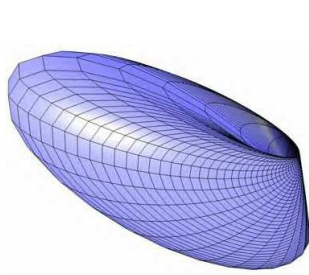
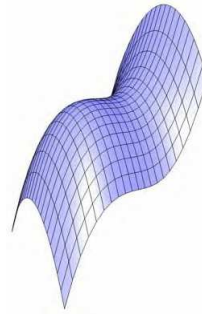


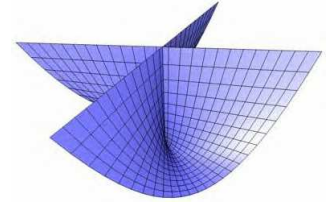
Enneper Fläche
 $x = u - (u^3/3) + u v^2$
 $y = v - (v^3/3) + u^2 v$
 $z = u^2 - v^2$
 $u \in [-2, 2], v \in [-2, 2]$



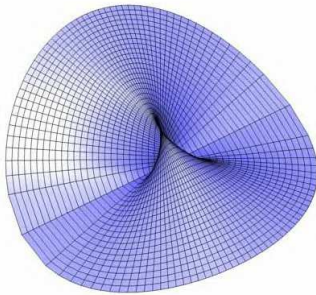
Cross Cup
 $x = 1 - u^2 + u^2 \sin^2(v)$
 $y = u^2 \sin^2(v) \sin(v) + 2 u^2 \sin(v) \cos(v)$
 $z = \sqrt{(1-u^2)/2} u (\sin(v)+\cos(v))$
 $u \in [0, 1], v \in [0, 2\pi]$



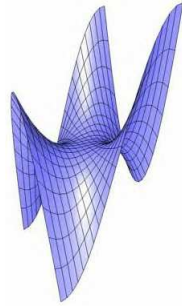
Shoe Surface
 $x = u, y = v,$
 $z = u^3/3 - v^2/2$
 $u \in [-2, 2], v \in [-2, 2]$



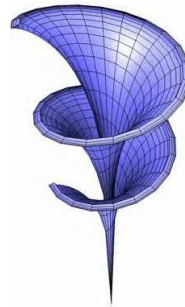
Whitney's Schirm
 $x = u v, y = u$
 $z = v^2$ für $-1 \leq u, v \leq 1$.
 Die Oberfläche kann als ein sich im Raum selbstschneidendes Rechteck interpretiert werden.



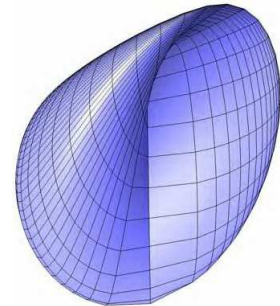
Plücker-Conoid
 $x = u \sqrt{(1 - v^2)}$
 $y = u v$
 $z = 1 - v^2$
 $u \in [-2, 2], v \in [-1, 1]$



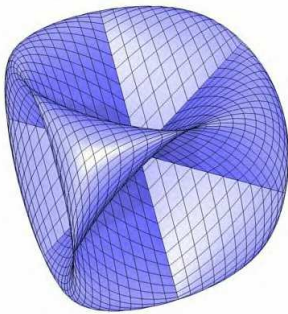
Affen-Sattel
 $x = u, y = v$
 $z = u^3 - 3 u v^2$
 $u \in [-1, 1], v \in [-1, 1]$



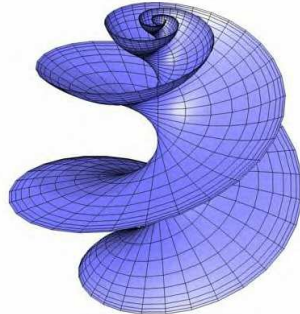
Dini's Oberfläche
 $x = a \cos u \sin v$
 $y = a \sin u \sin v$
 $z = a (\cos v + \ln(\tan v/2)) + b u$
 $u \in [0, 4\pi]$
 $v \in [0.01, 2]$



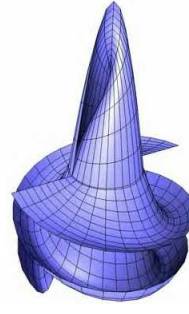
Roman Surface
 $x = 2u \cos v \sqrt{(1 - u^2)}$
 $y = 2v \sin v \sqrt{(1 - u^2)}$
 $z = 1 - 2u^2 \cos^2 v$
 $u \in [0, 1], v \in [0, 2\pi]$



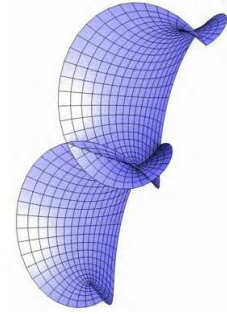
Sinus-Fläche
 $x = \sin u, y = \sin v$
 $z = \sin(u+v)$
 $u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$



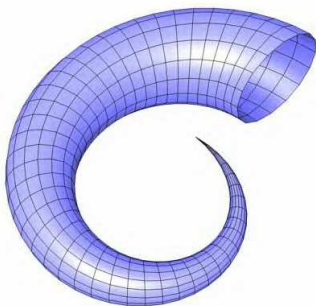
Hyperbolisches Heliocid
 $h = 1 + \cosh u \cosh v$
 $x = \sinh v \cos(au) / h$
 $y = \sinh v \sin(au) / h$
 $z = \cosh v \sinh u / h$
 $u \in [-4, 4], v \in [-4, 4]$



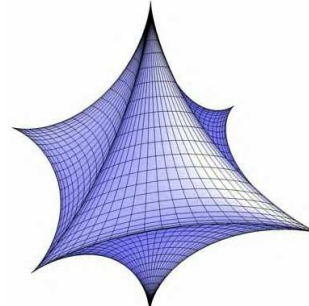
Steinbach-Screw
 $x = u \cos v$
 $y = u \sin v$
 $z = v \cos u$
 $u \in [-4, 4], v \in [0, 2\pi]$



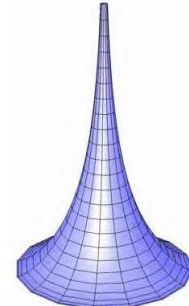
Catalan-Oberfläche
 $x = u - \cosh v \sin u$
 $y = 1 - \cos u \cosh v$
 $z = -4 \sin(u/2) \sinh(v/2)$
 $u \in [-2\pi, 2\pi], v \in [-1.4, 1.4]$



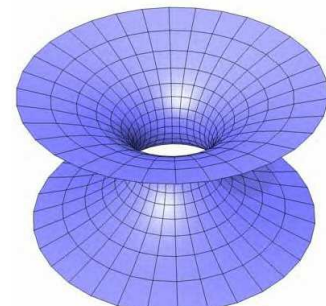
Horn
 $x = (a + u \cos v) \sin(b\pi u)$
 $y = (a + u \cos v) \cos(b\pi u) + cu$
 $z = u \sin v$
 $u \in [0, 1], v \in [-\pi, \pi]$



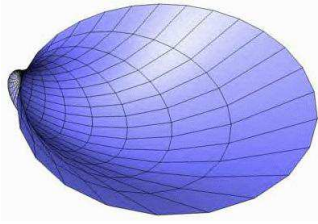
Hyperbolisches Oktaeder
 $x = (\cos u \cos v)^3$
 $y = (\sin u \cos v)^3$
 $z = \sin^3 v$
 $u \in [-\pi/2, \pi/2], v \in [-\pi, \pi]$



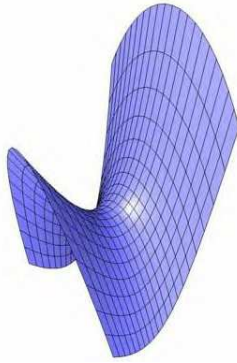
Tractroid
 $x = \operatorname{sech} u \cos v$
 $y = \operatorname{sech} u \sin v$
 $z = u - \tanh u$
 $u \in [0, 4], v \in [0, 2\pi]$



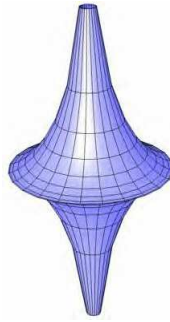
Catenoid
 $x = c \cosh(u/c) \cos u$
 $y = c \cosh(u/c) \sin u$
 $z = v$
 $u \in [-\pi, \pi], v \in [-2, 2]$



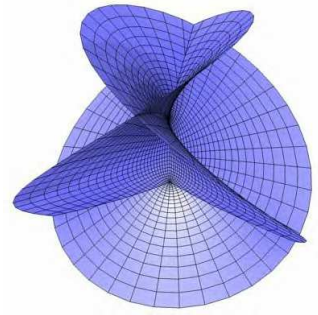
Cornucopia
 $x = e^{bv} \cos v + e^{av} \cos u \cos v$
 $y = e^{bv} \sin v + e^{av} \cos u \sin v$
 $z = e^{av} \sin u$
 $u \in [-\pi, \pi], v \in [0, 2\pi]$



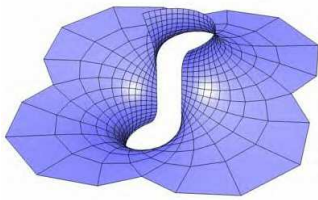
Tuch-Oberfläche
 $x = u, y = v$
 $z = 1/3 u^3 + u v^2 + 2(u^2 - v^2)$
 $u \in [-1, 1], v \in [-1, 1]$



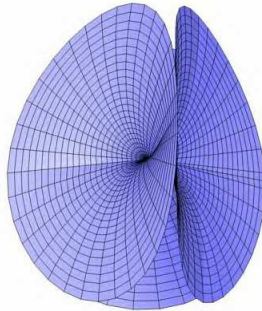
Pseudosphäre
 $x = \cos u \sin v$
 $y = \sin u \sin v$
 $z = \cos v + \lg(\tan(v/2))$
 $u \in [-\pi, \pi]$
 $v \in [0.1, 3.05]$



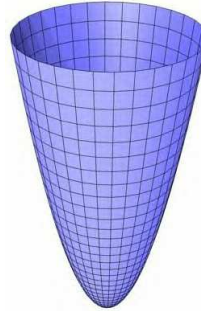
Henneberg Surface
 $x = 2 \cos v \sinh u - 0.667 \cos(3v) \sinh(3u)$
 $y = 2 \sin v \sinh u + 0.667 \sin(3v) \sinh(3u)$
 $z = 2 \cos(2v) \cosh(2u)$
 $u \in [-1, 1], v \in [-\pi/2, \pi/2]$



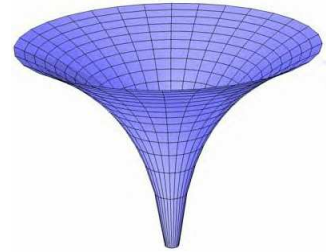
Richmond Surface
 $h = 6(u^2 + v^2)$
 $x = (-3u - u^5 + 2u^3v^2 + 3uv^4)/h$
 $y = (-3v + v^5 - 2u^2v^3 - 3u^4v)/h$
 $z = u$
 $u \in [-1, 1], v \in [-1, 1]$



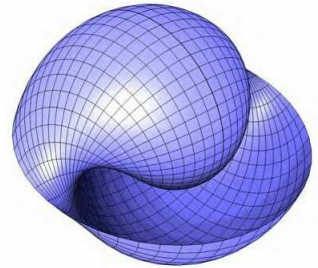
Maeders Owl
 $x = v \cos u - 0.5 v^2 \cos(2u)$
 $y = -v \sin u - 0.5 v^2 \sin(2u)$
 $z = 4/3 \exp(1.5 \ln v) \cos(3/2 u)$
 $u \in [0, 4\pi], v \in [0.0001, 1]$



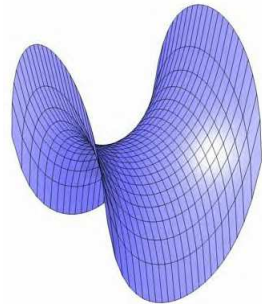
Paraboloid
 $x = a v \cos u$
 $y = a v \sin u$
 $z = b v^2$
 $u \in [-\pi, \pi], v \in [0, 2]$



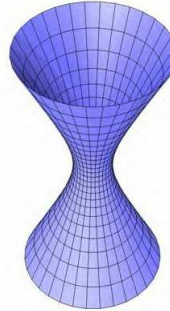
Funnel
 $x = u \cos v$
 $y = u \sin v$
 $z = \lg(u)$
 $u \in [0.1, 2], v \in [0, 2\pi]$



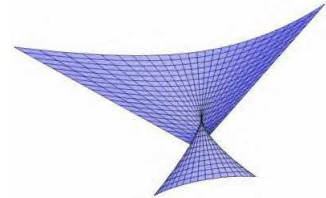
Snail Surface
 $x = u \cos v \sin u$
 $y = u \cos u \cos v$
 $z = -u \sin v$
 $u \in [0, 2\pi], v \in [-\pi, \pi]$



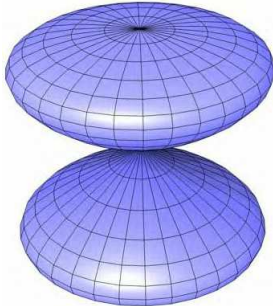
Scherk Surface
 $x = u, y = v$
 $z = \ln(\cos(cu)/\cos(cv))/c$
 $u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$



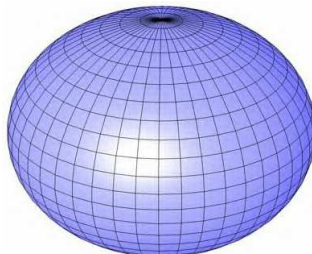
Hyperboloid
 $x = a \cosh v \cos u$
 $y = a \cosh v \sin u$
 $z = b \sinh v$
 $u \in [-\pi, \pi], v \in [-2, 2]$



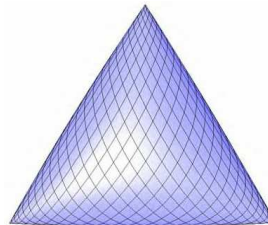
Swallow Surface
 $x = u v^2 + 3 v^4$
 $y = -2 u v - 4 v^3, z = u$
 $u \in [-2, 2], v \in [-0.75, 0.75]$



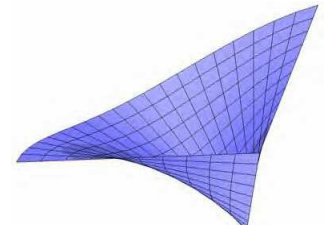
Eight Surface
 $x = \cos u \sin(2v)$
 $y = \sin u \sin(2v), z = \sin v$
 $u \in [0, 2\pi], v \in [-\pi/2, \pi/2]$



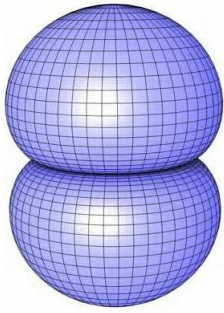
Ellipsoid
 $x = a \cos u \sin v$
 $y = b \sin u \cos v$
 $z = c \cos v$
 $u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]$



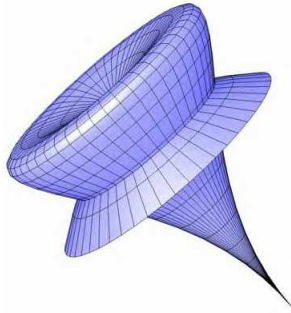
Kosinus Fläche
 $x = \cos u$
 $y = \cos v$
 $z = \cos(u+v)$
 $u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$



Wallis Conical Edge
 $x = v \cos u, y = v \sin u$
 $z = c \sqrt{(a^2 - b^2 \cos^2 u)}$
 $u \in [-1, 1], v \in [0, 1]$



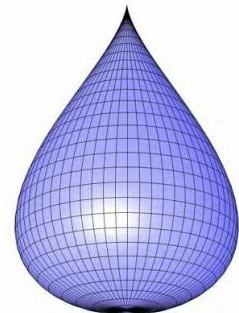
Kidney Surface
 $x = \cos u (3 \cos v - \cos(3v))$
 $y = \sin u (3 \cos v - \cos(3v))$
 $z = 3 \sin v - \sin(3v)$
 $u \in [0, 2\pi], v \in [-\pi/2, \pi/2]$



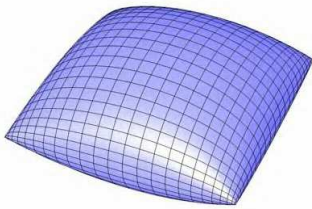
Triaxial Teardrop
 $x = (1 - \cos u) \cos(u + 2\pi/3)$
 $\cos(v + 2\pi/3)/2$
 $y = (1 - \cos u) \cos(u + 2\pi/3)$
 $\cos(v - 2\pi/3)/2$
 $z = \cos(u - 2\pi/3)$
 $u \in [0, \pi], v \in [0, \pi/2]$



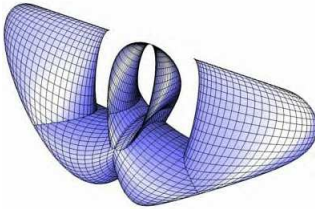
Jet Surface
 $x = (1 - \cosh u) \sin u \cos v/2$
 $y = (1 - \cosh u) \sin u \sin v/2$
 $z = \cosh u$
 $u \in [0, \pi], v \in [0, \pi/2]$



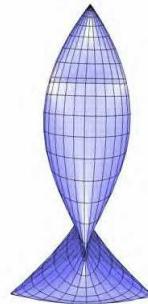
Tropfen
 $x = a (b - \cos u) \sin u \cos v$
 $y = a (b - \cos u) \sin u \sin v$
 $z = \cos u$
 $u \in [0, \pi], v \in [0, \pi/2]$



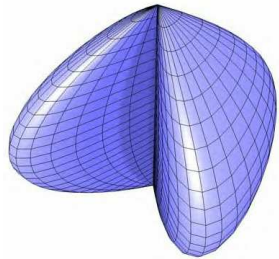
Pillow Shape
 $x = \cos u; y = \cos v$
 $z = a \sin u \sin v$
 $u \in [0, \pi], v \in [-\pi, \pi]$



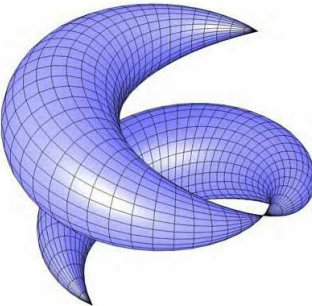
Bent's Horn
 $x = (2 + \cos u) (v/3 - \sin v)$
 $y = (2 + \cos(u + 2\pi/3)) (\cos v - 1)$
 $z = (2 + \cos(u - 2\pi/3)) (\cos v - 1)$
 $u \in [-\pi, \pi], v \in [-2\pi, 2\pi]$



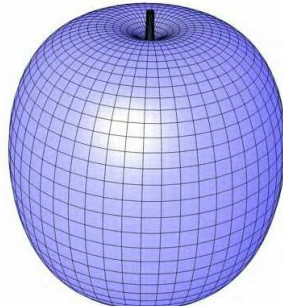
Fish Surface
 $x = (\cos u - \cos(2u)) \cos(v)/4$
 $y = (\sin u - \sin(2u)) \sin(v)/4$
 $z = \cos u$
 $u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi]$



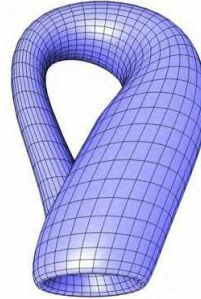
Pseudo Cross Cap
 $x = (1 - u^2) \sin v$
 $y = (1 - u^2) \sin(2v)$
 $z = u$
 $u \in [-1, 1], v \in [-\pi, \pi]$



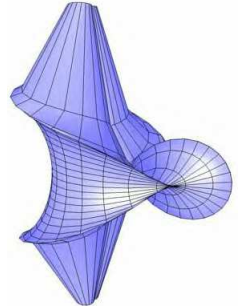
Crescent
 $x = (a + \sin(b\pi u) \sin(b\pi v)) \sin(c\pi v)$
 $y = (a + \sin(b\pi u) \sin(b\pi v)) \cos(c\pi v)$
 $z = \cos(b\pi u) \sin(b\pi v) + 4v - 2$
 $u \in [0, 1], v \in [0, 1]$



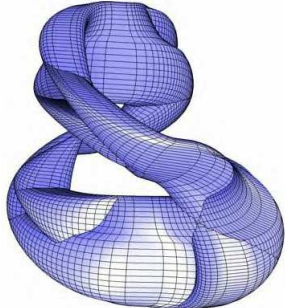
Apple Surface
 $x = \cos u (4 + 3.8 \cos v)$
 $y = \sin u (4 + 3.8 \cos v)$
 $z = (\cos v + \sin v - 1) (1 + \sin v) \ln(1 - \pi v/10) + 7.5 \sin v$
 $u \in [0, 2\pi], v \in [-\pi, \pi]$



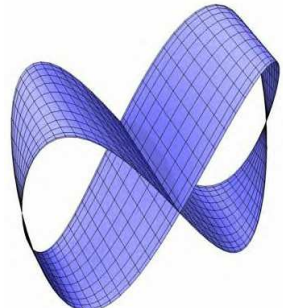
Kleinsche Flasche
 Gleichungen s.u.



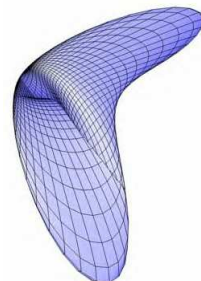
Kuen Surface
 $h = 1 + u^2 \sin^2 v$
 $x = 2(\cos u + u \sin u) \sin v/h$
 $y = 2(\sin u - u \cos u) \sin v/h$
 $z = \ln(\tan(v/2)) + 2 \cos v/h$
 $u \in [-4.3, 4.3], v \in [0.03, 3.11]$



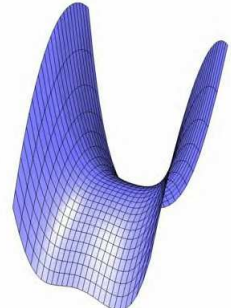
Saddle Torus
 $F(x) = 1 - \cos^2(x) - \cos^2(x + 2\pi/3)$
 $x = (2 + \cos(u)) \cos(v)$
 $y = (2 + \cos(u + 2\pi/3)) \cos(v + 2\pi/3)$
 $z = (2 + \operatorname{sgn}(F(u)) \sqrt{|F(u)|}) \sqrt{|F(v)|}$
 $u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$



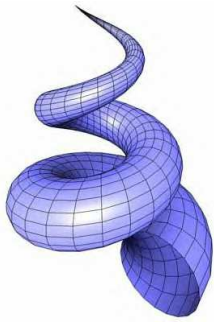
Schleife
 $x = \sin v \cos u$
 $y = 2 \cos v$
 $z = 4 \sin v \cos u$
 $u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$



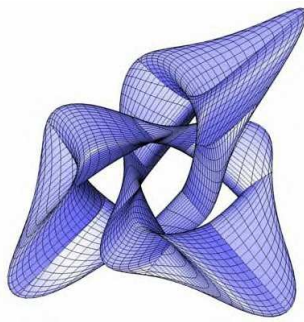
Boys Surface
 $a = \sqrt{2}$
 $b = 2 - \sin(3u) \sin(2v)$
 $x = a \cos^2 v \cos(2u) + \cos u \sin(2v) / b$
 $y = 3 \cos^2 v / b$
 $z = a \cos^2 v \sin(2u) + \cos u \sin(2v) / b$
 $u \in [-\pi/2, \pi/2], v \in [0, \pi]$



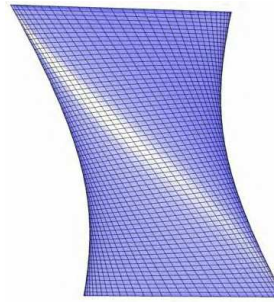
Menn's Surface
 $x = u, y = v$
 $z = a u^4 + u^2 v - v^2$
 $u \in [-1, 1], v \in [-1, 1]$



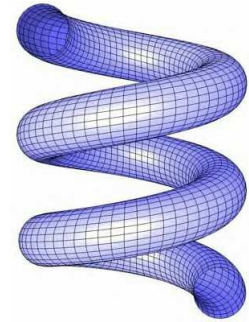
Seashell
 $h: h = 1 - 0.5 v$
 $x = a h \cos(n v \pi) (1 + \cos(u \pi)) + c \cos(n v \pi)$
 $y = a h \sin(n v \pi) (1 + \cos(u \pi)) + c \sin(n v \pi)$
 $z = b 0.5 v + a h \sin(u \pi)$
 $u \in [0, 2], v \in [0, 2]$



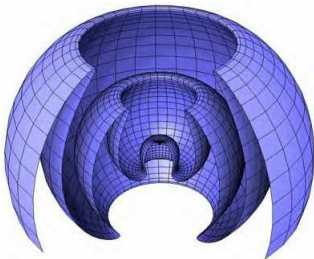
Tringuloid Trefoil
 $x = 2 \sin(3u)/(2 + \cos v)$
 $y = 2 (\sin u + 2 \sin(2u)) / (2 + \cos(v + 2/3 \pi))$
 $z = (\cos u - 2 \cos(2u)) (2 + \cos v) (2 + \cos(v + 2/3 \pi))/4$
 $u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$



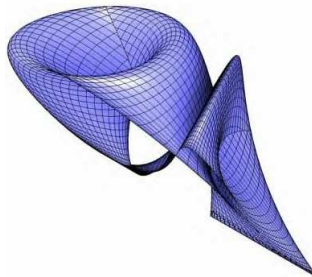
Milchtüte
 $x = k (1+u) \cos v$
 $y = k (1-u) \sin v$
 $z = u$
 $u \in [-1, 1], v \in [-\pi, \pi]$



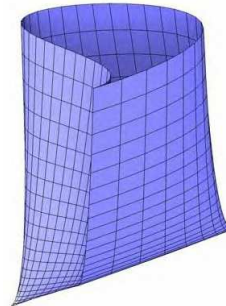
Feder
 $x = (R + r \cos v) \cos u$
 $y = (R + r \cos v) \sin u$
 $z = r (\sin v + L u/\pi)$
 $u \in [0, 2n\pi], v \in [0, 2\pi]$



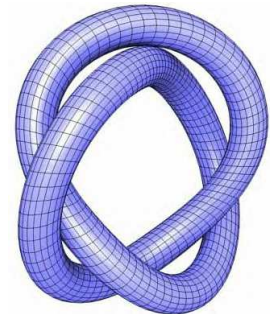
Wellenkugel
 $x = u \cos(\cos u) \cos v$
 $y = u \cos(\cos u) \sin v$
 $z = u \sin(\cos u)$
 $u \in [0, 14.5], v \in [0, 2\pi]$



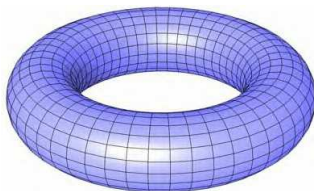
Stiletto Surface
 $h = 2\pi/3$
 $x = (2 + \cos(u)) \cos(v) \cos(v) \cos(v) \sin(v)$
 $y = (2 + \cos(u+h)) \cos(v+h) \cos(v+h) \sin(v+2h) \sin(v+h)$
 $z = -(2 + \cos(u-h)) \cos(v+h) \cos(v+h) \sin(v+h) \sin(v+h)$
 $u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]$



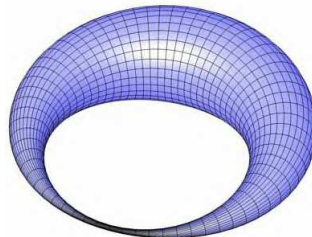
Paper Bag
 $x = v \cos u$
 $y = (v + bu) \sin u$
 $z = a v^2$
 $u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2]$



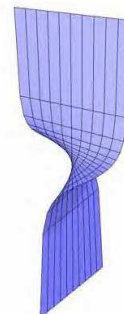
Kleeblattschleife
 $a = (R + r \cos(u/2)) \cos(u/3)$
 $b = (R + r \cos(u/2)) \sin(u/3)$
 $c = r + \sin(u/2)$
 $x = a + r \cos(u/3) \cos(v-\pi)$
 $y = b + r \sin(u/3) \cos(v-\pi)$
 $z = c + r \sin(v-\pi)$
 $u \in [0, 12\pi], v \in [0, 2\pi]$



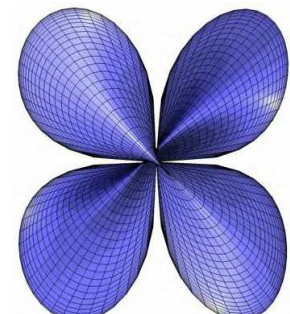
Torus
 $x = (R + r \cos v) \cos u$
 $y = (R + r \cos v) \sin u$
 $z = r \sin v$
 $u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$



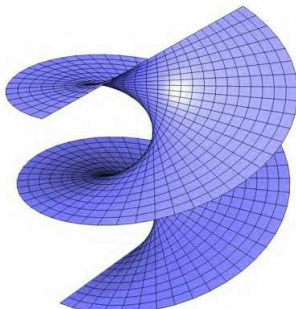
Antisymmetrischer Torus
 $x = (R + r \cos v (a + \sin u)) \cos u$
 $y = (R + r \cos v (a + \sin u)) \sin u$
 $z = r \sin v (a + \sin u)$
 $u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$



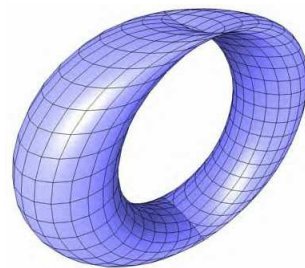
Zindlers Conoid
 $x = u \cos v$
 $y = u \sin v$
 $z = a \tan(2v)$
 $u \in [-1, 1]$
 $v \in [-0.74, 0.74]$



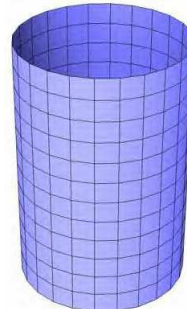
Lemniscate
 $x = \cos v \sqrt{(|\sin(2u)|)} \cos u$
 $y = \cos v \sqrt{(|\sin(2u)|)} \sin u$
 $z = x^2 - y^2 + 2 x y \tan^2 v$
 $u \in [0, \pi], v \in [0, \pi]$



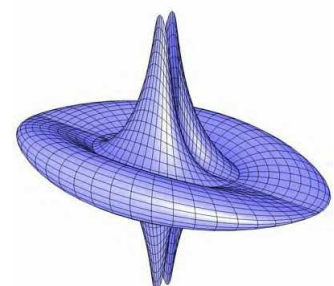
Elliptisches Helicoid
 $x = a v \cos u$
 $y = b v \sin u$
 $z = c u$
 $u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$



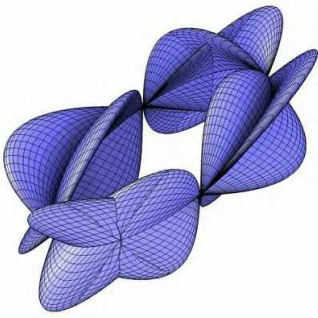
Böhmischer Ring
 $x = a \cos u$
 $y = b \cos v + a \sin u$
 $z = c \sin v$
 $u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$



Zylinder
 $x = r \cos u$
 $y = r \sin v$
 $z = v$
 $u \in [-\pi, \pi], v \in [0, 3]$

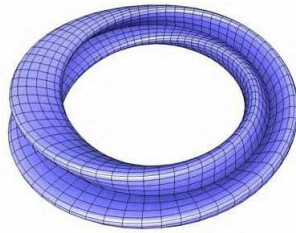


Folium
 $x = \cos u (2v/\pi - \tanh v)$
 $y = \cos (u + 2\pi/3)/\cosh v$
 $z = \cos (u - 2\pi/3)/\cosh v$
 $u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi]$



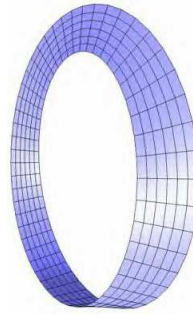
Kranz

$$\begin{aligned} x &= \cos(u + 4)/3 \\ y &= \cos u \sin v \cos v \sin u \cos v + 0.5 \cos u \\ z &= \cos v \sin u \cos u \sin v \\ u &\in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



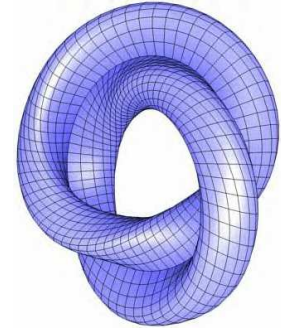
Gedrehter Acht-Torus

$$\begin{aligned} x &= (R+r (\cos(u/2) \sin v - \sin(u/2) \sin(2v))) \cos u \\ y &= (R+r (\cos(u/2) \sin v - \sin(u/2) \sin(2v))) \sin u \\ z &= r (\sin(u/2) \sin v + \cos(u/2) \sin(2v)) \\ u &\in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



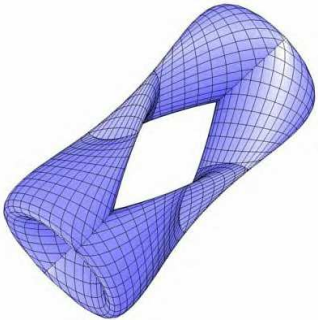
Möbius-Band

$$\begin{aligned} x &= (R + s \cos(t/2)) \cos t \\ y &= (R + s \cos(t/2)) \sin t \\ z &= s \sin(t/2) \\ u &\in [-w, w], v \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



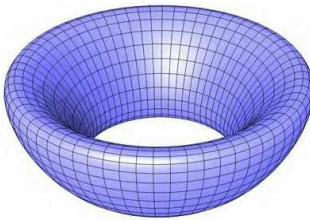
8-Torus

$$\begin{aligned} x &= \cos(u) (c + \sin(v) \cos(u) - \sin(2v) \sin(u)/2) \\ y &= \sin(u) \sin(v) + \cos(u) \sin(2v)/2 \\ z &= \sin(u) (c + \sin(v) \cos(u) - \sin(2v) \sin(u)/2) \\ u &\in [-\pi, \pi], v \in [\pi, \pi] \end{aligned}$$



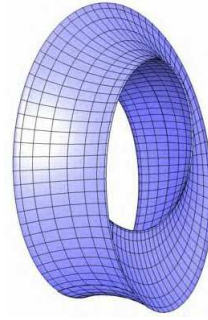
Twisted Pipe Surface

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{1 + \sin^2 v} \\ x &= \cos v (2 + \cos u)/h \\ y &= \sin(v - 2\pi/3) (2 + \cos(u - 2\pi/3))/h \\ z &= \sin(v + 2\pi/3) (2 + \cos(u + 2\pi/3))/h \\ u &\in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



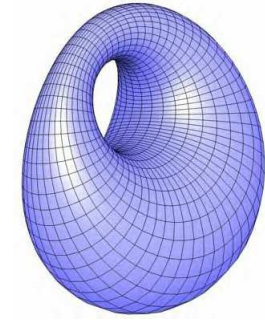
Elliptischer Torus

$$\begin{aligned} x &= (c + \cos v) \cos u \\ y &= (c + \cos v) \sin u \\ z &= \sin v + \cos v \\ u &\in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



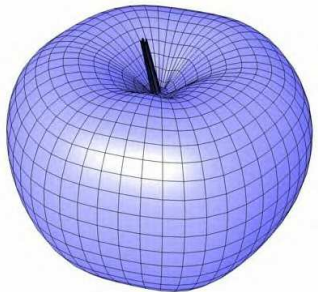
Umbilic Torus

$$\begin{aligned} x &= \sin u (7 + \cos(u/3 - 2v) + 2 \cos(u/3 + v)) \\ y &= \cos u (7 + \cos(u/3 - 2v) + 2 \cos(u/3 + v)) \\ z &= \sin(u/3 - 2v) + 2 \sin(u/3 + v) \\ u &\in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$



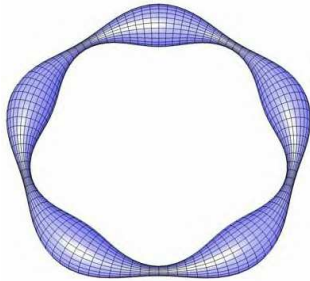
Dupin Cyclide

$$\begin{aligned} h &= a - c \cos u \cos v \\ x &= (d (c - a \cos u \cos v) + b^2 \cos u)/h \\ y &= (b \sin u (a - d \cos v))/h \\ z &= b \sin v (c \cos u - d)/h \\ u &\in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



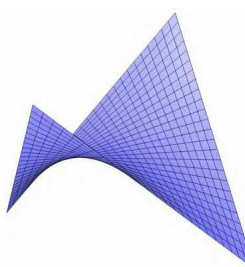
Apfel II

$$\begin{aligned} x &= \cos u (R1 + R2 \cos v) + (v/\pi)^{20} \\ y &= \sin u (R1 + R2 \cos v) + 0.25 \cos(5u) \\ z &= -2.3 \ln(1 - v \cdot 0.3157) + 6 \sin v + 2 \cos v, R1=5, R2=4.8 \\ u &\in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$



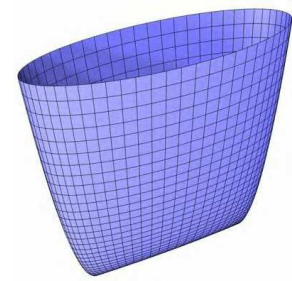
Wellentorus

$$\begin{aligned} x &= (R + (r + a \sin(nu)) \cos v) \cos u \\ y &= (R + (r + a \sin(nu)) \cos v) \sin u \\ z &= (r + a \sin(nu)) \sin v \\ u &\in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



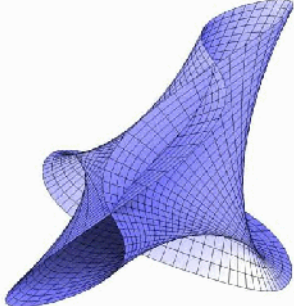
Hyperbolisches Paraboloid

$$\begin{aligned} x &= u, y = v, z = uv \\ u &\in [-1, 1], v \in [-1, 1] \end{aligned}$$



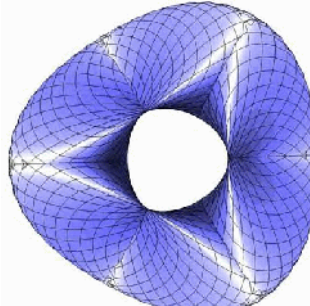
Trash Can

$$\begin{aligned} x &= (b+v) \cos u \\ y &= v \sin u \\ z &= a v^2 \\ u &\in [0, 2\pi], v \in [0, 2] \end{aligned}$$



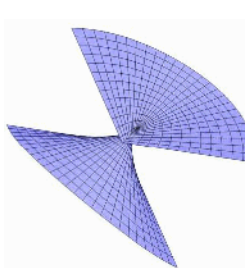
Verill Surface

$$\begin{aligned} x &= -2 u \cos v + (2 \cos(v)/u) - 2 u^3 (\cos(3v)/3) \\ y &= 6 u \sin v - 2 \sin(v)/u - 2 u^3 \cos(3v)/3, z = 4 \ln(u) \\ u &\in [0.5, 1], v \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



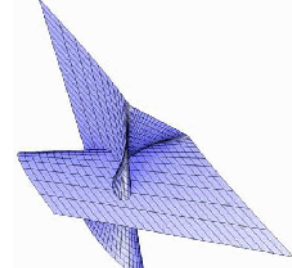
Triaxial Tritorus

$$\begin{aligned} x &= \sin u (1 + \cos v) \\ y &= \sin(u + 2\pi/3) (1 + \cos(v + 2\pi/3)) \\ z &= \sin(u + 4\pi/3) (1 + \cos(v + 4\pi/3)) \\ u &\in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$



Guimard Surface

$$\begin{aligned} x &= ((1 - u) a + u b) \cos v \\ y &= b u \sin v \\ z &= c u \sin^2 v \\ u &\in [-1, 1], v \in [-1, 1] \end{aligned}$$



Triple Point Twist

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v^3 + c v \\ z &= uv + v^5 + c v^3 \\ u &\in [-2, 1.7], v \in [-1.5, 1.5] \end{aligned}$$

Raumflächen

Elliptisches Helicoid

Ein elliptisches Helicoid ist eine Raumfläche, eine Verallgemeinerung des Helicoids. Die Fläche ist eine Minimalfläche mit einer Helix als Randkurve.

Das Gebilde wurde erstmals 1842 von Catalan intensiv untersucht.

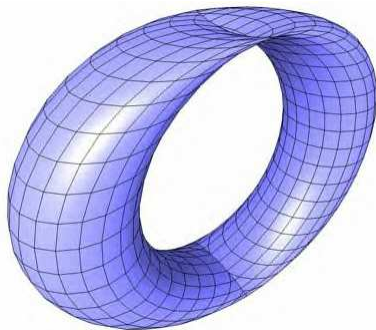
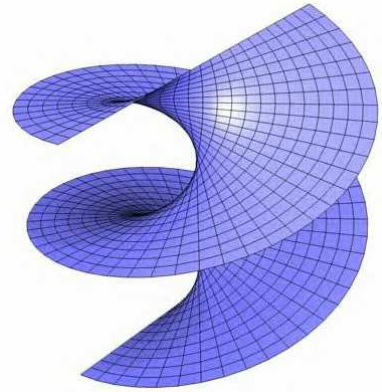
Zylinderkoordinaten $z = c \theta$
 Kartesische Koordinaten $y/x = \tan(z/c)$
 Parameterdarstellung: $x(u,v) = a v \cos u$
 $y(u,v) = b v \sin u$ $z(u,v) = c u$
 Gaußsche Krümmung $K = -c^2 / (c^2 + u^2)^2$

Mit der Transformation

$x(u,v) = \cos \alpha \sinh v \sin u + \sin \alpha \cosh v \cos u$
 $y(u,v) = -\cos \alpha \sinh v \cos u + \sin \alpha \cosh v \sin u$
 $z(u,v) = u \cos \alpha + v \sin \alpha$

kann ein Helicoid in ein Catenoid umgewandelt werden. Dabei entspricht $\alpha = 0$ dem Helicoid und $\alpha = \pi/2$ dem Catenoid. Ein Helicoid kann topologisch in ein Catenoid umgewandelt werden.

Quellenhinweis: Diese und weitere Abbildungen der nachfolgenden Seiten wurden mit der auf der hervorragenden Internetseite <http://www.3d-meier.de/> verfügbaren Software erstellt. © Jürgen Meier



Böhmischer Ring

Fläche 4. Ordnung. Parameterdarstellung:

$x(u,v) = a \cos u$ $y(u,v) = b \cos v + a \sin u$
 $z(u,v) = c \sin v$ $u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$

Die Konstanten a, b und c bestimmen das Aussehen der Figur.

Konstruktionsbeschreibung:

Gegeben ist ein Kreis K und eine Ebene E senkrecht zur Ebene des Kreises K. Ein zweiter Kreis K₂ mit dem gleichen Radius wie K bewegt sich so, dass sein Mittelpunkt stets auf K liegt und er parallel zu E bleibt.

Gleichung in kartesischen Koordinaten:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2)^2 = 4(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$$

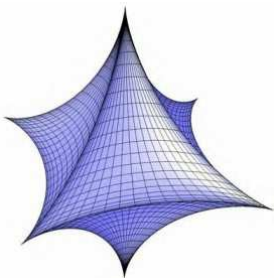
Oberflächeninhalt

$$A \approx 33.243 ab$$

Volumen

$$V = 2\pi ab^2 \text{ für } a > b$$

Der Böhmische Ring ist eine Projektion des Clifford-Torus in den R³.



Elliptische Astroide

... Raumfläche, der Oberfläche invers zu einem Ellipsoid ist

Parameterdarstellung: $x(u,v) = (a \cos u \cos v)^3$ $y(u,v) = (b \sin u \cos v)^3$
 $z(u,v) = (c \sin v)^3$

mit $-\pi/2 < u < \pi/2$ und $-\pi < v < \pi$

Der Spezialfall a = b = c = 1 ergibt ein hyperbolisches Oktaeder (Abbildung).

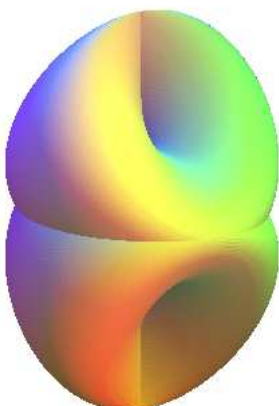
Kleinsche Flasche

Die Kleinsche Flasche (benannt nach dem Mathematiker Felix Klein, 1849 - 1925) gehört sicherlich zu den

interessantesten mathematischen Flächen. Es handelt sich um eine sogenannte nichtorientierbare Fläche, das heißt "Innen" und "Außen" können nicht voneinander unterschieden werden. Läuft man auf einer der Linien die Flasche

entlang, so gelangt man ohne Übergang von Innen nach Außen und umgekehrt - gut ist dies in der Drahtgitterdarstellung zu erkennen.

Wie auch das Möbiusband ist die kleinsche Flasche eine zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, die nicht orientierbar ist. Im Gegensatz zum Möbiusband kann die Kleinsche Flasche nur mit Selbstdurchdringung in den dreidimensionalen Euklidischen Raum R³ eingebettet werden. Ohne Selbstdurchdringung ist dies aber für den R⁴ und höhere Dimensionen möglich.



Der Name „kleinsche Flasche“ ist aus einem Übersetzungsfehler ins Englische entstanden. Die ursprüngliche Bezeichnung dieses Objekts war im Deutschen Kleinsche Fläche. Das wurde allerdings falsch ins Englische mit Klein Bottle (Flasche statt Fläche) übersetzt. Nachdem sich diese Bezeichnung durchgesetzt hat, wird nun auch im Deutschen der Begriff Flasche verwendet.

Die linke Darstellung zeigt eine topologisch verformte Kleinsche Flasche.

Parameterdarstellung

$$x = \cos u [\cos(u/2) (\sqrt{2} + \cos v) + \sin(u/2) \sin v \cos v]$$

$$y = \sin u [\cos(u/2) (\sqrt{2} + \cos v) + \sin(u/2) \sin v \cos v]$$

$$z = - \sin(u/2) (\sqrt{2} + \cos v) + \cos(u/2) \sin v \cos v$$

Im R^4 kann die Kleinsche Flasche durch die Gleichungen

$$x = (a + b \cos v) \cos u$$

$$y = (a + b \cos v) \sin u$$

$$z = b \sin v \cos (u/2)$$

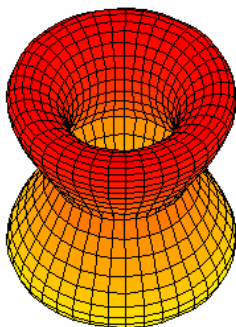
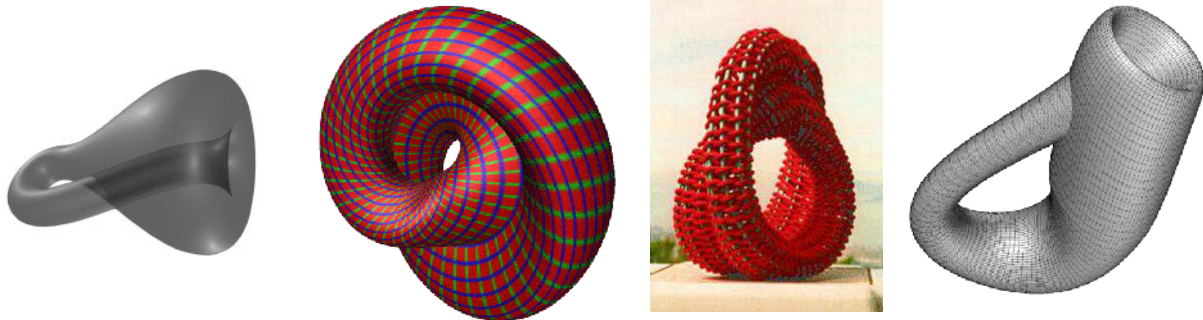
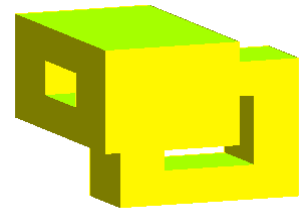
$$t = b \sin v \sin (u/2)$$

beschrieben werden. Durch Ian Stewart wird eine Gleichung in kartesischen Koordinaten angegeben:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 1) ((x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1)^2 - 8z^2) + 16xz (x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1) = 0$$

Eine Kleinsche Flasche, bestehend aus Würfelteilen ist rechts zu sehen.

Weitere interessante Ausführungen einer Kleinschen Flasche sind:



Jeener-Klein-Fläche

Die Jeener-Klein-Fläche wird durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$w = ((s + 1)/4) \cos((s + 1) u + \pi/t) + \sqrt{a}$$

$$x = s \cos u + \cos(s u) - w \sin((s - 1) u/2) \cos v$$

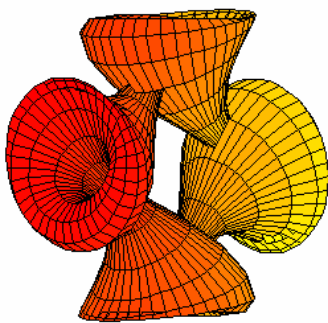
$$y = w \sin v$$

$$z = s \sin u - \sin(s u) - w \cos((s - 1) u/2) \cos v$$

Sie ist eine Erweiterung der Kleinschen Flasche und wurde u.a. von Bruce Puckett in "Some Standard Parametric Surfaces" beschrieben.

Die Konstanten s , t und a bestimmen das Aussehen der Figur. Zur Darstellung der Fläche können die beiden Parameter u und v zum Beispiel Werte aus dem Intervall $[0 ; 2\pi]$ annehmen.

Die Abbildungen zeigen oben die Jeener-Klein-Fläche mit $s = 1$ und $t = 3$, unten für $s = 2$ und $t = 4$.



$$y = w \sin v$$

$$z = m \sin u - \sin(m u) + ((m-1)/m) w \cos((m+1) u/2) \cos v$$

Die Konstanten m und t bestimmen das Aussehen der Figur.

Zur Darstellung der Fläche können die beiden Parameter u und v zum Beispiel Werte aus dem Intervall $[0 ; 2\pi]$ annehmen.

Die Abbildungen zeigen oben die Bonan-Jeener-Klein-Fläche mit $m = 3$ und $t = 1,5$, unten für $m = 4$ und $t = 1,5$.

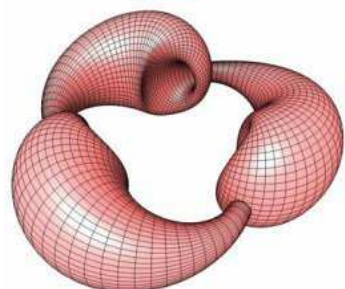
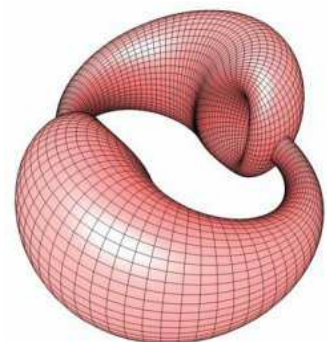
Bonan-Jeener-Klein-Fläche

Die Bonan-Jeener-Klein-Fläche wird durch folgende Gleichungen dargestellt. Sie ist ebenfalls eine Erweiterung der Kleinschen Flasche.

$$w = \sin((m - 1) u) + t$$

$$x = m \cos u - \cos(m u) - ((m-1)/m) w \sin((m+1) u/2) \cos v$$

$$y = w \sin v$$



Boysche Fläche

... eingeführt von Werner Boy 1902, Schüler Hilberts

... algebraische Fläche 6.Grades

Die Boysche Fläche hat in der Mathematik eine besondere Bedeutung: Ordnet man jeder Schar untereinander paralleler Geraden einer Ebene einen unendlich fernen Punkt zu, wie es u.a. aus den Bedürfnissen der Zentralperspektive entspringt, so schließen diese jede Gerade zu einer geschlossenen Kurve ab, da man dem unendlich fernen Punkt einer Geraden auf ihr in beiden Richtungen näherkommen kann. Ohne Selbstdurchdringung ist dies nicht möglich. Die Boysche Fläche

realisiert es mit minimaler Selbstdurchdringung. Ihr Modell steht seit 1991 im Park des Mathematischen Forschungsinstitutes Oberwolfach/Schwarzwald.

Kartesische Koordinaten

$$x = a/2 ((2u^2 - v^2 - w^2) + 2vw(v^2 - w^2) + uw(u^2 - w^2) + uv(v^2 - u^2))$$

$$y = \sqrt{3} a/2 ((v^2 - w^2) + uw(w^2 - u^2) + uv(v^2 - u^2))$$

$$z = a (u + v + w)((u + v + w)^3 + 4(v - u)(w - v)(u - w))$$

mit $u^2 + v^2 + w^2 = 1$

und

$$27 z^2(z - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2) + 12z(4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4 - 2^{1/2}x^3z + 3^{1/2}xy^2z) + 18z^3(3x^2 + 3y^2 + 2z^2) + 4^{1/2}z(2x^5 - 6x^4y - 4x^3y^2 - 4x^2y^3 - 6xy^4 + 2y^5) + 4^{1/2}z^3(2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3) - 4z^4(3x^2 + 3y^2 + 2z^2) - 20z^2(x^2 + y^2)^2 - 16(x^2 + y^2)^3 = 0$$

Die Gleichung wurde 1984 von Francois Apéry angegeben.



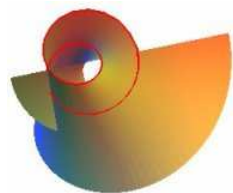
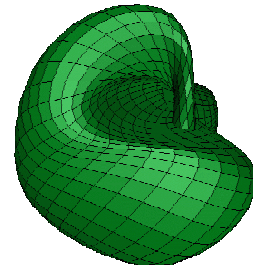
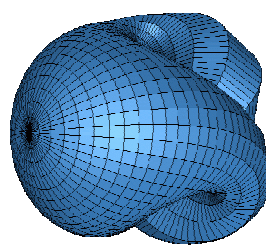
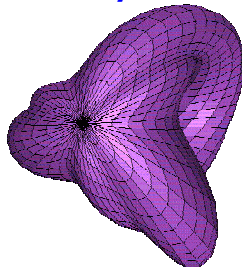
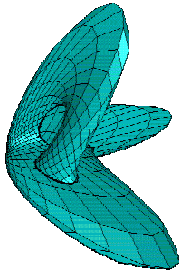
Parameterdarstellung

$$f = \cos s (1 - \sqrt{2} \sin s \cos s \sin(3t))^{-1} [\sqrt{2}/3 \cos s \cos(2t) + 2/3 \sin s \cos t]$$

$$g = \cos s (1 - \sqrt{2} \sin s \cos s \sin(3t))^{-1} [\sqrt{2}/3 \cos s \sin(2t) - 2/3 \sin s \sin t]$$

$$h = \cos s (1 - \sqrt{2} \sin s \cos s \sin(3t))^{-1} \cos s, s, t \in [0; \pi]$$

Verschiedene Darstellungen der Boy'schen Fläche



Möbius-Fläche

Kartesische Parametergleichung

$$x = (a + u \cos(v/2)) \cos v \quad y = (a + u \cos(v/2)) \sin v$$

$$z = u \sin(v/2)$$

Zylindergleichung

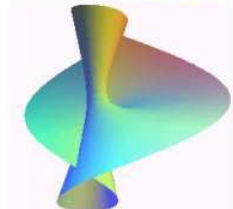
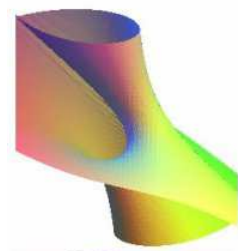
$$\rho = a + z \cot(\theta/2)$$

Kartesische Gleichung

$$(x^2 + y^2)(y - z)^2 = (ay + xz)^2 \text{ bzw.}$$

$$y((y - z)^2 - (x + a)^2) + 2x(y - z)(x + a) = 0$$

Die Möbussche Fläche ist eine Regelfläche und kann aus dem Möbius-Band entwickelt werden.



Tannerische Birne

Die Fläche (franz. poire de Tannery, engl. Tannery's pear) wurde 1892 von dem französischen Mathematiker Jules Tannery (1848-1910) eingeführt.

Kartesische Koordinaten

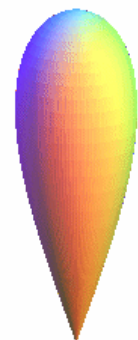
$$x = k/2 a \sin(2u) \cos v \quad y = k/2 a \sin(2u) \sin v$$

$$z = a \sin u \quad 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$$

Zylinderkoordinatengleichung

$$a^2 \rho^2 = k^2 z^2 (a^2 - z^2)$$

Die Tannerische Birne entsteht bei Rotation einer halben Lemniskate des Gerono.



Alysseide

Rotationskörper, der bei Rotation der Kettenlinie um die z-Achse (Symmetrieachse) entsteht

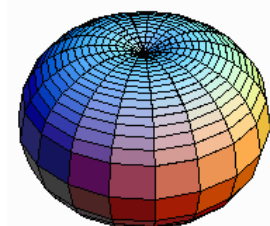
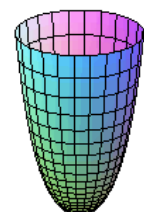
Zylinderkoordinaten

$$z = a \cosh \rho/a$$

Kartesische Koordinaten

$$x = a u \cos v, y = a u \sin v$$

$$z = a \cosh u \text{ mit } u = \rho/a$$



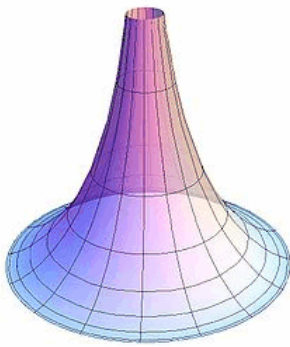
Apfel-Körper

Dieser Rotationskörper wurde erstmals von Johannes Kepler beschrieben.

Er entsteht, wenn zwei kongruente sich schneidende Kreise um die Achse durch die freien Bogenmittelpunkte rotieren. Die Begrenzungskurve ergibt sich zu

$$z = \pm \sqrt{(R^2 - (x - r)^2)}$$

mit $R > r$ und $-(r+R) \leq x \leq r+R$. Der Körper entspricht der äußeren Hülle eines Spindle-Torus.



Pseudosphäre

Als allgemeine Pseudosphären werden Flächen bezeichnet, die eine konstante negative Krümmung besitzen.

1968 führte Eugenio Beltrami den Begriff Pseudosphäre für eine Fläche mit dem Radius R ein, deren Krümmung stets $-1/R^2$ ist, in Analogie zur Kugel des Radius R die eine Krümmung von $1/R^2$ aufweist. Die erste ausführliche Diskussion der Fläche wurde 1839 von Minding gegeben.

Die Fläche ist vollständig geschlossen und zusammenhängend.

Die halbe Pseudosphäre mit dem Radius 1 entsteht, wenn die Traktrix-Kurve eine Rotationsfläche bildet.

Schon 1639 bewies Christiaan Huygens, dass sowohl Volumen als auch

Oberfläche der Pseudosphäre endlich sind. Hat die Pseudosphäre den Radius R , so wird

$$\text{Volumen } V = \frac{2}{3} \pi R^3$$

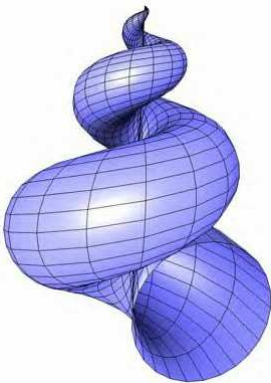
$$\text{Oberfläche } A = 4 \pi R^2$$

Parameterdarstellung

$$x = a \sin u \cos v$$

$$y = a \sin u \sin v$$

$$z = a(\ln \tan(u/2) + \cos u)$$



Schnecke

Die Schnecke wird durch folgende Gleichungen dargestellt. Um die Formeln

etwas übersichtlicher zu halten benutzen wir die Konstante h . $h = e^{u/(6 \pi)}$

$$x = a(1 - h) \cos(u) \cos(0.5 v) \cos(0.5 v); y = 1 - e^{u/(6 \pi)} - \sin(v) + h \sin(v); z = a(-1 + h) \sin(u) \cos(0.5 v) \cos(0.5 v)$$

Zur Darstellung der Fläche müssen die beiden Parameter u und v folgende Werte (Definitions-bereich) annehmen: u ist Element aus der Zahlenmenge $[0, 6\pi]$; v ist Element aus der Zahlenmenge $[0, 2\pi]$. Der Wert u_{\max} bestimmt die Anzahl Windungen der Schnecke, bei $u_{\max} = 6\pi$ sind es 3 Windungen.

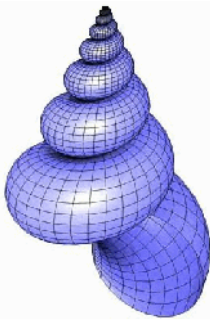
Schnecken und Muscheln

Auch andere Schnecken und Muscheln lassen sich parametrisch erzeugen.

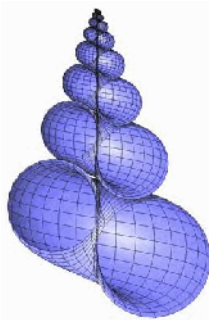
Allgemeine Gleichungen:

$$x = \exp(w u) (h + a \cos v) \cos(cu) \quad y = R \exp(w u) (h + a \cos v) \sin(cu) \quad z = \exp(w u) (k + b \sin v)$$

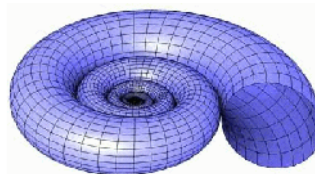
Die Konstanten a, b, c, h, k , und w bestimmen das Aussehen der Figur. Die Konstante R bestimmt die Drehrichtung der Spirale, R kann nur die Werte -1 oder 1 annehmen. Die Parameter u und v sind aus den Intervallen $[u_{\min}, u_{\max}]$ bzw. $[0, 2\pi]$ zu wählen.



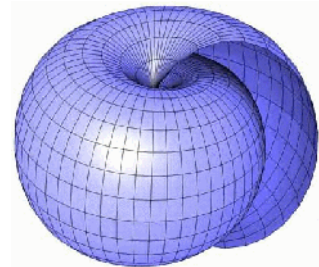
Pseudoheliceras subcatenatum
 $a = 1.6, b = 1.6, c = 1.0,$
 $h = 1.5, k = -7.0, w =$
 $0.075, u_{\min} = -50.0, u_{\max}$
 $= -1.0$



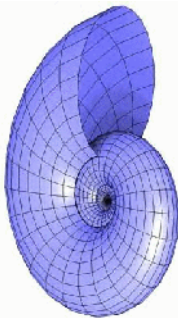
Pseudoheliceras subcatenatum
 Querschnitt



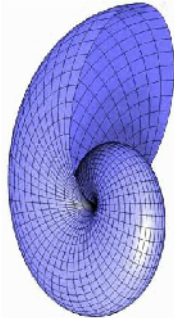
Astroceras
 $a = 1.25, b = 1.25, c = 1.0,$
 $h = 3.5, k = 0, w = 0.12,$
 $u_{\min} = -40.0, u_{\max} = -1.0$



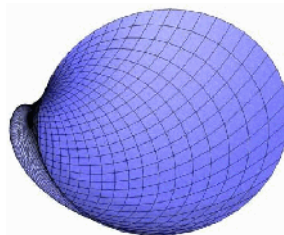
Bellerophina
 $a = 0.85, b = 1.2, c = 1.0,$
 $h = 0.75, k = 0, w = 0.06,$
 $u_{\min} = -10.0, u_{\max} = -1.0$



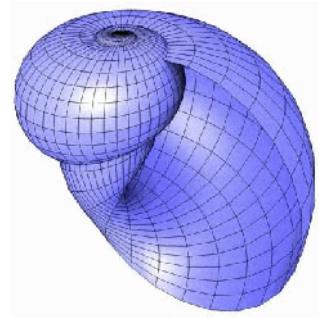
Eupholites
 $a = 0.6, b = 0.4, c = 1.0,$
 $h = 0.9, k = 0, w =$
 $0.1626, u_{\min} = -40.0, u_{\max}$
 $= -1.0$



Nautilus
 $a = 1, b = 0.6, c = 1.0, h$
 $= 1.0, k = 0, w = 0.18,$
 $u_{\min} = -20.0, u_{\max} = 1.0$



Mya araneraria
 $a = 0.85, b = 1.6, c = 3.0, h$
 $= 0.9, k = 0, w = 2.5, u_{\min} =$
 $-1.0, u_{\max} = 0.52$



Natica stellata
 $a = 2.6, b = 2.4, c = 1.0, h$
 $= 1.25, k = -2.8, w = 0.18,$
 $u_{\min} = -20.0, u_{\max} = 1.0$

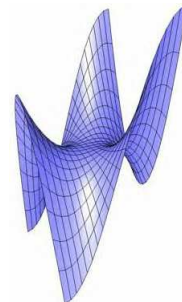
Eine künstliche Spirale im Vergleich zur Natur



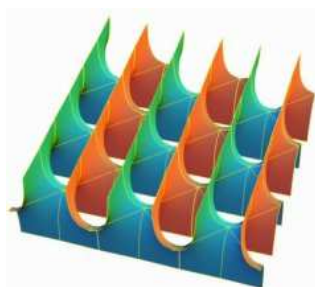
Sattelflächen

Sattelflächen lassen sich durch einfache quadratische und kubische Funktionen beschreiben, wobei zwei unabhängige Variable (x und y) notwendig sind und die z -Koordinate (Höhe) als Funktion $z = f(x,y)$ dieser Variablen ausgedrückt wird.

Der in der Darstellung gezeigte "Affensattel" wird durch die Gleichung $z = u^3 - 3u$



v^2 beschrieben. Betrachtet man die einzelnen Kurven, so kann man in der einen Richtung deutlich kubische Parabeln und in der anderen Richtung normale quadratische Parabeln betrachten. Dabei handelt es sich um Koordinatenlinien, also Kurven für die eine der Variablen x oder y konstant ist. Setzt man in der Gleichung für x oder für y eine feste Zahl ein, so erhält man ganz normale Graphen von quadratischen (falls x konstantgehalten wird) oder kubischen Funktionen (wenn y konstant bleibt).



Scherksche Fläche

Die Fläche wurde 1834 erstmals untersucht und benannt nach dem deutschen Mathematiker Heinrich Ferdinand Scherk (1798-1885).

Die Fläche ist eine Minimalfläche.

obere Abbildung: Scherksche Fläche 1. Ordnung

untere Abbildung: die Scherksche Fläche ergibt sich als Minimalfläche die von einer Seifenhaut gebildet wird

Kartesische Koordinaten $e^{z/a} \cos(x/a) = \cos(y/a)$

mit $z = a (\ln(\varepsilon \cos(x/a)) - n(\varepsilon \cos(y/a)))$ und $\varepsilon = \pm 1$

Äquivalente Form $\tanh(z/(2a)) = \tan((x+y)/(2a)) \tan((x-y)/(2a))$

Die zweite Scherksche Fläche ergibt sich mit

$\sin(z/a) = \sinh(x/a) \sinh(y/a)$



Sinusförmiger Kegel

auch: Sinuskegel, franz.: cône sinusoidal, engl.: sinusoidal cone

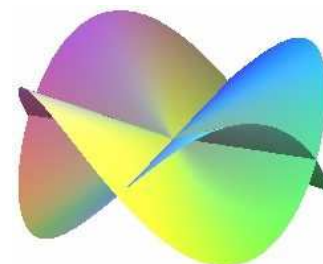
Zylindergleichung

$z = k\rho \cos(n\theta)$

Kartesische Koordinatengleichung

$x = u \cos v \quad y = u \sin v$

$z = ku \cos(nv)$



Die Fläche ist eine rationale Fläche der Ordnung n

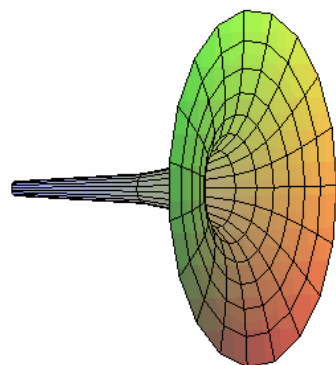
Von oben nach unten sind links abgebildet: $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$

Sekanskegel

franz.: cône sécantoïdal

Für den Sekanskegel wird ein Kegel analog mittels veränderter Gleichung

für z definiert $z = ku \sec(nv)$



Gabriels Horn

Die Raumfläche wurde erstmals 1641 von Roberval und Torricelli untersucht.

Zylindergleichung $\rho z = a^2$

Kartesische Gleichung $(x^2 + y^2) z^2 = a^4$

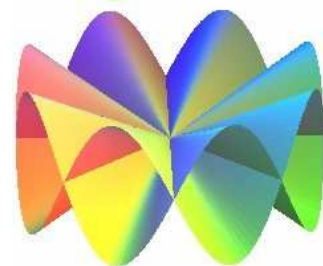
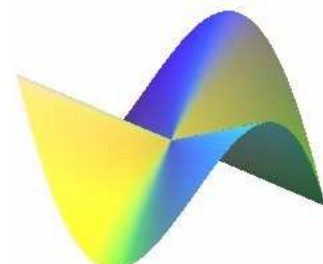
Parametergleichung $x = au \cos v$

$y = bu \sin v$

$z = a/u$

Die Fläche hat für $z > a$ ein endliches Volumen von $V = \pi a^3$ aber eine unendlich große Oberfläche, da

$2\pi a^2 \int_1^\infty \sqrt{1+u^4}/u^3 du = \infty$.

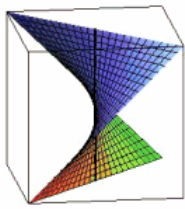


Folgendes Gedankenexperiment wird dazu angestellt:

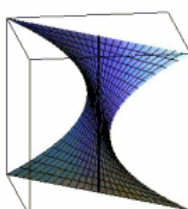
Die Oberfläche von Gabriels Horn kann nicht "lackiert" werden, da die Oberfläche unendlich ist.

Andererseits kann man mit einer Lackmenge von πa^3 das Gebilde vollständig(!) ausfüllen. Damit wäre die Oberfläche auch vollständig bedeckt. Kurios!

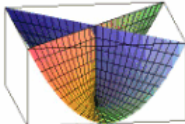
Gabriels Horn entsteht bei der Rotation einer gleichseitigen Hyperbel. Der Name wurde nach der Trompete des biblischen Erzengels Gabriel gegeben.



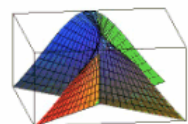
hyperbolisches Paraboloid
 $z = y/x$



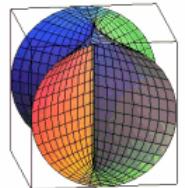
hyperbolisches Konoid
 $z^2 = y/x$



Whitney-Fläche
 $z = (y/x)^2$



Plücker-Konoid
 $z = (1 - (y/x)^2) / (1 + (y/x)^2)$



Kegelkonoid
 $z^2 + (y/x)^2 = 1$

Konoid

Unter dieser Bezeichnung fasst man eine Vielzahl von Flächen zusammen. Allen gemeinsam ist die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= u \cos v \\ y &= u \sin v \\ z &= h(v) + mu \cos v \end{aligned}$$

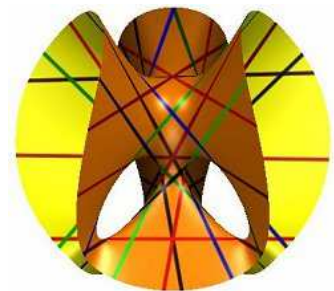
wobei $h(v)$ eine Funktion ist, die das endgültige Aussehen des Konoids beeinflusst. Die Abbildung enthält einige Beispiele.

Der ursprünglich von Archimedes geprägte Begriff Konoid (griechisch: kegelartig) bezeichnet Rotationsparaboloide und zweischalige Rotationshyperboloide.

Kubische Flächen, Clebsch-Fläche

Eine kubische Fläche wird durch eine kubische Gleichung mit drei Variablen beschrieben.

In einem Briefwechsel 1849 zwischen Arthur Cayley (1821-1895) in Cambridge und George Salmon (1819-1904) in Dublin wurde zum ersten Mal festgestellt, dass es auf einer durch eine kubische Gleichung definierten glatten Fläche immer genau 27 Geraden gibt.



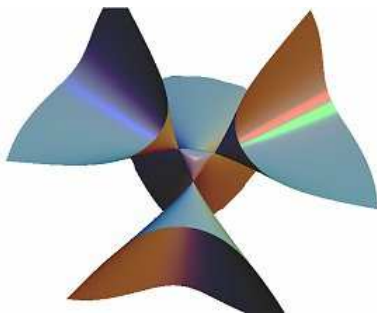
Durch Alfred Clebsch wurde 1862 ein Beispiel angegeben (Abbildung), das auch Clebsche Diagonalfäche genannt wird.

Die kubische Definitionsgleichung ist

$$81(x^3 + y^3 + z^3) - 189(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 54xyz + 126(xy + xz + yz) - 9(x^2 + y^2 + z^2) - 9(x + y + z) + 1 = 0$$

Zur Weltausstellung 1894 in Chicago wurde ein Modell der Clebsch-Fläche als deutscher Beitrag vorgeführt.

Zum 150. Geburtstag von Felix Klein 1999 wurde eine 2,50 m große Kopie der Clebschen Diagonalfäche im Innenhof der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Düsseldorfer Universität aufgestellt. Die Plastik stammt von Claudia Carola Weber und Ulrich Forster.



Cayley-Fläche

Die kubische Fläche wurde 1850 von dem englischen Mathematiker Arthur Cayley eingeführt.

Fläche 1.Art:

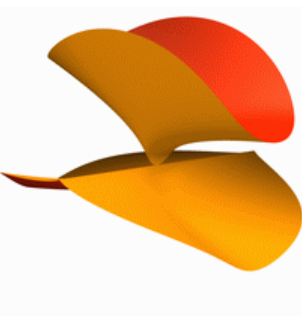
Homogene Gleichung $1/X_1 + 1/X_2 + 1/X_3 + 1/X_4 = 0$
mit Summe aller $X_i X_j X_k = 0$ für $1 \leq i < j < k \leq 4$

Fläche 2.Art:

Durch Ersetzen $X_1 = X, X_2 = Y, X_3 = Z$ und $k X_4 = T - (X+Y+Z)$ ergibt sich aus der 1.Art die homogene Gleichung
 $(X+Y+Z-T)(XY+YZ+ZX) = kXYZ$.

Fläche 3.Art: $(X^2+Y^2+Z^2)T + 2XYZ = T^3$

Fläche 4.Art: $4(X^3+Y^3+Z^3+T^3) = (X+Y+Z+T)^3$



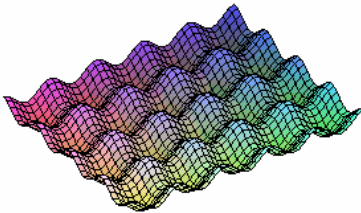
Calyx

Die Calyx-Fläche mit der Gleichung $x^2 + y^2z^3 = z^4$ hat eine Gerade als singulären Ort.

Der untere Teil der Fläche hat spitzenartige Singularitäten entlang dieser Geraden, wohingegen der obere Teil die Gerade in einem Punkt, dem Ursprung, tangential berührt.

Das reelle Bild täuscht, da das definierende Polynom irreduzibel ist und die Fläche somit aus nur einer algebraischen Komponente besteht, und nicht aus zwei wie die Abbildung zeigt.

Quelle: Programm Surfer

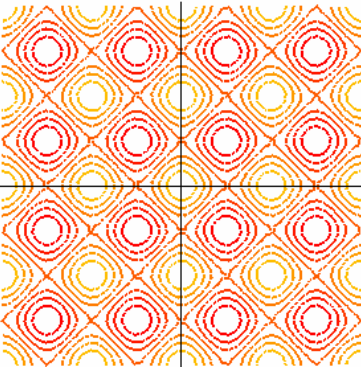


Eier-Schachtel-Fläche

Diese Fläche entsteht durch Translation und spiegelt ungefähr die Form von Eierpackungen wieder, deshalb auch der Name. Während der Translation wird eine Sinuskurve senkrecht zu einer weiteren Sinuskurve bewegt.

Kartesische Gleichung $z = a (\sin(x/b) + \sin(y/b))$

Zeichnet man die Linien gleichen Niveaus, gleicher Höhe, so entsteht das untere Bild.

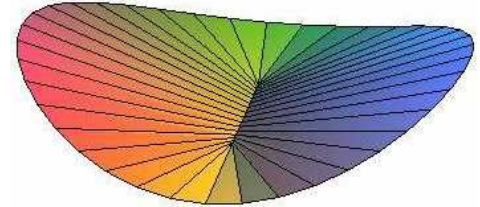


$$x = ((1 - u) a + ub) \cos v$$

$$y = b u \sin v$$

Guimard-Fläche

Durch den französischen Mathematiker und Architekten Hector Guimard (1867-1942) wurde eine weitere Regelfläche untersucht und auch in der Architektur genutzt, u.a. als Dachfläche eines Eingangs zu einer Pariser Metro-Station.



Kartesische Koordinaten

$$z = c u \sin^2 v$$



Römische Fläche

Diese Fläche wurde 1844 erstmals von Steiner untersucht. Er benannte sie während seines Aufenthaltes in Rom.

In der englischsprachigen Fachliteratur wird die Fläche Steiner-Fläche genannt.

Kartesische Koordinaten

$$x = a \sin 2u \cos v \quad y = a \sin 2u \sin v$$

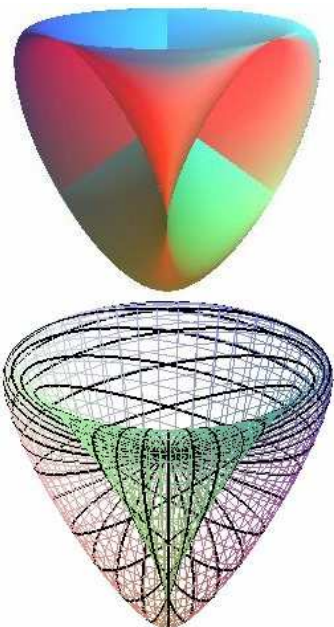
$$z = a \sin^2 u \sin 2v$$

Darstellung als Fläche 4. Ordnung nach Kümmer $f^2 = pqrs$ mit

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \quad p = z - a + x\sqrt{2}$$

$$q = z - a - x\sqrt{2} \quad r = z + a + y\sqrt{2}$$

$$s = z + a - y\sqrt{2}$$



Delaunaysche Fläche

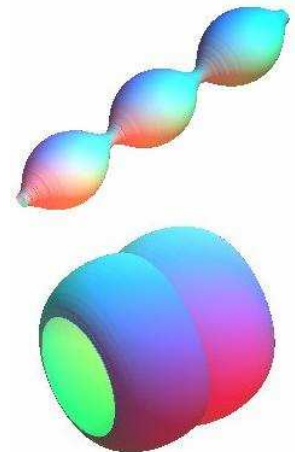
Die Fläche wurde 1841 von Delaunay eingeführt, und 1863 durch Lindelöf, 1873 durch Plateau untersucht.

Kartesische Gleichung

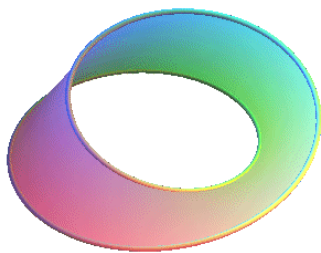
$$x = x(u) \quad y = y(u) \cos v$$

$$z = y(u) \sin v$$

wobei $x = x(t)$, $y = y(t)$ die Gleichung der Rollkurve von Delaunay darstellt. Damit ergibt sich die Fläche als Rotationsfläche der Delaunayschen Rollkurve um die x-Achse.



Möbius-Band



... nach August Ferdinand Möbius (1790-1868)

Der deutsche Mathematiker und Astronom

Möbius entwickelte eine merkwürdige topologische Figur, welche nach ihm benannt wurde. In einem postum erschienenen Artikel beschreibt er sie als ein Band, das keine Rückseite hat.

Zur Konstruktion des Möbius-Bandes benutzt man einen längeren Papierstreifen und klebt dessen Enden zusammen. Vor dem Zusammenkleben verdreht man aber ein Ende um 180° .

Schneidet man den Möbiusring längs der Mittellinie auseinander, entsteht ein Ring, der doppelt so lang, ineinander verdreht ist und zwei Seiten hat.

Schneidet man diesen Ring erneut in der Mitte, entstehen zwei getrennte, ineinander verschlungene Ringe, welche jeweils mehr als eine Seite haben.



Parameterdarstellung

$$x = [R + s \cos(t/2)] \cos t \quad y = [R + s \cos(t/2)] \sin t \quad z = s \sin(t/2)$$

mit $-breite < s < breite$ und $0 < t < 2\pi$

Wunderlich-Darstellung:

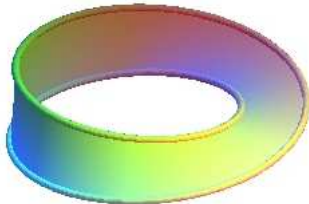
$$x = (at + bt^3 + ct^5)/(1 + d^2t^2 + 2det^4 + e^2t^6),$$

$$y = (dt + et^3)/(1 + d^2t^2 + 2det^4 + e^2t^6)$$

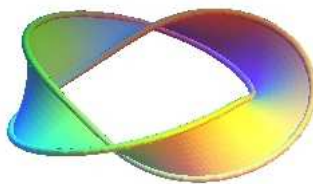
$$z = -f/(1 + d^2t^2 + 2det^4 + e^2t^6) \quad \text{mit } a = 1/2, b = 1/3, c = 1/6, d = 2/3, e = 1/3, f = 4/5.$$

Möbius-Bänder existieren für mehrere Verdrehungen. Dabei entsteht nur für eine ungerade Anzahl von 180° Drehungen ein einseitiges Band.

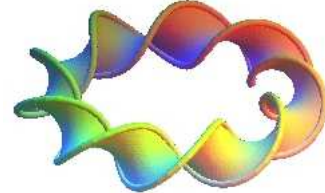
1 x 180° Drehung



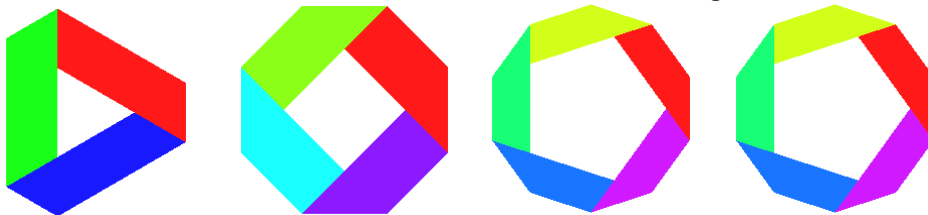
3 x 180° Drehung



9 x 180° Drehung



Möbius-Bänder müssen nicht notwendigerweise immer als runde Bänder gezeichnet werden.



In der Darstellung sind aber das 2. Band (4 Halbdrehungen) und das 4. (6 Halbdrehungen) keine wirklichen Möbius-Bänder, da diese zwei Seiten besitzen.



Der "Koloss von Frankfurt" (etwa 5 Meter hoch) von Max Bill (1908-1994) wurde 1986 aufgestellt.

Er erweist sich bei näherer Betrachtung als vielfach gewundenes Möbius'sches Band. Dieses Band, benannt nach dem Mathematiker August Ferdinand Möbius, ist eine einseitige Fläche, wie man sie erhält, wenn man einen Papierstreifen mit um 180 Grad verdrehten Enden zusammenklebt.

Ohne den Rand zu überschreiten, kann man auf die Rückseite der Ausgangsstelle gelangen. Damit verliert der Begriff Rückseite für diese Fläche überhaupt seinen Sinn.

Möbius-Bänder sind beliebte Objekte für Logos von Firmen, Organisationen oder diversen Veranstaltungen:



Logo der Firma „Renault“

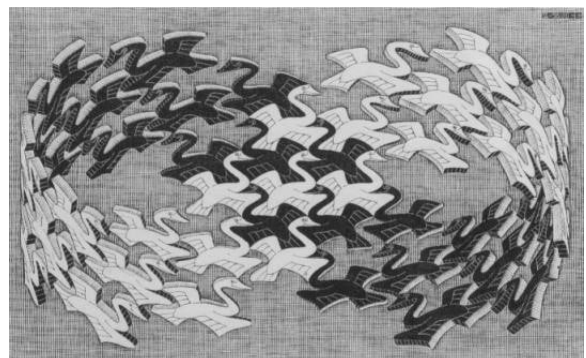
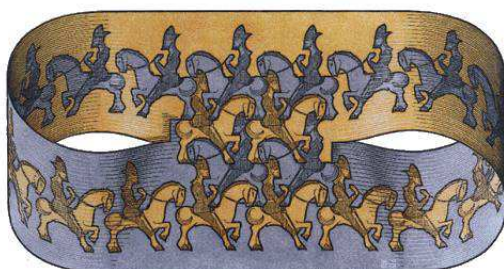
Recycle-Logo

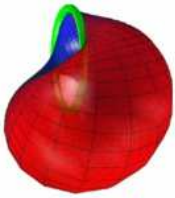


Logo der Internationalen Mathematik-Olympiade 1983 in Paris



Die besonderen Eigenschaften des Möbius-Bandes faszinierten auch M.C.Escher, der die Fläche mehrfach in seinen Grafiken verwendete.





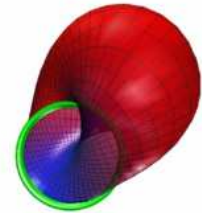
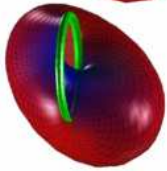
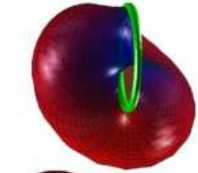
Sudanesisches Möbius-Band

Das Konzept des Möbius-Bandes kann auch in den dreidimensionalen Raum übertragen werden. Dieses Gebilde wird Sudanesisches Möbius-Band genannt.
Parameterdarstellung

$$z_1 = \sin \eta e^{i\phi} \quad z_2 = \cos \eta e^{i\phi}$$

Der Parameter η läuft von 0 bis π , ϕ von 0 bis 2π .

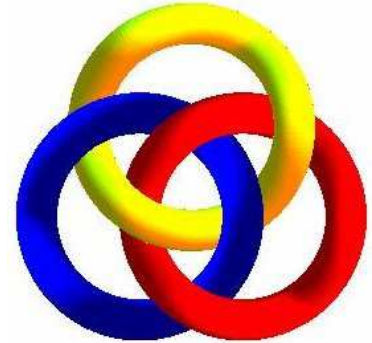
Die linken Abbildungen stellen stereografische Projektionen dar.



Borromäische Ringe

Die borromäischen Ringe erhielten ihren Namen nach der berühmten italienischen Familie Borromeo, die sie als Wappensymbol annahm. Diese finden sich am Schloss auf der Insel Ísola Bella, einer der borromäischen Inseln, im Lago Maggiore.

Die drei ineinander verflochtenen Ringe findet man schon auf Skulpturen des 9. Jahrhunderts auf der schwedischen Insel Gotland. Die borromäischen Ringe waren bei den nordischen Völkern als "Dreieck von Odin" bekannt.



Kartesische Parameterdarstellung

$$x = a \cos t + a_1, y = a \sin t + a_1, z = b \cos 3t$$

mit $(a_1, b_1) = (a/2, a/2 \sqrt{3})$, $(a_2, b_2) = (-a/2, a/2 \sqrt{3})$ und $(a_3, b_3) = (0, a \sqrt{3})$

Die Konstruktion aus drei Ellipsen ist ebenfalls möglich

$$E_1: x = a \cos t, y = b \sin t, z = 0$$

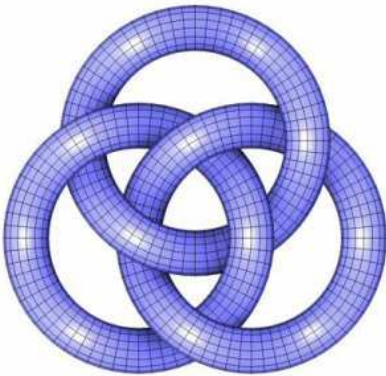
$$E_2: x = 0, y = a \cos t, z = b \sin t$$

$$E_3: x = b \sin t, y = 0, z = a \cos t$$

Für die Verbindung von drei Ringen gibt es mehrere Möglichkeiten.

In den "wahren" borromäischen Ringen durchdringen sich die Ringe nicht paarweise. Es reicht aus, einen Ring zu entfernen, um die anderen beiden zu trennen.

Die Ringe von Borromeo gelten daher als ein starkes Symbol des notwendigen Zusammenhaltes einer Gruppe. Firmen und Handelsgesellschaften benutzen es als Logo, Hochschulen lassen sie an ihrem Eingang thronen, usw.



Die borromäischen Ringe sind 3 einzelne Ringe die sich nicht berühren aber nicht voneinander getrennt werden können. Diese Ringe werden auch durch folgende Gleichungen dargestellt.

$$\text{Ring 1: } x = (R + r \cos v) \cos u \\ y = r \sin v + 3 \sin(3u + \pi/2) \\ z = (R + r \cos v) \sin u + R \sqrt{3}/3$$

$$\text{Ring 2: } x = (R + r \cos v) \cos u + 0,5 R \\ y = r \sin v + 3 \sin(3u + \pi/2) \\ z = (R + r \cos v) \sin u - R \sqrt{3}/6$$

$$\text{Ring 3: } x = (R + r \cos v) \cos u - 0,5 R \\ y = r \sin v + 3 \sin(3u + \pi/2) \\ z = (R + r \cos v) \sin u - R \sqrt{3}/6$$

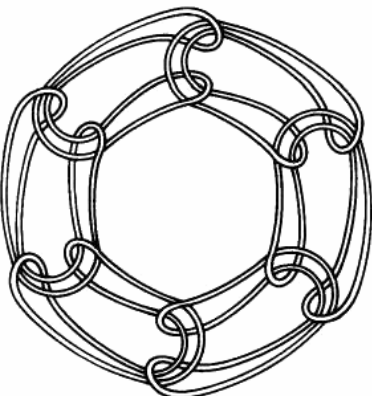
Die Konstanten R , und r bestimmen das Aussehen der Figur.

Zur Darstellung der Fläche können die beiden Parameter u und v zum

Beispiel folgende Werte (Definitionsbereich) annehmen:

u ist Element aus der Zahlenmenge $[0, 2\pi]$

v ist Element aus der Zahlenmenge $[0, 2\pi]$



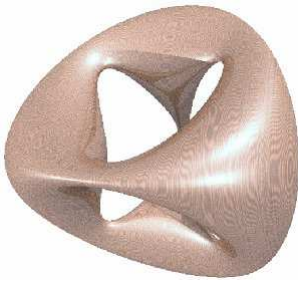
Brunnsche Verschlingung

Unter einer Brunnischen Verschlingung (nach Hermann Brunn, 1892) versteht man eine Verallgemeinerung der borromäischen Ringe.

Dabei sind mehrere geschlossene Ringe verflochten.

Für die borromäischen Ringe sind drei Ringe mit sechs Kreuzungen verknüpft.

siehe <http://www.mathcurve.com/courbes3d/brunnien/brunnien.shtml>



Fläche höherer Ordnung, Nordstrand-Oberfläche

... Oberflächen von Körpern im dreidimensionalen Raum, welche durch Gleichungen höheren als 2. Grades dargestellt werden können.

Beispiel: Nordstrand-Oberfläche

Gleichung: $(x^2+y^2+z^2-ak^2)^2 - b[(z-k)^2-2x^2][(z+k)^2-2y^2] = 0$

mit $k=5$, $a=0.95$ und $b=0.8$

... Oberfläche, die eine dem Tetraeder ähnliche Symmetrie besitzt

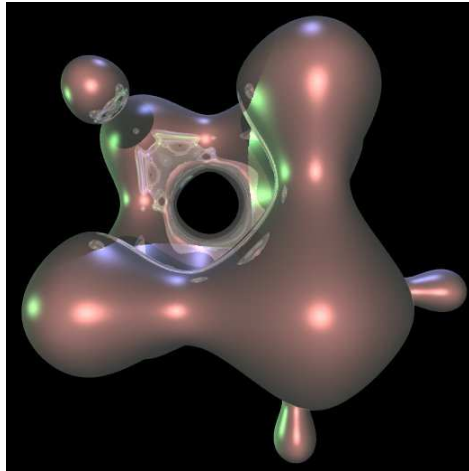
... von Nordstrand entwickelt

... erinnert in seiner Form an einen hypermodernen Stuhl der 70ziger Jahre

Fläche höherer Ordnung

Gleichung

$$z^2x^2 - z^4 - 2zx^2 + 2z^3 + x^2 - z^2 - (x^2-z)^2 - y^4 - 2x^2y^2 - y^2z^2 + 2y^2z + y^2 = 0$$



Fläche - The Blob

Fläche höherer Ordnung nach Paul Bourke

$$x^2 + y^2 + z^2 + \sin 4x + \sin 4y + \sin 4z - 1 = 0$$

Krümmung einer Fläche

Zur numerischen Charakterisierung der Krümmung einer Fläche werden zwei Größen benutzt:

1. Mittlere Krümmung einer Fläche im Punkt M

$$H = 1/2 (1/R_1 + 1/R_2)$$

2. Gaußsche Krümmung einer Fläche im Punkt M

$$K = 1 / (R_1 R_2)$$

Beispiel: Für den Kreiszyylinder mit dem Radius a ist $H = a/2$ und $K = 0$. Für elliptische Punkte ist $K > 0$ für hyperbolische $K < 0$ und für parabolische $K = 0$.

3. Berechnung von H und K, wenn die Fläche explizit $z = f(x,y)$

vorgegeben ist:

$$H = (r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)) / (2(1+p^2+q^2)^{3/2})$$

$$K = (rt - s^2) / (1+p^2+q^2)^2$$

Die Bedeutung von p, q, r, s, t ist

$$p = \partial z / \partial x$$

$$q = \partial z / \partial y$$

$$r = \partial^2 z / \partial x^2$$

$$s = \partial^2 z / \partial x \partial y$$

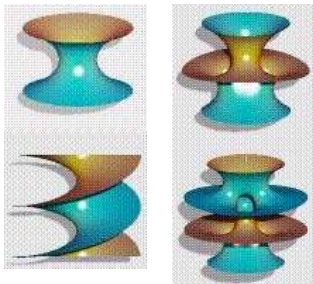
$$t = \partial^2 z / \partial y^2$$

$$h = \sqrt{1+p^2+q^2}$$

4. Klassifizierung der Flächen nach ihrer Krümmung

Minimalflächen sind Flächen, deren mittlere Krümmung H in allen Punkten Null ist, d.h. für die $R_1 = -R_2$ gilt.

Flächen konstanter Krümmung zeichnen sich durch konstante Gaußsche Krümmung aus.



Minimalflächen

Catenoid Genus 0

Costa-Hoffmann-Oberfläche

Minimalflächen ... jede durch eine geschlossene Kurve

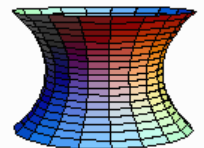
begrenzte Fläche kleinsten Oberflächeninhalts. Die

Oberfläche einer Flüssigkeit, auf die keine äußere Kraft

wirkt, ist eine Minimalfläche.

Helicoid Genus 0

Vier-Enden-Oberfläche



Catenoid

Minimalfläche mit Genus 0

...

... einzige Minimalfläche die gleichzeitig Rotationsfläche ist

... entsteht durch Rotation der Kettenlinie

... Fläche wurde 1740 erstmals von Euler untersucht

Parameterdarstellung:

$$x = c \cosh(v/c) \cos u \quad y = c \cosh(v/c) \sin u \quad z = v \quad \text{mit } 0 \leq u \leq 2\pi$$

$$dx = \sinh(v/c) \cos u \, dv - \cosh(v/c) \sin u \, du$$

$$dy = \sinh(v/c) \sin u \, dv + \cosh(v/c) \cos u \, du$$

$$dz = du$$

$$ds^2 = \cosh^2(v/c) \, dv^2 + \cosh^2(v/c) \, du^2$$

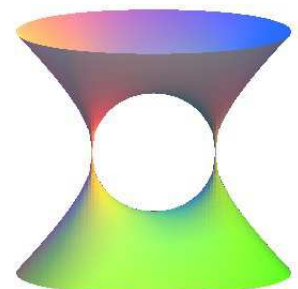
Das Catenoid geht durch Transformation aus einem Heliozid hervor, und umgekehrt.

Transformationsgleichungen ($\alpha = 0$ Catenoid ; $\alpha = \pi/2$ Heliozid)

$$x = \cos \alpha \cos v \cosh u + \sin \alpha \sin v \sinh u$$

$$y = \cos \alpha \sin v \cosh u - \sin \alpha \cos v \sinh u$$

$$z = \cos \alpha \, u + \sin \alpha \, v$$

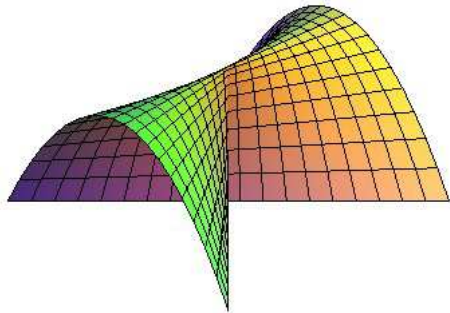


Cassini-Fläche

Die Cassini-Fläche, eine Fläche 4. Ordnung, entsteht aus den Cassinischen Kurven $(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = a^4 - e^4$, $e > 0$, $a > 0$, in dem die z-Koordinate gleich dem Parameter e gesetzt wird.

Kartesische Koordinaten $((x+a)^2+y^2)((x-a)^2+y^2) = z^4$

Die Randkurven sind konjugierte Hyperbeläste mit $x^2 - z^2 = a^2$. Das entstehende Loch im Inneren des Körpers ist ein Kreis mit $x^2 + z^2 = a^2$. Polargleichung $r r' = e^2$



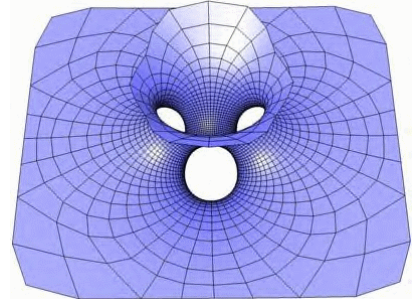
Parabolisches Konoid

... Konoidfläche die durch eine parabolische Leitlinie erzeugt wird, Kartesische Gleichung

$$a^2 z = x^2 y$$

Costa Surface

Die Costa Surface ist eine der schönsten Minimalflächen überhaupt, sie wurde zuerst 1982 vom brasilianischen Mathematiker Celso Costa



beschrieben. Bedauerlicherweise ist die Mathematik dahinter besonders kompliziert:

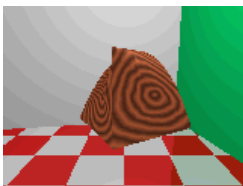
$$x = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{-\zeta(u + iv) + \pi u + \frac{\pi^2}{4e_1} + \frac{\pi}{2e_1} [\zeta(u + iv - 1/2) - \zeta(u + iv - 1/2i)]\}$$

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{-i \zeta(u + iv) + \pi u + \frac{\pi^2}{4e_1} + \frac{\pi}{2e_1} [i \zeta(u + iv - 1/2) - \zeta(u + iv - 1/2i)]\}$$

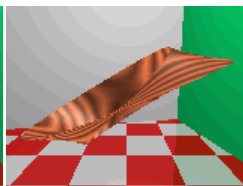
$$z = \frac{1}{4} \sqrt{4\pi} \ln \left| \frac{\wp(i + iv) - e_1}{\wp((i + iv) + e_1)} \right|$$

Bei $\zeta(z)$ handelt es sich um die Weierstrass Zeta Funktion und bei $\wp(g_2 ; g_3 ; z)$ um die Weierstrasssche Elliptische Funktion.

Flächen mit POV-Ray erzeugt



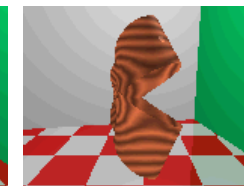
Wallis-Kegel



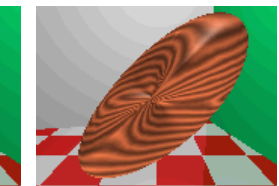
Möbius-Band



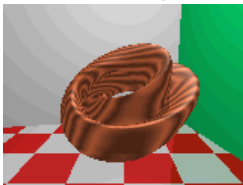
Möbius-Band



Viviani-Kurve



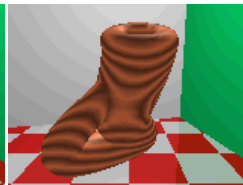
Bonete Cruzado



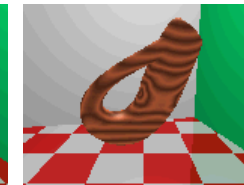
Kleinsche Flasche



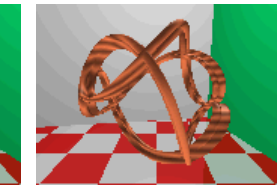
Kleinsche Flasche



Kleinsche Flasche



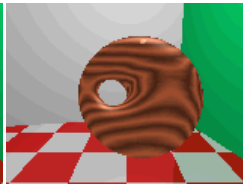
Kleinsche Flasche



Kleinsche Flasche



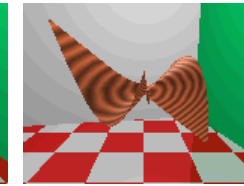
Caracola Marina



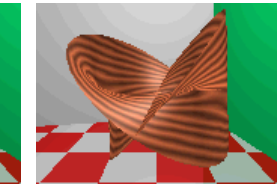
Kreiscyclide von Dupin



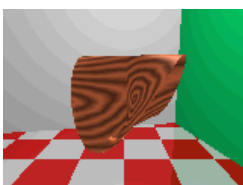
Parabolische Zyklide



Kugel von Golondrina



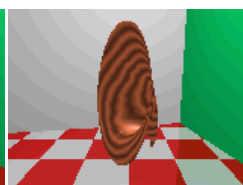
Konoid



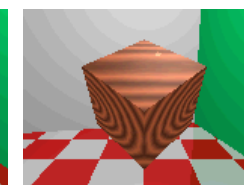
Plücker-Konoid



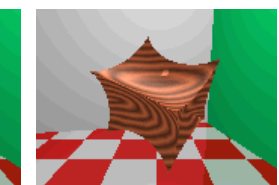
Allgem. Plücker-Konoid



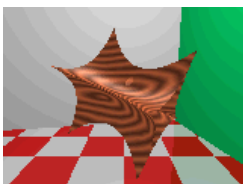
Cornucopia



Würfel



Würfelastruide



Allgemeiner Würfel



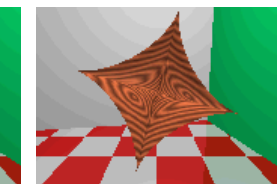
Böhmische Kuppel



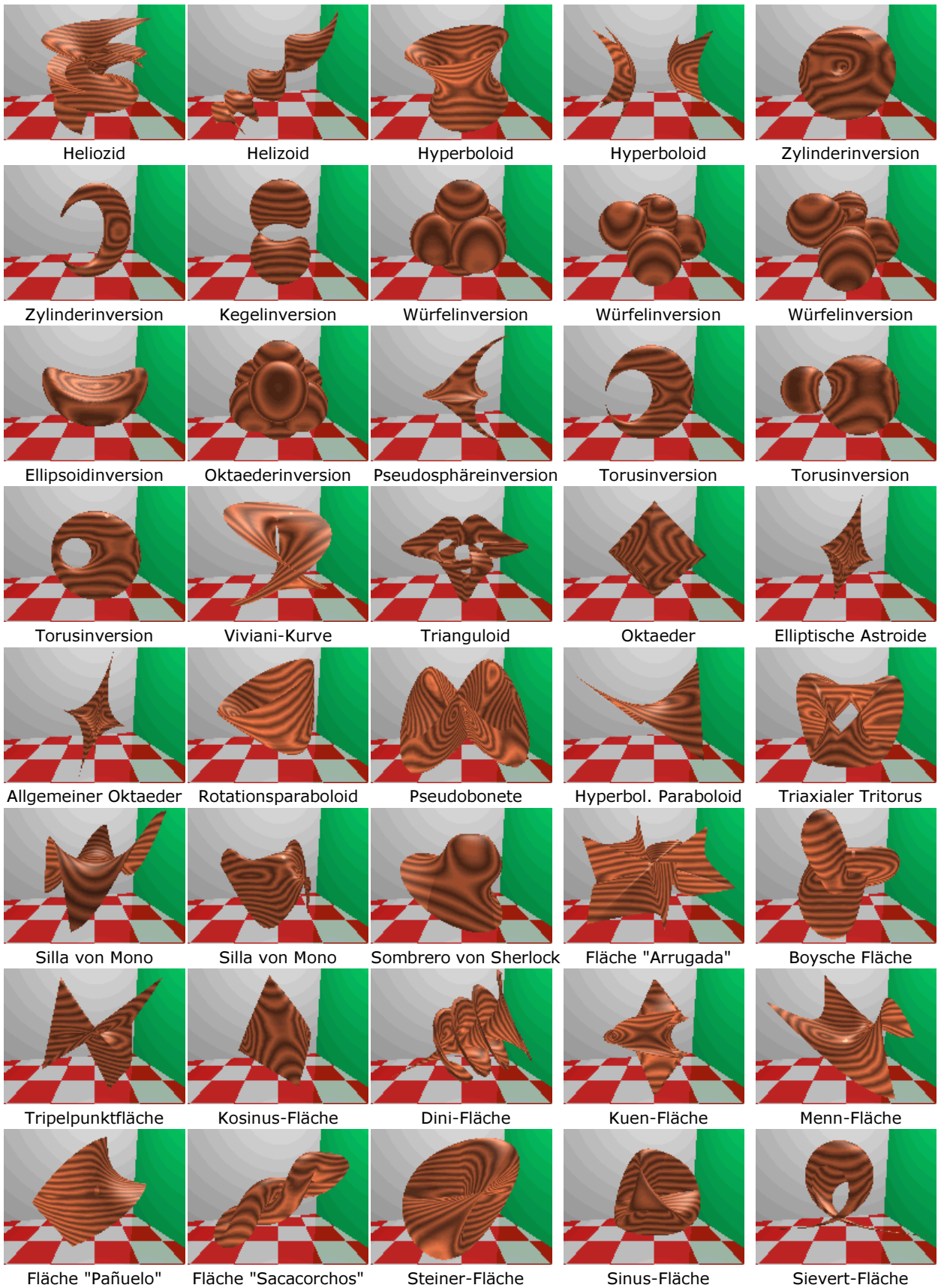
Helix



Snail-Kurve

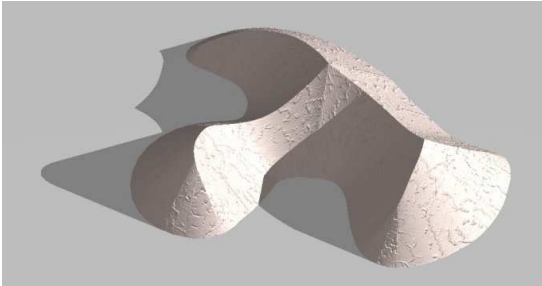
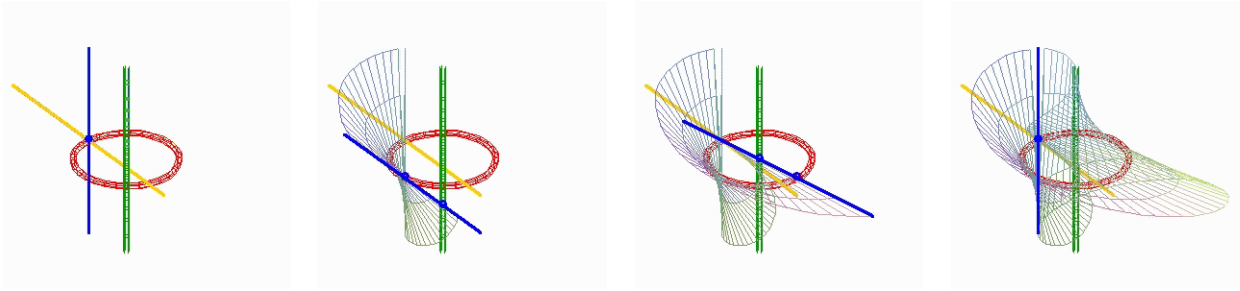


Kugelastruide



Regelfläche

... ist ein Fläche, die durch die Bewegung einer Geraden im Raum erzeugt werden kann. Einfache Beispiele sind der Kreiszyylinder oder der Kreiskegel. Eine kubische Regelfläche kann durch eine algebraische Gleichung dritten Grades beschrieben werden. In der Darstellung wird gezeigt, wie eine Gerade eine solche Regelfläche erzeugt.

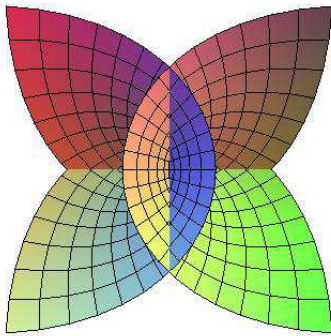


Sandhaufenfläche, Böschungfläche

Diese Fläche wurde erstmals von Monge 1807 untersucht. Die Fläche kann durch die partielle Differentialgleichung $(\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2 = \tan^2 \alpha$ beschrieben werden.
 Kartesische Gleichung:
 $x = f(u) + v f'(u)$
 $y = g(u) + v g'(u)$
 $z = \cot \alpha (\int \sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2} du + v \sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2})$



Diese sehr komplizierte Fläche beschreibt die Struktur realistischer Dünen in Sandwüsten erstaunlich gut.



Enneper-Fläche

Eine Fläche besonders schöner Form ist die Enneper-Fläche.

Parameterdarstellung $x = u - (u^3/3) + u v^2$
 $y = v - (v^3/3) + u^2 v$
 $z = u^2 - v^2$ mit $u \in [-2, 2], v \in [-2, 2]$

Kartesische Gleichung $(a(y^2-z^2)/(2z)+2/9z^2+2/3a^2)^3 = 6a^3(a(y^2-x^2)/(4z)-1/4(x^2+y^2+8/9z^2)+2/9a^2)^2$

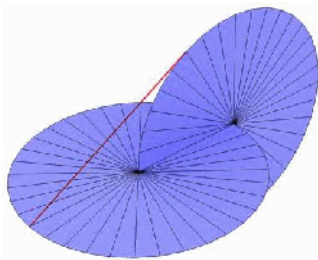
Die Kurve ist eine Kurve 9.Grades und eine Minimalfläche. Für die Krümmung ermittelt man $K = -4/(a^2(1+u^2+v^2)^2)$

Ihre besonders schöne Gestalt inspirierte auch Künstler. Die Abbildung zeigt eine Enneper-Fläche aus Eis.



Oloid

Der Oloid wurde von Paul Schatz (1898 - 1979) entwickelt. Die Basis für den Oloid bilden zwei Scheiben die um 90 ° versetzt ineinander gesteckt werden.



Die beiden Scheiben sind um den Radius r versetzt. Die rote Gerade zeigt die Verbindungslinie von der einen Scheibe zur anderen. Der Winkel zur horizontalen Scheibe beträgt 30°. Nach dem Satz von Pythagoras lässt sich die Länge der Geraden leicht berechnen.

Für den Oloid lassen sich wahrscheinlich keine parametrischen Gleichungen konstruieren die das komplette Objekt beschreiben. Die beiden Kreisausschnitte können wir aber parametrisch erzeugen.

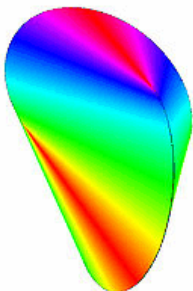
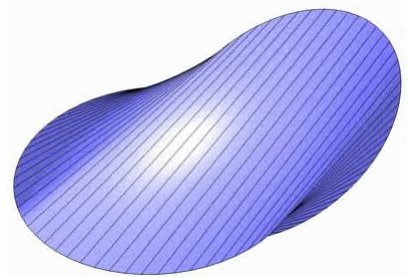
$$\begin{matrix} x = 0 & y = \sin u & z = 1 + \cos u \\ x = \sin(u) & y = 0 & z = -\cos(u) \end{matrix}$$

Zur Darstellung der Kreisausschnitte muss der Parameter u folgende Werte (Definitionsbereich) annehmen.

u ist Element aus der Zahlenmenge $[-2 \pi/3, 2 \pi/3]$

Nun verbinden wir wie alle Punkte der einem Scheibe mit den entsprechenden Punkten der anderen Scheibe und erzeugen daraus Polygone. So erhalten wir ein schönes Objekt.

Anmerkung: Das Oloid wird von esoterischen Spinnern für ihre Zwecke missbraucht. Zum Beispiel behauptet das "LichtYam Projekt", dass das Oloid "Einfluss auf die Gravitation und alles Lebendige" besitzt. Eigentlich lustig, wenn nicht Menschen in die Fänge dieser Sekten geraten würden.



Das Oloid kann als die konvexe Hülle zweier gleich großer, sich senkrecht schneidender Kreise, definiert werden, deren Mittelpunkte einen Abstand zueinander

haben, der gleich ihrem Radius r ist.

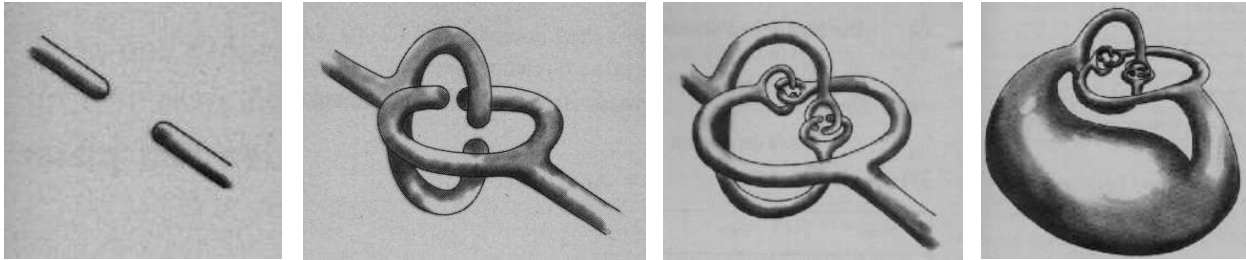
Anzahl der Ecken	0	Anzahl der Kanten	2	Anzahl der Flächen	1
Kantenlänge	$l = 4/3 \pi r$	Oberfläche	$A = 4\pi r^2$	Volumen	$V = 3,052418468 r^3$

Das Volumen des Oloids ist nur durch elliptische Integrale 1. und 2. Art ausdrückbar.

Die Oberfläche ist eine Regelfläche, d.h. zu jedem Punkt x gibt es, bis auf Spiegelung, genau einen Punkt y auf der anderen Kante, sodass die Verbindungsstrecke auf der Oberfläche des Oloids liegt. Die Länge dieser Strecke ist $\sqrt{3} r$. Der minimale Quader, der das Oloid umfasst, hat die Maße $3r \times \sqrt{2} r \times \sqrt{2} r$.

Horned sphere

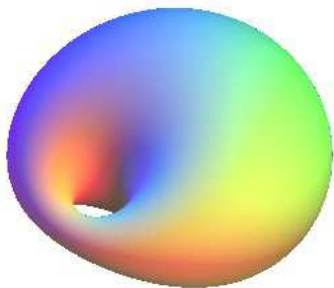
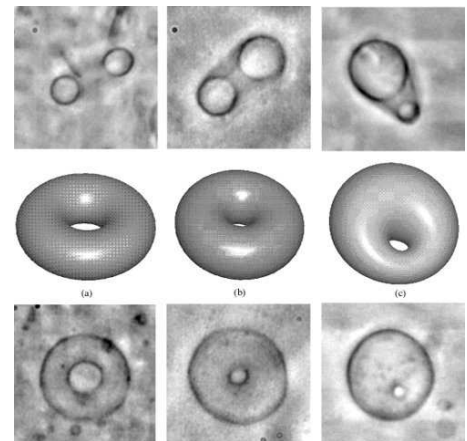
Neben der Kleinschen Flasche ist die 'Horned sphere' von J.W.Alexander eines der berühmtesten topologischen Objekte. Diese 'Horned sphere' ist zu einer Kugelfläche topologisch äquivalent, weil sie sich aus ihr durch eine unendliche "konvergente" Folge raffinierter Ausbeulungsvorgänge gewinnen lässt.



Zweck der Konstruktion ist es: die übliche Kugelfläche streift jede Bauchbinde leicht ab; die 'Horned sphere' schafft das nicht, weil die Bauchbinde im "Geweih" hängenbleibt. Das Abstreifen-Können ist also keine gegenüber topologischer Äquivalenz invariante Eigenschaft. Hinter den Anschauungen wie "Bauchbinde" und "Abstreifen" steht der exakte Begriff der Fundamentalgruppe, hier auf den Außenraum der Kugel bzw. Horned sphere bezogen.

Raumflächen in der Natur

Die bisher beschriebenen räumliche Flächen kommen auch in der Natur vor. Rechts sind Torus (a), Clifford-Torus (b) und Dupinsche Zyklide (c) zu sehen; dazu Mikroskopbilder von Zellstrukturen, die genau diese Flächen ausbilden.



Dupinsche Zyklide

Kartesische Koordinaten

$$x = (d(c - a \cos u \cos v) + b^2 \cos u) / (a - c \cos u \cos v)$$

$$y = (b \sin u (a - d \cos v)) / (a - c \cos u \cos v)$$

bzw.

$$z = (b \sin v (c \cos u - d)) / (a - c \cos u \cos v)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - d^2)^2 = 4((ax - cd)^2 + b^2 y^2)$$

Für verschiedene Parameter ergeben sich spezielle Flächen:

Cas particuliers :

$a = b (c = 0)$: Torus

$d = 0$: symmetrischer «Doppel-Croissant»
«Croissant»

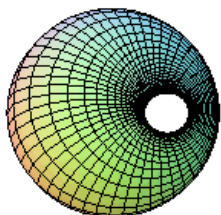
$0 < d < b$: «Doppel-Croissant»

$d = b$: einfacher

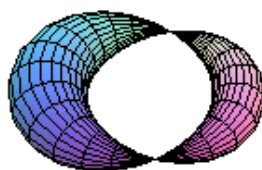
$b < d < a$: Ring-Zyklide

$d = a$: Ring-Zyklide ohne Loch

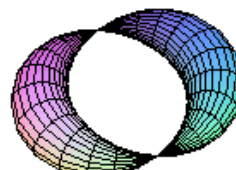
$d > a$: Spindel-Zyklide



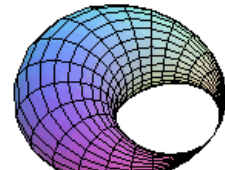
Ring-Zyklide



«Doppel-Croissant»



symmetrischer «Doppel-Croissant»



«Croissant»

Rotationsfläche, Drehfläche

Kartesische Gleichung bei Drehung um z-Achse:

$$x = f(u) \cos v - g(u) \sin v \quad y = f(u) \sin v + g(u) \cos v$$

$$z = k(u)$$

wobei die erzeugende Kurve die Gleichungen

$$x = f(t) ; y = g(t) ; z = k(t)$$

besitzt.

Erzeugende

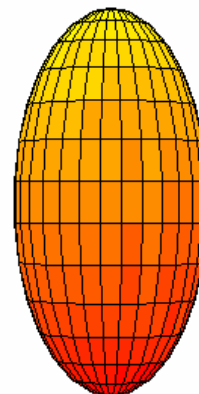
Gerade
Gerade
Gerade
Gerade
Kreis
Kreis
Ellipse
Parabel
Hyperbel
Hyperbel
Kettenlinie
Traktrix

Achse

senkrechte Gerade
Schnittgerade
parallele Gerade
nicht koplanare
Durchmesser
Kreisebene
Ellipsenachse
Parabelachse
Nicht-Brennachse
Brennachse
Basis
Asymptote

Rotationsfläche

Ebene
Rotationskegel
Rotationszylinder
Gerade einschaliges Hyperboloid
Kugel
Torus
Rotationsellipsoid
Rotationsparaboloid
einschaliges Hyperboloid
zweischaliges Hyperboloid
Kettenfläche
Pseudo-Sphäre



Zitrus-Fläche

Die Gleichung $x^2 + z^2 = y^3 (1-y)^3$

der Zitrus erscheint ebenso einfach wie die Figur selbst.

Zwei spiegelsymmetrisch angeordnete Spitzen rotieren um die durch sie gehende Achse. Die durch Weglassen von $(1-y)^3$ vereinfachte Gleichung

$$x^2 + z^2 = y^3$$

sorgt für genau eine Spitze und

$$x^2 + z^2 = (1-y)^3$$

liefert das Spiegelbild.

Beide sind unendlich ausgedehnte Flächen. Das Produkt auf der rechten

Seite der ursprünglichen Gleichung bewirkt, dass Zitrus beschränkt bleibt.

Wird y dem Betrag nach größer als 1 und damit die rechte Seite negativ, so erlaubt die Gleichung keine reellen Lösungen für x und z .

Quelle: Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für das Jahr der Mathematik, www.jahr-der-mathematik.de.

Visualisierung: Herwig Hauser und Sebastian Gann



A1+-

Einfache Singularitäten

Eine Fläche heißt nichtsingulär oder glatt, wenn sie, anschaulich gesagt, keine spitzen Stellen, sogenannte Singularitäten, besitzt.

Zum Beispiel sind eine Kugel oder ein Torus nichtsinguläre Flächen.

Die sogenannten ADE-Singularitäten sind die einfachsten Singularitäten. Beispiele sind Singularitäten vom Typ $A_k^{\pm\pm}$ mit einer Gleichung

$$x^{k+1} \pm y^2 \pm z^2 = 0$$

Beispiele sind von oben nach unten die A_1^{+-} -Singularität, der Doppelkegel, die A_2^{+-} -Singularität, eine Cuspe, und eine A_3^{+-} -Singularität.

Der Index k der A_k -Singularitäten heißt Milnor-Zahl der Singularität. Sie charakterisiert der Anzahl der sogenannten verschwindenden Zyklen.

ADE-Singularitäten treten in verschiedenen Bereichen der Mathematik sowie in den Naturwissenschaften Physik, Chemie und Biologie auf.



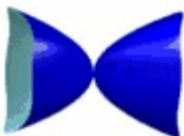
A2+-

Die einfachste A_1^{+-} -Singularität ist der Doppelkegel mit $a = 0$:

$$x^2 + y^2 - z^2 = a$$

Wird der Parameter a verschieden Null, so entsteht eine ein- oder zweischaliges Hyperboloid und die Fläche wird glatt.

Quelle: <http://www.oliverlabs.net>



A3+-

Cuspen-Singularität

Eine Cuspen-Singularität einer Fläche ergibt sich mit

der Gleichung

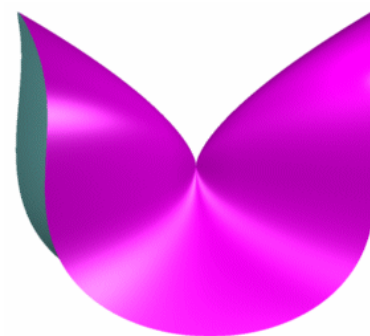
$$x^3 + y^2 - z^2 = 0.$$

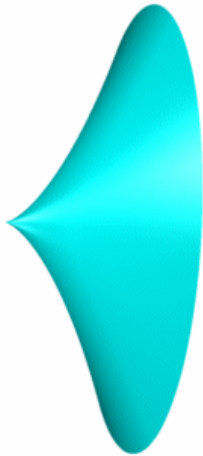
Diese Singularität ist vom Typ A_2^{+-} .

Sie entspricht der ebenen Kurve $x^3 + y^2 = 0$, die als Reflexionsbild entsteht, wenn zum Beispiel Licht in eine Tasse Kaffee fällt.

Verändert man die Gleichung zu $(1-a)x^3 + ax^2 + y^2 - z^2 = 0$ so ergibt sich die Cuspen-Singularität für $a = 0$.

Für $a = 1$ verformt sich die Fläche und bildet an der Singularität eine Doppelkegel- A_1^{+-} -Singularität.





Cuspen-Singularität (2)

Mit der Gleichung $x^3 + y^2 + z^2 = 0$ entsteht eine weitere Cuspen-Singularität, jetzt vom Typ A_2^{++} . Die entstehende Fläche ist rotationssymmetrisch. Ebenso ist ihre Deformation $(1-a)x^3 - ax^2 + y^2 + z^2 = 0$ rotationssymmetrisch.

Schreibt man die Ausgangsgleichung in der Form $y^2 + z^2 = -x^3$ so erkennt man, dass sich für jedes feste $x < 0$ ein Kreis ergibt, da $x^2 + z^2 = r^2$ einen Kreis beschreibt.

Alle Schnitte der deformierten Cuspe mit einer Ebene ergeben entweder eine ebene Kuspe oder eine ebene Schleife.

Kummer-Quartik

1875 untersuchte Eduard Kummer die Frage nach der maximalen Anzahl $\mu(d)$, von Singularitäten auf einer Fläche von Grad d , insbesondere für $d = 4$, d.h. Quartiken.

Kummer zeigte, dass $\mu(4) = 16$ ist und untersuchte Flächen mit dieser Eigenschaft. Er fand eine Gruppe derartiger Quartiken mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2)^2 - \lambda y_0 y_1 y_2 y_3 = 0$$

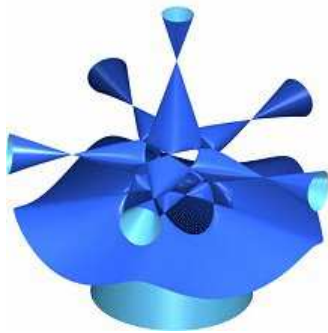
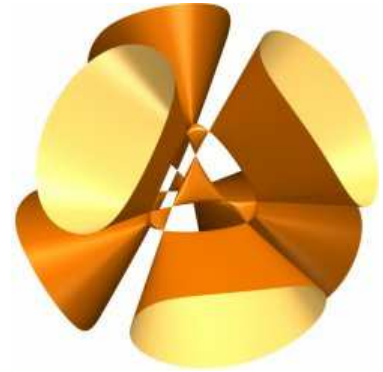
wobei μ ein frei wählbarer Parameter ist,

$$\lambda = (3\mu^2 - 1)/(3 - \mu^2)$$

gilt und die y_i als Seiten eines regelmäßigen Tetraeders gewählt werden:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 - z - \sqrt{2} x & y_1 &= 1 - z + \sqrt{2} x \\ y_0 &= 1 + z + \sqrt{2} x & y_0 &= 1 + z - \sqrt{2} x \end{aligned}$$

Nicht jede dieser Quartik hat genau 16 Singularitäten.



Togliatti-Quintik

Eugenio Giuseppe Togliatti bewies 1937, dass es eine Fläche 5. Grades (Quintik) mit 31 Singularitäten gibt.

1980 gelang Arneau Beauville der Nachweis, dass keine andere Quintik mehr Singularitäten besitzen kann.

Da es keinen Platonischen Körper gibt, dessen Symmetrieebenen man zur Konstruktion einer solchen Quintik nutzen kann, besitzt die abgebildete Quintik nur die Symmetrie eines regelmäßigen Fünfecks.

1990 gelang es Wolf Barth, eine verständliche Gleichung dieser Fläche aufzustellen:

$$\sin(2\pi/5) - z) (x \cos(4\pi/5) - y \sin(4\pi/5) - z) (x \cos(6\pi/5) - y \sin(6\pi/5) - z) (x \cos(8\pi/5) - y \sin(8\pi/5) - z) = 0$$

$$(1 - \sqrt{(5 - \sqrt{5})}/(2z)) (x^2 + y^2 - 1 + (1 + 3\sqrt{5})/4 z^2)^2 + a(x - z) (x \cos(2\pi/5) - y$$

Labs-Septik

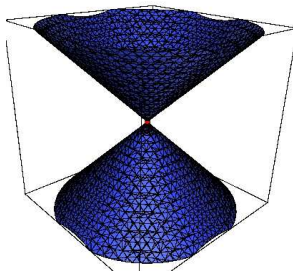
2004 konstruierte Oliver Labs eine Fläche vom Grad 7 (Septik) mit 99 Singularitäten. Die Anzahl der Singularitäten ist heute (2015) noch Weltrekord.

Labs' Fläche hat eine Symmetrie eines regelmäßigen Siebenecks. Die Gleichung ist

$$\begin{aligned} 0 = & x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6 + 7x^6 + 21x^4y^2 + 21x^2y^4 + 7y^6 - 57x^4 - \\ & 114x^2y^2 - 57y^4 + (24/7a^2 + 768/49a + 800/7)(x^2 + y^2) + (- \\ & 149808/2401a^2 + 3216/343a - 147584/2401) + (-49a^2 + 7a - \\ & 52)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)z \\ & + (128/7a^2 + 704/49a + 128/7)(x^2 + y^2)z + (-1632/343a^2 + 16/7a - \\ & 192/343)z + (-98a^2 + 14a - 101)(x^4 + y^4)z^2 + (-196a^2 + 28a - 202)x^2y^2z^2 \\ & + (3016/7a^2 - 2904/49a + 440)(x^2 + y^2)z^2 + (-17440/343a^2 + 416/49a - \\ & 17040/343)z^2 + (-49a^2 + 7a - 50)(x^4 + y^4)z^3 + (-98a^2 + 14a - 100)x^2y^2z^3 \\ & + (5776/7a^2 - 5648/49a + 5888/7)(x^2 + y^2)z^3 + (-313136/343a^2 + 6288/49a - 319264/343)z^3 + (3680/7a^2 - \\ & 3608/49a + 536)(x^2 + y^2)z^4 + (-592240/343a^2 + 11856/49a - 603856/343)z^4 + (816/7a^2 - 800/49a \\ & + 832/7)(x^2 + y^2)z^5 + (-458832/343a^2 + 1312/7a - 467840/343)z^5 \\ & + (-166272/343a^2 + 3328/49a - 169536/343)z^6 + (-166272/2401a^2 + 3328/343a - 169536/2401)z^7 \end{aligned}$$



Singularitäten algebraischer Flächen



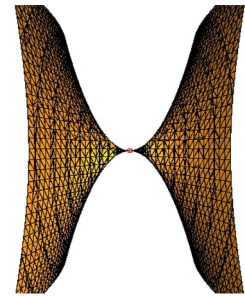
A1 Singularität
Gleichung: $x^2 - y^2 - z^2$



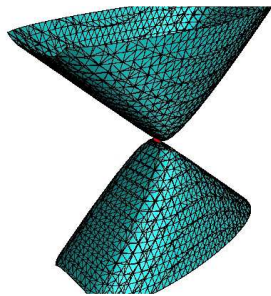
A2 Singularität
Gleichung: $x^3 - y^2 - z^2$



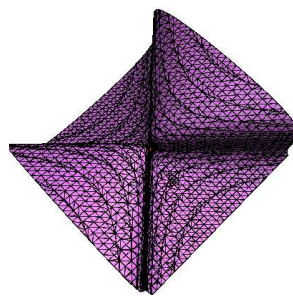
A2+- Singularität
Gleichung: $x^3 + y^2 - z^2$



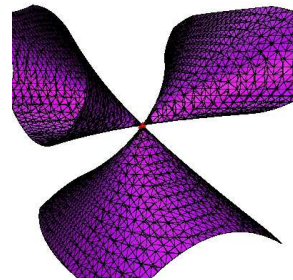
A3--
Gleichung: $x^4 - y^2 - z^2$



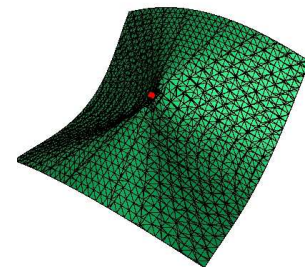
A3 +-
Gleichung: $x^4 - y^2 - z^2$



A4 +-
Gleichung: $x^5 + y^2 - z^2$



D4
Gleichung: $x^2 y - y^3 - z^2$



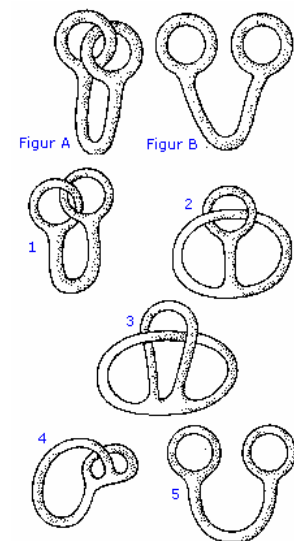
D4
Gleichung: $x^2 y + y^3 - z^2$

Topologie

Die Topologie (von griech.: τόπος „Ort, Platz“ und λόγος „Lehre, Wissen, Wort“) oder Analysis situs, wie sie früher meistens genannt wurde, ist ein Teilgebiet der Mathematik.

In der analytischen Geometrie werden Objekte u.a. anhand ihrer Lage im Raum identifiziert. In der klassischen Geometrie ist dies nicht der Fall, hier werden Objekte nicht unterschieden, wenn sie durch Verschiebung, Rotation oder Spiegelung ineinander überführt werden können. Diese Identifizierung wird als Kongruenz bezeichnet. Für die Topologie sind aber auch die klassischen geometrischen Begriffe wie Form, Größe und Winkel ohne Bedeutung.

Zum Beispiel wird hier zwischen Kreis und Dreieck nicht unterschieden. Auch sind die beiden Ringfiguren in der oberen Abbildung topologisch gleich, weil sie nur durch Biegung und Dehnung ineinander übergehen. Die Ringe müssen also nicht aufgeschnitten werden, um aus Figur A die Figur B zu formen (siehe untere fünf Abbildungen).



Dagegen sind Kreisscheibe und 2-Sphäre verschieden, weil die Kreisscheibe einen Rand hat und die 2-Sphäre (Oberfläche der dreidimensionalen Vollkugel) nicht. Der Torus hat allerdings auch keinen Rand, trotzdem sind Kugeloberfläche und Torusoberfläche topologisch zu unterscheiden. Wenn wir nämlich auf die Kugel eine beliebige geschlossene Kurve zeichnen, kann diese durch hinreichende "Schrumpfung" auf einen Punkt zusammengezogen werden. Auf dem Torus ist das nicht für jede geschlossene Kurve möglich.

Das Wort "Topologie" wurde erstmals 1847 von J. Listing (1808-1882, linke Abbildung) in seiner Arbeit Vorstudien zur Topologie benutzt. Die Geschichte der Topologie begann 1736 mit einer Arbeit von Euler. In "Lösung eines Problems zur Geometrie der Lage" beschäftigte er sich mit dem Königsberger Brückenproblem. Schon der Titel seiner Arbeit zeigt, dass er eingesehen hatte, dass das Problem nur mit der "Lage" der Punkte und nicht mit den Maßzahlen ihren Entfernungen zusammenhängt. Euler untersuchte auch konvexe Polyeder und entdeckte die berühmte Eulersche Polyederformel. Riemann und Jordan untersuchten den Zusammenhang von Flächen im Raum, ihre Ideen und die Eulersche Polyederformel stellte Poincaré im Jahre 1895 in einer Reihe von Arbeiten analysis situs auf eine völlig neue Basis. Er schuf die Konzepte Homologie und Homotopie und brachte damit algebraische Ideen in die Topologie ein.

Die mengentheoretischen Grundlagen der heutigen Topologie jedoch entstanden aus dem Versuch, die aus der Analysis bekannten Eigenschaften von Lage und Nähe auf eine axiomatische Grundlage zu stellen. Zunächst gelang es Fréchet das Abstandskonzept zu abstrahieren, also die "wichtigen" Eigenschaften einer



Abstandsfunktion zu erkennen, was ihn zu der Definition der metrischen Räume führte. Das sind Mengen, auf denen ein Abstandsbegriff definiert ist. Mit Hilfe des Abstandsbegriffes konnte er Konzepte wie Stetigkeit und Konvergenz auch für diese allgemeinere Situation definieren.

In einem Brief an den Internationalen Kongress der Mathematik in Rom verabschiedete sich Riesz (1880-1956, Abbildung rechts) im Jahr 1909 erstmals völlig vom Begriff des Abstands und schlug eine axiomatische Beschreibung der Topologie vor. 1914 axiomatisierte Hausdorff den Begriff der Umgebung und gelangte dadurch zum Begriff des topologischen Raumes, so wie er heute verwendet wird (genauer gesagt: Hausdorff axiomatisierte topologische Räume mit einer Zusatzeigenschaft: diese werden heute Hausdorff-Räume genannt). Die heutige gebräuchliche Beschreibung topologischer Räume durch offene Mengen wurde schließlich 1925 von Alexandroff formuliert.

Topologische Überlegungen und Begriffe spielen in anderen Teilgebieten der Mathematik, wie etwa in der Funktionalanalysis, eine grundlegende Rolle.

Ein paar Kostproben ...

neuester topologischer Entdeckungen. Wer kann das verstehen?

Hopf (1894-1971): Der Rand der n-dimensionalen Kugel hat "Löcher" in Dimensionen, die größer als n sind.

Milnor (1931-): Auf Sphären der Dimension größer als 6 gibt es wesentlich verschiedene Differentialrechnungen.

Freedman (1951-): Der 4-dimensionale euklidische Raum, unsere Raum-Zeit, ist der einzige euklidische Raum, der wesentlich verschiedene Differentialrechnungen erlaubt und sogar unendlich viele davon.

Metrischer Raum

Grundstruktur topologischer Untersuchungen sind metrische Räume.

Eine metrische Struktur, kurz eine Metrik, über einer Menge R ist gegeben, wenn jedem Paar x, y von Elementen von R eine reelle Zahl $d(x,y) \geq 0$ zugeordnet ist mit den Axiomen

$$d(x,y) = 0 \text{ dann und nur dann, wenn } x = y$$

$$d(y,x) = d(x,y)$$

$$\text{Dreiecksaxiom: } d(x,z) \geq d(x,y) + d(y,z)$$

Eine Menge R zusammen mit einer Metrik über R heißt ein metrischer Raum. Man sagt, die Metrik sei der Menge R aufgeprägt.

Die Menge R heißt die dem metrischen Raum zugrunde liegende Menge. Die Elemente von R heißen Punkt, $d(x,y)$ heißt der Abstand oder die Entfernung der Punkte x und y.

Gilt zusätzlich

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

so heißt die Abbildung d Ultrametrik.

Über eine Menge R könne verschiedene Abstandsfunktionen definiert werden. Immer befolgt diese weitere Regeln

$$|d(x,z) - d(z,y)| \geq d(x,y) \quad \text{zweite Dreiecksungleichung}$$

$$|d(x,y) - d(x',y')| \geq d(x,x') + d(y,y') \quad \text{Vierecksungleichung}$$

Die Vierecksungleichung ergibt sich aus

$$d(x,y) \geq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y)$$

$$d(x,y) - d(x',y') \geq d(x,x') + d(y,y')$$

durch Vertauschen von x mit x' und von y mit y' und Zusammenfassung beider Ungleichungen.

Ist p ein Punkt von R und $\varepsilon > 0$, so heißt die Menge $U_\varepsilon(p) = \{x \mid d(x,p) < \varepsilon\}$

aller Punkte x mit $d(x,p) < \varepsilon$ die Kugelumgebung von p mit dem Radius ε , kurz die ε -Umgebung von p.

Metrischer Raum, Beispiel

Die euklidische Menge R^n der in der Form $x = (x_1, \dots, x_n)$ gegebenen Punkte mit beliebigen reellen Zahlen x_1, \dots, x_n kann mit verschiedenen Entfernungsdefinitionen zu einem metrischen Raum erweitert werden.

1) $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$; Euklidische Metrik

Für die übliche Entfernungsdefinition sind die ersten zwei Metrixiome klar. Für das Dreiecksaxiom kann zum Nachweis die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwendet werden.

Die Kugelumgebung $U_\varepsilon(p)$ sind im Falle $n = 3$ gewöhnliche Vollkugeln ausschließlich der Randsphäre.

2) $d(x,y) = \text{Maximum } |y_i - x_i|, i = 1, \dots, n$

Für diese Metrik sind die Kugelumgebungen $U_\varepsilon(p)$ achsenparallele Würfel von der Kantenlänge 2ε um p als Mittelpunkt.

3) $d(x,y) = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|$

Die Kugelumgebungen sind für R^3 Oktaeder um p als Mittelpunkt; für R^n die entsprechenden verallgemeinerten Polytope.

4) die Metrik $d: X \times X \rightarrow \{0, 1\}$, die verschiedenen x_i die 1 zuordnet und gleichen x_i die 0, heißt diskrete Metrik.

Euklidische Metrik

Die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^n ist durch $d(x, y) = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$ gegeben. Insbesondere ist (\mathbb{R}, d) ein metrischer Raum mit $d(x, y) = |x - y|$ und durch Identifikation wird auch $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ zu einem metrischen Raum.

Für eine Menge M wird die Menge \mathbb{R}^M aller Abbildungen von M nach \mathbb{R} durch die beschränkte Maximumsmetrik $d(f, g) = \min\{\max\{|f(x) - g(x)| : x \in M\}, 1\}$ zu einem metrischen Raum.

Für $M = \{1, \dots, n\}$ erhält man eine weitere Metrik auf \mathbb{R}^n .

Für jeden metrischen Raum (X, d) und eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist auch $(A, d|_{A \times A})$ ein metrischer Raum, etwa für $A = \mathbb{Q}$, Menge der stetigen Funktionen.

Sei p eine Primzahl, dann gibt es zu jeder rationalen Zahl $q \neq 0$ genau eine ganze Zahl $z(q)$, so dass Zähler und Nenner des gekürzten Bruches $q \cdot p^{-z(q)}$ nicht durch p teilbar sind.

Sei $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $d(x, y) = p^{-z(x-y)}$, falls $x \neq y$ und $d(x, y) = 0$ andernfalls.

Dann ist (\mathbb{Q}, d) ein metrischer Raum und d ist sogar eine Ultrametrik, die sogenannte p -adische Ultrametrik. Mit dieser Metrik ist $\{0, p, p^2\}$ ein gleichschenkliges Dreieck mit Seitenlängen 2-mal $1/p$ und $1/p^2$.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Teilmenge

$$B_r^d(x) = B_r(x) = \{y \in X : d(y, x) < r\} \text{ für } r \in \mathbb{R} \text{ und } x \in X$$

heißt offene Kugel mit Radius r und Mittelpunkt x , oder kurz r -Kugel. Die Teilmengen

$$B_{r, \leq}^d(x) = B_{r, \leq}^*(x) = \{y \in X : d(y, x) \leq r\} \text{ und}$$

$$S_r^d(x) = B_{r, =}^*(x) = \{y \in X : d(y, x) = r\}$$

heißen abgeschlossene Kugeln bzw. Sphären. Eine Teilmenge U von X heißt offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, mit $B_r(x) \subseteq U$, und eine Teilmenge von X heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist.

In jedem metrischen Raum sind alle offenen Kugeln offene Teilmengen und alle abgeschlossenen Kugeln abgeschlossene Teilmengen.

Für jeden metrischen Raum (X, d) gilt: Die Teilmengen \emptyset und X sind offen. Jede Vereinigung von offenen Mengen ist offen. Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.

Topologischer Raum

Ein topologischer Raum ist der grundlegende Gegenstand der Teildisziplin Topologie der Mathematik.

Durch die Einführung einer topologischen Struktur auf einer Menge lassen sich intuitive Lagebeziehungen wie "Nähe" und "Streben gegen" aus dem Anschauungsraum auf sehr viele und sehr allgemeine Strukturen übertragen und mit präziser Bedeutung versehen.

Definition

Eine Topologie ist ein Mengensystem \mathcal{T} bestehend aus Teilmengen, "offene Mengen" genannt, und einer Grundmenge X , für die die folgenden Axiome erfüllt sind:

Die leere Menge und die Grundmenge X sind offene Mengen

Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist eine offene Menge

Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist eine offene Menge

Eine Menge X zusammen mit einer Topologie \mathcal{T} auf X heißt topologischer Raum (X, \mathcal{T}) .

Aus dem Anschauungsraum hat sich die Bezeichnung "Punkt" für die Elemente der Grundmenge und die Bezeichnung "topologischer Raum" für die Menge X , die die topologische Struktur trägt, durchgesetzt.

Formal korrekt ist ein topologischer Raum aber das Paar (X, \mathcal{T}) aus der strukturtragenden Menge X und dem strukturdefinierenden System \mathcal{T} ; der "Topologie"; von Teilmengen.

Eine Teilmenge des topologischen Raums X , deren Komplement eine offene Menge ist, heißt abgeschlossen.

In einem topologischen Raum hat jeder Punkt x einen Filter $\mathcal{U}(x)$ von Umgebungen. Damit lässt sich der intuitive Begriff von "Nähe" mathematisch fassen. Auch dieser Begriff kann einer Definition des Topologischen Raums zugrunde gelegt werden.

Auf einer festen Menge X kann man zwei Topologien \mathcal{T} und \mathcal{S} miteinander vergleichen: Man nennt eine Topologie \mathcal{T} "feiner" als eine Topologie \mathcal{S} , wenn $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ ist, wenn also jede in \mathcal{S} offene Menge auch in \mathcal{T} offen ist. \mathcal{S} heißt dann "gröber" als \mathcal{T} . Sind die beiden Topologien verschieden, sagt man auch \mathcal{T} ist "echt feiner" als \mathcal{S} und \mathcal{S} ist "echt gröber" als \mathcal{T} .

Diese Sprechweise ist kompatibel mit der "feiner"-Ordnung der Umgebungssysteme als Filter: Ist x ein fester Punkt des Raums, dann ist der von der feineren Topologie \mathcal{T} erzeugte Umgebungsfilter $\mathcal{V}(x)$ feiner als der von der gröberen Topologie \mathcal{S} erzeugte $\mathcal{U}(x)$.

Basis einer Topologie

Eine Teilfamilie $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt Basis der Topologie \mathcal{O} , wenn zu jedem $x \in X$ und $o \in \mathcal{O}$ ein $b \in \mathcal{B}$ existiert mit $x \in b \subseteq o$.

Eine Mengenfamilie $B \in 2^X$ ist genau dann die Basis einer eindeutig bestimmten Topologie O , wenn $\cup B = X$ und jeder Durchschnitt einer nicht leeren endlichen Teilfamilie aus B gleich der Vereinigung von Mengen aus B ist. O ist dann die Familie aller Vereinigungen von Mengen aus B .

In einem metrischen Raum $(X;d)$ bilden z.B. die offenen Kugeln $B(r;x)$ für $r > 0$ und $x \in X$ eine Basis der offenen Mengen.

Die durch die euklidische Norm bzw. euklidische Metrik erzeugte Topologie heißt auch natürliche Topologie auf R^n .

Subbasis einer Topologie

Sei $S \subset 2^X$ eine beliebige Familie von Teilmengen von X . Die Menge aller endlichen Durchschnitte von Elementen aus S bildet die Basis B einer Topologie O auf X .

S heißt dann Subbasis der Topologie O . Die Intervalle der Gestalt $] -\infty; a [$ und $] a; \infty [$ mit $a \in R$ bilden z.B. eine Subbasis der natürlichen Topologie auf R .

Umgebungssystem

Ein Mengensystem $U(x)$ heißt Umgebungssystem eines Punktes $x \in X$ und die Mengen $u \in U(x)$ heißen Umgebungen von x , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1) Jedes $u \in U(x)$ enthält x und darüberhinaus eine weitere Menge $v \in U(x)$, so dass $u \in U(y)$ für alle $y \in v \subset u$.
- 2) Mit u gehört auch jede darüberliegende Menge $u' \supset u$ zu $U(x)$.
- 3) Mit endlich vielen Mengen u_1, \dots, u_n liegt auch ihr Schnitt in $U(x)$.

Ordnet man jedem Punkt x einer Menge X ein Umgebungssystem $U(x)$ zu, so bildet die Familie aller Mengen, die Umgebung jedes ihrer Punkte sind, eine Topologie O auf X .

Eine Teilmenge $U \subset X$ ist genau dann Umgebung des Punktes $x \in X$, wenn es eine offene Menge $o \in O$ gibt mit $x \in o \subset U$.

Homöomorphismus, topologische Abbildung

Das Paar (X, O) heißt topologischer Raum; X ist eine Menge und O eine Topologie. siehe

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ für einen weiteren topologischen Raum (Y, O') heißt stetig, wenn Urbilder offener Teilmengen von Y offen in X sind, d.h. $f^{-1}(U) \in O$ für alle $U \in O'$, oder, prägnanter aber ungenauer, $f^{-1}(O') \subseteq O$.

Ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls stetig, so heißt f Homöomorphismus oder topologische Abbildung und die Räume (X, O) und (Y, O') homöomorph, in Zeichen $(X, O) \sim (Y, O')$.

Beispiele topologischer Räume

(a) Für jede Menge X ist $P(X)$ eine Topologie auf X , die sogenannte diskrete Topologie; sie ist die feinste Topologie auf X .

(b) Für jede Menge X ist $\{\emptyset, X\}$ die gröbste Topologie auf X , die sogenannte antidiskrete Topologie.

Allgemeiner ist $(X, \{U_1, \dots, U_n\})$ ein topologischer Raum, falls $\emptyset = U_1 \subseteq \dots \subseteq U_n = X$ gilt.

Auf der Menge $\{1, 2\}$ gibt es 4 Topologien, die diskrete, die antidiskrete und $\{\emptyset, \{i\}, \{1, 2\}\}$ für $i = 1, 2$.

(c) Für jeden metrischen Raum (X, d) ist die Menge der offenen Mengen eine Topologie auf X .

Ein topologischer Raum, dessen Topologie sich so durch eine Metrik definieren lässt, heißt metrisierbar. Die diskrete Metrik liefert die diskrete Topologie.

Die euklidische Metrik liefert die sogenannte natürliche Topologie auf R^n . Es lässt sich zeigen, dass die offenen Teilmengen von R genau die abzählbaren disjunkten Vereinigungen offener Intervalle sind.

(d) Sei X eine beliebige Menge und O die Menge aller kofiniten Teilmengen von X und \emptyset , also $O = \{U \subset X : X \setminus U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}$. Dann ist (X, O) ein topologischer Raum.

In einem topologischen Raum X gelten folgende Aussagen:

Die Teilmengen \emptyset und X sind abgeschlossen. Durchschnitte beliebig vieler abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen. Vereinigungen endlich vieler abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.



Betti-Zahlen

Bettische Zahlen bezeichnen in der Topologie drei einer Figur F zugeordnete Zahlen, die deren Zusammenhangsverhältnisse kennzeichnen.

a) die 0.Zahl

Die nullte Bettische Zahl gibt die Anzahl der zusammenhängenden Teile an, aus denen sich F zusammensetzt.

b) die 1.Zahl

Die erste Bettische Zahl gibt die Anzahl der Löcher an, die einen Durchgang durch die Figur bilden, z.B. das Loch im Torus oder die Löcher in einem Sieb.

c) die 2.Zahl

Die zweite Bettische Zahl gibt die Anzahl der Löcher an, die ganz vom Außenraum abgetrennt sind, z.B. das Innere einer Kugelschale oder die Löcher im Schweizer Käse.

Nach der Homologietheorie sind die Bettischen Zahlen homöomorpher Figuren gleich. Gelingt es zu zeigen, dass zwei Figuren nicht die gleichen Bettischen Zahlen haben, so können sie nicht homöomorph sein.

In dem wichtigen Spezialfall aller geschlossenen Flächen, d.h. aller Flächen, die keinen Rand haben, gelingt damit die vollständige Klassifikation.

Es lässt sich zeigen, dass diese Flächen zur Oberfläche einer Kugel, an die eventuell mehrere Henkel angehängt sind, homöomorph sind. Die Abbildung zeigt eine Kugel mit 3 Henkeln.

Andererseits sind zwei derartige Oberflächen nur dann homöomorph, wenn sie die gleiche Anzahl von Henkeln haben. Jede Fläche ist mithin zu genau einer Henkelkugel homöomorph.

Brouwerscher Fixpunktsatz

Der Fixpunktsatz von Brouwer ist eine wichtige Aussage der Topologie. Gefunden wurde der Satz von dem niederländischen Mathematiker Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966).

Der Satz besagt theoretisch:

Jede Einheitskugel hat Fixpunkteigenschaft. Ist K eine n -dimensionale Einheitskugel, so besitzt jede stetige Selbstabbildung von K in sich selbst mindestens einen Fixpunkt.

Mit Hilfe dieser Aussage können Existenzaussagen über Lösungen reeller, nichtlinearer Gleichungssysteme getroffen werden.

Beispiel:

Gegeben sind zwei übereinanderliegende Papierblätter. Zerknittert man das oben liegende Blatt so, dass die Projektion des oberen ganz in das untere Blatt passt, so gibt es trotzdem mindestens einen Punkt des zerknitterten Blattes, der genau über dem ursprünglichen Punkt des unzerknitterten liegt.

Bei der Wahl der zehn schönsten mathematischen Sätze im "The Mathematical Intelligencer" von 1990 wurde der Fixpunktsatz auf Platz 6 gewählt!