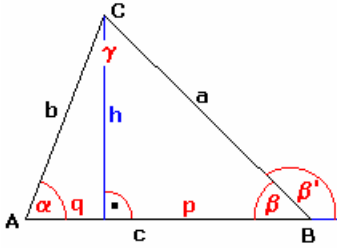


## Dreieck



Ein Dreieck wird von drei Geraden, die nicht parallel zueinander liegen, gebildet. Es ist durch seine drei Eckpunkte definiert, die gleichzeitig die Schnittpunkte dieser drei Geraden sind, und durch drei die Eckpunkte geradlinig verbindende Seiten 'aufgespannt'.

In der Geometrie werden die Eckpunkte des Dreiecks in der Regel mit A, B und C bezeichnet. Die Seite, die einer Ecke gegenüberliegt, wird analog a, b bzw. c genannt. Damit liegt z.B. die Seite a dem Eckpunkt A gegenüber, verbindet also die Punkte B und C.

Die Winkel werden im deutschsprachigen Raum  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  genannt;  $\alpha$  ist der Winkel am Eckpunkt A, usw. Im englischsprachigen Raum und verstärkt auch in anderen Ländern (u.a. Frankreich, Russland, ...) werden die Innenwinkel mit den Großbuchstaben A, B und C gekennzeichnet. Da die Punkte selbst in Berechnungsgleichungen nicht auftreten, ist keine Verwechslung möglich.

In modernen griechischen Mathematiklehrbüchern werden die Eckpunkte mit großen griechischen Buchstaben gekennzeichnet, Winkel mit großen Buchstaben und einem zusätzlichen "^".

Inkreis ... Kreis, welcher die Dreiecksseiten von innen berührt, Umkreis ... Kreis, welcher durch die drei Eckpunkte des Dreiecks verläuft, Inkreisradius  $\rho$ , Umkreisradius R, Ankreisradien ...  $\rho_a, \rho_b, \rho_c$   
Durch zyklisches Vertauschen der Winkel und Seiten erhält man weitere Beziehungen.

Inkreisradius  $\rho$ , Umkreisradius R, Ankreisradien ...  $\rho_a, \rho_b, \rho_c$

Englisch	triangle	Holländisch	driehoek, triangel	Französisch	triangle
Latein	triangulum	Russisch	треугольник	Spanisch	triángulo
Italienisch	triangolo	Dänisch	trekant	Griechisch	τριγωνο
Esperanto	triangulo	Polnisch	trójkąt	Schwedisch	trehörning, trekant
Slowenisch	trikotnik	Tschechisch	trojúhelník	Finnisch	kolmio
Portugiesisch	triângulo	Ungarisch	háromszög	Vietnamesisch	hình tam giác, tam giác

### Flächeninhalt

$$A = c \cdot h/2 = 1/2 a \cdot b \cdot \sin \gamma = 1/4 \cdot a \cdot b \cdot c/R = 2 R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

$$A = a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma / (2 \cdot \sin \alpha) = \sqrt{(\rho \rho_a \rho_b \rho_c)} = \rho_a (s - a)$$

$$A = s^2 \tan \alpha/2 \tan \beta/2 \tan \gamma/2 = \rho^2 \cot \alpha/2 \cot \beta/2 \cot \gamma/2$$

$$A = c^2 / (2 (\cot \alpha + \cot \beta))$$

### Heronische Dreiecksformel

nach Heron von Alexandria (Metrica, I-8), aber schon Archimedes bekannt

$$A = \rho \cdot s = \sqrt{(s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c))}$$

$$A = 1/4 \sqrt{(4 a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2)}$$

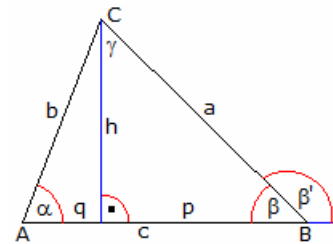
### Umfang

$$u = a + b + c = 8R \cos \alpha/2 \cdot \cos \beta/2 \cdot \cos \gamma/2$$

$$s = u/2 = 4R \cos \alpha/2 \cdot \cos \beta/2 \cdot \cos \gamma/2$$

### Beziehungen am Dreieck

Sind a, b, c die Dreiecksseiten, h die Höhe auf a, A der Flächeninhalt und  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Innenwinkel, so gilt:



### Flächeninhalt

geg.: a, h  $A = a \cdot h/2$

geg.: a, b, c  $A = 1/4 \sqrt{(4 a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2)}$

geg.: a, b, c  $A = \sqrt{((a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c))}$ ; Heron-Formel

geg.: a, b,  $\gamma$   $A = 1/2 a \cdot b \cdot \sin \gamma$

geg.: a,  $\alpha$ ,  $\beta$   $A = a^2/2 \sin \beta \sin (\alpha+\beta) / \sin \alpha$

geg.: a, b,  $\alpha$   $A = b/2 \sin \alpha \sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2 \alpha + b \cos \alpha)}$

geg.: a,  $\beta$ ,  $\gamma$   $A = a^2/2 \sin \beta \sin \gamma / \sin (\beta+\gamma) = a^2/2 1/(\cot \beta + \cot \gamma)$

geg.: h,  $\beta$ ,  $\gamma$   $A = h^2/2 \sin (\beta+\gamma) / (\sin \beta \sin \gamma) = h^2/2 (\cot \beta + \cot \gamma)$

### Dreiecksseite a

geg.: A, b, c  $a = \sqrt{(b^2 + c^2 + \sqrt{(4b^2c^2 - 16 A^2)})}$

geg.: A,  $\alpha$ ,  $\beta$   $a = \sqrt{(2A \sin \alpha / (\sin \beta \sin (\alpha+\beta)))}$

geg.: A,  $\beta$ ,  $\gamma$   $a = \sqrt{(2A (\cot \beta + \cot \gamma))}$

geg.: c,  $\alpha$ ,  $\beta$   $a = c \sin \alpha / \sin (\alpha+\beta) = c / (\cos \beta + \sin \beta \cot \alpha)$

geg.: c,  $\alpha$ ,  $\gamma$   $a = c \sin \alpha / \sin \gamma$

geg.: c,  $\beta$ ,  $\gamma$   $a = c \cos \beta + c \sin \beta \cot \gamma$

geg.: b, c,  $\alpha$   $a = \sqrt{(c^2 + b^2 - 2 bc \cos \alpha)}$

geg.:  $b, c, \beta$   $a = c \cos \beta + \sqrt{(b^2 - c^2 \sin^2 \beta)}$

**Dreieckshöhe h**

geg.:  $a, b, c$   $h = 1/(2a) \sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$

geg.:  $b, c, \alpha$   $h = bc \sin \alpha / \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha)}$

geg.:  $a, \alpha, \beta$   $h = a \sin \beta \sin (\alpha + \beta) / \sin \alpha$

geg.:  $a, \beta, \gamma$   $h = a \sin \beta \sin \gamma / \sin (\beta + \gamma)$

**Winkel**

geg.:  $a, b, c$   $\cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc)$

$\sin \alpha/2 = 1/2 \sqrt{((a+b-c)(a+c-b) / (bc))}$

$\cos \alpha/2 = 1/2 \sqrt{((a+b+c)(b+c-a) / (bc))}$

$\tan \alpha/2 = \sqrt{((a+c-b)(a+b-c) / ((a+b+c)(b+c-a))}$

$\sin \alpha = 1/(2bc) \sqrt{((a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c))}$

$\sin \alpha = a \sin \beta / \sqrt{(c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta)}$

für  $\beta + \gamma > 90^\circ$   $\sin \alpha = \sin (\beta + \gamma) = \sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta$

Die Berechnung von  $\beta$  und  $\gamma$  erfolgt analog durch Tauschen der entsprechenden Seiten. Weiterhin gilt für  $a > c$ :

$\tan \alpha = a \sin \beta / (c - a \cos \beta)$

$\tan \beta = c \sin \beta / (a - c \cos \beta)$

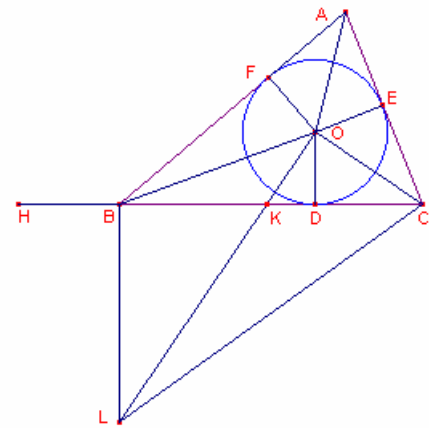
$\sin \gamma = c/a \sin \alpha$

$\sin \beta = (c \sin^2 \alpha - \cos \alpha \sqrt{(a^2 - c^2 \sin^2 \alpha)}) / a$

**Beweis der Heronischen Dreiecksformel**

Heron von Alexandria, "Metrica" I-8:

Anmerkung: Die Schreibweise  $V(PQR)$  bedeutet den Flächeninhalt des Dreiecks PQR



Gegeben sei ein Dreieck ABC, dessen Inkreis um O, der die Dreiecksseiten in D, E, F berührt. Dann ist  $BC * OD = 2 V(BOC)$ ;  $CA * OE = 2 V(COA)$ ;  $AB * OF = 2 V(AOB)$   
 Dann ist  $p * OD = 2 V(ABC)$ , wenn p der Dreiecksumfang ist.  
 Man verlängert CB nach H, so dass  $BH = AF$ . Dann wird  $AE = AF$ ,  $BF = BD$  und  $CE = CD$ ,  $CH = 1/2p = s$  und somit  $CH * OD = V(ABC)$ ;  $r * s = V(ABC)$ , wobei r der Inkreisradius ist.

OL wird senkrecht zu OC und BL senkrecht zu BC gezeichnet. Dann ist COBL ein Sehnviereck des Thales-Kreises über CL und somit

$\angle COB + \angle CLB = 180^\circ$ ;  $\angle COB + \angle AOF = 180^\circ$

und OA, OB, OC sind Winkelhalbierende der Winkel um O.

Folglich  $\angle AOF = \angle CLB$ . Die rechtwinkligen Dreiecke AOF und CLB sind damit ähnlich, d.h.

$BC : BL = FA : FO = BH : OD$

$BC : BH = BL : OD = BK : DK$ ;  $OD \parallel BL$

$(BC + BH) : BH = (BK + DK) : DK$

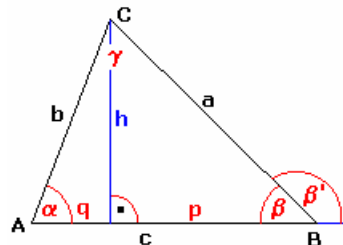
$CH : BH = BD : DK$

$CH^2 : (CH * BH) = (CD * BD) : (CD * DK)$

Da  $CD * DK = r^2$ , Dreieck ODC rechtwinklig ist und  $CH = s$ , wird  $r^2 s^2 = CH * BH * BD * CD$

Mit  $V(ABC) = r * s$  erhält man abschließend  $V^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

$V(ABC) = \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$



**Dreiecksarten:**

- spitzwinklig alle Innenwinkel sind kleiner als  $90^\circ$
- rechtwinklig ein Innenwinkel ist gleich  $90^\circ$
- stumpfwinklig ein Innenwinkel ist größer als  $90^\circ$
- schiefwinklig kein rechter Winkel und keine 2 Seiten sind gleich lang

unregelmäßig alle Seiten sind unterschiedlich lang  
 gleichschenkelig zwei Seiten sind gleich lang

gleichseitig alle Seiten sind gleich lang

Innenwinkelsumme  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Die Summe der Innenwinkel beträgt in jedem Dreieck  $180^\circ$ .

Außenwinkelsatz  $\beta' = \alpha + \gamma$

Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.

Dreiecksungleichung (zyklisch vertauschen!)  $a + b > c \wedge a - b < c$   $|a - b| < c$

Der kleinsten Seite liegt der kleinste Winkel gegenüber  $a < b \Rightarrow \alpha < \beta$

**Sinussatz (Satz von Snellius)**

$a / \sin \alpha = b / \sin \beta = c / \sin \gamma = 2 R$

**Kosinussatz (Satz von al-Kashi)**

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a * b * \cos \gamma$

**Tangensatz (Satz von Regiomontanus)**

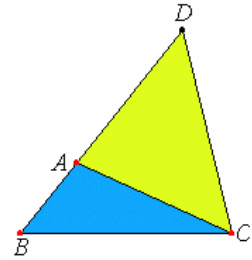
$$\tan[(\alpha-\beta)/2] = [(a-b) / (a+b)] * \tan[(\alpha+\beta)/2]$$

**Beweis der Dreiecksungleichung**

Euklids "Elemente": § 20 (L. 13): **In jedem Dreieck sind zwei Seiten, beliebig zusammengenommen, größer als die letzte.**

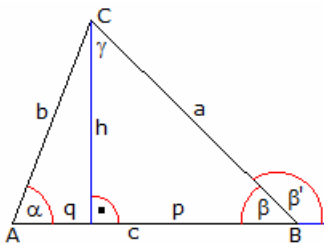
Das Dreieck sei ABC. Ich behaupte, dass in einem Dreieck ABC zwei Seiten, beliebig zusammengenommen, größer sind als die letzte:  $BA + AC > BC$ ,  $AB + BC > AC$  und  $BC + CA > AB$ .

Man verlängere BA nach Punkt D, mache  $AD = CA$  und ziehe DC. Da  $DA = AC$ , ist auch  $\angle ADC = \angle ACD$  (I, 5); also  $\angle BCD > \angle ADC$  (Ax. 8); und da DBC ein Dreieck ist mit  $\angle BCD > \angle BDC$ , dem größeren Winkel aber die größere Seite gegenüberliegt (I, 19), so ist  $DB > BC$ . Aber  $DA = AC$ ; also sind  $BA + AC > BC$ . Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch  $AB + BC > CA$  und  $BC + CA > AB$ .



**Herleitung der Dreiecksungleichung**

Die Dreiecksungleichungen können aus dem Kosinussatz hergeleitet werden. Die Stücke des Dreiecks seien wie üblich bezeichnet. Es gilt nach Definition des Kosinus für beliebiges  $\gamma$ :



$$-1 \leq \cos \gamma \leq 1 \quad \text{also} \quad 0 \leq 1 + \cos \gamma$$

Nach Multiplikation mit  $2ab$

$$(1) \quad 0 \leq 2ab(1 + \cos \gamma) = 2ab + 2ab \cos \gamma$$

Der Kosinussatz ergibt sich mit

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Wird die Gleichung zur Ungleichung (1) addiert, erhält man

$$c^2 \leq a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma + 2ab + 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 + 2ab$$

Nach Anwendung der entsprechenden binomischen Formel

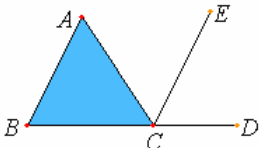
$$(2) \quad c^2 \leq (a + b)^2$$

und nach dem Wurzelziehen ergibt sich die Behauptung. Für die anderen Seiten kann man analog rechnen. Die Gleichheit kann in (2) nur dann auftreten, wenn  $\gamma = 180^\circ$  gilt, ein Fall, der in einem Dreieck aber nicht vorkommen kann.

**Beweis des Innen- und Außenwinkelsatzes**

Euklids "Elemente": § 32 (L. 22): **An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln zusammen gleich, und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zusammen zwei Rechten gleich.**

Das Dreieck sei ABC. Man verlängere seine eine Seite BC nach D; ich behaupte, dass der Außenwinkel ACD den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln  $CAB + ABC$  gleich ist und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks  $ABC + BCA + CAB = 2R$ .



Durch Punkt C ziehe man  $CE \parallel$  zur geraden Linie AB (I, 31).

Da  $AB \parallel CE$  und sie von AC geschnitten werden, sind die Wechselwinkel  $BAC = ACE$  (I, 29). Ebenso ist, da  $AB \parallel CE$  und sie von der geraden Linie BD geschnitten werden, der äußere Winkel  $ECD$  dem innen gegenüberliegenden  $ABC$  gleich (I, 29).

Wie oben bewiesen, ist auch  $ACE = BAC$ ; also ist der ganze Winkel  $ACD$  den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln  $BAC + ABC$  gleich (Ax. 2). Man füge  $ACB$  beiderseits hinzu; dann sind  $ACD + ACB = ABC + BCA + CAB$ . Aber  $ACD + ACB = 2R$ . (I, 13); also sind auch  $ACB + CBA + CAB = 2R$ .

**Herleitung des Kosinussatzes**

Für den Nachweis des Satzes von a-Kashi (Kosinussatz) werde  $\gamma < 90^\circ$  vorausgesetzt. Im Fall  $\gamma = 90^\circ$  folgt der Satz aus dem Satz des Pythagoras, für  $\gamma > 90^\circ$  muss der Beweis geringfügig verändert werden.

In verschiedenen Teildreiecken wird nach dem Satz des Pythagoras

$$h^2 = b^2 - e^2$$

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2ae + e^2$$

Für das linke Teildreieck wird  $c^2 = h^2 + d^2$

Durch Addition der beiden ersten Gleichungen wird

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2ae + e^2 = a^2 + b^2 - 2ae$$

Da außerdem  $\cos \gamma = e/b$  (Ankathete / Hypotenuse)

gilt, wird  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

**Spezieller Kosinussatz**

Bezieht man den Kosinussatz eines allgemeinen Dreiecks auf Dreiecke mit besonderen Innenwinkeln, so ergeben sich spezielle Kosinussätze.

**60°-Dreieck (obere Abbildung)**

Im gleichseitigen Dreieck mit der Seite  $b$  gilt  $h^2 = 3/4 b^2$ . Im rechtwinkligen Dreieck wird somit

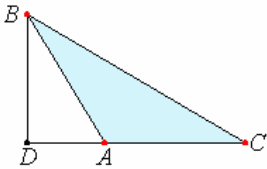
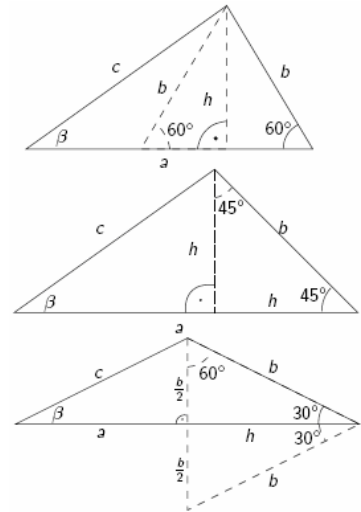
$$c^2 = h^2 + (a-b/2)^2 = a^2 + b^2 - ab$$

**45°-Dreieck (mittlere Abbildung)**

Im gleichschenkligen Dreieck mit den Schenkeln h gilt  $h^2 = 1/2 b^2$ . Im rechtwinkligen Dreieck wird somit  $c^2 = h^2 + (a-h)^2 = a^2 + b^2 - ab \sqrt{2}$

**30°-Dreieck (untere Abbildung)**

Im gleichseitigen Dreieck mit der Seite b gilt  $h^2 = 3/4 b^2$ . Im rechtwinkligen Dreieck wird somit  $c^2 = (b/2)^2 + (a-h)^2 = a^2 + b^2 - ab \sqrt{3}$

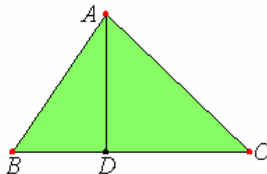


**Kosinussatz bei Euklid**

Im 2. Buch der "Elemente" von Euklid finden sich erste Ansätze des Kosinussatzes am Dreieck, allerdings ohne die Erwähnung des Kosinus, da dieser Begriff erst Jahrhunderte später von arabischen Mathematikern geschaffen wurde. Euklids "Elemente" Buch 2: § 12 (L. 11):

An jedem stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite größer als die Quadrate über den den stumpfen Winkel umfassenden Seite zusammen um zweimal das Rechteck aus einer der Seiten um den stumpfen Winkel, nämlich der, auf die das Lot fällt, und der durch das Lot außen abgeschnittenen Strecke an der stumpfen Ecke.

ABC sei ein stumpfwinkliges Dreieck mit dem stumpfen Winkel BAC; und vom Punkte B sei auf die Verlängerung von CA das Lot BD gefällt. Ich behaupte, dass  $BC^2$  um  $2 CA \cdot AD$  größer ist als  $BA^2 + AC^2$ . Da die Strecke CD im Punkte A beliebig geteilt ist, so ist  $DC^2 = CA^2 + AD^2 + 2 CA \cdot AD$  (II, 4). Man füge  $DB^2$  beiderseits hinzu; dann sind  $CD^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2 CA \cdot AD$ . Aber  $CD^2 + DB^2 = CB^2$ ; denn der Winkel bei D ist ein Rechter (I, 47); und  $AD^2 + DB^2 = AB^2$  (I, 47); also ist  $CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2 CA \cdot AD$ . Folglich ist  $CB^2$  um  $2 CA \cdot AD$  größer als  $CA^2 + AB^2$  - S. Gezeigt wird  $BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2 CA \cdot AD$ , d.h. nach moderner Schreibweise  $a^2 = b^2 + c^2 + 2b(-c \cos \alpha)$



Euklids "Elemente" Buch 2: § 13 (L. 12):

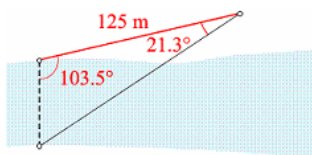
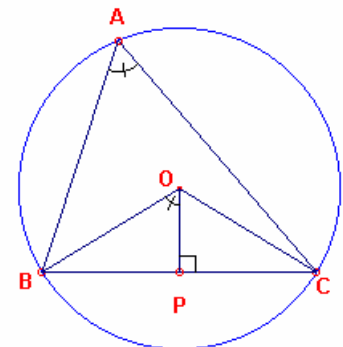
An jedem spitzwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der einem spitzen Winkel gegenüberliegenden Seite kleiner als die Quadrate über den diesen spitzen Winkel umfassenden Seiten zusammen um zweimal das Rechteck aus einer der Seiten um diesen spitzen Winkel, nämlich der, auf die das Lot fällt, und der durch das Lot innen abgeschnittenen Strecke an dieser spitzen Ecke.

ABC sei ein spitzwinkliges Dreieck mit einem spitzen Winkel bei B; und vom Punkte A sei auf BC das Lot AD gefällt. Ich behaupte, dass  $AC^2$  um  $2 CB \cdot BD$  kleiner ist als  $CB^2 + BA^2$ . Da die Strecke CB in D beliebig geteilt ist, so sind  $CB^2 + BD^2 = 2 CB \cdot BD + DC^2$  (II, 7). Man füge  $DA^2$  beiderseits hinzu; dann sind  $CB^2 + BD^2 + DA^2 = 2 CB \cdot BD + AD^2 + DC^2$ . Aber  $BD^2 + DA^2 = AB^2$ ; denn der Winkel bei D ist ein Rechter (I, 47); und  $AD^2 + DC^2 = AC^2$  (I, 47); also sind  $CB^2 + BA^2 = AC^2 + 2 CB \cdot BD$ . Folglich ist  $AC^2$  allein um  $2 CB \cdot BD$  kleiner als  $CB^2 + BA^2$  - S. Gezeigt wird  $AC^2 = CB^2 + BA^2 - 2 CB \cdot BD$ , d.h. nach moderner Schreibweise  $b^2 = a^2 + c^2 - 2a(c \cos \beta)$

**Sinussatz, Beweis**

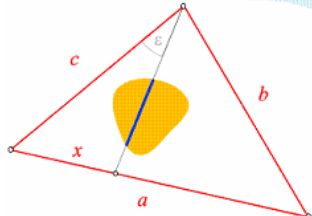
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt O und dem Umkreisradius R. Dann gilt:  $a / \sin \alpha = b / \sin \beta = c / \sin \gamma = 2R$

Beweis: In der Darstellung sei  $OB = R$ . Der Winkel  $\angle BOP$  ist dann als halber Zentriwinkel gleich dem Innenwinkel  $\alpha$ . Im rechtwinkligen Dreieck BOP gilt dann  $\sin(\angle BOP) = BP / R = (BP+PC) / 2R = a / 2R = \sin \alpha$ . Umstellen ergibt  $a / \sin \alpha = 2R$



Für die anderen Seiten b und c und deren gegenüberliegenden Innenwinkel gilt der Nachweis analog. Als Folgerung gilt für jedes Dreieck mit einem Umkreisradius R = 1/2:

$a = \sin \alpha \quad b = \sin \beta \quad c = \sin \gamma$



**Beispielaufgaben zum Sinussatz**

Aufgabe 1: Die in der oben abgebildeten Skizze eingezeichnete Breite eines Gewässers soll bestimmt werden.

Lösung: Gegeben sind  $a = 125 \text{ m}$ ,  $\beta = 21,3^\circ$  und  $\gamma = 103,5^\circ$ . Gesucht ist x. Der dritte Winkel  $\alpha$  ergibt sich über die Winkelsumme im Dreieck zu  $\alpha = 180^\circ$

-  $21,3^\circ - 103,5^\circ = 55,2^\circ$ .  $x$  kann nun mit Hilfe des Sinussatzes bestimmt werden:

$$x / \sin \beta = a / \sin \alpha, \text{ d.h. } x = 55,3 \text{ m.}$$

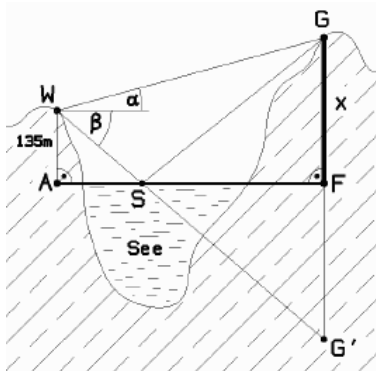
Die gesuchte Breite des Flusses ist 55.3m.

Aufgabe 2: Durch einen Berg soll ein Stollen getrieben werden. Der Berg und die Wetterlage verhindern Winkelmessungen, so dass die Lage des Stollens durch die untere Skizze, die nur Längenangaben enthält, festgelegt werden muss. Dabei sind  $a = 985 \text{ m}$ ,  $b = 786 \text{ m}$ ,  $c = 734 \text{ m}$  und  $x = 352 \text{ m}$ . Wie groß ist der Winkel  $\varepsilon$ ?

Lösung: Im hellblauen Dreieck sei  $\alpha$  der einzige Winkel, der direkt berechnet werden kann. Mit Hilfe des Kosinussatzes wird aus den Längen  $a$ ,  $b$  und  $c$ :  $\cos \alpha = (a^2 + c^2 - b^2)/(2ac) = 0,6163$ , daher  $\alpha = 51,95^\circ$ .

Die Länge der Strecke, auf der der Stollen liegt, sei  $y$ . Mit  $\alpha$  kann  $y$  mit Hilfe des Kosinussatzes aus  $c$ ,  $x$  und  $\alpha$  berechnet werden:  $y^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cos \alpha$ , d.h.  $y = 586,67 \text{ m}$

Der gesuchte Winkel  $\varepsilon$  ergibt sich aus dem Sinussatz und  $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$ .  $\varepsilon = 28,20^\circ$



### Beispielaufgaben zum Sinussatz (2)

Aufgabe 3:

Ein Wanderer W, der  $h = 135 \text{ m}$  über einem Bergsee steht, sieht den Gipfel G des Berges unter dem Erhebungswinkel  $\alpha = 34^\circ$  und das Spiegelbild G' des Berggipfels im See unter dem Tiefenwinkel  $\beta = 46^\circ$ . Wie groß ist die Gipfelhöhe  $FG = x$  über dem See.

Lösung:

Auf Grund des Reflexionsgesetzes gilt  $\angle ASW = \angle FSG = \beta = 46^\circ$  und  $\angle WSG = 180^\circ - 2\beta = 88^\circ$  sowie  $\angle SGW = 12^\circ = \beta - \alpha$ .

Die Strecke WS ergibt sich dann im rechtwinkligen Dreieck ASW zu  $\sin \beta = 135 \text{ m} / WS \dots WS = 135 \text{ m} / \sin \beta$

Mittels Sinussatz wird

$$WS / \sin 12^\circ = SG / \sin (\alpha + \beta) \quad SG = \sin (\alpha + \beta) / \sin 12^\circ \cdot WS$$

Analog wird im rechtwinkligen Dreieck SFG

$$\sin \beta = x / SG \dots x = SG \sin \beta \quad x = \sin (\alpha + \beta) \sin \beta / \sin 12^\circ \cdot 135 \text{ m} / \sin \beta$$

$$x = \sin (\alpha + \beta) / \sin (\beta - \alpha) \cdot h$$

Einsetzen der Werte ergibt  $x = 639,45 \text{ m}$

Der Gipfel befindet sich 639,45 m über dem Bergsee.

### Sätze am Dreieck

#### Verallgemeinerter Höhensatz (p,q Abschnitte auf c)

$$h^2 = p \cdot q + a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Verallgemeinerter Satz des Pythagoras

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bp, \text{ für } \alpha > 90^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bp, \text{ für } \alpha < 90^\circ$$

Verhältnis Höhen-Seiten ( $h_a, h_b$  Höhen auf  $a, b$ )

$$h_a / h_b = b / a$$

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta$$

Projektionssatz

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$$

Inkreisradius

$$\rho = \sqrt{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) / s}$$

$$\rho = 4R \cdot \sin \alpha/2 \cdot \sin \beta/2 \cdot \sin \gamma/2$$

$$\rho = (s - a) \tan \alpha/2 = s \tan \alpha/2 \tan \beta/2 \tan \gamma/2$$

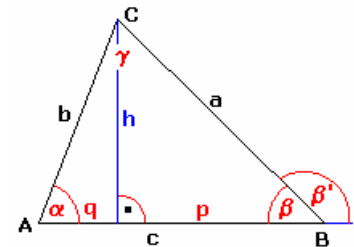
Inkreismittelpunkt ... Mittelpunkt des Inkreises

Umkreisradius  $R = 1/4 \cdot abc/A = 1/2 \cdot a/\sin \alpha$

Umkreismittelpunkt ... Mittelpunkt des Umkreises

Abstand Inkreis- zum Umkreismittelpunkt  $x = \sqrt{R^2 - 2\rho R}$

Der Umkreismittelpunkt liegt bei einem spitzwinkligen Dreieck innerhalb des Dreiecks, bei einem rechtwinkligen Dreieck auf der Hypotenuse und bei einem stumpfwinkligen Dreieck außerhalb des Dreiecks.



### Projektionssatz

In einem beliebigen Dreieck gilt:  $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ ;  $b = c \cos \alpha + a \cos \beta$ ;  $a = c \cos \beta + b \cos \alpha$

Beweis:

Es genügt eine Beziehung nachzuweisen, da die anderen sich durch zyklisches Vertauschen der Seiten und Winkel ergeben. In das Dreieck ABC wird die Höhe von C auf die Seite c eingezeichnet. Dann gilt

$$\angle DCA = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle BCD = 90^\circ - \beta$$

Nach der Definition des Sinus wird

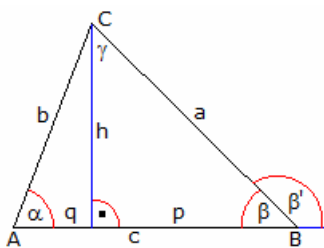
$$\sin (90^\circ - \alpha) = q/b \text{ und } \sin (90^\circ - \beta) = p/a$$

Da  $\sin (90^\circ - \phi) = \cos \phi$  gilt, erhält man  $\cos \alpha = q/b$  und  $\cos \beta = p/a$

umgestellt  $p = a \cos \beta$  und  $q = b \cos \alpha$

Bildet man die Summe ergibt sich die Behauptung

$$p + q = c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

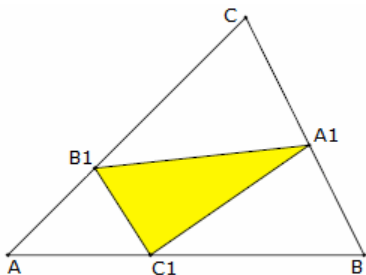


### Ungleichungen am Dreieck

Gegeben sei ein allgemeines Dreieck  $\triangle ABC$  mit den Seiten  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ . Weiterhin seien  $A$  der Flächeninhalt,  $u$  der Umfang,  $s$  der halbe Umfang,  $R$  der Umkreisradius,  $r$  der Inkreisradius,  $h_a, h_b, h_c$  die Längen der Höhen,  $s_a, s_b, s_c$  die Längen der Seitenhalbierenden und  $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$  die Längen der Winkelhalbierenden.

Dann gelten verschiedene Ungleichungen (alle Ungleichungen können zyklisch getauscht werden):

- $a + b > c ; a + c > b ; b + c > a$  (Dreiecksungleichung)
- $|a - b| < c ; |a - c| < b ; |c - b| < a$
- $s_a < (b+c) / 2$
- $w_\alpha < 2 bc / (b+c)$
- $4\sqrt{3} A \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$
- $6\sqrt{3} A \leq 2(s_a^2 + s_b^2 + s_c^2) < 3(ab + ac + bc) R \geq 2r$
- $9r \leq h_a + h_b + h_c \leq w_\alpha + w_\beta + w_\gamma \leq s_a + s_b + s_c \leq 9/2 R$
- $27r^2 \leq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq w_\alpha^2 + w_\beta^2 + w_\gamma^2 \leq s^2$
- $s^2 \leq s_a + s_b + s_c \leq 27/4 R^2$
- $r \leq \sqrt{(A \sqrt{3})/3} \leq \sqrt{3}/9 s \leq R/2$
- $\pi/3 \leq (a\alpha + b\beta + c\gamma)/(a+b+c) \leq \pi/2$
- $1/r_a + 1/r_b + 1/r_c \geq 1/s_a + 1/s_b + 1/s_c \geq 2/R$
- $3/2 s < s_a + s_b + s_c < u$
- $h_a \leq \sqrt{(bc) \cos \alpha/2}$
- $3/4 s^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 81/16 R^2$
- $A \leq \sqrt{3} / 36 u^2$  (isoperimetrische Ungleichung)
- $w_\alpha + w_\beta + w_\gamma \leq \sqrt{(r_a r_b)} + \sqrt{(r_a r_c)} + \sqrt{(r_c r_b)} \leq \sqrt{3} s$
- $(r_a + r_b + r_c)/3 \leq 3/2 R \leq \sqrt{((r_a^2 + r_b^2 + r_c^2)/3)}$



### Erdős-Dreiecksungleichung

Gegeben sei ein Dreieck  $\triangle ABC$  und auf den Seiten drei Punkte  $A_1, B_1, C_1$ , die ein Teildreieck  $\triangle A_1B_1C_1$  bilden.

1956 wurde durch H. Debrunner eine schon von P. Erdős gefundene Ungleichung angegeben. Für die beiden Dreiecke gilt u.a.

$$\text{Fläche}(A_1B_1C_1) \geq \min(\text{Fläche}(AB_1C_1), \text{Fläche}(A_1BC_1), \text{Fläche}(A_1B_1C))$$

Sind die Punkte  $A_1, B_1, C_1$  die Mittelpunkte der Seiten, so sind die vier Teildreiecke flächengleich.

$$\text{Fläche}(A_1B_1C_1) \geq \sqrt{(\text{Fläche}(AB_1C_1) \cdot \text{Fläche}(A_1BC_1))}$$

- $\text{Fläche}(ABC) \geq 4 \text{ Fläche}(A_1B_1C_1)$
- $4 \text{ Fläche}(A_1B_1C_1) \leq \text{Fläche}(ABC) + s^4 ((\omega-1)/(\omega+1))^2 / \text{Fläche}(ABC)$
- wobei  $s = (a+b+c)/2$  und  $\omega = (AC + AC_1)/(BC + BC_1)$  sind.
- $\text{Fläche}(AB_1C_1) = 1/(bc) (2\omega/(\omega+1) s - b) (2/(\omega+1) s - c) \text{ Fläche}(ABC)$
- $\text{Fläche}(A_1BC_1) = 1/(ac) (2\omega/(\omega+1) s - c) (2/(\omega+1) s - a) \text{ Fläche}(ABC)$
- $\text{Fläche}(A_1B_1C) = 1/(ab) (2\omega/(\omega+1) s - a) (2/(\omega+1) s - b) \text{ Fläche}(ABC)$

### Weitzenböck-Ungleichung

Die Weitzenböck-Ungleichung (nach Roland Weitzenböck) gibt eine Beziehung zwischen den Dreiecksseiten  $a, b, c$  und dem Flächeninhalt  $\Delta$  an. Es gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4 \sqrt{3} \Delta$$

Das Gleichheitszeichen gilt dabei nur für ein gleichseitiges Dreieck.

Nachweis: Grundlage für den Beweis ist die Heronsche Dreiecksungleichung

$$\Delta = 1/4 \sqrt{(4 a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2)}$$

Da Quadrate stets positiv oder gleich Null sind, wird  $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0$

Damit ergibt sich  $2(a^4 + b^4 + c^4) - 2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) \geq 0$

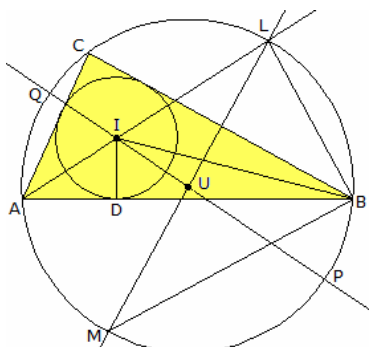
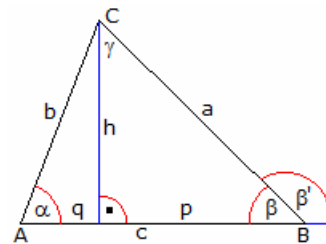
$$4/3 2(a^4 + b^4 + c^4) \geq 4/3 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)$$

$$(a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2))/3 \geq 2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2/3 \geq 4 \Delta^2$$

Alternativ kann der Flächeninhalt des inneren Napoleon-Dreiecks berechnet werden:

$$A = 1/6 (a^2 + b^2 + c^2 - 4 \sqrt{3} \Delta) \quad \text{woraus die Weitzenböck-Ungleichung folgt.}$$



### Satz von Euler (Geometrie)

In der Geometrie liefert der Satz von Euler eine Gleichung für die Entfernung  $d$  der Mittelpunkte von Umkreis und Inkreis eines beliebigen Dreiecks.

$$d = \sqrt{R(R - 2r)}$$

mit dem Umkreisradius  $R$  und dem Inkreisradius  $r$ . Aus dem Satz folgt unmittelbar die Eulersche Ungleichung  $R \geq 2r$ .

Nachweis: Es seien  $U$  der Umkreismittelpunkt und  $I$  der Inkreismittelpunkt des Dreiecks  $ABC$ . Die Gerade  $AI$  schneidet als Winkelhalbierende nach dem Südpolsatz den Umkreis in einem Punkt  $L$ ,



der auch auf der zugehörigen Mittelsenkrechten liegt. Der zweite Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten UL mit dem Umkreis sei M. Bezeichnet man den Fußpunkt des von I aus gefällten Lotes zu AB mit D, dann gilt  $ID = r$ .

Auf Grund der Übereinstimmung in zwei Winkeln sind die Dreiecke ADI und MBL zueinander ähnlich. Daher gilt  $ID/LB = AI/ML$  und  $ML \cdot ID = AL \cdot LB$ , d.h.  $2R \cdot r = AI \cdot LB$

Nach dem Außenwinkelsatz wird  $\angle BIL = \alpha/2 + \beta/2$

und mit Umfangswinkelsatz  $\angle LBI = \beta/2 + \angle LBC = \beta/2 + \angle LAC = \beta/2 + \alpha/2$

und somit  $\angle BIL = \angle LBI$ . Dreieck IBL ist damit gleichschenkelig und  $LI = LB$ , d.h.  $AI \cdot LI = 2R \cdot r$ . Sind P und Q die Schnittpunkte der Geraden UI mit dem Umkreis wird mittels Sehensatz

$$PI \cdot QI = AI \cdot LI = 2R \cdot r$$

Die Streckenlängen auf der linken Seite können durch den Umkreisradius R und die Entfernung  $d = UI$  ausgedrückt werden  $(R+d) \cdot (R-d) = 2R \cdot r$

Nach Umformung folgt die Behauptung.

### Berechnung am Dreieck (SSS)

Gegeben seien die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks. Nach dem Kongruenzsatz SSS sind andere Größen dann eindeutig berechenbar.

Winkel $\alpha$	$\alpha = 2 \arctan [ \sqrt{((a^2 - (b - c)^2) / ((b + c)^2 - a^2))} ]$
Winkel $\beta$	$\beta = 2 \arctan [ \sqrt{((b^2 - (c - a)^2) / ((c + a)^2 - b^2))} ]$
Winkel $\gamma$	$\gamma = 2 \arctan [ \sqrt{((c^2 - (a - b)^2) / ((a + b)^2 - c^2))} ]$
Fläche	$A = 1/4 \sqrt{[(b + c)^2 - a^2]} \cdot \sqrt{[a^2 - (b - c)^2]}$
Höhe $h_c$	$h_c = (a+b+c)(a-b-c) \sqrt{((a^2 - (b - c)^2)/((b + c)^2 - a^2))} / (2c)$
Abschnitt q	$q = (a^2 - b^2 - c^2)/(2c)$
Abschnitt p	$p = (b^2 - a^2 - c^2)/(2c)$
Inkreisradius r	$r = \sqrt{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) / s}$
Umkreisradius R	$R = 1/4 \cdot abc/A$

### Berechnung am Dreieck (SWS)

Gegeben seien die zwei Seiten a, b und der dazwischenliegende Winkel  $\gamma$  eines Dreiecks. Nach dem Kongruenzsatz SWS sind andere Größen dann eindeutig berechenbar.

Seite c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \gamma}$
Winkel $\alpha$	$\alpha = \arcsin ( a \sin \gamma / \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \gamma})$
Winkel $\beta$	$\beta = \arcsin ( b \sin \gamma / \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \gamma})$
Fläche	$A = 1/2 a b / \sin \gamma$
Höhe $h_c$	$h_c = a b \sin \gamma / \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \gamma}$
Abschnitt q	$q = b(a \cos \gamma - b) / \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \gamma}$

### Berechnung am Dreieck (SWW)

Gegeben seien die Seite a, der anliegende Winkel  $\alpha$  und der gegenüberliegende Winkel  $\beta$  eines Dreiecks. Nach dem Kongruenzsatz SWW sind andere Größen dann eindeutig berechenbar.

Seite b	$b = a \csc \alpha \sin \beta$
Seite c	$c = a (\cot \alpha \sin \beta + \cos \beta)$
Winkel $\gamma$	$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$
Fläche	$A = a^2/2 \sin^2 \beta (\cot \alpha + \cot \beta)$
Höhe $h_c$	$h_c = a \sin \beta$
Abschnitt p	$p = a \cos \beta$
Abschnitt q	$q = a \cot \alpha \sin \beta$

### Berechnung am Dreieck (WSW)

Gegeben seien die Seite c, und die zwei anliegenden Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  eines Dreiecks. Nach dem Kongruenzsatz WSW sind andere Größen dann eindeutig berechenbar.

Seite a	$a = c \csc \beta / (\cot \alpha + \cot \beta)$
Seite b	$b = c \csc \alpha / (\cot \alpha + \cot \beta)$
Winkel $\gamma$	$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$
Fläche	$A = a^2 / (2 (\cot \alpha + \cot \beta))$
Höhe $h_c$	$h_c = c / (\cot \alpha + \cot \beta)$

### Berechnung am Dreieck (SSW)

#### 1. Fall

Gegeben seien zwei Seiten a und b ( $a > b$ ) und mit dem Winkel  $\alpha$  der Winkel, welcher der größeren Seite gegenüberliegt. Nach dem Kongruenzsatz SSW sind andere Größen dann eindeutig berechenbar.

Seite c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 \cos (2\alpha) + 2 b \cos \alpha \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}}$
Winkel $\beta$	$\beta = \arcsin (b/a \sin \alpha)$
Winkel $\gamma$	$\gamma = \arccos (b/a \sin^2 \alpha - \cos \alpha \sqrt{1 - b^2/a^2 \sin^2 \alpha})$
Fläche	$A = b^2/2 \sin \alpha * (-\cos \alpha + \sqrt{a^2/b^2 - \sin^2 \alpha})$
Höhe $h_c$	$h_c = b * \sin \alpha$

## 2. Fall

Gegeben seien zwei Seiten  $a$  und  $b$  ( $a > b$ ) und mit dem Winkel  $\beta$  der Winkel, welcher der kleineren Seite gegenüberliegt. Nach dem Kongruenzsatz SSW sind andere Größen auch dann eindeutig berechenbar.

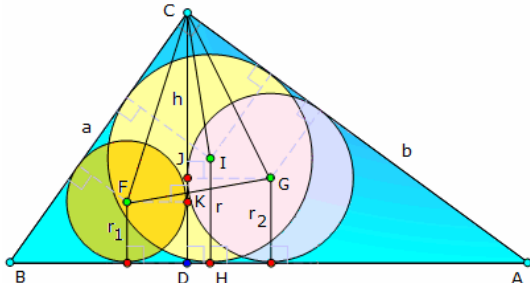
Seite  $c$   $c = \sqrt{(b^2 + a^2 \cos(2\beta)) + 2 a \cos \beta \sqrt{(b^2 - a^2 \sin^2 \beta)}}$

Winkel  $\alpha$   $\alpha = \pi/2 + \arccos(a/b \sin \beta)$

Winkel  $\gamma$   $\gamma = \arccos(a/b \sin^2 \beta - \cos \beta \sqrt{(1 - a^2/b^2 \sin^2 \beta)})$

Fläche  $A = a^2/2 \sin \beta * (\cos \beta - \sqrt{(b^2/a^2 - \sin^2 \beta)})$

Höhe  $h_c = b * \sin(\pi/2 + \arccos(a/b \sin \beta))$



### Beziehungen zwischen In- und Umkreis

Inkreisradius  $\rho$ , Umkreisradius  $R$ ,  $s = u/2$ , Flächeninhalt  $A$ ,  $r_1 \dots$  Ankreisradien

$$R \rho = a b c / (4 s)$$

$$A^2 = \rho r_1 r_2 r_3$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \rho / R$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4 \rho R + 8 R^2$$

im rechtwinkligen Dreieck

$$\rho = a b / (a + b + c) \text{ mit der Hypotenuse } c$$

ist  $d$  der Abstand von Inkreis- zum Umkreismittelpunkt, so

gilt  $1 / (R - d) + 1 / (R + d) = 1 / \rho$   
 $d = \sqrt{(R^2 - 2 R \rho)}$

Werden in den zwei durch die Höhe erzeugten Teildreiecken die Inkreise gezeichnet, so gilt weiterhin

1)  $r + r_1 + r_2 = h$

2) der Punkt  $I$  ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $CFG$

3)  $CI = FG \cdot \sqrt{2}$  und  $CI \perp FG$

4)  $DH = JK = r_2 - r_1$

5)  $r_1^2 + r_2^2 = r^2$

6)  $a r_1 + b r_2 = c r$

7) die Summe der Flächen der zwei kleinen Inkreise ist gleich dem Inkreisflächeninhalt

### Halbwinkelsätze am Dreieck

$a$ ,  $b$  und  $c$  seien die Seiten eines Dreiecks,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die gegenüberliegenden Winkel und  $s$  der halbe Umfang, mit  $s = 1/2(a+b+c)$ . Dann gilt:

$$\sin \alpha/2 = \sqrt{((s-b) \cdot (s-c)) / (bc)}$$

$$\cos \alpha/2 = \sqrt{((b+c)^2 - a^2) / (4bc)}$$

$$\tan \alpha/2 = \sqrt{((s-b)/s) \cdot (s-c)/(s-a)}$$

und für die Winkel  $\beta$ ,  $\gamma$  Analoges durch zyklisches Vertauschen der Größen.

Beweis: Nach dem Kosinussatz wird

$$\cos \gamma = (a^2 + b^2 - c^2) / (2ab)$$

Es ist  $\cos \gamma/2 = \sqrt{(1/2 (1 + \cos \gamma))}$ . Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$\cos \gamma/2 = \sqrt{(1/2 (1 + (a^2 + b^2 - c^2) / (2ab)))} = \sqrt{((a+b)^2 - c^2) / (4ab)} = \sqrt{((a+b+c)/2 \cdot (a+b-c)/2 \cdot 1/(ab))} = \sqrt{(s \cdot (s-c)) / (ab)}$$

Mit den anderen Varianten des Kosinussatzes ergeben sich die Beziehungen für  $\alpha$  und  $\beta$ .

Mit  $\sin \gamma/2 = \sqrt{(1/2 (1 - \cos \gamma))}$  wird  $\sin \gamma/2 = \sqrt{(1/2 (1 - (a^2 + b^2 - c^2) / (2ab)))} =$   
 und nach längeren Umformen  $\sin \gamma/2 = \sqrt{((s-a) (s-b)) / (ab)}$

Die Beziehung für den Tangens ergibt sich aus  $\tan \gamma/2 = \sin \gamma/2 / \cos \gamma/2$ .

### Schnittpunkte der Dreieckstransversalen

Seitenhalbierenden  $\rightarrow$  Schwerpunkt

Winkelhalbierenden  $\rightarrow$  Inkreismittelpunkt

Mittelsenkrechten  $\rightarrow$  Umkreismittelpunkt

Der Schwerpunkt teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1.

Der Schnittpunkt der Höhen, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des Umkreises liegen auf der Eulerschen Geraden.

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten liegt bei einem stumpfwinkligen Dreieck außerhalb des Dreiecks.

Die Mittelsenkrechte einer Seite und die Winkelhalbierende des gegenüberliegenden Winkels schneiden sich stets auf dem Umkreis.

Die Seitenhalbierenden teilen ein Dreieck in sechs kleine Teildreiecke, die untereinander gleichen Flächeninhalt haben. Der Höhenschnittpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ist der Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunkt Dreiecks.

Ankreisradius  $\rho_a = A / (s - a)$   $1/\rho_a = 1/h_b + 1/h_c - 1/h_a = (s-a)/A$

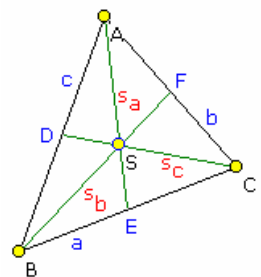
$$1/\rho = 1/\rho_a + 1/\rho_b + 1/\rho_c \quad \rho_a + \rho_b + \rho_c = 4R + \rho$$

$$\rho_a = s \tan \alpha/2 = [\alpha \cos \beta/2 \cos \gamma/2] / \cos \alpha/2$$

Länge der Seitenhalbierenden von  $a$

$$s_a = 1/2 \sqrt{(2 * (b^2 + c^2) - a^2)} = 1/2 \sqrt{[b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha]}$$

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)/4$$

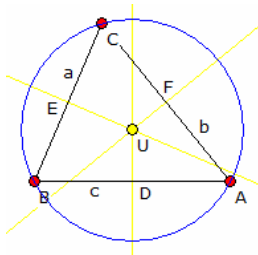




Länge der Winkelhalbierenden von  $\alpha$

$$w_\alpha = \sqrt{bc \left[ \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)} \right]} = \frac{2bc \cos(\alpha/2)}{(b+c)} = \sqrt{bc - u \cdot v}$$

$u, v$  ... Abschnitte auf der geschnittenen Seite



### Mittelsenkrechtenatz

#### Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Umkreises, des Kreises, auf dem die Eckpunkte des Dreiecks liegen.

Beweis: Sei D der Mittelpunkt der Seite AB. Jeder Punkt auf der Mittelsenkrechte durch D ist gleich weit von A und B entfernt.

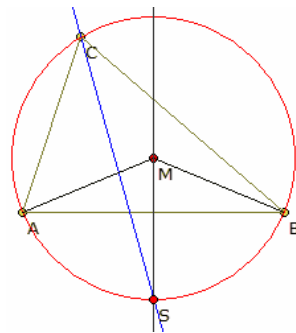
Analoges gilt für die Punkte auf der Mittelsenkrechte durch E im Verhältnis zu den

Punkten B und C.

Der Schnittpunkt U beider Mittelsenkrechten ist damit gleich weit von allen Ecken des Dreiecks entfernt; damit ist er Mittelpunkt eines Kreises durch die drei Ecken, des Umkreises.

U hat den gleichen Abstand von A und C, damit muss aber die Gerade durch U und F senkrecht auf der Seite AB stehen, also eine Mittelsenkrechte sein. Womit gezeigt ist, dass sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden.

Ist das Dreieck spitzwinklig liegt der Schnittpunkt innerhalb, bei einem stumpfwinkligen Dreieck außerhalb des Dreiecks. In einem rechtwinkligen Dreieck halbiert der Mittelpunkt des Umkreises die Hypotenuse.



### Südpolsatz

In jedem Dreieck gilt:

Die Mittelsenkrechte einer Seite und die Winkelhalbierende des gegenüberliegenden Winkels schneiden sich stets auf dem Umkreis. Der Schnittpunkt wird auch Südpol des Dreiecks genannt.

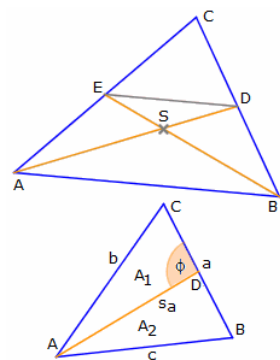
Nachweis: O.B.d.A. wird der Satz für die Mittelsenkrechte  $m_c$  und die Winkelhalbierende  $w_\gamma$  betrachtet.

S sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten  $m_c$  mit dem Umkreis, der nicht auf der gleichen Seite von AB liegt wie die Ecke C. Ist U der Umkreismittelpunkt, so ist der Winkel  $\angle ACS$  halb so groß wie der Winkel  $\angle AUS$ , da es sich um den Peripheriewinkel und Zentriwinkel über dem

Kreisbogen AS handelt.

Entsprechend ist der Winkel  $\angle SCB$  halb so groß wie der Winkel  $\angle SUB$ . Da die Winkel  $\angle AUS$  und  $\angle SUB$  aus Symmetriegründen gleich groß sind, müssen auch die Winkel  $\angle ACS$  und  $\angle SCB$  gleich groß sein.

D.h., S muss auf der Winkelhalbierenden des Winkels  $\gamma$  liegen. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und der Winkelhalbierenden muss mit S übereinstimmen und folglich auf dem Umkreis liegen.



### Seitenhalbierendensatz

Satz: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S. Dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 vom Eckpunkt aus gesehen.

Beweis: Es ist  $CB / CD = CA / CE = 2/1$

Dann muss nach der Umkehrung der Strahlensätze  $AB \parallel ED$  gelten, außerdem verhalten sie sich 2 : 1. Die Dreiecke  $\triangle ESD$  und  $\triangle ABC$  sind ähnlich, da sie im Scheitelwinkel  $\angle ESD = \angle BSA$  und den Wechselwinkeln  $\angle SAB = \angle SED$  übereinstimmen. Dann gilt aber:

$$AS / SD = BS / SE = 2/1$$

womit der erste Teil der Behauptung gezeigt ist.

Analoge Überlegungen kann man auch für zwei weitere Seitenhalbierende

anstellen. Damit müssen sich dann aber alle drei Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden, denn es kann nur einen Punkt geben, der die Strecke BE im Verhältnis 2 : 1 teilt.

Um zu zeigen, dass S der Schwerpunkt ist, zeigen man, dass jede Seitenhalbierende das Dreieck in zwei flächengleiche Teildreiecke zerlegt, damit muss aber der Schnittpunkt zweier Seitenhalbierenden der Schwerpunkt des Dreiecks sein. Mit der Dreiecksformel  $A = 1/2 bc \sin \alpha$  ergibt sich für deren Flächeninhalt  $A_1$  des Dreiecks  $\triangle ADC$

$$A_1 = 1/2 a/2 s_a \sin \phi$$

und  $A_2$  des Dreiecks  $\triangle ABD$

$$A_2 = 1/2 a/2 s_a \sin (180^\circ - \phi)$$

Diese Ausdrücke gleich.

### Seitenhalbierendenslänge

Satz: Für die Länge der Seitenhalbierenden  $s_a$  der Seite a gilt

$$s_a = 1/2 \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Analoge Formeln ergeben sich durch zyklisches Vertauschen für die anderen Seitenhalbierenden.

Nachweis: Mit dem Kosinussatz gilt im Dreieck  $\triangle ABD$

$$s_a^2 = (a/2)^2 + c^2 - 2 \cdot a/2 \cdot c \cdot \cos \beta \quad (1)$$

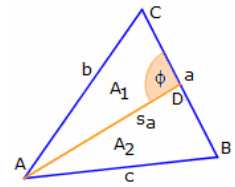
Im Dreieck  $\triangle ABC$  gilt  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ab \cos \beta$

Diese Gleichung ist äquivalent zu  $-2 \cdot a/2 \cdot c \cdot \cos \beta = b^2/2 - a^2/2 - c^2/2$

Setzen man diese Gleichung in (1) ein, wird

$$s_a^2 = a^2/4 + c^2 + b^2/2 - a^2/2 - c^2/2 = b^2/2 + c^2/2 - a^2/4 = 1/4 (2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

Wurzelziehen ergibt die Behauptung.



### Seitenhalbierende, Berechnung

Der Schwerpunkt teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1, d.h.  $AS / SE = BS / SF = 2/1$ .

1. Gegeben:  $AS$  ; Gesucht:  $SE$   $SE = 1/2 AS = 1/6 \sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$

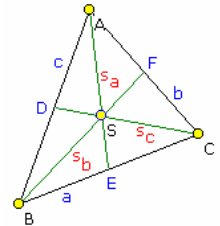
2. Gegeben:  $a, b, c$  ; Gesucht:  $s_a, s_b, s_c$   $s_a = 1/2 \sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$

3. Gegeben:  $b, c, s_a$  ; Gesucht:  $a$   $a = \sqrt{2(b^2+c^2)-2s_a^2}$

4. Gegeben:  $b, c, s_b$  ; Gesucht:  $a$   $a = \sqrt{1/2 b^2 - c^2 + 2s_b^2}$

5. Gegeben:  $a, b, s_a$  ; Gesucht:  $C$   $c = 1/\sqrt{2} \sqrt{a^2 - 2b^2 + 4s_a^2}$

6. Gegeben:  $a, b, s_a$  ; Gesucht:  $A$   
 $A = 1/8 \sqrt{8(a^2(b^2+s_a^2) - 2(b^2-s_a^2)^2) - a^4}$



### Ganzzahlige Seitenhalbierende

Besitzt ein Dreieck ganzzahlige Seitenlängen  $a, b$  und  $c$ , so ist auf Grund der Berechnungsvorschrift der Seitenhalbierenden, z.B.  $s_a = 1/2 \sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$  ;  $s_b, s_c$  analog nicht unbedingt mit Dreiecken zu rechnen, die auch drei ganzzahlige Seitenhalbierende besitzen. Dennoch existieren derartige Dreiecke. Die mit den kleinsten Seiten sind:

#### Seiten a,b,c

136,170,174  
 226,486,580  
 254,262,316  
 284,926,1058  
 290,414,656  
 318,628,650  
 416,1318,1366  
 466,510,884  
 488,734,1046  
 554,892,954  
 654,772,818  
 754,808,1238  
 932,982,1614  
 1018,2646,3328

#### Seitenhalbierende s\_a, s\_b, s\_c

158,131,127  
 523,367,244  
 261,255,204  
 984,621,435  
 529,463,142  
 619,404,377  
 1326,765,699  
 683,659,208  
 870,729,339  
 881,640,569  
 725,632,587  
 975,942,477  
 1252,1223,515  
 2963,2075,1118

Die Seiten derartiger Dreiecke haben einen ggT 2. Alle Vielfachen mit 2 der Seiten ergeben weitere derartige Dreiecke. Ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen und 2 oder 3 ganzzahligen Seitenhalbierenden existiert nicht.

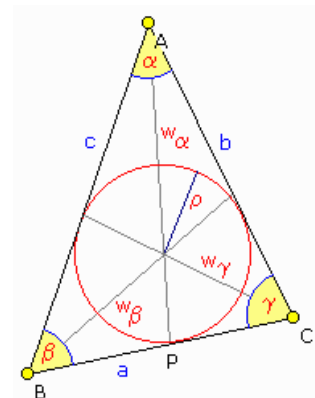
### Winkelhalbierende, Berechnung

1. Winkelhalbierende gesucht

geg.:  $a, b, c$   $s = (a+b+c)/2$   $w_\alpha = 2/(b+c) \sqrt{bcs(s-a)}$

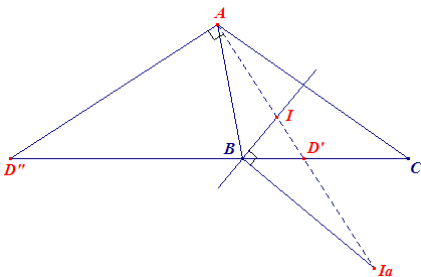
2. Seitenlänge gesucht

geg.:  $b, c$  und  $w_\alpha$   $a = \sqrt{(bc - w_\alpha^2)(b+c)^2 / (bc)}$



### Winkelhalbierendensatz

Der Schnittpunkt einer Winkelhalbierende mit einer Seite, teilt diese im Verhältnis der anliegenden Seiten,  $CP : BP = b : c$



Im Dreieck  $ABC$  seien  $AD'$  und  $AD''$  die Innen- und Außenwinkelhalbierenden des Winkels bei  $A$ . Aus dem Winkelhalbierendensatz folgt dann

$$BD' : CD' = BA : CA, \quad BD'' : CD'' = BA : CA$$

$$BD' : CD' = CD' : CD'' \text{ und somit}$$

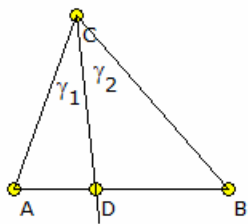
$$BD' : BD'' = CD' : CD'' = (D'D''BC) = -1$$

Die Punktepaare  $(D', D'')$  und  $(B, C)$  sind damit harmonische Punktepaare auf der Geraden  $BC$ , d.h.

Die Innen- und Außenwinkelhalbierenden eines Winkels schneiden die gegenüberliegende Seite in Punkten, die harmonisch zu den

Punkten der Seite liegen. D.h.  $D'$  teilt die Strecke  $BC$  stetig, also im goldenen Schnitt.

Außerdem sind dann auch die Punktepaare  $(A, D')$  und  $(I, I_a)$  harmonisch angeordnet auf der Innenwinkelhalbierende des Winkels bei A..



**Verallgemeinerter Winkelhalbierendensatz, Transversalensatz**

In einem Dreieck  $\Delta ABC$  sei D ein Punkt auf der Seite AB. Die Strecke CD teilt den Winkel  $\angle ACB$  in die Winkel  $\gamma_1 = \angle ACD$  und  $\gamma_2 = \angle DCB$ .

Diese beiden Winkel sind genau dann gleich groß, das heißt CD ist genau dann die Winkelhalbierende des Winkels  $\angle ACB$ , wenn für die Streckenverhältnisse gilt:

$$|AC| / |BC| = |AD| / |DB|$$

Dieser Satz lässt sich zum Transversalensatz auch auf Strecken CD

verallgemeinern, die den Winkel in einem beliebigen Verhältnis teilen. Es gilt dann

die Verhältnissgleichung:  $(|AC| \sin \gamma_1) / (|BC| \sin \gamma_2) = |AD| / |DB|$

Ist CD die Seitenhalbierende von AB, so folgt daraus  $|AC| \sin \gamma_1 = |BC| \sin \gamma_2$

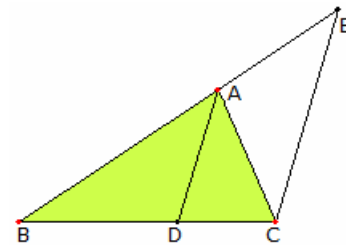
**Winkelhalbierendensatz bei Euklid**

Originaltext aus Euklids "Elementen" Buch VI: § 3 (L. 3):

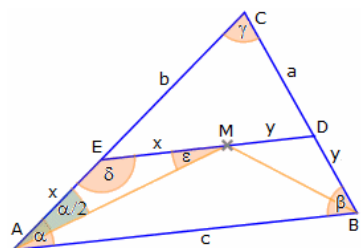
Halbiert man in einem Dreieck einen Winkel und bringt die den Winkel teilende gerade Linie auch mit der Grundlinie zum Schnitt, so müssen die Abschnitte der Grundlinie dasselbe Verhältnis haben wie die übrigen Dreiecksseiten; und wenn die Abschnitte der Grundlinie dasselbe Verhältnis haben wie die übrigen Dreiecksseiten, dass muss eine gerade Linie, die man vom Scheitel zum Teilpunkt zieht, den geteilten Winkel im Dreieck halbieren.

Das Dreieck sei ABC; man halbiere den Winkel BAC durch die gerade Linie AD. Ich behaupte, dass  $BD : CD = BA : AC$ .

Man ziehe durch C zu DA die Parallele CE; die Verlängerung von BA treffe diese in E (Postulat 5). Da die Parallelen AD, EC von der geraden Linie AC geschnitten werden, ist  $\angle ACE = CAD$  (I, 29). Nach Voraussetzung ist aber  $CAD = BAD$ , also ist auch  $\angle BAD = ACE$ . Ebenso ist, da die Parallelen AD, EC von der geraden Linie BAE geschnitten werden, der äußere Winkel BAD dem inneren AEC gleich (I,29). Wie oben bewiesen, ist  $ACE = BAD$ ; also ist auch  $\angle ACE = AEC$ , folglich Seite AE = Seite AC (I, 6).



Und da im Dreieck BCE AD || EC, einer der Seiten gezogen ist, so stehen in Proportion  $BD : DC = BA : AE$  (VI, 2). Aber  $AE = AC$ ; also ist  $BD : DC = BA : AC$  (V, 7, 11). Andererseits sei  $BD : DC = BA : AC$ ; man ziehe AD. Ich behaupte, dass  $\angle BAC$  von der geraden Linie AD halbiert wird. Man konstruiere ebenso. Da  $BD : DC = BA : AC$ , aber auch  $BD : DC = BA : AE$ , weil AD im Dreieck BCE einer der Seiten, nämlich EC parallel gezogen ist (VI, 2), so ist  $BA : AC = BA : AE$  (V, 11). Also ist  $AC = AE$  (V, 9), folglich auch  $\angle AEC = ACE$  (I, 5). AEC ist aber dem äußeren Winkel BAD gleich und ACE dem Wechselwinkel CAD (I, 29); also ist  $BAD = CAD$ ;  $\angle BAC$  wird also von der geraden Linie AD halbiert - S.



**Aufgabe zum Inkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt-Parallele**

Im Dreieck  $\Delta ABC$  sei M der Mittelpunkt der Winkelhalbierenden. ED sei die Parallele zu AB durch M. Gesucht ist die Länge von ED in Abhängigkeit von den Längen der Dreiecksseiten a, b und c.

Lösung: Es sei  $x = EM$  und  $y = MD$ ; gesucht ist dann  $x + y$ . Zuerst zeigen man, dass  $AE = EM$ . Der Winkel  $\delta = \angle AEM$  ist Gegenwinkel zu  $\alpha$ , d.h.  $\delta = 180^\circ - \alpha$ . Im Dreieck  $\Delta AME$  gilt nach Innenwinkelsatz  $\alpha/2 + 180^\circ - \alpha + \epsilon = 180^\circ$ , d.h.  $\epsilon = \alpha/2$ .

Da gleichgroßen Winkeln gleichlange Seiten gegenüberliegen, ist  $x = EM = AE$ . Analog schließt man  $y = DM = DB$ .

Da  $ED || AB$  ergibt sich aus dem Strahlensatz

$$(b-x)/(x+y) = b/c \text{ und } (a-y)/(x+y) = a/c$$

$$(b-x)c = b(x+y) = bx + by \text{ und } (a-y)c = a(x+y)$$

und  $y = ((b-x)c - bx) / b = c - x - cx/b$  (\*)

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$cx + c^2x/b + acx/b = c^2 \quad bcx + c^2x + acx = c^2b$$

$$cx(a+b+c) = c^2b \quad \text{und} \quad x = bc / (a+b+c)$$

Einsetzen in (\*) und Umstellen nach  $x+y$  ergibt abschließend

$$x + y = c(a+b) / (a+b+c)$$

**Beziehungen am Umkreis**

An jedem Dreieck ABC mit dem Umkreisradius R gelten folgende Beziehungen (weitere Beziehungen durch analoges Austauschen der Stücke, Winkel):

$$\angle BOC = 2\alpha$$

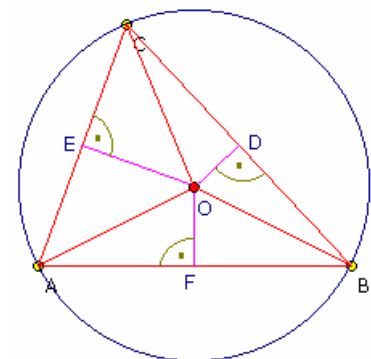
$$\angle BOD = \angle COD = \alpha$$

$$\angle DOE = \alpha + \beta$$

$$\angle BCO = \angle CBO = 90^\circ - \alpha$$

$$DO = R \cos \alpha$$

$$OF^2 = R^2 - a^2/4$$



$$DO + EO + FO = R + \rho$$

Carnots Theorem:

$$DO^2 + EO^2 + FO^2 = 3R^2 - 1/4(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$a = 2R \sin \alpha$$

$$A(\text{BOC}) = R^2/2 \sin 2\alpha = aR/2 \cos \alpha$$

$$\text{Seite a } a = 1/(R \sqrt{2}) \sqrt{(-bc \sqrt{(b^2 - 4R^2)} \sqrt{(c^2 - 4R^2)} + 2b^2r^2 + 2c^2R^2 - b^2c^2)}$$

$$\text{Seite b } b = 1/(R \sqrt{2}) \sqrt{(-ac \sqrt{(a^2 - 4R^2)} \sqrt{(c^2 - 4R^2)} + 2a^2r^2 + 2c^2R^2 - a^2c^2)}$$

$$\text{Seite c } c = 1/(R \sqrt{2}) \sqrt{(-ab \sqrt{(a^2 - 4R^2)} \sqrt{(b^2 - 4R^2)} + 2a^2r^2 + 2b^2R^2 - a^2b^2)}$$

### Mittelsenkrechtenlänge

Werden die Strecken von den Seitenmittelpunkten zum Umkreismittelpunkt als die Längen der Mittelsenkrechten betrachtet, so gilt

$$m_a = \sqrt{(R^2 - a^2/4)} \quad m_b = \sqrt{(R^2 - b^2/4)} \quad m_c = \sqrt{(R^2 - c^2/4)}$$

### Beziehungen am Inkreis

An jedem Dreieck ABC mit dem Inkreisradius  $\rho$  gelten folgende Beziehungen (weitere Beziehungen durch analoges Austauschen der Stücke, Winkel):

$$\angle BAI = \angle CAI = \alpha/2$$

$$\angle BIC = 90^\circ + \alpha/2$$

$$\angle ADB = \gamma + \alpha/2 = 90^\circ - (\beta - \gamma)/2$$

$$\angle CDA = \alpha/2 + \beta = 90^\circ + (\beta - \gamma)/2$$

$$\angle CIE = \angle BIF = 90^\circ - \alpha/2 = (\beta + \gamma)/2$$

$$w_\alpha = AD = \sqrt{(bc [1 + a^2/(b+c)^2])} = 2bc/(b+c) \cos \alpha/2 = 2\rho s / [(b+c) \sin \alpha/2]$$

$$= 2 \sqrt{(bc) / (b+c) \sqrt{(s(s-a))}}$$

$$AF = bc / (a+b) ; BD = ca / (b+c) ; CE = ab / (c+a)$$

$$FB = ca / (a+b) ; DC = ab / (b+c) ; EA = bc / (c+a)$$

$$AF + BD + CE = [(bc+ca+ab)^2 + bc^3 + ca^3 + ab^3] / [(b+c)(c+a)(a+b)]$$

$$FB + DC + EA = [(bc+ca+ab)^2 + b^3c + c^3a + a^3b] / [(b+c)(c+a)(a+b)]$$

$$AI = (b+c)/2s \cdot AD = bc/s \cos \alpha/2 = r / \sin \alpha/2 = \sqrt{[(s-a)^2 + \rho^2]} = \sqrt{(bc - 4R\rho)}$$

$$AI * BI * CI = 4R\rho^2$$

An jedem Dreieck ABC mit dem Inkreisradius  $\rho$  gelten folgende Beziehungen (weitere Beziehungen durch analoges Austauschen der Stücke, Winkel):

$$DI = a/(2s) AD ; EI = b/(2s) BE ; FI = c/(2s) CF$$

$$AI/DI = (b+c) / a ; BI/EI = (c+a) / b ; CI/FI = (a+b) / c$$

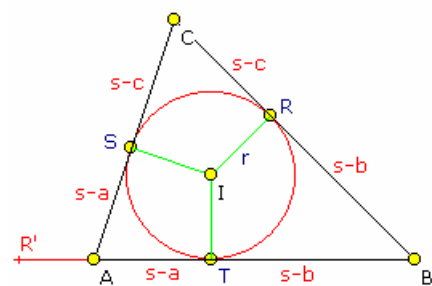
$$\angle SIT = 180^\circ - \alpha = \beta + \gamma \quad \angle TRS = (\beta + \gamma)/2 = 90^\circ - \alpha/2$$

$$\angle DIR = (\gamma - \beta)/2 \quad ST = 2(s-a) \sin \alpha/2$$

$$\tan \alpha/2 = r / (s-a)$$

$$\text{Fläche von BIC} = r a/2$$

Der Inkreismitelpunkt liegt auf den Geraden durch (Schwerpunkt ; Nagel-Punkt), (Lémoine-Punkt ; Mittenpunkt), (Neun-Punktekreis-Zentrum ; Feuerbach-Punkt) , (Gergonne-Punkt ; De Longchamps-Punkt), (Schiffiler-Punkt ; 2.Potenz-Punkt) , (Isotomisch konjugiertes Inkreiszentrum ; Cevapunkt von Inkreismitelpunkt und Schwerpunkt) , (Cevapunkt von Inkreismitelpunkt und Höhenschnittpunkt ; Cevapunkt von Inkreismitelpunkt und Clawson-Punkt).



ABC sei ein beliebiges Dreieck und R, S und T die Berührungspunkte des Inkreises. Die Dreiecke ASI, ATI ; BRI, BTI sowie CRI und CSI sind dann paarweise kongruent. Verlängert man die Strecke AB um CR über A hinaus, so erhält man den Punkt R'.

Dann gilt:

$$BR' = BT + AT + AR' = BT + AT + CR$$

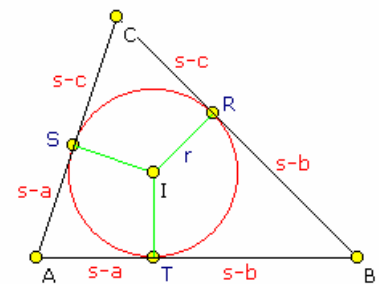
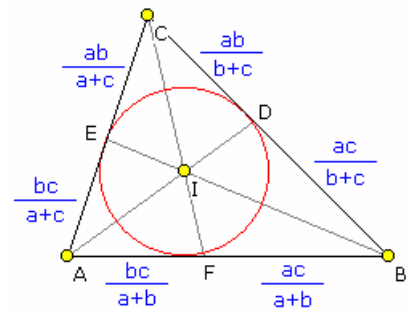
$$= 1/2 (2 BT + 2 AT + 2 CR)$$

$$= 1/2 (BT + BR + AT + AS + CR + CS) = 1/2 (AT + BT + BR + CR + AS + CS)$$

$$= 1/2 (AB + BC + CA) = 1/2 (a + b + c) = s$$

Weiterhin wird

$$s - a = BR' - BC = (BT + AT + AR') - (BR + CR) = (BT + AT + CR) - (BT + CR) = AT \text{ und analog für die Strecken BT bzw. CR } s - b = BT \quad s - c = CR$$



### Beziehungen am Inkreis

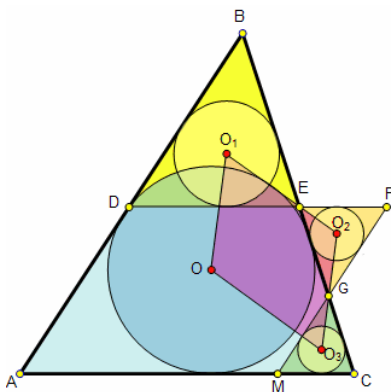
In der Abbildung ist ein beliebiges Dreieck ABC gegeben. Die Gerade DEF sei parallel zu AC und die Gerade FGM parallel zu AB.

O, O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub> und O<sub>3</sub> seien die Inkreismitelpunkte der Dreiecke ABC, DBE, FGE und MGC. Dann gilt:

1a) das Viereck OO<sub>1</sub>O<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ist ein Parallelogramm

Sind O, O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub> und O<sub>3</sub> die entsprechenden Umkreismittelpunkte, so gilt ebenfalls

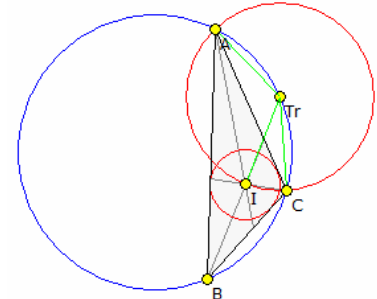
1b) das Viereck  $OO_1O_2O_3$  ist ein Parallelogramm



Sind  $r, r_1, r_2$  und  $r_3$  die Inkreisradien der Dreiecke ABC, DBE, FGE und MGC, so wird 2)  $r = r_1 + r_2 + r_3$   
 Sind  $R, R_1, R_2$  und  $R_3$  die Umkreisradien der Dreiecke ABC, DBE, FGE und MGC, so wird 3)  $R = R_1 + R_2 + R_3$   
 Sind  $S, S_1, S_2$  und  $S_3$  die Flächeninhalte der Dreiecke ABC, DBE, FGE und MGC, so gilt 4)  $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$

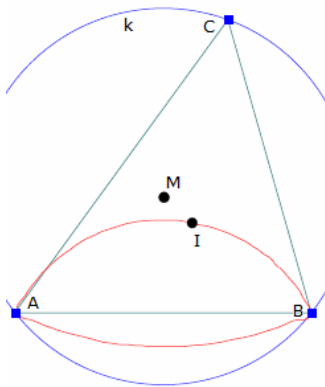
### Trillium-Theorem

Das Trillium Theorem (aus dem Russischen: Satz über das Dreizack bzw. Satz vom Trillium) ist ein Satz an beliebigen Dreiecken, der eine spezielle Eigenschaft von Umkreis und Inkreis eines Dreiecks beschreibt.



In einem Dreieck ABC sei I der Mittelpunkt seines Inkreises und Tr (Trilliumpunkt) der Schnittpunkt von BI (Winkelhalbierende in B) mit seinem Umkreis, dann gilt:

- 1) Die Strecken  $TrA$ ,  $TrI$  und  $TrC$  sind gleich lang, das heißt  $|TrA| = |TrI| = |TrC|$ .
- 2) A, I und C liegen auf einem Kreis dessen Mittelpunkt Tr ist, insbesondere liegt damit der Mittelpunkt des Kreises durch A, I und C auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.



### Winkelhalbierende am Dreieck

Die Winkelhalbierenden eines  $\Delta ABC$  schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt I, dem Inkreismittelpunkt des Dreiecks. Sind die Koordinaten der Punkte A, B, C

A  $(x_a, y_a)$  ; B  $(x_b, y_b)$  und C  $(x_c, y_c)$

so wird für die Geradengleichungen

$$w_\alpha : y = (y - y_a) / (x - x_a) = (-y_a + (y_b + \lambda_1 y_c) / (1 + \lambda_1)) / (-x_a + (x_b + \lambda_1 x_c) / (1 + \lambda_1))$$

wobei  $\lambda_1 = c/b$  ist; nach dem Satz des Apollonius:

In einem Dreieck teilt die Winkelhalbierende eines Innenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Für die beiden anderen Winkelhalbierenden ergeben sich analoge Gleichungen.

Für die Koordinaten des Inkreismittelpunktes I folgt daraus

$$x = (a x_a + b x_b + c x_c) / (a+b+c) \quad y = (a y_a + b y_b + c y_c) / (a+b+c)$$

Wird C bewegt und führt man Polarkoordinaten ein

$$x_a = r \cos \alpha ; y_a = r \sin \alpha$$

$$x_b = r \cos \beta ; y_b = r \sin \beta$$

$$x_c = r \cos \gamma ; y_c = r \sin \gamma$$

so erhält man als Ortskurve des Inkreismittelpunktes I

$$x(t) = (R (u \cos \alpha + v \cos t + w \cos \beta)) / (u + v + w)$$

$$y(t) = (R (u \sin \alpha + v \sin t + w \sin \beta)) / (u+v+w)$$

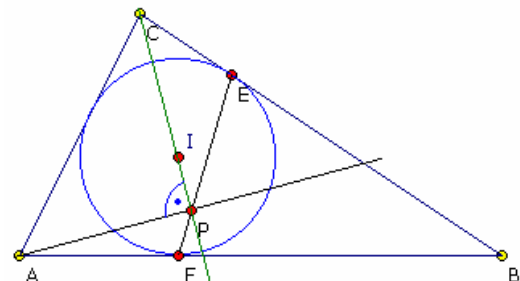
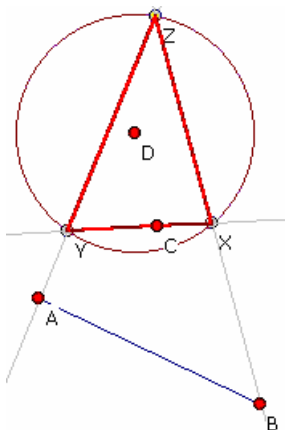
mit  $u = \sqrt{-R^2 (-1 + \cos (t-\beta))}$   $v = \sqrt{-R^2 (-1 + \cos (\alpha-\beta))}$

$$w = \sqrt{-R^2 (-1 + \cos (t-\alpha))}$$

### Honsberger-Inkreissatz

Gegeben sei das Dreieck ABC mit seinem Inkreis und dem Inkreismittelpunkt I. In den Punkten E, F und G berühre der Inkreis die Dreiecksseiten.

Dann schneiden sich die Geraden CI, EF und die Senkrechte zu CI durch den Punkt A in einem Punkt P. (Honsberger 1995)



### Castillons Problem

1750 veröffentlichte Gabriel Cramer folgendes Problem:

Gegeben sind drei Punkte A, B, C und ein Kreis. Gesucht ist ein in den Kreis eingeschriebenes Dreieck auf dessen, evtl. verlängerte Seiten, jeweils genau einer der Punkte A, B, C liegt.

1776 löste der italienische Mathematiker Castillon diese Aufgabenstellung. Sind A, B und C kollinear, so ergibt sich als Sonderfall der Satz des Pappus.

Die Lösung ist sehr anspruchsvoll und wurde veröffentlicht in

- "Exercices de Géométrie" von Frère Gabriel Marie
- "100 great problems of Elementary Mathematics" von Heinrich Dörrie

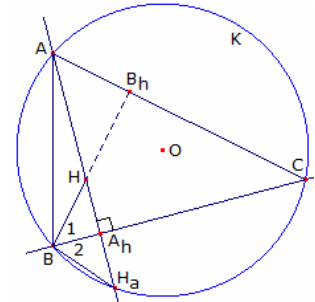
- "Géométrie" von Marcel Berger

Prinzipiell geht man wie folgt vor:

Der Punkt G liegt auf AB und ist bestimmt durch  $AG = \Pi/AB$ , wobei  $\Pi$  die Potenz des Punktes A bezüglich des gegebenen Kreises ist. Verbindet man G mit C, so entsteht der Hilfspunkt H auf dieser Geraden mit  $GH = \Pi'/GC$ , wobei nun  $\Pi'$  die Potenz von G in Bezug auf den Kreis ist. Durch den neuen Punkt H wird nun eine Kreissehne so konstruiert, dass diese einen Peripheriewinkel gleich dem Winkel AGH erzeugt. Prinzipiell gibt es dabei, wenn überhaupt, zwei Lösungen. Diese Sehne schneide den Kreis in den Punkten I und J. Der Punkt Y ist nun der zweite Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden GI, der Punkt X der Schnittpunkt einer Parallelen zu GH durch den Punkt J mit dem Kreis. Verbindet man zuletzt A mit Y, B mit X und Y mit X und verlängert diese Strecken, so schneiden sich AY und BX auf dem Kreis im Punkt Z. Die drei Punkte X, Y und Z stellen dann eins der gesuchten Dreiecke dar.

### Eingeschriebenes Dreieck

Gegeben sei ein Kreis K mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R. Weiterhin sei im Inneren des Kreises ein Punkt H mit  $0 < |OH| < R$  gegeben. Dann gilt: Es gibt unendlich viele, in den Kreis eingeschriebene Dreiecke, die H als Höhenschnittpunkt besitzen.



Beweis: A sei ein beliebiger Punkt auf dem Kreis und m die Gerade durch A und H. m schneidet dann den Kreis in einem zweiten Punkt  $H_a$ .

Die Seite BC des gesuchten Dreiecks ist dann die Mittelsenkrechte der Strecke  $HH_a$ . Dies folgt aus der Tatsache, dass die Spiegelbilder des Höhenschnittpunktes H an den Seiten des Dreiecks ABC auf dessen Umkreis liegen. (Satz von Feuerbach)

Zu zeigen ist noch, dass H auch der Höhenschnittpunkt von ABC ist.

Die Gerade BH schneide CA im Punkt  $B_h$ . Aus der Konstruktion folgt  $\angle B_1 = \angle B_2$  und  $\angle BH_aA_h = \gamma$  (Peripheriewinkel über demselben Bogen)

Und damit  $\angle B_1 + \gamma = \angle B_2 + \angle BH_aA_h = 90^\circ$ .

Die Gerade  $BB_h$  steht damit senkrecht auf der Seite CA des Dreiecks. H liegt auf dem Lot von A auf BC und auf dem Lot von B auf CA und ist somit der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.

Als Folgerung ergibt sich, dass zu jeder Geraden durch einen Punkt H in einem Kreis zwei verschiedene eingeschriebene Dreiecke existieren, die H als Höhenschnittpunkt und einen der Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis als Eckpunkt besitzen.

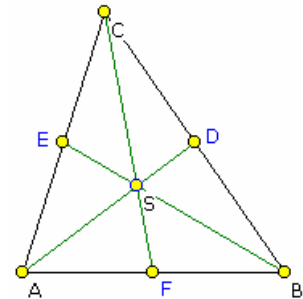
### Beziehungen am Schwerpunkt

An jedem Dreieck ABC mit dem Inkreisradius  $\rho$  gelten folgende Beziehungen (weitere Beziehungen durch analoges Austauschen der Stücke, Winkel):

$$\begin{aligned} AF = FB = c/2 & \quad AF + BD + CE = s \\ AD = s_a = 1/2 \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} & \\ AD^2 + BE^2 + CF^2 = s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = 3/4(a^2 + b^2 + c^2) & \\ \sin(ACF) = c \sin \alpha / \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2} & \\ \sin(BCF) = c \sin \beta / \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2} & \\ AS = 2/3 AD & \quad DS = 1/3 AD \end{aligned}$$

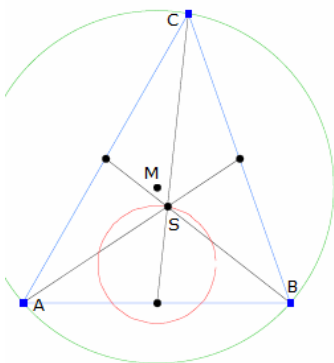
Die sechs Teildreiecke  $\triangle AFS$ ,  $\triangle BFS$ ,  $\triangle BDS$ ,  $\triangle DCS$ ,  $\triangle CES$  und  $\triangle AES$  sind flächengleich.

Die Umkreismittelpunkte dieser sechs Dreiecke liegen auf einem Kreis, dem Lamoen-Kreis.



### Satz von Garfunkel

Liegt der Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC im Inneren des Inkreises, so gilt  $a^2 < 4bc$ ,  $b^2 < 4ca$ ,  $c^2 < 4ab$ .



### Schwerpunktgleichung am Dreieck

Die Seitenhalbierenden eines  $\triangle ABC$  schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt S, dem Schwerpunkt des Dreiecks. Sind die Koordinaten der Punkte A, B, C

$$A(x_a, y_a); B(x_b, y_b) \text{ und } C(x_c, y_c)$$

und  $P_1, P_2$  und  $P_3$  die Seitenmittelpunkte, so wird für die Gleichungen der Seitenhalbierenden

$$s_1: (y - y_a) / (y_1 - y_a) = (x - x_a) / (x_1 - x_a)$$

$$s_2: (y - y_a) / (y_2 - y_a) = (x - x_a) / (x_2 - x_a)$$

Für die Koordinaten des Schwerpunkts S folgt daraus

$$x = (x_a + x_b + x_c) / 3 \quad y = (y_a + y_b + y_c) / 3$$

Wird C bewegt und führt man Polarkoordinaten ein

$$x_a = r \cos \alpha; y_a = r \sin \alpha$$

$$x_b = r \cos \beta; y_b = r \sin \beta$$

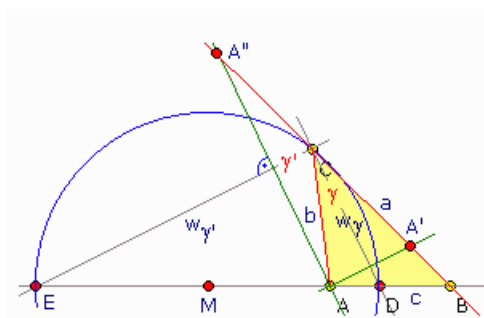
$$x_c = r \cos \gamma; y_c = r \sin \gamma$$

so erhält man als Ortskurve des Schwerpunkts S

$$x(t) = r/3 (\cos t + \cos \alpha + \cos \beta) \quad y(t) = r/3 (\sin t + \sin \alpha + \sin \beta)$$



Diese Kurve ist ein Kreis mit dem Radius  $r/3$  und dem Mittelpunkt bei  $M(r/3 (\cos \alpha + \cos \beta) ; r/3 (\sin \alpha + \sin \beta))$



### Satz des Apollonius

Im Dreieck teilt sowohl die Winkelhalbierende eines Innenwinkels als auch die des zugehörigen Außenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der dem Winkel anliegenden Seiten.

Der geometrische Ort der Eckpunkte  $C_i$  aller Dreiecke  $ABC_i$ , in denen eine Seite die gegebene Länge  $c = AB$  hat und die Längen der anderen Seiten im konstanten Verhältnis  $AC_i : BC_i = \lambda$  stehen, ist der Thaleskreis über der Strecke  $DE$  als Durchmesser, deren Eckpunkte  $D$  und  $E$  die Strecke  $AB$  innen und außen im Verhältnis  $\pm \lambda$  teilen.

Ist im Dreieck  $ABC$  z.B.  $w_\gamma = CD$  die Halbierende des Innenwinkels  $\gamma$ , so steht  $w_\gamma = CE$  als Halbierende des Außenwinkels  $\gamma'$  senkrecht zu  $CD$ . Ist  $A'$  das Spiegelbild von Punkt  $A$  in Bezug auf die Gerade  $CD$  und  $A''$  das von  $A$  in Bezug auf  $CE$ , so gilt  $AA'' \parallel CD$  und  $CE \parallel AA'$  sowie  $b = |AC| = |CA'| = |CA''|$ .

Nach den Strahlensätzen gelten dann für die Geraden  $BE$  und  $BA''$  die Proportionen

$$|AD| : |DB| = |CA''| : |C:B| = b : a = \lambda \quad \text{und} \quad |AE| : |EB| = |CA'| : |C:B| = b : a = \lambda$$

Für den inneren Teilpunkt  $D$  ist das Teilverhältnis positiv, für den äußeren Teilpunkt  $E$  negativ. Da für jeden Punkt  $C_i$  auf dem Thaleskreis über  $DE$  als Durchmesser die Strecken  $C_iD$  und  $C_iE$  aufeinander senkrecht stehen, gelten für jede Lage  $C_i$  die Beziehungen

$$|C_iA''| : |C_iB| = |C_iA'| : |C_iB| = \lambda$$

### Höhen im Dreieck

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta = 2 \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]} / a$$

$$h_b = 2 \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]} / b$$

$$h_c = 2 \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]} / c$$

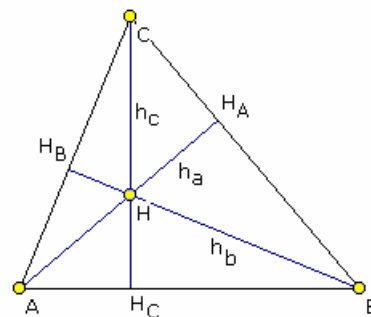
Die Punkte  $H_A, H_B, H_C$  werden Höhenfußpunkte genannt.

### Höhendreieck $\Delta H_A H_B H_C$

halber Umfang des Höhendendreiecks

$$s_h = A / R$$

wobei  $A$  die Fläche und  $R$  der Umkreisradius des Dreiecks  $\Delta ABC$  sind



### Satz von Johnson

$$h_a * h_b * h_c = 2 s_h * A = 2 A^2 / R$$

Seite  $a = 2 h_a h_b^2 h_c^2 / w$

mit  $w = \sqrt{(2 h_a^2 h_b^2 h_c^2 (h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) - h_a^4 h_b^4 - h_a^4 h_c^4 - h_b^4 h_c^4)}$

Weitere Beziehungen

$$1/h_a + 1/h_b + 1/h_c = 1/\rho ; \rho \dots \text{Inkreisradius des Dreiecks } \Delta ABC$$

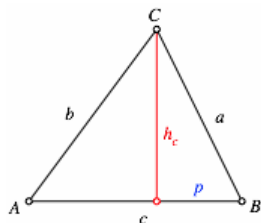
$$1/r_a = 1/h_b + 1/h_c - 1/h_a ; r_a \dots \text{Radius des Ankreises an Seite } a$$

$$1/r_b + 1/r_c = 1/\rho - 1/r_a = 2/h_a$$

$$HA * HH_A = HB * HH_B = HC * HH_C$$

$$HA * HH_A = 1/2 (a^2 + b^2 + c^2) - 4 R^2$$

Spiegelt man in einem spitzwinkligen Dreieck den Höhenschnittpunkt an den Dreiecksseiten, so liegen die Spiegelpunkte auf dem Umkreis.



Die Höhen eines Dreiecks sollen aus den gegebenen  $a, b$  und  $c$  berechnet werden.

Mit dem Satz des Pythagoras wird

$$h_c^2 = a^2 - p^2$$

$$h_c^2 = b^2 - (c-p)^2$$

Gleichsetzen ergibt

$$p = (a^2 - b^2 + c^2) / (2c)$$

und somit

$$h_c^2 = a^2 - p^2 = a^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2 / (4c^2) = (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) / (4c^2)$$

Mit der üblichen Schreibweise  $s = (a+b+c)/2$  wird

$$h_c = 2 \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]} / c$$

Der Zähler ist zyklisch symmetrisch in  $a, b, c$ . Durch zyklische Vertauschung ergibt sich

$$h_a = 2 \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]} / a$$

$$h_b = 2 \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]} / b$$

Mit der Flächenberechnung des Dreiecks  $A = c/2 h_c$  wird

$$A = 1/4 \sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$$

und erneut bei Einsetzen des halben Umfangs  $s$  die Heronsche Formel

$$A = \rho \cdot s = \sqrt{(s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c))}$$

### Beziehungen am Höhenschnittpunkt

An jedem Dreieck  $ABC$  folgende Beziehungen (weitere Beziehungen durch analoges Austauschen der Stücke, Winkel):

$$\angle AFC = \angle BFC = \angle BDA = \angle CDA = \angle CEB = \angle AEB = 90^\circ$$

$$h_a = AD = 2 \rho s / a = bc / (2R) = 2 R \sin \beta \sin \gamma$$

$$2/h_a = 1/r_b + 1/r_c$$

$$a/h_a = \cot \beta + \cot \gamma$$

$$h_b h_c / h_a = 2 A a / (bc) = a^2 / (2R) = a \sin \alpha$$

$$h_a + h_b + h_c = (bc + ca + ab) / (2R) = 2 A (1/a + 1/b + 1/c)$$

$$1/h_a + 1/h_b + 1/h_c = 1/\rho = 1/r_a + 1/r_b + 1/r_c$$

$$h_b h_c + h_b h_a + h_a h_b = 2 \rho s^2 / R = 2 A^2 / (R \rho)$$

$$h_b h_c / h_a + h_b h_a / h_b + h_a h_b / h_c = a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = a^2 + b^2 + c^2$$

$$h_a h_b h_c = 2 A^2 / R$$

$$AF = (b^2 + c^2 - a^2) / (2c) = b \cos \alpha = h_c \cot \alpha$$

$$FB = (c^2 + a^2 - b^2) / (2c) = a \cos \beta = h_c \cot \beta$$

$$AF + BD + CE = s [1 + (a - b)(b - c)(c - a) / (abc)]$$

$$FB + DC + EA = s [1 - (a - b)(b - c)(c - a) / (abc)]$$

$$AF * BD * CE = FB * DC * EA = DE * EF * FD = abc \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$AF / b = EA / c = EF / a = \cos \alpha \quad BD / c = FB / a = FD / b = \cos \beta$$

$$AF / FB = \cot \alpha / \cot \beta$$

$$EF = a (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc) = a \cos \alpha$$

$$DE + EF + FD = 8A^2 / (abc) = abc / (2R^2) = 2r\rho / R = 2A / R$$

$$AH = c \cos \alpha / \sin \gamma = 2 R \cos \alpha$$

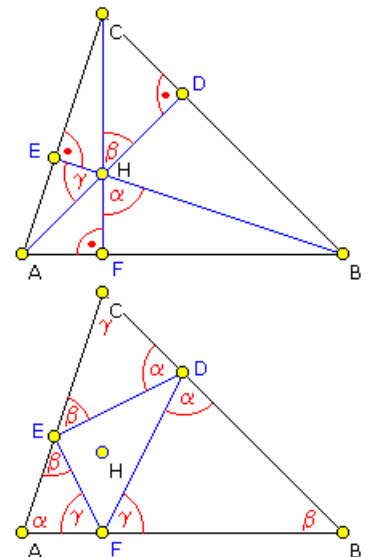
$$DH = b \cot \beta \cos \gamma = c \cot \gamma \cos \beta = 2 R \cos \beta \cos \gamma$$

$$AH + BH + CH = 2 (R + \rho)$$

$$DH + EH + FH = (s^2 - 4 R^2 + \rho^2) / (2R)$$

$$A_{EFA} = A \cos^2 \alpha$$

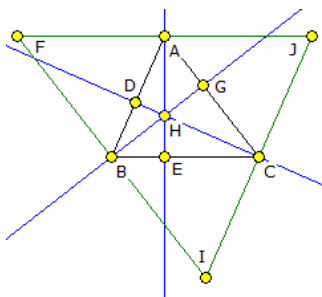
$$A_{HBC} = ab/2 \cot \beta \cos \gamma = ca/2 \cot \gamma \cos \beta = a R \cos \beta \cos \gamma$$



Die Kreise, die durch zwei Eckpunkte des Dreiecks und den Höhenschnittpunkt gehen, sind kongruent zum Umkreis.

Behauptung: Das Dreieck  $\triangle BDF$  ist ähnlich zum Ausgangsdreieck  $\triangle ABC$ .

Nachweis: Die Dreiecke  $\triangle ABD$  und  $\triangle BCF$  sind ähnlich durch den gemeinsamen Winkel  $\beta$  bei B und den rechten Winkel. Für deren Seiten gilt dann  $BD / AB = BF / BC$ . Für die zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle BDF$  sind damit zwei Seitenverhältnisse und der eingeschlossene Winkel  $\beta$  gleich. qed



### Höhenschnittpunktsatz

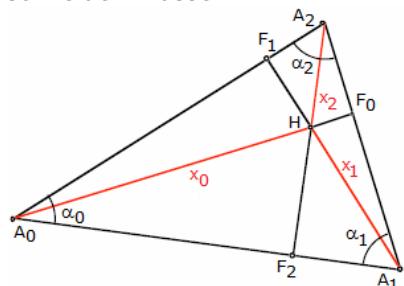
#### Satz über den Höhenschnittpunkt

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis: Den Beweis führt man, indem man den Höhenschnittpunkt als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks zurückführt.

Im  $\triangle ABC$  zeichnet man die Parallelen zu den einzelnen Seiten durch die gegenüberliegenden Punkte. So entsteht das Dreieck  $\triangle FIJ$ . Man zeigt, dass A die Seite JF halbiert und entsprechend B die Seite FI und C die Seite IJ.

Die Dreiecke  $\triangle ACJ$ ,  $\triangle BIC$  und  $\triangle AFB$  sind zum Originaldreieck  $\triangle ABC$  kongruent. Die Winkel kann man über Stufen- und Wechselwinkelbeziehungen in den Dreiecken wieder finden. Außerdem stimmen sie in jeweils einer Seite überein. Damit kann man zeigen, dass die Strecken BC, AJ und AF gleichlang sind. Mit anderen Worten A ist Mittelpunkt der Strecke JF. Entsprechendes gilt für die anderen Seiten. Diese Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt H. Auf Grund der Konstruktion sind sie aber gerade auch die Höhen im Dreieck  $\triangle ABC$ , womit gezeigt ist, dass sich diese auch in einem Punkt schneiden müssen.



### Satz von Segner

Am 29. Januar 1763 schrieb Segner in einem Brief an Euler:

"... das schoene Problem, welches Er Wohlgb. mir mitzutheilen die Geneigt[heit] haben ist einige Probe davon.

Ich will bey Gelegenheit die Aufloesung versuchen; aber ich muss Zeit haben; denn es war mir so gar neu, daß bey einem Dreyecke die intersecio trium perpendicularum ein einziges Punct sey.

Als ich diesem nachdachte, fand ich zugleich, daß die geraden Linien, welche von diesem Punct an die Ecken des Dreyecks gezogen werden

koennen, sich wie die Cosinus dieser Ecken oder Winckel verhalten. Er Wohlgb. haben dieses ohnfelbar auch bemercket."

Segner fand: In einem Dreieck  $A_0A_1A_2$  mit Höhenschnittpunkt H seien  $x_i = HA_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  die Höhenabschnitte.

Mit den Dreieckswinkeln  $\alpha_i = \angle A_{i+1}A_iA_{i-1}$  ( $i \bmod 3$ ) gilt

$$x_0 : x_1 : x_2 = \cos \alpha_0 : \cos \alpha_1 : \cos \alpha_2$$

$$x_0 / \cos \alpha_0 = x_1 / \cos \alpha_1 = x_2 / \cos \alpha_2 = 2R$$

R ... Umkreisradius des Dreiecks

Auffallend ist die formale Ähnlichkeit zum Sinussatz.

### Höhengleichungen am Dreieck

Die Höhen eines  $\Delta ABC$  schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt H, dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks. Sind die Koordinaten der Punkte A, B, C

A  $(x_a, y_a)$  ; B  $(x_b, y_b)$  und C  $(x_c, y_c)$

so wird für die Geradengleichungen

$$h_b : y = (x_a - x_c)/(y_c - y_a) x + y_b - (x_a - x_c)/(y_a - y_c) x$$

$$h_c : y = (x_a - x_b)/(y_b - y_a) x + y_c - (x_a - x_b)/(y_b - y_a) x$$

Für die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H folgt daraus

$$x = (x_a(x_b(-y_a + y_b) + x_c(y_a - y_c)) - (x_b x_c + (y_a - y_b)(y_a - y_c))(y_b - y_c)) / (-x_b y_a + x_c y_a + x_a y_b - x_c y_b - x_a y_c + x_b y_c)$$

$$y = (-(x_a - x_b)((x_a - x_c)(x_b - x_c) + y_a y_b) + (x_a y_a - x_b y_b + x_c(-y_a + y_b)) y_c) / (x_b y_a - x_c y_a - x_a y_b + x_c y_b + x_a y_c - x_b y_c)$$

Wird C bewegt und führt man Polarkoordinaten ein

$$x_a = r \cos \alpha ; y_a = r \sin \alpha$$

$$x_b = r \cos \beta ; y_b = r \sin \beta$$

$$x_c = r \cos \gamma ; y_c = r \sin \gamma$$

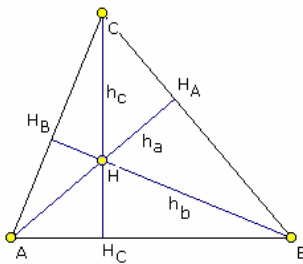
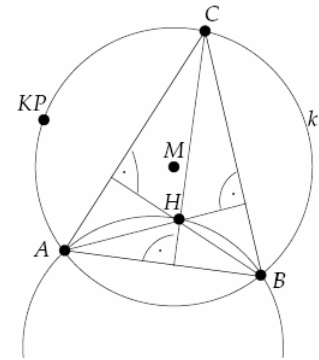
so erhält man als Ortskurve des Höhenschnittpunktes H

$$x(t) = r \cos t + r(\cos \alpha + \cos \beta)$$

$$y(t) = r \sin t + r(\sin \alpha + \sin \beta)$$

Diese Kurve ist ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt bei

$$M(r(\cos \alpha + \cos \beta) ; r(\sin \alpha + \sin \beta))$$



### Heronische Höhenformel

Von einem Dreieck ABC seien die drei Höhen  $h_a, h_b$  und  $h_c$  gegeben. Für diese gilt

$$h_a = 2 \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]} / a$$

$$h_b = 2 \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]} / b$$

$$h_c = 2 \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]} / c$$

Gesucht ist eine Gleichung zur Berechnung des Flächeninhaltes aus den gegebenen drei Höhen.

Aus der Flächengleichung  $A = 1/2 a h_a = 1/2 b h_b = 1/2 c h_c$  wird  $a = 2A/h_a ; b = 2A/h_b ; c = 2A/h_c$

Einsetzen in der Heronischen Dreiecksformel

$$A = \rho \cdot s = \sqrt{(s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c))}$$

mit  $s = (a+b+c)/2$  ergibt

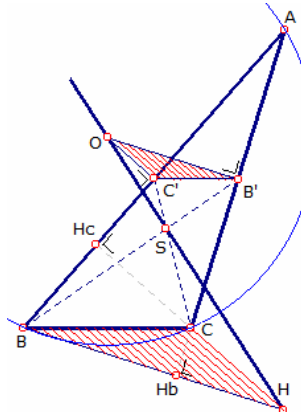
$$A = 1/4 \sqrt{((2A/h_a + 2A/h_b + 2A/h_c) (-2A/h_a + 2A/h_b + 2A/h_c) (2A/h_a - 2A/h_b + 2A/h_c) (2A/h_a + 2A/h_b - 2A/h_c))}$$

Ausklammern führt zu

$$1/A = \sqrt{((h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) (-h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) (h_a h_b - h_b h_c + h_c h_a) (h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a)) / (h_a^2 h_b^2 h_c^2)}$$

und somit zur Heronischen Höhenformel

$$A = (h_a^2 h_b^2 h_c^2) / \sqrt{((h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) (-h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) (h_a h_b - h_b h_c + h_c h_a) (h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a))}$$



### Umkreis-Schwerpunkt-Satz

Satz:

Der Schwerpunkt S, der Umkreismittelpunkt O und der Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks ABC sind kollinear, wobei  $HS : SO = 2 : 1$  gilt, d.h. der Schwerpunkt S teilt die Strecke HO im Verhältnis 2:1.

Beweis des 2. Teils: B' und C' seien die Mittelpunkte von AB und AC. O sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

Dann ist  $OB' \perp AC$  und  $OC' \perp AB$ . Weiterhin gilt für die Höhenlinien BH und CH:  $BH \perp AC$  und  $CH \perp AB$ .

Damit wird  $BH \parallel OB'$  und  $CH \parallel OC'$ . B'C' und BC sind als Mittelparallele ebenfalls zueinander parallel.

Die zwei Dreiecke OB'C' und HBC sind folglich zueinander homothetisch, d.h. sie können durch eine zentrische Streckung ineinander übergeführt werden.

Die Verbindungsstrecken entsprechender Höhenpunkte schneiden sich dann. BB' und CC' sind die Seitenhalbierenden von ABC, die sich in S schneiden.

Da O, S und H kollinear sind (1. Teil des Satzes), geht OH auch durch S. Der Ähnlichkeitsfaktor ist  $-1/2$  womit folgt  $OS : ZH = 1 : 2$

### Höhendreieck (2)

Gegeben sind die Höhenfußpunkte D, E und F eines Dreiecks. Gesucht ist das Ausgangsdreieck ABC.

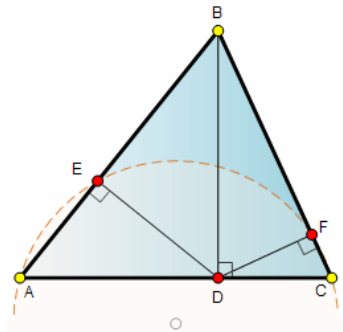
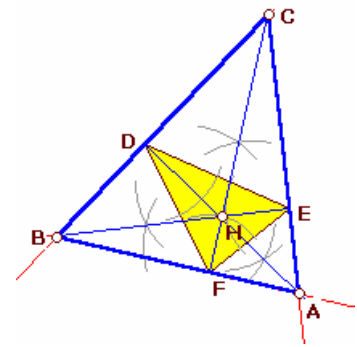
#### Konstruktion:

Die verlängerten Winkelhalbierenden des Höhenfußpunktdreiecks DEF sind gleichzeitig die Höhen im Dreieck ABC, d.h.

1. Konstruktion der Winkelhalbierenden des Dreiecks DEF
2. Errichten der Senkrechten zu den Winkelhalbierenden in den Punkten D, E und F
3. Diese Senkrechten schneiden sich untereinander in den gesuchten Punkten A, B und C

Für stumpfwinklige Dreiecke existieren drei Lösungen. Dabei ist im orthozentrischen Viereck ABCH (H ... Höhenschnittpunkt) der Punkt H mit jeweils einem der Punkte A, B, C zu tauschen.

Das Höhendreieck wird auch Fußpunktdreieck genannt. Genauer gesagt, stellt das Höhendreieck aber nur ein spezielles Fußpunktdreieck dar, das des Höhenschnittpunktes.



### Höhen am Dreieck, Aufgabe

Gegeben ist ein Dreieck  $\triangle ABC$  mit der Höhe BD.

Vom Höhenfußpunkt D werden senkrechte die Strecken DE auf AB und DF auf BC gezeichnet. Dann gilt: Die Punkte A, E, F und C sind konzyklisch, d.h. sie liegen auf einem Kreis.

Nachweis: Nach dem Kathetensatz ist  $BF \cdot BC = BD^2 = BE \cdot BA$  und damit  $BF \cdot BC = BE \cdot BA$

Nach der Umkehrung des Sehnensatzes am Dreieck müssen dann A, E, F und C auf einem Kreis liegen.

### Satz von Thomsen

Gegeben sei ein Dreieck ABC und ein beliebiger Punkt P auf der Seite CA. Folgender Streckenzug wird konstruiert:

Die Parallele zu der Geraden BC durch den Punkt P schneide die Gerade AB in Q.

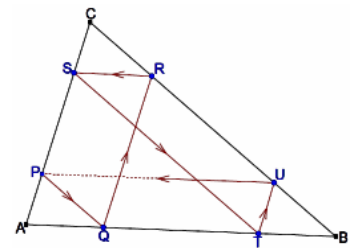
Die Parallele zu der Geraden CA durch den Punkt Q schneide die Gerade BC in R.

Die Parallele zu der Geraden AB durch den Punkt R schneide die Gerade CA in S.

Die Parallele zu der Geraden BC durch den Punkt S schneide die Gerade AB in T.

Die Parallele zu der Geraden CA durch den Punkt T schneide die Gerade BC in U.

Dann geht die Parallele zu der Geraden AB durch den Punkt U wieder durch den Punkt P. Der Streckenzug schließt sich nach 6 Strecken.

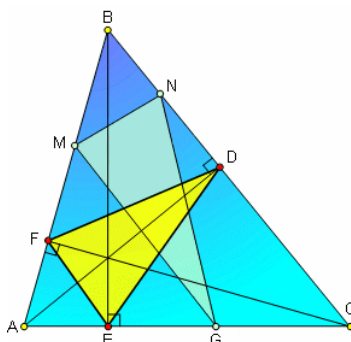


Beweis: Die vielen Parallelen in der Figur erlauben die Anwendung des Strahlensatzes. Nach dem

1. Strahlensatz gilt:  $AP / AC = AQ / AB$ ; denn  $PQ \parallel BC$   $AQ / AB = CR / CB$ ; denn  $QR \parallel CA$   
 $CR / CB = CS / CA$ ; denn  $RS \parallel AB$   $CS / CA = BT / BA$ ; denn  $ST \parallel BC$   
 $BT / BA = BU / BC$ ; denn  $TU \parallel CA$  und damit  $AP / AC = BU / BC$

Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes folgt daraus, dass die Gerade UP parallel zu der Geraden AB ist. Das heißt, die Parallele zu der Geraden AB durch den Punkt U geht durch den Punkt P. w.z.z.w.

Der Satz von Thomsen gilt auch, wenn von einem Punkt P auf der Verlängerung der Seite CA ausgegangen wird.



### Fagnano-Problem

1775 formulierte der italienische Mathematiker Giovanni F. Fagnano dei Toschi (1715-1797) folgendes Problem: Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC. In dieses soll ein Dreieck PQR, mit P auf BC, Q auf CA und R auf AB, so konstruiert werden, dass dessen Umfang möglichst klein wird. Als Lösung erhält man, dass genau das Fußpunktdreieck der Höhen diese Aufgabe erfüllt.

Einen weiteren Beweis mittels Skalarprodukt findet man unter <http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200422.pdf>

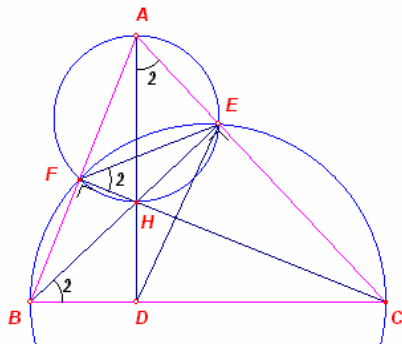
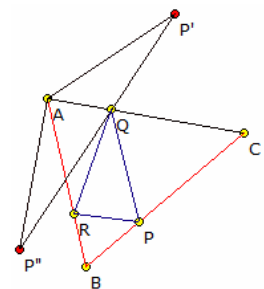
### Fagnano-Problem-Beweis

Das Dreieck ABC sei gegeben und auf dessen Seiten die Punkte P, Q und R. Der Punkt P wird an den Seiten AC und AB gespiegelt. Die Spiegelpunkte seien P' und P''. Für den Umfang des Dreiecks PQR wird dann  $P'Q + QR + RP''$

D.h. für ein eingeschriebenes Dreieck PQR mit festem P hat das Dreieck einen minimalen Umfang, bei dem einer der Punkte Q oder R auf der Strecke P'P'' liegt.

Der Winkel P'AP'' ist doppelt so groß wie der bei A, d.h. alle Dreiecke P'AP'' sind ähnlich. Das Dreieck mit der kürzesten Basis P'P'' hat auch die kürzeste Seite AP'.

Da  $AP' = AP$  ist, muss  $AP$  senkrecht auf  $BC$  stehen. Aus Ähnlichkeitsgründen müssen auch  $BQ$  senkrecht zu  $AC$  und  $CR$  senkrecht zu  $AB$  sein. Damit ist das Dreieck  $PQR$  mit dem kürzesten Umfang das Höhenfußpunkttriangleck.



### Höhen und Sehnenviereck

Gegeben sei ein Dreieck  $\Delta ABC$  und in ihm die Höhen  $BE$  und  $CF$ .  $H$  sei der Höhenschnittpunkt. Daraus ergibt sich sofort, dass auch  $AH$  Höhe im Dreieck ist und senkrecht im Punkt  $D$  zu  $AB$  steht. Dann gilt:  $AFHE$  ist Sehnenviereck. Für den Winkel bei  $F$  wird  $\angle CFE = \frac{1}{2}$  Bogen( $HE$ ) =  $\angle CAD$ .  $BCEF$  ist ebenfalls Sehnenviereck mit  $\angle CBE = \frac{1}{2}$  Bogen( $CE$ ) =  $\angle CFE$ . Im Viereck  $ABDE$  ist dann  $\angle DAE = \angle DBE$ , so dass die Punkte  $A, B, D$  und  $E$  auf einem Kreis liegen.

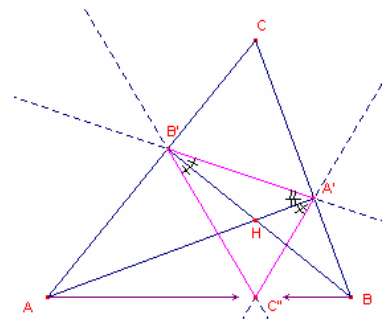
### Satz von Gudermann

nach Christoph Gudermann, 1798 - 1852, Satz von 1835:

$AA'$  und  $BB'$  seien Höhenlinien im Dreieck  $ABC$ , die sich im Punkt  $H$  schneiden. Spiegelung der Geraden  $A'B'$  an  $BB'$  und  $A'B'$  an  $AA'$  ergeben ein Dreieck  $A'B'C''$ .

Dann gilt: Von diesem Dreieck ist  $H$  der Inkreismittelpunkt.  $C$  ist der Schnittpunkt von zwei Außenwinkelhalbierenden, von  $B'C$  und  $A'C$ .  $A$  und  $B$  sind weiterhin die Schnittpunkte von je einer Innen- und einer Außenwinkelhalbierenden.  $C''H$  ist Winkelhalbierende im Dreieck  $A'B'C''$  und verläuft durch  $C$ .

$AB$  ist Außenwinkelhalbierende von  $A'B'C''$  und somit verlaufen die Geraden  $CH$  und  $AB$  durch den Punkt  $C''$ , d.h.  $C''$  ist Höhenfußpunkt.



### Fußpunkttriangleck eines Punktes

Das Dreieck, das von den Fußpunkten der Lote eines Punktes  $P$  auf die Seiten eines Dreiecks  $ABC$  gebildet wird, heißt Fußpunkttriangleck von  $P$  bezüglich des Dreiecks.

Die Produkte  $p_1 = PA \cdot BC$ ,  $p_2 = PB \cdot AC$ ,  $p_3 = PC \cdot AB$  heißen die Fußpunktprodukte von  $P$ . Es gilt:

Die Seiten des Fußpunkttrianglecks von  $P$  verhalten sich zueinander wie die Fußpunktprodukte von  $P$ .

Nachweis:

$A'C'PB'$  bilden ein Sehnenviereck; der Durchmesser des Umkreises ist  $AP$ .

$$B'C' / \sin \alpha = 2R_{AC'B'} = AP$$

$$BC / \sin \alpha = 2R$$

$$\text{Daraus folgt } B'C' = AP \cdot BC / (2R) = p_1 / (2R)$$

$$C'A' = p_2 / (2R) \text{ und } A'B' = p_3 / (2R)$$

Nach dem Sinussatz wird dann und im Dreieck  $ABC$  gilt wobei  $R$  des Radius des Umkreises des Dreiecks  $ABC$  ist. Daraus folgt  $B'C' = AP \cdot BC / (2R) = p_1 / (2R)$  und ebenso

Werden die Seiten des Fußpunkttrianglecks  $A'B'C'$  mit  $a', b', c'$  bezeichnet, so ergibt sich

$$a' : b' : c' = p_1 : p_2 : p_3 \quad \text{qed}$$

Die vier Fußpunkttrianglecke eines der Punkte  $P, A, B, C$  bezüglich des Dreiecks aus den anderen drei Punkten sind zueinander ähnlich.

Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$  und in ihm ein Punkt  $P$ . Das Dreieck  $DEF$  sei das Fußpunkttriangleck von  $P$ .

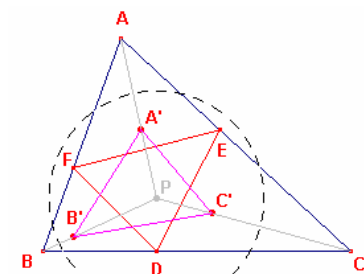
Die Eckpunkte werden nun an einem Kreis um  $P$  invertiert. Die entstehenden Inversionspunkte seien  $A', B'$  und  $C'$ . Dann gilt:

Das Dreieck  $A'B'C'$  ist ähnlich zum Fußpunkttriangleck  $DEF$  des Punktes  $P$ .

Nachweis: In der Abbildung sind die  $DEF$  und  $A'B'C'$  die zu betrachtenden Dreiecke und  $P$  der Punkte in  $ABC$ . Dann ist

$$EF : FD : DE = (PA \cdot BC) : (PB \cdot AC) : (PC \cdot AB)$$

Diese Gleichung ergibt sich aus den Ausführungen der vorhergehenden



Seite;

Sind  $a, b$  die Abstände der Endpunkte einer Strecke zum Inversionszentrum bei einer Streckeninversion am Kreis, so ist  $k^2/(ab)$  der auftretende Inversionsfaktor und es wird

$$A'B' = k^2/(PA \cdot PB) \cdot AB = k^2/(PA \cdot PB \cdot PC) \cdot (PC \cdot AB)$$

$$A'C' = k^2/(PA \cdot PC) \cdot AC = k^2/(PA \cdot PC \cdot PB) \cdot (PB \cdot AC)$$

$$B'C' = k^2/(PB \cdot PC) \cdot BC = k^2/(PB \cdot PC \cdot PA) \cdot (PA \cdot BC)$$

Aus  $EF : FD : DE = B'C' : A'C' : A'B'$  folgt dann unmittelbar nach Ähnlichkeitssatz die oben gemachte Aussage.





Mit  $A(-1; 0)$ ,  $B(1;0)$  und  $C(s; t)$  wird für die Koordinaten von D:

$$y = t / (x - 2) + t$$

Durch Drehung um  $45^\circ$  und Verschiebung des Koordinatensystems ergibt sich  $x^2 - y^2 - 2t = 0$  und so in jedem Fall eine Hyperbel.

### Satz von Stewart

In einem Dreieck ABC teile die Ecktransversale CZ die gegenüberliegende Seite c in die Abschnitte  $AZ = m$  und  $ZB = n$ . Dann gilt für die Länge  $CZ = t$  stets:

$$c(t^2 + mn) = ma^2 + nb^2$$

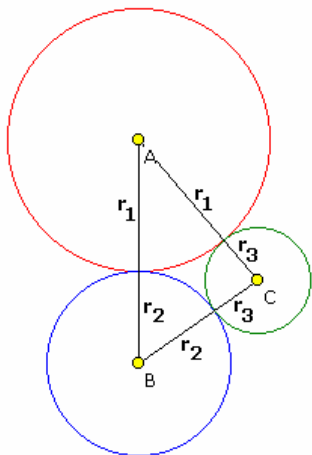
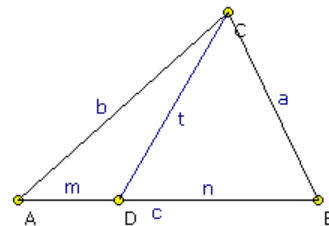
$$t = \sqrt{[(ma^2 + nb^2)/(m + n) - mn]}$$

Wird die Seite AB von Z außerhalb von AB geteilt, so gilt für  $AZ > AB$

analog  $c(t^2 + mn) = ma^2 - nb^2$

Anwendung: Für die Seitenhalbierende  $s_c$  mit  $m = n = c/2$  wird dann:

$$c(t^2 + c^2/4) = c/2(a^2 + b^2) \text{ und somit } s_c = t = 1/2 \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$



### Soddy Kreise

Der Umkreisradius R eines Dreiecks ergibt sich zu

$$R = 1/4 * abc / \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

Die drei Kreise um die Eckpunkte des Dreiecks, welche sich paarweise berühren, sind die Soddy-Kreise. Sind  $r_1, r_2$  und  $r_3$  deren Radien, wird

$$R = (r_1+r_2)(r_1+r_3)(r_2+r_3) / [4 \sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1+r_2+r_3)}]$$

$$\text{und } r_1 = 0.5(-a+b+c) \quad r_2 = 0.5(a-b+c) \quad r_3 = 0.5(a+b-c)$$

Abstand d von Schwerpunkt zum Umkreismittelpunkt

$$d^2 = R^2 - 1/9(a^2 + b^2 + c^2)$$

Aus der Heronischen Dreiecksformel folgt unter Berücksichtigung von  $s = r_1 + r_2 + r_3$  weiterhin für den Flächeninhalt des Dreiecks

$$A^2 = r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)$$

### Innerer und äußerer Soddy-Kreis

Für die drei, sich paarweise berührenden Soddy-Kreise um die Dreieckspunkte,

existieren, entsprechend dem Berührungsproblem von Apollonius, genau zwei Kreise, die diese drei Kreise berühren: der innere und äußere Soddy-Kreis.

Sind  $r_1, r_2$  und  $r_3$  die Radien der Soddy-Kreise, so ergibt sich

Radius des inneren Soddy-Kreises

$$r = r_1 r_2 r_3 / [r_2 r_3 + r_1(r_2 + r_3) + 2 \sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}]$$

Radius des äußeren Soddy-Kreises

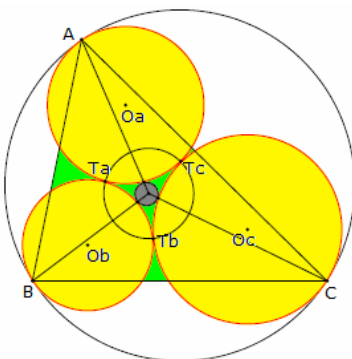
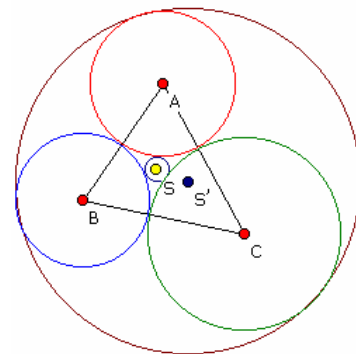
$$R = r_1 r_2 r_3 / [r_2 r_3 + r_1(r_2 + r_3) - 2 \sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}]$$

Die Mittelpunkte der beiden Kreise, der innere S bzw. äußere S' Soddy-Punkt, ergeben sich als spezielle Lösungen des allgemeinen Apollonius-Problems für drei Kreise. Die Gerade, auf der S und S' liegen, heißt Soddy-Gerade. Auf dieser Geraden befinden sich auch der Inkreismittelpunkt, der Gergonne-Punkt, die Griffiths-Punkte, die Rigby-Punkte sowie der Fletcher-Punkt.

Der Fletcher-Punkt ist der Schnittpunkt der Soddy-Geraden mit der Gergonne-Geraden.

Die erste und zweite Griffiths-Punkt  $Gr$  und  $Gr'$  ergeben sich aus  $Gr = I + 4 Ge$  bzw.  $Gr' = I - 4 Ge$ , wobei I der Inkreismittelpunkt und Ge der Gergonne-Punkt sind.

Der Gergonne-Punkt und der Inkreismittelpunkt sind die äußeren und inneren Ähnlichkeitszentren des inneren und äußeren Soddy-Kreises.



### Lucas-Kreise

Lucas-Kreise eines Dreiecks sind die drei Kreise, die sich paarweise berühren und gleichzeitig den Umkreis des Dreiecks von innen tangieren und damit durch je einen Eckpunkt verlaufen.

Mit der Conway-Dreiecksnotation ergeben sich für die Mittelpunkte der Lucas-Kreise die baryzentrischen Koordinaten

$$O_a = (a^2(S_A + 2S) : b^2 S_B : c^2 S_C)$$

$$O_b = (a^2 S_A : b^2(S_B + 2S) : c^2 S_C)$$

$$O_c = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2(S_C + 2S))$$

Die Radien der drei Kreise haben zum Umkreisradius die Verhältnisse  $S/(a^2+S)$ ,  $S/(b^2+S)$  und  $S/(c^2+S)$ .

Für die Berührungspunkte der Kreise ergibt sich

$$T_a = (a^2 S_A : b^2(S_B + S) : c^2(S_C + S))$$

$$T_b = (a^2(S_A + S) : b^2 S_B : c^2(S_C + S))$$

$$T_c = (a^2(S_A + S) : b^2(S_B + S) : c^2 S_C)$$

Der Kreis durch die drei Berührungspunkte  $T_a, T_b$  und  $T_c$  ist der innere Lucas-Kreis, das Dreieck  $T_a T_b T_c$  das Lucas-Dreieck.

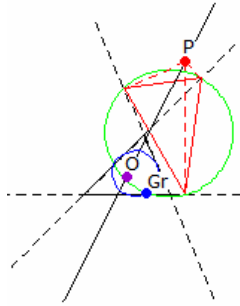
Für die Lucas-Kreise ist der Umkreis des Dreiecks ein äußerer Soddy-Kreis. Der innere Lucas-Soddy-Kreis berührt die drei Lucas-Kreise von innen.

Ebenso kann man Kreise betrachten, die zwei Lucas-Kreise von außen und den Umkreis von innen berühren. Setzt man  $n = 1$  ergibt sich für den Mittelpunkt  $O_n^a$  eines solchen Kreises

$$O_n^a = (a^2 ((2n^2 - 1)S_A - 2nS) : b^2 ((2n^2 - 1)S_B + 2n(n + 1)S) : c^2 ((2n^2 - 1)S_C + 2n(n + 1)S))$$

Analog ergeben sich die Kreise bei B und C.

Für  $n > 1$  beschreibt der Term die baryzentrischen Koordinaten der Mittelpunkte von Kreisen, die zwei Lucas-Kreise und den Kreis mit dem Zentrum  $O_{n-1}^a$  berühren.



### Griffiths-Punkt

Gegeben sei ein Dreieck. Bewegt sich ein Punkt P entlang einer Geraden durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks, so entsteht ein Kreis, der von den Lotfußpunkten von P auf die evtl. verlängerten Dreiecksseiten gebildet wird.

Dieser Kreis verläuft dann stets durch einen Punkt Gr, den sogenannten Griffiths-Punkt. Dieser Punkt liegt auf dem Neun-Punkte-Kreis des Dreiecks.

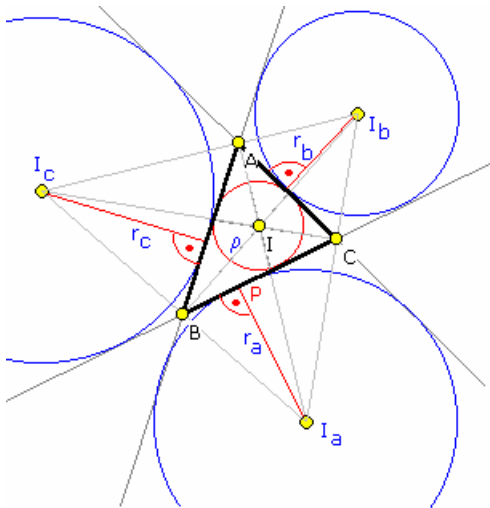
Der Griffiths-Punkt ist der Kimberling-Punkt X1373, mit der trilinearen

Zentralfunktion

$$1 + 8 \Delta / (a (b + c - a))$$

wobei  $\Delta$  den Flächeninhalt des Dreiecks darstellt.

### Ankreise des Apollonius



Die Ankreismittelpunkte sind die Schnittpunkte der Innen- und Außenwinkelhalbierenden des Dreiecks. Die Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sind die Höhen des Ankreisdreiecks  $M_1M_2M_3$ .

Die Potenzlinien der Ankreise sind die Winkelhalbierenden des Mittendreiecks von ABC. Außerdem ist der Potenzpunkt der Ankreise der Inkreismittelpunkt des Mittendreiecks.

### Ankreis-Satz

Je zwei Außenwinkelhalbierende treffen sich mit der Innenwinkelhalbierenden des dritten Winkels in einem Punkt.

Für die Ankreisradien  $\rho_a, \rho_b, \rho_c$ , den Inkreisradius  $\rho$  des Dreiecks und dessen Höhen auf die Seiten gilt:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \\ \frac{1}{\rho_a} \\ \frac{1}{\rho_b} \\ \frac{1}{\rho_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{h_a} \\ \frac{1}{h_b} \\ \frac{1}{h_c} \end{pmatrix}$$

### Beziehungen an den Ankreisen

An jedem Dreieck ABC folgende Beziehungen (weitere Beziehungen durch analoges Austauschen der Stücke, Winkel):

$$r_a = \rho s / (s - a) = s \tan \alpha/2 = \sqrt{[s (s - b)(s - c) / (s - a)]}$$

$$r_a = 2 A / (s - a)$$

$$r_a + r_b + r_c = 4 R + \rho$$

$$r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b = s^2$$

$$r_a r_b r_c = A^2 / r$$

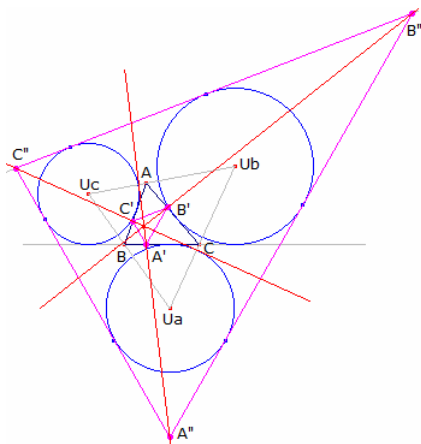
$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16 R^2 - \rho^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$1/r_b + 1/r_c = 2 / h_a$$

$$1/r_a + 1/r_b + 1/r_c = 1/\rho = 1/h_a + 1/h_b + 1/h_c$$

Ist P der Ankreisberührungspunkt auf der Seite a, so gilt für die Dreieckstransversalen  $AP = s$ ,  $BP = s - c$  und  $CP = s - b$  mit  $s = (a + b + c) / 2$

Der Abstand zwischen Inkreis- und Ankreisberührungspunkt auf einer Dreiecksseite ist damit dem Betrag nach gleich der Differenz der beiden anderen Dreiecksseiten, z.B. für die Seite AB gleich  $|a - b|$ .



### Außentangenten am Dreieck, Außentangentendreieck

Die verlängerten Seiten eines Dreiecks ABC bilden die gemeinsamen Tangenten von je zwei Ankreisen. Zusätzlich besitzen je zwei der Ankreise weitere äußere Tangenten, die keine Dreiecksseite sind, die sogenannten Außentangenten des Dreiecks. Mitunter spricht man auch von der A-Außentangente, B-Außentangente und C-Außentangente.

Diese Außentangenten bilden das Außentangentendreieck  $A''B''C''$  bzw. das umhüllende Dreieck von ABC.

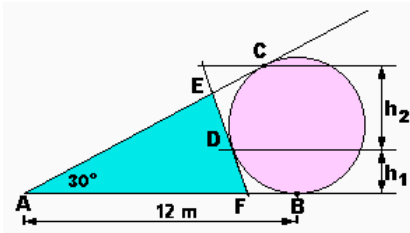
### Clawson-Punkt

Das Außentangentendreieck  $A''B''C''$  und das Höhenfußpunktendreieck  $A'B'C'$  des Dreiecks ABC befinden sich in Ähnlichkeitslage, d.h. die Geraden  $A'A''$ ,  $B'B''$  und  $C'C''$  schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt, das zugehörige Ähnlichkeitszentrum, ist der Clawson-Punkt,

Kimberling-Punkt X19, mit der trilinearen Zentralfunktion  $\tan A$ .

### Beispielaufgabe zum Ankreis

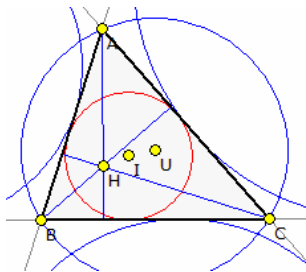
Auf der 12 m langen Strecke AB wird im Punkt B ein Kreis errichtet. Vom Punkt A geht eine Gerade aus, die mit der Strecke AB einen Winkel von  $30^\circ$  einschließt und den Kreis tangiert. Der Berührungspunkt ist C. Der Abstand des Punktes C von der Strecke AB wird im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Die Gerade, die unter diesem Verhältnis parallel zu AB verläuft, schneidet den Kreis im Punkt D. In D wird die Tangente an den Kreis gelegt, die AB in F und AC in E schneidet. Wie groß ist der Umfang des Dreiecks AEF?



**Lösung:** Hilfssatz: Von einem Punkt ausgehende Tangentensegmente an einen Kreis sind immer gleich lang.

Nach dem Hilfssatz sind die Strecken FD und FB gleich lang. Ebenso gilt dies für ED und EC. Aus diesem Grund kann man den gesuchten Umfang  $AF + FD + DE + EA$  auch als die Summe von  $AB + AC$  darstellen. Ebenfalls aus dem Hilfssatz folgt, dass diese beide Strecken gleich lang sind  $\rightarrow u = 12 \text{ m} + 12 \text{ m} = 24 \text{ m}$

Man sieht, dass der Ort von D keine Rolle spielt. Würde man D auf dem Kreis immer mehr zu einem der beiden Punkte B oder C verschieben, würde sich ein entartetes Dreieck (nämlich eine doppelte Strecke) ergeben, die  $2 \cdot 12 \text{ m} = 24 \text{ m}$  lang wäre. Dies kann leider aber nur als Lösung dienen, wenn die Universalität der Lösung schon angenommen wird und daher unabhängig vom Ort ist.



### Satz von Hansen

2004 wurde durch D.W. in "Mathematics Teacher" folgender Satz veröffentlicht:

Sind  $r, r_a, r_b$  und  $r_c$  der Inkreisradius und die drei Ankreisradien in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten  $a, b$  und  $c$ , so gilt

$$r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$$

$$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

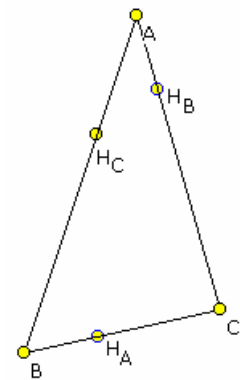
Dieser Satz kann auf allgemeine Dreiecke erweitert werden.

ABC sei ein Dreieck mit dem Höhenschnittpunkt H und dem Umkreisradius R.

Dann gilt  $r + r_a + r_b + r_c = AH + BH + CH + 2R$   
 $r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = AH^2 + BH^2 + CH^2 + 4R^2$

Weiterhin gilt  $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

Ebenso ist auch: In einem Dreieck ABC gilt die Beziehung  $r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = a^2 + b^2 + c^2$  genau dann, wenn  $\Delta ABC$  rechtwinklig ist.



### Halbumfangspunkte am Dreieck

Fährt man ausgehend von A entlang der Seiten den Umfang eines Dreiecks ab, so existiert auf der Seite BC stets ein Punkt  $H_A$ , für den der Weg  $AB + BH_A$  über den Eckpunkt B und  $AC + CH_A$  über C gleich groß ist. Dieser Punkt  $H_A$  heißt Halbumfangspunkt.

Analog existieren die Punkte  $H_B$  und  $H_C$ .

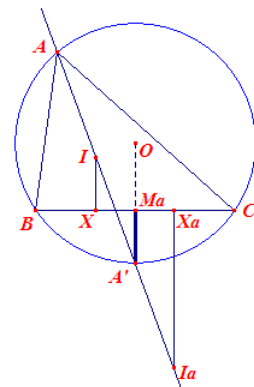
Weiterhin gilt:  $AH_B = BH_A, AH_C = CH_A, BH_C = CH_B$

Die Berührungspunkte der Ankreise fallen mit den Halbumfangspunkten zusammen.

(rechte Abbildung):

In der Darstellung sei  $IX = r$ , der Inkreisradius und  $I_a X_a = r_a$ , der Ankreisradius zur Seite  $a$ .  $A'$  sei weiter der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von  $a$  mit dem

Dreiecksumkreis, Mittelpunkt  $O$ , des Dreiecks.  $M_a$  ist der Mittelpunkt von BC und von  $XX_a$ . Dann gilt:  $M_a A' = \frac{1}{2}(r_a - r)$



### Weitere Sätze

Die Mittelsenkrechte von AB schneide den Umkreis in den Punkten F und F' (siehe Abbildung). Die Strecke CF halbiert dann den Innenwinkel ACB und F' den entsprechenden Außenwinkel.

Die Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sind die Höhen im Dreieck der Ankreismittelpunkte

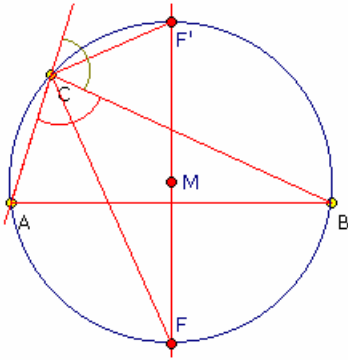
Im spitzwinkligen Dreieck gilt

... die Höhen halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks

... die Seiten halbieren die Außenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks

Im stumpfwinkligen Dreieck gilt

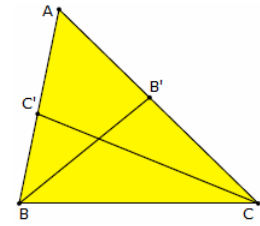
... eine Höhe und zwei verlängerte Seiten halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks



... die dritte Seite und die beiden anderen Höhen halbieren die Außenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks  
 Ist in einem Dreieck der Winkel  $\alpha = 60^\circ$ , so gilt für den Flächeninhalt  $A = 1/4 \sqrt{3} [a^2 - (b - c)^2]$   
 Ist in einem Dreieck der Winkel  $\alpha = 120^\circ$ , so gilt für den Flächeninhalt  $A = 1/12 \sqrt{3} [a^2 - (b - c)^2]$

**Satz von Steiner-Lehmus**

Satz: Jedes Dreieck mit zwei gleich langen Winkelhalbierenden ist gleichschenkelig. (nach Daniel Christian Ludolf Lehmus (1780-1863) und Jakob Steiner)  
 Einer der ersten trigonometrischen Beweise des Satzes wurde 1916 von dem rumänischen Mathematiker V. Cristescu gegeben.



Ein besonders eleganter Beweis wurde 1999 von M.Hajja in einem sowjetischen Buch von 1959 wiederentdeckt.

Nachweis: Schreibt man die Fläche des Dreiecks ABC mit Hilfe der Dreiecke ABB' und BB'C auf zwei verschiedene Arten, so erhält man

(\*)  $w_b = 2ac / (a + c) \cos \beta/2$                       (\*\*\*)  $w_a = 2bc / (b + c) \cos \alpha/2$

Angenommen es sei  $a > b$ . Dann ist  $\alpha > \beta$ , also  $\alpha/2 > \beta/2$ . Da  $\alpha/2$  und  $\beta/2$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  liegen wird  $\cos \alpha/2 < \cos \beta/2$

Analog folgt für  $b < a$  auch  $bc / (b + c) < ac / (a + c)$

Aus den Gleichungen (\*) und (\*\*\*) folgt dann  $w_a > w_b$ .

Wenn nach dem Steiner-Lehmus-Theorem  $w_a = w_b$  gilt, führt die Annahme  $a > b$  zum Widerspruch  $w_a > w_b$ .

Analog führt auch die Annahme  $a < b$  zu einem Widerspruch.

**Satz über die Euler-Gerade**

In jedem Dreieck liegt der Schnittpunkt H der Höhen, der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden und der Schnittpunkt U der Mittelsenkrechten (der Mittelpunkt des Umkreises) auf einer Geraden, der Euler-Gerade.

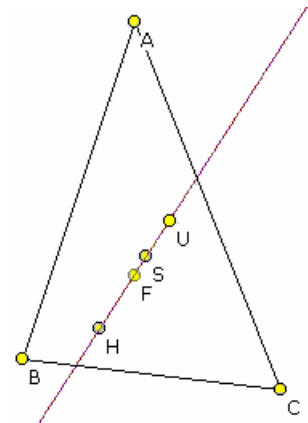
Es gilt  $HS = 2 * US$                        $HU = 3 * US$

d.h. der Schwerpunkt teilt die Verbindungsstrecke von Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt im Verhältnis 2:1.

Zusätzlich liegen auch der Longchamp-Punkt L und der Mittelpunkt des Feuerbachschen Neun-Punkte-Kreises F auf dieser Geraden.

Die Euler-Gerade schneidet die Soddy-Gerade im Longchamp-Punkt und die Gergonne-Gerade im Evans-Punkt.

Die Liste enthält weitere Punkte, mit deren trilinearen Zentralfunktion, die auf der Eulerschen Geraden liegen.



- X(2)  $1/a$                                       Schwerpunkt
- X(3)  $\cos \alpha$                                 Umkreismittelpunkt
- X(4)  $\sec \alpha$                                 Höhenschnittpunkt
- X(5)  $\cos(\beta - \gamma)$                         Neun-Punkte-Kreismittelpunkt
- X(20)  $\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma$             DeLongchamp-Punkt
- X(21)  $1/(\cos \beta + \cos \gamma)$                 Schiffler-Punkt
- X(22)  $a(b^4 + c^4 - a^4)$                     Exeter-Punkt
- X(23)  $a(b^4 + c^4 - a^4 - b^2c^2)$         Far-out-Punkt
- X(26)  $a(b^2 \cos 2\beta + c^2 \cos 2\gamma - a^2 \cos 2\alpha)$     Umkreiszentrum Tangentialdreieck
- X(30)  $\cos \alpha - 2 \cos \beta \cos \gamma$         Eulerscher Unendlichkeitseckpunkt
- X(384)  $a^3 + b^2c^2/a$                       Conway-Punkt
- X(401)  $\csc \alpha (\sin 2\beta \sin 2\gamma - \sin 2\alpha \sin 2\alpha)$     Bailey-Punkt

**Gergonne-Punkt**

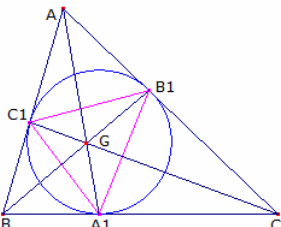
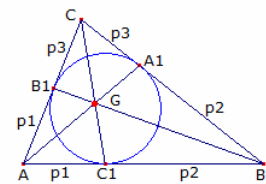
Die Dreiecksecktransversalen durch die Berührungspunkte des Inkreises eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt wird nach Joseph Gergonne (franz. Mathematiker, 1771-1859) Gergonne-Punkt genannt. Auf Grund des Satzes von Ceva gilt in der Abbildung

$-p_1/p_2 \cdot p_2/p_3 \cdot p_3/p_1 = -1$

d.h. die Transversalen sind konkurrent.

Das Dreieck  $A_1B_1C_1$ , das durch die Berührungspunkte des Inkreises gebildet wird, heißt Gergonne-Dreieck.

Das Gergonne-Punkte G des Ausgangsdreiecks ABC ist dann der Lemoine-Punkt des Gergonne-Dreiecks  $A_1B_1C_1$ .



### Satz über den Feuerbach-Kreis (Neun-Punkte-Kreis)

In jedem Dreieck liegen die drei Seitenmitten, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mitten zwischen dem Höhenschnittpunkt H und den Ecken auf einem Kreis, dem Feuerbach-Kreis (nach Karl Feuerbach, 1800-1834).

Der Mittelpunkt des Feuerbachkreises liegt genau in der Mitte zwischen Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt, also auf der Euler-Geraden.

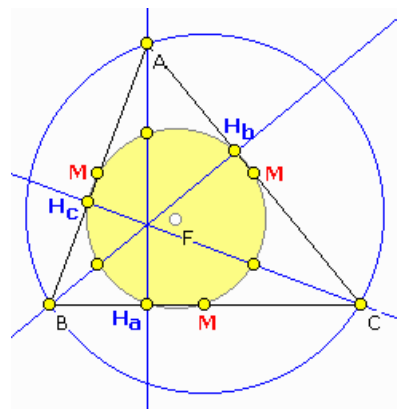
Der Feuerbachsche Kreis berührt den Inkreis und die drei Ankreise; sein Radius ist halb so groß wie der Umkreisradius.

$$\text{Feuerbachkreisradius } r = 1/(4abc) \sqrt{((1+a^2b^2)(1+b^2c^2)(1+a^2c^2))}$$

Der Punkt, in dem sich Feuerbach-Kreis und Inkreis berühren, wird mitunter Feuerbachpunkt des Dreiecks genannt. Zu beachten ist, dass vor allem deutsche Autoren den Mittelpunkt des Feuerbachkreises als Feuerbachpunkt bezeichnen.

Der Feuerbachkreis halbiert die Strecke zwischen dem Höhenschnittpunkt und einem beliebigen Punkt auf dem Umkreis.

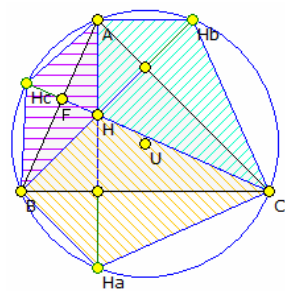
Geht eine gleichseitige Hyperbel durch die Ecken eines Dreiecks, dann liegt ihr Mittelpunkt auf dem Feuerbachkreis.



Streng genommen wurde der Feuerbachkreis ein Jahr vor der Veröffentlichung der Schrift Feuerbachs, d.h. 1821, von Charles-Julien Brianchon und Jean Victor Poncelet entdeckt.

In Deutschland hat sich der Name Feuerbachkreis eingebürgert, da Feuerbach der relativ schwierige Beweis gelang, dass dieser Kreis den Inkreis und die Ankreise berührt.

Außerhalb Deutschlands wird vom Neun-Punkte-Kreis gesprochen, selten auch vom Eulerkreis.



### Höhendrachenvierecke

Die drei Höhen eines Dreiecks  $\Delta ABC$  schneiden sich in dem Höhenschnittpunkt H. Wird H an den Dreiecksseiten a, b und c gespiegelt, so liegen die drei Spiegelpunkte  $H_a, H_b, H_c$  auf einem Kreis, dem Umkreis des Dreiecks. Damit befinden sich in dem Dreieck  $\Delta ABC$  drei Drachenvierecke  $AHBH_c, BHCH_a$  und  $CHAH_b$ , die Höhendrachenvierecke.

Nachweis:

Die Höhe  $h_c$  schneide die Seite AB im Fußpunkt F und den Umkreis im Punkt  $H_c$ . Die Winkel  $\angle BAH_c$  und  $\angle BCH_c$  sind als Winkel über derselben Kreissehne  $BH_c$  gleich groß. Da die Schenkel der Winkel  $\angle BCH_c$  und  $\angle HAF$  paarweise

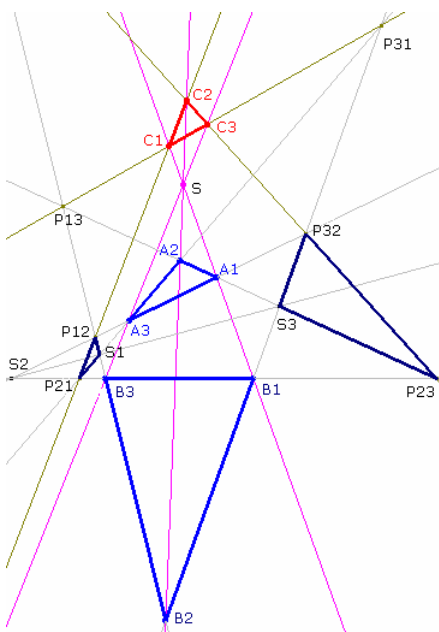
aufeinander senkrecht stehen, sind auch diese Winkel gleich groß, d.h.

$$\angle HAF = \angle BCH_c = \angle BAH_c = \angle FAH_c$$

Aus  $\angle HAF = \angle FAH_c$  folgt, dass  $\Delta HAH_c$  gleichschenkelig ist mit AF als Mittellot auf der Basisseite  $HH_c$ ; insbesondere sind die Strecken HF und  $FH_c$  gleichlang, so dass  $H_c$  der Bildpunkt bei der Spiegelung von H an c ist, der somit auf dem Umkreis liegt.

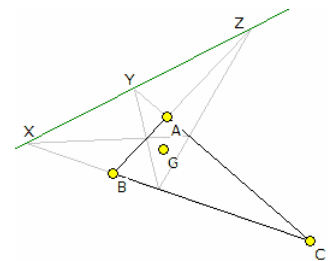
Ferner ist auch  $\Delta HBH_c$  gleichschenkelig und das Viereck  $HAH_cB$  ein Drachenviereck.

Analog verläuft der Beweis für die zwei anderen Drachenvierecke.



### Satz von Desargues

Schneiden sich die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zweier Dreiecke in einem Punkt, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten bzw. ihrer Verlängerungen auf einer Geraden.



### Sonderfall

Liegen zwei nichtkongruente Dreiecke so, dass ihre Seiten paarweise parallel sind, so schneiden sich die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken in einem Punkt. Inkreis berührt in X, Y und Z die drei Seiten a, b, c. Dann schneiden sich AX, BY, CZ in einem Punkt, dem Gergonne-Punkt. Ankreise berühren in X, Y und Z die drei Seiten a, b, c. Dann schneiden sich AX, BY, CZ in einem Punkt, dem Nagel-Punkt. Gergonne-Punkt und Nagel-Punkt sind isotomisch konjugierte Punkte.

### Allgemeiner Satz von Desargues

$A_1A_2A_3$  und  $B_1B_2B_3$  seien zwei Dreiecke A und B, die zueinander in Perspektive stehen mit dem Perspektivzentrum in S.



Das Tripel  $(i,j,k)$  sei eine Permutation von  $(1,2,3)$ . Dann versteht man unter den Punkten  $P_{ij}$  und  $C_k$  folgende:

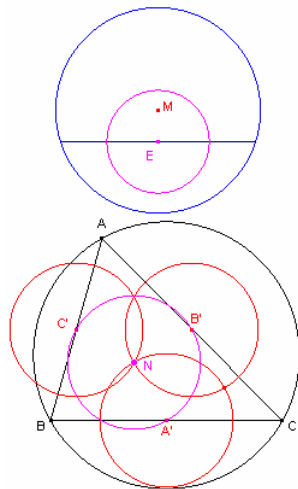
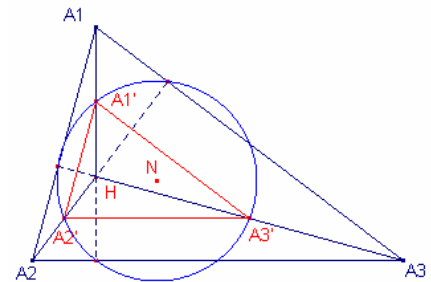
$$P_{ij} = A_i A_k \cap B_j B_k \quad C_k = P_{ik} P_{ki} \cap P_{jk} P_{kj}$$

Dann gilt: Das Dreieck  $C_1 C_2 C_3$  liegt perspektivisch zu den Dreiecken  $A$  und  $B$  bezüglich dem Punkt  $S$ .

### Euler-Dreieck

Die drei auf den Höhen liegenden Punkte des Neun-Punkte-Kreises (Feuerbach-Kreises) bilden das Euler-Dreieck. Für dieses gilt:

- der Neun-Punkte-Kreis ist der Umkreis des Euler-Dreiecks
- das Euler-Dreieck ergibt sich als zentrische Streckung des Ausgangsdreieck mit dem Höhenschnittpunkt als Zentrum und dem Streckungsfaktor 0,5
- das Euler-Dreieck ist kongruent zum Mittendreieck
- Euler-Dreieck und Mittendreieck sind punktsymmetrisch zum Feuerbach-Punkt (Mittelpunkt des Neun-Punkte-Kreises)
- Euler-Dreieck und Höhenfußpunktdreieck liegen bezüglich des Höhenschnittpunktes perspektivisch



### Eulerscher Kreis

Auch am Dreieck wird ein Kreis betrachtet, der nach dem großen Schweizer Mathematiker Leonard Euler (1707-1783) benannt ist.

Der Eulersche Kreis einer Sehne eines Kreises mit dem Radius  $R$  ist ein Kreis mit dem Radius  $R/2$ , dessen Mittelpunkt die Mitte der Kreissehne ist.

In der unteren Abbildung sind die Eulerschen Kreise der Seiten eines Dreiecks  $\Delta ABC$  bezüglich des Umkreises eingezeichnet. Es gilt:

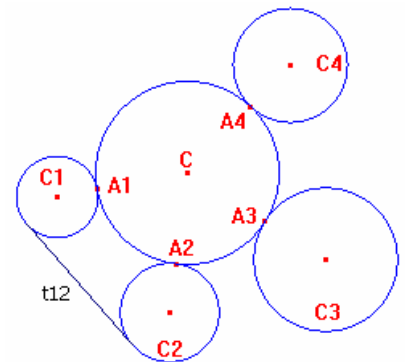
Die Mittelpunkte der Eulerschen Kreise der Dreiecksseiten sind konzyklisch; sie liegen auf dem Neun-Punkte-Kreis bzw. dem Eulerschen Dreieckskreis mit dem Radius  $R/2$ . Diese Eulerschen Kreise schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Neun-Punkte-Kreises, der auch Euler-Punkt genannt wird.

### Satz von Casey

Berühren vier Kreise  $C_1, C_2, C_3, C_4$  einen Kreis  $C$  von außen, so gilt

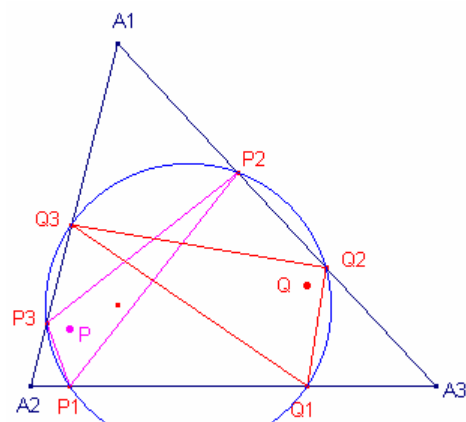
$$t_{13} t_{24} = t_{12} t_{34} + t_{14} t_{23}$$

wobei unter  $t_{ij}$  die Strecke der Berührungspunkte der äußeren Tangente von Kreis  $C_i$  und  $C_j$  zu verstehen ist. Die Umkehrung des Satzes gilt ebenfalls.



### Satz von Feuerbach

... Anwendung der Umkehrung des Satzes von Casey am Dreieck  
Sind  $C_1, C_2, C_3$  die Ankreise eines Dreiecks  $ABC$  und ist  $C_4$  der Inkreis des Dreiecks, so berühren diese einen weiteren Kreis, den Neun-Punkte-Kreis von Feuerbach.



### Verallgemeinerter Satz von Feuerbach

Die Lotfußpunktdreiecke  $P_1 P_2 P_3$  und  $Q_1 Q_2 Q_3$  zweier zueinander isogonaler Punkte  $P$  und  $Q$  besitzen kongruente Umkreise.

Der Umkreis eines Lotfußpunktdreiecks wird auch Lotfußpunktkreis genannt.

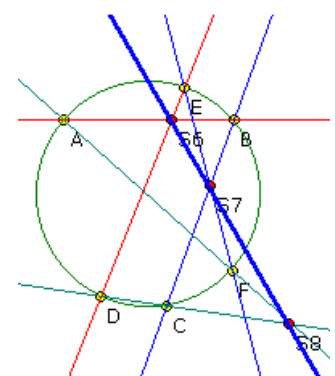
Sind  $P$  und  $Q$  der Höhenschnittpunkt bzw. der Umkreismittelpunkt des Ausgangsdreiecks (beide sind zueinander isogonal), so entsteht als Spezialfall der Neun-Punkte-Kreis von Feuerbach.

Der Neun-Punkte-Kreis ist somit der Lotfußpunktkreis des Höhenschnittpunktes.

### Satz über die Mittelparallele

Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten im Dreieck ist parallel

zur dritten Seite und halb so lang wie sie.



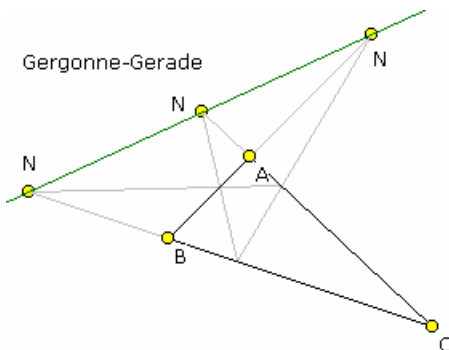
### Satz von Pascal

Wählt man sechs Punkte auf einem Kreis und nummeriert sie beliebig mit 1 bis 6, dann liegen die Schnittpunkte der Geraden 12 und 45, 23 und 56, 34 und 67 (Ecke 7 = Ecke 1) selber wieder auf einer Geraden, der Pascal-Gerade.



In der Darstellung wurden die Punkte mit A bis F bezeichnet. Die drei Schnittpunkt  $S_6$ ,  $S_7$  und  $S_8$  liegen dann auf einer Geraden, der Pascal-Geraden.

Jede Winkelhalbierende eines Außenwinkels teilt die Gegenseite außen im Verhältnis der anliegenden Seiten (Ausnahme: gleichschenkliges Dreieck) Jede Winkelhalbierende teilt die Gegenseite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten.



### Gergonne-Gerade

In einem Dreieck ABC wird das Kontakt-Dreieck (in der Abbildung farbig) eingezeichnet. Das Kontakt-Dreieck wird durch die 3 Berührungspunkte des Inkreises von ABC gebildet.

Die Verlängerungen der Dreiecksseiten und der Seiten des Kontakt-Dreiecks schneiden sich in drei Punkten, den Nobbs-Punkten (N). Die drei Nobbs-Punkte liegen auf einer Geraden, der Gergonne-Gerade. Die Gergonne-Gerade schneidet die Eulersche Gerade im Evans-Punkt sowie die Soddy-Gerade im Fletcher-Punkt.

### Kontakt-dreieck

Das Kontakt-dreieck  $X_a X_b X_c$  eines Dreiecks ABC wird durch die 3 Berührungspunkte des Inkreises von ABC gebildet.

Die Berührungspunkte haben die trilineare Zentralfunktion

$$0 : ac/(a-b+c) : ab/(a+b-c)$$

Die Seitenlängen und der Flächeninhalt  $\Delta'$  des Kontakt-dreiecks sind

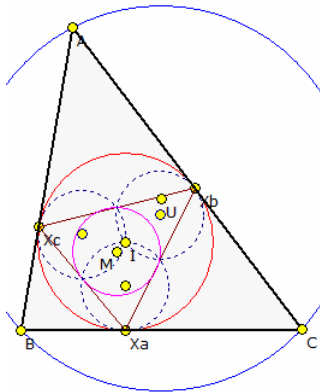
$$a' = (-a+b+c) \cos \alpha/2$$

$$b' = (a-b+c) \cos \beta/2$$

$$c' = (a+b-c) \cos \gamma/2$$

$$\Delta' = (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)/(4abc) \Delta = \Delta^2 / (2Rs)$$

wobei  $\Delta$  der Flächeninhalt, R der Umkreisradius und s der halbe Umfang des Dreiecks ABC sind.



Am Inkreis des Dreiecks können nun sowohl die drei Dreiecksseiten als auch der Umkreis von ABC invertiert werden. Da die Seiten den Inkreis außen berühren, gehen sie bei der Inversion in Kreise über, die den Inkreis innen berühren. Dabei gilt:

Bei der Inversion am Inkreis haben die Inversionsbilder der Seiten und des Umkreises den gleichen Radius  $r/2$ , wenn r der Inkreisradius ist.

Der Inversionskreis des Umkreises ist dann der Neun-Punkte-Kreis des Kontakt-dreiecks.

Der Schwerpunkt des Kontakt-dreiecks ist der Weill-Punkt  $X_{354}$ :

$$(b - c)^2 - ab - ac : (c - a)^2 - bc - ba : (a - b)^2 - ca - cb$$

### Spieker-Punkt, Mittelparallelen-Dreieck

In einem Dreieck ABC wird das Mittelparallelen-

Dreieck (auch kurz: Mittendreieck) eingezeichnet. Der Mittelpunkt des zugehörigen Inkreises heißt Spieker-Punkt, der Inkreis Spieker-Kreis.

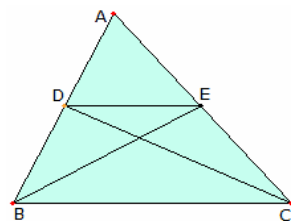
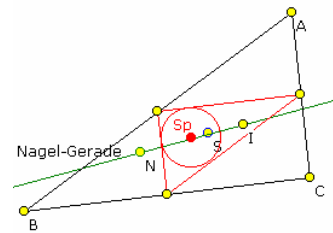
Der Spieker-Punkt liegt auf der Nagel-Geraden, d.h. auf der Geraden, die neben dem Nagel-Punkt N auch den Inkreismittelpunkt I des

Ausgangsdreiecks und den Schwerpunkt S enthält. Werden die Dreieckspunkte A, B und C mit dem Nagelpunkt N verbunden und die

Mittelpunkte der Strecken AN, BN und CN mit  $Q_A$ ,  $Q_B$  und  $Q_C$  bezeichnet, so ist der Spieker-Punkt auch für das Dreieck  $Q_A Q_B Q_C$  der Inkreismittelpunkt.

Das Dreieck  $Q_A Q_B Q_C$  wird in Mathematik 2003 als Nagel-Halbdreieck bezeichnet.

Das Dreieck  $A'B'C'$ , für welches für ein gegebenes Dreieck das Mittelparallelendreieck (Mittendreieck) darstellt, wird Antikomplementär-Dreieck genannt.



### Mittelparallele bei Euklid

Originaltext aus Euklids "Elementen" Buch VI: § 2 (L. 2):

Zieht man in einem Dreieck parallel zu einer Seite eine gerade Linie, so teilt diese die Dreiecksseiten proportional; und wenn Dreiecksseiten proportional geteilt sind, dann muss die Verbindungsstrecke der Teilpunkte zur letzten Dreiecksseite parallel sein.

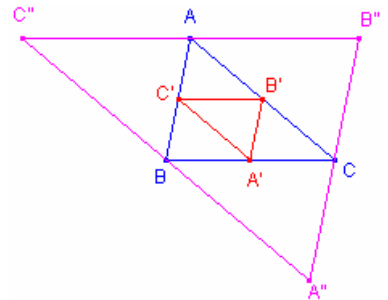
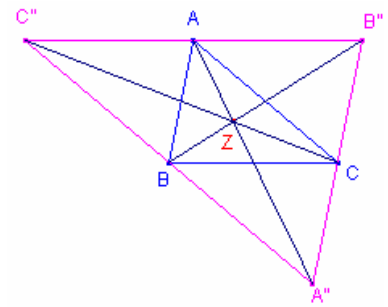
Im Dreieck ABC ziehe man  $DE \parallel BC$ , einer der Seiten. Ich behaupte, dass  $BD : DA = CE : EA$ .

Man ziehe BE, CD. Dann ist  $\Delta BDE = \Delta CDE$ ; denn sie liegen auf derselben Grundlinie DE und zwischen denselben Parallelen DE, BC (I, 37).  $\Delta ADE$  ist eine weitere Größe; gleiche Größen haben aber zu einer festen Größe dasselbe Verhältnis (V, 7): also ist  $\Delta BDE : \Delta ADE = \Delta CDE : \Delta ADE$ . Aber  $\Delta BDE : \Delta ADE = BD : DA$ ; denn da sie dieselbe Höhe haben, nämlich das von E auf AB zu fallende Lot, verhalten sie sich zueinander wie die Grundlinien (VI, 1).

Aus demselben Grunde ist  $\triangle CDE : ADE = CE : EA$ ; also ist  $BD : DA = CE : EA$  (V, 11).

Andererseits seien im Dreieck ABC die Seiten AB, AC proportionale geteilt,  $BD : DA = CE : EA$ ; ferner sei DE gezogen. Ich behaupte, dass  $DE \parallel BC$ . Man konstruiere ebenso. Da  $BD : DA = CE : EA$  und  $BD : DA = \triangle BDE : \triangle ADE$  sowie  $CE : EA = \triangle CDE : \triangle ADE$  (VI, 1), so ist dann auch  $\triangle BDE : \triangle ADE = \triangle CDE : \triangle ADE$  (V, 11).

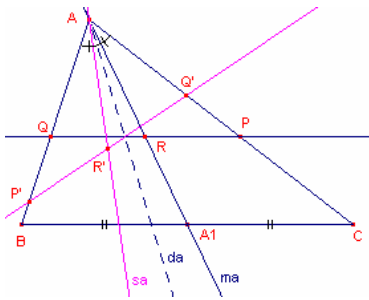
Beide Dreiecke BDE, CDE haben also zu ADE dasselbe Verhältnis. Also ist  $\triangle BDE = \triangle CDE$  (V, 9); dabei liegen sie auf derselben Grundlinie DE. Gleiche Dreiecke auf derselben Grundlinie liegen aber zwischen denselben Parallelen (I, 39); also ist  $DE \parallel BC$  - S.



### Antikomplementär-Dreieck

Gegeben sei ein Dreieck ABC und in ihm sein Mittendreieck A'B'C'. Werden zu den Mittendreiecksseiten parallele Geraden durch die Punkte A, B und C gezogen, so entsteht ein weiteres Dreieck A''B''C''. Dieses Dreieck wird Antikomplementär-Dreieck von ABC genannt. Das Dreieck ABC heißt dann Referenz-Dreieck von A'B'C' und A''B''C''. Aus der zweiten Darstellung entnimmt man, dass die Dreiecke ABC und A''B''C'' zueinander perspektivisch sind. Der zentrische Streckungspunkt Z ist der Schnittpunkt der zugehörigen Punkte. Der Streckungsfaktor ist  $k = -2$ .

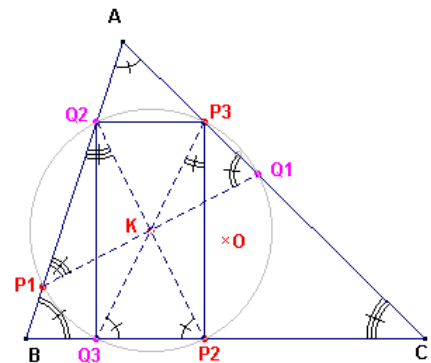
Der Höhenschnittpunkt H' des Antikomplementär-Dreiecks liegt ebenfalls auf der Euler-Gerade des Referenzdreiecks ABC. H' ergibt sich als Punktspiegelung des Höhenschnittpunktes H von ABC an dessen Umkreismittelpunkt U. H' stellt dabei den de Longchamps-Punkt von ABC dar.



### Antiparallele im Dreieck

Gegeben sei ein Dreieck ABC und ein Punkt P auf der Seite AC sowie die Seitenhalbierende von a, die BC im Punkt A<sub>1</sub> schneidet. Durch P wird eine zu BC parallele Gerade gelegt, die die Seite AB im Punkt Q schneidet. Dann teilt die Seitenhalbierende die Strecke PQ im Punkt R in zwei gleich große Streckenabschnitte a. Die Strecke PQ wird nun an der Winkelhalbierenden von  $\alpha$  gespiegelt. Die gespiegelte Strecke schneidet die Dreiecksseiten in den Punkten P' und Q'.

Dabei gilt  $P'R' = Q'R'$  und  $\angle AP'Q' = \angle APQ$ . Die Dreiecke  $\triangle APQ$  und  $\triangle AP'Q'$  sind damit kongruent. Die Strecke P'Q' nennt man dann eine Antiparallele zu BC im Dreieck ABC.



### 2. Lemoine-Kreis

Die sechs Schnittpunkte P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>, Q<sub>3</sub> der Antiparallelen des Dreiecks mit den drei Seiten des Dreiecks, die durch den Lemoine-Punkt verlaufen, sind konzyklisch, d.h. sie liegen auf einem Punkt, dem 2.Lemoine-Kreis (nach Emile Lemoine, 1840-1912).

#### Beweis:

K sei der Lemoine-Punkt des Dreiecks. P<sub>1</sub>Q<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>Q<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>Q<sub>3</sub> seien die von den Antiparallelen zwischen den Seiten gebildeten Strecken. Dann gilt:

$$\angle A = \angle P_3Q_3C \text{ (} P_3Q_3 \text{ antiparallel zu AB)}$$

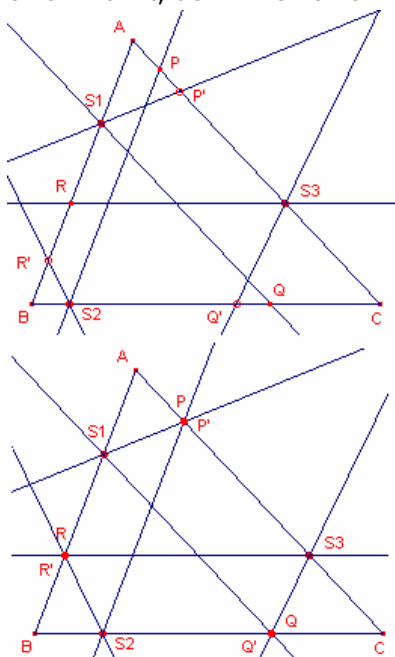
$$\angle A = \angle P_2Q_2B \text{ (} P_2Q_2 \text{ antiparallel zu AC)}$$

somit ist  $\triangle KP_2Q_3$  gleichschenkelig:  $KP_2 = KQ_3$ .

Die Antiparallelen werden durch die Symmedianen halbiert, d.h. K ist der Mittelpunkt der Strecken P<sub>i</sub>Q<sub>i</sub>, also  $KP_2 = KQ_3 = KQ_2 = KP_3$ . P<sub>2</sub>Q<sub>3</sub>Q<sub>2</sub>P<sub>3</sub> ist damit ein Rechteck, welches einen Umkreis besitzt, deren Mittelpunkt K ist.

In Analogie zeigt man dies auch bezüglich der Winkel  $\angle B$  und  $\angle C$ , womit die Behauptung bewiesen ist.

Die von den Antiparallelen-Schnittpunkten gebildeten Dreiecke P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>P<sub>3</sub> und Q<sub>1</sub>Q<sub>2</sub>Q<sub>3</sub> sind zueinander kongruent und außerdem zum Ausgangsdreieck ABC ähnlich.



### Tucker-Sechseck

Gegeben ist ein Dreieck ABC und auf jeder Seite einer der Punkte S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>, S<sub>3</sub>.

Durch  $S_1$  wird  $S_1P'$  antiparallel zu  $BC$ ,  $S_1Q$  parallel zu  $AC$  gezogen. Durch  $S_2$  werden  $S_2R'$  antiparallel zu  $AC$ ;  $S_2P$  parallel zu  $AB$  und durch  $S_3$   $S_3Q'$  antiparallel zu  $AB$ ;  $S_3R$  parallel zu  $BC$  gezeichnet. (obere Abbildung)

Fallen nun je Seite zwei der Punkte  $P$  und  $P'$ ,  $Q$  und  $Q'$  sowie  $R$  und  $R'$  zusammen, so entsteht ein Sechseck  $S_1PS_3QS_2R$ . (untere Abbildung) Dieses aus drei zu den parallelen und drei zu den Seiten antiparallelen Strecken bestehende Sechseck wird Tucker-Sechseck genannt.

Dieses Sechseck wurde erstmals 1883 von Robert Tucker beschrieben.

Zu jedem beliebigen Punkt  $S_1$  auf einer Dreiecksseite existiert ein solches Sechseck. Zu Konstruktion werden ausgehend von  $S_1$  abwechselnd Geraden antiparallel und parallel zu den Dreiecksseiten bis zu den Schnittpunkten gezeichnet.

Die Eckpunkte dieses Tucker-Sechsecks liegen alle auf einem Kreis, dem Tucker-Kreis.

### Taylor-Kreis, Tucker-Kreise

Werden in einem Dreieck  $ABC$  von den Höhenfußpunkten (in der Abbildung blau) die Lote auf die jeweils zwei anderen Dreiecksseiten gefällt, so entstehen sechs Lotfußpunkte (gelb), die Taylorfußpunkte.

Die Taylorfußpunkte liegen auf einem Kreis, dem Taylor-Kreis.

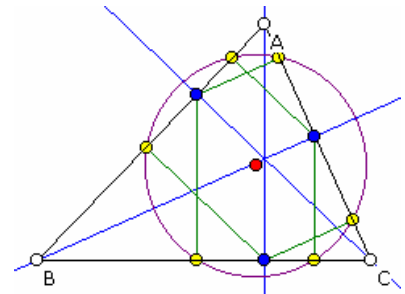
Weiterhin liegen bezüglich einer Höhe folgende 4 Punkte jeweils auf einem Kreis:

- der Eckpunkt der Höhe
- der Höhenfußpunkt
- die zwei Taylorfußpunkte des Höhenfußpunktes

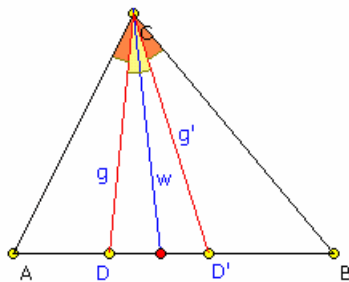
Dieser Kreis wird Tucker-Kreis 1.Art genannt. Die Mittelpunkte dieser Tucker-Kreise liegen auf den Mittelparallelen des Dreiecks.

Auf einem Tucker-Kreis 2.Art liegen die zwei Taylorfußpunkte einer Höhe und die anderen beiden Höhenfußpunkte. Damit gehören die Mittelpunkte dieser Tucker-Kreise zum Höhendreieck.

Tucker-Kreise 3.Art werden von Höhenschnittpunkt und jeweils zwei Taylorfußpunkten auf der selben(!) Dreiecksseite gebildet. Je zwei der drei Tucker-Kreise 3.Art schneiden sich paarweise auf den Höhen des Dreiecks.



### Isogonale Geraden



Die Ecktransversale  $g$  durch  $C$  schneide die Dreiecksseite  $AB$  im Punkt  $D$ . Dann gibt es auf dieser Seite immer einen Punkt  $D'$ , den zu  $D$  isogonal gelegenen Punkt, für den die Winkel  $ACD'$  und  $BCD$  gleich sind.

Die durch  $C$  und  $D'$  gehende Gerade  $g'$  heißt dann isogonal zu  $g$ . Damit sind  $g$  und  $g'$  symmetrisch zur Winkelhalbierenden  $w_c$ .

Teilt der Punkt  $D$  die Seite  $AB$  im Verhältnis  $z = AD/DB$ , so wird die Dreiecksseite durch die isogonale Gerade im Verhältnis  $z' = AD' / D'B = b^2/a^2 * 1/z$  geteilt.

Schneiden sich drei Dreieckstransversalen in einem Punkt, so schneiden sich auch den isogonalen Geraden in einem Punkt.

### Symmediane

Spiegelt man die Seitenhalbierenden an der Winkelhalbierenden, so werden die entstehenden isogonalen Geraden Symmediane genannt. (in Analogie zu Mediane = Seitenhalbierende)

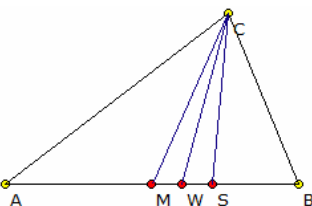
Die Schnittpunkte der Symmediane mit den Dreiecksseiten werden Symmedian-Punkte, dass von diesen gebildete Dreieck Symmedian-Dreieck genannt.

In jedem Dreieck schneiden sich die Symmediane in einem Punkt, dem Lemoine-Punkt. Der Lemoine-Punkt, der Umkreismittelpunkt und die beiden Brocard-Punkte liegen auf einem Kreis, dem Brocard-Kreis.

Trilineare Koordinaten des Lemoine-Punktes  $a : b : c$   
 Abstände des Lemoine-Punktes von den Dreiecksseiten:

$$2aA/(a^2+b^2+c^2) : 2bA/(a^2+b^2+c^2) : 2cA/(a^2+b^2+c^2)$$

wobei  $A$  der Dreiecksflächeninhalt ist.



### Symmediansatz

Die Symmediane in einem Dreieck ist die an der Winkelhalbierenden gespiegelte Seitenhalbierende. Ist in einem Dreieck  $ABC$  der Schnittpunkt  $W$  der von  $C$  ausgehenden Winkelhalbierenden mit  $AB$ ,  $M$  der Mittelpunkt von  $AB$  und  $S$  der Schnittpunkt der Symmediane, dann gilt der Symmediansatz  $AS / BS = AC^2 / BC^2$

Als Verallgemeinerung kann  $Y = M$  ein beliebiger Punkt auf  $AB$  und  $Y' = S$  der Schnittpunkt von  $AB$  mit dem Bild von  $CY$  bei Spiegelung an  $CW$  betrachtet werden.

Dann gilt  $AY' / BY' \cdot AY / BY = AC^2 / BC^2$

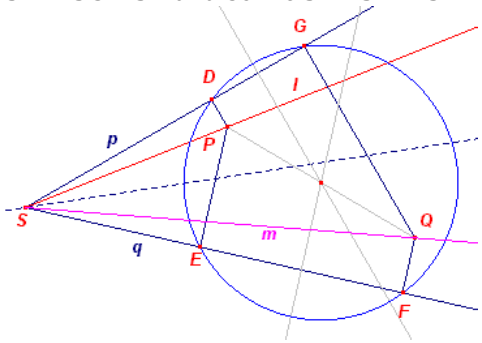
Als Spezialfall erhält man für  $AY = BY$  den Symmediansatz.

### Isogonale Geraden (2)

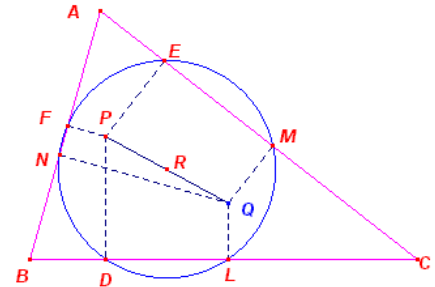
Der Begriff der isogonalen Geraden kann verallgemeinert werden und es gilt:

Sind  $l$  und  $m$  isogonale Geraden bezüglich des Eckpunktes  $S(p, q)$  und sind  $P$  und  $Q$  Punkte auf  $l$  und  $m$ , dann ist das Produkt der Abstände der Punkte zu  $p$  gleich dem Produkt der Abstände zu  $q$ . Für die Darstellung wäre also  $DP \cdot PE = GQ \cdot QF$ .  
 Weiterhin sind die vier Projektionen der Punkte  $P$  und  $Q$  auf die Seiten  $p$  und  $q$  konzyklisch, d.h. sie liegen auf einem Kreis.

Nachweis: Die vier Dreiecke  $SQF$ ,  $SPD$  und  $SQG$ ,  $SPE$  sind ähnlich und rechtwinklige, d.h.  $SF : SD = SQ : SP = SG : SE$  und somit  $SE \cdot SF = SD \cdot SG$ . Nach dem Sekantensatz folgt dann das Gesuchte.



Weiterhin ist der Mittelpunkt dieses Kreises der Mittelpunkt der Strecke  $PQ$ . Dieser Mittelpunkt liegt auf den Mittelparallelen der Trapeze  $PQGD$  und  $PEFQ$ . Überträgt man dies auf die drei Seiten eines Dreiecks, wird:  
 Die sechs Projektionen auf die Seiten eines Dreiecks von zwei isogonal verbundenen Punkten  $P$



und  $Q$  sind konzyklisch, d.h. sie liegen auf einem Kreis. Der Mittelpunkt des Kreises ist die Mitte zwischen den zwei isogonalen Punkten.

Als Sonderfall ergibt sich:

Ist der eine Punkte  $P$  der Höhenschnittpunkt  $H$  und der isogonale Punkt  $Q$  der Umkreismittelpunkt  $O$ , so ist der Kreis der Neun-Punkte-Kreis. Weiterhin gilt:

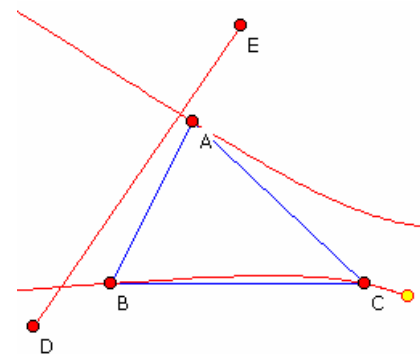
<p>Gegeben sei ein Dreieck <math>ABC</math> und in diesem zwei isogonale Punkte <math>P</math> und <math>Q</math>. Diese werden an den Seiten gespiegelt. Die Spiegelpunkte von <math>P</math> seien <math>D', E', F'</math> und von <math>Q</math> die Punkte <math>L', M'</math> und <math>N'</math>. Die zwei Punkttripel liegen dann auf je einem Kreis, dessen Mittelpunkte gerade der andere isogonale Punkt ist</p>	<p>Sind zwei isogonale Punkte kollinear mit dem Umkreismittelpunkt des Dreiecks, so berührt deren Fußpunktkreis den Neun-Punkte-Kreis.</p>	<p>Der Inkreis und die Ankreise eines Dreiecks berühren den Neun-Punkte-Kreis.</p>

### Isogonale Punkte

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . Die Ecktransversale  $g$  durch  $C$  schneide die Dreieckseite  $AB$  im Punkt  $D$ . Dann gibt es auf dieser Seite immer einen Punkt  $D'$ , den zu  $D$  isogonal gelegenen Punkt, für den die Winkel  $ACD'$  und  $BCD$  gleich sind.

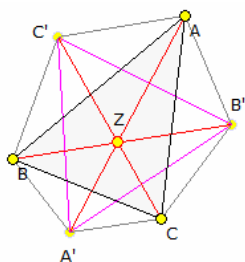
Diese Definition kann auf beliebige Punkte der Ebene erweitert werden.

Betrachtet man nun die Menge aller Punkte einer Geraden  $DE$  und bestimmt die dazu isogonal gelegenen Punkte, so bilden diese eine Kurve, einen Kegelschnitt. In der Abbildung entsteht eine Hyperbel.



Verläuft die Gerade (Brocard-Linie) durch den Lemoine-Punkt und den Umkreismittelpunkt des Dreiecks, so entsteht eine Hyperbel durch die Punkte  $A, B$  und  $C$  auf der außerdem der Schwerpunkt und der Höhenschnittpunkt liegen. Diese Hyperbel wird Kiepert-Hyperbel genannt. Verläuft die Gerade durch den Höhenschnittpunkt und den Schwerpunkt, so entsteht die Yff-Hyperbel.

Die zur Euler-Geraden (verläuft durch den Umkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt) isogonalen Punkte bilden ebenfalls eine Hyperbel. Diese hat mit der Euler-Geraden gerade den Umkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt als Schnittpunkte.  
 Schneidet die Gerade DE den Umkreis des Dreiecks nicht, so entsteht eine Ellipse als isogonale Kurve.  
 Berührt die Gerade den Umkreis erhält man eine Parabel, bei einem Schnitt eine Hyperbel.  
 Die Fußpunktkreise zweier isogonal verwandter Punkte fallen stets zusammen.



### Kiepert-Dreieck

Setzt man auf die Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC gleichschenklige Dreiecke mit dem Basiswinkel  $\phi$  auf, so bilden die Punkte an der Spitze dieser Dreiecke ein Kiepert-Dreieck.

Die Eckpunkte des Kiepert-Dreiecks haben die trilinearen Koordinaten

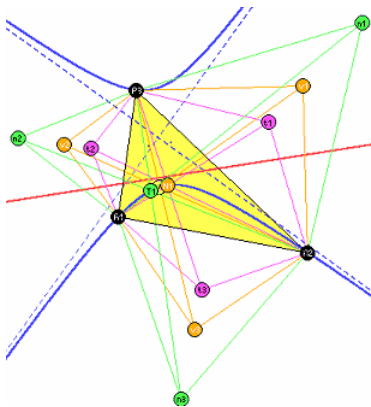
$$\begin{aligned} A' &= -\sin(\phi) : \sin(\gamma+\phi) : \sin(\beta+\phi) \\ B' &= \sin(\gamma+\phi) : -\sin(\phi) : \sin(\alpha+\phi) \\ C' &= \sin(\beta+\phi) : \sin(\alpha+\phi) : -\sin(\phi) \end{aligned}$$

Die Dreiecke ABC und A'B'C' sind dann zueinander perspektiv.

1869 bewies Kiepert, dass sich die Strecken AA', BB' und CC' in einem Punkt schneiden, dem Kiepert-Dreieckszentrum Z mit den trilinearen Koordinaten  $\sin(\beta+\phi) \sin(\gamma+\phi) : \sin(\gamma+\phi) \sin(\alpha+\phi) : \sin(\alpha+\phi) \sin(\beta+\phi)$

Durchläuft der Basiswinkel  $\phi$  alle Werte  $-90^\circ < \phi < 90^\circ$ , so liegen die zugehörigen Kiepert-Dreieckszentren auf der Kiepert-Hyperbel.

Für  $\phi = 30^\circ$  ist das Dreiecks A'B'C' stets gleichseitig, d.h. das gleichseitige Kiepert-Dreieck.



### Kiepert-Hyperbel

Satz von Kiepert:

Fügt man einem Dreieck drei neue Punkte zu, die mit seinen Ecken drei gleichschenklige Dreiecke; mit seinen Seiten als Grundseiten; allesamt nach außen oder allesamt nach innen orientiert, so schneiden sich die Ecktransversalen zu diesen Punkten in je einem Punkt, die auf einer rechtwinkligen Hyperbel liegen.

Diese geht durch die Ecken des Dreiecks, durch den Höhenschnittpunkt und den Schwerpunkt und durch den Spiekerpunkt. Diese Hyperbel heißt Kiepert-Hyperbel.

Für den Spezialfall mit den Basiswinkeln  $60^\circ$ , mit gleichseitigen Dreiecken, ergibt sich der erste Torricelli-Punkt, für  $-60^\circ$ , d.h. nach innen geklappte gleichseitige Dreiecke, entsteht der 2. Torricelli-Punkt.

Beide Punkte liegen somit auch auf der Kiepert-Hyperbel.

Für Basiswinkel  $+30^\circ$  bzw.  $-30^\circ$  entstehen die zwei Napoleon-Punkte, für  $+45^\circ$  bzw.  $-45^\circ$ ; Mittelpunkte von Quadraten; die Vecten-Punkte.

Der Schwerpunkt des Dreiecks liegt auf der Hyperbel für einen Basiswinkel von  $0^\circ$ .

Die Ecken der aufgesetzten gleichschenkligen Dreiecke mit den Basiswinkeln  $\phi$  haben die trilinearen Zentralfunktionen

$$\begin{aligned} A' &: -\sin \phi : \sin(\gamma + \phi) : \sin(\beta + \phi) & B' &: \sin(\gamma + \phi) : -\sin \phi : \sin(\pi - \phi) \\ C' &: \sin(\beta + \phi) : \sin(\alpha + \phi) : -\sin \phi \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte der Geraden durch die Eckpunkte der aufgesetzten Dreiecke und den gegenüberliegenden Punkten des Dreiecks ABC haben die trilinearen Koordinaten:

$$\sin(\beta + \phi) \sin(\gamma + \phi) : \sin(\alpha + \phi) \sin(\gamma + \phi) : \sin(\beta + \phi) \sin(\alpha + \phi)$$

Die Kiepert-Hyperbel selbst hat die Koordinaten

$$bc/\alpha (b^2 - c^2) + ca/\beta (c^2 - a^2) + ab/\gamma (a^2 - b^2) = 0$$

Den Mittelpunkt der Hyperbel findet man bei den trilinearen Koordinaten

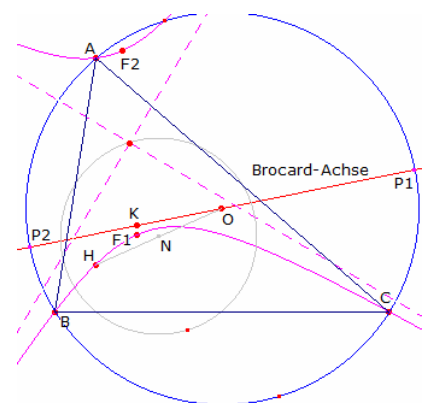
$$(b^2 - c^2)^2 / a \text{ bzw. } a^2 \sin^2(\beta - \gamma)$$

Die Hyperbel-Asymptoten sind die Simson-Geraden der Schnittpunkte der Brocard-Achse mit dem Umkreis. Die Brocard-Achse ist zur Kiepert-Hyperbel isogonal konjugiert.

Winkel $\phi$	Punkt auf der Hyperbel
$\pi/2 ; -\pi/2$	Höhenschnittpunkt H
0	Schwerpunkt S
$\pi/3 ; -\pi/3$	1. und 2. Fermatpunkt
$\pi/6 ; -\pi/6$	1. und 2. Napoleonpunkt
$\pi/4 ; -\pi/4$	1. und 2. Vecten-Punkt

Die Gerade durch den Lemoine-Punkt K, Symmedianpunkt, und den Umkreismittelpunkt O eines Dreiecks ist die Brocard-Achse.

Diese Brocard-Achse schneidet den Umkreis des Dreiecks in zwei





Punkten P1 und P2.

Die Simson-Geraden dieser zwei Punkte sind dann die Asymptoten der Kiepert-Hyperbel. Der Schnittpunkt der Asymptoten, das Kiepert-Zentrum liegt dann auf dem Neun-Punkte-Kreis.

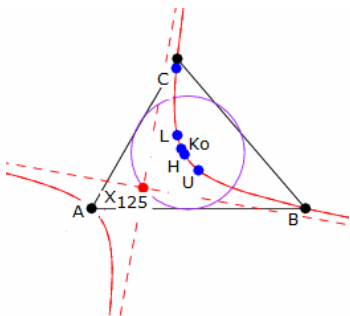
Da die zwei Punkte P1 und P2 entgegengesetzte Punkte auf dem Umkreis sind, folgt auch, dass die Kiepert-Hyperbel orthogonal ist.

Allgemein ist jede Hyperbel, die durch die Eckpunkte eines Dreiecks und deren Höhenschnittpunkt H geht, eine orthogonale Hyperbel.

Für die zwei Punkte P1 und P2 findet man die trilineare Zentralfunktion

$$e \cos \alpha - \cos(\alpha + \omega)$$

wobei  $\omega$  der Brocard-Winkel ist und  $e = \sqrt{1 - 4 \sin^2 \omega}$  gilt.



### Jerabek-Hyperbel

Die Jerabek-Hyperbel ist ein Umkegelschnitt eines Dreiecks, der isogonal konjugiert zur Euler-Geraden ist. Das Zentrum der orthogonalen Hyperbel liegt auf den Neun-Punkte-Kreis. Die Umkegelparameter sind

$$x : y : z = a (\sin 2\beta - \sin 2\gamma) : b (\sin 2\gamma - \sin 2\alpha) : c (\sin 2\alpha - \sin 2\beta)$$

Die trilineare Gleichung ist

$$a (\sin 2\beta - \sin 2\gamma)/u + b (\sin 2\gamma - \sin 2\alpha)/v + c (\sin 2\alpha - \sin 2\beta)/w = 0$$

Die Jerabek-Hyperbel verläuft durch den Umkreismittelpunkt, den Höhenschnittpunkt, den Symmedian-Punkt und den Kosnita-Punkt des Dreiecks,

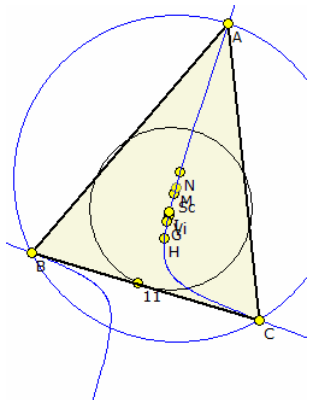
weiterhin durch die isogonal konjugierten Punkte zum Longchamps-Punkt,

dem Höhenschnittpunkt des Kontakt Dreiecks, dem Exeter-Punkt, dem Far-Out-Punkt und dem Prasolov-Punkt.

Das Zentrum des Kegelschnitts  $X_{125}$  hat die trilineare Zentralfunktion

$$\cos \alpha \sin^2 (\beta - \gamma)$$

$$bc (b^2 + c^2 - a^2)(b^2 - c^2)$$



### Feuerbach-Hyperbel

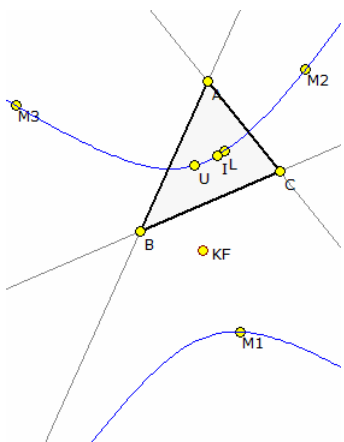
Die Feuerbach-Hyperbel eines Dreiecks ABC ist ein Umkegelschnitt des Dreiecks. Die trilineare Gleichung ist

$$(\cos \beta - \cos \gamma) / x + (\cos \gamma - \cos \alpha) / y + (\cos \alpha - \cos \beta) / z = 0$$

Das Hyperbelzentrum, der Feuerbach-Inkreis-Punkt, liegt auf dem Neun-Punkte-Kreis.

Diese gleichseitige Hyperbel verläuft durch die Dreieckseckpunkte, den Inkreismittelpunkt  $I = X_1$ , den Höhenschnittpunkt  $U = X_4$ , den Gergonne-Punkt  $U = X_7$ , den Nagel-Punkt  $U = X_8$ , den Mittenpunkt  $U = X_9$ , den Schiffler-Punkt  $U = X_{21}$  sowie durch die Kimberling-Punkte  $X_i$  mit  $i = 79, 80, 84, 90, 104, 177, 256, 294, 314, 885, 941, 943, 981, 983, 987, 989, 1000, 1039, 1041, 1061, 1063, 1156, 1172, 1251, 1320, 1389, 1392, 1476, 1896, 1937, 2298, 2320, 2335, 2344, 2346, 2481, 2648$  und 2997.

Zu diesen Punkten gehören: T einer der beiden Schnittpunkte des Umkreises mit der Eulergeraden e,  $T_i$  die Cevianfußpunkte zu T,  $N_i$  die Mittelpunkte der Strecken  $TA_i$ , W derjenige Schnittpunkt des Feuerbachkreises mit der Eulergeraden, der näher bei T liegt und G der Mittelpunkt der Strecke UW.



### Stammler-Hyperbel

Die Stammler-Hyperbel eines Dreiecks ABC ist die Feuerbach-Hyperbel des Tangentialdreiecks von  $\Delta ABC$ .

Der Kiepert-Fokus  $KF = X_{110}$  der Kiepert-Parabel ist der Mittelpunkt dieser Hyperbel. Die trilineare Gleichung ist

$$a^2 (\beta^2 - \gamma^2) + b^2 (\gamma^2 - \alpha^2) + c^2 (\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

Diese Hyperbel verläuft durch Inkreismittelpunkt  $I = X_1$ , den Umkreismittelpunkt  $U = X_3$ , den Lemoine-Punkt  $L = X_6$  sowie durch die Kimberling-Punkte  $X_i$  mit  $i = 155, 159, 195, 399, 610, 1498, 1740, 2574, 2575, 2916, 2917, 2918, 2929, 2930, 2931, 2935$  und 2948.

Interessant ist vor allem, dass die Stammler-Hyperbel auch durch die drei Mittelpunkte des Ankreise von  $\Delta ABC$  geht.

### Beziehungen am Lemoine-Punkt

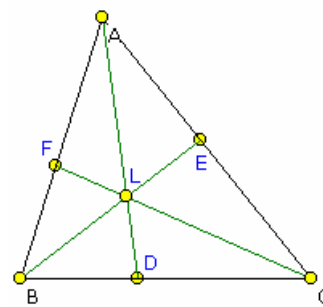
An jedem Dreieck ABC folgende Beziehungen (weitere Beziehungen durch analoges Austauschen der Stücke, Winkel):

$$AF = b^2 c / (a^2 + b^2)$$

$$FB = c a^2 / (a^2 + b^2)$$

$$AF / FB = b^2 / a^2$$

$$AF + BD + CE = [(a+b+c) a^2 b^2 c^2 + (ab^3 + bc^3 + ca^3) abc] /$$





$$\frac{[(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)] + [(b^4c^3+c^4a^3+a^4b^3) + (b^2c^5+c^2a^5+a^2b^5)]}{[(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)]}$$

$$AL / LD = (b^2 + c^2) / a^2 \quad LD / AD = a^2 / (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$AL / AD = (b^2 + c^2) / (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\sin(\angle ACF) = c \sin \beta / \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

$$\sin(\angle BCF) = c \sin \alpha / \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

### Lémoine-Kreis

Gegeben ist ein Dreieck ABC und in ihm der Lémoine-Punkt L. Werden zu den Dreiecksseiten parallele Geraden durch den Lémoine-Punkt bezeichnet, so schneiden diese die Dreiecksseiten in den sechs Punkten 1, 2, ..., 6.

Diese Punkte liegen auf einem Kreis, dem sogenannten Lémoine-Kreis oder auch 1.Lémoine-Kreis.

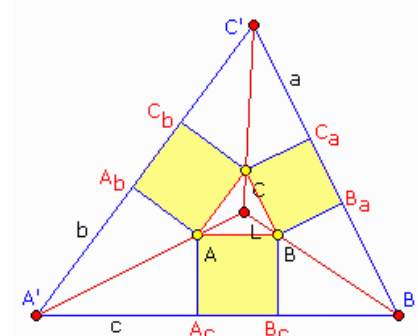
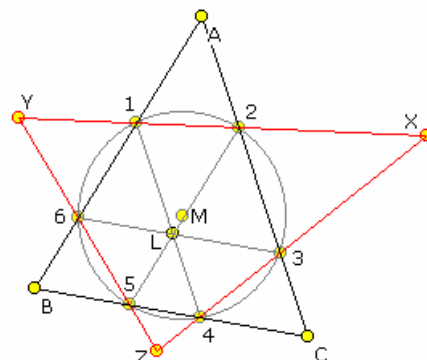
Der Kreismittelpunkt M, der Kimberling-Punkt  $X_{182}$ , ist der Mittelpunkt der Strecke Umkreismittelpunkt - Lémoine-Punkt. Der Radius des Lémoine-Kreises ist:

$$R_L = R/2 \sec \omega = 1/2 \sqrt{(R^2 + r^2)} = abc \sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} / [(a^2+b^2+c^2) \sqrt{((-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c))}]$$

wobei R der Umkreisradius, r der Inkreisradius und  $\omega$  der Brocard-Winkel sind. Brocard-Kreis und Lémoine-Kreis sind konzentrisch. Der Lémoine-Kreis ist außerdem ein Sonderfall eines Tucker-Kreises. Die Dreiecke L16, L23 und L45 sind untereinander und zum Ausgangsdreieck ABC ähnlich. Der 1.Lémoine-Kreis teilt jede Seite in Abschnitte, die proportional zu den Quadraten der Seitenlängen sind. Zum Beispiel:

$$\text{Strecke}(B5) : \text{Strecke}(54) : \text{Strecke}(4C) = c^2 : a^2 : b^2$$

Zeichnet man paarweise Geraden durch die Punkte auf dem Lémoine-Kreis, so bilden diese Geraden ein Dreieck XYZ, das Lémoine-Dreieck.



### Grebe-Punkt

1847 veröffentlichte Ernst Wilhelm Grebe (1804-1874) seine Schrift "Das geradlinige Dreieck in Bezug auf die Quadrate der Perpendikel, die man von einem Punkte seiner Ebene auf seine Seiten fallen kann". In diesem Artikel wird folgende Konstruktion durchgeführt: Auf den Dreiecksseiten werden jeweils Quadrate errichtet. Die neuen Quadratpunkte werden paarweise mit Geraden verbunden. Diese Geraden schneiden sich in drei weiteren Punkten A', B' und C'. Das neue Dreieck A'B'C', das Grebe-Dreieck, ist ähnlich und perspektivisch zu ABC.

Die drei Geraden AA', BB' und CC' schneiden sich im Perspektivzentrum. 1876 wurde dieser Punkt von E.Hain als Grebe-

Punkt bezeichnet. Später konnte nachgewiesen werden, dass der Grebe-Punkt mit dem Lémoine-Punkt L identisch ist.

Der Streckungsfaktor k, um ABC auf das Dreieck A'B'C' zentrisch zu strecken, ist gleich  $k = 1 + (a^2 + b^2 + c^2) / (2A)$ , wobei A der Flächeninhalt von ABC ist. Der Grebe-Punkt hat von den Dreiecksseiten die Abstände

$$2aA / (a^2 + b^2 + c^2) \quad 2bA / (a^2 + b^2 + c^2) \quad 2cA / (a^2 + b^2 + c^2).$$

### Grebe-Quadrate

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Auf den Seiten b und c werden zwei Quadrate errichtet. Die Schwerpunkte B' und C' der Quadrate werden mit dem Seitenmittelpunkt A' verbunden. Dann gilt:  $A'B' = A'C'$  und  $A'B' \perp A'C'$

Nachweis: P und Q sind die Mittelpunkte der Strecken AB und AC, dann gilt  $AP \parallel A'Q$  und  $AQ \parallel A'P$  (Mittenparallele)

Dann ist das Viereck APA'Q ein Parallelogramm und so  $C'P = AP = A'Q$   $B'Q = AQ = A'P$

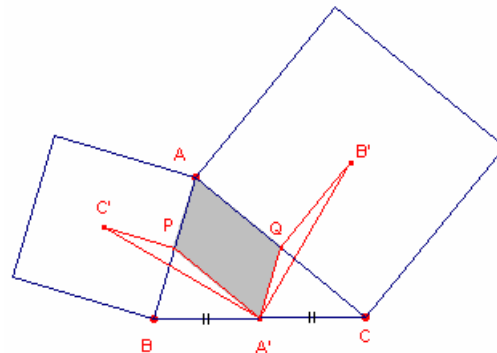
In den Dreiecken A'C'P und B'A'Q ist außerdem

$$\angle A'PC' = \angle A'QB' = 90^\circ + \angle BAC$$

Beide Dreiecke sind kongruent und so  $A'C' = A'B'$

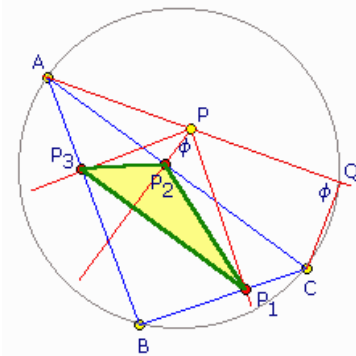
$$\text{Im Dreieck } A'C'P \text{ wird } 180^\circ = \angle C'A'P + \angle A'C'P + \angle A'PC' \quad 180^\circ = \angle C'A'P + \angle A'C'P + 90^\circ + \angle BAC$$

$$\text{Da der Winkel } \angle A'C'P \text{ in } A'C'P \text{ dem Winkel } \angle B'A'Q \text{ in } A'B'Q \text{ gleich ist } 90^\circ = \angle C'A'P + \angle B'A'Q + \angle PA'Q$$



### Lotfußpunktdreieck

Gegeben sei ein Dreieck ABC und ein weiterer Punkt P. Von diesem werden die Lote auf die Dreiecksseiten gefällt. Die Lotfußpunkte  $P_1, P_2$  und  $P_3$  bilden dann das Lotfußpunktdreieck  $P_1P_2P_3$  des Punktes P.



Ist Q der zweite Schnittpunkt der Geraden durch A und P mit dem Umkreis des Dreiecks, so gilt

$$\angle P_1P_2P_3 = \pi - \angle PCQ$$

Der Flächeninhalt des Lotfußpunktdreiecks ist dann

$$A(P_1P_2P_3) = \pm(OP^2 - R^2) \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$A(P_1P_2P_3) = A(ABC) / (4 R^2) * |OP^2 - R^2|$$

wobei O der Umkreismittelpunkt und R der Umkreisradius sind. Das Minuszeichen gilt, wenn P sich innerhalb des Dreiecks ABC befindet. Aus der Gleichung folgt, dass für  $A(P_1P_2P_3) = 0$  die drei Lotfußpunkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  genau dann auf einer Geraden liegen, wenn P auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt.  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  bilden dann die Simson-Gerade.

### Antifußpunktdreieck

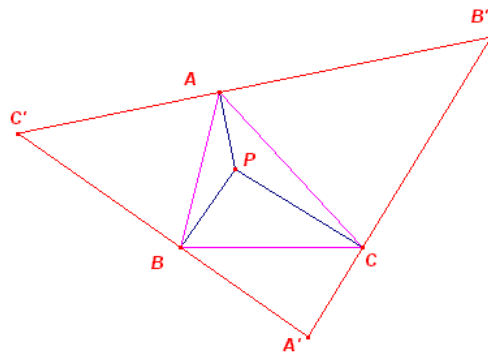
Das Antifußpunktdreieck wird dadurch gebildet, dass von einem Punkt P

im Dreieck ABC die Verbindungstrecken zu den Eckpunkten gezogen werden und dort Senkrechte errichtet werden.

In der Darstellung ist  $A'B'C'$  das Antifußpunktdreieck von ABC und somit ABC das Lotfußpunktdreieck des Punktes P bezüglich  $A'B'C'$ . Es gilt:

Sind P und Q isogonale Punkte im Dreieck ABC, dann ist das Fußpunktdreieck bezüglich P homothetisch (gleichliegend) mit dem Antifußpunktdreieck von Q. Es gilt auch die Umkehrung des Satzes.

Das Antifußpunktdreieck des Inkreismittelpunktes ist das von den Ankreismittelpunkten gebildete Dreieck. Fällt der Inkreismittelpunkt mit seinem isogonal konjugierten Punkt zusammen, dann liegt des Ankreismittelpunktdreieck homothetisch zum Inkreismittelpunkt-Dreieck.

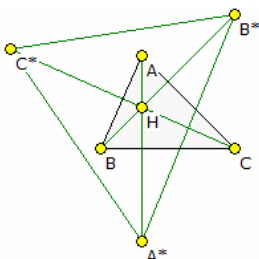


### Satz von Gallatly

(William Gallatly, *The Modern Geometry of the Triangle*, Hodgson, London, 1910-1st edition, pp.29-30)

Sind P und Q zwei isogonale Punkte eines Dreiecks ABC, ist  $F$  der Flächeninhalt von ABC,  $F_1$  der Flächeninhalt des Fußpunktdreiecks  $A'B'C'$  von P und  $F_2$  der Flächeninhalt des Antifußpunktdreiecks  $A''B''C''$  von Q, so gilt

$$F_1 \cdot F_2 = F^2$$



### Spiegeldreieck

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt U und dem Höhenschnittpunkt H.  $A^*B^*C^*$  sei das Dreieck, dass durch Spiegelung der Eckpunkte A, B, C an den gegenüberliegenden Seiten entsteht, das Spiegeldreieck (engl. reflection triangle).

Die Ecken  $A^*$ ,  $B^*$  und  $C^*$  haben dann die trilinearen Koordinaten

$$A^* \quad -1 : 2 \cos \gamma : 2 \cos \beta$$

$$B^* \quad 2 \cos \gamma : -1 : 2 \cos \alpha$$

$$C^* \quad 2 \cos \beta : 2 \cos \alpha : -1$$

Für die Seitenlängen gilt

$$a^* = 1/(bc) \sqrt{(a^6 - 3b^2a^4 - 3c^2a^4 + 3b^4a^2 + 3c^4a^2 + 3a^2b^2c^2 - b^6 - c^6 + b^2c^4 + b^4c^2)}$$

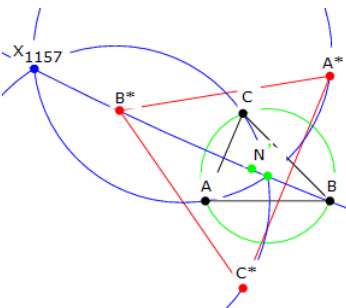
$$b^* = 1/(ac) \sqrt{(-a^6 + 3b^2a^4 + c^2a^4 - 3b^4a^2 + c^4a^2 + 3a^2b^2c^2 + b^6 - c^6 + 3b^2c^4 - 3b^4c^2)}$$

$$c^* = 1/(ab) \sqrt{(-a^6 + b^2a^4 + 3c^2a^4 + b^4a^2 - 3c^4a^2 + 3a^2b^2c^2 - b^6 + c^6 - 3b^2c^4 + 3b^4c^2)}$$

und für den Flächeninhalt

$$A = -\Delta/(a^2b^2c^2) (a^6 - b^2a^4 - c^2a^4 - b^4a^2 - c^4a^2 - b^2c^2a^2 + b^6 + c^6 - b^2c^4 - b^4c^2) = 4 - (UH / R)^2$$

wobei  $\Delta$  der Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks ist und OH der Abstand zwischen Umkreismittelpunkt U und dem Höhenschnittpunkt H.



### Musselman-Theorem

Durch J.R.Musselman und R.Goormaghtigh wurde 1939 folgender Satz entdeckt:

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt U und dem Höhenschnittpunkt H.

$A^*B^*C^*$  sei das Dreieck, dass durch Spiegelung der Eckpunkte A, B, C an den gegenüberliegenden Seiten entsteht, das Spiegeldreieck.

Die Kreise AUA\*, BUB\* und CUC\*, die Musselman-Kreise, schneiden sich dann, außer in U, in einem weiteren Punkt, dem Musselman-Punkt.

Dieser Punkt wird als 1157.Kimberling-Punkt geführt, d.h.  $X_{1157}$ , und besitzt die trilineare Zentralfunktion

$$(a^6 - 3b^2a^4 - 3c^2a^4 + 3b^4a^2 + 3c^4a^2 + b^2c^2a^2 - b^6 - c^6 + b^2c^4 + b^4c^2) \sec(\beta - \gamma)$$

Quelle: Musselman, J. R. and Goormaghtigh, R. "Advanced Problem 3928." Amer. Math. Monthly 46, 601, 1939.

**Simson-Gerade**

Gegeben sei ein Dreieck ABC und ein Punkt P auf dem Umkreis des Dreiecks. Fällt man von P die Lote auf die, evtl. verlängerten, Dreiecksseiten, so liegen die drei Lotfußpunkte (in der Abbildung 1,2,3) auf einer Geraden g, der Simson-Gerade.

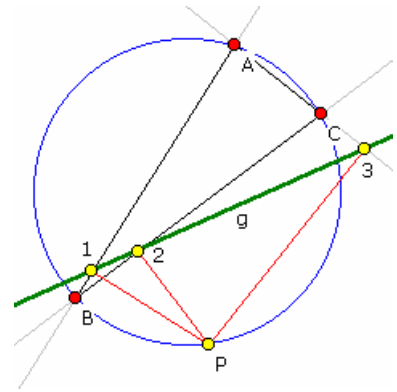
Von Poncelet wurde die Entdeckung dem schottischen Mathematiker Robert Simson (1687-1768) zugeschrieben. Heute bezeichnet man diese Gerade auch als Wallace-Simson-Gerade, da sie wahrscheinlich erst von William Wallace (1768-1843) entdeckt wurde.

Die Umkehrung, dass der Ort der Menge aller Punkte P, deren Lotfußpunkte auf den Dreiecksseiten kollinear sind, gleich dem Umkreis ist, heißt Wallace-Simson-Theorem.

Die Simson-Gerade halbiert die Strecke von P zum Höhenschnittpunkt H des Dreiecks in einem Punkt Q. Dieser Punkt Q liegt ebenfalls auf dem Neun-Punkte-Kreis.

Die Simson-Geraden zweier auf dem Umkreis gegenüberliegender Punkte P und P' sind senkrecht zueinander und schneiden sich auf dem Neun-Punkte-Kreis.

Der Schnittwinkel zweier Simson-Geraden von Punkten P und P' ist weiterhin halb so groß, wie der vom Kreisbogen PP' gebildete Zentriwinkel. Fällt der Punkt P der Simson-Geraden mit einem Dreieckseckpunkt zusammen, so wird die Simson-Gerade zur entsprechenden Dreieckshöhe. Liegt der Punkt P auf dem Umkreis exakt gegenüber einem Dreieckspunkt, so wird die Simson-Gerade zu der Dreiecksseite, auf welcher der Dreieckspunkt nicht liegt. Der die Simson-Gerade erzeugende Punkt P wird Pol der Simson-Gerade genannt.



**Sätze zur Simson-Gerade**

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Umkreis und ein beliebiger Punkt P auf dem Umkreis. Weiterhin sei s(P) die Simson-Gerade zu P.

**Satz 1**

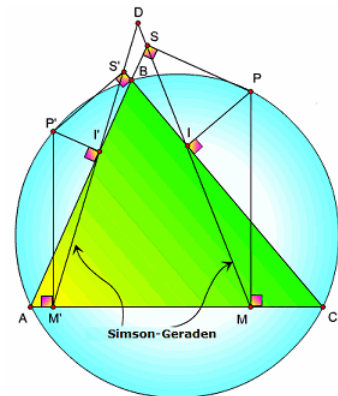
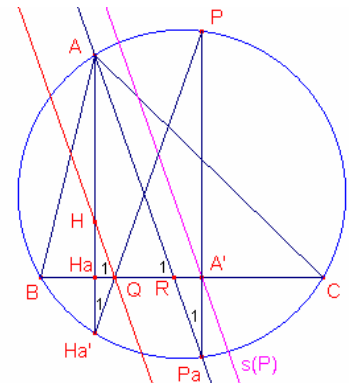
Ist P<sub>a</sub> der zweite Schnittpunkt der Lotgeraden von P auf BC mit dem Umkreis des Dreiecks, so gilt AP<sub>a</sub> || s(P)

**Satz 2**

Sind H<sub>a</sub>' der Schnittpunkt der Lotgeraden von A auf BC mit dem Umkreis und Q der Schnittpunkt von PH<sub>a</sub>' mit BC, so gilt QH || s(P)

**Satz 3**

Für jeden Punkt P verläuft die Simson-Gerade s(P) durch den Mittelpunkt der Strecke PH.



Satz: Der Winkel zwischen den Simson-Geraden SIM und S'I'M' der zwei Punkte P und P' ist die Hälfte des Maßes des Kreisbogens PP'.

Nachweis:

P und P' seien auf dem Umkreis des Dreiecks ABC gegeben. Dann sind PS ⊥ AB, PI ⊥ BC, PM ⊥ AC, P'S' ⊥ BC, P'I' ⊥ AB und P'M' ⊥ AC, da SIM und S'I'M' Simson-Geraden sind.

Gezeichnet wird DH ⊥ AC. Dann ist

$$\angle MDM' = \angle MDH + \angle HDA$$

Der Winkel ∠ MDH ist gleich den Winkeln ∠ DMP und ∠ S'CP sowie dem halben Bogen BP, da DH || PM und PIMC zyklisches Viereck ist.

Der Winkel ∠ HDA ist gleich den Winkeln ∠ SAP' und ∠ DM'P' sowie dem halben Bogen P'B, da DH || P'M' und auch das Viereck P'I'M'A Sehnenviereck ist.

Mit der Summe beider Winkel ergibt sich das Gesuchte.

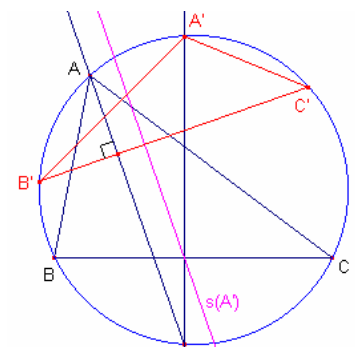
**Simson-Dreieck, S-Dreieck**

Gegeben ist ein Dreieck ABC und auf dem Dreieck ein Punkt A'. Bildet A' mit zwei weiteren Punkten B' und C' auf dem Umkreis des Ausgangsdreiecks ein Dreieck, bei dem die Simson-Gerade s(A') senkrecht zur Seite BC steht, so wird das Dreieck A'B'C' Simson-Dreieck oder kurz S-Dreieck genannt.

Für ein Simson-Dreieck A'B'C' gilt

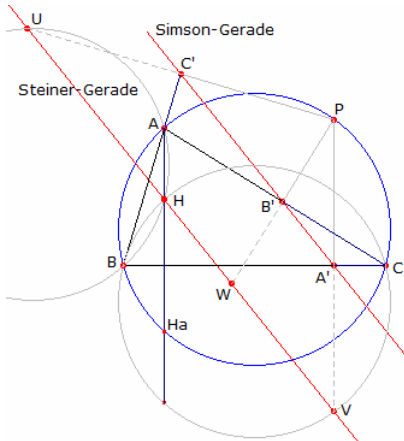
$$\text{Kreisbogen } AA' + \text{Kreisbogen } BB' + \text{Kreisbogen } CC' = 0$$

wobei zu beachten ist, dass die Bögen in gleicher Richtung gezählt und mit Vorzeichen versehen werden müssen.



**Steiner-Gerade**

Es sei ein Dreieck ABC und ein Punkt P auf dessen Umkreis gegeben. Wird P an den Dreiecksseiten gespiegelt, so entstehen drei Punkte U, V und W. Diese liegen auf einer Geraden, der Steiner-Geraden.



Die Steiner-Gerade verläuft durch den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC.

Die Mittelpunkte der Strecken PU, PV, PW, d.h. die Punkte A', B' und C' liegen ebenso auf einer Geraden, der Simson-Gerade. Damit entsteht die Steiner-Gerade aus der Simson-Gerade durch zentrische Streckung mit dem Zentrum P und einem Streckungsfaktor  $k = 2$ .

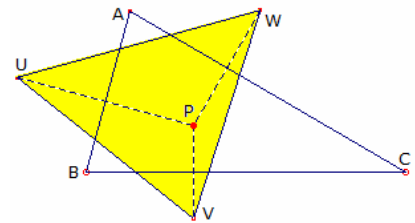
Weiterhin liegen die Punkte U, V und W jeweils auf einem Kreis durch den Höhenschnittpunkt H und zwei Eckpunkten des Dreiecks ABC. Für die Winkel bei P findet man

$$\begin{aligned} \angle C'PA + \angle APB' + \angle B'PA' + \beta &= 180^\circ \\ \angle APB' + \angle B'PA' + \angle A'PC + \beta &= 180^\circ \end{aligned}$$

### Steiner-Dreieck

Gegeben ist ein Dreieck ABC und ein beliebiger Punkt P. Dieser wird an den evtl. verlängerten Dreiecksseiten AB, BC und CA gespiegelt. Die Spiegelpunkte seien U, V und W.

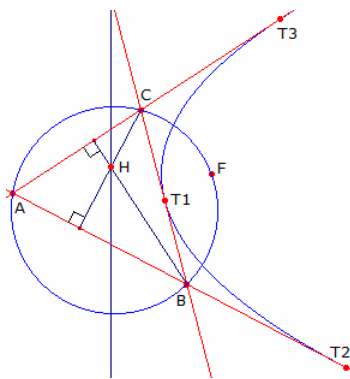
Im Allgemeinen bilden diese Spiegelpunkte dann ein Dreieck, das Steiner-Dreieck.



Durch den Schweizer Mathematiker Jakob Steiner (1796-1863) wurde nun die Frage gestellt, ob diese Punkte auch kollinear liegen können. Daraus ergab sich die Aussage über die Steiner-Gerade:

Liegt ein Punkt P auf dem Umkreis eines Dreiecks, dann sind die Spiegelpunkte von P an den Dreiecksseiten kollinear. Die entstehende Gerade heißt Steiner-Gerade des Punktes P.

Anmerkung: Die Bezeichnung Steiner-Dreieck ist so wie hier in einschlägigen Mathematiklehrbüchern nicht zu finden.



### Steiner-Parabel

Gegeben sei ein Dreieck ABC und auf dessen Umkreis ein Punkt P, verschieden von A, B und C. Der geometrische Ort aller Punkte X, die dann von P und der zugehörigen Steiner-Geraden den gleichen Abstand haben, ist dann eine Parabel, die Steiner-Parabel.

P ist der Fokus, Brennpunkt dieser Parabel, die Steiner-Gerade die Parabelleitlinie.

Diese Parabel berührt dann die drei evtl. verlängerten Dreiecksseiten, d.h. die Dreiecksseiten sind Parabeltangente. Außerdem liegt der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks auf der Leitlinie dieser Parabel.

Fällt die Steiner-Gerade mit der Euler-Gerade zusammen, so wird die Steiner-Parabel zur sogenannten Kiepert-Parabel.

### Kiepert-Parabel

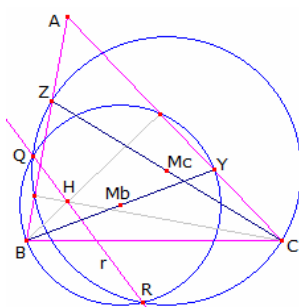
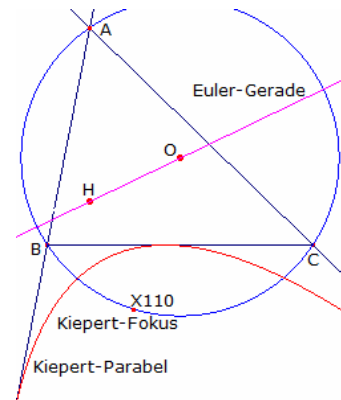
Ist F ein Punkt auf dem Umkreis eines Dreiecks ABC, so dass die Steiner-Gerade durch den Umkreismittelpunkt verläuft, so fällt die Steiner-Gerade mit der Euler-Gerade des Dreiecks zusammen.

Die zu F gehörende Steiner-Parabel wird dann zur eindeutig definierten Kiepert-Parabel des Dreiecks ABC. Diese Parabel wurde 1884 erstmals von Artzt untersucht.

Der Brennpunkt F dieser Parabel, wird Kiepert-Fokus genannt, liegt wie oben erwähnt auf dem Dreiecksumkreis und wird in der Klassifizierung nach Kimberling als der Punkt  $X_{110}$  am Dreieck geführt. Die trilinearen Koordinaten von  $X_{110}$  sind

$$a / (b^2 - c^2) : b / (c^2 - a^2) : c / (a^2 - b^2)$$

$X_{110}$  ist der Feuerbach-Punkt des Tangentialdreiecks von ABC und der isogonal konjugierte Punkt des isotomisch zum Steiner-Punkt konjugierten Punktes. Spiegelt man  $X_{110}$  bei der dargestellten Lage an den Dreiecksseiten AB und AC, so liegen die Spiegelbilder auf der Euler-Geraden.



### Höhenkreise, Transversalkreise

Auf der Seite a eines Dreiecks ABC sei ein beliebiger Punkt X gegeben. Ein Kreis, der die Strecke AX als Durchmesser besitzt, verläuft dann durch den Höhenschnittpunkt auf der Seite a und wird Höhenkreis oder Transversalkreis von X genannt. Dieser Kreis ist dann Thales-Kreis von AX.

Für zwei Transversalkreise zweier Punkte auf verschiedenen Dreiecksseiten gilt dann: Die Potenzlinie der zwei Kreise verläuft durch den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks.

Sind drei Punkte A', B' und C' auf den drei Dreiecksseiten gegeben, so ist

folglich der Potenzpunkt der drei zugehörigen Transversalkreise der Höhenschnittpunkt. Dabei müssen sich die Dreieckstransversalen  $AA'$ ,  $BB'$  und  $CC'$  nicht notwendig in einem Punkt schneiden.

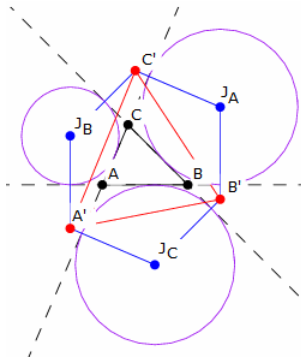
Ist die Gerade  $XYZ$  eine Dreieckstransversale des Dreiecks  $ABC$  ( $X$  auf  $BC$ ,  $Y$  auf  $CA$ ,  $Z$  auf  $AB$ ), dann gehören die Transversalkreise  $(AX)$ ,  $(BY)$ ,  $(CZ)$  zu einem Kreisbündel, d.h. deren Mittelpunkte sind kollinear. Betrachtet man ein vollständiges Viereck, z.B. in der Abbildung  $BCYZ$  so gilt dann auch:

**Satz von Gauß-Bodenmiller**

Die Kreise mit den Diagonalen eines vollständigen Vierecks als Durchmesser gehören zum gleichen Kreisbündel. Die Achse des Kreisbündels ist die Newton-Gerade dieses vollständigen Vierecks.

**Satz von Steiner am Viereck**

Die Höhepunkte der drei Dreiecke eines vollständigen Vierecks liegen auf der Potenzlinie der Kreise über den Diagonalen des Vierecks. Die Potenzlinie ist die Steiner-Gerade des vollständigen Vierecks.



**Hexyl-Dreieck**

Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$  und das Dreieck der Ankreismittelpunkte  $J_A J_B J_C$ . Ein Punkt  $A'$  wird als Schnittpunkt einer Geraden senkrecht zu  $AB$  durch  $J_B$  und einer Geraden senkrecht zu  $AC$  durch  $J_C$  definiert. Analog werden die Punkte  $B'$  und  $C'$  festgelegt.

Dann wird nach Kimberling (1998) das Dreieck  $A'B'C'$  aus den Hexyl-Punkten als Hexyl-Dreieck bezeichnet.  $A'J_B C' J_A B' J_C$  bilden ein Sechseck mit parallelen Seiten, das Hexyl-Sechseck.

Die Eckpunkte des Hexyl-Dreiecks haben die trilinearen Koordinaten

$$\begin{aligned} x+y+z+1 : x+y-z-1 : x-y+z-1 \\ x+y-z-1 : x+y+z+1 : -x+y+z-1 \\ x-y+z-1 : -x+y+z-1 : x+y+z+1 \end{aligned}$$

wobei  $x = \cos \alpha$ ,  $y = \cos \beta$  und  $z = \cos \gamma$  gilt.

Sind  $a, b, c$  die Seitenlängen von  $ABC$ , so ergibt sich für die Seitenlängen von  $A'B'C'$ :

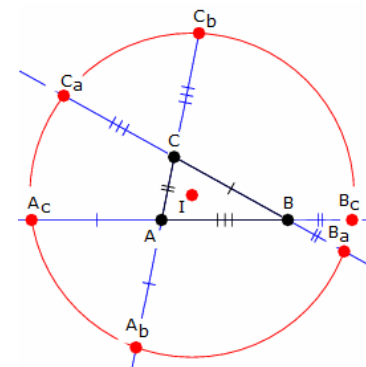
$$a' = a \sec \alpha/2 \quad b' = b \sec \beta/2 \quad c' = c \sec \gamma/2$$

und für den Flächeninhalt

$$\Delta' = (abc(a+b+c)) / (4\Delta) = abc / (2r)$$

Der Umkreis des Hexyl-Dreiecks ist der Hexyl-Kreis. Der Mittelpunkt des Hexyl-Kreises ist der Inkreismittelpunkt  $I$  des Ausgangsdreiecks. Der Radius ist gleich  $2R$ , wobei  $R$  der Umkreisradius ist.

2006 wurde der Hexyl-Kreis durch Boris Odehnal wiederentdeckt und deshalb mitunter Odehnal-Kreis genannt.



**Conway-Kreis**

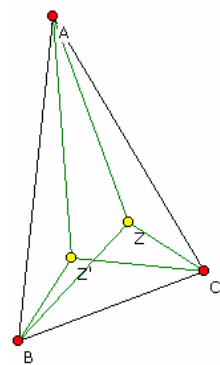
$a, b$  und  $c$  seien die Seitenlängen eines Dreiecks  $ABC$ .

$A_b$  ist nun der Punkt auf der über  $A$  hinaus verlängerte Strecke  $AC$ , so dass  $AA_b = a$  gilt. Analog werden die Punkte  $A_c, B_a, B_c, C_a$  und  $C_b$  wie in der Abbildung definiert.

Dann sind die Punkte  $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a$  und  $C_b$  konzyklisch, d.h. die sechs Punkte liegen auf einem Kreis, dem Conway-Kreis.

Der Mittelpunkt des Conway-Kreises ist gleichzeitig der Inkreismittelpunkt  $I$  des Dreiecks  $ABC$ . Für den Radius wird dann  $R_c = \sqrt{r^2 + s^2}$

wobei  $s$  der halbe Dreiecksumfang und  $r$  der Inkreisradius des Dreiecks  $ABC$  sind.



**Brocard-Punkte**

Bei jedem Dreieck existieren im Inneren zwei besondere Punkte, die Brocard-Punkte. Der 1. Brocard-Punkt  $Z$  ist der Punkt, für den die Winkel  $ZAB, ZBC$  und  $ZCA$  gleich groß sind. Am 2. Brocard-Punkt sind die Winkel  $Z'AC, Z'CB$  und  $Z'BA$  kongruent und dem ersten Brocard-Winkel identisch. Die beiden Brocard-Punkte liegen zueinander isogonal. Für den Brocard-Winkel  $\omega$  gilt:

$$\begin{aligned} \cot \omega &= \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = (a^2 + b^2 + c^2) / (4A) \\ &= (1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) / (\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) \\ &= (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) / (2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) \\ &= (a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma) / (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) \\ \csc^2 \omega &= \csc^2 \alpha + \csc^2 \beta + \csc^2 \gamma \\ \sin \omega &= 2A / (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \\ \sin^2 \omega &= (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c) / [4(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)] \end{aligned}$$

$$\sin^3 \omega = \sin(\alpha - \omega) \sin(\beta - \omega) \sin(\gamma - \omega)$$

$$\tan \omega = \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) / (1 + \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma))$$

Ist  $\alpha$  ein Dreiecksinnenwinkel, so kann der Brocard Winkel  $\omega$  ein Maximum von

$$\omega = \operatorname{arccot} ( 3/2 \tan(\alpha/2) - 1/2 \cos(\alpha/2) )$$

annehmen. Weiterhin ist

$$8 \omega^3 < \alpha \beta \gamma$$

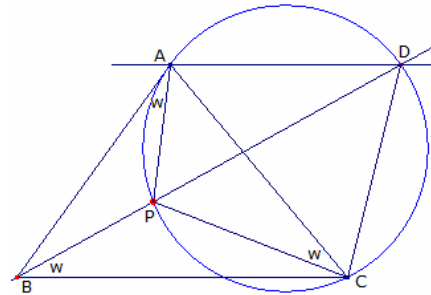
d.h. der Brocard-Winkel wird maximal  $30^\circ$  (gleichseitiges Dreieck).



Auf dem Brocard-Kreis liegen die beiden Brocard-Punkte, der Umkreismittelpunkt und der Lemoine-Punkt. Der Mittelpunkt der Strecke ZZ' heißt Brocard-Mittelpunkt. Der Brocard-Mittelpunkt ist der Kimberling-Punkt  $X_{39}$  und hat die trilinearen Koordinaten  $a(b^2+c^2) : b(a^2+c^2) : c(a^2+b^2)$  bzw.  $\sin(\alpha+\omega) : \sin(\beta+\omega) : \sin(\gamma+\omega)$ . Der Abstand der beiden Brocard-Punkte ist  $ZZ' = 2 R \sin \omega \sqrt{1 - 4 \sin^2 \omega}$

**Konstruktion des 1. Brocard-Punktes**

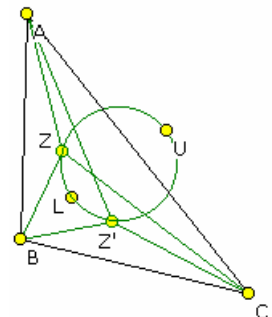
Zur Konstruktion eines Punktes P, für den  $\angle PBC = \angle PCA = \angle PAB$  gilt, d.h. den 1. Brocard-Punkt, kann ein Kreis genutzt werden, der die Seite AC als Sehne besitzt und in A die Dreiecksseite AB tangiert. Dessen Mittelpunkt liegt damit auf der Mittelsenkrechten von AC und der Senkrechten zu A in AB.



D sei weiterhin der von A verschiedene Schnittpunkte dieses Kreises mit der zu BC parallelen Geraden durch A. P ist dann der von D verschiedene Schnittpunkt von BD mit dem Kreis. Dann gilt:  $\angle PAB = \angle PCA = \angle ADP$ ; Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen  $\angle ADP = \angle PBC$ ; Wechselwinkel und somit  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ , d.h. P ist der 1. Brocard-Punkt von ABC. Damit ist auch der Brocard-Winkel  $\omega$  von ABC konstruiert. Diese Konstruktion wurde 1895 erstmals von A. Emmerich in "Die Brocardische Gebilde" angegeben.

**Brocard-Kreis, Brocard-Achse**

Auf dem Brocard-Kreis eines Dreiecks liegen die beiden Brocard-Punkte, der Umkreismittelpunkt U und der Lemoine-Punkt L. Die Brocard-Punkte Z und Z' sind symmetrisch zu der Geraden durch den Umkreismittelpunkt und den Lemoine-Punkt. Diese Gerade wird Brocard-Achse genannt und ist senkrecht zur Lemoine-Achse. Der Streckenabschnitt UL der Brocard-Achse heißt Brocard-Durchmesser und hat die Länge  $UL = UZ / \cos \omega = R \sqrt{1 - 4 \sin^2 \omega} / \cos \omega$  wobei R der Umkreisradius und  $\omega$  der Brocard-Winkel sind. Der Abstand zwischen den Brocard-Punkten und den Lemoine-Punkt ist  $ZL = Z'L = ZU \tan \omega$



nach Pierre Brocard, franz. Mathematiker, 1845-1922

**Brocard-Linien**

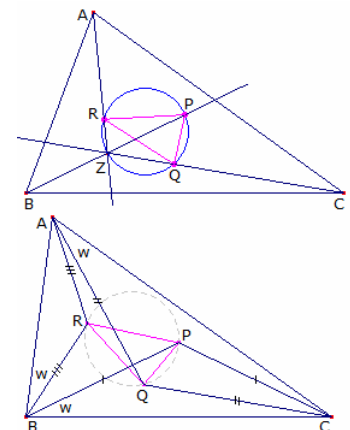
Jede Gerade durch einen Dreieckseckpunkt und einen der beiden Brocard-Punkte heißt Brocard-Linie. Die Schnittpunkte mit den gegenüberliegenden Seiten seien  $W_1, W_2$  und  $W_3$ , sowie bei den Transversalen durch  $Z'$ :  $W_1', W_2'$  und  $W_3'$ .

Dann gilt: Winkel  $AZW_3 = \alpha$   
 Winkel  $W_3ZB = \gamma$  Winkel  $BZW_1 = \beta$   
 Für die Abstände wird  $BZ = c \sin \omega / (\sin \beta)$   
 $BZ : CZ = c^2 / (ab) = \sin(\gamma - \omega) / \sin \omega$   
 $W_3A / W_3B = b \sin \omega / (a \sin(\gamma - \omega)) = (b/c)^2$   
 $W_3A = b^2 c / (b^2 + c^2)$   
 $W_3B = c^3 / (b^2 + c^2)$

Die Lotfußpunktdreiecke der beiden Brocard-Punkte sind zu einander kongruent und darüber hinaus ähnlich zum Ausgangsdreieck.

**1. Brocard-Dreieck, inneres Brocard-Dreieck**

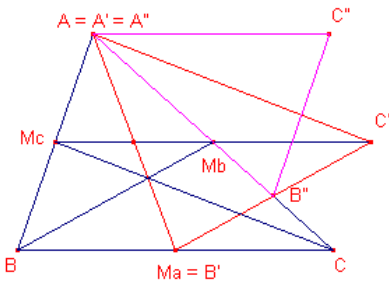
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Z ist der 1. Brocard-Punkt. Die Schnittpunkte der verlängerten Strecken AZ, BZ und CZ mit dem Brocard-Kreis bilden dann ein Dreieck PQR, das 1. Brocard-Dreieck oder auch inneres Brocard-Dreieck. Die Punkte P, Q und R liegen dann auf den Mittelsenkrechten des Ausgangsdreiecks ABC. Die Schwerpunkte der Dreiecke PQR und ABC sind identisch. Außerdem entsteht das gleiche Dreieck, wenn die Schnittpunkte der Strecken  $AZ', BZ'$  und  $CZ'$  mit dem Kreis betrachtet werden. Dabei ist  $Z'$  der 2. Brocard-Punkt. Die Dreiecke PBC, QCA und RAB sind gleichschenkelig. (siehe untere Abbildung)  
 Das 1. Brocard-Dreieck und das Ausgangsdreieck sind zueinander ähnlich und perspektiv. Das Perspektivzentrum wird 3. Brocard-Punkt genannt. Dieser ist der zum Lemoine-Punkt isotomisch zugeordnete Punkt und trägt die Kimberling-Bezeichnung  $X_{76}$ .



Brocard-Dreieck  $P_1P_2P_3$ : Das Dreieck  $P_1P_2P_3$  heißt inneres Brocard-Dreieck und besitzt den Brocard-Kreis als Umkreis. Der Brocard-Durchmesser, die Strecke von Umkreismittelpunkt zum Lemoine-Punkt, ist der



Durchmesser dieses Kreises. Der Schwerpunkt des inneren Brocard-Kreises ist der Schwerpunkt des Ausgangsdreiecks.



Darüber hinaus sind dann die Dreiecke  $AP_1C$ ,  $AP_2B$  und  $BP_3C$  gleichschenkelig. Der Basiswinkel dieser gleichschenkligen Dreiecke ist der Brocard-Winkel  $\omega$ .

Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke  $AP_1C$ ,  $AP_2B$  und  $BP_3C$  ist dann gerade der Flächeninhalt von Dreieck ABC. Ähnliche Dreiecke haben denselben Brocard-Winkel. Ebenso sind die Brocard-Winkel des Ausgangsdreiecks und eines aus den Seitenmittelpunkten gebildeten Dreiecks gleich.

Beweis: Gegeben sei das Dreieck  $\Delta ABC$  mit den Seitenmittelpunkten  $M_a$ ,  $M_b$  und  $M_c$ . Durch Parallelverschiebung der Seitenhalbierenden wird das Dreieck  $\Delta A'B'C'$  aus den Seitenhalbierenden von  $\Delta ABC$  gebildet. Konstruiert man ebenso ein Dreiecke  $\Delta A''B''C''$  aus den Seitenhalbierenden von  $\Delta A'B'C'$ , so sieht man, dass  $\Delta ABC$  und  $\Delta A''B''C''$  zueinander ähnlich sind. Außerdem ergibt sich aus der Konstruktion, dass der Flächeninhalt von  $\Delta A'B'C'$   $\frac{3}{4}$  des Flächeninhalts von  $\Delta ABC$  ist.

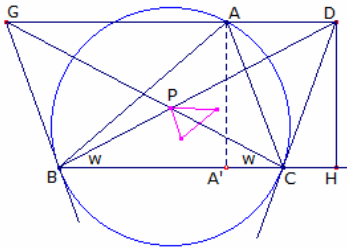
Nach der Gleichung für die Seitenhalbierenden wird

$$A'B' = m_a = \frac{1}{2} \sqrt{(2c^2 + 2b^2 - a^2)}$$

wobei  $m_a$ ,  $m_b$  und  $m_c$  die Seiten von  $A'B'C'$  sind. Für den Brocard-Winkel  $\omega'$  von  $A'B'C'$  gilt

$$\cos \omega' = (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)/4 F' = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2)/(4 \cdot \frac{3}{4} F) = \cos \omega,$$

wobei  $F$  der Flächeninhalt von  $ABC$ ,  $F'$  von  $A'B'C'$  ist. Beide Dreiecke haben somit den gleichen Brocard-Winkel. qed



### Konstruktion des Brocard-Dreiecks

Durch Pierre Brocard (1845-1922) wurde in "Nouvelles Correspondances mathématiques" 1880 eine Konstruktion des später nach ihm benannten Brocard-Dreiecks gegeben:

Gegeben ist das Dreieck ABC und dessen Umkreis. CD und BG seien die entsprechenden Tangenten in den Punkten C und B. Diese Geraden schneiden eine Gerade durch A parallel zu BC in den Punkten D und G. Dann ist

$\angle ACD = \angle ABC$  ; Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen

$\angle DCH = \angle A$  ; die Winkel  $\angle C$ ,  $\angle B$ ,  $\angle A$  bilden einen gestreckten Winkel

Nun sein  $\angle DBC = \omega$ . Dann ist  $\angle GCB = \omega$

da CDGB ein gleichschenkliges Trapez ist. Weiter sei  $DH = h$ .

$$BH = h \cot \omega$$

$$BC = BA' + A'C = h \cot \angle B + h \cot \angle C$$

$$CH = h \cot \angle DCH = h \cot \angle A$$

$$BH = BC + CH = h (\cot \angle A + \cot \angle B + \cot \angle C)$$

Somit folgt:  $\cot \omega = \cot \angle A + \cot \angle B + \cot \angle C$

womit  $\omega$  der Brocard-Winkel des Dreiecks ist. qed

### Brocard-Dreieck

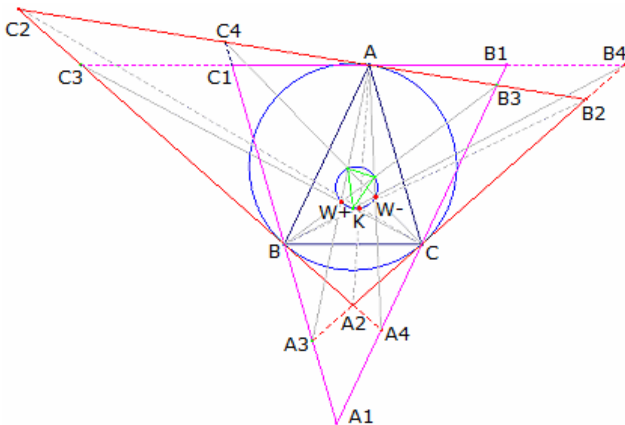
In der abgebildeten Figur sei  $A_1B_1C_1$  das Antikomplementär-Dreiecke des Dreiecks ABC. Das Dreieck  $A_2B_2C_2$  sei das Tangentialdreieck von ABC. Dann gilt:

Die Seiten dieser beiden Dreiecke schneiden sich in den Punkten  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  und  $A_4$ ,  $B_4$ ,  $C_4$ .

Die Geraden  $AA_3, \dots$  sind dann konkurrent und schneiden sich im 1. Brocard-Punkt  $W^+$  von ABC.

Die Geraden  $AA_4, \dots$  schneiden sich im 2. Brocard-Punkt  $W^-$  von ABC.

Die Geraden  $AA_2, \dots$  schneiden sich im Lemoine-Punkt des Dreiecks ABC.



### Neuberg-Kreise

Der Ort aller Punkte A eines Dreiecks ABC, für das dieses Dreieck den Brocard-Winkel  $\omega$  besitzt, ist ein Kreis, der sogenannte Neuberg-Kreis A. Vom Mittelpunkt des Kreises  $N_1$ , dem Neuberg-Zentrum, erscheint die Strecke BC dann unter dem Winkel  $2\omega$ .

Wird das Dreieck ABC so orientiert, dass B im Koordinatenursprung und C im Punkt  $(a, 0)$  liegt, so gilt:

$$N_1 (a/2 ; \pm a/2 \cot \omega)$$

$$\text{Radius} = a/2 \sqrt{(\cot^2 \omega - 3)}$$

Analog lassen sich Neuberg-Kreise bei B und C konstruieren. Das Dreieck  $N_1N_2N_3$  ist das Neuberg-Dreieck. Die inversen Neuberg-Kreise, mit der gleichen Eigenschaft, sind die Spiegelungen der Neuberg-Kreise an den gegenüberliegenden Dreiecksseiten. Deren Mittelpunkte bilden das inverse Neuberg-Dreieck  $N'_1N'_2N'_3$ .

**Satz von Yff**

Ist  $\omega$  der Brocard-Winkel eines beliebigen Dreiecks ABC, so gilt

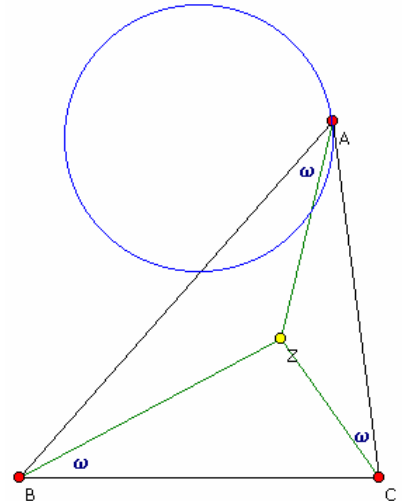
$$8 \omega^3 < \alpha \beta \gamma$$

Mit Hilfe der Flanders-Ungleichung am Dreieck

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq (3 \sqrt{3} / (2\pi))^3 \alpha \beta \gamma$$

bewies Abi-Khuzam 1974 die ursprüngliche Vermutung von Yff.

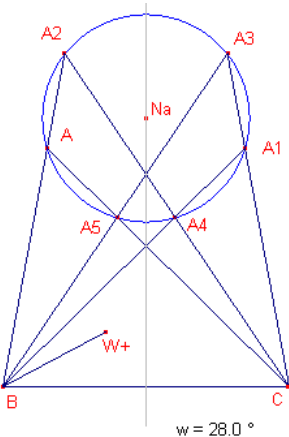
Das absolute Maximum des Terms  $\alpha \beta \gamma - 8 \omega^3$  ist näherungsweise 0,440053 und tritt in einem gleichschenkligen Dreieck mit den Innenwinkeln 0,322880, 1,40936 und 1,40936, d.h. 18,5°, 80,75° und 80,75° auf.



**Satz von Neuberg (Joseph J.B. Neuberg, 1840-1926, Luxemburg):**

Zu jedem Dreieck ABC existieren 5 direkt oder indirekt ähnliche

Dreiecke  $A_iBC$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , wobei die  $A_i$  auf derselben Seite wie  $A = A_0$  von BC liegen. Diese Punkte  $A_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$ , liegen dann auf einem Kreis, dem ersten Neuberg-Kreis von BC.



**Nachweis:** A1 ist das Spiegelbild von A an der Mittelsenkrechten von BC.

Damit ist  $A_1BC \sim ABC$ . A2 ist der Schnittpunkt der Geraden durch AB und einer Geraden durch C, die so konstruiert ist, dass der Winkel  $BCA_2$  gleich dem Winkel bei A ist, d.h. also  $A_2BC \sim ABC$  (Ähnlichkeitssatz ww).

A3 ist der Schnittpunkt der Geraden durch B mit dem Winkel von A zu BC und somit auch  $A_3BC \sim ABC$ .

A4 ist weiter der Schnittpunkt von  $CA_2$  mit  $BA_3$ , A5 der Schnittpunkt von  $BA_3$  mit CA.

Aus der Ähnlichkeit folgt  $BAC = A$ ,  $ABA_5 = B - A$ , so dass  $BA_5C = B$ ,  $A_5BC \sim ABC$ . Analog zeigt man  $A_4BC \sim ABC$ .

Andere Kombinationen von A, B und C sind nicht möglich. Die

Mittelsenkrechte von BC ist Symmetrieachse der entstandenen Figur. Durch

A, A2 und A4 verläuft ein Kreis, auf dem aus Symmetriegründen auch die anderen beschriebenen Punkte liegen. Im nichtkonvexen Sechseck  $A_0A_2A_4A_1A_3A_5$  gehen die Seiten abwechselnd durch die Punkte B und C.

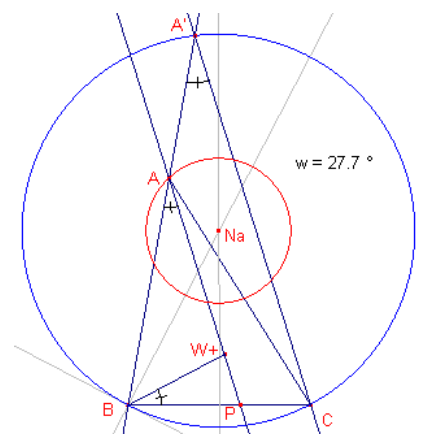
Die Spiegelbilder der Punkte  $A_i$  an BC geben sechs weitere Punkte mit der beschriebenen Eigenschaft. Der Kreis durch diese Punkte wird zweiter Neuberg-Kreis von BC genannt. Damit existieren an jedem Dreieck 6 verschiedene Neuberg-Kreise.

**Nachweis**, dass der Neuberg-Kreis der Ort aller Punkte A eines Dreiecks ABC ist, für das dieses Dreieck den Brocard-Winkel  $\omega$  besitzt:

Es sei das Dreieck ABC gegeben, der Brocard-Winkel sei  $w$  und der 1. Brocard-Punkt  $W+$ .

P sei der Schnittpunkt von  $AW+$  mit BC.

Nun wird der geometrische Ort aller Punkte betrachtet, für die BC unter dem gleichen Winkel  $w$  erscheint. Dabei sollen diese Punkte auf derselben Seite von BC wie A liegen. Dieser Ort ist ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt  $Na$ , der auf der Mittelsenkrechten von BC liegt.



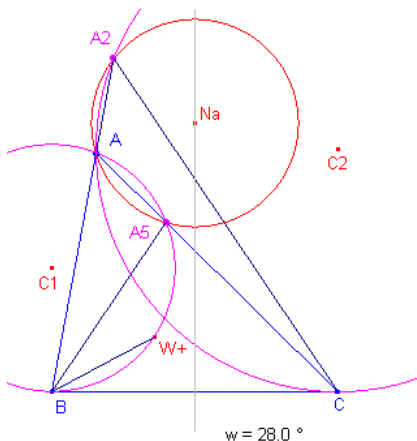
$A'$  ist der von B verschiedene Schnittpunkt von AB mit diesem Kreis,  $BAP = w$  und  $BA'C = w$ , womit die Geraden AP und  $A'C$  parallel sind.

Aus den Eigenschaften des Brocard-Punktes folgt  $BP / PC = c^2 / a^2$  und mit der Parallelität:

$$AB : AA' = BP : PC \text{ or } AA' = AB \cdot PC / BP = c \cdot PC / BP$$

$$AA' \cdot AB = c \cdot c \cdot (a^2 / c^2) = a^2.$$

Die Potenz des Punktes A bezüglich des Kreises um  $Na$  ist konstant. Der geometrische Ort der Punkte A ist dann ein konzentrischer Kreis um  $Na$ . Der Kreis, der erste Neuberg-Kreis von BC, geht somit durch A.



Die Spiegelung an BC des ersten Neuberg-Kreises ergibt die gleiche Eigenschaft.

**Weitere Eigenschaften:**

Die von verschiedenen Schnittpunkte des ersten Neuberg-Kreises von BC mit den Seiten BA und CA des Dreiecks ABC liegen auf dem Tangentialkreisen in B zu BC durch A und dem Kreis in C zu CB durch A (siehe auch weiter unten).

Die Potenz der Punkte B und C bezüglich des 1. Neuberg-Kreises ist gleich  $a^2$ .

Für die Radien  $n_a, n_b$  und  $n_c$  der ersten Neuberg-Kreise durch A, B und C bezüglich des Dreiecks gilt dann:

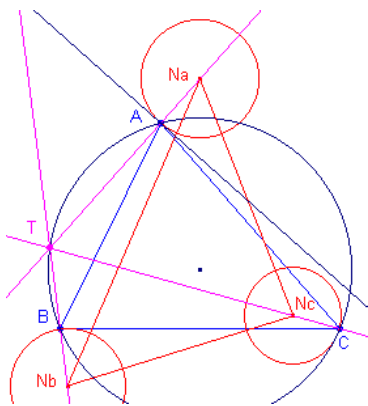
$$n_a/a = n_b/b = n_c/c = 1/2 \sqrt{(\cot^2 \omega - 3)}$$

Sind U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC, R der Umkreisradius und  $N_a, N_b, N_c$  die Neuberg-Kreismittelpunkte der ersten Ordnung sowie F der Flächeninhalt von ABC, dann ist

$$a^3/ON_a = b^3/ON_b = c^3/ON_c = 4F \quad ON_a \cdot ON_b \cdot ON_c = (a^3b^3c^3) / (64F^3) = R^3$$

Der Neuberg-Kreis durch A bezüglich BC schneidet sowohl den Kreis um B mit dem Radius BC, als auch den Kreis um C mit dem Radius BC senkrecht.

Das von den Neuberg-Kreis-Mittelpunkten gebildete Neuberg-Dreieck  $N_aN_bN_c$  und das Ausgangsdreieck haben den gleichen Schwerpunkt.



**Tarry-Punkt**

Die Geraden  $AN_a, BN_b$  und  $CN_c$  schneiden sich in einem Punkt T, der Tarry-Punkt des Dreiecks ABC genannt wird.

Weiterhin schneiden sich die Tangenten in A, B, C an den Neubergkreisen in einem Punkt, dem Steiner-Punkt von ABC.

(siehe Neuberg-Kreis)

Der Tarry-Punkt ist der Kimberling-Punkt  $X_{98}$  und hat die trilinearen Koordinaten

$$f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$$

wobei  $f(a,b,c) = bc / (b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2)$  ist.

Der Tarry-Punkt ist, neben den drei Eckpunkten A, B, C des Dreiecks, der vierte Schnittpunkt der Kiepert-Hyperbel mit dem Umkreis des Dreiecks.

Der Tarry-Punkt liegt genau zwischen dem Longchamps-Punkt und dem Steiner-Punkt des Antikomplementärdreiecks.

Der Tarry-Punkt liegt bezüglich des Umkreismittelpunktes genau gegenüber dem Steiner-Punkt auf dem Umkreis.

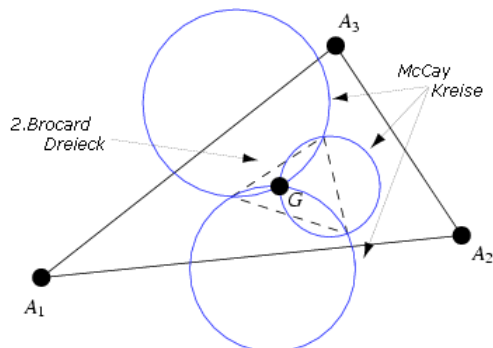
**McCay-Kreise**

Durch den Schwerpunkt des Dreiecks und die Eckpunkte des 2. Brocard-Dreiecks werden drei Kreise eindeutig beschrieben, die McCay-Kreise.

Sind  $a_1$  die Länge der Seite  $A_2A_3$  und  $\omega$  der Brocard-Winkel,

so wird für den Radius eines der McCay-Kreise

$$r = a_1/6 \sqrt{(\cot^2 \omega - 3)}$$

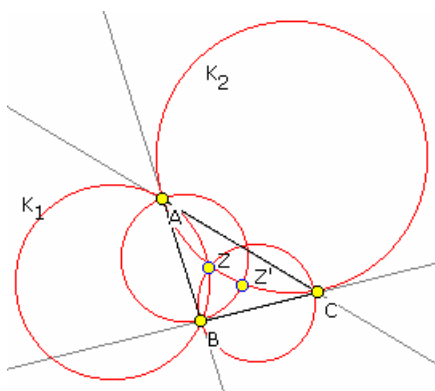


**Tangentialkreise am Dreieck**

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Dann existieren je Eckpunkt zwei Kreise, die durch diesen Eckpunkt gehen und die gegenüberliegenden Dreiecksseiten in einem der anderen Eckpunkte berühren, die Tangentialkreise.

Dabei handelt es sich um Kreise im Sinne von Apollonius, d.h. die gesuchten Kreise verlaufen durch zwei Punkte und tangieren eine Gerade.  $K_{BC}$  sei der Kreis durch B und C, welcher die Seite a in C berührt;  $K_{CA}$  und  $K_{AB}$  die entsprechenden Kreise. Diese drei schneiden sich dann im ersten Brocard-Punkt Z.

Analog schneiden sich  $K_{CB}, K_{AC}$  und  $K_{BA}$  im zweiten Brocard-Punkt.



**Orthozentrisches Viereck**

Ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC so gilt:

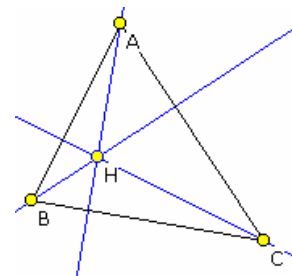
A ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks HBC

B ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks HAC

C ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks HBA

Die Konfiguration ABCH wird nach Lazare Carnot orthozentrisches Viereck oder orthozentrisches System genannt.

In einem orthozentrischen System besitzen die vier möglichen Dreiecke den gleichen Neun-Punktekreis. Außerdem haben die vier möglichen Umkreise den gleichen Radius.

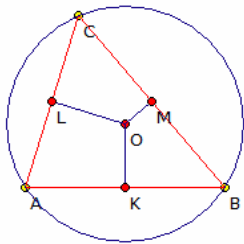


Die drei Kreise, die durch den Höhenschnittpunkt und je zwei Ecken des Dreiecks verlaufen, werden Carnot-Kreise oder Johnson-Kreise genannt.

**Weitere Sätze**

Sind H der Höhenschnittpunkt und O der Umkreismittelpunkt, so sind die Winkel HAB und OAC gleich groß. Für den Winkel HCO gilt  $\angle HCO = |\alpha - \beta|$

In einem spitzwinkligen Dreieck haben die Umkreise der Dreiecke HAB, HBC und HCA denselben Radius wie der Umkreis des Ausgangsdreiecks ABC. Der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ist gleichzeitig Höhenschnittpunkt des zugehörigen Seitenmittendreiecks.



**Satz von Carnot**

In jedem Dreieck ist die Summe der Abstände des Umkreismittelpunktes zu den Mittelpunkten der Seiten gleich der Summe aus Umkreisradius R und Inkreisradius  $\rho$ .

Bezeichnet O den Umkreismittelpunkt sowie K, L, M die Seitenmitten im spitzwinkligen Dreieck ABC, R den Radius des Umkreises und r den Radius des

Inkreises, so gilt also  $KO + LO + MO = R + r$

**Beweis**

Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegt der Punkt O in seinem Inneren und man kann den Satz von Ptolemaios anwenden. Auf jedes der drei Sehnenvierecke AMOL, BKOM, CLOK angewandt, wird

$$\begin{aligned} b/2 \cdot MO + c/2 \cdot LO &= a/2 \cdot R & c/2 \cdot KO + a/2 \cdot MO &= b/2 \cdot R \\ a/2 \cdot LO + b/2 \cdot KO &= c/2 \cdot R \end{aligned}$$

Aus der Zerlegung  $\text{Fläche} = A_{(BCO)} + A_{(CAO)} + A_{(ABO)}$  folgt in Verbindung mit der Formel  $\text{Fläche} = r \cdot s$  (s ... halber Umfang) sofort

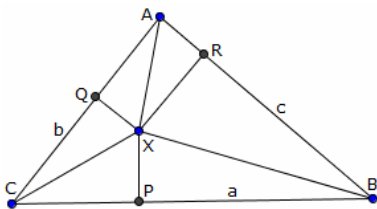
$$a/2 \cdot KO + b/2 \cdot LO + c/2 \cdot MO = a/2 \cdot r + b/2 \cdot r + c/2 \cdot r$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert

$$(a/2 + b/2 + c/2) \cdot (KO + LO + MO) = (a/2 + b/2 + c/2) \cdot (R + r), \text{ also } KO + LO + MO = R + r$$

Sonderfälle des Satzes von Carnot:

- I. Ist das Dreieck ABC bei C rechtwinklig, so fallen M und O zusammen und es gilt  $KO + LO = R + r$
- II. Ist das Dreieck ABC bei C stumpfwinklig, so gilt  $KO + LO - MO = R + r$



**Variante des Satzes von Carnot**

Wenn sich drei Lote in einem Punkt schneiden, besteht zwischen den Streckenabschnitten BP, CQ, AR, CP, AQ und BR folgender Zusammenhang

$$BP^2 + CQ^2 + AR^2 = CP^2 + AQ^2 + BR^2$$

Nachweis:

Mit Hilfe des Pythagoras lassen sich folgende Beziehungen aufstellen

- (1)  $CP^2 + PX^2 = CX^2$
- (2)  $BP^2 + PX^2 = BX^2$
- (3)  $CQ^2 + QX^2 = CX^2$
- (4)  $AQ^2 + QX^2 = AX^2$
- (5)  $BR^2 + RX^2 = BX^2$
- (6)  $AR^2 + RX^2 = AX^2$

Subtraktion der Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} (2)-(1) \quad BP^2 - CP^2 &= BX^2 - CX^2 & (3)-(4) \quad CQ^2 - AQ^2 &= CX^2 - AX^2 \\ (6)-(5) \quad AR^2 - BR^2 &= AX^2 - BX^2 \end{aligned}$$

Die neu entstandenen Gleichungen werden addiert

$$BP^2 + CQ^2 + AR^2 - CP^2 - AQ^2 - BR^2 = 0 \quad \text{BP}^2 + CQ^2 + AR^2 = CP^2 + AQ^2 + BR^2 \text{ q.e.d.}$$

**Umkehrsatz von Carnot**

Genügen drei senkrechte Geraden auf den Dreiecksseiten der Gleichung

$$BP^2 + CQ^2 + AR^2 = CP^2 + AQ^2 + BR^2$$

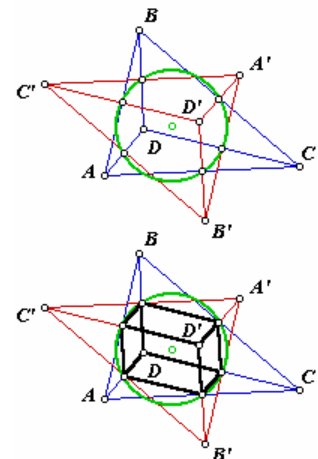
so schneiden sie sich in einem Punkt

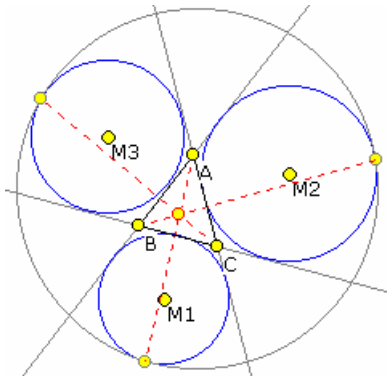
**Carnot-Dreieck**

Die drei Kreise, die durch den Höhenschnittpunkt und je zwei Ecken des Dreiecks verlaufen, werden Carnot-Kreise oder Johnson-Kreise genannt. Die Mittelpunkte dieser Carnot-Kreise bilden das Carnot-Dreieck, dass das Spiegelbild des Ausgangsdreiecks am Feuerbach-Punkt darstellt, d.h. die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'B'C'$  sind zueinander kongruent und besitzen den gleichen Neun-Punkte-Kreis.

Ist D der Höhenschnittpunkt von  $\triangle ABC$ , so ist der Höhenschnittpunkt D' des Carnot-Dreiecks  $\triangle A'B'C'$  ebenfalls die Punktspiegelung von D am Feuerbach-Punkt.

Verbindet man nun einige der neun Punkte des Feuerbach-Kreises untereinander und mit den zwei Höhenschnittpunkten, so ergibt sich eine Darstellung, die an eine senkrechte Parallelprojektion eines Quaders erinnert (untere Darstellung).





Apollonius-Punkt erst 1985 an.

### Apollonius-Punkt

ABC sei ein beliebiges Dreieck und an diesem die drei Ankreise angetragen. Der Apollonius-Kreis, der diese drei Ankreise von außen berührt heißt Ankreis-Apollonius-Kreis.

Verbindet man die Berührungspunkte der Ankreise an diesem Apollonius-Kreis mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreiecks, so schneiden sich diese Apollonius-Linien in einem Punkt, dem Apollonius-Punkt.

Die trilinearen Punkte des Apollonius-Punktes sind:

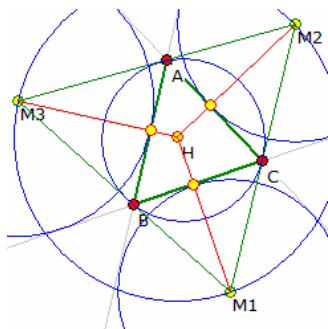
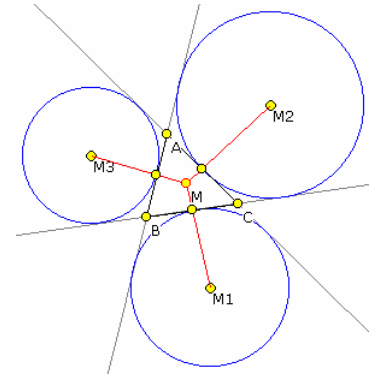
$$[\sin(\alpha) \cos(\beta/2 - \gamma/2)]^2 : [\sin(\beta) \cos(\gamma/2 - \alpha/2)]^2 : [\sin(\gamma) \cos(\alpha/2 - \beta/2)]^2$$

Während der umgebende Apollonius-Kreis schon vor Jahrhunderten gefunden wurde, gaben Kimberling, Iwata und Fukagawa den

### Mittelpunkt

Gegeben ist ein Dreieck ABC und die drei Ankreise. Werden die Ankreismittelpunkte  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  mit den Seitenmittelpunkten verbunden, so schneiden sich die Geraden in einem Punkt, im Mittelpunkt des Dreiecks.

Der Punkt wurde erstmals von C. von Nagel 1836 untersucht. Der Mittelpunkt ist der Lemoine-Punkt des Ankreismittelpunkt-Dreiecks  $M_1M_2M_3$ .



### Hadamard-Punkt, Hadamard-Kreis

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck mit den Ankreisen  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  und deren Mittelpunkte  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ . Die Geraden von einem Dreieckspunkt durch den gegenüberliegenden Berührungspunkt des Ankreises schneiden sich in einem Punkt, dem Nagel-Punkt. Es gilt aber auch:

Die Geraden von den Ankreismittelpunkten durch die Ankreisberührungspunkte schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt wird Hadamard-Punkt genannt, da Jacques Hadamard diesen Punkt als erster in "Leçons de géométrie élémentaire I: Géométrie plane"

1911 beschrieb.

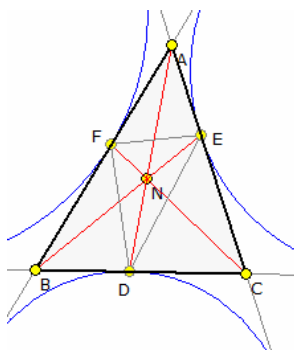
Der Hadamard-Punkt ist der Umkreismittelpunkt des von den Ankreismittelpunkten gebildeten Dreiecks  $M_1M_2M_3$ . Dieser Umkreis wird Hadamard-Kreis genannt. Dessen Radius ist doppelt so groß wie der Umkreisradius des Dreiecks ABC.

$$R_H = 1/2 \cdot abc/A = a/\sin \alpha$$

Der Hadamard-Punkt H, der Umkreismittelpunkt U von ABC und der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden und es ist  $UI = UH$

Der Feuerbach-Punkt von  $M_1M_2M_3$  ist gerade U. Der Höhenschnittpunkt von  $M_1M_2M_3$  ist I.

Der Hadamard-Punkt ist mit dem Bevan-Punkt identisch.



### Nagel-Dreieck, Außenkontaktdreieck

Das von den Berührungspunkten der Seiten mit dem Inkreis gebildete Dreieck ist das Kontakt Dreieck. Ein ähnliches Gebilde kann man mit den drei Berührungspunkten D, E, F der Ankreise an das Dreieck ABC betrachten. Dieses Dreieck wird Außenkontaktdreieck oder Nagel-Dreieck (engl. extouch triangle) genannt.

Verbindet man die Eckpunkte mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten, so schneiden sich die Geraden in einem Punkt, dem Nagel-Punkt.

Für die drei Punkte des Außenkontaktdreiecks gilt die trilineare Zentralfunktion  $0 : (a-b+c)/b : (a+b-c)/c$

Für die Seiten und den Flächeninhalt  $\Delta'$  des Außenkontaktdreiecks findet man

$$a' = \sqrt{a^2 - bc \sin^2 \alpha} \quad b' = \sqrt{b^2 - ac \sin^2 \beta}$$

$$c' = \sqrt{c^2 - ab \sin^2 \gamma}$$

$$\Delta' = (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) / (4abc) \Delta$$

wobei  $\Delta$  der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.

### Ankreis-Berührungsdreieck

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit dem Inkreis, der die Seiten in  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  berührt. Das Dreieck  $A_0B_0C_0$  ist das Kontakt Dreieck von ABC.

In ähnlicher Weise können drei Ankreis-Berührungsdreiecke konstruiert werden, die von den Berührungspunkten der Ankreise an den Seiten erzeugt werden.



Sind  $F_0, F_1, F_2, F_3$  die Flächeninhalte der vier Dreiecke, so gilt

$$1/F_0 = 1/F_1 + 1/F_2 + 1/F_3$$

Für das Ankreis-Berührungsdreieck  $A_1B_1C_1$  erhält man die baryzentrischen Koordinaten der Berührungspunkte

$$A_1 = (0 : s-b : s-c) \quad B_1 = (-(s-b) : 0 : s)$$

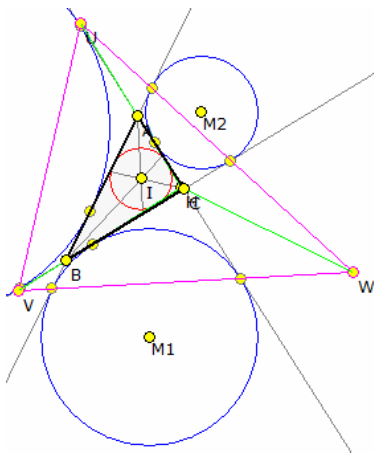
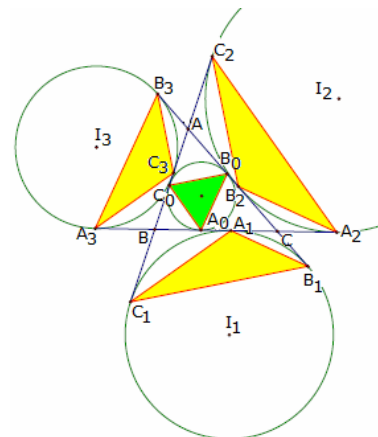
$$C_1 = (-(s-c) : s : 0)$$

und für die Fläche  $F_1$   $F_1 = 2s(s-b)(s-c) / (abc) \Delta$

Dabei ist  $s = (a+b+c)/2$  der halbe Umfang von  $ABC$  und  $\Delta$  dessen Flächeninhalt.

Für die anderen zwei Ankreis-Berührungsdreiecke ergeben sich die Berechnung analog.

$$F_2 = 2s(s-a)(s-c) / (abc) \Delta \quad F_3 = 2s(s-a)(s-b) / (abc) \Delta$$



### Äußeres Ankreisdreieck

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$  mit dem Inkreis, der die Seiten in  $A_0, B_0, C_0$  berührt. Das Dreieck  $A_0B_0C_0$  ist das Kontakt Dreieck von  $ABC$ . Die drei Ankreis-Berührungsdreiecke werden von den Berührungspunkten der Ankreise an den Seiten erzeugt.

Verbindet man die zwei Berührungspunkte eines jeden Ankreises, die nicht auf den direkten Dreiecksseiten liegen, so entsteht ein weiteres Dreieck  $UVW$ , das äußere Ankreisdreieck.

Die drei Eckpunkte haben die trilinearen Koordinaten

$$U = (-a(b+c) : S_C : S_B)$$

$$V = (S_C : -b(c+a) : S_A)$$

$$W = (S_B : S_A : -c(a+b))$$

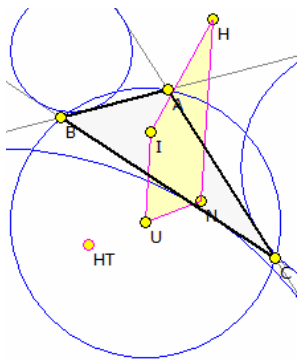
wobei nach der Conway-Dreiecksnotation

$$S_A = (b^2 + c^2 - a^2)/2, S_B = (a^2 + c^2 - b^2)/2 \text{ und } S_C = (b^2 + a^2 - c^2)/2$$

sind.

Das Dreieck  $ABC$  und  $UVW$  sind bezüglich des Höhenschnittpunktes  $H$  von  $ABC$  perspektiv.

Das äußere Ankreisdreieck  $UVW$  hat den Umkreismittelpunkt  $H$  und den Umkreisradius  $2R+r$ .



### Hofstadter-Trapez

Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$  mit dem Inkreismittelpunkt  $I$ , dem Umkreismittelpunkt  $U$ , dem Höhenschnittpunkt  $H$  und dem Nagel-Punkt  $N$ . Durch Hofstadter wurde nachgewiesen, dass die Strecken  $IU$  und  $HN$  stets parallel sind, d.h. das Viereck  $IUNH$  bildet ein Trapez, das Hofstadter-Trapez.

Die nichtparallelen Seiten des Trapezes  $IH$  und  $UN$  schneiden sich in einem Punkt, dem Hofstadter-Trapezpunkt (Kimberling-Punkt  $X_{944}$ ) mit der trilinearen Zentralfunktion

$$1 - \cos A - \cos B - \cos C + \cos B \cos C$$

Der Schwerpunkt  $S$  ist auch der Schwerpunkt des Trapezes (nach Darij Grinberg, 2002)

### Fuhrmann-Dreieck

1890 veröffentlichte Wilhelm Fuhrmann (1833-1904) in "Synthetische Beweise Planimetrischer Sätze" über eine weitere interessante Beziehung an Dreiecken.

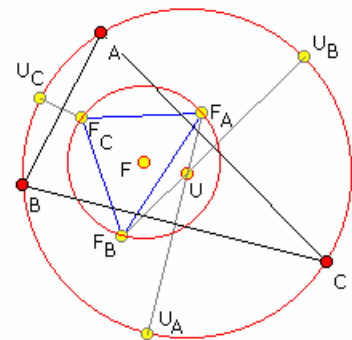
Halbiert man die Umkreisbogenabschnitte zwischen den Dreieckspunkten, so erhält man drei Punkte  $U_A, U_B$  und  $U_C$ . Diese Punkte werden an den Dreiecksseiten gespiegelt. Man erhält die Fuhrmann-Punkte  $F_A, F_B$  und  $F_C$ .

Diese Punkte bilden das Fuhrmann-Dreieck. Der Umkreis des Fuhrmann-Dreiecks ist der Fuhrmann-Kreis, auch F-Kreis genannt. Dessen Mittelpunkt ist der eigentliche Fuhrmann-Punkt.

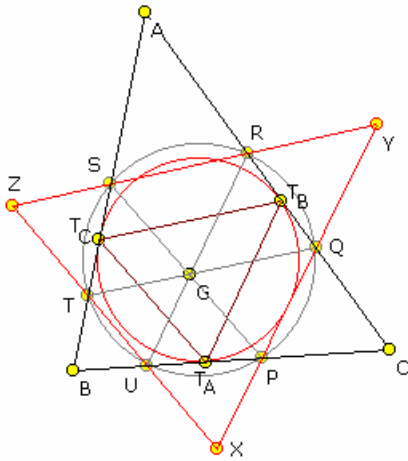
Auf Grund der Konstruktion der Fuhrmann-Punkte schneiden sich die Geraden  $U_A F_A, U_B F_B$  und  $U_C F_C$  im Umkreismittelpunkt  $U$  des Ausgangsdreiecks.

Weiterhin gilt:

Der Höhenschnittpunkt  $H$  des Dreiecks  $ABC$  liegt auf dem Fuhrmann-Kreis. Ebenso liegt der Nagel-Punkt  $N$  auf dem F-Kreis. Der Fuhrmann-Punkt  $F$  ist der Mittelpunkt der Strecke Nagel-Punkt - Höhenschnittpunkt  $NH$ . Jede Höhe schneidet den Fuhrmann-Kreis in einem zweiten Punkt. Dieser Punkt hat vom Eckpunkt der Höhe den Abstand  $2r$ , wobei  $r$  der Inkreisradius ist.







**Adams-Kreis**

Gegeben sei ein Dreieck ABC und dessen Kontakt-Dreieck  $T_A T_B T_C$  (Dreieck der Inkreisberührungspunkte). Werden die Geraden  $T_A T_B$ ,  $T_A T_C$  und  $T_B T_C$  parallel durch den Gergonne-Punkt G verschoben, so schneiden diese parallelen Geraden das Dreieck in sechs weiteren Punkten P, Q, R, S, T und U.

1843 bewies Adams in "Die Lehre von den Transversalen", dass diese sechs Punkte auf einem Kreis liegen. Adams zu Ehren trägt dieser Kreis seinen Namen.

Der Radius des Kreises ist  $R_A = r \sqrt{(p^2 - abcs - ps^2) / (p - s^2)}$  wobei s der halbe Dreiecksumfang, r der Inkreisradius und  $p = ab + bc + ca$  sind. Der Mittelpunkt des Kreises ist der Inkreismittelpunkt von ABC.

Verbindet man die Punkte auf dem Adams-Kreis paarweise, so entsteht ein Dreieck XYZ, das Adams-Dreieck.

Dann ist der Gergonne-Punkt von ABC der Lemoine-Punkt des Dreiecks XYZ. Der Adams-Kreis von ABC ist damit gleichzeitig der

1. Lemoine-Kreis von XYZ.

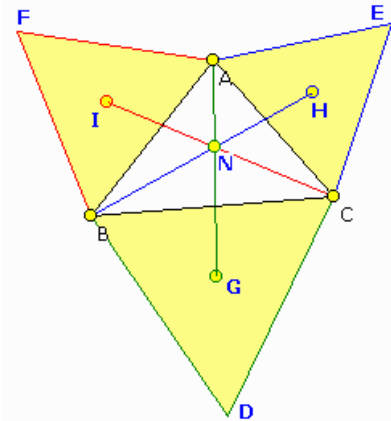
**Napoleon-Punkt**

Gegeben ist das Dreieck ABC. Auf jeder Dreiecksseite wird ein gleichschenkliges Dreieck errichtet. Die zusätzlichen Punkte seien D, E und F. Ist G der Schwerpunkt des Dreiecks DBC, H vom Dreieck CAE und I vom Dreieck ABF, so schneiden sich die Geraden AG, BH und CI in einem Punkt N, den sogenannten Napoleon-Punkt.

trilineare Koordinaten von N:  $\sin(\alpha + \pi/6) : \sin(\beta + \pi/6) : \sin(\gamma + \pi/6)$

Werden die Dreiecke in Richtung des Inneren des Dreiecks ABC angetragen, so schneiden sich die Geraden AG, BH und CI im 2. Napoleon-Punkt N'.

Trilineare Koordinaten von N':  $\sin(\alpha - \pi/6) : \sin(\beta - \pi/6) : \sin(\gamma - \pi/6)$



Die Eckpunkte der nach innen aufgesetzten Dreiecke bilden dann das innere Napoleon-Dreieck GHI. Dessen Flächeninhalt ist gleich

$$A = 1/6 (a^2 + b^2 + c^2 - 4 \sqrt{3} \Delta)$$

Der Umkreis des Dreieck GHI ist der innere Napoleon-Kreis. Dessen Mittelpunkt ist der Schwerpunkt des Ausgangsdreiecks ABC. Der Radius ist  $R = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - 4\Delta \sqrt{3}) / (3 \sqrt{2})}$

wobei  $\Delta$  der Flächeninhalt von  $\Delta$  ABC ist.  $\Delta = 1/4 \sqrt{(4 a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2)}$

**Dreiecks-Propeller**

Eng verbunden mit dem Napoleon-Punkt ist das Problem des Dreiecks-Propellers.

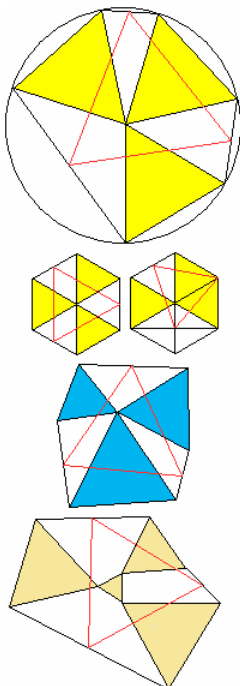
Der Dreieckspropeller, auch asymmetrischer Propeller, ist eine Figur der Unterhaltungsmathematik.

Er besteht aus drei gleichseitigen Dreiecken, die sich in einem Eckpunkt treffen. Das Besondere ist, dass ein weiteres gleichseitiges Dreieck auftritt. Verbindet man wie in der Abbildung die freien Eckpunkte der Dreiecke miteinander und halbiert die Verbindungsstrecken, so bilden ihre Mittelpunkte ein gleichseitiges Dreieck.

Das ist der Satz vom asymmetrischen Propeller.

zum Beweis siehe

Der Satz gilt für alle Anordnungen der Dreiecke. Der Propeller kann symmetrisch sein und die Dreiecke können Seiten gemeinsam haben. Sie können sich auch überlappen.



Weiterhin gilt:

Die drei gleichseitigen Dreiecke müssen nicht unbedingt gleich groß sein. Die drei gleichseitigen Dreiecke müssen nicht von einem Punkt ausgehen. Sie können auch von den Eckpunkten eines weiteren gleichseitigen Dreiecks ausgehen. Die drei Dreiecke müssen nicht gleichseitig sein, sie können ähnlich sein. Dabei rotiert jedes der drei Dreiecke relativ zum Nachbarn. Das "Mittendreieck" ist dann den anderen Dreiecken ähnlich.

Dieser Sachverhalt wurde 2000 von Martin Gardner in "The Asymmetric Propeller" bewiesen.

siehe

<http://mathdl.maa.org/mathDL/22/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=2698>

**Satz vom asymmetrischen Propeller**

Satz: Treffen sich drei gleichseitige Dreiecke in einem Eckpunkt, so gilt: Verbindet man die freien Eckpunkte der Dreiecke miteinander und halbiert die

Verbindungsstrecken, so bilden ihre Mittelpunkte ein gleichseitiges Dreieck.

Nachweis:

Die Ausgangsdreiecke seien ADE, AJH und AGF, die Seitenlänge sei a. Die Halbierungspunkte der Strecken FD, HG und EJ seien X, Y und Z. Die Winkel zwischen den Dreiecken seien  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . Ihre Summe ist  $180^\circ$ .

Zu zeigen ist, dass das Dreieck XYZ gleichseitig ist oder dass alle Innenwinkel  $60^\circ$  betragen.

Die gelben Dreiecke der oberen Abbildung sind kongruent, da zwei Seiten mit den Endpunkten A, R oder T und die stumpfen Winkel zwischen den Seiten gleich sind. Die Seiten sind als Mittelparallelen im Dreieck gleich  $a/2$ , die Winkel gleich  $120^\circ + \gamma$ .

Daraus folgt, dass das Dreieck PSZ gleichseitig ist.

Die Winkel APS und ASP betragen  $\delta = 1/2 (180^\circ - (120^\circ + \gamma)) = 1/2 (60^\circ - \gamma)$

Die gelben Dreiecke der unteren Abbildung sind kongruent, da sie in den beiden kürzeren Seiten übereinstimmen.

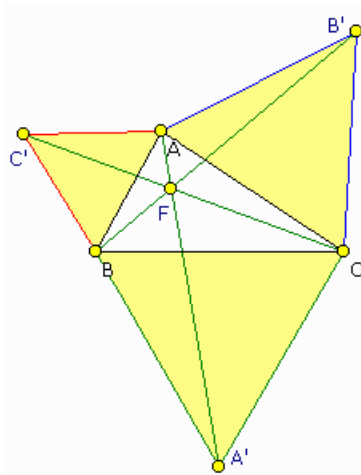
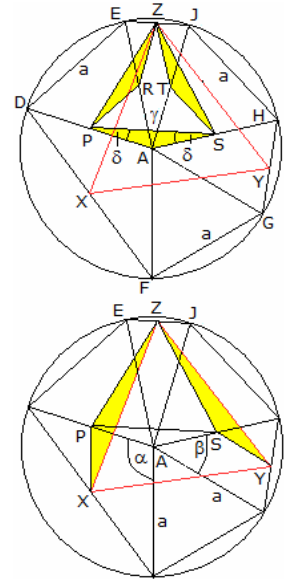
Die Seite SY ist als Mittelparallele im Dreieck AGH gleich  $a/2$ , ebenso PX im Dreieck FAD, und es gilt  $PZ = ZS$ , da das Dreieck PSZ gleichseitig ist.

Die Winkel XPZ und Winkel YSZ sind gleich, da aus  $60^\circ + \delta + (180^\circ - \alpha) = 360^\circ - (60^\circ + \delta + (180^\circ - \beta))$  mit etwas Umformung  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  wird. Aus der Kongruenz der gelben Dreiecke folgt, dass  $XZ = YZ$  gilt.

Für die 3. Seite des Dreiecks XYZ wiederholt man die Überlegungen. An Stelle der gelben Dreiecke über XZ und YZ errichtet man Dreiecke über XY und YZ. Das Vorgehen ist dann analog.

Damit wird  $XY = YZ = XZ$ , das rote Dreieck ist gleichseitig

<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/AsymmetricPropeller.shtml>



### Fermat-Punkt, Torricelli-Punkt

Gegeben ist das Dreieck ABC, auf dessen Seiten gleichseitige Dreiecke mit den Eckpunkten A', B' und C' errichtet werden. Die Geraden AA', BB' und CC' schneiden sich dann im Fermat-Punkt F. Die Umkreise der Dreiecke ACB', ABC' und BCA' schneiden sich ebenfalls in diesem Punkt.

Der Fermat-Punkt war die erste neue Entdeckung am Dreieck nach den Ergebnissen der antiken, griechischen Mathematiker.

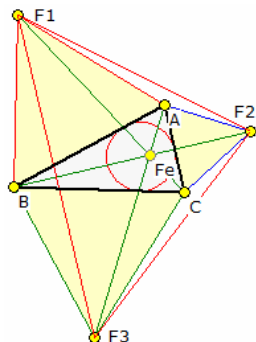
Der französische Mathematiker Pierre Fermat fand diesen Punkt auf der Suche nach dem Punkt P in einem Dreieck, so dass die Summe der Abstände  $PA + PB + PC$  zu den Dreieckspunkten minimal ist.

Torricelli bewies, dass der Fermat-Punkt die gesuchte Lösung ist, wenn jeder Innenwinkel des Dreiecks ABC kleiner als  $120^\circ$  ist. Nur in diesem Fall liegt F im Inneren des Dreiecks. Der Punkt F wird auch Fermat-Torricelli-Punkt genannt.

Torricellis Idee: Steckt man drei Fäden mit gleichen Massen durch drei Löcher in einem dünnen Brett an den Ecken des Dreiecks und knotet sie mit den oberen Enden zusammen, so findet der Knoten ganz von selbst im homogenen Schwerfeld den gesuchten Punkt, denn die in der Ebene des Dreiecks liegenden Teile der Fäden sind genau dann minimal, wenn der herunterhängenden Teile zusammen maximal lang sind.

Da alle drei Fäden gleich stark gespannt sind, bilden sie um den Knoten herum drei gleiche Winkel, also je  $120^\circ$ .

Der Fermat-Punkt ist auch das 1.isogonische Zentrum des Dreiecks ( $\iota\sigma\sigma\gamma$  ... iso = gleich,  $\gamma\omega\nu\iota\alpha$  ... gon = Winkel), da die Winkel BFC, CFA und AFB kongruent sind. Das 2.isogonische Zentrum ergibt sich, wenn die gleichseitigen Dreiecke in Richtung des Dreiecks konstruiert werden.



### Fermat-Dreieck

Gegeben ist das Dreieck ABC, auf dessen Seiten gleichseitige Dreiecke mit den Eckpunkten F1, F2 und F3 errichtet werden. Die Geraden AF3, BF2 und CF1 schneiden sich dann im Fermat-Punkt F.

Diese Eckpunkte bilden gleichzeitig ein Dreieck, das Fermat-Dreieck F1F2F3.

Sind a, b, c die Seitenlängen des Dreiecks ABC und ist  $\Delta$  dessen Flächeninhalt, so gilt dann

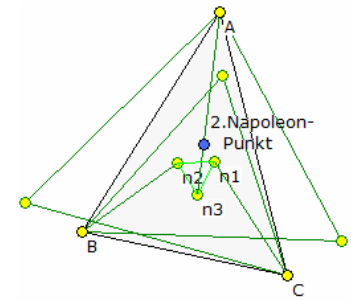
1) Die Strecken AF3, BF2 und CF1 sind gleich lang mit der Länge

$$l = \sqrt{\frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\Delta)}$$

2) Das Fermat-Dreieck hat den gleichen Schwerpunkt wie das Dreieck ABC

**Fermat-Punkt 2.Art, Torricelli-Punkt 2.Art, 2.Napoleon-Punkt**

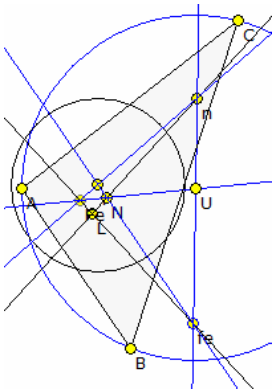
Klappt man die drei gleichseitigen Punkte der Dreiecke; entsprechend der Konstruktion des Fermat-Punktes; nach innen statt nach außen, so dass sie sich mehr oder weniger überlappen, bekommt man einen zweiten zentralen Punkt des Dreiecks, in dem sich die Geraden von den Eckpunkten zu den aufgesetzten Dreieckspunkten auch wieder treffen und sechs gleiche Winkel bilden.



Dieser Punkt wird 2.Fermat-Punkt oder 2.Napoleon-Punkt genannt.

Streng genommen ist dieser Punkt aber der 2.Torricelli-Punkt, da Evangelista Torricelli diesen Punkt als erster beschrieb.

Nach dem Satz von Lester liegen beide Torricelli-Punkte, der Umkreismittelpunkt und der Mittelpunkt des Feuerbachkreises auf einem Kreis, dem Lester-Kreis.



**Fermat-Napoleon-Geraden**

Zu vier Punkten kann man drei Paare von Geraden auswählen und jeweils deren Schnittpunkte suchen.

Für die beiden Fermat-Torricelli- und die beiden Napoleon-Punkte sind das drei sehr prominente Punkte:  $F_1N_1$  und  $T_2N_2$  schneiden sich im Umkreismittelpunkt U des Dreiecks.

Überkreuz schneiden sich die Fermat-Napoleon-Geraden  $F_1N_2$  und  $F_2+N_1$  dagegen im Mittelpunkt des Neunpunktekreises, dem Feuerbach-Punkt.

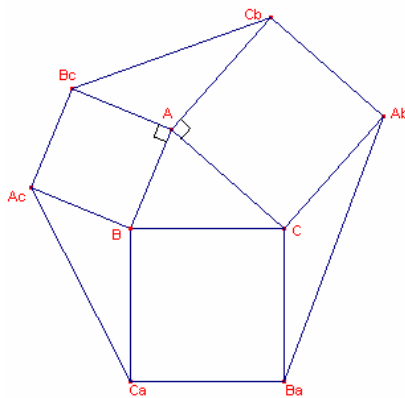
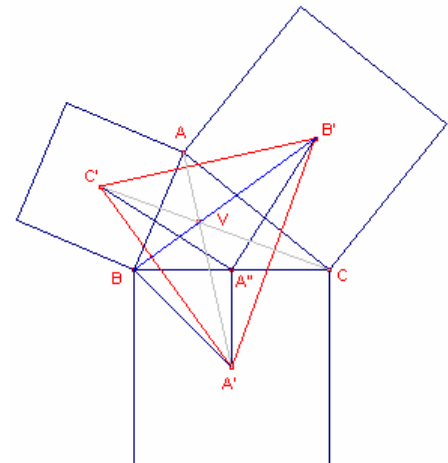
Die Gerade durch beide Fermat-Punkte  $F_1F_2$  und die durch beide Napoleon-Punkte  $N_1N_2$  treffen sich im Symmedianpunkt bzw. Lemoine-Punkt.

Wählt man zusätzlich die isogonalen Bildpunkte  $iN_1$  und  $iN_2$  der Napoleon-Punkte hinzu, so gibt es zwei Geraden, durch je drei dieser Punkte, die sich im Neunpunktekreis-Mittelpunkt treffen.

**Vecten-Punkt**

Auf den Seiten eines beliebigen, nicht notwendigerweise rechtwinkligen, Dreiecks ABC werden Quadrate errichtet.

Die Schwerpunkte der Quadrate werden mit den gegenüberliegenden Dreieckspunkten verbunden. Dann schneiden sich die Verbindungsgeraden in einem Punkt, dem 1.Vecten-Punkt. Nachweis: Die Dreiecke  $A''B'C'$  und  $A''BA'$  gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke, die den Punkt  $A''$  gemeinsam haben. Damit stehen die Geraden  $B'B$  und  $A'C'$  senkrecht aufeinander und die Gerade  $B'B$  ist Höhe im Dreieck  $A''B'C'$ . Analog zeigt man, dass  $A'A$  und  $C'C$  Höhen sind, die sich folglich in einem Punkt schneiden.



**Vecten-Dreiecke**

Wird die Vecten-Konstruktion, d.h. auf die Seiten eines Dreiecks ABC werden Quadrate aufgesetzt, durch Strecken wie in der Abbildung ergänzt, so entstehen drei Vecten-Dreiecke  $AC_bB_c$ ,  $BA_cC_a$  und  $CA_bB_a$ .

Hier gilt:

- 1)  $A_bB_a^2 + B_cC_b^2 + C_aA_c^2 = 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$
- 2) die Vecten-Dreiecke sind flächengleich

Nachweis: Im Dreieck  $AC_bB_c$  gilt

$$B_cC_b^2 = B_cA^2 + C_bA^2 - 2 B_cA C_bA \cos B_cAC_b$$

und mit dem Winkel  $(B_cAC_b) = \pi - \text{Winkel}(ABC)$

$$B_cC_b^2 = AB^2 + AC^2 + 2 AB AC \cos \alpha$$

Im Dreieck ABC wird

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB AC \cos \alpha \quad B_cC_b^2 = 2 AB^2 + 2 AC^2 - BC^2$$

und  $A_bB_a^2 = 2 BC^2 + 2 AC^2 - AB^2 \quad A_cC_a^2 = 2 AB^2 + 2 BC^2 - AC^2$

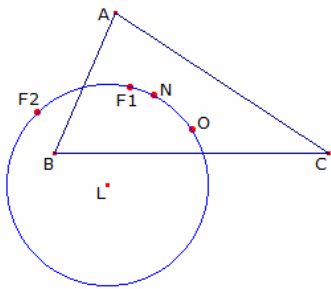
Aufsummierung führt zu  $A_bB_a^2 + B_cC_b^2 + C_aA_c^2 = 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$

Es sei  $A_x$  die Oberfläche des Vecten-Dreiecks bei A usw. Dann gilt

$$A_A = \frac{1}{2} bc \sin \alpha \quad A_B = \frac{1}{2} ac \sin \beta \quad A_C = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

Damit wird  $aA_A / \sin \alpha = b A_B / \sin \beta = c A_C / \sin \gamma = \frac{1}{2} abc$

und nach dem Sinussatz die Aussage 2)



### Lester-Kreis

Der Umkreismittelpunkt O (Kimberling-Punkt  $X_3$ ), der Mittelpunkt des Neun-Punkte-Kreises  $N = X_5$ , der erste Fermat-Punkt  $F_1 = X_{13}$  und der 2. Fermat-Punkt  $F_2 = X_{14}$ , auch 2. isogonisches Zentrum genannt, liegen auf einem Kreis.

Der Mittelpunkt des Lester-Kreises; Kimberling-Punkt  $X_{1116}$ ; hat die trilineare Funktion

$$\alpha = bc (b^2 - c^2) [2 (a^2 - b^2)(c^2 - a^2) + 3R^2 (2a^2 - b^2 - c^2) - a^2 (a^2 + b^2 + c^2) + a^4 + b^4 + c^4]$$

Anmerkung: Der Lester-Kreis wurde von der kanadischen Mathematikerin June Lester 1997 entdeckt. Ungewöhnlich in der Geschichte der Mathematik ist, dass sie ihre Entdeckung selbst(!) nach sich benannte.

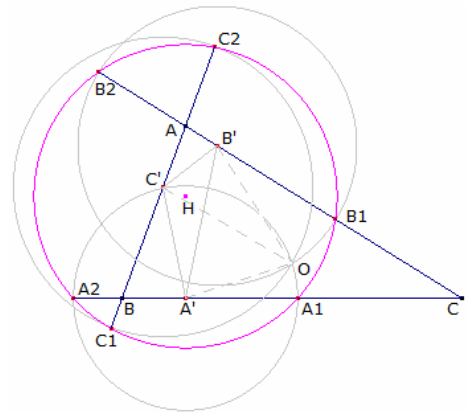
### Droz-Farny-Kreis

Gegeben sei ein Dreieck ABC und in diesem sein Höhenfußpunkt dreieck.

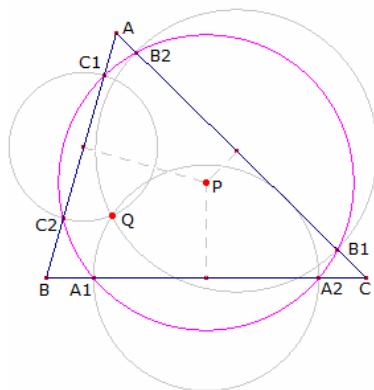
Durch die Höhenfußpunkte als Zentrum werden Kreise durch den Umkreismittelpunkt O gezeichnet, d.h. die Kreise  $A'(A'O)$ ,  $B'(B'O)$  und  $C'(C'O)$ .

Die Schnittpunkte dieser Kreise mit den evtl. verlängerten Dreiecksseiten liegen dann auf einem Kreis, mit dem Höhenschnittpunkt H als Mittelpunkt.

Dieser Kreis wird Droz-Farny-Kreis nach dem Schweizer Mathematiker Arnold Droz-Farny (1856-1912) genannt.



Ein zweiter Droz-Farny-Kreis entsteht, wenn das Mittendreieck betrachtet wird. Mit den Seitenmittelpunkten als Zentrum werden Kreise durch den Höhenschnittpunkt gezeichnet. Diese drei Kreise schneiden sich mit den Dreiecksseiten in sechs Punkten, die auf einem Droz-Farny-Kreis mit dem Umkreismittelpunkt als Zentrum liegen. Allgemein gilt der Satz von Droz-Farny.



### Satz von Droz-Farny

Gegeben sei ein Dreieck ABC und in diesem zwei zueinander isogonal konjugierte Punkte P und Q.

Von P werden die Lote auf die Dreiecksseiten gefällt. Mit den Lotfußpunkten als Mittelpunkt werden Kreise durch den isogonal konjugierten Punkt Q gezeichnet.

Diese drei Kreise schneiden die Dreiecksseiten in den Punkten  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ .

Satz von Droz-Farny: Diese Schnittpunkte sind konzyklisch, d.h. sie liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt P.

Auf Grund der isogonalen Verwandtschaft von P und Q ergibt sich ein zweiter Droz-Farny-Kreis, wenn P und Q vertauscht werden.

Beide Droz-Farny-Kreise haben den gleichen Radius.

Weiterhin gilt: Die Fußpunkt dreiecke zweier isogonaler Punkte haben den gleichen Umkreis.

Aus dem Satz von Droz-Farny ergibt sich ein spezieller Satz, der schon von Jakob Steiner gefunden, aber erst 1901 von Arnold Droz in "Notes sur un théorème de Steiner" bewiesen wurde.

Gegeben sei ein Dreieck ABC, dessen Mittendreieck  $A'B'C'$  und ein beliebiger Kreis um den Höhenschnittpunkt H. Dieser Kreis schneide sich mit den Seiten des Mittendreiecks in den Punktepaaren  $(P_a, Q_a), (P_b, Q_b), (P_c, Q_c)$ . Dann gilt:

$$AP_a = AQ_a = BP_b = BQ_b = CP_c = CQ_c$$

Ebenso gilt die Umkehrung: Wenn gleiche Kreise um die Höhenfußpunkte mit dem Radius  $R_{ABC}$  die Seiten des Mittendreiecks paarweise schneiden, dann liegen diese Schnittpunkte auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt H. Für den Radius dieses Kreises gilt

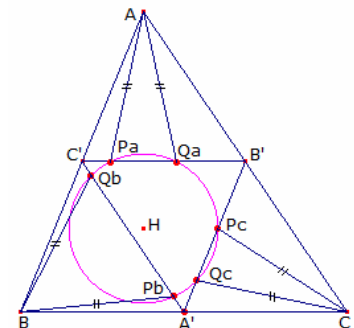
$$R_H^2 = 4 R^2 + R_{ABC}^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Wird  $R_{ABC}$  gleich den Umkreisradius R gesetzt, wird

$$R_H^2 = 5 R^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

und für den Abstand des Höhenschnittpunktes H zum Umkreismittelpunkt U

$$HU^2 = 9 R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$



## Ajima-Malfatti-Punkte

Problem von dem japanischen Mathematiker Chokuen Ajima (1732-1798) und dem Italiener Malfatti (um 1803):

Gegeben ist ein Dreieck ABC. In dieses sollen drei Kreise  $K_a$ ,  $K_b$  und  $K_c$  konstruiert werden, so dass die Kreise sich paarweise und zusätzlich jeweils zwei Seiten tangieren.

$A'$  sei der Berührungspunkt der Kreise  $K_b$  und  $K_c$ , sowie  $B'$  und  $C'$  entsprechende Punkte für die anderen Kreispaare.

Die Kreise haben dann die Radien

$$r_A = r / (2 (s-a)) (s - r - (IB + IC - IA))$$

$$r_B = r / (2 (s-b)) (s - r - (IA + IC - IB))$$

$$r_C = r / (2 (s-c)) (s - r - (IB + IA - IC))$$

Dabei sind  $r$  der Inkreisradius,  $I$  der Inkreismitelpunkt und  $s$  der halbe Kreisumfang. Für den Abstand eines Eckpunktes zum Inkreismitelpunkt gilt

$$AI = \sqrt{(s - a)^2 + r^2}$$

Die Geraden  $AA'$ ,  $BB'$  und  $CC'$  schneiden sich dann in einem Punkt, dem 1. Ajima-Malfatti-Punkt.

trilineare Koordinaten:  $(\sec(\alpha/4))^4 : [\sec(\beta/4)]^4 : [\sec(\gamma/4)]^4$

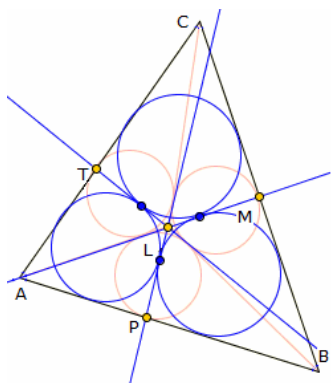
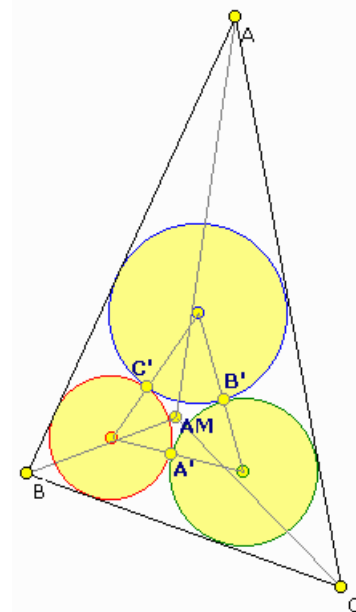
Sind  $A''$ ,  $B''$  und  $C''$  die Mittelpunkte der Ankreise des Dreiecks, so schneiden sich die Geraden  $A''A'$ ,  $B''B'$  und  $C''C'$  im zweiten Ajima-Malfatti-Punkt.

trilineare Koordinaten:  $1/t_2 + 1/t_3 - 1/t_1 : 1/t_3 + 1/t_1 - 1/t_2 : 1/t_1 + 1/t_2 - 1/t_3$

mit  $t_1 = 1 + 2 [\sec(\alpha/4) \cos(\beta/4) \cos(\gamma/4)]^2$

$$t_2 = 1 + 2 [\sec(\beta/4) \cos(\gamma/4) \cos(\alpha/4)]^2$$

$$t_3 = 1 + 2 [\sec(\gamma/4) \cos(\alpha/4) \cos(\beta/4)]^2$$



$M$ ,  $P$  und  $T$

4) für jedes der drei entstehenden Vierecke  $APLT$ ,  $BMLP$  und  $CTLM$  existiert ein Inkreis. Diese Inkreise sind die gesuchten Malfatti-Kreise des Ausgangsdreiecks  $ABC$

## Malfatti-Kreise

Malfatti-Problem:

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . In dieses sollen drei Kreise  $K_a$ ,  $K_b$  und  $K_c$  so konstruiert werden, so dass die Kreise sich paarweise und zusätzlich jeweils zwei Seiten tangieren. Diese Kreise nennt man die Malfatti-Kreise.

Durch Steiner wurde 1826 eine elegante Konstruktion vorgeschlagen und bewiesen:

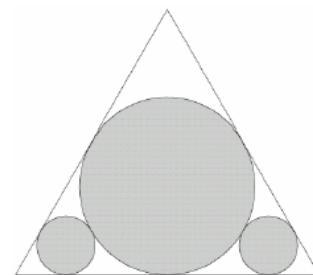
- 1) Man zeichne die drei Winkelhalbierenden  $IA$ ,  $IB$  und  $IC$
- 2) in die Dreiecke  $\triangle IAB$ ,  $\triangle IBC$  und  $\triangle ICA$  werden die Inkreise  $K_c$ ,  $K_a$  und  $K_b$  eingezeichnet. Die Winkelhalbierenden sind dann gemeinsame Tangenten von je zwei dieser Kreise
- 3) für jedes Kreispaar werden die zweiten inneren Tangenten gezeichnet. Diese schneiden sich im Punkt  $L$  und die Seiten in den Punkten

## Malfatti-Problem (2)

In der ursprünglichen Fassung stellte 1803 der italienische Mathematiker Malfatti die: "Nimm an, man hat ein Stück Marmor in der Form eines dreiseitigen Prismas und möchte daraus drei Zylinder weißeln, sodass die Zylinder zusammen ein möglichst großes Volumen haben. Die Zylinder müssen dabei nicht gleich groß sein."

Malfatti gab folgende Lösung:

In das Dreieck zeichnet man drei Kreise, die jeweils zwei der anderen Kreise und zwei Seiten des Dreiecks berühren, d.h. die klassischen Malfatti-Kreise.



1930 kamen jedoch Zweifel an der Aussage von Malfatti auf. Die US-Amerikaner Lob und Richmond fanden eine Anordnung in einem gleichseitigen Dreieck, die von der Fläche her ein wenig besser war, als die Anordnung, die Malfatti vorschlug.

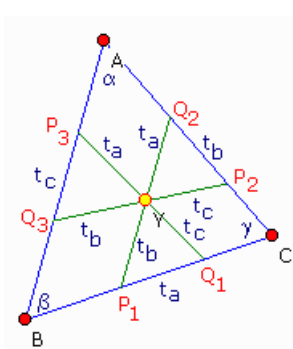
Sie platzierten zunächst einen großen Kreis (den Inkreis) in das Dreieck und füllten dann zwei der verbleibenden Lücken mit je einem größtmöglichen Kreis.

1967 traf Goldberg eine überraschende Feststellung: Malfatti hat nie recht.

Es ist immer besser, den sogenannten „gierigen“ Ansatz zu verfolgen, bei dem jeweils ein größtmöglicher Kreis in die verbleibende Fläche platziert wird. Goldberg machte seine Behauptung plausibel mit Hilfe numerischer Resultate. Ein Beweis wurde bis heute nicht geliefert.



### Congruent-Isoscelizer-Punkt, Yff Zentralpunkt



Ein Isoscelizer des Dreiecksinnenwinkels  $\alpha$  des Dreiecks ABC durch einen Punkt P auf AC ist eine Strecke durch einen weiteren Punkt auf AB, so dass das Segment AP gleich AQ ist. Damit ist das Dreieck APQ gleichschenkelig.

1989 bewies der holländische Mathematiker Peter Yff, dass es genau eine Lage von gleich langen Isoscelizern der Innenwinkel gibt. Diese schneiden sich dann in einem Punkt, dem Congruent-Isoscelizer-Punkt C.I.P., auch Yff Zentralpunkt Y genannt.

Nach Yff hat Y, C.I.P. die trilinearen Koordinaten:

$$\cos(\beta/2) + \cos(\gamma/2) - \cos(\alpha/2) : \cos(\gamma/2) + \cos(\alpha/2) - \cos(\beta/2) : \cos(\alpha/2) + \cos(\beta/2) - \cos(\gamma/2)$$

Weiterhin gilt  $\sin(\alpha/2) = (t_b + t_c) / (2 AQ_3)$

Sind  $l_a = AQ_3$ ,  $l_b$  und  $l_c$  die entsprechenden Abstände der Isoscelizer, so können

die Längen  $l_a$ ,  $l_b$ ,  $l_c$  und  $t_a$ ,  $t_b$ ,  $t_c$  aus folgendem Gleichungssystem ermittelt werden:

$$\begin{aligned} l_b + l_c - t_a &= a & l_a + l_c - t_b &= b & l_a + l_b - t_c &= c \\ [(t_b + t_c) / l_a]^2 &= 2 [1 - (b^2 + c^2 - a^2)/(2bc)] \\ [(t_a + t_c) / l_b]^2 &= 2 [1 - (a^2 + c^2 - b^2)/(2ac)] \\ [(t_a + t_b) / l_c]^2 &= 2 [1 - (a^2 + b^2 - c^2)/(2ab)] \end{aligned}$$

### Yff Zentraldreieck

Außer der Existenz des Yff Zentralpunktes (siehe Congruent-Isoscelizer-Punkt) konnte Yff schon 1987 beweisen, dass es stets eine Lage der drei Isoscelizer gibt, so dass die vier Dreiecke  $P_1Q_1D$ ,  $P_2Q_2E$ ,  $P_3Q_3F$  und DEF kongruent sind.

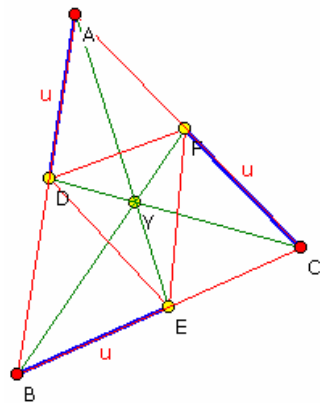
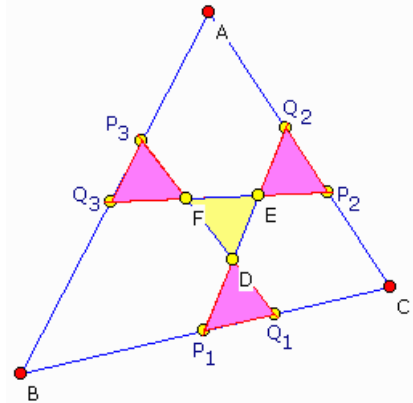
Sind  $x = \cos \alpha/2$ ,  $y = \cos \beta/2$  und  $z = \cos \gamma/2$ , so besitzen die drei Punkte D, E, F des Zentraldreiecks die trilinearen Koordinaten

Punkt D  $y z : z(x + z) : y(x + y)$

Punkt E  $z(y + z) : z x : x(y + x)$

Punkt F  $y(z + y) : x(z + x) : x y$

Das Dreieck ABC ist das Außenkreis-Tangenten-Dreieck des Yff Zentraldreiecks DEF.



### Yff-Punkt und Dreieck

Auf den Seiten eines Dreiecks ABC werden drei Punkte D, E und F so markiert, dass deren Abstände u von einem Dreieckspunkt auf den Seiten BC, CA und AB gleich sind.

Dann schneiden sich die Transversalen AE, BF und CD in einem Punkt Y. Y wird 1.Yff-Punkt genannt, wenn u die Gleichung  $x^3 = (a - x)(b - x)(c - x)$  erfüllt. Diese Gleichung hat eine einzelne reelle Wurzel u, die durch Lösung von

$$2x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

mit  $p = a+b+c$ ;  $q = ab + ac + bc$  und  $r = abc$ , gefunden werden kann.

**trilineare Zentralfunktion**  $1/a^3 \sqrt{[(c - u)/(b - u)]}$

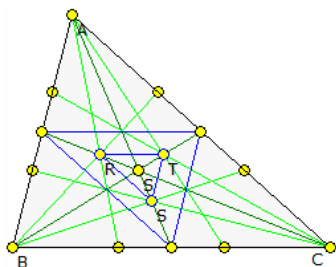
Der zum 1.Yff-Punkt isotomisch konjugierte Punkt wird 2.Yff-Punkt Y' genannt.

trilineare Zentralfunktion  $1/a^3 \sqrt{[(b - u)/(c - u)]}$

Für den Abstand u gilt  $u \leq p/6$ , wobei die Gleichheit für ein gleichseitiges Dreieck gilt. Weiterhin ist  $u < \alpha < p - 3u$ ;  $u < \beta < p - 3u$ ;  $u < \gamma < p - 3u$

Die Yff-Punkte wurde 1963 erstmals beschrieben und besitzen eine Vielzahl interessanter Eigenschaften. U.a. steht die Strecke  $YY'$  senkrecht zur Strecke Inkreiszentrum I-Umkreiszentrum U und hat die Länge  $YY' = 4 u IU A / (u^3 + abc)$  wobei A der Dreiecksflächeninhalt und IU der Abstand von Inkreiszentrum zum Umkreiszentrum sind.

Das Dreieck DEF wird dann 1.Yff-Dreieck genannt und hat den Flächeninhalt  $A = u^3 / (2 R)$  wobei R der Umkreisradius des Dreiecks ABC ist.



### Rosenbaum-Dreieck

#### Satz von Lehmann-Rosenbaum

Zu einem gegebenem  $0 < \lambda < 1$  unterteilt man die Seiten eines Dreiecks  $A_0A_1A_2$  mit den Teilpunkten  $B_i$  und  $C_i$ :

$$A_i B_{i+2} = \lambda A_i A_{i+1}$$

$$A_i C_{i+2} = (1-\lambda) A_i A_{i+1}$$

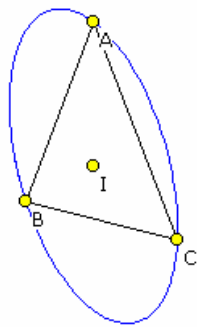
Weiter sei  $P_i$  der Schnittpunkt der beiden Ecktransversalen  $A_{i-1}B_{i-1}$  und  $A_{i+1}C_{i+1}$ . Schließlich sei S der Schwerpunkt des Dreiecks  $A_0A_1A_2$ .

Dann gilt: Die zentrische Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor  $(1-2\lambda)/(1+\lambda)$  bildet das Dreieck  $A_0A_1A_2$  auf das Dreieck  $P_0P_1P_2$  ab.



Dieses Dreieck  $P_0P_1P_2$  wird für den Spezialfall  $\lambda = 1/3$  Rosenbaum-Dreieck genannt. In der Abbildung stellt das Dreieck RST das Rosenbaum-Dreieck des Dreiecks ABC dar.

### Steiner-Ellipse



Für jedes Dreieck existiert der Umkreis. Allerdings ist dies nicht die Ellipse, auf deren Peripherie die Dreieckspunkte A, B und C liegen und die den kleinsten möglichen Flächeninhalt hat.

Diese Ellipse wurde 1826 von Steiner entdeckt und nach ihm benannt. Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ist auch der Mittelpunkt der Steiner-Ellipse. Auf dieser Ellipse liegt ebenfalls der Steiner-Punkt mit den trilinearen Koordinaten  $bc/(b^2 - c^2) : ca/(c^2 - a^2) : ab/(a^2 - b^2)$ . Die Steiner-Ellipse hat die spezielle Gleichung  $1/ax + 1/by + 1/cz = 0$

Der Flächeninhalt der Steiner-Ellipse ist  $A = 4\pi / (3 \sqrt{3}) \Delta$  wobei  $\Delta$  der Flächeninhalt des Dreiecks ist. Die Brennpunkte der Ellipse sind die Bickart-Punkte mit den trilinearen Koordinaten

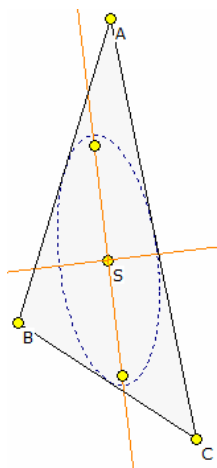
$$\begin{aligned} \sqrt{2} \Delta/a \pm \sqrt{-a^2 + Z + bc \cos(\beta-\gamma)} : \\ \sqrt{2} \Delta/b \pm \sqrt{-b^2 + Z + ac \cos(\alpha-\gamma)} : \\ \sqrt{2} \Delta/c \pm \sqrt{-c^2 + Z + ab \cos(\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

wobei  $Z = \sqrt{(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)}$  und  $\Delta$  der Flächeninhalt des Dreiecks sind.

Für die Halbachsen  $a, b$  und die Brennweite  $e$  wird

$$\begin{aligned} a &= 1/3 \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2Z)} & b &= 1/3 \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - 2Z)} \\ e &= 2/3 \sqrt{Z} \end{aligned}$$

### Steiner-Innenellipse, Mittelpunktsellipse



In Analogie zur Steiner-Ellipse, die ein Dreieck umgibt, kann man auch eine Ellipse definieren, die innerhalb des Dreiecks liegt:

Für jedes Dreieck existiert der Inkreis. Allerdings ist dies nicht die Ellipse, die alle Seiten des Dreiecks innen berührt und die den größten möglichen Flächeninhalt hat. Diese Ellipse wurde u.a. 1970 von Padoe in "Thinking geometrically" beschrieben. Durch Chakerian wird diese Ellipse auch Mittelpunktsellipse genannt.

Der Schwerpunkt  $S$  des Dreiecks ist auch der Mittelpunkt der Steiner-Innenellipse. Diese Ellipse entsteht durch eine zentrische Streckung der Steiner-Ellipse mit dem Faktor  $k = 1/2$  und dem Schwerpunkt als Zentrum.

Die Innenellipse verläuft durch das Zentrum der Kiepert-Hyperbel.

Der Flächeninhalt der Steiner-Innenellipse ist  $A = \pi / (3 \sqrt{3}) \Delta$

wobei  $\Delta$  der Flächeninhalt des Dreiecks ist. Die Brennpunkte der Ellipse sind die inneren Bickart-Punkte, die genau zwischen den eigentlichen Bickart-Punkten und dem Schwerpunkt liegen.

Ist  $Z = \sqrt{(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)}$ , so wird für die Halbachsen  $a, b$  und die

Brennweite  $e$

$$a = 1/6 \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2Z)} \quad b = 1/6 \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - 2Z)} \quad e = 1/3 \sqrt{Z}$$

### Steiner-Punkt

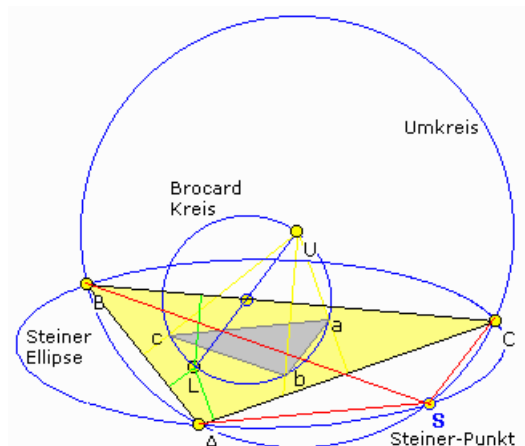
Der Steiner-Punkt eines Dreiecks wird wie folgt konstruiert:

$O$  sei der Umkreismittelpunkt und  $L$  der Lemoine-Punkt (symmetrischer Punkt) des Dreiecks  $ABC$ . Der Kreis, der  $OL$  als Durchmesser besitzt, ist der Brocard-Kreis.

Die Gerade von  $O$  senkrecht auf die Dreiecksseite schneidet den Brocard-Kreis in einem Punkt  $a$ , analog entstehen die Punkte  $b$  und  $c$ . Das durch die Punkte  $a, b$  und  $c$  gebildete Dreieck ist das 1. Brocard-Dreieck.

Parallelverschiebungen der Streckene  $bc$  durch  $A$ ,  $ca$  durch  $B$  und  $ab$  durch  $C$  schneiden sich in einem Punkt, dem gesuchten Steiner-Punkt  $S$ . Der Steiner-Punkt liegt auf der Steiner-Ellipse und hat die trilinearen Koordinaten:

$$bc/(b^2 - c^2) : ca/(c^2 - a^2) : ab/(a^2 - b^2)$$

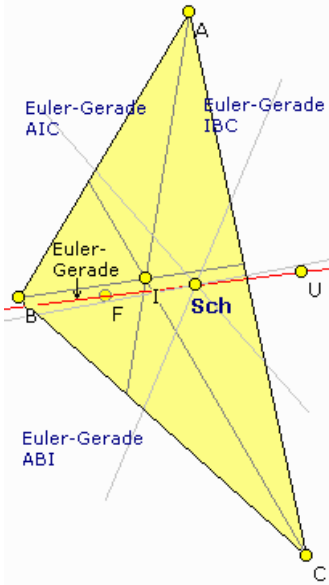


Durch die Eckpunkte  $A, B$  und  $C$  senkrecht zu den Seiten des Brocard-Dreiecks verlaufende Geraden schneiden sich ebenfalls in einem Punkt, dem Tarry-Punkt (nach Gaston Tarry, 1843-1913, Frankreich). Dieser Punkt liegt auf dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$  gegenüber dem Steiner-Punkt. Der Tarry-Punkt ist der Kimberling-Punkt  $X_{98}$ .

Der Lemoine-Punkt eines Dreiecks ist der Steiner-Punkt des 1. Brocard-Dreiecks dieses Dreiecks. Der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ist der Tarry-Punkt des 1. Brocard-Dreiecks dieses Dreiecks.

### Schiffler-Punkt

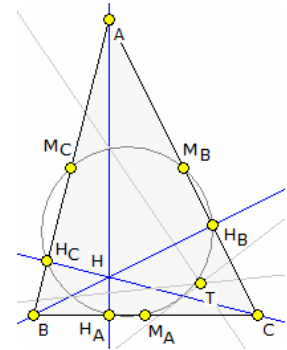
$I$  sei der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks  $ABC$ .



Die Euler-Geraden der vier Dreiecke BCI, CAI, ABI und ABC schneiden sich dann stets in einem Punkt, dem Schiffler-Punkt.  
 trilineare Koordinaten:  
 $1/(\cos(\beta)+\cos(\gamma)) : 1/(\cos(\gamma)+\cos(\alpha)) : 1/(\cos(\alpha)+\cos(\beta))$   
 $(b+c-a)/(b+c) : (c+a-b)/(c+a) : (a+b-c)/(a+b)$   
 wobei a, b und c die Seitenlängen und  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  die Innenwinkel sind.  
 Der Schiffler-Punkt wurde nach dem deutschen Mathematiker Kurt Schiffler (1896-1986) benannt, der ihn erstmals bei der Lösung geometrischer Probleme benutzte.

**Thébault-Punkt**

In einem Dreieck  $\Delta ABC$  mit den Höhenfußpunkten  $H_A, H_B$  und  $H_C$  ist der Thébaultpunkt T der gemeinsame Schnittpunkt der Eulergeraden der drei Dreiecke  $AH_BH_C, BH_AH_A$  und  $CH_AH_B$ . Dies wurde erstmals 1947 von Thébault veröffentlicht.



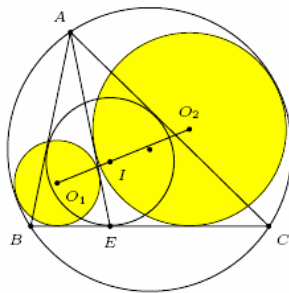
Der Thébault-Punkt liegt auf dem Feuerbachkreis und hat die Eigenschaft  $TH_A = TH_B + TH_C$  oder permutiert.

Somit gibt es zu einem unregelmäßigen Dreieck  $\Delta ABC$  vier Punkte auf dem Umkreis, so dass für sie gilt: Der Abstand zu einem Eckpunkt ist gleich der Summe der Abstände zu den beiden anderen Eckpunkten.

**Dreieckssatz von Thébault**

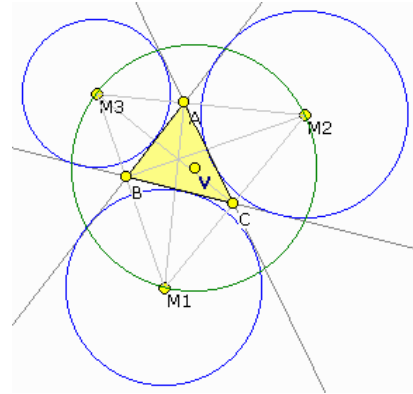
Durch Victor Thébault wurde 1948 in "Amer. Math. Monthly, 45" folgender Beziehung am allgemeinen Dreieck bewiesen:

E sei ein Punkt auf der Seite BD eines Dreiecks  $\Delta ABC$ , so dass  $\angle AEB = \theta$  ist.  
 $O_1(r_1)$  sei der Dreieck, der den Umkreis des Dreiecks und die Strecken EA, EB berührt. Der Kreis  $O_2(r_2)$  tangiert den Umkreis und die Strecken EA und EC.  
 Ist  $I(\rho)$  der Inkreis von  $\Delta ABC$ , so gilt  
 (1) I liegt auf der Strecke  $O_1O_2$  und  $O_1I / IO_2 = \tan^2 \theta/2$   
 (2)  $\rho = r_1 \cos^2 \theta/2 + r_2 \sin^2 \theta/2$



**Bevan-Punkt**

Der Bevan-Punkt V eines Dreiecks ABC ist der Umkreismittelpunkt des Ankreis-Dreiecks  $J_1J_2J_3$ . Der Punkt wurde zu Ehren des relativ unbekanntem englischen Mathematikers Benvan benannt, der als Erster bewies,



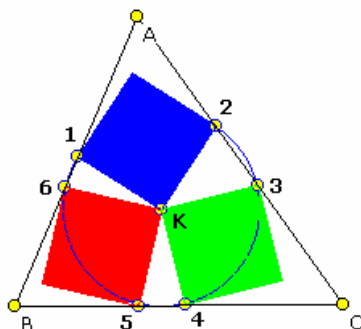
dass der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC der Mittelpunkt der Strecke Inkreismitelpunkt und Ankreis-Umkreismitelpunkt ist. Damit ist V die Spiegelung des Inkreismitelpunktes I am Umkreismittelpunkt O von ABC und es gilt:  $IO = OV = \sqrt{[R^2 - abc / (a+b+c)]}$  wobei R des Umkreisradius von ABC ist.

Der Bevan-Punkt ist weiterhin der Mittelpunkt der Strecke Nagel-Punkt - de Longchamp-Punkt. Der Spieker-Punkt ist der Mittelpunkt der Strecke Höhenschnittpunkt - Bevan-Punkt.

Der Bevan-Punkt hat in der Systematik von Kimberling die Bezeichnung  $X_{40}$  und die trilinearen Koordinaten:  $\cos \beta + \cos \gamma - \cos \alpha - 1 : \cos \alpha + \cos \gamma - \cos \beta - 1 : \cos \beta + \cos \alpha - \cos \gamma - 1$   
 Der Bevan-Punkt ist mit dem Hadamard-Punkt identisch.

**Kenmotu-Punkt**

In jedem Dreieck ABC existiert ein Punkt K, von dem aus drei kongruente Quadrate so konstruiert werden können, dass ein Quadratpunkt in K und zwei Punkte auf zwei verschiedenen Dreiecksseiten liegen. Dieser Punkt, der Kenmotu-Punkt oder Kongruenz-Quadrat-Punkt genannt wird, wurde zuerst von J.Rigby entdeckt.



Der Kenmotu-Punkt ist der Kimberling-Punkt  $X_{371}$  und hat die trilinearen Koordinaten:

$\cos \alpha + \sin \alpha : \cos \beta + \sin \beta : \cos \gamma + \sin \gamma$

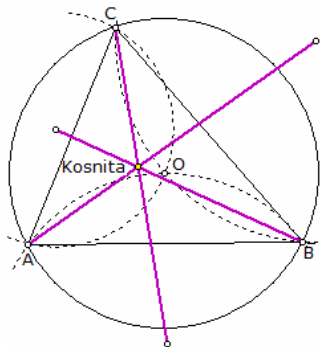
Die Seitenlänge der kongruenten Quadrate ist  $a_{\text{Quadrat}} = \sqrt{2} abc / (a^2 + b^2 + c^2 + 4A)$

wobei A der Flächeninhalt von ABC ist.

Wird zusätzlich die Forderung erhoben, dass die Quadrate vollständig im Dreieck ABC liegen, so ist das Problem nicht für alle Dreiecke lösbar. Mitunter liegen Quadratpunkte auch außerhalb des Dreiecks.

Zusätzlich können sich die Quadrate gegenseitig überlappen.

Die sechs Punkte auf den Dreiecksseiten bilden wieder einen Kreis, den Kenmotu-Kreis.



### Kosnita-Punkt

Der Kosnita-Punkt ist einer der besonderen Punkte eines Dreiecks mit Kimberling-Nummer X(54). Er ist isogonal konjugiert zum Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises.

Der Punkt erhielt seinen Namen nach dem Satz von Kosnita:

Ist O der Mittelpunkt des Umkreises, dann ist das Dreieck, das von den Umkreismittelpunkten der Dreiecke OBC, AOC und ABO gebildet wird, perspektiv zu ABC. Das Perspektivitätszentrum ist der Punkt von Kosnita. Die baryzentrischen Koordinaten des Kosnita-Punktes sind

$$\tan(\beta - \gamma) : \tan(\gamma - \alpha) : \tan(\alpha - \beta)$$

Das von den drei Umkreismittelpunkten gebildete Dreieck wird

Umkreispunkt-Dreieck oder Kosnita-Dreieck genannt.

Der Umkreismittelpunkt dieses Dreiecks ist der Kimberling-Punkt X<sub>1658</sub> mit der trilinearen Funktion (nach Nikolaos Dergiades)  $\cos(\beta - \gamma) + 4 \cos 2\alpha \cos \beta \cos \gamma$

### 1. Epstein-Punkt

Gegeben sei ein Dreieck ABC und in ihm die Soddy-Kreise sowie der diese Kreise von außen berührende äußere Soddy-Kreis. Die Berührungspunkte seien dabei die Punkt P, Q und R.

Konstruiert man in den Punkten P, Q und R die Tangenten an den äußeren Soddy-Kreis, so schneiden sich diese Geraden paarweise in 3 Punkten X, Y und Z, die das äußere Soddydreieck bilden.

Die Geraden durch die Punkte X, Y und Z und die jeweils gegenüberliegenden Dreieckspunkte schneiden sich in einem Punkt, dem 1. Epstein-Punkt, der auch innerer Oldknow-Punkt genannt wird.

Der 1. Epstein-Punkt ist der Kimberling-Punkt X<sub>481</sub> und hat die trilinearen Koordinaten

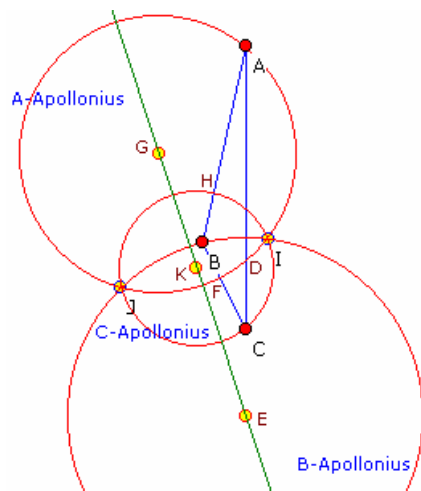
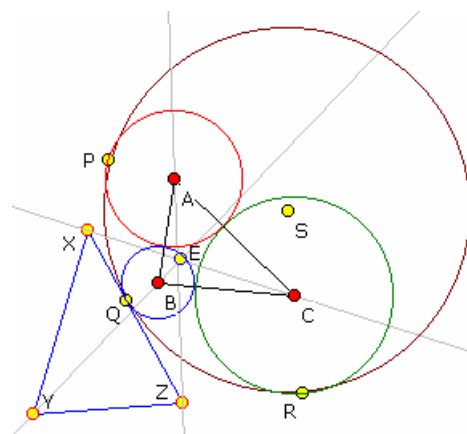
$$1 - 4A/[a(-a+b+c)] : 1 - 4A/[b(a-b+c)] : 1 - 4A/[c(a+b-c)]$$

wobei A der Flächeninhalt von ABC ist.

Dieser Punkt wurde 1996 erstmals von A. Oldknow ("The Euler-Gergonne-Soddy Triangle of a Triangle") angegeben und im Jahr 2001 von D. Epstein ("Tangent Spheres and Triangle Centers") wiederentdeckt.

Den 2. Epstein-Punkt erhält man als Schnittpunkt der Geraden durch P, Q und R und den Berührungspunkten der Soddy-Kreise auf den Dreiecksseiten.

Trilineare Zentralfunktion des Kimberling-Punktes X<sub>482</sub>:  $1 + 4A/(a(-a+b+c))$



### Isodynamische Punkte

Gegeben ist ein Dreieck ABC. F und G seien die Punkte auf der Seite BC, wo die Winkelhalbierenden des Innenwinkels  $\alpha$  und des Außenwinkels bei A die Gerade durch BC schneiden.

Der Kreis um G durch F und A, d.h. er hat den Radius GF, wird A-Apollonius-Kreis genannt. Analog konstruiert man den B-Apollonius-Kreis und den C-Apollonius-Kreis.

Diese drei Kreise schneiden sich in zwei Punkten I und J, den sogenannten isodynamischen Punkten des Dreiecks ABC. Für den ersten isodynamischen Punkt I sind die trilinearen Koordinaten:

$$\sin(\alpha + \pi/3) : \sin(\beta + \pi/3) : \sin(\gamma + \pi/3)$$

für den 2. isodynamischen Punkt J

$$\sin(\alpha - \pi/3) : \sin(\beta - \pi/3) : \sin(\gamma - \pi/3)$$

Die Mittelpunkte des A-Apollonius-Kreis, des B-Apollonius-Kreis und des C-Apollonius-Kreis liegen auf einer Geraden, der sogenannten Lemoine-Geraden. Weiterhin schneiden diese speziellen Apollonius-Kreise den Umkreis des Dreiecks in einem rechten Winkel.

Untereinander schneiden sich die Kreise paarweise unter  $60^\circ$ .

Der Name „isodynamisch“ ergibt sich aus dem griechischen  $\text{ισος} = \text{gleich}$  und  $\text{δυναμις} = \text{Potenz}$ , da beide Punkte bezüglich des Dreiecks die gleichen Potenzen ausweisen.

Die Potenz eines Punktes bezüglich eines Dreieckspunktes ist wie folgt definiert: X sei ein Punkt, A ein Eckpunkt des Dreiecks. Die Potenz von X bezüglich A ist dann

$$m(X, A, ABC) = XA \cdot BC$$

Die drei Mittelpunkt dieser Apollonius-Kreise sind kollinear, sie liegen auf der Lemoine-Geraden. Weiterhin schneiden die Apollonius-Kreise den Umkreis des Ausgangsdreiecks senkrecht. siehe auch <http://www.pandd.demon.nl/apolcirk2.htm>

### Teilungskreise der Apollonius

Gilt für die Seitenlängen eines Dreiecks ABC  $a > b > c$ , so gilt für die Radien des A-Apollonius, B-Apollonius und C-Apollonius-Kreis (Teilungskreise)

$$1 / R_b = 1 / R_a + 1 / R_c$$

Für ein positives  $k$  wird  $kc + kb = a$ , d.h.  $k = a / (b + c)$

$$BD = ac / (b + c)$$

$$EC - EB = a = lb - lc = l(b - c)$$

$$l = a / (b - c)$$

$$EB = ac / (b - c)$$

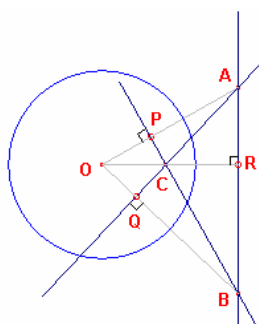
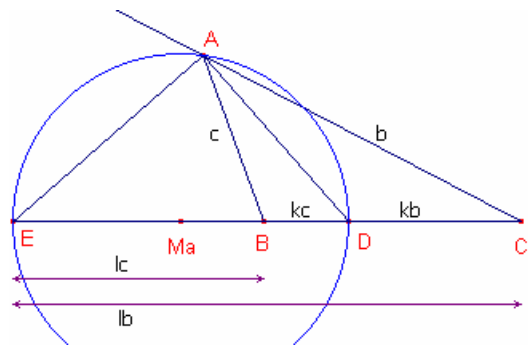
$$DE = EB + BD = ac / (b + c) + ac / (b - c)$$

$$= (abc - ac^2 + abc + ac^2) / (b^2 - c^2) = 2abc / (b^2 - c^2)$$

und damit  $R_a = 1/2 DE = abc / (b^2 - c^2)$

Analog ergibt sich  $R_b = abc / (a^2 - c^2)$  und  $R_c = abc / (a^2 - b^2)$

Insgesamt wird somit  $1 / R_a + 1 / R_c = (b^2 - c^2 + a^2 - b^2) / abc = (a^2 - c^2) / abc = 1 / R_b$



### Konjugierte Dreiecke

Zwei Dreiecke werden zueinander konjugierte bezüglich eines Kreises genannt, wenn die Eckpunkte des einen Dreiecks die Pole der Seiten des anderen Dreiecks sind.

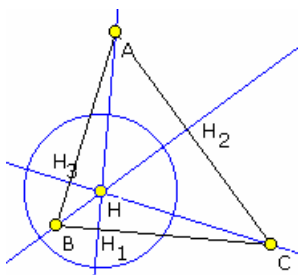
Ein Dreieck heißt selbstkonjugiert zu einem Kreis, wenn jeder Eckpunkte der Pol der gegenüberliegenden Seite ist.

Wenn A und B zwei zueinander konjugierte Punkte sind und C ist der Pol von AB, dann ist ABC ein selbstkonjugiertes Dreieck.

Satz:

Der Höhenschnittpunkt eines selbstkonjugierten Dreiecks ist der Mittelpunkt des zugeordneten Kreises. Ein selbstkonjugiertes Dreieck ist stets stumpfwinklig.

Nachweis: Die Polgerade von A steht nach Definition senkrecht auf OA, d.h.  $BC \perp OA$ . Die Polgerade von B steht senkrecht auf OB, und die Pollinie von C senkrecht auf OC. Damit ist  $AC \perp OA$  und  $AB \perp OC$ . O ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Jeder Punkt der Paare (A, P), (B, Q) und (C, R) liegt auf der selben Seite von O. Damit ist das Dreieck ABC stumpfwinklig. C ist der Höhenschnittpunkt des spitzwinkligen Dreiecks OAB.



### Polarkreis eines Dreiecks

Der Polarkreis eines Dreiecks hat den Höhenschnittpunkt H als Mittelpunkt. Für den Radius gilt:

$$r^2 = HA * HH_1 = HB * HH_2 = HC * HH_3 = -4 R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)/2 - 4 R^2$$

$$r = \sqrt{[(a^2 + b^2 + c^2)/2 - 4 R^2]}$$

wobei  $H_1, H_2, H_3$  die Höhenfußpunkte und R der Umkreisradius sind. Ein Dreieck ist zu seinem Polarkreis selbst-konjugiert.

Die Inversion des Umkreises eines stumpfwinkligen Dreiecks an seinem Polarkreis ist gerade der Neun-Punkte-Kreis des Dreiecks.

### Parry-Punkt und Kreis

Der Parry-Punkt ist der Schnittpunkt des Umkreises und des Parry-Kreises eines Dreiecks. Der Parry-Kreis wiederum verläuft durch den Schwerpunkt des Dreiecks und den beiden isodynamischen Punkten. Kreis und Punkt wurden zu Ehren des englischen Mathematikers Cyril Parry benannt, der Anfang der 90er Jahre des 20. Jahrhunderts diesen Punkt intensiv untersuchte.

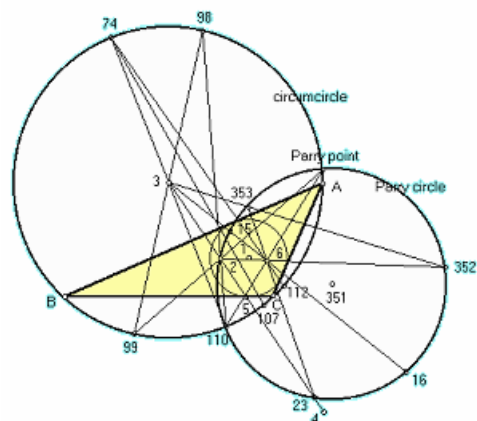
Die trilinearen Koordinaten des Parry-Punktes sind:  
 $a/(2a^2 - b^2 - c^2) : b/(2b^2 - c^2 - a^2) : c/(2c^2 - a^2 - b^2)$

Der Parry-Punkt ist zugleich der Scheitelpunkt der Kiepert-Parabel.

Der Radius des Parry-Kreises ist

$$R_p = abc [(a^4 + b^4 + c^4) - (a^2 + b^2 + c^2)] / [3 | (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) | ]$$

### Miquel-Punkt eines Dreiecks

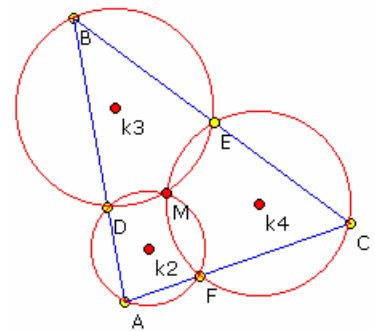


Sind ein Dreieck ABC und auf jeder Dreiecksseite weitere Punkte D, E und F gegeben, so schneiden sich die drei Kreise durch die Dreiecks Eckpunkte und die zwei auf den anliegenden Seiten verlaufenden Kreise in einem Punkt.

Dieser Punkt wird Miquel-Punkt genannt.

### Satz von Miquel

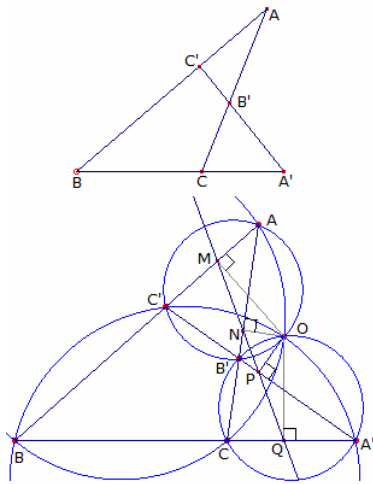
Drei Kreise (in der Abbildung um  $k_2, k_3, k_4$ ) haben einen gemeinsamen Punkt M. Jedes Paar dieser Kreise hat einen weiteren Schnittpunkt D, E, F. A sei ein beliebiger Punkt auf  $k_2$ . AD schneide den Kreis  $k_3$  in B, BE den Kreis  $k_4$  in C. Dann sind AFC kollinear.



### Satz von Klingens

Der Miquel-Punkt der Miquel-Konfiguration (DEF, ABC) ist Brocard-Punkt des Dreiecks DEF und ebenso des Dreiecks ABC.

Ist O der Umkreismittelpunkt von ABC, K der Lemoine-Punkt,  $M = B_1$  der Miquel-Punkt und  $\omega$  der Brocard-Winkel, so gilt:  $MK = MO \cdot \tan \omega$   
 Da für den 2. Brocard-Punkt  $B_2$  analog  $B_2K = B_2O \cdot \tan \omega$  gilt, folgt  $B_1K = B_2K$



### Miquel-Punkt und vollständiges Viereck

Gegeben sei ein Dreieck ABC und eine beliebige Transversale, die die drei Seiten und ihre Verlängerungen in den Punkten A', B' und C' schneide. Das entstehende Gebilde (obere Abbildung) wird vollständiges Viereck genannt.

Dieses vollständige Viereck kann man sich auch aus den Dreiecken ABC, AB'C', A'B'C' und A'B'C konstruieren vorstellen.

O sei nun der von A verschiedene Schnittpunkt der Umkreise von ABC und AB'C'. Ausgehend von O werden für das Dreieck ABC und für das Dreieck AB'C' die Simson-Geraden konstruiert.

Die Simson-Gerade von ABC bezüglich O verläuft durch die Punkte M, N und Q; die Simson-Gerade von AB'C' durch die Punkte M, N und P. Die vier Punkte M, N, P und Q sind damit kollinear.

Da N, P und Q kollinear sind, liegt O auf dem Umkreis von A'B'C'. Da M, P und Q kollinear sind, liegt O auf dem Umkreis von A'BC'.

Damit schneiden sich die vier Umkreise in einem Punkt, dem Punkt O. O ist der Miquel-Punkt des beschriebenen vollständigen Vierecks.

### Gleicher-Umfang-Punkt, Gleicher-Umweg-Punkt

Unter diesen speziellen Punkten am Dreieck versteht man folgende:

#### Gleicher-Umfang-Punkt P, Isoperimetrischer Punkt

Für diesen Punkt haben die Dreiecke BPC, CPA, APB gleichen Umfang.

Trilineare Koordinaten:

$$\sec(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) - 1 : \sec(\beta/2) \cos(\gamma/2) \cos(\alpha/2) - 1 : \sec(\gamma/2) \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) - 1$$

Der isoperimetrische Punkt ist harmonisch verwandt zum Punkt des gleichen Umwegs in Bezug auf den Inkreismittelpunkt und den Gergonne-Punkt und somit kollinear zu diesen drei Punkten.

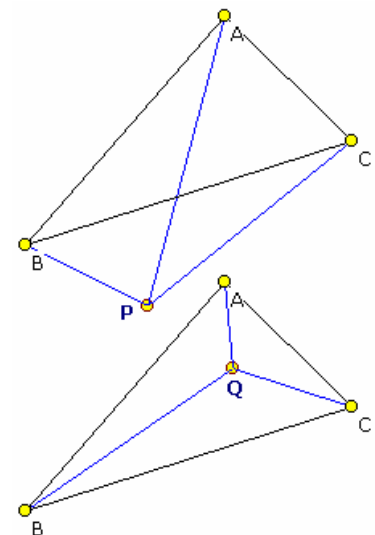
Die Umfänge von PBC, PCA und PAB sind gleich dem Durchmesser des äußeren Soddy-Kreises. Der isoperimetrische Punkt existiert genau dann, wenn der Umfang von ABC größer ist als  $4R + r$ , wobei R der Radius des Umkreises und r der Radius des Inkreises ist.

#### Gleicher-Umweg-Punkt Q

Für diesen Punkt sind die Umwege von A nach B über Q, von B nach C über Q und von C nach A über Q gleich lang. Dabei versteht man unter dem Umweg von A nach B über Q die Größe  $|AQ| + |BQ| - |AB|$  und entsprechend für die anderen Umwege. Trilineare Koordinaten:

$$\sec(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) + 1 : \sec(\beta/2) \cos(\gamma/2) \cos(\alpha/2) + 1 : \sec(\gamma/2) \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) + 1$$

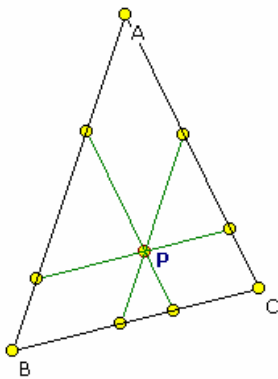
Beide Punkte existieren in jedem spitzwinkligen Dreieck. Für nicht spitzwinklige Dreiecke gibt es P und Q nur unter sehr speziellen Bedingungen.



### Gleiche-Parallelen-Punkt

Für jedes beliebige Dreieck ABC existiert ein Punkt P, durch den die drei Strecken; Endpunkte auf den Seiten; parallel zu den Dreiecksseiten gleiche Länge besitzen.





Erstmals wurde dieser Punkt 1961 von Peter Yff nachgewiesen. P teilt dabei die Parallele zu BC im Verhältnis  
 $(bc + ca - ab) : (ab + bc - ca)$

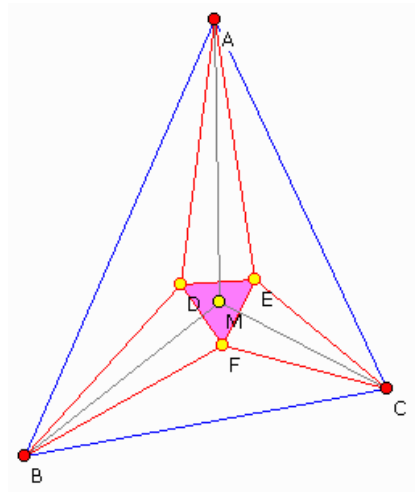
**Trilineare Koordinaten von P**

$bc(ca + ab - bc) : ca(ab + bc - ca) : ab(bc + ca - ab)$

**Morley-Zentrum**

Nach dem Satz von Morley bilden die paarweisen Schnittpunkte der die Innenwinkel eines Dreiecks ABC in drei gleiche Teile zerlegenden Geraden ein gleichseitiges Dreieck DEF. 1967 bewies Peter Yff, dass der Schwerpunkt dieses Dreiecks DEF, das 1.Morley-Zentrum, die trilinearen Koordinaten  $\cos(\alpha/3) + 2 \cos(\beta/3) \cos(\gamma/3) : \cos(\beta/3) + 2 \cos(\gamma/3) \cos(\alpha/3) : \cos(\gamma/3) + 2 \cos(\alpha/3) \cos(\beta/3)$

besitzt. Das Zentrum einer affinen Abbildung, welches Dreieck ABC in DEF überführt, wird 2.Morley-Zentrum genannt und hat die Koordinaten:  $\sec(\alpha/3) : \sec(\beta/3) : \sec(\gamma/3)$   
 Der Satz wurde 1898 von Frank Morley (1860-1937) veröffentlicht.



**Beweis des Satzes von Morley**

"Mathematics Magazine" 35 (1962) 223-224:

In der Darstellung ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin(\angle AEC) &= \sin(\pi - (\alpha + \gamma)/3) \quad (1) \\ &= \sin((\pi - \beta)/3) = \sin((2\pi + \beta)/3) \\ \sin(3a) &= 4\sin(a)\sin(\pi/3 + a)\sin(\pi/3 - a) \quad (2) \end{aligned}$$

Mit dem Sinussatz wird  $AE \cdot \sin((\pi - \beta)/3) = 2R \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma/3)$

wobei R der Umkreisradius ist. Aus (2) wird

$$\begin{aligned} AE &= 8R \cdot \sin(\beta/3) \cdot \sin(\gamma/3) \cdot \sin((\pi + \beta)/3) \\ AD &= 8R \cdot \sin(\gamma/3) \cdot \sin(\beta/3) \cdot \sin((\pi + \gamma)/3) \end{aligned}$$

und

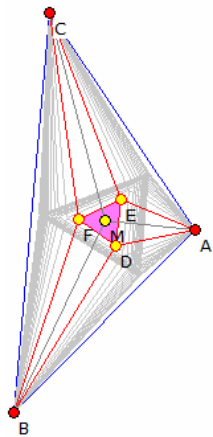
$$AD/AE = \sin((\pi + \gamma)/3) / \sin((\pi + \beta)/3)$$

Da  $\angle ADE + \angle AED = \pi - \alpha/3 = (\pi + \beta)/3 + (\pi + \gamma)/3$  wird

$$\angle ADE = (\pi + \gamma)/3 \text{ und } \angle AED = (\pi + \beta)/3$$

womit die Dreiecks BFD und CFE ähnlich sind.

Daraus ergibt sich, dass die Summe aller Winkel um F, ohne den Winkel  $\angle EFD$ , gleich  $300^\circ$  ist, und damit  $\angle EFD = 60^\circ$ . Analog wird für die beiden anderen Innenwinkel von FED die Größe  $60^\circ$  nachgewiesen, so dass das Dreieck FED gleichseitig ist.



**Hofstadter-Dreiecke**

Nach dem Satz von Morley bilden die paarweisen Schnittpunkte der die Innenwinkel eines Dreiecks ABC in drei gleiche Teile zerlegenden Geraden ein gleichseitiges Dreieck DEF.

Der Schwerpunkt dieses Dreiecks DEF wird 1.Morley-Zentrum genannt.

Teilt man die Innenwinkel nicht in drei gleiche Teile, sondern in n Teile, so ergeben sich weitere Dreiecke: die sogenannten Hofstadter-Dreiecke.

Auch hier liegen gleichseitige Dreiecke vor.

Die Abbildung zeigt die Hofstadter-Dreiecke von n = 4 bis n = 30.

**Poncelet-Brianchon-Problem**

Gegeben sei die orthogonale Hyperbel  $xy = 1$ . PQR sei ein beliebiges Dreieck, dessen Eckpunkte auf der Hyperbel liegen. Dann liegt der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ebenfalls auf der Hyperbel.

Nachweis: Die x-Koordinaten der Punkte P, Q, R seien a, b, c; die y-Koordinaten sind dann  $A = 1/a, B = 1/b, C = 1/c$ .

Der Anstieg der Seite QR ist  $(B-C)/(b-c)$ , d.h.  $(1/b - 1/c) / (b-c) = -1/bc$

Der Anstieg der Höhe von QR ist somit bc, die Gleichung  $y - A = bc(x - a)$  und umgestellt

$$y + abc = bc(x + ABC) \quad (1)$$

Für die Höhe auf PR ergibt sich analog

$$y + abc = ac(x + ABC) \quad (2)$$

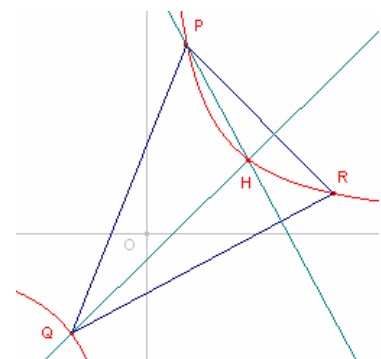
Die Koordinaten des Höhenschnittpunktes H(x'; y') ergeben sich somit zu  $x' = -ABC$

Für die y-Koordinaten von H gilt dann  $y' = -abc$

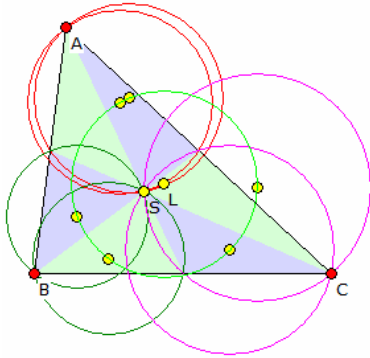
und somit  $x'y' = 1$ .

Verläuft eine orthogonale Hyperbel durch die Eckpunkte eines Dreiecks, dann liegt der Mittelpunkt der Hyperbel auf dem Euler-Kreis des Dreiecks.

Anmerkung: Die erste Erwähnung dieses Zusammenhangs findet sich in



"Annales de Gergonne", vol. XI, 1820-1821. Der französische Mathematiker Joseph Diaz Gergonne (1771-1859) hatte 1810 das Problem gestellt. Durch Poncelet und Brianchon wurde die Aufgabe 1820 gelöst.



### Lamoen-Kreis

Der Lamoen-Kreis geht auf eine Entdeckung des Niederländers Floor van Lamoen ("American Mathematical Monthly", Nr.11) aus dem Jahre 2000 zurück.

Die Umkreismittelpunkte der sechs Teildreiecke, in die ein gegebenes Dreieck durch seine Seitenhalbierenden unterteilt wird, liegen auf einem Kreis, dem Lamoen-Kreis.

Der Mittelpunkt des Kreises, der Lamoen-Punkt, ist der Kimberling-Punkt  $X_{1153}$  und hat die trilineare Zentralfunktion

$$\alpha_{1153} = (10 a^4 - 12 a^2 b^2 + 4 b^4 - 13 a^2 c^2 - 10 b^2 c^2 + 4 c^4) / a$$

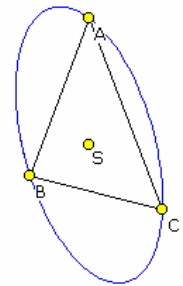
und den Radius

$$r = 1/(18a^2b^2c^2) \sqrt{((a^2-2b^2-c^2)(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2-b^2+2c^2)(2a^4-5a^2b^2+2b^4-5a^2c^2-5b^2c^2+2c^4))} R^2$$

### Umkegelschnitt, Inkegelschnitt

In der Dreiecksgeometrie versteht man unter einem Umkegelschnitt einen Kegelschnitt, der durch die Eckpunkte des Dreiecks verläuft. Ein Inkegelschnitt verläuft innerhalb des Dreiecks und tangiert die drei Seiten.

In der Abbildung ist die Steiner-Ellipse zu sehen, ein Umkegelschnitt.



Gegeben sei das Dreieck  $\Delta ABC$  mit den Seiten  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$ ,  $c = |AB|$  und den Innenwinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ .

Ein allgemeiner Umkegelschnitt ist der Ort aller Punkte  $X$  mit den trilinearen Koordinaten  $x : y : z$ , die die Gleichung  $uyz + vzx + wxy = 0$

für einige Punkte  $u : v : w$  erfüllen. Das Zentrum des Umkegelschnitts ist

$$u(-au + bv + cw) : v(au - bv + cw) : w(au + bv - cw)$$

Die isogonal konjugierten Punkte der Punkte  $X$  auf dem Umkegelschnitt sind Punkte auf der Geraden

$$ux + vy + wz = 0$$

Diese Gerade schneidet den Kegelschnitt 0, 1 oder 2 Mal, je nachdem, ob der Kegelschnitt Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Die allgemeine Gleichung eines Inkegelschnitts ist  $u^2x^2 + v^2y^2 + w^2z^2 - 2vwyx - 2wuzx - 2uvxy = 0$

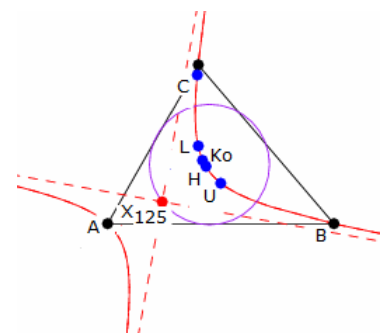
Das Zentrum des Inkegelschnitts ist  $cy + bz : az + cx : bx + ay$

### Zentralkreis eines Dreiecks

Unter einem Zentralkreis eines Dreiecks versteht man einen Kreis, der durch spezielle Punkte an einem allgemeinen Dreieck festgelegt sind. Einige dieser Kreise sind konzentrisch, d.h. sie besitzen den gleichen Mittelpunkt:

#### Kimberling Zentrum, Kreise ...

- $X_1$  Inkreiszentrum Inkreis, Adams-Kreis, Conway-Kreis, Hexyl-Kreis
- $X_2$  Schwerpunkt innerer und äußerer Napoleon-Kreis, orthoptische Kreis der Steiner-Innenellipse
- $X_3$  Umkreiszentrum Umkreis, 2.Brocard-Kreis, 2.Droz-Farny-Kreis, Stammler-Kreis
- $X_4$  Höhenschnittpunkt Antikomplementärkreis, Polarkreis, Johnson-Dreieck-Umkreis
- $X_5$  Feuerbachpunkt Neun-Punkte-Kreis, Steiner-Kreis
- $X_6$  Lemoine-Punkt Kosinuskreis
- $X_{10}$  Spieker-Punkt Spieker-Kreis
- $X_{20}$  de Longchamps-Punkt Longchamps-Kreis
- $X_{26}$  Tangentialkreis
- $X_{39}$  Brocard-Punkt Gallatly-Kreis, Moses-Kreis
- $X_{40}$  Bevan-Punkt Bevan-Kreis
- $X_{49}$  Sinus-Tripelwinkel-Kreis
- $X_{155}$  Dou-Kreis
- $X_{175}$  isoperimetrischer Punkt äußerer Soddy-Kreis
- $X_{176}$  innerer Soddy-Kreis
- $X_{182}$  Brocard-Kreis, erster Lemoine-Kreis
- $X_{194}$  Neuberg-Kreise
- $X_{351}$  Parry-Kreis
- $X_{356}$  Morley-Kreis
- $X_{641}$  äußerer Vecten-Kreis
- $X_{642}$  innerer Vecten-Kreis
- $X_{970}$  Apollonius-Kreis
- $X_{1153}$  van Lamoen-Kreis



## Dreieckskegelschnitte

An einem beliebigen Dreieck ABC können eine Vielzahl von Kegelschnitten diskutiert werden. Die bekanntesten sind

### Kiepert-Hyperbel

Umkegelschnitt, verläuft durch die Dreieckseckpunkte, durch den Höhenschnittpunkt, den Schwerpunkt und den Spiekerpunkt.

### Jerabek-Hyperbel (Abbildung)

Umkegelschnitt, verläuft durch den Umkreismittelpunkt, den Höhenschnittpunkt, den Symmedian-Punkt und den Kosnita-Punkt des Dreiecks.

### Stammler-Hyperbel

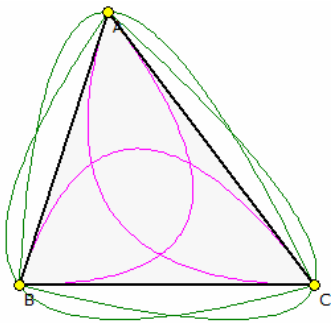
verläuft durch den Umkreismittelpunkt, den Inkreismittelpunkt, den Lemoine-Punkt und alle drei Ankreismittelpunkte

### Steiner-Ellipse

Umkegelschnitt, verläuft durch die Eckpunkte des Dreiecks und besitzt den kleinsten möglichen Flächeninhalt eines Umkegelschnittes des Dreiecks.

### Steiner-Innenellipse

Ellipse, die die Seiten des Dreiecks tangiert und den größten möglichen Flächeninhalt eines Inkegelschnittes des Dreiecks besitzt.



### Dreieck-Inparabel, Bézier-Parabel

Einem Dreieck  $A_0A_1A_2$  sollen Parabeln eingeschrieben werden. Da das Dreieck 3 Eckpunkte besitzt, können dazu Bézier-Kurven 2. Grades genutzt werden. Die Brennpunkte und Leitlinien der drei derartigen Parabeln führen zu zwei Schnittpunkten und einem Fünfpunktekreis im Dreieck. Unter der Inparabel  $b_i$  eines Dreiecks  $A_0A_1A_2$  versteht man die Bézier-Kurve zweiten Grades mit den Stützpunkten  $A_{i-1}, A_i, A_{i+1}$  (Indizes modulo 3).

Parameterdarstellung

$$b_i(t) = \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (1-t)^j t^{2-j} A_{\text{mod}(i+j-1,3)} ; 0 \leq t \leq 1$$

Die Parabel  $b_0$  berührt die Seite  $a_2$  im Punkt  $A_1$ , die Seite  $a_1$  im Punkt  $A_2$  und die Mittellinie  $m_0$  im Schnittpunkt  $S_0$  mit der Seitenhalbierenden  $s_0$ . Entsprechendes gilt für die Inparabeln  $b_1$  und  $b_2$ .

## Kimberling-Punkte

1994 begann der US-amerikanische Mathematiker C. Kimberling, besondere Punkte im Dreieck zu katalogisieren und klassifizieren. Mittlerweile (März 2003) beinhaltet die Liste über 1450 Punkte. Die Punkte werden dabei durchnummeriert und mit dem Buchstaben "X" gekennzeichnet.

Die aktuelle Liste ist als PDF-Datei auf der CD enthalten (siehe auch unter <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>)

Die ersten Punkte, deren Name und trilineare Zentralfunktion finden Sie in der nachfolgenden Tabelle. Dabei werden die Innenwinkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  durch Großbuchstaben A, B und C gekennzeichnet.

Nr.	Name	trilineare Zentralfunktion
1	Inkreismittelpunkt	1
2	Schwerpunkt	1/a
3	Umkreismittelpunkt	cos A
4	Höhenschnittpunkt	sec A
5	Neun-Punkte-Zentrum	cos A + 2 cos B cos C
6	Lemoine-Punkt	sin A
7	Gergonne-Punkt	bc/(b+c-a)
8	Nagel-Punkt	(b+c-a)/a
9	Mittelpunkt	b+c-a
10	Spieker-Zentrum	bc(b+c)
11	Feuerbach-Punkt	1-cos(B-C)
12	-	1+cos(B-C)
13	Fermat-Punkt	csc(A + PI/3)
14	2.isogonisches Zentrum	csc(A - PI/3)
15	1.isodynamischer Punkt	sin(A + PI/3)
16	2.isodynamischer Punkt	sin(A - PI/3)
17	1.Napoleon-Punkt	csc(A + PI/6)
18	2.Napoleon-Punkt	csc(A - PI/6)
19	Clawson-Punkt	tan A

20	de Longchamps-Punkt	$\cos A - \cos B \cos C$
21	Schiffler-Punkt	$1/(\cos B + \cos C)$
22	Exeter-Punkt	$a(b^4+c^4-a^4)$
23	Inverses von X2 am Umkreis	$a(b^4+c^4-a^4-b^2c^2)$
24	Perspektor von ABC	$\sec A \cos 2A$
25	Homothetic-Zentrum des Höhendreiecks	$\sin A \tan A$
26	Umkreiszentrum des Tangentialdreiecks	$a[b^2\cos 2B + c^2\cos 2C - a^2\cos 2A]$
27	Ceva-Punkt von X4 und X19	$(\sec A)/(b+c)$
28	Ceva-Punkt von X19 und X25	$(\tan A)/(b+c)$
29	Ceva-Punkt von X1 und X3	$(\sec A)/(\cos B + \cos C)$
30	Euler-Infinity-Punkt	$\cos A - 2 \cos B \cos C$
31	2.Power-Punkt	$a^2$
32	3.Power-Punkt	$a^3$
36	Inverses des Inkreismitelpunktes	$1 - 2 \cos A$
39	Brocard Mittelpunkt	$a (b^2 + c^2)$
40	Inkreisspiegelung am Umkreispunkt	$\cos B + \cos C - \cos A - 1$
43	X6-Ceva-Konjugiert von X1	$ab + ac - bc$
46	X4-Ceva-Konjugiert von X1	$\cos B + \cos C - \cos A$
51	Schwerpunkt des Höhendreiecks	$a^2 \cos(B - C)$
52	Höhenschnittpunkt des Höhendreiecks	$\cos 2A \cos(B - C)$
54	Kosnita-Punkt	$\sec(B - C)$
65	Höhenschnittpunkt des Inkreisdreiecks	$\cos B + \cos C$
69	Lemoine-Punkt Antikomplement-Dreieck	$(\cos A)/a^2$
73	Inkreispunkt-Umkreispunkt Mittelpunkt	$(\cos B + \cos C) \cos A$
74	Isogone zum Euler-Unendlichkreispunkt	$1/(\cos A - 2 \cos B \cos C)$
75	Isotome zum Inkreiszentrum	$1/a^2$
76	3.Brocard-Punkt	$1/a^3$
80	Spiegelung Inkreiszentrum am Feuerbachpunkt	$1/(1 - 2 \cos A)$
81	Cevapunkt Inkreispunkt-Lemoine-Punkt	$1/(b + c)$
82	Isogone zum X38	$1/(b^2 + c^2)$
83	Cevapunkt Schwerpunkt-Lemoine-Punkt	$bc/(b^2 + c^2)$
84	Isogone zum Bevan-Punkt	$1/(\cos B + \cos C - \cos A - 1)$
85	Isotome zum Mittenpunkt	$b^2c^2/(b + c - a)$
98	Tarry-Punkt	$bc/(b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2)$
99	Steiner-Punkt	$bc/(b^2 - c^2)$
110	Kiepert-Parabel-Brennpunkt	$a/(b^2 - c^2)$
111	Parry-Punkt	$a/(2a^2 - b^2 - c^2)$
115	Kiepert-Hyperbelzentrum	$bc(b^2 - c^2)^2$
125	Jerabek-Hyperbelzentrum	$\cos A \sin^2(B - C)$
141	Lémoine-Punkt-Komplement	$bc (b^2 + c^2)$
142	Mittenpunkt-Komplement	$b+c - (b - c)^2/a$
143	Neunpunktezentrum Höhendreieck	$(\sec A) (\cos(2C - 2A) + \cos(2A - 2B))$
155	Eigenzentrum Höhendreieck	$(\cos A) (\cos^2B + \cos^2C - \cos^2A)$
164	Inkreispunkt des Außendreiecks	$\sin B/2 + \sin C/2 - \sin A/2$
165	Schwerpunkt des Außendreiecks	$\tan B/2 + \tan C/2 - \tan A/2$
173	Congruent-Isoscelizer-Punkt	$\cos B/2 + \cos C/2 - \cos A/2$
174	Yff-Zentrum	$\sec A/2$
175	isoperimetrischer Punkt	$-1 + \sec A/2 \cos B/2 \cos C/2$
176	Gleicher-Umweg-Punkt	$1 + \sec A/2 \cos B/2 \cos C/2$
179	1.Ajima-Malfatti-Punkt	$\sec^4 A/4$
180	2.Ajima-Malfatti-Punkt	$1 + 2(\sec A/4 \cos B/4 \cos C/4)^2$
181	Apollonius-Punkt	$a(b + c)^2 / (b + c - a)$
182	Brocard-Durchmessermittelpunkt	$\cos (A-\omega) ; \omega$ Brocard-Winkel
185	Nagelpunkt des Höhendreiecks	$\cos A (1 - \cos A \cos (B-C))$
187	Schoute-Zentrum	$a (2a^2 - b^2 - c^2)$
190	parabolischer Yff-Punkt	$bc/(b - c)$
192	Kongruent-Parallelenpunkt	$bc (ca + ab - bc)$
256	1.Sharygin-Punkt	$1/(a^2 + bc)$
291	2.Sharygin-Punkt	$1/(a^2 - bc)$
316	Droussent-Pivot	$bc (b^4 + c^4 - a^4 - b^2c^2)$
351	Parry-Kreis-Zentrum	$a (b^2 - c^2) (b^2 + c^2 - 2a^2)$
354	Weill-Punkt	$(b - c)^2 - ab - ac$
355	Fuhrmann-Zentrum	$a \cos A - (b + c) \cos(B - C)$
356	Morley-Zentrum	$\cos A/3 + 2 \cos B/3 \cos C/3$
359	Hofstadter-Einspunkt	$a / A$
360	Hofstadter-Nullpunkt	$A / a$
364	Wabash-Zentrum	$\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}$

365	Quadratwurzelpunkt	$\sqrt{a}$
371	Kenmotu-Punkt	$\cos(A - \pi/4)$
389	Taylorkreis-Zentrum	$\cos A - \cos 2A \cos(B - C)$
400	Yff-Malfatti-Punkt	$\csc^4 A/4$
401	Bailley-Punkt	$(\sin 2B \sin 2C - \sin^2(2A)) \csc A$
476	Tixier-Punkt	$1 / ((1 + 2 \cos 2A) \sin(B - C))$
481	1.Epstein-Punkt	$1 - 2 \sec A/2 \cos B/2 \cos C/2$
482	2.Epstein-Punkt	$1 + 2 \sec A/2 \cos B/2 \cos C/2$
485	Vecten-Punkt	$\sec(A - \pi/4)$
486	innerer Vecten-Punkt	$\sec(A + \pi/4)$
495	Johnson Mittelpunkt	$2 + \cos(B - C)$
503	1.Isoscelizer Punkt	$\sec B/2 + \sec C/2 - \sec A/2$
504	2.Isoscelizer Punkt	$b \sin B/2 + c \sin C/2 - a \sin A/2$
505	3.Isoscelizer Punkt	$1/(\sin B/2 + \sin C/2 - \sin A/2)$
588	1.Kenmotu-van Lamoen-Punkt	$a/(a^2 + 4 \text{Fläche}(ABC))$
589	2.Kenmotu-van Lamoen-Punkt	$a/(a^2 - 4 \text{Fläche}(ABC))$
592	van Lamoen-Umkreiszentrum	$1(\cos A + 2 \cos(B-\omega) \cos(C-\omega))$
648	trilinearer Pol der Euler-Gerade	$1/(a(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2))$
905	Achernar-Punkt	$(b - c) \cot A$
940	Aldebaran-Punkt	$a^2 + a(b + c) + 2bc$
944	Hofstaedter-Trapezpunkt	$bc[3a^4 - 2a^3(b+c) + (b-c)^2(2ab+2ac-2bc-b^2-c^2-2a^2)]$
970	Apolloniuskreis-Zentrum	$a[a^3(b+c)^2 + a(ab+ac-2bc)(b^2+c^2) - bc(b^3+c^3) - a(b^4+c^4) - (b^5+c^5)]$
1066	Hastings-Punkt	$1 - \cos A (\cos B + \cos C)$
1113/4	Schnittpunkte Euler-Gerade-Umkreis R ... Umkreisradius, d ... Abstand OH	$(R \pm d) \cos A - 2R \cos B \cos C$
1116	Lester-Kreis-Zentrum	$bc(b^2-c^2)[2(a^2-b^2)(c^2-a^2) + 3R^2(2a^2-b^2-c^2) - a^2(a^2+b^2+c^2) + a^4+b^4+c^4]$
1122	1.Grünberg-Punkt	$(a(b+c) + (b-c)^2)/(b+c-a)$
1123	Paasche-Punkt	$1/(1 + \sin A)$
1127	1.Villiers-Punkt	$\sin(A/4) / \sin(3/4 A)$
1128	2.Villiers-Punkt	$\sin((\pi-A)/4) / \sin((\pi+3A)/4)$
1130	1.Stevanovic-Punkt	$\sin((\pi + 3A)/4) / \sin((\pi - A)/4)$
1131	Kiepert-Punkt arctan 2	$1 / (\sin A + 2 \cos A)$
1132	Kiepert-Punkt arctan -2	$1 / (\sin A - 2 \cos A)$
1139	äußerer Fünfeckpunkt	$(\csc A)/(\cot A + \cot 2\pi/5)$
1140	innerer Fünfeckpunkt	$(\csc A)/(\cot A - \cot 2\pi/5)$
1141	Gibert-Punkt	$\sec(B - C) / (1 - 4 \cos^2 A)$
1153	van Lamoen-Kreis-Zentrum	$bc(13a^2(b^2+c^2) + 10b^2c^2 - 10a^4 - 4b^4 - 4c^4)$
1155	Schröder-Punkt	$\cos B + \cos C - 2 \cos A$
1158	Umkreiszentrum des Außentangentendreiecks	$\sin^2 B/2 \cos B + \sin^2 C/2 \cos C - \sin^2 A/2 \cos A$
1318	Bevan-Schröder-Punkt	$(b+c-2a)/(b+c-a)$
1323	Fletcher-Punkt	$(\sec^2 A/2)(2 \cos^2 A/2 - \cos^2 B/2 - \cos^2 C/2)$
1339	Nagel-Schröder-Punkt	$(b+c-2a)[4bc(b+c-a) - (a+b+c)(b^2+c^2-a^2)]/(b+c-3a)$
1373	1.Griffiths-Punkt	$1 + 8 \Delta/[a(b+c-a)]$ ; $\Delta$ ... Flächeninhalt
1375	Evans-Punkt	$bc[-2a^2 \cos A + b(a-b+c) \cos B + c(a+b-c) \cos C]$
1381	Schnittpunkt IU-Umkreis	$r + ( UI  - R) \cos A$
1382	Schnittpunkt IU-Umkreis	$r + ( UI  + R) \cos A$
1385	Mittelpunkt Inkreis-Umkreis	$16(\Delta ABC)^2 + a(a+b+c)(b^2+c^2-a^2)$
1386	Mittelpunkt Lemoine-Inkreis	$a(a+b+c) + (a^2+b^2+c^2)$
1387	Mittelpunkt Inkreis-Feuerbachpunkt	$bc[2a^4 - 2(b+c)a^3 + (8bc-3b^2-3c^2)a^2 + 2(b+c)(b-c)^2a + (b^2-c^2)^2]$
1478	Johnson-Yff-Kreiszentrum	$1 + 2 \cos B \cos C$
1480	1.Schattenpunkt	$(2 - \cos A)(2 + \cos A - \cos B - \cos C)$
1481	2.Schattenpunkt	$(2 - \cos A)/(2 + \cos A - \cos B - \cos C)$
1487	Napoleon-Ceva-Punkt	$(\csc A)/[(3 - \cot B \cot C)(3 - \cot^2 A)]$
1507	1.Morley-Gibert-Punkt	$1 + 2(\cos B/3 + \cos C/3 - \cos A/3)$
1658	Umkreiszentrum Kosnita-Dreieck	$\cos(B - C) + 4 \cos 2A \cos B \cos C$
1659	Yiu-Paasche-Punkt	$1/(1 + \sin A + \cos A)$
1986	Hatzipolakis-Reflexionspunkt	$(1 + \cos 2B + \cos 2C) \sin 3A \csc 2A$
2039	Schnitt Feuerbachkreis-Kiepertasymptote	$e \cos A - 2e \cos B \cos C + \cos(A + \omega)$
2040	Schnitt Feuerbachkreis-Kiepertasymptote $e = \sqrt{1 - 4 \sin^2 \omega}$ ; $\omega$ ... Brocard-Winkel	$e \cos A + 2e \cos B \cos C + \cos(A + \omega)$
2041	1.Euler-Vecten-Gibert-Punkt	$\sin A + \cos(B - C) - 2 \cos(A - \pi/6)$
2446	Schnittpunkt IU-Inkreis	$\cos B + \cos C - 1 - D$
2447	Schnittpunkt IU-Inkreis $D = \sqrt{3 - 2 \cos A - 2 \cos B - 2 \cos C}$	$\cos B + \cos C - 1 + D$



**Conway-Dreiecksnotation**

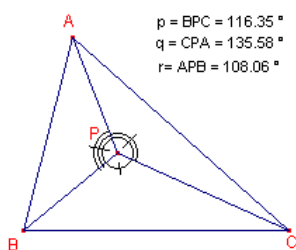
Zur Beschreibung verschiedener Größen am Dreieck wurde durch John Horton Conway die nach ihm benannte Notation eingeführt.

Gegeben sei ein Dreieck mit den Seiten a, b und c und den Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ .  $\Delta$  sei der Flächeninhalt. Dann ist

$$\begin{aligned}
 S &= bc \sin \alpha = ac \sin \beta = ab \sin \gamma = 2 \Delta \\
 S_\phi &= S \cot \phi \\
 S_A &= S \cot \alpha = bc \cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2)/2 \\
 S_B &= S \cot \beta = ac \cos \beta = (a^2 + c^2 - b^2)/2 \\
 S_C &= S \cot \gamma = ab \cos \gamma = (b^2 + a^2 - c^2)/2 \\
 S_\omega &= S \cot \omega = (a^2 + b^2 + c^2)/2, \omega \dots \text{Brocard-Winkel} \\
 S_{\pi/3} &= S \cot \pi/3 = S \sqrt{3}/3 \\
 S_{2\phi} &= (S_\phi^2 - S^2) / (2S_\phi) \quad S_{\phi/2} = S_\phi + \sqrt{(S_\phi^2 + S^2)} \\
 S_{\theta+\phi} &= (S_\theta S_\phi - S^2) / (S_\theta + S_\phi) \quad S_{\theta-\phi} = (S_\theta S_\phi + S^2) / (S_\phi + S_\theta) \\
 S_\omega &= S_A + S_B + S_C \\
 S^2 &= b^2c^2 - S_A^2 = a^2c^2 - S_B^2 = a^2b^2 - S_C^2 \\
 S_B S_C &= S^2 - a^2 S_A \\
 S_A S_B S_C &= S^2 (S_\omega - 4R^2) \quad S_\omega = s^2 - r^2 - 4rR \\
 S &= 4R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \quad (S_\omega - 4R^2) / (4R^2) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\
 S_{BC} &= S_B S_C = 1/S_A
 \end{aligned}$$

Beispiele für baryzentrische Koordinaten

Höhenschnittpunkt  $H = (S_{BC} : S_{CA} : S_{AB})$   
 Umkreismittelpunkt  $U = (S_A (S_B + S_C) : S_B (S_A + S_C) : S_C (S_A + S_B))$   
 Kiepert-Perspektor  $K(\theta) = (1/(S_A + S_\theta) : 1/(S_B + S_\theta) : 1/(S_C + S_\theta))$



**Winkelkoordinaten**

Zur Beschreibung der Lage von Punkten P bezüglich eines Dreiecks ABC können neben klassischen kartesischen Koordinaten auch andere Koordinatenarten genutzt werden, zum Beispiel Winkelkoordinaten. Unter den Winkelkoordinaten des Punktes P im Dreiecke ABC versteht man die Größe der Winkel BPC, CPA und APB. AB, BC und CA heißen die Referenzseiten dieser Koordinaten, die entweder im Gradmaß oder im Bogenmaß angegebene werden können.

Zur Kennzeichnung, ob P im Inneren oder außerhalb des Dreiecks liegt, werden auch negative Winkel genutzt (Abbildung rechts). Bezeichnet man die

drei Winkel mit p, q und r so gilt:

Für die Winkelkoordinaten (p, q, r), im Bogenmaß, eines Punktes P im Dreiecke ABC ist

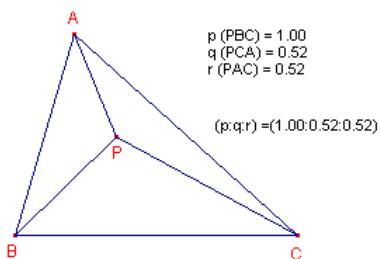
$$p + q + r \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

Liegt P im Inneren des Dreiecks wird  $p + q + r = 2\pi$ ; liegt P außerhalb wird  $p + q + r = 0$ .

Abbildung:  $p = BPC = 116,35^\circ, q = CPA = 135,58^\circ, r = APB = 108,06^\circ$

**Tripolare Koordinaten**

Eine weitere Koordinatenform sind folgende: Die Abstände AP, BP, CP eines Punktes P von den Eckpunkten eines Dreiecks ABC, dem Referenzdreieck, heißen tripolare Abstände. Drei Zahlen p, q, r für die  $p : q : r = PA : PB : PC$  gilt, werden dann tripolare Koordinaten von P bezüglich ABC genannt.



**Baryzentrische Koordinaten**

Gegeben sind ein Dreieck ABC und ein Punkt P. Die Verhältnisse der drei Teildreiecke PBC, PCA, PAB werden als baryzentrische Koordinaten von P bezüglich dem Referenzdreieck ABC genannt.

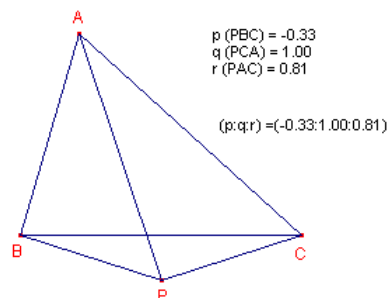
Das Vorzeichen wird dabei positiv gewählt, wenn der Punkt P auf der gleichen Seite wie der dritte Eckpunkt bezüglich der Grundseite des Dreiecks liegt.

Beispiel:

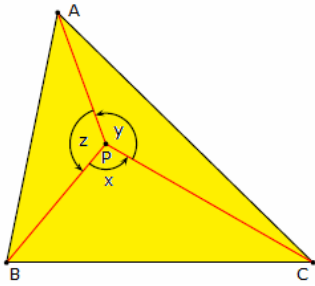
Der Schwerpunkt S des

Referenzdreiecks hat die baryzentrischen Koordinaten (1 : 1 : 1), da die Flächeninhalte der drei Teildreiecke gleich groß sind. Für den Inkreismittelpunkt I eines Dreiecks ergibt sich für die Flächeninhalte der Teildreiecke  $F(IBC) = \frac{1}{2} ra, F(ICA) = \frac{1}{2} rb, F(IAB) = \frac{1}{2} rc$  und somit

$$I_{\text{bary}} = a : b : c.$$



Durch Nikolaos Dergiades wurde 2009 in "A Simple Barycentric Coordinates Formula" eine neue, einfache Formel zur Berechnung der homogenen baryzentrischen Koordinaten eines Punktes P in einem Dreieck ABC angegeben.



Gegeben sei ein Dreieck  $\Delta ABC$  mit den Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  sowie ein Punkt  $P$ .  $P$  wird dabei durch die orientierten Winkel  $x = \angle BPC$ ,  $y = \angle CPA$  und  $z = \angle APB$  beschrieben.

Dann hat  $P$  die baryzentrischen Koordinaten

$$(1/(\cot \alpha - \cot x) ; 1/(\cot \beta - \cot y) ; 1/(\cot \gamma - \cot z))$$

und mit der Conway-Dreiecksnotation

$$(1/(S_A - S_x) ; 1/(S_B - S_y) ; 1/(S_C - S_z))$$

Zum Beispiel ergibt sich für den Fermat-Punkt  $X_{13}$

$$(1/(\cot \alpha + \cot \pi/3) ; 1/(\cot \beta + \cot \pi/3) ; 1/(\cot \gamma + \cot \pi/3))$$

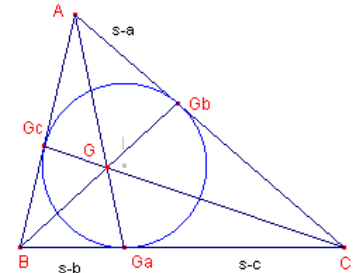
### Spur eines Punktes im Dreieck

Unter der Spur eines Punktes  $P$  im Dreieck  $ABC$  versteht man die Schnittpunkte der Dreieckstransversalen durch den Punkt  $P$  mit den Dreiecksseiten. Für die drei Spurpunkte  $A', B', C'$  gilt dann:

Hat der Punkt  $P$  die baryzentrischen Koordinaten  $x : y : z$ , dann haben die Spuren die baryzentrischen Koordinaten

$$A' = 0 : y : z \quad B' = x : 0 : z \quad C' = x : y : 0$$

Haben umgekehrt drei Punkte  $A', B', C'$  auf den Dreiecksseiten die angegebenen Koordinaten, dann schneiden sich die drei Geraden  $AA', BB', CC'$  in einem Punkt mit den baryzentrischen Koordinaten  $x : y : z$ .



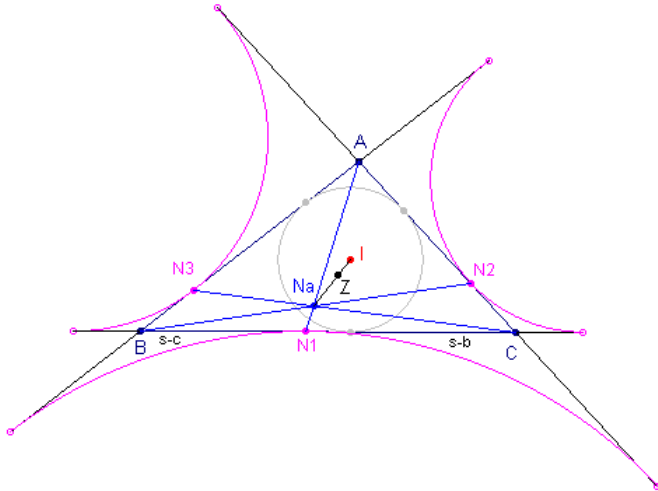
Gegeben seien die Berührungspunkte  $G_a, G_b, G_c$  des Inkreises eines Dreiecks  $ABC$ ;  $s = (a+b+c)/2$ . Für die Seite  $BC$  gilt dann  $BC: BG_a = s-b$  und  $CG_a = s-c$  und damit  $G_a = 0 : s-c : s-b$ . Analog findet man  $G_b = s-c : 0 : s-a$  und  $G_c = s-b : s-a : 0$ . Erweitert man die Koordinaten zu

$$G_a = 0 : (s-a)(s-c) : (s-a)(s-b)$$

$$G_b = (s-b)(s-c) : 0 : (s-a)(s-b)$$

$$G_c = (s-b)(s-c) : (s-a)(s-c) : 0$$

so folgt, dass die Dreieckstransversalen zu den Berührungspunkten sich in einem Punkt mit den Koordinaten  $(s-b)(s-c) : (s-a)(s-c) : (s-a)(s-b)$  bzw.  $1/(s-a) : 1/(s-b) : 1/(s-c)$  schneiden. Dieser Punkt ist der Gergonne-Punkt.



Für die Berührungspunkte  $N_1, N_2$  und  $N_3$  der Ankreise eines Dreiecks  $ABC$  ergibt sich in analoger Weise:

Für die Seite  $BC$  ist  $BN_1 = s-c$ , und  $CN_1 = s-b$ , so dass gilt

$$N_1 = 0 : s-b : s-c \quad \text{und entsprechend}$$

$$N_2 = s-a : 0 : s-c \quad N_3 = s-a : s-b : 0$$

Damit schneiden sich die Transversalen  $AN_1, BN_2, CN_3$  erneut in einem Punkt mit den Koordinaten

$$N_a = s-a : s-b : s-c$$

Dies ist der Nagel-Punkt des Dreiecks  $ABC$ .

Gegeben seien zwei Punkte  $X_i = 0 : y_i : z_i$  ( $i = 1, 2$ ) auf der Seite  $BC$ . Weiterhin seien die Parallelogramme  $X_i E_i A D_i$ ; mit  $E_i$  auf  $CA$  und  $D_i$  auf  $AB$ ; gegeben. Dann gilt:

Die Punkte  $A, Q = BE_1 \cap CD_2, P = BE_2 \cap CD_1$

sind kollinear. Die von ihnen gebildete Dreieckstransversale schneidet die Seite  $BC$  in einem Punkt  $X = 0 : y_1 y_2 : z_1 z_2$

Nachweis:

Es werden die Transversalen  $BE_1, CD_2$  betrachtet. Auf Grund der Konstruktion der Parallelogramme ist

$$E_1 C / A E_1 = X_1 C / B X_1 = y_1 / z_1$$

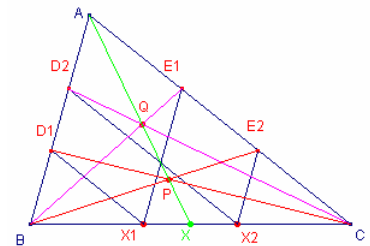
$$D_2 A / B D_2 = X_2 C / B X_2 = y_2 / z_2$$

Aus dem Satz von Ceva folgt für den Punkt  $P$

$$XB/CX \cdot E_1 C/A E_1 \cdot D_2 A/B D_2 = 1, \text{ d.h.}$$

$$XB/CX = y_1/z_1 \cdot y_2/z_2 = y_1 y_2 / (z_1 z_2)$$

$X$  ist damit der Punkt mit den baryzentrischen Koordinaten  $0 : y_1 y_2 : z_1 z_2$ . Das gleiche Ergebnis ergibt sich, wenn man den Punkt  $Q$  betrachtet.



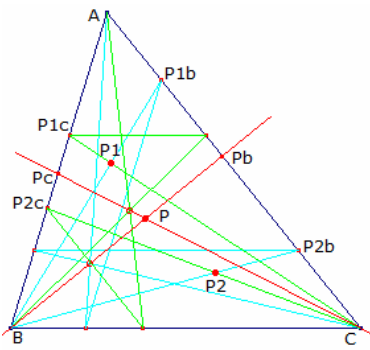
### Definition

Für die Punkte  $P_i = x_i : y_i : z_i$  ( $i = 1, 2$ ) sind die Spuren  $P_a, P_b, P_c$  die Punkte mit den Koordinaten

$$P_a = 0 : y_1 y_2 : z_1 z_2$$

$$P_b = x_1 x_2 : 0 : z_1 z_2$$

$$P_c = x_1 x_2 : y_1 y_2 : 0$$



### Baryzentrisches Produkt

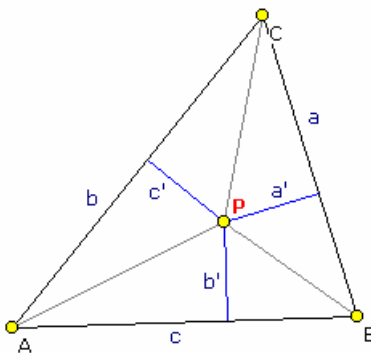
Ausgehend von der Definition der Spuren eines Punktes P im Dreieck kann definiert werden:

Unter dem baryzentrischen Produkt  $P = P_1 \otimes P_2$  mit  $P_i = x_i : y_i : z_i$  ( $i = 1, 2$ ) versteht man den Punkt  $P = x_1 x_2 : y_1 y_2 : z_1 z_2$ .

Aus der nebenstehenden Zeichnung kann eine Konstruktion des Punktes P abgelesen werden.

Hat ein Punkt P die Koordinaten  $x : y : z$ , so hat der isogonal zugeordnete Punkt  $P^*$  die Koordinaten  $a^2/x : b^2/y : c^2/z$ . Für den Schwerpunkt  $S = 1 : 1 : 1$  ist der Lemoine-Punkt des Dreiecks  $K = a^2 : b^2 : c^2$  isogonal zugeordnet. Allgemein gilt für isogonale Punkte P und  $P^*$  im Dreieck  $P \otimes P^* = K$ . Da für den Inkreismittelpunkt  $I = a : b : c$  sofort  $I \otimes I = a^2 : b^2 : c^2$  gilt, ist der Inkreismittelpunkt zu sich selbst isogonal.

Gilt für einen Punkt P  $P \otimes P = Q$ , so wird Q auch der Quadratwurzelpunkt von P genannt. Der Quadratwurzelpunkt Q eines Dreiecks ABC ist der Kimberling-Punkt  $X_{365}$ . siehe <http://faculty.evansville.edu/ck6/>: Clark Kimberling "Encyclopedia of Triangle Centers - ETC"



### Trilineare Koordinaten

Eine Besonderheit bei der geometrischen Untersuchung von Dreiecken stellen die sogenannten trilinearen Koordinaten dar. Diese ermöglichen die Angabe signifikanter Punkte eines Dreiecks in Abhängigkeit von den Seitenlängen und Winkeln ohne dass ein konkretes Koordinatensystem eingeführt werden muss.

Sind das Dreieck ABC und ein weiterer Punkt P gegeben, so hat dieser Punkt P von den Dreiecksseiten die minimalen Abstände  $a'$ ,  $b'$  und  $c'$ . Für die trilinearen Koordinaten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  (Achtung! Das sind nicht die Innenwinkel) gilt dann:

$$\alpha = k a' ; \beta = k b' ; \gamma = k c'$$

Die trilinearen Koordinaten werden dann in der Schreibweise  $\alpha : \beta : \gamma$  angegeben. Die Eckpunkte A, B und C haben die Koordinaten  $1 : 0 : 0$ ,  $0 : 1 : 0$  und  $0 : 0 : 1$ . Für den Inkreismittelpunkt gilt  $1 : 1 : 1$ , für den Lemoine-Punkt  $a : b : c$ , für den Umkreismittelpunkt  $\cos(\alpha) : \cos(\beta) : \cos(\gamma)$  usw.

Weiterhin gilt: Dreiecksfläche  $A = 1/2 k (a \alpha + b \beta + c \gamma)$  wobei  $\alpha, \beta, \gamma$  trilineare Koordinaten und  $k$  der oben beschriebene Faktor sind.

Sind  $\alpha : \beta : \gamma$  die trilinearen Koordinaten eines Punktes P, so sind  $(a \alpha, b \beta, c \gamma)$  dessen baryzentrische Koordinaten.

Anmerkung: Trilineare Koordinaten werden in der ausländischen Fachliteratur auch Normalkoordinaten genannt (z.B. niederländisch "normalcoördinaten").

### Umwandlung trilinearer Koordinaten

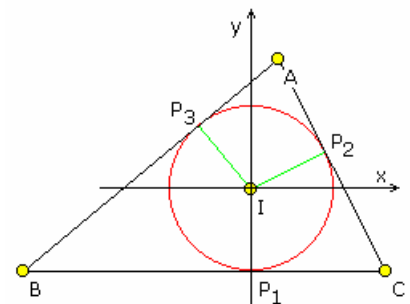
Am einfachsten erfolgt die Umwandlung trilinearer Dreieckskoordinaten  $\alpha : \beta : \gamma$  in kartesische Koordinaten mit folgendem Verfahren:

Das Dreieck wird so orientiert, dass BC parallel zur x-Achse ist und der Inkreismittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Dann gilt:

$$x = (k \beta - r + (k \alpha - r) \cos(\gamma)) \quad y = k \alpha - r$$

$$\text{mit } r = 2 A / (a + b + c)$$

$$k = 2 A / (a \alpha + b \beta + c \gamma)$$



### Exakte trilineare Koordinaten

Sind von einem Punkt die trilinearen Dreieckskoordinaten  $\alpha : \beta : \gamma$  bekannt, so können die exakten Abstände für ein konkretes Dreieck  $a' : b' : c'$  berechnet werden.  $a' : b' : c'$  nennt man die exakten trilinearen Koordinaten.

$$a' = 2 \alpha A / (a \alpha + b \beta + c \gamma)$$

$$b' = 2 \beta A / (a \alpha + b \beta + c \gamma)$$

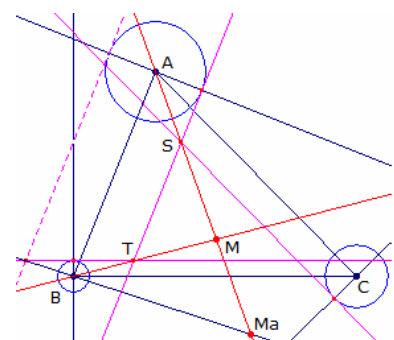
$$c' = 2 \gamma A / (a \alpha + b \beta + c \gamma)$$

### Zugeordnete Punkte

Gegeben sei ein Punkt M mit seinen trilinearen Koordinaten:  $M(x:y:z)$ . Die Punkte  $M_a(-x:y:z)$ ,  $M_b(x:-y:z)$  und  $M_c(x:y:-z)$  werden dann die zugeordneten Punkte von M genannt.

### Konstruktion

Zu dem gegebenen Punkt  $M(x:y:z)$  soll der zugeordnete Punkt  $M_a(-x:y:z)$  konstruiert werden. Dann gilt



$$d(M_a, AB) / z = d(M_a, CA) / y$$

damit liegt  $M_a$  auf der Geraden AM. Weiterhin ist

$$d(M_a, BC) / x = d(M_a, AB) / z.$$

Folglich liegt  $M_a$  auf einer Geraden durch B, deren Punkte das gleiche Verhältnis zu BC und AB haben wie die Punkte auf BM. Diese Gerade wird harmonische Gerade von MC bezüglich des Dreiecks ABC genannt. Auf analoge Weise folgt aus

$$d(M_a, CA) / y = d(M_a, BC) / x$$

dass  $M_a$  auch auf einer Geraden durch C liegt, der harmonisch zugeordneten Geraden von CM.

### System zugeordneter Punkte

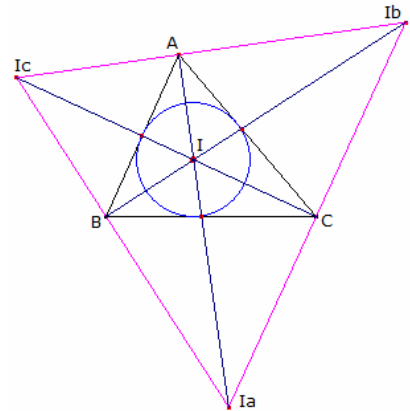
Unter einem System zugeordneter Punkte an einem Dreieck versteht man einen Punkt P und dessen drei zugeordnete Punkte.

Eine solches System ist kommutativ, d.h. jeder der vier Punkte hat die anderen drei als zugeordnete Punkte.

Ein System zugeordneter Punkte bilden u.a. der Inkreismittelpunkt I mit den drei Ankreismittelpunkten sowie der Schwerpunkt und die drei Eckpunkte des Antizentraldreiecks.

In der Abbildung sind die Koordinaten

$$I: 1,00; 1,00; 1,00 \quad I_a: -1,00; 1,00; 1,00 \\ I_b: 1,00; -1,00; 1,00 \quad I_c: 1,00; 1,00; -1,00$$



### Besondere Dreieckspunkte

Die Tabelle enthält die trilinearen Koordinaten besonderer Punkte an einem beliebigen Dreieck. (Bezeichnungen a, b, c ... Dreiecksseiten, A, B, C ... Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ )

Punkt	trilineare Koordinaten
Punkt A	1 : 0 : 0
Punkt B	0 : 1 : 0
Punkt C	0 : 0 : 1
Inkreismittelpunkt	1 : 1 : 1
Schwerpunkt	1/a : 1/b : 1/c
Umkreismittelpunkt	cos A : cos B : cos C
Höhenschnittpunkt	cos B cos C : cos A cos C : cos A cos B
Neun-Punktekreis-Mittelpunkt	cos(B-C) : cos(C-A) : cos(A-B)
Lémoine-Punkt	a : b : c
Gergonne-Punkt	bc/(b+c-a) : ca/(c+a-b) : ab/(a+b-c)
Nagel-Punkt	(b+c-a)/a : (c+a-b)/b : (a+b-c)/c
Mittelpunkt	b+c-a : c+a-b : a+b-c
Spiekerzentrum	bc(b+c) : ca(c+a) : ab(a+b)
Feuerbach-Punkt	1-cos(B-C) : 1-cos(C-A) : 1-cos(A-B)
Fermat-Punkt	csc(A+PI/3) : csc(B+PI/3) : csc(C+PI/3)
2.Isogonisches Zentrum	csc(A-PI/3) : csc(B-PI/3) : csc(C-PI/3)
1.Isodynamischer Punkt	sin(A+PI/3) : sin(B+PI/3) : sin(C+PI/3)
2.Isodynamischer Punkt	sin(A-PI/3) : sin(B-PI/3) : sin(C-PI/3)
1.Napoleon Punkt	csc(A+PI/6) : csc(B+PI/6) : csc(C+PI/6)
2.Napoleon Punkt	csc(A-PI/6) : csc(B-PI/6) : csc(C-PI/6)
Clawson Punkt	tan A : tan B : tan C
De Longchamps Punkt	cos A - cos B cos C : cos B - cos C cos A : cos C - cos A cos B
Schiffler Punkt	1/(cos B + cos C) : 1/(cos C + cos A) : 1/(cos A + cos B)
Exeter Punkt	a(b <sup>4</sup> + c <sup>4</sup> - a <sup>4</sup> ) : b(c <sup>4</sup> + a <sup>4</sup> - a <sup>4</sup> ) : c(a <sup>4</sup> + b <sup>4</sup> - c <sup>4</sup> )
Brocard Mittelpunkt	a(b <sup>2</sup> +c <sup>2</sup> ) : b(c <sup>2</sup> +a <sup>2</sup> ) : c(a <sup>2</sup> +b <sup>2</sup> )
Kosnita Punkt	sec(B-C) : sec(C-A) : sec(A-B)
3.Brocard Punkt	1/a <sup>3</sup> : 1/b <sup>3</sup> : 1/c <sup>3</sup>
Steiner Punkt	bc/(b <sup>2</sup> -c <sup>2</sup> ) : ca/(c <sup>2</sup> -a <sup>2</sup> ) : ab/(a <sup>2</sup> -b <sup>2</sup> )
Parry Punkt	a/(2a <sup>2</sup> -b <sup>2</sup> -c <sup>2</sup> ) : b/(2b <sup>2</sup> -c <sup>2</sup> -a <sup>2</sup> ) : c/(2c <sup>2</sup> -a <sup>2</sup> -b <sup>2</sup> )
Isoperimetrischer Punkt	-1+secA/2 cosB/2 cosC/2 : -1+secB/2 cosC/2 cosA/2 : -1+secC/2 cosA/2 cosB/2
1.Ajima-Malfatti Punkt	sec <sup>4</sup> (A/4) : sec <sup>4</sup> (B/4) : sec <sup>4</sup> (C/4)
Apollonius Punkt	a(b+c) <sup>2</sup> /(b+c-a) : b(c+a) <sup>2</sup> /(c+a-b) : c(a+b) <sup>2</sup> /(a+b-c)
Gleiche-Parallelen-Punkt	Bc(ca + ab - bc) : ca(ab + bc - ca) : ab(bc + ca - ab)

### Besondere Dreieckspunkte

Die Tabelle enthält die baryzentrischen Koordinaten besonderer Punkte an einem beliebigen Dreieck. (Bezeichnungen a, b, c ... Dreiecksseiten, A, B, C ... Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ )

Punkt	baryzentrische Koordinaten
Inkreismittelpunkt	a : b : c

Schwerpunkt	1 : 1 : 1
Umkreismittelpunkt	$\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$
Höhenschnittpunkt	$\tan A : \tan B : \tan C$
Neun-Punktekreis-Mittelpunkt	$a \cos(B-C) : b \cos(C-A) : c \cos(A-B)$
Lémoine-Punkt	$a^2 : b^2 : c^2$
Gergonne-Punkt	$1/(b+c-a) : 1/(c+a-b) : 1/(a+b-c)$
Nagel-Punkt	$b+c-a : c+a-b : a+b-c$
Mittelpunkt	$a(b+c-a) : b(c+a-b) : c(a+b-c)$
Spiekerzentrum	$b+c : c+a : a+b$
Feuerbach-Punkt	$a(1-\cos(B-C)) : b(1-\cos(C-A)) : c(1-\cos(A-B))$
Fermat-Punkt	$f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$ mit $f(a,b,c) = a^4 - 2(b^2 - c^2)^2 + a^2(b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} \cdot \text{Fläche}(ABC))$
2.Isogonisches Zentrum	$f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$ mit $f(a,b,c) = a^4 - 2(b^2 - c^2)^2 + a^2(b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} \cdot \text{Fläche}(ABC))$
1.Isodynamischer Punkt	$a \sin(A+\pi/3) : b \sin(B+\pi/3) : c \sin(C+\pi/3)$
2.Isodynamischer Punkt	$a \sin(A-\pi/3) : b \sin(B-\pi/3) : c \sin(C-\pi/3)$
1.Napoleon Punkt	$a \csc(A+\pi/6) : b \csc(B+\pi/6) : c \csc(C+\pi/6)$
2.Napoleon Punkt	$a \csc(A-\pi/6) : b \csc(B-\pi/6) : c \csc(C-\pi/6)$
Clawson Punkt	$a \tan A : b \tan B : c \tan C$
De Longchamps Punkt	$\tan B + \tan C - \tan A : \tan C + \tan A - \tan B : \tan A + \tan B - \tan C$
Schiffler Punkt	$a/(\cos B + \cos C) : b/(\cos C + \cos A) : c/(\cos A + \cos B)$
Exeter Punkt	$a^2(b^4 + c^4 - a^4) : b^2(c^4 + a^4 - a^4) : c^2(a^4 + b^4 - c^4)$
Brocard Mittelpunkt	$a^2(b^2+c^2) : b^2(c^2+a^2) : c^2(a^2+b^2)$
Kosnita Punkt	$\tan(B-C) : \tan(C-A) : \tan(A-B)$
3.Brocard Punkt	$1/a^2 : 1/b^2 : 1/c^2$
Steiner Punkt	$1/(b^2-c^2) : 1/(c^2-a^2) : 1/(a^2-b^2)$
Parry Punkt	$a^2/(2a^2-b^2-c^2) : b^2/(2b^2-c^2-a^2) : c^2/(2c^2-a^2-b^2)$
Isoperimetrischer Punkt	$g(A,B,C) : g(B,C,A) : g(C,A,B)$ mit $g(A,B,C) = (\sin A)(-1+\sec A/2 \cos B/2 \cos C/2)$
1.Ajima-Malfatti Punkt	$\sin A \sec^4(A/4) : \sin B \sec^4(B/4) : \sin C \sec^4(C/4)$
Apollonius Punkt	$a^3 \cos^2(B/2 - C/2) : b^3 \cos^2(C/2 - A/2) : c^3 \cos^2(A/2 - B/2)$

### Alphabetische Reihenfolge von wichtigen Punkten, Geraden, ...

1. und 2.Brocard-Dreieck	die von den Brocard-Schnittpunkten gebildeten Dreiecke
1. und 2.Brocard-Linien	die Transversalen durch die beiden Brocard-Punkte
1. und 2.Brocard-Punkt	die beiden Punkte, von denen bestimmte Winkel zu den Eckpunkten dem Brocard-Winkel entsprechen
1. und 2.Brocard-Schnittpunkte	die Schnittpunkte der Transversalen durch die beiden Brocard-Punkte mit den Seiten
1. und 2.Brocard-Strecken	die Strecken von den Dreieckspunkten zu den beiden Brocard-Punkten
1. und 2.isodynamischer Punkt	die Schnittpunkte der A-, B- und C-Apollonius-Kreise
1.Ajima-Malfatti-Linien	die Abschnitte auf den Geraden durch die Dreieckseckpunkte und die Malfatti-Kreise-Punkte
1.Ajima-Malfatti-Punkt	der Schnittpunkt der 1.Ajima-Malfatti-Linien
1.Epstein-Punkt	spezieller Punkt (siehe Lexikon)
1.Lémoine-Kreis	der durch die Parallelen zu den Dreiecksseiten durch den Lémoine-Punkt bestimmte Kreis
1.Tucker-Kreise	jeweils zwei Taylorfußpunkte, ein Höhenfußpunkt und die zugehörige Dreiecksecke liegen auf je einem der drei möglichen Tucker-Kreise 1.Art
2.Ajima-Malfatti-Linien	die Abschnitte auf den Geraden durch die Ankreismittelpunkte und die Malfatti-Kreise-Punkte
2.Ajima-Malfatti-Punkt	der Schnittpunkt der 2.Ajima-Malfatti-Linien
2.Tucker-Kreise	jeweils zwei Taylorfußpunkte und zwei Höhenfußpunkte liegen auf einem der drei möglichen Tucker-Kreise 2.Art
3.Tucker-Kreise	die Tucker-Kreise 3.Art durch den Höhenschnittpunkt und jeweils den zwei Taylorfußpunkten auf einer Dreiecksseite schneiden sich paarweise auf den Höhen des Dreiecks
9-Feuerbach-Punkte	die neun besonderen Punkte des Feuerbach-Kreises: die drei Höhenfußpunkte, die drei Seitenmitten und die drei Mitten zwischen dem Höhenschnittpunkt und den Dreiecksseiten
Adams-Dreieck	das durch die Schnittpunkte der Adams-Geraden gebildete Dreieck
Adams-Geraden	die Geraden durch je zwei benachbarte Adams-Kreispunkte
Adams-Kreis	der durch die Parallelen zum Kontakt-Dreieck durch den Gergonne-Punkt bestimmte Kreis
Adams-Kreispunkte	die Schnittpunkte der Parallelen zum Kontakt-Dreieck durch den Gergonne-Punkt mit den Dreiecksseiten



Adams-Strecken	die Strecken zwischen den Adams-Kreispunkten durch den Gergonne-Punkt
Ajima-Linien	die Geradenabschnitte durch die Eckpunkte und die Mittelpunkte der drei Malfatti-Kreise
Ajima-Punkt	der Schnittpunkt der Ajima-Linien
Ankreis-Ankreis-Kreise	die Kreise, welche durch je zwei Ankreismittelpunkte und Dreieckseckpunkte verlaufen
Ankreis-Apollonius-Kreis	der Apollonius-Kreis, der die drei Ankreise des Dreiecks von außen berührt
Ankreis-Apollonius-Kreis Punkte	die Punkte in denen der Apollonius-Kreis die drei Ankreise des Dreiecks von außen berührt
Ankreisdreieck	das Dreieck, das von den drei Ankreismittelpunkten gebildet wird
Ankreisdreieck-Umkreis	Umkreis des Ankreisdreiecks
Ankreise	drei Kreise, die jeweils eine Dreiecksseite und die anderen beiden Verlängerungen der Dreiecksseiten berühren, die sogenannten Kreise des Apollonius
Ankreismittelpunkte	die drei Punkte, welche die Mittelpunkte der Ankreise sind
Ankreis-Punkte	die drei Berührungspunkte der Ankreise an den eigentlichen Dreiecksseiten
Antikomplementär-Dreieck	das zugehörige Dreieck, für welches das Ausgangsdreieck Mittendreieck ist
Apollonius-Linien	die Strecken von den Ankreis-Apollonius-Kreis Berührungspunkten zu den gegenüberliegenden Dreieckspunkten
Apollonius-Punkt	der Schnittpunkt der Apollonius-Linien
Außentangenten	die nicht durch die Dreiecksgeraden gebildeten paarweisen Tangenten von je zwei Ankreisen des Dreiecks
Bevan-Punkt	Umkreismittelpunkt des Ankreisdreiecks
Brocard-Achse	die Gerade durch Lemoine-Punkt und Umkreismittelpunkt
Brocard-Durchmesser	die Strecke von Lemoine-Punkt zum Umkreismittelpunkt
Brocard-Kreis	der Kreis durch die beiden Brocard-Punkte, den Lemoine-Punkt und den Umkreismittelpunkt
Brocard-Mittelpunkt	der Mittelpunkt der von den beiden Brocard-Punkten gebildeten Strecke
Dreiecksgeraden	die Geraden, welche die Verlängerung der Dreiecksseiten darstellen
Dreiecksseiten	die Seiten a, b und c werden deutlicher hervorgehoben
Euler-Gerade	die Gerade auf welcher der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Feuerbach-Punkt liegen
Evans-Punkt	Schnittpunkt von Euler-Gerade und Gergonne-Gerade
Exeter-Punkt	der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Tangentialdreiecks
Fermat-Dreieckeckpunkte	die zusätzlichen Eckpunkte, der auf die Dreiecksseiten aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke
Fermat-Linien	die Strecken von den Fermat-Dreieckpunkten zu den gegenüberliegenden Punkten des Dreiecks
Fermat-Punkt	der Schnittpunkt der Fermat-Linien
Feuerbach-Kreis	ein Kreis, der 9 besondere Punkte enthält, die drei Höhenfußpunkte, die drei Seitenmitten und die drei Mitten zwischen dem Höhenschnittpunkt und den Dreiecksecken
Feuerbach-Punkt	der Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises, der auch auf der Eulerschen Gerade liegt
Fletcher-Punkt	Schnittpunkt von Soddy-Gerade und Gergonne-Gerade
Fuhrmann-Dreieck	das aus den Fuhrmann-Punkten gebildete Dreieck
Fuhrmann-Kreis	der Kreis durch die drei Fuhrmann-Punkte
Fuhrmann-Linien	die Strecken von den Umkreisbogen-Mittelpunkten zu den Fuhrmann-Punkten
Fuhrmann-Punkte	die Spiegelpunkte der Umkreisbogen-Mittelpunkte an den Dreiecksseiten
Gergonne-Gerade	die drei Nobbs-Punkte liegen auf dieser Geraden. Wichtig! Auch diese Gerade liegt mitunter außerhalb der Zeichenfläche!
Gergonne-Linien	die Geraden von den Dreieckseckpunkten und Inkreisberührungspunkten zu den Nobbs-Punkten
Gergonne-Punkt	die Strecken von den Eckpunkten zu den Inkreisberührungspunkten schneiden sich in einem Punkt, dem Gergonne-Punkt
Gergonne-Transversalen	die Strecken von den Eckpunkten zu den Inkreisberührungspunkten durch den Gergonne-Punkt
Gleiche Parallelen	die Strecken durch den Gleiche-Parallelen-Punkt
Gleiche-Parallelen-Punkt	Punkt, so dass Parallele zu den Dreiecksseiten gleiche Länge haben
Gleicher-Umfang-Punkt	zusätzlicher Punkt P, so dass Dreiecke mit den Eckpunkten A, B, C und diesem Punkt gleichen Umfang besitzen
Gleicher-Umweg-Punkt	Punkt, so dass der Umweg über diesen von einem Dreieckspunkt zum

	anderen konstant ist
Hofstadter-Einspunkt	Grenzwertpunkt der Hofstadter-Punkte mit $r = 1$ ; trilineare Koordinaten $a/\alpha : b/\beta : g/\gamma$
Hofstadter-Nullpunkt	Grenzwertpunkt der Hofstadter-Punkte mit $r = 0$ ; trilineare Koordinaten $\alpha/a : \beta/b : \gamma/g$
Höhen	die Höhen des Dreiecks, d.h. die von den Eckpunkten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Lote
Höhendreieck	das Dreieck, welches von den Höhenfußpunkten gebildet wird
Höhenfußpunkte	die Schnittpunkte der Höhen mit den Dreiecksseiten, die gleichzeitig die Lotfußpunkte von den Ecken zu den gegenüberliegenden Seiten sind
Höhenschnittpunkt	der Schnittpunkt der drei Höhen
Inkreis	der Kreis, welcher die drei Dreiecksseiten von innen berührt
Inkreismittelpunkt	der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden und zugleich der Mittelpunkt des Inkreises
Inkreispunkte	die Berührungspunkte des Inkreises
Inkreis-Umkreis-Gerade	die Gerade durch den Inkreis- und Umkreismittelpunkt, auf der auch der Exeter-Punkt liegt
innerer und äußerer Soddy-Kreis	Apollonius-Kreise für die drei klassischen Soddy-Kreise
innerer und äußerer Soddy-Punkt	Mittelpunkte des inneren und äußeren Soddy-Kreises
Inneres Brocard-Dreieck	das von den Transversalen durch die Brocard-Punkte gebildete spezielle Dreieck
Inverser Neuberg-Kreise	die an den Dreiecksseiten gespiegelten Neuberg-Kreise
Inverses Neuberg-Dreieck	das von den Mittelpunkten der inversen Neuberg-Kreise gebildete Dreieck
Isodynamischer Kreis	der Kreis, dessen Durchmesser von den zwei isodynamischen Punkten gebildet wird
Kontakt-Dreieck	das von den Inkreisberührungspunkten gebildete Dreieck
Lémoine-Dreieck	das durch die Schnittpunkte der Lémoine-Geraden gebildete Dreieck
Lémoine-Geraden	die Geraden durch je zwei benachbarte Lémoine-Kreispunkte
Lémoine-Kreispunkte	die Schnittpunkte der Parallelen zu den Dreiecksseiten durch den Lémoine-Punkt mit den Seiten
Lémoine-Punkt	der Schnittpunkt der Symmedian-Linien
Lémoine-Strecken	die Strecken zwischen den Lémoine-Kreispunkten durch den Lémoine-Punkt
Longchamp-Punkt	Schnittpunkt von Euler-Gerade und Soddy-Gerade
Malfatti-Berührungspunkte	die sechs Berührungspunkte der Malfatti-Kreise an den Dreiecksseiten
Malfatti-Dreieck	das von den Mittelpunkten der Malfatti-Kreise gebildete Dreieck
Malfatti-Kreise	die drei Kreise entsprechend dem Ajima-Malfatti-Problem
Malfatti-Kreise-Punkte	die Berührungspunkte der Malfatti-Kreise untereinander
Mittelparallelen	drei von den Seitenmittelpunkten gebildete Strecke, die jeweils zu einer Dreiecksseite parallel sind
Mittelsenkrechte	die Geraden, die in den Seitenmittelpunkten senkrecht auf den Dreiecksseiten stehen
Mittelpunkt	der Schnittpunkt der Mittelpunkt-Linien
Mittelpunkt-Linien	die Strecken von den Ankreis-Mittelpunkten zu den Mittelpunkten der zugehörigen Dreiecksseiten
Nagel-Dreieck	das von den drei Ankreisberührungspunkten gebildete Dreieck
Nagel-Gerade	die Gerade, welche den Inkreismittelpunkt und den Schwerpunkt enthält
Nagel-Punkt	die drei Strecken von den Eckpunkten zu den Ankreisberührungspunkten schneiden sich in einem Punkt, dem Nagel-Punkt
Nagelpunkt-Halbdreieck	halbiert man die Strecken von den Eckpunkten zu dem Nagelpunkt, so bilden die Mitten das Nagelpunkt-Halbdreieck
Nagel-Transversalen	die Strecken, welche von den Ecken aus durch den Nagelpunkt verlaufen und damit die Ankreisberührungspunkte treffen
Napoleon-Dreiecke	die auf den Seiten errichteten gleichseitigen Dreiecke
Napoleon-Dreieckpunkte	die Schwerpunkte der Napoleon-Dreiecke
Napoleon-Linien	die Strecken von den Napoleon-Dreieckpunkten zu den gegenüberliegenden Punkten des Dreiecks
Napoleon-Punkt	der Schnittpunkt der Napoleon-Linien
Neuberg-Dreieck	das von den Mittelpunkten der Neuberg-Kreise gebildete Dreieck
Neuberg-Kreise	die Kreise bei A, B und C, auf welchen die Eckpunkte A, B und C liegen können, ohne dass sich der Brocard-Winkel verändert
Nobbs-Punkte	die Verlängerung der Dreiecksseiten und der Seiten des Kontakt-Dreiecks schneiden sich in drei Punkten, den sogenannten Nobbs-Punkten. Wichtig! Diese Punkte liegen teilweise weit außerhalb der Zeichenfläche!
Parry-Punkt	Schnittpunkt des Umkreises und des Parry-Kreises (siehe Lexikon)

Polarkreis	der Kreis bezüglich dessen das Dreieck selbst-konjugiert ist
Punkte A, B und C	die Eckpunkte des Dreiecks
Schiffler-Punkt	der Schnittpunkt der Euler-Geraden der Dreiecks ABI, ACI, BCI und ABC
Schwerpunkt	der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden, welcher zugleich der Schwerpunkt des Dreiecks ist
Schwerpunktkreise	drei Kreise durch je zwei Dreieckseckpunkte und den Schwerpunkt
Seite a, b und c	die Dreiecksseiten
Seitenhalbierende	die Geraden durch die Eckpunkte und die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten
Seitenmittelpunkte	die Mittelpunkte der drei Seiten
Soddy-Gerade	Gerade auf der die beiden Soddy-Punkte, der Inkreismittelpunkt, der Gergonne-Punkt, die Griffiths-Punkte, die Rigby-Punkte sowie der Fletcher-Punkt liegen
Soddy-Kreise	drei Kreise um die Dreiecksecken, die sich paarweise berühren
Spieker-Kreis	der Inkreis des von den Mittelparallelen gebildeten Dreiecks
Spieker-Punkt	der Mittelpunkt des Spieker-Kreises
Steiner-Ellipse	die flächenmäßig kleinste Ellipse, welche die Dreieckspunkte A, B und C auf der Peripherie hat
Steiner-Punkt	ein auf der Steiner-Ellipse gelegener Punkt (Definition siehe Lexikon)
Symmedian-Dreieck	das von den Symmedian-Punkten gebildete Dreieck
Symmedian-Linien	die Dreieckstransversalen zu den Symmedian-Punkten
Symmedian-Punkte	die Spiegelpunkte der Seitenmittelpunkte an den Schnittpunkten der Winkelhalbierenden mit den Seiten
Tangentialdreieck-Punkte	die Eckpunkte, des von den Umkreistangenten erzeugten Dreiecks
Tangentialkreise	die zwei Kreise, die durch den Eckpunkt gehen und die gegenüberliegende Dreiecksseite in einem der anderen Eckpunkte berühren.
Taylorfußpunkte	fällt man die Lote von den Höhenfußpunkten auf die jeweils anderen 2 Seiten, so entstehen sechs Punkte, die Taylorfußpunkte
Taylor-Kreis	die sechs Taylorfußpunkte liegen auf einem Kreis, dem Taylor-Kreis
Taylor-Linien	die Strecken von den Höhenfußpunkten zu den Taylorfußpunkten
Taylor-Punkt	der Mittelpunkt des Taylor-Kreises
Umkreis	der Kreis, der durch die Eckpunkte des Dreiecks verläuft
Umkreisbogen-Mittelpunkte	die Mittelpunkte der Kreisbögen des Umkreises zwischen jeweils zwei Dreieckspunkten
Umkreismittelpunkt	der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und zugleich der Mittelpunkt des Umkreises
Umkreistangenten	die in den Dreieckspunkten errichteten Tangenten an den Umkreis
Winkelhalbierende	die Geraden, welche die Innenwinkel des Dreiecks halbieren
Winkelhalbierende-Punkte	die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den gegenüberliegenden Seiten
Yff-Zentraldreieck	durch Isoscelizer gebildetes Dreieck, so dass dieses kongruent zu drei weiteren Dreiecken ist
Yff-Zentralpunkt	Schnittpunkt gleicher Isoscelizer

### Dreieck-Winkelbeziehungen

$$\sin \gamma = \sin (\alpha + \beta) \quad \cos \gamma = -\cos (\alpha + \beta) \quad \tan \gamma = -\tan (\alpha + \beta) \quad \cot \gamma = -\cot (\alpha + \beta)$$

$$\sin (\gamma/2) = \cos ((\alpha + \beta)/2) = \sqrt{[(s-a)(s-b)/(ab)]} \quad \cos (\gamma/2) = \sin ((\alpha + \beta)/2) = \sqrt{[s(s-c)/(ab)]}$$

$$\tan (\gamma/2) = \cot ((\alpha + \beta)/2) = \sqrt{[(s-a)(s-b)/[s(s-c)]]}$$

$$\cot (\gamma/2) = \tan ((\alpha + \beta)/2) = \sqrt{[s(s-c)/[(s-a)(s-b)]]}$$

$$\sin (\beta - \gamma) = 2 \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha = \sin \alpha - 2 \cos \beta \sin \gamma$$

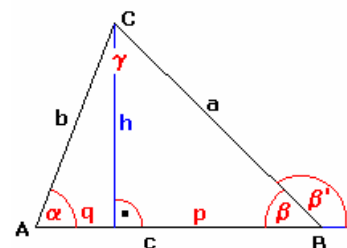
$$\cos (\beta - \gamma) = 2 \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha = 2 \sin \beta \sin \gamma - \cos \alpha$$

$$\sin ((\beta - \gamma)/2) = (\sin \beta - \sin \gamma) / (2 \sin \alpha/2)$$

$$\cos ((\beta - \gamma)/2) = (\sin \beta + \sin \gamma) / (2 \cos \alpha/2)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \alpha/2 \cos \beta/2 \cos \gamma/2 = s / R = A / (R\rho)$$

$$\sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha + \sin \alpha \sin \beta = (s^2 + 4 R \rho + \rho^2) / (4 R^2)$$



$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)/4 = \rho s / (2R^2) = abc / (8R^3)$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = (s^2 - 4 R \rho - \rho^2) / (2R^2)$$

$$\sin^3 \alpha + \sin^3 \beta + \sin^3 \gamma = s (s^2 - 6 R \rho - 3 \rho^2) / (4R^3)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \alpha/2 \sin \beta/2 \sin \gamma/2 = (R + \rho) / R$$

$$\cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha + \cos \alpha \cos \beta = (s^2 - 4 R^2 + \rho^2) / (4R^2)$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = (s^2 - 4 R^2 - 4 R \rho - \rho^2) / (4R^2)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = (6 R^2 + 4 R \rho + \rho^2 - s^2) / (2R^2)$$

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

$$\cot \alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / (4A)$$

$$\cot \beta + \cot \gamma = \sin(\beta + \gamma) / (\sin \beta \sin \gamma) = \sin \alpha / (\sin \beta \sin \gamma) = 2 \sin \alpha / [\cos(\beta - \gamma) + \cos \alpha] = 2 aR / (bc) = a^2 / (2A)$$

$$\cot \alpha \cot \beta + \cot \alpha \cot \gamma + \cot \beta \cot \gamma = 1$$

$$\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = (a^2 + b^2 + c^2) / (4A)$$

$$\cot \alpha/2 + \cot \beta/2 + \cot \gamma/2 = \cot \alpha/2 \cot \beta/2 \cot \gamma/2$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) * (\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma) * (\sin \alpha - \sin \beta + \sin \gamma) * (-\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = 4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$$

$$\sin \alpha/2 \sin \beta/2 \sin \gamma/2 = (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1)/4 = \rho / (4R) = (s - a)(s - b)(s - c) / (abc)$$

$$\sin^2 \alpha/2 + \sin^2 \beta/2 + \sin^2 \gamma/2 = (3 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma)/2 = (2R - \rho) / (2R)$$

$$\cos \alpha/2 \cos \beta/2 \cos \gamma/2 = s / (4R) = A / (4R \rho) = abc / (16 R^2 \rho)$$

$$\cos^2 \alpha/2 + \cos^2 \beta/2 + \cos^2 \gamma/2 = (4R + \rho) / (2R)$$

$$\tan^2 \alpha/2 + \tan^2 \beta/2 + \tan^2 \gamma/2 = [(4R + \rho)^2 - 2s^2] / s^2$$

$$\tan \beta/2 \tan \gamma/2 = (s - a) / s$$

$$\tan \beta/2 \tan \gamma/2 + \tan \gamma/2 \tan \alpha/2 + \tan \alpha/2 \tan \beta/2 = 1$$

$$\tan \alpha/2 \tan \beta/2 \tan \gamma/2 = \rho/s$$

$$\cot \alpha/2 + \cot \beta/2 + \cot \gamma/2 = \cot \alpha/2 \cot \beta/2 \cot \gamma/2 = s/\rho$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)/R = 2A / R^2$$

$$\sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta) = -4 \sin((\beta - \gamma)/2) \sin((\gamma - \alpha)/2) \sin((\alpha - \beta)/2)$$

$$\cos((\beta - \gamma)/2) \cos((\gamma - \alpha)/2) \cos((\alpha - \beta)/2) = (s^2 + 2R\rho + \rho^2) / (8R^2)$$

$$\cos \beta + \cos \gamma \leq 2 \sin \alpha/2$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sin \alpha/2 + \sin \beta/2 + \sin \gamma/2$$

$$a + b + c = u = 2s$$

$$bc + ca + ab = s^2 + 4R\rho + \rho^2 = 2A(1/\sin \alpha + 1/\sin \beta + 1/\sin \gamma) = 2R(h_a + h_b + h_c)$$

$$abc = 4R\rho s = 4RA$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - 4R\rho - \rho^2) = 2R(a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2s(s^2 - 6R\rho - 3\rho^2)$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 2s(s^2 + 2R\rho + \rho^2)$$

$$(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 = 8A^2 + (a^4 + b^4 + c^4)/2$$

$$1/(bc) + 1/(ca) + 1/(ab) = 2s / (abc) = 1 / (2R\rho)$$

Umkreismittelpunkt = O, Höhenschnittpunkt = H, Inkreismittelpunkt = I, Schwerpunkt = S

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = R^2(1 - 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)$$

$$OI^2 = R^2 - 2R\rho$$

$$IH^2 = 2\rho^2 - 4R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 4R^2 + 4R\rho + 3\rho^2 - s^2$$

$$SI^2 = 2/3 OI^2 - 1/3 IH^2 + 2/9 OH^2 = (s^2 - 16R\rho + 5\rho^2) / 9$$

$$SH = 2OS$$

### Spezielle Gleichungen am Dreieck

Wenn in einem Dreieck, anstelle der einzelnen Seiten, deren Summe, oder die Summe oder Differenz von Seiten gegeben sind, so können daraus unter bestimmten Bedingungen die Längen der Seiten, die Winkel und der Flächeninhalt berechnet werden.

Sind a, b, c die Seiten,  $\alpha, \beta, \gamma$  die Innenwinkel, A der Flächeninhalt und u der Umfang, so gilt:

1) gegeben: Differenz  $m = a - b, \alpha, \beta$

$$\text{Seite a } a = m \sin \alpha / (\sin \alpha - \sin \beta)$$

$$\text{Seite b } b = m \sin \beta / (\sin \alpha - \sin \beta)$$

$$\text{Seite c } c = m \sin(180^\circ - \alpha - \beta) / (\sin \alpha - \sin \beta)$$

$$\text{Fläche A } A = m^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(180^\circ - \alpha - \beta) / (2(\sin \alpha - \sin \beta)^2)$$

2) gegeben: Summe  $m = a + b, \alpha, \beta$

$$\text{Seite a } a = m \sin \alpha / (\sin \alpha + \sin \beta)$$

$$\text{Seite b } b = m \sin \beta / (\sin \alpha + \sin \beta)$$

$$\text{Seite c } c = m \sin(180^\circ - \alpha - \beta) / (\sin \alpha + \sin \beta)$$

$$\text{Fläche A } A = m^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(180^\circ - \alpha - \beta) / (2(\sin \alpha + \sin \beta)^2)$$

3) gegeben: Summe  $m = a + b + c, \alpha, \beta$  bzw.  $\gamma$

$$\text{Seite a } a = m \sin \alpha / (\sin \alpha + \sin \beta + \sin(180^\circ - \alpha - \beta))$$

$$\text{Seite b } b = m \sin \beta / (\sin \alpha + \sin \beta + \sin(180^\circ - \alpha - \beta))$$

$$\text{Seite c } c = m \sin(180^\circ - \alpha - \beta) / (\sin \alpha + \sin \beta + \sin(180^\circ - \alpha - \beta))$$

$$\text{Fläche A } A = m^2/4 \tan \alpha/2 \tan \beta/2 \tan(180^\circ - \alpha - \beta)/2$$

4) gegeben: Summe  $m = a + b, c, \gamma$

$$\text{Seite a } a = m/2 + 1/2 \sqrt{(m^2 - (m^2 - c^2)/\cos^2(\gamma/2))}$$

$$\text{Seite b } b = m/2 - 1/2 \sqrt{(m^2 - (m^2 - c^2)/\cos^2(\gamma/2))}$$

Fläche A  $A = (m^2 - c^2)/4 \tan \gamma/2$

5) gegeben: Differenz  $m = a - b$ ,  $c$ ,  $\gamma$   
 Seite a  $a = m/2 + 1/2 \sqrt{(m^2 + (m^2 - c^2)/\sin^2(\gamma/2))}$   
 Seite b  $b = m/2 - 1/2 \sqrt{(m^2 + (m^2 - c^2)/\sin^2(\gamma/2))}$   
 Fläche A  $A = (c^2 - m^2)/4 \cot \gamma/2$

6) gegeben: Differenz  $m = a - b$ ,  $c$ ,  $\alpha$   
 Seite a  $a = (c^2 + m^2 + 2cm \cos \alpha) / (2 (m + c \cos \alpha))$   
 Seite b  $b = (c^2 - m^2) / (2 (m + c \cos \alpha))$   
 Fläche A  $A = c (m^2 + c^2) \sin \alpha / (4 (m + c \cos \alpha))$

7) gegeben: Summe  $m = a + b$ ,  $c$ ,  $\alpha$   
 Seite a  $a = (c^2 + m^2 - 2cm \cos \alpha) / (2 (m - c \cos \alpha))$   
 Seite b  $b = (-c^2 + m^2) / (2 (m - c \cos \alpha))$   
 Fläche A  $A = c (m^2 - c^2) \sin \alpha / (4 (m - c \cos \alpha))$

8) gegeben: Differenz  $m = a - b$ ,  $c$ ,  $\beta$   
 Seite a  $a = (c^2 - m^2) / (2 (c \cos \beta - m))$   
 Seite b  $b = (c^2 + m^2 - 2cm \cos \beta) / (2 (c \cos \beta - m))$   
 Fläche A  $A = c (c^2 - m^2) \sin \beta / (4 (c \cos \beta - m))$

9) gegeben: Summen  $m = a + b$ ,  $n = a + c$ ,  $\alpha$   
 Seite a  $a = (m+n)(1 - \cos \alpha) / (1 - 2 \cos \alpha) + \sqrt{((m-n)^2 \cos^2 \alpha + 2mn(1 - \cos \alpha)) / (1 - 2 \cos \alpha)^2}$   
 Seite b  $b = m - ((m+n)(1 - \cos \alpha) - \sqrt{((m-n)^2 \cos^2 \alpha + 2mn(1 - \cos \alpha))}) / (1 - 2 \cos \alpha)$   
 Seite c  $c = n - ((m+n)(1 - \cos \alpha) - \sqrt{((m-n)^2 \cos^2 \alpha + 2mn(1 - \cos \alpha))}) / (1 - 2 \cos \alpha)$

### Differenziale am Dreieck

Wenn in einem ebenen Dreieck zwei Seiten oder Winkel als unveränderlich angesehen werden können, so wird eine sehr kleine Veränderung des dritten Teils auf die anderen Größen eine Auswirkung besitzen. Für diese gilt:

- eine Seite  $a$  und ein anliegender Winkel  $\beta$  sind konstant  
 $\partial c = \partial b / \cos \alpha = \partial b \sec \alpha = \partial \alpha b \csc \alpha = \partial \gamma b \csc \alpha$   
 $\partial b = \partial c \cos \alpha = \partial \alpha b \cot \alpha = \partial \alpha b \cot \alpha$   
 $\partial \alpha = \partial b / b \tan \alpha = \partial c / b \sin \alpha = -\partial \gamma$   
 $\partial \gamma = \partial b / b \tan \alpha = \partial c / b \sin \alpha = -\partial \alpha$
- eine Seite  $a$  und der gegenüberliegende Winkel  $\alpha$  sind konstant  
 $\partial b = \partial c \cos \beta \sec \gamma = \partial \beta b \cot \beta = \partial \gamma b \cot \beta$   
 $\partial c = \partial b \cos \gamma \sec \beta = \partial \beta c \cot \gamma = \partial \gamma c \cot \gamma$   
 $\partial \beta = \partial b b \cot \beta = \partial c c \cot \gamma = -\partial \gamma$   
 $\partial \gamma = \partial b b \cot \beta = \partial c c \cot \gamma = -\partial \beta$
- zwei Seiten  $a$  und  $b$  sind konstant  
 $\partial c = \partial \alpha c / \cot \beta = \partial \beta c \tan \alpha = \partial \gamma / (a \sin \beta)$   
 $\partial \alpha = \partial c / c \cot \beta = \partial \beta \tan \alpha \cot \beta = \partial \gamma a/c \cos \beta$   
 $\partial \beta = \partial c / c \cot \alpha = \partial \alpha \tan \beta / \tan \alpha = \partial \gamma b/c \cos \alpha$   
 $\partial \gamma = \partial c / (b \sin \alpha) = \partial \alpha c / (a \cos \beta) = \partial \beta c / (b \cos \alpha)$

### Kubische Dreiecksgleichung

Die Seitenlängen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  eines Dreiecks können als Lösungen der kubischen Gleichung

$$z^3 + 2 A/\rho z^2 + (A^2/\rho^2 + 4 R \rho + \rho^2) z - 4 A R = 0$$

beschrieben werden. Dabei sind  $A$  der Flächeninhalt,  $R$  der Umkreisradius und  $\rho$  der Inkreisradius. Mit den Hilfsvariablen

$$q = (A^4 (8R + \rho) + 2A^2 \rho^3 (142R^2 + 26R \rho + \rho^2) + \rho^6 (64R^3 + 48R^2 \rho + 12R \rho^2 + \rho^3))$$

$$p = \arctan(\sqrt{3} A (a^2 - 3\rho^3 (4R + \rho))^{3/2} (A^2 + 9\rho^3 (10R + \rho)) \sqrt{(-q \rho^3 / (A^2 - 12R \rho^3 - 3\rho^4))^3}) / (9 q \rho^3)$$

ergeben sich als Lösungen

$$z_1 = (2 \sqrt{(A^2 - 3\rho^3 (4R + \rho))} \sin(p/3) - 2A) / (3\rho)$$

$$z_2 = (\sqrt{3} \sqrt{(A^2 - 3\rho^3 (4R + \rho))} \cos(p/3) - \sqrt{(A^2 - 3\rho^3 (4R + \rho))} \sin(p/3) - 2A) / (3\rho)$$

$$z_3 = (-\sqrt{3} \sqrt{(A^2 - 3\rho^3 (4R + \rho))} \cos(p/3) - \sqrt{(A^2 - 3\rho^3 (4R + \rho))} \sin(p/3) - 2A) / (3\rho)$$

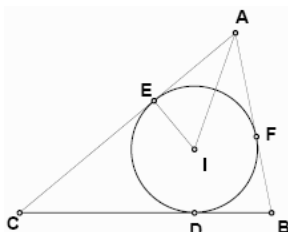
Satz: Sind  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die Seiten eines Dreiecks  $\Delta ABC$ , so sind  $a$ ,  $b$ , und  $c$  die Lösungen der kubischen Gleichung

$$x^3 - 2p x^2 + (p^2 + r^2 + 4rR) x - 4prR = 0$$

wobei  $p = 1/2 (a + b + c)$  der halbe Dreiecksumfang,  $r$  der Inkreisradius und  $R$  der Umkreisradius sind.

Nachweis:

Mit  $EA = FA$ ,  $EC = DC$ ,  $DB = FB$  wird  $EA = p - CD - DB = p - a = r \cot \alpha/2$





Ebenso ist  $BC = a = 2R \sin \alpha = 4R \sin \alpha/2 \cos \alpha/2$

und weiterhin  $\sin^2 \alpha/2 = ra / (4 R (p-a))$

$$\cos^2 \alpha/2 = a (p-a) / (4 rR)$$

Aufsummierung der letzten Terme ergibt über den trigonometrischen Pythagoras

$$ra / (4R (p-a)) + a (p-a) / (4rR) = 1$$

und so  $a^3 - 2p a^2 + (p^2 + r^2 + 4rR) a - 4p rR = 0$

Analog folgt dies für die Seiten b und c.

Mit der Heronschen Dreiecksformel  $A = r p$  folgt als kubische Gleichung

$$x^3 - 2 A/\rho x^2 + (A^2/\rho^2 + 4 R \rho + \rho^2) x - 4 A R = 0$$

Sind a, b, c die Seiten eines Dreiecks, so sind a, b und c die Lösungen der kubischen Gleichung

$$x^3 - 2 A/\rho x^2 + (A^2/\rho^2 + 4 R \rho + \rho^2) x - 4 A R = 0$$

Weiterhin gilt:

a) Die Höhen  $h_a, h_b, h_c$  des Dreiecks sind die Lösungen der Gleichung

$$2R x^3 - (p^2 + r^2 + 4rR) x^2 + 4p^2 r x - 4p^2 r^2 = 0.$$

b) Die Strecken  $p - a, p - b, p - c$  sind die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - p x^2 + (r^2 + 4rR) x - p r^2 = 0.$$

c) Die Ankreisradien  $r_a, r_b, r_c$  sind die Lösungen der Gleichung

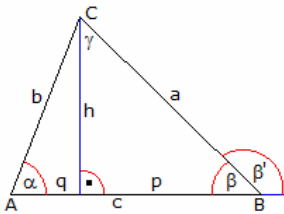
$$x^3 - (4R + r) x^2 + p^2 x - p^2 r = 0.$$

d) Die Sinuswerte  $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$  ergeben sich als die Wurzeln von

$$4R^2 x^3 - 2pR x^2 + (p^2 + r^2 + 4rR) x - pr = 0.$$

e) sowie die Kosinuswerte  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  von

$$4R^2 x^3 - 4R (r + R) x^2 + (p^2 + r^2 - 4R^2) x - (p^2 - (2R + r)^2) = 0$$



### Mollweidesche Formeln

In einem beliebigen Dreieck gelten die nach Carl Brandon Mollweide benannten

$$\text{Formeln: } (a + b) / c = \cos [(\alpha - \beta)/2] / \sin \gamma/2$$

$$(a - b) / c = \sin [(\alpha - \beta)/2] / \cos \gamma/2$$

und durch zyklisches Vertauschen analoge Formeln für andere Seitenbeziehungen.

Beweis: Nach dem Sinussatz

$$a / c = \sin \alpha / \sin \gamma \text{ und } b / c = \sin \beta / \sin \gamma$$

wird  $(a+b) / c = (\sin \alpha + \sin \beta) / \sin \gamma$

$$= (\sin \alpha + \sin \beta) / (2 \sin \gamma/2 \cos \gamma/2) = \sin (\alpha+\beta)/2 \sin (\alpha-\beta)/2 / (2 \sin \gamma/2 \cos \gamma/2)$$

$$= \cos ((\alpha-\beta)/2) / \sin \gamma/2$$

Die anderen Formeln ergeben sich durch zyklisches Vertauschen der Seiten und Winkel und analoge Schlussweisen.

Nach Division der entsprechenden Gleichungen und unter Benutzung von

$$\cos \gamma/2 = \sin ((\alpha+\beta)/2)$$

erhält man die Neperschen Gleichungen

$$(a-b) / (a+b) = \tan ((\alpha-\beta)/2) / \tan ((\alpha+\beta)/2) \quad (b-c) / (b+c) = \tan ((\beta-\gamma)/2) / \tan ((\beta+\gamma)/2)$$

$$(c-a) / (c+a) = \tan ((\gamma-\alpha)/2) / \tan ((\gamma+\alpha)/2)$$

### Platonische Dreiecke

In "Timaios" (53b-53c) versucht Platon die als Oberfläche der regelmäßigen Polyeder auftretenden regulären Vielecke durch besondere Dreiecke, die Platonischen Dreiecke, zu erklären:

"Alle Dreiecke aber gehen auf zwei zurück, von denen jedes einen rechten Winkel und zwei spitze Winkel hat: Das eine, in welchem zwei Seiten gleich sind ... und das andere mit zwei ungleichen Seiten ..."

Platon wählt dazu das rechtwinklige Dreieck mit den Winkeln 30°, 60°, 90° und den Seiten 1,  $\sqrt{3}$  und 2. Das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck hat die Katheten 1.

Mit beiden Dreiecken gelingt es tatsächlich, das gleichseitige Dreieck und das gleichseitige Viereck (Quadrat) zusammenzusetzen.

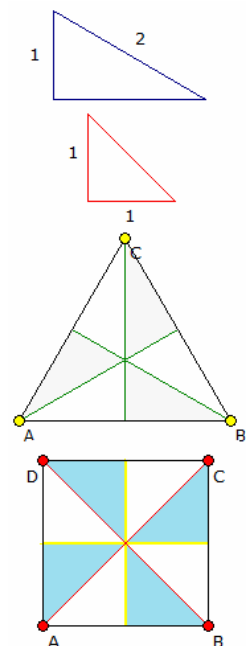
Für das regelmäßige Fünfeck gelingt zwar eine Zerlegung in 30 Dreiecke. Jedoch ist dazu zusätzlich eine dritte Dreiecksart notwendig.

### Gleichschenkliges Dreieck (a=b)

Zwei Seiten des Dreiecks haben die gleiche Länge.

Basiswinkelsatz: Das Dreieck hat zwei gleichgroße Basiswinkel  $\alpha$ .

Die Achse (Symmetrielinie) halbiert die Basis, halbiert den Winkel an der Spitze  $\gamma$  und steht senkrecht auf der Basis.

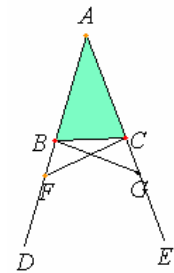


Flächeninhalt	$A = a^2/2 * \sin \gamma = c^2/4 * \tan \alpha$	
	$A = c/4 \sqrt{4a^2 - c^2} = h \sqrt{a^2 - h^2}$	
Grundlinie c	$c = \sqrt{2} \sqrt{a^2 + \sqrt{a^4 - 4A^2}}$	
	$c = 2 \sqrt{a^2 - h^2} = 2a \cos \alpha = 2a \sin \gamma/2$	
Schenkel a	$a = 1/(2c) \sqrt{16A^2 + c^4}$	
	$a = 1/h \sqrt{A^2 + h^4} = c/(2 \sin \gamma/2) = c/(2 \cos \alpha)$	
Winkel $\alpha$	$\cos \alpha = c/(2a)$	
Winkel $\gamma$	$\sin \gamma/2 = c/(2a)$	
Höhen	$h = w_\gamma = s_c = 1/2 * \sqrt{4a^2 - c^2}$	$h_a = h_b = 2 A/a = c/a * h$
Seitenhalbierende	$s_a = s_b = \sqrt{a^2/4 + a^2 - a c \cos \alpha}$	
Mittelsenkrechte	$m_c = \sqrt{a^2 - c^2/4}$	
Inkreisradius	$\rho = c / (4 h) (2 a - c)$	
Umkreisradius	$R = a^2 / (2 h)$	
Der Basiswinkelsatz wurde zuerst von Thales von Milet gefunden und bewiesen.		

### Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks

Euklids "Elemente": § 5 (L. 2):

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich; auch müssen die bei Verlängerung der gleichen Strecken unter der Grundlinie entstehenden Winkel einander gleich sein.



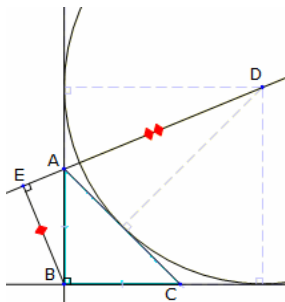
ABC sein ein gleichschenkliges Dreieck (I, Def. 20) mit den Seiten  $AB = AC$ , auch seien  $AB, AC$  um die geraden Linien  $BD, CE$  verlängert. Ich behaupte, dass  $\angle ABC = \angle ACB$  und  $\angle CBD = \angle BCE$ .

Man wähle nämlich auf  $BD$  Punkt  $F$  beliebig, trage auf  $AE$ , der längeren Strecke,  $AG = AF$ , der kürzeren ab (I, 3) und ziehe die Strecken  $FC, GB$ .

Da  $AF = AG$  und  $AB = AC$ , so sind zwei Seiten, nämlich  $FA, AC$  zwei Seiten, nämlich  $GA, AB$  entsprechend gleich, und sie umfassen einen gemeinsamen Winkel, nämlich  $\angle FAG$ ; also ist Grdl.  $FC =$  Grdl.  $GB$ ,  $\triangle AFC = \triangle AGB$ , und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, immer die denen gleiche Seiten gegenüberliegen,  $\angle ACF = \angle ABG$  und  $\angle AFC = \angle AGB$  (I, 4).

Und da die ganzen Strecken  $AF = AG$ , sowie von ihnen Teile  $AB = AC$ , so sind die Reste  $BF = CG$  (Ax. 3). Wie oben bewiesen, ist aber auch  $FC = GB$ ; mithin sind zwei Seiten,  $BF, FC$ , zwei Seiten,  $CG, GB$  entsprechend gleich; auch ist  $\angle BFC = \angle CGB$  und die Grundlinie  $BC$  ihnen gemeinsam; also muss auch  $\triangle BFC = \triangle CGB$  sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen, also  $\angle FBC = \angle GCB$  und  $\angle BCF = \angle CBG$  (I, 4). Da nun, wie oben bewiesen, die ganzen Winkel  $\angle ABG = \angle ACF$  und von ihnen die Teile  $\angle CBG = \angle BCF$ , so sind die Restwinkel  $\angle ABC = \angle ACB$ ; diese liegen an der Grundlinie des Dreiecks  $ABC$ . Wie oben bewiesen, ist ferner  $\angle FBC = \angle GCB$ ; und diese liegen unter der Grundlinie - S.

Nach heutigem Sprachgebrauch werden die Winkel an der Grundlinie Basiswinkel genannt.



In einem gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$  ( $AB = BC$ ) sind  $\beta$  der rechte Winkel.  $D$  sei der Außenkreismittelpunkt und die Strecke  $BE$  senkrecht zu  $AD$ . Dann gilt

$$AD = 2 BE$$

Nachweis: Die Dreiecksseite  $AB = BC$  sei  $a$ . Dann gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks

$$A_{ABC} = a^2/2 \text{ und } AC = \sqrt{2} a$$

Mit dem Außenradius  $= (a^2/2) / (2a - \sqrt{2} a) = a / (2 - \sqrt{2})$  wird

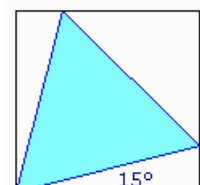
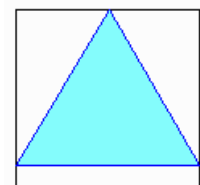
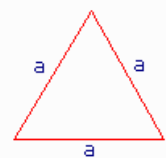
$$AD = \sqrt{(a/(2-\sqrt{2}))^2 + (a/\sqrt{2})^2} = a \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$BE = a \cos \angle ABE$$

Für die Strecke  $BE$  wird und mit  $\angle ABE = 22,5^\circ = \pi/8$  und  $\cos \pi/8 = 1/2 \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

$$2 BE = 2 a \cdot 1/2 \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

d.h.  $AD = 2 BE$



### Gleichseitiges Dreieck

Im gleichseitigen Dreieck haben alle Seiten des Dreiecks die gleiche Länge  $a$ . Alle Innenwinkel sind gleich  $60^\circ$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ .

Das Dreieck hat 3 Symmetrieachsen. Das gleichseitige Dreieck ist zentrisch symmetrisch, da sich die drei Symmetrieachsen in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt, schneiden.

Jede Symmetrieachse teilt das Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.

Im gleichseitigen Dreieck fallen die Höhen, die Winkelhalbierenden, die Seitenhalbierenden und die Mittelsenkrechten zusammen. Sie schneiden sich im Mittelpunkt  $M$  des Dreiecks. Die Mittellinien liegen parallel zu einer Seite und sind halb so groß wie sie.

Höhe des Dreiecks  $h = a/2 \cdot \sqrt{3}$   
 Dreieckflächeninhalt  $A = a^2/4 \cdot \sqrt{3} = 1/2 a h$   
 In- und Umkreisradius  $\rho = a/6 \cdot \sqrt{3}$ ;  $R = a/3 \cdot \sqrt{3}$   
 Fläche des In- bzw. Umkreises  $A_r = \pi/12 a^2$ ;  $A_R = \pi/3 a^2$

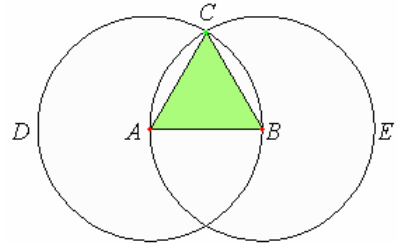
Das kleinste gleichseitige Dreieck, welches man in ein Quadrat mit einer Kantenlänge 1 einschreiben kann, hat die Werte  $a = 1$  und  $A = \sqrt{3} / 4 \approx 0.4330$

Das größte derartige Dreieck ist um  $15^\circ$  zur Grundseite des Quadrates geneigt:  
 $s = \sqrt{6} - \sqrt{2}$  und  $A = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0.4641$

### Konstruktion gleichseitiges Dreieck

Euklids "Elemente": § 1 (A. 1):

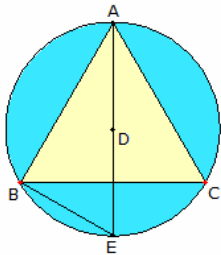
Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.



Die gegebene Strecke sei AB. Man soll über der Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck errichten.

Mit A als Mittelpunkt und AB als Abstand zeichne man den Kreis BCD (Postulat 3), ebenso mit B als Mittelpunkt und BA als Abstand den Kreis ACE; ferner ziehe man von Punkte C, in dem die Kreise einander schneiden, nach den Punkten A, B die Strecken CA, CB (Postulat 1).

Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises CDB ist, ist  $AC = AB$  (I, Definition 15); ebenso ist, da Punkt B Mittelpunkt des Kreises CAE ist,  $BC = BA$ . Wie oben bewiesen, ist auch  $CA = AB$ ; als sind CA und CB beide = AB. Was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich (Axiom 1); also ist auch  $CA = CB$ ; also sind CA, AB, BC alle drei einander gleich. Also ist das Dreieck ABC gleichseitig (I, Definition 20); und es ist über der gegebenen Strecke AB errichtet - dies hatte man ausführen sollen.



### Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks

Euklids "Elemente": Buch XIII § 12 (L. 12):

Beschreibt man einem Kreis ein gleichseitiges Dreieck ein, so wird quadriert die Dreiecksseite dreimal so groß wie der Radius des Kreises.

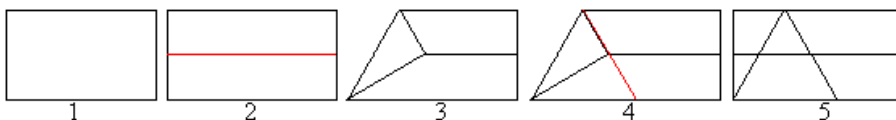
Man habe den Kreis ABC, ihm sei das gleichseitige Dreieck ABC einbeschrieben. Ich behaupte, dass quadriert eine Seite des  $\Delta ABC$  dreimal so groß wird wie der Radius des Kreises ABC.

Man verschaffe sich den Mittelpunkt D des Kreises ABC, ziehe AD, verlängere es nach E und ziehe BE.

Da  $\Delta ABC$  gleichseitig ist, ist Bogen BEC ein Drittel des Umfanges des Kreises ABC, Bogen BE also ein Sechstel des Kreisumfanges. Strecke BE gehört also zum Sechseck, ist also dem Radius DE gleich. Da  $AE = 2 DE$ , ist  $AE^2 = 4 ED^2$ , d.h.  $= 4 BE^2$ .

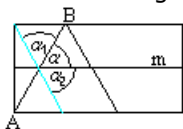
Nun ist  $AE^2 = AB^2 + BE^2$  (III, 31; I, 47), also  $AB^2 + BE^2 = 4 BE^2$ ; also, getrennt,  $AB^2 = 3 BE^2$ . Aber  $BE = DE$ ; also  $AB^2 = 3 DE^2$ . Also wird quadriert die Dreiecksseite dreimal so groß wie der Radius - q.e.d.

Dieser Satz von Euklid liefert somit die Umkreisformel für das gleichseitige Dreieck  $R = a/3 \cdot \sqrt{3}$



Ein gleichseitiges Dreieck kann man auch durch Falten erzeugen.

1. Gegeben ist ein Streifen Papier.
2. Man halbiert den Streifen.
3. Man legt die obere linke Ecke auf die Mittellinie und sorgt gleichzeitig dafür, dass die Faltlinie durch die untere linke Ecke geht.
4. Man faltet weiter an der roten Linie und macht die beiden Faltungen wieder rückgängig.
5. Es ist ein gleichseitiges Dreieck entstanden.



Beweis: Gibt man den Winkel  $\alpha$  vor, so ist  $\alpha_1 = \alpha$  wegen des Faltens an der Geraden AB und  $\alpha_2 = \alpha$  wegen des Faltens an der Mittellinie m. Zusammen bilden die drei Winkel einen gestreckten Winkel von  $180^\circ$ . Also bleibt für jeden Winkel  $60^\circ$ .

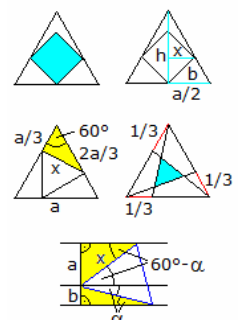
Übrigens kann man nach dieser Methode einen Streifen aus gleichseitigen Dreiecken falten.

### Quadrat und Dreieck

Man kann in ein gleichseitiges Dreieck ein auf der Spitze stehendes Quadrat legen, so dass es die Seiten berührt. Es sei a die Seite des Dreiecks und b die Seite des Quadrates.

Dann gilt:  $b = (1/4) [3\sqrt{2} - \sqrt{6}] a$  (ungefähr  $0,49 \cdot a$ ).

Diese Formel leitet man mit Hilfe des Strahlensatzes (blau) und den Beziehungen  $h = 1/2 \sqrt{3} a$  und  $b = \sqrt{2} x$  her.



### Dreieck im Dreieck

Sucht man Punkte, die die Seiten im Verhältnis 1:2 teilen, und verbindet sie, erhält man ein kleineres gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge  $x = \sqrt{3}/3 a$ . Man berechnet die Dreiecksseite  $x$  im gelben Dreieck nach dem Kosinussatz. In der Zeichnung ist  $k=1/3$ . Und allgemein wird die Dreiecksseite zu  $x = \sqrt{(3*k^2 - 3*k + 1) a}$ .

Verbindet man die Punkte, die die Seiten im Verhältnis 1:2 teilen, mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, entsteht in der Mitte ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge  $x = \sqrt{7}/7 a$ . Allgemein gilt  $x = (1-2k) / \sqrt{(1-k^2)}$ , wenn  $k=1/3$  durch  $k$  ersetzt wird.

### Dreieck auf drei Parallelen

Sind drei Parallelen mit den Abständen  $a$ ,  $b$  und  $a+b$  gegeben, so ist es leicht, ein Dreieck zu finden, dessen Eckpunkte auf den Parallelen liegt. Es ist gar nicht so einfach, ein oder besser das gleichseitige Dreieck zu finden.

Beweis:  $x$  sei die Seitenlänge des gesuchten Dreiecks. Man kann zweimal die Sinusformel anwenden und erhält zwei Gleichungen in  $x$  und  $\alpha$ . Löst man sie auf, erhält man  $\tan \alpha = \sqrt{a} / (a+2*b)$  und  $x = \frac{2}{3} \sqrt{3} \sqrt{(a^2+ab+b^2)}$ .

Mit Hilfe des Sinussatzes erhält man zwei Gleichungen für  $x$  und  $\alpha$ . Löst man sie auf, ergibt sich  $\tan \alpha = \sqrt{a} / (a+2*b)$  und  $x = \frac{2}{3} \sqrt{3} \sqrt{(a^2+ab+b^2)}$

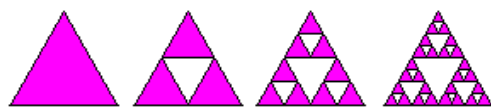
### Koch-Kurve (Schneeflockenkurve)

Ausgangsfigur für die Koch-Kurve ist ein gleichseitiges Dreieck der Seite  $a$  (1.Figur). Teilt man die Seiten des Dreiecks in drei gleiche Teile und setzt auf die mittlere Strecke ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite  $a/3$ , so entsteht Figur 2. Man wiederholt diese Regel: Man teilt jede der 12 Strecken mit der Länge  $a/3$  in drei gleiche Teile und setzt in die Mitte wieder ein Dreieck, dieses Mal mit der Länge  $a/9$ , so entsteht Figur 3. Figur 4 entsteht durch den nächsten Schritt. Man muss sich vorstellen, dass die Regel beliebig oft wiederholt wird.



$$U \quad \frac{4}{3}U \quad \frac{16}{9}U \quad \frac{64}{27}U \quad U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n U \rightarrow \infty$$

$$A \quad \frac{4}{3}A \quad \frac{40}{27}A \quad \frac{376}{243}A \quad A_n = \left[\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right] A \rightarrow \frac{8}{5}A$$



$$U \quad \frac{3}{2}U \quad \frac{9}{4}U \quad \frac{27}{8}U \quad U_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n U \rightarrow \infty$$

$$A \quad \frac{3}{4}A \quad \frac{9}{16}A \quad \frac{27}{64}A \quad A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A \rightarrow 0$$

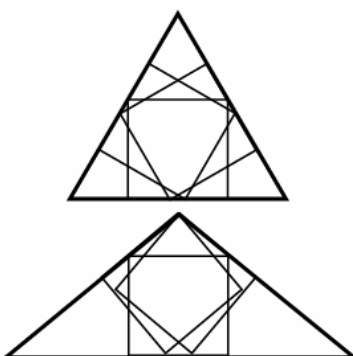
Begleitet man die Bilder mit Rechnungen, so gelangt man zu zwei merkwürdigen Aussagen: Der Umfang  $U(n)$  wächst über alle Grenzen, der Flächeninhalt  $A(n)$  nähert sich der Zahl  $8/5A$ .

### Sierpinski-Dreieck

Ausgangspunkt für das Sierpinski-Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck (Figur 1). Man schneidet das

Mittendreieck aus (Figur 2). Es bleiben drei (rote) Dreiecke zurück. Aus ihnen schneidet man wiederum die Mittendreiecke heraus. Es entsteht Figur 3. In Figur 4 werden nochmals die Mittendreiecke herausgenommen. Diese Prozedur wiederholt man beliebig oft, so dass das Ausgangsdreieck immer mehr durchlöchert wird.

Die Rechnung führt erneut zu merkwürdigen Aussagen: Der Umfang der Dreiecke wächst über alle Grenzen, der Flächeninhalt geht gegen 0.



### Calabi-Dreieck

In ein gleichseitiges Dreieck können drei gleich große Quadrate mit maximalem Flächeninhalt eingefügt werden (obere Abbildung).

Völlig überraschend war aber, dass Eugenio Calabi ein weiteres gleichschenkliges Dreieck entdeckte, in das ebenso drei gleiche Quadrate mit maximaler Fläche eingepasst werden können, das Calabi-Dreieck.

In diesem Dreieck ist das Verhältnis zwischen der Basis und einem Schenkel

$$x = 1,55138 \ 75245 \ 48320 \ 39226 \ 19525 \ 10264 \ 62381 \ 51635 \ 91703$$

$$80388 \ 71995 \ 28007 \ 12011 \ 79267 \ 42554 \ 25695 \ 72957 \ 60453 \ 61202$$

$$54362 \ 9 \dots$$

Die reelle Zahl  $x$  ist dabei die größte positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$2x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$$

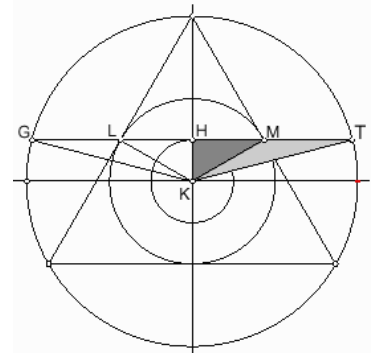
$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{22} \cos\left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{23}{711} \sqrt{237}\right) + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{(-23 + 3i\sqrt{237}) / 2} + \frac{11}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{2(-23 + 3i\sqrt{237})}}$$

$x$  hat die Kettenbruchentwicklung  $x = [1, 1, 1, 4, 2, 1, 2, 1, 5, 2, 1, 3, 1, 1, 390, \dots]$

**Odomscher Schnitt**

Die nicht sehr bekannte Tatsache, dass die Mittelparallele eines gleichseitigen Dreiecks von den Dreiecksseiten und dem Umkreis im Goldenen Schnitt geschnitten wird, eröffnet gute Möglichkeiten, das regelmäßige Fünfeck mit dem „rostigen Zirkel“, d.h. mit Kreisen des gleichen Radius und Lineal zu konstruieren.

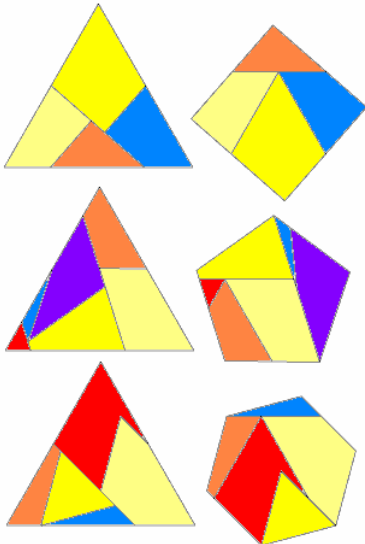


Der Goldene Schnitt im gleichseitigen Dreieck wurde vermutlich um 1980 von George Odom entdeckt und von Albrecht Beutelspacher zum ersten Mal in der deutschen Literatur beschrieben.

Beutelspacher bringt an gleicher Stelle auch einen Beweis für die Konstruktion von Odom. Coxeter pflegte zum Künstler George Odom freundschaftliche Beziehungen. Bei Coxeter kann man vermuten, dass ihm diese Art der Goldenen Schnitts ebenfalls bekannt war. Beutelspacher macht die bemerkenswerte Aussage: „es ist erstaunlich, dass diese wunderschöne Konstruktion nicht 2000 Jahre früher gefunden wurde“.

In der Darstellung sei  $KG = 1$  und  $KL = 1/2$   
dann wird  $KH = HL = 1/4 \sqrt{3}$  und  $HG = 1/4 \sqrt{15}$   
und somit  $ML : MG = \phi$

Aus der Abbildung kann man auch ableiten, dass drei konzentrische Kreise, von denen jeder den doppelten Radius des nächst kleineren hat, eine Konstruktion des Goldenen Schnitts nach George Odom ermöglichen, denn jede beliebige Tangente am innersten Kreis bildet eine Sekante am mittleren und am äusseren Kreis. Die Sekante am mittleren Kreis steht zum Sekantenabschnitt am äusseren Kreis im Goldenen Schnitt. Diese Tatsache ermöglicht die Konstruktion des regulären Fünfecks mit dem „rostigen Zirkel“.



**Zerlegung eines Dreiecks**

Durch die Mathematiker Herny Ernest Dudeney (1902) und C. W. McElroy (1902) wurden viele Zerlegungen eines gleichseitigen Dreiecks entdeckt, die dazu genutzt werden können, andere regelmäßige N-Ecke zu erzeugen.

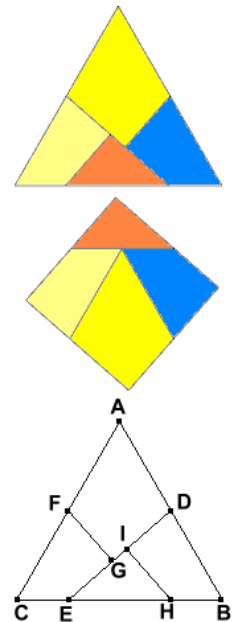
In der Abbildung sind die Zerlegungen zu sehen, die durch Umlegen der einzelnen Stücke ein Quadrat sowie regelmäßiges Fünfeck und Sechseck erzeugen.

Abbildung: Umwandlung Quadrat in Dreieck

**Zerlegung eines Dreiecks (2)**

Aufgabe von H.E. Dudeney (1857-1930), 1902

Ein gleichseitiges Dreieck soll so in vier Teile zerlegt werden, dass aus diesen Teilen ein Quadrat zusammengesetzt werden kann.



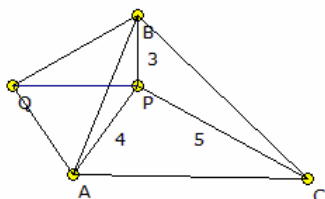
Konstruktion der Zerlegung (untere Abbildung):

- 1) D sei der Mittelpunkt der Dreiecksseite AB.
- 2) Der Punkt E wird zwischen C und B so gewählt, dass EC ein Viertel von BC ist. E wird mit D verbunden

Anmerkung: exakter wäre ein Abstand von  $0,2455 BC$

- 3) F wird als Mittelpunkt von AC konstruiert
- 4) zu Strecke ED wird die Senkrechte FG gezeichnet
- 5) H wird mit einem Abstand von  $3/4 BC$  von C aus gewählt; genauerer Wert  $0,7455$
- 6) abschließend wird zu ED die Senkrechte HI gezeichnet

Ist d die Seitenlänge des Dreiecks und q die Seitenlänge des Quadrates gleicher Fläche, so gilt  
Dreiecksfläche  $A = 1/4 \sqrt{3} d^2$   $q^2 = 1/4 \sqrt{3} d^2$ , d.h.  $q = 1/2 \sqrt[4]{3} d = 0,658... d$



**3-4-5-Punkt im Dreieck**

Aufgabe: Gegeben ist ein Punkt P, der 3-4-5-Punkt, der in einem gleichseitigen Dreieck ABC liegt und der von den Eckpunkten die Entfernungen 3, 4 und 5 hat. Wie groß ist die Seitenlänge des Dreiecks?

Lösung: Auf die Seite AB wird ein Dreieck  $\Delta ABQ$  mit den Seiten 4 und 5 wie in der Darstellung gezeichnet.

Dann sind die Seiten  $AQ = 4$  und  $BQ = 5$ .

Der Winkel  $\angle CAB$  ist  $60^\circ$  (gleichseitiges Dreieck), und da  $\Delta ABQ$  und  $\Delta ACP$  kongruent sind, ist auch Winkel der Winkel  $\angle PAQ = 60^\circ$ .

Somit ist  $\triangle PAQ$  gleichschenkelig und sogar gleichseitig (Basiswinkel und Winkel an der Spitze  $60^\circ$ ), d.h.  $PQ = 4$ .

Das Dreieck  $BPQ$  ist damit auch rechtwinklig, da die Seiten 3, 4 und 5 sind. Für den Winkel gilt dann  $\angle APB = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ .

Mit dem Kosinussatz wird

$$AB^2 = BP^2 + AP^2 - 2 \cdot BP \cdot AP \cdot \cos 150^\circ$$

$$AB^2 = 16 + 9 - 12 \cos 150^\circ$$

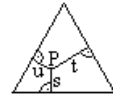
$$AB = \sqrt{(25 + 12\sqrt{3})}$$



### Satz von Viviani

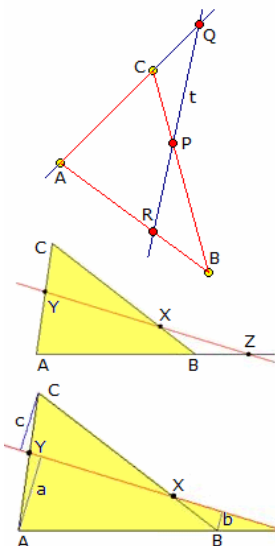
In jedem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines innerhalb des Dreiecks befindlichen Punktes von den Seiten konstant.

Dieser Satz gilt auch für den Mittelpunkt des Dreiecks, also für  $P=M$ . In diesem Falle sind die Abstände gleich den Radien  $r$  des Inkreises. Also heißt der Satz von Viviani in der Formelsprache:  $s + t + u = 3 \cdot r$ . Es gilt auch  $3 \cdot r = h$ .



Der Beweis ergibt sich, wenn man den Punkt  $P$  mit den Eckpunkten des Dreiecks verbindet und eine Flächenbilanz zieht. Außerdem gilt am gleichseitigen Dreieck: Zeichnet man von einem Punkt im Dreieck aus die Lote auf die Seiten und die Verbindungslinien zu den Eckpunkten, so entstehen sechs Dreiecke. Die Summe der Flächeninhalte dreier voneinander getrennter Dreiecke ist gleich.

Der Satz ist auch auf Punkte außerhalb des Dreiecks anwendbar, die Abstände, die auf der Außenseite ihrer Seite liegen, sind dann negativ zu nehmen. Der Satz lässt sich ohne Weiteres auf die 3. Dimension übertragen, also auf die Abstände eines Punktes von den Flächen eines regelmäßigen Tetraeders, wobei man zum Beweis die Volumina von 4 Tetraedern mit gleichen Grundflächen, aber nicht unbedingt gleichen Höhen benötigt.



### Satz von Menelaos

nach Menelaos von Alexandria, etwa 100 u.Z.

Schneidet eine beliebige Dreieckstransversale die Geraden durch die Ecken eines Dreiecks in drei von den Ecken verschiedenen Punkten, so hat das Produkt der Teilverhältnisse, das jeder dieser Punkte mit den auf seiner Geraden liegenden Eckpunkten bildet, den Wert  $-1$ .

$$BP/PC \cdot CQ/QA \cdot AR/RB = -1$$

Betrachtet man Streckenlängen und keine Teilverhältnisse so gilt:

Gegeben seien ein Dreieck  $ABC$  und eine Gerade, welche die Dreiecksseiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  beziehungsweise ihre Verlängerungen in den Punkten  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  schneidet. Dann ist

$$AZ \cdot BX \cdot CY = AY \cdot BZ \cdot CX$$

Umgekehrt kann man aus der Richtigkeit dieser Beziehung folgern, dass die Punkte  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  auf einer Geraden liegen.

Nachweis über Strahlensatz: Man betrachtet drei Lote auf die gegebene Gerade, die von den Ecken  $A$ ,  $B$  und  $C$  ausgehen. Die Längen der Lotstrecken seien  $a$ ,  $b$  und  $c$ . Aus dem Strahlensatz folgen die Gleichungen:

$$AZ : BZ = a : b$$

$$BX : CX = b : c$$

$$CY : AY = c : a$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen miteinander, so wird

$$AZ/BZ \cdot BC/CX \cdot CY/AY = a/b \cdot b/c \cdot c/a = 1$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner folgt der Satz des Menelaos.

### Satz von Ceva

(nach Giovanni Ceva, 1678, "De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio")

Drei Ecktransversalen eines Dreiecks, die einen Punkt gemeinsam haben, der auf keiner der Geraden durch zwei Ecken des Dreiecks liegt, schneiden diese Gerade in Punkten, für die das Produkt der Teilverhältnisse mit den 2 Eckpunkten auf jeder Geraden den Wert  $+1$  hat.

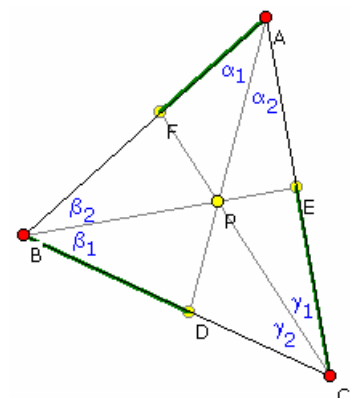
### Satz von Ceva, trigonometrische Form

Für die 3 Endpunkte  $D$ ,  $E$  und  $F$  der Dreieckstransversalen wird dann aus

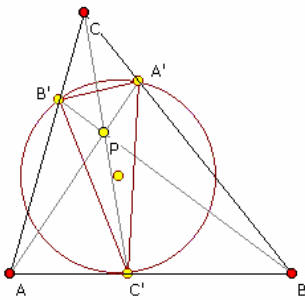
$$AF/FB \cdot BD/DC \cdot CE/EA = 1$$

die trigonometrische Form  $\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1 = \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2$

Nachweis: Der Satz von Menelaos wird auf das Dreieck  $ABD$  und die Gerade  $CF$  und zum zweiten auf das Dreieck  $ACD$  mit der Geraden  $BE$  angewandt. Nach einigen Umformungen ergibt sich der Satz von Ceva.







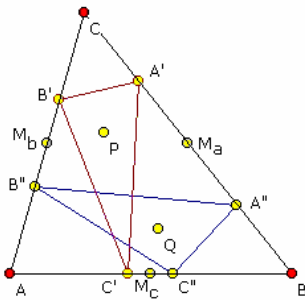
**Umkehrung Satz von Ceva**

Wenn das Produkt der Teilverhältnisse, das die Schnittpunkte der Ecktransversalen eines Dreiecks mit den Gegenseiten auf diesen bilden, den Wert 1 hat, dann schneiden sich die Ecktransversalen in einem Punkt.

**Ceva-Dreieck**

geg.: Dreieck ABC und ein Punkt P innerhalb des Dreiecks  
 Unter dem Ceva-Dreieck versteht man das Dreieck A'B'C', welches aus den Schnittpunkten der Dreieckstransversalen durch P mit den Seiten gebildet wird.

Der Umkreis eines Ceva-Dreiecks heißt Ceva-Kreis.  
 Das Dreieck A''B''C'', welches durch Spiegelung der Eckpunkte eines Ceva-Dreiecks an den Seitenmittelpunkten des Ausgangsdreiecks entsteht, ist selbst Ceva-Dreieck.  
 Schneidet der Ceva-Kreis die Seiten des Ausgangsdreiecks in drei weiteren Punkten, so bilden auch diese ein Ceva-Dreieck.



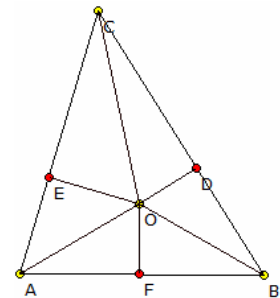
**Satz von Erdős-Mordell**

1935 veröffentlichte Paul Erdős eine Vermutung, die noch im gleichen Jahr von Louis Mordell bewiesen wurde:

Satz von Erdős-Mordell: Von einem Punkt O im Inneren eines Dreiecks Δ ABC werden die Lote OD, OE und OF auf die Seiten gezogen. Dann gilt

$$OA + OB + OC \geq 2 (OD + OE + OF)$$

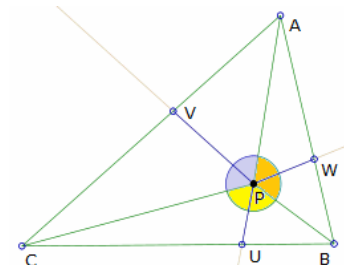
Gleichheit gilt genau dann, wenn Δ ABC gleichseitig ist.



Zum Beweis werden der Satz von Ptolemäus (André Avez), Winkelvergleiche in ähnlichen Dreiecken (Leon Bankoff) oder Trigonometrie (Mordell) benutzt.

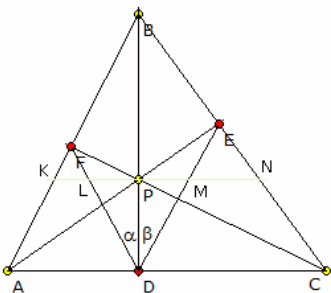
**Barrows Ungleichung**

Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC.  
 P sei ein Punkt im Inneren des Dreiecks. U, V und W sind die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden der Winkel BPC, CPA und APB mit den Dreiecksseiten BC, CA und AB.  
 Dann gilt die Ungleichung von Barrows:  
 $PA + PB + PC \geq 2 (PU + PV + PW)$



**Satz von Blanchet**

Gegeben sei ein Dreiecke ABC. BD sei die Höhe auf AC und P ein Punkt auf BD.  
 Der Schnittpunkt von AP mit BC sei E. CP schneide AB in F. Dann ist BD Winkelhalbierende des Winkels EDF, d.h.  $\alpha = \beta$ .



Nachweis: Durch P wird eine Parallele zu AC gezogen. Die Schnittpunkte mit den Strecken AB, DF, DE, AC seien K, L, M, N.  
 Damit ist  $PL / PK = DC / BC$  ;  $PN / PM = BC / DB$  ;  $PK / PN = DB / DC$   
 Damit wird  $PL / PM = 1$  , d.h.  $PL = PM$

Daraus folgt, dass die Strecke AD den Winkel EDF halbiert, was zu zeigen war.

**Satz von Routh**

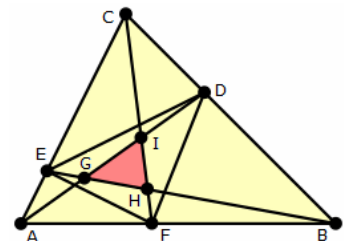
Der Satz von Routh (nach Edward John Routh) ist ein Satz zur Geometrie des Dreiecks. Er trifft eine Aussage über den Flächeninhalt von Dreiecken:

ABC sei ein Dreieck mit Flächeninhalt  $A_{ABC}$ . Ferner seien F, D und E Punkte auf den Seiten AB, BC bzw. AC.  
 Die Teilverhältnisse seien:  $AF / BF = r$  ;  $BD / CD = s$  ;  $CE / AE = t$   
 I, G und H seien die Schnittpunkte von AD und CF, AD und BE bzw. BE und CF. Dann gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks GHI

$$A_{GHI} = (rst-1)^2 / ((st+s+1) (rt+t+1) (rs+r+1)) A_{ABC}$$

Für  $r = s = t = n$  wird  $A_{GHI} = (n-1)^2 / (n^2 + n + 1) A_{ABC}$

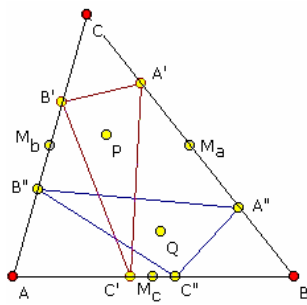
und für  $n = 1, 2, 3, \dots$  für den Anteil an der Fläche des Ausgangsdreiecks  $0, 1/7, 4/13, 3/7, 16/31, 25/43,$



**Isotomische Geraden und Punkte**

geg.: Dreieck ABC und ein Punkt P innerhalb des Dreiecks

Die Transversalen durch einen Punkt P in einem Dreieck schneiden die gegenüberliegenden Seiten in den Punkten A', B' und C'; und bilden damit ein Ceva-Dreieck. Sind die Punkte A'', B'' und C'' die Spiegelpunkte von A', B' und C' an den jeweiligen Seitenmittelpunkten, d.h. zum Beispiel  $AC' = C''B$ , so heißen die Punkte A', A'' (B', B'' bzw. C', C'') zueinander isotomisch konjugierte Punkte.



Die Transversalen AA' und AA'' sind dann isotomische Geraden, exakter zueinander isotomisch konjugierte Geraden. Teilt der Punkt C' die Strecke AB im Verhältnis  $AC'/C'B = x$ , dann teilt der isotomische Punkt C'' die Strecke im Verhältnis  $AC''/C''B = 1/x$ .

Hat der Punkt P die Koordinaten  $x : y : z$ , so hat die isotomisch konjugierte Punkt Q die Koordinaten  $1/x : 1/y : 1/z$ .

### Pol eines Dreiecks, Polgerade eines Dreiecks

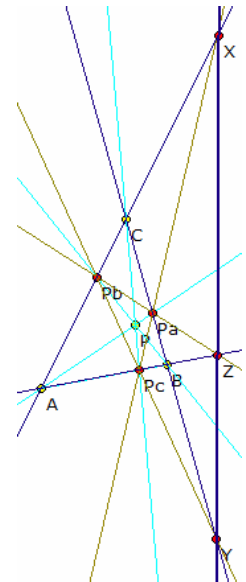
In einem Dreieck ABC seien ein Punkt P und durch diesen die Dreieckstransversalen gegeben. Diese Transversalen schneiden die Dreiecksseiten in den

Punkten Pa, Pb und Pc.

Die Schnittpunkte X, Y und Z (Abbildung) der Seiten des Dreiecks PaPbPc mit den Seiten von ABC sind dann kollinear.

Nachweis:

Die Punkte X, Y, Z sind nach der Konstruktion die vierten harmonischen Punkte von ABPc, BCPa, ABPc. Nach der Konstruktion harmonischer Punkte ergibt sich aber, dass z.B. X der Schnittpunkt von PbPc mit BC ist, und entsprechend für Y und Z. Damit liegen die Dreiecke ABC und PaPbPc perspektivisch bezüglich P. Aus dem Satz von Desargues ergibt sich, dass X, Y und Z kollinear sind.



Die Gerade p durch X, Y und Z heißt dann Polgerade bzw. harmonische Gerade von P im Dreieck ABC. Der Punkt P wird dann Pol oder harmonischer Punkt bezüglich p im Dreieck ABC genannt.

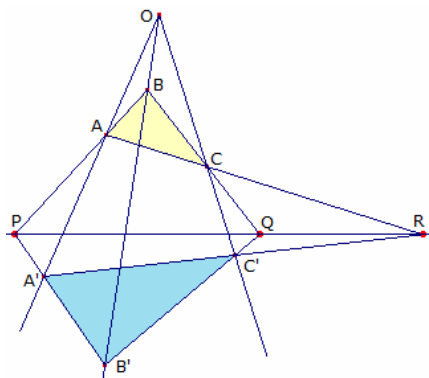
Aus dem obigen Satz folgt für P als Inkreismittelpunkt von ABC: Die

Außenwinkelhalbierenden und die verlängerten Seiten eines Dreiecks schneiden sich in drei kollinearen Punkten.

Ist P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, so wird analog, dass die Seiten des Höhendreiecks mit den Seiten von ABC drei kollineare Schnittpunkte ergeben. Hier schneidet die Polgerade die Euler-Gerade unter einem rechten Winkel.

Wird P der Schwerpunkt von ABC, so ergibt sich als Polgerade p die unendliche Ferngerade.

Außerdem ist die Lemoine-Gerade die Polgerade des Lemoine-Punktes im Dreieck.



### Punkt- und Geradenperspektivität

Zwei Dreiecke ABC und A'B'C' sind punktperspektiv bzw. perspektiv bezüglich eines Punktes P (eng. copolair), wenn sich die Geraden AA', BB', CC' in dem Punkt P schneiden.

Zwei Dreiecke ABC und A'B'C' sind geradenperspektiv (engl. coaxial), wenn die Schnittpunkte der Geradenpaare (AB, A'B'), (AC, A'C'') und (CA, C'A') kollinear sind. Es gilt:

**Satz von Desargues:** Zwei Dreiecke, die punktperspektiv sind, sind auch geradenperspektiv und umgekehrt.

### Beweis:

Die Dreiecke ABC und A'B'C' seien punktperspektiv zu Punkt O. P, Q, R seien die Schnittpunkte der entsprechenden Dreiecksseiten. Dann sollen P, Q und R kollinear sein.

In den Dreiecken OBC, OAC und OAB werden die Transversalen B'C'Q, C'A'R und B'A'P betrachtet. Nach dem Satz von Menelaos gilt dann:

$$(BCP)(COC')(OBB') = 1 \quad (CAQ)(AOA')(OCC') = 1 \quad (ABR)(BOB')(OAA') = 1$$

Umstellen und einsetzen ergibt  $(BCP)(CAQ)(ABR) = 1$ , d.h. die Punkte P, Q und R liegen auf einer Geraden. Die Umkehrung wird analog gezeigt.

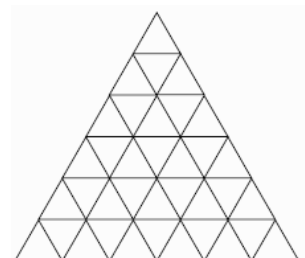
Anmerkung: Der hier angegebene Satz von Desargues stimmt mit dem weiter oben genannten überein, wird hier nur mit einer anderen Sichtweise hergeleitet.

### Dreiecke im Dreieck

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck, bei dem die Seiten in  $n = 6$  gleichlange Teilstrecken a geteilt sind.

In dieser Figur findet man nun Dreiecke mit den Seitenlängen a, 2a, ..., 6a.

Gesucht ist die Anzahl aller Dreiecke in dem Ausgangsdreieck.



Ist  $n$  die Anzahl der Unterteilungen der Dreiecksseite, so ergeben sich für gerade und ungerade  $n$  unterschiedliche Gleichungen. Es gilt für die Anzahl  $A(n)$  der enthaltenen Dreiecke

**$n$  gerade**  $A(n) = n/8 (n+2) (2n+1)$

**$n$  ungerade**  $A(n) = 1/8 (n (n+2) (2n+1) - 1)$

Allgemein ist  $A(n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i + \sum_{j=1}^{n-1} (1/2 + (-1/2)^{n+j-1}) \sum_{i=1}^j i$

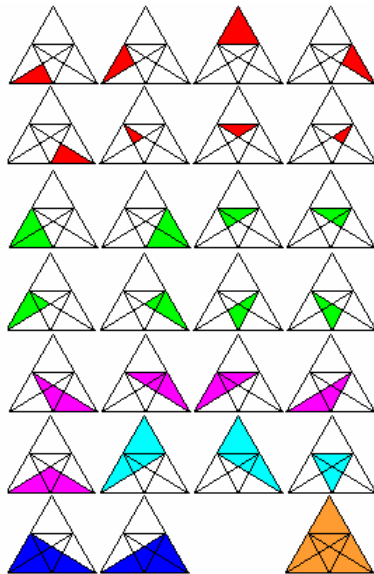
Für die ersten  $n = 1, 2, 3, \dots$  findet man damit als Anzahl  $A(n)$  Dreiecke  
 $1, 5, 13, 27, 48, 78, 118, 170, 235, 315, 411, 525, \dots$

Für  $n = 100$  ergeben sich schon 256275 verschiedene Möglichkeiten ein Dreieck zu markieren.

**Rätselaufgabe Dreieck**

Fernsehsender neun live am 7. April 2003, 15 Uhr:

Frage: Wie viele Dreiecke sind in dieser Figur?



Von den 20(!) deutschen Anrufern konnte niemand die richtige Antwort geben!

**Korrekte Antwort: 27**

Anmerkung: Die deutschen Fernsehsender haben seit 2005 eine neue Geldquelle zum hemmungslosen Abzocken der Zuschauer gefunden, das Rätselspiel. Auf nahezu allen privaten Fernsehsendern können die Zuschauer gegen extreme Telefongebühren angeblich hohe Geldpreise gewinnen. In die Rätsel werden stets spitzfindig, mitunter schon krankhaft dämlich, Probleme "hineingedacht", so dass die Anrufer mit einigermaßen logischen Denken nie auf die geforderte Lösung kommen. Dies ist auch nicht das Ziel des Senders. Er will so viele Anrufer wie nur irgendwie möglich um ihre Telefongebühren betrügen.

Für fast alle gestellten Rätsel gilt der US-amerikanische Begriff "cooken" (sinngemäß: "abkochen"). Der bekannte Mathematiker Martin Gardner beschreibt dies so:

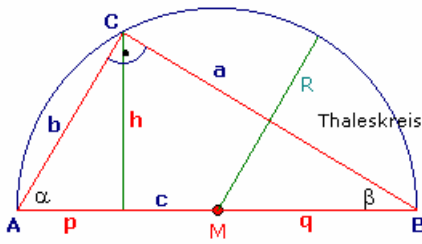
"Wenn ein mathematisches Rätselspiel einen größeren Fehler enthält, wenn die Antwort falsch ist, wenn es keine Antwort gibt,

wenn entgegen der allgemeinen Meinung es mehr als eine Antwort gibt oder eine bessere Antwort vorhanden ist, so sagt man, das Rätsel sei gecookt."

Die oben genannte Rätselaufgabe zum Dreieck ist eine positive Ausnahme. Dieses Problem stammt aber aus den Anfängen der Rätselabzocke. Im Jahre 2006 würde eine solche Aufgabe nicht mehr gestellt.

## Rechtwinkliges Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Innenwinkel des Dreiecks gleich  $90^\circ$ .



Flächeninhalt  $A = 1/2 * a * b = 1/2 a^2 * \tan \beta$

Höhensatz  $h^2 = p * q$

Kathetensatz  $a^2 = p * c$   $b^2 = q * c$

**Satz des Pythagoras  $c^2 = a^2 + b^2$**

Winkel  $\sin \alpha = \cos \beta = a / c$   $\tan \alpha = \cot \beta = a / b$

Höhe  $h = b \sin \alpha$

Umkreisradius  $R = c/2$

Inkreisradius  $r = 1/2 (a + b - c)$

Abstand des Schwerpunktes ... von der Hypotenuse  $h/3$

Abstand des Schwerpunktes ... von der Kathete a ist  $= b/3$

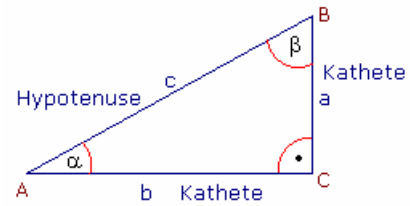
Sind  $a = m^2 - n^2$ ,  $b = 2mn$ ,  $c = m^2 + n^2$  ganzzahlige Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks, so gilt

Inkreisradius  $r = n (m - n)$

### Rechtwinkliges Dreieck, Begriffe

Die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck liegt dem rechten Winkel gegenüber und wird Hypotenuse genannt. Die beiden übrigen Seiten werden Katheten genannt.

Gegeben sei das abgebildete Dreieck. Dann ist die Seite c die Hypotenuse, weil sie dem rechten Winkel gegenüberliegt. Die beiden übrigen Seiten nennt man Katheten. Im Beispiel sind dies die Seiten a und b.



"Hypotenuse" kommt aus dem Griechischen und leitet sich von 'hypo' = *unter/gegenüber* (dem rechten Winkel) und von 'teinein' = *spannen* ab und zwar bedeutet dies soviel wie darunter gespannte Linie, die 'Grundlegende', dass heißt dem rechten Winkel gegenüberliegende Linie oder Seite in einem rechtwinkligen Dreieck. "Kathete" kommt ebenfalls aus dem Griechischen und leitet sich von 'kata' (auch 'kath') = *herab* und von 'hien ai' = (*nach*)lassen ab und zwar bedeutet dies die dem rechten Winkel anliegende Seite eines Dreiecks, die von der Spitze auf die Hypotenuse 'herabgelassen' wird.

### Gegenkathete und Ankathete

Die Katheten werden nochmals unterschieden.

Die Kathete, die dem Winkel  $\alpha$  gegenüber liegt, nennt man die Gegenkathete von  $\alpha$ . Die Kathete, die am Winkel  $\alpha$  anliegt, nennt man die Ankathete von  $\alpha$ .

### Pythagoreisches Dreieck

Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten und die Hypotenuse ganzzahlige Längen haben, wird pythagoreisches Dreieck genannt. Das bekannteste ist das Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5.

### Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

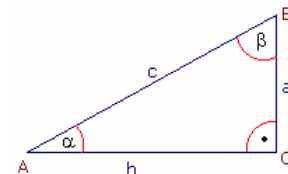
Aus den Stücken Hypotenuse c, Katheten a und b, Höhe h und Hypotenusenabschnitte müssen jeweils 2 gegeben sein, um ein weiteres Stück zu berechnen.

#### 1. Gegebene Stücke: Katheten a und b

Hypotenuse	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Hypotenusenabschnitt	$p = a^2 / \sqrt{a^2 + b^2}$
Hypotenusenabschnitt	$q = b^2 / \sqrt{a^2 + b^2}$
Höhe	$h = a b / \sqrt{a^2 + b^2}$
Winkel $\alpha$	$\alpha = \arctan a/b$
Winkel $\beta$	$\beta = \arctan b/a$
Fläche A	$A = ab/2$

#### 2. Gegebene Stücke: Hypotenuse c und eine Kathete, z.B. a

2. Kathete	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$
Hypotenusenabschnitt	$p = a^2 / c$
Hypotenusenabschnitt	$q = (c^2 - a^2) / c$
Höhe	$h = a / c * \sqrt{c^2 - a^2}$
Winkel $\alpha$	$\alpha = \arcsin a/c$
Winkel $\beta$	$\beta = \arccos a/c$
Fläche A	$A = a/2 \sqrt{c^2 - a^2}$



#### 3. Gegebene Stücke: Kathete a und Höhe h

Hypotenusenabschnitt	$p = \sqrt{a^2 - h^2}$
Hypotenuse	$c = a^2 / \sqrt{a^2 - h^2}$
Hypotenusenabschnitt	$q = h^2 / \sqrt{a^2 - h^2}$
2. Kathete	$b = a * h / \sqrt{a^2 - h^2}$

Aus den Stücken Hypotenuse  $c$ , Katheten  $a$  und  $b$ , den Hypotenusenabschnitten  $p$  und  $q$ , den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ , Höhe  $h$  auf die Hypotenuse und den Flächeninhalt  $A$  müssen jeweils 2 gegeben sein, um ein weiteres Stück zu berechnen.

Flächen $A =$	Hypotenuse $c =$
$= 1/2 c \cdot h$	$= 2A / h$
$= a/2 \sqrt{c^2 - a^2}$	$= 1/a \sqrt{4A^2 + a^4}$
$= 1/2 a b$	$= (4A - p^2) / (2p)$
$= a^2/2 h / \sqrt{a^2 - h^2}$	$= \sqrt{a^2 + b^2}$
$= 1/4 c^2 \sin 2\alpha$	$= a^2 / \sqrt{a^2 - h^2}$
$= 1/2 a^2 \tan \beta$	$= a / \sin \alpha$

Kathete $a =$	Höhe $h =$
$= \sqrt{c^2/4 + A} - \sqrt{c^2/4 - A}$	$= 2A / c$
$= \sqrt{2A} / h \sqrt{A + \sqrt{A^2 - h^4}}$	$= 2aA / \sqrt{4A^2 + a^4}$
$= (4A + p^2 - \sqrt{16A^2 - 24Ap^2 + p^4}) / (4p)$	$= 4pA / (4A - p^2)$
$= \sqrt{c^2 - b^2}$	$= a/c \sqrt{c^2 - a^2}$
$= \sqrt{c^2/4 + ch/2} - \sqrt{c^2/4 - ch/2}$	$= ab / c$
$= c \sin \alpha$	$= ab / \sqrt{a^2 + b^2}$
$= c \cos \beta$	$= c/2 \sin 2\alpha$

Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck, außer einer Seite, noch die Summe oder Differenz der beiden anderen bekannt ist, so können die Seitenlängen berechnet werden:

geg.: Hypotenuse  $c$ , Kathetensumme  $s = a + b$   
 $a = s/2 + \sqrt{c^2/2 - s^2/4}$        $b = s/2 - \sqrt{c^2/2 - s^2/4}$

geg.: Hypotenuse  $c$ , Kathetendifferenz  $d = a - b$   
 $a = \sqrt{c^2/2 - d^2/4} + d/2$        $b = \sqrt{c^2/2 - d^2/4} - d/2$

geg.: Kathete  $a$ , Summe  $s = c + b$  aus Hypotenuse und zweiter Kathete  
 $c = (s^2 + a^2) / (2s)$        $b = (s^2 - a^2) / (2s)$

geg.: Kathete  $a$ , Differenz  $d = c - b$  aus Hypotenuse und zweiter Kathete  
 $c = (a^2 + d^2) / (2d)$        $b = (a^2 - d^2) / (2d)$

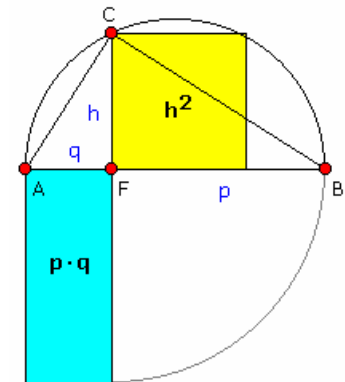
geg.: Hypotenuse  $c$ , Verhältnis  $a:b = m:n$  der beiden Katheten zueinander  
 $a = c m / \sqrt{m^2 + n^2}$        $b = c n / \sqrt{m^2 + n^2}$

### Höhensatz

In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten  $p$  und  $q$ .

$$h^2 = p \cdot q$$

D.h., die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zwischen den Projektionen der beiden Katheten auf die Hypotenuse.

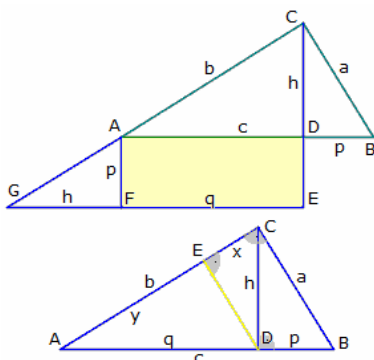


### Beweis

Laut Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + p^2 \\ b^2 &= h^2 + q^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Einsetzen  $(p+q)^2 = h^2 + p^2 + h^2 + q^2$   
 Binomische Formel  $p^2 + 2pq + q^2 = 2h^2 + p^2 + q^2$   
 Subtraktion  $2pq = 2h^2$  und somit  $h^2 = p \cdot q$



### Höhensatz (2)

Satz: In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten  $p$  und  $q$ .  $h^2 = p \cdot q$

Nachweis 1 (obere Abbildung):

Das große Dreieck  $\triangle GEC$  ergibt sich durch Anfügen des Dreiecks  $\triangle DBC$ . Mit den Bezeichnungen in der Abbildung erhält über den Dreiecksflächeninhalt

$$\begin{aligned} A_{\triangle DBC} &= 1/2 (h+p) (h+q) \\ \text{Es gilt } A_{\triangle DBC} &= pq + A_{\triangle ABC}, \text{ woraus sich} \\ 1/2 (h+p) (h+q) &= pq + 1/2 ch = pq + 1/2 (p+q)h \end{aligned}$$

ableitet. Also  $h^2 + ph + qh + pq = 2pq + hp + hq$   
 woraus sich der Höhensatz ergibt.

Beweis durch Ähnlichkeit: Die Dreiecke  $\triangle ADC$  und  $\triangle BCD$  sind ähnlich zueinander. Damit gilt  $h/q = p/h$ , d.h. der Höhensatz

Für den Höhensatz gilt auch die Umkehrung:

Gilt für ein Dreieck  $\triangle ABC$  mit Standardbezeichnungen  $h^2 = pq$ , so ist das Dreieck rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C.

**Kathetensatz, Satz des Euklid**

In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$a^2 = c \cdot p$  und  $b^2 = c \cdot q$

D.h., jede Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zwischen ihrer Projektion auf die Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse.

Beweis: Um die Flächengleichheit der Vierecke BEFC und DGHB zu zeigen, genügt es, die Dreiecke BEC und BDH zu betrachten. Die Dreiecke BEC und ABE haben den selben Flächeninhalt, da sie in der Seite BE und der Höhe BC übereinstimmen.

Gleiches gilt für die Dreiecke BDH und BCH die in der Seite BH und der Höhe BD übereinstimmen. Es bleibt zu zeigen, dass die Dreiecke ABE und BCH kongruent sind. Es ist

$|BH| = |AB| = c$  und  $|BC| = |BE| = a$

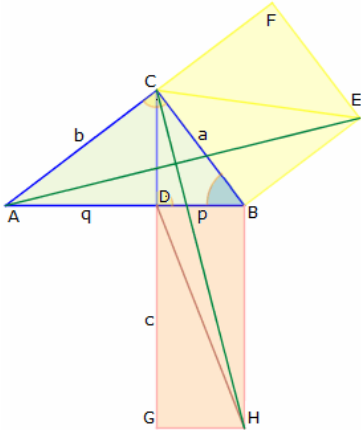
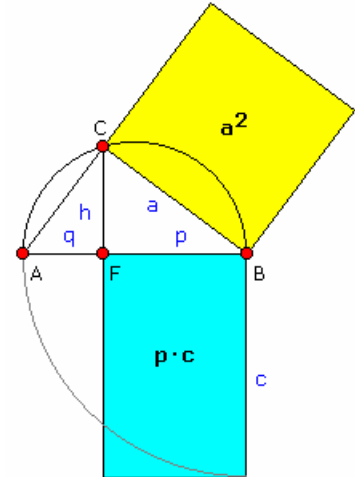
$\angle ABE = \angle HBS = 90^\circ + \beta$

Die Dreiecke stimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein und sind daher kongruent. Daher gilt  $a^2 = pc$ . Ebenso kann  $b^2 = qc$  gezeigt werden.

Beweis mittels Höhensatz und Satz des Pythagoras:

Nach dem Höhensatz gilt:  $h^2 = pq$ ; d.h.  $p^2 + h^2 = p^2 + pq$ . Für die linke Seite der Gleichung wendet man den Satz des Pythagoras an und erhält

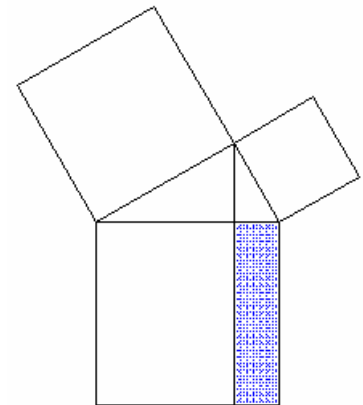
$a^2 = p^2 + pq = p(p + q)$ . Es ist  $p + q = c$  und damit gilt:  $a^2 = pc$ .



**Nachweis des Kathetensatzes**

Zum Nachweis des Höhensatzes, Kathetensatzes und des Satzes von Pythagoras wurden sehr viele Beweise gefunden. Eine sehr interessante Variante existiert für den Kathetensatz.

Dabei wird ausgenutzt, dass Flächen bei einer Scherung oder einer Drehung in der Ebene ihren Flächeninhalt nicht verändern. Das Quadrat über der Kathete a wird nun durch eine Scherung längs der Seite in ein flächengleiches Parallelogramm verwandelt. Danach wird es um den Dreieckspunkt B gedreht und abschließend durch eine zweite Scherung längs der Dreieckshöhe in ein Rechteck verwandelt und mit dem Rechteck über dem Hypotenusenabschnitt zur Deckung gebracht. Da beide Rechtecke zueinander kongruent sind, muss der Flächeninhalt des Quadrates über der Kathete gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks über dem Hypotenusenabschnitt sein. Damit ist der Kathetensatz nachgewiesen.

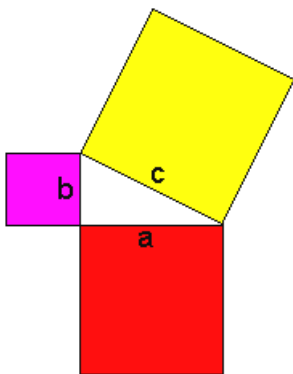


**Satz des Pythagoras**

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Maßzahl des Flächeninhaltes eines Quadrates über der Hypotenuse gleich der Summe der Maßzahlen der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten.

$c^2 = a^2 + b^2$

- erstmals nachgewiesen um 1900-1600 v.Chr. auf babylonischer Tafel
- weder Pythagoras (560-480 v.Chr.) noch einem Vertreter seiner Schule gelang der Beweis des Satzes
- Euklid veröffentlichte um 300 v.Chr. in seinem Werk "Elemente" einen der ersten Beweise



Wird das rechtwinklige Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C so in ein Koordinatensystem gelegt, dass A sich im Ursprung befindet und die Hypotenuse auf der positiven x-Achse liegt, so ergeben sich für die Punkte

der Pythagoras-Figur:

- |                 |                         |
|-----------------|-------------------------|
| A ( 0 ; 0 )     | B ( c ; 0 )             |
| C ( q ; h )     | F ( q ; 0 )             |
| D (-h ; 0 )     | E ( c + h ; 0 )         |
| G (-h ; q )     | H (-h + q ; q + h )     |
| L ( c + h ; p ) | K ( c + h - p ; p + h ) |



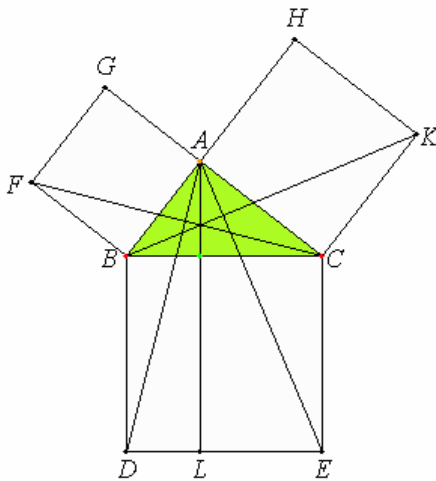
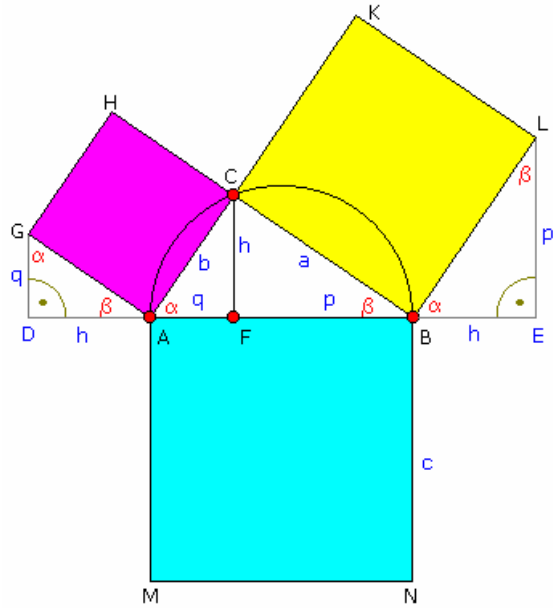
M (0 ; -c)      N (c ; -c)

**Satz des Pythagoras - Euklidischer Beweis**

"Elemente": § 47 (L. 33):

Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel BAC. Ich behaupte, dass  $BC^2 = BA^2 + AC^2$ . Man zeichne nämlich über BC das Quadrat BDEC (I, 46) und über BA, AC die Quadrate GB, HC; ferner ziehe man durch A AL || BD oder CE und ziehe AD, FC. Da hier die Winkel BAC, BAG beide Rechte sind, so bilden an der geraden Linie BA im Punkte A auf ihr die zwei nicht auf derselben Seite liegenden geraden Linien AC, AG Nebenwinkel, die zusammen = 2 R. sind; also setzt CA AG gerade fort (I, 14). Aus demselben Grunde setzt auch BA AH gerade fort. Ferner ist  $\angle DBC = FBA$ ; denn beide sind Rechte (Post. 4); daher füge man ABC



beiderseits hinzu; dann ist der ganze Winkel DBA dem ganzen FBC gleich (Ax. 2). Da ferner  $DB = BC$  und  $FB = BA$  (I, Def. 22), sind die zwei Seiten DB, BA zwei Seiten FB, BC überkreuz entsprechend gleich; und  $\angle DBA = \angle FBC$ ; also ist Grdl.  $AD = Grdl. FC$  in  $\triangle ABD = \triangle FBC$  (I, 4).

Ferner ist Pgm.  $BL = 2 \triangle ABD$ ; denn sie haben dieselbe Grundlinie BD und liegen zwischen denselben Parallelen BD, AL (I, 41); auch ist das Quadrat  $GB = 2 \triangle FBC$ ; denn sie haben wieder dieselbe Grundlinie, nämlich FB, und liegen zwischen denselben Parallelen FB, QC. Von Gleichem die Doppelten sind aber einander gleich (Ax. 5).

Also ist Pgm.  $BL = \text{Quadrat GB}$ . Ähnlich lässt sich, wenn man AE, BK zieht, zeigen, dass auch Pgm.  $CL = \text{Quadrat HC}$ ; also ist das ganze Quadrat BDEC den zwei Quadraten  $GB + HC$  gleich (Ax. 2). Dabei ist das Quadrat BDEC über BC gezeichnet und GB, HC über BA, AC. Also ist das Quadrat über der Seite BC den Quadraten über den Seiten BA, AC zusammen gleich. - S.

**Satz des Pythagoras - Beweis**

**Historischer Beweis von Liu Hui:**

In dem chinesischen Mathematikbuch "Jiuzhang suanshu" (Arithmetik in 9 Kapiteln) aus dem 1. Jahrhundert v. Chr. finden sich im 9. Kapitel 24 Probleme und deren Lösung, allerdings ohne Nachweis. Die ersten Fragen sind:

1. Wenn die [Länge der kleineren] Kathete [eines rechtwinkligen Dreiecks] 3 chi, und die längere Kathete 4 chi ist, wie lang ist die Hypotenuse ?

Antwort: 5 chi.

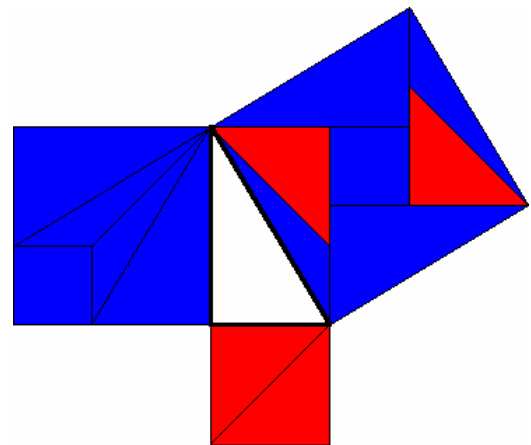
2. Ist die Hypotenuse 5 chi, und die kurze Kathete 3 chi, wie lang ist die lange Kathete?

Antwort: 4 chi.

3. Ist die lange Kathete 4 chi, und die Hypotenuse 5 chi, wie lang ist die kurze Kathete ?

Antwort: 3 chi.

Im 3. Jahrhundert kommentiert Liu Hui das Werk und gibt folgenden Zerlegungsbeweis: Die kurze Kathete mit sich selbst multipliziert ist das rote Quadrat, die lange Kathete mit sich selbst multipliziert das blaue Quadrat. Verschiebt man die Abschnitte dieser Quadrate (siehe Skizze) in das Quadrat über die Hypotenuse, wird dieses vollständig überdeckt.



**Satz des Pythagoras - Beweis mit Heronscher Dreiecksformel**

Gegeben: Dreieck mit Seiten a, b und c, Halbumfang  $p = (a + b + c)/2$  und Flächeninhalt A. Nach Herons Dreiecksformel ist dann:

$$A^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

Ist das Dreieck rechtwinklig und c die Hypotenuse, wird  $A = ab/2$ . Dann ist

$$p - a = (-a + b + c)/2$$

$$p - b = (a - b + c)/2$$

$$p - c = (a + b - c)/2$$

$$(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) =$$

$$= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)$$

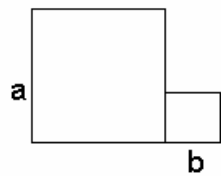
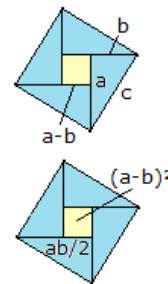
und weiter  $4a^2b^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)$

$$(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - 2c^2(a^2 + b^2) + c^4 = 0 \text{ und so } [(a^2 + b^2) - c^2]^2 = 0$$

**Satz des Pythagoras - Bhaskara**

Durch den indischen Mathematiker Bhaskara (1114-1185) wurde ebenfalls ein origineller Beweis des Satzes von Pythagoras angegeben. Dabei verwendet er Mittel, die schon den Babyloniern bekannt waren:



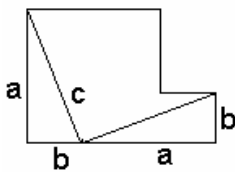
Das rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c sei viermal so angeordnet wie in der Abbildung, dann ergibt sich das äußere Quadrat mit der Seitenlänge c und das innere Quadrat mit der Seitenlänge (b - a).

Der Flächeninhalt des äußeren Quadrates ist genauso groß wie die Summe aus dem inneren Quadrat und den vier rechtwinkligen Dreiecken:

$$c^2 = (b - a)^2 + 4 \cdot (ab)/2$$

$$c^2 = b^2 - 2ab + a^2 + 2ab$$

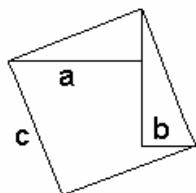
$$c^2 = a^2 + b^2$$



**Beweis 3**

gegeben: Zwei Quadrate mit den Seitenlängen a und b. Deren Gesamtfläche beträgt  $a^2 + b^2$ .

Trägt man an der waagerechten Seite b ab und verbindet entsprechend der 2. Skizze, so ergibt sich die Hypotenuse c. (Thäbit ibn Qurra, 836-901): Durch Drehung der beiden entstandenen Dreiecke um jeweils  $90^\circ$ , ergibt sich ein Quadrat mit der Seitenlänge c und der Fläche  $c^2$ . D.h.  $a^2 + b^2 = c^2$



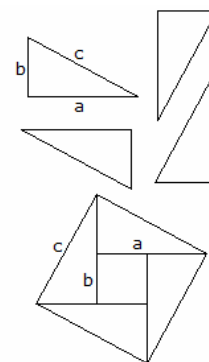
**Beweis 4**

Ausgehend von vier kongruenten rechtwinkligen Dreiecken, werden drei Dreiecke um  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  und  $270^\circ$  gedreht. Jedes dieser Dreiecke hat eine Fläche von  $ab/2$ . Diese vier Dreiecke werden zu einem Quadrat mit der Seitenlänge c zusammengeschoben. (untere Skizze). Dabei bleibt im Inneren ein Quadrat mit der Seitenlänge a-b und eine Fläche von  $(a-b)^2$  frei.

Die vier Dreiecke (Fläche  $4 \cdot ab/2$ ) und dieses kleine Quadrat ergeben:

$$4 \cdot ab/2 + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 = c^2$$

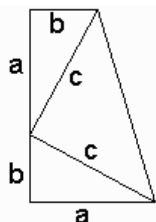
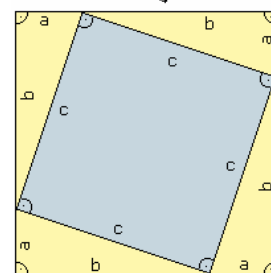
$c^2$  ist die Fläche des großen Quadrates. w.z.z.w.



**Beweis 5**

Werden die vier Dreiecke so zu einem Quadrat zusammengelegt, dass dieses eine Seitenlänge a+b besitzt, so bleibt im Innern ein Quadrat der Seitenlänge c frei. Damit wird:  $(a+b)^2 = 4 \cdot ab/2 + c^2$  und entsprechend weiter.

Der Spezialfall dieses Beweise für ein 3-4-5-Dreieck findet man schon in dem antiken chinesischen Mathematiklehrbuch "Chou Pei Suan Ching", das auf eine Entstehungszeit zwischen 300 v.u.Z. und 200 u.Z. datiert wird.



**Beweis 6**

Dieser Beweis stammt von dem US-amerikanischen Präsidenten(!) J.A.Garfield von 1876.

Zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke werden wie in der Skizze zusammengestellt. Das gebildete Trapez hat eine Fläche von  $(a+b)/2 \cdot (a+b)$ .

Die Fläche der 3 Dreiecke ergibt sich zu  $ab/2 + ab/2 + c \cdot c/2$ . Und damit  $a^2 + b^2 = c^2$ .

**Beweis 7**

Im Ausgangsdreieck ABC wird die Höhe auf BC gefällt, der Höhenfußpunkt ist D. Dann sind die Dreiecke ABC, BDA und ADC ähnlich, wodurch die Seitenverhältnisse  $AB/BC = BD/AB$  und  $AC/BC = DC/AC$  gelten.

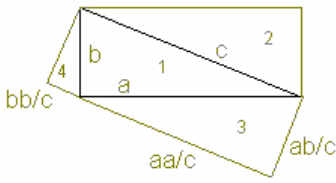
Daraus wird  $AB \cdot AB = BD \cdot BC$  und  $AC \cdot AC = DC \cdot BC$ . Durch Addition beider

Gleichungen wird

$$AB \cdot AB + AC \cdot AC = BD \cdot BC + DC \cdot BC = (BD + DC) \cdot BC = BC \cdot BC$$

### Satz des Pythagoras - Beweis 8

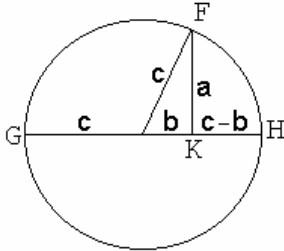
Aus das rechtwinklige Dreieck (1) werden, wie in der Abbildung, die ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke (2) bis (4) aufgesetzt. Damit entsteht ein Rechteck (1+3+4) und das Dreieck (2) oder das Rechteck (1+2) und zwei Dreiecke (3) und (4).



Es wird:  $ab/c * (a^2+b^2)/c + ab/2 = ab + (ab/c * a^2/c + ab/c * b^2/c)/2$   
 und somit  $ab/c * (a^2+b^2)/c/2 = ab/2$  bzw.  $(a^2+b^2)/c^2 = 1$

### Beweis 9

In einem Kreis mit dem Radius c wird wie dargestellt das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten a und b eingezeichnet.



Dann gilt: Die Punkte F, G und H liegen auf dem Kreis und bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit FK als Höhe der Länge a. Die Hypotenuse dieses Dreiecks wird im Verhältnis (c+b)/(c-b) geteilt. Somit wird  $a^2 = (c+b)(c-b) = c^2 - b^2$ .

### Beweis 10

#### Pappusscher Parallelogrammsatz

Dieser Beweis verallgemeinert den Satz des Pythagoras. Zum einen werden nicht nur

rechtwinklige Dreiecke betrachtet, zum anderen werden über den Dreiecksseiten Parallelogramme errichtet. Erstmals wurde dieser Beweis von Pappus von Alexandria im Buch IV seiner "Collectiones" gegeben. Über den Seiten werden Parallelogramme CADE und CBFG errichtet. Die Geraden DE und FG schneiden sich in H. Durch A und B werden die Geraden AL und BM parallel und gleichlang zu HC gezeichnet. Dann ist

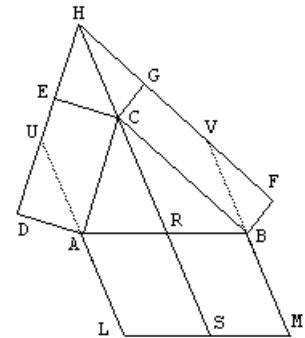
$$\text{Fläche}_{ABML} = \text{Fläche}_{CADE} + \text{Fläche}_{CBFG}$$

Da bei einer Scherung der Flächeninhalt erhalten bleibt, wird

$$\text{Fläche}_{CADE} = \text{Fläche}_{CAUH} = \text{Fläche}_{SLAR}$$

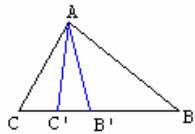
$$\text{Fläche}_{CBFG} = \text{Fläche}_{CBVH} = \text{Fläche}_{SBMR}$$

und damit das Gesuchte. Der Pappussche Parallelogrammsatz wird auch Satz von Clairaut genannt.



### Beweis 11

2. Beweis von Tabit ibn Qurra (836-901): Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC. Wenn die Winkel CAB, AC'B und AB'C gleich sind, dann gilt  $AC^2 + AB^2 = BC(CB' + BC')$



Dann sind die Dreiecke ABC, AC'B und AB'C ähnlich und somit  $AB / BC' = BC / AB$  und  $AC / CB' = BC / AC$ .

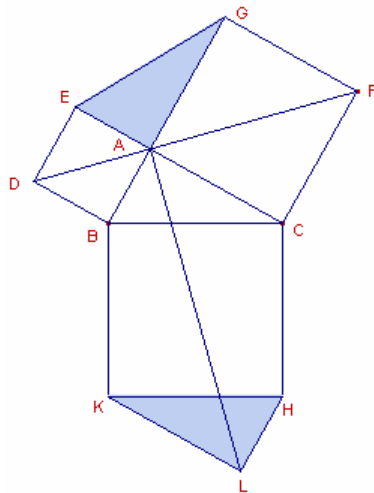
Ist der Winkel bei A ein rechter Winkel, so folgt daraus unmittelbar der Satz des Pythagoras.

### Beweis 12

nach Tempelhof, 1769:

Die Pythagoras-Figur wird im Punkt A und an der Seite KH um jeweils ein zum Dreieck ABC kongruentes Dreieck ergänzt. Dann entstehen zueinander kongruente Vierecke BDFC, DFGE und ABKL, ACHL.

Über den Vergleich der Flächen dieser Vierecke unter Abzug der zwei jeweils auftretenden Ausgangsdreiecke ergibt sich der Satz des Pythagoras.



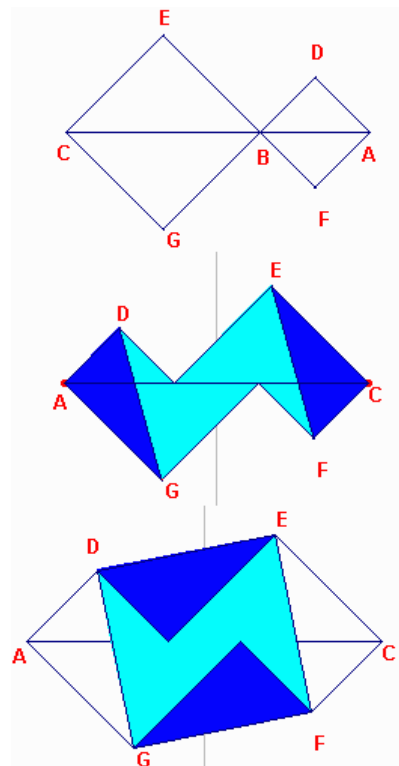
### Beweis 13

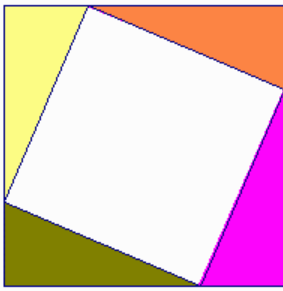
Beweis nach Leonardo da Vinci:

Ausgangspunkt sind zwei Quadrate

ABDF und BECG mit den Seitenlängen a und b. Die Quadrate sind so angeordnet, dass die Diagonalen AB und BC auf einer Geraden liegen. Die Punkte werden nun nacheinander an der Strecke AC und an der Mittelsenkrechten von AC gespiegelt. Dabei ergibt sich die zweite Abbildung.

Mit Drehung des Dreiecks ADG um D und das Dreiecks ECF um F entsteht die dritte Abbildung, womit die beiden Quadratflächen zur Deckung mit einem Quadrat der Hypotenusenlänge c gebracht wurden.

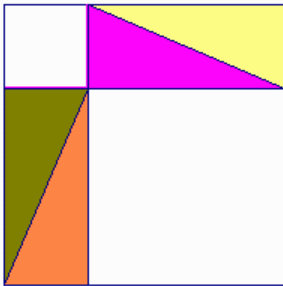




**Satz des Pythagoras - Beweis 14**

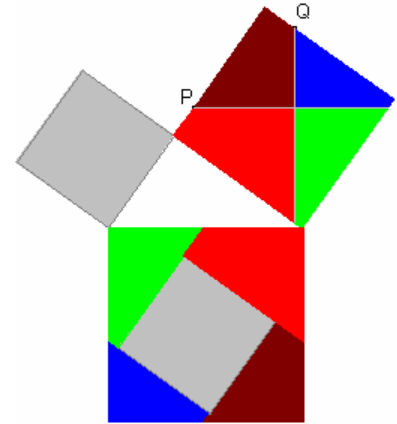
Dieser Zerlegungsbeweis des chinesischen Mathematikers Chou-Pei Suan-Ching (um 1100) ähnelt dem Beweis Nr.5.

Die im Quadrat mit der Seitenlänge (a+b) eingefügten vier rechtwinkligen Dreiecke (Seitenlängen a und b) werden wie in der zweiten Abbildung angeordnet. Durch Vergleich der Flächen unter Abzug der vier Dreiecke ergibt sich in beiden Darstellungen das gleiche Ergebnis und somit  $a^2 + b^2 = c^2$ , wobei c die Seitenlänge des oben "frei bleibenden" Quadrates ist.



**Satz des Pythagoras - Beweis 15**

Dieser Zerlegungsbeweis stammt von dem englischen Mathematiker Henry Perigal (1801-1898), den er 1830 veröffentlichte.

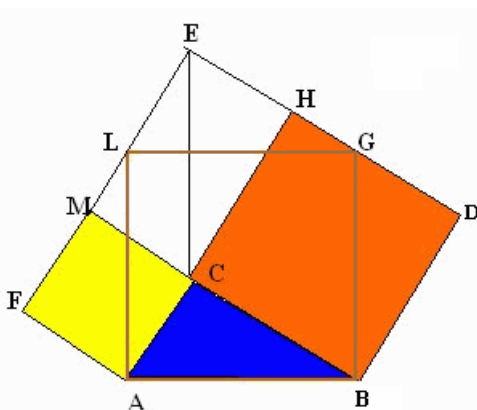


**Satz des Pythagoras - Beweis 16**

Der unten dargestellte Beweis wird H.E.Dudeney (1917) zugeschrieben. Es schneidet das Quadrat auf der größeren Seite in vier Teile, die dann mit dem kleineren kombiniert werden, um das Quadrat zu bilden, das auf der Hypotenuse errichtet wird.



Wahrscheinlich wurde dieser Beweis schon 1873 von Henry Perigal, einem Londoner Börsenmakler, veröffentlicht.



**Beweis 17**

3. Beweis von Tabit ibn Qurra (836-901):

In der Figur sind die Dreiecke ABC, CEH, CEM, BGD, EGL, AFL zueinander kongruent. Für den Flächeninhalt des Fünfecks ABDEF ergibt sich

$$ABDEF = AC^2 + BC^2 + \Delta ABC + \Delta CEH + \Delta CEM$$

aber auch

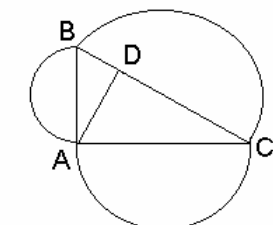
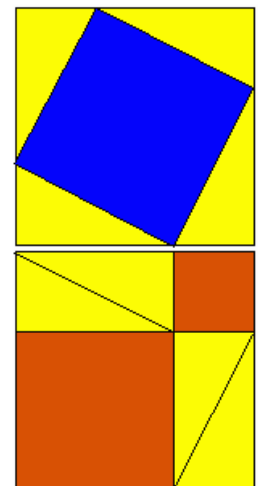
$$ABDEF = AB^2 + \Delta BGD + \Delta EGL + \Delta AFL$$

Durch Gleichsetzen und Subtraktion des jeweils 3 kongruenten Dreiecke ergibt sich unmittelbar der Satz des Pythagoras.

Der Beweis wurde u.a. von Rufus Isaac im Mathematics Magazine, Vol. 48 (1975), veröffentlicht.

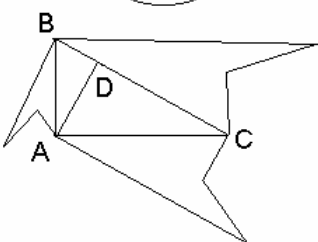
**Beweis 18**

Der rechte Zerlegungsbeweis ergibt sich allein aus der Darstellung.



**Beweis 19**

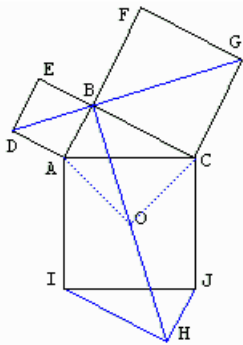
Beweis aus der englischen Euklid-Übersetzung von Sir Thomas L. Heath: In right-angled triangles the figure on the side subtending the right angle is equal to the similar and similarly described figures on the sides containing the right angle.



Let ABC be a right-angled triangle having the angle BAC right; I say that the figure on BC is equal to the similar and similarly described figures on BA, AC. Let AD be drawn perpendicular. Then since, in the right-angled triangle ABC, AD has been drawn from the right angle at A perpendicular to the base BC, the triangles ABD, ADC adjoining the perpendicular are similar both to the whole ABC and to one another [VI.8]. And, since ABC is similar to ABD, therefore, as CB is to BA so is AB to BD [VI.Def.1]. And, since three straight lines are proportional, as the first is to the third, so is the figure on the first to the similar and similarly described figure on the second [VI.19]. Therefore, as CB is to BD, so is the figure on CB to the similar and similarly described figure on BA.

For the same reason also, as BC is to CD, so is the figure on BC to that on CA; so that, in addition, as BC is to BD, DC, so is the figure on BC to the similar and similarly described figures on BA, AC. But BC is

equal to BD, DC; therefore the figure on BC is also equal to the similar and similarly described figures on BA, AC. Therefore etc. Q.E.D.



**Beweis 20**

Dieser Beweis wird ebenfalls Leonardo da Vinci zugeschrieben. Alle Vierecke ABHI, JHBC, ADGC und EDGF sind ähnlich. Dies folgt aus der Tatsache, dass der Winkel ABH gleich 45° ist. Dies ergibt sich, da ABC rechtwinklig ist und die Mitte des Quadrates ACJI auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt.

Offensichtlich ist auch Winkel ABO gleich 45°. Und damit:

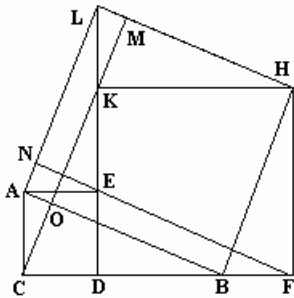
$$A(ABHI) + A(JHBC) = A(ADGC) + A(EDGF).$$

Jede Summe enthält zwei Flächen die ABC gleich sind (IJH oder BEF). Daraus ergibt sich unmittelbar der Satz des Pythagoras.

**Beweis 21**

B.F.Yanney (1903): Die Flächen LMOA, LKCA und ACDE; d.h.  $AC^2$ ; sind als Scherungen gleich, ebenso die Flächen HMOB, HKCB und HKDF, d.h.  $BC^2$ , und somit  $BC = DF$ .

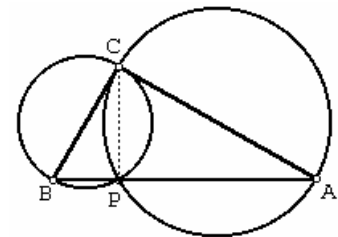
Daraus folgt  $AC^2 + BC^2 = \text{Fläche}(LMOA) + \text{Fläche}(HMOB) = \text{Fläche}(ABHL) = AB^2$ .



**Beweis 22**

Dieser Beweis benutzt den Sekanten-Tangenten-Satz am Kreis, nachdem das Produkt aus der Länge einer Sekante und ihrem äußeren Abschnitt gleich dem Quadrat der Tangentenlänge ist.

Gegeben sei wieder das rechtwinklige Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Der Lotfußpunkt von C auf der Hypotenuse sei P. Da der Winkel CPB gleich 90° ist, liegt der Punkt P auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC, analog P auf dem Kreis mit Durchmesser AC. Damit bildet die Schnittsehne beider Kreise die Strecke CP und ist senkrecht auf AB. Somit sind die Kreisdurchmesser AC und BC jeweils Tangente des anderen Kreises. Sind x und y die Längen der Strecken BP und PA sowie a, b, c die Längen der Seiten ABC, so ist  $x + y = c$ .



Da bei C der rechte Winkel liegt und BC Tangente zum Kreis mit Durchmesser CA ist wird nach dem Sekanten-Tangenten-Satz  $b^2 = x * c$ ; und analog  $a^2 = y * c$ . Addition beider Gleichungen ergibt

$$a^2 + b^2 = xc + yc = c^2.$$

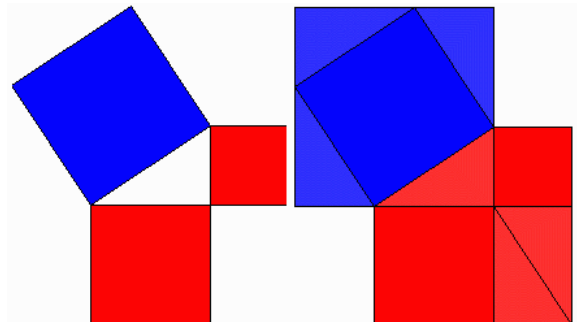
**Beweis 23**

Bei dieser Variante eines Beweis über den Vergleich von Flächen, wird die Pythagoras-Figur zu zwei Fünfecken ergänzt.

Das rote ist dem blauen Fünfeck offensichtlich flächengleich. Durch Wegnahme von je drei kongruenten Dreiecken ergibt sich somit das Satz des Pythagoras.

Beweis nach Monty Phister, Gnarly Mathe

Der erste Beweis in dieser Art wurde schon 1988 durch den niederländischen Mathematiker Eduard Douwes Dekker unter dem Pseudonym Multatuli veröffentlicht.



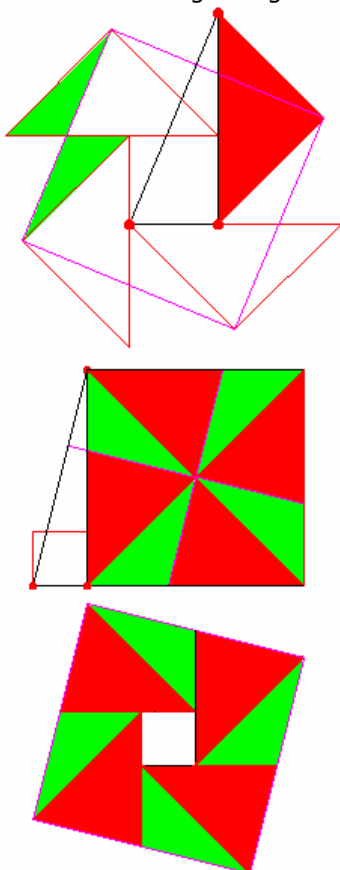
**Beweis 24**

Beweis aus R.Nelsens "Proofs without words II", 1999:

Ausgangspunkt ist die Konstruktion von vier gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken, von denen das erste (rot gezeichnet) die Hypotenuse gleich einer der Katheten des Ausgangsdreiecks hat, o.B.d.A. zum Beispiel b. Weiterhin werden die vier Dreiecke so platziert, dass sie im Inneren ein Quadrat mit einer Seitenlänge gleich der zweiten Kathete ergeben.

Dann bilden die vier, am rechten Winkel gelegenen Ecken dieser Dreiecke ein Quadrat mit der Seitenlänge c (Hypotenuse).

Von vier Paaren kongruenter Dreiecke (ein Paar ist grün dargestellt) liegt



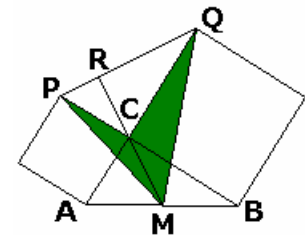


jeweils ein Dreieck innerhalb des Quadrates, eines außerhalb. Jedes der gleichschenkligen Dreiecke hat einen Flächeninhalt von  $b^2/4$ . Und damit ergibt sich  $a^2 + 4 \cdot b^2/4 = c^2$   
 Die zwei unteren Abbildungen zeigen veränderte Anordnungen der auftretenden Dreiecke.

**Beweis 25**

Beweis von Ann Condit, 1938, US-amerikanische High-School-Studentin:  
 Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC, dessen Seiten wie üblich bezeichnet werden.

Auf den Katheten werden wie in der Darstellung Quadrate errichtet. Nach dem Kongruenzsatz SWS sind dann die Dreiecke ABC und PCQ kongruent und somit die Winkel  $\angle QPC = \angle CAB$ .



M sei der Mittelpunkt der Hypotenuse. Der Schnittpunkt der Geraden MC und PQ sei R. Da M der Mittelpunkt des Umkreises ist, ist das Dreieck CMB gleichschenkelig und die Winkel  $\angle MBC = \angle MCB$ . Da auch  $\angle PCR = \angle MCB$  ist und  $\angle QPC = \angle CAB$ , folgt dass der Winkel  $\angle CRP$  ein rechter ist, d.h. MR steht senkrecht auf PQ.

Die Höhe von M auf PC ist gleich  $AC/2 = b/2$ , ebenso  $PC = b$ . Damit ist der Flächeninhalt von MCP =  $b^2/4$ . Andererseits ist

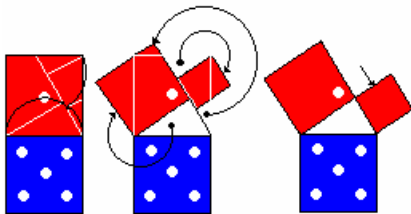
Fläche(MCP) =  $CM \cdot PR/2 = c \cdot PR/4$

Fläche(MCQ) =  $a^2/4$

Fläche(MCQ) =  $CM \cdot RQ/2 = c \cdot RQ/4$

Summiert man die Flächeninhalte, wird

$a^2/4 + b^2/4 = c \cdot PR/4 + c \cdot RQ/4 = c \cdot c/4$ , d.h.  $a^2 + b^2 = c^2$



**Beweis 26**

In der Darstellung ist ein schöner Beweis von Mario Patek zu sehen.

**Beweis 27**

Michael Hardy, Universität von Toledo, veröffentlicht in "The Mathematical Intelligencer" 1988:

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse BC, weiterhin  $AC = x$  und  $BC = y$ . Bewegt sich C längs von AC, so verändern sich x um  $dx$  und y um  $dy$ . Das Dreieck CDE ist dann näherungsweise rechtwinklig und auf Grund des gleichen Winkels D ähnlich zum Dreieck ABD, womit  $x/y = dy/dx$  gilt. Damit ergibt sich die Differentialgleichung  $y \cdot dy - x \cdot dx = 0$

Nach Integration wird  $y^2 - x^2 = \text{const.}$  Der konstante Wert ergibt sich aus der Anfangsbedingung für  $x = 0$ :  $y(0) = a$   
 $y^2 = x^2 + a^2$  für alle x.

Anmerkung zu dem "näherungsweise rechtwinkligen" Dreieck CDE:

Aus  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  und  $AB^2 + AD^2 = BD^2$ , d.h.

$x^2 + a^2 = y^2$  und  $(x + dx)^2 + a^2 = (y + dy)^2$

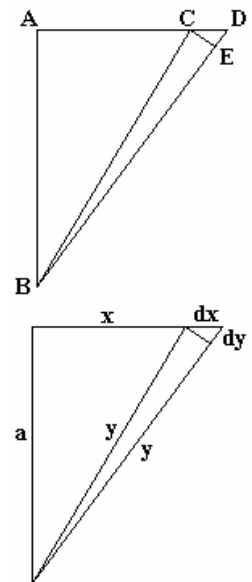
wird  $y \cdot dy - x \cdot dx = (dx^2 - dy^2)/2$

Für kleine dx und dy streben  $dx^2$  und  $dy^2$  stärker gegen Null und können vernachlässigt werden. Damit ergibt sich

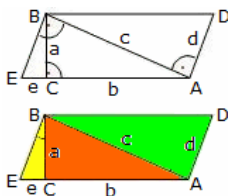
$y \cdot dy - x \cdot dx = 0$

und CDE ist näherungsweise rechtwinklig.

Ein merkwürdiger Nachweis des Satzes von Pythagoras, bei dem man den Eindruck nicht loswird, dass hier ein Zirkelschluss und somit kein korrekter Beweis vorliegt.



**Satz des Pythagoras-Beweis 28**



**Parallelogramm**

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC. Durch Senkrechte und Parallelverschiebung konstruiert man die Dreiecke BAD und ECB. Die 3 Dreiecke sind zueinander ähnlich, Dreieck ABE ist kongruent zu Dreieck BAD. Der Ähnlichkeit wegen gilt

$e/a = a/b \rightarrow e = a^2/b$   $d/a = c/b \rightarrow d = ac/b$

Der Kongruenz wegen gilt:

Dreieck BEC + Dreieck ABC = Dreieck DBA

gelb + orange = grün

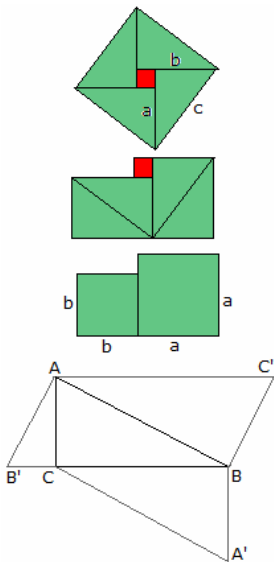
und folglich  $ea/2 + ab/2 = dc/2$  ; Multiplikation mit 2 und e, d ersetzen

$(a^2/2/b) \cdot a + ba = c \cdot (ac/b)$   $a^2/b + b = c^2/b$   $a^2 + b^2 = c^2$

**Satz des Pythagoras-Beweis 29**

In diesem weiteren Zerlegungsbeweis werden die vier Dreiecke und das Quadrat auf eine besondere Art angeordnet.





### Satz des Pythagoras-Beweis 30

untere Abbildung

Die Dreiecke  $\triangle ABC'$ ,  $\triangle BCA'$  und  $\triangle ACB'$  werden an das Dreieck  $\triangle ABC$  so angefügt, wie in der Zeichnung zu sehen. Offensichtlich sind die vier Dreiecke zueinander ähnlich.

Auf Grund der Konstruktion ist  $\triangle ABC \sim \triangle A'BC$ . Ebenso sind die Dreiecke  $\triangle ABB'$  und  $\triangle ABC'$  gleich. Daraus folgt

$$\text{Fläche}_{A'BC} + \text{Fläche}_{AB'C} = \text{Fläche}_{ABC}$$

Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke ist

$$B'C = AC^2/BC \text{ und } BC' = AC \cdot AB/BC$$

und zusammen

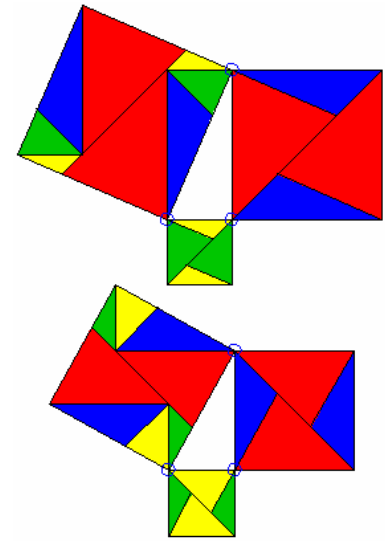
$$AC \cdot BC + (AC^2/BC) \cdot AC = AB \cdot (AC \cdot AB/BC), \text{ d.h. } BC^2 + AC^2 = AB^2$$

### Satz des Pythagoras-Beweis 31

In der oberen und mittleren Darstellung sind zwei weitere Zerlegungsbeweise zu sehen.

Der erste stammt von J.E.Böttcher. Im zweiten von S.K.Stein (Mathematics: The Man-Made Universe, Dover, 1999) wurden die Teile etwas

verändert angeordnet.



### Satz des Pythagoras-Beweis 32

untere Abbildung; nach Michelle Watkins, Math Spectrum 1997/98

$\triangle ABC$  und  $\triangle DEF$  seine zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke die so angeordnet sind, dass B auf DE liegt und A, F, C, E kollinear sind.

Es ist  $BC = EF = a$ ,  $AC = DF = b$ ,  $AB = DE = c$ . Außerdem ist AB senkrecht zu DE. Es soll die Fläche des Dreiecks  $\triangle ADE$  bestimmt werden.

$$\text{Fläche}_{\triangle ADE} = AB \cdot DE/2 = c^2/2 ;$$

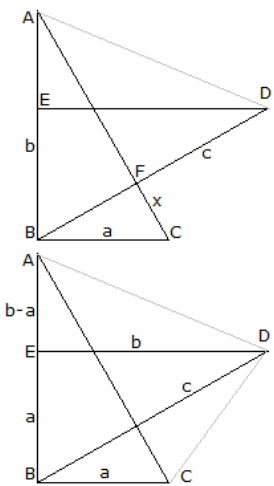
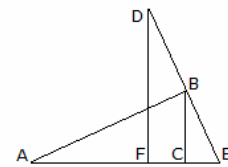
$$\text{Fläche}_{\triangle ADE} = DF \cdot AE/2 = b \cdot AE/2 \text{ und}$$

$$AE = AC + CE = b + CE.$$

CE kann aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $\triangle BCE$  und  $\triangle DFE$  ermittelt werden

$$CE = BC \cdot FE/DF = a \cdot a / b$$

$$\text{Und damit } c^2/2 = b(b + a^2/b)/2$$



### Satz des Pythagoras-Beweis 33

Dieser Beweis stammt von Tao Tong ("Mathematics Teacher", Feb. 1994).

$\triangle ABC$  und  $\triangle BED$  sind kongruente, rechtwinklige Dreiecke, wobei E auf AB liegt. Der Flächeninhalt von  $\triangle ABD$  wird auf zwei verschiedene Arten berechnet:

$$A_{\triangle ABD} = BD \cdot AF/2 = DE \cdot AB/2.$$

Mit der Schreibweise in der oberen Abbildung wird

$$c(c-x)/2 = b \cdot b/2.$$

Die Strecke  $x = CF$  ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $\triangle BFC$  und  $\triangle ABC$

$$x = a^2/c$$

und durch einfaches Einsetzen der Satz des Pythagoras.

### Satz des Pythagoras-Beweis 34

Dieser Beweis wurde von John Kawamura (Head-Rouce School, Oakland) gefunden.

Er ähnelt dem Beweis 33, nur wird dieses Mal die Fläche des Vierecks ABCD ermittelt.

Die zwei Diagonalen des Vierecks haben die Länge c, so dass für die Fläche  $c^2/2$  wird.

$$c^2/2 = A_{ABCD} = A_{BCD} + A_{ABD} = a \cdot a/2 + b \cdot b/2$$

und damit erneut der Satz des Pythagoras.

### Satz des Pythagoras-Beweis 35

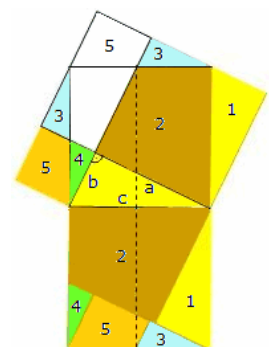
#### Beweis durch Flächenzerlegung

Jede auftretende Strecke ist zu einer Quadratseite parallel.

Die Teilflächen 1 bis 5 im Hypotenusenquadrat finden sich in den Kathetenquadraten wieder. Also muss nachgewiesen werden, dass die einzelnen Teilflächen 1 bis 5 zueinander kongruent sind.

Die Dreiecke 1 haben die Seiten a und c gemeinsam, außerdem den spitzen Winkel (Scheitelwinkel) an der Ecke, an der sie sich schneiden.

Die Vierecke 2 haben die Seiten a und c gemeinsam sowie in jeweils zwei



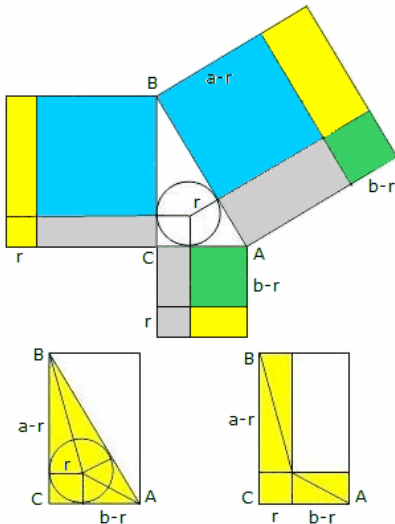
rechten Winkeln. Betrachtet man die Winkel der Vierecke 2 zwischen ihren Seiten a und c, dann erkennt man, dass auch sie übereinstimmen. Da die Kongruenzsätze für Dreiecke gelten, müssen noch die Diagonalen in den Vierecken 2 betrachtet werden.

Auf Grund der gestrichelten schwarzen Linie haben die blauen Dreiecke 3 die größere Seite gemeinsam, außerdem besitzen beide einen rechten Winkel. Einen zweiten gemeinsamen Winkel kann man leicht nachweisen.

Zwei kongruente Winkel in den Dreiecken 4 zu finden, ist kein Problem. Damit sind die Dreiecke ähnlich, jedoch noch nicht kongruent. Dies findet man, wenn man die größere der beiden Katheten von Dreieck 4 betrachtet, die ist so groß wie b im Ausgangsdreieck ABC.

Die Vierecke 5 stimmen in ihrer kleineren Seite mit der kleineren Kathete von Dreieck 3 überein, in einer anderen mit der größeren Kathete von Dreieck 4. Ferner haben beide Vierecke jeweils zwei rechte Winkel. Da sie auch in einem dritten Winkel übereinstimmen, stimmen sie in 4 Winkeln überein.

Der Beweis ist arabischen Ursprungs.



### Satz des Pythagoras-Beweis 36

Am rechtwinkligen Dreieck wird der Inkreis konstruiert. Die senkrecht auf den Dreiecksseiten stehenden Inkreisradien verlängert man wie in der Abbildung.

Blaues und grünes Quadrat in den Kathetenquadraten finden sich im Hypotenusenquadrat wieder. Man zeigt, dass die Summe der gelben Flächen in den Kathetenquadraten gleich dem gelben Rechteck im Hypotenusenquadrat ist.

Man betrachtet unten in der linken Figur das Dreieck ABC mit dem Inkreis, zusätzlich zwei Winkelhalbierende. Zwei Dreiecke links oben und die zwei Dreiecke rechts unten sind jeweils kongruent. Damit kann man das linke Rechteck in das rechte überführen.

Da das linke weiße Dreieck den Flächeninhalt  $ab/2$  besitzt, muss das rechte weiße Rechteck ebenfalls den Flächeninhalt  $(a - r)(b - r) = ab/2$

aufweisen, die Summe der farbigen Flächen im rechten Rechteck natürlich auch  $r(a - r) + r(b - r) + r^2 = ab/2$

Analog vergleicht man noch die gelben Flächen in der oberen Abbildung mit den Flächen im rechten Rechteck der unteren Abbildung und ebenso die grauen aus der oberen Abbildung.

### Satz des Pythagoras-Beweis 37

Dieser Beweis wurde von der 14jährigen iranischen Schülerin Sina Shieyan aus Sahzevar an den Betreiber der Seite <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml> gesandt.

Im Kreis mit dem Mittelpunkt M sei die Strecke AB der Durchmesser und C auf der Peripherie des Kreises. Dann ist das Dreieck ABC natürlich rechtwinklig bei C. Durch Punkt C gehe die Tangente t, von A und B seien die Lote auf t gefällt. Die Dreiecke ABC, ACQ und CBP sind damit ähnlich zueinander. Man addiert die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ und CBP

$$ACQ + CBP = CQ \cdot QA/2 + PC \cdot PB/2$$

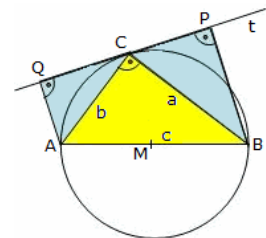
M ist Mittelpunkt von Strecke AB, Strecke MC ist senkrecht zu t und Mittelpunkt von Strecke PQ, damit wird

$$ACQ + CBP = \frac{1}{2} PQ \cdot QA/2 + \frac{1}{2} PQ \cdot PB/2$$

$$ACQ + CBP = \frac{1}{2} (PQ \cdot ((QA + PB)/2))$$

D.h.: Die Summe der Flächeninhalte der blau gefärbten Dreiecke ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Trapezes ABPQ.

Somit ist der Flächeninhalt des gelben Dreieckes ABC ist genau so groß wie die Summe der Flächeninhalte der blauen Dreiecke ACQ und CBP. Das führt unmittelbar zur Gleichung des Satzes von Pythagoras.



### Satz des Pythagoras-Beweis 38

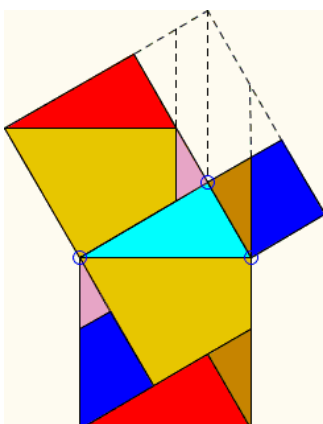
Dieser Beweis findet sich in der Sammlung von E.S.Loomis "The Pythagorean Proposition" von 1968.

<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml#Loomis>

Erstmals wurde dieser Zerlegungsbeweis 1914 von J.Versluys angegeben. Der Beweis ist durch das Einzeichnen von Hilfslinien selbsterklärend.

Eine dynamische Version findet man unter

<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/PythLoomis25G.shtml>



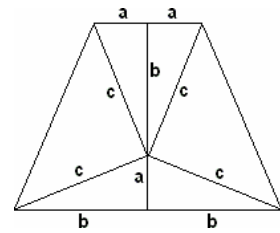
**Satz des Pythagoras-Beweis 39**

Dieser Beweis wurde 1995 in "The Mathematics Teacher" veröffentlicht und stammt von der Highschool-Schülerin Jamie deLemos. Ausgangspunkt ist ein gleichseitiges Trapez, wie in der Abbildung zu sehen. Für den Flächeninhalt des Trapezes erhält man mit der üblichen Trapezformel

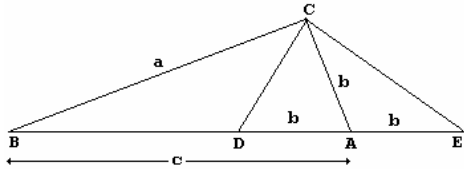
$$A = (2a + 2b)/2 \cdot (a + b)$$

Andererseits kann das Trapez aus sechs Dreiecken zusammengesetzt werden, d.h.

$$A = 2 a \cdot b/2 + 2 b \cdot a/2 + 2 c^2/2$$



Gleichsetzen und Umformen führt sofort zu  $a^2 + b^2 = c^2$ . Dieser Beweis ähnelt dem von James A. Garfield.



**Satz des Pythagoras-Beweis 40**

Veröffentlicht von J. Barry Sutton in "The Math Gazette", v 86, 2002:

Es sei im Dreieck  $\Delta ABC$  der Winkel bei  $C = 90^\circ$  und  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ . Zwei Punkte D und E werden auf der Geraden AB so festgelegt, dass  $AD = AE = b$  gilt.

C liegt damit auf einem Kreis um A mit dem Radius b. Damit ist auch der Winkel  $\angle DCE$  ein rechter, d.h.  $\angle DCE = 90^\circ$ . Somit ist  $\angle BCD = \angle ACE$ . Da  $\Delta ACE$  gleichschenkelig ist, wird  $\angle CEA = \angle ACE$ .

Die Dreiecke DBC und ECB haben den Winkel  $\angle DBC$  gemeinsam, d.h.  $\angle BCD = \angle BEC$ . Damit sind die Dreiecke  $\Delta DBC$  und  $\Delta ECB$  ähnlich.

Aus  $BC / BE = BD / BC$  wird  
und  $a^2 = c^2 - b^2$

$$a / (c + b) = (c - b) / a$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Satz des Pythagoras-Beweis 41**

Beweis nach Jack Oliver in "Mathematical Gazette 81", März 1997, Seite 117-118:

Die Fläche des Dreiecks ist  $A = r s$

wobei r der Inkreisradius und  $s = (a + b + c)/2$  der halbe Dreiecksumfang ist.

In der Abbildung ist die Hypotenuse

$$c = (a - r) + (b - r)$$

d.h.  $r = s - c$

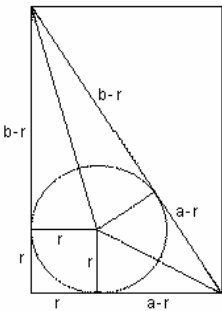
Die Fläche des Dreiecks kann dann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden

$$s (s - c) = ab/2,$$

$$(a + b + c)(a + b - c) = 2ab$$

$$\text{oder } (a + b)^2 - c^2 = 2ab$$

$$\text{Damit wird } a^2 + b^2 - c^2 = 0$$



**Satz des Pythagoras-Beweis 42**

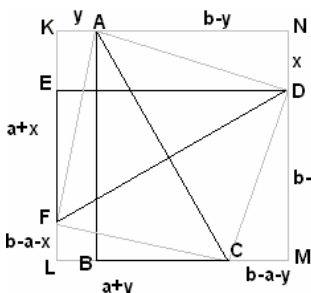
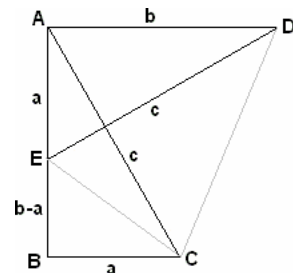
Beweis nach W.J. Dobbs in "The Mathematical Gazette 8", 1916: In der Abbildung sind zwei gleich große rechtwinklige Dreiecke ABC und ADE zu sehen, wobei E auf AB liegt. Die Fläche des Trapezes ABCD wird nun auf zwei verschiedene Arten berechnet.

$$F(ABCD) = F(AECD) + F(BCE) = c \cdot c/2 + a(b - a)/2$$

wobei  $c \cdot c$  das Produkt der beiden zueinander senkrechten Diagonalen des Vierecks AECD ist.  $F(ABCD) = AB \cdot (BC + AD)/2 = b(a + b)/2$

Kombiniert man beide Gleichungen, so wird

$$c^2/2 = a^2/2 + b^2/2 \quad \text{d.h.} \quad c^2 = a^2 + b^2$$



**Satz des Pythagoras-Beweis 43**

Die Fläche des großen Quadrates KLMN ist  $b^2$ . Die Fläche kann in vier Dreiecke und ein Viereck zerlegt werden.

$$b^2 = \text{Fläche}(KLMN) = \text{Fläche}(AKF) + \text{Fläche}(FLC) + \text{Fläche}(CMD) + \text{Fläche}(DNA) + \text{Fläche}(AFCD)$$

$$= y(a+x)/2 + (b-a-x)(a+y)/2 + (b-a-y)(b-x)/2 + x(b-y)/2 + c^2/2$$

$$= [y(a+x) + b(a+y) - y(a+x) - x(b-y) - a \cdot a + (b-a-y)b + x(b-y) + c^2]/2$$

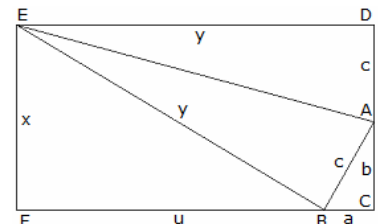
$$= [b(a+y) - a \cdot a + b \cdot b - (a+y)b + c^2]/2 = b^2/2 - a^2/2 + c^2/2.$$

**Satz des Pythagoras-Beweis 44**

Beweis von Larry Hoehn ("The Mathematics Teacher" 88, 1995):

Die Kathete AC des rechtwinkligen Dreiecks ABC wird zu einem Punkt D verlängert, sodass  $AD = AB = c$ , wie in der Abbildung, gilt.

In D wird die Senkrechte zu CD gezeichnet, in A die Winkelhalbierende des Winkels BAD. Beide Geraden schneiden sich im Punkt E. Außerdem sei EF senkrecht zu CF.



Nach Konstruktion haben die Dreiecke ABE und ADE die Seite AE gemeinsam und zwei weitere gleiche Seiten  $AD = AB$ . Außerdem ist  $\angle BAE = \angle DAE$ . Damit sind die Dreiecke ABE und ADE nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, d.h. der Winkel  $\angle ABE$  ist ein rechter. Folglich wird in den rechtwinkligen Dreiecken ABC und BEF,  $\angle ABC + \angle EBF = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = \angle BEF$  und  $\angle BAC = \angle EBF$ .

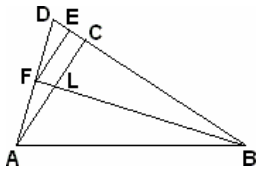
Die zwei Dreiecke sind ähnlich, d.h.

$$x/a = u/b = y/c$$

Da aber  $EF = CD$ , also  $x = b + c$ , gilt, ergibt sich  
 Andererseits ist  $y = u + a$  und somit  
 Einfache Umformungen ergeben dann  $c^2 = a^2 + b^2$ .

$$u = b(b + c)/a \text{ und } y = c(b + c)/a$$

$$c(b + c)/a = b(b + c)/a + a$$

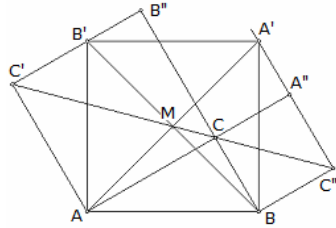


### Satz des Pythagoras-Beweis 45

B.F.Yanney und J. A. Calderhead in "Am. Math Monthly" 6/7 (1896):  
 ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C.  
 Die Seite BC wird nach einem Punkt D verlängert, so dass  $BD = AB$  ist. A und D werden verbunden. Von E, dem Mittelpunkt der Strecke CD, wird eine Senkrechte auf AD gezogen mit dem Fußpunkt F. B und F werden ebenfalls verbunden.

Das Dreieck  $\triangle ADC$  ist ähnlich zum Dreieck  $\triangle BFE$ . Dann ist  $AC / BE = CD / EF$   
 Aus  $CD = BD - BC = AB - BC$  wird  $BE = BC + CD/2 = BC + (AB - BC)/2 = (AB + BC)/2$   
 und  $EF = AC/2$ . Und damit  $AC \cdot AC/2 = (AB - BC) \cdot (AB + BC)/2$

Dies führt einfach zu  $AB^2 = AC^2 + BC^2$

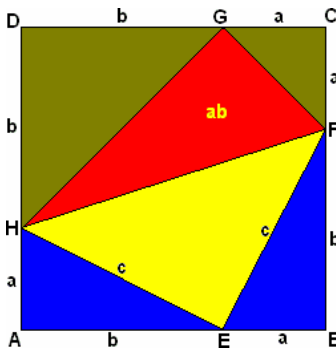


### Satz des Pythagoras-Beweis 46

Beweis von Floor van Lamoen:  
 In der Abbildung sei M der Mittelpunkt des Quadrats  $ABA'B'$ . Das Dreieck  $\triangle AB'C'$  entsteht durch Rotation des Dreiecks  $\triangle ABC$ .  
 Punkt  $B'$  liegt auf  $C'B''$ ;  $A'$  liegt auf  $A''C''$ . Es sind damit  $AA''$  und  $BB''$  gleich  $a + b$ . Der Abstand von M zu  $AC'$  bzw. zu  $B'C'$  ist gleich  $(a + b)/2$ .  
 Dann folgt

$$\begin{aligned} \text{Fläche}(\triangle AMB'C') &= \text{Fläche}(\triangle MAC') + \text{Fläche}(\triangle MB'C') \\ &= (a + b)/2 \cdot b/2 + (a + b)/2 \cdot a/2 = a^2/4 + ab/2 + b^2/4. \end{aligned}$$

Es ist aber auch  $\text{Fläche}(\triangle AMB'C') = \text{Fläche}(\triangle AMB') + \text{Fläche}(\triangle AB'C') = c^2/4 + ab/2$ .  
 woraus  $a^2/4 + b^2/4 = c^2/4$  und somit der Satz des Pythagoras.



### Satz des Pythagoras-Beweis 47

Beweis von Floor van Lamoen:  
 Die Strecke FH teilt ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge  $a + b$  in zwei kongruente Vierecke ABFH und CDHF.

Das untere Viereck besteht aus zwei gleichen rechtwinkligen Dreiecken mit der Fläche  $ab/2$  und einem gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck mit der Fläche  $c^2/2$ .

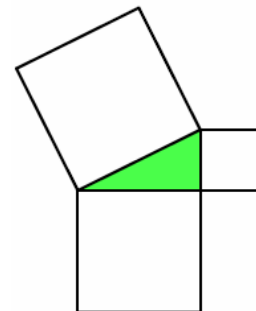
Das obere Viereck CDHF enthält zwei gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke, eines mit dem Flächeninhalt  $a^2/2$ , das andere mit  $b^2/2$ , sowie einem rechtwinkligen Dreieck mit der Fläche  $ab$ .

Werden gleichgroße Flächen bei beiden Vierecken abgezogen, so wird

$$a^2/2 + b^2/2 = c^2/2.$$

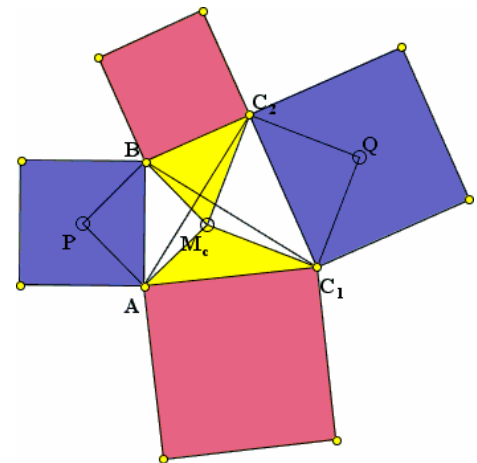
### Satz des Pythagoras-Beweis 48

Beweis von Floor van Lamoen:  
 Gegeben seien zwei Quadrate  $APBM_c$  und  $C_1M_cC_2Q$  mit der gemeinsamen Ecke  $M_c$ .



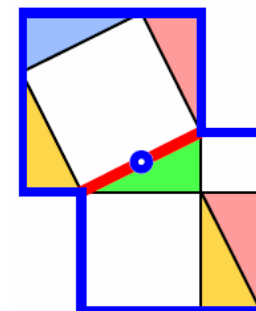
Bei einer Rotation von  $90^\circ$  um  $M_c$  in positiver Richtung gehen  $C_1M_c$  in  $C_2M_c$  über und  $BM_c$  in  $AM_c$ . Das bedeutet, dass  $DBM_cC_1$  in  $DAM_cC_2$  überführt wird und somit  $AC_2$  und  $BC_1$  zueinander senkrecht sind.

Das Viereck  $ABC_2C_1$  hat somit orthogonale Diagonalen und die roten und blauen Quadrat der Abbildung haben jeweils zusammen die gleiche Fläche. Die Summe der Flächen der Originalquadrate  $APBM_c$  und  $C_1M_cC_2Q$  ist halb so groß. Verschiebt man nun  $M_c$  in den Schnittpunkt der Diagonalen ergibt sich aus Symmetriegründen, dass die roten Quadrate flächengleich sind und die Flächeninhalte von  $APBM_c$  und  $C_1M_cC_2Q$  zusammen gerade den roten Quadraten entsprechen!



### Satz des Pythagoras-Beweis 49

Beweis von Hans Walser, 2004:  
 Die klassische Figur zum Satz des Pythagoras wird wie in der unteren Abbildung ergänzt.  
 Diese neue Figur hat einen punktsymmetrischen Umriss; das Symmetriezentrum



ist der Mittelpunkt der Hypotenuse. Zum Beweis wird die Figur an der Taille in zwei gleiche Teile zerlegt. Der untere Teil ist flächenmäßig gleich groß wie der obere Teil. Es bezeichne  $\Delta$  den Flächeninhalt des Dreieckes. Damit ist:  $a^2 + b^2 + 3\Delta = c^2 + 3\Delta$  und somit  $a^2 + b^2 = c^2$

### Satz des Pythagoras in den Sulbasutras

Das Sulbasutras waren Anhänge zu den indischen Veden, in denen Richtlinien für das Konstruieren der Altäre gegeben wurden. Sie sind damit die ältesten mathematischen Schriften Indiens und wurden über Jahrhunderte hinweg ergänzt. In diesen findet sich auch der Satz des Pythagoras.

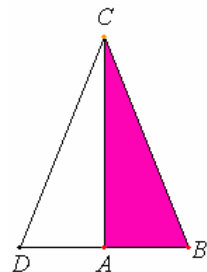
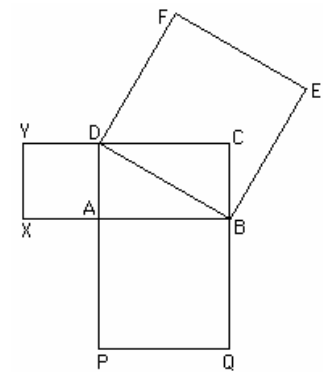
Das Baudhayana Sulbasutra (800 v.Chr.) gibt nur einen speziellen Fall vom Theorem:

"Das Seil, das über die Diagonale eines Quadrats ausgedehnt wird, produziert einen Bereich doppelter Größe des ursprünglichen Quadrats."

Das Katyayana Sulbasutra (200 v.Chr.) jedoch, gibt eine allgemeinere

Version (siehe Abbildung): "Das Seil, das entlang die Länge der Diagonale eines Viereckes ausgedehnt wird, produziert einen Bereich den die vertikalen und horizontalen Seiten zusammen bilden."

Die Aussagen wurden in "Seilen" ausgedrückt, da diese zur Konstruktion der Altäre genutzt wurden. An weiteren Stellen der Sulbasutras finden sich viele Beispiele für pythagoräische Dreiergruppen, zum Beispiel: (5, 12, 13), (12, 16, 20), (8, 15, 17), (15, 20, 25), (12, 35, 37), (15, 6, 39), (5/2, 6, 13/2) und (15/2, 10, 25/2)



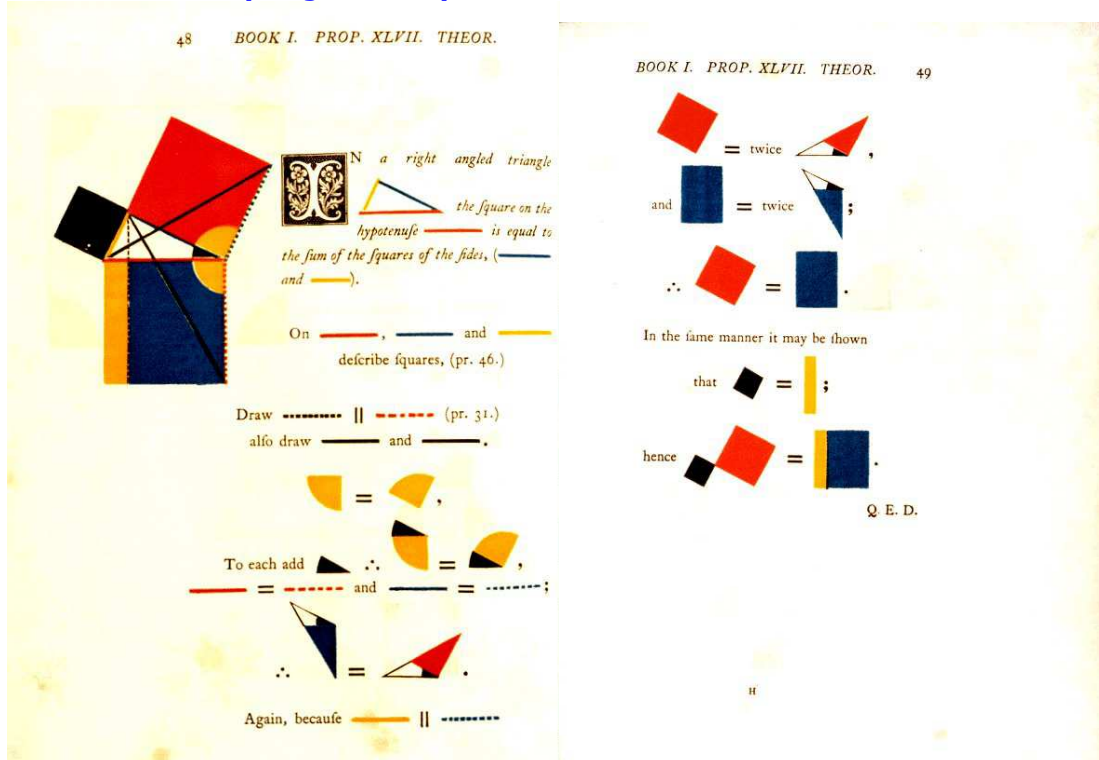
### Satz des Pythagoras - Umkehrung

Euklids "Elemente": § 48 (L. 34):

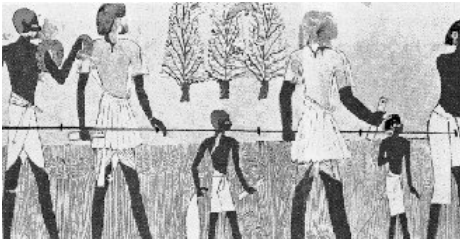
Wenn an einem Dreieck das Quadrat über einer Seite den Quadraten über den beiden anderen Seiten zusammen gleich ist, dann ist der von diesen beiden übrigen Seiten des Dreiecks umfasste Winkel ein Rechter.

Am Dreieck ABC sei nämlich das Quadrat über den einen Seite BC den Quadraten über den Seiten BA, AC zusammen gleich. Ich behaupte, dass  $\angle BAC$  ein Rechter ist. Man ziehe AD vom Punkte A aus  $\perp$  zur geraden Linie AC (I, 11), mache  $AD = BA$  und ziehe AC. Da  $DA = AB$ , ist auch  $DA^2 = AB^2$ . Man füge  $AC^2$  beiderseits hinzu; dann sind  $DA^2 + AC^2 = BA^2 + AC^2$ . Aber  $DA^2 + AC^2 = DC^2$ ; denn  $\angle DAC$  ist ein Rechter (I, 47). Andererseits ist  $BA^2 + AC^2 = BC^2$ ; dies hatten wir nämlich vorausgesetzt. Also ist  $DC^2 = BC^2$ , so dass auch die Seite  $DC = BC$ . Da ferner  $DA = AB$  ist und AC gemeinsam, so sind zwei Seiten DA, AC zwei Seiten BA, AC gleich; auch ist Grdl.  $DC =$  Grdl.  $BC$ ; also ist  $\angle DAC = \angle BAC$  (I, 8).  $\angle DAC$  ist aber ein Rechter; also ist auch  $\angle BAC$  ein Rechter.

### Beweis des Satzes des Pythagoras in Byrns „Elementen“







### Satz des Pythagoras in Ägypten

Über die Entstehung des Lehrsatzes von Pythagoras existieren keine gesicherten Erkenntnisse. Sicher ist, dass der Lehrsatz bereits vor Pythagoras in vielen Hochkulturen bekannt war. Bereits im antiken Ägypten zur Zeit Amenemats I. um 2300 v.u.Z. war das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 bekannt.

Die sogenannten Seilspanner, die Harpenodapten, hatten die Aufgabe, rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 zu konstruieren. Dazu verwendeten sie ein 12 Längeneinheiten langes Seils, das im Abstand einer Längeneinheit einen Knoten hatte und an beiden Enden zusammen geknotet wurde. Wird das Seil nun am ersten, vierten und achten Knoten festgehalten und gespannt, entsteht am vierten Knoten ein rechter Winkel. Abbildung: Malerei im Grab des Mena in Theben (1420 v.u.Z.)

Ein Inschrift am Tempel von Abydos beschreibt die Gründung des Tempels durch Pharaos Sethos I (um 1445 v.u.Z.):

"Die Göttin Sefech spricht zu ihm: Der Schlegel in meiner Hand war von Gold, als ich schlug den Pflöck mit ihm, und Du warst bei mir in Deiner Eigenschaft als Harpedonapt. Deine Hand hielt den Spaten beim Feststellen der vier Ecken des Tempels in Genauigkeit gemäß den vier Seiten des Himmel."

Auf den zugehörigen Bildern sieht man den König mit der Osiris-Krone, ihm gegenüber die Göttin. Beide halten in der Rechten eine Keule und schlagen damit je einen langen Pflöck in den Boden. Um die zwei Pfeile läuft ein an den Ecken zusammengebundenes Seil, das straff angezogen wird.

### Pythagoreische Dreiecke in der Antike

Westeuropa:

In der Jungsteinzeit (4500-2000 v.u.Z.) entstanden monumentale, megalithische Grabmäler und Kulturstätten. Die meisten dieser Kultstätten findet man in Südengland, z.B. in Stonehenge. Sie sind ringförmig von großen Steinen umgeben. Im Laufe der Zeit wurden auch Ellipsen verwendet. Bei Ellipsen bilden die Halbachsen und die lineare Exzentrizität ein rechtwinkliges Dreieck, mit der großen Halbachse als Hypotenuse. Man geht davon aus, dass den Erbauern dieser Monumente, die Tatsache, dass man aus primitiven pythagoreischen Zahlentripeln rechtwinklige Dreiecke erhält, bekannt gewesen ist.

Ägypten:

In Ägypten gehören die Pyramiden, Kolossalstatuen und Tempel zur megalithischen Architektur. In den Plänen der Stufenpyramide des Djoser findet man Dreiecke, von welchen sich einige als pythagoreische Dreiecke mit folgenden primitiven pythagoreischen Zahlentripeln, nachweisen ließen:

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8,15,17), (13, 84, 85), (20, 21, 29), (44,117,125), (48, 55, 73), ...

Es ist fraglich, ob dem Erbauer die Beziehung  $a^2 + b^2 = c^2$  bekannt war.

Babylonier:

Aus der Zeit um 1700 v.u.Z. stammt eine Tontafel mit altbabylonischer Keilschrift, bekannt unter dem Namen "Plimpton 322", die erkennen lässt, dass die Babylonier zur damaligen Zeit bereits über ein Verfahren zur Konstruktion pythagoreischer Zahlentripel verfügten.

Auch die Kenntnis des Zusammenhanges dieser Zahlentripel mit den Seiten und Diagonalen eines Rechtecks, d.h. mit dem Lehrsatz des Pythagoras, ist sich auf Grund einer geometrischen Deutung auf der Tontafel nachweisbar.

Sind  $p, q$  natürliche Zahlen mit  $p > q$  und  $\text{ggT}(p, q) = 1$ , so wird mit  $r = p/q$  aus

$$\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right)^2 = \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2r}\right)^2 + 1$$

mit  $(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2$  ein pythagoreisches Zahlentripel.

Pythagoras von Samos:

"Zu jeder ungeraden Zahl  $u$  lässt sich die Quadratzahl  $u^2$  als ein "Haken" (Gnomon) darstellen, der das



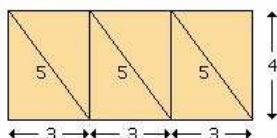
Quadrat mit der Seitenlänge  $(u^2 - 1)/2$  zu einem Quadrat mit der Seitenlänge  $(u^2 + 1)/2$  ergänzt, weshalb sich das Tripel  $((u^2 - 1)/2, u, (u^2 + 1)/2)$  als ein pythagoreisches Tripel erweist, das überdies stets primitiv ist."

### Bergers 4:9-Theorie

1980 veröffentlichte der Schweizer Historiker E. Berger in seinem Buch "Bauwerk und Plastik des Parthenon" (Basel) seine 4:9-Theorie.

Berger geht davon aus, dass auch beim Bau des Tempels der Athena Parthenon auf der Akropolis der Satz des Pythagoras eine zentrale Rolle spielte.

Dabei ist ein Verhältnis von 4:9 grundlegend. Das Basisrechteck mit den Seitenlängen 4 und 9 wurde dabei erzeugt, in dem 3 Rechtecke mit den





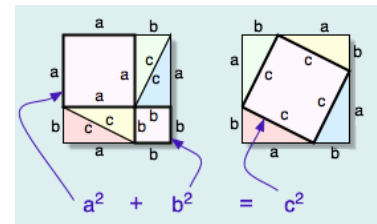
Seitenlängen 3 und 4 und der Diagonale 5 nebeneinander angeordnet wurden. Damit gelang es auch, die rechten Winkel absolut exakt zu konstruieren.

Die Länge des Parthenontempels ist 69,5 m, die Breite 30,88 m und die Höhe 13,72 m. In sehr hoher Genauigkeit ergeben sich dann die Verhältnisse Breite : Länge = 4 : 9 und Höhe : Breite = 4 : 9.  
Quelle: J.J. O'Connor, E.F. Robertson

### Pythagoras-Gedicht

Durch den englischen Astronomen George Airy wurde ein Beweis des Satzes des Pythagoras in Gedichtform verfasst:

"I am, as you can see,  
 $a^2 + b^2 - ab$   
 When two triangles on me stand,  
 Square of hypotenuse is plann'd  
 But if I stand on them instead  
 The squares of both sides are read."



### Pythagoras-Gedicht (2)

Ich weiß nicht, was soll es bedeuten,  
 Dass ich so traurig bin.  
 Ein Lehrsatz aus alten Zeiten,  
 Der kommt mir nicht aus dem Sinn.  
 Drei Winkel, wovon ein rechter,  
 Sind mit drei Seiten verwandt.  
 Und diese noblen Geschlechter  
 Regieren Leut' und Land.

Die schönste der Hypotenusen  
 Thront oben wunderbar.  
 Es schlummert an ihrem Busen  
 Ein holdes Kathetenpaar!  
 Sie thront auf hohem Quadrate

Und singt ein Lied dabei,  
 Das hat eine pythagorate  
 Gewaltige Melodei.

Der Welt unendlich Getriebe  
 Ergreift es mit wildem Weh,  
 Sie schwärmt in glühender Liebe  
 Für  $a^2, b^2, c!$   
 Sogar die kühlen Kometen  
 Erfasst ein feuriger Wahn, -  
 Und das hat mit ihren Katheten  
 Die Hypotenuse getan.  
 (frei nach Heinrich Heine)



### Satz des Pythagoras - Rätsel

Da der Satz des Pythagoras zu den bekanntesten mathematischen Sätzen überhaupt gehört, findet er auch schon immer Einzug in Kinder- und Jugendliteratur. So tritt im Heft 27 "Die neue Sonne" (Februar 1959!) der DDR-Comiczeitschrift "Mosaik" folgendes Rätsel auf:

Von Süden bis nach Norden geh,  
 das Planetarium und das Kreuz  
 sind B und C.  
 Von C geh ostwärts bis nach A,  
 der Drei, Vier, Fünf gedenke da.  
 Des Kreises Zentrum dich zum  
 Ziele führt,  
 der mit den Seiten a, b, c tangiert.

Gelöst wird das Rätsel in dem Comic vom Wissenschaftler Sinus Tangentus, der als Lösung das rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 und als Zielpunkt den Mittelpunkt des Inkreises dieses Dreiecks erkennt.

### Belchendreieck

Im Dreiländereck Frankreich, Schweiz und Deutschland erheben sich drei Berge, die alle den gleichen Namen tragen: Belchen; einer liegt im Westen in den Vogesen, einer im Osten im Schwarzwald und einer im Süden im Jura. Zum Frühlings- und Herbstanfang geht die Sonne, vom westlichen Belchen aus gesehen, direkt über dem östlichen auf; umgekehrt geht die Sonne, vom östlichen aus gesehen, genau hinter dem westlichen unter. Im Winter, am Tag der Sonnenwende, spielt sich das gleiche zwischen dem westlichen und dem südlichen Belchen ab.

Der östliche und der südliche Gipfel liegen mit geringer Abweichung in der Nord-Südachse, so dass das Belchendreieck annähernd rechtwinklig ist.

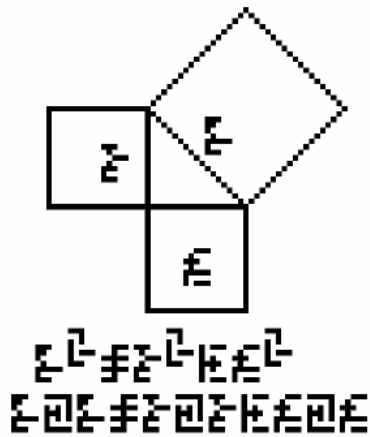
Interessant ist, dass sich das Seitenverhältnis des Dreiecks des elsässer Belchen, des badischen Belchen und des Basler Belchen wie 3 : 4 : 5 (ägyptisches, pythagoreisches Dreieck) verhält, mit einer Abweichung zwischen 3 und 4 von etwa 3 %.



Das die Bezeichnung der Berge nicht Zufall ist, zeigt die Bedeutung des Wortes "Belchen" sowie die geometrische Anordnung der Berge. Die vom indoeuropäischen "bhel" hergeleitete Wurzel mit der Bedeutung "glänzend, schimmernd, hell" liegt auch dem Namen des keltischen Sonnengottes "Belenus" zu Grunde.

siehe [http://www.regbas.ch/d\\_belchendreieck.cfm](http://www.regbas.ch/d_belchendreieck.cfm)

Bedauerlich ist, dass das Belchendreieck heute (2011) zum Tummelplatz esoterischer Spinner verkommen ist.



### Satz des Pythagoras, Episode

Der Satz des Pythagoras wurde im Zuge der Suche nach außerirdischer Intelligenz am 24.5.1999 ins All gefunkt.

Die kanadischen Astronomen Dutil und Dumas fokussierten an diesem Tag eine 23-seitige Botschaft in, hoffentlich, kulturunabhängiger Codierung auf Nachbarsterne unserer Galaxis, die als mögliche "Sonnenn" von Planetensystemen in Frage kommen.

Die Botschaft wurde vom Observatorium in Evpatoriya (Ukraine) ausgesandt. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt.

Hoffentlich schließen die Aliens nicht daraus, dass wir den Satz des Pythagoras nur für gleichschenklige Dreiecke kennen.

Quelle: Manfred Boergens - Briefmarke des Monats Juli - August 2002

### The Wizard of Oz

Im Film "Der Zauberer von Oz" von 1939 rezitiert die Vogelscheuche, nachdem sie vom Zauberer ein Gehirn erhalten hat, den Satz von

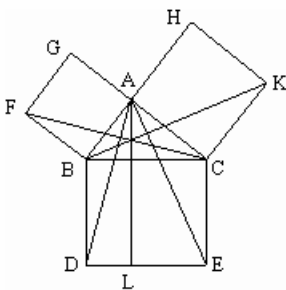
Pythagoras; natürlich falsch!!!

"The sum of the square roots of any two sides of an isosceles triangle is equal to the square root of the remaining side."

d.h., die Summe der Quadratwurzeln von zwei Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks ist gleich der Quadratwurzel aus der restlichen Seite. Da Millionen von Kindern so den Satz von Pythagoras zum ersten Mal hören, kann man nur hoffen, dass sie nicht zuhören. :-)

Übrigens zitiert Homer J.Simpson in der 5.Staffel von "The Simpsons" die Vogelscheuche, und natürlich wieder falsch!

In der deutschen Synchronfassung nennt der Scheuch den Satz des Pythagoras korrekt! Absicht oder Übersetzungsfehler?



### Satz des Pythagoras, Episode 2

Der heute als Satz des Pythagoras bekannte Zusammenhang am rechtwinkligen Dreieck wurde in früheren Zeiten nicht nach Pythagoras benannt.

In Bezug auf die Form der geometrischen Figur oder die Bedeutung wurde der berühmte Satz auch Braut-Satz (antikes Griechenland)

Brautstuhl (antike Hindu-Mathematik)

Figur der Verheirateten (persische Mathematik)

Meister der Mathematik (Mittelalter)

genannt. Im Französischen sprach man auch von "Invention digne d'une hécatombe" oder "Pont-aux-ânes" (Binsenwahrheit).

Die wörtliche Übersetzung von "Invention digne d'une hécatombe" =

"Würdige Entdeckung mit 100 Stieropfern" bezieht sich auf die Legende, dass Pythagoras die Entdeckung des Lehrsatzes mit 100 geopfert Stieren gefeiert haben soll.

Bei Diogenes Laërtus heißt es dazu:

"Als Pythagoras einst die berühmte Zeichnung gefunden,  
Brachte als Opfer er dar herrliche Stiere dem Gott"

Da Pythagoras Vegetarier war und an Seelenwanderung glaubte, ist die Legende äußerst fragwürdig.

### Satz des Pythagoras, Anwendungsaufgaben

1. Ein rechteckiger Holzrahmen ist 90 cm lang und 56 cm breit. Er wird durch eine Latte in der Diagonalen verstärkt. Wie lang muss die Latte sein?

2. Eine Leiter von 34 Metern Länge steht 3 Meter von der Mauer entfernt. In welcher Höhe liegt die Leiter an der Mauer an?

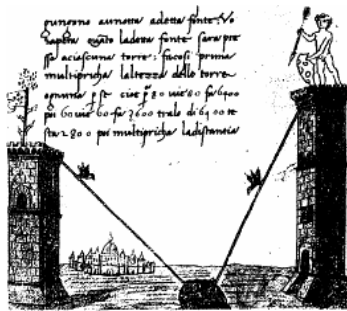
3. Ein quadratisches Schild mit einer Seitenlänge von 110 cm wird in zwei gegenüberliegenden Ecken befestigt. Wie weit liegen die Ecken auseinander?

4. Ein Hotel brennt im zweiten Stock, der sich 8 Meter über dem Boden befindet. Das Feuerwehrauto hält in 3 Metern Entfernung. Wie lang muss die Leiter ausgefahren werden, damit gelöscht werden kann?

- Ein Brückenpfeiler, der 25 Meter hoch ist, soll in einer Entfernung von 15 Metern mit einem Stahlseil im Boden verankert werden. Wie lang ist das Stahlseil?
- Eine Seiltanzgruppe will von der Spitze eines 60 Meter hohen Turmes ein 250 Meter langes Seil zur Erde spannen. Reicht der vor dem Turm liegende Platz von 220 Metern Breite dazu aus?
- Eine 4,5 Meter lange Eiche steht von einer Hauswand 1,8 Meter entfernt. Bei Sturm kippt die Eiche gegen die Wand. In welcher Höhe berührt sie die Hauswand?

### Lösungen

- 1,06 Meter, 2. 33,87 Meter, 3. 1,56 Meter, 4. 8,54 Meter, 5. 29 Meter, 6. Nein, der Platz ist 22,69 Meter zu kurz, 7. 4,12 Meter



### Satz des Pythagoras, Anwendungsaufgaben

#### Aufgabe 1

Die Zeichnung stammt aus dem handgeschriebenen und reich bebilderten Rechenbuch des Filippo Calandri aus dem Jahre 1491. Es wird in der Bibliothek von Florenz aufbewahrt.

Auf einem ebenen Feld stehen zwei Türme, einer 60 Fuß hoch, der andere 80 Fuß hoch. Ihr Abstand beträgt 100 Fuß. Für die beiden Vögel ist der Weg von der Turmspitze bis zu einem Brunnen zwischen den Türmen gleich weit.

Wie weit ist der Brunnen von den Türmen entfernt?

Lösung:

- d: Abstand des linken Turms vom Brunnen in Fuß;  
 (100-d): Abstand des rechten Turms vom Brunnen in Fuß  
 s: Abstand der beiden Turmspitzen vom Brunnen in Fuß

$$60^2 + d^2 = s^2 \text{ und } 80^2 + (100-d)^2 = s^2$$

$$60^2 + d^2 = 80^2 + (100-d)^2 \rightarrow d = 64$$

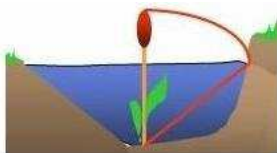
Der linke Turm steht 64 Fuß und der rechte 36 Fuß vom Brunnen entfernt.

#### Aufgabe 2

In einem Glockenturm hängt das Seil zum Läuten der Glocke. Wenn man das Ende des Seils um 2 m seitlich aus der Ruhelage bewegt, so hebt sich das Seilende dabei um 10 cm. Berechne die Länge des gespannten Seils.

Lösung: l ... Länge des Seils in m

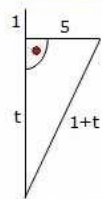
$$(l - 0,01)^2 + 2^2 = l^2 \rightarrow l = 20,05 \dots \text{ Das Seil ist } 20,05 \text{ m lang.}$$



#### Aufgabe 3: China, 13. Jahrhundert

Fünf Fuß vom Ufer eines Teiches entfernt rage ein Schilfrohr einen Fuß über das Wasser empor. Man ziehe seine Spitze an das Ufer wie in der Abbildung, dann berühre sie gerade den Wasserspiegel. Wie tief ist der Teich?

Lösung:  $5^2 + t^2 = (1 + t)^2 \dots t = 12$



#### Aufgabe 4: aus einem Rechenbuch des 15. Jahrhunderts

Ein 10 Fuß hoher Baum ist so geknickt, dass seine Spitze 3 Fuß entfernt den Boden berührt. Wie hoch liegt der Bruch?

Lösung:  $3^2 + x^2 = y^2$  und  $y = 10 - x$

Die quadratische Gleichung ergibt 4,05 Fuß Höhe für den noch stehenden Baumstumpf und den Rest bis 10 Fuß für die Krone mit Teilstamm.



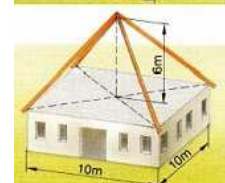
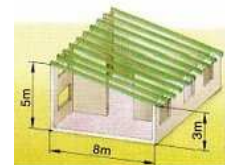
#### Aufgabe 5:

(untere Abbildung) Herr Mustermann fühlt sich mit seinem Kleinwagen von 3,20 m Länge und 1,60 m Breite hoffnungslos zugeparkt, weil nach vorn und hinten jeweils nur 30cm Rangierplatz sind.

Die Diagonale des Kleinwagens hat die Länge:

$$d = \sqrt{(3,22 + 1,62)} = 3,58 \text{ m.}$$

Der Platz zwischen den äußeren Wagen ist aber  $3,20 \text{ m} + 2 \cdot 0,30 \text{ m} = 3,80 \text{ m}$ . Es ist zwar knapp, aber mit etwas Mühe kann man noch ausparken.



#### Aufgabe 6: Dachsparren

Berechne für jedes abgebildete Gebäude die Länge eines Dachsparren. Jeder Dachsparren soll dabei 40 cm überstehen.

Lösung: Sparrenlängen (a) = 5,4 m ; (b) 9,05 m ; (c) 9,67 m

### Aufgabe 7: Wäscheleine

Zwischen zwei Pfählen mit einem Abstand von 3,80 m ist waagrecht eine dehnbare Wäscheleine straff gespannt.

(a) Hängt man z.B. in die Mitte der Leine einen Bügel mit einem nassen Wäschestück, senkt sich die Wäscheleine um 20 cm. Wie stark hat sich die Wäscheleine gedehnt?

(b) Die Wäscheleine ist bis zu 8% ihrer Länge dehnbar. Um wie viel cm dürfte sich die Wäscheleine höchstens senken, ohne zu zerreißen?

Lösung: (a) Dehnung 2,1 cm ; (b) Senkung maximal 60 cm

### Aufgabe 8: Zahnradbahn

(a) Die steilste Zahnradbahn der Welt fährt auf den Pilatus (Schweiz). Auf einem Streckenabschnitt von 1130m Länge überwindet sie gleichmäßig einen Höhenunterschied von 489 m.

Wie lang erscheint dieser Streckenabschnitt auf einer Karte im Maßstab 1 : 25000?

(b) Eine andere Zahnradbahnstrecke erscheint auf einer Karte 12 cm lang (Maßstab 1 : 10000). Die wirkliche Streckenlänge beträgt 1250 m. Wie groß ist der Höhenunterschied?

Lösung: (a) Strecke 1018,71 m; auf der Karte 4,07 cm ; (b) Höhenunterschied = 350 m

### Aufgabe 9: Pfostenschuss

Elfmeter! Olaf knallt den Ball in einer Höhe von 1,50 m an den Pfosten. Welche Strecke legt der Ball dabei mindestens zurück? Das Tor ist 7,32 m breit und 2,44 m hoch.

Lösung: Strecke minimal 11,69 m

5 Вычислите наименьшую диагональ правильного пятиугольника, сторона которого равна  $a = 1$  см.

### Aufgabe 10

A small candle is in the shape of a cone which fits exactly on top of a cylinder. The cylinder has a radius of length 2 cm. The slant length of the cone is 2.5 cm. The volume of the cylinder is 5 times the volume of the cone.

Calculate (i) the height,  $h$ , of the cone (ii) the total height of the candle.

6 La ortanto de egallatera triangulo estas dek du centimetroj. Kalkulu triangulajn laterojn kaj radiuson de ĉirkaŭskribita cirklo.

### Aufgabe 11

Soit un rectangle ABCD tel que  $AB = 8$  cm et  $BC = 6$  cm. La perpendiculaire à (BD) passant par A coupe BD en H. Calculer AH.

### Aufgabe 12

Dans un trapèze isocèle MNPQ ((NP) || (MQ)):  $MN = 6,5$  cm;  $NP = 4$  cm;  $MQ = 9$  cm. 1° Faire une figure 2° Calculer la hauteur de ce trapèze et son aire

3° Donner la longueur à 0,1 centimètre près de chacune des diagonales.

### Aufgabe 13

Triangulum rectangulum isosceles est. Longitudo hypotenusae quinque centimetri. Quantus cathetus est?



### Satz des Pythagoras, Anwendungsaufgabe

Dem Mittelstürmer Hofinger beim FC Pythagoras, an sich ein sicherer Elfmeterschütze, gelang einmal das Kunststück, in einem Spiel gleich 4 Elfmeter zu verschießen.

a) Einmal traf er den Fuß des Tormanns, der genau in der Mitte des Tores auf der Linie stand.

b) Dann traf er genau in der Mitte die Querlatte des Tores.

c) Beim dritten Versuch prallte der Ball an die linke untere Stange.

d) Und beim vierten Versuch traf der Schütze mit dem Ball genau das Lattenkreuz!

Berechnen Sie in allen Fällen die Entfernung vom Elfmeterpunkt!

Hinweis: Ein Fußballtor ist 8 yards breit (1 yard = 914,4 mm) und 8 feet hoch (1 foot = 304,8 mm). Der Elfmeter wird aus einer Entfernung von 12 yards geschossen.

Lösung: Die Abmessungen: Tor 7,32 m x 2,44 m; Elfmeter 10,97 m

a) 10,97 m ; b) 11,24 m ; c) 11,56 m ; d) 11,82 m

Aufgabe 2: Ein Handballtor hat folgende Abmessungen: Breite 3m, Höhe 2m.

Welche Diagonale muss ein Tormann somit abdecken?

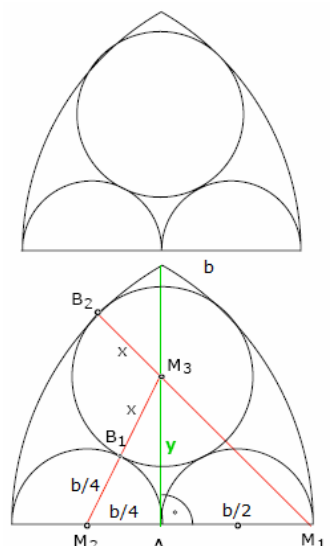
Ergebnis: 3,61 m

### Satz des Pythagoras, Anwendungsaufgabe

Aufgabe: Berechne die unbekanntenen Radien aus der Breite  $b$  der Figur.

Lösung:

Als grundsätzliche Überlegung gilt: Wenn sich zwei Kreise berühren, dann





liegen der Berührungspunkt und ihre Mittelpunkte auf einer Geraden.  
 Werden die Berührungsradien eingezeichnet, so liegt  $B_1$  auf einer Geraden mit  $M_2$  und  $M_3$ ,  $B_2$  liegt auf der Geraden  $M_1M_3$  (rot). Die grüne Linie ist die Symmetrieachse.  
 Die Strecke  $AM_1 = y$  kann entweder aus dem Dreieck links  $AM_2M_3$  oder aus dem Dreieck rechts  $AM_1M_3$  berechnet werden. Es wird

$$\begin{aligned} M_2M_3 &= M_2B_1 + B_1M_3 = b/4 + x \\ M_1M_3 &= M_1B_2 - B_2M_3 = b - x \\ \text{d.h. } (x + b/4)^2 - (b/4)^2 &= y^2 = (b - x)^2 - (b/2)^2 \\ x^2 + xb/2 + b^2/16 - b^2/16 &= b^2 - 2bx + x^2 - b^2/4 \\ bx/2 + 2bx &= b^2 - b^2/4 \\ 5/2 bx &= 3/4 b^2 \\ x &= 3/10 b \end{aligned}$$

Die Halbkreise haben die Radien  $b/4$  und der eingezeichnete volle Kreis den Radius  $3/10 b$ .

### Satz des Pythagoras, historische Aufgaben

In altbabylonischen Texten, altindischen Handbüchern und chinesischen Rechenbüchern spielt die Berechnung von Diagonalen aus Rechteckseiten in vielen Aufgaben eine bedeutende Rolle.

#### Chinesisches Rechenbuch

"Ein Bambusstamm ist 10 Fuß hoch. Die Spitze wurde abgeknickt und berührt den Boden in 3 Fuß Entfernung von der Wurzel. In welcher Höhe befindet sich die Knickstelle?"

Lösung:

Die Knickstelle befindet sich in  $x$  Fuß Höhe. Es gilt  $3^2 + x^2 = (10 - x)^2$ , daraus folgt  $x = 91/20$  Fuß.

"Im Mittelpunkt eines quadratischen Teiches von 10 Fuß Seitenlänge wächst ein Schilfrohr, das sich 1 Fuß über das Wasser erhebt. Treibt der Wind das Schilfrohr ans Ufer zur Mitte einer Seite hin, so berührt es gerade den Rand des Teiches. Wie tief ist der Teich?"

Lösung:

Die Wassertiefe sei  $x$  Fuß. Es gilt  $x^2 + 5^2 = (x + 1)^2$ , daraus folgt  $x = 12$  Fuß.

#### Altbabylonischer Text

"Ein Balken ist 30 Ellen lang. Von oben ist er um 6 Ellen herabgekommen. Wie weit hat er sich von unten entfernt?"

Lösung:

Die Entfernung zwischen dem Berührungspunkt des Balkens am Boden und der Wand wird mit  $x$  Ellen angenommen. Es ist  $x^2 + (30-6)^2 = 30^2$ , daraus folgt  $x = 18$ .

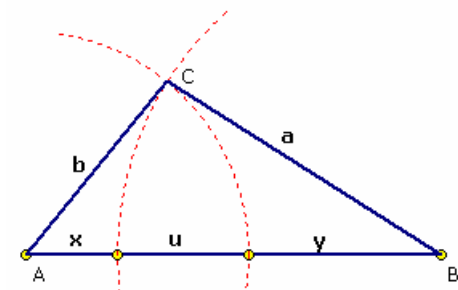
#### Indische Aufgabensammlung

"Zwei Vögel sitzen auf verschiedenen hohen Stangen; Sie fliegen nun auf ein zwischen den Stangen am Boden liegendes Ziel zu. Wo muss dieser Zielpunkt liegen, wenn die Wege der beiden Vögel gleich lang sein sollen?"

Lösung:

$a$  und  $b$  seien die Höhen der Stangen mit  $a > b$ ,  $d$  sei ihre Entfernung am Boden und  $x$  die Entfernung des Punktes von der kürzeren Stange.

Daraus folgt:  $b^2 + x^2 = a^2 + (d - x)^2$  und  $x = (a^2 - b^2 + d^2)/(2d)$



#### Allgemeiner Satz des Pythagoras

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Um A und B werden Kreisbögen mit den Radien  $b$  und  $a$  gezeichnet und mit der Seite  $c$  zum Schnitt gebracht, wodurch 3 Abschnitte entstehen. Der bei A beginnende Abschnitt der Seite  $c$  sei  $x$ , der mittlere Abschnitt  $u$  und der bei B endende Abschnitt  $y$ .

Dann gilt:

$$c = x + u + y ; a = u + y ; b = u + x$$

$$c^2 = (x + u + y)^2 = u^2 + x^2 + y^2 + 2ux + 2uy + 2uz$$

und somit als allgemeiner Satz des Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2 - u^2 + 2xy$$

Für rechtwinklige Dreiecke ergibt sich mit  $u^2 = 2xy$  der Satz des Pythagoras. Außerdem wird auch

$$u^2 - 2xy = 2 ab \cos \gamma$$

woraus sich der Kosinussatz ergibt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos \gamma$$

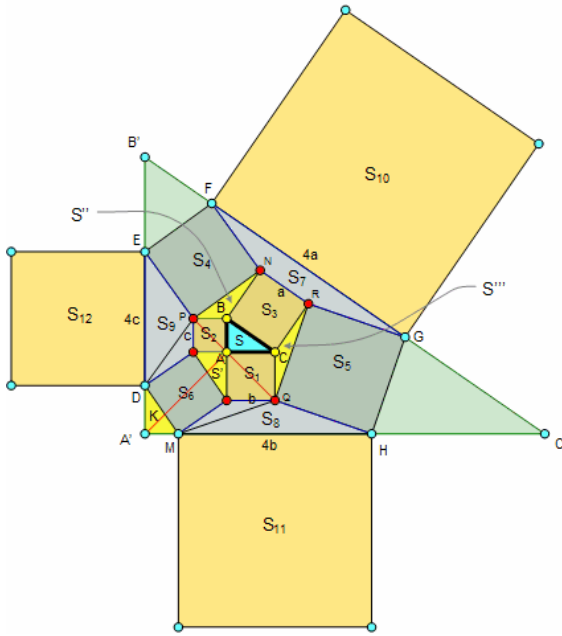
Edsger Wybe Dijkstra erweiterte den Satz von Pythagoras auf alle Dreiecke:

#### Satz von Dijkstra

Sind  $a$ ,  $b$  und  $c$  die Seiten eines Dreiecks und  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die gegenüberliegenden Innenwinkel, so gilt  $\text{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \text{sgn}(a^2 + b^2 - c^2)$

Für rechtwinklige Dreiecke wird  $\text{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = 0$  und somit  $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ . Für spitzwinklige Dreiecke ist die Summe  $\alpha + \beta - \gamma > 0$ , und damit  $\text{sgn}(\alpha + \beta - \gamma)$  positiv. Folglich muss  $a^2 + b^2 > c^2$  sein.

## Pythagoras-Kuriosität



A'A ist senkrecht zu PQ  
 $S_{10} = 16 S_3, S_{11} = 16 S_1, S_{12} = 16 S_2$

Durch Antonio Gutierrez wird unter <http://www.gogeometry.com> folgende Pythagoras-"Kuriosität" beschrieben:

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Fläche S, BC = a, AC = b und AB = c. S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>, S<sub>3</sub> seien die Flächen der auf die Katheten b, c und die Hypotenuse a aufgesetzten Quadrate. S<sub>4</sub>, S<sub>5</sub>, S<sub>6</sub>; S<sub>7</sub>, S<sub>8</sub>, S<sub>9</sub> sowie S<sub>10</sub>, S<sub>11</sub>, S<sub>12</sub> seien die Flächeninhalte, der in der Zeichnung markierten Quadrate, Vierecke, Dreiecke und S', S'', S''', K

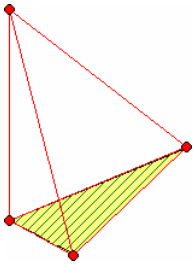
Flächeninhalte in den bezeichneten Dreiecken. Dann gilt:

- $S_3 = S_1 + S_2$ ; Satz des Pythagoras
- PD = PE, QM = QH
- S, S' und K sind kongruente Dreiecke
- S<sub>3</sub> und S<sub>6</sub> sind kongruente Quadrate
- $S = S' = S'' = S''' = K$
- DE || AB, FB || BC, HM || AC
- Δ A'B'C' ist ähnlich zu Δ ABC
- S<sub>7</sub>, S<sub>8</sub>, S<sub>9</sub> sind Trapeze
- DE = 4c, FG = 4a, HM = 4b
- $S_7 = S_8 = S_9 = 5S$
- $S_4 + S_5 = 5 S_3 = 5 S_6$
- A'A ist Winkelhalbierende bei A und A'

$$S_{10} = S_{11} + S_{12}$$

## Verallgemeinerter Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras kann auf höhere Dimensionen erweitert werden:



### Satz von de Gua, Satz des Pythagoras im R<sup>3</sup>

Besitzt ein Tetraeder eine Ecke mit rechten Winkeln, d.h. eine Würfecke, dann ist das Quadrat des Flächeninhaltes der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite gleich der Summe der Quadrate der Flächeninhalte der anderen drei Seitenflächen.

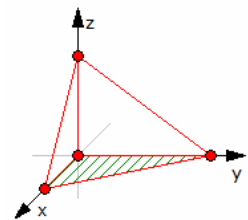
Sind a, b, c und d die Flächeninhalte der vier Tetraederseiten, so gilt dann  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

J.P.de Gua de Malves (1712-1785) stellte 1783 diesen Satz der Pariser Akademie vor. Allerdings war er schon Descartes bekannt.

Die Tabelle enthält die Längen der drei ganzzahligen, rechte Winkel bildenden Tetraederkanten x, y, z sowie die Flächeninhalte a, b, c, d der vier Seitenflächen eines oben beschriebenen Tetraeders sowie das Quadrat d<sup>2</sup>. Ein derartiges Tetraeder wird pythagoreisches Tetraeder genannt.

Beispiellösungen

x	y	z	a	b	c	d	d <sup>2</sup>
1	2	8	1	4	8	9	81
2	2	4	2	4	4	6	36
3	4	9	6	13	18	23	529
4	5	48	10	96	120	154	23716
5	8	14	20	35	56	69	4761
6	6	12	18	36	36	54	2916
7	8	26	28	91	104	141	19881
8	8	16	32	64	64	96	9216
9	12	32	54	144	192	246	60516



Satz: Besitzt ein Tetraeder eine Ecke mit rechten Winkeln, d.h. eine Würfecke, dann ist das Quadrat des Flächeninhaltes der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite gleich der Summe der Quadrate der Flächeninhalte der anderen drei Seitenflächen.

Sind a, b, c und d die Flächeninhalte der vier Tetraederseiten, so gilt dann  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

Nachweis: Ist das Tetraeder orthogonal mit der orthogonalen Ecke im Koordinatenursprung, so können die Ortsvektoren der anderen Ecken durch skalare Multiplikationen der Basisvektoren  $e_1 \rightarrow, e_2 \rightarrow, e_3 \rightarrow$  dargestellt werden:

$$x_1 \rightarrow = a e_1 \rightarrow, x_2 \rightarrow = b e_2 \rightarrow, x_3 \rightarrow = c e_3 \rightarrow$$

Die Kanten von Ecke 1 zu den Ecken 2 und 3 sind dann die Differenz dieser Vektoren

$$k_{1,2} \rightarrow = b e_2 \rightarrow - a e_1 \rightarrow$$

$$k_{1,3} \rightarrow = c e_3 \rightarrow - a e_1 \rightarrow$$



Der Flächeninhalt  $A$  des schräg stehenden Dreiecks ist gleich dem halben Parallelogramm, das von den zwei Kantenvektoren gebildet wird

$$A = 1/2 |(b \vec{e}_2 - a \vec{e}_1) \times (c \vec{e}_3 - a \vec{e}_1)| \quad \text{d.h.} \quad A^2 = 1/4 ((ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2)$$

Die orthogonalen Seitenflächen des Tetraeders sind rechtwinklige Dreiecke, deren Flächeninhalte sich einfach ergeben zu

$$A_1^2 = 1/4 (ab)^2 \quad A_2^2 = 1/4 (ac)^2 \quad A_3^2 = 1/4 (bc)^2$$

woraus sofort die obige Gleichung folgt.

### Satz von Dijkstra

Sind  $a, b$  und  $c$  die Seiten eines Dreiecks und  $\alpha, \beta, \gamma$  die gegenüberliegenden Innenwinkel, so gilt  $\text{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \text{sgn}(a^2 + b^2 - c^2)$

Für rechtwinklige Dreiecke wird  $\text{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = 0$  und somit  $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ . Für spitzwinklige Dreiecke ist die Summe  $\alpha + \beta - \gamma > 0$ , und damit  $\text{sgn}(\alpha + \beta - \gamma)$  positiv. Folglich muss  $a^2 + b^2 > c^2$  sein.

### Inkreis im rechtwinkligen Dreieck

In dem antiken chinesischen Werk "Chiu-chang suan-shu" ("Neun Bücher über Mathematik") aus dem 3. bis 1. Jahrhundert v. Chr. finden sich zwei interessante Aufgaben zum rechtwinkligen Dreieck.

Zum einen ist nach der Seitenlänge  $s$  des größtmöglichen Quadrates in einem rechtwinkligen Dreieck gefragt, wenn ein Punkt des Quadrates am rechten Winkel liegt. Mit der Bezeichnung "kou" für die waagerechte Kathete, "ku" für die senkrechte und "hsien" für die Hypotenuse, gibt der chinesische Mathematiker die Lösung  $s = (ku * kou) / (ku + kou)$

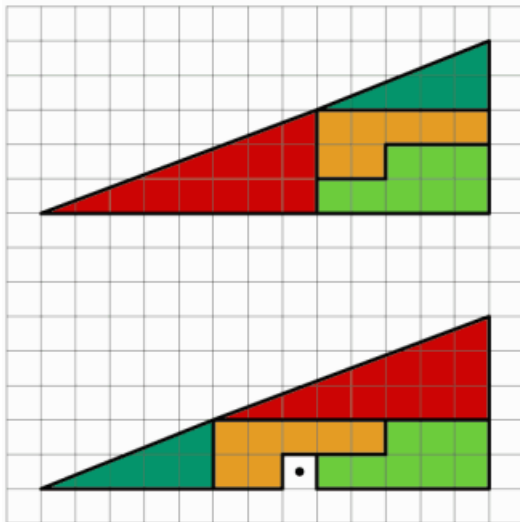
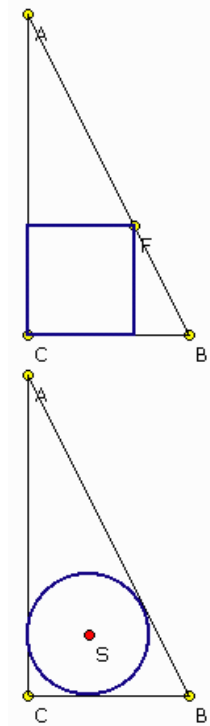
Als Lösungsweg werden die zwei ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke betrachtet, die vom Quadrat herausgeschnitten werden. Für diese gilt

$$ku / kou = (ku - s) / s \quad \text{woraus die Lösung folgt.}$$

In der zweiten Aufgabe wird nach dem Radius  $r$  des größtmöglichen Kreis gefragt, der die Dreiecksseiten von innen berührt; nach heutigem Verständnis nach dem Inkreis. Über einen Zerlegungsbeweis des Dreiecks erhält man

$$r = (ku * kou) / (ku + kou + hsien)$$

Wenn man bedenkt, dass diese Aufgabe vor über 2000 Jahren gelöst wurde, kann man die antike chinesische Mathematik nur bewundern.



positioniert und ergeben in der unteren Anordnung eine größere Fläche!

Dabei handelt es sich um eine Täuschung, da die zwei großen rechtwinkligen Dreiecke gar keine sind und die kleinen rechtwinkligen Dreiecke nicht zu einander ähnlich sind (Innenwinkel  $20,556^\circ$  zu  $21,801^\circ$ ) und so gar nicht oben und unten die gleichen Gesamtfiguren entstehen.

Ein ähnliches Paradoxon kann mit einem Quadrat konstruiert werden.

### Figuren am rechtwinkligen Dreieck / Pythagoreische Figuren

Als Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras gilt:

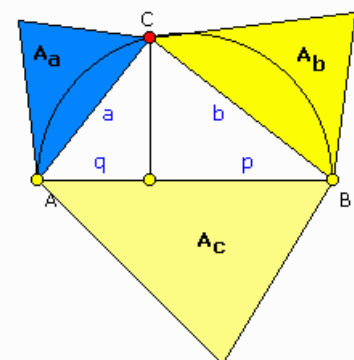
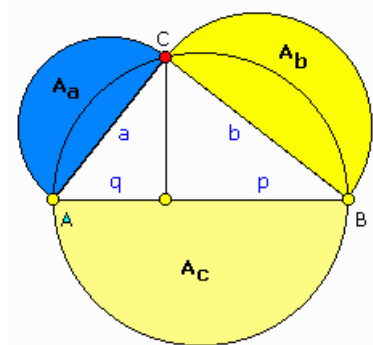
Die Summe der Flächen der Halbkreise über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Halbkreises über der Hypotenuse.

### Zerlegungsbeweis

Im Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras wurden im Laufe der Zeit sehr viele Zerlegungsbeweise konstruiert. Dabei werden die flächengleichen Bereiche durch unterschiedlich angeordnete flächengleiche Dreiecke, Vierecke, ... so überdeckt, dass die beabsichtigte Flächengleichheit ersichtlich wird.

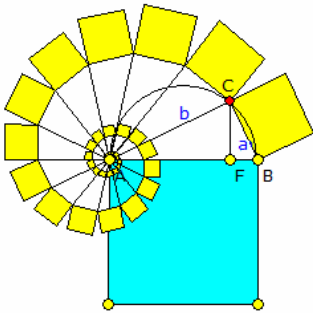
Derartige Beweise dürfen aber nicht auf der reinen Anschauung beruhen, sondern sollten arithmetisch unterlegt sein.

Dass das menschliche Auge irren kann, ist in der Abbildung zu sehen. Gleiche Flächen wurden unterschiedlich



großer Halbkreis:  $A = 1/2 \pi (c/2)^2 = \pi/8 c^2$   
 kleine Halbkreise:  $A = 1/2 \pi (a/2)^2 + 1/2 \pi (b/2)^2 = \pi/8 c^2$

Die Summe der Flächen zueinander ähnlicher Dreiecke über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des zu diesen ähnlichen Dreiecks über der Hypotenuse. Und allgemein: Sind  $F_a$ ,  $F_b$  und  $F_c$  zueinander ähnlicher Figuren über den Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  eines rechtwinkligen Dreiecks mit  $c$  als Hypotenuse, so gilt für ihre Flächeninhalte:  $F_a + F_b = F_c$



### Pythagoreische Spirale

Die klassische Pythagoras-Figur kann nicht nur durch Aufsetzen von ähnlichen N-Ecken modifiziert werden, es ist durchaus auch möglich, an die Katheten weitere, ähnliche rechtwinklige Dreiecke anzufügen und dort Quadrate bzw. andere Figuren aufzusetzen.

Wiederholt man dies immer wieder, so entsteht eine Pythagoreische Spirale wie in der Abbildung.

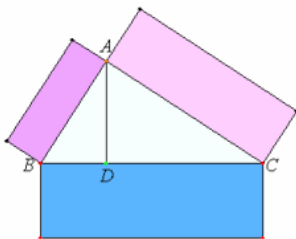
Dabei gilt: Das blaue Quadrat ist jeweils flächengleich der Summe der Flächen der an die Katheten angesetzten, hier gelben, Quadrate.

Das blaue Quadrat hat den Flächeninhalt  $c^2$ . Das erste gelbe Quadrat hat den Flächeninhalt  $a^2$ . Das zweite gelbe Quadrat ist gegenüber dem ersten gelben Quadrat längenmäßig mit dem Faktor  $b/c$  verkleinert, flächenmäßig also mit dem Faktor  $b^2/c^2$ .

Das dritte gelbe Quadrat ist gegenüber dem zweiten Quadrat ebenso flächenmäßig mit dem Faktor  $b^2/c^2$  verkleinert, und so weiter.

Damit erhält man für die Summe der Flächeninhalte der gelben Quadrate als Summe einer unendlichen geometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b/c)^{2n} a^2 = a^2 / (1 - b^2/c^2) = c^2$$



### Pythagoreische Figuren bei Euklid

Euklids "Elemente": Buch VI § 31 (L. 21):

**Im rechtwinkligen Dreieck ist eine Figur über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den ähnlichen, über den den rechten Winkel umfassenden Seiten ähnlich gezeichneten Figuren zusammen gleich.**

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel BAC. Ich behaupte, dass eine Figur über BC den ähnlichen, über BA, AC ähnlich

gezeichneten Figuren zusammen gleich ist.

Man zeichne das Lot AD.

Da man dann im rechtwinkligen Dreieck ABC aus dem rechten Winkel bei A auf die Grundlinie BC das Lot AD gefällt hat, sind die Dreiecke am Lot, nämlich ABD, ADC sowohl dem ganzen  $\Delta$  ABC aus auch einander ähnlich (VI, 8). Da  $ABC \sim ABD$ , ist  $CB : BA = AB : BD$ .

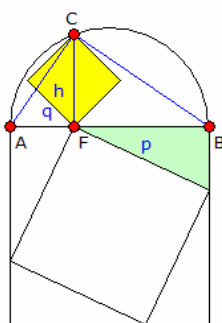
Da hier drei Strecken in Proportion stehen, verhält sich eine Figur über der ersten zu der ähnlichen, über der zweiten ähnlich gezeichneten, wie die erste Strecke zur dritten (VI, 20; V, Def.9); also verhält sich, wie  $CB:BC$ , so die Figur über CB zu der ähnlichen über BA ähnlich gezeichneten, und auch aus demselben Grund auch, wie  $BC:CD$ , so die Figur über BC zu der über CA.

Folglich verhält sich auch, wie  $BC:(BD+DC)$  so die Figur über BC zu den ähnlichen, über BA, AC ähnlich gezeichneten zusammen (V, 24).

Nun ist  $BC = BD+DC$ . Also ist auch die Figur über BC den ähnlichen, über BA, AC ähnlich gezeichneten Figuren zusammen gleich (V, Def.5) - S.

### Höhensätze

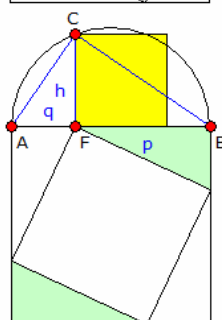
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC gelten neben dem klassischen Höhensatz  $h^2 = p \cdot q$  weitere ähnliche Beziehungen.



1) Das Quadrat (obere Abbildung) mit einer Diagonallänge gleich der Höhe h des rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten p und q des Ausgangsdreiecks.

Nachweis:

Seitenlänge des Quadrates	$a = h / \sqrt{2}$
Fläche des Quadrates	$A_Q = h^2 / 2$
Fläche des Dreiecks	$A_D = p \cdot q / 2 = h^2 / 2 = A_Q$



2) Das Quadrat (untere Abbildung) mit der Höhe h des rechtwinkligen Dreiecks als Seitenlänge ist flächengleich zwei rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten p und q des Ausgangsdreiecks.

Nachweis:

Fläche des Quadrates	$A_Q = h^2$
Fläche der 2 Dreiecke	$A_D = 2 (p \cdot q / 2) = p \cdot q = h^2 = A_Q$

3) Das Quadrat (keine Abbildung) mit einer Diagonalenlänge gleich der doppelten Höhe  $h$  des rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich vier rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten  $p$  und  $q$  des Ausgangsdreiecks.  
Nachweis erfolgt analog.

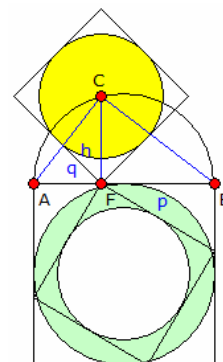
4) Der Kreis, welcher einem Quadrat (obere Abbildung) mit der doppelten Höhe  $h$  des rechtwinkligen Dreiecks als Seitenlänge, eingeschrieben ist, ist flächengleich dem Kreisring mit dem äußeren Radius  $c/2$  und dem inneren Radius gleich  $1/2 \sqrt{p^2+q^2}$ .

Nachweis:

Radius des Kreises  $r = h / \sqrt{2}$

Fläche des Kreises  $A_K = \pi/2 h^2$

Fläche des Kreisrings  $A_R = \pi c^2/4 - \pi (\sqrt{p^2+q^2}/2)^2 = \pi/4 (c^2 - (p^2+q^2)) = \pi/4 ((p+q)^2 - p^2 - q^2) = \pi/4 (2pq) = \pi/2 h^2 = A_K$



5) Der Kreis (untere Abbildung) mit der Höhe  $h$  des rechtwinkligen Dreiecks als Durchmesser ist flächengleich dem Arbelos mit der Grundseite  $c$  und der Teilung am Fußpunkt der Höhe  $h_c$ .

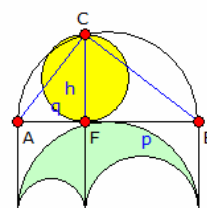
Nachweis:

Fläche des Kreises  $A_K = \pi/4 h^2$

Allgemeiner Flächeninhalt des Arbelos mit der Grundseite  $l$  und den Teilstrecken  $r$  und  $(l-r)$

Fläche des Arbelos  $A = \pi/4 \cdot r \cdot (l - r)$

Fläche des Arbelos  $A_A = \pi/4 q (c-q) = \pi/4 pq = \pi/4 h^2 = A_K$



### Quadrate im rechtwinkligen Dreieck

In jedes rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten  $a, b$  und der Hypotenuse  $c$  kann eine Folge von Quadraten und Kreisen eingeschrieben werden, so dass die Quadrate abwechselnd mit der Hypotenuse und einer Kathete eine Seite gemeinsam haben und die anderen beiden Quadratpunkte auf den anderen Seiten liegen. Die Kreise sind die Inkreise der entstehenden Teildreiecke.

Mit  $x = ac / (ab + c^2)$  und  $y = 1/2 \sqrt{2(c^2 - (a+b)c + ab)}$  ergibt sich für die Seitenlängen der Quadrate

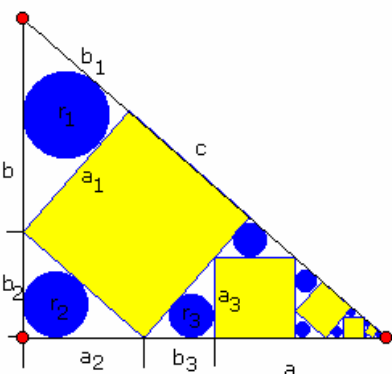
$s_n = b x^n$  und  $a_n = s_{(n+1)/2}$ , für ungerades  $n$

$a_n = ab/c x^{n/2}$ , für gerades  $n$

$b_n = b^2/a x^{(n+1)/2}$ , für ungerades  $n$

$b_n = b^2/c x^{n/2}$ , für gerades  $n$

Für die Radien der Kreise gilt  $r_n = b/a y x^{(n+1)/2}$ , für ungerades  $n$



und  $r_n = b/c y x^{n/2}$ , für gerades  $n$ .

Ein spezielles Sangaku-Problem von 1913 fragt nach dem Verhältnis des ersten, dritten und fünften Kreises. Es gilt:  $r_3 = \sqrt{r_1 r_5}$

### Quadrate im Dreieck

Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$  mit der Grundseite  $b$  und der Höhe  $h$ . In dieses Dreieck sollen Quadrate, wie in der Abbildung, eingeschrieben werden.  $s_1, s_2, s_3, \dots$  sind die Seiten der eingeschriebenen Quadrate. Dann gilt:

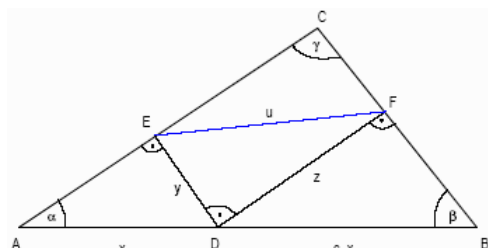
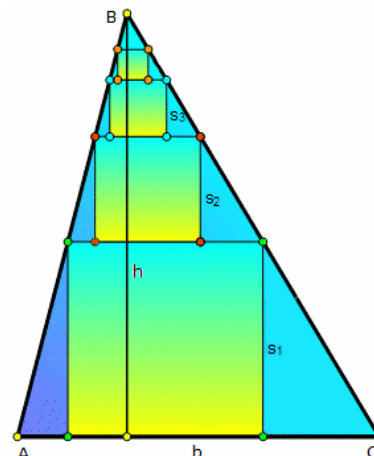
$s_1 = b \cdot h / (b + h)$   $s_2 = b \cdot h^2 / (b + h)^2$

$s_3 = b \cdot h^3 / (b + h)^3$  ...

$s_n = b \cdot h^n / (b + h)^n$

Die Folge der  $s_n$  bildet eine geometrische Folge mit dem Quotienten  $h/(b+h)$ .

Wird der Grenzwert der geometrischen Reihe  $\sum s_i$  gebildet, so ergibt sich die Höhe  $h$ .



### Sehne im Dreieck

Aufgabe:

Von einem Punkt  $D$  der Hypotenuse  $AB$  eines rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  werden die Lote  $DE$  und  $DF$  auf die Seiten  $BC$  und  $AC$  gefällt. Man bestimme diejenige Position von  $D$  für die die Strecke  $EF$  minimale Länge hat.

Lösung:

Wir bezeichnen die Teilstrecken auf den Dreieckseiten

entsprechend der Abbildung. Das Dreieck DFB ist dem Dreieck ABC ähnlich, es folgt  $z/(c-x) = b/c \rightarrow z = b(c-x)/c$

Das Dreieck AED ist dem Dreieck ABC ähnlich, es folgt

$$y/x = a/c \rightarrow y = ax/c$$

Mit dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck DEF ergibt sich

$$u^2 = y^2 + z^2 = (ax/c)^2 + (b(c-x)/c)^2$$

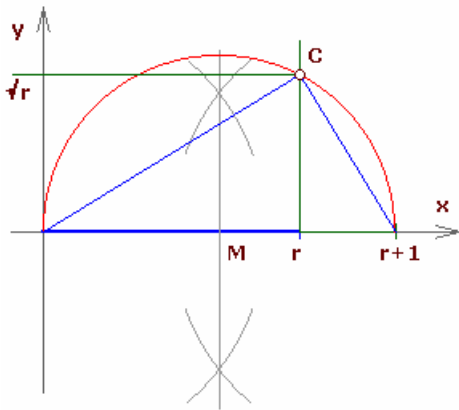
Es genügt das Minimum von  $u^2$  an Stelle von  $u$  zu bestimmen

$$du^2/dx = 2a^2x/c^2 - 2b^2(c-x)/c^2 = 0 \rightarrow x = b^2/c$$

Diese Entfernung entspricht genau dem Höhenschnittpunkt von  $h_c$  auf der Seite  $c$  im rechtwinkligen Dreieck.

Im rechtwinkligen Dreieck wird dann  $EF = u = b/(a^2+b^2) \sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4}$

Anmerkung: Auch in einem spitzwinkligen Dreieck ergibt sich als Lösung der Schnittpunkt zwischen Höhe  $h_c$  mit der Seite  $c$ .



### Konstruktion Quadratwurzel

Konstruktive Folgerung aus dem Höhensatz:

Mit der Zahl  $r$  ist auch der Quotient  $(r+1)/2$  konstruierbar.

Die Parallele zur Ordinate durch  $(r;0)$  schneidet den Kreis mit dem Mittelpunkt  $((r+1)/2;0)$  und Radius  $(r+1)/2$  im Punkt  $C(r;y)$ .

Das Dreieck mit den Eckpunkten  $(0;0)$ ,  $(r+1;0)$ ,  $(r;y)$  ist nach dem Satz des Thales rechtwinklig.

Aus dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke folgt damit:

$$y^2 = 1 \cdot r,$$

d.h. der Punkt  $C$  hat die Ordinate  $\sqrt{r}$ .

### 30-60-90-Dreieck

Halbiert man ein gleichseitiges Dreieck durch eine Höhe, so entsteht ein

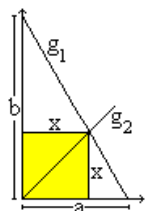
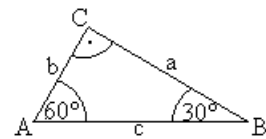


Dreieck mit den Innenwinkeln  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$ . Deshalb nennt man es auch 30-60-90-Dreieck.

Das Besondere an diesem Dreieck ist, dass die Innenwinkel im Verhältnis  $1:2:3$  stehen.

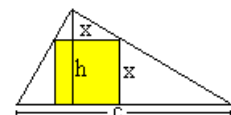
Ist die Hypotenuse des Ausgangsdreiecks gleich  $c$ , so sind die Katheten  $b = c/2$  und  $a = \frac{1}{2} \sqrt{3} c$ .

Der Flächeninhalt ist  $A = 1/8 \sqrt{3} c^2$ , der Umfang ist  $u = \frac{1}{2} (3 + \sqrt{3}) c$ .



Da das 30-60-90-Dreieck rechtwinklig ist, gibt es nur eine interessierende Höhe  $h$ , die anderen Höhen fallen mit den Katheten zusammen. Die Höhe teilt die Hypotenuse  $c$  in die Hypotenusenabschnitte  $p$  und  $q$ . Es gilt  $h = (1/4) \sqrt{3} c$ ;  $p = c/4$ ;  $q = 3/4 c$

Der halbe Umkreis ist der Kreis des Thales mit dem Radius  $R = c/2$ . Der Radius des Inkreises ist  $r = \frac{1}{4} (3 - \sqrt{3}) c$ .



Man kann ein Quadrat auf zweierlei Weise in ein 30-60-90-Dreieck legen.

Linker Fall: Zur Lösung legt man das Dreieck in ein Koordinatensystem und betrachtet die Geraden  $g_1$  und  $g_2$ . Die Gerade  $g_1$  ( $y = -b/a \cdot x + b$ ) enthält die Hypotenuse, die Gerade  $g_2$  ( $y = x$ ) ist die 1. Winkelhalbierende und enthält zwei Ecken des Quadrates.

Für den Schnittpunkt der beiden Geraden gilt  $x = -b/a \cdot x + b$  oder  $x = ab/(a+b)$ .

Rechter Fall: Nach dem 2. Strahlensatz gilt  $h:c = (h-x):x$ . Daraus folgt  $x = hc/(h+c)$

Die halben Quadratseiten sind in beiden Fällen ein harmonisches Mittel, einmal das von Höhe und Hypotenuse, zum anderen das der beiden Katheten. Die Aussagen gelten für beliebige rechtwinklige Dreiecke.

Setzt man die Größen des 30-60-90-Dreiecks ein, so ergibt sich im ersten Falle

$$x = (3 - \sqrt{3})/4 c \text{ (ungefähr } 0,32 \cdot c),$$

im zweiten Fall  $x = (4 \sqrt{3} - 3)/13 \cdot c$  (ungefähr  $0,30 \cdot c$ ).



### Figuren aus 30-60-90-Dreiecken

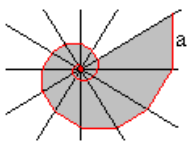
Quadrate, gleichseitige Dreiecke oder gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke kann man so aneinanderlegen, dass neue Figuren entstehen. Sie heißen dann Polyominos, Polyiamonds oder Polybolos. Natürlich kann man auch aus 30-60-90-Dreiecken neue Figuren bilden. Man kann zwei Dreiecke schon auf sechs

verschiedene Arten zusammensetzen. Als Puzzlestücke sind sie nicht gut geeignet, weil alle Strecken voneinander verschieden sind.

Zeichnet man in ein gleichseitiges Dreieck alle Höhen ein, so entstehen sechs 30-60-90-Dreiecke. Man kann sie als Tangram-Steine benutzen.



Zeichnet man in ein Rechteck die Diagonalen und die Mittellinien, so entstehen acht rechtwinklige Dreiecke.



**Spirale**

Sechs Geraden treffen sich in einem Punkt und bilden 12 Winkel der Größe 30°. Gibt man die vertikale Strecke der Länge a vor und führt sie in den Winkelräumen fort, indem man eine Senkrechte zur nächsten Halbgeraden zeichnet, so entsteht eine Folge von immer kleiner werdenden 30-60-90-Dreiecken. Die kürzeren Katheten bilden eine

Spirale (rot).

Grenzwert der Spirale:

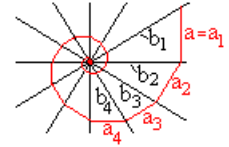
Gegeben sei a. Die Folge der Hypotenusen  $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$  bilden eine geometrische Folge.

$$b_1 = 2a$$

$$b_2 = [(1/2) \sqrt{3}] 2a$$

$$b_3 = [(1/2) \sqrt{3}]^2 2a$$

$$b_4 = [(1/2) \sqrt{3}]^3 2a \dots$$



Für die kürzeren Katheten, die die Spirale bilden, gilt:

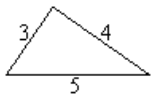
$$a_1 = a$$

$$a_2 = (1/2) b_2 = (1/2) \sqrt{3} a$$

$$a_3 = (1/2) b_3 = (1/2) \sqrt{3}^2 a$$

$$a_4 = (1/2) b_4 = (1/2) \sqrt{3}^3 a \dots$$

Das ist eine geometrische Folge. Die zugehörige Reihe hat den Grenzwert  $1/(1-q) = (4+2\sqrt{3}) a$ , ungefähr 7.46a.



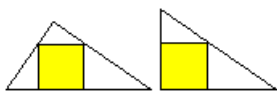
**3-4-5-Dreieck**

Das 3-4-5-Dreieck ist ein Dreieck mit den Seitenlängen 3cm, 4cm und 5cm. Allgemeiner bezeichnet man jedes Dreieck mit den Seiten  $3e, 4e$  und  $5e$  als 3-4-5-Dreieck, wobei e eine beliebige Einheitsstrecke ist. Man kann auch fordern: Es muss  $a:b:c = 3:4:5$  gelten.

Da das Dreieck rechtwinklig ist, gilt für die spitzen Winkel:  $\sin \alpha = a/c = 4/5$  oder  $\alpha = \arcsin(4/5)$ ,  $\sin \beta = b/c = 3/5$  oder  $\beta = \arcsin(3/5)$ . Angenähert betragen  $\alpha = 53,1^\circ$  und  $\beta = 36,9^\circ$ .

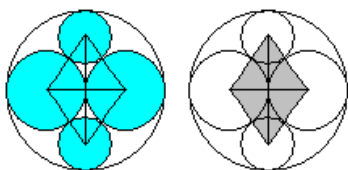
Der Umkreis wird durch den Halbkreis des Thales gegeben. Der Radius ist  $R = c/2 = 2,5$ .

Der Inkreis hat den Radius  $r = 1$ . Der Mittelpunkt liegt an der Stelle (1 | 1), wenn man sich ein Koordinatensystem denkt, das durch die Katheten erzeugt wird. Übrigens liegt an der Stelle (6 | 6) der Mittelpunkt eines zweiten Kreises (Ankreis). Er berührt die Hypotenuse von außen und die Verlängerungen der Katheten.



Nach dem Kathetensatz ist  $cp = b^2$ . Daraus folgt  $p = b^2/c = 9/5$ . Nach dem Kathetensatz ist  $cq = a^2$ . Daraus folgt  $q = a^2/c = 16/5$ . Nach dem Höhensatz ist  $h^2 = pq$ . Daraus folgt  $h = 12/5$ . Der Flächeninhalt ist  $A = 6$ , der Umfang  $u = 12$ .

In ein Dreieck passt ein Quadrat auf zwei verschiedene Arten. Im ersten Fall ist die Seitenlänge  $12/7$  (ungefähr 1,7), im zweiten Fall  $60/37$  (ungefähr 1,6).

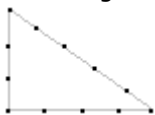


Zeichnet man in einen Kreis nebeneinander zwei halb so große Kreise ein und füllt die Lücken oben und unten mit zwei weiteren Kreisen aus, so bilden die vier Mittelpunkte der Kreise eine Raute. Diese Raute setzt sich aus vier 3-4-5-Dreiecken zusammen.

**3-4-5-Knotenschnur**

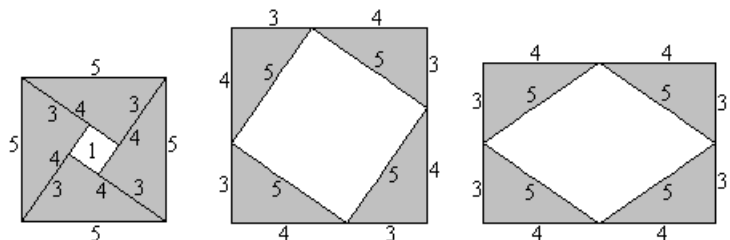
Das 3-4-5-Dreieck hat eine gewisse Berühmtheit erlangt, da man auch in Schulbüchern immer lesen kann, dass schon die alten Ägypter das Dreieck kannten.

Sie fertigten eine Knotenschnur mit Knoten in gleichen



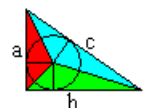
Entfernungen an. Wenn nach den Überschwemmungen des Nils der Fluss wieder zurückgewichen war und die fruchtbar gewordenen Felder wieder freigab, legten die Bauern die Knotenschnur in Form von rechtwinkligen Dreiecken aus und konnten so in jedem Jahr gleich große, rechteckige Felder reproduzieren.

Diese Geschichte kam erst um 1900 auf und geht wohl auf den deutschen Forscher der Geschichte der Mathematik, Moritz Cantor, zurück. Dieser wies darauf hin, dass den alten Ägyptern möglicherweise eine Schnur mit Knoten bekannt war.

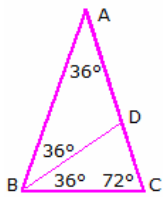


**Inkreisradius**

Im 3-4-5-Dreieck ist der Radius des Inkreises gleich 1, also auch ganzzahlig. Das ist kein Zufall. Alle Radien in Pythagoräischen Dreiecken sind nämlich ganzzahlig.



Beweis: Das nebenstehende Dreieck sei ein Pythagoräisches Dreieck. Der Flächeninhalt ist gleich  $A = ab/2$ . Man kann ihn auch mit Hilfe der farbigen Dreiecke bestimmen:  $A = (1/2)ar + (1/2)br + (1/2)cr = (1/2)r(a+b+c)$ . Daraus folgt  $r = 2A/(a+b+c) = ab/(a+b+c)$ . Setzt man  $b = \sqrt{c^2-a^2}$  ein, so ergibt sich nach etwas  $r = 1/2(a+b-c)$ . Eine Kathete ist im pythagoreischen Dreieck immer gerade, die andere ungerade und die Hypotenuse ungerade. Dann ist der Term  $a+b-c$  gerade und somit  $r$  ganzzahlig.



### 36-72-72-Dreieck, goldenes Dreieck

In dem 36-72-72-Dreieck sind zwei Winkel, die Basiswinkel, gleich  $72^\circ$ , der dritte Winkel, der Winkel an der Spitze, gleich  $36^\circ$ . AB und AC seien die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks, BC die Basis.

Die Winkelhalbierende bei B schneide AC im Punkt D. Dann ist auch der Winkel BDC gleich  $72^\circ$ . Das Dreieck BCD hat somit zwei gleiche Winkel und ist gleichschenkelig und so  $BC = BD$ .

Das Dreieck ABD mit zwei gleichen Winkeln von  $36^\circ$  ist ebenfalls gleichschenkelig mit  $BD = AD$ , d.h. die drei Seiten BC, BD und DA sind gleichlang.

Die Dreiecke BCD und ABC sind ähnlich und beide 36-72-72-Dreiecke.

Die kleine Strecke CD sei von der Länge 1. Mit  $r$  werde das Verhältnis der längeren zur kürzeren Seite im Dreieck BCD bezeichnet, d.h.  $BC = r$ .

Im Dreieck ABC ist dann die Basis gleich  $r$  und da ähnlich zu BCD;  $AB = r \cdot BC = r^2$ . Wie oben gezeigt ist  $BC = BD = AD$ , d.h. gleich  $r$ . Außerdem gilt  $AC = AD + DB$ .

Aus  $AC = 1+r$  und  $AB = r^2$  folgt

$$r^2 = 1 + r$$

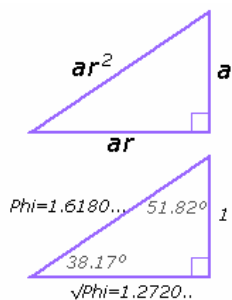
Dies ist die Gleichung, welche das goldene Verhältnis beschreibt.

Damit ist  $r$  gleich  $\phi$  oder  $-\phi$ . Da Längen positiv sind, ergibt sich

$$r = \phi$$

Dreiecke mit Innenwinkeln  $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$  haben somit Seitenverhältnisse  $\phi, \phi$  und 1.

Ein gleichschenkliges Dreieck mit den Basiswinkeln  $72^\circ$  wird "spitzes goldenes Dreieck" genannt. Teilt man unten ein ebensolches Dreieck ab, bleibt ein "stumpfes goldenes Dreieck" mit den Basiswinkeln  $36^\circ$  übrig.



### Goldenes rechtwinkliges Dreieck

Pythagoreische Dreiecke haben ganzzahlige Seitenlängen. Da das goldene Verhältnis  $\phi$  irrational ist, gibt es kein pythagoreisches Dreieck, dessen Seiten im goldenen Verhältnis stehen.

Problem: Für welche Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks stehen diese in einer geometrischen Progression mit dem Verhältnis  $r$ , d.h.

$$a; ar; ar^2$$

Nach dem Satz des Pythagoras wird

$$(ar^2)^2 = (ar)^2 + a^2 \quad \text{und} \quad r^4 = r^2 + 1$$

Mit  $R = r^2$  wird damit  $R^2 - R - 1 = 0$

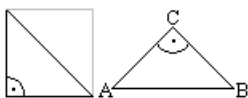
$$R = 1 \pm \sqrt{5}, \text{ d.h. } \Phi \text{ bzw. } \phi$$

Da  $R = r^2$  nicht negativ ist, folgt  $R = r^2 = \Phi; r = \sqrt{\Phi}$

und für die Seitenlängen des goldenen rechtwinkligen Dreiecks

$$a, a\sqrt{\Phi}, a\Phi$$

Ein solches Dreieck hat zwei Paare von Seiten im Verhältnis  $\Phi$  und ein Paar im goldenen Verhältnis  $\Phi$ .



### Gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck

Wenn man ein Quadrat durch eine Diagonale halbiert, entsteht ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck. Es hat somit einen rechten Winkel und zwei gleich lange Seiten. Andere Namen sind 45-90-45-Dreieck oder Halbquadrat.

Größen sind die Hypotenuse AB, die Katheten AC und BC, die Höhe  $h$ , der Flächeninhalt  $A$ , der Umfang  $u$ , der Radius  $R$  des Umkreises und der Radius  $r$  des Inkreises. Ist z.B. die Hypotenuse  $c$  gegeben, so lassen sich die übrigen Größen berechnen:

Die Katheten sind gleich  $\sqrt{2}/2 c$ , die Höhe ist  $h = c/2$ . Die Höhe teilt das Dreieck in wiederum gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke. Der Flächeninhalt ist  $A = c^2/4$ . Der Umfang ist  $u = (1+\sqrt{2})c$ .

Weiterhin gilt:

Flächeninhalt	$A = c^2/4 = a^2/2 = h^2$	$A = u^2 / (12 + 8\sqrt{2})$
Grundlinie c	$c = 2\sqrt{A} = a\sqrt{2} = 2h$	$c = u / (1 + \sqrt{2})$
Schenkel a	$a = c\sqrt{1/2} = h\sqrt{2}$	$a = u / (2 + \sqrt{2})$
	$a = \sqrt{2A}$	$a = h\sqrt{2}$
Höhe	$h = \sqrt{A} = c/2 = a/2\sqrt{2}$	$h = u / (2 + 2\sqrt{2})$
	$u = c(1 + \sqrt{2})$	$u = a(2 + \sqrt{2}) = 2h(1 + \sqrt{2})$
	$u = (2 + 2\sqrt{2})\sqrt{A}$	$u = 2h(1 + \sqrt{2})$
Seitenhalbierende	$s_a = a/2$	
Mittelsenkrechte	$m_c = \sqrt{2} a/2$	
Inkreisradius	$\rho = a(1 - \sqrt{2}/2)$	



### 60°-pythagoreisches Dreieck, allgemeines pythagoreisches Dreieck

Versteht man unter einem allgemeinen pythagoreischen Dreieck, ein Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen und einem ganzzahligen Winkel  $\gamma$ , so können auch  $\gamma = 60^\circ$  bzw.  $\gamma = 120^\circ$  untersucht werden.

Für  $\gamma = 60^\circ$ , d.h.  $\cos \gamma = 1/2$ , können derartige Dreiecke mit teilerfremden, natürlichen  $u, v$  erzeugt werden:

$$a = u^2 - v^2 \qquad b = 2 uv - 2 v^2 \cos \gamma = 2 uv - v^2$$

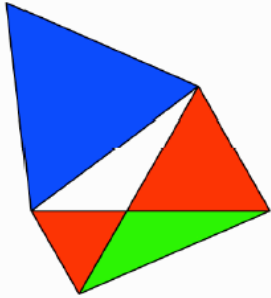
$$c = u^2 + v^2 - 2 uv \cos \gamma = u^2 + v^2 - uv$$

### 120°-pythagoreisches Dreieck, allgemeines pythagoreisches Dreieck

Versteht man unter einem allgemeinen pythagoreischen Dreieck, ein Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen und einem ganzzahligen Winkel  $\gamma$ , so können auch  $\gamma = 60^\circ$  bzw.  $\gamma = 120^\circ$  untersucht werden.

Für  $\gamma = 120^\circ$ , d.h.  $\cos \gamma = -1/2$ , können derartige Dreiecke mit teilerfremden, natürlichen  $u, v$  erzeugt werden:

$$a = u^2 - v^2 \qquad b = 2 uv - 2 v^2 \cos \gamma = 2 uv + v^2$$

$$c = u^2 + v^2 - 2 uv \cos \gamma = u^2 + v^2 + uv$$


#### 120°-Dreieck

Gegeben sei ein Dreieck mit einem 120°-Innenwinkel (in der Abbildung weiß). Auf die Dreiecksseiten werden gleichseitige Dreiecke gesetzt und wie in der Abbildung ergänzt. Dann gilt für die Flächeninhalte:

$$\text{Blau} = \text{Rot} + \text{Grün}$$

Das grüne Dreieck ist kongruent zum weißen Startdreieck.

Nachweis:

Wird die größte Dreiecksseite mit  $c$  bezeichnet, so wird für den Flächeninhalt des gleichseitigen blauen Dreiecks  $A_{\text{blau}} = c^2 \sqrt{3}/4$

Für die gleichseitigen Dreiecke ergibt sich

$$A_{\text{rot},1} = a^2 \sqrt{3}/4 \text{ und } A_{\text{rot},2} = b^2 \sqrt{3}/4$$

Das grüne Dreieck hat den Flächeninhalt

$$A_{\text{grün}} = 1/2 ab \sin 120^\circ = ab \sqrt{3}/4$$

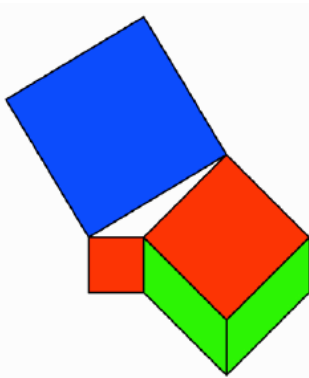
Nach dem Kosinussatz gilt im weißen Dreieck  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ$

und mit  $\cos 120^\circ = -1/2$

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab$$

Multiplikation beider Gleichungsseiten mit  $\sqrt{3}/4$  ergibt die Aussage des Flächensatzes.

Quelle: Hans Walser, [20120121]



#### 135°-Dreieck

Gegeben sei ein Dreieck mit einem 135°-Innenwinkel (in der Abbildung weiß). Auf die Dreiecksseiten werden Quadrate gesetzt und wie in der Abbildung um zwei Parallelogramme ergänzt. Dann gilt für die Flächeninhalte:

$$\text{Blau} = \text{Rot} + \text{Grün}$$

Nachweis:

Im weißen Dreieck mit dem stumpfen Winkel 135° gilt nach dem Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 135^\circ$$

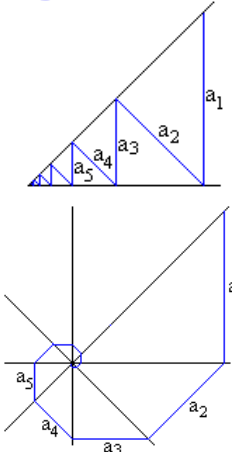
Wegen  $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\sin 45^\circ$  erhält man

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \sin 45^\circ$$

Der Term  $ab \sin 45^\circ$  beschreibt aber den Flächeninhalt eines grünen Parallelogramms. Damit ist der Flächensatz bewiesen.

Quelle: Hans Walser, [20120118]

### Folgen von Dreiecken



Zeichnet man in den Winkelraum eines 45°-Winkels eine Zick-Zack-Linie, so entstehen gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke.

Gibt man die vertikale Strecke  $a_1 = a$  vor, so bilden die "Sprossen" die geometrische Folge

$$a_1 = a, a_2 = a/\sqrt{2}, a_3 = a/(\sqrt{2})^2, a_4 = a/(\sqrt{2})^3, \dots$$

Die dazugehörige Summe, also die geometrische Reihe, hat den Grenzwert  $(2+\sqrt{2}) a$ . Das ist ungefähr gleich 3,4  $a$ .

Eine Vertikale, eine Horizontale und die dazugehörigen Winkelhalbierenden bilden eine Geradenkreuzung aus vier Geraden.

In diese Figur kann man einen Streckenzug einzeichnen, der die Form einer Spirale hat. Er wird aus den gleichen Strecken wie die Zickzacklinie oben gebildet.

Die Länge der Spirale nähert sich wie oben  $(2+\sqrt{2}) a$ .

### Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seiten

Neben dem bekannten 3-4-5-Dreieck existieren unendlich viele rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, die durch die pythagoreischen Tripel beschrieben werden. Die Tabelle enthält die ersten derartigen Dreiecke mit ihren Seitenlängen und Innenwinkel:

a	b	c	$\alpha$	$\beta$	a	b	c	$\alpha$	$\beta$
3	4	5	36.87°	53.13°	5	12	13	22.62°	67.38°
8	15	17	28.07°	61.93°	7	24	25	16.26°	73.74°
20	21	29	43.6°	46.4°	12	35	37	18.92°	71.08°
9	40	41	12.68°	77.32°	28	45	53	31.89°	58.11°
16	63	65	14.25°	75.75°	11	60	61	10.39°	79.61°
33	56	65	30.51°	59.49°	48	55	73	41.11°	48.89°
36	77	85	25.06°	64.94°	20	99	101	11.42°	78.58°
13	84	85	8.8°	81.2°	39	80	89	25.99°	64.01°
65	72	97	42.08°	47.92°	60	91	109	33.4°	56.6°
44	117	125	20.61°	69.39°	24	143	145	9.53°	80.47°
15	112	113	7.63°	82.37°	88	105	137	39.97°	50.03°
52	165	173	17.49°	72.51°	28	195	197	8.17°	81.83°
17	144	145	6.73°	83.27°	51	140	149	20.02°	69.98°
85	132	157	32.78°	57.22°	119	120	169	44.76°	45.24°
104	153	185	34.21°	55.79°	84	187	205	24.19°	65.81°
60	221	229	15.19°	74.81°	32	255	257	7.15°	82.85°
19	180	181	6.03°	83.97°	57	176	185	17.95°	72.05°
95	168	193	29.49°	60.51°	133	156	205	40.45°	49.55°
140	171	221	39.31°	50.69°	120	209	241	29.86°	60.14°
96	247	265	21.24°	68.76°	68	285	293	13.42°	76.58°
36	323	325	6.36°	83.64°	21	220	221	5.45°	84.55°
105	208	233	26.78°	63.22°	160	231	281	34.71°	55.29°
136	273	305	26.48°	63.52°	76	357	365	12.02°	77.98°
40	399	401	5.72°	84.28°	23	264	265	4.98°	85.02°
69	260	269	14.86°	75.14°	115	252	277	24.53°	65.47°
161	240	289	33.86°	56.14°	207	224	305	42.74°	47.26°
204	253	325	38.88°	51.12°	180	299	349	31.05°	58.95°
152	345	377	23.78°	66.22°	120	391	409	17.06°	72.94°
84	437	445	10.88°	79.12°	44	483	485	5.21°	84.79°
25	312	313	4.58°	85.42°	75	308	317	13.69°	76.31°
175	288	337	31.28°	58.72°	225	272	353	39.6°	50.4°
252	275	373	42.5°	47.5°	228	325	397	35.05°	54.95°
168	425	457	21.57°	68.43°	132	475	493	15.53°	74.47°
92	525	533	9.94°	80.06°	48	575	577	4.77°	85.23°

### Fast-pythagoreische Dreiecke

Darüber hinaus werden auch fast-pythagoreische Dreiecke betrachtet. Darunter versteht man Dreiecke, deren Seiten die diophantische Gleichungen  $a^2 + b^2 = c^2 - 1$  bzw.  $a^2 + b^2 = c^2 + 1$  erfüllen. Diese Dreiecke besitzen bei C einen Winkel, der fast 90° ist. Die Tabelle enthält die ersten fast-pythagoreischen Dreiecke beider Art:

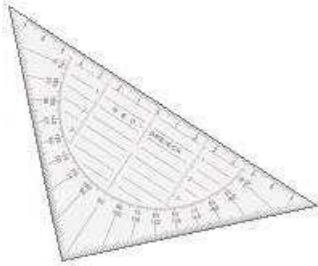
Typ  $a^2 + b^2 = c^2 - 1$

a	b	c	alpha	beta	gamma	prozentualer Fehler des rechten Winkels
2	2	3	41.41°	41.41°	97.181°	7.97862%
4	8	9	26.38°	62.72°	90.895°	0.99476%
6	18	19	18.41°	71.33°	90.265°	0.29473%
8	32	33	14.03°	75.86°	90.112°	0.12434%
10	50	51	11.31°	78.63°	90.057°	0.06366%
12	12	17	44.9°	44.9°	90.199°	0.22105%
12	72	73	9.46°	80.51°	90.033°	0.03684%
14	98	99	8.13°	81.85°	90.021°	0.0232%
16	128	129	7.12°	82.86°	90.014°	0.01554%
18	30	35	30.95°	59°	90.053°	0.05895%
18	162	163	6.34°	83.65°	90.01°	0.01092%
20	200	201	5.71°	84.28°	90.007°	0.00796%
22	46	51	25.55°	64.42°	90.028°	0.03145%
22	242	243	5.19°	84.8°	90.005°	0.00598%
24	288	289	4.76°	85.23°	90.004°	0.00461%

Typ  $a^2 + b^2 = c^2 + 1$

a	b	c	alpha	beta	gamma	prozentualer Fehler des rechten Winkels
4	7	8	29.99°	61.03°	88.977°	-1.13688%

5	5	7	45.57°	45.57°	88.854°	-1.27332%
6	17	18	19.47°	70.81°	89.719°	-0.31207%
7	11	13	32.58°	57.79°	89.628°	-0.41339%
8	9	12	41.81°	48.59°	89.602°	-0.4421%
8	31	32	14.48°	75.64°	89.884°	-0.12835%
9	19	21	25.38°	64.79°	89.832°	-0.18615%
10	15	18	33.75°	56.44°	89.809°	-0.21221%
10	49	50	11.54°	78.52°	89.942°	-0.06496%
11	13	17	40.32°	49.88°	89.8°	-0.22259%
11	29	31	20.78°	69.31°	89.91°	-0.09978%
12	71	72	9.59°	80.44°	89.966°	-0.03736%
13	19	23	34.42°	55.7°	89.884°	-0.12887%
13	41	43	17.6°	72.46°	89.946°	-0.05972%
14	17	22	39.52°	50.6°	89.88°	-0.13374%



### Geodreieck

Das Geodreieck ist ein Zeichengerät, das erst in den 1950iger Jahren auf dem Markt kam und sich seitdem immer mehr ausbreitete. Heute ist es das Standard-Zeichengerät. Seine Verbreitung spiegelt eine Entwicklung der Schulgeometrie wider.

Für das Gymnasium ist das Geodreieck eigentlich überflüssig, da im Unterricht, der Euklidischen Geometrie folgend, nur konstruiert, also mit Zirkel und Lineal gezeichnet wurde. Die Konstruktion als geometrisches

Problem ist inzwischen fast eine Randerscheinung im Geometrieunterricht geworden und auf die Zeichnungen beschränkt, die mit dem Geodreieck nicht möglich sind.

## Dreieckskonstruktion

Konstruktion unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal aus 3 Stücken. Auswahl der Stücke aus drei Seiten, Winkeln, Höhen, Seiten- und Winkelhalbierenden. 455 Möglichkeiten zerfallen in 95 Komplexe, von denen 63 lösbar, 2 unterbestimmt und 30 unlösbar sind.

### Unterbestimmte Komplexe (nicht eindeutig konstruierbar)

$(a, \beta, h_c)$        $(\alpha, \beta, \gamma)$

### Unlösbare Komplexe

$(a, b, w_\alpha)$	$(a, \beta, w_\alpha)$	$(a, h_{br}, w_\alpha)$	$(a, \alpha, w_\beta)$	$(a, h_{ar}, w_\beta)$	$(a, s_{ar}, w_\beta)$	$(a, s_{br}, w_\alpha)$
$(a, s_{br}, w_\gamma)$	$(a, w_{\beta r}, w_\gamma)$	$(a, s_{br}, w_\beta)$	$(a, w_{\alpha r}, w_\beta)$	$(\alpha, h_{ar}, w_\beta)$	$(\alpha, h_{br}, w_\gamma)$	$(\alpha, s_{br}, w_\alpha)$
$(\alpha, s_{br}, w_\gamma)$	$(\alpha, s_{ar}, w_\beta)$	$(\alpha, s_{br}, w_\beta)$	$(\alpha, w_{\alpha r}, w_\beta)$	$(\alpha, w_{\beta r}, w_\gamma)$	$(h_{ar}, s_{ar}, w_\beta)$	$(h_{ar}, s_{br}, w_\gamma)$
$(h_{ar}, h_{br}, w_\alpha)$	$(h_{ar}, s_{br}, w_\beta)$	$(h_{ar}, w_{\alpha r}, w_\beta)$	$(h_{ar}, w_{\beta r}, w_\gamma)$	$(s_{ar}, s_{br}, w_\gamma)$	$(s_{ar}, w_{\beta r}, w_\gamma)$	$(s_{ar}, s_{br}, w_\alpha)$
$(s_{ar}, w_{\alpha r}, w_\beta)$	$(w_{\alpha r}, w_{\beta r}, w_\gamma)$					

### Lösbare Dreieckskonstruktionen

Konstruktion unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal aus 3 gegebenen Punkten des Dreiecks.

Als Punkte werden betrachtet:

A, B, C ... die Dreieckspunkte     $M_a, M_b, M_c$  ... Seitenmittelpunkte  
 $H_a, H_b, H_c$  ... Höhenfußpunkte     $T_a, T_b, T_c$  ... Schnittpunkte der Winkelhalbierenden  
 $S, H, I, U$  ... der Schwerpunkt, der Höhenschnittpunkt, der Inkreis- und Umkreismittelpunkt  
 $E_a, E_b, E_c$  ... Mittelpunkte von Höhenschnittpunkt und Dreieckseckpunkten  
N ... Neun-Punkte-Kreis-Mittelpunkt

Durch William Wernick und Leroy Meyers wurden 140 Probleme analysiert. Vier Typen sind möglich:

R ... redundant, d.h. mit zwei Punkten ist automatisch der dritte gegeben oder unbestimmt

L ... lösbar mit Zirkel und Lineal

U ... durch algebraische Verfahren als unlösbar nachgewiesen

? ... Lösungsmöglichkeit noch unbekannt

lösbar sind:

1. A,B,Ea	2. A,B,Ec	3. A,B,N	4. A,Ea,Eb	5. A,Ea,G
9. A,Ea, I	10. A,Ea,Ma	11. A,Ea,Mb	12. A,Ea,N	13. A,Ea,O
14. A,Ea, Ta	16. A,Eb,Ec	17. A,Eb,G	18. A,Eb,H	19. A,Eb,Ha
21. A,Eb,Hc	23. A,Eb,Ma	24. A,Eb,Mb	25. A,Eb,Mc	26. A,Eb,N
27. A,Eb,O	31. A,G,N	32. A,H,N	33. A,Ha,N	34. A,Hb,N
36. A,Ma,N	37. A,Mb,N	38. A,N,O	41. Ea,Eb,Ec	42. Ea,Eb,G
43. Ea,Eb,H	44. Ea,Eb,Ha	45. Ea,Eb,Hc	48. Ea,Eb,Mc	50. Ea,Eb,O
53. Ea,G,H	54. Ea,G,Ha	55. Ea,G,Hb	57. Ea,G,Ma	58. Ea,G,Mb
59. Ea,G,N	60. Ea,G,O	65. Ea,H, I	66. Ea,H,Ma	67. Ea,H,Mb
68. Ea,H,N	69. Ea,H,O	70. Ea,H, Ta	72. Ea,H,Ha,Hb	73. Ea,H,Ha, I
75. Ea,Ha,Mb	77. Ea,Ha,O	83. Ea,Hb,Mb	84. Ea,Hb,Mc	86. Ea,Hb,O
90. Ea, I,Ma	92. Ea, I,N	98. Ea,Ma,O	101. Ea,Mb,Mc	103. Ea,Mb,O
107. Ea,N,O	115. G,Ha,N	117. G,Ma,N	120. H,Ha,N	122. H,Ma,N
126. Ha, I,N	129. Ha,N,O	132. I,Ma,N	136. Ma,N,O	

als unbestimmt/redundant wurden die Konstruktionen nachgewiesen:

6. A,Ea,H	7. A,Ea,Ha	8. A,Ea,Hb	20. A,Eb,Hb	47. Ea,Eb,Ma
49. Ea,Eb,N	63. Ea,H,Ha	64. Ea,H,Hb	74. Ea,Ha,Ma	76. Ea,Ha,N
78. Ea,Ha,Ta	80. Ea,Hb,Hc	82. Ea,Hb,Ma	85. Ea,Hb,N	96. Ea,Ma,Mb
97. Ea,Ma,N	102. Ea,Mb,N	114. G,H,N	118. G,N,O	123. H,N,O
125. Ha,Hb,N	127. Ha,Ma,N	128. Ha,Mb,N	135. Ma,Mb,N	

als unlösbar wurden nachgewiesen:

15. A,Ea,Tb	46. Ea,Eb,I	52. Ea,Eb,Tc	71. Ea,H,Tb	88. Ea,Hb,Tb
116. G,I,N U	119. G,N,Ta	121. H,I,N	124. H,N,Ta	133. I,N,O
139. N,O,Ta				

unbekannt ist die Lösbarkeit noch für folgende Punkttripel:

22. A,Eb,I	28. A,Eb,Ta	29. A,Eb,Tb	30. A,Eb,Tc	35. A,I,N
39. A,N,Ta	40. A,N,Tb	51. Ea,Eb,Ta	56. Ea,G,I	61. Ea,G,Ta
62. Ea,G,Tb	79. Ea,Ha,Tb	81. Ea,Hb,I	87. Ea,Hb,Ta	89. Ea,Hb,Tc
91. Ea,I,Mb	93. Ea,I,O	94. Ea,I,Ta	95. Ea,I,Tb	99. Ea,Ma,Ta
100. Ea,Ma,Tb	104. Ea,Mb,Ta	105. Ea,Mb,Tb	106. Ea,Mb,Tc	108. Ea,N,Ta
109. Ea,N,Tb	110. Ea,O,Ta	111. Ea,O,Tb	112. Ea,Ta,Tb	113. Ea,Tb,Tc
130. Ha,N,Ta	131. Ha,N,Tb	134. I,N,Ta		
137. Ma,N,Ta	138. Ma,N,Tb	140. N,Ta,Tb		

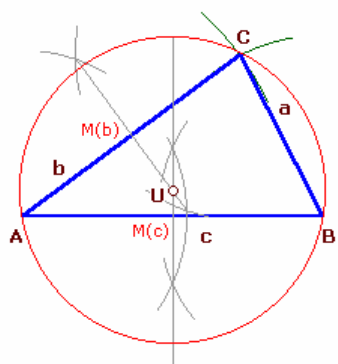
## Dreieckskonstruktion

gegebene Stücke: Seite a, b, c

gesucht: Dreieck und Umkreis

**Konstruktion:** 1. Strecke c mit Eckpunkten A, B zeichnen ; 2. Kreis um B mit Radius a, Kreis um A mit Radius c ; 3. Schnittpunkt beider Kreise ist C

Konstruktion in Euklids "Elementen": § 22 (A. 8)



### Umkreiskonstruktion

- Mittelpunkte  $M_c$  von  $c$  und  $M_b$  von  $b$  konstruieren
- Senkrechte in den Mittelpunkten auf die Seiten errichten
- Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der Umkreismittelpunkt  $U$
- Umkreis um  $U$  mit Radius  $UC$  zeichnen

Flächeninhalt  $A = \sqrt{(s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c))}$

Umkreisradius  $R = 1/4 \cdot abc/A$

Inkreisradius  $\rho = \sqrt{((s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) / s)}$

Winkel  $\alpha = 2 \arctan [ \sqrt{((a^2 - (b - c)^2) / ((b + c)^2 - a^2))} ]$

Winkel  $\beta = 2 \arctan [ \sqrt{((b^2 - (c - a)^2) / ((c + a)^2 - b^2))} ]$

Winkel  $\gamma = 2 \arctan [ \sqrt{((c^2 - (a - b)^2) / ((a + b)^2 - c^2))} ]$

Höhe  $h_c = (a+b+c)(a-b-c) \sqrt{((a^2 - (b - c)^2) / ((b + c)^2 - a^2))} / (2c)$

### Dreieckskonstruktion - Inkreiskonstruktion

gegebene Stücke: Seite  $a, b, c$

gesucht: Dreieck und Inkreis

#### Konstruktion:

- Strecke  $c$  mit Eckpunkten  $A, B$  zeichnen
- Kreis um  $B$  mit Radius  $a$ , Kreis um  $A$  mit Radius  $c$
- Schnittpunkt beider Kreise ist  $C$

Konstruktion in Euklids "Elementen": § 22 (A. 8)

#### Inkreiskonstruktion

- Winkel  $\alpha$  bei  $A$  und  $\beta$  bei  $B$  halbieren und Winkelhalbierende einzeichnen
- Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist  $M_i$
- von  $M_i$  Lot auf  $c$  fällen, Lotfußpunkt ist  $D$
- Inkreis um  $M_i$  mit Radius  $M_iD$  zeichnen

Winkel  $\alpha \quad \cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc)$

Inkreisradius  $r = \sqrt{((s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) / s)}$

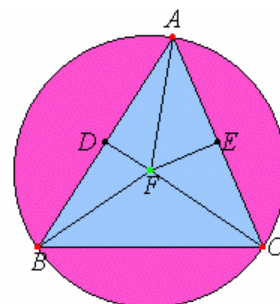
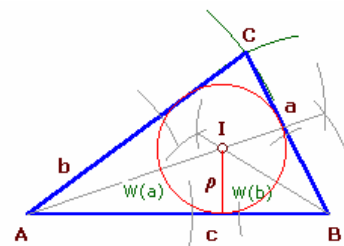
Flächeninhalt  $A = \sqrt{(s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c))}$

Umkreisradius  $R = 1/4 \cdot abc/A$

Winkel  $\beta = 2 \arctan [ \sqrt{((b^2 - (c - a)^2) / ((c + a)^2 - b^2))} ]$

Winkel  $\gamma = 2 \arctan [ \sqrt{((c^2 - (a - b)^2) / ((a + b)^2 - c^2))} ]$

Höhe  $h_c = (a+b+c)(a-b-c) \sqrt{((a^2 - (b - c)^2) / ((b + c)^2 - a^2))} / (2c)$



### Umkreiskonstruktion bei Euklid

Euklids "Elemente": Buch IV § 5 (A. 5):

#### Einem gegebenen Dreieck den Kreis umzubeschreiben.

ABC sei das gegebene Dreieck. Man halbiere die Strecken AB, AC in den Punkten D, E und ziehe rechtwinklige zu AB, AC von den Punkten D, E aus DF, EF; diese müssen einander treffen (Post.5) entweder innerhalb des Dreiecks ABC oder auf der Strecke BC oder jenseits BC.

Zunächst mögen sie sich innerhalb treffen, in F. Man ziehe FB, FC, FA. Da hier  $AD = DB$ , DF aber gemeinsam ist und rechte Winkel bildet, so ist auch Grundlinie  $AF =$  Grundlinie  $FB$  (I, 4). Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch  $CF = AF$ , so dass auch  $FB = FC$ . Also sind die Strecken FA, FB, FC alle drei einander gleich. Zeichnet man also mit F als Mittelpunkt und als Abstand einem von A, B, C den Kreis, so muss er auch durch die übrigen Punkte gehen, und der Kreis muss dem Dreieck ABC umbeschrieben sein.

Man beschreibe ihn um, wie ABC.

Zweitens mögen DF, EF sich auf der Strecke BC treffen, in F. Man ziehe AF. Dann lässt sich ähnlich beweisen, dass Punkt F der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umzubeschreibenden Kreises ist.

Schließlich mögen sich DF, EF außerhalb des Dreiecks ABC treffen, wieder in F.

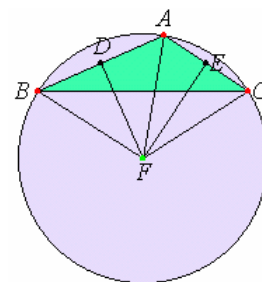
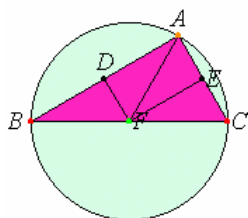
Man ziehe AF, BF, C F. Da hier wieder  $AD = DB$ , DF aber gemeinsam ist und der rechte Winkel bildet, so ist Grundlinie  $AF =$  Grundlinie  $BF$ . Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch  $CF = AF$ , so dass auch  $BF = FC$ . Zeichnet man

also wieder mit F als Mittelpunkt und einer der Strecken FA, FB, FC als Abstand den Kreis, so muss er auch durch die übrigen Punkte gehen und dem Dreieck ABC umbeschrieben sein - S.

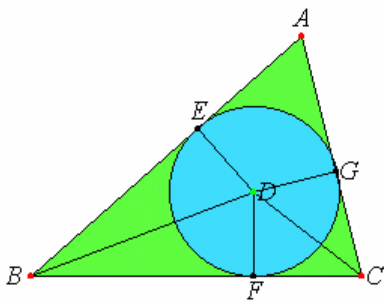
Zusatz: Man sieht, dass, wenn der Kreismittelpunkt innerhalb des Dreiecks fällt,  $\angle BAC$  als Winkel in einem Abschnitt, der größer als der Halbkreis ist,  $< R$ .

ist; dass  $\angle BAC$ , wenn der Mittelpunkt auf die Strecke BC fällt, als Winkel im Halbkreis ein Rechter ist; und dass  $\angle BAC$ , wenn der Kreismittelpunkt außerhalb des Dreiecks fällt, als

Winkel in einem Abschnitt, der kleiner als der Halbkreis ist,  $> R$ . ist (III, 31). Daher müssen auch DF, EF,



wenn der gegebene Winkel  $< R$ . ist, sich innerhalb des Dreiecks treffen; wenn ein Rechter, auf BC; wenn  $> R$ ., jenseits BC – dies hatte man ausführen sollen.



### Inkreisconstruction bei Euklid

Euklids "Elemente": Buch IV § 4 (A. 4):

#### Einem gegebenen Dreieck den Kreis einzubeschreiben.

ABC sei das gegebene Dreieck. Man soll dem Dreieck ABC den Kreis einbeschreiben (IV, Definition 5). Man halbiere die Winkel ABC, ACB durch die geraden Linien BD, CD; diese mögen miteinander im Punkte D zusammentreffen (Postulat 5); ferner falle man von D auf die geraden Linien AB, BC, CA die Lote DE, DF, DG.

Da  $\angle ABD = CBD$ , ferner  $\angle BED = BFC$  als Rechte, sind EBC, FBD zwei Dreiecke, in denen zwei Winkel zwei Winkeln gleich sind und eine Seite

einer Seite gleich, nämlich die einem der gleichen Winkel gegenüberliegende, ihnen gemeinsame BD; also müssen in ihnen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten gleich sein (I, 26); also ist  $DE = DF$ . Aus demselben Grunde ist auch  $DG = DF$ . Die Strecken DE, DF, DG sind also alle drei einander gleich.

Zeichnet man also mit D als Mittelpunkt und als Abstand einem von E, F, G den Kreis, so muss er auch durch die übrigen Punkte gehen und die geraden Linien AB, BC, CA berühren, weil die Winkel bei den Punkten E, F, G Rechte sind. Würde er sie nämlich schneiden, so gäbe es eine zum Kreisdurchmesser vom Endpunkte aus rechtwinklig gezogene Strecke, die innerhalb des Kreises läge; dass dies Unsinn ist, haben wir bewiesen (III, 16).

Der mit D als Mittelpunkt und als Abstand einem von E, F, G gezeichnete Kreis kann also die geraden Linien AB, BC, CA nicht schneiden; also muss er sie berühren (III, Definition 2); und der Kreis muss dem Dreiecke ABC einbeschrieben sein (IV, Definition 5). Man beschreibe ihn ein wie FGE. Man hat also dem gegebenen Dreieck ABC den Kreis einbeschrieben, nämlich EFG - dies hatte man ausführen sollen.

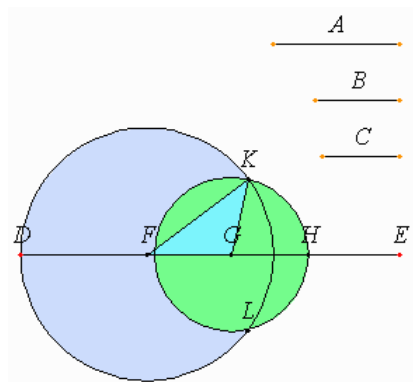
### Dreiecksconstruction bei Euklid

"Elemente": § 22 (A. 8):

#### Aus drei Strecken die drei gegebenen gleich sind, ein Dreieck zu errichten; hierbei müssen weil in jedem Dreieck zwei Seiten, beliebig zusammengenommen, größer sind als die letzte (I, 20) stets zwei beliebige zusammengenommen, größer sein als die letzte.

Die drei gegebenen Strecken seien A, B, C, und von ihnen seien stets zwei, beliebig zusammengenommen, größer als die letzte:  $A + B > C$ ,  $A + C > B$ ,  $B + C > A$ . Man soll aus Strecken, die A, B, C gleich sind, ein Dreieck errichten.

Man ziehe eine in D begrenzte, nach E unbegrenzte gerade Linie DE und trage  $DF = A$ ,  $FG = B$ ,  $GH = C$  ab; ferner zeichne man mit F als Mittelpunkt, FD als Abstand den Kreis DKL, ebenso mit G als Mittelpunkt, GH als Abstand den Kreis KLH, ziehe KF und KG; ich behaupte, dass das Dreieck KFG aus drei Strecken errichtet ist, die A, B, C gleich sind. Da nämlich Punkt F Mittelpunkt des Kreises DKL ist, ist  $FD = FK$ ; aber  $FD = A$ ; also ist auch  $KF = A$ . Da ebenso Punkt G Mittelpunkt des Kreises LKH ist, ist  $GH = GK$ ; aber  $GH = C$ ; also ist auch  $KG = C$ . Ferner ist  $FG = B$ . Die drei Strecken KF, FG, GK sind also den drei Strecken A, B, C gleich. Also hat man aus drei Strecken KF, FG, GK, die drei gegebenen Strecken A, B, C gleich sind, ein Dreieck errichtet, nämlich KFG - dies hatte man ausführen sollen.



### Dreiecksconstruction

gegebene Stücke: Seiten b, c, Winkel  $\alpha$

#### Konstruktion:

1. Strecke c mit Eckpunkten A, B zeichnen
2. Kreisbogen um A zeichnen
3. Winkel  $\alpha$  auf diesem Kreisbogen abtragen
5. auf dem freien Schenkel des Winkels die Strecke b abtragen
6. der gefundene Schnittpunkt ist C

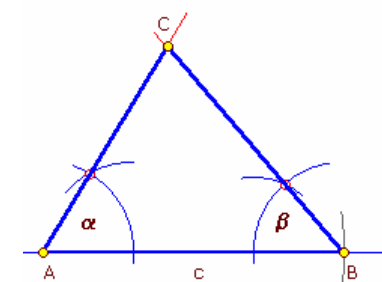
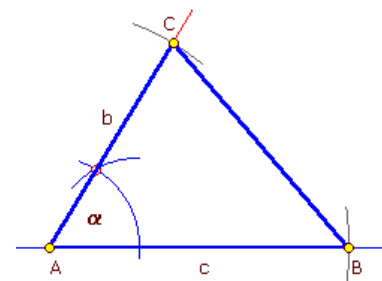
Ist der Winkel  $\alpha < 180^\circ$ , so ist die Konstruktion möglich und auf Grund des Kongruenzsatzes SWS eindeutig.

$$\text{Seite } a \quad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

$$\text{Höhe } h_c \quad h_c = b \sin \alpha$$

$$\text{Höhe } h_b \quad h_b = c \sin \alpha$$

$$\text{Flächeninhalt } A = bc/2 \sin \alpha$$



### Dreiecksconstruction

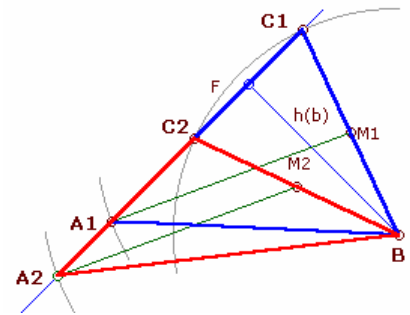
gegebene Stücke: Seite c, Winkel  $\alpha$  und  $\beta$





**Konstruktion:**

1. Strecke  $h_b$  von B zum Höhenfußpunkt F zeichnen
2. Senkrechte  $b'$  auf  $h_b$  in F errichten
3. Kreis  $k$  um B mit Radius  $a$  konstruieren
4. gefundene Schnittpunkte mit  $b'$  sind  $C_1$  und  $C_2$
5. Strecke  $BC_1$  ist  $a_1$
6. Strecke  $BC_2$  ist  $a_2$
7. Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  von  $a_1$  und  $a_2$  konstruieren
8. Kreis  $k$  um  $M_1$  mit Radius  $s_a$ , ein Schnittpunkt mit  $b'$  ist  $A_1$
9. Strecke  $BA_1$  ist  $c_1$
10. Kreis  $k$  um  $M_2$  mit Radius  $s_a$ , ein Schnittpunkt mit  $b'$  ist  $A_2$
11. Strecke  $BA_2$  ist  $c_2$



Für diese Konstruktionsaufgabe gibt es als Lösung zwei nichtkongruente Dreiecke.

Lösung 1 mit  $p = \cos(\arcsin(h_b/a) + \arcsin(h_b/(2 s_a)))$

Seite b  $b = 1/2 \sqrt{(4a s_a p + a^2 + 4s_a^2)}$

Seite c  $c = 1/2 \sqrt{(-4 \sqrt{(a^2 - h_b^2)} \sqrt{(a^2 + 4a p s + 4s_a^2)} + 5a^2 + 4a p s + 4s_a^2)}$

Lösung 2 mit  $p = \cos(\arcsin(h_b/a) - \arcsin(h_b/(2 s_a)))$

Seite b  $b = 1/2 \sqrt{(-4a s_a p + a^2 + 4s_a^2)}$

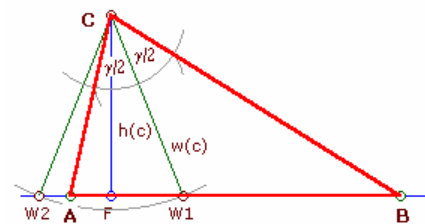
Seite c  $c = 1/2 \sqrt{(-4 \sqrt{(a^2 - h_b^2)} \sqrt{(a^2 - 4a p s + 4s_a^2)} + 5a^2 - 4a p s + 4s_a^2)}$

**Dreieckskonstruktion**

gegebene Stücke:  $\gamma, w_c = w_\gamma, h_c$

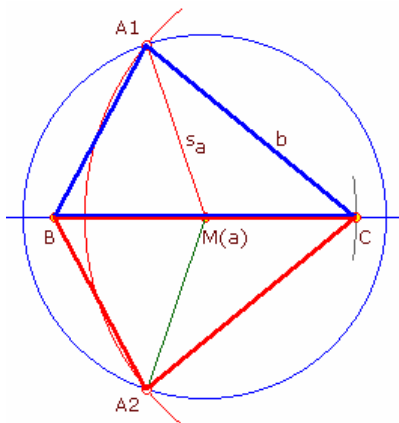
Konstruktion:

1. Strecke  $h_c$  von C zum Höhenfußpunkt  $F_c$  zeichnen
2. Senkrechte  $c'$  auf  $h_c$  in  $F_c$  errichten
3. Kreis  $k$  um C mit Radius  $w_\gamma = w(c)$  konstruieren
4. gefundene Schnittpunkte mit  $c'$  sind  $W_1$  und  $W_2$
5. Strecke  $CW_2$  ist  $w_2$
6. Strecke  $CW_1$  ist  $w_1$
7. Winkel  $\gamma/2$  an  $w(c)$  in C in beide Richtungen antragen
8. Schnittpunkte mit  $c'$  sind A und B. Die 2. Lösung mittels  $W_2$  ergibt ein kongruentes Dreieck.



Seite b  $b = h_c / \cos(\gamma/2 - \arccos(h_c / w_\gamma))$

Winkel  $\alpha$   $\alpha = \arcsin(\cos(\gamma/2 - \arccos(h_c / w_\gamma)))$



**Dreieckskonstruktion**

gegebene Stücke:  $a, b, s_a$

Konstruktion:

1. Strecke  $BC = a$  zeichnen
  2. Mittelpunkt  $M_a$  der Strecke konstruieren
  3. Kreis um  $M_a$  mit Radius  $s_a$  konstruieren
  4. Kreis um C mit Radius  $b$  zeichnen
  5. gefundene Schnittpunkte der beiden Kreise sind  $A_1$  und  $A_2$
- Die 2 Lösungen sind zueinander kongruente Dreiecke.

Seite c  $c = 1/\sqrt{2} \sqrt{(a^2 - 2 b^2 + 4 s_a^2)}$

Flächeninhalt  $A = 1/8 \sqrt{(8(a^2 (b^2 + s_a^2) - 2 (b^2 - s_a^2)^2) - a^4)}$

**Dreieckskonstruktion**

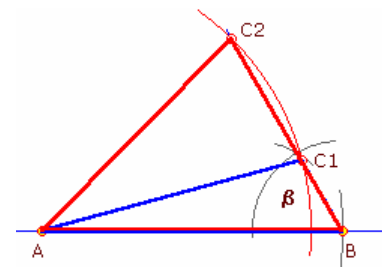
gegebene Stücke:  $b, c$  und Winkel  $\beta < 90^\circ$

Konstruktion:

1. Strecke  $AB = c$  zeichnen
2. am Punkt B den Winkel  $\beta$  abtragen
3. Kreisbogen um A mit dem Radius  $b$  zeichnen

**Fallunterscheidung nach der Länge b**

1. Der Kreis schneidet den freien Schenkel des gegebenen Winkels  $\beta$  nicht. Daraus ergibt sich keine Lösung.
2. Der Kreis berührt den freien Schenkel. Als Lösung ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit  $\gamma = 90^\circ$ .
3. Der Kreis schneidet zweimal den freien Schenkel ( $b < c$ ). Als Lösungen ergeben sich zwei formverschiedene Dreiecke  $ABC_1$  und  $ABC_2$ . (siehe Darstellung)
4. Der Kreis schneidet den freien Schenkel einmal in C und geht durch den Scheitelpunkt B des gegebenen Winkels  $\beta$  hindurch. Als Lösung ergibt sich ein gleichschenkliges Dreieck mit  $b = c$ .
5. Der Kreis schneidet den freien Schenkel einmal in C und umschließt den Scheitelpunkt B. Als Lösung ergibt sich ein Dreieck mit  $b > c$ . Dieser Fall entspricht dem Kongruenzsatz SSW.



Lösung 1 Seite a  $a = \sqrt{(2 b c \cos(\arcsin(c/b \sin \beta) + \beta) + b^2 + c^2)}$

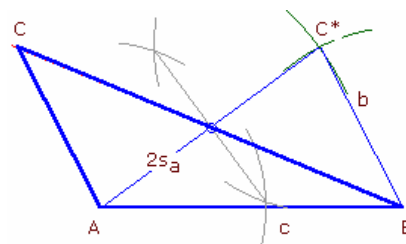
Lösung 2 Seite a  $a = \sqrt{(-2 b c \cos(\arcsin(c/b \sin \beta) - \beta) + b^2 + c^2)}$

### Dreieckskonstruktion

gegebene Stücke:  $b$ ,  $c$  und  $s_a$

Konstruktion:

1. Strecke  $AB = c$  zeichnen
  2. das Dreieck  $ABC^*$  aus den Stücken  $c$ ,  $b$  und der doppelten Seitenhalbierenden  $s_a$  nach Kongruenzsatz SSS eindeutig konstruieren
  3. Mittelpunkt der Strecke  $AC^*$  konstruieren. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der Seite  $a$ .
  4. Strecke von  $B$  durch diesen Mittelpunkt zeichnen
  5. Strecke  $BC^*$  parallel durch  $A$  verschieben
  6. der Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt  $C$
- Seite  $a$   $a = \sqrt{2(b^2 + c^2 - 2s_a^2)}$

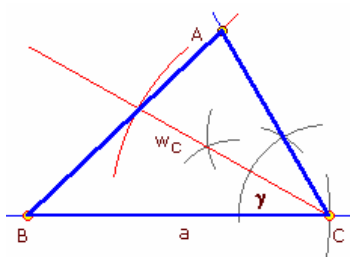


### Dreieckskonstruktion

gegebene Stücke:  $a$ ,  $\gamma$  und  $w_c$

Konstruktion:

1. Strecke  $BC = a$  zeichnen
2. im Punkt  $C$  den Winkel  $\gamma$  antragen und den zweiten Schenkel ziehen
3. Winkel  $\gamma$  halbieren und Winkelhalbierende  $w_c$  zeichnen
4. Kreisbogen um  $C$  konstruieren mit dem Radius  $r = w_c$
5. der Schnittpunkt liegt auf der Seite  $c$
6. von  $B$  durch den Schnittpunkt Gerade konstruieren und mit dem freien



Schenkel von  $\gamma$  zum Schnitt bringen

7. der Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt  $A$

Seite  $c$   $c = 2 \sqrt{a^2 + w_c^2 - 2 a w_c \cos(\gamma/2)}$

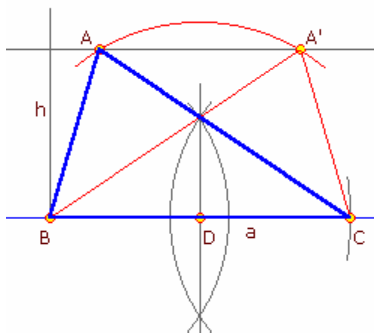
Seite  $b$   $b = w_c \cos(\gamma/2) + 1/2 \sqrt{2w_c^2 \cos(\gamma) + c^2 - 2w_c^2}$

### Dreieckskonstruktion

gegebene Stücke:  $a$ ,  $h_a$  und  $s_a$

Konstruktion:

1. Strecke  $BC = a$  zeichnen
2. die Gerade  $a$  parallel verschieben, so dass die Parallele den Abstand  $h_a$  hat
3. die Strecke  $BC$  halbieren, Mittelpunkt  $D$  ist ein Punkt der Seitenhalbierenden  $s_a$
4. Kreisbogen um  $D$  konstruieren mit dem Radius  $r = s_a$
5. die Schnittpunkte mit der Parallelen sind  $A$  und  $A'$
6. die beiden entstandenen Dreiecke  $ABC$  und  $A'BC$  sind zueinander kongruent



Seite  $b$   $b = 1/2 \sqrt{4a \sqrt{s_a^2 - h_a^2} + a^2 + 4 s_a^2}$

Seite  $c$   $c = 1/2 \sqrt{-4a \sqrt{s_a^2 - h_a^2} + a^2 + 4 s_a^2}$

Bei der Lösung 2 sind die Werte von  $b$  und  $c$  vertauscht.

### Dreieckskonstruktion

gegebene Stücke:  $a+b$ ,  $c$  und  $\beta$

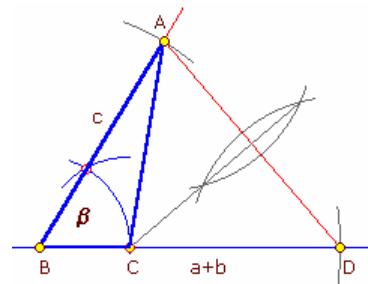
Das Dreieck  $ABD$  mit der Seite  $BD = a + b$  ist nach dem Kongruenzsatz SWS eindeutig konstruierbar.

Konstruktion:

1. Strecke  $BD = a+b$  zeichnen, der gefundene Punkt ist  $D$
2. in  $B$  den Winkel  $\beta$  antragen und einen Kreisbogen mit dem Radius  $a$  um  $B$  zeichnen; der Schnittpunkt mit dem freien Schenkel des Winkels ist  $A$
3. auf der Strecke  $AD$  die Mittelsenkrechte errichten und mit  $BD$  zum Schnitt bringen
4. der Schnittpunkt ist der dritte Dreieckspunkt  $C$

Seite  $b$   $b = 1/2 |(2c(a+b) \cos \beta - c^2 - (a+b)^2) / (c \cos \beta - (a+b))|$

Seite  $a$   $a = (a+b) - 1/2 |(2c(a+b) \cos \beta - c^2 - (a+b)^2) / (c \cos \beta - (a+b))|$



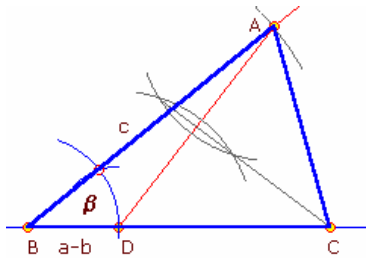
### Dreieckskonstruktion

gegebene Stücke:  $a-b$ ,  $c$  und  $\beta$

Das Dreieck  $ABD$  mit der Seite  $BD = a - b$  ist nach dem Kongruenzsatz SWS eindeutig konstruierbar.

Konstruktion:

1. Strecke  $BD = a-b$  zeichnen, der gefundene Punkt ist  $D$
2. in  $B$  den Winkel  $\beta$  antragen und einen Kreisbogen mit dem Radius  $a$  um  $B$  zeichnen; der Schnittpunkt mit dem freien Schenkel des Winkels ist  $A$

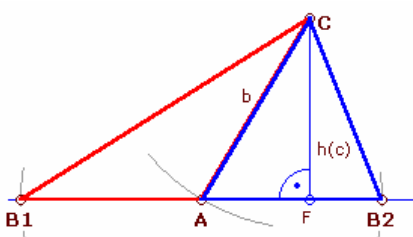
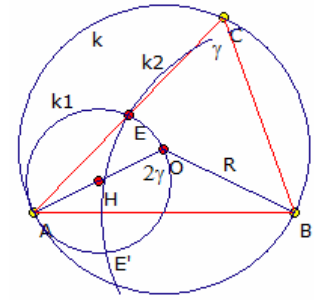


- auf der Strecke AD die Mittelsenkrechte errichten und mit BD zum Schnitt bringen
  - der Schnittpunkt ist der dritte Dreieckspunkt C
- Seite b  $b = 1/2 |(2c(a-b)\cos\beta - c^2 - (a-b)^2) / (c\cos\beta - (a-b))|$   
 Seite a  $a = (a-b) + 1/2 |(2c(a-b)\cos\beta - c^2 - (a-b)^2) / (c\cos\beta - (a-b))|$

**Dreieckskonstruktion**

gegebene Stücke:  $\gamma, m_b, \text{Umkreisradius } R$   
 Konstruktion:

- Seite AB ist Sehne des Umkreises
  - damit ist der Zentriwinkel AOB doppelt so groß, wie der Peripheriewinkel  $ACB = \gamma$
  - das gleichschenklige Dreieck ABO wird mit  $AO = BO = R$  und dem eingeschlossenen Winkel  $2\gamma$  konstruiert
  - um O wird der Umkreis mit dem Radius R gezeichnet
  - der Mittelpunkt der Seite AC = E ist dann der Schnittpunkt der Kreise  $k_1$  und  $k_2$
  - $k_1$  hat die Strecke AO als Durchmesser
  - $k_2$  hat den Radius  $s_b$  und den Mittelpunkt B
  - die Schnittpunkt der Geraden durch A und E mit dem Umkreis sind mögliche Punkte C, wobei nur dann zwei Dreiecke entstehen, wenn E und E' in der selben Halbebene bezüglich AB liegen
- Seite c  $c = 2R \sin \gamma$



**Dreieckskonstruktion**

gegebene Stücke:  $b, c, h_c$   
 Konstruktion:

- das Teildreieck AFC ist als rechtwinkliges Dreieck aus b und  $h_c$  sofort konstruierbar
  - den dritten Eckpunkt erhält man, in dem man auf dem Strahl AF die Strecke c abträgt
- Die Aufgabe ist stets lösbar, wenn  $b > h_c$  ist. Das Abtragen der Strecke c von A aus, ergibt zwei Schnittpunkte  $B_1$  und  $B_2$ . Beide

Dreiecke  $AB_1C$  und  $AB_2C$  sind nicht kongruent. Ist  $b = h_c$ , so existieren auch zwei Punkte  $B_1$  und  $B_2$ . Die zwei entstehenden Dreiecke sind aber kongruent. Ist  $b < h_c$ , so existiert keine Lösung.

- Lösung 1 Seite a  $a = \sqrt{-2c\sqrt{(b^2 - h_c^2) + b^2 + c^2}}$   
 Lösung 2 Seite a  $a = \sqrt{2c\sqrt{(b^2 - h_c^2) + b^2 + c^2}}$

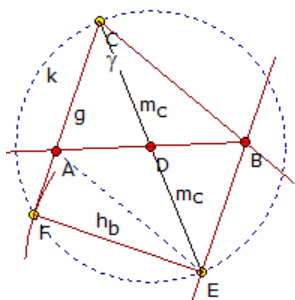
**Dreieckskonstruktion**

gegebene Stücke:  $h_c, w_\gamma, s_c$   
 Konstruktion:

- von dem rechtwinkligen Hilfsdreieck CFD sind eine Kathete  $h_c$  und die Hypotenuse  $s_c$  gegeben, d.h. nach dem Kongruenzsatz SSW konstruierbar
- der Punkt E ist der Schnittpunkt eines Kreises mit dem Radius  $w_\gamma$  um C mit der Geraden g, die durch F und D verläuft
- der Punkt K ist dann der Schnittpunkt der in D errichteten Senkrechten h zu g mit der Verlängerung der Strecke CE
- die Gerade h ist dann Mittelsenkrechte der noch unbekanntem Seite AB
- der Mittelpunkt O des Umkreises liegt dann auf h und auf der Mittelsenkrechten der Sehne CK
- die beiden Eckpunkte A und B sind nun die Schnittpunkte von g mit

dem gezeichneten Umkreis

Anmerkung: der zweite mögliche Schnittpunkt E' liegt nicht zwischen F und D und ergibt nicht das geforderte Dreieck



**Dreieckskonstruktion**

gegebene Stücke:  $h_b, \gamma, s_c$   
 Konstruktion:

- das Hilfsdreieck CEF wird wie folgt konstruiert:
- man zeichnet die Strecke  $CE = 2s_c = 2m_c$  und auf ihr um den Mittelpunkt D den Thales-Kreis k
- der Höhenfußpunkt F ist der Schnittpunkt von k mit einem Kreis mit dem Radius  $h_b$  um E
- in C wird der Winkel  $\gamma$  bzgl. der Geraden CF so abgetragen, dass CE zwischen beiden Schenkeln liegt
- der Dreieckspunkt B ist dann der Schnittpunkt der freien Schenkels mit der

Parallelen von g durch E

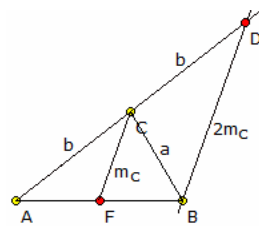
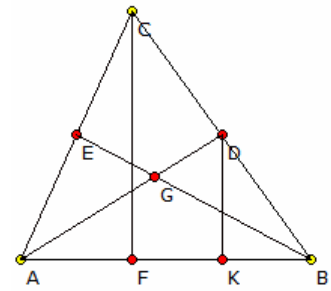
6. A ist der Schnittpunkt der Geraden BD mit g

### Dreieckskonstruktion

gegebene Stücke:  $s_a, s_b, h_c$

Konstruktion:

1. D und E seien die Mittelpunkte der Seiten BC und CA sowie F der Lotfußpunkt von C auf AB
  2. die Parallele zu CF durch D schneidet AB im Punkt K
  3. nach dem 2. Strahlensatz gilt dann  $BD : BC = DK : CF = 1 : 2$
  4. damit kann das Dreieck  $\triangle ADK$  aus  $AD = s_a, DK = 1/2 h_c$  und Winkel  $\angle AKD = 90^\circ$  konstruiert werden
  5. der Schwerpunkt G teilt die Seitenhalbierende AD im Verhältnis 1:2 und ist auch konstruierbar
  6. der Punkt B liegt dann auf der Verlängerung von AK im Abstand  $2/3 s_b$  von G aus
  7. der Punkt C entsteht durch Verdopplung von BD
- Seite c  $c = 1/3 \sqrt{4 s_b^2 - h_c^2} + 1/3 \sqrt{4 s_a^2 - h_c^2}$   
 Seite a  $a = 2 \sqrt{c^2 - s_a^2}$   
 Seite b  $b = 2 \sqrt{c^2 - s_b^2}$



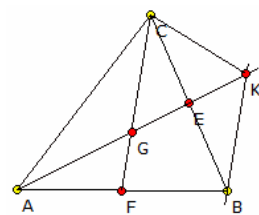
### Dreieckskonstruktion

gegebene Stücke: a, b,  $s_c$

Konstruktion:

1. eine wichtige Methode zur Konstruktion eines Dreiecks, von dem einen Seitenhalbierende bekannt ist, besteht in der Ergänzung von  $\triangle ABC$ , so dass der Strahlensatz angewandt werden kann
2. F sei der Mittelpunkt von AB, so dass  $CB = a, CA = b$  und  $CF = s_c = m_c$

3. die Seite AC wird um ihre Länge b über C hinaus verlängert. Das Ergebnis sei Punkt D
  4. dann gilt  $AC / AD = AF / AB = 1/2$  und  $BD = 2 s_c = 2 m_c$
  5. das Hilfsdreieck  $\triangle DCB$  ist somit konstruierbar
  6. A ergibt sich dann als Verlängerung von CD über C hinaus
- Seite c  $c = \sqrt{2(b^2 + a^2 - 2s_c^2)}$   
 Flächeninhalt  $A = 1/4 \sqrt{-a^4 + 2a^2(b^2 + 4s_c^2) - b^4 + 8s_c^2(b^2 - 2s_c^2)}$



### Dreieckskonstruktion

gegebene Stücke:  $s_a, s_b, s_c$

Konstruktion:

1. G sei der Schwerpunkt des Dreiecks  $\triangle ABC$
2. da G die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2 teilt, ergibt eine Drehung des Dreiecks  $\triangle GBC$  in  $\triangle KCB$ , dass das Dreieck  $\triangle GKB$  aus den Stücken  $GK = GA = 2/3 s_a, GB = 2/3 s_b$  und  $BK = GC = 2/3 s_c$  konstruiert werden kann

3. A ergibt sich durch Verdopplung von KG und C durch Erweiterung des Dreiecks  $\triangle GKB$  zu einem Parallelogramm
- Seite a  $a = 1/3 \sqrt{8 s_b^2 + 8 s_c^2 - 4 s_a^2}$   
 Seite b  $b = 1/3 \sqrt{8 s_a^2 + 8 s_c^2 - 4 s_b^2}$   
 Seite c  $c = 1/3 \sqrt{8 s_a^2 + 8 s_b^2 - 4 s_c^2}$   
 Fläche A  $A = 1/3 \sqrt{(2s_a^2s_b^2 + 2s_a^2s_c^2 + 2s_b^2s_c^2 - s_a^4 - s_b^4 - s_c^4)}$

### Dreieckskonstruktion

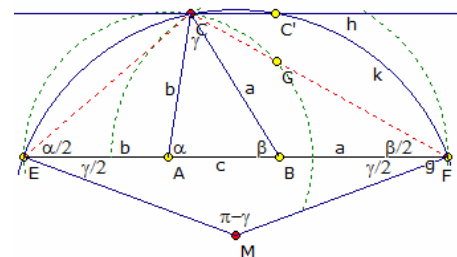
gegebene Stücke:  $\gamma, h_c, s = (a+b+c)/2$

Analysis:

1. die Seiten  $BC = a$  und  $AC = b$  werden so nach außen geklappt, dass die Punkte E und F auf der Geraden durch A und B liegen
2. damit ist  $EF = 2s = a + b + c$
3. die Dreiecke CAE und CBF sind dann gleichschenkelig und die Winkel  $\angle CEA = \angle ECA = \alpha/2, \angle CFB = \angle FCB = \beta/2$
4. der Winkel  $\angle ECF = 90^\circ - \gamma/2$  ist Peripheriewinkel über der Sehne EF im Umkreis k des Dreiecks ECF

Konstruktion:

1. das gleichschenkelige Dreieck EMF mit den Basiswinkeln  $\gamma/2$  ist nach dem Kongruenzsatz WSW konstruierbar
2. der Punkt C ist dann Schnittpunkt des Umkreises k und der Parallelen zu EF mit dem Abstand  $h_c$ . C' stellt eine symmetrische Lösung dar.
3. die Mittelsenkrechten von CE und CF schneiden sich mit der Geraden durch E und F in den noch gesuchten Punkten A und B



### Dreieckskonstruktion

gegebene Stücke:  $\gamma, w_c, \rho$





**Lösung 1**

Seite b  $b = 2 (\sqrt{a^2 - h_b^2} - \sqrt{s_b^2 - h_b^2})$   
 Seite c  $c = \sqrt{-4 \sqrt{a^2 - h_b^2} \sqrt{s_b^2 - h_b^2} + a^2 - 4(h_b^2 - s_b^2)}$

**Lösung 2**

Seite b  $b = 2 (\sqrt{a^2 - h_b^2} + \sqrt{s_b^2 - h_b^2})$   
 Seite c  $c = \sqrt{4 \sqrt{a^2 - h_b^2} \sqrt{s_b^2 - h_b^2} + a^2 - 4(h_b^2 - s_b^2)}$

**Dreieckskonstruktion**

gegebene Stücke: Seite a, Seitensumme b+c und Winkel  $\alpha$   
 Ist das Dreieck ABC gegeben, so ist der Punkt D die Verlängerung von CA, so dass  $CD = c + b$  ist.

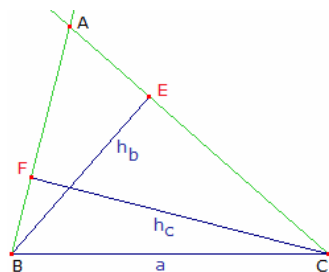
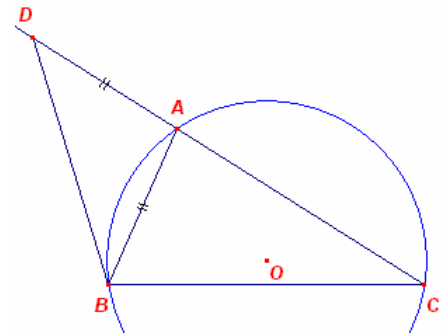
Dann ist im Dreieck ABD der Winkel  $\delta$  bei D:

$$\delta = \frac{1}{2}(180^\circ - (180^\circ - \alpha)) = \frac{1}{2} \alpha$$

Konstruktion:

1. Das Dreieck BCD ist somit nach SSW konstruierbar.
2. Das  $\alpha$  Peripheriwinkel um Umkreis von ABC ist, ist der Punkt A als Schnittpunkt des Umkreisbogens BG mit der Strecke CD konstruierbar.

Seite c  $c = a \sin(\alpha/2 + \arcsin(\sin(\alpha/2) (b+c)/a)) / \sin \alpha$   
 Seite b  $b = (b+c) - a \sin(\alpha/2 + \arcsin(\sin(\alpha/2) (b+c)/a)) / \sin \alpha$



**Dreieckskonstruktion**

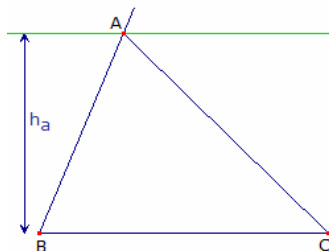
gegebene Stücke: Seite a, Höhen  $h_b, h_c$

Konstruktion:

Die Dreiecke BCE und BCF sind als rechtwinklige Dreieck direkt konstruierbar.

A ist dann der Schnittpunkt der Geraden BF und CE.

Seite c  $c = |h_b \sqrt{2h_b \cdot h_c \sqrt{h_b^2 - a^2} \cdot \sqrt{h_c^2 - a^2} + h_b^2 \cdot (a^2 - 2 \cdot h_c^2) + a^2 \cdot h_c^2} / (h_b^2 - h_c^2)|$



**Dreieckskonstruktion (31)**

gegebene Stücke: Seite a, Winkel  $\beta$  und Höhe  $h_a$

Konstruktion:

Der Punkt A liegt im Abstand  $h_a$  von BC, d.h. auf einer Parallelen zu BC und außerdem auf dem freien Schenkel des in B angetragenen Winkels  $\beta$ .

Seite c  $c = h_a / \sin \beta$

Seite b  $b = \sqrt{a^2 + h_a^2 / \sin^2 \beta - 2 a h_a \tan \beta}$

**Dreieckskonstruktion**

gegebene Stücke: Seitensumme b+c, Winkeldifferenz  $\beta - \gamma$  und Ankreisradiensumme  $r_b + r_c$

Konstruktion:

Die Punkte  $X_b$  und  $X_c$  seien die Projektionen von  $I_b$  und  $I_c$  auf die Gerade BC.  $J'$  ist der Schnittpunkt der Senkrechten in  $X_b$  mit der Geraden durch  $I_c$  parallel zu BC. Dann gilt

$$\angle I_b I_c J' = \frac{1}{2}(B - C) \quad X_b X_c = I_c J' = b$$

+ c

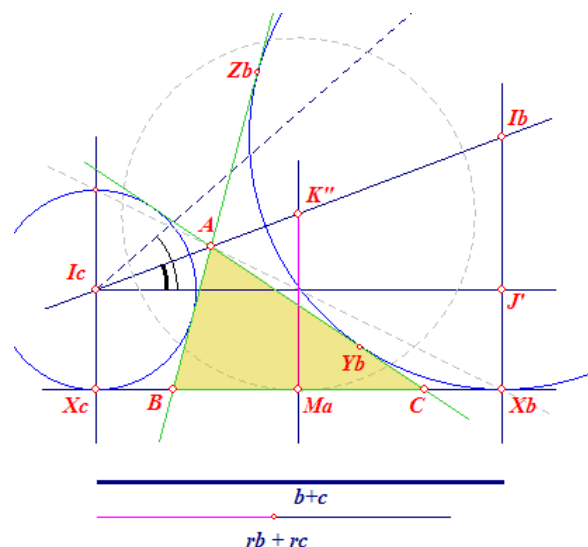
$M_a$  (die Mitte von BC) ist ebenfalls die Mitte von  $X_b X_c$ . In dem rechtwinkligen Trapez  $X_c X_b I_b I_c$  ist dann  $MaK'' = \frac{1}{2}(r_b + r_c)$ , wobei  $K''$  die Mitte von  $I_b I_c$  ist.

Ausgehend von  $I_c J' = b + c$  konstruiert man das rechtwinklige Dreieck  $I_c J' I_b$  (SWW).

Der Kreis ( $K''$ ,  $\frac{1}{2}(r_b + r_c)$ ) schneidet die Senkrechte von  $K''$  auf  $I_c J'$  im Punkt  $M_a$ . Die Senkrechte in  $M_a$  auf die Gerade  $K'' M_a$  schneidet die projizierten Geraden von  $I_b$  und  $I_c$  in den Punkten  $X_b$  und  $X_c$ .

Die beiden Außenkreise ( $I_b$ ) und ( $I_c$ ) sind dann konstruierbar. Der Punkt A ist dann Ähnlichkeitszentrum der beiden Außenkreise.

Die Punkte B und C gewinnt man dann als innere Berührungspunkte der inneren Tangenten von A an die zwei Kreise.



**Dreieckskonstruktion**

gegebene Stücke: Seite a, Höhe  $h_b$  und Inkreisradius r

Konstruktion:

In einem beliebigen Punkt E konstruiert man zwei zueinander senkrechte Geraden. Der Kreis (E, h<sub>b</sub>) ergibt dann den Punkt B. Mit einem Kreis (B, a) konstruiert man den Punkt C.

Das Dreieck IXC, wobei X die Projektion des Inkreismittelpunktes I auf BC ist, kann nach dem Kongruenzsatz SWW konstruiert werden. I liegt im Abstand r von BC auf der Winkelhalbierenden des Winkels bei C. Die zweite Tangente von B an den Kreis (I, r) schneidet die Gerade CE dann im gesuchten Punkt A.

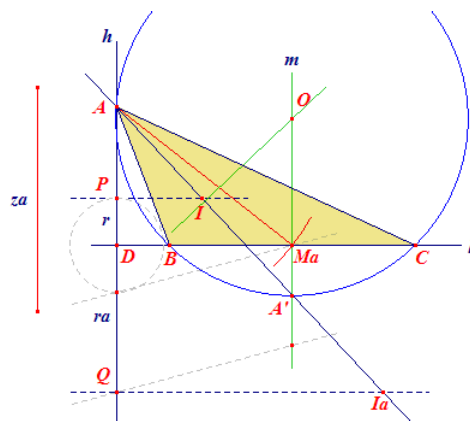
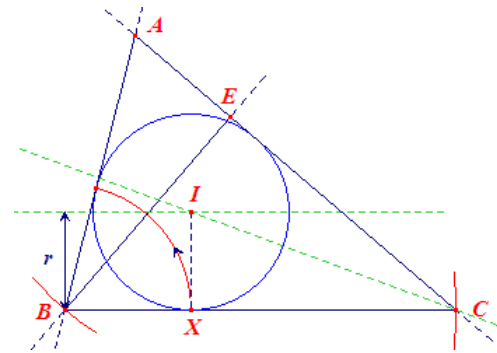
Ist das Dreieck spitzwinklig(!), so gilt:

Seite b  $b = 2r (r \sqrt{a^2 - h^2} + ar - ah) / (2rh - h^2)$

Seite c

$$c = (2r(h-r) \sqrt{a^2 - h^2} - ah^2 + 2ahr - 2ar^2) / (2rh - h^2)$$

Fläche A  $A = r (r \sqrt{a^2 - h^2} + ar - ah) / (2r - h)$



### Dreieckskonstruktion

gegebene Stücke: Seitenhalbierende  $s_a = z_a$ , Inkreisradius r und Ankreisradius  $r_a$

#### Konstruktionsbeschreibung

Auf einer, horizontalen, Gerade l wird ein Punkt D festgelegt und in diesem die Senkrechte h errichtet. Auf h werden die Punkte P und Q auf unterschiedlichen Seiten bezüglich D so festgelegt, dass  $DP = r$  und  $DQ = r_a$  gilt.

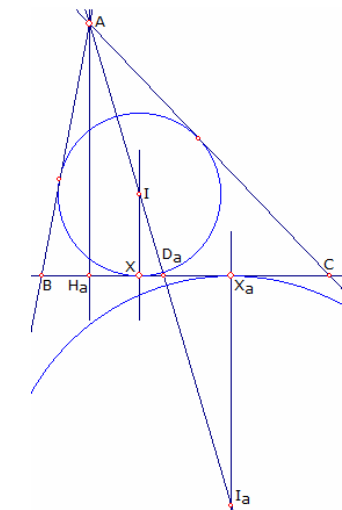
Auf h wird mittels der Grundkonstruktion zur vierten Proportionale ein Punkt A mit  $(ADPQ) = -1$  konstruiert.

Der Kreis  $A(z_a)$  schneidet die Gerade l im Punkt  $M_a$ , dem Mittelpunkt von BC. Die Gerade  $AM_a$  ist dann Seitenhalbierende von a im Dreieck ABC.

In  $M_a$  erzeugt man eine Senkrechte m auf l, die Mittelsenkrechte von BC, und auf dieser einen Hilfspunkt  $A'$  für den  $M_a A' = \frac{1}{2}(r_a - r)$  gilt. Diese Beziehung gilt für jeden Ankreis (siehe Abschnitt Ankreise des Dreiecks)

Der Umkreis des Dreiecks ABC geht sowohl durch A als auch durch  $A'$ . Dessen Mittelpunkt O muss auf m aber auch der Mittelsenkrechten von  $AA'$  liegen und kann so konstruiert werden.

Zuletzt ergeben sich die Punkte B und C als Schnittpunkte des Kreises  $O(OA)$  mit der Geraden l.



### Dreieckskonstruktion

gegeben: Punkt A und die Punkte X,  $X_a$ , die die Projektionen des Inkreismittelpunktes I und des Ankreismittpunktes  $I_a$  auf die Seite BC des Dreiecks ABC darstellen

Lösung:

Die Punkte  $[I, I_a]$  liegen harmonisch mit den Punkten  $[A, D_a]$  auf der Winkelhalbierenden des Winkels  $\alpha$ .  $D_a$  ist der Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden mit BC.

Daraus folge, dass auch der Höhenfußpunkt  $H_a$  mit  $D_a$  harmonisch liegt bezüglich dem Paar  $[X, X_a]$ ; das Doppelverhältnis ist invariant bezüglich einer Projektion.

$H_a$  ist als Lotfußpunkt von A auf  $XX_a$  konstruierbar. Der Punkt  $D_a$  ergibt sich dann als vierte Proportionale. Damit ist die Winkelhalbierende von  $\alpha$  gefunden.

Die Senkrechten in X und  $X_a$  auf BC schneiden  $AD_a$  in den Kreismittelpunkten I und  $I_a$ . Sowohl In- als auch Ankreis können gezeichnet werden.

AB und AC sind dann die gemeinsamen Tangenten von A an die Kreise (I,

$I_a)$  und  $(I_a, I_a X_a)$ .

### Dreieckskonstruktion

gegeben: Seite a, Winkel  $\alpha$ , Differenz  $b-c$  der Seiten b und c

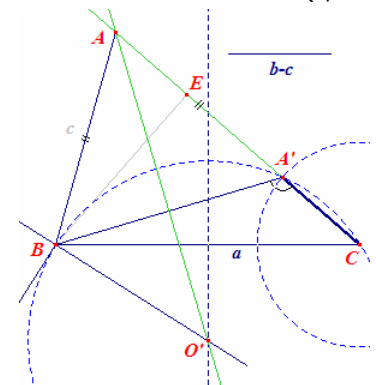
Lösung:

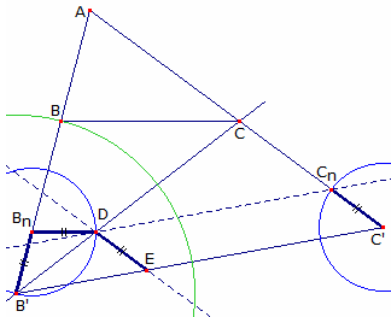
Das Hilfsdreieck  $A'BC$  mit a und  $CA' = b-c$  ist konstruierbar.

Aus  $AB = AA' = c$  folgt  $AA'DB = ABA' = \frac{1}{2}(180 - \alpha) = 90 - \frac{1}{2}\alpha$ , d.h.  $BA'C = 90 + \frac{1}{2}\alpha$ .

$A'$  liegt dadurch auf einem Kreis, bei dem BC unter einem Winkel von  $90 + \frac{1}{2}\alpha$  gesehen wird.  $A'$  findet man als Schnittpunkt dieses Kreises mit einem Kreis um C mit dem Radius  $b-c$ . A ist dann der Schnittpunkt von  $CA'$  mit der Mittelsenkrechten von  $A'B$ .

Dieses Problem ist nur lösbar, wenn  $a > (b-c)$  gilt.





### Dreieckskonstruktion

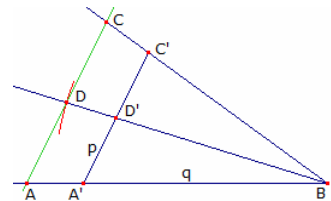
gegeben: Seitensummen  $b+a$  und  $c+a$ , Winkel  $\alpha$

Lösung:

Das Dreieck  $AB'C'$  ist nach dem Kongruenzsatz SWS direkt konstruierbar.

Anschließend müssen auf  $B'A$  und  $C'A$  die Punkte  $B$  und  $C$  mit  $B'B = BC = CC'$  konstruiert werden. Dazu wird das kleine Viereck  $B'B_nDE$  durch zentrische Streckung so vergrößert, so dass  $B_n$  und  $C_n$  auf den Seiten die Beziehung  $B'B_n = C'C_n$  erfüllen.

Der Punkt  $D$  ist dann der Schnittpunkt einer Geraden durch  $C_n$  parallel zu  $B'C'$  mit dem Kreis um  $B_n$ . Die Gerade  $B'D$  schneidet dann die Gerade  $AC'$  im gesuchten Punkt  $C$ . Damit ist mit  $a = CC'$  die Länge der Dreiecksseite  $a$  gefunden.  $B$  erhält man auf  $AB'$  mit einem Kreis ( $B', a$ ).



### Dreieckskonstruktion

gegeben: Winkel  $\alpha$ , Seitenhalbierende  $s_b$ , Seitenverhältnis  $b:c$

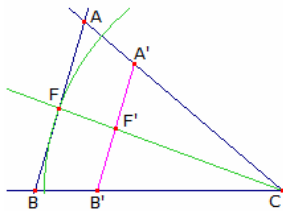
Lösung:

Zuerst werden zwei Strecken  $p$  und  $q$  konstruiert, deren Verhältnis dem Seitenverhältnis  $b:c$  entspricht. Mit diesen Strecken und dem Winkel  $\alpha$  kann das Dreieck  $A'B'C'$  als zu  $ABC$  ähnliches Dreieck nach SWS konstruiert werden.

Durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum  $B$  geht  $D'$  von  $A'C'$  in den Mittelpunkt  $D$  von  $AC$  über.  $D$  liegt damit auf der Geraden  $BD'$  und ergibt sich als Schnittpunkt mit einem Kreis um  $B$  mit dem Radius  $s_b$ . Die Gerade durch  $D$  parallel zu  $A'C'$  schneidet die beiden Schenkel  $BA'$  und  $BC'$  in den gesuchten Punkten  $A$  und  $C$ .

Seite  $b = s_b \cdot (b:c) / \sqrt{((b:c)^2/4 + 1 - (b:c) \cos \alpha)}$

Seite  $c = s_b / \sqrt{((b:c)^2/4 + 1 - (b:c) \cos \alpha)}$



### Dreieckskonstruktion (40)

gegeben: Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , Winkelhalbierende  $w_\gamma$

Lösung:

Durch zwei Innenwinkel wird ein ähnliches Dreieck zum gesuchten bestimmt.  $A'B'C$  sei eines dieser ähnlichen Dreiecke.

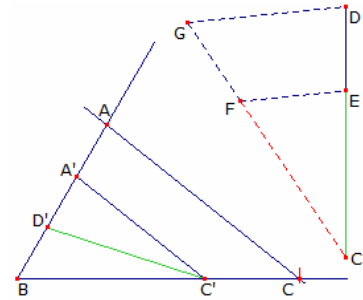
Die Winkelhalbierende von  $\gamma$  schneidet  $A'B'$  im Punkt  $F'$ . Der Punkt  $F$  liegt auf der Geraden  $CF'$  in der Entfernung  $w_c$  von  $C$  aus.

Die Gerade durch  $F$  parallel zu  $A'B'$  schneidet  $CA'$  und  $CB'$  in den gesuchten Punkten  $A$  und  $B$ .

Seite  $c = (\sin \gamma/2 / \sin \beta + \sin \gamma/2 / \sin \alpha) w_\gamma$

Seite  $a = c \sin \alpha / \sin \gamma$

Seite  $b = c \sin \beta / \sin \gamma$



### Dreieckskonstruktion

gegeben: Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , Seitenhalbierende  $s_c$

Lösung:

Aus dem Gegebenen folgt sofort der Winkel  $\gamma$ . Damit ist ein zu  $BCA$  ähnliches Dreieck  $BC'A'$  sofort konstruierbar.

Im Dreieck  $BC'A'$  sei  $C'D' = s'_c$  Seitenhalbierende. Der Streckungsfaktor von  $BC'A'$  zu  $BCA$  ist damit aus  $C'D' = s'_c$  und  $CD = s_c$  ermittelbar.

In der Hilfskonstruktion gilt

$$CE = C'D', CD = s_c, CF = BC' = a', CG = BC = a.$$

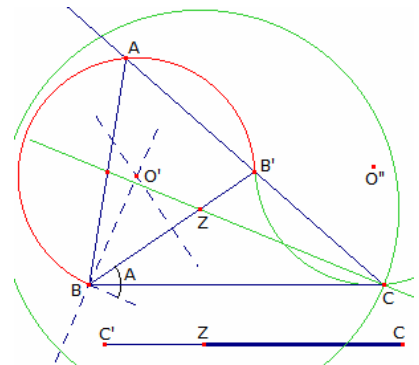
und somit  $CD : CE = CG : CF$  und  $s_c : s'_c = a : a'$

Damit kann der Punkt  $C$  auf  $BC'$  mit einem Kreis ( $B, a$ ) ermittelt werden.  $A$  ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden  $BA'$  mit einer zu  $A'C'$  parallelen Geraden durch  $C$ .

Seite  $c = s_c / \sqrt{(\sin^2 \beta / \sin^2 \gamma + 1/4 - \sin \beta \cos \alpha / \sin \gamma)}$

Seite  $a = c \sin \alpha / \sin \gamma$

Seite  $b = c \sin \beta / \sin \gamma$



### Dreieckskonstruktion

gegeben: Winkel  $\alpha$  und Seitenhalbierende  $s_b$  und  $s_c$

Lösung:

Im Dreieck  $ABB'$  sind  $\alpha$  und  $BB' = s_b$  gegeben.  $A$  liegt dabei auf dem Umkreis mit dem Peripheriewinkel  $\alpha$  und dem Kreismittelpunkt  $O'$ .

$C$  ist der punktsymmetrische Bildpunkt von  $A$  bezüglich  $B'$ .  $C$  liegt auch auf einem Kreisbogen um den Mittelpunkt  $O''$ .  $O''$  ist dabei der Spiegelpunkt von  $O'$  am Punkt  $B'$ .

Der Schwerpunkt Z ist durch BB' ebenfalls bekannt. C liegt dann im Abstand von  $2/3 CC' = 2/3 s_c$  von Z entfernt, d.h. C liegt auf einem Kreis (Z,  $2/3s_c$ ).  
Damit ist C gefunden. Die Gerade CB' schneidet den ersten Kreisbogen in A.

**Dreieckskonstruktion**

gegeben: Höhen  $h_a, h_b$  und Seitenhalbierende  $s_a$

Lösung:

Für die Konstruktion wird die Oberflächenformel des Dreiecks

$$A(ABC) = \frac{1}{2} h_a \cdot a = \frac{1}{2} h_b \cdot b$$

und die Beziehung für den Schnittpunkt E des Seitenhalbierenden  $s_a$  und der Winkelhalbierenden  $w_\gamma$  am Dreiecke ABC

$$AE : DE = AC : DC \quad \text{benötigt.}$$

A' sei der Fußpunkt der Höhe von A auf BC. Das Dreieck ADA' ist dann nach Kongruenzsatz direkt konstruierbar. Aus der Oberflächeformel folgt

$$BC \cdot h_a = AC \cdot h_b$$

und mit  $x = CD$ , wobei D der Mittelpunkt von BC ist

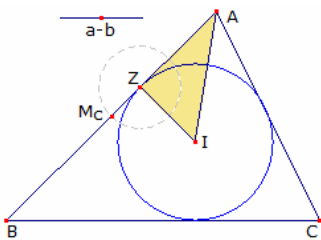
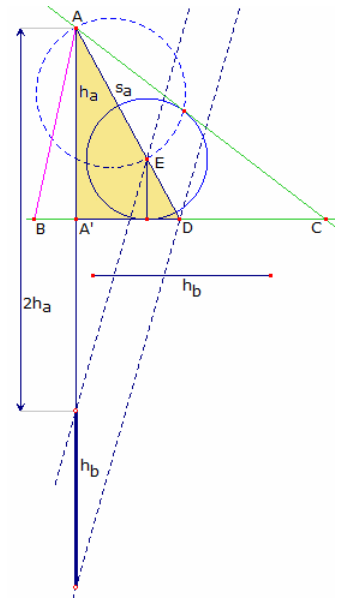
$$2x \cdot h_a = b \cdot h_b, \quad x : b = h_b : (2h_a)$$

Auf AD wird nun der Punkt E mit  $AE : DE = (2h_a) : h_b$  konstruiert.

E liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels  $\gamma$ . AC ist dann die Tangente an den Kreis mit dem Mittelpunkt E und einem Radius gleich dem Abstand von E zu BC.

Damit ergibt sich auf der Geraden AD der Punkt C und mittels Punktspiegelung von C an D auch der Punkt B.

Quelle: Anneke Grünefeld-Raaphorst



**Dreieckskonstruktion**

gegeben: Seitendifferenz a-b, Winkel  $\alpha$ , Inkreisradius r

Lösung:

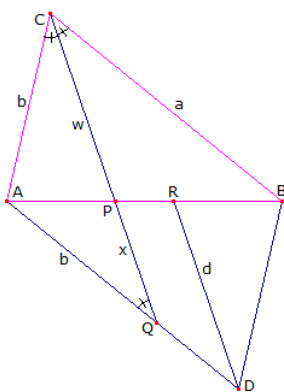
Der Winkel  $\alpha$  ist bekannt, also auch  $1/2\alpha$ . Z sei die Projektion von I auf die Seite AB des Dreiecks ABC. Mit  $IZ = r$  kann das Dreieck AZI nach Kongruenzsatz SWW konstruiert werden. Dann ist

$$AZ = s - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$$

$$\text{Daraus folgt } \frac{1}{2}c = AZ + \frac{1}{2}(a - b)$$

und der Mittelpunkt  $M_c$  kann auf der Verlängerung von AZ konstruiert werden. B ist dann der Spiegelpunkt von A an  $M_c$ .

Der dritte Dreieckspunkt C ergibt sich dann als der Schnittpunkt der Tangenten von A und B an den Kreis um I.



**Dreieckskonstruktion**

gegeben: Seiten a und b, Winkelhalbierende  $w_\gamma$

Lösung:

Angenommen, dass Dreieck ABC sei konstruiert. In diesem sind dann  $BC = a$ ,  $CA = b$  und  $CP = w_\gamma$  bekannt.

Das Dreieck ABC werde zum Parallelogramm ADBC ergänzt und Q sei der Schnittpunkt von CP und AD. Weiterhin zeichne man parallel zu CQ die Strecke DR, wobei R auf AB liegt.

Wenn  $PQ = x$  ist, so folgt aus der Ähnlichkeit  $ADR \sim AQP$

$$AD : AQ = DR : QP,$$

$$a : b = w_\gamma : x$$

PQ kann damit als vierte Proportionale aus a, b und  $w_\gamma$  konstruiert werden.

Nach Kongruenzsatz SSS ergibt sich das Dreieck AQC und der Punkt P auf CQ.

Der Punkt B ist der Schnittpunkt von AP mit dem Kreis um C mit dem Radius a.

$$\cos \gamma/2 = w_\gamma (a + b) / (2ab) \quad \text{Seite } c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

**Dreieckskonstruktion**

gegeben: Seitensumme b+c, Winkel  $\alpha$ , Inkreisradius r

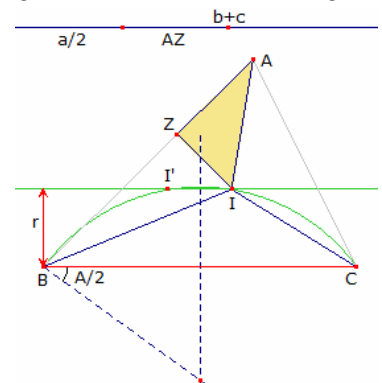
Lösung:

Das rechtwinklige Dreieck AZI ist direkt konstruierbar mit dem Winkel  $\alpha/2$  und dem Inkreisradius r. Dann ist

$$AZ = s - a = \frac{1}{2}(a + b + c) - a = \frac{1}{2}(b + c) - \frac{1}{2}a.$$

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(b + c) - AZ$$

Damit ist die Länge  $a = BC$  bekannt und die Konstruktion ist auf den Fall



der gegebenen Stücke  $a$ ,  $r$  und  $\alpha$  zurückgeführt.

- I liegt auf dem Kreisbogen ( $90 + \frac{1}{2}\alpha$ , BC)
- I liegt im Abstand  $r$  von BC
- die Spiegelbilder von BC an BI und CI schneiden sich dann im Punkt A

### Dreieckskonstruktion

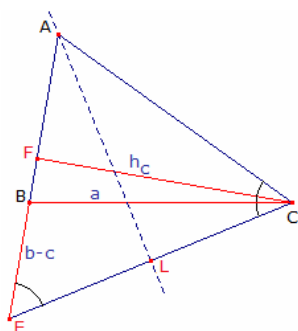
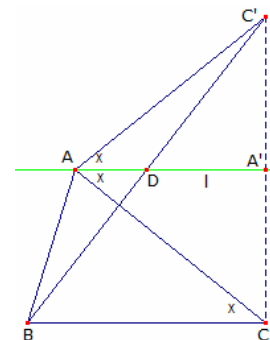
gegeben: Seiten  $a$  und  $b$ , Winkeldifferenz  $\alpha - \beta$

Lösung:

Die Gerade I ist die Gerade durch A parallel zu BC.  $C'$  sei das Spiegelbild von C an I. Dann ist

$$\begin{aligned} \angle BAA' &= 180^\circ - \beta \\ \angle C'AA' &= \angle CAA' = \gamma \\ \angle BAC' &= \angle BAA' + \angle C'AA' = 180^\circ - \beta + \gamma = 180^\circ - (\beta - \gamma) \end{aligned}$$

Mit  $AB = c$ ,  $AC' = AC = b$  und dem Winkel  $\angle BAC'$  kann das Dreieck  $ABC'$  eindeutig nach Kongruenzsatz SWS konstruiert werden. I ist die Mittelparallele des Dreiecks  $BCC'$ . AD ist dann konstruierbar mit dem Punkt D als Mitte von BC. Der Punkt C ist das Spiegelbild von  $C'$  an I.



### Dreieckskonstruktion

gegeben: Seite  $a$ , Seitendifferenz  $b - c$ , Höhe  $h_c$

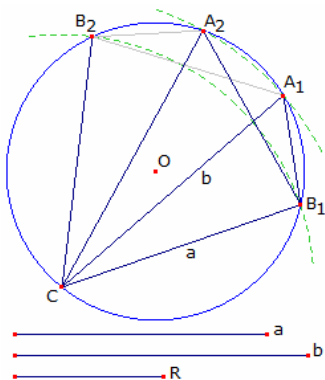
Lösung:

Ausgehend davon, dass das Dreieck  $ABC$  mit  $b > c$  konstruiert sei, gilt:

- 1) auf der Verlängerung von AB liegt der Punkt E so, dass  $AE = b$  und somit  $BE = b - c$
- 2) das Dreieck BCE ist dann mit der Höhe  $CF = h_c$  auf  $c$  und den Seiten  $BC = a$ ,  $BE = b - c$  konstruierbar
- 3) das Dreieck AEC ist gleichschenkelig

Konstruktion

Auf einer Geraden  $m$  werden zwei Punkte B und E mit  $BE = b - c$  gewählt. Die Gerade I mit dem Abstand  $h_c$  von BE ist der geometrische Ort von Punkt C. C liegt auch auf dem Kreis um B mit dem Radius  $a$ . Der Schnittpunkt des Kreise mit I ist der Punkt C. Punkt A liegt auf der Mittelsenkrechten von CE. Deren Schnitt mit der Geraden BE ist A. Bei dieser Konstruktion können zwei nicht kongruente Dreiecke entstehen.



### Dreieckskonstruktion

gegeben: Seiten  $a$  und  $b$ , Umkreisradius  $R$

Konstruktion

Der Kreis mit dem Umkreisradius  $R$  wird um den Umkreismittelpunkt  $O$  gezogen.

Auf dem Kreis wird ein beliebiger Punkt  $C$  gewählt und um diesen zwei Kreise mit den Radien  $a$  und  $b$  bezeichnet.

Diese Kreise schneiden den Ausgangskreis, wenn die Konstruktion möglich ist, in je zwei Punkten, die Punkte  $A$  und  $B$ .

Bei dieser Konstruktion können zwei nicht kongruente Dreiecke entstehen. Seite  $c = 1/(R \sqrt{2}) \sqrt{(-ab \sqrt{a^2 - 4R^2}) \sqrt{b^2 - 4R^2} + 2a^2R^2 + 2b^2R^2 - a^2b^2}$

### Dreieckskonstruktion

gegeben: Seite  $a$ , Winkel  $\alpha$  und Höhe  $h_a$

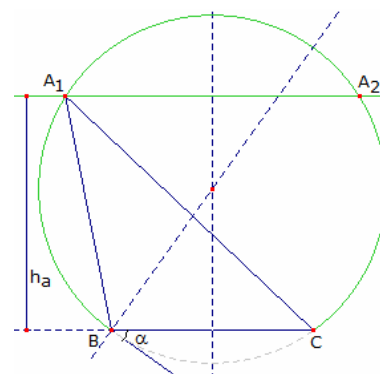
Konstruktion

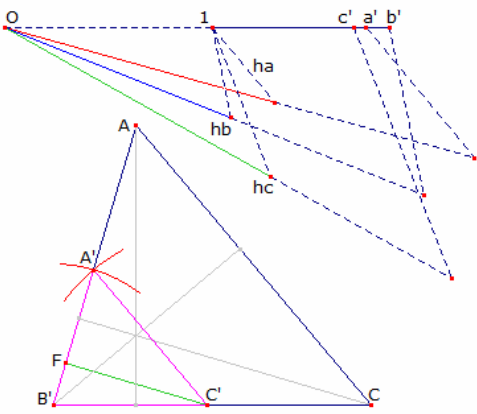
Die Konstruktion ergibt sich aus dem Sehnentangentenwinkel - Peripheriewinkelsatz.

1. An die Strecke  $BC = a$  wird der Winkel  $\alpha$  angetragen
2. die Senkrechte zum freien Schenkel von  $\alpha$  und die Mittelsenkrechte von BC schneiden sich im Umkreismittelpunkt  $U$  des gesuchten Dreiecks  $ABC$
3. die Parallele zu BC im Abstand  $h_a$  schneidet den Kreis in 0, 1 oder 2 Punkten, je nachdem, wie viele Lösungen für den Punkt A existieren

$$\text{Seite } c = \sqrt{\left(\sqrt{(4ah \cot \alpha + a^2 - 4h^2)/2} - a/2\right)^2 + h^2}$$

$$\text{Seite } b = \sqrt{\left(\sqrt{(4ah \cot \alpha + a^2 - 4h^2)/2} + a/2\right)^2 + h^2}$$





### Dreieckskonstruktion

gegeben: Höhe  $h_a$ , Höhe  $h_b$  und Höhe  $h_c$

Ausgehend von der Flächenformel des Dreiecks

$$A = \frac{1}{2} h_a \cdot a = \frac{1}{2} h_b \cdot b = \frac{1}{2} h_c \cdot c$$

folgt  $a : b : c = 1/h_a : 1/h_b : 1/h_c$

Über den Strahlensatz konstruiert man mit den drei Höhen  $h_a, h_b, h_c$  drei Seiten  $a', b', c'$ , die indirekt proportional zu den Höhen sind.

Aus  $a', b', c'$  kann nach dem Kongruenzsatz SSS das Hilfsdreieck  $A'B'C'$  konstruiert werden, das ähnlich zum gesuchten Dreieck ist.

Aus  $A'B'C'$  gewinnt man das Dreieck  $ABC$  durch eine zentrische Streckung am Zentrum  $B'$  mit dem Faktor  $h_c / CF$ ;  $CF$  ist die Höhe durch  $C$  im Dreieck  $A'B'C'$ .

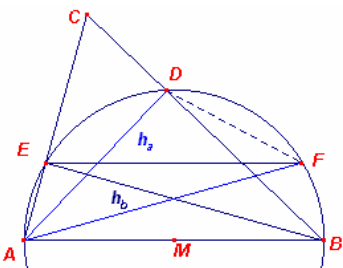
Den Punkt  $A$  erhält man durch Parallelverschiebung von  $A'C'$  durch den Punkt  $C$ .

$$\text{Hilfsgröße } w = \sqrt{2 h_a^2 h_b^2 h_c^2 (h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) - h_a^4 h_b^4 - h_a^4 h_c^4 - h_b^4 h_c^4}$$

$$\text{Seite } a = 2 h_a h_b^2 h_c^2 / w$$

$$\text{Seite } b = 2 h_b h_a^2 h_c^2 / w$$

$$\text{Seite } c = 2 h_c h_a^2 h_b^2 / w$$



### Dreieckskonstruktion

gegeben: Höhe  $h_a$ , Höhe  $h_b$  und die Winkeldifferenz  $\alpha - \beta$

$ABC$  sei das gesuchte Dreieck.

$ABDE$  ist dann Sehnenviereck mit einem Umkreis, dessen Mittelpunkt  $M$  sei.

Wenn ein Punkt  $F$  auf diesem Kreis so gewählt wird, dass  $ABFE$  ein gleichschenkeliges Trapez mit  $EF \parallel AB$  ist, so gilt

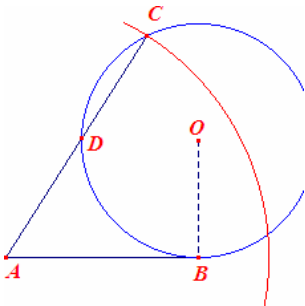
$$AF = h_b \text{ und Bogen}(AE) = \text{Bogen}(BF)$$

Und weiter

$$\begin{aligned} \angle DAF &= \frac{1}{2} \text{Bogen}(DF) = \frac{1}{2} \text{Bogen}(BDE - BF - ED) = \\ &= \frac{1}{2} \text{Bogen}(BDE) - \frac{1}{2} \text{Bogen}(AE + ED) = \alpha - \beta \end{aligned}$$

Das Dreieck  $AFD$  kann damit nach dem Kongruenzsatz SWS konstruiert werden. Damit ist auch der Umkreismittelpunkt  $M$  von  $AFD$  und  $ABC$  bekannt.

Der Punkt  $B$  ist das Spiegelbild von  $A$  an  $M$ . Der Punkt  $E$  ist dann der zweite Schnittpunkt des Kreises mit der Parallelen durch  $F$  in Bezug auf  $AB$ . Der Schnitt der Geraden  $AE$  und  $BD$  ergibt dann den letzten Dreieckspunkt  $C$ .



### Dreieckskonstruktion

gegeben: Höhen  $h_a, h_b$  und Inkreisradius  $r$

Grundlage der Konstruktion ist die Beziehung  $1/r = 1/h_a + 1/h_b + 1/h_c$

Somit ist es möglich, die dritte Höhe  $h_c$  zu konstruieren. Die Konstruktionsaufgabe wird damit zur Aufgabe aus den drei Höhen das Dreieck zu zeichnen.

siehe Dreieckskonstruktion (51) aus  $h_a, h_b, h_c$

### Konstruktion des Reziproken einer

#### Strecke

Gegeben:  $x$ ; zu konstruieren:  $1/x$

Man zeichne eine Strecke  $AB$  mit der Länge 1.

$O$  sei der Mittelpunkt eines Kreises, der die Strecke  $AB$  in  $B$  berührt.

Man zeichne nun einen Punkt  $C$  auf dem Kreis, der von  $AC$  den Abstand  $x$  hat, d.h.  $AC = x$ .

Dann gilt nach dem Sehnen-Tangentensatz  $AB^2 = AC \cdot AD$ , d.h. die Strecke  $AD$  ist gleich  $1/x$ .

#### Dreieckskonstruktion

gegeben: Seite  $a$ , Winkel  $\alpha$  und der Inkreisradius  $r$

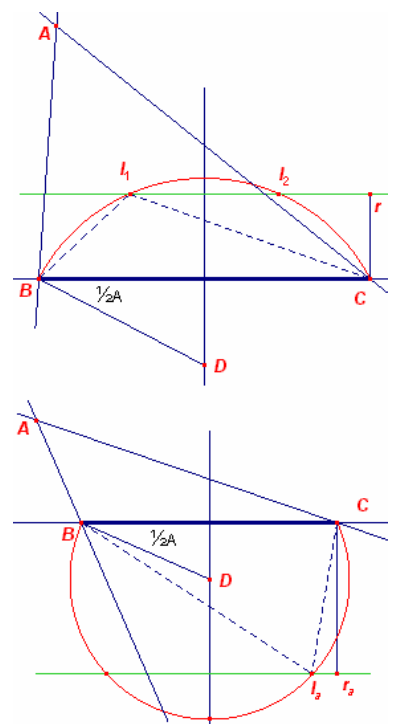
Grundlage dieser Konstruktion ist der Peripheriewinkel-Zentriwinkel-Satz.

Es sei  $I$  der Inkreismitelpunkt des Dreieck  $ABC$ . Dann ist

$$\angle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$$

Der Punkt  $I$  liegt auf einer Geraden  $m$  parallel zu  $BC$  in Abstand  $r$  von  $BC$ .

Damit sind auch die Strecken  $BI$  und  $CI$  konstruierbar. Die Spiegelung





der Strecke BC an den zwei Strecken ergibt dann den Punkt A.

Konstruktion:

An den Punkt B wird der Winkel  $\alpha/2$  angetragen. Der Punkt D auf der Mittelsenkrechten von BC ist der Punkt, für den der Kreisbogen BC die mögliche Lage von I beschreibt.

Die Gerade m schneidet den Kreisbogen in zwei möglichen Inkreispunkten  $I_1$  und  $I_2$ . Anschließend erfolgt die Spiegelung von BI und CI an BC.

### Dreieckskonstruktion

gegeben: Seite a, Winkel  $\alpha$  und der Ankreisradius  $r_a$

(untere Abbildung) Die Konstruktion erfolgt analog zu der oben beschriebenen, wobei  $r_a$  die Rolle von r einnimmt, und für die Bestimmung des Ankreismittelpunktes  $I_a$  der andere Kreisteil verwendet wird.

### Dreieckskonstruktion

gegeben: Seitensumme  $a+b+c$ , Winkel  $\alpha$ , Höhen  $h_a$

Angenommen die Konstruktionsaufgabe sei gelöst.

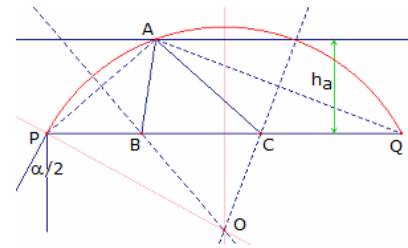
Dann ist BP gleich  $AB = c$  und CQ gleich  $CA = b$  und somit  $PQ = 2s = a + b + c$ . Dann wird für die Winkel  $\angle PAB = \frac{1}{2} \beta$  und  $\angle CAQ = \frac{1}{2} \gamma$  und  $\angle PAQ = 90^\circ + \frac{1}{2} \alpha$ .

Nach dem Peripheriewinkelsatz liegt dann A auf einem Kreisbogen. A

liegt aber auch auf einer Geraden mit dem Abstand  $h_a$  zu PQ. Der Punkt ist damit der Schnittpunkt des Kreisbogens und der parallelen Geraden.

Die Punkte B und C ergeben sich als Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von PA und QA mit der Geraden PQ.

Der Mittelpunkt O des Kreises ergibt sich als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von PQ und einer Geraden senkrecht zum Schenkel des in P angetragenen Winkels  $\alpha/2$ .



### Dreieckskonstruktion

gegeben: Innenwinkel  $\alpha$ , Inkreisradius r, Umkreisradius R

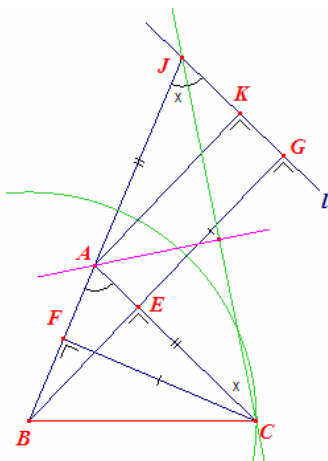
Diese Konstruktion kann auf die Konstruktion aus den Stücken Seite a, Innenwinkel  $\alpha$  und Inkreisradius r zurückgeführt werden.

Konstruktion:

Um einen beliebigen Punkt M wird ein Kreis mit dem Radius R gezeichnet und auf diesem ein beliebiger Punkt X gewählt.

Von X aus zeichnet man zwei Strahlen l und m, so dass diese den Winkel  $\alpha$  einschließen, d.h.  $\angle(l, m) = \alpha$ .

Der zweite Schnittpunkt von l mit dem Kreis ist B, der Schnittpunkt von m mit dem Kreis ist C. Nach dem Peripheriewinkelsatz ist damit die Strecke  $BC = a$  eindeutig festgelegt.



### Dreieckskonstruktion

gegeben: Seite a, Innenwinkel  $\alpha$ , Summe der Höhen  $h_b + h_c$

$\Delta ABC$  sei das gesuchte Dreieck sowie BE und CF seien die gegebenen Höhen im Dreieck. Man verlängere  $BE = h_b$  mit  $EG = CF = h_c$ . l sei die Gerade durch F parallel zu AC. l schneidet dann die Verlängerung von BA in J.

Die Dreiecke  $\Delta BAE$  und  $\Delta AJK$  sind dann ähnlich (WW), so dass  $\angle BJK = \angle BAC = \alpha$  ist.

Das Dreieck  $\Delta BJK$  kann dann Kongruenzsatz SWW konstruiert werden.

K ist die Projektion von A auf l. AKGE ist dann Rechteck, d.h.  $AK = EG = h_c$ .

Die rechtwinkligen Dreiecke  $\Delta AFC$  und  $\Delta JKA$  sind dann SWW kongruent, und so

$$AJ = CA = b \quad \text{und} \quad BJ = BA + AJ = c + b = b + c.$$

Damit ist die Konstruktion auf die Konstruktion aus den Stücken a,  $\alpha$ ,  $b+c$  zurückgeführt.

siehe Dreieckskonstruktion (29) aus a,  $b+c$ ,  $\alpha$

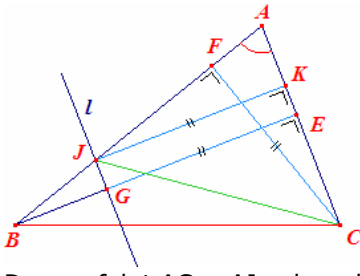
Die Konstruktion ist auch direkt ausführbar. Ausgehend vom Punkt B im Dreieck  $\Delta BJK$  wird  $\angle BAC = \angle AJK = \alpha$  und  $\angle BAC = \angle AJC + \angle ACJ$

$$\angle AJC = \angle ACJ = \frac{1}{2} \alpha \quad \text{sowie} \quad AJ = CA$$

JC ist dann Winkelhalbierende des Winkels bei J, auf der Punkt C liegt. Der Punkt C liegt aber auch auf einem Kreis um B mit dem Radius a.

Der Punkt A ist der Schnittpunkt von AJ mit der Mittelsenkrechten von CJ.

Die Konstruktion ist nicht notwendig eindeutig, da die Winkelhalbierende von J den Kreis um B an zwei Stellen schneiden kann.



**Dreieckskonstruktion**

gegeben: Seite a, Innenwinkel  $\alpha$ , Summe der Höhen  $h_b-h_c$

$\Delta ABC$  sei das gesuchte Dreieck, wobei  $\gamma > \beta$  gilt, da  $h_b > h_c$ .  
 Auf  $BE = h_b$  konstruiere man einen Punkt G so, dass  $EG = CF = h_c$  gilt, d.h.  $BG = h_b - h_c$ . Die Gerade l durch G sein parallel zu AC und schneide AB in J. K sei die Projektion von J auf AC.  
 Dann ist  $CF = GE = JK$ , so dass die Dreiecke  $\Delta AFC$  und  $\Delta AKJ$  kongruent sind.

Daraus folgt  $AC = AJ = b$  und  $BJ = BA - AJ = c - b$ .

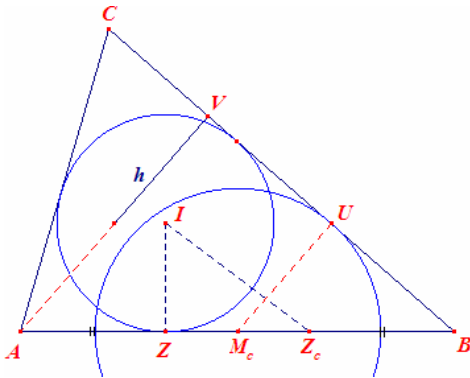
Damit ist die Konstruktion auf die Konstruktion aus den Stücken a,  $\alpha$ , c-b zurückgeführt. siehe Dreieckskonstruktion (37) aus a,  $\alpha$ , b-c

Die Konstruktion kann auch direkt geführt werden. Ausgangspunkt ist der Punkt B im Dreieck  $\Delta BJK$ . Der Winkel bei J ist dabei gleich  $\alpha$ . Das Dreieck  $\Delta ACJ$  ist gleichschenkelig und  $\angle AJC = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ .

JC ist die Winkelhalbierende des Winkels  $\angle GJA$ . Auf dieser Winkelhalbierenden und einem Kreis um B mit dem Radius a liegt der Punkt C.

A ist der Schnittpunkt der Verlängerung von BJ und der Mittelsenkrechten von JC.

Auch diese Konstruktion ist nicht eindeutig, da die Winkelhalbierende von J den Kreis um B an zwei Stellen schneiden kann.



**Dreieckskonstruktion**

gegeben: Seitendifferenz a-b, Höhe  $h_a$ , Inkreisradius r

Der Punkt Z sei die Projektion des Inkreismittelpunktes I auf AB.  $Z_c$  sei die Projektion von  $I_c$ , der Mittelpunkt des C-Ankreises von  $\Delta ABC$ ; auf AB.

Auf Grund von

$$ZZ_c = AB - AZ - BZ_c = c - 2(s-a) = c - (a+b+c) - 2a = a - b$$

kann das Dreieck  $IZZ_c$  nach Kongruenzsatz SWS konstruiert werden.

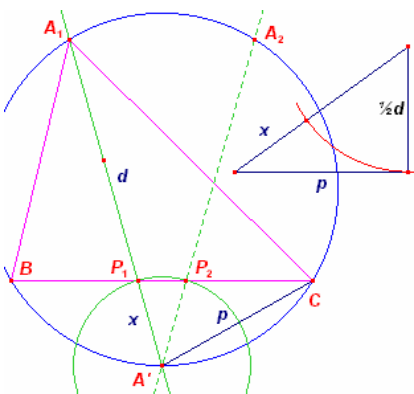
Die Punkte A und B liegen auf der Geraden  $ZZ_c$ . Der Mittelpunkt  $M_c$  von BC ist auch die Mitte von  $ZZ_c$ .

Das Lot auf BC von  $M_c$  ist gleich  $\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}h_a$  (Mittenparallele).

BC ist ebenso die gemeinsame Außentangente der zwei Kreise um I; Radius r; und um  $M_c$  mit dem Radius  $\frac{1}{2}h$ .

Die Berührungspunkt seien V und U. Damit erhält man auf der Geraden  $ZZ_c$  den gesuchten Punkt B. A ist dann das Spiegelbild von B an  $M_c$ .

Die zweite Tangente von A an den Inkreis um I erzeugt dann mit der Geraden BU den Punkt C.



**Dreieckskonstruktion**

gegeben: Seite a, Winkel  $\alpha$ , Winkelhalbierende  $w_\alpha$

$\Delta ABC$  sei das gesuchte Dreieck.

Die Winkelhalbierende von  $\alpha$  schneidet den Umkreis; der mit gegebenen a und  $\alpha$  konstruierbar ist; im Punkt  $A'$  und die Gerade BC in P. Es sei  $A'P = x$  und  $A'C = p$ . p ist bekannt.

Da  $\Delta AA'C \sim \Delta CA'P$  ist, folgt

$$AA' : CA' = A'C : A'P$$

$$(x + d)x = p^2$$

$$(x + \frac{1}{2}d)^2 = p^2 + (\frac{1}{2}d)^2$$

Die Strecke z mit  $z^2 = p^2 + (\frac{1}{2}d)^2$  ist nun über den Satz des Pythagoras konstruierbar.

$$x = z - \frac{1}{2}d$$

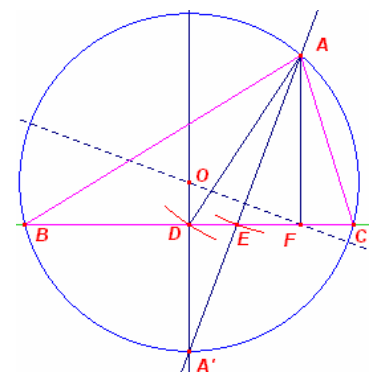
Mit dem Kreis um  $A'$  mit dem Radius  $z - \frac{1}{2}d$  findet man den Punkt P auf BC und somit mittels Gerade  $A'P$  als Schnittpunkt mit dem Umkreis den Punkt A.

**Dreieckskonstruktion**

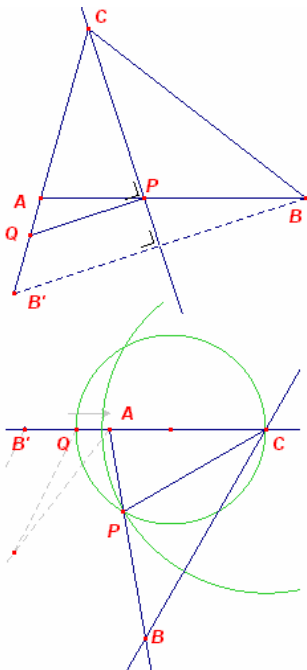
gegeben: Höhe  $h_a$ , Seitenhalbierende  $s_a$ , Winkelhalbierende  $w_\alpha$

Mit den gegebenen Stücken kann das rechtwinklige Dreieck AEF konstruiert werden.

Der Punkt D liegt auf der Geraden EF und ist gleichzeitig der Schnittpunkt eines Kreises um A mit dem Radius  $s_a$  und der Geraden EF.



Die Winkelhalbierende AE schneidet den Umkreis in der Mitte des Kreisbogens BC. Das Lot von D auf BC schneidet den Umkreis in dem gleichen Punkt. Damit ist der Punkt A' festgelegt. Der Mittelpunkt O des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AA' und der Geraden A'D. Abschließend findet man die Punkte B und C als Schnittpunkte des Umkreises mit der Geraden EF.



**Dreieckskonstruktion**

gegeben: Seiten a und b, Winkelhalbierende  $w_\alpha$

ABC sei das gesuchte Dreieck. Der Punkt B' auf AC ist dann Spiegelbild von B an der Winkelhalbierenden CP. PQ ist Strecke parallel zu BB' durch P. Dann gilt:

$AP : BP = b : a$  ; Winkelhalbierendensatz

$AP : BP = AQ : B'Q$  ; Strahlensatz

mit  $AB' = a - b$ . Damit ist Q konstruierbar.

Konstruktion:

Man zeichne eine Strecke AB' mit der Länge a - b und konstruiere in ihr einen Punkt Q im Verhältnis b : a.

Verlängert man B'A um b, so ergibt sich der Punkt C.

P liegt nun auf dem Kreis mit dem Durchmesser CQ und auf dem Kreis um C mit dem Radius  $w_\alpha$ .

Der Punkt B befindet sich auf der Geraden AP und gleichzeitig auf dem Spiegelbild der Geraden AC an PC.

**Dreieckskonstruktion**

gegeben: Seite a, Winkel  $\beta$ , Differenz b-h<sub>a</sub>

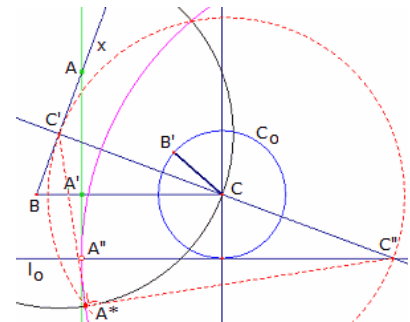
Dieses Konstruktionsproblem wurde 2003 von Hatzipolakis gestellt und von Dergiades gelöst.

Dergiades gelöst.

Zuerst wird die Strecke BC = a gezeichnet. Der Strahl l wird in B so angetragen, dass dieser mit BC den gegebenen Winkel  $\beta$  einschließt. Um den Punkt C wird ein Kreis C<sub>0</sub> mit dem Radius d = b - h<sub>a</sub> gezogen. Die Tangente l<sub>0</sub> an C<sub>0</sub> ist dann parallel zu BC. Die Höhe AA' schneidet l<sub>0</sub> im Punkt A'' und die Höhe CC' schneidet l<sub>0</sub> in C''.

Ein Kreis um C' mit dem Radius C'C schneidet den Durchmesser C'C'' in A\*.

Die Konstruktion von A\* ergibt den Punkt A'' mit C''A'' = C''A\* und das Lot auf l<sub>0</sub> durch A'' erzeugt den Eckpunkt A des Dreiecks  $\Delta ABC$ .

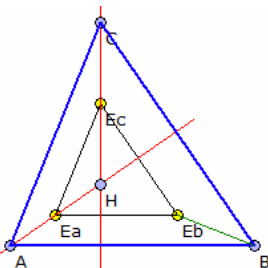


**Dreieckskonstruktion**

gegeben: die drei Euler-Punkte Ea, Eb, Ec auf den Höhen des Dreiecks

Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks, das durch die drei Euler-Punkte gebildet wird, ist der gleiche Höhenschnittpunkt H wie des gesuchten Dreiecks.

Da Ea der Mittelpunkt der Strecke AH ist, kann A durch Spiegelung von H an Ea konstruiert werden. Analog erhält man die zwei anderen Eckpunkte des Dreiecks ABC.



**Dreieckskonstruktion**

gegeben: die zwei Euler-Punkte Ea, Eb auf den Höhen des Dreiecks und der Umkreismittelpunkt U

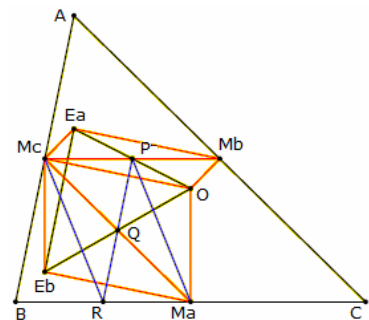
Beschreibung:

Es seien P und Q die Mittelpunkte der Strecken EaU und EbU. R ist das Spiegelbild von P an Q.

Die Gerade durch Eb, senkrecht zur Strecke EaEb, schneidet dann den Kreis um U mit dem Radius UR im Mittelpunkt Ma der Seite BC.

Der Kreis mit dem Zentrum U und dem Radius EaMa schneidet die Gerade durch Ma und R in den zwei Dreieckspunkten B und C. Die Gerade durch Ea, senkrecht zu BC, schneidet den Umkreis im dritten Punkt A.

Im Allgemeinen existieren zwei verschiedene Lösungen.



Begründung:

Im Parallelogramm OMaEbMc, dessen Diagonalen sich in Q schneiden, ist Q der Mittelpunkt von MaMc. Analog ist P der Mittelpunkt von MbMc.

Da Q auch Mittelpunkt von PR ist, ist P<sub>a</sub>M<sub>a</sub>R<sub>m</sub>C ebenfalls Parallelogramm und R liegt auf der Seite BC. Daher liegt M<sub>a</sub> auf einem Kreis mit dem Durchmesser OR. Da M<sub>a</sub>E<sub>b</sub> senkrecht zu E<sub>a</sub>E<sub>b</sub> ist, liegt M<sub>a</sub> auch auf der Senkrechten zu PQ durch E<sub>b</sub>.

### Dreieckskonstruktion O, H<sub>a</sub>, D<sub>a</sub>

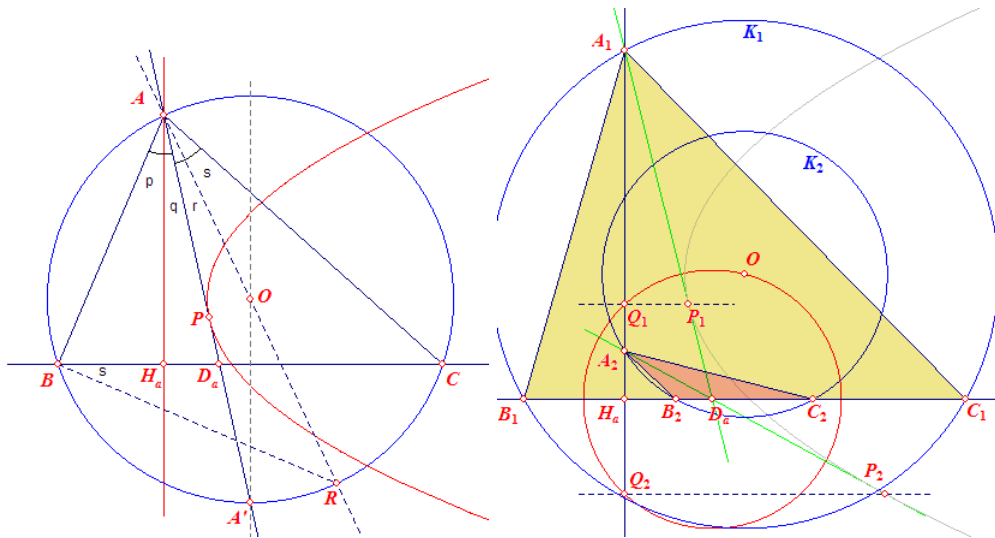
In dem Werk von J.Sapiña „Problemas gráficos de Geometría (1995)“ findet sich auf Seite 65 folgende Aufgabenstellung:

421. Construir un triángulo conociendo los pies de la altura y la bisectriz por A y el circuncentro.

d.h. es soll ein Dreieck konstruiert werden, von dem der Umkreismittelpunkt O, die Höhenfußpunkt H<sub>a</sub> auf der Seite A und der Schnittpunkt D<sub>a</sub> der Winkelhalbierenden des Innenwinkels α mit der Seite BC bekannt sind.

Diese Aufgabenstellung erweist sich als sehr anspruchsvoll.

### Konstruktion 1



Die Winkelhalbierende von A geht durch den Punkt A', dem Mittelpunkt des Kreisbogens BC. Wir zeigen, dass AA' die Parabel (O, AH<sub>a</sub>) tangiert. Diese Parabel ist auf Grund der vorgegebenen Lage der 3 Punkte konstruierbar. OA schneidet den Umkreis von ABC im Punkt R. Für die vier Winkel p, q, r, s bei A wird dann

$$\begin{array}{ll}
 p + q = r + s & \text{AA' ist Winkelhalbierende} \\
 \text{RBC} = \frac{1}{2} \text{bg}(\text{RC}) = s & \text{Peripheriewinkel} \\
 \text{RBA} = 90^\circ & \text{Thales-Kreis, so dass} \\
 s + \text{B} = 90^\circ & \\
 p + \text{B} = 90^\circ & \text{so dass } p = s, \text{ woraus folgt} \\
 q = r &
 \end{array}$$

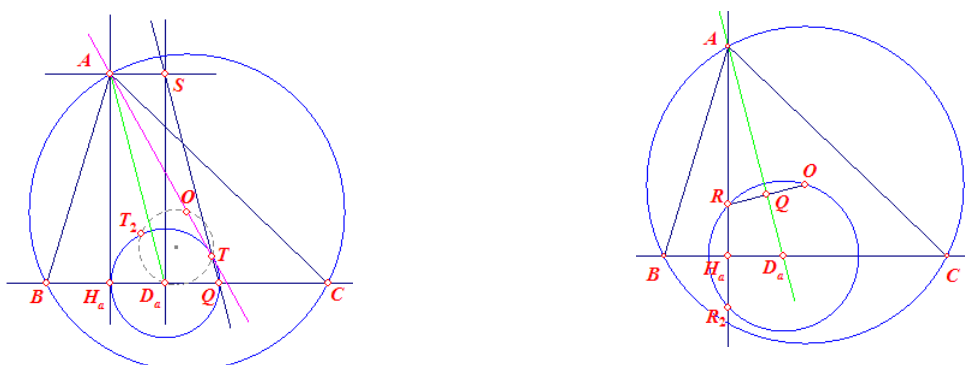
Damit ist AA' auch Winkelhalbierende von H<sub>a</sub>AR. Für alle Punkte P von AA' gilt: d(P, AH<sub>a</sub>) = (P, AR). O liegt auf m, mit anderen Worten: d(P, AH<sub>a</sub>) = PO. P liegt damit auf der Parabel(O, AH<sub>a</sub>). Dies gilt für jeden Punkt A auf der Geraden AH<sub>a</sub>. Die Winkelhalbierende von A umhüllt die Parabel(O, AH<sub>a</sub>).

Konstruktionsbeschreibung:

(1) Zeichne von D<sub>a</sub> aus die Tangente an die Parabel und erhalte die Berührungspunkte P<sub>1</sub> und P<sub>2</sub>. Der Kreis D<sub>a</sub>(O) schneidet die Gerade AH<sub>a</sub> in den Punkten Q<sub>1</sub> und Q<sub>2</sub>. Die Berührungspunkte P<sub>1</sub> und P<sub>2</sub> sind die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von OQ<sub>1</sub> und OQ<sub>2</sub> mit den Geraden in Q<sub>1</sub> und Q<sub>2</sub> senkrecht zu AH<sub>a</sub>. Diese Mittelsenkrechten sind die Tangenten.

(2) Die Gerade D<sub>a</sub>P<sub>1</sub> (D<sub>a</sub>P<sub>2</sub>) ist dann die Winkelhalbierende des Winkels bei A. A<sub>1</sub> (A<sub>2</sub>) wird als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit AH<sub>a</sub> gefunden. Der Kreis O(A) schneidet dann die Gerade D<sub>a</sub>H<sub>a</sub> in den gesuchten Punkten B und C.

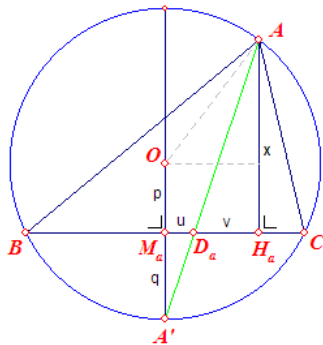
### Konstruktion 2 und 3



nach Paul Yiu  
 Konstruktionsbeschreibung  
 T ist der Tangentialpunkt der Tangente von O an den Kreis  $D_a(H_a)$ . Q ist der Gegenpunkt von  $H_a$  auf dem Kreis. Die Gerade QT schneidet die Senkrechte in  $D_a$  im Punkt S. Die Senkrechte in S schneidet die Senkrechte in  $H_a$  im Punkt A. Mit dem Kreis  $O(A)$  ergeben sich dann die Punkte B und C.  
 nach Nikolaos Dergiades, Vladimir Dubrovsky

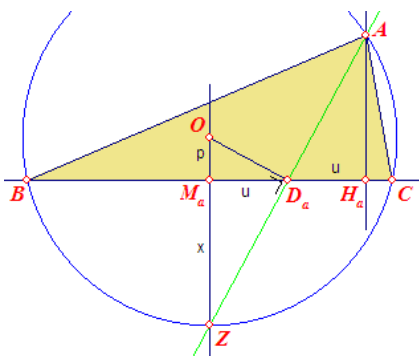
nach Harold Connelly  
 Konstruktionsbeschreibung  
 Der Kreis  $D_a(O)$  schneidet die Senkrechte  $H_a$  zu  $D_aH_a$  im Punkt R. Q sei der Mittelpunkt von OR. Der Schnittpunkt von  $D_aQ$  mit der Geraden  $H_aR$  ist dann der gesuchte Punkt A. Die Punkte B und C ergeben sich dann wieder mit dem Kreis  $O(A)$ .

### Konstruktion 4



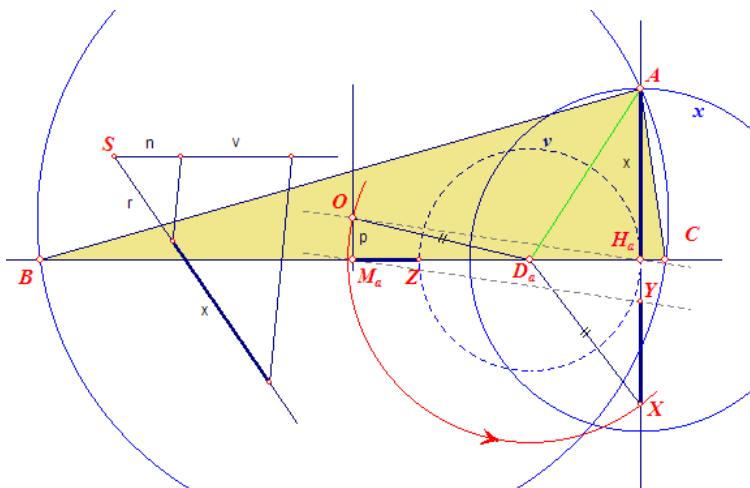
Von Francisco Javier García Capitán stammt eine analytische Lösung der Konstruktionsaufgabe:  
 Angenommen das Problem sei gelöst. Dann ist  
 $AH_a = x$                        $M_aD_a = u$  ( $M_a$  ist der Mittelpunkt von BC)  
 $D_aH_a = v$                        $OM_a = p$  en  $M_aA' = q$   
 Die Strecken  $u, v$  und  $p$  sind zu Beginn der Konstruktion bekannte Strecken. Aus der Ähnlichkeit von  $D_aM_aA'$  und  $D_aH_aA$  folgt  $D_aM_a : D_aH_a = M_aA' : H_aA$      $u : v = q : x$   
 und damit  $q = ux/v$   
 Außerdem ist  $(OA')^2 = OA^2 = (M_aH_a)^2 + (AH_a - OM_a)^2$ , of  
 $(p + q)^2 = (u + v)^2 + (x - p)^2$   
 Einsetzen ergibt eine Gleichung mit  $x$  als Unbekannter  
 $(v - u)x^2 - 2vpx + v^2(v + u) = 0$                       (ii)  
 und für  $v \neq u$                        $x = v(p \pm \sqrt{p^2 + u^2 - v^2}) / (v - u)$                       (iii)  
 Damit gibt es drei Konstruktionsfälle (4.1)  $v = u$ , (4.2)  $v < u$ , (4.3)  $v > u$

### Konstruktion 4.1



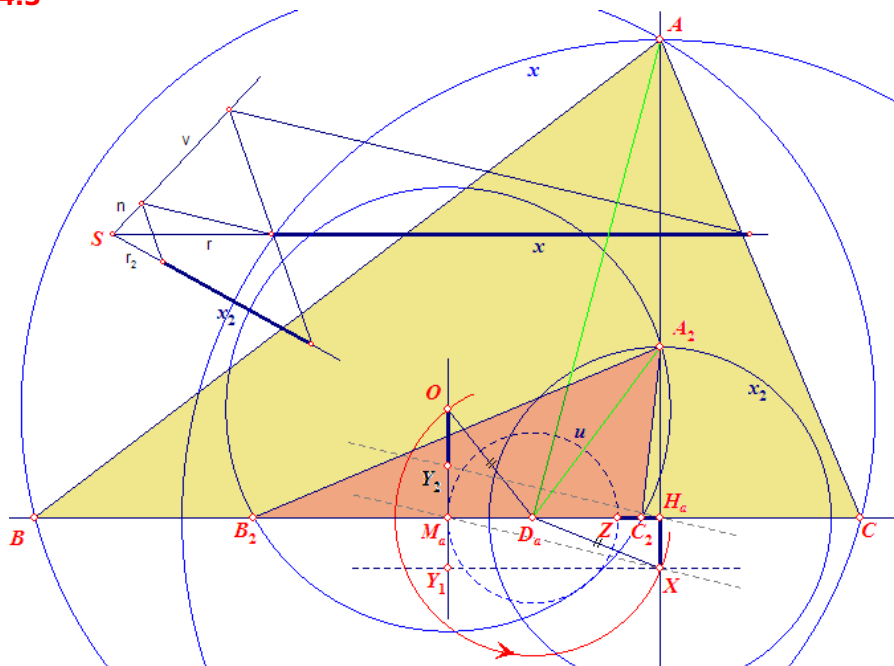
Konstruktionsbeschreibung  
 Gleichung (ii) geht mit  $v = u$  über in:  $2px = u(2u)$   
 $px = u^2$  und  $p : u = u : x$   
 $x$  ist dann als vierte Proportionale von  $p, u$  und  $u$  zu konstruieren.

### Konstruktion 4.2



Für  $v < u$  folgt aus (iii) die Gleichung  
 $x = v(-p + \sqrt{p^2 + u^2 - v^2}) / (v - u)$ .  
 Dann folgt  
 $p^2 + u^2 = (OD_a)^2 = (D_aX)^2$   
 $(D_aX)^2 - (D_aY)^2 = (D_aX)^2 - v^2 = H_aX^2$   
 $H_aX - H_aY = H_aX - p = XY = r$   
 $M_aZ = u - v = n$   
 Damit ist  $x = vr/n$ , so dass in:  
 $v = r : x$ .  $x$  ist jetzt die vierte Proportionale von  $n, v$  und  $r$ .  
 Der Kreis  $H_a(x)$  geht durch den Punkt A und die Senkrechte in  $H_a$  zu  $H_aD_a$ . Mit dem Kreis  $O(A)$  werden die Punkte B und C auf  $H_aD_a$  gefunden.

### Konstruktion 4.3



Für  $v > u$  ist die Konstruktion für  $x = v(p \pm \sqrt{(p^2 + u^2 - v^2)}) / (v - u)$  in der obigen Abbildung ausgeführt. Die Bezeichnung der Objekte ist die gleiche wie in der Konstruktion 4.2.

### Konstruktion 5

Anneke Grünefeld-Raaphorst gibt eine weitere Konstruktion:

Hierbij kiezen we het punt O als oorsprong van een assenstelsel waarvan de x-as evenwijdig is met de lijn a (de lijn door B en C).

Is nu  $|OMa| = 1$ ,  $|MaHa| = h$  en  $|MaDa| = d$  en is R de straal van de omcirkel van ABC, dan is:

$$M_a = (0, -1) \quad H_a = (-h, 0) \\ D_a = (-d, -1) \quad A' = (0, -R)$$

Voor de vergelijking van de lijn  $D_aA'$  vinden we op basis daarvan:

$$y + 1 = (-R + 1)/d \cdot (x + d) \text{ of } y = (1 - R)/d \cdot x - R$$

Stellen we nu  $p = (1 - R)/d$  (de rico van de lijn  $D_aA'$ ), dan is  $R = 1 - pd$ .

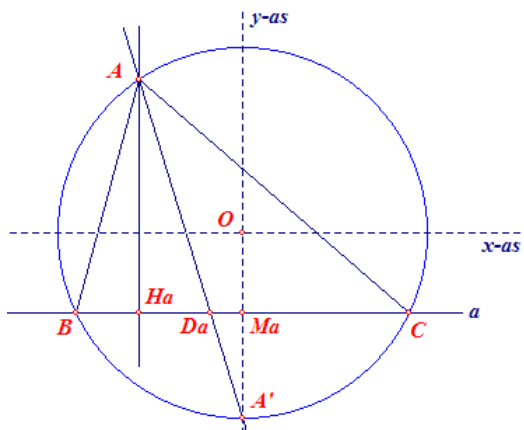
Voor het snijpunt A van de lijn  $D_aA'$  en de omcirkel hebben we dan (met  $x_A = -h$ ) in  $x^2 + y^2 = R^2$  substituerend:

$$(-h)^2 + (p(-h) - 1 + pd)^2 = (1 - pd)^2$$

Deze vergelijking is te herleiden tot:

$$(h - 2d)p^2 + 2p + h = 0$$

waaruit p (in het algemeen twee waarden) geconstrueerd kan worden omdat de waarden van d en h bekend zijn.



### Dreiecks konstruktion IMO 59

Aufgabe B1 der 1. Internationalen Mathematikolympiade 1959:

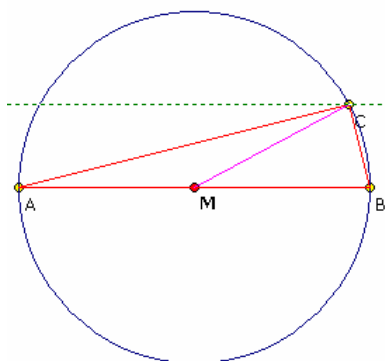
"Given the length  $|AB|$ , construct a triangle ACB with  $\angle ACB = 90^\circ$ , and the median MC satisfying  $CM^2 = AC \cdot BC$ ."

"Gegeben ist eine Strecke AB. Es ist ein Dreieck ACB so zu konstruieren, dass  $\angle ACB = 90^\circ$  und die Seitenhalbierende MC die Gleichung  $CM^2 = AC \cdot BC$  erfüllt."

### Lösung

C liegt auf dem Thaleskreis von AB. Die Fläche des Dreiecks ist gleich  $AC \cdot BC / 2$ , da ACB rechtwinklig und AC, BC die Katheten sind. Da  $CM = AM = BM$  sind, wird  $AC \cdot BC / 2 = CM^2 / 2 = AB^2 / 8$ . Somit ist C genau  $AB / 4$  von AB entfernt.

Der gesuchte Punkt C ergibt sich somit als Schnittpunkt des Thaleskreises mit einer Parallelen zu AB im Abstand  $AB / 4$ .





### Dreieckskonstruktion bei Euklid

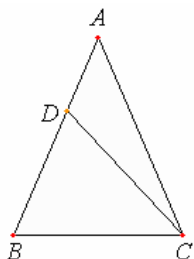
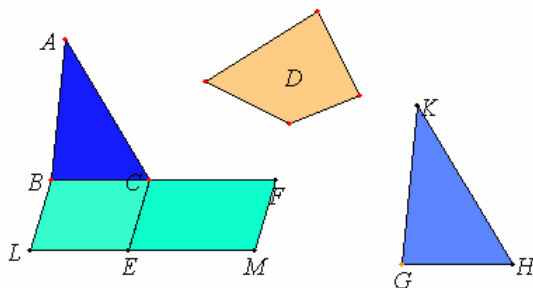
"Elemente": Buch VI § 25 (A. 7):

Eine geradlinige Figur zu errichten, die einer gegebenen ähnlich und zugleich einer weiter gegebenen gleich ist.

Die geradlinige Figur, der die zu errichtende ähnlich werden soll, sei ABC, und die, der sie gleich werden soll, D. Man soll eine Figur errichten, die  $\sim ABC$  und zugleich = D ist.

Man lege an BC ein Parallelogramm BE =  $\Delta ABC$  an und an CE das Parallelogramm CM = D im Winkel FCE = CBL (I, 44, 45). Dann setzt BC CF gerade fort und LE EM (I, 29, 41). Man verschaffe sich zu BC, CF die Mittlere Proportionale GH (VI; 13) und zeichne über GH die ABC ähnlich und ähnlich gelegte Figur KGH (VI, 18).

Da  $BC : GH = GH : CF$ , aber, wenn drei Strecken in Proportion stehen, dann einer Figur über der ersten sich zu der ähnlichen über der zweiten ähnlich gezeichneten Figur verhält wie die ersten Strecke zur dritten (VI, 20; V, Def. 9), so ist  $BC : CF = \Delta ABC : \Delta KGH$ . Aber  $BC : CF = \text{Pgm. BE} : \text{Pgm. EF}$  (VI, 1); also ist  $\Delta ABC : \Delta KGH = \text{Pgm. BE} : \text{Pgm. EF}$  (V, 11), also, vertauscht,  $\Delta ABC : \text{Pgm. BE} = \Delta KGH : \text{Pgm. EF}$  (V, 16). Nun ist  $\Delta ABC = \text{Pgm. BE}$ , also auch  $\Delta KGH = \text{Pgm. EF}$  (V, Def. 5). Aber  $\text{Pgm. EF} = D$ , also ist auch  $KGH = D$ ; zugleich ist  $KGH \sim ABC$ . Also hat man eine geradlinige Figur errichtet, die einer gegebenen ABC ähnlich und zugleich einer weiter gegebenen D gleich ist, nämlich KGH - dies hatte man ausführen sollen.



### Dreieck: Seiten-Winkel-Beziehung

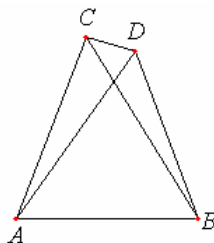
Euklids "Elemente": § 6 (L. 3):

Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, müssen auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich sein.

ABC sei ein Dreieck mit  $\angle ABC = \angle ACB$ . Ich behaupte, dass auch Seite AB = Seite AC. Wäre nämlich AB ungleich AC, so wäre von ihnen die eine größer; AB sei größer; dann trage man auf AB, der größeren Strecke, DB = AC, der kleineren, ab und ziehe DC. Da dann DB = AC wäre und BC gemeinsam, so wären zwei Seiten, nämlich DB, BC, zwei Seiten, nämlich AC, CB, entsprechend gleich und  $\angle DBC = \angle ACB$ ; also wäre Grdl.

DC = Grdl. AB und  $\Delta DBC = \Delta ACB$  (I, 4), das kleinere dem größeren (Axiom 8); dies wäre Unsinn; also kann AB nicht ungleich AC sein, ist ihm also gleich - S.

Der Beweis dieses Satzes ist der erste indirekte Beweis in Euklids "Elementen".



Euklids "Elemente": § 7 (L. 4):

Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden wie die ursprünglichen Strecken ansetzend, auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammenzubringen.

Wäre dies nämlich möglich, so bringe man über derselben Strecke AB zwei den festen Strecken AC, CB entsprechend gleiche weitere Strecken AD, DB in verschiedenen Punkten C und D zusammen, und zwar auf derselben Seite und an denselben Enden ansetzend, so dass CA und DA, die an demselben Ende, nämlich A ansetzen, einander gleich sind, ebenso CB und DB, die an demselben Ende B ansetzen; ferner ziehe man CD. Da dann  $AC = AD$ , so wäre auch  $\angle ACD = \angle ADC$  (I, 5); als wäre  $\angle ADC > \angle DCB$  (Axiom 8), um so mehr also  $\angle CDB > \angle DCB$ . Da ebenso  $CB = DB$ , so wäre auch  $\angle CDB = \angle DCB$ . Wie oben bewiesen, wäre er zugleich weit größer als dieser; dies ist aber unmöglich - S.

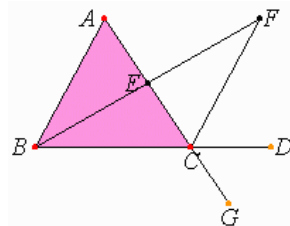
### Euklidische Dreieckssätze

Euklids "Elemente": § 16 (L. 9):

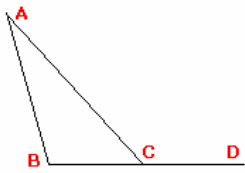
An jedem Dreieck ist der bei der Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Das Dreieck sei ABC; man verlängere seine eine Seite BC nach D. Ich behaupte, dass der Außenwinkel ACD größer ist als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel CBA, BAC. Man halbiere AC in E (I, 10), ziehe BE und verlängere es nach F; ferner mache man  $EF = BE$ , verbinde FC und ziehe AC nach G hin durch.

Da  $AE = EC$  und  $BE = EF$ , so sind zwei Seiten AE, EB zwei Seiten CE, EF entsprechend gleich; ferner  $\angle AEB = \angle FEC$  als Scheitelwinkel (I, 15); also ist Grdl. AB = Grdl. FC,  $\Delta ABE = \Delta FEC$ , und die übrigen Winkel sind den übrigen Winkeln entsprechend gleich, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4); also  $\angle BAE = \angle ECF$ . Aber  $\angle ECD > \angle EDF$



(Axiom 8); also ist  $\angle ACD > \angle BAE$ . Ähnlich lässt sich, bei Halbierung von BC, zeigen, dass auch  $\angle BCG$ , d.h.  $\angle ACD > \angle ABC - S$ .



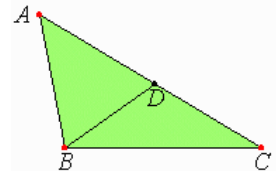
Euklids "Elemente": § 17 (L. 10):

In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner als zwei Rechte.

Das Dreieck sei ABC. Ich behaupte, dass in dem Dreieck ABC zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner sind als zwei Rechte. Man verlängere BC nach D.

Als Außenwinkel am Dreieck ABC ist dann  $\angle ACD$  größer als der

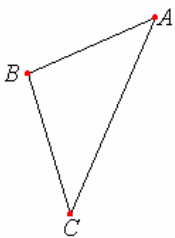
gegenüberliegende Innenwinkel ABC (I, 16). Man füge  $\angle ACB$  beiderseits hinzu; dann sind  $\angle ACD + \angle ACB > \angle ABC + \angle BCA$ . Aber  $\angle ACD + \angle ACB = 2R$ . (I, 13); also sind  $\angle ABC + \angle BCA < 2R$ . Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch  $\angle BAC + \angle ACB < 2R$ , desgleichen  $\angle CAB + \angle ABC - S$ .



Euklids "Elemente": § 18 (L. 11):

In jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

ABC sei ein Dreieck mit der Seite  $AC > AB$ . Ich behaupte, dass auch  $\angle ABC > \angle BCA$ . Hier ist  $AC > AB$ ; man trage daher  $AD = AB$  ab und ziehe BD. Als Außenwinkel am Dreieck BCD ist dann  $\angle ADB$  größer als der gegenüberliegende Innenwinkel  $\angle DCB$  (I, 16); aber  $\angle ADB = \angle ABD$ , da die Seite  $AB = AD$  (I, 5); also ist auch  $\angle ABD > \angle ACB$ , um so mehr  $\angle ABC > \angle ACB$  (Axiom 8) - S.



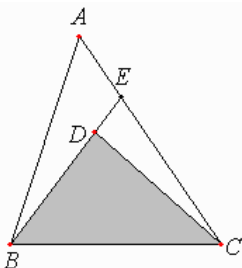
Euklids "Elemente": § 19 (L. 12):

In jedem Dreieck liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

ABC sei ein Dreieck mit  $\angle ABC > \angle BCA$ . Ich behaupte, dass auch die Seite  $AC > AB$ . Anderenfalls wäre AC nämlich entweder  $=$  oder  $<$  AB. Gleich AB kann AC nicht sein; denn sonst wäre auch  $\angle ABC = \angle ACB$  (I, 5); dies ist aber nicht der Fall: also ist nicht  $AC = AB$ . Aber auch  $AC < AB$  kann AC nicht sein; denn sonst wäre auch  $\angle ABC < \angle ACB$  (I, 18); dies ist aber nicht der Fall; also ist nicht  $AC < AB$ . Wie oben bewiesen, sind sie auch nicht gleich. Also ist  $AC > AB$ . - S.

Euklids "Elemente": § 21 (L. 14):

Sind in einem Dreieck über einer seiner Seiten von ihren Enden aus zwei Strecken innerhalb zusammengebracht, so müssen die zusammengebrachten Strecken kleiner sein als die beiden übrigen Dreiecksseiten zusammen, dabei aber den größeren Winkel umfassen.



Im Dreieck ABC seien nämlich über BC, einer seiner Seiten, von ihren Enden B, C aus zwei Strecken BD, DC innerhalb zusammengebracht. Ich behaupte, dass BD und DC zusammen kleiner als die beiden übrigen Dreiecksseiten  $BA + AC$  sind, dabei aber den größeren Winkel umfassen, nämlich  $\angle BDC > \angle BAC$ .

Man verlängere BD nach E. Da in jedem Dreieck zwei Seiten zusammen größer sind als die letzte (I, 20), so sind im Dreieck ABE die zwei Seiten  $AB + AE > BE$ ; man füge EC beiderseits hinzu; dann sind  $BA + AC > BE + EC$ . Ebenso sind im Dreieck CED die zwei Seiten  $CE + ED > CD$ ; man füge daher DB beiderseits hinzu; dann sind  $CE + EB > CD + DB$ . Wie oben bewiesen, sind  $BA + AC > BE + EC$ ; um so mehr sind  $BA + AC > BD + DC$ . Zweitens ist, da an jedem Dreieck der

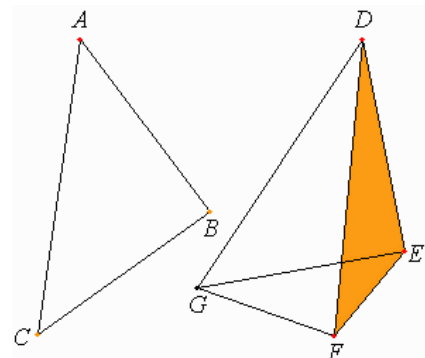
Außenwinkel größer als der gegenüberliegende Innenwinkel ist (I, 16), am Dreieck CDE der Außenwinkel  $\angle BDC > \angle CED$ . Aus demselben Grunde ist auch am Dreieck ABE der Außenwinkel  $\angle CEB > \angle BAC$ . Wie oben bewiesen, ist  $\angle BDC > \angle CEB$ ; um so mehr ist  $\angle BDC > \angle BAC - S$ .

Euklids "Elemente": § 24 (L. 15):

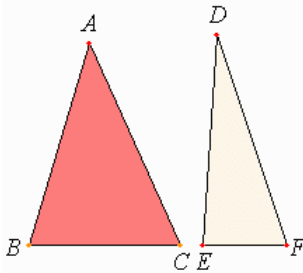
Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind, der von den gleichen Strecken umfasste Winkel aber im ersten Dreieck größer ist als im zweiten, dann muss auch die Grundlinie im ersten Dreieck größer sein als im zweiten.

ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten AB, AC zwei Seiten DE, DF entsprechend gleich sind, nämlich  $AB = DE$ ,  $AC = DF$ ; der Winkel bei A sei aber größer als der Winkel bei D. Ich behaupte, dass auch Grdl.  $BC >$  Grdl. EF. Hier ist  $\angle BAC > \angle EDF$ ; man trage daher an die gerade Linie DE im Punkte D auf ihr  $\angle EDG = \angle BAC$  an (I, 23), mache  $DG = AC$  oder  $DF$  und ziehe EG, FG.

Da  $AB = DE$  und  $AC = DG$ , so sind zwei Seiten BA, AC zwei Seiten ED, DG entsprechend gleich; ferner  $\angle BAC = \angle EDG$ ; also ist Grdl.  $BC =$  Grdl. EG (I, 4). Andererseits ist, da  $DF = DG$ , auch  $\angle DGF = \angle DFG$  (I, 5); also  $\angle DFG > \angle EGF$  (Axiom 8); um so mehr ist  $\angle EFG > \angle EGF$ . Da so  $\angle EFG > \angle EGF$



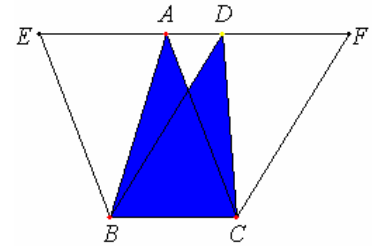
ein Dreieck mit  $\angle EFG > \angle EGF$  ist, dem größeren Winkel aber die größere Seite gegenüberliegt (I, 19), so ist auch die Seite  $EG > EF$ . Aber  $EG = BC$ ; also ist auch  $BC > EF$  - S.



Euklids "Elemente": § 25 (L. 16):

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind, die Grundlinie aber im ersten Dreieck größer ist als im zweiten, dann muss auch der von den gleichen Strecken umfasste Winkel im ersten Dreieck größer sein als im zweiten.

$ABC, DEF$  seien zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten  $AB, AC$  zwei Seiten  $DE, DF$  entsprechend gleich sind, nämlich  $AB = DE, AC = DF$ ; Grdl.  $BC$  sei aber  $>$  Grdl.  $EF$ . Ich behaupte, dass auch  $\angle BAC > \angle EDF$ . Anderenfalls wäre er entweder ihm gleich oder kleiner. Gleich  $\angle EDF$  kann  $\angle BAC$  nicht sein; denn sonst wäre auch Grdl.  $BC =$  Grdl.  $EF$  (I, 4); dies ist aber nicht der Fall; also ist nicht  $\angle BAC = \angle EDF$ . Aber auch  $\angle BAC < \angle EDF$  kann  $\angle BAC$  nicht sein; denn sonst wäre auch Grdl.  $BC <$  Grdl.  $EF$  (I, 24), dies ist aber nicht der Fall; also ist nicht  $\angle BAC < \angle EDF$ . Wie oben bewiesen, sind sie auch nicht gleich also ist  $\angle BAC > \angle EDF$  - S.

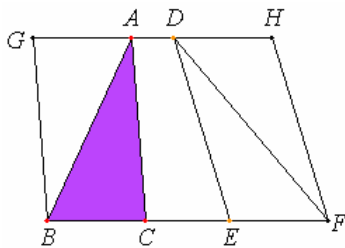


Euklids "Elemente": § 37 (L. 27):

Auf derselben Grundlinie zwischen denselben Parallelen gelegene Dreiecke sind einander gleich.

Die Dreiecke  $ABC, DBC$  mögen auf derselben Grundlinie  $BC$  zwischen denselben Parallelen  $AD, BC$  liegen. Ich behaupte, dass  $\triangle ABC = \triangle DBC$ . Man verlängere  $AD$  nach beiden Seiten nach  $E, F$ , ziehe durch  $B$   $BE \parallel CA$  und durch  $C$   $CF \parallel BD$  (I, 31).

Dann sind  $EBCA$  und  $DBC F$  beide Parallelogramme; und sie sind gleich; denn sie liegen auf derselben Grundlinie  $BC$  und zwischen denselben Parallelen  $BC, EF$  (I, 35). Ferner ist  $\triangle ABC$  vom Pgm.  $EBCA$  die Hälfte; denn dieses wird von der Diagonale  $AB$  halbiert (I, 34). Und  $\triangle DBC$  ist vom Pgm.  $DBC F$  die Hälfte; denn dieses wird von der Diagonale  $DC$  halbiert. Die Hälften gleicher Ganzen sind aber gleich (Axiom 6). Also ist  $\triangle ABC = \triangle DBC$  - S.



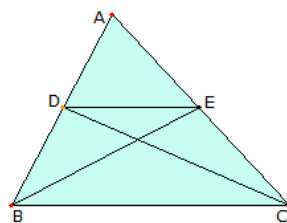
Euklids "Elemente": § 38 (L. 28):

Auf gleichen Grundlinien zwischen denselben Parallelen gelegene Dreiecke sind einander gleich.

Die Dreiecke  $ABC, DEF$  mögen auf gleichen Grundlinien  $BC, EF$  zwischen denselben Parallelen  $BF, AD$  liegen. Ich behaupte, dass  $\triangle ABC = \triangle DEF$ .

Man verlängere  $AD$  nach beiden Seiten nach  $G, H$ , ziehe durch  $B$   $BG \parallel CA$  und durch  $F$   $FH \parallel DE$ . Dann sind  $GBCA$  und  $DEFH$  beide Parallelogramme;

und  $GBCA = DEFH$ ; denn sie liegen auf gleichen Grundlinien  $BC, EF$  und zwischen denselben Parallelen  $BF, GH$  (I, 36). Ferner ist  $\triangle ABC$  vom Pgm.  $GBCA$  die Hälfte; denn dieses wird von der Diagonale  $AB$  halbiert (I, 34). Und  $\triangle FED$  ist vom Pgm.  $DEFH$  die Hälfte; denn dieses wird von der Diagonale  $DF$  halbiert. Die Hälften gleicher Ganzen sind aber gleich (Axiom 6). Also ist  $\triangle ABC = \triangle DEF$  - S.



### Euklidische Dreieckssätze (07)

Euklids "Elemente" Buch VI § 2 (L. 2):

Zieht man in einem Dreieck parallel zu einer Seite eine gerade Linie, so teilt diese die Dreiecksseiten proportional; und wenn Dreiecksseiten proportional geteilt sind, dann muss die Verbindungsstrecke der Teilpunkte zur letzten Dreiecksseite parallel sein.

Im Dreieck  $ABC$  ziehe man  $DE \parallel BC$ , einer der Seiten. Ich behaupte, dass  $BD :$

$DA = CE : EA$ .

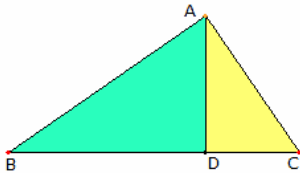
Man ziehe  $BE, CD$ . Dann ist  $\triangle BDE = \triangle CDE$ ; denn sie liegen auf derselben Grundlinie  $DE$  und zwischen denselben Parallelen  $DE, BC$  (I, 37).  $\triangle ADE$  ist eine weitere Größe; gleiche Größen haben aber zu einer festen Größe dasselbe Verhältnis (V, 7): also ist  $\triangle BDE : \triangle ADE = \triangle CDE : \triangle ADE$ .

Aber  $\triangle BDE : \triangle ADE = BD : DA$ ; denn da sie dieselbe Höhe haben, nämlich das von  $E$  auf  $AB$  zu fallende Lot, verhalten sie sich zueinander wie die Grundlinien (VI, 1). Aus demselben Grunde ist  $\triangle CDE : \triangle ADE = CE : EA$ ; also ist  $BD : DA = CE : EA$  (V, 11).

Andererseits seien im Dreieck  $ABC$  die Seiten  $AB, AC$  proportional geteilt,  $BD : DA = CE : EA$ ; ferner sei  $DE$  gezogen. Ich behaupte, dass  $DE \parallel BC$ .

Man konstruiere ebenso. Da  $BD : DA = CE : EA$  und  $BD : DA = \triangle BDE : \triangle ADE$  sowie  $CE : EA = \triangle CDE : \triangle ADE$  (VI, 1), so ist dann auch  $\triangle BDE : \triangle ADE = \triangle CDE : \triangle ADE$  (V, 11). Beide Dreiecke  $BDE, CDE$  haben also zu  $\triangle ADE$  dasselbe Verhältnis.

Also ist  $\triangle BDE = \triangle CDE$  (V, 9); dabei liegen sie auf derselben Grundlinie  $DE$ . Gleiche Dreiecke auf derselben Grundlinie liegen aber zwischen denselben Parallelen (I, 39); also ist  $DE \parallel BC$  - S.



### Euklidische Dreieckssätze (08)

Euklids "Elemente" Buch VI § 8 (L. 8):

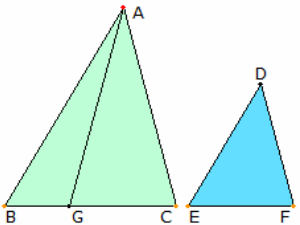
**Fällt man in einem rechtwinkligen Dreieck das Lot aus dem rechten Winkel auf die Grundlinie, so sind die Dreiecke am Lot sowohl dem ganzen als auch einander ähnlich.**

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel BAC und von A sei auf BC das AD gefällt. Ich behaupte, dass die Dreiecke ABD, ADC beide dem ganzen ABC und auch einander ähnlich sind.

Da nämlich  $\angle BAC = \angle ADB$ , weil beide Rechte sind (Postulat 4), und der Winkel bei B beiden Dreiecken ABC, ABD gemeinsam ist, so ist auch der letzte Winkel ACB dem letzten BAD gleich (I, 32). Also ist  $\triangle ABC$  mit  $\triangle ABD$  winkelgleich; also verhält sich, wie BC, die im  $\triangle ABC$  dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite, zu BA, der im  $\triangle ABD$  dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, so dieselbe Seite AB, die im  $\triangle ABC$  dem Winkel bei C gegenüberliegt, zur Seite BD, die dem gleichen Winkel im  $\triangle ABD$ , nämlich BAD, gegenüberliegt, und ebenso AC zu AD, die dem beiden Dreiecken gemeinsamen Winkel bei B gegenüberliegt.

Also ist  $\triangle ABC$  mit  $\triangle ABD$  winkelgleich, und in ihnen stehen die Seiten um gleiche Winkel in Proportion (VI, 4). Also ist  $\triangle ABC \sim \triangle ABD$  (VI, Definition 1). Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch  $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ ; ABD, ADC sind also beide dem ganzen  $\triangle ABC$  ähnlich. ...

Zusatz: Hiernach ist klar, dass wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck aus dem rechten Winkel auf die Grundlinie das Lot fällt, dieses Mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Grundlinie ist - dies hatte man beweisen sollen. Außerdem ist zwischen der Grundlinie und einem beliebigen ihrer Abschnitte die dem Abschnitte anliegende Seite Mittlere Proportionale.



### Euklidische Dreieckssätze (09)

Euklids "Elemente" Buch VI § 19 (L. 13):

**Ähnliche Dreiecke stehen zueinander zweimal im Verhältnis entsprechender Seiten.**

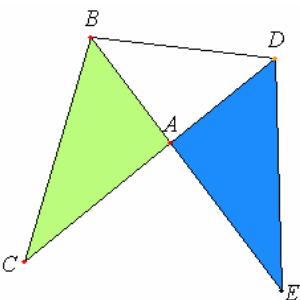
ABC, DEF seien ähnliche Dreiecke, in denen der Winkel bei B dem bei E gleich ist und  $AB : BC = DE : EF$ , so dass BC, EF entsprechende (V, Definition 11) Seiten sind. Ich behaupte, dass  $\triangle ABC : \triangle DEF = (BC : EF)^2$  (V, Definition 9).

Man verschaffe sich zu BC, EF die dritte Proportionale BG (VI, 11), so dass  $BC : EF = EF : BG$ , und ziehe AG. Da  $AB : BC = DE : EF$ , so ist vertauscht,  $AB : DE = BC : EF$  (V, 16). Aber  $BC : EF = EF : BG$ ; also ist auch  $AB : DE = EF : BG$  (V, 11).

Also sind in den Dreiecken ABG, DEF die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional. In einem Winkel übereinstimmende Dreiecke, in denen die Seiten um die gleichen Winkel umgekehrt proportional sind, sind aber gleich (VI, 15); also ist  $\triangle ABG = \triangle DEF$ . Und da  $BC : EF = EF : BG$ , aber, wenn drei Strecken in Proportion stehen, die erste zur dritten zweimal im Verhältnis steht wie zur zweiten (V, Definition 9), so ist  $BC : BG = (CB : EF)^2$ .

Aber  $CB : BG = \triangle ABC : \triangle ABG$  (VI, 1); also ist auch  $\triangle ABC : \triangle ABG = (BC : EF)^2$  (V, 11). Nun ist  $\triangle ABG = \triangle DEF$ . Also ist  $\triangle ABC : \triangle DEF = (BC : EF)^2$  - S.

Zusatz: Hiernach ist klar, dass, wenn zwei Strecken in Proportion stehen, dann eine Figur über der ersten sich zu der ähnlichen über der zweiten ähnlich gezeichneten Figur verhält wie die erste Strecke zur dritten; man hat ja gezeigt, dass  $CB : BG = \triangle ABC : \triangle ABG$ , d.h. :  $DEF$  - dies hatte man beweisen sollen.



### Euklidische Dreieckssätze (10)

Euklids "Elemente" Buch VI § 15 (L. 10):

**In gleichen, in einem Winkel übereinstimmenden Dreiecken sind die Seiten um die gleichen Winkel umgekehrt proportional. Und in einem Winkel übereinstimmende Dreiecke, in denen die Seiten um die gleichen Winkel umgekehrt proportional sind, sind gleich.**

ABC, ADE seien gleiche Dreiecke, in denen ein Winkel einem Winkel gleich ist,  $\angle BAC = \angle DAE$ . Ich behaupte, dass in den Dreiecken ABC, ADE die Seiten um die gleichen Winkel umgekehrt proportional sind, d.h. dass  $CA : AD = EA : AB$ . Man habe die Dreiecke so gelegt, dass CA AD gerade fortsetzt; dann setzt

auch EA AB gerade fort (I, 14). Ferner ziehe man BD.

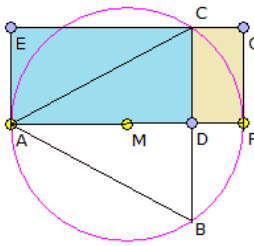
Da  $\triangle ABC = \triangle ADE$ , während BAD ein weiteres ist, so ist  $\triangle CAB : \triangle BAD = \triangle EAD : \triangle BAD$  (V, 7).

Andererseits ist  $CAB : BAD = CA : AD$  und  $EAD : BAD = EA : AB$  (VI, 1); also ist auch  $CA : AD = EA : AB$  (V, 11). In den Dreiecken ABC, ADE sind also die Seiten um die gleichen Winkel umgekehrt proportional.

Zweitens mögen in den Dreiecken ABC, ADE Seiten umgekehrt proportional sein, und zwar sei  $CA : AD = EA : AB$ . Ich behaupte, dass  $\triangle ABC = \triangle ADE$ .

Zieht man nämlich wieder BD, so ist, da  $CA : AD = EA : AB$ , andererseits  $CA : AD = \triangle ABC : \triangle BAD$  und  $EA : AB = \triangle EAD : \triangle BAD$  (VI, 1),  $\triangle ABC : \triangle BAD = \triangle EAD : \triangle BAD$  (V, 11).

Also haben ABC, EAD beide zu BAD dasselbe Verhältnis. Also ist  $\triangle ABC = \triangle EAD$  (V, 9) - S.



### Platonische Dreieckskonstruktion

Platon gibt in seinem Buch "Menon" (um 388 v.u.Z.) eine anspruchsvolle Dreieckskonstruktion an. Im Dialog spricht Sokrates: "Wenn jemand fragt, z.B. über eine Figur, ob es möglich ist, dieses dreieckige Figur einem Kreis einzuspannen? ..."

Die Aufgabe besteht darin, ein gleichseitiges Dreieck  $\triangle ABC$ , das flächengleich einem Rechteck ADCE ist, in einen Kreis einzubeschreiben.

Lösung: Die Basis AD des Rechtecks wird bis zu einem Punkt F verlängert, so dass

das entstehende Rechteck DFGC ähnlich dem gegebenen Rechteck ist. Die Strecke AF ist dann Durchmesser des gesuchten Kreises.

Nach dem Sekantensatz gilt  $CD \cdot DB = AD \cdot DF$

Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle AFC$  (Satz des Thales) gilt dann nach dem Höhensatz

$$CD^2 = AD \cdot DF \quad CD / DF = AD / CD$$

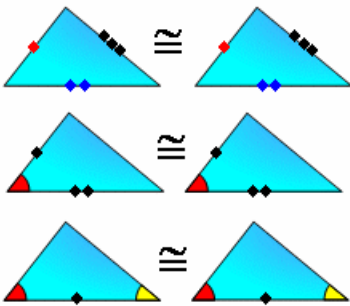
Diese Proportion zeigt die Ähnlichkeit der Rechtecke. Ist eine Verlängerung nach F, wie beschrieben, nicht möglich, existiert keine Lösung. Mit  $AF = d$ ,  $AD = x$ ,  $CD = y$  und  $R =$  Rechteckfläche ergibt sich

$$y^2 = x(d-x), \text{ also } xy = R$$

Einsetzen der 2. Bedingung ergibt

$$(R/x)^2 = x(d-x) \quad R^2 = dx^3 - x^4$$

Eine algebraische Lösung ergibt damit eine Gleichung 4. Grades, die zu Zeiten Platons nicht lösbar war. Deshalb ist die geometrische Lösung umso erstaunlicher.



### Kongruenzsätze für Dreiecke

Dreiecke sind kongruent,

- wenn sie in drei Seiten übereinstimmen (SSS)
- wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (SWS)
- wenn sie in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen (WSW)
- wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen (SSW)

Während die ersten 3 Kongruenzsätze von Euklid in den "Elementen" angegeben wurden, fand erst Clavius (1537-1612) den Kongruenzsatz

SSW.

Der Kongruenzsatz WSW findet sich schon bei Thales von Milet.

Aus dem Kongruenzsatz WSW folgt eine interessante Gleichung für den Dreiecksflächeninhalt. Sind die Seite  $c$  und deren anliegende Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  gegeben, so gilt:

$$A = c^2 / (2 (\cot \alpha + \cot \beta))$$

und für die Höhe

$$h_c = c / (\cot \alpha + \cot \beta)$$

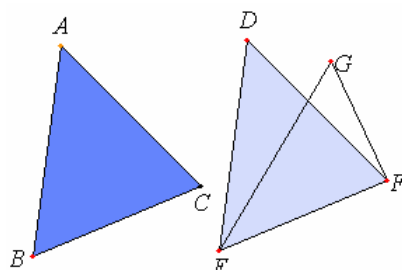
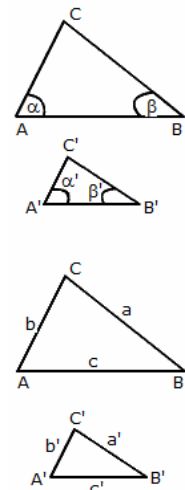
### Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Dreiecke sind zueinander ähnlich,

- wenn sie im Verhältnis der 3 Seiten übereinstimmen (Vierstreckensatz)
 
$$a / a' = b / b' = c / c'$$
- wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen
 
$$a / a' = b / b' ; \gamma = \gamma'$$
- wenn sie in zwei Winkel übereinstimmen (Hauptähnlichkeitssatz, WW-Theorem)
 
$$\alpha = \alpha' ; \beta = \beta' \text{ und somit } \gamma = \gamma'$$
- wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen
 
$$a / a' = b / b' ; \alpha = \alpha' \text{ oder } \beta = \beta'$$

Ist der kleinere Winkel gegeben, so existiert ein zweites Dreieck, für das zwar  $a / a' = b / b'$  und  $\alpha = \alpha'$  bzw.  $\beta = \beta'$  gilt, das aber nicht zum anderen Dreieck ähnlich ist.

Der Vierstreckensatz soll von Thales entdeckt worden sein. Im englischen Sprachraum wird der zum Strahlensatz analoge Satz auch als Satz des Thales bezeichnet.



### Kongruenzsatz SSS

Euklids "Elemente": § 8 (L. 5):

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und auch die Grundlinie der Grundlinie gleich ist, dann müssen in ihnen auch die von gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich sein.

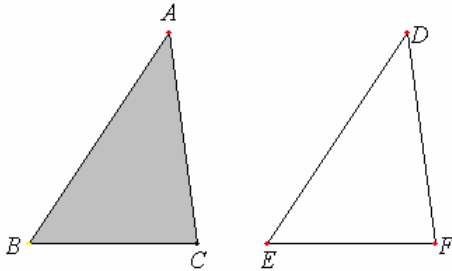


ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten AB, AC zwei Seiten DE, DF entsprechend gleich sind, nämlich  $AB = DE$  und  $AC = DF$ , ferner sei Grdl.  $BC =$  Grdl.  $EF$ . Ich behaupte, dass auch  $\angle BAC = \angle EDF$ . Denkt man nämlich  $\triangle ABC$  auf  $\triangle DEF$  und legt dabei Punkt B auf Punkt E sowie die gerade Linie BC auf EF, so muss auch Punkt C auf F decken, weil  $BC = EF$ ; da so BC EF deckt, müssen auch BA, CA die Seiten ED, DF decken.

Würden nämlich zwar die Grundlinien BC, EF einander decken, die Seiten BA, AC aber ED, DF nicht decken, sondern abweichen wie EG, GF, dann hätte man über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden ansetzend auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammengebracht.

Sie lassen sich aber nicht so zusammenbringen (I, 7); dass also, wenn man Grdl. BC auf Grdl. EF deckt, die Seiten BA, AC dabei ED, DF nicht deckten, trifft nicht zu. Also decken sie sich, und  $\angle BAC$  muss  $\angle EDF$  decken und ihm gleich sein (Axiom 7) - S.

### Kongruenzsatz SWS



Euklid "Elementen": § 4 (L. 1):

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich, dann muss in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muss dem Dreieck gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen.

ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten AB, AC zwei Seiten DE, DF entsprechend gleich sind, nämlich  $AB = DE$  und  $AC = DF$ , ferner  $\angle BAC = \angle EDF$ . Ich behaupte, dass auch Grdl.  $BC =$  Grdl.  $EF$ , ferner  $\triangle ABC = \triangle DEF$  und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein müssen, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen,  $\angle ABC = \angle DEF$  und  $\angle ACB = \angle DFE$ .

Deckt man nämlich  $\triangle ABC$  auf  $\triangle DEF$  und legt dabei Punkt A auf Punkt D sowie eine gerade Linie AB auf DE, so muss auch Punkt B auf E decken, weil  $AB = DE$ ; da so AB DE deckt, muss auch die gerade Linie AD DF decken, weil  $\angle BAC = \angle EDF$ ; daher muss auch Punkt C auf F decken, weil gleichfalls  $AC = DF$ .

B deckte aber E; folglich muss die Grundlinie BC die Grundlinie EF decken denn würde, während BE und CF deckt, die Grundlinie BC EF nicht decken, so würden zwei Strecken einen Flächenraum umfassen; das ist aber unmöglich (Axiom 9). Also muss die Grundlinie BC EF decken und ihr gleich sein (Axiom 7); folglich muss auch das ganze Dreieck ABC das ganze Dreieck DEF decken und ihm gleich sein, auch müssen die übrigen Winkel die übrigen Winkel decken und ihnen gleich sein,  $\angle ABC = \angle DEF$  und  $\angle ACB = \angle DFE$ . Wenn also in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich, dann muss in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muss dem Dreieck gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Winkel (Seiten!) gegenüberliegen - dies hatte man beweisen sollen.

### Griechischer Text des Kongruenzsatzes SWS

Θεωρημα 1 (Ιο Κρηριο - ΠΓΠ)

Αν δυο τριγωνα εχουν δυο πλευρες ισες μια προς μια και τις περιεχομενες σε αυτες γωνιες ισες, τοτε ειναι ισα.

Αποδειξη

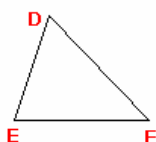
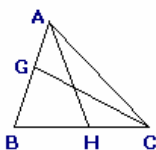
Ας υποθεσουμε οτι τα τριγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  εχουν  $AB = A'B'$ ,  $A\Gamma = A'\Gamma'$  και  $\angle A = \angle A'$  (σχ. 11).

Μετατοπιζουμε το τριγωνο  $A'B'\Gamma'$ , ωστε το σημιο  $A'$  να ταυτιστει με το  $A$  και η ημιευθεια  $A'B'$  να ταυτιστει με την  $AB$ . Επειδη  $\angle A = \angle A'$  και η ημιευθεια  $A'\Gamma'$  θα ταυτισθει με την  $A\Gamma$ . Τοτε, αφου  $AB = A'B'$  και  $A\Gamma = A'\Gamma'$ , το σημιο  $B'$  ταυτιζεται με το  $B$  και το  $\Gamma'$  με το  $\Gamma$ . Επομενωσ τα δυο τριγωνα σημπιπτουν, αρα ειναι ισα.

### Kongruenzsatz WSW

Originalbeweis des 1. Teils des Kongruenzsatzes aus Euklids "Elementen": § 26 (L. 17):

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel zwei Winkeln entsprechend gleich sind und eine Seite einer Seite, nämlich entweder die den gleichen Winkeln anliegenden oder die einem der gleichen Winkel gegenüberliegenden Seiten einander gleich, dann müssen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten entsprechend gleich sein und der letzte Winkel dem letzten Winkel.



ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen zwei Winkel  $\angle ABC, \angle BCA$  zwei Winkeln  $\angle DEF, \angle EFD$  entsprechend gleich sind, nämlich  $\angle ABC = \angle DEF, \angle BCA = \angle EFD$ ; ferner sei in ihnen eine Seite einer Seite gleich, zunächst die den gleichen Winkeln anliegende  $BC = EF$ . Ich behaupte, dass in ihnen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten entsprechend gleich sein müssen,  $AB = DE, AC = DF$ , und der letzte Winkel dem letzten Winkel,  $\angle BAC = \angle EDF$ .

Wäre nämlich  $AB$  ungleich  $DE$ , so müsste eine der Strecken größer sein.  $AB$  sei die größere; dann trage man  $BG = DE$  ab und ziehe  $GC$ . Da hier  $BG = DE$  und  $BC = EF$ , so wären zwei Seiten

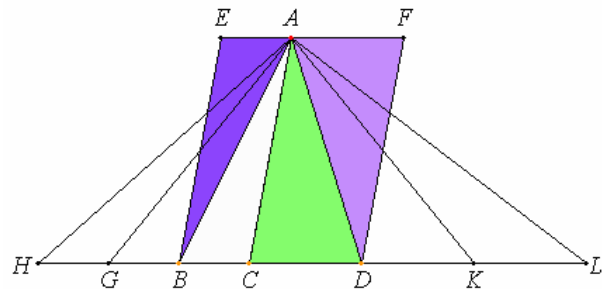


BG, BC zwei Seiten DE, EF entsprechend gleich; ferner  $\angle GBC = \angle DEF$ ; also wäre Grdl. GC = Grdl. DF,  $\triangle GBC = \triangle DEF$ , und die übrigen Winkel müssten den übrigen Winkeln gleich sein, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4); also wäre  $\angle GCB = \angle DFE$ . Nach Voraussetzung ist aber  $\angle DFE = \angle BCA$ ; also wäre auch  $\angle BCG = \angle BCA$ , der kleinere dem größeren (Axiom 8); dies ist aber unmöglich. AB ist also nicht ungleich DE, also ihm gleich. Aber auch  $BC = EF$ ; mithin sind zwei Seiten AB, BC zwei Seiten DE, EF entsprechend gleich; ferner  $\angle ABC = \angle DEF$ ; also ist Grdl. AC = Grdl. DF und der letzte Winkel BAC dem letzten Winkel EDF gleich (I, 4).

Euklids „Elemente“ Buch VI § 1 (L. 1):

**Dreiecke sowie Parallelogramme unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundlinien.**

ABC, ACD seien Dreiecke und EC, CF Parallelogramme unter derselben Höhe (VI, Definition 4) AC. Ich behaupte, dass Grundlinie BC : Grundlinie CD =  $\triangle ABC$  :  $\triangle ACD$  und = Parallelogramm EC : Parallelogramm CF.



Man verlängere BD nach beiden Seiten nach den

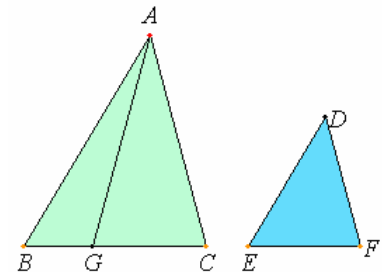
Punkten H, L, trage beliebige viele Strecken BG, GH = Grundlinie BC, sowie beliebig viele Strecken DK, KL = Grundlinie CD ab und ziehe AG, AH, AK, AL. Da  $CB = BG = GH$ , sind auch die Dreiecke  $\triangle AHG = \triangle AGB = \triangle ABC$  (I, 38). Also ist  $\triangle AHC$  von  $\triangle ABC$  Ebensoviefaches wie Grundlinie HC von Grundlinie BC. Aus demselben Grund ist auch  $\triangle ALC$  von  $\triangle ACD$  Ebensoviefaches wie Grundlinie LC von Grundlinie CD. Und wenn Grundlinie HC = Grundlinie CL, dann ist auch  $\triangle AHC = \triangle ACL$  (I, 38); wenn Grundlinie HC > Grundlinie CL, dann ist  $\triangle AHC > \triangle ACL$ , und kleiner, wenn kleiner. Mithin hat man bei vier Größen, nämlich den zwei Grundlinien BC, CD und den zwei Dreiecken ABC, ACD, sowohl von Grundlinie BC und  $\triangle ABC$  Gleichvielfache, nämlich Grundlinie HC und  $\triangle AHC$ , also auch von Grundlinie CD und  $\triangle ADC$  beliebige weitere Gleichvielfache, nämlich Grundlinie LC und  $\triangle ALC$  gebildet; und man hat gezeigt, dass wenn Grundlinie HC > Grundlinie CL, auch  $\triangle AHC > \triangle ALC$  ist, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner. Also ist Grundlinie BC : Grundlinie CD =  $\triangle ABC$  :  $\triangle ACD$  (V, Definition 5).

Da ferner Parallelogramm EC =  $2 \triangle ABC$  und Parallelogramm FC =  $2 \triangle ACD$  (I, 34), Teile aber dasselbe Verhältnis haben wie Gleichvielfache (V, 15), so ist  $\triangle ABC$  :  $\triangle ACD$  = Parallelogramm EC : Parallelogramm FC. Da nun, wie oben bewiesen, Grundlinie BC : CD =  $\triangle ABC$  :  $\triangle ACD$ , andererseits  $\triangle ABC$  :  $\triangle ACD$  = Parallelogramm EC : Parallelogramm FC, so ist auch Grundlinie BC : Grundlinie CD = Parallelogramm EC : Parallelogramm FC (V, 11) – S.

Euklids „Elemente“ Buch VI § 19 (L. 13):

**Ähnliche Dreiecke stehen zueinander zweimal im Verhältnis entsprechender Seiten.**

ABC, DEF seien ähnliche Dreiecke, in denen der Winkel bei B dem bei E gleich ist und  $AB : BC = DE : EF$ , so dass BC, EF entsprechende (V, Definition 11) Seiten sind. Ich behaupte, dass  $\triangle ABC$  :  $\triangle DEF = (BC : EF)^2$  (V, Definition 9).



Man verschaffe sich zu BC, EF die Dritte Proportionale BG (VI, 11), so dass  $BC : EF = EF : BG$ , und ziehe AG. Da  $AB : BC = DE : EF$ , so ist

vertauscht,  $AB : DE = BC : EF$  (V, 16). Aber  $BC : EF = EF : BG$ ; also ist auch  $AB : DE = EF : BG$  (V, 11).

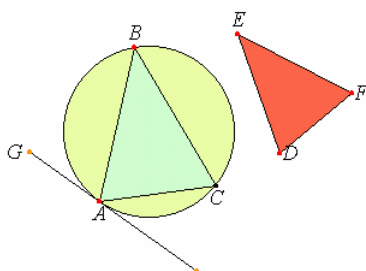
Also sind in den Dreiecken ABG, DEF die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional. In einem Winkel übereinstimmende Dreiecke, in denen die Seiten um die gleichen Winkel umgekehrt proportional sind, sind aber gleich (VI, 15); also ist  $\triangle ABG = \triangle DEF$ . Und da  $BC : EF = EF : BG$ , aber, wenn drei Strecken in Proportion stehen, die erste zur dritten zweimal im Verhältnis steht wie zur zweiten (V, Definition 9), so ist  $BC : BG = (BC : EF)^2$ . Aber  $BC : BG = \triangle ABC$  :  $\triangle ABG$  (VI, 1); also ist auch  $\triangle ABC$  :  $\triangle ABG = (BC : EF)^2$  (V, 11). Nun ist  $\triangle ABG = \triangle DEF$ . Also ist  $\triangle ABC$  :  $\triangle DEF = (BC : EF)^2$  – S. Zusatz:

Hiernach ist klar, dass, wenn zwei Strecken in Proportion stehen, dann eine Figur über der ersten sich zu der ähnlichen über der zweiten ähnlich gezeichneten Figur verhält wie die erste Strecke zur dritten; man hat ja gezeigt, dass  $BC : BG = \triangle ABC$  :  $\triangle ABG$ , d.h. :  $DEF$  – dies hatte man beweisen sollen.

### Dreieck und Kreis

Im vierten Buch der „Elemente“ konstruiert Euklid spezielle In- und Umdreiecke zu einem gegebenen Kreis:

**§ 2 (A. 2): Einem gegebenen Kreis ein mit einem gegebenen Dreieck winkelgleiches Dreieck einzubeschreiben.**



ABC sei der gegebene Kreis, DEF das gegebene Dreieck. Man soll dem Kreis ABC ein mit  $\triangle DEF$  winkelgleiches Dreieck einbeschreiben (IV, Definition 3).

Man ziehe an den Kreis ABC in A die Tangente GH, trage an die gerade Linie AH im Punkte A auf ihr  $\angle HAC = \angle DEF$  sowie an die gerade Linie

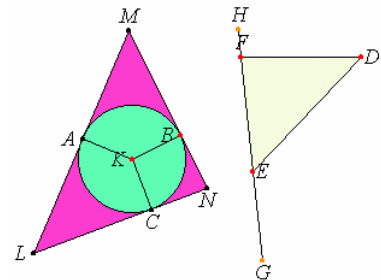
AG im Punkte A auf ihr  $\angle GAB = DFE$  an und ziehe BC.

Da dann eine gerade Linie AH den Kreis ABC berührt und vom Berührungspunkt A aus die gerade Linie AC zum Kreis durchgezogen ist, so ist  $\angle HAC = ABC$ , dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt (III, 32). Aber  $HAC = DEF$ ; also ist auch  $\angle ABC = DEF$ . Aus demselben Grunde ist auch  $ACB = DFE$ ; also ist auch der letzte Winkel BAC dem letzten  $\angle EDF$  gleich (I, 32). Also ist  $\triangle ABC$  mit  $\triangle DEF$  winkelgleich und dem Kreise einbeschrieben. – S.

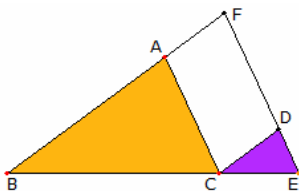
**§ 3 (A. 3): Einem gegebenen Kreis ein mit einem gegebenem Dreieck winkelgleiches Dreieck umzuschreiben.**

ABC sei der gegebene Kreis, DEF das gegebene Dreieck. Man soll dem Kreis ABC ein mit  $\triangle DEF$  winkelgleiches Dreieck umbeschreiben (IV, Definition 4).

Man verlängere EF nach beiden Seiten nach den Punkten G, H, verschaffe sich vom Kreise ABC den Mittelpunkt K, ziehe eine gerade Linie KB beliebig durch, trage an die gerade Linie KB im Punkte K auf ihr  $\angle BKA = DEG$  sowie  $BKC = DFH$  an und ziehe an den Kreis ABC durch die Punkte A, B, C die Tangenten LAM, MBN, NCL.



Da LM, MN, NL den Kreis ABC in den Punkten A, B, C berühren und KA, KB, KC die Verbindungsstrecken vom Mittelpunkt K zu den Punkten A, B, C sind, sind die Winkel bei den Punkten A, B, C Rechte (III, 18). Da ferner im Viereck (Postulat 5) AMBK die vier Winkel zusammen vier Rechten gleich sind, weil sich AMBK ja in zwei Dreiecke zerlegen lässt (I, 32), und  $\angle KAM, KBM$  Rechte sind, sind auch die übrigen  $\angle AKB + AMB = 2 R$ . Aber auch  $DEG + DEF = 2 R$ . (I, 13); also sind  $AKB + AMB = DEG + DEF$ . Hierin ist aber  $AKB = DEG$ ; also ist auch der Rest  $\angle AMB = \text{Rest } DEF$ . Ähnlich lässt sich zeigen, dass  $\angle LNB = DFE$ ; also ist auch der letzte  $\angle MLN = EDF$  (I, 32). Also ist  $\triangle LMN$  mit  $\triangle DEF$  winkelgleich, und es ist dem Kreis ABC umbeschrieben – S.



**Ähnlichkeitssatz bei Euklid**

Euklids "Elemente": Buch VI § 4 (L. 4):

**In winkelgleichen Dreiecken stehen die Seiten um gleiche Winkel in Proportion, und zwar entsprechen einander die, die gleichen Winkeln gegenüberliegen.**

ABC, DCE seien winkelgleiche Dreiecke mit  $\angle ABC = DCE, BAC = CDE$  und (I, 32)  $ACB = CED$ . Ich behaupte, dass in den Dreiecken ABC, DCE die Seiten um gleiche Winkel in Proportion stehen und dabei die gleichen Winkeln gegenüberliegenden einander entsprechen (V, Definition 11).

BC möge CE gerade fortsetzen. Da  $\angle ABC + ACB < 2 R$ . (I, 17) und  $ACB = DEC$ , so sind  $\angle ABC + DEC < 2 R$ .; also müssen sich BA, ED bei Verlängerung treffen (Postulat 5). Man verlängere sie, sie mögen sich in F treffen.

Da  $\angle DCE = ABC$ , ist  $BF \parallel CD$  (I, 28). Ebenso ist, da  $ACB = DEC, AC \parallel FE$ . Also ist FACD ein Parallelogramm, also  $FA = DC, AC = FD$  (I, 34). Da hier im Dreieck FBE  $AC \parallel FE$ , einer der Seiten gezogen ist, so ist  $BA : AF = BC : CE$  (VI, 2). Aber  $AF = CD$ ; also ist  $BA : CD = DC : CE$  und, vertauscht (V, 16),  $AB : BC = DC : CE$ .

Ebenso ist, da  $CD \parallel BF, BC : CE = FD : DE$ ; aber  $FD = AC$ ; also ist  $BC : CE = AC : DE$  und, vertauscht,  $BC : CA = CE : ED$ . Da, wie oben bewiesen,  $AB : BC = DC : CE$ , andererseits  $BC : CA = CE : ED$ , so ist über gleiches weg  $BA : AC = CD : DE$  (V, 22) - S.

**Ähnlichkeitssatz (2) bei Euklid**

Euklids "Elemente": Buch VI § 6 (L. 6):

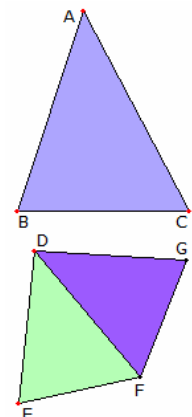
**Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel einem Winkel gleich ist und die Seiten um die gleichen Winkel in Proportion stehen, dann müssen die Dreiecke winkelgleich sein, und zwar müssen in ihnen die Winkel gleich sein, denen entsprechende Seiten gegenüberliegen.**

ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen ein Winkel BAC einem Winkel EDF gleich ist und die Seiten um die gleichen Winkel in Proportion stehen,  $BA : AC = ED : DF$ . Ich behaupte, dass  $\triangle ABC$  mit  $\triangle DEF$  winkelgleich ist, und zwar muss in ihnen  $\angle ABC = DEF, ACB = DFE$  sein.

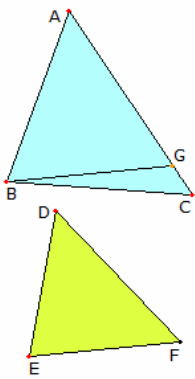
Man trage an die gerade Linie DF in den Punkten D, F auf ihr die Winkel  $FDG = BAC$  oder EDF, und  $DFG = ACB$  an; dann ist auch der letzte Winkel, bei B, dem letzten, bei G, gleich (I, 32).

Also ist  $\triangle ABC$  mit  $\triangle DGF$  winkelgleich. Also stehen in Proportion  $BA : AC = GD : DF$  (VI, 4). Nach Voraussetzung ist aber  $BA : AC = ED : DF$ ; also ist  $ED : DF = GD : DF$  (V, 11).

Also ist  $ED = DG$  (V, 9); und DF ist gemeinsam; mithin sind zwei Seiten ED, DF zwei Seiten GD, DF gleich; ferner ist  $\angle EDF = \angle GDF$ ; also ist Grundlinie EF = Grundlinie GF,  $\triangle DEF = \triangle DGF$ , und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln gleich sein, immer die, denn gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4).



Also ist  $\angle DFG = DFE$  und  $DGF = DEF$ . Aber  $DFG = ACB$ ; also ist auch  $ACB = DFE$ . Nach Voraussetzung ist aber  $\angle BAC = EDF$ ; also ist auch der letzte Winkel, bei B, dem letzten, bei E, gleich (I, 32).  $\triangle ABC$  ist also mit  $\triangle DEF$  winkelgleich - S.



### Ähnlichkeitssatz (3) bei Euklid

Euklids "Elemente": Buch VI § 7 (L. 7):

**Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel einem Winkel gleich ist und um weitere Winkel die Seiten in Proportion stehen, während die letzten Winkel beide zugleich entweder kleiner oder nicht kleiner als ein Rechter sind, dann müssen die Dreiecke winkelgleich sein, und zwar müssen in ihnen die Winkel gleich sein, um die die Seiten in Proportion stehen.**

ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen ein Winkel einem Winkel gleich ist,  $BAC = EDF$ , und um weitere Winkel ABC, DEF die Seiten in Proportion stehen,  $AB : BC = DE : EF$ ; außerdem seien die letzten Winkel, bei C und F, zunächst beide zugleich kleiner als ein Rechter.

Ich behaupte, dass  $\triangle ABC$  mit  $\triangle DEF$  winkelgleich ist, und zwar muss  $\angle ABC = \angle DEF$  sein, auch der letzte Winkel, bei C, offenbar dem letzten, bei F, gleich.

Wäre nämlich  $\angle ABC$  ungleich  $\angle DEF$ , so müsste einer von ihnen größer sein. ABC sei der größere Winkel. Man trage dann an die gerade Linie AB im Punkte B auf ihr  $\angle ABG = \angle DEF$  an. Da  $\angle A = \angle D$  und  $ABG = DEF$ , so wäre der letzte Winkel AGB dem letzten DFE gleich (I, 32);  $\triangle ABG$  wäre also mit  $\triangle DEF$  winkelgleich; also wäre  $AB : BG = DE : EF$  (VI, 4).

Nach Voraussetzung ist aber  $DE : EF = AB : BC$ ; AB hätte also zu den beiden Seiten BC, BG gleiches Verhältnis (V, 11); also wäre  $BC = BG$  (V, 9), folglich auch der Winkel bei C =  $\angle BGC$  (I, 5).

Nun ist nach Voraussetzung der Winkel bei C < R.; also wäre auch  $\angle BGC < R.$ , folglich sein Nebenwinkel  $AGB > R.$  (I, 13). Und dieser wäre, wie oben bewiesen, dem Winkel bei F gleich; also wäre auch der Winkel  $F > R.$

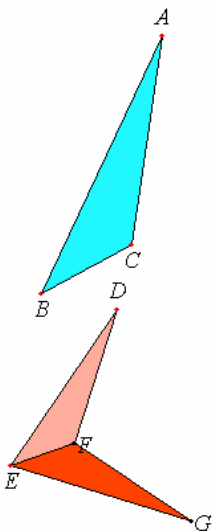
Nach Voraussetzung ist aber < R.; dies wäre Unsinn.

Also kann  $\angle ABC$  nicht ungleich  $\angle DEF$  sein, ist ihm also gleich. Aber auch der Winkel bei A ist dem bei D gleich, also auch der letzte, bei C, dem letzten, bei F, gleich (I, 32). Also ist  $\triangle ABC$  mit  $\triangle DEF$  winkelgleich. ...

### Ähnlichkeitssatz (4) bei Euklid

Euklids "Elemente": Buch VI § 5 (L. 5):

Stehen in zwei Dreiecken die Seiten in Proportion, so müssen die Dreiecke winkelgleich sein, und zwar müssen in ihnen die Winkel gleich sein, denen entsprechende Seiten gegenüberliegen.



Nachweis: ABC, DCE seien zwei Dreiecke, deren Seiten in Proportion stehen,  $AB : BC = DE : EF$ ,  $BC : CA = EF : FD$  und (V, 22)  $BA : AC = ED : DF$ .

Ich behaupte, dass  $\triangle ABC$  mit  $\triangle DEF$  winkelgleich ist und zwar die Winkel in ihnen gleich sein müssen, denen entsprechende Seiten gegenüberliegen,  $ABC = DEF$ ,  $BCA = EFD$  und  $BAC = EDF$ .

Man trage an die gerade Linie EF in den Punkten E, F auf ihr die Winkel  $FEG = \angle ABC$  und  $EFG = \angle ACB$  an; dann ist auch der letzte Winkel bei A dem letzten bei G gleich (I, 32).

Also ist  $\triangle ABC$  mit  $\triangle EGF$  winkelgleich. In den Dreiecken ABC, EGF stehen also die Seiten um gleiche Winkel in Proportion, und zwar entsprechen einander die, die gleichen Winkeln gegenüberliegen (VI, 4); also ist  $AB : BC = GE : EF$ .

Nach Voraussetzung ist aber  $AB : BC = DE : EF$ ; also ist  $DE : EF = GE : EF$  (V, 11). DE, GE haben also beide dasselbe Verhältnis zu EF; also ist  $DE = GE$  (V, 9).

Aus demselben Grunde ist auch  $DF = GF$ . Da nun  $DE = EG$  ist und EF gemeinsam, so sind zwei Seiten DE, EF zwei Seiten GE, EF gleich, auch ist Grundlinie  $DF =$  Grundlinie  $FG$ ; also ist  $\angle DEF = \angle GEF$  (I, 8),  $\triangle DEF = \triangle GEF$ , und die übrigen Winkel sind den übrigen Winkeln gleich, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4); also sind  $\angle DFE = \angle GFE$  und  $EDF = EGF$ . Da  $\angle FED = \angle GEF$  und  $\angle GEF = \angle ABC$ , so ist auch  $\angle ACB = \angle DEF$ .

Aus demselben Grunde ist auch  $\angle ACB = \angle DFE$  und schließlich der Winkel bei A dem bei D gleich. Also ist  $\triangle ABC$  mit  $\triangle DEF$  winkelgleich - S.

### Aufgabe zur Dreiecksähnlichkeit

#### Aufgabe

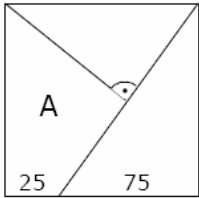
In einem Dreieck ABC gilt: M ist Seitenmittelpunkt,  $\alpha = \epsilon = 45^\circ$ . Wie groß sind  $\gamma$  und  $\beta$ ?

#### Lösung:

Das Dreieck AMC ist ähnlich zum Dreieck ABC auf Grund gleicher Winkel  $\gamma$  und

$45^\circ$ . Entsprechende Seiten sind

$0,5 a$  zwischen  $\gamma$  und  $\varepsilon$  und  $b$  zwischen  $\gamma$  und  $\alpha = \varepsilon$   
 $b$  gegenüber  $\varepsilon = \alpha$  und  $a$  gegenüber  $\varepsilon = \alpha$   
 Dann wird  $0,5a / b = b/a \Rightarrow 0,5 a^2 = b^2 \Rightarrow a^2 = 2 b^2 \Rightarrow a = b \sqrt{2}$   
 Im Dreieck ABC gilt  $\sin \beta / b = \sin 45^\circ / a$  ;  $\alpha = 45^\circ$  ist bekannt  
 $\sin \beta / b = \sin 45^\circ / (b \sqrt{2})$   
 Daraus folgt  $\sin \beta = \sin 45^\circ / (\sqrt{2}) = \sqrt{2} / 2 \cdot 1 / \sqrt{2} = 1/2 \Rightarrow \beta = 30^\circ$   
 und mit der Winkelsumme:  $\gamma = 105^\circ$



**Aufgabe 2 zur Dreiecksähnlichkeit**

**Aufgabe**

Die gegebene Figur ist ein Quadrat. Gesucht ist die Fläche A des Vierecks.

**Lösung:**

Die Dreiecke B und C sind ähnlich;  $\alpha$  und  $\beta$  ergänzen sich zu  $90^\circ$ . Für die Hypotenuse in B wird  $c^2 = 75^2 + 100^2 = 15625 \Rightarrow c = 125$

Ähnlichkeitsbeziehungen für B und C

$75 / 125 = a / 100 \Rightarrow a = 60$

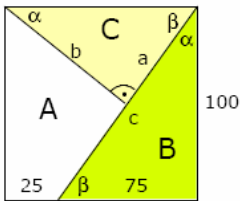
$100 / 125 = b / 100 \Rightarrow b = 80$

Fläche des Quadrates 10000

Fläche des Dreiecks A  $60 \cdot 80 / 2 = 2400$

Fläche des Dreiecks B  $100 \cdot 75 / 2 = 3750$

Fläche des Vierecks A  $10000 - 2400 - 3750 = 3850$

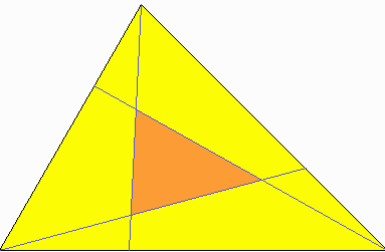
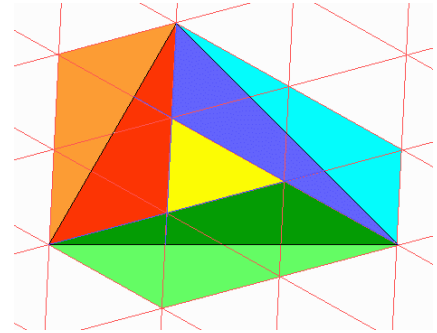


**Inneres Dreieck**

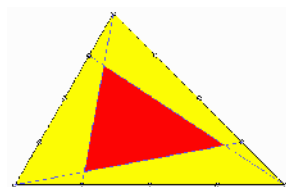
Jede Ecke eines Dreiecks wird zyklisch mit dem Punkt der nächsten Seite verbunden, der diese im Verhältnis  $1/3$  zu  $2/3$  teilt. Gefragt ist nach dem Verhältnis der innen von diesen Linien begrenzten Fläche zu der des ganzen Dreiecks.

Lösung: Für einen einfachen Beweis zeichnet man drei

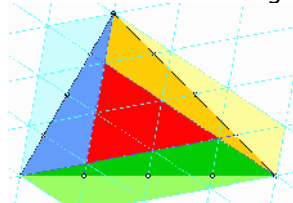
Parallelscharen mit je gleichen Abständen derart, dass das innere Dreieck zu einer Zelle darin wird. Von den Parallelogrammen, die blau, grün und rot getönt sind, und die je die Fläche von 4 solchen Zellen haben, gehört jeweils die kräftiger getönte Hälfte zum großen Dreieck. Die Fläche des "inneren" verhält sich also zu der des "ganzen" wie  $1/7$ .



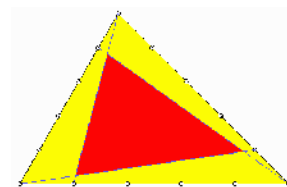
Weitere analoge Aufgaben und Lösungen zeigt die Tabelle:



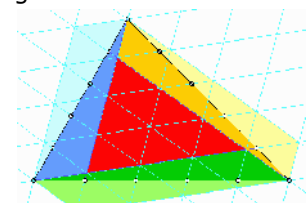
Teilverhältnis 1:3



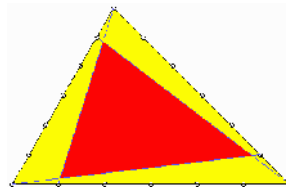
Flächenverhältnis 2:11



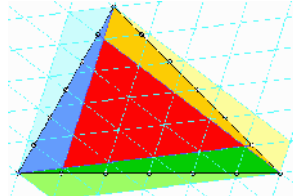
Teilverhältnis 1:4



Flächenverhältnis 3:7



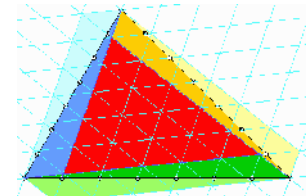
Teilverhältnis 1:5



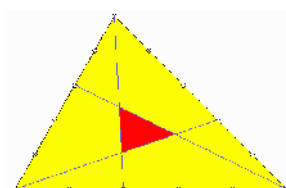
Flächenverhältnis 8 : 23



Teilverhältnis 1:6



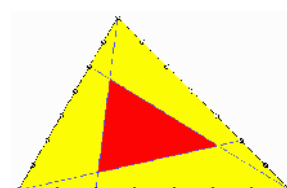
Flächenverhältnis 25 : 61



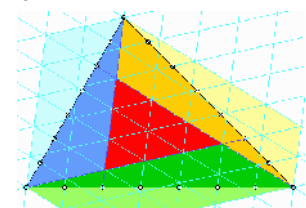
Teilverhältnis 2:3



Flächenverhältnis 1:19



Teilverhältnis 2:5



Flächenverhältnis 3:8

## Dreiecksunterteilung

In einem Dreieck ABC werden die drei Seiten in den Verhältnissen  $p : q$  und  $q : p$  geteilt und die sechs zugehörigen Ecktransversalen und Seitenhalbierenden gezeichnet. Dadurch wird das Dreieck in mehrer Teilgebiete unterteilt.

Die Transversalen schneiden sich in 22 Punkten. Nutzt man trilineare Koordinaten mit Punkt A (1:0:0), Punkt B (0:1:0) und C(0:0:1), so ergeben sich für die Schnittpunkte die Koordinaten:

a (q:p:0)	b (1:1:0)	c (p:q:0)	d (q <sup>2</sup> :pq:p <sup>2</sup> )	e (pq:q <sup>2</sup> :p <sup>2</sup> )	f (q:0:p)
g (q <sup>2</sup> :p <sup>2</sup> :pq)	h (q:p:p)	i (q:q:p)	j (1:0:1)	k (q:p:q)	l (1:1:1)
m (p:q:p)	n (p:0:q)	o (pq:p <sup>2</sup> :q <sup>2</sup> )	p (p:p:q)	q (p:q:q)	r (p <sup>2</sup> :q <sup>2</sup> :pq)
s (p <sup>2</sup> :pq:q <sup>2</sup> )	t (0:p:q)	u (0:1:1)	v (0:0:1)		

Außerdem entstehen 4 Arten von Dreiecken und ein Art Vierecke, die jeweils flächengleich sind. Für die Flächenanteile einer Fläche wird:

Dreieck 1  $(p-q)^2 / (6p^2+15pq+6q^2)$

Dreieck 2  $(p^3q-2p^2q^2+pq^3) / (2p^4+7p^3q+9p^2q^2+7pq^3+2q^4)$

Dreieck 3  $(p^2q-p^3) / (2p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)$

Dreieck 4  $p^3 / (p^3+2p^2q+2pq^2+q^3)$

Viereck 5  $-(p^2-pq) / (2p^2+6pq+4q) - (p^3q-p^2q^2) / (p^4+4p^3q+6p^2q^2+5pq^3+2q^4)$

Jeweils ein Dreieck der 4 Arten und ein Viereck haben einen gemeinsamen Flächeninhalt von 1/6 der Fläche des Dreiecks ABC.

Für bestimmte rationale Teilverhältnisse  $p:q$  ergeben sich dann

	1:2	1:3	1:4	2:3	2:5
Dreieck 1	1/60	4/105	1/18	1/168	1/36
Dreieck 2	1/70	12/455	2/63	3/532	5/234
Dreieck 3	1/28	2/65	1/42	4/133	4/117
Dreieck 4	1/21	1/52	1/105	8/95	8/273
Viereck 5	11/210	19/364	29/630	31/760	59/1092

Bei  $p = 1, q = 4$  bedeckt das gelbe Sechseck ein Drittel der Dreiecksfläche.

Bei  $p = 2, q = 5$  bedeckt das gelbe Sechseck ein Sechstel der Dreiecksfläche.

Das Sechseck bedeckt das halbe Dreieck für  $p : q = 1 : (13+3\sqrt{17})/4$  und ein Viertel des Dreiecks für  $p : q = 1 : (7+\sqrt{33})/4$

Teilt man im Verhältnis  $1:\sqrt{2}$  wird für die Flächen

Dreieck 1  $-(2\sqrt{2}-3) / (15\sqrt{2}+18)$

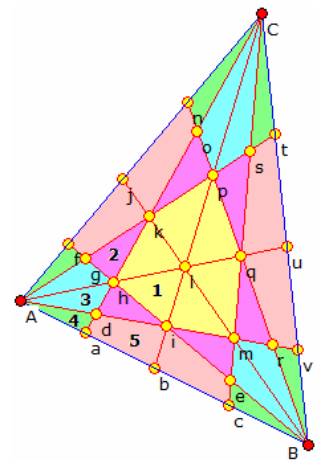
Dreieck 2  $(3\sqrt{2}-4) / (21\sqrt{2}+28)$

Dreieck 3  $(\sqrt{2}-1) / (5\sqrt{2}+8)$

Dreieck 4  $1 / (4\sqrt{2}+5)$

Viereck 5  $(\sqrt{2}-1) / (6\sqrt{2}+10) - (\sqrt{2}-2) / (14\sqrt{2}+21)$

Quelle: Hans Walser [20100715a]



## Bermuda-Dreieck

Das Bermudadreieck ist die Bezeichnung für ein Seegebiet, das sich im westlichen Atlantik, nördlich der Karibik befindet. Schiffe verschwinden bei guten Wetterbedingungen und ruhiger See spurlos oder treiben verlassen, aber völlig intakt im Meer, während die Mannschaften verschollen bleiben, so die Legende.

Für das Bermudadreieck gelten die Positionsangaben:

Im Norden begrenzen die Bermudainseln bei etwa  $32^\circ$  nördlicher Breite ( $32,271682^\circ$  n.Br.,  $-64,797158^\circ$  ö.L.) das Dreieck. Im Westen begrenzt in Florida Miami ( $25,787777^\circ$  n.Br.,  $-80,224165^\circ$  ö.L.) dieses Gebiet. Im Süden ist es die Stadt San Juan ( $18,451656^\circ$  n.Br.,  $-66.068867^\circ$  ö.L.) auf der Insel Puerto Rico.

Für dieses Dreieck ermittelt man als Seiten

Bermuda-Miami = 1657 km

Bermuda-San Juan = 1548 km

Miami-San Juan = 1670 km

und somit als Flächeninhalt

$A = 1140000 \text{ km}^2$

eine Fläche mehr als dreimal so groß wie Deutschland.

## Reihen am Dreieck

Neben der Darstellung von Seiten und Winkeln am Dreieck durch trigonometrische Beziehungen besteht auch die Möglichkeit, diese durch unendliche Reihen zu beschreiben.

In den nachfolgenden Gleichungen wird die Standardbezeichnung am Dreieck verwendet. Die Winkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  sind im Bogenmaß zu verwenden.

## Rechtwinkliges Dreieck

gegeben: Hypotenuse  $c$ , Winkel  $\alpha$  und  $\beta$



$$a = c (\alpha - 1/(2 \cdot 3) \alpha^3 + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \alpha^5 - 1/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) \alpha^7 + \dots)$$

$$a = c (1 - 1/2 \beta^2 + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4) \beta^4 - 1/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \beta^6 + \dots)$$

gegeben: Hypotenuse  $c$ , Kathete  $a$

$$\alpha = (a/c + 1/(2 \cdot 3) (a/c)^3 + 3/(2 \cdot 4 \cdot 5) (a/c)^5 + (3 \cdot 5)/(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7) (a/c)^7 + \dots)$$

$$b = c - (1/2 a/c + 1/(2 \cdot 4) (a/c)^3 + 3/(2 \cdot 4 \cdot 6) (a/c)^5 + (3 \cdot 5)/(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8) (a/c)^7 + \dots)$$

setzt man in den Reihen  $b$  für  $a$  ein, ergeben sich die Reihen für  $\beta$  und  $a$

gegeben: Kathete  $a$  und ein Winkel  $\alpha$  bzw.  $\beta$

$$c = a (1 + 1/2 \beta^2 + 5/24 \beta^4 + 61/720 \beta^6 + 277/8064 \beta^8 \dots)$$

$$b = a (\beta + 1/3 \beta^3 + 2/15 \beta^5 + 17/315 \beta^7 + 62/2835 \beta^9 \dots)$$

$$b = a (1/\alpha - 1/3 \alpha - 1/45 \alpha^3 - 2/945 \alpha^5 - 1/4725 \alpha^7 - \dots)$$

gegeben: Katheten  $a$  und  $b$

$$\alpha = (a/b - 1/3 (a/b)^3 + 1/5 (a/b)^5 - 1/7 (a/b)^7 + 1/9 (a/b)^9 - \dots)$$

$$\alpha = \pi/2 - (b/a - 1/3 (b/a)^3 + 1/5 (b/a)^5 - 1/7 (b/a)^7 + 1/9 (b/a)^9 - \dots)$$

vertauscht man  $a$  und  $b$  in beiden Reihen, erhält man den Winkel  $\beta$

$$c = a + b (1/2 b/a + 1/(2 \cdot 4) (b/a)^3 + 3/(2 \cdot 4 \cdot 6) (b/a)^5 + (3 \cdot 5)/(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8) (b/a)^7 + \dots)$$

$$c = b + a (1/2 a/b + 1/(2 \cdot 4) (a/b)^3 + 3/(2 \cdot 4 \cdot 6) (a/b)^5 + (3 \cdot 5)/(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8) (a/b)^7 + \dots)$$

In den nachfolgenden Gleichungen wird die Standardbezeichnung am Dreieck verwendet. Die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sind im Bogenmaß zu verwenden.

### Allgemeines Dreieck

gegeben: Seite  $a$  und die Winkel des Dreiecks

$$b = a (\beta - 1/(2 \cdot 3) \beta^3 + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \beta^5 - \dots) / (\alpha - 1/(2 \cdot 3) \alpha^3 + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \alpha^5 - \dots)$$

wird  $\beta$  durch  $\gamma$  ersetzt, ergibt sich die Seite  $c$

gegeben: Seite  $a$  und  $b$  und ein gegenüberliegender Winkel  $\beta$

$$c = b + a - b ((b+a)/(2a) \alpha^2 + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4 a^3) (3(b^3 + a^3) - 4a^2 (b+a)) \alpha^4 + \dots)$$

$$c = b - a - b ((b-a)/(2a) \alpha^2 + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4 a^3) (3(b^3 - a^3) - 4a^2 (b-a)) \alpha^4 + \dots)$$

$$\alpha = a/b (\beta - (b^2 - a^2)/(2 \cdot 3 b^2) \beta^3 + ((b^2 - a^2)^2 - 8a^2 (b^2 - a^2))/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 b^4) \beta^5 - \dots)$$

$$\gamma = (a+b)/a (\alpha - (3b^2 + 4ab + a^2)/(2 \cdot 3 a^2) \alpha^3 + (30a^2b^2 - 16a^3b + a^4 - 15b)/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 a^4) \alpha^5 - \dots)$$

gegeben: zwei Seiten  $a$  und  $b$  und der eingeschlossene Winkel  $\gamma$

$$c = \sqrt{((a-b)^2 - ab (\gamma^2 - 1/(3 \cdot 4) \gamma^4 + 1/(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \gamma^6 - \dots))}$$

$$c = (a+b) (1 - ab/(2(a+b)^2 (\pi - \gamma)^2 - (3a^2b^2 + ab(a+b)^2)/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (a+b)^4) (\pi - \gamma)^4 - \dots)$$

die erste Reihe gilt für  $\gamma < 90^\circ$ , die zweite für  $\gamma > 90^\circ$

$$\alpha = \pi/2 - \gamma/2 + (a-b)/(a+b) (2/\gamma - \gamma/(2 \cdot 3) - \gamma^3/(8 \cdot 45) - \dots) - 1/3 (a-b)^3/(a+b)^3 (2/\gamma - \gamma/(2 \cdot 3) - \gamma^3/(8 \cdot 45) - \dots) + 1/5 (a-b)^5/(a+b)^5 (2/\gamma - \gamma/(2 \cdot 3) - \gamma^3/(8 \cdot 45) - \dots) - \dots$$

die Reihe gilt für  $a > b$ ; andernfalls muss  $a$  durch  $b$  ersetzt werden

gegeben: drei Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$

$$\gamma = 1 - 1/2 ((a^2 + b^2 - c^2)/(2ab))^2 + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4) ((a^2 + b^2 - c^2)/(2ab))^4 - 1/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) ((a^2 + b^2 - c^2)/(2ab))^6 + \dots$$

für den Winkel  $\alpha$  muss  $(a^2 + b^2 - c^2)/(2ab)$  durch  $(b^2 + c^2 - a^2)/(2bc)$  ersetzt werden

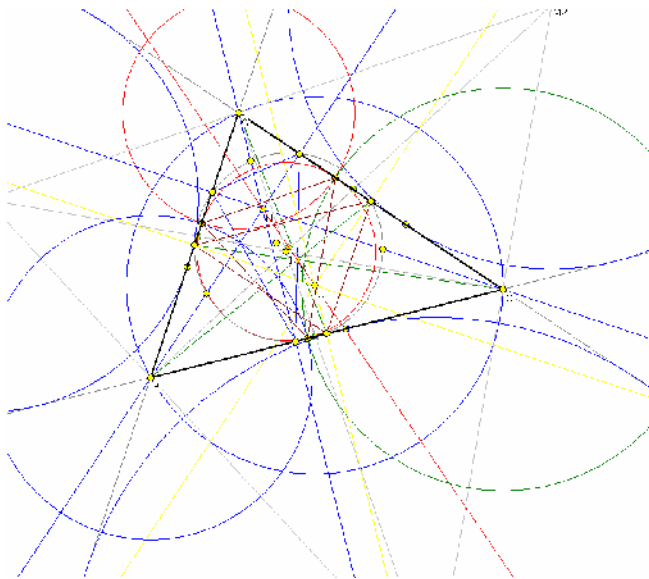
für den Winkel  $\beta$  muss  $(a^2 + b^2 - c^2)/(2ab)$  durch  $(a^2 + c^2 - b^2)/(2ac)$  ersetzt werden

### Dreiecksgeometrie bei YouTube

Unter dem Video-Portal YouTube findet man eine Vielzahl von interessanten Kurzvideos zu Problemen der Berechnung von Dreiecken, besonderen Punkten, Sätzen usw. Einige Beispiele sind:

Dreiecksberechnung	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=csprnzWN_IE">http://www.youtube.com/watch?v=csprnzWN_IE</a>
Punkte am Dreieck	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=MIyPfv5Os6Y">http://www.youtube.com/watch?v=MIyPfv5Os6Y</a>
Ähnliche Dreiecke	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=s4fr9vC9C5Q">http://www.youtube.com/watch?v=s4fr9vC9C5Q</a>
Dreiecksfläche	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=xz6gBA0M9FY">http://www.youtube.com/watch?v=xz6gBA0M9FY</a>
30-60-90-Dreieck	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=_eBIuP9pugM">http://www.youtube.com/watch?v=_eBIuP9pugM</a>
Satz des Pythagoras	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=g73rRI3vZ9M">http://www.youtube.com/watch?v=g73rRI3vZ9M</a>
Sinus, Kosinus am Dreieck	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=s9t7rNhaBp8">http://www.youtube.com/watch?v=s9t7rNhaBp8</a>
	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=XFh_JC7OSrg">http://www.youtube.com/watch?v=XFh_JC7OSrg</a>
	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=_S35Ht4imhs">http://www.youtube.com/watch?v=_S35Ht4imhs</a>
Rechtwinkliges Dreieck	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=dLOdHzttQ90">http://www.youtube.com/watch?v=dLOdHzttQ90</a>
Einheitskreis und Dreieck	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=6Qv_bPIQS8E">http://www.youtube.com/watch?v=6Qv_bPIQS8E</a>
Euler-Gerade	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=CizogTmSju4">http://www.youtube.com/watch?v=CizogTmSju4</a>
Gleichseitiges Dreieck	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=LqF4hiNkvQk">http://www.youtube.com/watch?v=LqF4hiNkvQk</a>
Satz von Stewart	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=cRebl8I0IKk">http://www.youtube.com/watch?v=cRebl8I0IKk</a>
Rationale Trigonometrie	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=7Oze-egF6AU">http://www.youtube.com/watch?v=7Oze-egF6AU</a>
Winkeldreiteilung	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=eAmPFKU1rvk">http://www.youtube.com/watch?v=eAmPFKU1rvk</a>
Heron-Formel	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=hooQuHLS-kk">http://www.youtube.com/watch?v=hooQuHLS-kk</a>





### Beispielberechnung für ein allgemeines Dreieck

Punkt A	( -1   2 )
Punkt B	( -2   -1 )
Punkt C	( 2   0 )
Seite a	4.123
Seite b	3.606
Seite c	3.162
Innenwinkel Alpha in °	74.745
Innenwinkel Beta in °	57.529
Innenwinkel Gamma in °	47.726
Umfang	10.891
Flächeninhalt	5.5
Brocard-Winkel in °	28.811
Seitenhalbierende a	Y = -2.5 X -0.5
Seitenhalbierende b	Y = 0.8 X +0.6
Seitenhalbierende c	Y = -0.143 X +0.286
Länge der Seitenhalbierenden von a	2.693
Länge der Seitenhalbierenden von b	3.202
Länge der Seitenhalbierenden von c	3.536
Winkelhalbierende-Schnittpunkt	( -0.13   -0.53 )

Winkelhalbierende-Schnittpunkt	( 0.3   1.13 )	Winkelhalbierende-Schnittpunkt	( -1.47   0.6 )
SP Winkelhalbierende alpha mit a	( -0.13   -0.53 )		
Länge der Winkelhalbierenden alpha	2.675		
SP Winkelhalbierende beta mit b	( 0.3   1.13 )		
Länge der Winkelhalbierenden beta	3.135		
SP Winkelhalbierende gamma mit c	( -1.47   0.6 )		
Länge der Winkelhalbierenden gamma	3.521		
Mittelsenkrechte auf c	Y = -0.333 X +0	Mittelsenkrechte auf b	Y = 1.5 X +0.25
Mittelsenkrechte auf a	Y = -4 X -0.5		
Umkreismittelpunkt	( -0.14   0.05 )	Umkreisradius	2.137
Inkreismittelpunkt	( -0.46   0.43 )	Inkreisradius	1.01
Höhenschnittpunkt	( -0.73   0.91 )	Schwerpunkt S	( -0.34   0.34 )
Radius des Feuerbach-Kreises	1.068	Feuerbach-Punkt	( -0.43   0.48 )
Euler-Gerade	Y = -1.462 X -0.157	Lémoine-Punkt	( -0.58   0.53 )
Ankreis M1	( 1.22   -4.48 ), r1 = 4.159	Ankreis M2	( 2.56   3.22 ), r2 = 2.989
Ankreis M3	( -3.87   1.02 ), r3 = 2.409	Soddy-Kreisradien	1.322, 1.84, 2.283
Ankreisberührungspunkte	( 0.21   -0.45 ), ( 0.9   0.73 ), ( -1.58   0.26 )		
Kontaktpunkte	( -0.22   -0.55 ), ( 0.1   1.27 ), ( -1.42   0.75 )		
Höhenfußpunkt H(b) auf b	( -0.31   1.54 )	Länge der Höhe auf b	3.051
Höhenfußpunkt H(a) auf a	( -0.35   -0.59 )	Länge der Höhe auf a	2.67
Höhenfußpunkt H(c) auf c	( -1.3   1.1 )	Länge der Höhe auf c	3.479
Feuerbachpunkte	( -1.5   0.5 ), ( 0.5   1 ), ( 0   -0.5 ), ( -0.31   1.54 ), ( -0.35   -0.59 ), ( -1.3   1.1 ), ( -0.87   1.46 ), ( -1.37   -0.04 ), ( 0.63   0.46 )		

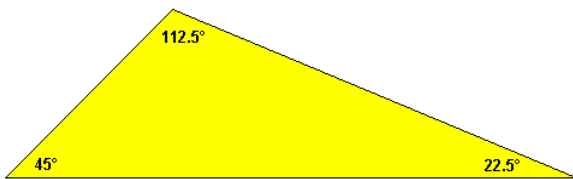
### Ganzzahliges Dreieck

Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen werden selbst ganzzahlig genannt. Für einen ganzzahligen Umfang  $u = 3, 4, 5, \dots$  gibt es  $1, 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 7, 5, 8, 7, 10, 8, 12, 10, 14, 12, 16, 14, 19, 16, 21, 19, \dots$  verschiedene ganzzahlige Dreiecke.

Allgemeine gilt für die Anzahl dieser Dreiecke:

$$T(u) = [u^2 / 48] \quad \text{für gerade } u \quad = [(u+3)^2 / 48] \quad \text{für ungerade } u$$

Dabei wird hier unter  $[x]$  die nächste ganzzahlige Zahl verstanden. Die entstehende Zahlenfolge  $T(u) = 1, 0, 1, \dots$  heißt Alcuin-Folge.



### Das „schiefe“ Dreieck

Möglichst schief soll bedeuten, dass der Unterschied der Innenwinkel des Dreiecks untereinander und zu den Winkeln von  $0^\circ, 90^\circ$  und  $180^\circ$  maximal ist. Gesucht ist also ein Dreieck, dessen Innenwinkel sich untereinander und von den oben genannten Winkeln

möglichst stark unterscheiden.

Der kleinste Winkel des Dreieck sei  $\alpha$ , der mittlere Winkel  $\beta$  und der größte Winkel  $\gamma$ . Differenzen zwischen den Winkeln:

$$\varphi_0 = \alpha - 0^\circ \quad \varphi_1 = \beta - \alpha \quad \varphi_2 = \gamma - \beta \quad \varphi_3 = 90^\circ - \gamma \quad \text{für ein spitzwinkliges Dreieck}$$

$$\varphi_3 = \gamma - 90^\circ \quad \text{für ein stumpfwinkliges Dreieck} \quad \varphi_4 = 180^\circ - \gamma$$

Es gilt  $\varphi_4 = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha + \beta > \alpha$

Da  $\varphi_4$  immer größer als  $\varphi_0$  ist, braucht der Unterschied zwischen  $\gamma$  und  $180^\circ$  nicht weiter betrachtet zu werden. Im spitzwinkligen Dreieck sind alle Winkel kleiner als  $90^\circ$  und es gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = (90^\circ - \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1) + (90^\circ - \varphi_3 - \varphi_2) + (90^\circ - \varphi_3) = 180^\circ$$

$$\varphi_1 = 90^\circ - 2 * \varphi_2 - 3 * \varphi_3$$

Für ein vorgegebenes  $\varphi_3$  wird  $\varphi_1$  linear kleiner, wenn  $\varphi_2$  größer wird und umgekehrt. Der kleinste von diesen beiden Winkeln ist also dann am größten, wenn beide Winkel gleich sind ( $\varphi_1 = \varphi_2$ ):

$$\varphi_1 = 30^\circ - \varphi_3$$

Wieder wird  $\varphi_1$  linear kleiner, wenn  $\varphi_3$  größer wird und der kleinste dieser beiden Winkel ist wieder dann am größten, wenn sie beide gleich sind ( $\varphi_1 = \varphi_3$ ):  $\varphi_1 = 15^\circ$ , d.h.  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 75^\circ$

Das schiefste spitzwinklige Dreieck hat die Innenwinkel  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $75^\circ$ .

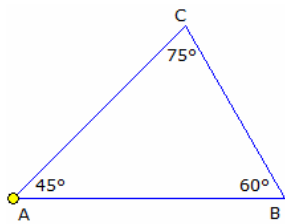
Im stumpfwinkligen Dreieck ist genau ein Winkel größer als  $90^\circ$  und es gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = \varphi_0 + (\varphi_0 + \varphi_1) + (90^\circ + \varphi_3) = 180^\circ \quad \varphi_1 = 90^\circ - 2 * \varphi_0 - \varphi_3$$

Für ein vorgegebenes  $\varphi_3$  wird  $\varphi_1$  linear kleiner, wenn  $\varphi_0$  größer wird und umgekehrt. Der kleinste von diesen beiden Winkeln ist also dann am größten, wenn beide Winkel gleich sind ( $\varphi_0 = \varphi_1$ ):  $\varphi_0 = 30^\circ - \varphi_3 / 3$

Wieder wird  $\varphi_0$  linear kleiner, wenn  $\varphi_3$  größer wird und der kleinste dieser beiden Winkel ist wieder dann am größten, wenn sie beide gleich sind ( $\varphi_0 = \varphi_3$ ):  $\varphi_0 = 22.5^\circ$ , d.h.  $\alpha = 22.5^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 112.5^\circ$

Das schiefste stumpfwinklige Dreieck hat also die Innenwinkel  $22.5^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $112.5^\circ$  und ist somit das schiefste Dreieck überhaupt.



### Bestmögliches Dreieck

Geometrische Aufgaben werden oft mit Abbildungen versehen. Ein Grundsatz von G.Pólya besagt:

"Eine Figur darf nicht eine unangebrachte Spezialisierung nahe legen."

Aus diesem Grund sucht man nach einem "bestmöglichen" Dreieck, das keine speziellen Eigenschaften besitzt.

Sind  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Innenwinkel eines spitzwinkligen Dreiecks mit  $\gamma > \beta > \alpha$ , dann geben  $90^\circ - \gamma$ ,  $\gamma - \beta$  und  $\beta - \alpha$  die Differenz zu einem rechtwinkligen, gleichschenkligen bzw. gleichseitigen Dreieck an.

Ist  $\Delta$  das Minimum der drei Werte  $90^\circ - \gamma$ ,  $\gamma - \beta$  und  $\beta - \alpha$ , so sollte  $\Delta$  für das bestmögliche Dreieck möglichst groß sein. Über das gewichtete arithmetische Mittel wird

$$\Delta = 15^\circ$$

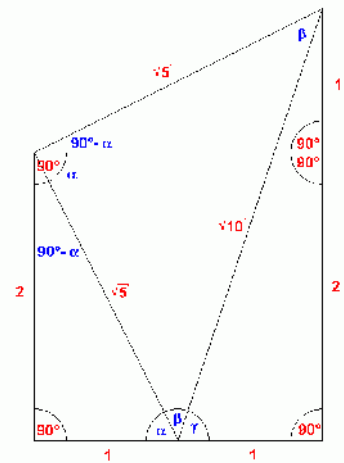
Damit hat das bestmögliche Dreieck die Innenwinkel

$$45^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 75^\circ.$$

Für alle anderen Innenwinkel ist  $\Delta$  kleiner als  $15^\circ$ .

Für das bestmögliche nichtspezielle stumpfwinklige Dreieck ergibt sich auf analoge Weise  $\alpha = 22,5^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 112,5^\circ$  mit  $\Delta = 22,5^\circ$ .

Quelle: Carsten und Wolfgang Moldenhauer



**Aufgabe:** In einem Dreieck sei der Tangens der drei Innenwinkel jeweils eine positive ganze Zahl. Wie lautet die Lösung?

**Lösung:**

Wenn es überhaupt eine Lösung gibt, muss der Tangens des kleinsten Winkels gleich eins sein und der Winkel selber  $45^\circ$ . Wäre der Tangens nämlich 2, würde die Winkelsumme im Dreieck mehr als  $180^\circ$  betragen, weil  $\arctan(2) = 63.435^\circ$  ist. Einen weiteren Winkel mit  $45^\circ$  kann es nicht geben, weil für den übrig bleibenden Winkel von  $90^\circ$  der Tangens

unendlich wäre. Der Tangens des zweitkleinsten Winkels kann aber auch nicht 3 oder mehr betragen, da der Winkel dann größer oder gleich  $71.565^\circ$  und damit mehr Hälfte des übriggebliebenen Winkels von  $135^\circ$  betragen würde. Es kommt für den Tangens also nur 2 in Frage.

Diese einzige Möglichkeit ist tatsächlich eine Lösung, wie man der Zeichnung entnehmen kann. Die Konstruktion ist so gewählt, dass  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  und  $\tan(\alpha) = 2$  ist. Da das linke und obere Dreieck ähnlich sind, erkennt man leicht, dass  $\tan(\beta) = 1$  und  $\tan(\gamma) = 3$  ist. Damit ist gezeigt, dass gilt:

$$\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = 180^\circ$$

Die Werte für die drei Innenwinkel betragen:

Kleinsten Winkel:  $\beta = 45.000^\circ$ ;  $\tan(\beta) = 1$

Mittlerer Winkel:  $\alpha = 63.435^\circ$ ;  $\tan(\alpha) = 2$

Größter Winkel:  $\gamma = 71.565^\circ$ ;  $\tan(\gamma) = 3$

### Vermessungskunde

(oder *Geodäsie*; griechisch: Erdverteilung, Landverteilung), mathematische Wissenschaft zur Bestimmung von Form und Größe der Erde sowie von Form, Größe und Position von Teilen ihrer Oberfläche. Dazu gehört beispielsweise die Bestimmung von Grundstücksgrenzen oder die Geländevermessung, als wichtige Grundlage für die Planung von Bauwerken (Dämme, Brücken) und Verkehrswegen. Man unterscheidet zwischen Erdmessung, Landes- und Einzelvermessung. Aufgabe der Erdmessung ist es, die äußere Gestalt der Erde im Großen zu erfassen; die Landesvermessung ist für die

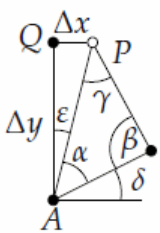
landesweite Vermessung und Bereitstellung gleich bleibender und exakter Bezugspunkte (Lagefestpunktfelder bzw. Triangulierungsnetze) zuständig; bei der Einzelvermessung wiederum werden die Festpunktfelder der Landesvermessung soweit verdichtet, dass Einzelobjekte exakt eingemessen werden können. Klassische Methoden sind das Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden.

Als Hilfsmittel werden verwendet:

Das Nivelliergerät (Teleskop auf einem dreifüßigen Stativ, das mit Libelle und Fadenkreuz ausgestattet ist) dient dem Ablesen des entsprechenden Teilstriches auf der Messlatte. Horizontale oder vertikale Winkel werden mittels eines Theodolites (Teleskop auf einem dreifüßigen Stativ, das mit einem Fadenkreuz und einem Winkelmesser ausgestattet ist) gemessen. Mit einer speziellen Optik ausgestattete Theodolite erreichen eine Genauigkeit von einer hundertstel Bogensekunde.

**Grundformel der Geodäsie**

Gegeben sind zwei Punkte A und B mit den kartesischen Koordination  $(x_A, y_A)$  und  $(x_B, y_B)$ , wobei  $x_A < x_B$  gelten soll. Dann erhält man die Entfernung  $d = AB$  und den Anstiegswinkel  $\alpha$  zwischen den Punkten mit  $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$   $\alpha = \arctan (y_B - y_A) / (x_B - x_A)$



**Vorwärtseinschneiden**

Gegeben sind zwei Punkte A und B mit den kartesischen Koordinaten  $(x_A, y_A)$  und  $(x_B, y_B)$ . Gesucht sind die kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  eines dritten Punktes P (siehe Abbildung).

gegebene Größen: Winkel  $\alpha$  und  $\beta$

Lösung: b und  $\delta$  werden bestimmt durch

$c = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$   $b = c \sin \beta / \sin(\alpha + \beta)$   
 $\delta = \arctan (y_B - y_A) / (x_B - x_A)$

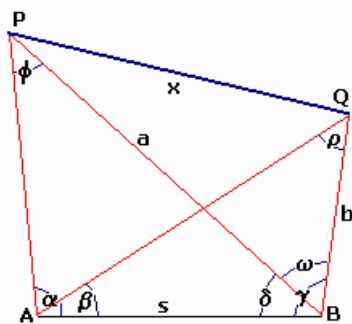
Damit wird insgesamt

$x = x_A + b \cos(\alpha + \delta)$   $y = y_A + b \sin(\alpha + \delta)$

Nachweis: Im rechtwinkligen Dreieck APQ gilt

$x = x_A + \Delta x = x_A + b \sin \epsilon$   $y = y_A + \Delta y = y_A + b \cos \epsilon$

Wegen  $\epsilon = \pi/2 - \alpha - \delta$  wird  $\sin \epsilon = \cos(\alpha + \delta)$  und  $\cos \epsilon = \sin(\alpha + \delta)$ .  
 Aus dem Sinussatz folgt  $b = c \sin \beta / \sin \gamma$  und  $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ , also  $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$ .



**Vorwärtseinschneiden**

Das Vorwärtseinschneiden (Hansensche Aufgabe) wird zur Bestimmung einer unzugänglichen Entfernung, in der Skizze PQ, genutzt. In den Punkten A und B können die vier Winkel zu den Punkten P und Q gemessen werden. Ist der Abstand AB bekannt, ist es möglich, die Entfernung PQ zu berechnen.

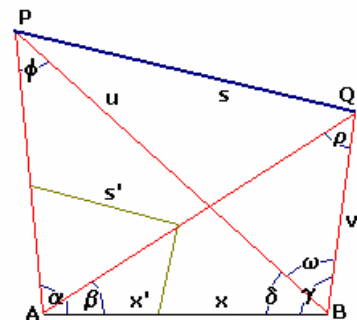
geg.:  $AB = s$ ,  $\angle PAB$ ,  $\angle QAB$ ,  $\angle ABQ$ ,  $\angle ABP$

ges.: Strecke PQ

$\phi = 180 - \alpha - \delta$   $a = s * \sin \alpha / \sin \phi$   
 $\rho = 180 - \beta - \gamma$   $b = s * \sin \beta / \sin \rho$   
 $\omega = \gamma - \delta$   $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega}$

Beispiel:  $AB = 2$ ,  $\angle PAB = 34^\circ$ ,  $\angle QAB = 24^\circ$ ,  $\angle ABQ = 67^\circ$ ,  $\angle ABP =$

$45^\circ$ . Lösung  $PQ = 1.493411$



**Rückwärtseinschneiden**

Beim Rückwärtseinschneiden nach 2 Punkten wird die Entfernung AB aus der Länge der Strecke PQ und den vier Winkeln bei A und B ermittelt. Dabei handelt es sich um die Umkehrung des Vorwärtseinschneidens.

geg.:  $s$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$

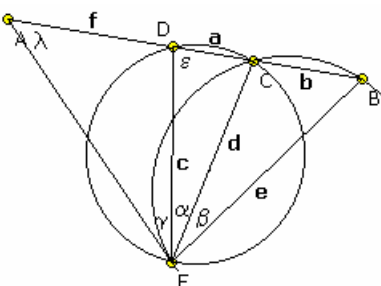
ges.: Strecke  $AB = x$

$x'$  wird parallel zu  $x$  gewählt und auf eine beliebige Länge

gesetzt

$\phi = 180 - \alpha - \delta$   $u = (x' * \sin \alpha) / \sin \phi$   
 $\rho = 180 - \beta - \gamma$   $v = (x' * \sin \beta) / \sin \rho$   
 $\omega = \gamma - \delta$   $x : x' = s : s'$

$s' = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \omega}$   
 $x = (s * x') / s'$



**Rückwärtseinschneiden**

gegeben:  $a = DC$ ;  $b = BC$ ;  $\alpha = \angle DEC$ ;  $\beta = \angle CEB$ ;  $\gamma = \angle AED$ ; BCDA liegen auf einer gemeinsamen Geraden

gesucht: Strecke  $f = AD$

Lösung:

$\omega = \alpha + \beta$   $2 r_1 = a / \sin \alpha$   
 $2 r_2 = b / \sin \beta$   $u = \sqrt{4 r_1^2 + 4 r_2^2 - 8 r_1 r_2 \cos \omega}$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arcsin(2 r_2 \sin \omega) / u & \psi &= \arcsin(2 r_1 \sin \omega) / u \\ d &= 2 r_1 \sin \varphi & c &= (d \sin(180 - \varphi - \alpha)) / \sin \varphi \\ e &= (d \sin(180 - \psi - \beta)) / \sin \psi & \varepsilon &= \arcsin(d \sin \alpha) / a \\ \lambda &= \varepsilon - \gamma & f &= (c \sin \gamma) / \sin \lambda \end{aligned}$$

Beispiel: Für  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $\alpha = 24^\circ$ ,  $\beta = 34^\circ$  und  $\gamma = 78^\circ$  werden die drei gesuchten Strecken 3.77509, 5.85386 und 4.73026.

### Snelliussche Aufgabe des Rückwärtseinschneidens

Nach Snellius kann das Rückwärtseinschneiden eines Neupunktes N über drei gegebene Punkte A, B, C erfolgen. Man spricht auch von der 2. Hauptaufgabe der Triangulierung.

Gegeben:  $y_A, x_A, y_B, x_B, y_C, x_C$  Gemessen:  $\delta_1, \delta_2$  in N

Gesucht:  $y_N, x_N$

Lösung:  $\tan t_{AC} = \Delta y_{AC} / \Delta x_{AC}$   $\tan t_B = \Delta y_{BC} / \Delta x_{BC}$

$$a = \Delta y_{AC} / \sin t_{AC} = \Delta x_{AC} / \cos t_{AC}$$

$$b = \Delta y_{BC} / \sin t_{BC} = \Delta x_{BC} / \cos t_{BC}$$

$$\gamma = t_{CA} - t_{CB} = t_{AC} - t_{BC}$$

$$(\varphi + \psi) / 2 = 180^\circ - (\gamma + \delta_1 + \delta_2) / 2$$

$$\tan \lambda = a \sin \delta_2 / (b \sin \delta_1)$$

$$\tan (\varphi - \psi) / 2 = \tan (\varphi + \psi) / 2 \cot(45^\circ + \lambda)$$

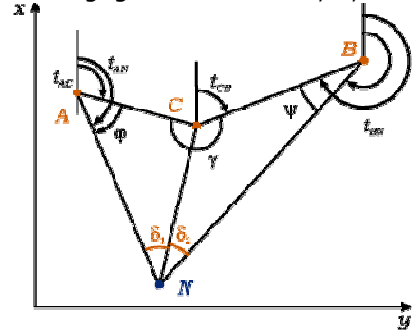
$$s_{AN} = a / \sin \delta_1 * \sin (\delta_1 + \varphi)$$

$$s_{BN} = b / \sin \delta_2 * \sin (\delta_2 + \psi)$$

$$s_{CN} = a / \sin \delta_1 * \sin \varphi = b / \sin \delta_2 * \sin \psi$$

$$x_N = x_A + s_{AN} \cos t_{AN} = x_B + s_{BN} \cos t_{BN}$$

$$y_N = y_A + s_{AN} \sin t_{AN} = y_B + s_{BN} \sin t_{BN}$$



### Rückwärtseinschneiden nach Cassini

Bei diesem Rechenverfahren werden zwei Hilfspunkte P und Q verwendet, die je auf einem Hilfskreis durch A, C, P bzw. B, C, Q sowie beide auf einer Geraden durch den Neupunkt N liegen.

Gegeben:  $y_A, x_A, y_B, x_B, y_C, x_C$  Gemessen:  $\delta_1, \delta_2$  in N.

Gesucht:  $y_N, x_N$ .

Die Kreismittelpunkte  $H_1$  bzw.  $H_2$  sind die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von AC bzw. BC mit den Verbindungslinien PC bzw. QC. Die in N gemessenen Winkel  $\delta_1, \delta_2$  erscheinen wieder in P bzw. Q (Peripheriewinkel).

Lösung:

$$y_P = y_A + (x_C - x_A) \cot \delta_1$$

$$x_P = x_A + (y_C - y_A) \cot \delta_1$$

$$y_Q = y_B + (x_C - x_B) \cot \delta_2$$

$$x_Q = x_B + (y_C - y_B) \cot \delta_2$$

$$t_{PQ} = \Delta y_{PQ} / \Delta x_{PQ}$$

$$x_N = x_P + (y_C - y_P + (x_C - x_P) \cot t_{PQ}) / (\tan t_{PQ} + \cot t_{PQ})$$

$$y_N = y_P + (x_N - x_P) \tan t_{PQ} \quad (\tan t_{PQ} < \cot t_{PQ})$$

$$y_N = y_C - (x_N - x_C) \cot t_{PQ} \quad (\cot t_{PQ} < \tan t_{PQ})$$

Gefährlicher Kreis: Bei der Punktauswahl ist dafür zu sorgen, dass die vier betrachteten Punkte nicht auf einem Kreis liegen, weil es dann keine Lösung gibt; man spricht vom gefährlichen Kreis. In dem Maße, in dem die Punkte in die Nähe eines gefährlichen Kreises zu liegen kommen, nimmt die Genauigkeit des Verfahrens ab.

