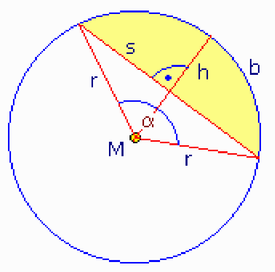
Kreis

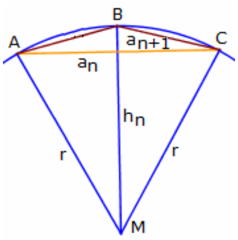


Geometrischer Ort aller Punkte der Ebene, welche von einem festen Mittelpunkt konstanten Abstand haben.
r … Radius, b … Bogenlänge, α … Zentriwinkel, s … Segmentsehne

Durchmesser $d = 2 \cdot r = 2 \sqrt{A / \pi} \approx 1{,}128379167096 \sqrt{A}$
Radius $r = \sqrt{A / \pi} \approx 0{,}564189583548 \sqrt{A}$
$r = u / (2\pi) \approx 0{,}1591549431\ u$
Flächeninhalt $A = \pi \cdot r^2 \approx 3{,}141592653590\ r^2 = \pi/4 \cdot d^2 \approx 0{,}785398163397\ d^2$
$A = u^2/(4\pi) = u/2 \cdot d/2 \approx 0{,}079577471546\ u^2$
Umfang $u = 2 \pi \cdot r = \pi d \approx 6{,}283185307180\ r = 2 \sqrt{\pi A} \approx 3{,}544907701812 \sqrt{A}$
Sehne $s = 2 \sqrt{2hr - h^2} = 2r \sin \alpha/2$
Höhe $h = r - \sqrt{r^2 - s^2/4} = s/2 \cdot \tan \alpha/4$
Lot vom Mittelpunkt auf eine Sehne $l = r \cos \alpha/2 = 1/2 \sqrt{4r^2 - s^2}$
Krümmung eines Kreises $K = 1/r$
Kreisring (r … innerer, R … äußerer Radius) Flächeninhalt $A = \pi (R^2 - r^2)$
Der Begriff Radius wurde erstmals von Peter Ramus 1569 verwendet. Archimedes verwendete "ek tou kentrou" (die Linie vom Zentrum), Euklid "Distanz" und Boethius "Halbmesser".

Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von einem festen Mittelpunkt konstanten Abstand haben.

Das Verhältnis des Durchmessers d zur Peripherie u entspricht 1 : π oder logarithmisch wie 0 : 0,49714987269413… Gute Näherungsbrüche für das Verhältnis π : 1 sind 22/7 = 3,142… ; 333/106 = 3,14150… ; … ; 833719/265381 ; …
Das Verhältnis des Quadrates des Durchmessers zur Kreisfläche ist 1 : $\pi/4$ = 1 : 0,785398163397…
Hierfür ergeben sich als Näherungsbrüche 11/14 = 0,7857… ; 172/219 = 0,78538… ; 355/452 = 0,7853982…
Das Verhältnis des Durchmessers zur Seite eines Quadrates, dessen Fläche der Kreisfläche gleich wäre ist 1 : $\sqrt{\pi} / 2$ = 1 : 0,886226925453… mit den Näherungsbrüchen 31/35 = 0,885… ; 39/44 = 0,8863… ; 109/123 = 0,8861…
Da keines der Verhältnisse rational ist, ist die Quadratur des Kreises, d.h. die Konstruktion eines flächengleichen Quadrates mit Zirkel und Lineal, nicht möglich.



Kreisflächenformel

Ursprünglich wurde die Kreiszahl π als das Verhältnis von Umfang u zum Durchmesser d eines Kreises definiert. Mit dem Radius r ist dann

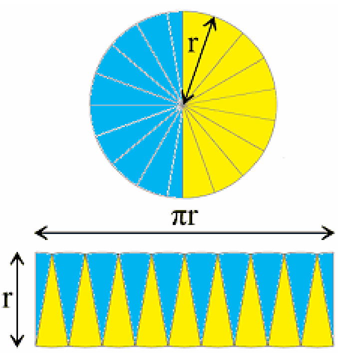
$$u = 2\pi\, r$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich direkt die Kreisflächenformel.
Einem Kreis mit dem Radius r werde vollständig ein Polygon, bestehend aus n Dreiecken, wie AMC, eingeschrieben.
Die Fläche jedes dieser gleichschenkligen Dreiecke ist die Hälfte der Grundlinie AB multipliziert mit der Höhe h. Die Gesamtfläche des Polygons entspricht dann

$$A_{Polygon} = 1/2\ AB \cdot h \cdot n$$

AB · n ist aber auch der Umfang des Polygons $u_{Polygon}$, d.h. $A_{Polygon} = 1/2\ u_{Polygon} \cdot h$
Strebt nun n gegen Unendlich, so nähert sich das Polygon immer stärker dem Kreis an und die Polygonfläche der Kreisfläche. Gleichzeitig konvergieren aber der Polygonumfang gegen den Kreisumfang und die Höhe h gegen den Kreisradius r, d.h.

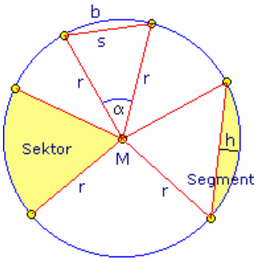
$$A_{Kreis} = \lim_{n\to\infty} A_{Polygon} = \lim_{n\to\infty} 1/2\ u_{Polygon} \cdot h = 1/2\ u_{Kreis} \cdot r = 1/2\ 2\pi\, r \cdot r = \pi\, r^2$$



Kreisflächeninhalt

Der Flächeninhalt der Kreisfläche A ist nach Archimedes proportional zum Quadrat des Radius r bzw. des Durchmessers d des Kreises.
Um die Formel für den Kreisinhalt zu erhalten, sind Grenzwert-Betrachtungen möglich. Aus der linken Abbildung ergibt sich eine dieser Möglichkeiten.
Die Kreisfläche wird in einer Anzahl von kongruenten Kreissektoren zerlegt und diese wie im unteren Teil der Abbildung wieder zusammengesetzt.
Die Kreisfläche ist dann zerlegungsgleich mit der Fläche der enstandenen Figur.
Diese nähert sich bei immer mehr Kreissektoren einem Rechteck mit dem halben Umfang π r als Länge und dem Radius r als Breite an. Für die Fläche wird damit $A = \pi \cdot r^2 \approx 3{,}141592653590\ r^2$

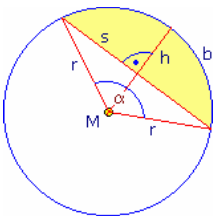
Dieses Verfahren zur Bestimmung des Kreisflächeninhalts findet sich schon bei den antiken Sumerern und wird auch sumerische Methode genannt.



Kreisbogen

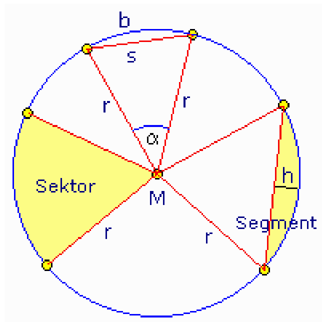
Ein Kreis ist der geometrischer Ort aller Punkte der Ebene, welche von einem festen Mittelpunkt konstanten Abstand haben.
Der Schwerpunkt eines Kreisbogens liegt auf der Winkelhalbierenden im Abstand rs/b vom Mittelpunkt
r … Radius, b … Bogenlänge, α … Zentriwinkel, s … Segmentsehne, m … der senkrechte Abstand der Sehne zum Mittelpunkt , h … Höhe des Segmentes ; in alten Lehrbüchern auch als "Pfeil des Abschnittes" bezeichnet

Kreisbogen $b / u = \alpha / (2\pi)$ α … Bogenmaß $\quad b = \pi\,\alpha\,r / 180°$ α … Gradmaß
$b = \pi\,\alpha\,s / (360° \sin \alpha/2)$ α … Gradmaß $\quad b = \pi\,\alpha\,m / (180° \cos \alpha/2)$ α … Gradmaß
$b = \pi\,\alpha\,h / (180° (1 - \cos \alpha/2))$ α … Gradmaß $\quad b = 2\,r \arccos (s / (2r))$
$b = 2\,r \arccos (m/r)$ $\quad b = 2\,r \arccos ((r-h)/r)$
$b = 2 \sqrt{s^2/4 + m^2} \arccos (m / \sqrt{s^2/4 + m^2})$
$b = 2\,(s^2 + 4h^2) / (8h) \cdot \arcsin ((4sh) / (s^2 + 4h^2))$
Zentriwinkel $\alpha = 2 \arcsin (s / (2r))$ $\quad \alpha = 2 \arccos (m / r)$
$\alpha = 2 \arccos ((r-h) / h)$
Sehnenlänge $s = 2 \sqrt{r^2 - m^2}$ $\quad s = 2 \sqrt{2r\cdot h - h^2}$
$s = 360°\, b \sin \alpha/2 / (\pi\,\alpha)$ α … Gradmaß $\quad s = 2r \sin \alpha/2$ α … Gradmaß
$s = 2m \tan \alpha/2$ α … Gradmaß $\quad s = 2h \cot \alpha/4$ α … Gradmaß
$s = 2r \cos (b/(2r))$
Radius $r = \sqrt{s^2/4 + m^2}$ $\quad r = (s^2 + 4h^2) / (8\,h)$
$r = 180°\, b / (\pi\,\alpha)$ α … Gradmaß $\quad r = s / (2 \sin \alpha/2)$
$r = m / \cos \alpha/2$ $\quad r = h / (1 - \cos \alpha/2)$
Mittelpunktabstand $m = \sqrt{r^2 - s^2/4}$ $\quad m = (s^2 - 4h^2) / (8h)$
$m = 180°\, b \cos (\alpha/2) / (\pi\,\alpha)$ α … Gradmaß $\quad m = s/2 \cot \alpha/2$
$m = r \cos \alpha/2$ $\quad m = (h \cos \alpha/2) / (1 - \cos \alpha/2)$
Abschnittshöhe $h = r - \sqrt{r^2 - s^2/4}$ $\quad h = \sqrt{s^2/4 + m^2} - m$
$h = s/2 \tan \alpha/4$ $\quad h = 180°\, b\,(1 - \cos \alpha/2) / (\pi\alpha)$ α … Gradmaß
$h = r\,(1 - \cos \alpha/2) = 2r \sin^2 \alpha/4$
$h = m\,(1 - \cos \alpha/2) / \cos \alpha/2 = 2m \sin^2 \alpha/4 / \cos \alpha/2$



Berechnungen zum Kreisbogen

Ist ein Kreis mit einem Radius r gegeben und in ihm ein Zentriwinkel α, so hat der zugehörige Kreisbogen die Länge
Kreisbogen $b = \alpha \cdot r$ Achtung! α im Bogenmaß
Für die Sehne s wird Sehne $s = 2\,r \sin(\alpha/2)$
Sind umgekehrt Bogen b und Sehne s gegeben, so erhält man für den gesuchten Radius r mit $s/2 = r \sin(b / (2r))$
eine analytisch nicht auflösbare Gleichung.
Über ein Iterationsverfahren können für r Näherungswerte ermittelt werden.
Auf der rechten Seite wird r für die einzugebenden s und b ermittelt.
Beachten Sie, dass der Bogen größer als die Sehne sein muss.



Kreissektor, Kreisausschnitt

Kreissektor bzw. Kreisausschnitt nennt man eine Teilfläche einer Kreisfläche, die von einem Kreisbogen und zwei Kreisradien begrenzt wird. Vereinfacht gesagt, sieht ein Kreissektor wie ein Tortenstück aus, das man von oben betrachtet. Der Schwerpunkt des Kreissektors liegt auf der Symmetrieachse im Abstand $2/3 \cdot rs/b$ vom Mittelpunkt.

Flächeninhalt $A = \pi\,\alpha/360°\, r^2 = 1/2\, b \cdot r = \pi\,\alpha\,s^2 / (1440° \sin^2 \alpha/2)$; α … Gradmaß
$A = \pi\,\alpha\,m^2 / (360° \cos^2 \alpha/2) = \pi\,\alpha\,h^2 / (360° \sin^2 \alpha/2) = r^2 \arcsin (s / (2r))$
$A = r^2 \arcsin (\sqrt{r^2 - m^2} / r) = r^2 \arcsin (\sqrt{2rh - h^2} / r)$
$A = (s^2 + 4h^2) / (64h^2) \arcsin (4sh / (s^2 + 4h^2))$
Bogenlänge $b = 2\,A / r = 2\,r \arcsin (s / (2r))$
Radius $r = 2\,A / b = \sqrt{360°\,A / (\pi\,\alpha)}$; α … Gradmaß
Sehnenlänge $s = \sin (\alpha/2) \cdot \sqrt{1440°\,A / (\pi\,\alpha)} = 2r \sin (b / (2r)) = 2r \sin (A/r^2)$
Mittelpunktabstand $m = \cos (\alpha/2) \sqrt{360°\,A / (\pi\,\alpha)} = \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 (A/r^2)}$
Abschnittshöhe $h = \sin (\alpha/2) \sqrt{360°\,A / (\pi\,\alpha)}$; α … Gradmaß
Zentriwinkel $\alpha = 360°\,A / (\pi\,r^2)$

Kreissegment (Kreisabschnitt)

Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse im Abstand $1/12\, s^3/A = 2/3\, r^3/A \sin^3(\alpha/2)$ vom Mittelpunkt. $A = 1/2\,[\,br - s(r-h)\,] = 1/2\,(br - sl) = r^2/2\,(\,\pi\alpha/180° - \sin \alpha)$

Mögliche, gegebene Stücke: Radius r, Zentriwinkel α, Kreisabschnitt A, Kreisbogen b, Abschnittshöhe h, Sehne s

Sehne s $\quad s = 2 r \sin(\alpha/2) = (2A - r b) / (h - r)$

$\quad = \sin \alpha/2 \sqrt{1440° A / (\pi\alpha - 180° \sin \alpha)}$; α im Gradmaß

Abschnittshöhe h, h < r $\quad h = 2 r [\sin(\alpha/4)]^2 = (2A - r b)/s - r$

$\quad h = \sin \alpha/2 \sqrt{360° A / (\pi\alpha - 180° \sin \alpha)}$; α im Gradmaß

Radius r $\quad r = s / [2 \sin(\alpha/2)] = h / [2 \sin(\alpha/4)^2] = \sqrt{2A / ((\pi \alpha/180) - \sin\alpha)} = (2A - s h) / (b - s)$

Kreisabschnitt A $\quad A = r^2/2 (\pi \alpha/180 - \sin \alpha) = 1/2 (r (b - s) + s h)$

$A = s^2 (\pi \alpha / (1440° \sin^2 \alpha/2) - 1/4 \cot \alpha/2)$; α Gradmaß

$A = m^2/2 (\pi \alpha - 180° \sin \alpha) / (180° \cos^2 \alpha/2)$; α Gradmaß

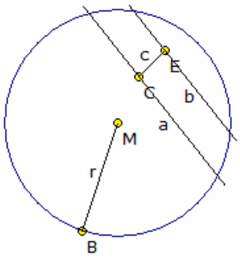
$A = h^2/2 (\pi \alpha - 180° \sin \alpha) / (180° \sin^2 \alpha/2)$; α Gradmaß

$A = r^2 \arcsin (s / (2r)) - s/4 \sqrt{4r^2 - s^2} = r^2 \arcsin (\sqrt{r^2 - m^2} / r) - m \sqrt{r^2 - m^2}$

Mittelpunktabstand $\quad m = \cos (\alpha/2) \sqrt{360° A/(\pi\alpha - 180° \sin \alpha)}$; α Gradmaß

Näherungsformeln $\quad A \approx 2/3\, s\, h$ mit Fehler < 0,1 % bei $0° < \alpha < 45°$

$\quad A \approx 2/3\, s\, h + h^3/ (2s)$ mit Fehler < 0,1 % bei $0° < \alpha < 150°$



Parallele Sehnen im Kreis

Wenn in einem Kreis zwei parallele Sehnen a und b und deren Abstand c gegeben sind, so gilt:

Radius des Kreises $\quad r = 1/(2c) \sqrt{(b^2/4 - a^2/4 - c^2)^2 + b^2c^2}$

Sehne a $\quad a = \sqrt{4c \sqrt{4r^2 - b^2} + b^2 - 4c^2}$

Sehne b $\quad b = \sqrt{4c \sqrt{4r^2 - a^2} + a^2 - 4c^2}$

Abstand c $\quad c = 1/2 \sqrt{8r^2 - b^2 - a^2 + 2 \sqrt{a^2b^2 - 4r^2 (b^2 + a^2 - 4r^2)}}$

Kreisbogenstrahlensatz

Der Strahlensatz an geschnittenen Parallelen kann auf Kreisbögen erweitert werden.

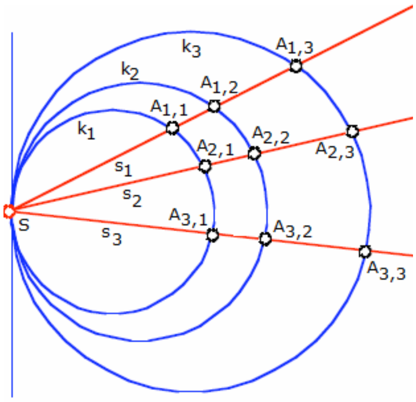
Die Kreise $\{k_j\}$ haben in S eine gemeinsame Tangente. Mit Streckungen von S aus kann für die Strecken bewiesen werden:

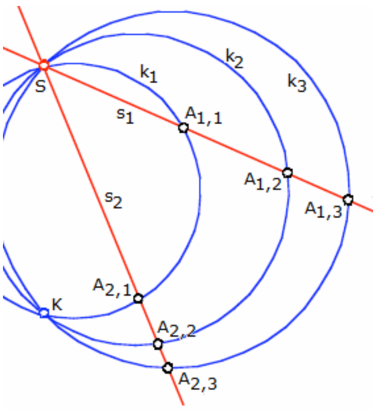
$A_{1,1}A_{1,2}/A_{1,2}A_{1,3} = A_{2,1}A_{2,2}/A_{2,2}A_{2,3} = A_{3,1}A_{3,2}/A_{3,2}A_{3,3}$

$A_{1,1}A_{2,1}/A_{2,1}A_{3,1} = A_{1,2}A_{2,2}/A_{2,2}A_{3,2} = A_{1,3}A_{2,3}/A_{2,3}A_{3,3}$

Ebenso gilt, wobei (PQ) die Länge des Bogens PQ bedeutet:

$(A_{1,1}A_{2,1})/(A_{2,1}A_{3,1}) = (A_{1,2}A_{2,2})/(A_{2,2}A_{3,2}) = (A_{1,3}A_{2,3})/(A_{2,3}A_{3,3})$





Kreisbüschelstrahlensatz

Wird ein Kreisbüschel mit drei Kreisen, die durch zwei Punkte S und K verlaufen, von zwei Strahlen geschnitten, so gilt für die Strecken

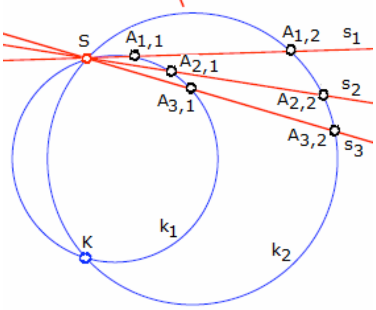
$A_{1,1}A_{1,2} / A_{1,2}A_{1,3} = A_{2,1}A_{2,2} / A_{2,2}A_{2,3}$

Wird ein Kreisbüschel mit zwei Kreisen, die durch zwei Punkte S und K verlaufen, von drei Strahlen geschnitten, so gilt für die Strecken

$A_{1,1}A_{2,1} / A_{2,1}A_{3,1} = A_{1,2}A_{2,2} / A_{2,2}A_{3,2}$

und die Kreisbögen

$(A_{1,1}A_{1,2}) / (A_{1,2}A_{1,3}) = (A_{2,1}A_{2,2}) / (A_{2,2}A_{2,3})$



Kreisringsektor

Mittlere Bogenlänge

$b_m = (b_i + b_a) / 2 = (R + r)/2\, \phi$

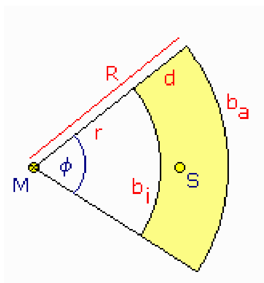
Fläche

$A = \phi/2 (R^2 - r^2) = b_m * d$

Umfang

$u = 2 d + b_i + b_a = 2 R - 2 r + (R + r) * \phi$

Ringbreite $\quad d = R - r$



Der Schwerpunkt S hat den Abstand x vom Mittelpunkt auf der Symmetrieachse

$x = 4 \sin(\phi/2) / (3\phi) * (R^3 - r^3) / (R^2 - r^2)$

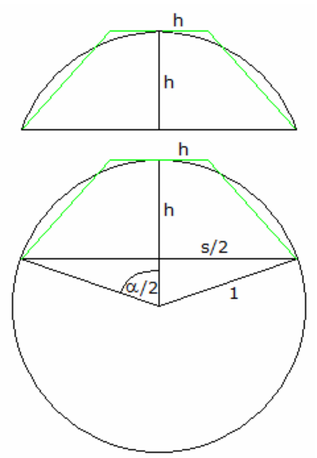
$x = 4 \sin(\phi/2) / (3\phi) * (R^2 + R r + r^2) / (R + r)$

Chinesische Trapezregel für Kreissegmente

Der chinesische Mathematiker Liu Hui gab in einem Kommentar zu dem Werk "Mathematik in neun Büchern" eine Methode an, mit der man den Flächeninhalt eines Kreissegments näherungsweise durch den Flächeninhalt eines Trapezes berechnen kann.

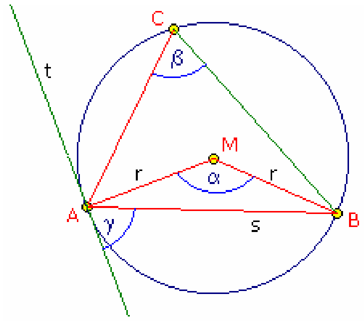
Segmentfläche ≈ Höhe · (Höhe + Sehne)/2

Segment und Trapez haben die gleiche Höhe, die Basis des Trapezes ist die Sehne des Segmentes, und die Parallelseite und die Höhe des Trapezes sind gleich lang.



Diese Näherung ist nicht besonders gut. Für den Fall, dass das Segment ein Halbkreis mit dem Radius r ist, gibt Liu Hui die Trapezfläche mit $3/2 \cdot r^2$ an. Nach Liu Hui wird die Approximation der Segmentfläche durch die Trapezfläche für kleinere Segmente immer schlechter.

Führt man den Winkel α zur Beschreibung des Segmentes ein und betrachtet einen Einheitskreis, so wird
Trapezfläche $A = 1/2\ (1 - \cos \alpha/2)(1 - \cos \alpha/2 + 2 \sin \alpha/2)$
Segmentfläche $A = \alpha/2 - \sin \alpha/2 \cos \alpha/2$
siehe http://www.fh-friedberg.de/users/boergens/problem/problem057loe.htm



Winkel am Kreis

Peripheriewinkelsatz
(Mittelpunktswinkelsatz) $\alpha = 2\beta$
Jeder Umfangswinkel (Peripheriewinkel) über einem Kreisbogen ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel (Zentriwinkel) über demselben Bogen.
Peripheriewinkel über der gleichen Sehne sind gleich groß.
Peripheriewinkel über entgegengesetzten Seiten einer Sehne ergänzen sich zu 180°.

Sehnentangentenwinkel $\gamma = \beta$
Der Sehnentangentenwinkel γ ist gleich dem zur Sehne gehörenden Peripheriewinkel β in dem Kreisabschnitt, der γ gegenüberliegt.

Thales - Satz

Der Peripheriewinkel über dem Durchmesser ist ein rechter Winkel. α … Zentriwinkel ; β … Peripheriewinkel
siehe auch: http://did.mat.uni-bayreuth.de/~wn/thalessatz.html

Fasskreisbogen zum Winkel α

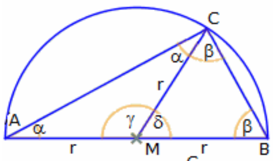
Kreisbogen, auf welchem die Scheitel gleich großer Umfangswinkel über einer Sehne a liegen

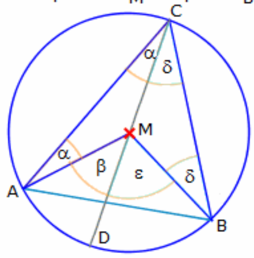
Zentrale zweier Kreise

Gerade durch die Mittelpunkte beider Kreise

Chordale zweier Kreise

Gerade durch die (evtl. existierenden) Schnittpunkte zweier Kreise





Zentri-Peripheriewinkelsatz

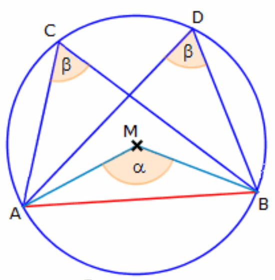
Zentri-Peripheriewinkelsatz: Jeder Zentriwinkel über einem Kreisbogen ist doppelt so groß wie der dazugehörige Peripheriewinkel.

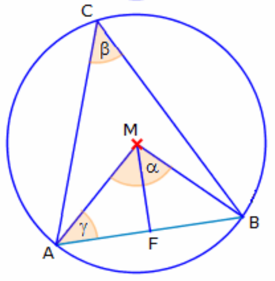
Nachweis: Zum Beweis führt man eine Fallunterscheidung durch. Für den Mittelpunkt des Kreises gibt es drei Möglichkeiten im Verhältnis zum Dreieck mit dem Peripheriwinkel:
1) er liegt auf einer Seite
2) er liegt innerhalb des Dreiecks
3) er liegt außerhalb des Dreiecks

Fall 1: (obere Abbildung) $\angle AMD = \delta = 180°$ ist der Zentriwinkel, $\angle ACB = \alpha+\beta$ der Peripheriwinkel.
Es seien A und B Punkte auf dem Durchmesser eines Kreises mit dem Radius r. C liege auf dem Kreis. Man zieht CM und erhält zwei Teildreiecke ΔAMC und ΔBCM. Offensichtlich sind die Winkel α und β gleich groß. Nach dem Innenwinkelsatz gilt im Dreieck ΔAMC
$2\alpha + \gamma = 180°$, d.h. $\gamma = 180° - 2\alpha$
δ und γ ergänzen sich zu 180°, d.h. $\delta = 2\alpha$.
Im Dreieck ΔBCM gilt somit $2\alpha + 2\beta = 180°$, d.h. $\beta = 90° - \alpha$. Damit ist aber, unabhängig vom konkreten Wert von α, die Summe $\alpha+\beta$ immer 90° groß.

Fall 2: (untere Abbildung)
Durch eine ähnliche Schlußweise wie in Fall 1 erhälten man
$\angle AMC + 2\alpha = 180°$, $\angle AMC + \beta = 180°$
und damit $\beta = 2\alpha$, Analog folgt $\varepsilon = 2\delta$ und mit der Summe das Gewünschte.

Fall 3: Dieser Fall ist rechenaufwendiger aber anlog zu 1) und 2). Hier folgt aus der Gleichschenkligkeit entsprechender Dreiecke die Gleichheit entsprechender Winkel.





Peripheriewinkelsatz-Beweis

Peripheriwinkelsatz: Alle Peripheriwinkel über dem gleichen Kreisbogen sind gleichgroß.

Nachweis: Unter Zuhilfenahme des Zentri-Peripheriewinkelsatzes ergibt sich die Behauptung sofort, da die Winkel ∠ACB und ∠ADB Peripheriwinkel zum gleichen Zentriwinkel α sind.
Zu Berechnung der Peripheriewinkel nutzt man $\sin \beta = AB / (2r)$
wobei r der Radius des Kreises ist.

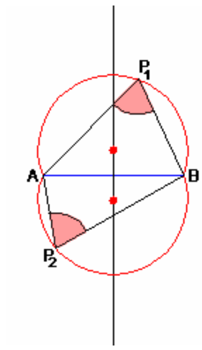
Nachweis: Es sei β der Peripheriwinkel und α der zugehörige Zentriwinkel. Nach dem Zentri-Peripheriewinkelsatz gilt: $\alpha = 2\beta$
Der Punkt F ist der Lotfußpunkt von M auf AB. Wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ΔABM halbiert das Lot den Winkel α. Dann gilt nach dem Innenwinkelsatz $\alpha/2 + \gamma = 90°$, also $\beta + \gamma = 90°$ und $\gamma = 90° - \beta$
Der Punkt F halbiert AB, d.h.

$\cos \gamma = AB/2 / AM$, d.h.

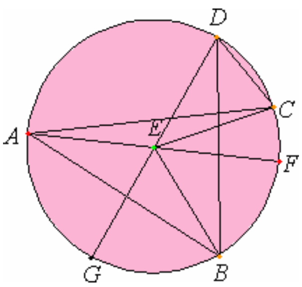
$\cos (90° - \beta) = \sin \beta = AB / (2r)$

und somit die Behauptung.

Fasskreisbogen



Der Peripheriwinkelsatz am Kreis lässt sich oft für geometrische Konstruktionen verwenden.
In vielen Fällen sucht man die Menge, den geometrischen Ort, aller Punkte P, von denen aus eine gegebene Strecke AB unter einem bestimmten Winkel erscheint.
Die gesuchte Punktmenge besteht im Allgemeinen aus zwei Kreisbögen, den so genannten Fasskreisbögen.



Peripheriewinkelsatz bei Euklid

"Elemente" Buch III: § 20 (L. 18):

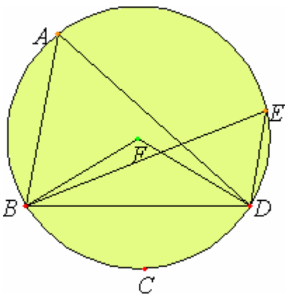
Im Kreise ist der Mittelpunktswinkel doppelt so groß wie der Umfangswinkel, wenn die Winkel über demselben Bogen stehen.

Man habe den Kreis ABC und die Winkel BEC an seinem Mittelpunkt, BAC am Umfang; diese mögen über demselben Bogen stehen. Ich behaupte, dass ∠ BEC = 2 BAC.
Man ziehe AE und durch nach F. Da dann EA = EB, so ist auch ∠ EAB = EBA (I; 5); also sind ∠ EAB + EBA = 2 EAB. Aber BEF = EAB + EBA (I, 32); also ist auch BEF = 2 EAB. Aus demselben Grunde ist auch FEC = 2 EAC. Also ist der ganze Winkel BEC doppelt so groß wie der ganze Winkel BAC. Man ziehe wieder eine gebrochene Linie, es entstehe ein anderer Winkel BDC. Dann ziehe man DE und durch nach G. Dann lässt sich ähnlich zeigen, dass ∠ GEC = 2 EDC und hierin GEB = 2 EDB; also ist auch der Restwinkel BEC = 2 BDC.

Peripheriewinkelsatz bei Euklid, 2.Teil

Euklids "Elemente" Buch III: § 21 (L. 19):

Im Kreise sind die Winkel in demselben Abschnitt einander gleich.

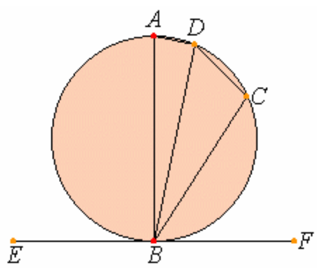


Man habe den Kreis ABCD und in demselben Abschnitt BAED die Winkel BAD, BED (III, Definition 8). Ich behaupte, dass ∠ BAD = ∠ BED. Man verschaffe sich den Mittelpunkt des Kreises ABCD, er sei F, und ziehe BF, FD. Da dann der Winkel BFD am Mittelpunkt liegt, BAD am Unfang, und sie über demselben Bogen BCD stehen, so ist ∠ BFD = 2 BAD (III, 20). Aus demselben Grunde ist auch BFD = 2 BED; also ist BAD = BED.

Sehnentangentenwinkelsatz bei Euklid

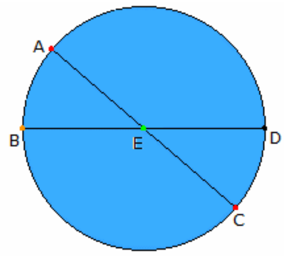
Euklids "Elemente" Buch III: § 32 (L. 28):

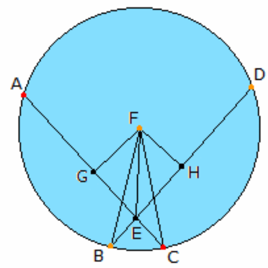
Zieht man an einen Kreis eine Tangente und vom Berührungspunkt aus eine den Kreis schneidende gerade Linie zum Kreis durch, so müssen die Winkel, die diese mit der Tangente bildet, den Winkeln in den entgegengesetzten Kreisabschnitten gleich sein.



Man ziehe an den Kreis ABCD eine im Punkte B berührende gerade Linie EF und vom Punkte B aus eine den Kreis ABCD schneidende gerade Linie BD zu

ihm durch. Ich behaupte, dass die Winkel, die BD mit der Tangente EF bildet, den Winkeln in den entgegengesetzten Kreisabschnitten gleich sein müssen, d.h. dass $\angle$ FBD einem im Abschnitt BAD zu errichtenden Winkel gleich ist und $\angle$ EBD einem im Abschnitt DCB zu errichtenden Winkel gleich.
Man ziehe nämlich von B aus BA $\perp$ EF, wähle auf dem Bogen BC Punkte C beliebig und ziehe AD, DC, CB.
Da eine gerade Linie EF den Kreis ABCD in B berührt und man BA vom Berührungspunkt aus rechtwinklig zur Tangente gezogen hat, liegt der Mittelpunkt des Kreises ABCD auf BA (III, 19). BA ist also Durchmesser des Kreises ABCD, also $\angle$ ADB als Winkel im Halbkreis ein Rechter (III, 31); also sind die übrigen Winkel BAD + ABC = 1 R. (I, 32). Aber auch ABF ist ein Rechter, also ABF = BAD + ABD (Postulat 4).
Man nehme ABD beiderseits weg; dann ist der Restwinkel DBF dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt, nämlich BAD gleich. Da ferner ABCD ein Viereck im Kreise ist, sind in ihm gegenüberliegende Winkel zusammen = 2 R. (III, 22). Aber auch DBF + DBE = 2 R. (I, 13); also sind DBF + DBE = BAD + BCD. Hiervon ist, wie oben bewiesen, BAD = DBF; also ist der Restwinkel DBE = DCB, dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt DCB – S.





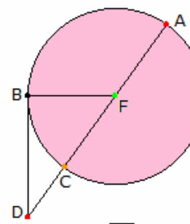
Sehnensatz bei Euklid

Euklids "Elemente" Buch III: § 35 (L. 29):
Schneiden im Kreise zwei Sehnen einander, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen gleich.

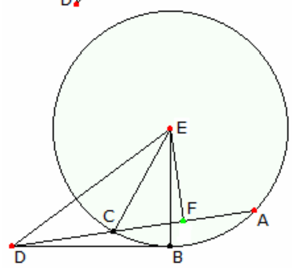
Im Kreise ABCD mögen nämlich zwei Sehnen AC, BD einander schneiden im Punkte E. Ich behaupte, dass AE · EC = DE · EB.
Gehen hier AC und BD durch den Mittelpunkt, so dass E der Mittelpunkt des Kreises ABCD ist, so ist klar, dass, da AE, EC, DE, EB gleich sind, auch AE · EC = DE · EB.
AC und DB mögen nun nicht durch den Mittelpunkt gehen.

Dann verschaffe man sich den Mittelpunkt von ABCD, er sei F, fälle von F auf die geraden Linien AC, DB die Lote FG, FH und ziehe FB, FC, FE.
Da eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie GF eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehne AC rechtwinklig schneidet, halbiert sie sie auch (III, 3); also ist AG = GC. Da man hier die Strecke AC sowohl in gleiche Abschnitte geteilt hat in G, als auch in ungleiche in E, so ist AE · EC + EG² = GC² (II, 5).
Man füge GF² beiderseits hinzu; dann ist AE · EC + GE² + GF² = CG² + GF².
Aber EG² + GF² = FE² und CG² + GF² = FC² (I, 47); also ist AE · EC + FE² = FC². Aber FC = FB; also ist AE · EC + EF² = FB². Aus demselben Grunde ist auch DE · EB + FE² = FB². Wie oben bewiesen, ist aber AE · EC + FE² = FB², also ist AE · EC + FE² = DE · EB + FE². Man nehme FE² beiderseits weg; dann ist der Rest AE · EC = DE · EB - S.

Tangentensatz bei Euklid

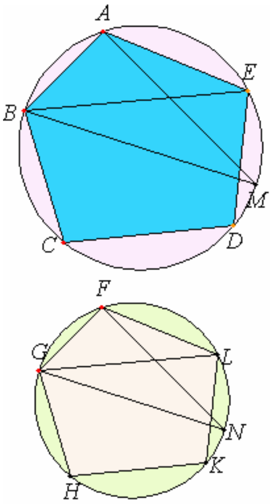


Euklids "Elemente" Buch III: § 36 (L. 30):
Wählt man außerhalb eines Kreises einen Punkt und zieht von ihm aus zum Kreis zwei Strecken, von denen die eine den Kreis schneidet, die andere ihn berührt, so muss das Rechteck aus der ganzen schneidenden Strecke und dem außen zwischen dem Punkt und dem erhabenen Bogen abgegrenzten Stück dem Quadrat über der Tangente gleich sein.



Man wähle außerhalb des Kreises ABC einen Punkt D und ziehe von D aus zum Kreis ABC zwei Strecken DCA, DB; DCA schneide den Kreis ABC, BD berühre ihn. Ich behaupte, AD · DC = DB²
DCA geht dann entweder durch den Mittelpunkt oder tut es nicht. Zunächst gehe es durch den Mittelpunkt; F sei der Mittelpunkt des Kreises ABC; man ziehe FB. Dann ist FBC ein Rechter (III, 18). Da die Strecke AC in F halbiert ist und CD ihr angesetzt, so ist AD · DC + FC² = FD² (II, 6). Aber FC = FB; also ist AD · DC + FB² = FD². Aber FD² = FB² + BD² (I, 47); also ist AD · DC + FB² = FB² + BD². Man nehme FB² beiderseits weg; dann ist der Rest AD · DC dem Quadrat über der Tangente DB gleich.
Zweitens gehe DCA nicht durch den Mittelpunkt des Kreises ABC; dann verschaffe man sich den Mittelpunkt E, fälle von E auf AC das Lot EF und ziehe EB, EC, ED.
Dann ist EBD ein Rechter (III, 18). Da hier eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie EF eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehne AC rechtwinklig schneidet, halbiert sie sie auch (III, 3); also ist AF = FC.
Und da die Strecke AC im Punkte F halbiert ist und CD ihr angesetzt, so ist AD · DC + FC² = FD² (II, 6).
Man füge FE² beiderseits hinzu; dann ist AD · DC + CF² + FE² = FD² + FE². Aber CF² + FE² = EC², weil EFC ein Rechter (I, 47); und DF² + FE² = ED² (I, 47); also ist AD · DC + EC² = ED². Aber EC = EB; also ist AD · DC + EB² = ED². Und ED² = EB² + BD², weil $\angle$ EBD ein Rechter (I, 47); also ist AD · DC + EB² = EB² + BD². Man nehme EB² beiderseits weg; dann ist der Rest AD · DC = DB² - S.

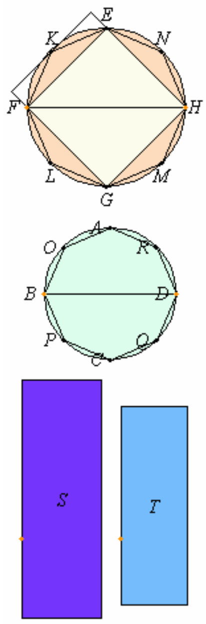
Kreissätze bei Euklid



Euklids "Elemente" Buch XIII: § 1 (L. 1):
Ähnliche Vielecke in Kreisen verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.

Man habe die Kreise ABC, FGH und in ihnen ähnliche Vielecke ABCDE, FGHKL; BM, GN seien Durchmesser der Kreise. Ich behaupte, dass $BM^2 : GN^2$ = Vieleck ABCDE : Vieleck FGHKL.
Man ziehe BE, AM, GL, FN.
Da Vieleck ABCDE ~ Vieleck FGHKL, ist $\angle$ BAE = GFL und BA : AE = GF : FL (VI, Definition 1). Mithin sind BAE, GFL zwei Dreiecke, in denen ein Winkel einem Winkel gleich ist, nämlich $\angle$ BAE = GFL, und die Seiten um die gleichen Winkel in Proportion stehen; also ist $\triangle$ ABE mit $\triangle$ FGL winkelgleich (VI, 6).
Also ist $\angle$ AEB = $\angle$ FLG. Andererseits ist $\angle$ AEB = AMB, denn sie stehen über demselben Bogen (III, 21); und $\angle$ FLG = FNG. Also ist $\angle$ AMB = FNG. Ferner sind die rechten Winkel (III, 31) BAM = GFN; also auch der letzte Winkel dem letzten gleich (I, 32). $\triangle$ ABM ist also mit $\triangle$ FGN winkelgleich. Also stehen in Proportion BM : GN = BA : GF (VI, 4). Nun ist $(BM : GN)^2 = BM^2 : GN^2$ und $(BA : GF)^2$ = Vieleck ABCDE : Vieleck FGHKL (VI, 20). Also ist $BM^2 : GN^2$ = Vieleck ABCDE : Vieleck FGHKL (V, 22, 11) - S.

Kreissätze bei Euklid (2)



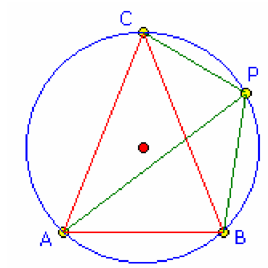
Euklids "Elemente" Buch XIII: § 2 (L. 2):
Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.

Man habe die Kreise ABCD, EFGH; BD, FH seien Durchmesser derselben; ich behaupte, dass Kreis ABCD : Kreis EFGH = $BD^2 : FH^2$.
Wäre nämlich Kreis ABCD : EFGH nicht = $BD^2 : FH^2$, dann müsste sein $BD^2 : FH^2$ = Kreis ABCD : einem Flächenstück, das entweder < oder > Kreis EFGH wäre.
Zunächst verhalte es sich so zu einem kleineren Flächenstück S. In den Kreis EFGH beschreibe man dann das Quadrat EFGH ein (IV, 6); hier ist das einbeschriebene Quadrat > ½ Kreis EFGH. Wenn man nämlich durch die Punkte E, F, G, H Kreistangenten zieht (III, 16 Zusatz), dann ist das Quadrat EFGH die Hälfte des dem Kreise umbeschriebenen Quadrats (I, 41); der Kreis ist aber < das umbeschriebene Quadrat (I, Axiom 8), so dass das einbeschriebene Quadrat EFGH > ½ Kreis EFGH.
Nun halbiere man die Bogen EF, FG, GH, HE in den Punkten K, L, M, N (III, 30) und ziehe EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE. Auch jedes der Dreiecke EKF, FLG, GMH, HNE ist dann größer als die Hälfte des zugehörigen Kreisabschnitts. Denn wenn man durch die Punkte K, L, M, N Kreistangenten zieht und die Parallelogramme über den Strecken EF, FG, GH, HE vervollständigt, muss jedes der Dreiecke EKF, FLG, GMH, HNE die Hälfte des zugehörigen Parallelogramms sein; der zugehörige Abschnitt ist aber < das Parallelogramm, so dass jedes der Dreiecke EKF, FLG, GMH, HNE > ½ zugehöriger Kreisabschnitt.

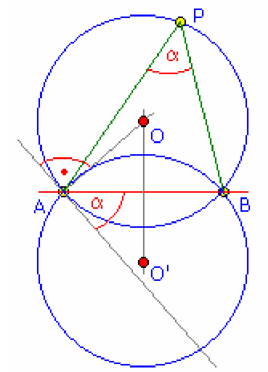
Mithin muss man, wenn man die gebliebenen Bogen halbiert, die Strecken zieht und dies immer wiederholt, schließlich Kreisabschnitte übrig behalten, die zusammen < Kreis EFGH – Flächen Stück S sind.
Es wurde nämlich im ersten Lehrsatz des zehnten Buches gezeigt, dass: wenn man bei Vorliegen zweier ungleicher gleichartiger Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte wegnimmt und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und dies immer wiederholt, dann einmal ein Größe übrigbleiben muss, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist (X, 1).
Dies geschehe, und die übriggebliebenen Abschnitte des Kreises EFGH über EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE seien zusammen < Kreis EFGH – Flächenstück S.
Das Restvieleck EKFLGMHN wäre also > Flächenstück S. Auch in den Kreis beschreibe man ein dem Vieleck EKFLGMHN ähnliches Vieleck AOBPCQDR ein; dann ist $BD^2 : FH^2$ = Vieleck AOBPCQDR : Vieleck EKFLGMHN (V, 11); und, vertauscht. Kreis ABCD : Vieleck in ihm = Flächenstück S : Vieleck EKFLGMHN (V, Definition 5).
Dabei sollte es kleiner sein; dies ist unmöglich. Also ist $BD^2 : FH^2$ nicht = Kreis ABCD : einem Flächenstück < EFGH. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch $FH^2 : BD^2$ nicht = Kreis EFGH : einem Flächenstück < Kreis ABCD.

Ich behaupte weiter, dass $BD^2 : FH^2$ auch nicht = Kreis ABCD : einem Flächenstück > Kreis EFGH. Wenn nämlich möglich, verhalte er sich so zu einem größeren Flächenstück S. Dann wäre umgekehrt (V, Definition 13), $FH^2 : DB^2$ = Flächenstück S : Kreis ABCD.
Nun wäre aber Flächenstück S : Kreis ABCD = Kreis EFGH : einem Flächenstück < Kreis ABCD (V, 14); also wäre auch $FH^2 : BD^2$ = Kreis EFGH : einem Flächenstück < Kreis ABCD (V, 11); hiervon haben wir die Unmöglichkeit oben nachgewiesen.

Also ist BD² : FH² nicht = Kreis ABCD : einem Flächenstück > Kreis EFGH. Wie oben bewiesen, verhält er soch so auch nicht zu einem kleineren Flächenstück; also ist BD² : FH² = Kreis ABCD : Kreis EFGH – S.

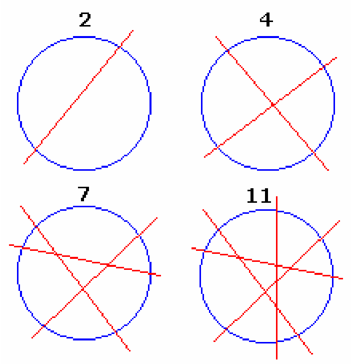


Honsberger-Satz
Ist das gleichseitige Dreieck A1A2A3 in einen Kreis eingeschrieben, so gilt für jeden Punkt P auf dem Kreis: Die Summe der zwei kürzeren Sehnen von P zu den Dreieckspunkten ist gleich der langen Sehne. Im Bild: PA2 + PA3 = PA1
Verallgemeinerung:
Ist ein regelmäßiges 3n-Eck in einen Kreis eingeschrieben und P ein Punkt auf dem Kreis, so ist die Summe der 2n kurzen Sehnen gleich der Summe der 1n längeren Sehnen.



Konstanter Sehwinkel
Aufgabe: Gesucht sind alle Punkte der Ebene von denen aus eine Strecke AB unter konstantem Sehwinkel erscheint.
Lösung: Ist dieser Sehwinkel α, so können die Punkte über den Sehnentangentenwinkel - Peripheriwinkelsatz gefunden werden.
1. Antragen des Winkels bei A und Konstruktion der Senkrechten zum freien Schenkel
2. Konstruktion der Mittelsenkrechten zu AB, Schnittpunkt ist Mittelpunkt eines Kreisbogens auf dessen Peripherie die gesuchten Punkte liegen
3. Zu dem Kreisbogen existiert ein zweiter, an AB gespiegelter Kreisbogen

Kreiszerlegung, Kreisteilung
Problem: In wieviel Teile t kann ein Kreis maximal bei n Schnitten zerlegt werden ?
Aus t(1) = 2, t(2) = 2+t(1) und t(n) = n+t(n-1) ergibt sich t(n) = (n² + n + 2) /2

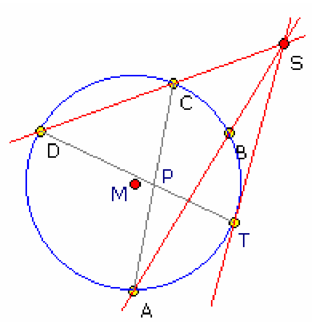


Problem: In wieviel Teile t wird eine Kreisfläche zerlegt, wenn n Punkte seiner Peripherie durch Sehnen mit jedem anderen Punkt verbunden sind ?

$$t(n) = (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24) / 24$$

$$t(n) = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n-1}{2}$$

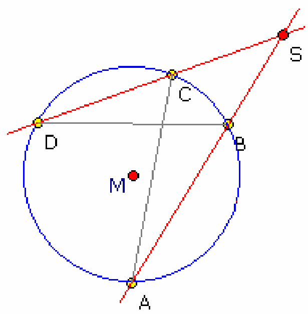
Die ersten Werte sind 1, 2, 4, 8, 16, aber(!) t(6) = 31 und t(7) = 57, … und für weitere n = 8, 9, … ergeben sich t(n) = 99, 163, 256, 386, 562, 794, 1093, …
Diese Fragestellung wird auch Mosers Kreisproblem genannt.



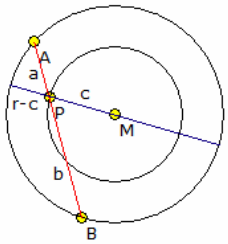
Tangentenbeziehungen
Tangente und Berührungsradius sind senkrecht zueinander

Sehnensatz PB * PC = PA * PD
... das Produkt aus den Abschnitten von zwei sich schneidenden Sehnen ist gleich groß.
Sekantensatz SA * SB = SC * SD
... das Produkt aus den Längen von zwei Sekanten und ihren äußeren Abschnitten ist konstant.
Tangentensatz SA * SB = ST²
... das Produkt aus der Länge einer Sekante und ihrem äußeren Abschnitt ist gleich dem Quadrat der Tangentenlänge
Kreistangenten in zwei senkrecht zueinander stehenden Sehnen bilden ein Sehnen-Tangenten-Viereck

Nachweis des Sekantensatzes:
Die Winkel ∠ BDS und ∠ CAS sind als Peripheriewinkel über dem gleichen Kreisbogen gleich groß. Gleiches gilt für die Winkel ∠ DCA und ∠ DBA. Diese beiden Winkel sind Nebenwinkel bei C und B, so dass auch die Winkel ∠ ACS und ∠ DBS gleich groß sind. Damit haben die Dreiecke ACS und BSD zwei kongruente Winkel und sind somit ähnlich. Für die Streckenverhältnisse wird
CS / BS = AS / DS
Nach dem Umstellen wird AS * BS = CS * DS. w.z.b.w.



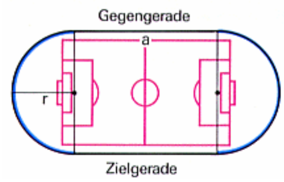
Satz von Holditch
1858 fand der englische Mathematiker Hammond Holditch den Satz:
Wenn eine Sehne der konstanten Länge a + b in einer geschlossenen Kurve von einem Punkt P in zwei Strecken der Längen a, b geteilt wird, hat die Differenz der von der Kurve und der Ortslinie des Teilpunktss P erzeugten Fläche den Inhalt A = π·a·b.



Wendet man diesen Satz auf einen Kreis an, ergibt sich als Spezialfall:
In einem Kreis k_1 vom Radius r sei eine Sehne eingezeichnet, die durch einen Punkt P in zwei Teilstrecken der Länge a und b geteilt wird.
Wenn die Sehne einmal im Kreis herumwandert, beschreibt der Teilungspunkt P einen inneren Kreis k_2 als Ortslinie.
Dann wird nach dem Sehnensatz $\quad a \cdot b = (r + c) \cdot (r - c) = r^2 - c^2$
und nach Multiplikation mit π $\quad \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot c^2$
und für den Flächeninhalt des Kreisringes zwischen k_1 und k_2

$$A = \pi \cdot a \cdot b$$

Kreisberechnung-Aufgaben

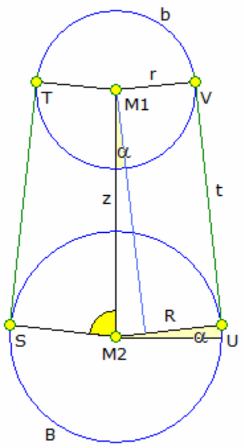


Aufgabe 1:
Die 400m-Lauflinie einer Laufbahn besteht aus zwei Halbkreisbögen und zwei Geradenstücken. Die Innenbahn verläuft in einem Abstand von 30 cm von der Berandung. Welchen Radius müssen die Halbkreisbögen haben, wenn die Geradenstücke exakt a = 100 m lang sind?
Die Laufbahn ist in 1,22 m breite Bahnen eingeteilt. Wie viel Meter ist die 2.Bahn länger als die Innenbahn, wenn auch hier ein Abstand von 30 cm zur Innenbahn eingerechnet wird?
Lösung:
Der Umfang der zwei Halbkreisbögen ist 200 m, da die Geradenstücke je 100 m sind, d.h.

$$r = U/(2\pi) = 31{,}83 \text{ m}$$

Da die Laufbahn 30 cm von der Innenkante entfernt verläuft, beträgt der Radius der Innenbahn 31,53 m.
Für die Länge der zweiten Bahn wird s = 200 m + 2π (1,22 m + 31,83 m) = 407,66 m, d.h. sie ist um 7,66 m länger als die Innenbahn.

Aufgabe 2:
Welchen Weg legt die Spitze eines 1,5 cm langen Sekundenzeigers einer Armbanduhr in 1 Jahr zurück?
Lösung: Die Zeigerspitze bewegt sich auf einer Kreisbahn, die im Verlauf eines Jahres 365·24·60 mal durchlaufen wird. $\quad s = 2\pi\, r\, 365 \cdot 24 \cdot 60 = 49{,}5$ km



Riemengetriebe

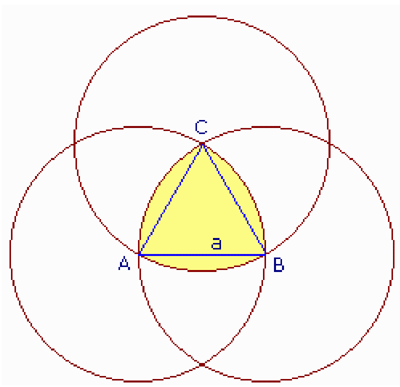
Der offene Riementrieb ist ein Getriebe, bei dem ein Triebriemen eine Kraft von einem auf ein anderes Rad überträgt.
Die Riemenlänge l setzt sich damit aus einem großen Kreisbogen B des einen Rades (Kreises), einem kleinen Kreisbogen b und zwei Tangentenstücken t zusammen.
Sind R der Radius des großen Kreises, r der Radius des kleinen Kreises und z der Abstand der beiden Kreismittelpunkte, so wird für den in der Abbildung gezeigten Winkel α $\quad \sin \alpha = (R - r) / z$
und für die Tangentenstücke $\quad t/z = \cos \alpha$, d.h. $t = z \cos \alpha$
Der Zentriwinkel des Bogens B ist 180° + 2α, der Zentriwinkel des Bogens b dagegen 180° - 2α. Damit gilt für die Bögen

$$B = R\,(\pi + 2\alpha) \qquad b = r\,(\pi - 2\alpha)$$

und somit für die Riemenlänge

$$l = R\,(\pi + 2\alpha) + r\,(\pi - 2\alpha) + 2z \cos \alpha$$
$$l = R\,(\pi + 2 \arcsin (R-r)/z) + r\,(\pi - 2 \arcsin (R-r)/z) + 2z \cos \arcsin (R-r)/z$$
$$l = \pi\,(R+r) + 2 \sqrt{z^2 - (R-r)^2} + (2R - 2r) \arcsin (R-r)/z$$

Kreissektor, Beispiel

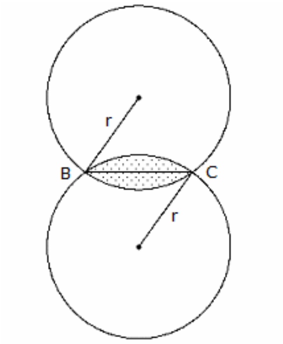


Der Flächeninhalt der in der Abbildung hervorgehobenen Figur soll berechnet werden. Die Abstände der Eckpunkte A, B, C sind gleich a. Die Verbindungen der Eckpunkte sind Kreisbögen mit dem Radius a.
Lösung:
Die Mittelpunkte der Kreisbögen liegen jeweils in den gegenüberliegenden Punkten. Die Fläche kann durch Übereinanderdecken von drei Kreissektoren mit dem Radius a und dem Zentriwinkel von 60° erzeugt werden.
Das gleichseitige Dreieck Δ ABC wird dabei dreifach bedeckt. Der gesuchte Flächeninhalt ergibt sich also aus der Summe der Flächeninhalte der drei Kreissektoren minus dem doppelten Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks.
Der Flächeninhalt eines Kreissektors mit einem Zentriwinkel von 60° beträgt $\pi/6\ a^2$. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a ist $a^2/4\ \sqrt{3}$. Und somit insgesamt

$$A = 3 * \pi/6\ a^2 - 2\ a^2/4\ \sqrt{3} = a^2/2\ (\pi - \sqrt{3})$$

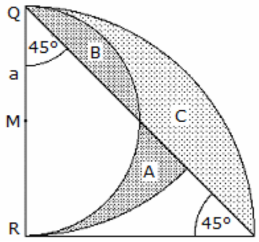
Übungsaufgaben zum Kreis

Aufgabe 1

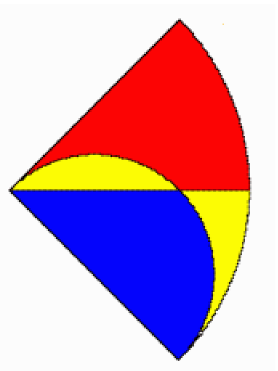


Die schattierte Fläche wird von zwei Kreisen mit gleichem Radius r eingeschlossen. Dabei gilt für die gemeinsame Sehne: BC = r. Berechnen Sie für r = 1,00 cm den Inhalt A der schattierten Fläche!
Lösung: A = 0,181… cm²

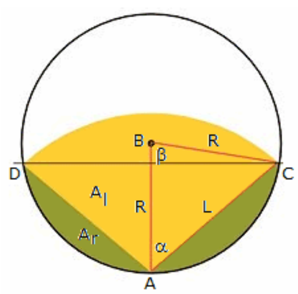
Aufgabe 2
An den Orten B und C mit BC = 100 km ist je ein Radiosender aufgestellt. Beide Sender haben eine Reichweite von a = 100 km. G ist die Menge aller Punkte, an denen beide Sender gleichzeitig empfangen werden können.
Berechnen Sie den Flächeninhalt A von G. Drücken Sie A zuerst allgemein durch a aus und setzen Sie dann Zahlen ein (drei geltende Ziffern)!
Lösung: $\phi = 120°$, $A = 2(A_{Sektor} - A_{Dreieck}) = 2\ a^2\ (\pi/3 - 1/4\ \sqrt{3}) = 12300\ km^2$



Aufgabe 3
Die Flächen A, B und C werden von den Seiten des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks PQR sowie von den Kreisbögen um die Ecken Q und R und den Seitenmittelpunkt M begrenzt.
(a) Berechnen Sie die Flächeninhalte von B und C in Abhängigkeit von a = 1/2 QR.
(b) Zeigen Sie, dass die Flächeninhalte von A und B gleich sind.
Lösung: Es ist $B = 1/2\ a^2\ (\pi/2 - 1)$. C hat die vierfache Fläche vermindert um die von B, ist also dreimal so groß. A und B sind gleich groß, da der Halbkreis um M und der Viertelkreis um Q denselben Flächeninhalt haben.

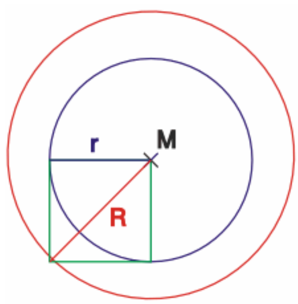


Kreisfläche, Anwendungsaufgabe
Mit Kühnheit und Verstand
König Arthur bestellte einen Maler, um seinen Schild bemalen zu lassen. Er bat ihn, den Schild, der die Form eines Viertelkreises hatte, mit drei Farben zu bemalen; mit Gelb als Farbe der Güte, mit Rot als Farbe der Kühnheit udn mit Blau als Farbe der Weisheit.
Als der Künstler den Entwurf dafür brachte, stellte der Waffenträger des Königs fest, dass auf dem Bild die Kühnheit gegenüber dem Verstand überwiege. Der Maler konnte jedoch beweisen, dass beide zu gleichen Teilen vertreten waren.
Wie tat er das? ("Quant", sowjetische mathematische Schülerzeitschrift)
Lösung:
Der Halbkreis hat einen Radius, der halb so groß ist, wie der Radius r des Viertelkreises. Die Fläche des Viertelkreises ist $A_1 = \pi/4\ r^2$ und die des Halbkreises somit $\pi/8\ r^2 = A_1/2$.
Damit hat der Halbkreis die gleiche Fläche wie der blaue oder rote Bereich, wenn die gelbe Farbe nicht eingezeichnet würde. Die zwei gelben Teilflächen sind somit flächengleich und somit auch die Bereiche für Kühnheit und Verstand.



Kreisfläche, Anwendungsaufgabe
Die Ziege auf der Wiese
Auf einer kreisförmigen Wiese mit dem Radius R wird im Punkt A eine Ziege angebunden. Wie lang muss das Seil sein, damit die Ziege genau die halbe Wiesenfläche abfressen kann?

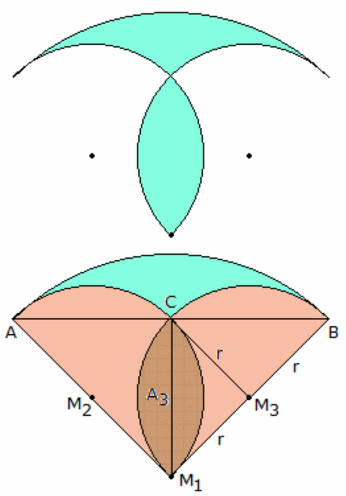
Lösung: Die Fläche für die Ziege setzt sich aus dem gelben Kreissektor A_l; Peripheriewinkel 2α; und den zwei grünen Segmenten A_r zusammen. Damit
wird $\pi/2 \cdot R^2 = \alpha \cdot L^2 + (\beta - \sin \beta) \cdot R^2$
mit $L/R = \sin \beta / \sin \alpha$ wird
$$0 = \alpha \cdot \sin^2 \beta / \sin^2 \alpha + \beta - \sin \beta - \pi/2$$
Mit $\beta = \pi - 2\alpha$ und $\sin(\pi - x) = \sin x$ ergibt sich
$$0 = \pi/2 + \alpha \cdot (\sin^2 2\alpha / \sin^2 \alpha - 2) - \sin 2\alpha$$
Über die trigonometrischen Beziehungen
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ und $2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$ wird weiterhin
$$0 = \pi/2 + 2\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin 2\alpha$$
Diese transzendente Gleichung besitzt als iterative Lösung
$\alpha = 0{,}9528 = 54{,}6°$ $\quad\beta = 1{,}2359 = 70{,}8°$
und damit $L / R = 1{,}1587$



Kreisflächenverdopplung
Während die Quadratur des Kreises, die Umwandlung in ein flächengleiches Quadrat, mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist, lässt sich die Fläche eines Kreises geometrisch verdoppeln.

Dazu wird ein Quadrat gezeichnet wird, dessen eine Ecke im Kreismittelpunkt liegt und sich zwei weitere Ecken auf dem Kreisbogen befinden. Durch die vierte Ecke wird ein Kreis um den alten Mittelpunkt gezogen. Dieses Verfahren wurde im 13.Jahrhundert im Bauhüttenbuch des Villard de Honnecourt dargestellt.

Begründung: Nach dem Satz des Pythagoras wird $R^2 = r^2 + r^2 = 2 r^2$
und damit für den Flächeninhalt des großen Kreises $\pi R^2 = 2\pi r^2$
d.h. doppelt so groß, wie der des kleinen Kreises.



Kreisbogenvieleck-Aufgabe

Aufgabe: Berechne den Flächeninhalt der farbig markierten Figur.

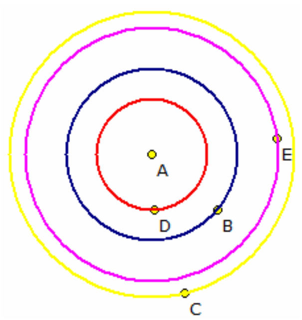
Lösung: Durch das Einzeichnen der Hilfslinien AM_1, BM_1 und AB liest man ab, dass
A_1: Sektor, Mittelpunkt M_1, Radius 2r, Mittelpunktswinkel 90°
A_2: Sektor, Mittelpunkte M_2 und M_3, Radius r, Mittelpunktswinkel 180°
Man erhält für die gesuchte Fläche A $\quad A = A_1 - 2A_2 + 2A_3$
Die Strecke M_1C teilt A_3 in zwei gleich große Teile. Beide Teile setzen sich folgendermaßen zusammen:
A_4: Sektor, Mittelpunkt M_3 bzw. M_2, Radius r, Mittelpunktswinkel 90°
A_5: Dreieck M_1M_3C bzw. M_2M_1C, Grundseite = Höhe = r
Es ist $\quad A_3 = 2 \cdot (A_4 - A_5)$

$A = A_1 - 2 \cdot A_2 + 4 \cdot (A_4 - A_5)$

$A = \pi(2r)^2\ 90°/360° - 2\pi r^2\ 180°/360° + 4(\pi r^2\ 90°/360° - 1/2\ r^2)$

$A = \pi r^2 - \pi r^2 + \pi r^2 - 2r^2$

$A = r^2\ (\pi - 2)$



Konzentrizität

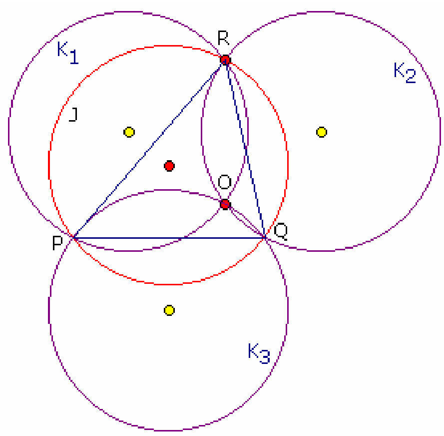
Mit konzentrisch (latein. con = "mit" und centrum = "Mittelpunkt", d.h. mit einem einzigen Mittelpunkt) bezeichnet man geometrische Figuren, die symmetrisch um einen gemeinsamen Mittelpunkt angeordnet sind.
Konzentrisch sind geometrische Formen, wenn die einzelnen Formen alle denselben Schwerpunkt besitzen.

Konzentrische Kreise

Von konzentrischen Kreisen (Abbildung) spricht man, wenn mehrere Kreise den gleichen Mittelpunkt jedoch unterschiedliche Radien besitzen, wie beispielsweise bei einer Zielscheibe oder bei Wellen, die sich ausgehend von einem ins Wasser geworfenen Stein ausbreiten.
Konzentrische Kreise sind, oft kombiniert mit der Spirale, eines der ältesten von Menschen überlieferten Ornamente überhaupt.
Während der Bronzezeit finden sich konzentrische Kreise, die als Sonnensymbol gedeutet werden zum Beispiel in den Felsbildern auf Carschenna und auf dem Sonnenwagen von Trundholm.

Konzentrische Quadrate

Von konzentrischen Quadraten spricht man, wenn mehrere Quadrate ein und denselben Mittelpunkt, jedoch unterschiedliche Seitenlängen aufweisen und durch zentrische Streckung ineinander überführbar sind. Konzentrische Quadrate ergeben einen räumlichen Tiefeneffekt.
Konzentrische Quadrate bilden oft Testmuster als Grundlage für die Prüfung und Qualitätssicherung von Kameras und Objektiven.



Johnson-Theorem

Gegeben sind drei Kreise mit gleichgroßem Radius K_1, K_2 und K_3, die sich in einem Punkt O schneiden. Paarweise schneiden sich die drei Kreise in den Punkt P, Q und R.
Dann ist der Umkreis des Dreiecks PQR kongruent zu den Kreisen K_1, K_2 und K_3 und wird Johnson-Kreis J genannt.

Descartes-Kreissatz

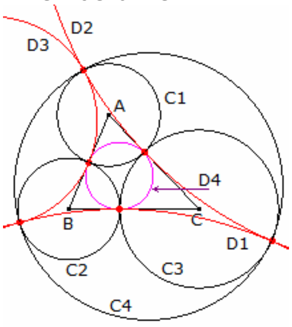
Im November 1643 beschrieb der französische Mathematiker René Descartes in einem Brief an der die Prinzessin Elisabeth von Böhmen eine spezielle Eigenschaft von vier sich paarweise berührenden Kreisen.
Dabei sei die Krümmung eines Kreises mit dem Radius R gleich 1/R, wobei die Krümmung als negativ aufgefasst wird, wenn ein Kreis, der größte, die anderen drei umschließt. Descartes-Kreissatz sagt dann aus:

Berühren sich vier Kreise C_i, mit i = 1,…,4, paarweise in verschiedenen Punkten und ist die Krümmung von C_i gleich k_i, dann gilt:

(1) $2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2$

(2) $2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 - k_4)^2$

Gleichung (1) gilt, wenn die Kreise sich von außen berühren, Gleichung (2), wenn die Kreise sich von innen berühren.

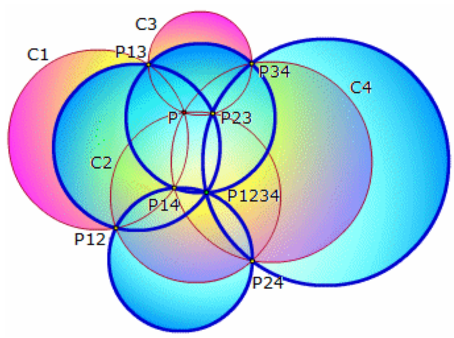


Liegen zum Beispiel an einem Dreieck ABC die Soddy-Kreise C_1, C_2, C_3 und der äußere Soddy-Kreis C4 vor, so ergibt sich ein weiterer Satz von 4 Kreisen, die Ankreise D1, D2, D3 und der Inkreis D4. Für jede dieser Kreismengen gilt der Satz.
Aus dem Descartes-Kreissatz entwickelte 1936 Sir Frederick Soddy die Aussagen über die nach ihm benannten Sätze am Dreieck.

Aus der Krümmung der Kreise C_1, C_2, C_3: $k_1 = 1/(s-a)$, $k_2 = 1/(s-b)$, $k_3 = 1/(s-c)$ folgt dann aber mit der Krümmung m_4 des Inkreises D_4 $m_4 = \pm 1/r$ die Heronsche Dreiecksformel

$$r^2 = (s-a)\,(s-b)\,(s-c) / s$$

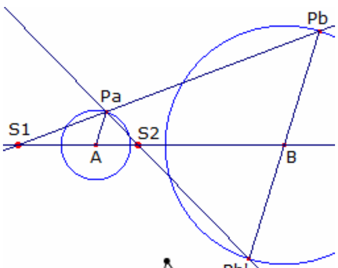
Cliffordsche Kreissätze



Durch William Clifford wurden, neben den Cliffordschen Algebren, auch elementar-geometrische Sätze entdeckt, darunter die drei Cliffordschen Kreissätze:

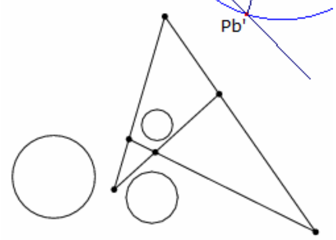
Gegeben seien vier Kreise C1, C2, C3, C4, die alle durch einen Punkt P verlaufen. Die Kreise C_i und C_j schneiden sich jeweils im Punkt P_{ij}, d.h. C1 und C2 in P12, … usw.
C_{ijk} sei der Kreis durch die drei Schnittpunkte C_{ij}, C_{ik}, C_{jk}, d.h. C123 durch P12, P13, P23, usw.

Satz 1: Die vier Kreise C123, C124, C134, C234 haben einen Punkt P1234 gemeinsam.
Satz 2: C5 sei ein fünfter Kreis durch P. Dann liegen die fünf Punkte P1234, P1235, P1245, P1345 und P2345 auf einem Kreis C12345.
Satz 3: C6 sei ein sechster Kreis durch P. Dann haben die sechs Kreise C12345, C12346, C12356, C12456, C13456 und C23456 einen Punkt gemeinsam, den Punkt P123456.



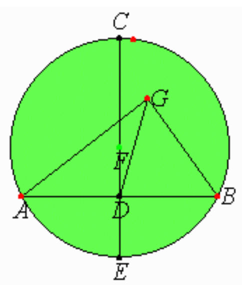
Ähnlichkeitszentrum zweier Kreise, homothetisches Zentrum

Gegeben sind zwei Kreise. In diese werden zueinander parallel liegende Radien gezeichnet und deren Peripheriepunkte miteinander verbunden.
Da zwei Kreise stets zueinander ähnlich sind, schneiden sich diese Geraden in einem Punkt, dem Ähnlichkeitszentrum oder homothetischen Zentrum der Kreise. Dabei existieren zwei derartige Punkte, ein Zentrum außerhalb der Kreise und ein Zentrum (siehe Abbildung) zwischen den Kreisen.
S1 heißt dann äußerer Ähnlichkeitspunkt, S2 innerer Ähnlichkeitspunkt. Zur Konstruktion zeichnet man zwei zueinander parallele Durchmesser in die Kreise ein. Werden die Schnittpunkte mit den Kreisen verbunden, so schneiden diese die Gerade zwischen den Kreismittelpunkten in den Ähnlichkeitszentren.
Es gilt: AS1/BS1 : AS2 / BS2 = -1
Die sich in den Ähnlichkeitspunkten schneidenden Geraden heißen Ähnlichkeitslinien. S1 und S2 teilen die Strecke AB der Mittelpunkte harmonisch.



Satz von Monge

Sind drei Kreise gegeben, so liegen jeweils drei der insgesamt sechs Ähnlichkeitszentren auf einer Geraden. Der kleinste der drei Kreise wird dabei von diesen Geraden vollständig eingeschlossen.

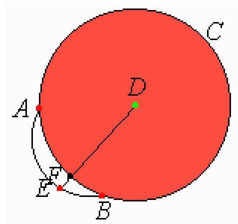


Kreismittelpunkt bei Euklid

"Elemente" Buch III: § 1 (A. 1):
Zu einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu finden.

Der gegebene Kreis sei ABC. Man soll zum Kreise ABC den Mittelpunkt finden.
Man ziehe in ihn, wie es gerade trifft, eine Sehne AB, halbiere sie im Punkte D, ziehe ferner DC von D aus ⊥ AB, ziehe DC nach E durch und halbiere CE in F; ich behaupte, dass F der Mittelpunkt des Kreises ABC ist.
Wäre dies nämlich nicht der Fall, sondern etwa G Mittelpunkt, dann ziehe man GA, GD, GB. Da AD = DB und DG gemeinsam wäre, wären zwei Seiten AD, DG zwei

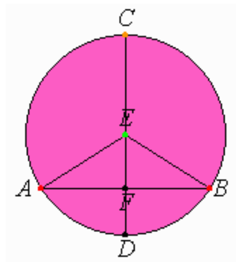
Seiten GD, DB (überkreuz) entsprechend gleich; auch die Grundlinien GA, GB wären gleich als Radien; also wäre ∠ ADG = ∠ GDB (I, 8). Wenn aber eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter (I, Definition 10); also wäre GDB ein Rechter. Aber auch FDB ein Rechter; also wäre FDB = GDB (Post. 4), der größere Winkel (Axiom 8) dem kleineren; dies ist aber unmöglich. G ist also nicht Mittelpunkt des Kreises ABC. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch sonst kein Punkt außer F es sein kann. Also ist Punkt F der Mittelpunkt (I, Definition 16) des Kreises ABC.
Zusatz: Hiernach ist klar, dass wenn im Kreise eine Sehne irgendeine andere mitten und rechtwinklig schneidet, dann der Mittelpunkt des Kreises auf der schneidenden Sehne liegt. - Das hatte man ausführen sollen.



Euklidische Sätze am Kreis

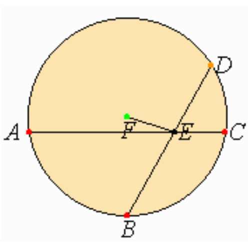
Euklids "Elemente" Buch III: § 2 (L. 1):
Wählt man auf dem Umfang eines Kreises zwei beliebige Punkte, so muss die die Punkte verbindende Strecke innerhalb des Kreises fallen.

ABC sei ein Kreis, man wähle auf seinem Umfang zwei beliebige Punkte A, B. Ich behaupte, dass die A mit B verbindende Strecke innerhalb des Kreises fallen muss.
Täte sie dies nämlich nicht, sondern fiele, etwa als AEB, außerhalb, so verschaffe man sich den Mittelpunkt des Kreises ABC (III, 1), er sei D; ferner ziehe man DA, DB und ziehe DFE durch.
Da hier DA = DB, so ist auch ∠ DAE = DBE (I, 5); und da am Dreieck DAE eine Seite verlängert ist, nämlich AEB, so ist ∠ DEB > DAE (I, 16). Aber DAE = DBE; also ist DEB > DBE. Dem größeren Winkel liegt aber die größere Seite gegenüber (I, 19); also ist DB > DE. Aber DB = DF; also ist DF > DE, die als kleinere angenommene Strecke größer als die größere (Axiom 8); dies ist aber unmöglich. Also kann die A mit B verbindende Strecke nicht außerhalb des Kreises fallen. Ähnlich lässt sich zeigen, dass sie auch nicht auf den Umfang selbst fallen kann; also fällt sie innerhalb - S.



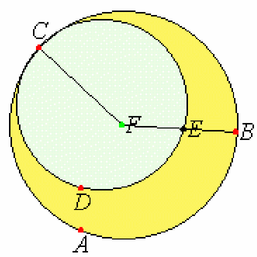
Euklids "Elemente" Buch III: § 3 (L. 2):
Wenn in einem Kreis eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie eine nicht durch den Mittelpunkt gehenden Sehne halbiert, schneidet sie sie auch rechtwinklig; und wenn sie sie rechtwinklig schneidet, halbiert sie sie auch.

ABC sei ein Kreis, in ihm halbiere eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie CD eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehne AB im Punkte F. Ich behaupte, dass sie sie auch rechtwinklig schneidet.
Man verschaffe sich nämlich den Mittelpunkt des Kreises ABC, er sei E, und ziehe EA, EB. Da AF = FB ist und FE gemeinsam, sind zwei Seiten zwei Seiten gleich; ferner Grundlinie EA = Grundlinie EB; also ist ∠ AFE = ∠ BFE (I, 8). Wenn aber eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter (I, Definition 19); also sind AFE, BFE beide Rechte. Also schneidet CD, eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie, AB, eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehne, indem sie sie halbiert, auch rechtwinklig.
Zweitens schneide CD AB rechtwinklig; ich behaupte, dass sie sie auch halbiert, d.h. dass AF = FB. Man konstruiere ebenso. Da dann EA = EB, ist auch ∠ EAF = EBF (I, 5). Aber auch AFE = BFE als Rechte; man hat also zwei Dreiecke EAF, EFB, in denen zwei Winkel zwei Winkeln gleich sind und die einem der gleichen Winkel gegenüberliegenden Seiten, nämlich die ihnen gemeinsame EF, einander gleich; also müssen in ihnen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten gleich sein (I, 26); also ist AF = FB - S.



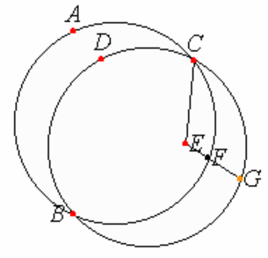
Euklids "Elemente" Buch III: § 4 (L. 3):
Zwei nicht durch den Mittelpunkt gehenden Sehnen eines Kreises können einander beim Schnitt nicht halbieren.

ABCD sei ein Kreis, in ihm mögen zwei nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehnen AC, BD einander in E schneiden. Ich behaupte, dass sie einander nicht halbieren.
Wenn dies nämlich möglich wäre, mögen sie einander halbieren, so dass sowohl AE = EC als auch BE = ED; man verschaffe sich dann den Mittelpunkt des Kreises ABCD, er sei F, und ziehe FE.
Da dann eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie, nämlich FE, eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehne, nämlich AC, halbierte, schnitte sie sie auch rechtwinklig (III, 3); also wäre FEA ein Rechter. Ebenso schnitte die gerade Linie FE, da sie die Sehne BD halbierte, diese auch rechtwinklig; also wäre FEB ein Rechter. Wie oben bewiesen, wäre auch FEA ein Rechter, also wäre FEA = FEB, der kleinere Winkel dem größeren (Ax . 8); dies ist aber unmöglich. Also können AC, BD einander nicht halbieren - S.



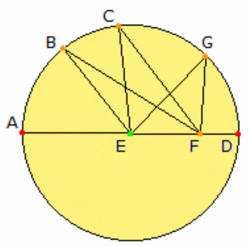
Euklids "Elemente" Buch III: § 5 (L. 4):
Wenn zwei Kreise einander schneiden, können sie nicht denselben Mittelpunkt

haben.
Zwei Kreise ABC, CDG mögen einander schneiden, in den Punkten B, C. Ich behaupte, dass sie nicht denselben Mittelpunkt haben können.
Wäre dies nämlich möglich, so sei er E; dann verbinde man EC und ziehe durch EFG durch, wie es gerade trifft. Da Punkt E Mittelpunkt des Kreises ABC sein soll, wäre EC = EF. Ebenso wäre, da Punkt E Mittelpunkt des Kreises CDG sein soll, EC = EG. Wie oben bewiesen, wäre EC = EF; also wäre auch EF = EG, die kleinere Strecke der größeren (Axiom 8); dies ist aber unmöglich. Also ist Punkt E nicht Mittelpunkt der Kreise ABC und CDG – S.

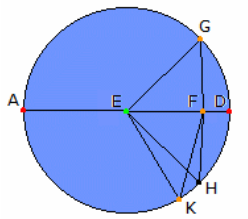


Euklids "Elemente" Buch III: § 6 (L. 5):
Wenn zwei Kreise einander berühren, können sie nicht denselben Mittelpunkt haben.

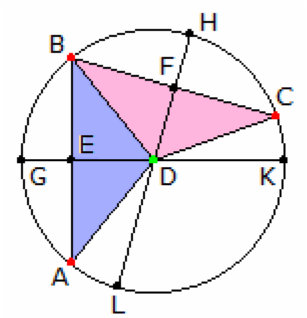
Zwei Kreise ABC, CDE mögen einander berühren, im Punkte C. Ich behaupte, dass sie nicht denselben Mittelpunkt haben können.
Wäre dies nämlich möglich, so sei er F; dann verbinde man FC und ziehe FEB durch, wie es gerade trifft. Da Punkt F Mittelpunkt des Kreises ABC sein soll, wäre FC = FB. Ebenso wäre, da Punkt F Mittelpunkt des Kreises CD sein soll, FC = FE. Wie oben bewiesen, wäre FC = FB; also wäre auch FE = FB, die kleinere der größeren Strecke (Axiom 8); dies ist aber unmöglich. Also ist Punkt F nicht Mittelpunkt der Kreise ABC und CDE – S.



Euklids "Elemente" Buch III § 7 (L. 6):
Wählt man auf dem Durchmesser eines Kreises einen Punkt, der nicht der Kreismittelpunkt ist, und zieht von dem Punkte bis zum Kreis irgendwelche Strecken, so muss die die größte sein, auf der der Mittelpunkt liegt, die kleinste die Reststrecke; und von den anderen ist immer die, welche der durch den Mittelpunkt gehenden näher liegt, größer als die entferntere; und von dem Punkt lassen sich an gleichen Strecken nur immer zwei bis zum Kreise ziehen, beiderseits der kleinsten.



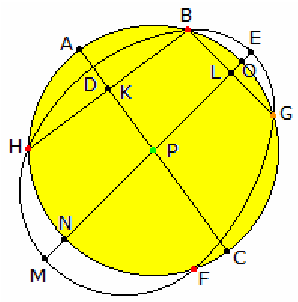
ABCD seien ein Kreis, AD ein Durchmesser desselben; auf AD wähle man einen Punkt F, der nicht der Kreismittelpunkt ist; der Kreismittelpunkt sei E; ferner ziehe man von F bis zum Kreise ABCD irgendwelche Strecken FB, FC, FG.
Ich behaupte, dass FA die größte und FD die kleinste ist, von den anderen FB > FC und FC > FG. Man ziehe BE, CE, GE.
Da in jedem Dreieck zwei Seiten zusammen größer sind als die letzte (I, 20), sind EB + EF > BF. Aber AE = BE also BE + EF = AF; also ist AF > BF. Da weiter BE = CE ist und FE gemeinsam, so sind zwei Seiten BE, EF zwei Seiten CE, EF gleich; dabei ist ∠ BEF > ∠ CEF; also ist Grundlinie BF > Grundlinie CF (I, 24). Aus demselben Grunde ist auch CF > FG. Ebenso sind, da GF + FE > EG (I, 20) und EG = ED, GF + FE > ED. Man nehme EF beiderseits weg; dann ist der Rest GF > Rest FD. Also ist FA die größte Strecke, FD die kleinste, FB > FC und FC > FG.
Ich behaupte, dass ferner sich vom Punkte F bis zum Kreise ABCD an gleichen Strecken nur immer zwei ziehen lassen, beiderseits der kleinsten FD.
Man trage an die gerade Linie EF im Punkte E auf ihr ∠ FEH = GEF an und ziehe FH. Da dann GE = EH ist und EF gemeinsam, sind zwei Seiten GE, EF zwei Seiten HE, EF gleich; und ∠ GEF = ∠ HEF; also ist Grundlinie FG = Grundlinie FH (I, 4). Ich behaupte nun, dass sich vom Punkte F keine weitere Strecke, die = FG wäre, bis zum Kreise ziehen lässt. Ware dies nämlich möglich, dann sei FK so gezogen. Da dann FK = FG und FH = FG, so wäre auch FK = FH, die der durch den Mittelpunkt gehenden nähere Strecke der entfernteren gleich; dies ist aber unmöglich. Also lässt sich von Punkte F bis zum Kreise keine weitere Strecke, die = GF wäre, ziehen, also nur eine einzige - S.



Euklids "Elemente" Buch III § 8 (L. 7):
Wählt man außerhalb eines Kreises einen Punkt und zieht von dem Punkte irgendwelche gerade Linien zum Kreise durch, eine davon durch den Mittelpunkt, die übrigen beliebig, so ist unter den zum hohlen Bogen gezogenen Strecken die größte die durch den Mittelpunkt, von den anderen immer die, welche der durch den Mittelpunkt gehenden näher liegt, größer als die entferntere; unter dem zum erhabenen Bogen gezogenen Strecken hingegen die kleinste die zwischen dem Punkt und dem Durchmesser, von den anderen immer die, welche der kleinsten näher liegt, kleiner als die entferntere; und vom dem Punkte lassen sich an gleichen Strecken nur immer zwei bis zum Kreise ziehen, beiderseits der kleinsten.

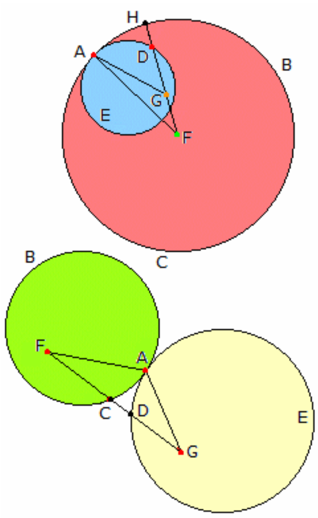
Euklids "Elemente" Buch III § 9 (L. 8):
Wählt man innerhalb eines Kreises einen Punkt und es lassen sich von dem Punkte bis zum Kreise mehr als zwei gleiche Strecke ziehe, so ist der gewählte Punkt der Mittelpunkt des Kreises.

ABC sei ein Kreis, D ein Punkt innerhalb desselben, und von D seien mehr als zwei gleiche Strecken bis zum Kreise ABC gezogen, nämlich DA, DB, DC. Ich behaupte, dass Punkt D der Mittelpunkt des Kreises ABC ist.
Man ziehe nämlich AB, BC, halbiere sie in den Punkten E, F und ziehe die Verbindungslinien ED, FD durch nach den Punkten G, K, H, L. Da dann AE = EB ist und ED gemeinsam, sind zwei Seiten AE, ED zwei Seiten BE, ED gleich; und Grundlinie DA = Grundlinie DB; also ist $\angle$ AED = $\angle$ BED (I, 8).
Also sind $\angle$ AED, BED beide Rechte (I, Definition 10); also schneidet GK die Sehne AB mitten und rechtwinklig. Und da, wenn im Kreise eine Sehne irgendeine andere mitten und rechtwinklig schneidet, der Mittelpunkt des Kreises auf der schneidenden Sehne liegen muss (III, 1, Zusatz), so liegt auf GK der Kreismittelpunkt.
Aus demselben Grunde liegt der Mittelpunkt des Kreises ABC auch auf HL. Die geraden Linien GK, HL können nun außer dem Punkte D keinen weiteren gemein haben; also ist Punkt D der Mittelpunkt des Kreises ABC - S.



Euklids "Elemente" Buch III § 10 (L. 9):
Ein Kreis kann einen Kreis nicht in mehr als zwei Punkten schneiden.

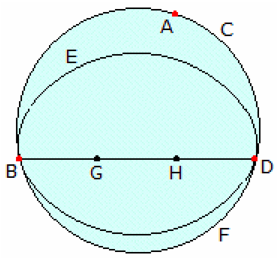
Wäre dies nämlich möglich, so schneide der Kreis ABC den Kreis DEF in mehr als zwei Punkten B, G, F, H; man ziehe dann die Strecken BH, BG und halbiere sei in den Punkten K, L; ferner ziehe man KC, LM von K, L aus rechtwinklig zu BH, BG und ziehe sie durch nach den Punkten A, E.
Da dann im Kreise ABC eine Sehne AC eine Sehne BH mitten und rechtwinklig schnitte, so läge der Mittelpunkt des Kreises ABC auf AC (III, 1, Zus.). Da ebenso in demselben Kreise ABC eine Sehne NO eine Sehne BG mitten und rechtwinklig schnitte, so läge der Mittelpunkt des Kreises ABC auf NO. Wie oben bewiesen, läge er auch auf AC. Die geraden Linien AC, NO treffen sich nun nirgends außer in P; also wäre auch P der Mittelpunkt des Kreises ABC. Ähnlich lässt sich zeigen, dass P auch der Mittelpunkt des Kreises DEF wäre; also hätten zwei Kreise, die einander schneiden, nämlich ABC, DEF, denselben Mittelpunkt, nämlich P; dies ist aber unmöglich (III, 5) - S.



Euklids "Elemente" Buch III § 11 (L. 10):
Wenn zwei Kreis einander innen berühren und man verschafft sich ihre Mittelpunkte, so muss die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte gegebenenfalls verlängert den Berührungspunkt der Kreise treffen.

Zwei Kreise ABC, ADE mögen einander innen berühren im Punkte A; man verschaffe sich die Kreismittelpunkte F von ABC und G von ADE (III, 1). Ich behaupte, dass die Verbindungsstrecke von G mit F verlängert den Punkt A treffen muss.
Sie treffe ihn nämlich nicht, sondern verlaufe etwa wie FGH; dann ziehe man AF, AG. Dann wären AG + GF > FA (I, 20), d.h. > FH; man nehme daher FG beiderseits weg; dann wäre der Rest AG > Rest GH. Aber AG = GD; also wäre auch GD > GH, die kleinere Strecke (Axiom 8) größer als die größere; dies ist aber unmöglich. Also kann die F mit G verbindende gerade Linie nicht vorbeigehen; also muss sie den Berührungspunkt A treffen. Bei äußerer Berührung würden GA + AF > GF, also GD + HF > GF; dies ist aber unmöglich - S.

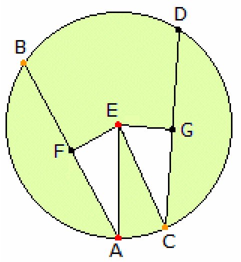
Euklids "Elemente" Buch III § 12 (L. 11):
Wenn zwei Kreis einander außen berühren, muss die Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte durch den Berührungspunkt gehen.



Euklids "Elemente" Buch III § 13 (L. 12):
Ein Kreis kann einen Kreis nicht in mehr als einem Punkte berühren, einerlei ob er ihn innen oder außen berührt.

Wenn möglich, berühre nämlich der Kreis ABCD den Kreis EBFD zunächst innen in mehr Punkten als einem, nämlich D und B.
Man verschaffe sich die Kreismittelpunkte G von ABCD und H von EBFD. Dann müsste die G mit H verbindende Linie B und D treffen (III, 11); sie verlaufe wie BGHD. Da Punkt G der Mittelpunkt des Kreises ABCD sein soll, wäre BG = GD; also wäre BG > HD (Axiom 8); um so mehr wäre also BH > HD (Axiom 8).
Ebenso wäre, da Punkt H der Mittelpunkt des Kreises EBFD sein soll, BH = HD; wie oben bewiesen, wäre die eine Strecke aber auch weit größer als die andere; dies ist aber unmöglich. Also berührt ein Kreis den anderen innen nicht in mehr Punkten als einem. Ich behaupte, dass er es auch außen nicht tut. Wenn möglich, berühre nämlich der Kreis ACK den Kreis ABCD außen in mehr Punkten als einem, nämlich A und C.

Dann ziehe man AC. Da man dann auf dem Umfang jedes der beiden Kreise ABCD, ACK zwei beliebige Punkte A, C hätte, müsste die die Punkte verbindende Strecke innerhalb beider Kreise fallen (III, 2). Sie liegt jedoch zwar innerhalb ABCD, aber außerhalb ACK (III, Definition 3); dies wäre Unsinn. Also berührt ein Kreis den anderen außen nicht in mehr Punkten als einem. Wie oben bewiesen, tut er es auch innen nicht - S.



Euklids "Elemente" Buch III § 14 (L. 13):
Im Kreise stehen gleiche Sehnen gleichweit vom Mittelpunkt ab, und gleichweit vom Mittelpunkt abstehende Sehnen sind einander gleich.

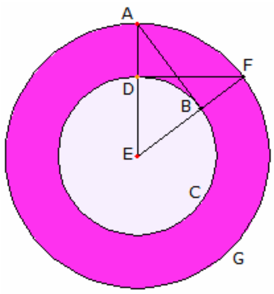
Euklids "Elemente" Buch III § 15 (L. 14):
Größte Sehne im Kreise ist der Durchmesser, und von den anderen ist immer die dem Mittelpunkt nähere größer als die entferntere.

Euklids "Elemente" Buch III § 16 (L. 15)
Eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkt aus gezogene Linie muss außerhalb des Kreises fallen, und in den Zwischenraum der geraden Linie und der Bogens lässt sich keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen; der Winkel des Halbkreises ist größer als jeder spitze geradlinige Winkel, der Restwinkel kleiner.

Euklids "Elemente" Buch III § 19 (L. 17)
Zieht man an einen Kreis eine Tangente, ferner vom Berührungspunkt aus eine gerade Linie rechtwinklig zur Tangente, so muss auf dieser der Mittelpunkt des Kreises liegen.

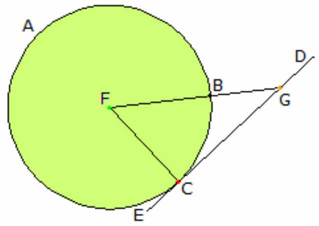
Euklids "Elemente" Buch III § 23 (L. 21)
Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei ungleiche ähnliche Kreisabschnitte nach derselben Seite zu errichten.

Euklids "Elemente" Buch III § 24 (L. 22)
Ähnliche Kreisabschnitte über gleichen Strecken sind einander gleich.



Euklids "Elemente" Buch III § 17 (A. 2):
Von einem gegebenen Punkte aus an einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen.

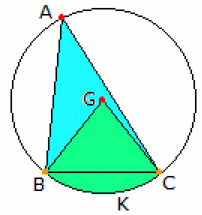
Der gegebene Punkt sei A, der gegebene Kreis BCD. Man soll vom Punkte A an den Kreis BCD eine Tangente ziehen.
Man verschaffe sich den Kreismittelpunkt E (III, 1), ziehe AE und zeichne mit E als Mittelpunkt, EA als Abstand den Kreis AFG, ziehe ferner von D aus DF ⊥ EA und ziehe EF, AB. Ich behaupte, dass man vom Punkte A an den Kreis BCD eine Tangente gezogen hat, nämlich AB.
Da nämlich E Mittelpunkt der Kreise BCD, AFG ist, so ist EA = EF und ED = EB; mithin sind zwei Seiten AE, EB zwei Seiten FE, ED gleich; und sie umfassen einen gemeinsamen Winkel, den bei E; also ist Grundlinie DF = Grundlinie AB, ∆ DEF = ∆ EBA, und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln (I, 4); also ist ∠ EDF = EBA. EDF ist aber ein Rechter; also ist auch EBA ein Rechter. Und EB geht vom Mittelpunkt aus; eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkte aus gezogene gerade Linie berührt aber den Kreis (III, 16, Zus.); also berührt AB den Kreis BCD.
Man hat also von einem gegebenen Punkte A an einen gegebenen Kreis BCD eine Tangente gezogen, nämlich AB - dies hatte man ausführen sollen.

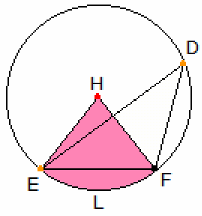


Euklids "Elemente" Buch III § 18 (L. 16):
Zieht man an einen Kreis eine Tangente, ferner vom Mittelpunkt aus eine gerade Linie zum Berührungspunkt, so muss die Verbindungsstrecke das Lot auf die Tangente sein.

Den Kreis ABC berühre nämlich eine gerade Linie DE im Punkte C; man verschaffe sich den Mittelpunkt F des Kreises ABC und ziehe von F nach C die Verbindungslinie FC. Ich behaupte, dass FC das Lot auf DE ist.
Anderenfalls fälle man nämlich von F auf DE das Lot FG. Da dann ∠ FGC ein Rechter wäre, wäre FCG spitz (I, 17). Dem größeren Winkel liegt aber die größere Seite gegenüber (I, 19), also wäre FC > FG. Aber FC = FB; also wäre auch FB > FG, die kleinere Strecke (Axiom 8) größer als die größere; dies ist aber unmöglich. FG ist also nicht das Lot auf DE. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch keine andere Strecke außer FC es sein kann; also ist FC das Lot auf DE (I, 12) - S.

Euklids "Elemente" Buch III § 26 (L. 23):
In gleichen Kreisen sind die Bogen gleich, über denen gleiche Winkel stehen, einerlei ob diese an den Mittelpunkten oder an den Umfängen stehen.





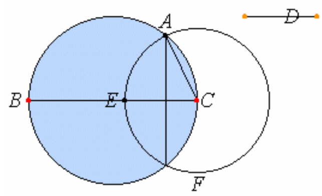
Euklids "Elemente" Buch III § 27 (L. 24):
In gleichen Kreisen über gleichen Bogen stehende Winkel sind einander gleich, einerlei ob sie an den Mittelpunkten oder an den Umfängen stehen.

Euklids "Elemente" Buch III § 28 (L. 25)
Gleiche Sehnen in gleichen Kreisen grenzen gleiche Bogen ab, so dass der größere dem größeren gleich wird und der kleinere dem kleineren.

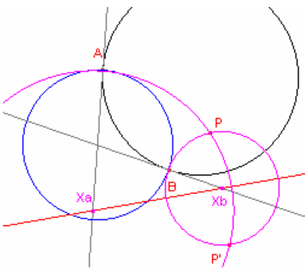
Euklids "Elemente" Buch III § 29 (L. 26)
Gleichen Bogen in gleichen Kreisen liegen gleiche Sehnen gegenüber.

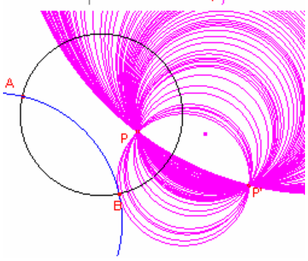
Euklids "Elemente" Buch III § 37 (L. 31)
Wählt man außerhalb eines Kreises einen Punkt und zieht von dem Punkte aus zum Kreis zwei Strecken, von denen die eine den Kreis schneidet, die andere herangeht, so, dass das Rechteck aus der ganzen schneidenden Strecke und dem außen zwischen dem Punkt und dem erhabenen Bogen abgegrenzten Stück dem Quadrat über der herangehenden Strecke gleich ist, so muss die Herangehende den Kreis berühren.

Euklids „Elemente" Buch IV: § 1 (A. 1)
In einen gegebenen Kreis eine einer gegebenen Strecke, die nicht größer als der Kreisdurchmesser ist, gleiche Sehne einzutragen.



ABC sei der gegebene Kreis, D die gegebene Strecke, die nicht größer sein darf als der Kreisdurchmesser (III, 15). Man soll in den Kreis ABC einer der Strecke D gleiche Sehne eintragen. (IV, Definition 7).
Man ziehe im Kreise ABC einen Durchmesser BC. Ist dann BC = D, so hätte man die Aufgabe ausgeführt; denn man hätte in den Kreis ABC eine Sehne = D eingetragen, nämlich BC.
Ist aber BC > D, dann trage man CE = D ab, zeichne mit C als Mittelpunkt und CE als Abstand den Kreis EAF und ziehe CA. Da der Punkt C Mittelpunkt des Kreises EAF ist, ist CA = CE. Andererseits ist CE = D; also ist auch D = CA. Man hat also in den gegebenen Kreis ABC eine der gegebenen Strecke D gleiche Sehne eingetragen, nämlich CA – dies hatte man ausführen sollen.



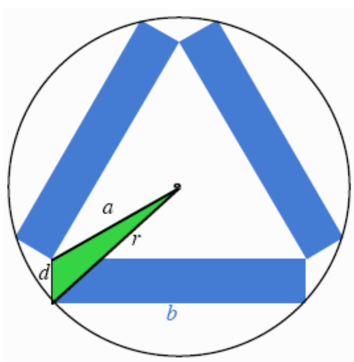


Senkrecht schneidende Kreise

Es gilt: Wenn zwei sich tangierende Kreise von einem dritten Kreis senkrecht geschnitten werden, so liegt der Tangentialpunkt auf diesem dritten Kreis.
Durch einen Punkt P außerhalb eines Kreises, der senkrecht zu einem anderen Kreis ist, verlaufen im Allgemeinen zwei orthogonale Kreise, die den Ausgangskreis tangieren.
Sollte die Gerade durch PP' zu der Tangente im Punkt A parallel sein, so entartet der tangierende Kreis in A zu einer Geraden durch A und P.

Daraus folgt: Gegeben sei ein Punkt P außerhalb eines Kreises, der durch zwei Punkte A und B verläuft. Ein zweiter Kreis durch A und B schneidet den Ausgangskreis senkrecht. Dann existieren unendlich viele zum zweiten Kreis orthogonale Kreise durch P, die den Ausgangskreis nicht schneiden.
Dieser hier in der Euklidischen Geometrie gefundene Satz ist die Grundlage für die Definition der Parallelität von „Geraden" im Poincaré-Modell einer nicht-euklidischen Geometrie.

Kaleidoskop-Berechnung



In einen Zylinder mit gegebenem Innenradius r sollen n > 2 Spiegel der Dicke d zu einem Kaleidoskop eingepasst werden. Gesucht ist die Spiegelbreite b.
Das eingezeichnete Dreieck hat den stumpfen Winkel $\pi - \pi/n$.
Aus $b = 2a \sin \pi/n$ und dem Kosinussatz im Dreieck wird

$$r^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos(\pi - \pi/n) = a^2 + d^2 + 2ad \cos \pi/n$$

und die quadratische Gleichung für a

$$a^2 + 2ad \cos \pi/n + d^2 - r^2 = 0$$

mit der positiven Lösung

$$a = -d \cos \pi/n + \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \pi/n}$$

Da $b = 2a \sin \pi/n$ ist, wird für die gesuchte Spiegelbreite

$$b = 2 \sin \pi/n \left(-d \cos \pi/n + \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \pi/n}\right)$$

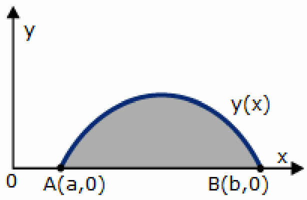
Für das klassische Kaleidoskop mit 3 Spiegeln wird somit

$$b = \sqrt{3}/2 \left(-d + \sqrt{4r^2 - 3d^2}\right) \qquad b \approx 0{,}866025403784 \sqrt{4r^2-3d^2} - 0{,}866025403784\, d$$

und für n Spiegel

n	Spiegelbreite
4	$\sqrt{2r^2 - d^2} - d$

5 $4\sqrt{(5/2 - \sqrt{5}/2)}\ (\sqrt{2}\ \sqrt{(d^2 (\sqrt{5}-5) + 8r^2)} - d(\sqrt{5}+1))$
6 $(\sqrt{(4r^2 - d^2)} - \sqrt{3}\ d)/2$
8 $(\sqrt{(d^2 (1-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}\ r^2)} - d\ \sqrt{(\sqrt{2}+1)})\ \sqrt{(\sqrt{2}/2-1/2)}$ Quelle :Hans Walser, 20080922a



Isoperimetrisches Problem

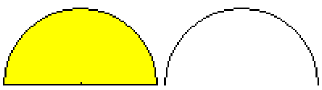
Das allgemeine isoperimetrische Problem besteht darin, unter allen ebenen Flächen mit vorgegebenem Umfang das flächengrößte zu bestimmen.
Die Lösung dieses Problems, ein Kreis mit dem vorgegebenen Umfang, soll auf die Königin Dido zurückgehen, die der Sage nach bei der Gründung Karthagos nur soviel Land nehmen durfte, wie sie mit einer Stierhaut umschließen konnte. Sie schnitt die Haut in feine Streifen und legte sie zu einem Kreis zusammen.
Dieser Sachverhalt kann durch die isoperimetrische Ungleichung der Ebene dargestellt werden:

$A \leq u^2 / (4\pi)$

wenn u den Umfang der Fläche repräsentiert und A den eingeschlossenen Flächeninhalt. Gleichheit tritt dann und nur dann ein, wenn die betrachtete geometrische Figur der Kreis selber ist.
Hat eine Figur eine Fläche von 1000 cm², so wird für deren Umfang und den isoperimetrische Koeffizienten

Fläche	Umfang/cm	IQ
gleichseitiges Dreieck	144	0,605
Quadrat	127	0,785
regelmäßiges Fünfeck	121	0,865
regelmäßiges Siebzehneck	112,75	0,988
Kreis	112	1

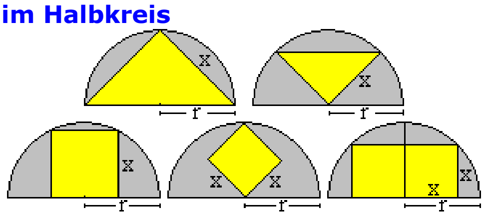
Die isoperimetrische Ungleichung des dreidimensionalen Raums lautet $V \leq A^{3/2} / (4\sqrt{\pi})$
wobei A den Oberflächeninhalt beschreibt und V das eingeschlossene Volumen. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn der Körper die Kugel ist.
Ein Spezialfall des allgemeinen isoperimetrischen Problems besteht in der Aufgabe, in einem kartesischen Koordinatensystem eine Verbindungskurve der Punkte A(a,0) und B(b,0) zu finden, die eine vorgegebene Länge l hat und mit der Verbindungsstrecke AB die größte Fläche umschließt.



Halbkreis

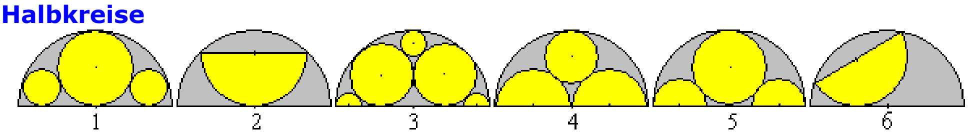
Unter einem Halbkreis versteht man, wie der Name sagt, die Hälfte eines Kreises. Dabei kann man entweder von der Kreisfläche ausgehen oder von der Kreislinie. Im folgenden wird meist die halbe Kreisscheibe (gelb) behandelt. Man kann den Halbkreis auch als Kreisausschnitt ansehen, der zum Winkel von 180° gehört, oder als Kreisabschnitt, dessen Sehne der Durchmesser ist. Ein Halbkreis wird im allgemeinen durch den Radius festgelegt. Dann sind der Flächeninhalt $A = \pi/2\ r^2$ und der Umfang $u = \pi\ r$.
Der Halbkreis ist auch der Graph einer Funktion. Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = \sqrt{(r^2-x^2)}$ mit dem Definitionsbereich $D=\{x|-r <= x <= r\}$.

Figuren im Halbkreis

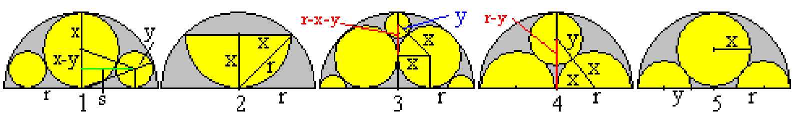


45-90-45-Dreiecke
Aufrecht stehendes Dreieck: $x = \sqrt{2}\ r$
Auf der Spitze stehendes Dreieck: $x = r$
Vierecke
Aufrecht stehendes Quadrat: $x = 2\ \sqrt{5}/5\ r$
Auf der Spitze stehendes Quadrat: $x = \sqrt{2}/2\ r$
Doppelquadrat: $x = \sqrt{2}\ /2\ r$

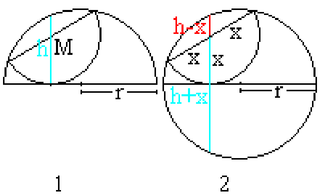
Kreise und Halbkreise



Lösungen:



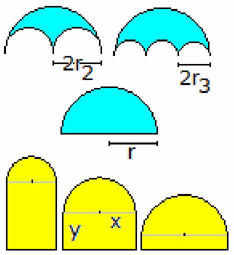
1 Drei Kreise: Es gilt $(x+y)^2 = (x-y)^2 + s^2$ und $(r-y)^2 = s^2+y^2$ und $x = r/2$. Daraus folgt $y = r/4$.



2 Halbkreis: $x = \sqrt{2}/2\ r$

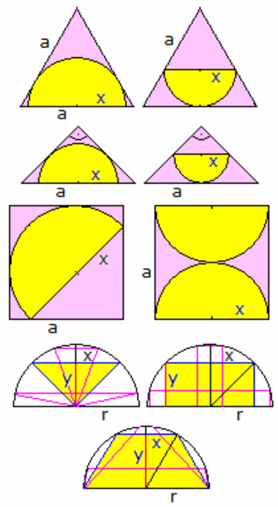
3 Drei Kreise und zwei Halbkreise: Es gilt $(x+y)^2 = (r-x-y)^2+x^2$. Daraus folgt: $x = (\sqrt{2} - 1)\ r$, $y = (3\sqrt{2} - 2)\ r$.
4 Zwei Halbkreise und ein Kreis: Es gilt $(x+y)^2 = (r-y)^2 + x^2$. Daraus folgt: $x = r/2$, $y = r/3$.

5 Ein Kreis und zwei Halbkreise: Nach Drehung um 90° wie 4. Es gilt: $x = r/2$, $y = r/3$.
6 Schräg liegender Halbkreis im Halbkreis
Es gibt beliebig viele schräg liegende Halbkreise im Halbkreis.
(1) Zur Herleitung einer Formel errichtet man im Berührpunkt des inneren Halbkreises eine Höhe h. Auf ihr liegt der Mittelpunkt.
(2) Ergänzt man den Halbkreis zu einem Vollkreis, so schneiden sich im Kreis zwei Sehnen in M. Es gilt der Sehnensatz $(h-x)(h+x) = x^2$. Daraus folgt $x = \sqrt{2}/2\ h$.



Halbkreisfolge
Man kann auf einen Durchmesser kleinere Halbkreise setzen und deren Anzahl immer mehr erhöhen. Es entsteht eine Restfigur (blau). Geht die Anzahl der Halbkreise über alle Grenzen, so gelangt man - theoretisch - zum Halbkreis.
Für die n-te Figur erhält man die Fläche $A(n) = \pi/2\ r^2 - \pi/2\ r^2/n$. Für n gegen Unendlich ergibt sich der erwartete Grenzwert von $\pi/2\ r^2$.
Der Umfang der Figur verhält sich merkwürdig. Er ist für jedes n und auch im Grenzfall gleich $u(n) = 2\pi r$ (ungefähr 6,3r).
Der Umfang des Halbkreises andererseits ist wesentlich kleiner als u(n), nämlich $u = (2+\pi)*r$ (ungefähr 5,1r). Darin liegt ein Widerspruch zur Anschauung.

Fensterproblem
Die drei nebenstehenden Rechtecke mit aufgesetztem Halbkreis haben den gleichen Umfang u. Vergleicht man die Flächeninhalte, so erkennt man, dass die mittlere Figur den größten Flächeninhalt hat.
Lösung: $x = y = u/(4+\pi)$
Diese Extremwertaufgabe ist bekannt: Gegeben ist der Umfang eines rechteckigen Fensters mit einem aufgesetztem Rundbogen. Welche Maße muss das Rechteck haben, damit der Flächeninhalt möglichst groß ist, d.h. damit möglichst viel Licht einfällt?
Man kann die Figur auf den Kopf stellen. Dann wird nach der Form eines Kanals gefragt, der möglichst viel Wasser durchlässt.
u sei der Umfang. Es gilt $A = 2xy + \pi/2\ x^2$.
Nebenbedingung $u = 2x + 2y + \pi x$, Zielfunktion $A = ux - 2x^2 - \pi/2\ x^2$, $A'=0$ ergibt $x = y = u/(4+\pi)$



Halbkreis in Figuren
Halbkreis im Dreieck

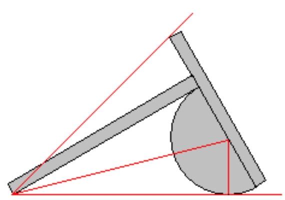
im linken gleichseitigen Dreieck	$x = \sqrt{3}/4\ a$
im rechten gleichseitigen Dreieck	$x = (3-\sqrt{3})/4\ a$
im linken Halbquadrat	$x = \sqrt{2}/4\ a$
im rechten Halbquadrat	$x = a/2$

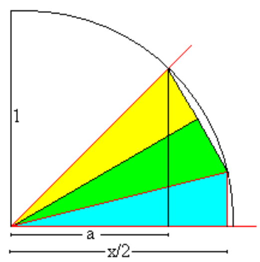
Halbkreis im Quadrat
Links: Es gilt $a = x + x/\sqrt{2}$.
Daraus folgt $x = (2 - \sqrt{2})\ a$
Die Lösung $x = a/2$ für die beiden Halbkreise ist einfach.

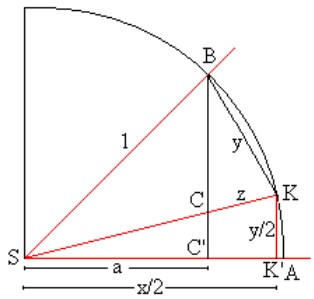
Größte Figuren
Dreieck, Rechteck und Trapez
Es gibt viele Dreiecke, Rechtecke und gleichschenklige Trapeze, die wie in der Darstellung in einen Halbkreis passen. Darunter gibt es jeweils eine Figur mit größtem Flächeninhalt

Dreieck
Es gilt $A = xy$. Nebenbedingung $x^2+y^2 = r^2$,
Zielfunktion $A^2 = r^2x^2-(x^2)^2$, $[A^2(x)]' = 0$ ergibt $x = y = \sqrt{2}/2\ r$.
Rechteck
Es gilt $A = 2xy$. Nebenbedingung $x^2+y^2 = r^2$,
Zielfunktion $A^2/2 = r^2x^2-(x^2)^2$, $[A^2/2]'=0$ ergibt $x = y = \sqrt{2}/2\ r$.
Trapez
Es gilt $A = (2x+2r)/2\ y$. Nebenbedingung $x^2+y^2 = r^2$,
Zielfunktion $A^2= -(x^2)^2-2rx^3+2r^3x+(r^2)^2$, $[A^2]'=0$ ergibt $x = r/2$, $y = \sqrt{3}/2\ r$. Das Trapez ist ein halbes regelmäßiges Sechseck.

Dreiteilung des Winkels
Der Halbkreis ist ein wichtiger Bestandteil eines Zeichengerätes ("Tomahawk"), mit dem man einen Winkel in drei gleiche Teile teilen kann.
Die Dreiteilung des Winkels mit Zirkel und Lineal ist nicht möglich. Das weiß man auf Grund von Arbeiten von Gauß. Es geht in der rechten Zeichnung darum, x







(bzw.x/2) zu bestimmen, wenn a gegeben ist. Es gilt die kubische Gleichung $x^3-3x-2a = 0$, die nur für Sonderfälle durch Terme aus Quadraten lösbar ist. Das Zeichengerät wird durch die Zeichnung erklärt.

Herleitung der kubischen Gleichung
Der gegebene Winkel sei BSA. Er wird durch die Strecke a bestimmt. SK drittelt den Winkel, SK wird durch die Strecke x/2 gegeben.
Die Dreiecke SKB und BCK sind ähnlich. Es gilt: $z : y = y : 1$, dann $z = y^2$.
Es gilt der erste Strahlensatz: SC : SK = SC' : SK' oder $(1-z) : 1 = a : (x/2)$.
Es gilt nach dem Satz des Pythagoras in Dreieck SKK' : $(x/2)^2+(y/2)^2 = 1$.
Daraus folgt nach etwas längerer Rechnung $x^3 -3x -2a = 0$, wzbw.

Anwendungen des Halbkreises


Fenster, Türen, Tore
Wenn man sich in seiner Umgebung umsieht, bemerkt man die meisten Halbkreise bei Fenstern, Türen oder Toren.
Halbkreise schließen Rechtecke oben ab und schmücken sie. Oft sind die Halbkreise unterteilt und geben so dem Halbbogen eine besondere Note.
Ein einfaches Wappenschild setzt sich auch aus einem Rechteck und Halbkreis zusammen, nur dass der Halbkreis unten ist. Als Beispiel steht das Wappen des Landes Nordrhein-Westfalen. Das springende Pferd steht für Westfalen und die weiße Schlangenlinie für den Rhein und damit Nordrhein.

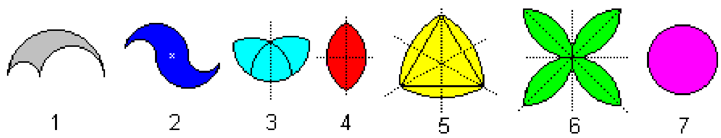
Zaun
Man kann Drähte zu einem Zaun so flechten, dass oben Halbkreise entstehen

Rosetten
Es gibt eine Reihe von Fachwerkhäusern mit geschnitzten Fächerrosetten im Giebel in Form von Halbkreisen.

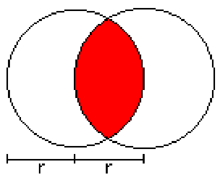
Arkaden
Es ist immer eindrucksvoll, wenn sich in Bauten Bögen wiederholen

Kreisteile

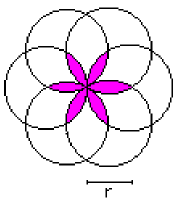
Kreisteile sind Figuren, die aus Kreisbögen gebildet werden. Die Tabelle enthält eine Sammlung von Kreisteilen, geordnet nach der Anzahl der Ecken. Eine Ecke ist der Punkt, an dem zwei Kreisbögen zusammenstoßen.



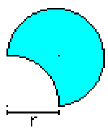
Die Farben der Figuren kennzeichnen die Symmetrie.
keine Symmetrie (1), nur Punktsymmetrie (2), Achsensymmetrie mit einer Achse (3), zwei Achsen (4), drei Achsen (5), vier Achsen (6), mehr als vier Achsen (7).



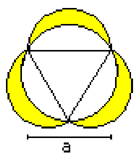
Linse
$A = [2/3\ \pi - ½\ \sqrt{3}]\ r^2$
$U = 4/3\ \pi\ r$



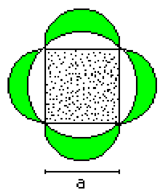
Rosette
$A = [2\pi - 3\sqrt{3}]\ r^2$
$U = 4\ \pi\ r$



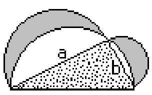
Dreiviertelmond
$A = [\pi/2 + 1]*r^2$
$U = 2\pi\ r$



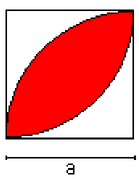
$A = [\pi/24 + ¼\ \sqrt{3}]\ a^2$
$U = [2/3\ \sqrt{3}+3/2]\ \pi\ a$



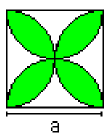
Möndchen des Hippokrates
$A = a^2$
$U = [\sqrt{2} +2]\ a$



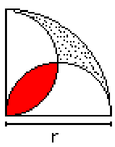
Möndchen des Hippokrates
$A = 1/2*a*b$
$U = \pi/2\ [a+b+\sqrt{(a^2+b^2)}]$



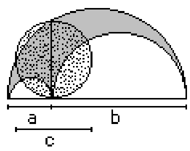
6) Linse
$A = [\pi/2-1]*a^2$
$U = \pi a$



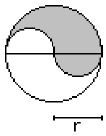
Kreuzblüte
$A = (\pi/2 - 1]*a^2$
$U = 2\pi\ a$



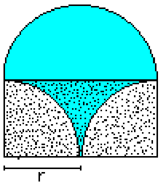
Pilz
$A = (\pi/8 - 1/4]\ r^2$
$U = \pi/2\ r$



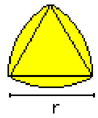
Arbelos (Schusterkneif des Archimedes)
$A = \pi/4\ ab = \pi/4\ c^2$
$U = (a+b)\ \pi$



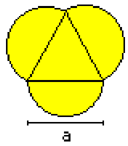
Ying und Yang
$A = \pi/2\ r^2$
$U = 2\pi\ r$



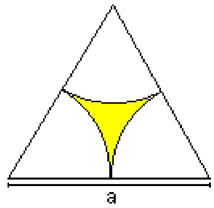
Kreisel
$A = 2r^2$
$U = 2\pi\ r$



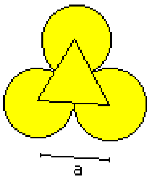
Bogendreieck
$A=[\pi/2 - ½ \sqrt{3}]\ r^2$
$U = \pi r$



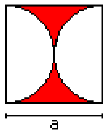
Käferaugen
$A = [1/4 \sqrt{3} + 3/8\ \pi]\ a^2$
$U = 3/2\ \pi a$



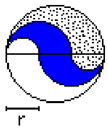
Golf Tee
$A = [1/4 \sqrt{3} - \pi/8]\ a^2$
$U = \pi/2\ a$



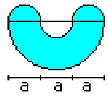
$A = [1/4 \sqrt{3} + 5/8\ \pi]\ a^2$
$U = 5/2\ \pi a$



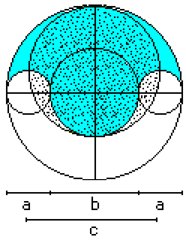
Sanduhr
$A = [1 - \pi/4]\ a^2$
$U = \pi a$



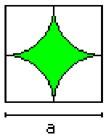
Haken
$A = ¾\ \pi\ r^2$
$U = 3\pi\ r$



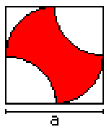
Wurm
$A = 5/4\ \pi a^2$
$U = 3\pi\ a$



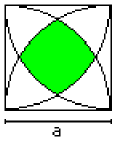
Salinon
$A = \pi/4\ (a+b)^2 = \pi/4\ c^2$
$U = \pi\ (2a+b)$



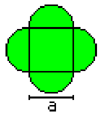
Karo
$A = (1 - \pi/4)*a^2$
$U = \pi a$



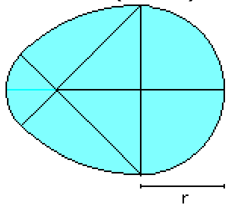
Doppelaxt
$A = 1/2*a^2$
$U = \pi a$



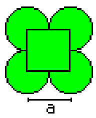
Bogenquadrat
$A = [1+\pi/3 - \sqrt{3}]\ a^2$
$U = 2/3\ \pi a$



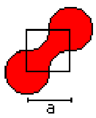
$A = [1 + \pi/2]\ a^2$
$U = 2\pi a$



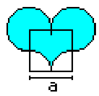
Hühnerei
$A = [3\pi - \sqrt{2}\ \pi - 1)]*r^2$
$U = [3-1/2\ \sqrt{2}]\ \pi r$



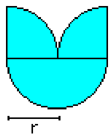
Vierblättriges Kleeblatt
$A = [1 + ¾\ \pi]*a^2$
$U = 3\pi a$



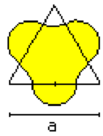
Hantel
$A = [1 + \pi/4]\ a^2$
$U = 2\pi a$



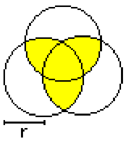
Herz
$A = [1 + \pi/4]\ a^2$
$U = 2\pi a$



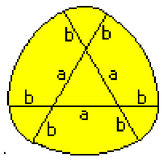
Tulpe, $A = \pi r^2$
$U = (2\pi+2)*r$



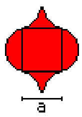
Bärenkopf
$A = [\sqrt{3}/4+\pi/16]\ a^2$, $U = \pi a$



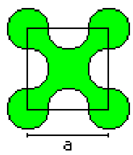
$A = [\pi - ½ \sqrt{3}]\ r^2$
$U = 2\pi r$



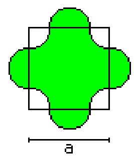
Reuleauxsche Figur
$A = \pi/2\ a^2 + \pi\ ab + \pi\ b^2 - ½ \sqrt{3}\ a^2$
$U = \pi\ (a+2b)$



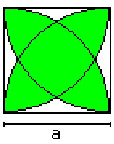
Brummkreisel
$A = 2a^2$
$U = 2\pi a$



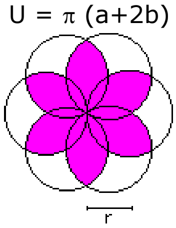
Kreuz
$A = [1 + \pi/16]\ a^2$
$U = 5/2\ \pi a$



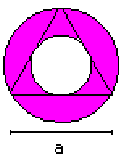
$A = [1 + \pi/16]\ a^2$
$U = 3/2\ \pi a$



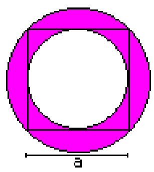
Orbitale
$A = [\sqrt{3} + 2/3\ \pi - 3]\ a^2$
$U = 4/3\ \pi a$



Blume, $A = 2\pi\ r^2$
$U = 4\pi r$



$A = \pi/4\ a^2$
$U = \sqrt{3}\ \pi a$

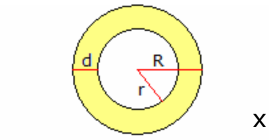


$A = \pi/4\ a^2$
$U = [1+\sqrt{2}]\ \pi a$

Kreisring

Ein Kreisring wird von zwei konzentrischen Kreisen gebildet und sei durch die Radien r und R festgelegt. Dann hat er einen Flächeninhalt von $A = \pi\ (R^2-r^2)$. Die Begrenzungslinien haben die Länge $2\pi\ R + 2\pi\ r$. Sind die Breite oder Dicke d des Ringes und der innere Radius r gegben, so ist der äußere Radius $R=r+d$.

Für den Flächeninhalt gilt $A = \pi (2rd+d^2)$. Ist die Breite wesentlich kleiner als der Radius, so gilt angenähert die einfachere Formel $A = 2\pi rd$.



Flächengleicher Kreis

Der Kreis, der den gleichen Flächeninhalt wie der Kreisring hat, hat einen Radius von $x = \sqrt{2}/2\ R$.

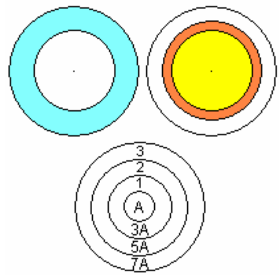
Herleitung: Der Ansatz $2\pi x^2 = \pi R^2$ führt zu $2x^2 = R^2$ oder $x = \sqrt{2}/2\ R$.

$x = \sqrt{2}/2\ R$.

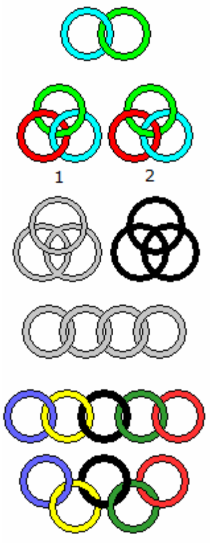
Konzentrische Kreise

Die unten stehende Figur ist als Zielscheibe bekannt. Sie besteht aus einer Folge von Kreisringen gleicher Dicke. Die Radien der Kreise betragen r, 2r, 3r, 4r, ...

Für den inneren Kreis gilt	$A_0 = \pi r^2$.
Für den ersten Ring gilt:	$A_1 = \pi [(2r)^2-r^2] = 3\pi r^2$.
Für den zweiten Ring gilt:	$A_2 = \pi [(3r)^2-(2r)^2] = 5\pi r^2$.
Für den n-ten Ring gilt	$A_n = \pi [((n+1)r)^2-(nr)^2] = \pi (2n+1) r^2$



Verbindung mehrerer Ringe



Doppelring

Zwei Ringe können so verbunden werden, dass man sie nicht wieder trennen kann, ohne dass man einen Ring aufbricht. Diese Anordnung von zwei Ringen gilt als ein Symbol der Treue und der Ehe. Mehrere so verbundene Ringe bilden eine Kette, die im Allgemeinen geschlossen ist.

Borromäische Ringe

Drei Ringe können auf zwei Arten zu einem Dreieck verbunden werden. Entfernt man einen Ring, so bleiben in die linken Darstellung die Ringe verbunden, rechts alle Ringe einzeln.

Die rechte Anordnung wird borromäische Ringe genannt.

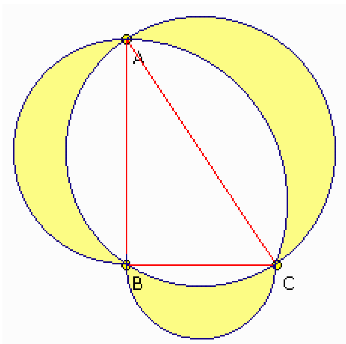
Eine Figur aus drei Ringen wurde auch vom Krupp-Rüstungskonzern als Firmenlogo verwendet. Sie weisen auf Alfred Krupps Erfindung des "nahtlos geschmiedeten und gewalzten Eisenbahnradreifens" hin.

Die Ringe sind nicht verbunden, der obere Ring liegt vor den beiden unteren Ringen. Heute werden die Ringe nicht mehr getrennt. Mit Waffen, die dieses Zeichen trugen, wurden im 1. und 2.Weltkrieg unzählige Menschen ermordet.

Das Audi-Logo besteht aus einer geraden Kette von vier Ringen. Die vier Ringe stehen für die Marken Audi, DKW, Horch und Wanderer, die 1932 zu der AUTO UNION zusammengefasst wurden.

Olympische Ringe

Das offizielle Emblem des IOK besteht aus den fünf verschlungenen olympischen Ringe. Sie entstehen, in dem eine gerade Kette in W-Form gelegt wird. Die Farben der Ringe sind so gewählt, dass jedes Land eine ihrer Farben in den Olympischen Farben wiederfindet. Sie stehen offiziell nicht für die fünf Erdteile. Trotzdem hat sich eine Zuordnung eingebürgert: blau-Europa, gelb-Asien, schwarz-Afrika, grün-Australien, rot-Amerika.



Möndchen des Hippokrates (Lunulae)

Auf den griechischen Mathematiker Hippokrates geht das Problem der Möndchen (Lunulae) zurück. Über den beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks werden Halbkreise gezeichnet. Zusätzlich wird der Umkreis des Dreiecks eingetragen. Dabei entstehen zwei Flächen in Form eines zunehmenden Mondes, die sogenannten Möndchen. Es gilt: Die Summe der Flächeninhalte der Möndchen über den Katheten ist gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks.

Nachweis: Für die Summe A der Inhalte der beiden Möndchen der linken Figur gilt:

A = Inhalt Dreieck ABC + Summe der beiden Halbkreisflächen über a bzw b - Halbkreisfläche über c =

$= 0{,}5\cdot a\cdot b + 0{,}5\cdot(a/2)^2 \cdot \pi + 0{,}5\cdot(b/2)^2 \cdot \pi - 0{,}5\cdot(c/2)^2 \cdot \pi =$

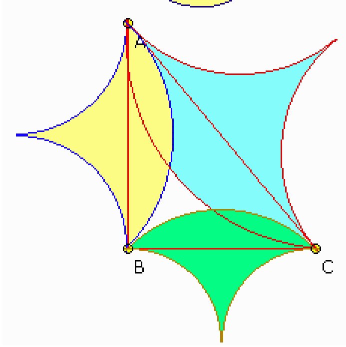
$= 0{,}5\cdot a\cdot b + \pi/8 \cdot (a^2 + b^2 - c^2) = 0{,}5\cdot a\cdot b$

Die Flächeninhalte der Möndchen berechnen sich zu

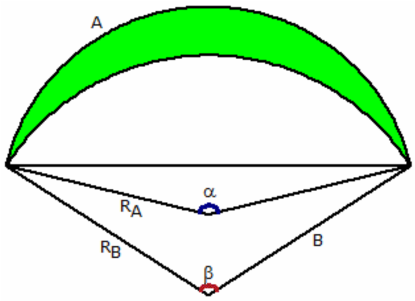
$A_1 = 1/8\ (a\ (2b + a\pi) - 2\ (a^2 + b^2)\ \arctan(a/b))$

$A_2 = 1/8\ (a\ (2b - a\pi) + 2\ (a^2 + b^2)\ \arctan(a/b))$

Flächeninhalt des Möndchens über der Kathete BC = a (untere Darstellung)



$A = \pi\cdot(a/2)^2 / 2 - (c/2)^2 (\beta - \sin \beta)/2$; β … Bogenmaß
$A = \pi\cdot(a/2)^2 / 2 - (c/2)^2 (\arccos(a/c) - \sin \arccos(a/c))/2$



Möndchenflächeninhalt

Gegeben seien zwei Kreissektoren A und B mit unterschiedlichen Radien R_A und R_B und den Sektorwinkeln α und β. Liegen die Endpunkte der Kreisbögen aufeinander, so bilden die Bögen ein Möndchen im Sinne von Hippokrates.
Der Flächeninhalt des Möndchens ist dann gleich der Fläche des Segmentes A minus Segment B.
Die Fläche des Segmentes A ist die Differenz aus dem Sektor A und dem Dreieck von A.

$A_{\text{Dreieck A}} = R_A^2/2 \sin \alpha$; $A_{\text{Sektor A}} = \alpha R_A^2/2$
$A_{\text{Segment A}} = \alpha R_A^2/2 - R_A^2/2 \sin \alpha$

und analog für B $\quad A_{\text{Segment B}} = \beta R_B^2/2 - R_B^2/2 \sin \beta$

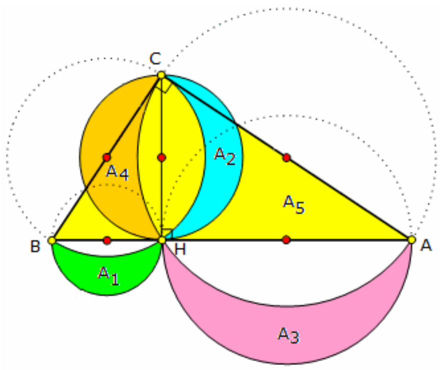
Der Flächeninhalt des Möndchens berechnet sich dann mit

$A_{\text{Möndchen}} = \alpha R_A^2/2 - R_A^2/2 \sin \alpha - \beta R_B^2/2 + R_B^2/2 \sin \beta$
$= (\alpha R_A^2/2 - \beta R_B^2/2) + (\sin \beta R_B^2/2 - \sin \alpha R_A^2/2)$

Wird nun $\alpha R_A^2/2 - \beta R_B^2/2 = 0$, so ist das Möndchen mit Zirkel und Lineal konstruierbar. In diesem Fall sind die Sektoren A und B gleich groß und die Quadrate ihrer Radien verhalten sich umgekehrt proportional zu deren Winkeln. In diesem Fall ist

$A_{\text{Möndchen}} = R_B^2/2 \sin \beta - R_A^2/2 \sin \alpha$

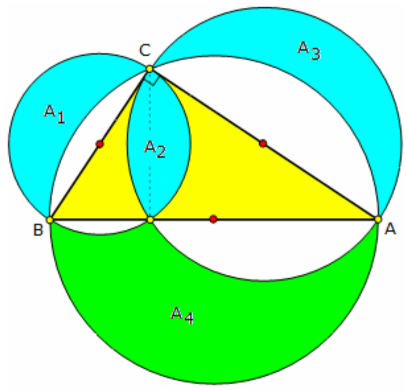
Dies ist der klassische von Hippokrates diskutierte Fall am rechtwinkligen Dreieck.



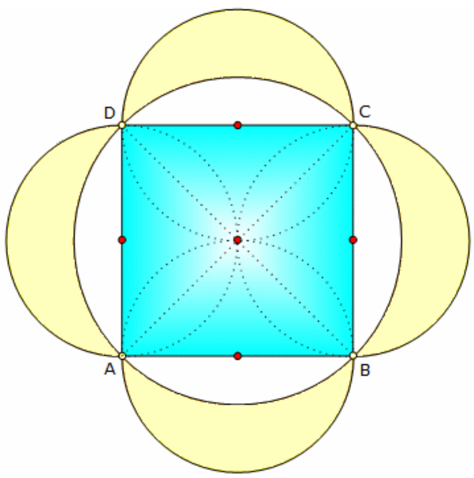
Möndchen des Hippokrates (2)

Auf den griechischen Mathematiker Hippokrates geht das Problem der Möndchen zurück.
Über den beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks werden Halbkreise gezeichnet. Zusätzlich wird der Umkreis des Dreiecks eingetragen. Dabei entstehen zwei Flächen in Form eines zunehmenden Mondes, die sogenannten Möndchen, für die spezielle Flächenbeziehungen gelten.
Außer dieser Figur existieren eine Vielzahl weiterer Figuren mit besonderen Flächeninhalten.

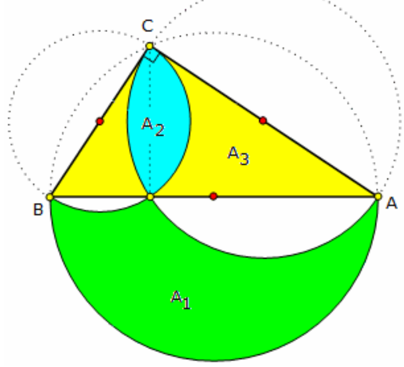
In der Darstellung wurden Kreise um die Mittelpunkte der Katheten und Hypotenusenabschnitte Seiten des rechtwinkligen Dreiecks gezeichnet. Dabei entstehen vier besondere Möndchen A_1, A_2, A_3 und A_4. Ist A_5 der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks, so gilt $\quad A_5 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$



Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Um die Mittelpunkte der drei Seiten werden erneut Kreise gezeichnet. Dabei entstehen weitere Möndchen.
In der oberen Abbildung gilt dann $\quad A_1 + A_2 + A_3 = A_4$
und in der unteren Abbildung $\quad A_1 - A_2 = A_3$ (Fläche des Dreiecks)



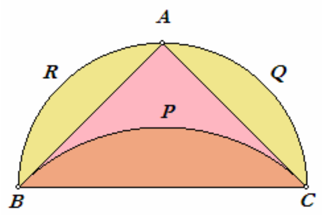
Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit seinem Umkreis. Um jeden Seitenmittelpunkt wird ein Kreis durch die Eckpunkte des Quadrates gezeichnet. Dabei entstehen vier Möndchen, deren Summe der Flächeninhalte gleich der Quadratfläche ist.



Nachweis:
Jedes Möndchen ergibt sich aus einem Halbkreis um die Seitenmittelpunkte von dem ein Kreissegment abgezogen wird. Ist a die Seitenlänge des Quadrates, so wird für den Umkreisradius $r = \sqrt{2}/2\, a$ und weiter
Halbkreisfläche = $a^2 \pi/8$
Kreissegment = $r^2/2 (\pi \alpha/180 - \sin \alpha) = \pi/8\, a^2 - a^2/4$

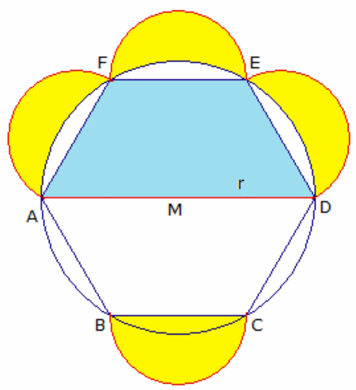
Damit hat jedes Möndchen den Flächeninhalt $a^2/4$ und somit alle vier die gleiche Fläche wie das Quadrat.

Insbesondere dieser Zusammenhang der Möndchen über den Quadratseiten verstärkte bei Hippokrates und anderen antiken griechischen Mathematikern die Hoffnung, die Quadratur des Kreises durchführen zu können.



Ein weiterer Spezialfall der Möndchen des Hippokrates ergibt sich an einem gleichseitigen, rechtwinkligen Dreieck.

AB, BC und CA seien die Seiten eines gleichseitigen, in A rechtwinkligen Dreiecks ABC. Über den Seiten werden Sektoren BAR, BCP und ACQ, wie in der Darstellung, gleichförmig gezeichnet.
Aus der Beziehung, dass die Summe der Flächeninhalte der Hippokratischen Möndchen über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks sind, folgt unmittelbar Segment(BAR) + Segment(ACQ) = Segment(BCP)
und weiterhin für die Fläche des Möndchens BPCA Möndchen(BPCA) = Dreieck(ABC)



Interessant ist folgende Konstruktion von Möndchen des Hippokrates.
Ein gleichschenkliges Trapez ADEF ist die Hälfte eines regelmäßigen Sechsecks. Über den drei Seiten des Trapezes werden Halbkreise konstruiert, die zusammen mit dem Umkreis des Trapezes drei Möndchen bilden.
Die Flächensumme der drei Möndchen zusammen mit einem Halbkreis über dem Umkreisradius ist flächengleich dem Trapez.
Nachweis: Möndchen = Halbkreis + gleichseitiges Dreieck AMF - Sechstelkreis

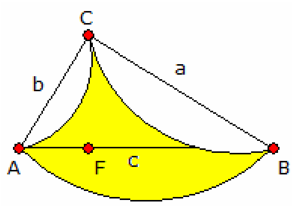
Möndchen = $\pi/2\ (r/2)^2 + r^2/4\ \sqrt{3} - \pi/6\ r^2$

Möndchen = $r^2/4\ \sqrt{3} - \pi/24\ r^2$

Die Fläche des Trapezes ist gleich der Flächensumme von 3 der gleichseitigen Dreiecke

Trapez = $3/4\ r^2\ \sqrt{3}$

Für den Halbkreis gilt Halbkreis = $\pi/8\ r^2$
und damit 3 Möndchen + Habkreis = $3/4\ r^2\ \sqrt{3} - 3/24\ \pi\ r^2 + \pi/8\ r^2 = 3/4\ r^2\ \sqrt{3}$ = Trapez



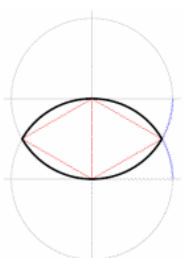
Konkaves Kreisbogendreieck

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b.
Über allen drei Seiten werden Kreisbögen mit einem Zentriwinkel von 45°, d.h. Viertelkreise, errichtet. Die Viertelkreise über den Katheten werden Richtung Hypotenuse (nach "innen") gezeichnet, über der Hypotenuse nach außen.
Die von den drei Bögen gebildete Figur ist ein konkaves Kreisbogendreieck.

Kreisbogendreiecke wurden 1724 von Daniel Bernoulli bei der Untersuchung von quadrierbaren Kreisbogenzweiecken eingeführt. Mitunter wird die hier gezeichnete Figur auch Pelekoide genannt; dieser Begriff aber auch für andere Figuren genutzt.
Sind a und b die Katheten, so gilt für den Flächeninhalt des Kreissegments über a

$A = a^2/16\ (\pi + 2\sqrt{2})$

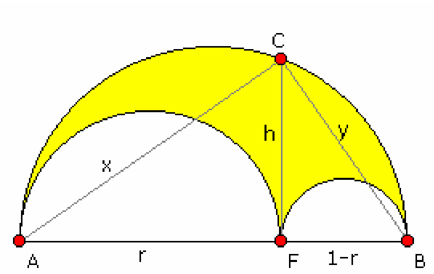
und analog für die Segmente bei b und c. Insgesamt ergibt sich für den Flächeninhalt des Kreisbogendreiecks $A = ab/2$ d.h. der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks!



Vesica Piscis, Fischblase

Als Vesica Piscis bzw. Fischblase bezeichnet man eine Figur, die durch die Überschneidung zweier Kreise gebildet wird. Dabei liegt der Mittelpunkt des zweiten Kreises auf der Kreislinie des ersten.
Insbesondere in der Spätgotik war die Fischblase weit verbreitet. Die einzeln oder gedoppelt und vervielfacht im Kreis rotierende Fischblase tritt auch häufig in der keltischen Kunst auf, die von ihren frühen Anfängen bis in die irische Buchmalerei des 19.Jahrhunderts zu finden ist.
In Indien nannte man die Figur Mandorla (Mandel). Sie ist auch in den frühen Zivilisationen Mesopotamiens, Afrikas und Asiens zu finden. Auch im Christentum wird dieser Figur eine besondere Rolle zugeschrieben.
In die Figur sind zwei gleichseitige Dreiecke eingeschrieben, die zu einem Rhombus zusammengesetzt sind. Der Längsdurchmesser der Vesica misst $\sqrt{3}$ = 1,7320… bei einem Kreisradius von 1 Maßeinheit.
Er lässt sich nach dem Pythagoreischen Lehrsatz errechnen, indem das Quadrat der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks $h^2 = 1^2 - (½)^2$ beträgt: $h^2 = 1-¼ = ¾$; $h = \sqrt{¾} = ½\ \sqrt{3}$. Die doppelte Länge ist dann $\sqrt{3}$.
Als Flächeninhalt eines der Dreiecke wird $\sqrt{3}$ / 4. Für die Fläche der Fischblase ergibt sich

$(4\pi - 3\ \sqrt{3}) / 6 = 1{,}2283696986…$



Arbelos ($\alpha\rho\beta\eta\lambda o\varsigma$ = Schustermesser)

Ist der Durchmesser des großen Halbkreises 1, so gilt für die Gesamtumfang L des Arbelos (gelbe Fläche)

$$L = \pi r + \pi(1-r) + \pi = 2\,\pi$$

d.h. der Umfang des großen Kreisbogens ist gleich der Summe der Umfänge der beiden eingeschriebenen

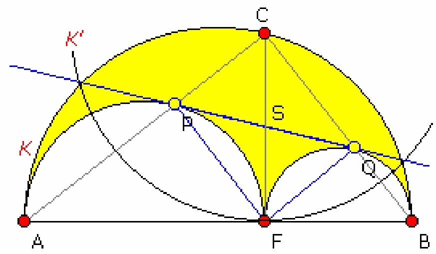
Flächeninhalt $A = \pi/4 \cdot r \cdot (l - r)$

Der Flächeninhalt ist gleich dem Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser CF bzw. einer Ellipse mit den Halbachsen r und 1-r.

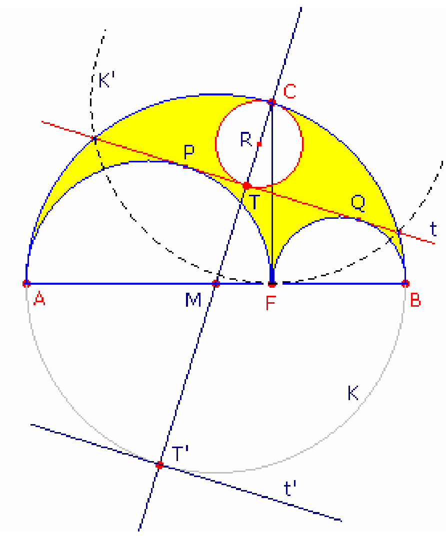
Ist AB = 1, so ist $x = AC = \sqrt{r}$, $y = CB = \sqrt{(1-r)}$ und die Höhe $h = CF = \sqrt{(r(1-r))}$.
Erstmals wurde das Arbelos von Archimedes untersucht.
siehe auch http://members.ozemail.com.au/~llan/arbelos.html
"... das Arbelos gehört zu den faszinierendsten Teilen der Geometrie ..." (Dr.Peter Woo, Biola-Universität)

Arbelosrechteck

Die Schnittpunkte P und Q der zwei eingeschriebenen Kreise mit den Strecken AC und BC sind ebenso die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangente der zwei Kreise. Diese Tangente halbiert die Strecke CF im Punkt S und ebenso die Strecke PQ.



Verbindet man P und Q mit dem Fußpunkt, so entsteht ein Viereck FQCP. Da S die Strecken CF und PQ halbiert und bei C ein rechter Winkel (Satz des Thales) liegt, ist dieses Viereck ein Rechteck, das Arbelosrechteck. Für einen Kreis K' mit dem Mittelpunkt in C durch den Punkt F sind die Punkte A, P bzw. B, Q paarweise invers. D.h. P und Q können durch Inversion der Punkte A und B am Kreis K' ermittelt werden.

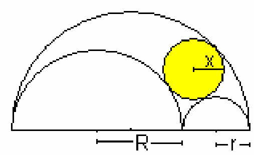


Arbelos-Tangentenkreis

Verbindet man an der Arbelos-Figur den Punkt C mit dem Kreismittelpunkt M des umschließenden Kreises K, so schneidet die Gerade die gemeinsame äußere Tangente der zwei kleinen Kreise in einem Punkt T.
Der mit dem Durchmesser CT eingezeichnete Kreis mit dem Mittelpunkt R ist der Arbelos-Tangentenkreis. Der Punkt T kann als Kreisinversionspunkt berechnet werden. Wird die Tangente t parallel so verschoben, dass sie Tangente an den Kreis K ist, so entsteht ein Berührungspunkt T'. T ist nun die Kreisinversion von T' an dem Kreis K' um C.
Setzt man AB = 1, AF = d und somit $FC = \sqrt{(d\,(1-d))}$, so ergibt sich weiterhin $CT = d(1 - d)$

Inkreis am Arbelos

Der Radius des Inkreises am Arbelos ist
$x = R\,r\,(R+r) / (R^2 + R\,r + r^2)$

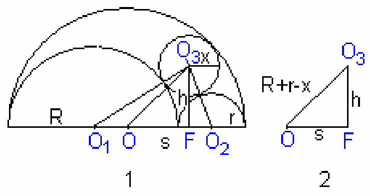


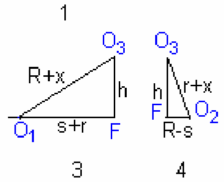
Herleitung der Formel: Man verbindet die Mittelpunkte und zeichnet das Lot des Mittelpunktes des Inkreises auf die Horizontale.
Es entstehen drei rechtwinklige Dreiecke, für die der Satz des Pythagoras gilt. Es ergeben sich drei Formeln zur Bestimmung von s, h und x:

$$(R + r - x)^2 = s^2 + h^2$$

$$(R + x)^2 = (s + r)^2 + h^2 \qquad (r + x)^2 = (R - s)^2 + h^2$$

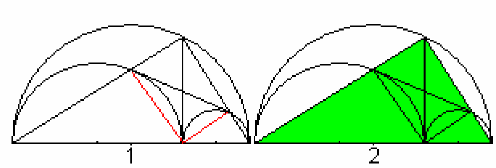
Das sind drei Gleichungen mit drei Variablen. Nach Umformung ergibt sich $x = R\,r\,(R + r) / (R^2 + Rr + r^2)$.

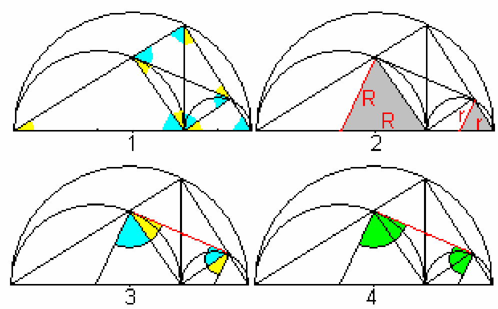




Dreieck am Arbelos

Das Dreieck am Arbelos ist das in der Abbildung grün gezeichnete Dreieck.
An der Zeichnung erkennt man schon, dass der Kreis des Archimedes die kleinen Halbkreise und die Katheten des Dreiecks an denselben Stellen schneidet. Zum Nachweis verbindet man diese Schnittpunkte mit dem Fußpunkt der Höhe (rot, Abbildung 1 oben).
Dann entstehen nach dem Satz des Thales drei rechtwinklige Dreiecke (Abbildungen 2,3 oben). Das grüne Viereck (Abbildung 4) ist ein Rechteck. Der Kreis des Archimedes ist auch der Umkreis dieses Rechtecks und die Diagonalen sind zwei Durchmesser. Dieser Kreis wird auch Sekantenkreis genannt.

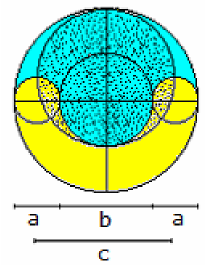




Die Höhe ist eine Diagonale des grünen Rechtecks. Die andere schräg liegende Diagonale ist ebenfalls interessant. Die Zeichnung zeigt, dass der schräg liegende Durchmesser auch ein Teilstück der gemeinsamen Tangente an die beiden kleinen Halbkreise ist.
Nachweis (Abbildungen unten):
(1) Die mit Gelb und Blau markierten Winkel sind nach elementaren Winkelsätzen gleich groß. Sie ergänzen sich zu 90°.
(2) Zeichnet man die Radien R und r ein, so entstehen gleichschenklige Dreiecke.
(3,4) Folglich setzen sich die grünen Winkel (4) aus zwei Winkeln (3) zusammen, die zusammen 90° ergeben. Es liegt eine Tangente vor, da die Radien Berührradien sind.

Salinon

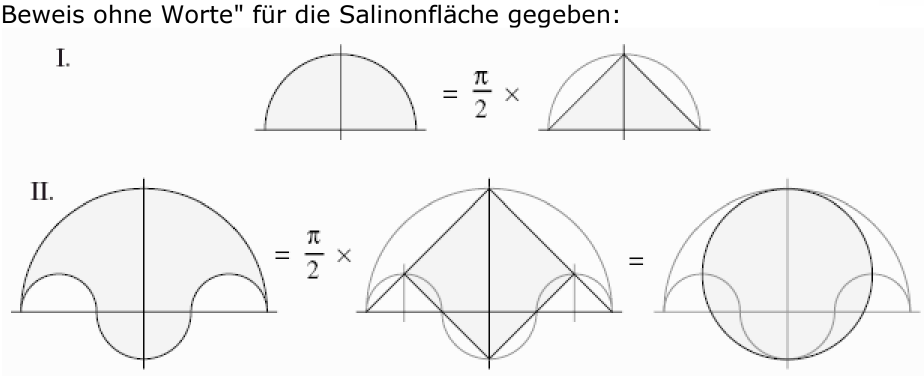
Eng verbunden mit dem Arbelos ist auch die Figur des Salinon, das "Salzfass des Archimedes"; in der Abbildung die gelbe Fläche. Archimedes gab als Erster in seinem "Buch der Sätze" den Inhalt der Fläche an.

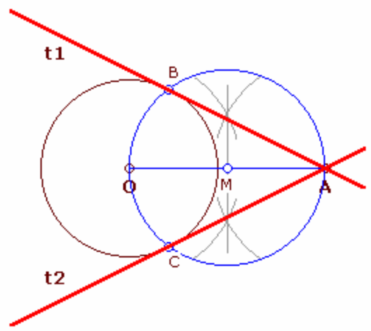


Der Inhalt der Fläche addiert sich aus dem eines halben Kreisrings

$$\tfrac{1}{2} (\pi (a+b/2)^2 - \pi b^2/4) = \pi/2 (a^2 + ab)$$

und den Inhalten zweier kongruenter Halbkreise des Radius a/2.
Insgesamt wird $A = \pi/4 (a+b)^2 = \pi/4 c^2$
d.h. der Flächeninhalt des Salinons ist gleich dem Flächeninhalt des Kreises mit dem Durchmesser c.
Wird der Kreisradius b gleich 0, so entsteht aus dem Salinon ein symmetrisches Arbelos mit dem Flächeninhalt $A = \pi/4 a^2$
Durch Roger B.Nelsen wurde im Mathematics Magazine (75, 2002, Seite 316) ein interessanter "Beweis ohne Worte" für die Salinonfläche gegeben:



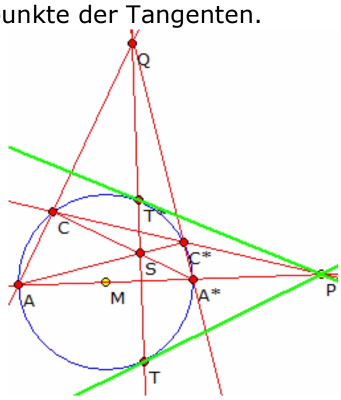


Tangentenkonstruktion an Kreis

Aufgabe: Von einem außerhalb eines Kreises liegenden Punkt A sind die Tangenten an den Kreis zu konstruieren.

Lösung:
1. der Mittelpunkt M der Strecke AO (O ... Mittelpunkt des Kreises) wird bestimmt.
2. um M wird ein Kreis gezeichnet, der A trifft und den Ausgangskreis in zwei Punkten C und B schneidet.
3. diese Punkte B und C sind die Berührungspunkte der Tangenten.
Grundlage dieser Konstruktion ist der Satz des Thales.

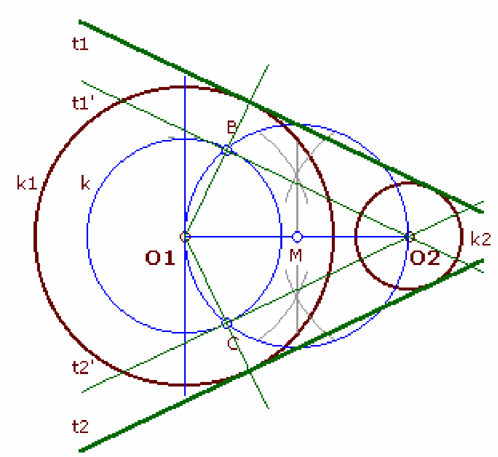
Wieland-Tangentenkonstruktion



Durch Woldeck Wieland wurde 1640 eine Möglichkeit angegeben, von einem Punkt P an einen Kreis um M die Tangenten zu konstruieren, ohne einen Zirkel benutzen zu müssen.
Dazu werden zwei Sekanten von P in den Kreis gezeichnet. Diese schneiden den Kreis in den Punkten A, A*, C, C*.
Verbindet man A mit C und A* mit C*, so schneiden sich die entstehenden Geraden im Allgemeinen in einem Punkt Q außerhalb des Kreises. Die Sehnen AC* und A*C schneiden sich im Kreisinneren im Punkt S.

Die Gerade durch Q und S schneidet dann den Kreis in den gesuchten Berührungspunkten T und T*. Von diesen aus sind die Tangenten nach P mit dem Lineal zu zeichnen.

Tangenten an zwei Kreise
Aufgabe: Es sind die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise zu konstruieren.
Lösung: 1. Die Kreise seien k_1, k_2, deren Mittelpunkte O_1, O_2 und deren Radien r_1, r_2, wobei r_1 größer oder gleich r_2 sei.
2. Schneiden sich beide Kreise gibt es nur zwei äußere Tangenten, haben sie keine Punkte gemeinsam zusätzlich zwei innere Tangenten

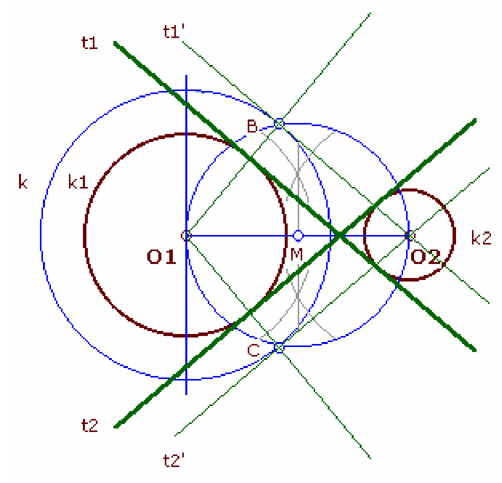


Äußere Tangenten
3. Verschiebt man die Tangenten so parallel, dass sie durch O_2 gehen, so würden sie einen Kreis um O_1 mit dem Radius $r_1 - r_2$ berühren
4. die gesuchten Tangenten konstruiert man damit als Tangenten an einen Kreis um O_1 mit dem Radius $r_1 - r_2$ und verschiebt sie parallel (siehe Tangentenkonstruktion)
Länge der Strecke zwischen den Berührungspunkten

$$l = \sqrt{a^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

a … Abstand O_1O_2, r_1 und r_2 Radien der beiden Kreise

Tangenten an zwei Kreise, Innere Tangenten
Aufgabe: Es sind die gemeinsamen inneren Tangenten zweier Kreise zu konstruieren.
Lösung:
1. Die Kreise seien k_1, k_2, deren Mittelpunkte O_1, O_2 und deren Radien r_1, r_2, wobei r_1 größer oder gleich r_2 sei.
2. Schneiden sich beide Kreise gibt es nur zwei äußere Tangenten, haben sie keine Punkte gemeinsam zusätzlich zwei innere Tangenten

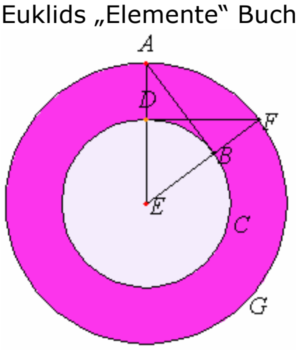


Innere Tangenten
3. Verschiebt man die Tangenten so parallel, dass sie durch O_2 gehen, so würden sie einen Kreis um O_1 mit dem Radius $r_1 + r_2$ berühren
4. die gesuchten Tangenten konstruiert man damit als Tangenten an einen Kreis um O_1 mit dem Radius $r_1 + r_2$ und verschiebt sie parallel (siehe Tangentenkonstruktion)
Berühren sich die beiden Ausgangskreis gibt es nur eine gemeinsame innere Tangente, deren Konstruktion einfach ist.
Länge der Strecke zwischen den Berührungspunkten

$$l = \sqrt{a^2 - (r_1 + r_2)^2}$$

a … Abstand O_1O_2, r_1 und r_2 Radien der beiden Kreise

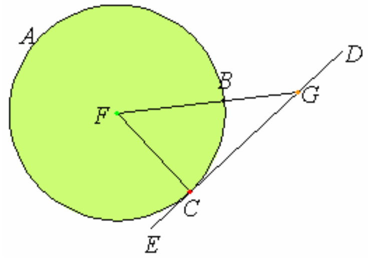
Euklids „Elemente" Buch III § 17 (A. 2):



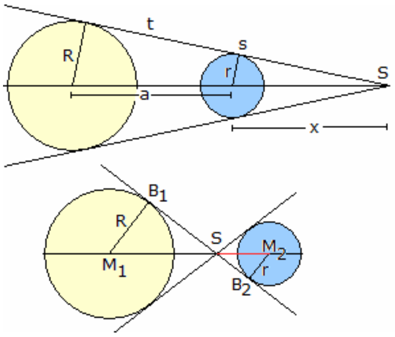
Von einem gegebenen Punkte aus an einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen.

Der gegebene Punkt sei A, der gegebene Kreis BCD. Man soll vom Punkte A an den Kreis BCD eine Tangente ziehen.
Man verschaffe sich den Kreismittelpunkt E (III, 1), ziehe AE und zeichne mit E als Mittelpunkt, EA als Abstand den Kreis AFG, ziehe ferner von D aus DF ⊥ EA und ziehe EF, AB. Ich behaupte, dass man vom Punkte A an den Kreis BCD eine Tangente gezogen hat, nämlich AB.
Da nämlich E Mittelpunkt der Kreise BCD, AFG ist, so ist EA = EF und ED = EB; mithin sind zwei Seiten AE, EB zwei Seiten FE, ED gleich; und sie umfassen einen gemeinsamen Winkel, den bei E; also ist Grundlinie DF = Grundlinie AB, Δ DEF = Δ EBA, und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln (I, 4); also ist ∠ EDF = EBA. EDF ist aber ein Rechter; also ist auch EBA ein Rechter. Und EB geht vom Mittelpunkt aus; eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkte aus gezogene gerade Linie berührt aber den Kreis (III, 16, Zus.); also berührt AB den Kreis BCD.
Man hat also von einem gegebenen Punkte A an einen gegebenen Kreis BCD eine Tangente gezogen, nämlich AB – dies hatte man ausführen sollen.

Euklids „Elemente" Buch III § 18 (L. 16):
Zieht man an einen Kreis eine Tangente, ferner vom Mittelpunkt aus eine gerade Linie zum Berührungspunkt, so muss die Verbindungsstrecke das Lot auf die Tangente sein.



Den Kreis ABC berühre nämlich eine gerade Linie DE im Punkte C; man verschaffe sich den Mittelpunkt F des Kreises ABC und ziehe von F nach C die Verbindungslinie FC. Ich behaupte, dass FC das Lot auf DE ist. Anderenfalls fälle man nämlich von F auf DE das Lot FG. Da dann $\angle$ FGC ein Rechter wäre, wäre FCG spitz (I, 17).Dem größeren Winkel liegt aber die größere Seite gegenüber (I, 19), also wäre FC > FG. Aber FC = FB; also wäre auch FB > FG, die kleinere Strecke (Axiom 8) größer als die größere; dies ist aber unmöglich. FG ist also nicht das Lot auf DE. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch keine andere Strecke außer FC es sein kann; also ist FC das Lot auf DE (I, 12) – S.



Tangenten an zwei Kreise, innere und äußere Tangenten

Aufgabe: Es sind die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise zu berechnen.

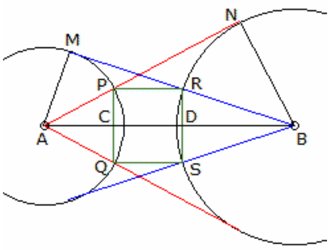
Gegeben seien die Radien R und r der Kreise und die Entfernung a ihrer Mittelpunkte. Dann ist x die Entfernung des Schnittpunktes der Tangenten vom Mittelpunkt des kleineren Kreises. Die Tangentenabschnitte sind s und s+t.
Für die äußeren Tangenten gilt

$x = ra / (R-r)$ $\qquad$ $s = r \sqrt{(a^2 - (R-r)^2)} / (R-r)$

$t = \sqrt{(a^2 - (R-r)^2)}$

Die Entfernung x ergibt sich aus dem zweiten Strahlensatz x : (a+x) = r : R. Für den Tangentenabschnitt s gilt nach dem Satz des Pythagoras $s^2 = x^2 - r^2$. Für die Entfernung t der Berührpunkte gilt wieder der zweite Strahlensatz s : (s+t) = r : R.
In Analogie zum Fall der äußeren Tangenten lassen sich die Längen der Strecken $x = SM_2$, $s = SB_2$ und $t = B_1B_2$ für die inneren Tangenten herleiten. Es gilt

$x = ra / (R+r)$ $\qquad$ $s = r \sqrt{(a^2 - (R+r)^2)} / (R+r)$ $\qquad$ $t = \sqrt{(a^2 - (R+r)^2)}$



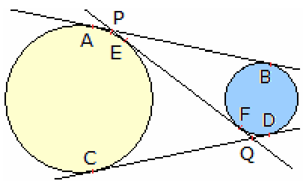
Augapfel-Satz

Gegeben seien zwei Kreise $C(A, R_A)$ und $C(B, R_B)$ mit dem Mittelpunkt A und dem Radius R_A sowie dem Mittelpunkt B und Radius R_B.
Die Tangenten von A an $C(B, R_B)$ schneiden den ersten Kreis in P und Q, die Tangenten von B an $C(A, R_A)$ den zweiten Kreis in R und S. Dann gilt PQ = RS, d.h. die Sehnen sind gleich lang.

Nachweis: C sei der Mittelpunkt von PQ. C liegt auf AB, d.h. das Dreieck Δ ACP ist rechtwinklig. Ebenso ist es ähnlich zum Dreieck Δ ANB.
Daraus ergibt sich $\qquad$ CP / AP = BN / AB, d.h.

$CP = R_A \cdot R_B / AB$, oder $PQ = 2 \cdot R_A \cdot R_B / AB$

Die Gleichung ist symmetrisch bezüglich A und B und somit $\quad RS = 2 \cdot R_A \cdot R_B / AB$. wzbw.
Quelle: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Eyeball.shtml#Explanation
Der Name des Satzes ergibt sich aus der Tatsache, dass die beiden Kreise als Augäpfel mit gleich großen Bildern gedeutet werden können.



Gleiche Tangentenabschnitte

Zeichnet man zwei äußere und eine innere Tangente an zwei Kreise, so entstehen auf der inneren Tangente zwei gleiche Tangentenabschnitte, d.h. PE = QF.

Nachweis: Es gilt für die äußeren Tangenten AB = CD oder AP + PB = CQ + QD. Die Tangentenabschnitte AP und PB außen sind gleich den Tangentenabschnitten PE und PF innen. Die Tangentenabschnitte QD und CQ außen sind gleich den Tangentenabschnitten QF und QE innen.
Somit kann man die äußeren Tangentenabschnitte durch die inneren ausdrücken

AB = PE+PF und CD = QF+QE.

Mit AB = CD ergibt sich $\qquad$ PE+PF = QF+QE
Da PF = PE+EF und QE = QF+FE gelten, ist $\qquad$ PE+EF = QF+FE oder PE = QF, wzbw.
Quelle: http://www.math4u.de/

Kreiskonstruktionen

In zwei verloren gegangenen Büchern "De Tactionibus" beschrieb Apollonius von Perga das nach ihm benannte Berührungsproblem: "Aus drei gegebenen Stücken (Punkte, Geraden, Kreise) sind alle berührenden Kreise zu konstruieren". D.h.:
Ein Kreis kann durch Angabe verschiedener Stücke (Punkt P, Gerade g, Kreis K) eindeutig bestimmt werden. Man unterscheidet 10 verschiedene Konstruktionsaufgaben:
Der Kreis ist gegeben durch ...

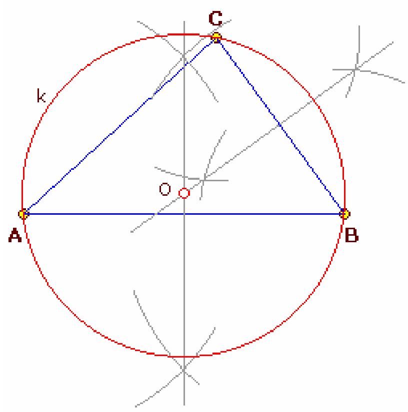
1. drei Punkte (PPP)
2. zwei Punkte und eine Gerade (PPG)
3. ein Punkt und zwei Geraden (PGG)
4. drei Geraden (GGG)
5. zwei Punkte und ein Kreis (PPK)
6. ein Punkt, eine Gerade und ein Kreis (PGK)
7. ein Punkt und zwei Kreise (PKK)
8. zwei Geraden und ein Kreis (GGK)
9. eine Gerade und zwei Kreise (GKK)
10. drei Kreise (KKK)

Der Fall (KKK) wird das spezielle Berührungsproblem des Apollonius genannt. Lässt man auch entartete Kreise, also Geraden und Punkte zu, so gehören alle genannten Möglichkeiten zu diesem Berührungsproblem.

Anzahl der Lösungen beim Berührungsproblem des Apollonius

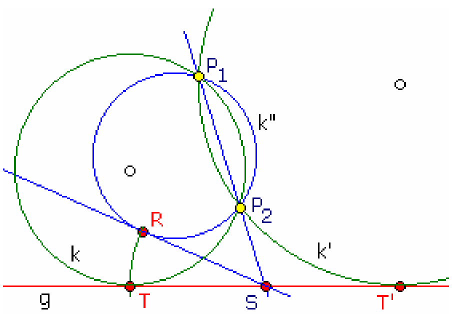
gegeben	Bedingung	Anzahl der Lösungen
P_1, P_2, P_3	Punkt nicht kollinear	1
	Punkte kollinear	0
P_1, P_2, g	$P_1, P_2 \notin g$; $h(P_1,P_2)$ und g nicht parallel	2
	$P_1, P_2 \notin g$; $h(P_1,P_2)$ und g parallel	1
	genau ein Punkt auf g	1
	beide Punkte auf g	0
	beide Punkte in unterschiedlichen Halbebenen	0
P, g_1, g_2	P nicht auf einer Geraden; g_1 und g_2 nicht parallel	2
	P zwischen beiden Geraden; g_1 und g_2 parallel	2
	P auf genau einer Geraden	1
	P ist Schnittpunkt vong$_1$ und g_2	0
	P nicht zwischen beiden Geraden; g_1 und g_2 parallel	0
g_1, g_2, g_3	3 Schnittpunkte der drei Geraden	4
	genau zwei Geraden parallel	2
	alle drei Geraden parallel	0
	nur ein Schnittpunkt der drei Geraden	0

Kreis durch drei Punkte



Konstruktionsaufgabe: Es ist ein Kreis zu konstruieren, auf dem drei gegebene Punkte A, B und C liegen. Die drei Punkte liegen nicht auf einer Geraden.
Lösung:
1. die drei Punkte bilden ein Dreieck ABC, womit der gesuchte Kreis der Umkreis des Dreiecks ist
2. der Kreismittelpunkt O zerlegt das Dreieck ABC in drei gleichschenklige Dreiecke AOB, BOC, COA.
3. der Punkt O liegt auf den Mittelsenkrechten der Basen AB, BC und CA
4. damit ist O der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken AB und BC

Die verwandte Aufgabe, von einem durch 3 Punkte gegebenen Kreis den Mittelpunkt zu konstruieren, behandelt erstmals Euklid im III.Buch der "Elemente" §1 (A. 1).

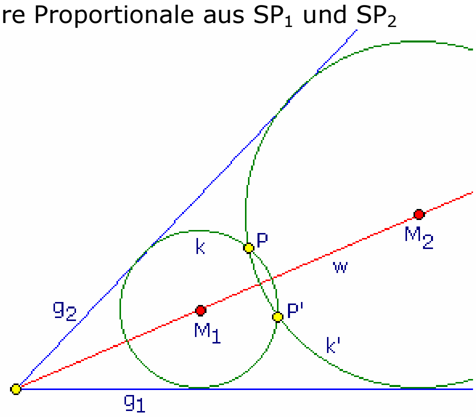


Kreis durch zwei Punkte und an eine Gerade (PPG)

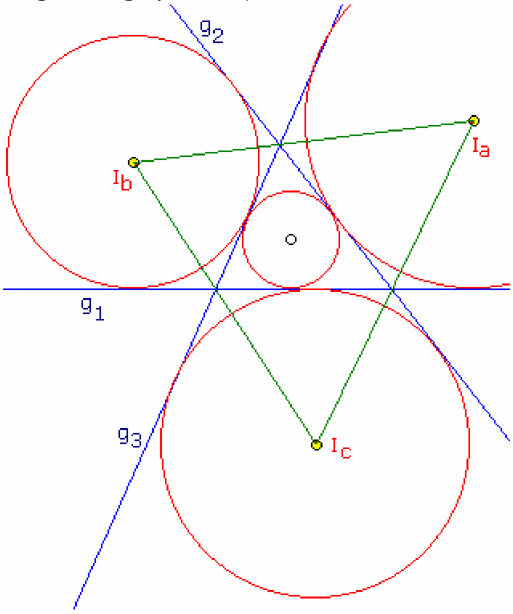
Konstruktionsaufgabe: Es ist ein Kreis zu konstruieren, auf dem zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 liegen und der eine Gerade g berührt.
Lösung:
1. P_1 und P_2 müssen in der selben Halbebene bezüglich g liegen
2. berührt der Kreis die Gerade im Punkt T, so gilt nach dem Sehnen-Tangenten-Satz $SP_1 * SP_2 = ST^2$
3. ST ist damit die mittlere Proportionale aus SP_1 und SP_2
4. an einen beliebigen Kreis k" durch P_1 und P_2 wird von S auf g die Tangente konstruiert
5. die Strecke RS wird dann von S auf g abgetragen. Im Ergebnis entstehen zwei Berührungspunkte T und T'
6. anschließend sind die zwei Lösungskreise nach dem Verfahren Kreis durch drei Punkte zu konstruieren

Kreis durch ein Punkt und an zwei Geraden (PGG)

Konstruktionsaufgabe: Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch einen Punkt P gehen und zwei Geraden g_1 und g_2 berührt.
Lösung:



1. im Allgemeinen seien g_1 und g_2 nicht parallel; w ist weiterhin die Winkelhalbierende der beiden Geraden
2. dann liegt aus Symmetriegründen der Spiegelpunkt P' von P an w auch auf den gesuchten Kreisen
3. damit ist das Problem auf die Kreiskonstruktion PPG zurückgeführt
4. liegt P auf der Winkelhalbierenden, so ist die Senkrechte in P zu w Tangente der gesuchten Kreise, das führt zum klassischen Berührungsproblem des Apollonius, der Konstruktion von Inkreis und den drei Ankreisen eines Dreiecks
5. g_1 und g_2 parallel, so muss die Winkelhalbierende durch die Mittelparallele ersetzt werden



Kreis drei Geraden berührt (GGG)

Konstruktionsaufgabe: Es ist ein Kreis zu konstruieren, der drei Geraden g_1, g_2 und g_3 berührt.

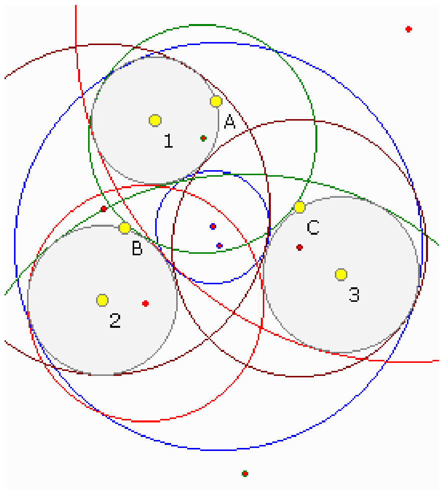
Lösung: 1. schneiden sich die drei Geraden in drei Punkten, so entsteht ein Dreieck
2. die gesuchten Kreise sind dann der Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks
3. der Inkreismittelpunkt ergibt sich als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Innenwinkel des Dreiecks
4. die Ankreismittelpunkte sind die paarweisen Schnittpunkte der Winkelhalbierenden der Außenwinkel
5. sind zwei der Geraden parallel enstehen nur zwei Kreise

Apollonius-Problem

Allgemeines Apollonius-Problem:
Gegeben sind drei Kreise. Gesucht sind alle Kreise, die jeweils die drei Ausgangskreise berühren.
Schneiden sich die drei Kreise nicht, so existieren genau 8 Lösungen. Diese ergeben sich als Lösungen des Gleichungssystems:

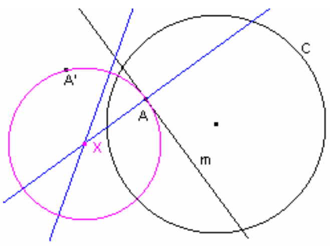
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0$$
$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 = 0$$
$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 = 0$$

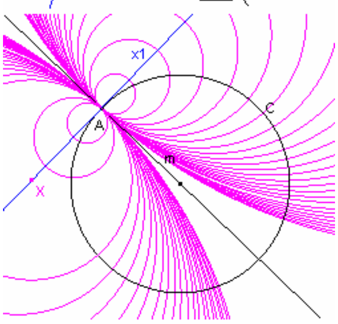
Mit $a = 2\,(x_1 - x_2)$ $b = 2\,(y_1 - y_2)$ $c = \pm 2(r_1 - r_1)$
$d = (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 - r_2^2)$
und a', b', c' und d' bei Ersetzung aller Indizees 2 durch 3 ergeben sich
$x = (b'\,d - b\,d' - b'\,c\,r + b\,c'\,r) / (a\,b' - b\,a')$
$y = (-a'\,d + a\,d' + a'\,c\,r - a\,c'\,r) / (a\,b' - b\,a')$
und bei Einsetzen in die Ausgangsgleichungen die Radien der Apollonius-Kreise.
Hat das Berührungsproblem des Apollonius für drei Kreise eine Lösung, so kann diese auch konstruktiv ermittelt werden.



Man konstruiert den Potenzmittelpunkt und die vier Ähnlichkeitsachsen dieser Kreise und bestimmt die Pole der Ähnlichkeitsachsen in bezug auf die gegebenen Kreise.
Nun legt man durch den Potenzmittelpunkt und je einen dieser Pole Geraden.
Besitzt die Aufgabe acht Lösungen, so schneidet jeder dieser Geraden den Kreis, der den Ppol, durch den sie gelegt wurde, bestimmt, in zwei Punkten. Auf diese Weise sind jeder Ähnlichkeitsachse sechs Punkte zugeordnet. Je drei davon bestimmen einen der gesuchten Kreise.

Hat die Aufgabe weniger als acht Lösungen, so erkennt man das bei der Konstruktion an der Tatsache, dass nicht alle der Geraden zwei Schnittpunkte mit den entsprechenden Kreisen haben.



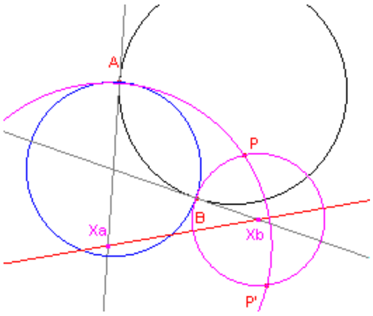


Senkrecht schneidende Kreise

Satz: Durch einen Punkt A auf einer Geraden m verläuft im Allgemeinen genau ein Berührungskreis, der einen zweiten Kreis C senkrecht schneidet.
Sonderfälle: die Gerade m verläuft durch den Mittelpunkt von C

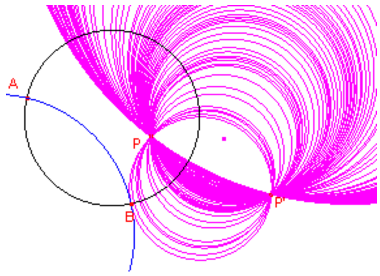
Nachweis:
Der Ort aller Mittelpunkte der gesuchten Kreise, die m tangieren, ist die Senkrechte x_1 in A zu m. Der Ort aller Mittelpunkte von Kreisen durch A die C senkrecht schneiden, ist die Mittelsenkrechte x_2 von AA', wobei A' das

Inversionsbild von A bezüglich Kreis C ist. Der Schnittpunkt von x_1 und x_2 ist der Mittelpunkt X des gesuchten Kreises.
Sonderfälle: Verläuft m durch den Mittelpunkt von C und liegt A nicht auf der Kreisperipherie, so werden x_1 und x_2 parallel. Damit gibt es keinen Schnittpunkt und keinen Kreis.
Liegt A zusätzlich auf dem Kreis C, so existieren unendlich viele der gesuchten Kreise. (siehe untere Abbildung)

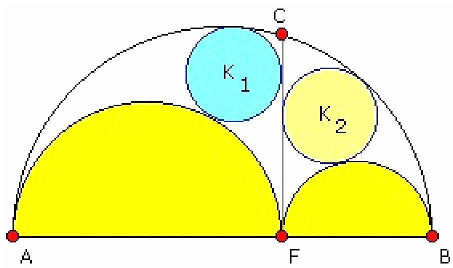


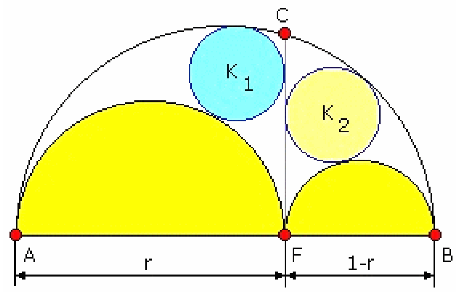
Weiterhin gilt: Wenn zwei sich tangierende Kreise von einem dritten Kreis senkrecht geschnitten werden, so liegt der Tangentialpunkt auf diesem dritten Kreis.

Durch einen Punkt P außerhalb eines Kreises, der senkrecht zu einem anderen Kreis ist, verlaufen im Allgemeinen zwei orthogonale Kreise, die den Ausgangskreis tangieren.
Sollte die Gerade durch PP' zu der Tangente im Punkt A parallel sein, so entartet der tangierende Kreis in A zu einer Geraden durch A und P.
Daraus folgt:
Gegeben sei ein Punkt P außerhalb eines Kreises, der durch zwei Punkte A und B verläuft. Ein zweiter Kreis durch A und B schneidet den Ausgangskreis senkrecht. Dann existieren unendlich viele zum zweiten Kreis orthogonale Kreise durch P, die den Ausgangskreis nicht schneiden.
Dieser hier in der Euklidischen Geometrie gefundene Satz ist die Grundlage für die Definition der Parallelität von „Geraden" im Poincaré-Modell einer nicht-euklidischen Geometrie.



Archimedische Kreise, Zwillingskreise des Archimedes





Konstruktion: Über dem Durchmesser eines Kreises werden Halbkreise gezeichnet, so dass ein Arbelos entsteht.
Errichtet man die Senkrechte auf dem Durchmesser am Berührungspunkt der zwei Halbkreise, so existieren zwei Kreise K_1 und K_2 für welche gilt:
1. beide Kreise berühren die Senkrechte, die zwei kleinen Halbkreis und den Ausgangshalbkreis
2. beide Kreise sind kongruent
Diese Kreise werden als Archimedische Kreise bezeichnet. Der Radius der Kreise ist gleich (AB)(BC)/(AC) und für AC = 1 und AB = r somit

$$R=r/2\ (1-r).$$

Bezogen auf den Punkt A hat der Mittelpunkt des Kreises K_1 die Koordinaten

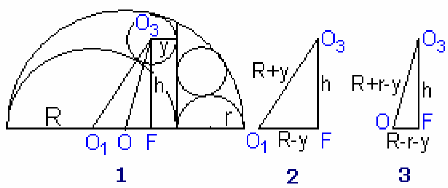
$$x_1 = r - R = r/2\ (1+r)$$
$$y_1 = \sqrt{(2rR)} = r\ \sqrt{(1-r)}$$

und der zweite Kreis

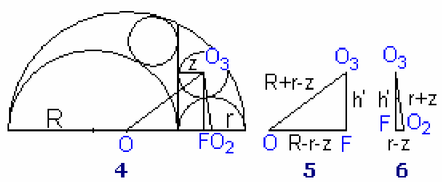
$$x_2 = r + R = r/2\ (3-r)$$
$$y_2 = \sqrt{(2R\ (1-r))} = (1-r)\ \sqrt{r}$$

Herleitung der Gleichungen der Archimedischen Kreise

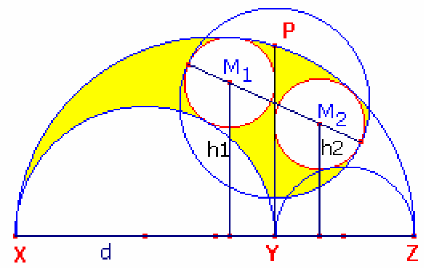
Linker Archimedischer Kreis:
Man verbindet die Mittelpunkte und zeichnet das Lot des Mittelpunktes des Inkreises auf den Durchmesser. Es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, für die der Satz des Pythagoras gilt.
Es ergeben sich zwei Formeln zur Bestimmung von y und h:
$(R + y)^2 = h^2 + (R - y)^2$
$(R + r - y)^2 = h^2 + (R - r - y)^2$
Man eliminiert h und erhält $y = R\ r\ /(R + r)$.
Für h ergibt sich aus der Abbildung 2:
$h = \sqrt{(4\ R\ y)} = \sqrt{(4\ R^2\ r\ /\ (R + r))}$



Rechter Kreis:
Abbildungen 4 bis 6. Man verbindet die Mittelpunkte und zeichnet das Lot des Mittelpunktes des Inkreises auf den Durchmesser. Es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, für die der Satz des Pythagoras gilt. Es ergeben sich zwei Formeln zur Bestimmung von y und h':



$(r + z)^2 = h'^2 + (r - z)^2$ $\qquad$ $(R + r - z)^2 = h'^2 + (R - r - z)^2$
Man eliminiert h' und erhält wieder $z = R\ r\ /(R + r)$. Die beiden Zwillingskreise sind also gleich groß. Für h' ergibt sich $\quad h' = \sqrt{(4\ r\ z)} = \sqrt{(4\ R\ r^2\ /(R + r))}$



Archimedische Kreise, Zwillingskreise des Archimedes

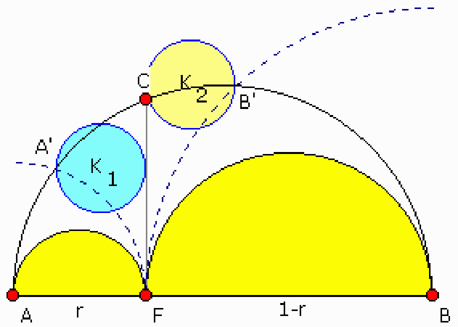
Die zwei Archimedischen Kreise haben die Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie den gleichen Radius R. Die Mittelpunkte seien h_1 und h_2 von der Grundlinie entfernt und XY = d.
Es existiert ein kleinster Kreis, der beide archimedische Kreise umfasst und damit einen Durchmesser besitzt auf dem M_1 und M_2 liegen. Es gilt:

$$(h_1 - h_2)^2 = d^2 (1 - d) + (1 - d)^2 d - 2 d (1 - d) \sqrt{d (1 - d)} =$$
$$= 2 R d + 2 R (1 - d) - 4 R \sqrt{2R} = 2 R - 4 R \sqrt{2R}$$

$$M_1M_2^2 = (h_1 - h_2)^2 + 4 R^2 = 2 R (1 - 2 \sqrt{2R} + 2R) = 2 R (1 - \sqrt{2R})^2$$

Damit hat der kleinste umgeschriebene Kreis den Durchmesser

$$M_1M_2 + 2 R = (1 - \sqrt{2R}) \sqrt{2R} + 2R = \sqrt{2R} = \sqrt{d (d-1)} = PY$$



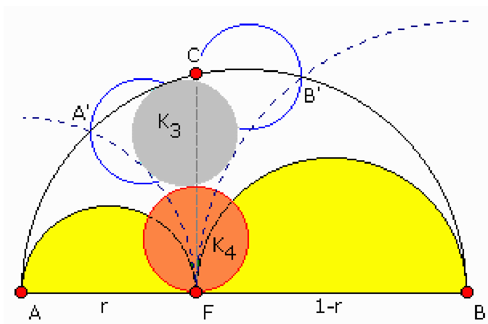
Zeichnet man die Kreise durch A mit dem Radius AF und durch B mit dem Radius FB ein, so schneiden diese den Halbkreis über AB in den Punkten A' und B'.
Die Kreise K_1 und K_2, die nun die Höhe FC berühren und durch die Punkte A' und B' verlaufen, haben den gleichen Radius wie die Archimedischen Zwillingskreise.

$$\text{Radius } R = 1/2\ r\ (1-r)$$

Ihre Mittelpunkte haben die Koordinaten (bzgl.A)

$$x_1 = 1/2\ r\ (r + 1) \qquad y_1 = r \sqrt{1 - r^2}$$
$$x_2 = 1/2\ r\ (r - 3) \qquad y_2 = (1- r) \sqrt{r (2 - r)}$$

Archimedische Kreise mit Apollonius-Kreis



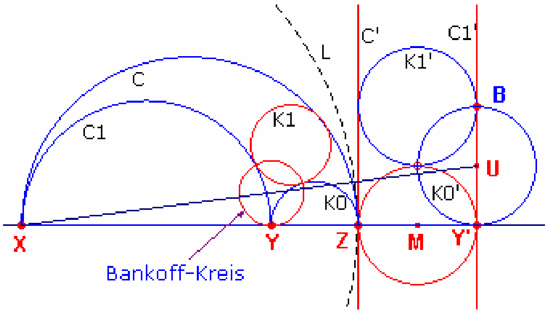
Zeichnet man die Kreise durch A mit dem Radius AF und durch B mit dem Radius FB ein, so schneiden diese den Halbkreis über AB in den Punkten A' und B'. Der Apollonius-Kreis K_3 der nun den Halbkreis über AB und die Kreisbögen FA' und FB' berührt hat dann ebenfalls die gleichen Radius wie die Archimedischen Zwillingskreise.

$$\text{Radius } R = 1/2\ r\ (1-r)$$

Der Mittelpunkt des Kreises K_3 liegt bei (bzgl.A)

$$x_3 = 1/2\ r\ (1 + 3r - 2r^2)$$
$$y_3 = r (1 - r) \sqrt{(2 - r) (1 + r)}$$

Der kleinste Kreis K_4 (Apollonius-Kreis), welcher durch F verläuft und den Kreis K_3 berührt, hat ebenfalls den Radius der Archimedischen Zwillingskreise.
Der Kreis K_4 wird Bankoff-Kreis genannt.



Bankoff-Kreis

Der Bankoff-Kreis entsteht, wenn ein Kreis um U der die Gerade XZ bei Y' berührt an dem Kreis um X mit dem Radius XZ invertiert wird.
Der Bankoff-Kreis geht dabei durch die Berührungspunkte von K_1 mit K_0 und K_1 mit C_1. Für den Radius des Bankoff-Kreises ergibt sich:

$$XB = m = XU^2 - r^2 = (1+2r)^2 + r^2 - r^2 = (1 + 2r)^2$$

Da weiterhin $2r = (1 - d) / d$ gilt:

$$f = 1/m = 1/(1+ 2r)^2 = d^2$$

und somit ist der Durchmesser des Kreises um U gleich

$$d^2 * (1 - d) / d = d(1 - d)$$

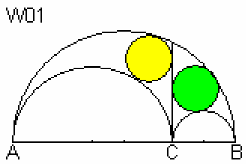
Der Bankoff-Kreis hat damit den gleichen Radius wie die zwei Archimedischen Zwillingskreise.

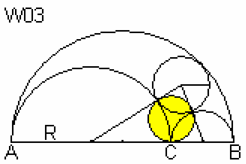
Familie der Archimedischen Zwillinge

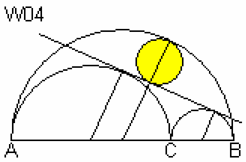
In der Figur des Arbelos gibt es erstaunlicherweise noch viele den Archimedischen Kreisen gleich große Kreise, die erst vor gar nicht langer Zeit gefunden wurden.
Die Suche wurde in einem Artikel von "Mathematics Magazine" unter Federführung von Clayton W.Dodge dokumentiert. Es gibt mindestens 29 Kreise neben unendlichen Kreisfolgen. Die Bezeichnungen W01, W02, W03, ... gehen auf diesen Artikel zurück. W01 und W02 sind die ursprünglichen Archimedischen Kreise.

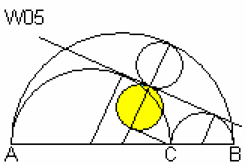
Der Kreis W03 ist der Inkreis des Dreiecks, das aus den Mittelpunkten von drei Kreisen gebildet wird, nämlich dem Inkreis des Arbelos und den Halbkreisen über AC und CB. W01, W02 und W03 heißen Bankoffs Tripel.

Man zeichnet die gemeinsame Tangente an die Halbkreise über AC und BC. Es entsteht ein Kreisabschnitt, in dem ein größter Kreis W04 passt. W01, W02, W03 und W04 heißen Bankoffs Quadrupel.

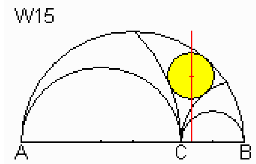




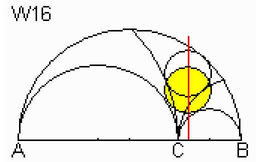




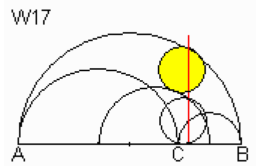
Zeichnet man durch den Mittelpunkt des Kreises über AB eine Senkrechte zur gemeinsamen Tangente, so liegt auf dieser Geraden der Mittelpunkt eines Zwillingskreises W05, der den Kreis W04 berührt. W05 ist ein Dodge-Kreis.



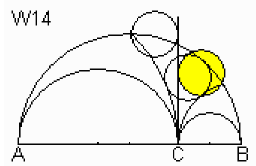
Man zeichnet um den Punkt A einen Kreis mit dem Radius AC und um Punkt B mit dem Radius BC. Man zeichnet einen Kreis W15, der diese beiden Kreise berührt. Zusätzlich berührt er auch den Halbkreis über AB. W15 ist ein Schoch-Kreis.
Die rote vertikale Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises W15 heißt Schoch-Gerade. Sie wird bei den beiden nächsten Kreisen verwendet.



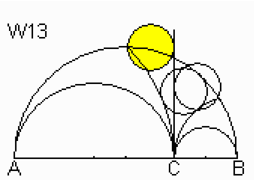
Man zeichnet einen Kreis W16, der die beiden Halbkreise über AC und CB berührt und dessen Mittelpunkt auf der Schoch-Geraden liegt. W16 ist ein Schoch-Kreis.



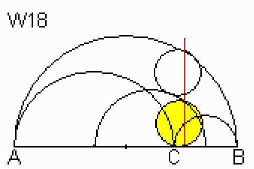
Man gibt einen Halbkreis vor, der über den beiden Mittelpunkten von AC und CB liegt. Man zeichnet dann einen Kreis W17, der diesen Halbkreis berührt und durch den Schnittpunkt der Schoch-Geraden mit dem Halbkreis über AB geht. W17 ist ein Schoch-Kreis.



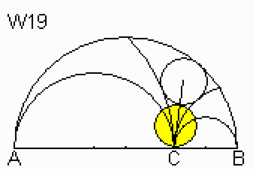
Man zeichnet um Punkt B einen Kreis mit dem Radius BC. Weiter zeichnet man durch den Schnittpunkt dieses Kreises um B mit dem Kreis über AB einen Kreis W14, der die Vertikale durch C berührt. W14 ist ein Schoch-Kreis.



Man zeichnet um den Punkt A einen Kreis mit dem Radius AC. Weiter zeichnet man durch den Schnittpunkt dieses Kreises um A mit dem Kreis über AB einen Kreis W13, der die Vertikale durch C berührt. W05 ist ein Schoch-Kreis.

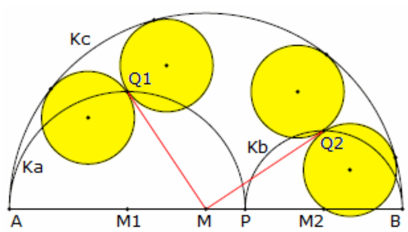


Man gibt einen Halbkreis vor, der über den beiden Mittelpunkten von AC und CB liegt. Man zeichnet dann einen Kreis durch den Fußpunkt der Höhe, dem Schnittpunkt der Schoch-Geraden mit dem oben beschriebenen Halbkreis und durch Punkt C. W18 ist ein Schoch-Kreis.



Man zeichnet eine Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises W15 und den Berührpunkt C. Dann zeichnet man einen Kreis W19, dessen Mittelpunkt auf dieser Verbindungslinie liegt und der durch Punkt C verläuft. W19 ist ein Schoch-Kreis.
Martin Gardner schrieb 1979 über Bankoffs Tripel. Das inspirierte den damaligen Studenten Thomas Schoch aus Essen weitere Kreise zu entdecken. Er schickte seine Ergebnisse Gardner, der sie weitergab, weil er nicht Deutsch verstand. Erst 1996 erhielt Clayton W. Dodge eine Kopie dieser Arbeit. Er erkannte die Qualität und fand einige Kreise wieder, die er unabhängig von Schoch entdeckt hatte. Er benannte die Kreise nach dem ersten Entdecker Schoch.

Familie der Archimedischen Zwillinge, Power-Kreise

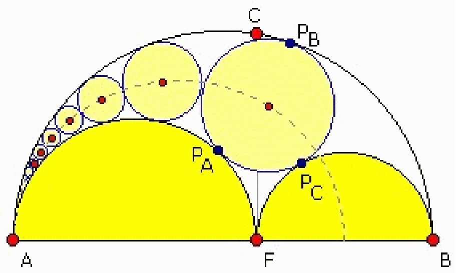


Es seien a und b die Radien der zwei Kreise K_a und K_b, die die Figur des Arbelos bilden. Alle Kreise mit einem Radius

$$r = ab / (a+b)$$

werden als Archimedische Kreise bezeichnet. Durch Frank Power wurden 2005 in "Some more Archimedean circles in the arbelos" neue, derartige Kreise beschrieben.
Dazu seien Q_1 und Q_2 die zwei höchsten Punkte der Kreise K_a und K_b.
Die vier Kreise, die den Außenhalbkreis K_c und die Strecken Q_1M bzw. Q_2M berühren sind ebenfalls archimedisch und werden Archimedische Power-Kreise genannt.

Kreise des Pappus, Pappus-Reihe



...nach Pappus von Alexandria; Buch IV der "Collectio":
Gegeben ist ein Halbkreis und in diesem ein Arbelos.
Unter einer Pappus-Reihe versteht man nun eine Folge von Kreisen, die derart in das Arbelos eingefügt werden, dass sie sowohl das Arbelos als auch den vorhergehenden Pappus-Kreis berühren. Diese Reihe existiert immer und ist unendlich, wenn gleich die Radien der Kreise gegen 0 konvergieren.
Ist r das Verhältnis von Durchmesser des linken Halbkreises zum Gesamtdurchmesser, so gilt für die Mittelpunkte und Radien der Pappus-Kreise:

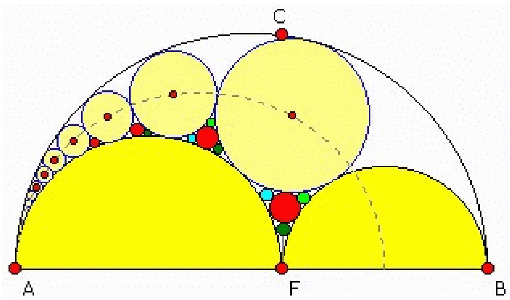
$x_n = r (1 + r) / [2 (n^2 (1-r)^2 + r)]$ $\qquad$ $y_n = n r (1 - r) / [n^2 (1-r)^2 + r]$

$r_n = (1 - r) r / [2 (n^2 (1-r)^2 + r)]$

Die Mittelpunkte der Pappus-Kreise liegen auf einer Ellipse mit den Halbachsen $(1 + r)/4$ und $1/2 \sqrt{r}$
Diese Tatsache war schon Pappus von Alexandria bekannt.
http://mathworld.wolfram.com/PappusChain.html

Kreise des Pappus, Pappus-Kreis

Der größte Kreis der Pappus-Reihe, der eigentliche Pappus-Kreis, berührt die unteren Kreise des Arbelos und den großen Halbkreis in drei Punkten P_A, P_B und P_C. Ist r das Verhältnis von Durchmesser des linken Halbkreises zum
Gesamtdurchmesser, so gilt für deren Koordinaten:



$x_A = r / (1 - r)^2$ $\qquad$ $y_A = r (1 - r) / (1 - r)^2$

$x_B = r (1 + r) / (1 + r^2)$ $\qquad$ $y_B = r (1 - r) / (1 + r^2)$

$x_C = r^2 / (1 - 2r + 2r^2)$ $\qquad$ $y_C = r (1 - r) / (1 - 2r + 2r^2)$

Erweiterte Pappus-Kreise

Zwischen den Halbkreisen des Arbelos und den Kreisen der Pappus-Reihe können Apollonius-Kreise, d.h. Kreise die 3 Kreise berühren, eingetragen werden. Ist r das Verhältnis von Durchmesser des linken Halbkreises zum Gesamtdurchmesser, so gilt für die Koordinaten dieser erweiterten Pappus-Kreise 1.Stufe:

$x_n = r (7 + r) / (2 p)$ $\qquad$ $y_n = 2 (2n - 1) r (1 - r) / p$ $\qquad$ $r_n = r (1 - r) / (2 p)$

Parameter $\quad p = 4 + 4n (n - 1)(1 - r)^2 + r (r - 1)$

Mit diesen erweiterten Kreisen können Apollonius-Kreise höherer Ordnung konstruiert werden. Für die jeweils 3 entstehenden Kreise 2.Stufe gilt:

$x_{n,1} = r (17 + r) / (2 p)$ $\qquad$ $y_{n,1} = 3 (3n - 2) r (1 - r) / p$ $\qquad$ $r_{n,1} = r (1 - r) / (2 p)$

mit Parameter $p = 12 + 3n (3n - 4)(1 - r)^2 + r (4r - 7)$

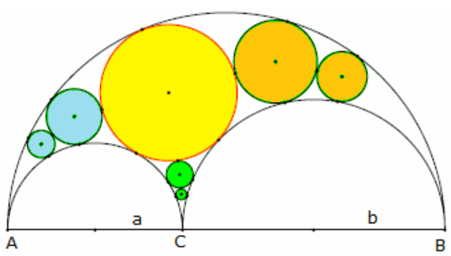
$x_{n,2} = r (17 + r) / (2 p)$ $\qquad$ $y_{n,2} = 3 (3n - 1) r (1 - r) / p$ $\qquad$ $r_{n,2} = r (1 - r) / (2 p)$

mit Parameter $p = 9 + 3n (3n - 2)(1 - r)^2 - r (1 - r)$

$x_{n,3} = r (17 + 7r) / (2 p)$ $\qquad$ $y_{n,3} = 6 (2n - 1) r (1 - r) / p$ $\qquad$ $r_{n,3} = r (1 - r) / (2 p)$

mit Parameter $p = 9 + 12n (n - 1)(1 - r)^2 + r (4r - 1)$

Pappus-Kreisreihen



Zeichnet man am Arbelos die Pappus-Kreise ein, so ergeben sich drei Reihen von Kreisen, die vom gemeinsamen Kreis, dem Arbelosinkreis (in der Abbildung gelb), nach links, nach rechts und nach unten streben. Zwischen diesen Kreisreihen bestehen Beziehungen.
Es sei 2a der Durchmesser des Halbkreises AC, 2b der Durchmesser des Halkreises CB und r = a+b der Radius des äußeren Kreises.
Die Kreisreihe in Richtung C sei K_r, in Richtung A K_b und in Richtung B K_a. Dann gilt für die Radien der n-ten Kreise

K_r: $\quad r_{rn} = rab / (n^2r^2 - ab)$ $\qquad$ $x_{rn} = ab (a-b) / (n^2r^2 - ab)$ $\qquad$ $y_{rn} = 2nr\, ab / (n^2r^2 - ab)$

K_a: $\quad r_{an} = rab / (n^2a^2 + rb)$ $\qquad$ $x_{an} = 2b - rb (r+b) / (n^2a^2 + rb)$ $\qquad$ $y_{an} = 2nr\, ab / (n^2a^2 + rb)$

K_b: $\quad r_{bn} = rab / (n^2b^2 + ra)$ $\qquad$ $x_{bn} = -2a - ra (r+a) / (n^2b^2 + ra)$ $\qquad$ $y_{bn} = 2nr\, ab / (n^2b^2 + ra)$

Für den (gelben) Arbelosinkreis ergibt sich als Radius $\qquad r_i = rab / (a^2 + ab + b^2)$

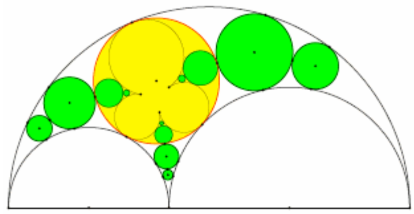
Dann gilt nach Giovanni Luca ("Three Pappus Chains Inside the Arbelos", 2007)

$$r_i (1/r_{rn} + 1/r_{an} + 1/r_{bn}) = 2n^2 +1$$
$$r_i^2 (1/r_{rn}^2 + 1/r_{an}^2 + 1/r_{bn}^2) = 2n^4 +1$$
$$r_i^2 (1/r_{rn}\, 1/r_{an} + 1/r_{an}\, 1/r_{bn} + 1/r_{bn}\, 1/r_{rn}) = n^4 +2n^2$$

Die drei Pappus-Reihen am Arbelos können auch am größten Kreis, den (gelben) Arbelosinkreis, invertiert werden.
Für den Arbelosinkreis erhält man, mit 2a als Durchmesser des Halbkreises AC und 2b als der Durchmesser des Halkreises CB,als Radius und Koordinaten

$r_i = rab / (a^2 + ab + b^2)$ $x_i = ab\,(a-b) / (a^2 + ab + b^2)$ $y_i = 2ab\,(a+b) / (a^2 + ab + b^2)$

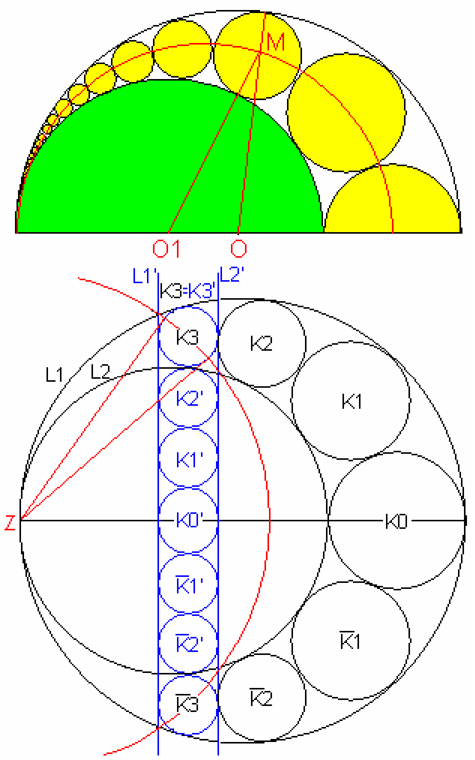
Die invertierte Kreisreihe in Richtung C sei K^i_r, in Richtung A K_b und in Richtung B K_a. Dann gilt mit den Werten der vorhergehenden Seite für die Radien der n-ten Kreise



K^i_r: $r^i_{rn} = rx_i^2 / ((x_{rn}-x_i)^2+(y_{rn}-y_i)^2 - r_i^2)\, r_{rn}$
$x^i_{rn} = x_i + rx_i^2\,(x_{rn} - x_i) / ((x_{rn}-x_i)^2+(y_{rn}-y_i)^2 - r_i^2)$
$y^i_{rn} = y_i + rx_i^2\,(y_{rn} - y_i) / ((x_{rn}-x_i)^2+(y_{rn}-y_i)^2 - r_i^2)$

K^i_a: $r^i_{an} = rx_i^2 / ((x_{an}-x_i)^2+(y_{an}-y_i)^2 - r_i^2)\, r_{an}$
$x^i_{an} = x_i + rx_i^2\,(x_{an} - x_i) / ((x_{an}-x_i)^2+(y_{an}-y_i)^2 - r_i^2)$
$y^i_{an} = y_i + rx_i^2\,(y_{an} - y_i) / ((x_{an}-x_i)^2+(y_{an}-y_i)^2 - r_i^2)$

K^i_b: $r^i_{bn} = rx_i^2 / ((x_{bn}-x_i)^2+(y_{bn}-y_i)^2 - r_i^2)\, r_{bn}$
$x^i_{bn} = x_i + rx_i^2\,(x_{bn} - x_i) / ((x_{bn}-x_i)^2+(y_{an}-y_i)^2 - r_i^2)$
$y^i_{bn} = y_i + rx_i^2\,(y_{bn} - y_i) / ((x_{bn}-x_i)^2+(y_{bn}-y_i)^2 - r_i^2)$



Kreisinversion und Pappus-Reihe

Man erhält die Pappus-Kette, wenn man in das Arbelos nicht nur einen Inkreis einzeichnet, sondern anschließend beliebig viele. Ein Kreis der Kette wird mit dem Mittelpunkt M gekennzeichnet. Er habe den Radius k. Dann gilt

$$O_1M + OM = (R + k) + [(R + r) - k] = 2R + r.$$

Für M gilt also, dass die Summe der Abstände von den festen Punkten O_1 und O konstant ist. Damit liegt M auf einer Ellipse. Da die Rechnung für jeden Mittelpunkt eines Kreises der Kette gilt, liegen alle Mittelpunkte auf einer Ellipse. O_1 und O sind die Brennpunkte.

Interessant ist nun die Spiegelung der Kreise an dem roten Kreis. Dazu legt man links das Zentrum Z fest. Der Kreis wird zum Beispiel so gelegt, dass der Kreis K_3 in sich selbst übergeht. Dann gehen die Kreise L_1 und L_2, die zum Teil den Arbelos bilden, in zwei Parallelen über, da das Zentrum ins "Unendliche" rückt und eine Beziehung wie Sich-Berühren erhalten bleibt. Aus der Pappus-Kette wird eine einfache Kreisfolge zwischen zwei Parallelen. Man kann der Abbildung entnehmen, dass die Pappuskette aus beliebig vielen Kreisen bestehen muss. Eine Gleichung ist aus der Zeichnung ablesbar:

Ist r_3 der Radius des dritten Kreises K_3 der Kette, so liegt sein Mittelpunkt M_3 in einem Abstand von $h_3 = 6*r_3$ von der horizontal liegenden Symmetrieachse entfernt.

Das kann man verallgemeinern zu $h_n = 2*n*r_n$

Ausgehend von der Konstruktion des Pappus-Kreises K_1 als Inversion von K'_1 kann der Radius von K_1 ermittelt werden:

r = ZM sei der Radius von K'_0 und M, N die Mittelpunkte von K'_0, K'_1. Dann ergibt sich für m = XM:

$m = XN^2 - r^2 = XM^2 + MN^2 - r^2 = (1+r)^2 + (2r)^2 - r^2 = 1 +2r +4r^2$

Für den Radius von K_1 ergibt sich ein Streckungsfaktor f bezüglich X

$$f = k^2 / m$$

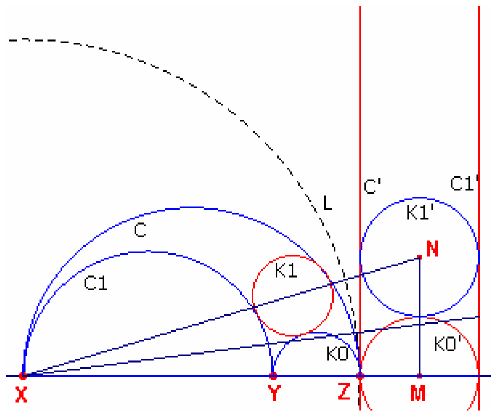
mit XZ = k = 1, und so $f = 1 / m$

Der Radius von K_1 ist dann gleich $r / (1 + 2r + 4r^2)$.

Auf Grund von XY * XY ' = k^2 = 1 und XY = d wird XY' = 1/d und ZY' = 1/d - 1. Und somit $2r = (1 - d) / d$

Einsetzen ergibt für den Radius r_1 von K_1:

$= (1-d)/(2d) / [1 + (1-d)/d + (1-d)^2/d^2] = 1/2\, d\, (d-1) / (d^2-d+1)$



Anmerkung: Archimedes gab in Abschnitt 6 seines Werkes "Liber Asumptorum" folgenden Satz an.

Wenn XY = 3/2 YZ, dann ist der Durchmesser des Sekantenkreises gleich 6/19 XZ.

In Bezug auf die obige Fragestellung wird XY : YZ = 3 : 2 = d : (1-d)

und damit d = 3/5. Einsetzen in die Gleichung gibt $r_1 = 6/19$ und somit Übereinstimmung, wenn XZ = 1.

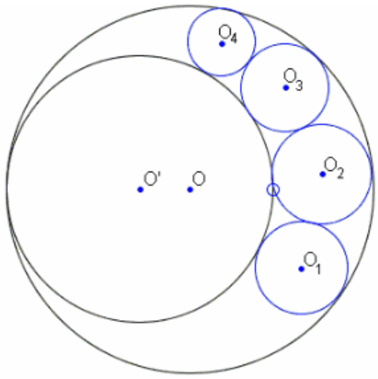
Kreisinversion und Pappus-Reihe (3)

Für 4 Kreise einer Pappus-Kette gilt folgende Beziehung.

Die Kreise O'(r') und O(r) berühren sich. Betrachtet werden vier sich paarweise berührende PappusKreise $O_i(r_i)$, i = 1, 2, 3, 4. Dann ist: $1 / r_1 + 3 / r_3 = 3 / r_2 + 1 / r_4$.

Nachweis: Für Kreise einer Pappus-Kette gilt allgemein $rt = r\,r'(r - r') / (r\,r' + t^2(r - r')^2)$

wobei r und r' berührende Kreise sind, deren Different der Indizees t gleich 1 ist.



Mit $A = r\,r'$ und $B = r - r'$ wird

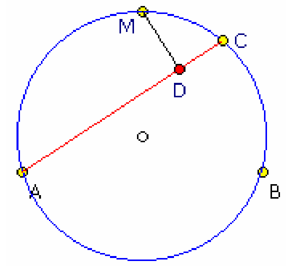
$r_1 = A / (A + B^2)$, $r_2 = A / (A + 2^2B^2)$,

$r_3 = A / (A + 3^2B^2)$, $r_4 = A / (A + 4^2B^2)$.

Einsetzen in $1 / r_1 + 3 / r_3 = 3 / r_2 + 1 / r_4$.

ergibt die gültige Beziehung $1 + 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 2^2 + 4^2$

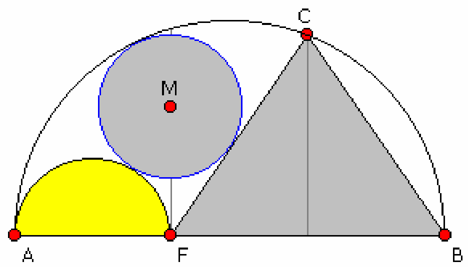
Archimedischer Mittelpunktsatz



Sind M der Mittelpunkt des Kreisbogens AMB, C ein beliebiger Punkt auf dem Kreis und D ein Punkt auf der Strecke AC, so dass MD senkrecht zu AC steht, so gilt:

AD = DC + BC

Sangaku-Problem (1803)



Gegeben ist ein Halbkreis, in den ein Kreis mit dem Durchmesser AF eingezeichnet wird. FBC ist weiterhin ein gleichschenkliges Dreieck.

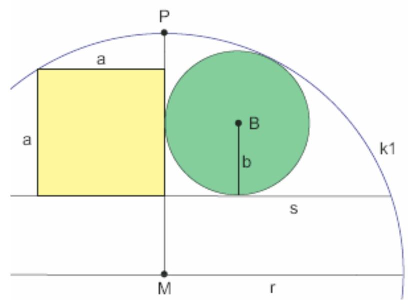
Gesucht ist ein Kreis, der Sangaku-Kreis, der sowohl den Kreis AF als auch das Dreieck berührt.

Wird AB = 1 und AF = r mit $0 < r < 1$ angenommen, so gilt, da MF senkrecht zu AB steht:

Radius des Sangaku-Kreises = $r (1-r) / (1+r)$

MF = $r \sqrt{(2(1-r))} / (1+r)$

Sangaku-Problem (2)

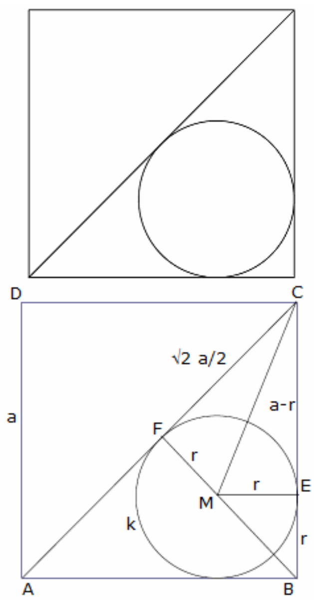


Gegeben sei der Kreis k_1 mit Radius r, Mittelpunkt M und Sehne s.
Die Sehne werde von der Strecke MP mittig geteilt. Dem rechten Teil zwischen Sehne und Kreisbogen werde der größtmögliche Kreis einbeschrieben.
Im linken Teil befinde sich das größtmögliche Quadrat; eine Seite liegt auf der Sehne und die andere Seite auf der Strecke PM.
Bestimme den Radius b vom einbeschriebenen Kreis und die Seitenlänge a vom Quadrat.
Lösung: Die Strecke p = PM ergibt sich aus dem Sehnensatz im Kreis
k_1: $k_1 : p \cdot (2 r - p) = s^2/4$
Im rechtwinkligen Dreieck MBC gilt der Satz des Pythagoras $\Delta MBC: (r - b)^2 = b^2 + (b + r - p)^2$
Zur Bestimmung der Quadratseite a wird $k_1: a^2 = (p-a) \cdot (2r - p + a)$
Auflösung der drei Gleichungen ergibt

$a = 1/4 (-\sqrt{(4r^2-s^2)} + \sqrt{(4r^2+s^2)})$

$b = -r - 1/2 \sqrt{(4r^2-s^2)} + \sqrt{(r (2r + \sqrt{(4r^2-s^2)}))}$

$p = r - 1/2 \sqrt{(4r^2-s^2)}$



Sangaku-Problem (3)

Aufgabe: Gesucht ist der Radius r des Kreises k in Abhängigkeit von der Quadratseite a.

Lösung: Die Länge der Diagonalen im Quadrat ABCD beträgt

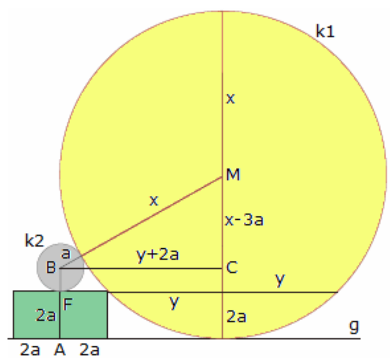
$AC = \sqrt{(a^2 + a^2)} = a \sqrt{2}$

Die Tangentenabschnitte CE und CF vom Punkt C an den Kreis k sind gleich lang. Die Strecke CF entspricht der halben Diagonalen AC. Die Länge von CE ergibt sich aus der Differenz a-r.

CE = CF $a/2 \sqrt{2} = a-r$

d.h. $r = a (2 - \sqrt{2})/2$

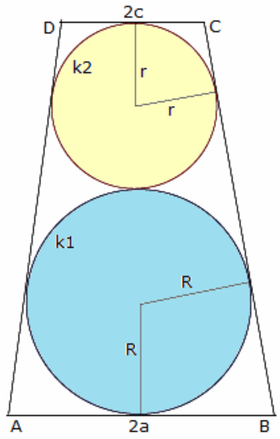
Sangaku-Problem (4)



Aufgabe: Der Kreis k1 mit dem Radius x berührt die Gerade g. Auf der Geraden befinden sich neben dem Kreis zwei Quadrate mit der Kantenlänge 2 a und der gemeinsamen Seite AF.
Der Kreis k2 mit Radius a berührt den Kreis k1 in einem Punkt und die Quadrate im Punkt F, wie in der Abbildung gezeigt.
Berechne den Radius x vom Kreis k1.
Lösung: Im Dreieck BCM folgt mit dem Satz des Pythagoras
Δ BCM $(a + x)^2 = (x - 3a)^2 + (y + 2a)^2$

Im Kreis k1 gilt für y der Sehnensatz k1 $y \cdot y = 2a\,(2x - 2a)$

Die Auflösung der Gleichungen ergibt $x = 2a \cdot (2 + \sqrt{2})$ $y = 2a \cdot (1 + \sqrt{2})$



Sangaku-Problem (5)

Aufgabe:

Einem Trapez ABCD sind die Kreise k1 und k2 einbeschrieben. Bestimme die Radien R, r wenn die Strecken 2a = AB und 2c = CD gegeben sind.

Lösung: Im rechtwinkligen Dreieck BEG gilt der Satz des Pythagoras

Δ BEG $(2R)^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2$, d.h. $R = \sqrt{a\,b}$

Analog gilt für Dreieck CFG

Δ CFG $(2r)^2 + (b-c)^2 = (b+c)^2$, d.h. $r = \sqrt{b\,c}$

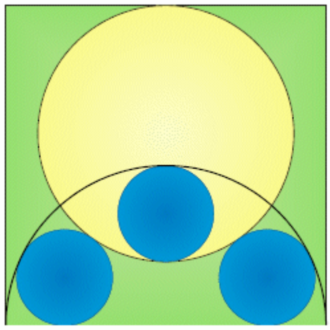
Die Dreiecke BEG und CFG sind zueinander ähnlich, und so

$2R / (a+b) = 2r / (b+c)$

Nach Auflösung der Gleichungen wird

$R = \sqrt[4]{a^3\,c}$ $r = \sqrt[4]{a\,c^3}$ $b = \sqrt{a\,c}$

Sangaku-Problem (6)



Aufgabe:

In einem Quadrat mit der Kantenlänge b sind blaue Kreise mit dem Radius r und ein gelber Kreis mit dem Radius R wie in der Abbildung eingeschrieben. Bestimme das Verhältnis R / r.

Lösung: Der im gelben Kreis eingeschriebene Halbkreis hat den Radius

$r_1 - (b - r_2) = (r_1 + r_2 - b)/2$

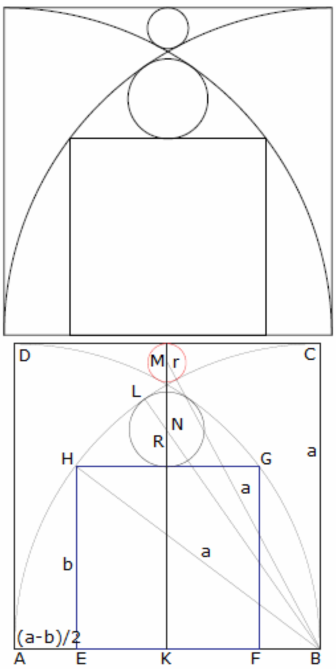
Für die drei blauen Kreise wird $r_3 = (r_1 + r_2 - b)/2$

$b + r_2 = 2r_1$

Einsetzen und Auflösen ergibt $r_1 / r_3 = 10/3$

und somit $r_2 / r_1 = R / r = 8/3$

Dieses Sangaku-Problem wurde auf einer Tafel im Tempel von Chusonji gefunden.



Sangaku-Problem (7)

Aufgabe:

In einem Quadrat mit der Kantenlänge a sind Viertelkreise eingezeichnet. Im unteren Viertelkreis befindet sich ein Quadrat. Zusätzlich sind zwei Kreise mit den Radien r und R eingeschrieben. Es sind r und R zu berechnen.

Lösung: Der obere, kleine Kreisradius r ergibt sich aus dem Dreieck BMK

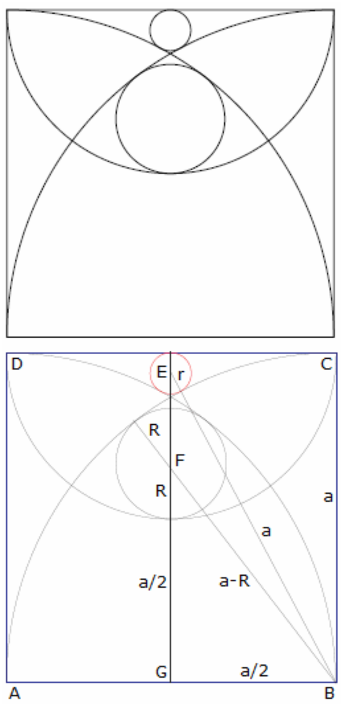
Δ BMK: $(a + r)^2 = (a - r)^2 + a^2$ … $r = a/16$

Seitenlänge b des inneren Quadrates EFGH

$a^2 = b^2 + (b + (a-b)/2)^2$ … $b = 3/5\,a$

Für den Radius R wird im Dreieck BNK

Δ BNK: $(a - R)^2 = (R + b)^2 + a^2/4$ und $R = 39/320\,a$



Sangaku-Problem (8)

Aufgabe:

In einem Quadrat mit der Kantenlänge a sind Viertelkreise und über der oberen Seite ein Halbkreis eingezeichnet. Zwischen den Kreisbögen sind zwei Kreise mit den Radien r und R eingeschrieben. Es sind r und R zu berechnen.

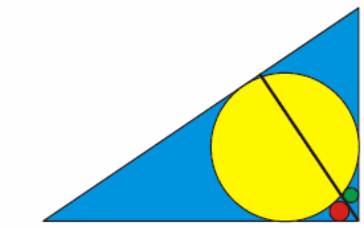
Lösung: Der obere, kleine Kreisradius r ergibt sich aus dem Dreieck BEG

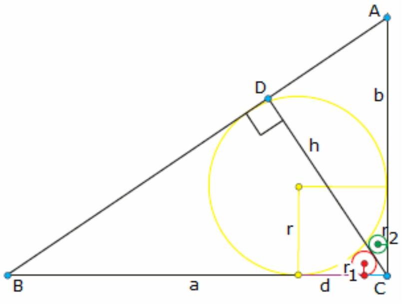
Δ BEG: $(a + r)^2 = (a - r)^2 + a^2/4$ $r = a/16$

Analog dazu folgt R aus dem Dreieck BFG

$(a - R)^2 = (a/2 + R)^2 + a^2/4$ $R = a/6$

Sangaku-Problem (9)





Auf einer 97 x 232 cm großen Holztafel aus der Präfektur Nagano wurde folgendes Sangaku-Problem gefunden.
Aufgabe:
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC und in ihm die Höhe h auf C. Der Inkreis habe den Radius r. Zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2 sind so gezeichnet, dass sie den Inkreis, die Höhe h und die Seiten a und b berühren. Es sind r_1 und r_2 zu berechnen.

Lösung:
Für die Strecke d vom Punkt D zu den Inkreisberührungspunkten wird

$$d = 2 \sqrt{r\, r_1}$$

Über Höhensatz und Heronscher Dreiecksformel wird dann nach längerer Rechnung

$$r_1 = r^2 / (\sqrt{b} + \sqrt{r})^2$$

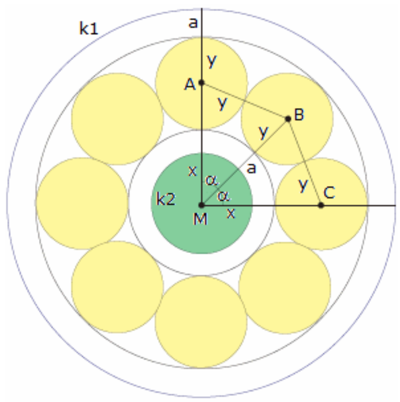
$$r_1 = (a+b-c)^2 (\sqrt{a+b-c} - \sqrt{2b})^2 / (2(a-b-c)^2)$$

analog $r_2 = r^2 / (\sqrt{a} + \sqrt{r})^2$

$$r_2 = (a+b-c)^2 (\sqrt{a+b-c} - \sqrt{2a})^2 / (2(a-b+c)^2)$$

Quelle: Géry Huvent, "Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises"

Sangaku-Problem (10)



Problem aus dem Buch "5000 Jahre Geometrie":
Gegeben sei der Kreis k1 mit einem Radius r. Dem Kreis k1 ist der Kreis k2 einbeschrieben. Weiterhin befinden sich acht gleich große Kreise so zwischen k1 und k2 platziert, dass ihr Abstand zu beiden Kreisen jeweils gleich a ist und sich je zwei dieser Kreise berühren. Berechne den Radius von k2 und den Radius der anderen 8 Kreise.

Lösung: Für den Fall, dass sich die acht Kreise exakt berühren, gilt für den Radius r von k1 $\quad r = x + 2a + 2y$
Der Winkel $\alpha = \angle$ AMB beträgt $2\pi/8 = 45°$. Im Dreieck AMD gilt mit dem Kosinussatz $\quad (y + y)^2 = 2 \cdot (x + a + y)^2 \cdot (1 - \cos \alpha)$
Auflösung der Gleichungen ergibt

$$x = 4(-2 + \sqrt{2})\, a - 2\sqrt{2}\, \sqrt{-(-10 + 7\sqrt{2})\,(a-r)^2} + (7 - 4\sqrt{2})\, r$$

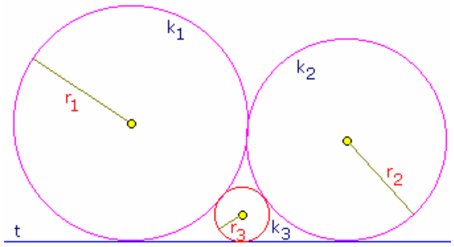
$$x \approx -0{,}8966830584 \cdot |a - r| - 2{,}343145750\, a + 1{,}343145750\, r$$

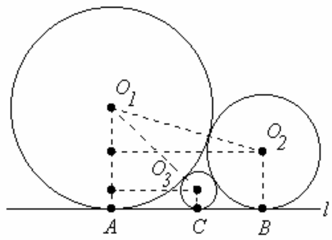
$$y = (3 - 2\sqrt{2})\, a + \sqrt{2}\, \sqrt{-(-10 + 7\sqrt{2})\,(a-r)^2} + (-3 + 2\sqrt{2})\, r$$

$$y \approx 0{,}4483415292 \cdot |a - r| + 0{,}1715728752\, a - 0{,}1715728752\, r$$

Die zweite auftretende Lösung entfällt, da dort $y < 0$ ist.

Japanisches Tempel-Problem





Problem aus der Japanischen Tempel-Geometrie:
Gesucht sind drei verschieden große Kreise, die einander jeweils paarweise in einem Punkt berühren und die eine gemeinsame Tangente besitzen.
Für die Radien gilt $\quad 1/\sqrt{r_3} = 1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2}$

Nachweis: Nach dem Tempel-Problem (2) gilt $AB^2 = 4 r_1 r_2$ und außerdem AC + CB = AB.

$$AB^2 = 4 r_1 r_2 = (AC + CB)^2$$

$$4 r_1 r_3 + 4 r_2 r_3 + 2(2\sqrt{r_1 r_3})(2\sqrt{r_2 r_3}) = 4 r_1 r_2$$

$$r_1 r_3 + r_2 r_3 + 2 r_3 \sqrt{r_1 r_2} = r_1 r_2$$

und nach Division mit $r_1 r_2 r_3$

$$1/r_2 + 1/r_1 + 2/\sqrt{r_1 r_2} = 1/r_3$$

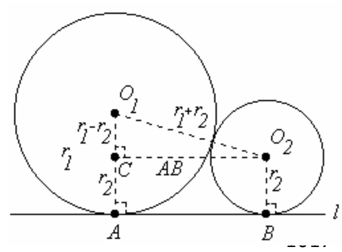
$$(1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2})^2 = (1/\sqrt{r_3})^2$$

$$1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2} = 1/\sqrt{r_3}$$

Fügt man zwischen dem 1. und 3.Kreis einen vierten Kreis ein, zwischen dem 1. und 4. einen fünften usw., so gilt

$$1/\sqrt{r_n} = (n-2)/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2}$$

Japanisches Tempel-Problem



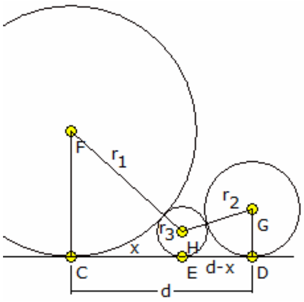
Im zweiten japanischen Tempel-Problem der Sangaku-Mathematik sind zwei sich berührende Kreise gegeben. Dann gilt $\quad AB^2 = 4\, r_1\, r_2$

Nachweis: Zuerst werden die Strecken O_1A, O_2B, O_1O_2 und O_2C eingezeichnet.

Das rechtwinklige Dreieck O_1O_2C hat dann die Katheten AB und $r_1 - r_2$ und die Hypotenuse $r_1 + r_2$. Nach dem Satz des Pythagoras wird dann

$$AB^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \qquad AB^2 + r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2$$

$$AB^2 = 4\, r_1r_2$$



Japanisches Tempel-Problem (3)

Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2, die sich nicht berühren, aber eine gemeinsame Tangente besitzen. Gesucht ist der Kreis mit dem Radius r_3, der beide Kreise berührt und ebenfalls die Gerade als Tangente besitzt.

Sind CD = d der waagerechte Abstand der Kreise K_1 und K_2 und CE = x der waagerechte Abstand der Kreise K_1 und K_3, so gilt

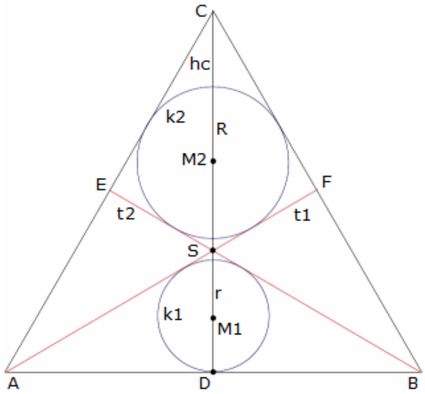
$$(r_1 + r_3)^2 = (r_1 - r_3)^2 + x^2 \qquad (r_2 + r_3)^2 = (r_2 - r_3)^2 + (d-x)^2$$

Auflösen des Systems ergibt

$$r_3 = d^2 / (4\, (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2) \qquad x = 2\, \sqrt{r_1}\, \sqrt{r_3} = d\, \sqrt{r_1}\, \sqrt{(1 / (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2)}$$

Japanisches Tempel-Problem (4)

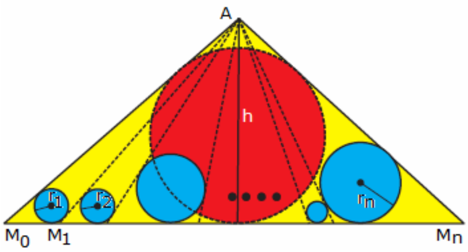
Gegeben sei das gleichseitige Dreieck ABC mit der Seitenlänge a.
Auf der Höhenlinie h_c = CD befinden sich die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2.
Der Kreis k_1 tangiert die Seite AB im Punkt D. Der Kreis k_2 tangiert die Seiten AC und BC des Dreiecks. Die gemeinsamen Tangenten t_1, t_2 der Kreise laufen durch die Punkte A bzw. B.
Bestimme den Radius von k_1 und k_2 für den Fall, dass beide Kreise gleich groß sind. Berechne den Radius R von k_2 wenn der Radius r für k_1 gegeben ist.



Lösung: Für a, r und R ergibt sich Beziehung

$$(a\, \sqrt{3} + 6\, r) / (3a - 2\, \sqrt{3}\, r) = \sqrt{3} - 4r/a$$

Damit wird für gleich große Kreise $\qquad r = a/2\, (\sqrt{3} - \sqrt{2})$
und für einen gegebenen Radius r $\qquad R = (a^2 - 2\sqrt{3}\, ar) / (2\sqrt{3}\, a - 4r)$



Wasan-Inkreissatz

In der mittelalterlichen japanischen Wasan-Mathematik wurde folgender Satz gefunden:
Ein Dreieck ABC werde in n Teildreiecke $\Delta\, AM_{k-1}M_k$, k = 1, …, n, wie in der Abbildung zerlegt. Sind die r_k die Inkreisradien der Teildreiecke $\Delta\, AM_{k-1}M_k$ und R der Inkreisradius von Δ ABC und h die Dreieckshöhe, so gilt

$$1 - 2R / h = \Pi_{k=1}^{n}\, (1 - 2r_k / h)$$

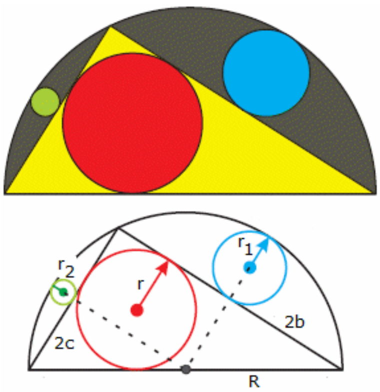
Haben die kleinen Inkreise alle den gleichen Radius r, gilt

$$1 - 2R / h = (1 - 2r / h)^n$$

d.h. $\quad r = 1/2\, (h - h^{(n-1)/n}\, (h - 2R)^{1/n})$

Werden in diesem Fall die Inkreise der Dreiecke $\Delta\, AM_kM_{k+2}$, d.h. je zwei Teildreiecke werden zusammengefasst, so sind die Inkreisradien gleich r_2 mit

$$1 - 2r_2 / h = (1 - 2r / h)^2 \qquad \text{d.h.} \qquad r_2 = 2r\, (h-r) / h$$



Wasan-Mathematik Problem 1

Ein klassisches Problem der japanischen Wasan-Mathematik besteht in der Bestimmung der Radien r_1 und r_2 von zwei Kreisen, die zwischen die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und den Umkreis geschrieben werden.
Mit der überlieferten Beschriftung der Stücke wie in der Abbildung wird

$$c + 2r_1 = R \qquad b + 2r_2 = R$$

Da für den Inkreisradius gilt

$$r = b + c - R \qquad \text{wird} \qquad r = 2R - 2\, (r_1 + r_2) - R$$

$$R = r + 2\, (r_1 + r_2) \qquad c = R - 2r_1 = r + 2r_2$$

Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich

$$b^2 + c^2 = R^2$$

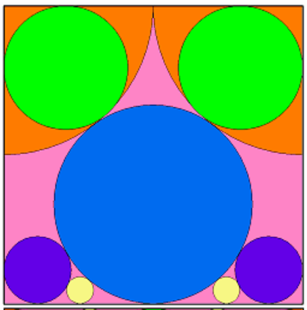
$$(r + 2r_1)^2 + (r + 2r_2)^2 - (r + 2(r_1 + r_2))^2 = r^2 - 8r_1r_2 = 0$$

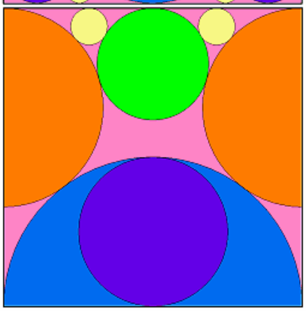
und damit $\qquad r^2 = 8r_1r_2$

Nach klassischer Beschriftung des Dreiecks mit c für die Hypotenuse und a, b für die Katheten wrid für die zwei Kreise: $\qquad r_1 = (c - b)/4 \qquad r_2 = (c - a)/4$

Wasan-Mathematik Problem

Eine besondere Form japanischer Wasan-Mathematik ist das Sangaku, d.h. Holztafeln, auf denen geometrische Rätsel beschrieben wurden.
Für viele der geometrischen Probleme der Wasan-Geometrie ist stets ein Quadrat der Seitenlänge a Ausgangspunkt, in das Kreise verschiedener Radien so eingefügt werden, dass sie sich gegenseitig berühren.





Problem 2a (obere Abbildung)

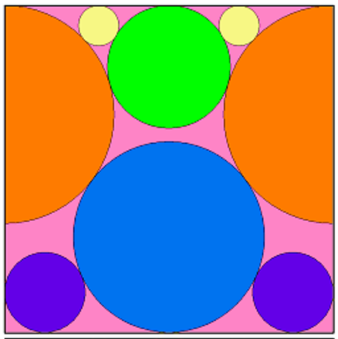
Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

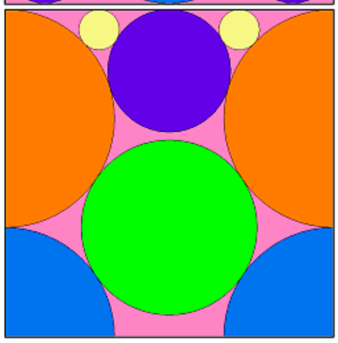
$r_1 = 1/2\ a$
$r_2 = 1/3\ a$
$r_3 = (\sqrt{2} - 1)/2\ a$
$r_4 = (7 - 2\sqrt{10})/6\ a$
$r_5 = (7 - 2\sqrt{10})/15\ a$

Problem 2b (untere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 1/2\ a$
$r_2 = 1/3\ a$
$r_3 = 1/4\ a$
$r_4 = 3/16\ a$
$r_5 = 3/49\ a$





Wasan-Mathematik Problem 3

Problem 3a (obere Abbildung)

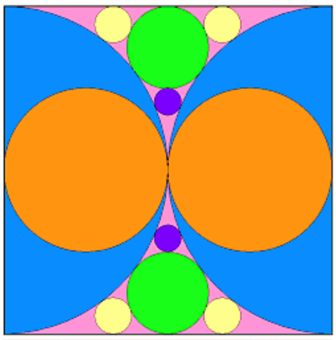
Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

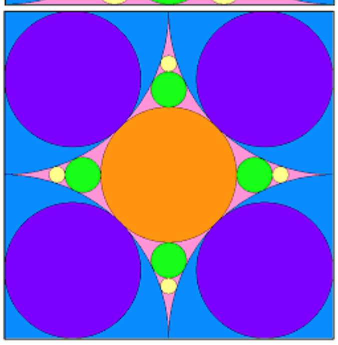
$r_1 = 1/3\ a$
$r_2 = 7/24\ a$
$r_3 = 3/16\ a$
$r_4 = (13 - \sqrt{133})/12\ a$
$r_5 = 3/49\ a$

Problem 3b (untere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 1/3\ a$
$r_2 = 1/3\ a$
$r_3 = (\sqrt{13} - 2)/6\ a$
$r_4 = 3/16\ a$
$r_5 = 3/49\ a$





Wasan-Mathematik Problem 4

Problem 4a (obere Abbildung)

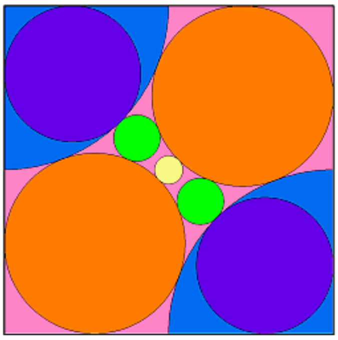
Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

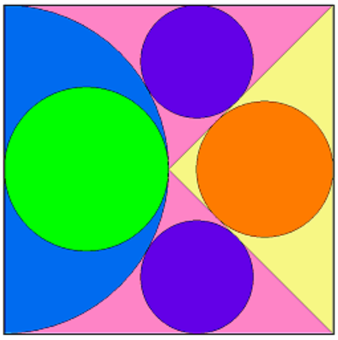
$r_1 = 1/2\ a$
$r_2 = 1/4\ a$
$r_3 = 1/8\ a$
$r_4 = 1/18\ a$
$r_5 = 1/24\ a$

Problem 4b (untere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 1/2\ a$
$r_2 = (\sqrt{2} - 1)/2\ a$
$r_3 = (\sqrt{2} - 1)/2\ a$
$r_4 = (5 - 3\ \sqrt{2})/14\ a$
$r_5 = (13 - 5\ \sqrt{2})/238\ a$





Wasan-Mathematik Problem 5

Problem 5a (obere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 1/2\ a$ $\quad$ $r_2 = (3 - \sqrt{6})/2\ a$

$r_3 = (\sqrt{2} - 1)/2\ a$ $\quad$ $r_4 = (\sqrt{3} - \sqrt{6} + 1)/4\ a$

$r_5 = (\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 3)/2\ a$

Problem 5b (untere Abbildung)

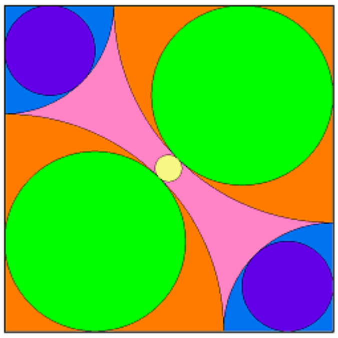
Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

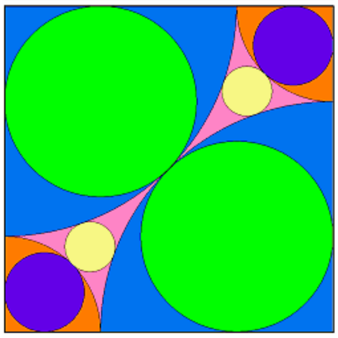
$r_1 = 1/2\ a$

$r_2 = 1/4\ a$

$r_3 = (\sqrt{2} - 1)/2\ a$

$r_4 = (3 - 2\sqrt{2})\ a$





Wasan-Mathematik Problem 6

Problem 6a (obere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 2/3\ a$

$r_2 = (2\sqrt{2} - 2)/3\ a$

$r_3 = 1/3\ a$

$r_4 = (\sqrt{2} - 1)/3\ a$ $\quad$ $r_5 = (3\sqrt{2} - 4)/6\ a$

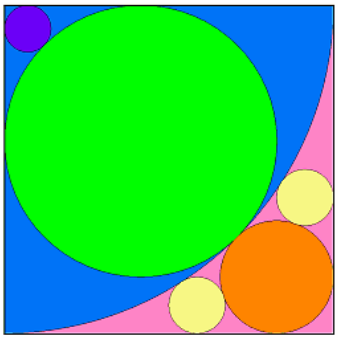
Problem 6b (untere Abbildung)

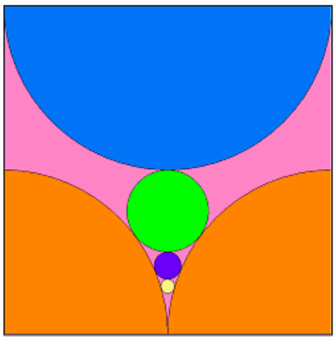
Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 1/2\ \sqrt{2}\ a$ $\quad$ $r_2 = (1 - 1/2\ \sqrt{2})\ a$

$r_3 = (2 - \sqrt{2})/2\ a$ $\quad$ $r_4 = (3\sqrt{2} - 4)/2\ a$

$r_5 = (5\sqrt{2} - 6)/14\ a$





Wasan-Mathematik Problem 7

Problem 7a (obere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = a$ $\quad$ $r_2 = (\sqrt{2} - 1)\ a$

$r_3 = (3 - 2\sqrt{2})\ a$ $\quad$ $r_4 = (5\sqrt{2} - 7)\ a$

$r_5 = (3/2 - \sqrt{2})\ a$

Problem 7b (untere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

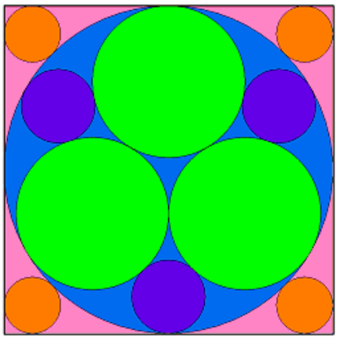
$r_1 = 1/2\ a$

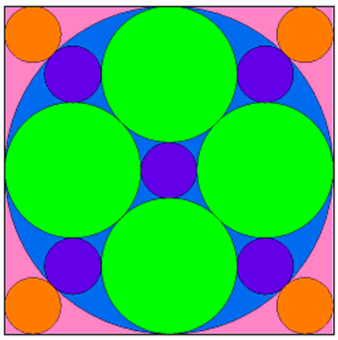
$r_2 = 1/2\ a$

$r_3 = 1/8\ a$

$r_4 = 1/24\ a$

$r_5 = 1/48\ a$





Wasan-Mathematik Problem 8

Problem 8a (obere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 1/2\ a$

$r_2 = (\sqrt{3} - 3/2)\ a$

$r_3 = (2\sqrt{3} - 1)/22\ a$ $\quad$ $r_4 = (3/2 - \sqrt{2})\ a$

Problem 8b (untere Abbildung)

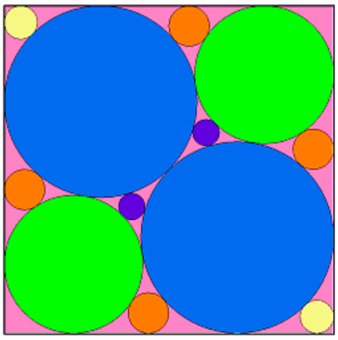
Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

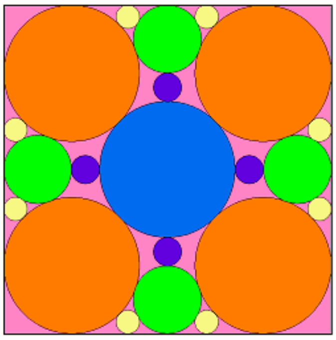
$r_1 = 1/2\ a$

$r_2 = (\sqrt{2} - 1)/2\ a$

$r_3 = (3/2 - \sqrt{2})\ a$

$r_4 = (3/2 - \sqrt{2})\ a$





Wasan-Mathematik Problem 9

Problem 9a (obere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

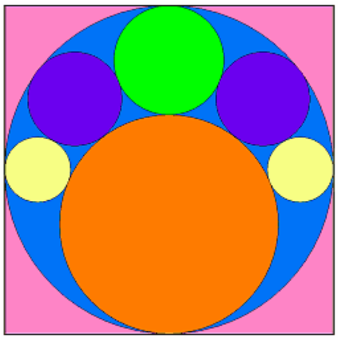
$r_1 = (1 - 1/2\ \sqrt{2})\ a$ $\qquad r_2 = (2 - \sqrt{(4 - 2\sqrt{2})} - 1/\sqrt{2})\ a$

$r_3 = 1/(\sqrt{(2\sqrt{2} + 4)} + \sqrt{2})^2\ a$ $\qquad r_4 = (10 - 7\sqrt{2})\ a$

$r_5 = 0{,}04022538\ldots\ a$

Problem 9b (untere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach



$r_1 = (\sqrt{2} - 1)/2\ a$

$r_2 = (\sqrt{2} - 1)/2\ a$

$r_3 = (\sqrt{2} - 1)/4\ a$

$r_4 = (3 - 2\ \sqrt{2})/4\ a$

$r_5 = (5\ \sqrt{2} - 7)/2\ a$

Wasan-Mathematik Problem 10

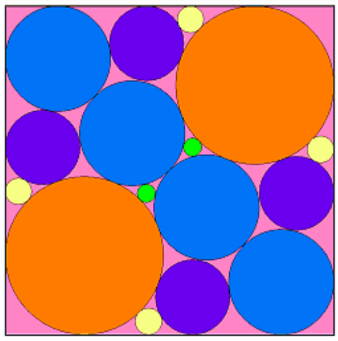
Problem 10a (obere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 1/2\ a$ $\qquad r_2 = 1/3\ a$

$r_3 = 1/6\ a$ $\qquad r_4 = 1/7\ a$

$r_5 = 1/10\ a$



Problem 10b (untere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

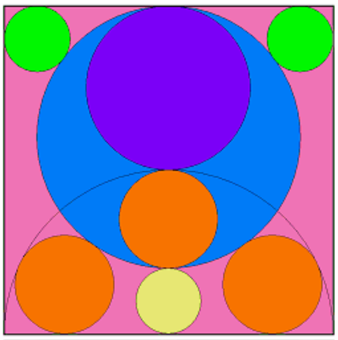
$r_1 = (12 + 3\sqrt{2} - 8\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[4]{8})/14\ a \approx 0{,}240385579\ a$

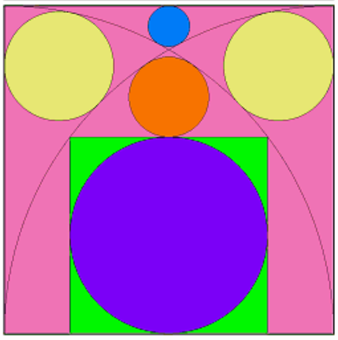
$r_2 = (3\sqrt{2} - 2)/14\ a \approx 0{,}160188620\ a$

$r_3 = (\sqrt{(32928 - 10976\sqrt{2})} - \sqrt{(8512\sqrt{2} + 2688)})^2/(3136\ (4\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8} - 7)^2)\ a \approx 0{,}113270459\ a$

$r_4 = \sqrt{2}\ (\sqrt{(32928 - 10976\sqrt{2})} - \sqrt{(8512\sqrt{2} + 2688)})^2/(64\ (62\sqrt[4]{2} - 16\sqrt[4]{8} - 24\sqrt{2} - 5)^2)\ a \approx 0{,}0398266353\ a$

$r_5 = \sqrt{2}\ (41 + 28\sqrt{2} - 24\sqrt[4]{8} - 32\sqrt[4]{})/(16\sqrt[4]{8} + 16\sqrt[4]{} - 24\sqrt{2} - 22)\ a \approx 0{,}0279998159\ a$





Wasan-Mathematik Problem 11

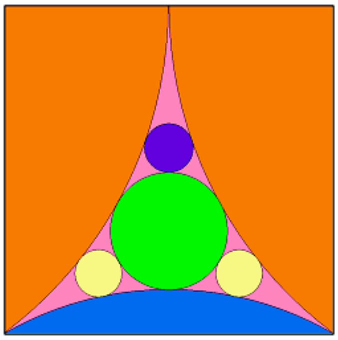
Problem 11a (obere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 4/10\ a$ $\qquad r_2 = 1/4\ a$

$r_3 = 3/20\ a$ $\qquad r_4 = 1/10\ a$

$r_5 = 1/10\ a$



Problem 11b (untere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 1/16\ a$ $\qquad r_2 = 1/6\ a$

$r_3 = 39/320\ a$ $\qquad r_4 = 1/16\ a$

Wasan-Mathematik Problem 12

Problem 12a (obere Abbildung)

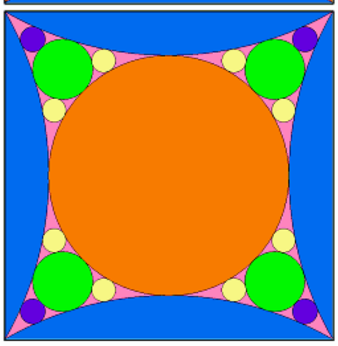
Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 5/4\ a$ $\qquad r_2 = a$

$r_3 = (4\ \sqrt{14} - 13)/11\ a$

$r_4 = (185 - 40\ \sqrt{14})/473\ a$

$r_5 = (25 - 5\ \sqrt{14})/88\ a$



Problem 12b (untere Abbildung)

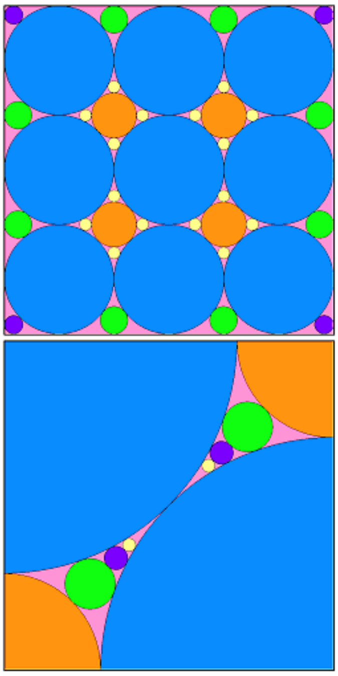
Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = a$ $\qquad r_2 = (\sqrt{3} - 1)/2\ a$

$r_3 = (28\ \sqrt{6} + 40\ \sqrt{2} - 39\ \sqrt{3} - 49)/94\ a \approx 0{,}09155348276\ a$

$r_4 = (414753\ \sqrt{3} - 485808\ \sqrt{2} - 279304\ \sqrt{6} + 723359)/1872386\ a \approx 0{,}0376758441\ a$

$r_5 = (98\ \sqrt{6} - 246\ \sqrt{2} + 118\ \sqrt{3} + 431)/1321\ a \approx 0{,}0359087540\ a$



Wasan-Mathematik Problem 13

Problem 13a (obere Abbildung)

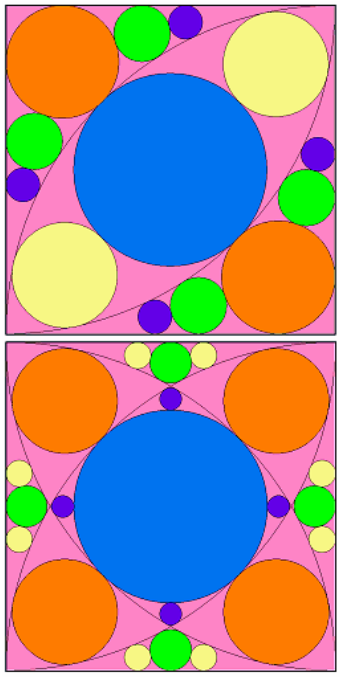
Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 1/6\ a$
$r_2 = (\sqrt{2} - 1)/6\ a$
$r_3 = 1/24\ a$
$r_4 = (1/2 - 1/3\ \sqrt{2})\ a$
$r_5 = (5 - 3\ \sqrt{2})/42\ a$

Problem 13b (untere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = 1/2\ \sqrt{2}\ a$
$r_2 = (2 - \sqrt{2})/2\ a$
$r_3 = (5\ \sqrt{2} - 6)/14\ a$
$r_4 = (13\ \sqrt{2} - 10)/238\ a$
$r_5 = (25\ \sqrt{2} - 14)/1054\ a$



Wasan-Mathematik Problem 14

Problem 14a (obere Abbildung)

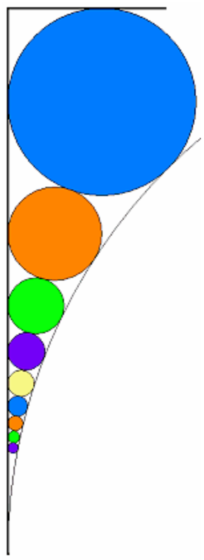
Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = (1 - \sqrt{2}/2)\ a$
$r_2 = (3 - 2\ \sqrt{2})\ a$
$r_3 = (3\ \sqrt{2} - 2)/14\ a$
$r_4 = (3/2 - \sqrt{2})\ a$
$r_5 = (11 - 6\ \sqrt{2})/49\ a$

Problem 14b (untere Abbildung)

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise der Größe nach

$r_1 = (1 - \sqrt{2}/2)\ a$
$r_2 = (3 - 2\ \sqrt{2})\ a$
$r_3 = 1/16\ a$
$r_4 = 1/25\ a$
$r_5 = (11\ \sqrt{2} - 14)/46\ a$



Wasan-Mathematik Problem 15

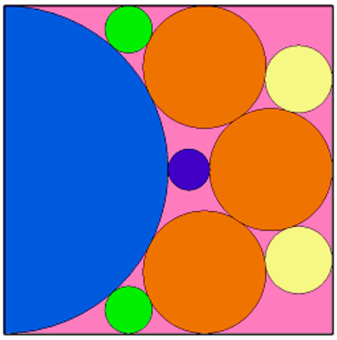
Die Kette der seitlichen Kreise im Wasan-Problem 14a kann theoretisch bis in das Unendliche fortgesetzt werden.
Als Kreisradius erhält man von oben nach unten

$r_1 = (3 - 2\ \sqrt{2})\ a \approx 0{,}171572875\ a$
$r_2 = (3/2 - \sqrt{2})\ a \approx 0{,}0857864375\ a$
$r_3 = (11 - 6\ \sqrt{2})/49\ a \approx 0{,}0513207882\ a$
$r_4 = (9 - 4\ \sqrt{2})/98\ a \approx 0{,}0341137321\ a$
$r_5 = (27 - 10\ \sqrt{2})/529\ a \approx 0{,}0243059818\ a$
$r_6 = (19 - 6\ \sqrt{2})/578\ a \approx 0{,}0181915547\ a$
$r_7 = (51 - 14\ \sqrt{2})/2209\ a \approx 0{,}0141244953\ a$
$r_8 = (33 - 8\ \sqrt{2})/1922\ a \approx 0{,}0112831901\ a$
$r_9 = (83 - 18\ \sqrt{2})/6241\ a \approx 0{,}009220342233\ a$
$r_{10} = (51 - 10\ \sqrt{2})/4802\ a \approx 0{,}007675523610\ a$
$r_{11} = (123 - 22\ \sqrt{2})/14161\ a \approx 0{,}006488757971\ a$
$r_{12} = (73 - 12\ \sqrt{2})/10082\ a \approx 0{,}005557373264\ a$
$r_{13} = (171 - 26\ \sqrt{2})/27889\ a \approx 0{,}004813024754\ a$
$r_{14} = (99 - 14\ \sqrt{2})/18818\ a \approx 0{,}004208789995\ a$
$r_{15} = (227 - 30\ \sqrt{2})/49729\ a \approx 0{,}003711588673\ a$
$r_{16} = (129 - 16\ \sqrt{2})/32258\ a \approx 0{,}003297556668\ a$
$r_{17} = (291 - 34\ \sqrt{2})/82369\ a \approx 0{,}002949128177\ a$
$r_{18} = (163 - 18\ \sqrt{2})/51842\ a \approx 0{,}002653141388\ a$
$r_{19} = (363 - 38\ \sqrt{2})/128881\ a \approx 0{,}002399577010\ a$
$r_{20} = (201 - 20\ \sqrt{2})/79202\ a \approx 0{,}002180699082\ a$

Sind r_1 und r_2 zwei aufeinanderfolgende Kreise, so gilt für den Abstand ihrer Mittelpunkte

$AB^2 = 4\ r_1 r_2$

Auf den Kreis mit dem Radius r folgt nach unten ein Kreis mit dem Radius R $\quad R = r / (1 + \sqrt{r})^2$



Wasan-Mathematik Problem 16

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise mit den Hilfsgrößen $w = \sqrt{4821}$, $v = 38759/262144$, $u = 659735/7077888$, $t = 113/4096$, $s = 7w/18432$, $q = 2401w/1179648$, $p = 791w/589824$:

Farbe Radius

Blau $1/2\ a$

Orange $r^* = (-\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{v-q} + \sqrt[3]{q+v} + \sqrt[3]{u-p} + \sqrt[3]{p+u} + 29/48} - \sqrt[3]{t-s} - \sqrt[3]{s+t} - 7/8} + \sqrt{\sqrt[3]{t-s} + \sqrt[3]{s+t} - 7/16} + 1/4)\ a \approx 0{,}18658342829872386491148\ a$

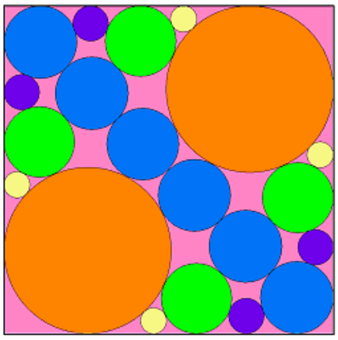
Lila $(1 - 4r^*)/4\ a \approx 0{,}063416571701276135088518\ a$

Grün $r^*/(\sqrt{2r^*} + 1)^2\ a \approx 0{,}071903496127491203055237\ a$

Beige $(2\sqrt{2}\ \sqrt{r^*}\ \sqrt{8r^{*3} - 4r^{*2} - r^* (4d^2 - 12d + 7) + (1-d)(4d^2 - 8d + 5)}\ (2r^* - 1) + 16r^{*3} - 12r^{*2} - r^* (4d^2 - 12d + 5) + (1-d)(4d^2 - 8d + 5)) / (8 (r^{*2} + 2r^* (d-1) + (d-1)^2))\ a \approx 0{,}10245393790251245029900\ a$

Dabei ist d der Abstand des Mittelpunktes eines orangenen Kreises von der linken Quadratseite

$d = (-\sqrt{12 (-\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{v-q} + \sqrt[3]{q+v} + \sqrt[3]{u-p} + \sqrt[3]{p+u} + 29/48} - \sqrt[3]{t-s} - \sqrt[3]{s+t} - 7/8} + \sqrt{\sqrt[3]{t-s} + \sqrt[3]{s+t} - 7/16} + 1/4)^2 + 4 (-\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{v-q} + \sqrt[3]{q+v} + \sqrt[3]{u-p} + \sqrt[3]{p+u} + 29/48} - \sqrt[3]{t-s} - \sqrt[3]{s+t} - 7/8} + \sqrt{\sqrt[3]{t-s} + \sqrt[3]{s+t} - 7/16} + 1/4) - 1}/2 - (-\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{v-q} + \sqrt[3]{q+v} + \sqrt[3]{u-p} + \sqrt[3]{p+u} + 29/48} - \sqrt[3]{t-s} - \sqrt[3]{s+t} - 7/8} + \sqrt{\sqrt[3]{t-s} + \sqrt[3]{s+t} - 7/16} + 1/4) + 1)\ a \approx 0{,}61087384671259886064526\ a$



Wasan-Mathematik Problem 17

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise:

Farbe Radius

Blau $(5\sqrt{2} - 2)/46\ a \approx 0{,}110240604\ a$

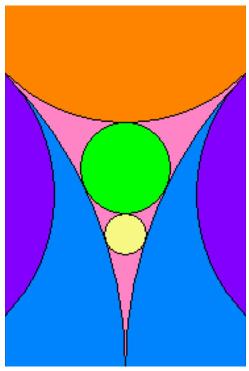
Orange $((44 + 5\sqrt{2})/46 - \sqrt{110/529\ \sqrt{2} + 232/529})\ a \approx 0{,}254300069\ a$

Grün $r^* = (\sqrt{16694634925568\ \sqrt{2} + 23610709624832} + \sqrt{4326645395968\ \sqrt{2} + 6206432625664} - \sqrt{3342763763712\ \sqrt{2} + 4764414580736} - 184\ \sqrt{2}\ (10613\ \sqrt{2} + 13083)) / (\sqrt{234007181369344\ \sqrt{2} + 468229853741056} - 4418208\ \sqrt{2} - 22099504)\ a \approx 0{,}107434837\ a$

Lila $(\sqrt{3724160\ \sqrt{2} + 7854592} - 92\ \sqrt{2} - 3772)^2\ (\sqrt{-\sqrt{617209635369366673280\ \sqrt{2} + 87286633255024918528} - \sqrt{16109750976810115072\ \sqrt{2} + 22783526620346531840} + \sqrt{12406405168384606208\ \sqrt{2} + 17545686066271518720} + 16928\ \sqrt{2}\ (208324\ \sqrt{2} + 292495)} - \sqrt{-\sqrt{3036233906422992896\ \sqrt{2} + 4296257749747859456} - \sqrt{713654022364524544\ \sqrt{2} + 1232892314562961408} + \sqrt{577069631989825536\ \sqrt{2} + 910605615113388032} + 819247488\ \sqrt{2} + 1959229792} - \sqrt{3098314912\ \sqrt{2} + 4679170048} + 92\ \sqrt{2}\ \sqrt{196\ \sqrt{2} + 423})^2 / (4 (\sqrt{1970080640\ \sqrt{2} + 4155079168} - 2116\ \sqrt{2} - 86756)^2\ (\sqrt{-\sqrt{16694634925568\ \sqrt{2} + 23610709624832} - \sqrt{4326645395968\ \sqrt{2} + 6206432625664} + \sqrt{3342763763712\ \sqrt{2} + 4764414580736} + 184\ \sqrt{2}\ (10613\ \sqrt{2} + 13083)} + \sqrt{1518184\ \sqrt{2} - 468464} - \sqrt{691840\ \sqrt{2} + 468096})^2)\ a \approx 0{,}05337970754\ a$

Beige $r^{*2}\ ((\sqrt{3724160\ \sqrt{2} + 7854592} - 92\ \sqrt{2} - 3772)\ \sqrt{-1/(\sqrt{r^*}) + \sqrt{14\ \sqrt{2}/23 + 22/23} + \sqrt{22/23 - 9\ \sqrt{2}/23}})^2 / (\sqrt{179015153219584\ \sqrt{2} + 398350982537216} - \sqrt{2209465852928\ \sqrt{2} + 3232899147776} + \sqrt{241702588416\ \sqrt{2} + 348863057920} - 9584\ \sqrt{2}\ (1016\ \sqrt{2} + 325))^2\ a \approx 0{,}03946283840\ a$

Wasan-Mathematik Problem 18



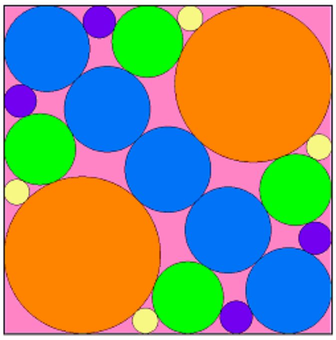
Die Kette der abwärts angeordneten Kreise, beginnend mit dem orangenen Kreis, im Wasan-Problem 7b kann theoretisch bis in das Unendliche fortgesetzt werden. Eingerahmt werden die Kreise von zwei Kreisen mit den Radien 1/2 a.
Als Kreisradius erhält man von oben nach unten

$r_1 = (\sqrt{2} - 1)/2\ a \approx 0{,}207106781186\ a$
$r_2 = (5 - 3\ \sqrt{2})/14\ a \approx 0{,}0540970937772\ a$
$r_3 = (13 - 5\ \sqrt{2})/238\ a \approx 0{,}0249114797820\ a$
$r_4 = (25 - 7\ \sqrt{2})/1054\ a \approx 0{,}0143268548988\ a$
$r_5 = (41 - 9\ \sqrt{2})/3038\ a \approx 0{,}009306148103568\ a$
$r_6 = (61 - 11\ \sqrt{2})/6958\ a \approx 0{,}006531136937898\ a$
$r_7 = (85 - 13\ \sqrt{2})/13774\ a \approx 0{,}004836301995727\ a$
$r_8 = (113 - 15\ \sqrt{2})/24638\ a \approx 0{,}003725415884584\ a$
$r_9 = (145 - 17\ \sqrt{2})/40894\ a \approx 0{,}002957851260323\ a$
$r_{10} = (181 - 19\ \sqrt{2})/64078\ a \approx 0{,}002405348829784\ a$
$r_{11} = (221 - 21\ \sqrt{2})/95918\ a \approx 0{,}001994427690216\ a$
$r_{12} = (265 - 23\ \sqrt{2})/138334\ a \approx 0{,}001680520248568\ a$
$r_{13} = (313 - 25\ \sqrt{2})/193438\ a \approx 0{,}001435316023432\ a$
$r_{14} = (365 - 27\ \sqrt{2})/263534\ a \approx 0{,}001240129295711\ a$
$r_{15} = (421 - 29\ \sqrt{2})/351118\ a \approx 0{,}001082222519754\ a$
$r_{16} = (481 - 31\ \sqrt{2})/458878\ a \approx 0{,}00095267016410992\ a$
$r_{17} = (545 - 33\ \sqrt{2})/589694\ a \approx 0{,}00084506702194983\ a$

$r_{18} = (613 - 35\sqrt{2})/746638\ a \approx 0{,}00075471985797259\ a$
$r_{19} = (685 - 37\sqrt{2})/932974\ a \approx 0{,}00067812618378668\ a$
$r_{20} = (761 - 39\sqrt{2})/1152158\ a \approx 0{,}00061262923233397\ a$

Ist r einer der Kreis, so folgt für den Radius x des nächstkleineren Kreises nach dem Descartes-Kreissatz

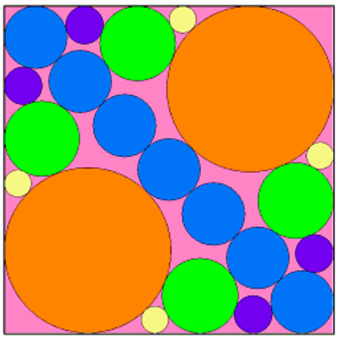
$x = r\,(4\sqrt{r}\sqrt{r+1} - 4r - 1) / (8r - 1)$



Wasan-Mathematik Problem 19

Für ein Quadrat der Seitenlänge a erhält man für die Radien der Kreise:

Farbe	Radius
Blau	$(2\sqrt{2} - 1)/14\ a \approx 0{,}1306019374\ a$
Orange	$(9 - 4\sqrt{2})/14\ a \approx 0{,}2387961250\ a$
Grün	$(-\sqrt{140372\sqrt{2}/49 + 198516/49} + 223\sqrt{2}/7 + 631/14)\ a \approx 0{,}1092688829\ a$
Lila	$(\sqrt{708\sqrt{2} + 1004} - 16\sqrt{2} - 20)^2 / (14\,(\sqrt{212\sqrt{2} + 300} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1} - 9\sqrt{2} - 13)^2)\ a \approx 0{,}04938378112\ a$
Beige	$(\sqrt{1484\sqrt{2} + 2100} - \sqrt{7}\,(9\sqrt{2} + 13))^2 / (2\,(\sqrt{3108\sqrt{2} + 4396} - 7\sqrt{2}\,(4\sqrt{2} + 5))^2)\ a \approx 0{,}03887909709\ a$



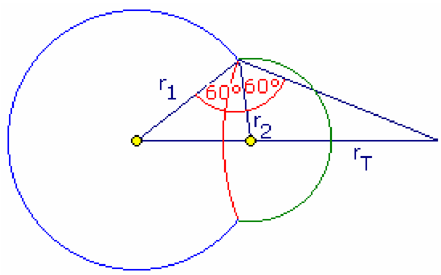
Wasan-Mathematik Problem 19b

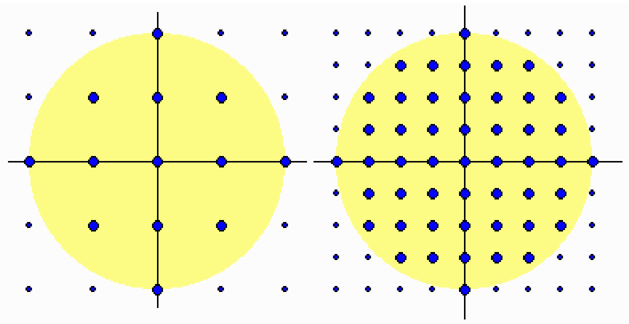
Farbe	Radius
Blau	$(3\sqrt{2} - 1)/34\ a \approx 0{,}09537178491\ a$
Orange	$(27 - 13\sqrt{2})/34\ a \approx 0{,}2533889320\ a$
Grün	$(951/578 + 330/289\sqrt{2} - \sqrt{292155/83521\sqrt{2} + 413194/83521})\ a \approx 0{,}1146887970\ a$
Lila	$(\sqrt{123\sqrt{2} + 178} - 6\sqrt{2} - 5)^2 / (\sqrt{415/578\sqrt{2} + 603/578} - \sqrt{245/578\sqrt{2} + 174/289} + \sqrt{3/34\sqrt{2} - 1/34})^2\ a/1156 \approx 0{,}05741615413\ a$
Beige	$289\,(\sqrt{415/578\sqrt{2} + 603/578} - \sqrt{245/578\sqrt{2} + 174/289})^2 / (\sqrt{11139/23\sqrt{2} + 15766/23} - 2\sqrt{2}\,(10\sqrt{2} + 9))^2\ a \approx 0{,}04098722221\ a$

Seifenblasenproblem

Zwei verschieden große kugelförmige Seifenblasen mit den Radien r_1 und r_2 bilden eine Doppelblase.
Dann ist die Trennwand zwischen beiden Teilblasen Teil einer Kugel mit dem Radius r_T und in die größere Blase hineingewölbt.
Für die Radien gilt

$$\mathbf{1/r_2 = 1/r_1 + 1/r_T}$$





$$1 + 4 \cdot \sum_{i=1}^{r^2} (-1)^{i-1} \left\lfloor \frac{r^2}{2i-1} \right\rfloor$$

Gaußsches Kreisproblem

Gegeben ist ein Kreis in Mittelpunktslage mit dem Radius r. Gesucht ist die Anzahl der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, welche innerhalb der Kreisfläche bzw. auf der Kreisperipherie liegen.
Lösung siehe Term unter der Abbildung
Für die ganzzahligen Radien r = 1, 2, ... ergibt sich damit als Anzahl überdeckter Punkte
5, 13, 29, 49, 81, 113, 149, 197, 253, 317, 377, 441, 529, 613, 709, 797, 901, 1009, 1257, 1373, 1517, 1653, 1793, 1961 ...

Nach Williams 1988 existiert umgekehrt für jedes natürliches n > 0 in der x-y-Ebene stets ein Kreis, der genau n Punkte mit ganzzahligen Koordinaten enthält. Solche Kreise existieren zum Beispiel um den Mittelpunkt ($\sqrt{2}$; 1/3), da von diesem jeder Gitterpunkt einen anderen Abstand besitzt.

Seil-Paradoxon

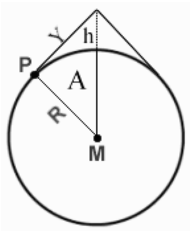
Man spannt ein Seil ganz straff um die Erde und verlängert es um 1 Meter. Wie weit kann das Seil dann in einer Richtung nach oben gezogen werden?

Ist R des Radius des Kreises (längs dessen das Seil über die Erde gepannt ist), so ergibt sich die allgemeine Lösung für die erreichbare Höhe h: $h = \arccos(R / (R+h)) * R$
und konkret für die Erde (R=6378 km) eine Höhe h = 121,5 m !!!
So paradox dies erscheint, vergrößert sich die maximal erreichbare Höhe, wenn der Radius der umschlossenen Kugel größer wird.

Anmerkung: Für eine Quadrat mit dem Umfang der Erde (40000 km) führt die gleiche Aufgabenstellung zu einer Seilhöhe von rund $\sqrt{5}$ km über einer der Quadratseiten !!!

Wie weit steht das Seil ab, wenn es überall gleichweit von der Äquatorlinie entfernt sein soll? Passt unter dem Seil eine Maus durch?

Aus $u = 2\pi r$ wird $u+1 = 2\pi(r+h)$, d.h. $1 = 2\pi h$ und somit eine Höhe von rund 16 cm. Da passt auch eine Katze durch!



Seil-Paradoxon (2)

Durch Hans-Jürgen Caspar wurde auf „Matroids Matheplanet" eine sehr schöne, alternative Lösung ohne Verwendung eines Programms zur Bestimmung der Näherungslösung vorgeschlagen. Für die Höhe h wird

$$h = \sqrt{R^2 + Y^2} - R \quad (*)$$

Für den Kreisbogen zwischen den Tangentialpunkten ergibt sich

$$b_o = 2\ R \arctan(Y/R)$$

für den verbleibenden, unteren Kreisbogen $\quad b_u = 2\ \pi\ r - 2\ R \arctan(Y/R)$

Die Gesamtseillänge ist $\quad l = 2\ \pi\ r - 2\ R \arctan(Y/R) + 2\ Y = 2\ \pi\ r + 1\ \text{m}$

und da 1 m länger als der Umfang der Kugel, somit $\quad Y - R \arctan(Y/R) = 0{,}5\ \text{m}$

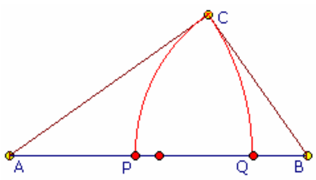
Anwendung der Taylorreihe für den Arkustangens bis zur 2.Näherung ergibt

$$Y - R\ (Y/R - 1/3\ Y^3/R^3) = 0{,}5\ \text{m}$$

$$Y^3 = 3/2\ R^2\ 1\ \text{m}$$

Damit kann aus dem Radius das Tangentialstück Y und anschließend über (*) die Höhe berechnet werden. $\quad h = \sqrt{R^2 + \sqrt[3]{9/4\ R^4\ 1\text{m}^2}} - R$

Zu beachten ist, dass das Ergebnis eine Näherungslösung ist, d.h. von exakten Wert etwas abweicht.



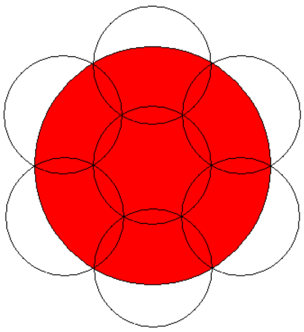
Dreieckssegment

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. CP und CQ sind Kreisbögen von Kreisen um A und B. Die Kreisbögen bilden dann das Dreieckssegment CPQ.

Dann gilt: $\quad PQ^2 = 2\ AP \cdot BQ \quad\quad PQ^2 = 2\ (c-a) \cdot (c-b)$

$$PQ^2 = 2\ (\sqrt{a^2+b^2} - a) \cdot (\sqrt{a^2+b^2} - b)$$

Abdeckung einer Kreisscheibe

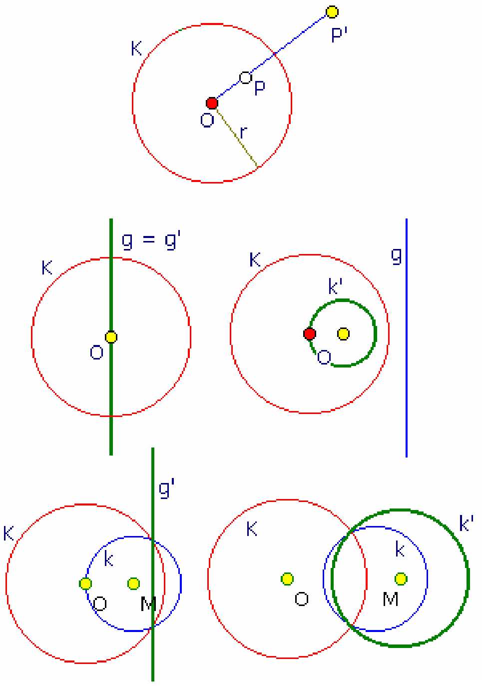


Gegeben sei eine Kreisscheibe. Wie viele Kreisscheiben mit dem halben Durchmesser braucht man mindestens, um die große Scheibe vollständig abzudecken?

Wenn man der Kreisscheibe ein regelmäßiges Sechseck einbeschreibt, erkennt man, dass mindestens 6 Kreisscheiben mit dem halben Durchmesser nötig sind, um den Rand der Kreisscheibe abzudecken. Der Mittelpunkt der kleinen Kreise muss dazu auf den Seitenmitten des Sechsecks platziert werden und die Seiten sind Durchmesser der kleinen Kreisscheiben. Diese 6 Kreisscheiben können allerdings den Mittelpunkt der großen Scheibe nicht erreichen. Dazu braucht man eine siebte zentral gelegene Scheibe.

Mittels Satz des Thales und den Winkelbeziehungen im regelmäßigen Sechseck, gelingt es zu zeigen, dass der Rand der zentralen Schreibe genau durch den innen gelegenen Schnittpunkt der Ränder zweier benachbarter Randscheiben geht.

Es sind also 7 Kreisscheiben mit dem halben Durchmesser nötig, um gerade die große Kreisscheibe abdecken zu können. Die gezeigte Lösung ist damit eindeutig.



Inversion am Kreis

Jakob Steiner (1830):

Gegeben sei ein Kreis K mit dem Mittelpunkt O, dem Zentrum der Inversion, und dem Radius r. Ein Punkt P sei von O verschieden. Dann ist der zu P inverse Punkt P' derjenige auf dem Strahl OP, der von O die Entfernung

$$OP' = r^2 / OP$$

besitzt.

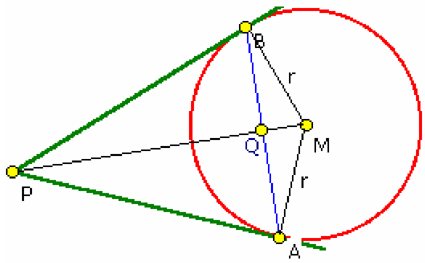
Eine Inversion vertauscht das Innere des Kreises K mit dem Äußeren. Die einzigen Punkte, die unverändert bleiben, sind die auf der Kreisperipherie liegenden Punkte.

Bei einer Inversion werden Geraden und Kreise wieder in

Geraden und Kreise überführt. Es gilt:
Eine Inversion an einem Kreis überführt
- eine Gerade durch O in eine Gerade durch O
- eine Gerade, die nicht durch O geht, in einen Kreis durch O
- einen Kreis durch O in einer Gerade, die nicht durch O geht
- einen Kreis, der nicht durch O geht, in einem Kreis, der nicht durch O geht.

Der letzte Punkt entspricht dem ...

Vietascher Satz
Die inverse Figur eines Kreises, der nicht durch den Inversionsmittelpunkt geht, ist wieder ein Kreis.



Wird ein Punkt P an einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius k invertiert, so liegt der Inversionspunkt Q auf dem Schnittpunkt der Strecke PM und der Kreissehne, die durch die Berührungspunkte der Tangenten von P an den Kreis gebildet wird. Dann gilt

$$MP / r = r / MQ \qquad r^2 = MP * MQ$$

Jeder Punkt auf Kreisperipherie geht somit in sich selbst über. r² wird die Potenz der Inversion genannt.
Hat der Punkt P die Koordinaten (x ; y) und der Mittelpunkt $M(x_m ; y_m)$, so ergibt sich für Q(x' ; y'):

$$x' = x_m + r^2 (x - x_m) / [(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2]$$
$$y_m + r^2 (y - y_m) / [(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2]$$

Für die Inversion am Einheitskreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung wird dann

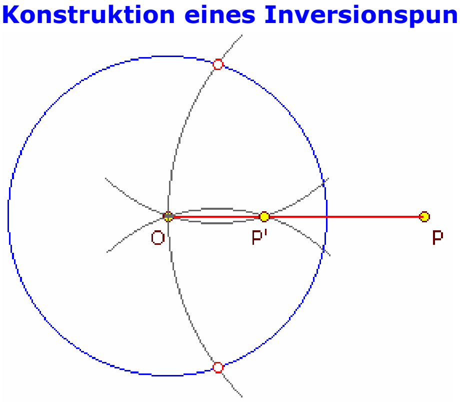
$$x' = x / (x^2 + y^2) \quad \text{und} \quad y' = y / (x^2 + y^2)$$

Da dann auch die Umkehrung

$$x = x' / (x'^2 + y'^2) \quad \text{und} \quad y = y' / (x'^2 + y'^2)$$

gilt, ist die Inversion am Einheitskreis eine birationale Transformation.

Konstruktion eines Inversionspunktes



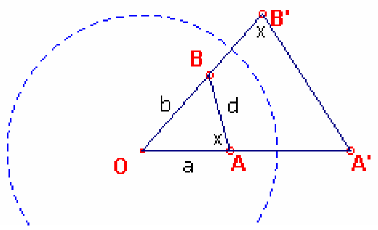
Gegeben ist ein Inversionkreis um einen Punkt O mit dem Radius r sowie ein Punkt P. Gesucht ist der Inversionspunkt P'.
Konstruktion:
1. um P einen Kreis mit dem Radius PO zeichnen
2. die Schnittpunkte mit dem Inversionskreis seien die Punkte Q und R
3. Kreis um Q mit Radius r zeichnen
4. Kreis um R mit Radius r zeichnen
5. der von O verschiedene Schnittpunkt der beiden Kreise ist der gesuchte Punkt P'

Auf Grund der Symmetrie liegt P' auf der Geraden OP. Da der Winkel QOP ein spitzer ist, liegen P und P' auf der gleichen Seite der Geraden OP bezüglich O.
Die Dreiecke QOP' und QOP sind gleichschenklig und haben den Winkel bei O gemeinsam. Daraus folgt

$$\Delta\, QOP' \sim \Delta\, POQ$$

und so $OQ : OP = OP' : OQ \qquad OP' * OP = OQ^2 = r^2$

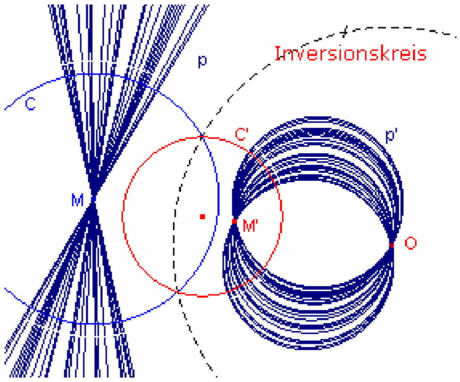
Inversion von Streckenpunkten



Gegeben ist ein Kreis um O mit dem Radius k, weiterhin eine Strecke AB innerhalb des Kreises. Dann wird

$$OA * OA' = k^2 \text{ und } OB * OB' = k^2$$

Dann ist AA'B'B ein Sehnenviereck und Δ OAB ~ Δ OB'A'.
Mit OA = a, OB = b und AB = d folgt
$AB : B'A' = OA : OB'$ und $d : A'B' = a : k^2/b \qquad A'B' = (k^2 d) / (ab)$



Die Strecke AB wird damit mit dem Faktor k²/(ab) verlängert. Weiterhin sind die Strecken AB und A'B' bezüglich des Winkels AOB zueinander antiparallel.
Achtung! A'B' ist nicht die Inversion der Strecke AB!

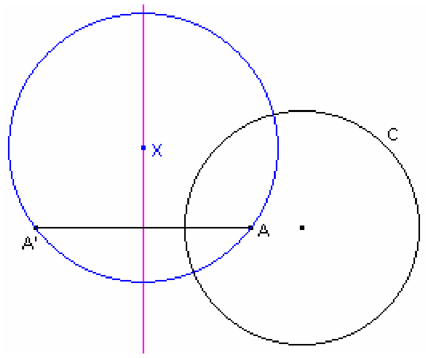
Inversion einer Geradenschar
Gegeben ist eine Geradenschar p, welche durch den Mittelpunkt M eines Kreises C verläuft. Weiterhin ist ein Inversionskreis um den Punkt O gegeben.

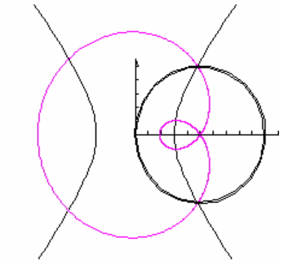
Die Inversion der Geraden ergibt dann eine Kreisschar p'. Alle diese Kreise verlaufen durch den Punkt O und einen weiteren gemeisamen Punkt M'. M' ist der Inversionspunkt von M am Kreis

um O.
Ist C' der invertierte Kreis von C, so schneiden alle Kreise der Schar p' diesen Kreis C' rechtwinklig. M' ist dann außerdem auch der Inversionspunkt von O am Kreis C'. Liegt der Punkt O auf dem Kreis C, so wird C' zu einer Geraden. M' und O sind das spiegelsymmetrisch zu C'.

Sätze zur Inversion am Kreis

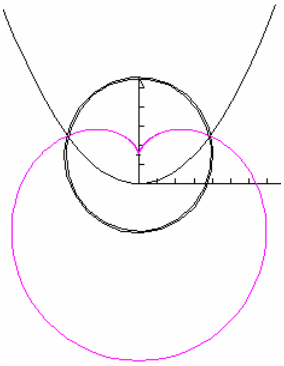
Die Ortskurve der Mittelpunkte aller Kreise durch einen gegebenen Punkt A, die ein zweiten Kreis C senkrecht schneiden, ist die Mittelsenkrechte einer Sekante AA', wobei A' der Kreisinversionspunkt von A bezüglich des Kreises C ist.





Inversion eines Kegelschnittes

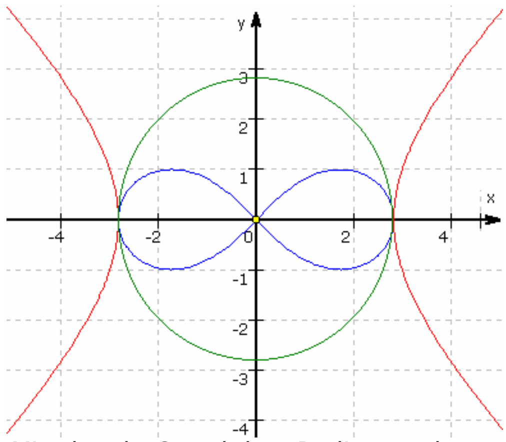
Eine Konchoide einer gegebenen Kurve r = r(t) erhält man, indem man eine konstante Strecke a zum Polarradius addiert $\quad r = r(t) + a$.
Konchoiden des Kreises sind Pascalsche Schnecken (Kurven vierter Ordnung). Diese gibt es in drei verschiedenen Formen: gespitzte, gestreckte und verschlungene Pascalsche Schnecken, die gespitzte Form heißt Kardioide oder Herzkurve.



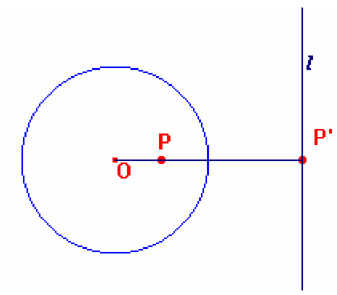
Da $r(t) = k \cdot \cos(t)$ einen Kreis ergibt, erhält man $\quad r(t) = 1 + k \cdot \cos(t)$ indem man auf allen Sehnen des Kreises durch O eine feste Strecke aufträgt, d.h. eine Konchoide des Kreises. Invertiert man diese, so entsteht eine Kegelschnittslinie.
D.h., invertiert man eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel an einem Kreis um den Brennpunkt ergibt sich eine Pascalsche Schnecke.
Merwürdige Ergebnisse erhält man, wenn man eine Parabel an einem beliebigen Kreis invertiert. Dabei wird die Berührung Parabel-Ferngerade völlig verfälscht, als Spitze.

Inversion einer Hyperbel

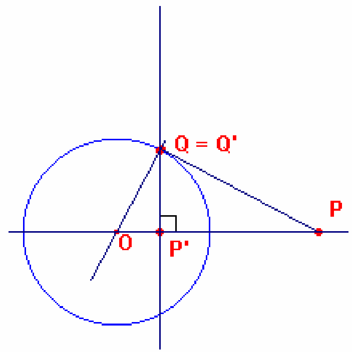
Das Inversionsbild einer achsensymmetrischen Hyperbel ist eine Lemniskate (griech. Schleife).
Die Gleichung der dargestellten Hyperbel lautet $x^2 - y^2 = a$ und die Gleichung des Inversionskreises $x^2 + y^2 = a$, womit sich der Spezialfall der Bernoullischen Lemniskate ergibt, d.h. der Scheitel der Hyperbel berührt den Inversionskreis.
Verschiebt man den linken Ast der Hyperbel in den Ursprung, so entsteht bei Kreisinversion eine Strophoide.
Die Zissoide des Diokles entsteht, wenn der Hyperbelast, der durch den Ursprung verläuft, zu einer Parabel entartet.



Polare Punkte

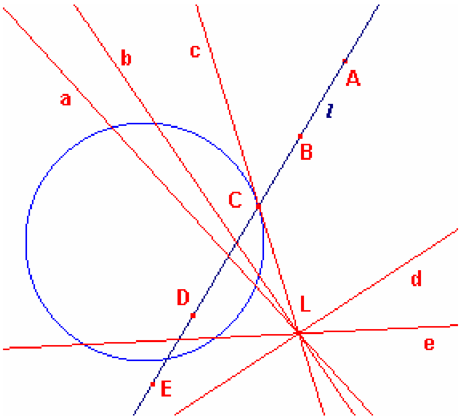


Zwei Punkte P und P' heißen bezüglich eines Kreises mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r polar, wenn $\quad OP * OP' = r^2$
gilt. Die Gerade l durch P', senkrecht zu OP', wird dann die Polgerade von P genannt. P heißt Pol der Geraden l bezüglich des Kreises. P' ist dann der Inversionspunkt von P dieses Kreises.
Weiterhin gilt: Liegt ein Punkt P auf der Polgeraden eines Punktes Q, so liegt auch Q auf der Polgeraden von P.
Die Polgerade eines Punktes P außerhalb des Kreises verläuft durch die Berührungspunkte der Tangenten, die von P an den Kreis gelegt werden können. Zueinander konjugiert bezüglich eines Kreises heißen zwei Punkte P und P', wenn der Punkt P' auf der Polgerade von P liegt.



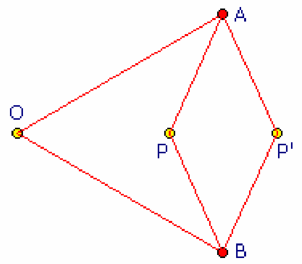
Polartransformation einer Geraden

Unter einer Polartransformation bezüglich eines Kreises versteht man die Abbildung der Punkte der Ebene, die wie folgt definiert ist:
Sind A ein Punkt der Ebene und O der Mittelpunkt des Kreises, so wird der Inversionspunkt A' von A bezüglich des Kreises gebildet. Die Gerade a durch A' senkrecht zu OA ist dann das Bild von A bei der Polartransformation. Werden die Punkte einer Geraden der Polartransformation unterzogen, so entsteht eine Geradenschar. Diese Geradenschar hat einen gemeinsamen Punkt (in der Abbildung L).



Andererseits werden Geraden durch einen Punkt auf Punkte transformiert, die auf einer Geraden liegen.

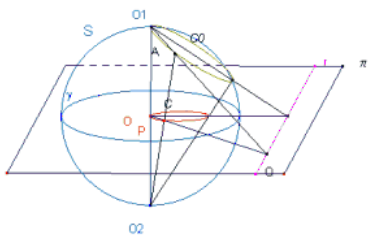
Peaucelliers Inversor



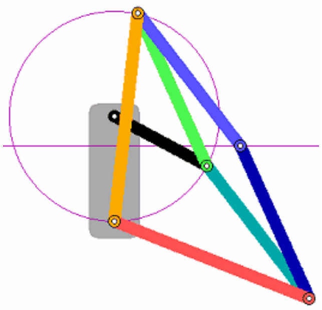
Sechs Stäbe sind an fünf Punkten O, A, B, P und P' drehbar miteinander verbunden. Dabei ist APBP' ein Rhombus. Die Strecken OA und OB sind gleich lang.
Wird der Inversor in O festgehalten und der Punkt P auf einer beliebigen Kurve bewegt, so beschreibt der Punkt P' die zugehörige inverse Kurve und umgekehrt. Der Inversor wurde 1864 von dem französischen Offizier A. Peaucellier (1832-1913) entwickelt.

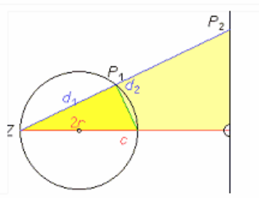
Beweis: Es gilt
$OP * OP' = (OQ - PQ)(OQ + PQ) = OQ^2 - PQ^2 = OQ^2 + AQ^2 - (AQ^2 + PQ^2) = OA^2 - PA^2$.
Überstreicht P eine Kreiskurve die durch O verläuft, so beschreibt P' eine gerade Linie. Bei der Inversion von Kurven ergibt sich weiterhin

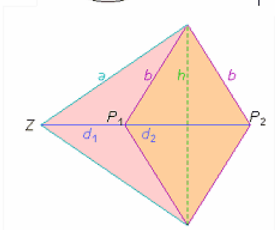
Kurve	**Inversionszentrum**	**Inversionskurve**
Archimedische Spirale	Ursprung	Archimedische Spirale
Kardioide	Umkehrpunkt	Parabel
Kreis	beliebig	Kreis
Zissoide	Umkehrpunkt	Parabel
Hyperbel	Mittelpunkt	Lemniskate
Logarithmische Spirale	Ursprung	Logarithmische Spirale
Strophoide	Ursprung	Hyperbel



Zur Konstruktion der Inversionspunkte am Kreis wurden verschiedenste Mechanismen erfunden.
Das abgebildete Gerät konstruiert das Inversionsbild.

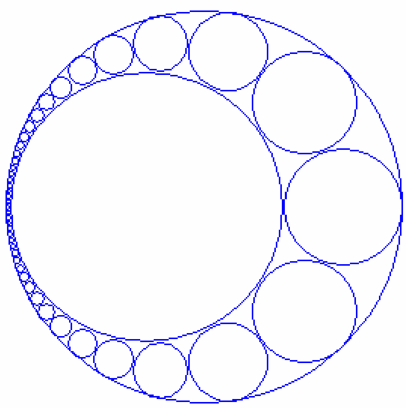






Peaucellier-Geradführung

Es wird vorausgesetzt, dass der Kreis um einen Punkt auf dem (roten) Lot von Z auf die (schwarze) Gerade und durch Z geht, und dass Z, P_1 und P_2 auf einer Geraden liegen.
Aus den zueinander ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken entnimmt man, dass $ZP_1 \cdot ZP_2 = 2$ rc ist.
Es seien $ZP_1 = d_1$ und $ZP_2 = d$. Nach Pythagoras ist $h^2 = b^2 - ((d_2 - d_1)/2)^2$ und andererseits $a^2 = h^2 + ((d_2 + d_1)/2)^2$, d.h. $d_1 d_2 = a^2 - b^2$
Diese Größe hängt nur von den Längen der Stangen ab, die ja nicht verändert werden.
Damit ist gezeigt, dass das Gestänge von Peaucellier exakt eine Bewegung auf einem Kreis, aber nicht ganz herum, einer auf einer Geraden zuordnet
Es ist möglich, dass man statt der Geraden auch einen zweiten Kreis bekommt, wenn der erste nicht durch Z geht. Allgemein liefert das Gerät die Inversion am Kreis, die so definiert werden kann:
Einem Punkt mit den Polarkoordinaten (r_1, w) (Radius und Winkel-Koordinaten) wird ein Bildpunkt (r_2,w) zugeordnet mit einem festen Produkt $r_1 \cdot r_2$. Dabei ist der Kreis mit $r_0 = \sqrt{(r_1 \cdot r_2)}$ um Z interessant.
Die Abbildung kehrt das Innere dieses Kreises nach außen und umgekehrt. Daher wird sie "Inversion" genannt.



Steiner-Kette , Porisma von Steiner

Gegeben sind zwei Kreise, von denen einer vollständig im Inneren des anderen liegt.
Unter einer Steiner-Kette versteht man dann eine Folge von Kreisen,

die beide Ausgangskreise und jeweils zwei andere Kreise der Kette tangential berühren. Zusätzlich wird gefordert, dass die Kreise der Kette keine "Lücke" lassen.
Eine derartige Steiner-Kette kann als Kreisinversion von Kreisen verstanden werden, welche einen Ausgangskreis von innen berühren. Für die Radien der symmetrischen Ausgangsstellung gilt dann:

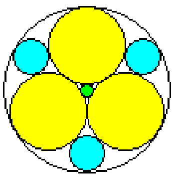
$\sin(\pi/n) = (a-b) / (a+b)$

wobei n die Anzahl eingeschriebener Kreise, a der Radius des Ausgangskreises und b der Radius des im Innern befindlichen Kreises sind. Für die eingeschriebenen Kreise ergibt sich also als Radius

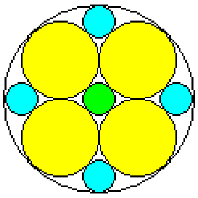
$c = 1/2\ (a-b)$

Ketten aus Kreisen

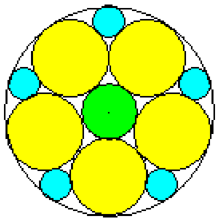
Die folgenden Figuren bestehen aus einer Kette von gelben Kreisen um einen grünen Zentralkreis und an den Rändern aus blauen Lückenkreisen. In den Formeln ist R der Radius des Umkreises, r der Radius der gelben Kreise. Diese Kreise bilden die Kette.
x der Radius der blauen Lückenkreise und y der Radius des grünen Zentralkreises.



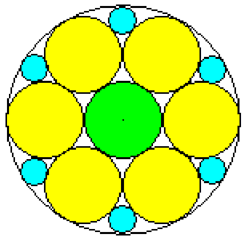
Drei gleiche Kreise im Kreis
$r = [2\sqrt{3} - 3]\ R$
$x = [2\sqrt{3} - 1]/11\ R$
$y = [7 - 4\sqrt{3}]\ R$



Vier gleiche Kreise im Kreis
$r = [\sqrt{2} - 1]\ R$
$x = [2\sqrt{2} - 1]/7\ R$
$y = [3 - 2\sqrt{2}]\ R$

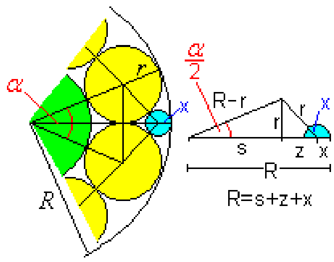


Fünf gleiche Kreise im Kreis

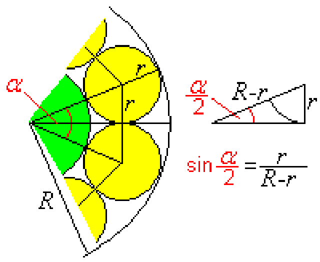


Sechs gleiche Kreise im Kreis
$r = R/3$
$x = [2\sqrt{3} - 2]/5\ R$
$y = R/3$

Formeln für die Ketten



Gibt man beliebige gleiche Kreise vor, so werden sie in seltenen Fällen eine geschlossene Kette um einen Zentralkreis bilden. Nach der Zeichnung ist die Kreiskette aus n Kreisen geschlossen, wenn n α = 360° oder α/2 = 180°/n ist.



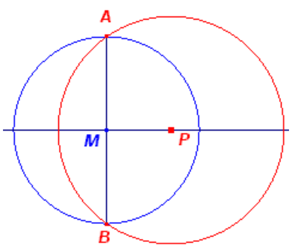
Nach der nebenstehenden Formel $\sin(\alpha/2)=r/(R-r)$ ist

$r : R = \sin(180°/n) / [1+\sin(180°/n)]$.

Ergebnis: Zu jeder Kreisanzahl n gibt es ein Verhältnis der Radien r:R.
Daraus folgt weiter

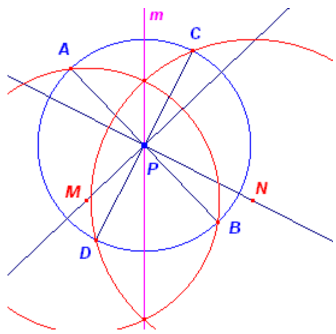
$r = \sin(180°/n) / (1+\sin(180°/n))\ R$

Für den Zentralkreis ergibt sich $y = R-2r$.
In die Lücken zwischen dem Umkreis und den gelben Kreisen kann man (blaue) gleiche Kreise mit dem Radius x legen. Es gilt $R = s+z+x$ und $(r+x)^2 = r^2+z^2$ oder $z = \sqrt{2rx+r^2}$.
Es gilt $\cos(\alpha/2) = s/(R-r)$ oder $s = (R-r) \cos(\alpha/2)$ oder $s = (R-r)\cos(180°/n)$. Das sind drei Gleichungen für die Variablen s, z und x. Für x ergibt sich:
$x = [R- (R-r) \cos(180°/n)]^2 / (2r + 2R - 2(R-r) \cos(180°/n))$



Diametralkreis und Antipotenz

Ein Kreis, von dem eine Sehne mit dem Durchmesser eines zweiten Kreises zusammenfällt, nennt man Diametralkreis des zweiten Kreises. In der Darstellung ist der Kreis um P ein Diametralkreis des Kreises um M. Man sagt, dass der Kreis um P den um M „halbiert“. Dabei ist keine flächenmäßige Halbierung gemeint.
Im Dreieck MPA gilt dann $PA^2 = PM^2 + AM^2 = PM^2 + r^2$. Das Quadrat des Radiuses des Diametralkreises um P heißt dann Antipotenz von P bezüglich des „halbierten“ Kreises um M. Die Potenz von M bezüglich des Diametralkreises um P ist dann (M, Kreis P) $=PM^2 - PA^2 = PM^2 - (PM^2 + r^2) = -r^2$

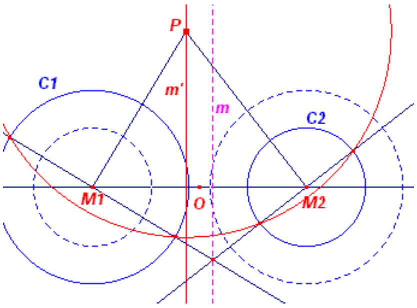


Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die von zwei gegebenen Kreisen „halbiert“ werden, ist der im Inneren der beiden Kreise gelegene Teil ihrer Potenzlinie.
Beweis: Der Kreis (P, *p*) sei durch die Kreise (M, *R*) und (N, *r*) halbiert. P kann dann nicht außerhalb der beiden Kreise liegen. Die Schnittpunkte A, B von (P) mit (M) sind für (P) entgegengesetzte Punkte, ebenso die Schnittpunkte C, D von (P) mit (N). Die Potenz von P zu jedem der Kreise ist dann gleich $-p^2$. P hat die gleiche Potenz zu (M) und (N). Damit liegt P auf der Potenzlinie der Kreise (M) und (N).

Umgekehrt liegt P auf der Potenzlinie von (M) und (N). Dann ist

$m(P,M) = PM^2 - R^2 = -PA^2 \qquad m(P,N) = PN^2 - r^2 = -PC^2$

so dass PA = PC. (P) wird damit durch sowohl von (M) als auch von (N) halbiert.



Antipotenzlinie

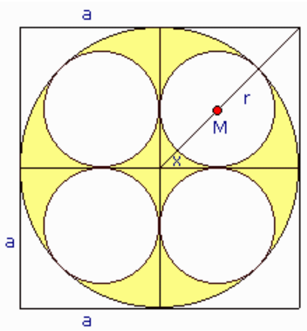
Der geometrische Ort aller Punkte mit gleicher Antipotenz zu zwei gegebenen Kreisen ist eine Senkrechte zur Verbindungsgerade der beiden Kreismittelpunkte. Diese Gerade wird Antipotenzlinie der beiden gegebenen Kreise genannt.

Nachweis: (M_1, r_1) und (M_2, r_2) seien die gegebenen Kreise. P ist ein Punkt des geometrischen Ortes m' mit

$PM_1^2 + r_1^2 = PM_2^2 + r_2^2 PM_1^2 - r_2^2 = PM_2^2 - r_1^2$

D.h. P liegt auf der Potenzlinie der Kreise (M_1, r_2) und (M_2, r_1).

Der geometrische Ort der Mittelpunkt der Diametralkreise zwei gegebener Kreise ist deren Antipotenzlinie. Die Antipotenzlinien dreier Kreise, deren Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen, schneiden sich in einem Punkt. Dieser Schnittpunkt P heißt Antipotenzpunkt der drei Kreises. Er ist gleichzeitig der Mittelpunkt des gemeisamen Diametralkreises der gegebenen Kreise.



Zusammengesetzte Fläche

Gegeben sind 4 Quadrate von jeweils der Seitenlänge a. Der Flächeninhalt der farbigen Fläche ist zu berechnen.

Lösung: Der mittlere Kreis tangiert die zwei Viertelkreise. Damit gilt für den Radius r des mittleren Kreises und die Strecke x $\quad 2r + x = 2a$

$(a + r)^2 = (r + x)^2 + a^2$

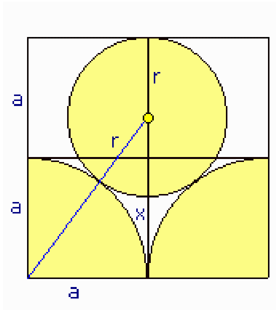
Auflösung des Gleichungssystems ergibt für r

$r = 2/3\, a$

d.h. der Mittelpunkt des Kreises drittelt die Gesamtstrecke 2a. Für den Flächeninhalt wird dann

$A = 2 * (\pi a^2 / 4) + (2/3\, a)^2 \pi$

$A = \pi a^2/2 + 4/9\, a^2 \pi = 17/18\, \pi a^2$



Zusammengesetzte Fläche

Gegeben ist ein Quadrat der Seitenlänge 2a. In dieses Quadrat wird der Inkreis gezeichnet und in diesen 4 symmetrische sich paarweise tangierende Kreise.

Der Flächeninhalt der farbigen Fläche ist zu berechnen.

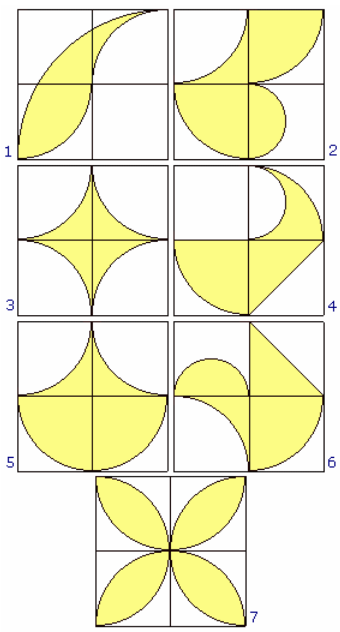
Lösung: Für einen der kleinen Kreise mit dem Radius r und der Strecke x gilt

$2r + x = a \qquad (r + x)^2 = r^2 + r^2$

Auflösung des Gleichungssystems ergibt für die positive Lösung von r: $r = (\sqrt{2} - 1)\, a$

Für den Flächeninhalt der farbigen Fläche wird dann

$A = a^2 \pi - 4 * (\sqrt{2} - 1)^2 a^2 \pi = \pi a^2 (8\sqrt{2} - 11)$



Zusammengesetzte Flächen

Für die schraffierten Flächen von links nach oben nach rechts unten gilt, wenn eines der vier kleinen Quadrate die Seitenlänge a hat:

$A_1 = a^2 (\pi - 2) \approx 08584\, a^2$

$A_2 = a^2 (1 + 3/8\, \pi) \approx 2.1781\, a^2$

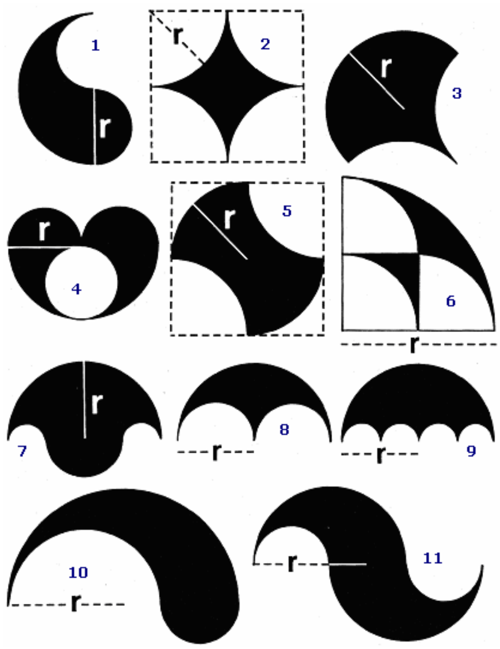
$A_3 = a^2 (4 - \pi) \approx 0.8584\, a^2$

$A_4 = a^2/8\, (4 + 3\pi) \approx 1.6781\, a^2$

$A_5 = 2\, a^2$

$A_6 = a^2/8\, (12 + \pi) \approx 1.8927\, a^2$

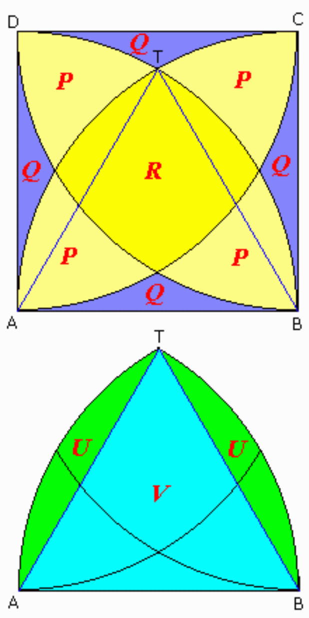
$A_7 = 2\, a^2 (\pi - 2) \approx 2.2832\, a^2$



Zusammengesetzte Flächen

Lösungen

Nr.	Flächeninhalt	Umfang
1	$1/2\, \pi r^2$	$2 \pi r$
2	$4 r^2 - \pi r^2$	$2 \pi r$
3	$2 r^2$	$2 \pi r$
4	$1/2\, \pi r^2$	$3 \pi r$
5	$2 r^2$	$2 \pi r$
6	$1/16\, \pi r^2$	$5/4\, \pi r + r$
7	$9/16\, \pi r^2$	$2 \pi r$
8	$1/4\, \pi r^2$	$2 \pi r$
9	$3/8\, \pi r^2$	$2 \pi r$
10	$1/3\, \pi r^2$	$2 \pi r$
11	$1/3\, \pi r^2$	$2 \pi r$



Zusammengesetzte Flächen

Ausgehend von einem Quadrat ABCD der Seitenlänge 1 sind die mit Buchstaben und Farben gekennzeichneten Teilflächen zu berechnen.
Diese ergeben sich aus folgenden Gleichungen:

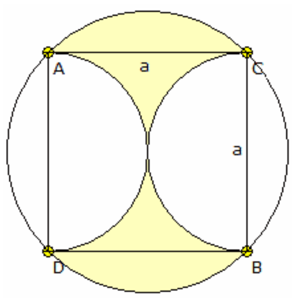
$$R + 4P + 4Q = 1$$
$$R + 3P + 2Q = \pi/4$$
$$R + 2P + Q = V + 2U$$

Für das gleichseitige Dreieck ABT wird $V = 1/4 \sqrt{3}$ und $U + V = \pi/6$ und somit

$$R + 4P + 4Q = 1$$
$$R + 3P + 2Q = \pi/4$$
$$R + 2P + Q = \pi/3 - 1/4 \sqrt{3}$$

Auflösung des Gleichungssystem ergibt die Lösungen

$$R = 1 - \sqrt{3} + \pi/3$$
$$P = -1 + 1/2 \sqrt{3} + \pi/12$$
$$Q = 1 - 1/4 \sqrt{3} - \pi/6$$



Gegeben ist ein Quadrat ABCD der Seitenlänge a. Um dieses Quadrat wird der Umkreis gezogen, über zwei Seiten zwei Halbkreise. Gesucht ist die in der Abbildung farbig hervorgehobene Fläche.

Lösung: Die gesuchte Fläche setzt sich aus zwei Teilen zusammen, den zwei Segmenten des Umkreises und den zwei krummlinigen Dreiecken im Quadrat. Der Umkreisradius ist $a/\sqrt{2}$, der Radius der Halbkreise $a/2$.
Die zwei Segmentflächen sind die Hälfte der Differenz von Umkreis und Quadrat, d.h.

$$A_{2Segmente} = (\pi (a/\sqrt{2})^2 - a^2) / 2 = a^2/4 \pi - a^2/2$$

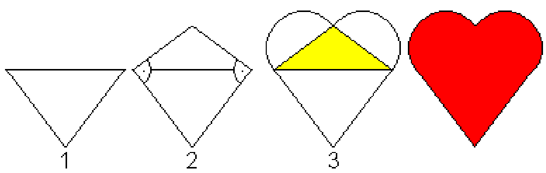
Die Fläche der Dreiecke ist die Differenz von Quadrat und den zwei Halbkreisen, d.h.

$$A_{Dreiecke} = a^2 - \pi (a/2)^2 = a^2 - \pi a^2/4$$

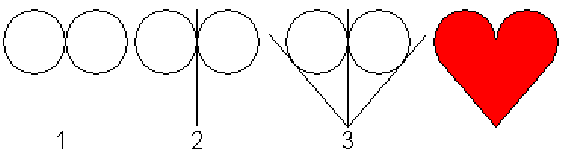
Für die farbige Fläche wird somit $A = A_{2Segmente} + A_{Dreiecke} = a^2/2$

Herzkurve

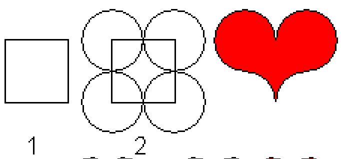
Die Herzkurve ist eine in sich geschlossene Kurve, die die Form des Herzens hat.
Die Herzfom ist als Spielkartenfarbe neben Pik, Kreuz und Karo wohlbekannt.
Im einfachsten Falle besteht ein Herz aus einem auf der Spitze stehenden Quadrat und zwei auf die Seiten gesetzten Halbkreisen. Kennzeichen der Herzfigur sind offenbar eine Einkerbung oben und eine Spitze unten. Eine Herzfigur entsteht auch, wenn man auf ein Dreieck zwei Halbkreise setzt. Dann entstehen seitlich zwei unschöne Ecken.
Fehlt die Spitze unten, so spricht man eher von einer herzförmigen Figur. Allerdings kommt diese Form dem menschlichen Herzen näher. Die Figur besteht aus drei Halbkreisen. Es gibt viele Methoden Herzkurven zu zeichnen:



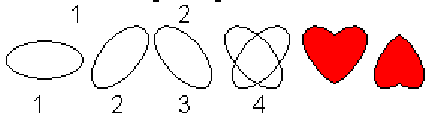
1 Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck.
2 Zeichne zu den Schenkeln die Senkrechten. Sie erzeugen ein zweites gleichschenkliges Dreieck.
3 Zeichne über die Schenkel des (jetzt gelben) Dreiecks Halbkreise.
Ist das Dreieck unten gleichschenklig-rechtwinklig, so besteht die Herzkurve aus einem Quadrat und zwei Halbkreisen.



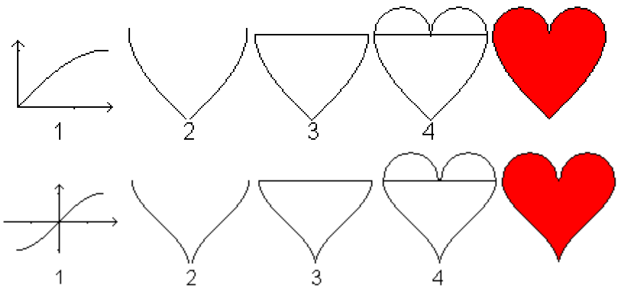
1 Zeichne zwei sich berührende Kreise.
2 Zeichne die gemeinsame Tangente.
3 Zeichne von einem Punkt der Tangente aus zwei weitere äußere Tangenten.
Ist der Winkel unten an der Spitze ein rechter, so besteht die Herzkurve wie oben aus einem Quadrat und zwei Halbkreisen.



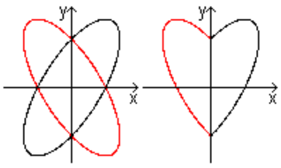
1 Zeichne ein Quadrat.
2 Zeichne gleiche Kreise um die Eckpunkte des Quadrates mit dem Radius "halbe Quadratseite".



1 Zeichne eine Ellipse. 2 Drehe sie.
3 Spiegele sie.
4 Bilde eine Schnittfigur. Markiere eines der Herzen.

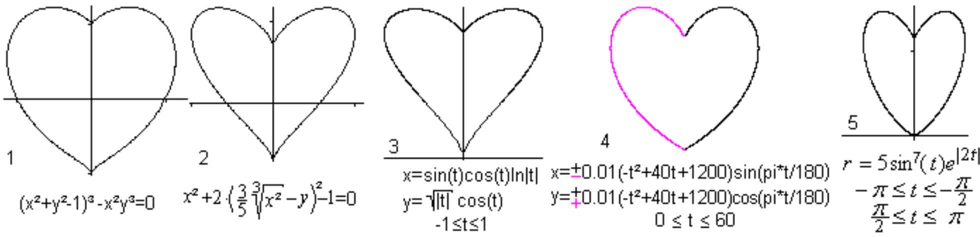


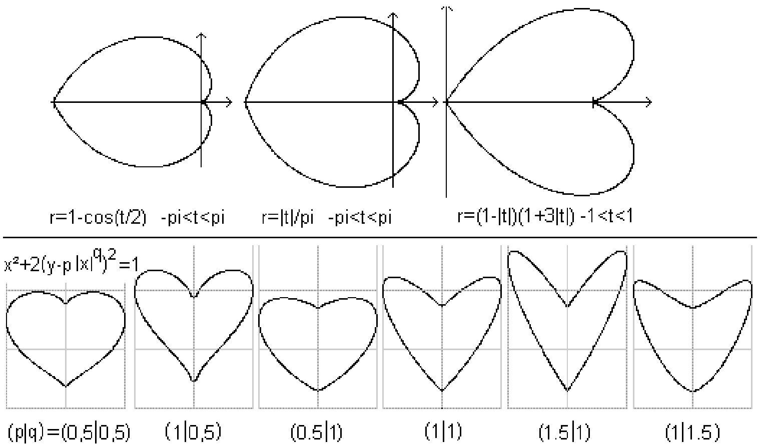
1 Zeichne den Graphen zu $f(x)=\sin(x)$, $0<x<\pi/2$.
2 Drehe die Kurve um 90°. Spiegele diese Kurve.
3 Bilde aus den beiden Kurvenstücken und einer Strecke ein Dreieck.
4 Setze auf das Dreieck zwei Halbkreise.
1 Zeichne den Graphen zu $f(x)=\sin(x)$, $-\pi/2<x<\pi/2$.
2 Drehe die Kurve um 90°. Spiegele diese Kurve.
3 Bilde aus den beiden Kurvenstücken und einer Strecke ein Dreieck.
4 Setze auf das Dreieck zwei Halbkreise.



Herzkurven-Formeln

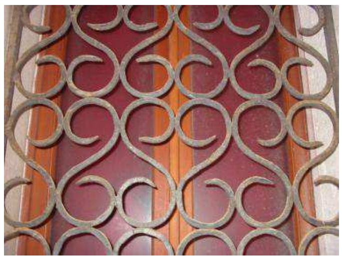
Man kann die Methode 4 von oben durch Formeln beschreiben. Die schwarze Ellipse hat die Formel $2x^2-2xy+y^2-1=0$. Als Nebenbedingung muss $x>=0$ sein. Die rot Ellipse hat die Formel $2x^2+2xy+y^2-1=0$. Als Nebenbedingung muss $x<=0$ sein. Die Einschränkung des Definitionsbereichs kann man weglassen, wenn man y eliminiert und die Betragsfunktion einsetzt. Dann stellen $y=|x|+\mathrm{sqrt}(1-x^2)$ und $y=|x|-\mathrm{sqrt}(1-x^2)$ ein Herz dar.
Weitere Gleichungen:





Parkettierung mit Herzkurven

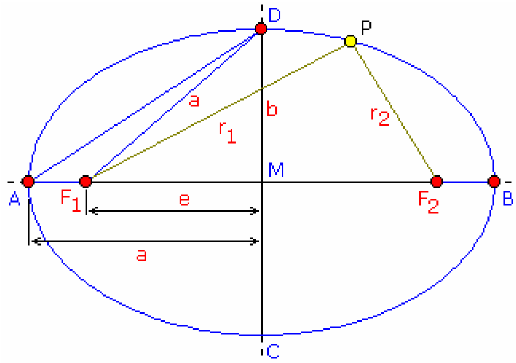
1 Gib eine Spirale vor.
2 Spiegele die Spirale an ihrem Endpunkt.
3 Setze die beiden Spiralen zu einer Doppelspirale zusammen.
4 Spiegele die Doppelspirale. Sie bildet mit dem Urbild ein Herz.



Viele Herzen führen zu einer Parkettierung (rechts).

Diese Idee ist bei einem Fenstergitter in Venedig gut umgesetzt.
Herzkurven sollte man auch bei anderen symbolischen Darstellungen erwarten, insbesondere bei Flaggen. Erstaunlich ist, dass bisher nur eine ermittelt werden konnte, die Flagge von Champagne-Adrenne.

Ellipse

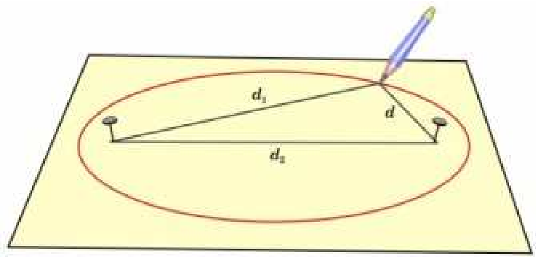


Eine Ellipse ist eine zentral-symmetrische geschlossene Kurve, bei der für jeden Punkt P die Summe der Entfernungen von zwei Festpunkten, den Brennpunkten, den konstanten Wert 2a hat.

$$r_1 + r_2 = 2a$$

Geschichte: die Ellipse wurde zuerst von Menaichmos beschrieben und von Euklid untersucht.
Der Name geht auf Apollonius zurück. Die Brennpunkte und die Direktrix wurden von Pappus von Alexandria eingeführt. Im Jahre 1609 wurde die Ellipse als typische Bahnform der Planeten durch Kepler erkannt. Er führte auch den Begriff Brennpunkt ein.
Das affine Bild eines Kreises ist eine Ellipse. Die Evolute einer Ellipse ist eine schiefe Astroide.

Größen und Begriffe: a ... große Halbachse, b ... kleine Halbachse, e ... lineare Exzentrizität, a = AM, b = CM, e = FM = $\sqrt{a^2-b^2}$



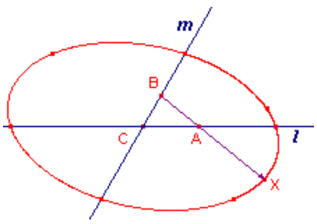
Spezialfälle: 1. a = b → Kreis (e = 0, $F_1 = F_2 = M$)
2. b = e → gleichseitige Ellipse

Gärtnerkonstruktion

Aus der Ellipsendefinition als Kurve, bei der für jeden Punkt P die Summe der Entfernungen von zwei Festpunkten, den Brennpunkten, den konstanten Wert 2a hat

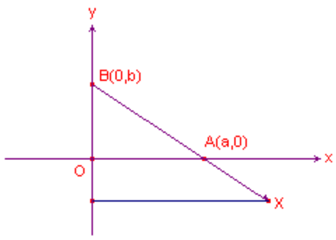
$$r_1 + r_2 = 2a$$

kann ein einfache Näherungskonstruktion abgeleitet werden.
Um zwei feste Punkte, mit dem Abstand a, wird ein geschlossenes Seil mit einer Mindestlänge von 2a gelegt. Wird das Seil gespannt und in dem gehaltenen Punkt z.B. mit einem Bleistift versehen, so beschreibt dieser bei kontinuierlichem Verschieben eine Ellipse. Da dieses Verfahren gern zum Anlegen elliptisch geformter Blumenbeete genutzt wird, spricht man von einer Gärtnerkonstruktion.
Physikalische Eigenschaft der Brennpunkte
Ein Lichtstrahl, der von dem Brennpunkt F_1 ausgeht, wird in jedem Punkt P der Ellipse so reflektiert, dass er durch den anderen Brennpunkt F_2 verläuft.

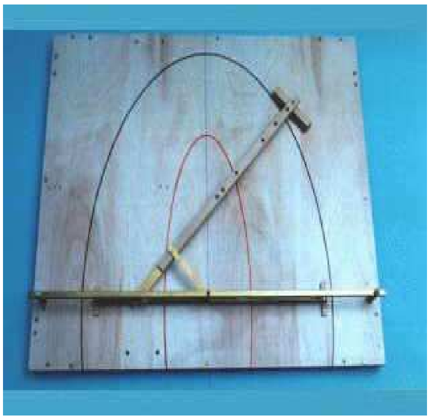


Ellipsenkonstruktion nach Johan de Witt (1625-1672)

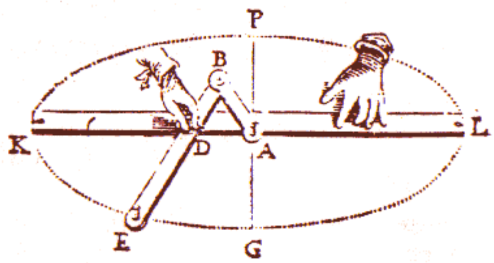
Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden m und l und eine Strecke BA auf der von B aus in Richtung A eine weitere Strecke X abgetragen ist.
Bewegen sich nun A auf l und B auf m, so beschreibt der Punkt X eine Kurve, in diesem Fall eine Ellipse.



Herleitung : A(a,0) und B(0,b) seien Punkte auf der x- bzw. y-Achse. Dann gilt $a^2 + b^2 = p^2$, wobei p die Länge von AB ist
X sei so gelegen, dass BX = kBA. Für die Koordinaten von X wird dann
$x = ka \quad y = kb - b$, d.h.
$a = x / k \quad b = y / (k-1)$
und somit $x^2/k^2 + y^2/(k-1)^2 = p^2$ und die Ellipsengleichung
$$x^2/(k^2 p^2) + y^2/((k-1)^2 p^2) = 1$$

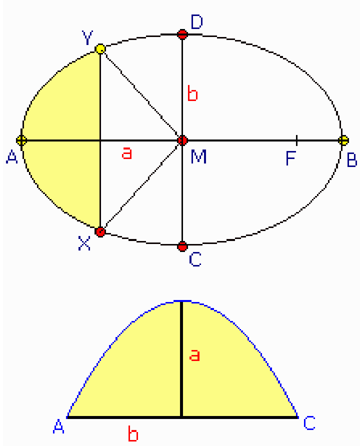


Ellipsograph



Auf der Basis der Ellipsenkonstruktion von de Witt konstruierte Frans van Schooten der Jüngere (1615-1660) ein Gerät zum mechanischen Zeichnen von Ellipsen, den Ellipsograph.
Zwei Stangen sind dabei im Punkt B mit einem Scharnier verbunden. Im Punkt E befindet sich ein Zeichenstift. Der Endpunkt A einer Stange ist im Ursprung befestigt, während der Punkt D der zweiten Stange waagerecht längs einer Strecke KL bewegt werden kann. Verändert man die Lage von D kontinuierlich, so beschreibt E dann eine Ellipse.
Im "Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica" in Modena (Italien) kann so ein Apparat noch bewundert werden.

Ellipsenfläche



Flächeninhalt $A = \pi * a * b$

Umfang $u = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{[\, 1 - (a^2-b^2)/a^2 \sin^2\theta \,]}\, d\theta$

$u = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\theta)}\, d\theta$

Umfang mit $\lambda = (a-b) / (a+b)$

$u = 2\pi a\, [1 - (e/2)^2 - [\, (1*3*e^2) / (2*4) \,]^2 /3 - \ldots]$

$u = \pi(a+b) * [\, 1 + \lambda^2/4 + \lambda^4/64 + \lambda^6/256 + \ldots]$

Näherungsformeln

$u \approx 2\pi \sqrt{(a\, b)}$ nach Kepler 1609

$u \approx \pi \sqrt{(2 a^2 + 2 b^2)}$ nach Euler 1773

$u \approx 2\pi\, (a+b)^2/(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ nach Sipos 1792

$u \approx \pi\, (3/2 \cdot (a+b) - \sqrt{(a \cdot b)})$ nach Peano 1889

$u \approx \pi\, (3a + 3b - \sqrt{(\, (a+3b)(3a+b))})$ nach Ramanujan 1913

$u \approx \pi \cdot (a+b) \cdot (64 - 3\lambda^4) / (64 - 16\lambda^2)$

$u \approx 2\pi\, (2(a+b)^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^4) / ((\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{(2a+2b)}\, \sqrt[4]{(ab)})$ nach Almkvist

$u \approx 2\pi\, \sqrt[3]{((\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3})/2)^2}$ nach Muir 1883

$u \approx \pi/2\, \sqrt{(6a^2 + 6b^2 + 4ab)}$

$u \approx \pi\, (a+b)\, (1 + 3\lambda^2 / (10 + \sqrt{(4 - 3\lambda^2)}))$ nach Ramanujan

Die letzte Näherungsformel hat für kleine λ^2 einen relativen Fehler von $3 \cdot 2^{-17} \lambda^{10}$.
Das Integral $\int^{\pi/2} \sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\theta)}\, d\theta$ ist das vollständige elliptische 2.Gattung nach Legendre und analytisch nicht lösbar.

Apoapsis, Periapsis

Die größte und die kleinste Entfernung eines Ellipsenpunktes von einem Brennpunkt heißen Apoapsis und Periapsis. $r_{apo} = a\, (1 + \varepsilon)$ $r_{peri} = a\, (1 - \varepsilon)$
Hinweis: In der Astronomie werden bei der Bewegung von Planeten, Satelliten, Monden ... die kleinsten und größten Abstände zum Zentralkörper (Sonne, Erde, Mond, ...) Perihel, Perigäum, Periselenum und Aphel, Apogäum, Aposelenum genannt.
Für den Ortsvektor der Bewegung eines Körpers m um einen anderen Körper M gilt

$r = a\, (1 - \varepsilon^2) / (1 + \varepsilon \cos\theta)$

Im Fall Apoapsis ist $\theta = \pi$ $r_{apo} = a\, (1 - \varepsilon^2) / (1 + \varepsilon \cos\theta) = a\, (1 + \varepsilon)$

Für die Geschwindigkeit bzgl. eines anderen Ortsvektors r_2 wird dann

$v_{apo} = \sqrt{[\, 2\, \gamma\, M\, r_2\, (r_{apo} + r_2) / (r_{apo}\, (r_{apo}^2 + r_2^2))\,]}$ $v_2 = r_{apo}/r_2\, v_{apo}$

Anwendung Ellipse

Das Kolosseum (Colosseum), größtes Amphitheater der antiken Welt, wurde zwischen 70 und 80 v.Chr. unter Vespasian in Rom erbaut.
Die heutige Ruine ist ein bedeutendes Architekturdenkmal und zugleich eine Touristenattraktion.
Der knapp 50 Meter hoch aufragende monumentale Bau hat eine elliptische Grundfläche von 188 Meter Länge und 156 Meter Breite.
Mit einer großen Halbachse a = 94 m und der kleinen Halbachse b = 78 m wird die lineare Exzentrizität e = 52.46 m, der Flächeninhalt A = 23034 m² und der Umfang näherungsweise $u \approx 543$ m.

Amphitheater in Nîmes

Ein weiteres faszinierendes, elliptisches Amphitheater befindet sich in Nîmes, innerhalb der Arenen, die Ende des 1.Jahrhunderts erbaut wurden.
Dabei misst das Amphitheater 133 m in der Länge und 101 m in der Breite und bietet Platz für über 20000 Zuschauer. Die 21 m hohe Fassade besteht aus zwei übereinanderliegenden Reihen aus jeweils 60 Bögen.

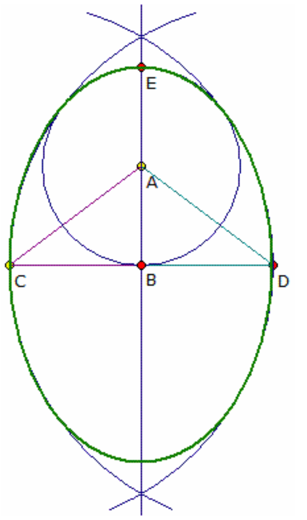
Washington-Ellipse

Südlich des Weißen Hauses in Washington befindet sich eine Parkanlage in Form einer Ellipse. Seit 1978 wird hier vor Weihnachten der "The National Christmas Tree" errichtet.
Um den Park führt ein Weg, der gern von Hobbyläufern genutzt wird.

Die elliptische Parkanlage hat folgende, offizielle Maße:

große Achse 1058,26 Fuß = 322,6 m
kleine Achse 902,85 Fuß = 275,2 m

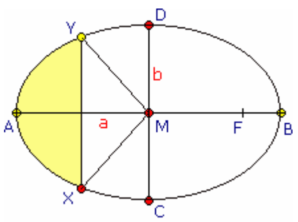
Flächeninhalt 751071,67 Quadratfuß = 69774,6 m²
Umfang 3086,87 Fuß = 940,9 m
Mit den Gleichungen für die Ellipse Flächeninhalt $A = \pi \cdot a \cdot b$
Umfangu $\approx \pi (a+b) (1 + 3\lambda^2 / (10 + \sqrt{4 - 3\lambda^2}))$
ergeben sich 69727 m² Fläche bei 940,5 m Umfang, d.h. die Parkform ist eine sehr gute Näherung einer Ellipse. Exzentrizität e = 84,2 m, numerische Exzentrizität ε = 0,5218



Persische Ellipse

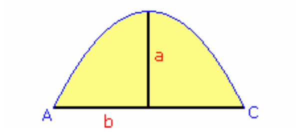
Das pythagoreische Dreiecke mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 eignet sich auch, um eine fast-elliptische Figur zu zeichnen.
Gegeben sei das Dreieck ABC mit AB = 3 Einheiten und BC = 4 Einheiten. Für AC folgt dann sofort die Länge 5. An das Dreiecke wird spiegelbildlich ein kongruentes Dreieck ABD angesetzt.
Um C und D werden Kreise mit dem Radius CD gezeichnet, um A ein Kreis mit dem Radius AB. Der Kreis um A berührt dann die anderen Kreisbögen.

Wird nun eine Kurve CED aus dem oberen Teil des Kreises um A und ab den Berührungspunkten aus Kreisbögen um C und D wie in der Skizze zusammengesetzt, so entsteht eine Fast-Ellipse. Der untere Teil der Kurve ergibt sich auf analoge Weise.
Auf Grund der Tatsache, dass die Anstiege der sich berührenden Kreise an den Berührungspunkten gleich sind, tritt keine "Ecke" auf. Dennoch ist es keine Ellipse, da sich bei dieser die Krümmung kontinuierlich ändert, hier aber nur an den Berührungspunkten.
Die "Ellipse" wird persische Ellipse genannt, da mit ihr in Persien elliptische Kuppeln konstruiert wurden. (u.a. Achaimenidische Epoche 550-330 v.u.Z., Sassanidische Epoche 226-641 u.Z.)



Ellipsensektor

Sektor AXM, x … Entfernung M bis Lotpunkt von X
$A = ab/2 \cdot \arccos (x/a)$
Sektor AXMY, x … Entfernung M bis Lotpunkt von X
$A = ab \cdot \arccos (x/a)$
Segment AXY, y = XY/2
$A = ab \cdot \arccos (x/a) - xy$
$A = ab \cdot \arccos (x/a) - x\, b/a \sqrt{a^2 - x^2}$

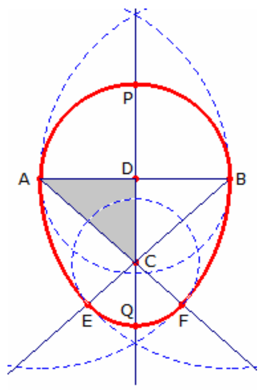


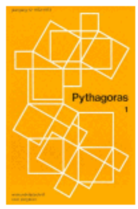
Parabelstück

$A = 2/3 \cdot a \cdot b$
Bogenlänge ABC:
$s = 0{,}5 \sqrt{b^2 + 16a^2} + b^2/(8a) \cdot \ln[(4a + \sqrt{b^2+16a^2})/b]$

Eilinien

Eilinien sind Punkte der Ebene, deren Summe der Vielfachen ihrer Abstände a,b zu zwei festen Punkten F_1, F_2 konstant ist.
$m \cdot a + n \cdot b = \text{konst}$
Eine eindeutige Definion gibt es noch nicht. Man definiert meist: Ein Oval ist eine in sich geschlossene ebene Linie, die ellipsenförmig ist oder die Form eines Hühnereis hat. Eine Eilinie oder Eikurve ist der Umriss des Hühnereies. Das Hühnerei wird an einem Ende schmaler und hat nur eine Symmetrieachse.
Für den Mathematiker ist die Eikurve eine konvexe Kurve, die stückweise zweimal stetig differenzierbar ist und eine echt positive Krümmung hat.

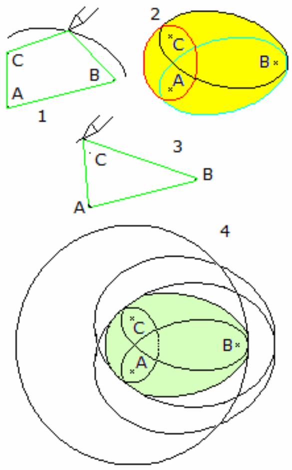




Eikonstruktion

Im Oktoberheft 2000 der holländischen mathematischen Schülerzeitschrift "Pythagoras" beschreibt Bruno Ernst die Konstruktion einer Eikurve mit Hilfe einer Vielzahl von Kreisbögen mit Zirkel und Lineal.
Konstruktionsbeschreibung:
1. Konstruiere den Mittelpunkt D einer Strecke AB und die Mittelsenkrechte zu AB
2. Zeichne den Kreis (D, DA)
3. Wähle einen beliebigen Punkt C auf der Mittelsenkrechten von AB
4. Zeichne die Kreis (A, AB) und (B, BA)
5. AC schneidet den Kreis um A in F, BC schnediet den Kreis um B in E
6. Zeichne den Kreis (C, CE)

Die Kreisbögen AE, EF, FB, BP und PA bilden dann die gesuchte Eikurve. Auf Grund der Symmetrie genügen auch drei Bögen PA, AE und EQ, die an der Mittelsenkrechten gespiegelt werden. Die Mittelpunkte dieser Kreisbögen sind D, A und C und bilden damit ein Dreieck, das Basisdreieck DAC der Eikurve. Die Seitenverhältnisse des Basisdreiecks bestimmen dann die Gestalt der Eikurve.

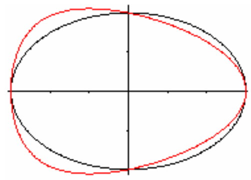


Eilinien-Gärtnerkonstruktion

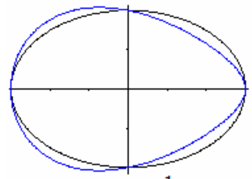
Ein Ei ist zeichenbar, indem man um drei Punkte, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden, nach der Gärtnermethode ein Seil (grün) schlingt, das etwas länger als der Umfang des Dreiecks ist, und bei gespannten Seil eine geschlossene Linie zeichnet (1).
Es entstehen Ellipsenbögen, die zusammen ein Ei (2) bilden.

Ist man genauer, so kommen im Bereich der Scheitelwinkel der Innenwinkel des Dreiecks ABC noch drei weitere Ellipsen hinzu (4).
Das sind Ellipsen um die Seiten AB, AC und BC (3).

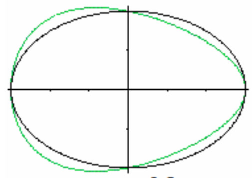
Eilinien-Konstruktion



$t_1(x) = 1+0.2x$



$t_2(x) = \frac{1}{1-0.2x}$



$t_3(x) = e^{0.2x}$

Man kann eine Hühnereiform aus einem Oval erzeugen, indem man die Ovalgleichung leicht abändert.
Man multipliziert y oder y^2 mit einem Term t(x), so dass bei der Eilinie die y-Werte rechts der y-Achse kleiner und links größer werden und der y-Achsenabschnitt bleibt. Auf diese Weise wird z.B. eine Ellipsengleichung zu

$$x^2/9 + y^2/4 \cdot t(x) = 1.$$

1. rote Eilinie: Die Ellipse ist schwarz. Die Eilinie ist rot. Rechts der y-Achse liegt die Eilinie unter der Ellipse. Der Term $t_1(x)$ ist dort größer als 1. Durch die Multiplikation von $y^2/4$ wird die Zahl 4 (= b^2) kleiner.
Die Kurve gehört also zu "Ellipsen" mit kleinerer Halbachse, sie ist also flacher als die gegebene Ellipse. Entsprechend erklärt man, warum links der y-Achse die rote Kurve oberhalb der Ellipse liegt.

$$y = 2\sqrt{(1 - x^2/9) / (1 + 0{,}2x)}$$
$$y = -2\sqrt{(1 - x^2/9) / (1 + 0{,}2x)}$$

2. blaue und grüne Eilinien: Die drei farbigen Eilinien haben etwa die gleiche gewünschte Form, obwohl die Gleichungen auf den ersten Blick sehr verschieden sind.
$t_2(x) = 1/(1-0{,}2x)$ kann als geometrische Reihe geschrieben werden. Allgemein ist

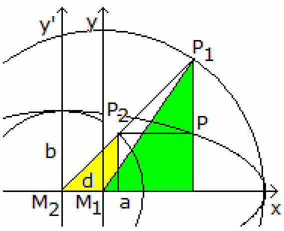
$$1/(1-q) = 1+q+q^2+\ldots, \text{ hier ist}$$
$$1/(1-0{,}2x) = 1 + 0{,}2x + 0{,}04x^2 + \ldots$$

$t_3(x) = e^{0{,}2x}$ kann als Taylorreihe entwickelt werden, hier ist

$$e^{0{,}2x} = 1 + 0{,}2x + 0{,}02x^2 + \ldots$$

Zum Vergleich ist $t_1(x) = 1 + 0{,}2x + 0x^2$. Die drei Terme t1, t2 und t3 unterscheiden sich in der Reihenentwicklung erst im quadratischen Glied.

Hügelschäfer-Konstruktion



In dieser Eilinienkonstruktion überträgt man die bekannte Ellipsenkonstruktion mit Hilfe zweier konzentrischer Kreise auf eine Zweikreisfigur.

Die Konstruktion erfolgt in der Reihenfolge M_1, M_2, P_1, P_2 und P. In der Zeichnung sind a und b die Radien der Kreise. d ist rechts die Entfernung der Mittelpunkte. Die Parameter a, b und d sind gut geeignet, eine Eiform zu kennzeichnen. 2a ist ihre Länge, 2b ihre größte Breite und um d seitlich von der Mitte aus verschoben liegt die breiteste Stelle.
Die Gleichung der Eilinie ist eine Gleichung dritten Grades:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2[1 + (2dx+d^2)/a^2] = 1 \quad \text{oder} \quad b^2x^2+a^2y^2+2dxy^2+d^2y^2-a^2b^2 = 0$$

Herleitung:
$P_1(x_1|y_1)$ ist ein Kreispunkt. Es gilt im grünen Dreieck nach dem Satz des Pythagoras

$$(1)\ (x_1-d)^2+ y_1^2 = a^2$$

$P_2(x_2|y_2)$ ist ein Kreispunkt. Es gilt im gelben Dreieck nach dem Satz des Pythagoras

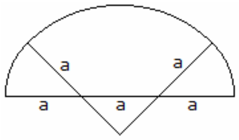
$$(2)\ x_2^2+ y_2^2 = b^2$$

Da die Punkte M_2, P_1 und P_2 auf einer Nullpunktsgeraden liegen, gilt (3) $y_1/x_1 = y_2/x_2$.
Punkt $P(x_1|y_2)$ liegt auf der Eilinie. Die Variablen x_2 und y_1 sind zu ersetzen.
Aus (1) folgt die Gleichung (1'): $x_2^2 = b^2-y_2^2$
Aus (2) folgt die Gleichung (2'): $y_1^2 = a^2-(x_1-d)^2$
Aus (3) folgt die Gleichung (3'): $x_2^2y_1^2 = x_1^2y_2^2$.
Man setzt (1') und (2') in (3') ein und erhält

$$-a^2b^2+b^2x_1^2 -2b^2dx_1 +b^2d^2 +a^2y_2^2 +2dx_1y_2^2 -d^2y_2^2 = 0$$

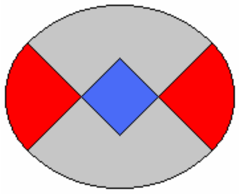
Die Gleichung wird einfacher, wenn man den Nullpunkt des Achsenkreuzes von M_2 nach M_1 verschiebt.
Man setzt dazu x_1 = x und y_2 = y und vereinfacht. Ergebnis:

$$-a^2b^2+b^2x^2+a^2y^2+2dy^2x+d^2y^2 = 0 \text{ wzbw.}$$

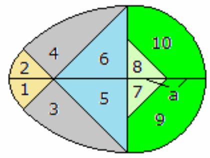


Eilinien aus Kreisbögen

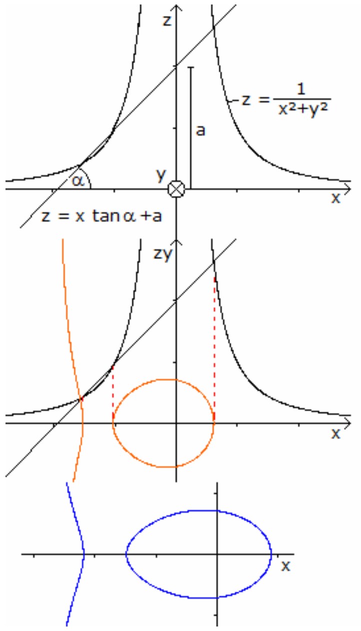
1) Das Oval setzt sich aus zwei kleinen Viertelkreisen (rot) und zwei großen Viertelkreisen (grau), die ein Quadrat gemeinsam haben, zusammen.
Die Winkel der Kreisausschnitte müssen nicht 90° betragen.



2) Die dritte Figur setzt sich aus einem Halbkreis (grün), einem Viertelkreis (rot) und zwei Achtelkreisen (grau), die ein Dreieck gemeinsam haben, zusammen. Zerschneidet man das Ei in zehn Teile, so entsteht das Tangram-Puzzle "Das magische Ei". Linien aus Kreisbögen heißen auch Korbbögen.



Eilinien und Schnitte durch Rotationskörper



Legt man einen schrägen Schnitt durch einen Kegel oder Zylinder, so entsteht als Schnittlinie u.a. eine Ellipse.
Wählt man einen hyperbolischen Trichter, so gelangt man zu Eilinien nach Art des Hühnereies. Hyperbolische Trichter sind Körper, die durch Rotation einer Hyberbel um die Symmetrieachse entstehen.

In der oberen Abbildung ist der hyperbolische Trichter zu

$$f(x) = 1/x^2$$

dargestellt. Die y-Achse ist senkrecht zur Zeichenebene nach hinten gerichtet. Die Gerade stellt eine Schnittebene dar, die senkrecht auf der Zeichenebene steht.

$$z = x \tan a + a \; ; \; z = 1/(x^2+y^2)$$

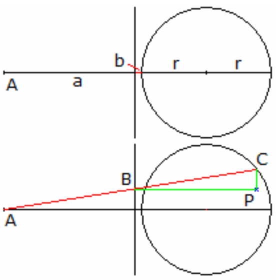
mittlere Abbildung: Die Ebene schneidet den hyperbolischen Trichter in der z-x-Ebene in drei Punkten. Projeziert man die Schnittlinien in die x-y-Ebene, so erhält man die roten Linien.

$$z = z; \; x \tan a + a = 1/(x^2+y^2)$$

untere Abbildung: In der Schnittebene erscheint die Schnittlinie als Eilinie.

$$x = x' \cos ax' \sin a + a = 1/((x' \cos a)^2 + y^2)$$

Auch andere Körper können schräg geschnitten werden und liefern Eilinien.

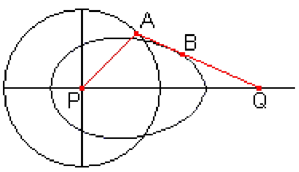


Granvillesches Ei

Gegeben ist eine Halbgerade, die von einem Punkt A ausgeht und waagerecht verläuft.
In der Entfernung a liegt eine vertikale Gerade und im Abstand a+b symmetrisch zur Horizontalen ein Kreis mit dem Radius r (obere Zeichnung).
Zieht man von Punkt A aus eine Gerade (rot), so schneidet sie die Vertikale in B und die Kreislinie in C. Zeichnet man durch C eine Vertikale und durch B eine Horizontale (grün), so schneiden sich diese in Punkt P. Bewegt sich Punkt C auf dem Kreis, so liegen die Punkte P auf einer Eilinie, der Granvilleschen Eilinie.
Das Granvillesche Ei ist eine Kurve 4.Ordnung mit der allgemeinen Gleichung

$$x^2 y^2 = (x-a)(1-x)$$

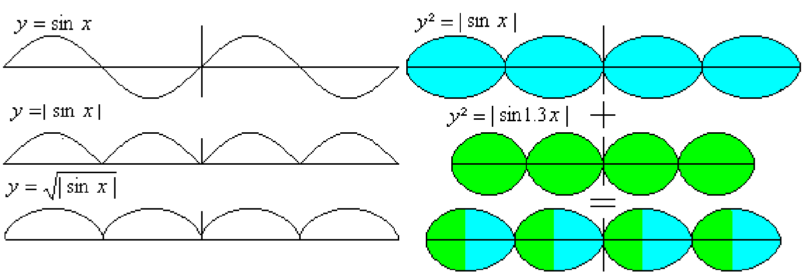
Beispiel a = 4 $y = \sqrt{(x - 4)(1 - x) / x^2}$
1929 beschrieb W.A.Granville die Kurve erstmals in "Elements of the differential and integral calculus".
Ihren Namen erhielt sie 1947 von R.A.Johnson.



Mechanisch erzeugtes Ei

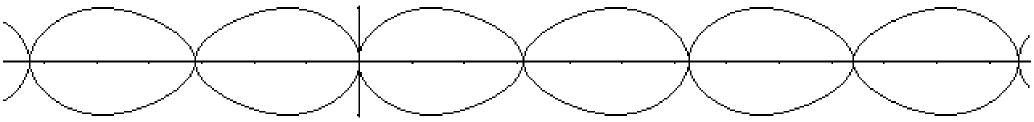
Gegeben sei ein fester Punkt P und ein beweglicher Punkt A, der sich um P mit dem Radius r=PA bewegt. An Punkt A wird eine Strecke a = AQ gehängt, deren freier Endpunkt Q sich auf einer Horizontalen durch P hin und her bewegt. Ein Punkt B auf der Strecke mit BQ = b beschreibt eine Eikurve.

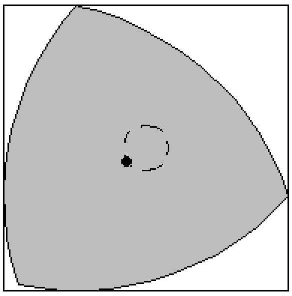
Doppel-Ei Die Polargleichung $r(t) = \cos^2 t$ erzeugt ein Doppelei (Münger 1894). Eine zweite Gleichung ist $r(t) = \exp(\cos(2t))*\cos^2(t)$ (Hortsch 1990).
Die Gleichung $x^4+2x^2y^2+4y^4-x^3-6x^2-xy^2 = 0$ erzeugt ebenfalls ein Doppelei.



Ketten

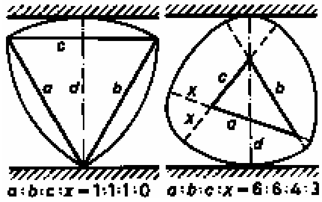
Man kann Sinuskurven so verändern und kombinieren, dass man eine Kette von Eiern erhält. Auch Polynome können Ketten erzeugen.
Elegant ist die Darstellung einer Kette durch $y^2 = abs[\sin(x)+0,1\sin(2x)]$





Gleichdicke

Gleichdicke sind zylindrische Hohlkörper, deren Leitkurve aus Kreisbögen zusammengesetzt ist.
Die längste Sehne von einem Punkt der Leitkurve zu einem anderen ist stets gleich lang.
Derartige Figuren wurden erstmals 1778 von Euler untersucht. Intensive Studien lieferte 1875 Franz Reuleaux (1829-1905).

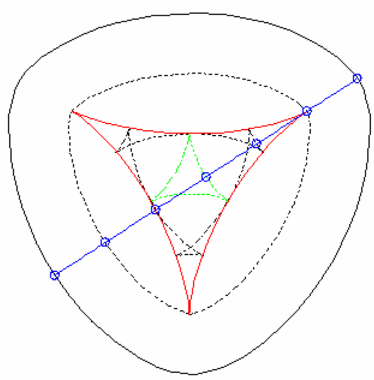


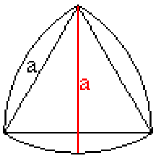
Die Figur wird auch selbstparallele Kurve oder Kurve konstanter Breite genannt.
Konstruierbar aus 4 Stücken a,b,c,x

Umfang $U = (a-b+c+2x) * (\alpha+\beta+\gamma) = d * \pi$
Durchmesser $d = a-b+c+2x$

Der rechts abgebildete Querschnitt (a:b:c:x = 1:1:1:0) entspricht einem Reuleaux-Dreieck, das wie gezeigt in einem Quadrat gleichmäßig abrollen kann.
Man kann das Gleichdick auch so beschreiben: Hält man das Parallelenpaar, das das Gleichdick berührt, fest und dreht das Gleichdick, so berührt es die Parallelen in jeder Lage.

Diese Kurve kann auch durch folgendes Modell erzeugt werden.
Innerhalb eines Deltoids rollt eine Strecke der Länge a ab. In beide Richtungen der Strecke befinden sich zwei Punkte mit einem Abstand von b (in der Darstellung b = a/5) von den Eckpunkten. Diese beiden Punkte beschreiben dann ein Kurve konstanter Breite. Die Größe von b hat nur Einfluss auf die Form der Kurve. In jedem Fall bleibt es ein Gleichdick.





Das Standard-Gleichdick ist das Kreisbogendreieck oder Reuleaux-Dreieck. Die Figur besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit drei auf die Seiten gesetzten Kreisabschnitten. Man erhält die Kreisbögen, wenn man um jeden Dreieckseckpunkt einen Kreisbogen mit dem Radius der Dreiecksseite zeichnet.
Das Bogendreieck ist ein Gleichdick aus folgendem Grund: Ein Parallelenpaar besteht aus einer Tangente und aus einer Parallelen durch einen Eckpunkt. Diese beiden Geraden haben immer den gleichen Abstand.
Das Bogendreieck wird i.a. durch die Seitenlänge a des erzeugenden Dreiecks gegeben. Diese Größe ist gleichzeitig der Radius der Kreisbögen und die Dicke des Gleichdicks.
Der Umfang setzt sich aus drei 60°-Bögen zusammen $u = 3\,[(2\pi a)/6] = \pi a$. Die Figur setzt sich aus einem gleichseitigen Dreieck und drei Kreisabschnitten zusammen. Für die Fläche wird dann

$$A = \sqrt{3}\, a^2/4 + 3\,[\pi a^2/6 - \sqrt{3}\, a^2/4] = [\pi - \sqrt{3}]\, a^2/2.$$ Das ist gerundet $0,705\, a^2$.

Die Winkel zwischen den Tangenten an den Spitzen des Bodendreiecks ist 120°.
Rotiert ein Reuleaux-Dreieck in einem Einheitsquadrat, so ist die dabei überdeckte Fläche

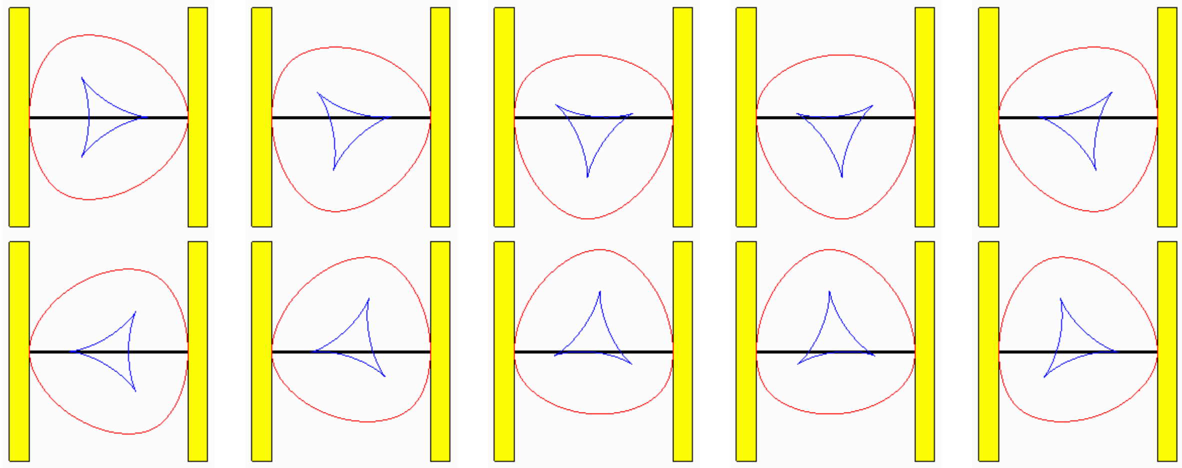
$$A_{Rot} = 2\sqrt{3} + \pi/6 - 3 = 0,9877003907\ldots$$

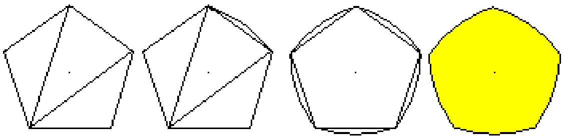
Alle Gleichdicke sind konvex. Jedes Gleichdick hat einen kleineren Flächeninhalt als der Kreis gleicher Dicke. Jeder Winkel an der Ecke eines Gleichdicks ist höchstens 120° groß. Jedes Gleichdick hat den gleichen Umfang wie der Kreis gleicher Dicke.
Gleichdicke müssen nicht notwendigerweise 3 Stellen größerer Krümmung besitzen. Auch solcher Kurven mit 7 oder mehr stärker gekrümmten Stellen sind möglich.
In der Abbildung wird ein solches Gleichdick durch das Abrollen einer Geraden auf einer Epizykloide mit 7 Spitzen erzeugt.

Eine exakte Angabe einer Gleichung für eine Kurve gleicher Dicke ist sehr anspruchsvoll. Wird ein Gleichdick über eine Hypozykloide erzeugt, so lautet die Gleichung für einen Bogen

$$qz = a\,(q^2 + 3q + 2)\, e^{it} + (q+2)\, e^{i(q+1)t} + 4\,(q+1)\, e^{it\,(q+2)/2}$$

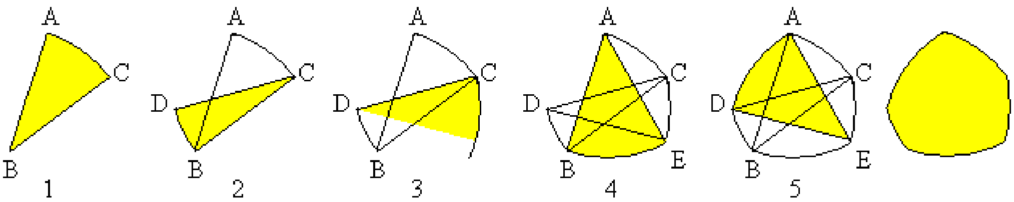
Die besonderen Rollfähigkeiten der Kurve zeigt die nachfolgende Tabelle. 10 Phasen einer 360°-Drehung werden von links oben nach rechts unten dargestellt.



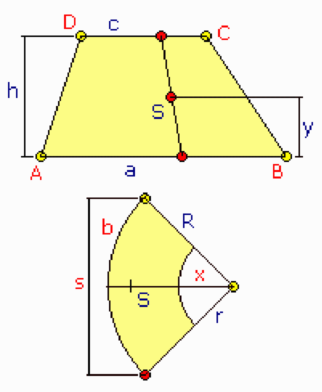


So wie das gleichseitige Dreieck kann man auch das regelmäßige Fünfeck mit Kreisbögen versehen.
Man greift ein gleichschenkliges Dreieck heraus, dessen Spitze in einem Eckpunkt und dessen Grundseite eine Fünfeckseite ist. Dieses Dreieck erhält einen Kreisbogen. Das wiederholt man für alle Ecken bzw. Seiten des Fünfecks.
Dieses Verfahren kann man auf regelmäßige Vielecke mit einer ungeraden Anzahl von Ecken übertragen. Diese Vielecke heißen auch Reulaux-Polygone.
Die Vielecke müssen nicht regelmäßig sein. Eine Zeichenvorschrift für ein Fünfeck:

1 Zeichne einen beliebigen Kreisausschnitt ABC.
2 Zeichne einen Kreis um C durch B und lege D beliebig fest.
3 Zeichne einen Kreis D durch C.
4 Zeichne einen Kreis um A durch B und nenne den Schnittpunkt mit dem Kreis um D Punkt E.
5 Zeichne einen Kreis um E durch A und D. Die fünf Punkte bilden ein sich selbst überschlagendes, gleichseitiges Fünfeck.



Man kann das Bogendreieck zu einem Gleichdick ohne Ecken weiterentwickeln. Man geht vom Bogendreieck aus und vergrößert die Kreisabschnitte, indem man einen größeren Radius wählt. Damit wird der Abstand des Parallelenpaars größer, die Richtung bleibt aber erhalten. Füllt man die Lücken mit Kreisausschnitten, so bleibt es auch hier bei einem konstanten Abstand der Parallelen. Das "aufgeblähte" Bogendreieck ist also auch ein Gleichdick.
Gleichdicke werden auch in der Praxis genutzt:
1) Für ein Reuleaux-Dreieck ist der Drehkolbenmotor (Wankelmotor) das Standardbeispiel.
2) Gleichdicke mit 7 "Ecken" werden in Großbritannien für Münzen genutzt.

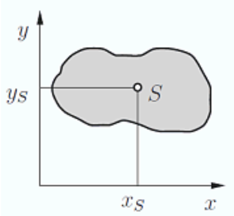


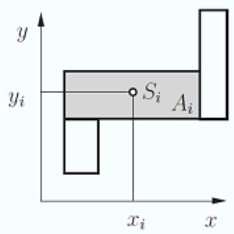
Schwerpunkt von Flächen

Dreieck — Schnittpunkt der Seitenhalbierenden
$x_S = (x_1+x_2+x_3) / 3$
$y_S = (y_1+y_2+y_3) / 3$; $P(x_i|y_i)$ Eckpunktkoordinaten
Rechteck — Schnittpunkt der Diagonalen
Trapez — $y = h/3 \cdot (a + 2c)/(a + c)$

Kreis

Der Schwerpunkt befindet sich auf der Symmetrieachse im Abstand x vom Kreismittelpunkt
Halbkreis $x = 4r/(3\pi) = 0{,}4224\ldots r$
Viertelkreis $x = 4\sqrt{2}\, r/(3\pi) = 0{,}600210\ldots r$
Kreisausschnitt $x = 2/3 \cdot rs/b$, s … Sehnenlänge
$x = 4r^2 / (3b) \sin (b / (2r))$
Kreisabschnitt $x = s^3 / (12\,A)$, A … Flächeninhalt
$x = 4r^2 / (3b) \sin^3 (b / (2r))$
Kreisringfläche $x = 2/3 \cdot [s(R^3 - r^3)] / [b(R^2-r^2)]$
Der Kreisbogenschwerpunkt befindet sich im Abstand von $r\cdot s/b$ vom Kreismittelpunkt auf der Symmetrieachse

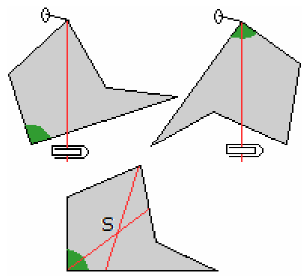




Flächenschwerpunkt

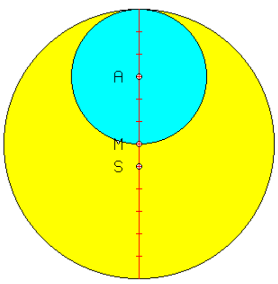
$x_S = 1/A \int x\, dA$ $\qquad y_S = 1/A \int y\, dA$
Dabei sind $S_x = \int x\, dA$ und $S_y = \int y\, dA$ das statische Moment (Flächenmoment 1.Ordnung) der Fläche um die y- bzw. um die x-Achse.
Für zusammengesetzte Flächen (untere Abbildung), bei denen die Lage (x_i, y_i) der Teilschwerpunkte S_i bekannt ist, gilt
$x_S = \Sigma (x_i A_i) / \Sigma A_i$ $\qquad y_S = \Sigma (y_i A_i) / \Sigma A_i$
Besitzt die Fläche gewisse Symmetrien, so liegt der Schwerpunkt auf den Symmetrieachsen.

Experimentelle Bestimmung des Schwerpunktes



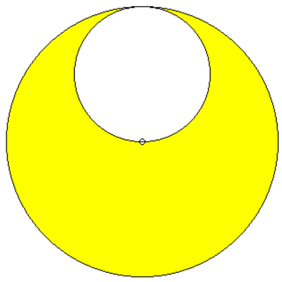
Der Schwerpunkt liegt immer unter dem Aufhängepunkt eines Körpers. Wäre das nicht der Fall, so träte ein Drehmoment auf, das den Körper in diese Lage treibt.
Zur experimentellen Bestimmung hängt man die Scheibe und einen Faden zweimal an verschiedenen Ecken auf.
An das andere Ende des Fadens klemmt man eine Büroklammer.
Den Verlauf der Fäden markiert man durch Linien. Sie sind die Bestimmungslinien für den Schwerpunkt.
Es gilt: Die beiden Schwerlinien treffen sich im Schwerpunkt.

Mit diesem Verfahren kann man auch den "geographischen Mittelpunkt" eines Landes bestimmen.
Überträgt man den Umriss des Landes auf Pappe, so kann obige Methode genutzt werden.
Für Deutschland ergibt sich zum Beispiel, dass der geographische Mittelpunkt 10 km nordöstlich der Stadt Eisenach liegt.



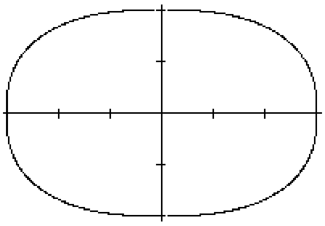
Sichelschwerpunkt

Die gelbe Fläche, die etwas an eine Sichel erinnert, ist außen durch einen Kreis und innen durch einen zweiten Kreis mit dem halben Radius begrenzt, der den ersten außen berührt und durch seinen Mittelpunkt geht. Gesucht ist der Schwerpunkt.



Man füllt man das Loch in der gelben Fläche durch Einfügen des blauen Kreises. Da sich die Radien wie 1 zu 2 verhalten, verhalten sich die Flächen von blau:gelb:gesamt wie 1:3:4. Der Schwerpunkt des ganzen Kreises ist natürlich die Mitte M, er muss die Strecke der Schwerpunkte A und S der beiden Teile also wegen des Massenverhältnisses im Verhältnis (3/4):(1/4) teilen. Der Schwerpunkt S der gelben "Sichel" liegt also um 1/6 des äußeren Radius unter dem Mittelpunkt.

"Jedes legt noch schnell ein Ei und dann kommt der Tod herbei."

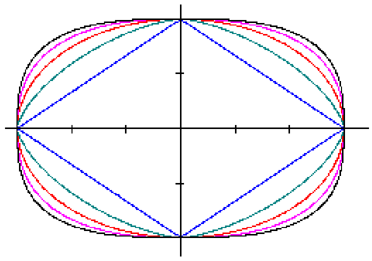


Superellipse

Ersetzt man in der Ellipsengleichung $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ den Exponenten 2 durch 2.5, so erhält man die Gleichung einer Superellipse:

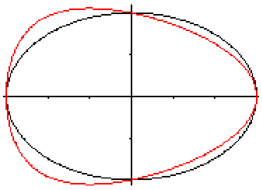
$$|x/a|^{2.5} + |y/b|^{2.5} = 1$$

Die Betragsstriche stellen sicher, dass die nun auftretenden Wurzeln definiert sind. Es gilt im nebenstehenden Graph a=3 und b=2.
Der dänische Schriftsteller und Erfinder Piet Hein hat sich ausgiebig mit der Superellipse beschäftigt. Eine Besonderheit besteht darin, dass der dazugehörige Rotationskörper, als Holzkörper ausgeführt, auf einer Spitze stehen kann. Im Gegensatz zum Ei des Kolumbus braucht man keine Gewalt. Die Superellipse gehört zu den Lamékurven. Sie haben die Parametergleichung $|x/a|^n + |y/b|^n = 1$.

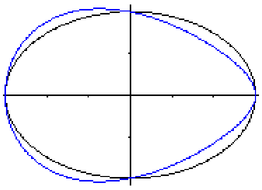


In der Darstellung einiger Lamékurven setzt man a=3, b=2 und für n die Zahlen 1(Parallelogramm, blau), 1.5(grün), 2(Ellipse, hellrot), 2.5 (Superellipse, rot) und 3 (schwarz) ein.

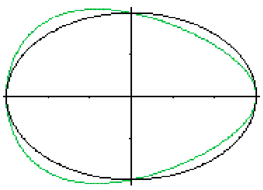
Man kann eine Hühnereiform aus einem Oval erzeugen, indem man die Ovalgleichung leicht abändert. Man multipliziert y oder y² mit einem Term t(x), so dass bei der Eilinie die y-Werte rechts der y-Achse kleiner und links größer werden und der y-Achsenabschnitt bleibt. Auf diese Weise wird z.B. die Ellipsengleichung $x^2/9+y^2/4=1$ zu $x^2/9+y^2/4*t(x)=1$. Man multipliziert also hier y² mit t(x). Drei Beispiele:



$t_1(x) = 1+0.2x$



$t_2(x) = \dfrac{1}{1-0.2x}$



$t_3(x) = e^{0.2x}$

Die rote Eilinie:
Die Ellipse ist schwarz. Die Eilinie ist rot. Rechts der y-Achse liegt die Eilinie unter der Ellipse. Der Term t1(x) ist dort größer als 1. Durch die Multiplikation von y²/4 wird die Zahl 4 (=b²) kleiner. Die Kurve gehört also zu "Ellipsen" mit kleinerer Halbachse, sie ist also flacher als die gegebene Ellipse. Entsprechend erklärt man, warum links der y-Achse die rote Kurve oberhalb der Ellipse liegt.

Die blaue und grüne Eilinien: Die drei farbigen Eilinien haben etwa die gleiche gewünschte Form, obwohl die Gleichungen auf den ersten Blick sehr verschieden sind. t2(x)=1/(1-0,2x) kann als geometrische Reihe geschrieben werden. Allgemein ist

$1/(1-q) = 1+q+q^2+\ldots$, hier ist $1/(1-0{,}2x) = 1+0{,}2x+0{,}04x^2+\ldots$

t3(x)=exp(0.2x) kann als Taylorreihe entwickelt werden, hier ist $\exp(0.2x) = 1+0{,}2x+0{,}02x^2+\ldots$ Zum Vergleich ist $t1(x)=1+0{,}2*x+0*x^2$. Die drei Terme t1, t2 und t3 unterscheiden sich in der Reihenentwicklung erst im quadratischen Glied.

Originaltext: Piet Heins „Superellipse"

Tegning af æg

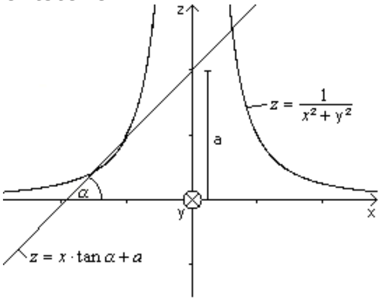
Enhver rigtig matematiker vil nu uvilkårligt spørge sig selv, hvad der sker, hvis man ændrer lidt på definitionen for ellipsen: hvad får man så ud af det? Man kunne for eksempel prøve at kigge på mængden af punkter i planen, som givet to brændpunkter *F* og *F*1, opfylder:

$$n\,|PF| + m\,|PF_1| = k$$

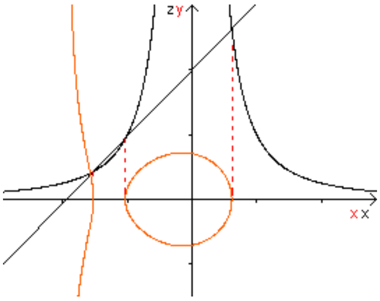
hvor *n*, *m* og *k* er passende positive konstanter. Jeg har en gang set denne type kurver omtalt i en bog eller artikel af *Martin Gardner*, som er den skribent, som i mange år leverede stof til den spalte i *Scientific American*, som hed *Mathematical Games*. Jeg har bare glemt hvilken! Hvis *n* = *m* så er det oplagt, at man får ellipsen, hvis altså *k* er stor nok! Dividér nemlig bare med den fælles konstant *n* = *m* på begge sider .... Er *n* og *m* derimod forskellige, så fås en kurve, som for visse værdier kan komme til at ligne et æg. Jeg har regnet på forskriften og fået et meget langt og ikke særligt spændende udtryk. Og da matematikere altid søger "skønheden" og da skønheden ofte er lig med "enkelhed", så vil jeg spare læseren for dette.
Man kan imidlertid for visse værdier af *n* og *m* sagtens selv konstruere sig frem til kurven på en måde, som ligner tilfældet med ellipsen. Tag for eksempel *n* = 2 og *m* = 3. Det gælder så om at skabe dobbelt snor til det højre søm og tredobbelt snor til det venstre søm. Dette kan praktisk gøres ved at fastgøre den ene ende af snoren til det venstre søm, køre nogle gange rundt om søm og blyant og slutte af med at fastgøre den anden ende af snoren til blyanten! Situationen er illustreret på figuren nedenfor.
Derefter kører man blyanten rundt samtidigt med, at man sørger for, at snorene er udspændt. Du vil måske sige, at det kun fungerer i teorien. Jeg har prøvet det selv - og det virker! Man skal bare være lidt omhyggelig.

Schnitte durch Rotationskörper

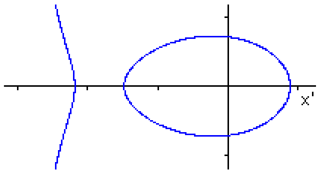
Legt man einen schrägen Schnitt durch einen Kegel oder Zylinder, so entsteht als Schnittlinie u.a. eine Ellipse. Wählt man einen hyperbolischen Trichter, so gelangt man zu Eilinien nach Art des Hühnereies. Hyperbolische Trichter sind Körper, die durch Rotation einer Hyberbel um die Symmetrieachse entstehen.



Links ist der hyperbolische Trichter zu $f(x) = 1/x^2$ dargestellt. - Die y-Achse ist senkrecht zur Zeichenebene nach hinten gerichtet.
Die Gerade stellt eine Schnittebene dar, die senkrecht auf der Zeichenebene steht.
$z = x \tan\alpha + a$; $z = 1/(x^2+y^2)$

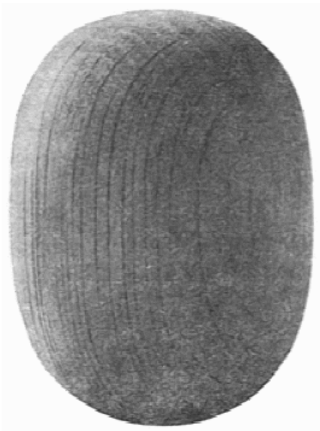


Die Ebene schneidet den hyperbolischen Trichter in der z-x-Ebene in drei Punkten. Projeziert man die Schnittlinien in die x-y-Ebene, so erhält man die roten Linien.
$z = z$; $x \tan\alpha + a = 1/(x^2+y^2)$



In der Schnittebene erscheint die Schnittlinie als Eilinie.
$x = x' \cos\alpha$
$x' \sin\alpha + a = 1/((x' \cos\alpha)^2 + y^2)$

Auch andere Körper können schräg geschnitten werden und liefern Eilinien.



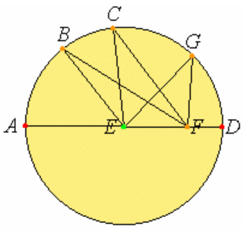
Det stabile superæg

Piet Hein nøjedes selvfølgelig ikke med at se på plane kurver. Hvis man drejer en superellipse om en af dens symmetriakser, så får man et *superæg*. Nedenfor er afbildet en model i træ, som har forholdet *a*:*b* lig med 4:3.
Superægget har en højst interessant egenskab.
I modsætning til et almindeligt æg, så er det nemlig *stabilt* i begge ender. Hvis det for eksempel står på højkant, som på figuren nedenfor, så vil et lille tilt ikke resultere i, at ægget vælter. Gør man derimod det samme med et almindeligt æg, så vil en nok så lille skubben få ægget til at vælte.
Forklaringen er skitseret i afsnittet om krumning ovenfor: Superellipsen har to *planpunkter*, dvs. punkter hvor *normalkrumningen* er 0 i alle retninger i tangentplanen. Alle superæg er i princippet stabile, uanset deres (*a*,*b*)-forhold. Men det siger sig selv, at hvis ægget er meget højt i forhold til dets bredde, så skal der ikke så stort et skub til at vælte det. Men sagen er altså, at man for et givet (*a*,*b*)-forhold, kan angive en vinkel, sådan at hvis ægget ikke tilter mere end denne vinkel, så vil det ikke vælte.
En anden model er lavet af metal og er ca. 3 cm høj. Den kan blandt andet købes hos forretningskæden *Inspiration*, og kommer med en lille læderpose. Den sælges som en slags "stresskugle" eller amulet:

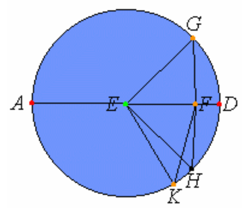
Verdens største superæg, lavet af stål i aluminium, og med en vægt på 1 ton, blev anbragt udenfor Kelvin Hall i Glasgow i oktober 1971, til ære for Piet Hein, som besøgte stedet i forbindelse med en udstilling af moderne hjem.
En rigtig fin version af Piet Heins Superæg kan findes på *Egeskov Slot* på Fyn. En tak til webmasteren på følgende side http://www.astoft.co.uk/herrefyn.htm, der omtaler det eksotiske slot, for at have givet mig tilladelse til at vise følgende billede af superægget:

III. Buch: § 7 (L. 6)

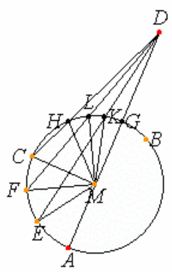
Wählt man auf dem Durchmesser eines Kreises einen Punkt, der nicht der Kreismittelpunkt ist, und zieht von dem Punkte bis zum Kreis irgendwelche Strecken, so muss die die größte sein, auf der der Mittelpunkt liegt, die kleinste die Reststrecke; und von den anderen ist immer die, welche der durch den Mittelpunkt gehenden näher liegt, größer als die entferntere; und von dem Punkt lassen sich an gleichen Strecken nur immer zwei bis zum Kreise ziehen, beiderseits der kleinsten.



ABCD sein ein Kreis, AD ein Durchmesser desselben; auf AD wähle man einen Punkt F, der nicht der Kreismittelpunkt ist; der Kreismittelpunkt sei E; ferner ziehe man von F bis zum Kreise ABCD irgendwelche Strecken FB, FC, FG.
Ich behaupte, dass FA die größte und FD die kleinste ist, von den anderen FB > FC und FC > FG. Man ziehe BE, CE, GE.
Da in jedem Dreieck zwei Seiten zusammen größer sind als die letzte (I, 20), sind EB + EF > BF. Aber AE = BE also BE + EF = AF; also ist AF > BF. Da weiter BE = CE ist und FE gemeinsam, so sind zwei Seiten BE, EF zwei Seiten CE, EF gleich; dabei ist ∠ BEF > ∠ CEF; also ist Grundlinie BF > Grundlinie CF (I, 24). Aus demselben Grunde ist auch CF > FG. Ebenso sind, da GF + FE > EG (I, 20) und EG = ED, GF + FE > ED. Man nehme EF beiderseits weg; dann ist der Rest GF > Rest FD. Also ist FA die größte Strecke, FD die kleinste, FB > FC und FC > FG.



Ich behaupte, dass ferner sich vom Punkte F bis zum Kreise ABCD an gleichen Strecken nur immer zwei ziehen lassen, beiderseits der kleinsten FD.
Man trage an die gerade Linie EF im Punkte E auf ihr ∠ FEH = GEF an und ziehe FH. Da dann GE = EH ist und EF gemeinsam, sind zwei Seiten GE, EF zwei Seiten HE, EF gleich; und ∠ GEF = ∠ HEF; also ist Grundlinie FG = Grundlinie FH (I, 4).
Ich behaupte nun, dass sich vom Punkte F keine weitere Strecke, die = FG wäre, bis zum Kreise ziehen lässt. Ware dies nämlich möglich, dann sei FK so gezogen. Da dann FK = FG und FH = FG, so wäre auch FK = FH, die der durch den Mittelpunkt gehenden nähere Strecke der entfernteren gleich; dies ist aber unmöglich. Also lässt sich von Punkte F bis zum Kreise keine weitere Strecke, die = GF wäre, ziehen, also nur eine einzige – S.

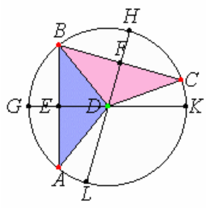


§ 8 (L. 7)

Wählt man außerhalb eines Kreises einen Punkt und zieht von dem Punkte irgendwelche gerade Linien zum Kreise durch, eine davon durch den Mittelpunkt, die übrigen beliebig, so ist unter den zum hohlen Bogen gezogenen Strecken die größte die durch den Mittelpunkt, von den anderen immer die, welche der durch den Mittelpunkt gehenden näher liegt, größer als die entferntere; unter dem zum erhabenen Bogen gezogenen Strecken hingegen die kleinste die zwischen dem Punkt und dem Durchmesser, von den anderen immer die, welche der kleinsten näher liegt, kleiner als die entferntere; und vom dem Punkte lassen sich an gleichen Strecken nur immer zwei bis zum Kreise ziehen, beiderseits der kleinsten.

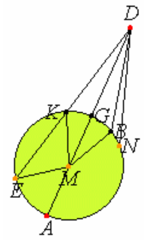
ABC sein ein Kreis; außerhalb ABC wähle man einen Punkt D und ziehe vom ihm irgendwelche gerade Linien DA, DE, DF, DC durch, DA soll durch den Mittelpunkt gehen. Ich behaupte, dass unter den zum hohlen Bogen AEFC gezogenen Strecken die größte die durch den Mittelpunkt, DA ist, ferner DE > DF und DF > DC, dass unter den zum erhabenen Bogen HLKG gezogenen Strecken hingegeben die kleinste DG ist, die zwischen dem Punkte und dem Durchmesser AG, und dass immer die, welche der kleinsten DG näher liegt, kleiner ist als die entferntere, DK < DL und DL < DH.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt des Kreises ABC, er sei M, und ziehe ME, MF, MC, MK, ML, MH. Hier ist AM = EM; man füge daher MD beiderseits hinzu; dann ist AD = EM + MD; aber EM + MD > ED (I, 20); also ist auch AD > ED. Da ebenso ME = MF ist und MD gemeinsam, so sind EM, MD den Seiten FM, MD gleich; und ∠ EMD > ∠ FMD; also ist Grundlinie ED > Grundlinie FD (I, 24). Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch FD > CD; also ist DA die größte Strecke, DE > DF und DF > DC. Da weiter MK + KD > MD (I, 20) und MG = MK, so ist der Rest KD > Rest GD, folglich GD < KD. Und da im Dreieck MDL über der einen Seite MD zwei Strecken MK, KD innerhalb zusammengebracht sind, so sind MK + KD < ML + LD (I, 21). Aber MK = ML; also ist der Rest DK < Rest DL. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch DL < DH; also ist DG die kleinste Strecke, DK < DL und DL < DH.
Ich behaupte, dass ferner sich vom Punkte D bis zum Kreise an gleichen Strecken nur immer zwei ziehen lassen, beiderseits der kleinsten DG.
Man trage an die gerade Linie MD im Punkte M auf ihr ∠ DMB = ∠ KMD an und ziehe DB. Da dann MK = MB ist und MD gemeinsam, sind zwei Seiten KM, MD zwei Seiten BM, MD entsprechend gleich; und ∠ KMD = ∠ BMD; also ist Grundlinie DK = Grundlinie DB (I; 4). Ich behaupte nun, dass vom Punkte D sich keine weitere Strecke, die = DK wäre, bis zum Kreise ziehen lässt. Wäre dies nämlich möglich, dann sei eine so gezogen, etwa DN. Da dann DK = DN und DK = DB, so wäre auch DB = DN, die der kleinsten

Strecke DG nähere der entfernteren gleich; wie oben bewiesen, ist dies aber unmöglich. Also lassen sich an gleichen Strecken nicht mehr als immer zwei vom Punkte D bis zum Kreise ABC ziehen, beiderseits der kleinsten DG – S.

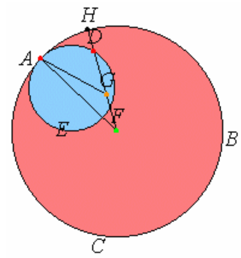


§ 9 (L. 8)

Wählt man innerhalb eines Kreises einen Punkt und es lassen sich von dem Punkte bis zum Kreise mehr als zwei gleiche Strecke ziehe, so ist der gewählte Punkt der Mittelpunkt des Kreises.



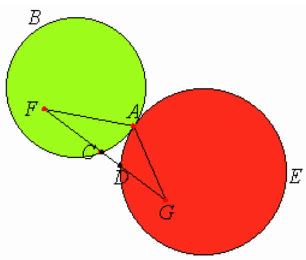
ABC sein ein Kreis, D ein Punkt innerhalb desselben, und von D seien mehr als zwei gleiche Strecken bis zum Kreise ABC gezogen, nämlich DA, DB, DC. Ich behaupte, dass Punkt D der Mittelpunkt des Kreises ABC ist. Man ziehe nämlich AB, BC, halbiere sie in den Punkten E, F und ziehe die Verbindungslinien ED, FD durch nach den Punkten G, K, H, L. Da dann AE = EB ist und ED gemeinsam, sind zwei Seiten AE, ED zwei Seiten BE, ED gleich; und Grundlinie DA = Grundlinie DB; also ist ∠ AED = ∠ BED (I, 8). Also sind ∠ AED, BED beide Rechte (I, Definition 10); also schneidet GK die Sehne AB mitten und rechtwinklig. Und da, wenn im Kreise eine Sehne irgendeine andere mitten und rechtwinklig schneidet, der Mittelpunkt des Kreises auf der schneidenden Sehne liegen muss (III, 1, Zusatz), so liegt auf GK der Kreismittelpunkt. Aus demselben Grunde liegt der Mittelpunkt des Kreises ABC auch auf HL. Die geraden Linien GK, HL können nun außer dem Punkte D keinen weiteren gemein haben; also ist Punkt D der Mittelpunkt des Kreises ABC – S.



§ 11 (L. 10)

Wenn zwei Kreis einander innen berühren und man verschafft sich ihre Mittelpunkte, so muss die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte gegebenenfalls verlängert den Berührungspunkt der Kreise treffen.

Zwei Kreise ABC, ADE mögen einander innen berühren im Punkte A; man verschaffe sich die Kreismittelpunkte F von ABC und G von ADE (III, 1). Ich behaupte, dass die Verbindungsstrecke von G mit F verlängert den Punkt A treffen muss.
Sie treffe ihn nämlich nicht, sondern verlaufe etwa wie FGH; dann ziehe man AF, AG. Dann wären AG + GF > FA (I, 20), d.h. > FH; man nehme daher FG beiderseits weg; dann wäre der Rest AG > Rest GH. Aber AG = GD; also wäre auch GD > GH, die kleinere Strecke (Axiom 8) größer als die größere; dies ist aber unmöglich. Also kann die F mit G verbindende gerade Linie nicht vorbeigehen; also muss sie den Berührungspunkt A treffen. Bei äußerer Berührung würden GA + AF > GF, also GD + HF > GF; dies ist aber unmöglich – S.

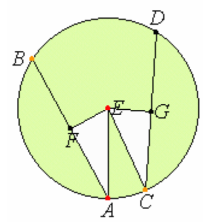


§ 12 (L. 11)

Wenn zwei Kreis einander außen berühren, muss die Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte durch den Berührungspunkt gehen.

§ 14 (L. 13)

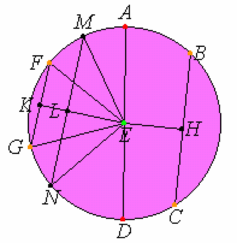
Im Kreise stehen gleiche Sehnen gleichweit vom Mittelpunkt ab, und gleichweit vom Mittelpunkt abstehende Sehnen sind einander gleich.



ABCD sei ein Kreis, und in ihm seien AB, CD gleiche Sehnen. Ich behaupte, dass AB und CD vom Mittelpunkt gleichweit abstehen.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt des Kreises ABCD, er sei E, fälle von E auf AB, CD die Lote EF, EG und ziehe AE, EC. Da hier eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie EF eine nicht durch den Mittelpunkt gehenden Sehne AB rechtwinklig schneidet, halbiert sie sie auch (III, 3). Also ist AF = FB, also AB = 2 AF. Aus demselben Grund ist auch CD = 2 CG. Hier ist AB = CD; also ist auch AF = CG. Da ferner AE = EC, ist auch $AE^2 = EC^2$. Aber $AE^2 = AF^2 + EF^2$; denn der Winkel bei F ist ein Rechter (I, 47); und $EC^2 = EG^2 + GC^2$; denn der Winkel bei G ist ein Rechter. Also sind $AF^2 + FE^2 = CG^2 + GE^2$; hierin ist $AF^2 = CG^2$, denn AF = CG; also ist der Rest $FE^2 = EG^2$, also EF = EG. Man sagt aber von Sehnen, dass sie vom Mittelpunkt gleichweit abstehen, wenn die vom Mittelpunkt auf sie gefällten Lote gleich sind (III, Definition 4); also stehen AB und CD gleichweit vom Mittelpunkt ab.
Andererseits mögen die Sehnen AB, CD gleichweit vom Mittelpunkt abstehen, d.h. es sei EF = EG. Ich behaupte, dass auch AB = CD. Man konstruiere ebenso; dann lässt sich ähnlich zeigen, dass AB = 2 AF und CD = 2 CG. Und da AE = CE, ist $AE^2 = CE^2$. Aber $AE^2 = EF^2 + FA^2$ und $CE^2 = EG^2 + GC^2$; also ist $EF^2 + FA^2 = EG^2 + GC^2$; hierin ist $EF^2 = EG^2$, denn EF = EG; also ist der Rest $AF^2 = CG^2$, also AF = CG. Nun ist 2 AF = AB und 2 CG = CD; also ist AB = CD – S.

§ 15 (L. 14)

Größte Sehne im Kreise ist der Durchmesser, und von den anderen ist immer die dem Mittelpunkt nähere größer als die entferntere.

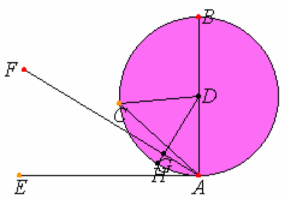


ABCD sei ein Kreis, AD ein Durchmesser desselben, E der Mittelpunkt, und dem Durchmesser AD liege BC näher, FG ferner. Ich behaupte, dass AD am größten ist und BC > FG.
Man fälle vom Mittelpunkt E auf BC, FG die Lote EH, EK. Da BC dem Mittelpunkt näher liegt, FG ferner, so ist EK > EH. Man trage EL = EH ab, ziehe LM durch L ⊥ EK und durch nach N, ziehe ferner ME, EN, FE, EG.
Da EH = EL, ist auch BC = MN (III, 14). Andererseits ist, da AE = EM und ED = EN, AD = ME + EN. Aber ME + EN > MN (I, 20) und AD > MN und MN = BC; also ist AD > BC. Und da zwei Seiten ME, EN zwei Seiten FE, EG gleich sind, dabei ∠ MEN > ∠ FEG, so ist Grundlinie MN > Grundlinie FG (I, 24). Wie oben bewiesen, ist MN = BC und BC > FG. Also ist der Durchmesser AD am größten und BC > FG – S.

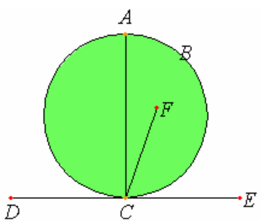
§ 16 (L. 15)

Eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkt aus gezogene Linie muss außerhalb des Kreises fallen, und in den Zwischenraum der geraden Linie und der Bogens lässt sich keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen; der Winkel des Halbkreises ist größer als jeder spitze geradlinige Winkel, der Restwinkel kleiner.

Man habe einen Kreis ABC um den Mittelpunkt D und den Durchmesser AB. Ich behaupte, dass eine ⊥ AB vom Endpunkte A aus gezogene gerade Linie außerhalb des Kreises fallen muss.



Täte sie dies nämlich nicht, sondern fiele innerhalb, etwa wie CA, dann ziehe man DC. Da DA = DC, wäre auch ∠ DAC = ∠ ACD (I, 5). DAC ist aber ein Rechter; also wäre auch ACD ein Rechter. Im Dreieck ACD wären dann zwei Winkel DAC + ACD = 2 R.; dies ist aber unmöglich (I, 17). Also kann eine ⊥ AB vom Punkte A aus gezogene gerade Linie nicht innerhalb des Kreises fallen. Ähnlich lässt sich zeigen, dass sie auch nicht auf den Bogen fallen kann; also fällt sie außerhalb.
Sie verlaufe wie AE. Ich behaupte, dass in den Zwischenraum der geraden Linie AE und des Bogens CHA sich keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen lässt.
Eine solche sei nämlich, wenn möglich, als FA nebenhineingezogen. Dann fälle man vom Punkte D auf FA das Lot DG. Da dann AGD ein Rechter wäre und DAG < R. (Axiom 8), so wäre AD > DG (I, 19). Aber DA = DH; also wäre DH > DG, die kleinere Strecke (Axiom 8) größer als die größere; dies ist aber unmöglich. Also lässt sich in den Zwischenraum der geraden Linie und des Bogens keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen.
Ich behaupte, dass außerdem der Winkel des Halbkreises, nämlich der, der von der geraden Linie BA und dem Bogen CHA umfasst wird (III, Definition 7), größer ist als jeder spitze geradlinige Winkel, der Restwinkel aber, nämlich der, der von dem Bogen CHA und der geraden Linie AE umfasst wird, kleiner als jeder spitze geradlinige Winkel.
Wäre nämlich irgendein geradliniger Winkel größer als der zwischen der geraden Linie BA und dem Bogen CHA oder kleiner als der zwischen dem Bogen CHA und der geraden Linie AE, so müsste sich in den Zwischenraum des Bogens CHA und der geraden Linie AE eine gerade Linie nebenhineinziehen lassen, die den Winkel zwischen geraden Linien erzeugte, der größer wäre als der zwischen der geraden Linie BA und dem Bogen CHA, und den, der kleiner wäre als der zwischen dem Bogen CHA und der geraden Linie AE. Eine solche lässt sich aber nicht nebenhineinziehen. Also kann kein spitzer Winkel zwischen geraden Linien größer sein als der Winkel zwischen der geraden Linie BA und dem Bogen CHA und auch keiner kleiner als der zwischen dem Bogen CHA und der geraden Linie AE.
Zusatz: Hiernach ist klar, dass eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkte aus gezogene gerade Linie den Kreis berührt und dass eine gerade Linie einen Kreis nur in einem Punkte berühren kann, da ja, wie bewiesen, eine Strecke, die in zweien mit ihm zusammentrifft, innerhalb desselben fällt – dies hatte man beweisen sollen.

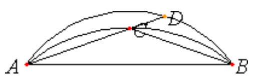


§ 19 (L. 17)

Zieht man an einen Kreis eine Tangente, ferner vom Berührungspunkt aus eine gerade Linie rechtwinklig zur Tangente, so muss auf dieser der Mittelpunkt des Kreises liegen.

Den Kreis ABC berühre nämlich eine gerade Linie DE im Punkte C; man ziehe von C aus CA ⊥ DE. Ich behaupte, dass der Mittelpunkt des Kreises auf AC liegt.
Täte er es nämlich nicht, sondern wäre etwa F; dann ziehe man CF. Da man dann an den Kreis ABC eine Tangente DE und vom Mittelpunkt zum Berührungspunkt die Verbindungslinie FC gezogen hätte, so wäre FC das Lot auf DE (III, 18), also ∠ FCE ein Rechter. Aber auch ACE ist ein Rechter; also wäre FCE = ACE, der kleinere Winkel dem größeren (Axiom 8); dies ist aber unmöglich.

Also ist F nicht Mittelpunkt des Kreises ABC. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch kein anderer Punkt außer einem auf AC es sein kann – S.



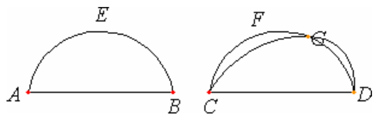
§ 23 (L. 21)

Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei ungleiche ähnliche Kreisabschnitte nach derselben Seite zu errichten.

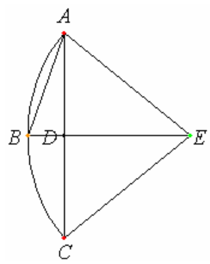
Wäre dies nämlich möglich, so errichte man über derselben Strecke AB zwei ungleiche ähnliche Kreisabschnitte ACB, ADB nach derselben Seite. Man ziehe dann ACD durch und ziehe CB, DB. Da hier der Abschnitt ACB dem Abschnitt ADB ähnlich sein soll, ähnliche Kreisabschnitte aber solche sind, die gleiche Winkel fassen (III, Definition 11), so wäre ACB = ADB, der Außenwinkel dem Innenwinkel; dies ist aber unmöglich (I, 16) – S.

§ 24 (L. 22)

Ähnliche Kreisabschnitte über gleichen Strecken sind einander gleich.

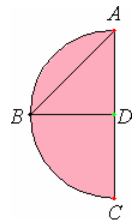


AEB, CFD seien ähnliche Kreisabschnitte über gleichen Strecken AB, CD. Ich behaupte, dass der Abschnitt AEB dem Abschnitt CFD gleich ist.
Deckt man nämlich den Abschnitt AEB auf CFD und legt dabei Punkt A auf C sowie die gerade Linie AB auf CD, dann muss auch Punkt B Punkt D decken, weil AB = CD. Deckt AB aber CD, dann muss auch der Abschnitt AEB CFD decken; wenn nämlich zwar die Strecke AB CD deckte, der Abschnitt AEB aber CFD nicht deckte, so müsste er entweder innerhalb desselben fallen oder außerhalb (ausgeschlossen durch III, 23) oder abweichen wie CGD, und ein Kreis schnitte den anderen in mehr als zwei Punkten; dies ist aber unmöglich (III, 10). Also trifft nicht zu, dass, während die Strecke AB CD deckt, der Abschnitt AEB CFD nicht auch deckte; also muss er decken und ihm gleich sein (Axiom 7) – S.

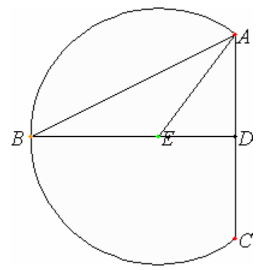


§ 25 (A. 3)

Wenn ein Kreisabschnitt gegeben ist, den Kreis daran zu zeichnen, dessen Abschnitt er ist.

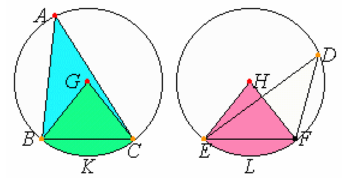


Der gegebene Kreisabschnitt sei ABC. Man soll zum Abschnitt ABC den Kreis daranzeichnen, dessen Abschnitt er ist.
Man halbiere AC in D, ziehe vom Punkte D aus DB $\perp$ AC und ziehe AB; $\angle$ ABD ist dann entweder > BAD oder = oder <. Zunächst sei er größer; dann trage man an die gerade Linie BA im Punkte A auf ihr $\angle$ BAE = ABD an, verlängere DB nach E und ziehe EC. Da $\angle$ ABE = BAE, ist auch die Strecke EB = EA (I, 6). Da ferner AD = DC ist und DE gemeinsam, so sind zwei Seiten AD, DE zwei Seiten CD, DE entsprechend gleich; und $\angle$ ADE = $\angle$ CDE, weil beide Rechte sind; also ist Grundlinie AE = Grundlinie CE (I, 4). Wie oben bewiesen, ist aber AE = BE; also ist auch BE = CE; also sind AE, EB, EC alle drei einander gleich. Zeichnet man also mit E als Mittelpunkt und einer der Strecken AE, EB, EC als Abstand den Kreis, so muss er auch durch die übrigen Punkte gehen und darangezeichnet sein (III,9).
Also hat man zum gegebenen Kreisabschnitt den Kreis darangezeichnet. Hier seht man, dass der Abschnitt ABC kleiner als der Halbkreis ist, weil sich der Mittelpunkt E außerhalb seiner findet.
Ähnlich müssen auch, wenn $\angle$ ABD = BAD, da AD sowohl BD als auch CD gleich wird, DA, DB, DC alle drei einander gleich sein; D muss der Mittelpunkt des ergänzten Kreises sein und offenbar ABC ein Halbkreis.
Ist aber $\angle$ ABD < BAD und trägt man an die gerade Linie BA im Punkte A auf ihr einen Winkel = ABD an, so muss der Mittelpunkt innerhalb des Abschnittes ABC auf DB fallen, und der Abschnitt ABC muss offenbar größer als der Halbkreis sein – S.



§ 26 (L. 23)

In gleichen Kreisen sind die Bogen gleich, über denen gleiche Winkel stehen, einerlei ob diese an den Mittelpunkten oder an den Umfängen stehen.

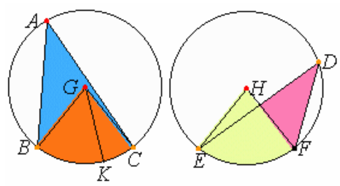


ABC, DEF seien gleiche Kreise, in ihnen BGC, EHF gleiche Mittelpunktswinkel, BAC, EDF gleiche Umfangswinkel. Ich behaupte, dass Bogen BKC = Bogen ELF.
Man ziehe BC, EF. Da die Kreise ABC, DEF gleich sind, sind auch die Radien gleich (III, Definition 1); also sind die zwei Seiten BG, GC zwei Seiten EH, HF gleich; und der Winkel bei G ist dem Winkel bei H gleich; also ist Grundlinie BC = Grundlinie EF (I; 4). Da der Winkel bei A dem bei D gleich ist, ist der Abschnitt BAC dem Abschnitt EDF ähnlich (III, Definition 11); sie liegen dabei über gleichen Strecken BC, EF; ähnliche Kreisabschnitte über gleichen Strecken sind aber einander gleich (III, 24); also ist der Abschnitt BAC = EDF. Auch der ganze Kreis ABC ist aber dem ganzen Kreis DEF gleich; also ist der Restbogen BKC dem Bogen ELF gleich – S.

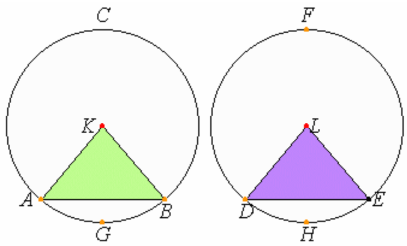
§ 27 (L. 24)

In gleichen Kreisen über gleichen Bogen stehende Winkel sind einander gleich, einerlei ob sie an den Mittelpunkten oder an den Umfängen stehen.

In gleichen Kreisen ABC, DEF mögen nämlich über gleichen Bogen BC, EF an den Mittelpunkten G, H die Winkel BGC, EHF und an den Umfängen die Winkel BAC, EDF stehen. Ich behaupte, dass ∠ BGC = EHF und BAC = EDF.



Wäre nämlich ∠ BGC ungleich EHF, dann müsste einer von ihnen größer sein. ∠ BGC sei der größere. Man trage dann an die gerade Linie BG im Punkte G auf ihr ∠ BGK = EHF an. Bogen, über denen gleiche Mittelpunktswinkel stehen, sind aber gleich (III, 26); also wäre Bogen BK = Bogen EF. Aber EF = BC; also wäre auch BK = BC; der kleinere Bogen dem größeren (Axiom 8); dies ist aber unmöglich. ∠ BGC ist also nicht ungleich EHF, also ihm gleich. Ferner ist der Winkel bei A = ½ BGC und der bei D = ½ EHF (III, 20); also ist auch der Winkel bei A dem bei D gleich – S.



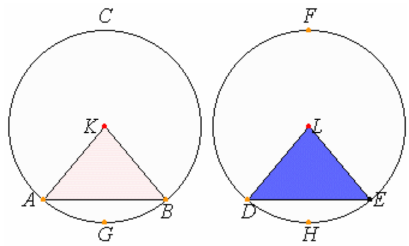
§ 28 (L. 25)

Gleiche Sehnen in gleichen Kreisen grenzen gleiche Bogen ab, so dass der größere dem größeren gleich wird und der kleinere dem kleineren.

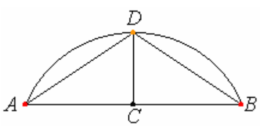
ABC, DEF seien gleich Kreise, in ihnen AB, DE gleiche Sehnen, so dass ACB, DFE die größeren abgegrenzten Bogen werden, AGB, DHE die kleineren. Ich behaupte, dass der größere Bogen ACB dem größeren Bogen DFE gleich ist und der kleinere Bogen AGB = DHE.
Man verschaffe sich die Kreismittelpunkte K, L und ziehe AK, KB, DL, LE.
Da die Kreise gleich sind, sind auch die Radien gleich; also sind zwei Seiten AK, KB zwei Seiten DL, LE gleich; und Grundlinie AB = Grundlinie DE; also ist ∠ AKB = ∠ DLE (I, 8). Bogen, über denen gleiche Mittelpunktswinkel stehen, sind aber gleich (III, 26); also ist Bogen AGB = DHE. Aber auch der ganze Kreis ABC ist dem ganzen Kreise DEF gleich; also ist auch der Restbogen ACB dem Restbogen DFE gleich – S.

§ 29 (L. 26)

Gleichen Bogen in gleichen Kreisen liegen gleiche Sehnen gegenüber.



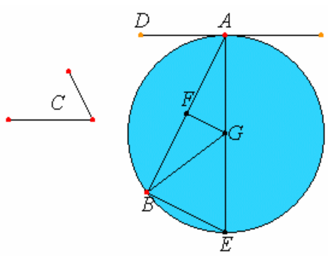
ABC, DEF seien gleich Kreise; in ihnen grenze man gleiche Bögen BGC, EHF ab und ziehe die Sehnen BC, EF. Ich behaupte, dass BC = EF.
Man verschaffe sich nämlich die Kreismittelpunkte, sie seien K, L, und ziehe BK, KC, EL, LF. Da Bogen BGC = Bogen EHF, ist auch ∠ BKC = ELF (III, 27). Und da die Kreise ABC, DEF gleich sind, sind auch die Radien gleich; also sind zwei Seiten BK, KC zwei Seiten EL, LF gleich; und sie umfassen gleiche Winkel; also ist Grundlinie BC = Grundlinie EF (I, 4) – S.



§ 30 (A. 4)

Einen gegebenen Bogen zu halbieren.

Der gegebene Bogen sei ADB. Man soll den Bogen ADB halbieren.
Man ziehe AB, halbiere es in C, ziehe vom Punkte C aus CD ⊥ zur geraden Linie AB und ziehe AD, DB. Da AC = CB ist und CD gemeinsam, sind zwei Seiten AC, CD zwei Seiten BC, CD gleich; und ∠ ACD = ∠ BCD, weil beide Rechte sind; also ist Grundlinie AD = Grundlinie DB (I, 4). Gleiche Sehnen grenzen aber gleiche Bogen ab, so dass der größere dem größeren gleich wird und der kleinere dem kleineren (III, 28); hier sind beide Bogen AD, DB kleiner als der Halbkreis; also ist Bogen AD = Bogen DB. Der gegebene Bogen ist also im Punkte D halbiert – dies hatte man ausführen sollen.

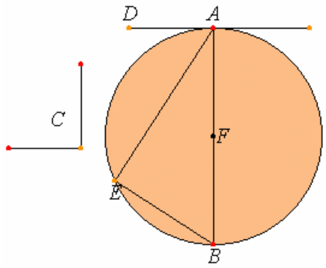


§ 33 (A. 5)

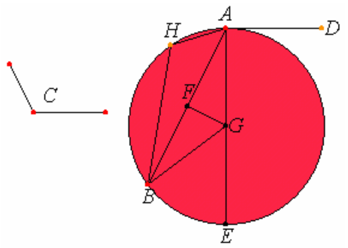
Über einer gegebenen Strecke einen Kreisabschnitt zu zeichnen, der einen einem gegebenen geradlinigen Winkel gleichen Winkel fasst.

Die gegebene Strecke sei AB, der gegebene geradlinige Winkel der bei C.
Man soll über der gegebenen Strecke AB einen Kreisabschnitt zeichnen, der einen dem bei C gleichen Winkel fasst.
Der Winkel bei C ist entweder spitz oder ein Rechter oder stumpf. Zunächst sei er spitz. Dann trage man, wie in der ersten Zeichnung, an die gerade Linie AB im Punkte A den dem Winkel bei C gleichen ∠ BAD an; dann ist auch ∠ BAD spitz. Man ziehe AE ⊥ DA, halbiere AB in F, ziehe vom Punkte F aus FG ⊥ AB und verbinde GB. Da AF = FB ist und FG

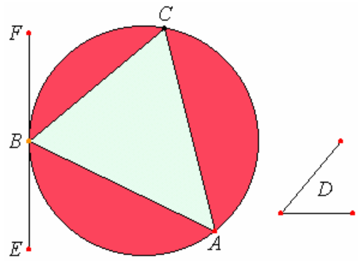
gemeinsam, sind zwei Seiten AF, FG zwei Seiten BF, FG gleich; und ∠ AFG = BFG; also ist Grundlinie AG = Grundlinie BG (I, 4). Zeichnet man also mit G als Mittelpunkt und GA als Abstand den Kreis, so muss dieser auch durch B gehen. Man zeichne ihn, er sei ABE, und ziehe EB.
Da AD vom Endpunkt A des Durchmessers AE aus ⊥ AE verläuft, berührt AD den Kreis ABE (III, 16, Zus.). Da hier eine gerade Linie AD den Kreis ABE berührt und vom Berührungspunkt A eine gerade Linie AB zum Kreis ABE durchgezogen ist, so ist ∠ DAB = AEB, dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt (III, 32). ∠ DAB ist aber dem bei C gleich; also ist der Winkel bei C auch = AEB. Man hat also über der gegebenen Strecke AB einen Kreisabschnitt, der den dem gegebenen Winkel bei C gleichen ∠ AEB fasst, gezeichnet, nämlich AEB.



Zweitens sei der Winkel bei C ein Rechter. Man soll wieder über AB einen Kreisabschnitt zeichnen, der einen dem Rechten bei C gleichen Winkel fasst. Man trage den dem Rechten bei C gleichen ∠ BAD an, wie in der zweiten Zeichnung geschehen, halbiere AB in F und zeichne mit F als Mittelpunkt und FA oder FB als Abstand den Kreis AEB.

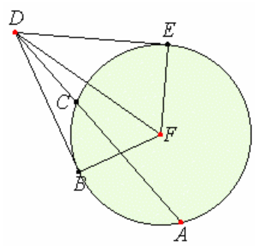


Dann berührt die gerade Linie AD den Kreis ABE, weil der Winkel bei A ein Rechter ist (III, 16, Zus.). Und ∠ BAD ist dem im Abschnitt AEB gleich; denn als Winkel im Halbkreis ist auch dieser ein Rechter (III, 31). ∠ BAD ist aber auch dem bei C gleich. Also ist auch der Winkel im Abschnitt AEB dem bei C gleich. Man hat also wieder über AB einen Kreisabschnitt, der einen dem Winkel bei C gleichen fasst, gezeichnet, nämlich AEB.
Schließlich sei der Winkel bei C stumpf. Man trage dann, wie in der dritten Zeichnung geschehen, an die gerade Linie AB im Punkte A ∠ BAD, der jenem gleich sei, an, ziehe AE ⊥ AD, halbiere wieder AB in F, ziehe FG ⊥ AB und verbinde GB. Da wieder AF = FB ist und FG gemeinsam, sind zwei Seiten AF, FG zwei Seiten BF, FG gleich; und ∠ AFG = ∠ BFG; also ist Grundlinie AG = Grundlinie BG (I, 4). Zeichnet man also mit G als Mittelpunkt und GA als Abstand den Kreis, so muss dieser auch durch B gehen; er verlaufe wie AEB. Da hier AD rechtwinklig zum Durchmesser AE vom Endpunkte aus verläuft, berührt AD den Kreis AEB (III, 16, Zus.); und AB ist von Berührungspunkt A aus durchgezogen; also ist ∠ BAD dem Winkel, der sich im entgegengesetzten Kreisabschnitt AHB errichten lässt, gleich. Andererseits ist ∠ BAD dem Winkel bei C gleich. Also ist auch der Winkel im Abschnitt AHB dem bei C gleich. Man hat also über der gegebenen Strecke AB einen Kreisabschnitt, der einen dem Winkel bei C gleichen fasst, gezeichnet, nämlich AHB – dies hatte man ausführen sollen.



§ 34 (A. 6)
Von einem gegebenen Kreis einen Abschnitt abzutrennen, der einen einem gegebenen geradlinigen Winkel gleichen Winkel fasst.

Der gegebene Kreis sei ABC, der gegebene geradlinige Winkel der bei D. Man soll vom Kreise ABC einen Abschnitt abtrennen, der einen dem gegebenen geradlinigen Winkel bei D gleichen Winkel fasst.
Man ziehe an ABC im Punkte B die Tangente EF (III, 16, Zus.) und trage an die gerade Linie FB im Punkte B auf ihr ∠ FBC = dem bei D an. Da eine gerade Linie EF den Kreis ABC berührt und BC
vom Berührungspunkt B aus durchgezogen ist, ist ∠ FBC dem Winkel, der sich im entgegengesetzten Abschnitt BAC erreichten lässt, gleich (III, 32). Andererseits ist FBC dem Winkel bei D gleich; also ist der Winkel im Abschnitt BAC dem bei D gleich.
Man hat also von dem gegebenen Kreise ABC einen Abschnitt abgetrennt, nämlich BAC, der einen dem gegebenen geradlinigen Winkel bei D gleichen Winkel fasst – dies hatte man ausführen sollen.

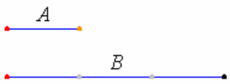


§ 37 (L. 31)
Wählt man außerhalb eines Kreises einen Punkt und zieht von dem Punkte aus zum Kreis zwei Strecken, von denen die eine den Kreis schneidet, die andere herangeht, so, dass das Rechteck aus der ganzen schneidenden Strecke und dem außen zwischen dem Punkt und dem erhabenen Bogen abgegrenzten Stück dem Quadrat über der herangehenden Strecke gleich ist, so muss die Herangehende den Kreis berühren.

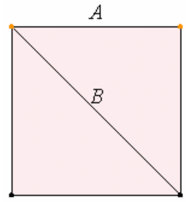
Man wähle außerhalb des Kreises ABC einen Punkt D und ziehe von D aus zum Kreis ABC zwei Strecken DCA, DB; DCA schneide den Kreis, DB gehe heran; und es sei AD · DC = DB². Ich behaupte, dass DB den Kreis ABC berührt.
Man ziehe an ABC die Tangente DE (III, 17), verschaffe sich den Mittelpunkt des Kreises ABC, er sei F, und ziehe FE, FB, FD. Dann ist FED ein Rechter (III, 18). Da DE den Kreis ABC berührt und DCA ihn

schneidet, so ist AD · DC = DE² (III, 36). Es war aber auch AD · DC = DB²; also ist DE² = DB², also DE = DB. Aber auch FE = FB; mithin sind zwei Seiten DE, EF zwei Seiten DB, BF gleich; und sie haben die Grundlinie FD gemein; also ist ∠ DEF = ∠ DBF (I, 8). DEF ist aber ein Rechter; also ist auch DBF ein Rechter. Nun lässt sich FB zum Durchmesser verlängern; eine gerade Linie, die man rechtwinklig zum Kreisdurchmesser von Endpunkte aus zieht, berührt aber den Kreis (III, 16, Zus.); also berührt DB den Kreis ABC. Ähnlich lässt sich der Beweis auch führen, wenn der Mittelpunkt auf AC liegt – S.

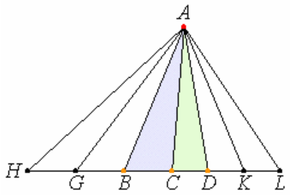
V. Buch: Definitionen



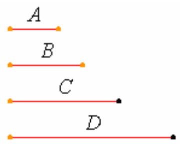
1. **Teil** einer Größe ist eine Größe, die kleinere von der größeren, wenn sie die größere genau misst;
2. Und **Vielfaches** die größere von der kleineren, wenn sei von der kleineren genau gemessen wird.
3. **Verhältnis** ist das gewisse Verhalten zweier gleichartiger Größen der Abmessung nach.



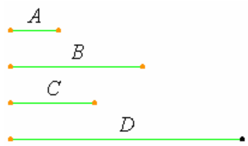
4. Dass sie ein **Verhältnis zueinander haben**, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können.



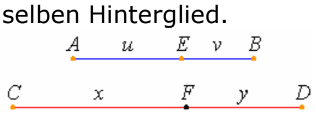
5. Man sagt, dass Größen **in demselben Verhältnis stehen**, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größere oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind;
6. Und die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen **in Proportion stehend** heißen;
7. Wenn aber von den Gleichvielfachen das Vielfache der ersten Größe das Vielfache der zweiten übertrifft, während das Vielfache der dritten das Vielfache der vierten nicht übertrifft, dann sagt man, dass die erste Größe zur zweiten **ein größeres Verhältnis hat** als die dritte zur vierten.



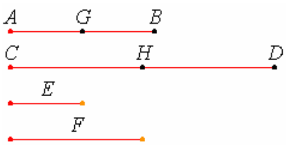
8. Die kürzeste Proportion besteht aus drei Gliedern
9. Wenn drei Größen in stetiger Proportion stehen, sagt man von der ersten, dass die zur dritten **zweimal im Verhältnis** stehe wie zur zweiten;
10. Und wenn vier Größen ist stetiger Proportion stehen, sagt man von der ersten, dass sie zur vierten **dreimal im Verhältnis** stehe wie zur zweiten, und ähnlich immer der Reihe nach je nach der vorliegenden Proportion.



11. Als **entsprechende** Größen bezeichnet man Vorderglied zu Vorderglied und Hinterglied zu Hinterglied.
12. Verhältnis mit **Vertauschung** ist die Inbeziehungsetzung von Vorderglied zu Vorderglied und von Hinterglied zu Hinterglied.
13. Verhältnis mit **Umkehrung** ist die Inbeziehungsetzung von Hinterglied als Vorderglied zu Vorderglied als Hinterglied.
14. Verhältnis**verbindung** ist die Inbeziehungsetzung von Vorderglied mit Hinterglied vereinigt zum selben Hinterglied.



15. Verhältnis**trennung** ist die Inbeziehungsetzung des Überschusses von Vorderglied über Hinterglied zum selben Hinterglied.
16. Verhältnis**umwendung** ist die Inbeziehungsetzung von Vorderglied zum Überschuss von Vorderglied über Hinterglied.
17. Verhältnis **über gleiches weg** hat man, wenn sich bei Zusammenstellung mehrerer Größen mit gleichviel weiteren, so dass sie paarweise immer in demselben Verhältnis stehen, dann: wie in der ersten Reihe die erste Größe zur letzten, ebenso in der zweiten Reihe die erste Größe zur letzten verhält; oder anders: es ist die Inbeziehungsetzung der äußeren Glieder unter Weglassung der mittleren.
18. Eine **überkreuzte Proportion** hat man, wenn sich bei drei Größen und gleichviel weiteren: wie in der ersten Reihe eine vorangehende Größe zur folgenden, ebenso in der zweiten Reihe eine vorangehende Größe zur folgenden verhält, zugleich aber wie in der ersten Reihe die folgende Größe zu noch einer, ebenso in der zweiten Reihe noch eine zur vorangehenden.



§ 1 (L. 1)

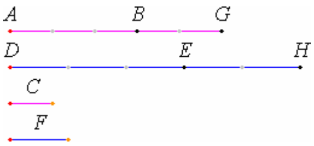
Bei beliebig vielen Größen, die einzeln Gleichvielfache von gleichviel weiteren Größen sind, ist die Summe von der Summe Ebensovielfaches wie die einzelne Größe von der zugehörigen einzelnen.

Beliebig viel Größen AB, CD seien einzeln Gleichvielfache von gleichviel Größen E, F. Ich behaupte, dass auch AB + CD von E + F Ebensovielfaches ist wie AB von E.
Da nämlich AB von E und CD von F Gleichvielfache sind, enthält AB ebenso viele Größen = E, wie CD solche von F. Man teile AB in die mit E gleichen Größen AG, GB (V, Definition 2) und CD in die mit F gleichen CH, HD; dann muss die Anzahl der Größen AG, GB der Anzahl der Größen CH, HD gleich sein. Und da AG = E, CH = F, so ist mit AG = E zugleich auch AG + CH = E + F. Aus demselben Grunde ist mit

GB = E zugleich auch GB + HD = E + F; also enthält AB + CD ebensoviel Teile = E + F, wie AB Teile = E enthält; also ist AB + CD von E + F Ebensovielfaches wie AB von E – S.

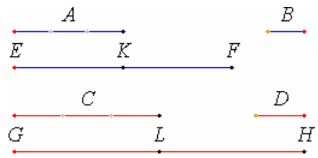
§ 2 (L. 2)

Wenn eine erste Größe von einer zweiten Gleichvielfaches ist wie eine dritte von einer vierten, während noch eine fünfte von der zweiten Gleichvielfaches ist wie eine sechste von der vierten, dann müssen auch zusammen erste und fünfte von der zweiten Gleichvielfaches sein wie dritte und sechste von der vierten.



E sei nämlich die erste Größe AB von der zweiten C Gleichvielfaches wie die dritte DE von der vierten F, ferner die fünfte BG von der zweiten C Gleichvielfaches wie die sechste EH von der vierten F. Ich behaupte, dass auch zusammen erste + fünfte, nämlich AG, von der zweiten C Gleichvielfaches sind wie dritte + sechste, nämlich DH, von der vierten F. Da nämlich AB von C Gleichvielfaches ist wie DE von F, so enthält DE ebensoviel Teile = F, wie AB Teile = C. Aus demselben Grunde enthält auch EH ebensoviel Teile = F, wie BG Teile = C; also enthält die Summe DH ebensoviel Teile = F, wie die Summe AG Teile = C; DH ist also von F Ebensovielfaches wie AG von C. Also muss zusammen erste + fünfte Größe, hier AG, von der zweiten hier C, Gleichvielfaches sein wie dritte + sechste, hier DH, von der vierten, hier F – S.

§ 3 (L. 3)



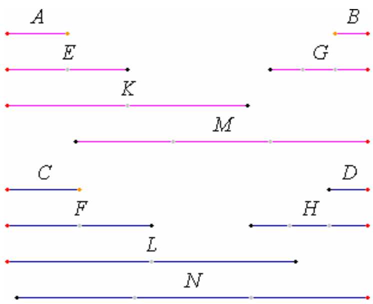
Wenn eine erste Größe von einer zweiten Gleichvielfaches ist, wie eine dritte von einer vierten, und man bildet Gleichvielfache der ersten und dritten, dann müssen über gleiches weg auch die neugebildeten Größen Gleichvielfache der zugehörigen sein, die eine von der zweiten, die andere von der vierten.

Es sei nämlich die erste Größe A von der zweiten B Gleichvielfaches wie die dritte C von der vierten D, und man bilde von A, C Gleichvielfache EF, GH. Ich behaupte, dass EF von B Gleichvielfaches ist wie GH von D.

Da nämlich EF von A Gleichvielfaches ist wie GH von C, so enthält GH ebensoviel Teile = C, wie EF Teile = A. Man teile EF in die mit A gleichen Größen EK, KF, und GH in die mit C gleichen GL, LH; dann muss die Anzahl der Teile EK, KF der Anzahl der Teile GL, LH gleich sein. Und da A und B Gleichvielfaches ist wie C von D, aber EK = A und GL = C, so ist EK von B Gleichvielfaches wie GL von D. Aus demselben Grunde ist KF von B Gleichvielfaches wie LH von D. Da so eine erste Größe EK von einer zweiten B Gleichvielfaches ist wie eine dritte GL von einer vierten D, ferner eine fünfte KF von der zweiten B Gleichvielfaches ist wie eine sechste LH von der vierten D, so sind auch zusammen erste + fünfte, nämlich EF, von der zweiten B Gleichvielfaches wie dritte + sechste, nämlich GH, von der vierten D (V, 2) – S.

§ 4 (L. 4)

Hat eine erste Größe zur zweiten dasselbe Verhältnis wie die dritte zur vierten, dann müssen auch bei beliebiger Vervielfältigung Gleichvielfache der ersten und dritten zu Gleichvielfachen der zweiten und vierten, entsprechend genommen, dasselbe Verhältnis haben.



Es habe nämlich die erste Größe A zur zweiten B dasselbe Verhältnis wie die dritte C zur vierten D; und man bilde von A, C Gleichvielfache E, F, sowie von B, D beliebige weitere Gleichvielfache G, H. Ich behaupte, dass E : G = F : H.

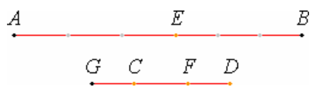
Man bilde von E, F Gleichvielfache K, L, und von G, H beliebige weitere Gleichvielfache M, N.

Da dann E von A Gleichvielfaches ist wie F von C, von E, F aber Gleichvielfache K, L gebildet sind, so ist K von A Gleichvielfaches wie L von C (V, 3). Aus demselben Grunde ist auch M von B Gleichvielfaches wie N von D.

Da nun A : B = C : D, und von A, C Gleichvielfache K, L, sowie von B, D irgendwelche weitere Gleichvielfache M, N gebildet sind, so ist, wenn K > M, auch L > N, wenn gleich, gleich, und wenn kleiner, kleiner (V, Definition 5). Hier sind K, L auch von E, F Gleichvielfache, und M, N von G, H beliebige weitere Gleichvielfache; also ist E : G = F : H (V, Definition 5) – S.

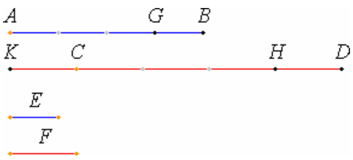
§ 5 (L. 5)

Wenn eine Größe von einer Größe Gleichvielfaches ist wie ein Stück von einem Stück, dann muss auch der Rest vom Rest Gleichvielfaches sein wie das Ganze vom Ganzen.



Es sei nämlich die Größe AB von der Größe CD Gleichvielfaches wie das Stück AE vom Stück CF. Ich behaupte, dass auch der Rest EB vom Rest FD Gleichvielfaches sein muss wie das Ganze AB vom Ganzen CD.

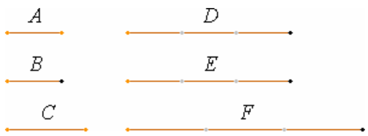
Man zeichne CG so, dass EB von ihm Ebensovielfaches wird, wie AE von CF. Da dann AE von CF Gleichvielfaches ist wie EB von GC, ist AE von CF Gleichvielfaches wie AB von GF (V, 1). AE ist aber von CF schon Gleichvielfaches wie AB von CD; also ist AB Gleichvielfaches von beiden Größen GF, CD; also ist GF = CD (Axiom 6 verallgemeinert). Man nehme CF beiderseits weg; dann ist Rest GC = Rest FD. Da AE von CF Gleichvielfaches ist wie EB von GC, und GC = DF, so ist AE von CF Gleichvielfaches wie EB von FD. Nach Voraussetzung ist aber AE von CF Gleichvielfaches wie AB von CD; also ist EB von FD Gleichvielfaches wie AB von CD. Also muss der Rest EB vom Rest FD Ebensovielfaches sein wie das Ganze AB vom Ganzen CD – S.



§ 6 (L. 6)

Wenn zwei erste Größen Gleichvielfache von zwei zweiten Größen sind und irgendwelche Stücke der ersten Gleichvielfache von denselben zweiten, dann sind auch die Reste denselben zweiten entweder gleich oder Gleichvielfache von ihnen.

Es seien nämlich zwei Größen AB, CD Gleichvielfache von zwei Größen E, F, und die Stücke AG, CH Gleichvielfache von denselben E, F. Ich behaupte, dass auch die Reste GB, HD entweder E, F gleich oder Gleichvielfache von ihnen sind.
Zunächst sei GB = E; ich behaupte, dass auch HD = F. Man lege CK = F hin. Da AG von E Gleichvielfaches ist wie CH von F, und GB = E, KC = F, so ist AB von E Gleichvielfaches wie KH von F (V, 2). Nach Voraussetzung ist aber AB von E Gleichvielfaches wie CD von F; also ist KH von Gleichvielfaches wie CD von F. Da so KH, CD beide von F Gleichvielfache sind, ist KH = CD (Axiom 5 verallgemeinert). Man nehme CH beiderseits weg; dann ist Rest KC = Rest HD. Aber F = KC; also ist auch HD = F; folglich muss, wenn GB = E, auch HD = F sein. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch, wenn GB Vielfaches von E ist, HD Ebensovielfaches von F sein muss – S.



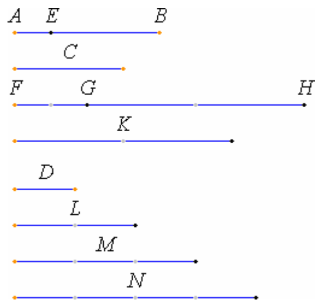
§ 7 (L. 7)

Gleiche Größen haben zu einer festen Größe dasselbe Verhältnis, ebenso die feste Größe zu gleichen.

Es seien A, B gleiche Größen, C eine beliebige andere Größe. Ich behaupte, dass A, B beide zu C dasselbe Verhältnis haben, ebenso C zu beiden Größen A, B.
Man bilde von A, B Gleichvielfache D, E, ferner von C ein beliebiges weiteres Vielfaches F. Da dann D von A Gleichvielfaches ist wie E von B, während A = B, so ist D = E. F ist irgendeine andere Größe; wenn also D > F, ist auch E > F, gleich, wenn gleich, kleiner, wenn kleiner. Hier sind D, E von A, B Gleichvielfache, und F ist von C ein beliebiges weiteres Vielfaches; also ist A : C = B : C (V, Definition 5). Ich behaupte, dass außerdem C zu beiden Größen A, B dasselbe Verhältnis hat.
Man konstruiere ebenso; dann zeigt man ähnlich, dass D = E; F ist irgendeine andere Größe; wenn F also > D, so ist es auch > E, gleich, wenn gleich, kleiner, wenn kleiner. Hier ist F Vielfaches von C, und D, E sind von A, B beliebige weitere Gleichvielfache; also ist C : A = C : B (V, Definition 5). Also haben gleiche Größen zu einer festen Größe dasselbe Verhältnis, ebenso die feste Größe zu gleichen. Zusatz: Hiernach ist klar, dass Größen, die in Proportion stehen, auch bei Umkehrung (V, Definition 13) in Proportion stehen müssen – dies hatte man ausführen sollen.

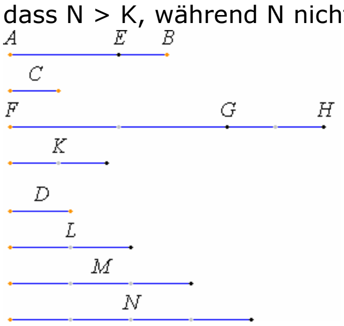
§ 8 (L. 8)

Von ungleichen Größen hat die größere zu einer festen Größe größeres Verhältnis als die kleinere; und die feste Größe hat zur kleineren größeres Verhältnis als zur größeren.



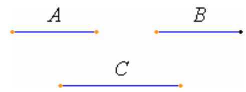
Es seien AB, C ungleiche Größen, AB die größere, D eine beliebige andere. Ich behaupte, dass AB : D > C : D, und D : C > : AB. Durch AB > C berechtigt, trage man BE = C ab; dann muss die kleinere der Größen AE, EB, vervielfältigt, schließlich D übertreffen (V, Definition 4).
Zunächst sei AE < EB; dann vervielfältige man AE und erhalte von ihm ein Vielfaches FG > D; auch bilde man Ebensovielfache, wie FG von AE ist, von EB, nämlich GH, und von C, nämlich K; ferner verschaffe man sich von D das Doppelte L, das Dreifache M, und so immer um eines fortschreitend weiter, bis ein Vielfaches von D entsteht, das als erste > K ist. Man verschaffe sich dieses, es sei N, etwa = 4 D, dabei als erstes > K.
Da nun K < N als erstes, ist K nicht < M. Da ferner FG von AE Gleichvielfaches ist wie GH von EB, so ist FG von AE Gleichvielfaches wie FH von AB (V, 1). F G ist aber von AE Gleichvielfaches wie K von C; also ist FH von AB Gleichvielfaches wie K von C; also sind FH, K Gleichvielfache von AB, C. Da GH von EB Gleichvielfaches wie K von C ist, während EB = C, ist andererseits GH = K. Nun ist K nicht < M, also auch GH nicht < M. Und FG > D; also ist die ganze Größe FH > D + M. Aber D + M = N, da ja M = 3 D und M + D = 4 D, während auch N = 4 D; also sind M + D = N. Nun ist FH > M + D, also FH > N, während K nicht > N. Hier sind FH, K Gleichvielfache von AB, C und N von D ein weiteres Vielfaches, wie es gerade trifft; also ist AB : D > C : D (V, Definition 7).

Ich behaupte, dass außerdem D : C > D : AB. Man konstruiere ebenso; dann lässt sich ähnlich zeigen, dass N > K, während N nicht > FH. Hier ist N ein Vielfaches von D, und FH, K sind von AB, C



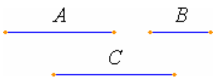
irgendwelche weitere Gleichvielfache; also ist D : C > D : AB (V, Definition 7).
Zweitens sei AE > EB. Die kleinere Größe EB muss vervielfältigt, schließlich D übertreffen (V, Definition 4). Man vervielfältige und erhalte von EB ein Vielfaches GH > D; auch bilde man Ebensovielfache, wie GH von EB ist, von AE, nämlich FG, und von C, nämlich K. Dann lässt sich wie oben zeigen, dass FH, K Gleichvielfache von AB, C sind. Und wie oben verschaffe man sich von D das Vielfache N, das als erstes > FG ist, so dass diesmal FG nicht < M. Und GH > D; also ist die ganze Größe FH > D + M, d.h. > N. Nun ist K nicht > N, da ja FG, das GH, d.h. K übertrifft, nicht > N ist. So kann man auf demselben Weg wie oben den Beweis zu Ende führen – S.

§ 9 (L. 9)
Größen, die zu einer festen Größe dasselbe Verhältnis haben, sind einander gleich; und Größen, zu denen die feste Größe dasselbe Verhältnis hat, sind gleich.



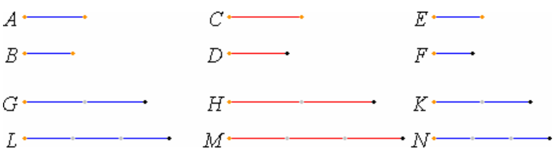
A und B mögen beide zu C dasselbe Verhältnis haben. Ich behaupte, dass A = B. Anderenfalls könnten nämlich A und B nicht beide zu C dasselbe Verhältnis haben (V, 8); sie haben es aber; also ist A = B. Zweitens habe C zu beiden Größen A und B dasselbe Verhältnis. Ich behaupte, dass A = B. Anderenfalls könnte nämlich C nicht zu beiden Größen A und B dasselbe Verhältnis haben (V, 8); es hat es aber; also ist A = B – S.

§ 10 (L. 10)
Von Größen, die zu einer festen Größe Verhältnis haben, ist die, die größeres Verhältnis hat, die größere; und die, zu der die feste Größe größeres Verhältnis hat, ist die kleinere.



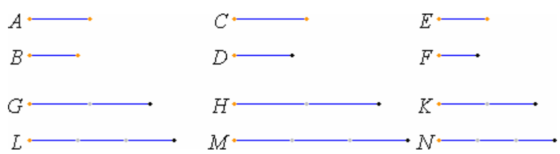
Es sei nämlich A : C > B : C. Ich behaupte, dass A > B. Anderenfalls müsste A entweder = B sein oder kleiner. Dass A = B, ist unmöglich; sonst hätten nämlich A und B beide zu C gleiches Verhältnis (V, 7); sie haben es aber nicht; also ist A nicht = B. Dass A < B, ist auch unmöglich; sonst wäre nämlich A : C < B : C (V, 8); dies ist aber nicht der Fall; also ist A nicht < B. Die Ungleichheit wurde oben bewiesen; also ist A > B. Zweitens sei C : B > C : A: Ich behaupte, dass B < A. Anderenfalls müsste es nämlich entweder gleich oder größer sein. Dass B = A, ist unmöglich; sonst hätte nämlich C zu beiden Größen A und B dasselbe Verhältnis (V, 7); es hat es aber nicht; also ist A nicht = B. Dass B > A, ist auch unmöglich; sonst hätte nämlich C zu B kleineres Verhältnis als zu A (V, 8); es hat es aber nicht; also ist B nicht > A. Die Ungleichheit wurde oben bewiesen; also ist B < A – S.

§ 11 (L. 11)
Mit demselben Verhältnis zusammenfallende Verhältnisse fallen auch miteinander zusammen.



Es sei A : B = C : D und C : D = E : F. Ich behaupte, dass A : B = E : F.
Man bilde von A, C, E Gleichvielfache G, H , K und von B, D, F beliebige weitere Gleichvielfache L, M, N. Da A : B = C : D und man von A, C Gleichvielfache G, H sowie von B, D beliebige weitere Gleichvielfache L, M gebildet hat, so ist, wenn G > L, auch H > M, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner (V, Definition 5). Da ferner C : D = E : F und man von C, E Gleichvielfache H, K sowie von D, F irgendwelche weitere Gleichvielfache M, N gebildet hat, so ist ebenso, wenn H > M, auch K > N, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner. Wenn H > M, war aber auch G > L, wenn gleich, gleich, wenn kleiner, kleiner; folglich ist auch, wenn G > L, K > N, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner. Hier sind G, K Gleichvielfache von A, E, und L, N von B, F beliebige weitere Gleichvielfache; also ist A : B = E : F (V, Definition 5) – S.

§ 12 (L. 12)
Stehen beliebig vielen Größen in Proportion, dann müssen sich alle Vorderglieder zusammen zu allen Hintergliedern zusammen verhalten wie das einzelne Vorderglied zum zugehörigen einzelnen Hinterglied.

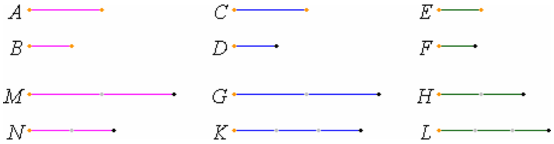


Beliebig viele Größen A, B, C, D, E, F mögen in Proportion stehen, A : B = C : D und = E : F. Ich behaupte, dass A : B = (A + C + E) : (B + D + F).
Man bilde nämlich von A, C, E Gleichvielfache G, H , K und von B, D, F beliebige weitere Gleichvielfache L, M, N. Da hier A : B = C : D = E : F und man von A, C, E Gleichvielfache G, H, K sowie von B, D, F beliebige weitere Gleichvielfache L, M, N gebildet hat, so sind, wenn G > L, auch H > M und K > N, gleich, wenn gleich,

und kleiner, wenn kleiner (V, Definition 5); folglich sind, wenn G > L, auch G + H + K > L + M + N, gleich, wenn gleich (Axiom 2), und kleiner, wenn kleiner. Hier sind G und G + H + K von A und A + C + E Gleichvielfache, da bei beliebig vielen Größen, die einzeln Gleichvielfache von gleichviel weiteren Größen sind, die Summe von der Summe Ebensovielfaches ist wie die einzelne Größe von der einzelnen (V, 1). Aus demselben Grunde sind auch L und L + M + N von B und B + D + F Gleichvielfache; also ist A : B = (A + C + E) : (B + D + F) (V, Definition 5)- S.

§ 13 (L. 13)

Hat eine erste Größe zur zweiten dasselbe Verhältnis wie die dritte zur vierten, während die dritte zur vierten größeres Verhältnis hat als die fünfte zur sechsten, dann muss auch die erste zur zweiten größeres Verhältnis haben als die fünfte zur sechsten.

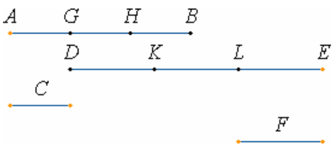


Es habe nämlich eine erste Größe A zur zweiten B dasselbe Verhältnis wie die dritte C zur vierten D, die dritte C habe aber zur vierten D größeres Verhältnis als die fünfte E zur sechsten F. Ich behaupte, dass auch die erste Größe A zur zweiten B größeres Verhältnis haben muss als die fünfte E zur sechsten F.
Da es nämlich von C, E Gleichvielfache und von D, F irgendwelche weitere Gleichvielfache gibt, so dass das Vielfache von C das Vielfache von D übertrifft, während das Vielfache von E das Vielfache von F nicht übertrifft (V, Definition 7), verschaffe man sich solche und erhalte von C, E Gleichvielfache G, H und von D, F irgendwelche weitere Gleichvielfache K, L. so dass G > K, aber H nicht > L; ferner sei M von A Ebensovielfaches wie G von C und N von B Ebensovielfaches wie K von D.
Da A : B = C : D und man von A, C Gleichvielfache M, G, sowie von B, D irgendwelche weitere Gleichvielfache N, K gebildet hat, so ist, wenn M > N, auch G > K, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner (V, Definition 5). Nun ist G > K, also auch M > N, während H nicht > L. Hier sind M, H von A, E Gleichvielfache, und N, L von B, F irgendwelche weitere Gleichvielfache; also ist A : B > E : F (V, Definition 7) – S.

§ 14 (L. 14)

Hat eine erste Größe zur zweiten dasselbe Verhältnis wie die dritte zur vierten und ist dabei die erste größer als die dritte, dann muss auch die zweite größer sein als die vierte, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner.

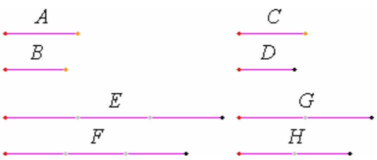
Es habe nämlich eine erste Größe A zur zweiten B dasselbe Verhältnis wie die dritte C zur vierten D; dabei sei A > C. Ich behaupte, dass auch B > D. Da A > C, und B eine beliebige weitere Größe ist, so ist A : B > C : B (V, 8). Nun ist A : B = C : D; also ist C : D > C : B (V, 13). Die Größe, zu der eine feste Größe größeres Verhältnis hat, ist aber die kleinere (V, 10); also ist D < B, folglich B > D. Ähnlich lässt sich auch zeigen, dass B = D, wenn A = C und B < D, wenn A < C – S.



§ 15 (L. 15)

Teile haben zueinander dasselbe Verhältnis wie Gleichvielfache von ihnen zueinander.

Es sei AB von C Gleichvielfaches wie DE von F. Ich behaupte, dass C : F = AB : DE.
Da AB von C Gleichvielfaches ist wie DE von F, so enthält DE ebensoviel Größen = F, wie AB solche = C. Man teile AB in die mit C gleichen Stücke AG, GH, HB, und DE in die mit F gleichen Stücke DK, KL, LE. Dann muss die Anzahl der Stücke AG, GH, HB der Anzahl der Stücke DK, KL, LE gleich sein. Da AG = GH = HB und DK = KL = LE, ist AG : DK = GH : KL = HB : LE (V, 7, 11). Also müssen sich auch alle Vorderglieder zusammen zu allen Hintergliedern zusammen verhalten wie einer der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder (V, 12); also ist AG : DK = AB : DE. Aber AG = C und DK = F; also ist C : F = AB : DE (V, 7, 11) – S.



§ 16 (L. 16)

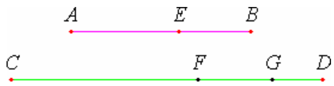
Stehen vier Größen in Proportion, so müssen sie auch vertauscht in Proportion stehen.

Vier Größen A, B, C, D mögen in Proportion stehen, A : B = C : D. Ich behaupte, dass sie es auch bei Vertauschung (V, Definition 12) tun müssen, A : C = B : D.
Man bilde von A, B Gleichvielfache E, F und von C, D beliebige weitere Gleichvielfache G, H. Da dann E von A Gleichvielfaches ist wie F von B, Teile aber dasselbe Verhältnis haben wie Gleichvielfache (V, 15), so ist A : B = E : F. Aber A : B = C : D; also ist auch C : D = E : F (V, 11), Ebenso ist, da G, H von C, D Gleichvielfache sind, C : D = G : H. Aber C : D = E : F; also ist auch E : F = G : H (V, 11). Stehen aber vier Größen in Proportion und ist dabei die erste größer als die dritte, dann muss auch die zweite größer sein als die vierte, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner (V, 14); also ist, wenn E > G, auch F >

H, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner. Hier sind E, F Gleichvielfache von A, B, und G, H von C, D beliebige weitere Gleichvielfache; also ist A : C = B : D (V, Definition 5) – S.

§ 17 (L. 17)
Stehen Größen verbunden in Proportion, so müssen sie auch getrennt in Proportion stehen.

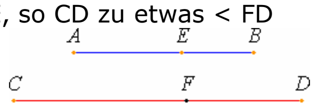
AB, BE, CD, DF seien Größen, die verbunden in Proportion stehen, AB : BE = CD : DF. Ich behaupte, dass sie auch getrennt (V, Definition 15) in Proportion stehen müssen, AE : EB = CD : DF. Man bilde von AE, EB, CF, FD Gleichvielfache GH, HK, LM, MN und von EB, FD beliebige weitere Gleichvielfache KO, NQ.
Da GH von AE Gleichvielfaches ist wie HK von EB, so ist GH von AE Gleichvielfaches wie GK von AB (V, 1). GH ist aber von AE Gleichvielfaches wie LM von CF; also ist GK von AB Gleichvielfaches wie LM von CF. Ebenso ist, da LM von CF Gleichvielfaches ist wie MN von FD, LM von CF auch Gleichvielfaches wie LN von CD. LM war aber von CF Gleichvielfaches wie GK von AB; also ist GK von AB Gleichvielfaches wie LN von CD. Also sind GK, LN Gleichvielfache von AB, CD. Ebenso ist, da HK von EB Gleichvielfaches ist wie MN von FD und KO von EB Gleichvielfaches wie NQ von FD, auch verbunden HO von EB Gleichvielfaches wie MQ von FD (V, 2). Da nun AB : BE = CD : DF und man von AB, CD Gleichvielfache GK, LN sowie von EB, FD Gleichvielfache HO, MQ gebildet hat, so ist, wenn GK > HO, auch LN > MQ, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner (V, Definition 5).



Es sei zunächst GK > HO; nimmt man dann HK beiderseits weg, so ist auch GH > KO. Wenn aber GK > HO, musste auch LN > MQ sein; also ist LN > MQ; nimmt man dann beiderseits MN weg, so ist auch LM > NQ; folglich ist, wenn GH > KO, auch LM > NQ. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch, wenn GH = KO, dann LM = NQ, und kleiner, wenn kleiner. Hier sind GH, LM von AE, CF Gleichvielfache und KO, NQ von EB, FD beliebige weitere Gleichvielfache; also ist AE : EB = CF : FD (V, Definition 5) – S.

§ 18 (L. 18)
Stehen Größen getrennt in Proportion, so müssen sie auch verbunden in Proportion stehen.

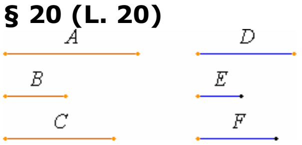
AE, EB, CF, FD seien Größen, die getrennt in Proportion stehen, AE : EB = CF : FD. Ich behaupte, dass sie auch verbunden (V, Definition 14) in Proportion stehen müssen, AB : BE = CF : FD. Verhielte sich nämlich nicht AB : BE = CD : DF, dann müsste sich, wie AB zu BE, so CD zu etwas verhalten, was entweder kleiner oder größer wäre als DF.
Zunächst verhalte es sich so zu etwas kleinerem, nämlich DG. Da dann AB : BE = CD : DG, stünden verbundene Größen in Proportion; folglich müssten sie auch getrennt in Proportion stehen (V, 17); also wäre AE : EB = CG : GD. Nach Voraussetzung ist aber AE : EB = CF : FD; also wäre CG : GD = CF : FD (V, 11). Hier wäre die erste Größe CG > die dritte CF; also wäre auch die zweite GD > die vierte FD (V, 14); dabei ist sie kleiner; dies ist unmöglich; also kann sich nicht, wie AB zu BE, so CD zu etwas < FD verhalten. Ähnlich lässt sich zeigen, dass es sich so auch nicht verhalten kann zu etwas, was größer wäre; es muss sich also so verhalten zu FD selbst – S.



§ 19 (L. 19)
Verhält sich ein Stück zum Stück wie das Ganze zum Ganzen, dann muss sich auch der Rest zum Rest verhalten wie das Ganze zu Ganzen.

Wie das Ganze AB zum Ganzen CD, so verhalte sich das Stück AE zum Stück CF. Ich behaupte, dass sich auch der Rest EB zum Rest FD verhalten muss wie das Ganze AB zum Ganzen CD.
Da AB : CD = AE : CF, so ist auch bei Vertauschung BA : AE = DC : CF (V, 16). Da hier verbundene Größen in Proportion stehen, müssen sich auch getrennt in Proportion stehen (V, 17), BE : EA = DF : CF; und es ist, mit Vertauschung, BE : DF = EA : FC (V, 16). Nach Voraussetzung ist aber AE : CF = Ganzes AB : Ganzem CD. Also muss sich auch der Rest EB zum Rest FD verhalten wie das Ganze AB zum Ganzen CD (V, 11) - S.
Da, wie oben bewiesen, AB : CD = EB : FD, so ist auch vertauscht AB : BE = CD : FD, die Größen stehen also verbunden in Proportion; andererseits wurde oben bewiesen, dass BA : AE = DC : CF; dies entsteht durch Umwendung.
Zusatz: Hiernach ist klar, dass Größen, die verbunden in Proportion stehen, auch bei Umwendung (V, Definition 16) in Proportion stehen müssen – dies hatte man beweisen sollen.

§ 20 (L. 20)



Hat man drei Größen und gleichviel weitere, so dass sie paarweise genommen in demselben Verhältnis stehen, und ist dabei über gleiches weg die erste größer als die dritte, so muss auch die vierte größer sein als die sechste, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner.

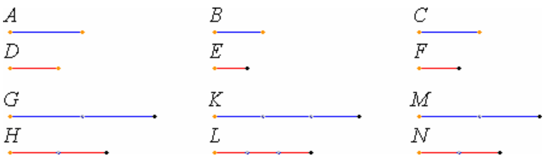
A, B, C seien drei Größen und D, E, F gleichviel weitere, paarweise genommen in demselben Verhältnis stehend, A : B = D : E, B : C = E : F, und über gleiches weg sei A > C. Ich behaupte, dass dann auch D > F, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner.

Da A > C ist und B irgendeine andere Größe, Größeres aber zu einer festen Größe größeres Verhältnis hat als Kleineres (V, 8), so ist A : B > C : B. Nun ist A : B = D : E, ferner, nach Umkehrung, C : B = F : E (V, 7 Zusatz). Also ist D : E > F : E (V, 13). Von Größen, die zu einer festen Größe Verhältnis haben, ist aber die, die größeres Verhältnis hat, die größere (V, 10); also ist D > F. Ähnlich lässt sich zeigen, dass, wenn A = C, auch D = F (V, 7, 11, 9), und kleiner, wenn kleiner – S.

§ 21 (L. 21)

Hat man drei Größen und gleichviel weitere, so dass sie paarweise genommen in demselben Verhältnis stehen, aber in überkreuzter Proportion, und ist dabei über gleiches weg die größer als die dritte, so muss auch die vierte größer sein als die sechste, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner.

A, B, C seien drei Größen und D, E, F gleichviel weitere, paarweise genommen in demselben Verhältnis stehend, aber in gekreuzter Proportion (V, Definition 18), A : B = E : F, B : C = D : E, und über gleiches weg sei A > C. Ich behaupte, dass dann auch D > F, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner.
Das A > C ist und B irgendeine andere Größe, so ist A : B > C : B (V, 8). Nun ist A : B = E : F, ferner, nach Umkehrung, C : B = E : D (V, 7 Zusatz). Also ist E : F > E : D (V, 13). Die Größe, zu der eine feste Größe größeres Verhältnis hat, ist aber die kleinere (V, 10); also ist F < D, also D > F. Ähnlich lässt sich zeigen, dass, wenn A = C, auch D = F (V, 7, 11, 9), und kleiner, wenn kleiner – S.



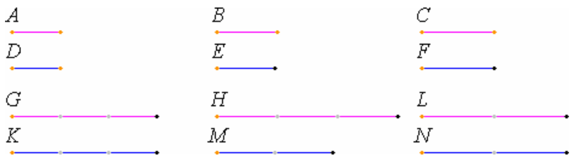
§ 22 (L. 22)

Hat man beliebig viele Größen und gleichviel weitere, so dass sie paarweise genommen in demselben Verhältnis stehen, so müssen sie auch über gleiches weg in demselben Verhältnis stehen.

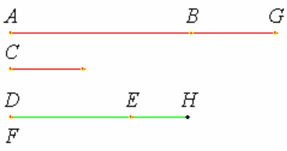
A, B, C seien beliebig viele Größen und D, E, F gleichviel weitere, paarweise genommen in demselben Verhältnis stehend, A : B = D : E, B : C = E : F. Ich behaupte, dass sie auch über gleiches weg in demselben Verhältnis (V, Definition 17) stehen müssen.
Man bilde von A, D Gleichvielfache G, H, von B, E beliebige weitere Gleichvielfache K, L, schließlich von C, F beliebige weitere Gleichvielfache M, N. Da A : B = D : E und man von A, D Gleichvielfache G, H sowie von B, E beliebige weitere Gleichvielfache K, L gebildet hat, so ist G : K = H : L (V, 4). Aus demselben Grunde ist auch K : M = L : N. Da man so drei Größen G, K, M und gleichviel weitere H, L, N hat, die paarweise genommen in demselben Verhältnis stehen, so muss über gleiches weg, wenn G > M, auch H > N sein, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner (V, 20). Hier sind G, H von A, D Gleichvielfache und M, N von C, F beliebige weitere Gleichvielfache. Also ist A : C = D : F (V, Definition 5) – S.

§ 23 (L. 23)

Hat man drei Größen und gleichviel weitere, so dass sie paarweise genommen in demselben Verhältnis stehen, aber in überkreuzter Proportion, so müssen sie auch über gleiches wen in demselben Verhältnis stehen.



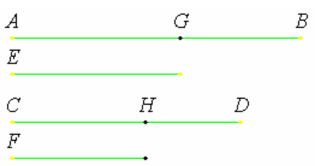
A, B, C seien drei Größen und D, E, F gleichviel weitere, paarweise genommen in demselben Verhältnis stehend, aber in überkreuzter Proportion (V, Definition 18), A : B = E : F, B : C = D : E. Ich behaupte, dass A : C = D : F.
Man bilde von A, B, D Gleichvielfache G, H, K und von C, E, F beliebige weitere Gleichvielfache L, M, N. Da G, H von A, B Gleichvielfache sind, Teile aber dasselbe Verhältnis haben wie Ebensovielfache (V, 15), so ist A : B = G : H. Aus demselben Grunde ist auch E : F = M : N.
Nun ist A : B = E : F, also auch G : H = M : N (V, 11). Da ferner B : C = D : E, so ist auch vertauscht B : D = C : E (V, 16). Und da H, K von B, D Gleichvielfache sind, Teile aber dasselbe Verhältnis haben wie Gleichvielfache (V, 15), so ist B : D = H : K. Aber B : D = C : E; also ist auch H : K = C : E (V, 11). Ebenso ist, da L, M von C, E Gleichvielfache sind, C : E = L : M. Nun ist C : E = H : K, also H : K = L : M und, vertauscht, H : L = K : M. Wie oben bewiesen, ist aber auch G : H = M : N. Da man so drei Größen G, H, L und gleichviel weitere K, M, N hat, die paarweise genommen in demselben Verhältnis stehen, und zwar in überkreuzter Proportion, so muss über gleiches weg, wenn G > L, auch K > N sein, gleich, wenn gleich, und kleiner, wenn kleiner (V, 21). Hier sind G, K und A, D Gleichvielfache, und L, N von C, F. Also ist A : C = D : F (V, Definition 5) – S.



§ 24 (L. 24)

Hat eine erste Größen zur zweiten dasselbe Verhältnis wie die dritte zur vierten, und auch eine fünfte zur zweiten dasselbe Verhältnis wie die sechste zur vierten, dann müssen auch verbunden die erste und fünfte Größe zur zweiten dasselbe Verhältnis haben wie die dritte und sechste zur vierten.

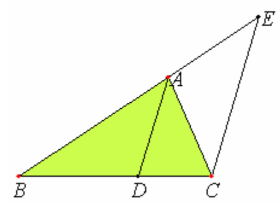
Die erste Größe AB haben zur zweiten C dasselbe Verhältnis wie die dritte DE zur vierten F, und auch die fünfte BG habe zur zweiten C dasselbe Verhältnis wie die sechste EH zur vierten F. Ich behaupte, dass auch verbunden erste + fünfte Größe, nämlich AG, zur zweiten C dasselbe Verhältnis haben muss wie dritte + sechste, nämlich DH, zur vierten F.
Da BG : C = EH : F, so ist, mit Umkehrung, C : BG = F : EH (V, 7 Zusatz). Da nun AB : C = DE : F und C : BG = F : EH, so ist auch über gleiches weg AB : BG = DE : EH (V, 22). Da hier Größen getrennt in Proportion stehen, müssen sie auch verbunden in Proportion stehen (V, 18); also ist AG : GB = DH : HE. Aber BG : C = EH : F; also ist über gleiches weg AG : C = DH : F (V, 22) – S.



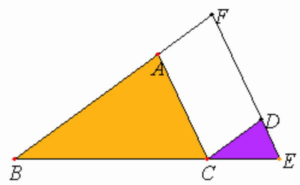
§ 25 (L. 25)
Stehen vier Größen in Proportion, so sind die größte und kleinste zusammen größer als die übrigen beiden zusammen.

Die vier Größen AB, CD, E, F mögen in Proportion stehen, AB : CD = E : F; von ihnen sei AB die größte und (V, 14, 16) die kleinste. Ich behaupte, dass AB + F > CD + E.
Man trage AG = E und CH = F ab. Da AB : CD = E : F und E = AG, F = CH, so ist AB : CD = AG : CH. Und da sich, wie das Ganze AB zum Ganzen CD, so das Stück AG zum Stück CH verhält, so muss sich auch der Rest GB zum Rest HD wie das Ganze AB zu Ganzen CD verhalten (V, 19). Nun ist AB > CD, also auch GB > HD (V, 16, 14). Ferner ist, das AG = E und CH = F, auch AG + F = CH + E. Nun sind, wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, die Grenzen ungleich (Axiom 4). Wenn man daher, da GB, HG ungleiche Größen sind, GB die größere, AG + F zu GB hinzufügt und CH + E zu HD, so erhält man AB + F > CD + E – S.

VI. Buch: § 2 (L. 2)
§ 3 (L. 3)
Halbiert man in einem Dreieck einen Winkel und bringt die den Winkel teilende gerade Linie auch mit der Grundlinie zum Schnitt, so müssen die Abschnitte der Grundlinie dasselbe Verhältnis haben wie die übrigen Dreiecksseiten; und wenn die Abschnitte der Grundlinie dasselbe Verhältnis haben wie die übrigen Dreiecksseiten, dass muss eine gerade Linie, die man vom Scheitel zum Teilpunkt zieht, den geteilten Winkel im Dreieck halbieren.



Das Dreieck sei ABC; man halbiere den Winkel BAC durch die gerade Linie AD. Ich behaupte, dass BD : CD = BA : AC.
Man ziehe durch C zu DA die Parallele CE; die Verlängerung von BA treffe diese in E (Postulat 5). Da die Parallelen AD, EC von der geraden Linie AC geschnitten werden, ist ∠ ACE = CAD (I, 29). Nach Voraussetzung ist aber CAD = BAD, also ist auch ∠ BAD = ACE. Ebenso ist, da die Parallelen AD, EC von der geraden Linie BAE geschnitten werden, der äußere Winkel BAD dem inneren AEC gleich (I,29). Wie oben bewiesen, ist ACE = BAD; also ist auch ∠ ACE = AEC, folglich Seite AE = Seite AC (I, 6). Und da im Dreieck BCE AD || EC, einer der Seiten gezogen ist, so stehen in Proportion BD : DC = BA : AE (VI, 2). Aber AE = AC; also ist BD : DC = BA : AC (V, 7, 11). Andererseits sei BD : DC = BA : AC; man ziehe AD. Ich behaupte, dass ∠ BAC von der geraden Linie AD halbiert wird. Man konstruiere ebenso. Da BD : DC = BA : AC, aber auch BD : DC = BA : AE, weil AD im Dreieck BCE einer der Seiten, nämlich EC parallel gezogen ist (VI, 2), so ist BA : AC = BA : AE (V, 11). Also ist AC = AE (V, 9), folglich auch ∠ AEC) ACE (I, 5). AEC ist aber dem äußeren Winkel BAD gleich und ACE dem Wechselwinkel CAD (I, 29); also ist BAD = CAD; ∠ BAC wird also von der geraden Linie AD halbiert – S.



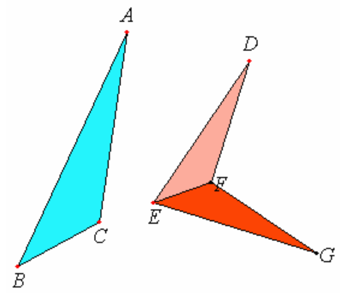
§ 4 (L. 4)
In winkelgleichen Dreiecken stehen die Seiten um gleiche Winkel in Proportion, und zwar entsprechen einander die, die gleichen Winkeln gegenüberliegen.

ABC, DCE seien winkelgleiche Dreiecke mit ∠ ABC = DCE, BAC = CDE und (I, 32) ACB = CED. Ich behaupte, dass in den Dreiecken ABC, DCE die Seiten um gleiche Winkel in Proportion stehen und dabei die gleichen Winkeln gegenüberliegenden einander entsprechen (V, Definition 11).
BC möge CE gerade fortsetzen. Da ∠ ABC + ACB < 2 R. (I, 17) und ACB = DEC, so sind ∠ ABC + DEC < 2 R.; also müssen sich BA, ED bei Verlängerung treffen (Postulat 5). Man verlängere sie, sie mögen sich in F treffen.
Da ∠ DCE = ABC, ist BF || CD (I, 28). Ebenso ist, da ACB = DEC, AC || FE. Also ist FACD ein Parallelogramm, also FA = DC, AC = FD (I, 34). Da hier im Dreieck FBE AC || FE, einer der Seiten gezogen ist, so ist BA : AF = BC : CE (VI, 2). Aber AF = CD; also ist BA : CD = DC : CE und, vertauscht (V, 16), AB : BC = DC : CE. Ebenso ist, da CD || BF, BC : CE = FD : DE; aber FD = AC; also ist BC : CE

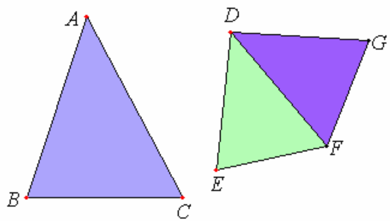
= AC : DE und, vertauscht, BC : CA = CE : ED. Da, wie oben bewiesen, AB : BC = DC : CE, andererseits BC : CA = CE : ED, so ist über gleiches weg BA : AC = CD : DE (V, 22) – S.

§ 5 (L. 5)

Stehen in zwei Dreiecken die Seiten in Proportion, so müssen die Dreiecke winkelgleich sein, und zwar müssen in ihnen die Winkel gleich sein, denen entsprechende Seiten gegenüberliegen.



ABC, DCE seien zwei Dreiecke, deren Seiten in Proportion stehen, AB : BC = DE : EF, BC : CA = EF : FD und (V, 22) BA : AC = ED : DF. Ich behaupte, dass ∆ ABC mit ∆ DEF winkelgleich ist und zwar die Winkel in ihnen gleich sein müssen, denen entsprechende Seiten gegenüberliegen, ABC = DEF, BCA = EFD und BAC = EDF.
Man trage an die gerade Linie EF in den Punkten E, F auf ihr die Winkel FEG = ABC und EFG = ACB an; dann ist auch der letzte Winkel bei A dem letzten bei G gleich (I, 32).
Also ist ∆ ABC mit EGF winkelgleich. In den Dreiecken ABC, EGF stehen also die Seiten um gleiche Winkel in Proportion, und zwar entsprechen einander die, die gleichen Winkeln gegenüberliegen (VI, 4); also ist AB : BC = GE : EF. Nach Voraussetzung ist aber AB : BC = DE : EF; also ist DE : EF = GE : EF (V, 11). DE, GE haben also beide dasselbe Verhältnis zu EF; also ist DE = GE (V, 9). Aus demselben Grunde ist auch DF = GF. Da nun DE = EG ist und EF gemeinsam, so sind zwei Seiten DE, EF zwei Seiten GE, EF gleich, auch ist Grundlinie DF = Grundlinie FG; also ist ∠ DEF = GEF (I, 8), ∆ DEF = ∆ GEF, und die übrigen Winkel sind den übrigen Winkeln gleich, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4); also sind ∠ DFE = GFE und EDF = EGF. Da ∠ FED = GEF und GEF = ABC, so ist auch ∠ ACB = DEF. Aus demselben Grunde ist auch ∠ ACB = DFE und schließlich der Winkel bei A dem bei D gleich. Also ist ∆ ABC mit ∆ DEF winkelgleich – S.



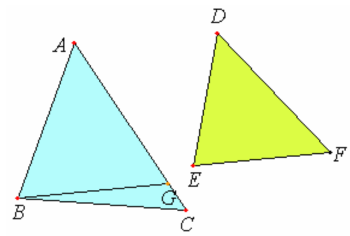
§ 6 (L. 6)

Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel einem Winkel gleich ist und die Seiten um die gleichen Winkel in Proportion stehen, dann müssen die Dreiecke winkelgleich sein, und zwar müssen in ihnen die Winkel gleich sein, denen entsprechende Seiten gegenüberliegen.

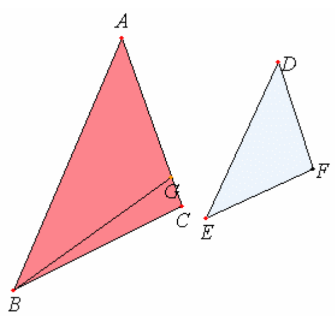
ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen ein Winkel BAC einem Winkel EDF gleich ist und die Seiten um die gleichen Winkel in Proportion stehen, BA : AC = ED : DF. Ich behaupte, dass ∆ ABC mit ∆ DEF winkelgleich ist, und zwar muss in ihnen ∠ ABC = DEF, ACB = DFE sein.
Man trage an die gerade Linie DF in den Punkten D, F auf ihr die Winkel FDG = BAC oder EDF, und DFG = ACB an; dann ist auch der letzte Winkel, bei B, dem letzten, bei G, gleich (I, 32).
Also ist ∆ ABC mit ∆ DGF winkelgleich. Also stehen in Proportion BA : AC = GD : DF (VI, 4). Nach Voraussetzung ist aber BA : AC = ED : DF; also ist ED : DF = GD : DF (V, 11). Also ist ED = DG (V, 9); und DF ist gemeinsam; mithin sind zwei Seiten ED, DF zwei Seiten GD, DF gleich; ferner ist ∠ EDF = ∠ GDF; also ist Grundlinie EF = Grundlinie GF, ∆ DEF = ∆ GDF, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln gleich sein, immer die, denn gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4). Also ist ∠ DFG = DFE und DGF = DEF. Aber DFG = ACB; also ist auch ACB = DFE. Nach Voraussetzung ist aber ∠ BAC = EDF; also ist auch der letzte Winkel, bei B, dem letzten, bei E, gleich (I, 32). ∆ ABC ist also mit ∆ DEF winkelgleich – S.

§ 7 (L. 7)

Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel einem Winkel gleich ist und um weitere Winkel die Seiten in Proportion stehen, während die letzten Winkel beide zugleich entweder kleiner oder nicht kleiner als ein Rechter sind, dann müssen die Dreiecke winkelgleich sein, und zwar müssen in ihnen die Winkel gleich sein, um die die Seiten in Proportion stehen.



ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen ein Winkel einem Winkel gleich ist, BAC = EDF, und um weitere Winkel ABC, DEF die Seiten in Proportion stehen, AB : BC = DE : EF; außerdem seien die letzten Winkel, bei C und F, zunächst beide zugleich kleiner als ein Rechter. Ich behaupte, dass ∆ ABC mit ∆ DEF winkelgleich ist, und zwar muss ∠ ABC = DEF sein, auch der letzte Winkel, bei C, offenbar dem letzten, bei F, gleich.

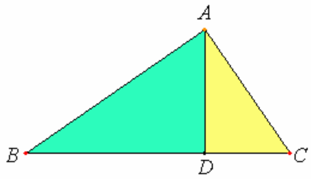


Wäre nämlich ∠ ABC ungleich DEF, so müsste einer von ihnen größer sein. ABC sei der größere Winkel. Man trage dann an die gerade Linie AB im Punkte B auf ihr ∠ ABG = DEF an. Da ∠ A = ∠ D und ABG = DEF, so wäre der letzte Winkel AGB dem letzten DFE gleich (I, 32); ∆ ABG wäre also mit ∆ DEF winkelgleich; also wäre AB : BG = DE : EF (VI, 4). Nach Voraussetzung ist aber DE : EF = AB : BC; AB hätte also zu den beiden Seiten BC, BG

gleiches Verhältnis (V, 11); also wäre BC = BG (V, 9), folglich auch der Winkel bei C = ∠ BGC (I, 5). Nun ist nach Voraussetzung der Winkel bei C < R.; also wäre auch ∠ BGC < R., folglich sein Nebenwinkel AGB > R. (I, 13). Und dieser wäre, wie oben bewiesen, dem Winkel bei F gleich; also wäre auch der Winkel F > R. Nach Voraussetzung ist aber < R.; dies wäre Unsinn. Also kann ∠ ABC nicht ungleich DEF sein, ist ihm also gleich. Aber auch der Winkel bei A ist dem bei D gleich, also auch der letzte, bei C, dem letzten, bei F, gleich (I, 32). Also ist ∆ ABC mit ∆ DEF winkelgleich.
Zweitens sei vorausgesetzt, dass die Winkel bei C und F beide nicht kleiner als ein Rechter sind. Ich behaupte wieder, dass auch dann ∆ ABC mit ∆ DEF winkelgleich ist.
Man konstruiere ebenso; dann lässt sich ähnlich zeigen, dass BC = BG, folglich auch der Winkel bei C = BGC. Nun ist der Winkel bei C nicht < R.; also wäre auch BGC nicht < R. Im Dreieck BGC wären mithin zwei Winkel zusammen nicht 2 R.; dies ist unmöglich (I, 17). Wieder kann also ∠ ABC nicht ungleich DEF sein, ist ihm also gleich. Aber auch der Winkel bei A ist dem bei D gleich; also ist der letzte Winkel, bei C, dem letzten, bei F, gleich (I, 32). Also ist ∆ ABC mit ∆ DEF winkelgleich – S.

§ 8 (L. 8)

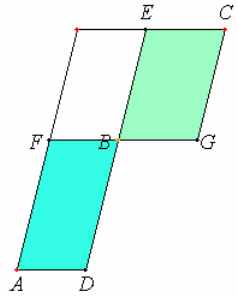
Fällt man in einem rechtwinkligen Dreieck das Lot aus dem rechten Winkel auf die Grundlinie, so sind die Dreiecke am Lot sowohl dem ganzen als auch einander ähnlich.



ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel BAC und von A sei auf BC das AD gefällt. Ich behaupte, dass die Dreiecke ABD, ADC beide dem ganzen ABC und auch einander ähnlich sind.
Da nämlich ∠ BAC = ADB, weil beide Rechte sind (Postulat 4), und der Winkel bei B beiden Dreiecken ABC, ABD gemeinsam ist, so ist auch der letzte Winkel ACB dem letzten BAD gleich (I, 32). Also ist ∆ ABC mit ∆ ABD winkelgleich; also verhält sich, wie BC, die im ∆ ABC dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite, zu BA, der im ∆ ABD dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, so dieselbe Seite AB, die im ∆ ABC dem Winkel bei C gegenüberliegt, zur Seite BD, die dem gleichen Winkel im ∆ ABD, nämlich BAD, gegenüberliegt, und ebenso AC zu AD, die dem beiden Dreiecken gemeinsamen Winkel bei B gegenüberliegt. Also ist ∆ ABC mit ∆ ABD winkelgleich, und in ihnen stehen die Seiten um gleiche Winkel in Proportion (VI, 4). Also ist ∆ ABC ~ ∆ ABD (VI, Definition 1).
Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch ∆ ABC ~ ∆ ADC; ABD, ADC sind also beide dem ganzen ∆ ABC ähnlich.
Ich behaupte weiter, dass die Dreiecke ABD, ADC auch einander ähnlich sind.
Da der Rechte BDA dem Rechten ADC gleich ist, ferner wie oben bewiesen, BAD dem Winkel bei C gleich, so ist auch der letzte Winkel, bei B, dem letzten ∠ DAC gleich (I, 32); also ist ∆ ABD mit ∆ ADC winkelgleich; also verhält sich, wie BD, die im ∆ ABD dem ∠ BAD gegenüberliegende Seite, zu DA, dem im ∆ ADC dem mit BAD gleichen Winkel bei C gegenüberliegenden, so dieselbe Seite AD, die im ∆ ABD dem Winkel bei B gegenüberliegt, zur Seite DC, die im ∆ ADC dem dem bei B gleichen Winkel DAC gegenüberliegt, und ebenso BA zu AC, die den rechten Winkeln gegenüberliegen; also ist ∆ ABD ~ ∆ ADC (VI, 4, Definition 1) – S.
Zusatz: Hiernach ist klar, dass wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck aus dem rechten Winkel auf die Grundlinie das Lot fällt, dieses Mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Grundlinie ist – dies hatte man beweisen sollen. Außerdem ist zwischen der Grundlinie und einem beliebigen ihrer Abschnitte die dem Abschnitte anliegende Seite Mittlere Proportionale.

§ 14 (L. 9)

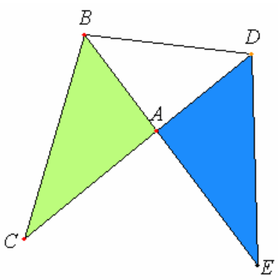
In gleichen winkelgleichen Parallelogrammen sind die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional. Und winkelgleiche Parallelogramme, in denen die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional sind, sind gleich.



AB, BC seien gleiche winkelgleiche Parallelogramme mit gleichen Winkeln bei B; und DB, BE mögen einander gerade fortsetzen; dann setzen auch FB, BG einander gerade fort (I, 14). Ich behaupte, dass in AB, BC die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional sind, d.h. dass DB : BE = GB : BF.
Man vervollständige das Parallelogramm FE. Da Parallelogramm Ab = Parallelogramm BC, während FE ein weiteres ist, so ist AB : FE = BC : FE (V, 7).
Aber Parallelogramm AB : Parallelogramm FE = GB : BF (VI, 1); also ist auch DB : BE = GB : BF (V, 11). In den Parallelogrammen AB, BC sind also die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional.
Zweitens sei DB : BE = GB : BF. Ich behaupte, dass Parallelogramm AB = Parallelogramm BC.
Da DB : BE = GB : BF, andererseits DB : BE = Parallelogramm AB : Parallelogramm FE und GB : BF = Parallelogramm BC : Parallelogramm FE (VI, 1), so ist auch AB : FE = BC : FE (V, 11). Also ist Parallelogramm AB = Parallelogramm BC (V, 9) – S.

§ 15 (L. 10)

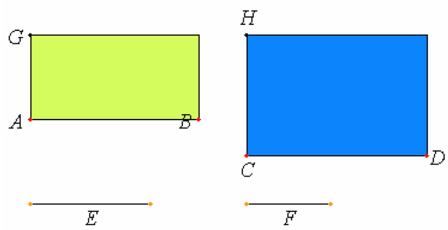
In gleichen, in einem Winkel übereinstimmenden Dreiecken sind die Seiten um die gleichen Winkel umgekehrt proportional. Und in einem Winkel übereinstimmende Dreiecke, in denen die Seiten um die gleichen Winkel umgekehrt proportional sind, sind gleich.



ABC, ADE seien gleiche Dreiecke, in denen ein Winkel einem Winkel gleich ist, ∠ BAC = DAE. Ich behaupte, dass in den Dreiecken ABC, ADE die Seiten um die gleichen Winkel umgekehrt proportional sind, d.h. dass CA : AD = EA : AB.
Man habe die Dreiecke so gelegt, dass CA AD gerade fortsetzt; dann setzt auch EA AB gerade fort (I, 14). Ferner ziehe man BD.
Da ∆ ABC = ∆ ADE, während BAD ein weiteres ist, so ist ∆ CAB : ∆ BAD = ∆ EAD : ∆ BAD (V, 7). Andererseits ist CAB : BAD = CA : AD und EAD : BAD = EA : AB (VI, 1); also ist auch CA : AD = EA : AB (V, 11). In den Dreiecken ABC, ADE sind also die Seiten um die gleichen Winkel umgekehrt proportional.
Zweitens mögen in den Dreiecken ABC, ADE Seiten umgekehrt proportional sein, und zwar sei CA : AD = EA : AB. Ich behaupte, dass ∆ ABC = ∆ ADE. Zieht man nämlich wieder BD, so ist, da CA : AD = EA : AB, andererseits CA : AD = ∆ ABC : ∆ BAD und EA : AB = ∆ EAD : ∆ BAD (VI, 1), ∆ ABC : ∆ BAD = ∆ EAD : ∆ BAD (V, 11). Also haben ABC, EAD beide zu BAD dasselbe Verhältnis. Also ist ∆ ABC = ∆ EAD (V, 9) – S.

§ 16 (L. 11)

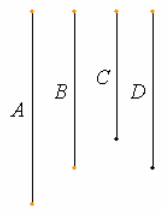
Stehen vier Strecken in Proportion, so ist das Rechteck aus den äußeren dem Rechteck aus den mittleren gleich. Und wenn das Rechteck aus den äußeren Strecken dem Rechteck aus den mittleren gleich ist, dann müssen die vier Strecken in Proportion stehen.



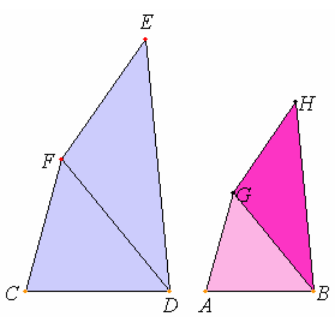
AB, CD, E, F seien vier in Proportion stehende Strecken, AB : CD = E : F. Ich behaupte, dass AB · F = CD · E. Man ziehe AG, CH von den Punkten A, C aus rechtwinklig zu den geraden Linien AB, CD, mache AG = F, CH = E und vervollständige die Parallelogramme BG, DH.
Da AB : CD = E : F, während E = CH, F = AG, so ist AB : CD = CH : AG. In den Parallelogrammen BG, DH sind also die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional. Winkelgleiche Parallelogramme, in denen die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional sind, sind aber gleich (VI, 14); also ist Parallelogramm BG = Parallelogramm DH. Hier ist BG AB · F; denn AG = F; und DH ist CD · E; denn E = CH. Also ist AB · F = CD · E.
Zweitens sei AB · F = CD · E. Ich behaupte, dass die vier Strecken in Proportion stehen, AB : CD = E : F. Man konstruiere ebenso. Dann ist, da AB · F = CD ·E, während AB · F wegen AG = F das Parallelogramm BG und CD · E wegen CH = E das Parallelogramm DH ist, BG = DH; und sie sind winkelgleich. In gleichen winkelgleichen Parallelogrammen sind aber die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional (VI, 14); also ist AB : CD = CH : AG. Nun ist CH = E, AG = F. Also ist AB : CD = E : F – S.

§ 17 (L. 12)

Stehen drei Strecken in Proportion, so ist das Rechteck aus den äußeren dem Quadrat über der mittleren gleich. Und wenn das Rechteck aus den äußeren Seiten dem Quadrat über der mittleren gleich ist, dann müssen die drei Strecken in Proportion stehen.



A, B, C seien drei in Proportion stehende Strecken, A : B = B : C. Ich behaupte, dass A · C = B². Man lege D = B hin.
Da A : B = B : C und B = D, so ist A : B = D : C (V, 7, 11). Stehen aber vier Strecken in Proportion, so ist das Rechteck aus den äußeren dem Rechteck aus den mittleren gleich (VI, 16); also ist A · C = B · D. B · D ist aber B², weil B = D; also ist A · C = B²,
Zweitens sei A · C = B². Ich behaupte, dass A : B = B : C. Man konstruiere ebenso. Da A · C = B², während B², weil B = D, B · D ist, so ist A · C = B · D. Wenn aber das Rechteck aus den äußeren Strecken dem aus den mittleren gleich ist, dann stehen die vier Strecken in Proportion (VI, 16); also ist A : B = D : C. Nun ist B = D; also ist A : B = B : C (V, 7, 11) – S.



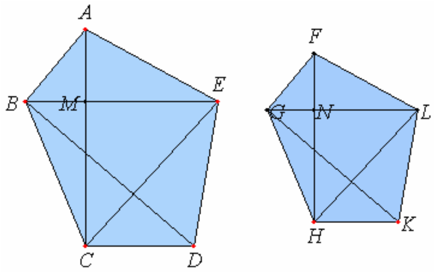
§ 18 (A. 6)

Über einer gegebenen Strecke eine einer gegebenen geradlinigen Figur ähnliche und ähnlich gelegte geradlinige Figur zu zeichnen.

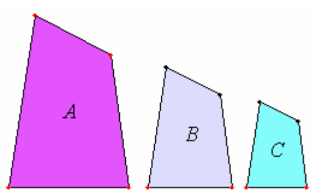
AB sei die gegebene Strecke, CE die gegebene geradlinige Figur. Man soll über der Strecke AB einer der geradlinigen Figur CD ähnliche geradlinige Figur ähnlich gelegt zeichnen.
Man ziehe DF und trage an die gerade Linie AB in den Punkten A, B auf ihr den dem Winkel bei C gleichen ∠ GAB und ∠ ABG = CDF am: dann ist auch der letzte ∠ CFD = AGB (I, 32). Also ist ∆ FCD mit ∆ GAB winkelgleich; also

stehen in Proportion FD : GB = FC : GA und = CD : AB (VI, 4, V, 16). Ebenso trage man an die gerade Linie BG in den Punkten B, G auf ihr ∠ BGH = DFE und GBH = FDE an; dann ist auch der letzte Winkel, bei E, dem letzten, bei H, gleich. Also ist ∆ FDE mit ∆ GHB winkelgleich; also stehen in Proportion FD : GB = FE : GH und = ED : HB. Wie oben beweisen, ist auch FD : GB = FC : GA und = CD : AB; also ist FC : AG = CD : AB = FE : GH = ED : HB (V, 11). Ferner ist, da ∠ CFD = AGB und DFE = BGH, der ganze Winkel CFE dem ganzen AGH gleich. Aus demselben Grunde ist auch ∠ CDE = ABH. Aber auch der Winkel bei C ist dem bei A gleich und der bei E dem bei H. Also ist AH mit CE winkelgleich; ferner stehen in ihnen die Seiten um gleiche Winkel in Proportion. Also ist die geradlinige Figur AH der geradlinigen Figur CD ähnlich (VI, Definition 1).
Also hat man über einer gegebenen Strecke AB eine einer gegebenen geradlinigen Figur CE ähnliche und ähnlich gelegte geradlinige Figur gezeichnet, nämlich AH – dies hatte man ausführen sollen.

§ 20 (L. 14)
Ähnliche Vielecke lassen sich in ähnliche Dreiecke zerlegen, und zwar in gleich viele und den Ganzen proportional entsprechende; und die Vielecke stehen zueinander zweimal im Verhältnis wie entsprechende Seiten zueinander.



ABCDE, FGHKL seien ähnliche Vielecke; AB entspreche dabei FG. Ich behaupte, dass die Vielecke ABCDE, FGHKL sich in ähnliche Dreiecke zerlegen lassen, und zwar in gleich viele und den Ganzen entsprechende (V, Definition 11), und dass Vieleck ABCDE : Vieleck FGHKL = $(AB : FG)^2$.
Man ziehe BE, EC, GL, LH. Da Vieleck ABCDE ~ Vieleck FGHKL, ist ∠ BAE = GFL und BA : AE = GF : FL (VI, Definition 1). Da nun ABE, FGL zwei Dreiecke sind, in denen ein Winkel einem Winkel gleich ist und die Seiten um die gleichen Winkel in Proportion stehen, so ist ∆ ABE mit ∆ FGL winkelgleich (VI, 6), folglich auch ähnlich (VI, 4, Definition 1). Also ist ∠ ABE = FGL. Aber auch der ganze ∠ ABC ist dem ganzen FGH gleich wegen der Ähnlichkeit der Vielecke; also ist der Restwinkel EBC = LGH. Und da wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABE, FGL EB : BA = LG : FG ist, andererseits wegen der Ähnlichkeit der Vielecke auch AB : BC = FG : GH, so ist über gleiches weg EB : BC = LG : GH (V, 22), und die Seiten um die gleichen Winkel EBC, LGH stehen in Proportion; also ist ∆ EBC mit ∆ LGH winkelgleich (VI, 6), folglich ∆ EBC ~ ∆ LGH (VI, 4, Definition 1). Aus demselben Grunde ist auch ∆ ECD ~ ∆ LHK, Also hat man die ähnlichen Vielecke ABCDE, FGHKL in ähnliche Dreiecke zerlegt, und zwar in gleich viele.
Ich behaupte, dass sie außerdem den Ganzen entsprechen (V, Definition 11), d.h. so, dass die Dreiecke mit den ganzen Vielecken in Proportion stehen und dabei ABE, EBC, ECD Vorderglieder, FGL, LGH, LHK ihre Hinterglieder sind, sowie dass das Vieleck ABCDE zum Vieleck FGHKL zweimal im Verhältnis (V, Definition 9) steht wie entsprechende Seiten zueinander, d.h. AB zu FG. Man ziehe AC, FH.
Da wegen der Ähnlichkeit der Vielecke ∠ ABC = ∠ FGH und AB : BC = FG : GH, so ist ∆ ABC mit ∆ FGH winkelgleich (VI, 6). Also ist ∠ BAC = GFH und BCA = GHF. Und da ∠ BAM = GFN, andererseits ABM = FGN, so ist auch der letzte ∠ AMB dem letzten FNG gleich (I, 32); also ist ∆ ABM mit ∆ FGN winkelgleich. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch ∆ BMC mit ∆ GNH winkelgleich ist. Also stehen in Proportion AM : MB = FN : NG und BM : MC = GN : NH (VI, 4), so dass auch über gleiches weg AM : MC = FN : NH (V, 22). Aber AM : MC = ∆ ABM : MBC und = AME : EMC; denn diese verhalten sich zueinander wie die Grundlinien (VI, 1). Also verhalten such auch alle Vorderglieder zusammen zu allen Hintergliedern zusammen wie ein Vorderglied zu einem Hinterglied (V, 12); also ist ∆ AMB : BMC = ABE : CBE. Aber AMB : BMC = AM : MC; also ist auch AM : MC = ∆ ABE : ∆ EBC (V, 11). Aus demselben Grunde ist auch FN : NH = ∆ FGL : ∆ GLH. Nun ist AM : MC =FN : NH; also ist ∆ ABE : ∆ BEC = ∆ FGL : ∆ GLH (V, 11) und, vertauscht, ∆ ABE : ∆ FGL = ∆ BEC : ∆ GLH (V, 16). Ähnlich kann man, indem man BD, GK zieht, zeigen, dass auch ∆ BEC : ∆ LGH = ∆ ECD : ∆ LHK. Und da ∆ ABE : ∆ FGL = EBC : LGH und = ECD : LHK, also auch hier alle Vorderglieder zusammen zu allen Hintergliedern zusammen sich verhalten wie ein Vorderglied zu einem Hinterglied (V, 12), so ist ∆ ABE : ∆ FGL = Vieleck ABCDE : Vieleck FGHKL. ∆ ABE steht aber zu ∆ FGL zweimal im Verhältnis wie die entsprechenden Seiten AB, FG zueinander; denn ähnliche Dreiecke stehen zweimal im Verhältnis entsprechender Seiten (VI,19). Also steht das Vieleck ABCDE zum Vieleck FGHKL auch zweimal im Verhältnis wie die entsprechenden Seiten AB, FG zueinander (V, 11) – S.
Zusatz: Ebenso lässt sich auch bei vierseitigen Figuren zeigen, dass sie zweimal im Verhältnis entsprechender Seiten stehen; für Dreiecke ist es schon bewiesen (VI, 19); folglich stehen allgemein ähnliche geradlinige Figuren (I, Definition 19) zueinander zweimal im Verhältnis entsprechender Seiten – dies hatte man beweisen sollen.



§ 21 (L. 15)
Derselben geradlinigen Figur ähnliche sind auch einander ähnlich.

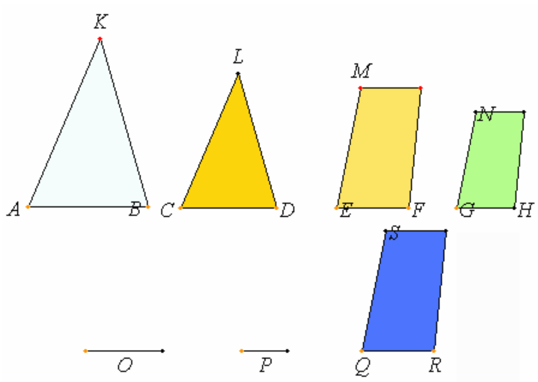
Die geradlinigen Figuren A, B seien beide ~ C. Ich behaupte, dass auch A ~ B.
A ist, da ~ C, mit ihm winkelgleich, und die Seiten um gleiche Winkel stehen in Proportion (VI, Definition 1). Ebenso ist B, da ~ C, mit ihm winkelgleich, und die Seiten um gleiche Winkel stehen in Proportion. Beide Figuren A, B

sind also mit C winkelgleich, und die Seiten um gleiche Winkel stehen in Proportion; also ist auch A mit B winkelgleich, und die Seiten um gleiche Winkel stehen in Proportion; also ist A ~ B (Axiom 1; V, 11; VI, Definition 1) – dies hatte man beweisen sollen.

§ 22 (L. 16)

Stehen vier Strecken in Proportion, so müssen auch ähnliche über ihnen ähnlich gezeichnete geradlinige Figuren in Proportion stehen. Und wenn ähnliche über ihnen ähnliche gezeichnete geradlinige Figuren in Proportion stehen, dann müssen auch die Strecken selbst in Proportion stehen.

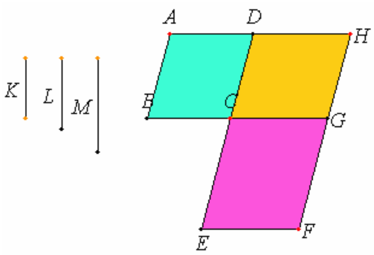
AB, CD, EF, GH seien vier in Proportion stehende Strecken, AB : CD = EF : GH, und es seine einerseits über AB, CD ähnliche ähnlich gelegte geradlinige Figuren KAB, LCD gezeichnet (VI, 18), andererseits über EF, GH ähnliche ähnlich gelegte geradlinige Figuren MF, NH (VI, 18). Ich behaupte, dass KAB : LCD = Figur MF : Figur NH.
Man verschaffe sich zu AB, CD die Dritte Proportionale O und zu EF, GH die Dritte Proportionale P (VI, 11). Da dann sowohl AB : CD = EF : GH als auch CD : O = GH : P (V, 11), so ist auch über gleiches weg AB : O = EF : P (V, 22). Aber AB : O = KAB : LCD und EF : P = Figur MF : Figur NH (VI, 20, Zusatz; V, 11, Definition 9). Also ist KAB : LCD = Figur MF : Figur NH (V, 11).



Zweitens sei KAB : LCD = Figur MF : Figur NH. Ich behaupte, dass auch AB : CD = EF : GH. Wäre nämlich nicht AB : CD = EF : GH, so sei AB : CD = EF : QR (VI, 12). Dann zeichne man die MF oder NH ähnliche und ähnlich gelegte geradlinige Figur über QR, nämlich SR (VI, 18).
Da AB : CD = EF : QR wäre und man sowohl über AB, CD ähnliche, ähnlich gelegte Figuren KAB, LCD als auch über EF, QR ähnliche, ähnlich gelegte Figuren MF, SR gezeichnet hätte, so wäre KAB : LCD = Figur MF : Figur SR. Nach Voraussetzung ist aber auch KAB : LCD = Figur MF : Figur NH; also wäre MF : SR = MF : NH; MF hätte also zu beiden Figuren NH, SR gleiches Verhältnis; also wäre Figur NH = Figur SR (V, 9). Diese wären aber auch ähnlich und ähnlich gelegt; also wäre GH = QR (Hilfssatz, s.u.). Und da AB : CD = EF : QR, während QR = GH, so ist AB : CD = EF : GH (V, 7) – S.
Hilfssatz: Dass, wenn geradlinige Figuren gleich und ähnlich sind, ihre entsprechenden Seiten einander gleich sind, lässt sich folgendermaßen beweisen: NH, SR seien gleiche und ähnliche geradlinige Figuren, und zwar sei HG : GN = RQ : QS. Ich behaupte, dass RQ = HG. Wären sie nämlich ungleich, so müsste eine von ihnen größer sein; es sei RQ > HG. Da RQ : QS = HG : GN und, vertauscht (V, 16), RG : HG = QS : GN, während QR > HG, so wäre auch QS > GN (V, 14); folglich wäre auch Figur RS > Figur HN (Axiom 8; VI, Definition 1). Sie sind aber auch gleich; dies ist unmöglich. Also kann QR nicht ungleich GH sein, ist ihm also gleich – dies hatte man beweisen sollen.

§ 23 (L. 17)

Winkelgleiche Parallelogramme haben zueinander das zusammengesetzte Verhältnis aus den Seitenverhältnissen.

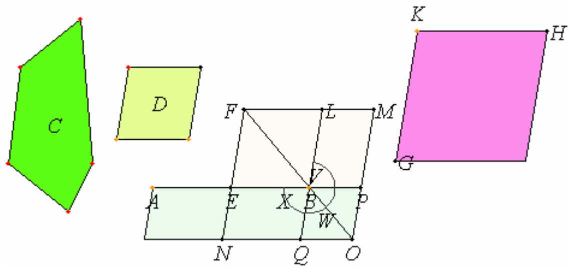


AC, CF seien winkelgleiche Parallelogramme, in denen ∠ BCD = ECG. Ich behaupte, dass Parallelogramm AC zu Parallelogramm CF das zusammengesetzte Verhältnis aus den Seiten hat.
Man lege sie so, dass BC CG gerade fortsetzt; dann setzt auch DC CE gerade fort (I, 14). Man vervollständige das Parallelogramm DG, lege irgendeine Strecke K hin und lasse BC : CG = K : L sowie DC : CE = L : M werden (VI, 12). Die Verhältnisse K : L, L : M sind dann dieselben wie die Verhältnisse der Seiten, nämlich BC : CG, DC : CE. Nun ist das Verhältnis K : M zusammengesetzt aus den Verhältnissen K : L und L : M, so dass K zu M das zusammengesetzte Verhältnis aus den Seiten hat. Und da BC : CG = Parallelogramm AC : CH (VI, 1), andererseits BC : CG = K : L, so ist auch K : L = Parallelogramm AC : CH (V, 11). Ebenso ist, da DC : CE = Parallelogramm CH : CF und DC : CE = L : M, auch L : M = Parallelogramm CH : Parallelogramm CF. Da, wie oben bewiesen, K : L = Parallelogramm AC : Parallelogramm CH und L : M = Parallelogramm CH : Parallelogramm CF, so ist über gleiches weg K : M = Parallelogramm AC : CF (V, 22). Nun hat K zu M das zusammengesetzte Verhältnis aus den Seiten; also hat auch AC zu CF das zusammengesetzte Verhältnis aus den Seiten (V, 11) – S.

§ 29 (A. 9)

An eine gegebene Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm so anzulegen, dass ein einem gegebenen ähnliches Parallelogramm überschießt.

Die gegebene Strecke sei AB; und die gegebene geradlinige Figur, der das an AB anzulegende Parallelogramm gleich werden soll, sei C; und die, der das überschießende ähnlich werden soll, sei D. Man soll an die Strecke AB ein der geradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm so anlegen, dass ein Parallelogramm ~D überschießt.

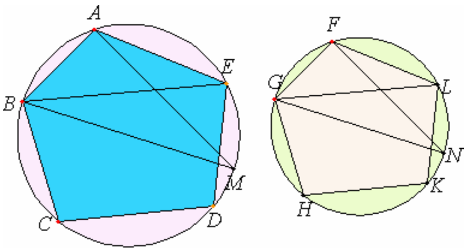


Man halbiere AB in E, zeichne über EB das D ähnliche und ähnlich gelegte Parallelogramm BF (VI, 18) und errichte ein D ähnliches und ähnlich gelegtes Parallelogramm GH, das zugleich = BF + C ist (VI, 25). KH möge hierbei FL entsprechen, und KG FE. Da Parallelogramm GH > FB, so ist (VI, 22, Hilfssatz) KH > FL und KG > FE. Man verlängere FL, FE, so dass FLM = KH und FEN = KG wird, und vervollständige das Parallelogramm MN; MN ist dann = und ~GH (I, 29, 34; VI, 14). Nun ist GH ~ EL (VI, 21); also ist auch MN ~ EL; also liegt EL mit MN um dieselbe Diagonale (VI, 26). Man ziehe in ihnen die Diagonale FO und zeichne die Figur fertig.

Da GH = EL + C und GH = MN, so ist MN = EL + C. Man nehme EL beiderseits weg; dann ist der Rest, Gnomon XWV = C (Axiom 3). Und da AE = EB, ist auch Parallelogramm AN = NB (I, 36), d.h. = LP (I, 43). Man füge EO beiderseits hinzu; das ganze Parallelogramm AO ist dann dem Gnomon VWX gleich. Aber Gnomon VWX = C. Also ist auch AO = C. Man hat also an die gegebene Strecke AB ein der gegebenen geradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm, nämlich AO, so angelegt, dass ein Parallelogramm QP überschießt, das D ähnlich ist, da PQ auch ~ EL (VI, 24) – dies hatte man ausführen sollen.

XII. Buch: § 1 (L. 1)

Ähnliche Vielecke in Kreisen verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.

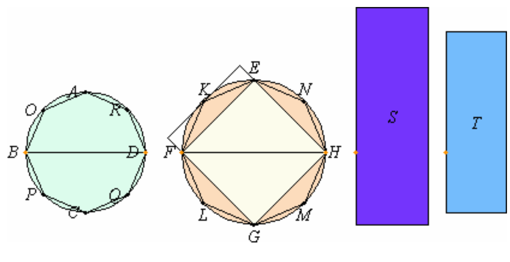


Man habe die Kreise ABC, FGH und in ihnen ähnliche Vielecke ABCDE, FGHKL; BM, GN seien Durchmesser der Kreise. Ich behaupte, dass BM² : GN² = Vieleck ABCDE : Vieleck FGHKL. Man ziehe BE, AM, GL, FN.

Da Vieleck ABCDE ~ Vieleck FGHKL, ist ∠ BAE = GFL und BA : AE = GF : FL (VI, Definition 1). Mithin sind BAE, GFL zwei Dreiecke, in denen ein Winkel einem Winkel gleich ist, nämlich ∠ BAE = GFL, und die Seiten um die gleichen Winkel in Proportion stehen; also ist Δ ABE mit Δ FGL winkelgleich (VI, 6). Also ist ∠ AEB = ∠ FLG. Andererseits ist ∠ AEB = AMB, denn sie stehen über demselben Bogen (III, 21); und ∠ FLG = FNG. Also ist ∠ AMB = FNG. Ferner sind die rechten Winkel (III, 31) BAM = GFN; also auch der letzte Winkel dem letzten gleich (I, 32). Δ ABM ist also mit Δ FGN winkelgleich. Also stehen in Proportion BM : GN = BA : GF (VI, 4). Nun ist (BM : GN)² = BM² : GN² und (BA : GF)² = Vieleck ABCDE : Vieleck FGHKL (VI, 20). Also ist BM² : GN² = Vieleck ABCDE : Vieleck FGHKL (V, 22, 11) – S.

§ 2 (L. 2)

Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.

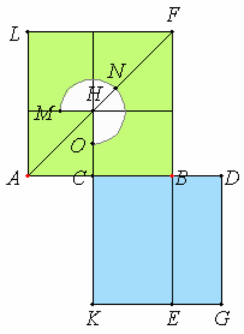


Man habe die Kreise ABCD, EFGH; BD, FH seien Durchmesser derselben; ich behaupte, dass Kreis ABCD : Kreis EFGH = BD² : FH².

Wäre nämlich Kreis ABCD : EFGH nicht = BD² : FH², dann müsste sein BD² : FH² = Kreis ABCD : einem Flächenstück, das entweder < oder > Kreis EFGH wäre.

Zunächst verhalte es sich so zu einem kleineren Flächenstück S. In den Kreis EFGH beschreibe man dann das Quadrat EFGH ein (IV, 6); hier ist das einbeschriebene Quadrat > ½ Kreis EFGH. Wenn man nämlich durch die Punkte E, F, G, H Kreistangenten zieht (III, 16 Zusatz), dann ist das Quadrat EFGH die Hälfte des dem Kreise umbeschriebenen Quadrats (I, 41); der Kreis ist aber < das umbeschriebene Quadrat (I, Axiom 8), so dass das einbeschriebene Quadrat EFGH > ½ Kreis EFGH. Nun halbiere man die Bogen EF, FG, GH, HE in den Punkten K, L, M, N (III, 30) und ziehe EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE. Auch jedes der Dreiecke EKF, FLG, GMH, HNE ist dann größer als die Hälfte des zugehörigen Kreisabschnitts. Denn wenn man durch die Punkte K, L, M, N Kreistangenten zieht und die Parallelogramme über den Strecken EF, FG, GH, HE vervollständigt, muss jedes der Dreiecke EKF, FLG, GMH, HNE die Hälfte des zugehörigen Parallelogramms sein; der zugehörige Abschnitt ist aber < das Parallelogramm, so dass jedes der Dreiecke EKF, FLG, GMH, HNE > ½ zugehöriger Kreisabschnitt. Mithin muss man, wenn man die gebliebenen Bogen halbiert, die Strecken zieht und dies immer wiederholt, schließlich Kreisabschnitte übrig behalten, die zusammen < Kreis EFGH – Flächen Stück S sind. Es wurde nämlich im ersten Lehrsatz des zehnten Buches gezeigt, dass: wenn man bei Vorliegen zweier ungleicher

gleichartiger Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte wegnimmt und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und dies immer wiederholt, dann einmal ein Größe übrigbleiben muss, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist (X, 1).
Dies geschehe, und die übriggebliebenen Abschnitte des Kreises EFGH über EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE seien zusammen < Kreis EFGH – Flächenstück S. Das Restvieleck EKFLGMHN wäre also >



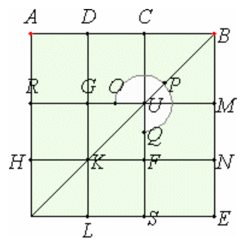
Flächenstück S. Auch in den Kreis beschreibe man ein dem Vieleck EKFLGMHN ähnliches Vieleck AOBPCQDR ein; dann ist $BD^2 : FH^2$ = Vieleck AOBPCQDR : Vieleck EKFLGMHN (V, 11); und, vertauscht. Kreis ABCD : Vieleck in ihm = Flächenstück S : Vieleck EKFLGMHN (V, Definition 5). Dabei sollte es kleiner sein; dies ist unmöglich. Also ist $BD^2 : FH^2$ nicht = Kreis ABCD : einem Flächenstück < EFGH. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch $FH^2 : BD^2$ nicht = Kreis EFGH : einem Flächenstück < Kreis ABCD.
Ich behaupte weiter, dass $BD^2 : FH^2$ auch nicht = Kreis ABCD : einem Flächenstück > Kreis EFGH. Wenn nämlich möglich, verhalte er sich so zu einem größeren Flächenstück S. Dann wäre umgekehrt (V, Definition 13), $FH^2 : DB^2$ = Flächenstück S : Kreis ABCD. Nun wäre aber Flächenstück S : Kreis ABCD = Kreis EFGH : einem Flächenstück < Kreis ABCD (V, 14); also wäre auch $FH^2 : BD^2$ = Kreis EFGH : einem Flächenstück < Kreis ABCD (V, 11); hiervon haben wir die Unmöglichkeit oben nachgewiesen. Also ist $BD^2 : FH^2$ nicht = Kreis ABCD : einem Flächenstück > Kreis EFGH. Wie oben bewiesen, verhält er soch so auch nicht zu einem kleineren Flächenstück; also ist $BD^2 : FH^2$ = Kreis ABCD : Kreis EFGH – S.

XIII. Buch: § 2 (L. 2)
Wird quadriert eine Strecke fünfmal so groß wie ein Abschnitt von ihr, dann ist, wenn man das Doppelte des genannten Abschnittes stetig teilt, der größere Abschnitt der Rest der ursprüngliche Strecke.

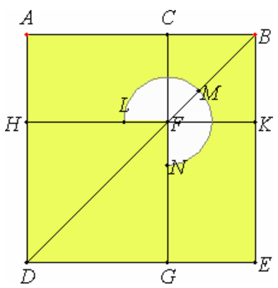
Quadriert weder die Strecke AB fünfmal so groß wie ihr Abschnitt AC, und es sei 2 AV = CD. Ich behaupte, dass CB der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke CD ist.
Man zeichne über beider Strecken AB, CD die Quadrate AF, CG, zeichne in AF die Figur fertig und ziehe BE durch. Da $BA^2 = 5\ AC^2$, ist Quadrat AF = 5 AH, also Gnomon MNO = 4 AH. Da DC = 2 CA, ist $DC^2 = 4\ CA^2$, d.h. Quadrat CG = 4 AH. Wie bewiesen, ist Gnomon MNO = 4 AH; also Gnomon MNO = CG. Da DC = 2 CA und DC = CK, AC = CH also KC = 2 CH, ist Parallelogramm KB = 2 BH (VI, 1). Aber auch Parallelogramm LH + HB = 2 HB (I, 43), also Parallelogramm KB = LH + HB. Wie bewiesen, ist der ganze Gnomon MNO = dem ganzen Quadrat CG, also auch Restquadrat HF = BG. BG ist nun CD · DB, weil CD = DG, und HF ist CB^2. Also ist CD · DB = CB^2, also DC : CB = CB · BD (VI, 17). Hier ist DC > CB, also CB > BD (V, 14). C B ist also von der stetig geteilten (VI, Definition 3) Strecke CD der größere Abschnitt – S.

§ 3 (L. 3)
Teilt man eine Strecke stetig, so wird ihr kleinerer Abschnitt, wenn man die Hälfte des größeren Abschnitts hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wie das Quadrat über der Hälfte des größeren Abschnitts.

Eine Strecke AB sei im Punkte C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt, und AC sei in D halbiert. Ich behaupte, dass $BD^2 = 5\ DC^2$.



Man zeichne über AB das Quadrat AE und zeichne die Doppelfigur fertig. Da AC = 2 DC, ist $AC^2 = 4\ DC^2$, d.h. Quadrat RS = 4 FG. Da AB · BC = AC^2 (VI, Definition 3; VI, 17), AB · BC aber CE ist, AC^2 dabei RS, ist Parallelogramm CE = RS. Aber Quadrat RS = 4 FG, also Parallelogramm CE = 4 FG. Ebenso ist, da AD = DC, HK = KF (I, 34), folglich Quadrat GF = Quadrat HL. Also ist GK = KL, d.h. MN = NE, folglich Parallelogramm MF = FE (I, 36). Aber Parallelogramm MF = CG (I, 43), also Parallelogramm CG auch = FE. Man füge beiderseits CN hinzu; dann ist Gnomon OPQ = CE. Wie oben bewiesen, ist aber Parallelogramm CE = 4 GF, also Gnomon OPQ = 4 GF, also Gnomon OPQ + GF = 5 GF. Gnomon OPQ + GF ist aber Quadrat DN. Und DN ist DB^2, GF ist DC^2. Also ist $DB^2 = 5\ DC^2$ - q.e.d.

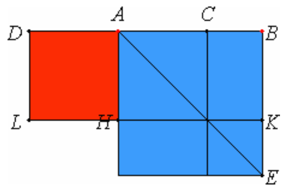


§ 4 (L. 4)
Teilt man eine Strecke stetig, so werden die beiden Quadrate über der ganzen Strecke und ihrem kleineren Abschnitt zusammen dreimal so groß wie das Quadrat über dem größeren Abschnitt.

Man habe eine Strecke AB, sie sei in C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt. Ich behaupte, dass $AB^2 + BC^2 = 3\ CA^2$. Man zeichne über AB das Quadrat ADEB und zeichne die Figur fertig.
Da AB in C stetig geteilt ist, AC der größere Abschnitt, ist AB · BC = AC^2 (VI, Definition 3; VI, 17). AB · BC ist nun AK, und AC^2 ist HG; also Parallelogramm AK = HG. Hier ist Parallelogramm AF = FE (I, 43); man füge CK beiderseits hinzu. Dann ist das ganze Parallelogramm AK = dem ganzen CE, also

Parallelogramm AK + CE = 2 AK. AK + CE bilden aber Gnomon LMN + Quadrat CK; also ist Gnomon LMN + Quadrat CK = 2 AK. Wie oben bewiesen, ist Parallelogramm AK = HG; also Gnomon LMN + Quadrat CK = 2 HG, folglich Gnomon LMN + Quadrate CK + HG = 3 Quadrat HG. Nun ist Gnomon LMN + Quadrate CK + HG = ganzes Quadrat AE + CK, d.h. $AB^2 + BC^2$, GH dabei AC^2. Also ist $AB^2 + BC^2 = 3\ AC^2$ - q.e.d.

§ 5 (L. 5)



Teilt man eine Strecke stetig und setzt ihr eine dem größeren Abschnitt gleiche an, dann ist die Summenstrecke stetig geteilt, und größerer Abschnitt ist die Ausgangsstrecke.

Die Strecke AB sei im Punkte C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt und AD = AC. Ich behaupte, dass die Strecke DB in A stetig geteilt ist und größerer Abschnitt die Ausgangsstrecke AB.
Man zeichne über AB das Quadrat AE und zeichne die Figur fertig (wie II, 6). Da AB in C stetig geteilt ist, ist $AB \cdot BC = AC^2$ (VI, Definition 3; VI, 17). $AB \cdot BC$ ist hier CE, und AC^2 ist CH; also Parallelogramm CE = CH. Aber Parallelogramm CE = HE (I, 43) und Quadrat HC = DH (I, 36); also Quadrat DH = HE. Man füge HB beiderseits hinzu. Dann ist das ganze Parallelogramm DK = dem ganzen AE. DK ist nun $BD \cdot DA$, weil AD = DL; und AE ist AB^2. Also ist $BD \cdot DA = AB^2$; also DB : BA = BA : AD (VI, 17). Hier ist DB > BA; also auch BA > AD (V, 14). Also ist DB in A stetig geteilt, AB der größere Abschnitt – q.e.d.

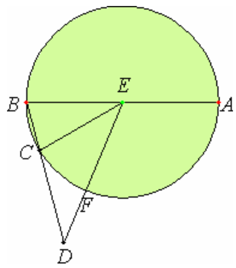
§ 6 (L. 6)

Teilt man eine rationale Strecke stetig, so wird jeder ihrer Abschnitte eine Irrationale, wie man sie Apotome nennt.

Man habe eine Rationale (X, Definition 3) AB, sie sei in C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt. Ich behaupte, dass sowohl AC als CB eine Irrationale ist, wie man sie Apotome (X, 73: Definition) nennt. Man verlängere BA und mache AD = ½ BA.
Da die Strecke AB in C stetig geteilt ist und AC, dem größeren Abschnitt, AD = ½ AB hinzugefügt, ist $CD^2 = 5\ DA^2$ (XIII, 1). Also verhält sich CD^2 zu DA^2 wie eine Zahl zu einer Zahl, CD^2 ist mit DA^2 kommensurabel (X, 6). Nun ist DA^2 rational (X, Definition 4); denn DA ist als Hälfte der Rationalen AB rational. Also ist CD^2 rational, also auch CD rational. Da CD^2 zu DA^2 aber kein Verhältnis hat wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl (vgl. VIII, 11 Anm.), ist CD mit DA linear inkommensurabel (X, 9). CD, DA sind also nur quadriert kommensurable (X, Definition 2) rationale Strecken; also AC eine Apotome (X, 73; Definition)
Zweitens ist, da AB stetig geteilt, AC der größere Abschnitt ist, $AB \cdot BC = AC^2$ (VI, Definition 3; VI, 17). Legt man also das Quadrat über der Apotome AC an die Rationale AB an (I; 44), so entsteht als Breite BC. Legt man aber das Quadrat einer Apotome an die Rationale an, so entsteht als Breite eine Erste Apotome (X, 97). Also ist CB eine Erste Apotome (X, 84a: Definition). Wie bewiesen, ist auch CA eine Apotome – S.

§ 9 (L. 9)

Fügt man die Seiten des demselben Kreise einbeschriebenen Sechsecks und Zehnecks zusammen, dann ist die Summenstrecke stetig geteilt, und ihr größerer Abschnitt ist die Sechseckseite.

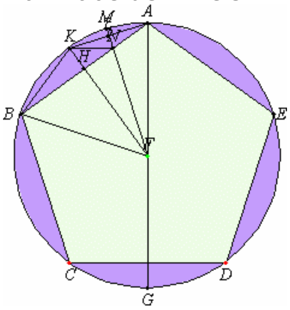


Man habe den Kreis ABC, und von den dem Kreise ABC einbeschriebenen Figuren sei BC die Seite des Zehnecks und CD die des Sechsecks, und sie mögen einander gerade fortsetzen. Ich behaupte, dass die Summenstrecke BD stetig geteilt ist, CD ihr größerer Abschnitt.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt E des Kreises, ziehe EB, EC, ED und ziehe BE nach A durch. Da BC die Seite des gleichseitigen Zehnecks ist, ist Bogen ACB = 5 Bogen BC (III, 28), also Bogen AC = 4 CB. Nun ist Bogen AC : CB = ∠ AEC : CEB (VI, 33). Also ist ∠ AEC = 4 CEB. Da ∠ EBC = ECB (I, 5), ist ∠ AEC = 2 ECB (I, 32).
Da ferner Strecke EC = CD, weil beide der Seite des dem Kreise ABC einbeschriebenen Sechsecks gleich sind (IV, 15 Zusatz), ist auch ∠ CED = ∠ CDE (I, 5), also ∠ ECB = 2 EDC (I, 32). Wie oben bewiesen, ist aber AEC = 2 ECB; also AEC = 4 EDC. Wie auch schon bewiesen, ist AEC = 4 BEC; also ist EDC = BEC. Und den beiden Dreiecken BEC, BED ist ∠ EBD gemeinsam; also auch Rest ∠ BED = ECB (I, 32), also Δ EBD dem Δ EBC winkelgleich. Also stehen in Proportion DB : BE = EB : BC (VI, 4). Nun ist EB = CD, also BD : DC = DC : CB. Hier ist BD > DC, also auch DC > CB (V, 14). Die Strecke BD ist also in C stetig geteilt (VI, Definition 3), DC ihr größerer Abschnitt – q.e.d.

§ 10 (L. 10)

Beschreibt man einem Kreis ein gleichseitiges Fünfeck ein, so wird quadriert die Seite des Fünfecks ebenso groß wie die Seiten des Sechsecks und des Zehnecks, die sich demselben Kreise einbeschreiben lassen, zusammen.

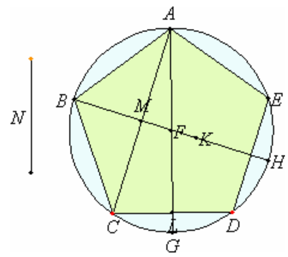
Man habe den Kreis ABCDE; dem Kreise ABCDE sei das gleichseitige Fünfeck ABCDE einbeschrieben. Ich behaupte, dass quadriert die Seite des Fünfecks ABCDE ebenso groß wird wie die Sehne des Sechsecks und des Zehnecks, die sich dem Kreise ABCDE einbeschreiben lassen, zusammen.



Man verschaffe sich den Mittelpunkt F des Kreises, ziehe AF und ziehe es durch zum Punkte G, ziehe FB, fälle von F auf AB das Lot FH und ziehe es nach K durch. Ferner ziehe man AK, KB und fälle wieder von F auf AK das Lot FL, ziehe es nach M durch und ziehe KN. Da Bogen ABCG = Bogen AEDG, hierin ABC = AED (III, 28), sind die Restbogen CG = GD. CD gehört aber zum Fünfeck, CG also zum Zehneck. Da weiter FA = FB und FH das Lot, ist ∠ AFK = KFB (I, 5, 32), folglich auch Bogen AK = KB (III, 26), also Bogen AB = 2 Bogen BK, also Strecke AK die Zehneckseite. Aus demselben Grunde ist auch Bogen AK = 2 KM. Da Bogen AB = 2 Bogen BK, während Boden CD = Bogen AB, ist auch Bogen CD = 2 Bogen BK. Aber Bogen CD ist auch = 2 CG; also Bogen CG = Bogen BK. Bogen BK ist aber = 2 KM, da KA es ist; also Bogen CG = 2 KM. Aber auch Bogen CB = 2 BK, weil Bogen CB = BA; also ist auch der Summenbogen GB = 2 BM , folglich ∠ GFB = 2 BFM (VI, 33).
Nun ist aber auch ∠ GFB = 2 FAB (I, 32), weil FAB = ABF; also ∠ BFN = FAB. Den beiden Dreiecken ABF, BFN ist aber ∠ ABF gemeinsam. Also sind die dritten ∠ AFB = BNF (I, 32). ∆ ABF ist also mit ∆ BFN winkelgleich. Also stehen in Proportion Strecke AB : BF = FB : BN (VI, 4); also ist AB · BN = BF^2 (VI, 17). Ebenso ist, da AL = LK und LN gemeinsam ist, dabei rechte Winkel bildet, Grundlinie KN = Grundlinie AN und ∠ LKN = LAN (I, 4). Aber ∠ LAN = KBN (III, 28; I, 5), also ist auch ∠ LKN = KBN. Und beiden Dreiecken AKB, AKN ist der Winkel bei A gemeinsam; also sind die dritten ∠ AKB = KNA (I, 32); also ist ∆ KBA mit ∆ KNA winkelgleich. Also stehen in Proportion Strecke BA : AK = KA : AN (VI, 4); also ist BA · AN = AK^2 (VI, 17). Wie oben bewiesen, ist aber AB · BN = BF^2. Also ist AB · BN + BA · AN, d.h. (II, 2) BA^2 = BF^2 + AK^2. Hier ist BA die Seite des Fünfecks, BF die des Sechsecks (IV, 15 Zusatz) und AK die des Zehnecks. Quadriert wird also die Seite des Fünfecks ebenso groß wie die des Sechsecks und des Zehnecks, die demselben Kreise eingeschrieben sind, zusammen – q.e.d.

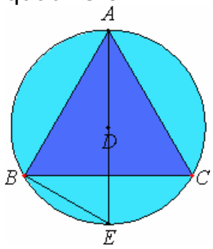
§ 11 (L. 11)

Beschreibt man einem Kreis mit rationalem Durchmesser ein gleichseitiges Fünfeck ein, so wird die Fünfeckseite eine Irrationale, wie man sie Minor nennt.



Dem Kreise ABCDE, der die Rationale (X, Definition 3) zum Durchmesser hat, sei das gleichseitige Fünfeck ABCDE einbeschrieben. Ich behaupte, dass die Seite des Fünfecks ABCDE eine Irrationale ist, wie man sie Minor (X, 76: Definition) nennt.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt F des Kreises, ziehe AF, FB, verlängere sie zu den Punkten G, H, ziehe AC und trage FK = ¼ AF (VI, 9) ab. AF ist rational, also FK rational; auch BF ist rational; also die Summe BK rational (X, 15). Da weiter Bogen ACG = Bogen ADG und hierin ABC = AED (III, 28), sind die Restbogen CG = GD. Zieht man hier AD, so ergibt sich (I, 4), dass die Winkel bei L Rechte sind und CD = 2 CL. Aus demselben Grunde sind auch die Winkel bei M Rechte und AC = 2 CM. Da so ∠ ALC = AMF, beide Dreiecke ACL und AMF dabei ∠ LAC gemeinsam haben, sind die dritten ∠ ACL = MFA (I, 32); ∆ ACL ist also mit ∆ AMF winkelgleich. Also stehen in Proportion LC : CA = MF : FA (VI, 4), also auch, bei Verdoppelung der Vorderglieder, 2 LC : CA = 2 MF : FA (V, 24). Aber 2 MF : FA = MF : ½ FA (V, 15); also 2 LC : CA = MF : ½ FA (V, 11), also auch, bei Halbierung der Hinterglieder, 2 LC : ½ CA = MF : ¼ FA. Hier ist 2 LC = DC, ½ CA = CM, ¼ FA = FK; also DC : CM = MF : FK. Also ist, verbunden, (DC + CM) : CM = MK : KF (V, 18), also auch $(DC + CM)^2 : CM^2 = KM^2 : KF^2$ (VI,22).
Da nun, wenn man die zwei Seiten des Fünfecks gegenüberliegende Diagonalen, etwa AC, stetig teilt, der größere Abschnitt der Fünfeckseite, d.h. DC, gleich ist (XIII, 8), ferner der größere Abschnitt, wenn man die Hälfte der ganzen Strecke hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wird wie das Quadrat der Hälfte der ganzen Strecke (XIII, 1) und CM die Hälfte der ganzen Strecke AC ist, so ist $(DC + CM)^2 = 5\ CM^2$.
Wie bewiesen, ist aber $(DC + CM)^2 : CM^2 = MK^2 : KF^2$; also $MK^2 = 5\ KF^2$ (V, Definition 5). Hier ist KF^2 rational, weil der Durchmesser rational ist. Also ist auch MK^2 rational (X, 6, Definition4), also MK rational (X, Definition 3). Da BF = 4 FK, ist BK = 5 KF; also $BK^2 = 25\ KF^2$. Aber $MK^2 = 5\ KF^2$; also $BK^2 = 5\ KM^2$. BK^2 hat also zu KM^2 kein (VIII, 11 Anmerkung) Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl. Also ist BK mit KM linear inkommensurabel (X, 9). Beide Strecken sind rational; BK, KM sind also nur quadriert kommensurable rationale Strecken. Nimmt man aber von einer rationalen Strecke eine rationale weg, die der ganzen nur quadriert kommensurabel ist, dann ist der Rest irrational, eine Apotome (X, 73). Also ist MB eine Apotome, MK ihre Ergänzung.
Ich behaupte weiter: eine Vierte Apotome (X, 84a Definition). Es sei $N^2 = BK^2 - KM^2$; BK übertrifft dann quadriert KM um N. Nun ist KF mit FB linear kommensurabel, auch, verbunden, KB mit FB linear kommensurabel (X, 15). BF ist aber BH linear kommensurabel, also BK mit BH linear kommensurabel (X, 12). Da nun $BK^2 = 5\ KM^2$, ist $BK^2 : KM^2 = 5 : 1$; also, umgewendet (V, Definition 16), $BK^2 : N^2 = 5 : 4$, d.h. nicht wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl (VIII, 11 Anmerkung); also ist BK mit N linear inkommensurabel (X,9). Quadriert übertrifft BK also um das Quadrat einer ihm inkommensurablen Strecke KM. Da hier die ganze Strecke BK um das Quadrat einer ihr inkommensurablen die Ergänzung KM

übertrifft, während die ganze Strecke BK mit der zugrundeliegenden Rationalen BH linear kommensurabel ist, ist MB eine Vierte Apotome (C, 84 a Definition). Ein Rechteck, das von der Rationalen und einer Vierten Apotome umfasst wird, ist aber irrational und heißt eine Minor (X, 94). Da nun, wenn man AH zieht, ∆ ABH mit ∆ ABM winkelgleich (III, 31; VI, 8) wird, also HB : BA = AB : BM (VI, 4), ergibt AB quadriert HB · BM (VI, 17).



Also ist AB, die Fünfeckseite, eine Irrationale, wie man sie Minor nennt. – q.e.d.

§ 12 (L. 12)

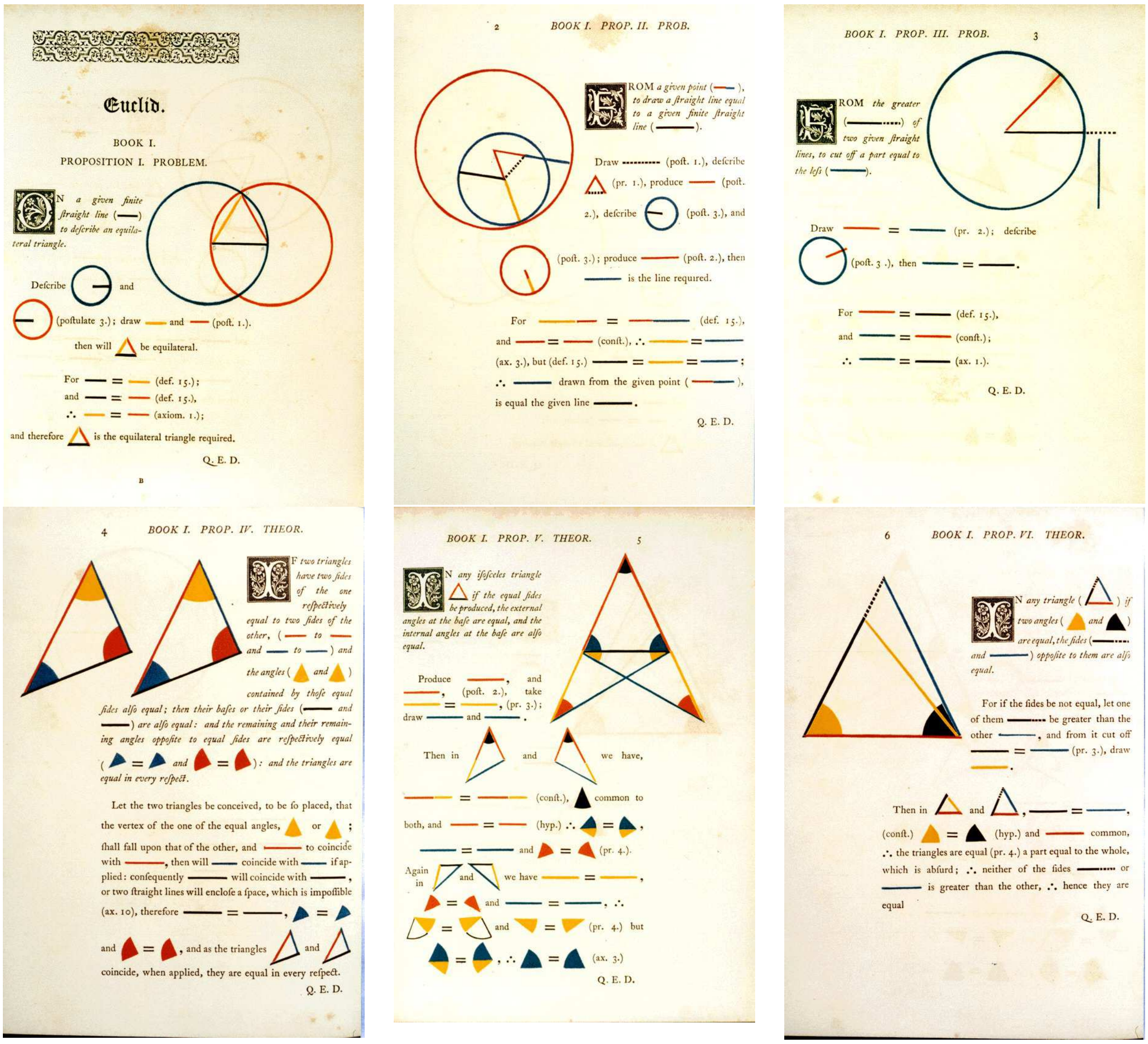
Beschreibt man einem Kreis ein gleichseitiges Dreieck ein, so wird quadriert die Dreieckseite dreimal so groß wie der Radius des Kreises.

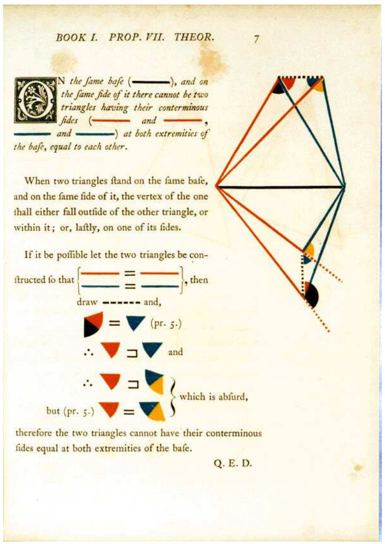
Man habe den Kreis ABC, ihm sei das gleichseitige Dreieck ABC einbeschrieben. Ich behaupte, dass quadriert eine Seite des ∆ ABC dreimal so groß wird wie der Radius des Kreises ABC.

Man verschaffe sich den Mittelpunkt D des Kreises ABC, ziehe AD, verlängere es nach E und ziehe BE. Da ∆ ABC gleichseitig ist, ist Bogen BEC ein Drittel des Umfanges des Kreises ABC, Bogen BE also ein Sechstel des Kreisumfanges. Strecke BE gehört also zum Sechseck, ist also dem Radius DE gleich. Da AE = 2 DE, ist $AE^2 = 4\,ED^2$, d.h. $= 4\,BE^2$. Nun ist $AE^2 = AB^2 + BE^2$ (III, 31; I, 47), also $AB^2 + BE^2 = 4\,BE^2$; also, getrennt, $AB^2 = 3\,BE^2$. Aber BE = DE; also $AB^2 = 3\,DE^2$. Also wird quadriert die Dreiecksseite dreimal so groß wie der Radius – q.e.d.

Byrns „Elemente"

... die ersten 9 Seiten der illustrierten Euklid-Ausgabe





BOOK I. PROP. VII. THEOR. 7

On the ſame baſe ( ), and on the ſame ſide of it there cannot be two triangles having their conterminous ſides (and , and) at both extremities of the baſe, equal to each other.

When two triangles ſtand on the ſame baſe, and on the ſame ſide of it, the vertex of the one ſhall either fall outſide of the other triangle, or within it; or, laſtly, on one of its ſides.

If it be poſſible let the two triangles be conſtructed ſo that { = , = }, then draw and,

= (pr. 5.)

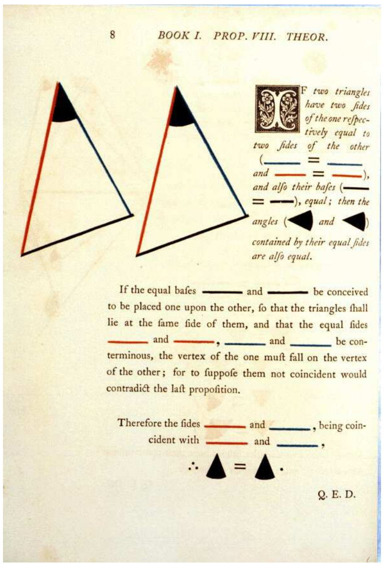
∴ ⊐ and

∴ ⊐ } which is abſurd,

but (pr. 5.) = }

therefore the two triangles cannot have their conterminous ſides equal at both extremities of the baſe.

Q. E. D.



8 BOOK I. PROP. VIII. THEOR.

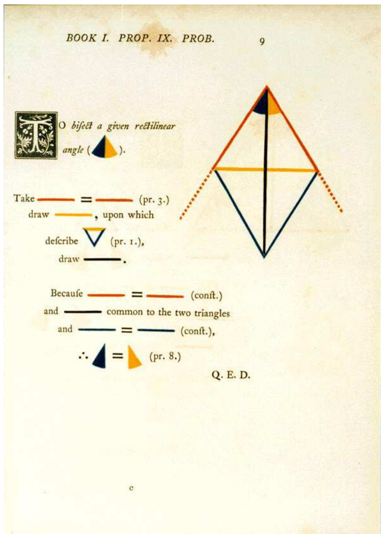
If two triangles have two ſides of the one reſpectively equal to two ſides of the other (= and =), and alſo their baſes (=), equal; then the angles (and) contained by their equal ſides are alſo equal.

If the equal baſes and be conceived to be placed one upon the other, ſo that the triangles ſhall lie at the ſame ſide of them, and that the equal ſides and , and be conterminous, the vertex of the one muſt fall on the vertex of the other; for to ſuppoſe them not coincident would contradict the laſt propoſition.

Therefore the ſides and , being coincident with and ,

∴ = .

Q. E. D.



BOOK I. PROP. IX. PROB. 9

To biſect a given rectilinear angle ( ).

Take = (pr. 3.)

draw , upon which

deſcribe (pr. 1.),

draw .

Becauſe = (conſt.)

and common to the two triangles

and = (conſt.),

∴ = (pr. 8.)

Q. E. D.

c