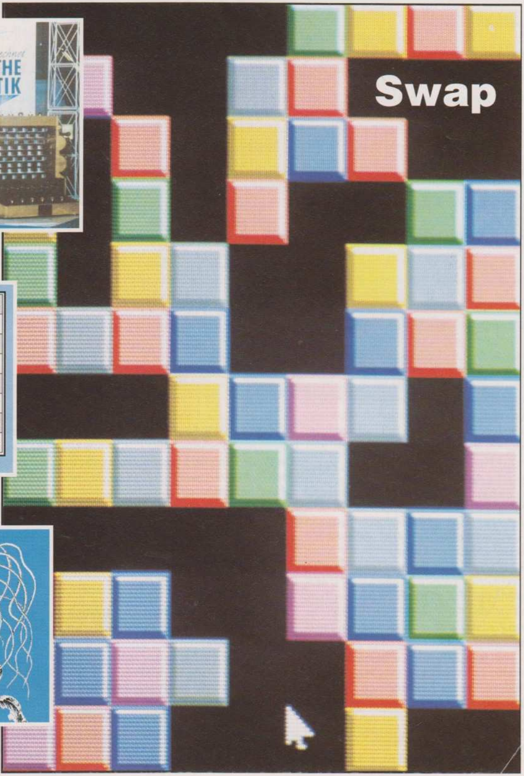
H 11328 F

Heft 1
Februar 1993
27. Jahrgang

Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift



Aktion „Ausgerechnet Mathematik“

Was geschah auf dem Schachbrett?

Regelmäßige Kreisteilung in der Pflanzenwelt

Werte Redaktion!

In Heft 6/90 von "alpha" wurde gleich in zwei Artikeln das Problem der "pythagoräischen Zwillinge" erwähnt, seine Lösung allerdings auf die Berechnung der ersten "Zwillinge" mittels Computer beschränkt. Dabei ist auch eine weitergehende mathematische Behandlung interessant und führt zudem zu einer entscheidenden Verringerung des Rechenaufwandes. Versuchen wir es: Gesucht sind also (möglichst alle) ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + (x+1)^2 = z^2$. Äquivalente Umformungen ergeben:

$2x^2 + 2x + 1 = z^2$

$2z^2 - (2x+1)^2 - 1 = 0$. Wir setzen $2x + 1 = v$ und erhalten schließlich

$2z^2 - v^2 = 1$. Diese Gleichung können wir auch schreiben:

$$\left(z\sqrt{2}+v\right)\left(z\sqrt{2}-v\right)=1.$$

Unsere Aufgabe führt uns also dazu, Zahlen der Form $a\sqrt{2}+b$ zu betrachten, wobei a und b ganze Zahlen sind. Auch die Zahl 1 können wir als eine solche Zahl ansehen ($a = 0$, $b = 1$).

Wir wollen den Term $N(a, b) = 2a^2 - b^2$ als "Norm" des Terms $a\sqrt{2}+b$ bezeichnen. Unser Problem läßt sich dann auch so formulieren:

Gesucht sind alle Zahlen der Form $a\sqrt{2}+b$ *mit ganzzahligen Koeffizienten a und b, deren Norm gleich Eins ist.*

Bei der Betrachtung der Gleichung

$$\left(z\sqrt{2}+v\right)\left(z\sqrt{2}-v\right)=1$$

fällt auf, daß die beiden Faktoren links (wenn es sie gibt) die Norm 1 haben, das Produkt aber die Norm - 1 hat (wieso?), die als zum Produkt der Normen der Faktoren entgegengesetzte Zahl betrachtet werden könnte.

Nun ist dieser Einzelfall sehr speziell, es ist jedoch nicht schwer, eine entsprechende Beziehung für den allgemeinen Fall nachzuweisen.

Gegeben seien die Terme

$a\sqrt{2}+b$ mit $2a^2 - b^2 = p$

$c\sqrt{2}+d$ mit $2c^2 - d^2 = q$. Dann ist

$$\left(a\sqrt{2}+b\right)\left(c\sqrt{2}+d\right)=(2ac+bd)+(ad+bc)\sqrt{2} \quad (*)$$

Wir bilden die Norm des Produktes:

$2(ad + bc)^2 - (2ac + bd)^2$

$= 2a^2d^2 + 4abcd + 2b^2c^2 - 4a^2c^2 - 4abcd - b^2d^2$

$= -(2a^2 - b^2)(2c^2 - d^2) = -pq.$

Wir können hieraus folgern:

1. Wenn zwei Terme der Form $a\sqrt{2}+b$ multipliziert werden, so ist das Produkt ein Term der gleichen Form; seine Norm ist gleich der zum Produkt der Normen der Faktoren entgegengesetzten Zahl.
2. Sind die Koeffizienten der Faktoren nichtnegative ganze Zahlen, so gilt das auch für das Produkt. Dessen Koeffizienten sind dann größer als die entsprechenden Koeffizienten der Faktoren.

Hieraus ergibt sich die wichtige Schlußfolgerung:

Wenn eine Zahl die Norm 1 hat, so haben auch alle ihre ungeraden Potenzen die Norm 1.

Haben wir also eine Lösung unserer Ausgangsgleichung, so haben wir zugleich eine unendliche Menge von Lösungen gefunden. Zum Glück brauchen wir, um eine solche Lösung zu finden, kaum einen Computer. Betrachtet man die Gleichung $2z^2 - v^2 = 1$ aufmerksam (oder beginnt man bei den kleinsten natürlichen Zahlen zu probieren), so sieht man, daß $z_1 = v_1 = 1$ eine solche Lösung ist. Alle Potenzen $\left(\sqrt{2}+1\right)^n$ mit *ungeradem* n sind also Lösungen unseres Problems. Setzen wir $n = 2i - 1$, so nehmen diese Lösungen die Gestalt.

$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2i-1} = z_i\sqrt{2}+v_i \quad (i = 1, 2, 3 \ldots)$ an.

Die $(i + 1)$ - te derartige Lösung kann aus der i - ten nach der Formel (*), einfacher noch direkt berechnet werden:

$$z_{i+1}\sqrt{2}+v_{i+1}=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2(i+1)-1}$$

$$=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2(i-1)+2}$$

$$=\left(z_i\sqrt{2}+v_i\right)\left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$=\left(z_i\sqrt{2}+v_i\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

$$=\left(3z_i+2v_i\right)\sqrt{2}+\left(4z_i+3v_i\right),$$

d. h. $v_{i+1} = 4z_i + 3v_i$

$z_{i+1} = 3z_i + 2v_i \qquad$ mit $z_1 = v_1 = 1$

Schließlich setzen wir wieder $v_i = 2x_i + 1$:

$2x_{i+1} + 1 = 6x_i + 3 + 4z_i$

$x_{i+1} = 3x_i + 2z_i + 1$

$z_{i+1} = 4x_i + 3z_i + 2.$

Wir können zusammenfassen:

Eine Menge von pythagoräischen Zwillingen (x_i, x_{i+1}) *mit* $x_i^2 + (x_i + 1)^2 = z_i^2$, x_i, z_i *ganzzahlig, wird durch die Koeffizienten des Terms*

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2i-1}=\left(2x_i+1\right)+z_i\sqrt{2}$$

erzeugt. Für sie gelten die Rekursionsformeln

$x_1 = 0,\ z_1 = 1$

$x_{i+1} = 3x_i + 2z_i + 1$

$z_{i+1} = 4x_i + 3z_i + 2 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$

Auf Grund der Rekursionsformeln kann man ohne großen Rechenaufwand auch für sehr hohe Werte somit die Lösungen finden; die ersten fünf Lösungspaare kann man leicht "von Hand" bestimmen:

i	x_i	$x_i + 1$	z_i
1	0	1	1
2	3	4	5
3	20	21	29
4	119	120	169
5	696	697	985
...			

Aufgabe: Beweise die folgenden Rekursionsbeziehungen zwischen pythagoräischen Zwillingszahlen:

$x_{i+2} = 6x_{i+1} - x_i + 2 \quad (x_1 = 0,\ x_2 = 3)$

$z_{i+2} = 6z_{i+1} - z_i \quad (z_1 = 1,\ z_2 = 5)$!

Wende hierbei die oben gefundenen Rekursionen auf $i + 1$ und $i + 2$ an!

Eine Frage ist bis jetzt offen geblieben: Haben wir mit den gefundenen Formeln auch alle Lösungen erfaßt, oder gibt es noch weitere?

Die Vollständigkeit der gefundenen Lösung zu beweisen, dauert etwas länger, ist aber auch nicht sehr schwer:

Es sei $w = r\sqrt{2}+s$ ein Term mit ganzzahligem r, s und es gelte $2r^2 - s^2 = 1$. O. B. d. A. können wir auch voraussetzen, daß r und s nichtnegative Zahlen sind (warum?).

Es sei dann

$$w_1=\frac{r\sqrt{2}+s}{\sqrt{2}+1}=\left(r\sqrt{2}+s\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=r_1\sqrt{2}+s_1.$$

Gemäß (*) gilt dann $2r_1^2 - s_1^2 = -1$; r_1 und s_1 sind offensichtlich ganzzahlig (nicht mehr notwendig positiv).

Setzen wir diese Operation fort, so erhalten wir eine Folge von Zahlen

$$w_n=\frac{r\sqrt{2}+s}{\left(\sqrt{2}+1\right)^n}=r_n\sqrt{2}+s_n$$

mit $2r_n^2 - s_n^2 = (-1)^n$, r_n, s_n ganz.

Aus Formel (*) ergibt sich die Rekursion (für $a = r_n$, $b = s_n$, $c = 1$, $d = -1$)

$r_{n+1} = s_n - r_n$

$s_{n+1} = 2r_n - s_n$.

Sind r_n und s_n nicht negativ, so gilt $r_n < r_{n-1} < \ldots < r$, entsprechend für s_n. (Warum?)

Da die Anzahl der natürlichen Zahlen unterhalb einer gegebenen Schranke aber begrenzt ist, müssen wir bei der Fortsetzung des Prozesses zu einem w_k kommen, für das gilt:

$0 \le r_k$, $0 \le s_k$, aber entweder $r_{k+1} < 0$, $s_{k+1} \ge 0$ oder $s_{k+1} < 0$, $r_{k+1} \ge 0$. (Warum können nicht beide Koeffizienten negativ sein?) Außerdem kann die Norm von w_k gleich 1 oder gleich - 1 sein. Zunächst untersuchen wir den Fall $r_{k+1} < 0$, $s_{k+1} \ge 0$: Aus $r_{k+1} < 0$ folgt $s_k - r_k < 0$, d. h. $s_k < r_k$. Da s_k und r_k nichtnegativ sind, gilt auch $s_k^2 < r_k^2$. Die letzte Ungleichung läßt sich äquivalent zu $s_k^2 < 2r_k^2 - s_k^2$ umformen.

Wäre nun die Norm $2r_k^2 - s_k^2$ gleich - 1, so müßte gelten $s_k^2 < -1$, was für kein reelles s_k erfüllbar ist. Die verbleibende Möglichkeit $2r_k^2 - s_k^2 = +1$ hätte $s_k^2 < 1$ zur Folge. Diese Ungleichung wird nur durch $s_k = 0$ erfüllt. Dann müßte aber $2r_k^2 = 1$ sein, was durch keinen ganzzahligen Wert von r_k erfüllt ist. Der hier betrachtete Fall kann also nicht eintreten.

Es bleibt der Fall $s_{k+1} < 0$, $r_{k+1} \ge 0$.

Aus $s_{k+1} < 0$ folgt $2r_k - s_k < 0$, $2r_k < s_k$, $4r_k^2 < s_k^2$, $4r_k^2 - 2s_k^2 < -s_k^2$ und schließlich $2(2r_k^2 - s_k^2) < -s_k^2$. Ist die Norm gleich + 1, so ist diese letzte Ungleichung nicht durch reelle Zahlen erfüllbar. Ist jedoch $2r_k^2 - s_k^2$ gleich - 1, so erhalten wir die Bedingung $s_k^2 < 2$. Dem entsprechen die ganzzahligen Werte $s_k = 0$ oder $s_k = 1$. Der Wert $s_k = 0$ ergibt keinen reellen Wert für r_k. Für $s_k = 1$ erhalten wir hingegen $r_k = 0$.

Demzufolge muß gelten

$$w_k=\frac{r\sqrt{2}+s}{\left(\sqrt{2}+1\right)^k}=1 \quad \text{bzw.} \quad r\sqrt{2}+s=\left(\sqrt{2}+1\right)^k.$$

Damit ist gezeigt, daß die gefundene Lösung auch vollständig ist.

Prof. Dr. Michael Benjamin,
Mojakowskiweg 18/20,
O - 1110 Berlin - Hohenschönhausen

Inhaltsverzeichnis

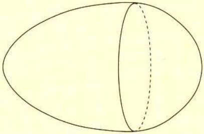
Zeitungs-schnipsel

Mit Gummihandschuh

Petra muß bei allen häuslichen Arbeiten, bei denen ihre Hände mit Wasser in Berührung kommen, wegen eines Hautekzems ihre linke Hand durch einen Gummihandschuh schützen. Im Geschäft werden Gummihandschuhe nur paarweise verkauft. Muß Petra, wenn der linke Gummihandschuh defekt wird, ein neues Paar kaufen oder kann sie mit dem rechten Gummihandschuh weiter arbeiten?
Dr. W. Träger, Döbeln

Ein Riesenhühnerei

Döbelner Allgemeine Zeitung, 10. Juni 1992
Am 10.6.92 verbreiteten Zeitungen die folgende dpa-Meldung aus Madrid: "Ein 180 Gramm schweres Ei war zu viel für ein spanisches Huhn: Die Besitzerin mußte die Henne nach mehreren vergeblichen Legeversuchen notschlachten. Das Tier quälte sich zu sehr mit dem Riesenei, das die dreifache Größe eines normalen Eies hatte...."
Aufgabe: Der größte auf der Schale eines normalen Hühnereies mit 60 g Masse verlaufende Kreis hat einen Umfang von 14,5 cm Länge. (Siehe Bild!)



Wie lang ist der Umfang des größten Kreises auf der Schale des Rieseneies?
Dr. W. Träger, Döbeln

Swap

Das jüngste Spiel von Palace/Microids nennt sich SWAP. Es entpuppt sich als reines Denkspiel mit einfacher Spielidee und vielen bunten Steinen. Nichts Neues, denkt man. Doch die Mannen von Microids haben sich bemüht, aus dieser einfachen Idee etwas mehr zu machen.
Beim Spiel bekommt man einen Bildschirm voller Spielsteine: Dreiecke, Vierecke oder Sechsecke, in maximal sechs verschiedenen Farben. Punkte gibt's, wenn man die Steine verschwinden läßt. Dazu klickt man mit der Maus auf die Nahtstelle zweier Steine, worauf beide den Platz tauschen. Liegen anschließend Steine gleicher Farbe nebeneinander, lösen diese sich auf. Kritisch sind die Eckfelder, die man vor allem bei den Dreiecken nicht immer leer bekommt.
Bei jeder der drei Spielsteinformen stellt sich ein anderes Spielgefühl ein. Kann man die Dreiecke an drei möglichen Seiten drehen, sind es bei den Quadraten schon vier Möglichkeiten. Hier erscheint das Tauschen um die Vertikale oder Horizontale noch einfach. Das räumliche Denkvermögen wird hauptsächlich bei den Drei- und Sechsecken beansprucht. Hat man den Bildschirm leer geräumt, wird man mit Punkten, acht Sternen und dem nächsten Level belohnt. Hat man dies aber geschickt getan, hat man mit einem Minimum an Drehungen ein Maximum an Feldern abgeräumt, dann überspringt man eine ganze Menge Levels. Nach dem Startlevel 1 kann man durchaus in der nächsten Runde 10 Levels höher starten. Im Spielverlauf wird dieser anfangs kolossale Sprung immer bescheidener. Die Programmierer waren nett, sie

Ein schönes Stück Ost-Deutschland kommt unter den Hammer

Ostsee-Insel: 2,8 Mio. – und sie gehört Ihnen

Sanft schlägt der Wind die Ostseewellen an den Sandstrand. Aus dem wogenden Uferschilf krächzen Kormorane, im Schnabel des Fischreihers zappelt ein Barsch. Verwunschen unter mächtigen Eichen ein verfallendes Fachwerkhaus – Insel Libitz im Kubitzer Bodden (Mecklenburg-Vorpommern). Kein Mensch lebt seit über 40 Jahen hier. Ein wunderschönes Stück Ost-Deutschland. Für 2,8 Millionen Mark gehört es Ihnen.
"Die Erben des früheren Eigentümers bekamen Libitz zurück. Jetzt ist es Deutschlands einzige private Insel", sagt der Hamburger Makler Farhad Vladi (47).
Naturschutz ist auf dem 41-Hektar-Eiland oberstes Gebot. "Ein Baulöwe, der auf Libitz eine Feriensiedlung hochziehen will,

haben Hilfsfunktionen eingebaut. Man kann aus einem Vorrat Steine nehmen und im Spielfeld einsetzen. Man kann alle Steine an den unteren Bildschirmrand fallen lassen, wo sich gleichfarbige Paare sofort auflösen. Dieser Tetris-Effekt kostet, wie das Einsetzen von Hilfssteinen, wertvolle Punkte. Wenn man in jenen Leveln swapt, in denen Punkte schwer zu ergattern sind, überlegt man sich schon, ob man den Punktevorrat anknabbert. Erschwerend kommt im Laufe des Spieles noch ein Zeitlimit hinzu – und ein recht vertracktes Bonussystem. Bei jedem Level wird man sich deshalb um eine andere Taktik bemühen. Kommt man nicht weiter, sollte man den Spielstand abspeichern, sich eine längere Ruhepause gönnen und zu einem späteren Zeitpunkt restoren. Wer nicht die Gabe hat, in emsiger Gedankenarbeit unterschiedlich geformte Plättchen um eine von mehreren möglichen Achsen zu drehen, der wird trotz einfachster Maus-Bedienung bei diesem Geometrie-Leckerbissen nicht weit kommen. Zum Schluß noch ein weiterer Pluspunkt: Auf dem PC kann man die Soundeffekte abstellen. Durch wieviele Level man sich bei diesem Spiel tatsächlich arbeiten kann, haben wir noch nicht raus. Wir knabbern gerade mal wieder an unseren Dreiecken in sechs unterschiedlichen Farben mit Zeitlimit und ohne jeglichen Bonus. Was das Programm nach diesem 188. Level noch bietet, haben wir noch nicht in Erfahrung bringen können.

SWAP, Palace 1991, Genre: taktisches Denkspiel mit vielen symmetrischen Überlegungen, 512 KB RAM, CGA/EGA/VGA Maus, Distributor: United Software, erhältlich im Fachhandel, Preis ca.: 70 DM. *H. Seitz*

„Komplizierte Funktionen einfach erklärt"

Der Elektronikkonzern CASIO, Hersteller des ersten Taschenrechners der Welt, hat jetzt in Zusammenarbeit mit dem Vogel Verlag ein CHIP INSIDE Heft publiziert, das am Beispiel der technisch-wissenschaftlichen Rechner von CASIO mathematische Probleme aufgreift und den Lösungsweg per Taschenrechner erklärt. Ob komplexe Zahlen, Matrizen oder Integrale, für technisch-wissenschaftliche Taschenrechner ist heute fast jedes mathematische Problem lösbar.

Die Fülle von Funktionen kann – wenn man nicht über die nötigen Hintergrundinformationen verfügt – auch Verwirrung stiften.

Abhilfe schafft jetzt die Sonderausgabe CHIP INSIDE "Komplizierte Funktionen einfach erklärt". Anhand verschiedener Taschenrechner von CASIO, unter anderem auch mit Hilfe des Grafikrechners FS-7700G, der über insgesamt 315 technisch-wissenschaftliche Funktionen verfügt und außerdem durch "zoomen" die vergrößerte Darstellung der Graphiken ermöglicht, werden Schritt für Schritt und in leicht verständlicher Weise Lösungswege zu mathematischen Aufgaben erklärt. Effektive Nachhilfe im A-4 Format, so kann fehlendes Basiswissen ergänzt werden.

Das Sonderheft CHIP INSIDE ist zum Preis von DM 34,— (ab 10 Stück je DM 25,—) direkt über CASIO zu beziehen.

Für weitere Informationen wenden Sie sich bitte an:

Manfred Großert CASIO Pressestelle Kleine Bahnstraße 8 • 2000 Hamburg 54 • Telefon (040) 85 366 (0) – 128

hat keine Chance", sagt Vladi bestimmt. "Das Bauernhaus kann wiederaufgebaut werden." Im Pferdewagen geht's locker durch die 50 Zentimeter tiefe Furt nach Rügen.

100 Inselns hat Vladi im Angebot, die teuerste für 38 Millionen Mark. "Die billigste vor Kanadas Ostküste kommt nur 26000 Mark." Ob die Erben von Libitz, die über Nacht zu Millionären werden, mit einem kleineren Modell in der Ferne liebäugeln, will Vladi nicht verraten.

Die Insel Libitz im Kubitzer Bodden

"Bild Leipzig" berichtete am 7.7.92 über die einzige private Insel Deutschland: "2,3 Kilometer Naturufer mit idyllischen Buchten hat Libitz bei Rügen. ... Aus dem wogenden Uferschilf krächzen Kormorane, .. Naturschutz ist auf dem 41 – Hektar – Eiland oberstes Gebot. ..."

Aufgabe: Um wieviel Prozent wäre die Fläche von Libitz größer, wenn ihr Naturufer bei gleicher Länge ein Kreis wäre?

Dr. W. Träger, Döbeln

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Der „Generationenvertrag" in der Krankenversicherung

Grafik: Globus

Die „Döbelner Allgemeine" berichtete am 24.9.92:

Auch in der Gesetzlichen Krankenversicherung gibt es einen „Generationenvertrag": Die jüngeren Mitglieder bezahlen höhere Beiträge, als sie an Leistungen wieder herausbekommen. Die Rentner hingegen brauchen umgekehrt altersbedingt höhere Versicherungsleistungen, zu deren Deckung ihre Beiträge nicht ausreichen. Die Jüngeren zahlen also für die Älteren.

Aufgabe: Mit möglichst kleinen natürlichen Zahlen ist das Verhältnis m:n der Zahl m der Rentner zur Zahl n der Berufstätigen für den Fall anzugeben, daß sich ihre Versicherungsleistungen und Beiträge gegenseitig kompensieren.

Dr. W. Träger, Döbeln

Neue Postleitzahlen kommen!

Ab 1.7.93 sollen neue Postleitzahlen das Zustellen von Briefen, Päckchen und Paketen der Post einfacher, schneller und billiger machen.

Die neuen Postleitzahlen

Die erste Ziffer der geplanten fünfstelligen Postleitzahlen gilt für diese Regionen:

Aufgabe: Peter färbte die Gebiete mit gleicher erster Ziffer der neuen Postleitzahlen so mit 3 Farben, daß zwei gleichfarbig gefärbte Gebiete nie einen gemeinsamen Randpunkt haben. Welche dieser Gebiete sind dann jeweils gleichfarbig gefärbt?

Dr. W. Träger, Döbeln

Die Zinsabschlagsteuer

Für jeden Bürger unseres Landes gilt ab 1.1.93:

1. Die 0,5 % Jahreszinsen für Guthaben auf Girokonten sind zinssteuerfrei.
2. Von den jährlichen Zinsen auf Sparguthaben ist ein Betrag von 6100 DM zinssteuerfrei. Überschreiten diese Jahreszinsen den genannten Freibetrag, so hat die Bank von der Differenz aus diesen Jahreszinsen und dem Freibetrag 30 % als Zinsabschlagsteuer abzuziehen und abzuführen.

Aufgabe: Ein Bürger B unseres Landes hat, abgesehen von einem Restbetrag auf seinem Girokonto, seine sämtlichen Ersparnisse mit dem Betrag G (Guthaben) zu Jahresbeginn bei seiner Sparkasse als Festgeld mit halbjähriger Kündigung zum Jahreszinssatz 7,75 % angelegt.

Geldanlage

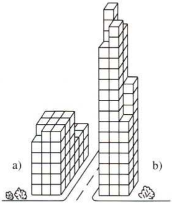
Festgeld

	ab 3.000,- DM	10.000,- DM
ab 30 Tage	6,25 %	7,00 %
ab 60 Tage	6,50 %	7,25 %
ab 90 Tage	6,75 %	7,50 %
ab 180 Tage	7,00 %	7,75 %

1.) B hat am Jahresende keine Zinsabschlagsteuer zu entrichten. Wie hoch ist sein Festgeldguthaben G höchstens?

2.) Es gilt G = 300000 DM. Wieviel Prozent vom Festgeldguthaben G betragen die am Jahresende nach Abzug der Zinsabschlagsteuer dem B verbliebenen Restzinsen?

W. Träger, Döbeln



Zwei Architekten bewarben sich mit einem Entwurf für ein Bürohochhaus. In jedem würfelförmigen Block kann ein Büro eingerichtet werden. Den Auftrag erhielt der Architekt, der mehr Büros in seinem Hochhaus unterbringen konnte. Welcher war es?

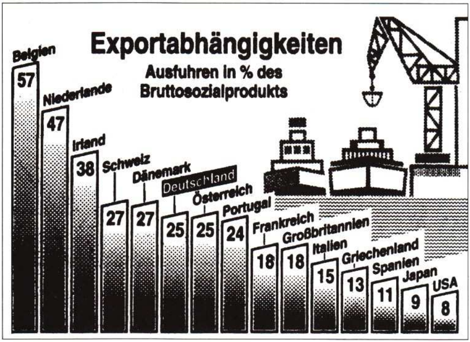
Die „Döbelner Allgemeine“ veröffentlichte am 25.5.92 zu der abgebildeten Graphik den folgenden Text:

Kleine Industrienationen exportieren einen Großteil ihrer Produkte, weil der heimische Markt nur begrenzt aufnahmefähig ist.
So erwirtschaftete Belgien zum Beispiel 1991 mehr als die Hälfte seines Bruttosozialprodukts auf fremden Märkten. Zwar exportierte das Königreich nur Waren im Wert von 118 Milliarden Dollar, die USA kamen auf 422 Milliarden Dollar, aber die Ausfuhren pro Kopf lagen in Belgien bei 11 359 Dollar, in den Vereinigten Staaten hingegen bei 1677 Dollar.

Aufgabe: Wieviel Dollar betrug im Jahr 1991 das erwirtschaftete Bruttosozialprodukt a) Belgiens und b) der USA pro Kopf der Bevölkerung?

Dr. W. Träger, Döbeln

Exporte für kleine Nationen am Wichtigsten



Quellen: IMF OFCD Stat. Bundesamt IW

Ab jetzt findet Ihr in jedem alpha-Heft ein kleines Preisausschreiben.

Zu gewinnen gibt es diesmal zwei Taschenrechner von Texas Instruments.

Aufgabe:
Die Ziffern von 1 bis 9 sind so in die leeren Felder des Gitters unten einzutragen, daß gültige Gleichungen resultieren. Es gibt eine einzige Lösung.

	:		=		–	1
*	■	–	■	:	■	*
	+		=		*	$\sqrt{9}$
=	■	=	■	=	■	=
	+		=		+	9
+	■	–	■	:	■	:
1	*	9	=	$\sqrt{9}$	*	3

Die Aufgabe wurde erdacht von Dr. Stefan Bondeli, Zürich.

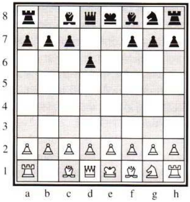
Bitte schickt mir (Erhard Friedrich Verlag, Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6, Redaktion alpha, Herrn J. Ricke) Eure Lösung bis zum 15. März zu. Unter den richtigen Einsendungen werden die Taschenrechner verlost.

Die Bekanntgabe der Gewinner und der richtigen Lösung erfolgt im nächsten alpha-Heft.

Was geschah auf dem Schachbrett?

Die Zahl der für das Schachspiel in Betracht kommenden Eröffnungen ist recht groß. So sind theoretisch nach dem 1. weißen Zug 20 verschiedenartige Eröffnungen möglich, und zwar 16, in denen ein Bauer gezogen hat und 4 mit einem Springerzug. Die entsprechenden Züge kann Schwarz ebenso ausführen, so daß sich nach dem 1. schwarzen Zug schon $20 \cdot 20 = 400$ verschiedene Möglichkeiten für die erreichte Stellung ergeben könnten.
Bereits die Berechnung der Stellungsmöglichkeiten nach dem 2. Zug von Weiß und Schwarz wird kompliziert, deshalb muß an dieser Stelle darauf verzichtet werden. Nach dem 2. Zug von Weiß sind 5.362 und nach dem 2. Zug von Schwarz 72.084 Stellungen möglich. Ziehen Weiß und Schwarz zum 3. Mal, so würde man ca. 9.000.000 mögliche verschiedene Stellungen finden.
Zur Freude der Schachspieler sind jedoch nur ein winziger Bruchteil der theoretisch in Betracht kommenden Partieöffnungen wirklich spielbar.

In Anlehnung an diese Betrachtung folgt eine Aufgabe, die verdeutlicht, welche kuriosen Positionen ebenfalls Bestandteil solcher Berechnungen sind.



Das abgebildete Diagramm ist aus der Partieanfangsstellung nach dem 4. Zug von Weiß und Schwarz entstanden. Welche Zugfolge führte zur Diagrammstellung?
PS: Versucht mal selbst, solche Aufgaben auszuknobeln!
H. Rüdiger

Sprachecke

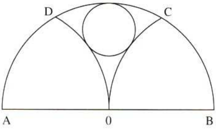
But: égalisation!
Vous devez replacer les signes manquants (+, –, · ou :) dans ces égalites mathématiques.

1. 16 13 16 6 = 99
2. 6 15 7 13 = 84
3. 17 1 14 3 = 58
4. 3 18 3 14 = 11
5. 5 4 14 16 = 45

(Logigram, France)

Наидите таки два чиспа что при умножении первого на 2 попучится квадрат второго а при умножении первого на 3 – куσ второго

Find the Radius
The drawing shows a semicircle with centre O, and segment AB = 2R as diameter. Using points A and B as centres, we draw arcs OC and OD with radius AO = OB = R. We then draw a circle that is tangent to the semicircle and to each of the two arcs.



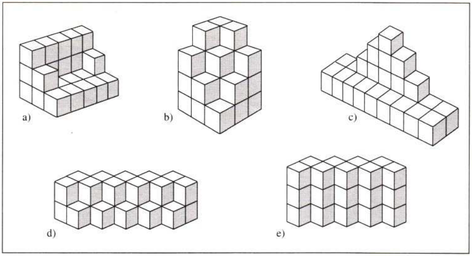
Question: Find the radius r of the small circle.
Hint: Use the theorem: A straight line that connects the centres of two tangent circles passes through the point of tangency.

Alphons logische Abenteuer

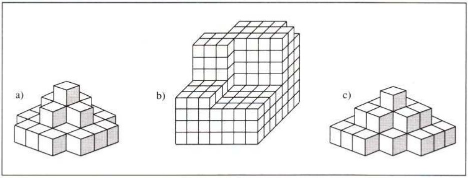
„Du hast wohl wieder ein aus der Antike stammendes Problem gefunden?", fragte Alphons Berti, als dieser in das Zimmer kam. „Wie bist du darauf gekommen?", wundert sich Berti. „Weil du nicht wie sonst um diese Zeit deine Schultasche bei dir hast", antwortete Alphons. „Stimmt. Da wir aber heute nicht viel Hausaufgaben haben, las ich in dem alten Buch und fand etwas, das ich für dich abgeschrieben habe." Bei diesen Worten zog Berti ein Stück Papier aus einer Jackentasche, entfaltete es und las vor:
„Ein Wanderer kam an eine Kreuzung. An jedem der beiden weiterführenden Wege saß ein Mann. Der Wanderer wußte, daß beide den richtigen Weg zur Stadt, in die er wollte, kannten, der eine aber immer lügt, der andere dagegen nur die Wahrheit spricht. Wer der eine und wer der andere ist, das wußte er nicht. Dem Wanderer war aber bekannt, daß er genau eine Frage an nur einen Mann stellen darf, um den richtigen Weg zu erfahren."
Berti schaute auf Alphons: „Nun, kommst du darauf, welche Frage der Wanderer zu stellen hat, falls es überhaupt eine solche Frage gibt?" So auf die Schnelle wußte er auch nicht, wie die Frage lauten könnte. Nach einigen Grübeleien einigten sie sich zum Zwecke abkürzender Redeweise darauf, einen Weg mit „α", den an diesem Weg sitzenden Mann mit „a" und demgemäß den anderen Weg mit „β" und den an ihm sitzenden Mann mit „b" zu bezeichnen. Spricht a bzw. b wahr, soll das durch „a_w" bzw. „b_w" angezeigt werden, entsprechend mit „a_l" bzw. „b_l", daß a bzw. b lügt. Nun ging es hin und her mit „a" und „α", „a_l" und „β" und anderen Kombinationen, eine Lösung ergab sich daraus aber nicht. Alphons riß die Geduld, er holte sein Logikbuch heraus und schlug nach, ob sich darin etwas zum Thema fände. Er hatte Glück, die Aufgabe war angegeben, zusammen mit einer Lösung und einer Erklärung zur Lösung.
Eine Aussage ist wahr nur dann, wenn das, was sie behauptet, auch so ist, wie sie behauptet; anderenfalls ist sie falsch. Legt man der Lösung diese Wahrheitsdefinition zugrunde, wird erstens der Wahr-Sprecher von einer wahren Aussage sagen, sie ist wahr, der Lügner aber, sie ist falsch. Von einer falschen Aussage wird ersterer sagen, daß sie falsch ist, letzterer aber, sie ist wahr, vorausgesetzt, sie wissen beide, daß die Aussage wahr bzw. falsch ist. Fragt man zweitens denWahr-Sprecher, ob der andere die Wahrheit sagt, wird er das verneinen. Fragt man den Lügner, ob der andere die Wahrheit sagt, wird er das auch verneinen. Fragt man aber, ob der jeweils andere lügt, werden beide das bejahen. Die ebenfalls als erfüllt anzunehmende Voraussetzung ist hier, daß beide voneinander um ihr Verhältnis zur Wahrheit wissen.
Beide Eigenschaften der Sprecher kann man zur Lösung des Problems nutzen. Die Frage ob z. B. a der richtige Weg ist, wird der Wahr-Sprecher bejahen, der Falsch-Sprecher verneinen, wenn a der richtige Weg ist. Dieser Ansatz berücksichtigt nur die erste Eigenschaft der Sprecher. Die zweite wird einbezogen, wenn unterstellt wird, der eine hat sie als Antwort gegeben, nun soll der andere sagen, ob sie wahr ist. Ist sie wahr, wird diese Frage, gleich an welchen Sprecher gerichtet, verneint; ist sie aber falsch, wird diese Frage, gleich an welchen Sprecher gerichtet, bejaht.
Eine Frage, die das leistete, ist: Wird der der andere sagen, dein Weg ist der richtige?
"Nehmen wir also an", sagte Alphons,"a wird diese Frage gestellt und a sagt: nein. Ist a der Wahr-Sprecher, lügt b, was a weiß, b kann nur sagen, daß α nicht der richtige Weg ist, wenn er der richtige Weg ist. Ist aber b der Lügner, so verneint er, was a sagt. a wird sagen, daß α der richtige Weg ist, da nur dann b mit "nein" antworten kann. Hätte a mit "ja" geantwortet, weißt du nun, wie du sie zu verstehen hast."

Prof. Dr. L. Kreiser

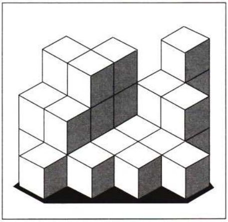
Würfelstapelei



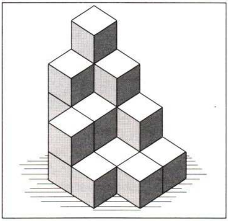
1. Lars behauptet, mit seinen 27 Holzwürfeln aus der Spielzeugkiste seines kleinen Bruders alle fünf Figuren bauen zu können, Vera widerspricht.



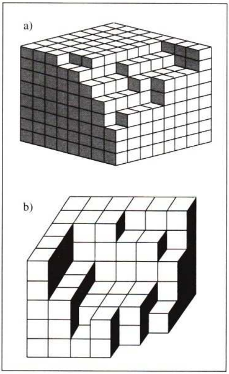
2. Aus wieviel Würfeln bestehen diese Bauwerke mindestens, wie viele sind es höchstens?



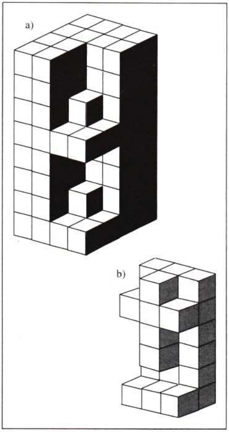
3. Aus 27 Einheiten (0 Würfeln) soll ein modernes Wohn- und Bürogebäude gebaut werden. in wie viele Einheiten kann man keine Fenster (auch keine Dachfenster) einbauen?



4. Wie viele Bauklötze braucht die kleine Angela für diesen Turm?



5. Von einem Stapel aus 512 (b: 150) Bierkästen wurden schon einige weggefahren. Wie viele?



6. Moderne Kunst. Wie viele Würfel hat der Künstler aus der Vorderseite des Steinquaders schon herausgemeißelt?

Heinz Siegler

Alphawettbewerb 1/93

5/1
Nicole, Anja und Jens wiegen sich. Nicole und Anja wiegen zusammen 55 kg. Nicole und Jens wiegen zusammen 80,5 kg. Alle drei wiegen zusammen 112,5 kg. Jens ist doppelt so alt wie Anja, zusammen sind beide 30 Jahre alt. Anja ist drei Jahre älter als Nicole. Wieviel Kilogramm wiegt jeder dieser drei Freunde? Wie alt ist jeder von ihnen?

Mandy Körner, Nünchritz

5/2
Anja, Robert, Heike und Andrea betreuen jeder eine ältere Frau, deren Familienname Meier, Braun, Baumann bzw. Kreher lautet. Wir wissen folgendes:
a) Anja hilft weder Frau Meier noch Frau Braun.
b) Robert hilft Frau Baumann.
c) Heike hilft nicht Frau Kreher.
d) Andrea betreut Frau Braun.

Welche älteren Frauen werden von welchem Kind betreut?

S. Parton, Chemnitz

5/3
Zeichne ein Quadrat ABCD; konstruiere nun nur mit Hilfe von Lineal und Zeichendreieck ein Quadrat EFGH, dessen Flächeninhalt doppelt so groß ist wie der des Quadrates ABCD.

OStR Theodor Scholl, Berlin

5/4
Bei einem 100-m-Lauf kamen die sieben gestarteten Läufer wie folgt im Ziel an:
(1) Bernd direkt vor Joachim, aber unmittelbar hinter Roger.
(2) Dieter direkt hinter Jürgen.
(3) Herrmann erzielte den mittleren der sieben Plätze.

Von diesen Läufern ist ferner folgendes bekannt:
(4) Bernd und Dieter kommen aus Greifswald.
(5) Den zweiten Platz schaffte ein Rostocker.
(6) Uwe hat blonde Haare.

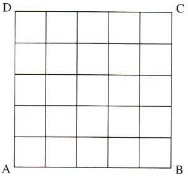
Welche Plätze erreichten die sieben Läufer?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

5/5
Würfelt man mit drei Spielwürfeln und legt man sie nebeneinander, so können die Würfelaugen als dreistellige natürliche Zahl aufgefaßt werden. Wieviel solcher Zahlen gibt es, wenn die Summe der Augenzahlen der drei Würfel zehn betragen soll? Schreibe alle Zahlen auf! Ordne Sie!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

5/6
Kreuze 10 der 25 Felder der abgebildeten Figur so an, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte (also waagerecht wie senkrecht) genau zwei angekreuzte Felder sind, aber in den beiden Diagonalen (also von A nach C und von B nach D) kein angekreuztes Feld liegt!



StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

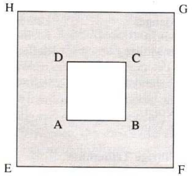
5/7
Frank hat Hefte zu 7 Pf., 10 Pf. und 30 Pf. je Stück gekauft. Er bezahlte dafür 1,16 DM. Wie viele Hefte zu 10 Pf. das Stück sind darunter?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/1
Jörg und Andy sind zusammen 24 Jahre alt; das Lebensalter jedes dieser beiden Jungen stellt eine Primzahl dar. Das Produkt aus den Lebensaltern von Jörg, Lars und Andy beträgt 2145. Jörg ist älter als Andy, aber jünger als Lars. Wie alt ist jeder von ihnen?

Maren Abschner, Gr.-Beuchow

6/2
Es ist der Flächeninhalt der in der Abbildung schraffierten Fläche zu bestimmen. Die Figur ABCD ist ein Quadrat, dessen Flächeninhalt 8 m^2 beträgt. Die Figur EFGH ist ebenfalls ein Quadrat, und es gilt $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = 1$ m.



StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/3
Jemand hat zwei Spielwürfel neu beschriftet.
a) Auf den Würfelflächen stehen jeweils sechs aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, und zwar stehen auf Würfel A die Zahlen von 15 bis 20 und auf Würfel B die Zahlen von 35 bis 40. Wie viele verschiedene Ergebnisse können mit diesen beiden Würfeln gewürfelt werden?
b) Trifft deine Aussage zu a) auch dann noch zu, wenn ganz beliebige sechs aufeinanderfolgende natürliche Zahlen auf jedem der Würfel stehen, wobei aber keine zwei Zahlen einander gleich sind?

Begründe deine Antwort!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/4
Ein alter Ackerwagen hat unterschiedlich große Räder. Jedes Hinterrad hat 4 m, jedes Vorderrad 3,50 m Umfang.
Wieviel Meter hat der Ackerwagen zurückgelegt, wenn das Hinterrad zehn Umdrehungen weniger als das Vorderrad gemacht hat?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/5
Aus den Ziffern 2, 4, 6, 8 lassen sich durch unterschiedliche Anordnungen vierstellige natürliche Zahlen bilden, in denen jede der vier Ziffern genau einmal vorkommt. Wie viele solcher vierstelliger

Zahlen sind mindestens zu addieren, um eine Summe zu erhalten, die durch 9 teilbar ist?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/6

Man hat ein bis zum Eichstrich mit Wasser gefülltes 7-Liter-Gefäß und zwei leere, ebenfalls geeichte Gefäße, die 3 Liter bzw. 2 Liter fassen. Durch Umfüllen will man jede ganzzahlige Literzahl von 1 bis 6 Liter erreichen. Gib eine Möglichkeit der Umfüllungen an, um diese Literzahlen zu erreichen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/7

Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit, wenn ein PKW 1 Stunde lang mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h und dann eine Stunde lang mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h fährt!

7/1

In einem Kasten liegen 40 gleichgroße und gleichschwere Kugeln in fünf verschiedenen Farben.

Es sind doppelt so viele blaue wie grüne, doppelt so viele weiße wie blaue und halb so viele rote wie blaue Kugeln. Schließlich sind noch gelbe Kugeln im Kasten. Um ohne hinzusehen mit Sicherheit fünf Kugeln von gleicher Farbe herausnehmen zu können, mußte Lars, der die Verteilung der Farben kannte, mindestens 19 Kugeln herausnehmen. Wie viele Kugeln von jeder Farbe befinden sich in diesem Kasten?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/2

Doris meint: "Jede natürlich Zahl $z \geq 100$, die auf Null endet, läßt sich entweder als Summe von zehn aufeinanderfolgenden ungeraden oder als Summe von zehn aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen darstellen." Hat Doris recht? Die Antwort ist zu begründen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/3

Ein Kreis mit dem Mittelpunkt M ist nur mit Hilfe eines Zirkels in zwei flächengleiche Teilfiguren zu zerlegen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/4

Es ist nachzuweisen, daß die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch 10 teilbar ist, wenn keine dieser Zahlen durch 5 teilbar ist!

Yvonne Langer, Eisenach

7/5

Bernds Lebensalter ist gleich dem um 10 verminderten dreifachen Lebensalter von Anton. Christian ist ein Jahr jünger als Bernd, Daniel doppelt so alt wie Anton. Zusammen sind sie 42 Jahre alt. Wie alt ist jeder von ihnen?

Stefan Golsisch, Falkenhagen

7/6

300 g Blei ($\rho = 11{,}3$ g/cm^3) werden in ein Überlaufgefäß gelegt. Wieviel Wasser fließt aus?

7/7

Ein Pyknometer (kleines Fläschchen mit genau bestimmten Rauminhalt) wiegt leer 12,82 g, mit Wasser ($\rho = 1$ g/cm^3) gefüllt 65,43 g und mit Kalilauge gefüllt 74,56 g. Welche Dichte hat die Kalilauge?

8/1

Ein Hotel verfügt über 52 Zwei- bzw. Vierbettzimmer mit insgesamt 144 Betten.

Wieviel Zweibettzimmer und wieviel Vierbettzimmer gibt es in diesem Hotel?

Daniela Berlt, Grimma (Sachsen)

8/2

In die folgende Gleichung sind für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen, so daß stets wahre Aussagen entstehen.

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BBB}$

Es sind alle Möglichkeiten zu finden.

H.-J. Kerber, Neustrelitz

8/3

Ich denke mir eine Zahl. Nun dividiere ich sie durch 10. Zum Ergebnis addiere ich 10. Dieses Ergebnis multipliziere ich mit 10, und zum Schluß subtrahiere ich noch 10. Jetzt ist mein Ergebnis 10 mal so groß wie meine gedachte Zahl.

Welche Zahl habe ich mir gedacht?

H.-J. Kerber, Neustrelitz

8/4

Es ist zu beweisen, daß in einem rechtwinkligen Dreieck ABC (C ist Scheitel des rechten Winkels) die Länge der Höhe h_c berechnet werden kann, indem man das Produkt der beiden Kathetenlängen durch die Länge der Hypotenuse des Dreiecks ABC dividiert.

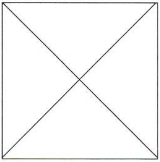
Sabine Köhler, Dresden

8/5

Gegeben sei das abgebildete Quadrat, das durch seine beiden Diagonalen in vier gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt wurde.

Zeichne dieses Quadrat auf ein Stück Zeichenkarton auf und zerschneide es in die angegebenen vier Teile.

Lege (immer unter Verwendung aller vier Teile!) 14 verschiedene Figuren! Beachte dabei, daß nur Seiten gleicher Länge aneinander gelegt werden dürfen!



8/6

Ein Schüler mit der Masse $m_1 = 40$ kg sitzt 3 m von der Achse einer Wippe entfernt. In welcher Entfernung muß ein anderer Schüler sitzen, dessen Masse $m_2 = 45$ kg beträgt, damit sich die Wippe im Gleichgewicht befindet?

8/7

Ein Kran hebt eine Palette Ziegel (Masse 600 kg) ins 5. Stockwerk eines Neubaus (Höhe 15 m) in 20 s. Wie groß muß die Leistung des Kranmotors mindestens sein?

9/1

In die folgende Gleichung sind für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen, so daß stets wahre Aussagen entstehen.

$\overline{XY} \cdot \overline{ZY} = \overline{WWW}$

Es sind alle Möglichkeiten zu finden.

H.-J. Kerber, Neustrelitz

9/2
Es ist zu beweisen, daß das Quadrat einer beliebigen zweistelligen natürlichen Zahl, vermindert um das Quadrat ihrer Quersumme, stets durch 9 teilbar ist.

Michael Enig, Crimmitschau

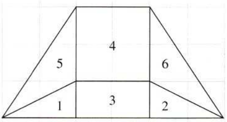
9/3
Das arithmetische Mittel zweier Zahlen sei 25, das geometrische Mittel sei 20.
Wie heißen die beiden Zahlen?

Michael Enig, Crimmitschau

9/4
Gesucht sind zwei Zahlen für die gilt:
Das Quadrat ihrer Summe ist gleich dem Quadrat ihres Produktes und beträgt 20,25.
Wie heißen die beiden Zahlen?

Holger Laabs, Berlin

9/5
Zeichnen Sie das abgebildete gleichschenklige Trapez auf ein Stück Zeichenkarton auf und zerschneiden es in die angegebenen 6 Teile!
Legen Sie aus diesen 6 Teilen
a) ein Rechteck, das kein Quadrat ist,
b) ein Parallelogramm, das kein Rechteck ist,
c) ein Dreieck
Zeigen Sie jeweils eine Möglichkeit!
Es ist zu beachten, daß jedesmal alle 6 Teile verwendet werden müssen!



9/6
Ein Eisenbahnzug fährt mit einer Beschleunigung $a = 0{,}5\ m/s^2$ an. Welche Geschwindigkeit hat er nach 15 s? Welchen Weg legt er dabei zurück?

9/7
Ein Güterzug verringert durch gleichmäßiges Bremsen seine Geschwindigkeit von 54 km/h auf 36 km/h und legt dabei eine Strecke von 500 m zurück. Wie lange dauert der Bremsvorgang?

10/1
Es ist zu beweisen, daß Zahlen der Form

$z_1 = \overline{ababab}$ und $z_2 = \overline{aaaaaa}$

(dekadische Darstellung) durch 3, 7, 13 und 37 teilbar sind.

Uwe Neugebauer, Borne b. Staßfurt

10/2
Es ist die größte natürliche Zahl zu finden, durch die der Term $8n^3 + 24n^2 + 22n + 6$ teilbar ist $(n \in N)$

Bernd Dethloff, Waren (Müritz)

10/3
Welche natürlichen Zahlen a und n erfüllen die Gleichung

$\overline{aa}^n = \overline{aaaa}$,

deren Terme Ziffern in dekadischer Schreibweise darstellen?

Sch.

10/4
Zeichnen Sie eine Strecke von 10 cm Länge mit Zentimetereinteilung! Konstruieren Sie unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge

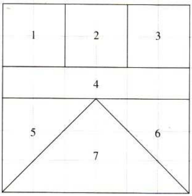
$s = \left(\sqrt{19} + \sqrt{85}\right)$

Beschreiben Sie die Konstruktion stichwortartig!

H.-J. Kerber, Neustrelitz

10/5
Zeichnen Sie das abgebildete Quadrat auf ein Stück Zeichenkarton auf und zerschneiden es in die angegebenen 7 Teile!
Legen Sie aus diesen 7 Teilen
a) ein Dreieck, b) ein Sechseck!

Es ist zu beachten, daß jedesmal alle 7 Teile verwendet werden müssen!



10/6
Ein PKW fährt mit konstanter Geschwindigkeit v = 36 km.h-1 an einem Motorradfahrer vorüber, der sich zur gleichen Zeit mit gleichmäßiger Beschleunigung in Bewegung setzt und den PKW nach 30 s überholt. Welche Beschleunigung hat das Motorrad und mit welcher Geschwindigkeit überholt es den Wagen?

10/7
Mittels eines Seiles, das bei 650 N reißt, wird eine Last, deren Masse 50 kg beträgt beschleunigt angehoben. Welche Hubgeschwindigkeit kann nach 3 s höchstens erreicht werden?

E/1
In welchem Zahlensystem stellt die Gleichung $525 + 34 = 25^2$ eine wahre Aussage dar?

Hartmut Boettcher, Weimar

E/2
Welche Wahrscheinlichkeit ist höher, mit 4 Würfeln auf einen Wurf 24 Augen zu haben oder 10 Münzen zu werfen, so daß alle Zahlen oben liegen?

Peter Wichmann, Rostock

E/3
Wieviele verschiedene gegenseitige Positionen können a) zwei gleiche, b) zwei verschiedene Spielsteine auf einem schachbrettähnlichen Spielbrett mit 49 quadratischen Feldern einnehmen?

Fr.

E/4
Welchen Rest läßt die Potenz 13^{169} bei Division durch 8?

Jörg Uhlig, Crimmitschau

E/5
Auf einem Kreis k liegen 6 verschiedene Punkte A, B, C, D, E, F beliebig verteilt. Es ist
a) die Anzahl der Dreiecke
b) die Anzahl der Sehnenvierecke und
c) die Anzahl der Fünfecke
zu ermitteln, die jeweils 3 bzw. 4 bzw. 5 dieser Punkte als Eckpunkte haben.

Bernd Tappe, Berlin

E/6
Auf einem Drehschemel sitzt eine Person, die bei angezogenem Armen 2 Hanteln hält, so daß diese von der Drehachse einen Abstand $r_1 = 10$ cm haben. Dann wird der Drehschemel in Rotation versetzt, und zwar soll er $n_1 = 1$ Umdrehung je Sekunde ausführen. Die Person streckt die Arme ruckartig aus, wobei der Abstand der Hanteln von der Drehachse auf $r_2 = 50$ cm zunimmt. Wie viele Umdrehungen je Sekunde führt der Schemel jetzt aus, wenn der Drehimpuls der Person und des Schemels gegenüber derjenigen der Hanteln vernachlässigt wird?

(O. Höfling: Phys.-Aufg. Sekundarst. II)

E/7
Auf eine 800 kg schwere Lore, die mit einer Geschwindigkeit von 1,5 m/s rollt, fallen senkrecht von oben 600 kg Schotter. Auf welchem Betrag sinkt dadurch die Geschwindigkeit der Lore?

Attraktive Preise im alpha-Wettbewerb 1993

Tolle Preise gibt es beim alpha-Wettbewerb 1993 zu gewinnen. Mitmachen lohnt sich also und bringt neben dem Spaß an der Mathematik auch die Möglichkeit, einen attraktiven Preis zu ergattern. Wir bedanken uns bei den Sponsoren des Wettbewerbs und wünschen uns eine rege Teilnahme.

Wettbewerbsbedingungen

1. Der Wettbewerb 1993 läuft über zwei Teilwettbewerbe in den Heften 1/93 und 2/93.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Anschrift, Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter) zu richten an:
Mathematische
Schülerzeitschrift alpha
Postfach 129
O-7010 Leipzig

   Den Lösungen ist die frankierte und an Euch adressierte Antwortkarte beizulegen, welche Ihr im Mittelteil unserer Zeitschrift findet. Darauf erhaltet Ihr die Ergebnisse dieses Teilwettbewerbes mitgeteilt. Steht mehreren Schülern nur eine Zeitschrift zur Verfügung, so kopiert Euch die Auswertungsseite der Antwortkarte und klebt sie auf eine an Euch adressierte Postkarte (Porto nicht vergessen!).
   Schulen beachten bitte, daß die gesammelte Rücksendung entsprechend mehr Porto verlangt.

3. Von dem Teilnehmer sind nur Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe zu lösen. Schüler ab Klassenstufe 10 und Erwachsene lösen die mit 10 und E gekennzeichneten Aufgaben.

4. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um diese mit den jeweils zwei Heften später erscheinenden Lösungen zu vergleichen.

5. Diejenigen Teilnehmer, die insgesamt mindestens 8 Aufgaben richtig (gut oder sehr gut) gelöst haben, senden bis zum 10. September beide Antwortkarten, einen entsprechend frankierten und adressierten Rückumschlag und
a) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde bzw.
b) bei diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die beiden bereits vorhandenen Urkunden ein.
Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die beiden Antwortkarten.

6. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Urkunde und einen alpha-Button. Pro Klassenstufe 5 bis 10 werden die 5 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der sehr gut gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen jeweils fünf Teilnehmer ausgelost.) (Außerdem prämieren wir 5 Frühstarter (Klassen 1 bis 4)).
Diesen Glücklichen winken attraktive Preise.

Beachtet bitte, daß wir Ensendungen ohne Rückporto nicht mehr bearbeiten können.

Einsendeschluß:
22. April 1993

Mitarbeiter/innen des Verlages und deren Angehörige können nicht am Wettbewerb teilnehmen. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Die Verlosung erfolgt unter den Einsendern, die die Aufgaben richtig gelöst haben. Der Computer wird unter den fünf Besten aller Klassenstufen verlost.

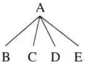
Kettenbriefe

Dies ist ein Kettenbrief.
Schicke bitte eine Ansichtskarte Deines Wohnortes an die erste Adresse.
Schreibe dann diesen Brief viermal ab. Diese vier Briefe schicke dann innerhalb von vier Tagen an vier Kinder, die Du kennst, die möglichst weit auseinander wohnen.
Aber wirklich in den nächsten vier Tagen, sonst ist die Kette unterbrochen. Die einzige Änderung: Du mußt die erste Adresse weglassen und als vierte Deine eigene angeben. Nach 30 Tagen erhälst Du eine Menge Ansichtskarten aus aller Welt.

Abb. 1

Von Zeit zu Zeit werden immer wieder sog. Kettenbriefe in Umlauf gesetzt, in denen dem Empfänger eine Liste mit vier Anschriften mitgeteilt wird. Der wichtigste Teil des Kettenbriefes ist die obenstehende Aufforderung.

Um die Folgen eines derartigen Kettenbriefes zu erkennen, verfolgen wir die lawinenartige Zunahme der Teilnehmerzahl anhand einer Skizze. Nehmen wir an, Annette startet einen Kettenbrief nach obigem Muster, sie schickt diesen Brief an Boris, Christian, Doris und Elke:



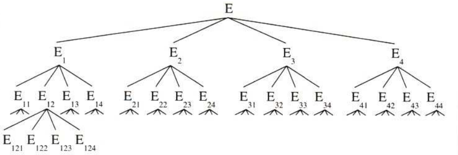
Diese Art der Darstellung nennt man ein Baumdiagramm. Da die Anzahl der Teilnehmer so schnell anwächst, daß bald die Namen und erst recht die Buchstaben des Alphabets nicht mehr ausreichen, bezeichnen wir den ersten Absender mit E und die ersten vier Empfänger mit E_1; E_2; E_3 und E_4.

Das Diagramm zeigt uns die durch einen Kettenbrief ausgelöste Kettenreaktion: Immer mehr Menschen werden erfaßt, denn mit jeder Runde vervielfacht sich die Anzahl derer, die bereit seit müssen, sich an der Aktion zu beteiligen. Die Nummer eines beliebigen Empfängers des Kettenbriefes beschreibt eindeutig, auf welchem Weg der Kettenbrief zu ihm gelangt ist. Zum Beispiel hat E_{121} den Brief auf folgendem Weg erhalten:

$E \rightarrow E_1 \rightarrow E_{12} \rightarrow E_{121}$

Wir erkennen außerdem, daß aus der Anzahl der Stellen eine Indexnummer hervorgeht, in welcher Runde ein Empfänger den Kettenbrief erhalten hat.

Es werden auch immer wieder Kettenbriefe gestartet, in denen die Empfänger aufgefordert werden, einen bestimmten Geldbetrag an die erste Anschrift zu schicken. Außerdem wird dann allen Teilnehmern versprochen, daß sie nach einer gewissen Zeit ein Vielfaches des eingesetzten Betrages erhalten werden. Tatsächlich ist es schon einigen wenigen Leuten gelungen, auf diese Weise reich zu werden. Man bezeichnet diese Methode des Gelderwerbs als Schneeballsystem, denn auch ein kleiner Schneeball kann eine ganze Lawine auslösen, wenn er auf einen stark geneigten Hang mit einer dicken Schneedecke geworfen wird. Natürlich kann das Versprechen an alle Teilnehmer, daß sie ein Vielfaches ihres Einsatzes zurückbekommen, nicht eingehalten werden. (Begründe dies!) Man sollte sich daher keinesfalls an Kettenbriefen beteiligen, in denen der Einsatz



Dieses Baumdiagramm veranschaulicht die Folgen eines Kettenbriefes, wenn jeder Empfänger E vier neue Empfänger E_1; E_2; E_3 und E_4 finden muß, die bereit sind, sich an dem Kettenbrief zu beteiligen. Da diese vier Empfänger der nächsten Runde wieder jeweils vier neue Empfänger finden müssen, erhalten in der übernächsten Runde bereits $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ Personen den Kettenbrief. Die weitere Entwicklung zeigt folgende Tabelle:

Runde	Anzahl der Empfänger	Anzahl der Teilnehmer
0	$1 = 4^0$	1
1	$4 = 4^1$	$4 + 1 = 5$
2	$4 \cdot 4 = 4^2 = 16$	$16 + 4 + 1 = 21$
3	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$	$64 + 16 + 4 + 1 = 85$
4	$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256$	$256 + 64 + 16 + 4 + 1 = 341$
5	$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$	$1024 + 256 + 64 + 16 + 4 + 1 = 1365$

Nach vier Runden ist ein beliebig herausgegriffener Teilnehmer E am Kettenbrief an die erste Stelle der Adressenliste gerückt; er erhält somit von den 256 Empfängern E_{1111} bis E_{4444} die versprochene Ansichtskarte. Dieser Erfolg tritt aber nur ein, wenn jeder der 341 Beteiligten die gegebenen Anweisungen genau befolgt.

Abb. 2

von Geld gefordert wird. Die Auslöser derartiger Kettenbriefe müßten strafrechtlich wegen Betrug verfolgt werden. Ebenso verwerflich sind Kettenbriefe mit okkultem Inhalt, die meist von Menschen mit religiösen Wahnvorstellungen verfaßt wurden und in denen die Empfänger mit Unglück oder sogar dem Tod bedroht werden, falls sie sich nicht an die gegebenen Anweisungen halten. Auch an derartigen Aktionen sollte man sich keinesfalls beteiligen. Leider mangelt es vielen Menschen an der Einsicht, daß die in einem Kettenbrief gegebenen Versprechungen für die meisten der Teilnehmer keinesfalls eingehalten werden können. Dies zeigt auch das folgende Beispiel:
In jeder Runde vervielfacht sich die Anzahl der Empfänger eines Kettenbriefes; der Mathematiker spricht dann von einer geometrischen Zahlenfolge. Um die Anzahl aller Teilnehmer zu berechnen, muß man diese Glieder der geometrischen Zahlenfolge addieren: Es entsteht eine geometrische Reihe.

Geometrische Zahlenfolge und geometrische Reihe

Eine (unendliche) Zahlenfolge $a_1; a_2; a_3; \dots a_n; a_{n+1}; \dots$ heißt eine geometrische Folge, wenn zwei beliebige unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder der Folge den gleichen Quotienten $q \neq 1$ besitzen:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Aus dieser Gleichung folgt: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, d. h. jedes Glied einer geometrischen Zahlenfolge ist das q-fache seines Vorgängers. Bezeichnen wir das erste Glied einer geometrischen Folge mit a, so gilt: $a_1 = a$; $a_2 = a \cdot q$; $a_3 = a \cdot q^2$; ... $a_n = a \cdot q^{n-1}$; ...

Wie bei jeder Zahlenfolge kann auch bei der geometrischen Folge durch

$$s_1 = a_1 \qquad = a$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \qquad = a + a \cdot q$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \qquad = a + a \cdot q + a \cdot q^2$$

.
.
.
.

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a + a \cdot q + \dots + a \cdot q^{n-1} \quad (1)$$

eine neue Folge, die sog. Folge der Teilsummen gebildet werden. Diese Folge $s_1; s_2; \dots s_n; \dots$ wird auch als geometrische Reihe bezeichnet und s_n als die n-te Teilsumme dieser Reihe.
s_n ist das n-te Glied der Reihe bzw. die n-te Teilsumme der Folge. Es ist nicht schwer, s_n zu berechnen: Wird die Gleichung (1) mit q multipliziert, so erhält man

$$s_n \cdot q = a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots + a \cdot q^n \quad (2)$$

und die Differenz der Gleichungen (2) und (1) lautet:

$$s_n \cdot q - s_n = a \cdot q^n - a$$

bzw. $s_n \cdot (q-1) = a \cdot (q^n - 1)$
und somit ist

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

und diese Formel ist gültig für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $q \in \mathbb{R}$, wenn $q \neq 0$ und $q \neq 1$.

Drohung des anonymen Verfassers: Wer das Schreiben aufhält, der stirbt

Post stoppte mysteriösen Kettenbrief

Anstelle einer Marke steht der Vermerk „Widobet 183 R" auf dem Umschlag

Bonn (AP) – Die Verantwortlichen des Deutschen Postdienstes leben gefährlich: Sie stoppten nämlich einen Kettenbrief, und das soll – so die Verfasser des mysteriösen Textes – den Tod bringen.
Wie der Postdienst berichtete, haben die sich massenhaft im Umlauf befindlichen Briefe keine Absenderangaben und tragen dort, wo die Marke hingehört, den Vermerk „Widobet 183 R". Wer einen solchen Brief erhält, muß 1,80 Mark Nachporto zahlen, sofern er die Annahme nicht verweigert.
Der Inhalt besteht aus einem Text, der den Empfänger auffordert, 20 Kopien anzufertigen und diese ebenso innerhalb von 96 Stunden zu versenden. Dann sei Glück, etwa ein Lottogewinn, zu erwarten. Wer aber die Kette aufhalte, werde bestraft: „Devon Mikanuja warf den Brief weg, weil er nicht an ihn glaubte und starb nach zehn Tagen."
Die Generaldirektion Postdienst ließ sich davon nicht beeindrucken und wies die Postämter an, derartige Briefe nicht mehr auszutragen.

Fürther Nachrichten vom 11.3.1992

Abb. 3

Der längste Kettenbrief

Am 11. Mai 1982 erreichte die Redaktion von „Tatsachen – Das Schneider Buch der Rekorde" folgender Brief:

Dies ist ein Kettenbrief.
Schicke bitte eine Ansichtskarte an die erste Adresse. Auf die schreibst Du Grüße. Dann schreibe diesen Brief sechsmal ab. Diese sechs Briefe schicke dann innerhalb von vier Tagen an Freunde oder Bekannte, die möglichst weit auseinander wohnen.
Aber wirklich in den nächsten vier Tagen, sonst ist die Kette unterbrochen.
Die einzige Änderung: Du mußt die erste Adresse weglassen und als sechste Deine eigene angeben. Nach 44 Tagen erhältst Du eine Menge Ansichtskarten aus dem Ausland bzw. der Bundesrepublik. Die Kette ist am 1.7.1975 in Bremen angefangen und nicht unterbrochen worden. Wenn sie bis zum 1.7.1982 nicht unterbrochen wird, kommen wir in das Buch der Rekorde.
Die Redaktion beteiligte sich an diesem ausgefallenen Rekordversuch und nimmt ihn an dieser Stelle in das „SchneiderBuch der Rekorde" mit auf.

Schneider-Buch der Rekorde (1984) S. 136

Abb. 4

Die in dem Buch „Buch der Rekorde" gemachten Angaben veranlassen uns zu folgenden Überlegungen:
- Da der Brief sechsmal abgeschrieben werden soll, muß für jede folgende Runde die sechsfache Anzahl von Empfängern gefunden werden.
- Wenn wir für jede Runde eine Zeit von einem Monat annehmen, so ist von Juli 1975 bis Mai 1982 die 82. Runde erreicht.
- Die Anzahl der Teilnehmer in den einzelnen Runden beträgt: 1; 6; 36; 216; 1296; 7776; ... und bereits in der 14. Runde wäre mit $6^{13} = 13\ 060\ 694\ 016$ Teilnehmern mehr als die gesamte Erdbevölkerung erfaßt.
- Sollte tatsächlich die 82. Runde erreicht werden, so müßten sich

$$1 + 6 + 36 + 216 + \dots + 6^{81} = \frac{1 - 6^{82}}{1 - 6}$$

das sind $1{,}286\ 567\ 354 \cdot 10^{63}$ Menschen an dem Kettenbrief beteiligen.

H. Walter, Fürth

Internationales Kinderspiel – mathematisch beleuchtet

oder wie Kettenbrief-Postkartenberge entstehen

Es wird ermittelt, wieviel Postkarten man beim internationalen Postkartenspiel erhalten kann und wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, überhaupt eine Postkarte zu erhalten.

Seit Jahrzehnten kursieren Briefe und Postkarten eines sogenannten „internationalen Kinderspiels", und es gibt regelmäßig Diskussionen darüber, wie so etwas „funktionieren" kann. Zwei Fragen stehen dabei hauptsächlich zur Debatte: Erstens, wie viele Postkarten erhalte ich wirklich, wenn sich alle Spieler an die Spielregeln halten? Zweitens, und das ist erheblich schwieriger zu beantworten, wie ist es überhaupt möglich, daß so ein Spiel über längere Zeit hinweg „läuft", da doch bei formaler Rechnung schon nach wenigen Wochen ein Vielfaches der Weltbevölkerung daran teilnehmen müßte? Mit dieser Frage hängt die Frage nach der Wahrscheinlichkeit zusammen, ob ich überhaupt jemals eine Postkarte erhalte. Die erste Frage ist rein kombinatorischer Art, bei der zweiten Frage muß man noch Zusatzannahmen darüber machen, wie oft das Spiel regelgemäß fortgesetzt wird.

Die Spielregel: Man erhält irgendwann einen Brief mit folgendem oder einem ähnlichen Text:

Hallo!
Hier kommt ein Kettenbrief, der Spaß machen soll. Sei bitte so nett und befolge nachstehende Anweisungen, damit unser Kettenbrief weitergeht. Nur so kommen wir in das Buch der Rekorde! Also sende an die erste Adresse eine Ansichtskarte Deiner Stadt mit folgendem Text: Viele Grüße vom Kettenbrief, er ist noch nicht unterbrochen. Dann schreibe diesen Brief sechs Mal und sende ihn an sechs Kinder, die Du kennst. Laß auf der Adressenliste die erste Adresse weg und schreibe Deine Adresse an die letzte Stelle. In den nächsten 14 Tagen wirst Du viele Ansichtskarten erhalten und wirst staunen, woher sie alle kommen. Bitte sei kein Spielverderber und unterbrich die Kette nicht.
Viele Grüße von N.N.

Schließlich folgt noch eine Liste von sechs Adressen. Meist enthält der Brief auch noch eine Angabe darüber, wieviel Postkarten man erhalten wird, falls niemand das Spiel unterbricht. Übrigens: Diese Angabe habe ich schon in den verschiedensten Varianten gesehen, sie waren aber alle unkorrekt. Deshalb beantworten wir also zunächst die erste Frage.

Die erste Frage: Wie viele Postkarten erhalte ich maximal? Und wann? Für diese Zusatzfrage machen wir die Durchschnittsannahme, daß die Zeit für Postbeförderung plus die Zeit für Schreiben des nächsten Briefes etwa eine Woche beträgt. Die Zahl der Adressen im Kettenbrief sei n, also ist n = 6 in unserem Beispiel. Die Zahl der Kinder, an die man den Brief senden soll, sei m, also m = 6 im interessierenden Fall. Sei x die Anzahl der Postkarten, die ich danach erhalte. x hängt von m und n ab, wir schreiben x = x(m,n), wobei der letztlich interessierende Wert x = x(6,6) ist. Sei ferner t die Zahl der Wochen, die ich warten muß, bis ich die Postkarten habe, also t = t(m,n).

Wir lösen das Problem Schritt für Schritt und beginnen mit dem einfachsten Fall n = 1. Dann schreibe ich also meine eigene Adresse gleich an erste Stelle und erhalte innerhalb von zwei Wochen m Postkarten. In Formeln heißt das

$$x(m,1) = m, \quad t(m,1) = 2. \tag{1}$$

Selbst für m = 0 sind diese Formeln richtig: Wenn ich null Briefe versende, erhalte ich null Postkarten, und die innerhalb von zwei Wochen.

Für den nächsten Schritt nehmen wir jetzt an, daß wir für ein bestimmtes $n \geq 1$ bereits wissen, wie groß x(m,n) und t(m,n) sind. Daraus wollen wir herleiten, wie groß x(m,n+1) und t(m,n+1) sind. Für t ist das ganz einfach: Es muß einfach eine Runde weitergehen, ehe ich an erster Stelle der Adressenliste stehe, also

$$t(m,n + 1) = t(m,n) + 1. \tag{2}$$

Daraus ergibt sich zusammen mit Formel (1), daß t(m,n) = n + 1 ist, also in unserem Beispiel t(6,6) = 7.

1. Ergebnis: Beim Kinderspiel wird der Hauptteil der Postkarten nach etwa sieben Wochen eintreffen.

Etwas komplizierter wird die Berechnung für x. Wir müssen dazu beachten, daß der Übergang von n zu n + 1 bedeutet, daß die Zahl der Kinder, die meine Adresse erhalten, mit m multipliziert wird. Es gilt also

$$x(m,n + 1) = m \cdot x(m,n), \tag{3}$$

woraus sich zusammen mit Formel (1) ergibt:

$$x(m,n) = m^n, \tag{4}$$

Bemerkung: Das hier angewendete Beweisverfahren des Schritt-für-Schritt-Vorgehens wird „Beweis durch vollständige Induktion" genannt.

Für unser Beispiel setzen wir m = n = 6 in Formel (4) ein und erhalten:

$$x(6,6) = 6^6 = 46656. \tag{5}$$

2. Ergebnis: Beim Kinderspiel erhalte ich 46656 Postkarten, falls niemand das Spiel unterbricht.

Da eine Postkarte etwa 0,3 mm dick ist, sind das 14 meterhohe Postkartenstapel. Kein Wunder also, daß die Post ihren Beitrag an der Durchführung solcher Kinderspiele, nämlich ordentliche Beförderung aller Briefe und Postkarten, nur solange leisten kann und will, wie diese theoretisch denkbare Zahl praktisch niemals auch nur annähernd erreicht wird. Mit anderen Worten: Sollte einmal der Fall eintreten, daß tatsächlich etwa 10 Wochen lang kein Kind das Spiel abbricht, dann müßte die Post das Spiel verbieten. Anderenfalls würde nämlich die Zustellung „normaler Briefe" gefährdet sein. So ist also gerade die Tatsache, daß regelmäßig Kinder diesen Brief erhalten aber nicht fortsetzen, Voraussetzung dafür, daß dieses Spiel über Jahre hinweg funktioniert.

Nun zur zweiten Frage: Wieviele Postkarten erhalte ich wirklich? Ich selbst habe in meinem Leben fünfmal an diesem Kinderspiel teilgenommen und habe insgesamt sechs Postkarten erhalten. Ist das typisch? Folgender Schluß ist völlig korrekt: Es können insgesamt nicht mehr Postkarten ankommen als abgesandt wurden. Weil pro Teilnehmer nur eine Postkarte versendet wird, kann im Durchschnitt auch nicht mehr als eine Postkarte ankommen. Bei zuverlässiger Postbeförderung kann man sogar „genau eine" sagen. Da es aber gelegentlich vorkommt, daß man mehr als eine Postkarte erhält, folgt daraus zwingend, daß es zumindest gelegentlich vorkommt, daß man überhaupt keine Postkarte erhält, da anderenfalls der Durchschnitt der erhaltenen Postkarten doch größer als eins wäre. Das Erstaunliche an diesem Schluß besteht darin, daß gar nicht vorausgesetzt werden mußte, daß das Spiel gelegentlich unterbrochen wird. Daraus folgt aber auch, daß die oft behauptete Schlußweise: „Wenn kein Kind das Spiel unterbricht, erhält man pro Teilnahme 46656 Postkarten, also auf jeden Fall mehr als eine im Durchschnitt." unkorrekt ist. Woran liegt das? Wir haben oben, ohne dies ausdrücklich zu erwähnen, von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß es nur endlich viele Kinder gibt und jedes Kind nur endlich oft an diesem Spiel teilnimmt. Die zitierte falsche Schlußweise beachtet diese Tatsache nicht.

Man kann aber der zitierten Schlußweise auch eine positive Interpretation geben: In der Anfangsphase des Spiels, also dann, wenn die Zahl der daran insgesamt beteiligten Kinder noch wesentlich kleiner als die Gesamtkinderzahl ist, (also wenn man „Gesamtkinderzahl ist uneingeschränkt groß" noch als gute Näherung verwenden kann,) kann man durchaus noch damit rechnen, wesentlich mehr als eine Postkarte zu erhalten.

Wir können das Ganze als einen Zufallsprozeß modellieren. Wir machen dazu die Annahme, daß jedes Kind nur mit einer Wahrscheinlichkeit $p < 1$ spielregelgemäß weiterspielt und in den übrigen Fällen überhaupt nicht reagiert. Man kann sich dann leicht überlegen, daß man dann statt m nur im Durchschnitt $y = (p \cdot m)^n$ Postkarten erhält. Da wir aber schon auf anderem Wege $y = 1$ hergeleitet hatten, folgt daraus $p = 1/m$, also $p = 1/6$ in unserem Beispiel.

3. Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit p, daß ein Kind, das dieses Kinderspiel bekommt, weiterspielt, beträgt p = 16,7 %.

Wir wollen uns jetzt klar machen, daß diese 16,7 %, genauer $16\frac{2}{3}$ %, recht stabil sind. Wäre etwa zwei Jahre (also 104 Wochen) lang p = 18 %, würde sich die Zahl der daran beteiligten Kinder um den Faktor $[18/(16 + 2/3)]^{104} \approx 3000$ vergrößern, was Verbreitung von Unlust am Weiterspiel und damit wieder eine Verringerung von p zur Folge hätte. Der Exponent 104 ist die Zahl der Wochen, die im Laufe der angenommenen zwei Jahre vergehen.

Andererseits, wäre $p < 16\frac{2}{3}$ %, würde die Zahl der beteiligten Kinder exponentiell (also sehr schnell) abnehmen und das Spiel bald ganz einschlafen. Das ist aber, wie die Erfahrung zeigt, nicht der Fall.

Als Letztes soll uns nun die Frage beschäftigen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß ich überhaupt eine (oder mehrere) Postkarte(n) erhalte. Dazu bezeichnen wir mit q die Wahrscheinlichkeit, daß ich eine ganz bestimmte der 46656 theoretisch denkbaren Postkarten erhalte, Sie beträgt 1/46656, da ja die Gesamtzahl im Durchschnitt 1 beträgt; d. h., die Wahrscheinlichkeit, daß ich eine bestimmte Postkarte nicht erhalte, beträgt z = 46655/46656. Wären nun alle diese Ereignisse voneinander abhängig, würde man

$$q = z^{46656} \approx 1/e \approx 36{,}79\ \% \qquad (6)$$

erhalten. Dabei ist e = 2,7183 die Basis der natürlichen Logarithmen. Dem spricht aber die Erfahrung entgegen, welche besagt, daß man in mehr als der Hälfte aller Fälle überhaupt keine Postkarte erhält. Um diesen Widerspruch zu lösen, wollen wir den Einfluß der Voraussetzung „unabhängig" an einem einfach überschaubaren Fall testen: Sei m = n = 2: Es ist also p = 50 %. Ich schreibe an die Kinder a und b, die machen jeder mit 50 % Wahrscheinlichkeit mit; dann schickt a an A und B, b an C und D, und jeder von diesen vier macht mit 50 % Wahrscheinlichkeit mit. Wir können jetzt Unabhängigkeit derart voraussetzen, daß jeder, der einen Brief erhält, mit derselben, von der Entscheidung der anderen unabhängigen Wahrscheinlichkeit von 50 % entscheidet, ob er mitmacht; aber die Entscheidung, ob a mitmacht, beeinflußt natürlich die Antwort auf die Frage, ob A und B den Brief überhaupt erhalten. Die Wahrscheinlichkeit, daß ich von A eine Postkarte erhalte, beträgt 25 %.

Dasselbe trifft für B, C und D zu. Wären diese vier Ereignisse voneinander unabhängig, würde die Wahrscheinlichkeit q(i), daß ich genau i Postkarten erhalte, gerade durch die Binomialverteilung b(i) bestimmt sein. Für unser Beispiel gilt dabei

$$b(i) = \binom{4}{i} 3^{4-i} / 256 \qquad (7)$$

also b(0) = 81/256, b(1) = 108/256, b(2) = 54/256, b(3) = 12/256 und b(4) = 1/256. Das Zeichen

$$\binom{n}{i} = n!/(i! \cdot (n-i)!) \qquad (8)$$

ist der Binomialkoeffizient, und i! ist das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis i. Der Erwartungswert ist 1, die Streuung 0,75. Die Wahrscheinlichkeit, überhaupt eine Postkarte zu erhalten, betrüge dann $b(0) \approx 31{,}64$ %.

Jetzt soll dasselbe ohne die Voraussetzung der Unabhängigkeit ganz genau berechnet werden. Es sind $2^6 = 64$ Fälle zu unterscheiden, je nachdem, wer mitmacht und wer nicht. Durch Auszählen aller Fälle erhält man das genaue Ergebnis q(0) = 25/64, q(1) = 20/64, q(2) = 14/64, q(3) = 4/64, q(4) = 1/64. Erwartungswert und Streuung sind beide gleich 1.

Um mit den b(i) besser vergleichen zu können, erweitern wir die q(i) mit 4, also q(0) = 100/256, q(1) = 80/256, q(2) = 56/256, q(3) = 16/256 und q(4) = 4/256. Es geschieht also wesentlich seltener, daß ich genau durchschnittlich viele, nämlich *eine* Postkarte erhalte. Jedes andere Ergebnis tritt dagegen häufiger auf als bei der Binomialverteilung. Das ist Ausdruck der Tatsache, daß hier die Streuung größer ist.

Insbesondere ist q(0) = 39,0625 %, also ist die Wahrscheinlichkeit, überhaupt keine Postkarte zu erhalten, deutlich größer als dies zunächst abgeschätzt wurde. Wir können daher davon ausgehen, daß auch bei m = n = 6 die berechneten 36,79 % bei Berücksichtigung der Abhängigkeiten wesentlich größer ausfallen werden.

Wir wollen dies jetzt genau herleiten. Die Wahrscheinlichkeit, überhaupt keine Postkarte zu erhalten, werde mit r = r(m,n) bezeichnet, wobei wieder der Fall m = n = 6 von besonderem Interesse ist. Wir verwenden wieder die vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Sei n = 1.

Für diesen Fall kann man tatsächlich von Unabhängigkeit ausgehen und erhält $r(m,1) = (1 - 1/m)^m$.

Induktionsschritt: r(m,n) möge bereits berechnet sein. Wir erhalten dann als Binomialverteilung

$$r(m,n+1)=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(m-1)^{m-i}m^{-m}r(m,n)^{i} \qquad (9)$$

also

$r(m,n+1) = [(r(m,n) + m - 1)/m]^{m}$. (10)

Die genaue Herleitung dieser Formel ist recht aufwendig und soll hier weggelassen werden. Als Probe berechnen wir jetzt mittels dieser Formel den schon oben hergeleiteten Wert r(2,2): Laut Induktionsanfang erhalten wir r(2,1) = 1/4, also

$$r(2,2)=\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}4^{-i-1}=$$

$$=1/4+2/16+1/64=q(0) \qquad (11)$$

Jetzt setzen wir m = 6 und benutzen die Abkürzung r(6,n) = s(n). Wir suchen also s(6). Es gilt $s(1) = (5/6)^6 = 0{,}334898$ und $s(n+1) = [(5 + s(n))/6]^6$, so daß mit 5 Iterationsschritten ermittelt werden kann (nachträglich kann man sogar von s(0) = 0 ausgehen und die Iterationsformel für n = 0 anwenden):

$$s(6) = 0{,}73504257. \qquad (12)$$

4. Ergebnis: Nur mir 26,5 % Wahrscheinlichkeit erhält man überhaupt eine Postkarte; wenn man aber überhaupt eine erhält, dann sogar im Durchschnitt 3 bis 4 Stück.

Hieraus sieht man, welch großen Fehler man machen kann (36,79 % statt der richtigen 73,50 %), wenn man fälschlich eine Unabhängigkeit zwischen Zufallsgrößen annimmt.

Für sehr große Werte n wird s(n) immer größer, es gilt

$$\lim_{n\to\infty} s(n)=1 \qquad (13)$$

Also: Wenn man das Kinderspiel mit sehr langer Adressenliste spielen würde, würde nicht nur die Wartezeit auf die Postkarten sehr lang werden, sondern auch die Wahrscheinlichkeit, überhaupt eine Postkarte zu erhalten, verschwindend klein werden.

Ungeachtet dessen bleibt die Aussage, daß man im Durchschnitt genau eine Postkarte erhält, richtig. Es werden nämlich diejenigen, die überhaupt mindestens eine Postkarte erhalten, im Durchschnitt eine sehr große Anzahl davon erhalten.

Hans-Jürgen Schmidt

Aufgaben zum „Pythagoras" und „Euklid" zur Weiterarbeit und zum Aufzeigen von Zusammenhängen

Die Sätze des "Pythagoras" und des "Euklid" werden nach der Einführung hauptsächlich zur Lösung von praktischen Aufgaben (Feuerwehrleiter, Dachsparren u. a.) oder zur Bestimmung von fehlenden Seiten in geometrischen Figuren verwendet. Neben diesem anwendungsorientiertem Aspekt lassen sich auch weitere Betrachtungen über Zusammenhänge anstellen, die für Schüler weiterführend und interessant sein können und dennoch nicht ganz ohne Praxisbezug sind.

Dazu einige Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad, die man selten oder gar nicht in Mathematikbüchern findet.

Aufgaben und Anregungen:

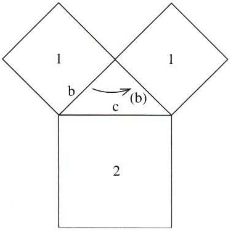
1. **Konstruiere mit Hilfe des Pythagoras aus einem Quadrat ein doppelt so großes Quadrat (nicht über der Diagonalen).**
2. **Konstruiere mit Hilfe des Pythagoras zu einem Quadrat das doppelt und das dreimal so große Quadrat in einer Zeichnung.**
3. **Bilde weitere Aufgaben, wo aus einem Quadrat bestimmte Vielfache hergestellt werden.**
4. **Falte aus einem DIN A4-Blatt ein Quadrat und bestimme durch Rechnung die Länge der Diagonale des Quadrats. Vergleiche das Ergebnis mit der Länge des Blattes. Drücke das Verhältnis von Länge und Breite auf möglichst einfache Weise aus.**
5. **Konstruiere mit Hilfe des Höhensatzes zu einem DIN A7-Blatt das flächengleiche Quadrat (oder im Maßstab mit größeren Formaten). Stelle die Größe der entstandenen Quadrate fest und berechne, den wievielten Teil eines Quadratmeters sie darstellen.**
6. **Konstruiere mit Hilfe des Höhensatzes aus dem Quadrat mit der Seitenlänge 12,5 cm das dazugehörige DIN A6-Format.**
7. **Konstruiere mit Hilfe des Höhensatzes im Maßstab 1 : 10 aus einem Quadratmeter das DIN A0-Format.**
8. **In welchem Würfel und welcher quadratischen Säule kommt die Fläche eines DIN A4-Blattes als Körperschnittfläche vor?**
9. **Gib das Verhältnis der Seiten und der Diagonale eines DIN A4-Format Blattes in der einfachsten Form an.**

Diese Aufgaben könnten als Anwendung und Vertiefung oder auch als Einzelaufgaben in Vertretungsstunden eingesetzt werden. Das Gesamtthema führt zu Einsichten und zeigt Zusammenhänge auf. Den Schülern viel Vergnügen bei den Lösungen!

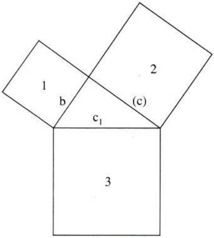
Heinz Günter Kirchhoff
Lennestadt

Lösungen:

Aufgabe Nr. 1



Aufgabe Nr. 2



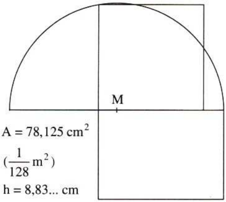
Aufgabe Nr. 3
analog

Aufgabe Nr. 4
Die Länge der Quadratseite:
a = 21,[02241 ... cm
a = 21 cm
$a^2 + b^2 = c^2$
$21^2 + 21^2 = 882$

$c = \sqrt{882}$ cm

$c \approx 29,7$ cm

Aufgabe Nr. 5



$A = 78,125 \text{ cm}^2$

$(\frac{1}{128} \text{m}^2)$

h = 8,83... cm

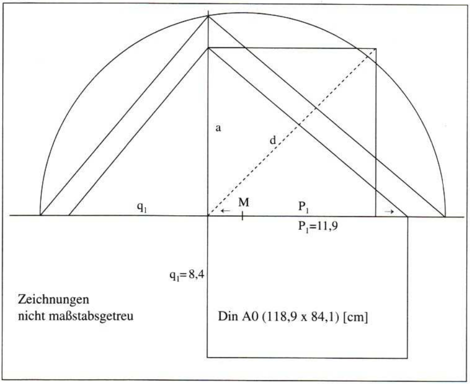
Aufgabe Nr. 6:
$12,5^2$ —-> DIN A6

Lösung wie Nr. 7

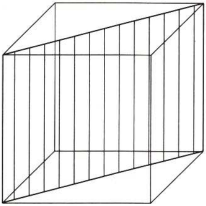
Aufgabe Nr. 7

1) Zu dem Quadrat mit der Seite a rechtwinkliges Dreieck konstruieren mit q = a und $p = a\sqrt{2}$.

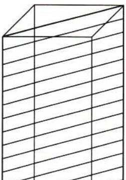
2) Dazu ähnliches Dreieck mit h = a.



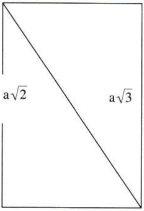
Aufgabe Nr. 8
a) Würfel



b) quadratische
Säule



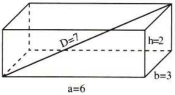
Aufgabe Nr. 9



$a : a\sqrt{2} : a\sqrt{3} = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$

Augabe Nr. 10 (weitere Aufgabe)
Problemtransformation des "Cogito 3/92 – Preisrätsels" aus "Bild der Wirtschaft"
Diophant fragt an: Welches ist der kleinste Quader (mit s > 1 und $s_1 \neq s_2 \neq s_3$), dessen Körperdiagonale auch eine ganze Zahl ist?

Lösung:



Regelmäßige Kreisteilung in der Pflanzenwelt

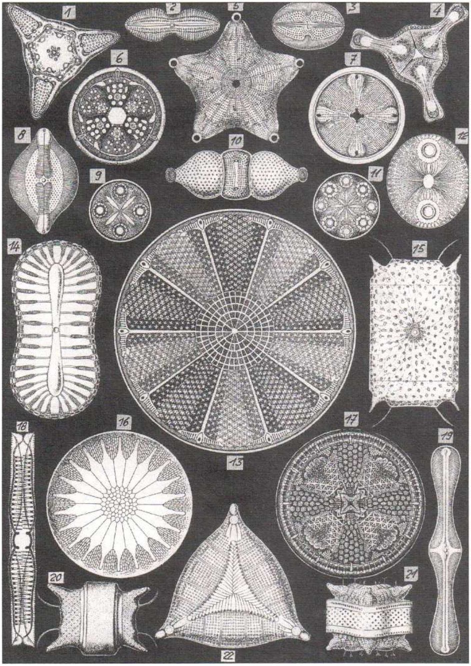


Abb. 1: Schachtellinge (Diatomea), Urpflanzen

Besonders die Blüten zahlreicher Pflanzen zeigen sehr schöne regelmäßige Kreisteilungen, wobei die Fünfer-Teilung in der Blumenwelt äußerst verbreitet ist. Schnittbilder fünfblättriger Blüten machen das sehr deutlich. So häufig fünfblättrige Blumen anzutreffen sind, so selten findet man dreiblättrige. Zu diesen geometrischen Raritäten der Natur gehören u. a. das Schneeglöckchen, der Gemeine Froschleiß, die Ananaspflanze. Auch vierblättrige Blumen sind nicht sehr häufig zu finden; die Kreuzblütler gehören dazu. Fast auf "Schritt und Tritt" begegnet man in der Natur der Sechsblättrigkeit; hierzu gehören neben vielen anderen die Vertreter aus der Familie der Anemonen und das Buschwindröschen.

Aber auch in anderen Bereichen der Pflanzenwelt finden wir regelmäßige Kreisteilungen. Auf den Abbildungen werfen wir einen Blick in die geheimnisvolle Welt kleinster Lebewesen des Meeres. Unter der immensen Vielzahl großer und kleiner Geschöpfe sind es gerade die winzigsten, die Schwebewesen des Planktons, die die wichtigste Rolle in der Nahrungskette des Meeres zu spielen haben. Die einzelligen Pflanzen des Planktons (Plankton heißt griechisch 'das Umhergetriebene') füllen die oberflächennahen Meeresschichten aus und bilden die Nahrungsgrundlage für alle Meeresbewohner. Die abgebildeten Lebewesen gehören zum Stamm der Urpflanzen. Es sind mirkroskopisch kleine einzellige Pflanzenwesen, Kieselalgen, genannt Diatomea oder zu deutsch Schachtellinge. Sie kommen massenweise sowohl im Süßwasser als auch in den Meeren vor. Ernst Haeckel kannte gegen Ende des letzten Jahrhunderts schon über 2000 verschiedene Arten. Von E. Haeckel stammen auch die Zeichnungen. Die Schachtellinge bestehen aus einer zweiklappigen Kieselschale, deren zwei Hälften sich wie eine Schachtel und ihr Deckel verhalten; daher denn auch ihr Name. Der lebendige, weiche Zellenkörper ist in der Schale eingeschlossen und enhält in der Mitte einen Zellkern. Von der ihn umgebenden feinen Plasmaschicht strahlen Plasmafäden aus. Im Plasmanetz zerstreut befinden sich grüne Farbkügelchen (Chlorophyll). Wir erkennen in den Figuren 6, 7, 9, 11, 13, 16 und 17 runde Formen, in den Figuren 3, 8 und 12 ovale, in 1, 4 und 22 dreieckige, in 15, 20 und 21 rechteckige, in 2, 14, 18 und 19 stäbchenförmige und in Figur 5 gar fünfeckige Kontur. Alle Figuren sind stark vergrößert (etwa 50- bis 500fach) gezeichnet. Welche regelmäßigen Kreisteilungen zu erkennen sind, kann jeder Leser selbst herausfinden.

Dr. G. Liebau, Leipzig

Die Simson-Gerade, die bei Robert Simson (1687 bis 1768) nicht vorkommt

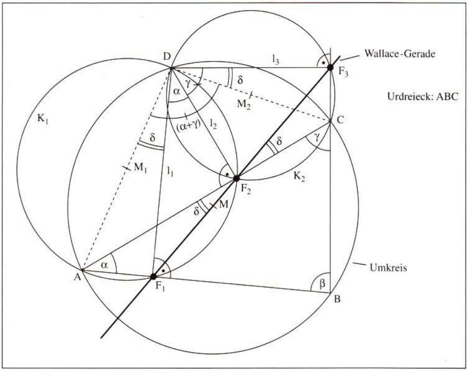


Abb. 1

Problem

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC und (nach üblicher Konstruktion) der zugehörige Umkreis. Von einem beliebigen Punkt D des Umkreises sind die Lote l_1, l_2, l_3 auf die Begrenzungsgeraden des Dreiecks zu fällen. Die Fußpunkte F_1, F_2, F_3 der Lote liegen immer auf einer Geraden!

Seit Poncelet wird diese bis in die heutige Zeit irrtümlich als Simson-Gerade bezeichnet. In Wahrheit findet sich die *Simson-Gerade* erst bei *William Wallace* (1768 bis 1843) in einem Aufsatz aus dem Jahre 1799, wie *Mackay* 1890 in Edinburgh mitteilte. Man sollte also gerechterweise von der *Wallace-Geraden* reden. Wie kann man nun beweisen, daß die Fußpunkte F_1, F_2 und F_3 immer auf einer Geraden liegen?

Ein Beweis benutzt das Sehnenviereck und den Peripheriewinkelsatz.

Beweis (Abb. 1)

Im Sehnenviereck ABCD ist der Winkel bei D Supplement von Beta, d. h. $\alpha + \gamma$. Andererseits schließen die Lote l_1 und l_2 bei D den Winkel α ein und l_2 und l_3 bei D den Winkel γ. Ihre Schenkel stehen paarweise aufeinander senkrecht. Damit sind $\sphericalangle ADF_1$ und $\sphericalangle CDF_3$ einander gleich. Diese lassen sich als Peripheriewinkel in zwei weiteren Kreisen verstehen. Der erste hat AD als Durchmesser, auf ihm liegen nach dem Satz von Thales die Punkte F_1 und F_2. Der zweite mit dem Durchmesser DC enthält die Punkte F_2 und F_3. Über der Sehne AF_1 im 1. Kreis sind die beiden Winkel bei D und F_2 Peripheriewinkel, also gleich groß. Genau so verhält es sich über der Sehne CF_3. Wenn aber die beiden Peripheriewinkel im Punkt F_2 gleich sind, lassen sie sich andererseits als Scheitelwinkel verstehen, also liegen die Punkte F_1, F_2 und F_2 auf einer Geraden, wie wir zeigen wollten.

Aufgaben

1. **Suche einen anderen Beweis für diesen Satz (Wallace-Gerade)!**
2. **Kann eine Dreiecksseite (schon) selbst Wallace-Gerade sein?**
3. **Wann geht die Wallace-Gerade durch eine Seitenmitte des Dreiecks?**

J. Buhrow

Der längste und kürzeste Tag in Deutschland

An den Tagen der Sonnenwenden kann man in den Zeitungen lesen, daß der längste oder kürzeste Tag soundsoviel Stunden dauert. Gemeint ist damit der sog. lichte Tag, also die Zeitdauer der Sonne über dem Horizont. So ist z. B. der kürzeste Tag dieses Jahres, der 22. Dezember, 7 Stunden 40 Minuten lang. – Dies ist durchaus richtig, doch fehlt hier eine wichtige Bemerkung, nämlich, für welche geographische Breite trifft diese Angabe zu.

Wir wissen, daß die Sommertage im Norden länger als im Süden sind, bei den Wintertagen liegen die Verhältnisse umgekehrt (s. "Das Fußballspiel auf der Insel Malta", Jahrg. 23 (1989), Nr. 3). Man mag vielleicht der Ansicht sein, daß die verhältnismäßig geringe Nord-Süd-Ausdehnung von knapp 900 km in Deutschland darauf keinen Einfluß habe. Das Gegenteil ist hier der Fall, wie aus den folgenden Darlegungen hervorgeht: Der nördlichste Punkt befindet sich auf der Nordspitze der Insel Sylt: Geogr. Breite: 55° 03'.

Der südlichste Punkt liegt im Stillachtal südlich Oberstorf: Geogr. Breite: 47° 16,5'.

Daraus ergibt sich ein Breitenunterschied von 7° 46,5', der sich beträchtlich auf die Tageslängen in den Sommer- und Wintermonaten auswirkt. Die unten folgende Übersicht zeigt deutlich diese Unterschiede.

Daraus geht hervor, daß der längste Tag im Norden um 1 h 27 min länger als im Süden ist, dagegen ist der kürzeste Tag im Süden um 1 h 29 min länger. Mit anderen Worten: Was im Norden im Winter fehlt, kommt im Sommer hinzu – bzw. umgekehrt.

Ganz anders liegen die Verhältnisse an den Tagen der Tag- und Nachtgleiche (21.3. und 23.9.). Hier spielt die geographische Breite keine Rolle, von den Polen abgesehen, sind die Tage und Nächte jeweils 12 Stunden lang. Das bedeutet, daß die Licht-Schattengrenze auf unserer Erde meridional, d. h. entlang der Meridiane verläuft. Es ist daher gleich, ob man sich in Schweden, in Nordafrika oder auf dem Äquator befindet, die Sonne geht um 6 Uhr auf und um 18 Uhr unter. Die Refraktion (Strahlenbrechung) sei hier unberücksichtigt.

Je weiter man sich im Datum vom 21.3. bzw. 23.9. entfernt und sich den Sonnenwenden nähert, desto größer werden die Tageslängendifferenzen zwischen Nord und Süd. Es sei hier noch einmal auf den Verlauf der Licht-Schattengrenze auf der Erde verwiesen, die an den Sonnenwendtagen die größte Schräge aufweist und die Meridiane schneidet. Es ist überaus aufschlußreich, den Verlauf dieser Grenze einmal auf einer Landkarte zu verfolgen:

Längster Tag, 21.6.

Sonnenaufgang: Östl. Flensburg-Wismar-Neuruppin-Strausberg b. Berlin-Guben.

Sonnenuntergang: Frankfurt/Oder-Leipzig-Ochsenfurt-Stuttgart-Basel.

Kürzester Tag, 22.12.:

Sonnenaufgang: Strausberg b. Berlin-Leipzig-Coburg-Stuttgart-östl. Basel.

Sonnenuntergang: Insel Fehmarn-Rostock-Eisenhüttenstadt.

Für den Verlauf der Licht-Schattengrenze wurde das Beispiel für die Sonnenaufgänge und -untergänge im Gebiet von Berlin ausgewählt, die übrigen Linien verlaufen parallel dazu. Die hier genannten Orte liegen auf einer Linie, wo die Sonne zur gleichen Zeit auf- bzw. untergeht.

Interessant ist auch die unterschiedliche Dauer der Dämmerung, die am 21.6. im Norden 64 Minuten, im Süden dagegen nur 44 Minuten dauert. Am 22.12. dauert sie im Norden 50 Minuten, im Süden nur 39 Minuten. Auffallend sind im Sommer die hellen Nächte im Norden Deutschlands, die sogen. Mitternachtsdämmerung. Diese dauert auf Sylt vom 8. Mai bis 5. August (89 Tage), nimmt aber in Richtung Süden ab und endet bei 50° Breite (Mainz, Frankfurt/M.-Schweinfurt). Südlich von 50° sind die Sommernächte auffallend dunkel, am nördlichen Horizont ist die Aufhellung durch die Dämmerung nicht mehr zu beobachten.

Wer sich von den hier gemachten Fakten überzeugen möchte, kann sich mit einem Telefonpartner verständigen, um den Zeitpunkt des Sonnenunterganges festzustellen. Um die Ortszeitdifferenz von 4 Min. pro Längengrad auszuschalten, ist zu empfehlen, sich einen Partner zu suchen, der etwa auf demselben Längenkreis wohnt. Man sollte auch auf einen möglichst freien Horizont achten.

Arnold Zenkert

Geogr. Breite	**Tagesdauer** **Längster Tag (21.6.)**	**Kürzester Tag (21.12.)**
55° 03' Insel Sylt	17 h 22 min	7 h 10 min
51° Köln, Erfurt	16 h 23 min	7 h 55 min
47° 16,5' Oberstdorf	15 h 55 min	8 h 29 min

Abb. 1

Aktion „Ausgerechnet Mathematik“

Ausstellung und Wettbewerbe in Koblenz

„Ausgerechnet Mathematik“ – der sonst nur von Kummer gewöhnten Schülern und verständnisvollen Eltern ausgestoßene Seufzer, war im Frühjahr 1991 das Motto einer äußerst ungewöhnlichen Ausstellung im rheinland-pfälzischen Koblenz. Als Schauplatz dieser wohl einmaligen Darbietung von Mathematik diente, in der Zeit vom 2. bis 11. Mai, ein großes Einkaufszentrum in der Stadt an Rhein und Mosel. „Mathe live und zum Anfassen“ – das hat es in der Bundesrepublik in dieser Form noch nie auf einem der Schule so fernen Gelände gegeben. Dort, wo Kunden üblicherweise ihren täglichen Einkäufen nachgehen, gab es zehn Tage lang, die meist als spröde empfundene Ware Mathematik, zum Gekauften umsonst dazu.

Die Idee zu diesem seltenen Experiment, die von vielen sonst nur aus der Ferne respektvoll gegrüßte Mathematik mitten unter Kunden und Verkaufsflächen zu streuen, ging übrigens von der Vorstandsebene des Koblenzer Einkaufsriesen aus. Im Frühjahr 1990 wandte sich die Verkaufsleitung mit dem Vorschlag an die Fachschaft Mathematik des ansässigen Max-von-Laue Gymnasiums, doch einmal auszuprobieren, wie sich ihr Schulfach innerhalb einer Einkaufs-Center-Aktion verkaufen ließe. Die Mathe-Lehrer mußten nicht lange gebeten werden. Schon bald fand sich eine Crew aus Kollegen und Schülern des Gymnasiums um den unermüdlichen Antreiber, StD Dietrich Lissautzki. Ein ganzes Jahr dauerte die Vorbereitungsphase, währte der Kampf der über 40 mathebesessenen Pennäler mit Fourier-Transformationen, Vektorräumen und übergroßen Wurzelzeichen. Projektleiter Lissautzki bereist die halbe Republik, überredete Behörden, überzeugte Firmen, an dieser Großaktion mitzuwirken. Er klapperte Museen und Universitäten ab, bis er schließlich genügend Schaustücke und Angebote beisammenhatte, um das Thema „Mathematik“ durchsichtiger zu machen. „Meine Telefonrechnung stieg damals auf ein globales Maximum“, atmet Studiendirektor Lissautzki heute noch kurz durch, zumal er so nebenbei auch noch den Job des regionalen Fachberaters für Mathematik ausübt(e).

Als Ergebnis dieser vielen Mühen ist daraus ein mathematisches Menü für jedermann entstanden, das neben den Denkmuskeln auch alle Sinne muntermachte. Es gibt keinen besseren Ort als die vertraute Einkaufsstätte, um dem Normalbürger die Berührungsängste zu nehmen, die ihn bei dem Gedanken an die Mathematik beschleichen. „Diese Sorgen zu vertreiben, dazu muß die Schule in die Welt des einfachen Bürgers kommen. Mehr wollten wir nicht bezwecken und es ist uns ganz gut gelungen“, meint StD D. Lissautzki rückblickend, der übrigens schon wieder ein neues Betätigungsfeld für sich entdeckt hat. Er gehört nun dem Organisationskomitee des Wettbewerbs Mathematik Rheinland-Pfalz an.

Die munteren Zahlenspiele im Koblenzer Einkaufszentrum haben auch ihr Echo in der Öffentlichkeit gefunden. „Mit uns können Sie rechnen!“ meldeten die Zeitungen. Sogar dem Regionalfernsehen des Südwestfunks war die Mathe-Show einen Filmbericht wert. Da wollte auch Kultusminister Dr. Georg Gölter nicht abseits stehen, obwohl er sich wenige Wochen zuvor noch bei der Landtagswahl schwer verrechnet hatte. Trotz verlorener Wahl besuchte er als Schirmherr die Ausstellung. Bei seinem Rundgang durch die Sammlung lag der Politiker zur Freude vieler (jüngerer) Ausstellungsgäste wieder knapp daneben, so als er die Zahl der Zwischenräume auf einer Allee mit 119 Bäumen auf 120 schätzte. (Ihr kennt sicher die richtige Antwort, oder?). Nicht minder belustigt war das Publikum von der *menschlichen* Seite der Zahlenwelt. Auf ihrem Einkaufsbummel erfuhren die Neugierigen auf Schautafeln, warum es in Dortmund mindestens zwei Einwohner mit genau gleich vielen Haaren auf dem Kopf geben muß (siehe Aufgabe 1). Oder die Besucher konnten mit einem präparierten Würfel, dem gesunden Men-

Abb. 1: Dr. Georg Gölter (damaliger) Kultusminister von Rheinland-Pfalz in der Schulbank neben Projektleiter D. Lissautzki und (stehend) Center-Manager H.-J. Ebel.

Abb. 2: Eine von 18 Schautafeln (Restaurant „Pythagoras" in der Koblenzer Altstadt

schenverstand völlig zuwider, gewinnen. An anderer Stelle vergnügten sich Spielernaturen an einem Original-Roulettetisch aus der Spielbank in Bad Neuenahr – nur die Spielchips waren, wenig stilecht, aus Kartoffeln hergestellt!
Wer schon immer einmal als Turnierleiter seines Tennisclubs eine Stadtmeisterschaft durchführen wollte, der hatte dazu Gelegenheit. Dazu mußte er nur wissen, wieviele Einzelspiele im K.O.-System bei 60 Teilnehmern insgesamt notwendig wären. Wer von euch kennt die Antwort? Als Fußballfans wißt ihr natürlich, daß der Lederkugel ein Ikosaeder-Muster zugrunde liegt. Aber wem ist wohl bekannt, daß der 20. Präsident der Vereinigten Staaten, James Garfield (4.3. – 19.9.1881), zusammen mit einigen seiner republikanischen Kongreßfreunde einen überraschend einfachen Beweis für den Satz von Pythagoras gefunden hatte.
In einer anderen Abteilung konnte, wer wollte, „spielend denken" lernen. Neben den üblichen Knobeleien aus der Unterhaltungsmathematik (Spiele mit Riesenstreichhölzern, Kartentricks) verwirrten Möbiusbänder zahlreiche Wettgruppen, gab das NIM-Spiel sein mathematisches Geheimnis preis und verzauberte ein Zahlenmagier sein Publikum. Wem diese Mixtur noch nicht genügte, der erhielt Gelegenheit, sich bei „Mathe zum Anfassen" zu bewähren. Mittels einer Pi-Maschine kam man dann der Kreiszahl π durch hemmungsloses Füttern mit Kugeln auf die Schliche. Daneben entwickelte Prof. Dr. A. Beutelspacher von der Universität Gießen in einem Workshop für jugendliche Verschlüsselungsfanatiker, Geheimcodes.

Mit Mozart Mut zu Mathe machen

Großen Zulauf erfuhr zweifellos im Mozartjahr 1991 ein Beitrag des Musikus zur Mathematik. Das „Wolferl" kam nämlich auf die Idee eines Kompositionsspiels. Hierzu ersann er eine Methode, 176 Takte würfelnd beliebig aneinanderzureihen, um damit eine harmonische Melodie im Dreivierteltakt zu bilden. Insgesamt 46 Milliarden Musikstücke hätten unermüdliche Hobbymusiker auf diese Weise durchprobieren können. Um alle Klangmuster auszuspielen, würden 437 Milliarden Jahre gerade ausreichen.
Wem der Sinn aber nach Theater stand, der war bei Mathematik auf der Bühne gut aufgehoben. Dort konnte er dann miterleben, wie eine Mathestunde in den USA oder in Frankreich abläuft. Zur Erholung spielte man anschließend Tangram und Solitär. Ein ganzes Lichthofteil des Einkaufkomplexes war der „Schönheit der Mathematik" vorbehalten. Das Siemens-Museum in München stellte dort vor allem Computergraphik vor. Zudem haben ganztätig Videofilme aus der Spektrum-Videothek mit ihrer dreidimensionalen Farbenpracht („Dynamisches Chaos", „Fraktale Geometrie") nicht nur Laien in ihren Bann gezogen. Neben den spektakulären Ergebnissen moderner Mathematik bestanden aber auch historische Zeitzeugen aus den Anfängen der Mathematik unter den Augen der Besucher. Ein Nachdruck des ersten Rechenbuchs von Adam Ries oder bahnbrechende Originalveröffentlichungen von Leibniz, Euler und Gauß gab es zu bestaunen. Sogar die erste Rechenmaschine der Welt von 1623 haben die Koblenzer Aussteller herangeschafft, zusammen mit dem Vorläufer moderner Rechenhilfen, den der deutsch-amerikanische Wissenschaftler und Tüftler, Konrad Zuse, 1941 entwickelt hatte.
Wer immer noch nicht genug hatte von den vielen Angeboten der Ausstellung, der durfte ein Denksport-Brevier mit 20

Abb. 3: Nachbau der ältesten Rechenmaschine der Welt von Prof. W. Schickard, Tübingen (1653)

Abb. 4: Eine von 18 Schautafeln (Testaurant „Pythagoras" vin der Koblenzer Altstadt

Abb. 5: Mozart's Würfelwalzer zur Eröffnung der Ausstellung

Aufgaben (aus dem Alltagsleben) mit nach Hause nehmen. Ihm sind die folgenden drei Beispiele entnommen, damit auch ihr etwas zum Knobeln habt.

1) **Dortmund hat mehr als 540 000 Einwohner. Man weiß, daß der Mensch weniger als 540 000 Haare auf dem Kopf hat. Gibt es in Dortmund mit Sicherheit *mindestens zwei Bürger* mit gleich viel Haaren auf dem Kopf?**
2) **Eine Flasche Wein kostet 10 DM. Der Wein selbst kostet 9 DM mehr als die (leere) Flasche. Wie teuer ist die Flasche?**
3) **Bei Einberufung zu Reserve-Übungen der Bundeswehr hat man im allgemeinen mit 40 % Ausfällen zu rechnen. Dies führte den Inspektor des Heeres zu der naheliegenden (?) Anweisung, dann müsse man „eben 140 % anfordern".**

Hättet ihr das auch getan?

Denksport in einem Einkaufszentrum

Die wohl ungewöhnlichsten Einzelaktionen innerhalb des Gesamtprojekts waren zwei mathematische Denksportwettbewerbe an zwei verschiedenen Vormittagen im Foyer des Centers. Dabei kämpften jeweils 4 Schüler der Klassenstufen 5 und 6 bzw. 7 bis 10 aus verschiedenen Koblenzer Schüler um den Titel des beeten Rateteams. Aus dem Rahmen fiel dieser Programmteil deshalb, weil er während eines regen Publikumverkehrs stattfand.

Die Wettkämpfer selbst zerstreuten eindrucksvoll alle Bedenken, ob in solch unruhiger Umgebung überhaupt anspruchsvolle Aufgaben gelöst werden können. Eifer und Konzentration jedoch hielten über die gesamte Wettkampfdauer (eine Stunde) an.

Die Problem(chen) zusammengestellt hat Dieter Bennewitz, ebenfalls Mathelehrer am Max-von-Laue Gymnasium und selbst – wie er gern von sich sagt – „ein süchtiger Problemlöser".

Leider konnte Quizmaster Bennewitz seine Begeisterung für Matheprobleme nicht auf die Umstehenden übertragen. „Denksport ist eben kein Zuschauersport, man muß es schon selbst tun", behauptet er. Dazu sollt ihr jetzt Gelegenheit bekommen. Ich habe 7 Beispiele aus der Koblenzer Raterunde für euch ausgewählt. In den Klammern steht die jeweilige Klassenstufe.

4) **Das Produkt der Alter von 3 Kindern beträgt 1664. Das jüngste Kind ist mindestens halb so alt wie das älteste. Der Vater ist 50 Jahre alt. Wie alt sind die Kinder? (5 – 6)**
5) **Wie viele Zahlen zwischen 1 und 100 gibt es, bei deren Primfaktorzerlegung die Zahl 7 der kleinste Primfaktor ist? (5 – 6)**
6) **Der Mittelwert einer Menge von 50 Zahlen ist 38. Wenn zwei Zahlen, nämlich 45 und 55, weggelassen werden, berechne für diesen Fall den Mittelwert der übrigen Zahlen (7 – 10).**
7) **Die Summe aus einer zweiziffrigen Zahl und der Zahl, die man bei Vertauschung der Ziffern erhält, ist eine Quadratzahl. Wie viele solcher Zahlen gibt es? (7 – 10)**
8) **In einer Schublade liegen 28 Taschentücher, 6 sind rot, 5 sind blau und der Rest ist weiß. Wenn Thomas blind ein Taschentuch aus der Schublade zieht, wie viele Taschentücher muß er dann mindestens aus dem Fach ziehen, damit er mit Sicherheit 3 Taschentücher der *gleichen* Farbe hat? (9 – 10)**
9) **Berechne die Summe**

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Es ergibt sich eine ganze Zahl! (9 – 10)

Übrigens: Zur Verblüffung vieler Anwesender erreichte eine zehnte Hauptschulklasse den ersten Platz. Sie bestand dabei gegen vier Gymnasien und eine Realschule. Das beste gymnasiale Rateteam (aus der Wettkampfgruppe 7 – 10) bildeten drei Mädchen (darunter zwei Töchter des Ministerpräsidenten von Rheinland-Pfalz) und ein Junge. Mädchen können Mathematik, wenn man sie nur läßt!

Paul Jainta

Lösungen

Zeitungsschnipsel

Der Gummihandschuh

Lösung: Der rechte Gummihandschuh kann auch über die linke Hand gestülpt werden, nachdem dieser gewendet ist. Das Wenden ist möglich, weil der Gummihandschuh sich beim Wenden verformt und auch nach dem Wenden verformt bleibt. Denn nach dem Wenden ist der äußere Teil des Handschuhs zum inneren geworden und umgekehrt.

Bemerkung: Ein rechter Gummihandschuh wird durch eine räumliche Spiegelung an einer Ebene auf einen linken abgebildet. Es ist jedoch unmöglich, einen unsymmetrischen Körper wie einen Gummihandschuh durch Verschieben oder Drehen im Raum mit seinem Spiegelbild in Deckung zu bringen.

Ein Riesenhühnerei

Lösung: Unter der Annahme, das Riesenei sei zu einem Normalei in Form und Stoffverteilung ähnlich, ist die gesuchte Länge

$$14{,}5cm \cdot \sqrt[3]{3} \approx 20{,}9cm$$

Die Insel

Lösung: Dann wäre die Fläche von Libitz

$$A = \frac{u^2}{4\pi} = 41{,}1ha$$

groß. Sie wäre dann um

$$\frac{A - 41ha}{41ha} \cdot 100\% = 2{,}7\%$$

größer.

Der Generationenvertrag

Lösung: Ein Berufstätiger zahlt jährlich 1209 DM = $3 \cdot 13 \cdot 31$ DM mehr an die Krankenversicherung als er Leistungen von ihr erhält.
Ein Rentner erhält jährlich für 3312 DM = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 23$ DM Leistungen mehr, als seine Beiträge abdecken. Das k.g.V. von 1209 und 3312 ist $2^4 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 31 = 1334736$. Hieraus folgt $m = 13 \cdot 31 = 403$, $n = 2^4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 23 = 1104$ und $m{:}n = 403 : 1104$.
Bemerkung: Die Erfüllung dieses „Generationenvertrages" fällt in einem Land mit überalterter Bevölkerung schwer.

Die Zinsabschlagsteuer

1.) Würden die Festgeldzinsen des B 6100,02 DM oder mehr betragen, so hätte er 0,01 DM oder mehr Zinsabschlagsteuer zu entrichten. Denn bereits

$$0{,}02DM \cdot \frac{30\%}{100\%} = 0{,}006DM$$

würde die Bank zu 0,01 DM Zinsabschlagsteuer aufrunden. Hingegen wäre für 6100,01 DM Festgeldzinsen wegen

$$0{,}01DM \cdot \frac{30\%}{100\%} = 0{,}003DM \approx 0{,}00DM$$

keine Zinsabschlagsteuer abzuziehen. Die noch nicht auf volle Pfennige gerundeten Festgeldzinsen des B müssen also kleiner als 6100,015 DM sein. Aus

$$G \cdot \frac{7{,}75\%}{100\%} < 6100{,}015DM$$

folgt

$$G < 6100{,}015DM \cdot \frac{100\%}{7{,}75\%}$$

$$= 78709{,}8709..DM$$

und damit $G \leq 78709{,}87$ DM.
2.) Jahreszinsen:

$$300000DM \cdot \frac{7{,}75\%}{100\%} = 23250DM$$

Zinsabschlagsteuer:

$$(23250 - 6100)DM \cdot \frac{30\%}{100\%} = 5145DM$$

Restzinsen:
(23250 – 5145) DM = 18105 DM
gesuchter Prozentsatz:

$$\frac{18105DM}{300000DM} \cdot 100\% = 6{,}035\%$$

Bemerkung: Wird das Festgeldguthaben immer größer angenommen, so strebt der Prozentsatz der Restzinsen vom Guthaben G beim Zinssatz p = 7,75 % gegen den Grenzwert

$$\frac{70\%}{100\%} \cdot p = \frac{7}{10} \cdot 7{,}75\% = 5{,}425\%.$$

Postleitzahlen

Gleichfarbig sind jeweils gefärbt die Gebiete mit den ersten Ziffern der neuen Postleitzahlen 0, 2, 6 und 8, 1, 4 und 9 sowie 3,5 und 7.
W. Träger, Döbeln

Export und Bruttosozialprodukt

$$\text{a) } 11359 \cdot \frac{100\%}{57\%} = 2{,}0 \cdot 10^4$$

$$\text{b) } 1677 \cdot \frac{100\%}{8\%} = 2 \cdot 10^4$$

Schachecke

1. Sc3 d6
2. Sd5 Sd7
3. S:e7 Sdf6
4. S:g8 S:g8.

Sprachecke

Ziel: Gleichheit!
Setzt die fehlenden Zeichen (+, -, · oder :) in die vorgegebenen mathematischen Gleichungen ein, so daß wahre Aussagen entstehen!
Lösungen:
1. $16 - 13 + 16 \cdot 6 = 99$
2. $6 \cdot 15 + 7 - 13 = 84$
3. $17 - 1 + 14 \cdot 3 = 58$
4. $3 - 18 : 3 + 14 = 11$
5. $5 + 4 \cdot 14 - 16 = 45$

Übersetzung: Peter Hofmann

Наидите таки два чиспа что при умножением цервого на 2 попучится квадрат второго а при умножении цервого на 3 – куσ второго

Findet zwei solche Zahlen, daß bei Multiplikation der ersten mit 2 das Quadrat der zweiten entsteht und bei Multiplikation der ersten mit 3 die 3. Potenz der zweiten.

Lösung
Es sei x die erste der gesuchten Zahlen, y die zweite. Laut Aufgabe gilt dann
$2x = y^2$ und $3x = y^3$
woraus wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x = y^2 \\ 3x = 2xy \end{cases}$$

folgern. Es wird erfüllt, wenn

$x = y = 0$ oder

$x = \frac{9}{8}$ und $y = \frac{3}{2}$ ist.

Finde den Radius

Die Zeichnung zeigt einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt O und dem Durchmesser AB = 2R.

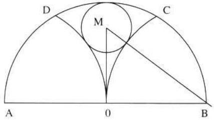
Wir zeichnen die Bögen OC und OD mit den Radien AO = OB = R und den Mittelpunkten A und B ein.

Dann zeichnen wir einen Kreis, welcher den Halbkreis und jeden der zwei Bögen berührt.

Frage: Finde den Radius des kleinen Kreises.

Hinweis: Nutze den Satz: Eine Strecke, welche die Mittelpunkte zweier sich berührender Kreise verbindet, geht durch den Berührungspunkt.

Lösung: x sei der Radius und M der Mittelpunkt des Kreises.



Dann geht die Linie BM durch den Berührungspunkt.

Das Dreieck OMB ist rechtwinklig mit:

OB = R

OM = R – x

BM = R + x

Es gilt: $BM^2 = OM^2 + OB^2$

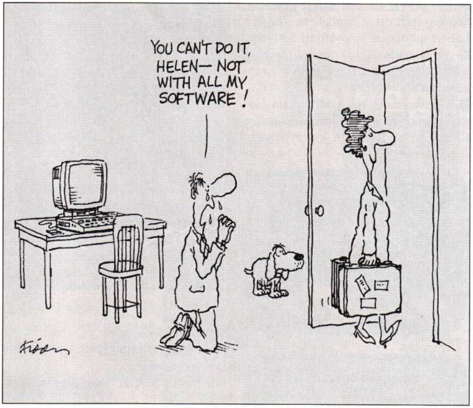
$(R + x)^2 = (R - x)^2 + R^2$

Daraus folgt: $x = \frac{R}{4}$

G. Liebau

Würfelstapelei

1. b besteht aus 26 Würfeln, a, d, e aus 27 und c aus 28 Würfeln und kann deswegen als einzige Figur nicht von Lars gebaut werden.
2. a) mindestens 24, höchstens 28
   b) mindestens 223, höchstens 247
   c) mindestens 24, höchstens 31
3. Zwei Einheiten sind völlig ummauert.
4. 22 Klötze
5. a) 52 Kästen b) 54 Kästen



alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG, Postfach 10 01 50, W-3016 Seelze 6
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,90 DM, im Einzelbezug 3,00 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten. Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

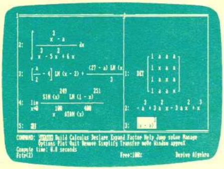
Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Gestaltung: Jens Hinzmann
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617- 34013-X

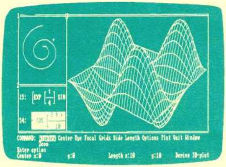
Derive

A mathematical Assistant

Damit Mathematikunterricht in der Schule Spaß machen kann, hat die hawaiianische Firma Soft Warehouse, Inc. School Lab Packs ihres PC-Programmes DERIVE auf den Markt gebracht. Schulen wird damit ermöglicht, ihre PC-Labors mit dieser innovativen Software, die für Formeln das ist, was der Taschenrechner für Zahlen ist, kostengünstig auszustatten.

Die Verwendung von DERIVE im Mathematikunterricht eröffnet die einmalige Chance, dieses Fach von seinem Schrek-





ken zu befreien und die Qualität des Unterrichtes entscheidend zu verbessern. In Österreich hat man sich bereits zu einem flächendeckenden Einsatz an allen Gymnasien und Höheren Technischen Lehranstalten entschlossen.

Der neue Lizenztyp wird ausschließlich über „Educational Specialist Dealers“ vertrieben. Nähere Informationen und ein Verzeichnis aller „Educational Specialist Dealers“ sind erhältlich bei: **Soft Warehouse GmbH Europe, Softwarepark Hagenberg, A-4232 Hagenberg, Tel. +43-7236-3297-81, Fax +43-7236-3769.**

Symmetrien, Ornamente, Kreisteilungen und Kreisketten

Hierzu seien zwei empfehlenswerte Bücher vorgestellt:

Das häufige Vorkommen der Symmetrie in der Natur hat zur Folge, daß der Mensch symmetrische Formen als wohltuend, als harmonisch empfindet. So war schon im Altertum die Schönheit an Symmetrie gebunden. Und betrachtet man die Bauten, den Schmuck und die Kleidung der Menschen über die Jahrhunderte, fallen immer wieder vielseitige Symmetrien auf. Vielfältige Beispiele solcher Symmetrien und die mathematische Interpretation dieser Strukturen findet Ihr in einem empfehlenswerten Büchlein der Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig:

Flachsmeyer/Feiste/Manteuffel
Mathematik und ornamentale Kunstformen
ISBN 3-332-00679-4
Mathematische Schülerbücherei Nr. 148

Aufwendig gestaltet und mit zahlreichen Beispielen ausgestattet ist das Buch von Harry Blaser (vgl. hierzu auch den Beitrag auf Seite 28).

Verlag Paul Haupt
ISBN 3-258-04206-3

MS-Word für Kinder
Eine unterhaltsame Einführung in die Textverarbeitung
von Susan Müller und Verena Weigand
1992.
185 Seiten. Kartoniert DM 12,80
ISBN: 3 406 36817 4
Beck EDV-Berater im dtv, Band 50114

Kindern im Alter von etwa 10 bis 14 Jahren eine sinnvolle Beschäftigung mit dem Arbeitsmittel Computer auf unterhaltsame und altersgemäße Weise nahezubringen, ist das Ziel dieses Buches. Aufgrund seiner weiten Verbreitung wurde das Textverarbeitungsprogramm MS-Word 5.5 gewählt. Anhand einer Einladung zur Faschingsparty, eines Tagebuchs oder eines Adressenverzeichnisses der Freunde lernt der jugendliche Anwender spielend, das Programm angemessen zu bedienen und für seine privaten und schulischen Zwecke effektiv einzusetzen. Die Autorinnen sind als Leiterin eines Schülertagesheimes und als Erzieherin pädagogisch besonders erfahren.

Erste Schritte am PC
Funktionsweise und Bedienung des Personal Computer
von Klaus-Peter Körner
1992.
327 Seiten. Kartoniert DM 19,80
ISBN: 3 406 36816 6
Beck EDV-Berater im dtv, Band 50117

Wer hat eigentlich den Computer erfunden? – Kann man eine mechanische Rechenmaschine bereits „Computer“ nennen? Das vorliegende Buch geht vom historischen Hintergrund aus und zeigt die Entwicklung von den Anfängen bis zu den modernsten Rechnern. Ganz nebenbei wird der Leser auch in deren Funktionsweise und Bedienung eingeführt:

Dieser Band erklärt den Aufbau des PC und seiner Zusatzgeräte. Anschaulich wird deren Funktionsweise und Bedienung beschrieben. Dabei werden ebenso grundlegende Befehle des Betriebssystems MS-DOS, wie auch Fragen zum Anlegen von Verzeichnissen und der Handhabung von Festplatte und Disketten erläutert.

ISBN 3-617-34013-X Einzelpreis: 3,– DM Einzelpreis im Abo: 2,15 DM