Analysis

Die Mathematik ist eine Mausefalle. Wer einmal in dieser Falle gefangen ist, findet selten den Ausgang, der zurück in seinen vormathematischen Seelenzustand leitet. Colerus

Englisch	analysis	Holländisch	analyse	Französisch	analyse
Latein	analytica	Russisch	анализ	Spanisch	análisis
Italienisch	analisi	Dänisch	analyse	Griechisch	αναλυση
Esperanto	analitiko	Polnisch	analiza matematyczna	Schwedisch	analys
Slowenisch	analiza	Tschechisch	analýza	Finnisch	analyysi
Portugiesisch	análise	Ungarisch	analízis	Vietnamesisch	giải tích, sự phân tích

Funktionsbegriff

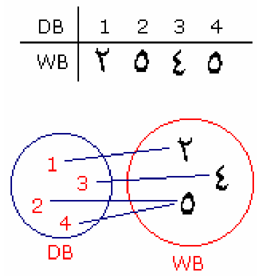
Der Begriff Funktion ist von zentraler Bedeutung für die gesamte Mathematik.

Definition

Eine Funktion f(x) ist eine eindeutige Zuordnung bzw. Abbildung einer Menge DB (Definitionsbereich, Urbildbereich) auf eine Menge WB (Wertebereich, Wertevorrat), d.h. jedem Argument x aus DB wird e i n d e u t i g ein Funktionswert y aus WB zugeordnet.

Zuerst wurde der Funktionsbegriff 1748 von Johann Bernoulli erklärt. Bei ihm heißt es:
"Man nennt Funktion einer veränderlichen Größe eine Größe, die auf irgendeine Weise aus eben dieser veränderlichen Größe und Konstanten zusammengesetzt ist."
Die Bezeichnung "Funktion" (lat. functio = Verrichtung) geht auf Leibniz zurück.

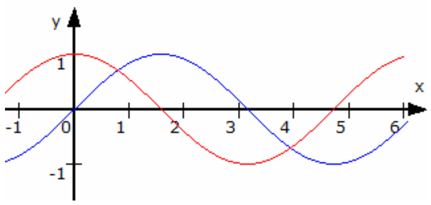
Darstellung



	kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
explizit	$y = f(x)$	$r = f(\rho)$
implizit	$F(x,y) = 0$	$F(r,\rho) = 0$
Parameter	$x = x(t)$	$r = r(t)$
	$y = y(t)$	$\rho = \rho(t)$

Symbolische Darstellung

als Wertetabelle,
weiterhin als Wortvorschrift, Definitionsgleichung bzw. in einem Koordinatensystem sowie als Mengendiagramm.
Als Pfeildiagramm wird die Darstellung der Zuordnung mit Zuordnungspfeilen bezeichnet. Hat jedes Element des Urbildbereichs nur ein Bild, liegt eine Funktion vor.



Spezielle Funktionseigenschaften

Monotonie ($\forall$ $x_1<x_2 \in D$)

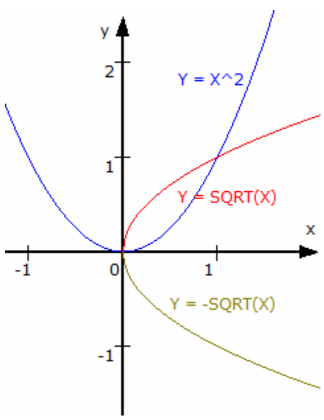
monoton wachsend	$f(x_1) \leq f(x_2)$
monoton fallend	$f(x_1) \geq f(x_2)$
strenge Monotonie	$f(x_1) \neq f(x_2)$
konstant	$f(x_1) = f(x_2)$

Periodizität

Die Funktion f ist eine periodische Funktion, wenn es eine reelle Zahl $p > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt: $x + p \in D$ und $f(x + p)=f(x)$. Die Zahl p nennt man Periode von f. D ist der Definitionsbereich.

Periode p $\quad f(x + kp) = f(x),\ k \in Z$

Ist p eine Periode, so sind nach Definition auch ganzzahlige Vielfache von p Perioden.
Im Allgemeinen sucht man die kleinste Periode der Funktion. Diese wird auch primitive Periode genannt.
Typische Beispiele periodischer Funktionen sind die trigonometrischen Funktionen.
Abbildung: $y = \sin x$ und $y = \cos x$



Beschränktheit ... beschränkt in einem Intervall [a;b], wenn Zahl B mit $|f(x)| < B$ existiert

Umkehrfunktion

Ist eine Funktion f(x) eine eineindeutige Abbildung aus dem DB in den WB, so heißt die Funktion umkehrbar.
Betrachtet man den WB einer umkehrbaren Funktion f(x) als Definitionsbereich DB' und den Definitionsbereich DB von f(x) als Wertebereich WB', so bildet die Umkehrabbildung ϕ die Umkehrfunktion oder inverse Funktion von f(x).

Beispiele:
1) Um die Umkehrfunktion von $y = f(x) = 2x - 2$ zu bestimmen, stellt man die Gleichung nach x um und erhält $\quad x = (y+2)/2 = y/2 + 1$

Um eine Darstellung der Form y = f(x) zu erhalten, tauscht man die Namen der Variablen x und y aus

$y = x/2 + 1$

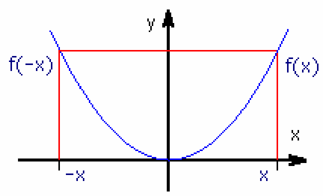
2) Die Funktion $y = f(x) = x^2$ ist auf ganz R definiert dort aber nicht umkehrbar. Sie besitzt zwei Umkehrungen. $y = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ und $y = -\sqrt{x}$ für $x \leq 0$

Den Graphen der Umkehrfunktion einer Funktion f erhält man durch Spiegelung an der Geraden y = f(x) = x.

Homogene Funktion

Eine Funktion $f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = 0$ heißt homogen vom Grad k bezüglich der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wenn

$f(t\,x_1; t\,x_2; \ldots; t\,x_n) = t^k \cdot f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ gilt. k heißt Homogenitätsgrad.



Symmetrie einer Funktion

gerade Funktion $f(-x) = f(x)$ ungerade Funktion $f(-x) = -f(x)$

Die graphische Darstellung einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch zur Ordinatenachse (y-Achse). Ein ungerader Funktionsgraph zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Gilt für den Definitionsbereich DB einer Funktion f(x), dass aus $x \in DB$ auch $-x \in DB$ folgt, so lässt sich die Funktion f(x) als Summe einer geraden Funktion g(x) und einer ungeraden Funktion u(x) darstellen:

$f(x) = g(x) + u(x)$ mit $g(x) = 1/2\,[f(x) + f(-x)]$ und $u(x) = 1/2\,[f(x) - f(-x)]$

Der Graph einer Funktion f(x) ist symmetrisch zur Geraden x = a, wenn gilt

für alle $x \in DB$: $f(a - h) = f(a + h)$

Der Graph einer Funktion f(x) ist symmetrisch zu dem Punkt P(a|b), wenn gilt

für alle $x \in DB$: $b - f(a - h) = f(a + h) - b$ oder

für alle $x \in DB$: $(f(a-h) + f(a+h))/2 = b$

Explizite Darstellung einer Funktion

y=f(x) heißt explizite Darstellung einer Funktion. Abhängige Variable y nur auf linken Seite der Gleichung. Mathematische Variable x nur auf rechten Seite der Gleichung.

Implizite Darstellung einer Funktion

$y-x^2=0$ heißt implizite Darstellung einer Funktion. Abhängige Variable y und Mathematische Variable x stehen beide auf der rechten Seite der Gleichung (Argumentenseite).

Nicht jede implizite Funktion lässt sich in expliziter Form aufschreiben. Nicht jede implizite Funktion ist eine Funktion im Sinne der Definition von Funktionen einer Variablen (Eindeutigkeit).

Monotonie einer Funktion

Monotonie bezeichnet die Eigenschaft einer Funktion, mit wachsendem Argument größere oder kleinere Funktionswerte anzunehmen.

Monoton fallend

Monoton fallend heißt eine Funktion, wenn der Funktionswert mit größer werdendem Argument nicht größer wird, d.h. wenn aus $x_1 < x_2$ folgt, dass $f(x_1) \geq f(x_2)$ ist.

Der Graph einer solchen Funktion "fällt" mit wachsendem x "nach unten" ab oder bleibt gleich "hoch".

Monoton steigend

Monoton steigend bedeutet dasselbe wie monoton wachsend.

Monoton wachsend

Monoton wachsend heißt eine Funktion, wenn der Funktionswert mit größer werdendem Argument nicht kleiner wird, d.h. wenn aus $x_1 < x_2$ folgt, dass $f(x_1) \leq f(x_2)$ ist.

Der Graph einer solchen Funktion "steigt" mit wachsendem x "nach oben" an oder bleibt gleich "hoch".

Verkettung von Funktionen

Es seien g und h zwei Funktionen: Die Verknüpfung $v(x) = g[h(x)]$, mit $z = h(x)$ und $v = g(z)$, nennt man die Verkettung zweier Funktionen. Man spricht auch von der äußeren und der inneren Funktion

Gespiegelte Funktionen

Ist eine Funktion y=f(x) gegeben, so verändert der Austausch des Argumentes x mit -x das Bild der Funktion. Es kommt zu einer Spiegelung. Entsprechend der Definition ergibt

f(-x) Spiegelung an der y-Achse -f(x) Spiegelung an der x-Achse

-f(-x) Spiegelung am Koordinatenursprung

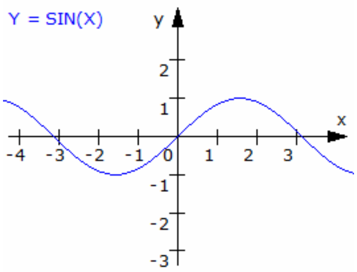
Kann die Funktion ohne Änderung an der y-Achse gespiegelt werden, so ist sie gerade. Stimmt f(x) mit -f(-x) überein, ist die Funktion ungerade.

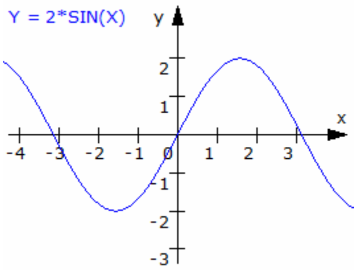
Funktionsverschiebung

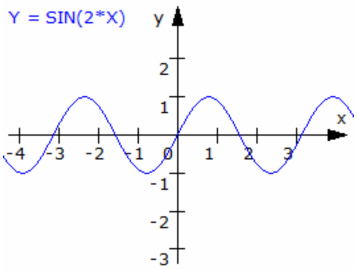
Ersetzt man das Argument x durch einen Term x+a (a reelle Zahl), so verschiebt sich der Graph der Funktion um -a Einheiten längs der x-Achse. Ist a positiv wird f(x) damit nach links verschoben.
Der Parameter b einer Funktion f(x)+b bewirkt eine Verschiebung des Graphen längs der y-Achse. Ist b > 0 wird der Graph nach oben verschoben.

Nullstelle einer Funktion

Eine Zahl x_0 heißt Nullstelle einer Funktion y=f(x), wenn der Zahl x_0 durch die Funktion die 0 zugeordnet wird. In der graphischen Darstellung im Koordinatensystem ist die Nullstelle die Stelle auf der Abszissenachse (x-Achse), bei welcher die Funktion die Abszissenachse schneidet bzw. berührt.







Streckung und Stauchung einer Funktion

Gegeben sei eine Funktion f(x).
Ein Parameter c der Funktion c f(x) streckt den Graphen der Funktion f(x) für |c|>1 längs der y-Achse und staucht für |c|<1.
In der zweiten Abbildung wird der Graph von y = sin x durch den Faktor 2 längs der y-Achse gestreckt.
Ein Parameter d der Funktion f(dx) staucht den Graphen der Funktion f(x) für |c|>1 längs der x-Achse und streckt für |c|>1.
In der zweiten Abbildung wird der Graph von y = sin x durch den Faktor 2 längs der x-Achse gestaucht.

Reziproke Funktion

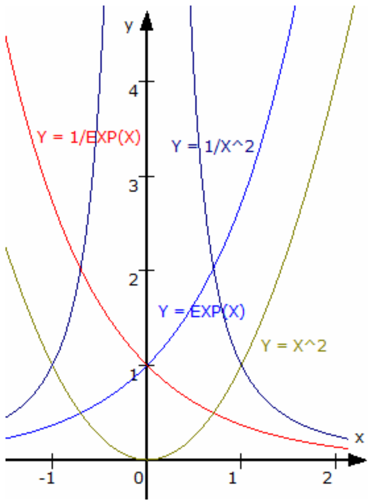
Unter der reziproken Funktion oder dem Kehrwert einer Funktion f(x) versteht man die Funktion mit

$$y = f^*(x) = 1/f(x)$$

In der Abbildung sind für

$$y = e^x \quad \text{und} \quad y = x^2$$

die reziproken Funktionen gezeichnet.
Die reziproke Funktion f*(x) hat an den Nullstellen der Funktion f(x) Unstetigkeitsstellen. f*(x) kann nur dann Nullstellen besitzen, wenn f(x) Polstellen aufweist.
Oft lassen sich über die reziproke Funktion neue Funktionen definieren oder spezielle Beziehungen zur alten Funktion beschreiben.



Klassifikation von Funktionen

Funktionen lassen sich nach ihren Eigenschaften in verschiedene Klassen einteilen.

1) ganzrationale Funktionen bzw. Polynome
Funktionen, die sich durch endlich viele Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen der unabhängigen Variable darstellen lassen.
Allgemeine Form: $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, n>0

2) rationale Funktionen
Funktionen, die sich durch endlich viele Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen der unabhängigen Variable erzeugen lassen.
2a) Gebrochenrationale Funktionen
Funktionen, die rational aber nicht ganzrational sind

$$y = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) / (b_m x^m + b_{m-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0), m>0$$

3) algebraische Funktionen
Die Funktionen genügen einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten ganzrationale Funktion der Variablen sind. Alle rationalen Funktionen sind algebraisch.

4) transzendente Funktionen
Funktionen, die nicht algebraisch sind. Sind oft durch unendliche Potenzreihen darstellbar.

5) nichtrationale Funktionen
Funktionen, die nicht rational sind, darunter alle transzendenten Funktionen.
Potenzfunktionen mit gebrochenem Exponenten sind nichtrational, aber nicht transzendent, sondern algebraisch.

Elementare Funktionen

$f(x)= c$ konstante Funktion

Das Bild der konstanten Funktion ist für $c = 0$ die x-Achse und für $c \neq 0$ eine zur Abszissenachse parallele Gerade. Die Funktion hat den Grad Null. Die Ableitungsfunktion ist die Nullfunktion. Stammfunktionen sind lineare Funktionen $y = cx + C^*$.

Sonderfälle

$f(x)= 0$	Nullfunktion	$f(x)= 1$	Einheitsfunktion
$f(x)= x$	identische Funktion	$f(x)= \|x\| =\{x, x\geq 0; -x, x<0\}$	Betragsfunktion

$f(x)= [x] = \text{entier}(x)$ — y ist größte ganze Zahl $\leq x$
$y=f(x)=ax+b$ — lineare Funktion
$y=f(x)=ax^2+bx+c$ — quadratische Funktion
$y=f(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ — Polynomfunktion
$y=f(x)=x^c$ — Potenzfunktion
$y=f(x)=e^x$ — Exponentialfunktion
$y=f(x)=\ln x$ — Logarithmusfunktion

Reelle Funktion

Eine reelle Funktion f ist eine Abbildung von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen $f: R \to R$

Für die Argumente, die abhängige Variable, verwendet man in der Regel die Bezeichnung x und für die Werte y. Man schreibt dann $y = f(x)$.

Normalerweise kann man für f einen algebraischen Ausdruck angeben, z.B. $y = f(x)\ \sqrt{(e^{\sin x})} + x$.

Eine solche Funktion wird auch elementar genannt.

Allerdings kann die Definition auch komplizierter sein, zum Beispiel:

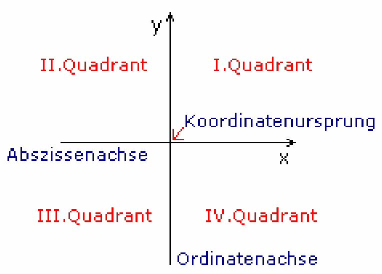
$y = f(x) = x$, für $x \in Q$ und $= 0$, für $x \in R\backslash Q$ (*)

Diese Funktion bildet alle rationalen Zahlen auf sich selbst ab und alle reellen Zahlen auf 0.

Zur Veranschaulichung eines funktionalen Zusammenhangs nutzt man den Graphen der Funktion. Dabei handelt es sich um eine Veranschaulichung der Funktion in der euklidischen Ebene. Der Graph umfasst diejenigen Punkte der euklidischen Ebene, deren Koordinaten dem geordneten Paar aus Wert und Funktionswert entspricht.

Diese Methode der Veranschaulichung versagt mitunter, zum Beispiel bei der Funktion (*).

Rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem



Das rechtwinklige karteischen Koordinatensystem besteht aus zwei senkrecht aufeinander stehende Achsen, der Abszissenachse (x-Achse, waagerecht) und der Ordinatenachse (y-Achse, senkrecht).

Schnittpunkt beider Achsen = Koordinatenursprung O

Die Quadranten sind die durch die Achsen gebildeten Gebiete der Ebene. Sie werden in mathematisch positiver Richtung (entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn) gezählt.

Abszisse … Koordinatenwert auf der waagerechten Achse, latein: linea abscissa = abgeschnittene Linie
Ordinate … Koordinatenwert auf der senkrechten Achse, latein: linea ordinata = geordnete Linie
für dreidimensionales Koordinatensystem:
Applikate … Koordinatenwert auf der dritten Achse, latein: linea applicata = angelehnte Linie
Applikatenachse … dritte Achse, z-Achse, in einem räumlichen Koordinatensystem

Gleichung

Ein Ausdruck (Aussageform), in dem zwei Terme T_1 und T_2 durch das Gleichheitszeichen miteinander verbunden sind, heißt Gleichung. Die Terme T_1 und T_2 sind dann gleich; man spricht von Gleichheit.

Alle Belegungen der Variablen, welche die Aussageform in eine wahre Aussage umwandeln, heißen Lösung der Gleichung.

Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn sie gleiche Definitionsbereiche und gleiche Lösungsmengen haben. Die Grundmenge, aus der die Lösungen genommen werden können, heißt Variablengrundbereich oder Variabilitätsbereich.

Eine Gleichung heißt …

erfüllbar, wenn eine Teilmenge des DB als Lösung existiert
nicht erfüllbar, wenn die Lösungsmenge die leere Menge ist

Definitionsmenge

Die Menge aller Elemente der zu einer Gleichung gegebenen Grundmenge, für die beide Seiten der Gleichung einen Sinn machen, d.h. mathematisch wohldefiniert sind. Wird üblicherweise mit D oder DB bezeichnet.

Lösungsmenge

Menge der Werte für die Unbekannte, die aus einer Gleichung eine wahre Aussage machen. Die Lösungsmenge ist stets Teilmenge der Grundmenge.

Äquivalenzumformungen von Gleichungen und Ungleichungen

Eine äquivalente Umformung ist eine Umformung einer Gleichung, die die Lösungsmenge unverändert lässt.

	$T_1 = T_2$	$T_1 < T_2$
Addition oder Subtraktion gleicher Terme T auf beiden Seiten	$T_1+T = T_2+T$	$T_1+T < T_2+T$
Multiplikation oder Division beider Seiten mit einem Term T > 0	$T_1*T = T_2*T$	$T_1*T < T_2*T$
Multiplikation oder Division beider Seiten mit einem Term T < 0	$T_1*T = T_2*T$	$T_1*T > T_2*T$

Das Potenzieren und Radizieren ist im Allgemeinen keine äquivalente Umformung

1. Vertauscht man die Seiten einer Gleichung, so ist die neue Gleichung der alten äquivalent. Bei Ungleichungen ist dies nicht gültig!
2. Addiert oder subtrahiert man auf beiden Seiten einer Gleichung jeweils den gleichen Term, so sind alte und neue Gleichung äquivalent.
3. Multipliziert oder dividiert man auf beiden Seiten einer Gleichung jeweils den gleichen Term, der aber nicht Null sein darf, so sind alte und neue Gleichung äquivalent. Vorsicht beim Multiplizieren oder Dividieren mit Termen, die die Variable selbst enthalten, da diese Terme gleich Null sein können.
4. Substituiert man einen Term durch eine neue Variable, so erhält man die Lösung der ursprünglichen Gleichung, wenn man die neue Gleichung löst und anschließend rücksubstituiert.

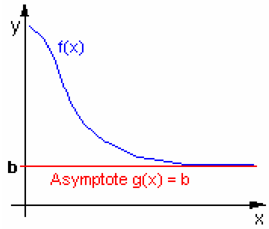
Gleichungsarten

ganzrationaler Term ... Term, der aus Summen bzw. Differenzen ganzzahliger Potenzen der Variablen besteht $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
Summen, Differenzen und Produkte ganzrationaler Terme sind wieder ganzrationale Terme

Ganzrationale Gleichung
... Gleichung, die Gleichheit zweier ganzrationaler Terme $P_1(x) = P_2(x)$ beschreibt
Beispiel: $x^3 + 2x^2 - 1 = x^2 + 4x + 5$
Gebrochenrationale Gleichung
... Gleichung, die Quotienten zweier ganzrationaler Terme verknüpft $P_1(x) / P_2(x) = P_3(x) / P_4(x)$
Beispiel: $(x^2 - 1) / (3x^3 + x + 2) = x / (3x^2 - 4)$
Irrationale Gleichung
... Gleichung, die Terme mit Wurzeln und/oder rationalen Potenzen der Variablen enthält
Beispiel: $\sqrt{(x^2 + 4)} = x^{2/5} - 1$
Algebraische Gleichung
... Gleichung, die sich bis auf eventuelle Einschränkungen im Definitionsbereich äquivalent in die Form

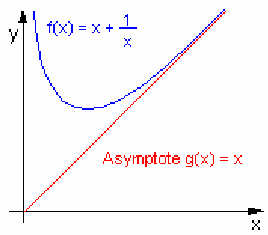
$$0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

umformen lässt. Ganzrationale, gebrochenrationale und irrationale Gleichungen sind algebraische Gleichungen. Sie lassen sich durch Multiplikation, Potenzieren und Radizieren auf die Grundform bringen.
Transzendente Gleichung
... Gleichungen, die mindestens einen nicht-algebraischen Ausdruck enthält, z.B. lg x , sin x, a^x usw.
Eine transzendente Gleichung ist keine algebraische Gleichung.



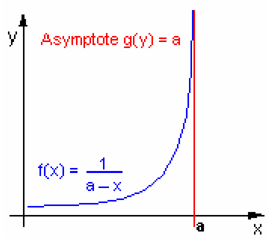
Numerisches Lösen einer Gleichung

Nicht jede Gleichung lässt sich durch eine Rechnung (äquivalente Umformung) analytisch lösen. In diesen Fällen muss eine näherungsweise ("numerische", "approximative") Lösung gefunden werden.
Da jede Gleichung (in einer Variablen) in die Form $f(x) = 0$ gebracht werden kann (wobei f eine Funktion ist), ist das Problem, sie zu lösen, gleichbedeutend damit, die Nullstellen der Funktion f zu finden. Dafür stehen eine Vielzahl Näherungsverfahren zur Verfügung, z.B.
Bisektion , Regula falsi , Newton-Verfahren , Allgemeines Iterationsverfahren
Geometrisch betrachtet, besteht das Problem darin, die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse zu ermitteln. Der praktischste und einfachste Weg, dies zu tun, besteht darin, die Zoom-Funktion eines Funktionsplotters zu benutzen, um die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit vernünftiger Genauigkeit abzulesen.



Asymptote

Wenn sich ein Graph von einer Stelle ab beliebig an eine Gerade g annähert, ohne diese zu erreichen, so nennt man diese Gerade g eine Asymptote des Graphen. Asymptote (griech. ασυμπτωτη) bedeutet die "Nicht-Zusammentreffende". Der



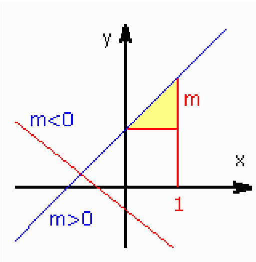
Begriff wurde um 225 v.u.Z. von Apollonius eingeführt.
Nähert sich der Graph einer Kurve (nicht notwendig eine Gerade), so spricht man von einer Einhüllenden.

Asymptotisch gleiche Funktionen
Zwei Funktionen f(x) und g(x) sind ungefähr gleich, wenn sie asymptotisch gleich sind, das heißt:

$\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$

Man schreibt $f(x) \sim g(x)$.

Lineare Funktionen



$y = m * x + n$; ($m,n \in R$)
DB: $\{ x \mid -\infty < x < \infty \}$ WB: $\{ y \mid -\infty < y < \infty \}$, $m \neq 0$
Polynom 1.Grades. Der Graph ist eine Gerade mit dem Anstieg

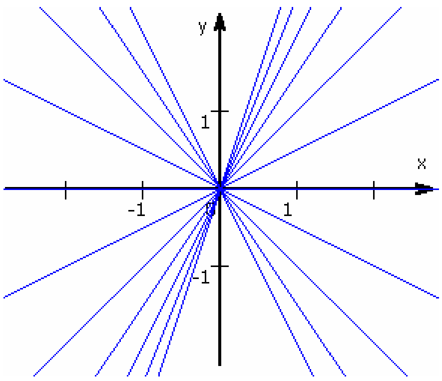
$m = \tan \phi = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$

$\phi = \arctan ((y_2 - y_1) / (x_2 - x_1))$

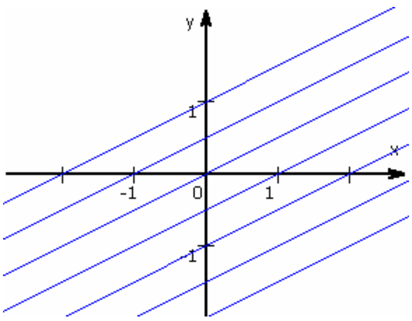
Mit der Punktprobe kann man feststellen, ob ein Punkt auf einem Funktionsgraphen liegt. Dazu setzt man die Koordinaten des Punktes in die Funktionsgleichung ein. Tritt kein Widerspruch auf, gehört der Punkt zur Funktion.
Eine lineare Funktion $y = ax + b$ wird auch als affine Funktion bezeichnet.
Das Bild der Funktion $y = ax + b$ verläuft durch den Punkt A(-b/a ; 0) und B(0 ; b). Die Nullstelle der Funktion liegt für $a \neq 0$ bei $x_0 = -b/a$.
Für b = 0 fallen die Punkte A und B zusammen. Die Bild der Funktion verläuft dann durch den Koordinatenursprung.
Ist a > 0, so ist die Funktion monoton steigend, für a < 0 ist die monoton fallend. Ist b = 0 und a > 0, so ist y zu x direkt proportional. a ist dann Proportionalitätsfaktor.
Lineare Funktionen sind ganzrationale Funktionen 1.Grades.

Eigenschaften der Linearen Funktion $y = m * x + n$; ($m,n \in R$; $m \neq 0$)

Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$-\infty < y < \infty$
Quadrant	m > 0, n = 0 : I. und II.
	m < 0, n = 0 : II. und IV.
Periodizität	Keine
Monotonie	m > 0 : streng monoton steigend
	m = 0 : konstant
	m < 0 : streng monoton fallend
Symmetrie	Punktsymmetrie bezüglich des Punktes (x, mx + n)
Verhalten im Unendlichen	m > 0 : $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$
	m < 0 : $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$
	m < 0 : $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$
Nullstellen	$x_0 = -n/m$ für $m \neq 0$
Sprungstellen	Keine
Extrema	Keine
Umkehrfunktion	$y = 1/m\, x - n/m$ für $m \neq 0$
Ableitung	$y' = m$
Stammfunktion	$F(x) = \int mx + n\, dx = m/2\, x^2 + n\, x + C$
reziproke Funktion	$1/f(x) = 1/(mx+n)$; Hyperbel
Differenzialgleichung	$d/dx\, f(x) = m$
Achsenspiegelung	$f(-x) = -f(x - 2n/m)$



Spezielle lineare Funktionen
In der Funktionsgleichung $y = m x + n$ bestimmt der Parameter m den Anstieg der Funktionen / Geraden und der Parameter n die Verschiebung der Funktion längs der y-Achse.
In der oberen Darstellung sind lineare Funktionen für verschiedene m und n = 0 eingezeichnet. Für negative m sind die Geraden fallend, für m > 0 steigend. **$y = m x$**



In der unteren Darstellung sind lineare Funktionen mit konstantem m = 1/2 für verschiedene n eingezeichnet.
$y = x/2 + n$

Lineare Funktion-Aufgaben
Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden.
a) mit der Steigung -3 die durch (-3/2) geht b) m = 5 ; P(2; 8)
c) m = 5/3 ; P(-6; 2) d) m = -1 ; P(-2; 3)
e) m = -1/2 ; P(4; 3) f) m = 1,2 ; P(5; -4)

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden
a) Gerade ist parallel zu y = 3x - 8 und geht durch (-2; -5) b) parallel zu y = -1/3 x durch (6; 0)
c) parallel zu y = 2/5 x - 3 durch (-5; -1) d) parallel zu y = -4x +1 durch (0; 1)
e) parallel zu y = 3x - 6 durch (-2; -8) f) parallel zu y = -3/2 x + 7 durch (4; -1)

Aufgabe 3: Eine Gerade ist durch zwei Punkte gegeben. Bestimmen Sie ihre Gleichung.
a) P(-3; -7) und Q(6; -1) b) P(2; 8) und Q(-1; -4)
c) P(5; 0) und Q(3; 0,4) d) P(1; 1) und Q(2; -6)
e) P(4; -2) und Q(0; -5) f) P(10; -4) und Q(-5; 5)
Lösung

Aufgabe 1	a) y = -3x - 7	b) y = 5x - 2	c) y = 5/3 x + 12	d) y = -x + 1
	e) y = -1/2 x + 5	f) y = 1,2 x - 10		
Aufgabe 2	a) y = 3x + 1	b) y = -1/3 x + 2	c) y = 2/5 x + 1	d) y = -4x + 1
	e) y = 3x - 2	f) y = -3/2 x + 5		
Aufgabe 3	a) y = 2/3 x - 5	b) y = 4x	c) y = -1/5 x + 1	d) y = -7x + 8
	e) y = 3/4 x - 5	f) y = -3/5 x + 2		

Lineare Gleichungen
Allgemeine Form 0 = ax + b; $(a \neq 0)$
Lösung x = - b/a
Geometrische Interpretation: Abszisse des Schnittpunkts zweier Geraden in der Ebene, oder Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse.
Lineare Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten a und Absolutgliedern b sind einfach durch äquivalente Umformung der Gleichung lösbar.
Dazu werden links und rechts des Gleichheitszeichens lineare Terme oder Zahlen addiert bzw. subtrahiert, mit dem Ziel, dass auf einer Gleichungsseite das x-enthaltende Glied auf der anderen Seite nur eine Zahl steht.
Das Ergebnis erhält man, wenn beide Gleichungsseiten durch den Koeffizienten des linearen Gliedes geteilt werden.

Beispiel: Thomas Alva Edison (1847 bis 1931) wurde oft von seinen Gästen gefragt, warum er, als einer der größten Physiker, ein Gartentor habe, dass unwahrscheinlich schwer gehe. Er erklärte dann schmunzelnd, dass jeder Besucher 20 Liter Wasser in seine Zisterne pumpe, wenn er das Tor betätige.
Als Edison statt des 20-l-Gefäßes eines mit 25 Litern benutzte, waren 12 Gäste weniger nötig, um seine Zisterne zu füllen. Wie groß war das Fassungsvermögen der Zisterne?
Lösung: 20 * x = 25 * (x - 12) → 20 x = 25 x – 300 → x = 60 , 60 Personen. Damit fasst die Zisterne 1200 Liter Wasser.

Rationale Gleichung
Eine Gleichung heißt rational, wenn ihre explizite Rechenvorschrift durch eine endliche Anzahl von rationalen Operationen, wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, gebildet wird.

Rationale Funktion
Eine Funktion heißt rational, wenn ihre explizite Definitionsgleichung durch eine endliche Anzahl von rationalen Operationen, wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, gebildet wird.

Einfache lineare Gleichungen

Aufgabe 1		Lösungen
a)	5 - x = 25 + 3x - 4	-4
b)	16 + 2x = 56 - 8x - 20	2
c)	2x - 22 - 9x = 42 + 11x - 100	2
d)	19x - 32 + 17x = 18x - 30 + 16x - 3	-1/2
e)	9x - 11 - 3x = 4x + 12 - 3x	4,6
f)	105 - 72x - 53 - 69 = 65x + 43x - 18 - 5	1/30
Aufgabe 2		
a)	0 = 8x - (4x + 12)	3
b)	7x - 10 = 15 - (x - 14)	39/8
c)	7(x + 1) = 6(x - 1)	-13
d)	57 - 2(x + 21) = 63 - 2(3x + 4)	10
e)	5(x + 7) + 2(x+ 7) - 4(x+ 7) = 3	-6
f)	15 - 3(2x - 1) = 16(x + 1) - 2(x - 1)	0
Aufgabe 3		
a)	(x + 1)(x + 7) = (x + 2)(x + 3)	-1/3
b)	2(x + 2)(x + 5) = (2x + 7)(x + 3)	1
c)	$2x^2$ - (x + 3)(x - 3) = $(x + 1)^2$	4
d)	(x + 3)(x - 5) = $(x - 3)^2$	6

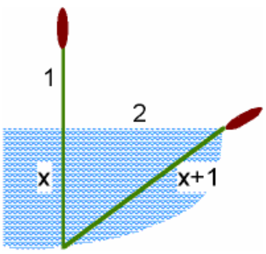
e)	$(2x - 3)^2 - (x - 5)^2 - 3x(x - 7) + 17 = 0$	-1/19
f)	$5x(x - 1) - (2x + 3)^2 - (x - 5)(x + 3) - 6 = 0$	0

Aufgabe 4

a)	$x + x/3 + x/6 = 45$	30
b)	$(4x + 1)/26 - (2x - 1)/39 = 0$	-5/8
c)	$x/4 + 1/5 = x/2 + x/6$	12/25
d)	$2x/3 - 4x/9 = 31 - 3x/2$	18
e)	$(8x - 15)/12 + (3x + 18)/15 = 2$	123/52
f)	$14/3 - (5x - 1)/6 = (34x - 1)/3 - 7$	1

Lineare Gleichungen-Aufgaben

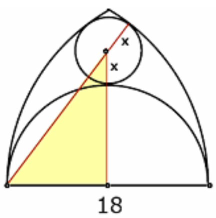
1. Subtrahiert man vom Drittel einer Zahl ein Viertel dieser Zahl, so ergibt sich 7.
Lösung: 84
2. Vermehrt man eine Zahl um ihr Drittel und ihr Viertel. so erhält man 190.
Lösung: 120
3. Die Summe aus der Hälfte, dem Drittel und dem Viertel einer Zahl ist um 3 größer als die Zahl.
Lösung: 36
4. Das Vierfache einer Zahl ist um 30 größer als ein Viertel der Zahl.
Lösung: 8
5. Die Zahl 93 ist so in drei Summanden zu zerlegen, dass folgende Bedingung gilt:
Jeder Summand ist um 9 größer als der vorhergehende. Lösung: 22, 31, 40
Jeder Summand ist das 5-fache des vorhergehenden. Lösung: 3, 15, 75
6.Das 7-fache und das Siebentel einer Zahl geben zusammen 100. Berechne die Zahl!
Lösung: 14
7. Jemand hat 300 Rupien und 6 Pferde. Ein anderer hat 10 Pferde, aber eine Schuld von 100 Rupien. Beider Vermögen ist gleich groß. Wieviel kostet ein Pferd? (Indien)
Lösung: 100 Rupien
8. Jemand wird nach seinem Alter gefragt und antwortet: "Wenn ich noch einmal so alt wäre, dazu noch die Hälfte und ein Viertel meines Alters und ein Jahr, dann wäre ich 100 Jahre." Wie alt ist er?
Lösung: 36 Jahre
9. Drei Gesellen wollen ein Haus für 204 Gulden kaufen. Der erste gibt dreimal soviel wie der zweite, dieser viermal soviel wie der dritte. Berechne, wieviel jeder zahlen muss. (nach Adam Ries)
Lösung: 144, 48, 12
10. Ein Vater vererbt seiner Frau, seinem Sohn und seinen beiden Töchtern 3600 Gulden. Sein letzter Wille ist, dass der Sohn zweimal soviel wie die Mutter und die Mutter zweimal soviel wie jede Tochter erhält. Berechne, wieviel jeder erbt. (Adam Ries)
Lösung: 1800, 900, 450

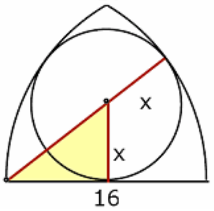


11. Der Betrag von 8400 € soll unter drei Personen A, B und C aufgeteilt werden. B soll dabei halb soviel wie A, C halb soviel wie B erhalten.
Lösung: 4800, 2400, 1200
12. 3000 € sollen unter drei Preisträgern derart verteilt werden, dass der zweite Preis 3/2 mal so groß wie der dritte, der erste Preis 5/3 mal so groß wie der zweite ist.
Lösung: 1500, 900, 600
13. Verkürzt man die Seiten eines Quadrats um je 10 cm, so vermindert sich sein Flächeninhalt um 400 cm^2. Berechne die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats!
Lösung: 25 cm
14. Verlängert man die Seiten eines Quadrats um je 3 cm, so vergrößert sich sein Flächeninhalt um 21 cm^2. Berechne die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats!
Lösung: 2 cm
15. Ein Schilfrohr wächst 2 m vom Ufer eines Teichs entfernt. Seine Spitze ragt 1 m über die Wasseroberfläche. Zieht man es ans Ufer, so berührt die Spitze gerade den Teichrand. Wie tief ist der Teich? (Abbildung)
Lösung: 1,5 m
16. Ein 9 m hoher Mast wurde von einem Sturm geknickt. Die Spitze berührt den Erdboden 3 m vom Fußpunkt des Mastes entfernt. In welcher Höhe ist die Knickstelle?
Lösung: 4 m
17. Aus dem "Lilawati" (Indien, 8. Jh. u.Z.):
Eine Kette zersprang im Verlauf verliebten Getümmels,
Eine Reihe Perlen löste sich drauf.
Ein Sechstel von ihnen fiel auf den Boden,
Ein Fünftel blieb auf dem Lager,
Ein Drittel ward von der jungen Frau gerettet,
Ein Zehntel behielt der Geliebte zurück,
Und sechs Perlen blieben an der Schnur befestigt.

Nun sag mir, wieviel Perlen an der Kette der Liebenden hingen.
Lösung: 30 Perlen
18. Fünf aufeinander folgende Viererzahlen geben zusammen 420. Wie heißt die kleinste der Zahlen?
Lösung: $x + x+4 + x+8 + x+12 + x+16 = 5x + 40 = 420$ … $x = 76$, die 1.Zahl
19. Die Differenz der Quadrate von zwei natürlichen Zahlen mit dem Unterschied 3 beträgt 381. Wie heißt die kleinere der beiden Zahlen?
Lösung: $(x+3)^2 - x^2 = 381$ … $x = 62$
20. Wenn ich bei einer zweistelligen Zahl zur hinteren Ziffer 6 addiere und anschließend rechts eine 4 anfüge, erhalte ich das 12-fache der Zahl. Wie heißt die Zahl?
Lösung: $10 (x+6) = 12x$ … $x = 32$

21. Werden auf der rechten Seite einer Zahl die Ziffern 72 angefügt, so erhält man das 102-fache der Zahl. Wie heißt die Zahl?
Lösung: $100x + 72 = 102x$ … $x = 36$
22. Ein Fahrzeug fährt mit 6km/h bergauf und anschließend mit 18km/h bergab. Für den gesamten Weg von 40km benötigt es 3h. Wann und wo erreicht es den höchsten Punkt?
Lösung: $6x + 18 (3-x) = 40$ … $x = 14/12$. Nach $14/12 = 70$ Minuten und $s = 6x = 14/12\ 6$ km $= 7$ km wird der höchste Punkt erreicht.
23. Zwei Fahrzeuge kommen mit den Geschwindigkeiten 40 und 60 km/h von zwei Orten, die 50 km voneinander entfernt sind, einander entgegen. Dabei fährt das zweite 30 Minuten nach dem ersten ab. Bestimmen Sie, wann und wo sie sich treffen.
Lösung: $40x + 60 (x - 0{,}5) = 50$ … $x = 4/5$. Bis zum Treffpunkt ist das 1. Fahrzeug 4/5 h 48 Minuten und $s = 40x = 4/5\ 40$ km $= 32$ km unterwegs.
24. Ein Fahrzeug hat die Geschwindigkeit 30 km/h und fährt um 12 Uhr beim Punkt A vorbei. Ein zweites Fahrzeug fährt mit 90 km/h und passiert A 20 Minuten später. Wo und wann überholt ein Fahrzeug das andere?
Lösung: $30x = 90 (x-1/3)$ … $x = 0{,}5$ … Überholt wird um 12.00 + 0.30 = 12.30 Uhr nach 15 km.
25. Ein Schiff benötigt stromaufwärts für eine 24 km lange Strecke 48 Minuten mehr als stromabwärts. Berechne die Geschwindigkeit des Schiffes gegenüber dem Wasser, wenn die Strömungsgeschwindigkeit 2,5 km/h misst.
Lösung: $24 / (x-2{,}5) = 24 / (x+2{,}5) + 4/5$ … $x = 12{,}5$ … Das Schiff hat eine Eigengeschwindigkeit von 12,5 km/h.
26. Patrick und Isabelle haben 600 Nüsse gesammelt. Isabelle sagt: Wenn du mir die Hälfte der Nüsse gibst, die du hast, und ich dir darauf einen Drittel der Nüsse gebe, die ich dann habe, so besitzen wir gleich viele Nüsse. Wie viele Nüsse besaßen beide am Anfang?
Lösung: Die beiden haben vorher und nachher je 300 Nüsse!
27. Die drei Gemeinden A, B und C haben zusammen 24873 Einwohner. B hat 7629 Einwohner weniger als A, aber 3030 mehr als C.
Lösung: $x + 7629 + x + x - 3030 = 24873$ … $x = 6758$ … Einwohnerzahl von A: 14387, B: 6758, C: 3728
28. Vater und Sohn haben einen Altersunterschied von 28 Jahren. Nach 16 Jahren ist der Vater gerade doppelt so alt wie der Sohn. Wie alt sind beide heute?
Lösung: Heute ist der Vater 40 und der Sohn 12. In 16 Jahren ist der Vater 56 und der Sohn 28.
29. Ein Teil eines Kapitals von 70350 Franken ist zu 6% angelegt, der andere zu 5%. Der Jahreszins des Kapitals beträgt 4100 Franken. Wie groß sind die beiden Teile?
Lösung: $0{,}06x + 0{,}05 (70350 - x) = 4100$ … $x = 58250$ … Das Kapital ist in 58250 Franken zu 6% und 12100 Franken zu 5% aufgeteilt.





30. Gesucht ist der Radius x des Füllkreises in den zwei Abbildungen.
Lösung: (oben) für das rechtwinklige gelbe Dreieck gilt der Satz des Pythagoras 92 + $(9 + x)^2 = (18 - x)^2$ … $x = 3$ … Der Radius des Füllkreises ist 3
(unten) Satz des Pythagoras ergibt $x^2 + 64 = (16 - x)^2$ … $x = 6$ … Der Radius des Füllkreises ist 6
31. Der Preis eine Autos stieg um 10% und sank dann wieder um 10% und beträgt heute Fr. 9504. Um wie viele Prozente hat sich der Preis insgesamt verändert?
Lösung: $0{,}90 (1{,}10\ x) = 0{,}99\ x = 9504$ … $x = 9600$
32. Zu 14 g Gold von 0,78 Feinheit kommen 10 g einer andern Goldsorte und geben 0,85 feines Gold. Welche Feinheit hatte die zweite Sorte?
Lösung: $0{,}78 \cdot 14 + 10\ x = 0{,}85 \cdot 24$ … $x = 0{,}948$ … es wurde Gold der Feinheit 0,948 hinzugefügt
33. In einem Dreieck verhalten sich 2 Winkel wie 2: 3. Der dritte ist das arithmetische Mittel aus den beiden andern.
Lösung: $2x + 3x + 2{,}5x = 180$ … $x = 24$ … die Winkel messen 48°, 72° und 60°
34. Ein Rechteck von 30 m Länge und 18 m Breite wird in lauter gleiche Quadrate aufgeteilt. Die Summe der Umfänge all dieser Quadrate ist 30 mal so groß wie der Umfang des Rechtecks. Wie lang ist die Seite eines solchen Quadrates?
Lösung: x sei Seite eines kleinen Quadrates, dann sind $30/x$ Quadrate in der Länge, $18/x$ in der Breite, d.h. $504/x^2$ Quadrate.

Jedes dieser Quadrate hat den Umfang 4x und alle zusammen $540/x^2 \cdot 4x = 2160\ x = 30 \cdot 96$. Die Seite eines kleinen Quadrates ist damit 75 cm.

Lösen von Bruchgleichungen

Bruchgleichungen sind Gleichungen, bei denen die gesuchte Variable auch im Nenner eines Bruchs auftritt.
Bruchgleichungen lassen sich wie auch lineare Gleichungen durch Äquivalenzumformungen lösen. Zuvor ist jedoch immer die Definitionsmenge zu bestimmen. Die Grundmenge ist, falls nichts anderes angegeben wird R. Die Definitionsmenge enthält die Variablenwerte, für die die Gleichung gültig ist.
Zur Bestimmung der Definitionsmenge ist zu untersuchen, für welche Variablenwerte der Nenner Null wird, d.h. die Nullstellen des Nenners. Diese Werte gehören nicht zur Definitionsmenge.

Beispiele

$(4 + x) / (x - 2) = 6$;	Definitionsmenge R, $x \neq 2$	Lösung $x = 16/5$
$5 / (x+3) + 1 / (x-1) = 0$;	DB = R \ {-3;1}	Lösung $x = 1/3$
$x / (x+1) + 4 / (x-1) = x / (x-1)$;	DB = R \ {-1;1}	Lösung $x = -2$

Aufgaben

a)	$2/x = (x-3)/3x - (x+5)/(4x)$	Lösung $x = 51$
b)	$1/x + (2x+5)/(x+6) = 2$	$x = 1$
c)	$2/(x-2) = 1/3$	$x = 8$
d)	$7/(x-4) - 2/(x-4) = 1$	$x = 9$
e)	$5/(x+1) = 3/(x+1) + 1/2$	$x = 3$
f)	$5(x-3)/(12x) - 2(x+1)/(15x) = 1$	$x = -83/43$

Komplexeres Beispiel

$(4x-5)/(6x-8) - (80x^2-96x+1/6)/(45x^2-80) = (11-10x)/(9x+12)$

DB = R \ {-4/3;4/3}

$(4x-5)/(2(3x-4)) - (80x^2-96x+1/6)/(5(3x-4)(3x+4)) = (11-10x)/(3(3x+4))$

Multiplikation mit dem Hauptnenner $30(3x - 4)(3x + 4)$ liefert:

$15(4x - 5)(3x + 4) - 6(80x^2 - 96x + 1/6) = 10(11 - 10x)(3x - 4)$

$(60x - 75)(3x + 4) - (480x^2 - 576x + 1) = (110 - 100x)(3x - 4)$

$180x^2 + 240x - 225x - 300 - 480x^2 + 576x - 1 = 330x - 440 - 300x^2 + 400x$

$-300x^2 + 591x - 301 = 730x - 440 - 300x^2$

$139 = 139x$

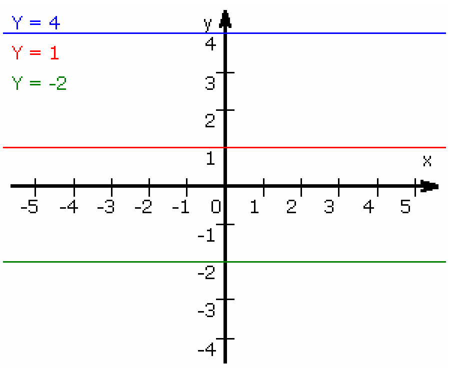
$x = 1$ Die Lösungsmenge ist damit L = {1}.

Aufgaben

a)	$(4x-9)/(x^2-3x-40) = 3/(x+5)$	Lösung $x = -15$
b)	$5/(x^2-9) - 3/(x^2-6x+9) = 0$	$x = 12$
c)	$(32x-11)/(15x-21) - 2(x+9)/(25x-35) - 16/(40x-56) = 1/3$	$x = -26/79$
d)	$15/(x+7) - 3/(x-3) = (x-4)/(x^2+4x-21)$	$x = 62/11$
e)	$(14-2x)/(x-1) - (9x+1)/(1-x) = 1$	$x = 2$
f)	$2/(x-1) + 3/(x-2) = 20/(4x-7)$	$x = 3$
g)	$1/(x-7) + 3((x+7) = (3x-5)/(x^2-49)$	$x = 9$
h)	$(9x-1)/(x^2-9x+20) = 5/(x-4) - 1/(x-5)$	$x = -4$

Bruchungleichungen

a)	$2 - 3x > -8 -8x$	Lösung $x > -1$
b)	$7 > 11 - (15 + x)$	$x > -11$
c)	$1 - 3(x-4) > 2(5-x)$	$x < 3$
d)	$(7y+3)/2 - (9y+3)/3 > 2(7y+3)/4$	$y < -1/3$
e)	$x / (x-2) > 0$	$x < 0$; $x > 2$
f)	$x / (x+2) < 0$	$-1 < x < 6$
g)	$(5-x)/(x+1)^2 < 0$	$x < 0$; $x > 3$
h)	$0 < (3x+9)/(2x-4)$	$-6 < x < -3$



Konstante Funktion, Eigenschaften

Funktionsgleichung $y = c$

Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	c
Quadrant	$c > 0$ ... I. und II.Quadrant $c < 0$ ... III. und IV.Quadrant
Periodizität	beliebige Perioden
Monotonie	gleichzeitig steigend und fallend aber nicht streng monoton
Symmetrien	symmetrisch zur y-Achse
Asymptoten	$f(x) = c$ ist eigene Asymptote
Ableitung	$f'(x) = 0$

Stammfunktion F(x) = c x + C
Nullstellen für c = 0 alle Abszissen andernfalls keine
Unstetigkeiten keine

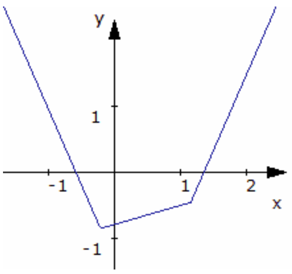
$$|x| = \begin{cases} x \text{ wenn } x \geq 0 \\ -x \text{ wenn } x < 0 \end{cases}$$

Betragsfunktion

Die Betragsfunktion ist jene Funktion, die jeder Zahl ihren Absolutbetrag zuordnet, d.h. $x \to |x|$.
Sie ist ein Beispiel für eine Funktion, deren einfachste Definition nicht als Termdarstellung, sondern mit Hilfe einer Fallunterscheidung geschieht:
Die Betragsfunktion ist stetig aber für x = 0 nicht differenzierbar.

Betragsfunktion $y = |x - a|$

Definitionsbereich	$\{ x \mid -\infty < x < \infty \}$		
Wertebereich	$\{ y \mid 0 \leq y < \infty \}$		
Quadrant	liegt im I. und II.Quadranten		
Periodizität	keine		
Monotonie	für $x \leq a$ streng monoton fallend	für $a \leq x$ streng monoton steigend	
Symmetrien	spiegelsymmetrische zur Achse x = a		
Nullstellen	x = a		
Stetigkeit	Funktion ist stetig		
Extrema	bei x = a, dort aber nicht differenzierbar		
Wendepunkte	keine	Polstellen	keine
Ableitung	$d/dx\ |x - a| = \mathrm{sgn}(x - a)$	Stammfunktion	$\int |x|\, dx = 1/2\ x\ |x| + c$



Die Verbindung zweier Betragsfunktionen
$$f(x) = y = a\,|x - b| + c\,|x - d| + e$$
zeigt in ihrem Funktionsverlauf Geradenabschnitte mit maximal zwei Knickpunkten. Die Funktion kann im Allgemeinen eine, zwei oder keine Nullstelle besitzen.

Nullstellen:
für $x \geq c$ und $x \geq d$: $x_0 = (ab + cd - e) / (a+c)$
für $x \geq c$ und $x \leq d$: $x_0 = (ab - cd - e) / (a-c)$
für $x \leq c$ und $x \geq d$: $x_0 = (ab - cd + e) / (a-c)$
für $x \leq c$ und $x \leq d$: $x_0 = (ab + cd + e) / (a+c)$

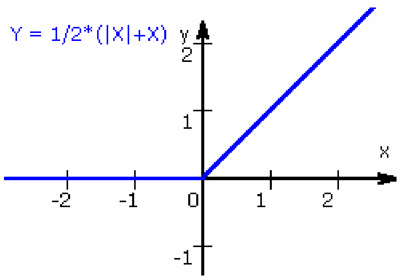
Ableitung $f'(x) = y' = a\,\mathrm{sgn}(x - b) + c\,\mathrm{sgn}(x - d)$ mit der Vorzeichenfunktion sgn(x).
Stammfunktion $F(x) = 1/2\ (a(x - b)|x - b| + c(x - d)|x - d|) + ex$

Betragsgleichung

Da der Betrag |a| einer reellen Zahl a definiert ist durch den Abstand zum Nullpunkt führt dies bei Betragsgleichungen immer zu einer Fallunterscheidung, je nachdem ob in den Betragszeichen eine positive Zahl steht, dann wird das Betragszeichen durch eine Klammer ersetzt, oder ob in den Betragszeichen eine negative Zahl steht, dann wir das Betragszeichen durch -( ) ersetzt.

Beispiel: Gesucht sind die Lösungen der Betragsgleichung $|4x - 1| = -2x + 4$
1.Fall: $4x - 1 \geq 0$, d.h. $x \geq 1$
In den Betragszeichen stehen für $x \geq 1$ nichtnegative Zahlen. d.h. die Betragszeichen können durch eine einfache Klammer ersetzt werden. $4x - 1 = -2x + 4$
Auflösen nach x ergibt x = 5/6, dass die Bedingung $x \geq 1$ erfüllt.

2.Fall: $4x - 1 < 0$, d.h. $x < 1$
In den Betragszeichen stehen für $x < 1$ nur negative Zahlen. Unter dieser Voraussetzung werden die Betragszeichen durch -( ) ersetzt. Es folgt $-(4x - 1) = -2x + 4$
Auflösen nach x liefert x = -3/2, dass die Bedingung $x < 1$ erfüllt.
Die Lösungsmenge ist damit L = {5/6 ; -3/2}.



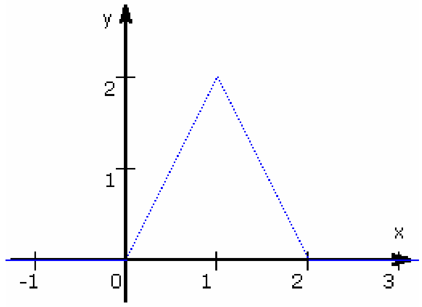
Knickfunktion

Die Knickfunktion ist der positive Ast der Funktion y = f(x) = x, für x < 0 wird die Funktion zu 0.
$$f(x) = 1/2\ (|x| + x) = x * H(x)$$
H(x) … Heaviside-Funktion

Maximumfunktion

Funktion zweier oder mehrerer Argumente, die den Funktionsargumenten das Argument mit dem größten Wert zuordnet. Sie kann für zwei Argumente mit Hilfe der Betragsfunktion geschrieben werden. $\max(x,y) = 1/2\ (x + y + |x - y|)$
Die Betragsfunktion kann umgekehrt mit Hilfe der Maximumfunktion definiert werden $|x| = \max(x,-x)$

Minimumfunktion
Funktion zweier oder mehrerer Argumente, die den Funktionsargumenten das Argument mit dem kleinsten Wert zuordnet. Sie kann analog zur Maximumfunktion für zwei Argumente mit Hilfe der Betragsfunktion geschrieben werden.
min (x,y) = 1/2 (x + y - |x - y|)

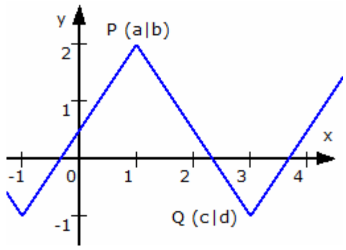


Dreiecksfunktion
Funktion mit einem gleichschenkligen Dreieck der Höhe h und Breite 2a mit der Spitze über dem Punkt x_0 mit a,h >0 als Kurvenbild.
Definierbar mit Hilfe der Heaviside-Funktion H(x).

Definitionsgleichung

$$f(x) = h \cdot (1 - |x - x_0| / a) \cdot H(x - (x_0 - a)) \cdot H((x_0 + a) - x)$$

Für $x \leq x_0 - a$ und $x \geq x_0 + a$ hat die Funktion den Funktionswert 0.
Für $x_0 - a < x \leq x_0$ wird $f(x) = h/a\ (x - x_0 + a)$
Für $x_0 \leq x < x_0 + a$ wird $f(x) = h/a\ (x_0 - x + a)$



Sägezahn-Funktion, Zick-Zack-Funktion
Funktionen in Form eines Sägezahns oder einer Zick-Zack-Linie können durch stückweise Definitionen konstruiert werden. Darüber hinaus existiert auch ein geschlossener analytischer Ausdruck.
Sind P(a|b) und Q(c|d) zwei benachbarte Spitzen der Sägezahnkurve dann gilt für die Funktion (nach Matroid 2003):

$$f(x) = (d-b)/\pi \arcsin(\cos(\pi\ (x-c)/(c-a))) + (d+b)/2$$

Gilt bd ≤ 0 und sind b, d verschieden, so existiert eine Nullstelle bei

$$x_0 = (ab-bc)/(d-b)$$

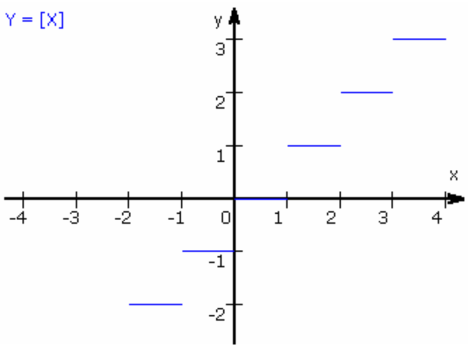
Weitere Nullstellen folgen mit der Periode 2(a-c).
Für den Sonderfall a = b = 0 und c = d = π wird dann $f(x) = \arcsin(\cos(x - \pi)) + \pi/2$
Für den Sonderfall a = b = 1 und c = d = -1 wird $f(x) = 2/\pi \arcsin(\cos(\pi\ (x+3)/2))$
Für den Sonderfall a = -π/2, b = -1, c = π/2, d = 1 ergibt sich die klassische Sägezahnkurve

$$f(x) = 2/\pi \arcsin(\sin x)$$

Als Ableitung der Sägezahn-Funktion ergibt sich sofort die allgemeine Rechteck-Funktion

$$f'(x) = (b-d)/(a-c)\ \mathrm{sgn}(\sin(\pi/(a-c)\ (x-c)))$$

Gaußklammer-Funktion, Abrundungsfunktion, Restfunktion



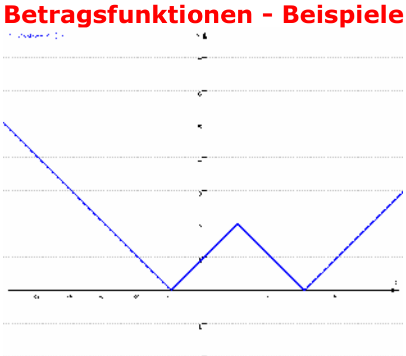
Definition f(x) = [x] = int(x)

Die Gaußklammer [x] oder Int(x) (engl. integer part function) entspricht der Abbildung jeder reellen Zahl x auf die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Mitunter auch als Integer-Funktion bezeichnet.
Verwendung für alle Arten von Rundungsoperationen und zur Einordnung von kontinuierlichen Größen in diskrete Gitter.
Die Funktion ist stückweise stetig, besitzt aber auch unendlich viele Sprungstellen. Ein Faktor im Argument verkürzt die Stufenlänge um diesen Faktor.

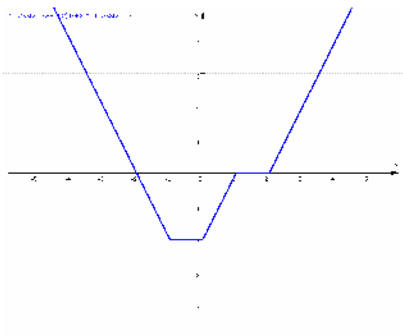
Die Restfunktion frac(x) (engl. fractional part) ist die Differenz zwischen x und [x].
Es gilt [x] + frac(x) = x, sowie [x + n] = [x] + n für ganze Zahlen n.

Rundungsfunktion
Definition f(x) = [x + 1/2] = Round(X)
Funktion springt statt bei ±0.5, ±1.5, ±2.5, …
Die Funktion f(x) = [x + 1/2] - x hat damit die Form einer Sägezahnkurve.

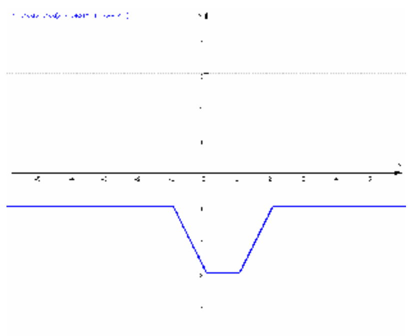
Betragsfunktionen - Beispiele



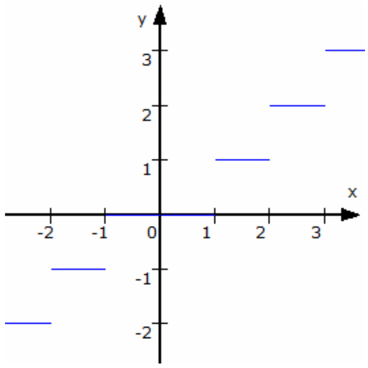
Y = ||X – 1| - 2|



Y = |X|+|X-2|+|X+1|-|X-1|-4



Y = |X|-|X-2|-|X+1|+|X-1|-1



Alternative Gaußklammer-Funktion

Die alternative Gaußklammer-Fuktion beschreibt die Vorkommazahl der dezimalen Darstellung:
Definition Ip(x) = ([|x|])·sgn(x)

Alternative Restfunktion

Diese Funktion ist die Komplementärfunktion zur alternativen Gaußklammer-Funktion:

Fp(x) = x - ([|x|])·sgn(x)

Bei beiden Funktionen liegt der Unterschied zur Gaußklammer-Funktion und Restfunktion in der Behandlung negativer Zahlen. Zum Beispiel ist

[-3,14] = -4 aber Ip(-3,14) = -3

Mehrere Programmiersprachen benutzen für INT(X) die alternative Gaußklammer-Funktion.

Modulo-Funktion

Die Funktion zweier natürlicher Zahlen m und n berechnet den Rest bei der Division von m mit n. Es ist

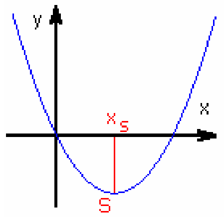
m (mod n) = m frac(m/n) = m (m/n - [m/n])

Quadratische Funktionen

Allgemeine Form: $y = ax^2 + bx + c$; $(a \neq 0)$

DB: { x | - ∞ < x < ∞ } Parabel mit Scheitelpunkt

S(-b/(2a) ; $(4ac-b^2)/(4a)$) Polynom 2.Grades



Das Bild der Funktion (a≠0) ist eine Parabel, mit einer zur y-Achse parallelen Parabelachse. Quadratische Funktionen haben den Grad 2 und höchstens zwei Nullstellen.

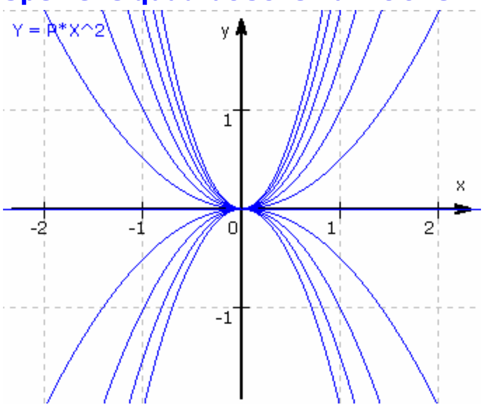
Der Graph der Funktion schneidet die y-Achse im Punkt B(0 ; c). Ist a > 0, so hat die Funktion an der Stelle x_1 = -b/(2a) ein Minimum, für a < 0 ein Maximum.

Spezielle Funktionen	$y = x^2$ (Normalparabel)	WB: y | 0 ≤ y < ∞	Scheitel S(0;0)
	$y = ax^2 + c$	WB: { y | c ≤ y < ∞ für a>0 }	Scheitel S(0;c)
	$y = (x + d)^2 + e$	WB: { y | e ≤ y < ∞ }	Scheitel S(-d;e)
Normalform	$y = x^2 + px + q$	WB: { y | $-p^2/4+q$ ≤ y < ∞ }	
	Scheitel S(-p/2;$-p^2/4+q$)		

Eigenschaften quadratischer Funktionen y = ax² + bx + c ; (a,b,c ∈ R; a ≠ 0)

Definitionsbereich	- ∞ < x < ∞
Wertebereich	für a > 0: -Da < y < ∞ ; für a > 0: -∞ < y < -Da
Diskriminante	$D = b^2 - 4ac$
Periodizität	keine
Monotonie	a > 0, x > -b/(2a) : streng monoton steigend
	a > 0, x < -b/(2a) : streng monoton fallend
	a < 0, x < -b/(2a) : streng monoton steigend
	a < 0, x > -b/(2a) : streng monoton fallend
Symmetrie	Spiegelsymmetrie zu x = -b/(2a)
Verhalten im Unendlichen	a > 0 : f(x) → ∞ für x → ±∞ ; a < 0 : f(x) → -∞ für x → ±∞
Nullstellen	0, 1 oder 2
	D < 0: keine reellen Nullstellen
	D = 0: eine reelle Nullstelle x = -b/(2a)
	D > 0: zwei reellen Nullstellen $x_{1,2}$ = -b/(2a) ±√D
Sprungstellen	keine
Extrema	a > 0: Minimum bei x = -b/(2a) ; f(x) = -Da ;
	a < 0: Maximum bei x = -b/(2a) ; f(x) = -Da
Wendepunkte	keine
Ableitung	y' = 2ax + b ; Gerade
Stammfunktion	$F(x) = \int ax^2 + bx + c\,dx = a/3\,x^3 + b/2\,x^2 + cx + C$
Umkehrfunktion	$y = -b/(2a) \pm \sqrt{x/a + b^2/(4a^2) - c/a}$; Wurzelfunktion
	für x > -b/(2a) gilt das Pluszeichen, für x < -b/(2a) das Minuszeichen
Öffnungsrichtung	a bestimmt die Öffnung der Parabel
	a > 0 … Parabel nach oben geöffnet
	a < 0 … Parabel nach unten geöffnet
Quadranten	a > 0 … 1.,2. evtl. 3. und 4. a < 0 … 3.,4. evtl. 1. und 2.
reziproke Funktion	$1/f(x) = 1/(ax^2+bx+c)$; quadratische Hyperbel
quadratische Funktion einer komplexen Zahl	$a(x+yi)^2 + b(x+yi) + c = a(x^2-y^2)+bx+c + y(2ax+b)i$

Spezielle quadratische Funktionen

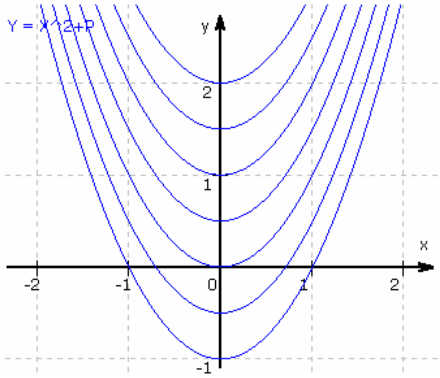


In der Funktionsgleichung $y = a\,x^2 + c$ bestimmt der Parameter a den Anstieg und Richtung der Parabel und der Parameter c die Verschiebung der Funktion längs der y-Achse.
In der oberen Darstellung sind quadratische Funktionen für verschiedene a und c = 0 eingezeichnet. Für negative a sind die Parabeln nach unten offen.

$y = a\,x^2$

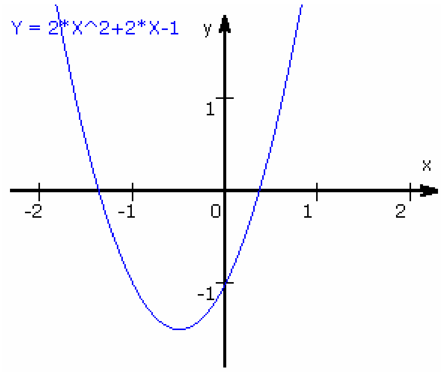
In der unteren Darstellung sind quadratische Funktionen mit konstantem a = 1 für verschiedene c eingezeichnet.

$y = x^2 + c$



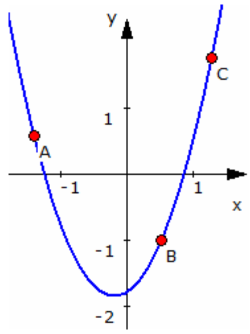
Darstellung der quadratischen Funktion

Der Graph der Funktion $y = a\,x^2 + b\,x + c$
ist eine um b / (2a) nach links und um b² / (4a) - c = a * D nach unten verschobene Parabel.



a bestimmt die Öffnung der Parabel. Für a > 0 ist die Parabel nach oben geöffnet, für a < 0 ist sie nach unten geöffnet. Ist |a| groß, wird die Parabel eng, ist |a| klein, wird die Parabel weit.

Parabel durch 3 Punkte



Eine quadratische Funktion, Parabel, wird im Allgemeinen durch auf 3 ihr gegebenen Punkte eindeutig beschrieben.
Im allgemeinen Fall seien die Punkte $A(x_1|y_1)$, $B(x_2|y_2)$ und $C(x_3|y_3)$ gegeben.
Setzt man diese Koordinaten in die allgemeine Form

$$y = ax^2 + bx + c$$

ein, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$x_1^2\,a + x_1\,b + c = y_1$$
$$x_2^2\,a + x_2\,b + c = y_2$$
$$x_3^2\,a + x_3\,b + c = y_3$$

Nach aufwendigen Umformungen ergeben sich die Lösungen

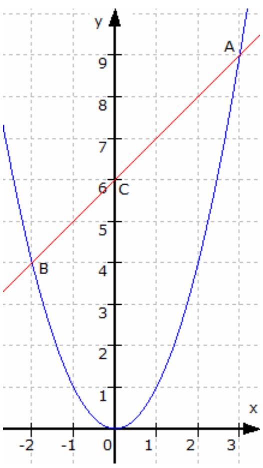
$$a = (x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2))/((x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_3-x_2))$$
$$b = (x_1^2(y_2-y_3)+x_2^2(y_3-y_1)+x_3^2(y_1-y_2))/((x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3))$$
$$c = (x_1^2(x_2y_3-x_3y_2)+x_1(x_3^2y_2-x_2^2y_3)+x_2x_3y_1(x_2-x_3))/((x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3))$$

Mit diesen Koeffizienten a, b und c erhält man für die x-Koordinate des Scheitelpunktes der gesuchten quadratischen Funktion

$$x_S = (x_2^2(y_3-y_1) - x_1^2(y_3-y_2) - x_3^2(y_2-y_1))/(2(x_2(y_3-y_1) - x_1(y_3-y_2) - x_3(y_2-y_1)))$$

Liegen die drei Punkte A, B, C äquidistant, d.h. der Abstand d der x-Werte ist konstant, so wird x1+d = x2 =x3-d und vereinfacht

$$x_S = x_2 + d/2\cdot(y_3 - y_1)/(2y_2 - y_1 - y_3)$$



Parabelrechnen

Durch die spezielle Struktur der quadratischen Normalparabel

$$y = x^2$$

existiert eine Methode zur grafischen Multiplikation von Zahlen an der Parabel.
Soll das Produkt c = a b ermittelt werden, so wählt man den Punkt A (a ; a²) auf der Normalparabel sowie den Punkt B (-b ; b²).
Verbindet man beide Punkte mit einer Geraden, so schneidet die Gerade die Ordinatenachse im Punkt C (0 ; c), d.h. am Schnittpunkt kann das Produkt direkt abgelesen werden.

Nachweis:
Die Verbindungsgerade von A und B hat den Anstieg

$$m = \Delta y / \Delta x = (a^2 - b^2)/(a - (-b)) = a - b$$

Wird der Punkt A (a ; a²) in die Geradengleichung $y = (a-b)\,x + n$
eingesetzt, so wird für den Ordinatenabschnitt n $n = a^2 - (a-b)\,a = a\,b$
Prinzipiell ist an der Normalparabel auch die Division c/b möglich. Dazu verbindet man den Punkt B (-b ; b²) mit C (0 ; c) und liest am 2.Schnittpunkt der Geraden mit der Parabel die Abszisse des Schnittpunktes als Ergebnis ab.

Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form $0 = ax^2 + bx + c$; $(a \neq 0)$
Normalform $0 = x^2 + px + q$
Lösungen $x_1 = -p/2 + \sqrt{[p^2/4 - q]}$; p-q-Formel
$x_2 = -p/2 - \sqrt{[p^2/4 - q]}$
$x_1 = -b/(2a) + \sqrt{[b^2 - 4ac]}/(2a)$
$x_2 = -b/(2a) - \sqrt{[b^2 - 4ac]}/(2a)$

Diskriminante $D = p^2/4 - q = b^2 - 4ac$
für $D>0$ existieren zwei reelle Lösungen
für $D=0$ existiert eine reelle Doppellösung
für $D<0$ existieren keine reellen Lösungen existieren zwei zueinander konjugiert komplexe Lösungen

Die Lösungsformel $x_{1,2} = -b/(2a) \pm \sqrt{[b^2 - 4ac]}/(2a)$ wird im Volksmund auch "Mitternachtsformel" genannt.

Linearfaktorenzerlegung

x_1, x_2 sind Lösungen der Gleichung $0 = x^2 + px + q \Leftrightarrow x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Quadratische Ergänzung

Für jeden Term $ax^2 + bx + c$ gilt:
$ax^2 + bx + c = a(x + b/(2a))^2 + (c - b^2/(4a))$
$ax^2 + bx + c = a(x + B)^2 + C$ mit $B = b/(2a)$ und $C = c - b^2/(4a)$

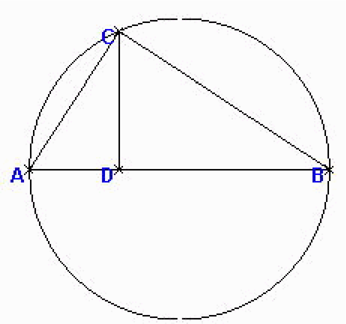
Wurzelsatz des Vieta

x_1, x_2 sind Lösungen der Gleichung $0 = x^2 + px + q$
$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -p = -b/a$ und $x_1 * x_2 = q = c/a$

Weiterhin gelten für die Lösungen x_1, x_2 der allgemeinen quadratischen Gleichung: $a x^2 + b x + c = 0$
$x_1 + x_2 - b / a$ $x_1 * x_2 = c / a$
$x_1^2 + x_2^2 = (b^2 - 2 ac) / c^2$ $x_1^3 + x_2^3 = -(b^3 - 3 abc) / c^3$
$x_1^4 + x_2^4 = (b^4 - 4 ab^2c + 2 a^2c^2) / c^4$

Konstruktion quadratischer Wurzeln

Die Lösungen (Wurzeln) einer quadratischen Gleichung
$x^2 - p x + q = 0$ bzw. $x^2 - p x - q = 0$ bzw.
können mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.



1.Fall $x^2 - p x + q = 0$

1. Zeichne eine Strecke AB der Länge p und einen Kreis K mit AB als Durchmesser
2. Konstruiere eine Gerade g parallel zu AB im Abstand q von AB
3. Der Punkt D sei einer der Schnittpunkte von g mit dem Kreis K. Existiert kein Schnittpunkt, so hat die Gleichung keine reellen Wurzeln.
4. Zeichne das Lot von D auf AB
5. Die Längen der Strecken AD und DB sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung.

Begründung: Die Konstruktion folgt unmittelbar aus dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck.

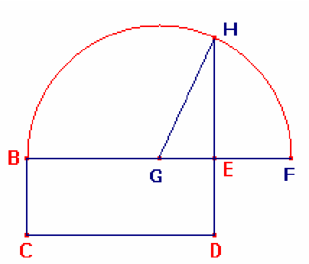
2.Fall $x^2 - p x - q = 0$

1. Konstruiere ein Dreieck CDE mit CD = q, DE = p/2 und einem rechten Winkel in D. Zeichne die Gerade durch D und E.
2. Zeichne einen Kreis K um E mit dem Radius EC. Die Punkte A und B sind die Schnittpunkte von K mit der Geraden durch D und E.
3. Die Länge von AD entspricht dem absoluten Betrag der 1.Wurzel, DB dem Betrag der zweiten.

Geschichte der quadratischen Gleichung

Im Berlin Papyrus (ca. 2160-1700 v.Chr.) findet sich die erste Lösung einer quadratischen Gleichung
$x^2 + y^2 = 100$ $y = 3/4\, x$
Euklid löste quadratische Gleichungen mittels geometrischer Methoden. In "Data" finden sich drei derartige Lösungen. Diophant löst in seinem Werk "Arithmetica" quadratische Gleichungen durch Angabe von genau einer Wurzellösung, die allerdings stets positiv sein musste.
500 v.Chr. wurden von verschiedenen indischen Mathematikern Lösungen gegeben, die u.a. zur Konstruktion von Altaren genutzt wurden.
Aryabhata (um 500) veröffentlichte als erster eine Regel zur Angabe beider Lösungen der Gleichungen.
Brahmagupta (um 628) verwendete wieder nur eine Lösung.
Die Lösungsformel in der modernen Form, allerdings weiterhin unter Verwendung geometrischer Methoden, wurde erstmals von Mahavira (um 800) angegeben. Diese Formel wurde durch Sridhara (um 1025) und die persischen Mathematiker al-Hwarizmi (nach 825) und Omar Khayyam (um 1100) ebenfalls

verwendet. Die erste rein analytische Lösungsmethode, ohne Rückgriff auf geometrische Überlegungen, wurde von Vieta gegeben.



Quadratische Gleichung bei Euklid

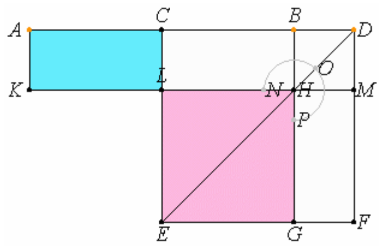
Euklid löst im 2.Buch der "Elemente" die quadratische Gleichung $x^2 = a * b$ mit geometrischen Mitteln. "Elemente" Buch II: § 14 (A. 2):

Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten.

Die gegebene geradlinige Figur sei A. Man soll ein der geradlinigen Figur A gleiches Quadrat errichten.
Man errichte ein der geradlinigen Figur A gleiches rechtwinkliges Parallelogramm BD (I, 45). Wenn hier BE = ED, dann wäre die Aufgabe schon ausgeführt; denn dann hat man der geradlinigen Figur A gleiches Quadrat errichtet, nämlich BD.
Anderenfalls ist eine der Strecken BE, ED größer. BE sei die größere, man verlängere sie nach F, mache EF = ED, halbiere BF in G, zeichne mit G als Mittelpunkt und einer der Strecken GB, GF als Abstand den Halbkreis BHF, verlängere DE nach H und ziehe GH. Da hier die Strecke BF sowohl in gleiche Abschnitte geteilt ist in G, als auch in ungleiche in E, so sind $BE * EF + EG^2 = GF^2$ (II, 5). Aber GF = GH (I, Def.15): also sind $BE * EF + GE^2 = GH^2$.
Aber $GH^2 = HE^2 + EG^2$ (I, 47); also sind $BE * EF + GE^2 = HE^2 + EG^2$. Man nehme das gemeinsame GE^2 weg; dann ist der Rest $BE * EF$ EH^2. $BE * EF$ ist aber BD; denn EF = ED, also ist Pgm. BD = HE^2. BD ist aber der geradlinigen Figur A gleich. Also ist auch die geradlinige Figur A dem Quadrat gleich, das man über EF zu zeichnen hätte. ...
Im Buch VI, § 28 konstruiert Euklid ein Parallelogramm AH, das zu einer gegebenen Figur X den gleichen Flächeninhalt hat und zusätzlich zu einer weiteren Figur Y ähnlich ist.

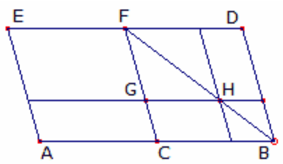
"Elemente" II. Buch: § 6 (L. 6):

Halbiert man eine Strecke und setzt ihr irgendeine Strecke gerade an, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke mit Verlängerung und der Verlängerung zusammen mit dem Quadrat über der Hälfte dem Quadrat über der aus der Hälfte und der Verlängerung zusammengesetzten Strecke gleich.



Eine Strecke AB halbiere man im Punkte C und setze ihr eine Strecke BD gerade an. Ich behaupte, dass $AD \cdot DB + CB^2 = CD^2$.
Man zeichne über CD das Quadrat CEFD, ziehe DE, ferner durch Punkt B BG || EC oder DF, durch Punkt H KM || AB oder EF, schließlich durch A AK CL oder DM. Da hier AC = CB, ist auch Parallelogramm AL = CH (I, 36). Andererseits ist Parallelogramm CH = HF (I, 43); also ist auch Parallelogramm AL = HF. Man füge CM beiderseits hinzu; dann ist das ganze Parallelogramm AM = Gnomon NOP. AM ist aber $AD \cdot DB$; denn DM = DB; also ist Gnomon NOP = $AD \cdot DB$. Man füge LG = BC^2 beiderseits hinzu; dann sind $AD \cdot DB + CB^2$ = Gnomon NOP + LG. Gnomon NOP und LG bilden aber zusammen das Quadrat CEFD, d.h. CD^2. Also sind $AD \cdot DB + CB^2 = CD^2$. – S.
Anmerkung: Wenn $a = 2b$, $y = a + x$, $z = b + x$, ist $xy + b^2 = z^2$ und damit die zu lösenden Gleichungen

$$(x + a/2)^2 = (a/2)^2 + x (a + x) \qquad \text{und} \quad (y - a/2)^2 = (a/2)^2 + y (y - a)$$



Quadratische Gleichung bei Euklid

Im Buch VI, § 28 konstruiert Euklid ein Parallelogramm AH, das zu einer gegebenen Figur X den gleichen Flächeninhalt hat und zusätzlich zu einer weiteren Figur Y ähnlich ist.
Setzt man nun AB = a, GC = x, BC / FC = p und Fläche des Parallelogramms AH = X = c^2, so ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\mathbf{ax - px^2 = c^2}$$

Umwandlung ergibt $\quad px^2 - ax = - c^2$
und Addition von $a^2/(4p)$, dem Flächeninhalt des Parallelogramms BF

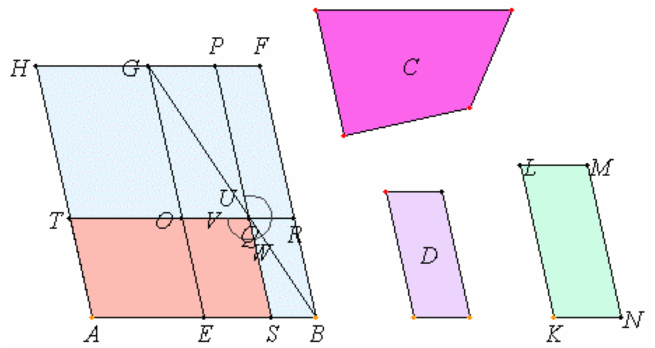
$$px^2 - ax + a^2/4p = a^2/4p - c^2 \qquad (x - a /(2p))^2 = a^2 / 4p^2 - c^2 / p$$

Nach VI §25 wird $\quad FG = \sqrt{(a^2 / (4p^2) - c^2/p)} \qquad FG = a/(2p) - x$
und somit $\quad GC = x = a/(2p) - \sqrt{(a^2 / (4p^2) - c^2/p)}$
Durch die Konstruktion des Parallelogramms AH, eines Parallelogramms mit dem Seitenverhältnis BC : FC und der anschließenden Ermittlung des Punktes G, gelingt es somit Euklid mit GC eine Lösung der quadratischen Gleichung $\quad px^2 - ax + c^2 = 0$
zu ermitteln. Allerdings ist anzumerken, dass Euklid nirgends explizit dies so ausführt. Ebenso wird die Bedingung $a^2/(4p) \geq c^2$ nicht erwähnt.

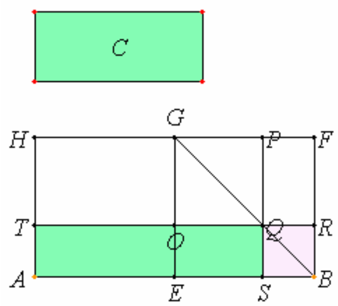
"Elemente" Buch VI: § 28 (A. 8):

An eine gegebene Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm so anzulegen, dass ein einem gegebenen ähnliches Parallelogramm fehlt; hierbei darf die

gegebene geradlinige Figur nicht größer sein als das dem fehlenden ähnliche über der Hälfte der Strecke zu zeichnende Parallelogramm.



Die gegebene Strecke sei AB; und die gegebene geradlinige Figur, der das an AB anzulegende Parallelogramm gleich werden soll, sei C, nicht größer als das dem fehlenden ähnliche über der Hälfte von AB zu zeichnende Parallelogramm (VI, 27); und das Parallelogramm, dem das fehlende ähnlich werden soll, sei D. Man soll an die gegebene Strecke AB ein der gegebenen geradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm so anlegen, dass ein Parallelogramm ~ D fehlt.
Man halbiere AB im Punkte E, zeichne über EB das D ähnliche und ähnlich gelegte Parallelogramm EBFG (VI, 18) und vervollständige das Parallelogramm AG. Ist hier AG = C, so hätte man das Verlangte schon ausgeführt; man hat nämlich das der gegebenen geradlinigen Figur C gleiche Parallelogramm AG so an die gegebene Strecke AB angelegt, dass Parallelogramm GB ~ D fehlt. Anderenfalls soll Parallelogramm HE > C sein. Nun ist HE = GB (I, 36), also GB > C. Dann errichte man ein D ähnliches und ähnlich gelegtes Parallelogramm KLMN, das dem Unterschied, um den GB größer als C ist (I, 45), gleich ist (VI, 25). Aber D ~ GB, also ist auch KM ~ GB (VI, 21). KL möge hierbei GE entsprechen, und LM GF. Da GB = C + KM, so ist Parallelogramm GB > KM; also ist (VI, 22, Hilfssatz) GE > KL und GF > LM. Man trage GO = KL und GP = LM ab und vervollständige das Parallelogramm OGPQ; Parallelogramm GQ ist dann = und ~ KM (I, 29, 34; VI, 14); also ist auch GQ ~ GB (VI, 21); also liegt GQ mit GB um dieselbe Diagonale (VI, 26). Ihre Diagonale sei GQB, und man zeichne die Figur fertig.



Da BG = C + KM und hierin GQ = KM, so ist der Rest, Gnomon UWV, den Rest C gleich (Axiom 3). Nun ist PR = OS (I, 43); daher füge man QB beiderseits hinzu; dann ist das ganze Parallelogramm PB dem ganzen OB gleich. Aber Parallelogramm OB = TE, da die Seite AE der Seite EB gleich ist (I, 36); also ist auch TE = PB. Man füge OS beiderseits hinzu; das ganze Parallelogramm TS ist dann dem ganzen Gnomon VWU gleich. Wie oben bewiesen, ist aber Gnomon VWU = C. Also ist auch TS = C. Man hat also an die gegebene Strecke AB ein der gegebenen geradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm, nämlich ST, so angelegt, dass ein Parallelogramm QB fehlt, das D ähnlich ist (VI,24) weil QB ~ GQ – dies hatte man ausführen sollen.

Aufgaben zur quadratischen Gleichung

Aufgabe 1: Lösen von Gleichungen ohne Lösungsformel

a) $x^2 = 0{,}81$ b) $x^2 = 72$c) $x^2 - 867 = 0$
d) $x^2 = 125$ e) $9x^2 = 25$ f) $x^2 - 3x = 0$
g) $5x^2 + 12x = 0$ h) $x^2 = 5x$i) $2x^2 + 6x = 0$
Lösung: a) ±0,9 ; b) ±6 √2 ; c) ±17 ; d) ±5 √5 ; e) ±5/3 ; f) 0; 3 ; g) 0; -12/5 ; h) 0; 5 ; i) 0; -3

Aufgabe 2: Lösen von Gleichungen durch Zerlegung in Faktoren

a) $x^2 + 15x + 54 = 0$ b) $x^2 + 15x - 54 = 0$ c) $x^2 - 15x + 54 = 0$
d) $x^2 - 15x - 54 = 0$ e) $x^2 - 34x + 64 = 0$ f) $x^2 - 16x + 64 = 0$
g) $x^2 + 12x - 64 = 0$ h) $x^2 + 20x + 64 = 0$ i) $x^2 - 27x - 90 = 0$
j) $x^2 - 29x + 100 = 0$ k) $x^2 + 2y - 80 = 0$ l) $x^2 - 8x - 9 = 0$
m) $x^2 - 20x + 51 = 0$ n) $x^2 - 8x - 105 = 0$ o) $x^2 - 26x + 144 = 0$
p) $-x^2 + 16x + 36 = 0$ q) $x^2 + 4x = 45$ r) $x^2 + 4x + 3 = 0$
s) $x^2 + 4x - 140 = 0$ t) $x^2 - x - 12 = 0$
Lösung: a) -6; -9 ; b) -18; -3 ; c) 6; 9 ; d) -3; 18 ; e) 2; 32 ; f) 8 ; g) -16; 4 ; h) -16; -4 ; i) -3; 30 ; j) 4; 25 ; k) -10; 8 ; l) -1; 9 ; m) 3; 17 ; n) -7; 15 ; o) 8; 18 ; p) -2; 18 ; q) -9; 5 ; r) -3; -1 ; s) -14; 10 ; t) -3; 4

Aufgabe 3: Lösen mit Lösungsformel

a) $8x^2 - 6x + 1 = 0$ b) $5x^2 + 2x - 135 = 0$ c) $x^2 - 6x + 18 = 0$
d) $3x^2 - x = 24$ e) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ f) $x^2 - 34/15\, x + 1 = 0$
g) $x^2 - 4x + 29 = 0$ h) $35 - 22x + 3x^2 = 0$ i) $7x^2 + 25x - 12 = 0$
j) $-14x^2 + 71x + 33 = 0$ k) $x^2 + 6x + 25 = 0$ l) $x^2 -13/6\, x + 1 = 0$
m) $7x^2 + x - 350 = 0$ n) $x^2 + x - 1 = 0$
Lösung: a) 1/2 ; 1/4 ; b) -5,4 ; 5 ; c) keine Lösung ; d) -8/3 ; 3 ; e) -1/2 ; 2 ; f) 3/5 ; 5/3 ; g) keine Lösung ; h) 7/3 ; 5 ; i) -4 ; 3/7 ; j) -3/7 ; 11/2 ; k) keine Lösung ; l) ; 2/3 ; 3/2 ; m) -50/7; 7 ; n) (-1 ± √5)/2

Aufgaben zur quadratischen Gleichung, quadratische Bruchgleichungen

Aufgabe 4

a)	$2x^2 - (x+2)(x-2) = 13(4-x)$	b)	$(x+5)^2 - (2x-1)(3x+5) = (x+3)^2 - (x+1)^2$
c)	$2(3x+1)^2 - 32(3x+1) + 126 = 0$	d)	$((x-5)/6)^2 + ((x-2)/3)^2 = ((x-1)/2)^2$
e)	$(2x^2+3x-8)/(x-2) = x + 5 + 6/(x-2)$	f)	$(x+11)/(x+3) = (2x+1)/(x+5)$
g)	$x/(2x-4) - 4/(x+2) = 1/(x-2)$	h)	$(x-3)/5 - 5/(x-3) = 8-x$
i)	$6(3x-2)/(3x-5) = 12x - 13$	j)	$5/(x+1) + 6/(x+2) = 14/(x+3)$
k)	$(2x-11)/(x-3) + (x-2)/6 + (x-8)/2 = 0$		

Lösungen: a) -16; 3 ; b) -11/5; 2 ; c) 2; 8/3 ; d) -4 ; 2 ; e) 2 ; f) -4 ; 13 ; g) 6 ; h) 8 ; 13/6 ; i) 7/3 ; 11/12 ; j) -5/3 ; 4 ; k) 1/2 ; 6

Aufgabe 5: Parametergleichungen

a)	$x^2 - 2ax + 6ab = 9b^2$	b)	$x^2 + x + a = a^2$
c)	$x^2 - b^2 = a(2x - a)$	d)	$(a^2-b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0$

Lösungen: a) 2a-3b ; 3b ; b) a ; 1-a ; c) a+b ; a-b ; d) 1/(a-b) ; 1/(a+b)

Aufgabe 6

a)	$(a+b)/(a-b)\, x^2 = a^2-b^2$	b)	$x/(x+a) + x/(x-a) = 1$
c)	$a/x + x/a = x/(ab^2) + ab^2/x$	d)	$a/b\, x^2 = a^3b + 2a^2b + ab$
e)	$2x^2 + 4x + 5 = 0$	f)	$3x^2 - 22x + 35 = 0$
g)	$(x+11)/(x+3) = (2x+1)/(x+5)$	h)	$(7x-5)/(10x-3) = (5x-3)/(6x+1)$
i)	$(5x-1)/9 + (3x-1)/5 = 2/x + x - 1$	j)	$(5x-7)/9 + 14/(2x-3) = x-1$
k)	$7/(2x-3) + 5/(x-1) = 12$	l)	$(7-x)/(11-2x) + (4x-5)/(3x-1) = 2$
m)	$2/(x-2) + 2/(x-3) = (x^2-2x-1)/(x^2-5x-6)$	n)	$(x^3-10x^2+1)/(x^2-6x+9) = x-3$
o)	$21/x - 10/(x-2) - 4/(x-3) = 0$	p)	$b^2x^2 - 2bcx + 2abx - 4ac = 0$
q)	$cx^2 - 2c^2x + x = 0$	r)	$(x-a)/b - 2 = a/(b-x)$

Lösungen: a) a-b , b-a ; b) -ai , ai ; c) -ab, ab ; d) -b(a+1) , b(a+1) ; e) $-1+i/2\,\sqrt{6}$, $-1-i/2\,\sqrt{6}$; f) 7/3 , 5
g) -4 , 13 ; h) 1 , 7/4 ; i) -45/7 , 2 ; j) -3 , 5 ; k) 29/24 , 2 ; l) -10 , 4
m) keine Lösung ; n) -28 , 1 ; o) 18/7 , 7 ; p) -2a/b , 2c/b ; q) 0 , 2c-1/c ; r) a+b , 2b

Beispielaufgaben zur quadratischen Gleichung

Aufgabe 1

Multipliziert man den dritten Teil einer natürlichen Zahl mit ihrem fünften Teil, so erhält man 15. Wie heißt die Zahl?

Lösung: $x/3 * x/5 = 15 \rightarrow x^2/15 = 15 \rightarrow x = 15$

Aufgabe 2

Multipliziert man das Vierfache einer natürlichen Zahl mit ihrem dritten Teil, so erhält man 48. Wie heißt die Zahl?

Lösung: $4x * x/3 = 48 \rightarrow x = 6$

Aufgabe 3

Dividiert man 54 durch eine natürliche Zahl, so erhält man das Sechsfache der Zahl. Wie heißt die Zahl?

Lösung: $54/x = 6x \rightarrow 9 = x^2 \rightarrow x = 3$

Aufgabe 4

Dividiert man eine natürliche Zahl durch 16, so erhält man ihren Kehrwert. Wie heißt die Zahl?

Lösung: $x/16 = 1/x \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4$

Aufgabe 5

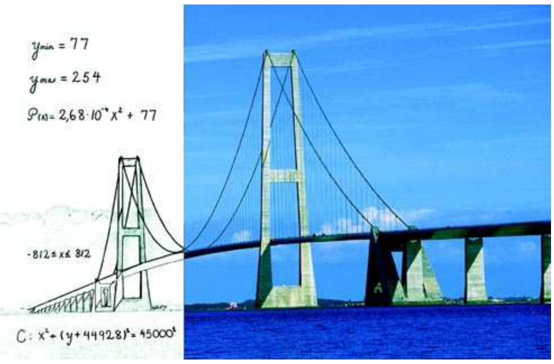
Zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen haben ein Produkt, das um 9 größer ist als die kleinere der beiden Zahlen. Wie heißen die beiden Zahlen? Welche Lösung kommt hinzu, wenn es sich um ganze Zahlen handelt?

Lösung: die kleinere Zahl sei x, die größere Zahl (x+1)

$x*(x+1) = x + 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3$, d.h. 3 und 4 sind die gesuchten Zahlen

als Lösung im Bereich der ganzen Zahlen, kommen -3 und -2 hinzu

Anlässlich des "Jahres der Mathematik 2000" wurde die Bedeutung mathematischer Forschung von dem dänischen Mathematiker Vagn Lundsgaard Hansen in einem Plakatmotiv veranschaulicht: Zu sehen ist die 1624 Meter lange Brücke über den Großen Belt, die damals längste Hängebrücke Europas. Sie verbindet die dänischen Inseln Fünen und Seeland. Näherungsweise beschreiben die Seile der Brücke eine Parabel.

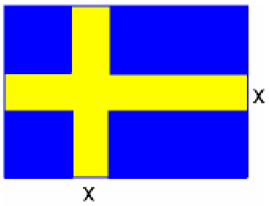


Russische Testaufgabe Klasse 10

При каких значениях параметра а график функции y =

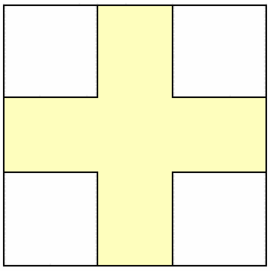
$-2x^2 + 3x + a$ лежит в нижней координатной полуплоскости?
Lösung: a $(-\infty, -9/8)$

Aufgabe 6
Der achte Teil einer Affenhorde - quadriert - ging in eine Höhle. Nur zwölf Affen zogen weiter. Wie groß war die Herde?
Lösung: 48 und 16



Beispielaufgaben zur quadratischen Gleichung
1. Zwei Quadrate haben zusammen den Flächeninhalt 100. Die Seite des zweiten Quadrats ist ¾ der Seite des ersten. Berechne die Seitenlängen! (Ägypten)
Lösung: 8, 6
2. Wenn bei einem Turnier mit n Teilnehmern jeder gegen jeden spielt, gibt es $n \cdot (n-1)/2$ Spiele. Bei einem Schachturnier wurden 28 Partien gespielt. Wie viele Spieler nahmen teil? Lösung: 8
3. Ein n-Eck hat $n \cdot (n-3)/2$ Diagonalen. Wie viele Ecken hat ein Vieleck mit 54 Diagonalen? Lösung: 12
4. Ein Rechteck hat 320 cm² Flächeninhalt. Die Länge ist um 4 cm länger als die Breite. Berechne die Seitenlängen des Rechtecks! Lösung:20 cm, 16 cm
5. Ein Rechteck hat 140 cm² Flächeninhalt. Die Länge ist um 1 cm kürzer als das Dreifache der Breite. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks? Lösung: 20 cm, 7 cm
6. Ein Rechteck hat 70 cm Umfang und 300 cm² Flächeninhalt. Berechne die Seitenlängen! Lösung: 20 cm, 15 cm

7. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 68 cm, die Diagonale ist 26 cm lang. Berechne die Seitenlängen!
Lösung: 24 cm, 10 cm
8. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die eine Kathete um 4 cm länger als die andere. Die Hypotenuse ist 20 cm lang. Berechne die Seitenlängen! Lösung: 12 cm, 16 cm, 20 cm
9. Wenn man die eine Seite eines Quadrates um 5 cm verlängert und die andere Seite um 5 cm verkürzt, so erhält man ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 600 cm². Berechne die Länge der Quadratseite!
Lösung: 25 cm
10. Einige Gesellen haben zusammen 10 Gulden. Nun legt ein jeder so viele Gulden dazu, wie es Gesellen sind. Als sie das Geld unter sich aufteilen, bekommt jeder 11 Gulden. Wie viele Gesellen sind es gewesen? (nach Abraham Ries) Lösung: 10
11. Suche eine Zahl, die so beschaffen ist, dass, wenn ich ihre Hälfte mit ihrem Drittel multipliziere und zum Produkt die Hälfte der gedachten Zahl addiere, 30 herauskommt. (Leonhard Euler) Lösung: 12 bzw. -15
12. Die Flaggen der skandinavischen Länder zeigen ein Kreuz (Abbildung). Wie breit muss bei einer Flagge der Länge a = 120 cm und der Breite b = 80 cm das Kreuz sein, wenn es den halben Flächeninhalt der Fahne einnehmen soll? Lösung: 28 cm



Beispielaufgaben zur quadratischen Gleichung
1. Wie viele Telefonanschlüsse sind in einer Ortschaft vorhanden, wenn 499500 gegenseitige Gesprächsverbindungen möglich sind?
Lösung: 1000
2. Welche rationale Zahl hat folgende Eigenschaft: Das Produkt der um 1 kleineren Zahl und der um 1 größeren Zahl ist um 31 größer als das halbe Quadrat der gesuchten Zahl!
Lösung: L = {-8; 8}
3. In einem Quader mit der Oberfläche 286 cm² ist die mittlere Kante 7 cm lang. Sie unterscheidet sich von der größten Kante ebensoviel wie von der kleinsten. Wie lang sind die Kanten dieses Quaders?
Lösung: 5 cm, 7 cm, 9 cm
4. (Abbildung) In ein weißes Quadrat der Seitenlänge $s = \sqrt{2}$ m ist ein farbiges Kreuz symmetrisch eingezeichnet. Wie breit ist das Kreuz, wenn der Flächeninhalt des Kreuzes genauso groß ist wie der des Hintergrundes?
Lösung: Gleichung $2 - 4\sqrt{2}\,x + 2x^2 = 0$, Ergebnis $\sqrt{2} - 1$
5. Die Einerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 5 kleiner als die Zehnerziffer. Multipliziert man die Zahl mit ihrer Zehnerziffer, so ergibt sich die 56fache Quersumme. Wie heißt die Zahl?
Lösung: 72
6. Bei einer dreistelligen Zahl ist die Zehnerziffer um 4 größer als die Einerziffer. Die Zahl ist gleich ihrer Spiegelzahl. Dividiert man die Zahl durch diejenige (zweistellige) Zahl, welche aus der ursprünglichen Zahl durch Streichen der Zehnerziffer hervorgeht, so erhält man um 5 weniger als die Quersumme der ursprünglichen Zahl beträgt. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?
Lösung: 484
7. Im dekadischen Zahlensystem ("Zehnersystem") bedeutet die Zahldarstellung 475, dass $475 = 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$ gilt. Im Duodezimalsystem ("Zwölfersystem") würde die Zahldarstellung 475 bedeuten, dass $475 = 4 \cdot 12^2 + 7 \cdot 12 + 5$ gilt.

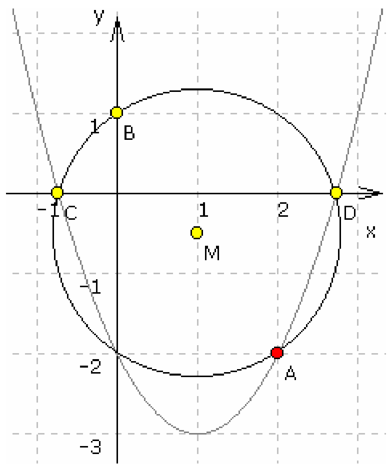
In welchem Zahlensystem hat die Zahl 132 den (dekadischen) Wert 56.
Lösung: die Zahl 132 im Sechsersystem

Beispielaufgaben zur quadratischen Gleichung

1) Bestimmen Sie zwei Zahlen mit dem Produkt 4,5 so, dass die Summe ihrer Kehrwerte gleich 1,1 ist.
Lösung: xy = 4,5 ; 1/x + 1/y = 1,1 ; Zahlen 15/4 und 6/5
2) Fügt man einer zweistelligen natürlichen Zahl die Ziffer 2 einmal links und einmal rechts hinzu, so ist das Produkt der entstehenden Zahlen 2222 mal so groß wie die ursprüngliche Zahl. Wie heißt diese?
Lösung: x = 20
3) Das Produkt der beiden kleinsten von sechs aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist dreimal so groß wie die Summe der vier übrigen Zahlen. Berechnen Sie die kleinste.
Lösung: kleinste Zahl x, $x^2 + x = 3(4x+14)$; x = 14, Zahlen 14, 15, 16, 17, 18, 19
4) Die Differenz der zwei Ziffern einer unter 50 liegenden Zahl beträgt 4. Bei umgestellten Ziffern aber ist die Summe der Quadrate der neuen und alten Zahl 4520. Wie lautet die Zahl?
Lösung: 26 und 62; davon ist 26 die gesuchte Zahl
5) Eine Gruppe Studenten mietete einen Bus für total 60 Franken. Da vier Studenten erkrankten, stieg der Kostenanteil für die übrigen um je 2,50 Franken. Wie viele Studenten waren ursprünglich in der Gruppe?
Lösung: 12
6) In einem Trapez von 70mm² Fläche ist die kleinere Parallelseite um 4mm kürzer als die grössere und um 1mm länger als die Höhe.
Lösung: Parallele 8mm und 12mm, Höhe 7mm
7) In einem rechtwinkligen Dreieck misst die Hypotenuse 15m und die Summe der beiden Katheten 21m.
Lösung: Katheten 9m und 12m

8) Die Seitenflächen eines Quaders messen 35m², 50m² und 70m². Berechnen Sie die Kanten des Quaders!
Lösung: Kanten x = 5m , y = 10m , z = 7m
9) Für ein Fest werden Paarkarten und Einzelkarten verkauft, wobei zwei Einzelkarten zusammen 5 Franken mehr kosten als eine Paarkarte. Aus total 60 verkauften Karten werden 1890 Franken für Paarkarten und 450 Franken für Einzelkarten eingenommen. Wie viele Einzelkarten wurden verkauft?
Lösung: es wurden 18 Einzelkarten zu 25Fr. und 42 Paarkarten zu 45Fr. verkauft
10) Verlängert man zwei parallele Seiten eines Quadrates um je 12cm, so entsteht ein Rechteck, dessen Diagonale 5 mal so lang ist, wie die Quadratdiagonale. Berechnen Sie die Quadratseite!
Lösung: Quadratseite 2 cm
11) Von zwei Zahlen ist die eine um 50 größer als die andere, zugleich ist das Produkt um 50 größer als die Summe. Bestimmen Sie die kleinere Zahl!
Lösung: 2 und 52 / -50 und 0
12) Von den Kantenlängen eines Quaders ist die mittlere um 2cm größer als die kleinste und um 3cm kleiner als die größte. Berechnen Sie die Kanten so, dass die Oberfläche 180cm² misst.
Lösung: Kanten 16/3 cm , 25/3 cm , 10/3 cm
13) Welche zweistelligen natürlichen Zahlen sind 4 mal so groß wie ihre Quersumme und haben zudem die Eigenschaft, dass ihr Quadrat 72 mal so groß ist wie das Produkt ihrer Ziffern?
Lösung: vier mögliche Zahlen: 12, 24, 36, 48

Geometrische Lösung der quadratischen Gleichung



Möglichkeit die Lösungen einer quadratischen Gleichung bzw. die Nullstellen einer quadratischen Funktion geometrisch zu bestimmen:
Ist die Gleichung $0 = x^2 + px + q$ gegeben, so zeichnet man in ein Koordinatensystem einen Kreis, der zum einen durch den Punkt B(0 ; 1) zum anderen durch A(-p ; q) verläuft. Dieser Kreis schneidet dann evtl. zweimal die Abszissenachse. Diese Schnittstellen sind die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion, d.h. also die Lösungen der Gleichung.
Dieses verblüffende Verfahren wurde schon im antiken Griechenland erdacht. In heutiger Schreibweise hat der Kreis die Gleichung:

$$(x + p/2)^2 + (y - (q+1)/2)^2 = p^2/4 + (q-1)^2/4$$

Für y = 0 ergibt sich dann für die Abszissen x die allgemein bekannte Lösungsformel quadratischer Gleichungen.
Im Beispiel ist A (-2 ; -2), d.h. für die quadratische Gleichung $Y = X^2 - 2X - 2$ ergeben sich die Nullstellen.

Der beschriebene Kreis wird seit 1817 auch Carlyle-Kreis genannt, nach Thomas Carlyle (1795–1881). Der österreichische Ingenieur Eduard Lill beschrieb unabhängig den Kreis 1867 in einem grafischen Lösungsverfahren. Daher wird auch von Lill-Kreis gesprochen.

Binäre quadratische Form

Eine binäre quadratische Form, ist in der Mathematik eine quadratische Form mit zwei Variablen x, y, d.h. ein Polynom der Form $ax^2 + bxy + cy^2$
wobei a, b, c die Koeffizienten der Form sind. Die Form f mit $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ schreibt man kurz als f = (a,b,c).
Bereits Adrien-Marie Legendre beschäftigte sich mit binären und ternären quadratischen Formen. Carl Friedrich Gauß begründete in seinem Werk Disquisitiones Arithmeticae eine umfassende Theorie der binären quadratischen Formen.

Formal ist eine binäre quadratische Form über einem kommutativen Ring mit Einselement A ein homogenes Polynom vom Grad 2 in zwei Unbestimmten mit Koeffizienten in A.
Die binären quadratischen Formen über dem Körper der reellen Zahlen nennt man reelle binäre quadratische Formen, die binären quadratischen Formen über dem Ring der ganzen Zahlen nennt man ganzzahlige binäre quadratische Formen.

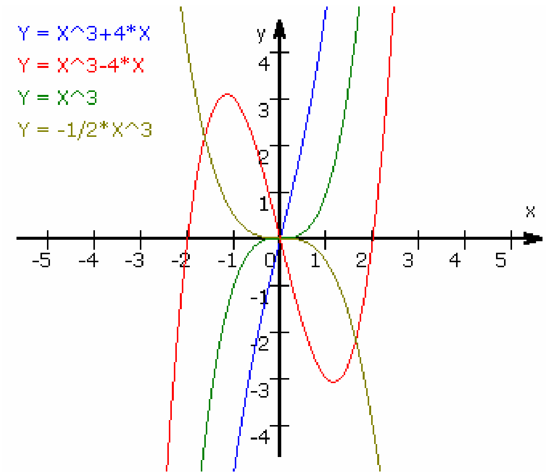
Eine ganzzahlige binäre quadratische Form f = (a,b,c) heißt
ambig, wenn der mittlere Koeffizient ein Vielfaches des ersten Koeffizienten ist, also b = ka für ein ganzes k gilt
primitiv, wenn die Koeffizienten teilerfremd sind, d.h. ggT(a,b,c) = 1 ist
Die Diskriminante D_f einer binären quadratischen Form f = (a,b,c) ist gleich $b^2 - 4ac$.
Mithilfe der Theorie binärer quadratischer Formen lassen sich folgende Probleme lösen:
Finden von ganzzahliger Lösungen diophantischer Gleichungen der Form $ax^2 + bxy + cy^2 = n$
Finden eines kürzesten Vektors in einem Gitter
Faktorisierung von ganzen Zahlen
Probleme der Kryptografie

Ungleichung 2. Grades

geg.: $ax^2 + bx + c > 0$ bzw. $ax^2 + bx + c < 0$
Lösung: Die Ungleichung wird mit a dividiert, wobei sich das Vorzeichen im Falle a < 0 ändert
… Normalform: $x^2 + px + q > 0$ oder $x^2 + px + q < 0$
durch quadratische Ergänzung wird …
$(x + p/2)^2 < (p/2)^2 - q$ oder $(x + p/2)^2 > (p/2)^2 - q$
Substitution von $z = x + p/2$ und $m = (p/2)^2 - q$ ergibt die einfach zu lösende Ungleichung
$z^2 < m$ oder $z^2 > m$

geg.: $ax^2 + 2bx + c \geq 0$
Lösung: Ist a > 0 wird die Diskriminante $D = b^2 - ac$.
Fall a) Für $D \leq 0$ ist jede reelle Zahl x eine Lösung.
Fall b) Für D > 0 besteht die Lösungsmenge aus genau allen reellen Zahlen x, die der Ungleichung
$x \leq (-b - \sqrt{D})/a$ oder $x \geq (-b + \sqrt{D})/a$ genügen.

Kubische Funktionen



Funktionen 3.Grades

Allgemeine Form $y = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ a \neq 0$
Graph der Funktion
- das Bild ist eine kubische Parabel untschiedlichster Form
- besitzt mindestens oder höchstens 3 Nullstellen
- besitzt kein oder genau 2 Extrema aber genau einen Wendepunkt

für a>0: $x \to -\infty$, $y \to -\infty$ und $x \to \infty$, $y \to \infty$
für a<0: $x \to -\infty$, $y \to \infty$ und $x \to \infty$, $y \to -\infty$

Diskriminante $D = b^2c^2-4ac^3-4bd-27a^2d^2+18abcd$
Diskriminante der Ableitung $\Delta = 3ac-b^2$
Es gilt:
$\Delta > 0$: f(x) besitzt kein Extrema
$\Delta = 0$: der Wendepunkt ist Sattelpunkt
$\Delta < 0$: Maximum bei $x = (-b-\sqrt{-\Delta})/(3a)$ und Minimum bei $x = (-b+\sqrt{-\Delta})/(3a)$
Extremwerte: $y = (d+2b^3-9abc \pm (6ac - 2b^2)\sqrt{-\Delta}) / (27a^2)$
D > 0 : f(x) hat drei Nullstellen
D = 0 : zwei oder eine Nullstelle, wobei genau ein Berührungspunkt auftritt
D < 0 : eine einfache Nullstelle
Wendepunkt $(-b/(3a)\ ;\ (2b^3-9abc)/(27a^2) + d)$
Symmetriezentrum der Funktion; Anstieg der Wendetangente $\tan \phi = \Delta/(3a)$

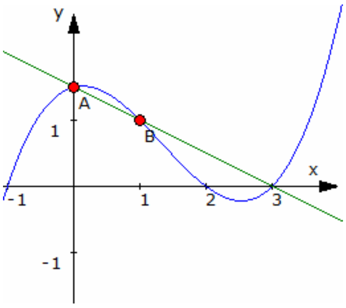
Verlauf einer kubischen Funktion

Der Graph der kubischen Funktion beginnt für a > 0 (a < 0) im negativen (positiven) Unendlichen, schneidet die x-Achse mindestens ein-, höchsten dreimal, und geht ins positive (negative) Unendliche.
Die Funktion hat entweder keine Extrema oder ein Maximum und ein Minimum.
Hat die Funktion mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen, so hat sie auch Extrema. Die Funktion besitzt einen Wendepunkt. Ist der Wendepunkt ein Sattelpunkt, so besitzt die Funktion keine Extrema.

Eigenschaften kubischer Funktionen

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; ($a,b,c,d \in R$; $a \neq 0$)

Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$-\infty < y < \infty$
Periodizität	keine
Monotonie	a > 0, kein Extremum ... überall streng monoton steigend a > 0, außerhalb Extrema ... streng monoton steigend a > 0, innerhalb Extrema ... streng monoton fallend a < 0, kein Extremum ... überall streng monoton fallend a < 0, außerhalb Extrema ... streng monoton fallend a < 0, innerhalb Extrema ... streng monoton steigend
Symmetrie	Punktsymmetrie zum Wendepunkt
Verhalten im Unendlichen	$a > 0 : f(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$, $a < 0 : f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$
Nullstellen	mindestens 1, maximal 3
Sprungstellen	keine
Extrema	$p < 0$: zwei Extrema bei $x = -b/(3a) \pm p$; $p \geq 0$: kein Extremum
Wendepunkte	$p = 0$: Sattelpunkt bei $x = -b/(3a)$; $p \neq 0$: Wendepunkt bei $x = -b/(3a)$
Ableitung	$y' = 3ax^2 + 2bx + c$; Parabel
Stammfunktion	$F(x) = \int ax^3 + bx^2 + cx + d\, dx = a/4\, x^4 + b/3\, x^2 + c/2\, x^2 + dx + C$



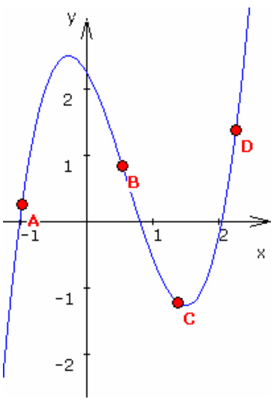
Kalman-Sätze

Durch Dan Kalman wurden 2008 in "The Most Marvelous Theorem in Mathematics" (Math Horizons) zwei überraschend einfache und verblüffende Sätze über kubische Funktionen veröffentlicht.
Es gilt:
Hat ein kubische Funktion $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$ die drei Nullstellen x_1, x_2, x_3, so ist die x-Koordinate der Wendestelle x_w das arithmetische Mittel der drei Nullstellen. $x_w = (x_1 + x_2 + x_3)/3$
Nachweis:
Ausgehend von der Funktion $y = f(x) = k (x - x1)(x - x2)(x - x3)$ wird für die zweite Ableitung

$y'' = f''(x) = k ((x - x3)+(x - x2)+(x - x3)+(x - x1)+(x - x2)+(x - x1))$

$y'' = k (6x - 2(x1 + x2 + x3))$

Nullsetzen ergibt das Gewünschte.
Außerdem gilt: Ist x_m das arithmetische Mittel von zwei der drei Nullstellen x_1, x_2, x_3, so verläuft für jedes $k > 0$ die Sekante durch die zwei Punkte $A(x_m - k, f(x_m - k))$ $B(x_m + k, f(x_m + k))$ durch die jeweils dritte Nullstelle.



Kubische Funktion durch 4 Punkte

Gegeben seien 4 Punkte der kartesischen Ebene mit deren Koordinaten $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ und $D(x_4, y_4)$. Gefordert wird außerdem, dass die Punkte bezüglich der Abszisse äquidistant sind, d.h. $x_1 + h = x_2$, $x_1 + 2h = x_3$ und $x_1 + 3h = x_4$. Gesucht ist eine kubische Funktion, die durch diese vier Punkte verläuft.

Ansatz: $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$
Für die Parameter a, b, c und d wird dann:

$h = x_2 - x_1$	$n = 6h^3$
$p = 3y_2 - y_1 - 3y_3 + y_4$	$q = 5y_2 - 2y_1 - 4y_3 + y_4$
$r = 18y_2 - 11y_1 - 9y_3 + 2y_4$	
$a = p/n$	$b = -3 (h q + x_1 p)/n$
$c = (h^2 r + 6h x_1 q + 3 x_1^2 p)/n$	
$d = (6h^3 y_1 - h^2 x_1 r - 3h x_1^2 q - x_1^3 p)/n$	

Kubische Gleichungen

Allgemeine Form:	$0 = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a \neq 0$
Normalform:	$0 = x^3 + rx^2 + sx + t$

Cardanische Formel (nach Tartaglia)

Substitution	$x = y - r/3$ führt zur reduzierten Form

$0 = y^3 + py + q$ mit $p = s - r^2/3$ und $q = 2r^3/27 - sr/3 + t$

Diskriminante $D = (p/3)^3 + (q/2)^2$

1.Fall: $q^2/4 + p^3/27 \geq 0$ $u = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$ $v = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$

reelle Lösung $y_1 = u + v$

komplexe Lösung $y_2 = -(u + v)/2 + [(u - v)/2] * i \sqrt{3}$ $y_3 = -(u + v)/2 - [(u - v)/2] * i \sqrt{3}$

2.Fall: $q^2/4 + p^3/27 < 0$ (Casus irreducibilis)

3 reelle Lösungen $y_1 = 2 \sqrt[3]{r} * \cos(\phi/3)$ $y_2 = 2 \sqrt[3]{r} * \cos(\phi/3 + 120°)$

$y_3 = 2 \sqrt[3]{r} * \cos(\phi/3 + 240°)$

mit $r = \sqrt{-p^3/27}$ und $\cos \phi = (-q/2) / \sqrt{-p^3/27}$

Kubische Gleichung, Beispiel

Zu lösen ist die kubische Gleichung $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.

Lösung: $p = (3 * (-5) - 2^2) / 3 = -19 / 3$

$q = -6 + (2 * 2^3) / 27 - 2 * (-5) / 3 = -56 / 27$

$D = (-19 / 3)^3 + (-28 / 27)^2 = -8{,}333... < 0$, d.h. 3 reelle Lösungen (Casus irreducibilis)

$\cos \phi = 28 / [27 \sqrt{(19/9)^3}] = 0{,}338... \rightarrow \phi = 1{,}226$ rad

$\phi_1 = \phi / 3 = 0{,}409$ rad $\phi_2 = (\phi - \pi) / 3 = -0{,}639$ rad

$\phi_3 = (\phi + \pi) / 3 = 1{,}456$ rad

und damit $x_1 = -2/3 + 2 \sqrt{19/9} \cos \phi_1 = 2$

$x_2 = -2/3 - 2 \sqrt{19/9} \cos \phi_2 = -3$ $x_3 = -2/3 - 2 \sqrt{19/9} \cos \phi_3 = -1$

Die Gleichung hat drei reelle Lösungen -3, -1 und 2.

Kubische symmetrische Gleichung

Eine symmetrische kubische Gleichung der Form $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$

kann ohne Rückgriff auf die Lösungsformel 3.Grades gelöst werden. Mit $p = b/a$ wird

$x^3 + px^2 + px + 1 = 0$

Diese Gleichung hat die Polynomzerlegung $(x + 1)(x^2 - x + 1 + px) = 0$

Außer der Lösung $x_1 = -1$ wird damit $x^2 + (p-1) x + 1 = 0$

und somit $x_1 = -1$ $x_2 = -(p-1)/2 + \sqrt{p^2 - 2p - 3}/2$ $x_3 = -(p-1)/2 - \sqrt{p^2 - 2p - 3}/2$

Beispiel: Für $y^3 + 6y^2 + 6y + 1 = 0$ wird

$(y + 1)(y^2 + 5y + 1) = 0$ und die Lösungsmenge $\{-1, -5/2 + \sqrt{21}/2, -5/2 - \sqrt{21}/2\}$

Kubische quadratfreie Gleichung

Eine spezielle Lösung für kubische quadratfreie Gleichungen, d.h. Gleichungen ohne das x^2-Glied, gab 1615 Vieta in "De aequationum recognitione et emendatione" an.

Gegeben ist $x^3 + p x + q = 0$

Mit $p = 3a$ und $q = -2b$ wird $x^3 + 3a x = 2b$

Bei einer Substitution $x = a/y - y$ wird die Gleichung zu $y^6 + 2b y^3 - a^3 = 0$

Dies ist eine quadratische Gleichung für y^3. Diese kann einfach gelöst werden. Anschließend werden die Lösungen für x berechnet.

Kubische Gleichung - Geschichte

Muhammad al-Mahani (820-880) untersuchte den Schnitt einer Kugel mit einer Ebene und löste dabei als erster Gleichungen der Form $x^3 + r = px^2$.

Im 10.Jahrhundert beschäftigten sich Abu Jafar al-Khazin (900-971) und al-Hasan Ibn al-Haitham (Alhazen; 965-1040) bei der Untersuchung der Winkeldreiteilung mit kubischen Funktionen und gaben erste Lösungen an.

1170 behandelte Sharaf al-Din al-Tusi (1135-1213) positive Wurzeln der kubischen Gleichungen und ermittelte Näherungslösungen. Durch Jemshid al-Kashi (1380-1430) wurden auch Gleichungen der Form $x^3 + q = px$ untersucht.

Um das Jahr 1515 wurde in Europa die erste Lösungsformel für kubische Gleichungen von Scipione del Ferro gefunden, der sie bis zu seinem Tode im Jahre 1526 geheim hielt.

Er teilte sie nur Antonio Maria del Fior mit, der 1535 Niccolo Tartaglia zum Rechen-Duell herausforderte und ihm kubische Gleichungen aufgab, in der Hoffnung, Tartaglia würde sie nicht lösen können. Dieser fand jedoch selbst die Formel und gilt deshalb als ihr zweiter Entdecker.

Tartaglia beging jedoch ebenfalls den Fehler, die Formel nicht zu veröffentlichen und teilte sie Geronimo Cardano mitgeteilt. Cardano veröffentlichte die Formel in seiner "Ars Magna".

Ob Cardano ein Plagiat beging ist unter Historikern umstritten. Er nennt zwar in der "Ars Magna" del Ferro und Tartaglia als Entdecker dieser Formel, gibt aber nicht an, woher er sie hat.

Casus irreducibilis

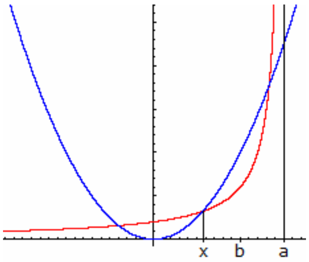
Scheinbar wird die Auflösung der kubischen Gleichung dann besonders schwierig, wenn der Radikand $(q/2)^2 + (p/3)^3$ der Quadratwurzel negativ ist.

In diesem Fall müsste man die dritte Wurzel aus komplexen Zahlen ziehen. Andererseits hat eine kubische Gleichung stets mindestens eine reelle Wurzel. Die Mathematiker im 15. und 16.Jahrhundert konnten diese reelle Lösung lange nicht herzustellen und bezeichneten diesen für sie nicht zu bewältigenden Fall als "nicht zurückführbaren Fall", als Casus irreducibilis.
Die Lösung des Casus irreducibilis gelingt erstmals Vieta um 1600.

Gleichungsschreibweise

Die symbolische Schreibweise von Polynomgleichungen veränderte sich im Laufe der Geschichte.
Als Beispiel sei **$4x^2 + 3x - 10 = 0$** genannt.

Mathematiker	Zeitraum	Schreibweise
René Descartes	1640	4xx + 3x ∝ 10
Francois Vieta	1600	4 in A quad + 3 in A aequatur 10
Simon Stevin	Ende 16.Jh.	4 (2) + 3 (1) egales 10 (0)
Tartaglia	Anfang 16.Jh.	4q p 3R equale 10N
Nicolas Chuquet	Ende 15.Jh.	4^2 p 3^1 egault 10^0
Luca Pacioli	Ende 15.Jh.	Quattro qdrat che gioto agli tre n^0 facia 10
Diophant	3.Jahrhundert	$\Delta^Y\delta$ ζγ εστι ι



Kubische Gleichung bei Archimedes

Archimedes stellt im zweiten Teil der Schrift "Über Kugel und Zylinder" die Aufgabe, eine Kugel mit dem Radius r so zu teilen, dass die Volumina der beiden Segmente in einem gegebenen Verhältnis p:q stehen.
Er kommt dabei auf eine Beziehung, die in heutiger Schreibweise lautet

$$(a - x) : c = b^2 : x^2 \text{ bzw. } \quad x^2(a - x) = b^2c$$

Dabei ist x die Höhe des einen Segments, außerdem a = 3r, b = 2r und c = pr/(p+q).
Es ist nicht direkt überliefert, wie Archimedes diese kubische Gleichung löst. Nach Eutokius, einem Kommentator aus dem 6.Jahrhundert, hat Archimedes die Lösung mit Hilfe von Kegelschnitten gefunden:
Setzt man die linke Seite der Proportion gleich e/y, erhält man $(a - x)y = ce$,
die Gleichung einer Hyperbel; für die rechte Seite ergibt sich $b^2y = ex^2$,
die Gleichung einer Parabel. e ist dabei eine beliebige Konstante. Diese beiden Kurven haben einen Schnittpunkt, dessen x-Koordinate zwischen 0 und b liegt. Das ist die gesuchte Höhe.

Kubische Gleichung-Aufgaben

Aufgabe 1:
Eine Armee besteht aus Herzögen, Grafen und Soldaten. Jeder Herzog hat unter sich zweimal soviel Grafen, als es Herzöge gibt. Jeder Graf hat unter sich viermal soviel Soldaten, als es Herzöge gibt. Der zweihundertste Teil der Anzahl der Soldaten ist 9 mal so groß wie die Zahl der Herzöge. Wieviele Herzöge, Grafen und Soldaten gibt es? (Robert Recorde, "Whetstone of Witte" 1557)
Lösung: 15 Herzöge, 450 Grafen, 27000 Soldaten

Aufgabe 2:
Es verbinden sich einige Personen zu einer Gesellschaft, und jeder legt zehnmal so viel Gulden ein, als der Personen sind, und mit dieser Summe gewinnen sie sechs Prozent mehr, als ihrer sind. Nun findet sichs, dass der Gewinn zusammen 392 Gulden betrage. Wie viel sind der Kaufleute gewesen? (Leonhard Euler, 1770)
Lösung: 14

Aufgabe 3:
Ein würfelförmiges Gefäß ist bis 1 dm unter den Rand mit Wasser gefüllt. Es enthält 100 l Wasser. Berechne die Seitenlänge.
Lösung: 5 dm

Aufgabe 4:
Die Länge eines Schwimmbeckens ist um 3 m größer als die Breite, und die Breite ist um 3 m größer als die Tiefe. Das Volumen beträgt 80 m³. Berechne die Maße des Schwimmbeckens.
Lösung: l = 8 m, b = 5 m, h = 2 m

Aufgabe 5:
Die Länge eines Quaders ist ein Zwölftel der Höhe, die Breite ist zwei Drittel der Länge. Vergrößert man die Höhe um eine Elle, so beträgt das Volumen 11/6 Kubikellen. Berechne die Seitenlängen. (Tipp: Wähle die Höhe als Unbekannte.) (Nach einer babylonischen Aufgabe, ca. 1500 v.u.Z.)
Lösung: h = 6, l = 1/2, b = 1/3

Aufgabe 6:
Aus einem rechteckigen Blech mit den Seitenlängen a = 10 dm und b = 8 dm soll eine quaderförmige Dose hergestellt werden, indem man an den Ecken Quadrate ausschneidet und die übriggebliebenen Rechtecke hochbiegt. Das Volumen der Dose soll 48 dm^3 betragen. Wie groß muss die Seitenlänge der Quadrate sein? (2 Lösungen)
Lösung: x_1 = 1 dm, x_2 = 2 dm

Aufgabe 7:
Ein quadratisches Prisma hat 900 dm^3 Volumen. Die Summe von Basiskante und Höhe beträgt 19 dm. Berechne die Maße des Prismas. (2 Lösungen)
Lösung: a = 10 dm, h = 9 dm oder a = 15 dm, h = 4 dm

Aufgabe 8:
Problem von Archimedes: Eine Kugel vom Radius r soll durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile geteilt werden, deren Volumina in einem gegebenen Verhältnis stehen.
Zahlenbeispiel: r = 3, $V_1 : V_2 = 7 : 20$
Anleitung: Volumen eines Kugelsegments der Höhe h: $V = \pi/3\cdot(3rh^2 - h^3)$
Ansatz: $(3rx^2 - x^3) : (3ry^2 - y^3) = 7 : 20$ $x + y = 2r$
Lösung: x = 2, y = 4

Plastikzahl
Die Plastikzahl oder Plastikkonstante ist die einzige reelle Lösung der Gleichung $x^3 = x + 1$
und hat den Wert $\rho = \sqrt[3]{1/2 + 1/6 \sqrt{23/3}} + \sqrt[3]{1/2 - 1/6 \sqrt{23/3}}$
näherungsweise 1,3247179572447460259609088544...
Mitunter wird die Zahl auch Silberzahl genannt, wobei dies eher für das silberne Verhältnis $1 + \sqrt{2}$ verwendet wird.
Die Plastikzahl ist der Grenzwert des Quotienten aufeinanderfolgender Glieder der Paduan-Folge und der Perrin-Folge. Die Plastikzahl ist auch Lösung der Gleichungen:

$x^5 = x^4 + 1$	$x^5 = x^2 + x + 1$
$x^6 = x^2 + 2x + 1$	$x^6 = x^4 + x + 1$
$x^7 = 2x^5 - 1$	$x^7 = 2x^4 + 1$
$x^8 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	$x^9 = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$
$x^{12} = 2x^{10} - x^4 - 1$	$x^{14} = 4x^9 + 1$

Die Plastik-Zahl ist die kleinste Pisot-Vijayaraghavan-Zahl.

Pisot-Vijayaraghavan-Zahl
Eine Pisot-Vijayaraghavan-Zahl ist eine algebraische Zahl α größer als 1, deren konjugierte Zahl α' dem Betrage nach kleiner als 1 ist.
Zum Beispiel ist $\alpha = a + b \sqrt{d}$ (a, b natürliche Zahlen) eine Pisot-Vijayaraghavan-Zahl, da
$\alpha > 1$ und $-1 < \alpha' = a - b \sqrt{d} < 1$ gilt.
Das goldene Verhältnis ϕ ist eine Pisot-Vijayaraghavan-Zahl. Man kennt nur 38 Pisot-Vijayaraghavan-Zahlen $< \phi = 1{,}618033...$

Gleichung vierten Grades
Allgemeine Form $0 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$; $(A \neq 0)$
Normalform $0 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

Formel nach Ferrari
Substitution $x = y - a/4$ führt zur reduzierten Form $0 = y^4 + py^2 + qy + r$
Lösungen $2y_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$ $2y_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$
$2y_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$ $2y_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$

Kubische Resolvente
z_1, z_2, z_3 sind Lösungen der kubischen Resolvente $z^3 + 2pz^2 + (p^2-4r) z - q^2 = 0$
Nebenbedingung $z_1 * z_2 * z_3 = -q > 0$

Lösungsfälle

z_1, z_2, z_3	y_1, y_2, y_3, y_4
alle reell, >0	vier reelle Werte
genau eine positiv	vier paarweise konjugiert komplexe Werte
2 konjugiert komplexe	2 reelle, 2 konjugiert komplexe

Beispiel: Gleichung vierten Grades $0 = x^4 - x^3 - 19 x^2 - 11 x + 30$
Substitution x = y + 1/4 ergibt $0 = y^4 - 155/8 y^2 - 165/8 y + 6669/256$
$p = -155/8$; $q = -165/8$; $r = 6669/256$
Kubische Resolvente $z^3 - 155/4 z^2 + 4339/16 z - 27225/64 = 0$
Normalform 3.Grades $r = -155/4$; $s = 4339/16$; $t = -27225/64$
Substitution $z = m + 155/12$
$0 = m^3 - 688/3 m - 33280/27$
$p = -688/3$ $q = -33280/27$

Diskriminante	$D = -200704 / 3$			
Casus irreducibilis	$r = 2752/27 \sqrt{43}$		$\cos \phi = 260/1849 \sqrt{43}$	
3 reelle Lösungen	$m_1 = 52/3$	$m_2 = -32/3$	$m_3 = -20/3$	
Rücksubstitution	$z_1 = 121/4$	$z_2 = 9/4$	$z_3 = 25/4$	
Rücksubstitution zu y	$2y_1 = 19/2$	$2y_2 = 3/2$	$2y_3 = -13/2$	$2y_4 = -9/2$
	$y_1 = 19/4$	$y_2 = 3/4$	$y_3 = -13/4$	$y_4 = -9/4$
Lösungen x	$x_1 = 5$	$x_2 = 1$	$x_3 = -3$	$x_4 = -2$

2.Lösungsvariante

Lösungen der Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ stimmen mit den Lösungen von

$$x^2 + (a*D)/2\, x + (y + (ay-c)/D) = 0 \quad \text{überein, wobei } D = \pm \sqrt{(8y + a^2 - 4b)}$$

und y irgendeine reelle Lösung von $8y^3 - 4\, by^2 + (2ac - 8d)\, y + (4bd - a^2d - c^2) = 0$ ist.

Biquadratische Gleichung

... relativ leicht lösbarer Sonderfall der allgemeinen Gleichung vierten Grades.

$$\mathbf{x^4 + a\, x^2 + b = 0}$$

Lösungsverfahren: Substitution $y = x^2$ und zweimaliges Lösen einer quadratischen Gleichung

Substitution $y = x^2 \rightarrow y^2 + a\, y + b = 0$

Lösung $y_{1,2} = -a/2 \pm \sqrt{(a^2/4 - b)}$

Rücksubstitution $x = \pm \sqrt{y}$

Endergebnis $x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{y_{1,2}} = \pm \sqrt{[-a/2 \pm \sqrt{(a^2/4 - b)}]}$

Die Lösungen müssen nicht unbedingt alle relle sein, da auch negative Radikanden auftreten können.

Symmetrische Gleichung 4.Grades

... lösbarer Spezialfall einer Gleichung vierten Grades

$$\mathbf{a\, x^4 + b\, x^3 + c\, x^2 + b\, x + a = 0}$$

Lösungsverfahren: Division durch x^2, Zusammenfassen der Terme und Substitution $y = x + 1/x$.

$$0 = a\, (x^2 + 1/x^2) + b\, (x + 1/x) + c = a\, (y^2 - 2) + by + c = ay^2 + by + (c - 2a)$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen y_1 und y_2. Bei der Rücksubstitution ist jeweils die quadratische Gleichung $y_{1,2} = x + 1/x$, d.h. $x^2 - y_{1,2}\, x + 1 = 0$

zu lösen, wobei sowohl $y_{1,2}$ als auch die endgütigen Lösungen komplex sein können.

Lösungen $x_{1,2,3,4} = 1/2\, y_{1,2} \pm \sqrt{(y_{1,2}^2 - 1)}$ mit $y_{1,2} = 1/2a\, (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac + 8a^2)})$

Ganzrationale Gleichungen n.ten Grades; Lösung von Gleichungen n-ten Grades

Im allgemeinen sind ganzrationale Gleichungen $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$

mit $n > 4$ nur noch näherungsweise lösbar. In der Praxis werden aber auch schon zur Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades Näherungsmethoden angewendet.

Eine näherungsweise Lösung von Gleichungen n-ten Grades zur Ermittlung aller Wurzeln einer algebraischen Gleichung n-ten Grades, einschließlich der komplexen, ist mit der Methode von Brodetsky-Smeal möglich.

Die Berechnung einzelner reeller Wurzeln algebraischer Gleichungen kann auch mit Hilfe der allgemeinen Näherungsmethoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungen erfolgen.

Ganzrationale Gleichungen werden auch algebraische Gleichungen genannt.

Bespiele:

$3x^2 - x + 5 = 0$ oder $\pi\, x - 1 = 0$ sind algebraische Gleichungen der Variablen x. $x^2 + 2y^2 - xy - 3 = 0$ ist eine algebraische Gleichung der Variablen x und y.

Dagegen ist $y^3 - y \sin x - 2 \sin^2 x = 0$ keine algebraische Gleichung, wenn x und y Variablen sind.

Nichtalgebraische Gleichungen lassen sich mitunter in algebraische umwandeln, wobei dies nicht notwendig äquivalent erfolgt.

Nichtalgebraische Gleichungen werden transzendente Gleichungen genannt, wenn die Variablen als Argumente transzendenter Funktionen auftreten.

Sind alle Koeffizienten in $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$

unabhängige Parameter, so heißt die Gleichung allgemeine algebraische Gleichung.

Dividiert man die Gleichung durch $a_n \neq 0$, so erhält man die Normalform der algebraischen Gleichung

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0 = 0 \qquad \text{mit } b_i = a_i / ab_n.$$

Satz von Bezout

Ist W(x) ein Polynom und existiert ein Polynom P(x) mit W(x) = P(x) (x-a), so gilt W(a) = 0, d.h. a ist Nullstelle der zu W(x) gehörenden ganzrationalen Funktion.

Fundamentalsatz der Algebra

Jede Gleichung n.ten Grades $\mathbf{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,}$

in der die a_i reelle oder komplexe Zahlen bedeuten, hat genau n, nicht notwendig voneinander verschiedene, komplexe Lösungen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und es gilt $(a_n=1)$:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x - x_1) * (x - x_2) * \ldots (x - x_n) = 0$$

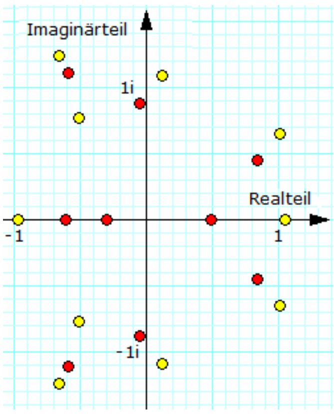
Jedes Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Wurzelsatz des Vieta

Für die Lösungen von $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$,
gilt:
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = - a_{n-1}$$
$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = a_{n-2}$$
$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = - a_{n-3} \qquad \dots$$
$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n = a_0$$
Ist x_i eine Lösung der Gleichung n.ten Grades, so heißt x_i Wurzel des Polynoms
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
$P_n(x)$ ist dann durch $(x - x_i)$ teilbar. Allgemein gilt dann $P_n(x) = (x - x_i) P_{n-1}(x) + P_n(x_i)$.
Wenn $P_n(x)$ durch $(x - x_i)^k$ aber nicht durch $(x - x_i)^{k+1}$ teilbar ist, so heißt x_i k-fache Wurzel. Dann ist x_i auch Wurzel der Ableitungen des Polynoms bis zur (k-1).ten Ordnung.

Lösung durch Radikale / Unmöglichkeitssatz

Nach Abel (1824) sind Gleichung n.ten Grades mit n>4 nicht vollständig in Radikalen auflösbar.
Anmerkung: Der Satz wurde 1813 schon von Ruffini gefunden.



Gauß-Lucas-Theorem

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt eine ganzrationale Gleichung der Form
$$a_n x^n + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$
stets n Lösungen im Bereich der komplexen Zahlen. Ist eine nicht reelle Zahl Lösung, so ist es auch die zugehörige konjugiert komplexe Zahl.
Diese komplexen Nullstellen können in der Gaußschen Zahlenebene grafisch veranschaulicht werden. Deutlich erkennt man, dass die reelle Achse Symmetrieachse ist.
Die konvexe Hülle dieser Nullstellen ist ein konvexes Polygon.
Nach dem Gauß-Lucas-Theorem liegen alle Nullstellen der 1.Ableitung der Ausgangsfunktion innerhalb eines dieses Polygons in der Gaußschen Ebene.
In der Abbildung sind die Nullstellen der Funktion gelb, die Nullstellen der Ableitung rot gezeichnet.

Nach Cauchy gilt weiterhin:
Alle Nullstellen eines Polynoms liegen innerhalb eines Kreises mit einem Radius r, wobei r die eindeutige, positive, reelle Lösung von $\quad -|a_n| x^n + \dots + |a_3| x^3 + |a_2| x^2 + |a_1| x + |a_0| = 0$
ist. Diese positive Lösung wird Perron-Wurzel genannt.
Nach Fujiwara liegen die Nullstellen auch in einem Kreis, dessen halber Radius kleinergleich dem Maximum der Terme $\quad |a_{n-1}/a_n|, \dots, |a_2/a_n|, |a_1/a_n|, |a_0/a_n| \quad$ ist.

Symmetrische Gleichung, Antisymmetrische Gleichung

Eine symmetrische Gleichung ist eine ganzrationale Gleichung, deren Koeffizientenfolge symmetrisch ist. Sind die Koeffizienten dem Betrag nach symmetrisch, unterscheiden sich aber nach dem Vorzeichen, heißt die Gleichung antisymmetrisch.
Mit jeder Lösung einer symmetrischen Gleichung ist auch ihr Reziprokwert Lösung. Symmetrischen Gleichungen ungeraden Grades haben immer +1 oder -1 zu Lösung.

1.Grad

Die symmetrische Gleichung 1.Grades $ax + a = 0$ hat als Lösung nur -1, die antisymmetrische Gleichung $ax - a = 0$ die Lösung 1.

2.Grad

Symmetrische Gleichungen 2.Grades lassen sich mithilfe der Lösungsformel lösen.

3.Grad

Da +1 oder -1 Lösung ist, führt eine Polynomdivision durch (x-1) oder (x+1) zu einer quadratischen Gleichung.
Beispiele:
Die linke Seite der Gleichung $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$ mit den Lösungen -1/3, -1 und -3 wird durch Division mit x+1 zu $3x^2 + 10x + 3$.

4.Grad

Division der Gleichung durch x^2 und anschließende Substitution $u = x + 1/x$ führt zu einer Gleichung 2.Grades in u, die mit der Lösungsformel gelöst werden kann.
Die Resubstition führt wiederum auf zwei symmetrische Gleichungen 2.Grades.
Beispiel:
Die Gleichung $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ wird durch die Substitution zur quadratischen Gleichung $6u^2 - 5u - 50 = 0$ mit den Lösungen 10/3 und 5/2 für u.

Daraus ergeben sich die Gleichungen $3x^2 - 10x + 3 = 0$ und $2x^2 + 5x + 2 = 0$ mit den Lösungen -2; -1/2; 1/3 und 3.

5.Grad

Da +1 bzw. -1 Lösung ist, führt eine Polynomdivision durch (x+1) bzw. (x-1) zu einer symmetrischen Gleichung 4.Grades.

Reziproke Gleichungen - Symmetrische Gleichungen

Reziproke Gleichungen sind Gleichungen, die zu jeder Lösung α auch $1/\alpha$ als Lösung besitzen. Reziproke Gleichungen sind symmetrisch bzw. antisymmetrisch.

Beispiel: $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

symmetrisch für $a_3 = a_0$ und $a_2 = a_1$

antisymmetrisch für $a_3 = - a_0$ und $a_2 = - a_1$

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad$ $2x^3 + 2 - 3x^2 - 3x = 0$

$2 (x^3 + 1) - 3x (x + 1) = 0$ $\quad$ $2 (x + 1) (x^2 - x + 1) - 3x (x + 1) = 0$

$(x + 1) (2 (x^2 - x + 1) - 3x) = 0$ ... $x_1 = -1$ $\quad$ $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$x_{2,3} = (5 \pm \sqrt{(25 - 16)}) /4 = (5 \pm \sqrt{9}) /4 = (5 \pm 3) /4$

$x_2 = (5 + 3) /4 = 8/4 = 2$ $\quad$ $x_3 = (5 - 3) /4 = 2/4 = ½$

L = {-1; 1/2; 2}

$2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$ $\quad$ $2x^3 - 2 - 3x^2 + 3x = 0$

$2 (x^3 - 1) - 3x (x - 1) = 0$ $\quad$ $2 (x - 1) (x^2 + x + 1) - 3x (x - 1) = 0$

$(x - 1) (2 (x^2 + x + 1) - 3x) = 0$ ... $x_1 = 1$ $\quad$ $2x^2 - x + 2 = 0$

$x_{2,3} = (1 \pm \sqrt{(1 - 16)}) /4 = (1 \pm \sqrt{(-15)}) /4 = (1 \pm 3.87i) /4$

$x_2 = (1 + 3.87i) /4 = ¼ + 0.97i \notin R$ $\quad$ $x_3 = (1 - 3.87i) /4 = ¼ - 0.97i \notin R$

L = {1}

Jede reziproke Gleichung 3. Grades hat entweder 1 oder -1 als Lösung.

Ganzrationale Gleichungen-Aufgaben

		Lösungen
1) $x^4 - 32x^2 + 31 = 0$		$x = 1, -1, \sqrt{31}, -\sqrt{31}$
2) $x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = 0$	Polynomdivision $x^2 - 5x + 1$,	$x = -2, (5 + \sqrt{21})/2, (5 - \sqrt{21})/2$
3) $2x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$	Polynomdivision $2x^2 + 4x + 1$,	$x = 1, (-2 + \sqrt{2})/2, (-2 - \sqrt{2})/2$
4) $x^3 + 2x - 12 = 0$	Polynomdivision $x^2 + 2x + 6$ mit keinen Lösungen,	$x = 2$
5) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$		$x = 1, -1, 4, -4$
6) $x^4 - 25x^2 = 0$		$x = 0, 5, -5$
7) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$		$x = 2, -2$
8) $x^4 + x^2 = 0$		$x = 0$
9) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$		keine reelle Lösung
10) $16x^4 - 881x^2 + 10000 = 0$		$x = 8, -8, 25/4, -25/4$
11) $x^2 - 36/x^2 - 5 = 0$		Gleichung $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$, $x = 3, -3$
12) $x^6 + 61x^3 - 8000 = 0$		$x = 4, -5$
13) $4x^6 + 3x^3 - 1 = 0$		$x = -1, \sqrt[3]{0,25}$
14) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 64$		$64 = (x+1)^3$, d.h. $x = 3$, binomischer Satz
15) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 125$		$125 = (x+2)^3$, d.h. $x = 3$, binomischer Satz
16) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 625$		$625 = (x-2)^4$, d.h. $x = -3, 7$
17) $16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 = 81$		$81 = (2x+1)^4$, d.h. $x = -2, 1$

Ganzrationale Funktionen

Funktionen mit der Definitionsgleichung (n natürliche Zahl) $\quad y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0,\ n>0$

n ungerade: mindestens eine Nullstelle und für $n\geq3$ mindestens ein Wendepunkt
für $n\geq3$ Anzahl der Extrema gerade und Anzahl der Wendepunkte ungerade

n gerade: für $n\geq2$ mindestens ein Extremum, Anzahl ungerade, Anzahl der Wendepunkte gerade

Jede ganzzahlige Nullstelle ist ein Teiler von a_0.

Ist die (gekürzte !) rationale Zahl p/q eine Nullstelle des Polynoms, so muss p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n sein. Ist der Hauptkoeffizient $a_n = 1$, so gilt: Jede rationale Nullstelle ist eine ganze Zahl und zwar ein Teiler von a_0.

Die Bilder der ganzrationalen Funktionen sind zusammenhängende Kurven ohne singuläre Punkte und ohne Asymptoten und haben höchstens n Schnittpunkte mit der Abszissenachse und höchstens n-2 Wendepunkte. Die Funktionen haben höchstens n-1 Extrema, wobei im Falle mehrerer Extrema Maxima und Minima sich abwechseln.

Für n > 0 sind die Bilder Kurven n-ter Ordnung, Parabeln n-ter Ordnung.

Horner-Schema zur Berechnung von $f(x_1)$

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
+	+	+	+		
	a_nx_1	$b_{n-1}x_1$ ...		b_2x_1	b_1x_1
a_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_1	$b_0 = f(x_1)$

Das Horner-Schema kann zur Berechnung des Funktionswertes $f(x_1)$, der Division von f(x) durch den Linearfaktor $(x-x_1)$, zur Bestimmung der Ableitungen $f'(x_1)$, $f''(x_1)$, ... und zur Taylorentwicklung von f an der Stelle x_1 genutzt werden. Im Beispiel bilden die b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_1 die Koeffizienten des Polynoms $f(x) / (x-x_1)$.
Das Schema sollte genauer Ruffini-Horner-Schema genannt werden, da Paolo Ruffini dieses 15 Jahre vor Horner beschrieb.

Vollständiges Horner-Schema ... der Funktion $y = 2x^4 - x^3 - x - 18$ für $x_0 = 2$

	2	-1	0	-1	-18	+
$x_0=2$	4	6	12	22	+	
	2	3	6	11	$4 = f(2)/0! = f(2) = 4$	
$x_0=2$	4	14	40			
	2	7	20	$51 = f'(2) / 1! = f'(2) = 51$		
$x_0=2$	4	22				
	2	11	$42 = f''(2) / 2! \dots f''(2) = 42 * 2! = 84$			
$x_0=2$	4					
	2	$15 = f^{(3)}(2) / 3! \dots f^{(3)}(2) = 15 * 3! = 90$				
$x_0=2$						
	$2 = f^{(4)}(2) / 4! \dots f^{(4)}(2) = 2 * 4! = 48$					

Horner-Schema zur Abspaltung eines Linearfaktors $(x - x_1)$
Das Horner-Schema kann zur Berechnung des reduzierten Polynoms

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x - x_1) (b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0)$$

genutzt werden, in dem man aus das Horner-Schema x_1 anwendet.

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
+	+	+	+		
0	$b_{n-1}x_1$	$b_{n-2}x_1$ ...		b_1x_1	b_0x_1
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_0	0

Horner-Schema
... Abspalten von (x-1) von der Funktion $y = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, d.h. $x_1 = 1$

	2	-1	-2	3	-2	
$x_1=1$	0	2	1	-1	2	+
	2	1	-1	2	0	

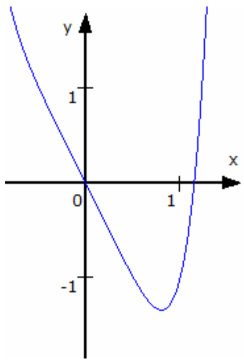
damit gilt $2x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = (x-1) (2x^3 + x^2 - x + 2)$

Horner-Schema zur Polynomdivision
Das Horner-Schema kann zur Polynomdivision mit der linearen Funktion $y = x - x_1$ genutzt werden. In Analogie zur Berechnung des reduzierten Polynoms ergibt sich:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
+	+	+	+		
0	$b_{n-1}x_1$	$b_{n-2}x_1$ ...		b_1x_1	b_0x_1
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_0	$f(x_1)$

Ergebnis

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) / (x - x_1) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0 + f(x_1) / (x - x_1)$$



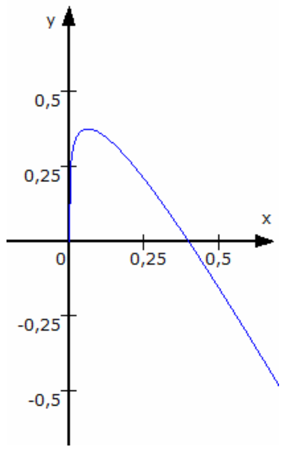
Ganzrationale Funktion $y = x^n$-ax
Für ganzrationale Funktionen der Form $y = x^n - ax$
mit a > 0, n > 1, besitzt die Funktion für nichtnegative Argumente x ein lokales Minimum an der Stelle $x_0 = (a/n)^{1/(n-1)}$
mit dem Funktionswert $y_0 = (1-n) (a/n)^{n/(n-1)}$

Nachweis: Die 1.Ableitung der Funktion ist $f'(x) = n x^{n-1} - a$
Mit f'(x) = 0 folgt für die einzige extremwertverdächtige Stelle

$$a/n = x^{n-1}$$

und damit der oben angegebene Wert. Auf Grund der Stetigkeit und der Verhaltens der Funktion für große x kann nur ein Minimum vorliegen.
In der Abbildung ist $y = x^6 - 2x$
mit dem Minimum bei $(\sqrt[5]{2/3}, -5 \sqrt[5]{(2/3)^6})$.

In Analogie gilt, dass Funktionen der Form $y = ax - x^n$
mit $a > 0$, $n > 1$, für nichtnegative Argumente x ein lokales Maximum bei
$$((a/n)^{1/(n-1)} ; (1-n)\,(a/n)^{n/(n-1)})$$ besitzen.



Ganzrationale Funktion $y = x^n - ax$ (2)

Für ganzrationale Funktionen der Form $y = x^n - ax$
mit $a > 0$, $0 < n < 1$, besitzt die Funktion x ein lokales Maximum an der Stelle
$$x_0 = (a/n)^{1/(n-1)}$$
In der Abbildung ist $y = x^{1/4} - 2x$
mit dem Maximum bei (1/16, 3/8).
Für ganzrationale Funktionen der Form $y = ax - x^n$
mit $a > 0$, $0 < n < 1$, besitzt die Funktion ein lokales Minimum an der Stelle
$$x_0 = (a/n)^{1/(n-1)}$$
Für ganzrationale Funktionen der Form $y = x^n - ax$
mit $a > 0$, $n < 0$, besitzt die Funktion x ein lokales Minimum an der Stelle
$$x_0 = (-a/n)^{1/(n-1)}$$

Polynom

Als Polynom bezeichnet man die gewichtete Summe von Potenzen. Diejenige Potenz im Polynom, die den größten Exponenten hat, bestimmt den Grad des Polynoms.
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,\ n>0$$
ist ein Polynom n-ten Grades mit den Koeffizienten a_n; a_{n-1}; ....; a_2; a_1; a_0

Polynomdivision

Wird ein Polynom durch einen Linearfaktor dividiert, so erhält man ein Polynom dessen Grad um eins niedriger ist, als der Grad des Ausgangspolynoms.

Ordnen eines Polynoms nach fallenden Potenzen

Ein Polynom n-ten Grades enthält n+1 gewichtete Potenzen. Ordnet man diese Potenzen gemäß der Größe ihrer Exponenten so an, dass von links nach rechts gesehen die Exponenten immer kleiner werden, dann heißt das Polynom nach fallenden Potenzen geordnet.

Irreduzibles Polynom

Ein Polynom nennt man irreduzibel, wenn ein Polynom P(x) vom Grade $n \geq 1$ nicht als Produkt von Polynomen niedrigeren Grades dargestellt werden kann. Polynome vom Grade 1 sind stets irreduzibel.

Unitäres Polynom

Polynom, dessen Koeffizient a_n der höchsten Potenz gleich 1 ist

Sätze zu Polynomen

Sei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $n>0$, ein Polynom n.Grades mit $a_n \neq 0$.
1. Ist der gekürzte Bruch p/q Wurzel von P(x), dann teilt p das Absolutglied a_0 und q teilt a_n.
Beweis: Wenn p/q Wurzel von P(x) ist, so ist $q^n P(p/q) = 0$ und somit
$$a_{n-1} q p^{n-1} + \dots + a_1 q^{n-1} p + a_0 q^n = -a_n p^n$$
Also teilt p das Produkt $a_0 q^n$, aber da p und q teilerfremd sind, teilt p die Zahl a_0. Aus dem gleichen Grund teilt q nun a_n.
2. Die Wurzeln eines unitären Polynoms sind entweder ganze Zahlen oder irrational.
Beweis: Da q den Koeffizienten a_n teilen muss, ist $q = \pm 1$.

3. Die Wurzeln von $x^n - a_0 = 0$ mit $n > 1$ und a_0 prim sind irrational.
Beweis: q muss a_n teilen, also $q = \pm 1$. p muss a_0 teilen, also $p = 1$ oder $p = a_0$. Beide Möglichkeiten erfüllen die Gleichung nicht.
Folgerung: Alle Wurzeln $\sqrt[n]{p}$ (n>1) aus Primzahlen sind irrational.
4. Es seien $a = \min \{a_{n-1}/a_n, a_{n-2}/a_n, \dots, a_1/a_n, a_0/a_n\}$ und $b = \min \{-a_{n-1}/a_n, a_{n-2}/a_n, \dots, (-1)^1 a_1/a_n, (-1)^0 a_0/a_n\}$. Dann liegen sämtliche Nullstellen von P(x), sofern es überhaupt welche gibt, in dem Intervall
$$-(1 + |b|) < x < 1 + |a|$$
Für $a \geq 0$ besitzt P(x) keine positiven Nullstellen, für $b \geq 0$ keine negativen Nullstellen. Für $a_n \neq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ existieren folglich keine reellen Nullstellen.

Eisensteinkriterium, Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein

Das Eisensteinkriterium, Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein, dient dem Nachweis der Irreduzibilität eines Polynoms.
Gotthold Eisenstein veröffentlichte 1850 das hinreichende, nicht notwendige, Kriterium, dass allerdings schon 1846 von T.Schönemann gefunden wurde.
P(x) sei ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten a_i $\qquad P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a$

Existiert eine Primzahl p, die alle Koeffizienten a_0 bis a_{n1}, den Koeffizienten a_0 jedoch nicht quadratisch und a_n nicht teilt, d.h.

$p \mid a_i$, i = 0, …, n-1 $a_0 \bmod p^2 <> 0$ $a_n \bmod p <> 0$

dann ist P(x) in Q irreduzibel. Ein Polynom, für das eine derartige Primzahl p existiert, wird Eisenstein-Polynom bezüglich p genannt.

Beispiele: $x^3 + 6x^2 + 4x + 2$ ist irreduzibel (p = 2), d.h. die Nullstelle muss irrational sein.
$x^2 + 4$ erfüllt das Kriterium nicht und ist irreduzibel, dagegen erfüllt $x^2 - 4$ das Kriterium auch nicht, ist aber zerlegbar in (x+2)(x-2).

Polynomdivision

Unter Berücksichtigung des Fundamentalsatzes der Algebra kann in speziellen Fällen ein Polynom durch Polynomdivision in ein Produkt von Polynomen geringeren Grades zerlegt werden.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = a_n (x - x_n) (x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1) (x - x_0)$$

wobei die x_n, x_{n-1}, …, x_1, x_0 die Lösungen der algebraischen Gleichung sind.
Kennt man eine Lösung einer algebraischen Gleichung, so kann man einen Linearfaktor abspalten und analog der schriftlichen Division von Dezimalzahlen dividieren.
Beispiel:
4 ist Lösung von $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8 = 0$. Abspalten von (x - 4) ergibt

```
(x⁴ - 4x³ - 3x² + 10x + 8) : (x - 4) = x³ - 3x - 2
-x⁴ + 4x³
---------------
        0x³ - 3x² + 10x + 8
        + 3x² - 12x
-------------------------
        - 2x + 8
        + 2x - 8
-------------------------
        0
```

und somit $(x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8) = (x - 4) * (x^3 - 3x - 2)$
Sukzessives Abspalten von Linearfaktoren führt nach n-1 Schritten auf die faktorisierte Form. Allerdings müssen auch n-1 Lösungen der Gleichung bekannt sein.

Beispielaufgaben zur Polynomdivision

$(3x^7+19x^6+12x^5-31x^4+39x^3+16x^2+8) : (3x^3+7x^2-x+2) = x^4+4x^3-5x^2+2x+4$
$(x^5+1) : (x+1) = x^4-x^3+x^2-x+1$ Rest 0
$(x^3-8) : (x-2) = x^2+2x+4$ Rest 0
$(x^5+243) : (x+3) = x^4-3x^3+9x^2-27x+81$ Rest 0
$(x^{10}-1) : (x-1) = x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ Rest 0
$(2x^7-3x^6+5x^5+2x^3+5) : (2x^2-3x+5) = x^5+x+3/2$ Rest $-1/2x-5/2$
$(1/2x^4+1/3x^3+1/4x^2+1/5x+1/6) : (1/3x^2+1/4x+1/5) = 3/2x^2-1/8x-9/160$ Rest $153/640x+427/2400$
$(x^9-x^8+2x^6-x^5+2x+1) : (x^3-x^2+x+1) = x^6-x^4+x+1$ Rest 0
$(x^{12}+4x^{11}-5x^9-x^8+8x^6-x^5+2x^4-5x^3+x-1) : (x^3+3x^2-2x+1) = x^9+x^8-x^7-x^6-x^5+2x^4+x^3+x^2-x-1$ Rest 0
$(x^5+1) : (x^4-x^3+x^2-x+1) = x+1$
$(x^5+x+2) : (x+1) = x^4-x^3+x^2-x+2$
$(1/4x^3+7/6x^2+83/18x+14/3) : (1/2x+2/3) = 1/2x^2+5/3x+7$
$(x^5-2x^2+3) : (x^4-x^3+x^2-3x+3) = x+1$

Euklidischer Algorithmus für Polynome

Der Euklidische Algorithmus kann zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teiles zweier Polynome genutzt werden.
Es seien der Grad der Polynome P(x) und $R_0(x)$ größer als null. Man bildet dann eine Kette von Polynomdivisionen mit

$P(x) = R_0(x) \cdot T_1(x) + R_1(x)$ $R_0(x) = R_1(x) \cdot T_2(x) + R_2(x)$
$R_1(x) = R_2(x) \cdot T_3(x) + R_3(x)$ usw.

Da $\mathrm{Grad}(R_0(x)) > \mathrm{Grad}(R_1(x)) > \mathrm{Grad}(R_2(x)) > \ldots$ gibt es einen Index n > 0, so dass $R_n(x)$ das Nullpolynom ist, während für alle m mit $0 \le m < n$ $R_m(x)$ nicht das Nullpolynom ist.
$R_{n-1}(x)$ ist dann der größte gemeinsame Teiler von P(x) und $R_0(x)$.

Beispiel: $P(x) = x^6 + 8\cdot x^5 + 20\cdot x^4 + 20\cdot x^3 + 19\cdot x^2 + 12\cdot x$
$R_0(x) = x^5 + 3\cdot x^4 + x^3 - 3\cdot x^2 - 14\cdot x + 12$
$T_1(x) = x + 5$ $R_1(x) = 4\cdot x^4 + 18\cdot x^3 + 48\cdot x^2 + 70\cdot x - 60$
$T_2(x) = x/4 - 3/8$ $R_2(x) = -17/4\cdot x^3 - 5/2\cdot x^2 + 109/4\cdot x - 21/2$
$T_3(x) = -16/17\cdot x - 1064/289$ $R_3(x) = 18624/289\cdot x^2 + 43368/289\cdot x - 28512/289$
$T_4(x) = -4913/74496\cdot x + 1812319/14452224$ $R_4(x) = 93925/150544\cdot (x+3)$
$T_5(x) = 2803731456/27144325\cdot x + 1430770176/27144325$ und $R_5(x) = 0$
Damit ist der ggT = x + 3.

Polynommultiplikation
Unter der Multiplikation zweier Polynome

$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ n>0$

$B(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0,\ m>0$

versteht man deren Produkt A(x) B(x), d.h. das Ausmultiplizieren der in Klammern gesetzten Polynomterme.

Kronecker–Schönhage-Trick
Steht eine Langarithmetikmultiplikation zur Verfügung, so kann effizient der sogenannte Kronecker–Schönhage-Trick verwendet werden.
Sind zwei Polynome A(x) und B(x), mit nichtnegativen Koeffizienten, zu multiplizieren und überschreiten sie nicht den Grad n und die Koeffizienten den Wert ρ, so verwendet man eine Potenz

$X = \beta^k > n\rho^2$

einer Basis β (meist = 10).
Mit dieser Potenz konstruiert man ganze Zahlen a = A(X) und b = B(X) und multipliziert diese.
Aus dem Ergebnis werden die Koeffizienten des Produktpolynoms "blockweise" ausgelesen.

Beispiel: $(6x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 9x^2 + x + 3)(7x^4 + x^3 + 2x^3 + x + 7)$
Der maximale Grad n ist 6 und der größte Koeffizient $\rho = 9$. Als Potenz ist $X = 1000 > n\rho^2$ geeignet.
Damit sind folgende natürliche Zahlen zu multiplizieren

6 006 004 009 001 003 × 7 001 002 001 007

Aus derem Produkt

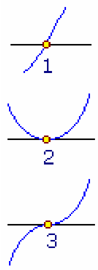
42 048 046 085 072 086 042 070 010 021,

liest man die Koeffizienten des Polynomprodukts ab:

$42x^9 + 48x^8 + 46x^7 + 85x^6 + 72x^5 + 86x^4 + 42x^3 + 70x^2 + 10x + 21$

Kronecker-Algorithmus
Der Kronecker-Algorithmus wird zur Berechnung aller in Z[x] gelegenen Teiler eines Polynoms f(x) mit ganzzahligen Koeffizienten genutzt.
(a) Ist der Grad deg(f) = n, so genügt es, alle Teiler g(x) von f(x) mit deg(g) ≤ n/2 zu bestimmen.
(b) Ist g(x) aus Z[x] ein Teiler von f(x) und ist a eine ganze Zahl, so gilt: g(a) | f(a).
(c) Ist s eine natürliche Zahl und sind $a_0, \ldots, a_s$ paarweise verschiedene ganze Zahlen und $b_0, \ldots, b_s$ weitere beliebige ganze Zahlen, so gibt es genau ein Polynom g aus Q[x] mit deg(g) ≤ s und dass für alle $i=0,\ldots,s$ $g(a_i) = b_i$ gilt.

Das folgende Verfahren findet also alle Teiler g aus Z[x] vom Grad s eines Polynomes f aus Z[x]:
(a) Man wähle paarweise verschiedene $a_0, \ldots, a_s$ aus Z, so dass $f(a_i)$ verschieden 0 für jedes i ist und man bestimme für jedes i alle Teiler von $f(a_i)$.
(b) Zu jedem (s+1)-Tupel $(b_0, \ldots, b_s)$ mit $b_i \mid f(a_i)$, für alle i, berechne man das Polynom g aus Q[x] mit deg(g) ≤ s und $g(a_i) = b_i$ für alle i.
(c) Diejenigen der eben ermittelten Polynome vom Grad s, die in Z[x] liegen, untersuche man daraufhin, ob sie Teiler von f sind.

Nullstelle einer Funktion


Eine Zahl α heißt Nullstelle einer Funktion y=f(x), wenn der Zahl α durch die Funktion die 0 zugeordnet wird
Vielfachheit von Nullstellen bei ganzrationalen Funktionen (siehe Verlauf des Graphen) ...

einfache Nullstelle ... Beispiel 1

mehrfache Nullstelle ... Beispiel 2 und 3

Descartessche Zeichenregel
Gegeben sei die ganzrationale Funktion $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ n>0$
Folge der Koeffizienten (Nullglieder ignorieren) $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$
Voraussetzung: a_n und $a_0 \neq 0$
Haben benachbarte Glieder unterschiedliche Vorzeichen liegt ein Zeichenwechsel vor
Descartesssche Regel:
Die Anzahl der Zeichenwechsel oder eine um eine gerade Zahl kleiner Zahl ist der Anzahl der positiven Nullstellen des Polynoms gleich. Die Anzahl der negativen Nullstellen ergibt sich analog aus der Anzahl der Zeichenwechsel im Polynom f(-x).

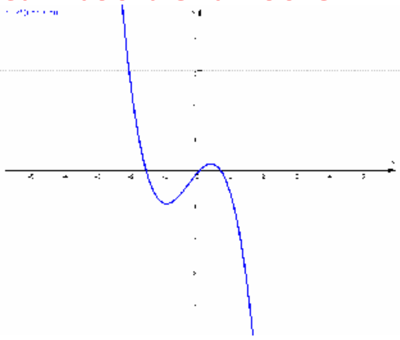
Descartessche Zeichenregel - Beispiel
Beispiel: Untersuchung von $x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 1 = 0$
Die Koeffizienten der Gleichung haben nacheinander die Vorzeichen +, +, -, +, - d.h. das Vorzeichen wechselt dreimal. Die Gleichung besitzt in Übereinstimmung mit der Regel von Descartes entweder eine oder drei positive Wurzeln.
Da beim Ersetzen von x durch -x die Wurzeln der Gleichung ihre Vorzeichen ändern, sich aber bei der Substitution von x durch x+a um a verringern, kann auch die Anzahl der negativen Wurzeln sowie die

Anzahl der Wurzeln, die größer sind als a, abgeschätzt werden. Im Beispiel führt das Ersetzen von x durch -x auf :

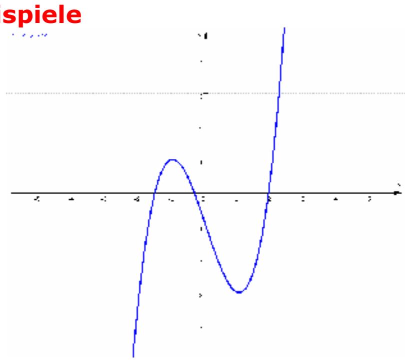
$x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 1 = 0$, d.h., die Gleichung besitzt eine negative Wurzel.

Substituiert man x durch x+1 ergibt sich: $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 13x + 6 = 0$,
d.h., alle positiven Wurzeln der Gleichung (eine oder drei) sind kleiner als 1.
Die Lösungen der Gleichung sind $x_1 = -2{,}95161$, $x_2 = 0{,}2046$, $x_3 = 0{,}37351 + 1{,}23144\cdot i$, $x_4 = 0{,}37351 - 1{,}23144\cdot i$.

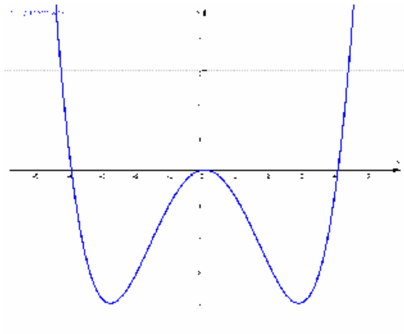
Ganzrationale Funktionen - Beispiele



Y = X*(1-X*(P+X))



Y = X^3-3*X-1



Y = 1/16*X^4-X^2

Newtonsche Nullstellenregel

Gegeben sein ein Polynom p(x) n-ten Grades. Die reelle Zahl S ist dann eine obere Schranke für alle reellen Nullstellen von p(x), falls gilt: $p(S) > 0$, $p'(S) > 0$, $p''(S) > 0$, …, $p^{(n-1)}(S) > 0$
d.h. alle Ableitungen müssen größer Null sein.

Beispiel: Gegeben ist $p(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8$.
Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8$
Mit den Ableitungen $p'(x) = 4x^3 - 10x + 8$ $\quad p''(x) = 12x^2 - 10$ $\quad p'''(x) = 24x$
wird für S = 2: $p(2) > 0$, $p'(2) > 0$, $p''(2) > 0$ und $p'''(2) > 0$.
Damit ist S = 2 eine obere Schranke für alle reellen Nullstellen von p(x).
Wendet man dieses Verfahren auf q(x) = p(-x) an, so ergibt sich, dass alle reellen Nullstellen von q(x) kleiner als oder gleich 3 sind.
Die reellen Nullstellen von p(x) müssen damit im Intervall [-3, 2] liegen.

Sturmscher Satz

Gegeben sei ein Polynom $\phi(x)$ und deren Ableitung $\phi'(x)$.
Durch Polynomdivision erhält man

$\phi = q_1 \phi' - \phi_2 \quad \phi' = q_2 \phi_2 - \phi_3 \quad \phi_2 = q_3 \phi_3 - \phi_4 \quad \phi_3 = q_4 \phi_4 - \phi_5 \ldots$

Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab. Die endliche Folge $\phi, \phi', \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r$ heißt Sturmsche Kette.
Für ein Argument x=a entsteht die Folge $\phi(a), \phi'(a), \phi_1(a), \phi_2(a), \ldots, \phi_r(a)$
W(a) ist die Anzahl der Vorzeichenwechsel dieser Folge

Sturmscher Satz

Ist $\phi(x)$ ein Polynom mit nur einfachen Nullstellen, ist a<b und sind $\phi(a)\neq 0$ und $\phi(b)\neq 0$, so ist W(a)-W(b) gleich der Anzahl der Nullstellen des Polynoms $\phi(x)$ im abgeschlossenen Intervall [a;b].

Sturmscher Satz - Beispiel

Für $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ soll die Anzahl der Wurzeln im Intervall [0,2] bestimmt werden. Die Berechnung der Sturmschen Funktion ergibt: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8$ $\quad f'(x) = 4x^3 - 10x + 8$

$f_1(x) = 5x^2 - 12x + 16$
$f_2(x) = -3x + 284$ $\quad f_3(x) = -1$

Einsetzen von x = 0 ergibt die Folge -8, +8, +16, +284, -1 mit zwei Wechseln, Einsetzen von x = 2 liefert +4, +20, +12, +278, -1 mit einem Wechsel, so dass W(a)-W(b) = 1 ist, d.h. zwischen 0 und 2 liegt eine Wurzel.

Budan-Regel

Mit der Descartschen Zeichenregel wird: Die Anzahl der Nullstellen von

$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, n>0

in einem Intervall (a,b) ist gleich W(a)-W(b) oder um eine gerade Zahl weniger, wobei W(x) die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Sturmschen Kette $\phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \phi^{(3)}(a), \ldots, \phi^{(n)}(a)$ ist.

Lobatschewski-Verfahren

Das Hauptwerk Lobatschewskis über Analysis enthielt eine Reihe von neuen Einsichten und Methoden, darunter ein Verfahren zur iterativen Bestimmung von Nullstellen von Polynomen n-ten Grades:

Hat z.B. ein Polynom 3.Grades die Nullstellen r_1, r_2, r_3 mit $|r_1| > |r_2| > |r_3|$, dann gilt:

$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$ mit

$a_2= -(r_1+r_2+r_3)$, $a_1 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$, $a_0 = -r_1r_2r_3$

Hieraus ergibt sich eine weitere Funktion 3.Grades, deren Nullstellen die Quadrate der ursprünglichen Nullstellen sind:

$f_1(x) = -f(\sqrt{x}) \cdot f(-\sqrt{x}) = (x-r_1^2)(x-r_2^2)(x-r_3^2) = x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ mit

$b_2= -(r_1^2+r_2^2+r_3^2) = -a_2^2 + 2a_1$, $b_1 = r_1^2r_2^2 + r_1^2r_3^2 + r_2^2r_3^2 = a_1^2 - 2a_2a_0$

$b_0 = - r_1^2r_2^2r_3^2 = -a_0^2$

Bei Fortsetzung des Verfahrens liegen die Nullstellen immer weiter auseinander, da sie quadriert werden, auch die Koeffizienten der Polynome nehmen betraglich zu.

Aus $f(x) = x^3 +3x^2 -4x -2$ wird $f_1(x) = x^3 -17x^2 +28x -4$, $f_2(x) = x^3 -233x^2 +648x -16$ und $f_3(x) = x^3 - 52993x^2 +412448x -256$.

Die Quotienten aufeinander folgender Koeffizienten liefern immer bessere Näherungswerte für die Nullstellen. Deren Vorzeichen erhält man durch Ausprobieren.

$-b_2/b_3 = - -17/1 = r_1^2+r_2^2+r_3^2 / 1 \approx r_1^2$

$-b_1/b_2 = - 28/(-17) = (r_1^2r_2^2 + r_1^2r_3^2 + r_2^2r_3^2) / (r_1^2+r_2^2+r_3^2) \approx r_2^2$

$-b_0/b_1 = - -4/28 = r_1^2r_2^2r_3^2 / (r_1^2r_2^2 + r_1^2r_3^2 + r_2^2r_3^2) \approx r_3^2$

also $r_1 \approx -4{,}12$; $r_2 \approx 1{,}28$; $r_3 \approx -0{,}38$.

Aus dem Polynom $f_3(x)$ erhält man die Nullstellen bereits mit 3stelliger Genauigkeit

$r_1 = -\sqrt[8]{52993} \approx -3{,}895$

$r_2 = \sqrt[8]{(412448/52993)} \approx 1{,}292$

$r_3 = -\sqrt[8]{(256/412448)} \approx -0{,}397$

Zerlegung des Binoms $B(n)=x^n-1$

Binome der Form x^n-1 können in ein Produkt von Polynomen niedrigeren Grades zerlegt werden; in Analogie der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen.

Interessant ist dabei, dass die Koeffizienten der Einzelsummanden der Polynome bis $x^{104} - 1$ stets einen der Werte -1, 0 oder 1 haben. Lange Zeit vermutete man, dass dies immer so sei. Allerdings gelang der Nachweis, dass in der Zerlegung des Binoms für n = 105 zweimal ein Koeffizient -2 auftritt. Die Liste enthält die Zerlegung für die ersten Binome.

Ein Eintrag der Form B(aa) bedeutet, dass die Zerlegung des Binoms $x^{aa} - 1$ ebenfalls als Teiler auftritt.

Faktorzerlegung der Binome x^n - 1

n	Zerlegung	n	Zerlegung
1	(x-1)	2	(x-1)(x+1)
3	(x-1)(x²+x+1)	4	B(2)·(x²+1)
5	(x-1)(x^4+x³+x²+x+1)	6	B(3)·(x+1)(x²-x+1)
7	(x-1)(x^6+x^5+x^4+x³+x²+x+1)	8	B(4)·(x^4+1)
9	B(3)·(x^6+x³+1)	10	B(5)·(x+1)(x^4-x³+x²-x+1)
11	(x-1)(x^10+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x³+x²+x+1)		
12	B(6)·(x²+1)(x^4-x²+1)	13	(x-1)(x^12+...+x+1)
14	B(7)·(x+1)(x^6-x^5+x^4-x³+x²-x+1)		
15	B(5)·(x²+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x³-x+1)	16	B(8)·(x^8+1)
17	(x-1)(x^16+...+x+1)	18	B(9)·(x+1)(x²-x+1)(x^6-x³+1)
19	(x-1)(x^18+...+x+1)	20	B(10)·(x²+1)(x^8-x^6+x^4-x²+1)
105	B(21)·(x^4+x³+x²+x+1)(x^8-x^7+x5-x^4+x³-x+1)·... (x^24-x^23+x^19-x^18+x^17-x^16+x^14-x^13+x^12-x^11+x^10-x^8+x^7-x^6+ +x^5-x+1)·(x^48+x^47+x^46-x^43-x^42-2·x^41-x^40-x^39+x^36+x^35+x^34+ +x^33+x^32+x^31-x^28-x^26-x^24-x^22-x^20+x^17+x^16+x^15+x^14+x^13+ +x^12-x^9-x^8-2·x^7-x^6-x^5+x²+x+1)		

Zerlegung des Binoms $B(n)=x^n+1$

Binome der Form x^n+1 können in ein Produkt von Polynomen niedrigeren Grades zerlegt werden; in Analogie der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen.

Ein Eintrag der Form B(aa) bedeutet, dass die Zerlegung des Binoms $x^{aa} + 1$ ebenfalls als Teiler auftritt.

Der Eintrag A(aa) stellt das Polynom $x^{aa} - x^{aa-1} + x^{aa-2} - x^{aa-3}$ +- ... + $x^2 - x + 1$ dar.

Faktorzerlegung der Binome x^n + 1

n	Zerlegung	n	Zerlegung
1	(x+1)	2	(x²+1)
3	(x-1)(x²-x+1)	4	(x^4+1)
5	(x+1)(x^4-x³+x²-x+1)	6	B(2)·(x^4-x²+1)
7	(x+1)(x^6-x^5+x^4-x³+x²-x+1)	8	(x^8+1)
9	B(3)·(x^6-x³+1)	10	B(2)·(x^8-x^6+x^4-x²+1)
11	(x+1)(x^10-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x³+x²-x+1)		

12	B(4)·(x^8-x^4+1)	13	(x+1)·A(12)
14	B(2)·(x^12-x^10+x^8-x^6+x^4-x²+1)		
15	B(5)·(x^2-x+1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x³+x+1)		
16	(x^16+1)	17	(x+1)·A(16)
18	B(2)·(x^4-x²+1)(x^12-x^6+1)	19	(x+1)·A(18)
20	B(4)·(x^16-x^12+x^8-x^4+1)		
21	B(7)·(x²-x+1)(x^12+x^11-x^9-x^8+x^6-x^4-x³+x+1)		

Zerlegung des Binoms $B(n)=x^n + a^m$

Binome der Form $x^n + a^m$ bzw. speziell $x^n + b$ können in mitunter in ein Produkt von Polynomen niedrigeren Grades zerlegt werden; in Analogie der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen. U.a. gilt

$x^3 + a^3 = (a + x)\cdot(a^2 - a\cdot x + x^2)$ $\quad$ $x^3 + a^6 = (a^2 + x)\cdot(a^4 - a^2\cdot x + x^2)$

$x^4 + 64 = (x^2 + 4\cdot x + 8)\cdot(x^2 - 4\cdot x + 8)$ $\quad$ $x^4 + 324 = (x^2 + 6\cdot x + 18)\cdot(x^2 - 6\cdot x + 18)$

$x^4 + 1024 = (x^2 + 8\cdot x + 32)\cdot(x^2 - 8\cdot x + 32)$ $\quad$ $x^4 + 2500 = (x^2 + 10\cdot x + 50)\cdot(x^2 - 10\cdot x + 50)$

$x^4 + 5184 = (x^2 + 12\cdot x + 72)\cdot(x^2 - 12\cdot x + 72)$ $\quad$ $x^4 + 9604 = (x^2 + 14\cdot x + 98)\cdot(x^2 - 14\cdot x + 98)$

allgemein: $x^4 + 4\, b^{4n} = (x^2 + 2\cdot b^n\cdot x + 2\cdot b^{2n})\cdot(x^2 - 2\cdot b^n\cdot x + 2\cdot b^{2n})$

$x^5 + a^5 = (a + x)\cdot(a^4 - a^3\cdot x + a^2\cdot x^2 - a\cdot x^3 + x^4)$ $\quad$ $x^6 + a^3 = (x^2 + a)\cdot(x^4 - a\cdot x^2 + a^2)$

$x^7 + a^7 = (a + x)\cdot(a^6 - a^5\cdot x + a^4\cdot x^2 - a^3\cdot x^3 + a^2\cdot x^4 - a\cdot x^5 + x^6)$

$x^8 + 4\, b^{4n} = (x^4 + 2\cdot b^n\cdot x^2 + 2\cdot b^{2n})\cdot(x^4 - 2\cdot b^n\cdot x^2 + 2\cdot b^{2n})$

$x^9 + a^3 = (x^3 + a)\cdot(x^6 - a\cdot x^3 + a^2)$

$x^{10} + a^5 = (a + x^2)\cdot(a^4 - a^3\cdot x^2 + a^2\cdot x^4 - a\cdot x^6 + x^8)$

$x^{12} + a^3 = (x^4 + a)\cdot(x^8 - a\cdot x^4 + a^2)$

Elementarsymmetrische Funktion

Jede symmetrische ganzrationale Funktion mit n unabhängigen Variablen kann als Polynom der elementarsymmetrischen Funktionen $o_1, o_2, \ldots, o_n$ dargestellt werden.

Elementarsymmetrische Funktion für den Fall n = 4:

$o_1 (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ $\quad$ $o_2 (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

$o_3 (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$ $\quad$ $o_4 (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4$

Partialbruchzerlegung von f(x)/g(x)

1. g(x) = 0 hat nur einfache reelle Wurzeln x_i

$f(x)/g(x) = A/(x-x_1) + B/(x-x_2) + C/(x-x_3) + \ldots$ mit $A = f(x_1)/g'(x_1)$, $B = f(x_2)/g'(x_2)$, …

2. … reelle aber mehrfache auftretende Wurzeln x_1 α mal, x_2 β mal, x_3 γ mal …

$f(x)/g(x) = A_1/(x-x_1)^\alpha + A_2/(x-x_1)^{\alpha-1} + \ldots + A_\alpha/(x-x_1) + B_1/(x-x_2)^\beta + \ldots + B_\alpha/(x-x_2) + \ldots$

3. … neben reellen auch einfache konjugiert komplex auftretende Wurzeln

x_1 und x_2 sind zueinander konjugiert komplex

$\Rightarrow f(x)/g(x) = (Px + Q) / [(x-x_1)\,(x+x_2)\,] = (Px + Q) / (x^2 + px + q)$

4. … neben reellen auch mehrfache komplexe Wurzeln, z.B. bei einer dreifachen reellen und zweifach auftretenden konjugiert komplexen Wurzeln

$f(x)/g(x) = A_1/(x-x_1)^3 + A_2/(x-x_1)^2 + A_2/(x-x_1) + (P_1x + Q_1) / (x^2 + px + q)^2 +$
$+ (P_2x + Q_2) / (x^2 + px + q)$

Standardfälle

Bezeichnung $X=a+bx$ und $Y=f+gx$ $\quad$ $1/(XY) = 1/(fb-ag)\,(b/X - g/Y)$

Bezeichnung $X=a+x$, $Y=b+x$ und $Z=c+x$ $\quad$ $1/(XYZ) = A/X + B/Y + C/Z$ mit

$A = 1/[(b-a)(c-a)]$, $B = 1/[(a-b)(c-b)]$ und $C = 1/[(a-c)(b-c)]$

Bezeichnung $X=a+bx^2$ und $Y=f+gx^2$ $\quad$ $1/(XY) = 1/(fb-ag)\,(b/X - g/Y)$

Beispiel zur Partialbruchzerlegung von f(x)/g(x)

$f(x)/ g(x) = (x^3 + 3x^2 - 6x - 2) /(x^3 + x^2 - 2x)$

ganzzahlige Anteile abspalten

$(x^3 + 3x^2 - 6x - 2) : (x^3 + x^2 - 2x) = 1$

$-(x^3 + x^2 - 2x)$

$2x^2 - 4x - 2$

$(x^3 + 3x^2 - 6x - 2) /(x^3 + x^2 - 2x) = 1 + (2x^2 - 4x - 2) /(x^3 + x^2 - 2x)$

$x^3 + x^2 - 2x = 0$ $\quad$ $x\,(x^2 + x - 2) = 0$

$x_1 = 0$ $\quad$ $x_{2,3} = -\tfrac12 \pm \sqrt{[1/4 + 2]} = -\tfrac12 \pm \sqrt{[9/4]} = -\tfrac12 \pm 3/2$

$x_2 = -\tfrac12 + 3/2 = 1$ $\quad$ $x_3 = -\tfrac12 - 3/2 = -2$

Ansatz

$(2x^2 - 4x - 2) /(x^3 + x^2 - 2x) = A/x + B/(x-1) + C/(x+2)$ $\quad$ | *Nenner

$2x^2 - 4x - 2 = A\,(x-1)\,(x+2) + Bx\,(x+2) + Cx\,(x-1)$

$2x^2 - 4x - 2 = Ax^2 - Ax + 2Ax - 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - Cx$

$2x^2 - 4x - 2 = x^2 (A + B + C) + x (A + 2B - C) + (- 2A)$ Koeffizientenvergleich

$2 = A + B + C \quad -4 = A + 2B - C \quad -2 = - 2A \quad \Rightarrow A = 1$

$2 = 1 + B + C \quad -4 = 1 + 2B - C \quad 1 = B + C \quad -5 = 2B - C$

$-4 = 3B \Rightarrow B = - 4/3 \quad \Rightarrow C = 7/3$

$(2x^2 - 4x - 2) /(x^3 + x^2 - 2x) = 1/x - 4/[3 (x-1)] + 7/[3 (x+2)]$

Anmerkung: Integration ergibt

$\int(x^3 + 3x^2 - 6x - 2) /(x^3 + x^2 - 2x)\, dx =$

$= \int 1\, dx + \int[2x^2 - 4x - 2] /[x^3 + x^2 - 2x]\, dx = x + \int 1/x\, dx - 4/3 \int 1/[x-1]\, dx + 7/3 \int 1/[x+2]\, dx =$

$= x + \ln |x| - 4/3 \int 1/[x-1]\, dx + 7/3 \int 1/[x+2]\, dx = x + \ln |x| - 4/3 \ln |x-1| + 7/3 \ln |x+2| + c =$

$= x + \ln |x| - \ln |(x-1)^{4/3}| + \ln |(x+2)^{7/3}| + c = x + \ln |x \sqrt[3]{[(x+2)^7] /[(x-1)^4]}\,| + c$

Gebrochenrationale Funktionen

$y = g(x) / h(x)$ mit $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

und $h(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, $m>0$

Sind g(x) und h(x) teilerfremd, so ist

x_0 ist Nullstelle von f(x) $\Leftrightarrow g(x_0) = 0$ und $h(x_0) \neq 0$

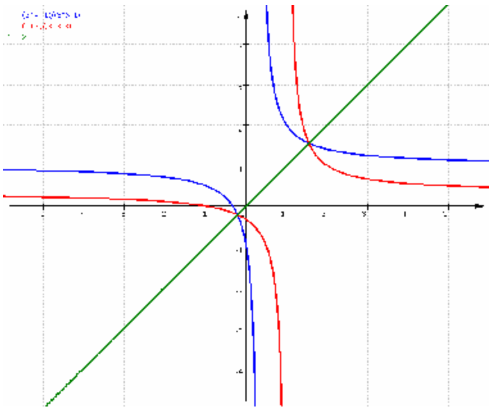
x_p ist Polstelle von f(x) $\Leftrightarrow g(x_p) \neq 0$ und $h(x_p) = 0$

x_u ist Unstetigkeitsstelle ("Loch") von f(x) $\Leftrightarrow g(x_u) = 0$ und $h(x_u) = 0$

Grad des h(x)-Polynoms>Grad des g(x)-Polynom $\Rightarrow$ echt gebrochenrationale Funktion, sonst unecht gebrochenrationale Funktion

$\Rightarrow$ Jede unecht gebrochenrationale Funktion kann als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochenrationalen Funktion dargestellt werden.

Verhalten gebrochenrationaler Funktionen im Unendlichen



$y = f(x) = g(x) / h(x)$ mit

$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$h(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, $m>0$

1. $m>n$: f(x) strebt für $x \to \infty$ gegen 0
2. $m=n$: f(x) strebt für $x \to \infty$ gegen a_n/b_m
3. $m<n$: f(x) strebt für $x \to \infty$ gegen ∞

Normalform rationaler Funktionen

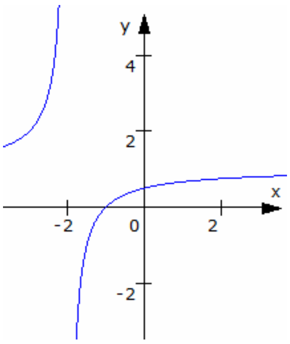
Wenn $f(x) = g(x) / h(x)$ eine rationale Funktion ist und die beiden Polynome g(x) und h(x) gemeinsame Nullstellen $x_1, \dots, x_k$ haben, dann kann man f in folgender Form schreiben:

$f(x) = (x-x_1) \dots (x-x_k)\, g^*(x) / (x-x_1) \dots (x-x_k)\, h^*(x)$

dabei haben $g^*(x)$ und $h^*(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen mehr.

Die rationale Funktion $f^*(x) = g^*(x) / h^*(x)$

stimmt bis auf ihr Verhalten an den gemeinsamen Nullstellen von g und h mit f überein und heißt Normalform. Es gilt sogar: $f^*(x_i)$) $\lim_{x \to xi} f(x)$ für $i = 1, \dots, k$



Gebrochenrationale Funktionen - Beispiele

$f(x) = (ax+b)/(cx+d)$ mit $D = ad-bc \neq 0$ und $c \neq 0$

Bild: gleichseitige Hyperbel mit Hauptachse $\sqrt{(2|D|)}/|c|$

Mittelpunkt $M(-d/c ; a/c)$

Asymptoten parallel zu den Koordinatenachsen; Pol 1.Ordnung $x = - d/c$

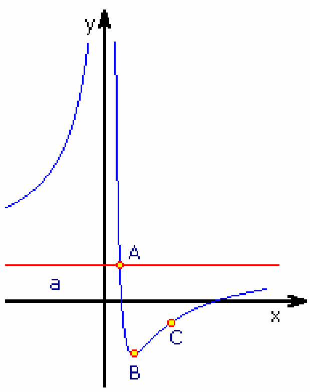
Funktionen dieses Typs werden auch homografische Funktionen genannt

$f(x) = (ax+b)/(cx+d)$ strebt für $x \to \infty$ gegen a/c

Die, unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches, zu $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$ gehörende Umkehrfunktion ist $y = (b - xd)/(xc - a)$.

In der Abbildung ist die Funktion $y = (3x+1)/(3x-1)$ mit ihrer Umkehrfunktion $y = (1+x)/(x+2)$ abgebildet.

Durch die Transformation $x = u-d/c$, $y = w+a/c$ geht die Funktion in die Gestalt $w = -D/(c^2u)$ über. Somit ergibt sich die Funktion aus der Normalform $y = -D/(c^2x)$ durch eine Translation, bei welcher der Punkt (0, 0) in den Punkt P = (-d/c, a/c) verschoben wird.



$f(x) = a + b/x + c/x^2$ mit $b \neq 0$ und $c \neq 0$

Bild: zwei Zweige, bei x=0 Pol 2.Ordnung (siehe Abbildung)

Asymptoten: y-Achse und y = a

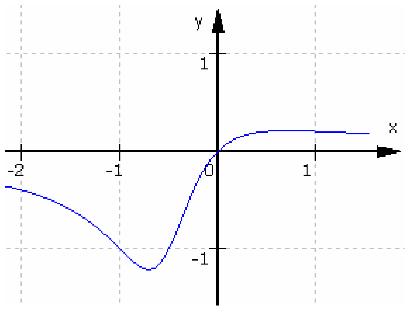
genau ein Zweig scheidet die Asymptote y=a

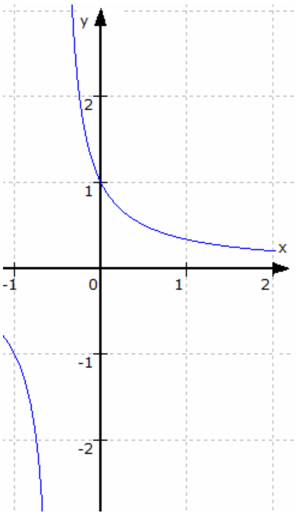
Schnittpunkt $A(-c/b ; a)$

Extremum B$(-2c/b \,;\, a-b^2/(4c))$ Wendepunkt C$(-3c/b \,;\, a-2b^2/(9c))$
für $\Delta = 4ac-b^2 < 0$ … 2 Nullstellen
$x_1 = -b/(2a) + \sqrt{(-\Delta)}/|2a|$ $x_2 = -b/(2a) - \sqrt{(-\Delta)}/|2a|$
für $\Delta = 0$ wird die x-Achse in $-b/(2a)$ berührt

$f(x) = 1/(ax^2+bx+c)$ mit $a \neq 0$
Symmetrieachse $2ax + b = 0$ Asymptote x-Achse
Diskriminante $\Delta = 4ac - b^2$
$\Delta>0$
Maximum $(-b/(2a) \,;\, 4a/\Delta)$ Wendepunkte $(-b/(2a) \pm \sqrt{\Delta} /(2a \sqrt{3}) \,;\, 3a/\Delta)$
mit Anstieg $\pm a^2 (3/\Delta)^{3/2}$
$\Delta=0$ Pol 2.Ordnung $x = -b/(2a)$
$\Delta<0$
Maximum $(-b/(2a) \,;\, 4a/\Delta)$ Pol 1.Ordnung $x = -b/(2a) \pm \sqrt{(-\Delta)}/(2a)$

$f(x) = x/(ax^2+bx+c)$ mit $ac \neq 0$
Abbildung: $y = x/(2x^2+2x+1)$
Asymptote x-Achse Diskriminante $\Delta = 4ac - b^2$
$\Delta>0$
Maximum $(\sqrt{(c/a)} \,;\, (-b+2\sqrt{(ac)})/\Delta)$
Minimum $(-\sqrt{(c/a)} \,;\, (-b-2\sqrt{(ac)})/\Delta)$
$\Delta=0$ Pol 2.Ordnung $x = -b/(2a)$
Maximum $(b/(2a) \,;\, 1/(2b))$ für $b>0$
Minimum $(b/(2a) \,;\, 1/(2b))$ für $b<0$
$\Delta<0$ Pol 1.Ordnung $x_{1;2} = (-b \pm \sqrt{(-\Delta)})/(2a)$



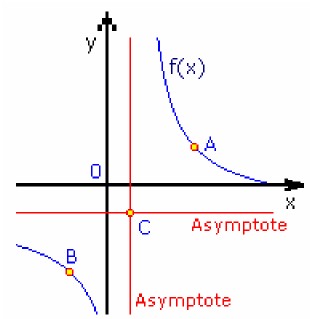


Reziproke lineare Funktion

Die reziproke lineare Funktion $f(x) = 1 / (ax+b)$
ist ein Sonderfall einer gebrochen rationalen Funktion. Ihr Graph ist ein Hyperbel.
Die Funktion besitzt bei $x = -b/a$ eine Polstelle. Für $x > -b/a$ ist die Funktion für $a > 0$ positiv, für $a < 0$ negativ. Für $x < -b/a$ hat sie jeweils das andere Vorzeichen. Beispiel: $y = 1/(x+1)$

Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$, $x \neq -b/a$
Wertebereich	$-\infty < y < \infty$, $y \neq 0$
Periodizität	keine
Monotonie	$a > 0$, $x > -b/a$ … streng monoton fallend
	$a > 0$, $x < -b/a$ … streng monoton steigend
	$a < 0$, $x < -b/a$ … streng monoton fallend
	$a < 0$, $x > -b/a$ … streng monoton steigend
Symmetrie	Punktsymmetrie zu P$(-b/a, 0)$
Verhalten	für $x \to \pm\infty$ jeweils $f(x) \to 0$
Nullstellen	keine

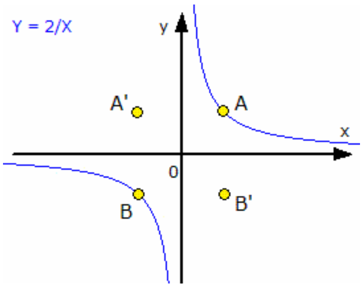
Extrema keine Wendepunkte keine
Umkehrfunktion $f^*(x) = 1/(ax) - b/a$ Ableitung $y' = -a / (ax+b)^2$
Stammfunktion $F(x) = 1/a \ln |1 + ax/b| + C$
Näherungen $1/(ax+b) \approx 1/b - ax/b^2$ für $|x| < |b|/(16|a|)$
$1/(ax+b) \approx (ax-b)/(a^2x^2)$ für $|x| > 16|a|/|b|$
Reihe $1/(ax+b) = 1/b - ax/b^2 + a^2x^2/b^3 - a^3x^3/b^4$ +- …



Gebrochen lineare Funktion

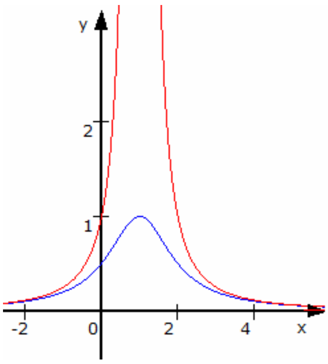
Die Funktion **$f(x) = (a_1 x + b_1) / (a_2 x + b_2)$**
liefert eine gleichseitige Hyperbel , deren Asymptoten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.
Der Mittelpunkt C liegt bei $(-b_2/a_2 \,;\, a_1/a_2)$. Mit $\Delta = a_1 b_2 - b_1 a_2$ liegen die Scheitelpunkte A und B der Hyperbel bei
$(-(b_2 \pm \sqrt{|\Delta|}) / a_2 , (a_1 + \sqrt{|\Delta|}) / a_2)$ bzw.
$(-(b_2 \pm \sqrt{|\Delta|}) / a_2 , (a_1 - \sqrt{|\Delta|}) / a_2)$,
wobei für $\Delta < 0$ gleiche Vorzeichen genommen werden, für $\Delta > 0$ verschiedene.

Die Unstetigkeitsstelle liegt bei $x = -b_2 / a_2$. Die Funktion nimmt für $\Delta < 0$ von a_1/a_2 bis $-\infty$ und von ∞ bis a_1/a_2 ab. Für $\Delta > 0$ wächst die Funktion von a_1/a_2 bis ∞ und von $-\infty$ bis a_1/a_2. Extrema gibt es keine.



Gebrochen lineare Funktion (2)

Die Funktion **$f(x) = a / x$; $a \neq 0$**
liefert eine gleichseitige Hyperbel mit der Hauptachse $\sqrt{2|a|}$, dem Mittelpunkt O und den Koordinatenachsen als Asymptoten.
Die Funktionen besitzen einen Pol 1.Ordnung an der Stelle $x = 0$. Extrema fehlen.
Für $a > 0$ sind die Funktionen in den Intervallen monton fallend, ihre Bilder verlaufen im 1. und 3.Quadranten. Die Scheitel der Hyperbel sind die Punkte $A(\sqrt{a}, \sqrt{a})$ und $B(-\sqrt{a}, -\sqrt{a})$.
Für $a < 0$ sind die Funktionen in den Intervallen monton steigend, ihre Bilder verlaufen im 2. und 4.Quadranten. Die Scheitel der Hyperbel sind die Punkte $A'(-\sqrt{|a|}, \sqrt{|a|})$ und $B'(\sqrt{|a|}, -\sqrt{|a|})$.



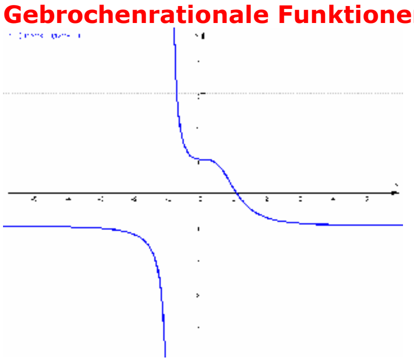
Reziproke quadratische Funktion

Die reziproke quadratische Funktion $f(x) = 1 / (ax^2+bx+c)$
ist ein Sonderfall einer gebrochen rationalen Funktion. Der Graph der Funktion ist von der Diskriminante $D = b^2/(4a^2) - c/a$
abhängig. Für $D = 0$ ist der Graph eine Hyperbel mit der Polstelle $-b/(2a)$.
Für $D > 0$ hat die Funktion bei $-b/(2a) \pm \sqrt{D}$ zwei Polstellen und bei $-b/(2a)$ ein Extremum. Für $D < 0$ besitzt die Funktion keine Polstelle und ein Extremum bei $-b/(2a)$.

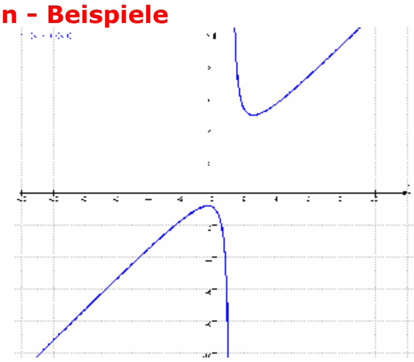
Definitionsbereich $-\infty < x < \infty$, ohne die Polstellen (siehe oben)
Wertebereich $a > 0, D < 0$: $0 < y < -1/(Da)$
$a > 0, D = 0$: $0 < y < \infty$
$a > 0, D > 0$: $0 < y < \infty$, $-\infty < y < -1/(Da)$
$a < 0, D < 0$: $-1/(Da) < y < 0$
$a < 0, D = 0$: $-\infty < y < 0$ $a < 0, D > 0$: $-1/(Da) < y < \infty$, $-\infty < y < 0$

Periodizität	keine		
Monotonie	$a > 0, x > -b/(2a)$ … streng monoton fallend		
	$a > 0, x < -b/(2a)$ … streng monoton steigend		
	$a < 0, x < -b/(2a)$ … streng monoton fallend		
	$a < 0, x > -b/(2a)$ … streng monoton steigend		
Symmetrie	Symmetrie zur $-b/(2a)$-Achse		
Nullstellen	keine	Extrema	siehe oben
Wendepunkte	keine	Umkehrfunktion	$f^*(x) = \sqrt{1/(ax) + D} - b/(2a)$
Ableitung	$y' = -(2ax+b) / (ax^2+bx+c)^2$		

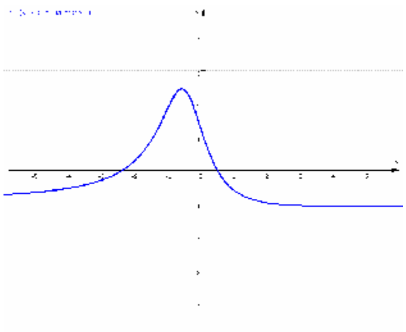
Gebrochenrationale Funktionen - Beispiele



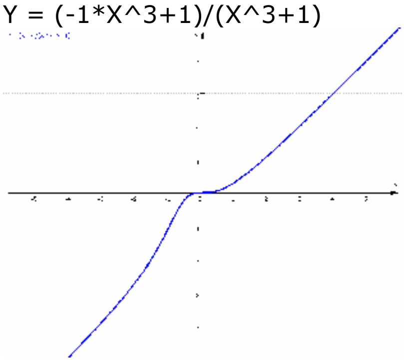
Y = (-1*X^3+1)/(X^3+1)



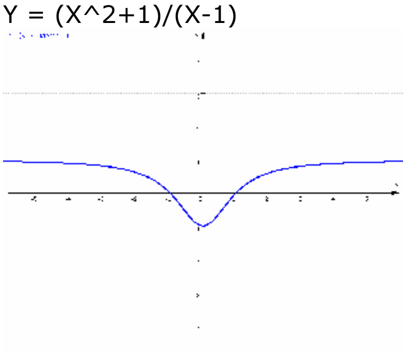
Y = (X^2+1)/(X-1)



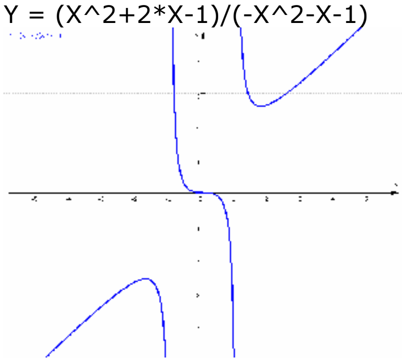
Y = (X^2+2*X-1)/(-X^2-X-1)



Y = (X^3)/(X^2+X+1)



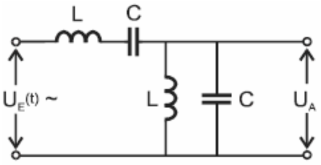
Y = (X^2-1)/(X^2+1)



Y = (X^3)/(X^2-1)

Übertragung bei Wechselstrom-Kreisen

Anwendungsbeispiel für eine gebrochenrationale Funktion
Die abgebildete LC-Schaltung hat als RCL-Schaltung die Eigenschaft: Ist die Eingangsspannung $U_E(t)$ eine Wechselspannung mit Frequenz ω, so ist auch die Ausgangsspannung eine Wechselspannung der Frequenz ω, aber phasenverschoben und mit anderer Amplitude.



Diese Amplitude hängt von der Frequenz der Eingangsspannung ab. Das Amplitudenverhältnis H(ω) ist

$$U_A(t)/U_E(t) = H(\omega) = -\omega^2 LC / (\omega^4 L^2C^2 - 3\omega^2 LC + 1)$$

H(ω) ist eine echt gebrochenrationale Funktion in ω. Die Nullstelle liegt bei ω = 0. Für die Polstellen der Funktion wird:

$$\omega^4 L^2C^2 - 3\omega^2 LC + 1 = 0$$

$$Z = \omega^2: Z^2(LC)^2 - 3Z\, LC + 1 = 0$$

$$Z_{1,2} = 3/2\ 1/(LC) \pm \sqrt{(9/4\ 1/(LC)^2 - 1/(LC)^2)} =$$

$$Z_{1,2} = (3/2 \pm \sqrt{5/2})\ 1/(LC)$$

Lösungen: $Z_1 = 2{,}62/(LC) \ldots \omega_{1,2} = \pm 1{,}61 \sqrt{(1/(LC))}$

$Z_2 = 0{,}76/(LC) \ldots \omega_{3,4} = \pm 0{,}87 \sqrt{(1/(LC))}$

Weiterhin ist H(ω) ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms. Daher gilt: H(ω) → 0 für ω → ∞. Außerdem ist H (ω) → 0 f¨ur ω → 0.
Der grafische Verlauf von |H (ω)| für positive Frequenzen (L = C = 1) entspricht qualitativ dem Graphen

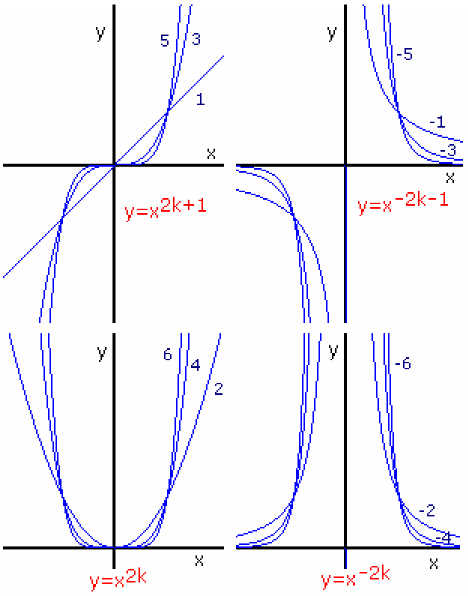
$$f(x) = |-x^2 / (x^4 - 3x^2 + 1)|$$

Die Berechnung gilt für R = 0. Tritt ein Ohmscher Widerstand auf, entfallen die Polstellen.

Potenzfunktionen

Allgemeine Form: $y = x^n$

$y = x^{2k}$, k = 1,2,3,...	DB: { x | - ∞ < x < ∞ }	WB: { y | 0 ≤ y < ∞ }
$y = x^{2k+1}$, k = 0,1,2,3,...	DB: { x | - ∞ < x < ∞ }	WB: { y | - ∞ < y < ∞ }
$y = x^0$	DB: { x | x < 0 und x > 0 }	WB: { y | y = 1 }
$y = x^{-2k}$, k = 1,2,3,...	DB: { x | - ∞ < x < ∞, x≠0 }	WB: { y | 0 ≤ y < ∞ }
$y = x^{-2k-1}$, k = 1,2,3,...	DB: { x | - ∞ < x < ∞, x≠0 }	WB: { y | - ∞ < y < ∞, y≠0 }



Der Graph einer Potenzfunktion $y = x^n$ ist für gerades n symmetrisch zur y-Achse (gerade Funktion), für ungerades n symmetrisch zum Koordinatenursprung (ungerade Funktion). Eine Potenzfunktion mit n = 0, 1, 2, … ist eine ganzrationale Funktion. Für negative Exponenten ergeben sich gebrochenrationale Funktionen.

Potenzfunktionen, Eigenschaften

Definitionsbereich: -∞ ≤ x < ∞

Wertebereich:
0 ≤ y < ∞, n gerade, a > 0
-∞ < y ≤ 0, n gerade, a < 0
-∞ < y < ∞, n ungerade, a ≠ 0

Periodizität: keine

Monotonie:
0 ≤ x, n gerade, a > 0, monoton steigend
x ≤ 0, n gerade, a > 0, monoton fallend
0 ≤ x, n gerade, a < 0, monoton fallend
x ≤ 0, n gerade, a > 0, monoton steigend
n ungerade, a < 0, monoton fallend
n ungerade, a > 0, monoton steigend

Symmetrie:
n gerade … spiegelsymmetrisch zu x = 0
n ungerade … punktsymmetrisch zu (0 ; 0)

Verhalten im Unendlichen

n gerade, a > 0, x --> ∞ ... y --> ∞	n gerade, a > 0, x --> -∞ ... y --> ∞
n gerade, a < 0, x --> ∞ ... y --> -∞	n gerade, a < 0, x --> -∞ ... y --> -∞
n ungerade, a > 0, x --> ∞ ... y --> ∞	n ungerade, a > 0, x --> -∞ ... y --> -∞
n ungerade, a < 0, x --> ∞ ... y --> -∞	n ungerade, a < 0, x --> -∞ ... y --> ∞

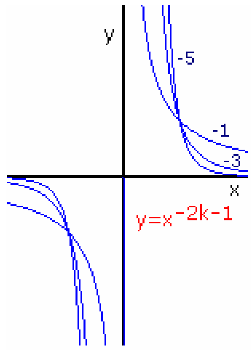
Nullstellen	n-fache Nullstelle bei 0	
Sprungstellen	keine	
Polstellen	keine	
Extrema	n gerade, a > 0: Minimum bei x = 0	n gerade, a < 0: Maximum bei x = 0
	n ungerade: kein Extremum	
Wendepunkte	n gerade: kein Wendepunkt	n ungerade: Sattelpunkt bei x = 0
Ableitung	$(ax^n)' = n\, a\, x^{n-1}$	
Stammfunktion	$F(x) = \int a\, x^n\, dx = a/(n+1)\, x^{n+1} + C$	

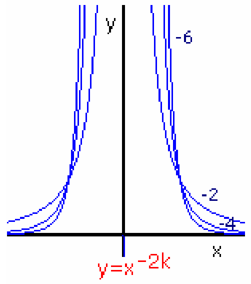
Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

Funktionen $y = x^n$ mit negativem, geradem n haben für a > 0 (a < 0) nur positive (negative) Werte.
Funktionen mit ungeradem n haben für a > 0 (a < 0) für positives x positive (negative) und für negatives x negative (positive) Werte.
Alle Funktionen haben einen Pol n-ter Ordnung bei x = 0.
Alle Funktionen gehen durch x = 1; y = a.
Funktionen mit größerem n schmiegen sich für x gegen Unendlich schneller an die x-Achse an und erreichen betragsmäßig für x gegen 0 höhere Werte als Funktionen mit kleinerem n.

Definitionsbereich	$-\infty \leq x < \infty$, $x \neq 0$		
Wertebereich	$0 \leq y < \infty$, n gerade, a > 0		
	$-\infty < y \leq 0$, n gerade, a < 0		
	$-\infty < y < \infty$, $f(x) \neq 0$, n ungerade		
Quadrant	n gerade, a > 0: I. und II.		
	n gerade, a < 0: III. und IV.		
	n ungerade, a > 0: I. und III.		
	n ungerade, a < 0: II. und IV.		
Nullstellen	keine	Sprungstellen	keine
Polstellen	x = 0	Extrema	keine
Wendepunkte	keine		

Symmetrien n gerade: Spiegelsymmetrie zur y-Achse
n ungerade: Punktsymmetrie zum Ursprung





Potenzfunktionen, Umrechnungsformeln

Spiegelung an der y-Achse

$f(-x) = a\,(-x)^n = (-1)^n\, a\, x^n = a\, x^n$; n gerade

$f(-x) = a\,(-x)^n = (-1)^n\, a\, x^n = -a\, x^n$; n ungerade

Rekursionsbeziehung

$a\, x^n = x\, a\, x^{n-1}$

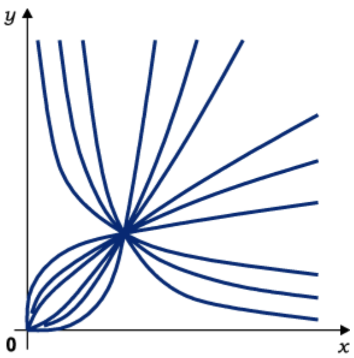
Summe zweier Potenzfunktionen n-ten Grades ist eine Potenzfunktion n-ten Grades $a\, x^n + b\, x^n = (a + b)\, x^n$

Produkt einer Potenzfunktion n-ten Grades mit einer Potenzfunktion m-ten Grades ist eine Potenzfunktion n+m-ten Grades $a\, x^n \cdot b\, x^m = (a\, b)\, x^{n+m}$

Quotient einer Potenzfunktion n-ten Grades und einer Potenzfunktion m-ten Grades ist eine Potenzfunktion n-m-ten Grades $a\, x^n / (b\, x^m) = a/b\, x^{n-m}$

m-te Potenz einer Potenzfunktion n-ten Grades ist eine Potenzfunktion n·m-ten Grades

$(a\, x^n)^m = a^m\, x^{n \cdot m}$



Typische Potenzfunktionen $y = a\, x^b$

Typische Kurvenverläufe für unterschiedliche Varianten des Exponenten b von dieser Gleichung zeigt die Abbildung.

Kurven mit teilweise ähnlichem Verlauf liefern die folgenden Funktionen:

Parabel n-ter Ordnung mit der Gleichung $y = ax^n$,

Umgekehrte Proportionalität mit der Gleichung $y = a/x$,

Reziproke Potenz mit der Gleichung $y = ax^{-n}$,

Potenzfunktion mit der Gleichung $y = a\, x^{\pm m/n}$, m und n ganzzahlig, positiv

Rektifiziert wird durch Logarithmieren gemäß

$X = \log x$ $\qquad$ $Y = \log y$ $\qquad$ $Y = \log a + b\, X$

Typ $y = a\, x^b + c$

Hier handelt es sich um die gleichen Kurven wie für $y = a\, x^b$, aber in y-Richtung um c verschoben.

Wenn b gegeben ist, dann wird rektifiziert gemäß

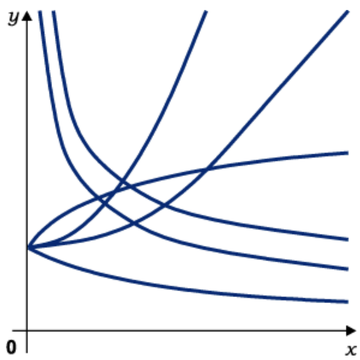
$X = xb$, $Y = y$: $Y = aX + c$

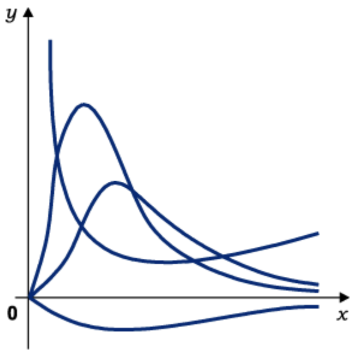
Ist b unbekannt, dann wird zunächst c bestimmt und danach gemäß

$X = \log x$, $Y = \log(y - c)$: $Y = \log a + BX$

rektifiziert. Zur Bestimmung von c werden drei Punkte mit den Abszissen- und Ordinatenwerten x_1, x_2 beliebig, $x3 = \sqrt{(x_1 x_2)}$ und y_1, y_2, y_3 gewählt, so dass

$c = (y_1 y_2 - y_3^2)/(y_1 + y_2 - 2y_3)$ gilt. Nachdem a, b bestimmt worden sind, kann c korrigiert und als Mittelwert der Größen $y - ax_b$ gewählt werden.





Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion $y = a\, x^b\, e^{cx}$

Typische Kurvenverläufe dieser Funktion zeigt die Abbildung.

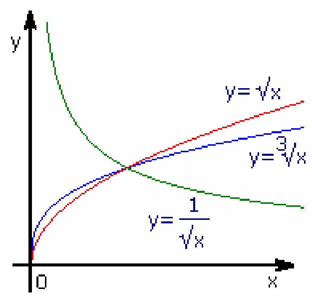
Wenn die empirischen x-Werte eine arithmetische Folge mit der Differenz h bilden, dann wird gemäß $Y = \Delta \log y$, $X = \Delta \log x$: $Y = hc \log e + b\, X$ rektifiziert. Dabei wird mit $\Delta \log y$ bzw. $\Delta \log x$ die Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte von log y bzw. log x bezeichnet.

Bilden jedoch die x-Werte eine geometrische Folge mit dem Quotienten q, dann erfolgt die Rektifizierung gemäß

$X = x$, $Y = \Delta \log y$: $Y = b \log q + c\,(q-1)\, X \log e$.

Nachdem b und c bestimmt sind, wird die gegebene Gleichung logarithmiert. Wenn die gegebenen x-Werte keine geometrische Folge bilden, sich aber jeweils zwei x-Werte so auswählen lassen, dass ihr

Quotient den konstanten Wert q ergibt, dann gilt für die Rektifizierung die gleiche Formel wie im Falle einer geometrischen Folge der x-Werte.

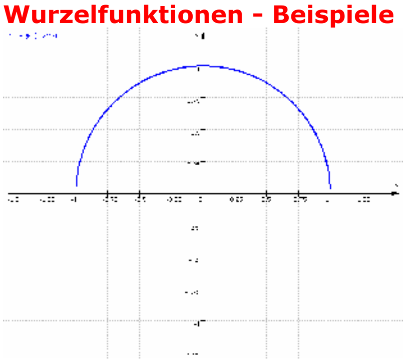


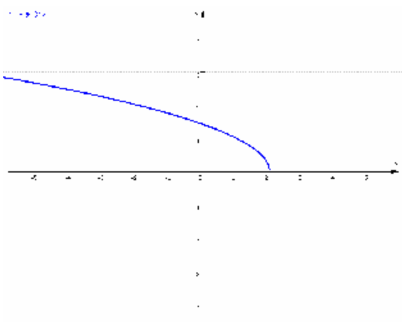
Wurzelfunktionen

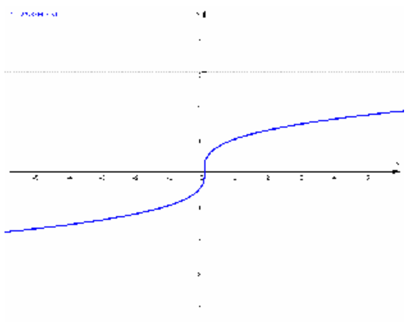
Allgemeine Form $y = x^{p/q}$ mit $p,q \in Z$, $q>0$, ggT(p,q)=1
p>0 : DB: $\{ x \mid 0 \le x < \infty \}$ WB: $\{ y \mid 0 \le y < \infty \}$
p<0 : DB: $\{ x \mid 0 < x < \infty \}$ WB: $\{ y \mid 0 < y < \infty \}$

$y = \sqrt{(ax+b)}$ und $a \neq 0$
DB: $\{ x \mid -b/a \le x < \infty \}$, positiv, monoton steigend ; Nullstelle -b/a
$y = \sqrt{(ax^2+bx+c)}$ und $a \neq 0$
1. a<0 und $\Delta=4ac-b^2>0$ ... keine reelle Funktion
2. a<0 und $\Delta<0$ DB $[(-b+\sqrt{(-\Delta)})/(2a) ; (-b-\sqrt{(-\Delta)})/(2a)]$
Maximum $(-b/(2a) ; \sqrt{(\Delta/(4a))})$; Bild: Teil einer Ellipse
3. a>0 und $\Delta>0$
DB   R   Minimum $(-b/(2a) ; \sqrt{(\Delta/(4a))})$; keine Nullstellen ; Bild ein Hyperbelast
4. a>0 und $\Delta<0$
DB $[-\infty ; (-b-\sqrt{(-\Delta)})/(2a)], [(-b+\sqrt{(-\Delta)})/(2a) ; \infty]$
Randpunkte sind Nullstellen und absolute Minima ; Bild: zwei Halbäste einer Hyperbel

Wurzelfunktionen - Beispiele


Y = SQRT(1-X^2)

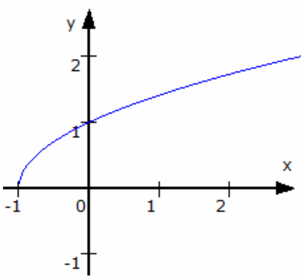

Y = SQRT(2-X)


Y = WURZEL3(X)

Eigenschaften der Wurzelfunktionen

Allgemeine Form $y = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in Z$

Definitionsbereich	$0 \le x < \infty$, n gerade, n > 0 ; $0 < x < \infty$, n gerade, n < 0
	$-\infty < x < \infty$, n ungerade, n > 0 ; $-\infty < x < \infty$, $x \neq 0$, n ungerade, n < 0
Wertebereich	$0 \le y < \infty$, n gerade, n > 0 ; $0 < y \le 0$, n gerade, n < 0
	$-\infty < y < \infty$, n ungerade, n > 0 ; $-\infty < y \le 0$, $y \neq 0$, n ungerade, n < 0
Quadrant	n gerade, I. ; n ungerade, I. und III.
Periodizität	keine
Monotonie	n > 0 streng monoton steigend
	n < 0 streng monoton fallend
Symmetrien	n gerade: keine ;
	n ungerade: Punktsymmetrie zum Ursprung



Quadratwurzelfunktion

Die Quadratwurzelfunktion $y = f(x) = \sqrt{(ax + b)}$
ist die Umkehrfunktion des positiven Astes der quadratischen Funktion $y = 1/a\ x^2 - b/a$. Die Quadratwurzelfunktion ist für a > 0 nur für Argumente $x \ge -b/a$ definiert; bei a < 0 für $x \le -b/a$.
Die Funktion hat bei x = -b/a den Wert Null und an dieser Stelle eine senkrechte Tangente.
Abbildung $y = \sqrt{(x+1)}$

Definitionsbereich	a > 0: $-b/a \le x < \infty$	a < 0: $-\infty < x \le -b/a$
Wertebereich	$0 \le y < \infty$	
Periodizität	keine	
Monotonie	a > 0 streng monoton steigend	a < 0 streng monoton fallend
Symmetrien	keine	
Nullstellen	x = -b/a	keine Polstellen, Extrema und Wendepunkte
reziproke Funktion	$y = 1/\sqrt{(ax+b)}$	Ableitung $f'(x) = a / (2 \sqrt{(ax+b)})$

Stammfunktion $\int \sqrt{(ax+b)}\, dx = 2/(3a) \sqrt{(ax+b)^3}$

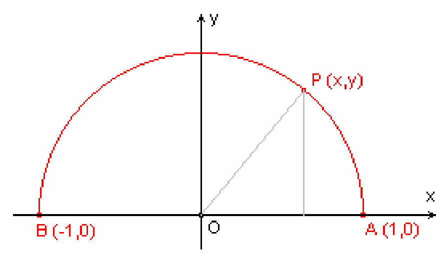
Wurzelgleichung

Wurzelgleichungen sind Gleichungen, bei denen die Unbekannte mindestens einmal unter einer Wurzel; Quadratwurzel oder beliebige n-te Wurzel; steht.

Wurzelgleichungen lassen sich meist auflösen, indem man eine Wurzel isoliert und anschließend beiden Seite der Gleichung mit dem Wurzelexponenten potenziert.
Achtung: Durch das Quadrieren der Gleichungen verändert man die Lösungsmenge. Da das Potenzieren mit einer geraden Zahl keine Äquivalenzumformung ist, können Scheinlösungen entstehen.

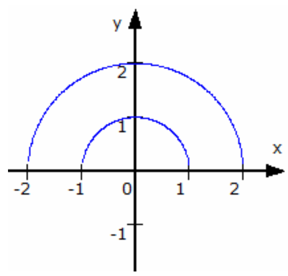
Beispiele	Lösungen
1) $4x - 5\sqrt{1-x^2} = 1{,}2$	0,8841 und Scheinlösung -0,6500
2) $2x + \sqrt{25-x^2} = 0$	$x = -\sqrt{5}$; Scheinlösung $\sqrt{5}$
3) $2 - x/\sqrt{25-x^2} = 0$	$x = 2\sqrt{5}$, Scheinlösungen $-2\sqrt{5}$, $\sqrt{20}$, $-\sqrt{20}$
4) $\sqrt{4x^2 + x - 2} + 1 = 2x$	$x = 3/5$
5) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x} - \sqrt{2}$	$x = 2$
6) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{3x-5} = 2$	$x = 10$; $x = 18$
7) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{4x-7} = 7$	$x = 4$, Scheinlösung 704
8) $\sqrt{3}\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} - 1 = 0$	$x = 13$, Scheinlösung 1
9) $\sqrt{9x+5} - \sqrt{6x} - \sqrt{2} = 0$	$x = 3$; $x = 1/3$
10) $\sqrt{x-11} + 2\sqrt{x} = 85/\sqrt{x-11}$	$x = 36$
11) $(b\sqrt{a-x} - a\sqrt{b-x}) / (\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x}) = 0$	$x = a$; $x = b$
12) $x - 29\sqrt{x} + 100 = 0$	$x = 16$; $x = 625$

Beispiel: Gesucht sind Lösungen der Wurzelgleichung $\sqrt{5 - x} + 3 - x = 0$
Isolieren der Wurzel $\sqrt{5 - x} = x - 3$
quadrieren $5 - x = x^2 - 6x + 9$
umformen $x^2 - 5x + 4 = 0$
Dies ist eine quadratische Gleichung, die mit der Lösungsformel gelöst werden kann. Als Lösungen ergeben sich $x_1 = 4$, $x_2 = 1$.
Da quadriert wurde, muss geprüft werden, ob es sich bei den beiden Werten um Lösungen der Wurzelgleichung handelt. Dazu setzen man die Werte in die Wurzelgleichung ein:
$x_1 = 4$: $\sqrt{1} - 1 = 0$. Der Wert $x_1 = 4$ erfüllt die Wurzelgleichung.
$x_2 = 1$: $\sqrt{4} + 2 = 4 <> 0$. Der Wert $x_2 = 1$ erfüllt die Wurzelgleichung nicht.
Damit ist die Lösungsmenge der Wurzelgleichung L = {4}.



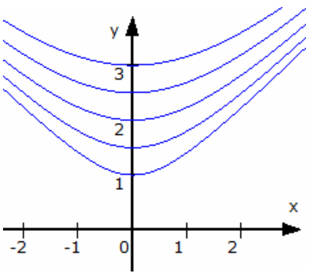
Kreisfunktion
Ein Halbkreis mit dem Radius r = 1 wird durch die Wurzelfunktion
$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
für x in [-1 ; 1] beschrieben.
Aus dem Satz des Pythagoras folgt für einen Punkt P(x,y) sofort $x^2 + y^2 = 1$ und nach Umstellen die Funktionsgleichung.

Wurzelfunktion $\sqrt{a^2-x^2}$



Die Funktion $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$
beschreibt die obere Hälfte eines Kreises mit dem Radius |a|. Ihre reziproke Funktion $f(x) = 1/\sqrt{a^2 - x^2}$
hat ein Minimum bei x = 0 und divergiert bei x = -a und x = a.

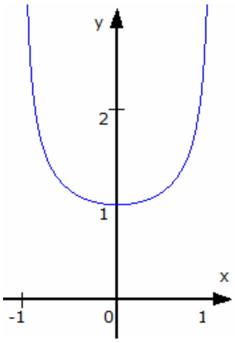
Definitionsbereich $-a \le x \le a$
Wertebereich $0 \le y \le |a|$
Quadrant im Allgemeinen im 1. und 2.Quadranten
Periodizität keine
Monotonie für x > 0 streng monoton fallend
x < 0 streng monoton steigend
Symmetrien Spiegelsymmetrie zur y-Achse
Nullstellen $x = \pm a$ keine Polstellen und Wendepunkte
Wert für x = 0 f(0) = |a|
Extrema Maximum bei x = 0
Ableitung $f'(x) = -x / \sqrt{a^2 - x^2}$ 2.Ableitung $f''(x) = -a^2 / (\sqrt{a^2 - x^2})^3$
Stammfunktion $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x/2 \sqrt{a^2-x^2} + a^2/2 \arcsin(x/|a|)$



Wurzelfunktion $\sqrt{a^2+x^2}$
Die Funktion $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$
beschreibt den positiven Arm einer Hyperbel mit den Asymptoten $y = \pm x$. Ihre reziproke Funktion $f(x) = 1/\sqrt{a^2 + x^2}$
hat ein Maximum bei x = 0 und geht für $x \to \infty$ gegen Null.

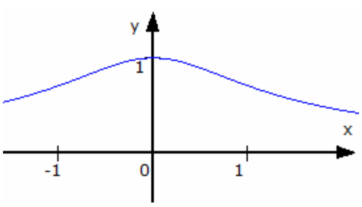
Definitionsbereich $\infty < x < \infty$
Wertebereich $|a| \le y < \infty$
Quadrant im Allgemeinen im 1. und 2.Quadranten
Periodizität keine
Monotonie für x > 0 streng monoton steigend x < 0 streng monoton fallend
Symmetrien Spiegelsymmetrie zur y-Achse

Nullstellen keine reellen keine Polstellen und Wendepunkte
Wert für x = 0 f(0) = |a|
Extrema Minimum bei x = 0 Ableitung $f'(x) = x / \sqrt{a^2 + x^2}$
2.Ableitung $f''(x) = a^2 / (\sqrt{a^2 + x^2})^3$
Stammfunktion $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = x/2 \sqrt{a^2+x^2} + a^2/2 \ln (\sqrt{x^2+a^2} + x)$



Wurzelfunktion $1/\sqrt{a^2-x^2}$

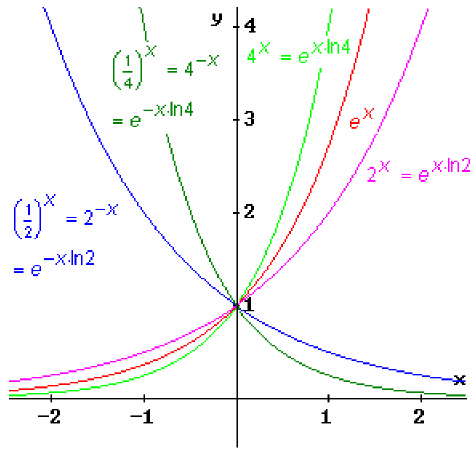
Die Funktion $f(x) = 1/\sqrt{a^2 - x^2}$
ist die reziproke Funktion der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$
Die Funktion $f(x) = 1/\sqrt{a^2 - x^2}$ hat ein Minimum bei x = 0 und divergiert bei x = -a und x = a.
Definitionsbereich $-a < x < a$
Wertebereich $1/|a| \le y < \infty$
Quadrant im Allgemeinen im 1. und 2.Quadranten
Periodizität keine
Monotonie für x > 0 streng monoton steigend
x < 0 streng monoton fallend
Symmetrien Spiegelsymmetrie zur y-Achse
Polstellen $x = \pm a$ keine Nullstellen und Wendepunkte
Wert für x = 0 f(0) = 1/|a|
Extrema Minimum bei x = 0
Ableitung $f'(x) = x / (\sqrt{a^2 - x^2})^3$ 2.Ableitung $f''(x) = (2x^2 + a^2) / (\sqrt{a^2 - x^2})^5$
Stammfunktion $\int 1/\sqrt{a^2-x^2}\, dx = \arcsin (x/|a|)$



Wurzelfunktion $1/\sqrt{a^2+x^2}$

Die Funktion $f(x) = 1/\sqrt{a^2 + x^2}$
ist die reziproke Funktion der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$
Die Funktion $f(x) = 1/\sqrt{a^2 + x^2}$ hat ein Maximum bei x = 0 und geht für $x \to \infty$ gegen Null.
Definitionsbereich $\infty < x < \infty$
Wertebereich $0 \le y \le 1/|a|$
Quadrant im Allgemeinen im 1. und 2.Quadranten
Periodizität keine
Monotonie für x > 0 streng monoton fallend x < 0 streng monoton steigend
Symmetrien Spiegelsymmetrie zur y-Achse
Nullstellen keine reellen Polstellen keine
Wert für x = 0 f(0) = 1/|a|
Wendepunkte bei $x = \pm\sqrt{2}/2\, a$ Extrema Maximum bei x = 0
Ableitung $f'(x) = -x / (\sqrt{a^2 + x^2})^3$ 2.Ableitung $f''(x) = (2x^2 - a^2) / (\sqrt{a^2 + x^2})^5$
Stammfunktion $\int 1/\sqrt{a^2+x^2}\, dx = \ln (\sqrt{x^2+a^2} + x)$

Exponentialfunktionen und Gleichungen



Allgemeine Form $y = a^x$ mit a>0 und $a \neq 1$
DB: { x | $-\infty < x < \infty$ } WB: { y | $0 < y < \infty$ }
Gleichung $a^x = b$ hat Lösung $x = \lg b / \lg a$
$y=a*e^x$ ist einzige Funktion, welche identisch mit ihrer Ableitung ist
Exponentialfunktionen $y = a^x$ sind für a > 1 monoton steigend, für 0 < a < 1 monoton fallend.

Anwendung der Exponentialfunktion:
Beschreibung vieler natürlicher Wachstumsprozesse (z.B. Vermehrung von Bakterien), Zerfallsprozesse (radioaktiver Zerfall von Atomen), Dämpfungs- oder Resonanzprozesse wie auch wirtschaftlicher Prozesse, in denen eine vorgegebene Menge proportional zu der Anzahl ihrer Elemente wächst (oder sich verringert).

Exponentialgleichung

Exponentialgleichungen sind Bestimmungsgleichungen, in denen die unbekannte Variable im Wurzel- oder Potenzexponenten vorkommt

Aufgaben zu Exponentialgleichungen

1) Löse durch Vergleich der Exponenten.
a) $6^{2x-4} = 6$ b) $7^{5x-7} = 343$ c) $4^{2x-1} = 256$ d) $7^{2x+1} = 7^{x+2}$
e) $3^x = 1/243$ f) $5^{x+1} = 1/5$ g) $8^{x-2} = \sqrt{8}$ h) $4^{5x} = 3\sqrt{4^2}$

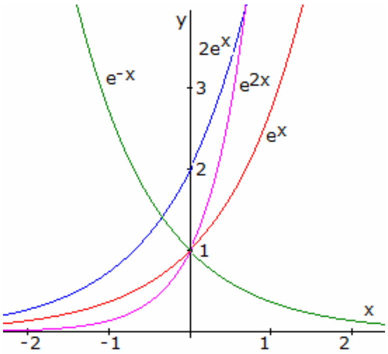
Lösungen: a) $x = 2{,}5$; b) $x = 2$; c) $x = 2{,}5$; d) $x = 1$; e) $x = -5$; f) $x = -2$; g) $x = 2{,}5$; h) $x = 2/15$

2) Löse
a) $10^{x-1} = 8$ b) $4^{x+2} = 256$ c) $6^{1-2x} = 18$ d) $9^{5x+1\ =\ 3}$
e) $^{3\cdot 8-x-2} = 25$ f) $(4^{2x-1})^2 = 36$ g) $2^{-3x+4} = 1$ h) $4^{5-x} = 1$
Lösungen: a) 1 + lg 8; b) 2; c) -2 (lg18 / lg 6 - 1); d) 1/5 (lg 3 / lg 9 - 1); e) -2 - lg(25/3) / lg 8; f) 1/4 (2 + lg 36 / lg 4); g) -4/3; h) 5

3) Ein Kapital K wird jährlich mit 4% verzinst. Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital mit Zinsen und Zinseszinsen verdoppelt (verdreifacht)?
Lösung: Nach ungefähr 18 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt.

4) Löse
a) $3^{2x} - 12\cdot 3^x + 27 = 0$ b) $4^x - 12\cdot 2^x + 32 = 0$
c) $2^{2x-1} - 3\cdot 2^x + 4 = 0$ d) $4^{x+1} - 2^{x+4} = 128$
e) $25^{x+1} + 3\cdot 5^{x+2} - 16 = 0$ f) $4^{x+1} + 16^{x-1} = 1536$
Lösungen: a) 1 und 2 ; b) 2 und 3 ; c) 2 und 1 ; d) 3 ; e) -1 ; f) 3,5

Aufgaben		Lösungen
1)	$6 - 3/2\ e^{2-2x} = 0$	$x = 1 - \ln 2$
2)	$1/4\ e^{4x} - 1/2\ e = 1$	$x = 1/4 \ln (4 + 2e)$
3)	$1/2\ e^x - e^{x+1} = 0$	keine Lösung, da Widerspruch $\ln 2 = -1$
4)	$(3 + 2x)\ e^{x-1} = 0$	$x = -3/2$
5)	$-2x^2\ e^{-x+2} = 0$	$x = 0$
6)	$-1/5\ e^x - 1 + 10\ e^{-x} = 0$	$x = \ln 5$
7)	$4 - 3\ e^{-x/2} = e^{x/2}$	$x_1 = 0$; $x_2 = 2 \ln 3$
8)	$5 - 3/4\ e^{-2x} = e^{-x}$	$x = -\ln 2$
9)	$2x / (e^x + 1) = 0$	$x = 0$
10)	$(2 - e^x)^2 = (e^x - 3)^2$	$x = \ln (5/2)$



$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

E-Funktion, e^x

Die e-Funktion ist die Exponentialfunktion zur Basis e.
Die e-Funktion $y = e^x$ ist eine der "wichtigsten" Funktionen der Analysis.
Sie ist zu allen ihren Ableitungen identisch, d.h.

$e^x = (e^x)' = (e^x)'' = \ldots$

Es gilt $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

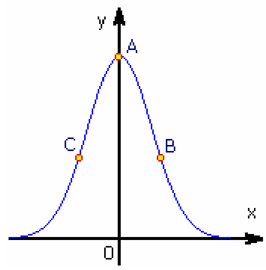
$e^x = \cosh x + \sinh x$

und für komplexe Zahlen $z = x + yi$ $\quad e^z = e^x\ (\cos y + i \sin y)$

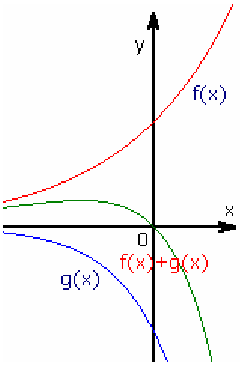
Jede Exponenialfunktion $y = a^x$, $a > 0$, kann durch eine e-Funktion ersetzt werden. Es gilt: $\quad e^{x \ln a} = a^x$

Funktion y = k * a^x

Faktor k bewirkt Stauchung oder Streckung …
ist identisch mit Parallelverschiebung in Richtung der x-Achse um -ln k



Funktion $y=b*e^{-(ax)^2}$; $a\neq 0$ und $b>0$



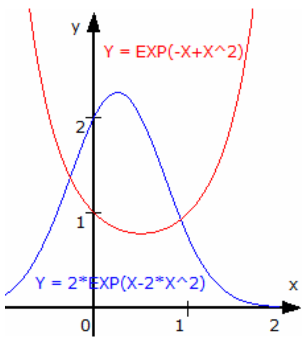
DB: { x | - ∞ < x < ∞ } WB: { y | 0 < y ≤ b }
bis x=0 monoton steigend, danach fallend
Maximum A = (0 ; b)
Wendepunkte B und C = (± 1/(a√2) ; b/√e)
Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur y-Achse. Die Wendetangenten haben die Steigungen -ab √(2/e) und ab √(2/e).
Der Spezialfall b = 1/√(2π), a = 1/√2 entspricht der Gaußschen Glockenkurve, die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Normalverteilung.Die Funktion $y = e^{-x^2}$ lässt sich erstaunlich gut durch die Dreiecksnäherung (maximaler Fehler 9%)

$$e^{-x^2} \approx 1 - |x|/\sqrt{\pi} \text{ für } |x| \le \sqrt{\pi}$$

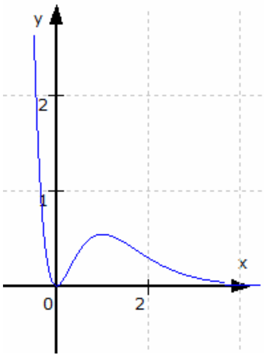
annähern. Die Fläche unter der Dreiecksfunktion ist genau gleich dem Integral der Gaußfunktion.

Funktion $y = a\ e^{bx} + c\ e^{dx}$ und $abcd\neq 0$

a) ac>0, bd>0: monoton steigend, keine Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte, x-Achse ist Asymptote
b) ac>0, bd<0: ein Minimum, keine Nullstelle und Wendepunkte, keine Asymptote
c) ac<0, bd>0: ein Maximum, eine Nullstelle, ein Wendepunkt, x-Achse ist



Asymptote
d) ac<0, bd<0: eine Nullstelle, ein Wendepunkt, keine Extremstelle und Asymptote
Extremwerte (Typ b und c) $x = 1/(d-b) \ln[-ab/(cd)]$ für $d \neq b$
Nullstellen (Typ c und d) $x = 1/(d-b) \ln(-a/c)$ für $d \neq b$
Wendestelle (Typ c und d) $x = 1/(d-b) \ln[-ab^2/(cd^2)]$ für $d \neq b$



Funktion $y = a x^b e^{cx}$ und $abc \neq 0$
Abbildung: $y = 4 x^2 e^{-2x}$
Für reelle b > 0 sind die Funktionen für nichtnegative, reelle x definiert, für ganzzahlige b für alle reellen Zahlen. Man kann mehrere Fälle unterscheiden:

a) c > 0, b > 1
Die Bilder berühren die x-Achse im Punkt O. Die Funktionen sind monoton steigend
b) c > 0, b = 1
Die Bilder gehen durch den Punkt O, Tangente in O ist die Gerade x - y = 0. Die Funktionen sind monoton steigend
c) c > 0, 0 < b < 1
Die Bilder berühren die y-Achse im Punkte O und haben im Punkt C mit der Abszisse $(\sqrt{b} - b)/c$ einen Wendepunkt. Die Funktionen sind monoton steigend und haben kein Extremum
d) c > 0, b < 0
Die y-Achse ist Asymptote. Die Funktionen besitzen ein Minimum an der Stelle -b/c und sind im Intervall (0, -b/c] monoton fallend, sonst steigend
e) c < 0, b > 1
Die Bilder berühren die x-Achse in O und haben zwei Wendepunkte mit den Abszissen $(b+\sqrt{b})/(-c)$ und $(b-\sqrt{b})/(-c)$. Die x-Achse ist Asymptote. Die Funktionen haben ein Maximum bei -b/c. Bis zum Maximum sind sie monoton steigend.

Exponentialfunktionen - Umrechnungsformeln

Umformungen für Addition und Multiplikation im Argument:

$e^{x+y} = e^x * e^y$ $\qquad e^{-x} = 1 / e^x$

$e^{x*y} = (e^x)^y = (e^y)^x$

Geometrische Reihenentwicklungen für unendliche Summen von Exponentialfunktionen mit negativem Argument e^{-nx}, x>0:

$e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3} + \ldots = 1/(e^x - 1) = 1/2 \coth(x/2) - 1/2$

$e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3} -+ \ldots = 1/(e^x + 1) = -1/2 \tanh(x/2)+1/2$

$e^{-x} + e^{-3x} + e^{-5} + \ldots = e^x/(e^{2x} - 1) = 1/2 \operatorname{cosech}(x)$

$e^{-x} - e^{-3x} + e^{-5} -+ \ldots = e^x/(e^{2x} + 1) = 1/2 \operatorname{sech}(x)$

Ungleichungen

$e^{-x/(1-x)} < 1-x < e^{-x}$; $x < 1$	$e^x > 1+x$
$e^{-x} < 1/(1-x)$; $x < 1$	$x/(1+x) < 1-e^{-x} < x$; $x > -1$
$x < e^x-1 < x/(1-x)$; $x < 1$	$1+x > e^{x/(1+x)}$; $x > -1$
$e^x > 1 + x^n/n!$; $n > 0, x > 0$	$e^x > (1+x/y)^y > e^{xx/(x+y)}$; $x > 0, y > 0$
$e^{-x} < 1-x/2$; $0 < x < 1{,}5936$	

Exponentialfunktionsnäherung

für $0 \leq x \leq \ln 2$ gilt

$e^x = 1 - 0{,}9664\, x + 0{,}3536\, x^2 + R(x)$; $R(x) = 3 \cdot 10^{-3}$

für $0 \leq x \leq \ln 2$ gilt

$e^x = 1 - 0{,}9998684\, x + 0{,}4982926\, x^2 - 0{,}1595332\, x^3 + 0{,}0293641\, x^4 + R(x)$; $R(x) = 3 \cdot 10^{-5}$

für $0 \leq x \leq \ln 2$ gilt

$e^x = 1 - 0{,}9999999995\, x + 0{,}4999999206\, x^2 - 0{,}1666653019\, x^3 + 0{,}0416573475\, x^4 - 0{,}0083013598\, x^5 + 0{,}0013298820\, x^6 - 0{,}0001413161\, x^7 + R(x)$; $R(x) = 2 \cdot 10^{-10}$

für $0 \leq x \leq 1$ gilt

$10^x = (1+1{,}1499196\, x+0{,}6774323\, x^2 + 0{,}2080030\, x^3 + 0{,}1268089\, x^4)^2 + R(x)$; $R(x) = 7 \cdot 10^{-4}$

für $0 \leq x \leq 1$ gilt

$10^x = (1 + 1{,}15129277603\, x + 0{,}66273088429\, x^2 + 0{,}25439357484\, x^3 + 0{,}07295173666\, x^4 + 0{,}01742111988\, x^5 + 0{,}00255491796\, x^6 + 0{,}00093264267\, x^7)^2 + R(x)$; $R(x) = 5 \cdot 10^{-8}$

Approximation mit Tschebyschow-Polynomen

für $0 \leq x \leq 1$

$T_n(x) = \cos n\theta$, $\cos \theta = 2x-1$

1) $e^x = \Sigma_{n=0}^{\infty} A_n T_n(x)$

für n = 0, 1, 2, … wird A_n = 1,753387654; 0,850391654; 0,105208694; 0,008722105; 0,000543437; 0,000027115; 0,000001128; 0,000000040; 0,000000001

2) $e^{-x} = \Sigma_{n=0}^{\infty} A_n T_n(x)$

für n = 0, 1, 2, … wird A_n = 0,645035270; -0,312841606; 0,38704116; -0,003208683; 0,000190019; -0,000009975; 0,000000415; -0,000000015

Aufgaben zu Exponentialfunktionen

Aufgabe: Berechnen Sie die Koordinaten aller Extremal- und Wendepunkte der Funktion
$f(x) = e^{-x^2/4}$. (Matura TSME 2000, Kurzaufgabe)

Lösung:

Ableitungen $f'(x) = e^{-x^2/4} \cdot (-2x/4) = -x/2\ e^{-x^2/4}$
$f''(x) = -1/2 \cdot e^{-x^2/4} + (-x/2) \cdot e^{-x^2/4} = (x^2/4 - 1/2)\ e^{-x^2/4}$

Extrema $-x/2\ e^{-x^2/4} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow M(0, 1)$
da $f''(0) < 0$ ist, handelt es sich um ein Maximum

Wendepunkte $(x^2/4 - 1/2)\ e^{-x^2/4} = 0 \rightarrow x^2/4 - 1/2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \rightarrow W_{1,2}(\pm\sqrt{2}\ ,\ 1/\sqrt{e})$

Aufgabe: Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph der Funktion $f(x) = (x^2 + b)\ e^{ax}$ in der Nullstelle N(3|0) die Steigung m = 6e hat.

Lösung:

Ableitung $f'(x) = e^{ax}\ (ax^2 + 2x + ab)$

"in der Nullstelle N(3|0)" $f(3) = 0 \rightarrow 0 = (3^2 + b)\ e^{3a}$

"in N(3|0) die Steigung m = 6e" $f'(3) = 6e \rightarrow 6e = e^{3a}\ (a\ 3^2 + 6 + ab)$

Da e^{3a} sicher nicht 0 ist, folgt aus der ersten Gleichung $9+b = 0 \rightarrow b = -9$

Damit wird die zweite Gleichung zu: $6e = e^{3a}\ (9a + 6 - 9a)$ und $\rightarrow a = 1/3$

Die gesuchte Funktion ist $f(x) = (x^2 - 9) \cdot e^{x/3}$.

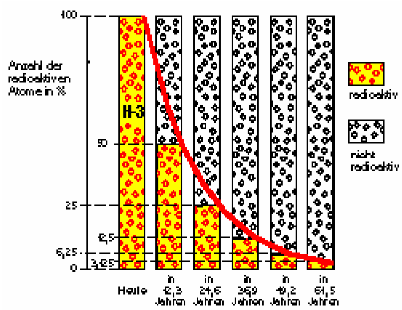
Zerfallsgesetz

Der radioaktive Zerfall lässt sich mit Hilfe des Zerfallsgesetzes beschreiben. Dabei tritt eine e-Funktion als funktionaler Zusammenhang auf.

$N = N_0\ e^{-\lambda\ t} = N_0\ (1/2)^{t/T}1/2$

Anzahl N_0 der zu t=0 vorhandenen Atome, Anzahl N der nicht zerfallenen Atome, Zerfallskonstante λ, Zeit t, Halbwertszeit $T_{1/2}$

Die grafische Veranschaulichung der noch nicht zerfallenen Atomkerne im Verlauf der Zeit zeigt das typische Aussehen einer Exponentialfunktion mit negativem Argument.



Halbwertszeit

Bei einem einzelnen radioaktiven Atomkern kann man nicht vorhersagen, zu welchem Zeitpunkt er zerfallen wird. Er kann in der nächsten Sekunde oder erst in Tausenden von Jahren zerfallen. Bei einer großen Anzahl von Atomen lässt sich aber eine Wahrscheinlichkeitsaussage über den Ablauf des Zerfalls machen.
Es zerfällt zum Beispiel von einer Menge Wasserstoff-3 (Tritium) in ca.12,3 Jahren die Hälfte der Atome, nach weiteren 12,3 Jahren ist von dem Rest wiederum die Hälfte zerfallen usw.
Die Zeit, nach der die Hälfte einer bestimmten Anzahl von Atomkernen zerfallen ist, wird Halbwertszeit (HWZ) genannt.
Sie ist für jedes Radionuklid eine charakteristische Größe. Die Halbwertszeiten liegen zwischen vielen Milliarden Jahren und Sekundenbruchteilen. Die größte Halbwertszeit, die bisher nachgewiesen worden ist, besitzt Tellur-128 (HWZ $1{,}5 \cdot 10^{24}$ a), die kleinste Halbwertszeit Radium-216 m (HWZ $7 \cdot 10^{-9}$s = 7ns).

Exponentialfunktion in der Literatur

Zu der Eigenschaft der Exponentialfunktion schnell zu wachsen, gibt es ein schönes Beispiel aus der Literatur:

Theodor Storm: Von Katzen

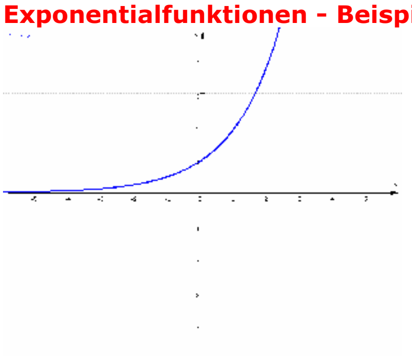
Vergangenen Maitag brachte meine Katze Zur Welt sechs allerliebste kleine Kätzchen.
Maikätzchen, alle weiß mit schwarzen Schwänzchen. Führwahr, es war ein zierlich Wochenbettchen!
Die Köchin aber - Köchinnen sind grausam, Und Menschlichkeit wächst nicht in der Küche -
Die wollte von den sechsen fünf ertränken, Fünf weiße, schwarzgeschwänzte Maienkätzchen
Ermorden wollte dies verruchte Weib.

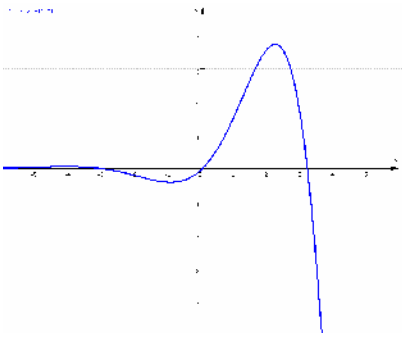
Ich half ihr heim! - Der Himmel segne Mir meine Menschlichkeit! Die lieben kleinen Kätzchen,
Sie wuchsen auf, und nachts vor ihrem Fenster Probieren sie die allerliebsten Stimmchen.
Ich aber, wie ich sie so wachsen sehe, Ich preis mich selbst und meine Menschlichkeit -
Ein Jahr ist um, und Katzen sind die Kätzchen, Und Maitag ist´s! - Wie soll ich es beschreiben,
Das Schauspiel, das sich jetzt vor mir entfaltet!

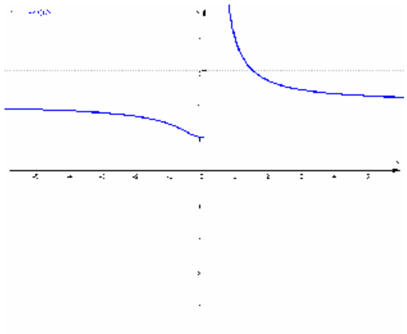
Mein ganzes Haus, vom Keller bis zum Giebel, Ein jeder Winkel ist ein Wochenbettchen!
Hier liegt das eine, dort das and´re Kätzchen, In Schränken, Körben, unter Tisch und Treppen,

Die Alte gar - nein, es ist unaussprechlich. Liegt in der Köchin jungfräulichem Bette!
Und jede, jede von den sieben Katzen Hat sieben, denkt euch! sieben junge Kätzchen,
Maikätzchen, alle weiß mit schwarzen Schwänzchen!
Die Köchin rast, ich kann der blinden Wut Nicht Schranken setzen dieses Frauenzimmers;
Ersäufen will sie alle neunundvierzig!
Mir selber, ach mir läuft der Kopf davon - O Menschlichkeit, wie soll ich dich bewahren!
Was fang ich an mit sechsundfünfzig Katzen! -

Exponentialfunktionen - Beispiele


Y = 2^X


Y = 2^X*SIN(X)


Y = 1+EXP(1/X)

Exponentieller Prozess

Bei einem exponentiellen Prozess handelt es sich um einen Vorgang, bei dem sich eine Größe exponentiell ändert. Man unterscheidet zwischen

exponentiellem Wachstum, bei der eine Größe immer schneller wächst
exponentiellem Abfall, bei dem eine Größe sich immer langsamer der Null annähert, und
exponentieller Annäherung, bei der sich eine Größe einem vorgegebenem Wert annähert.

Dabei ist der exponentielle Abfall ein Spezialfall der exponentiellen Annäherung an den vorgegebenen Wert Null.

Exponentielles Wachstum

Wenn bei einem Wachstumsprozess einer Größe A die Wachstumsrate dA/dt proportional zur Größe A selbst ist, liegt exponentielles Wachstum vor $dA/dt \sim A$

Mit der Proportionalitätskonstanten τ erhält man aus dieser Proportionalitätsbeziehung die Differenzialgleichung $\tau\, dA/dt = A$

mit der Lösung $A(t) = A_0\, e^{1/\tau}$

A_0 ist der Wert der Größe A zu Beginn.

Exponentieller Abfall

Nimmt eine Größe im Verlauf der Zeit kontinuierlich ab und ist die Abnahme dieser Größe proportional zur Größe selbst, so spricht man von exponentiellem Abfall, exponentieller Abnahme oder exponentiellem Zerfall.

Beispiele: Radiaoktiver Zerfall, Absorption von Strahlung in Materie, Entladen eines Kondensators über einen Widerstand, die Selbstinduktionsspannung, …

Da die zeitliche Änderung negativ ist, lautet die Differenzialgleichung $-\tau\, dA/dt = A$

mit der Lösung $A(t) = A_0\, e^{-1/\tau}$

Aufgaben zu Wachstums- und Zerfallsprozessen

Aufgabe 1

a) Wieviel sind 85Fr. nach Abzug von 20%?
b) Welcher Wert beträgt nach 230% Zunahme 66?
c) Welcher Wert geht um 76% auf einen Betrag von Fr. 900 zurück?
d) Wie groß ist der Faktor r, wenn eine Summe von 70850 Fr. auf 80384 Fr. zugenommen hat? Wie viele Prozent beträgt die Zunahme?
e) 5 kg Äpfel wiegen nach 2 Wochen noch 4,72 kg. Wie groß ist r und um wie viele Prozent hat das Gewicht abgenommen?
Lösung: a) 68 ; b) 3750 ; c) 20 ; d) 13,5 % ; e) 5,6 %

Aufgabe 2

a) Ein Kapital von Fr. 500 wird zu 5% verzinst. Der Zins wird jeweils zum Kapital geschlagen. Auf welchen Betrag wächst das Kapital in 10 Jahren?
b) Wie viele Franken muss man auf ein Sparkonto einzahlen, wenn es in 20 Jahren durch Zinseszins auf Fr. 2000.- anwachsen soll? (p=5%)
c) Wie lange dauert es, bis sich ein Kapital von Fr. 1000.- bei 4,5% verdoppelt hat?
d) Ein Kapital von Fr. 3600 wächst in 12 Jahren auf Fr. 5000. Zu wie viel Prozent wurde es verzinst?

Lösung: a) 814,45 ; b) 753,80 ; c) 15,7 Jahre ; d) 2,78 %

Aufgabe 3

Die Individuenzahl einer Bakterienkultur, die exponentiell wächst, verdreifacht sich in 2 Stunden. Um 9 Uhr waren es 3600 Individuen. Berechnen Sie die Individuenzahl um 12 Uhr und um 730 Uhr desselben Tages.
Lösung: 1580

Aufgabe 4

Ein Betrag wurde 15 Jahre auf einem Sparkonto angelegt. Während der ersten 6 Jahre war der Zinsfuß 3%, während der restlichen Jahre 3,5%. Heute (d.h. nach 15 Jahren) beträgt das Guthaben samt Zinsen Fr. 1716,90.
Lösung: 1082,05
»Exponentialgleichung, Lösung »Exponentialfunktion

Aufgabe 5

Ein Vater hinterlässt beim Tode seinen drei Kindern im Alter von 14, 10 und 7 Jahren eine Summe von 100000 Fr.. Dieses Geld soll so unter die Kinder verteilt werden, dass jedes im Zeitpunkt, wo es 20jährig wird, gleichviel besitzt. Wie viel erhält jedes, wenn man annimmt, dass das Geld zu 3,5% angelegt werden kann?
Lösung: Das älteste Kind erhält 29577,05 Franken, das mittlere 32792,65 Franken und das jüngste 37630,30 Franken.

Aufgabe 6

Ein Kapital ist auf Zinseszins angelegt. Nach 3 Jahren beträgt es Fr. 2771,80, nach 5 Jahren Fr. 2969,20.
a) Wie groß ist das Anfangskapital? ; b) Wie groß ist der Zinsfuß? ; c) Verdoppelungszeit?
Lösung: a) 2500 ; b) 3,5 % ; c) 20,14 Jahre

Aufgabe 7

Eine Substanz S hat eine Halbwertszeit von 3 Wochen.
a) Prozentuale Abnahme pro Tag? ; b) Wie viel ist nach einem Jahr (52 Wochen) noch vorhanden?
c) Wann ist noch 1 Promille vorhanden?
Lösung: a) 96,75 % ; b) 6 Millionstel ; c) 209 Tagen

Aufgabe 8

Der Zerfallsprozess von radioaktivem Uran 239 erfolgt exponentiell. Am Anfang waren 8,192 . 1022 radioaktive Atomkerne vorhanden, nach 4 Std. waren es noch 2 . 1019. Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Hälfte der vorhandenen Atomkerne zerfallen ist, d.h. die sogenannte Halbwertszeit.
Lösung: lg 0,5 / lg 0,125 = 1/3 , Halbwertszeit 1/3 Stunden = 20 Minuten

Aufgabe 9

Ein Fass enthält 100 Liter Alkohol. Täglich wird dem Fass ein Liter entnommen und durch Wasser ersetzt. Nach wie vielen Tagen ist die Alkoholkonzentration erstmals unter 55%?
Lösung: $55 > 100 \cdot 0{,}99^n$, $n < 59{,}48$; nach 60 Tagen ist die Alkoholkonzentration auf unter 55% gesunken.

Wachstumsprozesse (3)

In der "Star Trek"-Folge "The Trouble With Tribbles" (1966, Vol. 21, Episode 42) bevölkern die Tribbles, kleine niedliche, aber auch verfressene, Fellbällchen, die Enterprise.
Tribbles sind Zwitter und vermehren sich ziemlich schnell. Jedes Tribble bekommt nach 12 Stunden genau 10 Babys und das ununterbrochen. Problematisch ist aber, dass die Tiere seit 3 Tagen im Getreidelager sind und fressen, fressen, …. Spock ermittelt sofort, dass mittlerweile 1771561 Tribbles in der Enterprise sind.

Zeit	Tribblezahl
nach 12 Stunden	1 + 10 Babys = 11
nach 24 Stunden	11 + 110 Babys = 121
nach 36 Stunden	121 + 1210 Babys = 1331 usw.

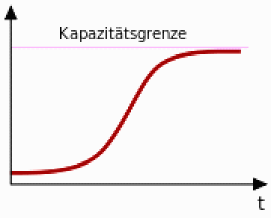
Sind P_0 die Populationszahl am Anfang und r die Vermehrungsrate, so wird

$$P_1 = r\,P_0 + P_0 = (r+1)\,P_0$$

und allgemein nach der Zeit t $\quad P_{t+1} = r\,P_t + P_t = (r+1)\,P_t = (r+1)^t\,P_0$

Für r = 10, P_0 = 1 und t = 6 wird somit $\quad P_t = 11^t \qquad P_6 = 11^6 = 1771561$ Tribbles

d.h. die Zahl, die Spock blitzschnell berechnete.
Gelöst wird das Tribble-Problem dadurch, dass Scotty alle Tribble auf ein Klingonen-Raumschiff beamt.



Logistisches Wachstum

Beschränktes Wachstum

Ein Wachstum heißt beschränkt mit einer Schranke S, wenn die Änderungsrate $B(t + 1) - B(t)$ nicht konstant, sondern proportional zum Sättigungsmanko $S-B(t)$ ist.

rekursive Darstellung $B(t+1) = B(t) + k (S - B(t))$
explizite Darstellung $B(t) = S - (S - B(0)) (1-k)^t$

Logistisches Wachstum

Ein Wachstum wird logistisch mit der Schranke S, die Kapazitätsgrenze, genannt, wenn die Änderungsrate $B(t + 1) - B(t)$ nicht konstant, sondern proportional zum Produkt aus Bestand und Sättigungsmanko $B(t) (S - B(t))$ ist.

rekursive Darstellung $B(t+1) = B(t) + k B(t) (S - B(t))$
explizite Darstellung $B(t) = B(0) S / (B(0) + (S - B(0)) e^{-k S t})$

Beispiel: Im Jahre 1705 wurden 5 Hasen auf einer Pazifikinsel ausgesetzt, um die Frischfleischversorgung bei künftigen Besuchen zu sichern. Ein Jahr später wurden bereits 12 Hasen gesichtet.
a) Wie viele Hasen wären bei der Annahme exponentiellen Wachstums im Jahre 1711 auf der Insel zu erwarten?
b) Nach jeweils wie vielen Monaten verdoppelt sich der Bestand unter der Annahme exponentiellen Wachstums?
c) Tatsächlich wurden auch Jahrzehnte nach der Aussetzung niemals mehr als 100 Hasen auf der Insel gezählt. Wie viele Hasen wären im Jahr 1711 auf der Insel zu erwarten, wenn man den Ansatz für logistisches Wachstum verwendet?
Lösung:
a) $Z(t) = 5 \cdot 2{,}4^t$ … $Z(9) = 956$ Hasen
b) $Z(t) = 2\, Z(0)$ … $t = 0{,}8$ Jahre = 9,5 Monate
c) $Z(1) = 12$, $Z(0) = 5$, $S = 100$ … $k = 0{,}0147$ … $Z(n) = 5, 12, 28, 58, 94, 102, 99$

Beispiel zum Logistischen Wachstum

Aufgabe: Eine Fichte ist 10 Jahre nach der Pflanzung etwa 8 Meter hoch, nach weiteren 10 Jahren etwa 13 m. Fichten werden im Durchschnitt etwa 35 Meter hoch.
Welche durchschnittliche Höhe ergibt sich daraus für einen 50 Jahre alten Fichtenwald, wenn man logistisches Wachstum annimmt.
Lösung:
$$B(t) = S / (1 + b\, e^{-Skt})$$
mit der Schranke S. Für $B(10) = 8$ und $B(20) = 13$ erhält man für die Konstanten b und k:
$$8 = 35 / (1 + b\, e^{-350\, t})$$
$$13 = 35 / (1 + b\, e^{-700\, t})$$
… $8\, b\, e^{-350k} = 27$ und $13\, b\, e^{-700k} = 22$
d.h. $b = 9477/1408 = 6{,}731$ und $k = 0{,}001972292$
Für das Wachstumgesetz folgt insgesamt
$$B(t) = 35 / (1 + 6{,}731\, e^{-0{,}06903\, t})$$ in Jahren
und damit als durchschnittliche Baumhöhe nach 50 Jahren $B(50) = 28{,}85$ m.

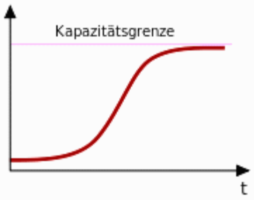
Beispiel 2 zum Logistischen Wachstum

Aufgabe 2: Von 6000 isoliert lebenden Menschen eines Indianerstamms infiziert sich eine Person mit Grippe. Durch gegenseitige Ansteckung zählt man nach 5 Wochen bereits 400 Kranke.
a) Um die Ausbreitung dieser Grippe zu modellieren, geht man von logistischem Wachstum der Anzahl K der Erkrankten aus. Was spricht für diese Annahme?
Lösung: Zuwachs ist proportional zu $K(x)$ und $6000 - K(x)$
b) Bestimmen Sie den Funktionsterm. Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Bewohner krank?
Lösung: $K(x) = 6000/(1 + 5999\, e^{-6000kx})$
$K(5) = 400$ … $k = 0{,}00020$ $\quad$ $K(x) = 3000$ … $x = 7{,}2$ Wochen
c) Wie groß ist in den ersten 2 Monaten die mittlere Zunahme der Erkrankungen pro Woche?
$$K(8)/8 = 533$$

Aufgabe 3:
Die Tabelle zeigt die Erdbevölkerungsentwicklung:

Jahr	1804	1927	1960	1974	1987	1999	2005
Milliarden	1	2	3	4	5	6	6,5

a) Geben Sie eine logistische Regressionskurve an. Welche Sättigungsgrenze beinhaltet sie?
Lösung mit $x = 0$ entspricht dem Jahr 2000
$f(x) = 11{,}5 / (1 + 0{,}893\, e^{-0{,}0288\, x})$ $\quad$ $S = 11{,}5$ Milliarden
b) In welchem Jahr sind demnach 7, 8 bzw. 9 Milliarden Menschen zu erwarten?
Lösung: 2011, 2025 bzw 2041



Gleichung zum logistischen Wachstum

Für das logistisches Wachstum hängt das Wachstum f'(t) vom aktuellen Bestand f(t) und der noch vorhandenen Kapazität G - f(t) ab, wobei G die obere Schranke ist. Dies wird durch eine Bernoullische Differentialgleichung der Form

$f'(t)=k\, f(t)\, (G - f(t))$

begschrieben.

Ist die gesuchte Lösung y, so wird $dy/dt = k\, y\, (G - y)$

Die Differentialgleichung wird mit Trennung der Variablen gelöst, d.h.

$k\, dt = dy/(y\, (G-y)) = 1/G\, (1/y + 1/(G-y))\, dy$

Integration mit der Voraussetzung $0 < f(0) < G$ ergibt

$k\, G\, t + c = \ln y - \ln(G-y) = \ln (y/(G-y))$

Mit der Exponentialfunktion erhält man

$e^{kGt+c} = y/(G-y)$ $\qquad e^{-kGt-c} = (G-y)/y = G/y - 1 \quad (*)$

Übertragen der 1 auf die linke Seite und erneute Kehrwertbildung liefert

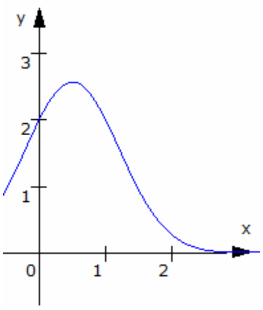
$y / G = 1 / (1 + e^{-kGt-c})$

und abschließend $\qquad y = G / (1 + e^{-kGt-c})$

Die Integrationskonstante c ergibt sich in der Gleichung (*) für t = 0 aus dem Wert f(0):

$e^{-c} = e^{-kg0-c} = G/f(0) -1$

Insgesamt wird damit $\qquad f(t) = G / (1 + e^{-kGT}\, e_c) = G / (1 + e^{-kGT}\, (G/f(0) - 1)$



Fremdvergiftetes Wachstum

Als vergiftetes Wachstum wird ein Wachstumsprozess bezeichnet, in dem die Populationsvermehrung durch einen Hemmstoff gebremst wird.

Wird der Hemmstoff von außen zugesetzt, spricht man von fremdvergiftetem Wachstum.

Dem Bestand wird in gleichen Zeitabschnitten eine konstante Menge eines giftigen Hemmstoffs von außen zugesetzt. Die Menge des Giftes steigt linear mit der Zeit. Der Wachstumsfaktor k - ct nimmt mit der Zeit ab.

Explizite Darstellung $\qquad B_n = B_0\, e^{k\, t\, -\, 1/2\, c\, t^2}$

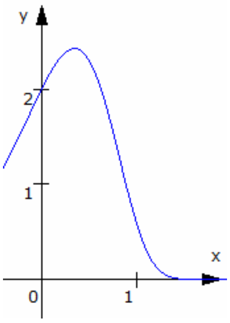
Differentialgleichung $\qquad B'(t) = dB/dt = (k -ct)\, B(t)$

Rekursive Gleichung $\qquad B_{n+1} = B_n\, e^{(k\, -\, c(n+1/2)\, \Delta t)\, \Delta t}$

Wachstumsgeschwindigkeit $\qquad B'(t) = dB/dt = (k -ct)\, B(0)\, e^{kt\, -\, 1/2\, c\, t^2}$

Maximum der Wachstumsfunktion $\qquad B_{max} = k/c$

Beispiel: Um das Bakterienwachstum bei einer Krankheit zu hemmen, wird in Zeitabständen ein Antibiotikum zugeführt, das für die Bakterien giftig ist. Dadurch wird die Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterien und ihre Menge reduziert.



Selbstvergiftetes Wachstum

Von einem selbstvergifteten Wachstum spricht man, wenn die Population während des Wchstums selbst behindernde Gifte erzeugt.

Die Menge des produzierten Gifts wächst proportional zum Umfang der Population. Damit wird die Wachstumsrate um den Anteil verringert, der proportional zur Giftmenge ist.

Explizite Darstellung $\qquad B_n = B_0\, e^{k\, t\, -\, c/k\, (ekt\, -1\,)}$

Differentialgleichung $\qquad B'(t) = dB/dt = (k -c\, e^{kt})\, B(t)$

Rekursive Gleichung $\qquad B_{n+1} = B_n\, e^{(k\, \Delta t\, -\, c/k\, ekn\, \Delta t\, (ek\, \Delta t\, -\, 1))}$

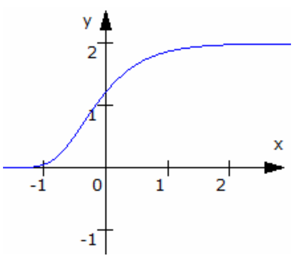
Wachstumsgeschwindigkeit $\qquad B'(t) = dB/dt = (k -c\, e^{kt})\, B(0)\, e^{kt\, -\, c/k\, (ekt\, -\, 1)}$

Maximum der Wachstumsfunktion $\qquad B_{max} = 1/k\, \ln\, (k/c)$

Beispiele:

Bei der Herstellung von Bierbrauen entsteht Alkohol als Abfallprodukt, der für die Hefezellen giftig ist, ihre Vermehrung hemmt und zu ihrem Aussterben führt.

Erhalten außerdem Fische in einem Aquarium kein frisches Wasser, sterben sie auf Grund einer Vergiftung an ihren eigenen Stoffwechselrückständen.



Gompertz-Funktion

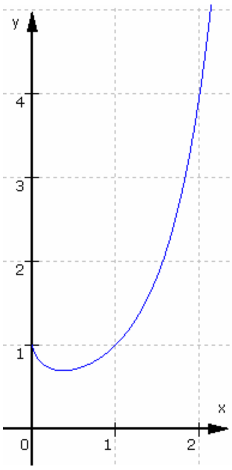
Die Gompertz-Funktion ist eine Sättigungsfunktion. Erstmals wurde sie von dem englischen Mathematiker Benjamin Gompertz (1779-1865) beschrieben.

Funktionsgleichung: $\qquad y = f(x) = a\, e^{(b\, ecx)}$

Dabei sind die Konstanten a die obere Asympote und b und c negative Zahlen. Die Konstante b beschreibt die Verschiebung der Funktion längs der y-Achse, die Konstante c die Wachtumsrate der Funktion.

Die 1.Ableitung $\qquad y' = f'(x) = abc\, e^{(b\, ecx\, +\, cx)}$

beschreibt die relative Wachtumsrate des betrachteten Prozesses. Das stärkste Wachstum (Extremstelle der 1.Ableitung) tritt auf bei $x = -1/c \ln(-b)$
Die Gompertz-Funktion wird vor allem in der Biologie (Wachstumsprozesse) und in den Wirtschaftswissenschaften verwendet. Die Funktion ist ein Spezialfall der verallgemeinerten logistischen Funktion.



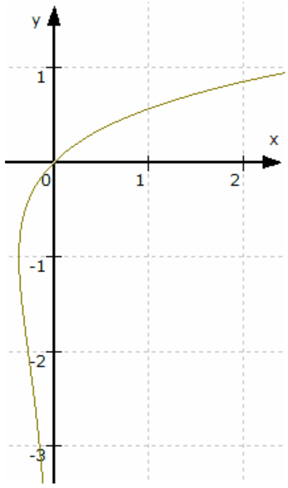
Selbstpotenzierende Funktion

Die selbstpotenzierende Funktion $y = x^x$ ist auf die Exponentialfunktion zurückführbar:

$$x^x = e^{x \ln x}$$

$y = x^x$ ist nur für $x > 0$ definiert und lässt sich durch die Festlegung $0^0 = 1$ stetig auf $x \geq 0$ erweitern. Die Funktion besitzt an der Stelle $x = 1/e = 0{,}36787$ ein Minimum mit $x^x = 0{,}69220$ und steigt dann schneller als die Exponentialfunktion gegen unendlich.
1.Ableitung $(x^x)' = x^x (1 + \ln x)$
$y = x^{1/x}$ ist analog umformbar, besitzt ein Maximum bei $x = e$ und geht für große Werte gegen 1. Diese Funktion hat bei $x = 0.58193...$ eine Wendestelle.
1.Ableitung $(x^{1/x})' = x^{(1-2x)/x} (1 - \ln x)$

Lambertsche W-Funktion, Omega-Funktion



Die Lambertsche W-Funktion (nach Johann Heinrich Lambert) ist die Umkehrfunktion der Funktion

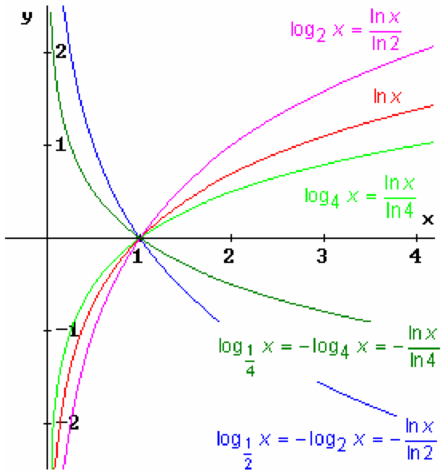
$$y = x\, e^x$$

wobei e^x die Exponentialfunktion und x eine beliebige komplexe Zahl ist. Die W-Funktion wird auch Omega-Funktion genannt und meist als W(x) geschrieben.
Es gilt für komplexe z $z = W(z)\, e^{(z)}$

Da $y = x\, e^x$ nicht eineindeutig ist, besitzt die W-Funktion auf dem Intervall zwei Funktionsäste. Mit W(x) wird in der Regel der obere der Äste bezeichnet. Für $y > -1$ liegt der Hauptzweig der Lambertschen W-Funktion, für $y < -1$ der Nebenzweig vor.
Die W-Funktion kann nicht als elementare Funktion ausgedrückt werden. Zumeist wird sie in der Kombinatorik verwendet.
Ableitungsfunktion $W'(x) = W(x) / (x + x\, W(x))$
Stammfunktion $\int W(x)\, dx = x\, (W(x) - 1 + 1/W(x)) + C$
Eine Stammfunktion ergibt sich durch Substitution des gesamten Integranden.

Spezielle Werte
$W(-\pi/2) = i\pi/2$ $W(-1/e) = -1$ $W(-1/2 \ln 2) = -\ln 2$ $W(0) = 0$
$W(e) = 1$ $W(1) = \Omega = 0{,}5671432904...$, Omega Konstante
Näherungswert der W-Funktion $W(x) = 0{,}665 \cdot (1 + 0{,}0195 \cdot \ln(x+1)) \cdot \ln(x+1) + 0{,}04$
siehe http://www.apmaths.uwo.ca/~djeffrey/Offprints/W-adv-cm.pdf

Logarithmusfunktionen



Umkehrung der Exponentialfunktion

Allgemeine Form
$y = \log_a x$ mit $a>0$ und $a \neq 1$
DB: $\{ x \mid 0 < x < \infty \}$
WB: $\{ y \mid -\infty < y < \infty \}$
Logarithmusfunktionen $y = \log_a x$ sind für $a > 1$ monoton steigend, für $0 < a < 1$ monoton fallend.

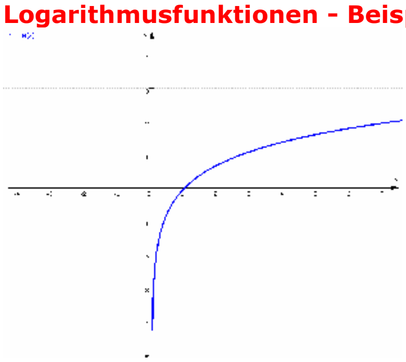
Wichtige Logarithmusfunktionen sind
Basis 10 $y = \lg x = \log_{10} x$; dekadische Logarithmusfunktion
Basis 2 $y = \mathrm{ld}\, x = \log_2 x$; binäre Logarithmusfunktion
Basis e $y = \ln x$; natürliche Logarithmusfunktion
Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ ohne Basisangabe a beziehen sich meist auf den natürlichen Logarithmus.
Die natürliche Logarithmusfunktion wird auch Nepersche Logarithmusfunktion oder hyperbolische Logarithmusfunktion genannt.
Für die dekadische Logarithmusfunktion werden auch die Bezeichnungen Briggssche Logarithmusfunktion oder gewöhnliche Logarithmusfunktion verwendet.

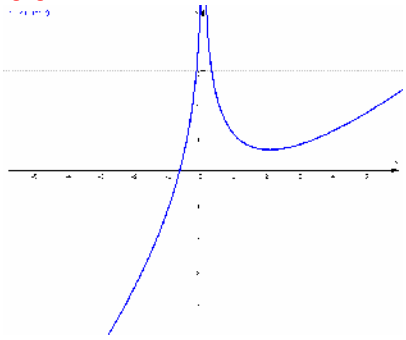
Eine historisch wichtige Anwendung der Logarithmusfunktionen sind Rechenschieber, bei denen Multiplikationen auf die Addition von Logarithmuswerten vereinfacht werden.
Verschiedene physikalische Größen, z.B. dezibel und pH-Wert, sind logarithmisch definiert.

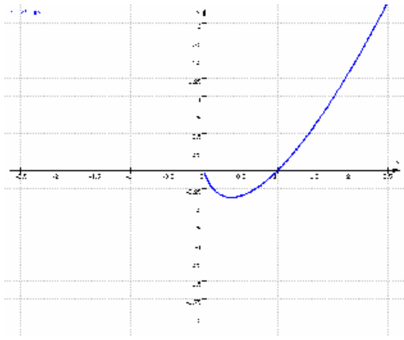
Funktion $y = \log_a(kx)$
für posivites k ... Verschiebung um $\log_a k$ entlang der y-Achse
für negatives k ... nur definiert für negatives x und damit wegen k< 0 und x< 0, d.h. kx>0 identisch

Für die speziellen Logarithmusfunktion $y = a \ln(x/b)$ gilt: Fallen Lichtstrahlen parallel zur x-Achse von rechts auf die Funktion, so bilden die reflektierten Strahlen für a = b eine Kettenlinie. Der Tangentialwinkel für $y = a \ln(x/b)$ ist gleich $\cot \varphi = x/a$, der entsprechende Krümmungsradius $R = a/(\sin^2 \varphi \cos \varphi)$.

Logarithmusfunktionen - Beispiele

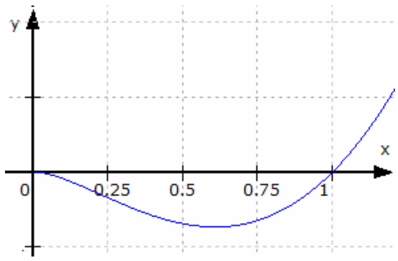

Y = LN(X)


Y = X-LN(X^2)


Y = X*LN(X)

Eine Vielzahl von Bauwerken besitzt eine logarithmische Funktion als äußere Begrenzungskurve. Das berühmteste Beispiel ist der Eiffel-Turm in Paris. Der Eiffel-Turm ist das Wahrzeichen von Paris. Er wurde von dem französischen Ingenieur Alexandre Gustave Eiffel für die Pariser Weltausstellung im Jahr 1889 aus über 6000 Tonnen Eisen errichtet und war mit seinen 300 Metern Höhe lange das höchste Bauwerk der Welt. Der untere Bereich besteht aus vier riesigen, gewölbten Streben, die auf gemauerten Pfeilern stehen und sich nach oben zu einem einzigen Turmschaft verjüngen. Er besitzt drei Aussichtsplattformen in verschiedener Höhe und ist über Treppen oder einen Aufzug zugänglich.

Aufgabe zur Logarithmusfunktion
Aufgabe: Untersuchen Sie die Funktion
$$y = x^2 \ln x \text{ für } > 0$$
sowie = 0 für x = 0.
Insbesondere werden verlangt: Verhalten der Funktion bei x = 0 und $x \to \infty$; Nullstellen, Maxima, Minima, Wendepunkte, Graph
Berechnen Sie das Flächenstück zwischen den Nullstellen.
(Städtisches Gymnasium Bern, Typus B, 1963)



Lösung: ln x ist für x = 0 nicht definiert; die Zusatzfunktion y = 0 für x = 0 füllt die Lücke bei Null mit einem passenden Wert. Für $x \to 0$ gilt: $y \to 0$; für $x \to \infty$ wird $y \to \infty$.
Nullstellen $f(x) = x^2 \cdot \ln x = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$
Extrema $f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot 1/x = x \cdot (2 \ln x + 1) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0$ oder $2 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1/\sqrt{e}$; $y_2 = -1/(2e)$
Es handelt sich um ein Minimum.
Wendepunkt $f''(x) = 1 \cdot (2 \ln x + 1) + x \cdot 2x = 2 \ln x + 3 = 0 \Rightarrow x = e^{-1,5}$
Die Funktion lässt sich mit partieller Integration integrieren. Allgemein ist
$$\int x^s \ln x \, dx = x^{s+1}/(s+1) (\ln x - 1/(s+1))$$
und hier für s = 2
$$\int x^2 \ln x \, dx = x^3/3 (\ln x - 1/3) \qquad -A = \int_0^1 x^2 \ln x \, dx = [x^3/3 (\ln x - 1/3)]_0^1 = -1/9$$
Der Inhalt des Flächenstücks ist also A = 1/9

Beispiele zu Logarithmengleichungen
Lösen Sie die folgenden logarithmischen Gleichungen!
a) $\log x + \log(x-7) = \log 6 + \log 3$
$\log x(x-7) = \log 18 \Rightarrow x(x-7) = 18 \Rightarrow x^2-7x-18 = 0 \Rightarrow (x-9)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$ kann nicht eingesetzt werden. Damit ist x = 9 die einzige Lösung.

b) $\log(x-3) - \log 6 = \log 7 - \log(x-4)$
$\log (x-3)/6 = \log 7/(x-4) \Rightarrow (x-3) / 6 = 7 / (x-4) \Rightarrow (x-3)(x-4)=42 \Rightarrow x^2-7x+12 = 42 \Rightarrow x^2-7x-30 = 0 \Rightarrow (x-10)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3$ kann nicht eingesetzt werden. x = 10 ist die einzige Lösung.

c) $\log(35-x^3) = 3 \log(5-x)$

$\log(35-x^3) = \log (5-x)^3 \Rightarrow 35 - x^3 = (5-x)^3 \Rightarrow 35-x^3 = 125-75x+15x^2-x^3 \Rightarrow 0 = 15x^2-75x+90 \Rightarrow 0 = x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$
Beide Lösungen sind richtig: $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$

d) $\log(x-5) - \log2 = \log(3x)$
$\log (x-5) / 2 = \log(3x) \Rightarrow (x-5) / 2 = 3x \Rightarrow x-5 = 6x \Rightarrow -5=5x \Rightarrow -1 = x$
$x = -1$ gehört nicht zum Definitionsbereich der Gleichung; die Gleichung hat keine Lösung.

e) $2 \log(x+1) - \log x = \log4$
$\log(x+1)^2 - \log x = \log4 \Rightarrow \log (x+1)^2/x = \log4 \Rightarrow (x+1)^2/x =4 \Rightarrow x^2+2x+1 = 4x \Rightarrow x^2-2x+1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$ ... Die Gleichung hat die Lösung $x = 1$

f) $4 \log x = 2 \log(x^2-3x)$
$\log x^4 = \log (x^2-3x)^2 \Rightarrow x^4 = (x^2-3x)^2 \Rightarrow x^4 = x^4-6x^3+9x^3 \Rightarrow 6x^3-9x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2(2x-3) = 0$
weder $x = 3/2 = 1,5$ noch $x = 0$ gehören zum Definitionsbereich.

Aufgabe: Ein Patient schluckt auf Anweisung seines Arztes um 12 Uhr und um 16.30 Uhr je eine Tablette Aspirin. Jede dieser Tabletten enthält 400 mg Wirksubstanz, welche im Körper nach etwa 2 Stunden zur Hälfte abgebaut wird.
Berechnen Sie, nach welcher Zeit sich nur noch 40 mg der Substanz im Körper des Patienten befinden und wann daher wieder eine Tablette eingenommen werden sollte.
Lösung:
$1/2\ N(0) = N(0)\ a^2$ … $a = \sqrt{0,5}$
$N(4,5) = 400\ a^{4,5} = 84,089$
Um 16.30 Uhr wird die zweite Tablette eingenommen und es ergibt sich ein neues N(0).
$N(0) = 84,089 + 400 = 484,089$
$40 = 484,089\ a^t$ … $0,08282 = a^t$
$\lg 0,08282 = t \lg a$ … $t = 7,1944$
Die nächste Tablette muss etwa 23.40 Uhr eingenommen werden.

Aufgabe 2: Die Beobachtung unter einem Mikroskop ergab, dass bei einer Bakterienkultur die Anzahl der Bakterien pro Tag um ein Viertel wächst.
a) Wie groß ist die Anzahl der Bakterien nach vier Tagen?
b) Wie lang dauert es, bis sich die Anzahl der Bakterien verzehnfacht hat?
Lösung:
a) $f(t) = 1500 \cdot 1,25^{t/Tag}$ … $f(4) = 1500 \cdot 1,25^4 = 3662$ die Anzahl der Bakterien nach vier Tagen
b) $f(x) = 10 \cdot 1500 = 15000$ … $1500 \cdot 1,25^x = 15000$.
$1,25^x = 10$ … $x = \log_{1,25}10 = \lg 10 / \lg 1,25 = 10,3$
Die Anzahl der Bakterien hat sich nach etwas mehr als 10 Tagen verzehnfacht.

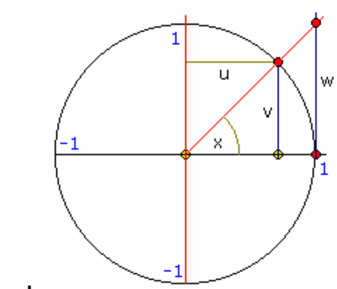
Trigonometrie

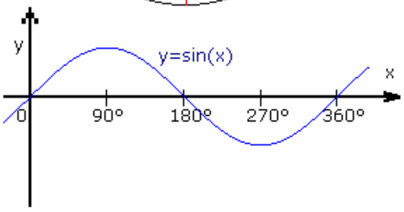
griech. Dreiwinkelmessung

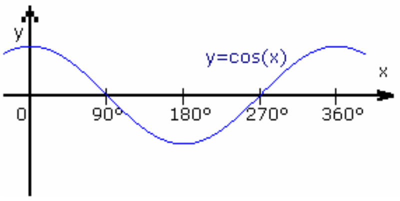
Die Trigonometrie ist die Lehre von der Dreiecksberechnung mit Hilfe von Winkelfunktionen, die deshalb oft trigonometrische Funktionen heißen.

Ebene Trigonometrie

Die ebene Trigonometrie stützt sich auf die Sätze der Planimetrie, die sphärische Trigonometrie gehört zur Geometrie der Kugeloberfläche, die als Modell einer elliptischen nichteuklidischen Geometrie aufgefasst werden kann. Die Anfänge der Trigonometrie gehen in das Altertum zurück.
Aristarch von Samos verwandte die Eigenschaften rechtwinkliger Dreiecke, um das Verhältnis der Entfernungen der Sonne bzw. des Mondes von der Erde zu berechnen. Hipparch verfasste eine Schrift über "Kreissehnen" und stellte eine Sehnentabelle auf; auch Ptolemäus berechnente eine Sehnentafel.
Araber und Inder bauten die Trigonometrie weiter aus. In der Renaissance erzwangen praktische Probleme (z.B. Hochseeschiffahrt) eine zunehmende Verbesserung der Trigonometrie.







Trigonometrische Funktionen, Kreisfunktionen

Sinus	$y = \sin x = v$
Kosinus	$y = \cos x = u$
Tangens	$y = \tan x = w$
Kotangens	$y = \cot x = 1/w$
Sekans	$y = \sec x = 1/u$
Kosekans	$y = \csc x = \operatorname{cosec} x = 1/v$

Sinus lat. sinus = Krümmung

DB: $\{ x \mid -\infty < x < \infty \}$ WB: $\{ y \mid -1 \le y \le 1 \}$
Periode 2π ungerade Funktion

Die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion. Ihr Bild ist die Sinuskurve, die die x-Achse in den Punkten B_n mit den Koordinaten $(n\pi, 0)$ schneidet.
Die Tangenten in diesen Punkten bilden mit der positiven Richtung der x-Achse Winkel von $\pi/2$ bzw. $-\pi/2$.
Die Maxima der Funktion liegen an den Stellen $x_{max} = \pi/2 + 2n\pi$, die Minima an den Stellen $x_{min} = -\pi/2 + 2n\pi$. Für jeden Funktionswert y gilt: $-1 \le y \le 1$.

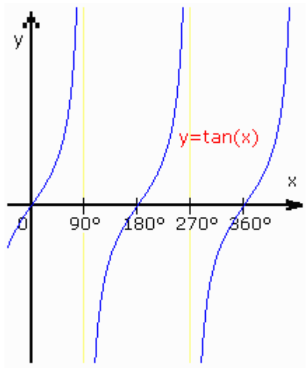
Kosinus
lat. complementi sinus = Sinus des Komplementswinkels

DB: $\{ x \mid -\infty < x < \infty \}$ WB: $\{ y \mid -1 \le y \le 1 \}$
Periode 2π gerade Funktion

Tangens

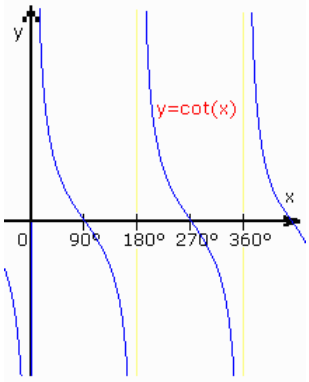
DB: $\{x \mid -\infty<x<\infty ; x \ne \pi/2+k\pi, k\in Z\}$ WB: $\{ y \mid -\infty < y < \infty \}$
Periode π ungerade Funktion

Der Definitionsbereich der Tangens- bzw. Kotangensfunktion zerfällt in unendlich viele offene Intervalle. In jedem dieser Intervalle ist die Tangensfunktion monoton steigend, die Kotangensfunktion fallend.
In jedem Intervall existiert eine Nullstelle. Die Nullstellen sind gleichzeitig Wendestellen. Lokale Extrempunkte gibt es nicht. Die Polstellen sind Pole 1.Ordnung.



Kotangens

DB: $\{x \mid -\infty < x < \infty ; x \ne k\pi, k \in Z \}$ WB: $\{ y \mid -\infty < y < \infty \}$
Periode π ungerade Funktion



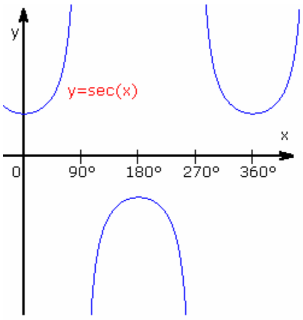
Komplementwinkelbeziehung

$\sin (\pi/2 - x) = \cos x$ $\tan (\pi/2 - x) = \cot x$

Sekans

DB: $\{ x \mid -\infty < x < \infty \text{ mit } x \ne \pi/2 + k\pi, k \in Z \}$
WB: $\{ y \mid -\infty < y \le -1 \text{ und } 1 \le y < \infty \}$

Die Sekansfunktion ist in den offenen Intervallen $(-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi)$ definiert durch $\sec x = 1/\cos x$ und hat an den Stellen $\pi/2 + n\pi$ Pole erster Ordnung und die Periode 2π.



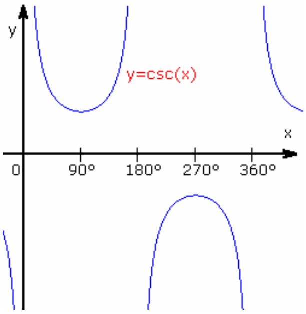
Minima liegen vor an den Stellen 2nπ, Maxima an den Stellen (2n+1)π.

Kosekans

DB: offene Intervalle (nπ;(n+1)π)

WB: { y | - ∞ < y ≤ -1 und 1 ≤ y < ∞ }

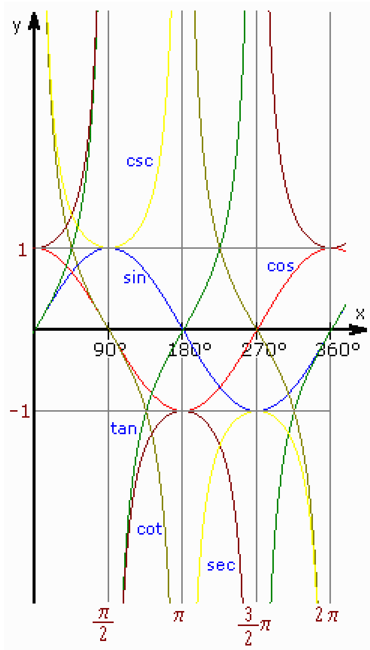
Die Kosekansfunktion ist in den offenen Intervallen (nπ, (n+1) π) definiert durch csc x = 1/sin x und hat an den Stellen nπ Pole erster Ordnung und die Periode 2π. Minima liegen vor an den Stellen (4n+1)/2 π, Maxima an den Stellen (4n+3)/2 π.



	Nullstelle	Maxima	Minima	Pole
sin	nπ	π/2+2nπ	-π/2+2nπ	-
cos	nπ+π/2	2nπ	(2n+1)π	-
tan	nπ	-	-	π/2+nπ
cot	nπ+π/2	-	-	nπ
sec	-	(2n+1)π	2nπ	π/2+nπ
csc	-	π(4n+3)/2	π(4n+1)/2	nπ

Verschiebungssatz

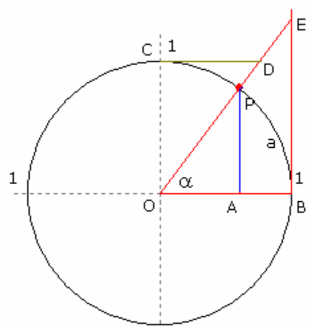
Es genügt, die Funktionswerte von sin x für alle Winkel x mit 0 ≤ x ≤ π/2 zu kennen. Andere Werte ergeben sich aus den Gleichungen



sin (π/2+x) = cos x	sin (π+x) = -sin x
sin (3π/2+x) = -cos x	cos (π/2+x) = -sin x
cos (π+x) = -cos x	cos (3π/2+x) = sin x
cot x = tan (π/2-x)	tan x =

Quadrantenbeziehungen

Quadrant	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Winkel	x	π-x	π+x	2π-x
Sinus	sin x	sin x	-sin x	-sin x
Kosinus	cos x	-cos x	-cos x	cos x
Tangens	tan x	-tan x	tan x	-tan x
Kotangens	cot x	-cot x	cot x	-cot x



Geometrische Deutung trigonometrischer Funktionen

Der freie Schenkel des Winkels α schneidet die Kreisbogen im Punkt P(c ; s), verläuft durch den Koordinatenursprung und schneidet die Gerade y = 1 im Punkt D.

Die Gerade x = 1 schneidet die x-Achse im Punkt B und den freien Schenkel im Punkt E.

Die Strecken c, s und die Verbindungsstrecke zwischen dem Ursprung O und dem Schnittpunkt P(c ; s) der Geraden mit dem Kreis bilden ein rechtwinkliges Dreieck, wobei die Strecke c die Ankathete, s die Gegenkathete und die Strecke zwischen Ursprung und Schnittpunkt die Hypotenuse ist. Die Funktionswerte der verschiedenen trigonometrischen Funktionen können folgendermaßen erhalten werden:

sin x ... y-Wert des Schnittpunktes P, d.h. gleich AP

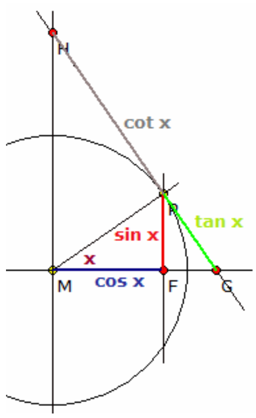
cos x ... x-Wert des Schnittpunktes P, d.h. gleich OA

tan x ... y-Wert des Schnittpunktes E, d.h. gleich BE

cot x ... x-Wert des Schnittpunktes D, d.h. gleich CD

sec x ... Länge der Strecke OE, das Vorzeichen wird durch das Vorzeichen von c bestimmt

csc x ... Länge der Strecke OD, das Vorzeichen wird durch das Vorzeichen von s bestimmt



Zweite geometrische Deutung trigonometrischer Funktionen

Eine weitere Erklärung der trigonometrischen Funktionen bietet sich an.

Der freie Schenkel des Winkels x schneidet den Kreisbogen im Punkt P(c ; s) und verläuft durch den Koordinatenursprung.

Im Punkt P werde die Tangente an den Kreis konstruiert, die die x-Achse im Punkt G und die Ordinatenachse im Punkt H schneidet. Das Lot von P auf die x-Achse habe den Fußpunkt F.

Ist der Kreis ein Einheitskreis, so findet man die trigonometrischen Funktionswerte bei folgenden Strecken:
sin x … y-Wert des Schnittpunktes P, d.h. gleich AF
cos x … x-Wert des Schnittpunktes P, d.h. gleich OF
tan x … Tangentenstück von P zur x-Achse, d.h. gleich PG
cot x … Tangentenstück von P zur y-Achse, d.h. gleich PH
sec x … x-Schnittstelle der Tangente, d.h. MG
csc x … y-Schnittstelle der Tangente, d.h. MH

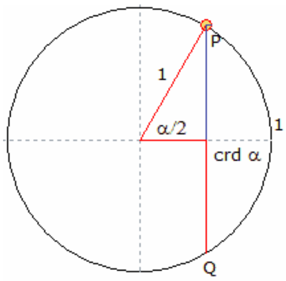
Beziehungen zwischen den trigonometrische Funktionen

(±√ wird je nach Quadrant gewählt)

	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x =	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\tan x / \pm\sqrt{1+\tan^2 x}$	$1/\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$
cos x =	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	cos x	$1/\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$	$\cot x / \pm\sqrt{1+\cot^2 x}$
tan x =	$\sin x / \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x} / \cos x$	tan x	1/cot x
cot x =	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x} / \sin x$	$\cos x / \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	1/tan x	cot x
sec x =	$\pm 1 / \sqrt{1-\sin^2 x}$	1 / cos x	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x} / \cot x$
csc x =	1 / sin x	$\pm 1 / \sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x} / \tan x$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$

Entstehung des Sinusbegriffs

Durch indische Astronomen wurde die antike Trigonometrie der Griechen weiterentwickelt. Hipparchos hatte bereits genaue Tabellen dafür entwickelt, in welchen Beziehungen zwischen den Winkeln, den dazugehörigen Kreisbögen und den Kreissehnen aufgestellt waren.
Die ältesten erhaltenen indischen Schriften stammen von Aryabhatta um 500 u.Z. Dort hatte es sich als tauglicher erwiesen, das Dreieck, den Winkel und die Sehne zu halbieren.
Der indische Ausdruck für "Halbsehne" war "ardhajyâ". Dieses wurde später abgekürzt zu "jyâ".
Die Araber übernahmen dieses Wort. Bei der Übersetzung ins Lateinische kam es dann aber offenbar zu einer Verwechslung mit dem ähnlich geschriebenen arabischen Wort "dschaib" (Busen), welches durch das gleichbedeutende lateinische "sinus" wiedergegeben wurde.
(nach Kurt Scheuerer: "Hipparchos - Zur Geschichte der Trigonometrie")



Chorda, Chord

In den Anfängen der Trigonometrie rechnete man an Stelle des Sinus mit der Sehne (Chorda = lat. Sehne). crd α ist die Länge der Sehne PQ zum Zentriwinkel α im Kreis mit dem Radius 1.
Mitunter wird auch kurz von Chord gesprochen und die Funktion mit chord α abgekürzt.

Hat der Kreis den Radius r, die Sehne die Länge s und der Zentriwinkel die Größe α, so gilt $s / r = \text{crd}\ \alpha = 2 \sin \alpha/2$
Heute ist der Gebrauch der Chorda-Funktion unüblich.

y = crd x

Früher wurden auch für die Chorda-Funktion Tabellenwerke verwendet. Für verschieden Winkel α gilt

α	10°	320°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
crd α	0,1743	0,3473	0,5176	0,6840	0,8452	1,0000	1,1472	1,2856	1,4142

Die erste bekannte Sehnentafel wurde von dem griechischen Astronomen Hipparchos von Nikaia berechnet. Die Teilung der Tafel betrug 7,5°. Sehnenskalen wurden bis ins 19.Jahrhundert in der Landvermessung zur Verbesserung der Messgenauigkeit eingesetzt.

Spezielle Funktionswerte

x	sin x	cos x	tan x	cot x
0	0	1	0	-
π/12	$1/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$(\sqrt{3}+1)/\sqrt{8}$	$2-\sqrt{3}$	$1/(2-\sqrt{3})$
π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
π/2	1	0	-	0
2π/3	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
3π/4	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
5π/6	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	0

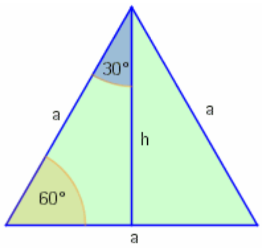
Spezielle trigonometrische Funktionen

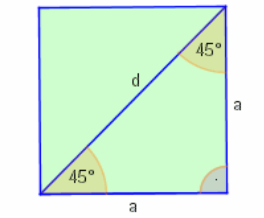
$y = a \sin(bx)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ WB: $\{ y \mid -a \leq y \leq a \}$,
kleinste Periode $2\pi/|b|$ Nullstellen $x = k\pi / b$, $k \in Z$
$y = a \sin(bx + c)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ WB: $\{ y \mid -a \leq y \leq a \}$,

kleinste Periode $2\pi/|b|$ Nullstellen $x = (k\pi - c) / b, k \in Z$

$y = a \cos (bx + c), a \neq 0, b \neq 0$ WB: $\{ y \mid -a \leq y \leq a \}$,

kleinste Periode $2\pi/|b|$ Nullstellen $x = (k\pi + \pi/2 - c) / b, k \in Z$





Spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus können an einem gleichseitigen Dreieck und einem Quadrat hergeleitet werden.

In einem gleichseitigen Dreieck findet man Winkel 30° und 60°. Es gilt nach dem Satz des Pythagoras $a^2 = h^2 + (a/2)^2$

woraus $h = \sqrt{3}/2\ a$

folgt. Mit der Definition von Sinus und Kosinus erhält man

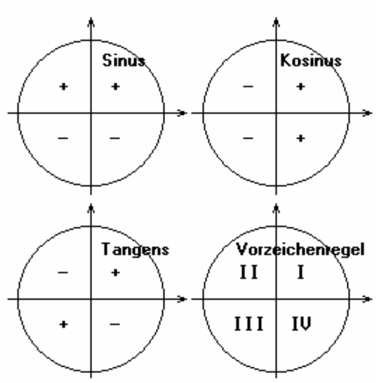
$$\sin 30° = \cos 60° = a/2 / a = 1/2$$

und $$\cos 30° = \sin 60° = h/a = \sqrt{3}/2\ a / a = 1/2 \sqrt{3}$$

In einem Quadrat mit der Seitenlänge a gilt nach dem Satz des Pythagoras für die Länge der Diagonalen $d = \sqrt{2}\ a$.

Damit wird $\sin 45° = \cos 45° = a/ (\sqrt{2}\ a) = 1/2 \sqrt{2}$.

Vorzeichenregeln trigonometrische Funktionen



Darstellung mit tan(x/2)

Mit Hilfe von $\tau = \tan(x/2)$ können alle trigonometrischen Funktionen angegeben werden $\sin x = 2\tau/(1+\tau^2)$

$\cos x = (1-\tau^2)/(1+\tau^2)$ $\tan x = 2\tau/(1-\tau^2)$

$\cot x = (1+\tau^2)/(2\tau)$ $\sec x = (1+\tau^2)/(1-\tau^2)$

$\csc x = (1-\tau^2)/(2\tau)$

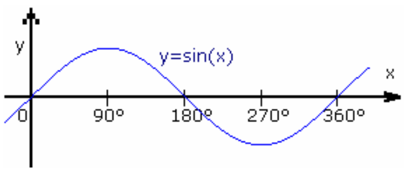
Beziehungen zu Hyperbelfunktionen

$\sin z = \sin (x+yi) = -i \sinh iz$

$\cos z = \cosh iz$ $\tan z = -i \tanh iz$

$\csc z = i\ \mathrm{csch}\ iz$ $\sec z = \mathrm{sech}\ iz$

$\cot z = i \coth iz$



Sinuskurve, Sinusoide

Die Sinusoide ist die zur Sinusfunktion gehörende transzendente Kurve. Die Kurve wurde 1636 von Roberval als Rollkurve intensiv untersucht.

Kartesische Gleichung $y = a \sin (x/b)$

Die Kurvenlänge einer Periode wird durch ein elliptisches Integral 2.Ordnung beschrieben. $\int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + a^2 \sin^2 t}\ dt = 4 \sqrt{a^2 + b^2}\ E(a/\sqrt{a^2+b^2})$

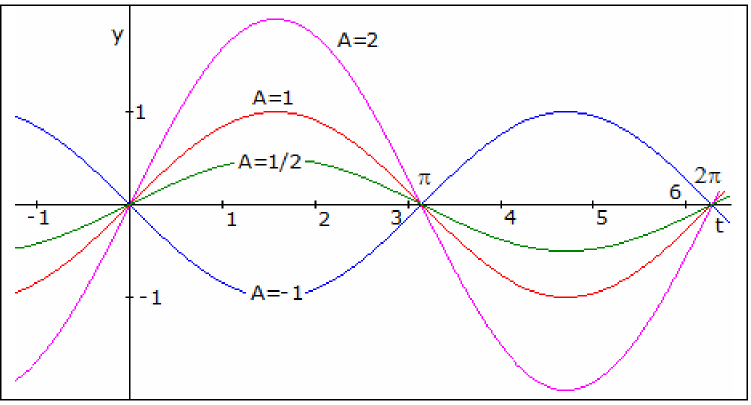
Für den Spezialfall a = b wird für die Kurvenlänge $\approx 7{,}64\ a \approx 1{,}216 \cdot 2\pi\ a$

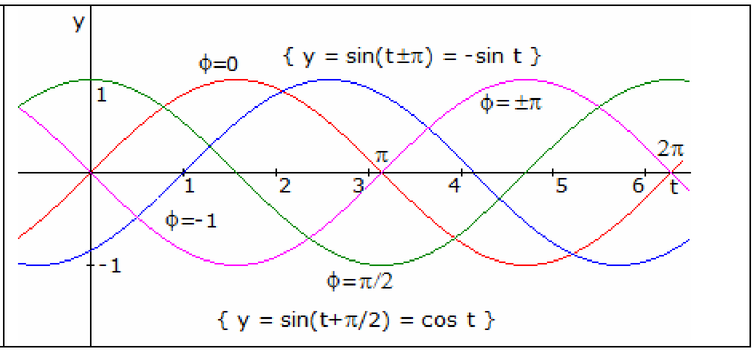
Die Sinuskurve ergibt sich als Bahnkurve eines Punktes im Inneren eines abrollenden Kreises.

Ebenso ergibt sich die Kurve, wenn ein schräg geschnittener Kreiszylinder abgerollt wird. Gilt für den Zylinder $\rho = nb$ und $z = a \sin (n\theta)$

so ist für n = 1 die Schnittkurve eine Ellipse mit der Exzentrizität $a/\sqrt{a^2+b^2}$. Auch für n = 2 und n = 1/2 (Kurve des Viviani) ergibt sich die Sinuskurve als Rollkurve.

Die senkrechte Projektion einer Kreishelix auf eine zur Achse parallelen Ebene ist eine Sinuskurve.

Parameterwirkung für $y = A \sin t$	

Parameterwirkung für $y = \sin(t + \phi)$	

Goniometrische Beziehungen, Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen

Gleichungen, welche trigonometrische Terme enthalten und für jede Belegung der Variablen wahre Aussagen ergeben.

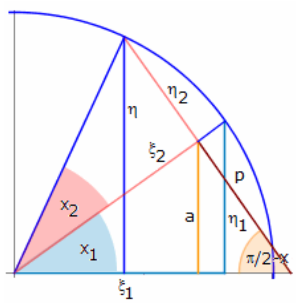
$\tan x = \sin x / \cos x$	$\cot x = \cos x / \sin x$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\tan x * \cot x = 1$
$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$	$\sin x * \operatorname{cosec} x = 1$
$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$	$1 + \cot^2 x = 1/\sin^2 x$
$\sec x = \csc x * \tan x$	$\sin^2 x = \tan^2 x / (1 + \tan^2 x) = 1 / (1 + \cot^2 x)$

Addition zweier Winkel

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
$\tan(x + y) = (\tan x + \tan y) / (1 - \tan x \cdot \tan y) = (\cot y + \cot x) / (\cot x \cot y - 1)$
$\tan(x - y) = (\tan x - \tan y) / (1 + \tan x \cdot \tan y) = (\cot y - \cot x) / (\cot x \cot y + 1)$
$\cot(x + y) = (\cot x \cdot \cot y - 1) / (\cot x + \cot y) = (1 - \tan x \tan y) / (\tan x + \tan y)$
$\cot(x - y) = (\cot x \cdot \cot y + 1) / (\cot x - \cot y) = (1 + \tan x \tan y) / (\tan x - \tan y)$
$\sec(x + y) = \sec x \sec y / (1 - \tan x \tan y) = 1 / (\cos x \cos y - \sin x \sin y)$
$\sec(x - y) = \sec x \sec y / (1 + \tan x \tan y) = (\csc x \csc y \sec x \operatorname{sex} y) / (\csc x \csc y + \sec x \sec y)$

Summe und Differenz zweier Winkelfunktionen

$\sin x + \sin y = 2 \sin((x+y)/2) \cdot \cos((x-y)/2)$
$\sin x - \sin y = 2 \cos((x+y)/2) \cdot \sin((x-y)/2)$
$\cos x + \cos y = 2 \cos((x+y)/2) \cdot \cos((x-y)/2)$
$\cos x - \cos y = -2 \sin((x+y)/2) \cdot \sin((x-y)/2)$
$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cdot \sin(45° + x) = \sqrt{2} \cdot \cos(45° - x)$
$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cdot \sin(45° - x) = \sqrt{2} \cdot \cos(45° + x)$
$\tan x \pm \tan y = \sin(x \pm y) / (\cos x \cdot \cos y)$
$\cot x \pm \cot y = \pm \sin(x \pm y) / (\sin x \cdot \sin y)$
$\tan x + \cot y = \cos(x - y) / (\cos x \cdot \sin y)$
$\cot x - \tan y = \cos(x + y) / (\sin x \cdot \cos y)$



Additionstheorem (02)

Additionstheoreme für Sinus und Kosinus:

Es gilt $\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1$
$\sin(x_1 - x_2) = \sin x_1 \cos x_2 - \sin x_2 \cos x_1$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$
$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2$
$\cos 2x = \cos 2 x - \sin 2 x$

Nachweis: In der Abbildung sind die beiden Winkel x_1 und x_2 übereinander abgetragen. Der Kreis soll Einheitskreis sein. Die gesuchte Größe ist $\eta = \sin(x_1 + x_2)$.

Folgende Größen seien festgelegt:	$\sin x_1 = \eta_1$, $\cos x_1 = \xi_1$, $\sin x_2 = \eta_2$, $\cos x_2 = \xi_2$
Aus dem Strahlensatz folgt	$a / \xi_2 = \eta_1 / 1$, d.h. $a = \eta_1 \xi_2$
	$p / a = (\eta_2 + p) / \eta$, d.h. $\eta = a (\eta_2 + p) / p$
Um p zu bestimmen, nutzt man	$\sin(\pi/2 - x_1) = \cos x_1 = \xi_1 = a/p$.
Damit ergibt sich	$\eta = \xi_1 (\eta_2 + p) = \xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2$

Setzt man die Definitionen für Sinus und Kosinus ein, ergibt sich die Behauptung.
Ersetzt man $x_2 = -x_2$ und $x_1 = x_2 = x$ ergeben sich die 2. und 3.Gleichung. Die Beziehungen für den Kosinus ergeben sich analog.

Das Additionstheorem $\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1$
kann an einem Dreieck sehr einfach hergeleitet werden.
Gegeben sei ein Dreieck mit den Bezeichnungen der abgebildeten Figur. Dann gilt $A_\Delta = A_1 + A_2$

und mit den Flächenbeziehung am Dreieck

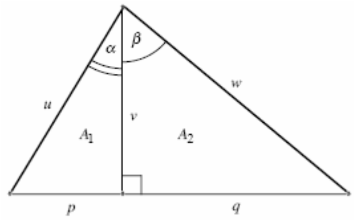
$1/2\ u\ w \sin(\alpha+\beta) = 1/2\ u\ v \sin\alpha + 1/2\ v\ w \sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = v/w \sin\alpha + v/u \sin\beta$

Da weiterhin $v/u = \cos\alpha$ und $v/w = \cos\beta$

sind, ergibt sich $\sin(\alpha+\beta) = \cos\beta \sin\alpha + \cos\alpha \sin\beta$

das gesuchte Additionstheorem.



Über den Kosinussatz wird $p^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos\alpha$

$q^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos$ $(p+q)^2 = u^2 + w^2 - 2uw \cos(\alpha+\beta)$

Andererseits ist aber auch

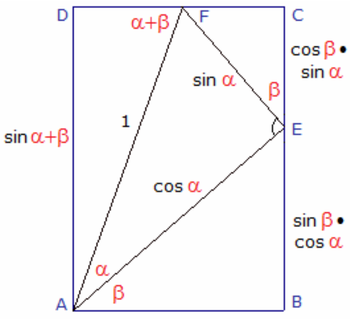
$(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = u^2 + v^2 - 2uv \cos\alpha + v^2 + w^2 - 2vw \cos\beta + 2pq$

Ein Vergleich liefert $\cos(\alpha+\beta) = -v^2/(uw) + v/w \cos\alpha + v/u \cos\beta - pq/(uw)$

Wegen $v/u = \cos\alpha$, $v/w = \cos\beta$, $p/u = \sin\alpha$ und $q/w = \sin\beta$ wird abschließend

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

Quelle: Hans Walser, 20090418a



Das Additionstheorem $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$ kann an einem Rechteck einfach hergeleitet werden; praktisch ohne große Erklärungen, als "Beweis ohne Worte".

Gegeben sei ein Rechteck ABCD mit dem eingezeichneten, rechtwinkligen Dreieck AEF. Die Strecke AF sei normiert auf eine Länge 1; die Winkel α und β seien die bei A eingezeichneten.

Dann werden im Δ AEF EF = $\sin\alpha$ und AE = $\cos\alpha$

Da der Winkel bei E gleich β ist, wird im Δ ECF EC = $\sin\alpha \cos\beta$

und außerdem BE = $\sin\beta \cos\alpha$

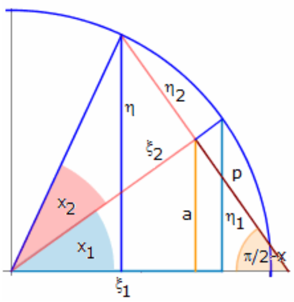
Mit dem Winkel $\alpha+\beta$ bei F gilt für die Strecke AD im Dreieck Δ AFD

AD = $\sin(\alpha+\beta)$

Da AD = BE + EC, ist das Additionstheorem gezeigt.

Außerdem gilt DF = AB - FC und DF = $\cos(\alpha+\beta)$; AB = $\cos\alpha \cos\beta$; FC = $\sin\alpha \sin\beta$. Somit folgt durch Streckensubtraktion das Theorem $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

Quelle: Stephan Hauschild, 2013



Additionstheorem (05)

Additionstheoreme für Tangens und Kotangens:

Es gilt $\tan(x + y) = (\tan x + \tan y) / (1 - \tan x \cdot \tan y)$

$\tan(x - y) = (\tan x - \tan y) / (1 + \tan x \cdot \tan y)$

$\cot(x + y) = (\cot x \cdot \cot y - 1) / (\cot x + \cot y)$

$\cot(x - y) = (\cot x \cdot \cot y + 1) / (\cot x - \cot y)$

$\tan x \pm \tan y = \sin(x \pm y) / (\cos x \cdot \cos y)$

$\cot x \pm \cot y = \pm \sin(x \pm y) / (\sin x \cdot \sin y)$

$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$

$1 + \cot^2 x = 1/\sin^2 x$

Nachweis: Da $\tan x = \sin x / \cos x$ gilt, wird

$\tan(x+y) = \sin(x+y) / \cos(x+y) = (\sin x \cos y + \sin y \cos x) / (\cos x \cos y - \sin x \sin y) =$

$= (\sin x/\cos x \cdot \cos y/\cos y + \sin y/\cos y \cdot \cos x/\cos x) / (1 - \sin x/\cos x \cdot \sin y/\cos y) =$

$= (\tan x + \tan y) (1 - \tan x \tan y) \cot(x+y) =$

$= 1 / \tan(x+y) = (1 - \tan x \tan y) / (\tan x + \tan y) =$

$= (1 - 1/\cot x \cdot 1/\cot y) / (1 / \cot x + 1 / \cot y) = (\cot x \cot y - 1) / (\cot y + \cot x)$

Die Beziehungen für die Differenzen ergeben sich analog, die für den doppelten Winkel durch Einsetzen in die Formeln.

$\tan x + \tan y = \sin x / \cos x + \sin y / \cos y = (\sin x \cos y + \sin y \cos x) / (\cos x \cos y) =$

$= (\sin x + y) / (\cos x \cos y)$

$1 + \tan^2 x = 1 + \sin^2 x/\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) / \cos^2 x = 1 / \cos^2 x$

Additionstheoreme

Funktionen für drei verschiedene Winkel x, y und z

$\sin(x+y+z) = \sin x \cos y \cos z + \sin y \cos x \cos z + \sin z \cos x \cos y - \sin x \sin y \sin z$

$\cos(x+y+z) = \cos x \cos y \cos z - \cos x \sin y \sin z - \cos y \sin x \sin c - \cos z \sin x \sin y$

$\tan(x+y+z) = (\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z) / (1 - \tan x\ \mathrm{tany} - \tan x \tan z - \tan y\ \mathrm{tanz})$

$\cot(x+y+z) = (\cot x \cot y \cot z - \cot a - \cot y - \cot z) / (\cot x \cot y + \cot x \cot z + \cot y \cot z - 1)$

$\sec(x+y+z) = \sec x \sec y \sec z \csc x \csc y \csc z / (\csc x (\csc y \csc z - \sec y - \sec z) - \sec x (\csc z \sec y - \csc y \sec z))$

$\csc(x+y+z) = \sec x \sec y \sec z \csc x \csc y \csc z / (\csc x (\csc z \sec y + \csc y \sec z) + \sec x (\csc y \csc z - \sec y \sec z))$

Für den Fall $x+y+z = \pi/2$ (90°) gilt
$\sin x \cos y \cos z + \sin y \cos x \cos z + \sin z \cos x \cos y - \sin x \sin y \sin z = 1$
$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z + \sec x \sec y \sec z$
$\cot x + \cot y + \cot z = \cot x \cot y \cot z$
$\tan x \tan y + \tan x \tan z + \tan y \tan z = 1$

Für den Fall $x+y+z = \pi$ (180°) gilt
$\cos x \cos y \cos z - \cos x \sin y \sin z - \cos y \sin x \sin z - \cos z \sin x \sin y = 1$
$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z$
$\cot x + \cot y + \cot z = \cot x \cot y \cot z + \csc x \csc y \csc z$
$\cot x \cot y + \cot x \cot z + \cot y \, coz = 1$
$\tan x/2 \tan y/2 + \tan x/2 \tan z/2 + \tan y/2 \tan z/2 = 1$
$\cot x/2 + \cot y/2 + \cot z/2 = \cot x/2 \cot y/2 \cot z/2$

Summe und Differenz zweier Winkelfunktionen
$\sec x + \sec y = 2 \cos (x+y)/2 \cos (x-y)/2 / (\cos x \cos y)$
$\sec y - \sec x = 2 \sin (x-y)/2 \sin (x+y)/2 / (\cos x \cos y)$
$\csc x + \csc y = 2 \sin (x+y)/2 \cos (x-y)/2 / (\sin x \sin y)$
$\csc y - \csc x = 2 \sin (x-y)/2 \cos (x+y)/2 / (\sin x \sin y)$

Differenz der Quadrate der Funktion zweier Bogen
$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin (x-y) \sin (x+y)$
$\cos^2 y - \cos^2 x = \sin (x-y) \sin (x+y)$
$\cos^2 x - \sin^2 y = \cos (x-y) \cos (x+y)$
$\tan^2 x - \tan^2 y = \sin (x-y) \sin (x+y) / (\cos^2 x \cos^2 y)$
$\cot^2 y - \cot^2 x = \sin (x-y) \sin (x+y) / (\sin^2 x \sin^2 y)$
$\cot^2 x - \cot^2 y = \cos (x+y) \cos (x-y) / (\sin^2 x \cos^2 y)$
$\cot^2 y - \tan^2 x = \cos (x+y) \cos (x-y) / (\cos^2 x \sin^2 y)$
$\sec^2 x - \sec^2 y = \sin (x-y) \sin (x+y) / (\cos^2 x \cos^2 y)$
$\csc^2 x - \csc^2 y = \sin (x-y) \sin (x+y) / (\sin^2 x \sin^2 y)$

Summe und Differenz von Summen bzw. Differenz zweier Bogen
$\sin (x+y) + \sin (x-y) = 2 \sin x \cos y$
$\sin (x+y) - \sin (x-y) = 2 \cos x \sin y$
$\cos (x-y) + \cos (x+y) = 2 \cos x \cos y$
$\cos (x-y) - \cos (x+y) = 2 \sin x \sin y$
$\sin (x+y) + \cos (x-y) = (\sin x + \cos x) (\sin y + \cos y)$
$\sin (x+y) - \cos (x-y) = (\sin x - \cos x) (\sin y - \cos y)$
$\tan (x+y) + \tan (x-y) = 2 \cot x \sec^2 y / (\cot^2 x - \tan^2 y)$
$\tan (x+y) - \tan (x-y) = 2 \tan y \csc^2 x / (\cot^2 x - \tan^2 y)$
$\cot (x+y) + \cot (x-y) = 2 \tan x \sec^2 y / (\tan^2 x - \tan^2 y)$
$\cot (x+y) - \cot (x-y) = 2 \tan y \sec^2 x / (\tan^2 y - \tan^2 x)$
$\sec (x+y) + \sec (x-y) = 2 \csc^2 x \csc^2 y \sec x \sec y / (\csc^2 x \csc^2 y - \sec^2 x \sec^2 y)$
$\sec (x+y) - \sec (x-y) = 2 \csc x \csc y \sec^2 x \sec^2 y / (\csc^2 x \csc^2 y - \sec^2 x \sec^2 y)$

Summen und Differenzen gleicher Bögen

Ausdrücke für die Summen bzw. Differenzen trigonometrischer Funktionen desselben Bogens

$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin (45°+x) = \sqrt{2} \cos (45°-x) = \sqrt{(1 + \sin 2x)}$
$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin (45°-x) = \sqrt{2} \cos (45°+x) = \sqrt{(1 - \sin 2x)}$
$\tan x + \cot x = 2 / \sin 2x = 1 / (\sin x \cos x) = 2 \csc 2x = \sec x \csc x$
$\cot x - \tan x = 2 / \tan 2x = 2 \cot 2x$
$\tan x + \sec x = \cot (45°-x/2) = 1 / \tan (45°-x/2) = \tan (45°+x/2) = (1 + \sin x) / \cos x = 1 / (\sec x - \tan x)$
$\sec x - \tan x = \tan (45°-x/2) = \cot (45°+x/2) = (1 - \sin x) / \cos x = \cos \text{versus}\, x / \cos x = 1 / (\sec x + \tan x)$
$\cot x + \csc x = \cot x/2 = 1 / (\csc x - \cot x) = (1 + \cos x) / \sin x$
$\csc x - \cot x = \tan x/2 = 1 / (\csc x + \cot x) = (1 - \cos x) / \sin x$
$\sec x - \cos x = \tan x \sin x = (1 - \cos^2 x) / \cos x = \sin^2 x / \cos x$
$\csc x - \sin x = \cot x \cos x = (1 - \sin^2 x) / \sin x = \cos^2 x / \sin x$

Ausdrücke für die Summen bzw. Differenzen der Quadrate trigonometrischer Funktionen desselben Bogens
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 = \sec^2 x - \tan^2 x = \csc^2 x - \cot^2 x$
$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$
$\sec^2 x + \csc^2 x = 4 / \sin^2 2x = \sec^2 x / \sin^2 x = 1 / (\sin^2 x \cos^2 x) = (\tan x + \cot x)^2$
$\csc^2 x - \sec^2 x = 4 \cot 2 x \csc 2x$

$\cot x/2 - \cot x = 1 / \sin x = \csc x$
$\tan x/2 + \cot x = 1 / \sin x = \csc x$
$\cot x - 2 \cot 2x = \tan x$

Produkte und Quotienten der Funktionen von der Summe oder Differenz zweier Bogen
$\sin (x+y) \sin (x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x = \sin^2 x - \sin^2 y = (\cos 2y - \cos 2x)/2$
$\sin (x+y) \cos (x-y) = (\sin 2x + \sin 2y)/2$
$\sin (x-y) \cos (x+y) = (\sin 2x - \sin 2y)/2$
$\cos (x+y) \cos (x-y) = \cos^2 y - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 y = (\cos 2y + \sin 2x)/2$
$\sin (x+y) / \sin (x-y) = (\tan x + \tan y) / (\tan x - \tan y) = (1 + \tan y \cot x) / (1 - \tan y \cos x)$
$\sin (x+y) / \cos (x-y) = (\tan x + \tan y) / (1 + \tan x \tan y) = (1 + \tan y \cot x) / (\cot x + \tan y)$
$\cos (x+y) / \cos (x-y) = (1 - \tan x \tan y) / (1 + \tan x \tan y) = (\cot x - \tan y) / (\cot x + \tan y)$

$\tan (x+y) \tan (x-y) = (\cos^2 y - \cos^2 x) / (\cos^2 y - \sin^2 x)$
$\tan (x+y) \cot (x-y) = (\sin 2x + \sin 2y) / (\sin 2x - \sin 2y)$
$\cot (x+y) \cot (x-y) = (\cos^2 y - \sin^2 x) / (\cos^2 y - \cos^2 x)$
$\tan (x+y) / \tan (x-y) = (\sin 2x + \sin 2y) / (\sin 2x - \sin 2y)$
$\cot (x+y) / \cot (x-y) = (\sin 2x - \sin 2y) / (\sin 2x + \sin 2y)$

$\sin (x+y) \sin (x-y) + \cos (x+y) \cos (x-y) = 1 - 2 \sin^2 y = \cos 2y$
$\sin (x+y) \sin (x-y) - \cos (x+y) \cos (x-y) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

Produkte der Summe oder Differenz von Sinus oder Kosinus zweier Bogen
$(\sin x + \sin y) (\sin x - \sin y) = \sin (x+y) \sin (x-y) = (\cos 2y - \cos 2x) / 2$
$(\sin x + \cos y) (\cos y - \sin x) = \cos (x+y) \cos (x-y)$
$(\cos x + \cos y) (\cos y - \cos x) = \sin (x+y) \sin (x-y) = (\cos 2y - \cos 2x) / 2$
$(\sin x + \sin y) (\cos x + \cos y) = 2 \sin (x+y) \cos^2 (x-y)/2$
$(\sin x + \sin y) (\cos y - \cos x) = \sin^2 (x+y)/2 \sin (x-y)$
$(\sin x - \sin y) (\cos x + \cos y) = 2 \sin (x-y) \cos^2 (x+y)/2$
$(\sin x - \sin y) (\cos y - \cos x) = 2 \sin (x+y) \sin^2 (x-y)/2$
$(\sin x + \cos y) (\sin y + \cos x) = (1 + \sin (x+y)) \cos (x-y)$
$(\sin x + \cos y) (\sin y - \cos x) = (1 + \sin (x-y)) \cos (x+y)$

Quotienten der Summe oder Differenz der Funktionen zweier Bogen
$(\sin x + \sin y) / (\sin x - \sin y) = \tan ((x+y)/2) \cot ((x-y)/2)$
$(\cos x + \cos y) / (\cos y - \cos x) = \cot ((x+y)/2) \cot ((x-y)/2)$
$(\cos y - \cos x) / (\cos x + \cos y) = \tan ((x+y)/2) \tan ((x-y)/2)$
$(\sin x + \sin y) / (\cos x + \cos y) = \tan ((x+y)/2) = (\cos y - \cos x) / (\sin x - \sin y)$
$(\cos y - \cos x) / (\sin x + \sin y) = \tan ((x-y)/2) = (\sin x - \sin y) / (\cos x + \cos y)$
$(\cos x + \cos y) / (\sin x + \sin y) = \cot ((x+y)/2) = (\sin x - \sin y) / (\cos y - \cos x)$
$(\sin x + \sin y) / (\cos y - \cos x) = \cot ((x-y)/2) = (\cos x + \cos y) / (\sin x - \sin y)$
$(\sin x + \cos y) / (\sin y + \cos x) = (\cos ((x-y)/2) + \sin ((x-y)/2) / (\cos ((x-y)/2) - \sin ((x-y)/2))$
$(\sin x + \cos y) / (\sin y - \cos x) = (\sin ((x+y)/2) + \cos ((x+y)/2) / (\sin ((x+y)/2) - \cos ((x+y)/2))$

$(\tan x + \tan y) / (\tan x - \tan y) = \sin (x+y) / \sin (x-y) = (\cot x + \cot y) / (\cot y - \cot x)$
$(\cot x - \tan y) / (\cot x + \tan y) = \cos (x+y) / \cos (x-y) = (1 - \tan x \tan y) / (1 + \tan x \tan y)$
$(\tan x + \tan y) / (\cot x + \cot y) = \sin x \sin y / (\cos x \cos y) = \tan x \tan y$
$(\tan x - \tan y) / (\cot y - \cot x) = \sin x \sin y / (\cos x \cos y) = \tan x \tan y$
$(\cot x + \tan y) / (\cot y + \tan x) = \cot x \tan y = (\cot x - \tan y) / (\cot y - \tan x)$
$(\tan x + \tan y) / (\cot x - \tan y) = \tan x \tan (x+y)$
$(\tan x + \tan y) / (\cot x - \cot y) = \tan x \tan y$
$(\cot x + \cot y) / (\cot x - \tan x) = \cot y \tan (x+y)$
$(\tan x - \tan y) / (\cot x + \tan y) = \tan x \tan (x-y)$
$(\cot x - \cot y) / (\cot x + \tan y) = \cot y \tan (x-y)$
$(\tan x + \tan y) / (\cot y - \tan x) = \tan y \tan (x+y)$
$(\tan x - \tan y) / (\cot y + \tan x) = \tan y \tan (x-y)$
$(\cot y + \cot x) / (\cot y - \tan x) = \cot x \tan (x+y)$
$(\cot y - \cot x) / (\cot y + \tan x) = \cot x \tan (x-y)$
$(\cot x - \tan y) / (\tan x + \tan y) = \cot x \cot (x+y)$
$(\cot x + \tan y) / (\tan x - \tan y) = \cot x \cot (x-y)$
$(\cot y - \tan x) / (\cot y + \cot x) = \tan x \cot (x+y)$
$(\cot y + \tan x) / (\cot y - \cot x) = \tan x \cot (x-y)$

Quotienten der Summe oder Differenz der Funktionen zweier Bogen
$(\cot y - \tan x) / (\tan x + \tan y) = \cot y \cot (x+y)$
$(\cot y + \tan x) / (\tan x - \tan y) = \cot y \cot (x-y)$

$(\cot x - \tan y) / (\cot x + \cot y) = \tan y \cot (x+y)$
$(\cot x + \tan y) / (\cot y - \cot x) = \tan y \cot (x-y)$
$(\tan x + \tan y) / (\cot x + \tan y) = \tan x \sin (x+y) / \cos (x-y)$
$(\tan x - \tan y) / (\cot x - \tan y) = \tan x \sin (x-y) / \cos (x+y)$
$(\tan x - \tan y) / (\cot y - \tan x) = \tan y \sin (x-y) / \cos (x+y)$
$(\cot y + \cot x) / (\cot y + \tan x) = \cot x \sin (x+y) / \cos (x-y)$
$(\cot y - \cot x) / (\cot x - \tan y) = \cot y \sin (x-y) / \cos (x+y)$
$(\sec x + \sec y) / (\sec x - \sec y) = \cot ((x+y)/2) \cot ((x-y)/2)$
$(\sec x + \sec y) / (\csc x + \csc y) = \cot ((x+y)/2) \tan x \tan y$
$(\sec x + \sec y) / (\csc x - \csc y) = -\cot ((x-y)/2) \tan x \tan y$
$(\csc x + \csc y) / (\csc x - \csc y) = -\tan ((x+y)/2) \cot ((x-y)/2)$

Produkte aus den Quotienten der Summen oder Differenzen der Sinus zweier Bogen
$(\sin x + \sin y)/(\sin x - \sin y) \cdot (\sin x + \sin y)/(\cos x + \cos y) = \tan^2 ((x+y)/2) \cot ((x-y)/2)$
$(\sin x + \sin y)/(\sin x - \sin y) \cdot (\sin x + \sin y)/(\cos y - \cos x) = \tan ((x+y)/2) \cot^2 ((x-y)/2)$
$(\sin x + \sin y)/(\sin x - \sin y) \cdot (\cos x + \cos y)/(\cos y - \cos x) = \cot^2 ((x-y)/2)$
$(\sin x + \sin y)^2 / (\cos^2 y - \cos^2 x) = \tan ((x+y)/2) \cot ((x-y)/2)$
$(\sin^2 x - \sin^2 y) / (\cos x + \cos y)^2 = \tan ((x+y)/2) \tan ((x-y)/2)$
$(\sin x - \sin y)^2 / (\cos^2 y - \cos^2 x) = 1$

Produkte und Quotienten der Summe oder Differenz der Funktionen von der Summe oder Differenz zweier Bogen
$(\sin (x+y) + \sin (x-y)) \cdot (\sin (x+y) - \sin (x-y)) = \sin 2x \sin 2y$
$(\sin (x+y) + \sin (x-y)) \cdot (\cos (x+y) + \cos (x-y)) = 2 \sin 2x \cos^2 y$
$(\sin (x+y) + \sin (x-y)) \cdot (\cos (x-y) - \cos (x+y)) = 2 \sin^2 x \sin 2y$
$(\sin (x+y) - \sin (x-y)) \cdot (\cos (x+y) + \cos (x-y)) = 2 \sin 2y \cos^2 x$
$(\sin (x+y) - \sin (x-y)) \cdot (\cos (x-y) - \cos (x+y)) = 2 \sin 2x \sin^2 y$
$(\sin (x+y) + \cos (x-y)) \cdot (\sin (x-y) + \cos (x+y)) = -\cos 2y (1 + \sin 2x)$
$(\sin (x+y) + \cos (x-y)) \cdot (\sin (x-y) - \cos (x+y)) = \cos 2x (1 + \sin 2y)$
$(\cos (x+y) + \cos (x-y)) \cdot (\cos (x-y) - \cos (x+y)) = \sin 2x \sin 2y$

$(\sin (x+y) + \sin (x-y)) / (\sin (x+y) - \sin (x-y)) = \tan x \cot y$
$(\sin (x+y) - \sin (x-y)) / (\sin (x+y) + \sin (x-y)) = \cot x \tan y$
$(\cos (x+y) + \cos (x-y)) / (\cos (x-y) - \cos (x+y)) = \cot x \cot y$
$(\cos (x-y) - \cos (x+y)) / (\cos (x-y) + \cos (x+y)) = \tan x \tan y$
$(\sin (x+y) + \sin (x-y)) / (\cos (x+y) + \cos (x-y)) = \tan x$
$(\sin (x+y) + \sin (x-y)) / (\cos (x-y) - \cos (x+y)) = \cot y$
$(\sin (x+y) - \sin (x-y)) / (\cos (x+y) + \cos (x-y)) = \tan y$
$(\sin (x+y) - \sin (x-y)) / (\cos (x-y) - \cos (x+y)) = \cot x$

$(\sin (x+y) + \cos (x-y)) / (\sin (x-y) + \cos (x+y)) = (\cot y + \sin y) / (\cos y - \sin y)$
$(\sin (x+y) + \cos (x-y)) / (\sin (x-y) - \cos (x+y)) = (\sin x + \cos x) / (\sin x - \cos x)$
$(\tan (x+y) + \tan (x-y)) / (\tan (x+y) - \tan (x-y)) = \sin 2x / \sin 2y$
$(\tan (x+y) + \tan (x-y)) / (\cot (x+y) + \cot (x-y)) = \tan (x+y) \tan (x-y)$
$(\tan (x+y) + \tan (x-y)) / (\cot (x+y) - \cot (x-y)) = \sin x \cos x \tan (x+y) \tan (y-x) / (\sin y \cos y)$
$(\cot (x+y) + \cot (x-y)) / (\cot (x+y) - \cot (x-y)) = -\sin 2x / \sin 2y$
$(\sec (x+y) + \sec (x-y)) / (\sec (x+y) - \sec (x-y)) = \cot x \cot y$
$(\sec (x+y) + \sec (x-y)) / (\csc (x+y) + \csc (x-y)) = \cot x \tan (x+y) \tan (x-y)$
$(\sec (x+y) + \sec (x-y)) / (\csc (x+y) - \csc (x-y)) = -\cot y \tan (x+y) \tan (x-y)$
$(\csc (x+y) + \csc (x-y)) / (\csc (x+y) - \csc (x-y)) = -\tan x \cot y$

Produkte und Quotienten der Summe oder Differenz der Funktionen von der Summe oder Differenz zweier Bogen
$(\sin(x+y) + \sin(x-y))/(\sin(x+y) - \sin(x-y)) \cdot (\sin(x+y) + \sin(x-y))/(\cos(x+y) + \cos(x-y)) = \tan^2 x \cot y$
$(\sin(x+y) + \sin(x-y))/(\sin(x+y) - \sin(x-y)) \cdot (\sin(x+y) + \sin(x-y))/(\cos(x-y) - \cos(x+y)) = \tan x \cot^2 y$
$(\sin(x+y) + \sin(x-y))/(\sin(x+y) - \sin(x-y)) \cdot (\cos(x+y) + \cos(x-y))/(\cos(x-y) - \cos(x+y)) = \cot^2 y$
$(\sin(x+y) + \sin(x-y))^2 / (\cos^2(x-y) - \cos^2(x+y)) = \tan x \cot y = \tan x / \tan y$
$(\sin^2(x+y) - \sin^2(x-y)) / (\cos(x+y) + \cos(x-y))^2 = \tan x \tan y$
$(\sin^2(x+y) - \sin^2(x-y)) / (\cos^2(x-y) - \cos^2(x+y)) = 1$

Quotienten von Sinus und Kosinus der Summe zweier Bogen, dividiert durch das Produkt

$\sin (x+y) / (\cos x \cos y) = \tan x + \tan y$	$\sin (x+y) / (\sin x \sin y) = \cot x + \cot y$
$\sin (x-y) / (\cos x \cos y) = \tan x - \tan y$	$\sin (x-y) / (\sin x \sin y) = \cot x - \cot y$
$\sin (x+y) / (\sin x \cos y) = 1 + \tan y \cot x$	$\sin (x+y) / (\cos x \sin y) = 1 + \tan x \cot y$
$\sin (x-y) / (\sin x \cos y) = 1 - \tan y \cot x$	$\sin (x-y) / (\cos x \sin y) = \tan x \cot y - 1$
$\cos (x+y) / (\cos x \cos y) = 1 - \tan x \tan y$	$\cos (x+y) / (\sin x \sin y) = \cot x \cot y - 1$

$\cos(x-y) / (\cos x \cos y) = 1 + \tan x \tan y$ $\cos(x-y) / (\sin x \sin y) = \cot x \cot y + 1$
$\cos(x+y) / (\sin x \cos y) = \cot x - \tan y$ $\cos(x+y) / (\cos x \sin y) = \cot y - \tan x$
$\cos(x-y) / (\sin x \cos y) = \cot x + \tan y$ $\cos(x-y) / (\cos x \sin y) = \cot y + \tan x$

Summe oder Differenz der Tangenten von der halben Summe oder Differenz zweier Bögen
$\tan(x+y)/2 + \tan(x-y)/2 = 2 \sin x / (\cos x + \cos y)$
$\tan(x+y)/2 - \tan(x-y)/2 = 2 \sin y / (\cos x + \cos y)$
$\cot(x-y)/2 + \cot(x+y)/2 = 2 \sin x / (\cos y - \cos a)$
$\cot(x-y)/2 - \cot(x+y)/2 = 2 \sin y / (\cos y - \cos a)$

Produkte und Quotienten gleicher Bögen

Ausdrücke für die Produkte bzw. Quotienten trigonometrischer Funktionen desselben Bogens
$\sin x \sin x = (1 - \cos 2x) / 2$ $\sin x \cos x = \sin 2x / 2$
$\sin x \tan x = \sec x - \cos x = 1 / (\cot x \csc x) = \tan x / \csc x$
$\sin x \cot x = \cos x$ $\sin x \cot x = \tan x$
$\cos x \cos x = (1 + \cos 2x) / 2$ $\cos x \tan x = \sin x$
$\cos x \cot x = \csc x - \sin x = (1 - \sin^2 x) / \sin x = \cos^2 x / \sin x$
$\cos x \csc x = \cot x$ $\cos x \sec x = 1$
$\tan x \tan x = (1 - \cos 2x) / (1 + \cos 2x)$ $\tan x \cot x = 1$
$\tan x \sec x = 1 / (\csc x - \sin x) = \tan x / \cos x = \sec x / \cot x$
$\tan x \csc x = 1 / \cos x = \sec x \cot x \cot x = (1 + \cos 2x) / (1 - \cos 2x)$
$\cot x \sec x = \csc x$ $\sec x \csc x = 2 / \sin 2x$
$\cot x \csc x = \csc x / \tan x = 1 / (\sin x \tan x) = 1 / (\sec x - \cos x)$

$\sin x / \cos x = \tan x$ $\sin x / \tan x = \cos x$
$\sin x / \cot x = \sin x \tan x = \sec x - \cos x = 1 / (\cot x \csc x)$
$\sin x / \sec x = \sin x \cos x = \sin 2x / 2$ $\sin x / \csc x = \sin^2 x$
$\cos x / \sin x = \cot x = 1 / \tan x$ $\cos x / \sin x = 1 / \csc x = \sin x$
$\cos x / \tan x = \cos x \cot x = \csc x - \sin x = (1 - \sin^2 x) / \sin x = \cos^2 x / \sin x$
$\cos x / \sec x = 1 / \sec^2 x = \cos^2 x$ $\cos x / \csc x = \sin 2x / 2$
$\tan x / \sin x = \sec x = 1 / \cos x$ $\tan x / \cot x = \tan^2 x$
$\tan x / \cos x = 1 / (\cot x \cos x) = 1 / (\csc x - \sin x) = \sin x / (1 - \sin^2 x) = \sin x / \cos^2 x$
$\tan x / \sec x = \tan x \cos x = \sin x$ $\tan x / \csc x = \tan x \sin x = \sec x - \cos x$
$\cot x / \sec x = \cos x \cot x = \csc x - \sin x = \cos x \cot x = (1 - \sin^2 x) / \sin x$
$\sec x / \csc x = 1 / (\csc x \cos x) = \sin x / \cos x = \tan x$

Auflösung doppelter Winkel

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \tan x / (1 + \tan^2 x) = 2 \sin x \sqrt{(1 - \sin^2 x)} = 2 \cos x \sqrt{(1 - \cos^2 x)} =$
$= 2 \cot x /(1+\cot^2 x) = 2 \sin^2 x / \tan x = 2 \cos^2 x / \cot x = 2/(\tan x + \cot x) = 2 \sin x / \sec x =$
$= 2 \tan x / \sec^2 x = 2 \cot x / \csc^2 x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = (1-\tan^2 x)/(1+\tan^2 x) = (\cot^2 x - 1) / (\cot^2 x + 1) =$
$= (2 - \sec^2 x) / \sec^2 x = (\csc^2 x - 2) / \csc^2 x = (\cot x - \tan x) / (\cot x + \tan x)$
$\tan 2x = 2 \tan x/(1 - \tan^2 x) = 2 / (\cot x - \tan x) = 2 \cot x / (\cot^2 x - 1) = 2 \sin x \cos x / (1 - 2 \sin^2 x) =$
$= 2 \tan x / (2 - \sec^2 x) = 2 \cot x / (\csc^2 x - 2)$
$\cot 2x = (\cot^2 x - 1) / (2 \cot x) = (\cot x - \tan x)/2 = (1 - \tan^2 x) / (2 \tan x)$
$= (1 - 2 \sin^2 x) / (2 \sin x \cos x) = (2 - \sec^2 x) / (2 \tan x) = (\csc^2 x - 2) / (2 \cot x)$
$\sec 2x = \sec^2 x / (2 - \sec^2 x) = 1 / (1 - 2 \sin^2 x) = 1 / (2 \cos^2 x - 1) = (1 + \tan^2 x) / (1 - \tan^2 x) =$
$= (\cot^2 x + 1) / (\cot^2 x - 1) = \sec^2 x / (2 - \sec^2 x) = \csc^2 x / (\csc^2 x - 2)$
$= (\cot x + \tan x) / (\cot x - \tan x) = \sec^2 x \csc^2 x / (\csc^2 x - \sec^2 x)$
$= 1/2 (\tan(45°+x) + \tan(45°-x))$
$\csc 2x = 1/2 \sec x \csc x = \csc^2 x /(2 \sqrt{(\csc^2 x - 1)}) = (1 + \tan^2 x) / (2 \tan x) = (1 + \cot^2 x) / (2 \cot x) =$
$= 1/(2 \sin x \cos x) = \sec x /(2 \sin x) = \csc x / (2 \cos x) = (\tan x + \cot x) / 2 = \sec^2 x / (2 \tan x)$

Partialbruchzerlegung

$\cos(\pi x) / \sin(\pi x) = 1/x + \Sigma_{k=1}^{\infty} (1/(x-k) + 1/(x+k))$

Auflösung vielfacher Winkel des Sinus

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\sin 3x = 2 \sin x \cos 2x + \sin x = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = (4 \cos^2 x - 1) \sin x$
$\sin 4x = 2 \sin x \cos 3x + \sin 2x = \sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x = 8 \cos^3 x \cdot \sin x - 4 \cos x \cdot \sin x = (4 \sin x - 8 \sin^3 x) \cos x$
$\sin 5x = 2 \sin x \cos 4x + \sin 3x = \sin x \cos 4x + \cos x \sin 4x = 16 \sin x \cos^4 x - 12 \sin x \cos^2 x + \sin x$
$= 5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x$
$\sin 6x = 2 \sin x \cos 5x + \sin 4x = \sin x \cos 5x + \cos x \sin 5x = (6 \sin x - 32 \sin^3 x + 32 \sin^5 x) \cos x = (32 \cos^5 - 32 \cos^3 x + 6 \cos x) \sin x$
$\sin 7x = 2 \sin x \cos 6x + \sin 5x = \sin x \cos 6x + \cos x \sin 6x = 7 \sin x - 56 \sin^3 x + 112 \sin^5 x - 64 \sin^7 x = (64 \cos^6 x - 80 \cos^4 x + 24 \cos^2 x - 1) \sin x$

$\sin 8x = 2 \sin x \cos 7x + \sin 6x = \sin x \cos 7x + \cos x \sin 7x = (8 \sin x - 80 \sin^3 x + 192 \sin^5 x - 128 \sin^7 x) \cos x$

$\sin 9x = 2 \sin x \cos 8x + \sin 7x = \sin x \cos 8x + \cos x \sin 8x = 9 \sin x - 120 \sin^3 x + 432 \sin^5 x - 576 \sin^7 x + 256 \sin^9 x$

$\sin 10x = 2 \sin x \cos 9x + \sin 8x = \sin x \cos 9x + \cos x \sin 9x = (10 \sin x - 160 \sin^3 x + 672 \sin^5 x - 7168 \sin^7 x + 3584 \sin^9 x) \cos x$

$\sin nx = 2 \sin x \cos (n-1)x + \sin (n-2)x = n \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x + \binom{n}{4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - + \ldots$

Auflösung vielfacher Winkel des Kosinus

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \sin (\pi/4-x) \sin (\pi/4+x) = 2 \cos (\pi/4+x) \cos (\pi/4-x)$

$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = (1 - 4 \sin^2 x) \cos x = 1 - 9/2 \sin^2 x + 15/8 \sin^4 x + 7/16 \sin^6 x + 27/128 \sin^8 x + \ldots = 2 \cos x \cos 2x - \cos x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x - 2 \sin x \sin 2x$
$= 4 \sin (\pi/6-x) \sin (\pi/6+x) \sin (\pi/2-x) = 4 \cos (\pi/3+x) \cos (\pi/3-x) \cos x$

$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x +1 = 2 \cos x \cos 3x - \cos 2x = \cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x = \cos 2x - 2 \sin x \sin 3x = 8 \sin (\pi/8-x) \sin (\pi/8+x) \sin (3\pi/8-x) \sin (3\pi/8+x)$

$\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x = (1 - 12 \sin^2 x + 16 \sin^4 x) \cos x = 1 - 25/2 \sin^2 x + 175/8 \sin^4 x - 105/16 \sin^6 x - 164/128 \sin^8 x + \ldots = 2 \cos x \cos 4x - \cos 3x = \cos x \cos 4x - \sin x \sin 4x$
$= \cos 3x - 2 \sin x \sin 4x = 16 \sin (\pi/10-x) \sin (\pi/10+x) \sin (3\pi/10-x) \sin (3\pi/10+x) \sin (\pi/2-x)$

$\cos 6x = 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1 = 1 - 18 \sin^2 x + 48 \sin^4 x - 32 \sin^6 x = 2 \cos x \cos 5x - \cos 4x = \cos x \cos 5x - \sin x \sin 5x = \cos 4x - 2 \sin x \sin 5x = 32 \sin (\pi/12-x) \sin (\pi/12+x) \sin (\pi/4-x) \sin (\pi/4+x) \sin (5\pi/12-x) \sin (5\pi/12+x)$

$\cos 7x = 64 \cos^7 x - 112 \cos^5 x + 56 \cos^2 x - 7 \cos x = (1 - 24 \sin^2 x + 80 \sin^4 x - 64 \sin^6 x) \cos x = 2 \cos x \cos 6x - \cos 5x = \cos x \cos 6x - \sin x \sin 6x = \cos 5x - 2 \sin x \sin 6x = 64 \sin (\pi/14-x) \sin (\pi/14+x) \sin (3\pi/14-x) \sin (3\pi/14+x) \sin (5\pi/14-x) \sin (5\pi/14+x) \sin (6\pi/14-x)$

$\cos 8x = 128 \cos^8 x - 256 \cos^6 x + 160 \cos^4 x - 32 \cos^2 x + 1 = 1 - 32 \sin^2 x + 160 \sin^4 x - 256 \sin^6 x + 128 \sin^8 x = 2 \cos x \cos 7x - \cos 6x = \cos x \cos 7x - \sin x \sin 7x = \cos 6x - 2 \sin x \sin 7x = 128 \sin (\pi/16-x) \sin (\pi/16+x) \sin (3\pi/16-x) \sin (3\pi/16+x) \sin (5\pi/16-x) \sin (5\pi/16+x) \sin (7\pi/16-x) \sin (7\pi/16+x)$

$\cos 9x = 256 \cos^9 x - 576 \cos^7 x + 432 \cos^5 x - 120 \cos^3 x + 9 \cos x = (1 - 40 \sin^2 x + 240 \sin^4 x - 448 \sin^6 x + 256 \sin^8 x) \cos x = 2 \cos x \cos 8x - \cos 7x = \cos x \cos 8x - \sin x \sin 8x = \cos 7x - 2 \sin x \sin 8x = 256 \sin (\pi/18-x) \sin (\pi/18+x) \sin (\pi/6-x) \sin (\pi/6+x) \sin (5\pi/18-x) \sin (5\pi/18+x) \sin (7\pi/18-x) \sin (7\pi/18+x) \sin (\pi/2-x)$

$\cos 10x = 512 \cos^{10} x + 1280 \cos^8 x + 1120 \cos^6 x - 400 \cos^4 x + 50 \cos^2 x - 1 = 1 - 50 \sin^2 x + 400 \sin^4 x - 1120 \sin^6 x + 1280 \sin^8 x - 512 \sin^{10} x = 2 \cos x \cos 9x - \cos 8x = \cos x \cos 9x - \sin x \sin 9x = \cos 8x - 2 \sin x \sin 9x = 512 \sin (\pi/20-x) \sin (\pi/20+x) \sin (3\pi/20-x) \sin (3\pi/20+x) \sin (\pi/4-x) \sin (\pi/4+x) \sin (7\pi/20-x) \sin (7\pi/20+x) \sin (9\pi/20-x) \sin (9\pi/20+x)$

$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \sin^2 x \cos^{n-2} x + \binom{n}{5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - + \ldots$

$\cos nx = 2 \cos x \cos ((n-1) x) - \cos ((n-2) x) = -2 \sin x \sin ((n-1) x) + \cos ((n-2) x)$

Auflösung vielfacher Winkel des Tangens

$\tan 2x = 2 \tan x / (1 - \tan^2 x) = 2 \cot x / (\cot^2 x - 1)$

$\tan 3x = (3 \tan x - \tan^3 x) / (1 - 3 \tan^2 x) = (3 \cot^2 x - 1) / (\cot^3 x - 3 \cot x)$

$\tan 4x = (4 \tan x - 4 \tan^3 x) / (1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x) = (4 \cot^3 x - 4 \cot x) / (\cot^4 x - 6 \cot^2 x + 1)$

$\tan 5x = (5 \tan x - 10 \tan^3 x + \tan^5 x) / (1 - 10 \tan^2 x + 5 \tan^4 x) = (5 \cot^4 x - 10 \cot^2 x + 1) / (\cot^5 x - 10 \cot^3 x + 5 \cot x)$

$\tan 6x = (6 \tan x - 20 \tan^3 x + 6 \tan^5 x) / (1 - 15 \tan^2 x + 15 \tan^4 x - \tan^6 x) = (6 \cot^5 x + 20 \cot^3 x + 6 \cot x) / (\cot^6 x - 15 \cot^4 x + 15 \cot^2 x - 1)$

$\tan 7x = (7 \tan x - 35 \tan^3 x + 21 \tan^5 x - \tan^7 x) / (1 - 21 \tan^2 x + 35 \tan^4 x - 7 \tan^6 x) = (7 \cot^6 x - 35 \cot^4 x + 21 \cot^2 x - 1) / (\cot^7 x - 21 \cot^5 x + 35 \cot^3 x - 7 \cot x)$

$\tan 8x = (8 \tan x - 56 \tan^3 x + 56 \tan^5 x - 8 \tan^7 x) / (1 - 28 \tan^2 x + 70 \tan^4 x - 28 \tan^6 x + \tan^8 x) = (8 \cot^7 x - 56 \cot^5 x + 56 \cot^3 x - 8 \cot x) / (\cot^8 x - 28 \cot^6 x + 70 \cot^4 - 28 \cot^2 x + 1)$

$\tan 9x = (9 \tan x - 84 \tan^3 x + 126 \tan^5 x - 36 \tan^7 x + \tan^9 x) / (1 - 36 \tan^2 x + 126 \tan^4 x - 84 \tan^6 x + 9 \tan^8 x) = (9 \cot^8 x - 84 \cot^6 x + 126 \cot^4 x - 36 \cot^2 x + 1) / (\cot^9 x - 36 \cot^7 x + 126 \cot^5 - 84 \cot^3 x + 9 \cot x)$

$\tan 10x = (10 \tan x - 120 \tan^3 x + 252 \tan^5 x - 120 \tan^7 x + 10 \tan^9 x) / (1 - 45 \tan^2 x + 210 \tan^4 x - 210 \tan^6 x + 45 \tan^8 x - \tan^{10} x) = (10 \cot^9 x - 12 \cot^7 x + 252 \cot^5 x - 120 \cot^3 x + 10 \cot x) / (\cot^{10} x - 45 \cot^8 x + 210 \cot^6 - 210 \cot^4 x + 45 \cot^2 x - 1)$

Auflösung vielfacher Winkel des Kotangens

$\cot 2x = (1 - \tan^2 x) / (2 \tan x) = (\cot^2 x - 1) / (2 \cot x)$

$\cot 3x = (-3 \cot x + \cot^3 x) / (3 \cot^2 x - 1) = (1 - 3 \tan^2 x) / (3 \tan x - \tan^3 x)$

$\cot 4x = (1 - 6 \cot^2 x + \cot^4 x) / (-4 \cot x + 4 \tan^3 x) = (1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x) / (4 \tan x - 4 \tan^3 x)$

$\cot 5x = (1 - 10 \tan^2 x + 5 \tan^4 x) / (5 \tan x - 10 \tan^3 x + \tan^5 x) = (\cot^5 x - 10 \cot^3 x + 5 \cot x) / (5 \cot^4 x - 10 \cot^2 x + 1)$

$\cot 6x = (1 - 15 \tan^2 x + 15 \tan^4 x - \tan^6 x) / (6 \tan x - 20 \tan^3 x + 6 \tan^5 x) = (\cot^6 x - 15 \cot^4 x + 15 \cot^2 x - 1) / (6 \cot^5 x - 20 \cot^3 x + 6 \cot x)$

$\cot 7x = (1 - 21 \tan^2 x + 35 \tan^4 x - 7 \tan^6 x) / (7 \tan x - 35 \tan^3 x + 21 \tan^5 x - \tan^7 x) = (\cot^7 x - 21 \cot^5 x + 35 \cot^3 x - 7 \cot x) / (7 \cot^6 x - 35 \cot^4 x + 21 \cot^2 x - 1)$

$\cot 8x = (1 - 28 \tan^2 x + 70 \tan^4 x - 28 \tan^6 x - \tan^8 x) / (8 \tan x - 56 \tan^3 x + 56 \tan^5 x - 8 \tan^7 x) = (\cot^8 x - 28 \cot^6 x + 70 \cot^4 x - 28 \cot^2 x + 1) / (8 \cot^7 x - 56 \cot^5 x + 56 \cot^3 x - 8 \cot x)$

$\cot 9x = (1 - 36 \tan^2 x - 126 \tan^4 x - 84 \tan^6 x + 9 \tan^8 x) / (9 \tan x - 84 \tan^3 x + 126 \tan^5 x - 36 \tan^7 x + \tan^9 x) = (\cot^9 x - 36 \cot^7 x + 126 \cot^5 x - 84 \cot^3 x + 9 \cot x) / (9 \cot^8 x - 84 \cot^6 x + 126 \cot^4 x - 36 \cot^2 x + 1)$

$\cot 10x = (1 - 45 \tan^2 x + 210 \tan^4 x - 210 \tan^6 x + 45 \tan^8 x - \tan^{10} x) / (10 \tan x - 120 \tan^3 x + 252 \tan^5 x - 120 \tan^7 x + 10 \tan^9 x) = (\cot^{10} x - 45 \cot^8 x + 210 \cot^6 x - 210 \cot^4 x + 45 \cot^2 x - 1) / (10 \cot^9 x - 120 \cot^7 x + 252 \cot^5 x - 120 \cot^3 x + 10 \cot x)$

Auflösung vielfacher Winkel des Sekans

$\sec nx = \sec^n x / (2^{n-1} - n/1\ 2^{n-3} \sec^2 x + n\cdot(n-3) / (1\cdot 2)\ 2^{n-5} \sec^4 x - n\cdot(n-4)\cdot(n-5) / (1\cdot 2\cdot 3)\ 2^{n-7} \sec^5 x + n\cdot(n-5)\cdot(n-6)\cdot(n-7) / (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\ 2^{n-9} \sec^6 x -+ \ldots)$

$\sec 2x = \sec^2 x / (2 - \sec^2 x)$

$\sec 3x = \sec^3 x / (4 - 3 \sec^2 x)$

$\sec 4x = \sec^4 x / (4 - 8 \sec^2 x + \sec^4 x)$

$\sec 5x = \sec^5 x / (16 - 20 \sec^2 x + 5 \sec^4 x)$

$\sec 6x = \sec^6 x / (32 - 48 \sec^2 x + 18 \sec^4 x - \sec^6 x)$

$\sec 7x = \sec^7 x / (64 - 112 \sec^2 x + 56 \sec^4 x - 7 \sec^6 x)$

$\sec 8x = \sec^8 x / (128 - 256 \sec^2 x + 160 \sec^4 x - 32 \sec^6 x + \sec^8 x)$

$\sec 9x = \sec^9 x / (256 - 576 \sec^2 x + 432 \sec^4 x - 120 \sec^6 x + 9 \sec^8 x)$

$\sec 10x = \sec^{10} x / (512 - 1280 \sec^2 x + 1120 \sec^4 x - 400 \sec^6 x + 50 \sec^8 x - \sec^{10} x)$

Auflösung vielfacher Winkel des Kosekans

wenn n eine ungerade Zahl ist

$\csc nx = \csc^n x / (n/1 \csc^{n-1} x - n\cdot(n^2-1) / (1\cdot 2\cdot 3) \csc^{n-3} x + n\cdot(n^2-1)\cdot(n^2-3^2) / (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5) \csc^{n-5} x + n\cdot(n^2-1)\cdot(n^2-3^2)\cdot(n^2-5^2) / (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7) \csc^{n-7} x +- \ldots)$

wenn n eine gerade Zahl ist

$\csc nx = \csc^n x / ((n/1 \csc^{n-2} x - n\cdot(n^2-2^2) / (1\cdot 2\cdot 3) \csc^{n-4} x + n\cdot(n^2-2^2)\cdot(n^2-4^2) / (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5) \csc^{n-6} x) \sqrt{(\csc^2 x - 1)})$

$\csc 2x = \csc^2 x / (2 \sqrt{(\csc^2 x - 1)})$

$\csc 3x = \csc^3 x / (3 \csc^2 x - 4)$

$\csc 4x = \csc^4 x / ((4 \csc^2 x - 8) \sqrt{(\csc^2 x - 1)})$

$\csc 5x = \csc^5 x / (5 \csc^4 x - 20 \csc^2 x - 16)$

$\csc 6x = \csc^6 x / ((6 \csc^4 x - 32 \csc^2 x + 32) \sqrt{(\csc^2 x - 1)})$

$\csc 7x = \csc^7 x / (7 \csc^6 x - 56 \csc^4 x + 112 \csc^2 x - 64)$

$\csc 8x = \csc^8 x / ((8 \csc^6 x - 80 \csc^4 x + 192 \csc^2 x - 128) \sqrt{(\csc^2 x - 1)})$

Auflösung halber Winkel

$\sin x/2 = \sqrt{((1 - \cos x)/2)} = 1/2 \sqrt{(1 + \sin x)} - 1/2 \sqrt{(1 - \sin x)} = \sqrt{((\sqrt{(1 + \tan^2 x)}-1)/(2 \sqrt{(1 + \tan^2 x)}))} =$
$= \sqrt{((\sqrt{(1 + \cot^2 x)} - \cot x) / (2 \sqrt{(1 + \cot^2 x)}))} = \sqrt{((\sec x - 1) / (2 \sec x))}$
$= \sqrt{((\csc x - \sqrt{(\csc^2 x - 1)})/ (2 \csc x))}$

$\cos x/2 = \sqrt{((1 + \cos x)/2)} = 1/2 \sqrt{(1 + \sin x)} + 1/2 \sqrt{(1 - \sin x)} = \sqrt{((\sqrt{(1 + \tan^2 x)} + 1) / (2 \sqrt{(1 + \tan^2 x)}))} = \sqrt{((\sqrt{(1 + \cot^2 x)} + \cot x) / (2 \sqrt{(1 + \cot^2 x)}))} = \sqrt{((1 + \sec x) / (2 \sec x))} =$
$= \sqrt{((\csc x + \sqrt{(\csc^2 x - 1)}) / (2 \csc x))}$

$\tan x/2 = \sqrt{((1 - \cos x) / (1 + \cos x))} = \sin x / (1 + \cos x) = (1 - \cos x) / \sin x = \tan x \sin x / (\tan x + \sin x) = (1 - \sqrt{(1 - \sin^2 x)}) / \sin x = \tan x / (\sqrt{(1 + \tan^2 x)} + 1) = 1 / (\sqrt{(\cot^2 x + 1)} + \cot x) =$
$= \sqrt{((\sec x - 1) / (\sec x + 1))} = \csc x - \sqrt{(\csc^2 x - 1)} = \csc x - \cot x$

$\cot x/2 = \sqrt{((1 + \cos x) / (1 - \cos x))} = \sin x / (1 - \cos x) = \sin x / (1 - \sqrt{(1 - \sin^2 x)}) =$
$= (1 + \cos x) / \sqrt{(1 - \cos^2 x)} = (\sqrt{(1 + \tan^2 x)} + 1) / \tan x = \sqrt{(\cot^2 x + 1)} + \cot x = \sqrt{((\sec x + 1) / (\sec x - 1))} = \csc x + \sqrt{(\csc^2 x - 1)} = \csc x + \cot x$

$\sec x/2 = \sqrt{(2 / (1 + \sqrt{(1 - \sin^2 x)}))} = \sqrt{(2 / (1 + \cos x))} = \sqrt{(2 + 2 \tan^2 x - 2 \sqrt{(1 + \tan^2 x)})} / \tan x =$
$= \sqrt{(2 + 2 \cot^2 x - 2 \cot x \sqrt{(1 + \cot^2 x)})} = \sqrt{(2 \sec x / (1 + \sec x))} = \sqrt{(2 \tan x / (\sin x + \tan x))} =$
$= \sqrt{(2 \csc x (\csc x - \sqrt{(\csc^2 x - 1)}))} = \sqrt{(2 / (1 + \sin x \cot x))} = \csc x \sqrt{(2 - 2 \cos x)}$

$\csc x/2 = \sqrt{(2 + 2 \sqrt{(1 - \sin^2 x)})} / \sin x = \sqrt{(2 / (1 - \cos x))} = \sqrt{(2 + 2 \tan^2 x + 2 \sqrt{(1 + \tan^2 x)})} / \tan x =$
$= \sqrt{(2+2 \cot x +2\cot x \sqrt{(1+\cot^2 x)})} = \sqrt{(2\csc x (\csc x +\sqrt{(\csc^2 x - 1)}))} = \sqrt{(2 \sec x / (\sec x - 1))} =$
$= \sqrt{(2 \tan x / (\tan x - \sin x))} = \sqrt{(2 / (1 - \sin x \cot x))} = \csc x \sqrt{(2 + 2 \cos x)}$

$2 \sin^2 (x/2) = 1 - \cos x$

$2 \cos^2 (x/2) = 1 + \cos x$

Produkte und Quotienten der Funktionen von der halben Summe oder Differenz zweier Bögen

$\sin (x+y)/2 \cdot \sin (x-y)/2 = 1/2 (\cos y - \cos x)$ $\sin (x+y)/2 \cdot \cos (x-y)/2 = 1/2 (\sin x + \sin y)$

$\sin (x-y)/2 \cdot \cos (x+y)/2 = 1/2 (\sin x - \sin y)$ $\cos (x+y)/2 \cdot \cos (x-y)/2 = 1/2 (\cos x + \cos y)$

$\tan (x+y)/2 \cdot \tan (x-y)/2 = (\cos y - \cos x) / (\cos y + \cos x)$

$\tan (x+y)/2 \cdot \cot (x-y)/2 = (\sin x + \sin y) / (\sin x - \sin y)$

$\tan (x-y)/2 \cdot \cot (x+y)/2 = (\sin x - \sin y) / (\sin x + \sin y)$

$\cot (x+y)/2 \cdot \cot (x-y)/2 = (\cos x + \cos y) / (\cos y - \cos x)$
$\sin (x+y)/2 \cdot \cos (x-y)/2 / (\cos (x+y)/2 \cdot \sin (x-y)/2) = \tan(x+y)/2 / \tan (x-y)/2 = \tan(x+y)/2 \cdot \cot(x-y)/2$
$\cos (x+y)/2 \cdot \cos (x-y)/2 / (\sin (x+y)/2 \cdot \sin (x-y)/2) = \cot(x+y)/2 / \tan (x-y)/2 = \cot (x+y)/2 \cdot \cot (x-y)/2$

Ausdrücke für die Summe der Einheit und dem Produkt zweier Tangenten
$1 + \tan x \cdot \tan y = \cos (x-y) / (\cos x \cos y)$
$1 - \tan x \cdot \tan y = \cos (x+y) / (\cos x \cos y)$
$1 + \cot x \cdot \cot y = \cos (x-y) / (\sin x \sin y)$
$\cot x \cdot \cot y - 1 = \cos (x+y) / (\sin x \sin y)$
$1 + \cot x \cdot \tan y = \sin (x+y) / (\sin x \cos y) = (\tan x + \tan y) / \tan x$
$1 - \cot x \cdot \tan y = \sin (x-y) / (\sin x \cos y) = (\tan x - \tan y) / \tan x$
$1 - \tan^2 x \cdot \tan^2 y = \cos (x+y) \cos (x-y) / (\cos^2 x \cos^2 y)$
$\cot^2 x \cdot \cot^2 y - 1 = \cos (x+y) \cos (x-y) / (\sin^2 x \sin^2 y)$
$\tan^2 x \cdot \cot^2 y - 1 = \sin (x+y) \sin (x-y) / (\cos^2 x \sin^2 y)$

Produkt trigonometrischer Funktionen / Werner-Formeln
$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$
$\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = \cos^2 y - \sin^2 x$
$\sin x \cdot \sin y = 1/2 (\cos (x - y) - \cos (x + y)) = \sin^2 (x+y)/2 - \sin^2 (x-y)/2$
$\sin x \cdot \cos y = 1/2 (\sin (x - y) + \sin (x + y))$
$\cos x \cdot \cos y = 1/2 (\cos (x - y) + \cos (x + y)) = \cos^2 (x+y)/2 - \sin^2 (x-y)/2$
$\tan x \cdot \tan y = (\tan x + \tan y) / (\cot x + \cot y)$
$\cot x \cdot \cot y = (\cot x + \cot y) / (\tan x + \tan y)$
$\tan x \cdot \cot y = (\tan x + \cot y) / (\cot x + \tan y)$
$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = (\sin(x+y-z) + \sin(y+z-a) + \sin(z+x-y) - \sin(x+y+z))/4$
$\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = (\cos(x+y-z) + \cos(y+z-a) + \cos(z+x-y) + \cos(x+y+z))/4$
$\sin x \cdot \sin y \cdot \cos z = (-\cos(x+y-z) + \cos(y+z-a) + \cos(z+x-y) - \cos(x+y+z))/4$
$\sin x \cdot \cos y \cdot \cos z = (\sin(x+y-z) - \sin(y+z-a) + \sin(z+x-y) + \sin(x+y+z))/4$

Quotient trigonometrischer Funktionen
$\sin x / \sin y = (\cot (x+y)/2 + \cot (x-y)/2) / (\cot (x-y)/2 + \cot (x+y)/2)$
$\sin x / \cos y = (\tan (x+y)/2 + \tan (x-y)/2) / (1 + \tan (x+y)/2 \tan (x+y)/2)$
$\cos x / \cos y = (\cot (x+y)/2 - \tan (x-y)/2) / (\cot (x+y)/2 + \tan (x-y)/2)$

Coversinus covers $x = 1 - \sin x$

Potenzen trigonometrischer Funktionen
Potenzen des Sinus
Ist n eine ungerade Zahl, so gilt
$\pm 2^{n-1} \sin^n x = \sin nx - n \sin ((n-2)x) + n\cdot(n-1)/(1\cdot2) \sin ((n-4)x) - n\cdot(n-1)\cdot(n-2)/(1\cdot2\cdot3) \sin ((n-6)x) \ldots \pm n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot((n+3)/2) / (1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)/2) \sin x$
das obere Zeichen gilt, wenn n/4 den Rest 1 lässt, das untere, wenn n/4 den Rest 3 lässt
Ist n eine gerade Zahl, so gilt
$\pm 2^{n-1} \sin^n x = \cos nx - n \cos ((n-2)x) + n\cdot(n-1)/(1\cdot2) \cos ((n-4)x) - n\cdot(n-1)\cdot(n-2)/(1\cdot2\cdot3) \cos ((n-6)x) \ldots \pm 1/2\, n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n/2+1) / (1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n/2)$
das obere Zeichen gilt, wenn n durch 4 teilbar ist, das untere, wenn n nur durch 2 teilbar ist

$\sin^n x = (-1)^{n/2}/2\ \Sigma_{k=0}^{\infty}\ (-1)^k \binom{n}{k} \cos((n-2k)x)$, n gerade
$\sin^n x = (-1)^{(n-1)/2}/2\ \Sigma_{k=0}^{\infty}\ (-1)^k \binom{n}{k} \sin((n-2k)x)$, n ungerade
$\sin^2 x = 1/2 (1 - \cos 2x)$
$\sin^3 x = -1/4 (\sin 3x - 3 \sin x)$
$\sin^4 x = 1/8 (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$
$\sin^5 x = -1/16 (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x)$
$\sin^6 x = 1/32 (10 -15 \cos 2x +6 \cos 4x -\cos 6x)$
$\sin^7 x = -1/64 (\sin 7x - 7 \sin 5x + 21 \sin 3x - 35 \sin x)$
$\sin^8 x = 1/128 (\cos 8x - 8 \cos 6x + 28 \cos 4x - 56 \cos 2x + 35)$
$\sin^9 x = -1/256 (\sin 9x - 9 \sin 7x + 36 \sin 5x - 84 \sin 3x + 126 \sin x)$
$\sin^{10} x = -1/512 (\cos 10x - 10 \cos 8x + 45 \cos 6x - 120 \cos 4x + 210 \cos 2 x - 126)$

Potenzen des Kosinus
Ist n eine ungerade Zahl, so gilt
$2^{n-1} \cos^n x = \cos nx - n \cos ((n-2)x) + n\cdot(n-1)/(1\cdot2) \cos ((n-4)x) + \ldots + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot((n+3)/2) / (1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)/2) \cos x$
Ist n eine gerade Zahl, so gilt
$2^{n-1} \cos^n x = \cos nx + n \cos ((n-2)x) + n\cdot(n-1)/(1\cdot2) \cos ((n-4)x) + \ldots + 1/2\, n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n/2+1) / (1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n/2)$

$\cos^n x = 1/2^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cos((n-2k)x)$
$\cos^2 x = 1/2\ (1 + \cos 2x)$
$\cos^3 x = 1/4\ (3 \cos x + \cos 3x)$
$\cos^4 x = 1/8\ (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$
$\cos^5 x = 1/16\ (10 \cos x + 5 \cos 3x + \cos 5x)$
$\cos^6 x = 1/32\ (10 +15 \cos 2x +6 \cos 4x +\cos 6x)$
$\cos^7 x = 1/64\ (\cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x)$
$\cos^8 x = 1/128\ (\cos 8x + 8 \cos 6x + 28 \cos 4x + 56 \cos 2x + 35)$
$\cos^9 x = 1/256\ (\cos 9x + 9 \cos 7x + 36 \cos 5x + 84 \cos 3x + 126 \cos x)$
$\cos^{10} x = 1/512\ (\cos 10x + 10 \cos 8x + 45 \cos 6x - 120 \cos 4x + 210 \cos 2x - 126)$

Potenzen des Tangens

Terme für $\tan^n x$ ergeben sich über $\tan^n x = \sin^n x / \cos^n x$ durch Einsetzen der entsprechenden Terme für Sinus und Kosinus
$\tan^2 x = (1 - \cos 2x) / (1 + \cos 2x) = 1 - 2 \tan x / \tan 2x$
$\tan^3 x = (3 \sin x - \sin 3x) / (3 \cos x + \cos 3x) = (3 \tan x \tan 2x - 6 \tan x \tan 3x + 2 \tan 2x \tan 3x) / \tan 2x$
$\tan^4 x = (4 \cos 2x - \cos 4x - 3) / (4 \cos 2x + \cos 4x + 3)$
$\tan^5 x = (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x) / (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x)$
$\tan^6 x = (\cos 6x - 6 \cos 4x + 15 \cos x - 10) / (\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos x + 10)$
$\tan^7 x = (\sin 7x - 7 \sin 5x + 21 \sin 3x - 35 \sin x) / (\cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x)$
$\tan^8 x = (\cos 8x -8\cos 6x +28\cos 4x -56\cos 2x +35) / (\cos 8x + 8 \cos 6x + 28 \cos 4x + 56 \cos 2x +35)$
$\tan^9 x = (\sin 9x - 9 \sin 7x + 36 \sin 5x - 84 \sin 3x + 120 \sin x) / (\cos 9x + 9 \cos 7x + 36 \cos 5x + 84 \cos 3x + 120 \cos x)$
$\tan^{10} x = (\cos 10x - 10 \cos 8x + 45 \cos 6x - 120 \cos 4x + 210 \cos 2x - 126) / (\cos 10x + 10 \cos 8x + 45 \cos 6x + 120 \cos 4x + 210 \cos 2x + 126)$

Potenzen des Kotangens

Terme für $\cot^n x$ ergeben sich über $\cot^n x = \cos^n x / \sin^n x$ durch Einsetzen der entsprechenden Terme für Sinus und Kosinus
$\cot^2 x = (1 + \cos 2x) / (1 - \cos 2x) = \cot x / (\cot x - 2 \cot 2x)$
$\cot^3 x = (3 \cos x + \sin 3x) / (3 \sin x - \sin 3x)$
$\cot^4 x = (4 \cos 2x + \cos 4x + 3) / (-4 \cos 2x + \cos 4x + 3)$
$\cot^5 x = (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x) / (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x)$
$\cot^6 x = (\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos x + 10) / (\cos 6x - 6 \cos 4x + 15 \cos x - 10)$
$\cot^7 x = (\cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x) / (\sin 7x - 7 \sin 5x + 21 \sin 3x - 35 \sin x)$
$\cot^8 x = (\cos 8x +8\cos 6x + 28\cos 4x +56\cos 2x +35)/(\cos 8x - 8 \cos 6x + 28 \cos 4x - 56 \cos 2x + 35)$
$\cot^9 x = (\cos 9x + 9 \cos 7x + 36 \cos 5x + 84 \cos 3x + 120 \cos x) / (\sin 9x - 9 \sin 7x + 36 \sin 5x - 84 \sin 3x + 120 \sin x)$
$\cot^{10} x = (\cos 10x + 10 \cos 8x + 45 \cos 6x + 120 \cos 4x + 210 \cos 2x + 126) / (\cos 10x - 10 \cos 8x + 45 \cos 6x - 120 \cos 4x + 210 \cos 2x - 126)$

Potenzen des Sekans

Terme für $\sec^n x$ ergeben sich über $\sec^n x = 1 / \cos^n x$ durch Einsetzen der entsprechenden Terme des Kosinus
$\sec^2 x = 2 / (1 + \cos 2x)$
$\sec^3 x = 4 / (3 \cos x + \cos 3x)$
$\sec^4 x = 8 / (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$
$\sec^5 x = 16 / (10 \cos x + 5 \cos 3x + \cos 5x)$
$\sec^6 x = 32 / (10 +15 \cos 2x +6 \cos 4x +\cos 6x)$
$\sec^7 x = 64 / (\cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x)$
$\sec^8 x = 128 / (\cos 8x + 8 \cos 6x + 28 \cos 4x + 56 \cos 2x + 35)$
$\sec^9 x = 256 / (\cos 9x + 9 \cos 7x + 36 \cos 5x + 84 \cos 3x + 126 \cos x)$
$\sec^{10} x = 512 / (\cos 10x + 10 \cos 8x + 45 \cos 6x - 120 \cos 4x + 210 \cos 2x - 126)$

Potenzen des Kosekans

Terme für $\csc^n x$ ergeben sich über $\csc^n x = 1 / \sin^n x$ durch Einsetzen der entsprechenden Terme des Sinus
$\csc^2 x = 2 / (1 - \cos 2x)$
$\csc^3 x = -4 / (\sin 3x - 3 \sin x)$
$\csc^4 x = 8 / (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$
$\csc^5 x = -16 / (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x)$
$\csc^6 x = 32 / (10 -15 \cos 2x +6 \cos 4x -\cos 6x)$
$\csc^7 x = -64 / (\sin 7x - 7 \sin 5x + 21 \sin 3x - 35 \sin x)$
$\csc^8 x = 128 / (\cos 8x - 8 \cos 6x + 28 \cos 4x - 56 \cos 2x + 35)$
$\csc^9 x = -256 / (\sin 9x - 9 \sin 7x + 36 \sin 5x - 84 \sin 3x + 126 \sin x)$
$\csc^{10} x = -512 / (\cos 10x - 10 \cos 8x + 45 \cos 6x - 120 \cos 4x + 210 \cos 2 x - 126)$

Potenzen trigonometrischer Funktionen

Werte für die Potenzen der Funktionen, ausgedrückt durch Reihen von Potenzen anderer Funktionen

$\sin^n x = 1 - n/2 \cos^2 x + n(n-2) / (1\cdot2\cdot2^2) \cos^4 x - n(n-2)(n-4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) \cos^6 x + \dots$
$\sin^n x = \tan x - n/2 \tan^3 x + n(n+2) / (1\cdot2\cdot2^2) \tan^5 x - n(n+2)(n+4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^2) \tan^7 x + \dots$
$\sin^n x = 1 - n/2 \cot^2 x + n(n+2) / (1\cdot2\cdot2^2) \cot^4 x - n(n+2)(n+4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) \cot^6 x + \dots$
$\sin^n x = 1 - n/2\ 1/\sec^2 x + n(n-2) / (1\cdot2\cdot2^2) / \sec^4 x - n(n-2)(n-4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) / \sec^6 x + \dots$
$\cos^n x = 1 - n/2 \sin^2 x + n(n-2) / (1\cdot2\cdot2^2) \sin^4 x - n(n-2)(n-4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) \sin^6 x + \dots$
$\cos^n x = 1 - n/2 \tan^2 x + n(n+2) / (1\cdot2\cdot2^2) \tan^4 x - n(n+2)(n+4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) \tan^6 x + \dots$
$\cos^n x = \cot^n x\ (1 - n/2 \cot^2 x + n(n+2) / (1\cdot2\cdot2^2) \cot^4 x - n(n+2)(n+4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) \cot^6 x + \dots)$
$\cos^n x = 1 - n/2\ 1/\csc^2 x + n(n-2) / (1\cdot2\cdot2^2) / \csc^4 x - n(n-2)(n-4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) / \csc^6 x + \dots$

$\tan^n x = \sin^n x\ (1 + n/2 \sin^2 x + n(n+2) / (1\cdot2\cdot2^2) \sin^4 x + n(n+2)(n+4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) \sin^6 x + \dots)$
$\tan^n x = 1 / \cos^n x\ (1 - n/2 \cos^2 x + n(n-2) / (1\cdot2\cdot2^2) \cos^4 x - n(n-2)(n-4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) \cos^6 x + \dots)$
$\tan^n x = \sec^n x\ (1 - n/2 / \sec^2 x + n(n-2) / (1\cdot2\cdot2^2) / \sec^4 x - n(n-2)(n-4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) / \sec^6 x + \dots)$
$\tan^n x = 1/ \csc^n x\ (1 + n/2 / \csc^2 x + n(n+2) / (1\cdot2\cdot2^2) / \csc^4 x + n(n+2)(n+4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) / \csc^6 x + \dots)$
$\cot^n x = 1 / \sin^n x\ (1 - n/2 \sin^2 x + n(n-2) / (1\cdot2\cdot2^2) \sin^4 x - n(n-2)(n-4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) \sin^6 x + \dots)$
$\cot^n x = \cos^n x\ (1 + n/2 \cos^2 x + n(n+2) / (1\cdot2\cdot2^2) \cos^4 x + n(n+2)(n+4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) \cos^6 x + \dots)$
$\cot^n x = 1/\sec^n x\ (1 + n/2 / \sec^2 x + n(n+2) / (1\cdot2\cdot2^2) / \sec^4 x + n(n+2)(n+4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) / \sec^6 x + \dots)$
$\cot^n x = \csc^n x\ (1 - n/2 / \csc^2 x + n(n-2) / (1\cdot2\cdot2^2) / \csc^4 x - n(n-2)(n-4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) / \csc^6 x + \dots)$

$\sec^n x = 1 + n/2 \sin^2 x + n(n+2) / (1\cdot2\cdot2^2) \sin^4 x + n(n+2)(n+4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) \sin^6 x + \dots$
$\sec^n x = 1 + n/2 \tan^2 x + n(n-2) / (1\cdot2\cdot2^2) \tan^4 x + n(n-2)(n-4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) \tan^6 x + \dots$
$\sec^n x = 1 / \cot^n x\ (1 + n/2 \cot^2 x + n(n-2) / (1\cdot2\cdot2^2) \cot^4 x + n(n-2)(n-4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) \cot^6 x + \dots)$
$\sec^n x = 1 + n/2\ 1/\csc^2 x + n(n+2) / (1\cdot2\cdot2^2) / \csc^4 x + n(n+2)(n+4) / (1\cdot2\cdot3\cdot2^3) / \csc^6 x + \dots$

n.te Teile eines Winkels

$\sin(\pi / 3) = 1/2 \sqrt{3} \approx 0{,}866025$
$\cos(\pi / 3) = 1/2$
$\sin(\pi / 4) = 1/2 \sqrt{2} \approx 0{,}707106$
$\cos(\pi / 4) = 1/2 \sqrt{2} \approx 0{,}707106$
$\tan(\pi / 3) = \sqrt{3} \approx 1{,}73205$
$\tan(\pi / 4) = 1$
$\sin(\pi / 6) = 1/2$
$\cos(\pi / 6) = 1/2 \sqrt{3} \approx 0{,}866025$
$\tan(\pi / 6) = 1/3 \sqrt{3} \approx 0{,}577350$
$\sin(\pi / 5) = \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} / 4 \approx 0{,}587785$
$\sin(2\pi / 5) = \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} / 4 \approx 0{,}951056$
$\cos(\pi / 5) = (1 + \sqrt{5}) / 4 \approx 0{,}809017$
$\cos(2\pi / 5) = (-1 + \sqrt{5}) / 4 \approx 0{,}309016$
$\tan(\pi / 5) = \sqrt{(5 - 2\sqrt{5})} \approx 0{,}726542$
$\tan(2\pi / 5) = \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})} \approx 3{,}07768$
$\sin(\pi/7) \sin(2\pi/7) \sin(3\pi/7) = 1/8 \sqrt{7} \approx 0{,}330718$
$\cos(\pi/7) \cos(2\pi/7) \cos(3\pi/7) = 1/8$
$\sin(\pi / 8) = 1/2 \sqrt{(2 - \sqrt{2})} \approx 0{,}382683$
$\sin(3\pi / 8) = 1/2 \sqrt{(2 + \sqrt{2})} \approx 0{,}923879$
$\cos(\pi / 8) = 1/2 \sqrt{(2 + \sqrt{2})} \approx 0{,}923879$
$\cos(3\pi / 8) = 1/2 \sqrt{(2 - \sqrt{2})} \approx 0{,}382683$
$\tan(\pi / 8) = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}414213$
$\tan(3\pi / 8) = \sqrt{2} + 1 \approx 2{,}414213$
$\sin(\pi/9) \sin(2\pi/9) \sin(4\pi/9) = 1/8 \sqrt{3} \approx 0{,}216506$
$\cos(\pi/9) \cos(2\pi/9) \cos(4\pi/9) = 1/8$
$\tan(\pi/9) \tan(2\pi/9) \tan(4\pi/9) = \sqrt{3} \approx 1{,}73205$
$\sin(\pi / 10) = (\sqrt{5} - 1) / 4 \approx 0{,}309016$
$\sin(3\pi / 10) = (1 + \sqrt{5}) / 4 \approx 0{,}809017$
$\cos(\pi / 10) = \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} / 4 \approx 0{,}951056$
$\cos(3\pi / 10) = \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} / 4 \approx 0{,}587785$
$\tan(\pi / 10) = \sqrt{(25 - 10\sqrt{5})} / 5 \approx 0{,}324919$
$\tan(3\pi / 10) = \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})} / 5 \approx 1{,}37638$

$\sin(\pi/11) \sin(2\pi/11) \sin(3\pi/11) \sin(4\pi/11) \sin(5\pi/11) = \sqrt{11} / 32 \approx 0.103644$
$\cos(\pi/11) \cos(2\pi/11) \cos(3\pi/11) \cos(4\pi/11) \cos(5\pi/11) = 1 / 32$
$\tan(\pi/11) \tan(2\pi/11) \tan(3\pi/11) \tan(4\pi/11) \tan(5\pi/11) = \sqrt{11} \approx 3.31662$
$\tan(3\pi/11) + 4 \tan(2\pi/11) = \sqrt{11} \approx 3.31662$
$\sin(\pi / 12) = 1/4 (\sqrt{6} - \sqrt{2}) / 4 \approx 0.0647047$
$\cos(\pi / 12) = 1/4 (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 0.965925$
$\sec(\pi / 12) = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1.03527$
$\csc(\pi / 12) = \sqrt{6} + \sqrt{2} \approx 3.86370$
$\tan(\pi / 12) = 2 - \sqrt{3} \approx 0.267949$
$\cot(\pi / 12) = 2+ \sqrt{3} \approx 3.73205$

$\sin(2\pi / 15) = (\sqrt{3} + \sqrt{15} - \sqrt{(10 - 2 \sqrt{5})}) / 8 \approx 0.40674$
$\sin(\pi / 15) = (2 \sqrt{3} - 2 \sqrt{15} + \sqrt{(40 + 8 \sqrt{5})}) / 16 \approx 0.20791$
$\cos(\pi / 15) = (-1 + \sqrt{5} + \sqrt{(30 + 6 \sqrt{5})}) / 8 \approx 0.97815$
$\cos(2\pi / 15) = (1 + \sqrt{(30 - 6 \sqrt{5})}) / 8 \approx 0.91355$
$\tan(\pi / 15) = (3 \sqrt{3} - \sqrt{15} - \sqrt{(50 - 22 \sqrt{5})}) / 2 \approx 0.21256$
$\sin(\pi / 16) = 1/2 \sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{2})})} \approx 0.19509$
$\sin(3\pi / 16) = 1/2 \sqrt{(2 - \sqrt{(2 - \sqrt{2})})} \approx 0.55557$
$\cos(\pi / 16) = 1/2 \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{2})})} \approx 0.98079$
$\cos(3\pi / 16) = 1/2 \sqrt{(2 + \sqrt{(2 - \sqrt{2})})} \approx 0.83147$
$\tan(\pi / 16) = \sqrt{(4 + 2 \sqrt{2})} - \sqrt{2} - 1 \approx 0.19891$

n.te Teile eines Winkels

Da ein regelmäßiges 17-Eck allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, können analytische Terme für $\sin(\pi/17)$ und $\cos(\pi/17)$ entwickelt werden.

$\omega = \sqrt{17}$ $\xi = \sqrt{2}$ $\varepsilon = \sqrt{(17 + \omega)}$ $\varepsilon^* = \sqrt{(17 - \omega)}$

$\beta = 2 \sqrt{17 + 3\omega - 2\varepsilon\xi - \varepsilon^*\xi}$ $\alpha = \sqrt{\sqrt{34} + 6\omega + (\sqrt{34} - \xi)\varepsilon^* - 8\varepsilon\xi}$ $\gamma = 2\xi(\omega - 1)\varepsilon^*$
$\eta = 2\xi\varepsilon$
Dann gilt
$\sin(\pi / 17) = 1/8 \sqrt{34 - 2\omega - 2\varepsilon^*\xi - 2\sqrt{68 + 12\omega + \gamma - 8\eta}} = 0.18375...$
$= \sqrt{-\sqrt{-\sqrt{19/32768 \sqrt{17} + 85/32768} + 3/256 \sqrt{17} + 17/256} - \sqrt{17/512 - \sqrt{17/512}} - \sqrt{17/32} + 17/32}$
$\cos(\pi / 17) = 1/8 \sqrt{30 + 2\omega + 2\varepsilon^*\xi + 2\sqrt{68 + 12\omega + \gamma - 8\eta}} = 0.98297...$
$\sin(2\pi / 17) = 1/16 \sqrt{136 - 8\omega - 2\gamma + 8\eta + 2(\xi - \sqrt{34} - 2\varepsilon^*)\sqrt{34 + 6\omega + (\sqrt{34} - \xi)\varepsilon^* - 4\eta}} = 0.36124...$
$\cos(2\pi / 17) = 1/16 [-1 + \omega + \xi\varepsilon^* + \sqrt{68 + 12\omega + 2\gamma - 8\eta}] = 0.93247...$
$\sin(4\pi / 17) = 1/128 (-\xi + \sqrt{34} + 2\varepsilon^* + 2\alpha)\sqrt{68 - 4\omega - 2(\sqrt{34} - \xi)\varepsilon^* + 4\eta + \alpha(\xi - \sqrt{34} - 2\varepsilon^*)} = 0.67370...$
$\sin(8\pi / 17) = 1/16 \sqrt{138 - 8\omega + 4\eta - 2(\sqrt{34} - 3\xi)\varepsilon^* - 2\beta(1 - \omega - \xi\varepsilon^*)} = 0.99573...$
$\sin(\pi / 18) = 1/2 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - ...}}}} = 0.17365...$ Vorzeichenwechsel +, +, - mit Periode 3
$\cos(\pi / 18) = \sqrt{3}/6 [1 + \sqrt{8 - \sqrt{8 - \sqrt{8 + \sqrt{8 - ...}}}}] = 0.98481...$ Vorzeichenwechsel -, -, + mit Periode 3
$\sin(\pi / 20) = 1/4 \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = 0.15643...$
$\cos(\pi / 20) = 1/4 \sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = 0.98768...$
$\tan(\pi / 20) = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 0.15838...$
$\cos(1/10) + \cosh(1/10) + 2\cos(1/20 \sqrt{2})\cosh(1/20 \sqrt{2})\ ] / 4 = 1 + 2.480... * 10^{-13} \approx 1$

$\sin(\pi / 24) = 1/2 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \approx 0.130526$
$\cos(\pi / 24) = 1/2 \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \approx 0.991444$
$\tan(\pi / 24) = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} - 2 \approx 0.131652$
$\cot(\pi / 24) = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + 2 \approx 7.59575$
$\sec(\pi / 24) = \sqrt{16 - 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6}} \approx 1.00862$
$\csc(\pi / 24) = \sqrt{16 + 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3} + 6\sqrt{6}} \approx 7.66129$
$\sin(\pi / 30) = 1/8 (-1 - \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}) \approx 0.104528$
$\cos(\pi / 30) = 1/4 \sqrt{7 + \sqrt{5} + \sqrt{30 + 5\sqrt{5}}} \approx 0.989105$
$\tan(\pi / 30) = \sqrt{7 - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{15 - 6\sqrt{5}}} \approx 0.105085$
$\cot(\pi / 30) = \sqrt{23 + 10\sqrt{5} + 2\sqrt{255 + 114\sqrt{5}}} \approx 9.51436$
$\sec(\pi / 30) = \sqrt{8 - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{15 - 6\sqrt{5}}} \approx 1.00550$
$\csc(\pi / 30) = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{15 + 6\sqrt{5}} \approx 9.56677$
$\sin(\pi / 32) = 1/2 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \approx 0.0980172$
$\cos(\pi / 32) = 1/2 \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \approx 0.995184$
$\tan(\pi / 32) = -1 - \sqrt{2} - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{(4 + 2\sqrt{2})(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}})} \approx 0.0984899$

Goniometrische Beziehungen für $\pi/17$

Mit $w = \pi/17$ wird
$-\sin^2(w) - \sin^2(2w) + \sin^2(3w) - \sin^2(4w) + \sin^2(5w) + \sin^2(6w) + \sin^2(7w) - \sin^2(8w) = 1/4 \sqrt{17}$
$-\sin^2(3w) - \sin^2(5w) + \sin^2(6w) + \sin^2(7w) = 1/8 \sqrt{2} \sqrt{17 + \sqrt{17}}$
$-4\sin^2(w) + 4\sin^2(2w) - \sin^2(3w) - 4\sin^2(4w) - \sin^2(5w) + \sin^2(6w) + \sin^2(7w) + 4\sin^2(8w) = 1/8 \sqrt{2} \sqrt{17} \sqrt{17 + \sqrt{17}}$
$-3\sin^2(w) - 2\sin^2(3w) + 3\sin^2(4w) + 2\sin^2(5w) + 2\sin^2(6w) - 2\sin^2(7w) = 1/16 \sqrt{17} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - \sqrt{17}\sqrt{17 + \sqrt{17}} - 7\sqrt{2}\sqrt{17 + \sqrt{17}}}$
$-\sin^2(w) + \sin^2(4w) = 1/16 \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - \sqrt{17}\sqrt{17 + \sqrt{17}} - 7\sqrt{2}\sqrt{17 + \sqrt{17}}}$
$2\sin^2(w) - 2\sin^2(2w) - \sin^2(3w) - 2\sin^2(4w) + \sin^2(5w) - \sin^2(6w) + \sin^2(7w) + 2\sin^2(8w) = 1/32 \sqrt{2} \sqrt{17 + \sqrt{17}} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - \sqrt{17}\sqrt{17 + \sqrt{17}} - 7\sqrt{2}\sqrt{17 + \sqrt{17}}}$
$6\sin^2(w) - 10\sin^2(2w) + 3\sin^2(3w) - 6\sin^2(4w) - 3\sin^2(5w) - 5\sin^2(6w) + 5\sin^2(7w) + 10\sin^2(8w) = 1/32 \sqrt{2} \sqrt{17} \sqrt{17 + \sqrt{17}} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - \sqrt{17}\sqrt{17 + \sqrt{17}} - 7\sqrt{2}\sqrt{17 + \sqrt{17}}}$
$\sin^2(w) + \sin^2(2w) + \sin^2(3w) + \sin^2(4w) + \sin^2(5w) + \sin^2(6w) + \sin^2(7w) + \sin^2(8w) = 17/4$

Terme für den Sinus x

Werte für sin x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x
$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \tan x / \sqrt{1 + \tan^2 x} = 1 / \sqrt{1 + \cot^2 x} = \sqrt{\sec^2 x - 1} / \sec x = 1 / \csc x$
Werte für sin x ausgedrückt durch den halben Winkel x/2
$\sin x = 2 \sin x/2 \sqrt{1 - \sin^2 x/2} = 2 \cos x/2 \sqrt{1 - \cos^2 x/2} = 2 \tan x/2 / (1 + \tan^2 x/2) =$
$= 2 \cot x/2 / (1 + \cot^2 x/2) = 2 \sqrt{\sec^2 x/2 - 1} / \sec^2 x/2 = 2 \sqrt{\csc^2 x/2 - 1} / \csc^2 x/2$
Werte für sin x ausgedrückt durch den doppelten Winkel 2x
$\sin x = 1/2 (\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}) = \sqrt{(1-\cos 2x) / 2} = \sqrt{(\sqrt{1+\tan^2 2x}-1)/(2\sqrt{1 + \tan^2 2x})} =$
$= \sqrt{(\sqrt{1 + \cot^2 2x} - \cot 2x) / (2\sqrt{1 + \cot^2 2x})} = \sqrt{(\sec 2x - 1) / (2 \sec 2x)} =$
$= 1/2 \sqrt{(\csc 2x + 1) / \csc 2x} - 1/2 \sqrt{(\csc 2x - 1) / \csc 2x}$
Werte für sin x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x mit mehreren Funktionen
$\sin x = \cos x \tan x = \cos x / \cot x = \tan x / \sec x = \cos x \sec x / \csc x = \sec x / \sqrt{\sec^2 x + \csc^2 x} =$
$= \tan x \cot x / \csc x = (\sec x - \cos x) \cot x$
Werte für sin x ausgedrückt durch den halben Winkel x/2 mit mehreren Funktionen
$\sin x = 2 \sin x/2 \cos x/2 = 1 - (\sin x/2 - \cos x/2)^2 = 2 \sin^2 x/2 / \tan x/2 = 2 \sin x/2 / \sec x/2 =$

$= 2 \cos^2 x/2 \tan x/2 = 2 \cos^2 x/2 / \cot x/2 = 2 \cos x/2 / \csc x/2 = 2 / (\tan x/2 + \cot x/2) =$
$= 2 \tan x/2 / \sec^2 x/2 = 2 / (\tan x/2 \csc^2 x/2) = 2 / (\cot x/2 \sec^2 x/2) = 2 \cot x/2 / \csc^2 x/2 =$
$= 2 / (\sec x/2 \csc x/2) = 2 \sec x/2 \csc x/2 / (\sec^2 x/2 + \csc^2 x/2)$

Werte für sin x ausgedrückt durch unterschiedliche Terme

sin x $= \sqrt{1 + \sin 2x} - \cos x = \cos x - \sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{\cos^2 x - \cos 2x} = \tan x/2\ (1 + \cos x) =$
$= (1 + \cos x) / \cot x/2 = (1 - \cos x) / \tan x/2 = (1 - \cos x) \cot x/2 = 1 / (\cot x/2 - \cot x) =$
$= 1/(\tan x/2+\cot x) = 1-\cos x/\tan(45°+x/2) = 1-\cos x \cot(45°+x/2) = 1-\cos x / \cot (45°-x/2) =$
$= 1 - \cos x \tan (45°-x/2) = 1/\sqrt{3}\ (\sin (30°+x) - \sin (30°-x)) = \cos (30°-x) - \cos (30°+x) =$
$= \sin (60°+x) - \sin (60°-x) = 1/\sqrt{3}\ (\cos (60°-x) - \cos (60°+x)) = 2 \sin (60°+x) - \sqrt{3 \cos x} =$
$= \sqrt{3} \cos x - 2 \sin (60°-x) = (1/2 \cos x - \cos (60°+x)) / (1/2 \sqrt{3})$
$= (\cos (60°-x) - 1/2 \cos x) / (1/2 \sqrt{3}) =$
$= 2 \sin^2 (45°+x/2) - 1 = 1 - 2 \sin^2 (45°-x/2) = (1 - \tan^2 (45°-x/2)) / (1 + \tan^2 (45°-x/2)) =$
$= (\tan^2 (45°+x/2) - 1) / (\tan^2 (45°+x/2) + 1) = (\cot^2 (45°-x/2) - 1) / (\cot^2 (45°-x/2) + 1) =$
$= (\tan (45°+x/2) - \tan (45°-x/2)) / (\tan (45°+x/2) + \tan (45°-x/2))$
$= (\sin (45°+x) - \sin (45°-x)) / \sqrt{2}$

Sinuswerte von speziellen Winkeln

0°	0	3,75°	$1/2\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$
3°	$1/16\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{5}-1)-2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}})$	5,625°	$1/2\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
4,5°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}})$	7,5°	$1/4\cdot(-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}})$
6°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1))$	11,25°	$1/2\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
9°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}+1)-2\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}})$	13,5°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}})$
12°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}-1))$	18°	$(-1+\sqrt{5})/4$
15°	$1/4\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)$	22,5°	$1/2\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$
21°	$1/16\cdot(-\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{5}+1)+2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}})$	27°	$1/8\cdot(-\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-1)+2\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}})$
24°	$1/8\cdot(-\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}+1))$	31,5°	$1/8\cdot(-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}})$
30°	$1/2$	33,75°	$1/2\cdot\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
33°	$1/16\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{5}-1)+2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}})$	37,5°	$1/4\cdot(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}})$
36°	$1/4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}$	40,5°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}})$
39°	$1/16\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{5}+1)-2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}})$	45°	$1/2\cdot\sqrt{2}$
42°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1))$	49,5°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}})$
48°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}-1))$	52,5°	$1/4\cdot(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}})$
51°	$1/16\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{5}+1)+2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}})$	56,25°	$1/2\cdot\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
54°	$(1+\sqrt{5})/4$	58,5°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}})$
57°	$1/16\cdot(-\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{5}-1)+2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}})$	63°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-1)+2\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}})$
60°	$1/2\cdot\sqrt{3}$	67,5°	$1/2\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}$
66°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1))$	72°	$1/4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}$
69°	$1/16\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{5}+1)+2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}})$	76,5°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}})$
75°	$1/4\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)$	78,75°	$1/2\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
78°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1))$	82,5°	$1/4\cdot(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}})$
81°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}+1)+2\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}})$	85,5°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}})$
84°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}+1))$	90°	1
87°	$1/16\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{5}-1)+2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}})$		

Ist ein Sinuswert eines Winkels x bekannt, so kann der Sinus des halben Winkels mittels

$$\sin x/2 = \sqrt{1/2\ (1 - \sqrt{1 - \sin^2 x})}$$

bestimmt werden.

Winkel	Sinuswert
$\pi/2$	1
$\pi/4$	$1/2 \sqrt{2} \approx 0{,}7071067811$
$\pi/8$	$\sqrt{1/2 - 1/4 \sqrt{2}} \approx 0{,}3826834323$
$\pi/16$	$\sqrt{1/2 - \sqrt{1/16 \sqrt{2} + 1/8}} \approx 0{,}1950903220$
$\pi/32$	$\sqrt{1/2 - \sqrt{\sqrt{1/256 \sqrt{2} + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}09801714032$
$\pi/64$	$\sqrt{1/2 - \sqrt{\sqrt{\sqrt{1/65536 \sqrt{2} + 1/32768} + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}04906767432$
$\pi/128$	$\sqrt{1/2 - \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1/4294967296 \sqrt{2} + 1/2147483648} + 1/32768} + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}02454122849$
$\pi/256$	$\sqrt{1/2 - \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}/18446744073709551616 + 1/9223372036854775808} + 1/2147483648} + 1/32768} + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}0122715382$
$\pi/512$	$\sqrt{1/2 - \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}/340282366920938463463374607431768211456 + 1/170141183460469231731687303715884105728} + 1/9223372036854775808} + 1/2147483648} + 1/32768} + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}006135884651$
$\pi/3$	$1/2 \sqrt{3} \approx 0{,}8660254037$
$\pi/6$	$1/2 = 0{,}5$
$\pi/12$	$1/4 \sqrt{6} - 1/4 \sqrt{2} \approx 0{,}2588190451$
$\pi/24$	$\sqrt{1/16 \sqrt{2} + 1/8} - \sqrt{3/8 - 3/16 \sqrt{2}} \approx 0{,}1305261922$
$\pi/48$	$\sqrt{- \sqrt{3/64 \sqrt{2} + 3/32} - \sqrt{1/32 - 1/64 \sqrt{2}} + 1/2} \approx 0{,}06540312923$

$\pi/96$ $\sqrt{1/2 - \sqrt{\sqrt{3/1024 \sqrt{2} + 3/512} + \sqrt{1/512 - 1/1024 \sqrt{2}} + 1/8}} \approx 0{,}03271908281$
$\pi/192$ $\sqrt{1/2 - \sqrt{\sqrt{\sqrt{3/262144 \sqrt{2} + 3/131072} + \sqrt{1/131072 - \sqrt{2}/262144} + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}01636173167$
$\pi/384$ $\sqrt{1/2 - \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3/17179869184 \sqrt{2} + 3/8589934592} + \sqrt{1/8589934592 - \sqrt{2}/17179869184} + 1/32768} + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}008181139620$

$\pi/5$ $\sqrt{5/8 - 1/8 \sqrt{5}} \approx 0{,}5877852522$
$\pi/10$ $1/4 \sqrt{5} - 1/4 \approx 0{,}3090169943$
$\pi/20$ $-\sqrt{5/16 - 1/16 \sqrt{5}} + 1/8 \sqrt{10} + 1/8 \sqrt{2} \approx 0{,}1564344650$
$\pi/40$ $\sqrt{- \sqrt{5/64 - 1/64 \sqrt{5}} - 1/16 \sqrt{10} - 1/16 \sqrt{2} + 1/2} \approx 0{,}07845909579$
$\pi/80$ $\sqrt{1/2 -\sqrt{\sqrt{5/1024 - \sqrt{5}/1024} + \sqrt{10}/16 + \sqrt{2}/64 + 1/8}} \approx 0{,}03925981578$
$\pi/160$ $\sqrt{1/2 -\sqrt{\sqrt{\sqrt{5/262144 - \sqrt{5}/262144} + \sqrt{10}/1024 + \sqrt{2}/1024 + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}01963369246$
$\pi/320$ $\sqrt{1/2 -\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5/17179869184 - \sqrt{5}/17179869184} + \sqrt{10}/262144 + \sqrt{2}/262144 + 1/32768} + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}009817319330$
$\pi/15$ $1/8 (\sqrt{2} \sqrt{5+\sqrt{5}} -\sqrt{3} (\sqrt{5}-1)) \approx 0{,}2079116908$
$\pi/30$ $\sqrt{15/32 - 3/32 \sqrt{5}} - \sqrt{5}/8 - 1/8 \approx 0{,}1045284632$
$\pi/60$ $\sqrt{-\sqrt{5/128 - \sqrt{5}/128} - \sqrt{15}/18 - \sqrt{3}/16 + 1/2} \approx 0{,}05233595631$
$\pi/120$ $\sqrt{1/2 -\sqrt{\sqrt{5/2048 - \sqrt{5}/2048} + \sqrt{15}/64 + \sqrt{3}/64 + 1/8}} \approx 0{,}02617694831$
$\pi/240$ $\sqrt{1/2 -\sqrt{\sqrt{\sqrt{5/524288 - \sqrt{5}/524288} + \sqrt{15}/1024 + \sqrt{3}/1024 + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}01308959559$
$\pi/480$ $\sqrt{1/2 -\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5/34359738368 - \sqrt{5}/34359738368} + \sqrt{15}/262144 + \sqrt{3}/262144 + 1/32768} + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}006544937981$
$\pi/960$ $\sqrt{1/2 -\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5/147573952589676412928 - \sqrt{5}/147573952589676412928} + \sqrt{15}/17179869184 + \sqrt{3}/17179869184 + 1/2147483648} + 1/32768} + 1/128} + 1/8}} \approx 0{,}003272486596$

Terme für den Kosinus x

Werte für cos x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x
$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 / \sqrt{1 + \tan^2 x} = \cot x / \sqrt{1 + \cot^2 x} = 1 / \sec x = \sqrt{\csc^2 x - 1} / \csc x$

Werte für cos x ausgedrückt durch den halben Winkel x/2
$\cos x = 1-2 \sin^2 x/2 = 2\cos^2 x/2 -1 = (1-\tan^2 x/2) / (1 + \tan^2 x/2) = (\cot^2 x/2 - 1) / (\cot^2 x/2 + 1) =$
$= (2 - \sec^2 x/2) / \sec^2 x/2 = (\csc^2 x/2 - 2) / \csc^2 x/2$

Werte for cos x ausgedrückt durch den doppelten Winkel 2x
$\cos x = \sqrt{1/2 (1 + \sqrt{1 - \sin^2 2x})} = 1/2 (\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x}) = \sqrt{(1 + \cos 2x) /2} =$
$= \sqrt{(1 + \sqrt{1 + \tan^2 2x}) / (2 \sqrt{1 + \tan^2 2x})}$
$= \sqrt{1/2 (1 + \tan^2 2x + \sqrt{1 + \tan^2 2x}) / (1 + \tan^2 2x)} =$
$= \sqrt{(\sqrt{1 + \cot^2 2x} + \cot 2x) / (2 \sqrt{1 + \cot^2 2x})} = \sqrt{(\sec 2x + 1) / (2 \sec 2x)}$

Werte für cos x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x mit mehreren Funktionen
$\cos x = \sin x / \tan x = \sin x \cot x = 1 / (\tan x \csc x) = \cot x / \csc x = (1 + \sin x) / (\sec x \tan x) =$
$= (1 - \sin x) / (\sec x - \tan x) = (\csc x - \sin x) \tan x = (\csc x - \sin x)/\cot x = \sin x \csc x / \sec x =$
$= \tan x \cot x / \sec x$

Werte für cos x ausgedrückt durch unterschiedliche Terme
$\cos x = \cos^2 x/2 \sin^2 x/2 = (\cot x/2 - \tan x/2) / (\cot x/2 + \tan x/2) = \sin x / \tan x/2 - 1$
$= \sin x \cot x/2 - 1 =$
$= 1 - \sin x \tan x/2 = 1 - \sin x / \cot x/2 = 1 / (1 + \tan x \tan x/2)$
$= \cot x \cot x/2 / (\cot x \cot x/2 + 1) =$
$= 1 / (\csc x \tan x/2) - 1 = 1 - \tan x/2 / \csc x = \cot x/2 / \csc x - 1 = 1 - 1 / (\csc x \cot x/2) =$
$= \sin 2x / (2 \sin x) = (1 + \cos 2x) / (2 \cos x) = \csc x / (2 \csc 2x) = \sqrt{1 + \sin 2x} - \sin x/2 =$
$= \sqrt{1 - \sin 2x} + \sin x/2 = (1 + \sin x) / \tan (45°+x/2) = (1 - \sin x) \tan (45°+x/2) =$
$= (1 + \sin x) \tan (45°-x/2) = (1 - \sin x) / \tan (45°-x/2) = (1 + \sin x) \cot (45°+x/2) =$
$= (1 - \sin x) / \cot (45°+x/2) = (1 + \sin x) / \cot (45°-x/2) = (1 - \sin x) \cot (45°-x/2) =$
$= (\sin (60°+x) - 1/2 \sin x) / (\sqrt{3}/2) = (\sin (60°-x) + 1/2 \sin x) / (\sqrt{3}/2)$
$= 2 (\cos (60°+x) + \sqrt{3}/2 \sin x) =$
$= 2 (\cos (60°-x) - \sqrt{3}/2 \sin x) = 2 / (\tan (45°+x/2) + \cot (45°+x/2))$
$= 2 / (\cot (45°-x/2) + \cot (45°+x/2)) =$
$= 2 / (\tan (45°+x/2) + \tan (45°-x/2)) = 2 \cos (45°+x/2) \cos (45°-x/2)$
$= 2 \sin (45°+x/2) \sin (45°-x/2) =$
$= \sin (30°+x) + \sin (30°-x) = (\cos (30°+x) + \cos (30°-x)) / \sqrt{3} = \cos (60°+x) + \cos (60°-x) =$
$= (\sin (60°+x) + \sin (60°-x)) / \sqrt{3}$

Kosinuswerte von speziellen Winkeln

0°	1		
3°	$1/16\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{5}-1)+2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}})$	3,75°	$1/2\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$
4,5°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}})$	5,625°	$1/2\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
6°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}+1))$	7,5°	$1/4\cdot(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}})$
9°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}+1)+2\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}})$	11,25°	$1/2\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
12°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1))$	13,5°	$1/8\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}})$
15°	$1/4\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)$	18°	$1/4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}$

21°	1/16·(√2·(√3+1)·(√5+1)+2·(√3-1)·√(5-√5))	22,5°	1/2·√(2+√2)
24°	1/8·(√2·√3·√(5-√5)+(√5+1))	27°	1/8·(√2·(√5-1)+2·√(5+√5))
30°	1/2·√3	31,5°	1/8·(√2·√(2+√2)·√(5-√5)+(√5+1)·√(2-√2))
33°	1/16·(-√2·(√3-1)·(√5-1)+2·(√3+1)·√(5+√5))	33,25°	1/2·√(2+√(2-√2))
36°	(1+√5)/4	37,5°	1/4·(√3·√(2-√2)+√(2+√2))
39°	1/16·(√2·(√3-1)·(√5+1)+2·(√3+1)·√(5-√5))	40,5°	1/8·(√2·√(2+√2)·√(5+√5)-(√5-1)·√(2-√2))
42°	1/8·(√2·√(5+√5)+√3·(√5-1))	45°	1/2·√2
48°	1/8·(√2·√3·√(5+√5)-(√5-1))	49,5°	1/8·(√2·√(2-√2)·√(5+√5)+(√5-1)·√(2+√2))
51°	1/16·(√2·(√3+1)·(√5+1)-2·(√3-1)·√(5-√5))	52,5°	1/4·(√3·√(2+√2)-√(2-√2))
54°	1/4·√2·√(5-√5)	56,25°	1/2·√(2-√(2-√2))
57°	1/16·(√2·(√3+1)·(√5-1)+2·(√3-1)·√(5+√5))	58,5°	1/8·(-√2·√(2-√2)·√(5-√5)+(√5+1)·√(2+√2))
60°	1/2	63°	1/8·(-√2·(√5-1)+2·√(5+√5))
66°	1/8·(-√2·√(5-√5)+√3·(√5+1))	67,5°	1/2·√(2-√2)
69°	1/16·(-√2·(√3-1)·(√5+1)+2·(√3+1)·√(5-√5))	72°	(-1+√5)/4
75°	1/4·√2·(√3-1)	76,5°	1/8·(√2·√(2+√2)·√(5-√5)-(√5+1)·√(2-√2))
78°	1/8·(√2·√(5+√5)-√3·(√5-1))	78,75°	1/2·√(2-√(2+√2))
81°	1/8·(√2·(√5+1)-2·√(5-√5))	82,5°	1/4·(-√3·√(2-√2)+√(2+√2))
84°	1/8·(√2·√3·√(5-√5)-(√5+1))	85,5°	1/8·(√2·√(2-√2)·√(5+√5)-(√5-1)·√(2+√2))
87°	1/16·(√2·(√3+1)·(√5-1)-2·(√3-1)·√(5+√5))	90°	0

Ist ein Kosinuswert eines Winkels x bekannt, so kann der Kosinus des halben Winkels mittels

cos x/2 = √((1+cos x)/2)

bestimmt werden.

Winkel	**Kosinuswert**
π/2	0
π/4	1/2 √2 ≈ 0,707106781
π/8	√(1/4 √2 + 1/2) ≈ 0,923879532
π/16	√(√(1/16 √2 + 1/8) + 1/2) ≈ 0,980785280
π/32	√(√(√(1/256 √2 + 1/128) + 1/8) + 1/2) ≈ 0,995184726
π/64	√(√(√(√(1/65536 √2 + 1/32768) + 1/128) + 1/8) + 1/2) ≈ 0,998795456
π/128	√(√(√(√(√(1/4294967296 √2 + 1/2147483648) + 1/32768) + 1/128) + 1/8) + 1/2) ≈ 0,999698818
π/256	√(√(√(√(√(√(1/18446744073709551616 √2 + 1/9223372036854775808) + 1/2147483648) + 1/32768) + 1/128) + 1/8) + 1/2) ≈ 0,999924701839
π/512	√(√(√(√(√(√(√(1/340282366920938463463374607431768211456 √2 + 1/170141183460469231731687303715884105728) + 1/9223372036854775808) + 1/2147483648) + 1/32768) + 1/128) + 1/8) + 1/2) ≈ 0,999981175282

π/3	1/2
π/6	1/2 √3 ≈ 0,866025403
π/12	1/4 (√6 + √2) ≈ 0,965925826
π/24	√(3/16 √2 + 3/8) + √(1/8 - 1/16 √2) ≈ 0,991444861
π/48	√(√(3/64 √2 + 3/32) + √(1/32 - 1/64 √2) + 1/2) ≈ 0,997858923
π/96	√(√(√(3/1024 √2 + 3/512) + √(1/512 - 1/1024 √2) + 1/8) + 1/2) ≈ 0,999464587
π/192	√(√(√(√(3/262144 √2 + 3/131072) + √(1/131072 - 1/262144 √2) + 1/128) + 1/8) + 1/2) ≈ 0,999866137909
π/384	√(√(√(√(√(3/17179869184 √2 + 3/8589934592) + √(1/8589934592 - 1/17179869184 √2) + 1/32768) + 1/128) + 1/8) + 1/2) ≈ 0,999966533917

π/5	1/4 + 1/4 √5 ≈ 0,809016994
π/10	√(1/8 √5 + 5/8) ≈ 0,951056516
π/20	√(5/16 - 1/16 √5) + 1/8 √10 + 1/8 √2 ≈ 0,987688340
π/40	√(√(5/64 - 1/64 √5) + 1/16 √10 + 1/16 √2 + 1/2) ≈ 0,996917333
π/80	√(√(√(5/1024 - 1/1024 √5) + 1/64 √10 + 1/64 √2 + 1/8) + 1/2) ≈ 0,999229036
π/160	√(√(√(√(5/262144 - 1/262144 √5) + 1/1024 √10 + 1/1024 √2 + 1/128) + 1/8) + 1/2) ≈ 0,999807240481
π/320	√(√(√(√(√(5/17179869184 - 1/17179869184 √5) + 1/262144 √10 + 1/262144 √2 + 1/32768) + 1/128) + 1/8) + 1/2) ≈ 0,999951808959

π/15	1/8·(√2·√3·√(5-√5)+(√5+1)) ≈ 0,913545457642
π/30	√(3/32 √5 + 15/32) + 1/8 √5 - 1/8) ≈ 0,978147600733
π/60	√(5/32 - 1/32 √5) + 1/8 √15 - 1/8 √3) ≈ 0,994521895368
π/120	√(√(5/128 - 1/128 √5) + 1/16 √15 - 1/16 √3 + 1/2) ≈ 0,998629534754
π/240	√(√(√(5/2048 - 1/2048 √5) + 1/64 √15 - 1/64 √3 + 1/8) + 1/2) ≈ 0,999657324975
π/480	√(√(√(5/524288 - 1/524288 √5) + 1/1024 √15 - 1/1024 √3 + 1/128) + 1/8) + 1/2) ≈ 0,999914327573

$\pi/960$ $\surd(\surd(\surd(\surd(5/34359738368 - 1/34359738368 \surd 5) + 1/262144 \surd 15 - 1/262144 \surd 3 + 1/32768) + 1/128) + 1/8) + 1/2) \approx 0{,}999978581663$

$\pi/1920$ $\surd(\surd(\surd(\surd(\surd(5/147573952589676412928 - 1/147573952589676412928 \surd 5) + 1/17179869184 \surd 15 - 1/17179869184 \surd 3 + 1/2147483648) + 1/32768) + 1/128) + 1/8) + 1/2) \approx 0{,}999994645401$

Terme für den Tangens x

Werte für tan x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x

$\tan x = \sin x / \surd(1 - \sin^2 x) = \surd(1 - \cos^2 x) / \cos x = 1 / \cot x = \surd(\sec^2 x - 1) = 1 / \surd(\csc^2 x - 1)$

Werte für tan x ausgedrückt durch den halben Winkel x/2

$\tan x = 2 \sin x/2 \surd(1 - \sin^2 x/2) / (1 - 2 \sin^2 x/2) = 2 \cos x/2 \surd(1 - \cos^2 x/2) / (2 \cos^2 x/2 - 1) =$
$= 2 \tan x/2 / (1 - \tan^2 x/2) = 2 \cot x/2 / (\cot^2 x/2 - 1) = 2 \surd(\sec^2 x/2 - 1) / (2 - \sec^2 x/2) =$
$= 2 \surd(\csc^2 x/2 - 1) / (\csc^2 x/2 - 2)$

Werte für tan x ausgedrückt durch den doppelten Winkel 2x

$\tan x = (\surd(1+\sin 2x) - \surd(1 - \sin 2x)) / (\surd(1 + \sin 2x) + \surd(1 - \sin 2x)) = \surd((1 - \cos 2x) / (1 + \cos 2x)) =$
$= (\surd(\tan^2 2x + 1) - 1) / \tan 2x = \surd(1 + \cot^2 2x) - \cot 2x = \surd((\sec 2x - 1) / (\sec 2x + 1)) =$
$= (\surd(\csc 2x +1) - \surd(\csc 2x - 1)) / (\surd(\csc 2x +1) + \surd(\csc 2x - 1))$

Werte für tan x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x mit mehreren Funktionen

$\tan x = \sin x / \cos x = \sin x \sec x = 1 / (\cos x \csc x) = \sec x / \csc x = \cos x / (\sin x \cot^2 x) =$
$= (\sec x - \cos x) / \sin x = \sin x \csc x / \cot x = \cos x \sec x / \cot x$

Werte für tan x ausgedrückt durch unterschiedliche Terme

$\tan x = 2 \sin x/2 \cos x/2 / (1 - 2 \sin^2 x/2) = 2 \sin x/2 \cos x/2 / (2 \cos^2 x/2 - 1) = 2 / (\cot x/2 - \tan x/2) =$
$= 2 \sin x/2 \cos x/2 / (\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2) = 2 \tan x/2 / (2 - \sec^2 x/2) = 2 \cot x/2 / (\csc^2 x/2 - 2)$

$\tan x = \sin 2x / (1 + \cos 2x) = (1 - \cos 2x) / \sin 2x = (1 - \cos 2x) \csc 2x = 1 / ((1 + \cos 2x) \csc 2x) =$
$= \surd((\tan 2x \csc 2x - 1) / (\tan 2x \csc 2x + 1)) = \surd((\csc 2x - \cot 2x) / (\csc 2x + \cot 2x)) = \cot x - 2 \cot 2x = 2 \tan x/2 \sec x / (1 + \tan^2 x/2) = 2 \sec x \cot x/2 / (1 + \cot^2 x/2) =$
$= (\surd(1 + \sin 2x) - \cos x) / (\surd(1 + \sin 2x) - \sin x/2) = (\cos x - \surd(1 - \sin 2x)) / (\sin x/2 + \surd(1 - \sin 2x)) = (\sin (30°+x) - \sin (30°-x)) / (\cos (30°+x) + \cos (30°-x)) =$
$= (\cos (30°-x) - \cos (30°+x)) / (\sin (30°+x) + \sin (30°-x)) =$
$= (\cos (60°-x) - \cos (60°+x)) / (\sin (60°+x) + \sin (60°-x)) = 1/2 (\tan (45°+x/2) - \tan (45°-x/2)) = \sin x/2 \cos x/2 / (\cos (45°+x/2) \cos (45°-x/2))$

Tangenswerte von speziellen Winkeln

x	tan x	x	tan x
0°	0		
3°	$-1/256\cdot(-8+\surd 2\cdot\surd(5-\surd 5)+\surd 3\cdot\surd 5+\surd 3)\cdot(\surd 2\cdot\surd 3\cdot\surd(5-\surd 5)+\surd 5+1)\cdot(24+8\cdot\surd 5)$		
3,75°	$2 \surd(2 + \surd 3) \surd(2 + \surd(2 + \surd 3)) - 2 \surd(2 + \surd 3) - 2 - \surd 3$		
4,5°	$(1 + \surd 5) (1/2 \surd 2 \surd(4 + \surd 2 \surd(5 + \surd 5)) - 1) - \surd(5 + 2 \surd 5)$		
5,625°	$\surd 2 \surd(2 + \surd 2) \surd(2 + \surd(2 + \surd 2)) - \surd 2 \surd(2 + \surd 2) - \surd 2 - 1$		
6°	$1/2\cdot(\surd 2\cdot\surd(5-\surd 5)-\surd 3\cdot(\surd 5-1))$	7,5°	$\surd 2-\surd 3+\surd 6-2$
9°	$1/4\cdot(-\surd 2\cdot(\surd 5+1)\cdot\surd(5+\surd 5)+4\cdot(\surd 5+1))$	12°	$(\surd(5+2\surd 5)-\surd 3)/(1+\surd(3\cdot(5+2\cdot\surd 5)))$
15°	$2-\surd 3 = (\surd 3-1)/(\surd 3+1)$	18°	$1/20\cdot(-\surd 2\cdot(\surd 5-1)\cdot\surd(5-\surd 5)+4\cdot\surd 2\cdot\surd(5-\surd 5))$
21°	$(\surd(5-2\cdot\surd 5)-2+\surd 3)/(1+(2-\surd 3)\cdot\surd(5-2\cdot\surd 5))$	22,5°	$\surd 2-1$
24°	$(\surd 3-\surd(5-2\cdot\surd 5))/(1+\surd(3\cdot(5-2\cdot\surd 5)))$	27°	$1/4\cdot(-\surd 2\cdot(\surd 5-1)\cdot\surd(5-\surd 5)+4\cdot(\surd 5-1))$
30°	$1/3\cdot\surd 3$		
33°	$(\surd(5-2\cdot\surd 5)+(2-\surd 3)\cdot\surd 5)/(\surd 5-(2-\surd 3)\cdot\surd(5-2\cdot\surd 5))$		
36°	$1/2\cdot(\surd 2\cdot\surd(5+\surd 5)-\surd 2\cdot\surd(5-\surd 5))$	37,5°	$-\surd 2+\surd 3+\surd 6-2$
39°	$(2+\surd 3-\surd(5-2\cdot\surd 5))/(1+(2+\surd 3)\cdot\surd(5-2\cdot\surd 5))$	42°	$1/2\cdot(-\surd 2\cdot\surd(5+\surd 5)+\surd 3\cdot(\surd 5+1))$
45°	1	48°	$(\surd 3+\surd(5+2\cdot\surd 5))/(\surd(3\cdot(5+2\cdot\surd 5))-1)$
51°	$(1+(2+\surd 3)\cdot\surd(5-2\cdot\surd 5))/(2+\surd 3-\surd(5-2\cdot\surd 5))$	52,5°	$-\surd 2-\surd 3+\surd 6+2$
54°	$1/20\cdot(-\surd 2\cdot(\surd 5-1)\cdot\surd(5-\surd 5)+8\cdot\surd 2\cdot\surd(5+\surd 5))$	57°	$(1-(2-\surd 3)\cdot\surd(1-2/\surd 5))/(2-\surd 3+\surd(1-2/\surd 5))$
60°	$\surd 3$	63°	$1/4\cdot(\surd 2\cdot(\surd 5-1)\cdot\surd(5-\surd 5)+4\cdot(\surd 5-1))$
66°	$1/2\cdot(\surd 2\cdot\surd(5-\surd 5)+\surd 3\cdot(\surd 5-1))$	67,5°	$1+\surd 2$
69°	$(1+(2-\surd 3)\cdot\surd(5-2\cdot\surd 5))/(\surd(5-2\cdot\surd 5)-2+\surd 3)$	72°	$\surd(5+2\cdot\surd 5)$
75°	$2+\surd 3$	78°	$1/2\cdot(\surd 2\cdot\surd(5+\surd 5)+\surd 3\cdot(\surd 5+1))$
81°	$1/4\cdot(\surd 2\cdot(\surd 5+1)\cdot\surd(5+\surd 5)+4\cdot(\surd 5+1))$	82,5°	$\surd 2+\surd 3+\surd 6+2$
84°	$(\surd 3+\surd(5-2\cdot\surd 5))/(\surd(3\cdot(5-2\cdot\surd 5))-1)$	87°	$(1+(2+\surd 3)\cdot\surd(5+2\cdot\surd 5))/(2+\surd 3-\surd(5+2\cdot\surd 5))$

Terme für den Kotangens x

Werte für cot x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x

$\cot x = \surd(1 - \sin^2 x) / \sin x = \cos x / \surd(1 - \cos^2 x) = 1 / \tan x = 1 / \surd(\sec^2 x - 1) = \surd(\csc^2 x - 1)$

Werte für cot x ausgedrückt durch den halben Winkel x/2

$\cot x = (1 - 2 \sin^2 x/2) / (2 \sin x/2 \surd(1 - \sin^2 x/2)) = (2 \cos^2 x/2 - 1) / (2 \cos x/2 \surd(1 - \cos^2 x/2)) =$
$= (1 - \tan^2 x/2) / (2 \tan x/2) = (\cot^2 x/2 - 1) / (2 \cot x/2) = (2-\sec^2 x/2) / (2 \surd(\sec^2 x/2 - 1)) =$
$= (\csc^2 x/2 - 2) / (2 \surd(\csc^2 x/2 - 1))$

Werte für cot x ausgedrückt durch den doppelten Winkel 2x

$\cot x = (\surd(1 + \sin 2x) + \surd(1 - \sin 2x)) / (\surd(1 + \sin 2x) - \surd(1 - \sin 2x)) = \surd((1+\cos 2x) / (1 - \cos 2x)) =$

$= (\sqrt{1 + \tan^2 2x} + 1) / \tan 2x = \sqrt{1 + \cot^2 2x} + \cot 2x = \sqrt{(\sec 2x + 1) / (\sec 2x - 1)} =$
$= (\sqrt{\csc 2x + 1} + \sqrt{\csc 2x - 1}) / (\sqrt{\csc 2x + 1} - \sqrt{\csc 2x - 1})$

Werte für cot x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x mit mehreren Funktionen

cot x $= \cos x / \sin x = 1 / (\sin x \sec x) = \cos x \csc x = \csc x / \sec x = \sin x / (\cos x \tan^2 x) =$
$= \sin x / (\sec x - \cos x) = \sin x \csc x / \tan x = \cos x \sec x / \tan x$

Werte für cot x ausgedrückt durch unterschiedliche Terme

cot x $= (1 - 2 \sin^2 x/2) / (2 \sin x/2 \cos x/2) = (2 \cos^2 x/2 - 1) / (2 \sin x/2 \cos x/2) =$
$= (\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2) / (2 \sin x/2 \cos x/2) = 1/2 (\cot x/2 - \tan x/2) = (2 - \sec^2 x/2) / (2 \tan x/2) = (\csc^2 x/2 - 2) / (2 \cot x/2) =$
$= (1 + \cos 2x) / \sin 2x = \sin 2x / (1 - \cos 2x) = 1 / ((1 - \cos 2x) \csc 2x) = (1 + \cos 2x) \csc 2x =$
$= \sqrt{(\tan 2x \csc 2x + 1) / (\tan 2x \csc 2x - 1)} = \sqrt{(\csc 2x + \cot 2x) / (\csc 2x - \cot 2x)} =$
$= 1 / (\cot x - 2 \cot 2x) = (1 + \tan^2 x/2) / (2 \tan x/2 \sec x) = (1 + \cot^2 x/2) / (2 \sec x \cot x/2) =$
$= (\sqrt{1 + \sin 2x} - \sin x/2) / (\sqrt{1 + \sin 2x} - \cos x) =$
$= ((\cos (30°+x) + \cos (30°-x)) / ((\sin (30°+x) - \sin (30°-x)) =$
$= ((\sin (60°+x) + \sin (60°-x)) / ((\cos (60°-x) - \cos (60°+x)) = 2 / (\tan (45°+x/2) - \tan (45°-x/2)) = 2 \cot (45°+x/2) \cot (45°-x/2) / (\cot (45°-x/2) - \cot (45°+x/2)) =$
$= \cos (45°+x/2) \cos (45°-x/2) / (\sin x/2 \cos x/2)$

Kotangenswerte von speziellen Winkeln

x	cot x	x	cot x
90°	0		
87°	$-1/256\cdot(-8+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1)\cdot(24+8\cdot\sqrt{5})$		
84°	$1/2\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}-\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}-1))$	82,5°	$\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-2$
81°	$1/4\cdot(-\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+4\cdot(\sqrt{5}+1))$	78°	$(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{3})/(1+\sqrt{3\cdot(5+2\cdot\sqrt{5})})$
75°	$2-\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)/(\sqrt{3}+1)$	72°	$1/20\cdot(-\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}})$
69°	$(\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}-2+\sqrt{3})/(1+(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}})$	67,5°	$\sqrt{2}-1$
66°	$(\sqrt{3}-\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}})/(1+\sqrt{3\cdot(5-2\cdot\sqrt{5})})$	63°	$1/4\cdot(-\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+4\cdot(\sqrt{5}-1))$
60°	$1/3\cdot\sqrt{3}$		
57°	$(\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}+(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{5})/(\sqrt{5}-(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}})$		
54°	$1/2\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}})$	52,5°	$-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-2$
51°	$(2+\sqrt{3}-\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}})/(1+(2+\sqrt{3})\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}})$	48°	$1/2\cdot(-\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}+1))$
45°	1	42°	$(\sqrt{3}+\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}})/(\sqrt{3\cdot(5+2\cdot\sqrt{5})}-1)$
39°	$(1+(2+\sqrt{3})\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}})/(2+\sqrt{3}-\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}})$	37,5°	$-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}+2$
36°	$1/20\cdot(-\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+8\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}})$	33°	$(1-(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{1-2/\sqrt{5}})/(2-\sqrt{3}+\sqrt{1-2/\sqrt{5}})$
30°	$\sqrt{3}$	27°	$1/4\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+4\cdot(\sqrt{5}-1))$
24°	$1/2\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}-1))$	22,5°	$1+\sqrt{2}$
21°	$(1+(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}})/(\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}-2+\sqrt{3})$	18°	$\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}$
15°	$2+\sqrt{3}$	12°	$1/2\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}+1))$
9°	$1/4\cdot(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+4\cdot(\sqrt{5}+1))$	7,5°	$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2$
6°	$(\sqrt{3}+\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}})/(\sqrt{3\cdot(5-2\cdot\sqrt{5})}-1)$	3°	$(1+(2+\sqrt{3})\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}})/(2+\sqrt{3}-\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}})$
5,625°	$\sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2} + 1$		
4,5°	$(1 + \sqrt{5}) (1/2 \sqrt{2} \sqrt{4 + \sqrt{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}}} + 1) + \sqrt{5 + 2 \sqrt{5}}$		
3,75°	$2 \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + 2 \sqrt{2 + \sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3}$		

Terme für den Sekans x

Werte für sec x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x

sec x $= 1 / \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 / \cos x = \sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{1 + \cot^2 x} / \cot x = \csc x / \sqrt{\csc^2 x - 1}$

Werte für sec x ausgedrückt durch den halben Winkel x/2

sec x $= 1/ (1 - 2 \sin^2 x/2) = 1 / (2 \cos^2 x/2 - 1) = (1 + \tan^2 x/2) / (1 - \tan^2 x/2) = (\cot^2 x/2 + 1) / (\cot^2 x/2 - 1) = \sec^2 x/2 / (2 - \sec^2 x/2) = \csc^2 x/2 / (\csc^2 x/2 - 2)$

Werte für sec x ausgedrückt durch den doppelten Winkel 2x

sec x $= 2 / (\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x}) = \sqrt{2 / (1 + \cos 2x)} = \sqrt{2 \sec 2x / (\sec 2x + 1)} =$
$= \sqrt{2 (1 + \tan^2 2x - \sqrt{1 + \tan^2 2x})} / \tan 2x = \sqrt{2 (1 + \cot^2 2x - \cot 2x \sqrt{1 + \cot^2 2x})} =$
$= \sqrt{2 \csc 2x (\csc 2x - \sqrt{\csc^2 2x - 1})}$

Werte für sec x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x mit mehreren Funktionen

sec x $= \tan x / \sin x = 1 / (\sin x \cot x) = \tan x \csc x = \csc x / \cot x = 1 / (\sin x \sqrt{\csc^2 x - 1}) =$
$= \tan x (\csc x - 1) / (1 - \sin x) = 1 / ((\csc x - \sin x) \tan x) = \cot x / (\csc x - \sin x) = \sin x \csc x / \cos x$

Werte für sec x ausgedrückt durch unterschiedliche Terme

sec x $= 1 / (\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2) = (\cot x/2 + \tan x/2) / (\cot x/2 - \tan x/2) = \tan x/2 / (\sin x - \tan x/2)$
$= 1 / (\sin x \cot x/2 - 1) = 1 / (1 - \sin x \tan x/2) = \cot x/2 / (\cot x/2 - \sin x) = 1 + \tan x \tan x/2$
$= (\cot x \cot x/2 + 1) / (\cot x \cot x/2) = \csc x \tan x/2 - 1 = \csc x / (\csc x - \tan x/2) =$
$= \csc x / (\cot x/2 - \csc x) = \csc x \cot x/2 / (\csc x \cot x/2 - 1) = 2 \sin x / \sin 2x = 2 \cos x / (1 + \cos 2x) = 2 \csc 2x / \csc x = 1 / (\sqrt{1 + \sin 2x} - \sin x/2) = 1 / (\sqrt{1 - \sin 2x} + \sin x/2) = \tan (45°+x/2) / (1 + \sin x) = 1 / ((1 + \sin x) \tan (45°+x/2)) = \tan (45°-x/2) / (1 - \sin x) = 1 / ((1 + \sin x) \cot (45°+x/2)) = \cot (45°+x/2) / (1 - \sin x) = \cot (45°-x/2) / (1 + \sin x) = 1 / ((1 - \sin x) \cot (45°-x/2)) = 1/2 \sqrt{3} / (\sin (60°+x) - 1/2 \sin x) = 1 / (2 \cos (60°+x) - \sqrt{3} \sin x) = 1/2$ (tan

$(45°+x/2) + \cot (45°+x/2)) = 1/2 (\cot (45°-x/2) + \cot (45°+x/2)) = 1 / (2 \sin (45°+x2) \sin (45°-x/2)) = 1 / ((\sin (30°+x) + \sin (30°-x)) = \sqrt{3} / ((\cos (30°+x) + \cos (30°-x))$

Terme für den Kosekans x

Werte für csc x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x

$\csc x = 1 / \sin x = 1 / \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 + \tan^2 x} / \tan x = \sqrt{1 + \cot^2 x} = \sec x / \sqrt{\sec^2 x - 1}$

Werte für csc x ausgedrückt durch den halben Winkel x/2

$\csc x = 1 / (2 \sin x/2 \sqrt{1 - \sin^2 x/2}) = 1 / (2 \cos x/2 \sqrt{1 - \cos^2 x/2}) = (1 + \tan^2 x/2) / (2 \tan x/2) =$
$= (1 + \cot^2 x/2) / (2 \cot x/2) = \sec^2 x/2 / (2 \sqrt{\sec^2 x/2 - 1})) = \csc^2 x/2 / (2 \sqrt{\csc^2 x/2 - 1})$

Werte für csc x ausgedrückt durch den doppelten Winkel 2x

$\csc x = 2 / (\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}) = \sqrt{2 / (1 - \cos 2x)} = \sqrt{2 \sec 2x / (\sec 2x - 1)} =$
$= \sqrt{2 (1 + \tan^2 2x + \sqrt{1 + \tan^2 2x})} / \tan 2x = \sqrt{2 (1 + \cot^2 2x + \cot 2x \sqrt{1 + \cot^2 2x})} =$
$= 2 \sqrt{\csc 2x} / (\sqrt{\csc 2x + 1} - \sqrt{\csc 2x - 1})$

Werte für csc x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x mit mehreren Funktionen

$\csc x = 1/(\cos x \tan x) = \cot x/\cos x = \sec x/\tan x = 1/(\cos x \sqrt{\sec^2 x - 1}) = \tan x / (\sec x - \cos x) =$
$= 1 / ((\sec x - \cos x) \cot x)$

Werte für csc x ausgedrückt durch unterschiedliche Terme

$\csc x = 1 / (2 \sin x/2 \cos x/2) = 1 / (1 - (\sin x/2 - \cos x/2)^2) = \tan x/2 / (2 \sin^2 x/2) = \sec x/2 / (2 \sin x/2) = 1 / (2 \cos^2 x/2 \tan x/2) = \cot x/2 / (2 \cos^2 x/2) = \csc x/2 / (2 \cos x/2) = 1/2 (\tan x/2 + \cot x/2) = \sec^2 x/2 / (2 \tan x/2) = 1/2 (\cot x/2 \sec^2 x/2) = \sec x/2 \csc x/2 / 2 =$
$= (\sec^2 x/2 + \csc^2 x/2) / (2 \sec x/2 \csc x/2) = 1 / (\sqrt{1 + \sin 2x} - \cos x) = 1 / (\cos x - \sqrt{1 - \sin 2x}) = 1 / \sqrt{\cos^2 x - \cos 2x} = 1 / (\tan x/2 (1 + \cos x)) = \tan x/2 / (1 - \cos x) = \cot x/2 - \cot x$
$= \tan x/2 + \cot x = 1 - \tan (45°+x/2) / \cos x = \sqrt{3} / (\sin (30°+x) - \sin (30°-x)) =$
$= 1 / (\cos (30°-x) - \cos (30°+x)) = 1 / (2 (\sin (60°+x) - 1/2 \sqrt{3} \cos x)) = 1/2 \sqrt{3} / (1/2 \cos x - \cos (60°+x)) = 1 / (2 \sin^2 (45°+x/2) - 1) = (1 + \tan^2 (45°-x/2)) / (1 - \tan^2 (45°-x/2)) =$
$= (\cot^2 (45°-x/2) + 1) / (\cot^2 (45°-x/2) - 1) =$
$= (\tan (45°+x/2) + \tan (45°-x/2)) / (\tan (45°+x/2) - \tan (45°-x/2))$

Sekanswerte und Kosekanswerte von speziellen Winkeln

x	**sec x**	
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}$
36°	$\pi/5$	$\sqrt{5} - 1$
30°	$\pi/6$	$2/3 \sqrt{3}$
22,5°	$\pi/8$	$\sqrt{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$
18°	$\pi/10$	$1/5 \sqrt{50 - 10 \sqrt{5}}$
15°	$\pi/12$	$\sqrt{6} - \sqrt{2} = 2 \sqrt{2 - \sqrt{3}}$
12°	$\pi/15$	$\sqrt{15 - 6 \sqrt{5}} - \sqrt{5} + 2$
11,25°	$\pi/16$	$\sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
9°	$\pi/20$	$(\sqrt{5} + 1) (1/2 \sqrt{2} \sqrt{4 - \sqrt{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}}})$
7,5°	$\pi/24$	$2 \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$
6°	$\pi/30$	$\sqrt{3} - \sqrt{5 - 2 \sqrt{5}}$
5,625°	$\pi/32$	$\sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$
4,5°	$\pi/40$	$(\sqrt{5} + 1) (1/2 \sqrt{2} \sqrt{4 + \sqrt{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}}}) (1/2 \sqrt{2} \sqrt{4 - \sqrt{2} \sqrt{4 + \sqrt{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}}}})$
3,75°	$\pi/48$	$2 \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$
	csc x	
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}$
36°	$\pi/5$	$1/5 \sqrt{50 + 10 \sqrt{5}}$
30°	$\pi/6$	2
22,5°	$\pi/8$	$\sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$
18°	$\pi/10$	$1 + \sqrt{5}$
15°	$\pi/12$	$\sqrt{6} + \sqrt{2} = 2 \sqrt{2 + \sqrt{3}}$
12°	$\pi/15$	$\sqrt{3} + \sqrt{5 + 2 \sqrt{5}}$
11,25°	$\pi/16$	$\sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
9°	$\pi/20$	$(\sqrt{5} + 1) (1/2 \sqrt{2} \sqrt{4 + \sqrt{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}}})$
7,5°	$\pi/24$	$2 \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$
6°	$\pi/30$	$\sqrt{15 + 6 \sqrt{5}} + \sqrt{5} + 2$
5,625°	$\pi/32$	$\sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$
4,5°	$\pi/40$	$(\sqrt{5} + 1) (1/2 \sqrt{2} \sqrt{4 + \sqrt{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}}}) (1/2 \sqrt{2} \sqrt{4 + \sqrt{2} \sqrt{4 + \sqrt{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}}}})$
3,75°	$\pi/48$	$2 \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$

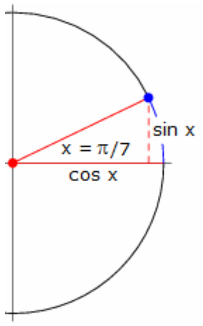
Algebraische trigonometrische Terme

Die Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte der vorhergehenden Seiten sind algebraisch, d.h. Lösungen von Polynomen. Zum Beispiel:

sin(30°)	ist Nullstelle von $y = 2x - 1$
sin(45°)	ist Nullstelle von $y = 2x^2 - 1$
sin(60°)	ist Nullstelle von $y = 4x^2 - 3$
sin(18°)	ist Nullstelle von $y = 4x^2 + 2x - 1$

sin(54°) ist Nullstelle von $y = 4x^2 - 2x - 1$
sin(22,5°) ist Nullstelle von $y = 8x^4 - 8x^2 + 1$
sin(67,5°) ist Nullstelle von $y = 8x^4 - 8x^2 + 1$
sin(15°) ist Nullstelle von $y = 16x^4 - 16x^2 + 1$
sin(75°) ist Nullstelle von $y = 16x^4 - 16x^2 + 1$
sin(6°) st Nullstelle von $y = 16x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 8x + 1$
sin(42°) ist Nullstelle von $y = 16x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 8x + 1$
sin(66°) ist Nullstelle von $y = 16x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 8x + 1$
sin(78°) ist Nullstelle von $y = 16x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 8x + 1$
tan(45°) ist Nullstelle von $y = x - 1$
tan(30°) ist Nullstelle von $y = 3x^2 - 1$
tan(60°) ist Nullstelle von $y = x^2 - 3$
tan(15°) ist Nullstelle von $y = x^2 - 4x + 1$
tan(22,5°) ist Nullstelle von $y = x^2 + 2x - 1$
tan(67,5°) ist Nullstelle von $y = x^2 - 2x - 1$
tan(75°) ist Nullstelle von $y = x^2 - 4x + 1$
tan(7,5°) ist Nullstelle von $y = x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 8x + 1$
tan(37,5°) ist Nullstelle von $y = x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 8x + 1$
tan(52,5°) ist Nullstelle von $y = x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1$
tan(82,5°) ist Nullstelle von $y = x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1$

Außerdem gilt: Ist sin(x) bzw. cos(x) algebraisch, dann auch sin(q·x) bzw. cos(q·x) für rationales q.



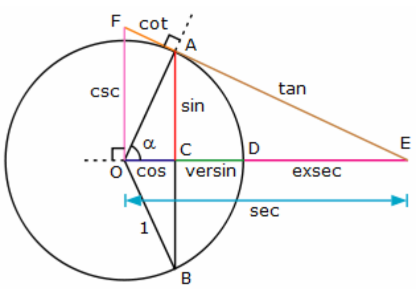
Trigonometrische Werte von π/7

Der Sinus bzw. Kosinus eines Winkels von π/7 kann nicht mehr explizit angegeben werden, da das Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.
Die Sinus- und Kosinuswerte können aber als Wurzeln von Polynomen beschrieben werden. Dabei bedeutet $(\ )_n$ die n.te Lösung des Polynoms.

$\cos \pi/7 = (8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)_3$ $\cot \pi/7 = (7x^6 + 35x^4 + 21x^2 - 1)_6$
$\sin \pi/7 = (64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7)_4$ $\tan \pi/7 = (x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7)_4$
$\sec \pi/7 = (x^3 - 4x^2 - 4x + 8)_2$ $\csc \pi/7 = (7x^6 - 56x^4 + 112x^2 - 64)_6$
$\cos 2\pi/7 = (8x^3 + 4x^2 - 4x + 1)_3$ $\cot 2\pi/7 = (7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1)_5$
$\sin 2\pi/7 = (64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7)_5$ $\tan 2\pi/7 = (x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7)_5$
$\sec \pi/7 = (x^3 + 4x^2 - 4x + 8)_3$ $\csc \pi/7 = (7x^6 - 56x^4 + 112x^2 - 64)_5$
$\cos 3\pi/7 = (8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)_2$ $\cot 3\pi/7 = (7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1)_4$
$\sin 3\pi/7 = (64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7)_6$ $\tan 3\pi/7 = (x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7)_6$
$\sec \pi/7 = (x^3 - 4x^2 - 4x + 8)_3$ $\csc \pi/7 = (7x^6 - 56x^4 + 112x^2 - 64)_4$

Trigonometrische Werte von π/9

Der Sinus bzw. Kosinus eines Winkels von π/9 kann nicht mehr allein durch Addition, Multiplikation und Quadratwurzelziehen explizit angegeben werden, da das Neuneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.
Die Sinus- und Kosinuswerte können aber als Wurzeln von Polynomen beschrieben werden.
Ausgehend von der Beziehung $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
und dem Einsetzen von $\alpha = \pi/9$ und $x = \sin \alpha$ wird $x^3 - 3/4x = -1/8 \sqrt{3}$
Damit wird für den Sinus
$\sin \pi/9 = \sqrt[3]{-\sqrt{3} / 16 + \sqrt{-1/256}} + \sqrt[3]{-\sqrt{3} / 16 - \sqrt{-1/256}} = 2^{-4/3} (\sqrt[3]{i - \sqrt{3}} - \sqrt[3]{i + \sqrt{3}}) = 0{,}34202\ldots$
und analog für den Kosinus
$\cos \pi/9 = 2^{-4/3} (\sqrt[3]{1 + i \sqrt{3}} - \sqrt[3]{1 - i \sqrt{3}}) = 0{,}93969\ldots$
Aus dem Wurzelsatz von Vieta ergibt sich außerdem
$\sin \pi/9 \sin 2\pi/9 \sin 4\pi/9 = 1/8 \sqrt{3}$
$\cos \pi/9 \cos 2\pi/9 \cos 4\pi/9 = 1/8 = \cos 20° \cos 40° \cos 60°$; Morries Gesetz
$\tan \pi/9 \tan 2\pi/9 \tan 4\pi/9 = \sqrt{3}$



Spezielle trigonometrische Funktionen (2)

Vor allem in älterer Fachliteratur werden außer den sechs trigonometrischen Funktionen Sinus sin, Kosinus cos, Tangens tan, Kotangens cot, Sekans sec und Kosekans csc weitere, selten genutzte Beziehungen verwendet.

Sinus versus
versin x = 1 - cos x = 2 sin² x/2
Der Sinus versus entspricht dem Kreisabschnitt CD in der Darstellung.

Kosinus versus
coversin x = 1 - sin x = versin (π/2 - x)

Halbierter Sinus versus
haversin x = 1/2 versin x

Halbierter Kosinus versus
hacoversin x = 1/2 coversin x = sin² (π/4 - x/2)

Exsekans exsec x = sec x - 1
Der Exsekans entspricht dem äußeren Abschnitt der Sekante.
Exkosekans excsc x = csc x - 1 = exsec (π/2 - x)

Terme für den Sinus versus x
Werte für versin x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x
$\text{versin } x = 1 - \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 - \cos x = (\sqrt{1 + \tan^2 x} - 1) / \sqrt{1 + \tan^2 x} = (\sec x - 1) / \sec x =$
$= (\sqrt{1 + \cot^2 x} - \cot x) / \sqrt{1 + \cot^2 x} = (\csc x - \sqrt{\csc^2 x - 1}) / \csc x$
Werte für versin x ausgedrückt durch den halben Winkel x/2
$\text{versin } x = 2 \sin^2 x/2 = 2 - 2 \cos^2 x/2 = 2 \tan^2 x/2 / (1 + \tan^2 x/2) = 2 / (\cot^2 x/2 + 1) =$
$= 2 (\sec^2 x/2 - 1) / \sec^2 x/2 = 2 / \csc^2 x/2$
Werte für versin x ausgedrückt durch unterschiedliche Terme
$\text{versin } x = (\tan x - \sin x) / \tan x = 1 - \sin x \cot x = (\tan x \csc x - 1) / (\tan x \csc x) = (\csc x - \cot x) / \csc x = (\sin x - 1/2 \sin 2x) / \sin x = 1 - \cos^2 x/2 + \sin^2 x/2$

Terme für den Kosinus versus x
Werte für coversin x ausgedrückt durch den einfachen Winkel x
$\text{coversin } x = 1 - \sin x = 1 - \sqrt{1 - \cos^2 x} = (\sqrt{1 + \tan^2 x} - \tan x) / \sqrt{1 + \tan^2 x} =$
$= (\sqrt{1 + \cot^2 x} - 1) / \sqrt{1 + \cot^2 x} = (\sec x - \sqrt{\sec^2 x - 1}) / \sec x = (\csc x - 1) / \csc x$
Werte für coversin x ausgedrückt durch den halben Winkel x/2
$\text{coversin } x = 1 - 2 \sin x/2 \sqrt{1 - \sin^2 x/2} = 1 - 2 \cos x/2 \sqrt{1 - \cos^2 x/2} = (1 - \tan x/2)^2 / (1 + \tan^2 x/2)$
$= (1 - \cot x/2)^2 / (1 + \cot^2 x/2) = (\sec^2 x/2 - 2 \sqrt{\sec^2 x/2 - 1}) / \sec^2 x/2 =$
$= (\csc^2 x/2 - 2 \sqrt{\csc^2 x/2 - 1}) / \csc^2 x/2$
Werte für coversin x ausgedrückt durch unterschiedliche Terme
$\text{coversin } x = 1 - \cos x \tan x = (\cot x - \cos x) / \cot x = (\sec x - \tan x) / \sec x = 1 - 2 \sin x/2 \cos x/2 =$
$= 2 \sin^2 (45°-x/2) = 2 / (\tan^2 (45°+x/2) + 1)$

Trigonometrische Terme mit 30°
Trigonometrische Terme mit einem Winkel von 30°:
$\sin (30°+x) = 1/2 (\cos x + \sin x \sqrt{3})$
$\sin (30°-x) = 1/2 (\cos x - \sin x \sqrt{3})$
$\cos (30°+x) = 1/2 (\cos x \sqrt{3} - \sin x)$
$\cos (30°-x) = 1/2 (\cos x \sqrt{3} + \sin x)$
$\tan (30°+x) = (\cot x + \sqrt{3}) / (\cot x \sqrt{3} - 1) = (1 + \sqrt{3} \tan x) / (\sqrt{3} - \tan x)$
$\tan (30°-x) = (\cot x - \sqrt{3}) / (\cot x \sqrt{3} + 1) = (1 - \sqrt{3} \tan x) / (\sqrt{3} + \tan x)$
$\cot (30°+x) = (\sqrt{3} \cot x - 1) / (\cot x + \sqrt{3}) = (\sqrt{3} - \tan x) / (1 + \sqrt{3} \tan x)$
$\cot (30°-x) = (\sqrt{3} \cot x + 1) / (\cot x - \sqrt{3}) = (\sqrt{3} + \tan x) / (1 - \sqrt{3} \tan x)$
$\sec (30°+x) = 2 \csc x \sec x / (\csc x \sqrt{3} - \sec x)$
$\sec (30°-x) = 2 \csc x \sec x / (\csc x \sqrt{3} + \sec x)$
$\csc (30°+x) = 2 \csc x \sec x / (\csc x + \sqrt{3} \sec x)$
$\csc (30°-x) = 2 \csc x \sec x / (\csc x - \sqrt{3} \sec x)$

Weitere Formeln ergeben sich aus den Gleichungen für "trigonometrische Terme mit 60°", wenn man beachtet, dass für
Funktion 30°+x = Cofunktion 60°-x   Funktion 30°-x = Cofunktion 60°+x
zu substituieren sind.

Trigonometrische Terme mit 45°
Trigonometrische Terme mit einem Winkel von 45°:
$\sin (45°+x) = 1/2 \sqrt{2} (\cos x + \sin x)$ $\sin (45°-x) = 1/2 \sqrt{2} (\cos x - \sin x)$
$\cos (45°+x) = 1/2 \sqrt{2} (\cos x - \sin x)$ $\cos (45°-x) = 1/2 \sqrt{2} (\cos x + \sin x)$
$\tan (45°+x) = (\cos x + \sin x)/(\cos x - \sin x)$ $\tan (45°-x) = (\cos x - \sin x) / (\cos x + \sin x)$
$\cot (45°+x) = \tan (45°-x)$ $\cot (45°-x) = \tan (45°+x)$
$\sec (45°+x) = 2 / (\sqrt{2} (\cos x - \sin x))$ $\sec (45°-x) = 2 / (\sqrt{2} (\cos x + \sin x))$
$\csc (45°+x) = 2 / (\sqrt{2} (\cos x + \sin x))$ $\csc (45°-x) = 2 / (\sqrt{2} (\cos x - \sin x))$

$\sin (45°+x) + \sin (45°-x) = \sqrt{2} \cos x$ $\sin (45°+x) - \sin (45°-x) = \sqrt{2} \sin x$
$\sin (45°+x) + \cos (45°-x) = \sqrt{2} (\sin x + \cos x)$ $\cos (45°+x) + \cos (45°-x) = \sqrt{2} \cos x$
$\cos (45°+x) - \cos (45°-x) = \sqrt{2} \sin x$ $\tan (45°+x) + \tan (45°-x) = 2 \sec 2x$
$\tan (45°+x) - \tan (45°-x) = 2 \tan 2x$
$\cot (45°+x) + \cot (45°-x) = \tan (45°-x) + \tan (45°+x)$
$\cot (45°+x) - \cot (45°-x) = \tan (45°-x) - \tan (45°+x)$
$\sec (45°+x) + \sec (45°-x) = 2 \sqrt{2} \cos x \sec 2x$ $\sec (45°+x) - \sec (45°-x) = 2 \sqrt{2} \sin x \sec 2x$
$\csc (45°+x) + \csc (45°-x) = 2 \sqrt{2} \cos x \sec 2x$ $\csc (45°+x) - \csc (45°-x) = -2 \sqrt{2} \sin x \sec 2x$

$\sin (45°+x) \sin (45°-x) = 1/2 - \sin^2 x$ $\cos (45°+x) \cos (45°-x) = 1/2 - \sin^2 x$
$\sin (45°+x) / \sin (45°-x) = \tan (45°+x)$ $\cos (45°+x) / \cos (45°-x) = \tan (45°-x)$

$\tan(45°+x) / \tan(45°-x) = (1 + \sin 2x) / (1 - \sin 2x)$
$\cot x \tan(45°+x) = (1 + \cot x) / (1 - \tan x)$ $\cot x \tan(45°-x) = (\cot x - 1) / (1 + \tan x)$
$\tan x \tan(45°+x) = (\tan x + 1) / (\cot x - 1)$ $\tan x \tan(45°-x) = (1 - \tan x) / (\cot x + 1)$

$\sqrt{2} \sin x \sin(45°+x) = (1 + \sin 2x - \cos 2x) /2$
$\sqrt{2} \sin x \sin(45°-x) = (-1 + \sin 2x + \cos 2x) /2$
$\sqrt{2} \sin(45°+x) / \sin x = 1 + \cot x$
$\sqrt{2} \sin(45°-x) / \sin x = \cot x - 1$
$2 \sin(45°+x) \sin(45°-x) / \sin^2 x = \cot^2 x - 1$
$\sqrt{2} \cos x \sin(45°+x) = (1 + \sin 2x + \cos 2x) /2$
$\sqrt{2} \cos x \sin(45°+x) = (1 - \sin 2x + \cos 2x) /2$
$\sqrt{2} \sin(45°+x) / \cos x = 1 + \tan x$
$\sqrt{2} \sin(45°-x) / \cos x = 1 - \tan x$
$2 \sin(45°+x) \sin(45°-x) / \cos^2 x = 1 - \tan^2 x$

Trigonometrische Terme mit 45°

Trigonometrische Terme mit einem Winkel von 45°:
$\sqrt{2} \sin((45°+x)/2) \cos((45°-x)/2) = (1 + \sqrt{2} \sin x)/2$
$\sqrt{2} \sin((45°-x)/2) \cos((45°+x)/2) = (1 - \sqrt{2} \sin x)/2$
$\sqrt{2} \cos((45°+x)/2) \cos((45°-x)/2) = (1 - \sqrt{2} \cos x)/2$
$\sqrt{2} \sin((45°+x)/2) \sin((45°-x)/2) = (\sqrt{2} \cos x - 1)/2$
$\tan((45°+x)/2) \cot((45°-x)/2) = (1 + \sqrt{2} \sin x) / (1 - \sqrt{2} \sin x)$
$\cot((45°+x)/2) \cot((45°-x)/2) = (1 + \sqrt{2} \cos x) / (\sqrt{2} \cos x - 1)$
$\tan((45°+x)/2) = (1 + \sqrt{2} \sin x) / (1 + \sqrt{2} \cos x)$
$\cot((45°-x)/2) = (1 + \sqrt{2} \sin x) / (1 - \sqrt{2} \cos x)$
$\tan((45°-x)/2) = (1 - \sqrt{2} \sin x) / (1 + \sqrt{2} \cos x)$
$\cot((45°+x)/2) = (1 - \sqrt{2} \sin x) / (\sqrt{2} \cos x - 1)$

$\sin^2(45°+x) = \cos^2(45° - x) = (1 + \sin 2x)/2$
$\sin^2(45°-x) = \cos^2(45° + x) = (1 - \sin 2x)/2$
$\tan^2(45°+x) = \cot^2(45° - x) = (1 + \sin 2x) / (1 - \sin 2x)$
$\tan^2(45°-x) = \cot^2(45° + x) = (1 - \sin 2x) / (1 + \sin 2x)$
$(\tan(45°+x) - 1) / (\tan(45°+x) + 1) = \tan x$ $(\tan^2(45°+x) - 1) / (\tan^2(45°+x) + 1) = \sin 2x$
$\sin^2(45°+x) - \sin^2(45°-x) = \sin 2x$
$\cos^2(45°-x) - \cos^2(45°+x) = \sin 2x$
$\tan^2(45°+x) - \tan^2(45°-x) = 4 \sec 2x \tan 2x$

$(\sin(45°+x) + \sin(45°-x)) / (\sin(45°+x) - \sin(45°-x)) = \cot x$
$(\cos(45°+x) + \cos(45°-x)) / (\cos(45°-x) - \cos(45°+x)) = \cot x$
$\sin(45°+x/2) = \cos(45°-x/2) = \sqrt{(1 + \sin x) / 2} = (\cos x/2 + \sin x/2) / \sqrt{2}$
$\sin(45°-x/2) = \cos(45°+x/2) = \sqrt{(1 - \sin x) / 2} = (\cos x/2 - \sin x/2) / \sqrt{2}$
$\tan(45°+x/2) = \cot(45°-x/2) = \sqrt{(1 + \sin x) / (1 - \sin x)} = (1 + \sin x) / \cos x = \cos x / (1 - \sin x)$
$\tan(45°-x/2) = \cot(45°+x/2) = \sqrt{(1 - \sin x) / (1 + \sin x)} = (1 - \sin x) / \cos x = \cos x / (1 + \sin x)$

Trigonometrische Terme mit 60°

Trigonometrische Terme mit einem Winkel von 60°:
$\sin(60°+x) = 1/2 (\sqrt{3} \cos x + \sin x)$
$\cos(60°+x) = 1/2 (\cos x - \sqrt{3} \sin x)$
$\tan(60°+x) = (\sqrt{3} \cot x + 1) / (\cot x - \sqrt{3})$
$\cot(60°+x) = (\cot x - \sqrt{3}) / (\sqrt{3} \cot x + 1)$
$\sec(60°+x) = 2 \csc x \operatorname{sex} / (\csc x - \sqrt{3} \sec x)$
$\csc(60°+x) = 2 \csc x \operatorname{sex} / (\sqrt{3} \csc x + \sec x)$
$\sin(60°-x) = 1/2 (\sqrt{3} \cos x - \sin x)$
$\cos(60°-x) = 1/2 (\cos x + \sqrt{3} \sin x)$
$\tan(60°-x) = (\sqrt{3} \cot x - 1) / (\cot x + \sqrt{3})$
$\cot(60°-x) = (\cot x + \sqrt{3}) / (\sqrt{3} \cot x - 1)$
$\sec(60°-x) = 2 \csc x \operatorname{sex} / (\csc x + \sqrt{3} \sec x)$
$\csc(60°-x) = 2 \csc x \operatorname{sex} / (\sqrt{3} \csc x - \sec x)$

$\sin(60°+x) + \sin(60°-x) = \sqrt{3} \cos x$
$\cos(60°+x) + \cos(60°-x) = \cos x$
$\sin(60°+x) \sin(60°-x) = 3/4 - \sin^2 x$
$\sin(60°-x) \cos(60°+x) = 1/4 (\sqrt{3} - 2 \sin 2x)$
$\sin(60°+x) - \sin(60°-x) = \sin x$
$\cos(60°+x) - \cos(60°-x) = -\sqrt{3} \sin x$
$\sin(60°+x) \cos(60°-x) = 1/4 (\sqrt{3} + 2 \sin 2x)$
$\cos(60°+x) \cos(60°-x) = 1/4 - \sin^2 x$
$\sin(60°+x) / \sin(60°-x) = (\sqrt{3} + \tan x) / (\sqrt{3} - \tan x)$
$\sin(60°+x) / \cos(60°-x) = (\sqrt{3} + \tan x) / (1 + \sqrt{3} \tan x)$
$\sin(60°-x) / \cos(60°+x) = (\sqrt{3} - \tan x) / (1 - \sqrt{3} \tan x)$
$\cos(60°+x) / \cos(60°-x) = (1 - \sqrt{3} \tan x) / (1 + \sqrt{3} \tan x)$

$\sin(60°+x) / \sin x = (\sqrt{3} \cot x + 1) /2$
$\sin(60°-x) / \sin x = (\sqrt{3} \cot x - 1) /2$
$\cos(60°+x) / \cos x = (1 - \sqrt{3} \tan x) /2$
$\cos(60°-x) / \cos x = (1 + \sqrt{3} \tan x) /2$
$\sin(60°+x) / \cos x = (\sqrt{3} + \tan x) /2$
$\sin(60°-x) / \cos x = (\sqrt{3} - \tan x) /2$
$\cos(60°+x) / \sin x = (\cot x - \sqrt{3}) /2$
$\cos(60°-x) / \sin x = (\cot x + \sqrt{3}) /2$

$\sin(60°+x) \sin(60°-x) / \cos^2 x = (3 - \tan^2 x) /4$
$\cos(60°+x) \cos(60°-x) / \cos^2 x = (1 - 3 \tan^2 x) /4$
$\sin(60°+x)/2 \cos(60°-x)/2 = (\sqrt{3} + 2 \sin x) /4$
$\cos(60°+x)/2 \cos(60°-x)/2 = (1 + 2 \cos x) /4$
$\sin(60°+x) \sin(60°-x) / \sin^2 x = (3 \cot^2 x - 1) /4$
$\cos(60°+x) \cos(60°-x) / \sin^2 x = (\cot^2 x - 3) /4$
$\sin(60°-x)/2 \cos(60°+x)/2 = (\sqrt{3} - 2 \sin x) /4$
$\sin(60°+x)/2 \sin(60°-x)/2 = (2 \cos x - 1) /4$

Trigonometrische Summen mit 1

Trigonometrische Terme der Summe und Differenz mit der Einheit

$1 + \sin x = 2 \sin^2 (45°+x/2) = 2 \cos^2 (45°-x/2) = (\sin x/2 + \cos x/2)^2 = \cos x \tan (45°+x/2)$

$1 + \cos x = 2 \cos^2 x/2 = (1 - \cos x) \cot^2 x/2 = (1 - \cos x) / \tan^2 x/2 = \sin x / \tan x/2 = \cot x/2 \sin x = 2 / \sec^2 x/2 = 2 / (1 + \tan^2 x/2)$

$1 + \tan x = (1 - \tan x) \sqrt{(1 + \sin 2x) / (1 - \sin 2x)} = (1 - \tan x) \tan (45°+x) = \sqrt{2} \sin (45°+x) / \cos x = (\cos x + \sin x) / \cos x = (3 - \tan^2 x/2) / (1 - \tan^2 x/2) = \sqrt{2} \cos (x-45°) / \cos x$

$1 + \cot x = \tan (45°+x) (\cos x - 1) = (\cot x - 1) / \tan (45°-x) = \cot (45°-x) (\cot x - 1) = \sqrt{2} \cos (x-45°) / \sin x$

$1 + \sec x = 2 + \tan x \tan x/2 = 2 + 2 \sin^2 x/2 / \cos x$

$1 + \csc x = 2 + \cot x \cot x/2 = 2 + 2 \cos^2 x/2 / \sin x$

$1 - \sin x = 2 \sin^2 (45°-x/2) = (\sin x/2 - \cos x/2)^2 = \cos x / \tan (45°+x/2) = \cos x \tan (45°-x/2)$

$1 - \cos x = 2 \sin^2 x/2 = (1 + \cos x) / \cot^2 x/2 = \tan^2 x/2 (1 + \cos x) = \tan x/2 \sin x = \sin x / \cot x/2 = 2 / \csc^2 x/2 = 2 \tan^2 x/2 / (1 - \tan^2 x/2) = 2 / (\cot^2 x/2 + 1)$

$1 - \tan x = (1 + \tan x) \tan (45°-x) = (1 + \tan x) \cot (45°+x) = \sqrt{2} \sin (45°-x) / \cos x$

$1 - \cot x = -\cot (45°+x) (1 + \cot x) = - (\cot x + 1) / \cot (45°-x) = -\sqrt{2} \sin (45°-x) / \sin x$

$1 - \sec x = -\tan x \tan x/2 = -2 \sin^2 x/2 / \cos x = -\sec^2 x \sin^2 x / (\sec x + 1) = -2 \sin^2 x/2 \sec x$

$1 - \csc x = -\cot x \cot x/2 = -2 \cos^2 x/2 / \sin x$

$1 + 2 \sin x = 4 \sin ((30°+x)/2) \cos ((30°-x)/2)$

$1 - 2 \sin x = 4 \cos ((30°+x)/2) \sin ((30°-x)/2)$

$1 + 2 \cos x = 4 \cos ((60°+x)/2) \cos ((60°-x)/2) = \sin (3/2\ x) / \sin (x/2)$

$1 - 2 \cos x = -4 \sin ((60°+x)/2) \sin ((60°-x)/2) = -\cos (3/2\ x) / \cos (x/2)$

$1 + \sin^2 x = 2 - \cos^2 x = (\csc^2 x + 1) / \csc^2 x = (3 - \cos 2x) /2$

$1 + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x = (\sec^2 x + 1) / \sec^2 x = (3 + \cos 2x) /2$

$1 + \tan^2 x = \tan^2 x / \sin^2 x = 2 \tan x / \sin 2x = 1 / \cos^2 x = \sec^2 x = \csc^2 x \tan^2 x$

$1 + \cot^2 x = 1/ \sin^2 x = \csc^2 x = \cot^2 x / \cos^2 x = \sec^2 x \cot^2 x = 2 \cos x/2 / \sin x$

$1 + \sec^2 x = (2 - \sin^2 x) / (1 - \sin^2 x) = 2 + \tan^2 x = (1 + 3 \sec 2x) / (1 + \sec 2x)$

$1 + \csc^2 x = (2 - \cos^2 x) / (1 - \cos^2 x) = 2 + \cot^2 x = (3 - \cos 2x) / (1 - \cos 2x)$

$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

$1 - \tan^2 x = 2 \tan x /\tan 2x = 2 \cot 2x \tan x = 2 \cos 2x / (1 + \cos 2x) = 2 / (\sec 2x + 1) = \cos 2x \sec^2 x$

$1 - \cot^2 x = -2 \cot 2x \cot x = -2 \cos 2x / (1 - \cos 2x) = -2 / (\sec 2x - 1) = -\cos 2x \csc^2 x$

$1 - \sec^2 x = -\sin^2 x \sec^2 x = -\tan^2 x = -1 / \cot^2 x$

$1 - \csc^2 x = -\cos^2 x \csc^2 x = -1/ \tan^2 x = -\cot^2 x$

$(1 + \sin x) / (1 - \sin x) = \tan^2 (45°+x/2) = \cot^2 (45°-x/2) = ((\cos x/2 + \sin x/2) / (\cos x/2 - \sin x/2))^2 = ((1 + \tan x/2) / (1 - \tan x/2))^2$

$(1 + \cos x) / (1 - \cos x) = \cot^2 x/2$

$(1 + \tan x) / (1 - \tan x) = \tan (45°+x) = \cot (45°-x) = ((\cos x + \sin x) / (\cos x - \sin x))$

$(1 + \cot x) / (\cot x - 1) = \tan (45°+x) = \cot (45°-x)$

$(1 + \sec x) / (\sec x - 1) = \cot^2 x/2 = (1 + \cos x) / (1 - \cos x)$

$(1 + \csc x) / (\csc x - 1) = (1 + \sin x) / (1 - \sin x) = \tan^2 (45°+x/2) = \cot^2 (45°-x/2)$

$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin^2 (45°+x)^2 = (1 + \tan^2 x + 2 \tan x) / (1 + \tan^2 x)$

$1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2 = 2 \sin^2 (45°-x)^2 = (1 + \tan^2 x - 2 \tan x) / (1 + \tan^2 x)$

$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x = 2 / (1 + \tan^2 x)$

$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x = 2 \tan^2 x / (1 + \tan^2 x)$

$1 + \tan 2x = (1 - \tan^2 x + 2 \tan x) / (1 - \tan^2 x)$

$1 - \tan 2x = (1 - \tan^2 x - 2 \tan x) / (1 - \tan^2 x)$

$1 + \cot 2x = 1 + 1/2 (\cot x - \tan x)$

$1 - \cot 2x = 1 - 1/2 (\cot x - \tan x)$

$1 + \sec 2x = 2 / (1 - \tan^2 x) = 2 \cos^2 x / (2 \cos^2 x - 1)$

$\sec 2x - 1 = 2 \tan^2 x / (1 - \tan^2 x) = 2 / (\cot^2 x - 1) = 2 \sin^2 x / (1 - 2 \sin^2 x)$

$1 + \csc 2x = 1 + 1/2 (\tan x + \cot x)$

$\csc 2x - 1 = 1/2 (\tan x + \cot x) - 1 = \tan (45°-x) (1 - \tan^2 x) / (2 \tan x)$

$\sin 2x / (1 + \cos 2x) = \tan x \quad \sin 2x / (1 - \cos 2x) = \cot x$

$\cos 2x / (1 + \cos 2x) = (1 - \tan^2 x) / 2 \quad \cos 2x / (1 - \cos 2x) = (\cot^2 x - 1) / 2$

$\cos 2x / (1 + \sin 2x) = \tan (45°-x) = \cot (45°+x) = \sec 2x - \tan 2x$

$\cos 2x / (1 - \sin 2x) = \tan (45°+x) = \cot (45°-x) = \sec 2x + \tan 2x$

$(1 + \sin 2x) / (1 - \sin 2x) = \tan (45°+x) / \tan (45°-x)$

$(1 - \sin 2x) / (1 + \sin 2x) = \tan^2 (45°-x)$

$(1 + \cos 2x) / (1 - \cos 2x) = \cot^2 x$

$(1 - \cos 2x) / (1 + \cos 2x) = \tan^2 x$

Sinusreihen

Ausdrücke für den Sinus eines vielfachen Bogens

Ist n eine ganze rationale, ungerade Zahl hat die die Reihe (n+1)/2 Glieder und ist

sin nx $= n \sin x - n(n^2-1^2)/(1\cdot2\cdot3) \sin^3 x + n(n^2-1^2)(n^2-3^2)/(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5) \sin^5 x - n(n^2-1^2)(n^2-5^2) / (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7) \sin^7 x +- \dots$

Ist n eine ganze rationale, gerade Zahl hat die die Reihe n/2 Glieder und ist

sin nx $= \sqrt{(1 - \sin^2 x)}\, (n \sin x - n(n^2-2^2)/(1\cdot2\cdot3) \sin^3 x + n (n^2-2^2)(n^2-4^2) / (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5) \sin^5 x - n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2) / (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7) \sin^7 x -+ \dots)$

Ist n eine ganze rationale, ungerade Zahl mit n = 4m+1 gilt

sin nx $= \sqrt{(1 - \cos^2 x)}\, (1 - (n^2-1^2)/(1\cdot2) \cos^2 x + (n^2-1^2)(n^2-3^2) / (1\cdot2\cdot3\cdot4) \cos^4 x - (n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2) / (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6) \cos^6 x +- \dots)$

Ist n eine ganze rationale, ungerade Zahl mit n = 4m-1 gilt

sin nx $= -\sqrt{(1 - \cos^2 x)}\, (1 - (n^2-1^2)/(1\cdot2) \cos^2 x + (n^2-1^2)(n^2-3^2) / (1\cdot2\cdot3\cdot4) \cos^4 x - (n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2) / (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6) \cos^6 x +- \dots)$

Ist n eine ganze rationale, gerade Zahl mit n = 4m+2 gilt

sin nx $= \sqrt{(1 - \cos^2 x)}\, (n \cos x - n (n^2-2^2)/(1\cdot2\cdot3) \cos^3 x + n (n^2-2^2)(n^2-4^2) / (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5) \cos^5 x -+ \dots)$

Ist n eine ganze rationale, gerade Zahl mit n = 4m-2 gilt

sin nx $= -\sqrt{(1 - \cos^2 x)}\, (n \cos x - n (n^2-2^2)/(1\cdot2\cdot3) \cos^3 x + n (n^2-2^2)(n^2-4^2) / (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5) \cos^5 x -+ \dots)$

sin nx $= \cos^n x\, (n \tan x - n (n-1)(n-2)/(1\cdot2\cdot3) \tan^3 x + n (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) / (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5) \tan^5 x -+ \dots)$

In dieser Reihe hat das letzte Glied den Koeffizienten

$n (n-1) \dots (n - (n-1)) / (1\cdot2\cdot3\cdot\dots\cdot(n-1))$

mit dem Vorzeichen - und der Potenz $\tan^{n-1} x$, wenn n = 4m

mit dem Vorzeichen + und der Potenz $\tan^{n-1} x$, wenn n = 4m+2

mit dem Vorzeichen + und der Potenz $\tan^n x$, wenn n = 4m+1

mit dem Vorzeichen - und der Potenz $\tan^n x$, wenn n = 4m-1

Ausdrücke für den Sinus eines vielfachen Bogens

sin nx $= \sin^n x\, (n \cot^{n-1} x - n (n-1)(n-2)/(1\cdot2\cdot3) \cot^{n-3} x + n (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) / (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5) \cot^{n-5} x -+ \dots)$

In dieser Reihe hat das letzte Glied den Koeffizienten

$n (n-1) \dots (n - (n-1)) / (1\cdot2\cdot3\cdot\dots\cdot(n-1)) \cot^{n-(n-1)} x$, wenn n = 4m oder 4m+2

$n -(n-1) \dots (n - (n-1)) / (1\cdot2\cdot3\cdot\dots\cdot n) \cot^{n-(n-1)} x$, wenn n = 4m+1 oder 4m-1

sin nx $= 2^{n-1} \sin x \sin(\pi/n - x) \sin(\pi/n + x) \sin(2\pi/n - x) \sin(2\pi/n + x) \sin(3\pi/n - x) \sin(3\pi/n + x) \dots$

Diese Reihe wird so lange fortgesetzt, bis n Faktoren auftreten.

sin 2x $= 2 \sin x \sqrt{(1 - \sin^2 x)} = 2 \sin x - \sin^3 x - 1/4 \sin^5 x - 3/8 \sin^7 x - 5/64 \sin^9 x - 7/128 \sin^{11} x - 21/512 \sin^{13} x - 231/7168 \sin^{15} x - \dots$

sin 4x $= (4 \sin x - 8 \sin^3 x) \sqrt{(1 - \sin^2 x)} = 4 \sin x - 10 \sin^3 x + 7/2 \sin^5 x + 3/4 \sin^7 x + 11/32 \sin^9 x + 13/32 \sin^{11} x + \dots$

sin 6x $= (6 \sin x - 32 \sin^3 x + 32 \sin^5 x) \sqrt{(1 - \sin^2 x)} = 6 \sin x - 35 \sin^3 x + 189/4 \sin^5 x - 99/8 \sin^7 x - 143/64 \sin^9 x - \dots$

sin 8x $= (8\sin x - 80\sin^3 x + 192\sin^5 x - 128\sin^7 x) \sqrt{(1 - \sin^2 x)} = 8 \sin x - 84 \sin^3 x + 231 \sin^5 x - 429/2 \sin^7 x$

sin 10x $= (10 \sin x - 160 \sin^3 x + 672 \sin^5 x - 7168 \sin^7 x + 3584 \sin^9 x) \sqrt{(1 - \sin^2 x)} = 10 \sin x - 165 \sin^3 x + 3003/4 \sin^5 x - 10725/8 \sin^7 x$

Kosinusreihen

Ausdrücke für den Kosinus eines vielfachen Bogens

Ist n eine ganze rationale, gerade Zahl hat die die Reihe (n+2)/2 Glieder und ist

cos nx $= 1 - n^2/(1\cdot2) \sin^2 x + n^2(n^2-2^2)/(1\cdot2\cdot3\cdot4) \sin^4 x - n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)/(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6) \sin^6 x + n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2) / (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8) \sin^0 x -+ \dots$

Ist n eine ganze rationale, ungerade Zahl hat die die Reihe (n+1)/2 Glieder und ist

cos nx $= \sqrt{(1-\sin^2 x)}\, (1 - (n^2-1)/(1\cdot2) \sin^2 x + (n^2-1^2)(n^2-3^2)/(1\cdot2\cdot3\cdot4) \sin^4 x - (n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2) / (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6) \sin^6 x + \dots)$

Ist n eine ganze rationale, ungerade Zahl ist

cos nx $= \pm (n \cos x - n (n^2-1)/(1\cdot2\cdot3) \cos^3 x + n(n^2-1)(n^2-3^2)/(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5) \cos^5 x -+ \dots)$

das positive Vorzeichen gilt für n = 4m+1, das negative für n = 4m-1

Ausdrücke für den Kosinus eines vielfachen Bogens

Ist n eine ganze rationale, gerade Zahl ist

cos nx $= \pm (1 - n^2/(1\cdot2) \cos^2 x + n^2 (n^2-2^2)/(1\cdot2\cdot3\cdot4) \cos^4 x - n^2 (n^2-2^2)(n^2-4^2) / (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6) \cos^6 x +- \dots)$

das positive Vorzeichen gilt für n = 4m, das negative für n = 4m-2

cos nx $= \cos^n x\, (1 - n(n-1)/(1\cdot2) \tan^2 x + n (n-1)(n-2)(n-3)/(1\cdot2\cdot3\cdot4) \tan^4 x - \dots)$

wobei das letzte Glied die Form hat

$\pm n (n-1) \dots (n - (n-1)) / (1\cdot2\cdot3\cdot\dots\cdot n) \tan^n x$

wenn n = 4m+2 oder n = 4m ist, hingegen

$\pm$ n (n-1) … (n - (n-1)) / (1·2·3·…·(n-1)) $\tan^{n-1}$ x
wenn n = 4m-1 oder n = 4m+1 ist
cos nx = $\sin^n$ x ($\cot^n$ x - n(n-1)/(1·2) $\cot^{n-2}$ x + n (n-1)(n-2)(n-3)/(1·2·3·4) $\cot^{n-4}$ x - …)
wobei das letzte Glied die Form hat
$\pm$ n (n-1) … (n - (n-1)) / (1·2·3·…·n)
wenn n = 4m+2 oder n = 4m ist, hingegen
$\pm$ n (n-1) … (n - (n-1)) / (1·2·3·…·(n-1)) cot x
wenn n = 4m-1 oder n = 4m+1 ist
cos nx = 2^{n-1} sin (π/(2n) - x) sin (π/(2n) + x) sin (3π/(2n) - x) sin (3π/(2n) + x) sin (5π/(2n) - x) sin (5π/(2n) + x) …
bis man n Faktoren hat
cos nx = 2^{n-1} cos ((n-1)/(2n) π + x) cos ((n-1)/(2n) π - x) cos ((n-3)/(2n) π + x) cos ((n-3)/(2n) π + x) …
bis man n Faktoren hat

Tangensreihen

Ausdrücke für den Tangens eines vielfachen Bogens
tan nx =(n tan x - n·(n-1)·(n-2)/(1·2·3) $\tan^3$ x + n·(n-1)·(n-2)·(n-3)·(n-4) / (1·2·3·4·5) $\tan^5$ x - …) /
(1 - n·(n-1)/(1·2) $\tan^2$ x + n·(n-1)·(n-2)·(n-3) / (1·2·3·4) $\tan^4$ x -+ …)
Ausdrücke für den Kotangens eines vielfachen Bogens
cot nx = (1 - n·(n-1)/(1·2) $\tan^2$ x + n·(n-1)·(n-2)·(n-3) / (1·2·3·4) $\tan^4$ x -+ …) /
(n tan x n·(n-1)·(n-2)/(1·2·3) $\tan^3$ x + n·(n-1)·(n-2)·(n-3)·(n-4) / (1·2·3·4*5) $\tan^5$ x -+ …)

Summen trigonometrischer Reihen

Sinus

Für eine Reihe der Form
S = sin x + sin (x+a) + sin (x+2a) + sin (x+3a) + … + sin (x+na)
ergibt sich als Summenformel
S = (cos (x - a/2) - cos (x + (2n+1)/2 a)) / (2 sin a/2) = (cos ((n+1)/2 a) sin (x + n/2 a)) / sin a/2
Strebt die Termzahl gegen Unendlich, ergibt sich als Grenzwert
S = cos (x - a/2) / (2 sin a/2)
Für die einzelnen Glieder der Reihe wird
sin (x + a) = 2 cos a sin x - sin (x - a)
sin (x + 2a) = 2 cos a sin (x + a) - sin x
sin (x + 3a) = 2 cos a sin (x + 2a) - sin (x + a)
sin (x + 4a) = 2 cos a sin (x + 3a) - sin (x + 2a) …
sin (x + na) = 2 cos a sin (x + (n-1) a) - sin (x + (n-2) a)

Kosinus

Für eine Reihe der Form
S = cos x + cos (x+a) + cos (x+2a) + cos (x+3a) + … + cos (x+na)
ergibt sich als Summenformel
S = (sin (x + (2n+1)/2 a) - sin (x - a/2) / (2 sin a/2) = (sin ((n+1)/2 a) cos (x + n/2 a)) / sin a/2
Strebt die Termzahl gegen Unendlich, ergibt sich als Grenzwert
S = -sin (x - a/2) / (2 sin a/2)
Für die einzelnen Glieder der Reihe wird
cos (x + a) = 2 cos a cos x - cos (x - a)
cos (x + 2a) = 2 cos a cos (x + a) - cos x
cos (x + 3a) = 2 cos a cos (x + 2a) - cos (x + a)
cos (x + 4a) = 2 cos a cos (x + 3a) - cos (x + 2a) …
cos (x + na) = 2 cos a cos (x + (n-1) a) - cos (x + (n-2) a)

Summen trigonometrischer Reihen

sin x + sin 2x + sin 3x + … + sin na = sin ((n+1)/2 x) sin (1/2 nx) / sin x/2
sin x + sin 2x + sin 3x + … = 1/2 cot x/2
sin x - sin 2x + sin 3x -+ … +- sin na = sin ((n+1)/2 x) cos (1/2 nx) / cos x/2
sin x - sin 2x + sin 3x -+ … = 1/2 tan x/2
cos x + cos 2x + cos 3x + … + cos nx = sin (n/2 x) cos ((n+1)/2 x) / sin x/2
cos x + cos 2x + cos 3x + … = -1/2
cos x - cos 2x + cos 3x -+ … +- cos nx = cos (n/2 x) cos ((n+1)/2 x) / cos x/2
cos x - cos 2x + cos 3x -+ … = 1/2
sin x + sin 3x + sin 5x + sin 7x + … + sin na = $\sin^2$ ((n+1)/2 x) / sin x
sin x + sin 3x + sin 5x + sin 7x + … = 1/2 csc x
sin x - sin 3x + sin 5x - sin 7x +- … = 0
cos x + cos 3x + cos 5x + cos 7x + … + cos nx = sin ((n+1) x) / (2 sin x)
cos x + cos 3x + cos 5x + cos 7x + … = 0
cos x - cos 3x + cos 5x - cos 7x +- … = 1/2 sec x
sin 2x + sin 4x + sin 6x + sin 8x + … + sin na = sin ((n+2)/2 x) sin (n/2 x) / sin x

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \ldots + \cos na = \cos((n+2)/2\ x) \sin(n/2\ x) / \sin x$
$\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \ldots + n \sin na = (\sin nx - n \sin x/2 \cos(n+1/2\ x)) / (2 \sin^2 x/2)$
$\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \ldots + n \cos na = (n \sin x/2 \sin(n+1/2\ x) - \sin^2(n/2\ x)) / (2 \sin^2 x/2)$

$\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y + \sin 3x \sin 3y + \ldots + \sin nx \sin ny =$
$= \sin(n/2\ (x-y)) \cos((n+1)/2\ (x-y)) / (2 \sin((x-y)/2)) - \sin(n/2\ (x+y)) \cos((n+1)/2\ (x+y)) / (2 \sin((x+y)/2))$
$\cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y + \cos 3x \cos 3y + \ldots + \cos nx \cos ny =$
$= \sin(n/2\ (x-y)) \cos((n+1)/2\ (x-y)) / (2 \sin((x-y)/2)) + \sin(n/2\ (x+y)) \cos((n+1)/2\ (x+y)) / (2 \sin((x+y)/2))$
$\sin x \cos y + \sin 2x \cos 2y + \sin 3x \cos 3y + \ldots + \sin nx \cos ny =$
$= \sin(n/2\ (x+y)) \sin((n+1)/2\ (x+y)) / (2 \sin((x-y)/2)) + \sin(n/2\ (x-y)) \sin((n+1)/2\ (x-y)) / (2 \sin((x+y)/2))$

Trigonometrische Näherungsformeln

für $0 \le x \le \pi/2$
$\sin x / x = 1 - 0{,}16605\ x^2 + 0{,}00761\ x^4 + R(x)\ ;\ R(x) < 2 \cdot 10^{-4}$
für $0 \le x \le \pi/2$
$\sin x / x = 1 - 0{,}1666666664\ x^2 + 0{,}0083333315\ x^4 - 0{,}0001984090\ x^6 + + 0{,}0000027526\ x^8 - 0{,}0000000239\ x^{10} + R(x)\ ;\ R(x) < 2 \cdot 10^{-9}$
für $0 \le x \le \pi/2$
$\cos x = 1 - 0{,}49670\ x^2 + 0{,}03705\ x^4 + R(x)\ ;\ R(x) < 9 \cdot 10^{-4}$
für $0 \le x \le \pi/2$
$\cos = 1 - 0{,}4999999963\ x^2 + 0{,}0416666418\ x^4 - 0{,}0013888397\ x^6 + + 0{,}0000247609\ x^8 - 0{,}0000002605\ x^{10} + R(x)\ ;\ R(x) < 2 \cdot 10^{-9}$
für $0 \le x \le \pi/4$
$\tan x / x = 1 + 0{,}31755\ x^2 + 0{,}20330\ x^4 + R(x)\ ;\ R(x) < 1 \cdot 10^{-3}$
für $0 \le x \le \pi/4$
$\tan x / x = 1 + 0{,}3333314036\ x^2 + 0{,}1333923995\ x^4 - 0{,}0533740603\ x^6 + + 0{,}0245650893\ x^8 + 0{,}0029005250\ x^{10} + 0{,}0095168091\ x^{12} + R(x)\ ;\ R(x) < 2 \cdot 10^{-8}$
für $0 \le x \le \pi/4$
$x \cot x = 1 - 0{,}332867\ x^2 - 0{,}024369\ x^4 + R(x)\ ;\ R(x) < 3 \cdot 10^{-5}$
für $0 \le x \le \pi/4$
$x \cot x = 1 - 0{,}3333333410\ x^2 - 0{,}0222220287\ x^4 - 0{,}0021177168\ x^6 + - 0{,}0002078504\ x^8 - 0{,}0000262619\ x^{10} + R(x)\ ;\ R(x) < 4 \cdot 10^{-10}$

Approximation mit Tschebyschow-Polynomen für $-1 \le x \le 1$; $T_n(x) = \cos n\theta$, $\cos \theta = 2x-1$
$\sin \pi/2\ x = x\ \Sigma_{n=0}^{\infty} A_n T_n(x^2)$
für n = 0, 1, 2, … wird
A_n = 1,276278962; -0,285261569; 0,009118016; -0,000136587; 0,000001185; -0,000000007
$\cos \pi/2\ x = \Sigma_{n=0}^{\infty} A_n T_n(x^2)$
für n = 0, 1, 2, … wird
A_n = 0,472001216; -0,499403258; 0,027992080; -0,000596695; 0,000006704; -0,000000047

Goniometrische Umformungen

$\sin(2x) / \sin x - \cos(2x) / \cos x =$
mit der Doppelwinkelformel ergibt sich
$\sin(2x) / \sin x - \cos(2x) / \cos x = 2 \sin x \cos x / \sin x - (\cos^2 x - \sin^2 x) / \cos x$
Den ersten Bruch kürzen, anschließend gleichnamig machen und subtrahieren
$2 \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x) / \cos x = (2 \cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)) / \cos x$
$= (\cos^2 x + \sin^2 x) / \cos x = 1 / \cos x$

$\sin 3x =$
$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin(2x) \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot \sin x$
mit den Doppelwinkelformeln
$\sin(2x) \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot \sin x = 2 \sin x \cos x \cdot \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sin x =$
$= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = \sin x \cdot (3\cos^2 x - \sin^2 x)$
Ersetzen von Kosinus durch Sinus
$= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3 \sin x\ (1 - \sin^2 x) - \sin^3 x =$
$= 3 \sin x - 3 \sin^3 x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

$(\cos^2 x - \cos(2x)) / (1 - \cos(2x)) =$
doppelte Winkel ersetzen
$(\cos^2 x - \cos(2x)) / (1 - \cos(2x)) = (\cos^2 x - (2 \cos^2 x - 1) / (1 - (2 \cos^2 x - 1) =$
$= (\cos^2 x - 2 \cos^2 x + 1) / (1 - 2 \cos^2 x + 1) = (-\cos^2 x + 1) / (2 - 2 \cos^2 x) =$
$= (1 - \cos^2 x) / (2\ (1 - \cos^2 x)) = 1/2$

$1 / \sin(2x) - 1 / \tan(2x) =$

mit der Tangensbeziehung ergibt sich

$$1 / \sin(2x) - 1 / \tan(2x) = 1 / \sin(2x) - \cos(2x) / \sin(2x) = (1 - \cos(2x)) / \sin(2x) =$$

und der Doppelwinkelformel

$$= (1 - \cos^2 x + 1) / (2 \sin x \cos x) = (1 - \cos^2 x) / (\sin x \cos x) = \sin^2 x / (\sin x \cos x) =$$
$$= \sin x / \cos x = \tan x$$

$(1 - \cos (2x)) / \sin (2x) =$

$$(1 - \cos (2x)) / \sin (2x) = (1 - (1 - 2 \sin^2 x) / (2 \sin x \cos x) =$$
$$2 \sin^2 x / (2 \sin x \cos x) = \sin x / \cos x = \tan x$$

$(\sin x + \sin (2x)) / (1 + \cos x + \cos (2x)) =$

mit der Doppelwinkelformel wird

$$(\sin x + \sin (2x)) / (1 + \cos x + \cos (2x)) = (\sin x + 2 \sin x \cos x) / (1 + \cos x + 2 \cos^2 x -1) =$$
$$= (\sin x + 2 \sin x \cos x) / (\cos x + 2 \cos^2 x) =$$

Faktorzerlegung führt weiter zu

$$= (\sin x \cdot (1 + 2 \cos x) / (\cos x \cdot (1 + 2 \cos x)) = \sin x / \cos x = \tan x$$

$\sin(60°+x) - \sin(60°-x) =$

Lösung mit dem Additionstheorem

$$\sin(60°+x) - \sin(60°-x) = (\sin 60° \cos x + \cos 60° \sin x) - (\sin 60° \cos x - \cos 60° \sin x) =$$
$$= \sin 60° \cos x + \cos 60° \sin x - \sin 60° \cos x + \cos 60° \sin x = 2 \cdot \cos 60° \sin x =$$

da $\cos 60° = 0{,}5$ ist, wird

$$= \sin x$$

$\tan(180°-x) =$

mit dem Additionstheorem des Tangens wird

$$\tan(180°-x) = (\tan 180° - \tan x) / (1 + \tan 180° \cdot \tan x) = (0 - \tan x) / (1 + 0 \cdot \tan x) = -\tan x$$

$\sin 75° =$

mit $75° = 45° + 30°$ und dem Additonstheorem wird

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° =$$
$$= \sqrt{2} /2 \cdot \sqrt{3} /2 + \sqrt{2} /2 \cdot 1/2 = 1/4 \sqrt{2} (1 + \sqrt{3})$$

$\cos x + \cos(x+120°) + \cos(x+240°) =$

Es gilt: $\sin 120° = \sin 60° = \sqrt{3} /2 \qquad \cos 120° = - \cos 60° = -1/2$

$\sin 240° = - \sin 60° = -\sqrt{3} /2 \qquad \cos 240° = - \cos 60° = -1/2$

$$\cos(x+120°) = \cos x \cos 120° - \sin x \sin 120° = \cos x \cdot (-1/2) - \sin x \cdot \sqrt{3} /2$$
$$\cos(x+240°) = \cos x \cos 240° - \sin x \sin 240° = \cos x \cdot (-1/2) - \sin x \cdot (-\sqrt{3} /2)$$

Das ergibt:

$$\cos x + \cos(x+120°) + \cos(x+240°) = \cos x + (-1/2 \cos x - \sqrt{3} /2 \sin x) + (-1/2 \cos x + \sqrt{3} /2 \sin x) = 0$$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) =$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = (\sin x \cos y + \cos x \sin y) + (\sin x \cos y - \cos x \sin y) =$$
$$= 2 \sin x \cos y$$

$\cos(x-y) / (\cos x \cos y) =$

$$\cos(x-y) / (\cos x \cos y) = (\cos x \cos y + \sin x \sin y)/(\cos x \cos y) =$$
$$= \cos x \cos y /(\cos x \cos y) + \sin x \sin y /(\cos x \cos y) = 1 + \tan x \tan y$$

$\cos^2 x + \cos^2 x \cdot \tan^2 x =$

Mit $\tan x = \sin x \cos x$ wird

$$\cos^2 x + \cos^2 x \cdot \tan^2 x = \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \sin^2 x / \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$(1 - \tan^2 x)/(1 + \tan^2 x) =$

$$(1 - \tan^2 x)/(1 + \tan^2 x) = (1 - \sin^2 x/\cos^2 x) / (1 + \sin^2 x/\cos^2 x) =$$

mit $\cos^2 x$ erweitern

$$= (1 - \sin^2 x/\cos^2 x) / (1 + \sin^2 x/\cos^2 x) \cdot \cos^2 x/\cos^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) / (\cos^2 x + \sin^2 x) =$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$1/(1 + \sin x) + 1/(1- \sin x) =$

$$1/(1+\sin x) + 1/(1-\sin x) = (1 - \sin x)/((1 + \sin x)(1 - \sin x)) + (1 + \sin x)/((1 + \sin x)(1 - \sin x)) =$$
$$= 2/(1 - \sin^2 x) =$$

der Nenner lässt sich ersetzen durch: $\cos^2 x$

$$= 2/(1 - \sin^2 x) = 2/\cos^2 x$$

$\cos(60° - x) / \tan(30° + x) =$

$\cos(60° - x) / \tan(30° + x) = 1/\tan(30° + x) \cos(60° - x)$

$(30° + x) + (60° - x) = 90°$ die Winkel sind komplementär, es gilt: $\cos(60° - x) = \sin(30° + x)$

$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha \Leftrightarrow 1 / \tan \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$

Damit erhalten wir:

$1/\tan(30° + x) \cos(60° - x) = \cos(30° + x)/\sin(30° + x) \cdot \sin(30° + x) = \cos(30° + x)$

$(\sin^2x - \sin^4x) / (\cos^2x - \cos^4x) =$

$(\sin^2x - \sin^4x) / (\cos^2x - \cos^4x) = \sin^2x (1 - \sin^2x) / (\cos^2x (1 - \cos^2x)) =$

Mit den Formeln $1 - \sin^2x = \cos^2x$ und $1 - \cos^2x = \sin^2x$ wird

$\sin^2x (1 - \sin^2x) / (\cos^2x (1 - \cos^2x)) = \sin^2x \cos^2x / (\cos^2x \sin^2x) = 1$

$\sin 2x / \sin x + \cos 2x / \cos x =$

Mit den Doppelwinkelformeln wird

$\sin 2x / \sin x + \cos 2x / \cos x = 2 \sin x \cos x / \sin x + (\cos^2x - \sin^2x) / \cos x =$

den ersten Bruch kürzen, anschliessend addieren

$= 2 \cos x + (\cos^2x - \sin^2x) / \cos x = 4 \cos x - 1/\cos x$

Goniometrische Terme-Aufgaben

Aufgabe: Alle Terme sind zu vereinfachen.

		Lösungen
a)	$\cos^2 x + \cos^2 x \tan^2 x =$	1
b)	$(1 - \tan^2 x) / (1 + \tan^2 x) =$	$\cos 2x$
c)	$1 / (1 - \sin x) - \tan x / \cos x =$	$1 / \cos^2 x$
d)	$1 / (1 + \sin x) + 1 / (1 - \sin x) =$	$2 / \cos^2 x$
e)	$\sin x + \cos (90° - x) =$	$2 \sin x$
f)	$\cos (60°-x) / \tan (30°+x) =$	$\cos (30°+x)$
g)	$(\sin^2 x - \sin^4 x) / (\cos^2 x - \cos^4 x) =$	1
h)	$\sin 2x / \sin x - \cos 2x / \cos x =$	$1 / \cos x$
i)	$\sin 3x =$	$3 \sin x - 4 \sin^3 x$
j)	$(\cos^2 x - \cos 2x) / (1 - \cos 2x) =$	$1/2$
k)	$1 / \sin 2x - 1/ \tan 2x =$	$\tan x$
l)	$(1 - \cos 2x) / \sin 2x =$	$\tan x$
m)	$\sin x \cos x / \tan x =$	$\cos^2 x$
n)	$(\sin x + \sin 2x) / (1 + \cos x + \cos 2x) =$	$\tan x$
o)	$\sin (60°+x) - \sin (60°-x) =$	$\sin x$
p)	$\tan (180°-x) =$	$-\tan x$

Aufgabe 2: Lösen Sie die Gleichungen!

a)	$2 \tan^2 x = \tan x$	$0° + k\ 180°$; $26{,}57° + k\ 180°$
b)	$1 - \sin x = 2 \cos^2 x$	$90° + k\ 360°$; $210° + k\ 360°$; $330° + k\ 360°$
c)	$\cos^4 x - 3 \cos^2 x \sin^2 x = 0$	$30°$; $150°$; $210°$; $330°$ alle $+ k\ 360°$

Ableitung trigonometrischer Funktionen

Für die 1.Ableitungen der trigonometrischen Funktionen erhält man:

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = - \sin x$

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -1 - \cot^2 x = -1/\sin^2 x = - \csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x = \sec^2 x / \csc x$

$(\csc x)' = - \csc x \cot x = -\csc^2 x / \sec x$

$(\sin ax)' = a \cos ax$

$(\cos ax)' = -a \sin ax$

Nachweis für $y = \sin x$:

$dy/dx = \lim_{\Delta x\to 0} (\sin (x+\Delta x) - \sin x)/\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} (2 \sin ((x+\Delta x-x)/2) \cos ((x+\Delta x+x)/2))/\Delta x$

$= \lim_{\Delta x\to 0} (2 \sin (\Delta x/2) \cos ((2x+\Delta x)/2))/\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} (\sin (\Delta x/2) \cos (x +\Delta x/2))/ (\Delta x/2) = \cos x$

Stammfunktionen trigonometrischer Funktionen

$\int \sin ax\, dx = - \cos(ax) / a + C$

$\int \cos ax\, dx = \sin(ax) / a + C$

$\int \tan x\, dx = \ln |\sec x| + C = 1/2 \ln(1 + \tan^2 x) + C$

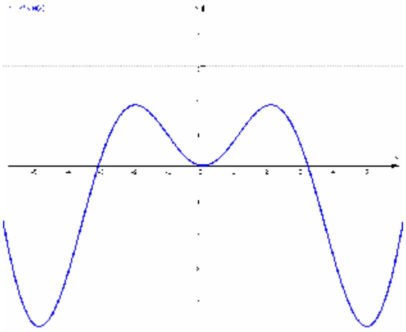
$\int \cot x\, dx = \ln |\csc x| + C = -1/2 \ln(1 + \cot^2 x) + C$

$\int \sec x\, dx = \ln |\tan (x/2 + \pi/4)| + C = \ln(\sec x + \tan x) + C = gd^*(x)$ … inverse Gudermann-Funktion

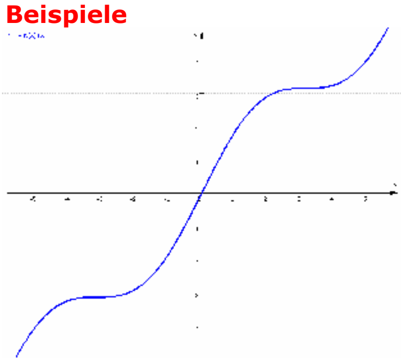
$\int \csc x\, dx = \ln |\tan (x/2)| + C = \ln(\csc x - \cot x) + C$

Sinus und Kosinus sind im Funktionenraum zueinander orthogonal.

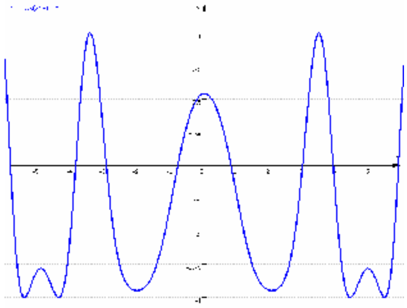
Trigonometrische Funktionen - Beispiele



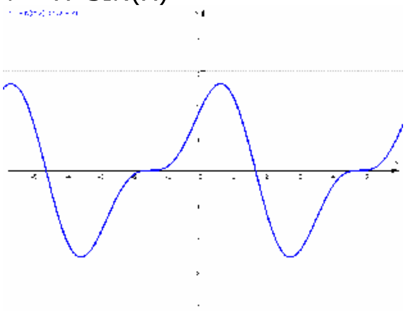
Y = X*SIN(X)



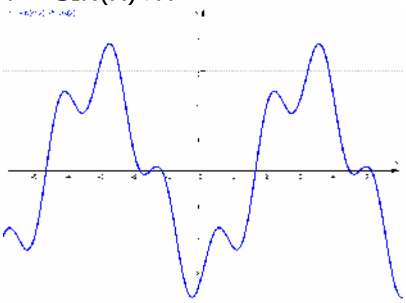
Y = SIN(X)+X



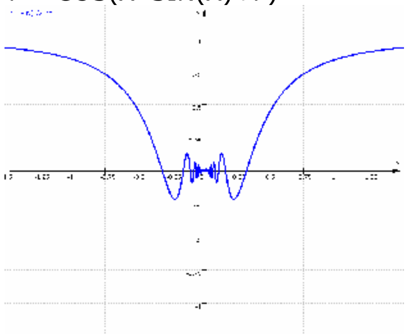
Y = COS(X*SIN(X)+P)



Y = SIN(2*X)+2*COS(X)



Y = SIN(4*X)-3*COS(X)



Y = X*SIN(1/X)

Aufgabe zu trigonometrischen Funktionen

Aufgabe: An welchen Stellen kann die Funktion $f(x) = \sin^2 x \cos x$ im Intervall von 0 bis 2π Extremalstellen haben? (Matur TSME 2000 Kurzaufgabe)

Lösung: Für die Ableitung benötigt man die Produkt- und die Kettenregel:

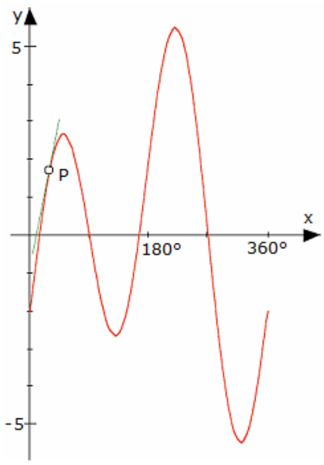
$$f'(x) = 2 \sin x \cos x \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot (-\sin x) = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$$

Auflösung der Gleichung $2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 0 = \sin x \cdot (2 \cos^2 x - \sin^2 x)$

und somit 1) $\sin x = 0 \to x = 0$ und $x = \pi$

oder 2) $2 \cos^2 x = \sin^2 x \to 2 = \tan^2 x \to \tan x = \pm\sqrt{2}$ mit

$x = 0,955$; $x = 4,097$; $x = 5,328$; $x = 2,186$



Aufgabe zu trigonometrischen Funktionen (2)

Aufgabe: Die Funktion f: $y = a \sin(2x) + b \cos(x)$ ist gegeben.

a) Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph der Funktion im Punkt P(30°| $\sqrt{3}$) die Steigung m = 5 besitzt.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Nullstellen und Extrema im Intervall [0 | 2π]; Skizzieren Sie den Graphen der Funktion in diesem Intervall.

Aufgabe a) $f(x) = a \sin(2x) + b \cos x \Rightarrow f(30°) = a \sin 60° + b \cos 30°$

$\sqrt{3} = a/2 \sqrt{3} + b/2 \sqrt{3}$

$f'(x) = 2a \cos(2x) - b \sin x \Rightarrow f'(30°) = 2a \sin 60° - b \sin 30°$

$5 = a - b/2$

Das Gleichungssystem hat die Lösungen $a = 4$ und $b = -2$

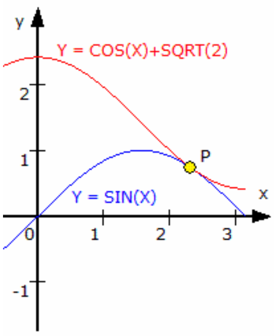
Aufgabe b) Nullstellen: $4 \sin(2x) - 2 \cos x = 0$

$\cos x = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 90°$; $x_2 = 270°$

$\sin x = 1/4 \quad \Rightarrow x_3 = 14,5°$; $x_4 = 165,5°$

Extrema: $8 \cos(2x) + 2 \sin x = 0$

$\sin x = 0,772 \quad \Rightarrow x_5 = 50,6°$; $x_6 = 129,4°$ $\qquad \sin x = -0,647 \Rightarrow x_5 = 319,7°$; $x_6 = 220,3°$



Aufgabe: Die Kurve $y = \cos x$ wird in Richtung der y-Achse verschoben, bis sie die Kurve $y = \sin x$ im Intervall $0 \le x \le \pi$ berührt.

Bestimmen Sie den Berührungspunkt. Berechnen Sie die Fläche, welche von der y-Achse und den beiden sich berührenden Kurven bis zum Berührungspunkt eingeschlossen wird. (TSME, Matura 1982)

Lösung: Ansatz für die verschobene Kurve: $y = \cos x + a$

Berührung heißt: $f(x) = g(x) \Rightarrow \cos x + a = \sin x$ und

$f'(x) = g'(x) \Rightarrow -\sin x = \cos x$

Aus der 2.Gleichung lässt sich x berechnen, mit

$\tan x = -1 \Rightarrow x = 3/4\ \pi$ oder $x = 7/4\ \pi$

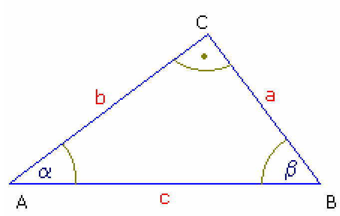
Die zweite Lösung ergäbe eine Verschiebung in Richtung der negativen y-Achse. Die 1.Lösung wird in der 1.Gleichung eingesetzt:

$\cos 3/4\,\pi + a = \sin 3/4\,\pi \Rightarrow a = \sqrt{2}$

Der Berührungspunkt ist $P(3/4\,\pi \mid 1/2\,\sqrt{2})$

Berechnung der Fläche: $A = {}_0\int^{3/4\,\pi} (\sqrt{2} + \cos x - \sin x)\,dx = 3/4\,\sqrt{2}\,\pi - 1$

Trigonometrischer Pythagoras



Satz: Für jeden Winkel α gilt: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Herleitung aus dem Satz des Pythagoras:

(1) $a^2 + b^2 = c^2$

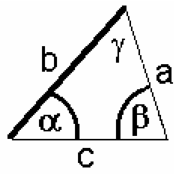
am rechtwinkligen Dreieck gilt (2) $a = \sin \alpha * c$

(3) $b = \cos \alpha * c$

Einsetzen von (2), (3) in (1) ergibt $\sin^2 \alpha * c^2 + \cos^2 \alpha * c^2 = c^2$

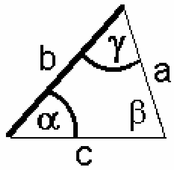
Ausklammern und Kürzen ergibt $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Dreiecksberechnung



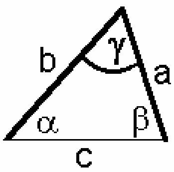
1. Gegeben: Eine Seite (b), der gegenüberliegende Winkel β und ein anliegender Winkel α.

Lösungweg: a über Sinussatz
c über Winkelsummensatz, Sinussatz
γ über Winkelsummensatz



2.Gegeben: Eine Seite b und die beiden anliegenden α und γ

Lösungweg: a über Winkelsummensatz, Sinussatz
c über Winkelsummensatz, Sinussatz
β über Winkelsummensatz

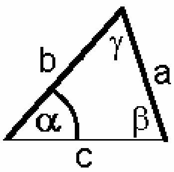


3.Gegeben: Zwei Seiten a, b und der eingeschlossene Winkel γ

Lösungweg: c über Kosinussatz
α über Kosinussatz, Sinussatz
β über Kosinussatz, Sinussatz

4.Gegeben: Ein Winkel α, die gegenüberliegende Seite a, eine anliegende Seite b.

Lösungsweg: β über Sinussatz
γ über Sinussatz, Winkelsummensatz
c über Sinussatz



5.Gegeben: Die drei Seiten a, b und c

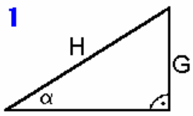
Lösungsweg: $\alpha = \arccos((b^2 + c^2 - a^2) / (2bc))$ über Kosinussatz

Winkel β und γ über Sinussatz und Innenwinkelsumme

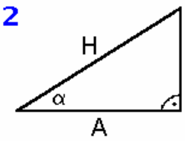
Dreiecksberechnung am rechtwinkligen Dreieck

Am rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel gesucht ...

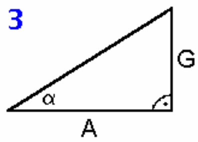
1



2



3



1. Gegeben: Gegenkathete und Hypotenuse ; Gesucht; α

Lösung: $\sin \alpha = G / H$

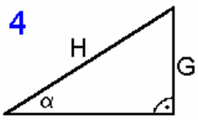
2. Gegeben: Ankathete und Hypotenuse ; Gesucht α

Lösung: $\cos \alpha = A / H$

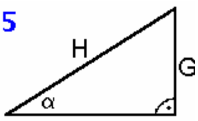
3. Gegeben: Ankathete und Gegenkathete ; Gesucht α

Lösung: $\tan \alpha = G / A$

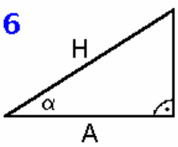
4



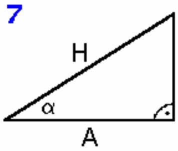
5



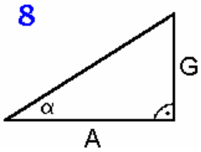
6



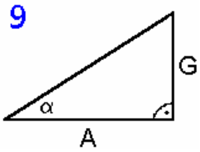
7



8



9



4. Gegeben: α und Gegenkathete ; Gesucht; Hypotenuse

Lösung: $H = G / \sin \alpha$

5. Gegeben: α und Hypotenuse ; Gesucht; Gegenkathete

Lösung: $G = H * \sin \alpha$

6. Gegeben: α und Ankathete ; Gesucht; Hypotenuse

Lösung: $H = A / \cos \alpha$

7. Gegeben: α und Hypotenuse ; Gesucht; Ankathete

Lösung: $A = H * \cos \alpha$

8. Gegeben: α und Gegenkathete ; Gesucht; Ankathete

Lösung: $A = G / \tan \alpha$

9. Gegeben: α und Ankathete ; Gesucht; Gegenkathete

Lösung: $G = A * \tan \alpha$

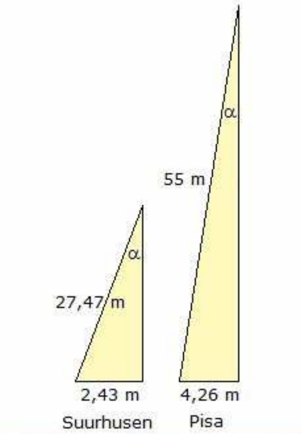
Merkregel im Englischen:

sin α = Opposite / Hypotenuse = O / H ... Oh Hell
cos α = Adjacent / Hypotenuse = A / H ... Another Hour
tan α = Opposite / Adjacent = O / A ... Of Algebra

Schiefe Türme

Anwendungsaufgabe zur Berechnung am rechtwinkligen Dreieck: Welcher Turm ist schiefer, der schiefe Turm von Pisa oder der Kirchturm von Suurhusen?

Der Turm von Suurhusen ist 27,47 m hoch und hat einen Überhang von 2,43 m. Für den Neigungswinkel α wird dann sin α = Überhang / Höhe d.h. α = 5,08°.

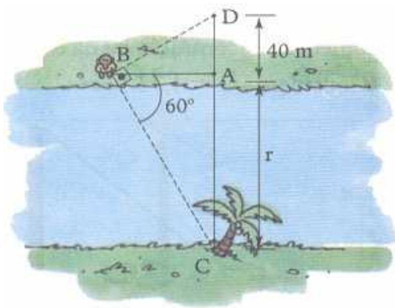


Der Turm in Pisa ist 55 m hoch und hatte einen maximalen Überhang von 4,26 m. Aus diesen Zahlen errechnet sich eine Neigung von 4,44°.
Nach dieser Berechnung steht der schiefste Turm der Welt also nicht in Pisa, sondern in Suurhusen.
Der Überhang am Suurhusener Kirchturm wurde erstmals 1885 festgestellt und nahm schnell zu (1925: 1,13 m ; 1967: 2,03 m; 1990: 2,43 m). Durch kostspielige Sanierungsmaßnahmen konnte ein weiteres Neigen bisher verhindert werden.

Turm von Pisa

Der Turm war als freistehender Glockenturm für den Dom in Pisa geplant. Die Grundsteinlegung des Turms fand am 9.August 1173 statt. Wenige Jahre nach Baubeginn, als gerade die drei unteren Stockwerke fertig waren, hatte der Turm wegen eines Grundbruches bereits eine Schräglage Richtung Südosten. Nach zwölfjährigen Sanierungsmaßnahmen, bei denen der Turm wieder um 44 Zentimeter aufgerichtet wurde, ist er nur noch 3,82 m geneigt und seit dem 15.Dezember 2001 wieder für Touristen geöffnet.

Dreiecksberechnung-Beispiel

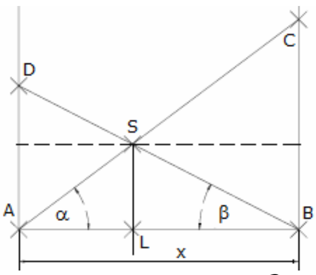


Aufgabe aus einem portugiesischen Mathematiklehrbuch:
Para medir a largura AC de um rio, um homem usou o seguinte procedimento: localizou um ponto B, na margem do rio, de onde podia ver na margem oposta o coqueiro C, de forma que o ângulo ABC fosse de 60°, e determinou o ponto D no prologamento de CA, de forma que o ângulo CBD fosse reto.
Medindo AD e encontrando 40 m, achou a largura do rio. Determine esaa largura.

Zur Bestimmung einer Flussbreite AC wird der Punkt C unter einem Winkel $\angle$ ABC von 60° von einem Punkt B aus anvisiert. Auf der Verlängerung von AB liegt ein Punkt D, so dass der Winkel $\angle$ DBC ein rechter wird. Die Entfernung von A nach D ist 40 m. Wie groß ist die Flussbreite AC?

Lösung: Im Dreieck ABD wird die Kathete AB = AD / tan $\angle$ ABD = 40 m / tan 30° = 69,28 m
Im Dreieck ACB wird dann AC = AB tan 60° = 120 m
Verallgemeinert man die Aufgabe auf AD = x und $\angle$ ABC = α, so ergibt sich AC = x tan² α

Dreiecksberechnung-Beispiel 2



Aufgabe: In der nebenstehenden, nicht maßstabsgerechten Figur, sind 3 Streckenlängen bekannt: AC = 3 ; BD = 2 und SL = 1
Bestimmt werden soll die Länge der Grundseite AB, d.h. x. Dabei sind AD und AB sowie CB und AB senkrecht zueinander.

Lösung: Mit den Bezeichnungen x_1 = AL und x_2 = LB wird

$x_1 = 1 / \tan \alpha$ und $x_2 = 1 / \tan \beta$

$x = x_1 + x_2 = 3 \cos \alpha$

$x = x_1 + x_2 = 2 \cos \beta$ $\qquad 1 / \tan \alpha + 1 / \tan \beta = 3 \cos \alpha$

Nun ist $1 / \tan \beta = \cos \beta / \sin \beta = 3/2 \cos \alpha / \sin \beta = 3 \cos \alpha / \sqrt{4 - 9 \cos^2 \alpha}$

und somit $1 / \tan \alpha + 3 \cos \alpha / \sqrt{4 - 9 \cos^2 \alpha} = 3 \cos \alpha$

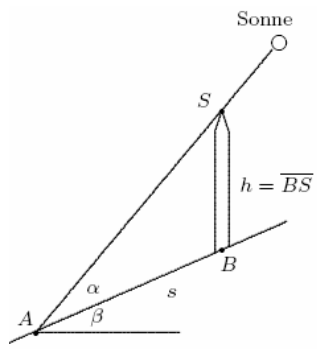
Nach einigen Umformungen ergibt sich eine Funktion in α

$f(x) = (3 \sin \alpha - 1) \sqrt{4 - 9 \cos^2 \alpha} - 3 \sin \alpha$

die nicht analytisch, sondern nur iterativ lösbar ist

$\alpha = 65{,}77033434$ $\qquad x = 1{,}23118572$

Dreiecksberechnung-Beispiel 3



Aufgabe: Ein Turm der Höhe h steht an einem Hang, der unter dem Winkel β = 30° gegen die Horizontale geneigt ist. Die Schattenlänge s = AB des Turms ist bei dem aus der Skizze ersichtlichen Sonnenstand gerade doppelt so groß wie die Turmhöhe.
Berechne den Winkel α zwischen Sonnenstrahlen und Hang.

Lösung: Für die Lösung ist die Ermittlung der Lotlänge von B auf die Waagerechte durch A und des Abstandes des entsprechenden Lotfußpunktes F zu A notwendig.

Da $s = 2h$ ist wird $BF = s \cdot \sin\beta = 2h \cdot \sin\beta$ $AF = 2h \cdot \cos\beta$
Damit wird für das Dreiecke AFS

$$\tan(\alpha + \beta) = (BS + BF) / AF = (h + 2h \sin\beta) / (2h \cos\beta) = 2 / \sqrt{3}$$

und somit für den Winkel $\alpha \approx 19{,}1°$.

Trigonometrischer Beweis der Heronischen Dreiecksformel

Gegeben sei ein beliebiges Dreiecke ABC mit den Seiten a, b, c und dem Winkel γ bei C. Dann gilt
Flächenformel $A = 1/2\ a\ b \sin\gamma$
Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a\ b \cos\gamma$
Umstellen beider Gleichungen nach dem Winkel ergibt

$$\sin\gamma = 2\ A / (a\ b) \qquad \cos\gamma = (c^2 - a^2 - b^2) / (-2\ a\ b)$$

Quadrieren und addieren beider Gleichungen liefert unter Berücksichtigung von $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$:

$$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1 = 4\ A^2 / (a^2 b^2) + (c^2 - a^2 - b^2)^2 / (4\ a^2 b^2)$$

und weiter

$$4\ a^2 b^2 = 16\ A^2 + (c^2 - a^2 - b^2)^2 \qquad 16\ A^2 = 4\ a^2 b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2$$
$$16\ A^2 = (2\ a\ b + (a^2 + b^2 - c^2))\ (2\ a\ b - (a^2 + b^2 - c^2))$$
$$16\ A^2 = ((a + b)^2 - c^2)\ (c^2 - (a - b)^2)$$
$$16\ A^2 = (a + b + c)\ (a + b - c)\ (a + c - b)\ (b + c - a)$$
$$16\ A^2 = 2\ s\ (2s - 2c)\ (2s - 2b)\ (2s - 2a)$$

und somit die Heronische Dreiecksformel **$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$**
Anmerkung: Wendet man die gefundene Gleichung $4\ a^2 b^2 = 16\ A^2 + (c^2 - a^2 - b^2)^2$ auf rechtwinklige Dreiecke an, für die $A = a\ b / 2$ gilt, wird $4\ a^2 b^2 = 4\ a^2 b^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2$

$$0 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 \qquad a^2 + b^2 = c^2$$

Damit ergibt sich der Satz von Pythagoras als eine spezielle Folgerung aus der Heronischen Dreiecksgleichung.

Einfache goniometrische Gleichungen

Bestimmen Sie alle Winkel x für die gilt:
a) $\sin(3x+15°) = -0{,}5$

$3x+15° = -30°+k\cdot360° = 330°+k\cdot360° \Rightarrow 3x = 315°+k\cdot360° \Rightarrow x = 105°+k\cdot120°$ oder
$3x+15° = 210°+k\cdot360° \Rightarrow 3x = 195°+k\cdot360° \Rightarrow x = 65°+k\cdot360°$

Im Interval [0°;360°] sind dies die Winkel: 65°, 105°, 185°, 225°, 305°, 345°

b) $2 \cos(x-60°) = -1$

$\cos(x-60°) = -1/2 \Rightarrow x-60° = 120°+k\cdot360° \Rightarrow x = 180°+k\cdot360°$ oder
$x-60° = 240°+k\cdot360° \Rightarrow x = 300°+k\cdot360°$

c) $\tan 4x = \sqrt{3}$

$4x = 60°+k\cdot180° \Rightarrow x = 15°+k\cdot45°$

d) $2 \sin(x+15°) = -\sqrt{2}$

$\sin(x+15°) = -\sqrt{2}/2 \Rightarrow x+15° = 225°+k\cdot360° \Rightarrow x = 210°+k\cdot360°$ oder
$x+15° = 315°+k\cdot360° \Rightarrow x = 300°+k\cdot360°$

e) $2 \cos(3x-60°) = 1$

$\cos(3x-60°) = 0{,}5 \Rightarrow 3x-60° = 60°+k\cdot360° \Rightarrow 3x = 120°+k\cdot360° \Rightarrow x = 40°+k\cdot120°$ oder
$3x-60° = 300°+k\cdot360° \Rightarrow 3x = 360°+k\cdot360° \Rightarrow 3x = 0°+k\cdot360° \Rightarrow x = k\cdot120°$

f) $2 \sin(0{,}3x+45°) = -\sqrt{3}$

$\sin(0{,}3x+45°) = -\sqrt{3}/2 \Rightarrow 0{,}3x+45° = 240°+k\cdot360° \Rightarrow 0{,}3x = 195°+k\cdot360°$
$\Rightarrow x = 650°+k\cdot1200°$ oder
$0{,}3x+45° = 300°+k\cdot360° \Rightarrow 0{,}3x = 255°+k\cdot360° \Rightarrow x = 850°+k\cdot1200°$

Goniometrische Gleichung

$a \cos x + b \sin x = c$

Ansatz $y = \tan(x/2)$, d.h. $\cos x = (1-y^2)/(1+y^2)$ und $\sin x = 2y/(1+y^2)$

ergibt $y = \tan(x/2) = 1/(a+c)\ [b \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}]$

Ansatz $y = \tan(x/2)$ und $\alpha = (a+c)/b$ und $\beta = (a-c)/b$

ergibt $y = 1/\alpha\ [1 \pm \sqrt{1 + \alpha\beta}]$

Goniometrische Gleichungen sind Gleichungen zwischen verschiedenen Winkelfunktionen unterschiedlicher Argumente. Zur Lösung einer solchen Gleichung kann u.U. folgender Lösungsweg genutzt werden:
1. Man drückt die auftretenden Winkelfunktionen mit Hilfe der trigonometrischen Formeln durch eine einzige Winkelfunktion eines einzigen Argumentes ax, also durch sin(ax), cos(ax), tan(ax) oder cot(ax) aus.
2. Man setzt die festgelegte Winkelfunktion gleich y, also z.B. y=sin ax, und erhält durch Einsetzen eine Gleichung für die eine Veränderliche g(y) = 0.
3. Man ermittelt dazu alle Lösungen y_1, y_2, ...
4. Durch Rücksubstituierung wird Schritt 2. rückgängig gemacht. Anschließend ermittelt man alle Lösungen der Gleichungen $y_1 = \sin(ax)$, $y_2 = \sin(ax)$, ...
5. Alle Lösungen sind mit einer Probe zu kontrollieren!

Arten goniometrischer Gleichungen

Gleichung	entwickelte Gleichung
a sin x = b cos x	tan x = b/a
-a sin x = b cos x	tan x = -b/a
a sin x = b tan x	cos x = b/a
-a sin x = b tan x	cos x = b/a
a sin x = b cot x	cos x = $(-b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}) / (2a)$
a sin x = b sec x	sin 2x = 2b/a
a sin x = b csc x	sin x = $\sqrt{b/a}$
a cos x = b tan x	sin x = $(-b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}) / (2a)$
a cos x = b cot x	sin x = b/a
a cos x = b sec x	cos x = $\sqrt{b/a}$
a cos x = b csc x	sin 2x = 2b/a
a tan x = b cot x	tan x = $\sqrt{b/a}$
a tan x = b sec x	sin x = b/a
a tan x = b csc x	cos x = $(-b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}) / (2a)$
a cot x = b sec x	sin x = $(-b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}) / (2a)$
a cot x = b csc x	cos x = b/a
a sec x = b csc x	tan x = b/a
a $\sin^2$ x = b cos x	cos x = $(-b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}) / (2a)$
a $\sin^2$ x = b tan x	sin 2x = 2b/a
a $\sin^2$ x = b cot x	$\cot^3$ x + cot x - a/b = 0
a $\sin^2$ x = b sec x	$\cot^3$ x - cot x + b/a = 0
a $\sin^2$ x = b csc x	sin x = $\sqrt[3]{b/a}$
a $\cos^2$ x = b sin x	sin x = $(-b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}) / (2a)$
a $\cos^2$ x = b tan x	$\tan^3$ x + tan x - a/b = 0
a $\cos^2$ x = b cot x	sin 2x = 2b/a
a $\cos^2$ x = b sec x	cos x = $\sqrt[3]{b/a}$
a $\cos^2$ x = b csc x	$\sin^3$ x - sin x + b/a = 0
a $\tan^2$ x = b sin x	sin x = $-(a \pm \sqrt{4b^2 + a^2}) / (2b)$
a $\tan^2$ x = b cos x	$\cos^3$ x + a/b $\cos^2$ x - a/b = 0
a $\tan^2$ x = b cot x	tan x = $\sqrt[3]{b/a}$
a $\tan^2$ x = b sec x	tan x = $(-b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}) / (2a)$
a $\tan^2$ x = b csc x	$\sin^3$ x + b/a $\sin^2$ x - b/a = 0
a $\cot^2$ x = b sin x	$\sin^3$ x + a/b $\sin^2$ x - a/b = 0
a $\cot^2$ x = b cos x	cos x = $(-a \pm \sqrt{4b^2 + a^2}) / (2b)$
a $\cot^2$ x = b tan x	cot x = $\sqrt[3]{b/a}$
a $\cot^2$ x = b sec x	$\cos^3$ x + b/a $\cos^2$ x - b/a = 0
a $\cot^2$ x = b csc x	sin x = $(-b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}) / (2a)$
a $\sec^2$ x = b sin x	$\sin^3$ x - sin x + a/b = 0
a $\sec^2$ x = b cos x	cos x = $\sqrt[3]{a/b}$
a $\sec^2$ x = b tan x	sin 2x = 2a/b
a $\sec^2$ x = b cot x	$\cot^3$ x - a/b $\cot^2$ x - a/b = 0
a $\sec^2$ x = b csc x	sin x = $(-a \pm \sqrt{4b^2 + a^2}) / (2b)$
a $\csc^2$ x = b sin x	sin x = $\sqrt[3]{a/b}$
a $\csc^2$ x = b cos x	$\cos^3$ x - cos x + a/b = 0
a $\csc^2$ x = b tan x	$\tan^3$ x - a/b $\tan^2$ x - a/b = 0
a $\csc^2$ x = b cot x	sin 2x = 2a/b
a $\csc^2$ x = b sec x	cos x = $(-a \pm \sqrt{4b^2 + a^2}) / (2b)$
a $\sin^2$ x = b cos x tan x	sin x = b/a
a $\sin^2$ x = b cos x cot x	$\sin^3$ x + b/a $\sin^2$ x - b/a = 0
a $\sin^2$ x = b cos x sec x	sin x = $\sqrt{b/a}$
a $\sin^2$ x = b cos x csc x	$\cot^3$ x + cot x - a/b = 0
a $\sin^2$ x = b tan x cot x	sin x = $\sqrt{b/a}$
a $\sin^2$ x = b tan x sec x	$\sin^3$ x - sin x + b/a = 0
a $\sin^2$ x = b tan x csc x	$\cos^3$ x - cos x + b/a = 0
a $\sin^2$ x = b cot x sec x	sin x = $\sqrt[3]{b/a}$
a $\sin^2$ x = b cot x csc x	$\cos^4$ x - 2 $\cos^2$ x - b/a cos x + 1 = 0
a $\sin^2$ x = b sec x csc x	$\sin^8$ x - $\sin^6$ x + b^2/a^2 = 0
a $\cos^2$ x = b sin x tan x	$\cos^3$ x + b/a $\cos^2$ x - b/a = 0
a $\cos^2$ x = b sin x cot x	cos x = b/a
a $\cos^2$ x = b sin x sec x	$\tan^3$ x + tan x - a/b = 0
a $\cos^2$ x = b sin x csc x	cos x = $\sqrt{b/a}$
a $\cos^2$ x = b tan x cot x	cos x = $\sqrt{b/a}$
a $\cos^2$ x = b tan x sec x	$\sin^4$ x - 2 $\sin^2$ x - b/a sin x + 1 = 0
a $\cos^2$ x = b tan x csc x	cos x = $\sqrt[3]{b/a}$
a $\cos^2$ x = b cot x sec x	$\sin^3$ x - sin x + b/a = 0
a $\cos^2$ x = b cot x csc x	$\cos^3$ x - cos x + b/a = 0
a $\cos^2$ x = b sec x csc x	$\cos^8$ x - $\cos^6$ x + b^2/a^2 = 0
a $\tan^2$ x = b sin x cos x	$\tan^3$ x + tan x - b/a = 0

$a \tan^2 x = b \sin x \cot x$	$\cos^3 x + a/b \cos^2 x - a/b = 0$
$a \tan^2 x = b \sin x \sec x$	$\tan x = b/a$
$a \tan^2 x = b \sin x \csc x$	$\tan x = \sqrt{(b/a)}$
$a \tan^2 x = b \cos x \cot x$	$\sin^4 x - a/b \sin^3 x - 2 \sin^2 x + 1 = 0$
$a \tan^2 x = b \cos x \sec x$	$\tan x = \sqrt{(b/a)}$
$a \tan^2 x = b \cos x \csc x$	$\tan x = \sqrt[3]{(b/a)}$
$a \tan^2 x = b \cot x \sec x$	$\sin^3 x + b/a \sin^2 x - b/a = 0$
$a \tan^2 x = b \cot x \csc x$	$\cos^4 x - b/a \cos^3 x - 2 \cos^2 x + 1 = 0$
$a \tan^2 x = b \sec x \csc x$	$\cot^3 x + \cot x - a/b = 0$
$a \cot^2 x = b \sin x \cos x$	$\cot^3 x + \cot x - b/a = 0$
$a \cot^2 x = b \sin x \tan x$	$\cos^4 x - a/b \cos^3 x - 2 \cos^2 x + 1 = 0$
$a \cot^2 x = b \sin x \sec x$	$\tan x = \sqrt[3]{(a/b)}$
$a \cot^2 x = b \sin x \csc x$	$\tan x = \sqrt{(a/b)}$
$a \cot^2 x = b \cos x \tan x$	$\sin^3 x + a/b \sin^2 x - a/b = 0$
$a \cot^2 x = b \cos x \sec x$	$\tan x = \sqrt{(a/b)}$
$a \cot^2 x = b \cos x \csc x$	$\tan x = a/b$
$a \cot^2 x = b \tan x \sec x$	$\sin^4 x - b/a \sin^3 x - 2 \sin^2 x + 1 = 0$
$a \cot^2 x = b \tan x \csc x$	$\cos^3 x + b/a \cos^2 x - b/a = 0$
$a \cot^2 x = b \sec x \csc x$	$\tan^3 x + \tan x - a/b = 0$
$a \sec^2 x = b \sin x \cos x$	$\cos^8 x - \cos^6 x + a^2/b^2 = 0$
$a \sec^2 x = b \sin x \tan x$	$\cos^3 x - \cos x + a/b = 0$
$a \sec^2 x = b \sin x \cot x$	$\cos x = \sqrt[3]{(a/b)}$
$a \sec^2 x = b \sin x \csc x$	$\cos x = \sqrt{(a/b)}$
$a \sec^2 x = b \cos x \tan x$	$\sin^3 x - \sin x + a/b = 0$
$a \sec^2 x = b \cos x \cot x$	$\sin^4 x - 2 \sin^2 x - a/b \sin x + 1 = 0$
$a \sec^2 x = b \cos x \csc x$	$\cot^3 x - a/b \cot^2 x - a/b = 0$
$a \sec^2 x = b \tan x \cot x$	$\cos x = \sqrt{(a/b)}$
$a \sec^2 x = b \tan x \csc x$	$\cos x = a/b$
$a \sec^2 x = b \cot x \csc x$	$\cos^3 x + a/b \cos^2 x - a/b = 0$
$a \csc^2 x = b \sin x \cos x$	$\sin^8 x + \sin^6 x + a^2/b^2 = 0$
$a \csc^2 x = b \sin x \tan x$	$\cos^4 x - 2 \cos^2 x - a/b \cos x + 1 = 0$
$a \csc^2 x = b \sin x \cot x$	$\cos^3 x - \cos x + a/b = 0$
$a \csc^2 x = b \sin x \sec x$	$\tan^3 x - a/b \tan^2 x - a/b = 0$
$a \csc^2 x = b \cos x \tan x$	$\sin x = \sqrt[3]{(a/b)}$
$a \csc^2 x = b \cos x \cot x$	$\sin^3 x - \sin x + a/b = 0$
$a \csc^2 x = b \cos x \sec x$	$\sin x = \sqrt{(a/b)}$
$a \csc^2 x = b \tan x \cot x$	$\sin x = \sqrt{(a/b)}$
$a \csc^2 x = b \tan x \sec x$	$\sin^3 x + a/b \sin^2 x - a/b = 0$
$a \csc^2 x = b \cot x \sec x$	$\sin x = a/b$
$a \sin x \cos x = b \tan x \sec x$	$\cos x = \sqrt[3]{(b/a)}$
$a \sin x \cos x = b \tan x \csc x$	$\sin x = \sqrt[3]{(b/a)}$
$a \sin x \cos x = b \sec x \csc x$	$\sin x = \sqrt{(1/2 (1 \pm \sqrt{(1 - 4b/a)}))}$
$a \sin x \tan x = b \cos x \cot x$	$\tan x = \sqrt[3]{(b/a)}$
$a \sin x \tan x = b \cot x \csc x$	$\sin x = \sqrt{(1/(2a) (-b \pm \sqrt{(b^2 + 4ab)}))}$
$a \sin x \tan x = b \sec x \csc x$	$\sin x = \sqrt[3]{(b/a)}$
$a \cos x \cot x = b \tan x \sec x$	$\cos x = \sqrt{(1/(2a) (-b \pm \sqrt{(b^2 + 4ab)}))}$
$a \cos x \cot x = b \sec x \csc x$	$\cos x = \sqrt[3]{(b/a)}$
$a \tan x \sec x = b \cot x \csc x$	$\tan x = \sqrt[3]{(b/a)}$
$a \sin x + b \cos x = c$	$\sin x = (ac \pm b \sqrt{(a^2 - c^2 + b^2)}) / (a^2 + b^2)$
$a \sin x + b \tan x = c$	$\sin^4 x - 2c/a \sin^3 x + (b^2+c^2-a^2)/a^2 \sin^2 x - 2c/a \sin x - c^2/a^2 = 0$
$a \sin x + b \cot x = c$	$\sin^4 x - 2c/a \sin^3 x + (b^2+c^2)/a^2 \sin^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \sin x + b \sec x = c$	$\cos^4 x + (c^2-b^2)/a^2 \cos^2 x - 2bc/a^2 \cos x + b^2/a^2 = 0$
$a \sin x + b \csc x = c$	$\sin x = (c \pm \sqrt{(c^2 - 4ab)}) / (2a)$
$a \cos x + b \tan x = c$	$\cos^4 x - 2c/a \cos^3 x + (c^2+b^2)/a^2 \cos^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \cos x + b \cot x = c$	$\sin^4 x + 2b/a \sin^3 x + (b^2+c^2-a^2)/a^2 \sin^2 x - 2b/a \sin x - b^2/a^2 = 0$
$a \cos x + b \sec x = c$	$\cos x = (c \pm \sqrt{(c^2 - 4ab)}) / (2a)$
$a \cos x + b \csc x = c$	$\sin^4 x + (c^2-b^2)/a^2 \sin^2 x - 2bc/a^2 \sin x + b^2/a^2 = 0$
$a \tan x + b \cot x = c$	$\tan x = (c \pm \sqrt{(c^2 - 4ab)}) / (2a)$
$a \tan x + b \sec x = c$	$\sin x = (-ab \pm c \sqrt{(a^2 - b^2 + c^2)}) / (a^2 + c^2)$
$a \tan x + b \csc x = c$	$\sin^4 x - 2bc/(a^2+c^2) \sin^3 x + (b^2-c^2)/(a^2+c^2) \sin^2 x + 2bc/(a^2+c^2) \sin x - b^2/(a^2+c^2) = 0$
$a \cot x + b \sec x = c$	$\cos^4 x - 2bc/(a^2+c^2) \cos^3 x + (b^2-c^2)/(a^2+c^2) \cos^2 x + 2bc/(a^2+c^2) \cos x - b^2/(a^2+c^2) = 0$
$a \cot x + b \csc x = c$	$\sin x = (cb \pm a \sqrt{(a^2 - b^2 + c^2)}) / (a^2 + c^2)$
$a \sec x + b \csc x = c$	$\sin^4 x - 2b/c \sin^3 x + (a^2+b^2-c^2)/c^2 \sin^2 x + 2b/c \sin x - b^2/c^2 = 0$
$a \sin^2 x + b \sin x = c$	$\sin x = (-b \pm \sqrt{(4ac + b^2)}) / (2a)$
$a \sin^2 x + b \cos x = c$	$\cos x = (b \pm \sqrt{(4a^2 - 4ac + b^2)}) / (2a)$
$a \sin^2 x + b \tan x = c$	$\sin^6 x - (2c+a)/a \sin^4 x - (b^2+c^2+2ac)/a^2 \sin^2 x - c^2/a^2 = 0$
$a \sin^2 x + b \cot x = c$	$\sin^6 x - 2c/a \sin^4 x + (b^2+c^2)/a^2 \sin^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \sin^2 x + b \sec x = c$	$\cos^3 x + (c-a)/a \cos x - b/a = 0$
$a \sin^2 x + b \csc x = c$	$\sin^3 x - c/a \sin x + b/a = 0$
$a \cos^2 x + b \sin x = c$	$\sin x = (b \pm \sqrt{(4a^2 - 4ac +b^2)}) / (2a)$

$a \cos^2 x + b \cos x = c$	$\cos x = (-b \pm \sqrt{4ac + b^2}) / (2a)$
$a \cos^2 x + b \tan x = c$	$\tan^3 x - c/b \tan^2 x + \tan x + (a-c)/b = 0$
$a \cos^2 x + b \cot x = c$	$\cot^3 x + (a-c)/b \cot^2 x + \cot x - c/b = 0$
$a \cos^2 x + b \sec x = c$	$\cos^3 x - c/a \cos x + b/a = 0$
$a \cos^2 x + b \csc x = c$	$\sin^3 x + (c-a)/b \sin x - b/a = 0$
$a \tan^2 x + b \sin x = c$	$\sin^3 x - (c+a)/b \sin^2 x - \sin x + c/b = 0$
$a \tan^2 x + b \cos x = c$	$\cos^3 x - (c+a)/b \cos^2 x + a/b = 0$
$a \tan^2 x + b \tan x = c$	$\tan x = (-b \pm \sqrt{4ac + b^2}) / (2a)$
$a \tan^2 x + b \cot x = c$	$\tan^3 x - c/a \tan x + b/a = 0$
$a \tan^2 x + b \sec x = c$	$\cos x = (b \pm \sqrt{4a^2 + 4ac + b^2}) / (2a + 2c)$
$a \tan^2 x + b \csc x = c$	$\sin^3 x - b/(a+c) \sin^2 x - c/(a+c) \sin x + b/(a+c) = 0$
$a \cot^2 x + b \sin x = c$	$\sin^3 x - (a+c)/b \sin^2 x + a/b = 0$
$a \cot^2 x + b \cos x = c$	$\cos^3 x - (a+c)/b \cos^2 x - \cos x + c/b = 0$
$a \cot^2 x + b \tan x = c$	$\cot^3 x - c/a \cot x + b/a = 0$
$a \cot^2 x + b \cot x = c$	$\cot x = (-b \pm \sqrt{4ac + b^2}) / (2a)$
$a \cot^2 x + b \sec x = c$	$\cos^3 x - b/(a+c) \cos^2 x - c/(a+c) \cos x + b/(a+c) = 0$
$a \cot^2 x + b \csc x = c$	$\sin x = (b \pm \sqrt{4a^2 + 4ac + b^2}) / (2a + 2c)$
$a \sec^2 x + b \sin x = c$	$\sin^3 x - c/b \sin^2 x - \sin x + (c-a)/b = 0$
$a \sec^2 x + b \cos x = c$	$\cos^3 x - c/b \cos^2 x + a/b = 0$
$a \sec^2 x + b \tan x = c$	$\tan x = (-b \pm \sqrt{-4a^2 + 4ac + b^2}) / (2a)$
$a \sec^2 x + b \cot x = c$	$\cot^3 x + (a-c)/b \cot^2 x + a/b = 0$
$a \sec^2 x + b \sec x = c$	$\cos x = (b \pm \sqrt{4ac + b^2}) / (2c)$
$a \sec^2 x + b \csc x = c$	$\sin^3 x - b/c \sin^2 x + (a-c)/c \sin x + b/c = 0$
$a \csc^2 x + b \sin x = c$	$\sin^3 x - c/b \sin^2 x + a/b = 0$
$a \csc^2 x + b \cos x = c$	$\cos^3 x - c/b \cos^2 x - \cos x + (c-a)/b = 0$
$a \csc^2 x + b \tan x = c$	$\tan^3 x + (a-c)/b \tan^2 x + a/b = 0$
$a \csc^2 x + b \cot x = c$	$\cot x = (-b \pm \sqrt{4ac - 4a^2 + b^2}) / (2a)$
$a \csc^2 x + b \sec x = c$	$\cos^3 x - b/c \cos^2 x + (a-c)/c \cos x + b/c = 0$
$a \csc^2 x + b \csc x = c$	$\sin x = (b \pm \sqrt{4ac + b^2}) / (2c)$
$a \sin^2 x + b \cos^2 x = c$	$\cos x = \sqrt{(a-c) / (a-b)}$
$a \sin^2 x + b \tan^2 x = c$	$\sin x = \sqrt{(a+b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2 + 2ab+2bc-2ac}) / (2a)}$
$a \sin^2 x + b \cot^2 x = c$	$\sin x = \sqrt{(b+c \pm \sqrt{(b+c)^2 - 4ab}) / (2a)}$
$a \sin^2 x + b \sec^2 x = c$	$\sin x = \sqrt{(a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4ab}) / (2a)}$
$a \sin^2 x + b \csc^2 x = c$	$\sin x = \sqrt{(c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}) / (2a)}$
$a \cos^2 x + b \tan^2 x = c$	$\cos x = \sqrt{(b+c \pm \sqrt{(b+c)^2 - 4ab}) / (2a)}$
$a \cos^2 x + b \cot^2 x = c$	$\cos x = \sqrt{(a+b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2 + 2ab+2bc-2ac}) / (2a)}$
$a \cos^2 x + b \sec^2 x = c$	$\cos x = \sqrt{(c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}) / (2a)}$
$a \cos^2 x + b \csc^2 x = c$	$\cos x = \sqrt{(a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4ab}) / (2a)}$
$a \tan^2 x + b \cot^2 x = c$	$\tan x = \sqrt{(c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}) / (2a)}$
$a \tan^2 x + b \sec^2 x = c$	$\tan x = \sqrt{(c-b) / (a+b)}$
$a \tan^2 x + b \csc^2 x = c$	$\tan x = \sqrt{(c-b \pm \sqrt{(b-c)^2 - 4ab}) / (2a)}$
$a \cot^2 x + b \sec^2 x = c$	$\cot x = \sqrt{(c-b \pm \sqrt{(b-c)^2 - 4ab}) / (2a)}$
$a \cot^2 x + b \csc^2 x = c$	$\cot x = \sqrt{(c-b) / (a+b)}$
$a \sec^2 x + b \csc^2 x = c$	$\sin x = \sqrt{(b+c-a \pm \sqrt{(b-c)^2 + a^2 - 2ab - 2ac}) / (2c)}$
$a \sin x + b \sin x \cos x = c$	$\sin^4 x + (a^2-b^2)/b^2 \sin^2 x - 2ac/b^2 \sin x + c^2/b^2 = 0$
$a \sin x + b \sin x \tan x = c$	$\sin^4 x - 2ac/(a^2+b^2) \sin^3 x + (c^2-a^2)/(a^2+b^2) \sin^2 x + 2ac/(a^2+b^2) \sin x - c^2/(a^2+b^2) = 0$
$a \sin x + b \sin x \cot x = c$	$\sin x = (ac \pm b \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}) / (a^2+b^2)$
$a \sin x + b \sin x \sec x = c$	$\sin^4 x - 2c/a \sin^3 x + (b^2+c^2-a^2)/a^2 \sin^2 x - 2c/a \sin x - c^2/a^2 = 0$
$a \sin x + b \sin x \csc x = c$	$\sin x = (c-b)/a$
$a \sin x + b \cos x \tan x = c$	$\sin x = c/(a+b)$
$a \sin x + b \cos x \cot x = c$	$\sin x = (c \pm \sqrt{a^2 + 4b^2 - 4ab}) / (2a - 2b)$
$a \sin x + b \cos x \sec x = c$	$\sin x = (c-b)/a$
$a \sin x + b \cos x \csc x = c$	$\sin^4 x - 2c/a \sin^3 x + (c^2+b^2)/a^2 \sin^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \sin x + b \tan x \cot x = c$	$\sin x = (c-b)/a$
$a \sin x + b \tan x \sec x = c$	$\sin^3 x - c/a \sin^2 x - (a+b)/a \sin x + c/a = 0$
$a \sin x + b \tan x \csc x = c$	$\cos^4 x + (c^2-a^2)/a^2 \cos^2 x - 2bc/a^2 \cos x + b^2/a^2 = 0$
$a \sin x + b \cot x \sec x = c$	$\sin x = (c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}) / (2a)$
$a \sin x + b \cot x \csc x = c$	$\sin^6 x - 2c/a \sin^5 x + c^2/a^2 \sin^4 x - b^2/a^2 \sin^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \sin x + b \sec x \csc x = c$	$\sin^6 x - 2c/a \sin^5 x + (c^2-a^2)/a^2 \sin^4 x + 2c/a \sin^3 x - c^2/a^2 \sin^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \cos x + b \sin x \cos x = c$	$\cos^4 x + (a^2-b^2)/b^2 \cos^2 x - 2ac/b^2 \cos x + c^2/a^2 = 0$
$a \cos x + b \sin x \tan x = c$	$\cos x = (c \pm \sqrt{c^2 - 4ab + 4b^2}) / (2a - 2b)$
$a \cos x + b \sin x \cot x = c$	$\cos x = c/(a+b)$
$a \cos x + b \sin x \sec x = c$	$\cos^4 x - 2c/a \cos^3 x + (c^2+b^2)/a^2 \cos^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \cos x + b \sin x \csc x = c$	$\cos x = (c-b)/a$
$a \cos x + b \cos x \tan x = c$	$\sin x = (bc \pm a \sqrt{b^2 - c^2 + a^2}) / (a^2+b^2)$
$a \cos x + b \cos x \cot x = c$	$\cos^4 x - 2ac/(a^2+b^2) \cos^3 x + (c^2-a^2)/(a^2+b^2) \cos^2 x + 2ac/(a^2+b^2) - c^2/(a^2+b^2) = 0$
$a \cos x + b \cos x \sec x = c$	$\cos x = (c-b)/a$
$a \cos x + b \cos x \csc x = c$	$\sin^4 x + 2b/a \sin^3 x + (c^2+b^2-a^2)/a^2 \sin^2 x - 2b/a \sin x - b^2/a^2 = 0$
$a \cos x + b \tan x \cot x = c$	$\cos x = (c-b)/a$
$a \cos x + b \tan x \sec x = c$	$\cos^6 x - 2c/a \cos^5 x + c^2/a^2 \cos^4 x + b^2/a^2 \cos^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \cos x + b \tan x \csc x = c$	$\cos x = (c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}) / (2a)$

$a \cos x + b \cot x \sec x = c$	$\sin^4 x + (c^2-a^2)/a^2 \sin^2 x - 2bc/a^2 \sin x + b^2/a^2 = 0$
$a \cos x + b \cot x \csc x = c$	$\cos^3 x - c/a \cos^2 x - (a+b)/a \cos x + c/a = 0$
$a \cos x + b \sec x \csc x = c$	$\sin^6 x -(2a^2-c^2)/a^2 \sin^4 x -2b/a \sin^3 x +(a^2-c^2)/a^2 \sin^2 x +2b/a \sin x +b^2/a^2 = 0$
$a \tan x + b \sin x \cos x = c$	$\sin^6 x + (2a^2+2b^2)/b \sin^4 x + ((a+b)^2+c^2)/b^2 \sin^2 x - c^2/b^2 = 0$
$a \tan x + b \sin x \tan x = c$	$\sin^4 x + 2a/b \sin^3 x + (a^2+b^2)/b^2 \sin^2 x - c^2/b^2 = 0$
$a \tan x + b \sin x \cot x = c$	$\cos^4 x - 2c/b \cos^3 x + (a^2+c^2)/b^2 \cos^2 x - a^2/b^2 = 0$
$a \tan x + b \sin x \sec x = c$	$\tan x = c/(a+b)$
$a \tan x + b \sin x \csc x = c$	$\tan x = (c-a)/b$
$a \tan x + b \cos x \tan x = c$	$\sin^4 x - 2c/b \sin^3 x + (a^2+c^2-b^2)/b^2 \sin^2 x - 2c/b \sin x - c^2/b^2 = 0$
$a \tan x + b \cos x \cot x = c$	$\cos^6 x - 2a/b \cos^5 x + (a^2+c^2)/b^2 \cos^4 x + 2a/b \cos^3 x - (2a^2+c^2)/b^2 \cos^2 x + a^2/b^2 = 0$
$a \tan x + b \cos x \sec x = c$	$\tan x = (c-b)/a$
$a \tan x + b \cos x \csc x = c$	$\tan x = (c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}) / (2a)$
$a \tan x + b \tan x \cot x = c$	$\tan x = (c-b)/a$
$a \tan x + b \tan x \sec x = c$	$\sin^4 x + 2bc/(a^2+c^2) \sin^3 x + (b^2-a^2-2c^2)/(a^2+c^2) \sin^2 x - 2bc/(a^2+c^2) \sin x + c^2/(a^2+c^2) = 0$
$a \tan x + b \tan x \csc x = c$	$\sin x = (-ab \pm c \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}) / (a^2 + c^2)$
$a \tan x + b \cot x \sec x = c$	$\sin^4 x - 2bc/(a^2+c^2) \sin^3 x + (b^2-c^2)/(a^2+c^2) \sin^2 x + 2bc/(a^2+c^2) \sin x - b^2/(a^2+c^2) = 0$
$a \tan x + b \cot x \csc x = c$	$\sin^6 x - 2ab/(a^2+c^2) \sin^5 x + (b^2-c^2)/(a^2+c^2) \sin^4 x + 2ab/(a^2+c^2) \sin^3 x - 2b^2/(a^2+c^2) \sin^2 x + b^2/(a^2+c^2) = 0$
$a \tan x + b \sec x \csc x = c$	$\sin x = \sqrt{(c^2 - 2ab \pm c \sqrt{c^2 - 4ab - 4b^2}) / (2a^2 + 2c^2)}$
$a \cot x + b \sin x \cos x = c$	$\sin^6 x + (2a-b)/b \sin^4 x + (a^2-2ab+c^2)/b^2 \sin^2 x - a^2/b^2 = 0$
$a \cot x + b \sin x \tan x = c$	$\sin^6 x - 2a/b \sin^5 x + (a^2+c^2)/b^2 \sin^4 x + 2a/b \sin^3 x - (2a^2+c^2)/b^2 \sin^2 x + a^2/b^2 = 0$
$a \cot x + b \sin x \cot x = c$	$\sin^4 x - 2a/b \sin^3 x + (a^2+c^2-b^2)/b^2 \sin^2 x - 2a/b \sin x - a^2/b^2 = 0$
$a \cot x + b \sin x \sec x = c$	$\tan x = (c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}) / (2b)$
$a \cot x + b \sin x \csc x = c$	$\cot x = (c-b)/a$
$a \cot x + b \cos x \tan x = c$	$\sin^4 x - 2c/b \sin^3 x + (a^2+c^2)/b^2 \sin^2 x - a^2/b^2 = 0$
$a \cot x + b \cos x \cot x = c$	$\cos^4 x + 2a/b \cos^3 x + (a^2+c^2)/b^2 \cos^2 x - c^2/b^2 = 0$
$a \cot x + b \cos x \sec x = c$	$\cot x = (c-b)/a$
$a \cot x + b \cos x \csc x = c$	$\cot x = c/(a+b)$
$a \cot x + b \tan x \cot x = c$	$\cot x = (c-b)/a$
$a \cot x + b \tan x \sec x = c$	$\cos^6 x - 2ab/(a^2+c^2) \cos^5 x + (b^2-c^2)/(a^2+c^2) \cos^4 x + 2ab/(a^2+c^2) \cos^3 x - 2b^2/(a^2+c^2) \cos^2 x + b^2/(a^2+c^2) = 0$
$a \cot x + b \tan x \csc x = c$	$\cos^4 x - 2bc/(a^2+c^2) \cos^3 x + (b^2-c^2)/(a^2+c^2) \cos^2 x + 2bc/(a^2+c^2) \cos x - b^2/(a^2+c^2) = 0$
$a \cot x + b \cot x \sec x = c$	$\sin x = (bc \pm a \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}) / (a^2 + c^2)$
$a \cot x + b \cot x \csc x = c$	$\cos^4 x + 2bc/(a^2+c^2) \cos^3 x + (b^2-a^2-2c^2)/(a^2+c^2) \cos^2 x - 2bc/(a^2+c^2) \cos x + c^2/(a^2+c^2) = 0$
$a \cot x + b \sec x \csc x = c$	$\cos x = \sqrt{(c^2 - 2ab \pm c \sqrt{c^2 - 4ab - 4b^2}) / (2a^2 + 2b^2)}$
$a \sec x + b \sin x \cos x = c$	$\cos^6 x - \cos^4 x + c^2/b^2 \cos^2 x - 2ac/b^2 \cos x + a^2/b^2 = 0$
$a \sec x + b \sin x \tan x = c$	$\cos x = (-c \pm \sqrt{c^2 + 4b^2 + 4ab}) / (2b)$
$a \sec x + b \sin x \cot x = c$	$\cos x = (c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}) / (2b)$
$a \sec x + b \sin x \sec x = c$	$\sin x = (-ab \pm c \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}) / (b^2 + c^2)$
$a \sec x + b \sin x \csc x = c$	$\cos x = a/(c-b)$
$a \sec x + b \cos x \tan x = c$	$\cos^4 x + (c^2-b^2)/b^2 \cos^2 x - 2ac/b^2 \cos x + a^2/b^2 = 0$
$a \sec x + b \cos x \cot x = c$	$\cos^6 x +c^2/b^2 \cos^4 x -2ac/b^2 \cos^3 x +(a^2-c^2)/b^2 \cos^2 x +2ac/b^2 \cos x -a^2/b^2 = 0$
$a \sec x + b \cos x \sec x = c$	$\cos x = a/(c-b)$
$a \sec x + b \cos x \csc x = c$	$\cos^4 x - 2ac/(b^2+c^2) \cos^3 x + (a^2-c^2)/(b^2+c^2) \cos^2 x + 2ac/(b^2+c^2) \cos x - a^2/(b^2+c^2) = 0$
$a \sec x + b \tan x \cot x = c$	$\cos x = a/(c-b)$
$a \sec x + b \tan x \sec x = c$	$\cos^4 x - 2a/c \cos^3 x + (a^2+b^2)/c^2 \cos^2 x - b^2/c^2 = 0$
$a \sec x + b \tan x \csc x = c$	$\cos x = (a+b)/c$
$a \sec x + b \cot x \sec x = c$	$\sin^4 x - 2b/c \sin^3 x + (a^2+b^2-c^2)/c^2 \sin^2 x + 2b/c \sin x - b^2/c^2 = 0$
$a \sec x + b \cot x \csc x = c$	$\cos^3 x + (a-b)/c \cos^2 x - \cos x + a/c = 0$
$a \sec x + b \sec x \csc x = c$	$\sin^4 x + (a^2-c^2)/c^2 \sin^2 x + 2ab/c^2 \sin x + b^2/c^2 = 0$
$a \csc x + b \sin x \cos x = c$	$\sin^6 x - \sin^4 x + c^2/b^2 \sin^2 x - 2ac/b^2 \sin x + a^2/b^2 = 0$
$a \csc x + b \sin x \tan x = c$	$\sin^6 x +c^2/b^2 \sin^4 x -2ac/b^2 \sin^3 x + (a^2-c^2)/b^2 \sin^2 x + 2ac/b^2 \sin x - a^2/b^2 = 0$
$a \csc x + b \sin x \cot x = c$	$\sin^4 x + (c^2-b^2)/b^2 \sin^2 x - 2ac/b^2 \sin x + a^2/b^2 = 0$
$a \csc x + b \sin x \sec x = c$	$\sin^4 x - 2ac/(b^2+c^2) \sin^3 x + (a^2-c^2)/(b^2+c^2) \sin^2 x + 2ac/(b^2+c^2) \sin x - a^2/(b^2+c^2) = 0$
$a \csc x + b \sin x \csc x = c$	$\sin x = a/(c-b)$
$a \csc x + b \cos x \tan x = c$	$\cos x = (c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}) / (2b)$
$a \csc x + b \cos x \cot x = c$	$\sin x = (-c \pm \sqrt{4ab + 4b^2 + c^2}) / (2b)$
$a \csc x + b \cos x \sec x = c$	$\sin x = a/(c-b)$
$a \csc x + b \cos x \csc x = c$	$\cos x = (-ab \pm c \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}) / (b^2+c^2)$
$a \csc x + b \tan x \cot x = c$	$\sin^3 x + (b-a)/c \sin^2 x - \sin x + a/c = 0$
$a \csc x + b \tan x \sec x = c$	$\sin^4 x - 2a/c \sin^3 x + (a^2+b^2-c^2)/c^2 \sin^2 x + 2a/c \sin x - a^2/c^2 = 0$
$a \csc x + b \tan x \csc x = c$	$\sin x = (a+b)/c$
$a \csc x + b \cot x \sec x = c$	$\sin x = (a+b)/c$
$a \csc x + b \cot x \csc x = c$	$\sin^4 x - 2a/c \sin^3 x + (a^2+b^2)/c^2 \sin^2 x - b^2/c^2 = 0$

$a \csc x + b \sec x \csc x = c$	$\cos^4 x + (a^2-c^2)/c^2 \cos^2 x + 2ab/c^2 \cos x + b^2/c^2 = 0$
$a \sin^2 x + b \sin x \cos x = c$	$\sin x = \sqrt{(b^2 + 2ac \pm b \sqrt{b^2 + 4ac - 4c^2}) / (2a^2 + 2b^2)}$
$a \sin^2 x + b \sin x \tan x = c$	$\cos^3 x + b/a \cos^2 x + (c-a)/a \cos x - b/a = 0$
$a \sin^2 x + b \sin x \cot x = c$	$\cos x = (b \pm \sqrt{4a^2 + b^2 - 4ac}) / (2a)$
$a \sin^2 x + b \sin x \sec x = c$	$\sin^6 x - (2c+a)/a \sin^4 x + (b^2+c^2+2ac)/a^2 \sin^2 x - c^2/a^2 = 0$
$a \sin^2 x + b \sin x \csc x = c$	$\sin x = \sqrt{(c-b)/a}$
$a \sin^2 x + b \cos x \tan x = c$	$\sin x = (-b \pm \sqrt{4ac + b^2}) / (2a)$
$a \sin^2 x + b \cos x \cot x = c$	$\sin^3 x - b/a \sin^2 x - c/a \sin x + b/a = 0$
$a \sin^2 x + b \cos x \sec x = c$	$\sin x = \sqrt{(c-b)/a}$
$a \sin^2 x + b \cos x \csc x = c$	$\sin^6 x - 2c/a \sin^4 x + (b^2+c^2)/a^2 \sin^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \sin^2 x + b \tan x \cot x = c$	$\sin x = \sqrt{(c-b)/a}$
$a \sin^2 x + b \tan x \sec x = c$	$\sin^4 x - (a+c)/a \sin^2 x - b/a \sin x + c/a = 0$
$a \sin^2 x + b \tan x \csc x = c$	$\cos^3 x + (c-a)/a \cos x - b/a = 0$
$a \sin^2 x + b \cot x \sec x = c$	$\sin^3 x - c/a \sin x + b/a = 0$
$a \sin^2 x + b \cot x \csc x = c$	$\cos^4 x + (c-2a)/a \cos^2 x + b/a \cos x + (a-c)/a = 0$
$a \sin^2 x + b \sec x \csc x = c$	$\sin^8 x - (a+2c)/a \sin^6 x + (c^2+2ac)/a^2 \sin^4 x - c^2/a^2 \sin x + b^2/a^2 = 0$
$a \cos^2 x + b \sin x \cos x = c$	$\cos x = \sqrt{(b^2 + 2ac \pm b \sqrt{b^2 + 4ac - 4c^2}) / (2a^2 + 2b^2)}$
$a \cos^2 x + b \sin x \tan x = c$	$\cos^3 x - b/a \cos^2 x - c/a \cos x + b/a = 0$
$a \cos^2 x + b \sin x \cot x = c$	$\cos x = (-b \pm \sqrt{4ac + b^2}) / (2a)$
$a \cos^2 x + b \sin x \sec x = c$	$\tan^3 x - c/b \tan^2 x + \tan x + (a-c)/b = 0$
$a \cos^2 x + b \sin x \csc x = c$	$\cos x = \sqrt{(c-b)/a}$
$a \cos^2 x + b \cos x \tan x = c$	$\sin x = (b \pm \sqrt{4a^2 - 4ac + b^2}) / (2a)$
$a \cos^2 x + b \cos x \cot x = c$	$\sin^3 x + b/a \sin^2 x + (c-a)/a \sin x - b/a = 0$
$a \cos^2 x + b \cos x \sec x = c$	$\cos x = \sqrt{(c-b)/a}$
$a \cos^2 x + b \cos x \csc x = c$	$\cot^3 x + (a-c)/b \cot^2 x + \cot x - c/b = 0$
$a \cos^2 x + b \tan x \cot x = c$	$\cos x = \sqrt{(c-b)/a}$
$a \cos^2 x + b \tan x \sec x = c$	$\sin^4 x + (c-2a)/a \sin^2 x + b/a \sin x + (a-c)/a = 0$
$a \cos^2 x + b \tan x \csc x = c$	$\cos^3 x - c/a \cos x + b/a = 0$
$a \cos^2 x + b \cot x \sec x = c$	$\sin^3 x + (c-a)/a \sin x - b/a = 0$
$a \cos^2 x + b \cot x \csc x = c$	$\cos^4 x - (a+c)/a \cos^2 x + b/a \cos x + c/a = 0$
$a \cos^2 x + b \sec x \csc x = c$	$\cos^8 x -(2c+a)/a \cos^6 x + (c^2+2ac)/a^2 \cos^4 x - c^2/a^2 \cos^2 x + b^2/a^2 = 0$
$a \tan^2 x + b \sin x \cos x = c$	$\tan^4 x + (a-c)/a \tan^2 x + b/a \tan x - c/a = 0$
$a \tan^2 x + b \sin x \tan x = c$	$\cos^3 x + (a+c)/b \cos^2 x - \cos x - a/b = 0$
$a \tan^2 x + b \sin x \cot x = c$	$\cos^3 x - (a+c)/b \cos^2 x + a/b = 0$
$a \tan^2 x + b \sin x \sec x = c$	$\tan x = (-b \pm \sqrt{4ac + b^2}) / (2a)$
$a \tan^2 x + b \sin x \csc x = c$	$\tan x = \sqrt{(c-b)/a}$
$a \tan^2 x + b \cos x \tan x = c$	$\sin^3 x - (a+c)/b \sin^2 x - \sin x + c/b = 0$
$a \tan^2 x + b \cos x \cot x = c$	$\sin^4 x + (a+c)/b \sin^3 x - 2 \sin^2 x - c/b \sin x + 1 = 0$
$a \tan^2 x + b \cos x \sec x = c$	$\tan x = \sqrt{(c-b)/a}$
$a \tan^2 x + b \cos x \csc x = c$	$\tan^3 x - c/a \tan x + b/a = 0$
$a \tan^2 x + b \tan x \cot x = c$	$\tan x = \sqrt{(c-b)/a}$
$a \tan^2 x + b \tan x \sec x = c$	$\sin x = (-b \pm \sqrt{4ac + b^2 + 4c^2}) / (2a+2c)$
$a \tan^2 x + b \tan x \csc x = c$	$\cos x = (b \pm \sqrt{4ac + b^2 + 4a^2}) / (2a+2c)$
$a \tan^2 x + b \cot x \sec x = c$	$\sin^3 x - b/(a+c) \sin^2 x - c/(a+c) \sin x + b/(a+c) = 0$
$a \tan^2 x + b \cot x \csc x = c$	$\cos^4 x + b/(a+c) \cos^3 x - (2a+c)/(a+c) \cos^2 x + a/(a+c) = 0$
$a \tan^2 x + b \sec x \csc x = c$	$\tan^3 x + b/a \tan^2 x - c/a \tan x + b/a = 0$
$a \cot^2 x + b \sin x \cos x = c$	$\cot^4 x + (a-c)/a \cot^2 x + b/a \cot x - c/a = 0$
$a \cot^2 x + b \sin x \tan x = c$	$\cos^4 x + (a+c)/b \cos^3 x - 2 \cos^2 x - c/ba \cos x + 1 = 0$
$a \cot^2 x + b \sin x \cot x = c$	$\cos^3 x - (a+b)/b \cos^2 x - \cos x + c/b = 0$
$a \cot^2 x + b \sin x \sec x = c$	$\cot^3 x - c/a \cot x + b/a = 0$
$a \cot^2 x + b \sin x \csc x = c$	$\cot x = \sqrt{(c-b)/a}$
$a \cot^2 x + b \cos x \tan x = c$	$\sin^3 x - (a+c)/b \sin^2 x + a/b = 0$
$a \cot^2 x + b \cos x \cot x = c$	$\sin^3 x + (a+c)/b \sin^2 x - \sin x - a/b = 0$
$a \cot^2 x + b \cos x \sec x = c$	$\cot x = \sqrt{(c-b)/a}$
$a \cot^2 x + b \cos x \csc x = c$	$\cot x = (-b \pm \sqrt{4ac + b^2}) / (2a)$
$a \cot^2 x + b \tan x \cot x = c$	$\cot x = \sqrt{(c-b)/a}$
$a \cot^2 x + b \tan x \sec x = c$	$\sin^4 x + b/(a+c) \sin^3 x - (2a+c)/(a+c) \sin^2 x + a/(a+c) = 0$
$a \cot^2 x + b \tan x \csc x = c$	$\cos^3 x - b/(a+c) \cos^2 x - c/(a+c) \cos x + b/(a+c) = 0$
$a \cot^2 x + b \cot x \sec x = c$	$\sin x = (b \pm \sqrt{4a^2 + b^2 + 4ac}) / (2a+2c)$
$a \cot^2 x + b \cot x \csc x = c$	$\cos x = (-b \pm \sqrt{4ac + 4c^2 + b^2}) / (2a+2c)$
$a \cot^2 x + b \sec x \csc x = c$	$\cot^3 x + b/a \cot^2 x - c/a \cot x + b/a = 0$
$a \sec^2 x + b \sin x \cos x = c$	$\cos^8 x - \cos^6 x + c^2/b^2 \cos^4 x - 2ac/b^2 \cos^2 x + a^2/b^2 = 0$
$a \sec^2 x + b \sin x \tan x = c$	$\cos^3 x + c/b \cos^2 x - \cos x - a/b = 0$
$a \sec^2 x + b \sin x \cot x = c$	$\cos^3 x - c/b \cos^2 x + a/b = 0$
$a \sec^2 x + b \sin x \sec x = c$	$\tan x = (-b \pm \sqrt{4ac - 4a^2 + b^2}) / (2a)$
$a \sec^2 x + b \sin x \csc x = c$	$\cos x = \sqrt{a/(c-b)}$
$a \sec^2 x + b \cos x \tan x = c$	$\sin^3 x - c/b \sin^2 x - \sin x + (c-a)/b = 0$
$a \sec^2 x + b \cos x \cot x = c$	$\sin^4 x - c/b \sin^3 x - 2 \sin^2 x + (a-c)/b \sin x + 1 = 0$
$a \sec^2 x + b \cos x \sec x = c$	$\cos x = \sqrt{a/(c-b)}$
$a \sec^2 x + b \cos x \csc x = c$	$\cot^3 x + (a-c)/b \cot^2 x + a/b = 0$
$a \sec^2 x + b \tan x \cot x = c$	$\cos x = \sqrt{a/(c-b)}$
$a \sec^2 x + b \tan x \sec x = c$	$\sin x = (-b \pm \sqrt{b^2 + 4c^2 - 4ac}) / (2c)$

$a \sec^2 x + b \tan x \csc x = c$	$\cos x = (b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}) / (2c)$
$a \sec^2 x + b \cot x \sec x = c$	$\sin^3 x - b/c \sin^2 x + (a-c)/c \sin x + b/c = 0$
$a \sec^2 x + b \cot x \csc x = c$	$\cos^4 x + b/c \cos^3 x - (a+c)/c \cos^2 x + a/c = 0$
$a \sec^2 x + b \sec x \csc x = c$	$\cos^6 x - (c+2a)/c \cos^4 x - (a^2+b^2+2ac)/c^2 \cos^2 x - a^2/c^2 = 0$
$a \csc^2 x + b \sin x \cos x = c$	$\sin^8 x - \sin^6 x + c^2/b^2 \sin^4 x - (2ac)/b^2 \sin^2 x + a^2/b^2 = 0$
$a \csc^2 x + b \sin x \tan x = c$	$\cos^4 x + b/c \cos^3 x - 2 \cos^2 x + (a-c)/b \cos x + 1 = 0$
$a \csc^2 x + b \sin x \cot x = c$	$\cos^3 x - c/b \cos^2 x - \cos x + (c-a)/b = 0$
$a \csc^2 x + b \sin x \sec x = c$	$\tan^3 x + (a-c)/b \tan^2 x + a/b = 0$
$a \csc^2 x + b \sin x \csc x = c$	$\sin x = \sqrt{a/(c-b)}$
$a \csc^2 x + b \cos x \tan x = c$	$\sin^3 x - c/b \sin^2 x + a/b = 0$
$a \csc^2 x + b \cos x \cot x = c$	$\sin^3 x + c/b \sin^2 x - \sin x - a/b = 0$
$a \csc^2 x + b \cos x \sec x = c$	$\sin x = \sqrt{a/(c-b)}$
$a \csc^2 x + b \cos x \csc x = c$	$\cot x = (-b \pm \sqrt{4ac - 4a^2 + b^2}) / (2a)$
$a \csc^2 x + b \tan x \cot x = c$	$\sin x = \sqrt{a/(c-b)}$
$a \csc^2 x + b \tan x \sec x = c$	$\sin^4 x + b/c \sin^3 x - (a+c)/c \sin^2 x + a/c = 0$
$a \csc^2 x + b \tan x \csc x = c$	$\cos^3 x - b/c \cos^2 x + (a-c)/c \cos x + b/c = 0$
$a \csc^2 x + b \cot x \sec x = c$	$\sin x = (b \pm \sqrt{4ac + b^2}) / (2c)$
$a \csc^2 x + b \cot x \csc x = c$	$\cos x = (-b \pm \sqrt{4c^2 - 4ac + b^2}) / (2c)$
$a \csc^2 x + b \sec x \csc x = c$	$\sin^6 x - (c+2a)/c \sin^4 x + (a^2+b^2+2ac)/c^2 \sin^2 x - a^2/c^2 = 0$
$a\sin x \cos x + b\sin x \tan x = c$	$\sin^6 x - 2b/a \sin^5 x + (b^2-2a^2)/a^2 \sin^4 x + 2b/a \sin^3 x + (a^2+c^2)/a^2 \sin^2 x - c^2/a^2 = 0$
$a \sin x \cos x + b \cos x \cot x = c$	$\cos^6 x - 2b/a \cos^5 x + (b^2-2a^2)/a^2 \cos^4 x + 2b/a \cos^3 x + (a^2+c^2)/a^2 \cos^2 x - c^2/a^2 = 0$
$a \sin x \cos x + b \tan x \sec x = c$	$\cos^8 x - \cos^6 x + 2b/a \cos^5 x + c^2/a^2 \cos^4 x - 2b/a \cos^3 x + b^2/a^2 \cos^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \sin x \cos x + b \cot x \csc x = c$	$\sin^8 x - \sin^6 x + 2b/a \sin^5 x + c^2/a^2 \sin^4 x - 2b/a \sin^3 x + b^2/a^2 \sin^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \sin x \cos x + b \sec x \csc x = c$	$\sin 2x = (c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}) / a$
$a \sin x \tan x + b \cos x \cot x = c$	$\sin^6 x + 2bc/(a^2+b^2) \sin^5 x + (c^2-3b^2)/(a^2+b^2) \sin^4 x - 4bc/(a^2+b^2) \sin^3 x - (c^2-3b^2)/(a^2+b^2) \sin^2 x + 2bc/(a^2+b^2) \sin x - b^2/(a^2+b^2) = 0$
$a \sin x \tan x + b \tan x \sec x = c$	$\cos^6 x + 2c/a \cos^5 x - (2a^2+c^2)/a^2 \cos^4 x - 2c/a \cos^3 x + (a^2+b^2)/a^2 \cos^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \sin x \tan x + b \cot x \csc x = c$	$\cos^4 x + c/a \cos^3 x + (b-2a)/a \cos^2 x - c/a \cos x + 1 = 0$
$a \sin x \tan x + b \sec x \csc x = c$	$\sin^6 x + c^2/a^2 \sin^4 x + 2b/a \sin^3 x - c^2/a^2 \sin^2 x + b^2/a^2 = 0$
$a \cos x \cot x + b \tan x \sec x = c$	$\sin^4 x + c/a \sin^3 x - (2a+b)/a \sin^2 x - c/a \sin x + 1 = 0$
$a \cos x \cot x + b \cot x \csc x = c$	$\sin^6 x - 2c/a \sin^5 x + (c^2-2a^2)/a^2 \sin^4 x - 2c/a \sin^3 x + (a^2+b^2)/a^2 \sin^2 x - b^2/a^2 = 0$
$a \cos x \cot x + b \sec x \csc x = c$	$\cos^6 x + c^2/a^2 \cos^4 x + 2b/a \cos^3 x - c^2/a^2 \cos^2 x + b^2/c^2 = 0$
$a \tan x \sec x + b \cot x \csc x = c$	$\sin^8 x + 2a/c \sin^7 x + (a^2+b^2-2c^2)/c^2 \sin^6 x - 2a/c \sin^5 x + (c^2-3b^2)/c^2 \sin^4 x + 3b^2/c^2 \sin^2 x - b^2/c^2 = 0$
$a \tan x \sec x + b \sec x \csc x = c$	$\sin^6 x + 2a/c \sin^5 x + (a^2-2c^2)/c^2 \sin^4 x - 2a/c \sin^3 x + (b^2+c^2)/c^2 \sin^2 x - b^2/c^2 = 0$
$a \cot x \csc x + b \sec x \csc x = c$	$\cos^6 x + 2a/c \cos^5 x + (a^2-2c^2)/c^2 \cos^4 x - 2a/c \cos^3 x + (b^2+c^2)/c^2 \cos^2 x - b^2/c^2 = 0$

Goniometrische Gleichung, Beispiel

sin x = cos (2x)

Als erstes durch eine der in der Formelsammlung zu findenden Formeln ersetzen

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

Mit der letzen ergibt sich eine Gleichung, die nur noch Sinus-Funktionen enthält

$\sin x = 1 - 2 \sin^2 x$ $\qquad$ $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Diese quadratische Gleichung hat zwei brauchbare Lösungen

$\sin x = 0,5 \Rightarrow x = 30°+k\cdot 360°$ und $x = 150°+k\cdot 360°$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = 270°+k\cdot 360°$

4·sin x - 5·cos x = 1,2

Man ersetzt cos x $\qquad$ $\cos x = \sqrt{1- \sin^2 x}$

und erhält eine Wurzelgleichung $\qquad$ $4\cdot\sin x - 5\cdot\sqrt{1- \sin^2 x} = 1,2$

Da die Gleichung quadriert wurde, müssen unbedingt beide Lösungen geprüft werden. Es zeigt sich, dass nur eine davon für die Wurzelgleichung korrekt ist

$u_1 = 0,8841 = \sin x \Rightarrow x = 62,14° +k \cdot 360°$ $\quad \Rightarrow x = 117,86° + k \cdot 360°$

3 sin x - 2 cos (2x) = 1/2

Als erstes ist dafür zu sorgen, dass überall der gleiche Winkel steht. Für cos 2x gibt es drei Formeln (siehe oben)

$3 \sin x - 2\cdot(1 - 2 \sin^2 x) = 0,5$ $\qquad$ $4 \sin^2 x + 3 \sin x - 2,5 = 0$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. $\sin x = -1,25$ ist unbrauchbar, da $-1 \leq \sin x \leq 1$ gilt.

$\sin x = 0,5 \Rightarrow x = 30° + k\cdot 360°$ und $x = 150° +k\cdot 360°$

1 - sin x = 2 cos² x

In der Gleichung treten zwei verschiedene Funktionen auf: sinx und cosx. Eine muss durch die andere ersetzt werden. $\qquad$ $1 - \sin x = 2 (1 - \sin^2 x)$

Für die quadratische Gleichung wird $\qquad$ $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = 90° + k\cdot 360$

$\sin x = -0{,}5 \Rightarrow x = -30°$ bzw. $x = 330°$

Für die 2. Lösung wird der gefundene Wert von 180° subtrahiert: 180° - (-30°) = 210°, alle Lösungen:

$x = 90° + k\cdot 360°$, $x = 210° + k\cdot 360°$, $x = 330° + k\cdot 360°$

$\cos^4 x - 3\cos^2 x \sin^2 x = 0$

$\cos^2 x$ lässt sich ausklammern $\cos^2 x \cdot(\cos^2 x - 3\sin^2 x) = 0$

Daraus ergeben sich 2 quadratische Gleichungen:

$\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = 90° + k\cdot 180°$

$\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0 \quad \cos^2 x = 3\sin^2 x$

$1/3 = \sin^2 x / \cos^2 x = \tan^2 x$

$x = 30° + k\cdot 360°$, $x = 150° + k\cdot 360°$, $x = 210° + k\cdot 360°$, $x = 330° + k\cdot 360°$

$4\cdot\sin x = 5\cdot\cos x$

Gleichungen dieses Typs sind einfach zu lösen. Die Gleichung wird so umgeformt, dass auf einer Seite der Gleichung der Bruch sin x / cos x steht $\sin x / \cos x = 5/4 = 1{,}25 = \tan x$

mit den Lösungen $x = 51{,}34° + k\cdot 180°$

$3/\tan x - \tan x = 1$

Multiplikation mit tan x und Ordnen ergibt

$3 - \tan^2 x = \tan x \qquad \tan^2 x + \tan x - 3 = 0$

Es ergibt sich eine quadratische Gleichung für tan x:

$\tan x = 1{,}302 \Rightarrow x = 52{,}5° + k\cdot 180° \qquad \tan x = -2{,}303 \Rightarrow x = 113{,}5° + k\cdot 180°$

$3\sin(x+45°) = -2\cos(x+45°)$

Division beider Seiten mit $3\cos(x+45°)$ ergibt $\sin(x+45°) / \cos(x+45°) = -2/3$

Ersetzen der linken Seite durch den Tangens: $\tan(x+45°) = -2/3$

$x+45° = -33{,}69 \Rightarrow x+45° = 146{,}31° \Rightarrow x = 101{,}31° + k\cdot 180°$

$\sin x = \sin x \cos x$

Achtung! Nicht durch sin x dividieren. sin x kann gleich 0 sein.

Man nimmt beide Terme auf die linke Seite und faktorisiert

$\sin x - \sin x \cos x = 0 \qquad \sin x\,(1 - \cos x) = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0° + k\cdot 180°$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0° + k\cdot 360°$ zusammengefasst: $x = k\cdot 180°$

$3\sin^2 x + 4\cos^2 x - 3{,}7 = 0$

Man ersetze $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$3(1 - \cos^2 x) + 4\cos^2 x - 3{,}7 = 0 \qquad 3 - 3\cos^2 x \cos^2 x + 4\cos^2 x - 3{,}7 = 0$

$\cos^2 x = 0{,}7 \Rightarrow \cos x = \pm 0{,}7$

Das ergibt vier verschiedene Grundlösungen:

$\cos x = 0{,}7 \Rightarrow x = 33{,}2° + k\cdot 360°$, $x = 326{,}8° + k\cdot 360°$

$\cos x = -0{,}7 \Rightarrow x = 146{,}8° + k\cdot 360°$, $x = 213{,}2° + k\cdot 360°$

$\cos x - 1 = \sin x$

Auf Grund der 1 kann nicht einfach mit cos x dividiert werden. Man ersetzt:

$\sin x = \sqrt{(1 - \cos^2 x)}$, so dass $\cos x - 1 = \sqrt{(1 - \cos^2 x)}$

Durch Quadrieren entfernt man die Wurzel $(\cos x - 1)^2 = (\sqrt{(1 - \cos^2 x)})^2$

$\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x \qquad 2\cos^2 x - 2\cos x = 0$

Die Gleichung löst man mit faktorisieren

$2\cos x\,(\cos x - 1) = 0$, und somit

$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90°$, $x = 270° \qquad \cos x = 1 \Rightarrow x = 0°$

Achtung! Da die Gleichung quadriert wurde, muss jede gefundene Lösung durch Einsetzen in der gegebenen Gleichung geprüft werden

$x = 90° \Rightarrow$ falsch $0-1 = 1 \qquad x = 270° \Rightarrow$ richtig $0-(-1) = 1$

$x = 0° \Rightarrow$ richtig $1-1 = 0$

Lösungen: $x = 0° + k\cdot 360°$ und $x = 270° + k\cdot 360°$

$\sqrt{2}\cdot\sin^2(2x) - \sin(2x) = 0$

Bei dieser Aufgabe kommt nur der Winkel 2x vor, d.h. die Doppelwinkelformel muss nicht verwendet werden. Die quadratische Gleichung wird durch Faktorsieren gelöst

$\sin(2x)\cdot(\sqrt{2}\cdot\sin(2x) - 1) = 0$

Es ist $\sin(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 0° + k\cdot 180° \Rightarrow x = 0° + k\cdot 90°$

oder $\sin(2x) = 1/\sqrt{2} \Rightarrow 2x = 45° + k\cdot 360° \Rightarrow x = 22{,}5° + k\cdot 180°$

$\Rightarrow 2x = 135° + k\cdot 360° \Rightarrow x = 67{,}5° + k\cdot 180°$

$2\tan^2 x/2 - 5\tan x/2 - 3 = 0$

Das ist eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten tan x/2:

$\tan x/2 = 3 \Rightarrow x/2 = 71{,}565°+k\cdot180° \Rightarrow x = 143{,}13°+k\cdot360°$
$\tan x/2 = -0{,}5 \Rightarrow x/2 = 153{,}435°+k\cdot180° \Rightarrow x = 306{,}87°+k\cdot360°$

3 tanx · sinx - sinx = 0
Faktorisieren ergibt $\sin x \cdot(3 \tan x - 1) = 0$
Es ist $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\cdot180°$ und $\tan x = 1/3 \Rightarrow x = 18{,}435°+k\cdot180°$

sin x + cos x = 1,2
Man ersetzt $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ $\quad 1 - \cos^2 x + \cos x = 1{,}2$
Wurzel isolieren und quadrieren
$\sqrt{1 - \cos^2 x} = 1{,}2 - \cos x$ $\quad 1 - \cos^2 x = 1{,}44 - 2{,}4 \cos x + \cos^2 x$
$0 = 2 \cos^2 x - 2{,}4 \cos x + 0{,}44$
Die quadratische Gleichung hat zwei brauchbare Lösungen
$\cos x = 0{,}974 \Rightarrow x = 13{,}05°+k\cdot360°$; $x = 346{,}95°+k\cdot360°$
$\cos x = 0{,}225 \Rightarrow x = 76{,}95°+k\cdot360°$; $x = 283{,}05°+k\cdot360°$
Alle Lösungen müssen geprüft werden
$x = 13{,}05°+k\cdot360° \Rightarrow \sin x + \cos x = 1{,}2 \Rightarrow$ richtig
$x = 346{,}95°+k\cdot360° \Rightarrow \sin x + \cos x = 0{,}75 \Rightarrow$ falsch
$x = 76{,}95°+k\cdot360° \Rightarrow \sin x + \cos x = 1{,}2 \Rightarrow$ richtig
$x = 283{,}05°+k\cdot360° \Rightarrow \sin x + \cos x = -0{,}75 \Rightarrow$ falsch
Brauchbare Lösungen $x = 13{,}05°+k\cdot360°$ und $x = 76{,}95°+k\cdot360°$

Winkelfunktionen imaginärer Argumente, Zusammenhang zu Exponentialfunktionen
$y = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ $\quad \sin x = (e^{ix} - e^{-ix}) / 2$ $\quad \cos x = (e^{ix} + e^{-ix}) / 2$
$\tan x = - i * (e^{ix} - e^{-ix}) / (e^{ix} + e^{-ix})$ $\quad \cot x = i * (e^{ix} + e^{-ix}) / (e^{ix} - e^{-ix})$

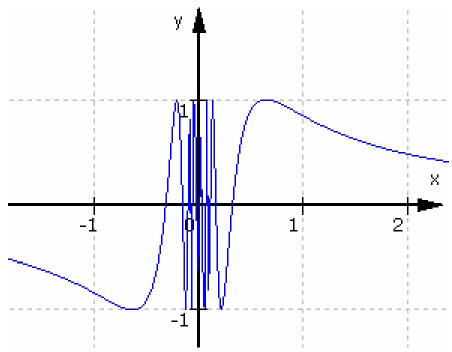
Winkelfunktionen imaginärer Argumente
$y = \sin ix = i \sinh x$ $\quad y = \cos ix = \cosh x$ $\quad y = \tan ix = i \tanh x$
$y = \cot ix = -i \coth x$

Trigonometrischer Taschenrechner
Angenommen ein Taschenrechner wäre so defekt, dass außer der Null keine Zahl eingebbar wäre und nur die trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrungen funktionieren würden. Kann man dann jede positive rationale Zahl p/q im Rechner darstellen?

Es ist möglich! Für $\sqrt{p/q}$ gilt bei beliebigen positiven ganzen Zahlen p und q
wenn $p < q$, dann $\sqrt{p/q} = \sin \arctan \sqrt{p/(q-p)}$
wenn $p > q$, dann $\sqrt{p/q} = \tan \arccos \sqrt{q/(p+q)}$
$= \tan \arccos \sin \arctan \sqrt{q/p}$
$= \tan \arccos \sin \arctan \sin \arctan \sqrt{q/(p-q)}$
Durch wiederholtes Anwenden der Regeln kann jeder Fall bis zu p = q reduziert werden und dann über cos 0 = 1 ermittelt werden.

Beispiel: Es soll 5/8 dargestellt werden. 5/8 ist die Quadratwurzel von 25/64, welche sin arctan der Wurzel von 25/39 ist.
Diese ist sin arctan der Wurzel von 25/14, diese tan arccos sin arctan sin arctan der Wurzel von 14/11, diese tan arccos sin arctan sin arctan der Wurzel 11/3, diese tan arccos sin arctan sin arctan der Wurzel 3/8, diese sin arctan der Wurzel 3/5, diese sin arctan der Wurzel 3/2, diese tan arccos sin arctan sin arctan von Wurzel 2 und diese tan arccos sin arctan sin arctan der Wurzel aus 1, die gleich cos 0 ist.
Damit müssen 39 Tasten des defekten Rechners gedrückt werden.
Übrigens ist es gleichgültig, ob der defekte Rechner im Bogen- oder Gradmaß arbeitet.

Sinusfunktion y=sin(1/x)
Eine nichtlineare Funktion von x im Argument verändert die Periode der Funktion in Abhängigkeit von x.
Ein Spezialfall ist die Funktion **$y = \sin(1/x)$**
Die Funktion schwingt für $x \to 0$ immer schneller. Am Punkt x = 0 ist die Funktion nicht definiert und kann auch nicht stetig erweitert werden. Dies ist ein Fall, bei dem eine Funktion nicht stetig ist, obwohl sie weder divergiert noch Sprünge macht.
Multipliziert man die Funktion mit x, d.h. $y = x \sin(1/x)$, so wird die neue Funktion zwar im Punkt x=0 durch f(x)=0 stetig erweiterbar, ist aber dort nicht differenzierbar.



Gedämpfte Sinusschwingung
Die Funktion **$f(x) = y = A e^{-a x} \sin(\omega x + \phi_0)$**
liefert die Kurve einer gedämpften Schwingung.

Die Schwingung erfolgt um die Abszissenachse, wobei sich die Kurve asymptotisch der x-Achse nähert. Dabei wird die Sinuskurve von den beiden Exponentialkurven $y = \pm A e^{-a x}$ eingehüllt, indem sie diese in den Punkten

$A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots = ([(k+1/2)\pi-\phi_0]/\omega ; (-1)^k Ae\text{^}[-a/\omega * ((k+1/2)\pi-\phi_0)])$

berühren. Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind

$B = (0 ; A \sin \phi_0)$

$C_1, C_2, \ldots = ((k\pi - \phi_0)/\omega , 0)$

Die Extrema $D_1, D_2, \ldots$ liegen bei

$x = (k\pi - \phi_0 + \alpha) / \omega$ mit $\tan \alpha = \omega/a$

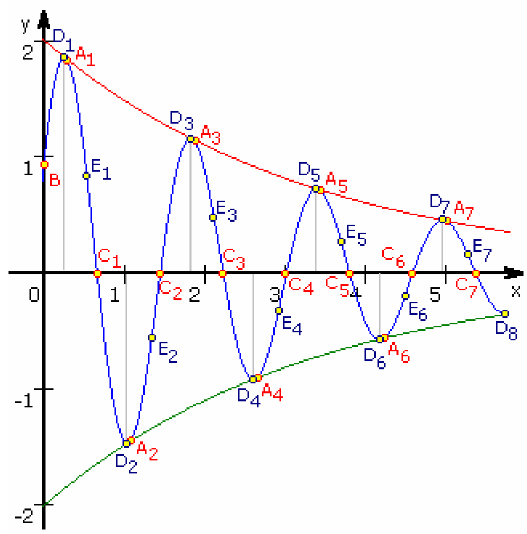
die Wendepunkte $E_1, E_2, \ldots$ bei

$t = (k\pi - \phi_0 + 2 \alpha) / \omega$ mit $\tan \alpha = \omega/a$

Als logarithmisches Dekrement der Dämpfung wird

$\delta = \ln | y_i / y_{i+1} | = a \pi/\omega$

bezeichnet, wobei y_i und y_{i+1} die Ordinaten zweier benachbarter Extrema sind.



Anwendung der Addition von Sinusfunktionen

Der Mond ruft täglich die Gezeiten hervor. Etwa alle 6 Stunden wechseln sich an den Küsten der großen Meere und Ozeane Ebbe und Flut ab. Beabsichtigt man die dabei auftretenden Höhenunterschiede zwischen Ebbe und Flut, den sogenannten Tidenhub, zu berechnen, stellt man schnell fest, dass dies bei weitem nicht einfach ist. Die Größe des Tidenhubs wird nicht nur durch eine einfache Mondbewegung, sondern durch eine Vielzahl von periodisch wiederkehrenden Bewegungen (Schwingungen) beeinflusst. Dazu gehören

- die elliptische Sonnentide mit einer jährlichen Periode
- die elliptische Mondtiden, die Haupt-Mondtiden und die Deklinationstide mit einer Periode von einem Tag bzw. 12 Stunden
- weitere Mondtiden und die Mond-Sonnenvariation mit etwa 6 Stunden Periode

insgesamt 10 verschiedene Schwingungen, welche als Sinusfunktionen unterschiedlicher maximaler Auslenkung und verschiedener kleinster Perioden beschrieben werden können. Der Tidenhub ergibt sich nun aus der Summe dieser Schwingungen.

Amplitudenmodulation

Das Produkt zweier Schwingungen, d.h. zweier Sinusfunktionen, mit unterschiedlichen Frequenzen ergibt eine Schwingung mit "schwingender Amplitude".

$f(t) = A \sin(\psi t) \sin(\omega t)$

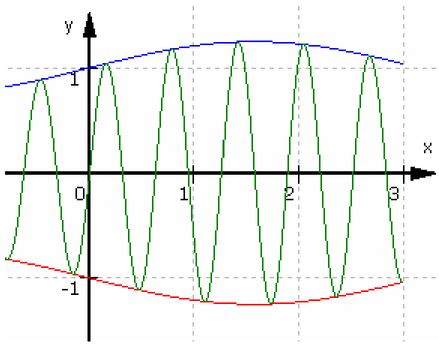
Abbildung: $y = (1 + 0.25 \sin x) \sin (10 x)$

Amplitudenmodulation: Die Amplitude A der Trägerwelle wird mit der Modulationsfrequenz ψ um einen Teil δA verändert.

Amplitudenmodulation (AM) wird in der Rundfunktechnik im Mittel- und Kurzwellenbereich angewandt.

Trägerkreisfrequenz ω, $\omega > \psi$, höhere Frequenz, bestimmt in der Rundfunktechnik den Bandbereich des Senders

Modulationskreisfrequenz ψ, niedrigere Frequenz, überträgt in der Rundfunktechnik das Sendesignal

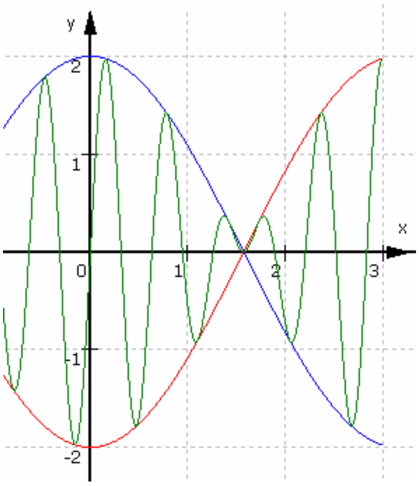


Frequenzmodulation

Frequenzmodulation (FM) wird vor allem im Ultrakurzwellenbereich angewandt. Hierbei wird die Schwingungskreisfrequenz der Trägerwelle mit der Modulationskreisfrequenz verändert.

$f(t) = A \sin(t (\omega + \delta\omega \sin(\psi t)))$

Die Übertragung mit Frequenzmodulation ist weniger anfällig gegenüber atmosphärischen Störungen, erfordert aber eine größere Bandbreite.



Schwebung

Schwebung ... Überlagerung von Schwingungen, d.h. Sinusfunktionen, ähnlicher, leicht unterschiedlicher, Frequenz ergibt eine Schwingung mit einer zwischen beiden Frequenzen liegenden neuen Frequenz, deren Amplitude mit der halben Differenzfrequenz schwingt.

$f(t) = \sin(\omega t) + \sin((\omega + \delta\omega) t) = 2 \sin((\omega + \delta\omega/2) t) \cos(\delta\omega/2 t)$

Abbildung: Schwebung der Sinusfunktion $y = \sin 9x$ und $y \sin 11x$ mit der einhüllenden Kurve $y = \pm 2 \cos x$

Überlagerung (Superposition) gleichfrequenter Schwingungen

Werden zwei Schwingungen unterschiedlicher Amplitude und Phase, jedoch mit gleicher Frequenz, überlagert, so entsteht eine neue Schwingung mit der gleichen Frequenz

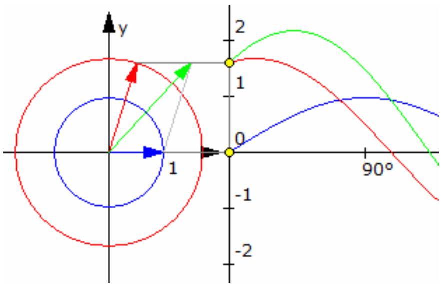
$$f(t) = a_1 \sin(\omega t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega t + \phi_2) = a \sin(\omega t + \phi)$$

Für Amplitude und Phase wird

$$a = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 \cos(\phi_2 - \phi_1))}$$

$$\tan \phi = (a_1 \sin \phi_1 + a_1 \sin \phi_2)/(a_1 \cos \phi_1 + a_1 \cos \phi_2)$$

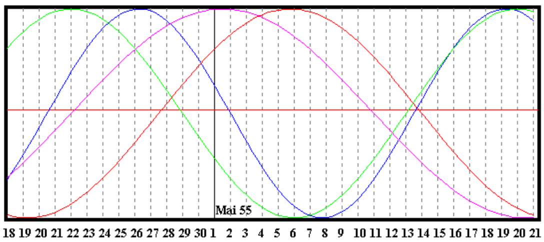
Der Quadrant, in dem der Winkel ϕ liegt, ergibt sich aus der Vorzeichenkombination von Zähler und Nenner.



Zeigerdiagramm

Ein Zeigerdiagramm ein geometrisches Hilfsmittel der Schwingungslehre.
Es stellt sinusförmige Schwingungen mit Amplitude und Phase als Kreisbewegungen dar und ermöglicht die Addition zweier phasenverschobener Sinsukurven und die Ermittlung von Amplitude und Phase der Summenfunktion.
Oft werden die Zeiger (Vektoren) in der komplexen Gaußschen Zahlenebene gezeichnet.
Zwei Schwingungen, die sich im Phasenwinkel um $\Delta\phi$ unterscheiden, stellt man im Zeigerdiagramm durch zwei Zeiger dar, die um eben diesen Winkel gegeneinander verdreht sind.
Die rote Schwingung läuft der blauen in der Abbildung um $\Delta\phi$ voraus. Zur Ermittlung der Summenfunktion werden beide Zeiger vektoriell addiert.
Für zwei Schwingungen gleicher Frequenz und unterschiedlicher Amplitude, eine Sinuskurve jedoch phasenverschoben, ergibt sich $f(t) = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \sin(\omega t + \phi_2) = a \sin(\omega t + \phi)$
mit $a = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 \cos \phi_2)}$ $\tan \phi = (a_2 \sin \phi_2)/(a_1 + a_2 \cos \phi_2)$

Biorhythmus



Die Theorie des Biorhythmus von Menschen ist wissenschaftlich heftig umstritten und besitzt auf jeden Fall einen Hauch von Esoterik. Als vollkommen idiotisch sind jegliche hellseherischen Vorhersagen einzustufen, die mit „Hilfe" des Biorhythmus getroffen werden. Zur Berechnung werden Sinusfunktionen unterschiedlicher Periode verwendet.
Die Verfechter des Biorhythmus gehen davon aus, dass vier periodische Zyklen das Leben eines Menschen von der Geburt bis zum Tod begleiten. Dabei treten in regelmäßigen Abständen Phasen der erhöhten Leistungsfähigkeit auf, welche von Abschnitten mit verminderter Lebensqualität abgelöst werden.
Zum Beweis werden Beispiele herangezogen, wie z.B., dass am Todestag Ludwig van Beethovens dessen körperlicher Biorhythmus unter dem Nullpunkt lag. Gerade dieser Nachweis über Einzelbeispiele ist wissenschaftlich natürlich nicht exakt. Andererseits konnte in den 70ziger Jahren in der Schiffswerft von Odessa (Ukraine) die Zahl der Arbeitsunfälle radikal gesenkt werden, als man dazu überging, Arbeiter an deren kritischen Tagen nur für einfache und ungefährliche Arbeiten einzusetzen. In wieweit allerdings ein rein psychologischer Effekt hier eine Rolle spielte, wurde nicht geklärt.
Folgende Biorhythmus-Kurven werden berechnet:

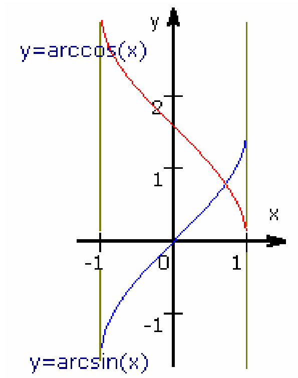
- physischer (körperlicher) Zyklus mit einer Periode von 23 Tagen
- emotionaler (seelischer) Zyklus mit einer Periode von 28 Tagen
- intellektueller (geistiger) Zyklus mit einer Periode von 33 Tagen
- intuitiver Zyklus mit einer Periode von 38 Tagen

Werden diese Zyklen vom Geburtsdatum an berechnet und graphisch veranschaulicht, erhalten Sie vier sinusförmige Kurven, welche periodisch über bzw. unter dem Nullpunkt liegen. Verläuft eine der Kurven im unteren Bereich, soll dies verminderte Leistungsfähigkeit bedeuten, z.B. im physischen Zyklus Müdigkeit, Abgespanntheit, Anfälligkeit gegenüber Krankheiten usw.
Als besonders kritisch werden Tage angesehen, an welchen mehrere Kurven gleichzeitig den Nullpunkt kreuzen. Sollten sich drei oder sogar alle vier Linien gleichzeitig kreuzen, läge ein besonders kritischer Tag vor. Gerüchten nach, stehen Anhänger des Biorhythmus an diesen Tagen gar nicht aus dem Bett auf ?!
Im Beispiel ist das Biorhythmus-Profil von Albert Einstein am 18.4.1955 zu sehen. An diesem Tag war er zwar physisch "nicht gut drauf", aber im aufsteigenden Zweig und schon gar nicht an einem kritischen Tag. Interessant wäre zu wissen, wie Biorhythmus-Anhänger dies mit der Theorie vereinbaren. Denn an diesem Tag starb Einstein.

Arkusfunktionen

Die Arkusfunktionen sind die Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen.
Sie ordnen den durch die trigonometrischen Funktionen definierten Werten die Länge des zugehörigen Bogens (lat. arcus, daher Arkusfunktionen) des Einheitskreises zu.
Da die Zuordnung nicht eindeutig ist, wird bei der Arkusfunktion ein Hauptwert zugeordnet. Bei arcsin x, arctan x, arccsc x liegt der Hauptwert zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ und bei arccos x, arccot x, arccsc x zwischen Null und π.

$y = \arcsin x$ DB: $\{ x \mid -1 \le x \le 1 \}$; WB: $\{ y \mid -\pi/2 \le y \le \pi/2 \}$
Nullstelle $x_0 = 0$ Wendestelle $x_0 = 0$
$y = \arccos x$ DB: $\{ x \mid -1 \le x \le 1 \}$; WB: $\{ y \mid 0 \le y \le \pi \}$
Nullstelle $x_0 = 1$ Wendestelle $x_0 = 0$
$y = \arctan x$ DB: $\{ x \mid -\infty < x < \infty \}$; WB: $\{ y \mid -\pi/2 < y < \pi/2 \}$
Nullstelle $x_0 = 0$ Asymptoten $y = \pm \pi/2$
$y = \text{arccot}\, x$ DB: $\{ x \mid -\infty < x < \infty \}$; WB. $\{ y \mid 0 < y < \pi \}$
keine Nullstelle; Asymptoten $y = 0$ und $y = \pi$

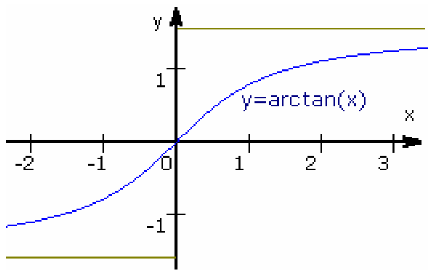


Arkussinus und Arkuskosinus

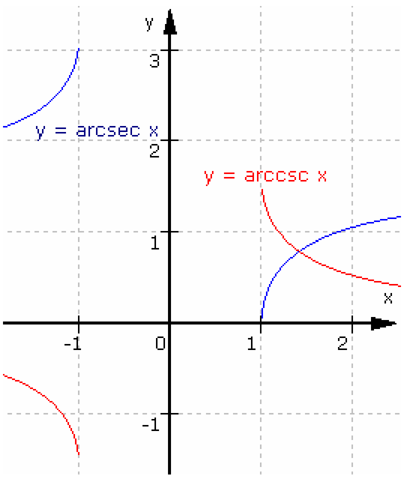
$y = \arcsin x$ DB: $\{ x \mid -1 \le x \le 1 \}$; WB: $\{ y \mid -\pi/2 \le y \le \pi/2 \}$
Quadrant erster und dritter
Monotonie streng monoton steigend
Symmetrie symmetrisch zum Ursprung
Nullstelle $x_0 = 0$
Wendestelle $x_0 = 0$
Ableitung $(\arcsin x)' = a / \sqrt{1 - (ax + b)^2}$
Stammfunktion $\int \arcsin(bx + c)\, dx = (x + c/b) \arcsin(bx + c) + \sqrt{1/b^2 - (x + c/b)^2} + C$
$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$
Anstieg der Wendetangente im Ursprung = $\pi/4$

$y = \arccos x$ DB: $\{ x \mid -1 \le x \le 1 \}$; WB: $\{ y \mid 0 \le y \le \pi \}$
Quadrant erster und dritter
Monotonie streng monoton fallend
Symmetrie symmetrisch zum Punkt $(0;\pi/2)$
Nullstelle $x_0 = 1$
Wendestelle $x_0 = 0$
Ableitung $(\arccos x)' = -a / \sqrt{1 - (ax + b)^2}$
Stammfunktion $\int \arccos(bx + c)\, dx = (x + c/b) \arccos(bx + c) - \sqrt{1/b^2 - (x + c/b)^2} + C$
$\int \arccos x\, dx = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$
Beide Funktionen sind nicht periodisch, besitzen keine Sprungstellen, Polstellen und Extrema.

Arkustangens und Arkuskotangens



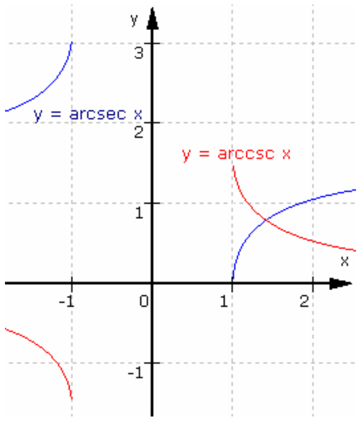
$y = \arctan x$
DB: $\{ x \mid -\infty < x < \infty \}$; WB: $\{ y \mid -\pi/2 < y < \pi/2 \}$
Quadrant erster und dritter
Symmetrie punktsymmetrisch zum Ursprung
Nullstelle $x_0 = 0$
Asymptoten $y = \pm \pi/2$
Ableitung $(\arctan (ax+b))' = a / (1 + (ax+b)^2)$
Stammfunktion $\int \arctan(bx + c)\, dx = (x + c/b) \arctan(bx + c) - 1/b \ln(\sqrt{1+(bx+c)^2}) + C$



$y = \text{arccot}\, x$ DB: $\{ x \mid -\infty < x < \infty \}$; WB. $\{ y \mid 0 < y < \pi \}$
Quadrant erster und zweiter
Symmetrie punktsymmetrisch zum Punkt $(0 ; \pi/2)$, keine Nullstelle; Asymptoten $y = 0$ und $y = \pi$
Ableitung $(\text{arccot}\, (ax+b))' = -a / (1 + (ax+b)^2)$
Stammfunktion
$\int \text{arccot}(bx + c)\, dx = (x+c/b)\, \text{arccot}(bx+c) + 1/b \ln(\sqrt{1+(bx+c)^2}) + C$

Die Funktionen sind für alle x definiert und stellen an der Winkelhalbierenden y=x gespiegelte Bögen von Tangens und Kotangens dar. Beide Funktionen sind nicht periodisch, besitzen keine Sprungstellen, Polstellen und Extrema sowie eine Wendestelle bei x = 0.
Die Funktionen haben waagerechte Asymptoten, d.h. die erste Ableitung geht für $x \to \pm\infty$ gegen 0. arctan x ist streng monoton

steigend, während arccot x streng monoton fallend ist. Bei $x = 0$ verhalten sich die Funktionen wie Geraden, deren Steigungen den Betrag Eins besitzen.



Arkussekans und Arkuskosekans

$y = \text{arcsec } x = \arccos(1/x)$
DB: $\{ x \mid |x| \geq 1 \}$; WB: $\{ y \mid 0 \leq y \leq \pi \}$
Quadrant erster und zweiter
Symmetrie punktsymmetrisch zu Punkt $(0 ; \pi/2)$
Nullstelle $x = 1$
Ableitung $(\text{arcsec } (ax+b))' = a / (|ax+b| \sqrt{(ax+b)^2 - 1})$
Stammfunktion
$\int \text{arcsec}(bx + c)dx = (x + c/b) \text{ arcsec}(bx + c) + 1/b \text{ arcosh } (bx+c)+C$

$y = \text{arccsc } x = \arcsin(1/x)$
DB: $\{ x \mid |x| \geq 1 \}$; WB. $\{ y \mid -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \}$
Quadrant erster und dritter
Symmetrie punktsymmetrisch zum Ursprung
Nullstelle keine
Ableitung $(\text{arccsc } (ax+b))' = -a / (|ax+b| \sqrt{(ax+b)^2 - 1})$
Stammfunktion $\int \text{arccsc}(bx + c) \, dx = (x + c/b) \text{ arccsc}(bx+c) - 1/b \text{ arcosh } (bx + c)+C$

Die Funktionen sind für alle x mit $|x| \geq 1$ definiert und stellen an der Winkelhalbierenden $y = x$ gespiegelte Bögen von Sekans und Kosekans dar. Für große x haben die Funktionen eine waagerechte Tangente, d.h. die erste Ableitung geht gegen Null. arcsec x ist in beiden Bereichen jeweils streng monoton steigend, während arccsc x jeweils streng monoton fallend ist. Beide Funktionen haben keine Sprung- und Polstellen, keine Extrema und Wendepunkte.

Zusammenhang

$\arcsin x = \pi/2 - \arccos x = \arctan [x/\sqrt{1 - x^2}] = {}_0\int^x dt/\sqrt{1 - t^2}$
$\arccos x = \pi/2 - \arcsin x = \text{arccot } [x/\sqrt{1 - x^2}] = {}_x\int^1 dt/\sqrt{1 - t^2}$
$\arctan x = \pi/2 - \text{arccot } x = \arcsin [x/\sqrt{1 + x^2}] = {}_0\int^x dt/\sqrt{1 + t^2}$
$\text{arccot } x = \pi/2 - \arctan x = \arccos [x/\sqrt{1 + x^2}] = {}_x\int^\infty dt/\sqrt{1 + t^2}$
$\text{arcsec } x = \pi/2 - \text{arccsc } x$
$\text{arccot } x = \arctan 1/x$, für $x > 0$; $=\arctan 1/x + \pi$, für $x < 0$

Negative Argumente

$\arcsin -x = -\arcsin x$	$\arccos -x = \pi - \arccos x$
$\arctan -x = -\arctan x$	$\text{arccot } -x = \pi - \text{arccot } x$
$\text{arcsec } -x = \pi - \text{arcsec } x$	$\text{arccsc } -x = -\text{arccsc } x$

Summen und Differenzen von Arkusfunktionen

arcsin x + arcsin y =

für $x^2+y^2 \leq 1$, $xy \leq 0$	$= \arcsin [x \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 - x^2}]$
für $x,y>0$, $x^2+y^2 >1$	$= \pi - \arcsin [x \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 - x^2}]$
für $x,y<0$, $x^2+y^2 > 1$	$= -\pi - \arcsin [x \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 - x^2}]$

arcsin x - arcsin y =

für $x^2+y^2 \leq 1$, $0 \leq xy$	$= \arcsin [x \sqrt{1 - y^2} - y \sqrt{1 - x^2}]$
für $x>0$, $y<0$, $x^2+y^2 >1$	$= \pi - \arcsin [x \sqrt{1 - y^2} - y \sqrt{1 - x^2}]$
für $x<0$, $y>0$, $x^2+y^2 > 1$	$= -\pi - \arcsin [x \sqrt{1 - y^2} - y \sqrt{1 - x^2}]$

arccos x + arccos y =

für $0 \leq x+y$	$= \arccos [xy - \sqrt{1 - y^2} * \sqrt{1 - x^2}]$

arccos x - arccos y =

für $y \leq x$	$= -\arccos [xy + \sqrt{1 - y^2} * \sqrt{1 - x^2}]$
für $x \leq y$	$= \arccos [xy + \sqrt{1 - y^2} * \sqrt{1 - x^2}]$

arctan x + arctan y =

für $xy < 1$	$= \arctan [(x+y) / (1 - xy)]$
für $xy > 1$, $x > 0$	$= \pi + \arctan [(x+y) / (1 - xy)]$
für $xy > 1$, $x < 0$	$= -\pi + \arctan [(x+y) / (1 - xy)]$

arctan x - arctan y =

für $xy > -1$	$= \arctan [(x-y) / (1 + xy)]$
für $xy < -1$, $x > 0$	$= \pi + \arctan [(x-y) / (1 + xy)]$
für $xy < -1$, $x < 0$	$= -\pi + \arctan [(x-y) / (1 + xy)]$

arccot x + arccot y = für $x \neq -y$ $= \text{arccot } [(xy - 1) / (x + y)]$
arccot x - arccot y = für $x \neq y$ $= \text{arccot } [(xy + 1) / (y - x)]$

Zusammenhang zu logarithmischen Funktionen

$\arcsin x = -i \ln [ix + \sqrt{1 - x^2}]$ $\arccos x = -i \ln [x + \sqrt{x^2 - 1}]$
$\arctan x = 1/(2i) * \ln [(1+ix) / (1-ix)]$ $\text{arccot } x = -1/(2i) * \ln [(ix+1) / (ix-1)]$

$\text{arccsc } x = -i \ln ((\sqrt{x^2 - 1}+i)/x)$ $\text{arcsec } x = -i \ln ((i\sqrt{x^2 - 1}+1)/x)$

Zusammenhang zu trigonometrischen Funktionen

$\sin (\arccos x) = \cos (\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ $\tan (\text{arccot } x) = \cot (\arctan x) = 1/x$

$\arctan (\cot x) = \text{arccot} (\tan x) = \pi/2 - x$ $\cos (\arctan x) = 1/\sqrt{1 + x^2}$

$\sin (\arctan x) = x/\sqrt{1 + x^2}$

Arkusfunktionsreihen

$\arcsin x = x - x^3/(2\cdot 3) + 1\cdot 3/(2\cdot 4\cdot 5)\, x^5 + \ldots + 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)/(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n-1))\, x^{2n-1} + \ldots$

$\arccos x = \pi/2 - x - x^3/(2\cdot 3) - 1\cdot 3/(2\cdot 4\cdot 5)\, x^5 - \ldots - 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)/(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n-1))\, x^{2n-1} - \ldots$

$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 +- \ldots + (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1) + \ldots$

$\text{arccot } x = \pi/2 - x + x^3/3 - x^5/5 + x^7/7 +- \ldots + (-1)^{n+1} x^{2n+1}/(2n+1) + \ldots$

Darstellung des Bogens als Reihe

Reihen für Kreisbogen, dargestellt durch zugehörige trigonometrische Funktionen

arc x $= \sin x + \sin^3 x /(1\cdot 2\cdot 3) + 1\cdot 3\cdot \sin^5 x / (1\cdot 2\cdot 4\cdot 5) + 1\cdot 3\cdot 5\cdot \sin^7 x / (1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 7) + 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \sin^9 x /(1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9) + \ldots$

arc x $= \pi/2 - (\cos x + \cos^3 x /(1\cdot 2\cdot 3) + 1\cdot 3\cdot \cos^5 x / (1\cdot 2\cdot 4\cdot 5) + 1\cdot 3\cdot 5\cdot \cos^7 x / (1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 7) + 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \cos^9 x /(1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9) + \ldots)$

$= (1 - \cos x)/1 + (1 - \cos^3 x) /(2\cdot 3) + 3\cdot(1 - \cos^5 x) /(2\cdot 4\cdot 5) - 3\cdot 5\cdot(1 - \cos^7 x) / (2\cdot 4\cdot 6\cdot 7) + \ldots$

arc x $= \tan x - 1/3 \tan^3 x + 1/5 \tan^5 x - 1/7 \tan^7 x + 1/9 \tan^9 x - \ldots$

arc x $= \pi/2 - (\cot x - 1/3 \cot^3 x + 1/5 \cot^5 x - 1/7 \cot^7 x + 1/9 \cot^9 x - \ldots)$

$= 1/ \cot x - 1/ (3 \cot^3 x) + 1/ (5 \cot^5 x) - 1/ (7 \cot^7 x) + 1/ (9 \cot^9 x) - 1/ (11 \cot^{11} x) + \ldots$

arc x $= \pi/2 - (1/ \sec x + 1/ (2\cdot 3\cdot \sec^3 x) + 3/ (2\cdot 4\cdot 5\cdot \sec^5 x) - 3\cdot 5/ (2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \sec^7 x) + \ldots)$

$= (\sec x - 1)/ \sec x + (\sec^3 x - 1) / (2\cdot 3\cdot \sec^3 x) + 3 (\sec^5 x - 1)/ (2\cdot 4\cdot 5\cdot \sec^5 x) - 3\cdot 5 (\sec^7 - 1)/ (2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \sec^7 x) + \ldots$

arc x $= 1/ \csc x + 1/ (2\cdot 3\cdot \csc^3 x) + 3/ (2\cdot 4\cdot 5\cdot \csc^5 x) - 3\cdot 5/ (2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \csc^7 x) + \ldots$

$1/2 \text{ arc } x = \sin x - 1/2 \sin 2x + 1/3 \sin 3x - 1/4 \sin 4x + \ldots$

Komplexe Arkusfunktionen

$\arcsin (x+yi) = \arcsin z = {}_0\int^z dt / \sqrt{1-t^2} = -i \text{ arcsinh } iz =$

$\arccos z = {}_z\int^1 dt / \sqrt{1-t^2} = \pi/2 - \arcsin z = \pm i \text{ arccosh } z$

$\arctan z = {}_0\int^z dt / (1+t^2) = -i \text{ arctanh } iz$

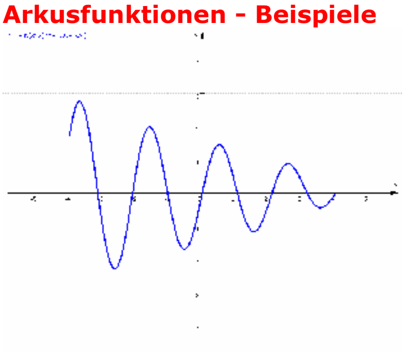
$\text{arcsec } z = \arccos 1/z = \pm i \text{ arcsech } z$

$\text{arccsc } z = \arcsin 1/z = i \text{ arccsch } iz$

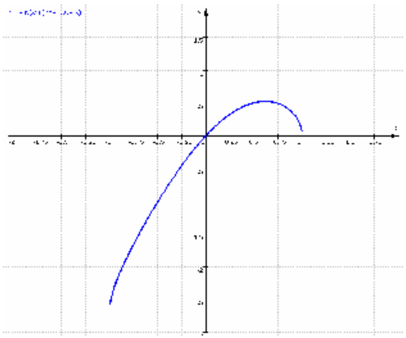
$\text{arccot } z = \arctan 1/z = \text{arccoth } iz$

$\arctan z + \text{arccot } z = \pm\pi/2$

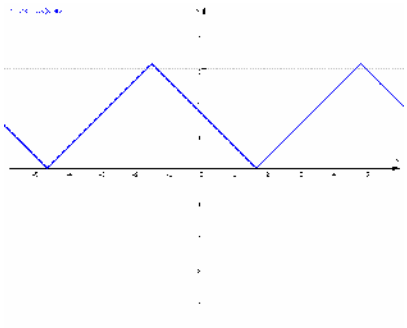
Arkusfunktionen - Beispiele



Y = SIN(3*X)*ARCCOS(X/4)



Y = X*ARCCOS(X)



Y = ARCCOS(SIN(X))

Ableitungen der Arkusfunktionen

Die Ableitungen der Arkusfunktionen können über die Differenziationsregel für Umkehrfunktionen gewonnen werden:

$y = \arcsin x$, d.h. $x = \sin y$ $dx/dy = \cos y$

$dy/dx = 1 / \cos y = 1 / \sqrt{1 - \sin^2 y} = 1 / \sqrt{1 - x^2}$

Es ergibt sich:

$(\arcsin x)' = 1 / \sqrt{1 - x^2}$ $(\arccos x)' = -1 / \sqrt{1 - x^2}$

$(\arctan x)' = 1 / (1 + x^2)$ $(\text{arccot } x)' = -1 / (1 + x^2)$

$(\text{arcsec } x)' = 1 / (x \sqrt{x^2 - 1})$ $(\text{arccsc } x)' = -1 / (x \sqrt{x^2 - 1})$

2.Ableitungen

$(\arcsin x)'' = x / \sqrt{1 - x^2}^3$ $(\arccos x)'' = -x / \sqrt{1 - x^2}^3$

$(\arctan x)'' = -2x / (1 + x^2)^2$ $(\text{arccot } x)'' = 2x / (1 + x^2)^2$

Stammfunktionen

$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$

$\int \arccos x \, dx = -x \arcsin x - \sqrt{1 - x^2} + \pi x/2$

$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - 1/2 \ln (1 + x^2)$

$\int$ arccot x dx = -x arctan x - 1/2 ln $(1 + x^2) + \pi x/2$
$\int$ arccsc x dx = x arccsc x ± ln $(z + \sqrt{x^2 - 1})$
$\int$ arcsec x dx = x arcsec x ± (- ln $(z + \sqrt{x^2 - 1}))$
$\int$ x arcsin x dx = $(x^2/2 - 1/4)$ arcsin x + $x/4 \sqrt{1 - x^2}$
$\int$ x arccos x dx = $(x^2/2 - 1/4)$ arccos x - $x/4 \sqrt{1 - x^2}$
$\int$ x arctan x dx = $(1 + x^2)/2$ arctan x - x/2
$\int$ x arccot x dx = $(1 + x^2)/2$ arccot x + x/2

Arkusfunktion-Näherungsformeln

für $0 \le x \le 1$
arcsin x = $\pi/2 - \sqrt{1-x}\,(1{,}5707288 - 0{,}2121144\,x + 0{,}0742610\,x^2 - 0{,}0187293\,x^3) + R(x)$; $R(x) < 5 \cdot 10^{-5}$
für $0 \le x \le 1$
arcsin x = $\pi/2 - \sqrt{1-x}\,(1{,}5707963050 - 0{,}2145988016\,x + 0{,}0889789874\,x^2 - 0{,}0501743046\,x^3 + 0{,}0308918810\,x^4 - 0{,}0170881256\,x^5 + 0{,}0066700901\,x^6 - 0{,}0012624911\,x^7) + R(x)$; $R(x) < 2 \cdot 10^{-8}$
für $-1 \le x \le 1$
arctan x = $0{,}9998660\,x - 0{,}3302995\,x^3 + 0{,}1801410\,x^5 - 0{,}0851330\,x^7 + 0{,}0208351\,x^9 + R(x)$; $R(x) < 10^{-5}$

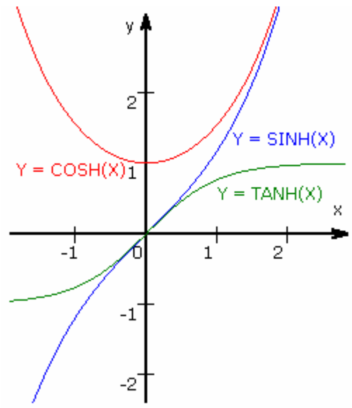
Approximation mit Tschebyschow-Polynomen für $-1 \le x \le 1$; $T_n(x) = \cos n\theta$, $\cos \theta = 2x-1$
arctan x = $x \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(x^2)$
für n = 0, 1, 2, … wird
A_n = 0,881373587; -0,105892925; 0,011135843; -0,001381195; 0,000185743; -0,000026215; 0,000003821; -0,000000570; 0,000000086; -0,000000013; 0,000000002
für $-1/2 \sqrt{2} \le x \le 1/2 \sqrt{2}$
arcsin x = $x \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(x^2)$
arccos x = $\pi/2 - x \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(x^2)$
für n = 0, 1, 2, … wird
A_n = 1,051231959; 0,054946487; 0,004080631; 0,000407890; 0,000046985; 0,000005881; 0,000000777; 0,000000107; 0,000000015; 0,000000002

Geschichte der Arkusfunktionen

Bis zum Jahr 1729 wurden Arkusfunktionen nicht explizit betrachtet, vielmehr sprach man vom "Winkel, dessen Sinus n ist".
1729 führte Daniel Bernoulli die Buchstaben "AS" als Symbol für die Umkehrfunktion der Sinusfunktion ein. Einige Jahre später nutzte Euler "A" für Arkussinus und "A t" für den Arkustangens.
Lagrange war der Erste, der arc.sin für die Umkehrfunktion einführte.

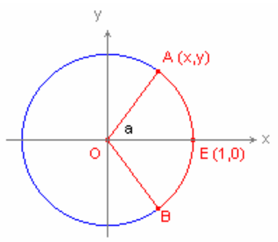
Um 1815 schlug der englische Mathematiker John Herschel, Sohn von William Herschel, vor, als Abkürzung $\sin.^{-1}N$ zu verwenden. Sein Vorschlag beruhte auf der Idee, eine zu den Ableitungen, wie d^2x, ähnliche Schreibweise einzuführen. Zu dieser Zeit war es üblich $d^{-n} V = \int^n V$
für das mehrfache Integral zu schreiben. Herschel war sich der Verwechslungsgefahr bewusst und schrieb:
"Die Schreibweise $\cos.^{-1}$ e darf nicht als 1 / cos. e interpretiert werden, viel mehr ist darunter arc (cos. = e) zu verstehen."
Durch den deutschen Mathematiker Burmann wurde die Schreibweise abgelehnt und John Herschel selbst nutzte in seinem Werk "Traite de la Luminere" von 1829 die Schreibweise arc.sin, was nicht verwundert, da das Buch in Frankreich erschien.
Dennoch setzte sich in den englischsprachigen Ländern die Notation $\sin^{-1} x$ durch. In allen anderen Staaten der Erde wird arcsin x usw. genutzt.
Problematisch ist dies für die Schulmathematik. Nahezu alle Taschenrechner, aus US-amerikanischer Produktion, tragen Tastenbeschriftungen $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, …, obwohl die Arkusfunktionen gemeint sind.

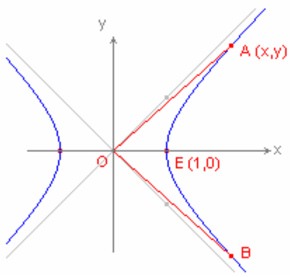
Hyperbolische Funktionen



Sinus hyperbolicus
y = sinh x = $(e^x - e^{-x})/2$
DB: { x | - ∞ < x < ∞ }; WB: { y | - ∞ < y < ∞ } , Nullstelle $x_0 = 0$
Cosinus hyperbolicus (Kettenlinie)
y = cosh x = $(e^x + e^{-x})/2$
DB: { x | - ∞ < x < ∞ }; WB: { y | 1 ≤ y < ∞ }, keine Nullstelle
Tangens hyperbolicus
y = tanh x = sinh x / cosh x = $(e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x})$
DB: { x | - ∞ < x < ∞ }; WB: { y | -1 ≤ y ≤ 1 },
Nullstelle $x_0 = 0$; Asymptoten y=1 und y=-1
Kotangens hyperbolicus
y = coth x = cosh x / sinh x = $(e^x + e^{-x}) / (e^x - e^{-x})$
DB: { x | - ∞ < x < ∞ }; WB: { y | - ∞ < y < -1 und 1 < y < ∞ }
keine Nullstelle; Asymptoten y=1 und y=-1
Secans hyperbolicus y = sech x = 1/cosh(x) = 2 / $(e^x + e^{-x})$
Cosecans hyperbolicus y = csch x = 1/sinh(x) = 2 / $(e^x - e^{-x})$

Die Hyperbelfunktionen wurden erstmals von dem italienischen Mathematiker Vincenzo Riccati (1707-1775) eingeführt.
Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus wachsen mit großem x exponentiell ins Unendliche.
Der Sinus hyperbolicus ist punktsymmetrisch zum Ursprung, hat bei x=0 den Wert f(x)=0 und geht für große negative Werte x gegen minus Unendlich. Die Funktion lässt sich in der Nähe des Ursprungs durch eine Gerade y=x nähern. Der Cosinus hyperbolicus ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse und hat ein Minimum x=0 bei y=1. Für große negative Werte x geht die Funktion gegen Unendlich. Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus nähern sich für große positive Werte von x immer mehr aneinander an.
Die Funktionen sinh²(x) und cosh²(x) unterscheiden sich nur um eine additive Konstante: cosh²(x) - sinh²(x) = 1.
Die Funktionen tanh(x) und coth(x) sind punktsymmetrisch zum Ursprung. tanh(x) ist streng monoton steigend und besitzt eine Nullstelle bei x=0. coth(x) besitzt eine Polstelle bei x=0 und ist jeweils für x>0 und x<0 streng monoton fallend.





Hyperbelfunktionen, Erklärung

Die trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus und Tangens werden am Einheitskreis mit der Gleichung x² + y² = 1 definiert. In der oberen Abbildung sind die Punkte A(x,y), B(x,-y), E (1,0) und der Winkel AOE = a (im Bogenmaß). Dann gilt für den Flächeninhalt U des Sektors OAB = (2a)/(2π) π = a, so dass

x = cos a = cos U   y = sin a = sin U   y/x = tan a = tan U

Diese Definition über den Flächeninhalt wird für die hyperbolischen Funktionen übernommen. Dazu wird die orthogonale Hyperbel x² - y² = 1 (mit x ≥ 1) betrachtet.

Definition

Es sei U der Flächeninhalt des Hyperbelsektors OAB der orthogonalen Hyperbel x² - y² = 1, wobei A(x,y) und B(x,-y) sei. Dann ist
Cosinus hyperbolicus x = cosh U
Sinus hyperbolicus y = sinh U
Tangens hyperbolicus y/x = tanh U
Dabei wird noch vereinbart, dass U positiv ist, wenn die Ordinate von A positiv ist; negativ, wenn y von A negativ ist.
Aus dieser Definition folgt unmittelbar
sinh(-U) = Flächeninhalt(OBA) = - Flächeninhalt (OAB) = - sinh (U)
cosh(-U) = Flächeninhalt(OBA) = Flächeninhalt(OAB) = cosh(U)
tanh(-U) = sinh(-U) / cosh(-U) = -sinh(U) / cosh(U) = -tanh(U)
Die Funktionen sinh und tanh sind somit ungerade, cosh ist gerade.

Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen (±√ wird für x > 0 bzw. x < 0 gewählt)

	sinh x	cosh x	tanh x	coth x
sinh x	sinh x	±√(1+cosh²x)	tanh x / √(1-tanh²x)	1/±√(coth²x-1)
cosh x	√(1+sinh²x)	cosh x	1/√(1-tanh²x)	coth x / ±√(coth²x-1)
tanh x	sinh x / √(1+sinh²x)	±√(cosh²x-1) / cosh x	tanh x	1/coth x
coth x	√(1+sinh²x) / sinh x	cosh x / ±√(cosh²x-1)	1/tanh x	coth x

Additionstheoreme Hyperbelfunktionen

Periode der Hyperbelfunktionen

$\sinh(x + i\,2k\pi) = \sinh x$

$\cosh(x + i\,2k\pi) = \cosh x$

$\tanh(x + i\,k\pi) = \tanh x$

$\coth(x + i\,k\pi) = \coth x$

Negative Argumente

$\sinh(-x) = -\sinh x$

$\cosh(-x) = \cosh x$

$\tanh(-x) = -\tanh x$

$\coth(-x) = -\coth x$

Additionstheoreme

$\sinh x + \cosh x = e^{x}$

$\sinh x - \cosh x = -e^{-x}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\tanh x = \sinh x / \cosh x$

$1 - \tanh^2 x = 1 / \cosh^2 x$

$\mathrm{sch}\, x = \tanh x / \sinh x$

$\mathrm{sch}^2 x + \tanh^2 x = 1$

$\coth^2 x + \mathrm{csch}^2 x = 1$

$e^{2x} = (1+\tanh x) / (1-\tanh x)$

$\sinh x = \mathrm{sgn}\, x * \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \tanh x / \sqrt{1 - \tanh^2 x}$

$\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = 1 / \sqrt{1 - \tanh^2 x}$

$\tanh x = \sinh x / \sqrt{1 + \sinh^2 x}$

Summe und Differenz der Argumente

$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

$\tanh(x \pm y) = (\tanh x \pm \tanh y) / (1 \pm \tanh x \tanh y)$

$\coth(x \pm y) = (1 \pm \coth x \coth y) / (\coth x \pm \coth y)$

Doppelte und halbe Argumente

$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

$\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$

$\tanh 2x = 2 \tanh x / (1 + \tanh^2 x)$

$\coth 2x = (1 + \coth^2 x) / (2 \coth x)$

$\sinh x/2 = \mathrm{sgn}\, x * \sqrt{[(\cosh x - 1)/2]} = \sinh x / \sqrt{[2\cosh x + 2]}$

$\cosh x/2 = \sqrt{[(\cosh x + 1)/2]} = \sinh x / \sqrt{[2\cosh x - 2]}$

$\tanh x/2 = \sinh x / (\cosh x + 1) = (\cosh x - 1)/ \sinh x = \mathrm{sgn}\, x * \sqrt{[(\cosh x - 1) / (\cosh x + 1)]}$

$\coth x/2 = \sinh x / (\cosh x - 1) = (\cosh x + 1)/ \sinh x = \mathrm{sgn}\, x * \sqrt{[(\cosh x + 1) / (\cosh x - 1)]}$

Vielfache Argumente

$\sinh 3x = \sinh x\, (4 \cosh2 x - 1)$

$\sinh 4x = \sinh x \cosh x\, (8 \cosh^2 x - 4)$

$\sinh 5x = \sinh x\, (1 - 12 \cosh2 x + 16 \cosh^4 x)$

$\cosh 3x = \cosh x\, (4 \cosh^2 x - 3)$

$\cosh 4x = 1 - 8 \cosh^2 x + 8 \cosh^4 x$

$\cosh 5x = \cosh x\, (5 - 20 \cosh^2 x + 16 \cosh^4 x)$

$\sinh nx = n \cosh^{n-1} x \sinh x + \binom{n}{3} \cosh^{n-3} x \sinh^3 x + \binom{n}{5} \cosh^{n-5} x \sinh^5 x + \ldots$

$\cosh nx = \cosh^n x + \binom{n}{2} \cosh^{n-2} x \sinh^2 x + \binom{n}{4} \cosh^{n-4} x \sinh^{n-4} x + \ldots$

Produkte

$\sinh x \sinh y = 1/2\, [\cosh(x+y) - \cosh(x-y)]$

$\cosh x \cosh y = 1/2\, [\cosh(x+y) + \cosh(x-y)]$

$\sinh x \cosh y = 1/2\, [\sinh(x+y) + \sinh(x-y)]$

$\tanh x \tanh y = (\tanh x + \tanh y) / (\coth x + \coth y)$

$\coth x \coth y = (\coth x + \coth y) / (\tanh x + \tanh y)$

Potenzen

$\sinh^2 x = 1/2\, (\cosh 2x - 1)$

$\cosh^2 x = 1/2\, (\cosh 2x + 1)$

$\sinh^3 x = 1/4\, (-3 \sinh x + \sinh 3x)$

$\cosh^3 x = 1/4\, (3 \cosh x + \cosh 3x)$

$\sinh^4 x = 1/8\, (3 - 4 \cosh 2x + \cosh 4x)$

$\cosh^4 x = 1/8\, (3 + 4 \cosh 2x + \cosh 4x)$

$\sinh^5 x = 1/16\, (10 \sinh x - 5 \sinh 3x + \sinh 5x)$

$\cosh^5 x = 1/16\, (10 \cosh x + 5 \cosh 3x + \cosh 5x)$

$\sinh^6 x = 1/32\, (-10 + 15 \cosh 2x - 6 \cosh 4x + \cosh 6x)$

$\cosh^6 x = 1/32\, (10 + 15 \cosh 2x + 6 \cosh 4x + \cosh 6x)$

Binome

$(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh nx + \cosh nx$

$(\cosh x - \cosh x)^n = \cosh nx - \sinh nx$

Formel von Moivre

$(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$

Summen und Differenzen

$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh [(x+y)/2] \cosh [(x-y)/2]$

$\sinh x - \sinh y = 2 \sinh [(x-y)/2] \cosh [(x+y)/2]$

$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh [(x+y)/2] \cosh [(x-y)/2]$

$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh [(x+y)/2] \sinh [(x-y)/2]$

$\tanh x \pm \tanh y = \sinh(x \pm y) / (\cosh x \cosh y)$

$\coth x \pm \tanh y = \cosh(x \pm y) / (\sinh x \cosh y)$

$\coth x \pm \coth y = \sinh(x \pm y) / (\sinh x \sinh y)$

Hyperbelfunktionen imaginärer Argumente

$\cosh ix = \cos x$ $\cosh x = \cos ix$ $\sinh ix = i \sin x$ $\sinh x = -i \sin ix$

$\tanh ix = i \tan x$ $\tanh x = -i \tan ix$ $\coth ix = -i \cot x$ $\coth x = i \cot ix$

Näherungsformeln

für kleine Werte von x gilt $\sinh x \approx x + x^3/6$; $|x| < 0{,}84$ $\cosh x \approx (1 + x^2/4)^2$; $|x| < 0{,}70$

$\tanh x \approx x (1 - x^2/3)$; $|x| < 0{,}41$ $\coth x \approx 1/x (1 + x^2/3)$; $|x| < 0{,}65$

für große Werte von x gilt $\sinh x \approx \mathrm{sgn}(x)\, e^{|x|}/2$; $|x| > 2{,}78$ $\cosh x \approx e^{|x|}/2$; $|x| > 2{,}78$

$\tanh x \approx \mathrm{sgn}(x) (1 - 2e^{-2|x|})$; $|x| > 1{,}6$ $\coth x \approx \mathrm{sgn}(x) (1 + 2e^{-2|x|})$; $|x| > 1{,}6$

Potenzreihenentwicklung

$\sinh(x) = x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + \ldots$

$\cosh(x) = 1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + \ldots$

$\tanh(x) = x - x^3/3 + 2/15\, x^5 - 17/315\, x^7 + \ldots + 2^{2n} (2^{2n}-1) B_{2n} / (2n)!\, z^{2n-1} + \ldots$

$\mathrm{csch}\, x = 1/x - x/6 + 7/360\, x^3 - 31/15120\, x^5 + \ldots - 2 (2^{2n-1}-1) B_{2n} / (2n)!\, z^{2n-1} + \ldots$

$\mathrm{sech}\, x = 1 - x^2/2 + 5/24\, x^4 - 61/720\, x^6 + \ldots + E_{2n} / (2n)!\, z^{2n} + \ldots$

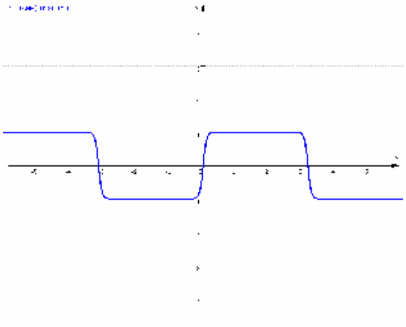
$\coth x = 1/x + x/3 - x^3/45 + 2/945\, x^5 - \ldots + 2^{2n-1} B_{2n} / (2n)!\, z^{2n-1} + \ldots$

Produktentwicklung

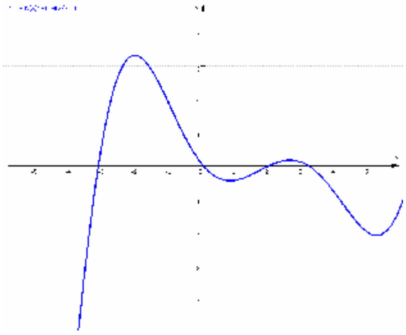
$\sinh(x) = x (1 + x^2/\pi^2) (1 + x^2/(4\pi^2)) (1 + x^2/(9\pi^2)) \ldots (1 + x^2/(k^2\pi^2)) \ldots$

$\cosh(x) = (1 + 4x^2/\pi^2) (1 + 4x^2/(9\pi^2)) (1 + 4x^2/(25\pi^2)) \ldots (1 + x^2/((2k-1)^2\pi^2)) \ldots$

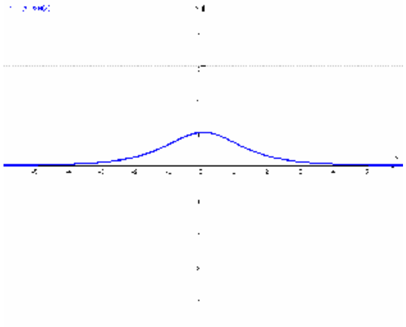
Hyperbelfunktionen - Beispiele



Y = TANH(10*SIN(X))



Y = SIN(X)*SINH(X/2-1)



Y = 1/COSH(X)

Hyperbelfunktionen-Ableitungen

$(\sinh x)' = \cosh x$ $(\cosh x)' = \sinh x$

$(\tanh x)' = \mathrm{sech}^2 x$ $(\mathrm{csch}\, x)' = -\mathrm{csch}\, x \coth x$

$(\mathrm{sech}\, x)' = -\mathrm{sech}\, x \tanh x$ $(\coth x)' = -\mathrm{csch}^2 x$

Stammfunktionen der Hyperbelfunktionen

$\int \sinh x\, dx = \cosh x$ $\int \cosh x\, dx = \sinh x$

$\int \tanh x\, dx = \ln \cosh x$ $\int \mathrm{csch}\, x\, dx = \ln \tanh x/2$

$\int \mathrm{sech}\, x\, dx = \arctan (\sinh x)$ $\int \coth x\, dx = \ln \sinh x$

$\int x^n \sinh x\, dx = x^n \cosh x - n \int x^{n-1} \cosh x\, dx$

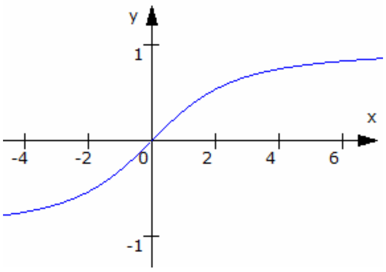
$\int x^n \cosh x\, dx = x^n \sinh x - n \int x^{n-1} \sinh x\, dx$

$\int \sinh^m x \cosh^n x\, dx = 1/(m+n) \sinh^{m-1} x \cosh^{n-1} x - (m-1)/(m+n) \int \sinh^{m-2} x \cosh^n x\, dx$

$\int \tanh^n x\, dx = -\tanh^{n-1} x / (n-1) + \int \tanh^{n-2} x\, dx$

$\int \coth^n x\, dx = -\coth^{n-1} x / (n-1) + \int \coth^{n-2} x\, dx$

$\int dx/(\sinh^m x \cosh^n x) = -1/(m-1)\, 1/(\sinh^{m-1} x \cosh^{n-1} x) - (m+n-2)/(m-1) \int dx / (\sinh^{m-2} x \cosh^n x)$



Langevin-Funktion

Die Langevin-Funktion L(x) wurde nach dem Physiker Paul Langevin benannt und wird in der Physik zur Berechnung von Polarisation, Magnetisierung und Widerständen verwendet.

Sie ist eine Kombination aus Hyperfunktion und hyperbolischer Potenzfunktion.

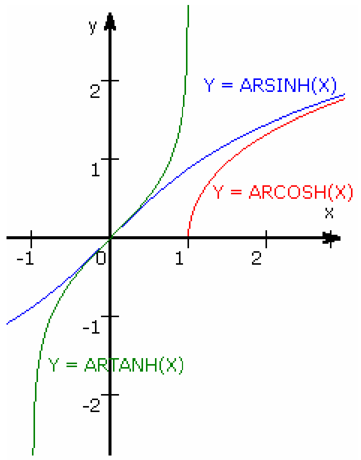
Definition: $L(x) = \coth x - 1/x = 1/\tanh x - 1/x$

1.Ableitung $L'(x) = (e^{4x} - 2 e^{2x} (2x^2 + 1) + 1) / (x^2 (e^{2x} - 1)^2)$

Stammfunktion $\int L(x)\, dx = \ln(e^{2x}/x - 1/x) - x$

Als Näherung für Argumente $|x| << 1$ wird $y = x/3$ verwendet.

Areafunktionen



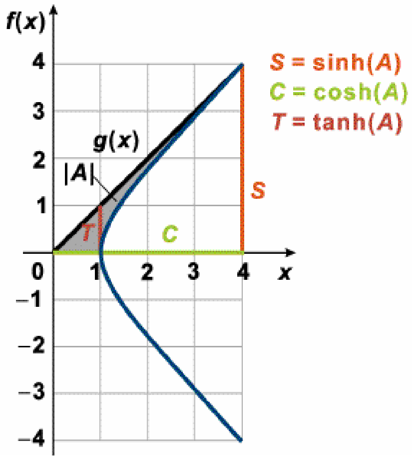
Die Areafunktionen sind die Umkehrungen der hyperbolischen Funktionen.

y = arsinh x ⇔ x = sinh y (Area sinus hyperbolicus)
DB: { x | - ∞ < x < ∞ } ; WB: { y | - ∞ < y < ∞ }
Nullstelle bei 0
y = arcosh x ⇔ x = cosh y
DB: { x | 1 ≤ x < ∞ } ; WB: { y | 0 ≤ y < ∞ }
Nullstelle bei 1
y = artanh x ⇔ x = tanh y
DB: { x | -1 ≤ x ≤ 1 } ; WB: { y | - ∞ < y < ∞ }
Nullstelle x_0 = 0; Asymptoten x=1 und x=-1
y = arcoth x ⇔ x = coth y
DB: { x | - ∞ < x < -1 und 1 < x < ∞ }; WB: { y | - ∞ < y < ∞, y≠0 }
keine Nullstelle; Asymptoten x=1, x=-1 und y=0

Darstellung durch andere Funktionen

± bedeutet + für x > 0, - für x < 0

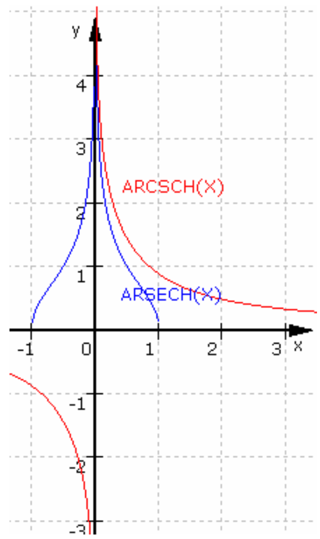
y = arsinh x = ± arcosh √(x² + 1) = artanh [x / √(x² + 1)] = arcoth [√(x² + 1) / x]
y = arcosh x = ± arsinh √(x² - 1) = ± artanh [√(x² - 1) / x] = ± arcoth [x / √(x² - 1)]
y = artanh x = arsinh [x / √(1 - x²)] = ± artcosh [1 / √(1 - x²)] = arcoth (1/x)
y = arcoth x = arsinh [1 / √(x² - 1)] = ± artcosh [x / √(x² - 1)] = artanh (1/x)
y = artanh -x = -artanh x



Erklärung der Areafunktionen

Areafunktionen sind die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen. Inverse hyperbolische Funktionen, weitere Bezeichnung der Areafunktionen. Sie ordnen den durch die hyperbolischen Funktionen definierten Werten die eingeschlossene Fläche (lat. area, daher Areafunktionen) zwischen einer Hyperbel und einer Geraden zu.
Schreibweise:
Areafunktionen werden durch ein vorangestelltes Ar gekennzeichnet, z.B. arsinh.
Teilweise existieren auch Schreibweisen mit vorangestelltem arc bzw. arg: arcsinh(x), argsinh(x), diese bergen jedoch Verwechselungsgefahren.
Vorwiegend im US-amerikanischen Sprachraum wird die Inversionsdarstellung mit -1 als Exponenten verwendet: $\sinh^{-1}$.

Eigenschaften der Areafunktionen



y = arsinh x

Definitionsbereich	-∞ < x < ∞	Wertebereich	-∞ < y < ∞
Quadrant	erster und dritter		
Periodizität	keine		
Monotonie	streng monoton steigend		
Symmetrie	Punktsymmetrie zum Ursprung		
Verhalten im Unendlichen	f(x) → ± ln (2|x|)		
Nullstelle	x = 0, zugleich Wendestelle		
Stammfunktion	∫ arsinh x dx = x arsinh x - √(x²+1) + C		

y = arcosh x

Definitionsbereich	1 ≤ x < ∞	Wertebereich	0 ≤ y < ∞
Quadrant	erster	Periodizität	keine
Monotonie	streng monoton steigend		
Symmetrie	keine Symmetrie		
Verhalten im Unendlichen	f(x) → ln (2x)		
Nullstelle	x = 0		
Stammfunktion	∫ arcosh x dx = x arcosh x - √(x²-1) + C		

Beide Funktionen haben keine Polstellen, Sprungstellen und Extrema.

y = artanh x

Definitionsbereich	-1 < x < 1	Wertebereich	-∞ < y < ∞
Quadrant	erster und dritter	Periodizität	keine
Monotonie	streng monoton steigend		
Symmetrie	Punktsymmetrie zum Ursprung		

Verhalten im Unendlichen	$f(x) \to \pm 1$		
Nullstelle	$x = 0$, zugleich Wendestelle	Polstellen	keine
Stammfunktion	$\int \text{artanh } x \, dx = x \text{ artanh } x + \ln \sqrt{1-x^2} + C$		

y = arcoth x

Definitionsbereich	$x > \|1\|$	Wertebereich	$-\infty \le y < \infty$; $y \ne 0$
Quadrant	erster und dritter	Periodizität	keine
Monotonie	streng monoton fallend		
Symmetrie	Punktsymmetrie zum Ursprung		
Verhalten im Unendlichen	$f(x) \to \pm 1$		
Nullstelle	keine		
Polstellen	bei $x=1$ und $x=-1$		
Wendepunkte	keine		
Stammfunktion	$\int \text{arcoth } x \, dx = x \text{ arcoth } x + \ln \sqrt{x^2-1} + C$		

artanh(x) geht durch den Ursprung und verhält sich in dessen Nähe wie eine Gerade der Steigung Eins. arcoth(x) strebt für negativ und positiv Unendlich gegen Null. Beide Funktionen haben keine Extrema und in ihren Definitionsbereichen die gleichen Ableitungen $f'(x) = 1/(1-x^2)$.

y = arsech x $\quad$ $\text{arsech } x = \ln\left((1+\sqrt{1-x^2})/x \right)$

Definitionsbereich $\quad 0 < x < 1$

Der Areasekans hyperbolicus wird mit arsech $x := \text{arsech } |x|$ auch auf den Definitionsbereich $-1 < x < 1$ erweitert

Wertebereich	$0 \le y < \infty$	Quadrant	erster (evtl. zweiter)
Nullstelle	$x = 1$	Polstellen	$x = 0$
Wendestelle	$x = \sqrt{1/2}$	Ableitung	$f'(x) = -1/(x \sqrt{1-x^2})$
Stammfunktion	$\int \text{arsech } x \, dx = x \text{ arsech } x + \arcsin x + C$		

y = arcsch x $\quad$ $\text{arcsch } x = \ln\left(1/x + \sqrt{1+1/x^2}\right)$

Definitionsbereich	$-\infty \le x < \infty$; $x \ne 0$	Wertebereich	$-\infty \le y < \infty$; $y \ne 0$
Quadrant	erster und dritter	Nullstelle	keine
Polstellen	$x = 0$	Wendepunkte	keine
Ableitung	$f'(x) = -1/(\|x\| \sqrt{1+x^2})$		
Stammfunktion	$\int \text{arcsch } x \, dx = x \text{ arcsch } x + \|\text{arcsinh } x\| + C$		

Beide Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich streng monoton fallend und nicht periodisch. arsech x divergiert bei $x = 0$ und schneidet die x-Achse senkrecht bei $x = 1$, $y = 0$. arcsch x ist punktsymmetrisch zum Ursprung, divergiert bei $x = 0$ und geht für unendliches x gegen Null.

Umrechnungsformeln Areafunktionen

Funktion	$f(x) = \text{arsinh}(x)$	$f(x) = \text{arcosh}(x)$	$f(x) = \text{artanh}(x)$
arsinh(x)	$f(x)$	$\text{sgn}(x)\, f(\sqrt{1+x^2})$	$f(x/\sqrt{1+x^2})$
arcosh(x)	$f(\sqrt{x^2-1})$	$f(x)$	$f(\sqrt{x^2-1}/x)$
artanh(x)	$f(x/\sqrt{1-x^2})$	$\text{sgn}(x)\, f(1/\sqrt{1-x^2})$	$f(x)$
arsech(x)	$f(\sqrt{1-x^2}/x)$	$f(1/x)$	$f(\sqrt{1-x^2})$
arcsch(x)	$f(1/x)$	$\text{sgn}(x)\, f(\sqrt{1+1/x^2})$	$\text{sgn}(x)\, f(1/\sqrt{1+x^2})$
arcoth(x)	$\text{sgn}(x)\, f(1/\sqrt{x^2-1})$	$\text{sgn}(x)\, f(\sqrt{x^2/(x^2-1)})$	$f(1/x)$

Funktion	$f(x) = \text{arsech}(x)$	$f(x) = \text{arcsch}(x)$	$f(x) = \text{arcoth}(x)$
arsinh(x)	$\text{sgn}(x)\, f(1/\sqrt{1+x^2})$	$f(1/x)$	$f(\sqrt{1+x^2}/x)$
arcosh(x)	$f(1/x)$	$f(1/\sqrt{x^2-1})$	$f(x/\sqrt{x^2-1})$
artanh(x)	$\text{sgn}(x)\, f(\sqrt{1-x^2})$	$f(\sqrt{1-x^2}/x)$	$f(1/x)$
arsech(x)	$f(x)$	$f(x/\sqrt{1-x^2})$	$f(1/\sqrt{1-x^2})$
arcsch(x)	$\text{sgn}(x)\, f(\sqrt{x^2/(1+x^2)})$	$f(x)$	$\text{sgn}(x)\, f(\sqrt{1+x^2})$
arcoth(x)	$\text{sgn}(x)\, f(\sqrt{1-1/x^2})$	$\text{sgn}(x)\, f(\sqrt{x^2-1})$	$f(x)$

Areafunktionen-Ableitungen

Die Ableitungen zu arsinh(x) und arcosh(x) sind Wurzeln reziproker quadratischer Funktionen:

$d/dx \text{ arsinh}(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$	$d/dx \text{ arcosh}(x) = 1/\sqrt{x^2-1}$, $x > 1$
$d/dx \text{ artanh}(x) = 1/(1-x^2)$	$d/dx \text{ arcoth}(x) = 1/(1-x^2)$
$d/dx \text{ arsech}(x) = -1/(x \sqrt{1-x^2})$	$d/dx \text{ arcsch}(x) = -1/(\|x\| \sqrt{1+x^2})$

Additionstheoreme Areafunktionen

Summe und Differenzen

$\text{arsinh } x \pm \text{arsinh } y = \text{arsinh } [x \sqrt{1+y^2} \pm y \sqrt{1+x^2}\,]$

$\text{arsinh } x \pm \text{arcosh } y = \text{arsinh } [xy \pm \sqrt{(1+x^2)(y^2-1)}\,]$

$\text{arcosh } x \pm \text{arcosh } y = \text{arcosh } [xy \pm \sqrt{[(y^2-1)*(x^2-1)]}\,]$

$\text{artanh } x \pm \text{artanh } y = \text{artanh } [\,(x \pm y) / (1 \pm xy)\,]$

$\text{artanh } x \pm \text{arcoth } y = \text{artanh } [\,(1 \pm xy) / (x \pm y)\,]$

$\operatorname{arcoth} x \pm \operatorname{arcoth} y = \operatorname{arcoth} [(1 \pm xy) / (x \pm y)]$

Areafunktionen imaginärer Argumente

$\operatorname{arsinh} ix = i \operatorname{arsinh} x$ $\qquad$ $\operatorname{arcosh} ix = i \operatorname{arcosh} x$

$\operatorname{artanh} ix = i \operatorname{artanh} x$ $\qquad$ $\operatorname{arcoth} ix = - i \operatorname{arcoth} x$

Negative Argumente

$\operatorname{arsinh} -x = - \operatorname{arsinh} x$ $\qquad$ $\operatorname{arcosh} -x = \pi i - \operatorname{arcosh} z$

$\operatorname{artanh} -x = - \operatorname{artanh} x$

Zusammenhang zu logarithmischen Funktionen

$\operatorname{arsinh} x = \ln [x + \sqrt{x^2 + 1}]$

$\operatorname{arcosh} x = \ln [x - \sqrt{x^2 - 1}]$; für $x>1$, $y<0$ $\qquad$ $= \ln [x + \sqrt{x^2 - 1}]$; für $x>1$, $y>0$

$\operatorname{artanh} x = 1/2 \ln [(1+x) / (1-x)]$; für $|x|<1$

$\operatorname{arcoth} x = 1/2 \ln [(1+x) / (x-1)]$; für $|x|>1$

Integraldarstellung

$\operatorname{arsinh} x = \int_0^x dt/\sqrt{1 + t^2}$ $\qquad$ $\operatorname{arcosh} x = \int_1^x dt/\sqrt{t^2 - 1}$, $x \geq 1$

$\operatorname{artanh} x = \int_0^x dt/(1 - t^2)$, $|x|<1$ $\qquad$ $\operatorname{arcoth} x = \int_x^\infty dt/(t^2 - 1)$, $x>1$

Logarithmus Näherungsformeln

Mittels Areafunktionen können Formeln zur Berechnung von beliebig vielen Dezimalziffern von Logarithmuswerten aufgestellt werden: $\qquad$ $\ln 2 = 2 \operatorname{artanh}(1/3)$

$\ln 2 = 4 \operatorname{artanh}(1/6) + 2 \operatorname{artanh}(1/99)$

$\ln 2 = 4 \operatorname{artanh}(1/7) + 2 \operatorname{artanh}(1/17)$

$\ln 2 = 18 \operatorname{artanh}(1/26) - 2 \operatorname{artanh}(1/4801) + 8 \operatorname{artanh}(1/8749)$

$\ln 2 = 10 \operatorname{artanh}(1/17) + 4 \operatorname{artanh}(13/449)$

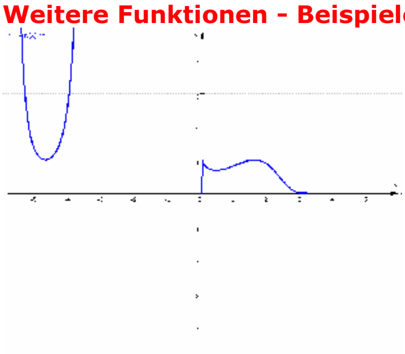
$\ln 2 = 144 \operatorname{artanh}(1/251) + 54 \operatorname{artanh}(1/449) - 38 \operatorname{artanh}(1/4801) + 62 \operatorname{artanh}(1/8749)$

$\ln 2 = 14 \operatorname{artanh}(1/31) + 10 \operatorname{artanh}(1/49) + 6 \operatorname{artanh}(1/161)$

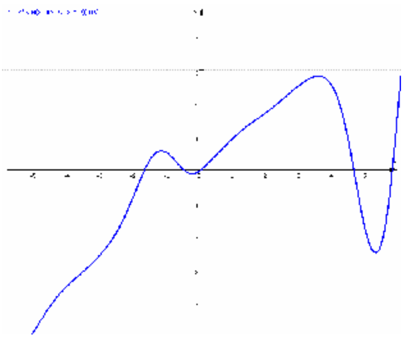
$\ln 10 = 6 \operatorname{artanh}(1/3) + 2 \operatorname{artanh}(1/9)$

$\ln 10 = 46 \operatorname{artanh}(1/31) + 34 \operatorname{artanh}(1/49) + 20 \operatorname{artanh}(1/161)$

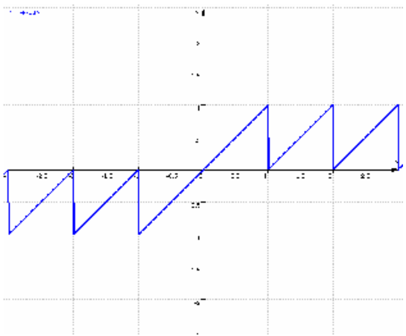
Weitere Funktionen - Beispiele



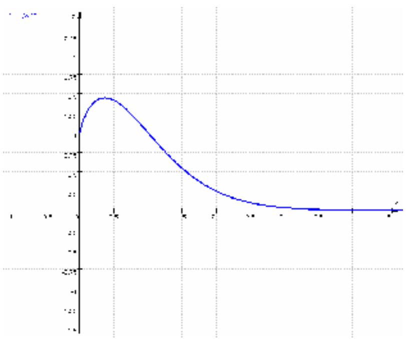
Y = SIN(X)^X



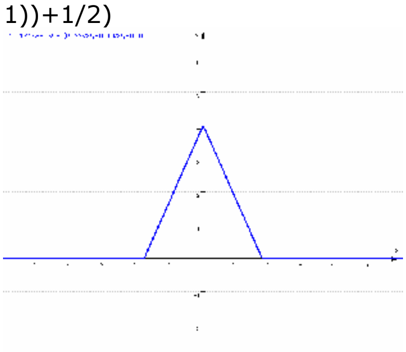
Y = X*SIN(SIN(X+COS(X-1))+1/2)



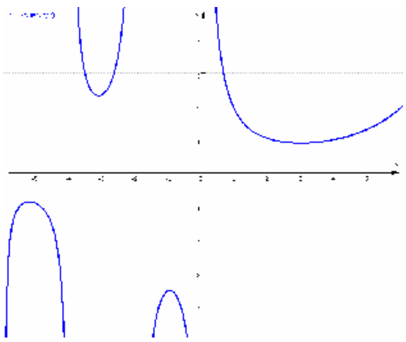
Y = FRAC(X)



Y = 1/X^X



Y = 4-4*|-√π>X<√π|/√π



Y = GAMMA(X/2)

Areafunktionen-Näherungen

Für große Werte von x gilt: $\qquad$ $\operatorname{arsinh}(x) \approx \operatorname{sgn}(x) (\ln(2|x|) + 1/(4x^2))$ für $|x| > 2$

$\operatorname{arcosh}(x) \approx \ln(2|x|) - 1/(4x^2)$ für $|x| > 2,2$

Für kleine Werte von x gilt: $\qquad$ $\operatorname{artanh}(x) \approx x / \sqrt{1+2/3\, x^3}$ für $|x| < 0,5$

$\operatorname{arsech}(x) \approx - \ln(x/2) - x^2/4$ für $x < 0,45$

$\operatorname{arcsch}(x) \approx \operatorname{sgn}(x) (- \ln(x/2) + x^2/4)$ für $|x| < 0,5$

Areafunktionsreihen

$\operatorname{arsinh} x = x - 1/(2\cdot3)\, x^3 + (1\cdot3)/(2\cdot4\cdot5= x^5 - (1\cdot3\cdot5)/(2\cdot4\cdot6\cdot7)\, x^7 + \ldots$; $|x| < 1$

$\operatorname{arsinh} x = \ln 2x + 1/(2\cdot2\cdot x^2) - (1\cdot3)/(2\cdot4\cdot4\cdot x^4) + (1\cdot3\cdot5)/(2\cdot4\cdot6\cdot6\cdot x^6) - \ldots$; $|x| > 1$

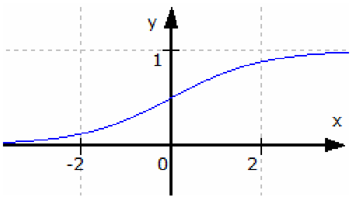
$\operatorname{arcosh} x = \ln 2x - 1/(2\cdot2\cdot x^2) - (1\cdot3)/(2\cdot4\cdot4\cdot x^4) - (1\cdot3\cdot5)/(2\cdot4\cdot6\cdot6\cdot x^6) - \ldots$; $|x| > 1$

$\operatorname{artanh} x = x + x^3/3 + x^5/5 + x^7/7 + \ldots$; $|x| < 1$
$\operatorname{arcoth} x = 1/x + 1/(3 \cdot x^3) + 1/(5 \cdot x^5) + 1/(7 \cdot x^7) + \ldots$; $|x| > 1$

Stammfunktionen der Areafunktionen

$\int \operatorname{arsinh} x\, dx = x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{1 + x^2}$
$\int \operatorname{artanh} x\, dx = x \operatorname{artanh} x + 1/2 \ln (1 - x^2)$
$\int \operatorname{arcsch} x\, dx = x \operatorname{arcsch} x \pm \operatorname{arsinh} x$
$\int \operatorname{arcosh} x\, dx = x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2 - 1}$
$\int \operatorname{arcoth} x\, dx = x \operatorname{arcoth} x + 1/2 \ln (x^2 - 1)$
$\int \operatorname{arsech} x\, dx = x \operatorname{arsech} x \pm \operatorname{arsinh} x$

$\int x \operatorname{arsinh} x\, dx = (2x^2 + 1)/4 \operatorname{arsinh} x - x/4 \sqrt{1 + x^2}$
$\int x^n \operatorname{arsinh} x\, dx = x^{n+1} /(n+1) \operatorname{arsinh} x - 1/(n+1) \int x^{n+1}/\sqrt{1 + x^2}\, dx$
$\int x \operatorname{arcosh} x\, dx = (2x^2 - 1)/4 \operatorname{arcosh} x - x/4 \sqrt{x^2 - 1}$
$\int x^n \operatorname{arcosh} x\, dx = x^{n+1} /(n+1) \operatorname{arcosh} x - 1/(n+1) \int x^{n+1}/\sqrt{x^2 - 1}\, dx$
$\int x \operatorname{artanh} x\, dx = (x^2 - 1)/2 \operatorname{artanh} x + x/2$
$\int x^n \operatorname{artanh} x\, dx = x^{n+1} /(n+1) \operatorname{artanh} x - 1/(n+1) \int x^{n+1}/(1 - x^2)\, dx$
$\int x \operatorname{arcoth} x\, dx = (x^2 - 1)/2 \operatorname{arcoth} x + x/2$
$\int x^n \operatorname{arcoth} x\, dx = x^{n+1} /(n+1) \operatorname{arcoth} x + 1/(n+1) \int x^{n+1}/(x^2 - 1)\, dx$
$\int x \operatorname{arcsch} x\, dx = x^2/2 \operatorname{arcsch} x \pm 1/2 \sqrt{1 + x^2}$
$\int x^n \operatorname{arcsch} x\, dx = x^{n+1} /(n+1) \operatorname{arcsch} x \pm 1/(n+1) \int x^n/\sqrt{x^2 + 1}\, dx$
$\int x \operatorname{arsech} x\, dx = x^2/2 \operatorname{arsech} x \pm 1/2 \sqrt{1 - x^2}$
$\int x^n \operatorname{arsech} x\, dx = x^{n+1} /(n+1) \operatorname{arsech} x \pm 1/(n+1) \int x^n/\sqrt{1 - x^2}\, dx$



Sigmoidfunktion

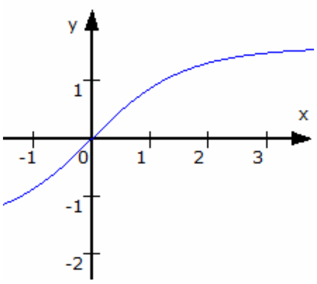
Die Sigmoidfunktion oder Schwanenhalsfunktion wird durch die Gleichung

$$y = \operatorname{sig}(x) = 1/(1+e^{-x}) = 1/2\, (1 + \tanh x/2)$$

beschrieben.
Die Sigmoidfunktion ist damit ein verschobene und gestreckte/gestauchte Tangens-hyperbolicus-Funktion.
Die Umkehrfunktion der Funktion ist

$$y = - \ln (1/x - 1) = 2 \operatorname{artanh} (2x - 1)$$

1.Ableitung $y' = e^x / (e^x + 1)^2$ $\quad \operatorname{sig}'(x) = \operatorname{sig}(x)\, (1 - \operatorname{sig}(x))$
2.Ableitung $y'' = e^x (1 - e^x) / (e^x + 1)^3$
Stammfunktion $F(\operatorname{sig}(x)) = \ln (e^x + 1)$
Die Sigmoidfunktion ist beschränkt, differenzierbar und hat genau einem Wendepunkt an der Stelle x = 0. Die Gompertz-Funktion ist ein Beispiel für eine Sigmoid-Funktion.



Gudermann-Funktion

Die Gudermann-Funktion gd(x), benannt nach Christoph Gudermann (1798-1852), verbindet die trigonometrischen mit den hyperbolischen Funktionen ohne Verwendung komplexer Zahlen. Sie ist definiert durch

$$\operatorname{gd}(x) = {}_0\!\int^x dp / \cosh p = \arcsin (\tanh x) =$$
$$= \arctan (\sinh x) = 2 \arctan (\tanh x/2) = 2 \arctan (e^x) - \pi/2$$

Es existieren eine Vielzahl von Identitäten:

$\arccos (\operatorname{sech} x) = |\operatorname{gd}(x)| = \operatorname{arcsec}(\cosh x)$
$\sin (\operatorname{gd} (x)) = \tanh x$; $\csc (\operatorname{gd} (x)) = \coth (x)$
$\cos (\operatorname{gd} (x)) = \operatorname{sech} x$; $\sec (\operatorname{gd} (x)) = \cosh (x)$
$\tan (\operatorname{gd} (x)) = \sinh x$; $\cot (\operatorname{gd} (x)) = \operatorname{csch} (x)$
$\tan (\operatorname{gd} (x) /2) = \tanh x/2$

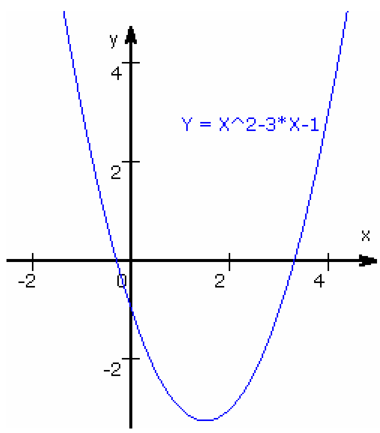
Die inverse Gudermann-Funktion ist auf dem Intervall $-\pi/2 < x < \pi/2$ definiert

$$\operatorname{gd}^{-1}(x) = {}_0\!\int^x dp / \cos p = \ln |(1 + \sin x)/\cos x|$$
$$= 1/2 \ln |(1 + \sin x)/(1 - \sin x)| = \ln |\tan x + \sec x| = \ln |\tan (\pi/4 + x/2)|$$
$$= \operatorname{artanh} \sin x = \operatorname{arsinh} \tan x$$

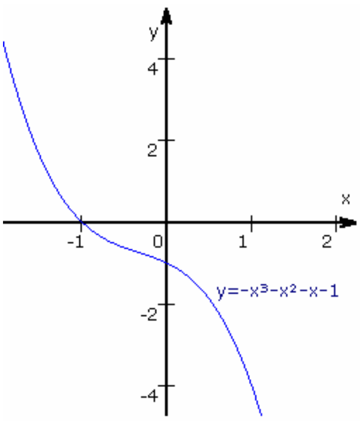
Die Ableitungen der Gudermann-Funktion sind

$d/dx\, \operatorname{gd}(x) = \operatorname{sech} x$ $\quad d/dx\, \operatorname{gd}^{-1}(x) = \sec x$

Funktion $y = x^2 - 3x - 1$



Quadratische Funktion
Nullstellen $x_1 = 3/2 + \sqrt{13} / 2 \approx 3.30277$
$x_2 = 3/2 - \sqrt{13} / 2 \approx -0.302775$
Schnittpunkt mit y-Achse S (0 ; -1)
Ableitungen $y' = 2x - 3$ $\quad y'' = 2$
Extrempunkte Minimum (3/2 ; -13/4) ist gleichzeitig Scheitelpunkt
Wendepunkte keine
Verhalten im Unendlichen, Stetigkeit
die Funktion ist in ganz R stetig; die Funktion strebt für negative und positive große Werte gegen Unendlich



Funktionsbeispiele: Funktion $y = -x^3 - x^2 - x - 1$

Kubische Funktion

Nullstellen $x_1 = -1$

komplexe Nullstellen $x_2 = i$ und $x_3 = -i$

Ableitungen $y' = -3x^2 - 2x - 1$

$y'' = -6x - 2$

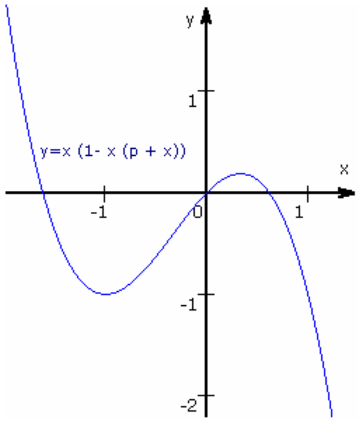
Extrempunkte keine

komplexe Nullstellen der 1.Ableitung $x_{1,2} = -1/3 \pm \sqrt{2}/3\, i$

Wendepunkte W $(-1/3 , -20/27)$

Verhalten im Unendlichen, Stetigkeit

die Funktion ist in ganz R stetig; die Funktion strebt für negative Werte gegen positiv Unendlich, für positive große Werte gegen negativ Unendlich



Funktion $y = x (1 - x (p + x))$

Kubische Funktion, Abbildung für P=1

Nullstellen $x_1 = 0$

$x_2 = -(\sqrt{(p^2 + 4)} + p) / 2$

$x_3 = (\sqrt{(p^2 + 4)} - p) / 2$

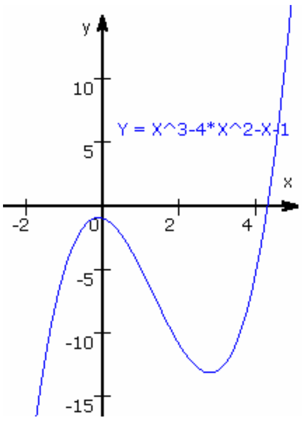
Ableitungen $y' = -3x^2 - 2px + 1$ $\quad y'' = -6x - 2p$

Extremstellen $x_1 = -(\sqrt{(p^2 + 3)} + p) / 3$ $\quad x_2 = (\sqrt{(p^2 + 3)} - p) / 3$

Wendestelle $x_1 = -p / 3$

Verhalten im Unendlichen, Stetigkeit

die Funktion ist in ganz R stetig; die Funktion strebt für negative Werte gegen positiv Unendlich, für positive große Werte gegen negativ Unendlich



Funktion $y = x^3 - 4x^2 - x - 1$

Kubische Funktion

Nullstellen $x_1 = 4.28762$

komplexe Nullstellen $x_2 = -0.143812 - 0.461027 \cdot \hat{\imath}$

$x_3 = -0.143812 + 0.461027 \cdot \hat{\imath}$

Ableitungen $y' = 3x^2 - 8x - 1$ $\quad y'' = -6x - 8$

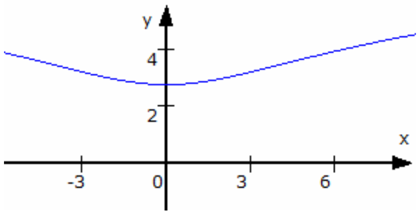
Extremstellen $x_1 = (\sqrt{19} + 4) / 3$ $\quad x_2 = (-\sqrt{19} + 4) / 3$

Wendestelle $x_1 = 4 / 3$

Verhalten im Unendlichen, Stetigkeit

die Funktion ist in ganz R stetig; die Funktion strebt für negative Werte gegen negativ Unendlich, für positive große Werte gegen positiv Unendlich

Funktion $y = \ln (x^2 + 16)$

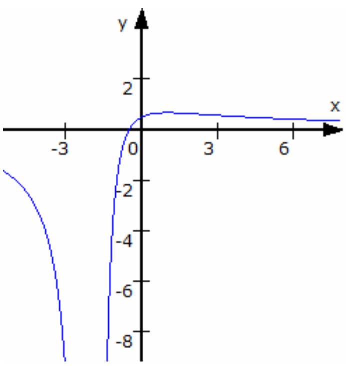


Ableitungen

$f'(x) = 2x / (x^2 + 16)$

$f''(x) = -2(x+4)(x-4) / (x^2 + 16)^2$

Definitionsbereich	R
Symmetrie	symmetrisch zur y-Achse
Nullstelle	keine Nullstellen
Extrempunkt	$P(0; \ln 16)$ Minimum
Wendepunkt	$P(\pm 4; \ln 32 \pm 1/4)$ mit einem Anstieg $\pm 1/4$
Stammfunktion	$y = 8 \arctan(x/4) + x \ln(x^2 + 16) - 2x + C$



Funktion $y = (4x+p)/(x+2)^2$

Ableitungen $f'(x) = -2 (2x + p - 4) / (x + 2)^3$

$f''(x) = 2 (4x + 3p - 16) / (x + 2)^4$

Definitionsbereich $R \setminus \{-2\}$

Symmetrie nicht symmetrisch

Nullstelle $x = -p/4$

Extrempunkt $P((4-p)/2 ; 4/(8-p))$;

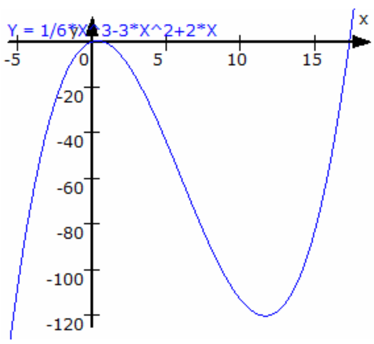
$p<8$ Maximum

sonst Minimum

Wendepunkt $P((16-3p)/4 ; 32/(72-9p))$ mit einem Anstieg $-64/(27 (p-8)^2)$

Stammfunktion

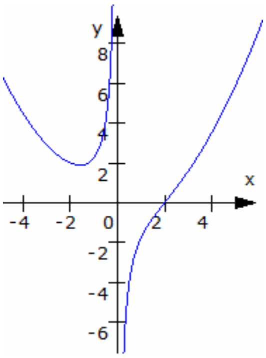
$y = 4 \ln(x+2) - (8-p) / (x+2)$



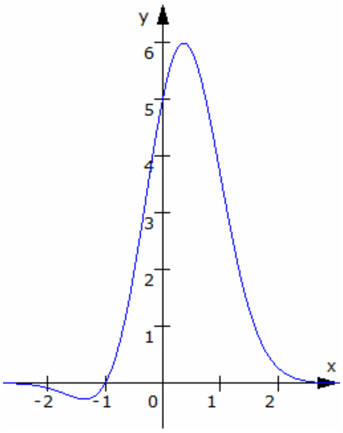
Funktion $y = 1/6\, x^3 - 3x^2 + 2x$

Definitionsbereich	R
y-Achsenabschnitt	S(0; 0)
Nullstelle	$x_1 = 0$; $x_2 = 0{,}69$; $x_3 = 17{,}31$

Symmetrie nicht symmetrisch
Ableitungen $f'(x) = 1/2\, x^2 - 6x + 2$ $f''(x) = x - 6$
Extrempunkt P(11,66 ; -120,34) ; Minimum Extrempunkt P(0,34 ; 0,34) ; Maximum
Wendepunkt P(6 ; -60)

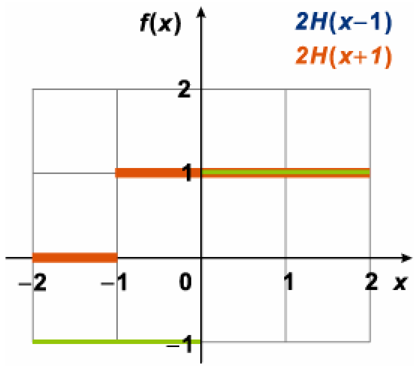


Funktion $y = (x^3-8) / (4x)$
Vorbereitung:
$y = (x^3-8) / (4x) = x^3/(4x) - 8/(4x) = x^2/4 - 2/x$ … eignet sich besser zur Differentiation
Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Polstelle $x = 0$, ungerader Pol
Funktion hat Parabel $y = x^2/4$ als Hüllkurve
Nullstelle $x_1 = 2$
Symmetrie nicht symmetrisch
Ableitungen $f'(x) = x/2 + 2/x^2$ $f''(x) = 1/2 - 4/x^3$
Extrempunkt $P(-\sqrt[3]{4}$; 1,9) ; Minimum
Wendepunkt P(2 ; 0)

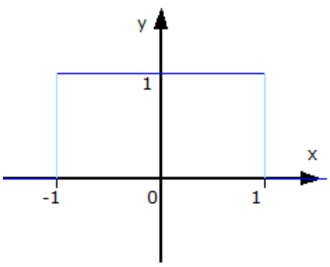


Funktion $y = 5\,(x+1)\, e^{-x^2}$
Definitionsbereich $\mathbb{R}$
Nullstelle $x_1 = -1$
Symmetrie nicht symmetrisch
Verhalten im Unendlichen … $y \to 0$
Ableitungen $f'(x) = 5e^{-x^2}(-2x^2-2x+1)$
$f''(x) = 10e^{-x^2}(2x^3+2x^2-3x-1)$
Stellen mit waagerechten Tangenten
$(\sqrt{3}-1)/2 = 0{,}366025\ldots$ und $(-\sqrt{3}-1)/2 = -1{,}36602\ldots$
Extrempunkt $P((\sqrt{3}-1)/2 \,;\, e^{\sqrt{3}/2-1}(5\sqrt{3}+5)/2)$; Maximum
$P((-\sqrt{3}-1)/2 \,;\, e^{\sqrt{3}/2-1}(-5\sqrt{3}+5)/2)$; Minimum
Wendepunkt $A(1 \,;\, 10/e) = (1 \,;\, 3{,}68)$
$B(\sqrt{2}/2 - 1 \,;\, 5/2\,\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2} - 3/2}) = (-0{,}29 \,;\, 3{,}24)$
$C(-\sqrt{2}/2 - 1 \,;\, -5/2\,\sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2} - 3/2}) = (-1{,}71 \,;\, -0{,}19)$

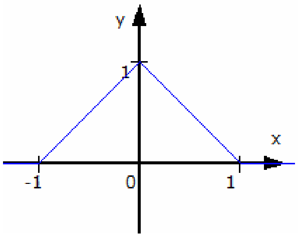
Sprungfunktion
$f(x) = H(x - a)$ 0 für $x < a$
$H(x - a) = 1/2$ für $x = a$ 1 für $x > a$



Die Sprungfunktion H(x - a), auch Heaviside-Funktion genannt, springt bei x-a=0 von 0 auf 1. Alternative Notation: E(x), u(x), oder Θ(x) statt H(x). Die Funktion Θ(x) ist hierbei nicht mit der Thetafunktion zu verwechseln.
Integraldarstellung $H(x) = 1/2 + 1/\pi \int_0^\infty \sin(xt) / t\, dt$
Definitionsbereich $-\infty < x < \infty$
Wertebereich 0, 1/2, 1
Eigenschaften $H(a - x) = 1 - H(x - a)$
$H(x - a) * H(x - b) = H(x - b)$ für $b > a$
$H(x - a) \approx 1/2\,(1 + \tanh(bx - ba))$
Die Konstante Funktion f(x) = c kann mit Hilfe der Sprung-Funktion dargestellt werden.
$c = c\, H(x - a) + c\, H(a - x)$
Die Vorzeichen-Funktion sgn(x) kann mit Hilfe der Sprung-Funktion dargestellt werden.
$\mathrm{sgn}(x) = 2\, H(x) - 1$
Die Stammfunktion der Sprungfunktion H(x) ist die Knickfunktion. $\int H(x)\, dx = x * H(x) + C$
Die Alternative Sprungfunktion $\mathrm{H}(x)$ besitzt an der Stelle x = a den Funktionswert 1.



Rechteckfunktion
Die Rechteckfunktion, auch rect-Funktion, ist eine nicht stetige mathematische Funktion:
$\mathrm{rect}(x) = 0$, wenn $|x| > a$
$= 1/2$, wenn $|x| = a$
$= 1$, wenn $|x| < a$
Dabei ist a eine reelle Zahl, die meist mit a = 1/2 angegeben wird. In der Signalverarbeitung wird alternativ auch rect(x) = 1/2 für x = a gesetzt.
Die Rechteckfunktion kann auch mit Hilfe der Heaviside-Funktion H(x) ausgedrückt werden $\mathrm{rect}(x) = H(x+a) - H(x-a)$
Die Fourier-Transformation der Rechteckfunktion ergibt die si-Funktion.
Die Rechteckfunktion ist als unstetige Funktion weder im klassischen Sinne differenzierbar noch ist sie schwach differenzierbar.
Die Faltung zweier Rechteckfunktionen ergibt die Dreiecksfunktion, die Integration eine Rampenfunktion.



Dreieckfunktion

Die Dreieckfunktion, auch tri-Funktion, triangle-Funktion oder tent-Funktion, ist wie folgt definiert $tri(x) = \max(1-|x|, 0)$
d.h. für $|x| < 1$ nimmt die Funktion den Wert $1-|x|$ an, ansonsten 0. Die Funktion kann auch über die Faltung mit der Rechteckfunktiondefiniert werden.

$$tri(x) = \int_{-\infty}^{\infty} rect(\tau)\ rect(\tau - x)\ d\tau$$

Durch einen Parameter $a \neq 0$ kann die Dreieckfunktion skaliert werden:

$$tri(x/a) = \max(1-|x/a|, 0)$$

Die Dreieckfunktionen findet im Bereich der Signalverarbeitung zur Darstellung von idealisierten Signalverläufen Anwendung. Sie dient neben der Gauß-Funktion, der Heaviside-Funktion und der Rechteckfunktion zur Beschreibung von Signalen.

Schwellenfunktion

Das Produkt $f(x) * H(x - a)$ aus einer Funktion und der Sprungfunktion unterdrückt den Wert von f(x) für $x<a$ zu 0.

0 für $x < a$ $\quad f(x)\ H(x - a) = 1/2\ f(a)$ für $x = a$ $\quad 1$ für $x > f(x)$

Pulsfunktion

Durch die Differenz zweier Sprungfunktionen erhält nur ein Ausschnitt der x-Achse den Wert 1.

0 für $x < a, x > b$ $\quad H(x - a) - H(x - b) = 1/2$ für $x = a, x = b$ $\quad 1$ für $a < x < b$

Fensterfunktion

Durch das Produkt einer Funktion mit einer Pulsfunktion wird die Funktion nur in einem bestimmten Bereich nicht unterdrückt.

0 für $x < a, x > b$ $\quad 1/2\ f(a)$ für $x = a$

$f(x)\ [H(x - a) - H(x - b)] = 1/2\ f(b)$ für $x = b$ $\quad f(x)$ für $a < x < b$

Stufenfunktion

Die Stufenfunktion wird über die alternative Sprungfunktion H(x) definiert

$$f(x) = c_0 + \Sigma_{k=1}^{n} (c_k - c_{k-1})\ H(x - a_k)\ ;\ a_1 < a_2 < \ldots < a_n$$

wobei c_0 der Wert für die Funktion für x gegen Unendlich und c_k der Wert der Funktion an der Stelle a_k ist.

Diracsche δ-Funktion, Deltafunktion

Schreibweise $f(x) = \delta(x - a)$

Definition $\quad \delta(x - a) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos[2\pi\ (x - a)\ t]\ dt$ $\quad \delta(x - a) = d/dx\ H(x - a)$

Charakterisierung mit beliebiger stetiger Funktion h(t)

$$\int_x^y h(t)\ \delta(t-a)\ dt = h(a) \text{ falls } x < a < y, \text{ andernfalls } = 0$$

Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	Wertebereich	$\{0\ ;\ \infty\}$
Ableitung	0 für alle $x \neq a$	Stammfunktion	$\int \delta(x - a) = H(x - a) + C\ ;\ x_0 < a$
Regeln	$\delta(x - a) = \delta(a - x) = \delta(\lvert x - a\rvert)$	$\delta(c\ x) = 1/\lvert c\rvert\ \delta(x)$	

Die Deltafunktion ist nicht zu verwechseln mit dem Kroneckersymbol. Die Deltafunktion ist keine eigentliche Funktion. Sie ist eine Distribution, d.h., ein linear stetiges Funktional, das auf Elemente eines Funktionenraums wirkt.
Die Deltafunktion kann als Grenzwert von Funktionen dargestellt werden. Die Deltafunktion hat ihre Bedeutung und Anwendung in der Multiplikation mit einer anderen Funktion unter einem Integral. Die Deltafunktion lässt sich nicht grafisch darstellen. Sie ist überall Null mit Ausnahme von x=a, wo sie unendlich ist.

Darstellung mittels Grenzwerte

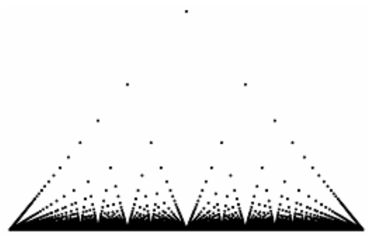
Grenzwert einer Dreiecksfunktion D(x; a; 1/h; h) der Höhe h und Breite 1/h

$$\delta(x - a) = \lim_{h\to\infty} D(x; a; 1/h; h)$$

Grenzwert einer Pulsfunktion der Breite 2b $\quad \delta(x - a) = \lim_{b\to 0} 1/(2b)\ (H(x - a + b) - H(x - a - b))$

Grenzwert einer Gaußfunktion $\quad \delta(x - a) = \lim_{b\to\infty} \sqrt{(b/\pi)}\ e^{-b(x-a)^2}$

Grenzwert des Sekans hyperbolicus $\quad \delta(x - a) = \lim_{b\to 0} 1/(2b)\ \mathrm{sech}\ ((x - a)/b)$



Thomaesche Funktion

Die Thomaesche Funktion (nach dem deutschen Mathematiker Carl Johannes Thomae, 1840-1921) ist eine mathematische Funktion, die auf den rationalen Zahlen unstetig und auf den irrationalen stetig ist. Sie ist verwandt mit der Dirichlet-Funktion.
Die Funktion wird auch Regentropfen-Funktion oder Popcorn-Funktion genannt.
Die Thomaesche Funktion wird als reellwertige Funktion $f: [0,1] \to R$ definiert durch

$f(x) = 1/q$, wenn $x > 0$ und $x = p/q$ rational und vollständig gekürzt
$f(x) = 0$, wenn x irrational
$f(x) = 1$, wenn $x = 0$

definiert.

Die Thomaesche Funktion ist ein einfaches Beispiel einer Funktion, deren Menge der Unstetigkeitsstellen kompliziert ist. Es gilt: f ist stetig auf allen irrationalen Zahlen von [0,1] und unstetig auf allen rationalen Zahlen dieses Intervalls.

Falls x irrational und y nahe bei x liegt, so ist entweder y irrational oder y eine rationale Zahl mit großem Nenner. In beiden Fällen liegt f(y) nahe bei f(x) = 0. Ist andererseits x rational und (y_n) eine Folge von irrationalen Zahlen in (0,1), die gegen x konvergiert, so ist $f(y_n) = 0$, welches nicht gegen $f(x) \neq 0$ konvergiert. Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Thomaesche_Funktion

Erzeugende Funktionen

... polynomiale, unendliche Funktionen; Potenzreihen der Form $f(x) = \Sigma a_n x^n$, wobei die Summenbildung von n = 0 bis unendlich erfolgt.

$1 / (1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
$x / (1 - x) = x + x^2 + x^3 + \ldots$
$x (x^2 + 4x + 1) / (x - 1)^4 = x + 8 x^2 + 27 x^3 + \ldots$
$x (x^3 + 5x^2 + 5x + 1) / (x - 1)^4 = x + 9 x^2 + 35 x^3 + \ldots$
$x (2x + 1) / (1 - x)^3 = x + 5 x^2 + 12 x^3 + 22 x^4 + \ldots$
$x (x + 1)^2 / (1 - x)^3 = x + 5 x^2 + 13 x^3 + 25 x^4 + \ldots$
$x (x^2 + x + 1) / (1 - x)^3 = x + 4 x^2 + 10 x^3 + 19 x^4 + \ldots$

Schrittstabile Funktionen

Definition: Eine Funktion heißt schrittstabil, wenn es für alle $h \in R$ ein $k \in R$ gibt, so dass für alle $x \in R$ mit $h \neq 0$, $x \in DB$ und $x+h \in DB$ gilt: $(f(x+h) - f(x)) / h = k \cdot f'(x)$
Alternativ kann definiert werden:
Eine auf der Menge R der reellen Zahlen definierte Funktion $t \to f(t)$ heisst schrittstabil, wenn der Quotient $(f(t+h) - f(t)) / f'(t)$
mit $t \in DB$ definiert und von t unabhängig ist.
Ist die Funktion differenzierbar und besitzt einen zusammenhängenden DB, dann gilt für die Menge ST der schrittstabilen Funktionen:

1. Ist $f \in ST$ und $a \in R$, dann ist auch $g \in ST$ für $g: x \to a \cdot f(x)$
2. Ist $f \in ST$ und $b \in R$, dann ist auch $g \in ST$ für $g: x \to f(x) + b$
3. Ist $f \in ST$ und $c \in R$, dann ist auch $g \in ST$ für $g: x \to f(c \cdot x)$
4. Die identische Funktion $f: x \to x$ ist schrittstabil
5. Die natürliche Exponentialfunktion $f: x \to e^x$ ist schrittstabil
6. Alle linearen Funktionen f mit $f(x) = a \cdot x + b$ sind schrittstabil
7. Alle mit einer Konstanten additiv erweiterten Exponentialfunktionen f mit $f(x) = a \cdot e^{cx} + b$ sind schrittstabil

Ackermann-Funktion

Funktion, die eindeutig definiert, prinzipiell berechenbar aber auf Grund ihrer Struktur nicht primitiv rekursiv berechnet werden kann. Sie wurde als Gegenbeispiel zur Annahme, dass jede berechenbare Funktion primitiv rekursiv ist, konstruiert. Die Ackermann-Funktion wächst schneller als alle Exponential-Funktionen.

Definition: A(x,y) = y + 1wenn x = 0 = A(x-1 , 1) wenn y = 0
= A(x-1, A(x, y-1)) sonst

Spezielle Werte A(0 , y) = y + 1 A(1 , y) = y + 2
A(2 , y) = 2y + 3 A(3 , y) = 2^{y+3} - 3

Für y = 0,1,2,... wird damit zum Beispiel A(3, y) = 5, 13, 29, 61, 124, 253, 609, 1021, ...
Die Funktion ist unmittelbar mit der Ackermann-Zahl verbunden. Herleitung von A(1, y):
A(1, y) = A(0, A(1, y-1)) = A(1, y-1) + 1 = A(0, A(1, y-2)) + 1 = A(1, y-2) + 2 = ... = A(1, 0) + y = A(0,1) + y = y + 2
Die gleiche Rekursionsbeziehung nutzt die Funktion von Buck (1963):

F(x,y) = F(x-1 , F(x, y-1)) mit F(0,y) = y+1 ;
F(1,0) = 1 ; F(2,0) = 0 ; F(x,0) = 1 für x = 3,4,5,...

Diese ergibt F(1 , y) = y + 2 F(2 , y) = 2y
F(3 , y) = 2^y F(4 , y) = 2^2^2^...^2 (mit y mal die „2")

F(4,n) liefert somit für n=0,1,2,... die Werte 1, 2, 4, 16, 65536, 2^{65536}, ... F(n,n) wird zu 1, 3, 4, 6, 65536, 2^2^2...^2 (mit 65536 mal die „2"), ...

Pascal-Programm

```
{Achtung ! für x ≥ 4 wird der Wert auf Grund des Stack-Überlaufes praktisch unberechenbar }
PROGRAM ackermann; VAR i,j:integer;
FUNCTION ack(x,y:INTEGER):LONGINT; BEGIN    IF x=0 THEN ack:=y+1 ELSE        IF y=0 THEN
ack:=ack(x-1,1) ELSE ack:=ack(x-1,ack(x,y-1)) END; BEGIN   for i:=1 to 3 do for j:=1 to 7 do
writeln('Ackermann-Funktion F(',i,',',j,') = ',ack(i,j)); END.
```

Sudanfunktion

Die Sudanfunktion ist eine rekursive berechenbare Funktion, die total μ-rekursiv jedoch nicht primitiv rekursiv ist, ähnlich zur Ackermannfunktion.
Die Funktion wurde 1927 von dem rumänischen Mathematiker Gabriel Sudan veröffentlicht; ein Jahr vor der Bekanntgabe der Ackermannfunktion.

Definition $F_0(x, y) = x + y$ $F_{n+1}(x, 0) = x$

$F_{n+1}(x, y+1) = F_n(F_{n+1}(x,y), F_{n+1}(x,y) +y+1)$

für nichtnegative n.

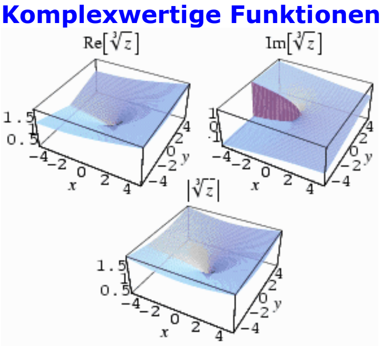
Insbesondere für n = 1 $F_1(x, 0) = x$ $F_1(x, y+1) = 2\, F_1(x,y) +y+1$

Werte von F1(x, y)

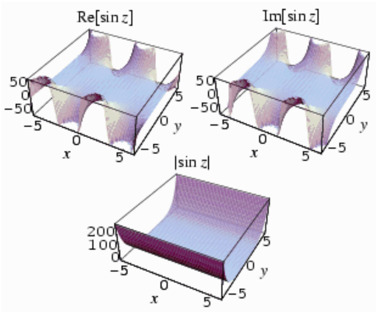
y\x	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	3	5	7	9	11
2	4	8	12	16	20	24
3	11	19	27	35	43	51
4	26	42	58	74	90	106
5	57	89	121	153	185	217
6	120	184	248	312	376	440

Die Funktionswerte $F_n(x,y)$ steigen für n > 1 sehr schell an. Zum Beispiel sind $F_2(2,1) = 10228$; $F_2(2,2) \approx 1{,}55 \cdot 10^{10}$ und $F_2(2,3) \approx 5{,}74 \cdot 10^{24}$.

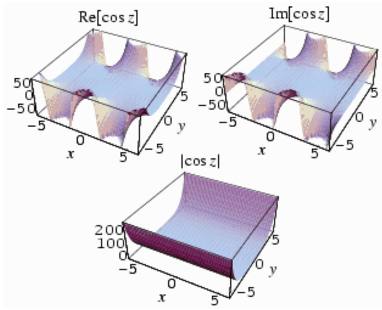
Komplexwertige Funktionen



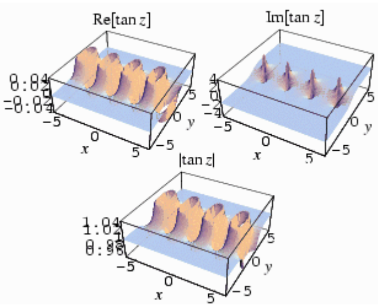
Kubikwurzel
Lässt man komplexe Zahlen als Wurzeln zu, so gilt, dass jede Zahl z stets genau drei, nicht notwendig verschiedene, Kubikwurzeln besitzt.



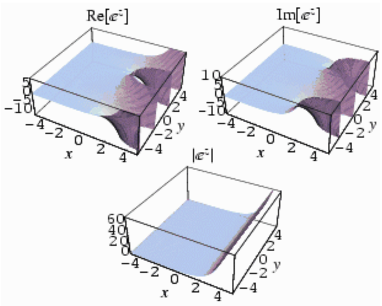
Komplexer Sinus
Darstellung der Sinus-Funktion sin (z) für komplexe Zahlen



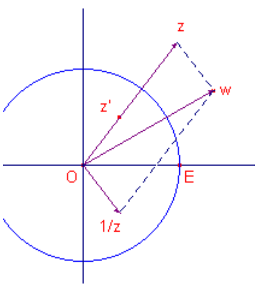
Komplexer Kosinus
Darstellung der Kosinus-Funktion cos (z) für komplexe Zahlen



Komplexer Tangens
Darstellung der Tangens-Funktion tan (z) für komplexe Zahlen

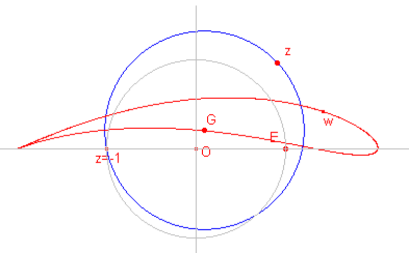


Komplexe E-Funktion
Darstellung der e-Funktion exp (z) für komplexe Zahlen

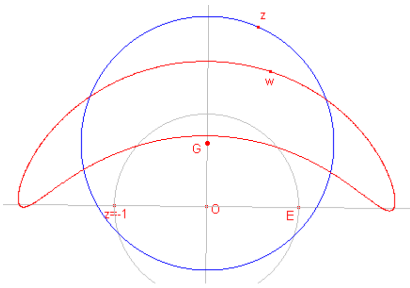


Joukowski-Abbildung einer komplexen Kurve

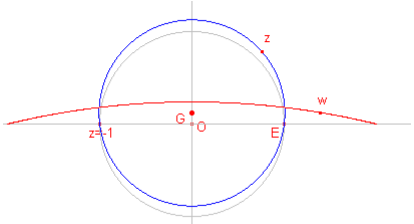
Die Abbildung einer komplexen Zahl z mittels der Vorschrift $w = z + 1/z$ wird Joukowski-Transformation bzw. –Abbildung der komplexen Zahlen genannt. w heißt dann das Joukowski-Bild, oder kurz J-Bild, von z.
Das Bild das Einheitskreises ist das reelle Interval [-2 ; 2]. Das Bild der imaginären Achse ist die imaginäre Achse selbst.
Sehr interessante J-Bilder enstehen, wenn das Bild eines Zirkels durch den Punkt z = -1 konstruiert wird. Es entsteht Kurven, die an Flugzeugtragflächen erinnern.
Wird die Joukowski-Transformation mehrfach angewendet, so ergeben sich ebenfalls „merkwürdige" Kurven.



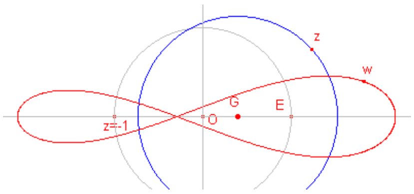
J-Bild eines Kreises durch z = -1



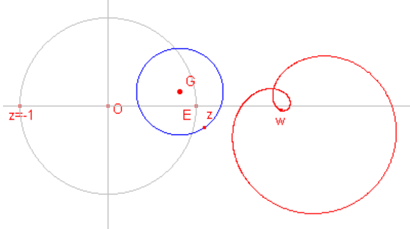
G auf der y-Achse ; E und z = -1 befinden sich im Kreis



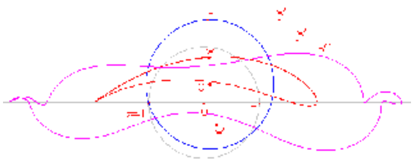
G auf der y-Achse; Kreis durch E



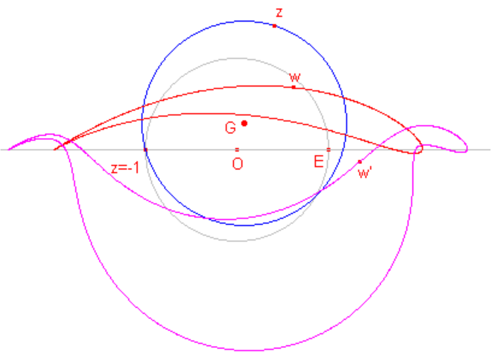
G auf der y-Achse; E im Kreis; z = -1 außerhalb des Kreises



G beliebig; E im Kreis



w"" = $J^{(5)}(z)$

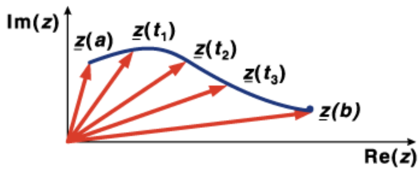


linke Abbildung: G ist der Mittelpunkt des Kreises durch z = -1. w ist das J-Bild von z, w' das Bild von w

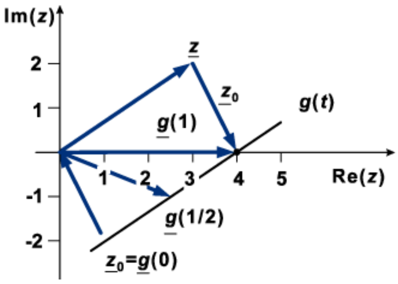
Komplexwertige Funktionen einer reellen Variablen

Zuordnung z: R → C, z (t) = x(t) + i y(t).
Realteil und Imaginärteil von z sind Funktionen derselben Variablen t. Eine komplexwertige Funktion z einer reellen Variablen t ist ein Spezialfall einer komplexwertigen Funktion *f* einer komplexen Variablen z mit rein reellem Argument.
Beispiel: Der eine Schwingung beschreibende Zeiger z(t) = A $e^{i\omega t}$ ist eine komplexwertige Funktion der reellen Variablen t.

Ortskurve



Bahn, welche die Spitze des Zeigers z(t) in der komplexen Ebene beschreibt, während der Parameter t das Intervall [a, b] durchläuft. Zu jedem *t* gehört genau ein Zeiger, d.h. ein Kurvenpunkt. Die Ortskurve ist das geometrische Bild einer komplexwertigen Funktion einer reellen Variablen. Die Ortskurve kann auch durch Parametergleichungen x = x(t) , y = y(t), a ≤ t ≤ b beschrieben werden.



Beispiele für Ortskurven:
Netzwerkfunktion, Abhängigkeit einer komplexen elektrischen Größe von einem reellen Parameter (Elektrotechnik), z.B.:
Reihenschaltung von ohmschem Widerstand und Spule: Abhängigkeit des komplexen Widerstands von der Kreisfrequenz

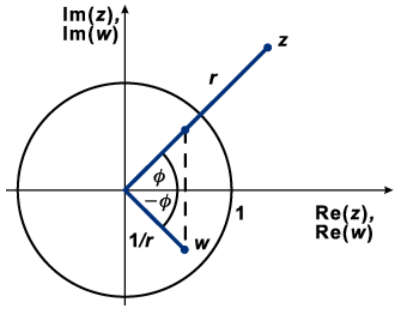
$$Z = Z(\omega) = R + i\,\omega\,L \quad (\omega \geq 0)$$

Parallelschaltung von ohmschem Widerstand und Kapazität, Abhängigkeit des komplexen Leitwerts von der Kreisfrequenz:

$$Y = Y(\omega) = 1/R + i\,\omega\,C\ (\omega \geq 0)$$

Ortskurve einer Geraden g(t) = z_0 + zt. Für z_0 = 1-2i, z = 3+2i ergibt sich z.B. das folgende Bild für die Ortskurve der Geraden g(t).

Inversion von Ortskurven



Übergang von komplexer Zahl *z* zu ihrem Kehrwert w = 1/z:
z = r $e^{i\phi}$ → w = 1/z = 1/r $e^{-i\phi}$
Inversion: Kehrwertbildung des Betrags, Vorzeichenwechsel des Winkels, d.h. Spiegelung des Zeigers z an der reellen Achse, Streckung des Zeigers um das 1/r²-fache. Die invertierte Ortskurve, entsteht durch punktweises Invertieren einer Ortskurve.

Inversionsregeln für Geraden und Kreise

z-Ebene	→	w-Ebene
Gerade durch Ursprung	→	Gerade durch Ursprung
Gerade nicht durch Ursprung	→	Kreis durch Ursprung

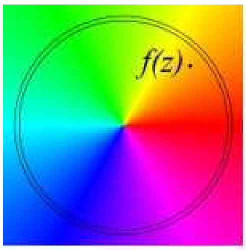
Mittelpunktskreis → Mittelpunktskreis
Kreis durch Ursprung → Gerade nicht durch Ursprung
Kreis nicht durch Ursprung → Kreis nicht durch Ursprung
Ursprung z = 0 (Südpol der Riemannschen Zahlenkugel auf der *z*-Ebene) wird der unendlich ferne Punkt w = ∞ zugeordnet (Nordpol der Riemannschen Zahlenkugel auf der w-Ebene). Dem Punkt P(z) mit kleinstem Betrag |z| wird Punkt P(w) mit größtem Betrag |w| zugeordnet. Punkte oberhalb der reellen Achse werden zu Punkten unterhalb der reellen Achse.

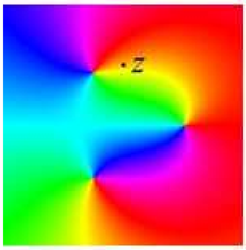
Ableitung im Komplexen

Die Definition der Ableitung im Komplexen entspricht der im Reellen.
Differenzierbarkeit einer Funktion f: C → C, z → f(z) an $z_0 \in C$ bedeutet, der Grenzwert
$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$ existiert.
Ableitung von f ist die Funktion f'(z) mit $f'(z_0) = df/dz(z_0)$. Höhere Ableitungen im Komplexen werden rekursiv definiert:

$$f'' = (f')', \ldots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Die Ableitungsregeln im Komplexen sind denen im Reellen vollständig analog.





Phasenplot

Soll eine komplexe Funktion, d.h. einer Funktion mit einer komplexen Variablen z und mit komplexen Funktionswerten f(z) grafisch dargestellt werden, so benötigt man insgesamt vier Dimensionen, zwei für die Variable z und zwei für den Funktionswert f(z). Dies ist nicht grafisch realisierbar.

Der Phasenplot einer komplexen Funktion gibt eine Möglichkeit zu deren Visualisierung. Er entsteht, indem zunächst alle Punkte der Zahlenebene nach einem speziellen Schema gefärbt werden.
Das Bild wird erzeugt, indem die Farben eines Farbkreises auf im Koordinatenursprung beginnende Strahlen übertragen werden. Punkte mit gleichem Argument sind gleich gefärbt.

Zur Darstellung einer Funktion f wird nun jedem Punkt z ihres Definitionsgebiets diejenigen Farbe zugeordnet, die der Funktionswert f(z) besitzt. Die vorgegebene Farbkodierung des Wertebereichs wird durch die Funktion auf das Definitionsgebiet zurück übertragen.
Der Phasenplot kann als Fingerabdruck der Funktion betrachtet werden. Obwohl er nur einen Teil der Daten veranschaulicht; das Argument; und den Betrag nicht berücksichtigt, können Funktionen im wesentlichen eindeutig rekonstruiert werden.
Quelle: http://www.mathe.tu-freiberg.de/fakultaet/information/mathe-kalender-2011

Funktionalgleichung

Eine Funktionalgleichung in den Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ist eine Gleichung, welche n unabhängige Veränderliche $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 1$) und k unbekannte Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ($k \geq 1$) sowie eine endliche Zahl von bekannten Funktionen enthält.
Dabei treten die n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bzw. ein Teil von ihnen, als Argumente der Funktionen auf.

Die Menge alle n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, die die möglichen Belegungen der n unabhängigen Veränderlichen darstellt, nennt man den Definitionsbereich D der Funktionalgleichung, der Grundbereich der Variablen f_i ($i = 1, \ldots, k$) heißt die zugelassene Funktionenklasse F.
Außer der Gleichung selbst gehört zur vollständigen Beschreibung einer Funktionalgleichung auch die Angabe von D und F.

Beispiel: $f(x_1 + x_2) - 2 f(x_1 - x_2) + f(x_1) - 2 f(x_2) = x_2 - 2$
Hier gilt n = 2 und k = 1; außerdem tritt die bekannte Funktion g(x) = x - 2 auf. D kann hier durch R^2 und F durch die Menge aller Funktionen festgelegt werden. Für F ist aber auch möglich

$$f = \{(x, y) \mid x \in R \text{ und } y = f(x) = mx - n\}$$

wobei m und n feste reelle Zahlen sind.
Die Grundaufgabe bei Funktionalgleichungen besteht in der Ermittlung aller möglichen Funktionen f_i und der zugehörigen Veränderlichen x_i.

Funktionalgleichung, Beispiele

1821 untersuchte Cauchy in "Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique" die Lösungen (reelle Funktionen) verschiedener Funktionalgleichungen.

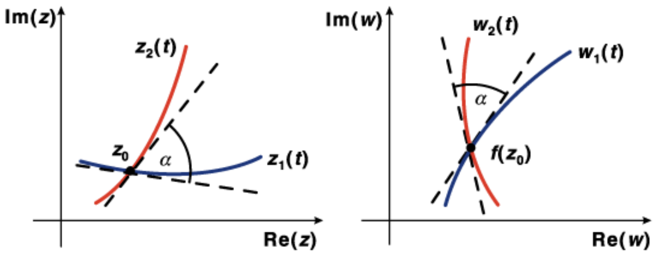
1. F(x+y) = F(x) + F(y)
Die Lösungen dieser Funktionalgleichung sind die linearen Funktionen F(x) = ax

wobei a eine reelle Zahl ist. Diese Funktionalgleichung wird Cauchy-Funktionalgleichung genannt.

2. $F(xy) = F(x) F(y)$
Die Lösungen dieser Funktionalgleichung sind die Potenzfunktionen $F(x) = x^a$; a reelle Konstante
3. $F(x+y) = F(x) F(y)$
Die Lösungen sind die Exponentialfunktionen $F(x) = a^x$; a reelle Konstante
4. $F(xy) = F(x) + F(y)$
Lösungen dieser Funktionalgleichung sind die Logarithmusfunktionen
$F(x) = \log_a(x)$; a positive reelle Konstante

Analytische Funktionen
Eine Funktion f heißt analytisch, holomorph oder regulär im Punkt z_0, wenn sie auf einer Umgebung G von z_0 differenzierbar ist.
Eine komplexe Funktion $f: C \to C, z \to f(z) = u(z) + i\, v(z)$ wird in der äquivalenten Form
$f: R^2 \to R^2$, $z = (x, y) \to f(z) = (u(x,y), v(x,y))$ mit $u(x,y) = Re(f(z))$, $v(x,y) = Im(f(z))$
dargestellt.

Cauchy-Riemannsche Differenzierbarkeitsbedingungen
Gegeben sei die Funktion $f = u + iv: C \to C, z \to f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$.
Ist f differenzierbar in $z_0 = (x_0, y_0)$, dann existieren die partiellen Ableitungen $\partial u/\partial x\, (x_0, y_0)$, $\partial u/\partial y\, (x_0, y_0)$, $\partial v/\partial x\, (x_0, y_0)$, $\partial v/\partial y\, (x_0, y_0)$ und es gelten die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen
$\partial u/\partial x\, (x_0, y_0) = \partial v/\partial y\, (x_0, y_0)$ $\partial u/\partial y\, (x_0, y_0) = - \partial v/\partial x\, (x_0, y_0)$
Damit gilt $f'(z_0) = \partial u/\partial x\, (x_0, y_0) + i\, \partial v/\partial x\, (x_0, y_0) = \partial v/\partial y\, (x_0, y_0) - i\, \partial u/\partial y\, (x_0, y_0)$



Konforme Abbildungen
Eine in z_0 stetige Funktion f heißt winkeltreu in z_0, falls für alle Ortskurven
$z1(t), z2(t), t \in R$ mit $z_1(0) = z_2(0) = z_0$
welche Tangenten in z_0 besitzen, auch die Bildkurven
$w_1(t) = f(z_1(t)), w_2(t) = f(z_2(t))$ in $f(z_0)$
Tangenten besitzen und die Winkel zwischen den Tangentenpaaren übereinstimmen.

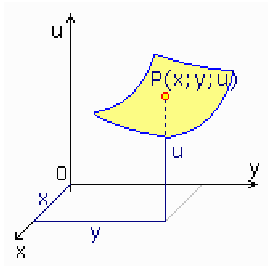
Eine an z_0 stetige Funktion f heißt streckentreu, falls
$|f'(z_0)| = \gamma > 0$.
Eine Funktion f heißt lokal konform an z_0, falls sie an z_0 winkeltreu und streckentreu ist.
Lokale Konformität 1. Art: bei der Winkeltreue bleibt nicht nur die Größe des Winkels, sondern auch der Drehsinn erhalten.
Lokale Konformität 2. Art: die Größe des Winkels bleibt erhalten, aber der Drehsinn kehrt sich um.

Konforme Abbildung: Eine Funktion $f: C \to C$ bildet ein Gebiet $G \subset C$ (global) konform auf das Gebiet $H = f(G) \subset C$ ab, falls
1) f an jedem Punkt $z_0 \in G$ lokal konform ist, und 2) $f: G \to H$ eineindeutig ist.

Einfache konforme Abbildungen
(1) Lineare Funktionen $f(z) = az + b$, $a = r\, e^{i\phi} \in C$, $b \in C$. Diese Funktionen können in folgende Operationen zerlegt werden:
a) Drehung um ϕ, $w = e^{i\phi} z$, b) Streckung um r, $v = rz$ und
c) Parallelverschiebung um b, $f(z) = z + b$
(2) Inversion $f(z) = 1/z$
(3) Gebrochen lineare Funktionen $f(z) = (az+b)/(cz+d)$. Diese Funktionen
a) verschieben parallel um d/c, $w = z + d/c$, b) invertieren, $v = 1/w = c/(cz+d)$,
c) drehstrecken, $u = (bc-dc)\, v/c^2$ und d) verschieben parallel um a/c, $f(z) = u + a/c$

Schlichte Funktion, univalente Funktion
Eine komplexwertige Funktion f(z) heißt schlicht oder univalent, wenn sie in ihrem Definitionsbereich D keinen Funktionswert zweimal annimmt, d.h.
$(f(z_1) - f(z_2)) / (z_1 - z_2) <> 0$
für alle z_1, z_2 aus D.
Jede schlichte Funktion ist konform. Die Umkehrung gilt nicht.
Zum Beispiel ist $f(z) = (1+z)^n - 1$ konform, jedoch nicht schlicht für $|z| < 1$.

Funktion u=f(x,y) zweier unabhängiger Variabler



Für die Darstellung einer Funktion zweier Veränderlicher u = f(x,y) sind zwei Varianten gebräuchlich:
Raumfläche: Eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen lässt sich in Analogie zum ebenen Kurvenbild einer Funktion von einer unabhängigen Veränderlichen als Fläche im Raum darstellen. Dazu wird der Funktionswert f(x,y) senkrecht über dem Punkt (x,y) des Definitionsbereiches abgetragen. Die Endpunkte dieser Strecken bilden eine Fläche im dreidimensionalen Raum.
Höhen- oder Niveaulinien: Das Bild der Funktion u = f(x,y) kann auch mit Hilfe von Schnittkurven ermittelt werden, die durch Schnitte parallel zu den Koordinatenebenen entstehen. Die Schnittkurven u = konst. werden auch Höhen- oder Niveaulinien genannt.

N-dimensionale Funktion
Eine Funktion mit n reellwertigen Veränderlichen erzeugt einen Graphen der Dimension n+1.
Darstellung $f : z \to f(z)\ ;\ z \in A \subseteq R^n$
$G_f = \{ f(z) \in R^{n+1} \mid z = (x_1, x_2, \dots ,x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))\}$

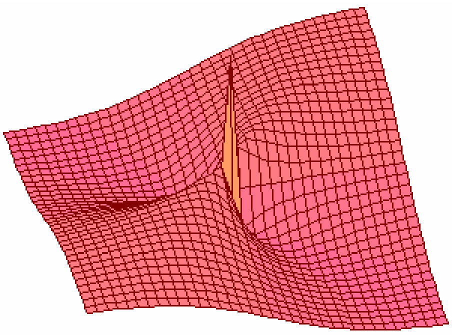
$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right) f(x,y) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x,y) +$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^3 f(x,y) +$$
$$\dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x,y) + R_n$$
$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x+\Theta h, y+\Theta k)$$
$$(0 < \Theta < 1)$$

Taylorsche Reihe für Funktionen zweier Veränderlicher

Relative und absolute Extrema für Funktionen mehrerer Veränderlicher
Eine Funktion f besitzt im Punkt x_0 ein strenges relatives Maximum, wenn die Funktionswerte der Punkte des nächsten Umkreises (d > 0) um $f(x_0)$ vom Betrag kleiner sind als $f(x_0)$. Bei relativen Maxima ist die Gleichheit der Funktionswerte zugelassen. $f(x_0)$ ist ein entsprechendes Minimum, wenn $-f(x_0)$ ein entsprechendes Maximum ist.
Eine Funktion f besitzt im Punkt x_0 ein strenges absolutes Maximum, wenn die Funktionswerte aller anderen Punkte im Definitionsbereich von f vom Betrag kleiner sind als $f(x_0)$. Bei absoluten Maxima ist die Gleichheit der Funktionswerte zugelassen. $f(x_0)$ ist ein entsprechendes Minimum, wenn $-f(x_0)$ ein entsprechendes Maximum ist.
Ein Sattelpunkt liegt vor, wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 zwar nur Ableitungen vom Betrag Null hat, die obenstehenden Bedingungen aber nicht erfüllt sind.
Beispiel: Der Punkt (0,0) der folgenden Funktion ist ein Sattelpunkt der Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$
$f_x = 2x\ ;\ f_y = -2y \qquad f_x(0;0) = f_y(0;0) = 0$

Satz von Weierstraß über die Existenz des größten und kleinsten Funktionswertes
Wenn eine Funktion f(x,y) in einem abgeschlossenen und beschränkten Gebiet stetig ist, dann existiert in diesem Gebiet mindestens ein Punkt (x', y') derart, dass der Wert f(x', y') größer als alle übrigen Werte von f(x,y) in diesem Gebiet ist. Außerdem existiert dann mindestens ein Punkt (x", y"), für den der Wert f(x", y") kleiner als alle übrigen Werte von f(x,y) in diesem Gebiet ist. Für einen beliebigen Punkt (x,y) dieses Gebietes gilt $f(x', y') \geq f(x,y) \geq f(x", y")$.
Hinreichende Bedingung für strenge relative Extrema
Eine Funktion f sei im Intervall I = (a,b) × (c,d) 2-fach differenzierbar und bilde R^2 auf R ab. Es sei der Vektor $(x_0,y_0) \in I$.

strenge relative Maxima
Wenn nun $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ und $f_{xx}(x_0,y_0) * f_{yy}(x_0,y_0) - f^2_{xy}(x_0,y_0) > 0$ während $f_{yy}(x_0,y_0) < 0$ ist, dann liegt in (x_0,y_0) ein strenges relatives Maximum vor.
strenge relative Minima
Wenn nun $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ und $f_{xx}(x_0,y_0) * f_{yy}(x_0,y_0) - f^2_{xy}(x_0,y_0) > 0$ während $f_{yy}(x_0,y_0) > 0$ ist, dann liegt in (x_0,y_0) ein strenges relatives Maximum vor.



Doppellimes, Doppelgrenzwert
Die Begriffe Grenzwert und Stetigkeit können auch auf Funktionen f(x,y) übertragen werden.
Ist f(x,y) am Punkt (x_0,y_0) nicht erklärt, existiert möglicherweise der Doppelgrenzwert
(*) $\lim_{(x,y) \to (x0,y0)} f(x,y) = g$
Dieser Doppellimes ist nicht mit
$\lim_{y \to y0} (\lim_{x \to x0} f(x,y)) = g_1$
und $\lim_{x \to x0} (\lim_{y \to y0} f(x,y)) = g_2$
zu verwechseln.

Bei (*) strebt man von allen möglichen Seiten gegen den Punkt (x_0,y_0), in den anderen beiden Grenzwerten dagegen nur parallel zu den Koordinatenachsen.
g_1 und g_2 können existieren und unterschiedlich sein. Können g_1 und g_2 bestimmt werden, so muss g nicht unbedingt existieren.
Zum Beispiel sind die genannten Grenzwerte für die Funktion $f(x,y) = xy / (x^2+y^2)$ unterschiedlich.
Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y) \to (x0,y0)} f(x,y) = g$ so heißt f(x,y) im Punkt (x_0,y_0) lokal stetig.

Totale Differenzierbarkeit

Während differenzierbare Funktionen einer Variablen immer stetige Funktionen sind, kann man dies bei partiell differenzierbaren Funktionen nicht behaupten.
Beispiel: Für die Funktion $f(x, y) = 2xy / (x^2+y^2)$
sind die partiellen Ableitungen
$f_x(x, y) = 2y\ (y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2$ und $f_y(x, y) = 2x\ (x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$
Im Punkt (x,y) = (0, 0) existiert sowohl die partielle Ableitung von f nach x, als auch nach y: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, obwohl die Funktion dort nicht stetig ist!

Dies führt zum Begriff der totalen Differenzierbarkeit, der vom Begriff der partiellen Differenzierbarkeit abweicht.
Man nennt eine Funktion f von zwei Variablen im Punkte (x_0, y_0) total differenzierbar, wenn sie nahe dieses Punktes durch eine Ebene angenähert werden kann.
Die Funktion f heißt im Punkt $(x_0, y_0$ total differenzierbar, wenn es Zahlen A, B $\in$ R und Funktionen $\varepsilon_1(x,y)$, $\varepsilon_2(x,y)$ gibt, so dass für alle (x,y) nahe bei (x_0,y_0) gilt
(*) $f(x, y) = f\ (x_0, y_0) + A(x - x_0 + B(y - y_0) + \varepsilon_1(x, y)(x - x_0) + \varepsilon_2(x, y)(y - y_0)$
wenn die Funktionen ε_1 und ε_2 gegen Null gehen für $(x, y) \to (x_0, y_0)$:
$\varepsilon_1(x, y) \to 0$ für $(x, y) \to (x_0, y_0)$ $\varepsilon_2(x, y) \to 0$ für $(x, y) \to (x_0, y_0)$.
Die Gleichung (*) besagt, dass in der Nähe des Punktes (x_0, y_0) die Funktionswerte f(x, y) näherungsweise durch die lineare Funktion
$z(x, y) = f(x_0, y_0) + A\ (x - x_0) + B\ (y - y_0)$
beschrieben werden.
Der Graph von z stellt eine Ebene im R^3 dar, die durch den Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ geht. Sie heißt die Tangentialebene von f in (x_0, y_0), da sie sich in der Umgebung dieses Punktes an den Graphen der Funktion f anschmiegt.
Aus der totalen Differenzierbarkeit folgt sowohl die partielle Differenzierbarkeit als auch die Stetigkeit von f.

Satz: Ist f in (x_0, y_0) total differenzierbar, dann folgt
(1) f ist in (x_0, y_0) stetig
(2) Es existieren die partiellen Ableitungen $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$
(3) Die Zahlenwerte A und B der Gleichung
$z(x, y) = f(x_0, y_0) + A\ (x - x_0) + B\ (y - y_0)$
berechnen sich mit
$A = f_x(x_0, y_0)$, $B = f_y(x_0, y_0)$
(4) Der Graph der Funktion f lässt sich in der Nähe des Punktes annähern durch die Tangentialebene
$f(x, y) = z_t = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\ (x-x_0) + f_y(x_0, y_0)\ (y-y_0)$

Die Definition der totalen Differenzierbarkeit ist schwierig nachzuprüfen. Mittels partieller Ableitungen ist die Entscheidung, ob eine Funktion f total differenzierbar ist, durchführbar.

Satz: f ist in einer Umgebung von (x_0, y_0) partiell nach x und y differenzierbar und die partiellen Ableitungen f_x und f_y sind in (x_0, y_0) stetig. Dann ist f in $(x_0, {}_0)$ total differenzierbar.

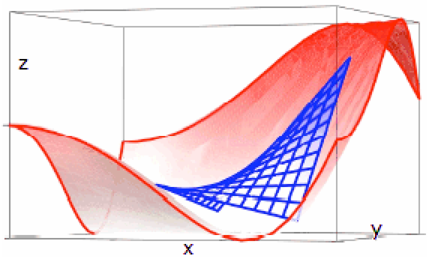
Gradient

Bei Funktionen einer Variablen gibt die Ableitung der Funktion im Punkt x0 die Steigung der Funktion an.
Bei Funktionen zweier Variablen berücksichtigt man als Maß sowohl die partielle Ableitung in x-Richtung als auch in y-Richtung.
Um eine Funktion f(x,y) bezüglich ihrer Steigung in einem Punkt (x0, y0) zu charakterisieren, nutzt man den Vektor $\text{grad } f(x0, y0) := \binom{\partial f/\partial x\ (x0,\ y0)}{\partial f/\partial y\ (x0,\ y0)}$
dessen Komponenten aus der partiellen Ableitung nach x und y bestehen.
Er beschreibt die Neigung der Tangentialebene im Punkt P(x0, y0). Da dieser Vektor den Grad der Steigung der Funktion angibt, nennt man ihn Gradienten.
Für den Gradienten wird oft der Nabla-Operator ∇ verwendet: $\nabla = \binom{\partial x}{\partial y} = \text{grad } f = \nabla f$

Richtungsableitung

Die Ableitung einer Funktion f(x, y) mit zwei Variablen in Richtung des Einheitsvektors $\vec{n} = \binom{n1}{n2}$
ist gegeben durch $\partial f/\partial \vec{n} = \vec{n} \cdot \text{grad } f = \binom{n1}{n2} \cdot \binom{\partial x}{\partial y} = n1\ \partial x\ f(x, y) + n2\ \partial y\ f(x, y) = \partial_{\vec{n}}$

Im Gegensatz zum Gradienten stellt die Richtungsableitung keinen Vektor, sondern eine skalare Größe dar. Spezialfälle:
für $n^{\to} = \binom{1}{0}$ ist $\partial_{n\to} = \partial f/\partial x$ die partielle Ableitung nach x.
für $n^{\to} = \binom{0}{1}$ ist $\partial_{n\to} = \partial f/\partial y$ die partielle Ableitung nach y.
Die Richtungsableitung von f in Richtung $n^{\to}$ ist die Projektion des Gradienten grad f auf die Gerade mit Richtung $n^{\to}$.



Bilineare Interpolation

Die lineare Interpolation wird auf eine Funktion von zwei Variablen $f(x,y) = z$ erweitert. Es seien vier Stützwerte $f(x_0, y_0)$, $f(x_0, y_1)$, $f(x_1, y_0)$, $f(x_1, y_1)$ bekannt. Interpoliert werden soll an der Stelle $(\xi,\eta) \in [x_0, x_1]\times[y_0, y_1]$.

Es ist $f(\xi,y_0) \approx f(x_0,y_0)+(\xi-x_0)\,(f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)) / (x_1-x_0)$

$f(\xi,y_1) \approx f(x_0,y_1)+(\xi-x_0)\,(f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)) / (x_1-x_0)$

Durch Einsetzen in

$$f(\xi,\eta) \approx f(\xi,y_0)+(\eta-y_0)\,(f(\xi,y_1)-f(\xi,y_0)) / (y_1-y_0)$$

wird nach einigen Umwandlungen

$$f(\xi,\eta) \approx f(x_0,y_0) + (\xi-x_0)/(x_1-x_0)\,(f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)) + (\eta-y_0)/(y_1-y_0)\,(f(x_0,y_1)-f(x_0,y_0)) +$$
$$+ (\xi-x_0)/(x_1-x_0)\,(\eta-y_0)/(y_1-y_0)\,(f(x_1,y_1) - f(x_1,y_0) - f(x_0,y_1) + f(x_0,y_0))$$

Die entstehende Interpolationsfläche ist ein Hyperboloid. Es ist eine gekrümmte Fläche, sie enthält aber zwei Scharen von Geraden. Quelle: Hans Walser, 2009

Zweidimensionale Integrale

Das Volumen V zwischen der Funktion f(x,y) und der x-y-Ebene im Bereich $x \times y \to [a,b] \times [c,d]$ beträgt:

$$V = \int_A\int f(x,y)\,dA = \int_A\int f(x,y)\,dx\,dy = {}_x\!\int ({}_y\!\int f(x,y)\,dy)\,dx$$

Beispiel: Gesucht ist das Volumen des Tetraeders, dessen Ecken in (0,0,0), (a,0,0), (0,b,0) und (0,0,c) sind. Die Gleichung der entsprechenden Ebene liefert den gesuchten Inhalt:

$$x/a + x/b + x/c = 1 \Leftrightarrow z = f(x,y) = c\,(1 - x/a - x/y)$$
$$V = \int_A\int f(x,y)\,dA = \int_{x=0}^{x=a} [\int_{y=0}^{y=b(1-x/a)} c\,(1-x/a-y/b)\,dy]\,dx =$$
$$= \int_{x=0}^{x=a} c\,[(1-x/a)\,y - y^2/(2b)\,]\,\Big|_{y=0}^{y=b(1-x/a)}\,dx = bc/2 \int_0^a (1 - x/a)^2\,dx = abc / 6$$

Dreidimensionale Integrale

Analog zu zweidimensionalen Integralen gilt:

$$I = {}_{Q=[x\,y\,z]}\int\int\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = {}_x\!\int [{}_y\!\int [{}_z\!\int f(x,y,z)\,dz]\,dy]\,dx$$

Beispiel: Gesucht ist das Volumen V einer Kugel mit Radius R in Mittelpunktslage.

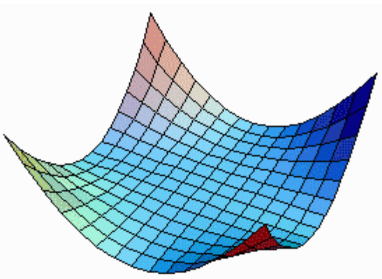
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Leftrightarrow z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Es gilt gemäß der obenstehenden Gleichung:

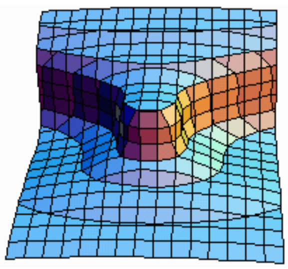
$$V/8 = \int_0^R [\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} [\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz]\,dy]\,dx =$$
$$= \int_0^R [\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy]\,dx = \int_0^R [\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}\,dy]\,dx =$$
$$= \int_0^R [-a^2 \int_{\pi/2}^0 \sin^2 u\,du]\,dx = \int_0^R [\pi/4\,(R^2 - x^2)]\,dx = \pi/6\,R^3$$

Das Kugelvolumen beträgt somit $V = 4/3\,\pi\,R^3$.

3D-Funktion

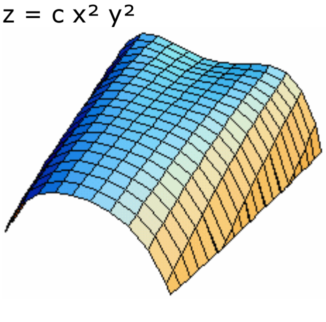


Wellental
$z = c\,x^2\,y^2$

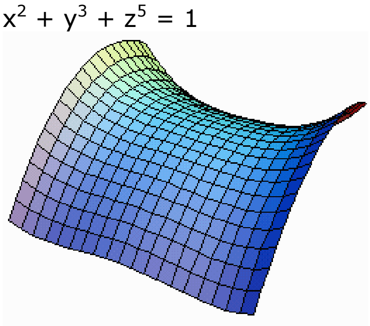


Peninsula-Oberfläche
$x^2 + y^3 + z^5 = 1$

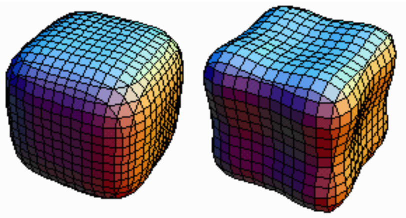
Cassini-Oberfläche
$[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2] = z^4$



Peano-Oberfläche
$f(x,y) = (2x^2 - y)\,(y - x^2)$

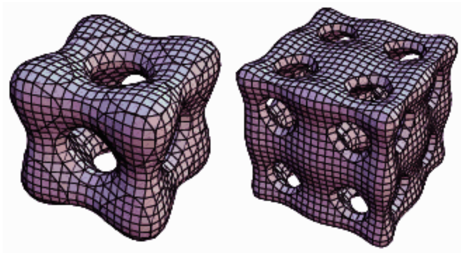


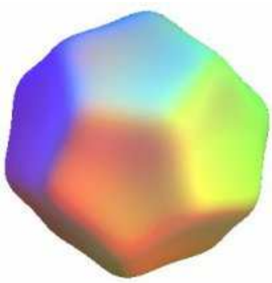
Menn's-Oberfläche
$x=u$, $y=v$, $z= a\,u^4 + u^2\,v - v^2$



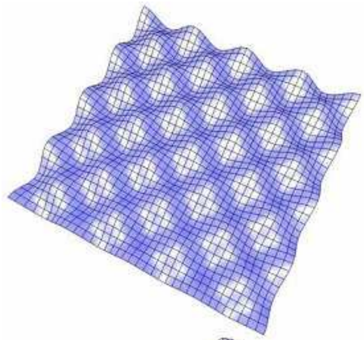
Goursat-Oberfläche
$x^4+y^4+z^4+a(x^2+y^2+z^2)^2+$
$+b(x^2+y^2+z^2)+c$
linke Abbildung: $a = b = 0$, $c = -1$
rechte Abbildung: $a = 0$, $b = -2$, $c = -1$

Chmutov-Oberfläche
linke Abbildung:
$$3 + 8(x^4 + y^4 + z^4) = 8(x^2 + y^2 + z^2)$$
rechte Abbildung:
$$2[\, x^2 (3 - 4x^2)^2 + y^2 (3 - 4y^2)^2 + z^2 (3 - 4z^2)^2] = 3$$





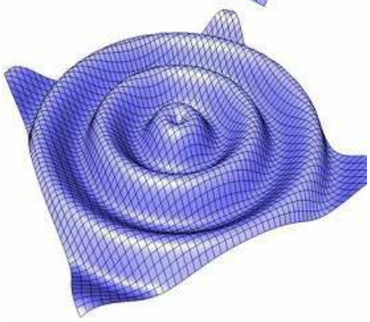
Pentagonale Goursat-Oberfläche
Die allgemeine Goursat-Fläche kann auch auf andere Ordnungen erweitert werden. Unter einer pentagonalen Goursat-Oberfläche versteht man eine Fläche 6.Ordnung mit der Gleichung
$$z^6 - 5(x^2+y^2)\, z^4 + 5(x^2+y^2)^2\, z^2 - 2(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4)\, xz + k\, (x^2+y^2+z^2)^3 + k'\, a^2\, (x^2+y^2+z^2)^2 + k''\, a^4\, (x^2+y^2+z^2) + k'''\, a^6 = 0$$
Die Abbildung zeigt den Fall $k = 1$; $k' = -1$; $k'' = 1$ und $k''' = 1$, bei dem ein Dodekaeder verändert wurde.
Die pentagonale Goursat-Oberfläche (0, 5/4, -5/2, 5/4) wird auch Barth-Sextic genannt.



3D-Funktion
Wellenfläche
Die Wellen werden durch folgende Gleichungen dargestellt.

$x = u$
$y = v$
$z = a \cos (b\, u) \cos(c\, v)$

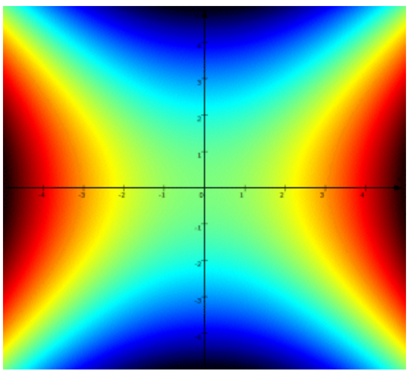
Beispiel $z = \cos(3x) \cos(2y)$
Die Konstanten a, b und c bestimmen das Aussehen der Figur.
Zur Darstellung der Fläche können die beiden Parameter u und v zum Beispiel folgende Werte annehmen. u und v sind Element aus der Zahlenmenge $[-2\pi, 2\pi]$.



Sinuswelle
Die Sinuswelle wird durch folgende Gleichungen dargestellt.

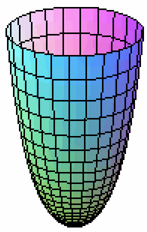
$x = u$
$y = v$
$z = a \sin(b \sqrt{u^2 + v^2})$

Beispiel $z = \sin(2 \sqrt{x^2+y^2})$
u und v sind Element aus der Zahlenmenge [-15, 15].



Niveaumenge, Niveaufläche
Als Niveaumenge, auch Levelmenge, bezeichnet man die Menge aller Punkte eines Skalarfeldes, denen der gleiche Wert zugeordnet ist. Für zweidimensionale Skalarfelder ist diese Menge oft eine Linie und man spricht von einer Niveaulinie. Für dreidimensionale Skalarfelder ist diese Menge eine Fläche, die Niveaufläche. Ein Beispiel für Niveauflächen sind die Äquipotentialflächen eines elektrischen Feldes.

Defintion: Sei $f: D \subset R^n \to R$ und $c \in R$, so ist
$$N_c = \{x \in D \mid f(x) = c\} \subset R^n$$
die Niveaumenge der Funktion f zum Niveau c.
Stellt man dreidimensionale Funktionen bzw. komplexwertige Funktionen so dar, dass für gegebene Paare (x, y) bzw. (a, bi) der Funktionswert je nach seiner Größe als farbiger Punkt in der Ebene gezeichnet wird, so entsteht eine Niveaufläche. (siehe Abbildung)
Werden zusätzlich die Funktionswerte durch unterschiedliche Höhen dargestellt, so spricht man von einer analytischen Landschaft.



Alysseide
Rotationskörper, der bei Rotation der Kettenlinie um die z-Achse (Symmetrieachse) entsteht

Zylinderkoordinaten	$z = a \cosh r/a$
Kartesische Koordinaten	$x = a\, u \cos v$, $y = a\, u \sin v$, $z = a \cosh u$ mit $u = r/a$

Geodätische Linie einer Fläche

Wenn eine Fläche in der expliziten Form $z = f(x,y)$ gegeben ist, dann lautet die Differenzialgleichung der geodätischen Linien

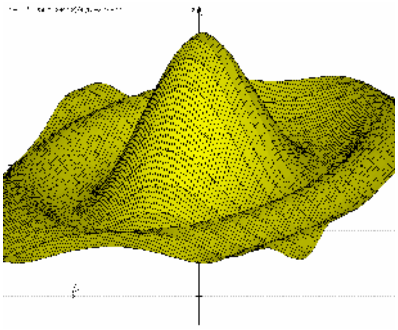
$$(1 + p^2 + q^2)\, d^2y/dx^2 = pt\, (dy/dx)^3 + (2ps - qt)\, (dy/dx)^2 + (pr - 2qs)\, dy\, dx - qr$$

Dabei bedeuten p, q, r, s und t $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$, $r = \partial^2 z/\partial x^2$, $s = \partial^2 z/(\partial x\, \partial y)$, $t = \partial^2 z/\partial y^2$

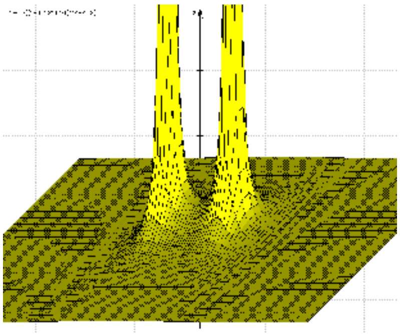
Flächenfunktion

Funktionen von zwei veränderlichen Größen z = F(x,y)

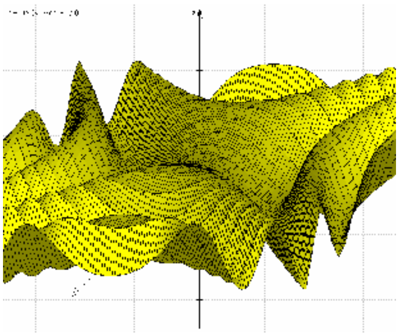
In der Darstellung werden die Argumente x, y als Punkte der Ebene interprediert und der Funktionswert auf einer senkrecht zur Ebene stehenden senkrechten, räumlichen Koordinatenachse angetragen



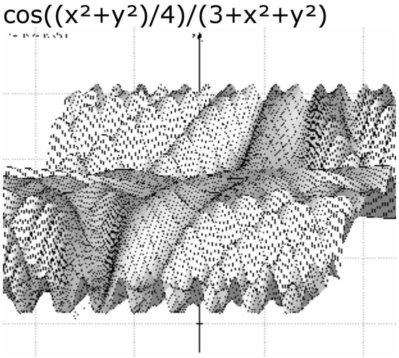
Sombrero
F(x,y) = 12 cos((x²+y²)/4)/(3+x²+y²)



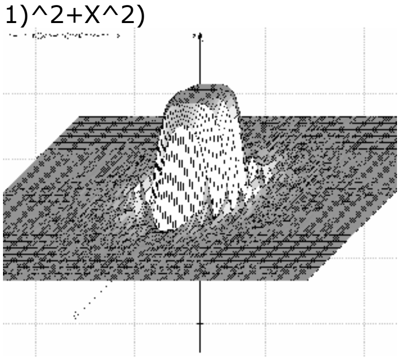
Zwei Superberge
F(x,y) = 1/((Y+1)^2*(Y-1)^2+X^2)



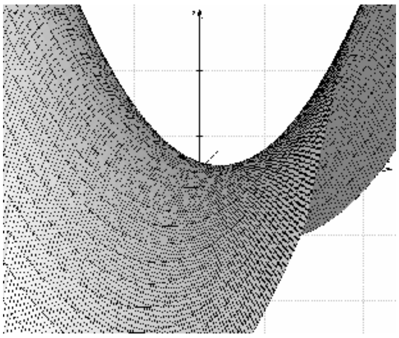
F(x,y) = SIN((X^2-Y^2+1)/3)



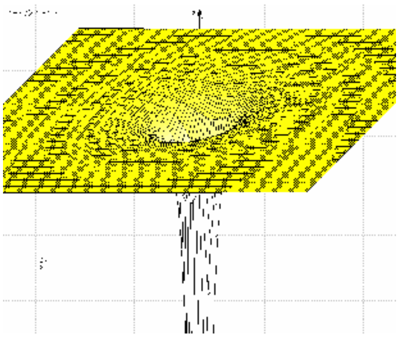
Gebirge
F(x,y) = SIN(X+SIN(X*Y))



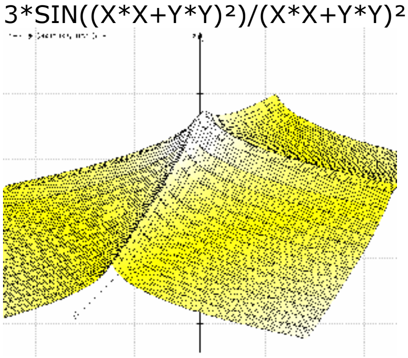
Hügel
F(x,y) = 3*SIN((X*X+Y*Y)²)/(X*X+Y*Y)²



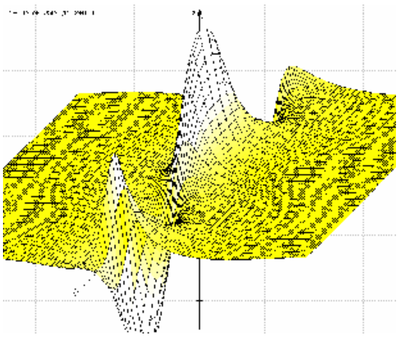
Hyperboloid
F(x,y) = (Y^2-X^2-1)/5



Loch
F(x,y) = -1/(X^2+Y^2)



Pagodendach
F(x,y) = -SQRT(ABS(X))-SQRT(ABS(Y))+3



F(x,y) = SIN(Y+COS(X))/(Y^2+0.2)

Geschichte der Analysis

Die Analysis ist ein zentrales Thema der Mathematik. Sie beschäftigt sich in erster Linie mit der Differential- und Integralrechnung. Der Grenzwertbegriff ermöglicht es davon zu sprechen, dass sich gewisse Dinge beliebig genau annähern und der Stetigkeitsbegriff bedeutet, dass es in der betrachteten Funktion keine großen Sprünge gibt.
In der Differentialrechnung geht es vornehmlich um die Berechnung der Ableitung, Steigung, einer Funktion. Die Integralrechnung beschäftigt sich mit der Flächen- bzw. Volumenberechnung, auch unter krummlinigen Kurven. In der Theorie gelangt man schließlich zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der besagt, dass Integrale über Stammfunktionen ausgerechnet werden können, und der somit die beiden, zunächst unabhängig voneinander entwickelten Theorien miteinander verbindet.

Historisch gesehen gehen die Anfänge der Analysis schon auf die Griechen (Eudoxos von Knidos, Archimedes von Syrakus) zurück. Auch Galileo Galilei, der den Zusammenhang zwischen Ableitung und Geschwindigkeit erkannte, lieferte Vorarbeiten. Die richtige Infinitesimalrechnung wurde jedoch im 17.Jahrhundert unabhängig voneinander von G.W. Leibniz und I. Newton begründet. Newton erschloss mit ihrer Hilfe durch seine 1687 erschienenen Principia ein gewaltiges Anwendungsfeld, die heute so genannte Newtonsche Mechanik. Im Prozess der Weiterentwicklung der Analysis spielten Lagrange, Cauchy und Gauß eine große Rolle.
Auch Bolzano und Dedekind, der durch seine Arbeit wesentlich dazu beitrug, den Begriff der irrationalen Zahlen zu klären, sollten erwähnt sein. In der Integrationstheorie taten sich besonders Riemann durch die Einführung des so genannten Riemann-Integrals und Lebesgue mit seiner Weiterentwicklung durch den neuen Ansatz des Lebesgue-Integrals hervor.
Die mathematischen Anwendungen der Analysis sind immens. Gebiete wie Differentialgleichungen (gewöhnliche und partielle), Integralgleichungen, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis, Differentialgeometrie und viele mehr basieren grundlegend auf den Konzepten der Analysis. Besondere Anwendungen findet man auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastik und den Naturwissenschaften, insbesondere in der Physik.