich bleiben.
Eine Kongruenzabbildung lässt die Entfernung zweier beliebiger Punkte P_1 und P_2 invariant, d.h. unverändert.
Formal können Kongruenzabbildungen definiert werden als Abbildungen der Zeichenebene oder des Raumes in sich, die sich durch Hintereinanderausführung (Verkettung, Komposition) von beliebig vielen Achsenspiegelungen zusammensetzen lassen.
Man kann zeigen, dass dabei höchstens drei Achsenspiegelungen nötig sind.
Kongruenzabbildungen sind geraden-, längen- und winkeltreu. Sie bilden also Geraden auf Geraden ab und lassen Streckenlängen und Winkelgrößen unverändert. Sie sind auch bijektiv, das heißt sie sind umkehrbar und auch in ihrer Umkehrung eindeutig.
Beispiele für Kongruenzabbildungen sind:

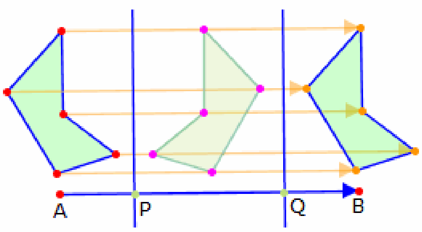
- Verschiebungen (Translationen, Parallelverschiebungen)
- Spiegelungen
- Drehungen



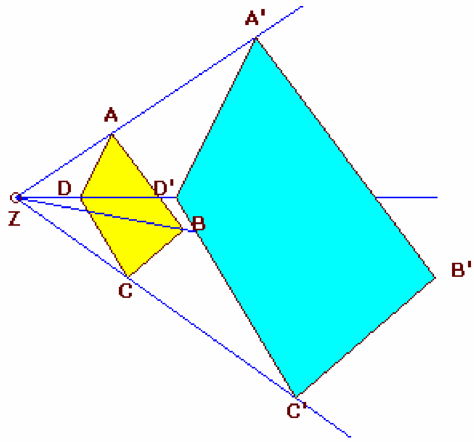
Kongruenzabbildungen sind spezielle Ähnlichkeitsabbildungen. Die Abbildung zeigt eine Parallelverschiebung.
In der analytischen Geometrie werden Kongruenzabbildungen mit Hilfe orthogonaler Matrizen beschrieben.
Algebraisch gesehen, bilden die Kongruenzabbildungen der Zeichenebene oder des Raumes eine Gruppe.

Parallelverschiebung

Eine Parallelverschiebung oder Translation ist eine Bewegung, bei der eine geometrische Figur entlang einer Strecke verschoben wird.
Dabei wird die Strecke AB, durch die die Verschiebung vollständig beschrieben ist, auch Verschiebungsvektor genannt.



Eine Verschiebungen kann immer als Hintereinanderausführung von zwei Spiegelung aufgefasst werden. (untere Abbildung)



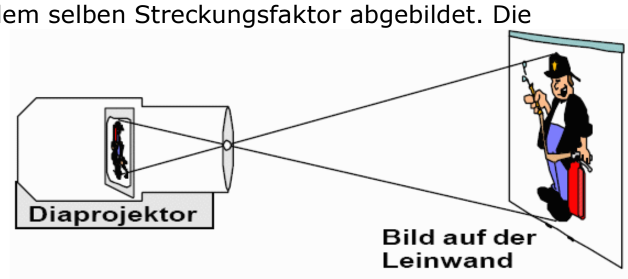
Zentrische Streckung

Die Vielecke ABCD und A'B'C'D' sind ähnlich, denn es gilt:
Streckungsfaktor
k = A'B' / AB
1. die Innenwinkel sind paarweise kongruent

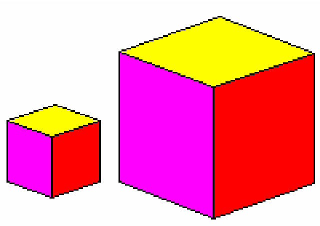
2. A'B' = k * AB ; B'C' = k * BC ; C'D' = k * CD ; D'A' = k * DA
Die Kongruenz ist ein Spezialfall der Ähnlichkeit mit k=1. Es gilt:

Umfang u' = k * u
Flächeninhalt A' = k^2 * A
Volumen V' = k^3 * V

Winkel werden bei der zentrischen Streckung mit der wahren Größe abgebildet. Zentrische Streckungen sind winkeltreu.
Die Lage von Geraden bleibt bei der zentrischen Streckung zueinander erhalten. Parallele Geraden bleiben parallel. Zentrische Streckungen sind geradentreu und parallelentreu.
Strecken werden bei der zentrischen Streckung mit dem selben Streckungsfaktor abgebildet. Die Abbildung von Flächen erfolgt über die Fortpflanzung der neuen Streckenverhältnisse.
Wird ein Quadrat durch die zentrische Streckung auf die doppelte Seitenlänge gestreckt, dann vervierfacht sich die Fläche.



Anwendung: Die Projektion eines Dias auf eine Leinwand ist ein Beispiel für die zentrische Streckung.

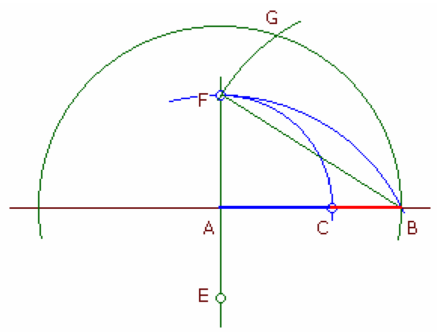


Räumliche zentrische Streckung
Bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor k werden Längen um den Faktor k vergrößert bzw. verkleinert.
Die Streckung von Flächen ergibt, da alle Längen gestreckte werden, eine Flächenänderung von k^2; die Streckung von Körpern folglich eine Volumenänderung von k^3.

Strecke s' = k · s
Flächeninhalt A' = k^2 · A
Volumen V' = k^3 · V

Zum Beispiel erhöht sich das Volumen eines Würfels auf das Achtfache, wenn die Kantenlängen verdoppelt werden.
Als Jonathan Swift in "Gullivers Reisen" seinen Helden zu den Liliputanern schickte, erhielt er dort, durch einen Vertrag geregelt, die 1728fache Menge an Nahrung, die ein Liliputaner erhält.
Die kleinen Leute hatten nämlich seine Höhe zu der zwölffachen ihrer eigenen bestimmt, und somit: $12^3 = 1728$.
Swift kannte offenbar die Gesetze der räumlichen Streckung.
In der Geschichte "Leberecht Hühnchen" von Heinrich Seidel wird ebenfalls eine räumliche Streckung berechnet.

Goldener Schnitt (lat. sectio aurea)



... pero che sia una cusi devisa che la menore parte monteplicata in tucta la linea faccia tanto quanto la maggiore parte monteplicata in se medessima.
Piero della Francesca, "Trattato d'abaco"

Eine Strecke AB wird durch einen Punkt C im Verhältnis des Goldenen Schnittes geteilt, wenn sich die kürzere Teilstrecke zur längeren Teilstrecke so verhält, wie die längere Teilstrecke zu AB.
Bezeichnet man die längere Teilstrecke mit x und die kürzere Teilstrecke mit 1-x, so muss also gelten $x : 1 = (1-x) : x$ und $x^2 + x - 1 = 0$
ρ (positive) Lösung der quadratischen Gleichung ...

$\rho = (\sqrt{5}-1)/2 = 0.61803...$

$-\phi$ die negative Lösung der quadratischen Gleichung ...

$\phi = (\sqrt{5}+1)/2 = 1.6180339887498948482045868343656381177 20 ...$

ϕ wird Goldener Schnitt genannt. (mitunter auch τ anstelle von ϕ). ϕ ist die "einfachste" irrationale Zahl, da sie die Kettenbruchentwicklung ϕ = [1, 1, 1, 1, 1,...] besitzt. Beziehungen zwischen ρ und ϕ:

$\phi * \rho = 1$; $\phi - \rho = 1$; $\phi + \rho = \sqrt{5}$ $\rho^2 = 1 - \rho$; $\phi^2 = 1 + \phi$
ϕ und $-\rho$ sind Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$
$\phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n$ ... für alle natürlichen Zahlen n

Das längere Teilstück der stetig geteilten Strecke heißt "Major", das kürzere "Minor".
In der zweiten Auflage seines mehrbändigen Werks "Die reine Elementar-Mathematik, weniger abstrakt, sondern mehr anschaulich", geschrieben für Mathematikstudenten, verwendet Martin Ohm 1835, der Bruder von Georg Simon Ohm, die Bezeichnung "Goldener Schnitt" für die von Pacioli göttlich genannte Streckenteilung (lat. proportio divina). Es ist das erste Mal, dass diese Bezeichnung in der Literatur auftaucht.

Im Zuge der Verherrlichung der griechischen Leistungen bürgerte sich die Bezeichnung Phi für das Verhältnis des Goldenen Schnitts ein. Phi bezieht sich dabei auf den griechischen Bildhauer und Architekten Phidias, der auch den Pantheon-Tempel von Athen entworfen hat.
Die nebenstehende Münze zeigt ein anderes Werk von Phidias, eines der sieben Weltwunder: die Zeus-Statue von Olympia.

Goldener Schnitt Potenzen

Die Proportion der stetigen Teilen $1 : x = x : /1+x)$ ergibt die quadratische Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Deren Lösung

$$\phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1{,}61803398875\ldots$$

ist die goldene Schnittzahl ϕ.

Es gilt $\phi^2 = \phi + 1$ und allgemein $\phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n$

Damit lassen sich Potenzen von ϕ linearisieren

$\phi^0 = 1$ $\quad\quad$ $\phi^1 = \phi$

$\phi^2 = \phi^1 + \phi^0 = \phi + 1$ $\quad\quad$ $\phi^3 = \phi^2 + \phi^1 = 2\phi + 1$

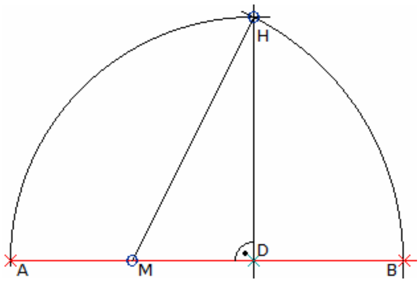
$\phi^4 = \phi^3 + \phi^2 = 3\phi + 1$ $\quad\quad$ $\phi^5 = \phi^4 + \phi^3 = 5\phi + 1$

$\phi^6 = \phi^5 + \phi^4 = 8\phi + 1$

Das Quadrat von ϕ hat demnach die merkwürdige Eigenschaft, die gleichen Dezimalen zu haben, wie die Zahl ϕ selbst. Gleiches gilt auch für ihren reziproken Wert $1/\phi$.

$1/\phi = \phi - 1 = (\sqrt{5} - 1)/2$ $\quad\quad$ $\phi + 1/\phi = \sqrt{5}$

Goldener Schnitt, Konstruktion



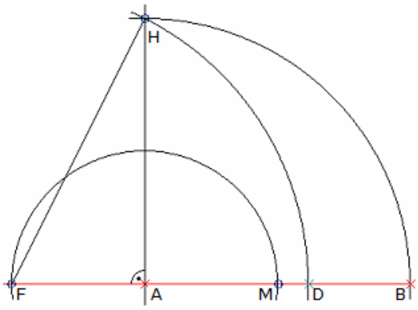
Eine Möglichkeit zur Konstruktion des zweiten Streckenpunktes B, wenn der Anfangspunkt A und der im goldenen Schnitt teilende Punkt D gegeben sind, ist folgende:

1) Strecke AD verbinden und den Mittelpunkt M bestimmen
2) in D eine Senkrechte zu AD errichten
3) um D einen Kreis mit dem Radius DA zeichnen, der Schnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten in D sei H
4) M und H verbinden und einen Kreis um M mit dem Radius MH konstruieren, der Schnittpunkt des Kreisbogens mit der Geraden durch A und D ist der gesuchte Punkt B

Beweis: Nach Konstruktion ist DH = AD. Somit ist nach dem Satz des Pythagoras

$$MH = \sqrt{(MH^2 + DH^2)} = \sqrt{((AD/2)^2 + AD^2)} = \sqrt{(1/4 + 1)}\ AD = \sqrt{(5/4)}\ AD = 1/2\ \sqrt{5}\ AD$$

Damit wird $AB = AM + MB = AD/2 + MH = AD/2 + 1/2\ \sqrt{5}\ AD = (1+\sqrt{5})/2\ AD$



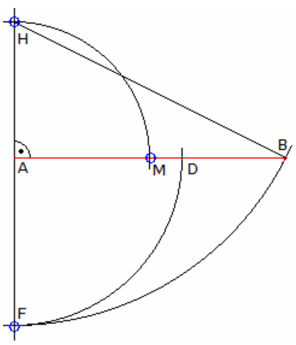
Goldener Schnitt, Konstruktion 2

Eine Möglichkeit zur Konstruktion des Teilungspunktes D des goldenen Schnittes.
1) Mittelpunkt M der Strecke AB bestimmen und in A eine Senkrechte zu AB errichten
2) Kreisbogen um A mit Radius AB zeichnen, der Schnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten in A sei H
3) Kreisbogen um A mit Radius AM zeichnen, der Schnittpunkt des Kreises mit der Verlängerung von BA über A hinaus sei F
4) F und H verbinden und einen Kreis um F mit dem Radius FH konstruieren, der Schnittpunkt des Kreisbogens mit der Geraden durch A und B ist der gesuchte Punkt D

Beweis: Es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$FH = \sqrt{(FA^2 + AH^2)} = \sqrt{((AB/2)^2 + AB^2)} = \sqrt{(5/4)}\ AD = 1/2\ \sqrt{5}\ AD$$

Somit ist $AD = FD - FA = FH - AB/2 = 1/2\ \sqrt{5}\ AB - AB/2 = (1+\sqrt{5})/2\ AB$



Goldener Schnitt, Konstruktion 3

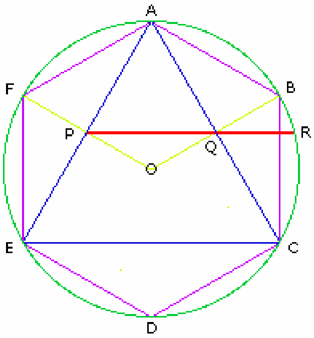
Eine Möglichkeit zur Konstruktion des Teilungspunktes D des goldenen Schnittes.

1) Mittelpunkt M der Strecke AB bestimmen und in A eine Senkrechte zu AB errichten
2) Kreisbogen um A mit Radius AM zeichnen, der Schnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten in A sei H
3) Kreisbogen um H mit Radius HB zeichnen, der Schnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten in A sei F
4) Kreisbogen um A mit Radius AF zeichnen, der Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden durch A und B ist der gesuchte Punkt D

Beweis: Da AH nach Konstruktion AB/2 ist, gilt nach dem Satz des Pythagoras

$HB = \sqrt{(AB^2 + AH^2)} = \sqrt{(AB^2 + AB^2/4)} = 1/2\ \sqrt{5}\ AB$

Somit ist $AD = AF = HF - AH = HB - AB/2 = 1/2\ \sqrt{5}\ AB - AB/2 = (\sqrt{5} - 1)/2\ AB$

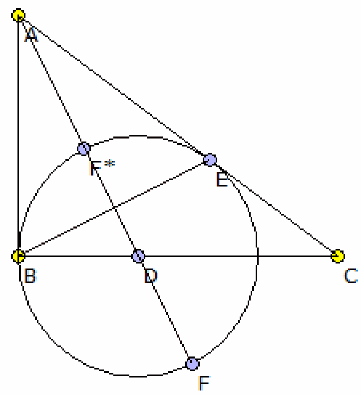


Goldener Schnitt, Konstruktion 4

Nach "Equilateral Triangles and the Golden ratio" von J.F.Rigby kann das goldene Verhältnis auch am gleichseitigen Dreieck bzw. Sechseck konstruiert werden.

1. In einem beliebigen Kreis mit dem Mittelpunkt O werden sechs Punkte A, B, C, D, E und F durch das Abtragen des Radius so konstruiert, dass ein regelmäßiges Sechseck entsteht.
2. Die drei Punkte A, C und E werden zu einem gleichseitigen Dreieck ACE ergänzt.
3. Auf zwei Seiten des Dreiecks AE und AC werden die Mittelpunkt P und Q konstruiert, in dem das Zentrum O mit den zwei nichtgenutzten Punkten F und B verbunden wird.
4. Die Gerade PQ schneidet den Kreis im Punkt R.

Q teilt dann die Strecke PR im goldenen Schnitt, d.h. Q ist der goldene Punkt von PR.



Goldener Schnitt, Konstruktion 5

Konstruktion:
Ausgangsfigur ist ein pythagoreisches Dreieck ABC mit den Seitenlängen 3, 4 und 5, d.h. ein ägyptisches Dreieck.
Die Winkelhalbierende durch den Punkt A schneide die längere Kathete BC im Punkt D. Um den Punkt D wird ein Kreis K gezogen mit dem Radius BD.
Der Kreis schneidet die Winkelhalbierende durch A und D in den beiden Punkten F und F*. Der Durchmesser FF* des Kreises K verhält sich zur Strecke CF* wie die verbleibende Strecke CF zum Durchmesser FF* des Kreises K, die Streckenabschnitte stehen also im Verhältnis des Goldenen Schnittes zueinander.
Nachweis: $AC / CB = AD / AB = 3/5$, $AD = 3/2$ und $BD = 5/2$
Aus dem Satz des Pythagoras wird

$CD = \sqrt{(CA^2 + AD^2)} = 3/2\ \sqrt{5}$	$CF^* = CD - F^*D = 3/2\ (\sqrt{5} - 1)$
$FF^* = 2\ AD = 3$	$CF = CF^* + 2\ AD = 3/2\ (\sqrt{5} - 1) + 3$
$CF / FF^* = 1/2\ (\sqrt{5} + 1)$	$FF^* / CF = 1/2\ (\sqrt{5} - 1) = \phi$

Goldenes Verhältnis

Zur Berechnung sehr vieler Dezimalziffern des Goldenen Verhältnisses

$\phi = 1.6180339887498948482045868343656381177720 ...$

nutzt man u.a. folgende Formeln:

$\phi = 1/2 + 1/(1-1/5)^2$

$\phi = 1/2 + (19/17) / (1-1/1445)^2$

$\phi = 1/2 + (341/305) / (1-1/465125)^2$

$\phi = 1/2 + (6119/5473) / (1-1/149768645)^2$

$\phi = 1/2 + (109801/98209) / (1-1/48225038405)^2$

$\phi = 1/2 + (1970299/1762289) / (1-1/15528312597605)^2$

Etwas Besonderes für Numerologen: $-(\sin 666° + \cos (6\cdot 6\cdot 6)°) = 1.61803398874989...$
ist gleich dem goldenen Verhältnis. Auf die "hochwissenschaftliche" Erklärung, was das goldene Verhältnis mit der "Zahl des Antichristen" zu tun hat, kann man nur gespannt sein.

Goldenes Verhältnis, Ziffern

Die ersten Ziffern des goldenen Verhältnisses $\phi = (1+ \sqrt{5})/2$ sind
1,618 033 988 749 894 848 204 586 834 365 638 117 720 309 179 805 762 862 135 448 622 705 260 462 818 902 449 707 207 204 189 391 137 484 754 088 075 386 891 752 126 633 862 223 536 931 793 180 060 766 726 354 433 389 086 595 939 582 905 638 322 661 319 928 290 267 880 675 208 766 892 501 711 696 207 032 221 043 216 269 548 626 296 313 614 438 149 758 701 220 340 805 887 954 454 749 246 185 695 364 864 449 241
und im Dualsystem
1,100 111 100 011 011 101 111 001 101 110 010 111 111 101 001 010 011 111 000 001 010 111 110 011 100 111 001 100 000 001 100 000 010 111 001 110 110 111 001 000 001 101 000 001 000 010 000 010 001 001 110 110 101 111 110 011 101 000 100 111 001 001 010 001 111 110 000 110 110 001 101 010 000 100 011 101 000 011 000 001 100 011 101 001 010 100 100 111 011 001 111 111 000 010 110 001 010 100 111 101 001 001 111
und im Hexadezimalsystem
1,9E3 779 B97 F4A 7C1 5F3 9CC 060 5CE DC8 341 082 276 BF3 A27 251 F86 C6A 11D 0C1 8E9 527 67F 0B1 53D 27B 7F0 347 045 B5B F18 27F 018 86F 092 840 300 2C1 D64 BA4 0F3 35E 36F 06A D7A E97

178 77E 858 39D 6EF FBD 7DC 664 D32 5D1 C53 716 82C ADD 0CC CFD FFB BE1 626 E33 B8D 04B 433 1BB F73 C79 0D9 4F7 9D4 71C 4AB 3ED 3D8 2A5 FEC 507 705 E4A E6E 5E7 3A9 B91 F3A A4D B28 7AE 44F 332 E92 3A7 3CB 916 48E 428
und im 26er-Code-System
A.QBU OSF FYV TXS ZUO FES LMS ECI ZIF UXV BQW QDF ONU FNY CLP SEY IIN TCS FKP AYR WOT OVB PYO ETU BHC PMH LVG UTX TJP OBH NHD FHO ETY ZWA WJM KLR YVQ KRE ODL SDN NQE JTJ QOV ZOO CYU IYA GEX DYJ WKT CJU QPB HPY LUP JQJ YCK HGT ALE BNV VBE OGD DJX CJS TMD JQG WNW KUO XSU QOZ ZEL GIY GMP MSL RNA FVQ PDN ZEN HPZ IFD TGK WIV IOH SYH KIG TRU VWI OIQ VCS VUW DYX NXO RDH VIF JMW VBY BTT HQC

Näherungsbrüche für ϕ

Für das goldene Verhältnis $\phi = (\sqrt{5} - 1) = 2 = 0,61803398874989\ldots$ können im besser annähernde Näherungsbrüche p/q durch schrittweitses Erhöhen von p und q ermittelt werden.
Die Tabelle enthält für wachsende Zähler p diejenigen Nenner, welche ϕ genauer annähern.

Bruch	Näherung	Fehler
1/2	0,500000000000000000000000000000000000000000000000000000	0,118033988749894848
2/3	0,666666666666666666666666666666666666666666666666666667	-0,048632677916771818
3/5	0,600000000000000000000000000000000000000000000000000000	0,018033988749894848
5/8	0,625000000000000000000000000000000000000000000000000000	-0,006966011250105152
8/13	0,615384615384615384615384615384615384615384615384615385	0,002649373365279464
13/21	0,619047619047619047619047619047619047619047619047619048	-0,001013630297724199
21/34	0,617647058823529411764705882352941176470588235294117647	0,000386929926365436
34/55	0,618181818181818181818181818181818181818181818181818182	-0,000147829431923334
55/89	0,617977528089887640449438202247191011235955056179775281	0,000056460660007208
89/144	0,618055555555555555555555555555555555555555555555555556	-0,000021566805660707
144/233	0,618025751072961373390557939914163090128755364806866953	
233/377	0,618037135278514588859416445623342175066312997347480106	
377/610	0,618032786885245901639344262295081967213114754098360656	
610/987	0,618034447821681864235055724417426545086119554204660588	
987/1597	0,618033813400125234815278647463994990607388854101440200	
1597/2584	0,618034055727554179566563467492260061919504643962848297	

Auf Grund der besonderen Struktur des Kettenbruches von ϕ ergibt sich nach einem Näherungsbruch p/q ein genauerer mit dem Zähler q. Sowohl Zähler als auch Nenner sind natürlich Fibonacci-Zahlen. Weitere Näherungen bis p = 50 Millionen befinden sich in der

Irrationalität des goldenen Verhältnisses

Angenommen das goldene Verhältnisses $\phi = (1+ \sqrt{5})/2$ wäre eine rationale Zahl. Dann kann ϕ als Bruch A/B dargestellt werden. Dieser Bruch werde weitgehend gekürzt, d.h.

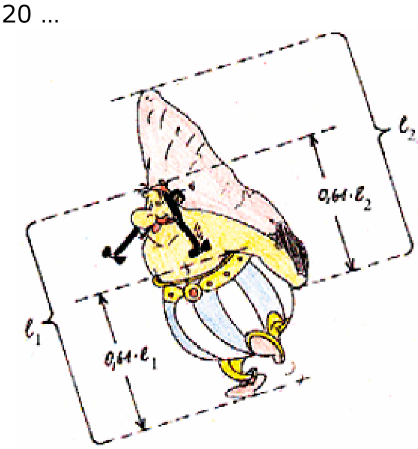
$\phi = p/q$ mit $ggT(p,q) = 1$

ϕ erfüllt nach Definition die quadratische Gleichung $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, d.h. $(p/q)^2 - p/q = 1$
Multiplizieren mit q^2 (q ist verschieden Null) und Faktorisieren ergibt (*) $p\ (p - q) = q^2$
d.h. p muss Teiler von q sein. Da $ggT(p,q) = 1$ gilt, ist p somit gleich 1.
Die Gleichung (*) kann durch Umordnen auf die Form $p^2 = q^2 + pq = q\ (q + p)$
gebracht werden, womit q Teiler von p und wie oben begründet gleich 1 sein muss.
Für ϕ ergibt sich damit der Wert $\phi = 1/1 = 1$. Da dieser die quadratische Gleichung nicht erfüllt, liegt ein Widerspruch vor. Folglich kann das goldene Verhältnis ϕ nicht rational sein. Die Zahl ist irrational.

Goldenes Verhältnis, Eigenschaften

Für das goldene Verhältnis $\phi = 1,6180339887498948482045868343656381177720\ldots$
existieren eine Vielzahl interessanter Beziehungen.

$\phi^2 = \phi + 1 = 2,6180339887498948482045868343656381177720\ldots$
$1/\phi = \phi - 1 = 0,6180339887498948482045868343656381177720\ldots$
$\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$
$2 = \phi + 1/\phi$
$\phi = 1 / (\phi - 1)$
$\phi = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + \ldots))) = [1; 1; 1; 1, \ldots]$
$\phi = \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \ldots)})})}$
$\phi = 1/\phi + 1/\phi^2 + 1/\phi^3 + \ldots + 1/\phi^m + \ldots$



In der Folge 1, ϕ, ϕ^2, ϕ^3, … ist jedes Glied die Summe der beiden vorhergehenden. Außerdem ist die Zahlenfolge eine geometrische Folge. Durch Sir d'Arcy Thompson wurde eine solche Zahlenfolge "gnomonisch wachsend" genannt.
In der Folge 1, $1/\phi$, $1/\phi^2$, $1/\phi^3$, … ist jedes Glied die Summe der beiden folgenden. Auch diese Zahlenfolge ist geometrisch.
Abbildung: Sogar Obelix ist im goldenen Schnitt geteilt :-)

Goldener Schnitt und Fibonacci-Folge

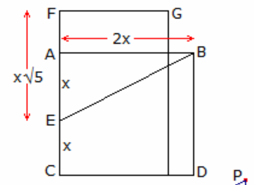
Linearkombination $\phi^{n+2} = a_{n+2}*\phi + a_{n+1}*1$
Für die Koeffizienten a_n gilt: $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$ und die Rekursionsvorschrift $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (Fibonacci-Folge)
Analog gilt: $(-\rho)^{n+2} = a_{n+2}*(-\rho) + a_{n+1}*1$ und weiter $\phi^{n+2} - (-\rho)^{n+2} = a_{n+2} (\phi + \rho)$

$a_n = 1/\sqrt{(5)}*(\phi^n - (-\rho))^n = 1/\sqrt{(5)}*(((\sqrt{(5)}+1)/2)^n - ((1-\sqrt{(5)})/2)^n$

für n>1 und n=1 und n=2

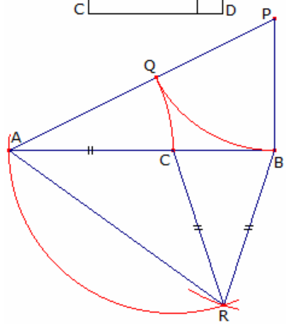
Folgerung: die Fibonacci-Zahlen streben mit wachsendem n gegen $1/\sqrt{(5)}*\phi^n$ und der Quotient a_{n+1}/a_n zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen ϕ

$\Phi = 1/2\ (\sqrt{5} + 1)$ $\quad \Phi^2 = 1/2\ (\sqrt{5} + 3)$ $\quad \Phi^3 = 1/2\ (2\ \sqrt{5} + 4)$
$\Phi^4 = 1/2\ (3\ \sqrt{5} + 7)$ $\quad \Phi^5 = 1/2\ (5\ \sqrt{5} + 11)$ $\quad \Phi^6 = 1/2\ (8\ \sqrt{5} + 18)$
$\Phi^7 = 1/2\ (13\ \sqrt{5} + 29)$ $\quad \Phi^8 = 1/2\ (21\ \sqrt{5} + 47)$ $\quad \Phi^9 = 1/2\ (34\ \sqrt{5} + 76)$



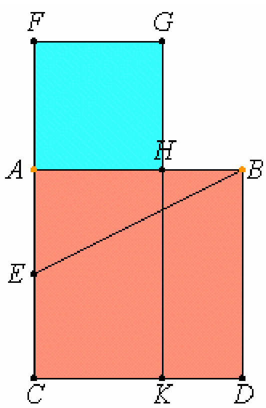
Goldener Schnitt in der Geometrie

Die Schenkel eines Goldenen Dreiecks stehen im Goldenen Verhältnis zur Basis. Der Basiswinkel beträgt dann 36°. Dies nutzte u.a. Pythagoras zur Konstruktion von ϕ.
Euklid gab folgende Konstruktionsbeschreibung:
Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 2x. E ist der Mittelpunkt von AC. Die Strecke BC hat dann die Länge $x\sqrt{5}$. Von E konstruiert man nun F in Richtung A mit der Länge von BC = $x\sqrt{5}$. FG ist nun gleich EF. Dann gilt:
$\phi = FC / CD = (EF + CE)/CD = x(\sqrt{5} + 1)/(2x) = 1/2\ (\sqrt{5} + 1)$
Das Verhältnis des Umkreisradius zur Seitenlänge im regelmäßigen Zehneck beträgt ebenfalls ϕ.



Winkel von 36°

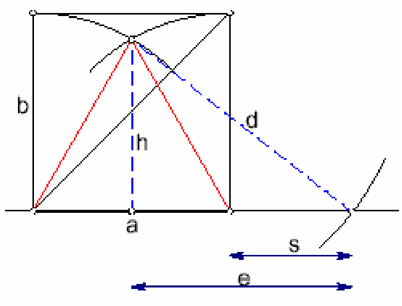
Umgekehrt kann man mit der Konstruktion des goldenen Schnittes auch einen Winkel von 36° mit Zirkel und Lineal erzeugen.
C sei dazu der Punkt, der die Strecke AB stetig teilt.
Um C wird ein Kreis mit dem Radius CA gezeichnet, um B ein Kreis mit dem gleichen Radius. Beide Kreise schneiden sich in einem Punkt R.
Dann ist der Winkel BRC = 36°.



Goldener Schnitt bei Euklid

"Elemente": Buch II § 11 (A. 1):
Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.

Die gegebene Strecke sei AB. Man soll AB so teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.
Man zeichne über AB das Quadrat ABDC, halbiere AC im Punkte E, ziehe BE, verlängere CA nach F, mache EF = BE, zeichnen über AF das Quadrat FH und ziehe GH nach K durch; ich behaupte, dass man AB in H so geteilt hat, dass AB * BH = AH². Da die Strecke AC nämlich in E halbiert und FA ihr angesetzt ist, so ist CF * FA + AE² = EF² (II, 6). Aber EF = EB; also ist CF * FA + AE² = EB². Aber EB² = BA² + AE²; denn der Winkel bei A ist ein Rechter (I, 47); also ist CF * FA + AE² = BA² + AE².
Man nehme das gemeinsame AE² weg; dann ist der Rest, CF * FA = AB². CF * FA ist hier FK; denn AF = FG; und AB² ist AD; also ist FK = AD. Man nehme Pgm. AK beiderseits weg; dann ist der Rest, Pgm. FH = HD. HD ist hier AB * BH; denn AB = BD; und FH ist AH²; also ist AB * BH = HA².
Man hat also eine gegebene Strecke AB in H so geteilt, dass AB * BH = HA² - dies hatte man ausführen sollen.
Euklid löst hier die Gleichung $a\ (a - x) = x^2$ konstruktiv. Dies entspricht der Ermittlung des Goldenen Schnittes. Nach Proklos soll diese Lösung schon den Pythagoreern bekannt gewesen sein.



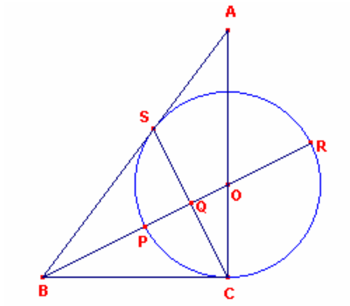
Goldener Schnitt am Dreieck

Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a = 2 als eine Kathete und die Diagonale eines Quadrats mit derselben Seitenlänge als Hypotenuse ergibt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenproportionen $\sqrt{3}$ / $\sqrt{5}$ $\sqrt{8}$.
Damit ist e = $\sqrt{5}$ und demnach s = $\sqrt{5}$ - 1. Weil a = 2, so gilt

$(\sqrt{5} - 1) / 2 = \tau$

Diese erstaunliche Tatsache gilt nicht nur für das Quadrat mit dem gleichseitigen Dreieck, sondern für alle beliebigen Rechtecke mit ihren gleichschenkligen Dreiecken, welche wie in der Abbildung durch herunterschlagen mit dem Zirkel der beiden Rechteckseiten gewonnen werden. Diese Methode ermöglicht nicht nur eine äußerst einfache Konstruktion der Verlängerung einer Strecke im Goldenen Schnitt, sondern auch eine Mascheroni-Konstruktion des regulären Fünfecks.

Goldener Schnitt am 3-4-5-Dreieck



Gegeben ist das rechtwinklige, pythagoreische Dreieck ABC mit AC = 4, CB = 3 und AB = 5.
Die Winkelhalbierende durch B schneide die Seite AC im Punkt O. O sei weiterhin Mittelpunkt eines Kreises durch den Punkt C. Da O auf der Winkelhalbierenden von β liegt, berührt der Kreis um U die Strecke AB im Punkt S. Dann ist: BS = 3 und AS = 2.
Die Winkelhalbierende schneidet den Kreis in den Punkten P und R und die Strecke CS in Q. In Q entstehen dabei Schnittwinkel von 90°. Dann wird:

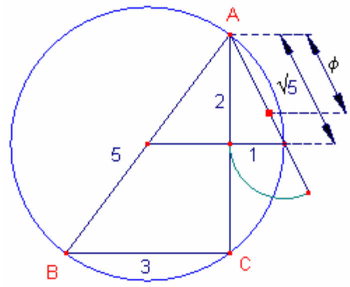
$BC / BA = CO / AO = 3/5$ $\qquad$ $CO = 3/8 * 4 = 3/2$ und $AO = 5/2$

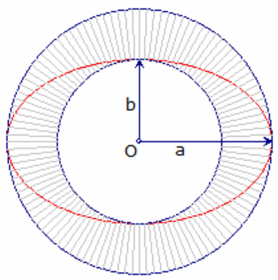
$BO = 3/2 \sqrt{5}$ $\qquad$ $BP = BO - PO = 3/2 (\sqrt{5} - 1)$

$BR = BP + PR = 3/2 (\sqrt{5} - 1) + 3 = 3/2 (\sqrt{5} + 1)$

$BR / PR = (\sqrt{5} + 1)/2 = \phi$

so dass P die Strecke BR im goldenen Schnitt teilt.
In der unteren Abbildung ist eine weitere Möglichkeit, das goldene Verhältnis ϕ am 3-4-5-Dreieck zu finden, dargestellt.





Goldene Ellipse

Gegeben seien zwei konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt O und den Radien a und b mit a > b.
Der Flächeninhalt des Kreisrings ist dann

$A = \pi a^2 - \pi b^2 = \pi (a^2 - b^2)$

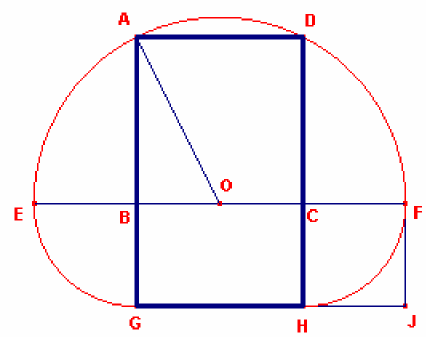
Die Ellipse mit der großen Achse 2a und der kleinen Achse gleich 2b hat dann den Flächeninhalt

$A_E = \pi ab$

Sind die beiden Flächeninhalte gleich, so wird

$a^2 - b^2 = ab$ $\qquad$ $a^2 - ab - b^2 = 0$

mit $a / b = \phi$. Die Ellipse wird dann goldene Ellipse genannt.



Goldenes Rechteck

Gegeben sei ein Quadrat ABCD der Seitenlänge 1.
Mit einem Kreis um den Mittelpunkt O der Strecke BC und dem Radius OA (= ½√5) werden die Punkte E und F auf der Geraden durch B und C konstruiert.
Konstruiert man die Punkte G und H als Schnittpunkte der Geraden AB, CD mit Kreisen um B und C mit dem Radius BE, so gilt:
$EB = BG = CF = CH = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = (\sqrt{5} - 1)/2 = 1/\phi$.
$AG = AB + BG = 1 + 1/\phi = (\phi + 1)/\phi = \phi$
Die Seiten des Rechtecks AGHD haben damit die Längen 1 und ϕ.
Ein derartiges Rechteck wird goldenes Rechteck genannt.

Fechner-Vierecke

Bei einem Experiment von Fechner sollten Versuchspersonen das Viereck auswählen, welches ihnen am harmonischsten erscheint. Außer dem Quadrat wurde aus den Fechner-Vierecken das Rechteck im Maß 5:8 am häufigsten ausgewählt, da es dem goldenen Rechteck am besten entspricht.

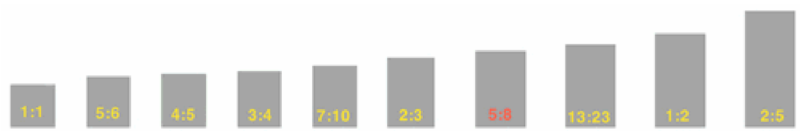
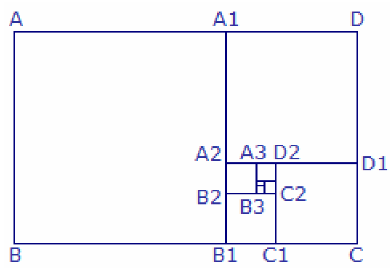


Abbildung: Fechner-Vierecke

Goldenes Rechteck (2)



Gegeben sei ein goldenes Rechteck ABCD, d.h. $AD = (1 + \sqrt{5})/2\ AB$, mit $p = (1 + \sqrt{5})/2$ und $p^2 - p - 1 = 0$.
Auf AD werde der Punkt A1 und auf BC der Punkt B1 mit AA1 = AB = A1B1 festgelegt. Von dem Rechteck ist damit ein Quadrat abgeschnitten. Dann ist

$A1D = AD - AB = p \cdot AB - AB = (p - 1)\ AB$

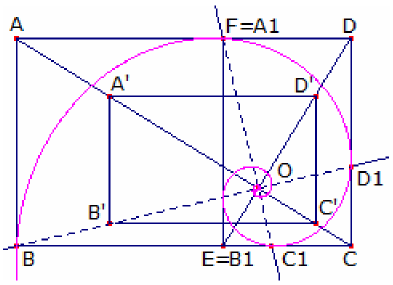
$p\ A1D = (p^2 - p)\ AB.$

Auf Grund des goldenen Schnittes ist $p^2 - p = 1$, so dass

$CD = AB = p \cdot A1D$

A1B1CD ist damit ebenfalls ein goldenes Rechteck.

Von diesem goldenen Rechteck kann erneut in gleicher Weise ein Quadrat abgeschnitten werden, wodurch ein weiteres goldenes Rechteck entsteht und somit eine Folge dieser ABCD, A1B1CD, A2B1CD1, A2B1C1D2, …
Aus der Konstruktion dieser Rechtecke ergibt sich, dass A2B1CD1 als zentrische Streckung von ABCD mit dem Streckungszentrum C entsteht. Damit sind die Punkte A, A2 und C kollinear.
Außerdem gilt: AC ⊥ B1D



Gegeben sei im goldenen Rechteck ABCD das zweite Rechteck A1B1CD.
Dann ist AC ⊥ B1D. O sei der Schnittpunkt von AC mit B1D.
Unter V sei eine Streckung von ABCD mit dem Zentrum O und dem Faktor f = 1/p (p = (1 + √5)/2) zu verstehen. Dann ist

V(ABCD) = A'B'C'D'

Dann ist A'D' = CD und A'B' = A1D. Bei einer Rotation R = (O, -90°) wird

R(A'B'C'D) = DA1B1C

F sei die Nacheinanderausführung von R und V, F = RV. Dann gilt

F(A) = D; F(B) = A1; F(C) = B1; F(D) = C

Weiterhin ist

OD = 1/p · OA ; OA = p · OD und A1A = p · A1D, so dass
OA : A1A = OD : A1D und OA : OD = A1A : A1D

Damit ist OA1 die Winkelhalbierende des Winkels AOD.
Es folgt: Die Geraden A1C1 und BD1 verlaufen durch O und halbieren den Winkel zwischen B1D und AC.
Die Abbildung F der Folge von goldenen Rechtecken erzeugt dann die Folge von zugeordneten Punkten

I: B → A1 → D1 → C1 → B2 → …
II: A → D → C → B1 → A2 → …

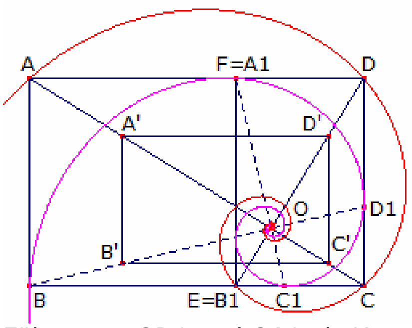
Die Abbildung F ist eine Drehstreckung mit dem Zentrum O, dem Faktor 1/p und dem Winkel -90°. Die Umkehrabbildung von F ist ebenfalls Drehstreckung (Zentrum O, Faktor p, Winkel +90°). Mit dem Übergang zu Polarkoordinaten mit dem Pol O wird

F: $P(r, \theta) \to P'(p/ r, \theta - \pi/2)$ $\qquad$ F_{inv}: $P(r, \theta) \to P'(p \cdot r, \theta + \pi/2)$

woeib OD1 die x-Achse mit OD1 = 1 darstellt. Die Polarkoordinaten der Punkte der Folge I sind dann

$B(p^2, \pi)$; $A1(p, ½\pi)$; $D1(1,0)$; $C1(1/p, -½\pi)$; $B2(1/p^2, -\pi)$; …

Allgemeine Formel $\qquad r = p^n$ mit $\theta = ½ \pi n$ (n ganzzahlig)
Folgerung: Die Punkte B, A1, D1, C1, … (Folge I) liegen auf der logarithmischen Spirale mit der Polargleichung $r = p^{2\,\theta/\pi}$



Wie auf der vorhergehenden Lexikonseite gezeigt wurde, liegen die Punkte B, A1, D1, C1, … auf einer logarithmischen Spirale mit der Polargleichung

$r = p^{2\,\theta/\pi}$

Analog kann man nachweisen, dass auch die Punkte A, D, C, B1, … auf einer logarithmischen Spirale liegen.
Mit O als Pol und OB1 als Hauptstrahl und OB1 = 1, wird dann

$A(p^3, 3\pi/2)$; $D(p^2, \pi)$; $C(p, \pi/2)$; $B1(1, 0)$, …

Die Polargleichung dieser Spirale ist bezüglich des Hauptstrahls OB1

$r = p^{2\,\theta/\pi}$

Beide Spiralen sind kongruent.
Führt man OD1 und OA1 als Koordinatenachsen ein, wird

$B2(-p^{-2}, 0)$, $C1(0, -p^{-1})$, $A1(0, p)$, $B(-p^2, 0)$.

Die Punkte A2, B1, C, D und A liegen dann auf der Spiralen mit der Gleichung $r = 2^{-½}\, p^n$ und den Argumenten $-5\pi/4$ (n = -1), $-3\pi/4$ (n = 0), $-\pi/4$ (n = 1), $\pi/4$ (n = 2), $3\pi/4$ (n = 3).

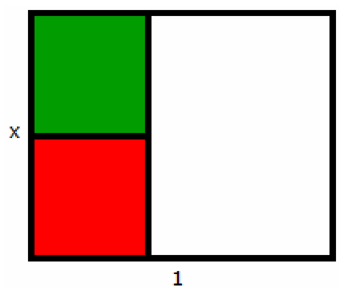
Allgemeines goldenes Rechteck

Ein Rechteck, dass nach Abschneiden von einem Quadrat dem Restrechteck ähnlich ist, wird goldenes Rechteck genannt. Dies kann verallgemeinert werden.
Dazu werden Rechtecke untersucht, bei denen nach Abschneiden von n (n ∈ N) übereinander liegenden Quadraten ein zum Ausgangsrechteck ähnliches Rechteck übrig bleibt. Die Abbildung zeigt den Fall für n = 2.
Das Ausgangsrechteck habe die Länge 1 und die Breite x. Dann wird

$x = (-1 + \sqrt{1 + 4n^2}) / (2n)$

mit den konkreten Werten

n	x
1	0,618034 = ϕ
2	0,780776
3	0,847127
4	0,882782
5	0,904988
6	0,920133

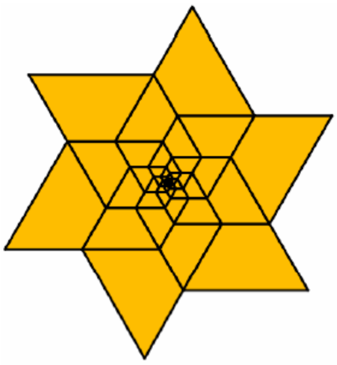


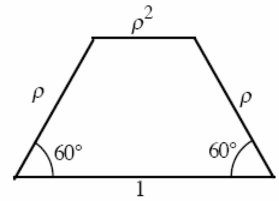
7	0,931119
8	0,939451
9	0,945986
10	0,951249

Für den Grenzfall n $\to \infty$ wird das allgemeine goldene Rechteck zum Quadrat.
Quelle: Hans Walser, 2004
Die Abbildung zeigt das Ergebnis des fortlaufenden Abschneideprozesses für n = 2:

Goldener Stern

Die oben abgebildete Figur besteht aus zueinander ähnlichen, gleichschenkligen Trapezen.
Diese Trapeze haben Basiswinkel von 60° an der Grundseite. Das Längenverhältnis von Basis zu den zwei Seiten und zur parallelen Deckseite beträgt $1 : \rho : \rho^2$
wobei hier $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ gleich dem goldenen Verhältnis ist.





Die entstehende Figur wird goldener Stern genannt.
Haben die längsten Außenseiten des Sterns die Länge 1, so bilden die Längen der nächstkleineren Seiten eine geometrische Zahlenfolge und verhalten sich wie

$$1 : \rho : \rho^2 : \rho^3 : \ldots$$

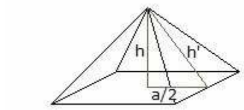
Im Inneren des Sterns befindet sich eine Singularität, die bei der Konstruktion nie erreicht wird.

Ägyptisches Dreieck, Kepler-Dreieck

Ein Dreieck, dessen Seitenlängen im Verhältnis

$$a : b : c = 1 : \sqrt{\phi} : \phi$$

stehen, wird ägyptisches Dreieck oder auch Kepler-Dreieck genannt.
Die Namensgebung ergibt sich aus der Tatsache, dass an der Cheops-Pyramide ein ägyptisches Dreieck auftritt.
Für diese Pyramide ist die Höhe h = 146,515 m und die quadratische Grundseite a = 230,363 m.



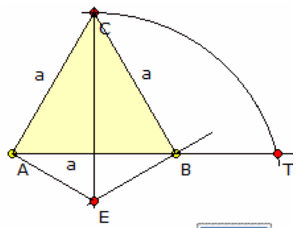
Damit wird für die Höhe h' der Seitenflächen

$$h' = 186{,}369 \text{ m}$$

Das Verhältnis h' : a/2 ist

$$h' : a/2 = 186{,}369 : 115{,}182 = 1{,}61804$$

d.h. nahezu das goldene Verhältnis ϕ = 1,61803…
Für h : a/2 wird $(h^2 : a^2/4) = 1{,}61620\ldots$ $\quad h : a/2 \approx \phi$
Kepler gab als Erster folgenden Satz an: Stehen in einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenlängen in geometrischer Progression, d.h. $b = k\,a\ ;\ c = k^2 a\ ;$ k … reelle Zahl
so ist es ein ägyptisches Dreieck und es gilt $a : b : c = 1 : \sqrt{\phi} : \phi$.



Goldener Winkel

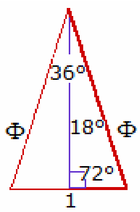
Eine wichtige Rolle spielt auch der sogenannte goldene Winkel Ψ (Psi), der den Winkel von 360° im Verhältnis des goldenen Schnittes teilt:

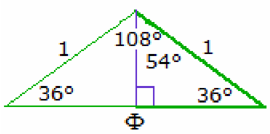
$$\Psi_1 = 360°/\varphi = 222°\ 29'\ 32{,}049'' \approx 222{,}5°$$

Betrachtet man den darauf folgenden Winkel in der Teilungsfolge

$$\Psi_2 = \Psi_1/\varphi = 137°\ 30'\ 27{,}951'' \approx 137{,}5°,$$

so stellt man fest, dass dieser Ψ_1 zu 360° ergänzt, wie es der Natur des goldenen Schnittes entspricht: 222,5° + 137,5° = 360°.
Diese Beziehung wurde erstmals 1875 durch Wiesner angegeben.
Da sich Winkel kleiner als 180° für die Praxis als handlicher erweisen, wird allgemein Ψ_2 als goldener Winkel verwendet.
Abbildung: Gegeben ist eine Strecke a = AB. Gesucht ist ein äußerer Punkt T, so dass B dann AT im goldenen Schnitt teilt.
Konstruktion: Über a wird ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Mit Senkrechten auf seine Seiten erhält man E. Der Kreis um E erzeugt T.
Ob beabsichtigt oder nicht. Eine Vielzahl von rechteckigen Marken- und Firmenlogos benutzt genau die Abmessungen eines goldenen Rechtecks. Zum Beispiel findet man Visa- und Mastercard oder auch Kitkat.





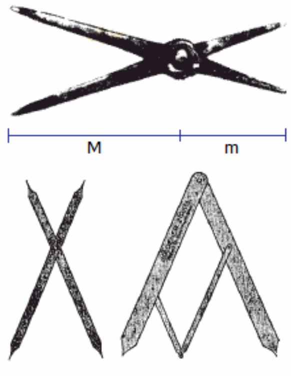
Goldener Schnitt und Winkel

In dem Artikel "Roots of (H-L)/15 Recurrence Equations in Generalized Pascal Triangles" von Smith und Hoggatt in "The Fibonacci Quarterly vol 18 (1980)" finden sich Beziehungen zwischen den goldenen Verhältnissen und den trigonometrischen Funktionen bestimmter Winkel. Bezeichnen wir

$$\phi = (\sqrt{5} - 1)/2 \quad \text{und} \quad \Phi = (\sqrt{5} + 1)/2$$

so ergibt sich an den links sichtbaren Dreiecken

$\cos(72°) = \cos(2\pi/5) = \sin(18°) = \sin(\pi/10) = \phi/2 = 1/(2\Phi)$
$\cos(36°) = \cos(\pi/5) = \sin(54°) = \sin(3\pi/10) = \Phi/2 = 1/(2\phi)$
und weiter $\cos(18°) = \sqrt{(\Phi \sqrt{5})} /2$
mit verschiedenen Additionstheoremen
$\cos(12°) = (\phi + \sqrt{(3\ \Phi \sqrt{5})}) /4$ $\cos(24°) = (\Phi + \sqrt{(3\ \phi \sqrt{5})}) / 4$
$\cos(48°) = (-\phi + \sqrt{(3\ \Phi \sqrt{5})}) /4$ $\cos(84°) = (-\Phi + \sqrt{(3\ \phi \sqrt{5})}) /4$



Goldener Zirkel
Ein goldener Zirkel ist ein mechanisches Instrument, mit dem man einerseits den goldenen Schnitt bestimmen kann und andererseits in der Lage ist, zu entscheiden, ob ein vorgefundener Punkt eine gegebene Strecke im goldenen Schnitt teilt.
Goldene Zirkel wurden z.B. häufig im Schreinerhandwerk verwendet. In der Abbildung sind aus dem 1919 erschienenen Buch von R.Engelhardt drei solche Zirkel abgebildet.

Das einfachste Modell ist der Reduktionszirkel, der aus zwei gleichlangen Stäben besteht, die in dem Punkt, der beide Stäbe im goldenen Schnitt teilt, beweglich aneinander befestigt sind. Ein antiker Vorläufer eines solchen Zirkels wurde z.B. bei den Ausgrabungen in Pompeji gefunden.

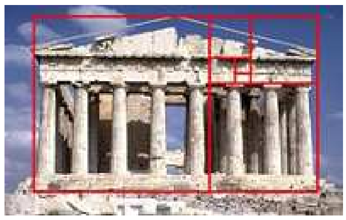
Nach dem Strahlensatz stellt sich auf der einen Seite ein Major und auf der anderen Seite der zugehörige Minor ein. Dieser goldene Zirkel ist so konstruiert, dass die Punkte P bzw. Q die gleichlangen Schenkel AS und SB im goldenen Schnitt teilen, und außerdem PT = PA , sowie QT = QB gilt.

Hurwitz-Theorem
Jede irrationale Zahl besitzt unendlich viele rationale Näherungen p/q, bei denen der Näherungswert p/q höchstens um $M = 1/(\sqrt{5}\ q^2)$ vom exakten Wert abweicht.

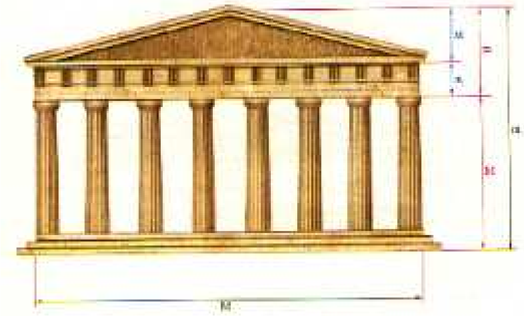
Irrationale Zahl	Näherung	Fehler e	Hurwitz-Wert M	e / M
π	22/7	0.00126	0.0091	0.13
	355/113	0.000000266	0.0000350	0.007
$\sqrt{2}$	7/5	0.0142	0.0179	0.79
	239/169	0.0000124	0.0000156	0.79
Goldener Schnitt ϕ				
ϕ	5/3	0.048633	0.0496904	0.9787
	21/13	0.00264937	0.26462343	1.001
	34/21	0.00101363	0.00101409	0.9995

Für keine andere irrationale Zahl als ϕ wurde bisher eine schlechtere Konvergenz der Näherungswerte gefunden. Damit wird ϕ auch die am stärksten irrationale Zahl genannt.

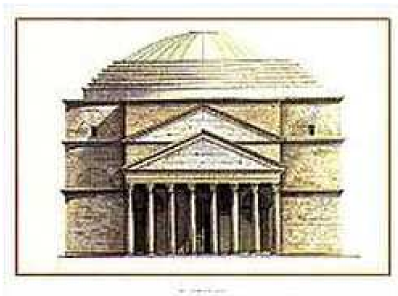
Kunst und Goldener Schnitt
Der „Goldene Schnitt", die am häufigsten angewandte Gestaltungsregelregel: In der Antike als "Maß aller Dinge" bezeichnet.
In der bildenden Kunst wird der Goldene Schnitt vorrangig deshalb verwendet, um dem Gesamtwerk einen harmonischen Eindruck zu verschaffen oder um bestimmte Details hervorzuheben.



Ob bereits die Ägypter ihre Pyramiden nach dem Goldenen Schnitt oder nach anderen geometrischen Prinzipien bauten, darüber streiten sich die Experten noch heute. Die Bedeutung des Goldenen Schnitts erkannte Euklid 300 v.Chr. Dieses Streckenverhältnis bildete später die Grundlage der griechischen Malerei, Plastik und Architektur.

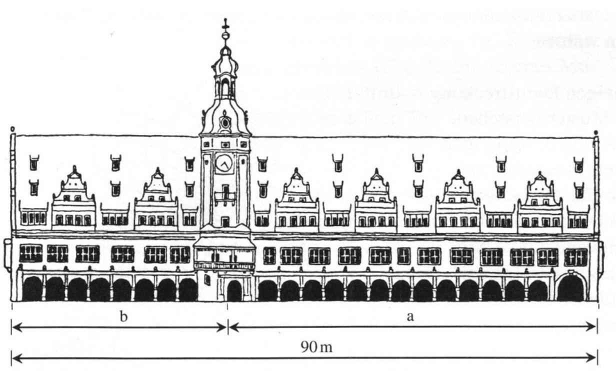


Beispiel: Das Parthenon in Athen, siehe Abbildung
Die vordere Fassade des Parthenon, des griechischen Staatstempels, passt genau in ein goldenes Rechteck, d.h. die Breite steht zur Höhe im Verhältnis des goldenen Schnitts. Die Säulenhöhe zur Höhe des Giebels ist ebenfalls in dieser Proportion. Der Grundriss selbst besteht aus goldenen Rechtecken.



Beim Panthenon in Rom erkennt man deutlich stetig geteilte Abschnitte.

Im Mittelalter hielt man den Goldenen Schnitt gar für "göttlich", er war die Verkörperung der vollkommenen Schöpfung, in der Renaissance stellte er die göttliche Logik dar. (Beispiel: Dom von Florenz). Danach verschwand er als Grundlage der Kunst für einige Zeit, wurde in den 20er Jahren unseres Jahrhunderts von vielen Künstlern angewandt, so z.B.: von Le Corbusier in der Architektur und von Piet Mondrian in der Malerei.
Prominente Beispiele im Bildnerischen sind die Mona Lisa von Leonardo da Vinci und das Selbstbildnis von Albrecht Dürer.
Der "Triumph der Galatea" von Raffael (um 1511) ziert eine Villa in Rom.
Die auf einem von Delphinen gezogenen Muschelboot fahrende Galatea ist von Fabelwesen umgeben, die offenbar alle nur das "Eine" im Sinn haben. Die Meeresnymphe dagegen sieht nur nach links oben, zum hinter einer Wolke versteckten Amor, der die platonische Liebe symbolisiert. Das Gemälde besteht aus zwei Teilen:
Der Himmel mit Amor und den anderen Engelchen

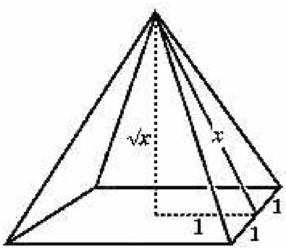


Die Nymphe und die Fabelwesen auf dem Meer
Nimmt man den goldenen Schnitt als Teilungsmaßstab, trifft der Minor von oben genau auf die Stirnlocke der Galatea und bezeichnet so die himmlische Welt, der Major umfasst den unteren Teil und damit die Darstellung des irdischen Lebens.

Das Leipziger Rathaus wurde ebenfalls im goldenen Schnitt konstruiert.

Cheops-Pyramide und Goldener Schnitt

Der griechische Gechichtsschreiber Herodot berichtet darüber, was ihm ägyptische Priester über den Bauplan der Cheops-Pyramide erzählt haben:



Die Große Pyramide des Cheops wurde so konstruiert, dass der Flächeninhalt jeder der 4 Seitenflächen gleich dem Quadrat der Pyramidenhöhe ist.
Die Pyramidenhöhe sei $\sqrt{x}$ Längeneinheiten und die quadratische Grundfläche habe die Seitenlänge 2 Längeneinheiten. Dann ist das Quadrat der Pyramidenhöhe x Flächeneinheiten.
Damit ein Seitendreieck den gleichen Flächeninhalt hat, muss die Höhe der Seitenfläche gleich x sein. Nach Pythagoras gilt dann:

$$x^2 = (\sqrt{x})^2 + 1^2 \qquad x^2 = x + 1 \qquad x^2 - x - 1 = 0$$

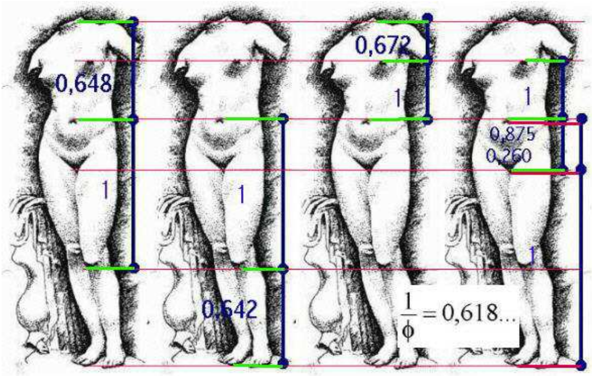
mit $x_1 = -0{,}618$ und $x_2 = 1{,}618...$
Damit entspricht x_2 dem Goldenen Verhältnis ϕ.
Piazzi-Smith fand durch Messung für Seitenflächenhöhe : Pyramidenhöhe = 1,617601..., d.h. etwa das Verhältnis des Goldenen Schnitts.
Anmerkung: Herodot berichtete auch, dass Hunderttausende von Zwangsarbeitern die Pyramiden errichtet haben. Dies wird von der Mehrzahl der Archäologen heute stark bezweifelt. Ebenso können daher die oben gemachten Aussagen über den geometrischen Aufbau der Pyramide angezweifelt werden.

Griechische Statuen

Es wird behauptet, dass griechische Bildhauer bewusst versuchten, das Verhältnis des Goldenen Schnitts mehrfach in die Abmessungen zum Beispiel dieser Statue einzuarbeiten.
Jedoch stimmen die an dieser Statue tatsächlich abzumessenden Verhältnisse wesentlich besser mit verschiedenen Verhältnissen kleiner ganzer Zahlen überein als mit dem Verhältnis des Goldenen Schnitts.

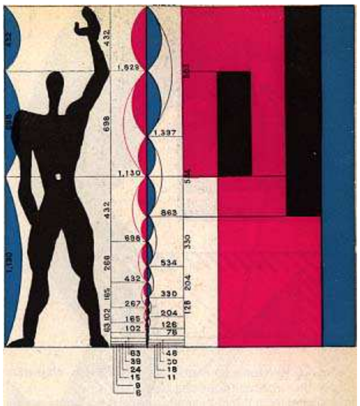
$0{,}648 \approx 0{,}666... = 2 : 3 \qquad 0{,}875 \approx 7 : 8$

$0{,}260 \approx 1 : 4$

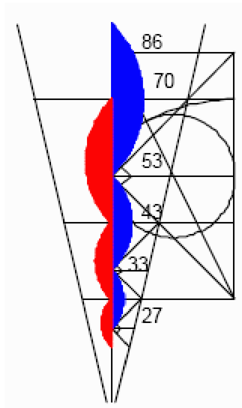


Le Corbusier (1887 – 1965) entdeckte auf der Suche nach harmonisch wirkenden Streckenteilungen durch den Hinweis eines Mitarbeiters den Goldenen Schnitt für sich und versuchte zum Beispiel in seinen Modulor-Studien dieses Verhältnis so oft wie möglich so genau wie möglich einzubauen.

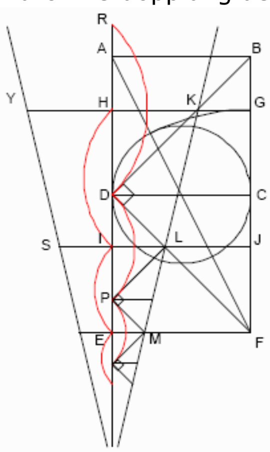
Modulor



Der Modulor (frz. moduler = Proportionsschema) ist ein vom Architekten und Maler Le Corbusier (1887-1965) in den Jahren 1942 bis 1955 entwickeltes Proportionssystem und stellt den bedeutendsten modernen Versuch dar, der Architektur eine am Maß des Menschen orientierte mathematische Ordnung zu geben. Er steht damit in der Tradition von Vitruv.
Der 1948 veröffentlichte Modulor wird zu den bedeutendsten Schriften der Architekturtheorie gezählt.



Das System basiert auf den menschlichen Maßen und dem goldenen Schnitt.
Zuerst nahm Corbusier 175 cm, ab 1950 183 cm als menschliches Maß an. Diese angenommene Standardgröße des menschlichen Körpers ist Ausgangswert einer geometrischen Folge von Maßen, die jeweils zueinander in der Proportion des goldenen Schnitts stehen.
Dies ist die sogenannte rote Reihe: …, 183, 113 (Bauchnabelhöhe), 70, 43, 27 cm, …
Durch Verdopplung der Werte der roten Reihe entsteht die blaue Reihe: …, 226 (Körpergröße mit ausgestrecktem Arm), 140, 86, 54 cm, …



Die erste Anwendung des Modulors findet man bei der Wohneinheit von Marseille, Unité d'Habitation à Marseille, die vollständig nach Modulor-Maßen gebaut wurde. Ein eindrucksvolles Beispiel des Modulors befindet sich im Kloster La Tourette. Dort existieren 100 Zellen für die dort wohnenden Mönche - jede dieser Zellen hat eine Höhe von 2,26 m und eine Breite von 1,83 m.

Konstruktion des Modulors

1) Zwei Quadrate mit Kantenlänge AB aufeinanderstapeln.
2) Einen Kreis mit Durchmesser DC zeichnen. Die Diagonale AF schneidet den Kreis in S. Kreisbogen mit Zentrum F und Radius FS schneidet FB in G.
3) Konstruieren eines dritten Quadrats GJIH mit Kantenlänge GJ = AB. Es entsteht der rechte Winkel BDF.
4) BDF schneidet HG und IJ in K und L. KL schneidet EF in M. PL rechtwinklig zu DL in D. Beweis, dass LPM ein rechter Winkel ist
5) Der Kreisbogen mit Zentrum LM verbindet I und E, H und I bilden zusammen mit IE die rote Skala.
6) Die Kreisbogen mit Zentrum YS, symmetrisch zu KL, verbinden R und D, D und P. Sie bilden die blaue Skala.

Die rote Zahlenreihe hat als Grundlage die Zahl 113: …, 11, 16, 27, 43, 70, 113, 183, 296, 479, 775, …
Die blaue Zahlenreihe hat als Grundlage die Zahl 226: …, 13, 20, 33, 53, 86, 140, 226, 366, 592, 958, …

Goldener Schnitt und Musik

Béla Bartok

Innerhalb der Musik tritt der Goldene Schnitt in zwei Formen auf. Zum einen können zwei Töne bzw. ihre Frequenzen zueinander in der Proportion des Goldenen Schnitts stehen. Andererseits kann die Komposition eines Stückes aus Teilen bestehen, deren Längen sich zueinander verhalten wie der Goldene Schnitt.

Nach Meinung des Musikwissenschaftlers Ernö Lendvai finden sich der Goldene Schnitt und die Fibonacci-Zahlen als beherrschendes Gestaltungsprinzip in den Werken des ungarischen Komponisten Béla Bartok (1881-1945) wieder. Besonders deutlich wird dies in der hier abgebildeten Sonate für zwei Klaviere und Schlagzeug (1938), wo große und kleine Formteile sowie Melodie- und Harmoniebildung der Proportionsbildung nach dem Goldenen Schnitt folgen. Bartok selbst hat sich allerdings nie zu seinen strukturellen Kompositionsprinzipien geäussert.

Goldener Schnitt – Trugschluss?

Gustav Theodor Fechner, ein Begründer der experimentellen Psychologie, stellte 1876 bei Untersuchungen mit Versuchpersonen anhand von Rechtecken in der Tat eine Präferenz

für den Goldenen Schnitt fest. Die Ergebnisse bei der Streckenteilung und bei Ellipsen fielen jedoch anders aus. Neuzeitliche Untersuchungen zeigen, dass das Ergebnis solcher Experimente stark vom Kontext der Darbietung abhängt. Fechner fand ferner bei Vermessungen von Bildern in verschiedenen Museen Europas, dass die Seitenverhältnisse im Hochformat im Mittel etwa 4:5 und im Querformat etwa 4:3 betragen und sich damit deutlich vom Goldenen Schnitt unterscheiden.
Ende des 20. Jahrhunderts suchte die Kunsthistorikerin Marguerite Neveux mit röntgenanalytischen Verfahren unter der Farbe von Originalgemälden, die angeblich den Goldenen Schnitt enthalten, vergeblich nach entsprechenden Markierungen oder Konstruktionsspuren.
Insgesamt muss man feststellen, dass bei modernen Untersuchungen sich sehr oft der „Goldene Schnitt" nicht nachweisen lässt.

Goldener Schnitt in Astronomie und Physik

Seit langem ist bekannt, dass die Umlaufzeiten mancher Planeten und Monde in Verhältnis kleiner ganzer Zahlen stehen wie beispielsweise Jupiter und Saturn mit 2:5 oder die Jupitermonde Io, Ganymed und Europa mit 1:2:4. Solche Verhältnisse stabilisieren diese Bahnen langfristig gegen kleinere Störungen. Erst 1964 wurde entdeckt, dass auch hinreichend irrationale Verhältnisse, wie sie beispielsweise im Fall 1:Φ vorliegen würden, stabilisierend wirken können. Derartige Bahnen werden KAM-Bahnen genannt, wobei die drei Buchstaben für die Namen der Entdecker Andrei Kolmogorow, V. I. Arnold und Jürgen

Der Goldene Schnitt tritt auch bei den Quasikristallen der Festkörperphysik in Erscheinung, die 1984 von D. Shechtman und seinen Kollegen entdeckt wurden. Dabei handelt es sich um Strukturen mit fünfzähliger Symmetrie, aus denen sich aber, wie bereits Kepler erkannte, keine streng periodischen Kristallgitter aufbauen lassen, wie dies bei Kristallen üblich ist. Entsprechend groß war die Überraschung, als man bei Röntgenstrukturanalysen Beugungsbilder mit fünfzähliger Symmetrie fand. Diese Quasikristalle bestehen strukturell aus zwei verschieden rhomboedrischen Grundbausteinen, mit denen man den Raum zwar lückenlos, jedoch ohne globale Periodizität füllen kann. Beide Rhomboeder setzten sich aus den gleichen rautenförmigen Seitenflächen zusammen, die jedoch unterschiedlich orientiert sind. Die Form dieser Rauten lässt sich nun dadurch definieren, dass ihre Diagonalen im Verhältnis des Goldenen Schnittes stehen.

Weiter Anwendungen

Selbst im Film wurde auf den Goldenen Schnitt geachtet. Berühmtestes Beispiel ist der Film "Panzerkreuzer Potemkin" von Sergej Eisenstein (1925). Er teilt das Bild bei besonders wichtigen Szenen im Goldenen Schnitt. Durch „The New Oxford Companion to Music" wurde weiterhin nachgewiesen, dass Stradivari zur Konstruktion seiner berühmten Violinen den Goldenen Schnitt nutzte. 1996 untersuchte Mike Kay eine Vielzahl von Mozarts Sonaten. Er konnte zeigen, dass der geniale Musiker diese stets in zwei Abschnitte unterteilte; im Verhältnis des goldenen Schnittes. Ähnliches wurde auch bei Beethovens 5.Sinfonie nachgewiesen.
Untersucht man die Konstruktion moderner Montain-Bikes, so stellt man fest, dass deren Konstruktion sowohl in Höhe als auch Breite den goldenen Schnitt ausweist.

Goldener Schnitt und Mystizismus

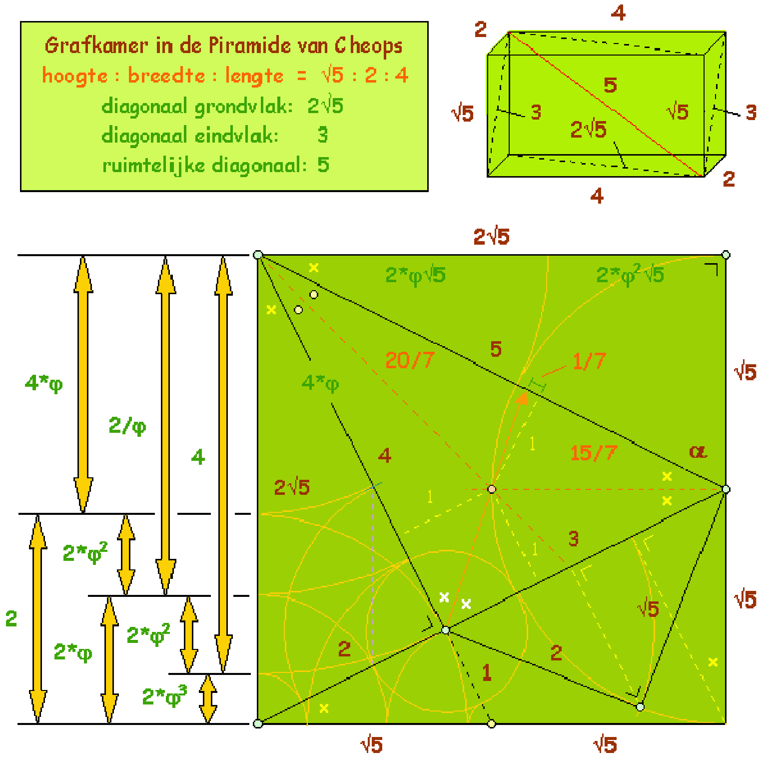
Abbildung: Das Pentagramm als Lebensbaum, Baptisterium im Jupitertempel von Split (Dalmatien/Kroatien)

In Goethes's Faust spricht Mephisto zu Faust:
"Beschauet es recht! Es ist nicht gut gezogen: Der eine Winkel, der nach außen zu,
ist, wie du siehst, ein wenig offen."

Das Pentagramm ist seit der Antike ein Heilszeichen und spielt beispielsweise im Islam nach wie vor eine große Rolle. Wie früher auch hierzulande, ist man im Orient der festen Überzeugung, ein Pentagramm auf der Türschwelle halte böse Geister davon ab, in das Haus einzudringen. In Deutschland war das Pentagramm früher als "Drudenfuß" bekannt. Diese Bezeichnung spielt auf den Glauben an, daß die Druden, die Alpe und Hexen einen Gänse- oder Entenfuß hätten, dessen Abdruck in etwa die Form eines Pentagramms gleiche.
Das Pentagramm wird aus den Diagonalen eine regelmäßigen Fünfecks gebildet. Die Diagonalen teilen sich im Verhältnis des Goldenen Schnittes. Es gilt: b = 72°, a = 36°, QP : PA = PA : AQ oder AP = QB = QC = 1,618.. • PQ.

«De Gulden Snede in de piramide van Cheops»

Wie schon oben erwähnt, glauben einige Hobbyarchäologen in der Konstruktion der Cheops-Pyramide die überraschendsten Zeugnisse für eine extrem hoch entwickelte Mathematik und vor allem für den Willen der Baumeister dies umzusetzen, zu finden.



Ein Vertreter dieser Personen ist der holländische Mathematiker Hans Bär. In seinem Text "De Gulden Snede in de piramide van Cheops" gibt er eine riesige Anzahl von Deutungen an, wo und wie die Ägypter den goldenen Schnitt und weitere mathematische Gesetze in den Bau der Pyramiden einfließen ließen.
Die linke Abbildung zeigt ein Modell und den Querschnitt der Grabkammer der Cheops-Pyramide. Durch Bär werden hier viele goldene Verhältnisse sowie ein pythagoreisches 3-4-5-Dreieck gefunden.

Architektur und goldener Schnitt

Im 19. und 20.Jahrhundert alle wichtigen Bauten und ihr architektonisches Umfeld auf Proportionen nach dem Goldenen Schnitt untersucht. Hardo Raslagg untersuchte den Salzburger Dom.

Links der Grundriss des Domes, wie er 1628 zuerst nach Plänen Vincenzo Scamozzis, später von Santino Solari fertig gestellt wurde. Man erkennt die Konstruktion mit den Doppelbögen zum Nachweis des goldenen Teilverhältnisses. Demnach sind der Ort des Kuppelmittelpunkts und der Kuppelradius "goldene Größen".
Ebenso liegt dem Domplatz der goldene Schnitt zugrunde.

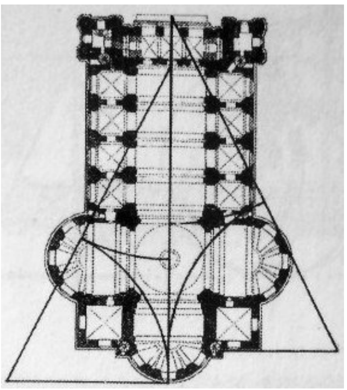
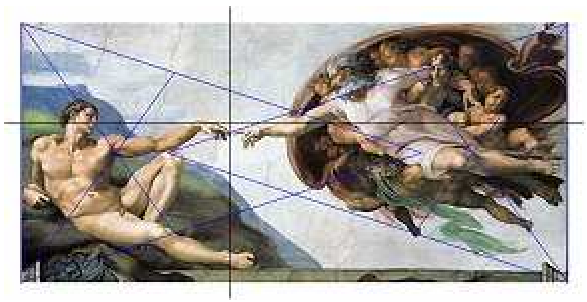


Abbildung: Grundriss des Domplatzes
Die Domfassade befindet sich rechts. Der rote Pfeil weist auf das im Platz befindliche, als Punkt erkennbare Mariendenkmal. Major (M) und Minor (m) sind wieder analog konstruiert und legen seinen Ort als "goldenes Zentrum" fest.
Quelle: Gerhard Hanebeck

Kunst und goldener Schnitt

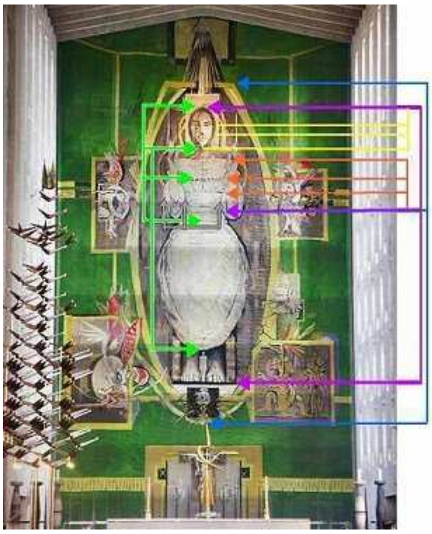
Eines der berühmtesten Beispiele für die Verwendung des goldenen Schnitts in der Kunst ist das Fresko "Erschaffung Adams" von Michelangelo Buonarroti. Die "Erschaffung Adams" ist ein Ausschnitt aus dem Deckengemälde in der Sixtinischen Kapelle. Es gehört zu einem Zyklus von 9 Fresken, welche "Genesis 1-9" bildlich darstellen.

Das Bild zeigt auf der linken Seite Adam, der seinen Zeigefinger ausstreckt, um Gott zu erreichen. Gott streckt ebenfalls seinen rechten Zeigefinger aus, um auf Adam den Lebensfunken überspringen zu lassen. Diese entscheidende Szene wird von Michelangelo in den goldenen Schnitt gelegt, so dass die zentrale Aussage besonders hervortritt.
Zusätzlich werden die beiden Hauptfiguren längs der Seiten und Winkelhalbierenden von zwei goldenen Dreiecken angeordnet, wodurch eine besondere Dynamik entsteht.



"Die Erschaffung Adams ist eines der großen Menschheitsbilder geworden, das über die Schranken von Konfessionen, Nationen und Rassen hinweg an die hohe Bestimmung des Menschen erinnert und wirkende Urkräfte des Kosmos in erfassbare Bildgestalten transponiert.
Als die Hälfte der Decke noch nicht ganz fertig gemalt war, verlangte der Papst, dass sie aufgedeckt werde. Ganz Rom strömte herbei, um zu sehen, was Michelangelo gemacht hatte. Durch das Erhabene und

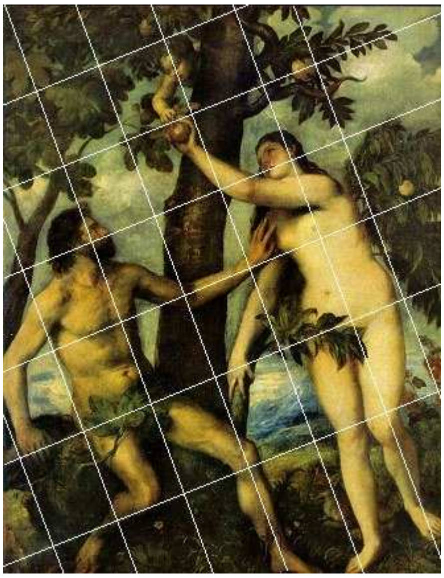
Gewaltige seiner Werke erschien er seinen Landsleuten und Zeitgenossen beinahe unheimlich. …"
(aus Johannes Lindenmaier, "Meisterwerke der Kunst")



Durch Graham Sutherland (1903-1980) wurde der Altar der Coventry Kathedrale gestaltet. Dabei fehlt auf, dass eine Vielzahl von goldenen Schnitten verwendet wurden.

(blau) Die Christus-Figur ist von einem oben abgeflachten Oval umgeben. Der Gürtel befindet sich dabei im goldenen Schnitt dieses Ovals.
(lila) Dieser Gürtel liegt ebenso im goldenen Verhältnis bezüglich der ganzen Christus-Figur; vom Kopf bis zu den Füßen. Dies entspricht dem natürlichen Verhältnis menschlicher Körper.
(rot) Der obere Gürtelrand und die Brustlinie liegen im goldenen Schnitt bezüglich dem unteren Rand des Gürtels und der Schultern.
(gelb) Die Augen teilen den Kopf ebenfalls stetig.
(grün) Zwei weitere Ovale bilden ein goldenes Verhältnis.
(grau) Die die Arme bildenden Ovale haben eine Breite von 0,618 des Armabstandes

Ein besonderes Beispiel für die Anwendung des goldenen Schnittes in der Kunst ist Tizians "Der Sündenfall" von 1568.



"Wie viel große Meister baute er es strikt nach dem Prinzip des Goldenen Schnittes auf.
Den flacheren Linien folgen die Äste und Zweige der Bäume, die Köpfer der Figuren, ihre Arme, Unterkörper, Knie und Fußknöchel. In das steilere Linienraster fügen sich die Figuren von Adam und Eva in ihrer Körperhaltung ein. Und sogar das Gesicht und der Arm des hier als kleines Kind dargestellten Verführers passen sich in dieser Richtung an.
… die Linien [sind] so eingezeichnet, dass sie der Haltung der Figuren folgen. Deshalb sind ihre Anstände unregelmäßig.
Würde man die Raster in gleichmäßigen Abständen zeichnen, dann würde sich zeigen, dass auch hier … auf 3 flachere ungefähr 5 steilere oder auf 5 flachere ungefähr 8 steilere Rasterfelder kommen." (Anmerkung: Fibonacci-Zahlen und damit der goldene Schnitt) zitiert nach Felix R.Paturi, "Mathematische Leckerbissen"

Goldener Schnitt und Bundeslade

In Exodus 25:10 heißt es
"Macht eine Lade aus Akazienholz, zweieinhalb Ellen lang, anderthalb Ellen breit und anderthalb Ellen hoch!"
Damit ergibt sich für das Verhältnis Länge zur Breite bzw. Höhe

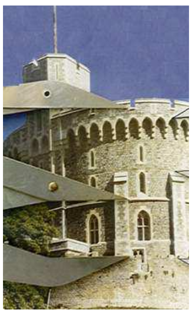
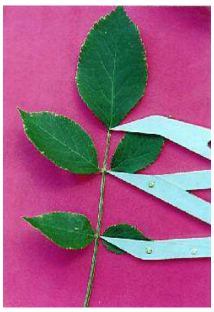
$25 / 15 = 1,66666…$

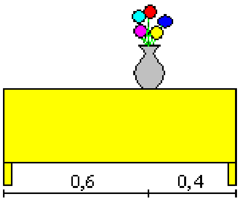
Berücksichtigt man, dass in der Bibel alle Zahlenwerte in sehr grober Genauigkeit genannt werden, so ergibt sich hier eine (schlechte) Näherung des Verhältnisses des goldenen Schnitts

$\Phi = 1,6180339887…$

Durch eine Vielzahl von Historikern wird aber in den Maßangaben der Bundeslade ein Hinweis auf eine frühe Verwendung des goldenen Schnitts gesehen. Die Abbildung zeigt eine fiktive Kopie dieser Bundeslade; wenn es sie überhaupt jemals gegeben hat!
Quelle: "Der geheime Code", Priya Hemenway

Weitere Beispiele für den goldenen Schnitt



In den 1960iger Jahren kennzeichnete der Fernsehjournalist Professor Heinz Haber das Verhältnis des Goldenen Schnitts wie folgt:
Gegeben sind in einem Versuchsraum nur ein niedriger Schrank und eine Blumenvase mit Blumen. Versuchspersonen sollen auf den Schrank eine Blumenvase so hinstellen, dass es "schön" aussieht. Die wenigsten stellen die Vase in die Mitte. Das sieht langweilig aus. Die meisten stellen die Vase ein wenig rechts oder links von der Mitte, wie es die Skizze zeigt. Es stellt sich heraus, dass die Vase die Schrankbreite etwa im Verhältnis des goldenen Schnittes teilt. Dieses Empfinden ist uns wohl anerzogen und ist Teil unserer Kultur.

Kunst und goldener Schnitt

Durch Jo Niemeyer wurde ein besonderes Kunstobjekt unter Berücksichtigung des Goldenen Schnitts erstellt.
Insgesamt installierte er 20 jeweils 5,50 m hohe Edelstahl-Stelen, die an präzise vermessenen Orten in dynamischen Abständen die Erde umspannen. Beginn und Endpunkt liegen in der Tundra Finnlands (Abbildung).
Für den Abstand von Stele 0 zu Stele 1 wurden 45,8 cm gewählt, für den Abstand 1 zu 2 das $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$-fache, d.h. 1,198 m: Die nachfolgenden Abstände steigen dann mit den Faktoren, danach um Φ^3, Φ^5, Φ^7, …

Stele	Abstand zu Nr.0	Ort der Aufstellung	Koordinaten
1	45,8 cm	Ropinsalmi, Finnland	68°40'0'' N 21°36'0'' E
2-6	1,198 m, 3,137 m, 8,214 m, 21,51 m, 56,30 m	Lappland, Finnland	68°40'0'' N 21°36'0-5'' E
7	147,40 m	Lappland, Finnland	68°40'1'' N 21°36'13'' E
8	385,88 m	Lappland, Finnland	68°40'3'' N 21°36'33' E
9	1,010 km	Lappland, Finnland	68°40'9'' N 21°37'27'' E
10	2,645 km	Lappland, Finnland	68°40'23'' N 21°39'47'' E
11	6,924 km	Lappland, Finnland	68°40'59'' N 21°45'55'' E
12	18,128 km	Lappland, Finnland	68°42'35'' N 22°1'59'' E
13	47,460 km	Kautokeino, Norwegen	68°46'36'' N 22°44'14'' E
14	124,25 km	Anarjokka, Norwegen	68°56'18'' N 24°35'59'' E
15	325,30 km	Pitkajarvi, Rußland	69°15'47'' N 29°35'24'' E
16	851,64 km	Barents-See	69°24'18'' N 43°1'50'' E
17	2229,6 km	Noryi Urengoj, Rußland	65°15'36'' N 73°47'22'' E
18	5837,3 km	Baotou, China	40°4'3'' N 109°46'38'' E
19	15282 km	Wilsons, Australien	38°24'55'' S 145°24'19'' E
20	40009 km	Ropinsalmi, Finnland	68°40'0'' N 21°36'0'' E

Moai und goldener Schnitt

Moais (polynesisch: steinerne Figur) werden die kolossalen Steinstatuen der Osterinsel genannt. Sie sind Bestandteil größerer Anlagen. Das genaue Alter der Figuren ist umstritten, wahrscheinlich sind sie jünger als 1500 Jahre.
Die riesigen Steinskulpturen wurden auf einer Plattform mit Blick auf die davor liegende Ansiedlung mit dem Rücken zum Meer aufgestellt. Der eigentliche Zweck der Statuen ist unbekannt.
Einige Statuen besitzen einen "Hut", einen Pukao, d.h. einen zylinderförmigen Kopfaufsatz.
Sieht man von diesem Pukao ab, so stellt man fest, dass die große Mehrheit der Figuren so gestaltet wurden, dass der Kopf dem goldenen Verhältnis der Gesamthöhe entspricht. Dabei enden die Figuren unmittelbar unter dem Bauchnabel.
Dieses gilt auch für die rund um den erloschenen Vulkankrater Rano Raraku befindlichen etwa 300 Moais, die heute meist bis zur Brust bzw. Halspartie in den Boden eingegraben sind.

Weitere mathematische Eigenschaften des goldenen Verhältnisses

Aus $\Phi^2 = 1 + \Phi$ lässt sich folgende unendliche Kettenwurzel herleiten: $\Phi = \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \ldots}}}}$
Das Quadrat $\Phi^2 = \Phi + 1$ und jede höhere ganzzahlige Potenz von Φ lassen sich als Summe aus einem Vielfachen von Φ und einem Vielfachen von 1 darstellen. Auf dieser Eigenschaft beruht die fundamentale Bedeutung des goldenen Schnitts für quasiperiodische Gitter.
In der Trigonometrie gilt unter anderem:

$\sin(\pi/10) = (\Phi-1)/2$ — $\pi/10$ ist die Hälfte des Winkels in der Spitze des Pentagramms
$\sin(3\pi/10) = \Phi/2$ — $3\pi/10$ ist die Hälfte des stumpfen Außenwinkels des Pentagramms
Der goldenene Schnitt Φ spielt für das Fünfeck eine ähnliche Rolle wie die Kreiszahl π für den Kreis.

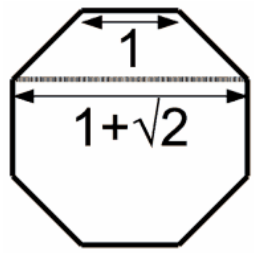
Der goldene Schnitt lässt sich auch mit Hilfe der Eulerschen Zahl und der hyperbolischen Areasinus-Funktion ausdrücken $\Phi = e^{\text{arsinh } 1/2}$

Informatik: Beim Hashen werden Daten über einen sogenannten Schlüssel h(k) in eine Hashtabelle gespeichert. Ziel ist es die Daten möglichst gleichmäßig in diese Tabelle einzutragen. Dafür entscheidend ist der Schlüssel, der durch die Hashfunktion berechnet wird. Folgt die Hashfunktion der multiplikativen Methode, also

$h(k) = m \text{ Floor}(k \varphi - k \text{ Floor}(\varphi))$ mit m als Größe der Hashtabelle und k als Datenindex,

so bringt die Wahl von $\varphi = 1{,}618033988$, also der Goldenen Schnitt, im Durchschnitt gute Ergebnisse in der Datenverteilung.

Silbener Schnitt



Als Silbernen Schnitt bezeichnet man das Teilungsverhältnis einer Strecke oder anderen Größe, bei dem das Verhältnis der Summe des verdoppelten größeren und des kleineren Teils zum größeren Teil dem Verhältnis des größeren zum kleineren Teil entspricht.

Sind a der größere und b der kleinere Teil, so gilt $(2a+b) / a = a / b = \delta_S$

Für den silbernen Schnitt gelten die trigonometrischen Terme mit dem Winkel $\pi/8 = 22{,}5°$:

$\delta_S = \cot \pi/8$ $\quad \delta_S = \tan 3\pi/8$

$\delta_S = 1 + \sqrt{2} = 2{,}414213562373095048801688724210...$

In einem regelmäßgen Achteck (Abbildung) steht die eingezeichnete Diagonale im silbernen Verhälts zur Seitenlänge des Achtecks.

Tribonacci-Konstante

Unter der Tribonacci-Konstante t versteht man die reelle Zahl

$t = 1/3 \, (1 + \sqrt[3]{19 - 3 \sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + 3 \sqrt{33}}) \approx$

1,83928 67552 14161 13255 18525 64653 28660 04241 78746 09759 22467 78758 63940 42032 22081 96642 57384 35419 42830 70141 41979 82685 92409 74164 17845 07465 07436 94383 15458 20499 51379 62496 55539 64461 36661 21540 27797 26781 18941 04121 16092 23282 15595 60718 16712 18236 59866 52273 37853 78156 96989 25211 73957 91413 …

Die Konstante erfüllt die Gleichungen

$(t + 1) (t - 1)^2 = 2$ $\quad t + t^{-3} = 2$

$(t - 1) (t^2 + 1) / t = 2$ $\quad (t + 1)^2 / (t (t^2 + 1)) = 1$

Die Tribonacci-Konstante besitzt besondere Bedeutung bei der Berechnung von Polyedern, insbesondere bei dem abgeschnittenen Würfel.

Die Konstante ist mit den Tribonacci-Zahlen verbunden. Der Name wurde in Anlehnung an den Zusammenhang von Fibonacci-Zahlen und goldenem Verhältnis ϕ gewählt.

Tribonacci-Zahlen

Zahlen der rekursiv definierten Zahlenfolge $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ mit $T_1 = 1$; $T_2 = 1$; $T_3 = 2$

Die ersten Zahlen der Folge sind 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, …

Tribonacci-Folge

Zahlen der rekursiv definierten Zahlenfolge $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ mit $T_1 = 1$; $T_2 = 1$; $T_3 = 2$ werden Tribonacci-Zahlen genannt, die von ihnen gebildete Zahlenfolge Tribonacci-Folge.

Die ersten Glieder der Folge sind

1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, 19513, 35890, 66012, 121415, 223317, 410744, 755476, 1389537, 2555757, 4700770, 8646064, 15902591, 29249425, …

Zahlenfolgen, der Struktur $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$

mit anderen Startgliedern T_1, T_2 und T_3 werden als Tribonacciähnliche Folgen bezeichnet.

Interessant ist, dass für jedes von Null verschiedene Tripel von Anfangswerten der Quotient T_n / T_{n-1} für steigendes n gegen die Tribonacci-Konstante t = 1,8392867552… konvergiert.

Tetranacci-Zahlen, Quadranacci-Zahlen

Die rekursive Definition der Fibonacci- und Tribonacci-Zahlen kann erweitert werden.

Unter Tetranacci-Zahlen versteht man Zahlen der rekursiv definierten Zahlenfolge

$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4}$ mit $T_1 = 1$; $T_2 = 1$; $T_3 = 2$; $T_4 = 4$

Die nächsten Tetranacci-Zahlen sind

8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773, 1490, 2872, 5536, 10671, 20569, 39648, 76424, 147312, …

Prime Tetranacci-Zahlen ergeben sich für $n < 236995$

n = 3, 7, 11, 12, 36, 56, 401, 2707, 8417, 14096, 31561, 50696, 53192, 155182, …

Die ersten sind 2, 29, 401, 773, 5350220959, 2682493808945359, …

Pentanacci-Zahlen

Die rekursive Definition der Fibonacci- und Tribonacci-Zahlen, usw. kann erweitert werden.

Unter Pentanacci-Zahlen versteht man Zahlen der rekursiv definierten Zahlenfolge

$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4} + T_{n-5}$ mit $T_1 = 1$; $T_2 = 1$; $T_3 = 2$; $T_4 = 4$; $T_5 = 8$

Die nächsten Pentanacci-Zahlen sind
16, 31, 61, 120, 236, 464, 912, 1793, 3525, 6930, 13624, 26784, 52656, 103519, 203513, 400096, 786568, 1546352, 3040048, 5976577, 11749641, 23099186, 45411804, 89277256, 175514464, 345052351, 678355061, …
Prime Pentanacci-Zahlen ergeben sich bis n = 1600 für n = 7, 8, 25, 146, 169, 182, 751, 812, 1507, 1591, …
und lauten 31, 61, 5976577, 198 91797 97398 59979 48114 79787 77143 96444 89521, …

Polynacci-Zahlen
Die Definition der Fibonacci-, Tribonacci-Zahlen, usw. wird zu den Polynacci-Zahlen des Grades p erweitert.
Unter den Polynacci-Zahlen des Grades p versteht man Zahlen der rekursiv definierten Zahlenfolge

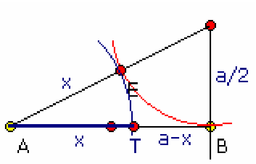
$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2} + \dots + P_{n-p}$$

mit den Startzahlen $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_i = 2^{i-2}$
In dieser Definition werden die Startglieder 0 nicht berücksichtigt.
Die ersten Polynacci-Zahlen sind

p	Polynacci-Zahlen
2	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597
3	1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768
4	1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773, 1490, 2872, 5536, 10671
5	1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, 236, 464, 912, 1793, 3525, 6930, 13624
6	1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 63, 125, 248, 492, 976, 1936, 3840, 7617, 15109, 29970, 59448, 117920, 233904, 463968, 920319, 1825529, 3621088
7	1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 253, 504, 1004, 2000, 3984, 7936, 15808, 31489, 62725, 124946, 248888, 495776, 987568, 1967200, 3918592
8	1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 255, 509, 1016, 2028, 4048, 8080, 16128, 32192, 64256, 128257, 256005, 510994, 1019960, 2035872, 4063664
9	1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 511, 1021, 2040, 4076, 8144, 16272, 32512, 64960, 129792, 259328, 518145, 1035269, 2068498, 4132920

Teilung einer Strecke
Teilverhältnis λ mit $|\lambda|$ = AT : TB
$\lambda > 0$ für inneren Teilpunkt T_i $\lambda < 0$ für äußeren Teilpunkt T_a
Liegt der Teilpunkt T außerhalb der Strecke AB, spricht man von einer äußeren Teilung, andernfalls von innerer Teilung.

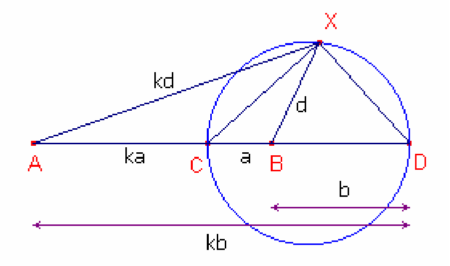
Harmonische Teilung
T_i, T_a teilen AB harmonisch, wenn $\lambda_i = -\lambda_a$
Die Bezeichnung harmonisch rührt daher, dass drei gleichartige und gleich starke gespannte Saiten, deren Längen einer harmonischen Teilung unterliegen, einen harmonischen Wohlklang ergeben. Bei der harmonischen Teilung von 5:1 verhalten sich die Saitenlängen wie 10:12:15 und die Schwingungszahlen wie 1/10:1/12:1/15 = 6:5:4.



Harmonische Punkte
Als harmonische Punkte werden die Punkte bezeichnet, die eine Strecke innen und außen im selben Verhältnis teilen.

Stetige Teilung / Goldener Schnitt
T teilt AB stetig (im Goldenen Schnitt), wenn AB : AT = AT : TB mit AB = a, AT = x gilt:

$$a : x = x : (a-x) \quad \text{und} \quad x = a/2\,(\sqrt{5} - 1)$$

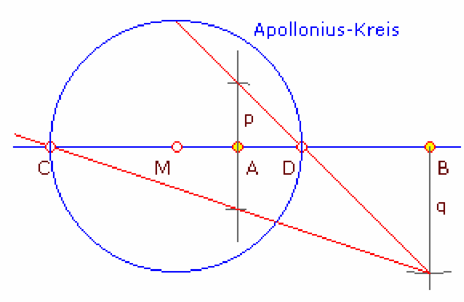


Kreis des Apollonius
Der geometrische Ort aller Punkte P mit AP : PB = $|\lambda|$
ist der Kreis mit dem Durchmesser T_iT_a, der Kreis des Apollonius

Teilungskreis des Apollonius
Der geometrische Ort aller Punkte X mit AX : XB = k : 1 = $|\lambda|$
ist der Kreis mit dem Durchmesser CD, wobei C und D die inneren und äußeren Teilungspunkte der Strecke AB im Verhältnis λ sind. Der entstehende Kreis wird Teilungskreis oder auch kurz Kreis des Apollonius genannt.
Nachweis: Es seien BC = a, CA = ka, XB = d und XA = kd. Dann ist XC die innere Winkelhalbierende des Winkels AXB und XD die äußere Winkelhalbierende und somit der Winkel CXD = 90°. Damit liegt X auf dem Thales-Kreis von CD.

Konstruktion des Teilungskreises des Apollonius

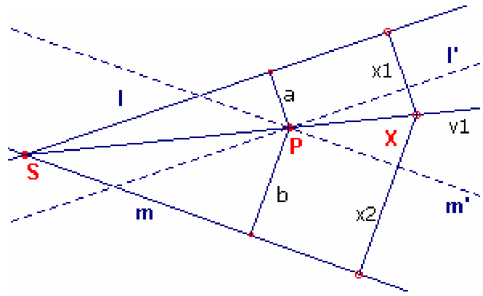
Gesucht ist der Teilungskreis des Apollonius für eine Strecke AB und das Verhältsnis $\lambda = p : q$.



Konstruktion

Im Punkt B wird eine beliebige Gerade gezeichnet und im Punkt A eine dazu parallele Gerade. Von A aus wird beidseitig der Wert p abgetragen, im Punkt B der Wert q. Die Verbindungsgeraden durch die gefundenen Schnittpunkte schneiden die Gerade durch A und B in dem inneren und äußeren Teilungspunkten D und C. Der Thaleskreis zu CD ist dann der gesuchte Apollonius-Kreis.

Teilungsgerade nach Apollonius



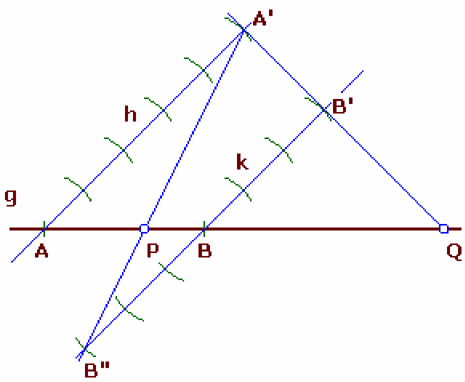
Der Teilungskreis des Apollonius beschreibt die Ortskurve der Punkte, die von zwei gegebenen Punkten Abstände im Verhältnis a:b haben. Dies kann man verallgemeinern. Unter einer Teilungsgerade nach Apollonius versteht man danach die Ortskurve der Punkte deren Abstände von zwei Geraden ein konstantes Verhältnis a:b haben.
Satz:
Die Ortskurve der Punkte, deren Abstände von zwei Geraden l und m das Verhältnis a:b haben, ist eine Gerade durch den Schnittpunkt S der beiden Geraden und den Schnittpunkt P der parallel um a und b verschobenen Geraden.
Nachweis:
P sei der Schnittpunkt der um a und b verschobenen Geraden m und l. X sei ein Punkt auf der Halbgeraden SP. Nach dem Strahlensatz ist dann

$SP : SX = a : x_1 \qquad SP : SX = b : x_2$

Damit ergibt sich $a : x_1 = b : x_2$ und $x_1 : x_2 = a : b$ und X liegt dann auf der Teilungsgerade nach Apollonius. Die Umkehrung des Satzes gilt ebenfalls.

Teilen einer Strecke

Aufgabe: Eine gegebene Strecke soll innen und außen in einem rationalen Verhälrnis m : n (m,n >0) geteilt werden.
Lösung:



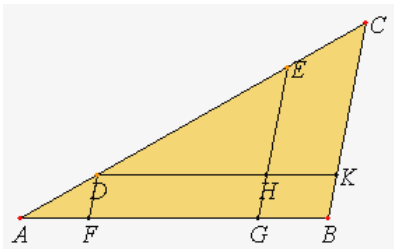
1. durch A zieht man eine von g verschiedene Gerade h.
2. durch B konstruiert man eine zu g parallele Gerade k
3. von A aus trägt man eine beliebige Strecke m mal auf h ab und findet den Punkt A'
4. von B aus wird auf k die gleiche Strecke n mal in beide Richtungen abgetragen
5. der Punkt, der in der gleichen Halbebene mit A' liegt sei B', der andere B"
6. die Geraden A'B' und A'B" schneiden die Gerade g in P und Q
7. P ist dann der innere Teilungspunkt, Q der äußere

In der Darstellung wird die Teilung für m = 5 und n = 3 demonstriert.

Streckenteilung bei Euklid

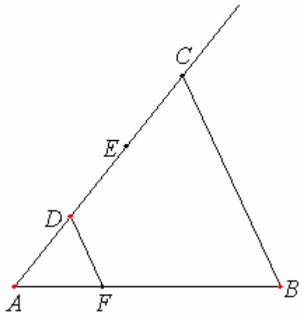
"Elemente" Buch VI: § 10 (A. 2):

Eine gegebene ungeteilte Strecke einer gegebenen geteilten Strecke ähnlich zu teilen.

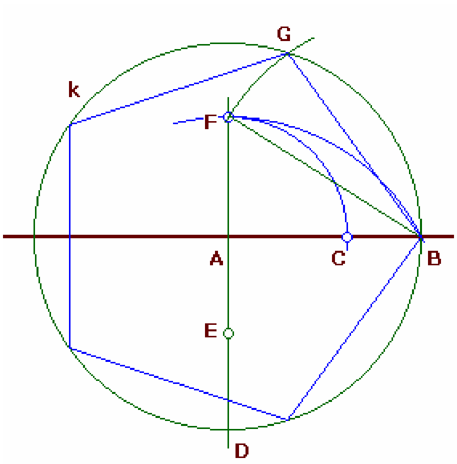


Gegeben seien die ungeteilte Strecke AB und die un den Punkten D, E geteilte AC; man habe sie so gelegt (I, 2), dass sie einen beliebigen Winkel umfassen.
Man verbinde dan CB und ziehe durch D, E zu BC die Parallelen DF, EG, sowie DHK || AB durch D. FH und HB sind dann beide Parallelogramme, also ist DH = FG, HK = GB (I, 34). Und da man im Dreieck DKC die gerade Linie HE || KC, einer der Seiten gezogen hat, so stehen in Proportion CD : ED = KH : HD (VI, 2). Nun ist KH = BG, HD = GF; also ist CE : ED = BG : GF. Ebenso stehen, da man im Dreieck AGE FD || GE, einer der der Seiten gezogen hat, in Proportion ED : DA = GF : FA.
Wie oben bewiesen, ist aber auch CE : ED = BG : GF; also ist sowohl CE : ED = BG : GF als auch ED : DA = GF : FA.
Also hat man eine gegebene ungeteilte Strecke AB einer gegebene geteilten Strecke AC ähnlich geteilt - dies hatte man ausführen sollen.

Unter Buch VI § 9 (A. 1) führt Euklid unter Bezug auf den Strahlensatz weiterhin aus:
Von einer gegebene Strecke einen vorgeschriebenen Teil abzuschneiden.
Die gegebene Strecke sei AB. Man soll von AB einen vorgeschriebenen Teil (V, Definition 1) abschneiden.
Vorgeschrieben sei der dritte Teil. Man ziehe von A unter beliebigem Winkel gegen AB die gerade Linie AC, wähle auf AC den Punkt D beliebig, mache DE und EC gleich AD, ziehe BC und hierzu parallel DF durch D.
Da man im Dreieck ABC FD || BC, einer der Seiten gezogen hat, so stehen in Proportion CD : DA = BF : FA (VI, 2). Nun ist CD = 2 DA, also auch BF = 2 FA (V, Definition 5), also BA = 3 AF.
Also hat man von der gegebenen Strecke AB den vorgeschriebenen dritten Teil, nämlich AF abgeschnitten – dies hatte man ausführen sollen.



Stetige Teilung, Konstruktion (Goldener Schnitt)



Aufgabe: Eine Strecke ist durch einen Punkt so zu teilen, dass der größere Abschnitt AC die mittlere Proportionale aus dem kleineren Abschnitt BC und der ganzen Strecke AB wird, d.h.

AC : CB = AB : AC

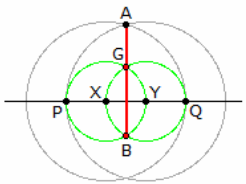
Lösung:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei AB = 1.
Auflösen der Gleichung ergibt für die Strecke AC = $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2$.
Die positive Lösung $\phi = 1/2\ (\sqrt{5} - 1)$ ist die Verhältniszahl des goldenen Schnitts.

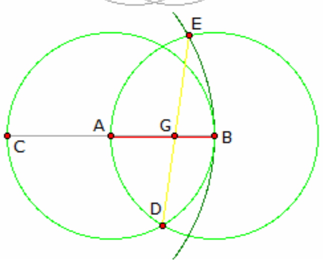
1. Um A wird ein Kreis mit dem Radius AB gezogen.
2. Punkt D wird so gewählt, dass der Winkel DAB = 90° ist.
3. E ist der Mittelpunkt der Strecke AD
4. Um E wird ein Kreis mit dem Radius EB gezeichnet.
5. Dieser Kreis schneidet die Gerade AD im Punkt F.
6. Der Schnittpunkt des Kreises um A mit Radius AF schneidet dann die Strecke AB im gesuchten Punkt C.

Anmerkung: BF ist die Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks, AF die Seitenlänge des regelmäßigen Zehnecks, welche dem Ausgangskreis um A einbeschrieben sind.

Stetige Teilung, Goldene Teilung

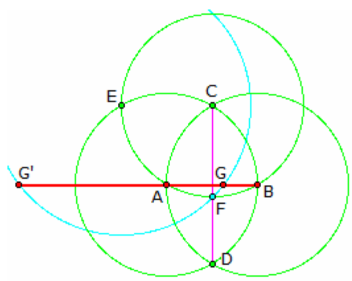
Durch Kurt Hofstetter wurden 2002 und 2004 in "Forum Geometricorum" zwei neue, interessante Konstruktionsmöglichkeiten für den goldenen Schnitt angegeben.
Konstruktion 1:
Auf einer Geraden s werden zwei beliebige Punkte X und Y gewählt.
Mit X bzw. Y als Mittelpunkt wird jeweils ein Kreis (grün) durch den anderen Punkt gezogen. Die beiden Kreisschnittpunkte seien G und B, die zweiten Schnittpunkte der Kreise mit der Geraden s seien P und Q.
Um X wird ein Kreis (blau) durch Q gezogen, um Y ein Kreis durch P. Beide Kreise schneiden sich in A.
Der Punkt G teilt dann die Strecke AB stetig, d.h. im goldenen Schnitt.





Konstruktion 2:
Gegeben ist die Strecke AB. Um A wird ein Kreis durch B gezeichnet, um B ein Kreis durch A.
Der Strahl BA schneidet den Kreis um A in C. Der eine Schnittpunkt der zwei Kreise sei D.
Ein weiterer Kreis durch B mit dem Mittelpunkt C schneidet den ersten Kreis um B in einem Punkt E. Dabei muss E auf der anderen Seite bezüglich AB als D liegen.
Die Strecke DE schneidet die Strecke AB im Punkt G.
Der Punkt G teilt dann die Strecke AB stetig, d.h. im goldenen Schnitt.
siehe http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200402index.html

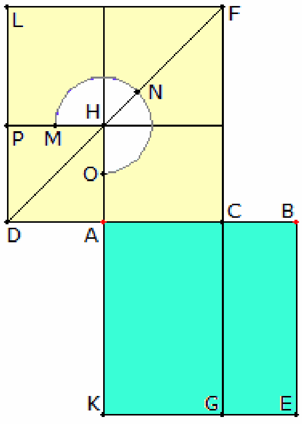
Stetige Teilung, Goldene Teilung



Eine weitere Konstruktionsmöglichkeit für den goldenen Schnitt wurde erstmals von E.Lemoine 1902 angegeben. Diese ging aber verloren und wurde 2003 von Kurt Hofstetter wieder entdeckt (Forum Geometricorum Vol. 3, 2003, Seiten 205-206).

Konstruktion: Um A wird ein Kreis durch B gezeichnet, und um B ein Kreis durch A. Die Punkte C und D seien die Schnittpunkte der zwei Kreise.
Mit C als Mittelpunkt schneidet ein Kreis durch A und B den ersten Kreis im Punkt E. Der Kreis um C wird von der Geraden CD im Punkt F geschnitten.

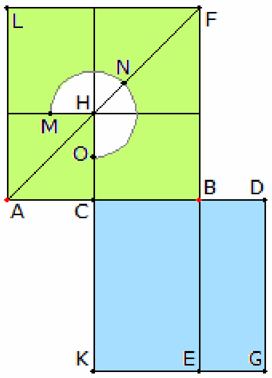
Ein vierter Kreis um E durch F schneidet dann die Strecke AB im Punkt G und deren Verlängerung im Punkt G'.
Der Punkt G teilt dann die Strecke AB stetig, d.h. im goldenen Schnitt. Außerdem teilt auch A die Strecke G'B stetig.



Sätze zur stetigen Teilung

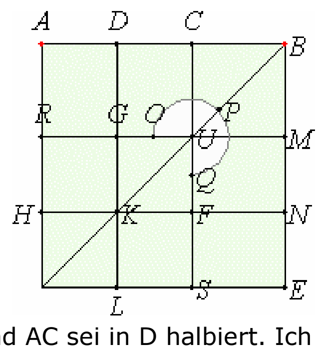
Originaltext aus Euklids "Elementen" Buch XIII: § 1 (L. 1):
Teilt man eine Strecke stetig, so wird ihr größerer Abschnitt, wenn man die Hälfte der ganzen Strecke hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wie das Quadrat über der Hälfte.

Die Strecke AB sei im Punkte C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt. Man setze an CA eine gerade Linie AD gerade an und mache AD = ½ AB. Ich behaupte, dass $CD^2 = 5\ DA^2$.
Man zeichne über AB, DC die Quadrate AE, DF (I, 46), zeichne in DF die (übliche, I, 43) Figur fertig und ziehe FC bis G durch. Da AB in C stetig geteilt ist, ist $AB \cdot BC = AC^2$ (VI, Definition 3; VI, 17). $AB \cdot BC$ ist CE, und AC^2 ist FH, also Parallelogramm CE = FH. Da BA = 2 AD, BA = KA, AD = AH, so ist KA = 2 AH. Nun ist KA : AH = Parallelogramm CK : CH (VI, 1), also Parallelogramm CK = 2 CH; aber auch Parallelogramm LH + HC = 2 CH (I, 43); also Parallelogramm CK = LH + HC. Wie oben bewiesen, ist Parallelogramm CE = HF; also das ganze Quadrat AE = Gnomon MNO. Da BA = 2 AD, ist $BA^2 = 4\ AD^2$ (II, 4), d.h. Quadrat AE = 4 DH. Aber AE = Gnomon MNO, also Gnomon MNO = 4 AP, also das ganze Quadrat DF = 5 AP. Nun ist DF aber DC^2, und AP ist DA^2; also $CD^2 = 5\ DA^2$ - S.
Anmerkung: Übersetzung des Originaltextes von Clemens Thaer (1937)



Originaltext aus Euklids "Elementen" Buch XIII: § 2 (L. 2):
Wird quadriert eine Strecke fünfmal so groß wie ein Abschnitt von ihr, dann ist, wenn man das Doppelte des genannten Abschnittes stetig teilt, der größere Abschnitt der Rest der ursprüngliche Strecke.

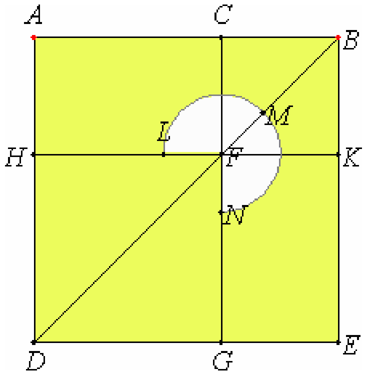
Quadriert werde die Strecke AB fünfmal so groß wie ihr Abschnitt AC, und es sei 2 AV = CD. Ich behaupte, dass CB der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke CD ist.
Man zeichne über beide Strecken AB, CD die Quadrate AF, CG, zeichne in AF die Figur fertig und ziehe BE durch. Da $BA^2 = 5\ AC^2$, ist Quadrat AF = 5 AH, also Gnomon MNO = 4 AH. Da DC = 2 CA, ist $DC^2 = 4\ CA^2$, d.h. Quadrat CG = 4 AH. Wie bewiesen, ist Gnomon MNO = 4 AH; also Gnomon MNO = CG. Da DC = 2 CA und DC = CK, AC = CH also KC = 2 CH, ist Parallelogramm KB = 2 BH (VI, 1). Aber auch Parallelogramm LH + HB = 2 HB (I, 43), also Parallelogramm KB = LH + HB. Wie bewiesen, ist der ganze Gnomon MNO = dem ganzen Quadrat CG, also auch Restquadrat HF = BG. BG ist nun $CD \cdot DB$, weil CD = DG, und HF ist CB^2. Also ist $CD \cdot DB = CB^2$, also $DC : CB = CB \cdot BD$ (VI, 17). Hier ist DC > CB, also CB > BD (V, 14). C B ist also von der stetig geteilten (VI, Definition 3) Strecke CD der größere Abschnitt - S.



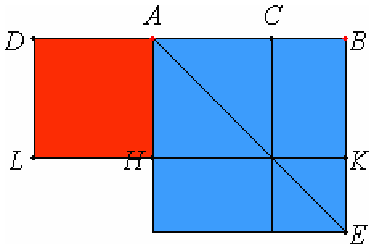
Originaltext aus Euklids "Elementen" Buch XIII: § 3 (L. 3):
Teilt man eine Strecke stetig, so wird ihr kleinerer Abschnitt, wenn man die Hälfte des größeren Abschnitts hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wie das Quadrat über der Hälfte des größeren Abschnitts.

Eine Strecke AB sei im Punkte C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt, und AC sei in D halbiert. Ich behaupte, dass $BD^2 = 5\ DC^2$.
Man zeichne über AB das Quadrat AE und zeichne die Doppelfigur fertig. Da AC = 2 DC, ist $AC^2 = 4\ DC^2$, d.h. Quadrat RS = 4 FG. Da $AB \cdot BC = AC^2$ (VI, Definition 3; VI, 17), $AB \cdot BC$ aber CE ist, AC^2 dabei RS, ist Parallelogramm CE = RS.
Aber Quadrat RS = 4 FG, also Parallelogramm CE = 4 FG. Ebenso ist, da AD = DC, HK = KF (I, 34), folglich Quadrat GF = Quadrat HL. Also ist GK = KL, d.h. MN = NE, folglich Parallelogramm MF = FE (I, 36).
Aber Parallelogramm MF = CG (I, 43), also Parallelogramm CG auch = FE. Man füge beiderseits CN hinzu; dann ist Gnomon OPQ = CE. Wie oben bewiesen, ist aber Parallelogramm CE = 4 GF, also Gnomon OPQ = 4 GF, also Gnomon OPQ + GF = 5 GF.
Gnomon OPQ + GF ist aber Quadrat DN. Und DN ist DB^2, GF ist DC^2. Also ist $DB^2 = 5\ DC^2$ - q.e.d.

Originaltext aus Euklids "Elementen" Buch XIII: § 4 (L. 4):
Teilt man eine Strecke stetig, so werden die beiden Quadrate über der ganzen Strecke und ihrem kleineren Abschnitt zusammen dreimal so groß wie das Quadrat über dem größeren Abschnitt.

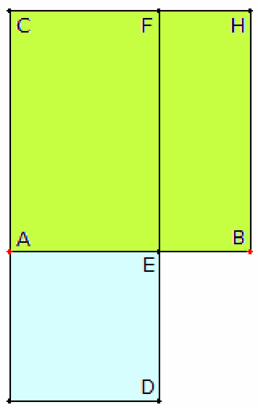


Man habe eine Strecke AB, sie sei in C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt. Ich behaupte, dass $AB^2 + BC^2 = 3\ CA^2$.
Man zeichne über AB das Quadrat ADEB und zeichne die Figur fertig.
Da AB in C stetig geteilt ist, AC der größere Abschnitt, ist $AB \cdot BC = AC^2$ (VI, Definition 3; VI, 17). $AB \cdot BC$ ist nun AK, und AC^2 ist HG; also Parallelogramm AK = HG. Hier ist Parallelogramm AF = FE (I, 43); man füge CK beiderseits hinzu.
Dann ist das ganze Parallelogramm AK = dem ganzen CE, also Parallelogramm AK + CE = 2 AK. AK + CE bilden aber Gnomon LMN + Quadrat CK; also ist Gnomon LMN + Quadrat CK = 2 AK.
Wie oben bewiesen, ist Parallelogramm AK = HG; also Gnomon LMN + Quadrat CK = 2 HG, folglich Gnomon LMN + Quadrate CK + HG = 3 Quadrat HG. Nun ist Gnomon LMN + Quadrate CK + HG = ganzes Quadrat AE + CK, d.h. $AB^2 + BC^2$, GH dabei AC^2. Also ist $AB^2 + BC^2 = 3\ AC^2$ - q.e.d.



Originaltext aus Euklids "Elementen" Buch XIII: § 5 (L. 5):
Teilt man eine Strecke stetig und setzt ihr eine dem größeren Abschnitt gleiche an, dann ist die Summenstrecke stetig geteilt, und größerer Abschnitt ist die Ausgangsstrecke.

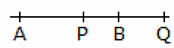
Die Strecke AB sei im Punkte C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt und AD = AC. Ich behaupte, dass die Strecke DB in A stetig geteilt ist und größerer Abschnitt die Ausgangsstrecke AB.
Man zeichne über AB das Quadrat AE und zeichne die Figur fertig (wie II, 6). Da AB in C stetig geteilt ist, ist $AB \cdot BC = AC^2$ (VI, Definition 3; VI, 17). $AB \cdot BC$ ist hier CE, und AC^2 ist CH; also Parallelogramm CE = CH.
Aber Parallelogramm CE = HE (I, 43) und Quadrat HC = DH (I, 36); also Quadrat DH = HE. Man füge HB beiderseits hinzu.
Dann ist das ganze Parallelogramm DK = dem ganzen AE. DK ist nun $BD \cdot DA$, weil AD = DL; und AE ist AB^2. Also ist $BD \cdot DA = AB^2$; also DB : BA = BA : AD (VI, 17). Hier ist DB > BA; also auch BA > AD (V, 14). Also ist DB in A stetig geteilt, AB der größere Abschnitt – q.e.d.



Euklids "Elemente" Buch VI § 30 (A. 10):
Eine gegebene begrenzte gerade Linie stetig zu teilen.

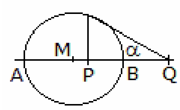
Die gegebene begrenzte Linie sei AB. Man soll die Strecke AB stetig teilen (VI, Definition 3).
Man zeichne über AB das Quadrat BC und lege an AC das Parallelogramm CD = BC so an, dass eine Figur AD ~ BC überschießt (VI, 29). BC ist ein Quadrat, also ist auch AD ein Quadrat.
Nun ist BC = CD; daher nehme man CE beiderseits weg. Der Rest, Parallelogramm BF, ist dann = Rest AD; er ist ihm aber auch winkelgleich (Postulat 4); also sind in BF, AD die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional (VI, 14); also ist FE : ED = AE : EB. Aber FE = AB (I, 34, Definition 22) und ED = AE. Also ist BA : AE = AE : EB.
Dabei ist AB > AE (Axiom 8), also auch AE > EB (V, 14). Also hat man die Strecke AB stetig geteilt in E (VI, Definition 3), und ihr größter Abschnitt ist AE - dies hatte man ausführen sollen.

Doppelverhältnis



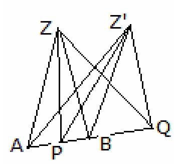
gegeben: 4 Punkte A,B,P,Q auf einer Geraden g
DV(A,B;P,Q) = m(AP)/m(AQ) : m(BP)/m(BQ)
m(AP) … Länge der orientierten Strecke AP; A, B … Grundpunkte / P, Q … Folgepunkte
DV(A,B;P,Q) < 0 wenn Punkte sich gegenseitig trennen (Skizze) ; Das Doppelverhältnis ist invariant bei Zentralprojektion

Harmonische Lage eines Punktequadrupels



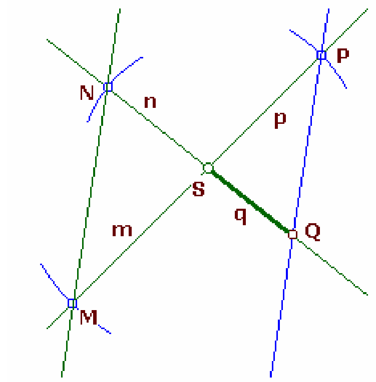
r … Kreisradius AB/2
DV(A,B;P,Q) = $(1+\sin\alpha)/(\sin\alpha-1)$ / $(1+1/\sin\alpha)/(1/\sin\alpha-1)$ = -1
Liegen die Punkte harmonisch, dann liegt P auf der Polaren von Q zum Kreis.

Doppelverhältnis eines Vierstrahles



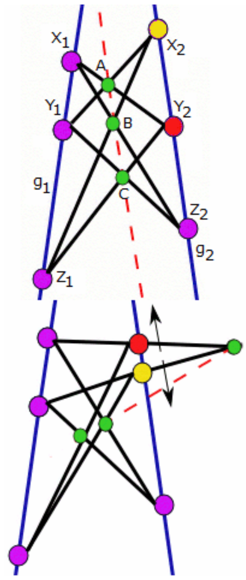
Geraden von Z zu den Punkten a,b,p,q ; Winkel zwischen Geraden α, β, γ, δ
DV(a,b;p,q) = $\sin\alpha/\sin\beta$: $\sin\gamma/\sin\delta$
Doppelverhältnis eines Vierstrahles ist invariant bei Zentralprojektion

Vierte Proportionale



Aufgabe: Gegeben sind drei Strecken m, n und p. Zu konstruieren ist die 4.Proportionale, d.h. eine Strecke der Länge q mit m/n = p/q.
Lösung: 1. zwei Hilfsgeraden schneiden sich im Punkt S
2. von S werden die drei bekannten Größen m, n und p angetragen. Die entstehenden Punkte sind M, N und P
3. verbindet man M mit N und zeichnet zur Strecke MN eine Parallele durch P, so schneidet diese den noch freien Strahl im Punkt Q
4. die Strecke SQ ist die gesuchte der Länge q
Grundlage dieser Konstruktion ist der Strahlensatz.

Satz des Pappus, Pappus-Sechsecksatz



Auf zwei beliebigen Geraden g_1 und g_2 wähle man sechs verschiedene Punkte X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 zufällig, drei auf je einer Geraden.
Dann sind die Schnittpunkte von

$A = X_1Y_2 \cap Y_1X_2$
$B = Y_1Z_2 \cap Z_1Y_2$ $\qquad$ $D = X_1Z_2 \cap Z_1X_2$

immer kollinear, d.h sie liegen auf einer Geraden.
Verändert man die Lage zweier Punkte auf einer der Geraden, so kann sich einer der Punkte A, B oder C auch außerhalb der zwei Geraden befinden. Auch in diesem Fall gilt der Satz des Pappus.
Der Satz des Pappus findet sich erstmals im 7.Buch der "Collectiones" von Pappus von Alexandria. Dieser Satz kann als erste Aussage der projektiven Geometrie angesehen werden.
Wendet man auf die gefundenen Schnittpunkte A, B, C und die Ausgangspunkte erneut den Satz des Pappus an, auf die neuen Schnittpunkte ebenso usw., so entsteht eine Folge von Punkten. Im Ergebnis entsteht ein merkwürdiges geometrisches Gebilde:

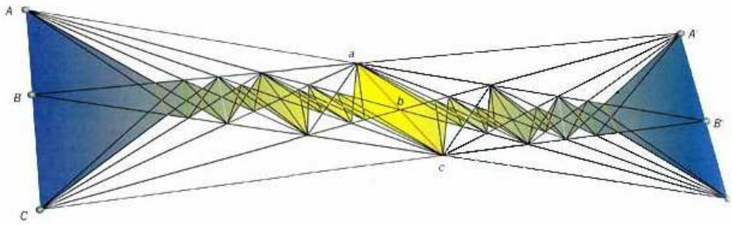
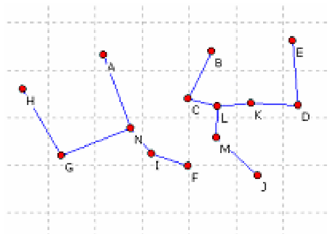
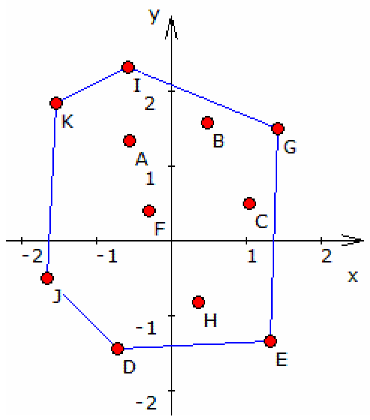


Abbildung: aus "Das Unendliche in der Geometrie" (Marcel Berger)
Dies ist eine fraktale Struktur mit sehr interessanten Eigenschaften.

Streckenzug bei Punkten in der Ebene



Gegeben sind bis n Punkte in der Ebene, welche paarweise unterschiedliche Abstände haben. Von jedem Punkt wird zu dem diesem am nächsten liegenden Punkt eine Strecke gezogen.
Frage:
Können die Punkte so verschoben werden, dass entweder ein geschlossener Streckenzug, also ein Polygon, entsteht oder sich zwei der Strecken kreuzen.
Antwort:
Dies ist niemals möglich! Ebenso ist es unmöglich, die Punkte derart zu verschieben, dass ein Punkt mit mehr als fünf Punkte gleichzeitig verbunden ist.



Konvexe Hülle

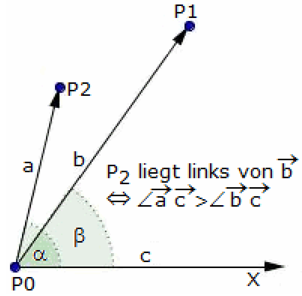
Unter der konvexen Hülle einer Menge von Punkten P versteht man den mengentheoretischen Durchschnitt aller konvexen Mengen, welche die Punkte P enthalten.
Damit ist die konvexe Hülle von n Punkten das kleinstmögliche Polygon mit m ≤ n Kanten, in dem sich alle Punkte befinden, inklusive der Seitenkanten.
Die konvexe Hülle von drei Punkten ist stets das von diesen Punkten gebildete Dreieck.

Sylvesters Vier-Punkte-Problem

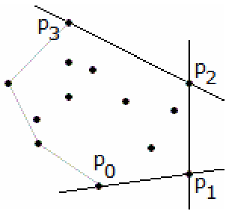
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p, dass die konvexe Hülle von vier Punkten ein Viereck bildet.
Für eine offene, konvexe Teilmenge der Ebene mit endlicher Fläche ermittelt man $2/3 \le p \le 1 - 35/(12\, \pi^2) = 0{,}704\ldots$

Graham-Scan-Algorithmus

Der Graham Scan; nach Ronald Graham 1972; ist ein effizienter Algorithmus zur Berechnung der konvexen Hülle eines einfachen Polygons. Seine asymptotische Laufzeit ist O(n log n).
Sei S = {P} eine endliche Punktmenge. Man sucht als Startpunkt den Punkt mit der kleinsten Ordinate, wenn nötig mit der kleinsten Abzisse. Ausgehend vom Startpunkt P_0 sortiert der Algorithmus die restlichen Punkte P in S nach aufsteigendem Winkel zwischen P_0P und der x-Achse gegen den Uhrzeigersinn. Haben dabei zwei Punkte den gleichen Winkel, so wird der Punkt welcher näher an P_0 liegt verworfen.

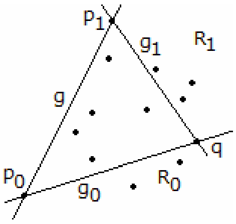


S sei nun die sortierte Punktmenge. Als nächstes läuft man alle Punkte in S durch und prüft, ob diese Eckpunkte der konvexen Hülle sind. Es wird ein Stapelspeicher angelegt, auf welchem sich alle Eckpunkte der konvexen Hülle für alle bereits abgearbeiteten Punkte befinden. Zu Beginn liegen P_0 und P_1 auf dem Stapel. Im k-ten Schritt wird P_k berechnet, wie er die vorherige konvexe Hülle verändert. Aufgrund der Sortierung liegt P_k immer außerhalb der Hülle der vorherigen Punkte P_i mit i < k.
Mitunter gehören bereits auf dem Stapel liegende Punkte nicht mehr zur neuen konvexen Hülle. Diese Punkte werden mittels "pop" Operation vom Stapel entfernt. Ob ein Punkt noch zur konvexen Hülle gehört oder nicht ermittelt man, indem man berechnet, ob P_k links oder rechts des Vektors $P_{T2}P_{T1}{}^{\rightarrow}$ liegt; P_{T1} = oberstes Element des Stapels, P_{T2} = Element direkt unter P_{T1}.
Liegt P_k links, so bleibt P_{T1} weiterhin auf dem Stapel und P_k wird auf dem Stapel abgelegt, liegt P_k rechts, so wird P_{T1} von der neuen konvexen Hülle verschluckt, vom Stapel entfernt und die nächsten beiden oberen Punkte untersucht.
Dieser Test wird solange durchgeführt, bis P_k links des Vektors $P_{T2}P_{T1}{}^{\rightarrow}$ oder nur noch P_0 auf dem Stapel liegt. In beiden Fällen wird P_k auf dem Stapel abgelegt und mit dem nächsten Punkt P_{k+1} weitergerechnet.



Jarvis-March-Algorithmus

Beim Verfahren von Jarvis zur Berechnung der konvexen Hülle wird die Menge der Punkte in der Ebene wie mit einer Schnur umwickelt.
Begonnen wird bei einem Punkt, der mit Sicherheit auf dem Rand der konvexen Hülle liegt, zum Beispiel mit dem Punkt mit minimaler y-Koordinate. Von dort aus wird der am weitesten rechts liegende Punkt gesucht. Dies ist ein Punkt mit folgender Eigenschaft:
Alle Punkte liegen links von der Verbindungsgeraden zu diesem Punkt oder auf der Verbindungsgeraden zu diesem Punkt.
Von dort aus wird wiederum der nächste Punkt mit dieser Eigenschaft gesucht usw. Gibt es mehrere Punkte mit dieser Eigenschaft, so wird der am weitesten entfernte Punkt gewählt.
Das Verfahren endet, wenn der Ausgangspunkt wieder erreicht ist. Die Abbildung zeigt, dass der Polygonzug, der den Rand der konvexen Hülle bildet, auf diese Weise erzeugt werden kann.

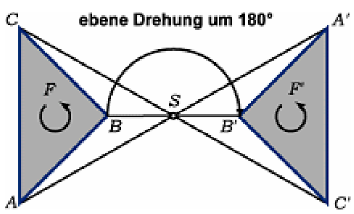


Quickhull-Algorithmus

Der Quickhull-Algorithmus zur Berechnung der konvexen Hülle einer endlichen Menge von Punkten in der Ebene verwendet eine ähnliche Technik wie Quicksort: Teilmengen der Punkte werden jeweils partitioniert in diejenigen Punkte, die links von einer bestimmten Geraden liegen und diejenigen, die rechts der Geraden liegen. Diese Punktemengen werden dann rekursiv weiter behandelt.

Gegeben sei eine Gerade g durch zwei Ecken p_0 und p_1 des konvexen Hüllpolygons sowie die Menge R derjenigen Punkte, die rechts von g liegen; siehe Abbildung.
In der Menge R wird der am weitesten von g entfernte Punkt q gesucht, dieser ist eine weitere Ecke des konvexen Hüllpolygons. Dann wird eine Gerade g_0 durch p_0 und q gelegt, und die Punktemenge R wird partitioniert in die Menge R_0 derjenigen Punkte, die rechts von g_0 liegen und die Menge L_0 derjenigen Punkte, die links von g_0 liegen.
Ferner wird eine Gerade g_1 durch q und p_1 gelegt, und L_0 wird partitioniert in die Menge R_1 derjenigen Punkte, die rechts von g_1 liegen und die Menge L_1 derjenigen Punkte, die links von g_1 liegen.
Die Punkte der Menge L_1 liegen im Inneren des konvexen Hüllpolygons. Mit den Geraden g_0 und g_1 und den zugehörigen Mengen R_0 und R_1 wird rekursiv weiter verfahren.

Tyger ! Tyger ! burning bright
In the forests of the night,
What mortal hand or eye.
Dare frame thy fearful symmetry?
(William Blake,1757 - 1827)



Zentrale Symmetrie

Ebene Figuren heißen zentralsymmetrisch, wenn deren Punkte durch eine ebene Drehung von 180° um das Symmetriezentrum S zur Deckung gebracht werden können.

Da Größe und Gestalt der Figuren bei dieser Transformation erhalten bleiben, spricht man von einer Kongruenztransformation. Auch der Umlaufsinn der ebenen Figuren bleibt bei dieser Transformation erhalten. Wegen des gleichen Umlaufsinnes spricht man von gleichsinnig kongruenten Figuren. Unter dem Umlaufsinn einer Figur versteht man das Durchlaufen des Randes einer Figur in einem Drehsinn: positiv im mathematischen Drehsinn, also im Gegenuhrzeigersinn, negativ im Uhrzeigersinn.

Geometrische Orte

Mittelsenkrechte

Geometrischer Ort des Punkte, die jeweils von zwei Punkten A und B gleichweit entfernt sind
Die Mittelsenkrechten werden auch als Symmetralen bezeichnet, in Österreich als Streckensymmetrale.
Sind in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(x_A; y_A)$ und $B(x_B; y_B)$, so lautet die Geradengleichung der Mittelsenkrechte

$$y = -(x_A - x_B)/(y_A - y_B)\ x + 1/2\ (x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2)/(y_A - y_B)$$

Für den Fall $y_A = y_B$ wird $x = 1/2\ (x_A + x_B)$

Parallelenpaar

Geometrischer Ort der Punkte, die von einer Gerade g den Abstand d haben

Mittelparallele

Geometrischer Ort der Punkte, die von zwei Parallelen denselben Abstand haben

Paar der Winkelhalbierenden

Geometrischer Ort der Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden gleichen Abstand haben

Kreis

Geometrischer Ort aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt M konstanten Abstand haben

Parallelenpaar

Geometrischer Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden konstanten Abstand haben

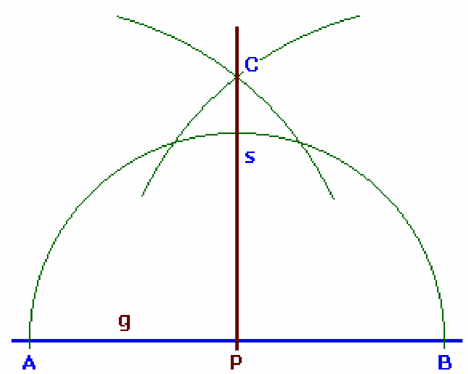
Euklidische Konstruktionen

Zur Lösung verschiedenster Aufgaben der ebenen Geometrie, der Planimetrie, werden Grundkonstruktionen benötigt, welche als Fundament für komplexere Aufgaben genutzt werden können. Seit Plato wird dabei gefordert, dass derartige Konstruktionen ausschließlich mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden.
Zu diesen Grundkonstruktionen gehören:

- Errichten der Senkrechten
- Konstruktion der Mittelsenkrechten
- Parallele zu einer Geraden
- Abtragen eines Winkels
- Halbieren einer Strecke
- Fällen des Lotes auf eine Gerade
- Winkelhalbierende eines Winkels

Weitere einfache Konstruktionen, die oft als Bausteine größere Zeichnungen verwendet werden, sind:

- Drehen einer Strecke
- Kreis durch drei Punkte
- Anlegen der Tangenten
- Gemeinsame Tangenten zweier Kreise
- Konstruktion der vierten Proportionale
- Teilen einer Strecke
- Stetige Teilung (Goldener Schnitt)
- Konstruktion von Mittelwerten
- Konstruktion der Wurzeln einer quadratischen Gleichung

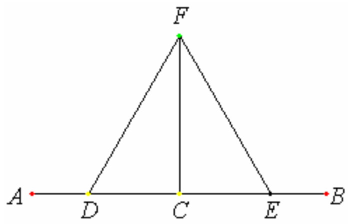


Errichten der Senkrechten

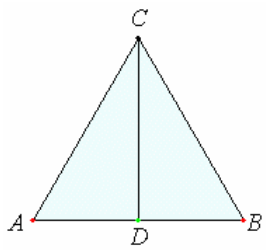
Aufgabe: Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P auf ihr. Zu konstruieren ist die Senkrechte zu g in P.
Lösung:
1. Konstruktion eines Kreises um P, welcher die Gerade in A und B schneidet
2. Zeichnen zweier Kreise um A und B, dessen Radius größer ist als der Radius des Kreises um P
3. Diese beiden Kreise schneiden sich. Ein Schnittpunkt sei C.
4. Die durch P und C gehende Gerade ist die gesuchte Senkrechte auf g durch P.

Grundlage dieser Konstruktion, ist die Tatsache, dass die in P errichtete Senkrechte im gleichschenkligen Dreieck AQB sowohl Mittelsenkrechte als Winkelhalbierende ist. Die Konstruktion der Senkrechten auf einer Geraden wird in Euklids "Elementen" unter § 11 (A. 6) behandelt.

Euklids "Elemente": § 11 (A. 6):
Zu einer gegebenen Linie rechtwinklig von einem auf ihr gegebenen Punkte aus eine gerade Linie zu ziehen.



Die gegebene gerade Linie sei AB und der gegebene Punkt auf ihr C. Man soll vom Punkte C aus rechtwinklig zur geraden Linie AB eine gerade Linie ziehen.
Auf AC wähle man den Punkt D beliebig, trage CE = CD ab, errichte über DE das gleichseitige Dreieck FDE (I, 1) und ziehe FC; ich behaupte, dass die gerade Linie FC rechtwinklig zu der gegebenen geraden Linie AB von dem auf ihr gegebenen Punkte C aus gezogen ist.
Da nämlich DC = CE ist und CF gemeinsam, so sind zwei Seiten DC, CF zwei Seiten EC, CF entsprechend gleich; ferner Grdl. DF = Grdl. FE; also ist ∠ DCF = ∠ ECF (I, 8); sie sind dabei Nebenwinkel. Wenn aber eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter (I, Def. 10); also sind DCF und FCE beide Rechte.
Man hat also zu einer gegebenen Strecke AB rechtwinklig von einem auf ihr gegebenen Punkte C aus eine gerade Linie gezogen, nämlich CF - dies hatte man ausführen sollen.



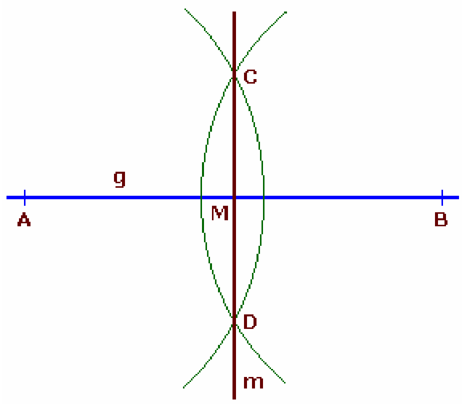
Halbieren einer Strecke

Euklids "Elemente": § 10 (A. 5): **Eine gegebene Strecke zu halbieren**

Die gegebene Strecke sei AB. Man soll die Strecke AB halbieren.
Man errichte über ihr das gleichseitige Dreieck ABC (I, 1) und halbiere ∠ ACB durch die gerade Linie CD (I, 9); ich behaupte, dass die Strecke AB im Punkte D halbiert wird.
Da nämlich AC = CB ist und CD gemeinsam, so sind zwei Seiten AC, CD zwei Seiten BC, CD entsprechend gleich; ferner ∠ ACD = ∠ BCD; also ist Grdl. AD = Grdl. BD (I, 4). Die gegebene Strecke AB ist also in D halbiert - dies hatte man ausführen sollen.

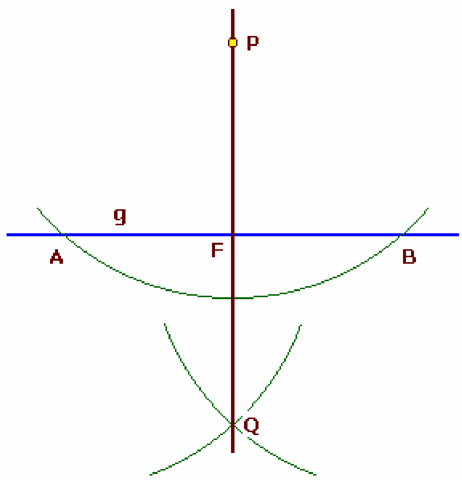
Konstruktion der Mittelsenkrechten

Aufgabe: Gegeben ist eine Strecke AB. Gesucht ist die Mittelsenkechte der Strecke.



Lösung: 1. Sowohl um A als auch um B werden Kreise mit gleichen, aber beliebigen Radius gezogen, so dass diese sich in den Punkten C und D schneiden.
2. Die Gerade durch die Punkte C und D ist die gesuchte Mittelsenkrechte.
3. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechte mit der Strecke ist der Mittelpunkt M der Strecke AB.
Die Konstruktion ist so möglich, da im Rhombus ABCD die Diagonalen AB und CD senkrecht aufeinander stehen.

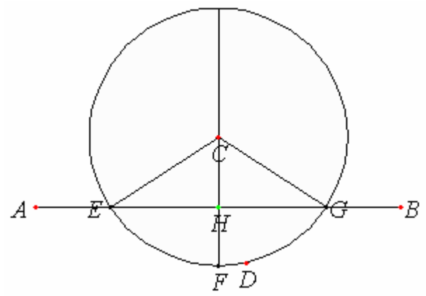
Fällen des Lotes



Aufgabe: Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P, der nicht auf g liegt. Gesucht ist das Lot von P auf die Gerade g.
Lösung:
1. Um den Punkt P wird ein Kreis derart konstruiert, dass er die Gerade g in zwei Punkten A und B schneidet.
2. Um diese beiden Punkte werden Kreise mit evtl. gleichem Radius gezogen.
3. Diese zwei Kreise schneiden sich in einem Punkt Q, der bezüglich der Geraden g und des Punktes P auf der anderen Halbebene liegt.
4. Die Gerade durch die Punkte P und Q schneidet die Gerade g im Lotfußpunkt F.
5. Die Strecke PF ist das gesuchte Lot von P auf die Gerade g.
Grundlage dieser Konstruktion ist die Tatsache, dass in dem Drachenviereck APBQ die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.
Die Konstruktion des Lotes auf eine Gerade wird in Euklids "Elementen" unter § 12 (A. 7) behandelt. Im Abschnitt § 13 (L. 6) beweist Euklid dann, dass eine Strecke auf einer Geraden dort als Winkel entweder zwei Rechte bildet oder zwei Winkel deren Summe gleich zwei Rechten ist. Nach Aussage von Proklos soll als erster Oinopides (um 460 v.Chr.) eine Konstruktion für das Lot angegeben haben.

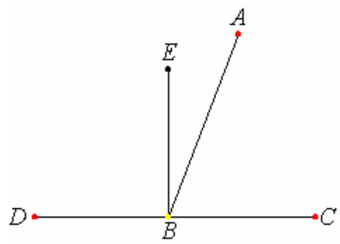
Euklids "Elemente": § 12 (A. 7):

Auf eine gegebene unbegrenzte gerade Linie von einem gegebenen Punkte, der nicht auf ihr liegt, aus das Lot zu fällen.



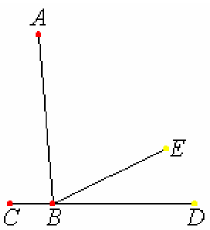
Es sei AB die gegebene unbegrenzte gerade Linie und C der gegebene Punkt, der nicht auf ihr liegt. Man soll auf die gegebene unbegrenzte gerade Linie AB von dem gegebenen Punkte C, der nicht auf ihr liegt, aus das Lot fällen.
Man wähle auf der anderen Seite der geraden Linie AB Punkt D beliebig, zeichnen mit C als Mittelpunkt und CD als Abstand den Kreis EFG, halbiere die Strecke EG in H (I, 10) und ziehe die Strecken CG, CH, CE; ich behaupte, dass man auf die gegebene unbegrenzte gerade Linie AB von dem gegebenen Punkte C, der nicht auf ihr liegt, aus das Lot gefällt hat, nämlich CH.
Da nämlich GH = HE ist und HC gemeinsam, so sind zwei Seiten GH, HC zwei Seiten EH, HC entsprechend gleich; ferner Grdl. CG = Grdl. CE; also ist ∠ CHG = ∠ EHC (I, 8); sie sind dabei Nebenwinkel. Wenn aber eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter, und die stehende gerade Linie heißt Lot auf die, auf der sie steht (I, Def. 10).
Man hat also auf eine gegebene unbegrenzte gerade Linie AB von einem gegebenen Punkte C, der nicht auf ihr liegt, das Lot gefällt, nämlich CH - dies hatte man ausführen sollen.

Winkel am Lot



Euklids "Elemente": § 13 (L. 6):
Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, Winkel bildet, dann muss sie entweder zwei Rechte oder solche, die zusammen zwei Rechten gleich sind, bilden.

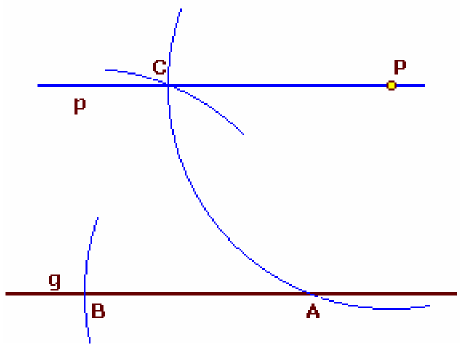
Eine gerade Linie AB bilde nämlich, auf die gerade Linie CD gestellt, die Winkel CBA, ABD. Ich behaupte, dass die Winkel CBA, ABD entweder beide Rechte sind oder zusammen zwei Rechten gleich.
Ist CBA = ABD, so sind beide Rechte (I, Def. 10).
Anderenfalls ziehe man von Punkt B aus BE ⊥ CD (I, 11); CBE, EBD sind also zwei Rechte. Hier ist CBE = CBA + ABE; daher füge man EBD beiderseits hinzu; dann sind CBE + EBD = CBA + ABE + EBD (Ax. 2). Ebenso ist DBA = DBE + EBA; daher füge man ABC beiderseits hinzu; dann sind DBA + ABC = DBE + EBA + ABC. Wie oben bewiesen, sind aber auch CBE + EBD denselben drei Winkeln zusammen gleich; was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich (Ax. 1); also sind auch CBE + EBD = DBA + ABC; aber CBE, EBD sind zwei Rechte; also sind auch DBA + ABC = 2 R. - S.



Euklids "Elemente": § 14 (L. 7):
Bilden an einer geraden Linie in einem Punkte auf ihr zwei nicht auf derselben Seite liegende gerade Linien Nebenwinkel, die zusammen zwei Rechten gleich sind, dann müssen diese geraden Linien einander gerade fortsetzen.

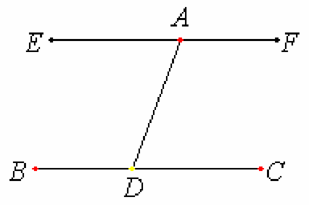
An einer geraden Linie AB mögen nämlich in dem Punkte B auf ihr zwei nicht auf derselben Seite liegende gerade Linien BC, BD die Nebenwinkel ABC, ABD bilden, die zusammen = 2 R. Ich behaupte, dass BC CB gerade fortsetzt.
Wenn nämlich BD BC nicht gerade fortsetzen sollte, möge BE CB gerade fortsetzen (Post. 2). Da dann die gerade Linie AB auf der geraden Linie CBE stünde, so wären ∠ ABC + ABE = 2 R. (I, 13); aber auch ABC + ABD = 2 R.; also wären CBA + ABE = CBA + ABD (Post. 4, Ax. 1). Man nehme CBA beiderseits weg; dann wäre der Restwinkel ABE dem Restwinkel ABD gleich (Ax. 3), der kleinere (Ax. 8) dem größeren; dies ist aber unmöglich. Also setzt BE nicht CB gerade fort. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch keine andere von BD verschiedene gerade Linie es tut; also setzt CB BD gerade fort (Post. 12) - S.

Parallele zu einer Geraden



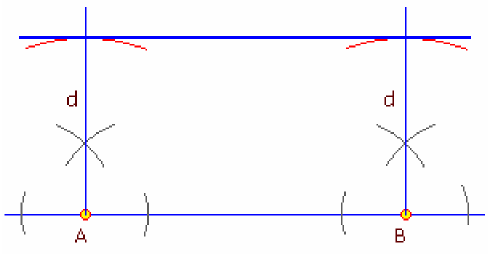
Aufgabe: Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P außerhalb dieser Geraden. Gesucht ist eine Gerade p durch P, die zu g parallel ist.
Lösung:
1. Um P Kreisbogen mit dem Radius r zeichnen, der die Gerade g in zwei Punkten schneidet. Einer dieser Punkte sei A.
2. Auf g wird mit dem gleichen Radius ein Bogen um A gezeichnet. Der Schnittpunkt mit g ist der Punkt B.
3. Um B wird wieder ein Kreis mit r konstruiert. Dieser Kreis schneidet den ersten um P gezeichneten Kreis in C.
4. Die Gerade durch P und C ist dann die gesuchte parallele Gerade p zu g.

Grundlage dieser Konstruktion ist die Tatsache, dass das Viereck PABC Rhombus ist, dessen gegenüberliegende Seiten parallel zueinander sind. In Euklids "Elementen" wird diese Konstruktion unter § 31 (A. 10) ausgeführt.

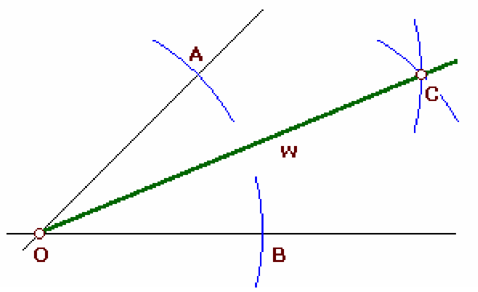


Euklids "Elemente": § 31 (A. 10): **Durch einen gegebenen Punkt eine einer gegebenen geraden Linie parallele gerade Linie zu ziehen.**

Der gegebene Punkt sei A, die gegebene gerade Linie BC. Man soll durch den Punkt A eine der geraden Linie BC parallele gerade Linie ziehen.
Auf BC wähle man Punkt D beliebig, ziehe AD, trage an die geraden Linie DA im Punkte A auf ihr ∠ DAE = ADC an (I, 23) und verlängere EA gerade um die gerade Linie AF.
Da die gerade Linie AD beim Schnitt mit den zwei geraden Linien BC, EF einander gleiche Wechselwinkel bildet, nämlich EAD, ADC, so ist EAF || BC (I, 27). Also hat man durch den gegebenen Punkt A zur gegebenen geraden Linie BC parallel die gerade Linie EAF gezogen - dies hatte man ausführen sollen.

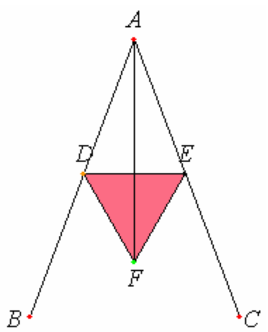


Parallele zu einer Geraden im Abstand d
Aufgabe: Gegeben ist eine Gerade g mit den Punkten A und B und ein Abstand d. Gesucht ist eine Gerade p, die zu g parallel ist und den Abstand d zu g hat.
Lösung:
1. In A und B werden senkrechte Geraden errichtet.
2. Um A und um B werden Kreisbögen mit dem Radius d gezeichnet.
3. Die Schnittpunkte der Bögen mit den Senkrechten in der gleichen Halbebene bezüglich g sind Punkte der gesuchten Parallelen.
4. Durch diese Punkte die gesuchte Parallele zeichnen.
Grundlage dieser Konstruktion ist die Tatsache, dass das entstehende Viereck ein Rechteck mit einer Seitenlänge d ist.



Winkelhalbierende eines Winkels
Aufgabe: Gegeben ist ein beliebiger ebener Winkel. Gesucht ist die Gerade, die den Winkel in zwei gleich große Teile zerlegt, die Winkelhalbierende.
Lösung:
1. Vom Scheitelpunkt O wird auf beiden Schenkeln eine Strecke beliebiger Länge abgetragen.
2. Werden von den beiden Punkten A und B Kreisbögen gleicher Länge abgetragen, so schneiden sich diese in C.
3. Die Gerade durch O und C ist die gesuchte Winkelhalbierende.
Grundlage dieser Konstruktion ist, dass in den gleichschenkligen Dreiecken OAB und ABC die Höhen und Winkelhalbierenden durch die Punkte an der Spitze zusammenfallen.

Winkelverdopplung
1. Man fällt das Lot von A auf SB und verlängert es über SB hinaus.
2. Den Schnittpunkt des Lotes mit SB nennt man M.
3. Man zeichnet einen Kreis um M durch A.
4. Der Schnittpunkt des Kreises mit dem Lot ist D.
5. Man zeichnet den Strahl s(SD).
6. Die Winkel ASM und MSD sind maßgleich. Der Winkel ASD ist also doppelt so groß wie der Winkel ASB.

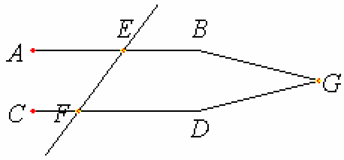


Euklids "Elemente": § 9 (A. 4): **Einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbieren.**

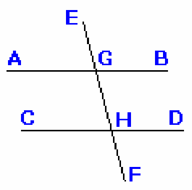
Der gegebene geradlinige Winkel sei BAC. Ihn soll man halbieren.
Auf AB wähle man Punkt D beliebig, trage AE = AD auf AC ab, ziehe DE, errichte über DE das gleichseitige Dreieck DEF (I, 1) und ziehe AF; ich behaupte, dass ∠ BAC durch die gerade Linie AF halbiert wird. Da nämlich AD = AE ist und AF gemeinsam, so sind zwei Seiten DA, AF zwei Seiten EA, AF entsprechend gleich; ferner Grdl. DF = Grdl. EF; also ist ∠ DAF = ∠ EAF (I, 8). Der gegebene geradlinige Winkel BAC wird also durch die gerade Linie AF halbiert - dies hatte man ausführen sollen.

Euklidische Parallelensätze
Euklids "Elemente": § 27 (L. 18):

Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien einander gleiche innere Wechselwinkel bildet, müssen diese geraden Linien einander parallel sein.

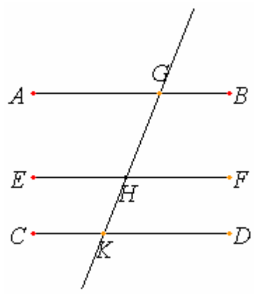


Die gerade Linie EF bilde nämlich beim Schnitt mit den zwei geraden Linien AB, CD einander gleiche Wechselwinkel AEF, EFD.
Ich behaupte, dass AB || CD. Anderenfalls müssten sich nämlich AB, CD bei Verlängerung treffen entweder nach B, D zu oder nach A, C zu (I, Def. 23); man verlängere sie, sie mögen sich nach B, D zu treffen, in G. Dann wäre am Dreieck GEF der Außenwinkel AEF dem gegenüberliegenden Innenwinkel EFG gleich; dies ist aber unmöglich (I, 16); also treffen sich AB, CD bei Verlängerung nicht auf der Seite B, D. Ähnlich lässt sich zeigen; dass sie es auch nach A, C zu nicht tun; nach keiner Seite hin sich treffende sind aber parallel (I, Def. 23); also ist AB || CD - S.

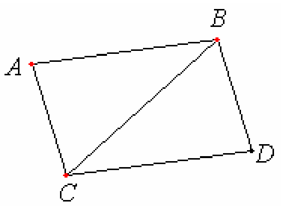


Euklids "Elemente": § 28 (L. 19):
Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass ein äußerer Winkel dem auf derselben Seite innen gegenüberliegenden gleich oder innen auf der derselben Seite liegende Winkel zusammen zwei Rechten gleich werden, dann müssen diese geraden Linien einander parallel sein.

Die gerade Linie EF mache nämlich beim Schnitt mit den zwei geraden Linien AB, CD den äußeren Winkel EGB dem innen gegenüberliegenden Winkel GHD gleich oder innen auf derselben Seite liegenden BGH + GHD = 2 R. Ich behaupte, dass AB || CD.
Da nämlich EGB = GHD, andererseits EGB = AGH (I, 15), so ist auch AGH = GHD; sie sind dabei Wechselwinkel; also ist AB || CD (I, 27). Im zweiten Fall sind, da BGH + GHD = 2 R., aber auch AGH + BGH = 2 R. (I, 13), AGH + BGH = BGH + GHD (Post. 4, Ax. 1); man nehme BGH beiderseits weg; dann ist Rest AGH = Rest GHD; sie sind dabei Wechselwinkel; also ist AB || CD (I, 27) - S.
Euklids "Elemente": § 30 (L. 21):
Derselben geraden Linie parallel sind auch einander parallel.

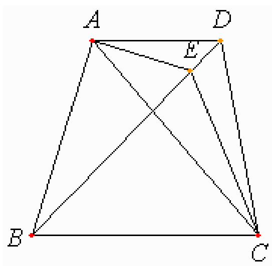


AB, CD seien beide || EF. Ich behaupte, dass auch AB || CD.
Man bringe die gerade Linie GK mit ihnen zum Schnitt. Da die parallelen geraden Linien AB, EF von der geraden Linie GK geschnitten werden, ist AGK = GHF (I, 29). Ebenso ist, da die parallelen geraden Linien EF, CD von der geraden Linie GK geschnitten werden, GHF = GKD (I, 29). Wie oben bewiesen, ist AGK = GHF; also ist auch AGK = GKD; sie sind dabei Wechselwinkel. Also ist AB || CD (I, 27) - S. dies hatte man beweisen sollen.



Euklids "Elemente": § 33 (L. 23):
Strecken, welche gleiche und parallele Strecken auf denselben Seiten verbinden, sind auch selbst gleich und parallel.

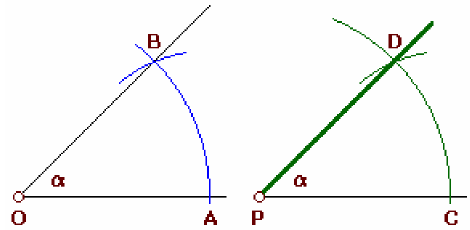
AB, CD seien gleich und parallel, und die Strecken AC, BD mögen sie auf denselben Seiten verbinden. Ich behaupte, dass auch AC, BD gleich und parallel sind. Man ziehe BC.
Da AB || CD und sie von BC geschnitten werden, sind die Wechselwinkel ABC = BCD (I, 29). Da AB = CD ist und BC gemeinsam, so sind zwei Seiten AB, BC zwei Seiten BC, CD gleich; auch ∠ ABC = ∠ BCD; also ist Grdl. AC = Grdl. BD, ∆ ABC = ∆ BCD, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4); also ist ∠ ACB = CBD. Da hier die gerade Linie BC beim Schnitt mit den zwei geraden Linien AC, BD einander gleiche Wechselwinkel bilden, so ist AC || BD (I, 27). Die Gleichheit ist oben bewiesen - S.



Euklids "Elemente": § 39 (L. 29):
Auf derselben Grundlinie nach derselben Seite gelegene gleiche Dreiecke liegen auch zwischen denselben Parallelen.

ABC, DBC seien gleiche auf derselben Grundlinie BC nach derselben Seite gelegene Dreiecke. Ich behaupte, dass sie zwischen denselben Parallelen liegen. Man ziehe AD. Ich behaupte, dass AD || BC. Anderenfalls ziehe man durch Punkt A AE || zur geraden Linie BC und verbinde EC. Dann wäre ∆ ABC = ∆ EBC; denn es läge mit ihm auf derselben Grundlinie BC und zwischen denselben Parallelen (I, 37). Aber ABC = DBC; also wäre auch DBC = EBC; das größere dem kleineren (Ax. 8); dies ist aber unmöglich; also ist AE nicht || BC. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch keine andere von AD verschiedene Linie es ist; also ist AD || BC (I, 31) - S.

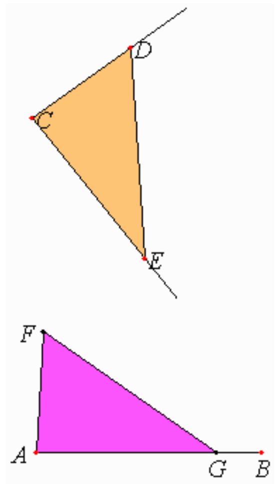
Euklids "Elemente": § 40 (L. 30):
Auf gleichen Grundlinien nach derselben Seite gelegene gleiche Dreiecke liegen auch zwischen denselben Parallelen.



Abtragen eines Winkels

Aufgabe: Ein gegebener Winkel α soll an einem anderen Schenkel O_1A_1 angetragen werden.
Lösung:
1. Kreisbogen um den Scheitel O des gegebenen Winkels zeichnen. Die Schnittpunkte mit den Schenkeln seien A und B.
2. Mit dem gleichen Radius wird um P ein Kreisbogen gezogen, welcher den Schenkel in C schneidet.
3. Der Abstand AB wird als Kreisbogen um C gezeichnet. Der Schnittpunkt mit dem ersten Kreisbogen sei D.
4. Durch Verbinden von P und D wird der zweite Schenkel des gesuchten Winkels konstruiert.

Diese Konstruktion ergibt sich aus dem Kongruenzsatz SSS für die Dreiecke OAB und PCD. In Euklids "Elementen" wird diese Konstruktion unter § 23 (A. 9) ausgeführt.

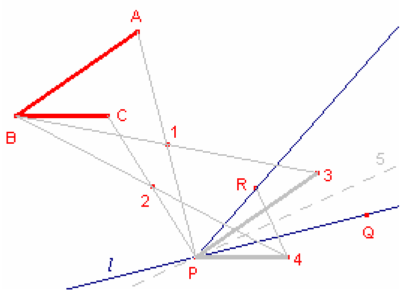


Winkelabtragen bei Euklid

"Elemente": § 23 (A. 9): An eine gegebene gerade Linie in einem Punkte auf ihr einen einem gegebenen geradlinigen Winkel gleichen geradlinigen Winkel anzutragen.

Die gegebene gerade Linie sei AB, der Punkt auf ihr A, der gegebene geradlinige Winkel DCE. Man soll an die gegebene gerade Linie AB in dem Punkte A auf ihr einen dem gegebenen geradlinigen Winkel DCE gleichen geradlinigen Winkel antragen.
Man wähle auf beiden geraden Linien CD, CE Punkte D, E beliebig und ziehe DE; ferner errichte man aus drei Strecken, die den drei Strecken CD, DE, CE gleich sind, ein Dreieck AFG (I, 22), so dass CD = AF, CE = AG und DE = FG.
Da hier zwei Seiten DC, CE zwei Seiten FA, AG entsprechend gleich sind, auch Grdl. DE = Grdl. FG, so ist ∠ DCE = ∠ FAG (I, 8). Man hat also an eine gegebene gerade Linie AB in einem Punkte A auf ihr einen einem gegebenen geradlinigen Winkel DCE gleichen geradlinigen Winkel angetragen, nämlich FAG - dies hatte man ausführen sollen.

Abtragen eines Winkels

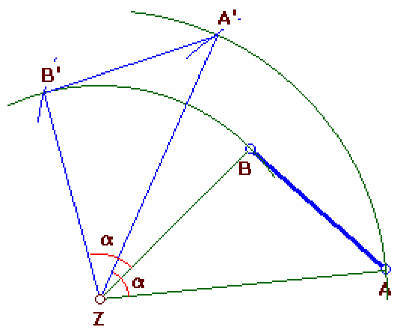


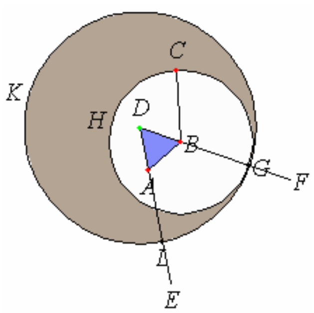
Aufgabe: An einer Gerade PQ = l soll ein Winkel ABC gleicher Orientierung angetragen werden.

Konstruktion:
1. Konstruktion des Mittelpunktes "1" der Strecke AP
2. Konstruktion des Mittelpunktes "2" der Strecke CP
3. Punktspiegelung von B an "1", Spiegelpunkt sei "3"
4. Punktspiegelung von B an "2", Spiegelpunkt sei "4"
5. Konstruktion der Winkelhalbierenden des Winkels 3PQ, Gerade sei "5"
6. Punktspiegelung von "4" an "5", Spiegelpunkt sei R
7. Zeichnen des gesuchten Schenkels PR

Drehen einer Strecke

Aufgabe: Eine Strecke AB ist um einen Punkt Z mit einem Winkel α zu drehen.
Lösung:
1. Zeichnen der Strahlen ZA und ZB
2. Abtragen des Winkels α an den beiden Strahlen in der gewünschten Drehrichtung (siehe Abtragen eines Winkels)
3. auf den freien Schenkeln liegen die gesuchten Punkte A' und B', so dass ZA = ZA' und ZB = ZB' gilt



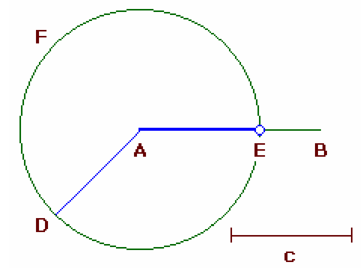


Konstruktion Strecke antragen

Euklids "Elemente": § 2 (A. 2):
An einem gegebenen Punkt eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke hinzulegen.

Der gegebene Punkt sei A und die gegebene Strecke sei BC. Man soll an dem Punkt A einer der gegebenen Strecke BC gleiche Strecke hinlegen.
Man ziehe von Punkt A nach Punkt B die Strecke AB und errichte über derselben das gleichseitige Dreieck DAB (I, 1), verlängere ferne DA, DB gerade um die Strecken AE, BF (Post. 2) und zeichnen mit B als Mittelpunkt und BC als Abstand den Kreis CGH, ebenso mit D als Mittelpunkt und DG als

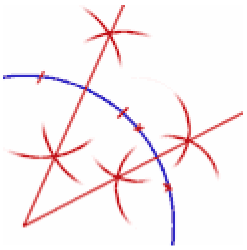
Abstand den Kreis GKL.
Da hier Punkt B Mittelpunkt von CGH ist, ist BC = BG. Ebenso ist, da Punkt D Mittelpunkt des Kreises GKL ist, DL = DG; von diesen Strecken sind Teile DA = DB.
Also sind die Reste AL = BG (Axiom 3). Wie oben bewiesen, ist auch BC = BG; also sind AL und BC beide = BG.



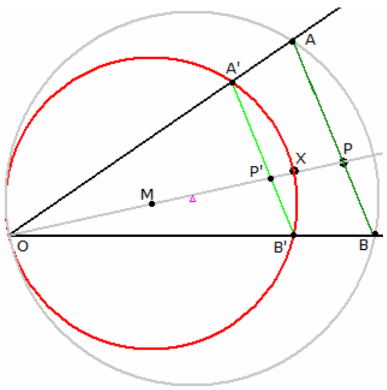
Was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich (Axiom 1); also ist AL = BC. Also hat man am gegebenen Punkt A einer der gegebenen Strecke BC gleiche Strecke hingelegt, nämlich AL - dies hatte man ausführen sollen.

Konstruktion Streckensubtraktion
Euklids "Elemente": § 3 (A. 3):
Wenn zwei ungleiche Strecken gegeben sind, auf der größeren eine der kleineren gleiche Strecke anzutragen.

Die zwei gegebenen ungleichen Strecken seien AB, c; von ihnen sei AB die größere. Man soll auf AB, der größeren Strecke, eine c, der kleineren, gleiche abtragen.
Man lege am Punkte A eine Strecke AD = c hin (I, 2) und zeichne mit A als Mittelpunkt und AD als Abstand den Kreis DEF.
Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises DEF ist, ist AE = AD; aber auch c = AD. Also sind AE, c beide = AD; folglich ist auch AE = c.
Also hat man, während zwei ungleiche Strecken AB, c gegeben waren, auf AB, der größeren, eine c, der kleineren, gleiche abgetragen, nämlich AE - dies hatte man ausführen sollen.



Bogenmittelpunkt
Gegeben ist ein Kreisbogen, dessen Radius und Mittelpunkt unbekannt sind und konstruktiv ermittelt werden sollen.
Konstruktion:
Auf dem Kreisbogen werden zwei beliebige Punkte gewählt. Um diese Punkte werden mit einer festen Zirkelöffnung Kreisbögen gezeichnet, so dass diese sich schneiden.
Durch die Schnittpunkte wird eine Gerade gezogen.
Diese Konstruktion wird mit einem zweiten Paar von Punkten auf dem gegebenen Kreisbogen wiederholt.
Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Mittelpunkt des Kreisbogens. Der Radius ergibt sich durch Messung.

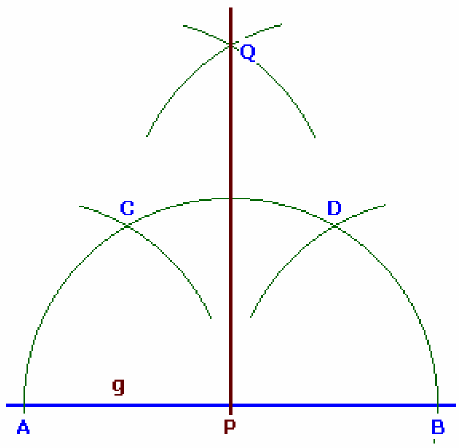


Kürzeste Strecke
Gegeben sind zwei Schenkel OA und OB eines Winkels und ein Punkt P zwischen den Schenkeln. Gesucht ist die kürzeste Strecke AB durch P, wobei A auf dem einen und B auf dem anderen Schenkel liegen sollen.

Konstruktionsbeschreibung:
Auf der Geraden OP wird ein beliebiger Punkt X gewählt. M sei der Mittelpunkt von OX. Um M wird der Kreis mit dem Radius OM gezeichnet.
Dieser Kreis schneidet die Schenkel des Winkels in den Punkten A' und B'. Die Strecke A'B' wird parallel durch P verschoben. Die Schnittpunkte A und B der Parallelen bilden die gesuchte Strecke.
Es seien gegeben $\angle AOX = \alpha$, $\angle BOX = \beta$ und die Strecke OP. Zuerst sei OP' = 1. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke A'OB' und AOB wird

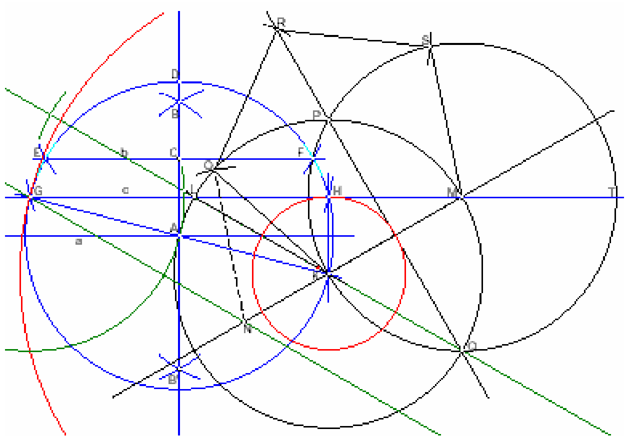
$AB : A'B = OP : OP'$; $AB = OP \cdot A'B'$
Für A'B' wird $\angle OA'X = \angle OB'X = 90°$; $\angle P'A'X = \beta$; $\angle P'B'X = \alpha$
$\angle OA'P' = 90° - \beta$; $\angle OB'P' = 90° - \alpha$
Sinussatz $\angle OA'P' : \sin(\alpha) = 1 : \sin(90° - \beta)$
$A'P' = \sin\alpha / \cos\beta$
$B'P' : \sin(\beta) = 1 : \sin(90° - \alpha)$
$B'P' = \sin\beta / \cos\alpha$
Aus $AB : A'B' = OP : OP' = OP$ folgt
$AB = OP (\sin\alpha / \cos\beta + \sin\beta / \cos\alpha)$

Konstruktion mit festem Zirkel
Auf Plato geht die Tradition der Mathematiker zurück, bei geometrischen Konstruktion nur Zirkel und Lineal zu nutzen. Später legten sich die Geometer noch schwerere Beschränkungen in der Wahl ihrer Instrumente auf. Ein Pionier auf diesem Gebiet war der persische Astronom und



Mathematiker Abul Wafa Muhammad Ibn Yahya Ibn Ismail al-Buzjani.
In einem seiner Werke beschreibt er Konstruktionen, die mit Hilfe eines Lineals und eines "festen Zirkels" möglich sind. Abul Wafas "fester Zirkel" ist ein Zirkel, der seine Öffnung nie ändert, er wurde später in "rostiger Zirkel" umbenannt.
Einfachere Beispiele für Konstruktionen mit Lineal und festem Zirkel sind die Methoden, eine Strecke oder einen Winkel zu halbieren.
Beispiel: Konstruktion der "Winkelhalbierenden" eines gestreckten Winkels, also eines Winkels mit 180°, d.h. Mittelsenkrechte
Man zieht mit dem rostigen Zirkel einen Halbkreis um P und erhält dadurch die Punkte A und B. Nun schlägt man um A und B je einen Kreisbogen und schneidet sie mit dem Halbkreis um P, die Schnittpunkte seien C und D. Man schlägt nun von C und D je einen Kreisbogen; der Schnittpunkt Q der beiden Kreisbögen bildet mit Punkt P die Winkelhalbierende.
Im 19. Jahrhundert legte der französische Mathematiker Victor Poncelet den Grundstein für den Beweis, dass alle Konstruktionen mit Zirkel und Lineal bereits mit Lineal und einem festen Zirkel möglich sind. Der strenge Beweis wurde dann vom Schweizer Jacob Steiner durchgeführt.

Fünfeck mit rostigem Zirkel

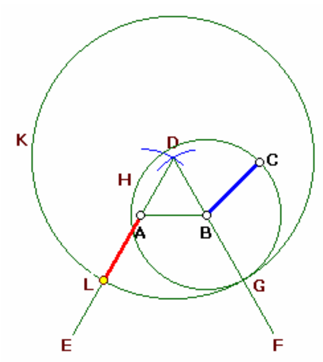


1. Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks GKH mit der 4:1 für Hypotenuse zu kleiner Kathete
2. Zeichne die Gerade a. Lege den zu verwendenden Kreisradius, welcher zugleich die gegebene Seite des Fünfecks ist, fest.
3. Errichte mittels dieses Radius und den Hilfspunkten B und B' eine Senkrechte über a. Dies ergibt Punkt A. Schlage den Kreis um A. Dies ergibt Punkt D.
4. Errichte die Mittelsenkrechte b von AD. Dies ergibt E und F. Errichte nochmals eine Mittelsenkrechte c zu AC. Dies ergibt die Punkte G und H.
5. Lege eine Gerade durch G und A. Dies ergibt Punkte K auf dem Kreis.

Konstruktion des Goldenen Schnitts

6. Nun schlage um K den Kreis und du erhältst L und M, d.h. LM:LG = t.
7. Ziehe nun durch K und M und ebenso durch K und L eine Gerade. Die Strecke KM ist eine Seite des zu konstruierenden Fünfecks.
8. Auf der Geraden durch K und M erhältst du Punkt N. Schlage um N den Kreis, so erhältst du in Punkt O die dritte Ecke des Fünfecks.
9. Dieser bildet zusammen mit den Punkten K und N ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel zur Basis im Goldenen Schnitt stehen, den Spitz des Pentagramms also.

Errichte zu KM die Mittelsenkrechte, indem du um M den Kreis schlägst. Du erhältst P und Q. Ziehe durch diese beiden Punkte eine Gerade. Der Kreis um O ergibt R und der Kreis um R ergibt schließlich S. R und S sind die restlichen Ecken des Fünfecks KMRSO.
nach Alfred Hoehn, 2003



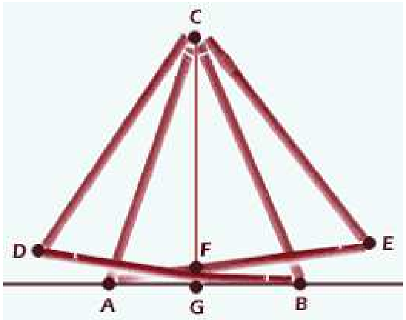
Kollabierender Zirkel, Euklidischer Zirkel

Der kollabierende Zirkel oder euklidische Zirkel ist ein Zirkel, der beim Hochheben vom Zeichenblatt zuschnappt. Er ist damit das Gegenstück zum rostigen Zirkel.
Der kollabierende Zirkel geht auf Euklid zurück. In Proposition 2 des I.Buchs der Elemente beweist er, dass mit einem solchen Zirkel und einem Lineal eine beliebige Strecke übertragen werden kann, d.h. die Äquivalenz der Konstruktion mit Lineal und kollabierenden und nicht kollabierenden Zirkeln.
Die Abbildung zeigt die Streckenabtragung mit dem Euklidischen Zirkel.
siehe Konstruktion Strecke antragen

Bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal wird meist ein nichtkollabierender Zirkel verwendet.
Euklid ging aber bei seinen Konstruktionsproblemen stets davon aus, dass der Radius des Zirkels nicht erhalten bleibt, sobald ein anderer Mittelpunkt gewählt wird. Nach Euklid existiert zu zwei Punkten A und B immer eine mit einem Lineal konstruierbare Gerade, die durch beide Punkte verläuft, so wie zwei Kreise, einer um A und einer um B, mit dem Radius der Strecke von A bis B.

Damit erhält man fast alle möglichen Konstruktionen, die man mit einem Zirkel und einem Lineal machen kann, bis auf das Abgreifen eine Strecke AB mit einem Zirkel und das Ziehen eines Kreises mit diesem Radius um einen dritten Punkt C.
Durch Hinzufügen weiterer Konstruktionsschritte ist aber auch das Abgreifen einer Strecke möglich.

siehe http://www.blu7.com/Skripte/Algebra_I_WS0304_Skript.pdf



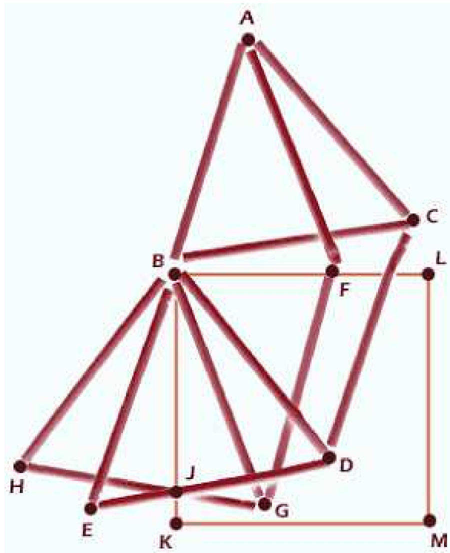
Zahnstocher-Konstruktion

Alle Punkte, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, können auch durch eine unbegrenzte Anzahl von gleich langen Zahnstochern erhalten werden. (Streichhölzer, Wattenstäbchen, usw.). Zahnstocher sind dabei feste Strecken, die in der Ebene bewegt werden dürfen. Diese Konstruktionsmethode wurde von T. R. Dawson erfunden und im Kapitel "Match-Stick" Geometry (Streichholzgeometrie) in der Mathematical Gazette 1939 veröffentlicht. Dawson bewies, dass man nur Punkte konstruieren kann, die man auch mit Hilfe von Zirkel und Lineal erhalten kann. Die Herausforderung dieser Aufgabe ist es, Konstruktionen mit der kleinstmöglichen Anzahl von Zahnstochern zu vollführen.

Halbieren eines Winkels mit fünf Zahnstochern

Gegeben sei ein Winkel ACB, der nicht grösser als 120° und nicht genau 60° ist, sowie eine Gerade durch die Punkte A und B. Gesucht ist der Mittelpunkt G von AB, den es nun mit Hilfe von gleich langen Zahnstochern zu konstruieren gilt.
Lösung:
Nimm je zwei Zahnstocher und ergänze AB und BC zu einem gleichseitigen Dreieck. Du erhältst die Dreiecke ACE und BCD. Der Schnittpunkt dieser beiden Dreiecke ist F, er liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels ACB. Legt man nun einen fünften Zahnstocher durch C und F, ergibt sich der Schnittpunkt G mit dem Zahnstocher durch A und B.

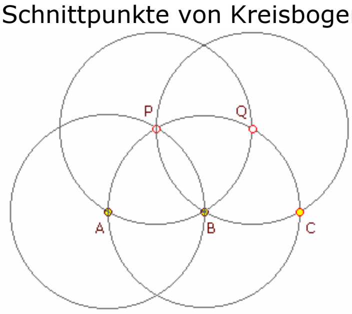
Konstruktion eines Quadrates mit 16 Zahnstochern



Lösung:
Fange irgendwo damit an, ein gleichseitiges Dreieck ABC zu bilden. Ergänze die Seite BC zu einem weiteren gleichseitigen Dreieck BCD, dasselbe tust du mit BD, es ergibt sich Dreieck BDE. AF ist eine beliebige Strecke innerhalb des Winkels BAC. Man erhält dadurch das gleichschenklige Dreieck ABF. "Spiegle" dieses Dreieck um BF, es folgt ein kongruentes Dreieck BFG. An die Strecke BG fügst du zwei weitere Zahnstocher an, so dass wir dort das gleichschenklige Dreieck BGH erhalten. Durch B und den Schnittpunkt J der Dreiecke BDE und BGH legst du die erste Seite des Quadrates (BK). Die Strecke durch B und F steht senkrecht dazu, dies ist unsere zweite Seite (BL). Nun ergänzt du das Quadrat mit zwei weiteren Zahnstochern, wobei sich Punkt M zwangsläufig ergibt.
Begründung:
Durch die Annahme des Winkels BAF ist eine Seite des Quadrates, nämlich die durch BF, bereits gegeben. Es gilt nun eine Senkrechte zu BF zu bilden, die gleichzeitig durch den Punkt B geht. Dies erzielt man, indem man das gleichschenklige Dreieck ABF "herunterspiegelt" und zwei weitere gleichseitige Dreiecke an ABC anfügt. Die Strecke AE ist dann 180° (Sechseck!). Der Winkel EBG ist dadurch gleich gross wie BAF, die Dreiecke BGE und ABF sind somit kongruent zueinander. Die Winkelhalbierende, die man nach derselben Methode wie im vorhergehenden Beispiel konstruiert, geht durch Punkt B und steht senkrecht auf BL.

Mascheroni-Konstruktionen

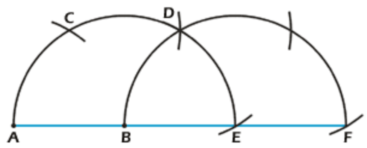
Unter einer Mascheroni-Konstruktion versteht man eine geometrische Konstruktion, die ausschließlich mit einem Zirkel ohne Benutzung eines Lineals ausgeführt wird. Es ist beweisbar, dass dies für jede sonst mit Zirkel und Lineal durchgeführte Konstruktion möglich ist.
Zum Beispiel wies 1890 August Adler in dem Artikel "Zur Theorie der Mascheronischen Konstruktionen" (Wiener Berichte Nr. 99) dies für eine Vielzahl von Grundkonstruktionen, darunter auch der Kreisinversion eines Punktes, nach. Die Konstruktionen mit Zirkel allein verlangen ein ziemlich abstraktes Denken: Eine Gerade wird durch zwei Punkte festgelegt und diese Punkte erhält man nur als Schnittpunkte von Kreisbogen. Deshalb folgen zuerst einige einfachere Beispiele:



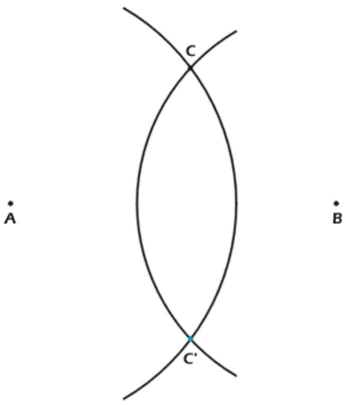
Aufgabe: An eine gegebene Strecke AB soll eine weitere Strecke BC = AB angefügt werden, d.h. die Strecke AB soll verdoppelt werden.

Konstruktion: 1. Konstruktion von Kreisen um A und B mit dem Radius r = AB
2. einer der Schnittpunkte sei P
3. der Kreis um P mit dem Radius r schneidet den Kreis um B im Punkt Q
4. ein weiterer Kreis um Q mit dem Radius r schneidet den Kreis um B in dem gesuchten Punkt C

Beispiel 1: Gegeben sei eine Strecke AB. Konstruiere eine Strecke, die dreimal so lang ist wie AB.

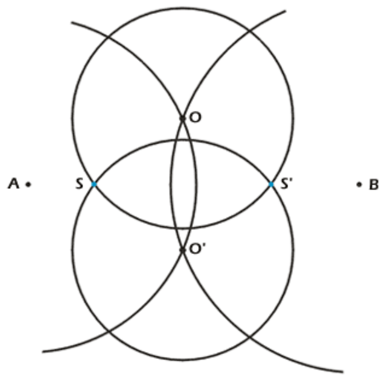


Lösung: Zeichne einen Kreis mit Radius AB und Mittelpunkt B. Trage nun dieselbe Zirkelöffnung von A ab und schneide sie mit dem Kreis, so dass du C erhältst. Mache nun das gleiche mit C und dem dadurch gewonnenen Punkt D. Der resultierende Punkt E liegt nun auf der Verlängerung von AB und die Strecke AE ist gerade doppelt so lang wie AB, da sie zweimal dem Radius AB entspricht. Damit sie dreimal so lang wird, musst du dasselbe Prinzip auf E anwenden, so dass die Strecke AE nochmals um AB verlängert wird und somit dreimal so lang ist. Die Strecke AF hat nun die gewünschte Länge. Dieses Prinzip basiert auf der Konstruktion eines regelmässigen 6-Ecks, wobei man hier natürlich nur die eine Hälfte, also ein Trapez (AEDC), konstruiert. Demzufolge müssen A, B, E und F auf einer Geraden liegen. Man kann die Konstruktion für jede beliebige Vergrösserung von AB verwenden, das einzige, was ändert, ist die Anzahl der Wiederholungen.

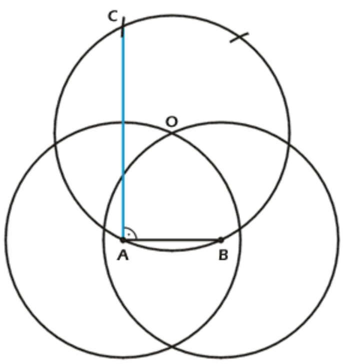


Beispiel 2: Gegeben sei eine Strecke AB. Ein weiterer Punkt C liege ausserhalb der Strecke AB. Konstruiere den Punkt C', der symmetrisch zu C ist, wenn du AB als Spiegelungsachse verwendest.
Lösung: Ziehe zwei Kreisbogen durch C, einer mit Mittelpunkt in A, ein anderer mit Mittelpunkt in B. Der zweite Schnittpunkt dieser beiden Kreise ist gerade der gesuchte Punkt C'.

Beispiel 3: Gegeben sei eine Strecke AB sowie ein Kreis mit Radius R und Mittelpunkt O, wobei O nicht auf AB liegen darf. Gesucht sind die Schnittpunkte des Kreises mit der Strecke AB.

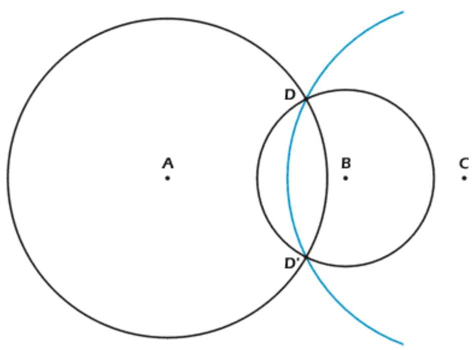


Lösung: Spiegle zuerst den Punkt O an AB wie bereits in Beispiel 2 gezeigt wurde. Dadurch erhalten wir O'. Als nächstes zeichnest du einen Kreis um O', benutze dazu den Radius R von Kreis O. Die Schnittpunkte S und S' der beiden Kreise sind gleichzeitig die Schnittpunkte von Kreis O mit der Strecke AB. Im Grunde genommen konstruiert man dabei eine Mittelsenkrechte zur Strecke OO'. Da beide Kreise denselben Abstand von AB haben, müssen S und S' zwangsläufig auf AB liegen. In unserem Beispiel gibt es zwei Schnittpunkte. Was aber wäre, wenn sich die beiden Kreise nur berühren würden? In diesem speziellen Fall, der nur einmal vorkommt, gibt es bloss einen Schnittpunkt. Wenn sich die beiden Kreise weder schneiden noch berühren, existieren keine gemeinsamen Schnittpunkte mit der Geraden AB.



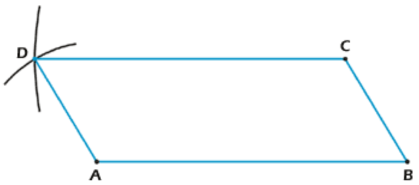
Beispiel 4: Gegeben sei eine Strecke AB. Finde einen Punkt C, so dass AC senkrecht auf AB steht.
Lösung: Ziehe je einen Kreis mit Radius R >= AB um die Punkte A und B. Mache danach einen dritten Kreis mit derselben Zirkelöffnung bei einem der zwei Schnittpunkte; in der Abbildung O. Trage von B aus dreimal den Radius R ab, so dass du C erhältst. B, O und C liegen offensichtlich auf einer Geraden, genauer gesagt auf der Diagonalen des regelmässigen Sechsecks mit Umkreis k(O, R), das wir ansatzweise konstruiert haben. Dass der Winkel BAC ein rechter Winkel sein muss, folgt aus dem Thaleskreis über der Strecke BC mit Mittelpunkt O, A ist Element dieses Kreises k(O, R).

Beispiel 5: Gegeben seien drei Punkte A, B und C. Zeige, ob die Punkte auf einer Geraden liegen oder nicht.



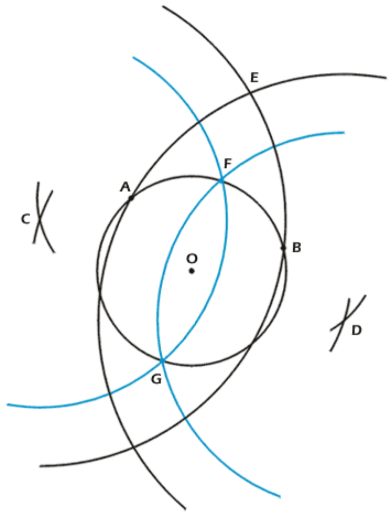
Lösung: Man stelle sich eine Gerade durch AB vor. Es muss nun gezeigt werden, dass C auch darauf liegt. Dazu nehmen wir einen Punkt D ausserhalb von AB an und konstruiere den zu AB symmetrischen Punkt D'. Wenn C den gleichen Abstand von den Punkten D und D' hat, liegt C ebenfalls auf der Geraden AB. Dies kommt daher, weil D und D' denselben Abstand von der Strecke AB haben. Wenn nun die Strecke DC und D'C gleich lang sind, folgt daraus logischerweise, dass C auf der Geraden durch AB liegt und somit alle drei Punkte auf einer Geraden liegen. Dies ist in unserem Beispiel der Fall.

Beispiel 6: Gegeben seien drei Punkte A, B und C. C liegt ausserhalb der Geraden AB. Ergänze das Parallelogramm.



Lösung: Ziehe zwei Kreise, einen mit Mittelpunkt C und Radius AB, den anderen mit Mittelpunkt A und Radius BC. Die Lösung basiert auf den Eigenschaften des Parallelogramms – gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleichlang.

Beispiel 7: Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius R. Die Punkte A und B liegen auf dem Kreis. Halbiere die durch A, O und B gegebenen Winkel AOB (Beachte: Es gibt auf beiden Seiten je einen Winkel), gesucht sind zwei Punkte auf dem Kreis um O. Mit anderen Worten: die gesuchten Punkte liegen auf der Winkelhalbierenden des Winkels AOB geschnitten mit dem Kreis.

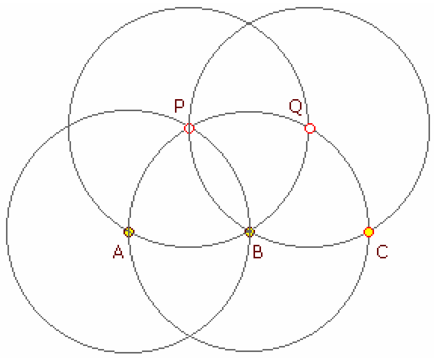


Lösung: Ergänze die zwei Parallelogramme wie im vorhergehenden Beispiel: ABOC (C liegt gegenüber von B) und OABD (D liegt gegenüber von A). Ziehe zwei Kreise mit Radius r = AD = BC, einer mit Mittelpunkt C, der andere mit Mittelpunkt D. Der Punkt E sei der obere Schnittpunkt der beiden Kreise. Schliesslich machst du je einen Kreise mit Radius OE um die Punkte C und D. Dabei entstehen die Punkte F und G, welche einerseits auf Kreis O liegen, andererseits aber auch noch die beiden Winkel AOB halbieren.

Beweis: In Folge der Konstruktion liegen die Punkte C, D und O auf einer Geraden, dasselbe gilt für F, G und O. Zudem steht OF senkrecht auf CD. Das einzige, das wir zeigen müssen, ist die Tatsache, das OF = R ist. Für ein Parallelogramm ABCD gilt folgende Formel: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2ABBC(\cos \alpha)$ und $BD^2 = AB^2 + BC^2 - 2ABBC(\cos \beta)$

$\rightarrow AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$



Wir betrachten das Parallelogramm ABOC in unserer Aufgabe und versuchen die Diagonale d = CB auszudrücken:

$BC^2 + AO^2 = 2(AB^2 + BO^2)$ $\quad d^2 + R^2 = 2(AB^2 + R^2) \rightarrow$

$d^2 = 2AB^2 + R^2$ (I)

Da das Dreieck COE rechtwinklig ist, gilt nach Pythagoras:

$d^2 = CE^2 = AB^2 + OE^2 \rightarrow OE^2 = d^2 - AB^2$

Unter Verwendung von (I): $\quad OE^2 = AB^2 + R^2$

Das Dreieck COF ist ebenfalls rechtwinklig und hat nach Pythagoras die Form:

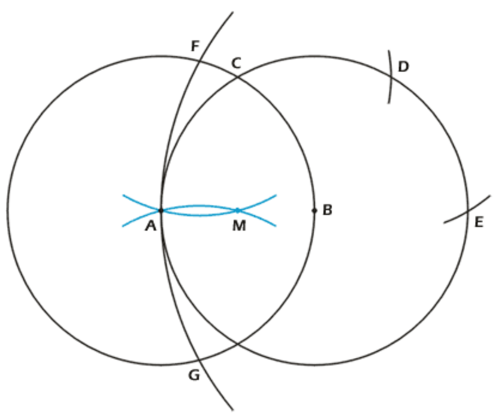
$CF^2 = AB^2 + OF^2 = OE^2$ (da CF = OE) $\rightarrow$

$AB^2 + OF^2 = AB^2 + R^2$

$\rightarrow OF = R$

Aufgabe: **An eine gegebene Strecke AB soll eine weitere Strecke BC = AB angefügt werden, d.h. die Strecke AB soll verdoppelt werden.**

Konstruktion:
1. Konstruktion von Kreisen um A und B mit dem Radius r = AB
2. einer der Schnittpunkte sei P
3. der Kreis um P mit dem Radius r schneidet den Kreis um B im Punkt Q
4. ein weiterer Kreis um Q mit dem Radius r schneidet den Kreis um B in dem gesuchten Punkt C

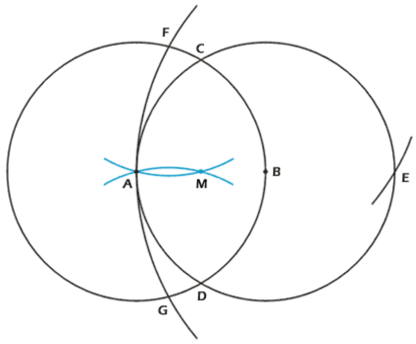


Aufgabe:

Von einer gegebenen Strecke AB ist unter alleiniger Nutzung eines Zirkels der Mittelpunkt konstruiert werden.

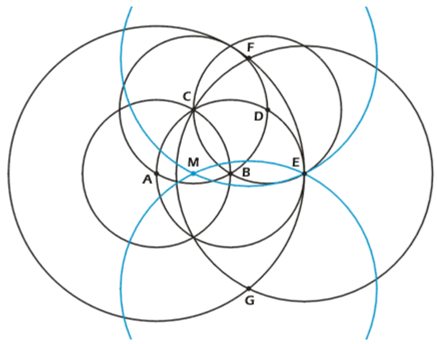
Konstruktion:
1. Mittels der Mascheroni-Konstruktion wird die Strecke AB verdoppelt und der Punkt E konstruiert
2. Mit Hilfe des Zirkels wird der Kreisinversionspunkt von E am Kreis um A mit dem Radius AB konstruiert, d.h.
3. um E' einen Kreis mit dem Radius AE zeichnen
4. die Schnittpunkte mit dem Inversionskreis seien die Punkte F und G
5. Kreis um F mit Radius AB zeichnen
6. Kreis um G mit Radius AB zeichnen
7. der von A verschiedene Schnittpunkt der beiden Kreise ist der gesuchte Mittelpunkt M

Begründung: Ist r = AB dann gilt für die Punkte E und M: $AM * AE = AM * 2r = r^2$ und damit $AM = ½ r$.



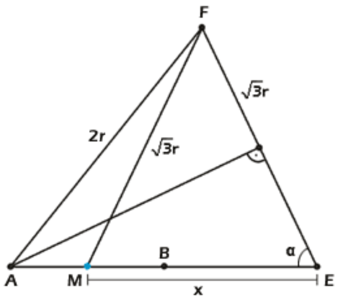
Verbesserte Mascheroni-Lösung

Die Mascheroni-Lösung der letzten Aufgabe kann um einen Schritt verkürzt werden.
Wiederum ist der Mittelpunkt der Strecke AB, die nur durch diese zwei Punkte gegeben ist, gesucht. In dieser Konstruktion kann man sich den Umweg über den "alten" Punkt D ersparen. Das "neue" D entspricht dem zweiten Schnittpunkt der Kreise um A und B. Die Strecke CD ist gerade gleich lang wie die Strecke CE. Die Punkte CDE bilden nämlich ein gleichseitiges Dreieck mit Umkreis k(B, AB). Man trägt also einen Kreisbogen mit Radius CD von C aus ab und erhält dadurch direkt Punkt E.
Der Rest der Konstruktion sowie der Beweis sind identisch.



Mascheronis komplizierteste Lösung

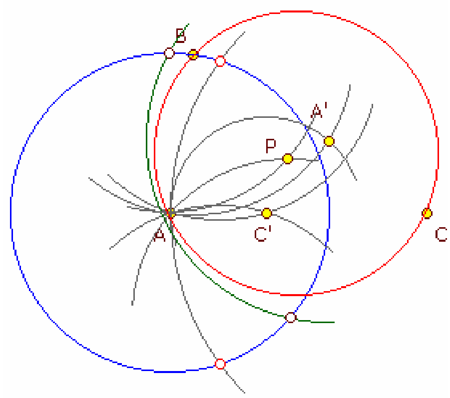
Erneut soll der Mittelpunkt einer gegebenen Strecke AB konstruiert werden.



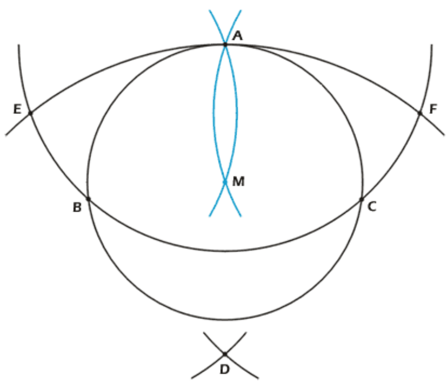
Konstruktion:
Zeichne zuerst zwei Kreise mit Radius AB sowie den Mittelpunkten A und B. Man erhält den Schnittpunkt C. Ziehe um C einen weiteren Kreis mit Radius AB, dies ergibt den Schnittpunkt D. Mache einen weiteren Kreis mit Radius AB um D, woraus der Schnittpunkt E hervorgeht. Bis jetzt ist die Konstruktion identisch mit der ersten Konstruktion.
Trage von E aus den Kreis durch C ab. Daraufhin machst du einen Kreis mit Mittelpunkt A und Radius AE. Dort wo sich die Kreise AE und EC schneiden, liegen F und G. Zeichne nun zwei Kreise mit den Mittelpunkten G und F sowie dem Radius EF. Unsere beiden Kreise schneiden sich einerseits in E, andererseits im gesuchten Mittelpunkt der Strecke AB.
Beweis: Die Strecke ME sei das gesuchte x, EF und FM sind je $\sqrt{3}\,r$, dies ist die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks mit Umkreis AB. Nach dem Kosinussatz wird $x = 2\sqrt{3}\,r \cos\alpha$
Das Dreieck AE(EF/2) ist rechtwinklig, da es die Hälfte des gleichschenkligen Dreiecks AEF ist. Es gilt für α: $\cos\alpha = \sqrt{3}/2\, r / (2r) = ¼ \sqrt{3}$
Einsetzen: $x = EM = 3/2\, r \rightarrow BM\; r/2$, Somit ist M der Mittelpunkt der Strecke AB.

Aufgabe:

Von drei gegebenen Eckpunkten A, B, C eines Dreiecks ist unter alleiniger Nutzung eines Zirkels der Umkreis konstruiert werden.



Konstruktion:
1. Zeichnen des Kreises um A mit dem Radius AB. Dieser Kreis wird als Inversionskreis genutzt.
2. Konstruktion des Inversionspunktes C' des Punktes C am Kreis A(AB) unter alleiniger Nutzung des Zirkels
(siehe dazu Konstruktion eines Inversionspunktes)
3. der Punkt A wird an der fiktiven Geraden BC' gespiegelt. Dazu werden um B und C' Kreisbögen durch A gezeichnet. Der zweite Schnittpunkt ist A'.
4. Konstruktion des Inversionspunktes von A' am Kreis A(AB).
5. dieser Inversionspunkt P ist der gesuchte Umkreismittelpunkt von Δ ABC

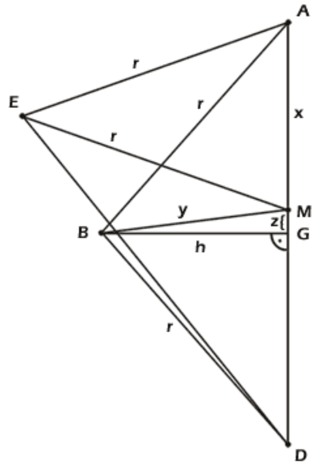


Begründung:
Bei einer Inversion am Kreis A(AB) geht der Umkreis von ABC in eine Gerade über. Auf dieser liegen B' = B und C'. Gleichzeitig wird P zum Inversionspunkt A', der dem Spiegelbild von A an der Geraden BC' entspricht.

Mittelpunkt eines Kreises

Der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises ist aufzufinden
Konstruktion:
Gegeben ist ein Kreis ohne Mittelpunkt. Wähle auf dem Kreisbogen einen beliebigen Punkt A. Um A schlägst du nun einen Bogen mit dem Zirkel, der den Kreis in B und C schneidet. Der Radius dieses Bogens ist frei wählbar, er muss lediglich den Kreis

in zwei Punkten schneiden, der Rest spielt keine Rolle. Nun machst du zwei Bögen mit Radius AB um B und C, sie schneiden sich in D. Der Punkt D kann nun inner- oder ausserhalb des Kreises liegen, dies hängt lediglich von Radius AB ab. Schliesslich ziehst du noch einen Kreisbogen mit Radius AD um D. Geschnitten mit dem Kreisbogen um A ergeben sich die Punkte E und F. Der letzte Schritt besteht darin, dass du von E und F aus je einen Bogen durch A schlägst. Der zweite Schnittpunkt ist der gesuchte Mittelpunkt M.



Beweis: In der rechten Abbildung ist AM = x; BG = y, das Dreieck AED ist ähnlich zu Dreieck AEM. G ist die Mitte von AD → AD = 2x + 2z

Beweis: $(x + y)^2 + h^2 = r^2$; $h^2 = y^2 - z^2$ →

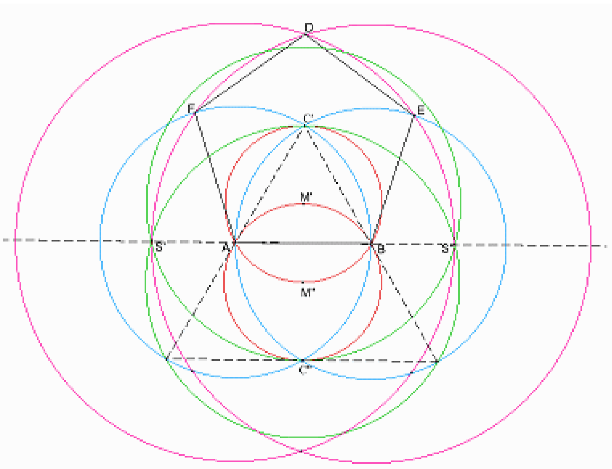
$x^2 + 2xz + z^2 + y^2 - z^2 = r^2$ (I)

AED ≅ AEM → $r:x = (2x + 2z):r$ <==> $2xz = - 2x^2 + r^2$ (II)

(II) → (I): $x^2 - 2x^2 + r^2 + z^2 + y^2 - z^2 = r^2$ →

$- x^2 + r^2 + y^2 = r^2$ → $x = y$

Damit ist die Behauptung bewiesen und M somit der Mittelpunkt des Kreises.

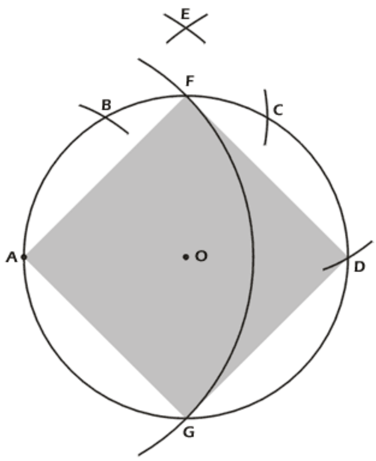


Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks nur mit dem Zirkel

1. Zeichne einen beliebigen Kreis um M‛ (in Figur Kreis mir r = M'B rot) und einen peripheren Kreis mit gleichem Radius (in Figur um M‟ rot).
2. Konstruiere Kreise mit r = AB um A und B (blau)
3. Anschließend Kreise mit r = M‟C‛ um M‟ und M‛ (grün, dies sind die Odom'schen Kreise)
4. Es resultieren die Punkte S‛ und S‟
5. Es folgen die Kreise mit r = AS‟ (oder BS‛) um A und B (violet)
6. Es ergeben sich die restlichen Punkte D, E und F.
7. Die Punkte ABEDF sind die Ecken des regelmäßigen Fünfecks.

Diese Konstruktion basiert auf dem sogenannten Odom'schen Goldenen Schnitt, welcher besagt, dass die Mittelparalelle eines gleichseitigen Dreiecks von den Dreiecksseiten und dessen Umkreis im Goldenen Schnitt geschnitten wird.

Napoleonisches Problem



Ein Problem, das Mascheroni löste, ist das Napoleonische Problem. Man sagt, dass Mascheroni ursprünglich einen Vorschlag von Napoleon Bonaparte erhielt. Beim Napoleonischen Problem ist ein Kreis und dessen Mittelpunkt gegeben. Es soll nun ein Quadrat konstruiert werden, dessen vier Eckpunkte auf dem gegebenen Kreis zu liegen kommen.

Nimm dazu einen beliebigen Punkt A auf dem Kreis an, A ist unser erster Eckpunkt. Trage nun mit dem Radius des Kreises von A aus die Punkte B, C und D ab, D ist unser zweiter Eckpunkt. Danach nimmst du AC in den Zirkel und machst um A und D Kreisbogen, die sich in E schneiden. OE ist nun die Seitenlänge des Quadrates. Trage mit Radius OE einen Halbkreis um A ab. Dieser schneidet den ursprünglichen Kreis in F und G. Diese beiden Punkte ergeben zusammen mit A und D das gesuchte Quadrat mit Umkreis O, grau unterlegte Fläche.

Beweis: Die Strecke AC entspricht einer Seite des gleichseitigen Dreiecks mit dem Umkreis O. Dann gilt für den Radius r und die Höhe h des Dreieckes $r = 2/3\ h$ → $h = 3/2\ r$

Seite AC des gleichseitigen Dreiecks $h = AC/2\ \sqrt{3}$ → $AC = \sqrt{3}\ r$

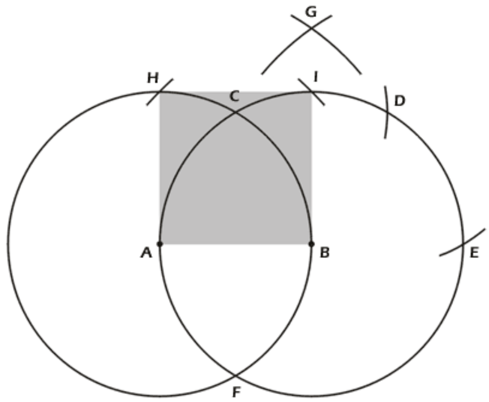
Seite OE $OE = \sqrt{2}\ r$

AOF ist ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge r. Dessen Diagonale AF, welche der Seite des gesuchten Quadrates AFDG entspricht, muss somit $\sqrt{2}\ r$ sein. Das bedeutet für die Diagonale d des Quadrates AFDG in Abhängigkeit von der Seite: $d = \sqrt{2}\ \sqrt{2}\ r = 2r$ Die Eckpunkte des Quadrates AFDG liegen auf dem Umkreis O.

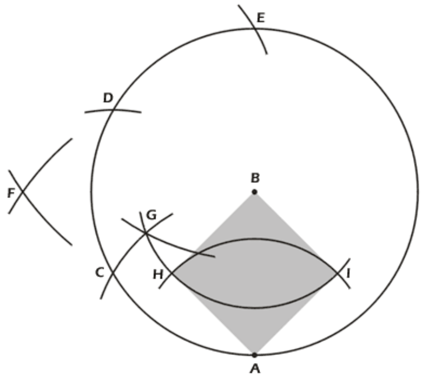
Konstruktion eines Quadrates

Zwei benachbarte Punkte sind gegeben

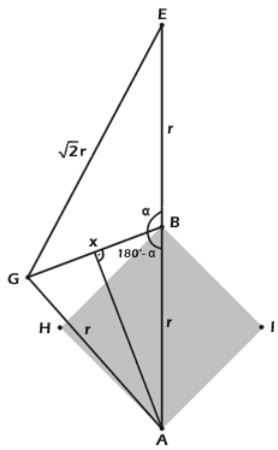
Gegeben seien die Punkte A und B. Konstruiere die zwei fehlenden Ecken des Quadrates mit Seitenlänge AB. Mache dazu je einen Kreis mit Radius AB um die Punkte A und B. Diese Kreisbögen schneiden sich in C und F. Trage dann von C aus mit Radius AB zwei weitere Bögen ab, die den Kreis in D und E schneiden.



Nimm nun CF in den Zirkel und trage von A und E aus je einen Bogen ab, woraus Schnittpunkt G hervorgeht. Danach machst du um A und B je einen Kreisbogen mit Radius BG, geschnitten mit den beiden anfänglichen Kreisen ergeben sich die Punkte H und I. Diese zwei Punkte sind die gesuchten Eckpunkte des zu konstruierenden Quadrates; grau unterlegt.
Beweis: Die Seite CF, die man benötigt um G zu erhalten, ist wiederum die Seite des gleichseitigen Dreiecks mit Umkreis B. Aus dem Beweis des vorangegangenen Beispiels (Napoleonisches Problem) folgt, dass $AG = \sqrt{3}\ r$ sein muss.
Mit Pythagoras berechnen wir die Diagonale des Quadrates ABIH mit Seitenlänge r: $AG^2 = BG^2 + AB^2 \rightarrow BG = \sqrt{2}\ r$.
Damit ist bewiesen, dass BG die Diagonale des Quadrates mit Seitenlänge r sein muss.

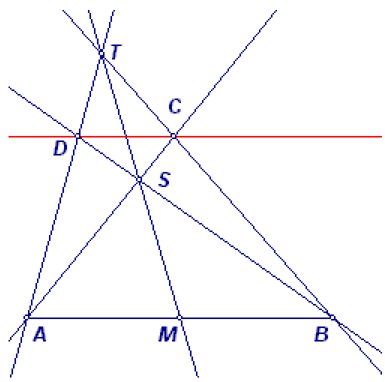


Zwei diagonal gegenüberliegende Punkte sind gegeben
Gegeben seien die Punkte A und B, welche die Diagonale eines gesuchten Quadrates bilden.
Mache als erstes einen Kreis mit Mittelpunkt B und Radius AB. Trage mit demselben Radius von A aus die Punkte C, D und E auf dem Kreis ab. Trage zudem zwei Kreisbögen mit Radius AD von A und E ab. Der Schnittpunkt dieser beiden Bögen ist Punkt F.
Der Kreis mit Radius BF und Mittelpunkt E schneidet den Kreis mit Radius AB und Mittelpunkt A in Punkt G. Als nächstes trägst du von B und A aus je einen Kreisbogen mit Radius BG ab. H und I sind die Schnittpunkte dieser beiden Kreise. A, I, B und H bilden die Eckpunkte des gesuchten Quadrates, welches grau unterlegt ist.



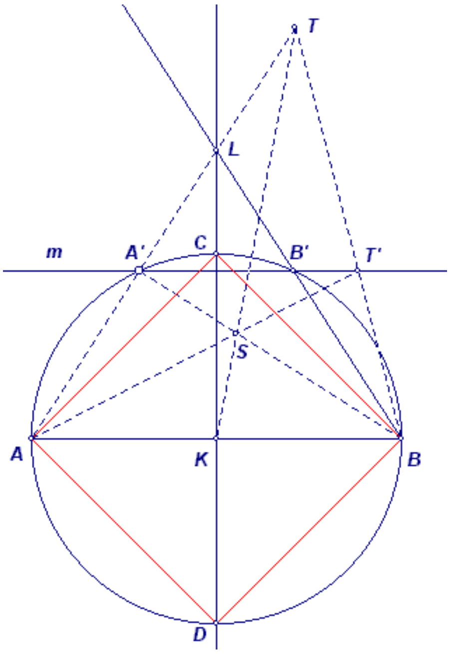
Beweis: Wie wir bereits bewiesen haben, muss die Strecke $EG = \sqrt{2}\ r$ sein, da sie gleich lang ist wie BF und wir dessen Länge schon zuvor mit dem gleichseitigen Dreieck bewiesen haben.
Die Strecke AB sei r und GB = x. Winkel GBE ist α, da die Punkte A, B und E auf einer Geraden liegen, ist Winkel GBA $(180° - \alpha)$. Mit dem Cosinussatz lässt sich für das Dreieck BEG folgende Gleichung aufstellen:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos \alpha) \rightarrow (\sqrt{2}\ r)^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos \alpha$ (I)
Das Dreieck AB(BG/2) ist rechtwinklig. Für den Winkel $(180° - \alpha)$ gilt also:
$\cos(180° - \alpha) = x / (2r) \rightarrow$
$-\cos \alpha = x/(2r)$ (II)
(II) in (I) einsetzen: $r^2 = 2x^2 \rightarrow x = r / \sqrt{2}$ und $d = \sqrt{2}\ (r/\sqrt{2}) = r$

Linealgeometrie, Steiner-Geometrie
Allein mit dem Lineal ist es ebenfalls möglich, alle geometrischen Konstruktionen, die mit Zirkel und Lineal ausführbar sind, durchzuführen. Deartige Konstruktionen wurden erstmals 1883 von Jakob Steiner angegeben.



Grundkonstruktion: Gegeben ist eine Strecke AB mit deren Mittelpunkt M. Durch einen außerhalb von AB gegebenen Punkt D soll eine Parallele zu AB gezogen werden.
Konstruktionsbeschreibung:
1. Zeichne die Geraden AD und BD
2. Wähle einen beliebigen Punkt T auf der Verlängerung von AD
3. Zeichne die Gerade MT
4. Der Schnittpunkt von BD mit TM sei S
5. Die Geraden AS und BT schneiden sich in einem Punkt C. Die Gerade CD ist dann parallel zu AB.

Aufgabe: Gegeben sei ein Kreis K mit dem Mittelpunkt K. Allein mit dem Lineal ist ein eingeschriebenes Quadrat zu konstruieren.
Konstruktionsbeschreibung:
1. Zeichne einen beliebigen Durchmesser AB des Kreises K durch den Punkt K
2. Mit der obigen Grundkonstruktion wird durch einen beliebigen Punkt A' auf dem Kreis K eine parallele Gerade m zum Durchmesser AB konstruiert
3. auf der Geraden AA' wird ein beliebiger Punkt T gewählt
4. die Punkte S und T' werden als Schnittpunkte von AB mit KT bzw. AS und TB ermittelt

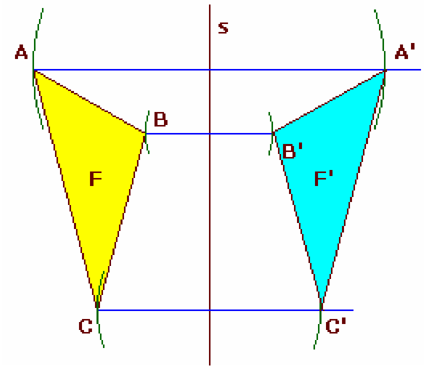


5. die Gerade m schneidet den Kreis in einem zweiten Punkt B'
6. A'ABB' ist dann ein gleichschnekliges Trapez. Deren verlängerten Seiten AA' und BB' schneiden sich in L
7. die Gerade LK schneidet den Kreis in zwei Punkten C und D
8. ADBC bilden dann das gesuchte eingeschriebene Quadrat

Spiegelung

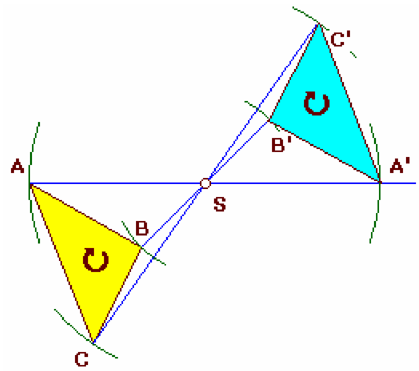
Geradenspiegelung

Bei der Spiegelung eines Punktes P an einer Geraden (Spiegelgerade) liegen der Punkt P und sein Bildpunkt P' auf einer Linie. Diese Linie steht senkrecht auf der Spiegelgeraden. Die Punkte P und P' haben den gleichen Abstand zur Spiegelgeraden. Verbindet man alle Bildpunkte entsteht zu einer Originalfigur eine deckungsgleiche Bildfigur.



Punkte auf der Spiegelgeraden, sogenannte Fixpunkte, bleiben erhalten. Der Orientierungssinn der Punkte einer Figur wird vertauscht.
In der Ebene ergeben sich für die Bildpunkte einer Geradenspiegelung:

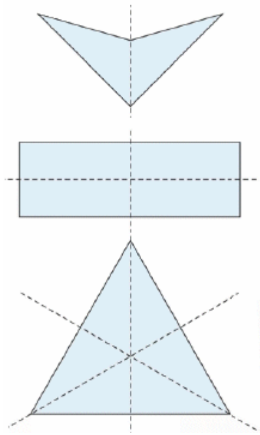
$x' = x \cos \phi + y \sin \phi$
$y' = x \sin \phi - y \cos \phi$
wobei $\phi/2$ der Winkel zwischen der Spiegelachse und x-Achse ist.
Existiert eine Gerade, so dass eine Figur bei der Spiegelung auf sich deckungsgleich zum Liegen kommt, so ist die Figur achsensymmetrisch.



Punktspiegelung

Bei der Spiegelung eines Punktes P an einem Spiegelpunkt S liegen der Punkt P und sein Bildpunkt P' auf einer Geraden. Diese Gerade geht dabei durch den Punkt P und den Spiegelpunkt S. Die Punkte P und P' haben den gleichen Abstand zum Spiegelpunkt.
Eine Punktspiegelung an einem Punkt S entspricht einer 180°-Drehung um diesen Punkt S. Der Orientierungssinn der Punkte einer Figur bleibt erhalten.
Existiert ein Punkt, so dass eine Figur bei der Spiegelung auf sich deckungsgleich zum Liegen kommt, so ist die Figur punkt- oder zentralsymmetrisch.

Achsensymmetrie



Eine Figur heisst achsensymmetrisch, wenn sie eine oder mehrere Symmetrieachsen (gestrichelte Linien) besitzt.
Anstelle des Begriffs Symmetrieachse wird auch der Ausdruck Spiegelachse genutzt.
Von oben nach unten sind Figuren abgebildet, die einfach achsensymmetrisch, zweifach achsensymmetrisch und dreifach achsensymmetrisch sind.
Rechtecke sind mindestens zweifach achsensymmetrisch, Quadrate vierfach achsensymmetrisch, Rhomben und Ellipsen zweifach achsensymmetrisch und gleichschenklige Dreiecke einfach achsensymmetrisch.
Kreise besitzen unendlich viele Symmetrieachsen.

Symmetrie bei mathematischen und anderen Gebilden

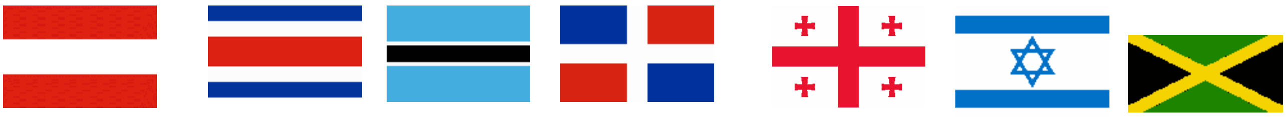
Zentral- und Achsensymmetrie findet man bei einer Vielzahl geometrischer Objekte.
In der Ebene bzw. im Raum sind zentralsymmetrisch: Quadrat, Rechteck, Rhombus, Parallelogramm, Zylinder, Kreis, Hyperbel, Ellipse, Astroide, Würfel, Quader, Oktaeder, Kugel, Ellipsoid und Hyperboloid.
Achsensymmetrisch sind zum Beispiel: gleichseitiges und gleichschenkliges Dreieck, Drachenviereck, gleichschenkliges Trapez, Parabel, Pyramide, Pyramidenstumpf, Kegel, Kegelstumpf, Kugelsektor und Kugelkappe, Paraboloid, ...
Untersucht man Funktionen, stellt man fest, dass sehr viele Funktionen symmetrische zum Koodinatenursprung sind (z.B. $y = x^3$, $y = \sin x$). Diese Funktionen werden ungerade genannt. Weitere Funktionen sind symmetrische zu y-Achse, gerade Funktionen. Beispiele sind hierfür $y = x^2$, $y = \cos x$, usw.
Auch die Buchstaben und Ziffern unseres Alphabets weisen zum Teil Symmetrie auf. Dabei ist aber von Bedeutung, wie der eine oder andere Buchstabe geschrieben wird.

Zentralsymmetrische Buchstaben und Ziffern: **H, I, N, O, S, X, Z, 0**
Achsensymmetrische Buchstaben und Ziffern: **A, C, D, E, M, T, U, V, W, Y, 3, 8**
Im griechischen und kyrillischen Alphabet findet man Ähnliches.
Zentralsymmetrische Buchstaben: Φ, Η, Ι, Ν, Ο, Θ, Σ, Ξ, Ζ
Achsensymmetrische Buchstaben: Α, Χ, Δ, Ε, Λ, Μ, Π, Τ, Υ, Ω, Ψ
Zentralsymmetrische Buchstaben: Ф, И, Н, О, Х,
Achsensymmetrische Buchstaben: А, С, Е, Ж, М, П, Э, З, Т, Ш, Ю

Symmetrie bei Flaggen der Welt

Zentralsymmetrische Flaggen haben bei einer rechteckigen, nicht quadratischen, Form vier Symmetrieabbildungen: Spiegelung an der waagerechten Mittellinie, senkrechten Mittellinie, Drehung um 0° bzw. 180°.
Bei Auswertung der Flaggen aller gegenwärtig souveränen Staaten (2006) zeigt sich, dass unsymmetrische Flaggen bevorzugt werden. Unter den symmetrischen wird eine Symmetrie zur senkrechten Mittellinie bevorzugt. Zentralsymmetrische Fahnen sind selten. Eine besondere Position nimmt die Nationalflagge der Schweiz ein. Da sie quadratisch ist, besitzt sie auch die Symmetrie bezüglich ihrer Diagonalen.

1. Zentralsymmetrische Flaggen



Österreich Costa Rica Botswana Dominikan.Rep. Georgien Israel Jamaica

Japan Laos Lettland Mazedonien Peru Schweiz Thailand

Großbritannien England Schottland Guernsey Rotes Kreuz

2. Flaggen symmetrisch zur waagerechten Mittellinie

Aserbaidschan Bahrain Schweden Guyana Belgien Frankreich Rumänien

Elfenbeinküste Katar Dänemark Finnland Guinea Island Irland

Italien Madagaskar Malediven Mali Nigeria Norwegen Palau

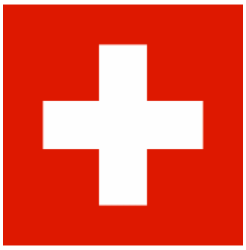
3. Flaggen symmetrisch zur senkrechten Mittellinie

Albanien Antigua Venezuela Barbados Burkina Faso Burundi Kambodscha

Kolumbien Kanada Estland Äthiopien Russland Nied.Antillen Syrien

Gambia Deutschland Ghana Somalia Ungarn Indien Polen

Kenia Vietnam Niederlande Malawi Mauretanien Mauritius Mikronesien



Schweizerfahne

Aus geometrischer Hinsicht ist die Schweizerfahne eine der symmetrischsten der Welt. Im Gegensatz zu den meisten anderen Nationalflaggen bildet die Fahne der Schweiz ein Quadrat.
Sie ist sowohl zentralsymmetrisch zum Quadratmittelpunkt, als auch symmetrisch zur waagerechten und senkrechten Mittellinie und den Diagonalen. Die Symmetriegruppe ist die dihedrale Gruppe D_4, also die Symmetriegruppe des Quadrates.

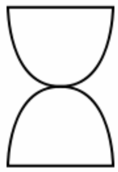
Die Schweizer Fahne zeigt ein aufrechtes, freistehendes weißes Kreuz auf rotem Grund. In der deutschsprachigen Schweiz hat sich das Wort Flagge zur Bezeichnung der Schweizer Nationalflagge nie eingebürgert, man spricht allgemein von der Schweizerfahne.

Für die Schweizerfahne gilt folgende Gestaltungsvorschrift: Das Kreuz in der Schweizerfahne muss so dargestellt werden, dass dessen unter sich gleiche Arme je einen Sechstel länger als breit sind.
Das Grössenverhältnis des Schweizerkreuzes zur Fahne ist bisher nicht festgelegt worden. Im Allgemeinen wird ein Verhältnis der Kreuzbalkenlänge zur gesamten Seitenlänge der Fahne von 20 : 32 empfohlen. Dies entspricht dem harmonischen Verhältnis des Goldenen Schnitts.
Hat die Schweizerfahne die Seitenlänge a wird damit
Balkenbreite $b = 3/16\ a$ Fläche des Kreuzes $A = 51/256\ a^2$

Gespiegelte Ziffern

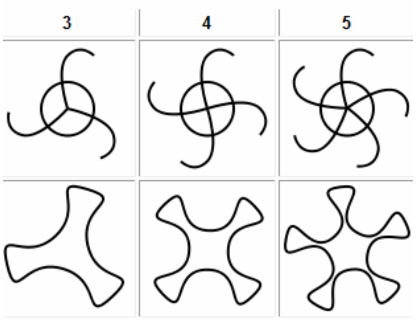
Spiegelt man die Ziffern 0 bis 8 an einer Senkrechten, so entstehen die links abgebildeten Muster.
Diese Muster als gespiegelte Ziffern zu erkennen, gelingt nicht jedem und ist insbesondere bei 3, 5 und 7 nicht sofort klar.

Drehsymmetrie, Rotationssymmetrie



Sind Punkt einer Figur bezüglich eines Zentrums gleich positioniert, so spricht man von Rotations- oder Drehsymmetrie.
Eine Figur mit Rotationssymmetrie wird nach einer Drehung um den Mittelpunkt mit einem konstanten Winkel wieder zur Deckung gebracht.

Unter dem Drehwinkel dieser symmetrischen Figur versteht man dabei den kleinsten Winkel, der bei der Rotation die Figur wieder erzeugt.
Zum Beispiel ist für die obere Figur der Drehwinkel 180°. Für die mittlere Figur ergeben sich 120° und für den unten abgebildeten Stern 72°.
Diese 72° ergeben sich dadurch, dass der Stern 5 äußere Eckpunkte besitzt und der Vollwinkel 360° beträgt. Fünf mal kann die Figur um ein Fünftel des Vollwinkels gedreht werden, d.h. 360°/5 = 72°.
Eine Drehsymmetrie hat die Ordnung n, wenn ihr Drehwinkel geraden 360°/n ist.



Zyklische Symmetrie

Außer der Punkt- und Geradensymmetrie existieren weitere Möglichkeiten für symmetrische Strukturen.
Zyklische Symmetrie liegt vor, wenn das Objekt durch Rotation um einen Punkt abgebildet wird. Eine zyklische Symmetrie der Ordnung n liegt vor, wenn das Objekt n mal angebildet wird, d.h. die Drehung um 360°/n erfolgt. Die zugeordnete Symmetriegruppe wird mit Z_n bezeichnet.
In der oberen Reihe der Abbildung sind Z_3 bis Z_5 zu sehen.

Dihedrale Symmetrie

Werden die rotationssymmetrischen Bilder zusätzlich an einer Geraden durch das Drehzentrum gespiegelt, liegt dihedrale Symmetrie vor (untere Reihe der Abbildung).
Für die Rotation der Ordnung n werden n Spiegelgeraden betrachtet. Die zugehörige Symmetriegruppe wird mit D_n bezeichnet,

Symmetrie in Malerei und Architektur

In der Malerei wird Symmetrie benutzt, um Bildern einen bestimmten Ausdruck zu verleihen.
Natürlich sind Gemälde nie vollkommen symmetrisch, aber bestimmte Details können durch eine symmetrische Anordnung hervorgehoben werden, da das menschliche Auge den Symmetrielinien unwillkürlich folgt.
In Raffaels "Sixtinischer Madonna" bilden die Köpfe der Personen u.a. ein symmetrisches Dreieck. Sowohl Vorhang als auch die Personen links und rechts der Madonna sind symmetrisch angeordnet.

Auch in der Architektur ist Symmetrie weit verbreitet.
Nachfolgend einige Beispiele:
Sixtinische Madonna"
Neue Orangerie, Potsdam, 1860
Villa Foscari, Malcontenta di Mari, 1563
Basilius-Kathedrale, Moskau, 1561

Da die Basilius-Kathedrale in Moskau nicht rechtwinklig zum Roten Platz steht, wirkt sie auf Fotos meist asymmetrisch, sogar etwas chaotisch. Vom Inneren betrachtet erkennt man hingegen eine starke Symmetrie.
Die Hauptkirche ist als Viereck gebaut, über dem sich ein Achteck erhebt, das sich nach oben hin verengt und von einer goldenen Kuppel gekrönt wird. Vier mittelgroße Kirchtürme rund um die Hauptkirche sind achteckig und weisen in vier Himmelsrichtungen. Die vier kleinen Türme sind viereckig und liegen diagonal dazwischen, so dass der Bau einen achtstrahligen Sterngrundriss aufweist.

Symmetrie in der Natur

Symmetrie ist eines der Grundprinzipien der Natur.
Praktisch alle Lebewesen besitzen mindestens eine Symmetrieachse. Besonders schöne Symmetrie beobachtet man zum Beispiel bei Schmetterlingen oder Blütenpflanzen.
Oftmals sind die Symmetrien nicht perfekt. Jedoch gerade dies macht die Strukturen interessant. So erscheint etwa ein völlig symmetrisches Gesicht eher langweilig.
Aber auch Vorgänge in der unbelebten Natur verlaufen symmetrisch, zum Beispiel das Fallen eines Wassertropfens.
Eine besonders schöne Symmetrie haben Mikroorganismen ausgeprägt.
Berühmt sind die künstlerisch wertvollen Darstellungen aus "Kunstformen der Natur" von Ernst Haeckel.
Symmetrie des Schwalbenschwanzes

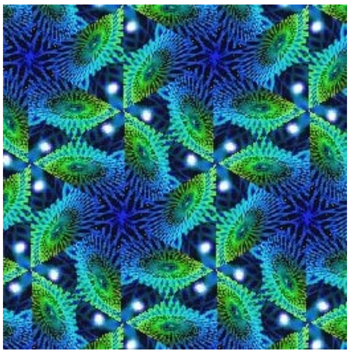
Ambigramm

Als Ambigramm (latein ambo = beide; griechisch gramma = Schrift) bezeichnet man ein symmetrisches Symbol oder einen Schriftzug, welcher jeweils um einen bestimmten Winkel, meist 180°, gedreht wiederum das gleiche Symbol oder den gleichen Schriftzug ergibt.

Ein Ambigramm kann, muss aber nicht ein Palindrom sein. Es gibt grafisch angepasste Ambigramme oder echte Schriftambigramme. Mit einer grafischen Änderung der Schriftart lässt sich fast aus jedem Wort ein Ambigramm formen.
Es gibt aber auch Ambigramme bei der eine grafische Anpassung der Schriftart nicht erforderlich ist. Beispiele hierzu sind Wörter wie opodo, pod, nuonu, NOON oder WM.
Um einen echten Ambigramm-Ausdruck nutzen zu können, ist meist auf Groß- und Kleinschreibung sowie geeignete Schriftarten zu achten. Geeignete Buchstaben sind: b, d, l, m, n, o, p, q, s, u, w, x, y, z, H, I, N, M, O, P, S, U, W, X, Y und Z.
Der Begriff Ambigramm wurde zuerst 1985 von Douglas Hofstadter gebraucht. Ambigramme besitzen eine hohe Werbewirkung, da Produkte von unterschiedlichen Seiten gleich gelesen werden können. Ambigramme spielen auch eine große Rolle im Roman "Illuminati" von Dan Brown. Auch viele Logos sind als Ambigramme gestaltet z.B. das Logo der Firma SUN.

Drehbare Zahlen

Ambigramme können auch mit Ziffernfolgen erzeugt werden.
Als Ziffern eignen sich 0, 1, 8, 6 und 9, während für die Ziffern 2, 3, 4, 5 und 7 keine um 180° gedrehten Entsprechungen existieren.
Zahlen die bei einer Drehung ihres Schriftbildes um 180° wieder "sich selbst" ergeben, werden drehbare Zahlen genannt.
Beispiele für drehbare Zahlen sind 0, 1, 8, 11, 69, 96, 101, 111, 181, 609, 619, 689, 808, 818, 888, 906, 916, 986, 1001 usw.



Kaleidoskop

Ein Kaleidoskop ist ein optisches Gerät, das unter Ausnutzung von Lichtreflexion symmetrische Abbildungen erzeugt. Es wird oft als Spielzeug verwendet.
Kaleidoskop bedeutet "schöne Formen sehen" und ergibt sich aus den griechischen Wörtern καλος = schön, ειδοϖ = Form und σκοπεω = sehen.
Obwohl das Kaleidoskop schon im antiken Griechenland verbreitet war, wurde es erst 1816 vom schottischen Physiker David Brewster wiederentdeckt und als Patent angemeldet. Bei der Untersuchung doppelbrechender Kristalle war Brewster zufällig auf das Kaleidoskop gestoßen.
Im Allgemeinen ist ein Kaleidoskop ein etwa 15 cm langer Zylinder. An einem Ende befinden sich zwischen zwei Glasplatten bewegliche kleine, farbige Objekte.
Das andere Ende des Kaleidoskops hat eine Öffnung zum Durchsehen. Im Rohr selbst sind längs drei oder vier Spiegel angebracht, die sich an ihren Längskanten berühren. Darin spiegeln sich die Gegenstände mehrfach, so dass ein symmetrisches farbiges Muster sichtbar wird, das sich beim Drehen ändert.

In der Mathematik werden auch Kaleidoskopbilder betrachtet, die durch Aneinanderreihung von regelmäßigen Dreiecken oder Quadraten die Ebene parkettieren. Die Parkettkacheln gehen dabei durch Rotation, Achsenspiegelung oder Translation auseinander hervor.
Im Ergebnis erhält man symmetrische Muster.