Lehrbuch der Mathematik

ZWÖLFTES SCHULJAHR

LEHRBUCH
DER
MATHEMATIK

FÜR DIE OBERSCHULE

12. SCHULJAHR

AUSGABE 1957

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN
1958

Der Teil A wurde von Dr. Gustav Beyrodt, der Teil B von Edgar Brey und der Teil C von Dr. Hanns Joachim Weinert verfaßt.

Zeichnungen: Kurt Dornbusch

Redaktionsschluß: 15. Dezember 1956

Bestell-Nr. 00 917-2 · 2,55 DM · Lizenz Nr. 203 · 1000/57 (DN)

Satz: (III/18/154) B. G. Teubner, Leipzig C 1, Querstr. 17 · 353

Druck: (140) Neues Deutschland, Berlin (3134)

A. Näherungsrechnung

I. Ermittlung von Näherungswerten

In den Naturwissenschaften und in der Technik haben wir es bei Berechnungen häufig mit Größen zu tun, die zahlenmäßig nur durch Näherungswerte angegeben werden können. Dafür wollen wir einige Beispiele angeben:

1. Irrationale Zahlen (π, $\sqrt{2}$ u. a.) – Theoretisch kann man sie zwar auf beliebig viele Dezimalen genau angeben. Beim praktischen Rechnen ist man jedoch auf Näherungswerte angewiesen.

2. Gemessene Größen (Längen, Massen, Kräfte u. a.) – Eine Messung ist immer mehr oder weniger ungenau. Zum Beispiel wird der Durchmesser einer Kugel mit der Mikrometerschraube genauer bestimmt als mit der Schieblehre. Außerdem wirken Einflüsse auf das Ergebnis der Messung, auf die später eingegangen wird.

3. Maße von Einzel- und Fertigteilen in der Produktion (Abmessungen von Nieten, Schrauben, Kapazität von Kondensatoren u. a.) – In der Produktion sind fast immer Werte für die Maße festgelegt (Sollwerte), von denen das Einzelstück mehr oder weniger abweicht. Der Betrag, um den das Einzelstück vom Sollwert höchstens abweichen darf, heißt Toleranz.

Man sagt, derartige Näherungswerte enthalten einen Fehler. Werden solche mit Fehlern behaftete Werte als Ausgangswerte in Berechnungen verwendet, so sind auch die Ergebnisse mit Fehlern behaftet. Das Teilgebiet der Mathematik, in dem die Auswirkungen dieser Fehler auf Rechenergebnisse untersucht werden, heißt Näherungsrechnung. Mit ihr werden wir uns in den folgenden Kapiteln beschäftigen.

1. Grundlegende Begriffe

Zunächst wollen wir einige grundlegende Begriffe definieren, die wir in den folgenden Abschnitten benötigen.

Die zu messende Größe, z. B. eine Kraft, eine Länge, eine Zeit, bezeichnen wir als **Meßgröße**.

Der Gegenstand, an dem die Messung ausgeführt wird, heißt **Meßgegenstand** oder **Meßobjekt**. Den Wert, den die Messung ergibt, bezeichnen wir als **Meßwert**. Häufig stellt der Meßwert – z. B. bei einer Längenmessung – gleichzeitig das **Meßergebnis** dar. In anderen Fällen wird aus einem oder mehreren Meßwerten erst das Meßergebnis berechnet. So errechnet man aus der gemessenen Wellenlänge die Frequenz, aus Gewicht und Volumen eines Meßobjektes die Wichte.

Die einzelnen Meßwerte sind aus verschiedenen Gründen mehr oder weniger ungenau. Abweichungen vom wahren (genauen) Wert der Meßgröße können z. B. durch Umwelteinflüsse, wie Änderungen der Temperatur, der Luftfeuchtigkeit und des Luftdruckes, auftreten. Solche Abweichungen haben ein bestimmtes Vorzeichen und eine bestimmte Größe. Sie lassen sich ausschalten oder mathematisch erfassen und korrigieren. Wir nennen sie **systematische Fehler**.

Wird eine Messung mehrmals durchgeführt, so stellt man fest, daß die einzelnen Meßwerte auch nach Ausschaltung der systematischen Fehler und trotz sorgfältigsten Vorgehens noch immer voneinander abweichen. Diese Abweichungen können ihre Ursache in Schwankungen der persönlichen Auffassung des Beobachters – z. B. beim Ablesen der Maßzahl und Schätzen der letzten Stelle – im toten Gang des Meßgerätes u. dgl. haben. Sie schwanken bei wiederholter Messung nach Größe und Vorzeichen. Da sie zufälliger Natur sind, nennen wir diese Abweichungen **zufällige Fehler**. Um etwas über ihren Einfluß auf den Meßwert bzw. das Meßergebnis aussagen zu können, muß man die betreffende Größe mehrmals messen. Zu diesem Zweck legt man die **Meßreihen** an.

2. Der Fehler eines Näherungswertes

Den **Fehler eines Näherungswertes** – häufig absoluter Fehler genannt – erhalten wir, indem wir vom Näherungswert $\bar{x}$ den genauen Wert x subtrahieren. Es ist $\Delta x = \bar{x} - x$. Der Fehler ist also positiv, wenn der Näherungswert größer ist als der genaue Wert, und negativ, wenn der Näherungswert kleiner ist als der genaue Wert.

Beispiel 1:

Wählen wir für $\frac{3}{8}$ zur Vereinfachung einer Rechnung an Stelle des genauen Wertes $x = 0{,}375$ den Näherungswert $\bar{x} = 0{,}4$, dann beträgt der Fehler

$$\Delta x = 0{,}4 - 0{,}375 = +0{,}025\,.$$

Beispiel 2:

Der Fehler Δx beträgt für $\pi \approx 3{,}14$

$$\Delta x = 3{,}14 - 3{,}14159\ldots = -0{,}00159\ldots$$

Als **relativen Fehler** eines Näherungswertes bezeichnen wir das Verhältnis seines Fehlers zu seinem genauen Wert. Der relative Fehler δ ist also

$$\delta = \frac{\Delta x}{x}\,. \tag{1}$$

Ist der Fehler klein im Vergleich zum genauen Wert x bzw. zu dessen Näherungswert $\bar{x}$, so können wir an Stelle des genauen Wertes den Näherungswert setzen. Es gilt dann

$$\delta = \frac{\Delta x}{\bar{x}}\,. \tag{1'}$$

Beispiel 3:

Der relative Fehler für $\frac{3}{8} \approx 0{,}4$ beträgt nach (1)

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{+\,0{,}025}{0{,}375} = +\,0{,}06\bar{6}.$$

Nach (1′) erhalten wir

$$\frac{\Delta x}{\bar{x}} = \frac{+\,0{,}025}{0{,}4} = +\,0{,}0625.$$

Beispiel 4:

Für $\pi \approx 3{,}14$ erhalten wir als relativen Fehler

$$\frac{\Delta x}{\bar{x}} = \frac{-\,0{,}001\,59}{3{,}14} \approx -\,0{,}0005.$$

In der Praxis gibt man häufig den relativen Fehler in Prozenten an und nennt ihn dann den **prozentualen Fehler.**

Er ist

$$\delta\,\% = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\,\%. \tag{2}$$

Beispiel 5:

Für Beispiel 4 ergibt sich der prozentuale Fehler zu

$$\delta\% = -\,0{,}05\%.$$

Wir müssen noch beachten, daß die Angabe des relativen Fehlers nicht immer sinnvoll ist. Das ist vor allem dann der Fall, wenn der Meßbereich einen willkürlich festgelegten Nullpunkt enthält. Haben wir z.B. die Temperatur $t = 1^\circ\,\mathrm{C}$ mit einem Fehler von 0,5° gemessen, so erhalten wir nach der Celsiusskala den relativen Fehler zu $\frac{0{,}5}{1} \cdot 100\% = 50\%$, nach der Kelvinskala zu $\frac{0{,}5}{273{,}2} \cdot 100\% = 0{,}18\%$. Die Ursache ist darin zu sehen, daß $0^\circ\,\mathrm{C}$ keinen eigentlichen Nullpunkt darstellt, sondern nur ein Fixpunkt der Temperaturskala ist, den man willkürlich mit 0° bezeichnet hat. Der eigentliche Nullpunkt liegt bei $-\,273{,}2^\circ\,\mathrm{C} = 0^\circ\,\mathrm{K}$. Der relative Fehler beträgt deshalb 0,18%.

3. Das Ergebnis einer Meßreihe

Da wir wissen, daß jeder Meßwert mit Ungenauigkeiten behaftet ist, verlassen wir uns grundsätzlich nicht auf eine Messung, sondern wir bestimmen eine Meßgröße durch eine Reihe einzelner Messungen, die unter möglichst gleichen Voraussetzungen vorgenommen werden. Die Anzahl der Einzelmessungen hängt davon ab, wie genau das Meßinstrument arbeitet und welche Genauigkeit das Meßergebnis haben soll. Je größer die Anzahl der Einzelmessungen ist, desto genauer wird das Ergebnis.

Aus den einzelnen Meßwerten einer Meßreihe bestimmen wir das Ergebnis aller Messungen.

Wir setzen voraus, daß kein Meßwert einen systematischen Fehler enthält.[1]) Dann sind die Meßwerte nur noch mit zufälligen Fehlern behaftet und haben alle gleiche Bedeutung für das Ergebnis der Messungen. Unter dieser Voraussetzung läßt sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigen, daß es sinnvoll ist, das arithmetische Mittel aller Meßwerte als Ergebnis der Einzelmessungen festzusetzen. Den auf diese Weise ermittelten Wert können wir als einen besseren Wert für die wirkliche Größe des Meßobjektes ansehen als den durch eine Messung bestimmten Wert. Da wir den genauen Wert der Meßgröße nicht kennen, wollen wir das arithmetische Mittel als den „richtigen" Wert bezeichnen.

Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ die einzelnen Meßwerte, so ist das arithmetische Mittel $\bar{x}$ gegeben durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{3}$$

oder unter Verwendung des Summenzeichens durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{3'}$$

Die Festsetzung, daß wir $\bar{x}$ als den „richtigen" Wert bezeichnen, darf uns nicht darüber hinwegtäuschen, daß das arithmetische Mittel nur ein Näherungswert ist. Hätten wir nämlich statt n Messungen $(n+1)$ Messungen durchgeführt und wäre dabei $x_{n+1} \neq \bar{x}$, so hätten wir ein $\bar{x}^*$ erhalten, das sicher von $\bar{x}$ abweicht. Unser Wert $\bar{x}$ enthält also noch einen Fehler.

Die unmittelbare Anwendung der Formel (3) führt, vor allem wenn die Zahl der Messungen groß wird, zu großen Zahlen. Wir vereinfachen die Rechnung, indem wir von einem angenäherten Mittelwert $\bar{x}_a$, der abgeschätzt wird, die Abweichungen bestimmen und mit dem Mittelwert der Abweichungen das arithmetische Mittel $\bar{x}$ berechnen. Dabei wählen wir $\bar{x}_a$ so, daß sich möglichst einfache Zahlen ergeben. Es ist dann

$$\bar{x} = \bar{x}_a + \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x}_a) + (x_2 - \bar{x}_a) + \cdots + (x_n - \bar{x}_a)]$$

oder

$$\bar{x} = \bar{x}_a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_a) . \tag{4}$$

Die Berechnung führen wir stets in einem Rechenschema durch.

Beispiel 1:

Mit einer Feinmeßschraube (Trommelteilung $\frac{1}{100}$ mm) wird der Durchmesser eines Werkstückes siebenmal gemessen.

Messung Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Meßgröße in mm	12,357	12,348	12,363	12,341	12,360	12,352	12,368

[1]) Wenn in einer Meßreihe die meisten Meßwerte eng beisammenliegen, einzelne aber weit abstreuen, ist die Vermutung begründet, daß die abstreuenden Meßwerte nicht erkannte systematische Fehler oder auch Ablesefehler enthalten. Solche Werte werden aus der Meßreihe als unbrauchbar ausgeschieden.

Es ist der Mittelwert zu bestimmen.

Messung Nr.	Meßwert x_i in mm	Angenäherter Mittelwert $\bar{x}_a$ in mm	$(x_i - \bar{x}_a)$ in μ	
1	12,357		+ 7	
2	12,348			− 2
3	12,363		+ 13	
4	12,341	12,350		− 9
5	12,360		+ 10	
6	12,352		+ 2	
7	12,368		+ 18	
Summe			+ 50	− 11
			= + 39	

$$\bar{x} = \left(12{,}350 + \frac{1}{7} \cdot \frac{39}{1000}\right) \text{ mm}$$

$$\bar{x} = 12{,}3556 \text{ mm}.$$

In manchen Fällen lassen sich systematische Fehler folgendermaßen ausgleichen: Man führt die Messungen so durch, daß einzelne systematische Fehler in jeweils zwei Messungen untereinander verschiedene Vorzeichen haben. Zusammengehörende Messungen faßt man zu einem Satz zusammen; mehrere Sätze ergeben eine Meßreihe. Zum Beispiel entstehen systematische Fehler bei Winkelmessungen mit dem Theodoliten dadurch, daß der Drehpunkt nicht genau im Zentrum der Kreisteilung liegt. Dieser systematische Fehler wird ausgeglichen, indem jeder Winkel zweimal gemessen wird, wobei das Fernrohr für die zweite Messung um 180° gedreht und umgeschlagen wird.

Beispiel 2:

Bei einem Streckenzug von P_1 nach P_2 werden in zwei Sätzen zu je drei Messungen mit Theodolit und Meßlatte von P_1 aus die Längen 235,73 m, 235,69 m, 235,76 m, und von P_2 aus die Längen 235,68 m, 235,75 m, 235,71 m gemessen.

Der Mittelwert, das arithmetische Mittel, ist dann

$$\bar{l} = \frac{1}{6}(235{,}73 + 235{,}69 + 235{,}76 + 235{,}68 + 235{,}75 + 235{,}71) \text{ m}$$
$$= 235{,}72 \text{ m}.$$

Anders geartete Beispiele für das Anlegen von Meßsätzen finden wir in den Aufgaben 6 und 7.

4. Beurteilung der Zuverlässigkeit eines Mittelwertes

Die Angabe der Meßgröße nur durch den Mittelwert würde eine Genauigkeit vortäuschen, die nicht vorhanden ist. Wir haben zwar den Mittelwert als den „richtigen“ Wert bezeichnet; er ist aber aus einzelnen Meßwerten ermittelt, die alle mit zufälligen Fehlern behaftet sind. Seine Genauigkeit hängt von der Zuverlässigkeit der einzelnen Meßwerte ab.

Als Maß für die Zuverlässigkeit der Meßwerte bestimmen wir das arithmetische Mittel $\Delta\tilde{x}$[1]) aus den Absolutbeträgen ihrer Abweichungen vom Mittelwert. Es ist

$$\Delta\tilde{x} = \frac{1}{n}\left(|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|\right) \tag{5}$$

oder, unter Verwendung des Summenzeichens,

$$\Delta\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|. \tag{5'}$$

Wir bezeichnen $\Delta\tilde{x}$ als die **durchschnittliche Abweichung** einer Einzelmessung. Sie ist stets eine nicht negative Größe und gibt den Betrag an, um den die einzelnen Meßwerte im Durchschnitt vom Mittelwert abweichen.

Beispiel 1:

Für Beispiel 2 des vorigen Abschnittes erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{x} &= \frac{1}{6}(0{,}01 + 0{,}03 + 0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}03 + 0{,}01)\ \text{m}\\ &= \frac{1}{6}\cdot 0{,}16\ \text{m} \approx 0{,}027\ \text{m}.\end{aligned}$$

Der Mittelwert hat eine Eigenschaft, die wir als Rechenkontrolle bei der Ermittlung der durchschnittlichen Abweichung benutzen wollen. Bilden wir die Summe der Abweichungen der Meßwerte vom Mittelwert, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x}) &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - n\cdot\bar{x}\\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Das bedeutet, daß die Summe der positiven Abweichungen dem Betrag nach stets gleich der Summe der negativen Abweichungen ist.

Beispiel 2:

Wir berechnen die durchschnittliche Abweichung in Beispiel 1 des vorigen Abschnittes. Es ist vorteilhaft, die Rechnung in Tabellenform durchzuführen:

Mittelwert $\bar{x}$ in mm	Meßwert x_i in mm	$\Delta x_i = (x_i - \bar{x})$ in μ	
12,3556	12,3570	+ 1,4	
	12,3480		− 7,6
	12,3630	+ 7,4	
	12,3410		− 14,6
	12,3600	+ 4,4	
	12,3520		− 3,6
	12,3680	+ 12,4	
		+ 25,6	− 25,8
		= − 0,2	

[1]) Sprich: delta x geschlangt.

Die Summe der Δx_i muß Null sein. Da wir jedoch bei der Bildung des Mittelwertes $\bar{x}$ gerundet haben, summieren sich die Rundungsfehler, die in die Abweichungen Δx_i eingehen, so daß wir $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = -0{,}2$ erhalten. Diese Ungenauigkeit bedeutet nicht, daß wir einen Rechenfehler begangen haben.

Die durchschnittliche Abweichung erhalten wir zu

$$\Delta \tilde{x} = \frac{1}{7} \left(|+25{,}6| + |-25{,}8| \right) \mu = 7{,}3 \mu .$$

Die relative Abweichung einer Einzelmessung berechnen wir entsprechend (1′) nach der Formel $\delta = \frac{\Delta \tilde{x}}{\bar{x}}$.

Beispiel 3:

Die relative Abweichung einer Einzelmessung im 2. Beispiel des vorigen Abschnittes beträgt

$$\frac{\Delta \tilde{x}}{\bar{x}} = \frac{0{,}0073 \text{ mm}}{12{,}3556 \text{ mm}} \approx 0{,}00059 .$$

Aufgaben

1. Mit einer Schieblehre wird ein Werkstück fünfmal gemessen. Dabei ergeben sich die folgenden Meßwerte: 150,73 mm; 150,84 mm; 150,75 mm; 150,64 mm; 150,78 mm.
Es sind der Mittelwert und die durchschnittliche Abweichung zu bestimmen.

2. Ein Winkel wird bei einer Vermessung durch sechs Messungen bestimmt. Es ergeben sich die folgenden Werte: 77° 48′ 43″, 77° 49′ 08″, 77° 49′ 00″, 77° 49′ 38″, 77° 48′ 32″, 77° 49′ 54″.
Es sind der Mittelwert und die durchschnittliche Abweichung zu bestimmen.

3. Eine Strecke wird mit einem Meßband dreimal gemessen. Dabei werden die folgenden Längen festgestellt: 15,87 m; 15,72 m; 15,94 m. Die mittlere Länge und die durchschnittliche Abweichung sind zu bestimmen.

4. Die relativen Abweichungen der Einzelmessungen sind zu bestimmen
a) in Aufgabe 1, **b)** in Aufgabe 2, **c)** in Aufgabe 3.

5. Eine gerade Eisenbahnschiene mit einer Sollänge von 32 m wird mit Meßlatten und einem Gliedermaßstab fünfmal gemessen. Es ergeben sich dabei die folgenden Meßwerte: 31,93 m; 32,15 m; 32,07 m; 31,98 m; 31,91 m.
Der Mittelwert, die durchschnittliche und die relative Abweichung der Einzelmessungen sowie die relative Abweichung des Mittelwertes von der Sollänge sind zu bestimmen.

6. Ein volkseigener Betrieb gewährleistet für Prüfmaschinen zur Untersuchung von Stahl, Eisen und anderen Metallen auf Festigkeit die folgende Genauigkeit:
1. im ersten Zehntel des Meßbereiches auf 1 Teilungsintervall,
2. darüber auf 1% des Sollwertes.

Für jede Prüfmaschine wird vom Werkabnehmer ein Abnahmeprotokoll über die Anzeigegenauigkeit mit 30 Messungen in Sätzen zu je drei Messungen angefertigt. Einem solchen Protokoll sind die folgenden Werte entnommen:

Sollwert	Istwert	Istwert	Istwert	Mittelwert	Abweichung des Mittelwertes in % des Sollwertes
	2 kp als Einheit				
245,7	246	245	245	245,3	− 0,16
478,3	479	479	479	479,0	+ 0,15
716,7	717	718	718		
958	959	958	958		
1192,7	1192	1193	1193		
1435	1439	1438	1439		
1670	1670	1670	1671		
1910	1910	1910	1910		
2152	2153	2152	2154		
2387	2390	2390	2390		

Berechnen Sie

a) die fehlenden Mittelwerte,

b) die relativen Abweichungen der Mittelwerte vom zugehörigen Sollwert auf 2 Dezimalen genau,

c) die relativen Abweichungen der Einzelmessungen in den einzelnen Sätzen!

7. Ein anderes Abnahmeprotokoll enthält die folgenden Werte:

Sollwert	Istwert	Istwert	Istwert	Mittelwert	Abweichung des Mittelwertes in % des Sollwertes
	6 kp als Einheit				
479	479	479	479		
958,7	959	958	959		
1443,3	1443	1444	1444		
1931,7	1937	1936	1936		
2421	2423	2423	2423		
2902	2907	2909	2908		
3392	3395	3394	3395		
3878	3880	3880	3880		
4380	4380	4380	4380		
4850	4858	4858	4859		

Berechnen Sie

a) die Mittelwerte in den einzelnen Zeilen,

b) die relativen Abweichungen der Mittelwerte vom zugehörigen Sollwert auf 2 Dezimalen genau,

c) die relativen Abweichungen der Einzelmessungen in den einzelnen Sätzen!

8. Die Dichte einer Flüssigkeit wurde zehnmal nach der gleichen Methode bestimmt. Es ergaben sich die folgenden Werte:

0,9345 g/cm³; 0,9348 g/cm³; 0,9352 g/cm³; 0,9347 g/cm³; 0,9350 g/cm³;
0,9347 g/cm³; 0,9348 g/cm³; 0,9348 g/cm³; 0,9348 g/cm³; 0,9346 g/cm³.

Bestimmen Sie den Mittelwert und die durchschnittliche Abweichung!

II. Das Rechnen mit Näherungswerten

5. Rundungsregeln und Kennzeichnung letzter Stellen

In der praktischen Mathematik wird, da Meßwerte stets Fehler aufweisen, immer nur mit so viel geltenden Ziffern wie notwendig gerechnet. Dazu ist erforderlich, daß die Genauigkeit des Meßwertes in irgendeiner Weise gekennzeichnet wird und daß entbehrliche Stellen unter Berücksichtigung der Rundungsregeln fortgelassen werden.

Die Rundungs- und Kürzungsregeln von Zahlen enthält das Normblatt DIN 1333. Sie gelten für alle Zweige der Wissenschaft und Technik, nicht aber für das Geldwesen.

a) Rundungsregeln

Die Rundungsregeln beziehen sich auf Zahlen, die in dezimaler Form gegeben sind und die an einer bestimmten Stelle abgebrochen werden sollen.

Abrunden heißt, daß die letzte Stelle, die noch angegeben werden soll, unverändert bleibt. Es wird abgerundet, wenn eine 0, 1, 2, 3 oder 4 folgt.

Beispiel: $8{,}2134 \approx 8{,}213 \approx 8{,}21 \approx 8{,}2 \approx 8.$

Aufrunden heißt, daß die letzte Stelle, die noch angegeben werden soll, um 1 erhöht wird. Es wird aufgerundet, wenn eine 6, 7, 8 oder 9 folgt.

Beispiel: $3{,}4579 \approx 3{,}458 \approx 3{,}46 \approx 3{,}5.$

Sonderregeln für 5: Ist bekannt, daß eine 5 durch Abrundung entstanden ist, so wird aufgerundet; ist sie aber durch Aufrunden entstanden, so wird abgerundet.

Beispiele: $6{,}1852 \approx 6{,}185$ und weiter $\approx 6{,}1\underline{9}$;
ein Strich unter der letzten Ziffer ist das Kennzeichen für Aufrunden.

$6{,}3146 \approx 6{,}315$ und weiter $\approx 6{,}3\dot{1}$;
ein Punkt über der letzten Ziffer ist das Kennzeichen für Abrunden.

Folgt auf die letzte Stelle, die noch angegeben werden soll, eine 5, so wird aufgerundet, wenn nach dieser 5 noch weitere von Null verschiedene Stellen folgen.

Beispiele: $3{,}141\,59 \approx 3{,}14\underline{2}$,
$4{,}250\,03 \approx 4{,}\underline{3}$.

Folgt auf die letzte Stelle, die noch angegeben werden soll, eine genaue 5 oder eine 5 unbekannter Herkunft, so wird so gerundet, daß die letzte Stelle zu einer geraden Zahl wird (Gerade-Zahl-Regel).

Beispiele: $\frac{1}{16} = 0{,}0625 \approx 0{,}06\dot{2}$,

$\frac{15}{4} = 3{,}75 \approx 3{,}\underline{8}$.

Anmerkung: Die „Gerade-Zahl-Regel“ hat den Vorteil, daß man bei einer größeren Menge von Zahlen annähernd ebensooft abrundet wie aufrundet.

b) Kennzeichnung genauer letzter Stellen

Soll im Druck angegeben werden, daß die letzte Stelle genau oder durch Vereinbarung festgelegt ist, so kann dies durch Fettdruck ausgedrückt werden.

Beispiel: $\frac{3}{8} = 0{,}37\mathbf{5}$

1 Technische Atmosphäre $= 0{,}98066\mathbf{5}$ Bar.

c) Kennzeichnung unsicherer letzter Stellen

In der Fertigungsindustrie ist es notwendig, außer den Sollwerten noch Maßzahlen anzugeben, die vorschreiben, um wieviel das Werkstück in seiner Abmessung vom Sollwert abweichen darf. Man spricht von Toleranzen (Unsicherheiten) der Abmessungen eines Werkstückes. Folgende Schreibweisen sind zulässig:

$$\begin{aligned} 3{,}726\ \text{mm} \pm 0{,}018\ \text{mm} &= 3{,}726\ \text{mm} \pm 18\,\mu \\ &= (3{,}726 \pm 0{,}018)\ \text{mm} = 3{,}726\ \text{mm} \cdot (1 \pm 0{,}005). \end{aligned}$$

Auch bei Werten, die aus Meßwerten erhalten wurden, werden oft Grenzen angegeben, innerhalb derer der wahre Wert liegt. Ist $\bar{x}$ der Mittelwert einer Meßreihe, so gibt man die Meßgröße mit $x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$ an. Diese Schreibweise bedeutet, daß der wahre Wert der Meßgröße zwischen $\bar{x} - \Delta\bar{x}$ und $\bar{x} + \Delta\bar{x}$ liegt. Man nennt $\Delta\bar{x}$ die Unsicherheit des Meßergebnisses.

Beispiel:

Die Lichtgeschwindigkeit im luftleeren Raum wird angegeben mit

$$c_0 = (2{,}997\,90 \pm 0{,}000\,06) \cdot 10^8\ \text{m/s}.$$

Das bedeutet, daß der wahre Wert zwischen $2{,}997\,96 \cdot 10^8$ m/s und $2{,}997\,84 \cdot 10^8$ m/s liegt.

Im einzelnen gelten folgende Richtlinien:

1. Wird die Unsicherheit nicht gleichzeitig zahlenmäßig genannt, so sind höchstens so viele Stellen anzugeben, daß die Unsicherheit in der letzten angegebenen Stelle liegt. Beträgt die Unsicherheit höchstens $\pm 0{,}5$ Einheiten der letzten Stelle, so wird diese im gewöhnlichen Schriftgrad gedruckt. Ist die Unsicherheit aber größer, so wird die letzte Stelle in Indexstellung gedruckt.

Beispiele:

a) Mit einer Feinmeßschraublehre (Mikrometerschraube) ist eine Strecke mit 110,72 mm gemessen (Unsicherheit $\leq 0{,}005$ mm).

b) Mit einem Stahlmeßband (cm- und mm-Teilung) wird eine Strecke mit $127{,}_4$ mm gemessen (Unsicherheit $> 0{,}05$ mm).

2. Die Indexstellung ist ferner anzuwenden, wenn für die Benutzung von Zahlenwerten in längeren Rechnungen die Kenntnis einer oder mehrerer der folgenden Stellen zweckmäßig oder notwendig erscheint.

Beispiel:

Für das Verhältnis des „internationalen“ (Hg-) Ohms zum absoluten Ohm sind Werte zwischen 1,00046 und 1,00052 gemessen worden. Ihr Mittelwert 1,00049 ist um weniger als $\pm 0{,}00005$ unsicher.

Man schreibt

$$\text{mit} \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} \right. \text{Dezimalen: } 1 \text{ int. Ohm} = \left. \begin{matrix} 1{,}0004_9 \\ 1{,}000\underline{5} \\ 1{,}00\dot{0} \end{matrix} \right\} \text{abs. Ohm}$$

3. Steht die in gewöhnlichem Schriftgrad anzugebende letzte Ziffer (Richtlinie 1) in der Stelle der Zehner oder davor, so ist durch Wahl einer größeren Einheit oder durch Abtrennen von Zehnerpotenzen das Komma so weit nach links zu verschieben, daß die tiefergestellten Ziffern erst hinter dem Komma erscheinen.

Beispiel:

Für die Lichtgeschwindigkeit $c_0 = (2{,}99790 \pm 0{,}00006) \cdot 10^8$ m/s kann man auch ohne Angabe der Unsicherheit schreiben

$$c_0 \approx 2{,}997_{90} \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \text{oder} \quad c_0 \approx 299{,}7_{90} \cdot 10^3 \text{ km/s}.$$

Die Schreibweise 299790 km/s, bei der die Null nicht entbehrt werden kann, würde eine Genauigkeit vortäuschen, die nicht vorhanden ist.

6. Der Fehler einer Summe

Es sei $\bar{y} = \bar{u} + \bar{v}$ die Summe zweier Näherungswerte. Da die Näherungswerte $\bar{u}$ und $\bar{v}$ mit den Fehlern Δu und Δv behaftet sind, ist der genaue Wert der Summe

$$y = \bar{y} + \Delta y = \bar{u} + \Delta u + \bar{v} + \Delta v.$$

Subtrahieren wir von dieser Gleichung den Näherungswert der Summe $\bar{y} = \bar{u} + \bar{v}$, so erhalten wir

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v.$$

Dies ist der Fehler des Ergebnisses, das aus den Näherungswerten berechnet wurde.

Sind die Fehler der Summanden nicht bekannt, so läßt sich häufig eine **Fehlergrenze** angeben. Bei gerundeten Größen beträgt die Fehlergrenze stets 0,5 Einheiten der letzten Stelle, da dieser Betrag vom wahren Fehler der betreffenden Größe nicht überschritten wird. In der Logarithmentafel finden wir zum Beispiel für lg 71 den Wert 1,8513 angegeben. Da 1,8513 ein gerundeter Wert ist, beträgt die Fehlergrenze $5 \cdot 10^{-5}$. Dieser Betrag wird vom Betrag des wahren Fehlers nicht überschritten.

Die Fehlergrenze stellt eine nichtnegative Größe dar. Wir bezeichnen sie mit $\Delta \bar{u}$ bzw. $\Delta \bar{v}$. Es gilt also

$$|\Delta u| \leqq \Delta \bar{u} \quad \text{und} \quad |\Delta v| \leqq \Delta \bar{v}$$

und damit

$$|\Delta y| \leqq \Delta \bar{u} + \Delta \bar{v}.$$

Wir können demnach die Fehlergrenze der Summe mit

$$\Delta \bar{y} = \Delta \bar{u} + \Delta \bar{v} \tag{6}$$

angeben.

Da jeder Summand wiederum eine Summe sein kann, gilt diese Gleichung für endlich viele Summanden.

Es gilt also der Satz:

Der Fehler einer Summe ist gleich der Summe aus den Fehlern der Summanden.

Dividieren wir den Fehler der Summe durch ihren Wert, so erhalten wir den relativen Fehler. Dabei sind jedoch zwei Fälle zu unterscheiden.

Haben die Glieder der Summe sämtlich gleiches Vorzeichen, so überschreitet der relative Fehler der Summe nicht den größten relativen Fehler, der bei den einzelnen Summanden auftritt. Sind dagegen die Vorzeichen der einzelnen Summanden untereinander verschieden und ist der Betrag der Summe klein gegenüber den einzelnen Gliedern, so kann der relative Fehler der Summe so große Werte annehmen, daß das Ergebnis unbrauchbar wird.

Beispiel 1:

Zwei Strecken sind mit $(62{,}4 \pm 0{,}5)$ mm und mit $(10{,}7 \pm 0{,}5)$ mm gemessen. Wie groß ist der relative Fehler der Differenz?

Es ist

$$\bar{y} = \bar{u} - \bar{v} = 51{,}7 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \Delta \bar{y} = \Delta \bar{u} + \Delta \bar{v} = 1 \text{ mm},$$

$$\frac{\Delta \bar{y}}{\bar{y}} = \frac{1 \text{ mm}}{51{,}7 \text{ mm}} = 0{,}019,$$

das heißt, der relative Fehler beträgt 1,9%.

Beispiel 2:

Zwei Strecken sind mit $(15{,}71 \pm 0{,}05)$ mm und mit $(14{,}98 \pm 0{,}05)$ mm gemessen. Welchen relativen Fehler besitzt die Differenz?

Es ist

$$\bar{y} = \bar{u} - \bar{v} = 0{,}73 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \Delta \bar{y} = \Delta \bar{u} + \Delta \bar{v} = 0{,}1 \text{ mm},$$

$$\frac{\Delta \bar{y}}{\bar{y}} = \frac{0{,}1 \text{ mm}}{0{,}73 \text{ mm}} = 0{,}137,$$

das heißt, der relative Fehler beträgt 13,7%.

Obwohl im Beispiel 2 der relative Fehler der Meßgrößen nur 0,3% beträgt, beträgt der relative Fehler der Differenz 13,7%. Das Ergebnis ist unbrauchbar.

Solche Fälle, in denen im Nenner des Ausdrucks für den relativen Fehler eine Differenz auftritt, muß man in der Praxis sorgfältig prüfen. Verlangt man ein genaueres Endergebnis, so muß man versuchen, die Meßgenauigkeit entsprechend zu steigern, oder man muß eine andere Meßmethode anwenden.

7. Der Fehler eines Produktes

Es sei $\bar{y} = \bar{u} \cdot \bar{v}$ das Produkt zweier Näherungswerte, die mit den Fehlern Δu und Δv behaftet sind. Der genaue Wert des Produktes ist dann

$$y = \bar{y} + \Delta y = (\bar{u} + \Delta u)(\bar{v} + \Delta v).$$

Hieraus ergibt sich

$$\bar{y} + \Delta y = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \Delta v + \bar{v} \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

und damit nach Subtraktion von $\bar{y} = \bar{u} \cdot \bar{v}$

$$\Delta y = \bar{u} \cdot \Delta v + \bar{v} \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Kennen wir statt der Fehler Δu und Δv die Fehlergrenzen $\Delta \bar{u}$ und $\Delta \bar{v}$, so können wir den Fehler des Produktes abschätzen.

Es ist

$$\bar{u} \cdot \Delta v \leqq |\bar{u}| \cdot |\Delta v|$$

und

$$|\Delta v| \leqq \Delta \bar{v},$$

also

$$\bar{u} \cdot \Delta v \leqq |\bar{u}| \cdot \Delta \bar{v}.$$

Ebenso ergibt sich

$$\bar{v} \cdot \Delta u \leqq |\bar{v}| \cdot \Delta \bar{u}.$$

Weiter ist

$$\Delta u \cdot \Delta v \leqq \Delta \bar{u} \cdot \Delta \bar{v}.$$

Wir erhalten so

$$|\Delta y| \leqq |\bar{u}| \cdot \Delta \bar{v} + |\bar{v}| \cdot \Delta \bar{u} + \Delta \bar{u} \cdot \Delta \bar{v}.$$

Die Fehlergrenze des Produktes ist daher

$$\Delta \bar{y} = |\bar{u}| \cdot \Delta \bar{v} + |\bar{v}| \cdot \Delta \bar{u} + \Delta \bar{u} \cdot \Delta \bar{v}.$$

Ist $\Delta \bar{u}$ klein gegen $\bar{u}$ und $\Delta \bar{v}$ klein gegen $\bar{v}$, so kann man das Produkt $\Delta \bar{u} \cdot \Delta \bar{v}$ gegenüber den übrigen Gliedern der Summe vernachlässigen. In den Aufgaben zu diesem Abschnitt ist dies stets der Fall. Wir setzen deshalb

$$\boldsymbol{\Delta \bar{y} = |\bar{u}| \cdot \Delta \bar{v} + |\bar{v}| \cdot \Delta \bar{u}}. \tag{7}$$

Bei jedem praktischen Arbeiten muß jedoch die Größenordnung des Produkts $\Delta \bar{u} \cdot \Delta \bar{v}$ abgeschätzt werden.

Dividieren wir die Formel (7) durch $|\bar{y}| = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|$, so ergibt sich der relative Fehler zu

$$\boldsymbol{\frac{\Delta \bar{y}}{|\bar{y}|} = \frac{\Delta \bar{u}}{|\bar{u}|} + \frac{\Delta \bar{v}}{|\bar{v}|}}. \tag{7'}$$

Der relative Fehler eines Produktes $\bar{y} = \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_n$, dessen Faktoren $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ die durchschnittlichen Fehler $\Delta \bar{u}_1, \Delta \bar{u}_2, \ldots, \Delta \bar{u}_n$ haben, beträgt

$$\boldsymbol{\frac{\Delta \bar{y}}{|\bar{y}|} = \frac{\Delta \bar{u}_1}{|\bar{u}_1|} + \frac{\Delta \bar{u}_2}{|\bar{u}_2|} + \cdots + \frac{\Delta \bar{u}_n}{|\bar{u}_n|}}. \tag{7''}$$

Diese Formel läßt sich aus Formel (7') herleiten, wenn man jeweils zwei Faktoren zusammenfaßt.

Der relative Fehler eines Produktes ist gleich der Summe aus den relativen Fehlern der Faktoren.

8. Der Fehler eines Quotienten

Gegeben sei der Quotient $\bar{y} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}}$ zweier Näherungswerte $\bar{u}$ und $\bar{v}$, die mit den Fehlern Δu und Δv behaftet sind.
Dann ist

$$y = \bar{y} + \Delta y = \frac{\bar{u} + \Delta u}{\bar{v} + \Delta v}.$$

Es folgt

$$\Delta y = \frac{\bar{u} + \Delta u}{\bar{v} + \Delta v} - \frac{\bar{u}}{\bar{v}}$$

oder

$$\Delta y = \frac{\bar{v} \cdot \Delta u - \bar{u} \cdot \Delta v}{\bar{v}\,(\bar{v} + \Delta v)}.$$

Ziehen wir $\bar{v}$ im Nenner vor die Klammer, so erhalten wir

$$\Delta y = \frac{\bar{v} \cdot \Delta u - \bar{u} \cdot \Delta v}{\bar{v}^2 \left(1 + \frac{\Delta v}{\bar{v}}\right)}$$

oder

$$\Delta y = \frac{\bar{v} \cdot \Delta u - \bar{u} \cdot \Delta v}{\bar{v}^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta v}{\bar{v}}}.$$

Ist Δv klein gegen $\bar{v}$, so unterscheidet sich der Ausdruck $\frac{1}{1 + \frac{\Delta v}{\bar{v}}}$ wenig von 1. Wir können ihn entsprechend unseren Betrachtungen bei der Herleitung des Fehlers eines Produktes vernachlässigen. Damit erhalten wir, falls Δv klein gegen $\bar{v}$ ist, den Fehler des Quotienten mit guter Annäherung zu

$$\Delta y \approx \frac{\bar{v} \cdot \Delta u - \bar{u} \cdot \Delta v}{\bar{v}^2}.$$

Sind die Fehlergrenzen $\Delta \bar{u}$ und $\Delta \bar{v}$ gegeben, so schätzen wir wieder den Fehler des Quotienten ab.

Es ist wieder

$$|\Delta u| \leqq \Delta \bar{u} \quad \text{und} \quad |\Delta v| \leqq \Delta \bar{v}$$

und damit, wie wir gesehen haben,

$$\bar{v} \cdot \Delta u \leqq |\bar{v}| \cdot \Delta \bar{u} \quad \text{bzw.} \quad \bar{u} \cdot \Delta v \leqq |\bar{u}| \cdot \Delta \bar{v}.$$

Haben $\bar{v} \cdot \Delta u$ und $\bar{u} \cdot \Delta v$ im Zähler des Bruches verschiedenes Vorzeichen, dann addieren sich die Produkte. Wir berücksichtigen diesen Fall bei unserer Abschätzung, indem wir im Zähler die absoluten Größen $|\bar{v}| \cdot \Delta \bar{u}$ und $|\bar{u}| \cdot \Delta \bar{v}$ addieren. Wir erhalten so

$$|\Delta y| \leqq \frac{|\bar{v}| \cdot \Delta \bar{u} + |\bar{u}| \cdot \Delta \bar{v}}{\bar{v}^2}.$$

Die Fehlergrenze des Quotienten ist damit

$$\boldsymbol{\Delta \bar{y} = \frac{|\bar{v}| \cdot \Delta \bar{u} + |\bar{u}| \cdot \Delta \bar{v}}{\bar{v}^2}}. \qquad (8)$$

Nach der Division durch $|\bar{y}| = \frac{|\bar{u}|}{|\bar{v}|}$ erhalten wir

$$\frac{\Delta\,\bar{y}}{|\,\bar{y}\,|} = \frac{|\,\bar{v}\,| \cdot \Delta\,\bar{u} + |\,\bar{u}\,| \cdot \Delta\,\bar{v}}{\bar{v}^2 \cdot \frac{|\,\bar{u}\,|}{|\,\bar{v}\,|}},$$

$$= \frac{|\,\bar{v}\,| \cdot \Delta\,\bar{u} + |\,\bar{u}\,| \cdot \Delta\,\bar{v}}{|\,\bar{u} \cdot \bar{v}\,|},$$

$$\boldsymbol{\frac{\Delta\bar{y}}{|\bar{y}|} = \frac{\Delta\bar{u}}{|\bar{u}|} + \frac{\Delta\bar{v}}{|\bar{v}|}}\,. \tag{8'}$$

Der relative Fehler eines Quotienten ist gleich der Summe aus den relativen Fehlern des Divisors und des Dividenden.

9. Der Fehler einer Funktion

Es sei eine Funktion $y = f(x)$ gegeben, die im betrachteten Intervall differenzierbar sei. Ist $\bar{x}$ ein Näherungswert mit dem Fehler Δx, dann hat $\bar{y}$ den Fehler Δy.

Es ist

$$\bar{y} + \Delta\,y = f(\bar{x} + \Delta\,x)\,.$$

Durch Subtraktion von $\bar{y} = f(\bar{x})$ erhalten wir den Fehler

$$\Delta\,y = f(\bar{x} + \Delta\,x) - f(\bar{x})\,.$$

Durch Erweitern der rechten Seite dieser Gleichung mit $\Delta\,x$ erhalten wir

$$\Delta\,y = \frac{f(\bar{x} + \Delta\,x) - f(\bar{x})}{\Delta\,x} \cdot \Delta\,x\,.$$

Ist $\Delta\,x$ hinreichend klein, so kann man den Differenzenquotienten mit guter Annäherung durch den Differentialquotienten ersetzen, und es ergibt sich

$$\Delta\,y \approx f'(\bar{x}) \cdot \Delta\,x\,.$$

Ist $\Delta\,\bar{x}$ die Fehlergrenze des Näherungswertes, so erhalten wir den Betrag der Fehlergrenze der Funktion, wenn wir berücksichtigen, daß

$$|\Delta\,x| \leqq \Delta\,\bar{x} \quad \text{und} \quad f'(\bar{x}) \leqq |f'(\bar{x})|$$

ist. Es ist also

$$\boldsymbol{\Delta\bar{y} = |f'(\bar{x})| \cdot \Delta\bar{x}}\,. \tag{9}$$

Der Betrag des relativen Fehlers ist

$$\boldsymbol{\frac{\Delta\bar{y}}{|\bar{y}|} = \frac{|f'(\bar{x})|}{|f(\bar{x})|} \cdot \Delta\bar{x}}\,. \tag{9'}$$

Beispiel:

Ein Winkel ist mit $\alpha = 62{,}64° \pm 0{,}05°$ gemessen. Wie groß ist der Fehler von $\sin\alpha$?

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \sin 62{,}64°, \\ \Delta\,\bar{y} &= |\cos 62{,}64°| \cdot \Delta\,\bar{\alpha} \\ &= 0{,}4596 \cdot 0{,}0008727 \approx 0{,}00040\,. \end{aligned}$$

Bei der numerischen Rechnung ist $\Delta\bar{\alpha}$ in das Bogenmaß umzuwandeln. Der Wert $\sin 62{,}64° = 0{,}8881$ besitzt also den Fehler 0,00040, d.h., $\sin\alpha$ hat mit $\alpha = 62{,}64° \pm 0{,}05°$ die Fehlergrenze 0,00040. Hiervon kann man sich unmittelbar überzeugen, wenn man die beiden Werte $\sin 62{,}59°$ und $\sin 62{,}69°$ der Funktionstafel entnimmt.

Der relative Fehler beträgt

$$\frac{\Delta\bar{y}}{|\bar{y}|} = \frac{0{,}00040}{0{,}8881} = 0{,}00045, \text{ das heißt } 0{,}045\,\%.$$

10. Anwendung in der Trigonometrie

In einem rechtwinkligen Dreieck seien die Hypotenuse c mit dem Fehler $\Delta\bar{c}$ und der Winkel α mit dem Fehler $\Delta\bar{\alpha}$ bekannt. Weiter sei vorausgesetzt, daß der Fehler des rechten Winkels so gering ist, daß er gegen die anderen Größen vernachlässigt werden darf. Es ist der Fehler der Kathete a zu bestimmen, wenn $c = (25{,}00 \pm 0{,}05)$ cm und $\alpha = (30 \pm 0{,}2)°$ sind.

Da $a = c \cdot \sin\alpha$ ist, errechnen wir den Fehler für a unter Verwendung der Formel (7),

$$\Delta\bar{y} = |\bar{u}| \cdot \Delta\bar{v} + |\bar{v}| \cdot \Delta\bar{u}.$$

Wir setzen $\bar{u} = \bar{c}$ und $\bar{v} = \sin\bar{\alpha}$. Dann ist $\Delta\bar{u} = \Delta\bar{c}$.

Für $\Delta\bar{v}$ erhalten wir nach Formel (9)

$$\Delta\bar{v} = |\cos\bar{\alpha}| \cdot \Delta\bar{\alpha}.$$

Für $\Delta\bar{a}$ ergibt sich dann

$$\Delta\bar{a} = |\sin\bar{\alpha}| \cdot \Delta\bar{c} + |\bar{c} \cdot \cos\bar{\alpha}| \cdot \Delta\bar{\alpha}.$$

Für den relativen Fehler erhalten wir

$$\frac{\Delta\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{\Delta\bar{c}}{|\bar{c}|} + \frac{|\cos\bar{\alpha}| \cdot \Delta\bar{\alpha}}{|\sin\bar{\alpha}|} = \frac{\Delta\bar{c}}{|\bar{c}|} + |\operatorname{ctg}\bar{\alpha}| \cdot \Delta\bar{\alpha}.$$

Bei der numerischen Rechnung ist zu beachten, daß $\Delta\bar{\alpha}$ in das Bogenmaß umzurechnen ist.

Es ergibt sich

$$\frac{\Delta\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{0{,}05}{25} + 1{,}732 \cdot 0{,}00349 = 0{,}002 + 0{,}0060$$

$$\frac{\Delta\bar{a}}{|\bar{a}|} = 0{,}0080.$$

Der prozentuale Fehler beträgt also 0,80%.

Aufgaben

Es sind, wenn in der Aufgabe nichts anderes angegeben ist, die Fehlergrenzen (in den Aufgaben häufig kurz mit „Fehler" bezeichnet) und die relativen Fehlergrenzen zu berechnen.

1. Die Seite eines Quadrates ist $a = (52{,}52 \pm 0{,}05)$ mm. Berechnen Sie die Fläche und ihren Fehler!

2. Der Durchmesser eines Kreises ist mit $d = (13{,}40 \pm 0{,}02)$ cm gemessen. Wie groß ist der Inhalt und dessen Fehler?

3. Die Seiten eines Dreiecks werden mit Hilfe eines Stechzirkels auf einem Transversal-Maßstab bestimmt. Dabei findet man die Werte $\bar{a} = 7{,}35$ cm, $\bar{b} = 5{,}27$ cm, $\bar{c} = 8{,}64$ cm. Die Meßwerte der Seiten sind mit $\pm\, 0{,}1$ mm unsicher. Wie groß ist der Fehler des Umfanges?

4. In einem Gleichstromkreis wurde die Spannung mit $U = (36{,}53 \pm 0{,}005)$ Volt und die Stromstärke mit $I = (0{,}056 \pm 0{,}0005)$ Ampere gemessen. Der Widerstand des Stromkreises ist zu bestimmen.

5. Die Seiten eines Rechtecks sind mit 81,5 mm und 57,5 mm gemessen. Der Fehler jeder Länge betrage $\pm\, 0{,}2$ mm. Wie groß sind die absolute und die relative Fehlergrenze des Flächeninhaltes?

6. Die Grundseite eines Dreiecks wurde mit 4,57 cm und die zugehörige Höhe mit 3,14 cm bestimmt. Der Fehler der Meßwerte betrage je $\pm\, 0{,}2$ mm. Wie groß sind die absolute und die relative Fehlergrenze des Flächeninhaltes?

7. An einem Trapez werden die Grundlinien mit $\bar{a} = 7{,}45$ cm und $\bar{b} = 5{,}79$ cm und die Höhe mit $\bar{h} = 4{,}25$ cm gemessen. Der Meßfehler sei $\pm\, 0{,}5$ mm. Wie groß ist der Fehler des Flächeninhaltes?

8. Bei einem Litermaß aus Aluminium sind der Durchmesser und die Höhe gemessen worden. Es ergaben sich die folgenden Meßwerte: $d = (8{,}56 \pm 0{,}01)$ cm; $h = (17{,}38 \pm 0{,}03)$ cm. Bestimmen Sie

   a) das Volumen und dessen Fehler,

   b) die relative Abweichung des Volumens gegenüber dem Sollwert!

   Überlegen Sie, wieviel Stellen von π verwendet werden müssen, damit durch dessen Nährungswert der Fehler des Ergebnisses nur unwesentlich beeinflußt wird!

9. Beim Ausmessen eines Ziegelsteines sind die folgenden Maße festgestellt worden:

   $a = (24{,}3 \pm 0{,}2)$ cm; $b = (11{,}6 \pm 0{,}1)$ cm; $c = (7{,}2 \pm 0{,}1)$ cm.

   Bestimmen Sie

   a) die Fehlergrenze und den relativen Fehler des Rauminhaltes,

   b) die relative Abweichung des Volumens vom Sollwert (Kantenlängen 24 cm, 11,5 cm und 7,1 cm)!

10. Bei einem Blatt DIN A 4 sind die Seiten zu $\bar{a} = 210{,}4$ mm und $\bar{b} = 296{,}4$ mm ermittelt worden. Die Fehlergrenze beträgt 0,3 mm.

    Bestimmen Sie

    a) die Fläche und deren Fehler,

    b) die relative Abweichung der Fläche von der Sollfläche ($a = 210$ mm; $b = 297$ mm)!

11. Es ist im rechtwinkligen Dreieck $b = c \cdot \cos\alpha$. Bestimmen Sie die absolute und die relative Fehlergrenze der Seite b!

    Es sei $c = 203{,}72$ m $\pm\, 0{,}05$ m, $\alpha = 37{,}37° \pm 0{,}05°$.

12. Es ist im rechtwinkligen Dreieck $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. Bestimmen Sie die absolute und die relative Fehlergrenze von α! Es sei $a = 25{,}73$ m $\pm\, 0{,}05$ m, $b = 18{,}57$ m $\pm\, 0{,}05$ m.

13. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist $F = \frac{a b \sin \gamma}{2}$. Bestimmen Sie den Fehler, wenn $a = 20{,}00$ cm $\pm$ 0,02 cm, $b = 10{,}00$ cm $\pm$ 0,02 cm, $\gamma = 30° \pm 0{,}2°$ ist!

14. Nach dem Sinussatz ist im Dreieck $a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$. Bestimmen Sie den Fehler von a, wenn $b = 10{,}00$ cm $\pm$ 0,02 cm, $\alpha = 55° \pm 0{,}2°$, $\beta = 65° \pm 0{,}2°$ ist!

15. Die Masse eines kleinen Quecksilbertropfens soll in einem Uhrglas mit einer Analysenwaage bestimmt werden. Man erhielt die folgenden Mittelwerte:
Masse des Uhrglases ohne Hg (6102,37 $\pm$ 0,05) mg,
Masse des Uhrglases mit Hg (6109,21 $\pm$ 0,05) mg.
Wie groß sind die Masse des Quecksilbertropfens und der relative Fehler der Wägung?

16. Die Kapazität eines Plattenkondensators soll berechnet werden $\left(C = \varepsilon_0 \cdot \frac{F}{d}\right)$. Die Fläche der Platten wurde mit $F = (105{,}7 \pm 0{,}13)\ \text{cm}^2$ und der Abstand der Platten mit $d = (0{,}1 \pm 0{,}01)$ cm bestimmt. Die Dielektrizitätskonstante ist $\varepsilon_0 = 8{,}859 \cdot 10^{-14} \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt} \cdot \text{cm}}$.

III. Näherungslösungen von Gleichungen

11. Praktische Berechnung erforderlicher Funktionswerte

In den Betrachtungen, die wir im folgenden durchführen werden, ist es häufig notwendig, Funktionswerte $f(x)$ von ganzen rationalen Funktionen zu berechnen. Diese Berechnung wird mitunter bereits dann umständlich, wenn $f(x)$ dritten Grades ist. Wir entwickeln daher ein Schema, das die Berechnung mit Hilfe des Rechenstabes gestattet. Dazu gehen wir von der Funktion dritten Grades

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(mit $a_3 \neq 0$) als Beispiel aus. Wir ziehen den Faktor x vor die Klammer und erhalten damit

$$f(x) = [a_3 x^2 + a_2 x + a_1] x + a_0.$$

Durch weitere Abtrennung des Faktors x ergibt sich

$$f(x) = [(a_3 x + a_2) x + a_1] x + a_0.$$

Diese Gleichung ermöglicht es uns, den Funktionswert $f(x)$ in aufeinanderfolgenden Stufen zu berechnen:

1. Den Koeffizienten a_3 multiplizieren wir mit x.
2. Zum Produkt addieren wir den Koeffizienten a_2.
3. Die Summe multiplizieren wir mit x.
4. Zu diesem Produkt addieren wir a_1.
5. Diese Summe multiplizieren wir mit x.
6. Zum Produkt addieren wir a_0.

Diesen Rechengang stellen wir in dem folgenden Schema dar:

a_3	a_2	a_1	a_0
$a_3 x$	$a_3 x + a_2$		
	$(a_3 x + a_2) x$	$(a_3 x + a_2) x + a_1$	
		$[(a_3 x + a_2) x + a_1] x$	$[(a_3 x + a_2) x + a_1] x + a_0$

Verkürzt schreiben wir das Schema folgendermaßen:

a_3	a_2	a_1	a_0
	$a_3 x$	$(a_3 x + a_2) x$	$[(a_3 x + a_2) x + a_1] x$
a_3	$a_3 x + a_2$	$(a_3 x + a_2) x + a_1$	$[(a_3 x + a_2) x + a_1] x + a_0$

Entsprechend kann dieses Schema für ganze rationale Funktionen n-ten Grades aufgestellt werden. Es heißt **Hornersches Schema**.

Beispiel:

Es soll $f(x) = 2{,}5 x^3 - 3{,}1 x^2 + 1{,}5 x + 0{,}8$ für $x = 1{,}5$ berechnet werden. Wir schreiben die Koeffizienten der Funktion in eine Zeile hintereinander:

$$2{,}5 \qquad -3{,}1 \qquad 1{,}5 \qquad 0{,}8.$$

Nun multiplizieren wir 2,5 mit $x = 1{,}5$. Wir erhalten 3,75 und addieren diesen Wert zu $-3{,}1$. Das Ergebnis 0,65 multiplizieren wir wieder mit $x = 1{,}5$. Das Produkt fassen wir mit dem nächsten Koeffizienten 1,5 zusammen usw. Es ergibt sich dann im Schema:

2,5	−3,1	1,5	0,8
	3,75	0,98	3,72
2,5	0,65	2,48	4,5

$f(1{,}5) = 4{,}5.$

Im Rechenstab stellen wir 1,5 fest ein und lesen sämtliche Produkte ab, ohne die Zunge zu verstellen.

Sind in der Funktion ein oder mehrere Koeffizienten gleich Null, so werden die Koeffizienten 0 in der ersten Zeile mitgeschrieben.

Beispiel:

Es ist $f(x) = 5x^4 - 2x^2 - 5x$ für $x = 2$ zu berechnen.

$$f(x) = 5x^4 + 0 \cdot x^3 - 2x^2 - 5x + 0$$

5	0	−2	−5	0
	10	20	36	62
5	10	18	31	62

$f(2) = 62.$

12. Das Sekantennäherungsverfahren

Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$. Es soll eine Nullstelle dieser Funktion bestimmt werden.

Zunächst untersuchen wir, ob die Funktion überhaupt eine Nullstelle hat. Dazu stellen wir eine Wertetafel auf; an dieser prüfen wir, ob mindestens zwei Funktionswerte vorhanden sind, die entgegengesetzte Vorzeichen haben. Existieren zwei solche Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$, so muß noch festgestellt werden, ob die Funktion im Intervall von x_1 bis x_2 stetig ist. Wenn das der Fall ist, so hat sie in diesem Intervall mindestens eine Nullstelle x_0.

Bei allen folgenden Betrachtungen werden nur solche Funktionen behandelt, die höchstens Lücken oder Pole als Unstetigkeitsstellen aufweisen. Es genügt also, die Untersuchung auf diese Fälle zu beschränken.

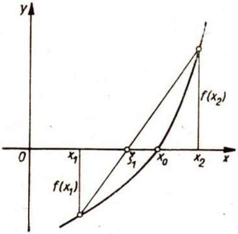


Abb. 1

Durch die Punkte $[x_1; f(x_1)]$ und $[x_2; f(x_2)]$ legen wir die Sekante (Abb.1); ihre Gleichung ist

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\eta - f(x_1)}{\xi - x_1},$$

wenn mit ξ und η die Koordinaten aller Punkte auf der Sekante bezeichnet werden. Für $\eta_1 = 0$ hat die Sekante eine Nullstelle ξ_1. Es gilt dann

$$\xi_1 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_1). \tag{1}$$

Da x_0 und ξ_1 Werte im Intervall $x_1 \ldots x_2$ sind, liegt ξ_1 näher an x_0 als mindestens einer der beiden Werte x_1 und x_2.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man die Stelle x_0 mit beliebiger Genauigkeit annähern. Dabei wählt man stets die Ausgangswerte für die weitere Berechnung so, daß die zugehörigen Funktionswerte verschiedene Vorzeichen haben.

Beispiel:

Gegeben sei die Funktion $y = f(x) = x^3 + x - 5 = 0$.

x	0	+ 1	+ 2	+ 3
y	− 5	− 3	+ 5	+ 25

Aus der Wertetafel erkennen wir, daß $f(1) = -3$ und $f(2) = +5$ verschiedene Vorzeichen haben. Da es sich bei unserem Beispiel um eine ganze rationale Funktion handelt, können Lücken und Pole nicht auftreten. Daraus folgt, daß zwischen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ eine Nullstelle liegt. Für ξ_1 ergibt sich

$$\xi_1 = 1 - \frac{2-1}{5-(-3)} \cdot (-3) = 1 + \frac{3}{8} = 1{,}375.$$

Den Wert $\xi_1 = 1{,}375$ runden wir auf $\xi_1 \approx 1{,}4$, da ξ_1 ohnehin nur ein Näherungswert ist und die Verwendung des Wertes $\xi_1 = 1{,}375$ die Fortsetzung der Rechnung erschwert.

Für $f(1{,}4)$ ergibt sich

$$f(1{,}4) \approx -0{,}86.$$

Da $f(1{,}4)$ negativ ist, wählen wir den positiven Wert $f(x_2) = 5$ für die Berechnung des nächsten Näherungswertes. Wir bezeichnen ihn mit ξ_2, und es gilt

$$\xi_2 = \xi_1 - \frac{x_2 - \xi_1}{f(x_2) - f(\xi_1)} \cdot f(\xi_1).$$

Diese Gleichung wurde aus der Gleichung für ξ_1 gewonnen, indem dort für x_1 der bessere Näherungswert ξ_1 eingesetzt wurde. Für ξ_2 erhält man

$$\xi_2 = 1{,}4 - \frac{2 - 1{,}4}{5 - (-0{,}86)} \cdot (-0{,}86) = 1{,}4 + \frac{0{,}516}{5{,}86} \approx 1{,}5.$$

Für $f(1.5)$ ergibt sich

$$f(1{,}5) = -0{,}125.$$

Führt man eine weitere Näherung durch, so erhält man $\xi_3 = 1{,}512$ und $f(1{,}512) \approx -0{,}031$. Es gilt also

$$x_0 \approx 1{,}512.$$

Das eben behandelte Verfahren heißt **Sekantennäherungsverfahren** oder auch **regula falsi**. Diese Bezeichnung (mittelalterliches Latein) bedeutet soviel wie ,,Regel vom Falschen (ausgehend)``.

13. Das Tangentennäherungsverfahren

Bei einem weiteren Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen einer Funktion wird an Stelle der Sekante die Tangente verwendet.

Es sei $f(x)$ eine Funktion, von der bekannt ist, daß sie im Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_2$ stetig und mindestens zweimal differenzierbar ist (vgl. die einleitenden Absätze zum Abschnitt 12) und daß sie in diesem Intervall eine Nullstelle x_0 besitzt. Ferner sei $f'(x)$ und $f''(x)$ im ganzen Intervall verschieden von Null, das heißt, in diesem Intervall existieren weder Extremwerte noch Wendepunkte. Es haben also $f(x_1)$ und $f(x_2)$ verschiedene Vorzeichen.

Die Gleichung der Tangente an die Kurve der Funktion $f(x)$ im Punkte $[x_1; f(x_1)]$ ist

$$\frac{\eta - f(x_1)}{\xi - x_1} = f'(x_1),$$

wobei mit ξ und η die Koordinaten aller Punkte auf der Tangente bezeichnet sind. Für den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ergibt sich:

$$\eta_1 = 0; \qquad \xi_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Wir müssen nun untersuchen, ob ξ_1 einen besseren Näherungswert für x_0 darstellt als x_1.

Wenn $f(x_1)$ und $f''(x_1)$ beide negativ sind, so steigt die Kurve von x_1 bis x_2, und sie ist konkav von unten. Die Tangente liegt also oberhalb der Kurve und schneidet demnach die x-Achse zwischen x_1 und x_0 (Abb. 2). Zum entsprechenden Ergebnis gelangen wir, wenn $f(x_1)$ und $f''(x_1)$ beide positiv sind (Abb. 3). In diesen Fällen stellt

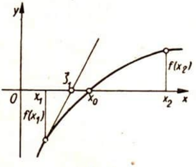


Abb. 2

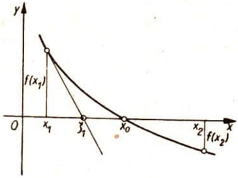


Abb. 3

ξ_1 eine bessere Näherung für x_0 dar als x_1. Sind dagegen die Vorzeichen von $f(x_1)$ und $f''(x_1)$ verschieden (Abb. 4 und 5), so liegt der Schnittpunkt nicht zwischen x_1 und x_0. Über seine Brauchbarkeit als Näherungswert kann man daher keine Aussage machen.

Eine entsprechende Betrachtung kann man für den Näherungswert x_2 anstellen.

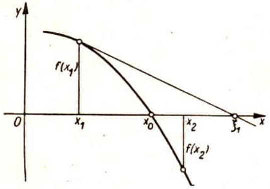


Abb. 4

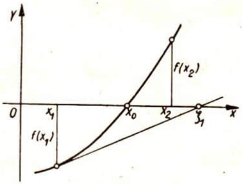


Abb. 5

Da $f(x_1)$ und $f(x_2)$ verschiedene Vorzeichen haben, stimmt das Vorzeichen eines und nur eines dieser beiden Werte mit dem Vorzeichen von $f''(x)$ überein (das sich nach der Voraussetzung im ganzen Intervall nicht ändert). Daher ist nur einer der beiden Werte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ für die Berechnung von ξ_1 sicher brauchbar.

Es ist

$$\xi_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

ein besserer Näherungswert für x_0 als der Wert x_1, wenn

$$f(x_1) \cdot f''(x_1) > 0$$

ist.

Wir haben diese Bedingung aus der geometrischen Veranschaulichung gewonnen. Auf einen strengen analytischen Beweis soll wegen seines Umfanges verzichtet werden.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man die Stelle x_0 mit beliebiger Genauigkeit annähern.

Beispiel:

Wir betrachten wieder die Funktion

$$f(x) = x^3 + x - 5.$$

Zwei Näherungswerte sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Es ist

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

und

$$f''(x) = 6x.$$

Im Intervall $1 \leqq x \leqq 2$ sind beide Ableitungen positiv, also verschieden von Null. Wegen $f''(x) > 0$ wählen wir $f(2) = 5$ als ersten Näherungswert. Es ist dann

$$\xi_1 = 2 - \frac{5}{13} \approx 1{,}6$$

und

$$f(1{,}6) \approx 0{,}7.$$

Verwenden wir für die Berechnung des nächsten Näherungswertes diesen Wert, so erhalten wir

$$\xi_2 = 1{,}6 - \frac{0{,}7}{8{,}7} \approx 1{,}52$$

und

$$f(1{,}52) \approx 0{,}03.$$

Der dritte Näherungswert ergibt sich als

$$\xi_3 = 1{,}52 - \frac{0{,}03}{7{,}93} \approx 1{,}516$$

mit

$$f(1{,}516) \approx +\,0{,}00016.$$

Das eben behandelte Verfahren, das **Tangentennäherungsverfahren**, wurde von *Isaak Newton* entwickelt und wird nach ihm auch als **Newtonsches Näherungsverfahren** bezeichnet.

Das Newtonsche Näherungsverfahren führt schneller zu einem guten Näherungswert als die regula falsi. Es hat aber gegenüber der regula falsi den Nachteil, daß für seine Anwendbarkeit mehr Einschränkungen gemacht werden mußten (vgl. dazu die einleitenden Absätze zu beiden Verfahren).

Da die Ableitungen bei ganzen rationalen Funktionen leicht zu bestimmen sind, wird man in diesen Fällen in der Regel das Newtonsche Näherungsverfahren anwenden. Liegt jedoch ein Extremwert oder ein Wendepunkt im betrachteten Intervall, so ist es zweckmäßig, mit Hilfe der regula falsi die ersten Näherungswerte zu bestimmen. Gelingt es, auf diese Weise ein Intervall abzugrenzen, in dem zwar eine

Nullstelle liegt, aber keine Extremwerte oder Wendepunkte mehr auftreten, so setzt man die Berechnung mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens fort. Ist eine gebrochene rationale oder eine nichtrationale Funktion gegeben, so ist das Newtonsche Näherungsverfahren nur dann zweckmäßig, wenn die Ableitungen leicht zu bestimmen sind. In der Regel wird man in diesem Fall also die regula falsi anwenden. Dabei ist zu beachten, daß man bei gebrochenen Funktionen zur Bestimmung von Nullstellen zunächst nur die Zählerfunktion untersucht und dann erst prüft, ob die Nullstelle der Zählerfunktion etwa auch Nullstelle der Nennerfunktion ist.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie eine Wurzel der folgenden Gleichungen

1. nach der regula falsi,
2. nach dem Newtonschen Näherungsverfahren!

Anmerkung: Berechnen Sie alle Funktionswerte mit dem Rechenstab unter Verwendung des Hornerschen Schemas!

a) $x^3 - 5x - 15 = 0$ **b)** $x^3 + 3x - 7 = 0$

c) $x^3 + x^2 - 5 = 0$ **d)** $2x^3 - 4x - 3 = 0$

e) $5x^3 - 6x - 7 = 0$ **f)** $2{,}5x^3 - 3{,}1x^2 + 1{,}5x + 0{,}8 = 0$

g) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 10 = 0$ **h)** $x^5 + 6x^3 + 5x^2 + 10x - 18 = 0$

i) $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x + 9 = 0$ **k)** $x^5 - 3x^3 - 2x^2 - 5 = 0.$

2. Bestimmen Sie eine Wurzel der folgenden Gleichungen

1. nach der regula falsi,
2. nach dem Newtonschen Näherungsverfahren!

a) $\cos x - x = 0$ **b)** $2 \sin x - x = 0$

c) $\operatorname{ctg} x - x = 0$ **d)** $\operatorname{tg} x - x = 0$

e) $7 \sin x - x + 9 = 0$ **f)** $2^x + \frac{1}{x} - 4 = 0.$

Anleitung: Die zeichnerische Lösung der Gleichung ergibt einen ersten Näherungswert für eine reelle Wurzel. Vergleichen Sie zur zeichnerischen Lösung der Gleichungen den Abschnitt Goniometrie, Lehrbuch der Mathematik für das 10. Schuljahr!

3. Wie tief sinkt eine Eisenkugel von 10 cm Radius in Quecksilber ein? (Die Wichte von Eisen ist 7,8 p/cm³, von Quecksilber 13,55 p/cm³).

Anmerkung: Die angegebenen Werte sind als exakt anzusehen.

4. Einer Halbkugel mit dem Radius $r = 10{,}00$ cm soll ein Zylinder einbeschrieben werden, dessen Rauminhalt $\frac{1}{3}$ des Halbkugelvolumens beträgt. Wie groß sind der Radius und die Höhe des Zylinders?

5. Einer Halbkugel soll ein Kegel, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt, einbeschrieben werden. Der Radius der Kugel beträgt $r = 12$ cm.

Wie groß sind der Radius und die Höhe des Kegels, wenn sein Volumen 500 cm³ betragen soll?

Anmerkung: Vgl. Anmerkung zu Aufgabe 3.

B. Sphärische Trigonometrie

Bei den bisherigen Betrachtungen in der Trigonometrie sind wir davon ausgegangen, daß die Figuren in einer Ebene liegen. Wir wollen in den folgenden Abschnitten die trigonometrischen Untersuchungen auf die Kugeloberfläche ausdehnen. Dieses Teilgebiet der Mathematik, mit dem wir uns jetzt beschäftigen werden, heißt **sphärische Trigonometrie**. Die Bezeichnung ist von dem griechischen Wort sphaira (Kugel) abgeleitet.

I. Grundbegriffe der Kugelgeometrie

1. Großkreise und Kleinkreise, kürzeste Entfernung zweier Punkte

Wird eine Kugel von einer Ebene geschnitten, so entsteht als Schnittfigur ein Kreis. Die Größe des Schnittkreises ist vom Abstand a der Ebene vom Mittelpunkt der Kugel abhängig. Es ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

1. $a = 0$ Der Mittelpunkt des Schnittkreises fällt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammen. Der Radius des Schnittkreises ist gleich dem Radius der Kugel. Es ist offensichtlich, daß es keinen Schnittkreis mit größerem Radius geben kann. Man bezeichnet deshalb diesen Schnittkreis als **Großkreis.**

2. $0 < a < r$ Der Radius des Schnittkreises ist $\varrho = \sqrt{r^2 - a^2}$. (Dies kann mit Hilfe einer Zeichnung leicht hergeleitet werden.) Es ist also in diesem Falle ϱ stets kleiner als r. Man bezeichnet deshalb diese Schnittkreise als **Kleinkreise.**

3. $a = r$ Die Ebene berührt die Kugel. Der Schnittkreis entartet zu einem Punkt.

4. $a > r$ Die Ebene schneidet die Kugel nicht. Es entsteht also kein Schnittkreis.

In der Ebene ist die Strecke die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Da es auf der Kugeloberfläche keine Geraden gibt, tritt hier an die Stelle der Strecke der kleinere Bogen eines Großkreises durch die beiden Punkte. Dieser Bogen ist auf der Kugeloberfläche die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.

Es soll hier nur bewiesen werden, daß der kleinere Bogen des Großkreises unter allen möglichen Kreisbogen auf der Kugeloberfläche die kürzeste Verbindung zweier

Punkte ist. Um zu beweisen, daß er die kürzeste Verbindung unter allen überhaupt möglichen Kurven ist, muß man Hilfsmittel heranziehen, die über den Lehrstoff der Oberschule hinausgehen.

In der Abbildung 6 a sind drei Kreise durch die Punkte A und B der Kugeloberfläche gelegt. Die Abbildung 6 b zeigt die Umlegung dieser Kreise in eine Ebene. Die drei Kreise haben die Sehne $AB = s$ gemeinsam.

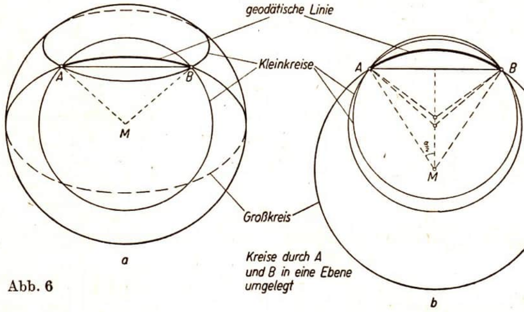


Abb. 6

Ist ϱ der Radius des durch A und B gehenden Kreisbogens und α_ϱ der zugehörige Zentriwinkel, so wird die Länge b des Bogens durch die Formel $b = \widehat{\alpha}_\varrho \cdot \varrho$ bestimmt. Der Radius ϱ kann aus $\sin\frac{\alpha_\varrho}{2} = \frac{s}{2\varrho}$ zu $\varrho = \frac{s}{2\sin\frac{\alpha_\varrho}{2}}$ berechnet werden. Dann gilt also $b = \frac{\frac{\widehat{\alpha}_\varrho}{2}}{\sin\frac{\alpha_\varrho}{2}} \cdot s$. Da s konstant ist, haben wir damit den Bogen b allein als Funktion von α_ϱ dargestellt.

Wir setzen zur Vereinfachung $\frac{\widehat{\alpha}_\varrho}{2} = x$ und betrachten das Verhalten der Funktion $b(x) = \frac{x}{\sin x} \cdot s$ im Intervall $0 < x < \pi$.

Wir erhalten als erste Ableitung $b'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} \cdot s$.

Im Teilintervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ist

$$\operatorname{tg} x > x \quad \text{(vgl. Lehrbuch der Mathematik, 11. Schuljahr),}$$

also $$\sin x > x\cos x \quad \text{und damit} \quad \sin x - x\cos x > 0.$$

Im Teilintervall $\frac{\pi}{2} \leqq x < \pi$ ist

$$\sin x > 0, \quad x\cos x \leqq 0 \quad \text{und damit} \quad \sin x - x\cos x > 0.$$

Mit $\sin x - x\cos x$ ist aber auch $b'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$ im ganzen Intervall $0 < x < \pi$ stets positiv. Das bedeutet, wenn wir wieder $x = \frac{\widehat{\alpha}_\varrho}{2}$ setzen, daß die Funktion $b(\widehat{\alpha}_\varrho) = \frac{\widehat{\alpha}_\varrho}{2\sin\frac{\alpha_\varrho}{2}} \cdot s$ im Intervall $0 < \widehat{\alpha}_\varrho < 2\pi$ mit wachsendem α_ϱ monoton wächst bzw. mit kleiner werdendem α_ϱ monoton fällt. Der Bogen b wird also um so kleiner, je kleiner α_ϱ ist oder, wegen $\varrho = \frac{s}{2\sin\frac{\alpha_\varrho}{2}}$, je größer ϱ ist.

Da der Großkreis unter allen möglichen Kreisen auf der Kugeloberfläche derjenige mit dem größten Radius ist, stellt der kleinere Bogen des Großkreises unter allen möglichen Kreisbogen die kürzeste Verbindung zwischen A und B dar.

Den kleineren Bogen des Großkreises durch zwei Punkte auf der Kugeloberfläche bezeichnen wir als **geodätische Linie**. (Allgemein wird die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf jeder gekrümmten Fläche als geodätische Linie bezeichnet.)

Die Länge der geodätischen Linie kann man auf zwei Arten messen: 1. mit einem Längenmaß auf dem kleineren Bogen des Großkreises; 2. als Winkel, den die beiden Radien zu den Endpunkten der geodätischen Linie bilden. Im ersten Falle ist die Länge der geodätischen Linie außer von der Lage der Punkte auch vom Kugelradius abhängig, im zweiten Falle dagegen nicht. Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir die Länge der geodätischen Linie als **sphärischen Abstand**, wenn sie im Längenmaß gemessen ist, dagegen als **sphärische Länge**, wenn sie im Winkelmaß gemessen ist. Für die Länge der geodätischen Linie gilt die folgende Relation:

$$\boldsymbol{b = r \cdot \widehat{\alpha} = r \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}}$$

Dabei ist α die sphärische Länge und b der sphärische Abstand (Abb. 7).

Für die Erde ist zum Beispiel die Länge der geodätischen Linie, die zur sphärischen Länge 1° gehört, annähernd 111 km.

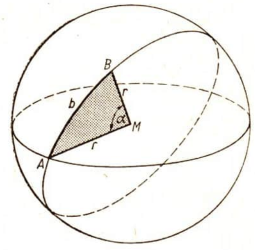


Abb. 7

2. Das sphärische Zweieck, Winkel am Zweieck, Flächeninhalt

Im allgemeinen wird durch zwei Punkte auf der Kugel ein Großkreis eindeutig bestimmt, da der Mittelpunkt der Kugel mit diesen beiden Punkten zusammen die Schnittebene festlegt. Sind speziell die beiden Punkte Endpunkte eines Durchmessers, so liegen sie zusammen mit dem Mittelpunkt auf einer Geraden. In diesem Fall lassen sich durch diese beiden Punkte, die diametral zueinander liegen, beliebig viele Großkreise ziehen, die sämtlich einander halbieren.

Durch zwei nicht zusammenfallende Großkreise wird die Kugeloberfläche in vier Teile zerlegt, von denen je zwei einander kongruent sind (Abb. 8). Die so entstandenen Teile der Kugelfläche nennt man **Kugelzweiecke.** Alle Kugelzweiecke sind gleichseitig. Die sphärische Länge ihrer Seiten ist 180°. Die Größe des Kugelzweiecks ist von der Größe des Winkels α zwischen den erzeugenden Großkreisebenen abhängig. Diesen Winkel α bezeichnen wir als den Winkel des Kugelzweiecks.

Der Flächeninhalt eines Kugelzweiecks läßt sich aus der Proportion

$$F : O = F : 4\pi r^2 = \alpha : 360°$$

als

$$\boldsymbol{F = \frac{4\pi r^2 \alpha}{360°} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°}}$$

bestimmen, wobei F die Fläche des Zweiecks und O die Oberfläche der Kugel bedeuten.

Wird der Winkel jedoch im Bogenmaß gemessen, so ist

$$F : O = F : 4\pi r^2 = \hat{\alpha} : 2\pi,$$

also

$$\boldsymbol{F = \frac{4\pi r^2 \hat{\alpha}}{2\pi} = 2r^2\hat{\alpha}.}$$

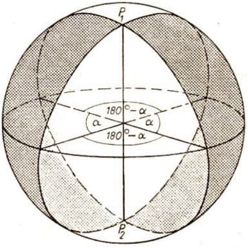


Abb. 8

3. Das sphärische Dreieck, Flächeninhalt, Winkelsumme

Wir wollen im folgenden Dreiecke auf der Kugeloberfläche betrachten. Ein Kugeldreieck ist die Figur, die von drei Großkreisbogen begrenzt wird. Die Großkreisbogen sind dann nach Abschnitt 1 die Seiten des Dreiecks. Die Winkel zwischen den erzeugenden Großkreisebenen sind entsprechend Abschnitt 2 die Winkel des Dreiecks. Wir beschränken uns bei den folgenden Untersuchungen auf solche Dreiecke, bei denen jede Seite sowie jeder Winkel kleiner als 180° ist. Diese Dreiecke werden als **Eulersche Dreiecke** bezeichnet.

Die vollständigen Großkreise schneiden sich paarweise noch einmal in den drei Punkten A_1, B_1 und C_1, die jeweils diametral den Punkten A, B und C gegenüberliegen (Abb. 9). Dadurch entsteht ein flächengleiches, symmetrisches sphärisches Dreieck $A_1B_1C_1$, das aber den entgegengesetzten Umlaufsinn des ursprünglichen Dreiecks ABC hat. Dieses Dreieck heißt das **Scheiteldreieck** zum Dreieck ABC. Neben dem Dreieck ABC und seinem Scheiteldreieck $A_1B_1C_1$ entstehen aber auf der Kugel noch weitere sechs Dreiecke:

$$AB_1C_1,\quad A_1BC,\quad A_1BC_1,\quad AB_1C,\quad A_1B_1C,$$
$$\text{und}\quad ABC_1.$$

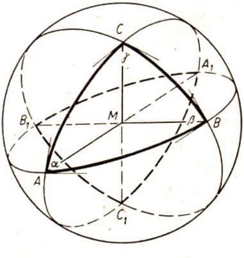


Abb. 9

Die Flächen der acht Dreiecke bedecken vollständig die Kugeloberfläche, ohne einander zu überschneiden.

Da je zwei gegenüberliegende Dreiecke flächengleich sind, genügt es, wenn wir uns bei den folgenden Betrachtungen auf die Halbkugel beschränken. Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit F, den des Dreiecks A_1BC mit F_1, den des Dreiecks AB_1C mit F_2 und den des Dreiecks A_1B_1C mit F_3. Es gilt also

$$F + F_1 + F_2 + F_3 = 2\pi r^2. \tag{1}$$

Andererseits bilden die Flächen F und F_1 ein Kugelzweieck mit dem Winkel α, die Flächen F und F_2 ein solches mit dem Winkel β und die Fläche des Scheiteldreiecks $A_1B_1C_1$, die der Größe nach gleich F ist, und F_3 ein Kugelzweieck mit dem Winkel γ. Daher ist nach Abschnitt 2

$$F + F_1 = \frac{\pi r^2 \alpha}{90^\circ},$$

$$F + F_2 = \frac{\pi r^2 \beta}{90^\circ},$$

$$F + F_3 = \frac{\pi r^2 \gamma}{90^\circ}.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergibt sich

$$3F + F_1 + F_2 + F_3 = \frac{\pi r^2}{90^\circ}(\alpha + \beta + \gamma)$$

und nach Subtraktion von (1)

$$2F = \frac{\pi r^2}{90^\circ}(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{180^\circ \pi r^2}{90^\circ},$$

$$2F = \frac{\pi r^2}{90^\circ}(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)$$

oder

$$F = \frac{\pi r^2}{180^\circ}(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ). \tag{2}$$

Wird $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \varepsilon}$ gesetzt, dann wird

$$\boldsymbol{F = \frac{\pi r^2}{180^\circ}\,\varepsilon}. \tag{3}$$

Die Größe ε heißt **sphärischer Exzeß.**

Der Flächeninhalt spielt bei praktischen Berechnungen kaum eine Rolle. Die Bedeutung der Formeln (2) und (3) liegt nicht so sehr in der Tatsache, daß sie die Berechnung des Flächeninhaltes eines sphärischen Dreiecks ermöglichen, sondern vielmehr darin, daß man aus ihnen eine Aussage über die Winkelsumme im sphärischen Dreieck herleiten kann.

Voraussetzung für die Entstehung eines Dreiecks ist, daß die Punkte A, B und C nicht auf demselben Großkreis liegen. Der Flächeninhalt des durch diese Punkte bestimmten Dreiecks ist stets größer als Null. Dann ist nach (2) und (3)

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ > 0,$$

also

$$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ.$$

Die Winkelsumme im sphärischen Dreieck ist demnach stets größer als 180°. Die Größe ε gibt dabei den Überschuß über 180° an. Dadurch wird die Bezeichnung sphärischer Exzeß verständlich.

Andererseits ist die Fläche eines Eulerschen Dreiecks stets kleiner als die der Halbkugel. Es besteht mithin auch die Beziehung

$$\frac{\pi r^2}{180^\circ}(\alpha+\beta+\gamma-180^\circ) < 2\pi r^2,$$

aus der unmittelbar folgt

$$\alpha+\beta+\gamma-180^\circ < 360^\circ,$$
$$\alpha+\beta+\gamma < 540^\circ.$$

Für die Winkelsumme im sphärischen Dreieck ergibt sich damit die folgende Ungleichung:

$$180^\circ < \alpha+\beta+\gamma < 540^\circ$$

oder

$$\pi < \widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma} < 3\pi.$$

Im sphärischen Dreieck ist die Winkelsumme stets größer als 180° und kleiner als 540°. Der sphärische Exzeß ist stets größer als 0° und kleiner als 360°.

4. Das sphärische Dreieck und die körperliche Ecke

Stoßen n Kanten ($n > 2$), von denen keine drei in einer Ebene liegen, in einem Punkt zusammen, so bilden sie eine n-seitige **körperliche Ecke.**

Durch die drei Seiten eines Eulerschen Dreiecks und den Mittelpunkt der Kugel werden drei Ebenen bestimmt, die sich paarweise in drei Geraden schneiden. Diese drei Geraden sind die Kanten einer dreiseitigen körperlichen Ecke. Es besteht also ein Zusammenhang zwischen dem sphärischen Dreieck und der dreiseitigen körperlichen Ecke.

Die Abbildung 10a zeigt das räumliche Bild einer dreiseitigen körperlichen Ecke, die zu einem sphärischen Dreieck ABC ergänzt ist. Die Projektion des Punktes A auf die Ebene MBC sei A'. Wir fällen von A auf die Kanten MB und MC die Lote. Ihre Fußpunkte seien D und E. Nun verbinden wir D und E mit A'. Dann ist der Winkel ADA', der Neigungswinkel β der Ebene MBA gegen die Ebene MBC, laut Definition der Winkel β des sphärischen Dreiecks. Entsprechend ist der Winkel AEA' der Winkel γ.

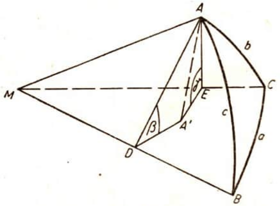


Abb. 10a

Wir wollen nun die wahren Größen der Seiten a, b und c und der Winkel β und γ konstruieren. Dazu wählen wir eine der drei Seitenflächen der körperlichen Ecke, zum Beispiel MBC, als Grundrißebene; die beiden anderen Seitenflächen, also MAB und MAC, klappen wir um die Achsen MB bzw. MC in die Zeichenebene.

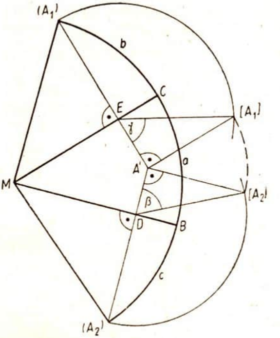


Abb. 10 b

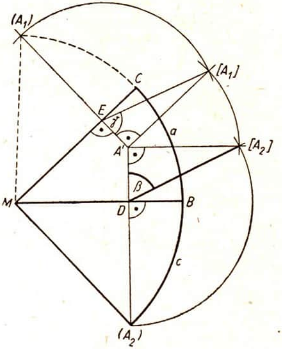


Abb. 10 c

Die Stützdreiecke ADA' und AEA' werden um die Achsen DA' bzw. EA' umgelegt (Abb. 10 b). Es ist $E(A_1) = E[A_1]$, $A'[A_1] = A'[A_2]$ und $D(A_2) = D[A_2]$.

Die Abbildung 10 b zeigt, wie man konstruktiv die Größe der Winkel β und γ ermitteln kann, wenn die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks gegeben sind. Durch Wahl einer anderen Seitenfläche als Grundriß lassen sich auch die Winkel α und γ bzw. α und β konstruieren, wobei durch die zweimal konstruierten Winkel eine gute Kontrolle über die Genauigkeit der Winkelwerte möglich ist.

Betrachtet man in der Abbildung 10 a zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel (zum Beispiel a, β, c) als gegeben, so kann man entsprechend der Abbildung 10 b durch Abänderung der Reihenfolge der Konstruktionen (vgl. Abb. 10 c) die dritte fehlende Seite konstruieren. Man geht dabei von den Punkten M, (A_2), B, C, D, A' und $[A_2]$ aus und verwendet die Beziehung $A'[A_2] = A'[A_1]$. Damit ist diese Aufgabe auf den Fall dreier gegebener Seiten zurückgeführt.

Alle durch Kanten begrenzten Körper bilden mehrere körperliche Ecken. Zum Beispiel hat der Würfel acht, das Tetraeder vier Ecken. Mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie können die Neigungswinkel der Seitenflächen kantig begrenzter Körper berechnet werden, indem man die von den Kanten gebildeten Winkel als Seiten eines sphärischen n-Ecks auffaßt und die Neigungswinkel der Flächen als Winkel in den entsprechenden sphärischen n-Ecken berechnet.

So ist zum Beispiel eine Tetraederecke eine körperliche Ecke mit drei gleichen Seiten (Abb. 11). Ihre Seitenlänge ist 60°. Es muß jedoch darauf

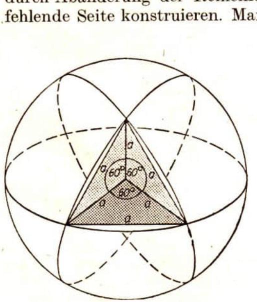


Abb. 11

hingewiesen werden, daß nicht jede körperliche Ecke mit drei gleichen Seiten diese Seitenlänge hat. Durch einen Diagonalschnitt bei einer Oktaederecke erhält man eine körperliche Ecke mit zwei Seiten zu 60° und einer Seite zu 90° (Abb. 12a). Abbildung 12b zeigt die wahre Größe der Seitenflächen. Sie sind in die Zeichenebene umgeklappt.

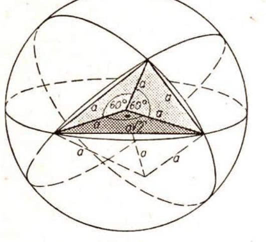


Abb. 12a

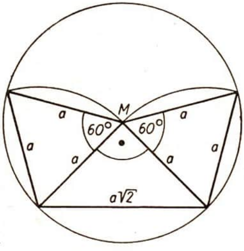


Abb. 12b

5. Die Polarecke und das Polardreieck, die Seitensumme

Es sei M der Scheitelpunkt einer körperlichen Ecke mit dem zugehörigen sphärischen Dreieck ABC. Im Scheitelpunkt M errichten wir auf den das Dreieck erzeugenden Ebenen MAB, MBC und MAC die Senkrechten. Diese bilden dort eine neue Ecke, die wir die **Polarecke** der ursprünglichen Ecke nennen. Die drei Senkrechten durchstoßen die Kugeloberfläche in den drei Punkten A', B' und C' (Abb. 13a). Die Punkte A', B' und C' bilden ein sphärisches Dreieck, das wir das **Polardreieck** $A'B'C'$ zu dem ursprünglichen Dreieck ABC nennen.

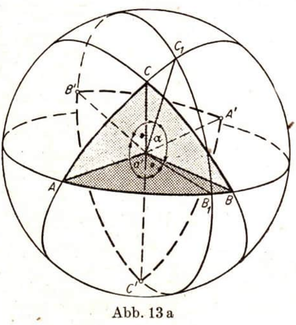


Abb. 13a

Seiten und Winkel des Polardreiecks werden genauso definiert wie Seiten und Winkel des ursprünglichen sphärischen Dreiecks. Wir wollen nun an Hand der Abbildungen 13a und 13b die Zusammenhänge zwischen dem sphärischen Dreieck und seinem Polardreieck herleiten.

Die beiden Ebenen MAC und MAB haben den Neigungswinkel α, der gleich dem Winkel α des sphärischen Dreiecks bei A ist. Die Senkrechten im Punkt M auf AM in den Ebenen MAC und MAB haben bei M ebenfalls den Winkel α. Die beiden Schenkel dieses Winkels durchstoßen die Kugel in den Punkten C_1 und B_1. Da die Kante MB' senkrecht auf der Ebene MAC steht, steht sie auch senkrecht auf MC_1, und ebenso steht MC' senkrecht auf MB_1. Die Punkte B', C', B_1 und C_1 liegen auf einem Großkreis, dessen wahre Größe in Abbildung 13 b dargestellt wird. Die Seite $B'C'$ des Polardreiecks nennen wir a'. Aus Abbildung 13 b folgt die Beziehung

$$\alpha + 90^\circ + a' + 90^\circ = 360^\circ$$

oder

$$\boldsymbol{a' = 180^\circ - \alpha}.$$

Die für die Seite a' durchgeführten Betrachtungen gelten entsprechend für die Seiten b' und c'. Somit ist

$$\boldsymbol{b' = 180^\circ - \beta} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{c' = 180^\circ - \gamma}.$$

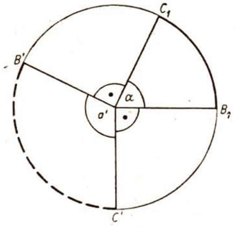


Abb. 13 b

Wenn man das auf diese Weise gefundene Polardreieck $A'B'C'$ als Ausgangsdreieck wählt und dazu das Polardreieck konstruiert, erhält man wieder das Dreieck ABC. Demnach ist das ursprüngliche sphärische Dreieck das Polardreieck seines eigenen Polardreiecks. Da jedem Dreieck eine körperliche Ecke eindeutig zugeordnet ist, folgt daraus der Satz:

Jede Ecke ist die Polarecke ihrer Polarecke.

Aus diesem Satz ergeben sich drei weitere Formeln:

$$\boldsymbol{a = 180^\circ - \alpha'}, \quad \boldsymbol{b = 180^\circ - \beta'} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{c = 180^\circ - \gamma'}.$$

Diese sechs Formeln werden in einem Satz zusammengefaßt:

Die Seiten (Winkel) eines sphärischen Dreiecks ergänzen sich mit den entsprechenden Winkeln (Seiten) des Polardreiecks zu je 180°.

Aus diesem Satz folgt unter Verwendung der Sätze über die Winkelsumme im sphärischen Dreieck ein wichtiger Satz über die Summe der Seiten.

Es ist

$$180^\circ < \alpha' + \beta' + \gamma'.$$

Unter Verwendung der obigen Formeln folgt dann

$$180^\circ < (180^\circ - a) + (180^\circ - b) + (180^\circ - c)$$
$$180^\circ < 540^\circ - (a + b + c)$$
$$a + b + c < 360^\circ.$$

Da a, b und c positiv sind, gilt also

$$\boldsymbol{0^\circ < a + b + c < 360^\circ}.$$

Die Seitensumme im sphärischen Dreieck ist kleiner als 360°, das heißt kleiner als ein Großkreisumfang.

II. Berechnung des sphärischen Dreiecks

6. Das rechtwinklige sphärische Dreieck, die Nepersche Regel

Zur Ableitung der Formeln verwenden wir eine bei C rechtwinklige Ecke (Abb. 14a). Von A fällen wir die Lote AA' auf MC und AD auf MB und verbinden A' mit D. Die Ebene MCA steht senkrecht auf der Ebene MCB, also ist der Winkel $AA'D$ ein rechter Winkel. Der Winkel ADA' ist der Neigungswinkel der Ebene MBA gegen die Ebene MBC. Er ist der Winkel β, den die sphärischen Seiten $AB = c$ und $BC = a$ miteinander bilden. Außerdem ist $AC = b$.

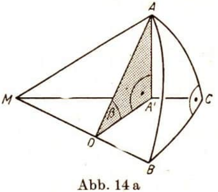


Abb. 14 a

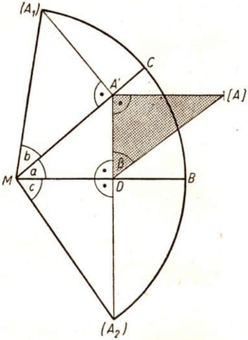


Abb. 14 b

Die Ebene MCB verwenden wir als Zeichenebene; wir legen die Ebenen MCA bzw. MBA um die Achsen MC bzw. MB um. Das Dreieck $AA'D$ legen wir um die Achse DA' um (Abb. 14b).

Aus Abbildung 14b entnehmen wir die folgenden Beziehungen:

$$\sin a = \frac{A'D}{MA'}, \qquad \sin b = \frac{A'(A_1)}{M(A_1)} = \frac{A'(A_1)}{r}, \qquad \sin c = \frac{D(A_2)}{M(A_2)} = \frac{D(A_2)}{r}$$

$$\cos a = \frac{MD}{MA'}, \qquad \cos b = \frac{MA'}{M(A_1)} = \frac{MA'}{r}, \qquad \cos c = \frac{MD}{M(A_2)} = \frac{MD}{r},$$

$$\sin\beta = \frac{A'[A]}{D[A]}, \qquad \cos\beta = \frac{A'D}{D[A]}.$$

Wir bilden nun:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{MD}{MA'} \cdot \frac{MA'}{r} = \frac{MD}{r} = \cos c,$$

$$\mathbf{\cos a \cdot \cos b = \cos c;} \tag{1}$$

$$\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{A'(A_1)}{r} \cdot \frac{r}{D(A_2)} = \frac{A'(A_1)}{D(A_2)} = \frac{A'[A]}{D[A]} = \sin\beta,$$

$$\mathbf{\frac{\sin b}{\sin c} = \sin\beta.} \tag{2 a}$$

Durch Vertauschen der Katheten a und b sowie entsprechendes Vertauschen der Winkel α und β erhalten wir:

$$\mathbf{\frac{\sin a}{\sin c} = \sin\alpha.} \tag{2 b}$$

Weiter erhalten wir:

$$\cos b \cdot \sin \alpha = \frac{MA'}{r} \cdot \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{MA'}{r} \cdot \frac{A'D}{MA'} \cdot \frac{r}{D(A_2)} = \frac{A'D}{D(A_2)} = \frac{A'D}{D[A]} = \cos \beta,$$

$$\boldsymbol{\cos b \cdot \sin \alpha = \cos \beta} \tag{3a}$$

und entsprechend durch Vertauschen der Katheten und Winkel

$$\boldsymbol{\cos a \cdot \sin \beta = \cos \alpha}\,. \tag{3b}$$

Daraus folgt:

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \quad \text{und} \quad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}.$$

Also wird aus (1)

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta,$$

$$\boldsymbol{\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta}\,. \tag{4}$$

Aus (3a) folgt:

$$\sin \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos b},$$

aus (2a) folgt:

$$\sin c = \frac{\sin b}{\sin \beta},$$

also wird aus (2b):

$$\sin a = \sin \alpha \cdot \sin c = \frac{\cos \beta}{\cos b} \cdot \frac{\sin b}{\sin \beta} = \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{tg} b,$$

$$\boldsymbol{\sin a = \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{tg} b} \tag{5a}$$

und entsprechend durch Vertauschen

$$\boldsymbol{\sin b = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} \alpha}\,. \tag{5b}$$

Aus (1) folgt:

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos b},$$

nach (2a) ist

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c},$$

also wird aus (3b)

$$\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta = \frac{\cos c}{\cos b} \cdot \frac{\sin b}{\sin c} = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c,$$

$$\boldsymbol{\cos \alpha = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c} \tag{6a}$$

und entsprechend durch Vertauschen

$$\boldsymbol{\cos \beta = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} c}\,. \tag{6b}$$

Damit haben wir zehn Formeln zur Berechnung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks erhalten. Sie lassen sich in einer Regel zusammenfassen.

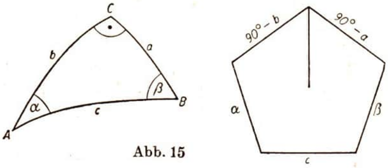


Abb. 15

Ordnet man die Bestimmungsstücke eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks wie in Abbildung 15, wobei man den rechten Winkel ausläßt und die Katheten *a* und *b* durch ihre Komplemente (90° − *a*) und (90° − *b*) ersetzt, so ist der Kosinus eines jeden Stückes gleich

a) dem Produkt der Kotangenten der anliegenden Stücke,

b) dem Produkt der Sinus der gegenüberliegenden Stücke.

Diese Regel heißt **Nepersche Regel**[1]).

7. Das schiefwinklige Dreieck

Nunmehr wollen wir Formeln zur Berechnung eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks herleiten.

a) Der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie

Wir gehen wie in der ebenen Trigonometrie vor und teilen durch eine Höhe das gegebene Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke, auf die wir die Nepersche Regel anwenden können.

Die Abbildung 16 ist die Skizze eines sphärischen Dreiecks mit den zugehörigen Neperschen Fünfecken für die beiden rechtwinkligen Teildreiecke. Es ist in ADC

$$\sin h_c = \sin \alpha \cdot \sin b$$

und in BDC

$$\sin h_c = \sin \beta \cdot \sin a.$$

Daraus folgt

$$\sin \alpha \cdot \sin b = \sin \beta \cdot \sin a$$

oder

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

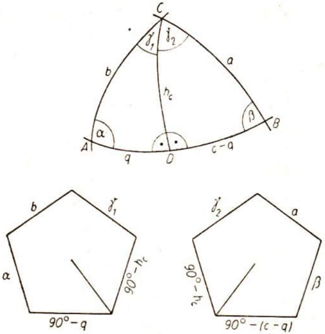


Abb. 16

[1]) Diese Regel wird nach dem englischen Mathematiker John Napier (1550 bis 1617; latinisierte Form des Namens: Neper) benannt, der 1614 eine ähnliche Regel gleichzeitig mit seiner Logarithmentafel veröffentlichte.

Durch zyklische Vertauschung oder durch Verwendung der anderen beiden Höhen h_a und h_b lassen sich dazu noch die beiden Formeln

$$\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad \text{und} \quad \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

ableiten.

Diese drei Formeln, die eine gewisse Ähnlichkeit mit denen der ebenen Trigonometrie haben, lassen sich auch kurz als laufende Proportion

$$\boldsymbol{\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \sin a : \sin b : \sin c}$$

oder in der Form

$$\boldsymbol{\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}}$$

schreiben.

Diese Gleichungen werden als der **Sinussatz der sphärischen Trigonometrie** bezeichnet.

b) Die Kosinussätze der sphärischen Trigonometrie

1. Der Seitenkosinussatz

Wir wollen nun einen dem Kosinussatz der ebenen Trigonometrie entsprechenden Satz für die sphärische Trigonometrie herleiten. Die dazu erforderlichen Beziehungen werden unter Verwendung der Neperschen Regel aus den beiden Teildreiecken gewonnen.

Es gilt im Dreieck BDC (Abb. 16)

$$\cos a = \cos h_c \cdot \cos (c - q), \tag{I}$$

im Dreieck ADC

$$\cos b = \cos h_c \cdot \cos q, \tag{II}$$

$$\sin q = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} h_c = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin h_c}{\cos h_c} \tag{III}$$

und

$$\sin h_c = \sin \alpha \cdot \sin b. \tag{IV}$$

Unter Verwendung eines Additionstheorems geht die Formel (I) über in

$$\cos a = \cos h_c \cdot \cos c \cdot \cos q + \cos h_c \cdot \sin c \cdot \sin q. \tag{I'}$$

Aus Gleichung (III) folgt

$$\cos h_c \cdot \sin q = \frac{\cos \alpha \cdot \sin h_c}{\sin \alpha}$$

und durch Einsetzen von (IV)

$$\cos h_c \cdot \sin q = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sin b}{\sin \alpha} = \sin b \cdot \cos \alpha. \tag{III'}$$

Durch Einsetzen von (II) und (III') in (I') folgt schließlich

$$\boldsymbol{\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha.}$$

Durch zyklische Vertauschung oder durch Verwendung der beiden anderen Höhen folgen die Formeln

$$\cos \boldsymbol{b} = \cos \boldsymbol{a} \cdot \cos \boldsymbol{c} + \sin \boldsymbol{a} \cdot \sin \boldsymbol{c} \cdot \cos \boldsymbol{\beta}$$

und

$$\cos \boldsymbol{c} = \cos \boldsymbol{a} \cdot \cos \boldsymbol{b} + \sin \boldsymbol{a} \cdot \sin \boldsymbol{b} \cdot \cos \boldsymbol{\gamma}.$$

Diese drei Formeln, die neben den drei Seiten jeweils nur einen Winkel enthalten, bilden den **Seitenkosinussatz der sphärischen Trigonometrie.**

2. Der Winkelkosinussatz

Die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks und seines Polardreiecks ermöglichen es, aus dem Seitenkosinussatz weitere Formeln abzuleiten. In

$$\cos a' = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos \alpha',$$

dem auf das Polardreieck $A'B'C'$ angewandten Seitenkosinussatz, setzt man:

$$a' = 180° - \alpha, \quad b' = 180° - \beta, \quad c' = 180° - \gamma \quad \text{und} \quad \alpha' = 180° - a.$$

Man erhält zunächst

$$\cos(180° - \alpha) = \cos(180° - \beta) \cdot \cos(180° - \gamma) + \sin(180° - \beta) \cdot \sin(180° - \gamma) \cdot \cos(180° - a).$$

Daraus folgt

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$$

und nach Multiplikation mit (-1)

$$\cos \boldsymbol{\alpha} = -\cos \boldsymbol{\beta} \cdot \cos \boldsymbol{\gamma} + \sin \boldsymbol{\beta} \cdot \sin \boldsymbol{\gamma} \cdot \cos \boldsymbol{a}.$$

Durch zyklische Vertauschung folgen die weiteren Formeln

$$\cos \boldsymbol{\beta} = -\cos \boldsymbol{\alpha} \cdot \cos \boldsymbol{\gamma} + \sin \boldsymbol{\alpha} \cdot \sin \boldsymbol{\gamma} \cdot \cos \boldsymbol{b}$$

und

$$\cos \boldsymbol{\gamma} = -\cos \boldsymbol{\alpha} \cdot \cos \boldsymbol{\beta} + \sin \boldsymbol{\alpha} \cdot \sin \boldsymbol{\beta} \cdot \cos \boldsymbol{c}.$$

Diese drei Formeln, die neben den drei Winkeln jeweils nur eine Seite enthalten, bilden den **Winkelkosinussatz der sphärischen Trigonometrie**.

Bei der Ableitung dieses Satzes haben wir die Beziehungen zwischen dem sphärischen Dreieck und seinem Polardreieck verwendet. Wir sagen deshalb, der Seitenkosinussatz und der Winkelkosinussatz sind einander polar.

Man kann ähnliche Überlegungen auch für den Sinussatz durchführen, erhält jedoch keine neuen Formeln. Wir sagen deshalb, der Sinussatz ist zu sich selbst polar.

8. Die sechs Fälle der Dreiecksberechnung

Ein ebenes Dreieck ist durch die drei Winkel nicht eindeutig bestimmt, da durch die Winkelsummenbeziehung der dritte Winkel aus zwei gegebenen Winkeln berechnet werden kann. Das gilt für das sphärische Dreieck nicht mehr. Durch die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks sind die drei Seiten des zugehörigen Polardreiecks eindeutig bestimmt. Daraus folgt, daß das Polardreieck und damit das ursprüngliche sphärische Dreieck eindeutig bestimmt sind. Es sind also die folgenden sechs Fälle der Dreiecksberechnung oder Dreieckskonstruktion möglich (zur Abkürzung bezeichnen wir eine Seite mit S und einen Winkel mit W):

$S\,S\,S$ (3 Seiten),

$S\,W\,S$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel),

$S\,S\,W$ (zwei Seiten und ein Gegenwinkel)

und

$W\,W\,W$ (drei Winkel),

$W\,S\,W$ (zwei Winkel und die Zwischenseite),

$W\,W\,S$ (zwei Winkel und eine Gegenseite).

Die drei Fälle der zweiten Gruppe lassen sich entsprechend den Ausführungen des ersten Absatzes auf die drei Fälle der ersten Gruppe zurückführen.

Die Konstruktion der Fälle SSS und SWS ist im Abschnitt 4 in den Abbildungen 10b und 10c dargestellt. Die Konstruktion der Fälle WWW und WSW wird mit Hilfe des Polardreiecks auf die Fälle SSS und SWS zurückgeführt. Die Berechnung dieser vier Fälle bietet keine Schwierigkeiten. Der Fall SSS kann durch dreimalige Verwendung des Seitenkosinussatzes und der Fall WWW entsprechend durch dreimalige Verwendung des Winkelkosinussatzes gelöst werden. Da für Eulersche Dreiecke nur Seiten bzw. Winkel unter 180° in Frage kommen, ist durch Verwendung der Kosinussätze die Lösung eindeutig bestimmt, denn die Kosinusfunktion hat im ersten und zweiten Quadranten verschiedene Vorzeichen.

In den Fällen SSS und WWW genügt es auch, wenn man nur einen Winkel bzw. eine Seite mit einem Kosinussatz berechnet, um dann die fehlenden beiden Stücke mit Hilfe des Sinussatzes zu ermitteln. Da aber die Sinusfunktion im ersten und zweiten Quadranten gleiche Vorzeichen hat, ist diese Lösung nicht eindeutig. Diesen Nachteil muß man jedesmal bedenken, wenn man eine Berechnung mit Hilfe des Sinussatzes vornimmt. Es gibt jedoch wie bei den ebenen Dreiecken Beziehungen zwischen den Winkeln und den Seiten eines sphärischen Dreiecks, die es häufig ermöglichen, von den beiden möglichen Lösungen die brauchbare zu bestimmen. Die wichtigsten Sätze seien hier ohne Beweis erwähnt.

1. Im sphärischen Dreieck liegen der kleineren Seite der kleinere Winkel, der mittleren Seite der mittlere Winkel, der größeren Seite der größere Winkel und gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

2. Die Summe zweier Seiten ist stets größer als die dritte Seite.

3. Die Summe zweier Seiten und die Summe der beiden Gegenwinkel sind stets zugleich kleiner, gleich oder größer als 180°.

4. Die Summe zweier Winkel ist stets kleiner als der um 180° vermehrte dritte Winkel.

In den Fällen SWS und WSW erhält man bei der Anwendung des Kosinussatzes die fehlende dritte Seite bzw. den fehlenden dritten Winkel. Sie sind damit auf die Fälle SSS und WWW zurückgeführt. In den Fällen SSW und WWS findet man zunächst unter Verwendung des Sinussatzes den fehlenden gegenüberliegenden Winkel bzw. die fehlende gegenüberliegende Seite. Dann bereitet aber die weitere Lösung Schwierigkeiten, weil die beiden noch fehlenden Stücke selbst einander gegenüberliegen, so daß weder der Sinussatz noch einer der Kosinussätze unmittelbar zum Ziel führen.

Wir wollen diese Fälle an einem konkreten Beispiel behandeln. Für den Fall SSW seien a, b und α gegeben. Der Winkel β wird sofort mit Hilfe des Sinussatzes gefunden:

$$\sin\beta = \frac{\sin b \cdot \sin\alpha}{\sin a}.$$

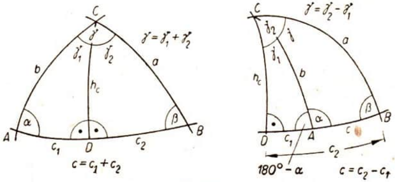


Abb. 17

Die unbekannte Seite c und der unbekannte Winkel γ werden mit Hilfe der Höhe h_c zerlegt. Es entstehen zwei rechtwinklige Teildreiecke, aus denen mit Hilfe der Neperschen Formeln γ_1, γ_2, c_1 und c_2 berechnet werden können. In Abb. 17 sind zwei Beispiele dargestellt.

Einen zweiten, aber rechnerisch umständlichen Lösungsweg erhält man, indem man auf die noch unbekannte Seite und den noch unbekannten Winkel den Seiten- bzw. Winkelkosinussatz anwendet. Es ist also

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma$$

und

$$\cos\gamma = -\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos c.$$

Es ergibt sich also ein Gleichungssystem mit den beiden Unbekannten $\cos c$ und $\cos\gamma$.

Bei einem dritten, häufig begangenen Lösungsweg verwendet man einen Kosinussatz, der auf eine schon bekannte Seite führt. Die unbekannte Größe tritt dann gleichzeitig in der Kosinusfunktion und in der Sinusfunktion auf. Es ist zum Beispiel

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha. \tag{I}$$

Wir verwenden nun als Hilfsgröße den Bogen AD und bezeichnen ihn mit ψ (vgl. Abb. 17). Dann ist nach der Neperschen Regel

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \psi) \cdot \operatorname{ctg} b,$$

$$\cos\alpha = \operatorname{tg}\psi \cdot \operatorname{ctg} b,$$

mithin

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg} b} = \operatorname{tg}\psi$$

oder

$$\cos\alpha \cdot \operatorname{tg} b = \operatorname{tg}\psi; \tag{II}$$

daraus erhalten wir

$$\cos\alpha \cdot \sin b = \cos b \cdot \operatorname{tg}\psi. \tag{III}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die Gleichung (I) ein. Dann erhalten wir

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin c \cdot \cos b \cdot \operatorname{tg}\psi.$$

Durch weitere Umformung folgt dann

$$\cos\psi \cdot \cos a = \cos b \cdot \cos c \cdot \cos\psi + \sin c \cdot \cos b \cdot \sin\psi,$$

$$\cos\psi \cdot \cos a = \cos b \cdot (\cos c \cdot \cos\psi + \sin c \cdot \sin\psi).$$

Wir wenden auf diese Formel ein Additionstheorem an und erhalten

$$\cos\psi \cdot \cos a = \cos b \cdot \cos(c - \psi).$$

Daraus folgt

$$\cos(c - \psi) = \frac{\cos\psi \cdot \cos a}{\cos b},$$

und da ψ aus der Gleichung (II) bestimmt ist, ist auch c bestimmbar.

Aufgaben

1. Wie lauten die 10 Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck, wenn das Dreieck **a)** zwei rechte Winkel, **b)** drei rechte Winkel hat?

2. Berechnen Sie die fehlenden Stücke des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks (Hypotenuse c)!

a) $a = 55{,}2°$, $b = 47{,}5°$	**b)** $a = 91{,}9°$, $\beta = 42{,}3°$
c) $a = 48{,}5°$, $c = 97{,}2°$	**d)** $\alpha = 83{,}6°$, $a = 71{,}1°$
e) $b = 135{,}6°$, $\beta = 99{,}0°$	**f)** $a = 99{,}0°$, $\alpha = 135{,}6°$
g) $\alpha = 132{,}2°$, $\beta = 104{,}6°$	**h)** $b = 167{,}4°$, $\alpha = 73{,}9°$
i) $b = 103{,}1°$, $c = 92{,}6°$	**k)** $\alpha = 117{,}3°$, $\beta = 32{,}5°$

Wieviel Lösungen gibt es jeweils? Beachten Sie insbesondere e) und f)!

3. Berechnen Sie die fehlenden Stücke des gleichschenkligen sphärischen Dreiecks durch Zurückführung auf zwei rechtwinklige Dreiecke (Basis b)!

a) $a = 117{,}9°$, $b = 35{,}6°$	**b)** $b = 97{,}2°$, $\alpha = 84{,}4°$
c) $a = 87{,}2°$, $\beta = 119{,}3°$	**d)** $a = 78{,}4°$, $\alpha = 57{,}7°$

4. Unter welchem Winkel sind zwei benachbarte Seitenflächen bei einem

a) Tetraeder, **b)** Oktaeder, **c)** Dodekaeder und **d)** Ikosaeder

gegeneinander geneigt (vgl. Abb. 17 und 18)?

5. Unter welchem Winkel sind die Seitenflächen einer geraden, regelmäßigen, vierseitigen Pyramide gegeneinander geneigt, wenn je zwei benachbarte Kanten an der Spitze einen Winkel von **a)** 20°, **b)** 40°, **c)** 60°, **d)** 80° bilden?

6. In den folgenden Aufgaben sind die fehlenden Seiten und Winkel der sphärischen Dreiecke zu berechnen.

a) $a = 21{,}3°$, $b = 33{,}6°$, $c = 39{,}5°$
b) $a = 114{,}3°$, $b = 89{,}9°$, $c = 121{,}5°$
c) $a = 93{,}4°$, $b = 107{,}3°$, $c = 59{,}5°$
d) $a = 74{,}7°$, $b = 98{,}6°$, $c = 65{,}6°$
e) $\alpha = 83{,}4°$, $\beta = 63{,}3°$, $\gamma = 79{,}9°$
f) $\alpha = 65{,}6°$, $\beta = 112{,}6°$, $\gamma = 118{,}7°$
g) $\alpha = 143{,}0°$, $\beta = 167{,}8°$, $\gamma = 152{,}3°$
h) $\alpha = 84{,}5°$, $\beta = 100{,}9°$, $\gamma = 70{,}6°$
i) $c = 51{,}5°$, $b = 42{,}9°$, $\gamma = 48{,}0°$
k) $c = 127{,}3°$, $a = 42{,}5°$, $\gamma = 45{,}7°$
l) $a = 128{,}5°$, $b = 89{,}2°$, $\alpha = 135{,}7°$
m) $\alpha = 131{,}3°$, $c = 119{,}9°$, $a = 72{,}2°$
n) $a = 46{,}5°$, $\beta = 73{,}9°$, $\alpha = 84{,}4°$
o) $\alpha = 114{,}4°$, $\gamma = 63{,}6°$, $a = 55{,}2°$
p) $\beta = 61{,}1°$, $\gamma = 119{,}8°$, $b = 126{,}5°$
q) $\beta = 79{,}4°$, $\alpha = 59{,}6°$, $c = 103{,}3°$
r) $a = 97{,}7°$, $c = 119{,}9°$, $\beta = 140{,}5°$
s) $a = 89{,}4°$, $b = 33{,}8°$, $\gamma = 178{,}2°$
t) $b = 108{,}6°$, $c = 107{,}7°$, $\alpha = 108{,}6°$
u) $a = 104{,}5°$, $b = 42{,}3°$, $\gamma = 79{,}6°$
v) $\alpha = 107{,}2°$, $\beta = 33{,}3°$, $c = 87{,}9°$
w) $\beta = 129{,}2°$, $\gamma = 109{,}1°$, $a = 85{,}3°$
x) $\alpha = 83{,}2°$, $\gamma = 24{,}8°$, $b = 38{,}5°$
y) $\alpha = 49{,}3°$, $\beta = 138{,}7°$, $c = 12{,}8°$

Bemerkung: Prüfen Sie nach Lösung der Aufgaben, ob in jedem Falle der Satz 1 (S. 41) erfüllt ist! Aufgabe *s* sorgfältig interpolieren!

7. Berechnen Sie den Winkel in einem gleichseitigen sphärischen Dreieck, wenn die Seite

a) $a = 10°$, **b)** $a = 30°$, **c)** $a = 50°$, **d)** $a = 70°$, **e)** $a = 90°$, **f)** $a = 110°$ gegeben ist!

8. Es ist die Seite in einem gleichseitigen sphärischen Dreieck zu errechnen, wenn der Winkel

a) $\alpha = 70°$, **b)** $\alpha = 90°$, **c)** $\alpha = 110°$, **d)** $\alpha = 130°$, **e)** $\alpha = 150°$, **f)** $\alpha = 170°$ gegeben ist!

9. Zwischen welchen Grenzen liegt der Winkel in einem gleichseitigen sphärischen Dreieck? Berechnen Sie die zu diesen Grenzen gehörigen Seiten!

10. Die Kanten eines Dreibeins betragen $r = 49$ cm, $s = 37$ cm, $t = 42$ cm; sie bilden die Winkel

$(r, s) = a = 80°$, $(s, t) = b = 45°$, $(t, r) = c = 60°$.

Unter welchem Winkel sind die durch die Kanten bestimmten Ebenen gegen die waagerechte Ebene geneigt, auf die das Dreibein gestellt wird (vgl. Abb. 18)?

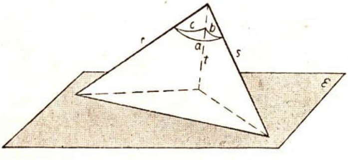


Abb. 18

III. Anwendung auf die Erdkugel

9. Das Gradnetz und die Größe der Erde

Durch neuere Messungen sowjetischer Geodäten wurde bestätigt, daß die Erde ein Ellipsoid mit drei ungleichen Achsen ist. Die lineare Exzentrizität des Äquators ist jedoch so klein, daß sie bei praktischen Berechnungen keine Rolle spielt. Man kann also den Äquator als Kreis und mithin die Erde als ein Ellipsoid mit zwei ungleichen Achsen annehmen. Die große Halbachse des Ellipsoides (Äquatorradius) hat die Länge von rund 6378 km, die kleine Halbachse (Erdmittelpunkt . . . Pol) die Länge von rund 6357 km. In vielen Fällen kann man sogar die Abweichung des Rotationsellipsoides von der Kugel vernachlässigen. Es ist dann üblich, mit dem mittleren Erdradius von $r = 6370$ km zu rechnen. Die dadurch auftretenden Fehler sind im allgemeinen unwesentlich. Wir wollen im folgenden für alle Berechnungen diesen Wert zugrunde legen, soweit nichts anderes angegeben ist. Durch diese Vereinfachung wird es uns möglich, die Ergebnisse der sphärischen Trigonometrie auf die Erde anzuwenden.

Aus dem Erdkundeunterricht ist uns das Koordinatensystem auf der Erde bekannt. Durch dieses Koordinatensystem, das Gradnetz der Erde, ist die Lage jedes Ortes P auf der Erde eindeutig angebbar. Wir wollen im folgenden eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Tatsachen geben.

Durch jeden Ort P und die beiden Pole N und S (geographischer Nordpol und geographischer Südpol) ist ein Großkreis bestimmt. Der Halbkreis von einem Pol über den Ort P zum anderen Pol wird als Meridian dieses Ortes bezeichnet. Der Meridian von Greenwich ist der Nullmeridian. Der sphärische Winkel des Kugelzweiecks, das durch den Nullmeridian und den Meridian des Ortes P gebildet wird, ist die **geographische Länge** des Ortes (Abb. 19). Dabei wird der Winkel gemessen, der kleiner als 180° ist; die Länge wird als östliche oder westliche Länge angegeben, je nachdem, ob die Messung vom Nullmeridian aus in östlicher oder in westlicher Richtung erfolgt. Die östliche ist dabei die positive und die westliche die negative Richtung.

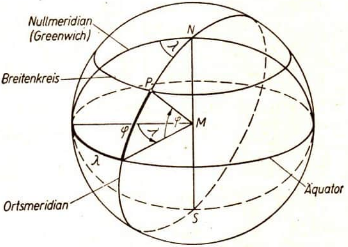


Abb. 19

Der Durchmesser durch die beiden Pole ist die Erdachse. Der Großkreis, auf dessen erzeugender Ebene die Erdachse senkrecht steht, heißt Äquator. Durch jeden Ort P, der nicht auf dem Äquator liegt, wird ein Kleinkreis bestimmt, der dem Äquator parallel ist. Dieser Kleinkreis heißt **Breitenkreis** (oder – in der Nautik – Breitenparallel). Durch den Äquator und den Breitenkreis wird auf dem Meridian von P ein Bogen ausgeschnitten. Der Winkel, der zu diesem Bogen gehört, ist die **geographische Breite** des Ortes (Abb. 19). Die Breite des Ortes P heißt nördliche Breite, wenn vom Äquator aus nach Norden gemessen wird, und südliche Breite, wenn vom Äquator aus nach Süden gemessen wird. Der nördlichen Breite gibt man auch das positive Vorzeichen, der südlichen entsprechend das negative.

Bei Aufgaben, in denen die Entfernung zweier Orte auf der Erdoberfläche bestimmt werden soll, ist es notwendig, das Ergebnis in einem Längenmaß anzugeben. Die Berechnung der Entfernung zweier Orte ergibt zunächst nur die Länge des Bogens im Gradmaß. Für die Umrechnung in Längeneinheiten wurden Mittelwerte für einen Meridiangrad bzw. einen Äquatorgrad bestimmt. In der Nautik wurde darüber hinaus eine besondere Längeneinheit, die Seemeile, eingeführt.

Eine Seemeile ist die Länge einer mittleren Meridianminute: $1' \mathrel{\widehat{=}} 1852$ m. Diese Beziehung beruht auf den Messungen, die zur Festlegung der Längeneinheit Meter durchgeführt wurden. Danach wurde das Meter als der zehnmillionste Teil des Erdquadranten definiert. Für die Länge eines Meridiangrades ergibt sich demnach 111,1 km. Diese Werte für die Längeneinheiten weichen nur sehr wenig von den Werten ab, die sich ergeben, wenn für die Berechnung der Längeneinheiten der Erdradius mit $r = 6370$ km angenommen wird. Eine weitere Längeneinheit, die durch die Länge eines Bogens definiert wurde, ist die geographische Meile. Eine geographische Meile ist die Länge von vier Äquatorminuten: 1 geographische Meile $= 7420$ m. Die Länge eines Äquatorgrades beträgt 111,3 km. Als Maßeinheiten werden also die folgenden Werte verwendet.

$$\begin{aligned} &1 \text{ mittlerer Meridiangrad} \mathrel{\widehat{=}} 111{,}1 \text{ km} = 60 \text{ sm} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \text{ sm} = 1852 \text{ m}, \\ &1 \text{ Äquatorgrad} \qquad\quad \mathrel{\widehat{=}} 111{,}3 \text{ km} = 15 \text{ geographische Meilen} \\ &\qquad\quad 1 \text{ geographische Meile} = 7420 \text{ m}. \end{aligned}$$

Da die Ungenauigkeit für einen Meridiangrad höchstens $\pm 0{,}18\,\%$ und für einen Äquatorgrad höchstens $-0{,}36\%$ beträgt, liefern beide Werte bei Entfernungsberechnungen hinreichend gute Näherungen. In der Nautik ist es üblich, die Seemeile zu verwenden.

10. Das Poldreieck, die Orthodrome und die Kurswinkel

Zwei Orte A und B auf der Erde (Abb. 20a) sind durch ihre Koordinaten $A\ (\varphi_1;\ \lambda_1)$ und $B\ (\varphi_2;\ \lambda_2)$ gegeben. Der kleinere Bogen des Großkreises durch A und B ist die kürzeste Entfernung l zwischen den beiden Orten. Eine in der Nautik und der mathematischen Geographie häufig auftretende Aufgabe ist es, die kürzeste Entfernung zweier Orte auf der Erde zu berechnen. Zur Berechnung dieser Entfernung verwenden wir das sphärische Dreieck ANB. Dieses Dreieck heißt das **Poldreieck**, weil der Nordpol der dritte Eckpunkt N ist. Für zwei Orte auf der Südhalbkugel verwendet man zweckmäßig das Poldreieck, das den Südpol als dritten Eckpunkt hat. Liegt ein Ort auf der Nord- und der andere auf der Südhalbkugel, so ist es gleich, welchen der Pole man verwendet.

Wir zeichnen als Analysisfigur für das Poldreieck ANB ein durch drei Bogen begrenztes Dreieck (Abb. 20b). Dabei ist $AB = l$ die gesuchte kürzeste Entfernung, $AN = 90° - \varphi_1$ und $BN = 90° - \varphi_2$ jeweils das Komplement der geographischen Breite und der Winkel $ANB = \lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$ der Längenunterschied der beiden Orte.

Die kürzeste Entfernung l ist nach dem Seitenkosinussatz

$$\cos l = \cos(90° - \varphi_1) \cdot \cos(90° - \varphi_2) + \sin(90° - \varphi_1) \cdot \sin(90° - \varphi_2) \cdot \cos \varDelta\lambda$$

oder nach Umformung

$$\cos l = \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \varDelta\lambda .$$

Das Ergebnis ist eindeutig, da die Kosinusfunktion im ersten und zweiten Quadranten verschiedene Vorzeichen hat.

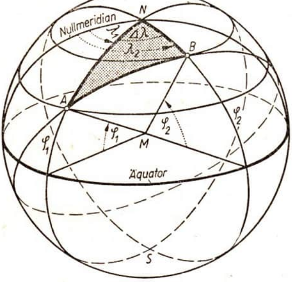


Abb. 20 a

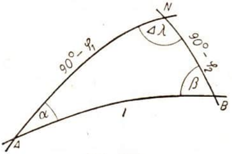


Abb. 20 b

Der Großkreisbogen zwischen A und B heißt auch **Orthodrome,** dementsprechend wird die kürzeste Entfernung auch **orthodrome Entfernung** genannt.

Von den beiden Tangenten im Punkt A an die Großkreise des Poldreiecks zeigt die eine Tangente nach Norden und die andere in die Himmelsrichtung, nach der man sich wenden muß, wenn man auf der kürzesten Verbindung nach B gelangen will. Der Winkel α wird deshalb der **Kurswinkel des Anfangskurses** genannt. Eine ähnliche Überlegung gilt im Punkte B, nur daß hier die zweite Tangente in die Richtung weist, aus der man in B ankommt. Der Kurswinkel β heißt deshalb auch der **Kurswinkel des Endkurses.** Wollte man in B auf demselben Großkreis weiterfahren, so wäre der zugehörige Anfangskurswinkel $180° - \beta$. Im allgemeinen, das heißt, wenn $\varphi_1 \neq -\varphi_2$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist, ist $\alpha \neq 180° - \beta$. Daraus können wir schließen, daß der Kurswinkel auf der Orthodromen seinen Wert ändert. Diese Änderung erfolgt stetig. Aus diesem Grunde wird im allgemeinen nicht der orthodrome Kurs gesteuert.

Die Berechnung der beiden Kurswinkel erfolgt unter Anwendung des Sinussatzes. Die Werte sind nicht eindeutig und erfordern die Heranziehung der auf den Seiten 41 bis 42 erwähnten Sätze. Bei Verwendung des Seitenkosinussatzes lassen sich auch die beiden Kurswinkel in jedem Fall eindeutig bestimmen. Wegen der einfacheren Rechnung ist jedoch im allgemeinen die Anwendung des Sinussatzes vorzuziehen.

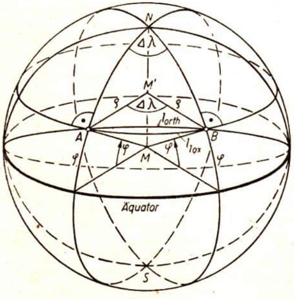
Die Bezeichnung des Kurses ist nicht einheitlich. Im allgemeinen gibt man den Kurs nach der folgenden Methode an: Man bezeichnet die Nordrichtung mit 0° und weiter die Ostrichtung mit 90°, die Südrichtung mit 180° und die Westrichtung mit 270° (vgl. die Einteilung einer Windrose). Die Südostrichtung bildet also mit der Nordrichtung einen Winkel von 135°. Man schreibt sie: N 135° O (lies: Nord, 135° über Ost). In einzelnen Fällen wird noch die folgende Schreibweise durchgeführt:

Man gibt der Nordrichtung und der Südrichtung die Bezeichnung 0° und mißt nun den Winkel von 0° bis 90° in östlicher oder westlicher Richtung. Für die Südostrichtung ergibt sich danach die folgende Schreibweise: S 45° O (Süd, 45° über Ost).

11. Loxodrome, Scheitelpunkt, Schnitt mit Meridian- und Parallelkreisen

Da es im allgemeinen praktisch nicht möglich ist, auf der Orthodromen zu fahren, ist es notwendig, eine Linie konstanten Kurses festzulegen. Die Linie konstanten Kurses hat die Eigenschaft, daß sie sämtliche Meridiane unter dem gleichen Winkel schneidet, und heißt **Loxodrome**.

Verlauf und Länge der Loxodrome lassen sich im allgemeinen nicht mit den Mitteln der sphärischen Trigonometrie berechnen. Die Bestimmung der Loxodrome ist ein Problem der Differentialgeometrie, also des Zweiges der Mathematik, der sich mit der Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie beschäftigt. Die Loxodrome verläuft im allgemeinen wendelartig auf der Erdkugel und nähert sich asymptotisch, je nach der Fahrtrichtung, zwei gegenüberliegenden Polen. Von Gerhard Kremer (genannt Mercator, 1512 bis 1594) ist eine Karte entwickelt worden, auf der sämtliche Loxodromen gerade Linien sind. Diese Karte wird Mercatorkarte genannt (vgl. Atlas zur Erd- und Länderkunde, Große Ausgabe, Karten 92/94c bis e). Damit ist es möglich, durch einfaches Anlegen eines Lineals an diese Karte den loxodromen Kurs abzulesen. Die loxodrome Entfernung zweier Orte ist nie kleiner als die orthodrome Entfernung. Liegen beide Orte auf dem gleichen Meridian oder auf dem Äquator, so sind beide Entfernungen gleich. In allen anderen Fällen ist die loxodrome Entfernung größer. Der Unterschied kann beträchtliche Ausmaße annehmen. So beträgt zum Beispiel der Unterschied der loxodromen und der orthodromen Entfernung zwischen dem Nadelkap (Südafrika; $\varphi_1 = 34{,}8°$ S, $\lambda_1 = 20{,}0°$ O) und dem Südwestkap auf Tasmanien (Australien; $\varphi_2 = 43{,}7°$ S, $\lambda_2 = 146{,}7°$ O) rund 1180 km und der gleiche Unterschied zwischen Kap Hoorn (Südamerika; $\varphi_1 = 56{,}0°$ S, $\lambda_1 = 67{,}3°$ W) und dem Südkap auf der Stewartinsel (Neuseeland; $\varphi_2 = 47{,}3°$ S, $\lambda_2 = 167{,}5°$ O) rund 1200 km. Liegen zwei Orte auf derselben geographischen Breite, so ist die Loxodrome, die hier die Meridiane unter 90° schneidet, ein Bogen des Parallelkreises, dessen Länge durch den Längenunterschied beider Orte unter Verwendung des Parallelkreisradius ϱ berechnet werden kann (vgl. Abb. 21). Es ist $l_{lox} = \varrho \cdot \operatorname{arc} \Delta\lambda$.



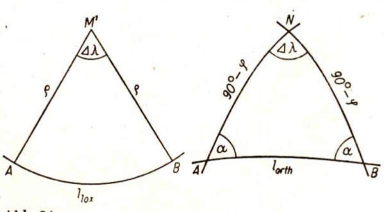


Abb. 21

Wegen $\operatorname{arc} \Delta\lambda = \dfrac{\pi\,\Delta\lambda}{180^\circ}$ und $\varrho = r \cdot \cos\varphi$ ergibt sich $l_{lox} = \dfrac{\pi \cdot r \cdot \Delta\lambda \cdot \cos\varphi}{180^\circ}$.

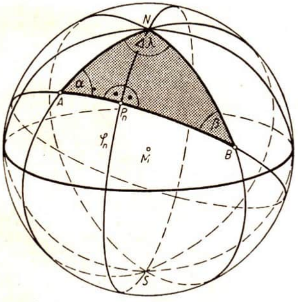
Diese spezielle Loxodrome ist eine geschlossene Kurve, und zwar ein Kleinkreis.

Da die loxodrome Entfernung wesentlich größer als die orthodrome Entfernung sein kann, wird im allgemeinen nicht der loxodrome Kurs gefahren. Es werden vielmehr auf dem orthodromen Kurs einzelne Punkte festgelegt. Zwischen diesen Punkten wird dann ein loxodromer Kurs gesteuert. Man braucht dann den Kurs nur in bestimmten Zeitabschnitten und nicht stetig zu ändern. Der Unterschied zwischen der orthodromen Entfernung und einer solchen ist dann nicht mehr erheblich. Wir können die Annäherung der Orthodromen durch Loxodrome auf einer Kugel mit der Annäherung eines Kreises durch einen Polygonzug in der Ebene vergleichen.

Liegen zwei Orte A und B hinreichend nahe beieinander, so ist, wenn α ein spitzer Winkel ist, auch noch $180^\circ - \beta$ ein spitzer, das heißt, β ist ein stumpfer Winkel. Wegen der stetigen Kursänderung auf der Orthodromen wird $180^\circ - \beta$ allmählich immer größer, und nach Erreichen des Wertes

$$\beta = 180^\circ - \beta = 90^\circ \quad \text{wird} \quad 180^\circ - \beta$$

ein stumpfer, das heißt, β wird ein spitzer Winkel.



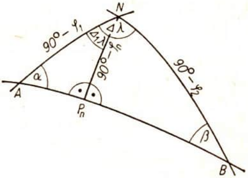
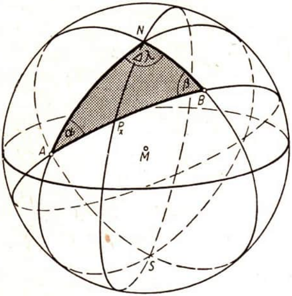


Abb. 22

Für die folgenden Betrachtungen wollen wir ein Poldreieck verwenden, das als dritten Eckpunkt den Nordpol enthält. Sind nun α und β spitze Winkel, so gibt es auf dem Wege $A\,B$ einen Meridian, der von der Orthodromen unter einem Winkel von 90° geschnitten wird. Der Schnittpunkt P_n dieses Meridians mit der Orthodromen ist von allen Punkten auf dem Wege $A\,B$ der dem Nordpol N am nächsten gelegene Punkt. Er heißt **Scheitelpunkt** auf dem Wege $A\,B$. Bezeichnen wir seine geographischen Koordinaten mit $P_n(\varphi_n; \lambda_n)$ und setzen $\lambda_n - \lambda_1 = \Delta_1\lambda$, so ist die Seite $P_n N = 90^\circ - \varphi_n$ und der Winkel $A\,N\,P_n = \Delta_1\lambda$. In dem bei P_n rechtwinkligen sphärischen Dreieck $A\,P_n N$ können $\Delta_1\lambda$ und φ_n mit Hilfe der Neperschen Formeln berechnet werden, wenn der Kurswinkel α vorher im sphärischen Dreieck $A\,N\,B$ berechnet worden ist (Abb. 22). Ähnliche Überlegungen gelten, wenn α und β stumpfe Winkel sind. Dann ist der Schnittpunkt P_s (der Scheitelpunkt), in dem der Meridian die Orthodrome rechtwinklig schneidet, dem Südpol am nächsten gelegen.



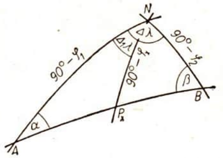
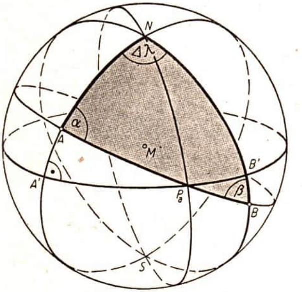


Abb. 23

Zur Kursfestlegung werden die **Schnittpunkte mit** beliebigen, aber **bekannten Längenkreisen** λ_x berechnet. Im Dreieck $A\,P_x N$ (Abb. 23) ist der Winkel $A N P_x = \Delta_1 \lambda = \lambda_x - \lambda_1$, der Winkel $N A P_x = \alpha$ und die Seite $A N = 90° - \varphi_1$ bekannt. Dann können φ_x, die gesuchte Breite, und x, der Kurswinkel im Punkte P_x, berechnet werden.

In vielen Fällen ist die Ermittlung des **Schnittpunktes mit einem gegebenen Parallelkreis** notwendig. Dabei ist die Berechnung der Länge des Schnittpunktes P_a mit dem Äquator ($\varphi_a = 0°$) besonders einfach (Abb. 24). Es ist der Winkel $A N P_a = \Delta_2 \lambda = \lambda_a - \lambda_1 = A' P_a$, ein Bogen auf dem Äquator, die eine Dreieckseite. Man verwendet entweder das rechtseitige Dreieck $A\,P_a N$ mit der Seite $N P_a = 90°$, der Seite $A N = 90° - \varphi_1$ und dem Winkel $N A P_a = \alpha$ oder das rechtwinklige Dreieck $A A' P_a$ mit dem Winkel $A A' P_a = 90°$, der Seite $A A' = \varphi_1$ und dem Winkel $A' A P_a = 180° - \alpha$ zur Berechnung von $\Delta_2 \lambda$.



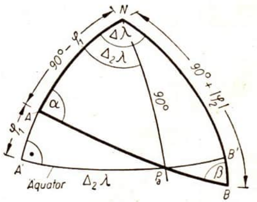
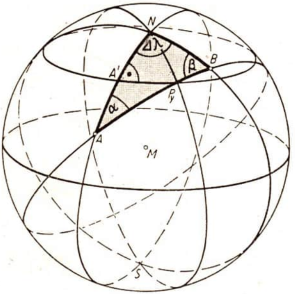


Abb. 24

Die Ermittlung des Schnittpunktes P_y mit einem beliebigen Parallelkreis (φ_y) führt auf ein rechnerisch etwas umständliches Verfahren (Abb. 25). Im Dreieck $A N P_y$ mit der Seite $A N = 90° - \varphi_1$, dem Winkel $N A P_y = \alpha$ und der Seite $N P_y = 90° - \varphi_y$ ist $\Delta_3 \lambda = \lambda_y - \lambda_1$ wegen des Falles SSW nur umständlich



berechenbar. Hierbei ist zu beachten, daß $NA'P_y$ nicht als rechtwinkliges Dreieck benutzt werden darf, weil $A'P_y$ als Bogen eines Breitenkreises **keine** Dreieckseite darstellt.

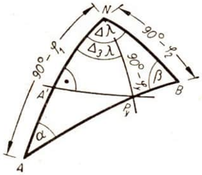


Abb. 25

Beispiel:

Für die kürzeste Verbindungslinie zwischen Hongkong $H(\varphi_1 = 22{,}3°$ N; $\lambda_1 = 114{,}2°$ O) und Valparaiso $V(\varphi_2 = 33{,}0°$ S; $\lambda_2 = 71{,}7°$ W) sind zu berechnen:

a) die kürzeste Entfernung l und die beiden Kurswinkel α und β,

b) der südlichste Punkt P,

c) der Schnittpunkt D mit der Datumgrenze ($\lambda_D = 180°$),

d) der Schnittpunkt Q mit dem Äquator ($\varphi_A = 0°$),

e) der Schnittpunkt W mit dem südlichen Wendekreis ($\varphi_W = 23{,}5°$ S).

1. Allgemeine Lösung

Durch die Punkte H, N und V ist ein sphärisches Dreieck bestimmt (Abb. 26a), von dem uns bekannt sind:

die Seite $HN = 90° - \varphi_1$,

die Seite $NV = 90° + |\varphi_2|$

und der Winkel $\Delta_1\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$,

wobei die Länge λ_2 als östliche Länge angegeben werden muß. Zunächst ist es erforderlich, die fehlenden Stücke des sphärischen Dreiecks zu berechnen.

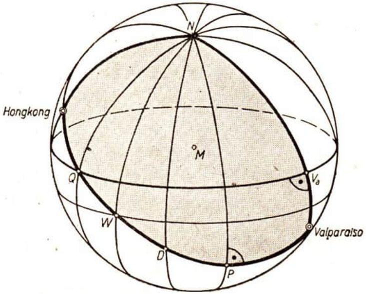


Abb. 26 a

a) Nach dem Seitenkosinussatz ergibt sich die Seite $HV = l$ (Abb. 26b) aus

$$\cos l = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cdot \cos(90^\circ + |\varphi_2|) + \sin(90^\circ - \varphi_1) \cdot \sin(90^\circ + |\varphi_2|) \cdot \cos \Delta_1 \lambda$$

oder

$$\cos l = -\sin \varphi_1 \cdot \sin |\varphi_2| + \cos \varphi_1 \cdot \cos |\varphi_2| \cdot \cos \Delta_1 \lambda. \tag{1}$$

Die Winkel α und β ergeben sich nach dem Sinussatz (Abb. 26b) aus

$$\sin \alpha = \frac{\sin(90^\circ + |\varphi_2|) \cdot \sin \Delta_1 \lambda}{\sin l}$$

oder

$$\sin \alpha = \frac{\cos |\varphi_2| \cdot \sin \Delta_1 \lambda}{\sin l} \tag{2}$$

und

$$\sin \beta = \frac{\sin(90^\circ - \varphi_1) \cdot \sin \Delta_1 \lambda}{\sin l}$$

oder

$$\sin \beta = \frac{\cos \varphi_1 \cdot \sin \Delta_1 \lambda}{\sin l}. \tag{3}$$

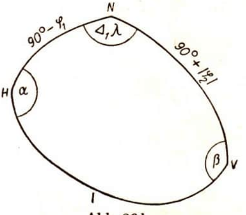


Abb. 26 b

b) Die Berechnung des südlichsten Punktes ergibt sich nach Abbildung 26c. Das Dreieck NHP ist bei P rechtwinklig. Es ergibt sich zunächst für $\Delta_2 \lambda$ nach der Neperschen Regel

$$\cos(90^\circ - \varphi_1) = \operatorname{ctg} \Delta_2 \lambda \cdot \operatorname{ctg} \alpha,$$

also

$$\operatorname{ctg} \Delta_2 \lambda = \frac{\sin \varphi_1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \sin \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha. \tag{4}$$

Dann folgt für die geographische Länge des Punktes P

$$\lambda_S = \lambda_1 + \Delta_2 \lambda. \tag{5}$$

Die geographische Breite des Punktes P ergibt sich aus

$$\cos(-|\varphi_S|) = \sin \alpha \cdot \sin(90^\circ - \varphi_1),$$

$$\cos |\varphi_S| = \sin \alpha \cdot \cos \varphi_1. \tag{6}$$

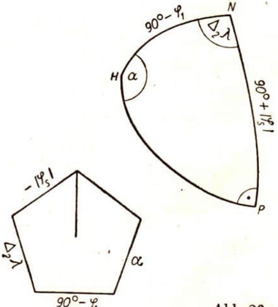


Abb. 26 c

c) Die Berechnung des Schnittpunktes mit der Datumgrenze ergibt sich nach Abb. 26d. Im Dreieck HND sind die folgenden Seiten und Winkel bekannt: $HN = 90^\circ - \varphi_1$, $\Delta_3 \lambda = 180^\circ - \lambda_1$ und α. Berechnet werden muß die Seite $DN = 90^\circ + |\varphi_D|$. Zunächst ist es notwendig, den Winkel ε zu berechnen.

Es ist nach dem Winkelkosinussatz

$$\cos \varepsilon = -\cos \Delta_3 \lambda \cdot \cos \alpha + \sin \Delta_3 \lambda \cdot \sin \alpha \cdot \cos (90^\circ - \varphi_1)$$

oder

$$\cos \varepsilon = -\cos \Delta_3 \lambda \cdot \cos \alpha + \sin \Delta_3 \lambda \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_1 . \quad (7)$$

Es ergibt sich nun für $|\varphi_D|$:

$$\sin (90^\circ + |\varphi_D|) = \frac{\sin \alpha \cdot \sin (90^\circ - \varphi_1)}{\sin \varepsilon}$$

oder

$$\cos |\varphi_D| = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \varphi_1}{\sin \varepsilon} . \text{[1]} \quad (8)$$

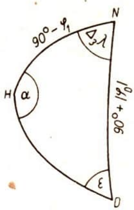


Abb. 26 d

d) Die Berechnung des Schnittpunktes Q mit dem Äquator ergibt sich aus Abbildung 26e. Das Dreieck $Q V_A V$ ist bei V_A rechtwinklig. Daraus ergibt sich für $\Delta_4 \lambda$

$$\cos (90^\circ - |\varphi_2|) = \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} (90^\circ - \Delta_4 \lambda)$$

oder

$$\sin |\varphi_2| = \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{tg} \Delta_4 \lambda .$$

Es folgt

$$\operatorname{tg} \Delta_4 \lambda = \sin |\varphi_2| \cdot \operatorname{tg} \beta . \quad (9)$$

Dann ist

$$\lambda_A = \lambda_2 - \Delta_4 \lambda . \quad (10)$$

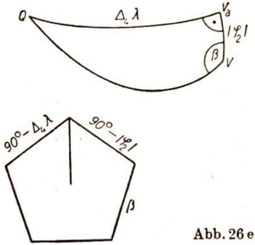


Abb. 26 e

e) Die Berechnung des Schnittpunktes W mit dem südlichen Wendekreis ergibt sich aus Abbildung 26f. Im Dreieck HNW sind die folgenden Seiten und Winkel bekannt: $HN = 90^\circ - \varphi_1$, $NW = 90^\circ + |\varphi_W|$ und α. Zunächst wird der Winkel γ berechnet. Es ist

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha \cdot \sin (90^\circ - \varphi_1)}{\sin (90^\circ + |\varphi_W|)}$$

oder

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \varphi_1}{\cos |\varphi_W|} . \text{[1]} \quad (11)$$

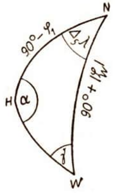


Abb. 26 f

Zur Berechnung des Winkels $\Delta_5 \lambda$ verwenden wir den Lösungsweg mittels eines Hilfswinkels (vgl. Seite 43). Es ist

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \Delta_5 \lambda + \sin \alpha \cdot \sin \Delta_5 \lambda \cdot \cos (90^\circ - \varphi_1)$$

oder

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \Delta_5 \lambda + \sin \alpha \cdot \sin \Delta_5 \lambda \cdot \sin \varphi_1 .$$

---

[1]) Setzt man die Lösung b (Koordinaten des Scheitelpunktes) als bekannt voraus, so läßt sich die Rechnung c im rechtwinkligen Dreieck DPN und die Rechnung e mit Hilfe des Dreiecks WPN wesentlich vereinfachen.

Wir setzen

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\varphi_1 \tag{12}$$

oder

$$\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi = \sin\alpha \cdot \sin\varphi_1 .$$

Dann gilt

$$\cos\gamma = -\cos\alpha \cdot \cos\Delta_5\lambda + \cos\alpha \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\psi} \cdot \sin\Delta_5\lambda,$$

$$\begin{aligned}\cos\psi \cdot \cos\gamma &= -\cos\psi \cdot \cos\alpha \cdot \cos\Delta_5\lambda + \cos\alpha \cdot \sin\psi \cdot \sin\Delta_5\lambda,\\ &= \cos\alpha \cdot (\sin\psi \cdot \sin\Delta_5\lambda - \cos\psi \cdot \cos\Delta_5\lambda),\\ &= -\cos\alpha \cdot \cos(\psi + \Delta_5\lambda),\end{aligned}$$

also

$$\cos(\psi + \Delta_5\lambda) = -\frac{\cos\psi \cdot \cos\gamma}{\cos\alpha} . \tag{13}$$

Dann folgt

$$\lambda_W = \lambda_1 + \Delta_5\lambda . \tag{14}$$

2. Numerische Lösung

a) (1) $\cos l = -\sin\varphi_1 \sin|\varphi_2| + \cos\varphi_1 \cos|\varphi_2| \cos\Delta_1\lambda$

(1a) $\Delta_1\lambda = 288{,}3^\circ - 114{,}2^\circ = 174{,}1^\circ$

	num	lg
$\sin\varphi_1$	sin 22,3°	9,5792 — 10
$\sin\lvert\varphi_2\rvert$	sin 33,0°	9,7361 — 10
	— 0,2067	0,3153 — 1
$\cos\varphi_1$	cos 22,3°	9,9662 — 10
$\cos\lvert\varphi_2\rvert$	cos 33,0°	9,9236 — 10
$\cos\Delta_1\lambda$	cos 174,1°	9,9977 — 10
	— 0,7718	0,8875 — 1
$\cos l$	— 0,9785	

$l = 180^\circ - 11{,}9^\circ = 168{,}1^\circ$

$l = 168{,}1 \cdot 60\ \mathrm{sm} = 10086\ \mathrm{sm}$

(2) $\sin\alpha = \dfrac{\cos|\varphi_2| \sin\Delta_1\lambda}{\sin l}$

	num	lg
$\cos\lvert\varphi_2\rvert$	cos 33,0°	9,9236 — 10
$\sin\Delta_1\lambda$	sin 174,1°	9,0120 — 10
$\sin l$	sin 168,1°	9,3143 — 10
$\sin\alpha$	sin 24,72°	9,6213 — 10

$\alpha = 180^\circ - 24{,}72^\circ = 155{,}28^\circ$

(3) $\sin\beta = \dfrac{\cos\varphi_1 \sin\Delta_1\lambda}{\sin l}$

	num	lg
$\cos\varphi_1$	cos 22,3°	9,9662 — 10
$\sin\Delta_1\lambda$	sin 174,1°	9,0120 — 10
$\sin l$	sin 168,1°	9,3143 — 10
$\sin\beta$	sin 27,47°	9,6639 — 10

$\beta = 180^\circ - 27{,}47^\circ = 152{,}53^\circ$

Die Winkel α und β sind stumpfe Winkel, wie man leicht am Globus nachprüfen kann.

b) (4) $\operatorname{ctg}\Delta_2\lambda = \sin\varphi_1 \operatorname{tg}\alpha$

	num	lg
$\sin\varphi_1$	sin 22,3°	9,5792 — 10
$\operatorname{tg}\alpha$	tg 155,28°	9,6631 — 10
$\operatorname{ctg}\Delta_2\lambda$	— ctg 80,09°	9,2423 — 10

$\Delta_2\lambda = 180^\circ - 80{,}09^\circ = 99{,}91^\circ$

(5) $\lambda_S = \lambda_1 + \Delta_2\lambda$

$\lambda_S = 114{,}2^\circ + 99{,}91^\circ = 214{,}11^\circ$ O

$\lambda_S = 145{,}89^\circ$ W

(6) $\cos|\varphi_S| = \sin\alpha \cos\varphi_1$

	num	lg
$\sin\alpha$	sin 155,28°	9,6213 — 10
$\cos\varphi_1$	cos 22,3°	9,9662 — 10
$\cos\lvert\varphi_S\rvert$	cos 67,24°	9,5875 — 10

$$\varphi_S = 67{,}24^\circ \text{ S}$$

Die Koordinaten des südlichsten Punktes sind P (67,24° S; 145,89° W).

c) (7) $\cos\varepsilon = -\cos\Delta_3\lambda \cos\alpha + \sin\Delta_3\lambda \sin\alpha \sin\varphi_1$

(7a) $\Delta_3\lambda = 180° - 114{,}2° = 65{,}8°$

	num	lg
$\cos\Delta_3\lambda$	cos 65,8°	9,6127 — 10
$\cos\alpha$	cos 155,28°	9,9582 — 10
	+ 0,3723	0,5709 — 1
$\sin\Delta_3\lambda$	sin 65,8°	9,9601 — 10
$\sin\alpha$	sin 155,28°	9,6213 — 10
$\sin\varphi_1$	sin 22,3°	9,5792 — 10
	0,1447	0,1606 — 1
$\cos\varepsilon$	0,5170	

$$\varepsilon = 58{,}87^\circ$$

(8) $\cos|\varphi_D| = \dfrac{\sin\alpha \cos\varphi_1}{\sin\varepsilon}$

	num	lg
$\sin\alpha$	sin 155,28°	9,6213 — 10
$\cos\varphi_1$	cos 22,3°	9,9662 — 10
$\sin\varepsilon$	sin 58,87°	9,9325 — 10
$\cos\lvert\varphi_D\rvert$	cos 63,14°	9,6550 — 10

$$\varphi_D = 63{,}14^\circ \text{ S}$$

Die Datumgrenze wird unter der Breite 63,14° S geschnitten.

d) (9) $\operatorname{tg}\Delta_4\lambda = \sin|\varphi_2| \operatorname{tg}\beta$

	num	lg
$\sin\lvert\varphi_2\rvert$	sin 33°	9,7361 — 10
$\operatorname{tg}\beta$	tg 152,53°	9,7159 — 10
$\operatorname{tg}\Delta_4\lambda$	— tg 15,81°	9,4520 — 10

$$\Delta_4\lambda = 164{,}19^\circ$$

(10) $\lambda_A = \lambda_2 - \Delta_4\lambda$
$= 288{,}3° - 164{,}19°$

$$\lambda_A = 124{,}11^\circ$$

Der Äquator wird unter der Länge 124,11° O geschnitten.

e) (11) $\sin\gamma = \dfrac{\sin\alpha \cos\varphi_1}{\cos|\varphi_W|}$

	num	lg
$\sin\alpha$	sin 155,28°	9,6213 — 10
$\cos\varphi_1$	cos 22,3°	9,9662 — 10.
$\cos\lvert\varphi_W\rvert$	cos 23,5°	9,9624 — 10
$\sin\gamma$	sin 24,95°	9,6251 — 10

$$\gamma = 24{,}95^\circ$$

(12) $\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\alpha \sin\varphi_1$

	num	lg
$\operatorname{tg}\alpha$	tg 155,28°	9,6631 — 10
$\sin\varphi_1$	sin 22,3°	9,5792 — 10
$\operatorname{tg}\psi$	— tg 9,91°	9,2423 — 10

$$\psi = 180^\circ - 9{,}91^\circ = 170{,}09^\circ$$

(13) $\cos(\psi + \Delta_5\lambda) = -\dfrac{\cos\psi \cos\gamma}{\cos\alpha}$

	num	lg
$\cos\psi$	cos 170,09°	9,9935 — 10
$\cos\gamma$	cos 24,95°	9,9574 — 10
$\cos\alpha$	cos 155,28°	9,9582 — 10
$\cos(\psi + \Delta_5\lambda)$	— cos 10,5°	9,9927 — 10

$$\psi + \Delta_5 \lambda = 190{,}5^\circ$$

$$\Delta_5 \lambda = 190{,}5^\circ - 170{,}09^\circ = 20{,}41^\circ$$

Die Rechnung mit dem Wert $\psi + \Delta_5 \lambda = 169{,}5^\circ$ würde einen negativen Wert für $\Delta_5 \lambda$ ergeben.

(14) $\lambda_W = \lambda_1 + \Delta_5 \lambda = 114{,}2^\circ + 20{,}41^\circ$

$$\lambda_W = 134{,}61^\circ$$

Der südliche Wendekreis wird unter der Länge 134,61° O geschnitten.

Aufgaben

Geographische Koordinaten einiger Orte:

Ort	Geogr. Breite (φ)	Geogr. Länge (λ)
Athen	38,0° N	23,7° O
Auckland (Neuseeland)	36,8° S	174,8° O
Berlin	52,5° N	13,4° O
Bombay	18,9° N	72,8° O
Budapest	47,5° N	19,1° O
Charkow	50,0° N	36,2° O
Greenwich	51,5° N	0,0°
Hamburg	53,6° N	10,0° O
Hongkong	22,3° N	114,2° O
Kairo	30,1° N	31,3° O
Kap Hoorn	56,0° S	67,3° W
Kap Oljutorski	59,9° N	170,5° O
Kapstadt	33,9° S	18,5° O
Leipzig	51,3° N	12,4° O
Leningrad	59,9° N	30,3° O
London	51,5° N	0,2° W
Melbourne	37,8° S	145,0° O
Moskau	55,8° N	37,6° O
Nadelkap	34,8° S	20,0° O
Nagasaki	32,8° N	129,9° O
Neapel	40,8° N	14,3° O
New York	40,8° N	74,0° W
Oslo	59,9° N	10,7° O
Paris	48,8° N	2,3° O
Peking	39,9° N	116,4° O
Potsdam	52,4° N	13,1° O
Rio de Janeiro	22,9° S	43,2° W
Rostock	54,1° N	12,1° O
San Francisco	37,8° N	122,4° W
Strasbourg	48,6° N	7,8° O
Südkap (Stewart-Island)	47,3° S	167,5° O
Südwestkap (Tasmanien)	43,7° S	146,7° O
Sydney	33,9° S	151,2° O
Taschkent	41,3° N	69,2° O
Tbilissi	41,7° N	44,8° O
Tokio	35,7° N	139,8° O
Ulan-Bator	47,8° N	106,9° O
Valparaiso	33,0° S	71,7° W
Wladiwostok	43,1° N	131,6° O

In den folgenden Aufgaben sind die geographischen Koordinaten, wenn nicht besonders angegeben, dieser Tabelle zu entnehmen.

1. Wie groß ist die kürzeste Entfernung zwischen Charkow und Peking, und wie groß sind die Kurswinkel?

2. Das im Jahre 1874 von der Insel Valentia ($\varphi_1 = 51{,}9^\circ$ N; $\lambda_1 = 10{,}4^\circ$ W) nach Neufundland ($\varphi_2 = 47{,}7^\circ$ N; $\lambda_2 = 53{,}4^\circ$ W) verlegte Kabel hat eine Länge von 1854 sm. Vergleichen Sie diese Länge mit der kürzesten Entfernung zwischen den beiden Orten!

3. Es ist die Länge des Weges zwischen dem Nadelkap und dem Südwestkap von Tasmanien zu bestimmen. Der orthodrome Kurs schneidet den 55. südlichen Breitenparallel in den Punkten E_1 und E_2. Da ein Schiff die Packeiszone nicht durchfahren kann, fährt es auf dem orthodromen Kurs bis E_1, dann auf dem Breitenparallel bis E_2 und dann wieder auf dem orthodromen Kurs. Die Kurswinkel sind zu bestimmen.

4. Wo liegt der Scheitelpunkt auf dem kürzesten Wege von Rostock nach Wladiwostok und wie weit ist er vom Nordpol entfernt?

5. Wie groß ist der Unterschied zwischen der loxodromen und der orthodromen Entfernung

a) Leningrad—Oslo, **b)** New York—Neapel,

c) Kapstadt—Sydney, **d)** Leningrad—Kap Oljutorski?

Wie weit ist der nördlichste bzw. der südlichste Punkt von der Loxodromen entfernt? (Die Loxodrome liegt in diesen Fällen auf dem entsprechenden Breitenkreis.)

6. Es sind die kürzeste Entfernung für die Fluglinie zwischen Moskau und Peking über Ulan-Bator und die Kurswinkel zu berechnen. Welches ist der nördlichste Punkt jeder Teilstrecke?

7. Der Portugiese Magalhães benötigte bei seiner Erdumseglung 1520/21 für die Entfernung von der nach ihm benannten Meeresstraße ($\varphi_1 = 54{,}5°$ S; $\lambda_1 = 71{,}5°$ W) nach den Philippinen ($\varphi_2 = 8{,}0°$ N; $\lambda_2 = 126{,}3°$ O) 99 Tage. Welche Zeit brauchte ein Schiff, das mit einer Geschwindigkeit von 18 Knoten (1 Knoten = 1 sm/h) fährt, wenn es zunächst zum Ort $P(\varphi_3 = 8{,}0°$ N; $\lambda_3 = 170{,}0°$ O) auf der Orthodromen und dann weiter auf der Loxodromen fahren würde?

8. Ein Schiff fährt von Auckland (Neuseeland) mit dem orthodromen Kurs *ONO* ab. Wo und wann kreuzt es die Datumgrenze und wo und wann den Äquator, wenn das Schiff mit einer Geschwindigkeit von 19,4 Knoten (1 Knoten = 1 sm/h) fährt?

9. Es sind die kürzeste Entfernung zwischen Leningrad und Wladiwostok und der Scheitelpunkt zu bestimmen.

10. Von einem Ort $P(\varphi_1 = 34°\ 20'$ S; $\lambda_1 = 18°\ 20'$ O) will man nach Melbourne fahren, ohne wegen der Eisgefahr den Breitenparallel 55° S zu überschreiten.

a) Auf welchen Längen schneidet der orthodrome Kurs diesen Breitenparallel?

b) Wieviel Seemeilen sind zurückzulegen, wenn für den südlich des 55. Breitenparallels gelegenen Teil des orthodromen Kurses der Kurs auf diesem Breitenparallel gewählt wird?

c) In welchen Breiten schneiden die beiden Großkreisbogen die durch 5 teilbaren Meridiane?

d) Bestimmen Sie den Anfangskurs und den Endkurs!

11. Ein Schiff befindet sich in einem Ort $P(\varphi_1 = 50°\ 10'$ S; $\lambda_1 = 159°\ 20'$ W) und soll, ohne in südlichere Breiten zu kommen, nach Valparaiso fahren.

a) Auf welcher Länge schneidet der orthodrome Kurs den Breitenparallel 50° 10′ S?

b) Wieviel Seemeilen sind zurückzulegen, wenn für den südlich des Breitenparallels 50° 10′ S gelegenen Teil des orthodromen Kurses der Kurs auf diesem Breitenparallel gewählt wird?

c) Mit welchem Endkurs kommt man in Valparaiso an?

d) Die Schnittpunkte der Orthodromen mit den durch 5 teilbaren Meridianen sind zu berechnen.

12. Es sind die Kurswinkel und die kürzeste Entfernung für eine Fluglinie zu berechnen.

a) Leningrad—Moskau **b)** Berlin—Budapest

c) Moskau—Tbilissi **d)** Peking—Wladiwostok

13. Berechnen Sie die Orthodrome zwischen Kapstadt und Rio de Janeiro und geben Sie die Kurswinkel und den Scheitelpunkt der Orthodromen an!

14. Von einem Ort $P(\lambda_1 = 136{,}9^\circ\,\mathrm{W};\ \varphi_1 = 35{,}8^\circ\,\mathrm{N})$ soll ein Schiff auf dem kürzesten Wege nach San Francisco fahren. Es sind die kürzeste Entfernung, der Anfangskurs, der Endkurs und der Scheitelpunkt zu berechnen.

15. Ein Schiff soll von Kapstadt nach Bombay fahren. Es fährt zunächst auf dem Längenkreis bis zum Breitenparallel 35° S und dann auf dem Breitenparallel bis 48° östlicher Länge. Von dort aus fährt es auf der Orthodromen bis Bombay. Wie lang ist der Weg? Welches sind die Kurswinkel in den einzelnen Orten? Um wieviel ist dieser Weg länger als die kürzeste Entfernung zwischen Kapstadt und Bombay?

16. Welche beiden Punkte des Äquators sind von Taschkent ebenso weit entfernt wie Taschkent vom Nordpol?

17. Es ist die kürzeste Entfernung Kairo—Leipzig zu bestimmen.

18. Ein Schiff soll von Valparaiso nach Südkap (Stewart-Island) fahren, ohne den Breitenparallel 55° S zu überschreiten. Wie lang ist der Weg, wenn der südlich des Breitenparallels 55° S gelegene Teil des orthodromen Kurses durch den Kurs auf diesem Breitenparallel ersetzt wird? Welche Kurswinkel ergeben sich? Um wieviel ist der Weg länger als die kürzeste Entfernung? Wie weit ist der Scheitelpunkt der Orthodromen vom Südpol entfernt?

19. Es ist der kürzeste Weg zwischen Taschkent und Leningrad zu bestimmen. Unter welchen Längen (Breiten) werden die durch 5 teilbaren Breitenkreise (Längenkreise) geschnitten? Kennzeichnen Sie den Kurs auf der Karte!

20. Auf einer Karte ist die Orthodrome zwischen Charkow und Kap Oljutorski einzutragen.

21. Auf einer Mercatorkarte (Atlas zur Erd- und Länderkunde, 92c—e) sind die Loxodrome und die Orthodrome zwischen dem Südwestkap (Tasmanien) und Neapel einzutragen.

Anmerkung zu den Aufgaben 20 und 21: Es sind mehrere Punkte der Orthodromen zu berechnen.

C. Komplexe Zahlen

I. Vom Bereich der natürlichen Zahlen zum Bereich der reellen Zahlen

Der heutige Zahlbegriff ist das Ergebnis einer langen Entwicklung, die bereits in vorgeschichtlicher Zeit begann. Aus den praktischen Bedürfnissen der Menschen ergaben sich das Zählen und damit die ersten Zahlen der Folge

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

Sie sind Zahlen im ursprünglichen Sinne des Wortes, das heißt, man kann mit ihnen zählen. Doch kennzeichnet das Zählen nur einen Teil ihrer Bedeutung. Es steht nämlich in einem engen wechselseitigen Zusammenhang mit dem Rechnen. So entwickeln sich einerseits die ersten Rechenoperationen unmittelbar aus dem Zählen durch Zusammenfassung einzelner Zählschritte, während andererseits das Zählen ohne die Hilfe des Rechnens nach wenigen Schritten aufhören würde. Wir können zu größeren Zahlen nur gelangen, indem wir kleinere rechnend zusammensetzen. Bei allen Zahlen von 11 an kommt dies bereits in unserer Ziffernschreibweise zum Ausdruck (vgl. nachstehende Aufgabe). Erst das Rechnen ermöglicht es also, die Zahlen zu beherrschen und sie im praktischen Leben anzuwenden. Die wesentliche Bedeutung der Zahlen liegt also nicht darin, daß man mit ihnen zählen, sondern daß man mit ihnen rechnen kann.

Um so entscheidender ist die Tatsache, daß mit den betrachteten Zahlen wohl das Zählen ohne jede Einschränkung möglich ist, jedoch viele von den einfachsten Rechenaufgaben mit ihnen nicht lösbar sind. Es ist daher erforderlich, umfassendere Zahlenbereiche zu bilden, in denen solche bisher unlösbaren Aufgaben gelöst werden können. Auch bei diesen Erweiterungen ist es berechtigt, von Zahlen zu sprechen; denn schon bei den ursprünglichen Zahlen $1, 2, 3, \cdots$ ist das Rechnen wesentlicher als das Zählen. Wir müssen nur zuvor den ursprünglichen Zahlen einen besonderen Namen geben, damit wir sie von dem erweiterten Begriff unterscheiden können. Die bekannte Bezeichnung „natürliche Zahlen" soll daran erinnern, daß diese Zahlen die erste Stufe des Zahlbegriffes darstellen, daß es Zahlen sind, mit denen man nicht nur rechnen, sondern auch zählen kann.

Von den Erweiterungen des Zahlbegriffes sind uns schon einige bekannt. In der Grundschule haben wir ganze und gebrochene, positive und negative Zahlen kennengelernt. Im 9. Schuljahr wurden über die rationalen Zahlen hinausgehend die reellen Zahlen behandelt. Wie wir im folgenden feststellen werden, läßt sich der Bereich der reellen Zahlen noch zu dem der komplexen Zahlen erweitern.

Aufgabe

Jede Ziffernschreibweise natürlicher Zahlen beruht — von den grundlegenden Zeichen für die ersten Zahlen abgesehen — auf Rechenoperationen.

a) Welche Rechenschritte führen zum Beispiel zu der mit dem Symbol 2645 gekennzeichneten natürlichen Zahl?

b) Welche Rechenoperationen liegen also der dekadischen Schreibweise zugrunde?

c) Welche Rechenoperationen sind dagegen für die Schreibweise im römischen Ziffernsystem notwendig, etwa für die Zahl CCXLIV?

d) Welche Rechenoperationen erfordert schließlich die Schreibweise einer gebrochenen Zahl, etwa 17,125, im dekadischen System?

1. Der Bereich der natürlichen Zahlen

Durch das Zählen erhalten die natürlichen Zahlen von selbst eine Ordnung, die wir ihre lineare Anordnung nennen wollen. Die natürlichen Zahlen sind in einer ganz bestimmten Reihenfolge gegeben, in der jede von ihnen genau einen unmittelbaren Nachfolger und genau einen unmittelbaren Vorgänger hat. Davon ausgenommen ist nur die 1, die nur Nachfolger, aber keine Vorgänger hat.

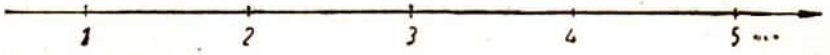


Abb. 27

Diese Eigenschaft der natürlichen Zahlen ermöglicht die Veranschaulichung auf dem Zahlenstrahl (Abb. 27). Dabei wird eine Zahl selbst auch oft als der Weg (Pfeil) von einem Anfangspunkt A zu dem mit ihr bezeichneten Punkt angesehen (Abb. 28).

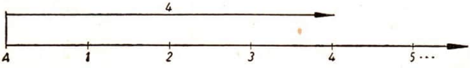


Abb. 28

Der Abstand von Punkt zu Punkt bedeutet dann immer das Weitergehen von der einen Zahl zur nächstfolgenden, er gibt also einen Schritt an.

a) Die Addition natürlicher Zahlen

Die Zusammenfassung mehrerer Zählschritte führt zur ersten Rechenoperation, der Addition. Die Summe zweier natürlicher Zahlen a und b ist die Zahl, die man erhält, wenn man von a aus b Schritte weiterzählt. Für die natürlichen Zahlen ergeben sich die folgenden

Grundgesetze der Addition:

1. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist stets wieder eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl. Die Addition ist also im Bereich der natürlichen Zahlen immer ausführbar.

2. Die Addition ist kommutativ, daß heißt, es gilt

$$a + b = b + a.$$

3. Die Addition ist assoziativ, das heißt, es gilt

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Diese Grundgesetze sind aus der Rechenpraxis von Jahrtausenden abstrahiert, so daß sich zunächst jeder Zweifel an ihnen verbietet. Man kann aber einwenden, daß es sicher sehr große natürliche Zahlen gibt, mit denen bisher noch niemand gerechnet hat. Es ist deshalb von Bedeutung, daß man die uneingeschränkte Gültigkeit dieser Grundgesetze aus der Erklärung der Addition mit Hilfe der linearen Anordnung ableiten kann (vgl. Aufgabe 1). Die Berechtigung, gerade diese drei Regeln als Grundgesetze der Addition auszuzeichnen, liegt darin, daß sich alle übrigen Rechenregeln der Addition als Folgerungen aus ihnen ableiten lassen (vgl. Aufgabe 2).

b) Die Multiplikation natürlicher Zahlen

Wie die Addition aus dem Zusammenfassen des Zählens entsteht, so ergibt sich die Multiplikation aus dem Zusammenfassen gewisser Additionsaufgaben. Es bedeutet $a \cdot b$ nichts anderes als $b + b + \cdots + b$, wobei b genau a mal als Summand gesetzt wird. Diese Tatsache rechtfertigt auch die Bezeichnung Rechenoperation zweiter Stufe. Es gelten dabei analog die folgenden

Grundgesetze der Multiplikation:

1. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist stets wieder eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl. Die Multiplikation ist also im Bereich der natürlichen Zahlen immer ausführbar.

2. Die Multiplikation ist kommutativ, das heißt, es gilt

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

3. Die Multiplikation ist assoziativ, das heißt, es gilt

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Dabei stehen beide Rechenoperationen in einem Zusammenhang, der zum Ausdruck kommt in dem

Grundgesetz der Verknüpfung beider Operationen:

Die Addition und die Multiplikation sind distributiv verknüpft, das heißt, es gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Für diese vier letztgenannten Grundgesetze gilt das Entsprechende wie für die Grundgesetze der Addition. Auch sie lassen sich aus der linaeren Anordnung der natürlichen Zahlen, der Erklärung der Addition und der Erklärung der Multiplikation ableiten (vgl. Aufgabe 3 und 4).

Das gesamte Rechnen im Bereich der natürlichen Zahlen ist durch diese sieben Grundgesetze bereits vollständig bestimmt. Alle übrigen Rechengesetze kann man als Folgerungen aus ihnen gewinnen. Das gilt nicht nur für alle Regeln der Verknüpfung von Addition und Multiplikation (vgl. Aufgabe 5), sondern auch für die Rechenoperation dritter Stufe, das Potenzieren (vgl. Aufgabe 6). Es gilt darüber hinaus sogar für die Rechenoperationen, die aus den Umkehrungen der bisher besprochenen Operationen entstehen, soweit diese überhaupt innerhalb des Bereiches der natürlichen Zahlen ausführbar sind.

c) Umkehrung der Addition

Die Addition zweier natürlicher Zahlen ergibt wieder eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl. Die Umkehrung besteht in der Aufgabe, zu einer gegebenen natürlichen Zahl b eine zweite Zahl x zu finden, so daß die Summe dieser beiden Zahlen gleich einer gegebenen natürlichen Zahl a ist. Wir müssen also die Gleichung

$$b + x = a$$

lösen, und das ist innerhalb des Bereiches der natürlichen Zahlen nur dann möglich, wenn a größer als b ist. In diesem Fall gibt es genau eine natürliche Zahl x, die der Gleichung genügt und die wir als Differenz

$$x = a - b$$

bezeichnen. In allen anderen Fällen ist die Subtraktion innerhalb des Bereiches der natürlichen Zahlen unlösbar.

d) Umkehrung der Multiplikation

Hier verläuft die Überlegung analog. Auch die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen hat als Ergebnis eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl. Die Umkehrung besteht in der Aufgabe, zu einer gegebenen natürlichen Zahl b eine zweite Zahl x zu finden, so daß das Produkt dieser beiden Zahlen gleich einer gegebenen natürlichen Zahl a ist. Wir müssen also die Gleichung

$$b \cdot x = a$$

lösen, und das ist innerhalb des Bereiches der natürlichen Zahlen nur dann möglich, wenn a ein Vielfaches von b oder gleich b ist. Dann gibt es genau eine natürliche Zahl x, die diese Gleichung erfüllt und die wir den Quotienten

$$x = a : b = \frac{a}{b}$$

nennen. In allen anderen Fällen ist die Division innerhalb des Bereiches der natürlichen Zahlen unlösbar.

e) Umkehrung des Potenzierens

Die Potenz einer natürlichen Zahl mit einer natürlichen Zahl als Exponenten ist ebenfalls eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl. Hier ergeben sich jedoch für die Umkehrung zwei Möglichkeiten (vgl. Aufgabe 7). Man kann einmal nach einer Zahl x fragen, von der eine durch n bestimmte Potenz eine vorgegebene natürliche Zahl a ist, zum anderen danach, mit welchem Exponenten x eine gegebene natürliche Zahl a die Potenz der natürlichen Zahl b ist. Die entsprechenden Gleichungen

$$x^n = a \quad \text{bzw.} \quad b^x = a$$

sind innerhalb des Bereiches der natürlichen Zahlen nur bei geeigneter Wahl von n und a bzw. b und a lösbar. Man schreibt für diese Lösungen, die dann eindeutig sind,

$$x = \sqrt[n]{a} \quad \text{bzw.} \quad x = {}^b\log a$$

und nennt die zugehörigen Operationen Radizieren und Logarithmieren (vgl. Aufgabe 8).

Damit ist der Weg zu allen Erweiterungen des Zahlbegriffes bereits durch die natürlichen Zahlen vorgezeichnet. Um die Subtraktion uneingeschränkt ausführen zu können, muß man die negativen Zahlen einführen. Für die uneingeschränkte Ausführbarkeit der Division ist die Einführung der Brüche erforderlich. Das Radizieren und Logarithmieren führt schließlich zu den irrationalen und komplexen Zahlen.

Aufgaben

1. Die im Text erwähnte Ableitung der drei Grundgesetze der Addition aus der Erklärung der Addition mit Hilfe der linearen Anordnung ist, exakt durchgeführt, verhältnismäßig schwierig. Man kann diese Ableitung aber unter Zuhilfenahme der auf Seite 60 erwähnten Pfeildarstellung veranschaulichen. Überzeugen Sie sich auf diese Weise von der Richtigkeit dieser drei Grundgesetze!

2. Mit Hilfe der drei Grundgesetze der Addition ist zu zeigen, daß es bei der Berechnung einer Summe mit endlich vielen Summanden $a + b + \cdots + k$ weder auf die Reihenfolge noch auf eventuell vorgeschriebene Zusammenfassungen (Klammern) ankommt[1]).

---

[1]) Für eine beliebige endliche Anzahl von Summanden ist ein Induktionsschluß notwendig.

3. Die drei Grundgesetze der Multiplikation von natürlichen Zahlen sind entsprechend den Überlegungen in Aufgabe 1 mit Hilfe geeigneter Pfeildarstellungen zu bestätigen.

Anleitung: Für das kommutative Gesetz ist eine Zerlegung des Gesamtpfeils (Abb. 29a) in ein rechteckiges Schema zu wählen (Abb. 29b). Für das assoziative Gesetz ist ein entsprechendes dreidimensionales, perspektivisches Schema zu zeichnen.

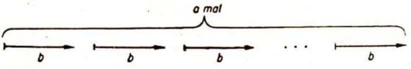


Abb. 29 a

4. Entsprechend der Aufgabe 3 ist die Richtigkeit des distributiven Gesetzes für natürliche Zahlen nachzuweisen.

5. Allein mit Hilfe der sieben Grundgesetze sind die folgenden Rechenregeln zu beweisen:

a) $(b + c) \cdot a = ba + ca$

b) $a \cdot (b + c + d) = ab + ac + ad$

c) $(a + b) \cdot (c + d)$
$= ac + ad + bc + bd$

d) Geben Sie die weitestgehende Verallgemeinerung des distributiven Gesetzes an! Wie wäre diese zu beweisen?

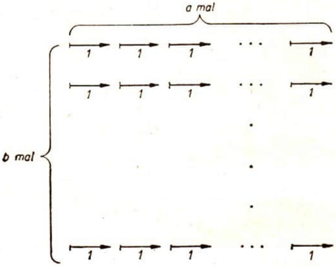


Abb. 29 b

6. Aus der Erklärung des Potenzierens $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n Faktoren) und mit den sieben Grundgesetzen sind die folgenden Regeln zu beweisen:

a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, **b)** $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, **c)** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

7. Begründen Sie, weshalb es beim Potenzieren zwei Möglichkeiten für die Umkehrung gibt und weshalb dies bei der Addition und Multiplikation nicht der Fall ist!

8. Lösen Sie die Gleichungen $x^3 = 8$ bzw. $5^x = 125$ und schreiben Sie die Lösungen in der im Text angegebenen Form! Bilden Sie weitere Beispiele dieser Art!

2. Die Erweiterung von Zahlenbereichen

Wir wollen zunächst untersuchen, wie ein bereits bekannter Zahlenbereich erweitert werden kann und was man dabei unter „erweitern" versteht. Als Beispiel wählen wir dazu den Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Brüchen, deren Zähler und Nenner natürliche Zahlen sind.

Die Einführung der Brüche und der Bruchrechnung entspringt dem Bedürfnis, jede aus natürlichen Zahlen gebildete Divisionsaufgabe lösen zu können, so zum Beispiel die Aufgabe $2:3$. Wir erhalten diese innerhalb des Bereiches der natürlichen Zahlen nicht vorhandene Lösung, indem wir

$$2:3=\frac{2}{3}$$

schreiben. Auf diese Weise erklären wir den Bruch „zwei Drittel". Wenn wir damit auch eine sehr anschauliche Vorstellung verbinden, so haben wir doch eigentlich nur die innerhalb des Bereiches der natürlichen Zahlen unlösbare Aufgabe nochmals in anderer Gestalt hingeschrieben.

Daß wir damit überhaupt etwas erreicht haben, ist in drei Tatsachen begründet:

1. Mit der Gesamtheit der so erklärten Brüche kann man nach den bekannten Regeln der Bruchrechnung wie mit natürlichen Zahlen rechnen. Es gelten nämlich für die Addition und Multiplikation von Brüchen die gleichen sieben Grundgesetze wie für natürliche Zahlen (Aufgabe 2). Diese Grundgesetze bestimmen aber bereits alle Rechengesetze. Wenn also die gleichen Grundgesetze gelten, so behalten auch alle daraus abgeleiteten Gesetze ihre Gültigkeit.

2. Diese Brüche enthalten die natürlichen Zahlen als Brüche mit dem Nenner 1. Die Bruchrechnung umfaßt also das Rechnen mit natürlichen Zahlen.

3. Innerhalb der Brüche ist nicht nur jede Divisionsaufgabe mit natürlichen Zahlen, sondern sogar jede Divisionsaufgabe mit Brüchen ausführbar. Dieser Sachverhalt wird durch ein weiteres Grundgesetz gekennzeichnet: Innerhalb der Brüche mit natürlichen Zahlen als Zähler und Nenner ist die Multiplikation immer umkehrbar, das heißt, jede Divisionsaufgabe ist lösbar.

Zusammenfassend können wir also folgendes feststellen: Mit Hilfe der schon bekannten natürlichen Zahlen werden durch die Bildung der Brüche neue Zahlen abgeleitet. Dies geschieht, indem die Divisionsaufgaben mit natürlichen Zahlen in geeigneter Gestalt, eben als Brüche, geschrieben werden. Das Rechnen mit diesen neuen Zahlen wird durch die Regeln der Bruchrechnung auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen zurückgeführt (vgl. Aufgabe 1). Dabei bleiben alle Rechengesetze der natürlichen Zahlen für die neuen Zahlen gültig. Der Bereich der neuen Zahlen ist eine Erweiterung des Ausgangsbereiches der natürlichen Zahlen, da er diese enthält. Der Bereich der neuen Zahlen ist von dem Mangel des Ausgangsbereiches, daß die Division nur beschränkt ausführbar ist, frei.

Mit der Verallgemeinerung dieses Verfahrens haben wir bereits das Prinzip jeder Erweiterung eines vorliegenden Zahlenbereiches gefunden: Gerade die im alten Bereich unlösbaren Aufgaben werden zur Erklärung der neuen Zahlen verwendet. Das Rechnen mit ihnen wird so auf das bereits bekannte Rechnen mit den alten Zahlen zurückgeführt, daß dabei alle Rechengesetze des alten Bereichs gültig bleiben. Der neue Bereich muß den alten enthalten und von dem entsprechenden Mangel des alten Bereiches frei sein.

Die Festlegung, daß die Rechengesetze des alten Bereiches auch im neuen Bereich gelten sollen, nennt man das **Permanenzprinzip** oder das **Prinzip von der Permanenz der Rechengesetze**.

Wir werden in den folgenden Abschnitten erkennen, daß alle Erweiterungen von Zahlenbereichen nach dem eben geschilderten Verfahren durchgeführt werden. Allerdings ist eine exakte Durchführung dieser Gedankengänge oft zu umfangreich und schwierig, als daß wir sie vollständig behandeln könnten. Wir wollen an Hand unseres Beispiels nur zwei Probleme betrachten, die bei allen Erweiterungen eine Rolle spielen:

Jede der neuen Zahlen kann in unendlich vielen verschiedenen Formen auftreten. So erklären zum Beispiel die Divisionsaufgaben

$$\frac{2}{3};\quad \frac{4}{6};\quad \frac{6}{9};\quad \frac{10}{15};\quad \frac{14}{21}\quad \text{usw.}$$

den gleichen Bruch. Man muß also kennzeichnen, welche der neuen Zahlen einander gleich sind. Bei den Brüchen geschieht dies durch die Regeln des Kürzens und Erweiterns. Die Rechenregeln der neuen Zahlen müssen selbstverständlich von dieser Mehrdeutigkeit der Schreibweise unabhängig sein (vgl. Aufgabe 3). So darf es keinen Einfluß haben, wenn man beispielsweise $\frac{4}{6}$ statt $\frac{2}{3}$ bei Rechnungen verwendet.

Weiterhin sind die alten Zahlen in den neuen zunächst in anderer Gestalt enthalten. So besteht doch ein begrifflicher Unterschied zwischen dem Bruch $\frac{5}{1}$ und der natürlichen Zahl 5, von dem wir gerade absehen, wenn wir sagen, daß die Brüche die natürlichen Zahlen enthalten. Dies ist möglich, da das Rechnen mit allen Brüchen $\frac{a}{1}, \frac{b}{1}, \frac{c}{1}, \cdots$ völlig gleich verläuft zu dem Rechnen mit den natürlichen Zahlen $a, b, c, \cdots$. In der höheren Mathematik sagt man für diesen Sachverhalt: Die Brüche mit dem Nenner 1 sind ein isomorphes Bild der natürlichen Zahlen und können durch diese ersetzt werden. Erst nach dieser Ersetzung wird aus dem völlig neuen Rechenbereich der Brüche eine Erweiterung des Bereiches der natürlichen Zahlen.

Den Bereich der gebrochenen Zahlen kann man auf dem Zahlenstrahl veranschaulichen, indem man die Einheitsschritte entsprechend unterteilt. Es zeigt sich dann, daß gleichen Brüchen $\left(\text{z.B. } \frac{2}{3} \text{ und } \frac{4}{6}\right)$ gleiche Punkte entsprechen.

Aufgaben

1. Überlegen Sie, daß die Addition und die Multiplikation von Brüchen durch die Rechenregeln

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

auf Rechenoperationen mit den natürlichen Zahlen a, b, c, d zurückgeführt werden!

2. Es ist zu beweisen, daß die Addition und die Multiplikation von Brüchen den sieben Grundgesetzen der Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen genügen.

3. An konkreten Beispielen ist zu bestätigen, daß die in der Aufgabe 1 angegebenen Regeln der Bruchrechnung davon unabhängig sind, ob die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ soweit als möglich gekürzt sind oder nicht.

3. Der Bereich der rationalen Zahlen

Wir haben im vorigen Abschnitt die Erweiterung der natürlichen Zahlen zu den Brüchen mit natürlichen Zahlen als Zähler und Nenner besprochen. In dem so entstandenen Bereich gelten die gleichen Rechengesetze wie im Bereich der natürlichen Zahlen, darüber hinaus ist die Division uneingeschränkt durchführbar. Jedoch ist nach wie vor die Subtraktion nur dann möglich, wenn der Minuend größer als der Subtrahend ist. Diese Tatsache veranlaßt uns, auch diesen Bereich zu erweitern. Wir werden den **Bereich der rationalen Zahlen** erhalten.

Diese Erweiterung kann nicht einfach dadurch vorgenommen werden, daß wir den mit den Bildern der bereits vorhandenen Brüche markierten Zahlenstrahl (Abb. 30)

Abb. 30

an dem mit O bezeichneten Anfangspunkt spiegeln und alle neu entstehenden Zahlen mit einem Minuszeichen versehen (Abb. 31). Die Punkte der so entstehenden Zahlengeraden sind nämlich nur Bilder der rationalen Zahlen und nicht diese selbst. Wir können aus diesem Bild nur entnehmen, wie die rationalen Zahlen angeordnet sind, nicht aber, wie mit ihnen zu rechnen ist. Man muß die Erweiterung vielmehr in der im vorigen Abschnitt besprochenen Art durchführen. Wir wollen dies in großen Zügen andeuten.

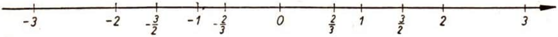


Abb. 31

Wir erklären die neuen (rationalen) Zahlen als die Gesamtheit aller Subtraktionsaufgaben mit alten Zahlen, also mit den bereits vorhandenen Brüchen. Eine Reihe von solchen Subtraktionsaufgaben fallen immer zu der gleichen neuen Zahl zusammen, zum Beispiel

$$3 - 5 = \frac{7}{2} - \frac{11}{2} = \frac{11}{3} - \frac{17}{3} = \frac{3}{7} - \frac{17}{7} = \cdots$$

oder

$$1 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - 1 = \frac{5}{6} - \frac{7}{6} = \frac{125}{3} - \frac{126}{3} = \cdots$$

oder

$$7 - 2 = \frac{21}{4} - \frac{1}{4} = 6 - 1 = \frac{13}{2} - \frac{3}{2} = \cdots.$$

Man nennt dann die Zahlen, deren Minuend größer als der Subtrahend ist, positiv; diejenigen, deren Minuend kleiner als der Subtrahend ist, negativ, und führt kürzere Bezeichnungen ein (in unseren Beispielen -2, $-\frac{1}{3}$, bzw. $+5$; vgl. dazu noch Aufgabe 2).

Das Rechnen mit den neuen Zahlen muß dann auf das Rechnen mit den alten Zahlen zurückgeführt werden. So wird zum Beispiel die Aufgabe

$$(+5) + (-2) = (+3)$$

abgeleitet aus

$$[7-2] + [3-5] = [(7+3) - (2+5)] = (10-7),$$

wobei man die Minuenden 7 und 3 und die Subtrahenden 2 und 5 für sich addiert. Es läßt sich nachweisen, daß dies tatsächlich allgemein möglich ist und dabei alle für die Brüche gültigen Rechenregeln auch für die neuen Zahlen gültig bleiben (Permanenzprinzip). Die so entstehenden neuen Zahlen enthalten die alten als positive Zahlen und ermöglichen es, die Subtraktion uneingeschränkt auszuführen.

Damit haben wir in zwei Schritten einen Zahlenbereich gewonnen, in dem ebenso gerechnet wird wie im Bereich der natürlichen Zahlen und in dem alle vier Grundrechenarten uneingeschränkt durchführbar sind, allerdings mit Ausnahme der Division durch Null. Man nennt diesen neuen Bereich den der rationalen Zahlen.

Wir wollen noch kurz begründen, daß die Aufgabe, durch Null zu dividieren, grundsätzlich undurchführbar ist. Der Quotient $a:b$ ist als die Lösung x der Gleichung $bx = a$ erklärt. Setzen wir aber in dieser Gleichung $b = 0$, so wird das Produkt bx unabhängig von der Wahl von x zu Null. Für $a \neq 0$ ist das ein Widerspruch, für $a = 0$ hätte die Gleichung alle Zahlen x als Lösung. Wir können also auch keine Erweiterung finden, die eine Lösung der Aufgabe $a:0$ ermöglichte, ohne die für Zahlen gültigen Rechengesetze (Permanenzprinzip) zu verletzen.

Man kann noch auf einem zweiten Wege vom Bereich der natürlichen Zahlen zum Bereich der rationalen Zahlen gelangen. Anstatt zuerst die uneingeschränkte Ausführbarkeit der Division zu fordern und damit als Zwischenbereich den der positiven Brüche zu erhalten, kann man mit der Forderung der uneingeschränkten Durchführbarkeit der Subtraktion beginnen. Dann erhält man als Zwischenbereich den der **ganzen Zahlen**, das heißt den der positiven und negativen ganzen Zahlen einschließlich der Null. Von ihm gelangt man durch die Forderung der uneingeschränkten Durchführbarkeit der Division (außer der durch Null) ebenfalls zum Bereich der rationalen Zahlen. Während der von uns beschrittene Weg der historische ist, der wegen seiner besseren Anschaulichkeit auch im Unterricht gewählt wird, hat der zweite Weg gewisse Vorteile bei einer systematisierenden Übersicht. Es ist nämlich folgerichtiger, zuerst die Umkehrung der Addition als der Rechenoperation erster Stufe und dann die Umkehrung der Multiplikation als der Rechenoperation zweiter Stufe zu behandeln.

Aufgaben

1. Die Erweiterung des Bereiches der positiven Brüche zum Bereich der rationalen Zahlen ist schrittweise mit der Erweiterung des Bereiches der natürlichen Zahlen zum Bereich der positiven Brüche zu vergleichen.

2. Welche Subtraktionsaufgaben mit alten Zahlen (positive Brüche) erklären die neue Zahl Null?

4. Der Bereich der reellen Zahlen

Wir wollen nunmehr den Bereich der rationalen Zahlen erweitern. Dazu gehen wir nochmals zu den natürlichen Zahlen zurück, die, wie wir erkannt hatten, in bestimmter Reihenfolge angeordnet sind (Abb. 32). Die Sonderrolle der 1 wird aufgehoben, wenn wir den Bereich der natürlichen Zahlen durch die Forderung der uneingeschränkten Durchführbarkeit der Subtraktion zunächst zum Bereich der ganzen Zahlen erweitern (Abb. 33). Hier hat jede Zahl genau einen unmittelbaren Vorgänger und genau einen unmittelbaren Nachfolger. Daraus folgt, daß für zwei Zahlen genau eine der drei Beziehungen $a < b$, $a = b$, $a > b$ zutrifft.

Abb. 32

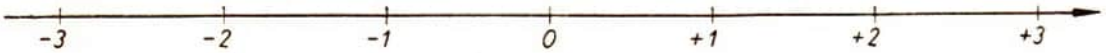


Abb. 33

Auch jeder rationalen Zahl entspricht ein ganz bestimmter Punkt der Zahlengeraden. Man erhält ihn (vgl. die Bemerkung am Ende von Abschnitt 2), indem man die Einheitsschritte entsprechend den jeweils auftretenden Nennern unterteilt (Abb. 34). In der so entstehenden linearen Anordnung der rationalen Zahlen gilt ebenfalls für zwei Zahlen genau eine der drei Beziehungen $a < b$, $a = b$, $a > b$. Dagegen kann man nicht mehr von dem unmittelbaren Vorgänger bzw. Nachfolger

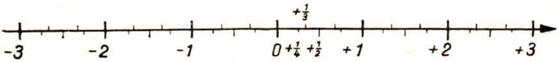


Abb. 34

einer Zahl sprechen; vielmehr gibt es zwischen zwei noch so benachbarten rationalen Zahlen a und b immer noch unendlich viele weitere rationale Zahlen, etwa

$$a + \frac{b-a}{2}; \quad a + \frac{b-a}{3}; \quad a + \frac{b-a}{4}; \quad \cdots.$$

Um diesen Unterschied in der linearen Anordnung der ganzen und der rationalen Zahlen auszudrücken, sagt man: Die Punkte, die die ganzen Zahlen darstellen, liegen diskret; die den rationalen Zahlen entsprechenden Punkte liegen überall dicht.

Dennoch gibt es zwischen diesen überall dicht liegenden rationalen Punkten noch weitere Punkte, denen keine rationale Zahl entspricht. Als Beispiel wollen wir in der angegebenen Weise ein Quadrat $ABCD$ von der Seitenlänge 1 über der Zahlengeraden so konstruieren, daß die Diagonale AC mit der Zahlengeraden zusammenfällt (Abb. 35). Nach Konstruktion ist der Eckpunkt C ein Punkt der Zahlengeraden, und sein Abstand vom Punkte $A = 0$ ist nach dem Lehrsatz des Pythagoras $\sqrt{2}$. Würde nun dem Punkt C eine rationale Zahl entsprechen, so wäre $\sqrt{2}$ eine rationale

Zahl. Dies ist jedoch nicht der Fall (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr). Wir wissen auch, daß dieser Punkt C keine Ausnahme ist. Die weitaus meisten Wurzeln und Logarithmen rationaler Zahlen sind nicht rational.

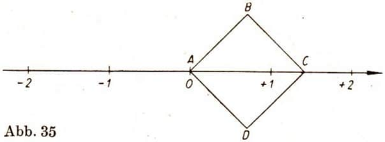


Abb. 35

Andererseits liegt der Punkt C, gerade weil die rationalen Punkte überall dicht liegen, in unmittelbarer Nachbarschaft von solchen rationalen Punkten, das heißt, die Zahl $\sqrt{2}$ kann durch rationale Zahlen mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden. Zum Beispiel gilt

$$\begin{array}{l} 1 < \sqrt{2} < 2 \\ 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \\ 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \\ 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

usw.

Dies lehrt uns zweierlei: Einmal können wir die Zahl $\sqrt{2}$ bei allen praktischen Rechnungen so genau, wie es nur erforderlich ist, durch rationale Zahlen annähern. Auf diese Weise haben wir bisher stets mit Wurzeln und Logarithmen gerechnet. Zum anderen aber erhalten wir einen Hinweis, wie wir den Bereich der rationalen Zahlen zu erweitern haben, um all die Aufgaben exakt lösen zu können, für die wir bisher nur Näherungslösungen ermitteln konnten. Die Tabelle zeigt uns nämlich, daß die Zahl $\sqrt{2}$ nichts anderes ist als der Grenzwert der Folge rationaler Zahlen

$$1; \quad 1{,}4; \quad 1{,}41; \quad 1{,}414; \ \cdots.$$

Diese Folge konvergiert, sie hat aber keinen rationalen Grenzwert. Genauso verhält es sich bei allen anderen Annäherungen nichtrationaler Zahlen durch rationale. Wir werden also als neue Zahlen einfach die Gesamtheit aller konvergenten Folgen mit rationalen Zahlen einführen. Sie entspricht der Gesamtheit aller endlichen und unendlichen Dezimalbrüche und wird der **Bereich der reellen Zahlen** genannt.

Eine exakte Durchführung dieser Erweiterung müßte wieder so vorgenommen werden: Bekannt sind die rationalen Zahlen. Die reellen Zahlen werden als neue Zahlen mit Hilfe konvergenter Folgen rationaler Zahlen erklärt. Zwei Folgen, bei denen die Differenz der Glieder gegen Null konvergiert, definieren dabei die gleiche reelle Zahl. Das Rechnen mit diesen Folgen muß auf das Rechnen mit ihren Gliedern, also auf das bekannte Rechnen mit rationalen Zahlen zurückgeführt werden.

Dabei müssen alle für rationale Zahlen geltenden Rechengesetze erhalten bleiben (Permanenzprinzip). Jede rationale Zahl tritt selbst als eine solche Folge auf. Zum Beispiel wird die Zahl $\frac{1}{2}$ dargestellt durch die Folge

$$\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2};\quad \frac{1}{2};\quad \frac{1}{2};\quad \ldots$$

oder durch die Folge

$$0;\quad 0{,}4;\quad 0{,}49;\quad 0{,}499;\quad 0{,}4999;\ \cdots.$$

Der auf diese Weise entstandene Bereich der reellen Zahlen ist damit eine Erweiterung des Bereiches der rationalen Zahlen. Die neuen, nichtrationalen reellen Zahlen werden **irrationale Zahlen** genannt.

Im Bereich der reellen Zahlen hat dann jede konvergierende Folge eine reelle Zahl als Grenzwert. Das bedeutet, daß sämtliche Wurzeln mit positivem Radikanden und sämtliche Logarithmen positiver Zahlen mit positiver Basis in diesem Bereich enthalten sind. Darüber hinaus enthält er auch diejenigen Zahlen, die überhaupt nur als Grenzwert einer Folge erklärt werden können, wie zum Beispiel die bei der Kreisberechnung auftretende Zahl π oder die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen.

Auch jeder irrationalen reellen Zahl entspricht ein bestimmter Punkt der Zahlengeraden. Auf Grund ihrer Konstruktion erschöpfen sie alle noch vorhandenen Punkte. Auf diese Weise entspricht jeder reellen Zahl genau ein Punkt der Zahlengeraden und umgekehrt jedem Punkt der Zahlengeraden genau eine rationale bzw. irrationale reelle Zahl. Damit ist auch für die reellen Zahlen wieder eine lineare Anordnung gegeben, wie wir sie schon für die rationalen Zahlen kennengelernt haben (vgl. Aufgabe 1).

Aufgaben

1. Erklären Sie die Beziehungen $a < b$, $a = b$, $a > b$ zwischen Dezimalbrüchen unabhängig von ihrer Darstellung auf der Zahlengeraden nur mit Hilfe der in ihnen auftretenden Ziffern!

2. Die Irrationalzahl $\sqrt{1{,}2}$ ist mit Hilfe einer konvergierenden Folge rationaler Zahlen bzw. durch einen unendlichen Dezimalbruch darzustellen. Geben Sie die ersten vier Glieder bzw. Ziffern an!

II. Der Bereich der komplexen Zahlen

Ausgehend vom Bereich der natürlichen Zahlen sind wir durch mehrfache Erweiterung zum Bereich der reellen Zahlen gelangt. Auch in diesem Bereich sind noch nicht sämtliche Rechenoperationen uneingeschränkt durchführbar. Es ist zum Beispiel nicht möglich, die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl auszuziehen, da es keine reelle Zahl gibt, deren Quadrat negativ ist. Auch die Logarithmen negativer Zahlen existieren in diesem Bereich nicht.

Es liegt also nahe, auch über den Bereich der reellen Zahlen hinauszugehen und einen neuen Zahlenbereich zu schaffen, in dem alle sieben Rechenoperationen uneingeschränkt ausführbar sind. Da, wie wir gesehen haben, die reellen Zahlen die Punkte der Zahlengeraden bereits erschöpfen, können die Bilder der neuen Zahlen nicht mehr auf dieser Geraden liegen. Damit entfällt auch die Möglichkeit, diese Zahlen zusammen mit den reellen Zahlen linear anzuordnen. Wir sehen also, daß wir den ursprünglichen Begriff der (natürlichen) Zahl noch wesentlich mehr als bisher verallgemeinern müssen.

Aus dem Gesagten ist zu erklären, daß die historische Entwicklung verhältnismäßig lange bei den reellen Zahlen stehengeblieben ist. Bis zum Beginn der Neuzeit wurden Lösungen von Aufgaben zum Beispiel in der Form $x = \sqrt{-2}$ für unmöglich, unwirklich oder eingebildet gehalten. Dadurch ist auch die heute noch gebräuchliche Bezeichnung „imaginäre Zahlen" für derartige Lösungen entstanden, obgleich wir dabei heute nicht mehr an die ursprüngliche Bedeutung des Wortes imaginär denken. Diese Zahlen sind zusammen mit den aus ihnen entwickelten komplexen Zahlen zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel der gesamten Mathematik und ihrer Anwendungsgebiete geworden. Sie sind damit weder geheimnisvoller noch unwirklicher als die Zahlen der bisher betrachteten Bereiche.

5. Einführung der imaginären Zahlen

Wir wollen als Erweiterung des Bereiches der reellen Zahlen einen neuen Zahlenbereich finden, in dem die Rechengesetze der reellen Zahlen weitergelten und alle sieben Rechenoperationen (mit Ausnahme der Division durch Null) uneingeschränkt durchführbar sind. Dazu gehen wir schrittweise vor und betrachten zunächst die im Bereich der reellen Zahlen unlösbaren Quadratwurzeln, etwa

$$\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-4}, \quad \sqrt{-\frac{5}{9}}, \quad \sqrt{-0{,}333\ldots}, \quad \sqrt{-\pi}.$$

Sie alle sind von der Form $\sqrt{-a}$ mit irgendeiner positiven reellen Zahl a. Diese im alten Bereich unlösbaren Rechenaufgaben führen wir als neue Zahlen ein; wir nennen sie **imaginäre Zahlen**. Ein solches Vorgehen entspricht genau unserem Vorgehen bei jeder der bisher besprochenen Erweiterungen von Zahlenbereichen. Die imaginären Zahlen entstehen also völlig auf die gleiche Art wie zum Beispiel die negativen oder irrationalen Zahlen. Wir müssen noch wie bei den bisher betrachteten Erweiterungen feststellen, wie mit diesen imaginären Zahlen umzugehen, das heißt zu rechnen ist.

Nach dem Permanenzprinzip sollen auch im neuen Zahlenbereich die Rechengesetze der reellen Zahlen gelten. Wir können daher wegen

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

alle imaginären Zahlen $\sqrt{-a}$ mit $a > 0$ umformen[1]):

$$\sqrt{-a} = \sqrt{(+a) \cdot (-1)} = \sqrt{+a} \cdot \sqrt{-1}.$$

[1]) Beachten Sie, daß $\sqrt{a}$ eine Rechenanweisung ist, eine abgekürzte Schreibweise für die Lösungen der Gleichung $x^2 = a$, von denen bekanntlich bei $a > 0$ im Bereich der reellen Zahlen stets genau zwei existieren! Desgleichen ist die Formel $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ als eine Relation zwischen diesen Rechenanweisungen aufzufassen. Beim Einsetzen konkreter Zahlen ist daher auf die Doppeldeutigkeit der Lösungen (Vorzeichen) zu achten.

Da $\sqrt{+a}$ stets zwei reelle Lösungen hat, werden damit alle imaginären Zahlen zu reellzahligen Vielfachen von $\sqrt{-1}$, das heißt, alle im Bereich der reellen Zahlen unlösbaren Aufgaben $\sqrt{-a}$ werden auf eine, nämlich $\sqrt{-1}$, zurückgeführt.

Eine Lösung der Aufgabe $\sqrt{-1}$ (von denen der neue Bereich ja wenigstens eine enthalten muß) sei i. Mit

$$i^2 = -1$$

ist aber auch

$$(-i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1.$$

Wir schreiben also

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

und nennen i die imaginäre Einheit. Damit sind alle imaginären Zahlen reellzahlige Vielfache der **imaginären Einheit** i.

Aufgaben

1. Die folgenden imaginären Zahlen sind nach dem Beispiel

$$\sqrt{-4} = \sqrt{+4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2 \cdot i$$

als reellzahlige Vielfache der imaginären Einheit i zu schreiben:

$$\sqrt{-9}, \quad \sqrt{-7}, \quad \sqrt{-1}, \quad \sqrt{-\frac{5}{9}}, \quad \sqrt{-\frac{16}{25}}, \quad \sqrt{-\pi}, \quad \sqrt{-18\pi}.$$

2. Die gleiche Umformung wie in Aufgabe 1 ist für $\sqrt{-a^2}$ durchzuführen und das Ergebnis zu erläutern.

3. Es sind die folgenden rein-quadratischen Gleichungen zu lösen:

$$x^2 + 16 = 0, \quad x^2 + 3 = 0, \quad x^2 + 1 = 0, \quad x^2 - 16 = 0,$$
$$x^2 + 9 = 0, \quad x^2 + \frac{1}{7} = 0, \quad x^2 - 5 = 0, \quad x^2 = 0.$$

Was kann man über die Anzahl der Wurzeln jeder dieser Gleichungen aussagen?

4. Die folgenden reellen bzw. imaginären Zahlen sind als Quadratwurzeln zu schreiben:

$$+2, \quad -2, \quad +2 \cdot i, \quad -2 \cdot i, \quad -7, \quad +3 \cdot i,$$
$$-\pi \cdot i, \quad -i, \quad +a, \quad -a, \quad +a \cdot i, \quad -a \cdot i.$$

(a ist eine beliebige reelle Zahl.)

5. Die Gleichung $x^4 - 16 = 0$ hat zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Geben Sie diese an und bilden Sie ähnliche Beispiele!

Anleitung: Es ist $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$.

6. Das Rechnen mit imaginären Zahlen

Wir wollen zunächst imaginäre Zahlen miteinander und mit reellen Zahlen multiplizieren. Da nach dem Permanenzprinzip die gleichen formalen Rechengesetze wie für reelle Zahlen gelten sollen, macht dies keinerlei Schwierigkeiten. Man muß nur berücksichtigen, daß wegen

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

stets für $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ zu setzen ist.

Es ist also

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = +1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = +1 \cdot i = i \quad \text{usw.}$$

oder allgemein

$$i^{4n} = +1$$
$$i^{4n+1} = +i$$
$$i^{4n+2} = -1$$
$$i^{4n+3} = -i$$
mit $n = 0;\ 1;\ 2;\ \cdots$

Mit Hilfe dieser Gesetzmäßigkeit kann man die folgenden Produkte ausrechnen:

$$3 \cdot (5 \cdot i) = (3 \cdot 5) \cdot i = 15 \cdot i$$
$$(3 \cdot i) \cdot (5 \cdot i) = (3 \cdot 5) \cdot i^2 = 15 \cdot (-1) = -15$$
$$(3 \cdot i) \cdot (5 \cdot i) \cdot (2 \cdot i) = (3 \cdot 5 \cdot 2) \cdot i^3 = 30 \cdot (-i) = -30 \cdot i$$
$$a \cdot (b \cdot i) = (a \cdot b) \cdot i$$
$$(a \cdot i) \cdot (b \cdot i) = (a \cdot b) \cdot i^2 = -(a \cdot b).$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir im folgenden den Multiplikationspunkt vor der imaginären Einheit i meist weglassen, also statt $3 \cdot i$ einfach $3i$, statt $a \cdot i$ einfach ai schreiben.

Als nächstes wollen wir Divisionsaufgaben mit reellen und imaginären Zahlen lösen. Auch da ergeben sich wegen der Permanenz der Rechengesetze aus

$$i \cdot i = -1 \quad \text{die Formeln} \quad i = \frac{-1}{i} \quad \text{und} \quad -i = \frac{1}{i}.$$

Wir können also die folgenden Brüche umformen:

$$\frac{15\,i}{3} = \frac{15}{3}\,i = 5\,i,$$

$$\frac{7}{3\,i} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{i} = \frac{7}{3}(-i) = -\frac{7}{3}\,i,$$

$$\frac{8\,i}{4\,i} = \frac{8}{4} \cdot \frac{i}{i} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Bei der Addition und Subtraktion wollen wir uns zunächst auf solche Aufgaben beschränken, die nur imaginäre Zahlen enthalten. Man kann, da auch im neuen Bereich das distributive Gesetz gelten soll, die imaginäre Einheit ausklammern. So gilt zum Beispiel:

$$5i + 7i = 5 \cdot i + 7 \cdot i = (5 + 7) \cdot i = 12i,$$

$$17i - 19i = 17 \cdot i - 19 \cdot i = (17 - 19) \cdot i = -2i.$$

Allgemein ist

$$ai + bi = (a + b)i.$$

Aufgaben

1. Die folgenden Aufgaben sind zu lösen:

a) $3i \cdot 16$; $\quad 10i \cdot 7 \cdot 5i$; $\quad 16 \cdot \frac{5}{2} i$; $\quad \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot i$; $\quad 5 \cdot \sqrt{-25}$;

$3i \cdot \sqrt{-8}$; $\quad \sqrt{-12} \cdot \sqrt{-\frac{1}{4}}$; $\quad \frac{1}{30} \cdot \frac{15}{3} i \cdot \sqrt{-\sqrt[3]{8}}$; $\quad (\sqrt{-5})i \cdot (\sqrt{-9})i$.

b) Welche Grundgesetze der Multiplikation werden zur Lösung der Aufgaben verwendet?

2. Begründen Sie, weshalb das Produkt zweier reeller Zahlen reell, das Produkt einer reellen mit einer imaginären Zahl imaginär, das Produkt zweier imaginärer Zahlen reell ist!

3. Stellen Sie eine Tabelle auf, die die Potenzen von i mit negativen Exponenten von i^{-1} bis i^{-8} enthält!

4. Die folgenden Brüche sind zu vereinfachen:

$\frac{3}{7i}$; $\quad \frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{3}}$; $\quad \frac{17}{\sqrt{-7}}$; $\quad \frac{10i}{\sqrt{-2}} \cdot 5i$; $\quad \frac{1}{\sqrt{-\pi}} \cdot \frac{3\pi}{2i}$; $\quad \frac{a}{bi}$; $\quad \frac{ai}{b}$; $\quad \frac{ai}{bi}$.

5. Es ist zu berechnen:

$\frac{5}{3} i - \frac{3}{2} i + \frac{5}{6} i$; $\quad 15i - \sqrt{-3}$; $\quad \frac{\sqrt{-2} + 7i}{15i}$; $\quad \frac{3i}{5i} + \frac{\sqrt{-4} + \sqrt{-9}}{25i}$;

$\sqrt{-\frac{1}{4}} + 4i - \sqrt{-\frac{3}{8}}$; $\quad 5 \cdot \sqrt{-\frac{4}{3}} + \frac{10}{3i}$.

6. Berechnen Sie

$\frac{4}{7} i - \frac{3}{4} i + \sqrt{-2}$; $\quad \sqrt{-\frac{1}{4}} - 3i - \sqrt{-\frac{1}{9}}$; $\quad 4 \cdot \sqrt{-\frac{4}{9}} - \frac{5}{6i} + \frac{6}{9} i$!

7. Wodurch unterscheidet sich die Aufgabe

$$17i + \frac{3i}{\sqrt{-5}}$$

von den unter Nummer 5 angegebenen Aufgaben?

7. Einführung der komplexen Zahlen

Wir müssen nun noch untersuchen, zu welchem Ergebnis wir bei der Addition bzw. Subtraktion von reellen und imaginären Zahlen gelangen. Auch diese Rechenoperationen müssen sich in dem angestrebten neuen Zahlenbereich ausführen lassen. Versuchen wir aber, eine reelle Zahl und eine imaginäre Zahl zu addieren, etwa

$$3 + 5i$$

oder allgemein

$$a + bi, \qquad (a \neq 0;\ b \neq 0),$$

so kann das Ergebnis weder eine reelle noch eine imaginäre Zahl sein.

Wäre nämlich $a + bi = c$ mit irgendeiner geeigneten reellen Zahl c, so folgte nach dem Permanenzprinzip, daß

$$bi = c - a,$$

also reell sein müßte, was doch nicht der Fall ist.

Analog folgte aus $a + bi = di$, daß a imaginär sein müßte.

Damit ergibt sich eine weitere Notwendigkeit: Es genügt nicht, den Bereich der reellen Zahlen nur mit den zum Quadratwurzelausziehen notwendigen imaginären Zahlen zu erweitern. Wir müssen vielmehr auch alle Summen

$$\boldsymbol{a + bi}$$

einer beliebigen reellen Zahl a und einer beliebigen imaginären Zahl bi als voneinander verschiedene Zahlen des neuen Bereiches ansehen.[1]) Ihrer zusammengesetzten Form wegen werden sie **komplexe Zahlen** genannt, wobei man die reelle Zahl a als den **Realteil**, die reelle Zahl b als den **Imaginärteil** der komplexen Zahl $a + bi$ bezeichnet. Die Gesamtheit aller komplexen Zahlen, das heißt also aller Ausdrücke $a + bi$ mit beliebigem reellem a und beliebigem reellem b, bildet bereits den von uns gesuchten neuen Zahlenbereich. Er enthält insbesondere auch alle reellen und alle imaginären Zahlen. Für reelle Zahlen ist nämlich $b = 0$ und für imaginäre $a = 0$. Wir werden sehen, daß in diesem Bereich alle sieben Grundrechenoperationen uneingeschränkt ausführbar sind.

Aufgaben

1. Es ist Realteil und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen zu nennen:

$3 + 5i$; $\quad 4 + i$; $\quad -5 + 2i$; $\quad \frac{1}{3} + (-4)i$; $\quad \frac{1}{3} - 4i$;

$-12 - 8i$; $\quad 1 + i$; $\quad x - yi$; $\quad 0 + 3i$; $\quad \frac{1}{2} + 0i$.

2. Das Ergebnis der Aufgabe 7 im vorigen Abschnitt ist eine komplexe Zahl. Geben Sie ihren Realteil und ihren Imaginärteil an!

3. Die folgenden Zahlen sind als komplexe Zahlen zu schreiben:

17; $\quad 17i$; $\quad 0{,}33\,i$; $\quad \sqrt{-5}$; $\quad \frac{538}{5}$; $\quad \frac{3i}{\sqrt{-4}}$; $\quad -1$; $\quad i$; $\quad -i$; $\quad 0$.

---

[1]) Es bedeutet also $a + bi = c + di$ stets $a = c$ und $b = d$. Insbesondere ist demnach $a + bi = 0$ gleichwertig mit $a = b = 0$.

8. Die Rechenoperationen erster und zweiter Stufe im Bereich der komplexen Zahlen

Nach dem Permanenzprinzip sollen alle Rechengesetze, die wir für den Bereich der reellen Zahlen kennengelernt haben, auch für den Bereich der komplexen Zahlen gelten. Dazu müssen wir die Summe und das Produkt zweier komplexer Zahlen geeignet festsetzen, das heißt auf Rechnungen mit reellen Zahlen zurückführen. Wir werden sehen, daß man dabei unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ so verfahren kann, als ob alle vorkommenden Ausdrücke reell wären. Mit den auf diese Weise gewonnenen Erklärungen für Summe und Produkt gelten dann tatsächlich im Bereich der komplexen Zahlen die gleichen Rechengesetze wie im Bereich der reellen Zahlen.

Um eine geeignete Erklärung für die Summe zweier komplexer Zahlen

$$(a + b\,i) + (c + d\,i)$$

zu finden, ersetzen wir die imaginäre Einheit i durch eine reelle Zahl x und erhalten

$$(a + b\,x) + (c + d\,x)\,.$$

Dann gilt

$$(a + b\,x) + (c + d\,x) = a + c + b\,x + d\,x = (a + c) + (b + d)\,x\,.$$

Entsprechend setzen wir bei der ursprünglichen Aufgabe

$$(a + b\,i) + (c + d\,i) = a + c + b\,i + d\,i = (a + c) + (b + d)\,i$$

und erklären:

Komplexe Zahlen werden addiert, indem die Realteile und die Imaginärteile für sich addiert werden.

Damit ist die Summe zweier komplexer Zahlen stets wieder eine eindeutig bestimmte komplexe Zahl. Diese Formulierung ist auch dann richtig, wenn in besonderen Fällen das Ergebnis reell oder imaginär ausfällt. Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, sind ja die reellen Zahlen die komplexen Zahlen $a + b\,i$ mit $b = 0$, die imaginären Zahlen die komplexen Zahlen $a + b\,i$ mit $a = 0$.

Die Addition komplexer Zahlen ist kommutativ und assoziativ (vgl. Aufg. 3). Sie ist aber auch umkehrbar, denn zu zwei komplexen Zahlen

$$(a + b\,i) \quad \text{und} \quad (c + d\,i)$$

gibt es stets eine Differenz

$$(a + b\,i) - (c + d\,i) = (a - c) + (b - d)\,i\,,$$

die als komplexe Zahl der Gleichung

$$(c + d\,i) + ((a - c) + (b - d)\,i) = (a + b\,i)$$

genügt.

Komplexe Zahlen werden also subtrahiert, indem die Realteile und die Imaginärteile für sich subtrahiert werden.

Bevor wir zur Multiplikation übergehen, wollen wir noch eine Begriffsbildung kennenlernen, die beim Rechnen mit komplexen Zahlen häufig verwendet wird. Zu jeder komplexen Zahl $a + bi$ gibt es eine komplexe Zahl $a - bi$. Beide unterscheiden sich also nur durch das Vorzeichen der Imaginärteile und werden **konjugiert komplex** genannt. Es ist auch üblich, die eine Zahl den konjugiert komplexen Wert der anderen zu nennen.

Auf Grund der bisher besprochenen Gesetze für komplexe Zahlen gilt

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$

und

$$(a + bi) - (a - bi) = 2bi.$$

Die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen ist also reell, die Differenz zweier konjugiert komplexer Zahlen imaginär.

Um eine geeignete Erklärung für das Produkt zweier komplexer Zahlen

$$(a + bi) \cdot (c + di)$$

zu finden, verfahren wir wie bei der Summe. Ersetzen wir wieder die imaginäre Einheit i durch die reelle Zahl x, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(a + bx) \cdot (c + dx) &= ac + adx + bxc + bxdx \\ &= ac + (ad + bc)x + bdx^2.\end{aligned}$$

Entsprechend setzen wir bei der ursprünglichen Aufgabe

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2.$$

Unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ erhalten wir

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

und erklären:

Komplexe Zahlen werden nach der Formel

$$\boldsymbol{(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

multipliziert.[1])

Damit ist das Produkt zweier komplexer Zahlen stets wieder eine eindeutig bestimmte komplexe Zahl. Insbesondere ist das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 + (ab - ba)i = a^2 + b^2$$

immer reell. Auf die Bedeutung von $a^2 + b^2$ werden wir später zu sprechen kommen.

---

[1]) Erst die hiermit vorgenommene Erklärung der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen stellt, streng genommen, den Ausgangspunkt für jedes Rechnen mit ihnen dar. Insofern haben die in den Abschnitten 5 und 6 vorgenommenen Rechenoperationen nur vorbereitenden Charakter. Sie sind als Spezialfälle in diesen Erklärungen enthalten.

Auch die Multiplikation komplexer Zahlen ist kommutativ und assoziativ. Dies läßt sich ohne Schwierigkeiten nachprüfen, doch wollen wir uns damit begnügen, beide Gesetze in Formeln aufzuschreiben (vgl. Aufgabe 9). Weiterhin ist die Multiplikation ebenfalls umkehrbar. Der Quotient zweier komplexer Zahlen

$$\frac{a + b\,i}{c + d\,i}$$

ist nämlich wieder eine komplexe Zahl. Wir erhalten sie dadurch, daß wir mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners erweitern:

$$\frac{a + b\,i}{c + d\,i} = \frac{(a + b\,i)\,(c - d\,i)}{(c + d\,i)\,(c - d\,i)} = \frac{(a\,c + b\,d) + (b\,c - a\,d)\,i}{c^2 + d^2}.$$

Damit wird der Nenner $c^2 + d^2$ reell. Dividieren wir Realteil und Imaginärteil des Zählers für sich durch den jetzt reellen Nenner, so entsteht die komplexe Zahl

$$\frac{a\,c + b\,d}{c^2 + d^2} + \frac{b\,c - a\,d}{c^2 + d^2}\,i\,,$$

deren Produkt mit $c + di$ genau $a + bi$ ergibt (vgl. Aufgabe 11).

Dieser Übergang ist immer durchführbar, es sei denn, daß $c^2 + d^2 = 0$, das heißt also $c = d = 0$ ist (vgl. Aufgabe 12).

Im Bereich der komplexen Zahlen ist also jede Division, mit Ausnahme der durch 0, ausführbar.

Wir haben damit gelernt, sämtliche vier Rechenoperationen erster und zweiter Stufe mit komplexen Zahlen vorzunehmen. Sie genügen den bereits aus den anderen Zahlenbereichen bekannten Rechengesetzen, denn außer den schon bei Addition und Multiplikation erwähnten Grundgesetzen gilt auch das beide Operationen verbindende distributive Gesetz (Aufgabe 13).

Wenn wir den Bereich der komplexen Zahlen mit dem Bereich der reellen Zahlen und dem Bereich der rationalen Zahlen vergleichen, erkennen wir: Solange wir nur die Rechenoperationen erster und zweiter Stufe betrachten, sind alle drei Zahlenbereiche bezüglich der dabei gültigen Rechengesetze gleich geartet. In jedem der drei Bereiche ist die Summe zweier Zahlen wieder eine bestimmte Zahl des Bereiches. Die Addition ist kommutativ und assoziativ und innerhalb jedes der drei Bereiche umkehrbar, das heißt, jede Subtraktionsaufgabe ist lösbar. Dies gilt sowohl für die Summe bzw. Differenz von rationalen Zahlen wie für die von reellen Zahlen als auch für die von komplexen Zahlen, wobei natürlich der Bereich der reellen Zahlen auch alle rationalen, der Bereich der komplexen Zahlen auch alle reellen Zahlen enthält.

Gleiches gilt für die Multiplikation in jedem der drei Bereiche. Sie ist stets eindeutig ausführbar, kommutativ, assoziativ und bis auf die Division durch Null umkehrbar. Schließlich gelten in jedem der drei Bereiche das distributive Gesetz und damit alle aus den Grundgesetzen folgenden Rechenregeln.

Anders wird es freilich, wenn wir die Rechenoperationen dritter Stufe betrachten. Zwar ist das Potenzieren mit einer natürlichen Zahl als Exponenten, das ja nichts anderes ist als eine Zusammenfassung von Multiplikationen, in allen drei Bereichen immer ausführbar und genügt den gleichen Gesetzen. Die beiden Umkehroperationen sind dagegen im Bereich der rationalen Zahlen nur in speziellen Fällen, im Bereich der reellen Zahlen für alle positiven Zahlen, im Bereich der komplexen Zahlen stets ausführbar.

Zunächst wollen wir uns mit den komplexen Zahlen etwas vertrauter machen. Die reellen Zahlen konnten wir als Punkte einer Zahlengeraden veranschaulichen. Eine solche lineare Anordnung ist, wie wir bereits wissen, für komplexe Zahlen nicht mehr möglich, da die reellen Zahlen schon alle Punkte der Zahlengeraden erschöpfen. Die komplexen Zahlen können aber durch eine zweidimensionale Anordnung als Punkte einer Ebene veranschaulicht werden. Diese Veranschaulichung wurde von Carl Friedrich Gauß eingeführt. Sie heißt deshalb **Gaußsche Zahlenebene**.

Aufgaben

1. Berechnen Sie

a) $(5+3i)+(7+2i)$; $(17-4i)+(3+2i)$; $(-8+4i)+(4-3i)$;

b) $(0{,}75+2i)+(-0{,}5-0{,}5i)$; $3i+(4-i)$; $(17+5i)+(4-5i)$;

c) $(5+2i)+(-3-2i)+(4-7i)$; $(-4+3i)+5i$; $5+(17-2i)$;

d) $(8-2i)+(2+2i)$; $(17-i)+i$; $(8+3i)+(-8+i)$;

e) $(125+3i)+(-10+i)+(2-4i)$; $(-4-i)+(4+17i)$; $(-8+3i)+8$;

f) $(2+3i)+17+(-19+2i)$; $(a+bi)+(a-bi)$; $(a+bi)+(-a+bi)$!

2. Erklären Sie, wieso die Addition komplexer Zahlen auf Rechenoperationen mit reellen Zahlen zurückgeführt wird!

3. Geben Sie das kommutative und das assoziative Gesetz der Addition für komplexe Zahlen als Formeln an! Begründen Sie die Gültigkeit dieser Gesetze!

4. a) $(12+3i)-(4+2i)$ $(8+2i)-(3+6i)$ $(17+2i)-9i$

b) $(12+7i)-8$ $(6+3i)-(9-2i)$ $(3+2i)-(-4+i)$

c) $(a+bi)-(a-bi)$ $(a+bi)-(-a+bi)$ $(a+bi)-(-a-bi)$

5. a) Zu den folgenden komplexen Zahlen sind die konjugiert komplexen Zahlen zu bilden.

$4+2i$	$1-2i$	$5+i$	$0{,}5-0{,}75i$	$-4+2i$
$4-2i$	$a-bi$	$3a+2bi$	$17i$	i

b) Aus den jeweils zueinander konjugiert komplexen Zahlen sind die Summe und die Differenz zu bilden.

6. Der folgende Satz ist zu begründen: Eine komplexe Zahl ist reell, wenn sie mit ihrer konjugiert komplexen Zahl zusammenfällt, und umgekehrt.

7. Die entsprechenden Betrachtungen wie bei Aufgabe 2 sind für die Multiplikation durchzuführen.

8. a) $(4+2i)\cdot(5+3i)$ $\quad(4-i)\cdot(3+3i)$ $\quad(0{,}5i-7)\cdot(8-2i)$

b) $(3+2i)\cdot(3-2i)$ $\quad(-5+i)\cdot(-2-0{,}75i)$ $\quad(2-i)\cdot(2+i)$

c) $(-8+2{,}5i)\cdot(-8-2{,}5i)$ $\quad(-1-i)\cdot(-1+i)$ $\quad(-3+4i)\cdot(6+2i)$

d) $(5+2i)\cdot(4-3i)\cdot(-7-i)$ $\quad(-5-i)\cdot(1+3i)\cdot 2i$ $\quad(2-i)\cdot(9+i)$

9. Schreiben Sie das kommutative und das assoziative Gesetz der Multiplikation für komplexe Zahlen als Formeln!

10. Berechnen Sie

a) $\dfrac{10+10i}{2+4i}$; b) $\dfrac{1-2i}{2+i}$; c) $\dfrac{-33-21i}{9-2i}$; d) $\dfrac{5-3i}{5+3i}$; e) $\dfrac{17-i}{\sqrt{-9}}$;

f) $\dfrac{\sqrt{-2}}{3-2i}$; g) $\dfrac{a+bi}{a-bi}$; h) $\dfrac{14xy+(4y^2-6x^2)i}{3x+yi}$!

11. Es ist die im Text Seite 79, Zeile 12 aufgestellte Behauptung durch Ausrechnen nachzuweisen.

12. Bei dem im Text verwendeten Schluß, daß mit $c^2+d^2=0$ auch $c=d=0$ gilt, ist Voraussetzung, daß c und d als Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl reell sind. An Beispielen ist zu zeigen, daß die Quadratsumme zweier komplexer Zahlen Null sein kann, ohne daß die beiden Zahlen Null sind.

13. Berechnen Sie

$$(3+2i)\cdot[(5-i)+(1+3i)]$$

entsprechend dem distributiven Gesetz auf zwei verschiedene Arten und vergleichen Sie beide Ergebnisse. Es ist auch das distributive Gesetz für komplexe Zahlen als allgemeine Formel zu schreiben.

Entsprechend ist zu berechnen:

a) $(7-4i)\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{7}i\right)+\left(5-\frac{3}{7}i\right)\right]$ $\quad$ b) $(5+2i)\cdot[(-3+i)-(2-2i)]$

c) $(-4+3i)\cdot[2i+(4-7i)]$ $\quad$ d) $9i\cdot\left[(5+2i)-\frac{1}{3}i\right]$

9. Die Gaußsche Zahlenebene

Wie wir wissen, entspricht jedem Punkt der Zahlengeraden eine reelle Zahl und umgekehrt. Dabei ist diese Zuordnung schon durch die Wahl der Einheitsstrecke von 0 bis +1 festgelegt. Um dies einzusehen, brauchen wir nur jeder reellen Zahl den Vektor vom Ursprung O bis zu dem mit ihr bezeichneten Punkt zuzuordnen. Jeder reellen Zahl $a=a\cdot 1$ entspricht dann das a-fache des Einheitsvektors.

Entsprechend können wir alle imaginären Zahlen auf einer Geraden veranschaulichen, indem wir jede imaginäre Zahl $b\cdot i$ als das b-fache der imaginären Einheit i

auffassen. Die so aus der „imaginären Einheitsstrecke" von 0 bis i entstehende Gerade wählen wir senkrecht zur Zahlengeraden mit dem Schnittpunkt $0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot i$ (vgl. Abb. 36). Die beiden Geraden werden reelle bzw. imaginäre Achse genannt.

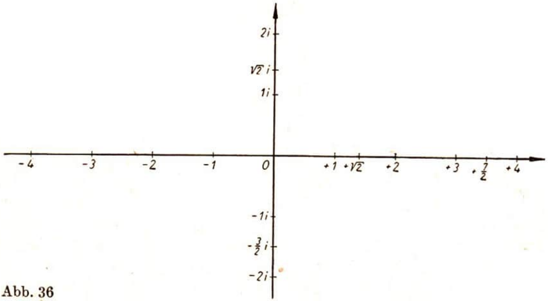


Abb. 36

Die eine veranschaulicht alle reellen, die andere alle imaginären Zahlen. Die Zahl Null ist die einzige, die als reelle und zugleich als imaginäre Zahl aufgefaßt werden kann.

Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, daß man jeden Punkt einer Ebene eindeutig durch ein Paar reeller Zahlen (Abszisse und Ordinate) kennzeichnen kann und daß umgekehrt jedem solchen Zahlenpaar eindeutig ein Punkt dieser Ebene entspricht. Andererseits ist jede komplexe Zahl

$$a + bi$$

durch die beiden reellen Zahlen a und b eindeutig festgelegt, und umgekehrt gibt es zu jedem Paar reeller Zahlen a und b genau eine komplexe Zahl $a + bi$. Beides zusammen bedeutet, daß durch die Konstruktion, wie sie die Abbildung 37 darstellt, jeder komplexen Zahl $a + bi$ genau ein Punkt der durch die reelle und imaginäre Achse aufgespannten Gaußschen Zahlenebene zugeordnet wird. Auf diese Weise entspricht also jedem Punkt der Zahlenebene eindeutig eine komplexe Zahl und jeder komplexen Zahl eindeutig ein Punkt der Zahlenebene. Die Punkte der reellen und der imaginären Zahlen fallen dabei auf die beiden Achsen. Die Abbildung 38 gibt dazu einige Beispiele.

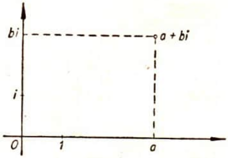


Abb. 37

Die Veranschaulichung der komplexen Zahlen als Punkte der Gaußschen Zahlenebene erweist sich auch für das praktische Rechnen mit ihnen oft als vorteilhaft. So können wir zum Beispiel die Addition komplexer Zahlen zeichnerisch ausführen, indem wir die Strecken wie Vektoren aneinanderfügen, die vom Nullpunkt zu den die komplexen Zahlen darstellenden Punkten führen (vgl. Abb. 39). Bei der Subtraktion kann man entsprechend verfahren (vgl. Abb. 40). Das darf uns jedoch nicht

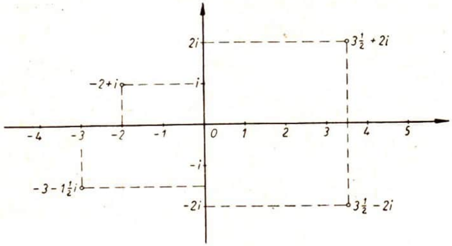


Abb. 38

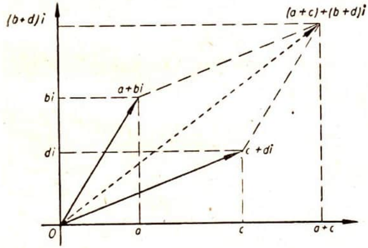


Abb. 39

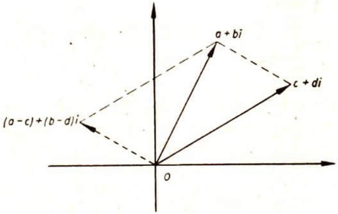


Abb. 40

dazu veranlassen, die komplexen Zahlen selbst mit den Vektoren einer Ebene zu verwechseln. Komplexe Zahlen sind arithmetische oder algebraische Rechengrößen. Sie werden durch Punkte veranschaulicht, und die Verbindungsstrecken dieser Punkte zum Nullpunkt verhalten sich bezüglich Addition und Subtraktion wie Vektoren. Schon für die Multiplikation komplexer Zahlen gelten andere Gesetze als für die Multiplikation von Vektoren, so daß kein Vergleich möglich ist.

Aufgaben

1. Es ist zu untersuchen, welchen Punkten der Gaußschen Zahlenebene die folgenden komplexen Zahlen entsprechen.

$3+4i$	$0{,}5-2i$	$-0{,}5-3i$	$-7+5i$	$1+i$
$\sqrt[3]{5\cdot i}$	$\sqrt{-8}$	π	πi	0

2. Nach dem Vorbilde der analytischen Geometrie teilt man auch die Gaußsche Zahlenebene in vier Quadranten ein. Welche Vorzeichen haben Real- und Imaginärteil in diesen vier Quadranten?

3. Wo liegen alle komplexen Zahlen mit gleichem Realteil, wo die mit gleichem Imaginärteil?

4. Wie liegen konjugiert komplexe Zahlen zueinander?

5. Welchen Punkten der Gaußschen Zahlenebene entsprechen die komplexen Zahlen $a + bi$ mit $a = b$?

6. Wo liegen diejenigen komplexen Zahlen $a + bi$, für die die Gleichung $a^2 + b^2 = 1$ erfüllt ist?

7. Die folgenden Aufgaben sind zeichnerisch zu lösen und die Ergebnisse rechnerisch nachzuprüfen:

$(3 + 2i) + (4 + i)$; $(2 - i) - (3 + 3i)$; $5i + (4 - i)$; $(-3 + 2i) + (3 + 2i)$;
$(2 + i) + (2 - i)$; $(2 + i) - (2 - i)$; $(4 + 3i) - 6$; $6i - 5$.

III. Rechenoperationen im Bereich der komplexen Zahlen

10. Die trigonometrische Form der komplexen Zahlen

Wir haben die komplexen Zahlen in der sogenannten „arithmetischen Form" $a + bi$ als alle möglichen Summen reeller und imaginärer Zahlen kennengelernt. Ihre Veranschaulichung in der Gaußschen Zahlenebene führt uns zu einer anderen Schreibweise, die die „trigonometrische Form" der komplexen Zahlen genannt wird und die für die Durchführung der Rechenoperationen zweiter und dritter Stufe vorteilhafter ist.

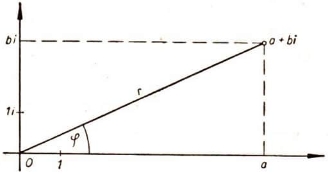


Abb. 41

Jeder komplexen Zahl $a + bi$ entspricht genau ein Punkt der Gaußschen Zahlenebene. Analytisch betrachtet sind dabei a und b die Cartesischen Koordinaten dieses Punktes. Gehen wir von ihnen zu Polarkoordinaten (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 11. Schuljahr, Seite 191ff.) über, so erhalten wir zwei andere Bestimmungsstücke, r und φ, die diesen Punkt ebenfalls eindeutig kennzeichnen (vgl. Abb. 41).

Durch die Formeln[1])

$$r = {}_{+}\sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$$

und

$$a = r \cdot \cos\varphi, \qquad b = r \cdot \sin\varphi$$

[1]) Das tiefgestellte Pluszeichen vor der Wurzel bedeutet, daß die Wurzel positiv auszuziehen ist.

lassen sich r und φ eindeutig aus a und b bestimmen und umgekehrt. Wir können daher die komplexe Zahl $a + bi$ durch r und φ ausdrücken:

$$\boldsymbol{a + bi = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).}$$

Man nennt r den **Betrag**, φ das **Argument** und $r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ die **trigonometrische Form der komplexen Zahl.** Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen ist das Argument φ nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt. Der Betrag r ist dabei die positive Wurzel aus dem Produkt der komplexen Zahl mit ihrem konjugiert komplexen Wert:

$$r = {}_{+}\sqrt{(a + bi) \cdot (a - bi)} = {}_{+}\sqrt{a^2 + b^2},$$

wofür man auch

$$\boldsymbol{r = |a + bi|}$$

schreibt. Diese Definition des Betrages einer komplexen Zahl steht nicht im Widerspruch zur Definition des Betrages einer reellen Zahl. Für $b = 0$ ist nämlich die komplexe Zahl $a + bi$ gleich der reellen Zahl a und ihr Betrag $r = |a + bi| = |a|$ der Betrag dieser reellen Zahl.

Aufgaben und Übungen

1. Welche komplexen Zahlen haben den gleichen Betrag, welche das gleiche Argument?

2. Welche Besonderheit gilt für die Null als komplexe Zahl in trigonometrischer Form?

3. Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in ihrer anderen Form an:

a) $3 + 4i$; **b)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \sqrt{3}$; **c)** $2 - 2i$;

d) $-\sqrt{3} - 3i$; **e)** $5i$; **f)** -1;

g) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)$; **h)** $\sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{4}\right)$;

i) $7(\cos\pi + i \cdot \sin\pi)$; **k)** $\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$;

l) $\frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{3}\right)$; **m)** $10(\cos 53{,}1^\circ + i \cdot \sin 53{,}1^\circ)$;

n) $9(\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ)$!

11. Multiplikation und Division komplexer Zahlen in trigonometrischer Form

Sind zwei komplexe Zahlen in arithmetischer Form gegeben, so lassen sie sich mühelos addieren und subtrahieren, während die Multiplikation und erst recht die Division einige Rechnungen erfordern. Diese Rechenoperationen lassen sich mit komplexen Zahlen in trigonometrischer Form leichter durchführen. Es gilt nämlich, wie wir weiter unten beweisen,

$$\{r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)\} \cdot \{r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)\}$$
$$= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

und

$$\{r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)\} : \{r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)\}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Zwei komplexe Zahlen in trigonometrischer Form multipliziert man also, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert. Man dividiert sie, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Argumente subtrahiert. Man muß nur beachten, daß sich bei der Addition bzw. Subtraktion der Argumente Werte ergeben können, die außerhalb des Winkelbereiches von 0 bis 2π liegen. Da negative Winkel oder Winkel größer als 2π auf Winkel im Bereich von 0 bis 2π zurückgeführt werden können, wird in einem solchen Falle das neue Argument um $+2\pi$ oder um -2π abgeändert.

Wir wollen nun die behaupteten Formeln beweisen. Zunächst ist

$$\{r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)\} \cdot \{r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)\}$$
$$= r_1 \cdot r_2([\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2] + i[\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2]).$$

Nach den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen ist aber

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

woraus bereits die behauptete Formel für das Produkt folgt.

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Multiplizieren wir den Ausdruck $\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ mit $r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$, so erhalten wir nach der eben bewiesenen Formel

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot r_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2)) = r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1).$$

Da der Quotient zweier komplexer Zahlen eindeutig bestimmt ist, ist die Richtigkeit der zweiten Formel ebenfalls gezeigt.

Die Multiplikation und die Division komplexer Zahlen in trigonometrischer Form lassen sich in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulichen (vgl. Abb. 42 und Abb. 43).

Der dem Produkt zugeordnete Punkt liegt auf dem Strahl, dessen Argument die Summe der Winkel φ_1 und φ_2 ist, und hat den Betrag $r_1 \cdot r_2$ als Abstand vom Null-

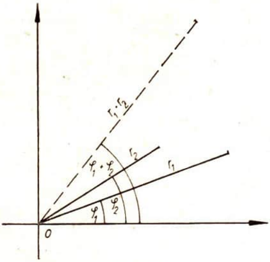


Abb. 42

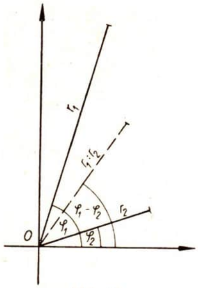


Abb. 43

punkt. Da nach dem Strahlensatz die entsprechenden Seiten ähnlicher Dreiecke einander proportional sind, gilt

$$(r_1 \cdot r_2) : r_1 = r_2 : 1 ;$$

also kann die Länge $r_1 \cdot r_2$ konstruiert werden (vgl. Abb. 44). Wir verbinden den der Zahl $r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ zugeordneten Punkt Z_1 mit dem die 1 darstellenden Punkt E und erhalten das Dreieck OEZ_1. Der Punkt Z_2 ist das Bild der Zahl $r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$. Die freien Schenkel der in O und Z_2 an $\overline{OZ_2}$ angelegten Winkel φ_1 bzw. $\sphericalangle\, OEZ_1$ schneiden einander in Z. Es ist $\triangle OEZ_1 \sim \triangle OZ_2Z$ und damit die Länge von $\overline{OZ}$ gleich dem Produkt $r_1 \cdot r_2$. Der konstruierte Punkt Z stellt also das Produkt

$$r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

dar.

Entsprechend liegt der dem Quotienten zweier komplexer Zahlen zugeordnete Punkt auf dem Strahl, dessen Argument die Differenz der Winkel φ_1 und φ_2 ist. Er

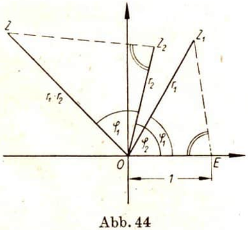


Abb. 44

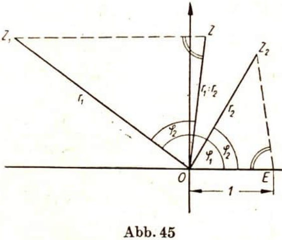


Abb. 45

hat den Betrag $\frac{r_1}{r_2}$ als Abstand vom Nullpunkt. Wir können ihn, den eben erläuterten Gedankengang umkehrend, ebenfalls konstruieren (vgl. Abb. 45).

Es ist dann $\triangle OZ_2E \sim \triangle OZ_1Z$ und wegen

$$\frac{r_1}{r_2} : 1 = r_1 : r_2$$

die Länge von $\overline{OZ}$ der Quotient $\frac{r_1}{r_2}$. Der Punkt Z stellt den Quotienten

$$\frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

dar.

Aufgaben

1. a) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$

b) $\frac{1}{2}(\cos\pi + i \cdot \sin\pi) \cdot \frac{4}{5}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $7{,}5(\cos 32^\circ + i \cdot \sin 32^\circ) \cdot 4{,}8(\cos 117^\circ + i \cdot \sin 117^\circ)$

d) $5\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{8}\right) \cdot 3{,}5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $10(\cos 53{,}1^\circ + i \cdot \sin 53{,}1^\circ) \cdot 12(\cos 342{,}7^\circ + i \cdot \sin 342{,}7^\circ)$

2. a) $\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) : 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)$

b) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) : \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$

c) $4(\cos 184^\circ + i \cdot \sin 184^\circ) : 12(\cos 254^\circ + i \cdot \sin 254^\circ)$

d) $1 : \frac{4}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{3}\right)$

e) $4i : 5(\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$

f) $-8 : \sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{4}\right)$

3. Führen Sie einige der in 1 und 2 gestellten Aufgaben zeichnerisch durch!

12. Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen, der Satz von Moivre

Die Multiplikation komplexer Zahlen in trigonometrischer Form ergibt eine übersichtliche Schreibweise für die Potenzen komplexer Zahlen. So ist zum Beispiel

$$\begin{aligned}\{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^2 &= \{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\} \cdot \{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\} \\ &= r^2(\cos 2\varphi + i \cdot \sin 2\varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^3 &= \{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^2 \cdot \{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\} \\ &= r^3(\cos 3\varphi + i \cdot \sin 3\varphi).\end{aligned}$$

Wir wollen sogleich die nach **Moivre** benannte Formel

$$\{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^n = r^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

für positive, ganzzahlige n beweisen. Wir führen einen Induktionsschluß durch und nehmen an, daß die Formel bereits für n bewiesen sei. Sie gilt dann wegen

$$\begin{aligned}\{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^{n+1} &= \{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^n \cdot \{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}\\ &= \{r^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)\} \cdot \{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}\\ &= r^n r(\cos(n\varphi + \varphi) + i \cdot (\sin n\varphi + \varphi))\\ &= r^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + i \cdot \sin(n+1)\varphi)\end{aligned}$$

auch für $n+1$. Für $n=1$ ist sie sicher richtig. Sie gilt also für alle positiven ganzzahligen n.

Es ist dabei wieder zu beachten, daß das Argument $n\varphi$ größer als 2π werden kann und dann um ganzzahlige Vielfache der Periode 2π abzuändern ist.

Satz von Moivre:

Die Formel

$$\{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^n = r^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

gilt für beliebige rationale Werte von *n*.

Beweis:

Für positive ganzzahlige n haben wir die Formel bereits als richtig erkannt. Im folgenden werden wir sie in drei Teilschritten für alle anderen rationalen Werte von n beweisen.

a) Beweis der Moivreschen Formel für negative ganzzahlige $n = -p$

Nach der Definition von Potenzen mit negativen Exponenten ist

$$\{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^{-p} = \frac{1}{\{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^p}.$$

Wir erweitern mit $(\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)^p$ und erhalten:

$$\{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^{-p} = \frac{(\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)^p}{r^p\{(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)(\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)\}^p}.$$

Da $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ ist, steht im Nenner nur r^p. Den Zähler können wir aber wegen $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$ und $-\sin\varphi = \sin(-\varphi)$ in $(\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi))^p = \cos(-p\varphi) + i \cdot \sin(-p\varphi)$ umwandeln.

Es ist also

$$\{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^{-p} = r^{-p}(\cos(-p\varphi) + i \cdot \sin(-p\varphi)).$$

Damit ist die Gültigkeit der Formel für negative ganzzahlige Exponenten bewiesen.

b) Beweis der Moivreschen Formel für positive Brüche der Form $n = \frac{1}{q}$

Wir bilden von der komplexen Zahl $r^{\frac{1}{q}}\left(\cos \frac{1}{q}\varphi + i \cdot \sin \frac{1}{q}\varphi\right)$ die q-te Potenz[1]). Es ist

$$\left\{r^{\frac{1}{q}}\left(\cos \frac{1}{q}\varphi + i \cdot \sin \frac{1}{q}\varphi\right)\right\}^q = \left(r^{\frac{1}{q}}\right)^q\left(\cos \frac{q}{q}\varphi + i \cdot \sin \frac{q}{q}\varphi\right)$$
$$= r\,(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\,.$$

Erheben wir diese Gleichung in die $\frac{1}{q}$-te Potenz, so erhalten wir mit vertauschten Seiten

$$\{r\,(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^{\frac{1}{q}} = r^{\frac{1}{q}}\left(\cos \frac{1}{q}\varphi + i \cdot \sin \frac{1}{q}\varphi\right).$$

Damit ist die Gültigkeit der Formel für Exponenten von der Form $n = \frac{1}{q}$ bewiesen.

c) Beweis der Moivreschen Formel für beliebige rationale n

Da jede rationale Zahl $n = \frac{p}{q}$ als Quotient zweier ganzer Zahlen mit $q > 0$ geschrieben werden kann, folgt aus den letzten beiden Teilschritten bereits die Gültigkeit der Moivreschen Formel für beliebige rationale n:

$$\{r\,(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^{\frac{p}{q}} = \left[\{r\,(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^{\frac{1}{q}}\right]^p = \left[r^{\frac{1}{q}}\left(\cos \frac{1}{q}\varphi + i \cdot \sin \frac{1}{q}\varphi\right)\right]^p$$
$$= r^{\frac{p}{q}}\left(\cos \frac{p}{q}\varphi + i \cdot \sin \frac{p}{q}\varphi\right).$$

Damit ist der Satz von Moivre bewiesen.

Es lassen sich also mit Hilfe der Moivreschen Formel alle Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen mit rationalen Exponenten berechnen. Wir können hier nur angeben, daß auch alle Wurzeln und Potenzen mit reellem, ja sogar mit komplexem Exponenten n innerhalb des Bereiches der komplexen Zahlen existieren. Auch für sie gilt die Moivresche Formel.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die folgenden Potenzen komplexer Zahlen einmal in der gegebenen arithmetischen Form, sodann in trigonometrischer Form nach dem Moivreschen Satz!

a) $(4 + 3\,i)^2$ **b)** $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i\sqrt{3}\right)^3$ **c)** $(2 + 2\,i)^4$

---

[1]) Dabei ist hier unter $r^{\frac{1}{q}}$ die positive reelle q-te Wurzel aus der (positiven) reellen Zahl r zu verstehen; das gilt auch im folgenden, wenn $r^{\frac{1}{q}}$ als Betrag einer in trigonometrischer Form geschriebenen komplexen Zahl auftritt.

2. Verfolgen Sie die Rechnungen der Aufgabe 1 in der Gaußschen Zahlenebene! Sprechen Sie das Ergebnis in allgemeiner Form für beliebige Potenzen aus!

3. a) $\left\{\frac{1}{2}(\cos\pi + i\cdot\sin\pi)\right\}^3$ b) $\left\{\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^7$

c) $\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^5$ d) $\left\{1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^6$

e) $\{5(\cos 10° + i\cdot\sin 10°)\}^4$ f) $\{2(\cos 127° + i\cdot\sin 127°)\}^2$

4. Berechnen Sie die folgenden Wurzeln nach dem Moivreschen Satz für gebrochene Exponenten und prüfen Sie die Resultate! Die Mehrdeutigkeit dieser Aufgaben wird erst im folgenden Abschnitt behandelt und soll vorläufig außer acht gelassen werden.

a) $\sqrt[2]{9\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)}$ b) $\sqrt[4]{32\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

c) $\sqrt[5]{32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)}$ d) $\sqrt[3]{27\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\cdot\sin\frac{3}{2}\pi\right)}$

e) $\sqrt[12]{64(\cos 144° + i\cdot\sin 144°)}$ f) $\sqrt[3]{4(\cos 260° + i\cdot\sin 260°)}$

13. Algebraische Gleichungen

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades hat die Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Die Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ können beliebige reelle oder auch komplexe Zahlen sein, wobei nur die Einschränkung $a_n \neq 0$ notwendig ist. Für die Theorie der algebraischen Gleichungen sind die komplexen Zahlen ein unentbehrliches Hilfsmittel.

So können schon bei quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten komplexe Wurzeln auftreten. Im Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, wurden für die quadratischen Gleichungen in Normalform

$$x^2 + px + q = 0$$

die Wurzeln

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

abgeleitet. Der Radikand der Quadratwurzel, die Diskriminante $D = \frac{p^2}{4} - q$, gibt an, welcher Art diese Wurzeln sind. So sind für $D > 0$ die Wurzeln x_1 und x_2 reell und voneinander verschieden, für $D = 0$ fallen beide zu einer reellen Doppelwurzel zusammen. Im Falle $D < 0$ konnten wir bisher nur feststellen, daß keine reellen Wurzeln existieren. Es wird nämlich $\sqrt{D}$ imaginär, und wir erhalten die beiden Lösungen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{\left|\frac{p^2}{4} - q\right|},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{\left|\frac{p^2}{4} - q\right|}.$$

Sie sind konjugiert komplex.

Wir können also feststellen, daß im Bereich der komplexen Zahlen eine quadratische Gleichung stets zwei Wurzeln hat, die allerdings zu einer Doppelwurzel zusammenfallen können. Dieser Satz bleibt richtig, wenn man quadratische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten betrachtet.

Für die Gleichungen dritten Grades gibt es ähnliche, jedoch schon wesentlich kompliziertere Auflösungsformeln. Sie werden nach dem italienischen Mathematiker Cardano benannt und sagen aus, daß jede Gleichung dritten Grades genau drei Wurzeln hat, von denen allerdings wieder zwei zu einer doppelten oder alle drei zu einer dreifachen Wurzel zusammenfallen können. Wir wollen dies an einigen Beispielen zeigen.

So hat die Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

die drei voneinander verschiedenen reellen Wurzeln

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

(vgl. Lehrbuch der Mathematik, 11. Schuljahr, S. 38), die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 + 2x = (x-0)(x-(1+i))(x-(1-i)) = 0$$

die reelle Wurzel $x_1 = 0$ und die beiden konjugiert komplexen Wurzeln $x_2 = 1 + i$, $x_3 = 1 - i$, die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)(x-2) = 0$$

die reelle Wurzel $x_1 = -1$ und die reelle Doppelwurzel $x_2 = x_3 = 2$ und schließlich die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)(x-1)(x-1) = 0$$

eine reelle dreifache Wurzel $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Auch bei Gleichungen dritten Grades ist also der Satz, daß es drei Wurzeln gibt, nur richtig, wenn man die komplexen Wurzeln mitberücksichtigt. Sie müssen übrigens bei einer Gleichung dritten Grades mit reellen Koeffizienten konjugiert komplex auftreten, so daß eine solche Gleichung entweder drei reelle oder eine reelle und zwei konjugiert komplexe Wurzeln hat.

Eine Verallgemeinerung dieser Behauptung ist der berühmte **Fundamentalsatz der Algebra,** der zum ersten Male von Carl Friedrich Gauß im Jahre 1799 exakt bewiesen wurde:

Jede algebraische Gleichung n-ten Grades mit reellen oder komplexen Koeffizienten hat im Bereich der komplexen Zahlen genau n Wurzeln, wenn man jede Wurzel mit ihrer Vielfachheit zählt.

Man kann also jede algebraische Gleichung n-ten Grades in n Wurzelfaktoren zerlegen:

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) = 0.$$

Dabei sind $x_1, \ldots, x_n$ die Wurzeln dieser Gleichung. Sie können reell oder komplex sein und können mehrfach auftreten. Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra setzt Kenntnisse voraus, die an der Oberschule nicht zur Verfügung stehen. Wir wollen ihn jedoch für einige Gleichungen nachprüfen.

So muß die Gleichung n-ten Grades

$$x^n - 1 = 0$$

n Wurzeln haben, die man wegen

$$x = \sqrt[n]{1}$$

die n-ten **Einheitswurzeln** nennt. Im Bereich der reellen Zahlen hat diese Gleichung aber nur die Wurzel $+1$, falls n ungerade, und die Wurzeln $+1$ und -1, falls n gerade ist. Wir wollen die komplexen Wurzeln der Gleichung ermitteln.

Dazu schreiben wir 1 als komplexe Zahl in trigonometrischer Form und wenden den Moivreschen Satz an:

$$1 = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi),$$

$$\sqrt[n]{1} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

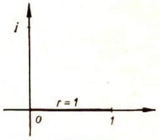


Abb. 46

Dabei ist $r = 1$. Da $r^{\frac{1}{n}}$ als Betrag einer komplexen Zahl positiv reell werden muß, ist dafür $+1$ zu wählen; das Argument φ ist zunächst 0 (vgl. Abb. 46). Dann wird aber $\frac{\varphi}{n}$ ebenfalls 0, und wir erhalten

$$\sqrt[n]{1} = 1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0) = (1 + 0 \cdot i) = 1.$$

Nun benutzen wir die Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion. Wegen $\sin 0 = \sin 2\pi$ und $\cos 0 = \cos 2\pi$ können wir auch 2π als Argument φ für die Zahl 1 wählen: Dann wird $\frac{\varphi}{n} = \frac{2\pi}{n}$ und damit

$$\sqrt[n]{1} = 1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{n}\right).$$

Diese komplexe Zahl liegt auf dem Kreis mit dem Radius 1 und dem Nullpunkt der Gaußschen Zahlenebene als Mittelpunkt, um $\frac{1}{n}$ des Vollkreises im mathematisch positiven Sinne aus der reellen Achse herausgedreht. Sie erfüllt tatsächlich die Gleichung

$$x^n = 1 .$$

Das veranlaßt uns, das Argument φ von 1 der Reihe nach als

$$\varphi = 2 \cdot 2\pi, \quad \varphi = 3 \cdot 2\pi, \ \ldots, \quad \varphi = (n-1) \cdot 2\pi$$

anzusetzen. Damit erhält man für $\sqrt[n]{1}$ die weiteren Argumente

$$\frac{\varphi}{n} = 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi}{n} = 3 \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi}{n} = (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}$$

und damit insgesamt n verschiedene Lösungen

$$\sqrt[n]{1} = 1 \cdot \left(\cos k\,\frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin k\,\frac{2\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

unserer Gleichung. Für alle anderen ganzzahligen k ergeben sich keine neuen Werte für die Wurzeln. In der Abbildung 47 sind für $n = 6$ und in der Abbildung 48 für $n = 7$ die n-ten Einheitswurzeln in der komplexen Zahlenebene dargestellt.

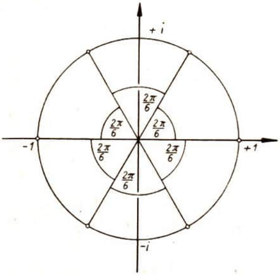


Abb. 47

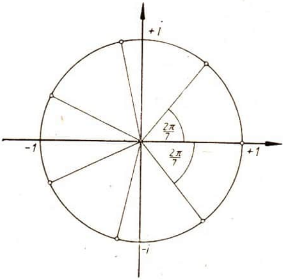


Abb. 48

Im allgemeinen Falle sind es die Eckpunkte eines in den Einheitskreis einbeschriebenen regulären n-Eckes, dessen eine Ecke im Punkte $+1$ liegt. Es bestätigt sich, daß -1 nur für gerade n Lösung ist. Die nicht reellen Wurzeln treten konjugiert komplex auf. Dieser geometrischen Bedeutung wegen nennen wir die Gleichung $x^n - 1 = 0$ auch **Kreisteilungsgleichung**.

Die gleichen Überlegungen können wir auch für die Gleichung

$$x^n - a = 0$$

mit beliebigem, positiv reellem a durchführen. Die $\sqrt[n]{a}$ muß also ebenfalls n Lösungen haben. Wir erhalten sie, wenn wir a als komplexe Zahl in trigonometrischer Form schreiben

$$a = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = a(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

und bei Anwendung des Moivreschen Satzes das Argument φ der Reihe nach als $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$, $\varphi = 2 \cdot 2\pi, \ldots, \varphi = (n-1) \cdot 2\pi$ ansetzen. Es sind dann

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}\left(\cos k\,\frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin k\,\frac{2\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

die n verschiedenen Lösungen unserer Gleichung, wobei als Betrag dieser komplexen Zahl natürlich wieder die positive reelle n-te Wurzel aus a zu setzen ist.

So hat zum Beispiel $\sqrt[3]{8}$ die drei Lösungen

$$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}\left(\cos 0 \cdot \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin 0 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = 2\,(1 + 0) = 2,$$

$$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}\left(\cos 1 \cdot \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin 1 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}\left(\cos 2 \cdot \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{3}\right),$$

die in der Abbildung 49 veranschaulicht sind.

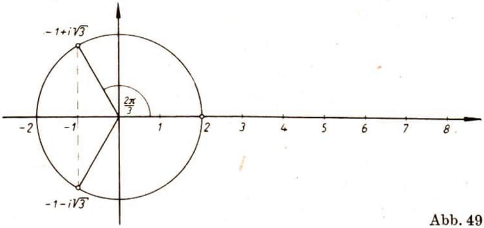


Abb. 49

Vergleichen wir das Ergebnis für $\sqrt[n]{a}$ mit dem für $\sqrt[n]{1}$, so sehen wir, daß wir alle Lösungen $\sqrt[n]{a}$ erhalten können, indem wir die positive reelle n-te Wurzel aus a mit allen n-ten Einheitswurzeln multiplizieren. Wir können sogar von irgendeiner der n Lösungen von $\sqrt[n]{a}$ ausgehen und durch Multiplikation dieser Lösung mit allen n-ten

Einheitswurzeln alle anderen erhalten. Ist nämlich α eine beliebige Lösung der $\sqrt[n]{a}$, das heißt $\alpha^n = a$, so erfüllt auch stets $\alpha \cdot \sqrt[n]{1}$ wegen

$$\left(\alpha \cdot \sqrt[n]{1}\right)^n = \alpha^n \left(\sqrt[n]{1}\right)^n = a \cdot 1 = a$$

die Gleichung $x^n = a$.

Wir wollen schließlich zeigen, daß jede komplexe Zahl

$$z_0 = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

genau n voneinander verschiedene n-te Wurzeln hat. Es sind dies die n komplexen Zahlen

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + (k-1)\cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + (k-1)\cdot 2\pi}{n}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

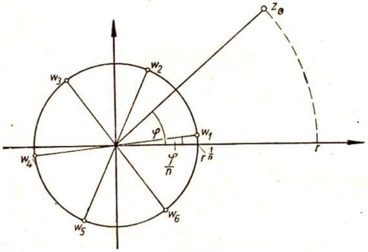


Abb. 50

deren Betrag $r^{\frac{1}{n}}$ die positive reelle n-te Wurzel des Betrages r ist. Wir erhalten sie, indem wir entweder vor Anwendung des Moivreschen Lehrsatzes das Argument φ der Reihe nach als

$$\varphi + 0 \cdot 2\pi, \quad \varphi + 1 \cdot 2\pi, \; \ldots, \quad \varphi + (n-1) \cdot 2\pi$$

ansetzen (die weiteren Argumente $\varphi + n \cdot 2\pi, \ldots$ ergeben keine neuen Lösungen) oder die sich aus $z_0 = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ nach dem Moivreschen Satz ergebende Lösung

$$w_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

mit allen n-ten Einheitswurzeln multiplizieren:

$$\left\{r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi}{n}\right)\right\} \cdot \left\{\left(\cos k\frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin k\frac{2\pi}{n}\right)\right\}$$
$$= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

In der Abbildung 50 sind als Beispiel die sechsten Wurzeln der komplexen Zahl $r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ dargestellt.

Aufgaben

1. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen!
 a) $x^2 + x + 1 = 0$ b) $8x^2 - 8x + 10 = 0$ c) $4x^2 + 12x + 10 = 0$
 d) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ e) $4x^2 + 12x + 8 = 0$ f) $x^2 - 5x + 2{,}25 = 0$

2. Die Lösungen der im Text angegebenen Gleichungen dritten Grades sind nachzuprüfen.

3. Die Gleichung vierten Grades $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$ hat zwei reelle und zwei konjugiert komplexe Wurzeln. Sie sind zu bestimmen.
 Anleitung: Die reellen Wurzeln x_1 und x_2 sind durch Probieren leicht zu finden, die Division durch $(x - x_1)(x - x_2)$ führt zu einer Gleichung zweiten Grades.

4. Berechnen Sie die dritten, vierten, fünften und sechsten Einheitswurzeln!

5. Sämtliche Lösungen von
$$\sqrt[4]{625}, \quad \sqrt[3]{-8}, \quad \sqrt[3]{27}, \quad \sqrt[3]{-27}, \quad \sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[5]{-32}$$
 sind als komplexe Zahlen und ihre Bilder in der Gaußschen Zahlenebene anzugeben.

6. Die Lösungen der Aufgabe 4 zu Abschnitt 12 sind vollständig zu berechnen.

14. Anwendung komplexer Zahlen in Physik und Technik

Die komplexen Zahlen sind in den Anwendungsgebieten der Mathematik von großer Bedeutung. Es gibt heute wenige Gebiete der Physik und der Technik, die auf das Hilfsmittel der komplexen Zahlen verzichten könnten. Wir müssen uns darauf beschränken, an einigen Beispielen die Anwendbarkeit der komplexen Zahlen auf physikalische Probleme zu zeigen.

a) Der Wechselstromwiderstand

Es ist bekannt, daß in einer von Wechselstrom durchflossenen Spule außer dem Ohmschen, auch für Gleichstrom vorhandenen Widerstand R_Ω der durch Induktion hervorgerufene Blindwiderstand (induktiver Widerstand) $R_L = 2\pi f \cdot L$ auftritt. Er hängt von der Selbstinduktion L der Spule und der Frequenz f des Wechselstromes ab. Wir können den Wechselstromwiderstand als eine komplexe Zahl $R = R_\Omega + i R_L$ auffassen (vgl. Abb. 51).

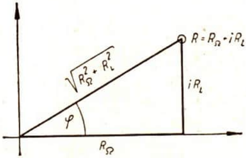


Abb. 51

Der Betrag $|R| = \sqrt{R_\Omega^2 + R_L^2}$ ist der in das Ohmsche Gesetz eingehende Scheinwiderstand, das Argument $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{R_L}{R_\Omega}$ die Phasenverschiebung. Der Vorteil dieser Betrachtungsweise ist, daß sich bei Hintereinanderschaltung mehrerer Spulen die Widerstände wie komplexe Zahlen addieren und bei Parallelschaltung die Kirchhoffsche Regel gilt, wenn wir für alle auftretenden Widerstände $R_\Omega + i R_L$ einsetzen.

Wir wollen dazu zwei Beispiele durchrechnen:

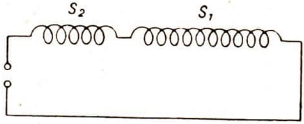


Abb. 52

1. An den Stromkreis (vgl. Abb. 52) sei Netzwechselspannung ($f = 50$ Hz, $U = 220$ V) angelegt. Die Spule S_1 habe eine Selbstinduktion $L_1 = 7$ Henry, die Spule S_2 eine Selbstinduktion $L_2 = 3{,}5$ Henry und beide einen Ohmschen Widerstand $R_{\Omega_1} = R_{\Omega_2} = 200\,\Omega$. Wir wollen die Stromstärke berechnen. Es ist

$$R_1 = R_{\Omega_1} + i\,2\pi f L_1 = 200 + i\,2\pi \cdot 50 \cdot 7 \approx 200 + 2200\,i$$

$$R_2 = R_{\Omega_2} + i\,2\pi f L_2 = 200 + i\,2\pi \cdot 50 \cdot 3{,}5 \approx 200 + 1100\,i,$$

wobei wir zur Vereinfachung für π den Näherungswert $\frac{22}{7}$ gesetzt haben. Dann ist $R = R_1 + R_2 \approx 400 + 3300\,i$ der komplexe Gesamtwiderstand des Kreises. Der Betrag der komplexen Zahl R ist $\sqrt{400^2 + 3300^2} \approx 3324$. Damit ist die Stromstärke

$$I = \frac{U}{|R|} \approx \frac{220}{3324}\,\mathrm{A} \approx 0{,}066\,\mathrm{A}.$$

2. Schalten wir dagegen beide Spulen parallel (vgl. Abb. 53), so haben wir nach der Kirchhoffschen Regel

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \approx \frac{(200 + 2200\,i)\,(200 + 1100\,i)}{400 + 3300\,i}.$$

Wir bringen die drei komplexen Zahlen in ihre trigonometrische Form und wenden den Satz von Moivre an. Da wir lediglich den Betrag von R brauchen, verzichten wir auf die Berechnung der Ausdrücke $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$. Es ist dann

$$|R| = \frac{|R_1| \cdot |R_2|}{|R_1 + R_2|} \approx \frac{2210 \cdot 1120}{3324} \approx 745,$$

$$I = \frac{U}{|R|} \approx \frac{220}{745}\,\mathrm{A} \approx 0{,}295\,\mathrm{A}.$$

Auf ähnliche Weise verfährt man, wenn ein Kondensator in einem Wechselstromkreis liegt.

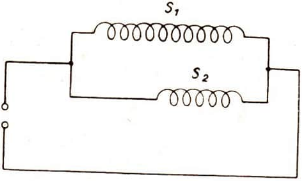


Abb. 53

b) Bewegung auf einem Kreis

Auf einem Kreis mit dem Radius r bewege sich ein Körper mit der konstanten Geschwindigkeit v (vgl. Abb. 54). Wir können dann seinen Ort s zu jedem Zeitpunkt t, also seinen Weg, durch die komplexe Zahl $s = r\left(\cos\frac{v}{r}t + i \cdot \sin\frac{v}{r}t\right)$ beschreiben, wobei der Winkel φ im Bogenmaß das Verhältnis des zurückgelegten Bogens $v \cdot t$ zum Kreisradius r ist.

Da die Geschwindigkeit die erste, die Beschleunigung die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit ist und, wie wir nicht beweisen wollen, die Differentiation von Funktionen im Bereich der komplexen Zahlen ebenso wie im Bereich der reellen Zahlen verläuft, können wir auch hier sofort die Geschwindigkeit und die Zentralbeschleunigung berechnen. Es ist dann

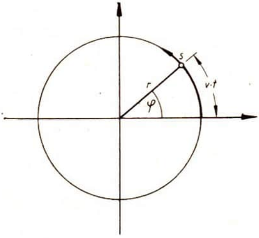


Abb. 54

$$\frac{ds}{dt} = r\left(-\sin\frac{v}{r}t + i\cdot\cos\frac{v}{r}t\right)\cdot\frac{v}{r},$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = r\left(-\cos\frac{v}{r}t - i\cdot\sin\frac{v}{r}t\right)\cdot\frac{v^2}{r^2}\cdot$$

Berücksichtigen wir in beiden komplexen Zahlen nur die Beträge, so erhalten wir tatsächlich die Geschwindigkeit v aus der ersten, die Zentralbeschleunigung $\frac{v^2}{r}$ aus der zweiten Ableitung.

c) Schwingungen eines Massenpunktes

Eine punktförmige Masse m schwinge zwischen zwei gleich starken Federn (vgl. Abb. 55).

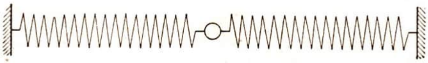


Abb. 55

Sehen wir von Reibungsverlusten ab, so ist die rücktreibende Kraft K um so größer, je mehr der Punkt aus der Mittellage ausgelenkt ist. Dabei ist K proportional der Entfernung x vom Ruhepunkt. Unter Verwendung eines Proportionalitätsfaktors $-\varkappa$ ergibt sich demnach

$$K = -\varkappa\cdot x.$$

Die positive Größe $\varkappa$ wird auch Federkonstante genannt. Da die Kraft das Produkt aus Masse und Beschleunigung ist, erhalten wir eine Relation

$$-\varkappa\cdot x = m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot$$

Ähnliche Beziehungen treten bei allen Schwingungsproblemen auf. Die eben gewonnene Relation wird von der komplexen Zahl

$$x = r\left(\cos\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\cdot t + i\cdot\sin\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\cdot t\right)$$

als Funktion von t erfüllt. Es ist nämlich

$$\frac{dx}{dt} = r\left(-\sin\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\cdot t + i\cdot\cos\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\cdot t\right)\cdot\sqrt{\frac{\varkappa}{m}},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r\left(-\cos\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\cdot t - i\cdot\sin\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\cdot t\right)\left(\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\right)^2,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\varkappa}{m}\,r\left(\cos\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\cdot t + i\cdot\sin\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\cdot t\right),$$

das heißt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\varkappa}{m}\cdot x.$$

Dabei entspricht der komplexen Zahl x ein Punkt in der Gaußschen Zahlenebene, der auf dem Kreis vom Radius r mit der Geschwindigkeit $r\cdot\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}$ umläuft (vgl. Abb. 56).

Die Projektion dieses Punktes auf die reelle Achse, also der Realteil von x, beschreibt den Weg der schwingenden Masse. Der Betrag r ist die Amplitude, das Argument $\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}$ ein Maß für die Frequenz der Schwingung.

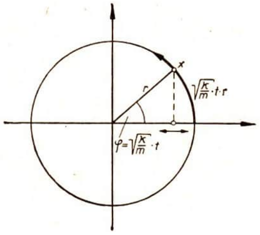


Abb. 56

Aufgaben

1. Rechnen Sie die unter a) durchgeführten Beispiele nach!
2. Welche Stromstärke fließt in dem Stromkreis der Abbildung 57, der an das Wechselstromnetz ($f = 50$ Hz, $U = 220$ V) angeschlossen ist?

   S_1: Selbstinduktion 2 Henry, Ohmscher Widerstand 50 Ω

   S_2: Selbstinduktion 5 Henry, Ohmscher Widerstand 250 Ω

   S_3: Selbstinduktion 3 Henry Ohmscher Widerstand 100 Ω

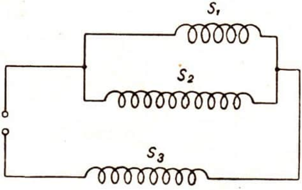


Abb. 57

15. Zusammenfassung

Wir haben die Entwicklung des Zahlenbegriffes vom Bereich der natürlichen bis zum Bereich der komplexen Zahlen verfolgt. Rückschauend können wir feststellen, daß die vorgenommenen Erweiterungen von Stufe zu Stufe durch den jeweils vorliegenden Zahlenbereich und die Bedürfnisse der Rechenpraxis vorgeschrieben sind. Wir können auch sagen, daß der Bereich der natürlichen Zahlen bereits den Ansatz zu allen Erweiterungen in sich trägt.

Bei jeder Erweiterung wurde unter Beibehaltung aller bereits gültigen Rechengesetze der Umfang der vornehmbaren Rechenoperationen erweitert, während man sich vom ursprünglichen Zahlbegriff, nämlich der Möglichkeit, mit den Zahlen zu zählen, immer mehr entfernte. Wir wollen dies noch einmal in Form einer Tabelle zusammenstellen.

Die Tatsache, daß auch das Logarithmieren und damit alle sieben Grundrechenoperationen innerhalb der komplexen Zahlen immer durchführbar sind, können wir hier nur erwähnen. Auch hat jede konvergierende Folge komplexer Zahlen stets eine komplexe Zahl als Grenzwert, so daß auch die Probleme der Infinitesimalrechnung nicht über den Bereich der komplexen Zahlen hinausführen.

Wir haben also mit dem Bereich der komplexen Zahlen einen echten Abschluß in der Entwicklung des Zahlbegriffes erreicht. Da es keine in ihm unlösbaren Rechenaufgaben gibt, die man als „neue Zahlen“ einführen könnte, liegt auch kein praktisches Bedürfnis vor, ihn zu erweitern.

Freilich kann man auch über den Bereich der komplexen Zahlen hinausgehende abstrakte Rechenbereiche schaffen, wie Vektoren, Matrizen, Quaternionen usw. Sie können ebenso wie die komplexen Zahlen auf physikalische Probleme angewendet werden und stellen teilweise unentbehrliche Hilfsmittel zur Erforschung und Beherrschung der Natur dar. Trotzdem ist es nicht mehr angebracht, bei ihnen von Zahlen zu sprechen. Man kann nämlich beweisen, daß jeder über die komplexen Zahlen hinausgehende Rechenbereich wenigstens eines der schon für die natürlichen Zahlen geltenden Grundgesetze verletzen muß. In den meisten Fällen ist es das kommutative Gesetz der Multiplikation, welches nicht mehr aufrechterhalten werden kann.

Bereich	Vervollkommnung der Rechentechnik	Entfernung vom ursprünglichen Zahlbegriff
Bereich der natürlichen Zahlen	Addition und Multiplikation uneingeschränkt durchführbar	Abzählen im ursprünglichen Sinne des Wortes
Bereich der ganzen Zahlen	Subtraktion uneingeschränkt durchführbar	Abzählen nach zwei Seiten, veranschaulicht auf der Zahlengeraden
Bereich der rationalen Zahlen	Division uneingeschränkt durchführbar	Statt diskreter Punktmenge auf der Zahlengeraden dichte Punktmenge. Ermöglicht Messungen mit beliebig genauer Annäherung
Bereich der reellen Zahlen	Jede konvergierende Zahlenfolge hat einen Grenzwert. Damit Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren weitgehend durchführbar	Kontinuierliche Punktmenge auf der Zahlengeraden. Jeder Länge entspricht exakt eine Zahl
Bereich der komplexen Zahlen	Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren uneingeschränkt durchführbar. Jede algebraische Gleichung n-ten Grades hat genau n Wurzeln	Lineare Anordnung muß aufgegeben werden. Dafür zweidimensionale Anordnung und Möglichkeit, Vorgänge in einer Ebene zu beschreiben

Bemerkungen: In der mittleren Spalte ist jeweils die Vervollkommnung der Rechentechnik gegenüber dem vorangehenden Bereich angegeben. Das Darüberstehende bleibt erhalten, das Darunterstehende ist noch nicht erreicht. Die Division durch Null ist stets ausgeschlossen.

IV. Zusammenstellung der wichtigsten Formeln zum Rechnen mit komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl kann in arithmetischer und in trigonometrischer Form geschrieben werden:

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

Dabei gelten für den Realteil a und den Imaginärteil b einerseits und für den Betrag r und das Argument φ andererseits die Umrechnungsformeln:

$$r = {}_{+}\sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a},$$

$$a = r \cdot \cos\varphi, \qquad b = r \cdot \sin\varphi.$$

Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen in arithmetischer Form:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen in arithmetischer Form:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$$

Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen in trigonometrischer Form:

$$\{r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)\} \cdot \{r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)\}$$
$$= r_1 \cdot r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

$$\{r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)\} : \{r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)\}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

Für die Potenz einer komplexen Zahl in trigonometrischer Form gilt (Satz von Moivre):

$$\{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\}^n = r^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

für alle reellen (sogar komplexen) Exponenten n.

Insbesondere gilt für zwei zueinander konjugiert komplexe Zahlen:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a,$$

$$(a + bi) - (a - bi) = 2bi,$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

INHALTSVERZEICHNIS

A. Näherungsrechnung

B. Sphärische Trigonometrie

C. Komplexe Zahlen

00 917-2