H 11328 F

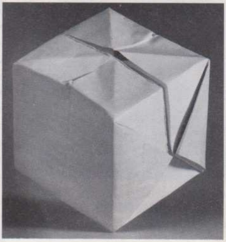
Heft 5
Oktober 1991
25. Jahrgang

Fachzeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha

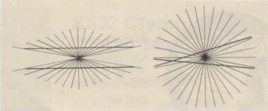
Mathematische Schülerzeitschrift

Konstruktion im Raum

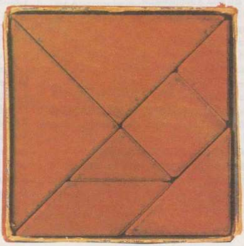


Mathematik im Straßenverkehr

Optische Täuschungen



Geometrie am ICE



Tangram und Bruchrechnung

Hallo, liebe Mathe-Fans!

Das Heft 4 hat Euch von seinem Äußeren her sicher nicht gefallen. Auch wir sind unzufrieden, daß uns die Probleme des Verlagswechsels zu dieser Notlösung zwangen.
Dieses Heft findet Ihr, hoffen wir doch, wesentlich ansprechender gestaltet.
Nun ist nichts so gut, daß man es nicht verbessern könnte.
Wir wollen in Zukunft versuchen, auch inhaltlich Einiges zu verändern, "alpha" informativer und abwechslungsreicher zu gestalten. Dazu gehören zum Beispiel kürzere, mit mehr Bildmaterial aufgelockerte Beiträge, aktuelle Informationen und Leseproben aus Literatur für Liebhaber der Mathematik.
Eine gute Zeitschrift für Leser kann aber nur entstehen, wenn Leser und Redaktion eng zusammenarbeiten. Deshalb solltet Ihr uns schreiben, was Ihr von "alpha" erwartet, was Euch nicht gefällt und welche Themen Euch besonders interessieren.

Wir sind gespannt auf Eure Meinungen!

Gabriele Liebau

Übrigens

Da es unsere Zeitschrift nun nicht mehr am Zeitungskiosk gibt, könnt Ihr sie direkt beim Erhard Friedrich Verlag in W-3016 Seelze 6, Postfach 100 150 bestellen. Wer interessierte Bekannte und Freunde hat, kann uns ebenfalls deren Anschrift mitteilen. Sie erhalten dann ein kostenloses Probeexemplar.

Alphons weist Euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin.

Alphonsvignetten: Lothar Otto (Leipzig)

alpha-Wettbewerb

Unseren alpha-Wettbewerb starten wir im Heft 6/91.
Wir haben Unterstützung gefunden, führen jedoch auch in diesem Jahr nur zwei Teilwettbewerbe durch. Wir hoffen auf Euer Verständnis und wieder auf eine tolle Teilnahme.

Ein Nachtrag

Leider haben wir es im letzten alpha-Heft versäumt, den „Bastler" des Titelblattes vorzustellen. Dieses wollen wir unbedingt nachholen:
Dr. Roland Mildner, tätig an der Sektion Mathematik der Universität Leipzig und nebenberuflich leidenschaftlicher Erfinder von Knobelaufgaben.

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett.

Redaktion:
Dr. Gabriele Liebau, Tel. (Leipzig) 58 18 54, PSF 129, Leipzig, O-7010
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. C. P. Helmholz (Leipzig), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), Herbert Kästner (Leipzig), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01.01.1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon (05 11) 4 00 04-53
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag
GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6
Telefon (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt DM 12,00, im Einzelbezug DM 2,50. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).
alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.
Herstellung: Pädagogika Zentrale
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617-34005-9

Inhaltsverzeichnis

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Teilbar oder nicht teilbar

Herr Flunkrich wird nach der Postleitzahl seines Wohnortes gefragt. Er macht über diese Zahl folgende Aussagen:

(1) Der Nachfolger der Zahl ist nicht durch 3 teilbar.
(2) Die Zahl läßt bei der Division durch 5 einen anderen Rest als bei der Division durch 7.
(3) Die Zahl ist größer als 800.
(4) Der Vorgänger der Zahl ist nicht durch 8 teilbar.
(5) Der Rest bei der Division der Zahl durch 7 ist kleiner als 3.
(6) Der Rest bei der Division der Zahl durch 5 ist größer als 3.

Nun wissen wir, daß alle Aussagen des Herrn Flunkrich falsch sind. Wie lautet die Postleitzahl seines Wohnortes?

Während der Vorlesung soll ein berühmter Mathematikprofessor einmal auf die schwierige Aufgabe $7 \cdot 9$ gestoßen sein. Er bittet die Studenten um Hilfe. Einer ruft: "62", ein anderer "65". Darauf der Professor: "Aber, meine Herren, das ist doch unmöglich, $7 \cdot 9$ kann doch nur 62 **oder** 65 sein!"

Überall natürliche Zahlen

Ein Mathematiklehrbuch umfaßt 196 Seiten. Die Seitenzahlen für die ersten beiden Seiten und für die letzte Seite wurden nicht gedruckt.

a) Wieviel Ziffern wurden zum Numerieren der übrigen Seiten verwendet?
b) Wie oft wurde dabei die Ziffer 0 gedruckt?

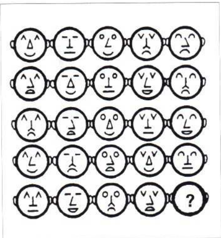
Nicht in die Brüche geraten

Zur Uraufführung des Puppenspiels "Der gestiefelte Kater" waren viele Zuschauer gekommen. Die Hälfte und einer waren Kinder. Ein Viertel und zwei der Anwesenden waren Mütter, und ein Sechstel und drei waren Väter dieser Kinder.

Wieviel Mütter, Väter und Kinder waren es?

Logisch gedacht

Die in der Abbildung gezeigten Figuren sind in einer bestimmten Reihenfolge geordnet. Man finde den logischen Zusammenhang. Aus ihm ergibt sich die fehlende Figur.



Gleichungen in Theorie und Praxis

In einem alten Buch mit lustigen mathematischen Knobeleien fand Annerose folgenden Vers:

Eine Zahl hab ich gewählt,
107 dazugezählt,
dann durch 100 dividiert
und mit 4 multipliziert,
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.

Gibt es Zahlen, die den gegebenen Bedingungen genügen?
Wenn ja, ermittle sie!

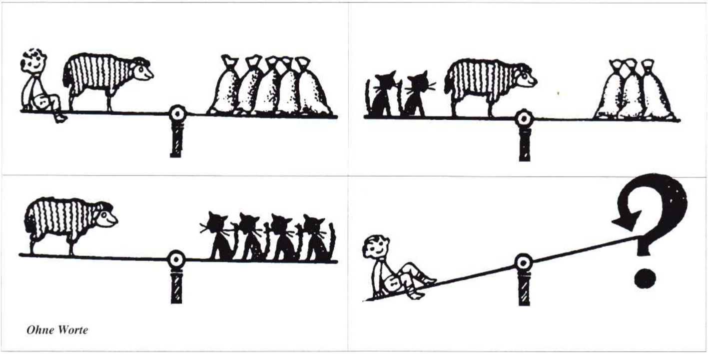
Rätsel

Jeder Buchstabe ist durch eine Ziffer zu ersetzen, so daß richtig gelöste Aufgaben entstehen. Innerhalb einer Aufgabe bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern.

a)
```
  ALPHA
+ MATHE
-------
 HEITER
```

b)
```
  WOCHE
+ WOCHE
+ WOCHE
+ WOCHE
-------
  MONAT
```

c)
```
  VIER
+ EINS
------
 FUENF
```



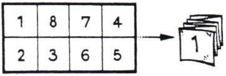
Ohne Worte

Wir falten

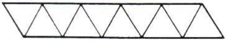
Henry Ernest Dudeney stellt folgendes Rätsel: Man unterteile einen rechteckigen Bogen in acht Quadrate und numeriere diese auf einer Seite (siehe Abb.).

Es gibt hierbei 40 Möglichkeiten, diese "Karte" entlang den eingezeichneten Linien so zu falten, daß ein quadratisches Paket entsteht, welches an oberster Stelle die "1" zeigt.

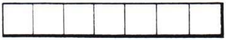
Das Problem verlangt nun, den Bogen so zu falten, daß die Quadrate in ihrer natürlichen Reihenfolge liegen, wobei die "1" oben sein soll.



Falte aus dem gezeichneten Tetra-Flexagon ein Sechseck!



Gegeben ist ein Streifen von 2 cm Breite und 14 cm Länge. Falte aus ihm einen Würfel mit einer Kantenlänge von 2 cm!



Abraham Gotthelf Kästner (1719 bis 1800), Mathematiker und Epigrammdichter, lernte als Student so spielend leicht, daß er es sich vor seinem Staatsexamen leisten konnte, mit der bildhübschen Tochter seines Professors spazierenzugehen, anstatt die Nase in die Bücher zu stecken. Als ihn der Professor deswegen zur Rede stellte, erwiderte Kästner schlagfertig: "Herr Professor, Sie haben uns Studenten als Vorbereitung für das Examen das Studium Ihrer eigenen Werke empfohlen. Ihre Tochter halte ich für Ihr bestes."

Alle Aufgaben dieser zwei Seiten stammen aus ***Mathe mit Herz*** von J. Lehmann, einem netten Trainingsbuch für alle, die Mathe bisher nicht besonders mochten. Erschienen ist es beim ***Urania-Verlag Leipzig*** in der Reihe Kopf + Nuss.

Diese Reihe bietet außerdem:

Der verzauberte Raum von R. Thiele und K. Haase
Eine Menge Spiele in drei Dimensionen mit vielen Bauplänen zum Selbermachen, mit Kniffelaufgaben nebst ausführlichen optischen Lösungen und einem Schuß Spielgeschichte.

Studentenfutter von Hugo Steinhaus
Unterhaltungsmathematik für den Sprung von elementarer zu höherer Mathematik

Nano's Physikabenteuer von K. Haase und D. Lehmann
Physiktüfteleien, bei denen man keine Angst vor Formeln haben muß, denn sie werden ausführlich kommentiert.

Sparen lohnt sich

Ein Streifzug durch die Finanzmathematik

Dieser Tage kam mir ein Werbeprospekt in die Hände, in dem ein Geldinstitut Reklame für regelmäßiges Sparen mit folgendem Angebot machte:

Wählt unseren Sparplan

Sparen und Wünsche erfüllen!

Ihr spart zehn Jahre lang regelmäßig monatlich eine bestimmte Summe, sagen wir 30 DM, die sich von Jahr zu Jahr ein wenig erhöht. Damit Ihr aber nicht nur sparen müßt, sondern Euch viele Wünsche erfüllen könnt, bekommt Ihr schon nach sechs Jahren sowie nach acht und zehn Jahren jeweils 1000 DM.

Und obwohl Ihr nach Ablauf von zehn Jahren nichts mehr einzuzahlen braucht, erhaltet Ihr am Ende des zwölften Jahres noch einen ansehnlichen Betrag extra.

Wie groß dieser "ansehnliche Betrag" sein sollte, stand leider nicht im Prospekt. Beim aufmerksamen Durchlesen fand ich aber noch die Angaben, daß alle Einzahlungen über die gesamte Laufzeit hinweg mit 6,5% verzinst werden und daß sie sich in jedem Jahr um 5% erhöhen (Dynamisierung).
Damit sind alle notwendigen Angaben bekannt, um die nach zwölf Jahren zur Auszahlung kommende Restsumme zu ermitteln. Doch wie groß ist diese? Die Beantwortung dieser Frage ist nicht ganz einfach, obwohl im Grunde genommen nur elementare mathematische Mittel benötigt werden, in erster Linie geometrische Folgen und Reihen. Die Überlegungen werden allerdings wesentlich erleichtert, verfügt man über einige Kenntnisse aus der Finanzmathematik.

Einfache Verzinsung

Jeder weiß, daß das Überlassen eines Geldbetrages an eine andere Person oder ein Geldinstitut (z. B. eine Spareinlage auf einer Sparkasse) dadurch belohnt wird, daß man **Zinsen** erhält. Diese sind von der Höhe des eingezahlten Betrages K_o (dem **Kapital**), der Dauer des Überlassens t (**Laufzeit**) sowie vom vereinbarten Zinsfuß p bzw. **Zinssatz** i = p/100 abhängig. Der Zinsfuß bezieht sich dabei auf eine bestimmte **Zinsperiode**, die anzugeben ist und in aller Regel ein Jahr beträgt. Die Laufzeit t ist als Vielfaches der Zinsperiode zu verstehen. Somit bedeutet t = 1, daß das Geld ein Jahr lang ausgeliehen bzw. gespart wird. Sinnvoll sind vor allem Werte für t, die zwischen 0 und 1 liegen, da man für t > 1 die Verzinsung der Zinsen (**Zinseszins**) berücksichtigen muß, sofern diese nicht abgehoben werden (s. unten). Die zu zahlenden Zinsen betragen

Geld öffnet Wege, aber es verschließt andere. *J. Urzieli*

$$Z_t = \frac{K_o p_t}{100} = K_o it, \qquad (1)$$

so daß sich ein **Endwert** von

$$K_t = K_o(1 + \frac{p_t}{100}) = K_o(1 + it) \qquad (2)$$

ergibt. Nunmehr sind wir in der Lage, den ersten Teilschritt zu gehen: Welche Summe hat ein Sparer am Jahresende auf seinem Konto, wenn er, im Januar beginnend, am Anfang eines jeden Monats 30 DM einzahlt und wenn jährlich mit 6,5% verzinst wird?
Wir wollen mit r die Höhe der monatlichen Einzahlung bezeichnen, so daß in Formel (1) $K_o = r = 30$ gilt. Ferner ist p = 6,5. Jetzt betrachten wir einzeln die zwölf Monate des Jahres und berechnen, wieviel jede Monatsrate am Jahresende wert ist.
Die zu Beginn des Januars eingezahlte Rate r bleibt das gesamte Jahr über auf dem Sparkonto, so daß sie am Jahresende gemäß Formel (2) einen Wert von $K_{JAN} = r(1 + i\cdot\frac{12}{12})$ hat.
Die Februarzahlung wird nur elf Monate lang verzinst, d. h. 11/12 eines Jahres. Folglich beträgt ihr Endwert $K_{FEB} = r(1 + i\cdot\frac{11}{12})$. Indem wir so fortfahren, erhalten wir für die Anfang Dezember eingezahlte Rate am Jahresende einen Betrag von $K_{DEZ} = r(1 + i\cdot\frac{1}{12})$. Der Wert aller Einzahlungen beträgt damit zum Jahresende

$$R = r\left(1 + i\cdot\frac{12}{12} + 1 + i\cdot\frac{11}{12} + ... + 1 + i\cdot\frac{1}{12}\right)$$
$$= r\left[12 + i\cdot\left(\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + ... + \frac{1}{12}\right)\right]. \qquad (3)$$

Der Ausdruck in der runden Klammer in (3) stellt eine **arithmetische Reihe** dar, d. h. eine Summe, die aus Gliedern einer **arithmetischen Zahlenfolge** $a_1, ..., a_n$ gebildet wird. Letztere ist dadurch charakterisiert, daß die Differenz zweier beliebiger aufeinanderfolgender Glieder konstant ist: $a_{k+1} - a_k = D$. Im Falle der Zahlenfolge $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, ..., \frac{12}{12}$ beträgt die Differenz $D = \frac{1}{12}$. Man kann sich leicht überlegen, daß die Summe der Glieder $a_1, \ldots, a_n$ gerade $S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ beträgt, so daß sich in unserem Beispiel $S = \frac{12}{2}\cdot\left(\frac{1}{12} + \frac{12}{12}\right) = \frac{13}{2} = 6,5$ ergibt.
Damit können wir nun endgültig das Sparguthaben am Ende des 1. Jahres (bei monatlichen Einzahlungen von r=30 [DM]) berechnen.
Es beläuft sich auf

$$R = r(12 + 6,5i) = 30\left(12 + 6,5\frac{6,5}{100}\right) =$$
$$= 372,68\,[\mathrm{DM}] \qquad (4)$$

Zinseszins

Oben hatten wir die Verzinsung eines Sparguthabens innerhalb eines Jahres (einer Zinsperiode) beschrieben. Jetzt wollen wir mehrere aufeinanderfolgende Jahre betrachten.
Die Zinsen werden in der Regel am Jahresende gutgeschrieben.
Zahlt man nun einmalig zu Jahresbeginn eine Summe Ko ein und läßt diese einschließlich der anfallenden Zinsen über mehrere Jahre stehen, ergibt sich zunächst als Betrag am Ende des 1. Jahres:
$K_1 = K_o + Z_1 = K_o + K_o i = K_o q$
(wir setzen q=1+i und nennen diese Größe den **Zinsfaktor**). Dies ist gleichzeitig das Startkapital für das 2. Jahr, so daß sich am Ende des 2. Jahres ein Sparguthaben in Höhe von
$K_2 = K_1 q = K_o q^2$
ergibt. Setzt man diese Überlegungen fort, so erhält man als **Endwert nach n Jahren**

$$K_n = K_o q^n. \qquad (5)$$

Formel (5) wird Endwertformel der Zinseszinsrechnung genannt.
Auch die umgekehrte Fragestellung ist von Interesse: Wieviel Geld muß ich jetzt (zu Beginn des 1. Jahres) einzahlen, damit bei einer jährlichen Verzinsung von p% nach n Jahren ein Betrag der Höhe K_n aufläuft?

Durch Umstellung von (5) ergibt sich leicht

$$K_o = K_n\cdot\frac{1}{q^n} \qquad (6)$$

Die Größe Ko nennt man in diesem Zusammenhang **Barwert**, und (6) heißt **Barwertformel der Zinseszinsrechnung.**

Rentenrechnung

Unter einer **Rente** versteht man eine regelmäßige Ratenzahlung, die i. allg. in konstanter Höhe in gleichmäßigen Abständen gezahlt wird. Im Rahmen der Finanzmathematik sind vor allem die sogenannten **Zeitrenten** von Bedeutung, deren Zahlung über einen festgelegten Zeitraum von n Ratenperioden (die der Einfachheit halber gleich den Zinsperioden, bei uns also gleich einem Jahr sein sollen) erfolgt. Wird die Rente stets am Ende der Periode gezahlt, spricht man von **nachschüssiger** Rentenzahlung.

Wie groß ist der Endwert (d. h. der Gesamtwert nach n Jahren) einer über n Jahre nachschüssig gezahlten Rente mit der Rate R?

Zahlt man beispielsweise am Ende eines jeden Jahres den Betrag R auf sein Sparkonto ein und das regelmäßig über n Jahre hinweg, wieviel hat man dann insgesamt (aus Einzahlungen plus Zinsen) am Ende des n-ten Jahres? Der Zinssatz sei wieder i=p/100, der Zinsfaktor q=1+i. Die 1. Rate wird (n-1)-mal verzinst, da sie sich n-1 Jahre auf dem Sparkonto befindet. Entsprechend Formel (5) wächst sie somit auf Rq^{n-1} an.

Die 2. Rate liefert am Ende Rq^{n-2} usw. Die letzte Rate schließlich hat den Endwert R, weil sie ja – erst am Ende des letzten Jahres eingezahlt – nicht verzinst wird. Insgesamt erhalten wir damit den Endwert

$E_n = R\,(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})$.

Der Ausdruck innerhalb der Klammern stellt eine sogenannte **geometrische Reihe** dar, das ist die Summe der Glieder einer **geometrischen Folge** $a_1, a_2, \ldots, a_n$, in der der Quotient aufeinanderfolgender Glieder stets konstant ist: $a_{k+1}/a_k = q$. Man überzeugt sich leicht davon (z. B. mittels Partialdivision, Ausmultiplizieren oder vollständiger Induktion), daß für $q\neq 1$ die Beziehung

$$1+q+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1} \text{ gilt.}$$

Damit wird $$E_n = R\cdot\frac{q^n-1}{q-1}. \qquad (7)$$

Unter Nutzung von (6) berechnen wir den zugehörigen Barwert:

$$E_o = R\cdot\frac{1}{q^n}\cdot\frac{q^n-1}{q-1} \qquad (8)$$

Die so ermittelte Größe stellt den Wert aller Ratenzahlungen (hier: Wert aller jeweils zum Jahresende erfolgten Einzahlungen) zum Zeitpunkt t = 0 dar.

Sie läßt sich auch wie folgt interpretieren: Hat man die Summe E_o auf einem Konto 1 und wird jährlich mit p% verzinst, so ist man in der Lage, n Jahre lang von Konto 1 auf ein anderes Konto 2 zum Ende eines jeden Jahres den Betrag R zu zahlen.

Da die Beziehung $R>E_o i$ gilt (Überprüft dies!), verringert sich der Kontostand des 1. Kontos von Jahr zu Jahr, und nach n Jahren ist dann Konto 1 gerade leer, während sich auf Konto 2 der Endwert E_n aus Formel (7) angesammelt hat.

Dynamischer Sparplan

Jetzt untersuchen wir das Anwachsen eines Sparkontos, wenn - im Unterschied zur eben betrachteten Rentenrechnung - die (nachschüssigen) Einzahlungen jährlich dynamisiert, d. h. um einen festen Prozentsatz c vergrößert werden oder, anders gesagt, um einen Faktor d = 1 + c/100 zunehmen. Im ersten Jahr sei die Rate R, im zweiten ist sie dann Rd, im dritten Rd^2 usw. Andererseits wachsen die bereits eingezahlten Beträge im Laufe des jeweiligen Jahres um den Zinsfaktor q an. Das ergibt folgendes Bild für das Guthaben E_n am Ende des n-ten Jahres:

$E_1 = R$,

$E_2 = Rq + Rd = R(q+d)$,

$E_3 = R(q+d)q + Rd^2 = R(q^2+qd+d^2)$,

....

$$E_n = R(q^{n-1}+q^{n-2}d+\ldots+qd^{n-2}+d^{n-1}). \qquad (9)$$

Der Ausdruck (9) stellt wieder eine geometrische Reihe mit Q=d/q und dem Anfangsglied q^{n-1} dar, deren Summe

$$E_n = R\cdot q^{n-1}\frac{Q^n-1}{Q-1} = R\cdot q^{n-1}\frac{(d/q)^n-1}{(d/q)-1},$$

also

$$E_n = R\frac{d^n-q^n}{d-q} \qquad (10)$$

beträgt, sofern $d\neq q$ ist; für d = q gilt offenbar $E_n = R\cdot n\cdot q^{n-1}$.

Berechnung der Restsumme

Nach obigen Vorbereitungen sind wir nun gerüstet, die eingangs gestellte Frage nach dem "ansehnlichen Betrag", den ein Sparer nach zwölf Jahren ausgezahlt bekommt, zu beantworten. Dazu vergleichen wir den Barwert aller Einzahlungen mit dem Barwert aller Auszahlungen und ermitteln hieraus den fraglichen Betrag.

Barwert aller Einzahlungen: Zunächst fassen wir die monatlichen Raten von 30 DM im ersten Jahr zum Endwert R=372,68 DM zusammen (s. Formel (4)). Es ist folglich völlig gleich, ob wir mit regelmäßigen monatlichen Zahlungen oder mit einer einmaligen nachschüssig gezahlten Rate rechnen. Damit ist es möglich, Formel (10) für den dynamischen Sparplan anzuwenden, wobei R=372,68, q=1,065 und d=1,05 gilt. (Überlegt Euch, daß sich bei Erhöhung der Monatsraten um den Faktor d die Jahresrate R auch gerade um d erhöht!) Einsetzen dieser Werte in (10) liefert den Endwert

$$E_{10} = 372{,}68\frac{1{,}05^{10}-1{,}065^{10}}{1{,}05-1{,}065} = 6167{,}66.$$

Der zu diesem Endwert gehörige Barwert ergibt sich (wie man sagt, durch **Abzinsen** oder **Diskontieren**) gemäß Formel (6) mit $K_n=E_n$ zu $E_o = 3285{,}67$ [DM].

Die Größe E_o ist der Wert, den man jetzt (zum Zeitpunkt t=0) besitzen müßte, um nach 10 Jahren bei 6,5% jährlicher Verzinsung auf denselben Endwert $E_{10} = 6167{,}66$ zu kommen, wie er sich aus den 120 monatlichen Einzahlungen (einschließlich Zinsen) ergibt.

Barwert aller Auszahlungen: Entsprechend dem Angebot des Geldinstituts erhält man nach 6, 8 und 10 Jahren jeweils A=1000 [DM] und nach 12 Jahren eine noch unbekannte Restsumme U. Um den Gegenwert all dieser in der Zukunft erfolgenden Zahlungen für den Zeitpunkt t=0, also den Barwert aller Auszahlungen, zu ermitteln, müssen wir wiederum Beziehung (6) mehrfach anwenden:

$$\begin{aligned}A_o &= A\cdot\left(\frac{1}{q^6}+\frac{1}{q^8}+\frac{1}{q^{10}}\right)+U\cdot\frac{1}{q^{12}}\\ &= 1000\cdot(0{,}68533+0{,}60423+0{,}53273)+\\ &\quad +0{,}46968\cdot U\\ &= 1822{,}29+0{,}46968\cdot U.\end{aligned}$$

Setzt man nun $E_o=A_o$ (denn weder der Sparer noch das Geldinstitut wollen ja bei diesem "Geschäft" etwas verlieren), ermittelt man leicht die Restsumme U:

$3285{,}67 = 1822{,}29 + 0{,}46968\cdot U$, d. h.

$U = 1463{,}38 : 0{,}46968 = 3115{,}70$.

Nach 12 Jahren wird also ein Restbetrag von 3115,70 DM ausgezahlt.

Damit haben wir das gestellte Problem gelöst. Es ist allerdings anzumerken, daß die angegebenen Formeln nur für einen Anfang Januar beginnenden Sparplan exakt gelten, falls die Verzinsung am Kalenderjahresende erfolgt.

Dr. Bernd Luderer
Tätig auf den Gebieten der Mathematischen Optimierung, Wirtschaftsmathematik und Finanzmathematik an der Technischen Universität Chemnitz. Ist verheiratet und hat eine Tochter.

Zeitungsschnipsel

Auch ein flüchtiger Zeitungsleser wird immer wieder auf Meldungen stoßen, die etwas mit Mathematik zu tun haben. Solche, aber auch Informationen, die wir allgemein interessant finden, sind hier aufgeführt. Wenn Ihr so einen Schnipsel findet, schneidet ihn doch bitte aus und sendet ihn an uns!
Vergeßt aber bitte nicht, die Quelle anzugeben!

Herr Walter Träger aus Döbeln fand in der *Bild am Sonntag* die Information, daß die Termitenkönigin das fruchtbarste Insekt der Welt ist.

Sie stößt fast jede Sekunde ein Ei aus, im Laufe ihres Lebens über 100 Millionen. Welches ist nach diesen Angaben die minimale Zeitspanne, in der eine Termitenkönigin diese 100 Millionen Eier legt?

In *Unsere Illustrierte* war die Meldung zu finden, daß die Elefantendame Kiri aus dem Nürnberger Zoo die Stabilität der Kinderfahrzeuge einer Fürther Spielwarenfabrik testete. Wie, sehr Ihr auf dem Foto.

„Kiri" prüft Kinderfahrzeuge

Als Warentester ganz besonderer Art betätigte sich Elenfantenkuh "Kiri" im Nürnberger Zoo. Der Fürther "Big"-Spielwarenfabrikant hatte die schwergewichtige Dame engagiert, um die Stabilität seiner Kinderfahrzeuge zu testen. Zur Freude des Herstellers hielt der rote Kunststoff-Renner dem starken Auftritt "Kiris" mühelos stand und bekam das Prädikat "unzerbrechlich".

Wißt Ihr eigentlich, wie schwer so ein Elefant ist?

In der Zeitschrift *Panthera* des Leipzigers Zoos fanden sich die Angaben für den 26 Jahre alten Sahib, er wog bei einer Größe von 3,5 m fast 5 t (1 Tonne = 1000 kg). Nur zum Vergleich: Der inzwischen allerorts bekannte Trabbi wiegt zusammen mit 4 normalgewichtigen Personen etwa 1 t.

Diese Meldung erinnert an die Frage, mit der Leipziger Physiklehrer die Klassen bei der Einführung des Druckes gern konfrontieren.
Wer übt den größeren Druck aus? Das Leipziger Völkerschlachtsdenkmal mit seinen 300 000 t und der Grundfläche von 80 m x 67,5 m oder der Pfennigabsatz eines Stöckelschuhs?

Wenn Ihr nicht klar kommt, fragt doch mal Euren Physiklehrer.

Schon gewußt, daß ...

• ein Würfel mit der Kantenlänge von 1 cm eine Oberfläche von 6 cm^2 hat, diese aber auf 6000 cm^2 anwächst, wenn man das gleiche Volumen auf viele kleine Würfel mit 10^{-3} cm Kantenlänge verteilt (woraus sich die Wirksamkeit poröser Stoffe erklären läßt).

• daß früher das Steinsalz (Natriumchlorid, NaCl) aus der Oase Ammon als sal ammoniacum bezeichnet wurde, dieser Name später fälschlicherweise auf den ägyptischen Salmiak (Ammoniumchlorid, NH_4CL) übertragen wurde und so der Name Ammoniak entstand.

aus: Urania, Berlin

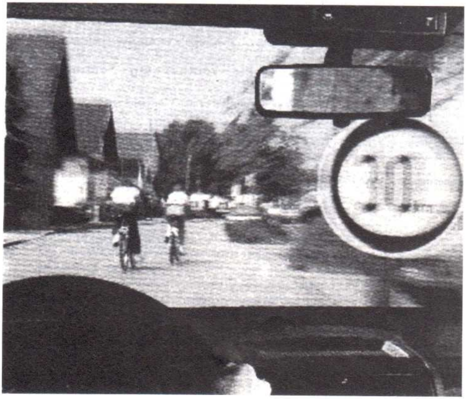
Mathematatik im Straßenverkehr

Ein leider sehr aktuelles Thema

Die erschreckend hohen Unfallzahlen der letzten Monate verdeutlichen, welche Gefahren im Straßenverkehr liegen. Ein häufiger Unfallgrund ist zu schnelles Fahren; d. h. der Anhalteweg ist beim Erkennen einer Gefahrensituation zu lang. Der unten wiedergegebene Zeitungsausschnitt (Hannoversche Allgemeine Zeitung vom 19. Juni 1991) gibt einige Hinweise zum Bremsweg und zum Anhalteweg.

Neben der angesprochenen Berechnungsmöglichkeit des Bremsweges gibt es verschiedene Arten, wie der Anhalteweg berechnet werden kann. Der Anhalteweg ist die Summe aus dem Vorbremsweg (das ist die Strecke, die während der "Schrecksekunde" zurückgelegt wird) und dem Bremsweg. Die Reaktionszeit ist bei Spitzensportlern beim Start des 100m-Laufes sehr kurz: 0,2 Sekunden wurden gemessen – bei einem plötzlich auftretenden Hindernis kann man "vor Schreck wie gelähmt sein" und (lebens)wichtige Zeit verstreichen lassen.
Der Anhalteweg wird auch nach den Faustregeln "Tachohalbe" oder "Zwei-Sekunden-Abstand" oder der Fahrschulregel $\frac{v^2}{10} + \frac{3v}{10}$ berechnet. Welche Werte erhält man jeweils für Tempo 30, 50, 80, 100 und 130?
Einschub: Die Polizei hat bei einer innerörtlichen Geschwindigkeitsmessung einen Motorradfahrer mit Tempo 247 geblitzt. In der Zeitungsmeldung steht, daß für ihn ein Bremsweg von 444 m berechnet wurde. Paßt dieser Wert zu einer der oben angegebenen Formeln?
Im Stadtverkehr kommt man vor den Ampeln häufig in den Zwiespalt "darf ich – oder darf ich nicht weiterfahren?", wenn die Ampel auf "Gelb" umspringt.

- Kann man es bei einer Geschwindigkeit von 50 km pro Stunde, einer Reaktionszeit von 1 Sekunde und einer Gelbphase von 3 Sekunden immer vermeiden, bei "Rot" über die Kreuzung zu fahren?
- Auf eine Kreuzung von zwei je sechs Meter breiten Straßen fahren zwei Autos mit der zugelassenen Geschwindigkeit von 50 km pro Stunde zu. Sie sind gleich weit von der Kreuzung entfernt. Kommt es zum Unfall?
- Wie langsam müßte eines der beiden Autos fahren, um den Aufprall vermeiden zu können?



Beim Bremsvorgang spielen viele Faktoren eine Rolle

Mehr Abstand bringt mehr Sicherheit

Von Otto Kretschmer

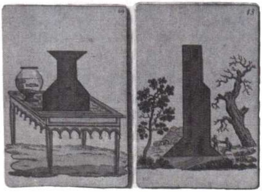
Für viele Urlauber endet die Fahrt in die Ferien leider vorzeitig. Gerade in der Reisezeit im Sommer ereignet sich eine Vielzahl von Unfällen auf unseren Straßen, die auf falsche Einschätzung des Bremsweges zurückzuführen sind. Je höher die Geschwindigkeit, desto verheerender sind die Folgen.

Der Bremsweg ist oft länger, als man denkt. Die sogenannte Schrecksekunde, schlechte Reifen- oder Fahrbahnbeschaffenheit, Überladung, ungewohntes Fahren mit Wohn- oder Bootsanhänger, können zu Überraschungen führen, die häufig nicht mit einkalkuliert werden.
Gut funktionierende Bremsen sind die wichtigste Voraussetzung für sicheres Fahren. Doch nutzen die besten Bremen wenig, wenn der Fahrer das Einmaleins des Bremsens nicht beherrscht. Am besten ist es natürlich, immer so zu fahren, daß man gar nicht erst in die Verlegenheit kommt, die Bremse voll durchtreten zu müssen. Der Sicherheitsabstand spielt dabei die entscheidende Rolle. Er sollte jeweils dem halben Tachowert entsprechen, bei Tempo 90 als etwa 45 Meter betragen. Nur so kann man Auffahrunfälle vermeiden.
Besonders bei hohen Geschwindigkeiten auf Schnellstraßen und Autobahnen wird die Länge des Bremsweges häufig unterschätzt. Denn der Bremsweg wächst im Quadrat der Geschwindigkeit. Er verdoppelt sich demnach bei doppelter Geschwindigkeit nicht nur, sondern vervierfacht sich. Ein Beispiel: Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h liegt er bei 16 Meter, während er bei 100 km/h bereits 64 Meter beträgt.
Der tatsächliche Anhalteweg jedoch ist noch länger. Denn von dem Augenblick an, in dem man die Gefahr erkennt, bis zum Handeln vergeht oft mehr als die sogenannte Schrecksekunde. Diese Reaktionszeit ist nicht nur von Mensch zu Mensch verschieden, sondern auch bei ein und demselben Fahrer. Sie hängt nicht unerheblich von der augenblicklichen seelischen und körperlichen Verfassung ab. Und in dieser Zeit rollte der Wagen mit unverminderter Geschwindigkeit weiter. Um den Anhalteweg eines Wagens zu berechnen, muß man also zum Bremsweg den Reaktionsweg addieren.
Verzögert werden kann der Anhalteweg darüber hinaus noch durch verschiedene andere Faktoren. So zum Beispiel durch die Reifen. Stark abgefahrene Profile können den Bremsvorgang ganz erheblich beeinflussen. Ebenso negativ kann sich zu niedriger oder zu hoher Reifenluftdruck bemerkbar machen.
Eine entscheidende Rolle spielen beim Bremsvorgang auch die Straßenbeschaffenheit und die Witterung. Schon bei normaler Regennässe kann sich der Bremsweg verdoppeln, bei schmieriger Fahrbahn verdreifachen. Da sich der Straßenzustand unversehens ändern kann, sollte man gar nicht erst das Risiko einer Vollbremsung eingehen, sondern mit ausreichendem Sicherheitsabstand fahren und den Fuß rechtzeitig vom Gaspedal nehmen. Das gilt ganz besonders auch in Kurven. Denn bei Vollbremsung besteht immer die Gefahr, daß die Räder blockieren und der Wagen ins Schleudern kommt.

Tangram und Bruchrechnung

Tangram-Set aus Kunststein mit Puzzlekarten aus dem Deutschland um die Jahrhundertwende

Legespiele gehören zum uralten Kulturgut vieler Völker. Bereits im 16. Jahrhundert war das Tangram-Spiel in Europa zur Lösung geometrischer Probleme weit verbreitet. Die Tangram-Idee bietet interessante Möglichkeiten für ein experimentelles und spielerisches Lernen. Es geht im folgenden nicht nur um das Spielen mit einer fertigen Tangram-Einheit, sondern um die Konzipierung und Herstellung eines entsprechenden Spiels.



Diese handgedruckten Tangramkarten sind Teil eines Spiels, das im Europa der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts erschien. Aufgabe der Spieler war, die Figuren unter Verwendung aller Teile nachzulegen.

Die Geschichte des Tangram-Spiels

Sicher ist, daß bereits Archimedes, Euklid und Pythagoras das Tangram-Spiel kannten. Vermutlich ist das Spiel in China entstanden; es wird sogar behauptet, daß dieses dort bereits vor 4000 Jahren bekannt war. Die Herkunft des Begriffes "Tangram" ist hingegen unbekannt. Fest steht, daß das Tangram-Spiel Europa im 19. Jahrhundert förmlich "überschwemmte", nachdem es 1813 in einem chinesischen Buch mit rund 300 Figuren wiederentdeckt worden war. Die Besonderheit des chinesischen Tangram: Es besteht aus sieben Teilstücken (Tan's), die sich stets zu der Urform des Quadrats zusammensetzen lassen.

Bruchtangram

Mit dem Bruchtangram können, wie mit dem üblichen Tangram, die verschiedensten Figuren gelegt werden. Aber vorher sollst Du ausrechnen, wie groß die einzelnen Bruchteile sind.

Spielanregungen

Die einfachste (aber trotzdem schwierige) Spielweise besteht darin, daß man die Tangramteile auf einem Tisch zu leicht erkennbaren Figuren, Symbolen usf. anordnet. Mit Geduld und Phantasie kann man zum Beispiel Zahlen, Buchstaben, Tiere, Menschen, Profile, Gesichter oder verschiedene Gegenstände legen (vgl. die Abbildungen). Um das Spiel abzuändern, läßt sich auch die Aufgabe stellen, eine Vorlage nachzubilden. Wenn man zum Beispiel ein erstes, beliebiges Tangram gelegt hat, ist es gar nicht gesagt, daß man nach dem Mischen der Teile das ursprüngliche Quadrat sofort auf Anhieb wieder zustande bringt. Noch schwieriger ist es, gewisse Vorlagen nachzubilden. Die Zahl der möglichen Figuren ist für einen phantasiebegabten Spieler fast unbegrenzt.

Selbstbau eines

Dieses Spiel kannst Du selbst herstellen und Weihnachten Deinen Freunden und Verwandten schenken.

Als Vorlage können die Bruchtangram-Spiele (Abb. 1 und 2), das übliche Tangram (Abb. 3), das Sechsecktangram (Abb. 4) oder eine von

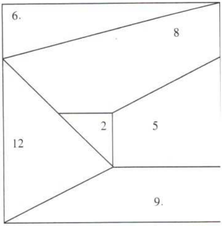
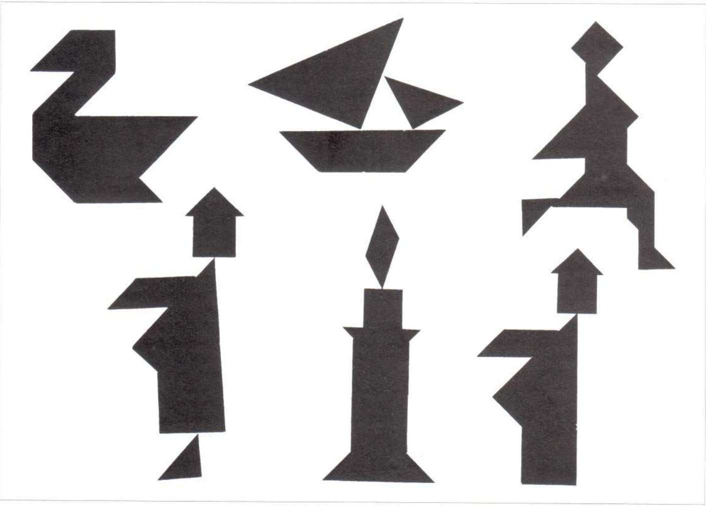


Abb. 1



Auf der höchsten Stufe des Tangrams befaßt man sich mit optischen Täuschungen. Die zwei kleinen, unten als erste und letzte Figur abgebildeten Chinesen zum Beispiel sind aus vollkommen gleichen Teilen aufgebaut, aber der eine hat einen Fuß und der andere nicht. Warum?

Tangramspiels aus Holz

Dir selbst erdachte Einteilung dienen. Wenn Du Dein persönliches Tangram herstellen willst, geht das in folgenden Schritten:
- Zeichnen eines Quadrats in beliebiger Größe (empfohlen wird eine Kantenlänge von 12 bis 20 cm)

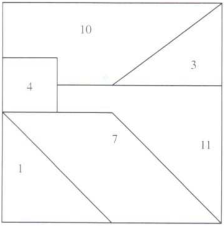


Abb. 2

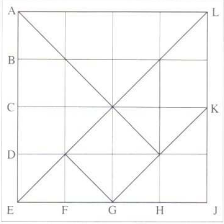


Abb. 3

- Aufteilen dieses Quadrats in 16 kleinere, gleichgroße Quadrate
- Einzeichnen von sieben Teilstücken (Tan's) durch Verbindung verschiedener Kreuzungspunkte.

Dabei ergeben sich beliebige Figuren wie Quadrate, Dreiecke, Rechtecke usw.

- Auftragen der Zeichnung auf Pappe (möglichst farbig) oder Sperrholz
- Ausschneiden bzw. Aussägen entlang der eingezeichneten Linie und die einzelnen Teile "durcheinanderwürfeln".

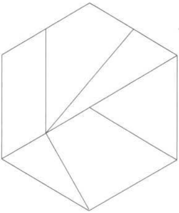


Abb. 4

Von der Ähnlichkeit zur Selbstähnlichkeit

2. Teil

In den letzten 10 Jahren erlangte der Begriff des Fraktals in der Mathematik und der Physik eine immer größere Bedeutung. Im letzten Heft wurdet Ihr mit einer speziellen Klasse von Fraktalen, den "Selbstähnlichen Mengen" bekannt gemacht. Dieser Beitrag soll Euch helfen, mit dem Computer selbständig solche Mengen zu erzeugen.

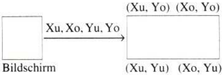
Im ersten Teil haben wir festgelegt: Eine beschränkte und abgeschlossene Figur A heißt selbstähnlich, wenn A aus endlich vielen zu A ähnlichen Teilen besteht. Wir schreiben hierfür: $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, n \in N$. Wenn $f_1, \ldots, f_n$ die entsprechenden Ähnlichkeitsabbildungen mit $f_i(A) = A_i$ sind, so können wir auch schreiben $A = f_1(A) \cup \ldots \cup f_n(A)$. Die Bilder 1 und 2 zeigen zwei weitere Computerbeispiele solcher Mengen.
Im Jahre 1981 hat der australische Mathematiker J. E. Hutchinson einen jetzt nach ihm benannten Satz bewiesen:
Zu jeder endlichen Menge $f_1, \ldots, f_n$ von Ähnlichkeitsabbildungen, deren Streckungsfaktoren alle kleiner als 1 sind, gehört genau eine selbstähnliche Menge A, die die Gleichung $A = f_1(A) \cup \ldots f_n(A), n \in N$ erfüllt.
Bei der Erzeugung solcher selbstähnlicher Figuren bedienen sich die Mathematiker oft der Computer. Dem Computer werden die Ähnlichkeitsabbildungen eingegeben. Die Programme sind dann so gestaltet, daß der Computer die zugehörige selbstähnliche Figur auf den Bildschirm zeichnet. Ein solches Basic-Programm für den KC85/3 geben wir Euch hier an:

```
10  WINDOW 0,31,0,39 : CLS
20  PRINT AT (2,5); "PROGRAMM ZUM
    ZEICHNEN"
30  PRINT AT (4,5); "SELBSTÄHNLI
    CHER MENGEN"
40  PRINT AT (6,2); "****************
    ***********************************
    ***********"
50  LOCATE 10,2: PRINT "GEBEN SIE
    DIE ANZAHL N DER"
60  PRINT "ABBILDUNGEN EIN"
70  INPUT N: DIMF(N): DIMW(N): DIMX
    (N): DIMY (N)
80  PRINT "GEBEN SIE FÜR DIE ABBIL-
    DUNGEN NR.I"
90  PRINT "FAKTOR, WINKEL, FIX-
    PUNKT EIN!"
100 FOR I = 1 TO N
110 PRINT "ABBILDUNG: ",I
120 INPUT F(I), W(I), X(I), Y(I) : W(I) =
    W(I) *2* PI/360
130 NEXT I: XO = X(1) : Y0 = Y(1)
140 PRINT "GEBEN SIE DIE BEGREN-
    ZUNGEN DER"
150 PRINT "ZEICHENEBENE Xu, Xo, Yu,
    Yo EIN"
160 INPUT Xu Xo, Yu, Yo : CLS
170 F= Int (N * RND (1) + 1) : X = X0 : Y =
    Y0
175 A = COS (W(F)) : B = SIN (W(F)) : C =
    X-X (F) : D = Y-Y (F)
180 X0 = F(F) * (A * C-B * D) + X(F)
190 YO = F(F) * (B * C + A * D) + Y(F)
200 P = 319 * (X0 - Xu) / Xo - Xu):
    Q = 256 * (Y0-Yu) / Yo-Yu)
210 IF P<0 OR P> 319 THEN 240
220 IF Q<0 OR Q> 256 THEN 240
230 PSETP, Q, 7: GOTO 170
240 PRINT "GRENZEN SIND ZU KLEIN"
250 PRINT "GEBEN SIE NEUE Xu, Xo,
    Yu, Yo EIN!"
260 INPUT Xu, Xo, Yu, Yo: CLS
270 GOTO 170
```

Alle Bilder unseres Artikels sind mit diesem Programm gezeichnet. Um die Startschwierigkeiten beim Umgang mit dem Programm zu verringern, seien hier einige Hinweise gegeben:

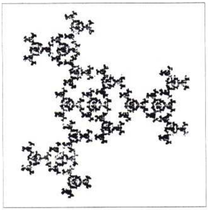
1. Mit diesem Programm könnt Ihr nur selbstähnliche Mengen erhalten, für die die Ähnlichkeitsabbildungen $f_1, \ldots, f_n$ Nacheinanderausführungen einer Drehung und einer zentrischen Stauchung sind und bei denen das Drehzentrum und das Stauchungszentrum zusammenfallen. (Durch einfache Ergänzungen in dem Programm kann man jedoch die Klasse der zulässigen Abbildungen $f_1, \ldots, f_n$ ohne Schwierigkeiten vergrößern.)

2. Ihr werdet zuerst aufgefordert, die Anzahl der Abbildungen $f_1, \ldots, f_n$ einzugeben. Jede einzelne Abbildung f_i, i = 1,...,n, ist durch die Angabe eines Stauchungsfaktors k_i, eines Drehwinkels w_i (zwischen -360° und 360°) und des Stauchungszentrums $(x_i; y_i)$ charakterisiert. Diese Daten habt Ihr danach in der Reihenfolge Faktor, Winkel, Fixpunkt (immer getrennt durch Komma) für jede Abbildung einzugeben. Zum Schluß müssen noch die Grenzen Xu, Xo, Yu und Yo des Teils der Zeichenebene, der auf dem Bildschirm erscheint, eingegeben werden.



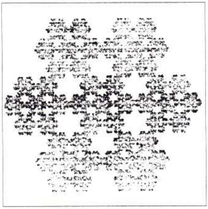
Sollten bei der Abarbeitung des Programms Bildpunkte berechnet werden, die außerhalb der eingegebenen Bildschirmebene liegen, so werdet Ihr aufgefordert, neue (größere) Grenzen für die Zeichenebene einzugeben.

Abb. 1



f_1:	0,42;	180°;	0,5;	0,0
f_2:	0,42;	180°;	-0,25;	0,43
f_3:	0,42;	180°;	-0,25;	-0,43
f_4:	0,42;	180°;	0,0;	0,0
Grenzen:	-2,0;	2,0;	-1,5;	1,5

Abb. 2



f_1:	0,34;	180°;	0,25;	0,43
f_2:	0,34;	180°;	-0,25;	0,43
f_3:	0,34;	180°;	-0,5;	0,0
f_4:	0,34;	180°;	-0,25;	-0,43
f_5:	0,34;	180°;	0,25;	-0,43
f_6:	0,34;	180°;	0,5;	0,0
f_7:	0,34;	180°;	0,0;	0,0
Grenzen:	-2,0;	2,0;	-1,5;	1,5

Fraktale

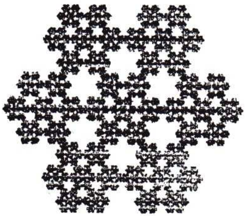
Fraktale hielten Einzug in das allgemeine wissenschaftliche Bewußtsein mit der Frage "Wie lang ist die Küste von Großbritannien?" im Titel einer Arbeit von Benoit B. Mandelbrot im Jahr 1967; das Wort "Fraktal" wurde dort allerdings noch nicht verwendet. So trivial die Frage zu sein scheint, so überraschend ist die Antwort: praktisch unendlich, jedenfalls verglichen mit der Zahl, die man erhält, wenn man die Länge der Küste auf der Landkarte in Abbildung 1 a ermittelt und durch den Maßstabsfaktor 1:X dividiert. Abbildung 1 b zeigt, warum das so ist: die auf der detaillierteren Karte sichtbaren Einbuchtungen und Ausbuchtungen tragen zur gemessenen Gesamtlänge der Küste bei. In der Wirklichkeit wächst die Küstenlänge bei jeder Verkürzung der Meßlatte – bis es spätestens bei atomaren Abmessungen sinnlos wird, von "Länge" der "Küste" zu sprechen. Richardson, der – von Mandelbrot zitiert – die Abhängigkeit der Küstenlänge von der Meßgenauigkeit untersucht hat, findet, daß bei einer Maßstabslänge von 1 km die Küste Großbritanniens dreimal so lang ist wie bei einer Länge von 1000 km. Nach Richardsons empirischem Gesetz für das Wachstum der Küstenlänge bei Verkürzung des Maßstabs ist die Küste Großbritanniens unendlich lang. Derartige Kurven nennt Mandelbrot Fraktale. Statt von der Länge eines Fraktals spricht man besser von dessen "fraktaler Dimension".

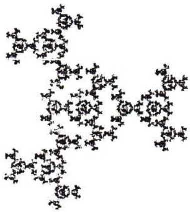
Abb. 1a

Abb. 1b

3. Von der Wahl der Stauchungsfaktoren hängt wesentlich ab, ob man in dem Computerbild die einzelnen Teile $A_i = f_i(A)$ der selbstähnlichen Menge A gut erkennen kann. Zu große Stauchungsfaktoren führen zur Überlappung der A_i, und damit wird eine Unterscheidung dieser Teile kaum noch möglich. Als Beispiel dafür mögen die Bilder 3a (Faktor 0.3) und 3b (Faktor 0.38) dienen.

Zum Abschluß noch einige Bemerkungen zur Arbeitsweise des Programms:
Die selbstähnliche Menge A wird durch einen iterativen Prozeß erhalten, d.h. es wird zuerst der Fixpunkt $(x_1; y_1)$ der ersten Abbildung f_1 auf dem Bildschirm gezeichnet. Im Befehl 170 wird zufällig eine Abbildung f aus den Abbildungen $f_1, ..., f_n$ ausgewählt und in 180 das Bild $f(x_1; y_1)$ von $(x_1; y_1)$ unter der ausgewählten Abbildung f berechnet. Der Bildpunkt $f(x_1; y_1)$ wird in Befehl 230 gezeichnet. Danach beginnt mit einem Sprung zu 170 der nächste Iterationsschritt, in welchem $f(x_1; y_1)$ jetzt die Rolle von $(x_1; y_1)$ übernimmt. Diese Iterationsschleife wird nun vom Computer solange durchlaufen, bis man der Meinung ist, das Bild der selbstähnlichen Menge ist "deutlich genug". Dann bricht man das Programm mittels der Stopptaste ab. Eine Begründung dafür, daß uns dieser iterativen Zufallsalgorithmus stets ein vernünftiges Bild der entsprechenden selbstähnlichen Menge liefert,

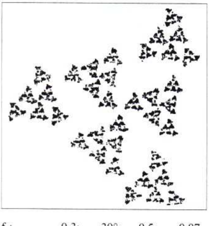




würde den Rahmen dieses Artikels sprengen. Sicher ist, daß auf diese Weise immer selbstähnliche Mengen erhalten werden.
Denjenigen, die schon ein wenig Erfahrung mit der Programmiersprache BASIC haben, wird es sicher nicht schwerfallen, einige kleine Verbesserungen der Bedienung in das Programm einzubauen. Wir wünschen Euch viel Spaß dabei und hoffen, daß Ihr mit unserem Programm viele schöne Bilder erzeugen könnt.

Dr. Uwe Feiste, stud. math. E. Krause
Fachrichtungen Mathematik/Informatik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Abb. 3 a



f_1:	0,3;	30°;	0,5;	0,87
f_2:	0,3;	30°;	-1,0;	0,0
f_3:	0,3;	30°;	0,5;	-0,87
f_4:	0,3;	0°;	-0,25;	0,43
f_5:	0,3;	0°;	-0,25;	-0,43
f_6:	0,3;	0°;	0,5;	0,0
Grenzen:	-2,0;	2,0;	-1,5;	1,5

Abb. 3 b

f_1:	0,38;	30°;	0,5;	0,87
f_2:	0,38;	30°;	-1,0;	0,0
f_3:	0,38;	30°;	0,5;	-0,87
f_4:	0,38;	0°;	-0,25;	0,43
f_5:	0,38;	0°;	-0,25;	-0,43
f_6:	0,38;	0°;	0,5;	0,0
Grenzen:	-2,0;	2,0;	-1,5;	1,5

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Alphons logische Abenteuer (7)

"Niemand ist hier", sagte Alphons' Schwester, als sie die Wohnung betrat, dabei Alphons übersehend, der zufällig hinter dem Schrank in seinem Zimmer stand. Als er hervortrat freute sie sich und sagte: "Es ist doch nicht niemand hier." Alphons nickte ihr freundlich zu und setzte sich an seinen Tisch. Zu seinen Schularbeiten kam er aber nicht, denn die beiden Aussagen seiner Schwester gingen ihm nicht aus dem Kopf. Ist die Aussage "Es ist nicht niemand hier" tatsächlich die Verneinung der Aussage "Niemand ist hier"? Immer wieder in seinem Logikbuch nachlesend überlegte sich Alphons folgendes. Wenn man nur Aussagen in Betracht zieht, die entweder wahr oder falsch sind, dann ist die Verneinung einer wahren Aussage eine falsche, die Verneinung einer falschen Aussage eine wahre Aussage. Ich muß also zunächst prüfen, ob "Niemand ist hier" eine Aussage vorausgesetzter Art ist. Mit "hier" ist unsere Wohnung gemeint. Daß niemand in der Wohnung ist, bezieht sich auf einen bestimmten Zeitpunkt. Selbst wenn sonst niemand da war zu diesem Zeitpunkt, so war sie ja zu diesem Zeitpunkt da. Wen erwartete sie dann in unserer Wohnung? Sicherlich ein Mitglied unserer Familie und diese besteht aus Mutti, Vati, meiner Schwester und mir. Die vollständige Behauptung meiner Schwester ist also: "Niemand von der Familie außer mir ist zu dem Zeitpunkt t in unserer Wohnung". Diese Behauptung ist entweder wahr oder falsch. Ersichtlich ist sie falsch, denn zu diesem Zeitpunkt war ja außer ihr noch ich in der Wohnung. Hätte nun meine Schwester die Aussage "Niemand ist hier" (eine Kurzfassung für die vollständige Aussage) auch so verneinen können: "Niemand ist nicht hier"? Das ist wieder eine Kurzfassung für die vollständige Aussage: "Niemand von der Familie außer mir ist zu dem Zeitpunkt t nicht in unserer Wohnung". Wenn niemand nicht hier ist, dann sind alle Familienmitglieder hier. Zum Zeitpunkt waren aber meine Eltern nicht hier, also ist diese Aussage falsch. Da die Verneinung einer falschen Aussage eine wahre Aussage ist, kann die falsche Aussage "Niemand ist nicht hier" nicht die Verneinung von "Niemand ist hier" sein.

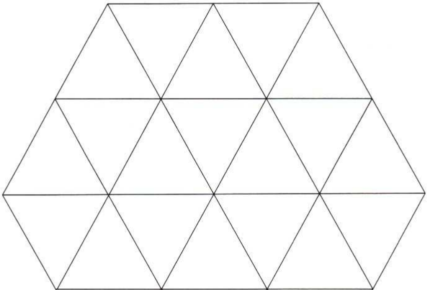
Meine Schwester bildete die Verneinung von "Niemand ist hier" durch den Satz: "Nicht niemand ist hier." Ist es so, daß zum Zeitpunkt t nicht niemand in der Wohnung ist, dann ist zu diesem Zeitpunkt jemand hier. Da meine Schwester die zum Zeitpunkt t getroffene Behauptung verneint, muß ich in der Wohnung denselben Zeitpunkt t beibehalten, obwohl es natürlich einen Zeitunterschied zwischen der Äußerung der beiden Aussagen gibt. Ein solcher jemand bin ich, denn ich war zum Zeitpunkt t in der Wohnung. Sie hat demnach eine Aussage behauptet, die wahr ist und die die Verneinung einer falschen Aussage ist.

"Die Verneinung ist schon eine verflixt knifflige Angelegenheit. Bist Klasse, Schwester", dachte Alphons noch ehe er sich auch mit sich zufrieden an seine Schularbeiten machte.

Prof. Dr. Lothar Kreiser
Institut für allgemeine Logik der Universität Leipzig

Legespiel

10 Münzen (5 Pfennigstücke und 5 Fünfpfennigstücke) müssen so auf die Schnitt- und Endpunkte der Linien gelegt werden, daß auf **einer** Linie nie zwei gleiche Geldstücke zu finden sind.
Es gibt mehrere Lösungen: Schließt Euch zu Vierergruppen zusammen.



Noch etwas für Logiker

Von fünf Freunden hat jeder je einen Sohn. Jeder Sohn hat sich ein Buch bei einem der Freunde seines Vaters entliehen.
Die Freunde haben alle Familiennamen, die einen Beruf bezeichnen.
Es bestehen dabei folgende Bedingungen:
1. Bei keinem stimmt der Familienname mit seinem Beruf überein.
2. Entsprechend einer alten Familientradition erlernt der Sohn den Beruf seines Vaters.
3. Der Sohn des Schneiders hat ein Buch von Herrn Schneider.
4. Der Familienname des Sohnes des Schneiders ist die Berufsbezeichnung des Sohnes von Herrn Schneider.
5. Der Sohn von Herrn Schneider hat ein Buch vom Schneider entliehen.
6. Der Zimmermann heißt nicht Schuster.
7. Der Zimmermann hat ein Buch von Herrn Sattler entliehen.
Wie heißt der Gärtner?

aus: O. Zich/A. Kolman, Unterhaltsame Logik, Mathematische Schülerbücherei Nr. 51, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

„Mensch ärgere Dich schnell!"

Es ist eine Art schnelles "Mensch ärgere Dich nicht". Du brauchst dazu 4 Pfennigstücke, 4 Fünfpfennigstücke und einen Würfel.

Und so werden die Münzen verteilt:

	1				5	
1						5
			■			
1						5
	1				5	

Regel:

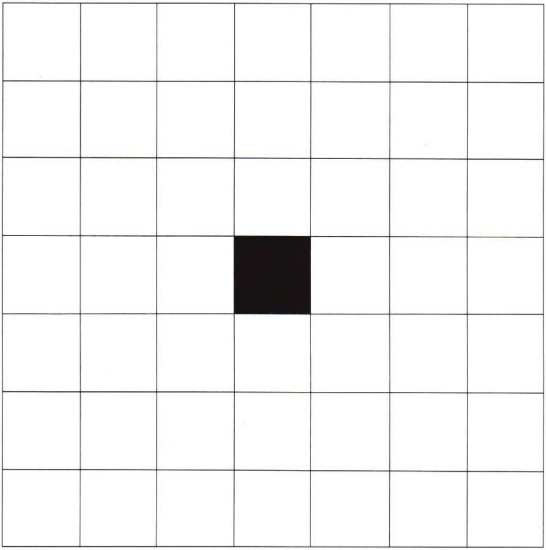
1 und 4 auf dem Würfel = 1 Kästchen weiter

2 und 5 auf dem Würfel = 2 Kästchen weiter

3 und 6 auf dem Würfel = 3 Kästchen weiter

Gezogen wird nur waagerecht oder senkrecht.

In der Mitte ist also das Loch. Besetzte Felder dürfen nicht übersprungen werden. Kommt man auf ein besetztes Feld, wird dessen Figur irgendwohin verwiesen (ganz an den Rand). Wer zuerst zwei gegenüberliegende Felder am Loch in der Mitte erreicht, hat gewonnen!



Sprachecke

The puzzle of the five houses

There are five houses.

1. An Englischman lives in the red house.
2. The Spaniard owns a dog.
3. Coffee is drunk in the green house.
4. The Ukrainian drinks tea.
5. The Old Gold smoker owns snails.
6. The green house is immediately to the right of the ivory house.
7. Kools are smoked in the yellow house.
8. Milk is drunk in the middle house.
9. The Norwegian lives in the first house.
10. The man who smokes Chesterfields lives next to the man who owns a fox.
11. Kools are smoked in the house next to the house where the horse is kept.
12. The Lucky strike smoker drinks orange juice.
13. The Japanese smokes Parliaments.
14. The Norwegian lives next to the blue house.
15. Each man has one house, one pet, one smoke, a different nationality and a different choice of drinks.

Who drinks water? Who owns a Zebra?

mitgeteilt von Dr. Jochen Hesse, Beilrode

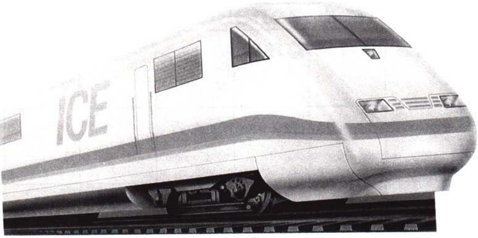
Les plaquettes de José

José a disposé 9 plaquettes numérotées de 1 à 9 dans un sac. Il en tire 4 d'un seul coup. Avec ces quatre plaquettes, en permutant les chiffres, il fabrique tous les nombres possibles à quatre chiffres, qu'il note au fur et à mesure. Il en fait le total et trouve 159984.

Quels sont les quatre plaquettes tirées? On n'oubliera pas d'indiquer le nombre de solutions.

aus: tangente, Paris
(übersetzt von Peter Hofmann, Leipzig)

Bei Herrn Kohl im Bücherschrank steht die Gesamtausgabe von Hölderlin, 4 Bände in Klarsichtfolie verpackt. Ein Bücherwurm hat die Folie durchbohrt und beginnt auf Seite 1 des ersten Bandes mit dem Fressen. Wie viele Zentimeter hat er bis zur letzten Seite des 4. Bandes zurückgelegt, wenn jeder Band 5 cm breit ist und die Einbanddecke 2,5 mm dick ist?

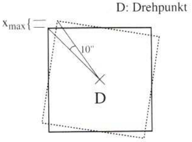


Mathematisches rund um die Bahn

Geometrie am ICE

Damit die an verschiedenen Orten hergestellten Bauteile großer technischer Geräte (z. B. Flugzeuge, Lokomotiven usw.) zueinander passen, dürfen die Abweichungen von den vom Entwicklungsingenieur vorgesehenen Idealmaßen (Sollwerte) bestimmte Grenzen nicht überschreiten.
Bei der Fertigung der Antriebswelle für den ICE wird ein quadratischer Arbeitstisch (vgl. Skizze, Seitenlänge l=1500 mm) benutzt, der im Verlauf der Bearbeitung aus der Grundposition um 360 Grad gedreht wird. Die zu bearbeitende Welle ist fest auf dem Tisch montiert, die jeweilige Position des Tisches wird automatisch gemessen und mit einer Genauigkeit von 10 Winkelsekunden korrigiert.
Berechne die maximale Abweichung x_{max} nach der Rückkehr in die Grundposition, wenn auch hier der Fehler maximal 10 Winkelsekunden beträgt.

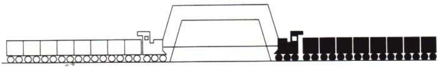
Diese Rechnung wurde nötig, da zu viele der gefertigten Wellen die erforderlichen Abmessungen nicht aufwiesen. Aufgrund des Ergebnisses der Rechnung ergab sich: Die benötigte Genauigkeit kann auf einer solchen Maschine nicht erreicht werden.



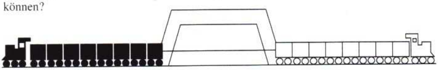
StR Friedrich Arnet,
Helene-Lange-Gymnasium Fürth, Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

Interessante Begegnung

Lokführer Weiß und Lokführer Schwarz begegnen sich auf einer eingleisigen Strecke mit ihren Zügen, von denen jeder 8 Wagen hat, neben einem Ausweichgleis, das nur Platz für eine Lokomotive und 4 Wagen besitzt. Nun ist guter Rat teuer.



Wie müssen beide Lokführer mit ihren Wagen rangieren, um ihre Fahrten fortsetzen zu können?



aus: H.-D. Hornschuh: Noch mehr Mathe mit Köpfchen, Manz Verlag München

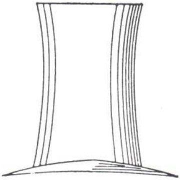
Deutschland im Stundentakt

Auf der 513 km langen Strecke zwischen Würzburg Hbf und Hamburg-Altona verkehren Intercity-Züge im Stundentakt. Der erste Zug fährt morgens um 7^{10} in Würzburg ab und kommt um 10^{59} in Hamburg an; der nächste fährt 8^{10} ab und erreicht um 11^{59} Hamburg-Altona usw. Abends besteht mit der Abfahrt um 19^{10} und der Ankunft um 22^{59} die letzte Fahrtmöglichkeit zwischen Würzburg und Hamburg.
In der Gegenrichtung von Hamburg-Altona nach Würzburg Hbf sind die Abfahrtszeiten 6^{58}, 7^{58} usw. bis 18^{58}; mit den Ankunftszeiten 10^{48} bzw. 11^{48} usw. bis 22^{48}.

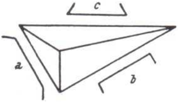
1. Wann und wo begegnen sich im Laufe eines Tages zwischen Würzburg und Hamburg erstmals zwei Intercity-Züge?
2. Wie viele Zugbegegnungen finden im Laufe eines ganzen Tages statt?
3. Warum finden diese Zugbegegnungen stets an gleichen Stellen statt?
4. Wie viele derartige Begegnungsstellen gibt es zwischen Würzburg und Hamburg und in welchem Anstand befinden sich diese?
5. Wie viele Züge sind zu einem beliebigen Zeitpunkt zwischen Würzburg und Hamburg unterwegs?
6. Wie viele Gegenzüge beobachtet ein Reisender auf der Fahrt von Würzburg nach Hamburg?
7. In welchem zeitlichen Abstand beobachtet der Reisende diese Gegenzüge?
8. Wie viele Zuggarnituren sind mindestens erforderlich, um den gesamten Verkehr zwischen Würzburg und Hamburg zu bedienen?

Studiendirektor Harald Walter,
Helene-Lange-Gymnasium Fürth

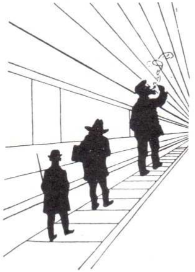
Optische Täuschungen



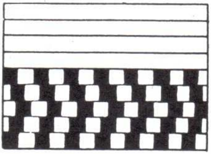
1. Ist der Zylinder ebenso hoch wie breit?



2. Vergleiche die Länge der Strecken *a*, *b* und *c*!

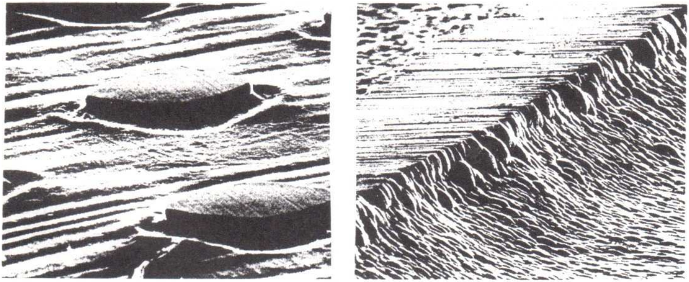


4. Diese Männer sind doch nicht gleich groß!

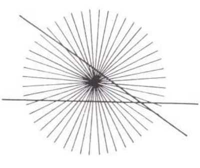


7 Der untere Teil scheint verdruckt und verworfen! Ist das so?

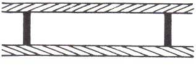
8. Vergleiche Masthöhe und Bootslänge!



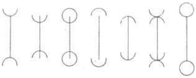
Konkav – Konvex. Dreht man diese Bilder um, so werden aus Erhebungen Einbuchtungen



3. Verbogen oder nicht?



5. Konvergieren diese Balken oder sind sie parallel?



6. Vergleiche die Längen der Hauptlinie!

9. Welcher der beiden Ochsen ist größer?

Würfel bauen auf dem Papier?

Eine Glanzleistung für Fantasievolle

Das geht, ist aber eine ganz schöne Denkleistung. Zur Unterstützung des räumlichen Vorstellungsvermögens kann man aus dem Baukasten der jüngeren Geschwister oder aus eigenen Beständen alle gleichgroßen Würfel heraussuchen. Die Bausteine des "Herzberger Quaders" sind mit etwas handwerklichem Geschick auch selbst aus Holz zu bauen.

Spiele mit dem Herzberger Quader

Aus gleichgroßen Würfeln aus Holz oder Plaste wollen wir Bausteine herstellen. Dabei sollen die Würfel so zusammengeklebt werden, daß

1. die Flächen aller Würfel zueinander parallel oder senkrecht sind,
2. aneinander stoßende Würfel eine gemeinsame Quadratfläche haben.

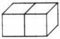


Abb. 1: Zwilling 2

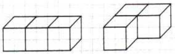
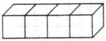


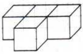
Abb. 2: Unverzweigter Drilling III *Verzweigter Drilling 3*

Aus zwei Würfeln erhalten wir einen Würfel-Zwilling (Abb. 1), aus drei Würfeln zwei Würfel-Drillinge (Abb. 2), und aus jeweils vier Würfeln acht Würfel-Vierlinge (Abb. 3).

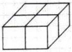


Stange S

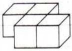
Haken H



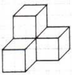
Auto A



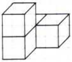
Platte P



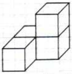
Treppe T



Dreibein D



Linke Hand L



Rechte Hand R

Abb. 3

Es sind insgesamt 11 Bausteine, für die wir 40 gleichgroße Würfel benötigen. Um uns besser verständigen zu können, führen wir für die Bausteine Namen ein und legen Abkürzungen fest.

Aufgabe 1

Untersuche, ob man mit zwei, drei oder vier Würfeln noch andere Bausteine bei Einhaltung der vorgegebenen Bedingungen zusammensetzen kann!

Aufgabe 2

Setze aus den 11 Bausteinen einen (5, 4, 2)-Quader (5 Würfelkanten lang, 4 breit und 2 hoch) zusammen!
Einen solchen Quader wollen wir Herzberger Quader nennen (Abb. 4).

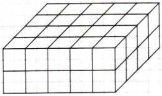
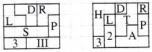


Abbildung 4

Aufgabe 3

Ermittle fünf verschiedene Zusammensetzungen für den Herzberger Quader und zeichne sie, wie es in Abb. 5 gezeigt wird.



untere Schicht *obere Schicht*

Abbildung 5

Um das räumliche Vorstellungsvermögen und damit die Fertigkeit im Zusammensetzen zu verbessern, ist es ratsam, einzelne Spielsteine in allen Lagen, in denen sie verbaut werden können, zu zeichnen. In der Abb. 6 wird dies mit dem Baustein Treppe T, in der Abb. 7 mit dem Baustein Linke Hand L vorgeführt.
Auf kleinkariertem Papier ist das leichter möglich.

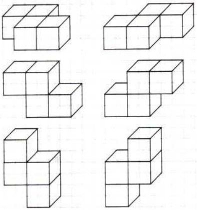


Abbildung 6

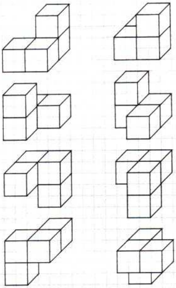


Abbildung 7

Würfelpuzzle

Du kennt sicher den "Teufelswürfel", auch "Rubiks Würfel" oder "Rubik Cube" genannt.
Wir wollen etwas Ähnliches bauen. Schau dir zunächst einmal die Zeichnung in Ruhe an:
Aus 9 gleichlangen Kanthölzern wurde ein Würfel zusammengesetzt, wobei die Würfelaugen mit schwarzem Filzstift aufgemalt werden.
Wie Du wahrscheinlich weißt, ist ein Würfel nur dann korrekt zusammengesetzt, wenn die gegenüberliegenden Seiten zusammen die Summe "7" ergeben. Es liegen sich also gegenüber: 1 und 6, 2 und 5, 3 und 4.
Für das Puzzle wird der Würfel einem Mitspieler in zusammengesetztem Zustand gezeigt – und dann läßt man ihn in seine Einzelteile zerfallen.

Aufgabe 4

Zeichne den Baustein Verzweigter Drilling 3 (Dreibein D und Rechte Hand R) in allen Stellungen, in denen sie verbaut werden können! Wir wollen uns nun einer umfangreicheren Untersuchung zuwenden und einen (4, 2, 2)-Quader (Abb. 8) mit Zusatzbedingungen zusammensetzen. Dabei sollen die drei kleinen Bausteine aus zwei und drei Würfeln immer verwendet und jeweils durch zwei Vierlinge ergänzt werden.

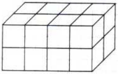


Abbildung 8

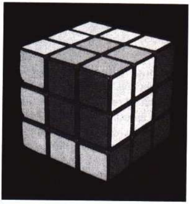
Aufgabe 5

Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus den Bausteinen 2, III, 3 und jeweils zwei Vierlingen einen (4, 2, 2)-Quader zusammenzusetzen?

Um das Finden aller Möglichkeiten zu erleichtern, fertigen wir eine Tabelle an. Ihren Anfang wollen wir angeben.

Fall	S	H	A	P	T	D	L	R
1	x	x						
2	x		x					
3	x			x				
4	x				x			
5	x					x		
6	x						x	
7	x							x
8		x	x					
9		x		x				
⋮								

Rubik's Cube



Das gegenwärtig wohl bekannteste Puzzlespiel ist der ungarische Würfel, bereits als Puzzle des Jahrhunderts gefeiert.

Die Schwierigkeiten beim Richten des Würfels liegen darin, daß unter mechanischen Nebenbedingungen eine Farbanordnung als Ganzes hergestellt werden soll.

Bestünden keine mechanischen Zwänge, so wäre das Richten des Würfels eine Beschäftigung für Kinder.

Aufgabe 6

Vervollständige die Tabelle! Versuche das Ordnungsprinzip zu erkennen!

Aufgabe 7

Versuche für jeden Fall eine Zusammensetzung zu finden!

Gibt es Fälle, für die es keine Zusammensetzung gibt? Warum gibt es keine Zusammensetzung?

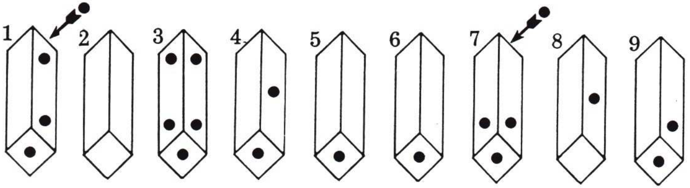
Aufgabe 8

Zeichne für jeden Fall, für den es eine Zusammensetzung gibt, eine Lösung!

Für den Fall 1, in dem der (4, 2, 2)-Quader aus den Bausteinen 2, III, 3, S und H zusammengesetzt wird, kann sie so aussehen, wie die Abb. 9 zeigt.

Abb. 9

OStR Gerhard Schulze aus Herzberg, Rentner, aber keineswegs im Ruhestand, Erfinder des Herzberger Quaders, hat eine reichhaltige Sammlung auch anderer mathematischer Spiele, Spielideen und Strategien, die auf seinen Ausstellungen Jung und Alt ins Knobeln und Schwitzen bringen.
Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha.



Die Aufgabe ist, den Würfel wieder richtig zusammenzusetzen.

Beim Bau ist die wichtigste Frage:
"Wie lang müssen die Kanthölzer sein?"
Schau dir zur Beantwortung der Frage zunächst einmal die Kanthölzer an.

Du erkennst, daß das Ganze nur geht, wenn die Enden genau quadratisch sind. Weil nun aber eine Längsseite die dreifache Länge einer Endseite hat, mußt du dir 9 Hölzer von eben genau dieser Länge zurechtsägen.

Beispiel: Hat das einzelne Holz eine Schmalseite (die an den beiden Enden) von 1 cm, muß es 3 cm lang werden.
Alles klar?
Und jetzt geht es ans Sägen, Bemalen und Zusammensetzen!

Eine Konstruktion im Raum: der Würfel

Heute wollen wir uns auf ein kleines Abenteuer einlassen: eine Konstruktion im Raum. Sie soll ebenso exakt sein wie die jedem vertrauten Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, jedoch ein *dreidimensionales* geometrisches Gebilde liefern, einen Würfel. Unmöglich? Bitte, jeder überzeuge sich selbst!

Einen Würfel aus einem Blatt Papier falten! Eine echt anspruchsvolle Aufgabe, und so ganz nebenbei bekommt man auch noch etwas Mathematik mit.

Wir nehmen vorerst irgendein Blatt Papier, es kann auch ein Stückchen aus unerwünschter Werbepost sein, und falten es auf einer festen, ebenen Unterlage einmal in der Mitte. Danach wiederholen wir diesen Vorgang, legen aber dabei die gerade entstandene Faltkante exakt aufeinander (Bild 1).

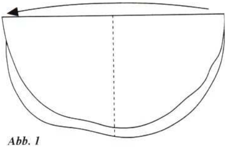


Abb. 1

Wenn wir nun alles wieder entfalten und untersuchen, können wir zweierlei sehen:

- Beide Kniffe verlaufen "schnurgerade" und stehen einer mit Lineal gezogenen Bleistiftlinie in punkto Exaktheit nicht nach.
- Die beiden Faltlinien stehen senkrecht aufeinander.

Zum Beweis dieser Aussage bedenke man, daß bei der zweiten Faltung gleichgroße ("kongruente", wie es exakt heißt) Nebenwinkel entstehen. Wenn zwei Nebenwinkel aber gleichgroß sind, haben wir es mit zwei rechten Winkeln ($180° : 2 = 90°$) zu tun.

Auf diese Weise können wir weitere Grundkonstruktionen ebenso exakt wie mit Zirkel und Lineal vornehmen, indem wir Papier falten.

1 Überlege, wie ein durch zwei einander kreuzende Kniffe gegebener Winkel halbiert werden kann!

2 Wie konstruiert man durch Falten eines beliebigen Stücks Papier dreiviertel einer darauf markierten Strecke?

Inzwischen wird langsam klar, wie vorgegangen werden soll. Wer aber denkt, naja, erst falten, dann schneiden und schließlich kleben ..., der hat unrecht. Ganz wie die japanischen Papierkünstler, die die sogenannte "Origami"-Technik hervorgebracht haben, wollen wir weder Schere noch Klebstoff verwenden, höchstens, um den quadratischen Bogen Papier auszuschneiden, der das Ausgangsmaterial bildet (etwa 20 cm Seitenlänge).

Wir legen den Bogen mit der farbigen Seite nach unten und falten entlang beider Diagonalen. Dann wenden wir die wieder entfaltete Arbeit und kniffen entlang der Mittellinie des Quadrats (Bild 2).

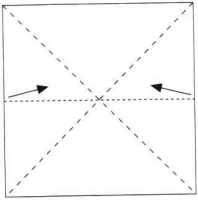


Abb. 2

Nun werden die Enden der zuletzt gefalteten Linie nach unten zusammengelegt, so daß ein Dreieck entsteht. Dessen vier (!) untere Ecken werden jeweils vorn bzw. hinten an die obere Spitze des Dreiecks (rechter Winkel) gefaltet, bis ein Viereck entsteht. Indem die obere und untere Spitze aufeinandergelegt werden, markieren wir durch einen flüchtigen Knick die halbe Höhe und falten nun vorn die rechte und linke Ecke zum so entstandenen "Mittelpunkt" des Vierecks (Bild 3).

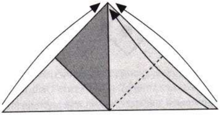


Abb. 3

Dasselbe wiederholen wir auf der Rückseite der Faltarbeit. Die oberen vier freien Spitzen werden dann ebenfalls zur "Mitte" gefaltet (Bild 4) und schließlich in die vier "Tütchen", die dort entstanden sind, fest eingesteckt (Bild 5).

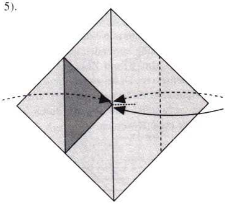


Abb. 4

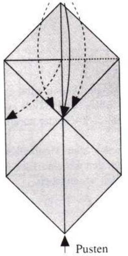


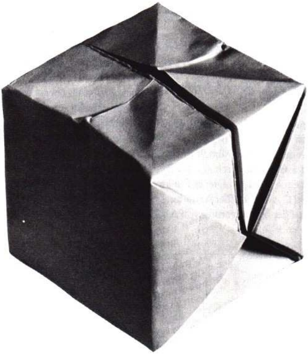
Abb. 5

Fertig.

Fertig? Wo bleibt der versprochene Würfel? Ganz einfach: An der unteren Ecke des Sechsecks ist eine Öffnung verblieben, in die wir kräftig, aber wohldosiert hineinblasen können und so das unmöglich Erscheinende möglich machen, ein räumliches Objekt aus einem ebenen Stück Papier.

Das entstandene Gebilde wird mehr oder weniger einem Würfel gleichen, je nach Geschick und Übung. Bitte nicht entmutigen lassen, wenn die ersten Versuche nicht so richtig klappen! Bedenken sollte man, daß auch die ersten Versuche, einen Kreis mit einem Zirkel zu zeichnen, vielleicht "nicht ganz rund liefen".

Über solche material- und geschicklichkeitsbedingten Ungenauigkeiten müssen wir - in gleicher Weise wie bei Zirkel/Lineal-Konstruktionen - hinwegsehen, wenn wir nun beweisen wollen, daß tatsächlich ein Würfel entstanden ist. Der Würfel oder das Hexaeder (griechisch: Sechsflächner) ist einer der fünf berühmten und nach dem antiken griechischen Mathematiker und Philosophen Platon (etwa 427 - 347 v. u. Z.) benannten Körper, die jeweils ausschließlich von ein und denselben regelmäßigen Vielecken (gleichseitige Dreiecke, Quadrate bzw. regelmäßige Fünfecke) begrenzt werden.



3 Warum ist ein ausschließlich aus regelmäßigen Sechsecken zusammengesetzter Körper unmöglich? Wenn Du keine Lösung findest, füge mehrere regelmäßige Sechsecke gleicher Größe aneinander!

Zum Beweis nehmen wir die Faltarbeit nochmals zur Hand, vielleicht sollte aber auch ein zweiter Würfel für diesen Zweck verwendet werden. Nun markieren wir die Seitenflächen des Würfels, und zwar so, daß an den Stellen, wo aus Gründen der Stabilität mehrere Schichten Papier übereinander liegen, die unterste Schicht gekennzeichnet wird. Nach dem Entfalten der gesamten Arbeit haben wir das in Bild 6 dargestellte Faltengewirr, das es nun zu enträtseln gilt:

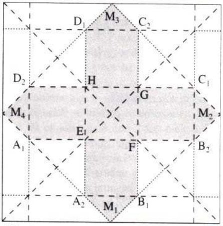


Abb. 6

Schaut man sich die Falten genauer an, erkennt man viele rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke unterschiedlicher Größe, deren kleinste gerade jede der Seitenflächen in vier Stücke teilen. Alle diese Dreiecke haben die gleiche Form (Sie sind "ähnlich", wie die Mathematiker sagen), denn bei einer jeden Faltung parallel zur Papierkante oder parallel zu einer der Diagonalen des Ausgangsquadrates entstehen ausschließlich Winkel von 90° oder 45° (Winkel an geschnittenen Parallelen). Dazu kommt, daß wir in jedem Fall die Papierkante, eine Diagonale oder einen schon vorliegenden Teil davon genau in der Hälfte gefaltet haben. Z. B. das Dreieck $D_1C_2M_3$, eines der zu betrachtenden kleinsten rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke, entsteht durch viermaliges Falten des über die Diagonale HF gefalteten Ausgangsquadrats. Somit sind die außenliegenden Seitenflächen allesamt deckungsgleiche Quadrate.
Schneiden wir mit der Schere die ausschließlich der Festigkeit der Faltarbeit dienlichen Teile ab, erkennen wir darüberhinaus, daß beim Zusammenfalten (z. B. bei G, wenn C_1 auf C_2 kommt) je zwei weitere rechte Winkel im Raum gebildet werden, also stehen die Kanten EA, FB, GC und HD senkrecht auf der Seitenfläche EFGH. Damit ist der Beweis erbracht, daß unser Gebilde ein Würfel ist.

4 Warum ist auch das entstehende Viereck ABCD ein Quadrat?
5 Welchen Rauminhalt hat ein solcher Würfel, wenn die Kantenlänge des Ausgangsquadrates gerade 24 cm beträgt?
6 Welcher Rauminhalt für einen Würfel wäre möglich, wenn wir die Schere verwenden dürfen und Klebefalze in die Rechnung nicht einbeziehen?

Dr. Christian Werge
Mathematik- und Physiklehrer
Assistent im Wissenschaftsbereich Didaktik der Sektion Mathematik der Universität Leipzig

Für Freunde der Zahlenjongliererei

Eine immer wieder beliebte Knobelei ist es, die Zahlen von 1 bis 50 (und noch weiter) mit Hilfe der Ziffern der aktuellen Jahreszahl in gegebener Reihenfolge zu errechnen.
Unser Leser Klaus-Horst Milde aus Dresden berechnete aus den Ziffern 1, 9, 9 und 1 die Zahlen 1 bis 50, erlaubt waren alle Grundrechenoperationen, Klammern, negative Vorzeichen sowie die Fakultät, mindestens ein Wurzelausdruck mußte enthalten sein.
Walter Görgens aus Schönebeck schickte uns die Lösungen für die Zahlen 1 bis 100 mit den Ziffern von 1990 und 1991 zu. Auch er ließ die oben genannten Operationen, negative Zahlen und Klammern zu, kam aber zu seinem Bedauern nicht ohne die Funktion [ ] – „ganzzahliger Ausdruck von" (z. B. [3,43]=3) aus. Das betraf als erstes die 39 ($39 = [\sqrt{19 \cdot 9}] \cdot 1$), die weiteren Problemzahlen sind 51, 66, 68, 69, 74, 75 und 77.. Bei der 65 und 92 tauchten Potenzen auf:
$65 = (1 + \sqrt{9})^{\sqrt{9}} + 1$ und $92 = 1^9 + 91$. Ob es auch ohne die geht?
Wie wäre es, wenn Ihr mal versucht, die Zahlen 1 bis 100 mittels der 1991 und 1992 darzustellen!
Eure Ergebnisse könnt Ihr an die Redaktion senden! Natürlich interessieren uns die „Problemzahlen" besonders. Im Heft 1/92 verabschieden wir dann das alte und begrüßen wir das neue Jahr mit Euren Ergebnissen. *Alphons*

Lösungen

- 1 Die Schenkel werden übereinandergelegt. Die beiden entstehenden Winkel sind, wie die Faltung zeigt, deckungsgleich.
- 2 Die Strecke wird zweimal halbiert und damit geviertelt. Drei dieser Teile ergeben dreiviertel der gegebenen Strecke.
- 3 Wenn drei regelmäßige Sechsecke zusammengelegt werden, treffen am gemeinsamen Punkt drei Winkel von 120° zusammen. Demzufolge liegen diese drei Sechsecke nach dem Zusammenfügen weiter in ein und derselben Ebene. Daraus kann kein (platonischer) Körper entstehen, man kann aber die Ebene mit solchen Sechsecken lückenlos ausfüllen, d. h. parkettieren.
- 4 Die erste mögliche Antwort wäre, weil ABCD auch aus vier der kleinsten rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke zusammengesetzt ist. Eine zweite Antwort liefert die Tatsache, daß A, B, C und D jeweils senkrecht und in gleichem Abstand über den Eckpunkten des Quadrates EFGH liegen.
- 5 Da die Seitenlänge des Würfels gerade ein Viertel der Seitenlänge des Ausgangsquadrates ist, folgt für das Volumen
$V = (6\ \text{cm})^3 = 216\ \text{cm}^3$.
- 6 Aus einem quadratischen Stück Papier $A = a^2 = (24\ \text{cm})^2 = 576\ \text{cm}^2$ kann maximal ein Würfel gebildet werden, dessen Seitenflächen ein Sechstel davon einnehmen: $96\ \text{cm}^2$. Ein solcher Würfel hat eine Kantenlänge von etwa 9,8 cm und damit einen Rauminhalt von etwa $941\ \text{cm}^3$.

Die Bewegungen der Ebene

Ein Nachweis der Tatsache, daß die Bewegungen die Menge der (eindeutigen) Längenvarianten Abbildungen bereits erschöpfen.

In Mathematikbüchern für die Schule finden wir folgende Definition: Bewegung nennt man jede Verschiebung, Drehung und Spiegelung sowie jede Nacheinanderausführung dieser Abbildungen.
Weiterhin werden dort die folgenden Eigenschaften von Bewegungen erarbeitet:

Gunter Winkler

Bei Bewegungen werden Punkte auf Punkte und Geraden auf Geraden abgebildet. Parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet, Strecken auf gleichlange Strecken und Winkel auf gleichgroße Winkel. Bei jeder Bewegung gibt es zu jedem Punkt der Ebene genau einen Bildpunkt, und umgekehrt ist jeder Punkt der Ebene Bildpunkt genau eines Originalpunktes (eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte der Ebene auf sich).

Wir wollen alle Abbildungen φ mit folgenden Bedingungen bestimmen: [1]
I. Jede Abbildung φ bildet jeden Punkt der Ebene eindeutig auf einen Punkt der Ebene ab. (Eindeutige Abbildung der Menge der Punkte der Ebene in die Menge der Punkte der Ebene)
II. Bei jeder Abbildung φ haben zwei Bildpunkte stets den gleichen Abstand wie ihre Originalpunkte (Invarianz des Abstandes).
Solche Abbildungen gibt es. Beispielsweise ist jede Bewegung eine derartige Abbildung. Die Menge $\mathfrak{M}$ der gesuchten Abbildungen ist also eine Obermenge der Menge $\mathfrak{B}$ der Bewegungen: $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{B}$
Für jede Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ gilt: Sind A und B zwei Punkte der Ebene, so gibt es bei jeder Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ gemäß Bedingung I zwei eindeutig bestimmte Bildpunkte A_φ und B_φ. Laut Bedingung II gilt $\overline{A_\varphi B_\varphi} = \overline{AB}$. B_φ liegt also auf dem Kreis k um A_φ mit Radius AB. ***(Abb. 1)***
Analog gilt: Sind A, B und C drei Punkte der Ebene, so gibt es bei jeder Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ drei Bildpunkte A_φ, B_φ und C_φ. Dabei gilt $\overline{A_\varphi B_\varphi} = \overline{AB}$, $\overline{B_\varphi C_\varphi} = \overline{BC}$ und $\overline{A_\varphi C_\varphi} = \overline{AC}$.
Wie werden bei jeder Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ die Punkte einer Geraden abgebildet? g sei eine Gerade durch die Punkte A und B. Für die Bildpunkte A_φ und B_φ von A und B bei einer Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ gilt $\overline{A_\varphi B_\varphi} = \overline{AB}$. ***(Abb. 2)***
Ist C ein zwischen A und B gelegener Punkt der Geraden g, so gilt $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$, und der Bildpunkt C_φ von C bei dieser Abbildung φ muß auf den Kreisen k_1 um A_φ mit Radius $\overline{AC}$ und k_2 um B_φ mit dem Radius $\overline{BC}$ liegen. k_1 und k_2 haben nur einen gemeinsamen Punkt; dieser liegt auf der Geraden durch A_φ und B_φ und zwar zwischen A_φ und B_φ. Dieser Punkt muß der Bildpunkt C_φ von C bei der Abbildung φ sein. Liegt C auf der Verlängerung von AB über B hinaus, so ist $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$. Wiederum haben die Kreise k_1 um A_φ mit Radius $\overline{AC}$ und k_2 um B_φ mit Radius $\overline{BC}$ nur einen gemeinsamen Punkt, der ebenfalls auf der Geraden durch A_φ und B_φ liegt. Für die dritte Lagemöglichkeit von C auf g, nämlich auf der Verlängerung von AB über A hinaus, gilt diese Feststellung analog.
Durch jede Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ wird also jede Gerade g der Ebene auf eine Gerade g_φ der Ebene abgebildet.
Weiterhin gilt: Strahlen werden auf Strahlen und Strecken auf kongruente Strecken abgebildet. Insbesondere gilt damit: Der Mittelpunkt einer Strecke wird bei jeder Abbildung

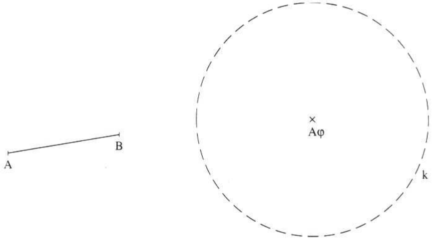


Abb. 1

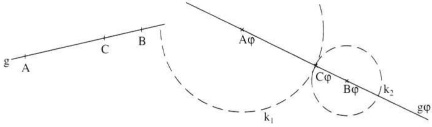


Abb. 2

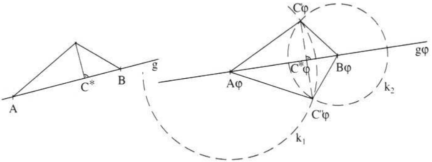


Abb. 3

$\varphi \in \mathfrak{M}$ auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet.

Wie wird ein Punkt C, der nicht auf der durch die Punkte A und B verlaufenden Geraden g liegt, durch eine Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ abgebildet? ***(Abb. 3)***

Der Bildpunkt C_φ eines Punktes C bei der Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ muß einer der beiden Schnittpunkte C'_φ und C''_φ der Kreise k_1 um A_φ mit Radius $\overline{AC}$ und k_2 um B_φ mit dem Radius $\overline{BC}$ sein. C_φ liegt also nicht auf der Geraden g_φ, und es gilt $\Delta ABC \cong \Delta A_\varphi B_\varphi C_\varphi$ nach Kongruenzsatz sss. Bei einer Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ sind Original- und Bilddreieck und ebenso Original- und Bildwinkel kongruent. Die Strecke $\overline{C'_\varphi C''_\varphi}$ (Bild 3) steht senkrecht auf g_φ und wird von g_φ halbiert. Der Schnittpunkt C^*_φ von g_φ und $C'_\varphi C''_\varphi$ ist der Bildpunkt des Fußpunktes C* des von C auf g gefällten Lotes.

Wie werden die Punkte einer Halbebene durch eine Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ abgebildet? [2] g sei die Gerade durch A und B, und C und D seien zwei in der gleichen Halbebene bezüglich g gelegene Punkte. Durch eine Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ werde A auf A_φ, B auf B_φ, g auf g_φ und C auf C_φ abgebildet. ***(Abb. 4)***

Weiterhin seien C* und D* die Fußpunkte der von C und D auf g gefällten Lote und C^*_φ und D^*_φ die Bilder von C* und D*. D_φ fällt mit einem der beiden Punkte D'_φ und D''_φ zusammen, die auf der Senkrechten zu g_φ durch D^*_φ liegen und von D^*_φ den Abstand $\overline{DD^*}$ haben. Jener der beiden möglichen Bildpunkte von D, der mit C_φ in der gleichen Halbebene bezüglich g_φ liegt, sei mit D'_φ bezeichnet. Ist C''_φ der Spiegelpunkt von C_φ an g_φ, so ist $D'_\varphi D''_\varphi C''_\varphi C_\varphi$ für $D^* \neq C^*$ ein gleichschenkliges Trapez.

Da in einem gleichschenkligen Trapez die Diagonale stets länger als ein Schenkel ist, und weil $\overline{DC} = D'_\varphi C_\varphi$ wegen $\square DD^*C^*C \cong \square D'_\varphi D^*_\varphi C^*_\varphi C_\varphi$ gilt, kann D_φ nur mit $D'\varphi$ zusammenfallen. Fällt D* mit C* zusammen, so gilt ebenfalls $D_\varphi = D'_\varphi$. Durch jede Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ werden die Punkte einer Halbebene bezgl. g stets auf die Punkte einer Halbebene bezgl. g_φ abgebildet, und die der anderen Halbebene bezgl. g auf die der anderen Halbebene bezgl. g_φ

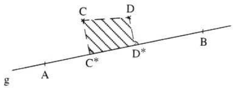


Abb. 4 a

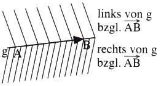


Abb. 5

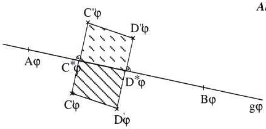


Abb. 4 b

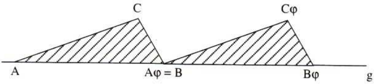


Abb. 6

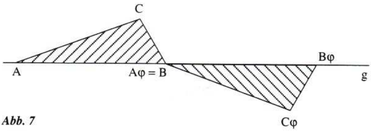


Abb. 7

Die Abbildungen $\varphi \in \mathfrak{M}$ lassen sich in gerade und ungerade Abbildungen unterteilen: Es sei $\varphi \in \mathfrak{M}$, es seien A, B und C drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte und A_φ, B_φ und C_φ ihre Bilder. Durch die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{A_\varphi B_\varphi}$ werden auf den Geraden g = AB bzw. $g_\varphi = A_\varphi B_\varphi$ Durchlaufrichtungen festgelegt. Bezüglich AB liegt der Punkt C entweder "rechts" oder "links" von g (Abb. 5). Hat der Punkt C_φ bezgl. $A_\varphi B_\varphi$ dieselbe (eine verschiedene) Lage, so heißt φ gerade (ungerade). Die Einteilung der Abbildungen $\varphi \in \mathfrak{M}$ in gerade und ungerade Abbildungen ist unabhängig von der Wahl der benutzten Punkte A, B und C, wie sich mittels der hergeleiteten Eigenschaften dieser Abbildungen zeigen läßt. Damit gilt:

III. Unter den Abbildungen aus $\mathfrak{M}$ (d. h., jenen mit den Eigenschaften I und II), die zwei vorgegebene Punkte A, B ($A' \neq B$) auf zwei vorgegebene Bildpunkte A', B' abbilden, gibt es höchstens eine gerade und höchstens eine ungerade Abbildung.

Nunmehr sollen alle Abbildungen $\varphi \in \mathfrak{M}$ bestimmt werden.

Die einfachste derartige Abbildung φ ist die, bei der jeder Bildpunkt A_φ mit seinem Originalpunkt A zusammenfällt. Man nennt sie identische Abbildung. Sie erfüllt auf triviale Weise die Bedingungen I und II. Bei jeder anderen Abbildung $\varphi \in \mathfrak{M}$ gibt es mindestens einen Punkt A der Ebene, dessen Bildpunkt A_φ nicht mit A zusammenfällt.

Als zweiter Originalpunkt neben A wird $B = A_\varphi$ betrachtet. Dann gilt gemäß II $\overline{A_\varphi B_\varphi} = \overline{AB} = \overline{AA_\varphi}$. B_φ liegt auf dem Kreis um B mit Radius AA_φ.

Für jede Lagemöglichkeit von B_φ wird nun je eine gerade und eine ungerade Bewegung angegeben, welche A auf A_φ und B auf B_φ abbildet. Da es in $\mathfrak{M}$ höchstens je eine solche Abbildung geben kann, sind diese somit Bewegungen und es gilt statt $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{B}$ sogar $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. D. h., außer den Bewegungen gibt es keine "abstandstreuen" eindeutigen Abbildungen.

Fall 1: B_φ liegt auf der Verlängerung von AA_φ über A_φ hinaus.

Fall 1a: $\varphi \in \mathfrak{M}$ sei eine gerade Abbildung. (Abb. 6)

Durch die Verschiebung (Translation) τ mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{AA_\varphi}$ wird A auf A_φ und B auf B_φ abgebildet. Da die Verschiebung τ eine gerade Bewegung ist, gilt nach III φ=τ.

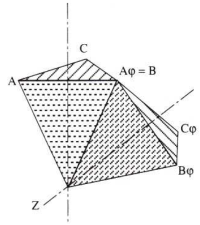


Abb. 8

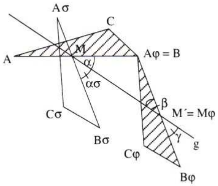


Abb. 9

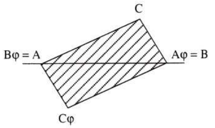


Abb. 10

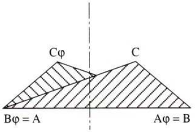


Abb. 11

Fall 1b: $\varphi \in \mathfrak{M}$ sei eine ungerade Abbildung. ***(Abb. 7)***. Durch die im Fall 1a betrachtete Verschiebung τ wird A auf A_φ und B auf B_φ abgebildet. Durch die Spiegelung σ an der Geraden g durch A und A_φ werden A_φ und B_φ als Punkte der Symmetrieachse g auf sich abgebildet. Die Nacheinanderausführung $\tau \bigcirc \sigma$ von τ und σ bildet also A auf A_φ und B auf B_φ ab. [3] Die Spiegelung σ ist eine zu $\mathfrak{M}$ gehörige ungerade Bewegung. Da die Nacheinanderausführung der geraden Bewegung τ und der ungeraden Bewegung σ eine zu $\mathfrak{M}$ gehörende ungerade Bewegung ist, gilt nach III $\varphi=\tau \bigcirc \sigma$. $\varphi=\tau \bigcirc \sigma$ nennt man Schubspiegelung. Schubspiegelung heißt die Nacheinanderausführung einer Verschiebung τ und einer axialen Spiegelung σ, deren Symmetrieachse parallel zum Verschiebungspfeil von τ ist. Als Achse einer Schubspiegelung $\tau \bigcirc \sigma$ wird die Symmetrieachse der Spiegelung σ bezeichnet. Wie in Bild 7 ablesbar, kommt es bei einer Schubspiegelung auf die Reihenfolge der Ausführung von Verschiebung und Spiegelung nicht an, also gilt auch $\varphi=\sigma \bigcirc \tau$.
(Abb. 7)

Fall 2: B_φ liegt nicht auf der Geraden durch A und A_φ.

Fall 2a: $\varphi \in \mathfrak{M}$ sei eine gerade Abbildung. ***(Abb. 8)***
Die Mittelsenkrechten von AA_φ und BB_φ schneiden einander in genau einem Punkt Z. Nach dem Satz über die Mittelsenkrechte gilt $\overline{AZ}=\overline{BZ}=\overline{B_\varphi Z}$. Da gemäß II $\overline{AB}=\overline{A_\varphi B_\varphi}$ gilt, sind die Dreiecke AZB und $A_\varphi ZB_\varphi$ kongruent (sss). Weil in kongruenten Dreiecken entsprechende Winkel gleich groß sind, gilt $\sphericalangle AZB = \sphericalangle A_\varphi ZB_\varphi$. Durch die Drehung δ mit dem Zentrum Z und orientiertem Drehwinkel $\sphericalangle AZA_\varphi$ wird A auf A_φ und B auf B_φ abgebildet.
Da die Drehung δ eine zu $\mathfrak{M}$ gehörige gerade Abbildung ist, gilt nach III $\varphi=\delta$.

Fall 2b: $\varphi \in \mathfrak{M}$ sei eine ungerade Abbildung. ***(Abb. 9)***
Die Mittelpunkte der Strecken AB und $A_\varphi B_\varphi$ seien mit M und M´, und die Gerade durch M und M´ sei mit g bezeichnet. M´ ist der Bildpunkt vom M bei der Abbildung $\varphi : M_\varphi = M'$. Denn der Mittelpunkt einer Strecke wird bei diesen Abbildungen auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet. Aus $\overline{AM}=\overline{MB}$ und $\overline{AM}=\overline{A_\varphi M_\varphi}$ folgt $\overline{MB}=\overline{A_\varphi M_\varphi}$. Dreieck $MM_\varphi B$ ist also gleichschenklig. Die mit α und β bezeichneten Basiswinkel sind also gleich groß. (Abb. 9) Der Winkel γ hat weiterhin die gleiche Größe wie sein Scheitelwinkel β. Also gilt $\alpha=\gamma$. Durch die Spiegelung σ mit g als Symmetrieachse werden A und B auf A_σ und B_σ und α wird auf α_σ abgebildet. Dabei gilt $\alpha=\alpha_\sigma$ und damit auch $\gamma=\alpha_\sigma$. Durch die Verschiebung τ mit Verschiebungspfeil $\overrightarrow{MM_\varphi}$ wird M auf M_φ, A_σ auf A_φ und B_σ auf B_φ abgebildet. Durch die Nacheinanderausführung $\sigma \bigcirc \tau$ der Spiegelung σ und der Verschiebung τ wird A auf A_φ und B auf B_φ abgebildet. Da $\sigma \bigcirc \tau$ eine zu $\mathfrak{M}$ gehörende ungerade Bewegung ist, gilt wegen III $\varphi=\sigma \bigcirc \tau=\tau \bigcirc \sigma$. φ ist wiederum eine Schubspiegelung.

Fall 3:
Jetzt gilt B_φ=A.

Fall 3a: $\varphi \in \mathfrak{M}$ sei eine gerade Abbildung. ***(Abb. 10)***
Durch die 180°-Drehung δ, deren Drehzentrum der Mittelpunkt M der Strecke AA_φ ist, wird A auf A_φ und B auf B_φ=A abgebildet. Da $\delta \in \mathfrak{M}$ gilt und δ eine gerade Bewegung ist, gilt nach III $\varphi=\delta$.

Fall 3b: $\varphi \in \mathfrak{M}$ sei eine ungerade Abbildung. ***(Abb. 11)***
Durch die Spiegelung σ an der Mittelsenkrechten der Strecke AA_φ wird A auf A_φ und B auf B_φ=A abgebildet. Da $\sigma \in \mathfrak{M}$ gilt und σ eine ungerade Bewegung ist, gilt nach III $\varphi=\sigma$.
Wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ können wir die Bewegungen in der Ebene auch wie folgt definieren:
Bewegung heißt jede Abbildung, die jeden Punkt der Ebene eindeutig auf einen Punkt dieser Ebene abbildet und bei welcher der Abstand zweier Originalpunkte stets gleich dem Abstand der zugehörigen Bildpunkte ist.
Aufgrund dieser Ausführungen gilt: Jede Bewegung ist entweder die **identische Abbildung**, eine Spiegelung, eine Schubspiegelung, eine **Verschiebung** oder eine **Drehung**.
Die geraden Bewegungen sind bei dieser Aufzählung fett gedruckt.
Nach diesen Betrachtungen muß die Nacheinanderausführung einer Drehung δ und einer Verschiebung τ eine gerade Bewegung sein. Es läßt sich zeigen, daß $\delta \bigcirc \tau$ eine Drehung ist, deren Drehwinkel ebenso groß ist wie der von δ.

Bei der Arbeit an diesem Beitrag unterstützte mich Herr Walter Träger aus Döbeln, dem ich für seine Bemühungen recht herzlich danken möchte.

Gunter Winkler, geboren am 5. 7. 1976 schrieb diesen Beitrag mit 14 Jahren regelmäßiger Frühstarter bei der OJM mit 1. Plätzen
Interesse außerdem am Schach und dem Programmieren auf dem Heimcomputer. Schüler an der Spezialschule Riesa

Anmerkungen

[1] In diesem Beitrag werden die folgenden Buchstaben des griechischen Alphabets benutzt: α Alpha, β Beta, γ Gamma, δ Delta, σ Sigma, τ Tau, φ Phi

[2] Jede Gerade zerlegt die Ebene in zwei Bereiche, Halbebenen genannt.

[3] $\tau \bigcirc \sigma$ wird "Tau Kringel Sigma" gelesen.

XXX. Olympiade Junger Mathematiker

4. Stufe

In diesem Jahr wurde die Olympiade Junger Mathematiker zum 30. Mal durchgeführt.
Das Zeichen dieser Olympiade ist das 17-Eck, dessen Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal C. F. Gauß 1796 bewies. Die Stadt Braunschweig, Geburtsort von Gauß, ehrte den großen deutschen Mathematiker durch den abgebildeten Sonderstempel (siehe Abbildungen)

Erfurt, 3. - 6.6.1991
Vor einem Jahr fand fast zum gleichen Zeitpunkt am gleichen Ort die Siegerehrung der 4. Stufe der XXIX. Olympiade Junger Mathematiker statt. Uns alle bewegte damals die Frage: Wie geht es weiter?
Durch die Einladung der Kultusministerin Thüringens, Frau Lieberknecht, zur "Mathematikolympiade 1991" nach Erfurt war eine erste Antwort auf diese Frage gegeben.

Erstmalig konnten auch Schüler aus den alten Bundesländern an diesem Wettbewerb teilnehmen. Besonders herzlich wurden Schülerinnen und Schüler aus Hamburg, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen und Schleswig-Holstein begrüßt.
Im nächsten Jahr erwartet uns in Erfurt die 600 Jahrfeier der Universität und die 1250 Jahrfeier der Stadt. Die Mathematikolympiade ordnet sich in diesen Prozeß ein, indem sie den zukünftigen wissenschaftlichen Nachwuchs in einem Leistungsvergleich vereint. Es könnte eine lohnenswerte Aufgabe für die Universität sein, alljährlich die besten Jungen Mathematiker Deutschlands zum Wettstreit zusammenzuführen. Schließlich ist es gelungen, durch Initiative eines neuen Bundeslandes auf dem Gebiet der Schülerwettbewerbe eine wesentliche Bereicherung einzubringen.
Unter den 125 Startern befanden sich auch 10 Mädchen. Die Jury konnte erste Preise verleihen an:

Klasse 12/13:
Lutz Lehmann, Heinrich-Hertz-Schule, Berlin
Marco Schlichting, C. F.-Gauß-Schule, Frankfurt/Oder
Jan Sieber, Heinrich-Hertz-Schule, Berlin
Tomas Antonius Klenke, Stormarn-Schule, Ahrensburg
Klasse 11:
Andreas Bernig, Spezialschule Leipzig
Klasse 10:
Martina Eckner, Spezialschule "Carl Zeiss", Jena
Reinhard Priber, Spezialschule Chemnitz
Andreas Mück, Spezialschule Halle
Ferner wurden 11 zweite und 19 dritte Preise vergeben. 28 Teilnehmer erhielten Anerkennungsurkunden. Bodo Lass (Eichenschule Scheeßel) konnte zwei Diplome für die besonders elegante Lösung einer Aufgabe entgegennehmen.

Dr. Wolfgang Moldenhauer
Sektion Mathematik der
Pädagogischen Hochschule Erfurt

Ein Siegerfoto darf nicht fehlen.

Von links: Dr. W. Moldenhauer (Landesvorsitzender der OJM Thüringens), Marco Schlichting, Lutz Lehmann, Martina Eckner, Jan Sieber, Andreas Bernig, Tomas Antonius Klenke, Andreas Mück, Herr Schnöller (Repräsentant des Sponsors Siemens-Nixdorf AG Thüringen)

XXX. Olympiade Junger Mathematiker (4. Stufe)

Aufgaben

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, sollen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) soll deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

Olympiadeklasse 10

301041

Zur Konstruktion eines Vierecks ABCD seien die Streckenlängen
$a = 3$ cm, $c = 6$ cm, $e = \sqrt{27}$ cm, $f = \sqrt{108}$ cm
und die Winkelgröße $\varphi = 60°$ vorgegeben. Gefordert wird:

(1) Die Seite AB hat die Länge $\overline{AB} = a$.
(2) Die Seite CD hat die Länge $\overline{CD} = c$.
(3) Die Diagonale AC hat die Länge $\overline{AC} = e$.
(4) Die Diagonale BD hat die Länge $\overline{BD} = f$.
(5) Die Diagonalen AC und BD schneiden sich in einem Punkt S; für diesen hat der Winkel $\sphericalangle ASB$ die Größe ϕ.

(a) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck ABCD die geforderten Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Größen a, c, e, f, φ konstruiert werden;
(b) Beschreiben Sie eine Konstruktion und führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!
(c) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck ABCD nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen!
(d) Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Viereck ABCD gibt, das die geforderten Bedingungen erfüllt!

301042

Es seien $x_1, x_2, ..., x_n$ Zahlen, von denen jede entweder gleich 1 oder gleich -1 ist. Ferner sei
$x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_{n+3} = x_3$;
für jedes $i = 1, ..., n$ sei
$p_i = x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+2} \cdot x_{i+3}$,
und es werde
$p_1 + p_2 + ... + p_n = 0$
vorausgesetzt. Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: n ist durch 4 teilbar.

Von den nachstehenden Aufgaben 301043 A und 301043 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

301043 A

Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, daß es zu jeder positiven natürlichen Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist!

301043 B

Im Raum seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, daß zwischen ihnen folgende Abstände auftreten:
$\overline{AB} = 7{,}2$ cm; $\overline{AC} = 9{,}6$ cm; $\overline{AD} = 15{,}6$ cm; $\overline{BC} = 12{,}0$ cm; $\overline{BD} = 15{,}6$ cm; $\overline{CD} = 15{,}6$ cm.
Ermitteln Sie den Radius r derjenigen Kugel, auf deren Oberfläche diese vier Punkte liegen!

301044

Untersuchen Sie, ob es eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f so gibt, daß für alle natürlichen Zahlen a und b die Gleichung $f(a) + f(a+b) - f(a-b) = a^2 + 4b + 2$ gilt!

301045

Ein Mathematiklehrer, der demnächst den Flächeninhalt von Kreisen behandeln wollte, stellte folgende vorbereitende Hausaufgabe: Auf kariertem Papier (quadratische Kästchen der Seitenlänge 5 mm) sollten die Schüler um einen Eckpunkt eines Kästchens Kreise mit den Radien 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm und 5 cm zeichnen. Zu jedem dieser Kreise sollten sie unter allen Kästchen, die gemeinsame Punkte mit der Kreisfläche haben, diejenigen zählen,

(A) die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind,
(B) deren Vereinigungsmenge die Kreisfläche vollständig überdeckt.

Offenbar ergibt das Produkt des Flächeninhaltes eines Kästchens mit der in (A) gefundenen Anzahl einen zu kleinen Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises, mit der in (B) gefundenen Anzahl dagegen einen zu großen Näherungswert. Anschließend sollte noch das arithmetische Mittel dieser beiden Näherungswerte (als ein dritter Näherungswert) berechnet werden.
Die Schüler, die sehr sorgfältig gearbeitet hatten, erhielten folgende Ergebnisse (siehe Tabelle 1).

Nun wurde bemerkt, daß jeweils die Maßzahlen des dritten Näherungswertes sämtlich nach dem Komma die Ziffer 5 haben. Trifft das auch bei Wahl aller Radien r zu, deren Maßzahlen in cm die natürlichen Zahlen größer als 5 sind?

301046

Das Arbeitsblatt zeigt die Bilder A', B', C', D', E', F', G' von sieben Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G eines Körpers bei Parallelprojektion. Dieser Körper hat außerdem noch einen Eckpunkt H; die Oberfläche des Körpers besteht aus sechs ebenen Vierecken ABCD, ABFE, ADHE, BCGF, CDHG, EFGH. Die Kanten AB, BC, BF werden (bei der Sicht auf die Zeichenebene in Projektionsrichtung) von davorliegenden Flächen verdeckt; daher sind A'B', B'C', B'F' gestrichelt gezeichnet.
Konstruieren Sie unter diesen Voraussetzungen das Bild H' des Punktes H und die Bilder der von H ausgehenden Kanten! Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! (siehe Abbildung 1)

Radius r in cm	Anzahl der Kästchen bei (A)	bei (B)	Näherungswert des Flächeninhalts in cm²
1	4	16	(1+ 4):2 = 2,5
2	32	60	(8+15):2 = 11,5
3	88	132	(22+33):2 = 27,5
4	164	224	(41+56):2 = 48,5
5	276	344	(69+86):2 = 77,5

Tabelle 1

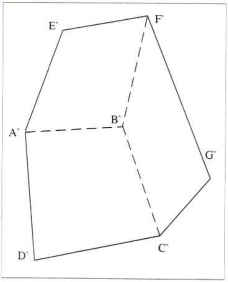


Abb. 1

Olympiadeklassen 11 - 13

301241

Man ermittle zu jedem Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen a, b, c, alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$x^2 - (y-z)^2 = a,$ (1)
$y^2 - (z-x)^2 = b,$ (2)
$z^2 - (x-y)^2 = c.$ (3)

301242

Zu einem würfelförmigen Kasten der Kantenlänge 10 cm seien alle diejenigen Geraden betrachtet und als "markiert" bezeichnet, die durch das Innere des Würfels gehen, parallel zu einer Würfelkante verlaufen und von den beiden Seitenflächen, die diese Kante enthalten, ganzzahlige in cm gemessene Abstände haben.
Man beweise:
Wie man auch den Kasten mit 250 quaderförmigen Bausteinen der Abmessungen 2 cm x 2 cm x 1 cm vollständig ausfüllt, stets gibt es wenigstens 100 markierte Geraden, die keinen der Bausteine durchstechen.
Dabei gilt ein Baustein genau dann als "durchstochen", wenn die Gerade innere Punkte des Bausteins enthält.

301243

Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig.
(2) Für jede reelle Zahl x gilt
$f(x) - 4 \cdot f(x^2) = x - 16x^4$.

301244

Eine streng monoton steigende Zahlenfolge $x_1, x_2, ..., x_n$ werde genau dann "m-schmal" genannt, wenn für alle $\upsilon = 2, ..., n$ die Ungleichungen $x_\upsilon - x_{\upsilon-1} \leq m$ gelten.
Eine Menge Z von Zahlen werde genau dann "m-dicht" genannt, wenn sie für jede natürliche Zahl $n \leq 2$ eine n-gliedrige streng monoton steigende Zahlenfolge enthält, die m-schmal ist.
Man beweise die folgende (einen berühmten Satz des niederländischen Mathematikers B. L. van der Waerden abschwächende [1)]) Aussage:
Zu jeder Zerlegung der Menge ℕ aller natürlichen Zahlen in eine Anzahl $r \leq 2$ paarweise disjunkter nicht leerer Teilmengen $T_1, ..., T_r$ gibt es eine positive ganze Zahl m, so daß (mindestens) eine der Mengen $T_1, ..., T_r$ eine m-dichte Menge ist.

301245

Man ermittle ein Polynom
$f(x) = a_o + a_1x + ... + a_2x^2$ (1)
($a_o, a_1, ..., a_n$ reell; $a_n \neq 0$)
das die Bedingungen
$f(-4) = 0,\ f(-3) = 1,\ f(-2) = 0,\ f(-1) = -1,$
$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 0,\ f(3) = -1,$ (2)
$f(4) = 0$
erfüllt und dabei möglichst niedrigen Grad n hat.

Von den nachstehenden Aufgaben 301246 A und 301246 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

301246 A

Man beweise: In jedem Dreieck ABC erfüllen für jeden Punkt P im Innern des Dreiecks die Längen $x = \overline{PA}, y = \overline{PB}, z = \overline{PC}$ und die Längen u, v bzw. w der von P auf die Seiten BC, CA bzw. AB oder deren Verlängerungen gefällten Lote die Ungleichung
$xyz \geq (v+w)(w+u)(u+v)$.

301246 B

Für natürliche Zahlen n, k mit $2 \leq k \leq n$ werde eine "Menge *N* von n Personen" genau dann als "k-familiär" bezeichnet, wenn sich in jeder Menge *K* von k Personen aus *N* eine Person befindet, die mit allen anderen Personen aus *K* bekannt ist.
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle diejenigen natürlichen Zahlen k mit $2 \leq k \leq n$, für die die Aussage gilt, daß jede k-familiäre Menge von n Personen auch n-familiär sein muß!
Hinweise: Für Personen a, b gelte stets: Wenn a mit b bekannt ist, so ist b mit a bekannt.
Ferner werde vorausgesetzt, daß jede in einer Menge theoretisch widerspruchsfreie Verteilung gegenseitiger Unbekanntheit oder Bekanntheit auch durch eine "Menge von Personen" realisiert werden kann.

Die Lösungen zu diesen Aufgaben könnt Ihr bei Einsendung eines frankierten (2,60 DM) und adressierten Rückumschlages (A5) von uns erhalten.

[1)] Diesen Satz (bei dem arithmetische statt m-schmaler Folgen auftreten) ohne Beweis nur als bekannten Sachverhalt zu zitieren, würde hier für eine Lösung der obigen Aufgabe 301244 nicht ausreichen.

Aktuelle Meldungen

Am 3. Oktober 1991 wurde in Annaberg ein Adam-Ries-Bund gegründet, dem die Nachfahren des bekannten Rechenmeisters, Riesforscher und Interessenten beitreten können. Anlaß ist der 500. Geburtstag von Adam Ries im Jahr 1992.
Die Adam-Ries-Städte Staffelstein in Bayern (sein Geburtsort), Erfurt in Thüringen und Annaberg-Buchholz in Sachsen planen 1992 gemeinsame Projekte. Neben Vorträgen zum Wissenschaftler, Humanisten und Bergbeamten Adam Ries steht auch ein mathematischer Schülerwettbewerb der drei Länder auf dem Programm. Staffelstein gedenkt zum Beispiel mit einem Altstadtfest ihres großen Sohnes, Bundespostminister Schwarz-Schilling übergibt eine Sondermarke und erstmals wird das wissenschaftliche Werk Coß, mit dem Ries als Wegbereiter der neuen Mathematik in die Geschichte einging, gedruckt vorliegen.
alpha wird natürlich darüber berichten.

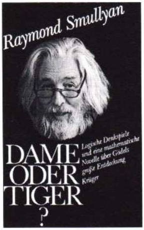
Die 2. Stufe der 31. OJM (auf Kreisebene) wird in Klausurform am 13. 11. ´91 durchgeführt. Interessenten wenden sich bitte an das Kultusministerium ihres Landes, dort liegen die Aufgaben und Teilnahmebedingungen vor.
Die 3. Stufe auf Länderebene soll am 8. und 9. Februar ´92 starten.
Bezüglich der 4. Stufe (Deutschland-Olympiade) und ihrer Abstimmung mit dem Bundeswettbewerb wird in diesem Monat beraten.

Die Marktecke

Lesens- und Sehenswertes vom Medienmarkt

Dame oder Tiger?

Im ersten Teil von "Dame oder Tiger?" werden von einer prächtigen Gesellschaft imaginärer Gestalten – darunter Vampire, Psychiater, Träumer, Eremiten, Könige, Ritter und Schurken – immer kniffliger werdende Rätsel gestellt. Den zweiten Teil bildet eine mathematische Novelle – die erste ihrer Art –: "Das Geheimnis des Schlosses von Monte Carlo". Inspektor Craig, der bei der praktischen Aufgabe beginnt, die Zahlenkombination für ein Safeschloß zu finden, wobei ihm zwei Freunde mit ihren Rechenmaschinen zu Hilfe kommen, gerät in immer tiefere logisch-mathematische Gedanken, die ihn schließlich mitten in Gödels wunderschönes Theorem über Wahrheit und Beweisbarkeit führen...



Raymond Smullyan: Dame oder Tiger? - Logische Denkspiele und eine mathematische Novelle über Gödels große Entdeckung, Wolfgang Krüger Verlag, 1983; ISBN 3-8105-1806-9

Ebenso einfallsreich und in ihrer Wirkung verblüffend sind M. C. Eschers paradoxe und verrätselte Zeichnungen, mit denen die 19 Kapitel von "Dame oder Tiger?" optisch eingeleitet werden.

Zum Autor:

Raymond Smullyan wurde 1918 in Far Rokkaway auf Long Island (New York) geboren. Mit 12 Jahren verließ er die Schule, um im Selbststudium moderne Algebra und mathematische Logik zu lernen. Seinen Unterhalt verdiente er zunächst als Zauberer in Clubs und als Musiklehrer. 1955, nach Jahren verschiedener Studien, wurde Smullyan von dem Philosophen Rudolf Carnap dem Dartmouth College als Professor für mathematische Logik empfohlen. Inzwischen ein international bekannter Mathematiker, lehrt er heute an der City University in New York, am Lehman College und im Graduate Center.

Eine Kostprobe:

Die Versuche des ersten Tages

Am ersten Tag fanden drei Versuche statt. Bei allen dreien erklärte der König den Gefangenen, daß in jedem der beiden Räume sich entweder eine Dame oder ein Tiger befände, aber es könnte sein, daß Tiger in beiden Räumen oder Damen in beiden Räumen oder eben auch möglicherweise in dem einen eine Dame und im andern ein Tiger wären.

1. Der erste Versuch

"Angenommen, in beiden Räumen sind Tiger", fragte der Gefangene, "was mache ich dann?"

"Das ist dein Pech!" erwiderte der König.

"Und angenommen, in beiden Räumen sind Damen?" fragte der Gefangene.

"Das ist dann offensichtlich dein Glück", entgegnete der König. "Die Antwort darauf hättest du sicher selbst erraten können."

"Nun, und angenommen, in dem einen Raum befindet sich eine Dame und in dem andern ein Tiger, was passiert dann?" fragte der Gefangene zum dritten Mal.

"In diesem Fall macht es einen ganz schönen Unterschied, für welchen Raum du dich entscheidest, nicht wahr?"

"Woher weiß ich aber, für welchen ich mich entscheiden soll?" wollte der Gefangene wissen.

Der König zeigte auf die Schilder an den Türen, die zu den Räumen führten:

> *I In diesem Raum ist eine Dame, und in dem anderen Raum ist ein Tiger.*

> *II In einem dieser Räume ist eine Dame, und in einem dieser Räume ist ein Tiger.*

"Stimmt denn das, was auf den Schildern steht?" fragte der Gefangene.

"Ein Schild ist richtig", erwiderte der König, "aber das andere ist falsch."

Wenn ***Sie*** *der Gefangene wären, welche Tür würden Sie öffnen (vorausgesetzt natürlich, daß Sie die Dame dem Tiger vorziehen)?*

Lösung:

1. Uns ist bekannt, daß eines der beiden Schilder richtig und das andere falsch ist. Könnte es sein, daß das erste richtig und das zweite falsch ist? – Natürlich nicht, denn wenn das erste Schild richtig ist, dann muß das zweite auch richtig sein – mit anderen Worten, wenn die Dame in Raum I ist und der Tiger im Raum II, dann trifft auch die Feststellung zu, daß in einem der Räume eine Dame und in dem andern ein Tiger ist. Da es nicht sein kann, daß das erste Schild richtig und das zweite Schild falsch ist, muß das zweite Schild richtig und das erste falsch sein. Da das zweite Schild richtig ist, befindet sich die Dame tatsächlich in einem der Räume und der Tiger im andern. Und da das erste Schild falsch ist, muß der Tiger in Raum I und die Dame in Raum II sein. Darum hat sich der Gefangene für Raum II entschieden.

Ultrarechner

Vom Aufbau der Chips über die Architektur der Rechner bis zur Grundkonzeption der Software steht die Computertechnik vor radikalen Neuerungen. Sie werden nicht nur eine Leistungsexplosion bringen, sondern das Gehirn zum Vorbild des Computers machen. Dieses Sonderheft beschreibt die Ultrarechner von morgen und ihre Auswirkungen auf die Gesellschaft.

Inhalt:

Trends in der Computertechnologie • Das Bilionending • Fortschritt in der Galliumarsenid-Technologie • Nanotechnik • Der Quan-

Harte Nüsse für Fortgeschrittene

Diese bietet das Buch "Die mathematischen Abenteuer von Fritz und Katharina" von Klaus Langmann, herausgegeben bei Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen. 33 "mildere" Abenteuer, deren Lösungen man Schülern aus Leistungskursen Mathematik oder Spezialschülern ruhig zutrauen darf, werden abgelöst durch 44 "wildere" Abenteuer. Bei diesen braucht man schon Kenntnisse der Analysis mehrerer Variablen (bis zum Oberflächenintegral) und der Linearen Algebra (bis zur Jordannormalform), um Fritz, Katharina und ihren Freunden beistehen zu können. Die Lösungsansätze im Anhang münden jeweils in weitere, zur Lösung führende Aufgaben, 222 sind damit insgesamt zu knacken.
Die dabei benötigten mathematischen Sätze und Methoden erfassen die wichtigsten Inhalte der Vorlesungen des mathematischen Grundstudiums, das Studenten der Mathematik, Physik, anderer Natur- oder Ingenieurwissenschaften zu absolvieren haben.
Zuweilen muten die Abenteuer etwas aufgesetzt an. Das ergibt sich aber aus dem Wollen des Autors, den mathematischen Stoff möglichst umfassend einzuarbeiten und mindert die Freude am Knacken der Probleme nicht. **(ISBN 3-525-40733-5, 19,80 DM)**

Symmetrie
das Spiel mit der Spiegelung

Mit vier verschiedenen Objekten – Punkt, Strecke, Gerade oder Dreieck – kannst Du Such- und Geschicklichkeitsaufgaben lösen. Dabei geht es um geometrische Konstruktionsprinzipien wie Verschieben, Spiegelung, Drehung und Schubspiegelung. Je besser Du wirst, desto komplexer werden die Aufgaben. Du kannst aber auch selbst Symmetrieachsen und -zentren definieren ...
Die Programme laufen auf PC mit MS-DOS ab Version 3.2, 640 KB Hauptspeicher und Grafikkarte (Hercules, EGA, VGA). DM 128,—
Alle Programme sind vom CoMet Verlag in Duisburg. Bestellungen bitte an: Cornelsen Verlagsgesellschaft, Postfach 8729, 4800 Bielefeld. Die Preise gelten für Schulen, SchülerInnen, LehrerInnen und StudentInnen.

teneffekt-Transistor • Spingläser • Ultraschnelle Prozessor-Netzwerke • Kollektives Rechnen mit neuronenähnlichen Schaltkreisen • Optische Neurocomputer • Können Computer denken? • Telekommunikation •Informationsmanagement im Wandel.
Dieses Sonderheft erhalten Sie bei Ihrem Zeitschriftenhändler, im Bahnhofsbuchhandel oder direkt beim Verlag.

128 Seiten, DM 14,80/sfr 14,80/öS 120
Spektrum der Wissenschaft
Mönchhofstraße 15, D-6900 Heidelberg

Videoserie zur "Künstlichen Intelligenz"

Die Künstliche Intelligenz (KI) als Automation weiter Bereiche geistiger Arbeit wird zunehmend mehr Einfluß auf unser Leben haben, sowohl am Arbeitsplatz als auch in der Freizeitgestaltung. Mit Hilfe von anschaulichen, faszinierenden und lustigen Beispielen gibt die vierteilige Video-Serie einen allgemeinverständlichen Überblick über wesentliche Grundlagen, wichtige Anwendungen und mögliche Auswirkungen der KI. Jeder Teil besteht aus zwei Folgen. Autor und Moderator der Serie ist Prof. Dr. Robert Trappl, Vorstand des Instituts für Medizinische Kybernetik und AI der Universität Wien und Leiter des Österreichischen Forschungsinstituts für Artificial Intelligence.

Einführung
in die Künstliche Intelligenz 1
- Herausforderung und Abenteuer
- Darstellung von Wissen

Ein Überblick über die wichtigsten Bereiche der KI. Anhand einfacher Beispiele werden drei wichtige Methoden zur Darstellung von Wissen erklärt: Semantische Netze, Rahmen, Scripts. Des weiteren abstrakte Beziehungen wie Besitzverhältnisse oder Handlungsabläufe, Probleme und Konsequenzen.

Einführung
in die künstliche Intelligenz 2
- Problemlösen, Suchen, Planen
- Expertensysteme

Eine Hauptaufgabe von intelligenten Systemen wird die Problemlösung sein. Anhand eines einfachen Schiebepuzzles, eines Spiels und der Planung einer Roboteraktion lernen wir verschiedene Methoden kennen; des weiteren, wie Expertensysteme funktionieren und wie sie eingesetzt werden.

Einführung
in die künstliche Intelligenz 3
- Natürlichsprachige Systeme 1
- Natürlichsprachige Systeme 2

Das Verstehen von Sprache und ihre Mehrdeutigkeiten. Mustervergleich, ATN, Casusrahmen und ein System im Einsatz werden vorgestellt. Des weiteren das Verstehen ganzer Texte. Und wir lernen ein Programm kennen, das selber Geschichten erfindet.

Einführung in die künstliche Intelligenz 4
- Roboter, Lernen, Non-Vons
- Zukunft und Auswirkungen

Damit Roboter "sehen" können, müssen die KI-Systeme immer wirklichkeitsnaher werden. Dazu muß man ihnen immer mehr Wissen eingeben. Wir erfahren, welche Arten von "Lernen" es gibt, und sehen und hören, wie ein Programm selbständig lernt, einen Text vorzutragen. Zudem: Chancen und Risiken in der Zukunft.

Die Videos kosten jeweils 99,— DM;
FHS/Farbe/31 Minuten
Zu bestellen bei:
Spektrum Videothek
Mönchhofstraße 15 . D-6900 Heidelberg

Lösungen

• Teilbar oder nicht teilbar

Da alle Aussagen des Herrn Flunkrich falsch sind, ergibt die Zahl wegen (1) bei der Division durch 3 den Rest 2 und wegen (2) bei der Division durch 5 denselben Rest wie bei der Division durch 7.
Dieser Rest ist wegen (5) größer oder gleich 3 und wegen (6) kleiner oder gleich 3, also gleich 3.
Wegen (4) läßt die Zahl bei der Division durch 8 den Rest 1. Ferner ist wegen (3) die Zahl nicht größer als 800. Nun gibt es wegen $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$ und $840 > 800$ höchstens eine natürliche Zahl $a \leq 800$, die
bei der Division durch 3 den Rest 2 (7)
bei der Division durch 5 den Rest 3 (8)
bei der Division durch 7 den Rest 3 (9)
bei der Division durch 8 den Rest 1 läßt. (10)

Wegen (10) ist a eine der Zahlen 9, 17, 25, 33, ..., 793 und wegen (9) eine der Zahlen 17, $17 + 8 \cdot 7 = 73$, $17 + 2 \cdot 56$, ..., $17 + 13 \cdot 56$; also wegen (8) eine der Zahlen 73, $73 + 8 \cdot 7 \cdot 5 = 73 + 280 = 353$, $73 + 2 \cdot 280 = 633$; also wegen (7) a = 353. Die Postleitzahl von Herrn Flunkrich ist 353; er wohnt in Havelberg.

• Überall natürliche Zahlen

Beim Numerieren der Seiten des Lehrbuches werden die Zahlen von 3 bis 195 gedruckt. Für die Zahlen 3 bis 9 braucht man 7 Ziffern. Für die Zahlen von 10 bis 99 braucht man $90 \cdot 2 = 180$ Ziffern. Für die Zahlen von 100 bis 195 dagegen $96 \cdot 3 = 288$ Ziffern. Das sind insgesamt 475 Ziffern. Die 0 kommt dabei 29mal vor.

• Nicht in die Brüche geraten

Es waren x Personen anwesend, davon $\frac{1}{2}x+1$ Kinder, $\frac{1}{4}x + 2$ Mütter und $\frac{1}{6}x + 3$ Väter.
$\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{4}x + 2 + \frac{1}{6}x + 3 = x$, also $x = 72$.
Somit waren 37 Kinder, 20 Mütter und 15 Väter zur Uraufführung des Puppenspiels gekommen.

• Logisch gedacht

• Ohne Worte

Sechs Katzen müssen auf der rechten Seite der Waage sitzen, damit diese im Gleichgewicht ist.

• Gleichungen in Theorie und Praxis

$\frac{x+107}{100} \cdot 4 = 7; \quad x = 68$

Die Zahl 68 erfüllt die Bedingungen.

• Rätsel

a) Es gibt mehrere Lösungen, z. B.

$$\begin{array}{r} 58\ 015 \\ +\ 65\ 412 \\ \hline 123\ 427 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 13\ 274 \\ +\ 13\ 274 \\ +\ 13\ 274 \\ +\ 13\ 274 \\ \hline 53\ 096 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13\ 402 \\ +\ 13\ 402 \\ +\ 13\ 402 \\ +\ 13\ 402 \\ \hline 53\ 608 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19\ 863 \\ +\ 19\ 863 \\ +\ 19\ 863 \\ +\ 19\ 863 \\ \hline 79\ 452 \end{array}$$

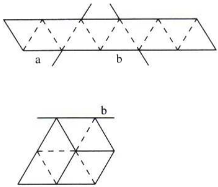
c) Es gibt insgesamt 24 Lösungen, z. B.
6 493 + 9 408 = 15 901

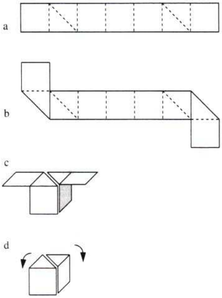
• Wir falten

Man halte den Bogen mit der beschrifteten Seite nach unten, so daß beim Betrachten des Bogens von oben die numerierten Quadrate in folgender Stellung liegen:

2	3	5	6
1	8	7	4

Nun falte man die rechte Hälfte des Bogens nach links, so daß die 5 über der 2, die 6 über der 3, die 4 über der 1 und die 7 über der 8 liegt. Die untere Hälfte falte man nun nach oben, so daß die 4 über der 5 und die 7 über der 6 liegt. Anschließend falte man 4 und 5 zwischen 6 und 3 und falte 1 und 2 unter das Paket.





• Noch etwas für Logiker

Name	Beruf
Schuster	Schneider
Schneider	Schuster
Gärtner	Zimmermann
Zimmermann	Sattler
Sattler	Gärtner

• Sprachecke

Die Tafeln des José

José hat 9 Tafeln in einem Gefäß, die jeweils die Nummern 1 bis 9 tragen. Mit einem Mal nimmt er 4 beliebige Tafeln heraus. Mit diesen 4 Tafeln stellt er alle vierstelligen Zahlen zusammen, indem er die Ziffern vertauscht, und schreibt sie nacheinander auf. Am Ende erhält er die Summe 159984.
Welche 4 Tafeln sind gezogen worden? Wieviele Lösungen gibt es insgesamt?

Lösung
Zwei von insgesamt 8 Lösungen sind:
1 - 6 - 8 - 9 oder 4 - 5 - 7 - 8

Das Rätsel der fünf Häuser

Es geht um fünf Häuser, fünf Nationalitäten, fünf Getränkearten, fünf Arten von Tabakwaren und fünf Haustierarten.

1. Der Engländer wohnt im roten Haus.
2. Der Spanier besitzt einen Hund
3. Im grünen Haus wird Kaffee getrunken
4. Der Ukrainer trinkt Tee.
5. Der Raucher von "Old Gold" besitzt Schnecken.
6. Das grüne Haus befindet sich direkt rechts neben dem elfenbeinfarbenen Haus.
7. Im gelben Haus wird "Kool" geraucht.
8. Im mittleren Haus wird Milch getrunken.
9. Der Norweger lebt im ersten Haus.

10. Der Mann, der "Chesterfield" raucht, lebt neben dem Mann, der einen Fuchs besitzt.
11. "Kool" wird im Nachbarhaus des Hauses geraucht, in dem das Pferd gehalten wird.
12. Der Raucher von "Lucky Strike" trinkt Orangensaft.
13. Der Japaner raucht "Parliament".
14. Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
15. Jeder Mann hat ein Haus, eine Haustierart, eine Tabakware, eine Getränkesorte und eine Nationalität.

Wer trinkt Wasser? Wer besitzt ein Zebra?

Lösung

Haus 1	Haus 2	Haus 3	Haus 4	Haus 5
Norweger	Ukrainer	Engländer	Spanier	Japaner
gelb	blau	rot	elfenbein	grün
Wasser	Tee	Milch	Orangensaft	Kaffee
Kool	Chesterfield	Old Gold	Lucky Strike	Parliament
Fuchs	Pferd	Schnekken	Hund	Zebra

• Kohl

Die Bücher stehen von links nach rechts. Also frißt er sich praktisch nur durch Band 2 und 3 sowie durch je eine Einbanddecke von Band 1 und 4 = 10,5 cm;

• Rund um die Bahn

Deutschland im Stundentakt

Diese Aufgabe löst man am besten graphisch. Im ***Diagramm 1*** ist die Lösung vorgegeben. Übertragt es auf Millimeterpapier und Ihr könnt die Antworten problemlos ablesen.

Interessante Begegnung

Nach sieben Rangierungen können beide Züge ihre Fahrt ungehindert fortsetzen (siehe ***Abbildung 1***).

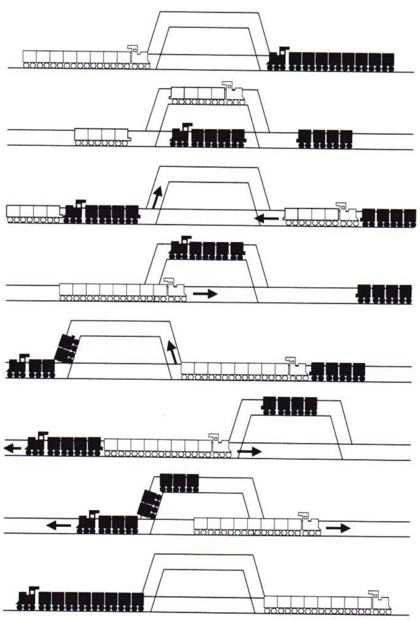


Abbildung 1

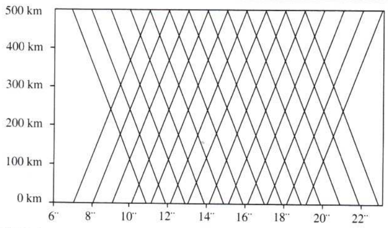
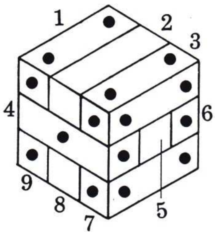


Diagramm 1

• **Würfelpuzzle**



Beliebte Schachübung

ein Euwetest

Voraussichtlich im Herbst dieses Jahres wird im Bange-Verlag Hollfeldt das "Schachlehrbuch für Kinder" in zwei Bänden erscheinen. Der erste Band führt den Anfänger ein in die bunte Welt des Schachspiels, erzählt, wie das Spiel entstanden ist, wie die Figuren ziehen, was ein Matt ist und viele andere wichtige Dinge, die man für eine regelgemäße Schachpartie wissen muß. Das alles wird in märchenhafter Form dargestellt und am Schluß eines jeden Kapitels gibt es Übungsaufgaben.
Der zweite Band führt den ersten nahtlos weiter, kann aber auch für sich allein gelesen werden. Das Mittelspiel mit seinen Fallen, Gabeln, verräterischen Abzugsschachs und Mattkombinationen steht im Mittelpunkt des ersten Kapitels. Danach folgt eine Darstellung aller modernen und vielgespielten Eröffnungen in Arbeitsblättern. Ein Abschnitt über die Schachuhr, die Fide-Regeln und die Geschichte des Schachs lockern das Ganze auf. Im letzten großen Kapitel finden sich schließlich Partien zum Nachspielen. Hier griff der Autor Markus Spindler, alpha-Schachfans ein Begriff, auf Partien seiner Schachkinder zurück. Diese Mannschaft wurde 1990 DDR-Meister der Altersklasse 9/10. Vorgestellt werden im Buch auch 8 Euwetests, nach deren Bewältigung der Leser prüfen kann, welche Leistungsklasse im Schach er hätte.
Einen stellt Euch der Autor in diesem Beitrag vor.

Nehmt Euch ein weißes Blatt Papier und Euer Schachbrett zur Hand. Mit dem Blatt deckt Ihr alle nun folgenden Zeilen ab. Spielt die folgende Partie nach! Immer, wenn ein * am Zeilenende auftaucht, dürft Ihr das Blatt nicht nach unten schieben, sondern Ihr schreibt zuerst die geforderte Stelleneinschätzung (z. B.: Weiß hat die offene e-Linie besetzt) auf bzw. überlegt, was Ihr gezogen hättet, wenn Ihr Weiß gewesen wärt. Danach schiebt Ihr das Blatt nach unten und schreibt Euch die erreichte Punktzahl auf. Am Schluß könnt Ihr Eure Punkte zusammenzählen und nachsehen, wie gut Ihr seid.

Werner (Stahl NSH Berlin) - Nichterlein (Post Dresden) Wilhelmstahl, 1.8.1990; Vier-Springer-Spiel
Mit Norman Werner, 10 Jahre und Dritter der DDR-Einzelmeisterschaften 1990, spielt der Leser Weiß.
1. e4 e5 2. Sf3 Sc6 3. Sc3 Sf6 4. Lc4 Lc5 5. d3 0-0 6. Lg5 d6?
Hier sollte doch besser h6 folgen, denn Weiß hat eine bekannte Drohung! Seht euch die Stellung genau an, schätzt sie ein und findet für beide Pläne! *
Die Eröffnung wurde von beiden zügig vorangetrieben.
(1) Weiß steht aktiver. **(1)** Weiß sollte unverzüglich am Königsflügel angreifen, dabei die Schwächen der schwarzen Stellung nutzen. **(1)** Schwarz muß schnell eine Verteidigung organisieren und versuchen, seinerseits aktiv zu werden. **(1)** *
7. Sd5! (3) Diese Chance muß unbedingt genutzt werden. Kommt Schwarz zu Le6, ist sie vertan. **7...Lg4** *
8.c3! (3) Das verhindert ein für alle mal, daß Weiß in dieselbe Falle tappt. Gut war auch h3 **(2)** oder S:f6 **(2). 8...h6?** *
9.S:f6+ (2) Viel besser als L:f6, der Läufer wird beim Angriff noch gebraucht. **9...g:f6** Erzwungen. *
10.L:h6 (1) Das sollte selbstverständlich sein. Nun sehen wir auch, warum h6 schlecht war. **10...Te8**
11.h3 (2) Hier hatte Weiß eine ganze Reihe anderer Möglichkeiten. Mit Db3! **(3)** hätte er f7 und b7 angegriffen, mit De2 oder Dd2 **(je 1)** die Dame entwickelt und mit 0-0 **(1)** den König gesichert. Hier sollte man allerdings lieber später 0-0-0 spielen, um den Königsflügel für Angriffsoperationen freizuhalten! **11...Lh5** *
12.g4 (2) Für Dd2 und De2 gibt es einen Punkt. **12...Lg6** *
13.Sh4 (3) Auch h4 **(3)** war gut. Der Angriff muß fortgesetzt werden, solange Schwarz seine Reihen noch nicht zur Verteidigung ordnen konnte. **13...Kh7** *
14.Le3 (1) Hier war Dd2 **(2)** besser; natürlich nicht Sf5? L:f5 g:f5 K:h6! Der Zug Le3 ist etwas passiv. **14...L:e3** *
15.f:e3 Wer diesen Zug nicht fand, schreibt sich fünf Minuspunkte an! **15...Kg7** Schwarz will Th8 spielen. *
16.Df3 (2) Mit Sf5+ **(2)** wäre der Springer gut postiert worden. **16...f5??** Ein äußerst schlechter Zug – Weiß beherrscht dieses Feld viermal. *
17.S:f5+ (2) Erzwungen, denn Schwarz stellte eine Falle. Es drohte D:h4+, nur der Springer durfte also schlagen. **17...Kf8** *
18.h4 (2) Weiß geht unbeirrt nach vorn. Gut war auch 0-0-0 **(2)**, was den zweiten Turm ins Spiel bringt.
18...L:f5 *
19.D:f5 (2) Das ist das beste, denn nun droht D:f7≠. Möglich war auch e:f5 **(1)**, wonach Weiß eine erdrückende Bauernmehrheit am Königsflügel hätte.
19...De7
Seht euch diese Stellung auf eurem Brett gut an! Schätzt sie ein und entwickelt Pläne! *

Weiß hat zwei Bauern mehr. Er hat Angriff auf die offene schwarze Königsstellung. Der g- und h-Bauer sind sehr stark. Weiß steht klar besser. **(je 1)**
Weiß sollte lang rochieren, auf der f-Linie angreifen und mit den beiden Bauern laufen **(3)**. Schwarz muß den König auf den Damenflügel überführen und die g- und h-Linie verteidigen. **(2)** *
20.g5! (3) Ein Schritt nach vorn, der gleichzeitig h4 schützt. Gut war auch 0-0-0, was den König aus dem drohenden Schach herausbringt (D:h4+ nach Tf1?), und Dh7, was Dh8≠ droht **(je 3). 21...Sd8** Das deckt f7. *
21.0-0-0 (3) Möglich war auch Dh7 **(1)**, Tf1 **(2)**, g6 **(1)** und h5 **(1)**. **21...c6** Schwarz will den gefährlichen Läufer von c4 vertreiben. *
22. Tdf1 (2) Je einen Punkt gibt es für h5, g6 und Thf1. **22...d5** *
23.e:d5 (1) Was sonst? **23...Tc8** *
24.D:c8 (1) Wer das nicht gesehen hat, schreibt sich 5 Minuspunkte an! Tc8 war ein grober Fehler, doch Schwarz hatte auch so keine Chance mehr. Den Rest zum Anschauen: **24...c:d5 25.L:d5 Dd6 26.Dc4 Dg6 27.Tf6! Dg7 28.Thf1 Te7 29.g6** Neun Figuren decken f7 oder greifen an! **29...Dh6 30.Kd2!** Weiß kann sich Zeit nehmen, den Punkt e3 zu verteidigen. **30...Dg7? 31.L:f7 b6 32.Le6+ Ke8 33.Db5+ Sc6 34.D:c6+ Kd8 35.Dc8≠.**
Ein glanzvoll geführter Angriff, der nur zustande kam, weil Schwarz Lg5 und Sd5 zuließ. Weiß spielte hervorragend! Ihr auch?

Schaut doch in der Tabelle nach:

Erreichte Punkte	Leistungsklasse	ELO-Zahl	INGO-Zahl
bis zu 12	8 = Anfänger	300 bis 540	320 bis 285
13 bis 22	7	540 bis 780	285 bis 255
23 bis 30	6	780 bis 1020	255 bis 225
31 bis 38	5	1020 bis 1260	225 bis 195
39 bis 45	4	1260 bis 1500	195 bis 165
46 bis 50	3 und stärker	1500 und mehr	165 und weniger

Zum Vergleich: LK 5 entspricht ungefähr dem deutschen Meister Altersklasse 9/10 oder einem Landesmeister Ak 11/12, mit LK 6 ist man als Mannschaftsspieler in jedem Verein im Kinderbereich bis 14 Jahre gern gesehen.

stud. math. M. Spindler
Humboldt-Universität zu Berlin

 ISBN 3-617-34005-9 Einzelpreis: 2,50 DM Einzelpreis im Abo: 2,00 DM