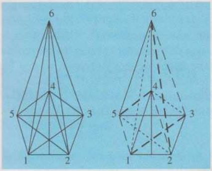
H 113228

Heft 4
August 1992
26. Jahrgang

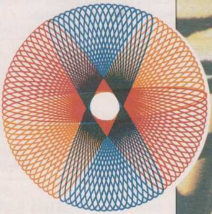
Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift



Entwicklung von Turnierplänen



Spirographisches

Hinterm Horizont geht´s weiter...

Erdkrümmung und Sichtweite

Leserpost

Als langjähriger alpha Leser und Teilnehmer am alpha-Wettbewerb (seit 1975) möchte ich erst einmal die Hoffnung aussprechen, daß sowohl alpha als auch alpha-Wettbewerb erhalten bleiben.
Beim Durchblättern alter alpha Hefte stieß ich auf das Spiel – live – (Heft 3,4/79).
Da ich die Problematik sehr interessant fand, habe ich auch ein Basic-Programm für den Sharp – PC 1403 H geschrieben. Ich kann auf einem Spielfeld von maximal 161 x 161 Felder spielen. Die Berechnung einer Generation dauert (je nach Größe) zwischen 2 Minuten und mehreren Stunden.
Unter anderem habe ich festgestellt, daß im „Glider Gun" ein Druckfehler vorliegen muß. Zur Zeit berechne ich das Pentomino

```
 xx
xx
 x
```

für das Conway nach 430 Generationen kein Schicksal gefunden hat. Zur Zeit bin ich bei der 154. Generation (nach 48 h). Ich möchte Sie bitten, mir mitzuteilen, ob zu dieser Problematik «Live» Literatur erhältlich ist und gleichzeitig anregen, dieses Thema im Zuge heutiger moderner Computer nochmals aufzugreifen. Das Problem ist sehr interessant als Computerprogramm.

Jens Grundmann, Gevelsberg

Liebe alpha-Redaktion, in alpha 3/92 haben Sie eine Kniffel-Aufgabe abgedruckt, welche das folgende Gleichungssystem mit der zusätzlichen Gleichung t = 60 : 10 (6) enthält.

Problem
(aus ALPHA 3/90): $g, i, l, s, t, u \in \mathbb{Z}$;
$u + s + t = 21$ (1)
$s \cdot t = 42$ (2)
$i + t = 70 : s$ (3)
$l : u = i$ (4)
$l + u + s + t + i + g = 60$ (5)
Löse das Gleichungssystem!
Durch diese letzte Gleichung ist leider der 'Reiz' der Aufgabe weg!

Wie wäre es ohne diese letzte Gleichung?
Man müßte aus (2) und (3) schließen, daß s ein gemeinsamer Teiler von 42 und 70 sein muß; also kommen für s nur die Werte ± 1, ±2, ± 7 und ± 14 in Frage. Die restlichen Variablen sind mit s eindeutig bestimmt.
Ein Programm hilft beim Ausrechnen (s. Kasten). Übrigens lassen sich nach dem Muster der obigen Aufgabe leicht weitere Aufgaben zu den Problemkreisen 'Teilbarkeit', 'Rechnen mit ganzen (natürlichen) Zahlen', 'Gleichungen lösen' finden. Vielen Dank für den Hinweis.

Jörg Wachtler, Wernau

P. S.: alpha lese ich gerne – machen Sie weiter so!
Vielleicht gelingt es Ihnen, die Zeitschrift noch etwas übersichtlicher zu gestalten; gelungen erscheint mir diesbezüglich die Seite 'Komisches, Kniffliges und Knackiges'.

```
Program Raetsel;   { Turbo Pascal 4.0 }
uses    crt;
const c = 8;
var i, l, g, u, s, t: integer;
begin
   clrscr;
   writeln('g':c, 'i':c, 'l':c, 's':c, 't':c, 'u':c); writeln;
   for s:= -42 to 42 do
    if s<>0 then
     if (42 mod s = 0) and (70 mod s = 0 ) then
        begin
        t:= 42 div s;
        u:= 21-s-t;
        i:= 70 div s -t;
        l:= u*i;
        G:= 60-l-i-u-t-s;
        writeln(g:c,i:c,l:c,s:c,t:c,u:c);
        readln
        end;
   readln;
end.
```

Lösungen

g	i	l	s	t	u
117	-2	-76	-14	-3	38
179	-4	-136	-7	-6	34
669	-14	-616	-2	-21	44
1859	-28	-1792	-1	-42	64
627	28	-616	1	42	-22
53	14	-28	2	21	-2
3	4	32	7	6	8
29	2	8	14	3	4

Mitteilung

An dieser Stelle möchten wir der ehemaligen Redakteurin von alpha, **Frau Dr. Gabriele Liebau**, unseren ganz herzlichen Dank für Ihre richtungsweisende redaktionelle Arbeit aussprechen. Sie wird der Zeitschrift erhalten bleiben und als Mitherausgeberin die Inhalte auch weiterhin mitbestimmen. *Verlag und Redaktion*

Alfons-Vignetten: Lothar Otto

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-23
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,00 DM, im Einzelbezug 2,50 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten. Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Gestaltung: Jens Hinzmann
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617- 34010-5

Inhaltsverzeichnis

Der „Wasserberg"

Wer hat nicht schon einmal an der Küste die Beobachtung gemacht, wie ein weit entferntes Schiff nur noch mit seinen Aufbauten aus dem Wasser ragt und damit den Eindruck erweckt, als sei es schon halb versunken. Es sieht aus, als läge ein "Wasserberg" zwischen uns und dem Schiff. Die Ursache dafür ist bekannt: Es ist die Wölbung unserer kugelähnlichen Erde!

Unsere Beobachtung an der Küste ist einleuchtend: Unser Blick geht über eine weite Strecke, so daß sich die Erdwölbung deutlich bemerkbar macht. Wie aber verhält es sich über eine kleinere Entfernung, wenn wir z. B. an einem See stehen? Kann man hier auch von einem "Wasserberg" sprechen? Selbstverständlich werden wir vom Ufer eines Sees aus das allmähliche Verschwinden eines Schiffes nicht beobachten können, dazu ist die Entfernung zu kurz. Es ist jedoch immerhin erstaunlich, daß sich selbst bei einem verhältnismäßig kleinen See die Erdwölbung auswirkt, so daß man auch hier von einem mehr oder weniger großen "Wasserberg" sprechen kann. So war ich nicht wenig erstaunt, daß ich für den 1350 m langen Hl. See in Potsdam, in dessen Nachbarschaft sich meine Wohnung befindet, einen "Wasserbuckel" von immerhin 3,57 cm berechnete.

Die Berechnung

Dafür benötigen wir die Länge des Sees sowie die Kenntnis des Erdradius, der den Mittelwert zwischen Äquator und Pol von 6367,645 km ergibt. Die Abplattung der Erde kann dabei vernachlässigt werden. Mathematisch geht es um die Berechnung des Krümmungshalbmessers für jede beliebige Richtung (Azimut). Bei der angenommenen Ku-

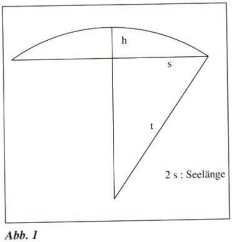


Abb. 1

Der Leuchtturm auf Amrum ist mit einer Höhe von 64 m der höchste an Deutschlands Nordseeküste.

gelgestalt unserer Erde spielt somit die Himmelsrichtung keine Rolle.
Die Höhe h gehört zur Sehne 2 s eines Kreises mit dem Radius r. Demnach ist

$$s = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}\,.$$

Wird h als sehr klein angenommen, kann man mit der bekannten Näherungsformel arbeiten:

$$h = \frac{s^2}{2r}$$

s bedeutet die Halbierung der Seelänge, ferner ist zu empfehlen, den Erdradius in Metern anzugeben, um beim Ergebnis Umrechnungen zu vermeiden (s. **Abb. 1**).
Wählen wir einen größeren See mit 2450 m Länge (s = 1225 m), wie z. B. den Sacrower See östlich von Potsdam, dann beträgt die Höhe des "Wasserberges" immerhin schon 11,8 cm. Noch deutlicher wird dies beim Müggel-See in Berlin mit 4375 m Länge (s = 2187,5 m). Hinter dem 37,6 cm hoher Wasserbuckel kann ein Wasservogel bereits verschwinden. Betrachten wir die Verhältnisse bei dem zweitgrößten See Deutschlands, der Müritz in Mecklenburg-Vorpommern, so ähneln diese bereits denen an der Küste. Bei dem 16000 m langen See (s = 8000 m) entsteht ein stattlicher "Wasserberg" von 5,025 m!
Diese Beispiele zeigen, daß die Höhe rasch zunimmt:

Länge des Sees	Höhe des „Wasserberges"
1000 m	1,9 cm
2000 m	7,8 cm
4000 m	31,4 cm
8000 m	125,6 cm
16000 m	502,5 cm
32000 m	2010,2 cm (= 20,10 m)

Eine Verdoppelung der Seelänge hat eine Vervierfachung der Wasserberghöhe zur Folge.
Unser Thema steht im engen Zusammenhang mit der sog. **Aussichtsweite**. Diese ist von der Höhe unseres Standpunktes abhängig und läßt sich mit Hilfe der nachstehenden Näherungsformel mühelos berechnen:

$$A = \sqrt{2rh}\,.$$

Für r gilt wieder: 6367645 m. *Leite Dir diese Formel selbst her.* Mathematisch betrachtet geht es hierbei um das Abbiegen von der Berührungsebene. Befinden wir uns z. B. in 2 m Höhe unmittelbar am Meeresufer, so beträgt die Aussichtsweite nur 5046 m. Weiter entfernte Gegenstände befinden sich unter der Kimm (Horizont) und sind nicht mehr sichtbar.
Die folgende Übersicht zeigt den Anstieg der Aussichtsweite bei zunehmender Höhe:

Höhe in m	Aussichtsweite in km
1	3,570
3	6,181
5	7,980
10	11,285
50	25,234
100	35,690

Nimmt man eine Augenhöhe von 1,5 m an, so beträgt die Aussichtsweite in ebenem Gelände nur 4,370 km. Auf dem Mond ist sie infolge des größeren Krümmungsradius bedeutend geringer. Der Mondhalbmesser beträgt nur 1738 km. Bei einer Augenhöhe von 1,5 m ist die Aussichtsweite bedeutend kleiner als auf der Erde: 2,283 km. Selbst hohe Mondberge verschwinden rasch unter dem Horizont. Bei einem Aufenthalt in einem der großen Mondkrater könnte man die 2000 bis 3000 m hohen Gebirgswälle nicht mehr sehen. – Was mit Hilfe der Formel leicht nachzuprüfen ist!

StR Arnold Zenkert, Potsdam

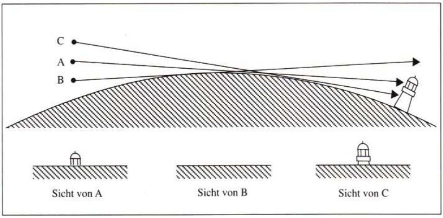
Die „Humber Estuary Bridge"

Das Gewicht einer Hängebrücke wird vollständig von ihren Pylonen (Stützpfeiler) getragen, die sehr genau senkrecht stehen müssen. – Laut "Guinness Buch der Rekorde 1991" ist die 1981 fertiggestellte "Humber Estuary Bridge" in England zur Zeit noch die Hängebrücke mit der längsten Spannweite. Der Abstand ihrer 162,5 m hohen Pylone beträgt 1410 m. **Um wieviel Zentimeter ist infolge der Erdkrümmung – die Erde ist in guter Näherung eine Kugel mit einem Radius von rund 6370 km – der Abstand der Spitzen (oberen Enden) ihrer Pylone größer als deren Fußpunkte, den lotrechten Projektionen der Pylonenspitzen auf die Erdoberfläche?**

W. Träger, Döbeln

Die Kimm

Wegen der Kugelgestalt der Erde ist die Meeresoberfläche gekrümmt. Dadurch ist die Sichtweite begrenzt. Der scheinbare Horizont, den ein Seefahrer rund um sich wahrnimmt, heißt **Kimm**. Taucht ein Objekt gerade am scheinbaren Horizont auf, befindet es sich in der Seemannssprache gerade in der Kimm.



Aufgaben:

a) **Wie weit ist die Kimm von einem Beobachter auf freier See entfernt, dessen Augen sich 1,5 m über dem Wasserspiegel befinden?**

b) **Beim Segeln in der Nacht kann es vorkommen, daß man plötzlich ein Leuchtfeuer sieht, wenn man sich im Boot aufrichtet. Setzt man sich wieder hin, ist das Leuchtfeuer verschwunden. Wie ist diese Erscheinung zu erklären?**

c) **Kann man die Sichtweite, d. h. den Abstand bis zur Kimm, durch ein Fernrohr vergrößern?**

d) **Warum gibt es an Land keine Kimm?**

verkürzt aus: Werner Schmidt: Mathematikaufgaben 7 – 10, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1989

Rund ums Loch

Für dieses Spiel für zwei Mitspieler benötigt ihr vier Einpfennigstücke, vier Fünfpfennigstücke und einen Würfel.

So werden die Münzen verteilt:

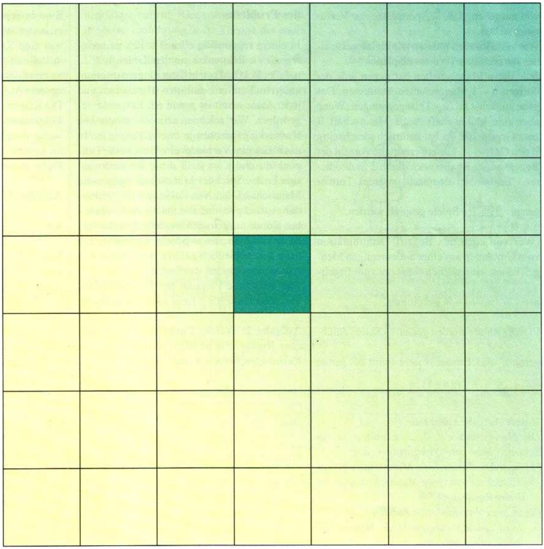
	1				5	
1						5
			■			
1						5
	1				5	

Ziel ist es, zwei gegenüberliegende Felder am schwarzen Loch zu besetzen.
Die gewürfelte Augenzahl bestimmt, um wieviele Felder die Münzen verschoben werden dürfen.

Folgende Regeln gelten:
1 und 4 auf dem Würfel
= 1 Kästchen weiter
2 und 5 auf dem Würfel
= 2 Kästchen weiter
3 und 6 auf dem Würfel
= 3 Kästchen weiter
Gezogen wird nur waagerecht oder senkrecht.

Besetzte Felder müssen umgangen und dürfen nicht übersprungen werden. Gelangt man auf ein besetztes Feld, wird die gegnerische Münze irgendwohin verwiesen (ganz an den Rand).

J. Ricke



Eine Idealisierung von „König Fußball"

Wir wollen Turnierpläne aus mathematischer Sicht betrachten und dabei von folgenden Voraussetzungen ausgehen:

- die Anzahl n der am Turnier teilnehmenden Mannschaften ist gerade ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, n gerade);
- im Verlauf des Turniers hat jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal zu spielen.

Die notwendige Anzahl der Sportplätze ist leicht zu finden.
Wir haben n teilnehmende Mannschaften, auf jedem Sportplatz können jeweils genau zwei Mannschaften gegeneinander spielen – wir benötigen also $\frac{n}{2}$ Sportplätze $\left(\frac{n}{2} \in \mathbb{N}\right)$.

Für die weiteren Betrachtungen wollen wir davon ausgehen, daß $\frac{n}{2}$ Sportplätze zur Verfügung stehen.
Wie viele Runden müssen wir im Interesse eines kurzzeitigen Turniers einplanen?
Jede der n Mannschaften hat gegen jede der übrigen $n-1$ Mannschaften anzutreten. Das gäbe zunächst $n \cdot (n-1)$ Begegnungen. Wenn aber eine Mannschaft A die Mannschaft B zum Gegner hat, so hat natürlich gleichzeitig B den Gegner A. Unsere ermittelte Anzahl der Begegnungen ist also noch durch 2 zu dividieren. Es müssen demnach unserem Turnier genau $\frac{n(n-1)}{2}$ Spiele gespielt werden.

(Wer von euch den Begriff "Kombination vom Umfang m aus einer n-elementigen Menge" kennt, ist natürlich schneller zum Ergebnis $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ gekommen.)

In jeder Runde werden genau $\frac{n}{2}$ Spiele durchgeführt – das Turnier besteht somit aus genau $n-1$ Runden $\frac{n(n-1)}{2} : \frac{n}{2} = n-1$.

Unsere Aufgabe lautet nun:
Die Mannschaften 1, 2, ..., n sind so in ein Schema (siehe unten) einzutragen, daß
(1) in jeder Runde jede Mannschaft genau einmal auftritt (jede Mannschaft spielt in jeder Runde);
(2) in zwei verschiedenen Runden keine gleichen Spiele auftreten. (Jede Mannschaft spielt gegen jede andere genau einmal.)

Als gleich gelten auch Spiele $\boxed{i|j}$ und $\boxed{j|i}$! (vgl. **Abb. 1**)

Für 4 bzw. 6 teilnehmende Mannschaften finden wir z. B. folgende mögliche Turnierpläne:

$\boxed{1|2}$ $\boxed{3|4}$ $\qquad$ $\boxed{1|4}$ $\boxed{2|3}$ $\boxed{5|6}$

$\boxed{1|3}$ $\boxed{2|4}$ $\qquad$ $\boxed{1|5}$ $\boxed{2|4}$ $\boxed{3|6}$

$\boxed{1|4}$ $\boxed{2|3}$ $\qquad$ $\boxed{1|6}$ $\boxed{2|5}$ $\boxed{3|4}$

n = 4 $\qquad$ $\boxed{1|2}$ $\boxed{3|5}$ $\boxed{4|6}$

n = 6 $\qquad$ $\boxed{1|3}$ $\boxed{2|6}$ $\boxed{4|5}$

Aufgabe 1: Sucht noch andere Pläne für n = 6! Versucht selbst, einen Turnierplan für n = 8 zu finden! Fragt Euren Sportlehrer, wie er derartige Turnierpläne aufstellt!

2. Mathematische Formulierung des Problems

In einem regelmäßig ebenen n-Eck numerieren wir die Eckpunkte mit den Zahlen 1, 2, ..., n. Jeder Eckpunkt steht dann für genau eine an unserem Turnier beteiligten Mannschaft und jeder Mannschaft ist genau ein Eckpunkt zugeordnet. Wir zeichnen nun alle möglichen Verbindungsstrecken je zweier Eckpunkte in das n-Eck ein. Verbindet eine Strecke die Eckpunkte i und j, so stellt diese Verbindungsstrecke das Spiel der Mannschaft i gegen die Mannschaft j dar. Nun färben wir die Verbindungsstrecke so, daß alle Spiele, die in derselben Runde ausgetragen werden, dieselbe Farbe bekommen. Zwei Spiele werden genau dann unterschiedlich gefärbt, wenn sie in verschiedenen Runden stattfinden.
Eine mögliche Färbung für unseren obigen Turnierplan für n = 6 ist in Abb. 2 angegeben.

Aufgabe 2: Welche Farbe entspricht welcher Runde? Sucht selbst weitere mögliche Färbungen für n = 6 und n = 8!

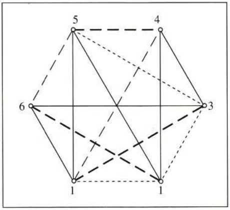


Abb. 2

Da die Menge der Runden eindeutig auf die Menge der verwendeten Farben abgebildet wurde, benötigen wir zum Färben der Verbindungsstrecke genau $n-1$ paarweise verschiedene Farben. Wenn eine Färbung einen möglichen Turnierplan darstellen soll, so müssen die Bedingungen (1) und (2) der Aufgabenstellung im 1. Abschnitt erfüllt sein. Dies ist der Fall, wenn an keinen Eckpunkt zwei Verbindungsstrecken gleicher Farbe zusammenstoßen. Ein Objekt aus Eckpunkten und Verbindungslinien dieser Eckpunkte nennt man in der Mathematik einen Graph. Für die Verbindungslinien ist die Bezeichnung Kante üblich. Sind in einem Graph je zwei beliebige voneinander verschiedene Eckpunkte durch genau eine Kante verbunden, so ist der Graph vollständig. Mit diesen Begriffen kommen wir zu einer ersten mathematischen Formulierung unserer Aufgabenstellung:
Die Kanten eines vollständigen Graphen mit n Eckpunkten (n gerade) sind mit $n-1$ paarweise verschiedenen Farben so zu färben, daß an keinem Eckpunkt zwei Kanten gleicher Farbe zusammenstoßen.

Aufgabe 3: Überlege, daß dann jeweils genau $\frac{n}{2}$ Kanten dieselbe Farbe enthalten!

Das "Färben" ist noch der Umgangssprache entnommen. Zur rein mathematischen Formulierung unseres Problems müssen wir noch einen Schritt weiter gehen.
Aus unserem vollständigen Graphen konstruieren wir weitere Graphen – diese werden wir **Linearfaktoren** nennen: Die Menge der Eckpunkte eines solchen Linearfaktors stimmt mit

	Sportplatz 1	Sportplatz 2	...	Sportplatz $\frac{n}{2}$
1. Runde	$\square\square$	$\square\square$		$\square\square$
2. Runde	$\square\square$	$\square\square$		$\square\square$
...	...	...		...
(n – 1) Runde	$\square\square$	$\square\square$		$\square\square$

Abb. 1

der Eckpunktmenge des vollständigen Graphen überein. Die Menge der Kanten des Linearfaktors ist eine Teilmenge der Kantenmengen des vollständigen Graphens. Sie wird so gebildet, daß von jedem Eckpunkt des Linearfaktors genau eine Kante ausgeht.

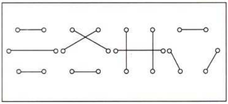


Abb. 3

Die **Abb. 3** zeigt als Beispiel vier Linearfaktoren eines vollständigen 6punktigen Graphen an.
Wir können nun jeden Linearfaktor eines vollständigen Graphen mit n Eckpunkten als eine Runde unseres Turniers für n Mannschaften auffassen. Damit erhalten wir eine weitere Formulierung unserer Aufgabenstellung:
Ein vollständiger Graph mit n Eckpunkten ($n \in \mathbb{N}$, n gerade, $n \neq 0$) ist in $n - 1$ Linearfaktoren so zu zerlegen, daß jede Kante des vollständigen Graphen in genau einem Linearfaktor auftritt.
Eine solche Zerlegung für $n = 6$ stellt **Abb. 3** dar, wenn wir die Menge der Kanten einer Farbe mit der zugehörigen Eckpunktmenge als einen Linearfaktor ansehen.
Zum Abschluß dieses Abschnitts sollen die Begriffe der verschiedenen Formulierungen unserer Aufgabenstellung noch einmal gegenübergestellt werden:

Mannschaft	Eckpunkt	
Spiel	Kante	
Runde	Menge der Kanten derselben Farbe mit der Menge der zugehörigen Eckpunkte	Linearfaktor

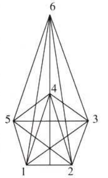


Abb. 4

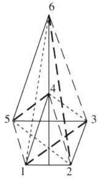


Abb. 5

Aufgabe 4: Wie spiegelt sich der Begriff "Sportplatz" in der mathematischen Formulierung wider?

3. Ein Verfahren zum Aufstellen eines Turnierplanes

Im Jahre 1947 wurde von dem Mathematiker *W. T. Tutte* bewiesen:
Satz: Jeder vollständige Graph mit n Eckpunkten ($n \in \mathbb{N}$, n gerade) läßt sich so in $n - 1$ Linearfaktoren zerlegen, daß jede Kante des vollständigen Graphen in genau einem Linearfaktor auftritt. (Genaueres könnt ihr z. B. in Sachs, Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil I nachlesen.)
Dieser Satz sagt aus, daß es eine Lösung für unsere Aufgabenstellung gibt. Da der Beweis dieses Satzes konstruktiv geführt wird, gibt er Antwort auf die Frage, wie man solche $n - 1$ Linearfaktoren erhalten kann:
Wir betrachten eine regelmäßige $(n - 1)$-seitige Pyramide. Die Eckpunkte der Pyramide bezeichnen wir mit 1, 2, ..., n. Zu den schon vorhandenen Kanten fügen wir noch alle Diagonalen der Grundfläche hinzu (**Abb. 4** – $n = 6$). Dadurch erhalten wir einen vollständigen Graphen mit den Eckpunkten 1, 2, ..., n. Wir nehmen nun eine beliebige Seite der Grundfläche der Pyramide (regelmäßiges $(n - 1)$-Eck) und alle zu dieser Seite parallelen Diagonalen. Durch diese $\frac{n}{2}$-1-Strecken werden alle Eckpunkte der Grundfläche bis auf einen erfaßt. Die Menge der Kanten eines Linearfaktors besteht nun aus diesen $\frac{n}{2}$-1-Strecken und der Strecke, die den noch "freien" Eckpunkt der Grundfläche mit der Spitze der Pyramide verbindet. Durch die Wahl einer Seite der Grundfläche der Pyramide wird nach obiger Vorschrift genau ein Linearfaktor bestimmt. Es gibt $n - 1$ Seiten der Grundfläche, also auch $n - 1$ Linearfaktoren. Diese zerlegen den vollständigen Graphen auch wirklich, denn zu jeder Kante gibt es genau einen Linearfaktor, zu dem sie gehört.
Abb. 5 zeigt eine solche Zerlegung, die den oben angegebenen Turnierplan für $n = 6$ liefert.

Aufgabe 5: Welche Farbe entspricht welcher Runde?
Stellt nach diesem Verfahren selbst Spielpläne für n = 4, n = 6 und n = 8 auf!
Sucht selbst andere Verfahren zum Aufstellen von Spielplänen!

Dr. U. Feiste
Fachrichtungen Mathematik/Informatik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

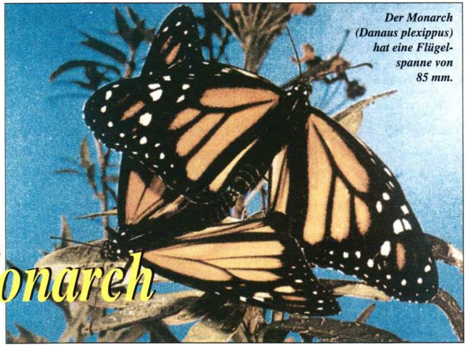
Leichtathletik im Sonnensystem

Olympische Disziplinen auf den Mitgliedsplaneten der Interplanetarischen Sportvereinigung im Jahre 2092. In die Berechnungen gehen zahlreiche vereinfachende Annahmen ein; insbesondere wurde generell der Luftwiderstand vernachlässigt.

Planet	Schwerebeschleunigung in Metern pro Sekundenquadrat	Hochsprung Höhe in Metern Herren	Hochsprung Höhe in Metern Damen	Kugelstoßen Weite in Metern	Kugelstoßen optimaler Winkel in Grad	Weitsprung Weite in Metern	Weitsprung optimaler Winkel in Grad	Speerwurf Weite in Metern	Speerwurf optimaler Winkel in Grad
Merkur	3,70	4,66	3,73	56,46	43,99	23,60	71,17	193,66	53,16
Venus	8,85	2,53	2,14	24,70	42,69	9,87	71,17	82,50	52,56
Erde	9,81	2,38	2,03	22,47	42,46	8,90	71,17	74,68	52,45
Mond	1,62	9,36	7,24	126,45	44,50	53,89	71,17	438,86	53,41
Mars	3,72	4,61	3,72	56,17	43,89	23,47	71,17	192,63	53,16
Jupiter	26,39	1,51	1,38	9,43	39,01	3,31	71,17	29,34	50,67
Saturn	11,67	2,16	1,87	19,17	42,02	7,48	71,17	63,19	52,24
Uranus	11,48	2,18	1,88	19,46	42,07	7,61	71,17	64,19	52,26
Neptun	11,97	2,13	1,84	18,74	41,95	7,29	71,17	61,67	52,20
Pluto	1,96	7,91	6,15	104,86	44,45	44,54	71,17	363,19	53,37

entdeckt in *Spektrum der Wissenschaft*, Juli 1992

Zeitungs-schnipsel



Der Monarch (Danaus plexippus) hat eine Flügelspanne von 85 mm.

Der amerikanische Wanderfalter Monarch

Schwärme mit Millionen Monarchen flattern jedes Jahr im Herbst von Westkanada nach Mexiko und im Frühjahr des Folgejahres auf der gleichen Route wieder zurück nach Westkanada.

Jeder dieser Schwärme von Monarchen überquert im Herbst die längs des 49ten nördlichen Breitengrades verlaufende Grenze zwischen Westkanada und den USA in einem Punkte P und erreicht erst nach dem Überfliegen des 33ten nördlichen Breitengrades in einem Punkt Q Mexiko.

Das Wegstück zwischen den Punkten P und Q dieser Wanderroute ist also nicht kürzer als die Länge $\overset{\frown}{PQ}$ des die Punkte P und Q verbindenden, über das Territorium der USA verlaufenden Kreisbogens $\overset{\frown}{PQ}$, dessen Mittelpunkt mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt.

Bei den folgenden Aufgaben ist die Erdoberfläche als Kugelfläche mit dem Radius $r = 6370$ km aufzufassen.

Während in einer Ebene die kürzeste Verbindung zweier ihrer Punkte die diese Punkte verbindende Strecke ist, ist in einer Kugeloberfläche die kürzeste Verbindung zweier ihrer Punkte A und B ein Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ mit folgenden Eigenschaften: A und B sind die Endpunkte von $\overset{\frown}{AB}$. Der Kugelmittelpunkt M ist zugleich der Mittelpunkt des Kreises k, auf dem $\overset{\frown}{AB}$ liegt.

Der Radius r der Kugel ist also gleich dem Radius von k. Und weiterhin ist die Länge von $\overset{\frown}{AB}$ nicht größer als πr. – Sind die Punkte A und B nicht die Endpunkte eines Kugeldurchmessers, liegen also A, B und M nicht auf einer Geraden, so ist der die kürzeste Verbindung der Punkte A und B darstellende Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ eindeutig bestimmt.

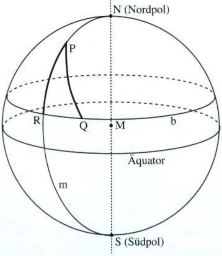


Abb. 1

Aufgabe 1: P sei ein Punkt der Erdoberfläche mit der nördlichen geographischen Breite φ_1, b sei der Breitenkreis mit der nördlichen geographischen Breite φ_2 mit $\varphi_2 < \varphi_1$, m sei der durch den Punkt P verlaufende Meridian, m schneide b im Punkte R und Q sei ein von R verschiedener Punkt von b. Es ist zu zeigen, daß in der Erdoberfläche die kürzeste Verbindung der Punkte P und R kleiner ist als die der Punkte P und Q.

Aufgabe 2: Wie lang ist in der Erdoberfläche die kürzeste Verbindung der Punkte P und R (siehe 1. Aufgabe!) mit $\varphi_1 = 49°$ und $\varphi_2 = 33°$?

Die neu entdeckte Primzahl

Numerus primus, linearis, eine einfache Zahl oder Linienzahl, ist diejenige, die sich durch keine andere Zahl als durch 1 völlig dividieren läßt, also 3, 5, 7, 29.

Ende März 1992 wurde in Fernsehen und Zeitungen gemeldet: Britische Mathematiker des Harwell-Labors in Oxfordshire entdeckten die bisher größte bekannte Primzahl. Sie wiesen mit einem Supercomputer CRAY-2 nach, daß die natürliche Zahl $p = 2^{756839} - 1$ eine Primzahl ist. Schon Euklid (um 300 v. Chr.) war bekannt, daß es unendlich viele Primzahlen gibt und daß es damit keine größte Primzahl gibt. Da bis heute nur endlich viele Primzahlen bekannt sind, gibt es unter diesen eine größte. Die nebenstehende, den heutigen Anforderungen nicht genügende, Definition der Primzahl steht in einem 1716 in Leipzig gedruckten „Mathematischen Lexicon". Laut einem lateinischen Wörterbuch gilt: numerus = Zahl; primus = vorderster, erster, haupt-, ursprünglich

Aufgabe 1: Wieviele Seiten sind zum Abdrucken dieser Zahl p mit ihren 227832 Stellen in einem Buch erforderlich, wenn jede Seite 32 Zeilen mit je 62 Ziffern faßt?
Aufgabe 2: Welche Ziffer steht bei der Darstellung dieser Zahl p im Dezimalsystem an der Einerstelle?
Aufgabe 3: Welches sind die beiden letzten Ziffern in der Darstellung dieser Zahl p im Dezimalsystem?
Aufgabe 4: Es ist zu zeigen, daß die Darstellung der natürlichen Zahl $p = 2^{756839} - 1$ im Dezimalsystem aus 227832 Ziffern besteht. Hinweis: Zur Lösung darf benutzt werden, daß die für alle positiven reellen Zahlen erklärte Funktion mit der Gleichung $y = 10^x$ und auch deren Umkehrfunktion streng monoton wachsende Funktionen sind. *W. Träger, Döbeln*

Autorennen

Der Erfinder dieses so wirklichkeitsnahen Logikspiels ist leider nicht bekannt. Das Spiel entstand in den sechziger Jahren, höchstwahrscheinlich in Nordamerika.
In einigen Spielbüchern ist es unter sehr verschiedenen Namen, wie z. B. "Karo-Rennen" oder "Grand Prix", zu finden. Die Spielregeln sind recht einfach.
Das Spiel können zwei bis drei Spieler spielen. Natürlich können auch mehr Autofahrer antreten, was aber das Spiel sehr in die Länge zieht.

Bevor es losgeht, sollte sich jeder Fahrer ein "Auto", welches hier nur ein Farbstift ist, organisieren. Die Rennstrecke wird auf kariertes Papier gezeichnet, wobei die Fahrbahnbreite für Anfänger zwischen 3 – 5 Kästchen liegen sollte (**Abb. 1**).

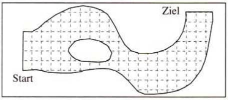


Abb. 1

Unsere "Verkehrsordnung" ist innerhalb von wenigen Minuten erlernbar.
Jeder Fahrer stellt sein Auto (d. h. setzt einen Punkt) auf die Startlinie. In **Abb. 2** treten unsere Spieler A (dicke Linie) und Spieler B (dünne Linie) zur Wettfahrt an und Spieler A darf als erster starten.

Die Verkehrsordnung

Die Rennfahrer bewegen sich abwechselnd weiter. Sie müssen sich bei der Wahl der Fahrtgeschwindigkeit und Fahrtrichtung an folgende Regeln halten:
Ein Fahrzeug bewegt sich bei jedem Zug in vertikaler Richtung um v Kästchen und in horizontaler Richtung um h Kästchen. Von Zug zu Zug dürfen sich v und h jeweils nur um + 1, – 1 oder 0 ändern. Dazu zwei Beispiele (**Abb. 3**).
a) Das Auto hat sich um 2 Karos nach vorn und um 3 Karos nach rechts bewegt ($v = 2$; $h = 3$). Beim nächsten Zug kann es somit 1 bis 3 Karos nach vorn und 2 bis 4 Karos nach rechts fahren ($v = 1, 2, 3$; $h = 2, 3, 4$).
b) Das Auto bewegte sich in vertikaler Richtung um 3 Karos nach vorn, d. h. $v = 3$ und $h = 0$. Beim nächsten Zug kann es 2 bis 4 Karos vorwärts fahren und gleichzeitig nach links ($h = 1$), nach rechts ($h = + 1$) oder gerade aus ($h = 0$) fahren.
Die neun Punkte zeigen die möglichen Standorte des Autos nach diesem Zug.
Nun einige Regeln, die das Verhalten auf der Rennstrecke betreffen.
Ein Fahrzeug, das auf ein Hindernis auffährt, den Rand der Rennbahn streift oder die Rennbahn verläßt, scheidet sofort aus. Dies betrifft nicht nur den neuen Standort, sondern auch den Weg dorthin. Im Zweifelsfall muß ein Lineal angelegt werden, da jeder Weg eine Gerade sein sollte. Es ist ebenfalls verboten, andere Autos zu rammen. D. h. im gleichen Zug dürfen nicht zwei Fahrzeuge auf einem Punkt stehen. Erlaubt hingegen ist das Kreuzen einer anderen Fahrstrecke, auch im gleichem Zug.
Hier einige Beispiele für Züge, die ein Ausscheiden zur Folge hätten (**Abb. 4**).
Ein solches Autorennen gewinnt der Fahrer, der als erster die Zielgerade erreicht. D. h., daß der Sieger mindestens einen Zug früher als die Gegner das Ziel erreichen muß. Das Rennen (**Abb. 2**) von Spieler A und B gewinnt B.

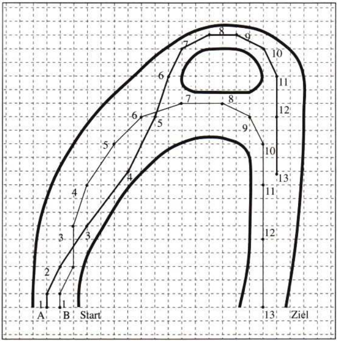


Abb. 2

Der Sieger bekommt eine Anzahl von Punkten gut geschrieben. Diese errechnet sich wie folgt.
Siegerpunkte = Maximale Zuganzahl · Anzahl der Karos des Gegners, der als Nächster das Ziel erreicht.
Jedes Ausscheiden wird mit einer Strafe von 10 Minuspunkten geahndet. Die Anzahl der Spieler entscheidet, ob weitergespielt wird oder eine neue Runde gestartet werden muß.

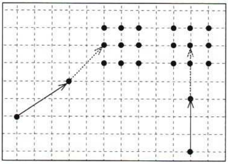


Abb. 3 a) *Abb. 3 b)*

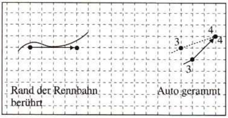


Abb. 4 a) *Abb. 4 b)*

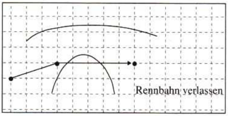


Abb. 4 c)

Ein „Beispielrennen"

Schauen wir uns das Rennen von A und B in **Abb. 2** an. Zunächst scheint, daß A durch entschlossene Tempofahrt B abschüttelt. Sehr spät bemerkt A, daß er viel zu schnell fährt. Zwar versucht er zu bremsen und kriegt noch knapp die Kurve, aber er verliert wertvolle Zeit (Züge) durch das Bremsen und erneute Beschleunigungen. Spieler B verfolgt eine andere Fahrtaktik. Im 2. Zug beschleunigt er von $v = 2$ auf $v = 3$ und behält diese Geschwindigkeit bis zum 5. Zug bei. Er geht rechtzeitig in die weite Rechtskurve, kommt am Hindernis unterhalb vorbei und braust dann, nach kurzer Bremsung in der zweiten Kurve, mit Vollgas auf das Ziel zu.
B gewinnt und erhält 20 Punkte (= 2 Züge · 10 Karos).
Beim Autorennen gewinnt also wie beim echten Autorennen derjenige Fahrer, der den richtigen Bogen raus hat.

Claudia Erdmann;
Stud. der Mathematik, Universität Leipzig

Das Rundlauf'sche Dreiersystem

Auf der Kirmes

Auf den folgenden Seiten wird der Beitrag aus dem letzten Heft „Herr Paddel und das Dualsystem" fortgesetzt.

Herr Rundlauf besitzt auf der Kirmes mehrere Fahrgeschäfte und Buden. Er möchte gern ein neues Karussell für kleine Kinder bauen lassen. Er denkt sich: Auf dem neuen Karussell müssen Fahrräder fest montiert werden. Auf jedem Fahrrad kann ein Kind nach Lust und Laune die Pedale vorwärts oder rückwärts treten und auch klingeln. Jedes Fahrrad ist also ein Einerfahrzeug (E). Außerdem sollen Motorräder mit Seitenwagen auf dem Karussell aufgebaut sein. Zwei Kinder finden auf jedem Motorrad Platz, dazu eins im Seitenwagen. Damit ist jedes Motorrad ein Dreierfahrzeug (D). Und große Feuerwehrwagen mit Blaulicht, Glocke und Hupe dürfen nach Ansicht von Herrn Rundlauf auch nicht fehlen. In jedem Feuerwehrwagen können auf drei Bänken insgesamt 9 Kinder sitzen. Jeder Feuerwehrwagen ist also ein Neunerfahrzeug (N).

Donnerstags ist Familientag auf der Kirmes. Alle Kinder dürfen an diesem Tag zu ermäßigten Preisen fahren. Aber am Familientag besetzt Herr Rundlauf das Karussell nach besonderen Regeln, wir wollen sie "Rundlauf-Regeln" nennen. Er sagt immer: "Ein Fahrzeug muß voll besetzt sein, sonst macht die Karussellfahrt am Familientag keinen Spaß." Solche Regeln müssen in der Familie wohl üblich sein, Herr Rundlauf ist ja ein Vetter von Herrn Paddel.

Karussellfahrt am Familientag

Regel 1
Ein leeres Fahrzeug darf erst dann bestiegen werden, wenn alle seine Plätze von Kindern, die noch warten, besetzt werden können.

Regel 2
Alle auf eine Karussellfahrt wartenden Kinder müssen einen Platz besetzen.

Auf dem Karussell sind zwei Fahrräder, zwei Motorräder mit Seitenwagen und zwei Feuerwehrautos aufgebaut.

(Die Aufgaben 1 bis 18 sind im Beitrag "Herr Paddel und das Dualsystem" enthalten.)

Aufgabe 19: *Herr Rundlauf notiert folgende Teilnehmerzahlen:*

Uhrzeit:	*14.00*	*14.10*	*14.20*	*14.30*
Kinderzahl:	*24*	*13*	*5*	*17*
Uhrzeit:	*14.40*	*14.50*	*15.00*	
Kinderzahl:	*10*	*19*	*15*	

Verteile sie nach den "Rundlauf-Regeln" auf die Fahrzeuge des Karussells.

Aufgabe 20: Wie kann man möglichst schnell festlegen, welche Fahrzeuge auf dem Karussell nach den "Rundlauf-Regeln" besetzt werden? Versuche für die Schülerzahlen von Aufgabe 19 und dann allgemein ein Verfahren zu entwickeln!

**Aufgabe 21: Wieviele Kinder können am Familientag höchstens am Karussell auf eine Fahrt warten, wenn alle einen Platz auf dem Karussell bekommen sollen?
Ist bei allen kleineren Anzahlen eine Verteilung der Plätze nach den "Rundlauf-Regeln" möglich?**

Aufgabe 22: *Herr Rundlauf notiert, welche Fahrzeuge voll besetzt sind:*

Uhrzeit:	*17.00*	*17.10*	*17.20*	*17.30*
Fahrzeuge:	*N,D,E*	*D,E*	*N,D*	*N,E*

Wieviele Kinder fahren auf dem Karussell?

Aufgabe 23: Wieviele Möglichkeiten gibt es, zwei (drei) Fahrzeuge zu besetzen?

Aufgabe 24: Die Kinder sollen alle Kombinationen, Fahrzeuge nach den "Rundlauf-Regeln" zu besetzen, ausprobieren. Stelle in einer Tabelle alle Kombinationen zusammen und schreibe zu jeder Kombination, wie viele Kinder Karussell fahren. Wie lange dauert es, wenn sie alle Kombinationen nacheinander ausführen wollen und eine Karussellfahrt 5 Minuten dauert?

Aufgabe 25: Ein Motorrad muß repariert werden und wurde abgebaut. Bei welchen Schülerzahlen ist nun eine Verteilung der Fahrzeuge den "Rundlauf-Regeln" nicht mehr möglich?

Herr Übersicht ist als Leiter des städtischen Ordnungsamtes für einen geordneten Betrieb der Kirmes zuständig. Er kommt bei Herrn Rundlauf vorbei und möchte wissen, wieviele Kinder gerade auf dem Karussell fahren. Er schafft es nicht, sie bei fahrendem Karussell zu zählen. "Kein Problem, es sind 15 Kinder", sagt Herr Rundlauf und zeigt auf eine Tafel. Dort hat er mit Kreide in einer Tabelle notiert, welche Fahrzeuge besetzt sind. Im Moment kann man folgendes auf der Tafel lesen:

Neuner	Dreier	Einer
1	2	0

Herr Rundlauf notiert die Besetzung der Fahrzeuge auf eine ähnliche Art wie sein Vetter Herr Paddel die Bootsausleihe.

Aufgabe 26: Fülle für die Kinderzahlen von Aufgabe 22 solche Tabellen aus!

Aufgabe 27: Finde eine Regel, wie aus dem Tafelanschrieb die Anzahl der Karussell fahrenden Kinder berechnet werden kann!

Aufgabe 28: Fülle für die Schülerzahlen von Aufgabe 19 solche Tabellen aus und mache die Probe!

Aufgabe 29: *Herr Rundlauf notiert:*

Uhrzeit	*16.00*	*16.10*	*16.20*	*16.30*
Besetzung	*102*	*110*	*021*	*122*

Uhrzeit	*16.40*	*16.50*
Besetzung	*201*	*012*

Welche Fahrzeuge auf dem Karussell sind besetzt und wie viele Kinder fahren mit?

Das Karussell von Herrn Rundlauf hat regen Zulauf, es ist meist gut besetzt. Die Kinder fahren vor allem am Familientag gern mit. Herr Übersicht schlägt Herrn Rundlauf folgende Neuerung vor: Es sollen 3 Fahrräder oder, was nach Meinung von Herr Übersicht noch besser sei, drei Motorräder auf dem Karussell eingebaut werden. Herr Übersicht denkt dabei an die Marktgebühren, die er bei Herrn Rundlauf kassiert.
Wenn das Karussell mehr Plätze hat, muß Herr Rundlauf auch mehr Geld auf der Kirmes als Standgebühr bezahlen. Herr Übersicht weiß, daß noch Platz für ein weiteres Fahrrad oder Motorrad auf dem Karussell vorhanden ist. Herr Rundlauf ist damit nicht einverstanden. "Dann gibt es zu oft Streit, weil nicht immer klar ist, welche Fahrzeuge besetzt werden sollen", sagt er.
Ihm kommt es vor allem darauf an, daß die Kinder immer nur auf eine Art auf die Fahrzeuge verteilt werden können, die Verteilung also eindeutig ist.

Aufgabe 30: Auf dem Karussell sollen drei Fahrräder (Motorräder) sein. Gib verschiedene Kinderzahlen an, bei denen es mehrere Möglichkeiten gibt, die Kinder nach den "Rundlauf-Regeln" auf die Fahrzeuge zu verteilen!

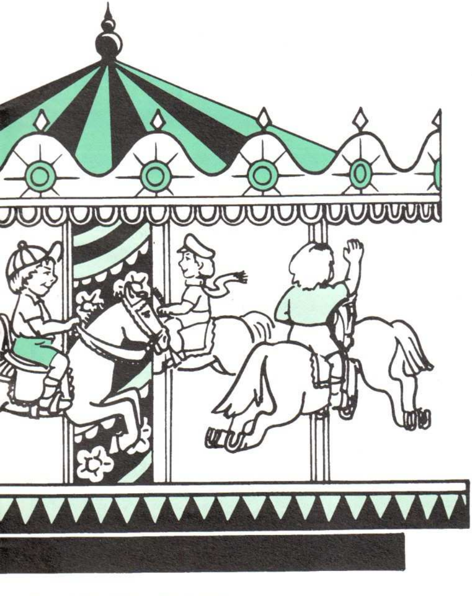
Herr Übersicht überlegt auch, das Feuerwehrauto nicht mehr als Neunerfahrzeug, sondern als Fahrzeug mit 7 Plätzen auszurüsten.

Aufgabe 31: Das Feuerwehrauto soll 7 Sitze anstelle von 9 Sitzen haben. Bei wievielen wartenden Kindern ist eine Verteilung auf die Fahrzeuge nach den "Rundlauf-Regeln" auf verschiedene Arten möglich? Gib mehrere Lösungen an!

Herr Übersicht zieht seinen Vorschlag zurück, aber nicht, weil ihn die Gründe von Herrn Rundlauf überzeugen, sondern weil Herr Rundlauf dann weniger Standgeld bezahlen würde. Wen wundert es, wenn Herr Übersicht nun ein Feuerwehrauto mit 11 Plätzen vorschlägt?

Aufgabe 32: Das Feuerwehrauto soll 11 Sitze anstelle von 9 Sitzen haben. Bei wievielen wartenden Kindern ist eine Verteilung auf die Fahrzeuge nach den "Rundlauf-Regeln" gar nicht mehr möglich? Gib alle Möglichkeiten an!

Bis heute wird bei Herrn Rundlauf das Karussell nach den "Rundlauf-Regeln" besetzt. Ist es eine Überraschung, wenn das Feuerwehrauto immer noch 9 Sitze hat und wenn von jedem Fahrzeug zwei Exemplare vorhanden sind? Die Kinder kommen gern zu Herrn Rundlauf. Sie wissen jedoch nie, welche Fahrzeuge bei der nächsten Karussellfahrt besetzt werden. Darin liegt für sie am Familientag der große Reiz bei einer Fahrt mit Herrn Rundlaufs Karussell.



Die "Karussellzahlen"

Herr Rundlauf kann bei seiner Schreibweise erkennen, welche Fahrzeuge auf dem Karussell voll besetzt sind. Bei 102 sind es ein Feuerwehrauto und zwei Fahrräder. Er benötigt nur die drei Zeichen 0, 1 und 2 als Ziffern seiner "Karussellzahlen". Dann kann er alle Informationen geben, die er über die Belegung seines Karussells und für Auskünfte an Herrn Übersicht benötigt. Bei den Karussellzahlen hat jede Stelle für Herrn Rundlauf einen bestimmten Wert. Er redet von der Stelle für das Einer-, das Dreier- und das Neunerfahrzeug und liest dabei die Ziffern seiner Zahlen von rechts nach links. Wenn er weitere Fahrzeuge benötigen würde, lautet für ihn die logische Fortsetzung ein Fahrzeug mit 27, 81, 243, usw. Plätzen. In den Aufgaben 31 und 32 konntet Ihr lernen, warum eine andere Fortsetzung (im Feuerwehrauto 7 oder 11 Sitze statt 9 Sitze) nicht sinnvoll ist. Ihr habt sicher schon entdeckt, daß sich bis auf die Einerstelle alle Stellenwerte auf die Zahl 3 zurückführen lassen.

Stelle	**Siebenundzwanziger**	**Neuner**	**Dreier**	**Einer**
Wert	27	9	3	1
andere Schreibweise	$3\cdot3\cdot3 = 3^3$	$3\cdot3 = 3^2$		

Nun könnt Ihr sicher nach größeren "Karussellzahlen" hin fortsetzen und einsehen, daß gilt: $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$, $243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$, usw. Wenn Ihr die letzte Zeile der Tabelle von links nach rechts lest, könnt Ihr folgende Fortsetzung vermuten: $3^1 = 3$ und $3^0 = 1$. In der Klasse 9 oder 10 werdet Ihr lernen, warum diese Fortsetzung sinnvoll ist.
Herr Rundlauf stellt seine "Karussellzahlen" in einem Zahlensystem dar, das die Mathematiker Dreiersystem oder auch Ternärsystem nennen. Wir benötigen nur die drei Zeichen 0, 1, und 2 als Ziffern und können damit aller Dreierzahlen darstellen. In Aufgabe 30 konntet Ihr lernen, warum die Benutzung von mehr als 3 Ziffern, in Aufgabe 26, warum die Benutzung von weniger als 3 Ziffern zu Schwierigkeiten führt.
Herr Rundlauf kann auch ausrechnen, wieviele Schüler insgesamt auf dem Karussell fahren. Nach den "Rundlauf-Regeln" müssen Fahrzeuge voll besetzt sein. Daher fahren beim Tafelanschrieb 102 insgesamt 11 Kinder Karussell, 9 mit einem Feuerwehrauto und 2 auf den beiden Fahrrädern. Herr Rundlauf rechnet wie folgt:
$1 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 11$. Aus der "Karussellzahl" oder die Dreierzahl 102 können wir also Zahl 11, die Zahl der auf dem Karussell befindlichen Kinder, ausrechnen. Diese Anzahl der auf dem Karussell fahrenden Kinder ist eine Zahl aus dem Euch bereits bekannten Zahlensystem, dem Zehner- oder Dezimalsystem. Den Zusammenhang zwischen der Dreierzahl 102 und der Dezimalzahl 11 machen wir durch folgende Redeweisen deutlich: "Zur Dreierzahl 102 gehört die Dezimalzahl 11." oder "Der Dreierzahl 102 wird die Dezimalzahl 11 zugeordnet."
In Aufgabe 20 solltet Ihr ein Verfahren entwickeln, mit dem Ihr die Fahrzeuge, die besetzt werden dürfen, finden könnt. 23 Kinder werden auf 2 Neunerfahrzeuge, 1 Dreierfahrzeug und 2 Einerfahrzeuge verteilt. Zur Dreierzahl oder "Karussellzahl" 212 gehört also die Dezimalzahl 23. Die nächsten drei Anweisungen beschreiben solch ein Verfahren:
(1) Besetze auf dem Karussell das größte Fahrzeug, das voll besetzt werden kann, so oft wie möglich.
(2) Berechne die Anzahl der dann noch wartenden Kinder.
(3) Wiederhole die beiden Schritte (1) und (2) mit den nach (2) noch wartenden Kindern solange, bis alle Kinder auf dem Karussell Platz gefunden haben.
Probiert dieses Verfahren einmal aus!

Abschluß

Wir sind mit der Auswertung der Geschichten da angekommen, wo die fertige Mathematik anfängt. Euch ist sicher aufgefallen, daß das Zweier- und das Dreiersystem ähnlich aufgebaut sind. Vielleicht habt Ihr Lust und schreibt eine eigene Geschichte über Zahlen in einem anderen Zahlensystem und versucht dann, das was Ihr hier über den Aufbau von Zahlensystemen sowie über die Umrechnung in das Zehnersystem gelernt habt, auf das neue Zahlensystem zu übertragen. Wenn Ihr verstehen wollt, wie ein Computer mit Zahlen rechnet, müßt Ihr Euch neben dem Zweiersystem z. B. auch mit dem Achtersystem (auch Oktalsystem genannt) oder dem Sechzehnersystem (auch Hexadezimalsystem genannt) vertraut machen. Diese Zahlensysteme sind ähnlich wie das Zweier- oder das Dreiersystem aufgebaut. Im Achtersystem benötigt Ihr die acht Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, um alle Zahlen darstellen zu können. Im Sechzehnersystem ist es üblich, die 16 Zeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und die Buchstaben A, B, C, D, E, F als Ziffern zu verwenden.
Unter Zweierzahlen haben wir uns in den Geschichten "Bootszahlen", unter den Dreierzahlen "Karussellzahlen" vorgestellt, die dazu gehörenden Dezimalzahlen haben wir als Anzahl der insgesamt Boot oder Karussell fahrenden Kinder verstanden. Die "Paddel-Regeln" und die "Rundlauf-Regeln" waren Hilfen beim Umrechnen von Zweier(Dreier)-zahlen in Dezimalzahlen und umgekehrt. Wenn Ihr später einmal mit Zweier- oder Dreierzahlen und der Umrechnung in die dazu gehörigen Dezimalzahlen zu tun habt, ist es sehr hilfreich, wenn Ihr Euch weiter diese Zahlen so konkret wie in den Geschichten vorstellt.

StD Helmut Wirths
Fachlehrer für Mathematik und Physik an der Cäcilienschule Oldenburg

So zählt man auf...

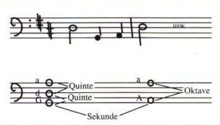
von Heinz Siegler, Eschau

	indonesisch	englisch	finnisch
1	satu	one	yksi
2	dua	two	kaksi
3	tiga	three	kolme
4	empat	four	neljä
5	lima	five	viisi
6	enam	six	kuusi
7	tujuh	seven	seitsemän
8	delapan	eight	kahdeksan
9	sembilan	nine	yhdeksän
10	sepuluh	ten	kymmenen
11	sebelas	eleven	yksitoista
12	dus belas	twelve	kaksitoista
13	tiga belas	thirteen	kolmetoista
14	empat belas	fourteen	neljätoista
15	lima belas	fifteen	viisitoista
16	enam belas	sixteen	kuusitoista
17	tujuh belas	seventeen	seitsemäntoista
18	delapan belas	eighteen	kahdeksantoista
19	sembilan belas	nineteen	yhdeksäntoista
20	dua puluh	twenty	kaksikymmentä
21	dua puluh satu	twenty-one	kaksikymmentäyksi
22	dua puluh dua	twenty-two	kaksikymmentäkaksi
23	dua puluh tiga	twenty-three	
24	dua puluh empat	twenty-four	
25	dua puluh lima	twenty-five	
26	dua puluh enam	twenty-six	

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Eine Aufgabe nicht nur für Musizierende

Markus spielt erst seit wenigen Wochen Cello, soll aber schon beim nächsten Elternabend die Gitarrenbegleitung seines Freundes durch Baßtöne verstärken. Sein Gehör und die Treffsicherheit seiner Finger sind noch so wenig geschult, daß sein Spiel oft gräßlich unsauber klingt. (Im Gegensatz zu den Zupfinstrumenten haben die Streichinstrumente ja keine Bünde, durch die die Tonhöhe von Halbtonschritt zu Halbtonschritt festgelegt ist.)
Das Lied, das Markus' Klasse vortragen will, steht in D-Dur, und um es zu begleiten, braucht man nur die drei Hauptdreiklänge. Deren Grundtöne soll Markus spielen:



Für die Töne d und G streicht Markus nur leere Saiten; aber das A muß auf der G-Saite schnell und sicher getroffen werden. Deshalb will sich Markus die Stelle, wo er den Finger aufsetzen muß, mathematisch genau kennzeichnen. Er weiß: Je kürzer der schwingende Teil der Saite ist, umso höher ist die Schwingungsfrequenz. Halbiert man die Saite, so entsteht ein Ton mit doppelter Frequenz: die Oktave. Die Freuqenzen zweier Töne im Quintabstand verhalten sich wie 2 : 3.
Der Abstand zwischen Sattel und Steg beträgt bei Markus' Cello 64,8 cm. Um wieviel muß die Saite verkürzt werden, damit ein Ganztonschritt erklingt?

Johanna Heller, Erfurt

Verwurzeltes

In den folgenden Kryptogrammen sind Buchstaben durch Ziffern zu ersetzen (gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern), so daß die entstehenden arithmetischen Identitäten erfüllt sind!

1. Bio = Wurzelballen "liefert" die Aufgabe

$$\mathrm{BIO} = \sqrt{\mathrm{BALLEN}}$$

2. Teep, der Wurzelfüßer, soll uns zu dem Kryptogramm

$$\mathrm{TEEP} = \sqrt{\mathrm{FUESSER}}$$

führen.

3. Wurzelwerk: Für welche dem Wort WERK zugeordnete vierstellige natürliche Zahlen mit der Einschränkung 0<W<E<R<K ist

$$\sqrt{\mathrm{WERK}}$$

eine natürliche Zahl?

4. Es soll die Wurzel aus dem Kiefer eines Wales gezogen werden:

$$\mathrm{WAL} = \sqrt{\mathrm{KIEFER}}$$

5. Das AS ist die Kubikwurzel:

$$\mathrm{AS} = \sqrt[3]{\mathrm{KUBIK}}$$

Wie groß ist das AS?

Hinweis: *Die Kryptogramme 3 und 5 können leicht durch Probieren mit einem Taschenrechner gelöst werden: Man beachte etwa, daß $(AS)^3 = KUBIK$ sein muß. In den übrigen Fällen empfehlen wir, einen Computer zu benutzen.* **W. Schmidt**

Treffender Vergleich

Der Philosoph Demonax aus Kypros traf eines Tages zwei Kollegen, die sich in ungebildeter Weise über ein Thema stritten. Während einer Fragen stellte, die nicht am Platze waren, gab der andere Antworten, die nicht zur Sache gehörten. Demonax hörte ihnen eine Weile geduldig zu. Dann sagte er:
"Freunde, kommt es euch nicht so vor, als wenn der eine einen Bock melkt und der andere ihm dabei ein Sieb darunterhält?"

aus: Oetzel/Polte: Der gescholtene Thales, Urania-Verlag Leipzig

Komplizierte Heimkehr

Andreas, Benno und Claus müssen abends um 18.00 Uhr zuhause sein. Der Heimweg ist genau 9,5 km lang.
Sie haben ein Fahrrad (v = 15 km/h) und einen Tretroller (v = 9 km/h). Alle drei gehen mit einer Geschwindigkeit v = 5 km/h. **Wann müssen Sie aufbrechen, wenn sie ihr Fahrzeug auf dem Weg einfach abstellen können und kein Fahrzeug mehr als eine Person befördern kann?**

OStR Anton Hammerschmitt, Herder-Gymnasium, Forchheim

1742

1917

837

Was geschah vor...Jahren?

1992 Chronologie Teil III

992 In China wird ein dezimales Maßsystem für Massen (Gewichte) eingeführt 1592 der Astronom, Astrologe und Mathematiker Giovanni Antonio Magini (1555 – 1617) aus Bologna verwendet erstmals das Dezimalkomma.

1592 Am 13.9. stirbt der französische Philosoph Michel Montaigne. Montaigne vertrat im Gegensatz zu seinen Zeitgenossen einen mathematischen Skeptizismus: es werden zwar viele wertvolle mathematische Einzelergebnisse erzielt, aber es fehlt eine durchgreifende allgemeine Methode, um diese Resultate zu ordnen.

1667 Am 6.8. wurde Johann I. Bernoulli geboren (weitere Informationen im folgenden kurzen Beitrag).

1692 Der Marquis L'Hospital (1661 – 1704) rechnet die Länge eines Stücks der logarithmischen Kurve aus.

1742 Der Schweizer Mathematiker Gabriel Cramer (1704 – 1752) stellt die Aufgabe: in einen Kreis ist ein Dreieck so einzubeschreiben, daß die Seiten des Dreiecks durch drei vorgegebene Punkte gehen. Lösungen der Aufgabe gaben u. a. von J. L. Lagrange (1736 – 1813) 1776 und L. Euler (1707 – 1783) 1780.

1792 C. F. Gauß (1777 – 1855) erkennt: das Parallelenpostulat ist nicht denknotwendig (Näheres auf dieser Seite).

1842 Lord W. P. Rosse (1800 – 1867) stellt seinen berühmtesten Teleskopspiegel mit einem Durchmesser von 1,8 m her.

1892 Es erscheint das berühmte Buch: Vorlesungen über die Theorie der Irrationalzahlen von P. Bachmann (1837 – 1920).

1917 Am 3.8. stirbt der bedeutende Mathematiker Georg Frobenius (* 1849), Frobenius war Professor in Berlin.

Johann I. Bernoulli

Am 6.8.1667 wurde als 10. Kind eines Basler Ratsherrn Johann Bernoulli geboren. Er gehört ohne Zweifel in die kurze Reihe der "ganz großen Mathematiker". Bernoulli studierte in seiner Heimatstadt Medizin, wurde von seinem Bruder Jakob I. Bernoulli (1654 – 1705) in die Mathematik eingeführt. 1690 erschien Bernoullis erste medizinische Publikation, 1691 seine erste mathematische. Ab 1695 war er Professor in Groningen (Niederlande), ab 1705 in Basel. In seiner Heimatstadt starb der Mathematiker am ersten Tag des Jahres 1748.

Bernoulli war der wichtigste Vertreter der von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) erfundenen Methode, Probleme der Differential- und Integralrechnung zu behandeln. Er hat Wichtiges zum Funktionsbegriff beigetragen, arbeitet über höhere Kurven, über Differentialgleichungen, zur Zahlentheorie. Besonders wichtig sind die Versuche Johann I. Bernoullis gewesen, die Mathematik auf die Physik anzuwenden. Er fand eine spezielle Form des Energiesatzes, arbeitete zur Hydraulik, zur Theorie des Schiffes. Johann I. Bernoulli war ein sehr streitbarer Herr, lag in heftigen literarischen Fehden mit englischen Mathematikern und seinem Bruder Jacob I. Für die Entwicklung der Mathematik ist neben seiner Forschungstätigkeit seine Lehrtätigkeit von höchster Bedeutung gewesen. Zu den Schülern von Johann I. Bernoulli gehörten die sehr bedeutenden Mathematiker Leonhard Euler (1707 – 1783), Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698 – 1759), Gabriel Cramer (1704 – 1752), Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765).

Vor 200 Jahren: Carl Friedrich Gauß „entdeckt" die nichteuklidische Geometrie

In einem Brief vom 28.11.1846 an den Astronomen Heinrich Christian Schumacher (1780 – 1850) schrieb der weltbekannte Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855): "Es enthält die Grundzüge derjenigen Geometrie, die statt finden müßte und strenge consequent statt finden könnte, wenn die Euklidische nicht die wahre ist ... Sie wissen, daß ich schon seit 54 Jahren (1792) dieselbe Überzeugung habe ..." Mit "Es" war ein Büchlein des russischen Mathematikers N. J. Lobatschewski (1792 – 1856) gemeint: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin 1840.

Als Gauß sich also mit der nichteuklidischen Geometrie zu beschäftigen begann, war er 15 Jahre alt! Bei dem Problem der verschiedenen Arten von Geometrie ging es um eine uralte Frage. Kann man zweifelsfrei beweisen, daß durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nur genau eine Gerade gezeichnet werden kann, die die ursprüngliche Gerade nicht schneidet? In der Geschichte der Mathematik hat es viele Versuche gegeben, diesen Satz zu beweisen. Alle diese Beweise beruhten auf Irrtümern. Die Quelle dieser Irrtümer ist immer gewesen, daß man zum Beweis des Satzes Behauptungen verwendete, die mit dem zu beweisenden Satz gleichwertig sind. Z. B. ist der Satz: die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° mit dem Satz über die Parallelen gleichwertig. Eine Geometrie, in der der Satz gilt, heißt "euklidische Geometrie" (nach Euklid (um 365 v. Chr. – um 300 v. Chr.)). Gauß war der erste, der erkannte, daß es Geometrien (nichteuklidische Geometrien) gibt, die zur "euklidischen Geometrie" gleichwertig sind. In einer dieser Geometrie wäre beispielsweise der Satz richtig: zu einer gegebenen Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb dieser Geraden beliebig viele Parallelen.

Man kann also nicht zweifelsfrei beweisen, daß es zu einer Geraden und durch einen Punkt außerhalb einer Geraden genau eine Parallele gibt. Die Entscheidung, welche der Geometrien in unserer Welt richtig ist, ist keine Aufgabe der Mathematik, sondern eine Aufgabe für die Physik und die Astronomie. Genaueres über das Thema kann man nachlesen bei Reichardt, H.: Gauß und die Anfänge der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1985.

Zusammengestellt von H.-J. Ilgauds, Sudhoff-Institut der Universität Leipzig

Abenteuer Forschung

Vor hundert Jahren gab es auf der Landkarte die sogenannten ‚weißen Flecken' – unerforschte, unbekannte Gebiete der Erde, Herausforderung für Entdecker, Weltenbummler und Wissenschaftler. Weiße Flecken gibt es noch heute, zum Beispiel in zahllosen Gebieten der Naturwissenschaft und Technik; denn die Forschung löst nicht nur Probleme, sondern wirft auch ständig neue auf – z. B. Umweltprobleme: Lärmbelästigung, Smog, verschmutzte Gewässer etc.
JUGEND FORSCHT ist eine Herausforderung für alle, die selber aktiv werden sollen. – dabei geht es nicht darum, den Forschungsinstituten oder der Industrie ein Stück Arbeit abzunehmen, sondern darum, selber Fragen zu stellen, Probleme zu erkennen, neue Ideen und Lösungen – oder Lösungswege – zu entdecken.

Die Teilnehmer

Seit dem Start des Wettbewerbs, 1965, haben rund 44.000 Mädchen und Jungen bei JUGEND FORSCHT den Spaß am Experimentieren und Forschen entdeckt. Teilnehmen können alle Nachwuchsforscher unter 21 Jahren: Schülerinnen und Schüler, Auszubildende, Wehr- und Zivildienstleistende, Studentinnen und Studenten im ersten Studiensemester. Für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer unter 16 Jahren heißt der Wettbewerb SCHÜLER EXPERIMENTIEREN, damit der Fünftkläßler nicht mit der 20jährigen Abiturientin konkurrieren muß! Man kann allein oder als ‚Gruppendynamiker' in einer Forschergemeinschaft bis zu drei Leuten loslegen. Das Thema denkt sich jeder – bzw. jede Gruppe – selbst aus.

Die Fachgebiete

Das selbstgewählte Thema der Wettbewerbsarbeit muß aber in eines der sieben JUGEND FORSCHT-Fachgebiete passen: Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaften, Mathematik/Informatik, Physik, Technik und Arbeitswelt.

Die Wettbewerbsarbeit

Der schriftliche Teil der Arbeit darf nicht länger sein als 15 Seiten; dazu gehört eine einseitige Kurzfassung, die die wichtigsten Fakten kurz skizziert. Bei den Wettbewerben gestaltet jeder Teilnehmer seinen Ausstellungsstand so anschaulich wie möglich. Zielsetzung, Methoden und Ergebnisse der Arbeit sollen klar erkennbar sein. Da sind Phantasie und Kreativität gefragt!

Der Wettbewerbsablauf

Die Anmeldekarte, die in jeder JUGEND FORSCHT-Broschüre und im Taschenbuch zu finden ist, muß pünktlich abgeschickt werden. Anmeldeschluß ist in jedem Jahr der 30. November!
Anfang Januar erhalten alle, die sich angemeldet haben, eine Einladung zu einem der 48 Regionalwettbewerbe, die überall in der Bundesrepublik stattfinden. Die Wettbewerbe werden von Industrieunternehmen, den JUGEND FORSCHT-Patenfirmen, ausgerichtet und gemeinsam mit engagierten Lehrerinnen und Lehrer, die als Wettbewerbsleiter fungieren, organisiert. Den Jurys gehören Experten aus Schule und Hochschule, Forschung und Industrie an. Der Juniorwettbewerb SCHÜLER EXPERIMENTIEREN endet in fast allen Bundesländern auf der Regionalebene, besonders qualifizierte Arbeiten können allerdings zu JUGEND FORSCHT aufgestuft werden. Die Siegerinnen und Sieger der Regionalwettbewerbe JUGEND FORSCHT gehen weiter zum jeweiligen Landeswettbewerb. Wer auch diese Hürde überwindet, sprintet mit großen Schritten zur Endausscheidung – dem Bundeswettbewerb.

Die Preise

Experimentieren und Forschen, neue Freunde gewinnen, spannende Wettbewerbsatmosphäre genießen... das macht Spaß – dazu gibt es auf allen drei Wettbewerbsebenen tolle Preise: Geldpreise zwischen DM 100 auf der Regional- und DM 3.000 auf der Bundesebene, Sonderpreise für besondere Themenschwerpunkte, z. B. Umweltprobleme oder Ideen zur Energieeinsparung; Forschungspatenschaften in Firmen und Forschungsinstituten im In- und Ausland; Einladungen zu internationalen Wettbewerben außerdem zahlreiche Sachpreise: Bücher, Experimentierkästen und Zeitschriftenabonnements.

Übrigens: 1990 hatte ein neuer internationaler Jugendwettbewerb Premiere: ‚Europas JUGEND FORSCHT für die Umwelt' ist eine Initiative der Stiftung JUGEND FORSCHT und der Deutschen Bank. Beim 2. internationalen Umweltwettbewerb, im November '91, wetteiferten insgesamt 63 nationale Siegerinnen und Sieger aus 20 west- und osteuropäischen Ländern um Sieg und Platz. Die deutschen Vertreter auf internationalem Parkett sind ausgewählte Preisträger des JUGEND FORSCHT-Bundeswettbewerbs.

Für den großen naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchswettbewerb JUGEND FORSCHT ist die Zeitschrift **junge wissenschaft**, die auch im Erhard Friedrich Verlag erscheint, eine ideale Ergänzung. – Denn: Die bereits aktiven und erfolgreichen Nachwuchsforscherinnen und Nachwuchsforscher haben in der **jungen wissenschaft** ein Forum, um ihre Wettbewerbsarbeiten einer großen Öffentlichkeit zu präsentieren. Auf der anderen Seite bietet die **junge wissenschaft** denjenigen, die gern wissen möchten, wie erfolgreiche Wettbewerbsarbeiten aussehen, konkretes Anschauungsmaterial. Die **junge wissenschaft** möchte noch mehr Jugendliche motivieren, das ‚Abenteuer Forschung' zu wagen! Übrigens: Die in der **jungen wissenschaft** veröffentlichten Wettbewerbsarbeiten sind zumeist auf der Landes- und Bundesebene mit einem Preis ausgezeichnet worden. Die Qualität dieser Arbeiten soll Ansporn sein – nicht ‚Maß aller Dinge'...

Die Stiftung JUGEND FORSCHT e.V.
Organisation und Kuratorium
Die Bundesgeschäftsstelle von JUGEND FORSCHT hat ihren Sitz in Hamburg, der Geburtsstadt des Wettbewerbs. Bundesgeschäftsführerin ist Dr. Uta Krautkrämer-Wagner. Ein zwölfköpfiges Kuratorium berät über das Wettbewerbsprogramm, über die Aktivitäten und Initiativen, die von JUGEND FORSCHT durchgeführt werden. Im Kuratorium sind alle JUGEND FORSCHT-relevanten Gruppen vertreten: Das Bundesministerium für Forschung und Technologie, das Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft (Dr. Heinz Riesenhuber und Prof. Dr. Rainer Ortleb haben im jährlichen Wechsel den Kuratoriumsvorsitz), der STERN, das Verlagshaus Gruner + Jahr, die Kultusministerien, der Stifterverband der Deutschen Wissenschaft, der Gewerkschaftsbund, der Bundesverband der Deutschen Industrie, der Verein zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, die Bundesjury, die Wettbewerbsleiter und die Patenfirmen.

Informationen und Wettbewerbsunterlagen sind zu erhalten bei der
Stiftung JUGEND FORSCHT e. V.
Beim Schlump 58
2000 Hamburg 13

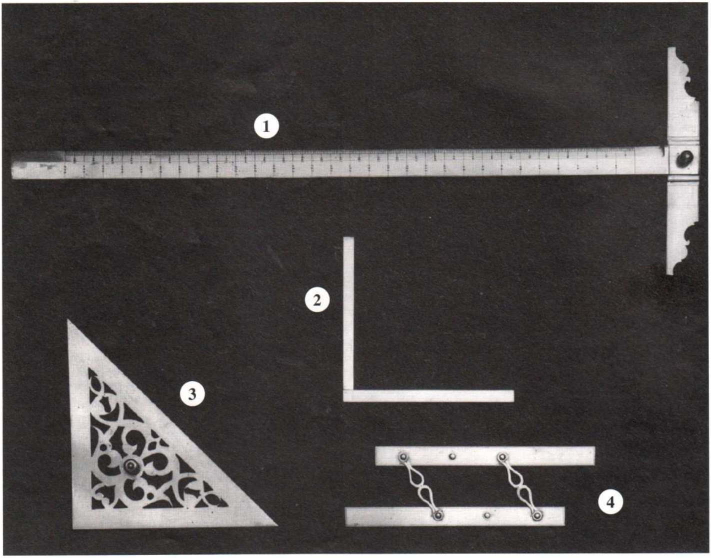
Historische Entwicklung des Lineals

Die Grundform des uns allen geläufigen und oft gebrauchten Lineals ist bereits seit dem Altertum bekannt. Seine Entwicklung ist eng mit geometrischen Problemen bei der Landvermessung verbunden. So mußten im alten Ägypten nach den sich jährlich wiederholenden Nilüberflutungen die Felder neu vermessen werden. Die Entwicklung des Lineals und anderer Zeichenhilfsmittel läßt sich sehr gut nachvollziehen.

Neben mit Knoten versehenen Richtschnuren wurden auch Meßlatten eingesetzt. Letztere boten sich u. a. in verkürzter Form auch als Lineal zum Aufreißen oder Zeichnen gerader Linien an. Zusammen mit dem Zirkel bildeten sie in der griechischen Geometrie fast die einzige Möglichkeit, um ebene Figuren zu konstruieren. Die Entwicklung führte über das "Richtscheid" Albrecht Dürers mit ersten Maßeinteilungen zu einer Reihe von Arten und Kombinationen. So konnte das Lineal zum maßstabgerechten Zeichnen mit Skalen versehen sein. Sie entsprachen entweder den jeweils benutzten Längeneinheiten oder waren ihnen proportional.

Längeneinheiten

Hinsichtlich der benutzten Längeneinheiten und ihrer Werte gibt es, wie auch bei den anderen Maßeinheiten, eine fast unüberschaubare Vielfalt. Längeneinheiten wurden in der Regel vom menschlichen Körper abgeleitet. So waren beispielsweise eine Armlänge für die Festlegung der Elle, eine Fußlänge für den Fuß oder Schuh und eine Daumenbreite für den Zoll maßgebend. Ihre Werte schwankten bei den einzelnen Völkern und zu verschiedenen Zeiten. Obwohl es bereits im Altertum Bestrebungen einzelner Herrscher gab, in ihrem Reich ein einheitliches Maßsystem einzuführen und durchzusetzen, waren diese in vielen Staaten erst im 19. Jahrhundert von Erfolg gekrönt. In Deutschland unterschieden sich bis zur Einführung des metrischen Maßsystems am 01.01.1872 die benutzten Längeneinheiten und insbesondere deren Werte auf Grund der politischen Zersplitterung besonders stark voneinander, so daß eine große Zahl lokaler Maße existierte.
Diese Vielfalt spiegelt sich in den auf Maßstäben angegebenen Längeneinheiten wider. Handelte es sich um verkleinernde Maßstäbe, werden sie als Reduktions- oder verjüngte Maßstäbe bezeichnet. Ihr Hauptanwendungsgebiet war das kartographische Zeichnen. Der Abgriff der Strecken erfolgte in der Regel mit



Historische Zeicheninstrumente: 1 = Anschlaglineal, deutsch, um 1600; 2 = Winkelmaß (Anschlagwinkel), deutsch, um 1600; 3 = Dreieck, deutsch, um 1600;

dem Zirkel. Architektonische bzw. Bauzeichnungen wurden bis zum 18. Jahrhundert häufig in einem willkürlichen Maßstab gezeichnet, der meist neben der Zeichnung angegeben ist.

Beispiele für andere Zeichenhilfsmittel

Zum Aufzeichnen aufeinander senkrecht stehender Linien dienten Reißschiene, Winkelhaken bzw. Winkelmaß, oder rechtwinkliges Dreieck.

Die Reißschiene, auch Anschlag- oder Kreuzlineal, besteht aus einem Lineal, das mit einem dazu senkrechten, etwas überstehenden Lineal fest verbunden ist, so daß nach Anlegen an die Kante eines Zeichenbrettes die dazu Senkrechte gezogen werden konnte.

Das Querlineal konnte auch in einer Laufschiene bzw. auf einer Gleitschiene verschoben werden. Gleichzeitig konnten damit parallele Linien gezogen werden. Diese ließen sich auch mittels Lineal bzw. Maßstab und Dreieck oder mittels spezieller Parallellineale, die aus zwei, mitunter drei miteinander durch bewegliche Scharniere parallelogrammförmig verbundenen Linealen bestanden, zeichnen.

Eine spezielle Art stellten Roll-Parallel-Lineale dar. Sie bestehen aus einem auf zwei mit Skalen versehenen Rädchen laufenden Lineal, das bei sorgfältiger Handhabung parallel geführt werden kann. Sie wurden vor allem bei der Navigationsarbeit auf Seekarten angewendet.

Das Winkelmaß besteht aus zwei am Ende entweder beweglich (Winkelmaß) oder senkrecht fest (Winkelhaken) miteinander verbundenen Linealen. Damit konnten beliebige Winkel abgenommen und übertragen bzw. rechte Winkel gezeichnet werden.

Die Sammlung der Dresdner Kunstkammer

Viele Arten dieser Lineale sind bereits im Inventar von 1587 der 1560 gegründeten Dresdner Kunstkammer zu finden. So umfaßt der Bestand von ca. 400 Zeicheninstrumenten neben 218 Zirkeln und anderen Objekten 37 Lineale, 50 Maßstäbe einschließlich Reduktionsmaßstäbe, 19 Kreuzlineale, 47 Winkelmaße einschließlich Winkelhaken und 18 Dreiecke.

Einige Typen werden auch heute noch in fast unveränderter Form gefertigt und gehören zum unentbehrlichen Hilfsmittel im Schulunterricht.

Dr. Klaus Schillinger, Direktor des Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salons im Dresdner Zwinger

Ein seltsamer Beweis

Behauptung: 90° = 100°

Gegeben ist das Viereck ABCD mit $\overline{BC} = \overline{DA} = 3\text{cm}$, $\overline{CD} = 5\text{cm}$, $\sphericalangle DCB = 90°$ und $\sphericalangle ADC = 100°$.

M liegt auf der Symmetrieachse m_1 zu A und B. M liegt auch auf der Symmetrieachse m_2 zu C und D. Dann sind die Dreiecke AMD und BCM kongruent, denn

$M \in m_1 \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BM}$

$M \in m_2 \Rightarrow \overline{DM} = \overline{CM}$

$\overline{BC} = \overline{DA} = 3$ cm nach Voraussetzung.

Also gilt: $\sphericalangle MCB = \sphericalangle ADM$.

Nun ist aber $\sphericalangle CDM = \sphericalangle MCD = \alpha$ (Basiswinkel),

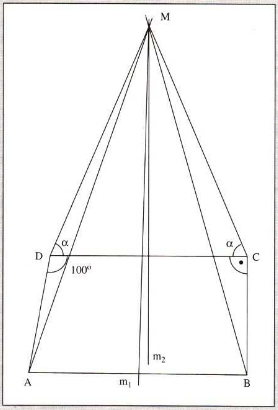
also $\sphericalangle BCM = 100° + \alpha =$

$= \sphericalangle ADM = 90° + \alpha$

$\Rightarrow 100° = 90°$, also $90° = 100°$

Was stimmt hier nicht? Wer es weiß, schreibt uns! Wir sind gespannt!

(Mitgeteilt bei einem mathematischen Colloquium der Universität Bayreuth)

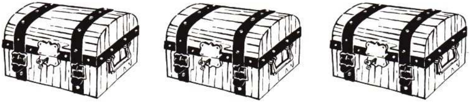


OStR Anton Hammerschmitt, Herder-Gymnasium, Forchheim

Der Griff in das Schatzkästchen

Eines der drei Schatzkästchen enthält zwei schwarze Steine, eines zwei weiße und das dritte je einen weißen und einen schwarzen Stein. Leider sind alle Beschriftungen vertauscht angebracht, so daß jedes Schatzkästchen falsch markiert ist.

Es darf nacheinander (ohne hineinzuschauen) aus jedem Kästchen ein Stein entnommen werden, um herauszufinden, welche Beschriftung richtig wäre. Welche und wieviele Griffe sind notwendig?



Lösung:
Es genügt ein Griff in das mit S/W beschriftete Kästchen. Holt man einen weißen Stein heraus, ist es also das Kästchen mit den beiden weißen Steinen. Dann liegen im Kästchen W/W zwei schwarze und im Kasten S/S ein weißer und ein schwarzer Stein. Zieht man beim ersten Griff in S/W einen schwarzen Stein, so gilt alles entsprechend.

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Alphons logische Abenteuer (11)

Trotz wohlgemeinter Warnung seiner Mutter hatte sich Alphons doch nicht beherrschen können. Die dunklen Süßkirschen waren zu verlockend gewesen, um auch nur eine von ihnen auf der Obstschale liegen zu lassen. Mit leichtem Magendrücken war er zu Bett gegangen.
Unruhig wälzte er sich im Bett hin und her, schließlich stand er auf, ging zur Tür und öffnete sie. Ein jäher Schreck durchfuhr ihn. Statt auf dem gewohnten Korridor stand er in einer zerklüfteten Höhle. Vor ihm richtete sich fauchend ein Ungeheuer auf. Alphons wich entsetzt zurück, aber hinter ihm war nicht mehr die rettende Tür, sondern ein Bergabhang, über den immer mehr Kirschen auf ihn herabrollten. „Du wirst unter den Kirschen begraben werden, es sei denn, Du löst zuvor folgende, Dich aus der Höhle befreiende Aufgabe." Bei diesen Worten hatte das Ungeheuer einen Arm ausgestreckt, der den Kirschenstrom stoppte. „Wenn ich zur Seite trete", sprach er weiter, „wirst Du drei Geister sehen. Der eine ist der Geist der Wahrheit. Er behauptet stets das Wahre als wahr und das Falsche als falsch. Ein anderer ist der Geist der Falschheit, der stets Wahres als falsch und Falsches als wahr behauptet. Der Dritte ist der Geist der Diplomatie, der, wie es ihm beliebt, mitunter Wahres als falsch, mitunter aber auch Wahres als wahr behauptet. Finde mit nur zwei Fragen an die Geister heraus, wer welcher Geist ist. Das sei Dir noch erlaubt. Du darfst dieselbe Frage höchstens drei Mal stellen. Viel Zeit bleibt Dir nicht, denn wenn mein Arm ermattet sinkt, begraben Dich die sich wieder in Bewegung setzenden Kirschen!"
Nach diesen Worten trat das Ungeheuer zur Seite. Alphons dachte verzweifelt an die Mahnung seiner Mutter. Doch dann faßte er sich ein Herz, atmete tief durch und trat dann an den links stehenden Geist mit der Frage heran: „Ist die Aussage „Ich stehe jetzt vor Dir, wahr?" Der Geist antwortete: „Ja." Alphons wandte sich mit derselben Frage an den in der Mitte stehenden Geist, der mit „Nein" antwortete. In gleicher Weise antwortete der rechts von ihm stehende Geist. Alphons wußte nun, daß der links stehende Geist der Geist der Wahrheit ist. Hätte der Geist der Diplomatie gleich dem Geist der Wahrheit mit „ja" geantwortet, der Geist der Falschheit, da er seine Frage verneinen mußte, wäre dann identifizierbar gewesen.
Alphons trat an den Geist der Wahrheit heran, zeigte auf den rechts stehenden Geist und fragte: „Ist das der Geist der Falschheit? Der Geist antwortete: „Nein." Daraufhin sagte Alphons zu dem Ungeheuer: „Links von mir steht der Geist der Wahrheit, in der Mitter der Geist der Falschheit und rechts der Geist der Diplomatie." Das Ungeheuer sah gar nicht mehr so furchterregend aus. Mit freundlicher Stimme sagte es:„Du bist frei." Aufatmend richtete Alphons sich auf und stieß dabei mit dem Kopf gegen etwas Hartes. Es war die Kante des Bücherbords über seinem Bett, die ihn sanft weckte.
Berti, dem Alphons am nächsten Tag seinen Alptraum erzählte, meinte mitfühlend: „Da sei nur froh, daß Du nicht unter denselben Bedingungen nur zwei Geister vor Dir gehabt hast, von denen der eine der Geist der Wahrheit und der anderer der Geist der Diplomatie ist." Alphons nickte: „Wenn der Geist der Diplomatie dem Geist der Falschheit in der Antwort gefolgt wäre und ich hätte sie identifizieren sollen, wäre ich auch in keiner besseren Lage gewesen." Berti klopfte seinem Freund auf die Schulter und bemerkte: „Ein Glück, daß manche Ungeheuer mit uns Menschen so human umgehen."

Prof. Dr. Lothar Kreiser, Institut für allgemeine Logik der Universität Leipzig

Zur Entdeckung Amerikas

Am 12.10.1492 erreichte nach gefahrvoller Reise Christoph Columbus mit seinen 3 Schiffen die Insel Guanahani (heutige Watling-Insel der Bahamas). Er war davon überzeugt, an der Ostküste Indiens gelandet zu sein. Er hatte den neuen Erdteil Amerika entdeckt.

	I	M	T	S	N	,	I
A	A	,	I		N	A	T
A	P	R		N	A	N	A

Die Namen seiner 3 Schiffe sind im abgebildeten Rechteck mit 24 Feldern in Form eines Rösselsprungs, d. h. in der Gangart eines Springers beim Schachspiel, enthalten. Der Springer betritt dabei jedes Feld genau einmal, auch die ein Komma tragenden Felder sowie die Leerfelder. Der Name des Admiralschiffes besteht aus 2 Worten, die im Rösselsprung durch ein Leerfeld getrennt sind. Die Namen zweier Schiffe sind im Rösselsprung jeweils durch 2 Felder getrennt, deren erstes ein Komma trägt und deren zweites ein Leerfeld ist. Wie heißen die 3 Schiffe des Columbus? Noch ein Hinweis: Würde man den Konsonanten N (gesprochen wie "nj") des spanischen Alphabetes durch N ersetzen, so wären 2 dieser 4 gesuchten Worte gleichzeitig bei uns gebräuchliche Vornamen.

W. Träger, Döbeln

Lösung:

$_{13}$	I_{10}	M_7	T_4	S_1	N_{16}	$,_{19}$	I_{22}
A_8	A_5	$,_{12}$	I_{15}	$_{20}$	N_{23}	A_2	T_{17}
A_{11}	P_{14}	R_9	$_{6}$	N_3	A_{18}	N_{21}	A_{24}

Santa Maria (Heilige Maria), Pinta (Flecken, Tupfen), Nina (gesprochen "Ninja"; kleines Mädchen)

Sprachecke

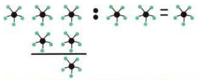
Echecs et maths

Au tournoi de Grenoble, chaque joueur rencontre une fois et une seule chacun des autres participants. Après chaque match, l'arbitre donne aux deux joueurs un carton de couleur. Ce carton est rouge pour le joueur victorieux, vert pour le perdant. En cas de nul, les deux joueurs ont un carton jaune. A l'issue du tournoi, il a été distribué exactement 752 cartons de chaque couleur. Quel est le nombre de participants au tournoi?

Peter Hofmann, Leipzig

Деление

В этом зашифрованном примере на деление все девять цифр различны. Расшифруйте его.



aus: Quant, Moskau

Prime Primes

The prime number 31 has an interesting property: if we drop its right-hand digit, we get the number 3, which is also a prime. The prime number 317 has the same property; if we drop the 7, we get 31, which is a prime; if we then drop the 1, we get another prime, 3.

Two American mathematicians named Walstrom and Berg have called integers which have this property prime primes.

Try to find all of the two-digit prime primes (remembering that 1 ist not a prime).

aus: Fun with mathematics, Toronto

Wir setzen gleichlange Strecken zusammen

Gleichlange Strecken sollen so zusammengesetzt werden, daß sie (1) in Verlängerung zueinander (Abb. 1) und (2) rechtwinklig zueinander sind (Abb. 2).

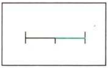


Abb. 1

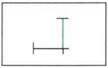


Abb. 2

Aufgabe 1: Wieviele Möglichkeiten gibt es, verschiedenen Figuren aus vier gleichlangen Strecken unter diesen beiden Bedingungen zusammenzusetzen.

Dabei gelten Zusammensetzungen als gleich, wenn sie durch Drehungen und Spiegelungen auseinander hervorgehen. Aus zwei Strecken gelten also die vier Zusammensetzungen, die

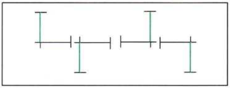


Abb. 3

die **Abb. 3** zeigt, als gleich. Die Figuren können auf kleinkariertem Papier gezeichnet werden.

Es ist aber auch möglich, sie zunächst aus gleichlangen Stäbchen zusammenzusetzen. Aus zwei Stäbchen können wir genau die beiden Figuren zusammensetzen, die in **Abb. 1** und **2** gezeigt wurden. Um das zu zeigen, nehmen wir eine vollständige Fallunterscheidung vor. Die Endpunkte der Strecken bezeichnen

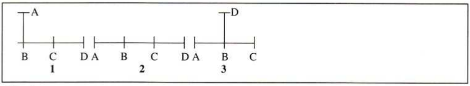


Abb. 6

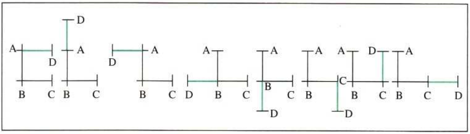


Abb. 7

wir, wie üblich, mit Großbuchstaben. Die systematische Untersuchung zeigt die **Abb. 4**. Es gibt genau sechs Möglichkeiten das zweite Stäbchen anzulegen, je drei an den Punkten A und B.

Um zu ermitteln, wieviele verschiedene Figuren aus vier Stäbchen zusammengesetzt werden können, ist es erforderlich, um systematisch vorgehen zu können, zunächst die Figuren aus drei Stäbchen zusammenzusetzen.

Wir gehen von der Figur der **Abb. 1** aus. Dann gibt es mit drei Stäbchen folgende Figuren, zusammengestellt in der **Abb. 5**.

Wir sondern die Fälle aus, die gleich sind. Es bleiben die drei verschiedenen Figuren, die die **Abb. 6** zeigt. Entsprechend untersuchen wir den Fall 2 aus zwei Stäbchen. Das Ergebnis zeigt die **Abb. 7**. Zu den drei Figuren der **Abb. 6** kommen noch zwei Figuren (**Abb. 8**) hinzu.

Aus drei gleichlangen Strecken kann man also unter den geforderten Bedingungen fünf Figuren zusammensetzen. Nun gilt es, die Figuren aus vier gleichlangen Strecken zu ermitteln.

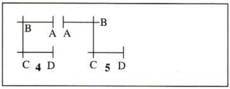


Abb. 8

Christopher, der diese Untersuchungen vorgenommen hat, hat die Figuren, die die **Abb. 9** zeigt, gefunden. Da er nicht systematisch vorgegangen ist, ist die Lösung nicht vollständig.

Aufgabe 2: Ermittle die fehlenden Figuren!

Gerhard Schulze, Herzberg

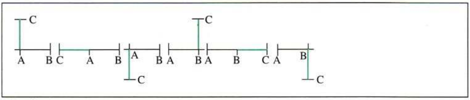


Abb. 4

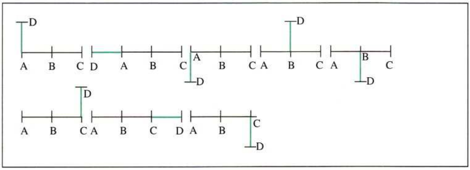


Abb. 5

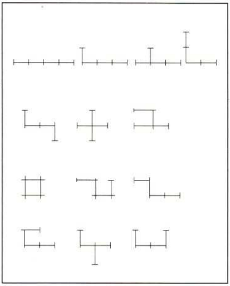


Abb. 9

Die Olympiade-Ecke

Der Bundeswettbewerb Mathematik – kein elitärer Treff für Wunderkinder

Der Bundeswettbewerb Mathematik (BWM) wurde im vergangenen Jahr zum 21. Mal ausgeschrieben und gehört damit wohl zu den Klassikern unter den Schülerwettbewerben. Seit seiner Gründung im Jahr 1970 will dieser Wettbewerb Interesse an der Mathematik wecken und Schülerinnen und Schüler zu intensiver Beschäftigung mit mathematischen Problemen anregen.

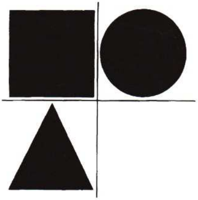


Abb. 1

An der 1. Runde 1991 waren erstmals auch Schüler aus den neuen Bundesländern teilnahmeberechtigt. Insgesamt haben sich 315 Schülerinnen und Schüler aus diesen Ländern beteiligt. Das sind zwar weniger als sich die Organisatoren erhofft hatten, dennoch ist dies doch eine erfreulich hohe Beteiligung.
Bundesbildungsminister Dr. Rainer Ortleb rechnet sogar mit deutlich ansteigenden Anmeldungen aus den fünf neuen Bundesländern; deren Erfolgszahlen können sich schon jetzt durchaus sehen lassen. Nach einer Statistik zur 2. Runde des 1991er Wettbewerbs kommen allein aus Sachsen bzw. Thüringen bereits mehr Teilnehmer als aus Schleswig-Holstein und Hamburg zusammengenommen. Insgesamt waren zur Teilnahme an der zweiten Runde 1991 noch 888 Schülerinnen und Schüler berechtigt, von denen knapp die Hälfte, nämlich 394, eine Arbeit eingereicht haben. Dies ist für einen zweiten Durchgang eine bemerkenswerte Quote.
Leider läßt die Resonanz unter den Mädchen noch einige Wünsche offen – nur 35 der 394 eingesandten Lösungen gingen auf das Konto von Schülerinnen. Bundesminister Ortleb setzt jedoch in der Zukunft ganz auf den traditionell hohen Mädchenanteil bei Mathe-Wettbewerben im Ostteil der Republik. Gerade in mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern könne man auf gute Erfahrungen zurückgreifen, wo auch Mädchen in den Mannschaften für die internationalen Schülerolympiaden vertreten gewesen waren.
Also liebe Leserinnen von *alpha*, zeigt es den Jungens und wagt Euch an die Lösungen der Probleme der nächsten Wettbewerbsrunden heran!
Sicher wird sich die Gesamtbeteiligung am BWM noch weiter erhöhen, wenn auch in den neuen Bundesländern dessen Bekanntheitsgrad wächst. Der BWM und die Euch wohlbekannte Mathe-Olympiade aus der früheren DDR unterscheiden sich ja grundlegend voneinander. Ganz anders etwa als die vierstufige Olympiade Junger Mathematiker (OJM), die in Klassenstufen unterteilt ist und einen Klausurwettbewerb darstellt, wird der BWM als Korrespondenzwettbewerb d. h. als Hausaufgabenwettbewerb organisiert. Während in der OJM die Aufgaben durchweg von höherem (schul)mathematischen Schwierigkeitsgrad sind, deren Lösung oft weniger "Erfinderreichtum" erfordert, stellt es sich beim BWM genau umgekehrt dar: dort lassen die Aufgaben der ersten Runde in der Regel unterschiedliche Lösungsansätze zu und fördern dadurch einen kreativen Umgang mit den mathematischen Vorkenntnissen. Die etwas geringeren mathematischen Anforderungen sind geradezu ein Kennzeichen der 1. Runde des BWM.
Dafür fehlt aber eine Aufteilung in Klassenstufen (wie bei der OJM üblich).
Veranstalter des BWM ist der Verein Bildung und Begabung e. V. in Bonn. Der Wettbewerb wird gemeinsam vom Bundesminister für Bildung und Wissenschaft und dem Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft gefördert und steht unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Alle Schülerinnen und Schüler in der Bundesrepublik Deutschland, die eine zur allgemeinen Hochschulreife führende Schule besuchen, können sich beteiligen.
Der BWM findet jährlich statt und besteht aus drei Runden. Er beginnt jeweils im Dezember und dauert insgesamt etwa 13 Monate. Die Unterlagen der ersten Runde kommen Anfang Dezember an Eure Schule. Fragt Euren Fachlehrer rechtzeitig nach den Teilnahmecoupons. An vielen Schulen gibt es übrigens auch eine Kontaktperson als Ansprechpartner für Interessierte.
In der **ersten und zweiten Runde** sind jeweils vier Aufgaben zu Hause **selbständig** schriftlich zu bearbeiten. Dabei sind die Aufgaben in der zweiten Runde deutlich schwieriger als in der ersten Runde. Die Bearbeitungszeit beträgt jeweils etwa drei Monate. Die Verpflichtung zu eigenständiger Bearbeitung der Aufgaben besteht von Anfang an, also von der Ideenfindung über die Aufbauplanung bis zur Ausformulierung der Lösung. Es reicht daher **nicht** aus, nur einen Teil – selbst wenn er der überwiegende ist – allein bearbeitet zu haben. Die Aufgabenkommission nennt im wesentlichen drei Grundregeln, die Ihr bei der Lösung einer Aufgabe beherzigen solltet.
Zunächst müßt Ihr den – meist eingekleideten – Aufgabentext aufbereiten, ihn nach möglichen Verfremdungen abklopfen. Danach gilt es, sein mathematisches Rüstzeug zurechtzulegen und es gegebenenfalls in völlig ungewohnter Art und Weise einzusetzen. Schließlich müßt Ihr noch die sauber formulierte Lösung auf logische Lücken oder notwendige Falluntersuchungen hin durchsehen.
Seit 1988 sind in der ersten Runde auch Gruppenarbeiten zugelassen. Diese durchlaufen das Korrekturverfahren allerdings außer Konkurrenz. Sie werden nicht mit Preisen versehen. Die Gruppen erhalten jedoch die Lösungsbeispiele und eine Mitteilung über die Einstufung ihrer Arbeit. Für die **dritte** Runde, ein Kolloquium, jeweils im Januar des übernächsten Jahres, haben sich die Gewinner(innen) erster Preise in der zweiten Runde qualifiziert. Jede(r) aus diesem Kreis der Preisträger(innen) führt dabei ein knapp einstündiges Fachgespräch mit Mathematikern aus Schule und Hochschule. Auf der Grundlage solcher Gespräche werden die Bundessieger(innen) ermittelt. Die Besten nach den drei Runden erwartet eine besondere Auszeichnung: Sie werden im Falle eines Studiums an einer wissenschaftlichen oder technischen Hochschule in die Förderung der Studienstiftung des deutschen Volkes aufgenommen.
Zu gewinnen gibt es in der 1. Runde Urkunden für erste, zweite und dritte Preise oder eine Anerkennungsurkunde, wenn mindestens eine Aufgabe richtig gelöst worden ist. Alle ersten bis dritten Preisträgerinnen und Preisträger dürfen an der 2. Runde teilnehmen. Hier gibt es erste, zweite und dritte Preise, die neben Urkunden mit Geldpreisen bis zu 200 DM verbunden sind.
Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger der 2. Runde haben sich für die Teilnahme an der 3. Runde qualifiziert. In dieser Runde gibt es als Preisstufe nur den Bundessieg. Alle ersten Preisträger(innen) der 2. Runde, die zuvor schon einmal den Bundessieg errungen haben, sind automatisch wieder Bundessieger(innen). Für diese mehrmaligen Bundessieger (innen) setzt der Bundesminister einen Sonderpreis aus. Daneben winken Euren Schulen weitere attraktive Geldzuweisungen des Bundesministers, wenn Ihr in der ersten Runde be-

sonders erfolgreich gewesen wart. Als weitere Sonderpreise stellt der Verein Bildung und Begabung jedes Jahr für mehrere junge, qualifizierte Teilnehmer(innen) einen dreiwöchigen USA-Aufenthalt (einschließlich Sommerprogramm) bereit.

Wer noch mehr Informationen über den Wettbewerb – die Aufgaben, das Korrekturverfahren und die Bewertungsmaßstäbe – haben möchte, der kann an folgende Adresse schreiben: **Bundeswettbewerb Mathematik Geschäftsstelle**, Wissenschaftszentrum Ahrstraße 45 (oder Postfach 20 14 48), W-5300 Bonn 2.

Dort sind – gegen Einsendung eines adressierten und frankierten Rückumschlages (Drucksache 250 – 500 g) DIN C4 – auch die Ausschreibungsunterlagen und Lösungsbeispiele zu den Aufgaben erhältlich.

Die für Teilnehmer(innen) aus den neuen Bundesländern noch sehr ungewohnte Form des Ablaufs des BWM verursacht bei dem einen oder anderen von Euch manch zwiespältige Gefühle, wie erste Erfahrungen mit diesem Wettbewerb im Osten Deutschlands vermuten lassen. Eine kleine Ahnung davon gibt ein Bericht, den zwei erste Preisträger der 2. Runde aus Thüringen, **Sven Peyer** und **Dmitri Stübner** (von der Spezialschule Erfurt) an *alpha* geschickt haben. Beeindruckt erzählen sie darin vom ganzen Drumherum der Preisverleihung in Frankfurt/Main, wo sie – zusammen mit 20 anderen Siegern der 2. Runde aus Hessen, Rheinland-Pfalz und dem Saarland – einen Tag lang, großzügig von einem Tochterunternehmen einer großen Frankfurter Metallgesellschaft bewirtet worden sind.

Gefehlt hat es dort an nichts: Getränke zur Begrüßung, Werksbesichtigung, üppiges Mittagessen. Später dann mit Taxen zur Gesprächsrunde mit Teilnehmern, Lehrern und Verantwortlichen des BWM. Vor der eigentlichen Preisverleihung schnell noch ein Sektempfang. Zum Abschluß schließlich ein als "Imbiß" getarntes, prächtiges Abendessen.

Neu war für beide Teilnehmer sicher der Rummel um die Ehrung der Preisträger. Ungewohnt auch die – von beiden als "zu knapp" kritisierte – Art der Würdigung der eingereichten Arbeiten zu beiden Runden des Wettbewerbs. Aber eines scheint sich als verbindendes Merkmal von Teilnehmern aus Ost und West herauszuschälen, nämlich "immer erst auf den letzten Drücker mit der Bearbeitung der Aufgaben fertigzuwerden". Es ist nicht ohne Reiz, den ersten Eindrücken der beiden Erfurter Schüler einen ganz anderen Aufsatz gegenüberzustellen. Er stammt von Markus Bisanz aus Korntal bei Stuttgart. Der Württemberger ist mit dem BWM aufgewachsen, ist mehrmaliger Preisträger und Bundessieger gewesen und hat als Mitglied der deutschen Mannschaft bei der Internationalen Mathematik Olympiade in Peking 1990, einen dritten Preis erringen können.

Mittlerweile hat Markus Bisanz sein "Schülerdasein" beendet und studiert in Berlin Mathematik und Islamwissenschaften. Er möchte (noch) zögernden Interessenten unter Euch zur Teilnahme an kommenden Runden des BWM ermuntern.

Hier also sein launiger Bericht.

"Once upon a time ...".

Es war damals in der achten Klasse, als ich auf Anregung meines Mathe-Lehrers die Aufgaben der ersten Runde des BWM '85 in Händen hielt, um mich daran zu probieren. Je mehr es dem Einsendeschluß, dem 1. März, entgegen-

Die Bundessieger bei der Preisverleihung

Auf dem Bild sind zu sehen (von links nach rechts): Prof. Dr. Günter Pickert, Vorsitzender des Kuratoriums des Bundeswettbewerbs Mathematik, Senator a. D. Walter Rasch (zweite Reihe), Vorsitzender des Vereins Bildung und Begabung e. V., Prof. Dr. Rainer Ortleb, Bundesminister für Bildung und Wissenschaft, Thomas Gleim (zweite Reihe), Andreas Winter, Tomas A. Klenke, Marten Fels, Jan Kneißler, Hugo Leicht, Staatssekretär im Kultusministerium Baden-Württembergs, Michael Kuß, Markus Spitzweck, Dr. Hartmut Rahn, Generalsekretär der Studienstiftung des deutschen Volkes, Dr. Peter Weber, stellvertretender Hauptgeschäftsführer der IHK Karlsruhe, Bodo Laß, Bernhard Hanke, Christoph Bergemann, Michael Mengler, Marc Nardmann, Bernd Strüber, Walter Hofstetter. Soweit bei den Namen nichts dabei steht, handelt es sich um Bundessieger. ***Foto: Fotostudio Querbach***

Nun sollt Ihr Gelegenheit bekommen, Eure Fähigkeiten an Aufgaben früherer Runden des BWM auf die Probe zu stellen. Darunter befinden sich auch Trainingsaufgaben aus Klausuren zur Vorbereitung bundesdeutscher Mannschaften auf Internationale Mathematik-Olympiaden. Den Auftakt macht ein Problem aus der 1. Runde des Jahres 1987, "meine erste vollständig gelöste Aufgabe", wie Markus Bisanz schreibt.

1. Es sei p eine Primzahl größer als 3 und n eine natürliche Zahl; außerdem habe p^n in der Dezimalschreibweise 20 Stellen. Man zeige, daß hierin mindestens eine Ziffer mehr als zweimal vorkommt.

2. Gegeben ist ein Stück Papier. Es wird in acht oder zwölf beliebige Stücke zerschnitten. Jedes der entstandenen Stücke darf man wieder in acht oder zwölf Stücke zerschneiden oder unzerschnitten lassen, usw.
Kann man auf diese Weise 60 Teile erhalten? Zeige, daß man jede beliebige Anzahl, die größer als 60 ist, bekommen kann!
(1. Runde 1970)

3. Die Oberfläche eines Fußballs setzt sich aus schwarzen Fünfecken und weißen Sechsecken zusammen. An die Seiten eines jeden Fünfecks grenzen lauter Sechsecke, während an die Seiten eines jeden Sechsecks abwechselnd Fünfecke und Sechsecke grenzen. Man bestimme aus diesen Angaben über den Fußball die Anzahl seiner Fünfecke und seiner Sechsecke. (1. Runde 1983)

4. In einem Quadrat mit der Seite 7 sind 51 Punkte markiert. Es ist zu zeigen, daß es unter diesen Punkten stets drei gibt, die im Innern eines Kreises mit Radius 1 liegen. (2. Runde 1972)

5. Eine Kugel wird von allen vier Seiten eines räumlichen Vierecks berührt. Man beweise, daß alle vier Berührpunkte in ein und derselben Ebene liegen. (2. Runde 1984)

6. Gesucht werden drei natürliche Zahlen a, b, c, bei denen das Produkt von je zweien bei Division durch die dritte den Rest 1 läßt.
Man bestimme alle Lösungen. (2. Runde 1990)

7. Man entscheide durch Beweis, ob es möglich ist, neun quadratische Flächenstücke mit den Seitenlängen 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 und 18 lückenlos zu einem Rechteck aneinanderzulegen, ohne daß sich Flächenstücke überlappen. (Prüfungsjahrgang 1979)

8. Bestimme das Produkt aller Teiler von 1980^n für $n \in \mathbb{N}$ (a ist Teiler von b, wenn $b/a \in \mathbb{N}$).
(Prüfungsjahrgang 1981)

9. Zeige, daß $n^3 + m^3 + 4$ für $n, m \in \mathbb{N}$ keine Kubikzahl sein kann. (Prüfungsjahrgang 1985)

Die Lösungen findet Ihr im nächsten alpha-Heft!

Nachsatz: Schreibt mir, wenn es an Eurer Schule, in Eurer Stadt, in Eurem Bundesland, etwas Berichtenswertes in Sachen Mathematikwettbewerb gibt. Schickt mir auch Eure Aufgaben und Lösungen. Paul Jainta, Werkvolkstraße 10, W-8540 Schwabach.

ging, umso intensiver und zeitaufwendiger wurde meine Suche nach den Lösungen und später – nicht weniger intensiv- auch deren Ausformulierung. Es durfte nämlich kein Schritt fehlen, der zur Lösung notwendig war. Schlußendlich konnte ich dann doch voller Stolz meine eigenhändig getippten Lösungen zum letztmöglichen Termin in den Umschlag stecken. Ich lief noch schnell zur Post, um auch ja den richtigen Tagesstempel zu bekommen.

In jener Zeit hatte uns auch unser Lehrer immer mal wieder etwas über den Wettbewerb und seine damaligen Gewinner erzählt. Das führte auch dazu, daß mir diese "obere Schicht" der Wettbewerbssieger als "geistig" unerreichbar fern vorkam, so 'ne Art Wunderkinder, denen die Mathematik schon in die Wiege gelegt worden war. Aber ich wollte ja schließlich gar nicht die großen Erfolge, sondern nur mal ein bißchen auf der unteren Ebene ein Erfolgserlebnis haben.

Unterdessen wartete ich gespannt auf die Entscheidung der Korrektoren. Anfang Juni trudelte sie ein ... und ich war bitter enttäuscht: Alle von mir bearbeiteten Aufgaben waren in der Kommentarspalte "erhebliche Lücke oder schwerer Fehler" angekreuzt. Das dämpfte meinen Eifer erst einmal ungemein und im darauffolgenden Jahr konnte ich die Aufgaben überhaupt nicht lösen. Der "große Wurf" gelang mit dafür im Jahr 1987. Meine dreimonatige Beschäftigung mit den Aufgaben brachte mir erste Früchte ein: einen 1. Preis in der 1. Runde. Während ich aber vor der 2. Runde noch kapitulieren mußte, schaffte ich dann wieder ein Jahr später auch hier einen 1. Preis. Jedesmal war jedoch eine Menge Geduld vonnöten, um auch wirklich hart an der Lösung der Probleme dranzubleiben. Bisweilen kam es tatsächlich vor, daß mir der entscheidende Lösungsgedanke wie ein Geistesblitz im Traum oder bei irgendeiner anderen Tätigkeit einfiel. Je mehr ich aber andere Teilnehmer kennenlernte, denen es ähnlich wie mir erging, umso mehr verschwand auch der Mythos vom "Wunderkind". Fast jeder hatte sich seine Lösungen mühsam erarbeiten müssen, wobei man natürlich im Lauf der Zeit routinierter wird, ohne Zweifel. Seltsamerweise entwickelte nahezu jeder am Anfang die Vorstellung, unter den vielen "Intelligenzbestien" sich etwas deplaziert wiederzufinden, was dann aber glücklicherweise doch nicht eintraf. In der 3. Runde (bei mir erstmalig im Wettbewerbsjahr 88) war – statt der Bearbeitung von 4 Aufgaben – ein Gespräch mit meist zwei Prüfern angesagt. Diese hatten später über einen Bundessieg zu entscheiden. Den Reiz dieser dritten Runde macht weniger das mit Spannung erwartete Ergebnis aus. Er liegt vielmehr im Zusammentreffen mit all den anderen Kandidaten: Gemeinsam verbringt man zwei Tage im Januar in einer Unterkunft. Während dieser Zeit hört man Vorträge (anderer Teilnehmer), ansonsten steht die restliche Zeit – bis auf das Prüfungsgespräch – zur freien Verfügung (manche nutzen sie für Nachtwanderungen etc.). Die Prüfung findet über beide Tage verteilt statt, wobei die Glücklicheren ihren Gesprächstermin gleich zu Beginn haben. Dann ist der Kopf frei für all die schönen Dinge danach. Falls man mal zu Grüppchen stoßen sollte, in denen gefachsimpelt wird ... Nur keine Bange! Meist kennen die anderen gerade einmal zwei oder drei Fachwörter mehr und das ist dann auch schon ihr ganzer Vorsprung! In diesem Jahr 1989 gehörte ich zwar nicht zu den Bundessiegern, schaffte dafür aber im nächsten Jahr den Sprung in die bundesdeutsche Mannschaft zur Internationalen Mathematik Olympiade in Peking 1990. Aber das ist ein anderes umfangreiches Kapitel.

Zusammengefaßt läßt sich also sagen: Aller Anfang s c h e i n t schwer! Das Bilderbuch-Ideal von der mathematischen Elite gibt es nicht. Man muß nur genügend Sitzfleisch am Anfang entwickeln. Es ist nie zu spät, solange man noch Schüler ist, ein erstes Mal mitzumachen. Nur Mut also und keine Angst vor Mißerfolgen zu Beginn!

Markus Bisanz

Hinweis: Die Aufgaben der 1. Stufe der 32. OJM werden in der zweiten Septemberwoche vom Schroedel-Schulbuchverlag Hannover an die Schulen versandt.

Schach-Resonanz bei jung und alt

Beachtliche Resonanz bei jung und alt fand wiederum der 9. alpha-Schachwettbewerb unter den Schachfreunden der alpha-Leser. Die Aufgaben Nr. 1 bis 5 zeigten durch die Anordnung der Figuren auf dem jeweiligen Schachbrettdiagramm als Referenz an den Titel der Zeitschrift in symbolischer Form die Buchstaben A, L, P, H und A. Ein einfaches Beispiel dafür, daß Schachaufgaben nicht nur Wesensmerkmale des Rätsels und der Logik enthalten, sondern auch durch künstlerische Elemente geprägt werden. Deshalb sollte die Umsetzung des Wettbewerbs in Schach-AG's, wie sie Herr Norbert Bös in Ludwigshafen-Oggersheim oder Herr Hoft in Hohen-Demzin praktizierten noch mehr "Schule machen".

Lösungen

1 1. Da3 K:f4
2. Df8 matt.
"A" – von J. Fokin ("64-Schachrundschau", 1981).

2 1. Sa5 Ka1/Ka3
2. Lc3/Sc4 matt.
"L" – Diese Aufgabe stammt vom Autor (H. R.) als Urdruck für "alpha" nach einer Vorlage von H. Wagner ("Die Schwalbe", 1938).

3 1. Lf5 (droht 2. Tc5 matt)
1. ... e:d3/S:f5
2. Tc5+/Dc4+ K:d4/Kd6
3. Lf2+/S:e4+ Te3/T:e4
4. Sb3/Lb4 matt

1. ... Sb7
2. Db5+ Kd6/K:d4
3. S:e4+/Tc4+ T:e4/Kd3, Ke3
4. Dd7/Db3 matt.
"P" – Bereits im Jahre 1867 komponierte I. Schumow (1800-1893) diesen Vierzüger. Zu jedem Buchstaben des russischen Alphabets kreierte er eine Schachaufgabe. Eine bemerkenswerte Leistung zur damaligen Zeit.

4 1. Dd8 d:e5/K:e5/Kc5
2. Db6/Df6/Db6/ matt.
"H" – Von J. Fokin ("64-Schachrundschau", 1981).

5 1. Db8 Kc5
2. Db6 matt.
"A" – ebenso wie die Aufgaben Nr. 1 und Nr. 4 von Juri Fokin ("64-Schachrundschau", 1981).

6 1. Sg5 (droht 2. D:d5 matt)
1. ... S:f3/Sf4/D:c5/d:c4
2. S:f3/D:f4/De3/De4 matt.
In der preisgekrönten Aufgabe von H. Hermanson ("Die Schwalbe", 1967) verführt der Se4 zu Scheinlösungen, z. B. 1. Sec3 S:f3/Sf4
2. Se2/D:e3 matt, aber 1. ... D:c5!,
oder
1. Sd2 S:f3/D:c5
2. Se2/D:e3 matt, aber 1. ... Sf4!

7 1. Df8 Ke4/K:e5/Kg5/Kg4
2. Ke6/Dc5+/Db4/Dh6 Kd4/Ke4/Kh5(Kf5)/Kf5
3. Db4/f3/Dh4(Df4)/Df4 matt.
Ein effektvoller Schlüsselzug, der dem schwarzen König drei weitere Fluchtfelder freigibt, zeichnet den mit einem 1. Preis bedachten Dreizüger von V. Cisar ("Hampstead and Highgate Express", 1909) aus.

8 1. Ta1 e5/Kd5/Kc7
2 Tc1/Tc1/Tc1+ e4/Ke5/Kb7
3. Tc6+/Df8/Db5+ Kd5/Kd5, Kd4/Ka8
4. D:e4/Dc5, Dd6/Ta1 matt.

1. ... Ke5/Kc5
2. Dd8/Tc1+ Kf5/Kb bel., Kd bel.
3. Ta6/Db8+, Db8+ Ke5J, e5/bliebig, Ke5
4. Ta5, Df6/Ta1, Tc5 matt.
In dieser Aufgabe von Günther Jahn ("Main-Post", 1971) kommt Sam Loyds Aussage "Wahre Schwierigkeit ist die Verkörperung des Unerwarteten in verhältnismäßig einfacher Form" gut zum Ausdruck. Die unerwartete Entfernung des Turmes im Schlüsselzug wirkt verblüffend auf den Löser.

Unter den Einsendern, die alle acht Aufgaben korrekt gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Michael Fritzsche (Burgdorf),
Sandra Geupel (Dresden),
Jens Körner (Luppa),
Yvonne Langer (Eisenach) und
Roland Voigt (Böhlen).

Desweiteren wurden Preise unter allen Teilnehmern verlost, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten:
Jörg Dürr (Plochingen),
Simone Jörs (Groß-Köthel),
Matthias Loesdau (Landshut),
Michael Loos (Wansdorf) und
Daniel Wiegand (Essen 14).

Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch!

An dieser Stelle sei der Sportverlag GmbH Berlin gedankt, die als einer der populärsten Verlagsgesellschaften für Sport- und Schachliteratur wiederum interessante Bücher der "alpha" zur Verfügung stellte.
Zum Schluß noch ein Kompliment an den Nestor unter den "alpha"-Lösern, Herrn Fritz Rauhe! In seinem 88. Lebensjahr fand er wiederum Spaß und Freude am "alpha"-Schachwettbewerb.
In der Hoffnung, daß Ihr beim 10. Wettbewerb wieder mit von der Partie seid, verbleibt Euer Schachfreund *Harald Rüdiger*.

TETRAPACK – ein Extremalproblem

Wie muß ein quaderförmiger Behälter mit 200 ml Rauminhalt beschaffen sein, der aus einem möglichst kleinen rechteckigen Stück gefaltet wird?

Ralf und Reni aus Rostock genießen in der großen Pause ihre Erfrischungen: Fruchtsaft und Schokotrunk. Die Mutter hat ihnen die Getränke in den beliebten Pappkartons mit dazugehörigen Trinkröhrchen mitgegeben. Mit diesen Kartons, den sogenannten Tetrapacks, kann man so wunderbar knallen, nachdem sie leergetrunken sind. Ralf und Reni aber falten ihre Tetrapacks sorgfältig zusammen und nehmen die zusammengelegte Pappe immer mit nach Hause. Als Reni heute ihren Fruchtsaft getrunken hat, zieht sie die umgelegten Pappdreieecke des Tetrapacks hoch und sagt: "Diese Ohren an dem Tetrapack sind doch umsonst, die reinste Verschwendung!" Ralf meint, daß man die Form des Pappbehälters so gestalten müßte, daß die überstehenden "Ohren" eine möglichst kleine Fläche besitzen. "Nein", erwidert Reni, "darum kann es nicht gehen. Stell dir doch einmal einen Behälter von der Form einer Schokoladentafel vor, da sind die Ohren kleiner. Aber ich schätze, da steckt viel mehr Pappe drin als in unseren Tetrapacks!" "Okay", sagt Ralf, "laß uns überlegen, wie ein quaderförmiger Behälter beschaffen sein muß, damit in ihn 200 ml hineingehen und damit er aus einem möglichst kleinen rechteckigen Stück gefaltet werden kann. Die überstehenden Ohren beachten wir dabei mit." Reni erinnert sich an den Mathe-Zirkel. Dort hat ihnen ihr Lehrer einmal erklärt, daß bei vorgegebener Oberfläche unter allen Quadern der Würfel das größte Volumen besitzt. Ihrer Meinung nach sollte deshalb der Pappbehälter würfelförmig gestaltet werden. "Dann werden aber auch die Ohren ganz schön groß", gibt Ralf zu bedenken. Er legt dabei seinen Tetrapack zusammen und erhält folgende (doppelte) Pappfläche. Er bezeichnet die Stellen des Rechtecks mit a und b und die Breite der schmalen Streifen mit z. Ralf stellt fest: "Es geht darum, die Größen a, b, z (in cm) so festzulegen, daß $(a-2z)\cdot(b-2z)\cdot 2z = V$; $V = 200\ cm^3$ ist und $F = 2ab$ möglichst klein wird. Für 2z setze ich x, dann ist also $F(a,b) = 2ab$ möglichst klein zu machen unter der Bedingung $(a-x)\cdot(b-x)\cdot x = 200\ cm^3$. Von einer Überlappung der Pappe an den Klebestellen wollen wir absehen. Unser Tetrapack ist 6 cm breit, 8,35 cm hoch und 4 cm dick. Demnach gilt für ihn a = 10 cm und b = 12,35 cm, somit ist $V = 200{,}4\ cm^3$ und $F(a,b) = 247\ cm^2$.

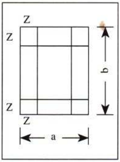


Abb. 1

Kann man es besser machen?

Ich schlage vor, die Variable b mit Hilfe der Variablen a und x auszudrücken:

$$b = x + \frac{200}{(a-x)x}.$$

Gesucht ist dann ein möglichst kleiner Wert von

$$f(a,x) = 2ab = 2ax + \frac{2\cdot 200a}{(a-x)x}.$$

Aus **Abb. 1** entnimmt man als Einschränkung für x = 2z: $0<x<a$; $0<x<b$. Damit ist der Nenner in der Darstellung von f(a,x) für die zulässigen x ($0<x<a$) definiert."

"Eine komplizierte Sache bleibt es trotzdem", verzweifelt Reni fast, "die Werte von f verändern sich ja laufend, und zwar sowohl mit a als auch mit x." Ralf probiert mit dem Taschenrechner: "Wenn der Tetrapack ein Würfel ist, so gilt

$$(a-x) = (b-x) = x = \sqrt[3]{200},$$

also ungefähr x = 5,85 cm. Mithin ist a = b = 11,70 cm und damit $F(a,b) \approx 273{,}60\ cm^2$. Das ist eine größere Fläche als die des zusammengefalteten Tetrapacks. Der Würfel stellt nicht die beste Lösung dar!"

Weil das viele Probieren aber ermüdet, schlägt Ralf vor, den Behälterbau mit verschiedensten Seitenlängen auf seinem Computer zu simulieren.

Dazu will er die Länge a aller Werte von 1 + h, 1 + 2h, 1 + 3h ... bis 20 und die Länge x aller Werte von 1, 1 + h, 1 + 2h, ... bis a-h annehmen lassen. Die Schrittweite h soll zuerst 0,1 (cm) sein.

Das jeweils zugehörige f(a,x) wird berechnet. Unter den endlich vielen berechneten Funktionswerten f(a,x) soll der Computer den kleinsten bestimmen und uns die entsprechenden Werte für a und x (und dazu b) anzeigen. Das realisiert folgendes BASIC-Programm:

```
10 MIN = 1000
20 INPUT H
30 FOR A = 1 + H TO 20 STEP H
40 FOR X = 1 TO A-H STEP H
50 B = X + 200/X/(A-X)
60 OB = A*B
70 IF OB>MIN THEN 120
80 MIN = OB
90 AM = A
100 BM = B
110 XM = X
120 NEXT X
130 NEXT A
140 PRINT "A = ";AM,"B = ";BM,
    "X = ";XM,"OB = ";MIN
```

Ralf erhält a = 11,1 cm, b = 11,0 cm, x = 3,7 cm und $f(a,x) = 244{,}30\ cm^2$. Dann läßt er das Programm noch einmal mit der Schrittweite h = 0,01 cm rechnen.

Dabei sind sehr viele Varianten zu berücksichtigen, sein Computer arbeitet die ganze Nacht und zeigt dann die besten Werte an: a = 11,05 cm, b = 11,054196 cm, x = 3,68 cm und $f(a,x) = 244{,}2977362\ cm^2$.

Ralf und Reni wenden sich an ihren Mathematiklehrer Herrn Richter. Sie möchten wissen, ob man dieses Ergebnis auch ohne Computer gewinnen kann. Herr Richter erklärt, daß die Bestimmungen von kleinsten und größten Funktionswerten Extremwertaufgaben genannt werden. Sie lassen sich mit Methoden der Differentialrechnung lösen, aber das ist noch zu schwierig für Ralf und Reni! Weil die Schüler aber so interessiert an dem Problem des Tetrapacks sind, erklärt der Lehrer ihnen diese Methode für das konkrete Beispiel:

Wir nehmen an, $\bar{a}$ und $\bar{x}$ realisieren das Minimum der Funktion f(a,x) unter der Bedingung $0<x<a$. Dann vergleichen wir zuerst die Funktionswerte zu $\bar{a}, \bar{x}$ mit denen zu benachbarten Werten a, x. Dazu sei $h \neq 0$ eine beliebige, noch nicht genauer festgelegte reelle Zahl, mit der Einschränkung $\bar{a} + h > \bar{x}$. Als Vergleichswerte wählen wir $\bar{a} + h$ und $\bar{x}$

Folglich muß gelten $f(\bar{a}+h, \bar{x}) \geq f(\bar{a}, \bar{x})$.

Mithin ist

$$(\bar{a}+h)\bar{x} + 200\frac{\bar{a}+h}{(\bar{a}+h-\bar{x})\bar{x}} \geq \bar{a}\bar{x} + 200\frac{\bar{a}}{(\bar{a}-\bar{x})\bar{x}}$$

und daher

$$h\bar{x}^2(\bar{a}-\bar{x})(\bar{a}+h-\bar{x}) + 200(\bar{a}+h)(\bar{a}-\bar{x})$$

$$\geq 200\,\bar{a}(\bar{a}+h-\bar{x}).$$

Es folgt

$$h\left(\bar{a}^2\bar{x} - 2\bar{a}\bar{x}^2 + \bar{x}^3 - 200\right) + h^2\left(\bar{a}\bar{x} - \bar{x}^2\right) \geq 0.$$

Für h>0 ergibt sich

$$\bar{a}^2\bar{x} - 2\bar{a}\bar{x}^2 + \bar{x}^3 - 200 + h\left(\bar{a}\bar{x} - \bar{x}\right) \geq 0,$$

und, weil h beliebig klein gewählt werden kann, auch

$$\bar{a}^2\bar{x} - 2\bar{a}\bar{x}^2 + \bar{x}^3 - 200 \geq 0,$$

Für h<0, |h| genügend klein, folgt entsprechend

$$\bar{a}^2\bar{x} - 2\bar{a}\bar{x}^2 + \bar{x}^3 - 200 \leq 0.$$

Also ist

$$\bar a^2 - 2\bar a\bar x + \bar x^2 - \frac{200}{\bar x} = 0$$

und daher

$$\bar a = \bar x + \sqrt{\frac{200}{x}}.$$

Das zugehörige $\bar b$ wird dann

$$\bar b = \bar x + \frac{200}{\bar x\sqrt{\frac{200}{\bar x}}} = \bar a.$$

Jetzt versuchen wir, eine Bedingung für $\bar x$ herzuleiten:

Es ist

$$f(\bar a, x) = \bar a x + 200\frac{a}{x(\bar a - x)} = x^2 + \sqrt{200x} +$$

$$+ 200 + \frac{x + \sqrt{\frac{200}{x}}}{\sqrt{200x}} =$$

$$= x^2 + \sqrt{200x} + \frac{1}{x}\left(x + \sqrt{\frac{200}{x}}\right)\sqrt{200x}$$

$$= x^2 + 2\sqrt{200x} + \frac{200}{x}$$

$$= \left(x + \sqrt{\frac{200}{x}}\right)^2.$$

Daher wird $f(\bar a, x)$ genau für die x minimal, für welche die Funktion

$$g(x) = x + \sqrt{\frac{200}{x}}$$

den kleinsten Wert annimmt. Das ist für

$$\bar x = \sqrt[3]{50}$$

der Fall. Das folgt aus einem Satz, den ihr in der alpha 23 (1989) Heft 1, Seite 4 findet. Die Funktion g hat genau diese eine Minimumstelle. Der Satz ist mit elementaren Mitteln bewiesen worden!

Man kann dieses Resultat aber auch direkt herleiten. Dazu sei $k \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl. Weil g das Minimum bei x annehmen soll, muß

$$\bar x + k + \sqrt{\frac{200}{\bar x + k}} \ge \bar x + \sqrt{\frac{200}{\bar x}}$$

sein. Hieraus folgt

$$k\sqrt{\bar x(\bar x + k)} + \sqrt{200\bar x} \ge \sqrt{200(\bar x + k)}$$

sowie

$$k^2(\bar x + k)\bar x + 2k\sqrt{200\bar x^2(\bar x + k)} \ge 200k.$$

Für $k > 0$

$$2\sqrt{200\bar x^2(\bar x + k)} \ge 200\,\text{cm}^3 - k(\bar x + k)\bar x$$

und

$$800\bar x^3 + k\left[800\bar x^2 + 400\bar x(\bar x + k) + k\bar x(\bar x + k)\right]$$

$$\ge 200^2\,\text{cm}^3.$$

Wir können k genügend klein wählen, daher muß $\bar x^3 \ge 50$ sein. Für $k < 0$ schließt man auf $\bar x^3 \le 50$. Folglich muß

$$\bar x^3 = \sqrt[3]{50}\,\text{cm}$$

sein. Herr Richter erwähnt, daß eine minimale Fläche nur bei einem Tetrapack mit den Seiten

$$\bar x = \sqrt[3]{50} \approx 3{,}7\ (\text{cm})$$

und

$$a' = b' = \sqrt{\frac{200}{x}} \approx 7{,}41\ (\text{cm})$$

zu erwarten ist, wobei

$a' = \bar a - \bar x$ und $b' = \bar b - \bar x$

gesetzt wird. Besitzt allgemein das Tetrapack das Volumen V, so erhält man für den Fall minimaler Fläche

$$\bar x = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$$

und $a' = b' = \sqrt{\frac{200}{x}} \approx 7{,}41\ (\text{cm}).$

Offenbar ist dann

$$\bar x = \frac{a'}{2} = \frac{b'}{2}$$

Wenn es also einen Tetrapack mit der geforderten Minimaleigenschaft gibt, so muß es ein Quader mit quadratischer Ansicht sein, dessen Tiefe gerade die Hälfte von Höhe bzw. Breite ist. Man muß sich jedoch noch überlegen, daß wirklich ein Minimum der Pappfläche existiert. Das kann mit mathematischen Methoden geschehen, Ralf und Reni akzeptieren das aber auch aus der Anschauung heraus. Eines verblüfft sie jedoch, die kleinste Oberfläche eines Tetrapacks mit dem Volumen 200 ml beträgt 244,30 cm². Der handelsübliche Tetrapack hat eine Pappfläche von ca. 247 cm², das ist zwar nicht optimal, aber nur geringfügig größer als das Optimale. Einsparen kann man nur ungefähr 1 % der Pappe. Damit hatten Ralf und Reni nicht gerechnet.

Aufgabe: Wir haben einen Tetrapack mit 1 Liter Fruchtsaft mit den Abmessungen 6,2 cm · 9,5 cm · 17 cm gekauft. Wie ist ein Tetrapack mit 1 l Volumen zu gestalten, so daß möglichst wenig Pappe verbraucht wird?

Literatur:

W. Schmidt: Lösen von Extremwertaufgaben mit elementaren Mitteln. alpha Heft 1/89, Seite 3 – 7

Werner Schmidt

Gefaltete Maxima und Minima

Um Fragen nach "dem größten" oder "dem kleinsten" zu beantworten, braucht man in der Regel Kenntnisse aus dem Mathe-Unterricht der Sekundarstufe II. Die dort behandelten sogenannten Extremwertaufgaben werden mit einem Kalkül (einer abzuarbeitenden Vorschrift) gelöst, der – einmal verstanden – natürlich an Reiz verliert. Anders ist die Situation, wenn diese Methode nicht bekannt ist oder wenn sie nur sehr umständlich angewendet werden kann. Dann erweist sich, wer zu den wahren Problemlösern gehört, ist doch dann keine Vorschrift angehbar, nach der die Aufgaben "abgearbeitet" werden könnten.

Über verschiedene Methoden wurde in alpha schon berichtet, andere sind jedem vertraut, wenn sie vielleicht in diesem Zusammenhang auch nicht gleich auf der Hand liegen:

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte A und B ist diejenige entlang der Geraden durch A und B. (*)

Besonders deutlich wird die Lösung derartiger Aufgaben, wenn man sie *faltend bearbeitet;* d. h. die einzelnen Schritte nicht nur aufzeichnet bzw. mit gespitztem Bleistift konstruiert, sondern Faltkonstruktionen (s. auch alpha 1 und 2, 1992) ausführt. Bestimmte Beziehungen zwischen einzelnen geometrischen Objekten können von ihrem Entstehen her besser verständlich werden.

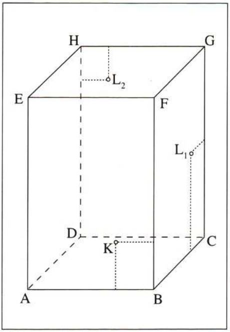


Abb. 1

Beginnen wir mit einem sehr einfach anmutenden Problem, *nämlich demjenigen, das vor einem Marienkäfer K steht, wenn er sich auf einem quadratischen Prisma befindet und auf kürzestem Wege eine Blattlaus L fangen will, die sich auf einer anderen Seitenfläche aufhält* (**Abb. 1**).

Untersuchen wir zuerst die Positionen der Laus L_1. Natürlich könnten diejenigen Leser, die das Differentialkalkül kennen, dem Käfer einen kürzesten Weg berechnen, aber warum so umständlich. Fertigen wir uns doch ein Papiermodell des Netzes des Prismas und denken an (*). **Abb. 2** zeigt die einfache Lösung, aus der wir noch – ganz nebenher – erkennen können, daß sich solche kürzesten Wege über den Mantel eines prismatischen Körpers durch gleiche Schnittwinkel mit den Kanten des Prismas auszeichnen.

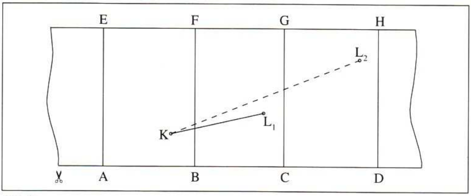


Abb. 2

Doch schon Position L_2, führt zu weiteren Schwierigkeiten, denn der Käfer kann auf zwei prinzipiell unterschiedlichen Wegen zum Ziel gelangen, indem er sich zuerst nach links oder nach rechts wendet. Die unbedachte Anwendung unserer Methode kann zu einem falschen Ergebnis führen, wenn das betreffende Netz des Körpers nicht geeignet gewählt wurde, oder anders ausgedrückt, wenn die Oberfläche des Körpers zur Erzeugung des Netzes an unbrauchbaren Stellen aufgeschnitten wurde. Prinzipiell müssen wir alle in Frage kommenden (Teil-)Netze nach der kürzesten Entfernung untersuchen.

Aufgabe 1: Wir denken uns ein quadratisches Prisma aus Kästchenpapier gefertigt, 4 cm hoch, 4 cm breit und 10 cm lang. K befinde sich auf der vorderen quadratischen Fläche 1 cm über der Mitte der unteren Seite. L ist auf der entgegengesetzten Seitenfläche zu finden, 1 cm unter der Mitte der oberen Kante.
Wie verläuft der kürzeste Weg von K nach L? (Beachte dabei die Symmetrie der Anordnung!)

Für das folgende Problem benötigen wir einen kleinen Bogen Papier, den wir etwa in der Mitte einmal falten. Darauf kennzeichnen wir zwei Punkte R und S, die für *einen erschöpften Reiter und sein Reittier R stehen, die auf kürzestem Wege dem Stall S zustreben, sich aber zwischendurch noch am nahegelegenen Fluß f, den die Faltkante veranschaulichen soll, erfrischen wollen* (**Abb. 3**).

Wenn die Markierungen für R und S auch auf dem darunterliegenden Teil des Blattes sichtbar sein sollten, liegt die mögliche Lösung im wahrsten Sinne des Wortes auf der Hand: Entfalte und verbinde R mit dem Bild von S (oder S mit dem Bild von R) entlang einer Geraden. Der entstehende Schnittpunkt T dieser Geraden mit f ist diejenige Stelle am Fluß, die angelaufen werden muß. Durch erneutes Falten überzeugt man sich, daß die Strecke ST mit der Strecke ST zusammenfällt, d. h. insbesondere, daß sie gleichlang sind.

Nachdem wir diese Aufgabe faltend gelöst und gründlich durchdacht haben, können wir uns an eine etwas komplexere wagen.

Durch zwei Falten f_1 und f_2, die einander in einem Punkt S schneiden, ist ein spitzer Winkel gegeben, in dessen Winkelraum ein Punkt P liegt.

Man falte das umfangskleinste Dreieck PQR mit $Q \in f_1$ und $R \in f_2$.

Unser Vorgehen wird sich am gerade beschriebenen orientieren. Es empfiehlt sich, nach dem Zusammenfalten bei f_1 und f_2 den Punkt P z. B. mit der Zirkelspitze *durchzustechen.* Damit sind die Spiegelbilder P' und P an f_1 und P" von P an f_2 nicht nur deutlich markiert, sondern es ist auch leichter, eine Falte exakt durch P' und P" zu legen. Sie ist der Schlüssel zur Lösung: Die Schnittpunkte Q und R dieser Falte mit f_1 bzw. mit f_2 sind die gesuchten Punkte des umfangskleinsten Dreiecks PQR. Darüber hinaus erkennt man, daß die Länge des Umfangs mit der Länge von P'P" übereinstimmt (**Abb. 4**) Zum *Beweis*, der –

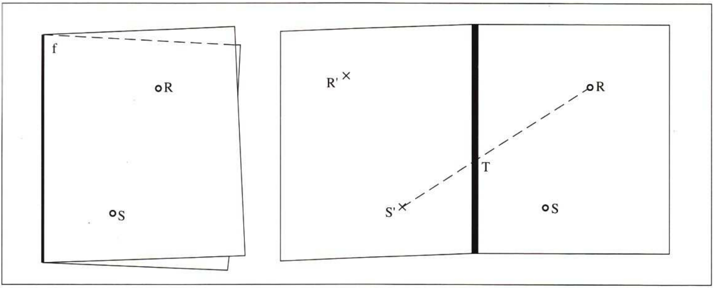


Abb. 3

wie man sagt – *indirekt* geführt wird, nehmen wir an, ein Punkt Q_1 habe die Eigenschaft, daß Δ PQ_1R einen kürzeren Umfang als Δ PQR hat. Anschließend wird sich ein *Widerspruch* (ein Fehler) zeigen. Dazu zeichnen wir Q_1 in unserer Faltarbeit ein, dazu die Strecken $P'Q_1$ und Q_1R. Damit ist ein Dreieck $P'Q_1R$ entstanden, in dem die Summe der Seitenlängen $P'Q_1$ und Q_1R *größer* als die Seitenlänge P'R ist. Der Umfang von PQ_1R ist also größer als derjenige von Δ PQR, was nun im Gegensatz zu unserer Annahme steht, daß Q_1 zu einem umfangskleineren Dreieck führt. Damit ist der indirekte Beweis geführt. Das Dreieck PQR ist tatsächlich dasjenige, das die geforderten Eigenschaften hat.

Beim abschließenden Faltproblem versagt allerdings die praktizierte Methode. Das Problem ist aber so einfach zu verstehen, daß es jeder experimentell (angenähert) lösen kann. Dazu nehmen wir *einen genormten Bogen, z. B. DIN A4, und legen eine Ecke auf die gegenüberliegende Längsseite. Wie entsteht die kürzeste Faltkante?*

Die experimentelle Lösung mit einem DIN A4-Blatt (21 cm x 29,7 cm) liefert einen Wert zwischen 27 cm und 27,5 cm. Für ein Vorgehen dieser Art ist auch ein interaktives Computer-Programm zur ebenen Geometrie vorzüglich geeignet. Ist eine Konstruktion für einen beliebigen Fall ausgeführt, können Ausgangsgrößen variiert werden, wobei die zu untersuchenden Objekte beobachtet (gemessen) werden. Als Beispiel sei hier GEOLOG (Autor G. Holland, Universität Giessen) angeführt. **Abb. 5** zeigt den Bildschirm mit dieser Konstruktion, wobei der Maßstab so gewählt wurde, daß das Rechteck ABCD Seitenlängen von 29,7 Einheiten und 21,0 Einheiten aufweist. Punkt P kann auf AB variiert werden. Die aktuellen Längen werden jeweils ausgegeben.

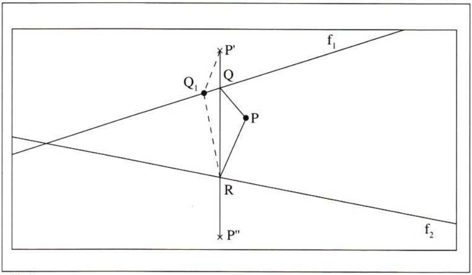


Abb. 4

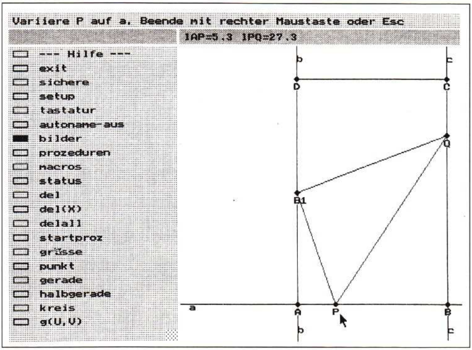


Abb. 5

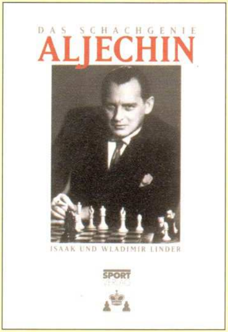
Aufgabe 2: Ermittele die Lage des Punktes auf der Schmalseite AB des DIN A4-Blattes, durch den die kürzeste Faltkante PQ verläuft, experimentell! Welche Vermutung über seine genaue Lage kann aufgestellt werden?

Christian Werge, Leipzig

Marktecke

Isaak und Wladimir Linder:

Das Schachgenie Aljechin



Der bekannte Großmeister und Schachjournalist Milan Matulović hat den wagemutigen Versuch unternommen, den besten Schachspieler aller Zeiten zu ermitteln. Das Ergebnis seiner wahrhaft titanischen Arbeit – der Jugoslawe hat u. a. jeweils 200 Partien der weltbesten Schachmeister analysiert – liegt jetzt vor: Dieser Rang im Schacholymp gebührt dem Russen Alexander Aljechin, der 1927 nach einem gigantischen Zweikampf über 34 Runden gegen den Kubaner José Raoul Capablanca den Weltmeistertitel erkämpfte und ihn dann – mit einer zweijährigen Unterbrechung (1935 – 1937) – bis zu seinem Tode behielt. In die Schachgeschichte ist Aljechin (1892 – 1946) vor allem als "Künstler" eingegangen. Seine tiefgründigen Pläne und seine unerschöpfliche Erfindungsgabe sind gewissermaßen die Visitenkarte des gebürtigen Moskauers, dessen Leben nicht nur am Schachbrett voller Höhenflüge und Abstürze war. In den Mittelpunkt ihrer fesselnden Biographie über Alexander Aljechin, der im November 1992 hundert Jahre alt geworden wäre, haben die Autoren deshalb nicht nur das schachliche Schaffen des unbestrittenen Genies gestellt.

Ihre geradezu besessene Spurensuche, vor allem in den russischen Archiven, ließ vielmehr das faszinierende Porträt eines einsamen Menschen – Alejechin starb im portugisischen Asyl – entstehen, dessen Charakter kompliziert und voller innerer Widersprüche war.

Mit der vorliegenden Aljechin-Biographie schließen Isaak und Wladimir Linder ihre aufsehenerregende Trilogie der Schachweltmeister in der "Geniereihe" des Berliner Sportverlages ab (José Raoul Capablaca, 1988, und Dr. Emanuel Lasker, 1991).

Isaak Linder, einer der vielseitigen Schachhistoriker der Gegenwart, hat bisher mehr als 20 Bücher veröffentlicht. Eine besonders positive Resonanz fand in Deutschland der Titel "Faszinierendes Schach" (Sportverlag 1986), in dessen Mittelpunkt ästhetische Probleme des königlichen Spiels stehen.

Isaak und Wladimir Linder:
Das Schachgenie Aljechin, Sportverlag, Berlin 1992;
272 Seiten, 150 Diagramme, 15 Tabellen, 12 Fotos, geb., DM 29,80,
ISBN 3-328-00495-5

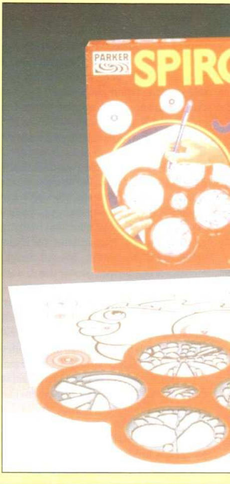
OH NO! MORE LEMMINGS

Endlich noch mehr Lemminge! 100 frische Denkaufgaben! Nach dem erfolgreichen Mathe-Denk-Knobel-Spaß LEMMINGS (s. alpha 1/92) gibt es OH NO! MORE LEMMINGS als Vollprogramm oder als Data-Diskette. Das Prinzip, den stur laufenden grünhaarigen Tierchen mittels Überlegung, gutem Auge oder Dreiecksberechnung den Weg zum Ziel zu ebnen, wurde beibehalten. Wieder Klettern, Springen, Bauen, Baggern, Graben und Sprengen sich die Lemminge mit Hilfe der vor dem Bildschirm sitzenden Knobel-Freaks den Weg frei.

Anfänger sollten sich zuerst LEMMINGS, das Urspiel, besorgen, denn der Schwierigkeitsgrad steigt bei Lemmings II sehr steil innerhalb der fünf Level. LEMMINGS-Profis wird das freuen. Den neuen 100 Rettungsversuchen dieser Staffel werden mit Sicherheit weitere Versuche folgen!

Hersteller: DMA 1991, Distributor: United Software, Typ: Denk-, Geometrie- und Geschicklichkeitsspiel, Handbuch: dreisprachig – das Spielprinzip wird in Form eines Comics erklärt. Hardware: 512 KB RAM, CGA, EGA, VGA,Tastatur, Soundkarte, Maus, Preis: 99,95 DM (als Vollprogramm, als Datendisk-Zusatz zum Ur-Programm vorr. 84,95 DM.

Text: H. Seitz/S. Hempel



Jeder Mensch der heutigen Zeit wächst von Kindheit an ganz selbstverständlich in eine Welt hinein, in der alle Maßeinheiten international einheitlich, dezimal untergliedert und ihre Definitionen und gegenseitigen Beziehungen durch übersichtliche physikalische Sachverhalte geregelt sind.

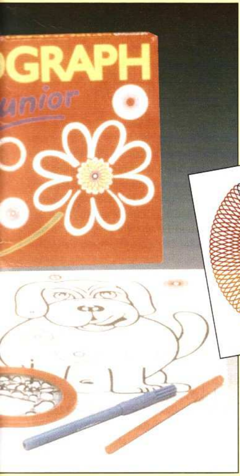
Nur aus historischen Büchern kann man noch etwas über die Mühen früherer Zeiten mit ihren von Ort zu Ort verschiedenen Zoll, Spannen, Ellen, Ruten, Klaftern, Meilen, Werst, ... erfahren. Wer ein wenig historisch interessiert ist, weiß vielleicht, daß unser Meter, ursprünglich definiert als zehnmillionster Teil der Entfernung vom Nordpol zum Äquator, eine Errungenschaft der Französischen Revolution von 1789 ist. Die von den fortschrittsstrunkenen französischen Bürgern von Anfang an erstrebte Internationalität wurde freilich erst viel später und schrittweise erreicht.

Nachdem z. B. Brasilien "schon 1862" das metrische System eingeführt hatte, schlossen 1875 17 Staaten die Meterkonvention, der nach und nach fast alle Staaten der Erde beitraten, manche aber erst vor kurzer Zeit. Was weiß man aber von den fast unüberwindlichen Schwierigkeiten, in den Wirren der Jahre nach 1789 durch eine neue, die bislang präziseste Gradmessung zwischen Barcelona und Dünkirchen, quer durch Krieg und Bürgerkrieg, das Meter mit der erwünscht hohen Genauigkeit festzulegen?

Der Verfasser des vorliegenden Romans, Mathematiker an der Pariser Universität, führt uns in einer bis zur letzten Seite spannenden Handlung, aber fundiert durch genaue Quellenstudien, durch die Mühen jenes Unternehmens. Wer das Buch gelesen hat, hat nicht nur viel über die praktische Durchführung großräumiger geodätischer Messungen mit den Mitteln des ausgehenden 18. Jahrhunderts und über das persönliche Leben der vier Helden jenes Unternehmens gelernt, sondern er hat auch eine neue Sicht auf den Alltag der Jahre nach der Französischen Revolution gewonnen, wie sie kaum ein Geschichtsbuch zu vermitteln vermag.

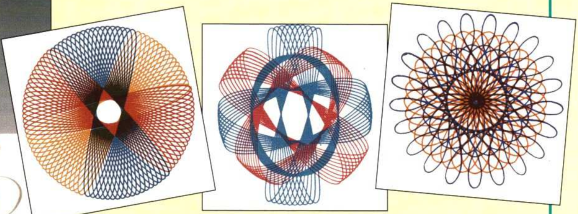
Frankfurt/New York: Campus-Verlag 1991, 292 Seiten, DM 48,-
(Aus dem Französ. von K. Jöken)
ISBN 3-593-34429-7.

Dr. P. Schreiber, Greifswald



Für Ästhetiker

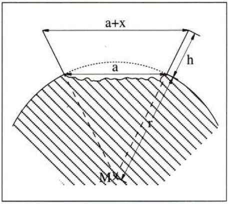
sind die Ergebnisse, welche man mit einem Spirographen erzielen kann, eine Augenweide.



Sowohl ein Juniorgerät als auch ein Spirograph für die fortgeschrittenen Künstler mit der ruhigen Hand sind von **Kenner Parker Toys Inc.** zu haben. Fragt doch einmal in den Spielwarenläden nach!

Lösungen

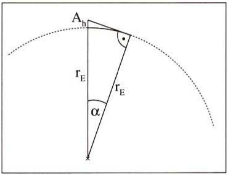
Die „Humber Estuary Bridge" (S. 4)



a = 1410 m
h = 162,5 m
r = 6370 km
Laut Strahlensatz gilt: $\frac{a+x}{a} = \frac{r+h}{r}$
Daraus folgt: $x = \frac{a \cdot h}{r} \approx$ 3,6 cm.

Die Kimm (S. 5)

a) Mit dem Radius $r_E = (360 \cdot 60 \cdot 1852) : 2\,\pi$ m folgt nach der Skizze



$A = r_E \cdot \alpha$ (α in Radiant!).
Für kleine Winkel gilt:

$$\alpha \approx \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{r_E}{r_E+A_h}\right)^2}$$

$$A = \frac{r_E}{r_E+A_h}\sqrt{(r_E+A_h)^2 - r_E^2}$$

$$A \approx \sqrt{2r_E \cdot A_h} = 3570 \cdot \sqrt{A_h}$$

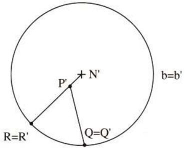
$$A = 3570 \cdot \sqrt{1{,}5}\,\text{m} = 4372\,\text{m}$$

Die Formel $A = 3{,}57\sqrt{A_h}$ (A in km; A_h Augenhöhe in m) wird übrigens in Seefahrerhandbüchern zur Bestimmung der Entfernung der Küste angegeben.
Entscheidend ist der Moment, in dem die weiße Brandung der Küste an der Kimm erscheint.

b) Die Kimm ist bei ruhiger See sehr scharf begrenzt, was sich bei nahezu punktförmigen Lichtquellen bemerkbar macht.
c) nein
d) Weil die Erdoberfläche an Land nicht die exakte Krümmung besitzt, von der Flora ganz abgesehen.

Der amerikanische Wanderfalter Monarch (S. 8)

1. Die Punkte P und N (Nordpol) und die durch das Innere der Erdkugel verlaufenen Strecken PQ und PR werden senkrecht in die Ebene des Breitenkreises b projeziert. Für die Längen $\overline{P'Q'}$ und $\overline{P'R'}$ der Bildstrecken P'Q' und P'R' gilt $\overline{P'Q'} > \overline{P'R'}$!



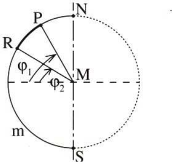
Hieraus und weil die Dreiecke PQP' und PRP' rechtwinklig sind, folgt mit dem Satz des Pythagoras

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{P'Q'}^2 + \overline{P'P}^2} > \sqrt{\overline{P'R'}^2 + \overline{P'P}^2} = \overline{PR}.$$

Da die Kreisbögen $\overset{\frown}{PQ}$ und $\overset{\frown}{PR}$ Teile von Kreisen mit dem gleichen Radius r sind und ihre Längen $\overline{\overline{PQ}}$ und $\overline{\overline{PR}}$ kleiner als πr sind, gilt damit $\overline{\overline{PQ}} > \overline{\overline{PR}}$.

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{360°} \approx 2900\,\text{km}.$$

Bei jeder Wanderung legen diese Schwärme von Monarchen einen Weg von mindestens 2900 km zurück.



Bemerkung: Auch andere Tag- sowie auch Nachtfalter sind Wanderschmetterlinge. So wandert z. B. der Admiral im Frühjahr einzeln oder in kleinen Schwärmen über die Alpen zu uns oder weiter nordwärts bis zum 62ten Breitengrad.

Die neu entdeckte Primzahl (S. 8)

1. 227832:(32·62) = 114,84.. 115 Seiten sind erforderlich.
2. Steht an der Einerstelle eine Zahl 2^n mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$ die Ziffer z, so haben die Zahlen 2^{n+1} und $z \cdot 2$ an der Einerstelle die gleiche Ziffer.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Ziffer an Einerstelle von 2^n	2	4	8	6	2	4	8	6	2	...
Ziffer an Einerstelle von 2^n-1	1	3	7	5	1	3	7	5	1	...

Die Ziffer an der Einerstelle von 2^n-1 ändert sich nicht, wenn n um ein Vielfaches von 4 vergrößert oder verkleinert wird. Wegen 756839 = 4 · 189709 + 3 haben die Zahlen $p = 2^{756839} - 1$ und $2^3 - 1 = 7$ im Dezimalsystem die gleiche Ziffer an der Einerstelle. p endet also im Dezimalsystem mit der Ziffer 7.

3.

n	4	5	6	7	8	9	10	...
letzten zwei Ziffern von 2^n	16	32	64	28	56	12	24	

n	19	...	23	24	25	...
letzten zwei Ziffern von 2^n	88		08	16	32	...

Die beiden letzten Ziffern von $2^n - 1$ ändern sich nicht, wenn n um ein Vielfaches von 20 vergrößert oder verkleinert wird. Wegen 756839 = 20 · 37841 + 19 haben die Zahlen $p = 2^{756839} - 1$ und $2^{19} - 1$ im Dezimalsystem an der Zehner- und Einerstelle gleiche Ziffern. p endet also im Dezimalsystem mit den Ziffern 87.

4. Jede im Dezimalsystem n-stellige natürliche Zahl m genügt der Ungleichung
$10^{n-1} \leq m < 10^n$ und damit auch
$n - 1 \leq \lg m < n$.
Aus $p + 1 = 2^{756839}$
$= (10^{\lg 2})^{756839} = 10^{756839 \cdot \lg 2}$
folgt $\lg(p+1) = 756839 \cdot \lg 2 = 227831{,}24$ ... (mit dem Taschenrechner). Mithin hat zunächst wegen $227831 < \lg(p+1) < 227832$ die Darstellung der natürlichen Zahl p + 1 im Dezimalsystem 227832 Stellen. Weil jedoch nicht $227831 = \lg(p+1)$ gilt, besitzt die Darstellung von p im Dezimalsystem ebenfalls 227832 Stellen.

KKK (S. 13)

Die in der Aufgabe genannten Frequenzrelationen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$F_G : F_d : F_a = 4:6:9$$
$$F_A : F_a = 1:2$$
$$\overline{}$$
$$F_G : F_A = 8:9$$

Für die Länge der schwingenden Saite gilt das umgekehrte Verhältnis; für einen Sekundschritt muß die Saite folglich um ein Neuntel verkürzt werden, also um rund 7,2 cm.

Verwurzeltes (S. 13)

1. $958 = \sqrt{917764}$

2. $1663 = \sqrt{2765569}$

3. $37 = \sqrt{1369}$

4. $467 = \sqrt{218089}$

5. $43 = \sqrt[3]{79507}$

• Sprachecke (S. 22)

Schach und Mathematik

Bei einem Turnier in Grenoble trifft jeder Spieler genau einmal auf jeden anderen Teilnehmer.
Nach jedem Spiel gibt der Schiedsrichter jedem der beiden Spieler ein farbiges Kärtchen. Dieses ist rot für den siegreichen Spieler, grün für den Verlierer. Im Fall des Unentschiedens erhalten beide Spieler je ein gelbes Kärtchen. Am Ende des Turniers hat er genau 752 Kärtchen jeder Farbe verteilt. Wieviele Teilnehmer hat das Turnier?

Lösung:
752 rote und 752 grüne Kärtchen zeigen, daß dabei 752 Spiele ausgetragen wurden, wo es einen Sieger und einen Verlierer gab. 752 gelbe Kärtchen weisen auf 376 Spiele hin, da beim Unentschieden jeder eine gelbe Karte erhält. Also wurden insgesamt 1128 Spiele ausgetragen. Man rechnet $0{,}5\,n\,(n-1) = 11{,}28$, d. h. $n^2 - n - 2256 = 0$ Da $n>0$, hat die quadratische Gleichung die Lösung $n = 48$. 48 Spieler nahmen also am Turnier von Grenoble teil.

Division

In diesem verschlüsselten Divisionsschema sind alle neun Ziffern verschieden. Entschlüsseln Sie es!

Lösung
Aufgrund der Aufgabenstellung überlegt man sich zunächst

(1) $\overline{10a} : \overline{de} = f$
$\quad\overline{9b}$
$\quad\;\bar{c}$

wobei a, b, c, d, e, f sämtlich paarweise verschiedene Grundziffern sind und
(2) $2 \leq a,b,c,d,e,f \leq 8$ gilt.
Da $4 \cdot 25 = 2 \cdot 50 = 100 > \overline{9b} = f \cdot \overline{de}$
ist und wegen (1), (2) folgert man $2 \leq d \leq 4$.

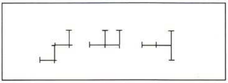
Hiervon kann nur d = 4 zutreffen, denn aus d = 2 folgt mit b = d = 2 und aus d = 3 mit f = d = 3 jeweils ein Widerspruch. Ist d = 4, so folgt f = 2 und wegen (1) und (2) kann nur noch e = 5, 6, 7, 8 gelten.
Da aus e = 5 im Widerspruch zu (2) b = 0 folgt, aus e = 6 mit b = f = 2 ebenfalls ein Widerspruch sich ergibt und desgleichen mit e = 7 der Widerspruch b = d = 4 eintritt, kann nur noch e = 8 zutreffen. Damit schließt man weiter, daß a = 3 und e = 7 gelten muß.
Ergebnis: $\overline{103} : 48 = 2$
$\quad 96$
$\quad\; 7$

"Primprimzahlen"

Die Primzahl 31 hat eine interessante Eigenschaft: Streichen wir die rechte Zahl, erhalten wir 3, ebenfalls eine Primzahl. Die Primzahl 317 hat dieselbe Eigenschaft. Streichen wir die 7, erhalten wir die Primzahl 31, streichen wir dann die 1, erhalten wir eine andere Primzahl, die 3.
Die zwei amerikanischen Mathematiker Walstrom und Berg nannten Zahlen mit dieser Eigenschaft prime primes, man könnte es mit "Primprimzahlen" übersetzen.
Finde alle zweistellige "Primprimzahlen".
Lösung:
23, 29, 31, 37, 53, 59, 71, 73, 79

Wir setzen Strecken zusammen (S. 23)

Wir setzen gleichlange Strecken zusammen
Die drei fehlenden Figuren:



Tetrapack – ein Extremalproblem (S. 28)

Für den vorliegenden Tetrapack werden 728,5 cm² Pappe benötigt. Die optimalen Ausmaße sind 6,3 cm · 12,6 cm · 12,6 cm, die entsprechende Pappfläche beträgt 714,5 cm². Die Einsparung würde ca. 2 % ausmachen.

Gefaltete Maxima und Minima (S. 30)

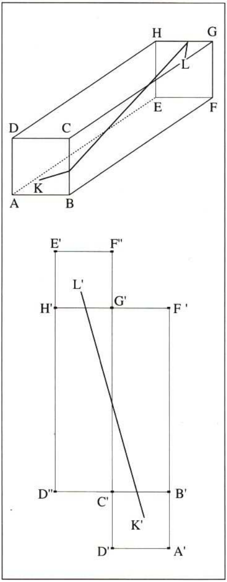
1. Die Bestimmung der Länge über die Ober- bzw. Unterseite ist einfach. Beide Wege sind genau 14 cm lang. Etwas weiter ist die Entfernung über die linke bzw. die rechte Seitenhälfte, wobei aus Symmetriegründen beide Wege gleiche Länge haben. Wer sehr genau gemessen hat, erhält 14,15 cm. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras errechnet man

$\sqrt{200}cm \approx 14{,}142..cm$

Doch das ist *nicht die kürzeste Verbindung*. Läuft K z. B. über die rechte Seitenfläche und anschließend auch noch über die obere, kann er schneller am Ziel sein (s. Abb., die mit CABRI-Géomètre angefertigt wurde).
Dieser Weg ist nur etwa 13,9 cm lang

(exakt $\sqrt{197}cm \approx 13{,}928..cm$).

(Diese Lösung war auch für den Autor etwas überraschend!)



2. Beträgt die Seitenlänge exakt 21 cm, so liegt der Punkt P 21,0 cm/4 = 5,25 cm von A entfernt, das heißt, daß bei einem Blatt im DIN-Format (Seitenverhältnis $1{:}\sqrt{2}$) ein Viertel der Schmalseite markiert wird. Mit dem Differentialkalkül kann dies leicht bestätigt werden. Welcher Leser findet einen elementargeometrischen Beweis?