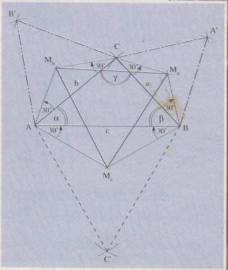
H 113228

Heft 2
April 1992
26. Jahrgang

Fachzeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

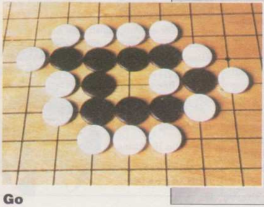
alpha

Mathematische Schülerzeitschrift



Napoleons Satz

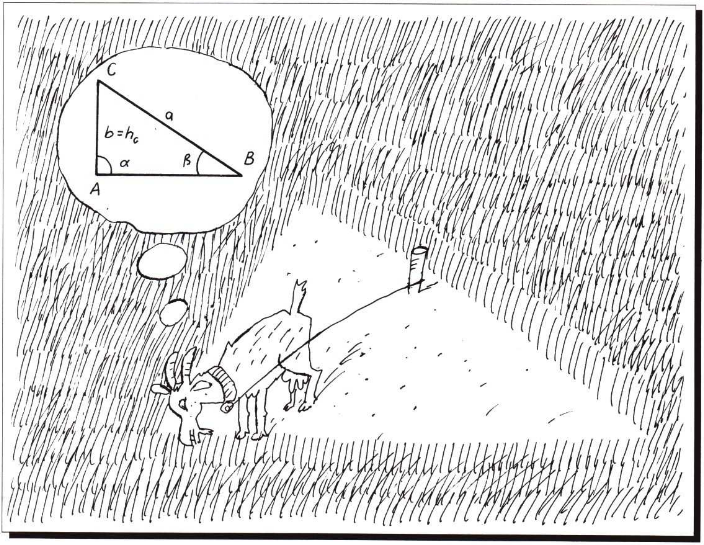
Gefalteter Alfkopf



Go

Rückschau auf Olympia ´92:

Der Viererbob von Wolfgang Hoppe auf dem Weg zur Silbermedaille



Karikatur von:
Lothar Otto, Leipzig

Alphonsvignetten: Lothar Otto (Leipzig)

Alphons weist Euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst!

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett.
Redaktion:
Dr. Gabriele Liebau, Tel. (Leipzig) 58 18 54,
Einsendungen an:
Erhard Friedrich Verlag, Herrn J. Ricke, Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. C. P. Helmholz (Leipzig), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), Herbert Kästner (Leipzig), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01.01.1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG, Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Telefon (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt DM 12,00, im Einzelbezug DM 2,50. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Kursstärke vervielfältigt werden. Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: Pädagogika Zentrale

Titel: Jens Hinzmann

Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617-34008-3

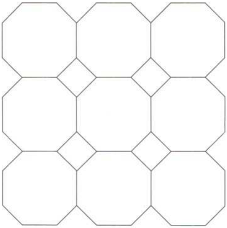
Inhaltsverzeichnis

Titelfotonachweis:
Das Titelbild zeigt den Viererbob von Wolfgang Hoppe (vergl. dazu auch den Beitrag „Wenn Zentimeter über Hop oder Top entscheiden" auf S. 29).
Das Foto wurde uns freundlicherweise von SC Johnson, Autopflege zur Verfügung gestellt.

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Nachbarschaft

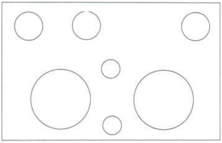
Die natürlichen Zahlen von 1 bis 13 sind so in die quadratischen und achteckigen Felder einzusetzen, daß die in jedem Quadrat stehende Zahl gleich dem arithmetischen Mittel der vier Zahlen in den angrenzenden Achtecken ist.



Walter Träger, Döbeln

Kurz nachgedacht

Trenne die sieben Kreise mit nur drei Linien!



aus: Füles, Budapest

Ein Mathe-As

In ein Lotteriegeschäft kommt ein Mann und fragt, ob er das Los mit der Nummer 48 haben könne. Er will nur die "48". Der Losverkäufer durchsucht die noch freien Lose und findet auch tatsächlich das mit der Nummer 48. Nach vier Wochen kommt Nummer 48 mit dem Hauptgewinn heraus. "Sie haben das wohl geahnt, Sie Glücklicher?" fragt der Losverkäufer bei der Gewinnauszahlung. "Ich kann mich noch ganz genau erinnern, daß Sie unbedingt die Nummer 48 haben wollten!"
"Das war eigentlich ganz einfach", erwidert der Gewinner. "Ich habe drei Nächte hintereinander immer wieder dasselbe geträumt: Sechs mal sieben ... sechs mal sieben ... sechs mal sieben ... Da habe ich mir dann gesagt, sechs mal sieben ist 48 – das Los kaufst du dir!"

Elke Loose
aus: LVZ, Leipzig

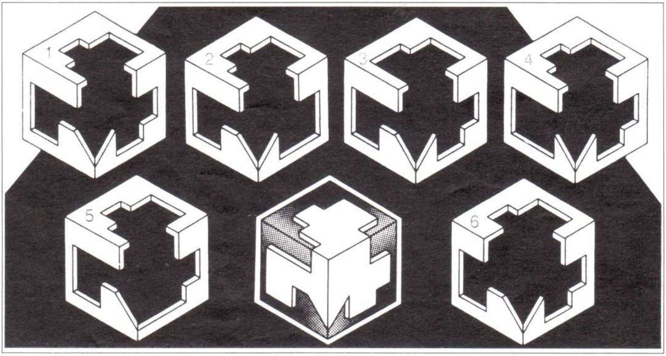
Eine der merkwürdigsten Zahlen ist die Zahl 2592. Setzt man die erste als Grundzahl (Basis), die zweite als Hochzahl, (Exponent), die dritte wieder als Grundzahl und die vierte als Hochzahl, so erhält man $2^5 \times 9^2 = 32 \times 81$.
Und das ist – 2592!
Es dürfte kaum eine zweite Zahl dieser Art geben. Jedenfalls ist sie nicht bekannt.

mitgeteilt von H.-J. Böhland, Wallroda

Gleichungsrätseleien

In diesem Rätsel ist der Wert jedes Buchstaben gemäß der vorliegenden Gleichungen in

Klug kombiniert Suche die richtige Ergänzung!



aus: Füles, Budapest

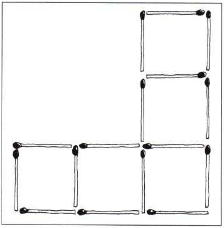
den Zeilen und Spalten zu bestimmen. Jeder Buchstabe entspricht dabei einer Ziffer zwischen 1 und 9. Darüber hinaus gilt: Z=2N und H=K–S

E	+	D	−	N	+	H	+	D	=	K
+	■	+	■	+	■	+	■	+	■	+
R	+	E	−	H	+	E	−	R	=	N
−	■	+	■	+	■	+	■	−	■	−
N	+	E	+	Z	−	R	−	E	=	D
+	■	+	■	−	■	−	■	+	■	+
D	+	N	+	R	−	Z	−	H	=	R
−	■	−	■	+	■	+	■	−	■	−
E	+	S	−	N	−	R	+	Z	=	S
=	■	=	■	=	■	=	■	=	■	=
Z	−	D	+	K	−	S	+	E	=	R

aus:
Logigram, Paris

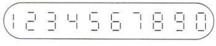
Trick mit Streichhölzern

Durch Wegnehmen von zwei Streichhölzern kannst Du aus dieser Figur 4 Quadrate bilden.



Hölzchensymmetrie

I ** + *·* = *·* + **
II ** + ** + ** = ** + ** + **



Werden die Ziffern durch die angegebenen Hölzchenanordnungen dargestellt, so läßt sich in jede beider Gleichungen so mit Hölzchen eine Ziffer anstelle jedes Sternchens legen, daß wahre Gleichungen entstehen, deren linke und rechte Seite Spiegelbilder voneinander sind. Dabei soll in keiner Gleichung dieselbe 2stellige Zahl mehrfach enthalten sein.

Walter Träger, Döbeln

Die Olympiade-Ecke

Menschen stellen sich gern Problemen "because they are there", nur zur eigenen Erbauung also. So beschrieb einmal der Vorsitzende des Komitees zur Ausrichtung der amerikanischen Mathematik-Olympiade, Murray Klamkin, den Spaß, den man beim Knacken eines mathematischen Problems hat.
Wer von Euch schon einmal an einer Wandzeitung mitgearbeitet, an Knobelrunden in der Klasse, an der Schule, am Wohnort teilgenommen oder sich gar an einem regionalen oder überregionalen Mathewettbewerb versucht hat, der wird die Eingangsworte sicher bestätigen können und mir zustimmen: der freiwillige Umgang mit Mathematik sorgt für ziemlich viel Kurzweil.
Problemlösendes Denken und Mathematik-Olympiaden haben daher rund um den Globus Konjunktur. Tendenz: Steigend.
Auf dem Gebiet der ehemaligen DDR hat es eine vergleichbar lange Tradition der Förderung junger mathematischer Talente gegeben. Es existierte ein feinmaschiges Netz von Kreis- und Bezirksklubs, in denen begabte Schüler sich ausreichend mit Mathematik beschäftigen konnten. Die besten Nachwuchsmathematiker wurden in Zirkeln der Mathematischen Schülergesellschaft zusammengefaßt, die oft von Universitäten betreut wurden. Es ist zu hoffen, daß davon noch möglichst viel erhalten bleibt.
Für das alte Bundesgebiet gilt das Gesagte leider nicht. Da liegt großer Nachholbedarf vor. Von einigen Schulen weiß ich aber, daß nun zusehends Bewegung in die Förderungslandschaft kommt und erfreulicherweise wächst auch an anderen Schulen die Neigung, sich auf die Kunst des Problemlösens einzulassen. Das Besondere an diesen Förderwettbewerben ist die Freiwilligkeit, mit der sich Schüler solchen Herausforderungen stellen. Vielleicht habt Ihr es selbst schon einmal erlebt, wenn Mitschüler nur ein mitleidiges Kopfschütteln dafür übrig hatten, wieso ein ganz normaler Mensch völlig ohne Zwang eine mathematische Aufgabe bearbeiten und auch noch Freude daran empfinden kann. Sie vermuten dahinter wieder nur eine neue Spielart von Strebertum, vergessen darüber jedoch häufig, daß Problemlösen durchaus neugierig machen kann und überaus viel Fantasie erfordert.
Seit über zehn Jahren führe ich selbst in meinen Klassen Knobelrunden durch, betreue Problemecken. Stets wiederholt sich das gleiche Bild: eine Gruppe Schüler steht vor der Anschlagsäule, eine andere diskutiert vor dem Schwarzen Brett. Gelegentlich verweilen Schüler einzeln davor, die Stirn in tiefe Falten gelegt, und grübeln. Obwohl keine guten Noten winken, finden sich genug Interessenten, die sich von einem Problem angesprochen fühlen. Sogar Kollegen ertappe ich nicht selten beim Tüfteln.
Leider wird diese Form der Heranführung an die Mathematik derzeit von vielen Gruppen und Einzelpersonen getragen, die wenig oder nichts voneinander wissen. Dabei leben besonders Lehrer von der Resonanz, die sie auszulösen vermögen. Um diesem Informationsdefizit ein wenig abzuhelfen und um dem ständigen Schülerwunsch nach originellen Problemen entgegenzukommen, hat sich die Redaktion von alpha entschlossen, eine neue Rubrik einzurichten, **Die Olympiade-Ecke**. Diese Seite soll ein Forum zum Austausch von Ideen und Erfahrungen aus den unterschiedlichsten Varianten nationaler und internationaler Mathematikförderung werden. Es ist geplant, in regelmäßigem Turnus eine Wettbewerbsart in Kurzform vorzustellen und natürlich sollen darin charakteristische Aufgaben aus den einzelnen Runden einen breiten Raum einnehmen.
Diese Einrichtung steht und fällt aber mit der Bereitschaft von Lesern der alpha zur Mitarbeit. Wenn Ihr also der Meinung seid, daß an Eurer Schule, in Eurer Stadt oder dem Bundesland etwas Berichtenswertes in Sachen Mathematik geschieht, dann schreibt mir (Paul Jainta, Werkvolkstr. 10, W-8540 Schwabach) oder an die Redaktion. Und vergeßt bitte nicht, mir/uns einige Aufgaben mit Lösungen mitzuschicken, damit andere alpha-Leser auch etwas zum Kopfzerbrechen haben.
Darüber hinaus möchte die Redaktion alle in der außerunterrichtlichen Mathematikförderung Tätigen dazu einladen, in Artikeln von ihrer Arbeit in Zirkeln, Arbeitsgemeinschaften, Mathematik-Tagen usw. zu berichten. Bitte helfen Sie uns durch Mitteilung origineller Wettbewerbsaufgaben (plus einschlägiger Lösungen) den riesigen Fundus wenig genutzter Olympiadeaufgaben einem größeren Publikum zugänglich zu machen.
Denn Schüler wollen basteln und knobeln, forschen und konstruieren können. Nur dies befördert später auch die Liebe zur Wissenschaft und das Interesse für Technik.
Zum Auftakt sollen 5 Probleme vorgestellt werden, die unterschiedlichen Formen (inter)nationaler Schülerförderung entnommen worden sind.

Diese 5 Aufgaben findet Ihr auf der übernächsten Seite in der rechten Spalte!

StR Paul Jainta, Schwabach, Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik

Eins zwei drei vier fünf...

Besuch im MMK Frankfurt/M.

Abb. 1: Das MMK in Frankfurt Foto: R. Nagel, Frankfurt/M.

Frankfurt am Main, 6. Juni 1991, ein neues Museum wird eröffnet: das Museum für Moderne Kunst. Baugrund ist wohl nirgendwo in der Bundesrepublik so teuer zu erkaufen wie in der Innenstadt von Frankfurt am Main, und so sollte auf einem sehr spitzwinkligen Grundstück ein Optimum an Raum und äußerer Gestaltung entstehen. In der Frankfurter Bevölkerung hieß das Gebäude bald das "Tortenstück".

Trotz einer gewissen Befangenheit im Umgang mit moderner Kunst (verständlich für einen Menschen, der sich viel mehr mit Mathematik als mit Kunstgeschichte beschäftigt?) ist der Gesamteindruck überaus anregend. Die Neugier hatte zu einem Abenteuer ganz eigener Art geführt.

Aus der Fülle der Exponate sollen zwei herausgegriffen werden, die in gewisser Weise einen *mathematischen Zugang* haben. Da ist Hanne Darbovens "Ein Jahrhundert – Johann Wolfgang von Goethe gewidmet". Das Werk besteht aus 884 DIN A4-Seiten, die im wesentlichen mit Schreibmaschine getippte Zahlwörter enthalten (daher die Überschrift). Die Seiten hängen, jede vollständig sichtbar, in 9 Reihen übereinander in einem der Räume mit spitzwinkliger Ecke.

Was könnte man sich nun vorstellen hinter diesen Zahlenkolonnen? Die Fülle all der Ereignisse in einem ganzen Jahrhundert, die genutzten und ausgelassenen Möglichkeiten vieler, vieler Menschen, nicht eines konkreten, sondern eines beliebigen Zeitraums zwischen einem 1. Januar eines Jahres ..00 und dem 31. Dezember des entsprechenden Jahres ..99 soll künstlerisch verdeutlicht werden. Da lag doch nahe: Veranschaulichung mit mathematischen Mitteln.

Hanne Darboven berechnete zu jedem Tag des Jahrhunderts eine "Quersumme", z. B. dem Weihnachtstag '91 wird die Zahl 24+12+9+1 = 46 zugeordnet. Dazu wird mit Sorgfalt die Zahlwortfolge notiert, die in Abb. 3 zu sehen ist. Diese "Quersummen" gliedern ebenso wie die Kapitel I bis XII für die jeweiligen Monate im ganzen Jahrhundert das Werk, das natürlich nicht vollständig *gelesen*, sondern *als Ganzes betrachtet* werden muß. Der zweite Teil des Titels rührt von einer Ergänzung des Kunstwerks, die 1982 anläßlich des 150. Todestages Goethes entstand, durch den Wortlaut eines ausführlichen Enzyklopädie-Artikels über JWG her. Auf einigen Blättern notiert die Künstlerin dann wiederum "Quersummen", nämlich die jedes der 150 Todestage 22.3.(18)32 bis 22.3.(19)82 des großen Sohnes der Stadt Frankfurt.

Ein zweites Werk ist *mathematisch* sehr leicht zu entschlüsseln: *Walter De Marias* Arbeit "4–6–8 Series". Großzügig, aber sehr regelmäßig sind 27 gleichartig erscheinende Metallkonstruktionen im Fußboden verankert. Sieht man genauer hin, erkennt man gleichlange Vierkant-, Sechskant- und Achtkantstäbe in sehr regelmäßiger Anordnung, die jeweils in Dreiergruppen zusammengefaßt sind. Keine zwei der 27 Einzelteile sind gleich, zumindest in der Anordnung entlang des Grundbleches unterscheiden sie sich voneinander. Nun ist längst klar geworden, daß mit diesen 27 Teilen *alle Möglichkeiten*, drei verschiedene Objekte in einer bestimmten Reihenfolge anzuordnen, vom Künstler erfaßt worden sind (in der Mathematik wird dies als *Variation ohne Wiederholung unter Berücksichtigung der Reihenfolge* bezeichnet). Die zugehörige Anzahl zu bestimmen ist einfach. Für den

```
elf zwölf dreizehn vierzehn fünfzehn sechzehn siebze
hn achtzehn neunzehn zwanzig einundzwanzig zweiundzw
anzig dreiundzwanzig vierundzwanzig fünfundzwanzig s
echsundzwanzig siebenundzwanzig achtundzwanzig neunu
ndzwanzig dreißig                                       18/9/30 -30
eins zwei drei vier fünf sechs sieben acht neun zehn
elf zwölf dreizehn vierzehn fünfzehn sechzehn siebze
hn achtzehn neunzehn zwanzig einundzwanzig zweiundzw
anzig dreiundzwanzig vierundzwanzig fünfundzwanzig s
echsundzwanzig siebenundzwanzig achtundzwanzig neunu
ndzwanzig dreißig einunddreißig zweiunddreißig dreiu
nddreißig vierunddreißig fünfunddreißig sechsunddrei
ßig siebenunddreißig achtunddreißig neununddreißig     39- 18/9/39
eins zwei drei vier fünf sechs sieben acht neun zehn
elf zwölf dreizehn vierzehn fünfzehn sechzehn siebze
hn achtzehn neunzehn zwanzig einundzwanzig zweiundzw
anzig dreiundzwanzig vierundzwanzig fünfundzwanzig s
echsundzwanzig siebenundzwanzig achtundzwanzig neunu
ndzwanzig dreißig einunddreißig                         18/9/40-31
eins zwei drei vier fünf sechs sieben acht neun zehn
elf zwölf dreizehn vierzehn fünfzehn sechzehn siebze
hn achtzehn neunzehn zwanzig einundzwanzig zweiundzw
anzig dreiundzwanzig vierundzwanzig fünfundzwanzig s
echsundzwanzig siebenundzwanzig achtundzwanzig neunu
ndzwanzig dreißig einunddreißig zweiunddreißig dreiu
538
```

Abb. 2: Ausschnitt eines Blattes zu Hanne Darboven, „Ein Jahrhundert..."

eins zwei drei vier fünf sechs sieben acht neun zehn
elf zwölf dreizehn vierzehn fünfzehn sechzehn siebze
hn achtzehn neunzehn zwanzig einundzwanzig zweiundzw
anzig dreiundzwanzig vierundzwanzig fünfundzwanzig s
echsundzwanzig siebenundzwanzig achtundzwanzig neunu
ndzwanzig dreißig einunddreißig zweiunddreißig dreiu
nddreißig vierunddreißig fünfunddreißig sechsunddrei
ßig siebenunddreißig achtunddreißig neununddreißig v
ierzig einundvierzig zweiundvierzig dreiundvierzig v
ierundvierzig fünfundvierzig sechsundvierzig

Abb. 3: „Quersumme" = 46

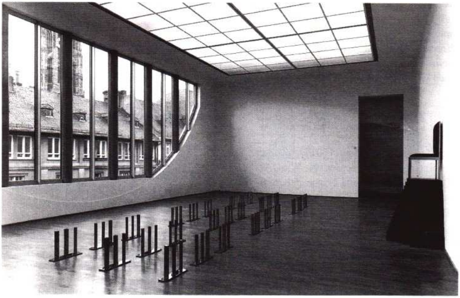


Abb. 4: Walter De Maria, „4 – 6 – 8 Series" Foto: R. Nagel, Frankfurt/M.

linken Platz stehen *drei* Stabformen zur Auswahl, ebenso für den mittleren und den rechten: *3 mal 3 mal 3 sind 27*. Über die künstlerische Aussage dieses Werkes sollte sich jeder bei einem Besuch im Museum für Moderne Kunst an Ort und Stelle selbst ein Urteil bilden. Dazu muß man hoch unters Dach des "Tortenstücks" steigen, in den hellen großen Raum mit Blick auf den Dom.

- Welches ist die größte bei H. Darboven auftauchende „Quersumme", und zu welchem Tag eines Jahrhunderts gehört sie? An welchen Tagen beträgt diese "Quersumme" nur 3?
- Die Künstlerin ergänzte ihr "Jahrhundert" u. a. durch die Veranschaulichung der Todestage 21.3. .. J.W.v.Goethes. In welchem Jahr zwischen 1832 und 1982 entsteht die längste Zahlwortkolonne?
- Notiere alle *Variationen* der Elemente {4; 6; 8} *zur 3. Klasse mit Wiederholung*! Wieviel Teile umfaßte das Werk, hätte sich der Künstler für die vier Elemente {4; 6; 8; 10} entschieden und jeweils vier davon in einem dieser Teile zusammengefaßt (Beispiele: [4; 4; 8; 6], [8; 6; 6; 6])?

MMK in Zahlen

Baubeginn:	Juni 1987
Eröffnung:	6. Juni 1991
Architekt:	Hans Hollein

Das Problem für den Architekten bestand darin, auf dem schmal zulaufenden Stück des in der Frankfurter Innenstadt sehr teuren Baugrundes eine optimale Raumnutzung zu erreichen.

Grundstücksfläche:	2140 m^2
Ausstellungsfläche:	4100 m^2
Umbauter Raum:	50 530 m^3
Kosten	48 000 000 DM
Öffnungszeiten:	Di – So: 10.00 – 17.00 Uhr Mi: 10.00 – 20.00 Uhr *Montag geschlossen* *Eintritt frei*

Führungen von größeren Gruppen sind zwei Wochen vorher anzumelden

Dr. Christian Werge
Mathematik- und Physiklehrer, Assistent im Wissenschaftsbereich Didaktik der Sektion Mathematik der Universität Leipzig

Olympiade-Ecke: Die Aufgaben

5. Jahrgangsstufe
Nach einem Scheibenschießen vergleichen Elke (E), Regina (R), Gert (G) und Joachim (J) ihre Ergebnisse im Schießen. Der Vergleich ergab:
a) Joachim erzielte mehr Ringe als Gert.
b) Elke und Regina erreichten gemeinsam dieselbe Ringzahl wie Joachim und Gert zusammen.
c) Elke und Joachim erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gert zusammen.
Ermittle die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl. (Arbeitsgemeinschaft für Schüler der Klassenstufe 5 in der ehemaligen DDR)

6. – 7. Jahrgangsstufe
Denke Dir eine Kurzschreibweise für große Zahlen auf folgende Weise hergestellt: Es bezeichne z_n einen Ziffernblock von n aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern z mit $0 \le z \le 9$. Es bedeutet z. B. $1_4 9_5 8_2 3_6$ die Zahl 1111999998833333. Für welche natürlichen Zahlen x, y und z gilt folgende Gleichheit: $2_x 3_y 5_z + 3_z 5_x 2_y = 5_3 7_2 8_3 5_1 7_3$ (Australian Mathematics Competition 1983)

8. Jahrgangsstufe
Über die Anzahl x der Schüler einer 8. Klasse ist folgendes bekannt: (1) Die Zahl x ist eine Primzahl. (2) Genau 9 Schüler dieser Klasse können schlittschuhlaufen. (3) Genau 12 Schüler dieser Klasse können skilaufen. (4) Genau 4 Schüler dieser Klasse können weder schlittschuhlaufen noch skilaufen.
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Schülerzahl x eindeutig ermitteln läßt! (29. OJM, 2. Stufe)

9. Jahrgangsstufe
Gegeben ist das Zahlentripel $(1, 2, \sqrt{2})$. Man darf zwei Zahlen davon (a und b) durch die Terme $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ ersetzen.
Kann man durch Wiederholung dieses Schrittes jemals das Tripel $(1, 2, 1+\sqrt{2})$ erhalten? (Problem des Monats Oktober/November 1985, Hamburger Schülerzirkel Mathematik)

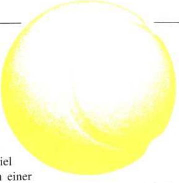
9. – 10. Jahrgangsstufe
Es sei N eine vierstellige Quadratzahl, deren Ziffern alle kleiner als sieben sind. Jede der vier Ziffern wird nun um drei erhöht und man erhält wieder eine Quadratzahl. Bestimme die Zahl N.
(Ungarische Mathematik-Olympiade 1987)

Die 4. Stufe der Olympiade Junger Mathematiker findet vom 3. bis 6. Mai in Erfurt statt. Nähere Informationen können von den Kultusministerien der Länder erhalten werden.

Zeitungsschnipsel

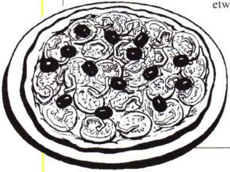
Auch ein flüchtiger Zeitungsleser wird immer wieder auf Meldungen stoßen, die etwas mit Mathematik zu tun haben. Wenn Ihr einen solchen Schnipsel findet, schneidet ihn doch bitte aus und sendet ihn an uns!
Vergeßt aber bitte nicht, die Quelle anzugeben.

Wetten daß...?



Den härtesten Tennisaufschlag hat der Mathematiker und Tennislehrer Horst Göpper aus Weinheim. Die Geschwindigkeit eines von ihm servierten Balles wurde beim Erreichen des gegnerischen Feldes mit 321,12 km/h gemessen. Keiner der Weltranglisten-Profispieler kommt auf einen ähnlich hohen Wert. Wieviel Reaktionszeit bleibt dem Gegenspieler, der in einer Entfernung von 25 Metern den Ball annehmen will? (Es sei vorausgesetzt, daß die Ballgeschwindigkeit konstant bleibt.)

Die größte Pizza der Welt wurde 1991 in Florida (USA) gebacken. 150 Pizzabäcker arbeiteten 7 Stunden lang an der Riesenpizza mit einem Durchmesser von 47 m. Als Zutaten wurden 8178,3 kg Mehl, 2900 kg Tomatensoße und eine Tonne Peperoniwurst verarbeitet. Wir wollen nun eine Pizza in "Normalgröße", etwa mit einem Durchmesser von 25 cm nach demselben Rezept backen, wie es die Rekord-Bäcker benutzten. Die Dicke unserer Pizza soll der der Riesenpizza entsprechen. Welche Menge der genannten Zutaten müssen wir für unsere Pizza verwenden?



Herausgesucht aus der Sammlung kurioser Rekorde von Ralf Laue, selbst Superlativ-Weltrekordler aus Leipzig

Die "Struwwelpetra"

Die Hände der Struwwelpetra sind praktisch funktionsunfähig. Ihre Nägel werden also durch den Gebrauch der Hände nicht abgenutzt. Miss Nail muß sogar Tag und Nacht dafür Sorge tragen, daß sie sich keinen Nagel abbricht. Wieviel Monate nach dem Auftreten der Struwwelpetra in einer japanischen TV-Show werden die Nägel von Miss Nail 50 cm lang sein?

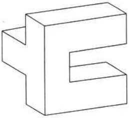
Walter Träger, Döbeln

48 cm lang waren die seit 12 Jahren nicht geschnittenen Nägel der „Miss Nail" bei ihrem TV-Auftritt.

Foto: AMW, München

Enttarnung eines Logos

Auf der Baufachmesse "Leipzig '91", einer der größten in Europa, stellten 1400 Firmen aus 19 Ländern auf über 76 000 m² Ausstellungsfläche Baumaterialien und Baustoffe sowie Verarbeitungsmethoden und Dienstleistungen vor.
Das Emblem der Baufachmesse "Leipzig '91" stellt einen ebenflächigen Körper dar, der entsteht durch Aneinandersetzen von 3 backsteinförmigen Quadern:



1. Die Flächen dieses Körpers sollen mit möglichst wenig Farben so gefärbt werden, daß stets zwei Flächen, die die Punkte einer Strecke als gemeinsame Randpunkte besitzen, verschiedenartig gefärbt sind. Wieviel Farben werden benötigt?
2. Ist dieser Körper ein Polyeder? Falls ja, so sind die Zahl e seiner Ecken, die Zahl k seiner Kanten und die Zahl f seiner Flächen anzugeben.

Walter Träger, Döbeln

In den Zeitungen blätterte für Euch: Walter Träger aus Döbeln.

Was war los?

Eine Chronologie ausgewählter Ereignisse über Jahrhunderte

1142 Petrus Abaelard, Logiker, Philosoph und Theologe am 21. April gestorben. Abaelard ist auch außerhalb seiner Fachgebiete weltbekannt geworden durch die Liebesbeziehung zu seiner Schülerin Heloise. Diese Geschichte ist vielfach in der schöngeistigen Literatur behandelt worden, zuletzt in L. Rinser: Abaelards Liebe, Frankfurt/M. 1991.

1592 am 22. April Wilhelm Schickard geboren (siehe Text)

1667 Erscheinen von Antoine Arnaulds (1612 – 1694) „Neue Elemente", die zu einer Reform des geometrischen Anfangsunterrichts entscheidend beitrugen – Arnauld forderte einfache und direkte Schlußweisen und einen genetischen Aufbau der Geometrie

1742 nach sehr langer Druckzeit erschien endlich Colin Maclaurins (1698 – 1746) Verteidigung der Infinitesimalrechnung und der infinitesimalen Methoden. Maclaurin berief sich dabei auf Archimedes (um 287 v. u. Z. – 212 v. u. Z.)

1842 Entdeckung des Energieerhaltungssatzes durch Julius Robert Mayer

1867 Erscheinen von Hermann Hankels „Theorie der complexen Zahlensysteme" mit der Formulierung des Permanenzprinzips (siehe Text)

1867 Christian von Staudt am 1. Juni gestorben. Staudt beschließt durch fundamentale Arbeiten die Entwicklung der synthetischen Geometrie

1917 Sergej Natanowitsch Bernstein (1880 – 1968) veröffentlicht den ersten systematischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung

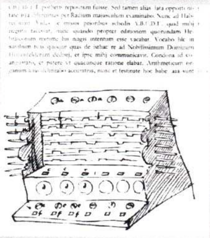
Christian von Staudt beschäftigte sich unter anderem mit Konstruktionen mit Hilfe des Lineals.
Eine solche Aufgabe, allerdings von Jacob Steiner (1796 – 1863), stellen wir euch hier vor:

Es ist $\overline{AC} \parallel \overline{KF}$ gegeben. Man halbiere eine der Strecken, z. B. $\overline{AC}$, nur mit Hilfe des Lineals.

Hans Joachim Ilgauds,
Sudhoff-Institut der Universität Leipzig

Wilhelm Schickard

Der am 22. April 1592, also vor 400 Jahren, in Herrenberg (Württemberg) geborene Schickard (auch Schickardt) studierte Theologie und orientalische Sprachen. Nach seinem Studium wurde er Diakon (niederer Geistlicher) in Nürtingen und Tübingen. Seit 1617 war er mit dem später so berühmten Astronomen und Mathematiker Johannes Kepler (1571 – 1630) befreundet. Kepler weckte das Interesse Schickards an Mathematik und Astronomie. Schickard starb am 23. Oktober 1635 in Tübingen an der Pest. Schickard war außerordentlich vielseitig interessiert und „übertrieb" das Arbeiten. In einem alten Buch von 1751 wurde dazu bemerkt, daß sein rechtes Auge „durch subtile Arbeit verderbt oder blöde gemacht" worden ist. Schickard schrieb Abhandlungen über Optik, Astronomie, Astrologie, Sprachen des Nahen Ostens, Meteorologie und Kartographie. Er gehörte zu den eifrigsten Anhängern der Lehren seines Freundes Kepler und hat viel für deren Verbreitung getan. Auch möglicherweise für Kepler entwarf er eine Rechenmaschine (1623/24). Aus Schickards Notizbüchern und aus einem Brief an Kepler von 1624 konnte man die Konstruktion seiner Rechenmaschine entnehmen und die Maschine 1957/58 nachbauen (siehe Abbildung). Es war eine Maschine, die auf unbeholfene Art Addition, Subtraktion und auch Multiplikation (wie bei den Neperschen Rechenstäbchen) ermöglichte. Die Rechenmaschine von Schickard war die erste wirkliche Rechenmaschine.



Beschreibung und Skizze der Rechenmaschine im Brief Schickards an Kepler vom 20. 9. 1624.

Herman Hankel
und das Permanenzprinzip

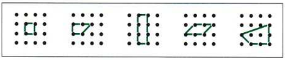
Im Jahre 1867 erschien in Leipzig ein dünnes Buch mit dem Titel „Theorie der complexen Zahlensysteme...". Verfasser des Buches war der junge Professor der Mathematik in Leipzig Hermann Hankel (1839 – 1873). In diesem Buch behandelte Hankel nicht nur den Aufbau des Zahlensystems, sondern auch die Frage, auf welche Weise man den Bereich der reellen und der gewöhnlichen komplexen Zahlen zu sogenannten hyperkomplexen Zahlensystemen erweitern kann. Hankels Grundidee der Erweiterung der Zahlensysteme ist gewesen, daß die definierten Verknüpfungsgesetze zwischen Zahlen den Zahlbereich erst schaffen und nicht etwa die Verknüpfungsgesetze Eigenschaften der Zahlen selbst sind. Und es soll das „selbstverständliche" Prinzip gelten, daß bei der Erweiterung des alten zu einem neuen Zahlenbereich die Rechengesetze des alten Bereiches auch im neuen Bereich gelten sollen. Das ist Hankels „Princip der Permanenz formaler Gesetze": „Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen." Dieses Prinzip, vielfach auch im Schulunterricht verwendet, ist natürlich kein Gesetz, sondern nur ein heuristisches Prinzip. Die Art des Vorgehens von Hankel, nämlich, daß die Verknüpfungsgesetze und die daraus abgeleiteten Rechenregeln die Zahlen erst definieren, war ein wichtiger Schritt auf dem Wege zur modernen axiomatischen Methode.

Mathematik am Nagelbrett

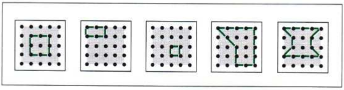
In diesem Beitrag lernt Ihr keineswegs, wie Ihr durch starke Konzentration und Autosuggestion gegenüber Schmerzen unempfindlich und damit zum Fakir werdet. Vielmehr wird das Nagelbrett umfunktioniert und nun kann an diesem sehr gut Mathematik betrieben werden.

Ein Nagelbrett besteht im allgemeinen aus einem quadratischen Brettchen, auf dem in gleichen Abständen sowohl senkrecht als auch waagerecht kleine Nägel eingeschlagen sind. Mit Hilfe von Gummiringen, die man um die Nägel spannt, kann man verschiedene Figuren "abstecken".

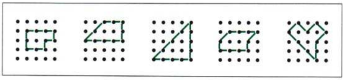
1. Welche der Figuren sind a) Trapeze, b) Rechtecke?



2. Welcher Bruchteil des grau gefärbten Nagelbrettes ist vom Gummiring umspannt?

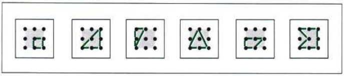


3. Ermittle jeweils den Flächeninhalt der vom Gummiring umspannten Fläche!

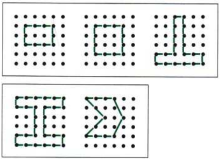


$A_1 = 5F_E$ $A_2 = ...F_E$ $A_3 = ...F_E$ $A_4 = ...F_E$ $A_5 = ...F_E$

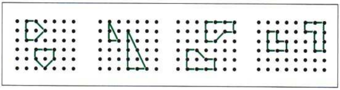
4. Wieviel Prozent der grau gefärbten Fläche des Nagelbrettes sind jeweils vom Gummiring umspannt?



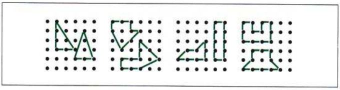
5. Trage jeweils in die vom Gummiring umspannte Figur alle Symmetrieachsen ein!



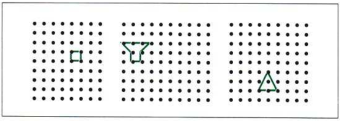
6. Auf welchem Nagelbrett findet man zueinander kongruente Figuren, die durch Gummiringe aufgespannt sind?



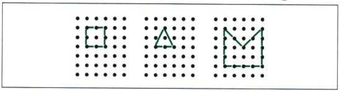
7. Auf welchem Nagelbrett findet man zueinander flächengleiche Figuren, die durch Gummiringe aufgespannt sind?



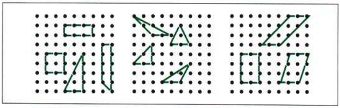
8. Vergrößere jede Figur im Maßstab 1 : 3!



9. Verkleinere jede Figur mit dem Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$!



10. Welche Figur hat auf dem Nagelbrett jeweils den größten Flächeninhalt?



Dr. Lothar Flade, Hochschuldozent für Didaktik des Mathematikunterrichts an der Martin-Luther-Universität Halle, Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

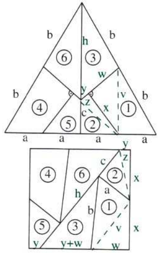
Oh, diese Wurzeln!

Eine Nachbetrachtung

In alpha, Heft 3/1991, S. 54 / S. 71, war unter der Überschrift **„Quadratur des gleichseitigen Dreiecks", (W. Träger)**, folgende interessante Übung zu lesen.

Man zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit s=2·b=4·a=10 cm. Laut Abbildung zeichne man die Teilflächen ein, schneide sie aus und bilde mit ihnen eine Quadratfläche!
Dabei sei $c=\frac{s}{4}\left(\sqrt{3}-\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)$

Mit s=10 cm gilt dann c≈2,19... cm.
Die Abbildungen zeigen Dreieck und Quadrat.



So mancher Leser wird sich über die etwas verzwickte Angabe von c gewundert haben. Es liegt nun nahe, die Richtigkeit bzw. die Notwendigkeit dieser Angabe nachzuweisen. Mit Hilfe von "Pythagoras" und der Kenntnis der Rechenregeln mit Wurzeln ist dies möglich, obwohl man sicher Obacht geben muß, daß nicht beim Umformen Flüchtigkeitsfehler entstehen.

(1) Vorausgesetzt, daß mit allen Teilflächen des Dreiecks eine zur Dreiecksfläche inhaltsgleiche Quadratfläche gebildet werden kann, soll nun c berechnet werden.
(2) Danach möge der Leser selbst mit Hilfe der gefundenen Strecken die Inhalte der sechs Teilflächen bestimmen, um dann zu zeigen, daß die Summe dieser Inhalte der Teilflächen den Flächeninhalt des Quadrates ergibt.
Notwendige Hilfslinien und Bezeichnungen sind im Bild 1 grün eingezeichnet.

(1) Im Dreieck – und damit im Quadrat – gilt für den Flächeninhalt $A=\frac{s\cdot h}{2}$ mit $h=\frac{s}{x}\sqrt{3}$, $A=\frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ und so für die Seite des Quadrats $q=\frac{s}{2}\sqrt[4]{3}$. Dann gilt $2x=\frac{s}{2}\sqrt[4]{3}$, $x=\frac{s}{4}\sqrt[4]{3}$.
Da das Dreieck mit den Seiten $\frac{s}{2}$, $\frac{s}{4}$, v rechtwinklig ist (Strahlensatz), gilt

$$v^2=\frac{s^2}{4}-\frac{s^2}{16}=\frac{3}{16}s^2\text{, d. h. } v=\frac{s}{4}\sqrt{3}.$$

Man erhält dies auch sofort aus $h=\frac{s}{2}\sqrt{3}$, wenn man h : v = 2 : 1 beachtet.
Dann ist $w^2=v^2-x^2=$

$$=\frac{3}{16}s^2-\frac{1}{16}s^2\sqrt{3}=\frac{s^2}{16}\left(3-\sqrt{3}\right)$$

$$w=\frac{s}{4}\sqrt{3-\sqrt{3}}$$

Nun gilt für das Quadrat 2x = 2(y+w) und somit y = x - w.
Nach weiterer Verwendung des Lehrsatzes des Pythagoras ergibt sich dann

$$z^2=x^2+y^2,\ c^2=z^2-\frac{s^2}{16},\ c^2=x^2+y^2-\frac{s^2}{16}$$

$$c=\sqrt{x^2+y^2-\frac{s^2}{16}}$$

Es ergeben sich folgende Rechnungen

$$y=\frac{s}{4}\sqrt[4]{3}-\frac{s}{4}\sqrt{3-\sqrt{3}}$$

$$c^2=\frac{s^2}{16}\sqrt{3}+\left[\frac{s^2}{16}\sqrt{3}+\frac{s^2}{16}\left(3-\sqrt{3}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2s^2}{16}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3}}\right]-\frac{s^2}{16}$$

$$c^2=\frac{s^2}{16}\left(2\sqrt{3}+3-\sqrt{3}-2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3}}-1\right)$$

Nun ist $2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3}}=$

$$=2\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3}}=2\cdot\sqrt{\sqrt{3}\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}$$

$$=2\cdot\sqrt{3\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}=2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{3}-1}$$

Durch geringfügige Umformung läßt sich der rechtsseitige Term als Quadrat erkennen:

$$c^2=\frac{s^2}{16}\left[3+\left(\sqrt{3}-1\right)-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{3}-1}\right]$$

Damit ist mit Hilfe der Binomischen Formel $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

$$|c|=\frac{s}{4}\left(\sqrt{3}-\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)$$

und die Übereinstimmung mit dem angegebenen Termin erreicht.
Nun seid Ihr mit dem 2. Problem an der Reihe!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz
Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

Ich kann nicht leugnen, daß mir, als ich zum ersten Male sah, daß man nun in meinem Vaterlande anfange zu wissen, was Wurzelzeichen sind, die klaren Freudentränen in die Augen gedrungen sind.
Lichtenberg 1775

Zur Entwicklung des Wurzelzeichens

Ka6Ka5	$\sqrt{6}+\sqrt{5}$	frühes Indien
radix de 4	$\sqrt{4}$	Leonardo Fibonacci 1228
$\frac{\dot{\text{ʒ}}}{60}$	$\sqrt{60}$	al-Qalasādi (†1486)
6 -· 9	$6-\sqrt{9}$	Dresdner Kodex (um 1486)
√44	$\sqrt{44}$	M. Stifel 1544
℞ √(℞ 24 men ℞ 12)	$\sqrt{\sqrt{24}-\sqrt{12}}$	N. Tartaglia 1556
√. 2 – √. 2	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$	R. Descartes um 1620
√q	$\sqrt{q}$	W. Oūghtred 1631
$\overbrace{\text{√ccc +√cccccc}}$	$\sqrt[3]{c^3+\sqrt{c^6}}$	T. Harriot 1631
$\sqrt{a^2+b^2}$	$\sqrt{a^2+b^2}$	R. Descartes 1637

Zusammengestellt von H. J. Ilgauds, Leipzig

Im Raum konstruiert: das Oktaeder

Nun haben wir schon zwei platonische Körper "in Falten gelegt". Bitte lest über Würfel und Tetraeder in den alpha-Heften 5/'91 und 1/'92 nach oder studiert besonders genau das folgende lustige Beispiel, die Konstruktion eines Alf-Kopfes, denn dann soll der dritte Körper folgen, das Oktaeder (griechisch, Achtflächner), ebenfalls ohne Schere und ohne jedes Tröpfchen Leim.

Wiederum wird – wie gewohnt – mit der Exaktheit der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal vorgegangen, gemäß den Forderungen des griechischen Philosophen Platon, dessen Namen die fünf regelmäßigen Körper tragen. (Pentagon-Dodekaeder – 12-Flächner und Ikosaeder – Zwanzigflächner werden wir auf diese Weise nicht falten).

Stellen wir uns vor, uns läge der vollständig gefaltete Kopf (**Abb. 1**) bereits vor und wir wollten die Faltungen möglichst genau nachvollziehen, ohne daß jede Hilfsfaltung genügend deutlich ist. (Genau dies war – nebenbei bemerkt – die Situation des Autors, als er begann, über exakte Papierfaltkonstruktionen nachzudenken.)

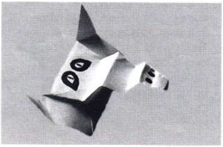


Abb. 1: Der fertig gefaltete Alfkopf
Foto: Dr. B. Liebau, Leipzig

Offensichtlich entsteht der Außerirdische aus einem über die Diagonale gefalteten quadratischen Bogen. Die Schnauze des Wesens wird durch sechs exakt aufeinander liegende Lagen Papier gebildet, d. h. der rechte Winkel bei R muß gedrittelt werden (**Abb. 2**). Dies könnte man erreichen, indem man entweder einen 30°- oder einen 60°-Winkel erzeugt.

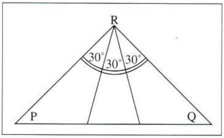


Abb. 2

Sollten wir einen 60°-Winkel mit Zirkel und Lineal konstruieren, fiele uns sicher das *gleichseitige Dreieck* ein. Es hat drei Stück davon und ist bekanntlich aus drei gleichlangen (kongruenten) Seiten bequem zu zeichnen. Wenn man sich aber überlegt, daß bei der gewöhnlichen Konstruktion zwei Kreisbögen einander schneiden, so fiele das Falten schwer. In solcher Situation verlieren wir weder Mut noch Phantasie, sondern *suchen nach anderen Eigenschaften* des gleichseitigen Dreiecks, die gegebenenfalls in einer Falt-Konstruktion verwendbar wären. Dem etwas geübteren Problemlöser unter euch kommen die Symmetrieachsen in den Sinn (bei anderen Problemen könnte es auch die Eigenschaft sein, daß eine Drehung von 120° oder 240° um einen bestimmten Punkt im Innern des Dreiecks die Eckpunkte jeweils aufeinander abbildet). Eine Mittelsenkrechte als Symmetrieachse ist aber sehr leicht zu falten. Ein Hilfskniff bei H legt mit $\overline{HR}$ die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks fest. Dabei kann H im Prinzip beliebig auf $\overline{QR}$ gewählt werden, am besten in der Mitte dieser Seite (**Abb. 3**).

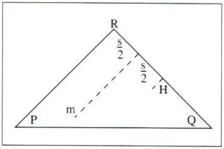


Abb. 3

Falten wir nun R auf H, ist die Mittelsenkrechte m rasch fertiggestellt. Nun kommt der schwierigste Schritt für den Anfang. Dazu legen wir H "um R herum" auf m, das heißt, wir kniffen eine scharfe Falte, die durch R verläuft, wobei H auf m fällt (**Abb. 4**).

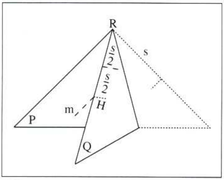


Abb. 4

1 Bezeichnen wir den Punkt auf m, der nach dem Falten mit H zusammenfällt, mit S. Begründe, warum ΔHRS tatsächlich gleichseitig ist!

Damit sind bei R ein 30°- und 60°-Winkel entstanden. Schließlich braucht nur noch die Ecke bei P darübergefaltet zu werden, und Ohren und Schnauze sind fertig. Zur Vollendung des weitgereisten Fernsehstars faltet die Ohren (Ecken P und Q) nach oben sowie die Schnauze (Ecke R) nach unten.

2 Ein Alfkopf wird aus einem quadratischen Stück Papier mit 16 cm Kantenlänge gefertigt. Wie breit ist sein Kopf an der dicksten Stelle? Welche "Ohrenspannweite" hat das Geschöpf?

Das **Oktaeder** ist aus acht gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt, so daß es keinen verwundert, die gerade gelernte Erzeugung eines 60°-Winkels schon zu Beginn der Oktaeder-Konstruktion anwenden zu müssen: Wir benutzen, wie schon gewohnt, ein quadratisches Blatt (ABCD) mit mindestens 20 cm Seitenlänge und falten es entlang einer seiner Diagonalen, D auf B, danach C auf A, so daß wir das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck CBM vor uns haben. Bei M wird nun ein 60°-Winkel benötigt, den wir mittels der schon bekannten Hilfsfalten (s. o.) exakt konstruieren. H wird als Mitte von BM markiert, die Hilfsfalte m liegt auf der Mittelsenkrechten von HM und entsteht, wenn M auf H gefaltet wird. Um M wird schließlich H auf m gefaltet. Nun wird wieder entfaltet, bis C an seiner alten Position ist. Entlang der gerade entstandenen 60°-Falten werden C nach unten und A nach rechts darüber gelegt. Die vier oberen Lagen werden nach links oben umgelegt (**Abb. 5**) und die Arbeit anschließend wieder vollständig entfaltet.

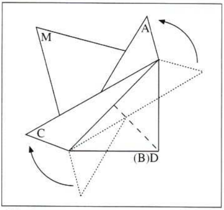


Abb. 5

Die Vorschrift wiederholt sich jetzt, nur wird vorher das Blatt um 90° gedreht. (Bei der Konstruktion der 60°-Winkel könnt ihr durch Halbieren des schon vorhandenen 60°-Winkels etwas Mühe sparen.) Wiederum nach

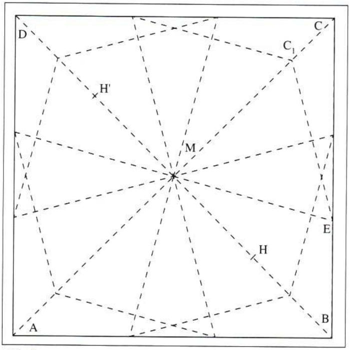


Abb. 6

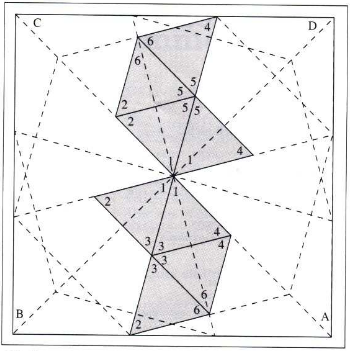


Abb. 9

vollständigem Entfalten ist ein geordnetes Gewirr von Falten wie in **Abb. 6** entstanden.

3 Begründe, weshalb sechs gleichseitige Dreiecke (z. B. ΔC_1EM) entstanden sind!

Inzwischen ist das Schwerste geschafft, obwohl wir von einem *Körper* ja noch weit entfernt sind. Diejenigen, die die Aufgaben **2** und **3** schon gelöst haben, gewinnen jetzt ohne Mühe den Umriß eines regelmäßigen Sechsecks, indem sie die Ecken B und D gerade bis an die 60°-Faltlinien heran nach innen knikken. (Dabei fallen Abschnitte der ursprünglichen Diagonalen zusammen.) Danach werden die übrigen beiden Ecken entlang der 15°-Linien (z. B. $\overline{C_1E}$) nach innen gebracht und an diesen Stellen die infolge dessen gerade entstandenen Ecken ebenso. Ein regelmäßiges Sechseck ist fertig. Jetzt muß eine Art Sternvieleck entstehen: Abwechselnd, beginnend bei FG, werden alle 15° Tal- und Bergfalten gelegt, und zwar auf den schon vorhandenen Faltlinien (**Abb. 7**).

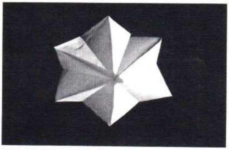


Abb. 7: Sternvieleck

Foto: Dr. B. Liebau, Leipzig

Dieses Gebilde wird jetzt so zusammengelegt, daß ein gleichseitiges Dreieck JKM entsteht, wobei in den Eckpunkten J und K jeweils drei Spitzen übereinander liegen (**Abb. 8**). Wenn die rechte (untere) Spitze K_1 an die Mitte der linken Kante gefaltet wird und anschließend zuerst die obere linke (J_1), dann die mittlere linke Spitze (J_2) in die entstandene "Tüte" gesteckt (Vorfalten empfiehlt sich!) und angedrückt und dieser Vorgang nach dem Wenden der Faltarbeit wiederholt wird, ist das Oktaeder fertig.

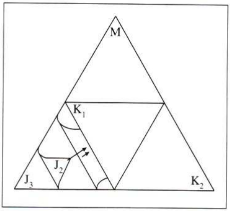


Abb. 8

4 Welche Eigenschaften haben die Dreiecke, die durch Umlegen der Spitze K_1 neu entstehen?

Fertig? werden die "Neulinge" unter Euch zu Recht fragen. Die versierten "Falter" dagegen wissen, daß nur noch ein vorsichtiger Puster in die Öffnung des Gebildes fehlt, um es zu ganzer Schönheit zu entfalten.

Zum Beweis unserer Konstruktion "im Raum" können wir uns diesmal kürzer fassen, ist doch einerseits durch die Lösung der Aufgaben viel Vorarbeit geleistet und andererseits das Prinzip von den beiden vorangegangenen Arbeiten bekannt. Wir markieren wieder die außen liegenden Figuren (Dreiecke) und entfalten das Gebilde in die Ebene (**Abb. 9**).

(1) Jede der Seitenflächen ist gemäß der in der Lösung von **4** und zuvor angestellten Überlegungen ein gleichseitiges Dreieck.

(2) In jedem der Eckpunkte des Körpers stoßen genau vier Dreiecke zusammen.

Aus (1) und (2) folgt, daß der Körper von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird und sechs gleichartig gebaute Ecken aufweist, also exakt ein Oktaeder ist, q.e.d.

Mit dem Oktaeder und phantastischen Vorstellungen von unserer Welt schließt sich jetzt der Kreis zu Alf vom fernen Planeten Melmac. Johannes Kepler (1571 – 1630), der die Bewegung der Planeten sehr präzis beschrieb, hat darüber hinaus versucht, die Zahl der Planeten unseres Sonnensystems sowie ihre unterschiedlichen Abstände von der Sonne zu erklären:

"Die Sphäre der Erde ist das Maß für alle anderen. Zeichne ein Dodekaeder um sie! Die diesem Dodekaeder umschriebene Sphäre ist die des Mars. Zeichne jetzt ein Tetraeder um die Marssphäre! Die diesem Körper umschriebene Sphäre gehört dem Jupiter. Schreibe jetzt einen Würfel um des Jupiters Sphäre! Die ihm umschriebene Sphäre ist die des Saturnus. Zeichne nun ins Innere der Erde ein Ikosaeder! Die ihm eingeschriebene Sphäre gehört der Venus. Zeichne ein Oktaeder in diese Sphäre! Die diesem Oktaeder eingeschriebene Sphäre gehört endlich dem Merkur. Und siehe, somit ist die Zahl der Planeten erklärt."

Mysterium Cosmographicum (erschien 1596)

Dr. Christian Werge, Leipzig

Eine Variation des Faltens von Würfel, Tetraeder und Oktaeder sandte uns Dr. Peter Gallin (Bauma/Schweiz) ein. Bei Einsendung eines frankierten und adressierten Rückumschlages könnt Ihr sie von uns erhalten.

Komisches, Kniffliges und Knackiges

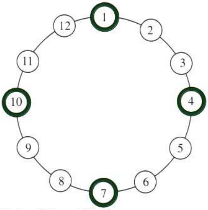
Verflixt, das geht doch nicht!

$$\frac{\mathrm{XXII}}{\mathrm{VIII}} = \mathrm{II}$$

Forme diese Gleichung so um, daß sie eine wahre Aussage ist!
Eingesandt von unserer Leserin
Ina Maria dos Remedios, Forchheim

Stapeln von Spielsteinen

Auf jedes der auf einem Kreis angeordneten 12 Spielfelder ist ein Spielstein zu setzen (1-Pfennig-Stück, Damestein). Aus diesen Spielsteinen sind mit 8 Zügen 4 Stapel mit je drei Steinen zu bilden, wobei diese Stapel auf den doppelt umrandeten Feldern liegen. Ein Zug besteht im Springen eines Steines von einem Feld auf ein anderes Feld im oder entgegen dem Uhrzeigersinn über genau drei Spielsteine hinweg. Die übersprungenen Steine können einzeln oder gestapelt liegen.



Walter Träger, Döbeln

Idiotisch
Der Mathelehrer ist wieder einmal total entrüstet über die Rechenkünste von Alphons: "Tut mir leid, Alphons, aber einer von uns beiden ist ein Vollidiot!" Alphons gibt keinen Kommentar dazu. Am nächsten Tag legt er gleich zu Beginn der Stunde einen Briefumschlag auf das Lehrerpult. "Was ist denn da drin?", fragt der Lehrer verblüfft.
Alphons: "Ein Attest vom Schularzt, daß ich völlig normal bin!"

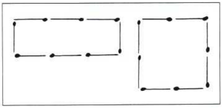
Sprachecke

Les polygones

Deux polygones ont, à eux deux, 89 diagonales. A eux deux, combien ont-ils de côtés?
aus: Tangente, Paris

Same perimeter but different areas

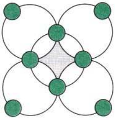
The drawing shows two shapes with the same number of matches (eight) in their perimeters. However, their areas are in the ratio of 3 : 4.



Construct two other shapes in the plane so that one of them is a rectangle, they are each composed of twentyfour matches, and their areas are in the ratio of 5 : 6.
aus: Fun with mathematics, Toronto

Арифме́тика

Расставьте числа от 1 до 8 в кружки фигуры, изображенной на рисунке, так, чуобы сумма чисел на каждой окружности была одной и той же.



aus: Quant, Moskau

Übersetzt von Peter Hofmann, Dr. Gabriele Liebau (beide Leipzig) und Rainer Bergmann (†), Döbeln.

Alphons logische Abenteuer (9)

"Berti lügt"; sagte Alphons' Schwester. "Wie kommst Du darauf", fragte Alphons. "Er hat es mir vorhin selber gesagt", antwortete seine Schwester.
Was er denn gesagt habe, wollte Alphons nun genauer wissen. "Ich lüge", das hat er auf sich zeigend gesagt, erwidert sie darauf. Alphons wollte schon seiner Schwester Gegenbeispiele angeben, da glaubte er, einen besseren Weg zur Ehrenrettung von Berti gefunden zu haben. "Wenn Berti von sich behauptet, daß er lüge, so ist doch auch diese Behauptung von ihm gelogen, also nicht wahr. Ist es aber nicht wahr, daß er lügt, lügt er nicht. Berti spricht die Wahrheit", argumentiert Alphons und fügt noch hinzu, daß Berti damit aber ganz schön angebe.
Alphons dachte dabei an Situationen, in denen Berti wider besseren Wissens etwas behauptete, also gelogen hatte. "Du, Alphons", tippte ihn seine Schwester vorsichtig an, "wenn aber wahr ist, was Berti sagt, dann ist doch auch wahr, was er mir gesagt hat, nämlich daß er lügt."
In der Tat, mußte Alphons zugeben, seine Schwester hatte seine eigene Argumentation nur zu Ende gedacht. Wenn Berti lügt, dann ist auch das eine Lüge und somit lügt Berti nicht. Lügt Berti nicht, so hat er, wenn er behauptet, er lüge, nicht gelogen, also lügt er. Berti lügt somit genau dann, wenn er nicht lügt. Statt "lügt" kann man auch sagen "nicht wahr", so daß wir zu dem Resultat kommen: Berti sagt die Wahrheit genau dann, wenn er nicht die Wahrheit sagt. Seine Schwester deutete sein ratloses Gesicht anders: "Sei nicht traurig, Berti redet eben manchmal so dahin, ich kann ihn aber trotzdem auch gut leiden." War es wirklich nur komische Rede? Nein, das war es ganz und gar nicht, wie Alphons seinem Logikbuch entnehmen konnte, das er zu Rate zog.
Zu beweisen, daß eine Aussage zugleich wahr und falsch ist, das hieß eine Antinomie zu beweisen. Eine Antinomie ist ein beweisbarer logischer Widerspruch. Die Antinomie, auf die man durch Bertis Aussage kommt, war schon in der Antike bekannt. Auch im späten Mittelalter hat man diese Lügner-Antinomie zu lösen versucht und war dabei schon auf einen Lösungsweg gekommen, den man in unserem Jahrhundert in allen seinen Konsequenzen für den Aufbau einer wissenschaftlichen Theorie untersuchte.
Das Antinomienproblem wird deshalb heute so intensiv untersucht, weil man sowohl innerhalb der Mengenlehre als auch bei dem Versuch, Arithmetik auf ein logisches Axiomensystem zurückzuführen, von den jeweiligen begrifflichen oder axiomatischen Voraussetzungen ausgehend Antinomien beweisen konnte.

Der zunächst gefundene Weg zur Vermeidung logischer Antinomien (wie z. B. der Lügner-Antinomie) ist nicht trivial. Da er von sehr starken Voraussetzungen Gebraucht macht, ist er auch nicht unumstritten.

"Wenn man den ganzen Scharfsinn von Jahrhunderten braucht, um auf eine Lösung zu kommen, brauche ich mich nicht zu schämen, daß ich mich schachmatt gesetzt fühlte", dachte Alphons. Besonderes Aufsehen habe, so las er weiter, eine Anfang unseres Jahrhundertes von B. Russell gefundene Antinomie erregt. Man denke sich die Menge M aller der Mengen gebildet, die sich nicht selbst als Element enthalten.

Die Antwort auf die Frage, ob M sich selbst als Element enthält oder nicht, ist eine Antinomie. Alphons beschloß, diese Frage Berti vorzulegen.

Prof. Dr. L. Kreiser
Institut für allgemeine Logik
der Universität Leipzig

Die Logik ist die Hygiene,
deren sich der Mathematiker bedient,
um seine Gedanken
gesund und kräftig zu erhalten.
H. Weyl

Für Freunde der Zahlenjongliererei – eine zu harte Nuß?

Im Heft 5/91 stellten wir Euch vor das Problem, die Zahlen 1 – 100 mittels der Ziffern in den Jahreszahlen 1991 und 1992 darzustellen. Dabei sollte die gegebene Ziffernfolge eingehalten und möglichst einfache Ausdrücke, also ohne die Funktion ganzzahliger Ausdruck, verwendet werden.

Die Problemzahlen waren für die 1991 die 39, 51, 66, 68, 69, 74, 75 und 77.

„Geknackt hat unser Leser Ingo Maaß aus Berlin folgende Zahlen:

$$39 = 1 \cdot \sqrt{9} + (\sqrt{9}\,!)^2$$

$$66 = 1 \cdot \sqrt{9}! \cdot (9+2)$$

$$68 = -((1+\sqrt{9})!) + 92$$

$$74 = (1+\sqrt{9})! \cdot \sqrt{9} + 2$$

$$75 = -1 \cdot \sqrt{9}\,! + 9^2$$

$$77 = (1+\sqrt{9}\,!) \cdot (9+2)$$

Bei der 51 und 69 mußte auch er passen! Die beiden Zahlen stehen also weiterhin zur Debatte.

Nummernsalat

„Was liest du denn da?"
„Die 3-426-04175-8!"
„Das Buch fand ich toll. Aber jetzt habe ich ein noch spannenderes, die 3-328-00349-5, kennst du das schon?"

Nein, also ganz so schlimm ist es doch nicht mit den Nummern in unserem Leben. Wir haben zwar schon festgestellt, daß die Nahrungsmittel, technischen Geräte, sogar die Lokomotiven Nummern haben, aber das? Nein!

Trotzdem, fast alle Bücher, die nicht älter als 20 Jahre sind, tragen auf der Rücktitelseite die zehnstellige Internationale Standard-Buchnummer (ISBN). Nehmen wir die ISBN-Nummer der alpha:

3 - 617 - 34005 - 9

9 – Prüfziffer
34005 – Titelnummer
617 – Verlagsnummer
3 – Sprache, Land

Der Übergang zwischen Titel- und Verlagsnummer ist fließend. Große Verlage erhalten eine zwei- oder dreistellige Verlagsnummer, kleinere Verlage hingegen mehrstellige Verlagsnummern, da sie entsprechend weniger Buchtitel herausgeben. Ebenso variabel ist die Ländernummer. Gibt ein Land sehr viele Bücher heraus, so erhält es eine einstellige Nummer, anderenfalls wird die Verlagsnummer mit einbezogen. Bücher mit der 3 an erster Stelle weisen übrigens lediglich darauf hin, daß diese Titel im deutschsprachigen Raum, also in der Bundesrepublik Deutschland, in der Schweiz oder in Österreich erschienen sind.

ISBN-Sprachgruppen

0 – englisch	91 – schwedisch
2 – französisch	92 – UNESCO
3 – deutsch	951 – finnisch
84 – spanisch	963 – ungarisch
86 – jugoslawisch	977 – ägyptisch
87 – dänisch	978 – nigerianisch
90 – niederländisch	979 – indonesisch

Wozu eine ISBN?

Diese vereinfacht das Bestellsystem Kunde-Buchhändler-Verlag wesentlich, denn statt langer bibliographischer Angaben genügt die ISBN zur eindeutigen Angabe des Titels.

Vorausgesetzt, sie enthält keine Fehler!

Aber zum Ausschließen der häufigsten Fehler gibt es ja die Prüfziffer.

Wie wird die Prüfziffer ermittelt?

Die richtige Prüfziffer ergibt sich durch Ergänzen zum nächsten Vielfachen der 11 (s. Abbildung unten).

Da im 11er-System gerechnet wird, kommen für die Prüfziffer alle Reste beim Teilen durch 11 in Frage, also die Zahlen von 0 bis 10. Statt der zweistelligen 10 benutzt man den Buchstaben X als Prüfziffer, in Anlehnung an das entsprechende römische Zahlzeichen.

Aufgabe 1:
Bei diesen ISBN fehlt die Prüfziffer.
a) 3-453-00548- ?
b) 3-425-07081- ?
c) 0-45-283527- ?
d) 0-912843-08- ?

Aufgabe 2:
Der häufigste Fehler ist eine falsch geschriebene Ziffer. Wird dieser Fehler mittels des 11er-Systems immer entdeckt?

Aufgabe 3:
Während das 11er-System die Vertauschung von Nachbarziffern stets erkennt (im Gegensatz zum 10er-System der EAN-Nummer, siehe alpha Heft 1/92), führen Vertauschungen von benachbarten Zweierblöcken nicht immer zu Fehlermeldungen. Versuche ein solches Beispiel zu finden!

nach: Wilfried Herget "Prüfziffer und Strichcode – "Computermathematik" auch ohne den Computer", mathematik lehren, Friedrich Verlag

3 - 6 1 7 - 3 4 0 0 5 - 9
↓·10 ↓·9 ↓·8 ↓·7 ↓·6 ↓·5 ↓·4 ↓·3 ↓·2 ↓·1
30 + 54 + 8 + 49 + 18 + 20 + 0 + 0 + 10 + 9 = 198 : 11 = 18

Die Mitternachts-dämmerung

Täglich können wir beobachten, wie es am Morgen ganz allmählich hell und am Abend wieder dunkel wird. Die Dämmerung ist für uns eine selbstverständliche Erscheinung, und wer denkt schon daran, daß die Erdatmosphäre die Ursache dafür ist. Befänden wir uns auf dem Mond, der bekanntlich keine Lufthülle besitzt, so könnten wir beobachten, daß Licht und Dunkelheit, Tag und Nacht, ganz plötzlich ineinander übergingen. Für uns Erdbewohner ist die Dämmerung eine durchaus angenehme Erscheinung, da diese den lichten Tag verlängert. Maßgeblich für die Dämmerungshelligkeit ist der Stand der Sonne unter dem Horizont, die Sonnentiefe. Ist die Sonne z. B. gerade untergegangen, merkt man kaum eine Helligkeitsabnahme. Erst nach etwa 45 Minuten hat die Helligkeit so weit abgenommen, daß es nicht mehr möglich ist, ohne Zuhilfenahme von künstlichem Licht, etwas zu lesen. Bald erscheinen auch die ersten hellen Sterne, denen immer mehr folgen. Nach 1,5 Stunden ist selbst der geringste Rest der Dämmerung am Horizont verschwunden, es ist dunkle Nacht. Der Astronom unterscheidet drei Dämmerungsstufen (s. **Tabelle 1**).

Sonnentiefe	Erscheinung
0° bis 6,5°	Bürgerliche Dämmerung: Gegenstände sind noch deutlich erkennbar. Lesen ohne künstliches Licht ist noch möglich.
6,5° bis 12°	Nautische Dämmerung: Hellere Sterne sind zu sehen. Der Verlauf des Horizontes (Kimm) ist noch erkennbar.
12° bis 18°	Astron. Dämmerung: Die Dunkelheit nimmt zu, am Horizont ist noch eine mehr oder weniger leichte Aufhellung zu bemerken. Am Ende der astron. Dämmerung sind alle Sterne am Himmel zu sehen.

Tabelle 1

Breite		Mitternachts-dämmerung	Anzahl der Tage
55°	Insel Sylt, dänische Grenze	8.5.- 5.8.	89
54°	Lübeck, Wismar, Rostock, Usedom	13.5.- 1.8.	80
53°	Bremen, Wittenberge, Angermünde	17.5.-28.7.	72
52°	Münster, Bielefeld, Magdeburg Jüterbog, Guben	21.5.-24.7.	67
51°	Köln, Erfurt, Dresden	26.5.-18.7.	58
50°	Mainz, Frankfurt/M., Bayreuth	2.6.-12.7.	40

Tabelle 2

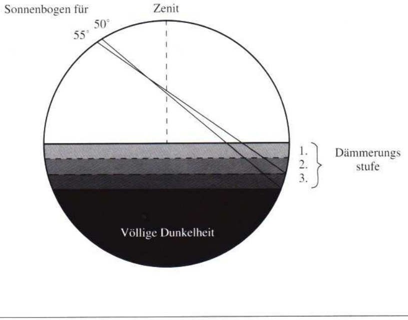


Abb. 1

Die hellen Nächte im Norden Deutschlands

Um die Zeit der Sommersonnenwende (21.6.) bemerkt man im Norden des Landes, daß es nachts nicht ganz dunkel wird. Selbst um Mitternacht ist am Nordhorizont eine leichte Aufhellung zu beobachten, die umso stärker ist, je mehr wir uns der Nord- und Ostseeküste nähern. Die 3. Dämmerungsstufe, die astronomische Dämmerung, bleibt für einige Wochen erhalten. Mit anderen Worten: Die Abenddämmerung geht in die Morgendämmerung über. Ein Dichter hat diese Erscheinung poesievoll in folgende Worte gekleidet: "Lieblich sind die Juninächte, wenn des Abendrots Verglühen und des Morgens frühe Lichter dämmernd ineinanderschwimmen."

Um genau zu sein: Ganz im Norden (Flensburg, Insel Sylt) bleibt die Sonne sogar vom 10. Juni bis 1. Juli innerhalb der nautischen Dämmerung.

Da die Sonnenbögen im Norden flacher als im Süden verlaufen, kann die Sonne südlich der Linie Mainz-Frankfurt/M.-Bayreuth um Mitternacht niemals weniger als 18° unter dem Horizont stehen, d.h. eine Mitternachtsdämmerung ist dort nicht mehr möglich. Die Sommernächte sind südlich von 50° Breite auffallend dunkel.

Die Übersicht zeigt die Abhängigkeit der Dauer der Mitternachtsdämmerung von der geographischen Breite (s. **Tabelle 2**).

Dabei ist zu berücksichtigen, daß in der zeitlichen Nähe der Sommersonnenwende die Mitternachtsdämmerung deutlicher ausgeprägt ist als nahe der Grenztage. Die **Abb. 1** zeigt im Meridianschnitt die 3 Dämmerungszonen mit der Sonnenbahn als Gerade am 21.6. für die Breite von 55° und 50°.

Die "Weißen" Nächte

Reisen wir noch weiter nach Norden, geht die Mitternachtsdämmerung in die sogen. weißen Nächte über. Den Touristen gut bekannt, ist diese eindrucksvolle Erscheinung von Stockholm oder St. Petersburg. In diesem Falle verbleibt die Sonne noch nahe im Bereich der 1. Dämmerungsstufe, der bürgerlichen Dämmerung. Es ist dann dort so hell, daß man mühelos etwas lesen kann, am Himmel sind nur die hellsten Sterne erkennbar. **Abb. 2** zeigt in

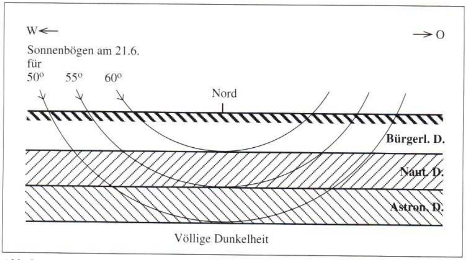


Abb. 2

einer schematisierten Darstellung des Nordhorizontes die Dämmerungsverhältnisse in 3 verschiedenen geographischen Breiten.
Dehnen wir unsere Reise noch weiter nach Norden aus, muß logischerweise auf einer bestimmten geographischen Breite die Sonne um Mitternacht nicht mehr untergehen. Wir haben damit den nördlichen Polarkreis auf der Breite von 66,5° erreicht, wo die Mitternachtssonne zu beobachten ist. Die hier gemachten Ausführungen über die Mitternachtsdämmerung und die weißen Nächte gelten selbstverständlich sinngemäß auch für die Zeit um den 22.12. auf der Südhalbkugel. Wie ein Blick auf den Globus zeigt, gibt es südlich der Breite von 50° (Südpatagonien; Feuerland) nur sehr wenige Siedlungsgebiete.

StR Arnold Zenkert, Potsdam

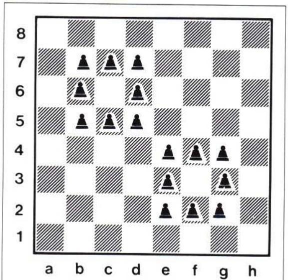
Schachecke

Lothar Otto, Leipzig

Jeder Zug ein Treffer

Der bekannte Berliner Schachschriftsteller und Internationale Meister Kurt Richter (1900 – 1969) bezeichnete den Springer unter den Schachfiguren als die schillerndste Figur im königlichen Spiel. Während König, Dame, Turm und Läufer sich in geraden Bahnen bewegen, zieht der Springer dagegen zwei Felder vor und eins zur Seite. Im Prinzip zieht er nicht, sondern er springt vielmehr, was auch schon sein Name ausdrückt. In dem Diagramm sind zweimal 8 schwarze Bauern in Quadratform aufgestellt. Nun soll ein weißer Springer, der auf ein beliebiges freies Feld gesetzt werden darf, in möglichst wenigen Zügen alle Bauern schlagen. Es gibt mehrere richtige Lösungswege. Finde einen davon!

Harald Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin



Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 6/91

5/1
Aus (1) folgt: Bernd hat nicht den Familiennamen Lange.
Aus (3) folgt: Christian hat nicht den Familiennamen Lange.
Deshalb heißt einer der drei Freunde Andre Lange.
Aus (2) folgt: Christian hat nicht den Familiennamen Neumann.
Deshalb heißt er Christian Meier und der dritte Bernd Neumann.

5/2
Die kleinste dreistellige natürliche Zahl mit der Quersumme 10 ist 109, die größte 910.

5/3
Wir stellen eine Tabelle auf:
Lebensalter (in ganzen Zahlen)

Sohn	Tochter	Vater	Mutter	Summe
7	11	28	25	71
8	12	32	29	81
9	13	36	33	91
10	14	40	37	101

Nur für die Zahlenangaben der vierten Zeile beträgt die Summe 101. Der Vater ist 40, die Mutter 37, die Tochter 14, der Sohn 10 Jahre alt.

5/4
Aus (1) folgt: Falk hat nicht den Nachnamen Krause.
Aus (2) folgt: Weder Falk noch Ingmar haben den Nachnamen Lumnitz.
Einer der drei Freunde heißt deshalb Ronny Lumnitz, ein weiterer Ingmar Krause, der dritte Falk Schettler.

5/5
Zunächst gilt O = 1. Wegen A + A = OP gilt $A \geq 5$. Wegen E + E = A muß A eine gerade Zahl, also 6 oder 8 sein. Es existiert genau eine Lösung, nämlich 6948 + 6948 = 13 896.

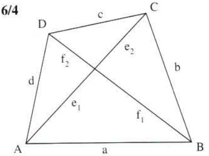
5/6
Beate sei x Jahre alt; dann ist Christian (x-2) Jahre und Axel (x+2) Jahre alt. Zusammen sind sie $3 \cdot x$ Jahre alt. Nun gilt $3x=24$, also $x=8$. Christian ist 6, Beate 8 und Axel 10 Jahre alt.

5/7
Angenommen, das Hotel habe nur Zweibettzimmer; dann wären $20 \cdot 2 = 40$ Betten vorhanden. Da es aber $40 - 32 = 8$ Betten weniger sind, verfügt das Hotel über 8 Ein- und 12 Zweibettzimmer.

6/1
Aus (1) und (2) folgt: Weder Rico, weder Mark noch Lars haben den Nachnamen Stöwesand. Deshalb heißt ein Junge Dirk Stöwesand. Aus (3) und (4) folgt: Mark heißt nicht Jakobi, aber auch nicht Fischer. Deshalb heißt er Mark Wagenknecht.
Aus (3) folgt: Lars heißt nicht Jakobi. Deshalb heißt er Lars Fischer, und der vierte Junge heißt Rico Jakobi.

6/2
Aus $A = a \cdot b = 1 \cdot 40\ \text{cm}^2 = 2 \cdot 20\ \text{cm}^2 = 4 \cdot 10\ \text{cm}^2 = 5 \cdot 8\ \text{cm}^2$
und $\frac{u}{2} = a + b = 26\ \text{cm} : 2 = 13\ \text{cm} = 5\ \text{cm} + 8\ \text{cm}$
folgt a = 8 cm und b = 5 cm.

6/3
$$\frac{131313}{656565} = \frac{13 \cdot 10101}{65 \cdot 10101} = \frac{13}{65} = \frac{1}{5}$$

6/4


Der Zeichnung ist folgendes zu entnehmen:
Nach der Dreiecksungleichung gilt
$e_1 + f_1 > a$ und $e_2 + f_1 > b$,
$e_2 + f_2 > c$ und $e_1 + f_2 > d$,
$e_1 + e_2 + f_1 + f_2 > a + c$ und
$e_1 + e_2 + f_1 + f_2 > b + d$,
also $e + f > a + c$ und $e + f > b + d$.

6/5
Für den Bruch gilt $\frac{n}{n + 3521} = \frac{4}{11}$
Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so $a \cdot d = b \cdot c$.
Deshalb gilt
$11 \cdot n = 4 \cdot (n + 3521)$, $11n = 4n + 14084$, $7n = 14084$, $n = 2012$. Daraus folgt weiter
$\frac{2012}{5533} = \frac{4 \cdot 503}{11 \cdot 503}$
Der Bruch wurde somit durch 503 gekürzt.

6/6
Es sei 2n eine gerade natürliche Zahl; die ihr unmittelbar aufeinanderfolgenden weiteren vier Zahlen sind dann $2n + 1$, $2n + 2$, $2n + 3$ und $2n + 4$. Die Summe dieser fünf Zahlen beträgt $10n + 10 = 10(n + 1)$. Die Summe ist somit ein Vielfaches von 10, also durch 10 teilbar.

6/7
Er legt in 1 Stunde 4 km zurück, in einer halben (30 min) die Hälfte, also 2 km.

7/1
Wegen $\frac{1}{2} \cdot (88 - 48) = 20$ sind Sohn und Tochter zusammen 20 Jahre alt.
Angenommen, die Tochter ist x Jahre, der Sohn also (20–x) Jahre alt; dann gilt $3 \cdot (20 - x) + (20 - x) + 4x + x = 88$, $4 \cdot (20 - x) + 5x = 88$, also $x = 8$. Der Vater ist 36, die Mutter 32, der Sohn 12 und die Tochter 8 Jahre alt.

7/2
Es sei $z = \overline{19xy}$ die Zahl des Geburtsjahres von Tobias ($0 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$). Dann gilt $1900 + 10 \cdot x + y + (1 + 9 + x + y) = 2000$, $1910 + 11x + 2y = 2000$, $11x + 2y = 90$. Nur für $x = 8$ und $y = 1$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Tobias wurde im Jahre 1981 geboren.

7/3
Aus der Aussage der Schwester folgt, daß ihr Bruder zwei Äpfel mehr als sie selbst hat. Angenommen, der Bruder hat x Äpfel, seine Schwester also (x–2) Äpfel; dann gilt $x + 1 = 2 \cdot (x - 3)$, $x + 1 = 2x - 6$, $x = 7$. Axel hat sieben, Beate fünf Äpfel.

7/4
Angenommen, Axel ist gegenwärtig x Jahre alt; dann gilt $x + 2 = 2 \cdot (x - 2)$, $x + 2 = 2x - 4$, $x = 6$. Axel ist gegenwärtig sechs Jahre alt.

7/5
Es sei $z = \overline{abc}$ eine dreistellige natürliche Zahl in dezimaler Schreibweise, dann gilt $100a + 10b + c + 297 = 100c + 10b + a$, $99c - 99a = 297$, $c - a = 3$, $c = a + 3$. Daraus folgt $1 \leq a \leq 6$, $0 \leq b \leq 9$, $4 \leq c \leq 9$. Somit existieren 60 solcher Zahlen. Die kleinste lautet 104, die größte 699.

7/6
Das Fahrzeug legt eine Strecke von insgesamt 30 km zurück, dazu wird die Zeit (0,5 + 0,2) h benötigt. Die Durchschnittsgeschwindigkeit berechnet sich aus 30 km/0,7 h. Sie beträgt rund 43 km/h.

7/7
Da die Masse eines Körpers nicht vom Ort abhängt, beträgt sie auch auf dem Mond 240 kg.

8/1

Das Ziehen der Quadratwurzel aus $\left(4-\frac{9}{2}\right)^2$ ist keine äquivalente Umformung, da $4-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}$, aber sowohl $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ als auch $\left(+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ ist.

8/2

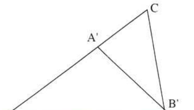
a) Die Zahl muß durch $3^2 \cdot 2^2$, also durch 4 und durch 9 teilbar sein, d. h., die letzten beiden Ziffern müssen in der vorgegebenen Reihenfolge eine durch 4 teilbare Zahl darstellen und die Quersumme der Zahl muß durch 9 teilbar sein. Für die letzte Ziffer kommt nur eine 0, 4 oder 8 in Frage. Ist es eine 0, so kann die mittlere Ziffer 0 oder 9 sein; ist es eine 4 bzw. eine 8, so kann die mittlere Ziffer nur eine 5 bzw. 1 sein.

Alle gesuchten Zahlen sind: 52020, 52920, 52524 und 52128.

b) Eine natürliche Zahl a ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme von a durch 11 teilbar ist. Es muß also □–2+□–2+5 durch 11 teilbar sein. In die Leerstellen können nur Ziffern eingesetzt werden, die, als einstellige Summanden aufgefaßt, die Summe 10 ergeben. Alle gesuchten Zahlen sind: 52129, 52228, 52327, 52426, 52525, 52624, 52723, 52822 und 52921.

8/3

In einem beliebigen Punkt A' der Seite $\overline{AC}$ wird der Winkel ∢ABC angetragen, so daß ein Schenkel auf $\overline{AC}$ liegt und der andere Schenkel die Seite $\overline{BC}$ schneidet. Diesen Schnittpunkt bezeichnen wir mit B'. Wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck sind ∢CAB und ∢A'B'C kongruent. Nun stimmen die Innenwinkel im Dreieck ABC mit denen im Dreieck A'B'C überein, und damit sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz die beiden Dreiecke zueinander ähnlich.



8/4

Für die zweistellige Zahl z soll gelten

$2 \cdot (10a + b) < 10b + a < 3 \cdot (10a + b)$. Wegen $a + b = 9$, also $b = 9 - a$ erhalten wir durch Einsetzen

$2 \cdot (9a + 9) < 90 - 9a < 3 \cdot (9a + 9)$,

$2 \cdot 9 \cdot (a + 1) < 9 \cdot (10 - a) < 3 \cdot 9 \cdot (a + 1)$,

$2a + 2 < 10 - a < 3a + 3$, daraus folgt weiter $3a < 8$ und $4a > 7$, also $a \leq 2$ und $a \geq 2$.

Deshalb gilt $a = 2$ und somit $b=7$.

Die gesuchte Zahl lautet 27.

8/5

Aus der Flächengleichheit der Dreiecke Δ ABD und Δ ABC folgt

$A_2 + A_3 = A_2 + A_4$, also $A_3 = A_4$.

Ferner gilt $A_3 : A_1 = \overline{AS}:\overline{SC}$

und $A_2 : A_4 = \overline{AS}:\overline{SC}$, also $A_3 : A_1 = A_2 : A_4$, $A_3 \cdot A_4 = A_1 \cdot A_2$, $A_3^2 = A_1 \cdot A_2$,

$$A_3 = \sqrt{A_1 \cdot A_2}.$$

8/6

Der Betrag der erforderlichen Zugkraft ist gleich dem Betrag der Reibungskraft.

$F_R = \mu \cdot F_N$. Da die Fallbeschleunigung auf dem Mond 0,165g beträgt, ist auf dem Mond eine Zugkraft F' von $3{,}5 \cdot 0{,}165$ N = 0,58 N erforderlich. (g Fallbeschleunigung auf der Erde.)

8/7

Der lineare Ausdehnungskoeffizient α für Stahl beträgt $17 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$. Für die Längenzunahme von festen Stoffen gilt: $\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T$.

$\Delta l = 0{,}52$ km.

9/1

Darstellung der ersten Zahl:

$z_1 = 100a + 10b + c$,

Darstellung der zweiten Zahl:

$z_2 = 100c + 10b + a$.

Die Differenz beider Zahlen:

$$z_1 - z_2 = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$
$$= 99a - 99c$$
$$= 99(a - c).$$

Genau die folgenden natürlichen Zahlen sind Teiler von $|z_1 - z_2|$:

(1) Alle natürlichen Teiler von 99, d. s. 1, 3, 9, 11, 33, 99,

(2) Alle natürlichen Teiler von $|a-c|$ und

(3) Alle Produkte aus je einer unter (1) genannten mit je einer unter (2) genannten Zahl.

9/2

$z_1 = 10 \cdot a + b$; $z_2 = 10 \cdot c + d$;

$$z_1 \cdot z_2 = (10a + b)(10c + d)$$
$$= 100ac + 10ad + 10bd + bd.$$

Die durch Vertauschung der Ziffern entstandenen Zahlen seien

$z_1^* = 10 \cdot b + a$; $z_2^* = 10 \cdot d + c$ und für deren Produkt gilt

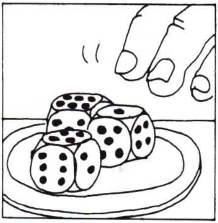
$$z_1^* \cdot z_2^* = (10b + a)(10d + c)$$
$$= 100bd + 10bc + 10ad + ac.$$

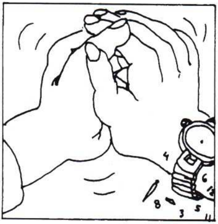
Setzt man beide Produkte gleich, so erhält man nach Vereinfachung $ac = bd$.

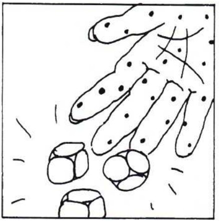
Beispiele dafür sind $36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$ oder $32 \cdot 46 = 23 \cdot 64$.

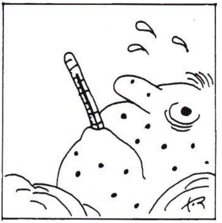
9/3

Wir schlagen um einen beliebigen Punkt A der Peripherie des Kreises k einen Kreis mit dem Radius von 6 cm Länge; er schneide k in B. Wir zeichnen um M einen Kreis k' mit dem Radius $\overline{MP}$, der $\overline{AB}$ in P' schneidet. Wir drehen die Gerade AB um M im mathematischen negativen Sinn um den Drehwinkel ∢PMP'. Das Bild $\overline{A'B'}$ von $\overline{AB}$ ist die zu konstruierende Sehne. Die Konstruktion ist



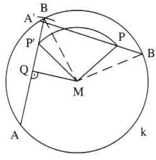






aus: Funktio 3/87

nur ausführbar, wenn das Lot $\overline{MQ}$ auf $\overline{AB}$ gleich oder kürzer ist als $\overline{MP}$.



9/4

Das gleichseitige Dreieck habe die Seitenlänge a, das Quadrat die Seitenlänge x; für das rechtwinklige Dreieck ADG gilt dann nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 + \frac{1}{4}\cdot(a-x)^2 = (a-x)^2,$$

$$x^2 = \frac{3}{4}\cdot(a-x)^2,$$

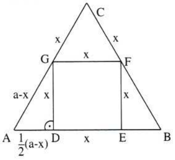
$$x^2 + 6ax - 3a^2 = 0,$$

$$x_1 = a\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}-3\right).$$

(x_2 entfällt, da negativ).
Daraus folgt weiter

$$\frac{A_Q}{A_D} = \frac{\left(2\cdot\sqrt{3}-3\right)^2}{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}} = 4\cdot\left(7\cdot\sqrt{3}-12\right) \approx 0{,}4974.$$

Der Flächeninhalt des Quadrates macht etwa 50 % des Flächeninhaltes des gleichseitigen Dreiecks aus.



9/5

Es sei $A_{EFGH} = a^2$. Dann gilt

$$A_{EFI} = A_{HEJ} = \frac{1}{4}a^2 \quad \text{und} \quad A_{GJI} = \frac{1}{8}a^2.$$

Somit ist

$$A_{EIJ} = a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8}a^2;\ A_{EIJ} = \frac{3}{8}a^2.$$

Es gilt also $A_{EIJ} : A_{EFGH} = 3 : 8$.

9/6

Da sich bei parallel geschalteten Widerständen die Stromstärken umgekehrt wie die Widerstände verhalten, gilt:
$I_i : I_p = R_p : R_i$.
Mit I_p=297 mA und R_i=20 Ω ergibt sich R_p=0,202 Ω.

9/7

Die gesuchte Zeit t setzt sich aus der Laufzeit des Schalles und der Fallzeit zusammen. Der Fallweg h beträgt (152,3–12) m.
$t = h/c + \sqrt{(2h/g)}$. t = 5,8 s.

10/1

Die Quadratzahl b könnte gleich 0, 1, 4 oder 9 sein. Da $\overline{bca}$ eine dreistellige natürliche Zahl ist, entfällt b = 0. Die Zahlen $\overline{ac}$ könnten 16, 25, 36, 49, 64 oder 81 sein. Für $\overline{acb}$ wären dann die Zahlen 161, 164, 169, 251, 254, 259, 361, 364, 369, 491, 494, 499, 641, 644, 649, 811, 814, 819 möglich. Davon sind aber nur die Zahlen 169 und 361 Quadratzahlen. Nun müßte abc gleich 196 oder 316 sein. Davon ist nur 196 Quadratzahl. Die Zahl $\overline{bca}$ lautet deshalb 961 und ist ebenfalls Quadratzahl.
Es existiert somit genau eine Zahl, die die gestellten Bedingungen erfüllt; sie lautet 1969.

10/2

Wir formen äquivalent um:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = m^2,$$
$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = m^2,$$
$$1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = m^2,$$
$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = m^2 - 1,$$
$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{m^2-1}{2}$$

10/3

$$\frac{\sqrt{8}}{b^2}\cdot a^{(a+a)} = \frac{\sqrt{2}}{50}\cdot a^{(3a)} \qquad \Big|\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{a^{(a+a)}}{b^2} = \frac{a^{(3a)}}{100} \qquad \Big|\cdot\frac{1}{a^{(2a)}}$$

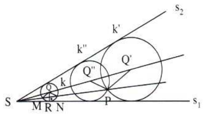
$$\frac{1}{b^2} = \frac{a^a}{100} \qquad |\cdot 100b^2$$

$$100 = a^a\cdot b^2$$

Da a und b natürliche Zahlen sind, müssen sie Teiler von 100 sein. 100 = 2 · 2 · 5 · 5. Für b^2 kann 100 oder 25 in Frage kommen. Wenn b = 10 ist, dann folgt a = 1; wenn b = 5 ist, folgt a = 2. Die Gleichung hat zwei Lösungen (a; b), und zwar (1; 10) und (2; 5). Die Proben überlassen wir dem Leser.

10/4

Wir konstruieren die Halbierende des gegebenen Winkels, fällen von einem beliebigen Punkt Q dieser Halbierenden das Lot auf den Schenkel s_1, sein Fußpunkt sei R. Um Q zeichnen wir den Kreis mit dem Radius $\overline{QR}$, der beide Schenkel des gegebenen Winkels berührt. Wir zeichnen die Gerade SP; sie schneide den Kreis k in den Punkten M und N, und wir verbinden Q mit M und N.
Die Parallele zu $\overline{MC}$ bzw. zu $\overline{NQ}$ durch P schneide die Halbierende des gegebenen Winkels in Q' bzw. Q''. Auf Grund der vorgenommenen Ähnlichkeitsabbildung erfüllen die Kreise k' um Q' mit dem Radius $\overline{PQ'}$ und k'' um Q'' mit dem Radius $\overline{PQ''}$ die gestellten Bedingungen.



10/5

Es gilt $1900 < x^2$. Wegen $43^2 = 1849$ und $1849 < 1900 < x^2$ gilt $x \geq 44$.
Aus $x \cdot y + x = x^2$ folgt wegen $x \neq 0$ $y+1=x$, also $y = x - 1$.
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
44 · 43 + 44 = 1936, Geburtsjahr 44 · 43 = 1892, entfällt; 45 · 44 + 45 = 2025, Geburtsjahr 45 · 44 = 1980, Lösung; 46 · 45 + 46 = 2116, Geburtsjahr 46 · 45 = 2070, entfällt.
Der Enkel von Herrn Meyer wurde im Jahre 1980 geboren.

10/6

Nach dem Energiesatz : $m \cdot v^2/2 = F \cdot 1$.
$F \approx 1$kN.

10/7

Aus $R_c = U/I = 1/2\pi \cdot f \cdot c$ folgt
$f = I/2\pi \cdot U \cdot C$. f = 50 Hz.

E 1

Es müssen mindestens 5 solcher Punkte für jeden Buchstaben festgelegt werden. Es handelt sich um Zusammenstellungen von zwei Elementen (weißer oder schwarzer Punkt) zu je 5 (zur fünften Klasse). Da weiß oder schwarz mehrfach auftreten, sind es Variationen mit Wiederholung.
$W_{v_2}^{(5)} = 2^5 = 32$ verschiedene Zeichen kann man auf diese Weise bilden.
Wenn die geringstmögliche Anzahl von Punkten gefordert ist und verschiedene Anzahlen für die einzelnen Buchstaben möglich sind, kommt man mit ein bis vier Punkten aus:
$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$.
Der Leser möge einmal systematisch alle Zeichen darstellen!

E 2

Nach Definition hat ein Parallelogramm zwei Paare zueinander paralleler Gegenseiten. Man muß also aus jeder der Parallelenscharen je zwei parallele Geraden auswählen, um ein Parallelogramm zu erzeugen.
Wählen wir zunächst aus 5 zueinander parallelen Geraden zwei aus. Es spielt sicher die Anordnung keine Rolle; auch Wiederholungen dürften nicht auftreten, denn es sind ja stets zwei verschiedene Geraden notwendig.
Es sind also Kombinationen von 5 Elementen zur 2. Klasse, und bei der zweiten Parallelenschar handelt es sich um Kombinationen von 7 Elementen zur 2. Klasse.

Da jedes Parallelenpaar aus der ersten Schar mit jedem Parallelenpaar aus der zweiten Schar ein Parallelogramm erzeugt, entstehen $K_5^{(2)} \cdot K_7^{(2)}$ Parallelogramme,

$$\text{d. s.} \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}$$
$$= 10 \cdot 21$$
$= 210$ Parallelogramme.

E 3

1. Quadrat: $a = 1 \cdot a^2 = 2^0\ cm^2$
2. Quadrat: $A = 2 \cdot a^2 = 2^1\ cm^2$
3. Quadrat: $A = 4 \cdot a^2 = 2^2\ cm^2$
4. Quadrat: $A = 8 \cdot a^2 = 2^3\ cm^2$

$\vdots$

n. Quadrat: $A = 2^{n-1} a^2 = 2^{n-1}\ cm^2$.

$1\ ha = 10\,000\ m^2 = 100\,000\,000\ cm^2 = 10^8\ cm^2$. Das 28. Quadrat hat einen Flächeninhalt von $A = 2^{27}\ cm^2 = 134\,217\,728\ cm^2$ und übertrifft als erstes die Fläche von einem Hektar.

E 4

Am günstigsten ist (4). Es sind Variationen von 100 Elementen zur 3. Klasse, wobei die Reihenfolge der ersten drei wichtig ist.

$V_{100}^{(3)} = \binom{100}{3} \cdot 3! = 970200$ Möglichkeiten.

Es folgt (1). Das sind Kombinationen von 60 Elementen zur 8. Klasse.

$K_{60}^{(8)} = \binom{60}{8} = 2558620845$ Möglichkeiten.

An 3. Stelle folgt (2). Hier handelt es sich um Variationen von 3 Elementen (gewonnen, verloren, unentschieden) zur 20. Klasse mit Wiederholung.

$W_{V_3}^{(20)} = 3^{20} = 3486784401$ Möglichkeiten.

Am ungünstigsten ist (3). Da nach allen möglichen Reihenfolgen der 13 Springer gefragt ist, handelt es sich um Permutationen von 13 Elementen.

$P_{13} = 13! = 6\,227\,020\,800$ Möglichkeiten.

E 5

2 Geraden erzeugen höchstens $1 = \frac{2 \cdot 1}{2}$ Schnittpunkt,
3 Geraden erzeugen höchstens $3 = \frac{3 \cdot 2}{2}$ Schnittpunkte,
4 Geraden erzeugen höchstens $6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$ Schnittpunkte,
5 Geraden erzeugen höchstens $10 = \frac{5 \cdot 4}{2}$ Schnittpunkte.

Daraus folgt die Vermutung:
n Geraden erzeugen höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte.

Die Vermutung ist für n=2 richtig, denn

$\frac{2(2-1)}{2} = 1$.

Aus der Richtigkeit der Vermutung für n=k folgt die Richtigkeit für n=k+1, denn

$$\frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k(k-1)+2k}{2} = \frac{(k+1)k}{2}.$$

Deshalb gilt die Vermutung für alle natürlichen Zahlen n. In einer Ebene haben also n Geraden höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte.

E 6

Nach der allgemeinen Gasgleichung $p \cdot V = m \cdot R \cdot T$ ergibt sich: $p_1 \cdot V_1 = m \cdot R \cdot T_1$ und $p_2 \cdot V_2 = m \cdot R \cdot T_2/2$. Daraus: $p_2 = p_2 \cdot T_2/2T_1$. Mit $T_1 = 300\ K$ und $T_2 = 285\ K$ erhält man gesuchten Druck $p_2 = 1{,}9\ MPa$.

E 7

Im Resonanzfall sind die Spannungen am Kondensator und an der Spule gleich groß, aber entgegengerichtet. Es ist dann nur der ohmsche Widerstand wirksam. $I = U/R$.
$I = 124\ V/12\ \Omega$. $I = 10{,}4\ A$.

Ein Nachtrag

Im Heft 1/92 hatte die Redaktion aus Platzmangel das zu dem Beitrag Historische mathematische Instrumente (Die Rechenmaschine von Johann Philipp Gruson, S. 30/31) gehörige Literaturverzeichnis gestrichen. Die beiden Autoren sind mit dieser drakonischen Maßnahme nicht einverstanden. Mit der Bitte um Entschuldigung holen wir damit an dieser Stelle die Veröffentlichung nach.

1. Allgemeine Deutsche Biographie. Zehnter Band. Berlin 1879, S. 65
(S. 30, 1. Spalte oben)

2. Brunow, E.: Eine Magdeburgische Erfindung. In: Patriotisches Archiv Nr. 11 vom 17. Dezember 1791, S. 178
(S. 30, 1. Spalte unten)

3. Gruson, J. P.: Beschreibung und Gebrauch einer neu erfundenen Rechenmaschine, Magdeburg 1791, S. 9
(S. 30, 2. Spalte)

4. Brunow, E.: Eine Magdeburgische Erfindung ..., S. 177
(S. 31, 1. Spalte)

5. Gruson, J. P.: Beschreibung und Gebrauch ..., o. S.
(S. 31, 1. Spalte)

6. Brunow, E.: Eine Magdeburgische Erfindung ..., S. 187
(S. 31, 3. Spalte)

Auf S. 30, 2. Spalte, 9. Zeile von oben muß es heißen: „... von Johann Philipp Gruson...“.

Mathematik am Billardtisch (3)

Welchen Weg muß eine Billardkugel rollen, um an den Ausgangspunkt zurückzukehren?

Nach dem Mittagessen hatte der Wind die Regenwolken vertrieben, und ich hatte mich mit meinem Skizzenblock auf die Terrasse zurückgezogen, um ein wenig zu zeichnen, während die meisten Schüler hinter dem Hause Fußball spielten.

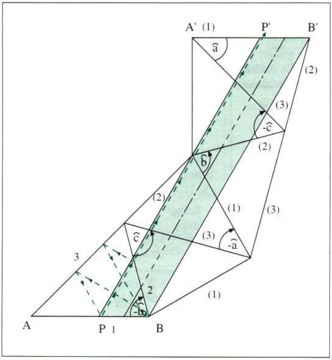


Abb. 1

Als ich einmal kurz hochschaute, bemerkte ich Hans am Nebentisch, der ganz vertieft in das Zeichnen von Dreiecken zu sein schien.
"Das ist aber komisch", er schaute zu mir herüber und war offensichtlich brennend daran interessiert, das vormittägliche Gespräch über geschlossene Reflexionswege in Vierekken fortzusetzen, "erst wenn ich ein Dreieck an jeder Seite zweimal gespiegelt habe, liegt schließlich die Bildstrecke [A'B'] parallel zu [AB]; also kann es nach unserer bewährten Methode nur geschlossene Reflexionswege mit **zweifachem** Umlauf geben !?" (s. **Abb. 1**) – "In der Tat ergibt sich aus Deiner Zeichnung, mit den Überlegungen, die uns Eberhard heute vormittag zum Viereck vorgeführt hat, sofort $\sphericalangle$ ([AB], [A'B']) = $-\widehat{b}+\widehat{c}-\widehat{a}+\widehat{b}-\widehat{c}+\widehat{a}=0°$, und wenn wir zwischen allen Ecken 'durchkommen' wie im vorliegenden Fall, dann haben wir unendlich viele, gleichlange Reflexionswege mit zweifachem Umlauf." – Während ich solcherart laut dachte, war auf meinem Skizzenblock das folgende Bild entstanden (**Abb. 2**).

Inzwischen hatte sich unser Algebraiker Klaus auch wieder eingefunden. "Das Gleichungssystem, welches uns Lösbarkeit und Lösung bei Vierecken angezeigt hatte, läßt sich für das Dreieck ganz genauso aufstellen! (**Abb. 3**) Ihr seht die Beziehungen $\widehat{a}+90°-\alpha+90°-\beta=180°$, also
$\widehat{a}=\alpha+\beta$
und ganz analog
$\widehat{b}=\beta+\gamma$
und
$\widehat{c}=\alpha+\gamma$.
Auch die Auflösung funktioniert ganz leicht, denn wir bekommen $\widehat{c}+\widehat{a}-\widehat{b}=2\alpha$, $\widehat{a}+\widehat{b}-\widehat{c}=2\beta$, $\widehat{b}+\widehat{c}-\widehat{a}=2\gamma$, wenn wir die entsprechenden Gleichungen zusammenfassen.
Die bekannte Winkelsumme $\widehat{a}+\widehat{b}+\widehat{c}=180°$ im Dreieck verhilft uns nun aber zu einer einzigen Lösung unseres Gleichungssystems, nämlich $2\alpha=180°-2\widehat{b}$, also $\alpha=90°-\widehat{b}$, $\beta=90°-\widehat{c}$ und $\gamma=90°-\widehat{a}$. (*) Das zeigt uns aber doch, daß es **genau eine Lösung mit einem Umlauf** geben muß, wenn das Dreieck spitzwinklig war. Ein stumpfwinkliges Dreieck läßt dagegen keine solche Lösung zu, weil nur positive Werte für α, β und γ den gemachten Voraussetzungen entsprechen."
Mit solchen Schülern machte es ungeheuren Spaß; dieses Dreigestirn in einer Klasse zu haben war schon ein einzigartiger Glücksfall für einen Lehrer!
"Dann habe ich auch die geometrische Charakterisierung dieser einzigen Lösung!" – Jetzt hatte Hans das Blatt bereits aufgenommen und präsentierte seine Lösung: Er hatte einfach die Ergebnisse (*) von Klaus eingezeichnet und fuhr nun fort(**Abb. 4**)."Die Winkelhalbierenden in ΔDEF müssen demnach jeweils durch die Gegenecke des Grunddreiecks ΔABC hindurchgehen. Sie sind die Höhen dieses Dreiecks! 'Das Höhenfußpunktdreieck eines spitzwinkligen Dreiecks ist einfach geschlossener Reflexionsweg. Es gibt keinen weiteren Weg mit dieser Eigenschaft.' – Hough! Ich habe gesprochen!" ...
"Habt Ihr Penner eigentlich die Frage von Klaus von heute vormittag ..." – da zeigte es sich, daß unser Genie Eberhard auch nicht beim Fußball war! Nein, er legte einen Zettel vor uns hin und setzte seine Erklärung fort:
"... ernst genommen? Seht her! Für das Dreieck lautet sein Gleichungssystem ..." -
"So schlau waren wir selbst auch schon, sieh her!" -
"... Na gut. Für das Viereck sah es ganz ähnlich aus, und man kann es für ein n-Eck mit den Winkeln $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, ..., \widehat{a}_n$ ganz genauso aufschreiben, wenn $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ wie immer die 'Reflexionswinkel' sein sollen:
$\widehat{a}_1=\alpha_1+\alpha_2$
$\widehat{a}_2=\alpha_2+\alpha_3$
...
$\widehat{a}_{n-1}=\alpha_{n-1}+\alpha_n$
$\widehat{a}_n=\alpha_1+\alpha_n$.
Ich habe nun versucht, dieses System durch 'Aufrollen von hinten her' – aufzulösen, und dabei ist mir klar geworden, daß zwischen den Vielecken mit einer **geraden Eckenzahl** (n=2, 4, 6, ... 2k) und denen **ungerader Anzahl** (n=3, 5, 7, ... 2k+1) ein grundlegender Unterschied bestehen muß."
Gespannt verfolgten wir seine Erläuterungen, denen Hans und Klaus nur mit sichtlicher Mühe folgen konnten. Auf diesen Unterschied waren wir selbst ja im Spezialfall n = 3 schon gestoßen.
"Mit allgemeinem n schreibt sich das alles etwas umständlich, und deshalb rechne ich es Euch nur für n = 5 und n = 6 vor. Addiert und subtrahiert die entsprechenden Gleichungen,

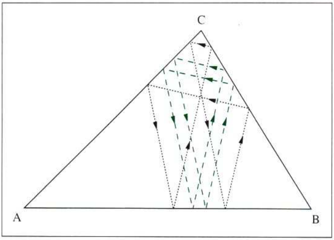


Abb. 2

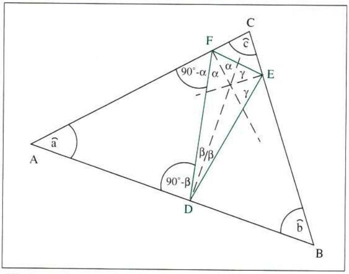


Abb. 3

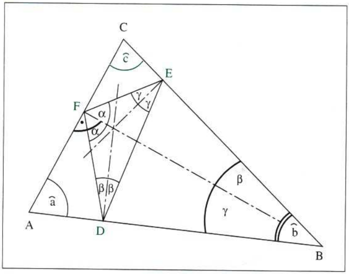


Abb. 4

dann bekommt Ihr für n = 5 die eindeutige Auflösung: $\hat{a}_5-\hat{a}_1+\hat{a}_2-\hat{a}_3+\hat{a}_4=2\alpha_5$,

$\hat{a}_4-\alpha_5=\alpha_4$,

$\hat{a}_3-\alpha_4=\alpha_3$,

$\hat{a}_2-\alpha_3=\alpha_2$,

$\hat{a}_1-\alpha_2=\alpha_1$,

die allerdings nur dann geometrisch sinnvoll ist, wenn die berechneten Zahlen für α_k zwischen Null und 90° liegen!"

Das leuchtete allen ein, es erinnerte uns ja auch an unsere Rechnung beim Dreieck.

"Na, toll", das war Klaus, "ich hab' dasselbe für n = 6 versucht, und was finde ich?

$\hat{a}_6-\hat{a}_1+\hat{a}_2-\hat{a}_3+\hat{a}_4-\hat{a}_5$

$=\alpha_1+\alpha_6-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_3-\alpha_4+\alpha_4+\alpha_5-\alpha_5-\alpha_6$

$=0°$

Wenn die gegebenen Winkel diese Bedingung also **nicht** erfüllen, dann kann es überhaupt keine Lösung geben. Voraussetzung ist also, daß es ein **Sehnensechseck** ist:

$\hat{a}_6+\hat{a}_4+\hat{a}_2=\hat{a}_5+\hat{a}_3+\hat{a}_1=360°$".

"Ja, und wenn das so ist, dann fällt diese Gleichung weg, wir haben nur 5 Gleichungen für die 6 Unbekannten und damit entweder keine oder unendlich viele Lösungen", schloß Eberhard die Überlegungen ab.

Ich konnte nur staunen, wie er das alles herausbekommen hatte. Seine Kameraden hatten wohl doch nicht diesen Durchblick, aber sie glaubten ihm das, was geometrisch denkbar blieb.

Glaubt Ihr es auch? – Arbeitet doch noch etwas weiter! Es gibt noch so viel zu denken und zu klären.

Wie lang ist der Weg mit doppeltem Umlauf im Falle ungerader Eckenzahl? Läßt sich der einzige Reflexionsweg mit einfachem Umlauf ähnlich wie im Dreieck geometrisch charakterisieren? Wenn im Falle des 2k-Ecks unendlich viele Lösungen vorhanden sind, so handelt es sich wieder um 2k-Ecke, und alle haben den gleichen Umfang (wie groß?)! Welche Lösung unter ihnen hat dann den größten Flächeninhalt?

Kann man ähnlich wie beim Dreieck die geometrischen Lösbarkeitsbedingungen angeben? Schreibt mir doch, wenn Ihr etwas herausbekommen habt. Ich möchte gern mit Euch weiterdiskutieren!

Dr. habil. Reinhard Hofmann
Gymnasiallehrer für Mathematik
Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

Utopische Knobeleien

Die folgenden Aufgaben wurden in Vorbereitung auf die Olympiade des Mathematikspezialistenlagers des Kreises Gotha 1989 gelöst. Elf Tage knobelten 30 Schüler der Klassenstufen 5-7 vormittags an mathematischen Problemen, die Nachmittage standen den Freizeitvergnügungen und zahlreichen Ausflügen zur Verfügung.

1. Auf einem Planeten nahe des schwarzen Lochs BH 13/4 in der Nähe des Toliman trafen sich vier Raumschiffe von den Planeten Bruton, Casson, Dora und der Erde, deren Kosmonauten Raumanzüge in den Farben rot, orange, grün und blau anhatten. Über sie ist folgendes bekannt:

(1) Die Kosmonauten von Casson und Erde sowie Rot und Grün kennen sich.

(2) Die Brutonier und Doraner können sich verständigen, ebenfalls Orange und Blau.

(3) Die Cassonarier sind größer als die Brutonier und die Menschen.

(4) Die Orangen sind größer als die Roten bzw. Grünen.

(5) Aus diesen Angaben läßt sich nicht ermitteln, wer der zweitgrößte ist.

(6) Die Brutonier sind grün.

Ordne den Raumanzügen der Kosmonauten die richtigen Farben zu!

2. Während einer Planetenerkundung wechseln sich die Raumfahrer jede Stunde in der Führung ab. Sie laufen bis zum Ziel in jeder möglichen Reihenfolge.
Wie lange sind sie unterwegs?

3. Sie verabreden sich regelmäßig zu treffen. Der Brutonier kann alle zwei Planetenumläufe, der Cassonarier alle drei Planetenumläufe, der Doraner alle fünf Planetenumläufe und der Mensch alle sieben Planetenumläufe kommen.
Wann treffen sich alle wieder?

Mitgeteilt von der Teilnehmerin
Ina Rüdiger und dem Organisator
Volker Pöschel

Faszination Go

Vor dem Vertiefen in dieses Spiel möchten wir ausdrücklich warnen, denn folgende chinesische Legende ist im Zusammenhang mit ihm überliefert!

Es lebte einmal ein Holzfäller, der auf dem Nachhauseweg vom Berg zwei alte Männer auf einem Felsen sah, welche Go spielten. Er schaute ihrem geistvollen Spiel mit begierigem Interesse zu, ganz in Bewunderung vertieft, fasziniert und alles um sich her völlig vergessend. Nachdem die Partie beendet war, verschwanden die beiden Alten, die in Wirklichkeit Götter waren. Der Holzfäller erwachte wie aus einem wunderschönen Traum. Seine Haare waren schlohweiß geworden und seine Axt, die neben ihm lag, war vermodert. Als er in das Dorf zurück kam, gab es niemanden mehr, der ihn noch gekannt hätte.

Das Go-Spiel, von einem klugen Chinesen vor etwa 4 000 Jahren ersonnen, von den Japanern übernommen und bis zur heutigen Form weiterentwickelt, begeistert immer mehr Menschen.

Ihr könnt Go in einer halben Stunde erlernen, aber ein Menschenleben ist zu kurz, um es wirklich meisterhaft zu beherrschen.

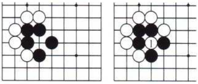
Go wird gespielt von zwei Spielern mit 181 schwarzen und 180 weißen Steinen auf den 361 Kreuzungspunkten eines Netzes von 19x19 sich rechtwinklig kreuzenden Linien. Für Anfänger sind kleinere Spielfelder (13x13 oder 9x9) günstiger. Die Spieler setzen abwechselnd ihre Steine auf freie Punkte des Netzes, wobei Schwarz beginnt. Jeder Spieler darf nach Belieben aussetzen, was erst in der Endspielphase sinnvoll ist. Nach dem Setzen wird kein Stein mehr bewegt. Vom Gegner vollständig umschlossene Steine werden im Augenblick ihrer Umschließung vom Brett entfernt und als Gefangene aufbewahrt.

Die Partie ist beendet, wenn die Spielfläche vollständig unter den Spielern aufgeteilt ist, d. h. wenn es keinem Spieler mehr möglich ist, sein Gebiet zu vergrößern oder gegnerische Steine zu fangen.

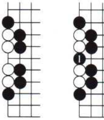
Die Größe eines Gebietes entspricht der Anzahl der freien Punkte, welche von schwarzen oder weißen Steinen umschlossen sind. Bei der Abrechnung werden den Gebietspunkte und gefangene Steine beider Spieler miteinander verglichen. Der Sieger verfügt über die größere Anzahl dieser Punkte.

Fangt doch einfach einmal mit einem selbstgefertigten 9x9 Feld an. Dann sucht Ihr Euch einen geeigneten Ersatz für die 41 schwarzen und 40 weißen Spielsteine. Vielleicht findet Ihr im Hobbyladen um die Ecke etwas Passendes! Wir stellen Euch hier die Regeln und einige Kniffe vor.

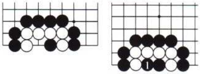
Wenn Euch das Spiel Freude macht, dann solltet Ihr Euch ein richtiges Go-Spiel anschaffen, zum Beispiel von Ravensburger. Ein weiterführendes Büchlein empfehlen wir in unserer Marktecke. **Abb. 1** zeigt eine Go-Partie auf einem 9x9 Feld. Die schwarzen und weißen Steine werden durch entsprechende Kreise auf einem Go-Brett dargestellt. Die Satzfolge wird mit 1 beginnend in der Reihenfolge des Setzens fortlaufend numeriert. Es ist auch möglich eine Go-Partie wie eine Schachpartie aufzuschreiben. Diese Partie gewinnt Schwarz mit 6 Punkten. Im folgenden Beispiel (**Abb. 2**) verfügt schwarz über 11 Gebietspunkte und weiß ebenfalls. Somit endet die Partie remis, was im Go sehr selten ist. Die unbesetzten Punkte a und b sind von keinem der Spieler vollständig umschlossen. Solche Punkte nennt man neutrale Punkte. Sie beeinflussen das Spielergebnis nicht und werden keinem von beiden angerechnet (**Abb. 2**). Wenn man einen Go-Spieler nach dem Sinn des Go-Spieles fragt, erhält man nicht selten die Antwort, daß es sich um einen Kampf um Leben und Tod handelt.. Eine Gruppe von Steinen lebt, wenn sie nicht mehr gefangen werden kann. Nimmt ein Satz einer Gruppe von Steinen gleicher Farbe die letzte Freiheit, werden diese Steine vom Brett entfernt und als Gefangene aufbewahrt. Jeder freie Punkt, der durch eine Brettlinie mit einem Stein oder einer Gruppe von Steinen verbunden ist, heißt Freiheit. In Bild 3 werden die Freiheiten der schwarzen Steine durch einen Pfeil und die der weißen Steine durch einen Punkt markiert. Wieviel Freiheiten haben Schwarz und Weiß in den Beispielen 3a – 3c?



Beispiel 1) und Lösung



Beispiel 2) und Lösung



Beispiel 3) und Lösung

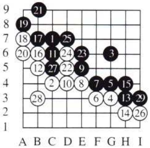


Abb. 1

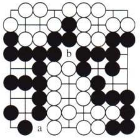


Abb. 2

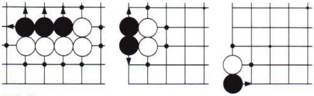


Abb. 3 a-c

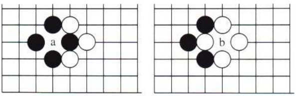


Abb. 4

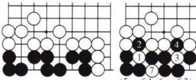


Abb. 5 mit Lösung (5 auf 1, 6 auf 3)

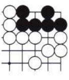


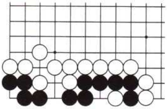
Abb. 6

Ein Stein darf nicht so gesetzt werden, daß er keine Freiheit mehr hat, wenn er nicht gegnerische Steine fängt. Dazu einige Beispiele.

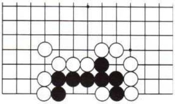
Beispiel 1)
Weiß am Satz fängt 3 schwarze Steine
Beispiel 2)
Schwarz am Satz fängt 4 weiße Steine
Beispiel 3)
Schwarz am Satz fängt 6 weiße Steine

In **Abb. 4** wird deutlich, daß Satzwiederholungen möglich sind. Diese Situation wird Ko genannt. Um solche Satzwiederholungen zu vermeiden, verbietet die Ko-Regel das sofortige Zurücknehmen.
Wie wichtig ein solches Ko sein kann, zeigt folgendes Beispiel (**Abb. 5**).
Weiß soll eine Folge von Sätzen finden, die es ihm unter Anwendung der Ko-Regel erlaubt, die schwarzen Steine zu fangen.
Eine Gruppe von Steinen lebt, wenn sie mindestens zwei Augen besitzt. Als Auge wird ein vollständig umschlossener Gebietspunkt bezeichnet. Dazu wieder ein kleines Beispiel (**Abb. 6**).

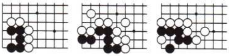
Zum Schluß noch einige kleine Go-Aufgaben.
1) Weiß ist am Satz:
Hier hat Weiß die Möglichkeit, ein Ko zu beginnen und damit die Schwarzen Steine zu fangen.



2) Wie kann Schwarz in einem Satz eine lebende Stellung bilden?



3) In den folgenden Stellungen ist Weiß am Satz und kann die schwarzen Steine töten.



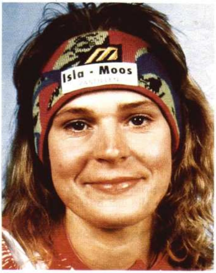
Claudia Erdmann
Studentin der Mathematik an der Universität Leipzig

In unserer Marktecke findet Ihr zwei Tips zu Go.

Wenn Zentimeter über Hop oder Top entscheiden

Zeitmessung und Abstände – Rückblick auf die Winterolympiade 1992

"Wasmeier um 15 Hundertstelsekunden an Bronze vorbei" oder "Silber ist nur Silber – dem Viererbob-Piloten Hoppe fehlten nur 2 Hundertstelsekunden zum Gold" so lauteten Überschriften von Tageszeitungen während der Olympiade in Albertville.
Die Angabe in Hundertstelsekunden ist nur schwer vorstellbar: die Belichtungszeit bei Fotoapparaten kann auf 1/100 Sekunde eingestellt werden, der sprichwörtlich kurzzeitige Wimpernschlag dauert etwa eine Zehntelsekunde. Da ist die Umrechnung von Zeitabständen in Längenabstände viel anschaulicher und "handfester": ein Fingernagel ist etwa einen halben Millimeter dick, ein Finger etwa einen Zentimeter, die Hand ist ungefähr zehn Zentimeter breit, die Länge der Handspanne beträgt ungefähr 20 Zentimeter. Der ausgestreckte Arm ist etwa 70 cm lang, der Abstand zwischen den Fingerspitzen der ausgestreckten Arme beträgt ungefähr 1,80 m. "Körpereigene" Maße sind also viel anschaulicher als Zeitmaße.
So sollen in den folgenden Aufgaben die Zeitabstände in Längenabstände umgerechnet werden. In den Aufgaben sind die benötigte Zeit und die Streckenlänge angegeben. Stillschweigend gehen wir davon aus, daß die Geschwindigkeit kurz vor Erreichen des Zieles konstant und auch etwa ebenso hoch wie die Durchschnittsgeschwindigkeit ist. Messungen auf den letzten Metern haben ergeben, daß diese Annahme statthaft ist, wenn kein außergewöhnlicher Endspurt oder ein eklatantes Nachlassen vorliegt.



Gunda Niemann Foto: Team Kommunikation

Aufgaben:

1. Beim Rodeln (Einsitzer Herren) gewann Georg Hackl in 3 Minuten 2,363 Sekunden die Goldmedaille, Markus Prock in 3 Minuten 2,669 Sekunden die Silbermedaille und Marcus Schmidt in 3 Minuten 2,942 Sekunden die Bronzemedaille. "Diesmal", lobte Markus Prock, der im zweiten Lauf durch eine gebrochene Kufenaufhängung behindert wurde, aber dies nicht als Grund seiner Niederlage anführte, "diesmal war er uns allen um eine Schlittenlänge voraus."
War es wirklich nur "eine Schlittenlänge" Vorsprung, die der Hackl-Schorsch in den vier Läufen in dem 1500 m langen Eiskanal herausfuhr?

2. Im Viererbob war die Entscheidung noch knapper: nur zwei Hundertstelsekunden trennten die beiden besten Bobs: Österreich I benötigte 3:53,90 Minuten, Deutschland I 3:53,92 Minuten. Welchem Rückstand entspricht das (die vier Läufe wurden auf der Strecke der Rennschlittensportler ausgetragen).

3. Im Abfahrtslauf der Herren ergaben sich auf der 3048 m langen Strecke folgende Zeiten: 1. Patrick Ortlieb 1:50,37 Minuten, 2. Franck Piccard 1:50,42 Minuten, 3. Günther Mader 1:50,47 Minuten, 4. Markus Wasmeier 1:50,62 Minuten. Welchen Rückstand hatte Markus Wasmeier auf die Bronzemedaille?

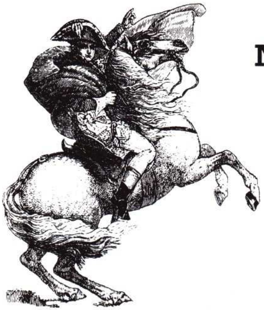
4. Berechne jeweils den Rückstand in cm auf die Siegerin im 5000 m-Eisschnellauf der Damen:

1. Gunda Niemann	7:37,51 Minuten
2. Heike Warnicke	7:37,59 Minuten
3. Claudia Pechstein	7:39,80 Minuten
4. Carla Zijlstra	7:41,10 Minuten

Jürgen Ricke, Redakteur der Zeitschrift mathematik lehren

Bitte um Mitarbeit

Die Olympischen Sommerspiele sind nicht mehr weit. Aus diesem Anlaß suchen wir Aufgaben zum Thema "Mathematik und Sport". Bitte schickt Eure Ideen an den Erhard Friedrich Verlag, Im Brande 15, W-3016 Seelze 6, Herrn Jürgen Ricke, Redaktion "mathematik lehren".



Napoleons Satz

1. Napoleons Satz

Im "Mathematischen Wörterbuch" (Akademie-Verlag Berlin und B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1961) findet man unter dem Stichwort "Napoleons Satz" folgende Auskunft:

"Die Mitten der über den Seiten eines beliebigen Dreiecks (nach außen oder nach innen) konstruierten gleichseitigen Dreiecke sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks."

Hier soll nun ein einfacher trigonometrischer Beweis für diesen Satz vorgestellt werden für den Fall der nach außen konstruierten gleichseitigen Dreiecke. Der andere Fall wird dem Leser überlassen. In Abschnitt 3 wird für Schüler, die noch keine Trigonometrie kennengelernt haben, ein Spezialfall diskutiert, der durchaus nicht trivial ist, wenn er unabhängig von Napoleons Satz behandelt wird. Diese Leser können Abschnitt 2 überspringen.

2. Trigonometrischer Beweis

Wir wollen den Fall der nach außen geklappten gleichseitigen Dreiecke betrachten (**Abb. 1a**).

In der Formulierung des Satzes erscheint der Begriff "Mitte eines gleichseitigen Dreiecks". Damit ist der Mittelpunkt des Umkreises, des Inkreises, des Schwerpunktes und des Höhenschnittpunktes gemeint, denn alle diese Punkte fallen im gleichseitigen Dreieck zusammen. Die Dreiecke $\Delta A'CB$, $\Delta B'AC$ und $\Delta C'BA$ sind nach Konstruktion gleichseitig. Ihre Mitten werden mit M_a, M_b und M_c bezeichnet.

Die Höhe h im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a ist $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, der größere Höhenabschnitt ist $\frac{a}{3}\sqrt{3}$, der kleinere $\frac{a}{6}\sqrt{3}$, ihr Verhältnis 2:1.

Daher ist $\overline{M_aC} = \overline{M_aB} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

$\sphericalangle M_aCB = \sphericalangle M_aBC = 30°$,

weil Höhe und Winkelhalbierende im gleichseitigen Dreieck zusammenfallen.

Mit diesen Größen können wir nun nach dem Cosinussatz im Dreieck ΔM_aCM_b schreiben:

$$\overline{M_aM_b}^2 = \overline{M_aC}^2 + \overline{M_bC}^2 - 2\overline{M_aC}\,\overline{M_bC}\cos(\gamma + 60°) = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma + 60°)\right)$$

und analog ergibt sich für das Dreieck ΔM_aBM_c

$$\overline{M_aM_c}^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta + 60°)\right)$$

Die Differenz dieser Quadrate soll mit D bezeichnet werden:

$$D = \overline{M_aM_b}^2 - \overline{M_aM_c}^2 = \frac{1}{3}\left(b^2 - c^2 - 2ab\cos(\gamma + 60°) + 2ac\cos(\beta + 60°)\right)$$

Nach dem Additionstheorem der Cosinusfunktion

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

und unter Berücksichtigung von

$\cos 60° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

ist

$$\cos(x + 60°) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin x$$

Damit erhalten wir für D:

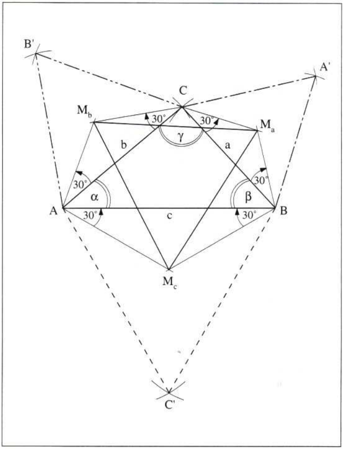


Abb. 1a

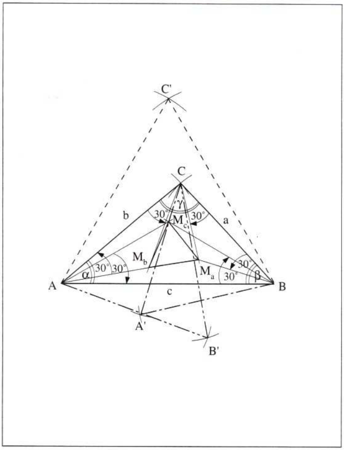


Abb. 1b

$$D = \frac{1}{3}\left(b^2 - c^2 - ab\cos\gamma + ab\sqrt{3}\sin\gamma + ac\cos\beta - ac\sqrt{3}\sin\beta\right)$$

Nun denken wir an die trigonometrische Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

und an den Projektionssatz

$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$.

Aus letzterem folgt z. B.

$ac\cos\beta = a^2 - ab\cos\gamma$.

Daher erhalten wir

$D = \frac{1}{3}\left(b^2 - c^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma\right)$ und dieser Ausdruck ist gleich Null nach dem Cosinussatz für ΔABC, also ist $\overline{M_aM_b} = \overline{M_aM_c}$. Analog zeigt man $\overline{M_aM_b} = \overline{M_bM_c}$. Damit ist Napoleons Satz für den Fall der nach außen konstruierten gleichseitigen Dreiecke bewiesen.

Abb. 1b zeigt den Fall der nach innen konstruierten gleichseitigen Dreiecke.

Der Beweis verläuft analog und wird dem Leser überlassen, obwohl die Konstruktion für diesen 2. Fall höhere Ansprüche an das Vorstellungsvermögen stellt als der 1. Fall, da sich jetzt die gleichseitigen Dreiecke überlappen. Wer hier Schwierigkeiten hat, dem empfehle ich ein Klappmodell anzufertigen, bei dem die Mitten der drei gleichseitigen Dreiecke auf beiden Flächenseiten markiert werden.

Weiter beachte man, daß $\sphericalangle M_cAM_b = 60° - \alpha$ oder $\alpha - 60°$ ist usw. zyklisch, je nach Größe der Winkel. Das hat aber auf den Cosinuswert dieses Winkels natürlich keinen Einfluß, weil $\cos x = \cos(-x)$ ist.

3. Ein Spezialfall

Die Strecke $\overline{AB}$ werde im Innern geteilt durch einen beliebigen Punkt C. Wir errichten über $\overline{AB}$ ein gleichseitiges Dreieck $\Delta ABC'$. Dann konstruieren wir zwei gleichseitige Dreiecke, eines über $\overline{AC}$, das andere über $\overline{CB}$, deren Eckpunkte A', B' bezüglich $\overline{AB}$ auf der anderen Seite wie C' liegen.

Behauptung: Die Mitten dieser drei gleichseitigen Dreiecke bilden ein gleichseitiges Dreieck.

Wer Abschnitt 2 gelesen hat, erkennt in der Strecke $\overline{AB}$ ein entartetes Dreieck ΔABC mit $\overline{AC} = b$, $\overline{CB} = a$, $\overline{AB} = c = a + b$, $\alpha = \beta = 0°$, $\gamma = 180°$ und kann Napoleons Satz auf diesen Spezialfall anwenden.

Wir wollen dagegen den Spezialfall ohne Trigonometrie, nur mit Hilfe der Koordinatengeometrie beweisen. Dazu führen wir ein kartesisches Koordinatensystem ein (**Abb. 2**).

Die gleichseitigen Dreiecke sind: $\Delta A'CB$, $\Delta B'AC$, $\Delta C'BA$. Die Mitten sind die Höhenschnittpunkte. Die Höhenabschnitte eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a sind:

$\frac{a}{6}\sqrt{3}$ und $\frac{a}{3}\sqrt{3}$, zusammen $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Das Koordinatensystem wurde so gewählt, daß die Koordinaten der Eckpunkte sind:

$A = (0,0)$, $B = (a+b,0)$, $C = (b,0)$

$$A' = \left(b + \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$B' = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$C' = \left(\frac{a+b}{2}, -\frac{a+b}{2}\sqrt{3}\right)$$

Die Mitten der gleichseitigen Dreiecke haben die Koordinaten:

$$M_a = \left(b + \frac{a}{2}, \frac{a}{6}\sqrt{3}\right),$$

$$M_b = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{6}\sqrt{3}\right),$$

$$M_c = \left(\frac{a+b}{2}, -\frac{a+b}{6}\sqrt{3}\right)$$

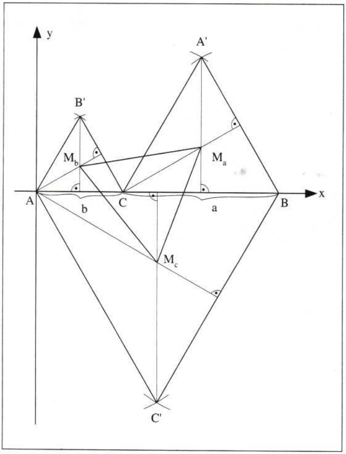


Abb. 2

Der Abstand d zweier Punkte mit den kartesischen Koordinaten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ ist bekanntlich

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Damit findet man

$$\overline{M_aM_b} = \overline{M_aM_c} = \overline{M_bM_c} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)} \ .$$

q. e. d.

4. Anmerkung

Was hat "Napoleons Satz" mit Napoleon I. Bonaparte (1769 – 1821), Kaiser der Franzosen zu tun? Der italienische Autor Faifofer behauptete in der 18. Auflage seines Geometrielehrbuches "Elementi di geometria", Venedig 1912, Napoleon habe diesen Satz Lagrange (1736 – 1813) zum Beweis überlassen. Der Mathematikgeschichte sind heute dafür aber keine Quellen bekannt. Der Satz selbst wird erstmals (soweit heute belegbar) bei Turner, "Elementi di geometria", Palermo 1843 erwähnt, aber ohne Hinweis auf Napoleon (Nach Fischer, Joachim: Napoleon und die Naturwissenschaften. Stuttgart: Franz Steiner Verlag Wiesbaden GmbH, 1988).

Tragen mathematische Begriffe oder Lehrsätze Namen von historischen Personen, so darf nicht automatisch vom Namen auf den Urheber geschlossen werden. Das gilt z. B. auch für so bekannte Namen wie Pythagoras oder Thales. Das Spektrum der Zueignungsskala ist sehr breit, es enthält viele Stufen, von denen beispielhaft nur erwähnt sein sollen: "Gesicherte Priorität" – "Erstveröffentlichung" – "Geistige Teilhabe" – "Völlige Unschuld" – "Verdacht auf Plagiat". Solche Namen fungieren in der Mathematik als Terminus technikus. Ihre historische Relevanz kann häufig nicht abschließend geklärt werden, weil Quellenbelege verloren gegangen sind oder nie vorhanden waren. Im Glücksfalle können aber auch neue Quellen gefunden werden. Bezüglich Napoleon sei angemerkt: Bekannt sind uns Zeitzeugen und Dokumente, die allgemein seine Begabung und sein Interesse für Mathematik bekunden.

Vergleiche dazu auch Schmidt, Fritz: 200 Jahre französische Revolution. Problem und Satz von Napoleon mit Variationen. Didaktik der Mathematik 1, 1990 (15 – 29), München. Hier wird auch eine Verallgemeinerung von Adriano Barlotti (1955) mitgeteilt, die zeigt, daß der Problemkreis immer noch bearbeitet wird.

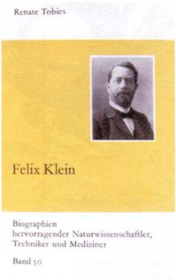
Für die Literatur danke ich den Professoren Johannes Böhm aus Jena und Rudolf Fritsch aus München.

Dr. Wolfgang Dörband, Greifswald

Bücher
Programme
Videos
Spiele

Die Marktecke

Lesens- und Sehenswertes vom Medienmarkt



Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner

Allen Freunden der Geschichte und ihrer herausragenden Persönlichkeiten können die Bändchen der Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner der Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig empfohlen werden.

Zu haben sind über Eure Buchhandlung die nebenstehenden Titel:

Band 15: Carl Friedrich Gauß
Hans Wußing, ***ISBN 3-322-00682-4***

Band 19: Galileo Galilei
Ernst Schmutzer/Wilhelm Schütz, ***ISBN 3-322-00661-1***

Band 27: Isaac Newton
Hans Wußing, ***ISBN 3-322-00752-9***

Band 47: Alexander von Humboldt
Kurt-R. Biermann, ***ISBN 3-322-00567-4***

Band 50: Felix Klein
Renate Tobies, ***Bestell-Nr. 666 026 6***

Band 60: Aristoteles
Fritz Jürß/Dietrich Ehlers
ISBN 3-322-00664-6

Band 79: Georg Cantor
Walter Purkert/Hans Joachim Ilgauds, ***Bestell-Nr. 666 252 8***

Adam Ries in Erfurt

Nur der Rechenmeister und seine Familie dürften alle diese Schriften kennen, die **vom 7. April bis 10. Mai 1992** in der **Ausstellung „Adam Ries in Erfurt“** zu sehen sind. Es ist gelungen, ein Original des 1. Rechenbuches von Ries (weltweit noch 3 Exemplare) in der Auflage von 1525, das 2. Rechenbuch in der 1. Auflage von 1522 (weltweit noch 1 Exemplar), davon die 2. Auflage von 1525 sowie das 3. Rechenbuch von Ries von 1550 (in Erfurt vorhanden) für die Ausstellung zu bekommen. Zusätzlich kann man einen direkten Eindruck vom handschriftlichen wissenschaftlichen Lehrbuch (Coß) von Ries und einer weiteren Handschrift aus der Erfurter Zeit erhalten. In der Coß nannte Ries einige von ihm vorher studierte Rechenbücher, sie werden ebenfalls zu sehen sein.

Vom Go-Fieber angesteckt?

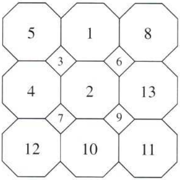
Dann kommen hier zwei Empfehlungen genau richtig!

• Das 19er-Brett, das Turnierbrett, ist die Krönung und das ersehnte Ziel aller echten Go-Fans.
Eine Trainingspartie dauert 1 bis 2 Stunden und eine Turnierpartie im Durchschnitt 3 bis 6 Stunden. Als 9er, 13er, aber auch 19er Brett nutzbar ist **Go** von ***Ravensburger.***

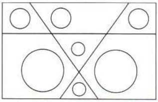
• Grundkurs, Taktik und Strategie und auf der Innenseite des Schutzumschlages ein selbstzufertigendes 9er-Brett mit Steinen zum Anfangen, aufgeschrieben vom Träger des 4. Dan Siegmar Steffens.
Sportverlag Berlin,
ISBN 3-328-00349-5, 24,80 DM

Lösungen

• Nachbarschaft



• Kurz nachgedacht



• Klug kombiniert

Teil 4 ergänzt den Quader richtig.

• Gleichungsrätseleien

D=4, E=2, H=1, K=8, N=3, R=5, S=7, Z=6

• Trick mit Streichhölzern

• Hölzchensymmetrie

Da die 0 ausscheidet, sind nur die Ziffern 1, 2, 5 und 8 zulässig. Mit diesen lassen sich 12 zweistellige Zahlen $\overline{ab}$ bilden, die nicht gleich ihrem Spiegelbild $\overline{\beta\alpha}$ sind, 85, 82, 81, 55, 51, 21 und deren Spiegelbilder. Wegen 85-28=57, 82-58=24, 81-18=63, 55-22=33, 51-12=39 und 21-15=6 sind die Differenzen $c\cdot d-\delta\cdot\gamma$ gleich ±63, ±57, ±39, ±33, ±24 oder ±6. Die von 0 verschiedenen Differenzen $\overline{ab}-\overline{\beta\alpha}$ aus dem Produkt zweier durch die Ziffern 1, 2, 5 und 8 dargestellten einstelligen Zahlen c und d und dessen Spiegelbild sind wegen 8·5-2·8=24, 5·5-2·2=21 und 5·1-1·2=3 gleich ±24, ±21 oder ±3.

Neues zum Kopfzerbrechen

Man wird auch gute Bekannte treffen, wenn man dieses Buch erwirbt. Aufgaben zum beispielgebundenen Begründen – dies zu üben ist eines der Anliegen des 1. Teiles – sind nicht neu und auch nicht mehr selten.
Von Seite zu Seite fortarbeitend, soll der interessierte Nutzer zu immer anspruchsvolleren Aufgaben gelangen und mit Hilfe seines Schulwissens durch dessen Anwendung sein Können im Deduzieren erheblich steigern. Wenn der Leser (oder wohl besser: Löser) nicht loskommt von den Aufgaben, ist das der schönste Lohn für den Autor, der fast 300 Aufgaben ausdachte, auswählte und angeboten hat.
Im zweiten Teil wird versucht, insbesondere bei den Lösungen, eine gewisse Methodik des klassischen Beweisens, dies aber weder vollständig noch gar mit dem Anspruch auf Alleingültigkeit, darzustellen.

Manzbuch 857
ISBN 3-7863-0857-8; 15,80 DM

180 Aufgaben, in drei Schwierigkeitsstufen gegliedert, aber inhaltlich so ungeordnet wie möglich dargestellt, damit kein Routinedenken aufkommt, frei nach dem Motto von B. Brecht: *„Das Denken gehört zu den größten Vergnügungen der menschlichen Rasse."* (aus "Leben des Galilei").
Da sich aber mathematisches Denken nicht von selbst entwickelt, ist es sinnvoll, ein geeignetes Training zu betreiben. Dies nach Lust und Laune, nach Interesse und Bedürfnis zu tun, ist Zweck des Büchleins.

Manzbuch 856
ISBN 3-7863-0856-X; 15,80 DM

Für eine wahre Gleichung $\overline{ab}+c\cdot d=\delta\cdot\gamma+\overline{\beta\alpha}$ vom Typ I muß $\overline{ab}-\overline{\beta\alpha}=\delta\cdot\gamma-c\cdot d$ gelten und für eine wahre Gleichung $\overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ef}=\overline{\xi\varepsilon}+\overline{\delta\gamma}+\overline{\beta\alpha}$ vom Typ II $\overline{ab}-\overline{\beta\alpha}+\overline{cd}-\overline{\delta\gamma}=\overline{\xi\varepsilon}-\overline{ef}$. Hiermit ergeben sich die Lösungen
I: 82+8·2=5·8+58
II: 85+58+22=55+82+28
85+21+18=81+15+28
82+51+18=81+12+58
55+21+12=51+15+22
Alle weiteren Lösungen entstehen aus den angegebenen durch Vertauschen der beiden Seiten einer Gleichung oder durch Vertauschen der Faktoren der Produkte oder der Summanden der Summen.

• Eins zwei drei vier fünf ...
– Besuch im MMK Frankfurt/M.

• Zwei Tage vor Sylvester stehen mit 29+12=41 zu Buche, das Jahr '99 mit weiteren 18. Die größte Quersumme ist somit 59. Die Quersumme 3 tritt nur an 4 Tagen auf: 1.2.'00; 2.1.'00; 1.1.'01 und 1.1.'10.
• Für das Jahr '99 ergibt sich die längste Zahlwortkolonne, sie reicht bis "... zweiundvierzig"
• 444, 446, 448, 464, 466, 468, 484, 486, 488, 644, 646, 648, 664, 666, 668, 684, 686, 688, 844, 846, 848, 864, 866, 868, 884, 886, 888

Analog wie für drei rechnet man: 4 (für die erste Position) mal 4 (für die zweite) mal 4 ... mal $4=4^4=256$.

• Olympiaecke

5. Jahrgangsstufe
Es bezeichne J ... Ringzahl von Joachim,
E ... Ringzahl von Elke,
R ... Ringzahl von Regina,
G ... Ringzahl von Gerd.
Aus dem Text der Aufgabe ergeben sich folgende Beziehungen:
a) $J>G$ b) $E+R=J+G$ c) $E+J<R+G$
Die Addition von a) und b) ergibt
$2E+R+J<2\cdot G+R+J$
Daraus folgt: d) $E<G$
Aus b) und d) ergibt sich nun e) $R>J$.
Aus a), e) und d) folgt $R>J>G>E$.
Die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl lautet damit Regina, Joachim, Gert und Elke.

6. – 7. Jahrgangsstufe
Vorbemerkung: In beiden Summanden ist die Anzahl der Ziffern gleich (da $x+y+z=z+x+y$).
Da die Anfangszweien der 1. Zahl und die Dreien zu Beginn der 2. Zahl im Ergebnis drei aufeinanderfolgende Fünfen liefern sollen und die nächsten Ziffern der Summe zweimal eine

Sieben ergeben, die nur von Zweien und Fünfen erzeugt werden können, muß gelten: $z = 3$.
Eine ähnliche Überlegung führt zu $x = 5$.
Auch läßt sich folgende Gleichheit aufstellen:

$$x + y + z = 3 + 2 + 3 + 1 + 3 = 12$$

Also gilt: $y = 12 - x - z = 12 - 5 - 3 = 4$
Somit erfüllen die Zahlen $(x, y, z) = (5, 4, 3)$ die Bedingungen der Gleichheit.

8. Jahrgangsstufe

	Schlittschuh	Ski	beide	keine
1. Möglichkeit:	1	4	8	4
2. Möglichkeit:	3	6	6	4

9. Jahrgangsstufe
Die Antwort lautet: Nein. Sind nämlich a, b zwei Zahlen des Tripels $(1, 2, \sqrt{2})$, die im nächsten Schritt durch $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ und $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ ersetzt werden, so ist $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 =$

$$= \frac{a^2+2ab+b^2}{2} + \frac{a^2-2ab+b^2}{2} = a^2 + b^2.$$

Die Summe der beiden Quadrate ändert sich somit nicht; sie bleibt immer gleich ihrem Anfangswert $1^2 + 2^2 + (\sqrt{2})^2 = 7$.
Da aber das Tripel $(1, 2, 1+\sqrt{2})$ die Quadratsumme $1 + 2^2 + (1+\sqrt{2})^2 = 1 + 4 + 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 8 + 2\sqrt{2} \neq 7$ besitzt, wird es niemals in der mit $(1, 2, \sqrt{2})$ startenden Folge auftauchen.

9. – 10. Jahrgangsstufe
Im Dezimalsystem sei $N = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $1 \leq a \leq 6$, $0 \leq b, c, d, \leq 6$.
Nach Voraussetzung gilt $N = n^2$ für eine geeignete natürliche Zahl n.
Dann muß gelten: $n^2 = N \leq 6666$, also $n \leq 81$ $(81^2 = 6561 < 6666)$
Erhöht sich jede Ziffer von N um 3, ergibt sich $(a+3) \cdot 10^3 + (b+3) \cdot 10 + (d+3) = m^2$ für eine passende natürliche Zahl m.
Für die Differenz $m^2 - n^2$ gilt:
$m^2 - n^2 = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d + 3000 + 300 + 30 + 3 - (a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d) = 3333$.
Wegen $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = 3333 \Rightarrow (m+n)(m-n) = 3 \cdot 11 \cdot 101$.
Da weiter $m + n > m - n$ und $n \leq 81$ gilt, muß $m + n = 101$ und $m - n = 33$ sein.
Also $(m+n) - (m-n) = 68$

$$2n = 68 \Rightarrow \underline{n = 34}$$

Die Zahl N ist somit die Quadratzahl $34^2 = 1156$.

• Zeitungsschnipsel

• Tennisaufschlag

Die Geschwindigkeit von 321,12 km/h entspricht 89,2 m/s. Um eine Strecke von 25 m zurückzulegen, braucht der Ball bei dieser Geschwindigkeit etwa 0,28 s.

• Riesenpizza

Die Oberfläche unserer Pizza beträgt $\pi/4\ (0{,}25\text{ m})^2 \approx 0{,}049\text{ m}^2$, die der Rekordpizza $\pi/4\ (47\text{ m})^2 \approx 1735\text{ m}^2$. Diese braucht also $1735:0{,}049 \approx 35400$mal soviel Zutaten wie unsere. Für unser Rezept brauchen wir 230 g Mehl, 30 g Peperoniwurst und 80 g Tomatensoße.

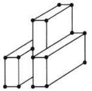
• Die „Struwwelpetra"

Pro Monat wachsen die Nägel der Struwwelpetra um $480\text{ mm}:(12 \cdot 12) = \frac{10}{3}$ mm.
Um 2 cm wachsen ihre Nägel in

$20\text{ mm}: \frac{10}{3}\text{ mm} = 6$ Monaten

• Enttarnung eines Logos

1. Da dieser Körper Ecken besitzt, in denen 3 Flächen, also eine ungerade Zahl von Flächen, anstoßen, ist ein Färben mit 2 Farben nicht möglich. Also sind mindestens 3 Farben erforderlich. Das Färben mit 3 Farben gelingt, indem jeweils alle zueinander parallelen Flächen gleichfarbig gefärbt werden. Zu diesem Färben werden nur 3 Farben benutzt und es erfüllt die Färbungsvorschrift, denn zwei gleichfarbig gefärbte Flächen, also zwei zueinander parallele, haben höchstens einen Randpunkt gemeinsam. 3 ist also die gesuchte Minimalzahl.
2. Dieser Körper ist ein Polyeder. Da bei einem Polyeder allerdings von jeder an eine Ecke anstoßenden Fläche zwei Seiten in diese Ecke einmünden, müssen von diesem Körper zwei begrenzende Rechteckflächen als Fünfeckflächen und eine als Sechseckfläche aufgefaßt werden. Zu diesen zusätzlich eingeführten Eckpunkten der begrenzenden Flächen gehören gestreckte Winkel als Innenwinkel.



Vor dem Zusammensetzen besitzt jeder der 3 backsteinförmigen Quader 8 Ecken. Jede von 20 dieser 3·8=24 Ecken liefert nach dem Zusammensetzen jeweils eine Ecke des Körpers, während 4 dieser 24 Ecken nach dem Zusammensetzen zu keiner Ecke des Körpers gehören. Andererseits besitzt der zusammengesetzte Körper zwei Ecken, von denen keine gleichzeitig Ecke eines der 3 Quader ist. Mithin gilt e=24-4+2=22. Entsprechend ergibt sich k=3·12-6+4=34 und f=3·6-4=14 (2 Achteck-, 1 Sechseck-, 2 Fünfeck- und 9 Rechteckflächen). Damit gilt e-k+f=2, wie es nach dem Eulerschen Polyedersatz sein muß.

• Mathematik am Nagelbrett

1. a) (1), (2), (3), (4) b) (1), (3)

2. (1) $\frac{1}{4}$, (2) $\frac{1}{8}$, (3) $\frac{1}{16}$, (4) $\frac{5}{8}$, (5) $\frac{1}{2}$

3. (2) $A_2=6\ F_E$; (3) $A_3=8\ F_E$; (4) $A_4=6\ F_E$; (5) $A_5=7\ F_E$

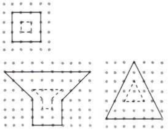
4. (1) 25%, (2) 50%, (3) 25%, (4) 50%, (5) 37,5%, (6) 75%

5.

6. (1), (3)

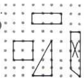
7. (1), (2), (4)

8.



9.

10.
(1)



(2) Alle Figuren haben denselben Flächeninhalt.
(3) Alle Figuren haben denselben Flächeninhalt.

• Oh, diese Wurzeln

(2) Es gelten für die Flächen 1, 2, 3

$$A_1 = \frac{1}{2}(x \cdot w + a \cdot v),$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(x \cdot y + a \cdot c),$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(h - c) \cdot b \cdot \sin 30°$$

Um die Rechnung übersichtlicher zu machen, setze man

$$m = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3}},\ n = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{4}\sqrt[4]{3} \cdot \frac{s}{4}\sqrt{3-\sqrt{3}}\right) + \frac{s}{4} \cdot \frac{s}{4}\sqrt{3}$$

$$= \frac{s^2}{32}\left(m + \sqrt{3}\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{4}\sqrt[4]{3}\left(\frac{s}{4}\sqrt[4]{3} - \frac{s}{4}\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)\right]$$
$$+\frac{s}{4}\cdot\frac{s}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\sqrt{3}-1}\right)$$
$$= \frac{s^2}{32}\left(\sqrt{3} - m + \sqrt{3} - n\right)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{s}{4}\left(2\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{3}-1}\right)\right]\cdot\frac{s}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{s^2}{32}\left(\sqrt{3}+n\right)$$

$$A = 2\cdot\left(A_1 + A_2 + A_3\right)$$
$$= 2\cdot\frac{s^2}{32}\left[\left(m+\sqrt{3}\right) + \left(2\cdot\sqrt{3} - m - n\right) + \left(\sqrt{3}+n\right)\right]$$
$$= \frac{s^2}{16}\cdot 4\cdot\sqrt{3}) = \frac{s^2}{4}\sqrt{3},$$

was dem Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks entspricht.

Ein anderer Lösungsweg vereinfacht ein wenig die Rechnung:

$$\ldots\ A = 2\cdot\frac{1}{2}\left[x(y+w) + a(v+c) + \frac{1}{2}\cdot b(h-c)\right].$$

Wegen y+w=x und $\frac{1}{2}\cdot b = a$ folgt

$A=x^2+a\,(v+c+h-c)$,

$$A = \frac{s^2}{16}\sqrt{3} + \frac{s}{4}(v+h),$$

$$A = \frac{s^2}{16}\sqrt{3} + \frac{s}{4}\cdot\left(\frac{s}{4}\sqrt{3} + \frac{s}{2}\sqrt{3}\right),$$

$$A = \frac{s^2}{16}\sqrt{3} + \frac{s^2}{16}\cdot 3\sqrt{3},\ A = \frac{s^2}{16}\left(4\sqrt{3}\right)$$

$$A = \frac{s^2}{4}\cdot\sqrt{3}.$$

• Das Oktaeder

zu 1) Die Mittelsenkrechte zu zwei Punkten hat die Eigenschaft, daß alle auf ihr liegenden Punkte von diesen Punkten jeweils gleichen Abstand haben. Damit gilt also nicht nur $\overline{RH}$=s (laut Voraussetzung) und $\overline{RS}$=s (gemäß Faltvorschrift), sondern auch $\overline{SH} = \overline{SR}$ =s (gemäß der genannten Eigenschaft der Mittelsenkrechten m von $\overline{HR}$). Also ist ΔHRS gleichseitig, q. e. d.

zu 2) Der Kopf ist etwa 6,1 cm breit (maßstäbliche Konstruktion) oder $\sqrt{2}\cdot 16\,\text{cm}\cdot\tan 15°$. Die Ohrenspannweite beträgt stolze 8,3 cm (maßstäbliche Konstruktion) oder 2 · 16 cm · sin 15°.

zu 3) Der Winkel ∢EMC ist 60° gemäß Konstruktion. Beim Umlegen der Ecken A und C (Abb. 4) entsteht eine Falte senkrecht zur Winkelhalbierenden dieses Winkels, also bei C_1 und E zwei gleichgroße Winkel. Ihre Größe beträgt 120°/2=60°. Damit hat ΔC_1EM drei gleichgroße Winkel, also drei gleichgroße Seiten, q. e. d.

zu 4) Alle vier neu entstehenden Dreiecke sind ebenfalls gleichseitig und haben die halbe Seitenlänge des Ausgangsdreiecks. Zur Begründung beachte man, daß nach dem Umlegen bei K_1 (Seitenmitte) aus Gründen der Symmetrie drei Winkel von 60° entstehen.

• Komisches, Kniffliges und Knackiges

• Verflixt, das geht doch nicht!

Hier hilft nur folgender Trick:

$$\frac{\text{XXII}}{\text{VIII}} = \text{II, also } \frac{\text{XXII}}{\text{VII}} = \Pi\text{, also } \frac{22}{7} = \pi$$

• Stapeln von Spielsteinen

9 -> 1; 3 -> 7; 2 -> 7; 8 -> 1; 12 -> 4; 11 ->4; 6 -> 10; 5 -> 10

• Sprachecke

• Vielecke

Zwei Vielecke haben zusammen 89 Diagonalen. Wie groß ist die Summe der Seiten beider Vielecke?

Lösung: Die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks mit n Seiten ergibt sich nach $\frac{n(n-3)}{2}$. Danach kann man folgende Tabelle aufstellen:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Diagonalen	0	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90

Daraus ergibt sich als Lösung: 35+54=89 für die Diagonalen, d. h. 10+12=22 für die Summe der Seiten. Es handelt sich also um ein Zehn- und ein Zwölfeck.

• Derselbe Umfang, aber verschiedene Flächen

Die Zeichnung zeigt zwei Figuren, deren Rand aus je 8 Streichhölzern besteht. Jedoch das Verhältnis der Flächen beträgt 3:4. Konstruiere zwei andere Figuren in einer Ebene so, daß eine davon rechteckig und jede aus 24 Streichhölzern gelegt ist, sowie die Flächen im Verhältnis 5:6 stehen.

Lösung: Die Rechteckseiten bestehen aus 2 bzw. 10 Hölzchen, die Fläche beträgt 20 Einheiten. Die andere Figur ist ein rechtwinkliges Dreieck aus 6, 8 bzw. 10 Hölzchen. Seine Fläche beträgt 24 Einheiten. 20:24=5:6.

• Arithmetik

Setzt die Ziffern von 1 bis 8 in die kleinen Kreise der Figur, die auf der Zeichnung dargestellt ist, so ein, daß die Summe der Zahlen auf jeder Kreislinie ein und dieselbe ist!

Lösung: Eine mögliche Lösung ist:

8 5
1
3 6
2
7 4

• Nummernsalat

1) a) 1 b) 9 c) 5 d) X

2) Ja, denn bei Veränderung einer Ziffer ändert sich die Prüfsumme um Vielfache von zu 11 teilerfremden Faktoren.

3) Zum Beispiel:
3-451-**3452**1-8 und 3-451-**5234**1-8

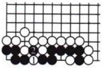
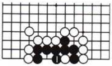
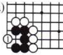
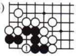
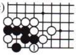
•Schachecke

Zum Beispiel:
1. S : f2, 2. S : g4, 3. S : e3, 4. S : g2,
5. S : f4, 6. S : e2, 7. S : g3, 8. S : e4,
9. S : d6, 10. S : b7, 11. S : c5, 12. S : d7,
13. S : b6, 14. S : d5, 15. S : c7, 16. S : b5.

• Utopische Knobeleien

1. Brutonier-grün; Doraner-rot; Cassonarier-orange; Menschen-blau.
2. Die Raumfahrer sind 24 h unterwegs.
3. kgV (2, 3, 5, 7)=210, d. h. sie treffen sich nach 210 Planetenumläufen wieder.

• Faszination Go

1)

2)

3) a)

b)

c)


• Wenn Zentimeter über Hop oder Top entscheiden

1. Georg Hackl hatte einen Vorsprung von 10 Metern und 6,7 Zentimetern auf den Zweitplazierten bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 118,44 Kilometern pro Stunde.
2. Der Rückstand beträgt 51,3 cm .
3. Wasmeier fuhr um 5,05 m an der Bronzemedaille vorbei.
4. 2. Heike Warnicke (7:37,59 Minuten)
Rückstand von 0,87 m
3. Claudia Pechstein (7:39,80 Minuten)
Rückstand von 24,90 m
4. Carla Zijlstra (7:41,10 Minuten)
Rückstand von 38,93 m