6

Rechnen, Messen, Konstruieren

RECHNEN
MESSEN
KONSTRUIEREN

SECHSTES SCHULJAHR

Ausgabe 1957

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1958

Die Teile A und B wurden von Max Heinemann und Karl Pietzker verfaßt,
der Teil C von Dr. Helmut Klein.
Zur inhaltlichen Gestaltung trugen eine große Zahl
von Fachkommissionen Pädagogischer Kreiskabinette und viele Lehrer bei.
Zeichnungen: Kurt Dornbusch
Umschlaggestaltung: Heinz Unzner, Berlin

Redaktionsschluß: 2. Mai 1957

ES 11 G Bestell-Nr. 00 605-4 · 1,75 DM · Lizenz-Nr. 203 1000/58 (DN)
Textkarte genehmigt MDI der DDR Nr. 3263/3
Satz: Betriebsberufsschule Otto Grotewohl, Leipzig, III-18-3
Druck: Leipziger Volkszeitung, III-18-138

INHALTSVERZEICHNIS

A. Einführende Wiederholung

B. Bruchrechnung

C. Geometrie

A. Einführende Wiederholung

I. Rechnen mit großen Zahlen

1. Addition und Subtraktion

Übungen für das Kopfrechnen

1. a) 7000 + 8000 b) 13000 + 19000 c) 240000 + 180000
   d) 3500 + 800 e) 7600 + 700 f) 13600 + 500
   g) 25300 + 10200 h) 56500 + 13500 i) 190400 + 10800

2. Setze die Folgen fort (10 Aufgaben)!

   a) 200000 + 300 = 200300
   200300 + 300

   b) 400000 + 6000 = 406000
   406000 + 6000

   c) 1600 + 3500 = 5100
   5100 + 3500

   d) 350000 + 700 = 350700
   350700 + 700

3. a) 24000 — 9000 b) 140000 — 75000 c) 1000000 — 360000
   d) 3000 — 700 e) 7000 — 2400 f) 13000 — 4600
   g) 8000 — 600 h) 11000 — 2100 i) 320000 — 57600
   k) 200000 — 65300 l) 450000 — 120300 m) 180000 — 95200

4. Setze die Folge fort (20 Aufgaben)!

   1000000 — 2700 = 997300
   997300 — 2700

5. Erkläre die Ausdrücke „Summe", „Summand", „Minuend", „Subtrahend" und „Differenz" an selbstgewählten Beispielen!

6. Eine Summe beträgt 12500, der eine Summand 850. Wie groß ist der andere Summand?

7. Der Minuend beträgt 13200, die Differenz 3700. Wie groß ist der Subtrahend?

8. Die Differenz beträgt 4600, der Subtrahend 7900. Wie groß ist der Minuend?

Schriftliches Rechnen

In den Aufgaben 9 und 10 sind 1. die Zahlen der einzelnen Zeilen und 2. die Zahlen der einzelnen Spalten zu addieren.

		A	B	C	D	E
9.	**a)**	546231 +	865567 +	578469 +	2876827 +	442886
	b)	4635769 +	748874 +	357746 +	638666 +	977847
	c)	784392 +	562578 +	2777655 +	579996 +	1406292
	d)	27895 +	867678 +	453564 +	1398623 +	709589
	e)	956434 +	3333628 +	825745 +	614628 +	1260495

		A	B	C	D	E
10.	**a)**	645398 +	1468536 +	45792 +	7707 +	40809
	b)	639458 +	547021 +	2589763 +	678 +	8603725
	c)	67894 +	3673718 +	620458 +	4325671 +	5789234
	d)	1895467 +	76543 +	278 +	7385 +	4648743
	e)	2630027 +	983046 +	1654302 +	5974 +	345678

11. a) 710012 — 238561 **b)** 456789 — 6875
c) 870003 — 67895 **d)** 688745 — 234444
e) 9876543 — 861745 **f)** 2634451 — 887596
g) 3260401 — 785432 **h)** 700000 — 68937
i) 3100205 — 768934 **k)** 1304501 — 783654
l) 657304 — 19418 **m)** 2304080 — 1976543

12. a) 200000 — 607 — 7826 — 9548 — 13265 — 107654 — 29876
b) 623456 — 42745 — 5348 — 267 — 165749 — 98 — 48888
c) 1235501 — 163973 — 38254 — 96419 — 739 — 17345 — 8764
d) 2996591 — 738904 — 29 — 613017 — 546828 — 4637 — 97775
e) 10350401 — 4673892 — 794608 — 76832 — 2304059 — 7821
f) 1608201 — 319458 — 9732 — 834 — 76 — 723456 — 65473

13. a) 26405 + 103907 + 780 — 116546 + 3765
b) 89705 + 630 — 7520 + 156007 — 16662
c) 123456 — 77865 — 19753 + 134567 — 21926
d) 67562 — 84546 + 78372 — 92504 + 136458

2. Multiplikation und Division

Übungen für das Kopfrechnen

1. a) 350 · 4 **b)** 270 · 5 **c)** 180 · 6 **d)** 430 · 3
e) 230 · 7 **f)** 620 · 4 **g)** 780 · 5 **h)** 930 · 5
i) 840 · 8 **k)** 460 · 8 **l)** 540 · 9 **m)** 640 · 7
n) 730 · 8 **o)** 760 · 9 **p)** 820 · 6 **q)** 370 · 8

2.

a) 2100 · 3	**b)** 1400 · 7	**c)** 3200 · 8	**d)** 4500 · 6
e) 6300 · 5	**f)** 7300 · 3	**g)** 5400 · 5	**h)** 1900 · 6
i) 8100 · 9	**k)** 2800 · 7	**l)** 3600 · 5	**m)** 4200 · 7
n) 5800 · 6	**o)** 7400 · 5	**p)** 9300 · 6	**q)** 6800 · 8

3. Multipliziere nacheinander **a)** 7, **b)** 12, **c)** 25, **d)** 15 mit 10, 20, 30, ..., 90!

4. Dividiere 360 nacheinander durch 6, 8, 9, 12, 15, 20, 40, 60, 80, 90, 18, 24, 36, 72!

5.

a) 240 : 5	**b)** 372 : 4	**c)** 270 : 6	**d)** 440 : 8
e) 390 : 6	**f)** 600 : 8	**g)** 570 : 6	**h)** 504 : 7
i) 675 : 9	**k)** 750 : 6	**l)** 360 : 15	**m)** 300 : 12
n) 450 : 15	**o)** 540 : 12	**p)** 810 : 15	**q)** 720 : 12

6.

a) 2100 : 3	**b)** 4200 : 6	**c)** 5600 : 7	**d)** 8100 : 9
e) 7200 : 8	**f)** 3000 : 2	**g)** 2600 : 4	**h)** 3600 : 8
i) 7500 : 6	**k)** 4550 : 7	**l)** 3700 : 5	**m)** 5600 : 4
n) 6440 : 7	**o)** 6750 : 9	**p)** 2490 : 3	**q)** 3720 : 8

7. Kettenaufgaben

a) 8 · 12	**b)** 128 : 8	**c)** 3 · 15	**d)** 76 + 88
+ 36	· 5	+ 9	: 2
: 6	— 10	: 18	· 10
· 7	: 14	· 7	— 560
— 56	· 21	+ 39	: 13
: 14	+ 105	: 15	· 17
· 18	: 7	+ 18	— 61
+ 45	· 5	· 5	: 3
: 9	+ 60	: 2	— 9
— 9	: 30	— 25	: 12

e) 225 : 25	**f)** 128 · 4	**g)** 8 · 9	**h)** 276 — 155
· 30	: 8	+ 71	: 11
— 72	— 8	: 13	· 15
: 18	: 14	· 25	— 9
· 14	· 21	— 65	: 12
+ 146	+ 98	: 7	· 9
: 15	: 7	· 12	+ 63
· 17	· 5	: 4	: 18
+ 36	+ 66	+ 8	· 7
: 4	: 14	: 14	+ 11

8. Erkläre an selbstgewählten Beispielen die Ausdrücke „Faktor“, „Produkt“, „Dividend“, „Divisor“ und „Quotient“!

9. Der eine Faktor beträgt 170, das Produkt 1190. Wie groß ist der andere Faktor?

10. Ein Faktor ist 51, das Produkt 1530. Wie groß ist der andere Faktor?

11. Der Dividend beträgt 1360, der Quotient 17. Wie groß ist der Divisor?

12. Der Divisor ist 120, der Quotient 15. Wie groß ist der Dividend?

Schriftliches Rechnen

13. a) 348 · 7 b) 2608 · 9 c) 9849 · 6
d) 83579 · 8 e) 46053 · 5 f) 654008 · 7
g) 103080 · 6 h) 654309 · 4 i) 476805 · 8

14. a) 729 · 32 b) 539 · 54 c) 2608 · 76
d) 3798 · 87 e) 97640 · 64 f) 83579 · 98
g) 76041 · 43 h) 678005 · 78 i) 792038 · 95

15. a) 488 · 547 b) 539 · 867 c) 720 · 408 d) 860 · 730
e) 654 · 307 f) 786 · 590 g) 387 · 469 h) 970 · 358

16. a) 4075 · 29 b) 6709 · 83 c) 9780 · 75
d) 7654 · 80 e) 7880 · 37 f) 6578 · 94
g) 7009 · 86 h) 5034 · 79 i) 2308 · 120
k) 6074 · 305 l) 8950 · 704 m) 2876 · 895
n) 7500 · 345 o) 4060 · 765 p) 9370 · 234

17. a) 45672 · 98 b) 72390 · 93 c) 457881 · 93
d) 16080 · 77 e) 40397 · 460 f) 90807 · 305
g) 8371 · 9918 h) 72330 · 5906 i) 13057 · 8790
k) 8509 · 2007 l) 6087 · 4305 m) 10409 · 7080

18. a) 84528 : 2 b) 87453 : 3 c) 753928 : 4
d) 721895 : 5 e) 465774 : 6 f) 164192 : 7
g) 7764216 : 8 h) 277947 : 9 i) 2835469 : 7

19. a) 134228 : 23 b) 40764 : 79 c) 237150 : 85
d) 505940 : 41 e) 142639 : 41 f) 359959 : 59
g) 84135 : 79 h) 410290 : 89 i) 467200 : 64

20. a) 65627 : 899 b) 248651 : 403 c) 200233 : 167
d) 676053 : 147 e) 151782 : 123 f) 427981 : 139
g) 198743 : 8641 h) 675906 : 4598 i) 73109 : 2521
k) 241289 : 2389 l) 548730 : 2345 m) 211019 : 2371

21. a) 4720 : 17 b) 6800 : 19 c) 7375 : 13
d) 9565 : 18 e) 10000 : 37 f) 23456 : 29
g) 73030 : 46 h) 13805 : 57 i) 200000 : 64
k) 365420 : 83 l) 760020 : 74 m) 680541 : 34

22. a) 65174 : 234 b) 82160 : 345 c) 762689 : 457
d) 350400 : 586 e) 602130 : 674 f) 702030 : 863
g) 800235 : 766 h) 956430 : 972 i) 1372514 : 735
k) 1000000 : 2360 l) 2630450 : 3425 m) 4780521 : 4138

23.

605358	804579	10234567	25675839

Dividiere jede der vorstehenden Zahlen durch **a)** 76, **b)** 387, **c)** 1648, **d)** 3469!

24. Zusammengesetzte Aufgaben

a)
$3991 \cdot 12$
$47892 + 36243$
$47400 - 43409$
$1185 \cdot 40$
$84135 : 71$

b)
$796104 : 8$
$100000 - 37576$
$99513 + 487$
$62424 : 1734$
$36 \cdot 22114$

c)
$41123 \cdot 695$
$24981054 : 574$
$43521 + 3205196$
$28580485 - 3599431$
$3248717 : 79$

Bei richtiger Lösung lassen sich die Einzelaufgaben einer Gruppe in bestimmter Weise ordnen.

II. Rechnen mit Maßeinheiten

3. Verwandlungsübungen

1. Welche Geldscheine und Geldmünzen kennst du? Beschreibe sie und ordne sie nach ihrem Wert!

2. Welche Längenmaße sind dir bekannt? Beschreibe sie und ordne sie nach ihrem Aufbau!

3. Nenne die Einheiten der Flächenmaße! Beschreibe sie und ordne sie nach ihrem Aufbau!

4. Welche Raummaße kennst du? Beschreibe sie und ordne sie nach ihrem Aufbau!

5. Nenne Einheiten, mit denen Warenmengen gewogen werden, und ordne sie nach ihrem Aufbau!

6. Gib den Aufbau der Zeitmaße an!

7. Verwandle die folgenden Maßangaben in die nächstniedere Maßeinheit!

a) 0,75 DM, 4,80 DM, 7,06 DM, 9 DM, 17,04 DM, 0,07 DM, 15,12 DM, 3 DM

b) 3,07 m, 7,84 m, 5,3 cm, 4 dm, 7,6 dm, 2,8 dm, 4,3 cm, 4,07 m, 13 km, 4,085 km, 7,009 km, 14,345 km

c) 4,72 m^2, 8,09 dm^2, 0,45 cm^2, 8 ha, 3,14 a, 25,05 ha, 1,06 km^2, 0,07 a, 12,84 km^2, 6,71 m^2, 0,83 ha, 16 m^2

d) 0,015 m^3, 7,485 dm^3, 7,805 dm^3, 4,025 m^3, 0,09 hl, 12 hl, 1,002 dm^3, 350 cm^3, 4,675 cm^3, 6 m^3, 0,195 cm^3, 3,45 hl
(1 $dm^3 \triangleq$ 1 l, 100 l $\triangleq$ 1 hl)

e) 7,486 kg, 0,824 kg, 0,075 kg, 3 kg, 8,19 dz, 12,03 t, 4,50 dz, 9,25 t, 3,406 kg, 6,05 t, 0,76 dz, 2 dz

8. a) Verwandle in Pfennig!

9 DM 35 Pf, 18 DM 9 Pf, $3\frac{1}{2}$ DM, $\frac{3}{4}$ DM, 4 DM 13 Pf, $\frac{3}{10}$ DM

b) Verwandle in Meter!

3 km 26 m, $6\frac{1}{2}$ km, 6 km 4 m, 5 km 2 m, 4900 cm, $2\frac{3}{4}$ km

c) Verwandle in Ar!

7 ha 8 a, 3 ha 25 a, $3\frac{1}{5}$ ha, 8 ha 64 a, 7 ha 9 a, $\frac{1}{4}$ ha, 82400 m^2

d) Verwandle in Kubikdezimeter!

4 m^3 875 dm^3, 86 m^3 19 dm^3, 3 m^3 5 dm^3, $\frac{5}{8}$ m^3, $2\frac{3}{4}$ m^3, 42 m^3 4 dm^3, 26 l, 84 l, 56000 cm^3, 451000 cm^3, 96 l

e) Verwandle in Minuten!

7 Std. 28 Min., $4\frac{2}{3}$ Std., 8 Std. 30 Min., $\frac{1}{2}$ Std., 5 Std. 45 Min.

9. Verwandle die folgenden Maßangaben in die nächsthöhere Maßeinheit!

a) 136 Pf, 85 Pf, 1350 Pf, 2000 Pf, 30400 Pf, 48768 Pf

b) 650 cm, 3700 cm, 30000 mm, 950 dm, 4800 mm, 7200 m

c) 3500 ha, 34000 a, 7100 m^2, 852500 dm^2, 93500 cm^2, 62570 m^2, 192300 m^2, 17500 a, 75000 dm^2, 703600 ha

d) 50000 cm^3, 875000 dm^3, 435000 mm^3, 75600 l, 3000 m^3, 70000 cm^3, 153000 dm^3, 208000 mm^3, 67 l, 305 l

e) 17500 kg, 6050 dz, 750000 kg, 62500 kg, 180 kg, 316000 g, 208400 g, 30680 dz, 30 dz, 73860 g, 820 dz

f) 95 Sek., 84 Min., 40 Std., 162 Std., 180 Min., 105 Sek., 276 Std.

4. Addition und Subtraktion

Beachte: Schreibe bei den folgenden Aufgaben alle Summanden, Minuenden und Subtrahenden immer als Dezimalbrüche!

1. a) 6 m 13 cm + 7 m 25 cm **b)** 7 m 59 cm + 95 cm
c) 24 m 17 cm + 3 m 9 cm **d)** 12 m 5 cm + 9 m 26 cm
e) 13,75 m + 5,75 m **f)** 6,48 m + 7,89 m
g) 24,92 m + 25,98 m **h)** 12,19 m + 8,31 m
i) 4,92 m + 3,28 m **k)** 46,32 m + 15,47 m
l) 24,75 m — 13 m 22 cm **m)** 64 m 42 cm — 14,88 m
n) 27,22 m — 21 m 45 cm **o)** 48 m 13 cm — 29 m 45 cm

2. a) 5 km 585 m + 6 km 192 m **b)** 19 km 498 m + 22 km 747 m
c) 17 m 129 mm + 24 m 206 mm **d)** 34 m 465 mm + 79 m 785 mm
e) 5,795 km + 8,56 km **f)** 11,538 km + 5,789 km
g) 47,205 km + 41,593 km **h)** 36,705 km + 14,116 km
i) 9,245 m + 0,897 m **k)** 38,475 m + 43,525 m
l) 8,35 m — 3,26 m **m)** 12,04 m — 7,85 m
n) 24,12 m — 18,38 m **o)** 6,425 km — 4,318 km
p) 12,138 km — 9,325 km **q)** 21,095 km — 13,536 km

3. a) 12,56 m — 3 m 85 cm — 4,67 m — 9 dm — 175 cm
b) 15 km — 984 m — 3,286 km — 1375 m — 8 km 125 m
c) 9,20 m — 0,46 m — 8 dm 3 cm — 67 cm — 1 m 8 cm
d) 36,500 km — 14 km 875 m — 10,879 km — 3475 m — 865 m

4. a) 7 a 54 m^2 + 9 a 25 m^2 **b)** 15 a 17 m^2 + 5 a 53 m^2
c) 13 a 47 m^2 + 8 a 72 m^2 **d)** 4 ha 27 a + 6 ha 87 a
e) 2,48 a + 7,34 a **f)** 6,52 ha + 4,43 ha
g) 9,15 ha + 7,72 ha **h)** 11,41 a + 13,83 a
i) 16,56 a + 27,79 a **k)** 44,65 ha + 39,75 ha

5. a) 54 ha 23 a + 19,77 ha **b)** 36,48 ha + 43 ha 86 a
c) 25,75 ha — 19 ha 85 a **d)** 19 a 72 m^2 + 7,52 a
e) 28,51 a + 13 a 27 m^2 **f)** 63,43 a — 44 a 92 m^2

6. a) 63 a 23 m^2 — 19 a 47 m^2 — 26 a 28 m^2 — 15 a 32 m^2
b) 3,51 ha + 39,46 ha — 16,39 ha — 24,54 ha
c) 98,56 a — 13,12 a — 57 m^2 — 83 m^2
d) 75,37 ha — 13 ha 4 a — 45 a — 27 a

7. a) 435,156 m^3 + 207,432 m^3 **b)** 86,739 m^3 + 24,546 m^3
c) 73,058 m^3 — 39,206 m^3 **d)** 58,157 m^3 — 46,967 m^3
e) 62,403 m^3 — 43,964 m^3 **f)** 93,084 m^3 — 28,564 m^3

8. a) 12 kg 375 g + 5 kg 995 g
b) 47 kg 498 g + 21 kg 774 g
c) 52 kg 665 g + 26 kg 798 g
d) 76 g 286 mg + 78 g 497 mg
e) 8 kg 678 g + 5 kg 67 g
f) 64,058 kg + 57,898 kg
g) 3 t 37 kg + 2 t 986 kg
h) 7,809 t + 5,567 t
i) 14 g 820 mg + 7 g 198 mg
k) 24,891 g + 38,409 g
l) 1 dz 58 kg + 2 dz 75 kg
m) 6,78 dz + 7,89 dz
n) 6 kg 247 g — 2 kg 124 g
o) 23 kg 81 g — 17 kg 902 g
p) 54 kg 312 g — 991 g
q) 524 kg 9 g — 298 kg 807 g
r) 13,375 kg — 7,125 kg
s) 41,225 kg — 27,815 kg
t) 38 kg 115 g — 23,895 kg
u) 82,072 kg — 49 kg 512 g

9. a) 13 t — 765 kg — 1,243 t — 5678 kg — 4 t 38 kg
b) 82,456 kg — 17 kg 819 g — 24650 g — 9,878 kg — 14,047 kg
c) 8 t — 639 kg — 123 kg — 2 t 85 kg — 0,765 t
d) 2780 kg — 15 dz 78 kg — 2 dz 9 kg — 215 kg

10. a) 4 hl 52 l + 1 hl 76 l
b) 12 hl 23 l + 7 hl 78 l
c) 18 hl 50 l + 10 hl 75 l
d) 3 hl 9 l + 2 hl 95 l
e) 4,95 hl + 3,27 hl
f) 8,96 hl + 5,57 hl
g) 19,46 hl + 7,54 hl
h) 5 hl 7 l + 93 l
i) 11 hl 86 l — 7 hl 59 l
k) 17 hl 32 l — 9 hl 96 l
l) 4 hl 12 l — 76 l
m) 12,75 hl — 3,87 hl
n) 8,86 hl — 4,25 hl
o) 17,57 hl — 6,92 hl
p) 24,08 hl — 19 hl 81 l
q) 32 hl 5 l — 25,87 hl

11.

	A	B	C	D
I	24 kg 225 g	31 kg 382 g	153,027 kg	321 kg 366 g
II	31 kg 718 g	17,265 kg	228,369 kg	222 kg 648 g
III	122,406 kg	9 kg 822 g	25 kg 148 g	42,624 kg
IV	9,057 kg	33 kg 54 g	124 kg 425 g	433,464 kg
V	12 kg 594 g	8 kg 477 g	469,031 kg	279 kg 898 g

a) Addiere die Maßzahlen in jeder der Spalten A bis D!

b) Addiere die Maßzahlen in jeder der Zeilen I bis V!

c) Subtrahiere von der größten Maßzahl jeder Zeile einzeln die übrigen Maßzahlen derselben Zeile!

d) Subtrahiere nacheinander jede Maßzahl von 1 t!

III. Aus der Einführung in die Bruchrechnung

5. Vermischte Aufgaben

1. Bilde je 5 Beispiele **a)** für echte Brüche, **b)** für unechte Brüche, **c)** für gemischte Zahlen!

2. Nenne 10 verschiedene Brüche, die denselben Wert haben wie

a) $\frac{2}{3}$, **b)** $\frac{3}{4}$, **c)** $\frac{5}{6}$, **d)** $\frac{4}{9}$!

3. Drücke **a)** 2 (Ganze), **b)** 5 (Ganze) durch 12 verschiedene Brüche aus!

4. Drücke die folgenden Maßangaben als Bruchteile einer höheren Maßeinheit aus!

a) 60 cm	**b)** 35 cm	**c)** 625 m	**d)** 20 m^2
e) 80 a	**f)** 24 dm^2	**g)** 650 dm^3	**h)** 85 l
i) 450 kg	**k)** 325 g	**l)** 24 Min.	**m)** 18 Std.

5. a) Verwandle in unechte Brüche!

$1\frac{3}{4}$, $2\frac{6}{7}$, $3\frac{4}{5}$, $4\frac{7}{8}$, $5\frac{8}{9}$, $6\frac{7}{10}$, $7\frac{7}{12}$, $8\frac{11}{15}$, $9\frac{7}{20}$, $11\frac{5}{24}$

b) Bilde selbst 10 Aufgaben!

6. a) Verwandle die folgenden Brüche in ganze oder in gemischte Zahlen!

$\frac{15}{2}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{23}{12}$, $\frac{45}{15}$, $\frac{27}{8}$, $\frac{51}{3}$, $\frac{133}{19}$, $\frac{45}{7}$, $\frac{100}{13}$, $\frac{90}{17}$, $\frac{108}{9}$

b) Bilde selbst 10 Aufgaben!

7. Erweitere die folgenden Brüche!

a) $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{50}$, $\frac{7}{25}$. Der Nenner des neuen Bruches soll 100 sein.

b) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{18}$. Der Nenner des neuen Bruches soll 144 sein.

8. Kürze die folgenden Brüche!

a) $\frac{24}{36}$	**b)** $\frac{51}{85}$	**c)** $\frac{76}{95}$	**d)** $\frac{65}{78}$	**e)** $\frac{84}{105}$	**f)** $\frac{36}{96}$
g) $\frac{75}{105}$	**h)** $\frac{96}{144}$	**i)** $\frac{120}{192}$	**k)** $\frac{117}{169}$	**l)** $\frac{150}{225}$	**m)** $\frac{180}{252}$
n) $\frac{196}{256}$	**o)** $\frac{248}{360}$	**p)** $\frac{288}{360}$	**q)** $\frac{360}{540}$	**r)** $\frac{132}{154}$	**s)** $\frac{160}{220}$
t) $\frac{760}{920}$	**u)** $\frac{56}{180}$	**v)** $\frac{640}{880}$	**w)** $\frac{145}{580}$	**x)** $\frac{390}{1040}$	**y)** $\frac{324}{4296}$

9. Berechne die folgenden Werte!

a) $\frac{1}{4}$ von 72	**b)** $\frac{1}{5}$ von 270	**c)** $\frac{1}{8}$ von 960	**d)** $\frac{4}{5}$ von 130
e) $\frac{5}{6}$ von 156	**f)** $\frac{7}{10}$ von 780	**g)** $\frac{3}{8}$ von 1240	**h)** $\frac{3}{5}$ von 355
i) $\frac{1}{9}$ von 846	**k)** $\frac{4}{7}$ von 147	**l)** $\frac{3}{4}$ von 96	**m)** $\frac{5}{9}$ von 576

10. Worin besteht der Unterschied zwischen Zehnerbrüchen und Dezimalbrüchen?

11. Erkläre, wie man Dezimalbrüche erweitert und kürzt! Begründe deine Erklärung an Beispielen!

6. Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

1.

a)	**b)**	**c)**	**d)**
$\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$	$\frac{17}{25} + \frac{11}{25}$	$3\frac{4}{5} + \frac{3}{5}$	$2\frac{4}{5} + 8\frac{4}{5} + \frac{2}{5}$
$\frac{7}{8} + \frac{5}{8}$	$\frac{9}{16} + \frac{13}{16}$	$7\frac{5}{8} + \frac{7}{8}$	$7\frac{9}{16} + 8\frac{11}{16} + \frac{5}{16}$
$\frac{4}{5} + \frac{3}{5}$	$\frac{9}{20} + \frac{17}{20}$	$9\frac{5}{6} + \frac{5}{6}$	$3\frac{7}{12} + \frac{7}{12} + 1\frac{1}{12}$
$\frac{5}{6} + \frac{5}{6}$	$\frac{11}{18} + \frac{13}{18}$	$11\frac{11}{12} + \frac{5}{12}$	$7\frac{8}{15} + 1\frac{4}{15} + 2\frac{7}{15}$
$\frac{7}{10} + \frac{9}{10}$	$\frac{9}{13} + \frac{7}{13}$	$23\frac{7}{9} + \frac{5}{9}$	$9\frac{19}{30} + \frac{17}{30} + 1\frac{11}{30}$
$\frac{11}{12} + \frac{7}{12}$	$\frac{17}{20} + \frac{13}{20}$	$8\frac{6}{7} + \frac{4}{7}$	$3\frac{5}{24} + \frac{23}{24} + 3\frac{7}{24}$

2.

a)	**b)**	**c)**	**d)**
$\frac{14}{15} - \frac{11}{15}$	$12 - 3\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{6} - 2\frac{5}{6}$	$3\frac{7}{12} - 1\frac{11}{12}$
$\frac{11}{12} - \frac{5}{12}$	$14 - 9\frac{6}{7}$	$5\frac{4}{9} - 1\frac{7}{9}$	$8\frac{7}{15} - 2\frac{13}{15}$
$\frac{13}{20} - \frac{7}{20}$	$9 - 8\frac{7}{12}$	$7\frac{2}{5} - \frac{4}{5}$	$5\frac{1}{6} - 2\frac{5}{6}$
$\frac{19}{24} - \frac{1}{24}$	$5\frac{3}{8} - \frac{7}{8}$	$5\frac{9}{25} - 1\frac{17}{25}$	$3\frac{11}{24} - 1\frac{19}{24}$
$\frac{9}{10} - \frac{3}{10}$	$19\frac{7}{18} - \frac{11}{18}$	$6\frac{3}{8} - 2\frac{5}{8}$	$5\frac{2}{9} - 1\frac{8}{9}$
$\frac{19}{25} - \frac{4}{25}$	$23\frac{6}{17} - \frac{14}{17}$	$27\frac{7}{30} - 2\frac{19}{30}$	$5\frac{7}{25} - 2\frac{17}{25}$

3.

a) $\frac{7}{12} + \frac{11}{12} - \frac{5}{12}$	**b)** $\frac{3}{7} - \frac{6}{7} + \frac{5}{7}$	**c)** $3\frac{7}{12} - 1\frac{11}{12} + \frac{5}{12}$
d) $\frac{4}{9} + \frac{7}{9} - \frac{5}{9}$	**e)** $9\frac{3}{5} - \frac{4}{5} + 2\frac{2}{5}$	**f)** $8\frac{3}{10} + \frac{9}{10} + 2\frac{7}{10}$

4. Bilde selbst 10 Aufgaben
a) zur Addition zweier gleichnamiger Brüche,
b) zur Subtraktion zweier gleichnamiger Brüche!

B. Bruchrechnung

IV. Teilbarkeit der Zahlen

7. Teilbarkeitsregeln

Löse die folgenden Aufgaben!

28 : 4	63 : 7	75 : 5	96 : 8
31 : 4	65 : 7	72 : 5	94 : 8

Wenn wir die Ergebnisse dieser Divisionsaufgaben miteinander vergleichen, stellen wir folgendes fest:

In den Aufgaben der oberen Zeile bleibt nach der Division kein Rest; in den Aufgaben der unteren Zeile bleibt nach der Division ein Rest. Wir können also von der ersten Aufgabe sagen: 28 ist ohne Rest durch 4 teilbar. Man sagt kurz:

28 ist durch 4 **teilbar.**

Dagegen ist 31 nicht ohne Rest durch 4 teilbar. Man sagt kurz:

31 ist durch 4 **nicht teilbar.**

Stelle fest, ob die folgenden Zahlen durch 4 teilbar sind:

44, 54, 112, 178, 2354, 17964!

Bei den Zahlen 44 und 54 können wir schnell erkennen, ob sie durch 4 teilbar sind oder nicht. Bei der Zahl 17964 dagegen müssen wir erst länger rechnen, wenn wir die Teilbarkeit durch 4 feststellen wollen. Aber auch bei großen Zahlen besteht oft die Möglichkeit, schnell zu überblicken, ob sie durch einen bestimmten Divisor teilbar sind. Dazu wollen wir einige Regeln kennenlernen.

1. Teilbarkeit durch 10, 100, 1 000

a) Wir teilen durch 10.
Schreibe der Reihe nach alle reinen Zehner bis 200 auf! Worin stimmen diese Zahlen überein?
Bilde größere Zahlen mit einer Null in der letzten Stelle! Prüfe durch Rechnen nach, ob diese Zahlen durch 10 teilbar sind!

Wir können immer feststellen: **Alle Zahlen, deren letzte Ziffer eine Null ist, sind durch 10 teilbar.**

b) Stelle auf ähnliche Weise fest, welche Zahlen durch 100 teilbar sind!

c) Stelle fest, welche Zahlen durch 1000 teilbar sind!

2. Teilbarkeit durch 5

Wir bilden die Zahlenfolge der Fünf bis 100. Dabei stellen wir fest, daß bei den Zahlen immer eine Null oder eine Fünf als letzte Ziffer steht. Das ist auch der Fall, wenn wir die Folge der Fünf über 100 hinaus fortsetzen.

Wir sagen: **Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn sie auf 0 oder 5 endet.**

3. Teilbarkeit durch 2

Die Folge der Zwei ist dir bekannt. Bilde sie bis 100 und schreibe sie in der folgenden Weise auf!

2	4	6	8	10
12	14	16	..	..
22	24	..	..	..
usw.				

Alle diese Zahlen enden auf 0, 2, 4, 6 oder 8.

Wie wir bereits wissen, heißen Zahlen, die als letzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 haben, **gerade Zahlen**. Wir erkennen also, daß alle geraden Zahlen bis 100 durch 2 teilbar sind. Führen wir unsere Untersuchungen weiter, so stellen wir fest, daß auch alle geraden Zahlen, die größer als 100 sind, durch 2 teilbar sind.

Wir sagen deshalb: **Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.**

4. Teilbarkeit durch 4

Wir schreiben die Folge der Vier bis 100 auf und vergleichen die Zahlen miteinander. Wir finden zwar auch bei ihnen als letzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8, aber wir können nicht sagen, daß alle geraden Zahlen durch 4 teilbar sind. So ist zum Beispiel **36** durch 4 teilbar, aber nicht **26** oder **86**. Ebenso läßt sich **20** durch 4 teilen, aber nicht **70** oder **90**.

Dagegen läßt sich jede reine Hunderterzahl durch 4 teilen, zum Beispiel 300, 1400, 7600, 23900. Wir brauchen also bei Zahlen, die größer als 100 sind, nur die letzten beiden Stellen auf ihre Teilbarkeit durch 4 zu untersuchen.

Die Zahl 87748

ist durch 4 teilbar, weil 87700 als reine Hunderterzahl und auch 48 durch 4 teilbar sind. Die Zahl

87778

ist nicht durch 4 teilbar, weil zwar 87700 durch 4 teilbar ist, nicht aber 78.

Wir müssen deshalb die Folge der Vier bis 100 beherrschen, wenn wir schnell entscheiden wollen, ob eine Zahl durch 4 teilbar ist.

Wir sagen: **Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden. Reine Hunderterzahlen sind immer durch 4 teilbar.**

5. Teilbarkeit durch 8

Untersuche die reinen Hunderter bis 1000 auf ihre Teilbarkeit durch 8! Stelle an verschiedenen Beispielen fest, ob reine Tausender durch 8 teilbar sind!

Wie wir bei allen großen Zahlen feststellen können, ob sie durch 8 teilbar sind, soll an dem folgenden Beispiel gezeigt werden. Wir wollen untersuchen, ob die Zahl

6748512

durch 8 teilbar ist. Dazu zerlegen wir 6748512 in 6748000 als reine Tausenderzahl und 512. Die Zahl 6748000 ist durch 8 teilbar; denn alle Tausender sind durch 8 teilbar. Die Zahl 512 ist ebenfalls durch 8 teilbar. Also ist auch die Zahl 6748512 durch 8 teilbar.

Wir sagen: **Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihre letzten drei Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden. Reine Tausenderzahlen sind immer durch 8 teilbar.**

6. Teilbarkeit durch 9

Wenn wir erkennen wollen, ob eine Zahl durch 9 teilbar ist, müssen wir zunächst wieder einige Beispiele untersuchen. Wir zerlegen zu dem Zweck die Zahlen in ihre Zehnerstufen. Diese untersuchen wir auf ihre Teilbarkeit durch 9.

1. Beispiel: 4356 : 9

$$
\begin{aligned}
4356 &= 4000 + 300 + 50 + 6 \\
4000 &: 9 = 444 \quad \text{Rest 4 Einer} \\
300 &: 9 = 33 \quad \text{Rest 3 Einer} \\
50 &: 9 = 5 \quad \text{Rest 5 Einer} \\
6 &: 9 = 0 \quad \text{Rest 6 Einer}
\end{aligned}
$$

Vergleiche die bei den Teildivisionen entstandenen Reste 4, 3, 5 und 6 Einer mit den Ziffern in den Stellen des Dividenden!

Da wir erkennen wollen, ob die Zahl 4356 durch 9 teilbar ist, müssen wir die bei den Teildivisionen entstandenen Reste addieren und untersuchen, ob die Summe der Teilreste durch 9 teilbar ist. Die Summe der Teilreste beträgt 18 Einer. Da 18 durch 9 teilbar ist, muß auch 4356 durch 9 teilbar sein.

2. Beispiel: 7813 : 9

$$7813 = 7000 + 800 + 10 + 3$$

$$\begin{aligned} 7000 : 9 &= 777 \text{ Rest } 7 \text{ Einer} \\ 800 : 9 &= 88 \text{ Rest } 8 \text{ Einer} \\ 10 : 9 &= 1 \text{ Rest } 1 \text{ Einer} \\ 3 : 9 &= 0 \text{ Rest } 3 \text{ Einer} \end{aligned}$$

Vergleichen wir in dem 2. Beispiel die sich bei den Teildivisionen ergebenden Reste mit den Ziffern des Dividenden, so sehen wir, daß auch in diesem Falle die Teilreste den Ziffern des Dividenden entsprechen. Wir können noch beliebig viele solcher Beispiele untersuchen, wir stellen jedesmal dasselbe fest.

Die Addition der Teilreste im 2. Beispiel ergibt die Summe von 19 Einern. Da 19 nicht durch 9 teilbar ist, kann also auch 7813 nicht durch 9 teilbar sein.

Weil die bei den Teildivisionen entstandenen Reste den Ziffern des Dividenden gleichen, brauchen wir die Teildivisionen gar nicht erst durchzuführen. Wir addieren nur die Ziffern des Dividenden ohne Rücksicht auf ihren Stellenwert.

1. Beispiel: $4 + 3 + 5 + 6 = 18$

2. Beispiel: $7 + 8 + 1 + 3 = 19$

Man nennt eine solche Summe die Ziffernsumme oder **Quersumme** einer Zahl.

Wollen wir also feststellen, ob eine Zahl durch 9 teilbar ist, so brauchen wir nur die Quersumme der Zahl zu bilden und zu untersuchen, ob sie durch 9 teilbar ist.

Wir sagen: **Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.**

7. Teilbarkeit durch 3

Jede durch 9 teilbare Zahl ist auch durch 3 teilbar, aber nicht jede durch 3 teilbare Zahl ist durch 9 teilbar. Prüfe an selbstgewählten Beispielen nach!

Für die Teilbarkeit durch 3 gilt eine entsprechende Regel wie für die 9.

1. Beispiel: 1317 : 3

Die Quersumme der Zahl lautet:

$$1 + 3 + 1 + 7 = 12$$

Da die Quersumme 12 durch 3 teilbar ist, ist auch die Zahl 1317 durch 3 teilbar.

2. Beispiel: 5743 : 3

Wir bilden die Quersumme der Zahl.

$$5 + 7 + 4 + 3 = 19.$$

Da die Quersumme 19 nicht durch 3 teilbar ist, ist auch die Zahl 5743 nicht durch 3 teilbar.
Prüfe durch Rechnen nach!

Wir sagen: **Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.**

8. Teilbarkeit durch 25

Schreiben wir die Folge der 25 auf, so erkennen wir, daß reine Hunderterzahlen durch 25 teilbar sind. Wollen wir beurteilen, ob eine beliebig große Zahl durch 25 teilbar ist, so brauchen wir nur ihre letzten beiden Stellen auf die Teilbarkeit durch 25 zu untersuchen.

Die Zahl 7426375 ist durch 25 teilbar, weil 7426300 und auch 75 durch 25 teilbar sind. Die Zahl 406824 ist durch 25 nicht teilbar, weil wohl 406800 durch 25 teilbar ist, aber nicht 24.

Wir sagen: **Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 25 teilbare Zahl bilden. Reine Hunderterzahlen sind immer durch 25 teilbar.**

Zusammenfassung

1. Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar.
2. Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
3. Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden. Reine Hunderterzahlen sind immer durch 4 teilbar.
4. Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine Fünf oder eine Null ist.
5. Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihre letzten drei Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden. Reine Tausenderzahlen sind immer durch 8 teilbar.
6. Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

7. Eine Zahl ist durch **10** teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine Null ist.
8. Eine Zahl ist durch **25** teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 25 teilbare Zahl bilden. Reine Hunderterzahlen sind immer durch 25 teilbar.

Aufgaben

1. Gib **a)** eine vierstellige, **b)** eine fünfstellige, **c)** eine sechsstellige Zahl an und untersuche sie nach den behandelten Teilbarkeitsregeln!
Prüfe jedesmal durch Rechnen nach!

2. Stelle fest, ob die folgenden Zahlen durch 2 teilbar sind!

a) 25036	**b)** 19747	**c)** 8300	**d)** 63528
e) 36009	**f)** 53044	**g)** 18672	**h)** 528320
i) 10001	**k)** 2003	**l)** 3486284	**m)** 9007675

Ordne die Zahlen in durch 2 teilbare und durch 2 nicht teilbare Zahlen!

3. Stelle fest, welche der folgenden Zahlen durch 5 teilbar sind!

a) 17375	**b)** 39706	**c)** 48250	**d)** 97874
e) 66555	**f)** 125973	**g)** 306025	**h)** 2458
i) 17625	**k)** 4874252	**l)** 90120	**m)** 21850
n) 45377	**o)** 8255	**p)** 7672065	**q)** 9207308

Ordne die Zahlen in durch 5 teilbare und durch 5 nicht teilbare Zahlen!

4. Untersuche die folgenden Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 4 und 8!

a) 48	**b)** 42	**c)** 64	**d)** 724	**e)** 956
f) 5032	**g)** 6420	**h)** 37952	**i)** 3814	**k)** 49534
l) 360912	**m)** 73718	**n)** 95392	**o)** 524598	**p)** 18408
q) 24607348	**r)** 867584	**s)** 5781976	**t)** 400832	**u)** 3517258

5. Untersuche die folgenden Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 3 und 9!

a) 81	**b)** 45	**c)** 72	**d)** 987
e) 2469	**f)** 384	**g)** 51	**h)** 6192
i) 36477	**k)** 984	**l)** 28655	**m)** 72261
n) 6321	**o)** 9462	**p)** 361263	**q)** 244992
r) 5931792	**s)** 7929	**t)** 9145521	**u)** 2745
v) 4382117	**w)** 800803	**x)** 60702	**y)** 5362098

6. Welche der folgenden Zahlen sind durch 25 teilbar?

a) 76000	**b)** 7825	**c)** 89350	**d)** 667500
e) 34567	**f)** 34875	**g)** 356465	**h)** 7864300

7. Untersuche mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln, ob die folgenden Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 oder 25 teilbar sind!

a) 3678	b) 7690	c) 14586	d) 33872
e) 67924	f) 7683500	g) 23456100	h) 7653300
i) 8896500	k) 977648	l) 7653000	m) 54897225

8. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

Untersuche, durch welche Zahlen 20 und 23 teilbar sind! Wir stellen fest, daß 20 durch 1, 2, 4, 5, 10 und 20 teilbar ist. (Wende zur Begründung die Teilbarkeitsregeln für 2, 4, 5 und 10 an!) 23 dagegen ist nur durch 1 und 23 teilbar.

Untersuche entsprechend die Zahlen 12 und 13!

Es gibt demnach Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind, zum Beispiel 2, 3, 5, 7, 13, 23. Solche Zahlen nennt man **Primzahlen**. Die Zahl 1 wird nicht als Primzahl bezeichnet.

Alle anderen Zahlen, zum Beispiel 4, 8, 9, 10, 12, 20, nennt man **zusammengesetzte Zahlen**. Sie lassen sich nicht nur durch 1 und durch sich selbst teilen, sondern sie sind auch durch andere Zahlen teilbar. Alle zusammengesetzten Zahlen sind also Produkte, die wir in Faktoren zerlegen können.

Beispiele: $6 = 2 \cdot 3 \qquad 15 = 3 \cdot 5 \qquad 35 = 5 \cdot 7$

Es gibt auch zusammengesetzte Zahlen, die sich in 3 Faktoren zerlegen lassen.

Beispiele: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

Viele zusammengesetzte Zahlen lassen sich sogar in mehr als 3 Faktoren zerlegen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 24 &= 4 \cdot 6 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Zerlegen wir eine zusammengesetzte Zahl in Faktoren, so beginnen wir mit dem kleinsten Teiler, der möglich ist. Beim Zerlegen der Zahl 72 ergibt sich zum Beispiel das folgende Bild:

$$\begin{aligned} 72 &= 2 \cdot 36 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 18 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

Wir führen das Zerlegen so weit durch, bis sich die gefundenen Faktoren nicht mehr zerlegen lassen, also bis die Faktoren Primzahlen sind. Die Primzahlen, die sich beim Zerlegen einer Zahl in Faktoren ergeben, nennen wir **Primfaktoren**.

Mit Hilfe der Zerlegung in Primfaktoren kann man feststellen, durch welche Zahlen eine gegebene Zahl teilbar ist. Wir haben zum Beispiel die Zahl 72 in die Primfaktoren 2, 2, 2, 3 und 3 zerlegt. Wir fassen nun die Primfaktoren so zusammen, daß die Zahl 72 immer als ein Produkt aus zwei Faktoren erscheint.

$$\begin{aligned} 72 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 \\ &= 8 \cdot 9 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 72 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 \\ &= 4 \quad 18 \end{aligned}$$

Führe weitere Zusammenfassungen selbst durch!

Es ergeben sich für die Zahl 72 die folgenden Zusammenfassungen:

$$\begin{aligned} 72 &= 2\cdot 36 \text{ oder } 36\cdot 2, \\ &= 4\cdot 18 \text{ oder } 18\cdot 4, \\ &= 6\cdot 12 \text{ oder } 12\cdot 6, \\ &= 3\cdot 24 \text{ oder } 24\cdot 3, \\ &= 9\cdot 8 \text{ oder } 8\cdot 9. \end{aligned}$$

Also ist 72 durch 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24 und 36 teilbar.

Teilbarkeit durch 6

Jetzt können wir auch untersuchen, ob Zahlen durch 6 teilbar sind. Die Zahl 6 ist ein Produkt aus den Primfaktoren 2 und 3. Deshalb muß eine Zahl, die durch 6 teilbar ist, sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar sein.

Wir sagen: **Durch 6 ist jede gerade Zahl teilbar, deren Quersumme durch 3 teilbar ist.**

Potenzschreibweise

Ein Produkt mit gleichen Faktoren können wir in abgekürzter Form schreiben.

Beispiele:

$2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$ (sprich: zwei hoch drei)

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^4$ (sprich: drei hoch vier)

$5\cdot 5 = 5^2$ (sprich: fünf hoch zwei)

Produkte, die in dieser abgekürzten Form geschrieben werden, nennen wir **Potenzen**. Die kleine hochgesetzte Zahl wird Hochzahl oder

Exponent genannt. Sie gibt an, wie oft die Grundzahl oder **Basis** als Faktor gesetzt werden soll.

Die Zahl 72 hatten wir in Primfaktoren zerlegt. Als Potenzen kurz geschrieben, ergibt sich:

$$72 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{}$$
$$= \quad 2^3 \quad \cdot \quad 3^2$$

Unterscheide stets sehr genau die Potenzschreibweise von der Schreibweise bei Multiplikationen! 2^3 bedeutet: Die 2 soll dreimal als Faktor gesetzt werden, also $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.

$2 \cdot 3$ bedeutet: Die 2 soll dreimal als Summand gesetzt werden, also $2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2$.

Berechne 2^3, dann $2 \cdot 3$ und vergleiche die Ergebnisse!

Aufgaben

1. Schreibe die folgenden Produkte als Potenzen!

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ b) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
c) $7 \cdot 7 \cdot 7$ d) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$
e) $9 \cdot 9 \cdot 9$ f) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$
g) $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25$ h) $30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30$

2. Rechne die folgenden Potenzen aus!

2^3, 5^2, 3^2, 5^3, 8^3, 10^4, 2^5, 7^3, 3^4, 4^3, 3^5, 7^2, 9^2, 6^2, 2^6, 6^3, 3^6, 5^4, 4^5

3. Bilde selbst 10 Potenzen und rechne sie aus!

4. a) Löse die folgenden Aufgaben und vergleiche die Ergebnisse!

$4 + 4 + 4 + 4 + 4$ $\qquad$ $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

b) Schreibe beide Aufgaben in abgekürzter Form!

5. Um wieviel ist 3^6 größer als $3 \cdot 6$?

6. a) Zerlege die Zahlen 2 bis 20 in ihre Primfaktoren!
b) Stelle die Primzahlen im Zahlenbereich von 2 bis 20 zusammen!

7. Zerlege folgende Zahlen in ihre Primfaktoren!

25, 27, 42, 45, 48, 54, 64, 81, 100

8. Bestimme die Primzahlen im Zahlenbereich von 2 bis 100! Anleitung:

a) Die erste Primzahl ist 2. Andere gerade Zahlen außer 2 können keine Primzahlen sein. Begründe das!
b) Wir schreiben nun die ungeraden Zahlen von 3 bis 9 in eine Zeile, in die nächste Zeile die ungeraden Zahlen von 11 bis 19, in die

folgende Zeile die von 21 bis 29 usw. bis zu der Zeile 91 bis 99. Wir streichen nun jede ungerade Zahl durch, die ein Vielfaches einer schon vorhandenen ungeraden Zahl darstellt (zum Beispiel 9 in der ersten Zeile, weil $9 = 3 \cdot 3$ ist). Durch die Streichungen bleiben in der Folge der natürlichen Zahlen von 2 bis 100 nur noch die Primzahlen stehen. Die Zahlenfolge wird damit wie ein Sieb durchlöchert. Der griechische Mathematiker **Eratosthenes**, der vor ungefähr 2100 Jahren lebte, hat dieses Verfahren beschrieben. Man bezeichnet es deshalb als „Sieb des Eratosthenes“.

9. Bestimme die Primfaktoren der folgenden Zahlen!

36, 56, 91, 90, 105, 126, 152, 168, 198, 225, 240, 306, 440, 504, 625, 720

10. Ermittle durch Zerlegen in Primfaktoren, durch welche Zahlen **a)** 372, **b)** 512, **c)** 960, **d)** 1440 teilbar sind!

11. Untersuche die folgenden Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 6!

a) 756	**b)** 2847	**c)** 9462	**d)** 5344	**e)** 378961
f) 214872	**g)** 7392	**h)** 30462	**i)** 44406	**k)** 97360

9. Der Hauptnenner

Wir haben schon gelernt, wie man gleichnamige Brüche addieren und subtrahieren kann. Wollen wir dagegen ungleichnamige Brüche addieren oder subtrahieren, so müssen wir sie erst durch Erweitern gleichnamig machen. Wir müssen die Brüche also auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen, der die Nenner der einzelnen Brüche enthalten muß.

Der gemeinschaftliche Nenner ist in den folgenden Beispielen schnell zu finden.

1. Beispiel: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ 2. Beispiel: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Bei der ersten Aufgabe sehen wir, daß wir 8 als gemeinschaftlichen Nenner wählen können, da der Nenner 4 in ihm enthalten ist. Beim zweiten Beispiel können wir die beiden Nenner miteinander multiplizieren, so daß wir als gemeinschaftlichen Nenner 12 erhalten.

Das erste Beispiel $(\frac{1}{4} + \frac{1}{8})$ zeigt uns, daß wir den gemeinschaftlichen Nenner nicht immer durch Multiplizieren beider Nenner zu suchen brauchen. Durch die Multiplikation der Nenner 4 und 8 erhalten wir als gemeinschaftlichen Nenner 32. Wir können aber schon mit dem gemeinschaftlichen Nenner 8 beide Brüche gleichnamig machen. Wir versuchen stets, ein möglichst kleines gemeinschaftliches Vielfaches zu finden.

In dem 1. Beispiel könnten wir außer 32 auch 24 oder 16 als gemeinschaftliches Vielfaches wählen. Damit wir beim Rechnen möglichst kleine

Zahlen erhalten, suchen wir immer das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache* der Nenner. Man bezeichnet es als **Hauptnenner**.

Wir finden den Hauptnenner mit Hilfe der Zerlegung in Primfaktoren.

3. *Beispiel*: $\frac{1}{8} + \frac{1}{6}$

Zerlegung in Primfaktoren:

$$\begin{array}{rcccc} 8 = & 2 & \cdot\, 2 & \cdot\, 2 & \\ 6 = & & & 2 & \cdot\, 3 \\ \hline & 2 & \cdot\, 2 & \cdot\, 2 & \cdot\, 3 = 24 \end{array}$$

Der Hauptnenner ist 24.

Den bei der Zerlegung der 6 auftretenden Primfaktor 2 schreiben wir unter einen gleichen Primfaktor, der sich bei der Zerlegung der 8 ergeben hat. Das bedeutet, daß wir diese 2 nicht mehr zu berücksichtigen brauchen, weil sie schon als Primfaktor der Acht aufgeführt ist. Die 3 rücken wir heraus, da sie noch nicht als Primfaktor vorhanden ist. Nun schreiben wir die gefundenen Primfaktoren unter den Strich und multiplizieren sie miteinander. Als Produkt erhalten wir 24. Die Zahl 24 ist das *kleinste* gemeinschaftliche Vielfache, also der Hauptnenner der beiden Nenner 8 und 6.

Entsprechend können wir auch bei drei und mehr Nennern den Hauptnenner suchen.

4. *Beispiel*: $\frac{1}{24} + \frac{1}{20} + \frac{1}{18}$

Wenn wir diese drei Nenner miteinander multiplizieren würden, erhielten wir als gemeinschaftlichen Nenner 8640. Wir würden aber dadurch nach dem Erweitern große Zähler erhalten:

$$\frac{360}{8640} + \frac{432}{8640} + \frac{480}{8640}.$$

Wir suchen deshalb den Hauptnenner durch Zerlegen in Primfaktoren.

$$\begin{array}{rcccccc} 24 = & 2 & \cdot\, 2 & \cdot\, 2 & \cdot\, 3 & & \\ 20 = & 2 & \cdot\, 2 & & & \cdot\, 5 & \\ 18 = & 2 & & & \cdot\, 3 & & \cdot\, 3 \\ \hline & 2 & \cdot\, 2 & \cdot\, 2 & \cdot\, 3 & \cdot\, 5 & \cdot\, 3 = 360 \end{array}$$

Also ist 360 der Hauptnenner der drei gegebenen Nenner 24, 20 und 18. Nach dem Erweitern erhalten wir nun:

$$\frac{15}{360} + \frac{18}{360} + \frac{20}{360}.$$

Neben dieser ausführlichen Schreibweise beim Zerlegen in Primfaktoren können wir auch die Potenzschreibweise verwenden. Wir schreiben dann:

$$\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 20 = 2^2 \quad \cdot 5 \\ 18 = 2 \;\cdot 3^2 \\ \hline \qquad 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360 \end{array}$$

Von den beim Zerlegen vorkommenden Potenzen der Zwei wählen wir die höchste (2^3) und multiplizieren sie mit der höchsten Potenz der Drei (3^2) und mit 5.

Aufgaben

Bestimme den Hauptnenner der folgenden Nenner!

1. a)	4 und 6	5 und 8	4 und 10	4 und 18	4 und 14
	8 und 9	10 und 15	8 und 12	9 und 12	12 und 15
b)	3 und 4	3 und 5	2 und 6	3 und 8	3 und 9
	4 und 5	7 und 21	2 und 11	5 und 6	4 und 13
c)	4 und 9	9 und 13	5 und 16	7 und 13	15 und 20
	12 und 15	18 und 14	10 und 125	12 und 38	8 und 18
d)	24 und 27	14 und 35	12 und 39	15 und 36	16 und 36
	21 und 35	25 und 35	27 und 36	28 und 35	30 und 36
e)	35 und 40	12 und 40	16 und 44	18 und 48	20 und 45
	24 und 28	42 und 70	45 und 54	60 und 80	78 und 130

2. a) 4, 9 und 24	b) 7, 12 und 21	c) 9, 10 und 30
d) 8, 24 und 30	e) 9, 12 und 18	f) 6, 9 und 21
g) 6, 8 und 10	h) 12, 16 und 20	i) 15, 20 und 30
k) 12, 18 und 24	l) 16, 18 und 28	m) 15, 21 und 24
n) 25, 30 und 40	o) 24, 32 und 56	p) 27, 36 und 54
q) 40, 48 und 72	r) 28, 35 und 49	s) 15, 40 und 48
t) 24, 32 und 60	u) 54, 27 und 81	v) 88, 64 und 40
w) 36, 48 und 84	x) 64, 40 und 25	y) 36, 54 und 64

3. a) 24, 36 und 48	b) 24, 36 und 60	c) 30, 45 und 75
d) 95, 38 und 57	e) 21, 56 und 35	f) 63, 18 und 81
g) 91, 52 und 78	h) 35, 95 und 85	i) 120, 180 und 300

4. a) 6, 8, 10 und 12	b) 6, 9, 12 und 15
c) 8, 10, 12 und 14	d) 6, 12, 18 und 24
e) 9, 15, 21 und 27	f) 12, 15, 18 und 21
g) 12, 16, 20 und 24	h) 12, 18, 24 und 30

5. a) 6, 8, 10, 12 und 14	b) 6, 10, 15, 21 und 25
c) 9, 12, 15, 20 und 28	d) 10, 14, 18, 24 und 35
e) 16, 27, 12, 9 und 30	f) 5, 16, 15, 8 und 10

V. Rechnen mit gemeinen Brüchen

10. Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Nachdem wir wissen, wie man für ungleichnamige Brüche den Hauptnenner findet, können wir solche Brüche gleichnamig machen. Dann können wir ungleichnamige Brüche addieren oder subtrahieren

Addition

1. Beispiel: $\frac{5}{8} + \frac{7}{10}$

Lösung: Wir suchen zunächst den Hauptnenner für die beiden Brüche. Dann erweitern wir die Brüche so, daß sie gleichnamig werden. Die gleichnamigen Brüche können wir addieren.

Hauptrechnung:

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{10} = \frac{25}{40} + \frac{28}{40}$$
$$= \frac{53}{40} = 1\frac{13}{40}$$

Nebenrechnung:

$8 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2$			5
$10 =$	2		$\cdot 5$	4
	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$			

Damit wir uns das Erweitern erleichtern, schreiben wir in der Nebenrechnung für jeden Nenner die Erweiterungszahl in eine besondere Spalte. Wir finden die Erweiterungszahl, indem wir den Hauptnenner durch den Nenner des zu erweiternden Bruches dividieren.

Ergibt die Summe der Brüche einen unechten Bruch, so verwandeln wir diesen in eine gemischte Zahl. Wir kürzen, wenn es möglich ist.

2. Beispiel: $\frac{3}{8} + 2\frac{5}{12} + \frac{7}{15} + 3\frac{9}{20}$

Lösung:

Hauptrechnung:

$$\frac{3}{8} + 2\frac{5}{12} + \frac{7}{15} + 3\frac{9}{20}$$
$$= \frac{45}{120} + 2\frac{50}{120} + \frac{56}{120} + 3\frac{54}{120}$$
$$= 5 + \frac{205}{120}$$
$$= 6\frac{85}{120} = 6\frac{17}{24}$$

Nebenrechnung:

$8 =$	$2 \cdot 2 \cdot 2$			15
$12 =$	$2 \cdot 2$	$\cdot 3$		10
$15 =$		3	$\cdot 5$	8
$20 =$	$2 \cdot 2$		$\cdot 5$	6
	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$			

Als **Gang der Lösung** bei der Addition von Brüchen merken wir uns:

1. In einer Nebenrechnung den Hauptnenner suchen.
2. Erweiterungszahl für jeden Bruch bestimmen.

3. Die einzelnen Brüche erweitern.
4. Zähler der erweiterten Brüche addieren, gegebenenfalls kürzen und bei gemischten Zahlen auch die Ganzen addieren.
5. Wenn die Summe der Brüche einen unechten Bruch ergibt, diesen in eine gemischte Zahl verwandeln, gegebenenfalls kürzen.

Aufgaben

Übungen für das Kopfrechnen

	a)	b)	c)	d)	e)
1.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}+\frac{4}{15}$	$\frac{5}{8}+\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}+\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}+\frac{5}{12}$	$\frac{7}{9}+\frac{5}{18}$	$\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$
	$\frac{4}{7}+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}+\frac{1}{10}$	$\frac{2}{3}+\frac{7}{9}$	$\frac{1}{6}+\frac{19}{24}$
	$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$	$\frac{5}{9}+\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}+\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}+\frac{7}{10}$	$\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$

	a)	b)	c)	d)	e)
2.	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$	$\frac{4}{5}+\frac{9}{20}$	$\frac{4}{5}+\frac{17}{30}$	$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$	$\frac{7}{8}+\frac{2}{3}$
	$\frac{5}{12}+\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}+\frac{7}{12}$	$\frac{8}{15}+\frac{23}{60}$	$\frac{1}{6}+\frac{2}{7}$
	$\frac{9}{10}+\frac{5}{7}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}+\frac{5}{18}$	$\frac{3}{4}+\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}+\frac{5}{6}$
	$\frac{3}{8}+\frac{7}{20}$	$\frac{2}{7}+\frac{4}{21}$	$\frac{1}{6}+\frac{3}{14}$	$\frac{3}{10}+\frac{7}{40}$	$\frac{2}{9}+\frac{5}{18}$

Schriftliches Rechnen

	a)	b)	c)	d)	e)
3.	$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$	$\frac{9}{10}+\frac{11}{12}$	$\frac{11}{15}+\frac{9}{25}$	$\frac{8}{9}+\frac{7}{8}$	$\frac{2}{3}+\frac{5}{19}$
	$\frac{5}{8}+\frac{7}{20}$	$\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$	$\frac{4}{9}+\frac{7}{15}$	$\frac{13}{28}+\frac{8}{25}$	$\frac{7}{10}+\frac{29}{50}$
	$\frac{19}{24}+\frac{25}{36}$	$\frac{11}{15}+\frac{21}{25}$	$\frac{5}{8}+\frac{7}{10}$	$\frac{7}{18}+\frac{11}{15}$	$\frac{11}{12}+\frac{8}{15}$

	a)	b)	c)	d)	e)
4.	$\frac{11}{20}+\frac{17}{35}$	$\frac{4}{9}+\frac{8}{15}$	$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$	$\frac{11}{12}+\frac{5}{8}$	$\frac{5}{24}+\frac{9}{16}$
	$\frac{17}{20}+\frac{7}{12}$	$\frac{13}{25}+\frac{57}{100}$	$\frac{17}{30}+\frac{11}{45}$	$\frac{23}{24}+\frac{7}{9}$	$\frac{4}{15}+\frac{3}{10}$
	$\frac{8}{21}+\frac{11}{14}$	$\frac{11}{30}+\frac{8}{9}$	$\frac{5}{8}+\frac{13}{15}$	$\frac{15}{26}+\frac{17}{39}$	$\frac{13}{32}+\frac{19}{24}$

	a)	b)	c)	d)
5.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{7}$	$\frac{7}{10}+\frac{9}{14}+\frac{2}{7}$
	$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}+\frac{9}{10}+\frac{11}{18}$	$\frac{3}{8}+\frac{7}{12}+\frac{11}{20}$
	$\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$	$\frac{9}{10}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}+\frac{9}{11}+\frac{1}{4}$	$\frac{11}{15}+\frac{17}{35}+\frac{8}{21}$
	$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$	$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+\frac{7}{10}$	$\frac{5}{12}+\frac{4}{9}+\frac{3}{8}$	$\frac{11}{24}+\frac{19}{32}+\frac{27}{40}$
	$\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$	$\frac{9}{10}+\frac{7}{8}+\frac{4}{5}$	$\frac{11}{24}+\frac{17}{36}+\frac{7}{9}$	$\frac{11}{15}+\frac{18}{25}+\frac{4}{5}$

6.

a)	b)	c)	d)
$1\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$	$1\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{10} + 5\frac{5}{12}$	$17\frac{11}{20} + 15\frac{9}{35}$
$4\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$	$4\frac{3}{5} + 3\frac{1}{3}$	$15\frac{9}{10} + 12\frac{3}{8}$	$8\frac{14}{15} + 38\frac{7}{24}$
$9\frac{1}{2} + \frac{5}{6}$	$7\frac{2}{9} + 5\frac{4}{5}$	$3\frac{1}{2} + 15\frac{7}{15}$	$19\frac{9}{10} + 24\frac{53}{100}$
$12\frac{3}{8} + \frac{4}{5}$	$10\frac{5}{8} + 5\frac{5}{6}$	$35\frac{13}{14} + 18\frac{19}{21}$	$35\frac{19}{48} + 19\frac{17}{60}$
$15\frac{9}{10} + \frac{79}{100}$	$20\frac{5}{7} + 18\frac{5}{9}$	$51\frac{8}{9} + 38\frac{13}{15}$	$19\frac{13}{16} + 83\frac{39}{40}$

7.

a)	b)	c)	d)
$4\frac{1}{2}$	$7\frac{3}{7}$	$3\frac{3}{4}$	$5\frac{5}{12}$
$+\ 3\frac{3}{4}$	$+\ 29\frac{7}{12}$	$+\ 15\frac{9}{10}$	$+\ 9\frac{3}{8}$
$+\ 9\frac{2}{5}$	$+\ 4\frac{5}{6}$	$+\ 33\frac{11}{15}$	$+\ 27\frac{2}{3}$
$+\ 2\frac{1}{10}$	$+\ 36\frac{3}{4}$	$+\ 8\frac{4}{5}$	$+\ 18\frac{11}{20}$
$+\ 8\frac{9}{20}$	$+\ 9\frac{1}{2}$	$+\ 29\frac{13}{20}$	$+\ 49\frac{1}{6}$

e)	f)	g)	h)
$38\frac{9}{25}$	$15\frac{5}{7}$	$18\frac{4}{5}$	$9\frac{3}{20}$
$+\ 5\frac{7}{10}$	$+\ \frac{19}{21}$	$+\ 9\frac{13}{20}$	$+\ 17\frac{11}{24}$
$+\ 65\frac{11}{15}$	$+\ 8\frac{34}{35}$	$+\ 12\frac{7}{8}$	$+\ 5\frac{7}{15}$
$+\ 14\frac{5}{8}$	$+\ 5\frac{17}{20}$	$+\ 46\frac{11}{15}$	$+\ 23\frac{5}{12}$
$+\ 9\frac{19}{30}$	$+\ 12\frac{3}{4}$	$+\ 23\frac{19}{24}$	$+\ 7\frac{3}{8}$

8. a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{7}{15} + \frac{9}{20} + \frac{5}{8} + \frac{9}{10}$ b) $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{5}{6} + \frac{7}{12} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10} + \frac{5}{12} + \frac{19}{30} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{8} + \frac{11}{20} + \frac{1}{4} + \frac{17}{24} + \frac{5}{6} + \frac{3}{5}$

e) $\frac{4}{7} + \frac{1}{6} + \frac{9}{14} + \frac{5}{12} + \frac{16}{21} + \frac{1}{3} + \frac{7}{8}$ f) $\frac{11}{45} + \frac{7}{12} + \frac{19}{30} + \frac{3}{10} + \frac{5}{6} + \frac{13}{15}$

g) $\frac{5}{16} + \frac{5}{8} + \frac{31}{48} + \frac{8}{15} + \frac{3}{5} + \frac{11}{12} + \frac{11}{24}$ h) $\frac{17}{20} + \frac{37}{50} + \frac{19}{25} + \frac{61}{100} + \frac{5}{8} + \frac{27}{40}$

9. a) $25\frac{3}{4} + 18\frac{5}{8} + 133\frac{7}{9} + 58\frac{11}{12} + 225\frac{8}{15}$

b) $34\frac{7}{10} + 14\frac{5}{7} + 59\frac{4}{5} + 16\frac{3}{4} + 186\frac{13}{14}$

c) $55\frac{19}{40} + 138\frac{17}{25} + 249\frac{3}{4} + 67\frac{9}{10} + 39\frac{41}{50} + 349\frac{7}{8}$

Subtraktion

1. Beispiel: $2\frac{3}{4} - \frac{7}{10}$

Lösung:

Hauptrechnung:

$$2\frac{3}{4} - \frac{7}{10} = 2\frac{15}{20} - \frac{14}{20} = 2\frac{1}{20}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{l|l} 4 = 2 \cdot 2 & 5 \\ 10 = 2 \quad \cdot 5 & 2 \\ \hline 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20 & \end{array}$$

2. Beispiel: $7\frac{5}{12} - 3\frac{11}{20}$

Lösung:

Hauptrechnung:

$$7\tfrac{5}{12} - 3\tfrac{11}{20} = 7\tfrac{25}{60} - 3\tfrac{33}{60}$$
$$= 6\tfrac{85}{60} - 3\tfrac{33}{60}$$
$$= 3\tfrac{52}{60} = 3\tfrac{13}{15}$$

Nebenrechnung:

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	5
$20 = 2 \cdot 2 \quad \cdot 5$	3
$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$	

3. Beispiel: $12\frac{3}{4} - 3\frac{5}{6} - 2\frac{7}{15} - 1\frac{7}{20}$

Lösung:

Hauptrechnung:

$$12\tfrac{3}{4} - 3\tfrac{5}{6} - 2\tfrac{7}{15} - 1\tfrac{7}{20}$$
$$= 12\tfrac{45}{60} - 3\tfrac{50}{60} - 2\tfrac{28}{60} - 1\tfrac{21}{60}$$
$$= 6\tfrac{45}{60} - \tfrac{50}{60} - \tfrac{28}{60} - \tfrac{21}{60}$$
$$= 6\tfrac{45}{60} - \tfrac{99}{60} = 5\tfrac{105}{60} - \tfrac{99}{60} = 5\tfrac{6}{60} = 5\tfrac{1}{10}$$

Nebenrechnung.

$4 = 2 \cdot 2$	15
$6 = \quad 2 \cdot 3$	10
$15 = \quad 3 \cdot 5$	4
$20 = 2 \cdot 2 \quad \cdot 5$	3
$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$	

Die Subtraktion ungleichnamiger Brüche haben wir entsprechend dem Lösungsgang der Addition ausgeführt.

Zusammenfassung: Zur Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche sind die folgenden Teilschritte notwendig:

1. In einer Nebenrechnung den Hauptnenner suchen.
2. Erweiterungszahl für jeden Bruch bestimmen.
3. Die einzelnen Brüche erweitern.
4. Zähler der erweiterten Brüche addieren oder voneinander subtrahieren, gegebenenfalls kürzen und bei gemischten Zahlen auch die Ganzen addieren oder voneinander subtrahieren.
5. Wenn die Summe oder die Differenz der Brüche einen unechten Bruch ergibt, diesen in eine gemischte Zahl verwandeln, den Bruch gegebenenfalls kürzen.

Aufgaben

Übungen für das Kopfrechnen

10.

a)	b)	c)	d)	e)
$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$	$\frac{5}{6} - \frac{5}{12}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$	$\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$	$\frac{14}{15} - \frac{3}{5}$
$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$	$\frac{19}{24} - \frac{5}{8}$	$\frac{1}{9} - \frac{1}{10}$	$\frac{7}{9} - \frac{2}{3}$
$\frac{3}{5} - \frac{9}{20}$	$\frac{2}{5} - \frac{1}{4}$	$\frac{4}{5} - \frac{3}{10}$	$\frac{31}{45} - \frac{7}{15}$	$\frac{3}{7} - \frac{1}{3}$

11. a) $\frac{1}{2} - \frac{2}{5}$ $\frac{9}{10} - \frac{4}{15}$ $\frac{5}{6} - \frac{7}{11}$
b) $\frac{7}{8} - \frac{4}{9}$ $\frac{4}{5} - \frac{3}{8}$ $\frac{7}{12} - \frac{7}{15}$
c) $\frac{7}{8} - \frac{5}{12}$ $\frac{11}{12} - \frac{4}{5}$ $\frac{9}{10} - \frac{2}{3}$
d) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$ $\frac{13}{20} - \frac{8}{13}$
e) $\frac{8}{9} - \frac{3}{4}$ $\frac{5}{6} - \frac{3}{5}$ $\frac{13}{18} - \frac{11}{24}$

Schriftliches Rechnen

12. a) $\frac{9}{10} - \frac{5}{12}$ $\frac{5}{8} - \frac{7}{36}$ $\frac{10}{11} - \frac{9}{10}$
b) $\frac{5}{9} - \frac{3}{16}$ $\frac{19}{20} - \frac{13}{15}$ $\frac{8}{13} - \frac{4}{11}$
c) $\frac{19}{30} - \frac{11}{20}$ $\frac{15}{17} - \frac{3}{4}$ $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$
d) $\frac{7}{15} - \frac{7}{18}$ $\frac{7}{10} - \frac{9}{23}$ $\frac{9}{10} - \frac{2}{15}$
e) $\frac{8}{11} - \frac{5}{7}$ $\frac{8}{15} - \frac{7}{20}$ $\frac{19}{20} - \frac{1}{4}$

13. a) $\frac{15}{28} - \frac{11}{21}$ $\frac{11}{15} - \frac{9}{25}$ $\frac{43}{48} - \frac{23}{36}$
b) $\frac{19}{25} - \frac{22}{45}$ $\frac{9}{10} - \frac{11}{32}$ $\frac{49}{60} - \frac{13}{24}$
c) $\frac{17}{30} - \frac{13}{25}$ $\frac{15}{26} - \frac{17}{39}$ $\frac{47}{48} - \frac{5}{16}$
d) $\frac{15}{16} - \frac{9}{20}$ $\frac{19}{30} - \frac{11}{18}$ $\frac{11}{12} - \frac{6}{11}$
e) $\frac{37}{60} - \frac{8}{45}$ $\frac{23}{24} - \frac{13}{30}$ $\frac{9}{11} - \frac{4}{7}$

14. a) $1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ b) $2\frac{1}{3} - \frac{4}{5}$ c) $4\frac{2}{3} - 1\frac{3}{4}$
d) $12\frac{2}{5} - 8\frac{4}{7}$ e) $8\frac{11}{12} - 5\frac{5}{8}$ f) $4\frac{1}{3} - \frac{5}{6}$
g) $4\frac{3}{8} - \frac{7}{10}$ h) $5\frac{3}{5} - 2\frac{7}{8}$ i) $25\frac{4}{9} - 14\frac{11}{16}$
k) $15\frac{11}{20} - 10\frac{22}{25}$ l) $2\frac{2}{5} - \frac{7}{10}$ m) $12\frac{5}{9} - \frac{8}{15}$
n) $9\frac{3}{10} - 4\frac{7}{15}$ o) $33\frac{11}{40} - 20\frac{18}{25}$ p) $12\frac{5}{8} - 5\frac{7}{12}$
q) $5\frac{1}{9} - \frac{1}{8}$ r) $18\frac{7}{20} - \frac{19}{30}$ s) $8\frac{7}{12} - 3\frac{8}{9}$
t) $41\frac{9}{11} - 38\frac{7}{8}$ u) $18\frac{7}{15} - 5\frac{5}{12}$ v) $56\frac{5}{18} - 29\frac{7}{30}$
w) $34\frac{5}{18} - \frac{7}{12}$ x) $11\frac{5}{8} - 7\frac{4}{7}$ y) $94\frac{16}{25} - 68\frac{17}{20}$

15. a) $212\frac{4}{5} - 89\frac{3}{8}$ b) $531\frac{11}{32} - 248\frac{17}{24}$ c) $681\frac{11}{15} - 474\frac{17}{20}$ d) $1\,039\frac{5}{18} - 679\frac{17}{24}$
e) $3\,451\frac{23}{35} - 1\,868\frac{44}{49}$ f) $2\,138\frac{14}{25} - 1\,654\frac{29}{40}$ g) $496\frac{17}{25} - 121\frac{1}{2}$ h) $695\frac{17}{25} - 43\frac{4}{15}$
i) $708\frac{7}{20} - 534\frac{1}{15}$ k) $926\frac{17}{42} - 534\frac{1}{15}$ l) $9\,866\frac{14}{15} - 2\,364\frac{2}{11}$ m) $6\,453\frac{2}{3} - 1\,470\frac{2}{17}$

16. Lösungsbeispiel: $16\frac{3}{5} - 10\frac{5}{12} + 4\frac{4}{15} - 8\frac{5}{6} + 3\frac{3}{4}$

$$= 16\frac{3}{5} + 4\frac{4}{15} + 3\frac{3}{4} - 10\frac{5}{12} - 8\frac{5}{6}$$
$$= 16\frac{36}{60} + 4\frac{16}{60} + 3\frac{45}{60} - 10\frac{25}{60} - 8\frac{50}{60}$$
$$= 23 + \frac{97}{60} - 10\frac{25}{60} - 8\frac{50}{60}$$
$$= 5\frac{22}{60} = 5\frac{11}{30}$$

Beschreibe vor dem Rechnen den Lösungsweg!

a) $13\frac{3}{4} + 7\frac{1}{2} - 12\frac{5}{8} + 6\frac{5}{9} - 4\frac{7}{12}$ **b)** $7\frac{2}{3} + 4\frac{5}{16} - 8\frac{7}{12} + 2\frac{3}{8} - 2\frac{5}{24}$

c) $20\frac{4}{5} - 8\frac{9}{20} - 7\frac{3}{4} + 15\frac{17}{60} + 9\frac{11}{15}$ **d)** $14\frac{4}{9} - 8\frac{13}{24} - 3\frac{5}{8} + 7\frac{7}{18} - 5\frac{11}{12}$

e) $5\frac{5}{7} + 13\frac{3}{4} + 9\frac{13}{20} - 6\frac{4}{5} - 11\frac{9}{14}$ **f)** $15\frac{4}{5} + 3\frac{3}{4} - 9\frac{7}{10} - 3\frac{19}{20} + 8\frac{6}{25}$

g) $9\frac{7}{10} + 25\frac{3}{8} - 4\frac{7}{12} - 8\frac{8}{9} + 18\frac{5}{6}$ **h)** $31\frac{2}{3} + 13\frac{1}{4} - 19\frac{3}{5} + 23\frac{8}{9} - 17\frac{1}{10}$

17. Die Klammern in den nachfolgenden Aufgaben deuten an, was beim Ausrechnen zusammengehört. Es muß erst jede Klammer für sich ausgerechnet werden, bevor die Hauptrechnung ausgeführt wird.

Lösungsbeispiel:

$$\begin{aligned}(5\tfrac{3}{4} + 3\tfrac{5}{6}) - (2\tfrac{2}{5} + 4\tfrac{5}{8}) &= (5\tfrac{9}{12} + 3\tfrac{10}{12}) - (2\tfrac{16}{40} + 4\tfrac{25}{40})\\ &= (8 + \tfrac{19}{12}) - (6 + \tfrac{41}{40})\\ &= 9\tfrac{7}{12} - 7\tfrac{1}{40}\\ &= 9\tfrac{70}{120} - 7\tfrac{3}{120}\\ &= 2\tfrac{67}{120}\end{aligned}$$

a) $(17\frac{5}{18} + 11\frac{11}{24}) - (13\frac{5}{8} + 4\frac{8}{9})$ **b)** $(12\frac{9}{16} - 5\frac{1}{6}) + (8\frac{7}{8} - 5\frac{5}{12})$

c) $(4\frac{11}{18} + 5\frac{3}{4}) - (8\frac{7}{9} - 3\frac{11}{12})$ **d)** $(18\frac{4}{15} - 7\frac{3}{4}) - (11\frac{5}{12} - 6\frac{13}{20})$

e) $(24\frac{3}{4} - 13\frac{5}{9}) + (18\frac{7}{8} - 10\frac{2}{3})$ **f)** $(76\frac{2}{3} - 19\frac{1}{5}) - (25\frac{4}{9} + 18\frac{1}{6})$

g) $(46\frac{5}{6} - 3\frac{5}{7}) - (28\frac{6}{7} - 25\frac{2}{21})$ **h)** $(65\frac{1}{2} - 16\frac{4}{5}) + (94\frac{3}{8} - 87\frac{3}{4})$

Anwendungen

18. Ein Minuend beträgt $19\frac{5}{6}$, die Differenz $3\frac{4}{9}$. Wie heißt der Subtrahend?

19. Eine Differenz beträgt $33\frac{1}{5}$, der Subtrahend ist $12\frac{9}{10}$. Wie heißt der Minuend?

20. Ein Summand ist $44\frac{3}{4}$, die Summe ist $131\frac{5}{8}$. Wie heißt der andere Summand?

21. Von welcher Zahl muß man $14\frac{1}{2}$ subtrahieren, wenn man $91\frac{4}{5}$ übrigbehalten will?

22. Vermindert man eine Zahl um $96\frac{7}{18}$, so erhält man $4\frac{1}{36}$. Wie heißt die Zahl?

23. Vermehrt man eine Zahl um $81\frac{21}{34}$, so erhält man $332\frac{3}{34}$. Wie heißt die Zahl?

24. Berechne **a)** die Summe, **b)** die Differenz der beiden Zahlen $78\frac{29}{54}$ und $47\frac{11}{30}$!

25. Vergleiche die Summe der beiden Zahlen $9\frac{11}{30}$ und $7\frac{8}{25}$ mit ihrer Differenz!

26. Von einem Ballen Mantelstoff, auf dem noch $17\frac{1}{2}$ m sind, werden nacheinander $2\frac{1}{4}$ m, $3\frac{1}{2}$ m, $4\frac{3}{4}$ m, $2\frac{1}{2}$ m und $3\frac{3}{4}$ m verkauft. Wieviel Meter Mantelstoff bleiben als Rest von dem Ballen übrig?

27. In einer HO-Verkaufsstelle für Molkereiprodukte wird aus einem Behälter, der 10 l faßt, Sahne verkauft. Ihm werden am Vormittag $\frac{1}{8}$ l, $1\frac{1}{4}$ l, $\frac{5}{8}$ l, $\frac{3}{8}$ l, $\frac{3}{4}$ l, $\frac{1}{2}$ l, am Nachmittag $\frac{3}{4}$ l, $\frac{1}{8}$ l, $\frac{1}{4}$ l, $1\frac{1}{4}$ l, $\frac{1}{2}$ l, $1\frac{3}{8}$ l und $\frac{5}{8}$ l Sahne entnommen. Welche Menge ist verkauft worden und wieviel Liter bleiben übrig?

28. Im Schulgarten sollen 3 Beete mit Kohl bepflanzt werden. Für das erste Beet brauchen die Schüler $1\frac{1}{4}$ Schock, für das zweite $\frac{1}{2}$ Schock und für das dritte $\frac{3}{4}$ Schock Kohlpflanzen. Wieviel Schock Kohlpflanzen brauchen die Schüler für die drei Beete? (1 Schock = 60 St.)

29. Im Schulgarten werden von einem Beet $12\frac{1}{2}$ kg Gurken geerntet. Auf einem anderen Beet von der gleichen Größe war besser gedüngt worden. Infolgedessen konnten von diesem Beet $18\frac{1}{4}$ kg Gurken geerntet werden. Wieviel Kilogramm Gurken konnten von dem zweiten Beet mehr geerntet werden?

30. Auf einem Tomatenbeet werden an drei aufeinanderfolgenden Tagen $2\frac{1}{2}$ kg, $2\frac{3}{4}$ kg und $1\frac{1}{4}$ kg Tomaten geerntet. Wieviel Kilogramm Tomaten werden an den drei Tagen insgesamt geerntet?

31. Zwei Klassen haben im Sammeln von Schrott, Altpapier und Knochen einen Wettbewerb abgeschlossen. Die Klasse 5a lieferte im einzelnen im Verlaufe der Wettbewerbswoche beim Altwarenhändler $19\frac{3}{4}$ kg Schrott, $21\frac{2}{10}$ kg Papier, $6\frac{1}{2}$ kg Knochen, $6\frac{1}{4}$ kg Schrott, 19 kg Papier und $4\frac{1}{8}$ kg Knochen ab. Die Klasse 5b sammelte $15\frac{1}{2}$ kg Schrott, $5\frac{3}{8}$ kg Knochen, $2\frac{1}{4}$ kg Papier, $4\frac{3}{4}$ kg Knochen, $5\frac{1}{8}$ kg Papier und $4\frac{7}{8}$ kg Schrott.

a) Welche Klasse sammelte mehr Schrott, mehr Papier und mehr Knochen?

b) Wieviel Kilogramm Knochen, wieviel Kilogramm Papier und wieviel Kilogramm Schrott wurden insgesamt von beiden Klassen abgeliefert?

32. Eine Pioniergruppe wanderte an fünf aufeinanderfolgenden Tagen $13\frac{3}{4}$ km, $15\frac{1}{2}$ km, $2\frac{7}{8}$ km, $14\frac{3}{4}$ km und $12\frac{1}{4}$ km.
Eine andere Gruppe war an fünf aufeinanderfolgenden Tagen $57\frac{1}{2}$ km gewandert.

Vergleiche die Wegstrecken miteinander, die beide Gruppen gewandert sind!

33. Dieter fährt mit dem Rad von A nach B. In der ersten Stunde legt er die Hälfte, in der zweiten Stunde $\frac{1}{3}$ des Weges zurück. Danach muß er noch 6 km fahren. Wie weit ist der Ort B vom Ort A entfernt?

34. Herr Berner erntet in seinem Garten $9\frac{1}{2}$ dz Obst. Davon waren $4\frac{3}{4}$ dz Äpfel, $3\frac{1}{2}$ dz Birnen, das übrige waren Pflaumen. Rechne mit gemeinen Brüchen!

35. Bei einer Sammelstelle für Heilkräuter wurden im Verlaufe eines Tages von 6 Sammlern die folgenden Mengen an Heilkräutern in getrocknetem Zustand abgeliefert.

Arten der Heilkräuter	Gesammelte Mengen in kg durch die Sammler					
	Arndt	Bettin	Dornberg	Germer	Kluge	Weise
Birkenblätter ...	$4\frac{3}{8}$	—	—	$3\frac{3}{4}$	$5\frac{2}{5}$	$4\frac{1}{2}$
Huflattichblüten	$1\frac{1}{4}$	$4\frac{5}{8}$	$2\frac{1}{8}$	—	$5\frac{3}{8}$	$2\frac{1}{2}$
Kamillenblüten..	—	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	—
Lindenblüten ...	$3\frac{3}{4}$	$3\frac{3}{8}$	$4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{8}$	$3\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$
Pfefferminze	$5\frac{3}{8}$	$6\frac{3}{4}$	$7\frac{3}{4}$	$11\frac{1}{4}$	$15\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$
Salbeiblätter	—	$2\frac{7}{8}$	—	—	—	$5\frac{3}{8}$
Schafgarbe......	$2\frac{1}{2}$	—	—	$5\frac{1}{2}$	—	$6\frac{5}{8}$
Taubnesselblüten	—	—	—	—	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$
Zinnkraut	$8\frac{7}{8}$	—	$12\frac{1}{5}$	$6\frac{3}{8}$	$7\frac{3}{4}$	$10\frac{1}{4}$

a) Errechne, wieviel Kilogramm die 6 Sammler insgesamt von jeder Heilkräuterart an diesem Tage abgeliefert haben!

b) Stelle fest, wieviel Kilogramm Heilkräuter insgesamt jeder der 6 Sammler abgeliefert hat!

36. Ein Schnellzug fährt von Leipzig nach Magdeburg in $2\frac{1}{3}$ Std. Ein Personenzug fährt die gleiche Strecke in $3\frac{3}{4}$ Std. Wieviel Stunden und Minuten ist ein Reisender, der den Personenzug benutzt, länger unterwegs?

37. Ein Schiff lief in der ersten Stunde $9\frac{1}{2}$ Seemeilen, in der zweiten $11\frac{3}{5}$ Seemeilen und in der dritten Stunde $13\frac{1}{4}$ Seemeilen. Wieviel Seemeilen legte das Schiff in den drei Stunden zurück?
(1 Seemeile = 1852 m.)

38. Ein Schraubenschlüssel wurde nachgeschmiedet und hat eine Maulweite von $11\frac{1}{2}$ mm (Abb. 1). Wieviel Millimeter müssen noch ausgefeilt werden, wenn die Maulweite $12\frac{7}{10}$ mm betragen soll?

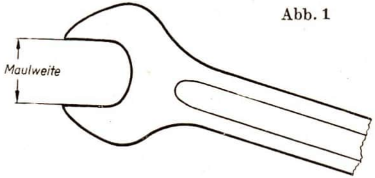


Abb. 1

39. Durch gute Arbeitsweise sparten 6 Traktoristen einer MTS-Brigade während der Frühjahrsbestellung die folgenden Mengen an Schmieröl und Schmierfett ein:

$$1\frac{5}{8}\text{ kg},\ \frac{7}{10}\text{ kg},\ 1\frac{1}{2}\text{ kg},\ \frac{3}{4}\text{ kg},\ 2\text{ kg},\ 1\frac{5}{8}\text{ kg}.$$

Wieviel Kilogramm Schmiermittel wurden von der MTS-Brigade insgesamt eingespart?

40. Scherzaufgabe: Ein Araber hinterließ seinen 3 Söhnen bei seinem Tode 23 Kamele. Er hatte in seinem Testament bestimmt, daß sein jüngster Sohn die Hälfte, der mittlere ein Drittel und der älteste ein Achtel aller Kamele bekommen sollte. Die Söhne sahen keine Möglichkeit einer solchen Teilung. Sie klagten ihre Not einem alten Nachbarn. Er sagte: „Ich will euch mein einziges Kamel geben, dann habt ihr 24 und könnt teilen.“ Prüfe, ob das Testament überhaupt erfüllt werden konnte!

11. Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl

1. Beispiel: Die Seite einer quadratischen Tischdecke hat eine Länge von $\frac{3}{4}$ m. Wieviel Spitze braucht man zum Einfassen der Decke? (Wir berücksichtigen dabei nicht, daß wir an den Ecken etwas Spitze zugeben müssen.)

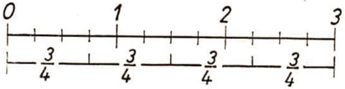


Abb. 2

Lösung:

a) Hans zeichnet eine Strecke von $1\frac{1}{2}$ cm Länge, die $\frac{3}{4}$ m darstellen soll. Da ein Quadrat 4 gleich lange Seiten hat, legt er 4 solche Strecken aneinander und erhält 3 m (siehe Abb. 2).

b) Hanna meint: „Wir rechnen $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3+3+3+3}{4}=\frac{12}{4}=3$.“

c) Gisela sagt: „Da es sich um gleiche Summanden handelt, können wir eine Multiplikationsaufgabe bilden."

Wir schreiben $\frac{3}{4} \cdot 4$. An Stelle von $\frac{3+3+3+3}{4}$ heißt es dann $\frac{3 \cdot 4}{4}$.

$$\frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Wir multiplizieren also den Zähler des Bruches $\frac{3}{4}$ mit der ganzen Zahl 4 und erhalten $\frac{12}{4}$ oder 3.
Zum Einfassen der Decke werden demnach 3 m Spitze benötigt.

2. Beispiel: Herr Müller hat 10 Küken, die einen Monat alt sind. Im zweiten Monat verbraucht jedes Küken $\frac{4}{5}$ kg Trockenfutter. Herr Müller berechnet, wieviel Trockenfutter er für seine 10 Küken im zweiten Monat brauchen wird.

Lösung: Herr Müller rechnet:

$$\frac{4}{5}\text{ kg} \cdot 10 = \frac{4 \cdot 10}{5}\text{ kg} = \frac{40}{5}\text{ kg} = 8\text{ kg}$$

Also braucht er für 10 Küken 8 kg Trockenfutter.

Wir wollen uns das Rechnen erleichtern. Infolgedessen kürzen wir, wenn die Möglichkeit gegeben ist, noch vor dem Multiplizieren. Dadurch vermeiden wir, daß große Zahlen im Zähler entstehen.

Wir kürzen den Bruchausdruck $\frac{4 \cdot 10}{5}$ mit 5 und erhalten den Ausdruck $\frac{4 \cdot 2}{1} = \frac{8}{1}$. Brüche mit dem Nenner 1 deuten an, daß es sich um ungeteilte Ganze handelt:

$$\frac{8}{1} = 8 \text{ Ganze.}$$

Wir führen also die Lösung wie folgt durch:

$$\frac{4}{5}\text{ kg} \cdot 10 = \frac{4 \cdot 10}{5}\text{ kg} = \frac{4 \cdot 2}{1}\text{ kg} = \frac{8}{1}\text{ kg} = 8\text{ kg}.$$

3. Beispiel: Für einen Anzug werden $3\frac{1}{4}$ m Anzugstoff benötigt. Wieviel Meter Stoff werden für 6 Anzüge angefordert?

Lösung: $3\frac{1}{4}\text{ m} \cdot 6 = \frac{13}{4}\text{ m} \cdot 6 = \frac{13 \cdot 6}{4}\text{ m} = \frac{13 \cdot 3}{2}\text{ m} = \frac{39}{2}\text{ m} = 19\frac{1}{2}\text{ m}$

Für 6 Anzüge werden demnach $19\frac{1}{2}$ m Anzugstoff angefordert.

Alle drei Beispiele haben wir auf die gleiche kurze Art gelöst. Wir merken uns:

Man multipliziert einen Bruch mit einer ganzen Zahl, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert. Der Nenner bleibt unverändert. Wenn möglich, wird vor dem Ausrechnen gekürzt.

Aufgaben

Übungen für das Kopfrechnen

1. Multipliziere $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{30}$
a) mit 2, **b)** mit 4, **c)** mit 5, **d)** mit 7, **e)** mit 9, **f)** mit 10!

2. Multipliziere

a) $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{4}{19}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{7}{26}$, $\frac{4}{25}$ mit 3;
b) $\frac{2}{11}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{3}{23}$, $\frac{5}{27}$, $\frac{4}{33}$, $\frac{7}{39}$, $\frac{5}{43}$, $\frac{8}{51}$ mit 5;
c) $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{19}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{9}{35}$ mit 8;
d) $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{36}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{11}{24}$ mit 12!

Schriftliches Rechnen

3.

a)	b)	c)	d)
$\frac{8}{21}\cdot 30$	$\frac{5}{18}\cdot 45$	$\frac{7}{15}\cdot 33$	$\frac{7}{9}\cdot 63$
$\frac{11}{16}\cdot 24$	$\frac{8}{25}\cdot 30$	$\frac{6}{7}\cdot 49$	$\frac{13}{14}\cdot 28$
$\frac{11}{12}\cdot 60$	$\frac{15}{34}\cdot 51$	$\frac{2}{15}\cdot 80$	$\frac{9}{20}\cdot 65$
$\frac{9}{10}\cdot 15$	$\frac{5}{6}\cdot 12$	$\frac{7}{8}\cdot 24$	$\frac{14}{25}\cdot 30$
$\frac{7}{36}\cdot 48$	$\frac{19}{45}\cdot 15$	$\frac{17}{20}\cdot 35$	$\frac{8}{25}\cdot 45$
$\frac{10}{27}\cdot 90$	$\frac{16}{17}\cdot 68$	$\frac{5}{16}\cdot 24$	$\frac{8}{9}\cdot 33$

4.

a)	b)	c)	d)
$\frac{3}{25}\cdot 5$	$\frac{5}{8}\cdot 4$	$\frac{11}{15}\cdot 5$	$\frac{20}{21}\cdot 7$
$\frac{5}{102}\cdot 17$	$\frac{17}{30}\cdot 6$	$\frac{7}{90}\cdot 15$	$\frac{15}{133}\cdot 7$
$\frac{11}{108}\cdot 18$	$\frac{6}{91}\cdot 13$	$\frac{9}{121}\cdot 11$	$\frac{13}{48}\cdot 12$
$\frac{7}{12}\cdot 9$	$\frac{14}{15}\cdot 12$	$\frac{29}{60}\cdot 27$	$\frac{15}{16}\cdot 12$
$\frac{13}{18}\cdot 15$	$\frac{23}{30}\cdot 25$	$\frac{5}{28}\cdot 28$	$\frac{17}{26}\cdot 13$
$\frac{25}{78}\cdot 65$	$\frac{13}{51}\cdot 34$	$\frac{6}{55}\cdot 44$	$\frac{19}{48}\cdot 36$

5.

a)	b)	c)	d)
$\frac{7}{9}\cdot 39$	$\frac{9}{16}\cdot 24$	$\frac{11}{20}\cdot 30$	$\frac{3}{14}\cdot 21$
$\frac{7}{18}\cdot 24$	$\frac{17}{24}\cdot 30$	$\frac{22}{27}\cdot 24$	$\frac{9}{14}\cdot 36$
$\frac{7}{18}\cdot 22$	$\frac{5}{16}\cdot 34$	$\frac{13}{66}\cdot 36$	$\frac{31}{42}\cdot 56$
$\frac{61}{87}\cdot 54$	$\frac{7}{15}\cdot 25$	$\frac{17}{21}\cdot 49$	$\frac{8}{9}\cdot 42$
$\frac{9}{64}\cdot 28$	$\frac{11}{15}\cdot 35$	$\frac{7}{33}\cdot 55$	$\frac{29}{81}\cdot 54$
$\frac{15}{32}\cdot 24$	$\frac{9}{49}\cdot 42$	$\frac{13}{35}\cdot 25$	$\frac{29}{80}\cdot 48$

6.

a)	b)	c)	d)
$15\frac{5}{7} \cdot 4$	$12\frac{3}{5} \cdot 12$	$5\frac{7}{11} \cdot 9$	$2\frac{7}{19} \cdot 38$
$10\frac{5}{9} \cdot 36$	$6\frac{5}{12} \cdot 15$	$7\frac{11}{14} \cdot 9$	$15\frac{8}{15} \cdot 8$
$13\frac{13}{19} \cdot 7$	$7\frac{18}{25} \cdot 35$	$3\frac{7}{12} \cdot 13$	$6\frac{13}{18} \cdot 15$
$4\frac{11}{14} \cdot 15$	$3\frac{17}{25} \cdot 15$	$5\frac{13}{20} \cdot 11$	$7\frac{2}{3} \cdot 8$
$6\frac{2}{3} \cdot 13$	$18\frac{4}{7} \cdot 9$	$5\frac{5}{6} \cdot 10$	$3\frac{3}{8} \cdot 14$
$19\frac{5}{8} \cdot 12$	$11\frac{7}{12} \cdot 7$	$20\frac{9}{10} \cdot 9$	$6\frac{7}{9} \cdot 21$

7.

a)	b)	c)	d)
$17\frac{2}{9} \cdot 3$	$14\frac{4}{5} \cdot 5$	$15\frac{6}{7} \cdot 21$	$5\frac{11}{13} \cdot 13$
$5\frac{3}{17} \cdot 34$	$17\frac{3}{8} \cdot 40$	$3\frac{2}{7} \cdot 14$	$7\frac{3}{10} \cdot 25$
$5\frac{3}{14} \cdot 21$	$4\frac{5}{6} \cdot 18$	$17\frac{2}{15} \cdot 3$	$24\frac{7}{36} \cdot 4$
$18\frac{16}{49} \cdot 5$	$14\frac{8}{49} \cdot 7$	$19\frac{9}{56} \cdot 4$	$14\frac{5}{8} \cdot 12$
$3\frac{7}{9} \cdot 6$	$8\frac{8}{15} \cdot 10$	$8\frac{3}{26} \cdot 13$	$7\frac{5}{18} \cdot 12$
$9\frac{7}{30} \cdot 20$	$45\frac{5}{8} \cdot 14$	$23\frac{11}{20} \cdot 14$	$65\frac{5}{8} \cdot 4$

8.

a)	b)	c)	d)
$4\frac{5}{6} \cdot 9$	$3\frac{9}{16} \cdot 24$	$5\frac{7}{12} \cdot 18$	$7\frac{7}{9} \cdot 15$
$6\frac{4}{9} \cdot 21$	$5\frac{7}{8} \cdot 14$	$19\frac{4}{9} \cdot 10$	$10\frac{11}{18} \cdot 20$
$8\frac{7}{10} \cdot 15$	$12\frac{5}{8} \cdot 12$	$6\frac{12}{13} \cdot 7$	$5\frac{14}{15} \cdot 12$
$7\frac{15}{16} \cdot 20$	$4\frac{11}{13} \cdot 18$	$5\frac{7}{12} \cdot 16$	$6\frac{5}{8} \cdot 9$
$7\frac{5}{8} \cdot 12$	$25\frac{14}{15} \cdot 10$	$9\frac{7}{24} \cdot 15$	$4\frac{23}{42} \cdot 35$
$21\frac{3}{4} \cdot 14$	$6\frac{4}{17} \cdot 51$	$8\frac{8}{33} \cdot 22$	$3\frac{8}{49} \cdot 35$

9. Bestimme von $3\frac{4}{5}$, $5\frac{5}{6}$, $4\frac{8}{15}$, $9\frac{9}{16}$, $5\frac{11}{18}$, $3\frac{7}{24}$, $6\frac{6}{13}$, $13\frac{16}{21}$

a) das Vierfache, **b)** das Sechsfache, **c)** das Siebenfache,
d) das Neunfache, **e)** das Zwölffache, **f)** das Dreißigfache!

Anwendungen

10. Berechne das Dreifache **a)** der Summe, **b)** der Differenz von $7\frac{3}{10}$ und $4\frac{8}{15}$!

11. Wenn man eine Zahl durch 3 teilt, erhält man $3\frac{5}{8}$. Wie heißt die Zahl?

12. Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich den 6. Teil davon nehme, erhalte ich $3\frac{5}{6}$. Welche Zahl habe ich mir gedacht?

13. Mutter hat im vergangenen Monat an 17 Tagen je $\frac{3}{4}$ l und an 13 Tagen je $1\frac{1}{4}$ l Milch geholt. Berechne, wieviel Liter Milch Mutter im vergangenen Monat insgesamt gekauft hat!

14. Die 153 Schüler einer Landschule wollen mit zur Winterfütterung unseres Wildes beitragen. Jeder von ihnen verpflichtete sich, im Herbst $\frac{3}{4}$ kg Eicheln und $1\frac{1}{4}$ kg Kastanien zu sammeln.

a) Wieviel Kilogramm Eicheln und wieviel Kilogramm Kastanien sollen insgesamt gesammelt werden?

b) Nach Abschluß der Sammelaktion ergab sich, daß insgesamt $148\frac{1}{2}$ kg Eicheln und $248\frac{3}{4}$ kg Kastanien gesammelt wurden. Vergleiche Verpflichtung und Sammelergebnis!

15. Als die Hefte einer Klasse durchgesehen wurden, zeigte sich, daß das Papier nicht genügend ausgenutzt worden war. Von den 28 Seiten jedes Heftes waren durchschnittlich $3\frac{1}{3}$ Seiten frei gelassen worden. Die Klasse zählt 42 Schüler.

a) Wieviel Seiten waren insgesamt von den Schülern nicht beschrieben worden?

b) Wieviel Hefte ergäbe das?

c) Ein Heft kostet 0,10 DM. Welcher Betrag hätte gespart werden können, wenn die Schüler die Seiten voll ausgenutzt hätten?

16. 1 kg Rohkaffee wiegt nach dem Brennen nur noch $\frac{4}{5}$ kg.

a) Wieviel Kilogramm wiegen 3 kg Rohkaffee nach dem Brennen? Berechne auch den Gewichtsverlust!

b) Es werden $\frac{3}{4}$ dz Rohkaffee gebrannt.

17. 1 kg Mehl ergibt $1\frac{1}{3}$ kg Brot.

a) Wieviel Kilogramm Brot kann man aus 63 kg Mehl backen?

b) Wieviel Brote sind das, wenn ein Brot 1500 g wiegt?

18. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft erntet von 172 ha Getreideanbaufläche durchschnittlich $26\frac{1}{2}$ dz Getreide je Hektar.

a) Wieviel Doppelzentner Getreide erntet sie insgesamt?

b) Etwa $\frac{2}{3}$ der Ernte können sofort gedroschen und abgeliefert werden. Wie groß ist die abgelieferte Getreidemenge?

19. Ein Bauer hat einen Futtervorrat, mit dem er seine 6 Pferde $4\frac{1}{2}$ Tage füttern kann. Wie lange reicht er mit seinem Vorrat, wenn er nur 1 Pferd zu füttern braucht?

20. Zwei Gärtner graben einen Garten in $1\frac{3}{4}$ Tagen um. Wie lange würde ein Gärtner dazu brauchen?

21. Die Seitenlängen eines rechteckigen Gartens betragen $20\frac{9}{10}$ m und $14\frac{3}{4}$ m. Wieviel Meter Drahtzaun sind zum Einzäunen nötig?

22. Das Hinterrad eines Fahrrades hat einen Umfang von $2\frac{2}{5}$ m. Welche Entfernung hat der Radfahrer bei **a)** 1000, **b)** 4500, **c)** 7500 Umdrehungen seines Hinterrades zurückgelegt?

23. In einem Werkstück sollen Bohrungen angebracht werden. Für diese Arbeit wird je Werkstück eine Zeit von $1\frac{1}{2}$ Min. gebraucht. In welcher Zeit kann demnach ein Arbeiter 70 Werkstücke bearbeiten?

24. Eine Dampfmaschine verbraucht in einer Stunde $\frac{3}{10}$ l Schmieröl. Wieviel Liter Schmieröl werden in 3, 4, 5, 7, 9 und 10 Stunden verbraucht?

12. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl

1. Beispiel: Mutter teilt eine Tafel Schokolade in 5 gleiche Teile. $\frac{1}{5}$ davon behält sie selbst, $\frac{4}{5}$ sind für die beiden Kinder bestimmt und werden gleichmäßig verteilt.
Wieviel von der ganzen Tafel Schokolade bekommt jedes Kind?

Lösung:

Wenn wir die Tafel Schokolade auseinanderbrechen, sehen wir, daß jedes Kind die Hälfte von den $\frac{4}{5}$, also $\frac{2}{5}$ der ganzen Tafel Schokolade bekommt (Abb. 3).

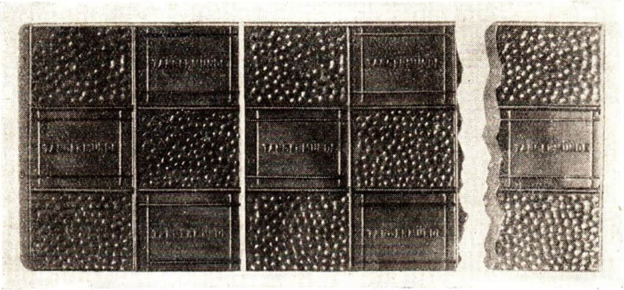


Abb. 3

Wir können die Lösung auch durch Zeichnen finden (Abb. 4).

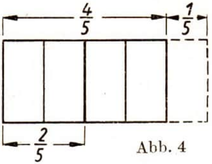


Abb. 4

Wir haben $\frac{4}{5}$ des Rechtecks durch einen senkrechten Schnitt in zwei gleiche Teile geteilt, die jeder für sich $\frac{2}{5}$ des ganzen Rechtecks darstellen. Das abgebrochene Fünftel haben wir dabei gestrichelt gezeichnet.

Die Lösung der Aufgabe $\frac{4}{5} : 2$ können wir uns auch an einer Strecke veranschaulichen (Abb. 5).


Abb. 5

Auch bei dieser Darstellung erhalten wir die gleiche Lösung $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$.

Wenn wir $\frac{4}{5}$ durch 2 teilen sollen, brauchen wir nur den Zähler durch 2 zu teilen:

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4:2}{5} = \frac{2}{5}.$$

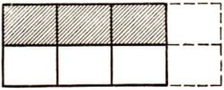


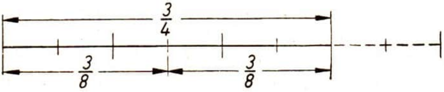
Abb. 6

2. Beispiel: $\frac{3}{4}$ einer Schokoladentafel sollen gleichmäßig unter 2 Kinder verteilt werden. Wir wollen nun wissen, welchen Teil der ganzen Tafel jedes Kind erhält.

a) Lösung durch Zeichnen:

$\frac{3}{4}$ einer Schokoladentafel zu halbieren, ist nicht schwierig. Wir wollen aber wissen, welchen Teil von der ganzen Tafel jedes Kind erhält. Deshalb müssen wir beim Teilen die ganze Tafel, also auch das fehlende Viertel, berücksichtigen. Es ist in unserer Zeichnung gestrichelt hinzugefügt. Wenn wir nun jedes Viertel teilen, sehen wir, daß jedes der beiden Kinder $\frac{3}{8}$ der ganzen Tafel erhält (Abb. 6).

Auch an einer Strecke läßt sich die Lösung der Aufgabe $\frac{3}{4} : 2$ darstellen (Abb. 7).

Abb. 7


Wir erhalten also $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$.

b) Lösung durch Rechnen:

Im 1. Beispiel haben wir den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl dividiert. Das ist im 2. Beispiel ($\frac{3}{4} : 2$) nicht möglich. Wir können aber den

Bruch so umformen, daß der Zähler eine durch 2 teilbare Zahl wird. Wir erweitern zu diesem Zweck den Bruch $\frac{3}{4}$ mit 2 und erhalten $\frac{6}{8}$. Jetzt könnten wir die Division wie im 1. Beispiel durchführen. Ausführlich geschrieben ergibt sich dann:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} : 2 = \frac{3 \cdot 2 : 2}{4 \cdot 2} = \boxed{\frac{3}{4 \cdot 2}} = \frac{3}{8}$$

Aus dem eingerahmten Bruchausdruck erkennen wir einen kürzeren Lösungsweg. Wir brauchen die Multiplikation und Division im Zähler gar nicht erst auszuführen, weil eine Zahl unverändert bleibt, wenn sie erst mit einer Zahl multipliziert und dann durch die gleiche Zahl dividiert wird. Wir können also gleich den Nenner mit dem Divisor multiplizieren und den Zähler unverändert beibehalten.

$$\frac{3}{4} : 2 = \boxed{\frac{3}{4 \cdot 2}} = \frac{3}{8}$$

3. Beispiel: Aus $11\frac{3}{5}$ m Fahnentuch sollen 4 gleichgroße Fahnen angefertigt werden. Wie lang wird jede Fahne?

Lösung: $11\frac{3}{5}\text{ m} : 4 = \frac{58}{5}\text{ m} : 4 = \frac{58}{5 \cdot 4}\text{ m} = \frac{29}{5 \cdot 2}\text{ m} = \frac{29}{10}\text{ m} = 2\frac{9}{10}\text{ m}$

Jede Fahne wird 2,90 m lang.

Wir merken uns: **Man dividiert einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert und den Zähler unverändert läßt. Wenn es möglich ist, kürzt man vor dem Ausrechnen.**

Wir vergleichen miteinander

Multiplizieren eines Bruches mit einer ganzen Zahl	Dividieren eines Bruches durch eine ganze Zahl
$\frac{4}{5} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5 \cdot 3} = \frac{4}{15}$
$\frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$	$\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$

Aufgaben

1. Löse durch Zeichnen an einer Strecke die folgenden Aufgaben!

a) $\frac{2}{3} : 3$ b) $\frac{3}{5} : 2$ c) $\frac{4}{5} : 3$ d) $\frac{3}{4} : 2$ e) $\frac{3}{4} : 3$

Lösungsbeispiel: $\frac{1}{6} : 2$ Ergebnis: $\frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{12}$ (siehe Abb. 8)

Abb. 8

2. Die Abbildung 9 stellt die Lösung der folgenden Aufgabe dar: In einem Garten ist $\frac{1}{4}$ als Rasenplatz eingerichtet, von dem Rest wird die Hälfte mit Kartoffeln bebaut. Welcher Teil des ganzen Gartens wird mit Kartoffeln bebaut? Lies das Ergebnis aus der Zeichnung ab!

Abb. 9

3. Löse durch eine ähnliche Zeichnung die folgende Aufgabe! Auf einer Hälfte eines rechteckigen Gartens sind Bohnen gelegt. Von der anderen Hälfte wird der dritte Teil mit Erdbeeren bepflanzt. Welcher Teil des ganzen Gartens ist das?

4. Löse auf entsprechende Weise die folgenden Aufgaben!

a) $\frac{4}{5} : 3$ b) $\frac{2}{3} : 4$ c) $\frac{3}{4} : 3$

Übungen für das Kopfrechnen

5. a) $\frac{1}{2} : 5$ b) $\frac{2}{3} : 3$ c) $\frac{3}{4} : 5$ d) $\frac{1}{6} : 4$ e) $\frac{2}{9} : 5$
f) $\frac{8}{9} : 2$ g) $\frac{3}{5} : 8$ h) $\frac{5}{8} : 9$ i) $\frac{12}{13} : 3$ k) $\frac{18}{25} : 6$
l) $\frac{11}{12} : 9$ m) $\frac{27}{28} : 9$ n) $\frac{5}{7} : 2$ o) $\frac{3}{8} : 4$ p) $\frac{2}{7} : 4$

6. a) $\frac{11}{14} : 9$ b) $\frac{5}{9} : 8$ c) $\frac{7}{8} : 4$ d) $\frac{5}{12} : 6$ e) $\frac{5}{13} : 11$
f) $\frac{7}{8} : 5$ g) $\frac{7}{9} : 8$ h) $\frac{9}{10} : 5$ i) $\frac{3}{7} : 4$ k) $\frac{11}{12} : 9$
l) $\frac{3}{13} : 7$ m) $\frac{5}{8} : 11$ n) $\frac{7}{12} : 3$ o) $\frac{4}{5} : 7$ p) $\frac{6}{11} : 5$

Schriftliches Rechnen

7. Lösungsbeispiel: $\frac{8}{15} : 6 = \frac{8}{15 \cdot 6} = \frac{4}{15 \cdot 3} = \frac{4}{45}$

a)	b)	c)	d)
$\frac{4}{5} : 12$	$\frac{5}{9} : 15$	$\frac{7}{9} : 21$	$\frac{9}{10} : 6$
$\frac{5}{12} : 15$	$\frac{24}{25} : 12$	$\frac{9}{13} : 15$	$\frac{18}{25} : 27$
$\frac{21}{25} : 14$	$\frac{18}{19} : 27$	$\frac{6}{7} : 24$	$\frac{14}{15} : 49$
$\frac{27}{32} : 36$	$\frac{8}{9} : 56$	$\frac{36}{37} : 54$	$\frac{10}{13} : 25$
$\frac{5}{9} : 15$	$\frac{6}{7} : 18$	$\frac{9}{11} : 12$	$\frac{15}{16} : 25$
$\frac{24}{25} : 16$	$\frac{13}{18} : 26$	$\frac{7}{11} : 14$	$\frac{44}{57} : 33$

8.

a)	b)	c)	d)
$\frac{24}{25} : 36$	$\frac{7}{9} : 49$	$\frac{24}{25} : 48$	$\frac{25}{34} : 65$
$\frac{16}{17} : 48$	$\frac{4}{5} : 16$	$\frac{5}{7} : 35$	$\frac{22}{25} : 44$
$\frac{18}{23} : 45$	$\frac{16}{17} : 64$	$\frac{25}{27} : 75$	$\frac{21}{23} : 70$
$\frac{5}{7} : 20$	$\frac{17}{18} : 34$	$\frac{12}{17} : 16$	$\frac{7}{9} : 49$
$\frac{6}{7} : 33$	$\frac{3}{8} : 24$	$\frac{11}{19} : 99$	$\frac{6}{11} : 36$
$\frac{24}{29} : 16$	$\frac{12}{13} : 42$	$\frac{14}{15} : 42$	$\frac{19}{20} : 38$

9.

a)	b)	c)	d)
$2\frac{1}{4} : 5$	$5\frac{1}{3} : 3$	$2\frac{1}{3} : 4$	$4\frac{1}{4} : 4$
$6\frac{1}{3} : 5$	$5\frac{1}{3} : 5$	$10\frac{1}{2} : 13$	$7\frac{1}{3} : 9$
$9\frac{1}{4} : 10$	$8\frac{1}{5} : 10$	$10\frac{1}{3} : 20$	$15\frac{1}{2} : 25$

10. Lösungsbeispiel: $3\frac{1}{5} : 6 = \frac{16}{5} : 6 = \frac{16}{5 \cdot 6} = \frac{8}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$

a)	b)	c)	d)
$3\frac{3}{4} : 5$	$3\frac{3}{7} : 8$	$6\frac{3}{4} : 6$	$5\frac{1}{4} : 7$
$3\frac{6}{7} : 9$	$3\frac{5}{9} : 4$	$6\frac{6}{11} : 8$	$3\frac{4}{15} : 7$
$4\frac{7}{12} : 5$	$2\frac{2}{9} : 5$	$8\frac{1}{6} : 7$	$5\frac{3}{5} : 7$
$5\frac{1}{11} : 14$	$11\frac{5}{9} : 13$	$7\frac{1}{8} : 19$	$10\frac{2}{7} : 12$
$7\frac{1}{2} : 5$	$8\frac{3}{4} : 7$	$9\frac{9}{10} : 11$	$4\frac{3}{8} : 7$
$3\frac{1}{3} : 2$	$5\frac{1}{11} : 8$	$6\frac{1}{8} : 7$	$4\frac{1}{11} : 9$

11.

a)	b)	c)	d)
$7\frac{1}{4} : 58$	$5\frac{2}{3} : 68$	$2\frac{1}{2} : 15$	$6\frac{1}{4} : 20$
$3\frac{3}{4} : 45$	$7\frac{3}{5} : 57$	$8\frac{1}{4} : 44$	$5\frac{4}{9} : 70$
$5\frac{5}{8} : 27$	$10\frac{4}{5} : 72$	$12\frac{2}{3} : 95$	$16\frac{2}{3} : 40$
$14\frac{2}{7} : 75$	$11\frac{1}{9} : 60$	$8\frac{1}{3} : 25$	$6\frac{3}{4} : 18$
$10\frac{1}{5} : 17$	$1\frac{2}{13} : 5$	$3\frac{1}{8} : 5$	$7\frac{1}{7} : 10$
$9\frac{1}{7} : 8$	$6\frac{6}{7} : 8$	$11\frac{1}{3} : 17$	$10\frac{1}{5} : 17$

12.

a)	b)	c)	d)
$29\frac{3}{8} : 5$	$43\frac{3}{7} : 4$	$69\frac{7}{8} : 13$	$100\frac{4}{5} : 18$
$87\frac{1}{9} : 16$	$68\frac{1}{3} : 5$	$75\frac{1}{9} : 4$	$90\frac{5}{6} : 5$
$72\frac{1}{3} : 14$	$50\frac{2}{5} : 16$	$92\frac{6}{7} : 15$	$68\frac{2}{5} : 18$
$80\frac{2}{5} : 24$	$53\frac{3}{4} : 25$	$79\frac{1}{3} : 28$	$98\frac{5}{14} : 24$
$125\frac{5}{8} : 60$	$258\frac{1}{11} : 51$	$110\frac{2}{5} : 96$	$356\frac{7}{10} : 87$

13. a) Multipliziere jede der folgenden Zahlen mit 3, 8, 15, 24!

b) Dividiere jede der folgenden Zahlen durch 3, 8, 15, 24!

$\frac{17}{30}$, $\frac{72}{95}$, $\frac{45}{64}$, $\frac{57}{80}$, $7\frac{4}{11}$, $9\frac{3}{8}$, $18\frac{4}{9}$, $6\frac{6}{17}$

Anwendungen

14. Zu einem Gericht Rotkohl für 3 Personen werden $\frac{3}{4}$ kg Rotkohl, $\frac{1}{4}$ l Wasser, $\frac{1}{8}$ l Weinessig, 20 g Zucker, 100 g Schmalz, 20 g Salz gebraucht. Es soll **a)** für eine Person, **b)** für 6 Personen, **c)** für 15 Personen gekocht werden.
Berechne die Mengen, die von jeder Sorte benötigt werden!

15. a) Aus 5 kg Blaubeeren erhält man durch Pressen etwa $3\frac{1}{2}$ l Saft. Wieviel Liter Saft erhält man aus 1 kg Blaubeeren?

b) Aus 10 kg Johannisbeeren kann man durch Pressen etwa $6\frac{2}{3}$ l Saft gewinnen. Wieviel Saft kann man aus 5 kg Johannisbeeren gewinnen?

c) Aus 5 kg Stachelbeeren erhält man etwa $3\frac{3}{4}$ l Saft. Wieviel Liter Saft erhält man aus 1 kg Stachelbeeren?

16. Ein volkseigenes Gut (VEG) hat $732\frac{3}{4}$ ha Ackerland bestellt. $\frac{1}{3}$ des Ackerlandes wurde mit Hackfrüchten, $\frac{1}{20}$ mit Ölfrüchten, $\frac{1}{8}$ mit Grünfutter und die übrige Fläche mit Getreide bestellt. Berechne die Größe der einzelnen Anbauflächen!

17. Es wurde geschätzt, daß ein Schüler für das Umgraben eines großen Beetes in unserem Schulgarten $3\frac{1}{4}$ Std. benötigt. Damit das Beet bald bepflanzt werden kann, werden 3 Schüler beauftragt, das Beet umzugraben. Wieviel Zeit benötigen sie für die Arbeit? Rechne das Ergebnis in Minuten um!

18. Eine Schülergruppe wandert auf einer Ferienwanderung an vier aufeinanderfolgenden Tagen folgende Wegstrecken: $12\frac{1}{2}$ km, $16\frac{3}{4}$ km, $3\frac{3}{4}$ km, $14\frac{1}{2}$ km. Berechne die durchschnittliche Tagesleistung!

19. Bernd, Anneliese und Uta fahren gemeinsam ins Betriebsferienlager. Am ersten Tag werden die Kinder im Lager gewogen. Bernd wiegt $38\frac{3}{4}$ kg, Anneliese $40\frac{1}{8}$ kg und Uta $36\frac{8}{10}$ kg.
Nach 3 Wochen werden die Kinder wieder gewogen. Bernd wiegt jetzt $40\frac{1}{2}$ kg, Anneliese 42 kg und Uta $39\frac{8}{10}$ kg.

a) Wieviel Kilogramm hat jedes Kind an Gewicht zugenommen?

b) Wie groß ist die durchschnittliche Gewichtszunahme der drei Kinder?

20. Acht Klassen einer Schule beteiligten sich am Wettbewerb zum Sammeln von Altmaterial. Sie erzielten ein gutes Sammelergebnis:

Klasse	Schrott in kg	Altpapier in kg	Lumpen in kg
5a	$36\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{8}$	$15\frac{1}{4}$
5b	$19\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$12\frac{3}{8}$
6a	21	$\frac{7}{8}$	$20\frac{1}{2}$
6b	$24\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{2}$	11
7a	$16\frac{1}{8}$	$3\frac{3}{4}$	$13\frac{5}{8}$
7b	$45\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{8}$	$9\frac{3}{5}$
8a	$22\frac{7}{8}$	$4\frac{3}{5}$	$14\frac{1}{4}$
8b	$20\frac{5}{8}$	3	$12\frac{3}{4}$

a) Berechne die Gesamtmengen an Schrott, an Papier und an Lumpen, die von der Schule gesammelt wurden!

b) Wieviel Kilogramm Schrott, Papier und Lumpen wurden durchschnittlich von jeder Klasse gesammelt?

21. a) Welchen Wert haben eine punktierte Halbenote, Viertelnote, Achtelnote und Sechszehntelnote?

b) Bestimme in den folgenden Takten (Abb. 10) den Wert der einzelnen Noten!

Abb. 10

c) Ergänze die folgenden Notenangaben zu je einem $\frac{4}{4}$-Takt!

d) Ergänze 2 Viertelnoten zum $\frac{4}{4}$-Takt! Die übrigen Noten sollen Achtel- und Sechzehntelnoten sein.

e) Ergänze eine Halbenote und eine punktierte Viertelnote zu einem $\frac{4}{4}$-Takt! Die übrigen Noten sollen Achtel sein.

22. Wenn man einen Bruch mit 4 vervielfacht, erhält man $2\frac{2}{5}$. Wie heißt der Bruch?

23. Ich denke mir eine Zahl. Ihr fünfter Teil ist gleich dem 6fachen von $1\frac{2}{3}$. Wie heißt meine Zahl?

24. Scherzaufgabe: Ein Schäfer weidete seine Herde. Als er nach der Anzahl seiner Schafe gefragt wurde, antwortete er: „Hätte ich nur $\frac{2}{3}$ meiner Schafe und noch 2 dazu, so wären es gerade 100.“

13. Multiplikation eines Bruches mit einem Bruch

1. Beispiel: a) Für 1 ha braucht man $1\frac{2}{5}$ dz Roggen als Saatgut. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft will eine Ackerfläche von 3 ha mit Roggen bestellen. Wieviel Doppelzentner Roggen benötigt sie als Saatgut für diese Fläche?

Lösung: $1\frac{2}{5}\text{ dz} \cdot 3 = \frac{7 \cdot 3}{5}\text{ dz} = \frac{21}{5}\text{ dz} = 4\frac{1}{5}\text{ dz}$

Für 3 ha Ackerfläche benötigt die LPG $4\frac{1}{5}$ dz Roggen als Saatgut.

Weil wir von einer Einheit (1 ha) auf eine Mehrheit (3 ha) schließen, müssen wir multiplizieren.

1. Beispiel: b) Die benachbarte LPG will eine Ackerfläche von $2\frac{1}{2}$ ha mit Roggen bestellen. Auch sie benötigt für 1 ha eine Saatgutmenge von $1\frac{2}{5}$ dz Roggen. Wieviel Doppelzentner Saatgut braucht die LPG für ihre Ackerfläche?

Lösung: Wir schließen auch bei dieser Aufgabe von einer Einheit (1 ha) auf eine Mehrheit ($2\frac{1}{2}$ ha). Folglich müssen wir multiplizieren.

$$1\frac{2}{5}\text{ dz} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{7}{5}\text{ dz} \cdot \frac{5}{2}$$

Wir wissen noch nicht, was es bedeutet, eine Zahl mit einem Bruch zu multiplizieren. Deshalb überlegen wir: Im Beispiel a) haben wir das 3fache von $\frac{7}{5}$ dz berechnet. Im Beispiel b) müssen wir das $2\frac{1}{2}$fache (das $\frac{5}{2}$fache) von $\frac{7}{5}$ dz berechnen. Wir berechnen $\frac{5}{2}$ von $\frac{7}{5}$ dz:

$$\frac{1}{2}\text{ von }\frac{7}{5}\text{ dz} = \frac{7}{5}\text{ dz} : 2 = \frac{7}{5 \cdot 2}\text{ dz}$$

$$\frac{5}{2}\text{ von }\frac{7}{5}\text{ dz} = \frac{7}{5 \cdot 2}\text{ dz} \cdot 5 = \boxed{\frac{7 \cdot 5}{5 \cdot 2}}\text{ dz} = \frac{7}{2}\text{ dz} = 3\frac{1}{2}\text{ dz}$$

Die LPG benötigt für $2\frac{1}{2}$ ha eine Saatgutmenge von $3\frac{1}{2}$ dz Roggen.

2. Beispiel: Von $\frac{3}{4}$ l Öl sind $\frac{2}{5}$ verbraucht worden. Wieviel Liter sind demnach verbraucht worden?

Lösung: Wir berechnen $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{4}$ l:

$$\frac{1}{5}\text{ von }\frac{3}{4}\text{ l} = \frac{3}{4}\text{ l} : 5 = \frac{3}{4 \cdot 5}\text{ l}$$

$$\frac{2}{5}\text{ von }\frac{3}{4}\text{ l} = \frac{3}{4 \cdot 5}\text{ l} \cdot 2 = \boxed{\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5}}\text{ l} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 5}\text{ l} = \frac{3}{10}\text{ l}$$

Also sind $\frac{3}{10}$ l Öl verbraucht worden.

3. Beispiel: Die Entfernung zweier Orte beträgt $4\frac{1}{2}$ km. $\frac{2}{3}$ des Weges führen durch Wald. Wieviel Kilometer sind das?

Lösung: Wir berechnen $\frac{2}{3}$ von $4\frac{1}{2}$ km:

$\frac{1}{3}$ von $4\frac{1}{2}$ km $= \frac{9}{2}$ km $: 3 = \frac{9}{2 \cdot 3}$ km

$\frac{2}{3}$ von $4\frac{1}{2}$ km $= \frac{9}{2 \cdot 3}$ km $\cdot 2 = \boxed{\frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 3}}$ km $= \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 1}$ km $= 3$ km

3 km des Weges führen durch Wald.

4. Beispiel: 1 kg einer Apfelsorte kostet 0,80 DM. Wie teuer sind $\frac{3}{4}$ kg? (Wir rechnen mit $\frac{8}{10}$ DM.)

Lösung: 1 kg kostet $\frac{8}{10}$ DM, $\frac{3}{4}$ kg kosten $\frac{3}{4}$ von $\frac{8}{10}$ DM.

Wir berechnen $\frac{3}{4}$ von $\frac{8}{10}$ DM:

$\frac{1}{4}$ von $\frac{8}{10}$ DM $= \frac{8}{10}$ DM $: 4 = \frac{8}{10 \cdot 4}$ DM

$\frac{3}{4}$ von $\frac{8}{10}$ DM $= \frac{8}{10 \cdot 4}$ DM $\cdot 3 = \boxed{\frac{8 \cdot 3}{10 \cdot 4}}$ DM $= \frac{2 \cdot 3}{10 \cdot 1}$ DM $= \frac{6}{10}$ DM

$\frac{3}{4}$ kg Äpfel kosten also $\frac{6}{10}$ DM oder 0,60 DM.

Wenn wir die Aufgaben und ihre Lösungen betrachten, stellen wir folgendes fest:

Wir wollten berechnen:	Wir erhielten beim Rechnen den Bruchausdruck:
1. Beispiel: $\frac{5}{2}$ von $\frac{7}{5}$ dz	$\frac{7 \cdot 5}{5 \cdot 2}$
2. Beispiel: $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{4}$ l	$\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5}$
3. Beispiel: $\frac{2}{3}$ von $4\frac{1}{2}$ km	$\frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 3}$
4. Beispiel: $\frac{3}{4}$ von $\frac{8}{10}$ DM	$\frac{8 \cdot 3}{10 \cdot 4}$

Wir sehen also, daß wir die Multiplikationsaufgaben durch Schließen als „Von-Aufgaben" gelöst haben. Dabei sind sowohl die Zähler der Brüche als auch die Nenner der Brüche miteinander multipliziert worden. Aus der Gegenüberstellung der Aufgaben mit ihren Lösungen erkennen wir, wie wir bei Multiplikationsaufgaben mit Brüchen den umständlichen Lösungsweg über das Schließen vermeiden können.

Das Beispiel 1 b) schreiben wir kurz als Multiplikationsaufgabe:

$$1\frac{2}{5} \text{ dz} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{7}{5} \text{ dz} \cdot \frac{5}{2} = \frac{7 \cdot 5}{5 \cdot 2} \text{ dz} = 3\frac{1}{2} \text{ dz}$$

Schreibe die Lösung der Beispiele 2 bis 4 auch als Multiplikationsaufgaben in dieser kurzen Form!

Wir merken uns: **Man multipliziert einen Bruch mit einem Bruch, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.**

Kurzform: Bruch mal Bruch $= \frac{\text{Zähler mal Zähler}}{\text{Nenner mal Nenner}}$

Vor dem Ausrechnen wird gekürzt, wenn es möglich ist.

Gemischte Zahlen müssen wir vor dem Multiplizieren in unechte Brüche verwandeln.

Die Regel läßt sich auch auf das Multiplizieren von Brüchen mit ganzen Zahlen anwenden. Wir haben bereits Brüche mit dem Nenner 1 kennengelernt. So können wir die Aufgabe $\frac{3}{4} \cdot 5$ auch anders schreiben:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{1} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 1} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Wir brauchen uns also für das Multiplizieren mit Brüchen nur die hier angegebene, fettgedruckte Regel zu merken.

Aufgaben

Übungen für das Kopfrechnen

1. a) $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{2}{3} \cdot \frac{11}{15}$; $\frac{11}{16} \cdot \frac{5}{7}$; $\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{11}$; $\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{7}$

b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{6}$; $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{15}$; $\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11}$; $\frac{7}{8} \cdot \frac{9}{11}$; $\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{7}$

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}$; $\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{13}$; $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{9}$; $\frac{3}{5} \cdot \frac{11}{17}$; $\frac{3}{8} \cdot \frac{7}{10}$

d) $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4}$; $\frac{2}{7} \cdot \frac{6}{19}$; $\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{5}$; $\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9}$; $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5}$

e) $\frac{2}{13} \cdot \frac{2}{15}$; $\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{11}$; $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$; $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$; $\frac{4}{13} \cdot \frac{6}{7}$

2. a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$; $\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{9}$

b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$; $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$; $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{10}$

c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9}$; $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}$

d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}$; $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8}$; $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}$

e) $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6}$; $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$; $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{10}$

3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ **c)** $\left(\frac{4}{9}\right)^2$ **d)** $\left(\frac{7}{8}\right)^2$ **e)** $\left(\frac{11}{15}\right)^2$ **f)** $\left(\frac{10}{17}\right)^2$

Schriftliches Rechnen

Bei den folgenden Aufgaben kürzen wir vor dem Ausrechnen.

4. Lösungsbeispiel: $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} = \frac{5 \cdot 9}{6 \cdot 10} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

a) $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{8}$; $\frac{7}{12} \cdot \frac{36}{37}$; $\frac{4}{21} \cdot \frac{63}{65}$; $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$; $\frac{25}{38} \cdot \frac{39}{50}$; $\frac{9}{10} \cdot \frac{25}{27}$

b) $\frac{5}{6} \cdot \frac{12}{13}$; $\frac{5}{17} \cdot \frac{51}{53}$; $\frac{38}{39} \cdot \frac{5}{19}$; $\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{15}$; $\frac{28}{51} \cdot \frac{85}{96}$; $\frac{11}{15} \cdot \frac{25}{44}$

c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{12}$; $\frac{6}{13} \cdot \frac{39}{40}$; $\frac{28}{29} \cdot \frac{5}{14}$; $\frac{9}{11} \cdot \frac{32}{45}$; $\frac{4}{25} \cdot \frac{5}{9}$; $\frac{22}{75} \cdot \frac{25}{33}$

d) $\frac{4}{9} \cdot \frac{18}{25}$; $\frac{57}{59} \cdot \frac{2}{19}$; $\frac{6}{11} \cdot \frac{77}{85}$; $\frac{26}{27} \cdot \frac{16}{39}$; $\frac{16}{17} \cdot \frac{51}{64}$; $\frac{12}{17} \cdot \frac{51}{82}$

5. a) $\frac{21}{38} \cdot \frac{19}{49}$; $\frac{13}{25} \cdot \frac{15}{52}$; $\frac{13}{32} \cdot \frac{48}{65}$; $\frac{21}{44} \cdot \frac{22}{49}$

b) $\frac{33}{34} \cdot \frac{17}{22}$; $\frac{42}{55} \cdot \frac{33}{70}$; $\frac{24}{35} \cdot \frac{55}{84}$; $\frac{48}{65} \cdot \frac{13}{32}$

c) $\frac{16}{45} \cdot \frac{55}{64}$; $\frac{45}{56} \cdot \frac{14}{75}$; $\frac{26}{45} \cdot \frac{35}{39}$; $\frac{38}{49} \cdot \frac{91}{114}$

d) $\frac{41}{45} \cdot \frac{6}{41}$; $\frac{28}{51} \cdot \frac{34}{49}$; $\frac{14}{17} \cdot \frac{34}{35}$; $\frac{19}{60} \cdot \frac{40}{57}$

6. a) $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{2}$; $3\frac{4}{5} \cdot 2\frac{3}{4}$; $3\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{5}$; $5\frac{1}{9} \cdot 1\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{8} \cdot 11\frac{1}{3}$

b) $2\frac{3}{5} \cdot 3\frac{2}{3}$; $6\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{5}$; $7\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4}$; $4\frac{2}{3} \cdot 4\frac{2}{5}$; $9\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{19}$

c) $4\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{3}$; $5\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{3}$; $6\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{2}$; $8\frac{7}{9} \cdot 3\frac{1}{2}$; $3\frac{5}{7} \cdot 2\frac{4}{9}$

d) $3\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3}$; $4\frac{3}{4} \cdot 3\frac{1}{2}$; $2\frac{3}{4} \cdot 1\frac{2}{3}$; $4\frac{4}{5} \cdot 4\frac{2}{7}$; $5\frac{3}{8} \cdot 8\frac{4}{5}$

7. a) $1\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$; $3\frac{9}{10} \cdot \frac{31}{39}$; $7\frac{9}{13} \cdot \frac{67}{100}$; $5\frac{1}{11} \cdot \frac{9}{14}$

b) $1\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7}$; $3\frac{7}{11} \cdot \frac{39}{40}$; $9\frac{4}{15} \cdot \frac{137}{139}$; $9\frac{1}{7} \cdot \frac{19}{24}$

c) $2\frac{3}{8} \cdot \frac{17}{19}$; $4\frac{7}{8} \cdot \frac{37}{39}$; $7\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15}$; $9\frac{9}{10} \cdot \frac{5}{22}$

d) $2\frac{4}{9} \cdot \frac{13}{22}$; $6\frac{5}{12} \cdot \frac{61}{77}$; $6\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$; $8\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7}$

8. a) $\frac{3}{8} \cdot 3\frac{1}{5}$; $\frac{4}{9} \cdot 1\frac{5}{13}$; $\frac{2}{25} \cdot 16\frac{2}{3}$; $\frac{6}{7} \cdot 4\frac{3}{8}$

b) $\frac{5}{9} \cdot 6\frac{3}{4}$; $\frac{7}{12} \cdot 4\frac{4}{5}$; $\frac{7}{75} \cdot 13\frac{7}{11}$; $\frac{10}{13} \cdot 5\frac{1}{5}$

c) $\frac{5}{7} \cdot 5\frac{1}{4}$; $\frac{3}{16} \cdot 2\frac{2}{23}$; $\frac{8}{9} \cdot 4\frac{1}{2}$; $\frac{9}{11} \cdot 7\frac{6}{7}$

d) $\frac{3}{8} \cdot 3\frac{3}{7}$; $\frac{10}{11} \cdot 3\frac{1}{7}$; $\frac{8}{35} \cdot 6\frac{4}{11}$; $\frac{8}{15} \cdot 7\frac{4}{11}$

9. a) $\frac{5}{24} \cdot 5\frac{1}{3}$; $\frac{1}{18} \cdot 2\frac{1}{13}$; $5\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{40}$; $8\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{35}$

b) $\frac{11}{12} \cdot 3\frac{3}{5}$; $2\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{12}$; $\frac{5}{12} \cdot 4\frac{4}{5}$; $\frac{14}{25} \cdot 5\frac{5}{6}$

c) $9\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{21}$; $3\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{30}$; $6\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{13}$; $11\frac{1}{9} \cdot \frac{27}{40}$

d) $2\frac{3}{11} \cdot \frac{4}{15}$; $\frac{5}{24} \cdot 2\frac{2}{17}$; $\frac{3}{14} \cdot 9\frac{4}{5}$; $\frac{5}{16} \cdot 9\frac{3}{5}$

10. a) $8\frac{1}{3} \cdot 1\frac{4}{5}$; $5\frac{5}{6} \cdot 1\frac{5}{7}$; $4\frac{4}{15} \cdot 3\frac{1}{8}$; $5\frac{5}{8} \cdot 2\frac{7}{18}$

b) $2\frac{7}{10} \cdot 1\frac{1}{9}$; $4\frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{12}$; $5\frac{5}{12} \cdot 2\frac{2}{15}$; $9\frac{4}{5} \cdot 1\frac{3}{7}$

c) $5\frac{5}{8} \cdot 1\frac{7}{8}$; $16\frac{2}{3} \cdot 1\frac{7}{10}$; $6\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{15}$; $10\frac{2}{7} \cdot 4\frac{3}{8}$

d) $6\frac{2}{3} \cdot 2\frac{2}{5}$; $6\frac{1}{4} \cdot 3\frac{3}{5}$; $3\frac{3}{8} \cdot 2\frac{11}{12}$; $4\frac{7}{12} \cdot 7\frac{1}{11}$

11. Lösungsbeispiel: $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{9} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 9} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$

a) $1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{7}$; $1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$

b) $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{2}{7} \cdot 1\frac{1}{3}$; $1\frac{19}{21} \cdot 2\frac{11}{12} \cdot 5\frac{2}{5}$

c) $1\frac{1}{6} \cdot 1\frac{1}{8} \cdot 1\frac{1}{3}$; $5\frac{4}{7} \cdot 4\frac{1}{26} \cdot 4\frac{2}{45}$

d) $3\frac{2}{25} \cdot 2\frac{3}{11} \cdot 6\frac{8}{35}$	e) $5\frac{5}{18} \cdot 7\frac{11}{19} \cdot 4\frac{5}{24}$	f) $4\frac{3}{13} \cdot 1\frac{7}{11} \cdot 2\frac{8}{9}$
$4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{9} \cdot 1\frac{3}{4}$	$5\frac{5}{6} \cdot 1\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{5} \cdot 1\frac{2}{3}$

12.

a) $1\frac{1}{4} \cdot 2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{5}$	b) $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 6\frac{2}{3}$	c) $10\frac{1}{2} \cdot 2\frac{3}{4} \cdot 5\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4}$	$8\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 12\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2} \cdot 4\frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{19}$
$3\frac{1}{5} \cdot 4\frac{1}{6} \cdot 2\frac{2}{5}$	$4\frac{1}{6} \cdot 1\frac{2}{5} \cdot 16\frac{2}{3}$	$22\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{15}$
$5\frac{3}{5} \cdot 7 \cdot 3\frac{4}{5}$	$12\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4} \cdot 7\frac{1}{5}$	$28\frac{1}{6} \cdot 3\frac{4}{17} \cdot 1\frac{6}{11}$

13. Aufgaben mit überraschenden Ergebnissen:

a) $24 \cdot 41\frac{2}{3}$	b) $120 \cdot 102\frac{7}{8}$	c) $26\frac{2}{3} \cdot 18\frac{3}{4}$
d) $73\frac{1}{3} \cdot 60\frac{3}{5}$	e) $151\frac{1}{2} \cdot 14\frac{2}{3}$	f) $54 \cdot 6\frac{1}{6}$
g) $3\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9}$	h) $7\frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{25}$	i) $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{8} \cdot 1\frac{7}{9}$
k) $10\frac{2}{3} \cdot 60 \cdot 5\frac{2}{5}$	l) $321\frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 5\frac{1}{3}$	m) $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{9}$

Anwendungen

14. Welche Zahl ist $2\frac{1}{3}$ mal so groß wie $4\frac{2}{7}$?

15. Wenn du $3\frac{3}{4}$ mit $2\frac{2}{3}$ multiplizierst, erhältst du gerade die Hälfte der Zahl, die ich mir jetzt gedacht hatte.

16. Die Sprunggrube auf dem Schulhof ist $6\frac{1}{4}$ m lang und $4\frac{1}{5}$ m breit. Wie groß ist die Fläche der Sprunggrube?

17. Heinz wandert in einer Stunde durchschnittlich $4\frac{1}{2}$ km. Wie weit kommt er

a) in $1\frac{1}{2}$ Std., b) in $2\frac{1}{3}$ Std., c) in $\frac{3}{4}$ Std.?

18. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft bebaut $23\frac{1}{2}$ ha Ackerfläche mit Kartoffeln und $26\frac{7}{8}$ ha mit Zuckerrüben. Als Durchschnittsertrag von einem Hektar werden 180 dz Kartoffeln und 392 dz Zuckerrüben erwartet. Wieviel Tonnen Kartoffeln und wieviel Tonnen Zuckerrüben werden voraussichtlich insgesamt geerntet?

19. Ein Bauer hat $2\frac{1}{2}$ ha Ackerfläche mit Roggen, $1\frac{3}{4}$ ha mit Weizen, $1\frac{3}{5}$ ha mit Gerste und $1\frac{1}{2}$ ha mit Hafer bestellt. Er hatte im vergangenen Jahr einen Ernteertrag von $23\frac{3}{5}$ dz Roggen, $26\frac{3}{5}$ dz Weizen, $32\frac{1}{2}$ dz Gerste und $28\frac{3}{10}$ dz Hafer je Hektar. Mit welchen Ernteerträgen kann er rechnen, wenn sie denen des Vorjahres entsprechen?

20. Wenn Butter aus Milch mit normalem Fettgehalt hergestellt wird, rechnet man mit einer Buttergewinnung von $\frac{1}{25}$ des Milchgewichts. Ein Bauer liefert $71\frac{1}{2}$ kg Milch mit normalem Fettgehalt ab. Wieviel Kilogramm Butter kann man aus dieser Menge Vollmilch erhalten?

21. Ein Schinken behält nach dem Räuchern nur noch $\frac{4}{5}$ seines Gewichts. Es wird ein Schinken geräuchert, der **a)** $1\frac{1}{2}$ kg, **b)** $2\frac{1}{4}$ kg, **c)** $3\frac{3}{4}$ kg wiegt. Berechne das Gewicht jedes Schinkens nach dem Räuchern!

22. Eine automatisch arbeitende Maschine fertigt in einer Stunde $1\frac{3}{4}$ kg Muttern. Die Maschine läuft $7\frac{1}{2}$ Std. in einer Schicht. Wieviel Kilogramm Muttern werden in 3 Schichten mit dieser Maschine hergestellt?

23. Eine Brigade verlegt in einer Stunde $2\frac{1}{2}$ m Erdkabel. Sie hat an einem Tag $7\frac{1}{2}$ Std. gearbeitet. Wieviel Meter Erdkabel konnten an diesem Tage verlegt werden?

14. Division eines Bruches durch einen Bruch

Teilen

1. Beispiel: a) Ein Lastkraftwagen durchfährt eine Strecke von 224 km in 4 Std. Wieviel Kilometer fährt er durchschnittlich in einer Stunde?

Lösung: In 4 Std. durchfährt das Auto 224 km,
in 1 Std. durchfährt das Auto 224 km : 4 = 56 km.
Das Auto fährt in der Stunde durchschnittlich 56 km.

Wir haben in der Lösung von der in 4 Stunden zurückgelegten Strecke auf die in einer Stunde zurückgelegte Strecke geschlossen. Wir haben also auf die Einheit geschlossen und mußten dividieren.

1. Beispiel: b) Ein anderer Lastkraftwagen durchfährt die gleiche Strecke (224 km) in $3\frac{1}{2}$ Std. Wieviel Kilometer fährt dieser Wagen durchschnittlich in einer Stunde?

Da wir in diesem Beispiel auch auf die Einheit schließen, müssen wir demnach die Divisionsaufgabe bilden:

$$224 : 3\tfrac{1}{2}.$$

Durch einen Bruch können wir noch nicht dividieren. Wir wollen uns deshalb einen Lösungsweg suchen.

2. Beispiel: $3\frac{3}{4}$ kg Spinat kosten 1,50 DM. Wie teuer ist 1 kg Spinat? (Wir rechnen mit $1\frac{1}{2}$ DM.)

Lösung: $3\frac{3}{4}$ kg kosten $1\frac{1}{2}$ DM.
$\frac{15}{4}$ kg kosten $\frac{3}{2}$ DM.
$\frac{1}{4}$ kg kostet $\frac{3}{2}$ DM : 15 $= \frac{3}{2 \cdot 15}$ DM.
$\frac{4}{4}$ kg kosten $\frac{3}{2 \cdot 15}$ DM $\cdot\, 4 = \boxed{\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 15}}$ DM
$= \frac{2}{5}$ DM = 40 Pf = 0,40 DM.
1 kg Spinat kostet demnach 40 Pf.

3. Beispiel: $\frac{3}{4}$ kg Stachelbeeren kosten 0,90 DM. Wie teuer ist 1 kg? (Wir rechnen mit $\frac{9}{10}$ DM.)

Lösung: $\frac{3}{4}$ kg kosten $\frac{9}{10}$ DM.
$\frac{1}{4}$ kg kostet $\frac{9}{10}$ DM: 3 $= \frac{9}{10 \cdot 3}$ DM.
$\frac{4}{4}$ kg kosten $\frac{9}{10 \cdot 3}$ DM $\cdot\, 4 = \boxed{\frac{9 \cdot 4}{10 \cdot 3}}$ DM $= \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 1}$ DM
$= \frac{6}{5}$ DM $= 1\frac{1}{5}$ DM.
1 kg kostet demnach 1,20 DM.

Im Beispiel 1b) wollen wir berechnen, wieviel Kilometer der Lastkraftwagen in *einer* Stunde fährt. Dazu haben wir eine Divisionsaufgabe gebildet ($224 : 3\frac{1}{2}$).

Im 2. und 3. Beispiel errechneten wir den Preis für *ein* Kilogramm ausführlich durch Schließen. Wollen wir wie im 1. Beispiel rechnen, müssen wir dividieren. Es ergeben sich demnach die folgenden Aufgaben:

2. Beispiel: $1\frac{1}{2}$ DM : $3\frac{3}{4}$

3. Beispiel: $\frac{9}{10}$ DM : $\frac{3}{4}$

Wir versuchen, den Bruch im Divisor so umzuformen, daß wir eine ganze Zahl erhalten. Dann können wir die Divisionsaufgaben lösen; denn wir haben bereits gelernt, einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividieren.

Ehe wir eine solche Veränderung in den Aufgaben vornehmen, müssen wir uns noch folgendes überlegen: Das Ergebnis einer Divisionsaufgabe ändert sich nicht, wenn wir Dividend und Divisor mit derselben Zahl multiplizieren.

Die Aufgabe 6 : 3 ergibt die gleiche Lösung wie
60 : 30 (Dividend und Divisor multipliziert mit 10)
oder wie 24 : 12 (Dividend und Divisor multipliziert mit 4).

Diese Erkenntnis wenden wir auf die Division eines Bruches durch einen Bruch an. Für das 2. Beispiel ergibt sich folgende Überlegung:

$$1\tfrac{1}{2}\text{ DM} : 3\tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{2}\text{ DM} : \tfrac{15}{4}.$$

Wir verändern den Divisor so, daß aus dem Bruch $\frac{15}{4}$ eine ganze Zahl wird. Dazu müssen wir ihn mit seinem Nenner multiplizieren ($\frac{15}{4} \cdot 4 = \frac{15 \cdot 4}{4} = 15$). Da wir den Divisor mit 4 multipliziert haben, müssen wir auch den Dividenden $\frac{3}{2}$ mit 4 multiplizieren, wenn sich das Ergebnis nicht ändern soll.

Die Aufgabe $\frac{3}{2} : \frac{15}{4}$ lautet nun: $\frac{3}{2}$ mal 4 dividiert durch 15. Wir erhalten die folgende Lösung:

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{2} : \tfrac{15}{4} &= \tfrac{3}{2} \cdot 4 : 15 \\ &= \tfrac{3 \cdot 4}{2} : 15 = \boxed{\tfrac{3 \cdot 4}{2 \cdot 15}} = \tfrac{2}{5}\end{aligned}$$

Vergleiche den eingerahmten Bruchausdruck mit dem in der ausführlichen Lösung des Beispiels 2 auf Seite 53!

Auch im 3. Beispiel verändern wir den Divisor so, daß er zur ganzen Zahl wird: $\frac{3 \cdot 4}{4} = 3$. Die entsprechende Lösung für das 3. Beispiel lautet:

$$\begin{aligned}\tfrac{9}{10} : \tfrac{3}{4} &= \tfrac{9}{10} \cdot 4 : 3 \\ &= \tfrac{9 \cdot 4}{10} : 3 = \boxed{\tfrac{9 \cdot 4}{10 \cdot 3}} = \tfrac{6}{5} = 1\tfrac{1}{5}\end{aligned}$$

Vergleiche auch hier den eingerahmten Bruchausdruck mit der ersten Lösung des Beispiels 3 auf Seite 53!

Die eingerahmten Bruchausdrücke zeigen, daß wir sowohl bei der ausführlichen Lösung mit Hilfe des Schließens als auch bei dem kurzen Lösungsweg der Division das gleiche Ergebnis erhalten.

Vergleichen wir nun die Divisionsaufgabe mit ihren Lösungen, so stellen wir fest:

2. Beispiel: $\frac{3}{2} : \frac{15}{4}$ ergibt $\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 15}$

3. Beispiel: $\frac{9}{10} : \frac{3}{4}$ ergibt $\frac{9 \cdot 4}{10 \cdot 3}$

Der Dividend ist unverändert geblieben. Aber im Divisor ist der Zähler zum Nenner und der Nenner zum Zähler geworden. Zähler und Nenner des Divisors werden vertauscht. Man bezeichnet $\frac{4}{15}$ als den **Kehrwert** von $\frac{15}{4}$. Der Kehrwert des Divisors $\frac{3}{4}$ im Beispiel 3 lautet $\frac{4}{3}$. Den Kehrwert nennt man auch den **reziproken Wert**.

Wir haben damit einen abgekürzten Lösungsweg gefunden, wie wir einen Bruch durch einen Bruch dividieren können.

2. Beispiel: $1\frac{1}{2}\text{ DM} : 3\frac{3}{4} = \frac{3}{2}\text{ DM} : \frac{15}{4} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 15}\text{ DM} = \frac{2}{5}\text{ DM}$

3. Beispiel: $\frac{9}{10}\text{ DM} : \frac{3}{4} = \frac{9 \cdot 4}{10 \cdot 3}\text{ DM} = \frac{6}{5}\text{ DM} = 1\frac{1}{5}\text{ DM}$

Nun können wir auch das 1. Beispiel lösen. Führe die Lösung in der ausführlichen und in der abgekürzten Form selbst durch!

Für die Division zweier Brüche merken wir uns: **Man dividiert einen Bruch durch einen Bruch, indem man ihn mit dem reziproken Wert des Divisors multipliziert.**

Kurzform: Bruch durch Bruch $= \dfrac{\text{Zähler mal Nenner}}{\text{Nenner mal Zähler}}$

Diese Regel läßt sich auch auf das Dividieren eines Bruches durch eine ganze Zahl anwenden.

Beispiel: $\frac{3}{4} : 5$

Lösung: $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} : \frac{5}{1} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$

Wir brauchen uns also für die Division von Brüchen nur die hier gegebene, fettgedruckte Regel zu merken.

Aufgaben

Übungen für das Kopfrechnen

1. Rechne die nachstehenden Aufgaben aus und schreibe sie mit ihren Lösungen übersichtlich untereinander!
Dividiere 12 nacheinander durch 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\dots$, $\frac{1}{12}$!
Welche Regel findest du bestätigt?

	a)	b)	c)	d)	e)
2.	$3 : \frac{4}{5}$	$2 : \frac{3}{8}$	$5 : \frac{3}{4}$	$7 : \frac{5}{6}$	$5 : \frac{2}{3}$
	$9 : \frac{7}{8}$	$8 : \frac{7}{9}$	$10 : \frac{7}{12}$	$6 : \frac{7}{15}$	$12 : \frac{7}{9}$
	$11 : \frac{5}{8}$	$14 : \frac{5}{9}$	$13 : \frac{1}{2}$	$11 : \frac{15}{16}$	$16 : \frac{9}{10}$
	$3 : \frac{14}{15}$	$10 : \frac{13}{21}$	$14 : \frac{9}{11}$	$10 : \frac{7}{9}$	$7 : \frac{5}{12}$
3.	$5 : \frac{4}{9}$	$2 : \frac{11}{12}$	$1 : \frac{7}{15}$	$8 : \frac{4}{5}$	$18 : \frac{9}{20}$
	$6 : \frac{7}{10}$	$10 : \frac{5}{16}$	$10 : \frac{8}{15}$	$12 : \frac{7}{8}$	$5 : \frac{15}{17}$
	$9 : \frac{2}{3}$	$12 : \frac{3}{5}$	$7 : \frac{5}{6}$	$8 : \frac{4}{9}$	$2 : \frac{11}{13}$
4.	$17 : \frac{3}{4}$	$25 : \frac{4}{5}$	$20 : \frac{4}{5}$	$32 : \frac{8}{9}$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{5}$
	$\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$	$\frac{1}{6} : \frac{1}{7}$	$\frac{1}{4} : \frac{5}{8}$	$\frac{1}{5} : \frac{7}{10}$
	$\frac{1}{6} : \frac{11}{12}$	$\frac{1}{9} : \frac{7}{12}$	$\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} : \frac{2}{3}$
	$\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$	$\frac{5}{7} : \frac{5}{14}$	$\frac{2}{5} : \frac{4}{15}$	$\frac{3}{8} : \frac{3}{16}$	$\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$

Schriftliches Rechnen

	a)	b)	c)	d)
5.	$\frac{7}{12} : \frac{5}{6}$	$\frac{8}{15} : \frac{3}{5}$	$\frac{4}{39} : \frac{9}{13}$	$\frac{3}{4} : \frac{5}{12}$
	$\frac{5}{9} : \frac{7}{18}$	$\frac{12}{13} : \frac{6}{7}$	$\frac{59}{90} : \frac{5}{18}$	$\frac{19}{40} : \frac{3}{16}$
	$\frac{11}{28} : \frac{3}{7}$	$\frac{9}{16} : \frac{3}{8}$	$\frac{15}{28} : \frac{5}{7}$	$\frac{2}{3} : \frac{8}{27}$
	$\frac{40}{63} : \frac{8}{9}$	$\frac{15}{56} : \frac{3}{8}$	$\frac{5}{6} : \frac{25}{72}$	$\frac{5}{6} : \frac{10}{11}$
6.	$1\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$	$\frac{6}{7} : 5\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4} : 17\frac{3}{4}$	$2\frac{5}{11} : \frac{9}{11}$
	$4\frac{4}{5} : \frac{3}{5}$	$5\frac{4}{9} : \frac{7}{9}$	$5\frac{5}{16} : \frac{7}{16}$	$2\frac{14}{17} : \frac{16}{17}$
	$3\frac{7}{27} : \frac{4}{27}$	$4\frac{8}{19} : \frac{14}{19}$	$6\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$	$3\frac{3}{8} : \frac{5}{8}$
	$10\frac{4}{5} : \frac{3}{5}$	$6\frac{1}{12} : \frac{7}{12}$	$2\frac{4}{11} : \frac{2}{11}$	$3\frac{11}{20} : \frac{9}{20}$
7.	$2\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$	$1\frac{4}{9} : \frac{1}{5}$	$4\frac{2}{3} : \frac{1}{7}$	$1\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$
	$3\frac{1}{3} : \frac{7}{10}$	$3\frac{1}{3} : \frac{10}{21}$	$3\frac{1}{5} : \frac{4}{7}$	$8\frac{4}{5} : \frac{11}{15}$
	$10\frac{2}{3} : \frac{16}{17}$	$2\frac{1}{12} : \frac{5}{9}$	$5\frac{3}{5} : \frac{7}{25}$	$6\frac{3}{4} : \frac{9}{16}$
8.	$\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6} : 1\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9} : 1\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} : 1\frac{5}{6}$
	$\frac{1}{2} : 2\frac{3}{7}$	$\frac{5}{8} : 3\frac{1}{3}$	$\frac{9}{20} : 1\frac{3}{5}$	$\frac{3}{7} : 2\frac{4}{5}$
	$\frac{7}{48} : 2\frac{11}{12}$	$\frac{64}{75} : 2\frac{14}{25}$	$\frac{7}{12} : 3\frac{5}{6}$	$\frac{4}{9} : 2\frac{2}{15}$
9.	$1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{3} : 1\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{5} : \frac{3}{5}$	$1\frac{4}{9} : 2\frac{7}{9}$
	$6\frac{2}{3} : 1\frac{2}{3}$	$12\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2}$
	$15\frac{3}{4} : 2\frac{1}{4}$	$2\frac{3}{5} : 18\frac{1}{5}$	$3\frac{1}{8} : 1\frac{7}{8}$	$5\frac{5}{6} : 1\frac{1}{6}$
	$8\frac{1}{3} : 3\frac{1}{3}$	$15\frac{2}{5} : 2\frac{1}{5}$	$20\frac{5}{8} : 3\frac{1}{8}$	$3\frac{5}{9} : 4\frac{4}{9}$
10.	$1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{3} : 2\frac{1}{5}$	$1\frac{2}{7} : 1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{9} : 1\frac{1}{4}$
	$1\frac{1}{10} : 1\frac{5}{6}$	$1\frac{1}{4} : 1\frac{1}{6}$	$1\frac{2}{5} : 1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{7} : 1\frac{1}{4}$
	$1\frac{1}{14} : 1\frac{1}{7}$	$3\frac{1}{3} : 1\frac{1}{2}$	$5\frac{2}{5} : 4\frac{1}{2}$	$9\frac{3}{4} : 6\frac{1}{2}$
11.	$2\frac{1}{3} : 1\frac{1}{6}$	$2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{10}$	$3\frac{1}{3} : 3\frac{1}{6}$	$4\frac{2}{7} : 1\frac{1}{2}$
	$7\frac{1}{9} : 1\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{5} : 3\frac{3}{4}$	$4\frac{4}{5} : 1\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{6} : 1\frac{3}{8}$
	$7\frac{1}{2} : 3\frac{4}{7}$	$12\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$	$25\frac{5}{6} : 3\frac{2}{3}$	$9\frac{3}{8} : 4\frac{1}{6}$
12.	$\frac{5}{12} : \frac{20}{33}$	$4\frac{2}{3} : \frac{7}{9}$	$5\frac{1}{3} : 3\frac{1}{5}$	$11\frac{1}{4} : 3\frac{1}{8}$
	$\frac{3}{10} : \frac{4}{5}$	$16\frac{2}{5} : \frac{5}{12}$	$1\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}$	$6\frac{4}{9} : 14\frac{1}{2}$
	$\frac{15}{34} : \frac{10}{17}$	$3\frac{1}{5} : \frac{3}{4}$	$3\frac{1}{3} : 1\frac{3}{5}$	$19\frac{5}{6} : 1\frac{7}{15}$
	$\frac{10}{9} : \frac{3}{5}$	$7\frac{7}{8} : \frac{21}{32}$	$4\frac{2}{7} : 1\frac{1}{4}$	$12\frac{4}{5} : 12\frac{1}{4}$

Enthaltensein

4. **Beispiel:** $4\frac{1}{2}$ l Fruchtsaft sollen in $\frac{3}{4}$-Literflaschen gefüllt werden. Wieviel Flaschen sind zum Abfüllen des Saftes erforderlich?

Lösung a)

$\frac{3}{4}$ l in $4\frac{1}{2}$ l = ? mal

$\frac{3}{4}$ l in $\frac{9}{2}$ l = ? mal

$\frac{3}{4}$ l in $\frac{18}{4}$ l = 6 mal

Lösung b)

$\frac{3}{4}$ l in $4\frac{1}{2}$ l = ? mal

Wir lösen durch Division:

$4\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{9}{2} : \frac{3}{4} = \frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 6$

Es werden 6 $\frac{3}{4}$-Literflaschen benötigt.

5. **Beispiel:** In wieviel Gläser können $2\frac{1}{2}$ l Bier gefüllt werden, wenn ein Glas $\frac{3}{20}$ l faßt?

Lösung a)

$\frac{3}{20}$ l in $2\frac{1}{2}$ l = ? mal

$\frac{3}{20}$ l in $\frac{5}{2}$ l = ? mal

$\frac{3}{20}$ l in $\frac{50}{20}$ l = $16\frac{2}{3}$ mal

Lösung b)

$\frac{3}{20}$ l in $2\frac{1}{2}$ l = ? mal

Wir lösen durch Division:

$2\frac{1}{2} : \frac{3}{20} = \frac{5}{2} : \frac{3}{20} = \frac{5 \cdot 20}{2 \cdot 3} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$

Es können 16 Gläser voll gefüllt werden. Das 17. Glas wird nur zu $\frac{2}{3}$ gefüllt.

Wir lösen also auch beim Rechnen mit Brüchen eine Aufgabe des Messens oder Enthaltenseins durch Division. Für die weiteren Aufgaben wählen wir den *kürzeren Lösungsweg* der Division.

Aufgaben

13. Wie oft sind

a) $\frac{2}{7}$ in $\frac{6}{7}$, **b)** $\frac{7}{45}$ in $\frac{28}{45}$, **c)** $\frac{5}{53}$ in $\frac{20}{53}$, **d)** $\frac{12}{97}$ in $\frac{72}{97}$,
e) $\frac{8}{17}$ in $\frac{16}{17}$, **f)** $\frac{15}{19}$ in $\frac{60}{19}$, **g)** $\frac{21}{34}$ in $\frac{42}{34}$, **h)** $\frac{16}{55}$ in $\frac{48}{55}$

enthalten?

14. Berechne, wie oft

a) $\frac{3}{4}$ in $3\frac{3}{4}$, **b)** $\frac{4}{5}$ in $6\frac{2}{5}$, **c)** $\frac{5}{6}$ in $9\frac{1}{6}$, **d)** $\frac{7}{9}$ in $5\frac{4}{9}$,
e) $\frac{12}{13}$ in $11\frac{1}{13}$, **f)** $\frac{17}{25}$ in $11\frac{14}{25}$, **g)** $2\frac{4}{5}$ in $19\frac{3}{5}$, **h)** $\frac{4}{27}$ in $10\frac{2}{27}$

enthalten sind!

15. Löse die folgenden Aufgaben des Enthaltenseins!

a) $\frac{7}{20}$ hl in 7 hl	**b)** $\frac{4}{25}$ hl in $3\frac{9}{25}$ hl	**c)** $1\frac{1}{4}$ km in $3\frac{1}{8}$ km
d) $2\frac{1}{4}$ kg in $13\frac{1}{2}$ kg	**e)** $1\frac{1}{8}$ ha in $15\frac{3}{4}$ ha	**f)** $3\frac{1}{2}$ m^2 in $19\frac{1}{5}$ m^2
g) $\frac{5}{6}$ Std. in $6\frac{2}{3}$ Std.	**h)** $\frac{7}{12}$ Dtzd. in $5\frac{5}{6}$ Dtzd.	**i)** $\frac{3}{8}$ Tg. in $5\frac{1}{4}$ Tg.
k) $2\frac{1}{4}$ Std. in $4\frac{1}{2}$ Std.	**l)** $3\frac{1}{2}$ m in $12\frac{1}{4}$ m	**m)** $1\frac{3}{4}$ l in $12\frac{3}{5}$ l

16. Wie oft sind $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{6}$, $6\frac{1}{4}$, $6\frac{2}{3}$, $8\frac{1}{3}$, $12\frac{1}{2}$, $16\frac{2}{3}$, $14\frac{2}{7}$, $33\frac{1}{3}$ in 100 enthalten?

Anwendungen

17. Ich denke mir eine Zahl. $\frac{2}{3}$ davon sind $1\frac{1}{9}$. Wie heißt die Zahl?

18. $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{3}$ einer Zahl betragen zusammen 65.

19. $\frac{1}{3}$ einer Zahl ist um 3 größer als $\frac{1}{4}$ derselben Zahl. Nenne die Zahl!

20. Welche Zahl ist $2\frac{1}{3}$ mal so groß wie $4\frac{2}{7}$?

21. Das Vierfache einer Zahl beträgt 6 mehr als $\frac{2}{3}$ von 45.

22. $\frac{5}{6}$ einer Zahl beträgt $3\frac{3}{4}$.

23. Nehme ich von einer Zahl $\frac{2}{3}$ derselben weg und zähle ich 2 dazu, so erhalte ich 10.

24. Eine Konsum-Mostkelterei hat nach dem Plan jährlich 14770 l Kirschmost, 12110 l Johannisbeermost und 17500 l Apfelmost zu erzeugen.

a) Wieviel $\frac{7}{10}$-Literflaschen müssen für jede einzelne Mostsorte angefordert werden?

b) Wieviel $\frac{7}{10}$-Literflaschen werden insgesamt benötigt?

25. Wieviel Handtücher von $1\frac{1}{5}$ m Länge lassen sich aus einem Ballen Handtuchstoff von $21\frac{3}{5}$ m Länge herstellen?

26. Bei der Reinschrift schreibt Gerhard $\frac{2}{3}$ seines Hausaufsatzes in $\frac{1}{2}$ Std. Berechne, wieviel Zeit er zum Schreiben des ganzen Aufsatzes brauchen wird!

27. Eine Brieftaube flog die Strecke von Berlin nach Warschau (rund 517 km Luftlinie) in $5\frac{1}{2}$ Std.

Berechne, wieviel Kilometer diese Taube durchschnittlich in einer Stunde geflogen ist!

28. Zu einem Anzug mittlerer Größe sind $3\frac{1}{5}$ m Stoff erforderlich. Wieviel Anzüge können aus einem Stoffballen angefertigt werden, auf dem noch **a)** $34\frac{1}{2}$ m, **b)** $41\frac{3}{4}$ m sind?

29. Ein Radfahrer stellt fest, daß er 1 km in

a) 4 Min., b) $3\frac{3}{4}$ Min., c) $3\frac{1}{2}$ Min.

fährt. Wieviel Kilometer legt er in 1 Std. zurück?

30. Der Tank des Außenbordmotors „Nixe“ faßt $1\frac{1}{3}$ l Brennstoff. Wie lange reicht der Vorrat, wenn der Motor in einer Stunde $\frac{8}{10}$ l verbraucht?

31. Ein Schmied benötigt für die Anfertigung eines Radreifens $1\frac{3}{4}$ m Bandstahl. Am Lager sind noch $10\frac{1}{2}$ m Bandstahl vorhanden. Wieviel Radreifen können aus diesem Vorrat angefertigt werden?

15. Wiederholungsübungen

Übersichtliche Zusammenstellung der vier Grundrechenarten

Rechnen mit ganzen Zahlen	Rechnen mit Brüchen
Addition	
$3+4=4+3=7$	$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$
	$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$
Subtraktion	
$12-5=7$	$\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{16}{20}-\frac{15}{20}=\frac{1}{20}$
Probe: $7+5=12$	Probe: $\frac{1}{20}+\frac{3}{4}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$
Multiplikation	
$4\cdot3=3\cdot4=12$	a) $\frac{3}{4}\cdot6=6\cdot\frac{3}{4}=\frac{18}{4}=4\frac{1}{2}$
	oder $\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{1}=\frac{3\cdot6}{4\cdot1}=\frac{18}{4}=4\frac{1}{2}$
	b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3\cdot5}{4\cdot6}=\frac{5}{8}$
Division	
$12:6=2$	a) $\frac{3}{4}:6=\frac{3}{4\cdot6}=\frac{1}{4\cdot2}=\frac{1}{8}$
Probe: $2\cdot6=12$	oder $\frac{3}{4}:\frac{6}{1}=\frac{3\cdot1}{4\cdot6}=\frac{1\cdot1}{4\cdot2}=\frac{1}{8}$
	Probe $\frac{1}{8}\cdot6=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$
	b) $\frac{4}{15}:\frac{8}{9}=\frac{4\cdot9}{15\cdot8}=\frac{1\cdot3}{5\cdot2}=\frac{3}{10}$
	Probe: $\frac{3}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{3\cdot8}{10\cdot9}=\frac{4}{15}$

Erkläre die Übersicht! Gib die Regeln und Gesetze an!

Aufgaben

1. a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$

2. a) $1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4}$ b) $1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}$ c) $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4}$ d) $1\frac{1}{3} : 1\frac{1}{4}$

3. Bilde zu 1. und 2. selbst je 10 Beispiele!

4. Zusammengesetzte Aufgaben

a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$	b) $5\frac{3}{4} + 2\frac{5}{6}$	c) $1\frac{1}{8} + 1\frac{1}{5}$	d) $\frac{1}{3} \cdot \frac{14}{15}$	e) $9\frac{1}{2} - 4\frac{5}{8}$
$\cdot\ 2$	$-\ 1\frac{1}{3}$	$+\ \frac{7}{40}$	$:\ \frac{7}{90}$	$:\ \frac{1}{2}$
$:\ \frac{5}{24}$	$:\ 1\frac{1}{2}$	$\cdot\ \frac{4}{9}$	$-\ \frac{2}{7}$	$:\ 9$
$-\ \frac{1}{3}$	$\cdot\ 3$	$:\ 3\frac{1}{3}$	$:\ \frac{13}{14}$	$-\ \frac{3}{4}$
$+\ 2\frac{3}{5}$	$-\ 3\frac{4}{5}$	$+\ \frac{5}{6}$	$+\ 7\frac{4}{13}$	$:\ 1\frac{1}{9}$
$-\ \frac{4}{15}$	$:\ 11$	$:\ 3\frac{1}{2}$	$:\ 1\frac{10}{39}$	$+\ \frac{17}{25}$
f) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$	g) $3 \cdot \frac{1}{12}$	h) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$	i) $\frac{8}{9} - \frac{5}{6}$	k) $\frac{5}{14} : 1\frac{2}{7}$
$-\ \frac{3}{5}$	$\cdot\ \frac{3}{8}$	$\cdot\ 24$	$:\ 1\frac{5}{9}$	$+\ \frac{5}{6}$
$+\ \frac{7}{20}$	$+\ \frac{21}{32}$	$:\ \frac{3}{5}$	$+\ \frac{13}{28}$	$:\ 1\frac{3}{7}$
$-\ \frac{5}{12}$	$-\ \frac{5}{12}$	$-\ 2\frac{3}{4}$	$\cdot\ \frac{5}{6}$	$+\ \frac{5}{6}$
$\cdot\ 6$	$\cdot\ 9$	$:\ 1\frac{1}{4}$	$:\ 1\frac{1}{4}$	$-\ \frac{1}{9}$
$+\ \frac{1}{6}$	$-\ \frac{11}{20}$	$\cdot\ 10$	$+\ 2\frac{5}{6}$	$\cdot\ 50$
$-\ \frac{4}{15}$	$:\ 7$	$:\ 4$	$\cdot\ 12$	$\cdot\ 1\frac{1}{3}$

5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
I	$1\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{4}$	$5\frac{2}{5}$	$7\frac{1}{5}$	$10\frac{1}{8}$	$4\frac{4}{5}$	$6\frac{1}{4}$
II	$\frac{7}{8}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{15}$
III	$2\frac{1}{12}$	$2\frac{5}{12}$	$4\frac{4}{15}$	$10\frac{4}{5}$	$5\frac{5}{8}$	$10\frac{5}{6}$	$3\frac{3}{7}$	$2\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{3}$	$2\frac{3}{5}$

a) Addiere je zwei benachbarte Brüche der Zeilen I (II, III)!

b) Addiere die drei untereinanderstehenden Brüche jeder Spalte!

c) Subtrahiere nacheinander jeden Bruch der Tafel von $20\frac{3}{5}$!

d) Multipliziere je zwei benachbarte Brüche der Zeilen I (II, III) miteinander!

e) Dividiere nacheinander jeden Bruch der Zeile I durch den darunterstehenden Bruch der Zeile II!

f) Dividiere nacheinander jeden Bruch der Zeile II durch den darunterstehenden Bruch der Zeile III!

6. Multipliziere die Differenz der Zahlen $17\frac{3}{5}$ und $5\frac{3}{4}$ mit ihrer Summe!

7. Dividiere die Summe der Zahlen $6\frac{8}{25}$ und $9\frac{1}{10}$ durch das Produkt der Zahlen $\frac{21}{50}$ und 4!

8. Bilde den Quotienten der Zahlen $83\frac{1}{5}$ und $1\frac{23}{25}$, dividiere ihn durch 10 und subtrahiere dann das Produkt der Zahlen $8\frac{1}{3}$ und $\frac{17}{50}$!

9. Ilse ist $10\frac{3}{4}$ Jahre alt.
   - **a)** Ihre Schwester Angelika ist $8\frac{1}{2}$ Jahre jünger.
   - **b)** Ihr Bruder Max ist $5\frac{3}{4}$ Jahre älter.
   - **c)** Ilses Alter beträgt $\frac{3}{4}$ vom Alter ihrer Schwester Bärbel.

   Wie alt sind Ilses Geschwister?

10. Scherzaufgabe: Peter ist $11\frac{3}{4}$ Jahre alt. Er fragt seinen Vater: „Wie alt bist du eigentlich?" Der Vater antwortet: „Wenn du dein Alter verdreifachst, dann durch 4 teilst, $\frac{13}{16}$ Jahre abziehst und nun noch 30 Jahre hinzuzählst, dann weißt du es."

11. Bei einem Sportfest wurden im 75-Meter-Lauf gute Leistungen erzielt. Die fünf besten Jungen liefen die Strecke in $10\frac{3}{10}$ Sek., $9\frac{5}{10}$ Sek., $9\frac{8}{10}$ Sek., $9\frac{7}{10}$ Sek., $10\frac{1}{10}$ Sek. Berechne die durchschnittliche Leistung der fünf Läufer!

12. Die Schnur für ein Lagerzelt soll erneuert werden. Es sind vier Teilschnüre erforderlich. Die Länge jeder Teilschnur beträgt $5\frac{1}{2}$ m. Wieviel Meter Schnur muß die Lagerleitung kaufen?

13. Auf einer mehrtägigen Wanderung geben Angelika $\frac{3}{4}$, Bärbel $\frac{4}{5}$ ihres Taschengeldes aus. Zuletzt hatte jede noch 1,40 DM in der Tasche. Wieviel Mark hatte jede mitgenommen?

14. **a)** Bei einem Gewitter wird von einem Beobachter festgestellt, daß seit dem Aufleuchten des Blitzes 5 Sek. vergangen sind, bis der Donner zu hören ist. Errechne, wie weit das Gewitter vom Beobachter entfernt ist! (Schallgeschwindigkeit etwa $\frac{1}{3}$ km in der Sek.)

    b) Wieviel Sekunden nach dem Aufleuchten des Blitzes wird man den Donner hören, wenn der Blitz $2\frac{1}{2}$ km entfernt eingeschlagen hat?

15. Beim Bau einer Schule wird für jeden Schüler $1\frac{3}{10}$ m² Fußbodenfläche im Klassenzimmer berücksichtigt. Wie groß muß demnach die Fußbodenfläche eines Klassenzimmers für 40 Schüler sein?

16. Mutter hat noch $5\frac{2}{5}$ m Spitze, die sie in 6 Kopfkissen einsetzen will. Wieviel Meter Spitze kann sie für jedes Kopfkissen vorsehen?

17. **a)** In einem HO-Warenhaus werden an einem Tage von 5 Ballen Anzugstoff die folgenden Mengen verkauft: $13\frac{3}{4}$ m, $22\frac{1}{2}$ m, 38 m 60 cm,

$25\frac{7}{10}$ m und 29,35 m. Berechne, wieviel Meter Anzugstoff an diesem Tag insgesamt verkauft wurden! (Rechne mit gemeinen Brüchen!)

b) Auf einem Ballen sind noch 17 m Anzugstoff. Davon werden für drei Anzüge $3\frac{1}{4}$ m, $3\frac{1}{2}$ m und $3\frac{2}{10}$ m abgeschnitten. Wieviel Meter Stoff bleiben als Rest übrig?

c) Auf einem Ballen sind $27\frac{3}{4}$ m Kleiderstoff. Davon werden fünfmal nacheinander $3\frac{3}{4}$ m Stoff für Kleider verkauft. Wieviel Meter Stoff sind danach noch auf dem Ballen?

18. Dieter gab auf einer Wanderung erst die Hälfte von seinem Geld und dann von dem Rest ein Drittel aus. Er behielt 1,50 DM übrig. Fritz gab von seinem Geld erst ein Fünftel, dann ein Drittel aus und behielt 2,10 DM übrig.
Wieviel Mark hatte jeder zu Beginn der Wanderung?

19. Ein volkseigener Betrieb soll 256 Sporthemden anfertigen. Für ein Sporthemd werden $3\frac{2}{10}$ m Hemdenstoff benötigt. Wieviel Meter Hemdenstoff müssen für die Anfertigung der Hemden bestellt werden?

20. Bei der Inventur in einer HO-Verkaufsstelle werden die Bestände an Weizenmehl überprüft.
Im Verkaufsraum sind die folgenden Mengen vorhanden:

14 Beutel mit einem Füllgewicht von je $\frac{1}{2}$ kg,

29 Beutel mit einem Füllgewicht von je $\frac{3}{4}$ kg,

37 Beutel mit einem Füllgewicht von je 1 kg und

21 Beutel mit einem Füllgewicht von je $1\frac{1}{2}$ kg.

Im Lagerraum sind außerdem noch $214\frac{1}{4}$ kg Weizenmehl vorrätig.

a) Wie groß ist der Vorrat an Weizenmehl in der HO-Verkaufsstelle?

b) Wieviel Tage reicht der Vorrat an Weizenmehl, wenn täglich im Durchschnitt 47 kg Weizenmehl verkauft werden?

21. Ein Spiralbohrer rückt bei jeder Umdrehung $\frac{1}{4}$ mm tiefer. In einer Minute macht er 480 Umdrehungen. Welche Lochtiefe kann mit dem Bohrer in einer Minute gebohrt werden?

22. Ein Leichtmotorrad verbraucht für 100 km Wegstrecke etwa $2\frac{1}{4}$ l Kraftstoff. Wieviel Liter Kraftstoff hat das Motorrad verbraucht, wenn es eine Gesamtstrecke von 900 km durchfahren hat?

23. Ein Garten hat eine Fläche von 1296 m². Auf einem Drittel der Fläche stehen Obstbäume, auf der Hälfte wird Mais angebaut. Der Rest ist Gemüseland, das in 27 Beete aufgeteilt ist. Wieviel Quadratmeter sind für ein Beet berechnet worden, wenn von den Wegen abgesehen wird?

24. Bei der Obsternte wurden in einem Garten durchschnittlich $2\frac{1}{2}$ kg Stachelbeeren je Strauch und durchschnittlich $3\frac{3}{4}$ kg Johannisbeeren je Strauch geerntet. In dem Garten standen 29 Stachelbeersträucher und 23 Johannisbeersträucher. Wie groß war der Ernteertrag an Stachelbeeren und Johannisbeeren?

25. Von 5 Pflaumenbäumen wurden 274 kg Pflaumen geerntet. Aus 150 kg Pflaumen wurde Pflaumenmus gekocht. Das Gewicht des Muses beträgt $\frac{3}{10}$ des Gewichtes der frischen Pflaumen.
Der Rest der Ernte von den 5 Pflaumenbäumen wurde gedörrt. Beim Dörren verlieren die Pflaumen etwa $\frac{5}{8}$ ihres Gewichtes.
Wieviel Kilogramm Mus und wieviel Kilogramm Backpflaumen wurden aus den geernteten Pflaumen gewonnen?

26. Von Getreide, das als Saatgut anerkannt ist, keimen mindestens $\frac{95}{100}$ der ausgesäten Menge. Auf einem Hektar werden 145 kg anerkannter Saathafer ausgesät. Wieviel Kilogramm werden davon mindestens keimen?

27. Bei der Getreideernte geht ein Teil der Körner verloren. Der Verlust beträgt im Durchschnitt beim Handmähen und Binden $\frac{3}{50}$, beim Mähen mit dem Mähbinder $\frac{3}{200}$, beim Mähen mit dem Mähdrescher $\frac{1}{200}$ des Ernteertrages. Es wird auf einem Feld von $\frac{4}{5}$ ha mit einem durchschnittlichen Ernteertrag von 32 dz je Hektar gerechnet.
Errechne den zu erwartenden Körnerverlust
a) beim Handmähen und Binden,
b) beim Mähen mit dem Mähbinder,
c) beim Mähen mit dem Mähdrescher!

28. Auf einer Grünfutterfläche wird ein Gemisch von $\frac{30}{100}$ Rotklee, $\frac{20}{100}$ Weißklee, $\frac{5}{100}$ Schwedenklee und $\frac{45}{100}$ Raigras ausgesät.

a) Für einen Hektar benötigt man zur Aussaat 21 kg dieses Gemisches. Wieviel Kilogramm von jeder Sorte muß man nehmen, wenn man dieses Gemisch herstellen will?

b) Welche Mengen der einzelnen Sorten braucht man, um ein $3\frac{1}{2}$ ha großes Feld mit Grünfutter zu bestellen?

29. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft lieferte in einem Monat 12 Schweine mit durchschnittlich je $1\frac{1}{2}$ dz Lebendgewicht, im darauffolgenden Monat 23 Schweine mit durchschnittlich je $1\frac{1}{4}$ dz und im dritten Monat 7 Schweine mit durchschnittlich je $1\frac{3}{4}$ dz Lebendgewicht ab. Wieviel Doppelzentner Lebendgewicht an Schweinen lieferte die LPG ab?

VI. Rechnen mit Dezimalbrüchen

16. Multiplikation eines Dezimalbruches mit einer ganzen Zahl

Wir haben bereits gelernt: Man multipliziert Brüche mit ganzen Zahlen, indem man den Zähler des Bruches mit der Zahl multipliziert.

Dezimalbrüche sind auch Brüche, und zwar in besonderer Form geschriebene Zehnerbrüche. Daher können wir aus den Rechenregeln für gemeine Brüche Regeln für das Rechnen mit Dezimalbrüchen herleiten.

1. Beispiel: In einer Verkaufsstelle für Molkereiprodukte sind noch 9 große Flaschen Milch vorhanden. Jede Flasche faßt 0,5 l. Wieviel Liter Milch können noch verkauft werden?

Lösung: 1 Flasche enthält 0,5 l.
9 Flaschen enthalten $0{,}5\,\mathrm{l} \cdot 9$.
0,5 läßt sich als Zehnerbruch schreiben: $0{,}5 = \frac{5}{10}$.

$$\frac{5}{10}\,\mathrm{l} \cdot 9 = \boxed{\frac{5 \cdot 9}{10}}\,\mathrm{l} = \frac{45}{10}\,\mathrm{l} = 4\tfrac{5}{10}\,\mathrm{l} = 4{,}5\,\mathrm{l}$$

Also können noch 4,5 l Milch verkauft werden.

Aus dem eingerahmten Bruchausdruck können wir einen kürzeren Weg für die Lösung der Aufgabe ableiten. Wir rechnen bei der Aufgabe $0{,}5 \cdot 9$ wie mit ganzen Zahlen, also $5 \cdot 9$. Wir bedenken aber dabei, daß wir 5 **Zehntel** mit 9 multiplizieren und als Produkt auch wieder Zehntel erhalten müssen, also 45 **Zehntel**:

$$\frac{45}{10} = 4{,}5.$$

2. Beispiel: In einer Schneiderwerkstatt sollen 7 Blusen angefertigt werden. Man rechnet durchschnittlich für jede Bluse 2,25 m Stoff. Wieviel Meter Stoff werden zur Anfertigung dieser Blusen benötigt?

Lösung: Wir rechnen $2{,}25\,\mathrm{m} \cdot 7$.
Verwandeln wir 2,25 in einen Zehnerbruch, so erhalten wir $2{,}25 = 2\frac{25}{100} = \frac{225}{100}$.

$$\frac{225}{100}\,\mathrm{m} \cdot 7 = \boxed{\frac{225 \cdot 7}{100}}\,\mathrm{m} = \frac{1\,575}{100}\,\mathrm{m} = 15\tfrac{75}{100}\,\mathrm{m} = 15{,}75\,\mathrm{m}$$

Für 7 Blusen werden insgesamt 15,75 m Stoff gebraucht.

Da wir 225 **Hundertstel** mit 7 multipliziert haben, erhalten wir wieder **Hundertstel**.

An dem eingerahmten Bruchausdruck erkennen wir wieder den Weg zu einem kürzeren Rechenverfahren. Wir führen die Multiplikation so aus, daß wir zunächst ohne Berücksichtigung des Kommas rechnen und erst am

Ende der Rechnung beachten, daß wir mit Hundertsteln gerechnet haben. Wir schreiben also die Aufgabe ohne Zehnerbruch:

$$2{,}25\ \text{m} \cdot 7 = 15{,}75\ \text{m}.$$

3. Beispiel: In der Seeschiffahrt rechnet man mit Seemeilen. Einer Seemeile entspricht eine Länge von 1,852 km. Wieviel Kilometer sind 15 Seemeilen?

Lösung: Wir rechnen mit Dezimalbrüchen ohne Umwandlung in Zehnerbrüche.

$$\begin{array}{r} \underline{1{,}852 \cdot 15} \\ 1852 \\ \underline{9260} \\ 27{,}780 \end{array}$$

1,852 km · 15 = 27,780 km
15 Seemeilen entsprechen 27,780 km.

Auch hier müssen wir beachten, daß wir 27780 **Tausendstel** erhalten haben und deshalb von rechts her 3 Dezimalstellen berücksichtigen müssen.

4. Beispiel: 0,0038 · 96

Lösung: Vor dem Rechnen überschlagen wir das Ergebnis. Wir multiplizieren 38 **Zehntausendstel** mit 100 und erhalten 3800 **Zehntausendstel**. Wir müssen also 4 Dezimalstellen berücksichtigen.

$$\begin{array}{r} \underline{0{,}0038 \cdot 96} \\ 342 \\ \underline{228} \\ 0{,}3648 \end{array}$$

Wir stellen fest: **Wenn man Dezimalbrüche mit einer ganzen Zahl multipliziert, läßt man das Komma zunächst unberücksichtigt. Im Produkt muß man jedoch so viel Stellen von rechts nach links abstreichen, wie der Dezimalbruch Stellen hinter dem Komma hat.**

Besonders einfach kann man einen Dezimalbruch mit 10, 100, 1000 usw. multiplizieren.

5. Beispiel: Wir multiplizieren 3,78 a) mit 10, b) mit 100, c) mit 1000.

Lösung: a) 3,78 · 10 = 37,80 b) 3,78 · 100 = 378,00
c) 3,78 · 1000 = 3780,00

Wenn wir die Ergebnisse mit dem Dezimalbruch 3,78 vergleichen, erkennen wir, daß

beim Multiplizieren mit ... 10 das Komma um 1 Stelle,
beim Multiplizieren mit ... 100 das Komma um 2 Stellen,
beim Multiplizieren mit ... 1000 das Komma um 3 Stellen

nach rechts rückt.

Wir sagen: **Man multipliziert Dezimalbrüche mit 10, 100, 1000, ..., indem man das Komma 1, 2, 3, ... Stellen nach rechts rückt.**

Dabei ist zu beachten, daß fehlende Stellen beim Dezimalbruch durch Anhängen von Nullen ersetzt werden (Beispiel 5c).

Löse die Aufgabe 3,78 · 10000 und vergleiche den ersten Faktor mit dem Produkt!

Aufgaben

Übungen für das Kopfrechnen

1. a) 0,9 · 4; 0,7 · 6; 1,2 · 8; 1,7 · 6
b) 1,3 · 7; 2,4 · 4; 0,6 · 18; 0.3 · 32
c) 0,04 · 3; 0,08 · 12; 0,19 · 9; 0,27 · 4
d) 0,009 · 5; 0,018 · 6; 0,025 · 7; 0,125 · 9

2. a) 0,3 · 9 b) 0,06 · 8 c) 0,007 · 9 d) 1,2 · 9
e) 0,18 · 7 f) 0,014 · 9 g) 3,04 · 5 h) 2,003 · 4

Bilde zu a) bis h) je 10 Beispiele!

3. Multipliziere die folgenden Zahlen nacheinander mit 10, 100, 1000 und 10000!

a) 0,783 b) 0,5645 c) 0,35298
d) 0,16 e) 0,4 f) 0,391
g) 16,349 h) 5,827 i) 126,31
k) 91,25803 l) 6,67081 m) 55,328
n) 146,34 o) 19,19 p) 10,3
q) 25,67 r) 48,321 s) 100,001
t) 203,08 u) 0,0476 v) 68,034

4. a) 2,4 · 5 (10, 30, 100, 200, 1000, 2000)
b) 1,6 · 7 (10, 40, 100, 300, 1000, 5000)
c) 0,27 · 3 (10, 40, 100, 400, 1000, 3000)

Schriftliches Rechnen

Vergiß nicht, vor dem Rechnen das Ergebnis zu überschlagen!

5. a) 8,5 · 3 b) 7,9 · 4 c) 9,8 · 7 d) 4,5 · 9
e) 0,63 · 7 f) 0,37 · 9 g) 0,89 · 6 h) 0,57 · 8
i) 0,047 · 9 k) 0,036 · 5 l) 0,088 · 6 m) 0,023 · 7
n) 3,1978 · 7 o) 0,0236 · 9 p) 0,57638 · 9 q) 15,347 · 8

6. a) 0,6 · 37 b) 0,8 · 62 c) 0,4 · 29
d) 0,5 · 75 e) 0,09 · 54 f) 0,12 · 81
g) 0,07 · 93 h) 0,11 · 46 i) 0,003 · 135
k) 0,008 · 68 l) 0,013 · 99 m) 0,07 · 561
n) 0,78 · 90 o) 0,462 · 300 p) 0,085 · 120
q) 0,0234 · 5000 r) 0,026 · 4000 s) 0,0015 · 600

7. a) $13{,}09 \cdot 15$ (36, 420, 1000)
b) $20{,}4 \cdot 5$ (17, 40, 708)
c) $7{,}135 \cdot 6$ (70, 90, 780)
d) $39{,}08 \cdot 3$ (67, 201, 900)
e) $67{,}08 \cdot 5$ (20, 75, 608)
f) $7{,}684 \cdot 5$ (80, 600, 784)
g) $182{,}4 \cdot 29$ (76, 900, 7000)
h) $8{,}932 \cdot 35$ (105, 435, 850)

8. a) 0,48 DM · 7 (10, 300, 467)
b) 6,57 m · 4 (30, 100, 84)
c) 3,907 kg · 9 (40, 500, 190)
d) 1,84 hl · 3 (90, 700, 890)
e) 0,27 a · 6 (70, 800, 705)
f) 2,63 dz · 8 (50, 400, 307)
g) 16,25 a · 4 (60, 200, 135)
h) 28,96 hl · 7 (34, 600, 258)
i) 9,425 m^3 · 5 (90, 600, 457)
k) 7,829 t · 2 (64, 860, 783)

9. a) 38,48 hl · 54 (87, 235)
b) 84,64 DM · 48 (96, 287)
c) 97,01 a · 72 (128, 549)
d) 117,28 dz · 9 (48, 96)
e) 78,625 kg · 95 (234, 657)
f) 18,438 t · 25 (648, 1000)
g) 16,83 m^2 · 84 (186, 500)
h) 78,96 ha · 74 (238, 650)
i) 238,45 DM · 84 (365, 2450)
k) 438,50 m · 75 (87, 576)
l) 58,388 km · 38 (69, 125)
m) 348,875 m^3 · 84 (235, 800)

10. Verwandle vor dem Multiplizieren die folgenden Maßangaben in Dezimalbrüche!

a) 54 a 47 m^2 · 228
b) 69 a 37 m^2 · 675
c) 89 ha 74 a · 369
d) 46 a 85 m^2 · 775
e) 215 ha 29 a · 341
f) 876 ha 39 a · 548
g) 624 ha 45 a · 472
h) 946 ha 58 a · 560
i) 58 ha 78 a · 385
k) 356 hl 24 l · 162
l) 571 hl 5 l · 345
m) 956 hl 42 l · 509
n) 12 m^3 364 dm^3 · 389
o) 16 m^3 168 dm^3 · 264
p) 4 cm^3 39 mm^3 · 835
q) 43 kg 75 g · 92
r) 46 kg 139 g · 84
s) 19 kg 6 g · 405

Anwendungen

11. Berechne den Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen Seiten 6 cm und 4,5 cm lang sind! Prüfe das Ergebnis durch Zeichnen auf Millimeterpapier nach!

12. Berechne den Flächeninhalt der folgenden Rechtecke! Gegeben sind die Seiten:

a) 7 cm und 4,8 cm
b) 17 dm und 9,5 dm
c) 12 m und 8,75 m
d) 20 m und 12,5 m
e) 6 cm und 38 mm (Flächeninhalt in cm^2)
f) 24 dm und 165 cm (Flächeninhalt in dm^2)
g) 5 m und 345 cm (Flächeninhalt in m^2)

13. An einer Straße sind 25 Baustellen geplant. Für eine Baustelle wird eine Fläche von 7,40 a gerechnet. Welche Gesamtfläche soll in dieser Straße bebaut werden?

14. Bauer Schulze rechnet mit einem Kartoffelertrag von 1,95 dz auf einem Ar. Er will 137 a mit Kartoffeln bebauen. Wieviel Doppelzentner Kartoffeln würde er nach seiner Berechnung ernten?

15. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft liefert an einen volkseigenen Erfassungs- und Aufkaufsbetrieb (VEAB) 547,4 dz Roggen, 128,5 dz Weizen, 96,9 dz Braugerste und 309,3 dz Hafer. Die Erfassungspreise betragen je Doppelzentner für Roggen 21,— DM, Weizen 21,50 DM, Braugerste 29,— DM, Hafer 21,— DM.

   a) Berechne die Einnahmen für die einzelnen Getreidesorten!

   b) Welchen Betrag erhält die Genossenschaft insgesamt?

16. Ein Aktivist erzielt durch Anwendung einer neuen Arbeitsweise beim Drehen eine tägliche Einsparung von 3,64 DM. Es arbeiten im Betrieb noch 3 Dreher nach dieser Arbeitsmethode. Wieviel Mark werden insgesamt im Monat (26 Arbeitstage) eingespart?

17. Eine Wandergruppe einer Schule in Berlin plant eine fünftägige Wanderung nach dem Thüringer Wald. Die Kosten für Verpflegung, Unterkunft und Fahrt betragen für jeden Teilnehmer 20,85 DM. Wieviel Mark kassiert der Gruppenleiter, wenn 27 Kinder an der Fahrt teilnehmen?

17. Division eines Dezimalbruches durch eine ganze Zahl

Im 5. Schuljahr lernten wir, Zahlen mit Kommaschreibung durch eine ganze Zahl zu teilen. Dabei verwandelten wir jedesmal den Dividenden in das nächstniedere Maß (zum Beispiel: 3,24 m : 4 = 324 cm : 4). Wir wollen uns nun überlegen, wie wir Dezimalbrüche durch eine ganze Zahl dividieren können, ohne erst umwandeln zu müssen. Wir versuchen wieder, mit Hilfe der Rechenregeln für Zehnerbrüche einen Lösungsweg zu finden.

1. Beispiel: Ein Radfahrer fuhr in 4 Stunden eine Wegstrecke von 58,4 km. Wieviel Kilometer ist er durchschnittlich in einer Stunde gefahren?

Lösung: Wir berechnen 58,4 km : 4.

$$58{,}4\text{ km} : 4 = 58\tfrac{4}{10}\text{ km} : 4 = \tfrac{584}{10}\text{ km} : 4 = \boxed{\tfrac{584:4}{10}}\text{ km} = \tfrac{146}{10}\text{ km}$$
$$= 14{,}6\text{ km}$$

Der Radfahrer legte in einer Stunde durchschnittlich 14,6 km zurück.

Aus dem eingerahmten Bruchausdruck erkennen wir einen kürzeren Lösungsweg. Wir können einen Dezimalbruch durch eine ganze Zahl dividieren, ohne daß wir vorher den Dividenden in einen Zehnerbruch verwandeln. Wir dividieren wie mit ganzen Zahlen.

58,4 km : 4 = 14,6 km

```
58,4 : 4 = 14,6
18
 24
  0
```

Probe: 14,6 · 4 = 58,4

Wir müssen darauf achten, daß wir nicht 584 Ganze, sondern 584 **Zehntel** dividiert haben. Also erhalten wir im Ergebnis wieder **Zehntel**. Aus diesem Grunde setzen wir im Quotienten ein Komma, wenn wir die Einer des Dividenden dividiert haben.

Vergiß nie, ein Komma zu setzen, sobald du im Quotienten die Einer hingeschrieben hast!

Beide Lösungswege führen zu dem gleichen Ergebnis 14,6. Wir brauchen also nicht mehr den umständlichen Weg der Verwandlung in Zehnerbrüche zu wählen. In Zukunft rechnen wir bei der Division eines Dezimalbruches durch eine ganze Zahl wie mit ganzen Zahlen.

2. Beispiel: 0,945 : 7

Lösung: Wir rechnen wieder wie mit ganzen Zahlen. Der Dividend enthält jedoch keine Einer, so daß wir mit der eigentlichen Division erst bei den Zehnteln beginnen können. Deshalb müssen wir im Quotienten für die fehlenden Einer eine Null hinschreiben und sie durch ein Komma von den Zehnteln trennen.

Vor dem Rechnen überschlagen wir das Ergebnis.

900 Tausendstel : 7 $\approx$ 130 Tausendstel

```
0,945 : 7 = 0,135
  24
   35
    0
```

Probe: 0,135 · 7 = 0,945

3. Beispiel: Zwei Freunde wandern in 4 Std. eine Wegstrecke von 17,5 km. Wieviel Kilometer wandern sie durchschnittlich in 1 Std.?

Lösung: Wir berechnen 17,5 km : 4.

Dabei müssen wir feststellen, daß nach der Teilbarkeitsregel 175 nicht durch 4 teilbar ist. Wir können aber auch Dezimalbrüche erweitern. In diesem Fall erweitern wir den Dezimalbruch 17,5 mit 100 und erhalten 17,500, also 17500 **Tausendstel.** 17500 ist durch 4 teilbar, im Ergebnis erhalten wir **Tausendstel.**

$17{,}500 \text{ km} : 4 = 4{,}375 \text{ km}$

Probe: $4{,}375 \cdot 4 = 17{,}500$

$$\begin{array}{l} \underline{17},500 : 4 = 4{,}375 \\ \;\underline{15} \\ \;\;\underline{30} \\ \;\;\;\underline{20} \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

Die beiden Freunde wandern in einer Stunde durchschnittlich 4,375 km.

Wir können die Aufgabe auch rechnen, ohne daß wir den Dezimalbruch vorher erweitern. Jeder Dezimalbruch kann mit 10, 100, 1000, ... erweitert werden, indem so viel Nullen angehängt werden, wie die Erweiterungszahl Nullen hat. Wir brauchen also nicht schon vor dem Dividieren zu bestimmen, mit welcher Zahl erweitert werden soll. Wir erweitern einfach den Dezimalbruch, wenn beim Dividieren noch ein Rest verbleibt, immer wieder mit 10. Die Nullen brauchen wir nicht an den Dezimalbruch anzuhängen, sondern wir können sie in unsere Rechenfahne schreiben (an die mit Pfeilen bezeichneten Stellen):

$$\begin{array}{l} \underline{17},5 : 4 = 4{,}375 \\ \;\underline{15} \\ \;\;\underline{30} \leftarrow \\ \;\;\;\underline{20} \leftarrow \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

Aus den Beispielen erkennen wir: **Man dividiert einen Dezimalbruch durch eine ganze Zahl, indem man den Dezimalbruch wie eine ganze Zahl dividiert. Dabei muß im Quotienten ein Komma gesetzt werden, wenn man die Einer des Dividenden dividiert hat.**

Die Division eines Dezimalbruchs durch 10, 100, 1000, ... ist sehr einfach. Wir wollen uns die Lösung an den folgenden Beispielen überlegen.

4. Beispiel: Dividiere den Dezimalbruch 0,3 a) durch 10, b) durch 100, c) durch 1000! (Überschlage vor dem Rechnen das Ergebnis!)

Lösung: Wir rechnen:

a) $0{,}3 : 10 = 0{,}03$

b) $0{,}3 : 100 = 0{,}003$

c) $0{,}3 : 1000 = 0{,}000\,3$

Wenn wir in dem Beispiel 4 die Quotienten mit den Dividenden der Aufgaben vergleichen, sehen wir, daß

beim Dividieren durch ... 10 das Komma 1 Stelle,
beim Dividieren durch ... 100 das Komma 2 Stellen,
beim Dividieren durch ... 1000 das Komma 3 Stellen

nach links rückt.

Würden wir die Untersuchung fortsetzen und einen Dezimalbruch durch 10000 dividieren, müßten wir das Komma vier Stellen nach links rücken usw. Eine Nachprüfung an anderen beliebigen Beispielen führt zu den gleichen Ergebnissen. Deshalb sagen wir: **Man dividiert Dezimalbrüche durch 10, 100, 1000, ..., indem man das Komma 1, 2, 3, ... Stellen nach links rückt.**

Endliche und unendliche Dezimalbrüche

In den Beispielen 1 bis 3 blieb beim Dividieren kein Rest. Wir erhielten als Ergebnis einen Dezimalbruch mit einer bestimmten Anzahl von Stellen hinter dem Komma. Unsere Rechnung führte zu einem Ende. Ein solcher Dezimalbruch heißt **endlicher Dezimalbruch.** Das ist jedoch nicht immer beim Dividieren der Fall, wie uns das 5. Beispiel zeigen wird.

5. Beispiel: Ein Wanderer will 14,5 km in 3 Stunden zurücklegen. Wieviel Kilometer muß er durchschnittlich in 1 Stunde gehen?

Lösung: Wir berechnen 14,5 km : 3.

$$\begin{array}{l} 14{,}5 : 3 = 4{,}833\,3\ldots \\ \;\;25 \\ \;\;\;\;10 \\ \;\;\;\;\;\;10 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;10 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1 \end{array}$$

Die drei Punkte im Quotienten sollen andeuten, daß wir weiterrechnen können und in den folgenden Stellen des Quotienten immer wieder die gleiche Zahl, nämlich 3, erhalten. Aus der Rechenfahne ist außerdem zu erkennen, daß unsere Rechnung nicht zu einem Ende führt. Begründe das!

Wir nennen einen solchen Dezimalbruch einen **unendlichen Dezimalbruch.**

Im folgenden Kapitel werden wir solche unendlichen Dezimalbrüche, wie sie beim Dividieren als Ergebnis häufig vorkommen, noch genauer kennenlernen.

Wenn wir bei einem unendlichen Dezimalbruch zu einem abgeschlossenen Ergebnis gelangen wollen, müssen wir runden. Damit wir wissen, ob wir auf- oder abrunden müssen, dürfen wir die Division in solchen Fällen erst abbrechen, wenn wir eine Stelle mehr berechnet haben, als wir für das gerundete Ergebnis brauchen.

Da wir beim Rechnen mit Kilometern gewöhnlich nur 3 Stellen hinter dem Komma benötigen, runden wir auch im Ergebnis des Beispiels 5 auf Tausendstel. Die nächsten Stellen lassen wir hier unberücksichtigt. Beim Rechnen mit Kilometern haben $\frac{3}{10000}$, $\frac{3}{100000}$ usw. wegen ihrer Kleinheit keine Bedeutung für das Ergebnis.

Wir schreiben nun: $14{,}5\text{ km} : 3 \approx 4{,}833\text{ km}$.

Es müssen in einer Stunde durchschnittlich rund 4,833 km zurückgelegt werden.

Da der Quotient gerundet, also nur angenähert richtig ist, erhalten wir bei der Probe im Ergebnis auch nicht genau den Dividenden.

$$\text{Probe: } 4{,}833 \cdot 3 = 14{,}499$$

Wir sehen, daß die Abweichung vom genauen Ergebnis nur sehr klein ist.

6. Beispiel: Bauer Schulze hat auf 3 ha insgesamt 68 dz Weizen geerntet. Wie groß ist der durchschnittliche Ertrag von 1 ha?

Lösung: Wir rechnen: 68 dz : 3.

68 ist nicht durch 3 teilbar. Wir können aber, wie wir im 5. Schuljahr gelernt haben, jede ganze Zahl als Dezimalbruch auffassen. Wir rechnen deshalb entsprechend Beispiel 5:

$$\begin{array}{l} \underline{6}8 : 3 = 22{,}666\ldots \\ \;\,\underline{8} \\ \;\,\underline{20} \\ \;\;\;\underline{20} \\ \;\;\;\;\;\underline{20} \\ \;\;\;\;\;\;\;2 \end{array}$$

Wir runden bei Doppelzentnern das Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma, und zwar müssen wir in diesem Beispiel aufrunden. Gib die Erklärung dafür!

$$68\text{ dz} : 3 \approx 22{,}67\text{ dz} \qquad \text{Probe: } 22{,}67 \cdot 3 = 68{,}01$$

Der durchschnittliche Ertrag je Hektar beträgt rund 22,67 dz.

Wir stellen fest:

Im 6. Beispiel ist der Dividend 68 eine ganze Zahl. Er läßt sich durch den Divisor 3 nicht teilen. Er kann aber als Dezimalbruch mit Nullen in den Stellen hinter dem Komma aufgefaßt werden. Das Dividieren wird dann wie bei Dezimalbrüchen durchgeführt.

Zusammenfassung:

Als Ergebnis bei der Division kann man einen endlichen oder einen unendlichen Dezimalbruch erhalten. Erhält man im Quotienten mehr Stellen als nötig, so muß man das Ergebnis runden. Das ist besonders bei unendlichen Dezimalbrüchen erforderlich. Die Rundungsregeln für Ganze gelten entsprechend auch für Dezimalbrüche:

Man rundet den Dezimalbruch ab, wenn die Stellenziffer nach der zu rundenden Stelle eine 1, 2, 3 oder 4 ist.

Man rundet den Dezimalbruch auf, wenn die nächste Stellenziffer nach der zu rundenden Stelle eine 5, 6, 7, 8 oder 9 ist.

Man rundet meist
auf eine Stelle hinter dem Komma beim Rechnen mit mm, cm, dm,
auf zwei Stellen hinter dem Komma beim Rechnen mit DM, m, cm^2, dm^2, m^2, a, ha, km^2, dz, hl,
auf drei Stellen hinter dem Komma beim Rechnen mit km, kg, t, cm^3, dm^3, m^3, l.

Aufgaben

Übungen für das Kopfrechnen

1. a) 0,8 : 2 b) 2,4 : 2 c) 0,08 : 2 d) 0,018 : 2
e) 72 : 12 f) 7,2 : 12 g) 0,72 : 12 h) 0,072 : 12

Bilde zu a) bis h) selbst je 3 andere Aufgaben mit Zahlen der Einmaleinsfolgen!

2. a) 0,4 : 2 b) 8,1 : 3 c) 0,48 : 4
d) 7,5 : 5 e) 0,78 : 6 f) 0,98 : 7
g) 10,4 : 8 h) 11,7 : 9 i) 14,4 : 12
k) 1,68 : 12 l) 0,76 : 19 m) 0,135 : 15
n) 1,12 : 4 o) 1,26 : 14 p) 0,144 : 16
q) 0,078 : 6 r) 0,112 : 7 s) 0,084 : 12
t) 0,136 : 17 u) 0,168 : 14 v) 2,38 : 14

3. a) 36 : 10, 100, 1000 b) 3,6 : 10, 100, 1000
c) 0,36 : 10, 100, 1000 d) 0,036 : 10, 100, 1000

Bilde zu a) bis d) selbst je 5 Aufgaben!

Schriftliches Rechnen

4. a) 9,1 : 13 b) 0,95 : 19 c) 1,35 : 15 d) 2,88 : 12
e) 12,8 : 16 f) 0,225 : 25 g) 0,64 : 16 h) 1,17 : 13
i) 1,54 : 14 k) 0,084 : 12 l) 13,6 : 17 m) 0,216 : 24
n) 1,69 : 13 o) 4,65 : 15 p) 5,61 : 11 q) 0,294 : 14

5. **a)** 0,28 : 4 **b)** 2,36 : 4 **c)** 5,792 : 8
d) 8,316 : 4 **e)** 5,895 : 9 **f)** 1,652 : 7
g) 4,0579 : 7 **h)** 0,059427 : 9 **i)** 6,3 : 5
k) 7,246 : 5 **l)** 0,5924 : 5 **m)** 0,6258 : 5
n) 14,6 : 4 **o)** 1,35 : 4 **p)** 9,504 : 3
q) 0,18764 : 4 **r)** 91,25 : 8 **s)** 57,123 : 8
t) 4,9567 : 8 **u)** 0,88025 : 8 **v)** 36,00376 : 6

6. Dividiere die folgenden Zahlen durch 10 (100, 1000, 10000)!

a) 5734,5 **b)** 930,21 **c)** 684,34 **d)** 12487,6
e) 90345,38 **f)** 82163,459 **g)** 13,4 **h)** 16,17
i) 28,537 **k)** 6,2 **l)** 9,173 **m)** 0,3
n) 0,18 **o)** 0,613 **p)** 0,004 **q)** 0,103
r) 0,000156 **s)** 0,0703 **t)** 0,145 **u)** 2,076

7. **a)** 73 kg : 2 **b)** 49,374 t : 3 **c)** 375,68 DM : 4
d) 3498 DM : 5 **e)** 789,36 DM : 6 **f)** 660,24 ha : 7
g) 53,28 dz : 8 **h)** 277,830 kg : 9 **i)** 478,94 hl : 7
k) 940,527 m^3 : 9 **l)** 4,062 t : 3 **m)** 345,68 a : 8

8. **a)** 3,468 kg : 20 **b)** 42,354 kg : 90 **c)** 1,260 kg : 70
d) 25,672 kg : 80 **e)** 1,026 t : 30 **f)** 3,978 t : 60
g) 57,942 t : 90 **h)** 39 t : 40 **i)** 52 a : 400
k) 405 a : 900 **l)** 648 a : 800 **m)** 364 a : 700
n) 29 m^3 : 4000 **o)** 57 m^3 : 6000 **p)** 108 m^3 : 9000
q) 51,569 cm^3 : 7000 **r)** 26,478 cm^3 : 3000 **s)** 93,256 cm^3 : 8000

9. **a)** 112,68 : 18 **b)** 40,32 : 24 **c)** 6,507 : 27
d) 91,35 : 29 **e)** 76,88 : 31 **f)** 171,99 : 39
g) 12,138 : 42 **h)** 2,1168 : 48 **i)** 6,2 : 25
k) 9,5 : 16 **l)** 38,24 : 32 **m)** 57,168 : 64
n) 105,3 : 45 **o)** 8,61 : 56 **p)** 248,16 : 75
q) 73 : 25 **r)** 373 : 25 **s)** 301 : 16
t) 17 : 64 **u)** 2914 : 50 **v)** 8056,3 : 35

10. **a)** 73,35 : 225 **b)** 305,36 : 347 **c)** 983,5 : 562
d) 1066,8 : 635 **e)** 575,12 : 728 **f)** 17,3272 : 968
g) 1 : 125 **h)** 3 : 125 **i)** 111 : 625
k) 4,05 : 225 **l)** 15,974 : 326 **m)** 49,47 : 51

11. **a)** 219,45 m : 57
b) 409,92 DM : 42
c) 246,895 kg : 67
d) 314,57 dz : 83
e) 241,08 hl : 84
f) 1215,95 DM : 83
g) 349,848 kg : 86
h) 844,87 dz : 97
i) 262,35 hl : 53
k) 287,28 DM : 38
l) 630,176 kg : 94
m) 711,56 dz : 94
n) 367,664 t : 176
o) 6538,68 ha : 738
p) 353,925 t : 143
q) 317,184 m^3 : 354
r) 182,646 m^3 : 417
s) 1310,5312 m^2 : 352
t) 15895,76 ha : 652
u) 7494,16 ha : 829
v) 1700,11 ha : 197
w) 2309,624 m^3 : 536
x) 447,2832 m^2 : 182
y) 1358,1566 m^2 : 479

12. Dividiere 12498,935 kg durch **a)** 3, **b)** 74, **c)** 68, **d)** 187, **e)** 830, **f)** 274!

13. **a)** 722,436 km : 156
b) 2143,38 ha : 417
c) 8130 kg : 120
d) 11 t : 120
e) 87216 DM : 600
f) 531,042 t : 749
g) 7680 ha : 170
h) 5006,391 kg : 137
i) 6537,84 hl : 284
k) 974,85 DM : 785
l) 33 t : 220
m) 7125,306 t : 491
n) 592,2 t : 140
o) 2244,48 a : 672
p) 45 m^3 : 250

14. Verwandle vor dem Dividieren die folgenden Maßangaben in Dezimalbrüche!

a) 674 m 88 cm : 76
b) 726 km 750 m : 85
c) 638 km 166 m : 94
d) 41 a 86 m^2 : 13
e) 63 ha 84 a : 19
f) 504 a 75 m^2 : 75
g) 1870 hl 8 l : 384
h) 654 hl 15 l : 89
i) 490 hl 86 l : 54
k) 172 t 95 kg : 231
l) 877 kg 713 g : 307
m) 638 t 166 kg : 94
n) 250 m^3 299 dm^3 : 137
o) 169 dm^3 848 cm^3 : 126
p) 628 cm^3 788 mm^3 : 732

Anwendungen

15. Wenn ich eine Zahl mit 7 multipliziere und zum Ergebnis noch 11,45 addiere, erhalte ich 100. Nenne die Zahl!

16. Das Siebenfache einer Zahl ist um 16,3 größer als 197,2.

17. Von welcher Zahl ist das Dreifache um 18,9 kleiner als 60?

18. Welche Zahl ergibt durch 8 dividiert 4,675?

19. Wenn ich eine Zahl durch 5 und das Ergebnis durch 3 dividiere, erhalte ich 0,58. Wie heißt die Zahl?

20. Unter den Schülern der Klasse 6a sind gute Springer. In der letzten Stunde konnten die sieben besten Springer unter den Jungen die folgenden Leistungen im Weitsprung erzielen: 3,32 m, 3,90 m, 3,75 m, 3,64 m, 3,42 m, 3,53 m, 3,46 m. Berechne die durchschnittliche Leistung dieser sieben Springer.

21. Beim erwachsenen Menschen beträgt ungefähr

die Länge des Kopfes $\frac{1}{8}$, die Länge des Gesichts $\frac{1}{10}$,
die Länge des Oberkörpers $\frac{1}{3}$, die Länge des Unterarms $\frac{1}{4}$,
die Brustweite $\frac{1}{6}$, die Schulterbreite $\frac{1}{4}$,
die Handlänge $\frac{1}{10}$, die Fußlänge $\frac{1}{6}$

der Gesamtlänge.

a) Berechne nach diesen Angaben die Größe der einzelnen Körperteile eines Menschen, der 1,80 m groß ist!

b) Miß deine Größe, berechne die einzelnen Körperteile und vergleiche deine rechnerischen Ergebnisse mit den wirklichen Größen!

22. In der letzten Turnstunde erreichten neun Mädchen der Klasse 6b im Schlagballweitwurf die folgenden Leistungen: 31,65 m, 33,50 m, 26,95 m, 30,80 m, 27,80 m, 32,20 m, 29,50 m, 31,25 m, 28,30 m. Berechne die durchschnittliche Leistung dieser Mädchen im Schlagballweitwurf!

23. Bilde über sportliche Leistungen in deiner Klasse zwei Aufgaben, die den Aufgaben 20 und 22 entsprechen!

24. Ein Rennpferd legte im Trab eine Strecke von 2,100 km in 175 Sek. zurück. Wieviel Meter legte es durchschnittlich in einer Sekunde zurück?

25. Ein Leichtmotorrad fuhr eine Strecke von 78,5 km in 109 Min. Wieviel Meter wurden durchschnittlich in einer Minute zurückgelegt? Runde!

26. Im Ferienlager werden die Kinder gemessen und gewogen. 10 Schüler einer Gruppe haben die folgenden Größen: 1,32 m, 1,35 m, 1,40 m, 1,38 m, 1,39 m, 1,41 m, 1,40 m, 1,42 m, 1,40 m, und 1,43 m. Welche durchschnittliche Größe haben die 10 Schüler der Gruppe?

27. In einem Haushalt wurden für den Verbrauch an elektrischem Strom im vergangenen Jahr die folgenden Beträge gezahlt:

Januar ..	12,48 DM,	Februar .	10,72 DM,	März ...	10,64 DM,
April ...	9,20 DM,	Mai	8,16 DM,	Juni	6,88 DM,
Juli	4,14 DM,	August ..	7,28 DM,	September	10,96 DM,
Oktober .	11,92 DM,	November	13,76 DM,	Dezember	15,36 DM.

a) Berechne den Monatsdurchschnitt!

b) Vergleiche den Durchschnitt der Monate April bis September mit dem Durchschnitt der übrigen 6 Monate!

28. Frau Sperber gab an sechs aufeinanderfolgenden Wochentagen beim Einkauf von Lebensmitteln die folgenden Beträge aus: 3,80 DM, 6,30 DM, 4,45 DM, 5,60 DM, 4,95 DM, 8,62 DM. Wieviel Mark hat sie im Durchschnitt täglich für Lebensmittel verbraucht?

29. An eine Markthalle wurden an sechs aufeinanderfolgenden Wochentagen 18,45 dz, 56,75 dz, 39,85 dz, 21,38 dz, 64,75 dz und 67,32 dz Gemüse geliefert. Wieviel Doppelzentner betrug die durchschnittliche Belieferung am Tage?

30. Zwei HO-Verkaufsstellen hatten in der ersten Dezemberwoche an den einzelnen Tagen folgende Umsätze zu verzeichnen:

Verkaufsstelle I:	4548,67 DM,	5529,32 DM,	4952,76 DM,
	5149,24 DM,	5388,28 DM,	6213,37 DM;
Verkaufsstelle II:	3219,32 DM,	4648,56 DM,	5579,82 DM,
	5286,37 DM,	4473,59 DM,	5992,78 DM.

a) Berechne den durchschnittlichen Tagesumsatz jeder Verkaufsstelle!

b) Vergleiche die Wochenumsätze beider Verkaufsstellen miteinander!

31. In einem volkseigenen Gut wurden auf einem Feld von 7 ha Größe 125,8 dz Roggen, auf einem Feld von 12 ha Größe 295,6 dz Weizen geerntet. Errechne die durchschnittlichen Erträge an Roggen und Weizen auf einem Hektar!

32. Eine Möbelfabrik lieferte im I. Quartal 110 Schlafzimmer, im II. Quartal 132 Schlafzimmer, im III. Quartal 105 Schlafzimmer und im IV. Quartal 140 Schlafzimmer an die Großhandelskontore aus. Wieviel Schlafzimmer wurden durchschnittlich im Quartal von der Möbelfabrik geliefert?

18. Umwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt

Wir haben wiederholt Zehnerbrüche als Dezimalbrüche und umgekehrt Dezimalbrüche als Zehnerbrüche geschrieben. Nun wollen wir untersuchen, ob sich auch andere Brüche als Dezimalbrüche schreiben lassen.

1. Beispiel: Schreibe $\frac{3}{8}$ als Dezimalbruch!

Lösung: Wir haben im 5. Schuljahr gelernt, daß $\frac{3}{8}$ das Ergebnis einer Divisionsaufgabe sein kann. Sie lautet $3:8$. Wir können nun aus dem Bruch wieder die Divisionsaufgabe bilden und rechnen:

$$\begin{array}{l} 3 : 8 = 0{,}375 \\ 30 \\ \;\;60 \\ \;\;\;\;40 \\ \;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

Der Bruch $\frac{3}{8}$ ergibt als Dezimalbruch geschrieben 0,375.

Achte darauf, daß wir ein Komma setzen müssen, wenn die Einer des Dividenden dividiert worden sind und noch ein Rest verbleibt! (3 Einer dividiert durch 8 ergeben in diesem Beispiel 0 Einer Rest 3.)

Wir haben also einen Weg gefunden, wie wir jeden gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln können.

2. Beispiel: Verwandle $\frac{4}{9}$ in einen Dezimalbruch!

Lösung: Wir rechnen

$$\begin{array}{l} 4 : 9 = 0{,}44\ldots \\ 40 \\ \;\;40 \\ \;\;\;\;4 \end{array}$$

3. Beispiel: Verwandle $\frac{5}{12}$ in einen Dezimalbruch!

Lösung:

$$\begin{array}{l} 5 : 12 = 0{,}4166\ldots \\ 50 \\ \;\;20 \\ \;\;\;\;80 \\ \;\;\;\;\;\;80 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;8 \end{array}$$

4. Beispiel: Verwandle $\frac{7}{55}$ in einen Dezimalbruch!

Lösung:

$$\begin{array}{l} 7 : 55 = 0{,}12727\ldots \\ 70 \\ 150 \\ \;\;400 \\ \;\;\;\;150 \\ \;\;\;\;\;\;400 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;15 \end{array}$$

Wenn wir die 4 Beispiele miteinander vergleichen, sehen wir, daß das erste Beispiel zu einem endlichen Dezimalbruch führt. Die letzten drei Beispiele ergeben unendliche Dezimalbrüche.

In den Beispielen 2 bis 4 kehren im Ergebnis bestimmte Ziffern oder Gruppen von Ziffern immer wieder. Man nennt sie **Periode.** Nenne die Periode in jedem der Beispiele 2 bis 4!

Im 3. und 4. Beispiel stehen vor der Periode Ziffern, die nicht wiederkehren: im 3. Beispiel 41, im 4. Beispiel 1. Man nennt diese Ziffern, die nicht zur Periode gehören, **Vorziffern.**

Für Dezimalbrüche, die eine Periode enthalten, gibt es eine abgekürzte Schreibweise. Man setzt über die Ziffern, die eine Periode bilden, einen waagerechten Strich.

Beispiele:	$0{,}44\ldots$	schreibt man $0{,}\overline{4}$	(gesprochen: Null-Komma-Vier; Periode Vier)
	$0{,}4166\ldots$	schreibt man $0{,}41\overline{6}$	(gesprochen: Null-Komma-Vier-Eins-Sechs; Periode Sechs)
	$0{,}12727\ldots$	schreibt man $0{,}1\overline{27}$	(gesprochen: Null-Komma-Eins-Zwei-Sieben; Periode Zwei-Sieben)
	$0{,}5732121\ldots$	schreibt man $0{,}573\overline{21}$	(Lies entsprechend den vorhergehenden Beispielen!)
	$0{,}32534534\ldots$	schreibt man $0{,}325\overline{34}$	(Lies entsprechend!)

Wir unterscheiden endliche und unendliche Dezimalbrüche. Von den unendlichen Dezimalbrüchen haben wir die periodischen kennengelernt. Das sind solche Dezimalbrüche, bei denen ein und dieselbe Ziffernfolge immer wiederkehrt. Wir teilen die periodischen Dezimalbrüche in **rein-periodische** und **gemischt-periodische** Dezimalbrüche ein. Rein-periodische Dezimalbrüche sind solche, bei denen die Periode sogleich hinter dem Komma beginnt. Rein-periodische Dezimalbrüche haben keine Vorziffern.

Erkläre selbst, was man unter einem gemischt-periodischen Dezimalbruch versteht!

Untersuchen wir nun noch die Umwandlung von endlichen Dezimalbrüchen in gemeine Brüche!

5. Beispiel: a) $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ b) $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ c) $0{,}375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$

Da die Stellen hinter dem Komma ohne weiteres den Nenner 10, 100, 1000 usw. erkennen lassen, brauchen wir die Dezimalbrüche nur als Zehnerbrüche zu schreiben. Der Zehnerbruch wird dann, soweit es möglich ist, gekürzt.

Bei unendlichen Dezimalbrüchen ist die Verwandlung in gemeine Brüche schwieriger. Deshalb werden sie in diesem Schuljahr nicht behandelt.

Aufgaben

1. Verwandle die folgenden gemeinen Brüche in Dezimalbrüche!

a) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$

b) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{17}{25}$, $\frac{23}{50}$, $\frac{39}{50}$

c) $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{17}{40}$, $\frac{73}{125}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{9}{32}$, $\frac{11}{80}$, $\frac{17}{80}$, $\frac{9}{16}$

d) $\frac{5}{16}$, $\frac{11}{32}$, $\frac{37}{64}$, $\frac{11}{128}$, $\frac{99}{125}$, $\frac{23}{80}$, $\frac{81}{625}$, $\frac{19}{1600}$, $\frac{23}{40}$, $\frac{11}{256}$, $\frac{3}{1250}$, $\frac{9}{160}$

2. Verwandle die folgenden gemeinen Brüche in Dezimalbrüche! Rechne bis zur Wiederkehr der Periode!

a) $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{4}{19}$

b) $\frac{5}{27}$, $\frac{22}{27}$, $\frac{17}{33}$, $\frac{7}{33}$, $\frac{9}{37}$, $\frac{13}{37}$, $\frac{12}{41}$, $\frac{21}{41}$, $\frac{25}{41}$, $\frac{27}{37}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{5}{21}$

3. Verwandle die folgenden Brüche in einen Dezimalbruch! Runde auf Hunderttausendstel!

a) $\frac{5}{21}$ b) $\frac{13}{21}$ c) $\frac{17}{23}$ d) $\frac{22}{23}$ e) $\frac{12}{29}$ f) $\frac{18}{31}$

g) $\frac{12}{39}$ h) $\frac{25}{39}$ i) $\frac{19}{27}$ k) $\frac{8}{69}$ l) $\frac{5}{13}$ m) $\frac{9}{14}$

n) $\frac{16}{21}$ o) $\frac{7}{39}$ p) $\frac{9}{13}$ q) $\frac{25}{29}$ r) $\frac{30}{31}$ s) $\frac{9}{17}$

t) $\frac{4}{7}$ u) $\frac{20}{21}$ v) $\frac{17}{23}$ w) $\frac{19}{33}$ x) $\frac{9}{49}$ y) $\frac{35}{121}$

4. Verwandle die folgenden Brüche in einen Dezimalbruch! Brich ab bei der Wiederkehr der Periode!

a) $\frac{7}{18}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{17}{18}$ b) $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{12}$

c) $\frac{1}{30}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{17}{30}$ d) $\frac{2}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{13}{15}$

e) $\frac{5}{22}$, $\frac{13}{22}$, $\frac{17}{22}$, $\frac{8}{33}$, $\frac{25}{33}$ f) $\frac{5}{36}$, $\frac{13}{36}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{19}{24}$, $\frac{7}{48}$

g) $\frac{13}{60}$, $\frac{29}{60}$, $\frac{37}{60}$, $\frac{31}{90}$, $\frac{47}{90}$, $\frac{67}{90}$, $\frac{53}{60}$, $\frac{49}{90}$

h) $\frac{2}{37}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{5}{37}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{11}{37}$, $\frac{17}{28}$, $\frac{9}{28}$, $\frac{9}{14}$

5. Verwandle die folgenden Brüche in einen Dezimalbruch und runde der Benennung entsprechend!

a) $\frac{1}{3}$ DM	b) $\frac{1}{12}$ DM	c) $\frac{1}{6}$ DM	d) $\frac{5}{6}$ DM
e) $\frac{7}{11}$ m^2	f) $\frac{3}{7}$ m	g) $\frac{3}{13}$ m^3	h) $\frac{23}{24}$ km
i) $\frac{37}{45}$ t	k) $\frac{61}{72}$ ha	l) $\frac{17}{18}$ a	m) $\frac{13}{15}$ kg

6. Schreibe die folgenden Dezimalbrüche als gemeine Brüche und kürze, soweit es möglich ist!

a)	0,50	0,25	0,75	0,4	0,6	0,35	0,48
	0,05	0,65	0,64	0,56	0,84	0,45	0,32
b)	0,125	0,675	0,18	0,655	0,4055	0,936	
	0,864	0,175	0,625	0,068	0,005	0,3754	
c)	0,1275	0,245	0,65	0,984	0,464	0,1252	
	0,288	0,324	0,52	0,084	0,375	0,4080	
d)	0,4285	0,0312	0,8525	0,0064	0,9720	0,48275	
	0,945	0,0538	0,605	0,4852	0,32675	0,0926	

19. Multiplikation eines Dezimalbruches mit einem Dezimalbruch

Weil Dezimalbrüche nur Brüche von besonderer Form sind, lassen sie sich auch wie Brüche multiplizieren.

1. Beispiel: Ein Rechteck ist 4,6 cm lang und 2,5 cm breit. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

Lösung durch Zeichnen: Wir zeichnen das Rechteck auf Millimeterpapier und zählen die Millimeter- und Zentimeterquadrate aus (Abb. 11). Das Rechteck mit den Seitenlängen 4,6 cm und 2,5 cm hat einen Flächeninhalt von 1150 mm^2 oder 11,50 cm^2; denn 1150 mm^2 = 11,50 cm^2.

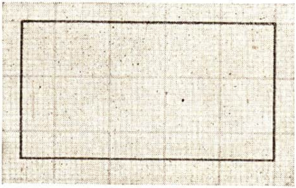


Abb. 11

Lösung durch Rechnen:

Vor dem Rechnen überschlagen wir das Ergebnis:

$4{,}6 \approx 5$	Das Ergebnis muß größer sein als $5 \cdot 2 = 10$,
$2{,}5 > 2$, aber $2{,}5 < 3$	aber kleiner als $5 \cdot 3 = 15$.

Wir rechnen $4{,}6 \cdot 2{,}5\,\text{cm}^2$. Zunächst verwandeln wir die Dezimalbrüche in Zehnerbrüche. Mit ihnen rechnen wir wie mit gemeinen Brüchen.

$$4{,}6 = 4\tfrac{6}{10} \qquad 2{,}5 = 2\tfrac{5}{10}$$

$$4\tfrac{6}{10} \cdot 2\tfrac{5}{10} = \tfrac{46}{10} \cdot \tfrac{25}{10} = \boxed{\tfrac{46 \cdot 25}{10 \cdot 10}} = \tfrac{46 \cdot 25}{100} = \tfrac{1150}{100} = 11{,}50$$

Das Rechteck hat einen Flächeninhalt von $11{,}50\,\text{cm}^2$.

Der eingerahmte Bruchausdruck zeigt uns den Weg, wie wir zwei Dezimalbrüche miteinander multiplizieren können, ohne sie erst in gemeine Brüche verwandeln zu müssen.

Aus dem Zähler des eingerahmten Bruchausdrucks erkennen wir, daß wir die Dezimalbrüche wie ganze Zahlen multiplizieren können und 1150 erhalten. Wir müssen jedoch beachten, daß es sich um Hundertstel handelt (das erkennen wir aus der Multiplikation der Nenner). Wir haben also 1150 durch 100 zu dividieren. Die Division führen wir aus, indem wir von rechts nach links zwei Dezimalstellen abstreichen.

$$\begin{array}{r} 4{,}6 \cdot 2{,}5 \\ \hline 92 \\ 230 \\ \hline 11{,}50 \end{array}$$

2. Beispiel: 1 dz Kartoffeln kostet 9,80 DM. Wie teuer sind 2,5 dz?

Lösung: Nachdem wir die Dezimalbrüche in Zehnerbrüche verwandelt haben, rechnen wir wie mit gemeinen Brüchen:

1 dz kostet $9\tfrac{80}{100}$ DM,

$2\tfrac{5}{10}$ dz kosten $9\tfrac{80}{100}\,\text{DM} \cdot 2\tfrac{5}{10} = \tfrac{980}{100} \cdot \tfrac{25}{10}\,\text{DM} = \boxed{\tfrac{980 \cdot 25}{100 \cdot 10}}\,\text{DM}$

$= \tfrac{24\,500}{1000}\,\text{DM} = 24{,}500\,\text{DM}.$

2,5 dz Kartoffeln kosten 24,50 DM.

Aus dem eingerahmten Bruchausdruck erkennen wir wieder den kürzeren Lösungsweg.

Überschlagsrechnen:

$9{,}80 \approx 10$	Da 9,80 etwas kleiner ist als 10, muß das Ergebnis
$2{,}5 \cdot 10 = 25$	etwas kleiner sein als 25.

Wir rechnen 9,80 DM · 2,5 und multiplizieren ohne Rücksicht auf das Komma 980 mit 25.

$$\begin{array}{r} \underline{9{,}80 \cdot 2{,}5} \\ 19\ 60 \\ \underline{4\ 900} \\ 24{,}500 \end{array}$$

Im Ergebnis streichen wir von rechts nach links drei Dezimalstellen ab, da wir Hundertstel mit Zehntel multiplizieren und Tausendstel erhalten haben. Wir runden den Dezimalbruch im Produkt auf die erforderliche Stellenzahl und erhalten 24,50.

3. Beispiel: 1 m Stoff kostet 2,45 DM. Wieviel Mark kosten 0,75 m?

Lösung: 0,75 m kosten $\frac{75}{100}$ von 2,45 DM.

Wir haben gelernt, daß wir den Bruchteil eines Bruches durch Multiplikation errechnen.

Wir rechnen also 2,45 DM · 0,75 und multiplizieren wieder ohne Rücksicht auf das Komma.

$$\begin{array}{r} \underline{2{,}45 \cdot 0{,}75} \\ 1\ 715 \\ \underline{1225} \\ 1{,}8375 \end{array}$$

Im Ergebnis müssen wir von rechts nach links vier Dezimalstellen abstreichen; denn wir haben Hundertstel mit Hundertsteln multipliziert und dadurch **Zehntausendstel** erhalten.

Die Maßeinheit Mark (DM) erfordert nur zwei Stellen nach dem Komma. Infolgedessen runden wir das Ergebnis.

$$1{,}8375 \approx 1{,}84$$

Ergebnis: 0,75 m kosten 1,84 DM.

Es ergibt sich die allgemeine Regel: **Man multipliziert zwei Dezimalbrüche miteinander, indem man sie wie ganze Zahlen multipliziert. Dann streicht man im Ergebnis so viel Dezimalstellen von rechts nach links ab, wie die Faktoren zusammen Stellen hinter dem Komma haben.**

Die gleiche Regel gilt auch für die Multiplikation von Dezimalbrüchen mit ganzen Zahlen. Weise das an Beispielen nach!

Aufgaben

Übungen für das Kopfrechnen

1. a) 0,1 · 0,1
0,2 · 0,2
bis
0,9 · 0,9

b) 0,1 · 0,01
0,2 · 0,02
bis
0,9 · 0,09

c) 0,01 · 0,01
0,02 · 0,02
bis
0,09 · 0,09

d) 0,1 · 0,17
0,2 · 0,17
bis
0,9 · 0,17

2. a) 0,4 · 0,2
0,7 · 0,5
1,3 · 0,8
2,6 · 0,6

b) 0,03 · 0,07
0,08 · 0,3
0,06 · 1,5
0,05 · 2,1

c) 0,27 · 0,3
0,18 · 0,5
0,17 · 0,9
1,02 · 0,9

d) 0,02 · 0,03
0,09 · 0,07
0,15 · 0,05
0,16 · 0,12

3.

	A	B	C	D	E	F
I	0,3	0,8	0,9	0,5	0,4	0,6
II	0,08	0,02	0,04	0,07	0,09	0,05
III	0,7	1,3	1,4	2,5	1,8	1,5
IV	0,02	0,19	1,16	1,07	1,12	0,11

Bilde selbst mit den Dezimalbrüchen der Tabelle Multiplikationsaufgaben mit zwei Faktoren! Zum Beispiel:

a) Multipliziere jeden Dezimalbruch der Zeilen I bis IV mit dem ersten Dezimalbruch der betreffenden Zeile!

b) Multipliziere jeden Dezimalbruch der Spalten A bis F mit dem obersten Dezimalbruch der betreffenden Spalte!

c) Multipliziere die Dezimalbrüche der Zeile IV mit dem zweiten Dezimalbruch der Zeile I!

4. a) 0,8 · 0,7 · 0,3 **b)** 1,2 · 0,3 · 4 **c)** 0,7 · 1,9 · 0,2

5. Bilde selbst 10 Aufgaben mit 3 Faktoren!

Schriftliches Rechnen

6. Beispiel: 0,6 · 24 = 24 · 0,6

a) 37 · 0,6 **b)** 62 · 0,8 **c)** 29 · 0,4
d) 75 · 0,5 **e)** 54 · 0,09 **f)** 81 · 0,12
g) 93 · 0,07 **h)** 46 · 0,11 **i)** 135 · 0,003
k) 68 · 0,008 **l)** 99 · 0,015 **m)** 561 · 0,002
n) 320 · 0,25 **o)** 1500 · 0,011 **p)** 9750 · 0,2
q) 5000 · 0,71 **r)** 2300 · 0,04 **s)** 6000 · 0,84

7. a) $0{,}9 \cdot 0{,}6$ b) $0{,}8 \cdot 0{,}12$ c) $0{,}7 \cdot 0{,}09$
d) $0{,}18 \cdot 0{,}4$ e) $0{,}6 \cdot 0{,}024$ f) $0{,}045 \cdot 0{,}07$
g) $0{,}025 \cdot 0{,}005$ h) $0{,}0135 \cdot 0{,}06$ i) $3{,}5 \cdot 0{,}4$
k) $0{,}9 \cdot 4{,}8$ l) $8{,}7 \cdot 0{,}04$ m) $0{,}09 \cdot 9{,}6$
n) $0{,}09 \cdot 1{,}8$ o) $7{,}5 \cdot 0{,}08$ p) $4{,}1 \cdot 0{,}005$
q) $0{,}008 \cdot 5{,}8$ r) $9{,}3 \cdot 0{,}52$ s) $8{,}7 \cdot 4{,}9$

8. a) $0{,}18 \cdot 0{,}6$ b) $0{,}9 \cdot 0{,}25$ c) $0{,}7 \cdot 0{,}95$
d) $0{,}58 \cdot 0{,}8$ e) $0{,}5 \cdot 0{,}096$ f) $0{,}4 \cdot 0{,}037$
g) $0{,}089 \cdot 0{,}7$ h) $0{,}065 \cdot 0{,}05$ i) $0{,}95 \cdot 0{,}09$
k) $0{,}12 \cdot 0{,}015$ l) $0{,}084 \cdot 0{,}009$ m) $0{,}15 \cdot 0{,}074$
n) $0{,}013 \cdot 0{,}27$ o) $0{,}032 \cdot 0{,}026$ p) $0{,}095 \cdot 0{,}06$

9. a) $3{,}5 \cdot 1{,}2$ b) $1{,}8 \cdot 1{,}3$ c) $2{,}5 \cdot 2{,}4$
d) $1{,}7 \cdot 1{,}5$ e) $1{,}6 \cdot 0{,}11$ f) $0{,}28 \cdot 1{,}4$
g) $1{,}8 \cdot 0{,}18$ h) $2{,}4 \cdot 0{,}17$ i) $2{,}1 \cdot 1{,}5$
k) $0{,}17 \cdot 1{,}7$ l) $4{,}8 \cdot 0{,}13$ m) $1{,}3 \cdot 1{,}6$
n) $6{,}4 \cdot 1{,}1$ o) $0{,}28 \cdot 2{,}3$ p) $7{,}8 \cdot 0{,}03$
q) $5{,}6 \cdot 0{,}012$ r) $6{,}8 \cdot 4{,}3$ s) $0{,}58 \cdot 0{,}32$

10. a) $0{,}31 \cdot 1{,}4$ b) $1{,}5 \cdot 0{,}15$ c) $7{,}6 \cdot 0{,}012$
d) $9{,}8 \cdot 0{,}011$ e) $0{,}32 \cdot 7{,}5$ f) $0{,}25 \cdot 6{,}4$
g) $2{,}8 \cdot 0{,}025$ h) $5{,}6 \cdot 0{,}025$ i) $0{,}038 \cdot 0{,}012$
k) $0{,}098 \cdot 0{,}07$ l) $0{,}076 \cdot 0{,}009$ m) $8{,}7 \cdot 0{,}006$
n) $0{,}46 \cdot 0{,}048$ o) $3{,}702 \cdot 0{,}049$ p) $5{,}56 \cdot 0{,}708$
q) $0{,}30303 \cdot 0{,}09$ r) $7{,}603 \cdot 0{,}476$ s) $6{,}83 \cdot 0{,}50702$

11. a) $0{,}48 \cdot 0{,}57$ b) $7{,}85 \cdot 0{,}32$ c) $4{,}346 \cdot 0{,}87$
d) $6{,}9 \cdot 0{,}094$ e) $16{,}94 \cdot 7{,}3$ f) $74{,}056 \cdot 9{,}5$
g) $17{,}48 \cdot 0{,}095$ h) $425{,}36 \cdot 4{,}7$ i) $85{,}9 \cdot 6{,}09$
k) $92{,}473 \cdot 7{,}35$ l) $234{,}26 \cdot 7{,}4$ m) $5248{,}25 \cdot 0{,}34$
n) $84{,}356 \cdot 5{,}08$ o) $974{,}23 \cdot 6{,}42$ p) $8234{,}04 \cdot 0{,}49$

12. a) $83{,}39 \cdot 0{,}9$ b) $4{,}026 \cdot 0{,}6$ c) $900{,}5 \cdot 0{,}07$
d) $676{,}9 \cdot 0{,}004$ e) $3{,}1978 \cdot 0{,}3$ f) $0{,}02369 \cdot 0{,}5$
g) $576{,}38 \cdot 0{,}0008$ h) $73{,}4836 \cdot 0{,}5$ i) $0{,}0125 \cdot 8{,}04$
k) $55{,}5807 \cdot 0{,}016$ l) $43{,}802 \cdot 0{,}051$ m) $66{,}0823 \cdot 0{,}047$
n) $75{,}832 \cdot 5{,}976$ o) $50{,}45 \cdot 0{,}0769$ p) $28{,}638 \cdot 0{,}037$

13. a) $0{,}17 \cdot 3{,}8 \cdot 5{,}7$ b) $112 \cdot 6{,}6 \cdot 0{,}07$ c) $0{,}11 \cdot 5{,}7 \cdot 21{,}2$
d) $19{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}02$ e) $11{,}2 \cdot 0{,}05 \cdot 37$ f) $0{,}13 \cdot 20{,}5 \cdot 0{,}6$
g) $99{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 9{,}9$ h) $21{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 16$ i) $0{,}09 \cdot 17{,}1 \cdot 55$

14. Runde die Ergebnisse auf die übliche Stellenzahl!

a) 9,38 DM · 7,8 **b)** 16,439 km · 9,64 **c)** 48,39 hl · 18,9
d) 4,956 kg · 5,78 **e)** 435,94 dz · 7,35 **f)** 9,49 ha · 3,489
g) 45,692 m^3 · 22,8 **h)** 9,489 t · 0,78 **i)** 394,97 m^2 · 5,328
k) 0,459 kg · 7,89 **l)** 386,94 DM · 87,96 **m)** 18,96 cm^2 · 0,794

15.

	a	b	c	A	B	C
I	55,9	123,84	2345,06	1,2	50,05	0,0089
II	76,23	296,094	8604,208	0,14	60,08	0,0074
III	49,568	158,3	3957,072	2,4	72,03	0,025
IV	17,49	447,26	563,8906	0,016	40,8	0,00093
V	65,08	507,09	45,009	0,029	15,009	0,06

Bilde aus der Tabelle Multiplikationsaufgaben!

Zum Beispiel:

a) Multipliziere in der Zeile I die Dezimalbrüche der Spalten a bis c mit jedem Dezimalbruch der Spalten A bis C!

b) Multipliziere die Dezimalbrüche der Spalte a nacheinander mit den Dezimalbrüchen der Spalte C!

c) Bilde entsprechende Aufgaben!

16. **a)** 24,168 · 200 **b)** 469,73 · 8000 **c)** 0,753 · 3400
d) 3,946 · 39000 **e)** 6,9 · 8400 **f)** 4,7856 · 256000
g) 27500 · 3,76 **h)** 48300 · 0,9482 **i)** 372100 · 6,4733
k) 195000 · 123,58 **l)** 380000 · 0,0384 **m)** 765400 · 18,543

17. **a)** $0{,}8^2$ **b)** $3{,}7^2$ **c)** $0{,}48^2$ **d)** $0{,}725^2$ **e)** $18{,}45^2$
f) $0{,}1^3$ **g)** $0{,}37^3$ **h)** $4{,}02^3$ **i)** $16{,}08^3$ **k)** $3{,}047^3$

Runde das Ergebnis auf 4 Stellen nach dem Komma, wenn sich mehr Stellen ergeben!

18. Überlege, wie sich die folgenden Aufgaben vorteilhaft rechnen lassen!

a) 47,8 · 0,9 **b)** 36,78 · 9,9 **c)** 75,432 · 0,99
d) 68,74 · 4,9 **e)** 128,763 · 99,8 **f)** 653,47 · 1,99

Anwendungen

19. Multipliziere die Summe der beiden Zahlen 178,09 und 148,63 mit ihrer Differenz!

20. Vermindere 437,3 um das 17,5fache von 23,84!

21. 1 m Anzugstoff kostet 28,75 DM. Wie teuer sind 3,15 m?

22. Erkundige dich bei der HO nach Preisen für Kleiderstoffe und berechne, wieviel 4,50 m für ein Kleid kosten! (Wähle fünf verschiedene Stoffe aus!)

23. Bilde selbst ähnliche Aufgaben wie in Nr. 22!

24. 1 dz Briketts kostet 3,40 DM. Wie teuer sind

a) 7,25 dz, b) 15,8 dz, c) 23,78 dz?

25. Ein Klassenzimmer ist 8,45 m lang, 6,80 m breit und 3,60 m hoch. Es ist für 36 Schüler eingerichtet. Wieviel Kubikmeter Raum stehen für jede Person zur Verfügung? (Vergiß den Lehrer nicht!)

26. Die Kante eines Würfels aus Stahl ist 12,5 cm lang. Welchen Rauminhalt hat der Würfel? Ein Kubikzentimeter des verwendeten Stahls wiegt 7,9 g. Wie schwer ist der Würfel?

27. Ein Mauerziegel ist 24 cm lang, 11,5 cm breit und 7,1 cm hoch.

a) Welchen Rauminhalt hat der Stein?

b) Wie schwer ist der Stein, wenn ein Kubikzentimeter 1,8 g wiegt?

28. Eine Betriebssportgemeinschaft (BSG) beabsichtigt, die Rasendecke ihres Sportplatzes durch Aussaat von Grassamen zu erneuern. Die Rasenfläche ist 5800 m² groß. Wieviel Kilogramm Grassamen müssen besorgt werden, wenn für eine Fläche von einem Ar 1,850 kg Grassamen benötigt werden?

29. Eine Tischtennisplatte hat etwa die folgenden Maße: 2,74 m Länge und 1,53 m Breite. Welche Spielfläche ergibt sich? Runde!

30. Ein Kiefernholzbrett ist 4,65 m lang und 27 cm breit. Der Preis für einen Quadratmeter Kiefernholzbretter beträgt 2,78 DM. Wie hoch ist der Preis für dieses Brett?

31. Ein Raum, der 5,45 m lang und 4,10 m breit ist, soll gedielt werden.

a) Wieviel Quadratmeter Bretter werden für das Dielen benötigt? Wie muß man in diesem Falle runden?

b) Wieviel Meter Fußleisten werden gebraucht, wenn für zwei Türen je 1,18 m wegfallen?

32. In einer Wohnung sollen die Fußböden gestrichen werden. Das Wohnzimmer ist 5,40 m lang und 4,75 m breit, das Schlafzimmer ist 4,25 m lang und 4,75 m breit, die Küche ist 3,80 m lang und 3,25 m breit. Der Anstrich für einen Quadratmeter kostet 1,95 DM. Berechne die Kosten!

33. Ein Grundstück von 38,75 m Länge und 19,45 m Breite wird verkauft. Ein Quadratmeter des Grundstücks kostet 3,80 DM. Rechne!

34. Ein Bauernhof hat eine Breite von 23,70 m und eine Länge von 25,75 m. Der anschließende Garten ist ebenso breit, aber 32,6 m lang.

a) Gib die Größe der beiden Flächen an!

b) Wieviel Ar umfaßt der gesamte Bauernhof einschließlich Garten?

35. Ein Industriearbeiter, der aufs Land gegangen war, erhielt ein rechteckiges Stück Ackerland von 21,80 m Breite und 34,60 m Länge als Gartenland. Wie groß war die Gartenfläche, die der Arbeiter erhielt?

36. In einer Gärtnerei sollen

8,20 a mit Erbsen,	3,15 a mit Möhren,
9,25 a mit Bohnen,	4,75 a mit Spinat

bebaut werden.

a) Wie hoch ist der Samenbedarf, wenn auf ein Ar

2,550 kg Erbsensaatgut,	1,040 kg Bohnensaatgut,
0,035 kg Möhrensamen,	0,360 kg Spinatsamen

gerechnet werden?

b) Bei normalen Wachstumsbedingungen werden je Ar im Durchschnitt

0,45 dz Erbsen,	2,15 dz Möhren,
1,05 dz Bohnen,	1,35 dz Spinat

geerntet. Mit welchem Ernteertrag von jeder Sorte ist zu rechnen?

37. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft sparte auf einer Getreideanbaufläche von 150,25 ha durch Verwendung von Traktoren und durch Gerätekopplung 1384 DM an Kosten ein. Wieviel Mark betrug die Kosteneinsparung je Hektar?

20. Division eines Dezimalbruches durch einen Dezimalbruch

Teilen

Wir haben schon gelernt, wie man einen Bruch durch einen Bruch dividiert. Dabei haben wir zunächst den Bruch im Divisor in eine ganze Zahl umgewandelt, indem wir den Dividenden und den Divisor mit dem Nenner des Divisors multiplizierten (siehe S. 52 bis 55).

Den gleichen Weg wählen wir auch bei der Division eines Dezimalbruches durch einen Dezimalbruch.

1. Beispiel: 1,5 m Stoff kosten 5,25 DM. Wie teuer ist 1 m?

Lösung: Wir rechnen: 5,25 DM : 1,5.

Damit wir im Divisor eine ganze Zahl erhalten, multiplizieren wir den Divisor und den Dividenden mit 10. Wir erhalten dadurch die Aufgabe

$$52{,}5\ \text{DM} : 15.$$

Diese Aufgabe können wir lösen.

Vor dem Rechnen überschlagen wir das Ergebnis:

$52{,}5 \approx 53$

$53 : 15 > 3$

aber $53 : 15 < 4$

Wir rechnen:

$$\begin{array}{l} \underline{52},5 : 15 = 3{,}5 \\ \ \underline{75} \\ \ \ 0 \end{array}$$

Probe: $3{,}5 \cdot 1{,}5 = 5{,}25$

1 m Stoff kostet also 3,50 DM.

2. Beispiel: Auf 0,85 ha wurden 16,20 dz Roggen geerntet. Wie hoch ist der Ertrag für 1 ha?

Lösung: Die Aufgabe lautet 16,20 dz : 0,85.

Vor dem Rechnen überschlagen wir wieder das Ergebnis:

$$1600 : 85 < 20$$

Wir rechnen:

16,20 dz : 0,85 ≈ 19,06 dz

Weil der Quotient mehr Stellen nach dem Komma ergibt, als in der Aufgabe gefordert sind, haben wir gerundet.

(Wir multiplizieren Dividend und Divisor mit 100, damit wir das Komma im Divisor beseitigen.)

$$\begin{array}{l} \underline{162}0 : 85 = 19{,}0588\ldots \\ \ \underline{770} \\ \ \ \underline{500} \\ \ \ \ \underline{750} \\ \ \ \ \ \underline{700} \\ \ \ \ \ \ 20 \end{array}$$

Der Ernteertrag für einen Hektar beträgt also rund 19,06 dz Roggen.

$$\begin{array}{r} \text{Probe: } \underline{19{,}06 \cdot 0{,}85} \\ 15248 \\ 9530 \\ \hline 16{,}2010 \approx 16{,}20 \end{array}$$

Das Produkt muß größer sein als 16,20, weil beim Dividieren das Ergebnis aufgerundet worden ist.

Wir merken uns:

Man dividiert durch einen Dezimalbruch, indem man vor dem Rechnen Dividend und Divisor so mit 10, 100, 1000, ... multipliziert, daß der Divisor eine ganze Zahl wird. Dann rechnet man wie bei der Division durch ganze Zahlen.

Das Ergebnis muß, wenn notwendig, entsprechend der Benennung oder der Angabe in der Aufgabe gerundet werden.

Aufgaben

Übungen für das Kopfrechnen

1. a) 2 : 0,2	**b)** 2 : 0,02	**c)** 2 : 0,002
4 : 0,2	4 : 0,02	4 : 0,002
bis	bis	bis
20 : 0,2	20 : 0,02	20 : 0,002
d) 0,2 : 2	**e)** 0,02 : 0,2	**f)** 0,002 : 0,02
0,4 : 2	0,04 : 0,2	0,004 : 0,02
bis	bis	bis
2,0 : 2	0,20 : 0,2	0,020 : 0,02

g) Bilde mit den Zahlen des Einmaleins zwei weitere Folgen dieser Art, wie sie sich in a) bis f) ergeben!

2. Dividiere 36 durch **a)** 0,2, **b)** 0,3, **c)** 0,5, **d)** 0,06, **e)** 0,09, **f)** 0,04, **g)** 0,12, **h)** 0,018, **i)** 0,0006, **k)** 0,0012!

3. Dividiere die folgenden Zahlen durch 1,2!
a) 6 **b)** 36 **c)** 54 **d)** 18 **e)** 108 **f)** 72 **g)** 1,44 **h)** 0,048

4. a) 0,9 : 0,03	**b)** 4,5 : 0,9	**c)** 16,2 : 0,09
d) 2,52 : 1,8	**e)** 4,5 : 0,15	**f)** 0,64 : 0,08
g) 12,8 : 0,16	**h)** 25,6 : 0,04	**i)** 9,6 : 0,12
k) 0,96 : 0,12	**l)** 96 : 0,12	**m)** 14,4 : 1,6
n) 25,6 : 0,8	**o)** 2,56 : 0,8	**p)** 3,72 : 1,2
q) 2,04 : 1,7	**r)** 1,54 : 0,14	**s)** 0,152 : 0,19
t) 1,17 : 0,013	**u)** 1,26 : 0,014	**v)** 1,02 : 0,017

5. Dividiere 7,2 durch die folgenden Zahlen! **a)** 0,08 **b)** 0,9 **c)** 0,18 **d)** 0,024 **e)** 1,2 **f)** 0,006 **g)** 0,003 **h)** 0,009 **i)** 1,8 **k)** 0,012

6. Dividiere 0,68 durch die folgenden Zahlen! **a)** 0,17 **b)** 0,4 **c)** 0,034 **d)** 1,7 **e)** 0,04 **f)** 0,017 **g)** 0,000 2 **h)** 0,004 **i)** 3,4

Schriftliches Rechnen

Beachte, daß bei jeder Divisionsaufgabe stets vor dem Ausrechnen das Ergebnis überschlagen oder abgeschätzt werden soll!

7. **a)** 36 : 0,4 **b)** 64 : 0,8 **c)** 85 : 0,5 **d)** 72 : 0,6
e) 84 : 0,7 **f)** 76 : 0,4 **g)** 96 : 1,6 **h)** 68 : 1,7
i) 90 : 1,5 **k)** 65 : 1,3 **l)** 90 : 1,8 **m)** 125 : 2,5
n) 60 : 1,2 **o)** 60 : 1,5 **p)** 60 : 0,12 **q)** 60 : 0,15

8. **a)** 87,342 : 0.6 **b)** 473,920 : 0,08 **c)** 58,671 : 0,009
d) 11,528 : 0,2 **e)** 587,49 : 0,3 **f)** 6,9785 : 0,05
g) 74,936 : 0,04 **h)** 53,988 : 0,006 **i)** 52,325 : 0,7
k) 5,608 : 0,08 **l)** 4,041 : 0,09 **m)** 10,101 : 0,003

9. **a)** 0,569 874 : 2 **b)** 437,5689 : 3 **c)** 9 348,75 : 5
d) 94 738,74 : 6 **e)** 0,038 458 : 7 **f)** 537,648 : 8
g) 0,006 873 57 : 9 **h)** 56 793 480 : 0,2 **i)** 761 952 : 0,03
k) 8 745 835 : 0,005 **l)** 3 749 585 : 0,07 **m)** 5 597 838 : 0,0009
n) 793,5476 : 0,02 **o)** 7 643 264 : 0,4 **p)** 293,8476 : 0,006

10. **a)** 3,114 : 0,9 **b)** 2,58 : 0,6 **c)** 12,6 : 0,018
d) 0,084 : 0,12 **e)** 0,175 : 2,5 **f)** 0,112 : 1,4
g) 16,8 : 0,24 **h)** 0,135 : 0,45 **i)** 0,96 : 1,6
k) 0,57 : 1,9 **l)** 2,07 : 0,023 **m)** 1,04 : 2,6

11. **a)** 2,64 : 2,4 **b)** 15,3 : 0,17 **c)** 0,305 : 6,1
d) 0,546 : 0,42 **e)** 1,33 : 1,9 **f)** 0,148 : 7,4
g) 1,92 : 1,2 **h)** 0,154 : 0,22 **i)** 7,56 : 5,4
k) 0,364 : 0,28 **l)** 27,2 : 1,36 **m)** 0,068 : 0,34

12. Runde die folgenden Ergebnisse auf drei Stellen nach dem Komma!

a) 54,6 : 0,52 **b)** 11,9 : 1,75 **c)** 8,432 : 1,7
d) 12,54 : 6,6 **e)** 642,8 : 0,87 **f)** 3,54 : 1,5
g) 2,496 : 0,48 **h)** 32,204 : 7,1 **i)** 7,92 : 14,4
k) 455,6 : 0,134 **l)** 72 : 0,576 **m)** 0,54 : 0,216
n) 368,1 : 0,075 **o)** 1,8 : 0,288 **p)** 178,54 : 0,346

13.

	a	b	c	A	B	C
I	7	8,9	147,23	2	9,4	0,023
II	13	17,2	728,45	3	3,7	0,019
III	124	0,75	102,038	17	0,12	4,782
IV	600	4,38	506,793	25	0,78	3,965

Bilde Aufgaben mit den Zahlen der Tabelle!

Runde beim Rechnen mit den Zahlen der vorstehenden Tafel unendliche Dezimalbrüche auf drei Stellen hinter dem Komma! Beispiele:

a) Dividiere die Zahlen der Spalte a durch jede der Zahlen in der Spalte A!

b) Dividiere die Zahlen der Spalte c durch jede der Zahlen in der Spalte B!

c) Dividiere 728,45 durch jede der Zahlen in den Spalten A, B und C!

Enthaltensein

3. Beispiel: Berechne, wievielmal 7,5 l in 4,5 hl enthalten sind!

Wenn gemessen werden soll, müssen beide Zahlen die gleiche Benennung haben.

Lösung a)	Lösung b)
7,5 l in 450 l	0,075 hl in 4,5 hl
Wir rechnen mit Hilfe der Division:	Wir rechnen mit Hilfe der Division:
450 l : 7,5 l	4,5 hl : 0,075 hl
4500 : 75 = 60	4500 : 75 = 60

7,5 l sind in 4,5 hl 60mal enthalten.

Erkläre beide Wege! Welcher Weg ist zweckmäßiger?

4. Beispiel: 40 m³ Schutt sollen abgefahren werden. Der dazu bestimmte Lastkraftwagen kann mit 1,5 m³ beladen werden. Wieviel Fuhren sind notwendig?

Lösung: $1{,}5\ \mathrm{m}^3$ in $40\ \mathrm{m}^3 = ?$

Wir lösen die Aufgabe durch Division.

$$40 : 1{,}5 = 400 : 15 = 26{,}66\ldots \approx 27$$

Es sind 26 volle Fuhren und noch eine Restfuhre erforderlich. Der Lastkraftwagen muß also 27mal fahren.

Wir merken uns:

Auch beim Rechnen mit Dezimalbrüchen werden Aufgaben des Messens oder Enthaltenseins durch die Division gelöst. Dabei muß darauf geachtet werden, daß der Dividend und der Divisor die gleiche Benennung erhalten. Das Ergebnis ist unbenannt.

Aufgaben

Übungen für das Kopfrechnen

14. a) 0,3 in 1,2 b) 0,4 in 16 c) 0,05 in 2,5
d) 0,06 in 5,4 e) 1,7 in 85 f) 1,3 in 5,2
g) 0,14 in 0,98 h) 0,075 in 0,75 i) 0,025 in 1,25
k) Bilde 10 weitere Aufgaben mit Zahlen der Einmaleinsfolgen!

15. a) 5 cm in 3 m b) 8 Pf in 4,56 DM c) 8 l in 3,44 hl
d) 7 m^2 in 1,26 a e) 35 g in 7 kg f) 18 m in 9 km
g) 0,80 m in 10,40 m h) 0,125 kg in 2 kg i) 0,300 l in 18,300 l
k) 0,240 l in 14,400 l l) 0,170 km in 10,200 km m) 1,40 a in 0,28 ha

Schriftliches Rechnen

16. a) 9 m in 1,161 km, in 0,792 km, in 1,008 km
b) 13 Pf in 6,24 DM, in 4,29 DM, in 15,21 DM
c) 18 g in 0,342 kg, in 0,504 kg, in 0,738 kg
d) 37 l in 3,33 hl, in 5,55 hl, in 9,99 hl
e) 46 m^2 in 1,4766 ha, in 2,4472 ha, in 5,4648 ha
f) 93 kg in 157,17 dz, in 435,24 dz, in 834,21 dz
g) 2,16 m in 1740,96 m h) 2,70 m in 45,36 m
i) 0,357 m^3 in 2,856 m^3 k) 0,1415 m^3 in 573,075 m^3
l) 0,568 t in 35,216 t m) 0,710 t in 39,192 t
n) 7,94 a in 365,24 a o) 857,52 a in 1619,76 a

Anwendungen

17. Teile die Summe der beiden Zahlen 25,6 und 24,96 durch ihre Differenz!

18. Teile das Produkt der beiden Zahlen 25,6 und 24,96 durch ihre Differenz!

19. Drei Faktoren ergeben das Produkt 26,1738. Der erste Faktor heißt 15,72, der zweite 0,45. Wie heißt der dritte Faktor?

20. Berechne die Preise für 1 kg oder für 1 m!

a) 2,500 kg kosten 12,50 DM. **b)** 0,800 kg kosten 13,60 DM.
c) 1,40 m kosten 2,10 DM. **d)** 0,75 m kosten 3,75 DM.

21. Berechne den Preis für 1 kg der nachstehend angegebenen Lebensmittel!

a) 9 kg Mehl kosten 11,88 DM.
b) 15,250 kg Erbsen kosten 13,42 DM.
c) 7,500 kg Salz kosten 2,25 DM.
d) 12,750 kg Mohrrüben kosten 4,59 DM.
e) 2,750 kg Haferflocken kosten 4,40 DM.

22. Es soll eine Turnhalle mit einer Fußbodenfläche von etwa 375 m² gebaut werden. Die Turnhalle soll 24,50 m lang sein. Wie breit muß die Turnhalle sein? (Runde auf zwei Stellen nach dem Komma!)

23. Ein volkseigenes Gut hat auf seinem Gemüseland die folgenden Erträge erzielt:

a) 557,50 dz Weißkraut auf 1,25 ha,
b) 264,50 dz Rotkraut auf 0,75 ha,
c) 638,05 dz Blumenkohl auf 3,5 ha,
d) 392,95 dz junge Pflückerbsen auf 4,65 ha,
e) 215, 60 dz junge Pflückbohnen auf 2,45 ha,
f) 1428 dz Zwiebeln auf 5,8 ha,
g) 407,50 dz Möhren und Karotten auf 1,75 ha,
h) 21,05 dz Erdbeeren auf 0,5 ha.

Berechne die durchschnittlichen Ernteerträge je Hektar!

24. Ein Bauer erntete auf 2,5 ha Ackerfläche 50 dz Roggen, auf 2 ha Ackerfläche 46 dz Weizen, von einem 1,5 ha großen Feld 31,5 dz Gerste und auf 50 a Ackerfläche 11,5 dz Hafer. Berechne, wie groß der Ernteertrag an Gerste, Weizen, Roggen und Hafer durchschnittlich je Hektar war!

25. **a)** Ein volkseigenes Gut hatte für die Aussaat auf einer Getreideanbaufläche von 83,4 ha den Betrag von 3419,40 DM aufzuwenden. Wie groß waren die Kosten je Hektar?

b) Bei der nächsten Aussaat sollen mehr Traktoren verwendet und die Gerätekopplung eingeführt werden. Man rechnet daher für das kommende Jahr nur noch mit Kosten in Höhe von 31,40 DM je Hektar. Wieviel Mark hat man voraussichtlich für die Bestellung von 86,7 ha auszugeben?

c) Welche Summe wird man voraussichtlich gegenüber dem Vorjahr einsparen, obwohl die zu bestellende Fläche größer ist?

26. Bei der Getreideernte wurden in einer Stunde im Durchschnitt die folgenden Flächen abgemäht:

mit der Hand	0,05 ha,
mit dem Grasmäher	0,45 ha,
mit dem Mähbinder	0,65 ha,
mit dem Mähdrescher	1,8 ha.

Wie lange dauert das Mähen von 5,4 ha Getreide **a)** mit der Hand, **b)** mit dem Grasmäher, **c)** mit dem Mähbinder, **d)** mit dem Mähdrescher?

27. An Güterwagen findet man Angaben über Rauminhalt und Ladegewicht. Gedeckte Güterwagen haben im allgemeinen eine Bodenfläche von 21,30 m² und eine Tragfähigkeit von 17,5 t. Verschiedene gedeckte Güterwagen haben ein Eigengewicht von 10,370 t, 10,340 t, 10,520 t, 10,510 t, 10,260 t.

a) Wieviel Tonnen wiegt durchschnittlich ein gedeckter Güterwagen?

b) Welche Last ruht bei gleichmäßiger Verteilung und voller Belastung auf jedem Quadratmeter Bodenfläche?

21. Dezimalbrüche und gemeine Brüche

Löse die Aufgaben 1 bis 5 mit Dezimalbrüchen! Rechne im Ergebnis höchstens bis zur vierten Stelle nach dem Komma und runde auf die dritte Stelle des Dezimalbruches! Überschlage vor dem Rechnen das Ergebnis!

1. a) $\frac{3}{7} + 0{,}7$ **b)** $4\frac{1}{2} + 3{,}68$ **c)** $0{,}9 + \frac{2}{3}$ **d)** $12\frac{5}{7} + 4{,}5$

e) $0{,}6 + \frac{2}{5}$ **f)** $2{,}439 + \frac{3}{8}$ **g)** $1{,}7 + \frac{5}{6}$ **h)** $3\frac{5}{9} + 8{,}436$

i) $1{,}9 + \frac{7}{25}$ **k)** $9\frac{11}{50} + 2{,}6$ **l)** $3\frac{2}{3} + 0{,}89$ **m)** $0{,}39 + \frac{11}{13}$

n) $2{,}75 + \frac{5}{8}$ **o)** $0{,}476 + \frac{17}{20}$ **p)** $3\frac{7}{12} + 1{,}9$ **q)** $8{,}474 + 5\frac{17}{60}$

2. a) $0{,}9 - \frac{4}{5}$ **b)** $0{,}97 - \frac{14}{25}$ **c)** $5\frac{1}{3} - 0{,}79$ **d)** $1{,}381 - \frac{2}{3}$

e) $\frac{11}{20} - 0{,}39$ **f)** $2{,}887 - \frac{39}{50}$ **g)** $7\frac{7}{9} - 4{,}8$ **h)** $5\frac{11}{12} - 2{,}69$

i) $0{,}89 - \frac{3}{4}$ **k)** $6\frac{1}{2} - 3{,}456$ **l)** $10{,}75 - 6\frac{11}{12}$ **m)** $9\frac{4}{11} - 6{,}9$

n) $\frac{19}{25} - 0{,}7$ **o)** $7\frac{3}{4} - 2{,}89$ **p)** $3{,}29 - 2\frac{5}{6}$ **q)** $4{,}359 - 2\frac{5}{7}$

3. a) $\frac{3}{4} \cdot 0{,}21$ **b)** $0{,}412 \cdot \frac{9}{20}$ **c)** $8\frac{4}{5} \cdot 0{,}49$ **d)** $4{,}31 \cdot 3\frac{1}{8}$

e) $6{,}924 \cdot 1\frac{7}{12}$ **f)** $6{,}48 \cdot 2\frac{3}{5}$ **g)** $3{,}2 \cdot 1\frac{1}{3}$ **h)** $4\frac{5}{6} \cdot 0{,}78$

i) $5\frac{5}{9} \cdot 3{,}7$ **k)** $2\frac{5}{7} \cdot 8{,}4$ **l)** $3\frac{11}{12} \cdot 5{,}45$ **m)** $2{,}87 \cdot 3\frac{5}{12}$

4. **a)** $0{,}84 : \frac{2}{5}$ **b)** $2{,}56 : \frac{16}{25}$ **c)** $1\frac{4}{9} : 0{,}7$ **d)** $19\frac{5}{7} : 2{,}8$

e) $3{,}825 : \frac{1}{2}$ **f)** $5\frac{13}{20} : 0{,}625$ **g)** $6{,}6 : \frac{2}{3}$ **h)** $3{,}9 : 1\frac{5}{12}$

i) $8\frac{3}{4} : 0{,}45$ **k)** $2\frac{3}{4} : 3{,}51$ **l)** $0{,}665 : \frac{7}{9}$ **m)** $8\frac{17}{30} : 5{,}25$

5. Zusammengesetzte Aufgaben:

a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**
$2{,}5 + \frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4} - 0{,}2$	$1\frac{4}{5} : 0{,}3$	$1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4}$	$11\frac{1}{4} : 9$
$-\ 0{,}9$	$-\ 0{,}02$	$-\ 4{,}5$	$-\ 2{,}75$	$-\ 0{,}75$
$:\ 3$	$\cdot\ 4$	$:\ 5$	$:\ 0{,}3$	$:\ 10$
$+\ 0{,}45$	$+\ 3{,}08$	$-\ \frac{1}{4}$	$-\ 8\frac{7}{10}$	$-\ 3\frac{4}{5}$
$:\ 10$	$:\ 2$	$\cdot\ 100$	$:\ 10$	$+\ 2{,}4$
$:\ 5$	$:\ 4$	$-\ 0{,}7$	$-\ 0{,}03$	$:\ 0{,}18$
$-\ 0{,}8$	$+\ 1{,}1$	$+\ \frac{1}{5}$	$:\ 100$	$:\ 6\frac{2}{3}$
$:\ \frac{3}{10}$	$:\ 10$	$:\ 0{,}9$	$+\ 0{,}999$	$-\ 3$

6. Bereits bei der Bruchrechnung und bei der Dezimalbruchrechnung haben wir mit Bruchausdrücken gerechnet, in denen sowohl im Zähler als auch im Nenner zwei Faktoren standen. Wir wissen auch bereits, daß der Bruchstrich die gleiche Bedeutung wie das Divisionszeichen hat. Wir setzen ihn besonders in solchen Divisionsaufgaben, in denen sowohl der Dividend als auch der Divisor aus zwei oder mehr Faktoren bestehen. Darum brauchen wir nicht den Dividenden und den Divisor für sich auszurechnen und danach die Ergebnisse zu dividieren, sondern wir können vor dem Ausrechnen kürzen und dadurch oft große Zahlen vermeiden.

Lösungsbeispiel:

Wir schreiben die Divisionsaufgabe $(48 \cdot 35 \cdot 68) : (85 \cdot 63)$ als Bruch:

$$\frac{48 \cdot 35 \cdot 68}{85 \cdot 63} = \frac{16 \cdot 7 \cdot 68}{17 \cdot 21} = \frac{16 \cdot 1 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$$

Löse die folgenden Aufgaben entsprechend dem Lösungsbeispiel:

a) $(42 \cdot 84) : 28$ **b)** $(108 \cdot 136) : 51$ **c)** $(106 \cdot 35) : 105$

d) $(64 \cdot 85) : 51$ **e)** $(48 \cdot 72 \cdot 7) : (63 \cdot 28)$ **f)** $(56 \cdot 65 \cdot 24) : (39 \cdot 32)$

g) $\frac{45 \cdot 116}{72}$ **h)** $\frac{256 \cdot 38 \cdot 15}{95 \cdot 48}$ **i)** $\frac{128 \cdot 25}{96 \cdot 10 \cdot 14}$ **k)** $\frac{325 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 25}{52 \cdot 70 \cdot 48}$

l) $\frac{34 \cdot 42}{105 \cdot 7 \cdot 54}$ **m)** $\frac{64 \cdot 329 \cdot 14 \cdot 18}{56 \cdot 21 \cdot 84}$ **n)** $\frac{44 \cdot 16 \cdot 45}{62 \cdot 110 \cdot 96}$ **o)** $\frac{15 \cdot 27 \cdot 92 \cdot 36}{69 \cdot 45 \cdot 72}$

7. Ersetzen wir bei Divisionsaufgaben das Rechenzeichen durch den Bruchstrich, so ist es für das Rechnen zweckmäßig, im Zähler und Nenner ganze Zahlen zu verwenden. Treten im Zähler und im Nenner gemeine Brüche auf, so entsteht ein Doppelbruch. Wir vereinfachen diesen Doppelbruch, indem wir ihn als Division eines Bruches durch einen Bruch auffassen.

1. Lösungsbeispiel: $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Gemischte Zahlen werden vor dem Rechnen in unechte Brüche verwandelt.

2. Lösungsbeispiel: $\dfrac{1\frac{2}{3}}{3\frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{15}{4}} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 15} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$

a) $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}}$ b) $\dfrac{4\frac{2}{7}}{1\frac{3}{4}}$ c) $\dfrac{\frac{8}{15}}{\frac{3}{12}}$ d) $\dfrac{3\frac{1}{8}}{5\frac{5}{22}}$ e) $\dfrac{\frac{2}{3} \cdot 7}{\frac{3}{4}}$

f) $\dfrac{3\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}$ g) $\dfrac{24 \cdot 5\frac{5}{9}}{8\frac{1}{3}}$ h) $\dfrac{4\frac{2}{7} \cdot 2\frac{4}{5}}{\frac{3}{8}}$ i) $\dfrac{\frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{5} \cdot 15}$ k) $\dfrac{\frac{9}{10}}{\frac{7}{20} \cdot 18}$

l) $\dfrac{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}}{15 \cdot \frac{3}{4}}$ m) $\dfrac{4\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}}{2\frac{1}{3} \cdot 9}$ n) $\dfrac{9\frac{1}{2} \cdot 6\frac{9}{100}}{4\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}}$ o) $\dfrac{3\frac{3}{5} \cdot 4\frac{2}{3}}{\frac{3}{5} \cdot 8\frac{1}{2} \cdot 7}$

p) $\dfrac{\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{7} \cdot 49}{21 \cdot 26\frac{1}{4}}$ q) $\dfrac{4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 9}$ r) $\dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{24}{25} \cdot 144}{\frac{6}{7} \cdot 8 \cdot \frac{18}{55}}$ s) $\dfrac{\frac{9}{10} \cdot 6\frac{2}{3} \cdot 5}{64 \cdot \frac{8}{9}}$

t) $\dfrac{4\frac{2}{7} \cdot 2\frac{4}{5}}{6 \cdot \frac{3}{8}}$ u) $\dfrac{16\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4} \cdot 3\frac{5}{12}}{8\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{9} \cdot \frac{5}{6}}$ v) $\dfrac{6\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{5} \cdot 9\frac{1}{10}}{\frac{3}{5} \cdot 18\frac{1}{5}}$ w) $\dfrac{1\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{3}}{\frac{7}{12} \cdot 1\frac{1}{5}}$

8. Treten in Divisionsaufgaben, die als Brüche geschrieben wurden, Dezimalbrüche im Zähler oder Nenner auf, so werden sie in die entsprechenden Zehnerbrüche verwandelt. Dann erhalten wir Doppelbrüche, mit denen wir schon rechnen können.

Lösungsbeispiel:

$$\frac{25{,}6 \cdot 18}{12 \cdot 0{,}84} = \frac{25\frac{6}{10} \cdot 18}{12 \cdot \frac{84}{100}} = \frac{256 \cdot 18 \cdot 1 \cdot 100}{10 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 84} = \frac{32 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7} = \frac{320}{7} = 45\frac{5}{7}$$

a) $\dfrac{19{,}04 \cdot 12}{4{,}08}$ b) $\dfrac{21{,}06 \cdot 0{,}8}{26 \cdot 0{,}09}$ c) $\dfrac{36 \cdot 12{,}25}{7{,}5 \cdot 28}$ d) $\dfrac{0{,}72 \cdot 1{,}95}{7{,}5 \cdot 0{,}048}$

e) $\frac{1{,}68 \cdot 5{,}12}{9{,}6 \cdot 0{,}144}$ f) $\frac{0{,}81 \cdot 1{,}96}{0{,}141 \cdot 4{,}2}$ g) $\frac{0{,}7 \cdot 136{,}5}{18{,}4 \cdot 12{,}37}$ h) $\frac{48 \cdot 7{,}5}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}5}$

i) $\frac{9{,}02 \cdot 5\frac{2}{3}}{2\frac{1}{5} \cdot 4{,}1}$ k) $\frac{9\frac{1}{2} \cdot 6{,}09}{4\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}}$ l) $\frac{17{,}55 \cdot 18 \cdot 5\frac{2}{3}}{13\frac{1}{2} \cdot 22{,}1}$ m) $\frac{750 \cdot 3{,}5 \cdot 1\frac{1}{6}}{2{,}45 \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 40}$

22. Vom Maßstab

Beispiel: Eine Schulgruppe unternimmt während der großen Ferien eine Wanderung durch das Erzgebirge. Die Kinder wollen am Nachmittag noch Schmiedeberg von Kipsdorf aus erreichen. Weil sie wissen möchten, wie weit sie noch zu wandern haben, messen die Kinder die Länge des Weges auf der Wanderkarte nach (Abb. 12). Die Karte ist im Maßstab 1:100 000 gezeichnet.

Der Maßstab 1 : 100 000 bedeutet:
Jede Strecke auf der Karte ist der 100 000. Teil der wirklichen Länge. (Jede Strecke auf der Karte ist in Wirklichkeit 100 000mal so groß.)

1 cm auf unserer Karte entspricht also 1 cm · 100 000 = 100 000 cm = 1 km in der Natur. Man nennt Karten, die im Maßstab 1:100 000 gezeichnet sind, auch 1-cm-Karten.

Nachdem wir uns den Maßstab erklärt haben, können wir nun messen und berechnen, wie lang der Wanderweg von Kipsdorf nach Schmiedeberg ist.

Aus Wanderkarten und Lageplänen kann man die Länge des Weges nur dann richtig berechnen, wenn man den Maßstab beachtet. Er ist im allgemeinen auf der Karte angegeben.

Beachte: Je größer die zweite Zahl im Maßstab ist, desto kleiner ist die Wiedergabe einer Strecke auf der Karte.

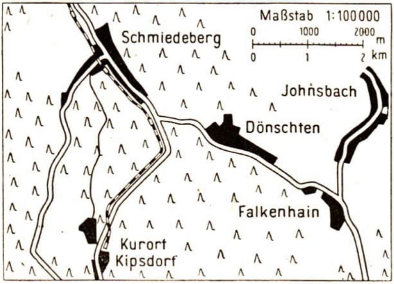


Abb. 12

Aufgaben

1. Es wurden auf der 1-cm-Karte die folgenden Entfernungen gemessen: **a)** 7 cm, **b)** 12 cm, **c)** 3,5 cm, **d)** 6,8 cm, **e)** 9,3 cm. Wie groß sind die wirklichen Längen?

2. **a)** Erkläre die Angabe: „Der Maßstab des Meßtischblattes ist 1:25000"!
   b) Wie lang ist auf dem Meßtischblatt die Zeichnung einer Wegstrecke, die in Wirklichkeit 1 km lang ist?
   c) Du mißt auf dem Meßtischblatt Entfernungen von 2, 5, 9, 11, 15, 20 cm. Wie groß sind die wirklichen Längen?

3.

	Maßstab der Karte	Gemessene Strecken			
a	1: 50000	7 cm	40 cm	8,4 cm	7,6 cm
b	1: 200000	5 cm	23 cm	6,7 cm	11,2 cm
c	1:1500000	25 cm	40 cm	51,5 cm	7,5 cm

Wie lang sind die wirklichen Entfernungen?

4. Wie lang sind auf Karten die folgenden Entfernungen zu zeichnen?

	Entfernung	Maßstab		Entfernung	Maßstab
a	5 km	1: 10000	d	17 km	1: 100000
b	10 km	1: 25000	e	450 km	1: 500000
c	32 km	1: 50000	f	1200 km	1:2000000

5. Ein Stadtplan wurde im Maßstab 1:5000 gezeichnet.
   a) Wie lang wurden die Straßen gezeichnet, die in der Natur 1 km, 800 m, 350 m, 650 m, 1,280 km lang sind?
   b) Bestimme die Länge der Straßen, die in diesem Plan 4 cm, 7 cm, 15 cm, 24 cm, 36 mm, 86 mm und 245 mm lang gezeichnet wurden!
   c) Wie lang und wie breit ist der Marktplatz, der auf dem Plan als Rechteck mit den Seiten 18 mm und 13 mm dargestellt wurde?

6. Dieter hat auf der Karte als Entfernung zweier Orte eine Strecke von 3,5 cm gemessen. Die Karte ist im Maßstab 1:6000000 gezeichnet. Berechne die wirkliche Länge der Strecke!

7. Berechne nach deinem Atlas die Entfernungen der folgenden Orte in Luftlinie: **a)** Berlin—Moskau, **b)** Berlin—Prag, **c)** Prag—Moskau, **d)** Wien—Sofia, **e)** Berlin—Genf!

Beachte: Miß sorgfältig! Wenn man nur um 1 mm zuwenig mißt, wird beispielsweise bei einem Maßstab 1:6000000 die wirkliche Strecke 6 Kilometer zu kurz. Da die Messung mit Stechzirkel und Lineal nie ganz genau werden kann, erhält man nur angenäherte Ergebnisse.

8. Suche fünf Strecken auf einer Karte und stelle die wirkliche Länge fest!

9. 1 cm der Zeichnung entspricht in Wirklichkeit einer Länge von **a)** 1 m, **b)** 5 m, **c)** 10 m, **d)** 500 m, **e)** 10 km. Gib die Maßstäbe der Zeichnungen an!

10. Der Tischler fertigt, bevor er ein Möbelstück herstellt, eine Zeichnung in verkleinertem Maßstab an. Meistens wählt er dazu einen der Maßstäbe 1:2,5; 1:5; 1:10 oder 1:20.

a) Wie groß müßtest du die Höhe und die Breite eines Tisches im Maßstab 1:2,5 (1:10) zeichnen, wenn die natürliche Höhe 0,80 m und die Breite 1,20 m beträgt?

b) Zeichne im Maßstab 1:20 die Vorderansicht deines Kleiderschrankes und schreibe die wirklichen Maße darunter!

11. Ein Gebäude ist auf der Zeichnung 24 cm lang und 16 cm breit dargestellt. Die Zeichnung ist im Maßstab 1:50 angefertigt. Wie groß ist das Gebäude in Wirklichkeit?

12. Gib die wirkliche Länge der Strecken in der Abbildung 13 an (Maßstab 1:150)!

13. **a)** Zeichne ein Fenster, das 1,50 m hoch und 1,10 m breit ist, im Maßstab 1:10!

b) Zeichne einen rechteckigen Spielplatz, der 138 m lang und 85 m breit ist, im Maßstab 1:500!

14. Ein rechteckiges Wandbild von $6\frac{1}{2}$ m Länge und $4\frac{1}{4}$ m Breite ist im Maßstab 1:50 zu verkleinern. Berechne die Länge, die Breite und die Fläche des verkleinerten Bildes! Wie groß ist die Fläche des Originals?

15. Die Abbildung 14a zeigt den Grundriß einer 3-Zimmer-Wohnung in einem Einzelhaus (Abb. 14b).

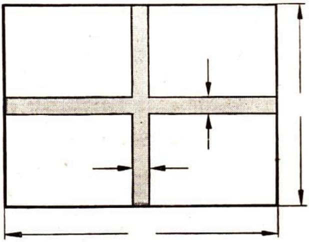


Abb. 13

a) Miß in der Zeichnung nach und gib an, welcher Maßstab der Abbildung 14 zugrunde liegt!

b) Bestimme die wirkliche Länge von Schlafzimmer und Wohnzimmer! Berechne die Breite des Kinderzimmers! (Runde auf zwei Stellen nach dem Komma!) Prüfe den errechneten Wert in der Zeichnung nach!

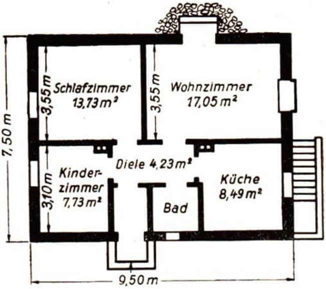


Abb. 14 a

16. Miß Länge und Breite eures Wohnzimmers und fertige einen Grundriß des Zimmers entsprechend der Abbildung 14 an!

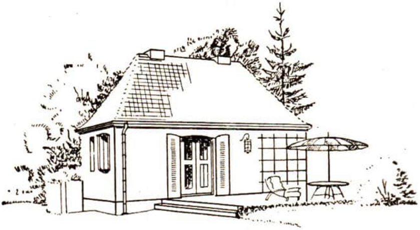


Abb. 14 b

23. Wiederholungsübungen

1. a) 3,8 — 2,5	**b)** 0,3 · 4	**c)** 13,2 — 8,4	**d)** 4,8 : 1,5
+ 0,02	+ 0,8	: 1,2	— 0,08
: 0,6	: 0,4	· 0,7	: 0,4
· 10	— 2,6	+ 2,7	· 0,05
— 11,5	: 0,6	: 0,5	— 0,02
: 5	+ 1,4	— 8,6	· 10
· 0,4	· 0,5	· 5	+ 20,3
+ 2,96	: 9	+ 1,2	: 5

e) 1,2 : 4	**f)** 9,4 + 9,9	**g)** 0,98 : 0,2	**h)** 1,5 — 0,6
· 5	— 2,5	+ 1,03	— 0,02
: 2,5	: 2,4	— 0,53	: 0,11
· 0,6	· 0,14	: 0,3	+ 0,4
+ 0,16	+ 0,02	+ 0,6	: 7
: 1,3	: 2,5	: 0,31	— 0,15

2. a) Zu welcher Zahl muß ich 1,2 addieren, um 3,6 zu erhalten?

b) Von welcher Zahl muß 1,2 subtrahiert werden, damit sich 3,6 ergibt?

c) Mit welcher Zahl muß ich 1,2 multiplizieren, um das Produkt 3,6 zu erhalten?

d) Welche Zahl ergibt durch 1,2 dividiert den Quotienten 3,6?

e) Durch welche Zahl ist 3,6 zu dividieren, damit 1,2 im Ergebnis erscheint?

Wähle selbst zwei Dezimalbrüche und bilde entsprechende Aufgaben zu a) bis e)!

3. Ich denke mir sechs Zahlen ...

a) Wenn ich die erste Zahl durch 2,5 teile, erhalte ich 3,9.

b) Die zweite Zahl mit 3,8 multipliziert ergibt als Produkt 134,5086.

c) Wenn ich zur dritten Zahl 3,79 addiere, fehlen noch 2,86 an 10.

d) Wird das Dreifache der vierten Zahl um 13,9 vermehrt, so ergibt das gerade 100.

e) Wenn man die fünfte Zahl durch 3,7 und dann das Ergebnis durch 0,8 dividiert, erhält man 3,45.

f) Der Unterschied zwischen dem 5,8fachen und dem 5fachen der sechsten Zahl beträgt 3,2.

Nenne die gedachten Zahlen!

4. Miß Länge, Breite und Höhe einer Streichholzschachtel! Berechne **a)** den Rauminhalt der Schachtel und **b)** die Reibefläche!

5. Miß die Länge und die Breite deines Klassenzimmers und berechne die Fußbodenfläche!

6. In der nachstehenden Tabelle sind Flächengröße und Bevölkerungszahlen der Erdteile angegeben.

Erdteil	Größe in km²	Bevölkerung
Europa	10 500 000	565 000 000
Asien	43 800 000	1 496 000 000
Afrika	30 300 000	216 000 000
Nord- und Mittelamerika	24 200 000	239 000 000
Südamerika	17 900 000	124 000 000
Australien	8 600 000	15 000 000

a) Berechne die Bevölkerungsdichte (das ist die durchschnittliche Bevölkerungszahl auf 1 km²) für die einzelnen Erdteile!

b) Berechne die Gesamtbevölkerung der Erde!

7. Bei der Erneuerung eines Sportstadions werden auch die Sprunggruben mit neuem Sand ausgefüllt. Dazu werden 6,5 m^3 Sand benötigt. Ein Kubikmeter Sand wiegt 1,8 t.

a) Wie schwer ist die benötigte Sandmenge?

b) Wie oft müßte ein 3-t-Lastkraftwagen fahren, um den Sand von der Sandgrube in das Stadion zu transportieren?

8. Für einen Schrank mit drei Türen werden 9 Scharniere, das Stück zu 0,42 DM, 2 Schlösser, das Stück zu 1,46 DM, 2 Riegel, das Stück zu 0,24 DM, und 2 Schlüsselschilder, das Stück zu 0,18 DM, gebraucht. Wieviel Mark kosten die Beschläge für den Schrank insgesamt?

9. Für das Schweißen von 8 mm dickem Blech werden in einer Stunde 0,75 m^3 Sauerstoff verbraucht. Wieviel Kubikmeter Sauerstoff werden in 7 Std. benötigt?

10. Eine Gießpfanne für Stahl soll 2,5 t flüssigen Stahl fassen. 1 m^3 Stahl wiegt 7,85 t. Wieviel Kubikmeter muß das Fassungsvermögen der Pfanne betragen? Runde!

11. 234 Hauer in einem Steinkohlenrevier förderten in einer Schicht 1536,5 m^3 Kohle. Wie groß war die durchschnittliche Förderung je Hauer?

12. In einem volkseigenen Gut ist vorgesehen, daß 28,4 ha mit Weizen und 15,9 ha mit Hafer bestellt werden. Für Weizen beträgt der Saatgutbedarf 160 kg je Hektar, bei Hafer 130 kg je Hektar. Berechne die benötigten Saatgutmengen **a)** für Weizen, **b)** für Hafer!

13. Während früher Kartoffeln hauptsächlich mit der Hand ausgelegt wurden, arbeiten heute viele MTS mit Kartoffellegemaschinen. Mit einer Kartoffellegemaschine, die von einer Arbeitskraft bedient wird, können in einer Stunde Kartoffeln auf 0,5 ha gelegt werden. Berechne, in welcher Zeit ein Schlag von 8,5 ha mit Kartoffeln bestellt wird!

14. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft hat 12,4 ha mit Weizen und 15,7 ha mit Roggen bestellt. Sie rechnet mit einem Ertrag von 32 dz Weizen und 28 dz Roggen je Hektar.

a) Welche Einnahmen kann sie erwarten, wenn sie für 1 dz Weizen 21,50 DM und für 1 dz Roggen 21 DM erhält?

b) Bei vorfristiger Ablieferung wird je Doppelzentner 1,80 DM Frühdruschprämie gezahlt. Welche Mehreinnahmen hat die LPG, wenn sie $\frac{3}{4}$ des Getreides vorfristig abliefert?

15. Eine LPG erntet 415 dz Weizen auf 12,8 ha Ackerland. Berechne den Ertrag je Hektar!

16. Eine LPG besitzt 68 Kühe. Man rechnet mit einer Jahresleistung von durchschnittlich 2850 kg Milch je Kuh.
   a) Mit wieviel Kilogramm Milch insgesamt kann die LPG in einem Jahr rechnen?
   b) Die Pflichtablieferungsmenge an Milch beträgt 86000 kg. Für den Eigenverbrauch sowie für die Schweine- und Jungtierhaltung benötigt die LPG 35000 kg Milch. Wieviel Kilogramm Milch bleiben der LPG für den Verkauf als freie Spitze, wenn die Jahresleistung erreicht wird?
   c) Der Grundpreis für 1 kg Milch auf Soll beträgt 0,24 DM. Im Verkauf als freie Spitze wird für 1 kg Milch 0,70 DM gezahlt. Mit welcher Gesamteinnahme kann die LPG durch den Milchverkauf rechnen?

17. Ein Bauer lieferte an den volkseigenen Erfassungs- und Aufkaufbetrieb (VEAB) 16,5 dz Futtergerste, 21,25 dz braufähige Gerste und 19,75 dz Mais.
   Die Erfassungspreise betragen
   für 1 dz Futtergerste .... 22,40 DM,
   für 1 dz braufähige Gerste ... 26,50 DM,
   für 1 dz Mais .... 20,20 DM.
   Wieviel Mark wurden ihm nach der Ablieferung ausgezahlt?

18. Ein volkseigener Erfassungs- und Aufkaufbetrieb hatte in der ersten Oktoberwoche die folgenden Kartoffeleingänge und -ausgänge:

Tag	Eingänge in dz	Ausgänge in dz	Bestand in dz
	—	—	116,0
1. 10. 19...	173,2	195,1	
2. 10. 19...	199,1	207,1	
3. 10. 19...	223,4	232,3	
4. 10. 19...	182,5	178,9	
5. 10. 19...	248,9	227,7	
6. 10. 19...	234,5	219,2	

   a) Wie groß war der Bestand am Ende eines jeden Tages?
   b) Wie hoch waren insgesamt die Kartoffeleingänge und die Kartoffelausgänge?
   c) Wieviel Doppelzentner Kartoffeln wurden durchschnittlich jeden Tag ein- und ausgeliefert?

19. Bei einem Versuch ergab es sich, daß durch das Pflügen der Felder im Herbst (Winterfurche) gegenüber dem Pflügen der Felder im Frühjahr (Frühjahrsfurche) die folgenden Durchschnittserträge auf 1 ha erzielt werden konnten:

Fruchtart	Ernteertrag bei	
	Frühjahrsfurche	Winterfurche
Hafer	21,53 dz	25,37 dz
Gerste	22,12 dz	26,61 dz
Weizen	22,46 dz	25,76 dz

a) Berechne die Ertragssteigerung, die durch die Winterfurche erreicht wurde!

b) Wie groß wäre die Ertragssteigerung auf einem Feld von 2,72 ha (0,93 ha, 4,38 ha)?

20. Bei der Bearbeitung eines Schlages Weizen von 12,5 ha durch die MTS entstanden einer landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaft die folgenden Kosten:

Ziehen der Saatfurche	245,— DM,
Streuen von Dünger	75,— DM,
Eggen mit schwerer Egge ...	37,50 DM,
Drillen	82,50 DM,
Mähdreschen	262,— DM.

a) Berechne die Bearbeitungskosten für 1 ha Weizen!

b) Die LPG erzielte einen Ertrag von 29,2 dz je Hektar. Welche Summe wurde ihr insgesamt bei einem Preis von 21,50 DM je Doppelzentner gezahlt?

C. Geometrie

VII. Achsensymmetrie

24. Einführung in die Achsensymmetrie

Die in den Abbildungen 15 bis 19 dargestellten Gegenstände fallen uns durch eine gewisse Regelmäßigkeit auf. Wir wollen sie näher untersuchen. Dabei stellen wir fest: Diese Figuren bestehen jeweils aus zwei Teilen, die untereinander die gleiche Gestalt und die gleiche Größe haben. Der eine Flügel des Schmetterlings hat zum Beispiel die gleiche Größe und Gestalt wie der andere Flügel. Dasselbe gilt für die beiden Hälften des Blattes und des Scharniers. Wie müßte man die Giebelwand in der Abbildung 19 zerschneiden, damit zwei Teile gleicher Gestalt und Größe entstehen? Beschreibe den ungefähren Verlauf dieser Schnittlinie! Nenne weitere dir bekannte Gegenstände, die die gleichen Eigenschaften haben wie die in den Abbildungen 15 bis 19 dargestellten!

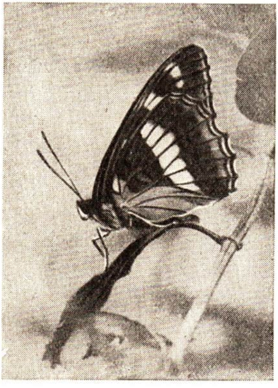


Abb. 15a

Abb. 15b

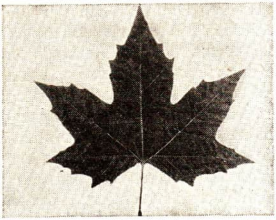


Abb. 16

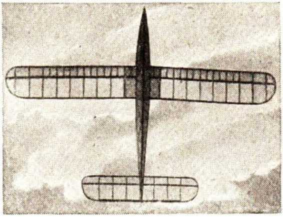


Abb. 17

Die in den Abbildungen 15 bis 18 dargestellten Gegenstände sind in Wirklichkeit Körper. Ihre Abbildungen sind jedoch auf ein ebenes Blatt Papier gedruckt. Sie sind also Figuren in einer Ebene, ebene Figuren. Die Zeichnungen im Heft oder an der Tafel sind auch ebene Figuren. Wir werden uns im folgenden nur mit solchen **ebenen Figuren** beschäftigen.

Wenn ein Schmetterling seine Flügel zusammenklappt, dann decken sie sich (Abb. 15a und b). Beim Scharnier (Abb. 18) decken sich die beiden Teile, wenn wir es um seine Achse zusammenklappen. Auch die Abbildungen 16, 17 und 19 könnten wir so falten, daß sich jeweils die beiden Teile der Figur genau decken. Die Geraden, um die wir die Figuren falten müssen, sind in den Abbildungen allerdings nicht eingezeichnet. Bei der Giebelwand der Abbildung 19 würde diese Faltgerade durch die Spitze des Giebels und durch den Mittelpunkt der Grundlinie verlaufen (Abb. 20).

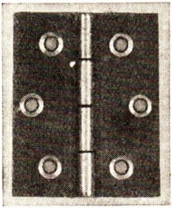


Abb. 18

Wir pausen die Abbildung 20 auf ein dünnes

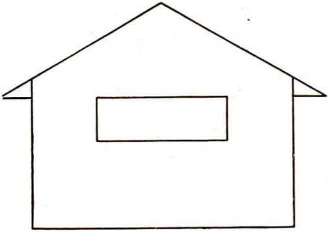


Abb. 19

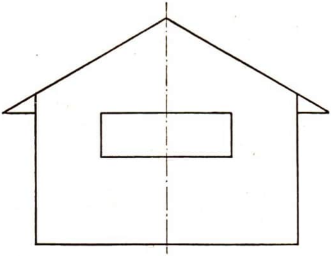


Abb. 20

Abb. 21

Blatt Papier. Dann drehen wir die rechte Hälfte um die eingezeichnete Gerade herum, bis sie auf der anderen Hälfte liegt. Wir stellen fest, daß sich die beiden Teile der Figur vollständig decken. Durch dieses Umklappen gewinnen wir sogar erst die Gewißheit, daß die beiden Teile der Figur gleiche Gestalt und gleiche Größe haben. Bei oberflächlicher Betrachtung können nämlich geringfügige Abweichungen leicht übersehen werden.

Beschreibe den ungefähren Verlauf der Faltgeraden in den Abbildungen 16, 17 und 21! (Die Abbildung 21 zeigt ein Hochhaus in Berlin.)

Aufgaben

1. Versuche die Giebelwand eines Hauses ähnlich der Abbildung 19 zu zeichnen! Halbiere mit dem Lineal die Grundlinie! Zeichne eine Gerade durch die Spitze des Giebels und durch den Mittelpunkt der Grundlinie! Schneide die Figur aus und klappe sie um die Gerade zusammen! Prüfe, ob sich die beiden Teile decken!

2. Zeichne mit dem Zirkel einen Kreis! Zeichne dann durch den Mittelpunkt des Kreises eine Gerade! Schneide den Kreis sorgfältig aus und klappe ihn um die Gerade zusammen! Prüfe, ob sich die Teile decken!

3. Zeichne unter Verwendung von Lineal und Zeichendreieck **a)** ein Quadrat, **b)** ein Rechteck!
Halbiere mit dem Lineal die Seiten und verbinde die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten miteinander! Schneide die Figuren aus und klappe sie um die Geraden zusammen! Prüfe, ob sich die Teile decken!

Wenn man einen Teil einer ebenen Figur um eine Gerade dreht, bis er auf dem anderen Teil liegt, führt man eine Bewegung aus, die man **Umklappung** nennt. Der Drehwinkel beträgt dabei 180°.

Ebene Figuren mit Eigenschaften, wie sie die Abbildungen 15 bis 21 zeigen, nennt man spiegelgleich oder **achsensymmetrisch**. Diese Figuren haben also die folgenden Eigenschaften:

1. Sie bestehen aus zwei Teilen, die die gleiche Gestalt und die gleiche Größe haben.
2. Man kann eine Gerade so einzeichnen, daß sich die beiden Teile der Figur beim Umklappen um diese Gerade genau decken. Diese Gerade wird **Symmetrieachse** genannt.

Erklärung: **Wenn eine Figur in zwei Teilfiguren zerlegt werden kann, die sich beim Umklappen um eine Gerade vollständig decken, nennt man diese Figur achsensymmetrisch. Die Gerade heißt Symmetrieachse.**

Die Abbildungen 22 (chinesischer Scherenschnitt) und 23 zeigen jeweils zwei voneinander getrennte Figuren. Diese haben untereinander gleiche Gestalt und gleiche Größe. Es läßt sich eine Gerade zeichnen, die so verläuft, daß sich beim Umklappen um sie die beiden Figuren genau decken. In der Abbildung 23 ist diese Gerade bereits eingezeichnet. Welchen Verlauf müßte die entsprechende Gerade in der Abbildung 22 haben?

Solche Figuren nennt man **achsensymmetrisch zueinander.**

Erklärung: **Wenn sich zwei Figuren beim Umklappen um eine Gerade genau decken, nennt man sie achsensymmetrisch zueinander.**

Auch für Punkte können wir die Achsensymmetrie erklären.

Erklärung: **Wenn sich zwei Punkte beim Umklappen um eine Gerade decken, nennt man sie achsensymmetrisch zueinander.**

Wie stellen wir nun fest, ob eine Figur achsensymmetrisch ist oder ob zwei Figuren achsensymmetrisch zueinander sind? Wir müssen in jedem Fall die Symmetrieachse suchen. Zunächst versuchen wir, die Symmetrieachse durch Probieren zu finden. Später werden wir lernen, wie man die Symmetrieachse konstruieren kann.

Wir pausen die Umrisse der Figur, die wir untersuchen wollen, auf durchsichtiges Papier. Bei geradlinig begrenzten Figuren können wir auch die Eckpunkte durchstechen und die so gefundenen Punkte miteinander verbinden. Dann versuchen wir das Blatt Papier so zu falten, daß die Faltgerade die Figur in zwei einander gleiche Teile teilt, die sich beim Falten decken. Gelingt uns das, so ist die Faltgerade die Symmetrieachse, und die Figur ist achsensymmetrisch.

Abb. 22

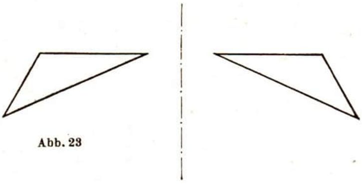


Abb. 23

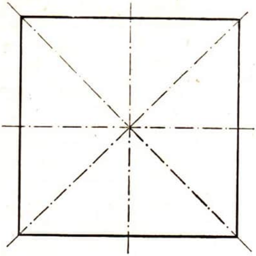


Abb. 24

Es gibt auch Figuren mit mehreren Symmetrieachsen, wie zum Beispiel das Quadrat in der Abbildung 24. Wir werden noch andere Figuren mit mehreren Symmetrieachsen kennenlernen.

Aufgaben

4. Pause die Abbildung 24 mit den Symmetrieachsen auf ein durchsichtiges Blatt Papier! Schneide das Quadrat aus und falte es um die Symmetrieachsen! Prüfe, ob sich die Teile der Figuren wirklich decken! Welche Figuren entstehen durch das Falten?
5. Übertrage die Abbildungen **a)** 25, **b)** 26, **c)** 27, **d)** 28, **e)** 29, **f)** 30 auf durchsichtiges Papier, indem du die Eckpunkte durchstichst! Suche durch Falten die Symmetrieachsen und zeichne sie ein!
6. Pause die Abbildung 31 auf durchsichtiges Papier! Suche eine Symmetrieachse und zeichne sie ein!

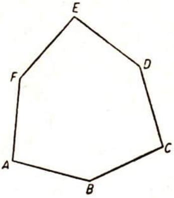


Abb. 25

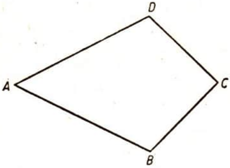


Abb. 26

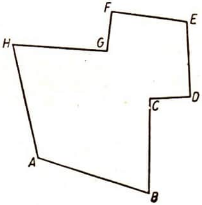


Abb. 27

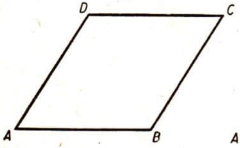


Abb. 28

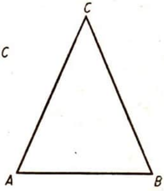


Abb. 29

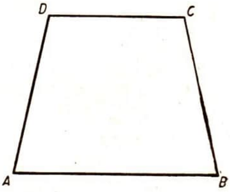


Abb. 30

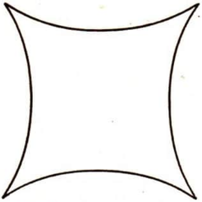


Abb. 31

7. Wieviel Symmetrieachsen besitzt ein Rechteck?

8. Wieviel Symmetrieachsen kann man in einen Kreis einzeichnen?

9. Stelle fest, welche der Abbildungen 25 bis 31 mehrere Symmetrieachsen besitzt! Zeichne sie ein!

10. Suche bei dem in Abbildung 32 dargestellten Scherenschnitt die Symmetrieachsen! Wieviel sind es?

11. Nenne Gegenstände aus dem Klassenzimmer, an denen Achsensymmetrie auftritt!

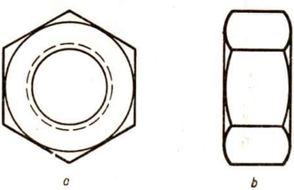
12. Nenne Gegenstände aus Natur und Technik, bei denen Achsensymmetrie auftritt!

13. a) Die Abbildung 33 (a und b) zeigt eine Sechskantmutter von oben und von der Seite gesehen. Untersuche die Zeichnungen auf Achsensymmetrie und zeichne die Symmetrieachsen ein!

b) Die Abbildung 34 (a und b) zeigt eine Flügelmutter von der Seite und von oben gesehen. Ist bei den Zeichnungen Achsensymmetrie erkennbar? Zeichne die Symmetrieachsen ein!

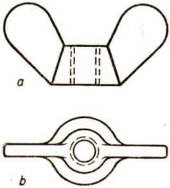
Abb. 32

Wir wollen uns nun achsensymmetrische Figuren selbst herstellen. Wir zeichnen zunächst einen Teil der Figur und die Symmetrieachse. Damit wir den anderen Teil der Figur erhalten, der zu dem bereits gezeichneten achsensymmetrisch ist, können wir verschiedene Verfahren anwenden. Zunächst falten wir das Blatt um die Symmetrieachse. Dann wird die Teilfigur entweder durchgepaust oder die Eckpunkte werden mit einer Stecknadel



a b

Abb. 33 a und b



b

Abb. 34 a und b

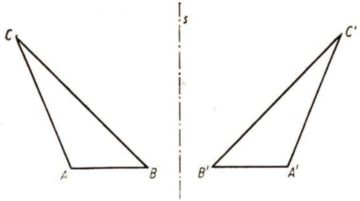


Abb. 35

durchstochen. Es ist auch möglich, die zuerst gezeichnete Teilfigur auszuschneiden und nach dem Umklappen an den Rändern nachzuzeichnen. Wir erhalten so den zweiten Teil der Figur, der zu dem ersten Teil achsensymmetrisch ist. Die ganze Figur ist dann ebenfalls achsensymmetrisch.

Auf die gleiche Art können wir auch zwei Figuren oder Punkte zeichnen, die achsensymmetrisch zueinander sind. Die Abbildung 35 zeigt zwei zueinander achsensymmetrische Dreiecke. Die Symmetrieachse ist die Gerade s.

Auch hier wurden zunächst das Dreieck ABC und die Symmetrieache s gezeichnet. Dann wurde das Blatt um s gefaltet und die Eckpunkte auf die rechte Hälfte des Blattes übertragen. So entstand das Dreieck $B'A'C'$, das zu dem Dreieck ABC achsensymmetrisch ist. Aus der Abbildung wird auch deutlich, daß zueinander achsensymmetrische Figuren seitenvertauscht sind. Bei dem Dreieck ABC liegt der Punkt A links vom Punkt B, bei dem Dreieck $A'B'C'$ liegt der Punkt A' rechts vom Punkt B'.

Ähnlich ist es bei uns und unserem Spiegelbild. Wenn man vor dem Spiegel steht und den rechten Arm hebt, dann hebt unser Spiegelbild den linken Arm. Prüfe das nach! Wenn sich ein am Ufer stehender Gegenstand im Wasser spiegelt, dann steht er im Spiegelbild kopf (vgl. Abb. 36, Messepavillon in Moskau).

Abb. 36

Nenne weitere Beispiele solcher Spiegelungen!

Die Abbildung 37 zeigt eine achsensymmetrische Figur, die man ganz einfach herstellen kann. Man faltet ein Blatt Papier. Durch die Faltgerade entstehen auf dem Blatt Papier zwei Teilebenen. Auf den einen Teil des Blattes spritzt man einige Tintenkleckse. Dann faltet man das Blatt um die Faltgerade und drückt dabei die noch feuchten Tintenkleckse breit.

Aufgaben

Die Aufgaben 14 bis 19 sollen nach dem Umklappen um die Symmetrieachse durch Abpausen oder Durchstechen gelöst werden.

14. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und außerhalb des Dreiecks die Symmetrieachse s! Stelle das Dreieck her, das zum Dreieck ABC achsensymmetrisch ist!

15. Zeichne eine achsensymmetrische Giebelwand!

16. a) Entwirf ein achsensymmetrisches Gitter! Anregungen erhältst du aus der Abbildung 38.

b) Entwirf die achsensymmetrische Vorderansicht eines Futterhäuschens!

17. Zeichne die großen Druckbuchstaben A, E, D, O, M, Z! Zeichne die Spiegelbilder dieser Buchstaben!

18. Entwirf ein achsensymmetrisches Muster!

19. Zeichne einen Schmetterling!

20. Zeichne einen Punkt P und eine Symmetrieachse s! Suche den zu P achsensymmetrischen Punkt P'!

Abb. 37

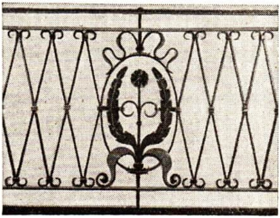


Abb. 38

21. Zeichne eine Strecke AB und eine Symmetrieachse s! Zeichne die zu AB achsensymmetrische Strecke $A'B'$!

22. Stelle eine Figur ähnlich der in Abbildung 37 her! (Vorsichtig mit der Tinte umgehen, nichts beschmutzen!)

23. Fertige einen achsensymmetrischen Scherenschnitt an!

25. Eigenschaften der Achsensymmetrie

Wir wollen nun die Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren genauer untersuchen. Dazu bauen wir uns ein Modell: Auf ein Stück Karton zeichnen wir eine Gerade s. Wir falten den Karton um diese Gerade und durch-

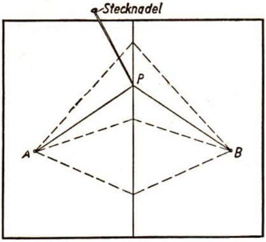


Abb. 39

bohren beide Teile des Kartons mit einem Stich. So erhalten wir zwei zueinander achsensymmetrische Punkte, die wir mit A und B bezeichnen. Die Symmetrieachse ist die Gerade s. Durch die beiden Löcher ziehen wir von oben her je ein Ende eines Gummifadens; diese Enden verknoten wir so, daß der Faden gespannt ist. Führen wir jetzt eine Stecknadel auf der Faltgeraden entlang, so wird der Gummifaden durch die Stecknadel verschoben (Abb. 39).

Wir wollen einige Messungen an dem Modell durchführen. Befestige den Gummifaden mit der Nadel in einem Punkt der Symmetrieachse und bezeichne diesen Punkt mit P! Miß die Länge des Gummifadens zwischen A und P und zwischen B und P! Vergleiche beide Längen miteinander! Führe die gleichen Messungen auch noch für andere Lagen des Punktes P oberhalb und unterhalb der Verbindungsstrecke AB durch! Vergleiche auch hier jeweils die Längen AP und BP! Was stellst du stets fest?

Durchbohre nun das Modell an einer anderen Stelle und ziehe den Gummifaden, wie oben beschrieben, durch die neuen Löcher! Du erhältst zwei weitere Punkte, die zueinander achsensymmetrisch sind. Die Symmetrieachse ist wieder die Faltgerade s. Führe auch hier die gleichen Messungen wie für die Punkte A, B und P durch!

Wir stellen fest: In allen Fällen ist $AP = BP$.

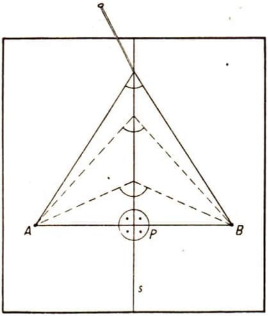


Abb. 40

Zu derselben Feststellung können wir auch durch das Umklappen kommen. Wir zeichnen auf durchsichtiges Papier zwei zueinander achsensymmetrische Punkte und ihre Symmetrieachse. Von verschiedenen Punkten der Symmetrieachse zeichnen wir die Verbindungsstrecken zu den achsensymmetrischen Punkten. Die zusammengehörenden Verbindungsstrecken decken sich beim Umklappen. Sie sind also gleichlang.

Satz 1: Die Abstände eines Punktes der Symmetrieachse von den beiden symmetrischen Punkten sind einander gleich.

An der Zeichnung auf durchsichtigem Papier führen wir weitere Messungen durch. Miß für die verschiedenen Lagen von P die Winkel, die von den Strecken PA und PB mit der Faltgeraden gebildet werden! Vergleiche ihre Größe! Klappe die Zeichnung auf dem durchsichtigen Papier zusammen. Was kannst du über die Größe der Winkel sagen, die von der Symmetrieachse und den Verbindungsstrecken eingeschlossen werden?

Satz 2: Verbindet man einen Punkt der Symmetrieachse mit den beiden symmetrischen Punkten, so schließen die Verbindungsstrecken mit der Achse einander gleiche Winkel ein.

Wir lassen jetzt an unserem Modell die Stecknadel von oben nach unten wandern. Je weiter wir dabei nach unten kommen, um so kürzer wird der Gummifaden. Das bedeutet, daß die Verbindungsstrecken zwischen P und den symmetrischen Punkten A und B immer kürzer werden. Die Winkel an der Symmetrieachse werden dagegen immer größer (Abb. 40). Prüfe das mit dem Lineal beziehungsweise mit dem Winkelmesser nach!

Schließlich kommen wir zu einer Stelle, an der der Faden zwischen den Punkten A und B eine gerade Linie bildet. Jetzt können wir die Stecknadel sogar wegnehmen, ohne daß der Gummifaden seine Lage ändert. Auch in dieser Stellung sind die Strecken AP und BP einander gleich. Das bedeutet, daß die Verbindungsstrecke AB durch die Symmetrieachse halbiert wird. Auch die Winkel an der Achse sind in dieser Stellung einander gleich. Sie bilden zusammen einen gestreckten Winkel, also einen Winkel von 180°. Demnach ist jeder von ihnen 90° groß. Das bedeutet, daß die Symmetrieachse auf der Verbindungsstrecke AB senkrecht steht. Prüfe mit dem Winkelmesser!

Satz 3: Die Symmetrieachse halbiert die Verbindungsstrecke symmetrischer Punkte und steht auf ihr senkrecht.

Zeichne zwei Punkte A und B! Falte das Blatt Papier so, daß sich die Punkte decken! Die Faltgerade ist die Symmetrieachse zu den Punkten A und B. Wie diese auch liegen mögen, wir können immer eine Symmetrieachse finden. Zu zwei Punkten gibt es also immer eine Symmetrieachse.

Gibt es zu diesen beiden Punkten vielleicht noch weitere Symmetrieachsen? Alle Versuche, eine zweite, von der ersten verschiedene Symmetrieachse zu A und B zu finden, mißlingen. Wir stellen also fest, daß es zu zwei Punkten nur e i n e Symmetrieachse gibt. Wir wissen nun, daß es zu zwei Punkten **immer** eine Symmetrieachse gibt, daß aber stets **nur eine** vorhanden ist. Dafür sagen wir dann:

Satz 4: Zu zwei Punkten gibt es g e n a u e i n e Symmetrieachse.

Wir haben mit dem Satz 1 festgestellt, daß die Abstände eines Punktes der Symmetrieachse von den beiden symmetrischen Punkten einander gleich sind. Gibt es nun noch andere Punkte außerhalb der Symmetrieachse, deren Abstände von den beiden symmetrischen Punkten ebenfalls einander gleich sind? Alle Versuche, solche Punkte außerhalb der Symmetrieachse zu finden, schlagen fehl. Punkte mit dieser Eigenschaft gibt es außerhalb der Symmetrieachse nicht. Wir können deshalb sagen:

Satz 5: Wenn ein Punkt von zwei Punkten gleichweit entfernt ist, liegt er auf der Symmetrieachse zu diesen Punkten.

26. Konstruktionen

Wir haben bisher häufig die Aufgabe gestellt, zu zwei symmetrischen Figuren die Symmetrieachse zu finden oder achsensymmetrische Figuren herzustellen. Diese Aufgabe wurde durch Falten, Durchstechen, Pausen usw. gelöst. Wir werden jetzt diese Aufgabe durch Konstruktionen mit Hilfe des Zirkels lösen und dabei das bisher Gelernte anwenden.

Aufgabe 1: Zwei Punkte A und B sind bereits gezeichnet. Konstruiere die Symmetrieachse!

A und B sind die gegebenen Punkte (Abb. 41). Damit wir die Symmetrieachse erhalten, genügt es, zwei ihrer Punkte zu konstruieren. Wir haben schon gelernt, daß zwei Punkte eine Gerade bestimmen. Wir wissen, daß jeder Punkt, der von A und B gleichweit entfernt ist, auf der Symmetrieachse liegt (Satz 5).

Wir brauchen also nur zwei Punkte zu konstruieren, deren Abstände von A und B einander gleich sind. Dazu schlagen wir um A und B Kreise mit gleichem Radius, die einander in den Punkten P_1 und P_2 schneiden. (Damit die Kreise einander schneiden, muß der Radius größer sein als die halbe Strecke AB.) Die Schnittpunkte P_1 und P_2 liegen auf beiden Kreisen. Da alle Punkte einer Kreislinie vom Mittelpunkt gleichweit entfernt liegen, sind P_1 und P_2 sowohl von A als auch von B gleichweit entfernt. Die Gerade durch die Schnittpunkte P_1 und P_2 ist also die Symmetrieachse zu den Punkten A und B.

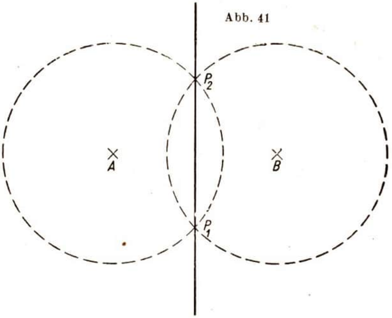


Abb. 41

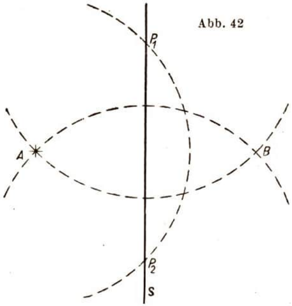


Abb. 42

Anmerkung: Es ist nicht notwendig, die Kreislinien stets voll auszuzeichnen. Es genügt, die benötigten Teile der Kreislinie,. also Kreisbogen, zu zeichnen.

Zu den Konstruktionsaufgaben ist in Zukunft stets eine Konstruktionsbeschreibung zu geben. Sie muß die wichtigsten Schritte der Konstruktion darlegen und lautet für die Aufgabe 1 etwa folgendermaßen:

Konstruktionsbeschreibung: Ich schlage um A und B Kreisbogen mit dem gleichen Radius. Sie schneiden einander in P_1 und P_2. Ich zeichne eine Gerade durch P_1 und P_2 und erhalte damit die verlangte Symmetrieachse zu den Punkten A und B.

Aufgabe 2: Ein Punkt A und eine Symmetrieachse s sind schon gezeichnet. Konstruiere den zu A symmetrischen Punkt B!

A ist der gegebene Punkt und s die gegebene Symmetrieachse (Abb. 42). Wir zeichnen um A mit einem genügend großen Radius einen Kreisbogen. Dieser schneidet die Symmetrieachse s in den Punkten P_1 und P_2. Der gesuchte Punkt B muß von P_1 und von P_2 genauso weit entfernt sein wie der Punkt A (Satz 1). Wir schlagen daher mit unverändertem Radius um P_1 und P_2 Kreisbogen. Sie gehen einmal beide durch den Punkt A. Außerdem schneiden sie sich auf der anderen Seite der Symmetrieachse in einem zweiten Punkt. Dieser ist der gesuchte Punkt B; denn er ist von P_1 und P_2 genauso weit entfernt wie der Punkt A. Punkt B ist also zu Punkt A achsensymmetrisch.

Konstruktionsbeschreibung: Ich schlage um A einen Kreisbogen, der die Gerade s in den Punkten P_1 und P_2 schneidet. Mit gleichem Radius schlage ich um P_1 und P_2 Kreisbogen, die einander außer in A noch in B schneiden. B ist der gesuchte Punkt, der zu A achsensymmetrisch ist.

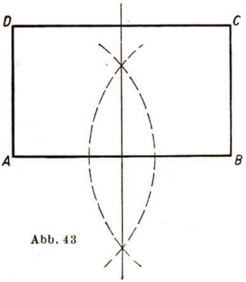


Abb. 43

Wir können nun auch bei achsensymmetrischen Figuren die Symmetrieachse konstruieren. Wir brauchen nur zwei zueinander symmetrische Punkte auszuwählen und zu ihnen die Symmetrieachse zu zeichnen.

Beispiel: Konstruiere eine Symmetrieachse eines Rechtecks (vgl. Abb. 43)!

Lösung: Wir zeichnen das Rechteck $ABCD$ unter Verwendung von Lineal und Zeichendreieck (Abb. 43). Wollen wir eine Symmetrieachse des Rechtecks zeichnen, genügt es, die Symmetrieachse zu den Punkten A und B zu konstruieren. Die Konstruktion wurde bereits in der Aufgabe 1 beschrieben.

Aufgaben

Alle folgenden Aufgaben sollen unter Verwendung des Zirkels gelöst werden. Es ist jedesmal eine Konstruktionsbeschreibung zu geben.

1. Zeichne zwei Punkte D und E! Konstruiere die Symmetrieachse!

2. Zeichne einen Punkt P_1 und eine Symmetrieachse s! Konstruiere den zu P_1 symmetrischen Punkt P_2!

3. Zeichne eine Strecke GH von **a)** 6 cm, **b)** 5,3 cm, **c)** 7,8 cm Länge! Konstruiere die Symmetrieachse zu den Endpunkten!

4. Übertrage die Abbildungen **a)** 25, **b)** 26, **c)** 27, **d)** 29, indem du die Eckpunkte auf eine Seite deines Heftes durchstichst! Konstruiere die Symmetrieachsen der Figuren!

   Anleitung: Zu a) Konstruiere die Symmetrieachse zu A und C!
   Zu b) Konstruiere die Symmetrieachse zu B und D!
   Zu c) Konstruiere die Symmetrieachse zu H und B!
   Zu d) Konstruiere die Symmetrieachse zu A und B!

5. Zeichne mit Lineal und Zeichendreieck ein Rechteck $ABCD$! Konstruiere die beiden Symmetrieachsen!

   Anleitung: Konstruiere zunächst die Symmetrieachse zu den Punkten A und B und dann die Symmetrieachse zu den Punkten B und C!

6. Übertrage die Abbildung 30 auf eine Seite deines Heftes! (Durchstechen der Eckpunkte!) Konstruiere die Symmetrieachse zu den Punkten A und B!

7. Zeichne einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und eine Symmetrieachse s, die nicht durch M geht! Konstruiere den Kreis, der zu dem gegebenen symmetrisch ist!

   Anleitung: Konstruiere zunächst den zu M symmetrischen Punkt M_1! Schlage um M_1 einen Kreis mit dem Radius des gegebenen Kreises!

8. Entwirf eine Hälfte eines achsensymmetrischen Dachgiebels! Konstruiere die andere Hälfte!

   Anleitung: Konstruiere die Eckpunkte!

9. Entwirf eine Hälfte des Planes einer achsensymmetrischen Gartenanlage! Konstruiere die andere Hälfte!

27. Grundkonstruktionen

In diesem Kapitel werden wir fünf wichtige Konstruktionen kennenlernen, die die Grundlage für das gesamte geometrische Zeichnen bilden. Man nennt sie deshalb auch **geometrische Grundkonstruktionen.** Einige von ihnen haben wir schon im 5. Schuljahr mit Lineal und Zeichendreieck ausgeführt. Nun sollen die Konstruktionen — wenn es nicht ausdrücklich anders verlangt wird — nur mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden.

1. Grundkonstruktion:

Aufgabe: Halbiere eine gegebene Strecke AB!

Wir wissen bereits, daß die Symmetrieachse die Verbindungsstrecke symmetrischer Punkte halbiert (Satz 3). Wir konstruieren daher die Symmetrieachse zu den Endpunkten der gegebenen Strecke AB. (Die Konstruktionsbeschreibung zu einer solchen Aufgabe haben wir schon bei der Aufgabe 1, Seite 117, erarbeitet.)

2. Grundkonstruktion:

Aufgabe: Errichte im Mittelpunkt einer gegebenen Strecke die Senkrechte (Konstruktion der **Mittelsenkrechten** einer gegebenen Strecke)!

Wir wenden wieder Satz 3 an, der aussagt, daß die Symmetrieachse zweier Punkte deren Verbindungsstrecke halbiert und auf ihr senkrecht steht. Wir konstruieren also die Symmetrieachse zu den Endpunkten der Strecke AB. (Die Konstruktionsbeschreibung zur Aufgabe 1, Seite 117, findet auch hier Anwendung.)

3. Grundkonstruktion:

Aufgabe: Halbiere einen gegebenen Winkel (vgl. Abb. 44)!

Wenn wir um den Scheitelpunkt S des Winkels α einen Kreisbogen schlagen, schneidet dieser die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B. Da alle Punkte eines Kreisbogens vom Mittelpunkt gleichweit entfernt sind, müssen auch A und B von S gleichweit entfernt sein ($SA = SB$). Wir konstruieren nun die Symmetrieachse zu den Punkten A und B. Sie muß durch den Scheitel S gehen; denn auch S ist ein Punkt, der von A und B gleichweit entfernt ist. Solche Punkte liegen aber alle auf der Symmetrieachse (Satz 5). Wir wissen ferner, daß an der Symmetrieachse einander gleiche Winkel entstehen, wenn ein Punkt der Symmetrieachse mit den symmetrischen Punkten verbunden wird (Satz 2). Folglich bilden

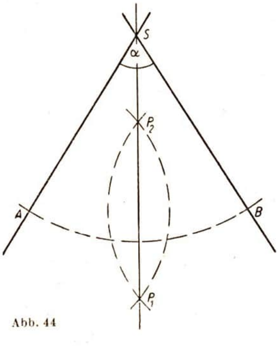


Abb. 44

auch die Schenkel des gegebenen Winkels mit der Symmetrieachse einander gleiche Winkel. Die Symmetrieachse halbiert also den gegebenen Winkel.

Konstruktionsbeschreibung: Ich schlage um den Scheitelpunkt S des gegebenen Winkels einen Kreisbogen, der die beiden Schenkel in den Punkten A und B schneidet. Um A und B schlage ich mit gleichen Radien Kreisbogen, die sich in P_1 und P_2 schneiden. Ich verbinde P_1 mit P_2 und erhalte die Gerade, die den gegebenen Winkel halbiert.

Diese Gerade wird auch **Winkelhalbierende** genannt.

4. Grundkonstruktion:

Aufgabe: Fälle das Lot von einem gegebenen Punkt P auf eine gegebene Gerade g (Konstruktion des Lotes von P auf g)!

Wenn wir mit genügend großem Radius um P einen Kreisbogen schlagen, schneidet dieser die Gerade g in den Punkten A und B. Beide Punkte haben von P den gleichen Abstand, weil sie auf demselben Kreisbogen um P liegen. Wir konstruieren nun die Symmetrieachse zu den Punkten A und B. Diese muß durch den Punkt P gehen; denn alle Punkte, deren Abstände von den beiden Punkten einander gleich sind, liegen auf der Symmetrieachse zu diesen Punkten (Satz 5). Sie steht außerdem auf der Verbindungsstrecke der symmetrischen Punkte senkrecht (Satz 3). Die Symmetrieachse ist also das gesuchte Lot von P auf g (Abb. 45). Der Schnittpunkt des Lotes mit der Geraden wird Fußpunkt des Lotes genannt.

Konstruktionsbeschreibung: Ich schlage um P einen Kreisbogen, der die Gerade g in den Punkten A und B schneidet. Mit gleichen Radien schlage ich um A und B Kreisbogen, die einander in P und P_1 schneiden. Ich verbinde P_1 mit P und erhalte das verlangte Lot von P auf g.

Prüfe die Konstruktion mit dem Zeichendreieck oder mit dem Winkelmesser nach!

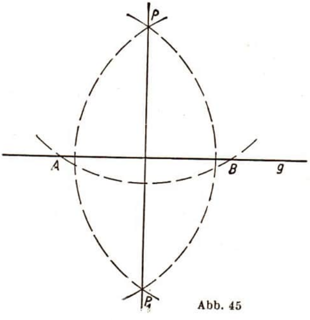


Abb. 45

5. Grundkonstruktion:

Aufgabe: Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr der Punkt P. Konstruiere die Gerade, die in P auf g senkrecht steht (Konstruktion der Senkrechten in P auf g)!

Auch diese Aufgabe können wir durch die Konstruktion einer Symmetrieachse lösen. Wenn wir um P mit einem beliebigen Radius einen Kreisbogen schlagen, so erhalten wir auf der Geraden g zwei Punkte A und B. Der Punkt P liegt in der Mitte der Strecke AB. Wir müssen nun die Symmetrieachse zu den Punkten A und B konstruieren. Diese geht dann durch P und steht auf der Geraden g senkrecht (Satz 3). Sie ist also die gesuchte Senkrechte (Abb. 46).

Konstruktionsbeschreibung: Ich schlage um P einen Kreisbogen, der die Gerade g in den Punkten A und B schneidet. Um A und B schlage ich Kreisbogen, die den gleichen Radius haben. Sie schneiden sich in P_1 und P_2. Ich verbinde P_1 mit P_2 und erhalte die verlangte Senkrechte auf g in P.

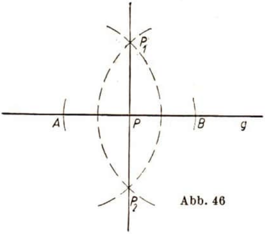


Abb. 46

Aufgaben

Zu den folgenden Konstruktionsaufgaben ist stets eine Konstruktionsbeschreibung zu geben.

1. Halbiere eine Strecke **a)** $AB = 8\,\text{cm}$, **b)** $AC = 0{,}3\,\text{dm}$, **c)** $AD = 4{,}8\,\text{cm}$, **d)** $BC = 10{,}4\,\text{cm}$, **e)** $BD = 83\,\text{mm}$, **f)** $CD = 67\,\text{mm}$! Kontrolliere die Konstruktion mit dem Lineal!

2. Halbiere einen Winkel von **a)** 90°, **b)** 180°, **c)** 50°, **d)** 30°, **e)** 135°, **f)** 88°! Kontrolliere mit dem Winkelmesser!

3. Zeichne eine Gerade g und einen Punkt Q außerhalb der Geraden! Fälle von Q das Lot auf die Gerade g! Kontrolliere mit dem Zeichendreieck!

4. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und fälle von jedem Eckpunkt das Lot auf die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung! Kontrolliere mit dem Zeichendreieck!

5. Zeichne ein beliebiges Dreieck EFG und konstruiere die drei Winkelhalbierenden! Kontrolliere mit dem Winkelmesser!

6. Zeichne ein beliebiges Dreieck DEF und konstruiere die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten!

7. Teile eine gegebene Strecke AB in **a)** 2, **b)** 4, **c)** 8 gleiche Teile!

8. Konstruiere Winkel von **a)** 45°, **b)** 135°, **c)** 22,5°, **d)** 67,5°! Prüfe die Konstruktion mit dem Winkelmesser nach!
   Anleitung: Fälle von einem Punkt auf eine Gerade das Lot und gehe von dem entstehenden rechten Winkel aus!

9. Überlege, welche der 5 Grundkonstruktionen sich auch mit dem Zeichendreieck ausführen lassen! Untersuche, ob man mit dem Zirkel oder mit dem Zeichendreieck schneller zum Ziel kommt!

10. Zeichne eine Strecke $AB = 6$ cm! Konstruiere in den Endpunkten A und B die Senkrechten auf der Strecke!

Anleitung: Verlängere die Strecke AB über beide Endpunkte hinaus! Verfahre dann so, wie es bei der 5. Grundkonstruktion beschrieben wurde!

11. Konstruiere ein Rechteck von 6 cm Länge und 4 cm Breite

a) unter Verwendung von Zirkel und Lineal,
b) mit Hilfe des Zeichendreiecks!

12. Konstruiere unter Verwendung von Zirkel und Lineal Rechtecke mit den Seiten **a)** 4 cm und 3 cm, **b)** 6 cm und 2 cm, **c)** 5 cm und 7 cm, **d)** 3,5 cm und 5 cm, **e)** 2,8 cm und 7,4 cm!

13. Konstruiere mit Hilfe von Zirkel und Lineal Quadrate mit den Seitenlängen von **a)** 2 cm, **b)** 2,5 cm, **c)** 3,4 cm, **d)** 4,8 cm, **e)** 5,2 cm!

14. Konstruiere in dem Rechteck der Aufgabe 11 die Winkelhalbierenden!

15. Zeichne eine Gerade g! Konstruiere die Parallele zu der Geraden g im Abstand von **a)** 2 cm, **b)** 3,5 cm, **c)** 4,7 cm, **d)** 5 cm unter Verwendung von Zirkel und Lineal!

Anleitung: Zeichne zunächst die Gerade g! Nimm einen Punkt auf der Geraden an und errichte in ihm auf g die Senkrechte! Auf der Senkrechten trage mit dem Zirkel den gegebenen Abstand ab! Errichte in dem Endpunkt wiederum die Senkrechte!

16. Im Werkunterricht wird für den Geometrieunterricht das Modell eines Quaders gebaut. Grund- und Deckfläche sind Quadrate mit 4 cm Seitenlänge. Die übrigen Kanten sind 7 cm lang. Fertige die Konstruktionszeichnung an! Konstruiere die Grundfläche und die Seitenflächen mit Hilfe von **a)** Lineal und Zeichendreieck, **b)** Zirkel und Lineal!

17. Auf einem Werkstück befinden sich zwei Bohrungen A und B, deren Abstand 5 cm beträgt.

a) Eine dritte Bohrung C soll im Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von A und B angebracht werden.
b) Im anderen Fall soll die dritte Bohrung C von A und B gleichweit entfernt sein und von der Verbindungsstrecke AB einen Abstand von 2,5 cm haben.
Fertige die Konstruktionszeichnungen an!

Anleitung zu b: Konstruiere die Mittelsenkrechte zu AB und trage auf ihr die Entfernung von 2,5 cm ab!

18. Wir wollen im Werkunterricht ein Schlüsselbrett für drei Schlüssel bauen. Die Fläche des Brettes soll ein Rechteck mit den Seitenlängen

13 cm und 8 cm sein. Auf dem Brett sollen drei Haken in einer Reihe gleichmäßig angebracht werden. Sie sollen von der oberen Kante 2 cm entfernt sein. Fertige die Konstruktionszeichnung an!

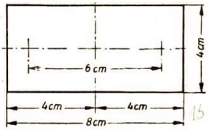


Abb. 47

Anleitung: Konstruiere unter Verwendung von Lineal und Zeichendreieck das Rechteck und die Strecke mit dem Abstand 2 cm von der oberen Seite des Rechtecks! Teile diese Strecke mit Zirkel und Lineal in vier gleiche Teile!

19. Die Flächen der beiden Teile eines Scharniers sind Rechtecke von 8 cm Länge und 4 cm Breite. In jeden Teil sollen drei Löcher gebohrt werden. Entnimm der Abbildung 47 die Maße und fertige die Konstruktionszeichnung für einen Teil des Scharniers an!

Anleitung: Konstruiere das Rechteck unter Verwendung von Lineal und Zeichendreieck! Führe die weitere Konstruktion mit Zirkel und Lineal durch!

20. In ein Brett sollen sieben Löcher für elektrische Kontakte gebohrt werden. Die Fläche des Brettes ist ein Rechteck von 12 cm Länge und 5 cm Breite. Die Löcher sollen gleichmäßig auf der Mittelsenkrechten der kleineren Seite verteilt sein. Fertige die Konstruktion an!

Anleitung: Zeichne zunächst mit Hilfe von Lineal und Zeichendreieck das Rechteck! Konstruiere dann mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte der kleineren Seite und teile sie in acht gleiche Teile!

21. Es soll ein Nagelkasten mit acht gleich großen Fächern hergestellt werden. Die Bodenfläche des Kastens ist ein Rechteck von 20 cm Länge und 13 cm Breite. Fertige die Konstruktionszeichnung für den Boden an!

Anleitung: Zeichne zunächst unter Verwendung des Zeichendreiecks das Rechteck! Konstruiere dann mit dem Zirkel die Mittelsenkrechte der kleineren Seite und teile die größere Seite in vier gleiche Teile!

22. Ein rechteckiges Blechstück von 15 cm Länge und 6 cm Breite soll so gebogen werden, daß es einen Quader ohne Grund- und Deckfläche ergibt. Die Grundfläche dieses Quaders soll ein Quadrat sein. Fertige eine Konstruktionszeichnung an, in der die Biegekanten eingezeichnet sind!

Anleitung: Konstruiere das Rechteck mit Lineal und Zeichendreieck! Teile die größere Seite mit dem Zirkel in vier gleiche Teile!

23. a) In ein rechteckiges Holzbrett von 9 cm Länge und 4 cm Breite sollen zwei Löcher für Schrauben gebohrt werden. Sie sollen jeweils im Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden liegen. Fertige die Konstruktionszeichnung an!

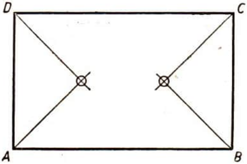


Abb. 48

Anleitung: Konstruiere zunächst das Rechteck $ABCD$ und dann die Winkelhalbierenden! Wieviel Schnittpunkte ergeben sich? Welche davon kommen in Frage? (Vgl. Abb. 48)

b) Konstruiere die Symmetrieachse zu den beiden Bohrungen!

24. In die quadratische Grundplatte eines Kakteenständers (Seitenlänge 8 cm) soll in der Mitte ein Fuß eingeleimt werden. Fertige die Konstruktionszeichnung an!

Anleitung: Konstruiere mit Lineal und Zeichendreieck das Quadrat! Die Bohrung für den Fuß liegt im Schnittpunkt der Verbindungslinien zweier gegenüberliegender Ecken!

25. An einem Garderobenbrett, dessen Fläche ein Rechteck von 60 cm Länge und 25 cm Breite ist, sollen drei Kleiderhaken angebracht werden. Sie sollen auf der Mittelsenkrechten der kleineren Seite gleichmäßig verteilt werden. Fertige die Konstruktionszeichnung an! Wähle den Maßstab 1:10!

26. Zeichne ein Dreieck, in dem alle Seiten **a)** 3 cm, **b)** 4 cm, **c)** 6,5 cm, **d)** 3,5 cm lang sind!

Anleitung: Zeichne die Seite AB des Dreiecks! Schlage mit AB um A und B Kreise! Sie schneiden sich oberhalb von AB im Punkt C. Verbinde A und B mit C! Prüfe, ob alle Seiten gleichlang sind! (Die Kreise schneiden einander noch in einem zweiten Punkt, der unterhalb von AB liegt. Dieser Schnittpunkt soll nicht berücksichtigt werden.)

27. Zwischen den Dörfern A und B soll an einer Eisenbahnstrecke ein Bahnhof gebaut werden. Konstruiere den Punkt, der von den Dörfern A und B gleichweit entfernt ist und an der Bahnstrecke liegt (Abb. 49)!

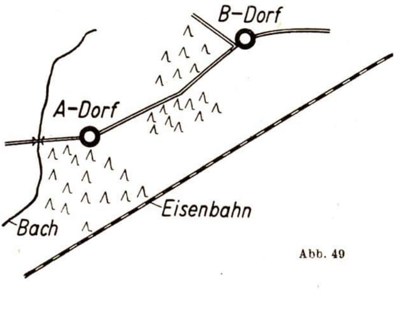


Abb. 49

28. Neben- und Scheitelwinkel

Wenn man den einen Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert, entsteht ein zweiter Winkel (vgl. Abb. 50). Da der neu entstandene Winkel (Winkel β) neben dem ursprünglichen Winkel (Winkel α) liegt, wird er **Nebenwinkel** zu Winkel α genannt. Andererseits liegt auch der Winkel α neben dem Winkel β. Also ist auch α Nebenwinkel zu β. Nebenwinkel haben den Scheitelpunkt und einen Schenkel gemeinsam; die beiden anderen Schenkel bilden eine Gerade. Nebenwinkel bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

Satz 6: Nebenwinkel betragen zusammen 180°.

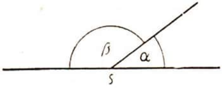


Abb. 50

Wir verbinden zwei Pappstreifen so, daß sie in einem Punkt drehbar sind (Abb. 51). Wenn wir die Streifen drehen, verändern sie ihre Richtung oberhalb und unterhalb des Drehpunktes um die gleiche Größe. Bei jeder Stellung der Streifen sind einmal die Winkel α und β und zum anderen die Winkel γ und δ einander gleich.

Die Winkel α und β haben den Scheitelpunkt gemeinsam; die Schenkel von α sind die Verlängerungen der Schenkel von β. Solche Winkel nennt man **Scheitelwinkel**. Auch γ und δ sind Scheitelwinkel.

Satz 7: Scheitelwinkel sind stets einander gleich.

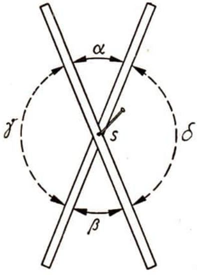


Abb. 51

Aufgaben

1. a) Zeige bei einer geöffneten Tür die entstandenen Nebenwinkel! Fertige eine Skizze an!
   b) Suche andere Beispiele für Nebenwinkel!
2. Zeige Scheitelwinkel a) an einer geöffneten Schere, b) an zwei sich kreuzenden Straßen oder Eisenbahngleisen! c) Suche andere Beispiele!
3. a) Gib an, welche Winkel in der Abbildung 52 Scheitelwinkel sind!
   b) Gib an, welche Winkel einander gleich sind!
   c) Gib an, welche Winkel einander zu 180° ergänzen!
4. Zwei Nebenwinkel sind einander gleich. Wie groß ist dann jeder?
5. Fertige ein Modell von Scheitelwinkeln an, wie es die Abbildung 51 zeigt!

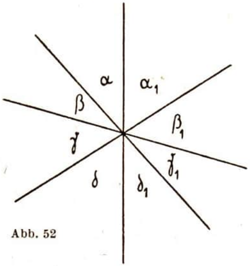


Abb. 52

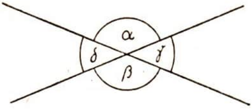


Abb. 53

6. Zeichne einen Winkel $\alpha = 51°$! Verlängere beide Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus!

a) Berechne die Größe der drei anderen Winkel!

b) Miß die drei Winkel und vergleiche die gemessenen Größen mit den errechneten!

7. Beim Drehen einer Geraden in Abbildung 53 durchläuft α die Werte 10°, 20°, 30°, ..., 180°. Welche Werte durchläuft **a)** β, **b)** γ, **c)** δ? Stelle diese Werte in einer Tabelle zusammen!

α	10°	20°	30°	40°	usw.
β					
γ					
δ					

8. Der Winkel, den zwei Mauern miteinander bilden, soll gemessen werden. Benutze dazu zwei Stäbe (Abb. 54)! Wo kannst du den Winkel messen?

9. Der Winkel α in der Abbildung 53 sei 90°. Wie groß sind dann die anderen Winkel?

10. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ! Konstruiere zu jedem Dreieckswinkel je einen Nebenwinkel!

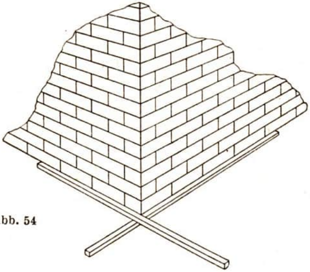


Abb. 54

29. Winkel an geschnittenen Parallelen

Die Abbildung 55 zeigt zwei Parallelen g und g_1, die von einer Geraden g_2 geschnitten werden. An jedem Schnittpunkt entstehen vier Winkel, die mit griechischen Buchstaben bezeichnet sind. Es liegen zwischen den Parallelen die **inneren Winkel** (β, γ, α_1, δ_1) und außen an den Parallelen die **äußeren Winkel** (α, δ, β_1, γ_1).

An den geschnittenen Parallelen erhalten wir drei verschiedene Arten von Winkeln.

Erklärung:

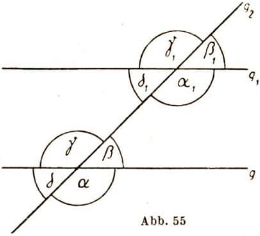


Abb. 55

1. Die Winkel α und α_1 in der Abbildung 55 werden **Stufenwinkel** genannt. Stufenwinkel sind ein äußerer und ein innerer Winkel auf der gleichen Seite der schneidenden Geraden. Auch β und β_1, γ und γ_1, δ und δ_1 sind Stufenwinkel.
2. Die Winkel β und δ_1 heißen **Wechselwinkel**. Das sind entweder zwei äußere oder zwei innere Winkel auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden. Wechselwinkel sind auch γ und α_1, δ und β_1, α und γ_1.
3. Die Winkel β und α_1 werden **entgegengesetzt liegende Winkel** genannt. Das sind entweder zwei äußere oder zwei innere Winkel auf der gleichen Seite der schneidenden Geraden. Desgleichen sind α und β_1, γ und δ_1, δ und γ_1 entgegengesetzt liegende Winkel.

Im 5. Schuljahr haben wir gelernt, wie man Parallelen mit Hilfe des Zeichendreiecks konstruiert (vgl. Abb. 56).

Durch die Verschiebung des Zeichendreiecks am Lineal entlang wird die Gerade g so verschoben, daß sie ihre Richtung nicht verändert. Auch die Geraden g und g_1 in Abbildung 57 haben als Parallelen

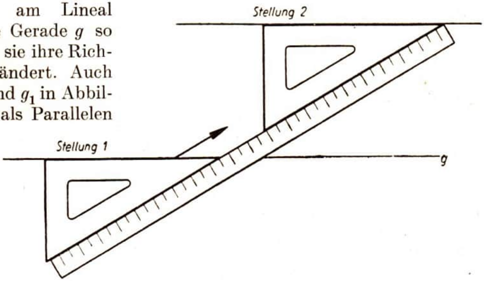


Abb. 56

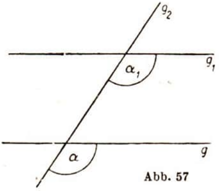


Abb. 57

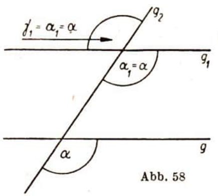


Abb. 58

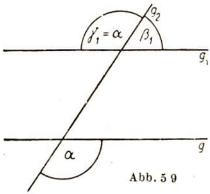


Abb. 59

die gleiche Richtung. Wenn wir die Gerade g parallel zu sich selbst verschieben, dann fällt sie schließlich mit der Geraden g_1 zusammen. Die Gerade g_2 hat ihre Richtung nicht verändert. Folglich decken sich dann die Winkel α und α_1. Sie sind also gleichgroß (siehe Abb. 57).

Satz 8: Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind einander gleich.

Für die anderen Paare Stufenwinkel können wir die Richtigkeit des Satzes entsprechend nachweisen. Führe den Nachweis für die Stufenwinkel β und β_1!

In der Abbildung 58 ist der Winkel α_1 Stufenwinkel zu α. Er ist deshalb genauso groß wie dieser. Der Winkel γ_1 ist Scheitelwinkel zu α_1 und deshalb genauso groß wie α_1. Also ist auch γ_1 so groß wie α. Wir können sagen:

Satz 9: Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind einander gleich.

Für die anderen Paare Wechselwinkel kann der Beweis entsprechend geführt werden. Führe ihn für das Wechselwinkelpaar γ und α_1!

In der Abbildung 59 sind γ_1 und α Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Folglich ist $\gamma_1 = \alpha$. Die Winkel γ_1 und β_1 sind Nebenwinkel und betragen zusammen 180°. Da α genauso groß wie γ_1 ist, betragen auch α und β_1 zusammen 180°.

Wir können sagen:

Satz 10: Entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen betragen zusammen 180°.

Für die anderen Paare entgegengesetzt liegender Winkel können wir den Beweis entsprechend führen. Führe den Beweis für das Paar entgegengesetzt liegender Winkel α und δ_1!

Aufgaben

1. Nenne in der Abbildung 55 alle Paare **a)** der Stufenwinkel, **b)** der Wechselwinkel, **c)** der entgegengesetzt liegenden Winkel, **d)** der Nebenwinkel, **e)** der Scheitelwinkel!

2. Zeichne Winkel an geschnittenen Parallelen! Schneide sie aus und lege gleichgroße übereinander!

3. a) Miß in der Abbildung 55 die Größe der zusammengehörenden Paare Wechselwinkel und Stufenwinkel!

   b) Miß in der Abbildung 55 die zusammengehörenden Paare entgegengesetzt liegender Winkel! Bilde jeweils ihre Summe!

4. Die Abbildung 60 zeigt das Geburtshaus von Johann Wolfgang Goethe in Frankfurt a. M. aus der Zeit vor 1755. An ihm sind, wie an vielen Fachwerkbauten, geschnittene Parallelen zu erkennen. Suche geschnittene Parallelen in der Abbildung 60!

Abb. 60

5. Zeichne drei Parallelen, die von einer vierten Geraden geschnitten werden! Bezeichne a) alle gleichgroßen Winkel, b) alle Winkel, die einander zu 180° ergänzen!

6. Stecke mit Fluchtstäben und dem Winkelpeiler auf dem Schulhof einen Weg von a) 6 m, b) 8 m Breite ab!

7. a) Pause die Abbildung 55 auf ein Blatt Papier! Miß den Abstand der beiden Parallelen!

   b) Konstruiere eine Parallele zu der Geraden g_2 im Abstand von 3 cm!

   c) Welche Winkel in der so entstandenen Zeichnung sind Wechselwinkel, Stufenwinkel, entgegengesetzt liegende Winkel, Nebenwinkel, Scheitelwinkel?

8. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und eine Parallele zu AB durch C! Suche Stufenwinkel, Wechselwinkel und entgegengesetzt liegende Winkel!

VIII. Körper und ebene Figuren

30. Das Prisma

Aufgaben zur Wiederholung:

1. a) Wieviel Ecken, Kanten und Begrenzungsflächen hat ein Quader?
b) Wieviel Kanten treffen sich in einem Eckpunkt eines Quaders?
c) Welchen Winkel schließen jeweils zwei Kanten eines Quaders an einem Eckpunkt miteinander ein?
d) Welche Form haben die Begrenzungsflächen?

2. Wir wissen, daß auch der Würfel ein Quader ist. Welche Besonderheiten weist er auf?

Bei den folgenden Aufgaben soll der Verschnitt nicht berücksichtigt werden.

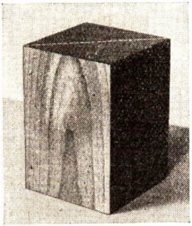


Abb. 61

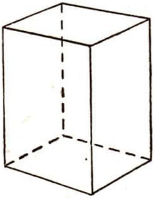


Abb. 62

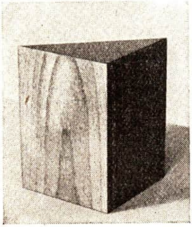


Abb. 63

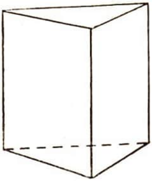


Abb. 64

3. a) Die Kanten eines Würfels sind 4 cm lang. Wieviel Meter Draht benötigt man, wenn man ein Kantenmodell dieses Würfels anfertigen will?
b) Löse dieselbe Aufgabe für einen Würfel, dessen Kanten 6,5 cm lang sind!
c) Löse dieselbe Aufgabe für einen Würfel, dessen Kanten 0,9 dm lang sind!

4. Bei einem Quader sind die Kanten 3 cm, 4 cm und 5 cm lang. Wieviel Meter Draht benötigt man, wenn man ein Kantenmodell dieses Quaders anfertigen will?

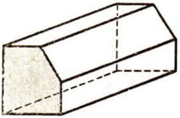


Abb. 65

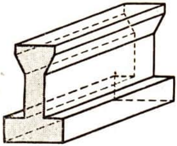


Abb. 66

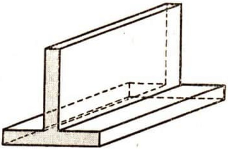


Abb. 67

Fertige aus Knetmasse einen Quader an! Zerschneide ihn so, daß du den in Abbildung 63 gezeigten Teilkörper erhältst! Beschreibe diesen Teilkörper! Zähle die Ecken, Kanten und Flächen! Beschreibe die Form der Begrenzungsflächen!

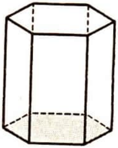


Abb. 68

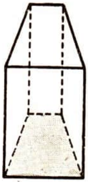


Abb. 69

Abb. 70

In den Abbildungen 61 und 63 sind die Photographien eines Quaders und seines Teilkörpers zu sehen. In den Abbildungen 62 und 64 sind dieselben Körper als Zeichnungen dargestellt. Die in der Photographie nicht sichtbaren Kanten des Körpers sind bei der Zeichnung stets als gestrichelte Linien eingezeichnet. Solche Zeichnungen muß man richtig betrachten. Man muß sich dabei vorstellen, daß die gestrichelten Linien hinter den vollumrandeten Flächen liegen.

Die in den Abbildungen 65 bis 67 gezeigten Körper finden im Bauwesen und in der Industrie Verwendung, zum Beispiel als Holzbalken oder Betonträger.

Zähle die Ecken, Kanten und Flächen der abgebildeten Körper. Beschreibe die Form der Begrenzungsflächen! Keiner der Körper aus den Abbildungen 65 bis 70 ist ein Quader. Sie haben aber alle einige Eigenschaften mit dem Quader gemeinsam.

Alle Körper der Abbildungen 65 bis 70 haben als Grund- und Deckfläche Vielecke (Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke usw.) von gleicher Form und gleicher Größe. (Die grau gezeichneten Flächen bezeichnen wir als Grundflächen, die ihnen gegenüberliegenden als Deckflächen.) Beide Flächen liegen zueinander parallel. Die übrigen Begrenzungsflächen sind Rechtecke, die alle auf der Grundfläche senkrecht stehen (Abb. 71).

Alle Körper, die diese Eigenschaften haben, werden **gerade Prismen** genannt.

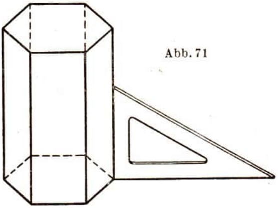


Abb. 71

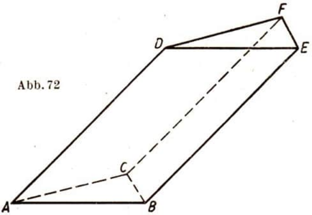


Abb. 72

Erklärung: **Ein Körper wird gerades Prisma genannt, wenn er die folgenden Eigenschaften hat: Grund- und Deckfläche sind Vielecke von gleicher Form und gleicher Größe. Sie liegen zueinander parallel. Die übrigen Begrenzungsflächen (Seitenflächen) sind Rechtecke. Sie stehen auf der Grundfläche senkrecht.**

Außer den geraden Prismen gibt es auch noch schiefe Prismen. Bei diesen stehen nicht mehr alle Seitenflächen auf der Grundfläche senkrecht (Abb. 72). Wir werden uns in diesem Lehrbuch jedoch nur mit geraden Prismen beschäftigen und nennen sie kurz Prismen.

Die Prismen unterscheidet man nach der Anzahl der Seitenflächen. So gibt es zum Beispiel dreiseitige, vierseitige, fünfseitige Prismen. Auch der Quader ist ein Prisma, denn er hat alle Eigenschaften, die in der Erklärung angegeben sind. Er hat jedoch die Besonderheit, daß bei ihm auch Grund- und Deckfläche Rechtecke sind.

Bei den Prismen werden stets die Vielecke als Grund- und Deckfläche bezeichnet, die zueinander parallel liegen und auf denen die Rechtecke (die Seitenflächen) senkrecht stehen. Die Prismen brauchen dabei keineswegs immer auf der Grundfläche zu stehen; sie können, wie zum Beispiel in den Abbildungen 65 und 66, auch auf einer Seitenfläche liegen.

Aufgaben

5. Schreibe auf, welche der Abbildungen auf den restlichen Seiten dieses Lehrbuches Prismen zeigen!

6. Schreibe auf, warum die in den Abbildungen 104 bis 106 dargestellten Körper keine Prismen sind!

7. Gib die genauen Bezeichnungen der Prismen in den Abbildungen 65 bis 70 an!

8. Begründe, warum der Würfel zu den Prismen gehört!

9. Wieviel Ecken, Kanten und Flächen hat **a)** ein dreiseitiges, **b)** ein fünfseitiges, **c)** ein sechsseitiges Prisma?

10. Nenne Gegenstände, die die Form von Prismen haben!

11. Aus Draht soll das Kantenmodell eines fünfseitigen Prismas hergestellt werden. Die Seitenkanten sollen je 8 cm, die anderen Kanten je 6 cm lang sein. Wieviel Meter Draht werden benötigt? (Der Verschnitt soll unberücksichtigt bleiben.)

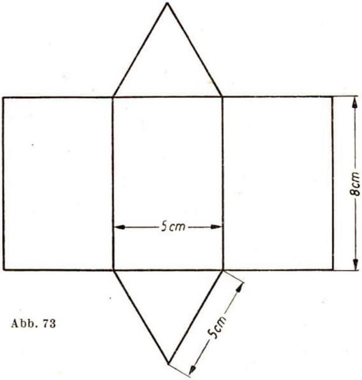


Abb. 73

Wenn wir aus steifem Papier oder Karton ein dreiseitiges Prisma bauen wollen, müssen wir zunächst das Netz dieses Prismas konstruieren (siehe Abb. 73). Die Seitenkanten sollen je 8 cm und die übrigen Kanten je 5 cm lang sein. Grund- und Deckfläche sind Dreiecke, deren Seiten sämtlich 5 cm lang sind. Wir können die Dreiecke mit dem Zirkel konstruieren (vgl. Aufgabe 26, Seite 124). Seitlich wird das Prisma durch drei Rechtecke begrenzt, deren Seiten 5 cm und 8 cm lang sind. Rechtecke können wir mit Lineal und Zeichendreieck konstruieren. So erhalten wir das in Abbildung 73 dargestellte Netz dieses Prismas. Zeige an dem Netz, welche Punkte und Kanten beim Zusammenkleben aufeinanderfallen und welche Kanten aneinanderstoßen! Überlege, wo du die Klebefalze am zweckmäßigsten anbringst!

Die Dreiecke kann man auch anders an die Rechtecke anlegen. Welche anderen Lagen sind noch möglich?

Aufgaben

12. Konstruiere die Netze der folgenden dreiseitigen Prismen!

a) Die Kanten, die die Grund- und Deckfläche umschließen, sollen je 3,5 cm, die Seitenkanten je 6 cm lang sein.

b) Die Kanten, die die Grund- und Deckfläche umschließen, sollen je 6 cm, die Seitenkanten je 4 cm lang sein.

c) Bringe bei beiden Netzen Klebefalze an, schneide die Netze aus und klebe die Prismen zusammen!

13. a) Konstruiere auf Karton das Netz eines quadratischen Prismas! Grund- und Deckfläche sind Quadrate mit der Seitenlänge 4 cm. Die Seitenkanten des Prismas sollen 8 cm lang sein.

b) Bringe Klebefalze an, schneide aus und klebe zusammen!

14. Konstruiere das Netz eines Quaders! Die Grundfläche ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 cm und 2,5 cm. Die Seitenkanten sind 6 cm lang. Bringe Klebefalze an, schneide aus und klebe zusammen!

15. Wieviel Nähte muß ein Schlosser mindestens schweißen, der ein oben offenes, vierseitiges Prisma aus einem Stück Blech herstellen will?

16. a) Schneide aus Knetmasse ein vierseitiges Prisma aus!

b) Baue aus Holzstäbchen und kleinen Knetmassekugeln das Kantenmodell eines vierseitigen Prismas!

In der Abbildung 74 ist ein dreiseitiges Prisma durch einen parallel zur Grundfläche geführten Schnitt in zwei Teile zerlegt worden. Beschreibe die Form der Schnittfläche! Denke dir noch andere Schnitte parallel zur Grundfläche!

Die Abbildung 75 zeigt ein fünfseitiges Prisma, das ebenfalls parallel zur Grundfläche zerschnitten worden ist. Beschreibe die Form der Schnittfläche!

Denke dir auch bei einem vierseitigen, sechsseitigen oder siebenseitigen Prisma Schnitte parallel zur Grundfläche! Wir stellen fest, daß alle Schnittflächen die gleiche Form und Größe wie die jeweilige Grundfläche haben. Die Schnittflächen werden auch kurz **Schnitte** genannt.

Wir können also feststellen:

Wird ein Prisma parallel zur Grundfläche zerschnitten, so hat die Schnittfläche die gleiche Form und Größe wie die Grundfläche.

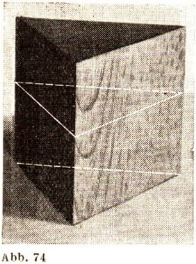


Abb. 74

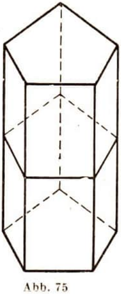


Abb. 75

In der Abbildung 76 ist ein vierseitiges Prisma an verschiedenen Stellen senkrecht zur Grundfläche zerschnitten. Beschreibe die Form der Schnittflächen! Denke dir auch ein dreiseitiges, ein fünfseitiges oder sechsseitiges Prisma senkrecht zur Grundfläche zerschnitten und beschreibe die Form der Schnittflächen!

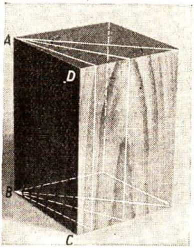


Abb. 76

Wird ein Prisma senkrecht zur Grundfläche zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets Rechtecke.

Je nach Lage des Schnittes sind diese Rechtecke verschieden groß.

Aufgaben

17. Welche Körper entstehen, wenn man ein Prisma

a) parallel zur Grundfläche,

b) senkrecht zur Grundfläche zerschneidet?

18. Wie ändert sich in der Abbildung 76 die Größe der Schnitte, wenn wir sie der Reihe nach von der Fläche $ABCD$ ausgehend betrachten?


Abb. 77

31. Der Zylinder

Trotz der unterschiedlichen Größe und der verschiedenen Verwendungszwecke haben die in den Abbildungen 77 bis 80 gezeigten Gegenstände etwas gemeinsam. Sie enthalten Körper, die große Ähnlichkeit mit dem Körper der Abbildung 81 haben. Wenn man zum Beispiel von dem elektrischen Kochtopf (Abb. 77) den Deckel abnimmt und den Henkel sowie den Steckkontakt entfernt, so hat er fast die gleiche Form wie der Körper in Abbildung 81. Beim Meßglas (Abb. 78) müssen wir uns den breiten Boden wegdenken, damit wir die große Ähnlich-

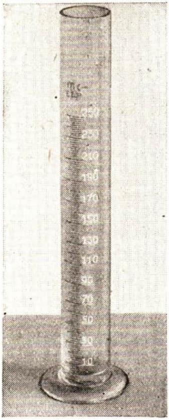


Abb. 78

keit mit dem Körper der Abbildung 81 feststellen können. Bei der Kartoffeldämpfmaschine (Abb. 79) ist zum Beispiel der umgekippte Schornstein ein solcher Körper. Suche in der Abbildung 80 (Druckmaschine) ähnliche Körper!

Wir wollen diese Körper näher untersuchen. Sie werden von zwei Kreisflächen und einer gekrümmten Fläche begrenzt. Die Kreisflächen sind gleichgroß und liegen zueinander parallel. Wir nennen sie Grund- und Deckfläche. Die gekrümmte Fläche wird **Mantelfläche** oder kurz Mantel genannt. Wenn man einen solchen Körper, wie den in Abbildung 81 gezeigten, mit der Grundfläche auf den Tisch stellt, kann man an den Mantel überall ein Zeichendreieck so anlegen, wie es die Abbildung 82 zeigt. Die Mantelfläche steht also überall auf der Grundfläche senkrecht.

Wenn man den Mantel auf der Zeichenebene abrollt, erhält man ein Rechteck (vgl. Abb. 83).

Körper mit den genannten Eigenschaften heißen **gerade Kreiszylinder.**

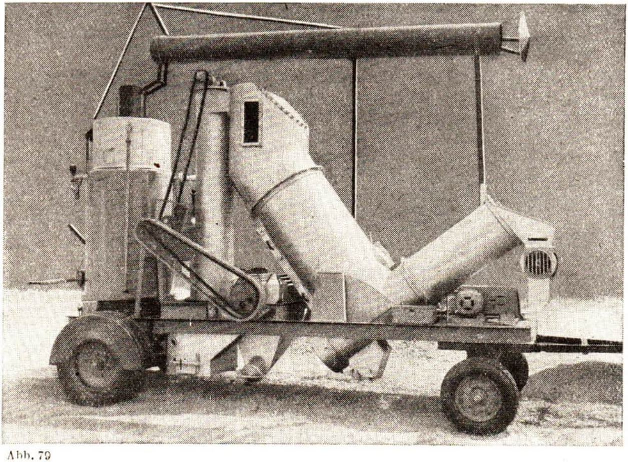


Abb. 79

Erklärung: **Ein Körper heißt gerader Kreiszylinder, wenn er von zwei gleichgroßen, zueinander parallelen Kreisflächen (Grund- und Deckfläche) und von einer gekrümmten Mantelfläche begrenzt wird. Der Mantel kann auf einer ebenen Fläche zu einem Rechteck abgerollt werden.**

Es gibt auch schiefe Kreiszylinder (vgl. Abb. 84). Wir werden uns jedoch in diesem Lehrbuch nur mit geraden Kreiszylindern beschäftigen, die wir von nun an einfach Zylinder nennen wollen. Wir wissen dann, daß damit gerade Kreiszylinder gemeint sind.

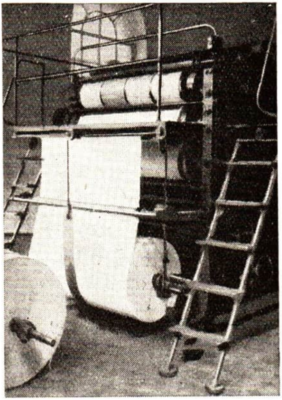


Abb. 80

Aufgaben

1. Nenne Gegenstände, die die Form eines Zylinders haben!

2. Lege um einen zylindrischen Gegenstand, zum Beispiel um ein zylindrisches Trinkglas, einen Papiermantel! (Achte auf Genauigkeit!) Rolle den Papiermantel ab!

a) Miß Länge und Breite des ausgebreiteten Papiermantels!

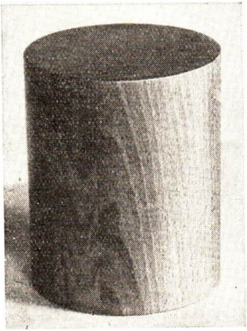


Abb. 81

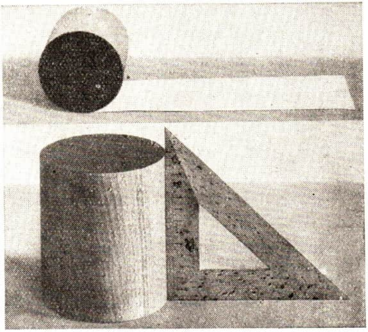


Abb. 82 (unten) Abb. 83 (oben)

b) Miß den Umfang und die Höhe des Zylinders!

Vergleiche die Ergebnisse von a) und b)!

3. Die Abbildung 85 zeigt das Netz eines Zylinders. Gib an, welche Linien in der Abbildung gleichlang sein müssen! Entnimm der Abbildung 85 die Maße und zeichne das Netz auf ein Stück Karton, bringe Klebefalze an, schneide aus und klebe den Zylinder zusammen!

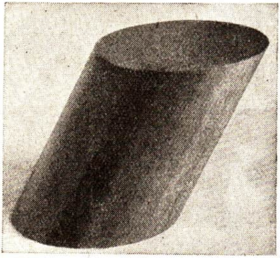


Abb. 84

4. Eine Litfaßsäule ist vom Sockel an 2,80 m hoch und hat einen Umfang von 4,50 m. Wie groß ist die Fläche, die man bekleben kann?

5. Wieviel Quadratmeter Blech braucht man, wenn man ein Ofenrohr von 31,4 cm Umfang und 120 cm Länge anfertigen will? Für den Falz müssen zum Umfang 2,9 cm zugeschlagen werden. Runde!

6. Ein zylinderförmiger Teil (Walze) einer Druckmaschine soll mit dünnem Gummi belegt werden. Die Stirnflächen (Grund- und Deckfläche) bleiben frei. Die Walze hat einen Umfang von 1,57 m und eine Länge von 1,28 m. Wieviel Quadratmeter Gummi benötigt man? Runde!

7. Eine Handwalze für den Straßenbau ist 1,25 m breit und hat einen Umfang von 4 m. Wieviel Quadratmeter Straßenfläche walzt sie bei einer Umdrehung?

8. In einer Konservenfabrik werden die Konservendosen mit Papierstreifen umklebt, auf denen Angaben über Inhalt, Herstellungstag und Preis der Dosen aufgedruckt sind. Die Dosen haben einen Umfang von 36 cm, und die Papierstreifen sind 10 cm hoch. Sie werden 0,5 cm übereinandergeklebt.

a) Wieviel Quadratzentimeter Papier werden für eine Konservendose benötigt?

b) Wieviel Quadratzentimeter Papier werden für 10, 30, 50, 100 Dosen benötigt?

c) Wie groß ist der Papierbedarf im Monat bei einer Monatsproduktion von 10 000 Dosen?

9. a) Ein Baumstamm mit einem Umfang von 56 cm soll zum Schutz gegen Schädlinge mit einem 20 cm hohen Leimring versehen werden. Wieviel Quadratzentimeter Papier werden benötigt?

b) Wieviel Quadratzentimeter werden für 12, 18, 32 Bäume benötigt? Es soll angenommen werden, daß 56 cm der durchschnittliche Umfang ist.

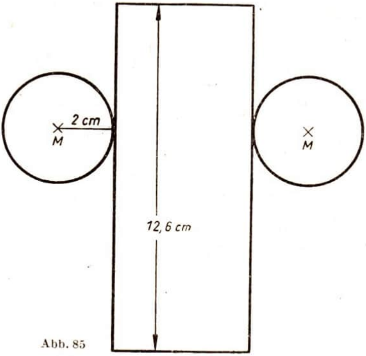


Abb. 85

Die Abbildung 86 zeigt einen Zylinder, der durch verschiedene Schnitte zerlegt worden ist. Alle Schnitte stehen auf der Grundfläche senkrecht und gehen durch die Mittelpunkte der Kreisflächen.

Die Abbildung 87 zeigt einen Zylinder, der auch senkrecht zur Grundfläche zerschnitten worden ist. Die Schnitte gehen jedoch nicht durch die Mittelpunkte der Kreisflächen. In allen Fällen sind die Schnittflächen Rechtecke.

Wird ein Zylinder senkrecht zur Grundfläche zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets Rechtecke.

Aus der Abbildung 88 ist ersichtlich, welche Schnittflächen entstehen, wenn ein Zylinder in verschiedenen Abständen parallel zur Grundfläche zerschnitten wird.

Wird ein Zylinder parallel zur Grundfläche zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets Kreisflächen. Sie haben die gleiche Größe wie Grund- und Deckfläche.

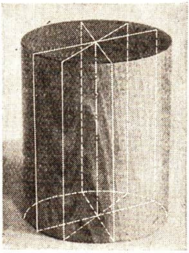


Abb. 86

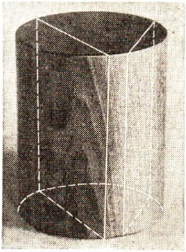


Abb. 87

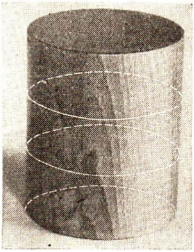


Abb. 88

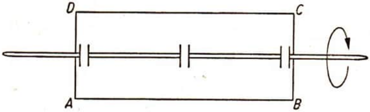


Abb. 89

Schneide aus Zeichenkarton ein Rechteck $ABCD$ aus! Halbiere die Seiten AD und BC! Befestige das Rechteck so an einer Stricknadel, daß diese durch die Mittelpunkte der Seiten AD und BC geht (Abb. 89)! Drehe jetzt die Stricknadel zwischen je zwei Fingern beider Hände möglichst schnell! Bei genügend schneller Drehung glaubt man einen Zylinder zu sehen. Man kann sich also einen Zylinder durch die Drehung eines Rechtecks um seine Mittellinie entstanden denken. Wir sagen deshalb: Der Zylinder ist ein **Drehkörper.**

32. Der Kreis und die Ellipse

Der Kreis

Wir wissen bereits, daß Kreise mit dem Zirkel konstruiert werden. Die Metallspitze des Zirkels steht im Mittelpunkt des Kreises. Der andere Zirkelfuß zeichnet die Kreislinie oder den Kreisumfang (auch Peripherie oder Vollkreisbogen genannt). Alle Punkte der Kreislinie sind vom Mittelpunkt gleichweit entfernt.

Eine Gerade, die einen Kreis schneidet, heißt Schneidende oder **Sekante** des Kreises. In Abbildung 90 ist ein Kreis mit mehreren Sekanten gezeichnet. Der innerhalb der Kreisfläche verlaufende Teil einer Sekante wird **Sehne** genannt. In einen Kreis können Sehnen verschiedener Länge gezeichnet werden. Die Sehne, die durch den Kreismittelpunkt verläuft, ist die längste Sehne und heißt Durchmesser des Kreises. Denke dir die Sekante g parallel zu sich selbst in Richtung M verschoben (Abb. 90)! Wie verändert sich die Länge der Sehne AB?

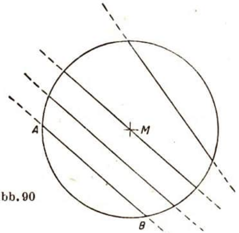


Abb. 90

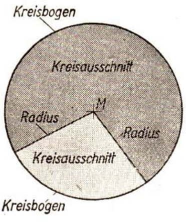


Abb. 91

Wenn man in einen Kreis zwei Radien zeichnet, die sich nicht decken, wird die Kreisfläche in zwei **Kreisausschnitte (Sektoren)** und die Kreislinie in zwei **Kreisbogen** geteilt. Ein Kreisausschnitt wird also von einem Kreisbogen und von zwei Radien begrenzt (vgl. Abb. 91).

Aufgaben

1. Zeichne mit Hilfe des Zirkels Kreise mit einem Radius von **a)** 3 cm, **b)** 4 cm, **c)** 5 cm, **d)** 2,4 cm, **e)** 3,6 cm, **f)** 1,8 cm, **g)** 12 mm, **h)** 27 mm!
2. Untersuche, wieviel Symmetrieachsen man in einen Kreis zeichnen kann! Beschreibe ihren Verlauf!
3. Zeichne einen Kreis und in ihm eine Sehne! Konstruiere die Symmetrieachse zu den Endpunkten der Sehne!
4. Zeichne in einen Kreis zwei Radien so ein, daß zwei gleiche Kreisausschnitte entstehen!
5. Zeichne einen Kreis und zwei seiner Radien! Konstruiere die Symmetrieachsen der entstandenen Kreisausschnitte!
   Anleitung: Bezeichne die Endpunkte der Radien auf der Kreislinie mit A und B! Konstruiere die Symmetrieachse zu A und B!

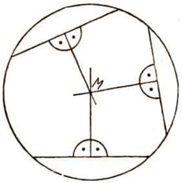


Abb. 92

6. Zeichne Kreise mit dem Radius **a)** 3 cm, **b)** 4 cm! Zeichne in jeden Kreis zwei Sehnen! Konstruiere die Mittelsenkrechten der Sehnen!

Wir stellen fest:

Satz 11: Die Mittelsenkrechte jeder Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

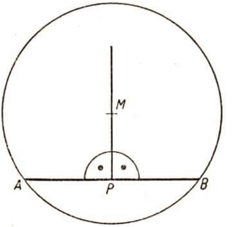


Abb. 93

Die Richtigkeit des Satzes wird durch jede Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Sehne bestätigt (Abb. 92). Der Satz ergibt sich auch aus den folgenden Überlegungen: Die Mittelsenkrechte der Sehne AB (Abb. 93) ist die Symmetrieachse zu ihren Endpunkten A und B. Wir wissen ferner, daß jeder Punkt, der von den beiden symmetrischen Punkten gleichweit entfernt ist, auf dieser Symmetrieachse liegen muß (nach Satz 5). Ein solcher Punkt ist jedoch auch der Punkt M, der Mittelpunkt des Kreises. A und B sind nämlich als Punkte der Kreislinie vom Mittelpunkt gleichweit entfernt. Infolgedessen muß M auf der Mittelsenkrechten der Sehne liegen (Satz 11).

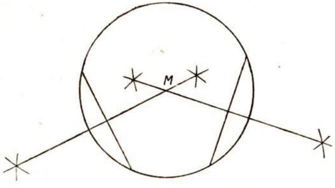


Abb. 94

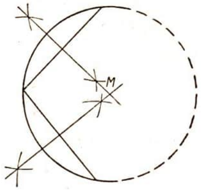


Abb. 95

Diese Erkenntnis können wir dazu benutzen, den nicht gezeichneten Mittelpunkt eines Kreises zu konstruieren.

Lege den Deckel eines Konservenglases auf ein Blatt Papier! Zeichne den Rand mit einem Bleistift nach! Zeichne zwei beliebige Sehnen und konstruiere ihre Mittelsenkrechten! Der gesuchte Mittelpunkt des Kreises muß sowohl auf der einen als auch auf der anderen Mittelsenkrechten liegen. Der einzige Punkt, der diese Bedingungen erfüllt, ist der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten. Dieser Schnittpunkt ist der gesuchte Mittelpunkt des Kreises (Abb. 94). Wir können sogar den Mittelpunkt eines Kreises konstruieren, wenn uns nur ein Teil der Kreislinie, ein Kreisbogen, gegeben ist. In diesen Kreisbogen zeichnet man zwei Sehnen ein und konstruiert deren Mittelsenkrechten. Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Mittelpunkt M des Kreises, den man dann voll auszeichnen kann (Abb. 95). Merke: Die Sehnen dürfen nicht parallel liegen! Begründe diese Forderung!

Aufgaben

7. Stelle eine Kaffeetasse auf ein Blatt Papier! Zeichne den Rand des Bodens mit einem Bleistift nach und konstruiere den Mittelpunkt dieses Kreises!

8. Zeichne den Rand der Tasse nur teilweise nach! Konstruiere, ausgehend von diesem Kreisbogen, den Mittelpunkt des ganzen Kreises! Vervollständige den Kreis und beschreibe die Konstruktion!

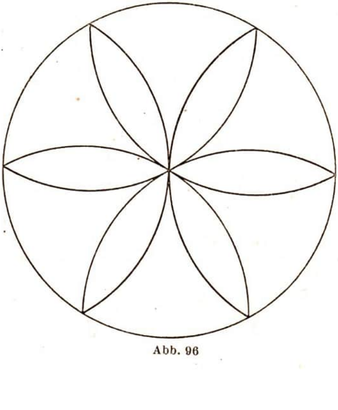


Abb. 96

9. Zeichne den Halbkreis deines Winkelmessers nach! Konstruiere den Mittelpunkt! Welche Konstruktionen sind möglich? Welche Konstruktion ist am einfachsten?

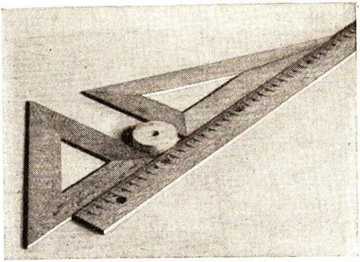


Abb. 97

10. Zeichne ein Wagenrad mit dem Radius 3,5 cm und 8 Speichen!
Anleitung: Denke daran, daß ein voller Kreisbogen einem Winkel von 360° entspricht! Welchen Winkel schließen dann jeweils zwei benachbarte Speichen (Radien) ein?

11. a) Zeichne einen Kreis mit dem Radius 3 cm! Beschreibe um einen beliebigen Punkt auf der Kreislinie einen Kreisbogen mit demselben Radius! Nimm einen der beiden Schnittpunkte, die auf dem ersten Kreis entstanden sind, als Mittelpunkt eines neuen Kreises derselben Größe usw.! Du erhältst eine Rosette (Abb. 96).

b) Wieviel Symmetrieachsen hat die Rosette? Wo kommen solche Verzierungen vor?

c) Verbinde die benachbarten Spitzen der Rosetten geradlinig miteinander! Welche Figur wird durch diese Strecke gebildet? Vergleiche die Länge der Strecken untereinander und mit dem Radius!

12. Bestimme mit Hilfe eines Lineals und zweier Zeichendreiecke den Durchmesser eines runden Bleistiftes, eines Geldstückes, eines Knopfes (Abb. 97)!

In der Technik benutzt man für solche Messungen ein besonderes Gerät, die Schieblehre (Abb. 98). Der Abstand der Meßschenkel wird durch die

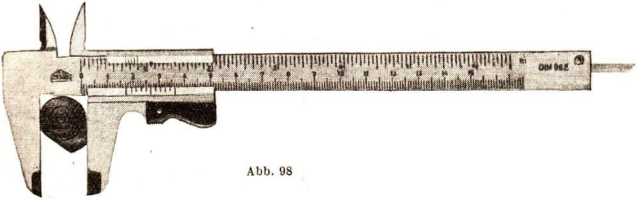


Abb. 98

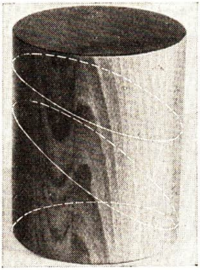


Abb. 99

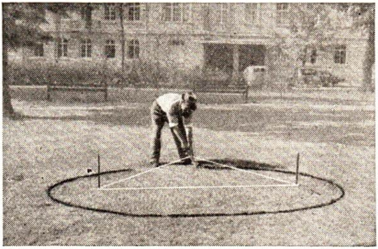


Abb. 100

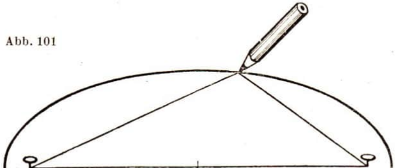
Stellung des Nullstriches am Schieber angegeben. Wenn die beiden Meßschenkel einander berühren, zeigt dieser Nullstrich auf den Nullpunkt der Linealteilung. Das Lineal der abgebildeten Schieblehre hat an einem Rand eine Millimeterteilung.

Die Ellipse

Die Abbildung 99 zeigt einen Zylinder, der an zwei Stellen schräg durchschnitten worden ist. Die entstandenen Schnittflächen werden **Ellipsen** genannt (vgl. auch Abb. 102). Eine Ellipse kann man nicht so einfach zeichnen wie einen Kreis. Die Abbildung 100 zeigt, wie ein Gärtner ein Beet von der Form einer Ellipse abgrenzt.

Nach dem gleichen Verfahren können wir auch im Heft eine Ellipse zeichnen. Wir drücken je einen Reißnagel in die Punkte A und B auf das Zeichenblatt und legen um die Nägel eine Fadenschlinge. Dann stecken wir einen Bleistift in die Schlinge und führen ihn so herum, daß der Faden stets gespannt ist (siehe Abb. 101). Man nennt diese Konstruktion die **Gärtnerkonstruktion der Ellipse**. Der Halbierungspunkt M der Strecke AB wird Mittelpunkt der Ellipse genannt.

Abb. 101



Die Ellipse wird wie der Kreis von einer krummen Linie begrenzt. Die Kreislinie ist überall gleichmäßig gekrümmt. Bei der Ellipse sind die Krümmungen verschieden. Beschreibe, an welchen Stellen die Ellipse am stärksten und an welchen Stellen sie am schwächsten gekrümmt ist! Wir wollen verschiedene Punkte der Ellipse mit dem Mittelpunkt verbinden (Abb. 102). Wenn wir die Längen dieser Strecken vergleichen, stellen wir fest, daß nicht sämtliche gleichgroß sind. Das ist ein weiterer Unterschied zum Kreis, bei dem der Radius überall gleichlang ist.

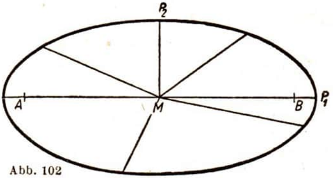


Abb. 102

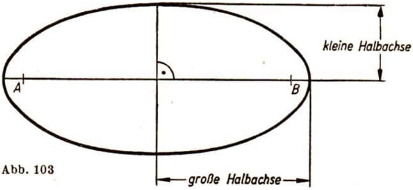


Abb. 103

In der Abbildung 102 ist die Verbindungsstrecke MP_1 die größte und die Strecke MP_2 die kleinste aller gezeichneten Verbindungsstrecken. MP_1 wird **große Halbachse** und MP_2 **kleine Halbachse** der Ellipse genannt (Abb. 103). Eine Ellipse hat stets zwei große und zwei kleine Halbachsen. Man erhält die zweite kleine Halbachse durch Verlängerung der ersten Halbachse über M hinaus bis zum Schnitt mit der Peripherie der Ellipse. Entsprechend erhält man die zweite große Halbachse.

Die große Halbachse und die kleine Halbachse stehen aufeinander senkrecht.

Aufgaben

13. Zeichne eine Ellipse mit Hilfe der Gärtnerkonstruktion, wobei $AM = MB = 4$ cm ist! Drücke einen weiteren Reißnagel in den Mittelpunkt der Ellipse! Verkürze die Strecke AM und MB um je 1 cm und zeichne nun mit der gleichen Fadenschlinge die Ellipse! Was beobachtest du? Verkürze die Strecken AM und MB nochmals um 1 cm und zeichne wieder die Ellipse! Führe das Verfahren fort, bis A und B im Mittelpunkt M zusammenfallen! Welche Figur erhältst du nun bei der Konstruktion?

14. Wieviel Symmetrieachsen hat eine Ellipse? Beschreibe ihren Verlauf!

15. Zeichne mit Hilfe der Gärtnerkonstruktion die folgenden Ellipsen! (Der Faden der Schlinge soll in allen Fällen 12 cm lang sein.) **a)** $AB = 5$ cm, **b)** $AB = 4$ cm, **c)** $AB = 3{,}5$ cm, **d)** $AB = 3$ cm, **e)** $AB = 2$ cm. **f)** Zeichne jeweils eine große und eine kleine Halbachse ein und miß deren Länge!

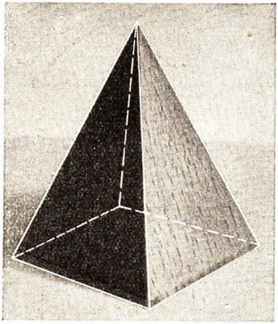


Abb. 104

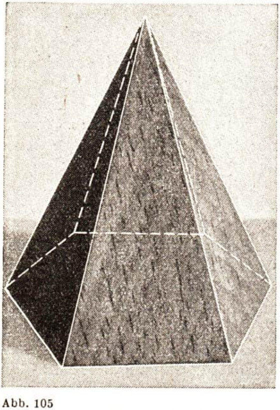


Abb. 105

33. Die Pyramide

Betrachte die Abbildungen 104 bis 109! Man nennt diese Körper **Pyramiden**. Wir finden sie oft an Bauwerken, zumeist als Aufsätze auf anderen Körpern. (Abb. 110 zeigt das Modell von Bauten, die vor fast 4000 Jahren in Ägypten errichtet wurden; Abb. 111 zeigt den Dom von Trier.)

Wir können feststellen, daß die in den Abbildungen 104 bis 109 dargestellten Körper Eigenschaften gemeinsam haben. So ist die Grundfläche stets ein Vieleck. Die von den Ecken der Grundfläche ausgehenden Seitenkanten schneiden sich alle in einem Punkt. Diesen nennen wir die **Spitze** der Pyramide. Alle Seitenflächen sind Dreiecke.

Wir werden uns in diesem Buch nur mit einer besonderen Art von Pyramiden beschäftigen. In den Abbildungen 104, 105, 107, 108, 112 und 113 sind solche Pyramiden dargestellt.

In den Abbildungen 114 bis 117 sind die Grundflächen dieser Pyramiden allein gezeichnet.

Jede dieser Grundflächen ist ein Vieleck, in dem die Seiten und Winkel einander gleich sind. Solche Vielecke nennt man **regelmäßige Vielecke**. Das regelmäßige Viereck, das Quadrat, kennen wir bereits.

Die Grundflächen der Pyramiden, die in den Abbildungen 104, 105, 107, 108, 112 und 113 gezeigt werden, sind also regelmäßige Vielecke. Diese Pyramiden werden deshalb auch regelmäßige Pyramiden genannt. In ihnen sind außerdem auch noch alle Seitenkanten gleichlang. Man nennt sie **regelmäßige gerade Pyramiden**.

Erklärung: **Ein Körper heißt regelmäßige gerade Pyramide, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt: Die Grundfläche ist ein regelmäßiges**

Vieleck. Die von den Ecken der Grundfläche ausgehenden Seitenkanten schneiden sich alle in einem Punkt und sind gleichlang. Die Seitenflächen sind Dreiecke.

Da wir uns in diesem Schuljahr nur mit regelmäßigen geraden Pyramiden beschäftigen, werden wir sie von nun an kurz Pyramiden nennen. Wir wissen dabei jedoch, daß regelmäßige gerade Pyramiden gemeint sind.

Nach der Anzahl der Seitenflächen unterscheiden wir auch hier dreiseitige, vierseitige, fünfseitige, ... Pyramiden. Benenne danach die Pyramiden in den Abbildungen 104 bis 109 sowie 112 und 113!

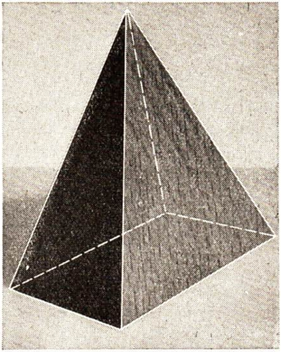


Abb. 106

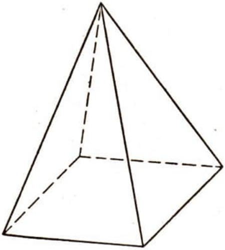


Abb. 107

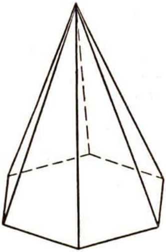


Abb. 108

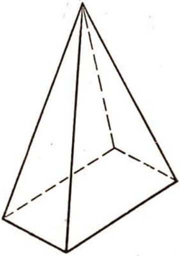


Abb. 109

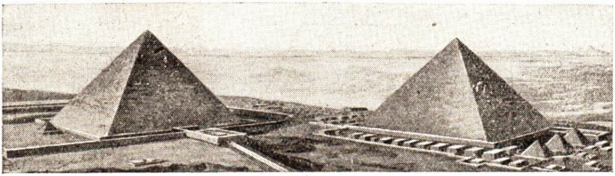


Abb. 110

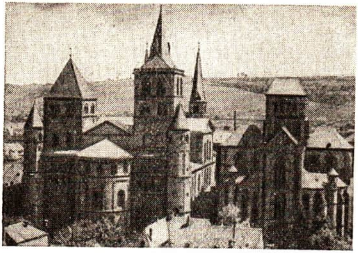


Abb. 111

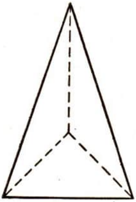


Abb. 112

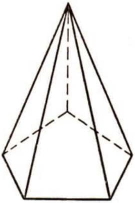


Abb. 113

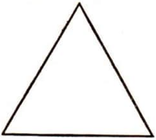


Abb. 114

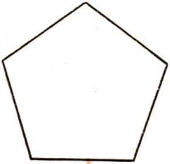


Abb. 115

Abb. 116

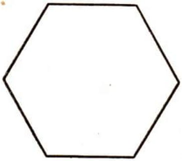


Abb. 117

Aufgaben

1. Aus welchen Figuren setzt sich die Oberfläche **a)** einer dreiseitigen, **b)** einer quadratischen, **c)** einer fünfseitigen, **d)** einer sechsseitigen Pyramide zusammen?
2. Nenne Gegenstände von der Form einer Pyramide!
3. **a)** Bei Pyramiden mit mehr als drei Seitenflächen gibt es nur eine Fläche, die man Grundfläche der Pyramide nennen kann. Begründe, warum das so ist!

   b) Eine dreiseitige Pyramide läßt dagegen mehrere Möglichkeiten zu. Wieviel gibt es?
4. Vergleiche die Seitenflächen der Pyramiden aus den Abbildungen 112 und 113 hinsichtlich Form und Größe untereinander!
5. Stelle entweder aus Holzleisten und Knetmasse oder aus Draht das Kantenmodell einer dreiseitigen Pyramide her!
6. Wieviel Meter Draht benötigt man, wenn man das Kantenmodell einer fünfseitigen Pyramide anfertigen will? Die Grundkanten sollen je 16 cm und die Seitenkanten je 24 cm lang sein. (Der Verschnitt soll nicht berücksichtigt werden.)

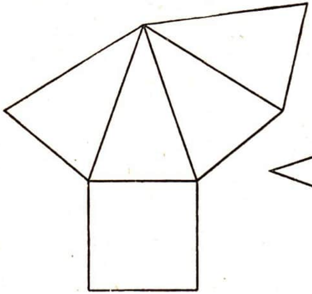


Abb. 118

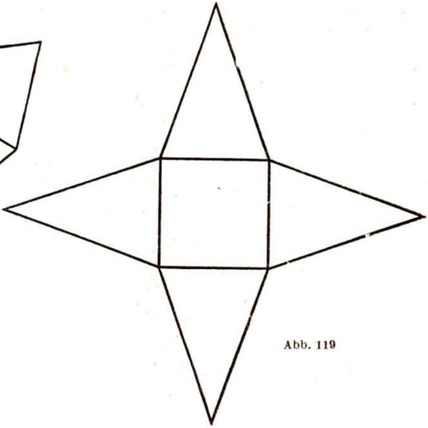


Abb. 119

Die Oberfläche einer quadratischen Pyramide besteht aus einem Quadrat und aus vier Dreiecken. Zwei Seiten jedes Dreiecks sind gleichlang. Die dritte Seite ist so lang wie eine Seite des Quadrates.

Die Abbildung 118 zeigt das Netz einer quadratischen Pyramide. Ein solches Netz läßt sich auch durch Abwickeln des entsprechenden Pyramidenmodells auf dem Zeichenblatt herstellen.

Die Abbildung 119 zeigt das Netz der gleichen Pyramide, jedoch wurden die Seitenflächen um die Grundfläche herumgelegt.

Wie kann man nachprüfen, ob die beiden Netze dieselbe Pyramide ergeben? Wo müßte man in den Abbildungen 118 und 119 Klebefalze anbringen, um die Netze zu Pyramiden zusammenkleben zu können?

Wir wollen nun auch durch Pyramiden Schnitte legen. Die Abbildung 120 zeigt zwei Pyramiden, die parallel zur Grundfläche zerschnitten wurden. Denke dir weitere Schnitte in verschiedenen Entfernungen von der Spitze!

Die Schnittflächen haben stets die gleiche Form wie die Grundfläche. Je näher die Schnitte an der Spitze der Pyramide liegen, um so kleiner sind die Schnittflächen.

Wir erkennen:

Wird eine Pyramide parallel zur Grundfläche zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets Vielecke von der gleichen Form wie die Grundfläche. Diese Vielecke sind jedoch stets kleiner als die Grundfläche.

Eine Pyramide wird durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche in zwei Teilkörper zerlegt (Abb. 120). Der obere Teilkörper ist wieder eine Pyramide.

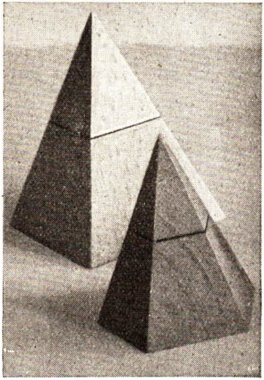


Abb. 120

Aufgaben

7. Stelle aus Karton das Modell einer dreiseitigen Pyramide her!

   Anleitung: Zeichne zunächst ein Dreieck, in dem alle Seiten 5 cm lang sind (vgl. Aufgabe 26, Seite 124)! Konstruiere nun über jeder Seite des Dreiecks ein weiteres Dreieck, in dem ebenfalls alle Seiten 5 cm lang sind! Bringe Klebefalze an, schneide aus, klebe zusammen!

8. Stelle aus Karton das Modell einer vierseitigen Pyramide her! Jede Kante soll 5 cm lang sein!

34. Der Kegel

Die in den Abbildungen 121 bis 125 dargestellten Körper haben wie die Pyramiden eine Spitze, jedoch haben sie keine Seitenkanten. Die Grundflächen sind keine Vielecke, sondern Kreise. Die Körper besitzen eine gekrümmte Mantelfläche.

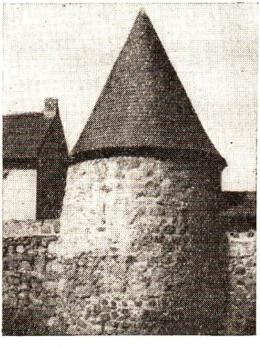


Abb. 121

Wir umwickeln ein Modell eines solchen Körpers mit einem Blatt Papier, schneiden die überstehenden Teile ab und rollen den so entstandenen Mantel aus (Abb. 126). Wir stellen fest, daß der Mantel ein Kreisausschnitt ist. In der Abbildung 127 ist dieser Mantel noch einmal gezeichnet; gleichzeitig ist angedeutet, daß er zu einem Kreis ergänzt werden kann.

Die Körper in den Abbildungen 121 bis 125 werden **gerade Kreiskegel** genannt. In dem Kegel der Abbildung 124 ist der Mittelpunkt des Grundkreises mit der Kegelspitze verbunden. Diese Gerade heißt **Achse des Kegels**. Wie aus der Abbildung 125 ersichtlich ist, steht diese Kegelachse auf der Grundfläche senkrecht.

Erklärung: **Ein Körper heißt gerader Kreiskegel, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt: Die Grundfläche ist ein Kreis. Die übrige Begrenzungsfläche, der Mantel, ist gekrümmt und läuft in einer Spitze aus. Der Mantel kann auf einer ebenen Fläche abgerollt werden. Die Kegelachse steht auf der Grundfläche senkrecht.**

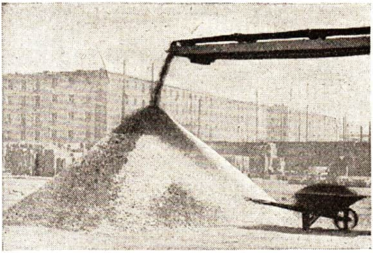


Abb. 122

Wir wollen im folgenden die geraden Kreiskegel nur kurz Kegel nennen. Die Abbildung 128 zeigt das vollständige Netz eines Kegels. Welche Linien sind gleichlang?

Aufgaben

1. Nenne Gegenstände von der Form eines Kegels!

2. Forme aus Knetmasse einen Kegel!

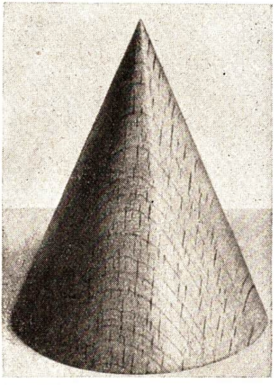


Abb. 123

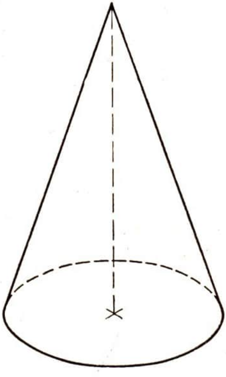


Abb. 124

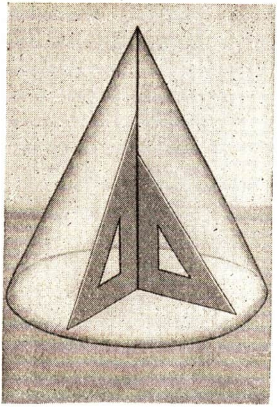


Abb. 125

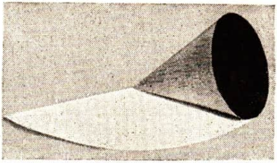


Abb. 126

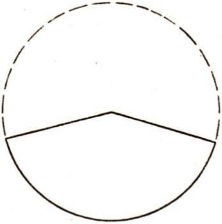


Abb. 127

3. Entnimm der Abbildung 129 die Maße und konstruiere das Netz des Kegels! Bringe Klebefalze an, schneide aus und klebe zusammen!
4. Zeichne einen Halbkreis mit dem Radius 10 cm! Schneide ihn aus und klebe ihn zu einem Kegelmantel zusammen! Der zugehörige Grundkreis hat einen Radius von 5 cm! Schneide ihn aus und vervollständige den Kegel!

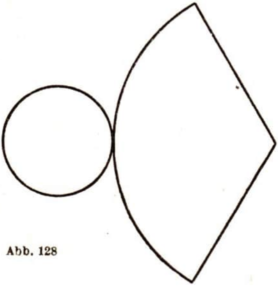


Abb. 128

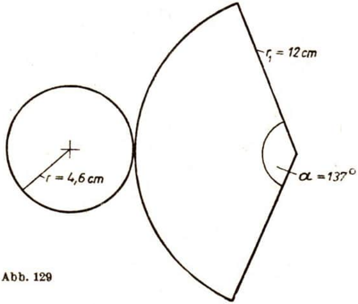


Abb. 129

5. Forme aus Knetmasse einen Kegel! Zerschneide ihn an mehreren Stellen parallel zur Grundfläche! Welche Form haben die Schnittflächen? Vergleiche die Größe der Schnittflächen untereinander und mit der Grundfläche!
6. Forme aus Knetmasse einen weiteren Kegel! Zerschneide ihn senkrecht zur Grundfläche, und zwar so, daß der Schnitt durch die Kegelspitze geht! Ganz gleich, in welcher Richtung dabei geschnitten wird, es entstehen stets gleich große Dreiecke.

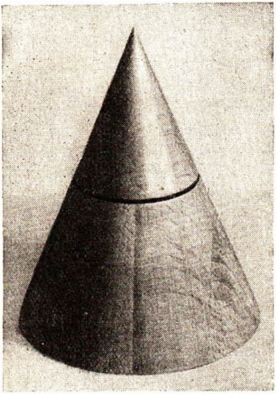


Abb. 130

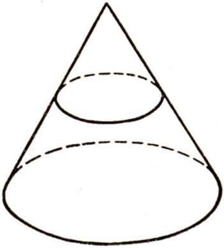


Abb. 131

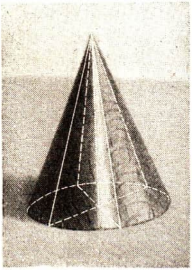


Abb. 132

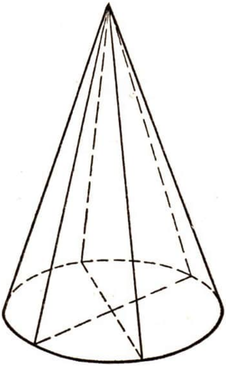


Abb. 133

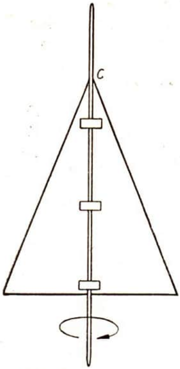


Abb. 134

Wir können also sagen:

Wird ein Kegel parallel zur Grundfläche zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets Kreise. Sie sind immer kleiner als die Grundfläche (siehe Abb. 130 und 131).

Durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche entstehen zwei Teilkörper; der obere ist wieder ein Kegel.

Wird ein Kegel durch seine Spitze senkrecht zur Grundfläche zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets einander gleiche Dreiecke (siehe Abb. 132 und 133).

Zeichne einen Winkel mit dem Scheitelpunkt C! (Der Winkel muß kleiner als 180° sein.) Trage auf den Schenkeln von C aus gleiche Strecken ab! Verbinde die Endpunkte! Fälle das Lot von C auf die gegenüberliegende Seite! Schneide das Dreieck aus und befestige es so an einer Stricknadel, daß die Nadel auf dem Lot liegt (Abb. 134)! Drehe die Stricknadel zwischen je zwei Fingern beider Hände möglichst schnell! Was beobachtest du? Wir können uns einen Kegel auch durch **Drehung (Rotation)** eines Dreiecks mit zwei gleich langen Seiten entstanden denken. Die **Drehachse (Rotationsachse)** ist das Lot von der Spitze auf die gegenüberliegende Seite.

Auch der Kegel ist also ein Drehkörper.

Aufgaben

7. Denke dir mehrere Schnitte parallel zur Grundfläche eines Kegels! Wie ändert sich die Größe der Schnittflächen von der Grundfläche zur Spitze?
8. Auch bei einem Zylinder entstehen bei Schnitten parallel zur Grundfläche stets Kreisflächen. Zerschneide in Gedanken einen Zylinder in verschiedenen Höhen parallel zur Grundfläche! Was kannst du über die Größe der Schnittflächen aussagen? Welcher Unterschied besteht gegenüber dem Kegel?

35. Das Dreieck

An geometrischen Körpern treten häufig Dreiecke auf. So gibt es unter den Prismen solche, die Dreiecke als Grund- und Deckfläche haben. Bei allen Pyramiden sind die Seitenflächen Dreiecke. Bei der dreiseitigen Pyramide ist außerdem noch die Grundfläche ein Dreieck. Wenn ein Kegel senkrecht zur Grundfläche durch die Kegelspitze zerschnitten wird, entstehen als Schnittflächen stets Dreiecke.

Dreiecke finden wir auch häufig in der Technik, zum Beispiel an Gebäuden, Brücken und Maschinen. Die Abbildung 135 zeigt ein Theater in Berlin, die Abbildung 136 die Konstruktion einer Brücke und die Abbildung 137 einen Dachstuhlbinder (so bezeichnet man Teile des Dachstuhls; in leeren Scheunen sind sie besonders deutlich zu erkennen).

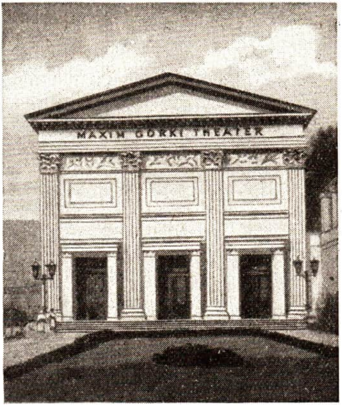


Abb. 135

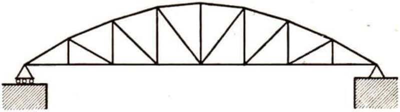


Abb. 136

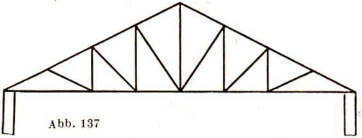


Abb. 137

Miß bei den Seitenflächen einer Pyramide die Länge der Dreiecksseiten und die Größe der Winkel! Miß die Winkel der Dreiecke in den Abbildungen 138 bis 140!

Wir können feststellen: In den uns bekannten Dreiecken kommen spitze, rechte und stumpfe Winkel vor. Wenn man untersucht, ob man ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln, zwei stumpfen Winkeln oder mit einem stumpfen und einem rechten Winkel zeichnen kann, so ergibt sich: Dreiecke mit zwei und mehr rechten oder mit zwei und mehr stumpfen Winkeln gibt es nicht.

Erklärung: **Ein Dreieck, das nur spitze Winkel enthält, heißt spitzwinkliges Dreieck** (Abb. 138). **Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt rechtwinkliges Dreieck** (Abb. 139). **Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heißt stumpfwinkliges Dreieck** (Abb. 140).

Wir können also die Dreiecke nach der Größe der Winkel benennen, die in ihnen vorkommen. Wir sprechen demnach von spitzwinkligen, rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreiecken. Zum anderen werden die Dreiecke auch noch danach benannt, ob in ihnen alle drei Seiten verschieden lang sind, ob zwei oder alle drei Seiten die gleiche Länge haben.

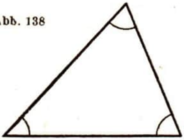


Abb. 138

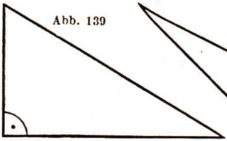


Abb. 139

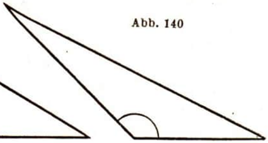


Abb. 140

Erklärung: **Ein Dreieck, in dem alle drei Seiten verschieden lang sind, heißt ungleichseitiges Dreieck** (Abb. 138 bis 141). **Ein Dreieck, in dem zwei Seiten die gleiche Länge haben, heißt gleichschenkliges Dreieck** (Abb. 142). **Ein Dreieck, in dem alle drei Seiten gleichlang sind, heißt gleichseitiges Dreieck** (Abb. 143).

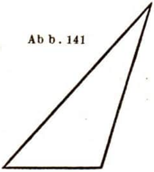


Abb. 141

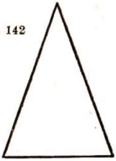


Abb. 142

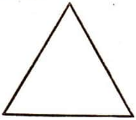


Abb. 143

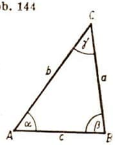


Abb. 144

Die Eckpunkte eines Dreiecks werden meist mit den großen Buchstaben A, B, C, die Seiten (als Strecken) mit den kleinen Buchstaben a, b, c bezeichnet. Dabei erhält die Seite, die dem Eckpunkt A gegenüberliegt, die Bezeichnung a. Die Seite, die dem Eckpunkt B gegenüberliegt, wird mit b bezeichnet, und die dem Eckpunkt C gegenüberliegende Seite erhält die Bezeichnung c. Die Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben benannt. Dabei hat der Winkel α den Eckpunkt A, der Winkel β den Eckpunkt B und der Winkel γ den Eckpunkt C zum Scheitelpunkt. Die Winkel α, β und γ bezeichnet man als Innenwinkel des Dreiecks (Abb. 144).

Aufgabe: Zeichne ein Dreieck mit den Seiten $a = 3{,}5$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $c = 5$ cm!

a) Lösung mit Hilfe von Pappstreifen:

Zeichne zunächst die Seite $AB = c = 5$ cm in das Heft! Nun schneide aus Pappe zwei Streifen aus und zeichne auf den einen Streifen die Strecke $AC = b = 4{,}5$ cm und auf den anderen die Strecke $BC = a = 3{,}5$ cm! Befestige die Streifen mit Reißnägeln an den entsprechenden Endpunkten der Strecke AB (Abb. 145)! Drehe nun die Pappstreifen so lange, bis ihre Enden zusammenfallen! So erhältst du die Lage des Punktes C. Prüfe nach, ob oberhalb von AB nur eine Lage des Punktes C möglich ist!

An Stelle der Pappstreifen benutzen wir den Zirkel.

b) **Lösung** mit Hilfe des Zirkels:

Zeichne die Strecke $AB = c = 5$ cm! Der Punkt C muß von A den Abstand 4,5 cm und von B den Abstand 3,5 cm haben. Schlage um A mit dem Radius 4,5 cm einen Kreisbogen! Alle Punkte dieses Kreisbogens sind 4,5 cm von A entfernt. Ebenso haben alle Punkte auf dem Kreisbogen um B mit dem Radius 3,5 cm von B den Abstand 3,5 cm. Die Kreise schneiden einander in zwei Punkten. Wir wählen den Schnittpunkt oberhalb von AB und bezeichnen ihn mit C (Abb. 146). Dieser Schnittpunkt der beiden Kreise ist ein Punkt, der gleichzeitig 4,5 cm von A und 3,5 cm von B entfernt ist. Er ist der gesuchte dritte Dreieckspunkt, und das Dreieck ABC ist das gesuchte Dreieck. Prüfe nach, ob die Seiten des Dreiecks die geforderte Länge besitzen! Vergleiche diese Konstruktion mit dem Konstruktionsverfahren unter Verwendung der Pappstreifen! Welches Verfahren ist einfacher und genauer?

Aufgabe

1. Konstruiere ein Dreieck mit den Seiten

a)	$a = 3$ cm,	$b = 5$ cm,	$c = 6$ cm,
b)	$a = 4$ cm,	$b = 5$ cm,	$c = 7$ cm,
c)	$a = 3$ cm,	$b = 4$ cm,	$c = 5$ cm,
d)	$a = 5$ cm,	$b = 3$ cm,	$c = 7$ cm!

Versuche, ein Dreieck aus den Seiten $a = 3$ cm, $b = 2$ cm und $c = 6$ cm zu zeichnen! Was stellst du fest?

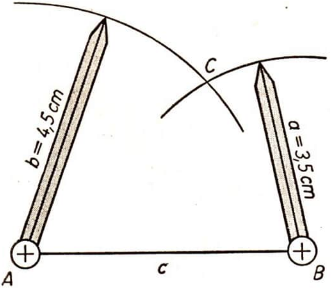


Abb. 145

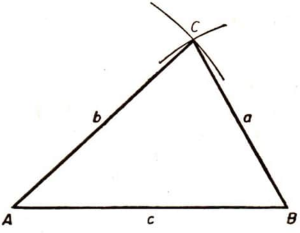


Abb. 146

Erläuterung: Aus den Seiten $a = 3$ cm, $b = 2$ cm und $c = 6$ cm läßt sich kein Dreieck konstruieren. Addiert man nämlich die Länge der Seiten a und b, so ist die Summe kleiner als die dritte Seite c. Betrachtet man aber ein beliebiges Dreieck, so sieht man sofort, daß stets die Summe von zwei Seiten größer als die dritte Seite sein muß. Die kürzeste Verbindung von A und B ist die Strecke c. Der Weg von A nach B über C, also die Summe der Seiten a und b, muß länger sein als die Strecke $AB = c$.

Diese Feststellung gilt für alle Seiten des Dreiecks.

Satz 12: Im Dreieck ist die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite.

Auf Grund des Satzes 12 können wir leicht feststellen, ob man aus drei gegebenen Strecken ein Dreieck konstruieren kann. Je zwei dieser gegebenen Strecken müssen nämlich zusammen größer als die dritte Strecke sein. Nur in diesem Fall ist die Konstruktion eines Dreiecks möglich. Wir untersuchen einige Beispiele.

1. Beispiel: $a = 3$ cm $\quad b = 4$ cm $\quad c = 6$ cm

$3 + 4 = 7$ ist größer als 6,
$4 + 6 = 10$ ist größer als 3,
$3 + 6 = 9$ ist größer als 4.
Die Konstruktion des Dreiecks ist möglich.

2. Beispiel: $a = 15$ cm $\quad b = 8$ cm $\quad c = 6$ cm

$15 + 8 = 23$ ist größer als 6,
$8 + 6 = 14$ ist nicht größer als 15,
folglich ist die Konstruktion des Dreiecks nicht möglich.

Aufgaben

2. Untersuche, in welchen der folgenden Aufgaben aus a, b und c ein Dreieck konstruiert werden kann!

a)	$a = 4{,}3$ cm	$b = 3{,}8$ cm	$c = 5{,}5$ cm
b)	$a = 6{,}5$ cm	$b = 2{,}5$ cm	$c = 3{,}5$ cm
c)	$a = 1{,}7$ cm	$b = 4{,}3$ cm	$c = 6{,}0$ cm
d)	$a = 4{,}2$ cm	$b = 12{,}2$ cm	$c = 17{,}3$ cm
e)	$a = 4{,}3$ cm	$b = 5{,}7$ cm	$c = 1{,}9$ cm

3. Konstruiere die folgenden Dreiecke!

a)	$a = 5$ cm	$b = 4$ cm	$c = 6$ cm
b)	$a = 5$ cm	$b = 3$ cm	$c = 6$ cm
c)	$a = 5$ cm	$b = 2$ cm	$c = 6$ cm

d) Versuche, aus den Seiten $a = 5$ cm, $b = 1$ cm, $c = 6$ cm ein Dreieck zu konstruieren!

Wir hatten schon festgestellt, daß unter den Innenwinkeln eines Dreiecks nur ein rechter oder nur **ein** stumpfer Winkel vorkommen kann. Wir wollen den Grund für diese Feststellung finden und zu diesem Zweck die Innenwinkel des Dreiecks näher untersuchen.

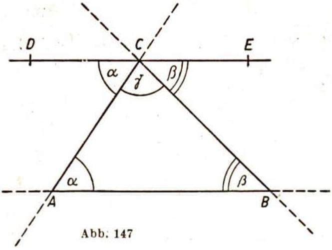


Abb. 147

Zeichne ein rechtwinkliges, ein stumpfwinkliges und ein spitzwinkliges Dreieck! Miß die Innenwinkel α, β, γ und bilde für jedes Dreieck die Summe $\alpha + \beta + \gamma$!

Wir messen in einem beliebigen Dreieck die Innenwinkel. Aus diesen Gradzahlen bilden wir die Summe. In jedem Falle erhalten wir einen Wert, der nahe bei 180° liegt. Die Messungen mit dem Winkelmesser sind nicht völlig genau. Daher vermuten wir, daß die Summe der Innenwinkel **genau** 180° beträgt.

Wir werden im folgenden beweisen, daß in jedem Dreieck die Summe der Innenwinkel genau 180° beträgt. Dabei wenden wir den Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen an, den wir bereits kennen. Wir zeichnen ein beliebiges Dreieck ABC. Durch den Punkt C zeichnen wir die Parallele zu der Dreiecksseite AB. Auf dieser Parallelen legen wir links von C irgendeinen Punkt D und rechts von C einen Punkt E fest (Abb. 147).

Wenn wir nun noch die Dreiecksseiten wie in Abbildung 147 verlängern, dann erkennen wir folgendes:

Der Winkel DCA ist Wechselwinkel zu dem Winkel α. (Die schneidende Gerade ist die nach beiden Seiten verlängerte Dreiecksseite AC.) Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind aber einander gleich. Folglich ist der Winkel DCA so groß wie α.

Der Winkel ECB ist Wechselwinkel zu dem Winkel β. (Die schneidende Gerade ist die nach beiden Seiten verlängerte Dreiecksseite CB.) Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind einander gleich. Folglich ist der Winkel ECB so groß wie β. Die Winkel α, γ und β bilden zusammen bei C einen gestreckten Winkel. Folglich ist $\alpha + \gamma + \beta = 180°$ oder anders geschrieben: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Satz 13: Im Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.

Aufgaben

4. Begründe, warum in einem Dreieck nur einer der drei Innenwinkel 90° oder größer als 90° sein kann!

5. In einem Dreieck sind die Größen zweier Winkel bekannt.

a) $\alpha = 49°$, $\beta = 72°$ **b)** $\gamma = 90°$, $\alpha = 60°$ **c)** $\alpha = 60°$, $\beta = 65°$
d) $\gamma = 55°$, $\alpha = 72°$ **e)** $\beta = 112°$, $\alpha = 22°$ **f)** $\gamma = 74°$, $\beta = 92°$

1. Stelle durch Zeichnung fest, wie groß jeweils der dritte Winkel ist!
   Anleitung: Konstruiere die Summe der beiden Winkel und miß die Differenz zum gestreckten Winkel!
2. Stelle durch Rechnung fest, wie groß jeweils der dritte Winkel ist, und vergleiche diese Ergebnisse mit den zeichnerischen Lösungen!

6. Ein Satz lautet: Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der spitzen Winkel 90°. Begründe diesen Satz!

Erklärung: **Wenn man eine Dreiecksseite verlängert, so entsteht zwischen dieser Verlängerung und der anderen Dreiecksseite ein Außenwinkel des Dreiecks** (Abb. 148).

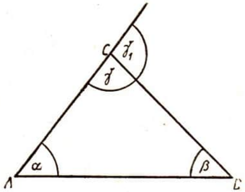


Abb. 148

Begründe nach Abbildung 148, warum $\gamma + \gamma_1 = 180°$ ist! Am Punkt C läßt sich noch ein zweiter Außenwinkel zeichnen, indem man die Seite BC über C hinaus verlängert. Begründe, warum dieser Außenwinkel so groß wie γ_1 ist!

Wir zeichnen durch C zur Seite AB die Parallele. Sie teilt den Außenwinkel γ_1 in zwei Teilwinkel (Abb. 149). Der untere Teilwinkel ist Wechsel-

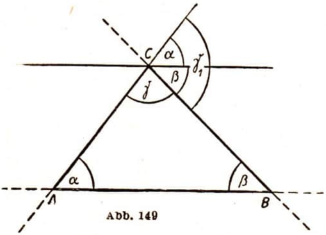


Abb. 149

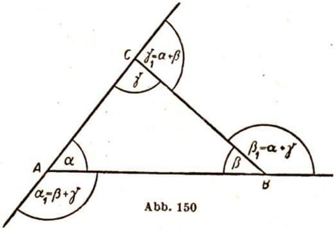


Abb. 150

winkel zu β und folglich genauso groß wie dieser. Der obere Teilwinkel ist Stufenwinkel zu α und deshalb genauso groß wie dieser.

Folglich ist der Außenwinkel γ_1 gleich der Summe der Innenwinkel α und β:

$$\gamma_1 = \alpha + \beta.$$

Die Winkel α und β sind die Innenwinkel des Dreiecks, die dem Außenwinkel γ_1 nicht anliegen. Deshalb sagen wir:

Satz 14: Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel.

Wenn wir mit α_1 den Außenwinkel beim Punkt A und mit β_1 den Außenwinkel beim Punkt B bezeichnen, dann können wir entsprechend Satz 14 sagen:

$$\alpha_1 = \beta + \gamma \quad \text{und} \quad \beta_1 = \alpha + \gamma.$$

Abbildung 150 zeigt ein Dreieck ABC, in dem alle Außenwinkel eingezeichnet sind. Bildet man die Summe der drei Außenwinkel, so erhält man folgendes Ergebnis:

$$\overbrace{\beta + \gamma}^{\alpha_1} + \overbrace{\alpha + \gamma}^{\beta_1} + \overbrace{\alpha + \beta}^{\gamma_1} = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma.$$

In dieser Summe kommt jeder Innenwinkel doppelt vor. Da die Summe der Innenwinkel 180° ist, beträgt die Summe der Außenwinkel das Doppelte, also 360°.

Satz 15: Die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 360°.

Aufgaben

7. In einem Dreieck sind zwei Winkel bekannt.
   a) $\alpha = 43°$, $\beta = 64°$ **b)** $\gamma = 113°$, $\beta = 24°$
   c) $\beta = 74°$, $\gamma = 83°$ **d)** $\alpha = 14°$, $\beta = 63°$
   Berechne jeweils den dritten Innenwinkel und die drei Außenwinkel!
8. Zeichne ein stumpfwinkliges Dreieck! Führe an dieser Figur die Beweise für die Sätze
   a) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (Satz 13), **b)** $\gamma_1 = \alpha + \beta$ (Satz 14)!
9. Zeichne ein Dreieck und die drei Außenwinkel! Miß die Außenwinkel und bilde ihre Summe!

In der Abbildung 151 ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC gezeichnet. Bei einem gleichschenkligen Dreieck werden die gleichlangen Seiten **Schenkel** genannt (AC und BC). Die dritte Seite erhält die Bezeichnung **Basis** (AB). Der Punkt des Dreiecks, der der Basis gegenüberliegt, heißt

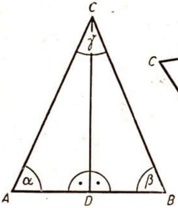


Abb. 151

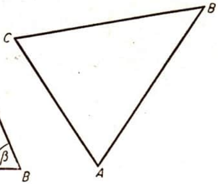


Abb. 152

Spitze (Punkt C). Es ist zu beachten, daß durchaus nicht immer die Seite AB die Basis und die Seiten AC und BC die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks zu sein brauchen. In der Abbildung 152 sind zum Beispiel die Seiten AB und BC gleichlang, die Seite AC ist die Basis und der Punkt B die Spitze dieses gleichschenkligen Dreiecks.

Die an der Basis liegenden Dreieckswinkel werden **Basiswinkel** genannt. Der der Basis gegenüberliegende Winkel heißt **Winkel an der Spitze**.

Aufgabe: Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis AB die Länge 4 cm hat und dessen Schenkel 6 cm lang sind!

Lösung: Wir zeichnen zunächst die Strecke $AB = c = 4$ cm. Der Punkt C muß von A und B den gleichen Abstand von 6 cm haben. Wir schlagen deshalb um A und B Kreise mit dem Radius 6 cm, die einander oberhalb von AB in dem Punkt C schneiden. ABC ist das gesuchte Dreieck.

Konstruiere nun in diesem gleichschenkligen Dreieck das Lot von der Spitze C auf die Basis AB! Schneide das Dreieck aus und klappe es um das Lot zusammen! Wir stellen dabei fest, daß sich die beiden Teile des Dreiecks vollständig decken. Das gleichschenklige Dreieck ist also achsensymmetrisch, und das Lot von der Spitze auf die Basis ist die Symmetrieachse (Abb. 151). Sie halbiert den Winkel an der Spitze (Winkel γ) und die Basis (AB). Außerdem steht die Symmetrieachse auf der Basis senkrecht.

Ferner stellen wir durch Umklappen fest, daß die Basiswinkel (α und β) einander gleich sind.

Satz 16: Das gleichschenklige Dreieck ist achsensymmetrisch. Die Symmetrieachse geht durch die Spitze, halbiert den Winkel an der Spitze, halbiert die Basis und steht auf ihr senkrecht.

Satz 17: Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich.

Aufgaben

10. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck aus den gegebenen Seiten!

a) $a = b = 4$ cm, $c = 5$ cm
b) $a = 3$ cm, $b = c = 5$ cm
c) $b = 2{,}8$ cm, $a = c = 2{,}3$ cm
d) $a = b = 2{,}5$ cm, $c = 3{,}5$ cm

11. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck aus der gegebenen Seite!
a) 3 cm (Beschreibe die Konstruktion!)
b) 4 cm **c)** 5,2 cm **d)** 6,4 cm
e) Wieviel Symmetrieachsen hat ein gleichseitiges Dreieck? Zeichne sie ein!

12. a) Dachgiebel sind oft gleichschenklige Dreiecke. Zeichne einen solchen Dachgiebel mit der Basis 10 m (6 m, 5 m) und den Schenkeln 8 m (7,5 m, 6 m)! Maßstab 1:100.
b) Welchen Winkel schließen die Dachkanten am Dachfirst ein?

13. Konstruiere die Netze von dreiseitigen Pyramiden mit den folgenden Maßen!

	a)	b)	c)	d)
Grundkanten:	3,0 cm	4,2 cm	2,8 cm	3,5 cm
Seitenkanten:	5,0 cm	6,0 cm	2,5 cm	3,5 cm

Anleitung: Konstruiere zunächst die Grundfläche! Gehe von der Grundfläche aus und konstruiere die Seitenflächen!
e) Bringe Klebefalze an, schneide aus und klebe zusammen!

14. Konstruiere die Netze der folgenden quadratischen Pyramiden!

	a)	b)	c)	d)
Grundkanten:	3,0 cm	2,5 cm	4,0 cm	6,0 cm
Seitenkanten:	4,8 cm	3,7 cm	4,0 cm	4,8 cm

Anleitung: Konstruiere zunächst das Quadrat mit Lineal und Zeichendreieck! Verfahre dann wie bei Aufgabe 13!

15. Fertige aus Karton das Modell eines Turmdaches an! Das Dach soll eine quadratische Pyramide sein, deren Grundkante 4 m und deren Seitenkanten 6 m lang sind (Maßstab 1:100).

16. Wie groß ist jeder Winkel in einem gleichseitigen Dreieck?

17. In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt der Winkel an der Spitze 90°. Wie groß sind die anderen Innenwinkel?

18. Begründe den folgenden Satz: Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß wie ein Basiswinkel!

19. In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt ein Basiswinkel **a)** 28°, **b)** 49°, **c)** 76°, **d)** 64°. Wie groß sind die übrigen Innenwinkel und die Außenwinkel?

20. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt **a)** 132°, **b)** 98°, **c)** 67°.
Bestimme die Innenwinkel und die anderen Außenwinkel!

21. Der Winkel γ an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks nimmt folgende Werte an: 10°, 20°, 30°.
Stelle die zugehörigen Werte von α fest! Wie groß ist jeweils der Winkel β?

36. Der Kegelstumpf

Wenn wir einen Kegel parallel zur Grundfläche zerschneiden, entstehen zwei Teilkörper. Der obere Teilkörper ist wieder ein Kegel, der andere wird **Kegelstumpf** genannt (Abb. 153 und 154).

Die Abbildungen 155 und 156 zeigen uns Gegenstände, die die Form eines Kegelstumpfes haben. Grund- und Deckfläche eines Kegelstumpfes sind Kreise, die zueinander parallel liegen. Sie sind verschieden groß. Den Mantel eines Kegelstumpfes können wir auf einem Zeichenblatt abrollen.

Schneide zu dem Modell eines Kegelstumpfes einen Papiermantel und breite diesen aus (Abb. 157 und 158)!

Die Abbildung 158 zeigt den ausgebreiteten Mantel eines Kegelstumpfes. Welche Linien sind gleichlang? Wo muß man Klebefalze anbringen, wenn man den Mantel wieder zusammenkleben will? Die Abbildung 158 zeigt uns auch, wie man den Mantel eines Kegelstumpfes zu einem Kegelmantel ergänzen kann. Durch welche Linien wird dieser Kegelmantel begrenzt?

Erklärung: **Grund- und Deckfläche eines Kegelstumpfes sind Kreise. Sie sind verschieden groß und liegen zueinander parallel. Der Mantel ist ein Teil eines Kegelmantels und kann auf der Zeichenebene abgerollt werden.**

Aufgaben

1. Nenne Gegenstände von der Form eines Kegelstumpfes!
2. Begründe, warum bei einem Kegelstumpf die Verbindungsstrecke zwischen den Mittelpunkten von Grund- und Deckfläche auf der Grundfläche senkrecht steht! (Diese Strecke nennt man wieder Achse. Vergleiche Abb. 164!)

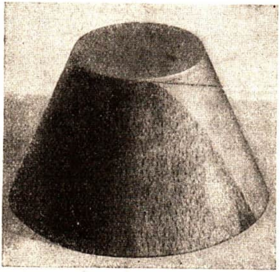


Abb. 153

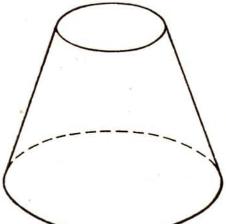


Abb. 154

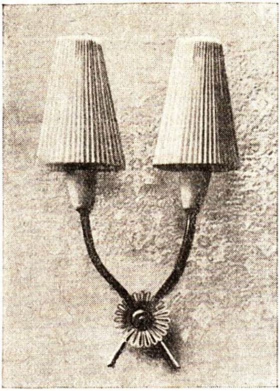


Abb. 155

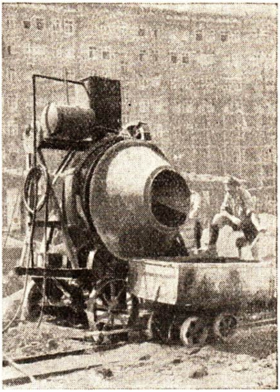


Abb. 156

3. Denke dir einen Kegelstumpf parallel zur Grundfläche zerschnitten! Beschreibe die Form der Schnittfläche!
4. Begründe, warum in der Abbildung 164 die Strecken CD und AB zueinander parallel liegen und warum die Strecken AD und BC die gleiche Länge haben!

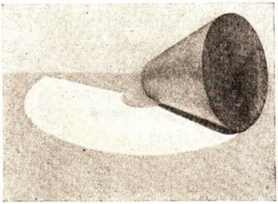


Abb. 157

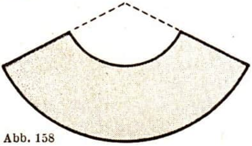


Abb. 158

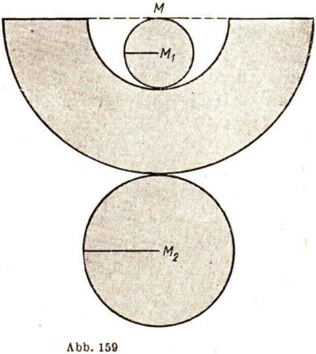


Abb. 159

5. Die Abbildung 159 zeigt (grau gezeichnet) das vollständige Netz eines Kegelstumpfes. Entnimm der Zeichnung die notwendigen Maße und konstruiere das Netz auf festem Papier! Bringe Klebefalze an, schneide aus und klebe den Kegelstumpf zusammen!
6. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck! Fälle das Lot von der Spitze auf die Basis! Ziehe durch einen Punkt eines Schenkels die Parallele zur Basis und zerschneide das Dreieck längs dieser Parallelen! Befestige das erhaltene Viereck so an einer Stricknadel, daß diese auf dem Lot liegt! Drehe die Stricknadel schnell zwischen den Fingern! Beschreibe, was du beobachtest!

37. Der Pyramidenstumpf

Wenn eine Pyramide parallel zur Grundfläche zerschnitten wird, entstehen zwei Teilkörper. Der obere Teilkörper ist wieder eine Pyramide, der untere heißt **Pyramidenstumpf** (Abb. 160, 161 und 162).

Beschreibe die Form der Begrenzungsflächen beim Pyramidenstumpf! Wie liegen Grund- und Deckfläche zueinander? Auch die Pyramidenstümpfe unterscheiden wir nach der Anzahl der Seitenflächen. Es gibt zum Beispiel dreiseitige, vierseitige und fünfseitige Pyramidenstümpfe.

Beschreibe die Oberfläche eines dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen Pyramidenstumpfes! Begründe, warum die Seitenflächen der Pyramidenstümpfe achsensymmetrisch sind! Beschreibe den Verlauf der Symmetrieachse!

Erklärung: **Grund- und Deckfläche eines Pyramidenstumpfes sind zueinander parallele, aber verschieden große Vielecke. Die Seitenflächen sind stets Vierecke. Zwei Seiten dieser Vierecke sind zueinander parallel.**

Die Abbildung 163 zeigt das vollständige Netz eines quadratischen Pyramidenstumpfes. Stelle fest, welche Strecken gleichlang sind!

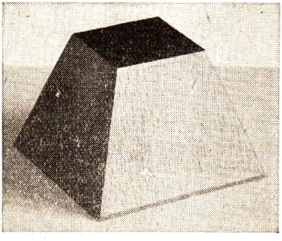


Abb. 160

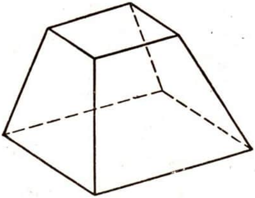


Abb. 161

Aufgaben

1. Nenne Gegenstände von der Form eines Pyramidenstumpfes?
2. Aus welchen Flächen setzt sich das Netz **a)** eines fünfseitigen, **b)** eines sechsseitigen, **c)** eines siebenseitigen Pyramidenstumpfes zusammen?
3. Welche Veränderungen müßte man in der Abbildung 163 vornehmen, um das Netz einer Pyramide zu erhalten? Fertige eine entsprechende Zeichnung an!
4. Es soll das Kantenmodell eines sechsseitigen Pyramidenstumpfes hergestellt werden. Wieviel Meter Draht benötigt man, wenn die Grundkanten 4 cm, die Deckkanten 3 cm, die Seitenkanten 8 cm lang sind?
   Denke dir die Drähte an den Enden zusammengelötet!
5. Denke dir einen quadratischen Pyramidenstumpf parallel zur Grundfläche zerschnitten! Beschreibe die Form der Schnittfläche!
6. Übertrage die Abbildung 163 auf Karton (Durchstechen der Eckpunkte)! Bringe Klebefalze an, schneide aus und klebe den Pyramidenstumpf zusammen!

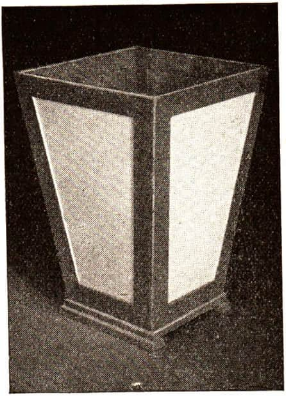


Abb. 162

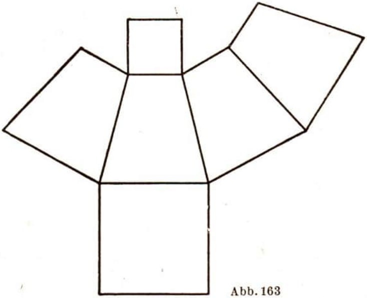


Abb. 163

38. Das Trapez

Die Seitenflächen eines Pyramidenstumpfes sind Vierecke. In diesen Vierecken sind zwei Seiten zueinander parallel. Die beiden anderen Seiten sind gleichlang, aber nicht parallel. Vierecke mit dieser Eigenschaft entstehen auch, wenn man einen Kegelstumpf senkrecht zur Grundfläche zerschneidet (vgl. Abb. 164).

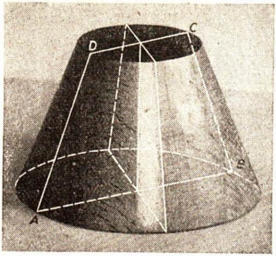


Abb. 164

Die Abbildungen 165 und 166 zeigen zwei weitere Vierecke, bei denen die nichtparallelen Seiten verschieden lang sind. Darin unterscheiden sich die abgebildeten Flächen von den Seitenflächen eines Pyramidenstumpfes. Mit diesen haben sie aber gemeinsam, daß zwei Seiten zueinander parallel liegen.

Erklärung: **Vierecke, in denen zwei Seiten zueinander parallel liegen, heißen Trapeze.**

Die nichtparallelen Seiten heißen **Schenkel** des Trapezes. Wenn in einem Trapez die Schenkel gleichlang sind, wird es **gleichschenkliges Trapez** genannt (Abb. 167).

Die zueinander parallelen Seiten eines Trapezes bezeichnet man als große und kleine Grundseite. Errichtet man in irgendeinem Punkt der einen Grundseite eine Senkrechte, so schneidet diese die andere Grundseite oder deren Verlängerung ebenfalls rechtwinklig. Die Entfernung dieser beiden Schnittpunkte voneinander ist die **Höhe** des Trapezes (die Strecke EF bzw. GH in Abb. 168).

Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis AB! Zeichne durch einen beliebigen Punkt eines Schenkels eine Parallele zur Basis (Abb. 169)! Begründe, warum das Viereck $ABDE$ in der Abbildung 169 ein

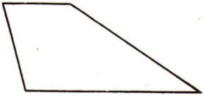


Abb. 165

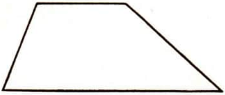


Abb. 166

Abb. 167

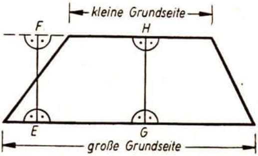


Abb. 168

gleichschenkliges Trapez ist! Fälle in dem Dreieck ABC das Lot von C auf die Basis! Schneide das Trapez $ABDE$ aus und falte es um die Strecke GF zusammen! Vergleiche untereinander die Größe der Strecken EG und DG bzw. AF und BF sowie die Größe der Winkel mit den Scheitelpunkten A und B bzw. E und D!

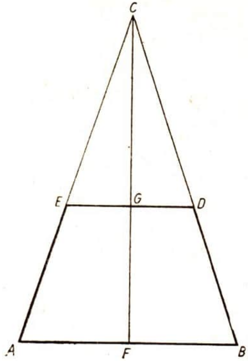


Abb. 169

Satz 18: **Das gleichschenklige Trapez ist achsensymmetrisch. Die Symmetrieachse halbiert die Grundseiten und steht auf ihnen senkrecht. Die Innenwinkel an den Endpunkten der großen Grundseite sind einander gleich. Entsprechend sind die Innenwinkel an den Endpunkten der kleinen Grundseite einander gleich.**

Aufgaben

1. Zeichne **a)** ein beliebiges, **b)** ein gleichschenkliges Trapez!
Anleitung zu b): Gehe vom gleichschenkligen Dreieck aus!

2. Zeichne ein beliebiges Trapez und verlängere alle Seiten! Bestimme Scheitelwinkel, Nebenwinkel und Winkel an geschnittenen Parallelen (Stufenwinkel, Wechselwinkel und entgegengesetzt liegende Winkel)! Suche Winkel, die **a)** gleich groß sind, **b)** einander zu 180° ergänzen!

3. Zeichne ein beliebiges Trapez $ABCD$! Zeichne eine Höhe ein **a)** durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal, **b)** unter Verwendung eines Zeichendreiecks!

4. Zeichne die Umrisse eines Siebes, wie es auf Bauplätzen verwendet wird! Es hat häufig die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Die kleinere Seite soll 4,5 dm, die größere 8 dm und die Höhe 10 dm lang sein. Wähle den Maßstab 1:10!

Anleitung: Zeichne zunächst die große Grundseite! Halbiere diese und errichte in dem Halbierungspunkt die Senkrechte! Trage die Länge der Höhe auf der Senkrechten ab! Ziehe durch den Endpunkt die Parallele zur Grundseite! Trage auf der Parallelen nach beiden Seiten die halbe Länge der kleinen Grundseite ab!

5. Zeichne gleichschenklige Trapeze! Entnimm der folgenden Tabelle die notwendigen Maße!

	Große Grundseite	Kleine Grundseite	Höhe
a	9 cm	5 cm	5 cm
b	6 cm	4 cm	3 cm
c	7,5 cm	4,5 cm	4,0 cm
d	5,5 cm	4,5 cm	3,0 cm

Anleitung: Verfahre wie in Aufgabe 4!

6. Fertige Modelle für quadratische Pyramidenstümpfe an! Entnimm die entsprechenden Maße der folgenden Tabelle!

	Seitenlänge der Grundfläche	Seitenlänge der Deckfläche	Höhe der trapezförmigen Seitenfläche
a	5 cm	3 cm	4 cm
b	6,5 cm	4,0 cm	5,0 cm
c	7,1 cm	6,3 cm	3,5 cm

Konstruiere zu jeder Aufgabe das Netz, schneide es aus und klebe zusammen!

7. Zeichne ein gleichschenkliges Trapez auf Pappe! Konstruiere seine Symmetrieachse und befestige eine Stricknadel auf der Symmetrieachse des ausgeschnittenen Trapezes!
Welche Körperform erkennt man, wenn man ein gleichschenkliges Trapez um seine Symmetrieachse dreht?

39. Die Kugel

Versuche einen Ball in ein Blatt Papier einzuwickeln, ohne dabei das Papier zu falten! Nenne Gegenstände von der Form einer Kugel! Forme eine Kugel aus Knetmasse! Wie muß man dabei vorgehen?

Gegenüber vielen anderen Körpern hat die Kugel mehrere Vorzüge. So kann sie zum Beispiel nach jeder Richtung hin rollen. Sie berührt die Unterlage (genau genommen) nur in einem Punkt. Deshalb ist die Reibung beim Rollen sehr gering. Diese Eigenschaft wird vielfach ausgenutzt. So finden Kugeln oft in der Technik Verwendung, zum Beispiel in Kugellagern (Abb. 170).

Auf dem Mantel eines Kegels oder eines Zylinders kann man in bestimmten Richtungen gerade Linien ziehen. Prüfe, ob sich auf der Kugelfläche

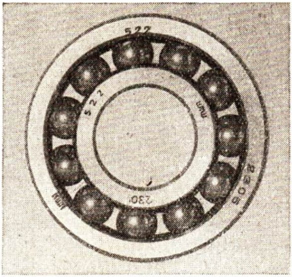


Abb. 170

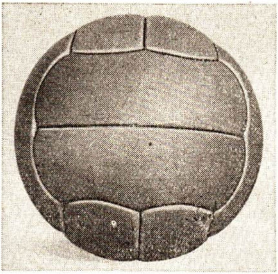


Abb. 171

auch gerade Linien zeichnen lassen! Worin unterscheidet sich die Oberfläche einer Kugel von dem Mantel eines Kegels und eines Zylinders?

Die Kugel wird von einer Fläche begrenzt, die nach allen Richtungen gleichmäßig gekrümmt ist, von der Kugelfläche. Diese Kugelfläche läßt sich nicht auf einer ebenen Fläche ausbreiten. Auf der Kugelfläche lassen sich in keiner Richtung Geraden zeichnen.

Auch die Erde hat angenähert Kugelform. Geographische Wandkarten, wie sie im Erdkundeunterricht benutzt werden, geben uns Teile der Erdoberfläche als ebene Zeichnungen wieder. Diese Karten sind stets irgendwie verzerrt, weil man die Oberfläche einer Kugel nicht auf einer Ebene abrollen kann. Eine nicht verzerrte Wiedergabe der Erdoberfläche ermöglicht der Globus (Abb. 172).

Da die Kugelfläche nicht in einer ebenen Fläche abgerollt werden kann, ergeben sich auch Schwierigkeiten für die Herstellung von Kugelflächen, wie sie zum Beispiel für Bälle benötigt werden. So werden Faust- oder Fußbälle aus zwölf Teilen zusammengesetzt (Abb. 171).

Zeichne auf Pappe einen Kreis und einen Durchmesser! Schneide die Kreisfläche aus und befestige sie so an einem Holzstab, daß dieser auf dem Durchmesser des Kreises liegt! Drehe den Holzstab schnell zwischen

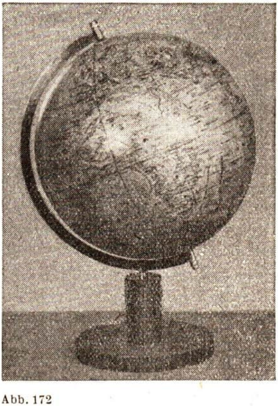


Abb. 172

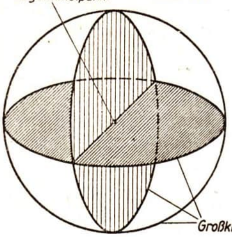


Abb. 173

beiden Händen! Bei genügend schneller Drehung sieht man die Form einer Kugel. Der Mittelpunkt des Kreises wird dann zum **Mittelpunkt der Kugel**. Die Kugel ist also auch ein Drehkörper.

Die Verbindungsstrecke eines Punktes der Kugelfläche mit dem Mittelpunkt der Kugel heißt **Kugelradius**. Die Radien einer Kugel sind gleichlang.

Wir können sagen: **Alle Punkte der Kugeloberfläche haben vom Kugelmittelpunkt den gleichen Abstand.**

Denke dir einen Kugelradius über den Kugelmittelpunkt hinaus verlängert, bis diese Verlängerung an die Kugelfläche stößt! Dadurch sind zwei Punkte der Kugelfläche durch eine Strecke verbunden worden, die durch den Kugelmittelpunkt verläuft. Diese Strecke heißt **Kugeldurchmesser**. Überlege, ob zwei beliebige Punkte der Kugelfläche stets durch einen Kugeldurchmesser verbunden werden können! Wieviel Durchmesser hat eine Kugel? Vergleiche die Länge des Kugeldurchmessers mit der Länge des Kugelradius! Begründe, warum die Länge eines Kugeldurchmessers der größte Abstand ist, den zwei Punkte der Kugelfläche voneinander haben können!

Forme aus Knetmasse große Kugeln! Zerschneide sie in verschiedenen Richtungen! Versuche eine Kugel so zu zerschneiden, daß zwei gleichgroße Kugelteile entstehen! Welche Form haben in allen Fällen die Schnittflächen? Vergleiche ihre Größe! Welche Schnittfläche ist die größte?

Erklärung: **Wird eine Kugel zerschnitten, so entstehen als Schnittflächen stets Kreise, gleichgültig wie die Schnitte geführt werden.**

Bei einem Schnitt, der durch den Mittelpunkt der Kugel verläuft, entstehen zwei **Halbkugeln**. Die Schnittfläche ist der größte Kreis, der überhaupt beim Zerschneiden entstehen kann. Der Radius dieses größten Kreises ist gleich dem Kugelradius. Diese größten Kreise werden auch **Großkreise** genannt. Großkreise sind demnach alle Kreise, deren Fläche den Kugelmittelpunkt enthält. In der Abbildung 173 sind zwei derartige Großkreise eingezeichnet. Die Großkreisflächen sind in dieser Abbildung schraffiert. Die Länge jeder Großkreislinie ist der Kugelumfang.

Versuche auf einen Ball einen Großkreis zu zeichnen!

Eine Kontrollmöglichkeit dafür, daß man richtig gezeichnet hat, besteht zunächst nicht. Man kann nämlich nicht nachprüfen, ob die Kreisfläche, die zu der gezeichneten Kreislinie gehört, durch den Mittelpunkt der Kugel verläuft. Bei einem geographischen Globus wäre es einfacher, einen Großkreis zu zeichnen, da er eine Achse hat, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Die Punkte, in denen eine derartige Achse die Kugeloberfläche durch-stößt, nennt man **Pole**. Begründe, warum jeder Kreis, der durch die Pole verläuft, ein Großkreis ist!

Aufgaben

1. Zeichne auf einen großen Ball zwei Kreise, die einander schneiden! Wieviel Schnittpunkte erhältst du?
2. Der Halbkreis in Abbildung 174 wird um die Achse AB gedreht. Welche bekannte Linie auf der entstehenden Kugelfläche wird durch den Punkt C erzeugt? Wie nennt man die Punkte A und B der Kugelfläche?

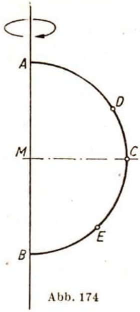


Abb. 174

Holzschraube
Abb. 175

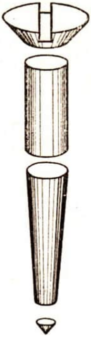


Abb. 176

3. Stelle alles, was du über die Kugel weißt, in einem kurzen Aufsatz zusammen!
4. Gib die wichtigsten Unterschiede an zwischen **a)** Kugel und Kegel, **b)** Kugel und Zylinder, **c)** Kegel und Zylinder!
5. **a)** Die Abbildung 175 stellt die Zeichnung einer Schraube dar. In der Abbildung 176 ist die gleiche Schraube in vereinfachter Form in verschiedene Körper zerlegt. Aus welchen Körpern ist diese Schraube zusammengesetzt?

   b) Suche ähnliche Beispiele aus der Technik (z. B. die Niete) und untersuche sie in der gleichen Weise!
6. Welche der uns bekannten Körper kann man sich durch Drehung einer ebenen Figur entstanden denken? Gib an, welche Figuren dabei jeweils gedreht werden müssen!

Erklärung: Körper, die man sich durch Drehung einer ebenen Figur um eine Achse entstanden denken kann, heißen **Drehkörper oder Rotationskörper**.

7. Welche Form haben bei den einzelnen Rotationskörpern die Schnittflächen senkrecht zur Rotationsachse? (Schnitte senkrecht zur Rotationsachse sind Schnitte parallel zur Grundfläche.)
8. Welche Form haben die Schnitte senkrecht zur Grundfläche, die durch den Mittelpunkt der Grundfläche **a)** eines Kegels, **b)** eines Zylinders, **c)** eines Kegelstumpfes gehen? Welche Eigenschaften haben alle diese Schnittflächen gemeinsam?

Abbildungsnachweis

Aufnahmen:

Phototechnische Werkstätten, Berlin: Abb. 79, 162;
DEWAG, Berlin: Abb. 122, 156;
Fritz Kühn (Kunstschmiedemeister), Berlin-Grünau: Abb. 38;
Horst E. Schulze, Berlin: Abb. 36;
Zentralbild: Abb. 21;
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin: Abb: 3, 16, 17, 18, 22, 32, 37, 74, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 97, 98, 99, 100, 104, 105, 106, 110, 120, 121, 123, 126, 130, 132, 153, 160, 170, 171, 172.

Reproduktionen:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin: Abb. 60, 111, 15a und 15b;
DEWAG, Berlin: Abb. 61, 63, 125, 135, 155, 157.
Die Abbildungen 15a und 15b sind entnommen aus dem Werk: Koch, M. und K. Herschel, Falter bei Tag und Nacht. Radebeul und Berlin, Neumann Verlag 1953.
Die Abbildung 111 wurde entnommen aus dem Werk: Deutsche Baukunst in zehn Jahrhunderten. Dresden: Sachsenverlag 1952.
Die Abbildung 60 ist die Reproduktion eines Bildes aus dem Goethe-Museum in Frankfurt (M.).

00605–4
1,75 DM