

H 11328 F

Heft 5

Oktober 1993
27. Jahrgang

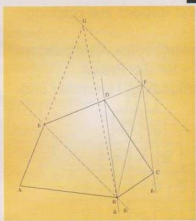
Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

Alpha

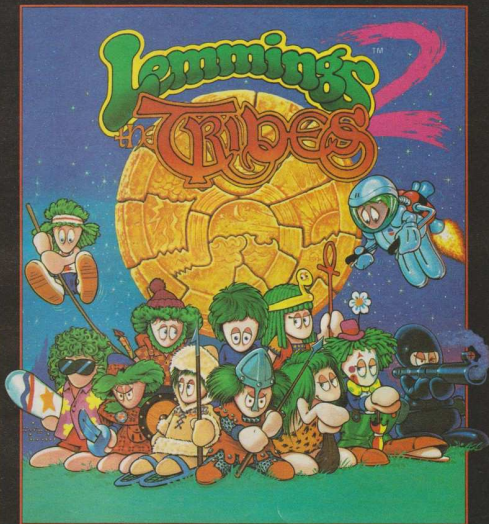
Mathematische
Schülerzeitschrift



**Leben und Werk
Georg Cantors**



Flächenverwandlungen



RAUPENWANDERUNG

**Raupenwanderung
als strategisches**

BRETTSPIEL



**Bewegungen auf
der Höllenschaukel**

Inhaltsverzeichnis

Zeitungsschnipsel 4

Eine bunte Mischung von Informationen und Aufgaben zu einer Höllenschaukel, einer norwegischen Münze, zu Bundesratsbriefen und der Alge „Caulerpa Taxifolia“

Der schnellste Weg – ein besonderes Stück Mathematikgeschichte 6

Johann Bernoulli's berühmte Aufgabe – dargestellt von *Heinz Dabrock*.

Zahlen-spielereien 7, 15

Dieter Bauke zeigt erstaunliche Gleichungen, die zu eigenen Tüfteleien anregen.

Der Komet Swift-Tuttle und die Erde 9

Horrmeldungen über Kometenaufschläge auf der Erde relativiert *Walter Träger*.

Vor 30 Jahren: Start des Nachrichtensatelliten „Telstar 2“ 9

Rückblicke auf diesen frühen Satelliten von *Walter Träger*.

Komisches, Kniffliges und Knackiges 10

Alphons logische Abenteuer mit Antinomien, die Wege einer sportlichen (Schach) Dame sowie die Sprachecke.

Ein Kirschenpuzzle .. 11

Obwohl schon gut 250 Jahre alt, regt es noch immer zum Nachbilden und Probieren an, wie *Konrad Haase* und *Rüdiger Thiele* zeigen.

Flächenverwandlungen 12

Eine Verwandlung gradlinig begrenzter Flächen zu „entsprechenden Rechtecken“ erleichtert Flächeninhaltsberechnungen ungemein, belegt *Jochen Kreusch*.

Sommerzeit – Sportzeit 14

Hartmut Boettcher verdeutlicht Zeitrückstände bei Sportresultaten durch Umrechnung in Streckenrückstände.

Zuschnitt eines Glockenrocks 15

Berechnungen zur optimalen Nutzung einer vorgegebenen Stoffbreite von *Bernad Luderer*.

Ein Ausflug in die räumliche Geometrie 16

Besonders die Beschreibung und Analyse eines um eine Raumdiagonale rotierenden Würfels interessiert *Bernad Wernicke*.

Ganz so einfach ist es mit dem Mond nicht 24

Astronomischen Unsinn mit Mondabbildungen auf Zeichnungen und Gemälden rückt *Arnold Zenkert* gerade.

Gedanken zum 75. Todestag von Georg Cantor 26

Vielseitig interessiert, widmete sich Georg Cantor besonders der Mengenlehre. *Walter Purkert* beschreibt die Person Georg Cantors und seine mathematischen Leistungen.

Interessante Aufgaben von Isaak Newton 28

Aus dem umfangreichen Werk des vor 350 Jahren geborenen Isaak Newton hat *Johannes Lehmann* einige „mathematische Bonbons“ ausgewählt.

Marktecke 32

Im Vordergrund stehen diesmal strategische Brettspiele für den Computer – ausgewählt und ausprobiert von *Hartmut Seitz* und *Christian Pape*.

Lösungen 30, 34

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholz und Herbert Kästner.

Redaktion:

Hans Joachim Lemke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze

Redaktionskollegium:

StR F. Arnet (Kleingschmidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pleizhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaiser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), Dr. W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader

Anzeigenabwicklung:

Telefon: (05 11) 4 00 04-23

Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990

Vertrieb und Abonnement:

Telefon: (05 11) 4 00 04-52/53/85

Verlag:

Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,

Postfach 10 01 50, 30917 Seelze

Telefon: (05 11) 4 00 04-0

Telefax: 4 00 04-19

Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,00 DM, im Einzelbezug 2,50 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten. Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage. © Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassen- bzw. Fachstärke vervielfältigt werden.

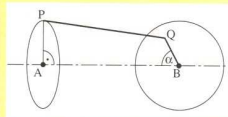
Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH

Druck: Scherrerdruk, Hannover

ISBN 3-617- 34017-2

Auf zum Münchner Oktoberfest!



1993 findet das Münchner Oktoberfest, das seinen Ursprung in den Hochzeitsfeierlichkeiten des Kronprinzen Ludwig, des späteren Königs Ludwig I. von Bayern, mit der Prinzessin Therese von Sachsen-Hildburghausen im Jahr 1810 hat, zum 160. mal statt. 24 Oktoberfeste mußten ausfallen (Kriegs- und Nachkriegsjahre, Cholera-Epidemien). Festplatz ist die Theresienwiese, das Oktoberfest wird deshalb auch „Wies'n“ genannt. Seit 1835 findet am ersten Festsonntag der Trachten- und Schützenzug statt. Auch in diesem Jahr wird wieder mit über 6 000 000 Besuchern gerechnet.

Die Gondel der „Stern von Rio“ genannten Höllenschaukel, die auch in diesem Jahr wieder auf der „Wies'n“ steht, bietet 48 Personen in 12 Reihen mit je 4 Sitzen Platz. Die Gondel ist an ihren Enden über

Kardangelenke mit zwei von Hydraulikmotoren angetriebenen Rotoren verbunden. Beide Rotoren haben die gleiche Drehachse. Sie sind aber in ihrer Drehbewegung nicht miteinander gekoppelt, sie werden also separat gesteuert. Die maximale Drehzahl jedes Rotors beträgt 10 U/min. Dadurch wird eine große Vielfalt von Bewegungsmöglichkeiten erreicht. Denn mit der gegenseitigen Lage der Rotorenarme ändert sich der Winkel zwischen Rotorenachse und Gondelachse. Der dazu erforderliche Längenausgleich (der Abstand der Enden der Gondelachse ist konstant) wird dadurch erreicht, daß ein Rotorarm als Schwenkarm ausgebildet ist.

Aufgabe: Vereinfachend seien die Rotorarme AP und BQ und die Achse PQ der Gondel als Strecken aufgefaßt. Für ihre

Längen gilt $\overline{AP} = \overline{BQ} = r = 4,8\text{m}$ und $\overline{PO} = a = 15,0\text{m}$. Der Arm AP des starren Rotors steht senkrecht auf der Rotorenachse AB. Der Arm BQ des Gelenkrotors bildet mit der Rotorenachse einen sich ändernden Winkel $\alpha = \angle QBA$. Für jede Lage beider Rotorenarme gilt also: Der Punkt P (als Punkt idealisiertes Kardangelenke) ist ein Punkt des Kreises mit Mittelpunkt A und Radius r, dessen Ebene senkrecht auf AB steht. Der Punkt Q (als Punkt idealisiertes Kardangelenke) ist ein Punkt des Kreises mit Mittelpunkt B und Radius r. Der Minimal- und der Maximalwert des Winkels α sind zu ermitteln! Dabei soll zusätzlich gelten: Der Winkel α ist dann ein rechter Winkel, wenn BQ auf der Ebene durch die Punkte A, B und P senkrecht steht.

Dr. W. Träger



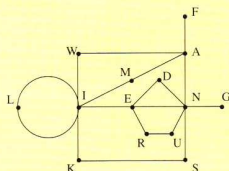
Die Höllenschaukel

Foto: Firma Zehle, München

Norwegische 50-Kronen-Silber- münze „Olympische Winterspiele 1994 Lillehammer“



Aufgabe: Das auf dieser Münze dargestellte Motiv wird durch einen Substantiv beschrieben. Dieser ist im abgebildeten Graphen versteckt:



Das Wortbild dieses gesuchten Substantivs entsteht, indem man beim Ablaufen eines geeigneten, jede Kante genau einmal enthaltenden Kantenzuges (Weges) nacheinander die den passierten Knoten zugeordneten Buchstaben aufschreibt.

Dr. W. Träger, Döbeln

Bundesschatzbriefe – eine lohnende Geldanlage

Bei Bundesschatzbriefen gibt es zwei Typen A und B. Beim Typ A beträgt die Geldanlage N (Nennwert) 100 DM oder ein Mehrfaches von 100 DM, erfolgt jährlich die Zinsauszahlung und nach der Laufzeit von 6 Jahren die Rückzahlung des Nennwertes. Beim Typ B beträgt die Geldanlage N 50 DM oder ein Mehrfaches von 50 DM, werden die Zinsen angesammelt und erfolgt nach einer Laufzeit von 7 Jahren die Rückzahlung des Nennwertes und der angesammelten Zinsen und Zinseszinsen.

Für die Bundesschatzbriefe 1992/11 mit Zinslaufbeginn am 1. 11. 92 gelten die folgenden Zinssätze:

Laufzeit	Zinssatz
1. Jahr	$p\% = 7,00\%$
2. Jahr	$p_1\% = 7,50\%$
3. Jahr (Typ A und B)	$p_2\% = 8,00\%$
4. Jahr	$p_3\% = 8,25\%$
5. Jahr	$p_4\% = 8,50\%$
6. Jahr	$p_5\% = 8,50\%$
7. Jahr (Typ B)	$p_6\% = 8,50\%$

1. Aufgabe:

Wieviel Prozent seiner Geldanlage N in einem Bundesschatzbrief 1992/11 vom Typ A erhält ein Erwerber während der Laufzeit vom 1. 11. 92 bis zum 1. 11. 98 insgesamt an Zinsen ausgezahlt?

2. Aufgabe:

Ein Sparer läßt sich die auf seine Geldanlage N jährlich zum gleichen Zinssatz $p\%$ erteilten Zinsen jeweils auszahlen: Wie groß muß dieser Prozentsatz $p\%$ sein, damit er nach 6 Jahren Laufzeit ebenso viel



Zinsen erhalten hat wie ein Erwerber eines Bundesschatzbriefes 1992/11 vom Typ A mit dem gleichen Nennwert bis zum 1. 11. 98?

3. Aufgabe:

Wieviel Prozent seiner Geldanlage N in einem Bundesschatzbrief 1992/11 vom Typ B erhält ein Erwerber am 1. 11. 1999 allein an Zinsen und Zinseszinsen zurückgezahlt?

4. Aufgabe:

Eine Geldanlage N wachse durch die jährlichen Zinsen und Zinseszinsen mit jeweils dem gleichen Zinssatz $p\%$. Wie groß muß $p\%$ sein, damit nach einer Laufzeit von 7 Jahren die angesammelten Zinsen und Zinseszinsen ebenso groß sind wie die bei einem Bundesschatzbrief 1992/11 vom Typ B mit dem gleichen Nennwert am 1. 11. 1999?

Dr. W. Träger, Döbeln

Killeralge erstickt das Mittelmeer

Die „Döbelner Allgemeine Zeitung“ druckte am 3.11.92 mit obiger Überschrift einen Bericht von Christa Barth ab:

„Marseille. Sie ist für den Menschen ungefährlich, droht aber das gesamte Ökosystem des Mittelmeeres zu zerstören. Zu diesem Ergebnis sind Wissenschaftler nach mehrmonatigen eingehenden Beobachtungen der tropischen Killeralge „Cau-

lerpa Taxifolia“ gelangt, die entlang der französischen Küsten „mosaikartig“ die heimischen Algenarten überwuchert und unter ihren Wedel gnadenlos alles andere Leben erstickt läßt. Der 1984 erstmals vor dem Ozeanographischen Museum in Monaco entdeckte Eindringling vermehrt sich exponentiell. Rund 400 Hektar des schmalen mediterranen Festlandssockels hat er bereits kolonisiert. Italien, Spanien und die Balearen sind inzwischen berührt. heißt es in dem Ende Oktober vorgelegten alarmierenden Bericht des Expertenkomitees...

Wie weit wird sich die tropische Wucheralge noch ausbreiten, die derzeit keinen natürlichen Feind im Mittelmeer besitzt? Von Roquebrune bei Monaco hat sich der grüne Teppich seit 1984 „jedes Jahr versechsfacht“, betont Professor Meinesz vom Institut für Küstenumweltschutz der Universität Nizza.“

Aufgabe: Wie groß war bei ihrer Entdeckung 1984 höchstens die von der Caulerpa Taxifolia überwucherte Fläche des küstennahen Mittelmeeres?

Dr. W. Träger, Döbeln

Der schnellste Weg – ein besonderes Stück Mathematikgeschichte

Der Mathematiker Johann Bernoulli (1667 – 1748) stellte im Jahre 1696 den Mathematikern seiner Zeit die folgende Aufgabe:

Zwei Punkte A und B, welche verschiedenen Abstand vom Erdboden haben und nicht senkrecht übereinander liegen, sollen durch eine Bahn verbunden werden, auf welcher ein reibungsfrei beweglicher Körper vom oberen Punkt ausgehend infolge der Schwerkraft in kürzester Zeit zum unteren der beiden Punkte gelangt.

Es ist naheliegend, die Verbindungsstrecke zwischen A und B als Lösung des Problems zu vermuten. Der Körper bewegt sich dann auf einer schiefen Ebene, die Bewegung ist gleichmäßig beschleunigt. Für solche geraden Wegstücke berechnet sich die Laufzeit t über die Formel $t = s/\bar{v}$ wobei s der zurückgelegte Weg und $\bar{v}$ das arithmetische Mittel aus der zum Wegstück gehörenden Anfangs- und Endgeschwindigkeit bedeuten. Für die Momentangeschwindigkeiten entlang der Bahn erhalten wir mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$, wobei g für die Erdbeschleunigung und h für die insgesamt durchfallene Höhe stehen.

Die Erdbeschleunigung ist in der folgenden Berechnung auf den Wert 10 m/s^2 gerundet. Längenangaben beziehen sich auf die Längeneinheit Meter und Zeitangaben auf die Zeiteinheit Sekunde. Im Sinne einer mathematisch ausgerichteten Betrachtung des Problems verzichten wir einfachheitshalber auf die Mitführung der Einheiten und begnügen uns bei konkreten Größenangaben mit den Maßzahlen.

Zunächst positionieren wir ein kartesisches Koordinatensystem mit horizontaler x -Achse und vertikaler, nach unten gerichteter y -Achse so, daß der Ursprung mit dem Anfangspunkt A der Bewegung zusammenfällt und der tieferliegende Endpunkt B positive Koordinaten hat. Ist dann $A(0|0)$ und $B(x_B|y_B)$, ergeben die obigen Beziehungen für den direkten Weg AB die Laufzeit

$$t_{\text{direkt}} = 2 \cdot \sqrt{x_B^2 + y_B^2} / \sqrt{2 \cdot g \cdot y_B}$$

Konkret für B(9|3) erhalten wir hiermit $t_{\text{direkt}} = 2,45$.

Wir vergleichen jetzt den direkten Weg AB mit einem in Abb. 1 gezeigten Knickweg APB. Die zugehörigen Laufzeit ist die Summe der Laufzeiten über die Teil-

wege AP und PB. Für einen Punkt P(x/y) (welche Koordinatenwerte x und y sind erlaubt?) erhalten wir als Gesamtlaufzeit $t_{\text{Knick}} = t_{\text{AP}} + t_{\text{PB}}$ die im Kasten aufgeführte Formel.

Konkret für B(9|3) wie oben und P(3|2) ergibt sich hieraus der Wert $t_{\text{Knick}} = 2,01$. Vergleichen wir mit dem zuerst berechneten Wert $t_{\text{direkt}} = 2,45$, erkennen wir:

Der kürzeste Weg ist nicht der schnellste!

Johann Bernoullis Aufgabe ist offensichtlich nicht so einfach zu lösen, wie es auf den ersten Blick erscheint. Überraschend ist, daß auch Knickwege mit einem Knickpunkt P unterhalb des Niveaus des Punktes B schneller durchlaufen werden können als der kürzeste Weg.

$$\begin{aligned} t_{\text{Knick}} &= t_{\text{AP}} + t_{\text{PB}} \\ &= 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} / \sqrt{2 \cdot g \cdot y} \\ &\quad + 2 \cdot \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2} / (\sqrt{2 \cdot g \cdot y} + \sqrt{2 \cdot g \cdot y_B}) \end{aligned}$$

Endpunkt : B (9.00 | 3.00)
Knickpunkt : P (3.00 | 2.00)

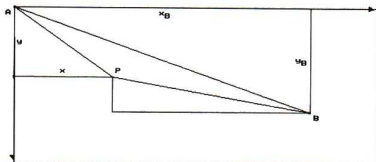


Abb. 1

Endpunkt : B (9.00 | 3.00)

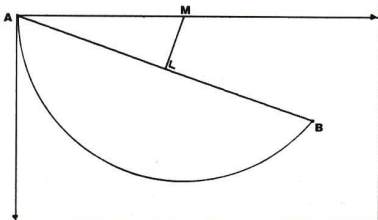


Abb. 2

Beispielsweise für P(7/5) erhalten wir unter Beibehaltung von B(9/3) die Laufzeit $t_{\text{Knick}} \approx 2,04$. Wo liegt der Knickpunkt des schnellsten Knickweges?

Forschungen Galileis

Galileo Galilei (1564 – 1642) hatte 1638 den Bogen des Kreises durch A und B mit Mittelpunkt auf der x-Achse als den schnellsten Weg bezeichnet (s. Abb. 2). Die Laufzeit längs des zu B(9/3) gehörenden Kreisbogens ist $t_{\text{Kreis}} \approx 1,81$. Man kann diesen Laufzeitwert beliebig genau bestimmen, indem man den Kreisbogen durch einen hinreichend fein untergliederten Sennenzug annähert und die Laufzeiten für die Sehnen aufsummiert.

Berechnungen Bernoullis

Wie Johann Bernoulli zeigte, hatte sich auch Galilei in der Art der Bahn geirrt. Bernoulli wies nach, daß die gesuchte Kurve dieselbe Form besitzt wie die Bahn, welche ein Punkt auf dem Rand eines Rades beim Abrollen des Rades zurücklegt (s. Abb. 3). Wir leiten dieses Resultat und die weiteren Zusammenhänge nicht her, da hierbei u. a. eine Differentialgleichung gelöst werden muß.

Zykloide

Die durch die eingangs gestellte Frage gesuchte Bahnkurve ist eine sogenannte Radlinie oder Zykloide. Der Radius r und die konstante Winkelgeschwindigkeit ω des Kreises (Rades) sind durch die Koordinaten von A und B eindeutig festgelegt. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes $P(x|y)$ der Zykloide lassen sich in Abhängigkeit vom Drehwinkel $\alpha = \omega \cdot t$ des Kreises aus seiner Ausgangslage erfassen und man erhält
 $x = r(\alpha - \sin \alpha)$
 $y = r(1 - \cos \alpha)$
 Man bezeichnet ein derartiges Gleichungspaar auch als Parameterdarstellung der Kurve, hier mit Parameter α . Für die Laufzeit längs des zu B(9/3) gehörenden Zykloide ergibt sich $t_{\text{Zyk}} \approx 1,75$. Galileis Irrtum erscheint angesichts des damals nicht meßbaren Unterschiedes von 0,06 Sekunden zum optimalen Wert verzeihlich.

„Brachistochrone“

Die Zykloide trägt in diesem Zusammenhang den Namen „Brachistochrone“ (griech.: kürzeste Zeit). Es erstaunt, daß sowohl die Brachistochrone als auch Galileis Kreisbogen teilweise unterhalb des Niveaus des Endpunktes B verlaufen,

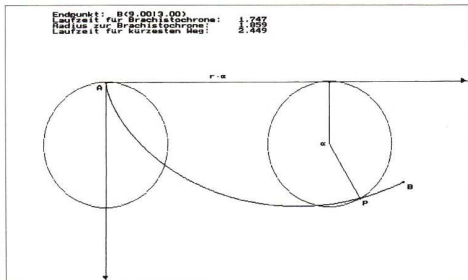


Abb. 3

wenn die Neigung der Verbindungsgerade AB hinreichend gering ist. Das Brachistochronen-Problem markiert übrigens den Anfang einer mathematischen Disziplin, der sogenannten Variationsrechnung.

Variationsrechnung

Neben Johann Bernoulli selbst lösten auch sein Bruder Jakob Bernoulli sowie

Gottfried Wilhelm Leibniz und der Marquis De L'Hospital die oben gestellte Aufgabe.

Eine weitere Lösung war von einem anonymen Verfasser eingegangen, den Johann Bernoulli an Hand der verwendeten Methode mit den Worten „ex ungue leonem“ (den Löwen von der Pranke her) als Isaac Newton identifizierte.

StR Heinz Dabrock

Zahlen spielereien

1) Gibt es Zahlen, die Potenz ihrer Quersumme sind?

- $(8+1)^2=81$
 $(5+1+2)^3=512$
 $(2+4+0+1)^4=2401$
 $(4+9+1+3)^5=4913$
 $(5+8+3+2)^6=5832$
 $(1+7+5+7+6)^7=17576$
 $(1+9+6+8+3)^8=9683$
 $(2+3+4+2+5+6)^9=234256$
 $(3+9+0+6+2+5)^4=39065$
 $(6+1+4+6+5+6)^4=614656$

2) Für einige Kombinationen gibt es garantiert nur endlich viele Lösungen:

$19=(1+9)+1 \cdot 9$

$29=(2+9)+2 \cdot 9$

...

$99=(9+9)+9 \cdot 9$

Es sind nur diese neun Lösungen unter der Bedingung möglich, daß eine Zahl gleich der Summe aus Quersumme und Querprodukt ist.

$135=(1+3+5) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5$

$144=(1+4+4) \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4$

Jedoch gibt es nur diese beiden Lösungen unter der Bedingung, daß eine Zahl gleich dem Produkt aus Quersumme und Querprodukt ist.

Unendlich viele Lösungen gibt es jedoch bei

$71=7+1+7 \cdot 1+(7+1) \cdot 71$

$119=1+1+9+1 \cdot 1 \cdot 9+(1+1+9) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9$

$391=3+9+1+3 \cdot 9 \cdot 1+(3+9+1) \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1$

und für 1391, 2933, 5961, 25943, 31778, 34583, 39392,...

Dieter Bauke

Der Komet Swift-Tuttle und die Erde

Eine im Januar 1992 veröffentlichte dpa-Meldung lautet:

Eis-Bombe aus dem All

New York (dpa). Der „Jüngste Tag“ findet fast tausend Jahre später statt als noch vor kurzem angenommen – falls der Aufprall des Kometen Swift-Tuttle die Ursache für das Ende des Lebens auf der Erde sein sollte. Das haben US-Astronomen aufgrund neuer Berechnungen herausgefunden. Der Himmelskörper aus Eis und Dreck mit einem Durchmesser von etwa zehn Kilometern werde die Erde auf keinen Fall wie ursprünglich berechnet im Jahre 2126 treffen. Der gefährliche Zeitpunkt komme im Jahr 3044, präzise Vorhersagen für den Aufprall könne man noch nicht machen.

- Nach Angaben von „Der Sternbote“ (Wien) errechnete D. K. Yeomans (USA) aus 237 Beobachtungen des Kometen Swift-Tuttle u. a. die Umlaufzeit dieses Kometen zu $U_K = 135,01$ Jahre.
- Die Erde umkreist die Sonne in einem (siderischen) Jahr einmal: $U_E = 1$ Jahr. Im sonnennächsten Punkt ihrer Bahn, ihrem Perihel, ist sie $\pi_E = 147,1 \cdot 10^6$ km und im sonnenfernsten Punkt, ihrem Aphel, ist sie $\alpha_E = 152,1 \cdot 10^6$ km von der Sonne entfernt.
- 1. Keplersche Gesetz: Die Planeten, Planetoiden und Kometen bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- Für jeden Punkt einer Ellipse genannten ebenen Kurve gilt: Die Summe seiner Ab-

stände von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, ist gleich der großen Achse $2a$ der Ellipse.

- 3. Keplersche Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeit zweier Planeten, Planetoiden oder Kometen verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

Aufgaben

1. Aufgabe: Als Längeneinheit für astronomische Entfernungsangaben wird die als Astronomische Einheit (AE) bezeichnete Länge der großen Halbachse a_E der

Bemerkung: Petrus Apianus (Peter Apian; 1495-1552), Professor an der Universität Ingolstadt und Berater von Kaiser Karl V. entdeckte, daß der sich bei einem Kometen in Sonnennähe bildende Schweif stets von der Sonne weggerichtet ist.

Sollte tatsächlich einmal ein Komet auf die Erdoberfläche zufliegen, so wird in der Erdatmosphäre zumindest teilweise seine Bewegungsenergie in Wärmeenergie umgewandelt, und dadurch bedingt wird zumindest teilweise das im Kometen enthaltene Eis verflüssigt oder in den Gaszustand überführt. Weiterhin würden die dadurch vom Kometen gelösten festen Bestandteile zum Teil wie Sternschnuppen in der Atmosphäre verglühen.



Ein Komet in Sonnennähe. Nach Meinung des Wiener Geologenehepaares Dr. Edith Kristan-Tollmann und Prof. Alexander Tollmann soll vor etwa 9500 Jahren der Einschlag eines solchen Schweifsternes auf der Erde die biblische Sintflut (Meereswelle, Weltbeben, Sturzregen, „ewige“ Nacht) ausgelöst haben.

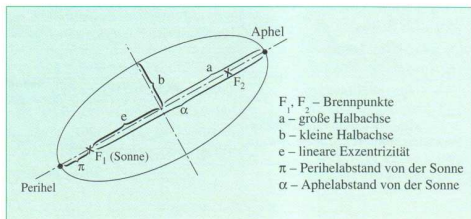
Erdbahn benutzt. 1 AE = a_E . Die Astronomische Einheit ist in Kilometer umzurechnen.

2. Aufgabe: Die kleine Halbachse b_E der Erdbahn und das Verhältnis $b_E : a_E$ sind zu berechnen.

3. Aufgabe: Die große Halbachse a_K der Bahn des Kometen Swift-Tuttle ist zu bestimmen.

4. Aufgabe: Wie groß ist mindestens der Abstand α_K des Aphels der Bahn des Kometen Swift-Tuttle von der Sonne? Anleitung: Da eventuell mit einem Aufprall dieses Kometen auf die Erde zu rechnen ist, muß seine Bahn die Erdbahn schneiden.

5. Aufgabe: Wie groß sind höchstens die kleine Halbachse b_K der Bahn dieses Kometen und der Quotient $b_K : a_K$?



Dr. W. Träger

Vor 30 Jahren: Start des Nachrichtensatelliten „Telstar 2“

Mit dem am 7.5.63 mit einer Trägerrakete vom Typ Delta in Cape Canaveral auf eine Umlaufbahn um die Erde transportierten Satelliten „Telstar 2“ wurden Fernsehbilder und Ferngespräche zwischen den USA und zwei europäischen Stationen übertragen. Die Übertragungszeit betrug jeweils 15 Minuten. Denn nur so lange befanden sich jeweils Sendende und Empfangsstation über dem optischen Horizont des Satelliten.

Laut dem „1. Keplerschen Gesetz“ bewegte sich „Telstar 2“ auf einer Ellipse, für die der Mittelpunkt M der Erde ein Brennpunkt ist. Nach Beobachtungen gilt: Die Umlaufzeit von „Telstar 2“ betrug $T_T = 225,05$ min. Für zwei spezielle Punkte P_1 und P_2 der Bahnellipse galt:

$$MP_1 = 12868 \text{ km}$$

$$MP_2 = 8572 \text{ km und } \angle P_1MP_2 = 60^\circ.$$

Aufgaben

1. Aufgabe: Die große Halbachse der Bahn von „Telstar 2“ ist zu berechnen! Anleitung: Alle möglichen Erdsatelliten mit gleicher Umlaufzeit T_T wie „Telstar 2“ laufen nach dem „3. Keplerschen Gesetz“ auf Bahnellipsen um, deren große Halbachsen gleich der großen Halbachse a_T der Bahn von „Telstar 2“ sind. Also wird auch die Kreisbahn mit Radius $r = a_T$, deren Mittelpunkt mit dem Erdmittelpunkt M zusammenfällt, von jedem auf ihr umlaufenden Satelliten mit der gleichen Umlaufzeit T_T durchlaufen. Gemäß dem „2. Keplerschen Gesetz“ wird weiterhin diese Kreisbahn mit konstanter Bahngeschwindigkeit v durchlaufen. Im Falle der Kreisbahn müssen sich die auf den Satelliten wirkende Zentrifugalkraft F_Z und die Erdanziehungskraft F_G (Gravitationskraft), die beide entgegengesetzt gerichtet sind, gegenseitig kompensieren. Dabei gilt:

$G = 6,67295 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

– Gravitationskonstante

$$F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

– Zentrifugalkraft

$$F_G = G \frac{m_E \cdot m_S}{r^2}$$

– Gravitationskraft

$$G = 6,67295 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

– Gravitationskonstante

$$F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

– Zentrifugalkraft

$$F_G = G \frac{m_E \cdot m_S}{r^2}$$

– Gravitationskraft

Bemerkung:

Nachdem hinreichend leistungsstarke Trägerraketen zur Verfügung standen, wird für kommerzielle Nachrichtensatelliten im allgemeinen die geostationäre Bahn benutzt.

Die geostationäre Bahn ist eine in der Äquatorebene liegende Kreisbahn, die den mittleren Abstand 35730 km von der Erdoberfläche hat. Die zu dieser Bahn gehörende Umlaufzeit ist $T_T = 23\text{h } 56\text{ min}$; das ist die Zeit, in der sich die Erde einmal um ihre Achse dreht.

Bei entsprechender Wahl der Durchlaufrichtung bleibt ein Satellit auf geostationärer Bahn stets über einem Punkt der Erdoberfläche „stehen“. Ein geostationärer Satellit „sieht“ also etwa ein bestimmtes Drittel der Erdoberfläche.

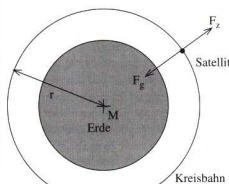
Drei geostationäre Satelliten, die in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks „stehen“, können die ganze Erdoberfläche mit Ausnahme der Polgebiete versorgen. Dies hatte bereits 1945 A. C. Clark vorgeschlagen.

2. Aufgabe:

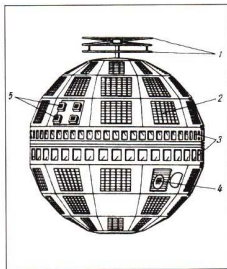
Durch eine Konstruktion im Maßstab 1:200 000 000 sind der zweite Brennpunkt, das Perihel (Perigäum – erdnächster Punkt der Bahn), das Aphel (Apoegäum – erdfernster Punkt der Bahn) und die kleine Halbachse b_T der Bahn von „Telstar 2“ zu ermitteln. Welche Abstände haben Perihel und Aphel dieser Satellitenbahn von der Erdoberfläche?

Anleitung: Die Summe der Abstände jedes Punktes einer Ellipse zu ihren beiden Brennpunkten ist gleich der großen Achse $2a$ der Ellipse.

Dr. W. Träger, Döbeln



M – Mittelpunkt der Erde
 $m_E = 5,977 \cdot 10^{24}$ kg – Masse der Erde
 $r_E = 6371$ km – Erdradius
 m_S – Masse des Satelliten
 r – Abstand des Satelliten vom Erdmittelpunkt



Telstar 2



Der vor 350 Jahren, am 5. 1. 1643 im Dorf Woolthorpe (England) geborene Isaac Newton erfand die Differential- und Integralrechnung, entdeckte die Dispersion des Lichtes und das Gravitationsgesetz.

Alphons' logische Abenteuer

Wege einer Sportlichen Dame

Während eines Urlaubs an der Nordsee nahmen Alphons, seine Eltern und seine Schwester an einer Bootsfahrt auf eine Insel teil. Der Kapitän des kleinen Schiffes unterhielt die Fahrgäste mit Berichten über regionale Ereignisse aus Vergangenheit und Gegenwart. Am Schluß sagte er verschmitzt lächelnd: „Nehmen Sie das, was ich Ihnen erzählt habe, nicht so ernst. Wissen Sie, die Bewohner dieser Insel – höflich gesagt – flunkern gern, und ich bin ein Bewohner dieser Insel.“ Seine Worte lösten allgemeine Heiterkeit aus. Bei dieser oder jener Erzählung hatte man schon einen Verdacht in dieser Richtung gehabt. Durch geschickten Bezug auf augenscheinliche Tatsachen hatte der Kapitän die Zweifel des gesunden Menschenverstandes aber immer wieder zerstreuen können, so daß seine Erklärung nun in der Tat befreiende Erleichterung auslöste. Auch Alphons' Vater hatte mehrfach an der Wahrheit vorgetragener Geschichten gezweifelt. „Na“, sagte er stolz zu seiner Familie, „mit meiner Skepsis saß ich doch auf dem richtigen Dampfer.“ Zu seiner großen Überraschung fragte ihn Alphons, warum er da so sicher sei? „Aber Alphons, Du hast doch gehört, was der Kapitän gesagt hat, seine Geschichten waren schlicht und einfach Lügen. Die Bewohner dieser Insel flunkern eben 'mal gern.' „Genau das ist es“, meinte darauf Alphons. „Wenn Sie gern flunkern, dann kann doch der Kapitän auch geflunkert haben, als er das sagte!“ Der Vater stöhnte: „Mein Sohn, Du hast schon eine Art einem jedes Selbstbewußtsein nehmen zu wollen. Du willst gern auf Dein Lieblichsthem, die

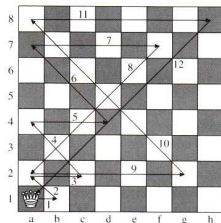
Antinomien, hinaus. Daraus wird hier nichts. Denke doch an das Prinzip des indirekten Beweises. Wenn die Annahme der Wahrheit einer Aussage zu einem logischen Widerspruch führt, ist diese Aussage nicht wahr, sondern falsch. In unserem Fall ist also die Aussage des Kapitans, alle Inselbewohner lügen, falsch.“ Alphons' Schwester unterbrach den Vater. „Dann hätte aber Alphons recht. Wenn es nicht so ist, daß alle Inselbewohner lügen, dann sagen eben alle die Wahrheit.“ Alphons, über die unerwartete Hilfe erfreut, nickte zustimmend. „Kinder“, wehrte der Vater ab, „nicht alle lügen, das ist doch eine ganz andere Aussage als alle lügen nicht. Daß nicht alle Inselbewohner lügen besagt, mindestens ein Inselbewohner sagt die Wahrheit. Ob es nun alle Inselbewohner sind, die nicht lügen oder doch mindestens einer von ihnen lügt, das läßt die Aussage offen, im Gegensatz zu der Aussage, derzufolge alle Inselbewohner nicht lügen.“ Alphons mußte einsehen, daß sein Vater recht hatte. Eine als wahr gesetzte Aussage ist falsch, wenn diese Annahme zu einem logischen Widerspruch, und den schließt eine Antinomie ein, führt. Ist die Aussage des Kapitans über die Inselbewohner nicht wahr, so ist sie falsch und damit ist die Möglichkeit, daß alle Inselbewohner die Falschheit sagen, ausgeschlossen. „Trotzdem, Vati, wenn auch diese allgemeine Aussage des Kapitans falsch ist, so wissen wir doch nicht, ob er auch auf See gelogen hat. Daß er lügt heißt ja nicht, daß er immer lügt.“ Da mußte nun wieder der Vater Alphons zustimmen.

Prof. Dr. L. Kreiser

Die Dame im Schachspiel zieht von ihrem Standfeld aus waagrecht, senkrecht oder diagonal beliebig weit über alle unbesetzten Felder. Wegen ihrer großen Beweglichkeit ist die Dame die stärkste Figur auf dem Schachbrett.

Eine schachbegeisterte, ältere Dame fährt zu einer 14-tägigen Urlaubsreise in die Berge. Sie will an jedem Urlaubstag wandern, wobei sich ihre Wanderrouuten täglich verlängern sollen.

Vor der Abreise legt sie ihr tägliches Wanderpensum anhand des Schachbretts mittels der weißen Dame fest. Als Bedingungen für ihre Überlegungen gelten, daß die weiße Dame von a1 hintereinander mehrere Züge ausführt, von denen jeder länger ist als der vorhergehende – entsprechend den Wanderrouuten – und wieder nach a1 zurückkehrt.



Die Gesamtlänge der Damenzüge soll ein Maximum sein. Die schachspielende Dame ermittelt die im Diagramm oben dargestellte Lösung. Die Gesamtstrecke beträgt, wenn für die Länge eines Schachfeldes 2 km und für die Diagonale eines Feldes 2,3 km angenommen wird, genau 103,2 km.

Während der Zugfahrt zum Urlaubsort findet die Urlauberin auf ihrem Reise-schachspiel zu den genannten Bedingungen jedoch eine weitere Lösung, die ihre gesamte Wanderstrecke um 17 km übertrifft.

Aufgabe:
Welche Damenzüge auf dem Schachbrett führen vom Feld a1 aus zum optimalen Ergebnis?

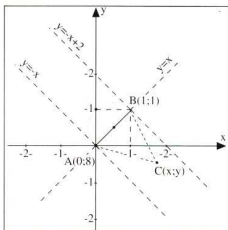
Harald Rüdiger



Sprachecke

Треугольник

На координатной плоскости рассматриваются треугольники с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;1)$ и $C(x;y)$. Найдите и изобразите на рисунке множество таких точек C , что треугольник ABC — остроугольный.
aus: Quant, Moskau



Ein Kirschenpuzzle

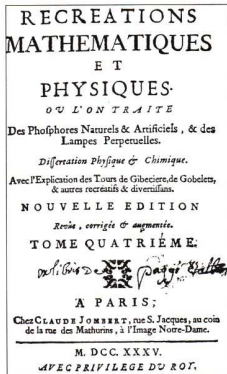


Abb. 1: *Récréations mathématiques et physiques*, ein französisches Buch über kurzweilige mathematische und physikalische Probleme aus dem 18. Jahrhundert (1735).

In einem alten französischen Buch über mathematische und physikalische Unterhaltungen (Abb. 1) aus dem 18. Jahrhundert haben wir ein Kirschenpuzzle gefunden, das sich jeder mühelos selbst herstellen kann.

Die Lösung dieses „topologischen“ Problems ist zwar verblüffend einfach, aber man muß sie erstmal gefunden haben.

Ein dauerhaftes Puzzle wird am besten aus Stoff- oder Lederresten gebaut, für weniger strapazierfähige Puzzles reicht auch Papier. Die ungefähren Maße sind in der Abbildung 2 angegeben. Längs AA' und BB' ist ein etwa 14 cm langer und längs CC' und DD' ein etwa 3 cm langer Schnitt in das Material zu machen.

Das Problem besteht ganz einfach darin, wie hängt man das Kirschenpaar in das Puzzle bzw. wie holt man es später wieder heraus? (Anstelle des Kirschenpaares können auch zwei mit einem Faden verbundene Kugeln, Ringe usw. verwendet werden.)

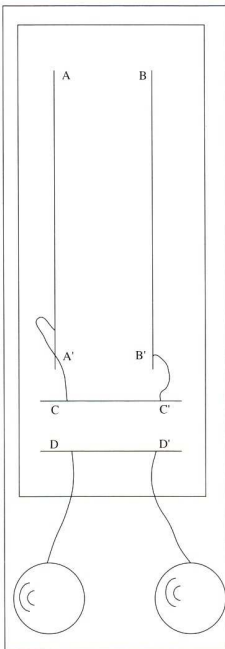
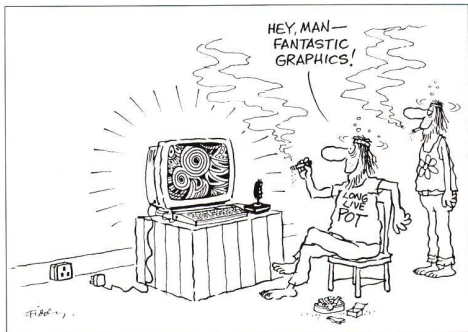


Abb. 2: Prinzipialskizze des Puzzels. Das Rechteck hat etwa das Format 4 cm x 20 cm, die Schlitze AA' und BB' sind ungefähr 16 cm lang, die Schlitze CC' und DD' sind ungefähr 3 cm lang. Die Schlitze AA' und BB' sowie CC' und DD' sind jeweils etwa 1 cm voneinander entfernt.

Die Lösung: Bringt die Zunge AA'BB' in der Mitte zusammen und zieht sie unter der kleineren Zunge CC'DD' hindurch, so daß die Mitte der größeren Zunge bei DD' wieder heraus kommt. Jetzt läßt sich das Kirschenpaar durch die gebildete Schlaufe mühelos einführen oder herausnehmen. Danach zieht die Zunge AA'BB' (d. h. die Schlaufe) wieder in die Ausgangsstellung zurück.

Konrad Haase, Dr. Rüdiger Thiele



Flächenverwandlungen

Kaum jemand denkt darüber nach, daß man eigentlich jede Flächeninhaltsberechnung gradlinig begrenzter Figuren in der Ebene auf die Ermittlung des Inhaltes einer Rechteckfläche zurückführt. Aus dieser Formel leitet man diejenige zur Berechnung des Flächeninhaltes für ein Dreieck, für ein Trapez, ... her. Dabei entspricht der Flächeninhalt eines Dreiecks der Hälfte des Flächeninhaltes eines „entsprechenden Rechtecks“. Was versteht man unter „entsprechenden Rechteck“?

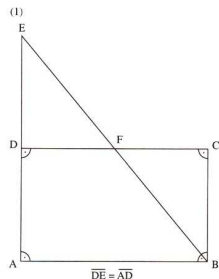


Abb. 2a

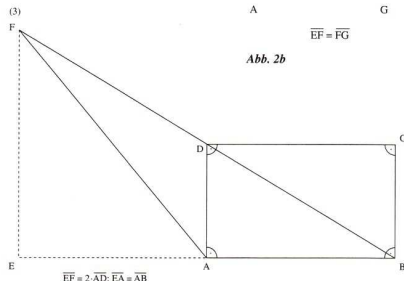


Abb. 2c

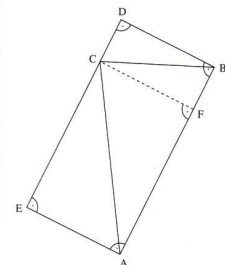


Abb. 1

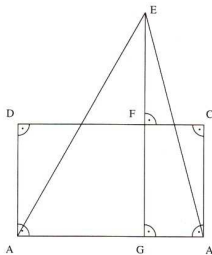


Abb. 2b

Nun, es ist ein solches Rechteck gemeint, das in einer seiner beiden Seiten mit einer der Dreieckseiten kongruent ist und in der anderen mit der zu dieser Dreieckseite gehörenden Höhe übereinstimmt.

Dieses zeigt **Abb. 1**.

Wie wir sehen, gilt:

(1) $\triangle AFC \cong \triangle EAC$ wegen Ssw

(2) $\triangle FBC \cong \triangle CBD$ wegen Ssw

2. $A_{ABC} = A_{ABDE}$

Selbstverständlich kann man auch jedes Rechteck zeichnerisch-konstruktiv in ein dazu flächeninhaltsgleiches Dreieck verwandeln und umgekehrt.

Hier drei Varianten: **Abb. 2**

Aufgabe 1:

Führe den Nachweis der Flächen- gleichheit in den Fällen (1) bis (3).

Mehr noch: man kann jedes beliebige (konvexe) Vieleck in ein dazu flächeninhaltsgleiches Dreieck verwandeln.

Wir zeigen das Prinzip an einem beliebigen Fünfeck, ABCDE.

(Siehe hierzu **Abb. 3**, rechte Seite.)

1. Schritt:

(1) g_1 durch B und D

(2) $g_2 \parallel g_1$ durch C

(3) ED über D hinaus verlängern.

(4) Schnitt von g_{ED} mit g_2 ergibt F.

(5) B mit F verbinden.

Daraus folgt:

(I) $A_{BCD} = A_{BFD}$

Gleiche Grundseite ($\overline{BD}$) und gleiche Höhe ($g_1 \parallel g_2$).

(II) $A_{ABCDE} = A_{ABFE}$

2. Schritt: (1) g_1 durch B und E

(2) $g_4 \parallel g_3$ durch F

(3) AE über E hinaus verlängern.

(4) Schnitt von g_{AE} mit g_4 ergibt G.

(5) B mit G verbinden.

Daraus folgt: (III) $A_{BFE} = A_{BGE}$; gleiche Grundseite ($\overline{BE}$)

und gleiche Höhe ($g_3 \parallel g_4$).

(IV) $A_{ABFE} = A_{ABG}$

Aus (II) und (IV) ergibt sich

$A_{ABCDE} = A_{ABG}$

Aufgabe 2:

Gegeben ist ein Fünfeck ABCDE mit den Koordinaten seiner Eckpunkte (s. **Abb. 4**, rechte Seite).

A(1,5;1); B(6;1); C(7,5;3); D(3,5;5) E(1,5;2,5). Koordinateneinheit e = 25 m

a) Gib einen Maßstab an!

b) Berechne näherungsweise den Flächeninhalt des Fünfecks auf das Dreieck ABG, wobei G der Schnittpunkt von g_{AE} mit g_{BD} sein soll.

Jochen Kreusch

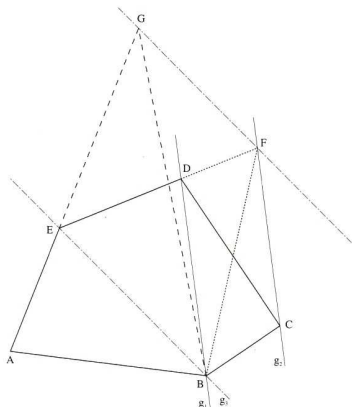


Abb. 3

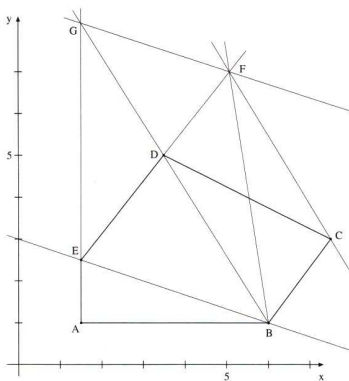


Abb. 4

Kleine Knobeleyen

Wer ist zuerst an der Brandstelle?

An der Straßenkreuzung brennt es. Von den Punkten A und B fahren zur selben Zeit mit gleicher Geschwindigkeit Löschzüge ab. Welches Feuerwehrauto erreicht zuerst die Brandstelle? (Abb. 1)

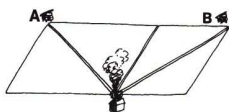


Abb. 1

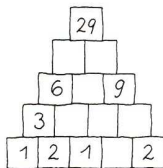


Abb. 3



Seilzug

Welche Seilstücke bewegen sich nach unten, wenn man an der Schlaufe A zieht? (Abb. 2)

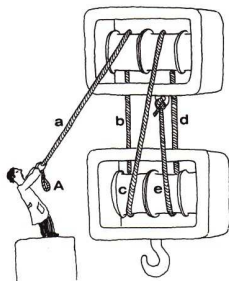


Abb. 2

Zahlenpyramide

Zwei Zahlen nebeneinander ergeben zusammengezählt die Zahl darüber. Welche Zahlen müssen eingesetzt werden? (Abb. 3)

Ergänzungen

Versuche die Lücken dieses Zahlenquadrats so auszufüllen, daß bei jeder waagerechten, senkrechten und diagonalen Reihe 12 herauskommt. (Abb. 4)

$4\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$		$4\frac{1}{2}$
	$3\frac{1}{4}$		$2\frac{3}{4}$
		3	
$1\frac{3}{4}$	5		

Abb. 4

Sommerzeit – Sportzeit

Im Sport zählen nicht nur die Ergebnisse, wer Erster oder Zweiter wurde – interessant sind auch die Zeitunterschiede, die in Rückstände umgerechnet werden. Denn vorstellbar sind Meter und Zentimeter aber nicht Zehntel- oder gar Hundertstelsekunden. Hierzu ein paar Anregungen; bei der Berechnung wird angenommen, daß die Geschwindigkeit über die gesamte Strecke konstant bleibt.

Deswegen möchten wir Euch einige Aufgaben mit den zugehörigen Lösungswegen vorstellen, die sich auf aktuelle sportlich-mathematische Probleme einfach übertragen lassen.

Aufgabe:

Im Endlauf über 200 m Freistil der Frauen bei den 25. Sommerspielen in Barcelona wurde Franziska van Almsick in 1 Minute und 58,00 Sekunden Gewinnerin der Silbermedaille hinter Haislett (USA) in 1 Minute und 57,90 Sekunden. Welchen Abstand hatten die beiden Sportlerinnen am Ende des Laufes?

Lösung:

USA 1:57,90 s

D 1:58,00 s

$$\frac{117,90}{118,00} \cdot 200 = 199,83 \text{ m}$$

200 – 199,83 = 0,17 m.

Der Abstand betrug 17 Zentimeter.

Aufgabe:

Im Endlauf über 4 x 200 m Freistil der Herren bei den 25. Sommerspielen in Barcelona erreichte die Staffel der USA den 3. Platz in 7 Minuten und 16,27 Sekunden. Die deutsche Staffel wurde in 7 Minuten und 16,58 Sekunden Vierter. Um wie viele Zentimeter wurde die Bronzemedaille verloren?

Lösung:

USA 7: 16,27 s

D 7: 16,58 s

$$\frac{436,27}{436,58} \cdot 800 \text{ m} = 799,432 \text{ m}$$

800 – 799,432 = 0,567 m

Die Bronzemedaille ging wegen 57 Zentimeter Rückstand zu der USA-Staffel verloren.

Aufgabe:

Beim Bahnradsport im 1000 m-Zeitfahren wurde der Amerikaner Hartwell Dritter in 1 Minute und 4,753 Sekunden sowie der Deutsche glücklich Vierter mit 1 Minute und 4,798 Sekunden. Welchem Abstand entspricht das?

Lösung:

Hartwell: 1:04,753 s

Glücklich 1:04,798 s

$$\frac{64,753}{64,798} \cdot 1000 \text{ m} = 999,3055 \text{ m}$$

1000 m – 999,31 m = 0,69 m

Aufgabe:

Bei der 25. Sommerolympiade in Barcelona erreichten im Ruderlauf beim Vierter ohne Steuermann der Herren über 2000 m Australien den 1. Platz in 5 Minuten und 55,04 Sekunden, Slowenien den 3. Platz in 5 Minuten und 58,24 Sek. sowie Deutschland den undankbaren 4. Platz in 5 Minuten und 58,39 Sekunden. Um wie viele Zentimeter verpaßte Deutschland die Bronzemedaille?

Lösung:

Austr. 5:55,04 s

Slow. 5:58,24 s

2000 m : 358,24 s = 5,58285 m/s

Deutschl. 5:58,39 s = 5,5805 m/s

2000 m : 358,39 s = 5,5805 m/s

$$s_{\text{A}} = t_{\text{A}} \cdot v_{\text{S}} = 355,04 \times 5,58285 = 1982,135 \text{ m}$$

$$s_{\text{D}} = t_{\text{A}} \cdot v_{\text{D}} = 355,04 \times 5,5805 = 1981,30 \text{ m}$$

Abstand Slowenien/Deutschland:

$$1982,135 - 1981,30 = 0,835 \text{ m}$$

Deutschland ruderte um 83,5 cm an der Bronzemedaille vorbei.

Aufgabe:

Bei der 25. Sommerolympiade in Barcelona erreichten beim Achter der Herren im Rudern über 2000 m Kanada den 1. Platz mit 5 Minuten und 29,53 Sekunden und Deutschland mit 5 Minuten und 31,00 Sekunden den 3. Platz. Um wie viele Meter verpaßte der Deutschlandachter die Goldmedaille?

Lösung:

Kanada: 5:29,53 s

2000 m : 329,53 s = 6,06925 m/s

Deutschl. 5:31,00 s = 331,00 s

2000 m : 331,00 s = 6,0423 m/s

Weg von Deutschland = Zeit_k · Geschw._D
329,53 · 6,0423 = 1991,12

Abstand 2000 – 1991,12 = 8,88 m

Der Deutschlandachter hat die Goldmedaille um fast 9 Meter verpaßt.

Aufgabe:

Auf der 9. Etappe der Tour de France 1992, einem Einzelzeitfahren über 64,989 km, siegte der Spanier Miguel Indurain in 1 Stunde, 18 Minuten und 31 Sekunden. Jens Heppner lag als bester Deutscher um 6 Minuten und 9 Sekunden hinter dem Sieger zurück. Welchem Abstand in Kilometern zum Sieger entspricht das?

Lösung:

Indurain: 1:19:31 Std sind 1,32528 Std

Heppner: 1:25:40 Std sind 1,42778 Std

$v_{\text{H}} = \frac{64,989 \text{ km}}{1,42778 \text{ h}} = 45,5175 \text{ km/h}$

$$s_{\text{H}} = t_{\text{H}} \cdot v_{\text{H}} = 1,32528 \cdot 45,5175 \text{ km/h}$$

$$s_{\text{H}} = 60,323$$

Abst. = 64,989 – 60,323 = 4,666 km

Jens Heppner lag um 4,666 Kilometer hinter dem Sieger zurück.

Aufgabe:

Bei der Tour de France 1992 benötigte der Sieger Miguel Indurain für die gesamte Strecke 100 Stunden, 49 Minuten und 30 Sekunden. Jens Heppner lag als bester Deutscher in der Gesamtwertung 25 Minuten und 30 Sekunden zurück und Olaf Ludwig, der die letzte Etappe gewann, in der Gesamtwertung 2 Stunden, 47 Minuten und 17 Sekunden zurück. Welchen Abstand in km zum Sieger hatten die beiden Deutschen in der Gesamtwertung, wenn man die Länge der Tour mit 4000 Kilometern unterstellt?

Lösung:

Indurain: 100:49:30 sind 100,825 Stunden

4000 km : 100,825 Stunden = 39,67 km/h

Heppner: 4000 km : 101,25 Stunden = 39,506 km/h

Weg von Heppner = Zeit von Indurain

mal Geschwindigkeit von Heppner

$$s_{\text{H}} = t_{\text{I}} \cdot v_{\text{H}} = 100,825 \cdot 39,506$$

$$s_{\text{H}} = 3983 \text{ km}$$

Ludwig: 4000 km : 103,613 Stunden = 38,6052 km/h

$$s_{\text{L}} = t_{\text{I}} \cdot v_{\text{L}} = 100,825 \cdot 38,6052$$

$$s_{\text{L}} = 3892,37 \text{ km}$$

Abstand Heppners: 4000 – 3983 = 17 km

Ludwig 4000 – 3892,37 = 107,63 km

Jens Heppner lag zum Sieger etwa 17 Kilometer und Olaf Ludwig fast 108 km in der Gesamtwertung zurück.

Hartmut Boettcher

Zuschnitt eines Glockenrocks

Näherungsweise Lösung einer Bestimmungsgleichung

Laura möchte sich selbst einen Glockenrock nähen und dabei aus der vorhandenen Stofffläche soviel wie möglich verwenden.

Aus diesem Grund soll die Stoffbreite von 146 cm vollständig ausgenutzt werden. Der Schnitt für einen Glockenrock ergibt sich als Teil eines Vollkreises (s. hierzu Abb. 1).

Aus einer Stoffbreite wird jeweils ein halber Rock zugeschnitten. Die Rocklänge soll 76 cm betragen, der Taillenumfang (einschließlich Zugabe für Nähte) 80 cm.

Aufgabenstellung

Wie sind der Winkel α und der Radius r zu wählen, und wieviel Stoff muß Laura kaufen?



Hinweis: Laura glaubt, durch Anwendung elementargeometrischer Methoden eine Beziehung herleiten zu können, aus der die gesuchten Größen leicht zu ermitteln sind. Es erweist sich aber, daß sie auf eine goniometrische Gleichung stoßen wird, die sich nicht exakt auflösen läßt, sondern nur mit Hilfe numerischer Näherungsverfahren lösbar ist.

Prof. Dr. Bernd Luderer

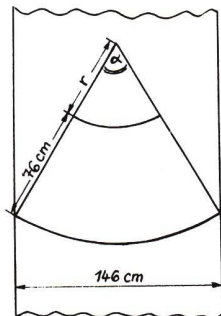


Abb. 1

Zahlenspielerien

Verschiedene Buchstaben bedeuten
verschiedene Ziffern

$$A \cdot BC = AB \cdot C$$

$$1 \cdot 64 = 16 \cdot 4$$

$$1 \cdot 95 = 19 \cdot 5$$

$$2 \cdot 65 = 26 \cdot 5$$

$$4 \cdot 98 = 49 \cdot 8$$

$$A \cdot BCD = AB \cdot CD$$

$$1 \cdot 325 = 13 \cdot 25$$

$$2 \cdot 756 = 27 \cdot 56$$

$$3 \cdot 975 = 39 \cdot 75$$

$$8 \cdot 332 = 83 \cdot 32$$

(Für $D=0$ kommen die 4 Lösungen oben
analog dazu.)

$$A \cdot BCD = ABC \cdot D$$

$$1 \cdot 664 = 166 \cdot 4$$

$$1 \cdot 995 = 199 \cdot 5$$

$$2 \cdot 665 = 266 \cdot 5$$

$$4 \cdot 998 = 499 \cdot 8$$

$$4 \cdot 847 = 484 \cdot 7$$

$$6 \cdot 545 = 654 \cdot 5$$

$$7 \cdot 424 = 742 \cdot 4$$

$$4 \cdot 847 = 484 \cdot 7$$

$$6 \cdot 545 = 654 \cdot 5$$

$$7 \cdot 424 = 742 \cdot 4$$

$$AB \cdot CD = ABC \cdot D$$

keine Lösung

$$A \cdot BCDE = AB \cdot CDE$$

$$7 \cdot 9875 = 79 \cdot 875$$

$$A \cdot BCDE = ABC \cdot DE$$

$$1 \cdot 3325 = 133 \cdot 25$$

$$1 \cdot 5134 = 151 \cdot 34$$

$$1 \cdot 8145 = 181 \cdot 45$$

$$2 \cdot 2724 = 272 \cdot 24$$

$$2 \cdot 4235 = 242 \cdot 35$$

$$2 \cdot 7756 = 277 \cdot 56$$

$$3 \cdot 2725 = 327 \cdot 25$$

$$3 \cdot 9975 = 399 \cdot 75$$

$$4 \cdot 5448 = 454 \cdot 48$$

$$6 \cdot 8172 = 681 \cdot 72$$

$$8 \cdot 3332 = 833 \cdot 32$$

$$9 \cdot 8175 = 981 \cdot 75$$

$$A \cdot BCDE = ABCD \cdot E$$

$$1 \cdot 6664 = 1666 \cdot 4$$

$$1 \cdot 9995 = 1999 \cdot 5$$

$$2 \cdot 6665 = 2666 \cdot 5$$

$$4 \cdot 9998 = 4999 \cdot 8$$

$$4 \cdot 3243 = 4324 \cdot 3$$

$$8 \cdot 6486 = 8648 \cdot 6$$

(Beachten Sie die bereits bekannten Lö-
sungen vorn und folgend!)

$$AB \cdot CDE = ABC \cdot DE$$

$$16 \cdot 664 = 166 \cdot 64$$

$$19 \cdot 995 = 199 \cdot 95$$

$$26 \cdot 665 = 266 \cdot 65$$

$$49 \cdot 998 = 499 \cdot 98$$

$$21 \cdot 775 = 217 \cdot 75$$

$$24 \cdot 996 = 249 \cdot 96$$

$$AB \cdot CDE = ABCD \cdot E$$

$$14 \cdot 848 = 1484 \cdot 8$$

$$17 \cdot 515 = 1751 \cdot 5$$

$$ABC \cdot DE = ABCD \cdot E$$

keine Lösung

Dieter Bauke

Ein Ausflug in die räumliche Geometrie

Von windschiefen Geraden zum einschaligen Hyperboloid
– Ein Würfel rotiert um eine Raumdiagonale
– Analyse und Beschreibung des Rotationskörpers

Wir wollen den Drehkörper, der bei Rotation eines Würfels um eine seiner Raumdiagonalen entsteht, näher untersuchen (Abb. 1). Diese besondere Situation nutzen wir, um über einige grundlegende Beziehungen in der Raumgeometrie nachzudenken.

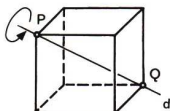


Abb. 1

Zunächst ist es sicherlich nützlich, den Würfel so in einem Schrägbild darzustellen, daß die ausgewählte Raumdiagonale PQ auf einer vertikalen Geraden d unseres Zeichenblattes liegt (Abb. 2).

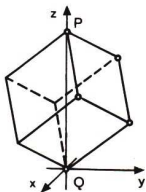


Abb. 2

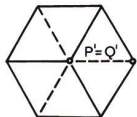


Abb. 3

Diese Gerade sei die z-Achse eines Koordinatensystems in kavalierspektivischer Projektion ($\alpha = 45^\circ$, $q = 1/2$). Proji-

zieren wir den Würfel nun senkrecht auf die xy-Ebene (siehe hierzu Abb. 3), so wird sofort deutlich, daß jeweils 120° -Drehungen um die Achse d durch P und Q den Würfel auf sich abbilden. Da man hier 120° -, 240° - und 360° -Drehungen um d unterscheiden kann, spricht man bei d bezüglich des Würfels um eine 3zählige Drehachse.

Aufgabe:

Beschreibe weitere Achsen von Drehungen, die den Würfel auf sich abbilden, und gib ihre Zähligkeit an!

Aus dem um d rotierenden Würfel entsteht ein Drehkörper, von dem wir drei Teilkörper unterscheiden können. Die je drei Kanten, die von P bzw. Q ausgehen, erzeugen jeweils einen Kegel.

Aufgabe:

Welchen Teilkörper erzeugen die übrigen Kanten – die Kanten im Zwischenbereich – des Würfels?

Mit dieser Problemstellung wollen wir unseren eigentlichen Ausflug in die Raumgeometrie beginnen. Wir werden auf die besondere Lage der Kanten, die weder P noch Q als Endpunkt haben, aufmerksam:

Jede dieser Kanten liegt auf einer Geraden, die mit der Achse d keinen Punkt gemeinsam hat und auch nicht zu d parallel ist. Parallele Geraden liegen nämlich stets in einer Ebene, und dabei haben sie keinen Punkt gemeinsam oder fallen zusammen.

1. Windschiefe Geraden und räumliche Figuren mit windschiefen Geraden

Haben zwei Geraden g und h keinen Punkt gemeinsam und gibt es keine Ebene, die g und h enthält, so heißen g und h

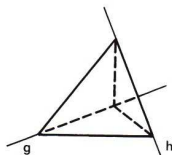


Abb. 4

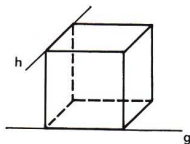


Abb. 5

windschief. Die Abb. 4 und 5 zeigen windschiefe Geraden, die durch Kanten eines Tetraeders bzw. eines Würfels bestimmt sind.

Die nachfolgenden Abbildungen zeigen räumliche Figuren mit weiteren Paaren windschiefer Geraden.

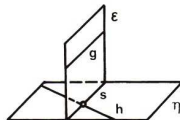


Abb. 6

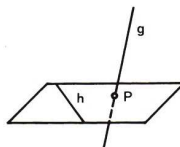


Abb. 7

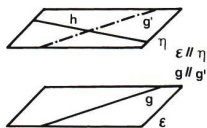


Abb. 8

Wir beziehen uns auf die dargestellten Vorgaben der jeweiligen Abbildung. Es gilt dann:

a) In der ersten Figur, **Abb. 6**: Jede Gerade h , die in η liegt und s schneidet, ist windschief zu g .

b) In der zweiten Figur, **Abb. 7**: Jede Gerade h , die in η liegt und nicht durch P geht, ist windschief zu g .

c) In der dritten Figur, **Abb. 8**: Jede Gerade h , die in η liegt und g' schneidet, ist windschief zu g .

Begründbar sind diese Aussagen mit Hilfe grundlegender Eigenschaften der Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen (vgl. auch [3]).

Die Aussagen über die Verbindungsgerade zweier Punkte und über die Verbindungsebene dreier nicht auf einer Gerade

liegenden Punkte sowie die Parallelenaussage sind wesentliche Grundeigenschaften der räumlichen Geometrie:

Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die diese Punkte enthält.

Zu drei Punkten, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, gibt es genau eine Ebene, die diese Punkte enthält.

Zu einer Geraden g und einem Punkt P gibt es genau eine Gerade h , die zu g parallel ist und durch P geht.

Weitere Grundaussagen der räumlichen Geometrie werden durch die vollständigen Übersichten von Lagebeziehungen in den **Abb. 9, 10 und 11** veranschaulicht.

2. Ein Satz wird erarbeitet

Die windschiefen Geraden g und h der **Abb. 8** liegen in zueinander parallelen Ebenen. Wir wollen uns überlegen, daß es zu zwei beliebig gegebenen windschiefen Geraden g und h stets genau zwei zueinander parallele Ebenen gibt, von denen jede eine der windschiefen Geraden enthält. Dazu betrachten wir die Menge aller Ebenen, die g enthalten (**Abb. 12**). Man nennt eine solche Menge von Ebenen anschaulich ein Ebenenbüschel.

Nun wählen wir auf g einen Punkt P und betrachten die Ebene ϵ (Ph), die sowohl die Gerade h als auch den Punkt P enthält. Wegen $P \notin h$ ist diese Ebene eindeutig bestimmt und gehört überdies nicht zum obigen Ebenenbüschel (warum?). Folglich schneidet jede Ebene des Büschels die Ebene ϵ (Ph) in einer (von g verschiedenen) Geraden durch P . In der Ebene ϵ (Ph) gibt es aber unter allen Ge-

raden durch P genau eine zu h parallele Gerade h' . Infolgedessen ist die h' enthaltende Ebene ϵ des Büschels parallel zu h (und enthält zudem g). Analog überzeugt man sich von der eindeutigen Existenz einer Ebene η , die h enthält und zu g parallel ist.

Die beiden Ebenen ϵ und η sind zudem auch untereinander parallel. Würden sie sich nämlich in einer Geraden k schneiden, so folgte $g \parallel k$ und $k \parallel h$. Dies hätte $g \parallel h$ zur Folge; g, h sind aber windschief. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen.

Satz: Sind g, h windschiefe Geraden, so existiert ein eindeutig bestimmtes paralleles Ebenenpaar ϵ, η , wobei g in ϵ und h in η enthalten ist.

3. Senkrechte Geraden

Zwei Geraden g und l heißen senkrecht genau dann, wenn g und l sich schneiden und zwei Nebenwinkel, die g und l einschließen, kongruent sind. Gleichwertig wird das Senkrechtsein von g und l dadurch beschrieben, daß die Spiegelung an g die Gerade l auf sich abbildet und $l \neq g$ ist (**Abb. 14**).

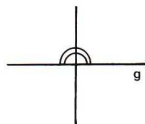


Abb. 14

Liegen mit g und h zwei verschiedene Geraden vor, so soll zunächst nach der Existenz und gegebenenfalls nach der Eindeutigkeit einer gemeinsamen Senkrechten gefragt werden.

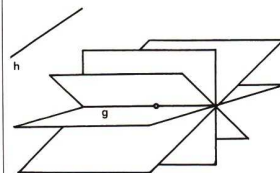


Abb. 12

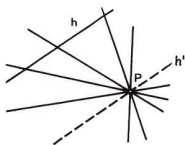


Abb. 13

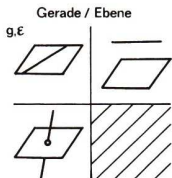


Abb. 9

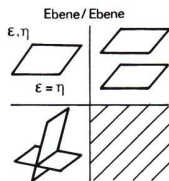


Abb. 10

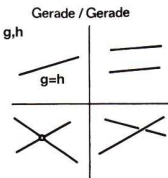


Abb. 11

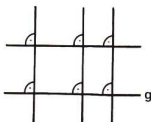


Abb. 15

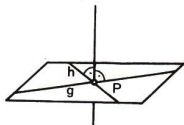


Abb. 16

Es sind die Fälle a) g, h parallel, b) g, h schneiden sich und c) g, h windschief zu unterscheiden. Sind g und h parallel, so ist jede Senkrechte zu g in der Ebene, die g und h enthält, auch eine Senkrechte zu h . Schneiden sich die Geraden g und h im Punkt P , so können wir die Verbindungsebene $\epsilon(gh)$ von g und h betrachten. Eine gemeinsame Senkrechte l von g und h muß durch P gehen und zugleich auch senkrecht zu $\epsilon(gh)$ sein. Damit ist l eindeutig bestimmt (Abb. 15 und 16).

Wie sieht nun die Situation aus, wenn g und h windschief sind? Wir betrachten das zu g und h gehörende parallele Ebenenpaar ϵ, η mit $g \subset \epsilon$ und $h \subset \eta$ (Abb. 8). Die senkrechte Projektion von h auf ϵ ergibt eine Gerade h' , wobei h' und g sich schneiden. Der Schnittpunkt P von g und h' ist das Bild einer projizierenden Geraden l ; diese Gerade ist senkrecht zu g und h . Da eine

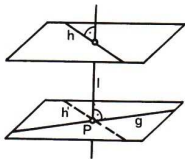


Abb. 17

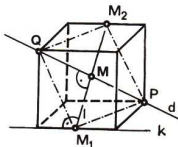


Abb. 18

senkrechte Gerade zu g und h auch senkrecht zu ϵ und η sein muß, ist l die zu g, h eindeutig bestimmte Senkrechte (Abb. 17). Wir kehren zu einer Raumdiagonalen PQ eines Würfels zurück, die als Achse für eine Rotation dienen soll. Neben $d=g(PQ)$ betrachten wir eine Kante, die keinen Endpunkt auf d hat (Abb. 18).

Diese Kante liegt auf einer Geraden k , die zu d windschief ist. Die Verbindungsgerade l von Kantenmittelpunkt M_1 und Mittelpunkt M_2 der im Würfel gegenüberliegenden Kante ist die gemeinsame Senkrechte von d und k : Zunächst schneiden sich l und d im Mittelpunkt M des Würfels, und außerdem sind die Dreiecke $\Delta M_1 M_2 P$ und $\Delta M_1 M_2 Q$ gleichschenkelig, so

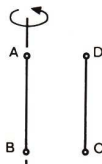


Abb. 19

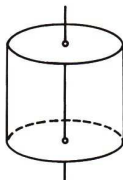


Abb. 20

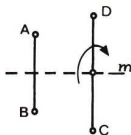


Abb. 21

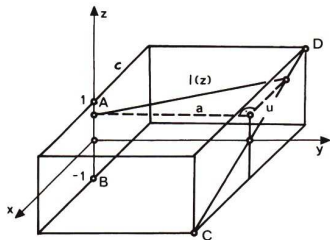


Abb. 22

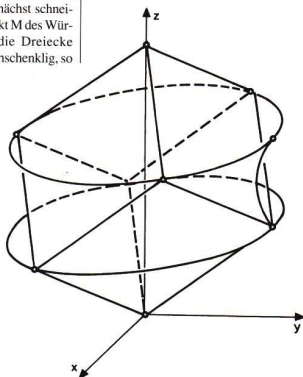


Abb. 23

daß $d=g(PQ)$ die Mittelsenkrechte von M_1M_2 ist. Damit ist $l=g(M_1M_2)$ senkrecht zu d . Die Konstruktion von l ergab schon, daß l zu k senkrecht ist.

4. Ein einschaliges Rotationshyperboloid entsteht

Wir haben schon festgestellt, daß bei der Rotation eines Würfels um eine Raumdiagonale PQ die Kanten, die von P bzw. Q ausgehen, jeweils einen Kegel erzeugen. Nun werden wir die restlichen Kanten bei der Drehung um die Achse $d=g(PQ)$ untersuchen. Dabei vereinfachen wir zuvor und geben uns zwei Strecken AB , CD vor, so daß $ABCD$ ein Rechteck ist (Abb. 19). Rotiert die Strecke CD um $g(AB)$, so entsteht ein Zylinder (Abb. 20). Betrachten wir die Strecken AB und CD , die die Gerade m als gemeinsame Mittelsenkrechte haben (Abb. 21), so können wir uns CD um m gedreht derart vorstellen, daß $g(CD)$ und $g(AB)$ windschief sind. Jetzt haben wir die Lagebezeichnung von Raumdiagonale und entsprechender Kante.

Für die analytische Beschreibung der Rotationsfläche, die bei der Rotation von CD um $g(AB)$ entsteht, werden wir in einem xyz -Koordinatensystem vieles geeignet normieren. Dies zeigt Abb. 22.

Die Strecke AB fällt mit dem Intervall $[-1, 1]$ auf der z -Achse zusammen, und $g(AB)$ ist zugleich Mittellinie einer Seitenfläche eines Quaders. Diese Seitenfläche sei in der xz -Ebene enthalten. In der gegenüberliegenden Seitenfläche sei CD eine Flächendiagonale. Der Quader habe neben der Höhe 2 ($=AB$) eine Breite von a (y -Richtung) und eine Tiefe von $2c$ (x -Richtung). Jeder Punkt von CD beschreibt bei der Drehung um die z -Achse einen Kreis auf einem Niveau zwischen -1 und 1 der z -Achse. Hierfür gilt

$$x^2 + y^2 = [l(z)]^2, \quad (1)$$

wobei $l(z)$ der Abstand des Punktes von der z -Achse ist. Bezeichnet u den Abstand dieses Punktes von der yz -Ebene, so gilt $[l(z)]^2 = a^2 + u^2$. (2)

Mit der z -Koordinate aus dem Intervall $[-1, 1]$ ergibt sich für den Abstand u aus der Proportionalität $c:l=u:z$ die folgende Gleichung

$$u = c \cdot z. \quad (3)$$

Aus den Gleichungen (1) bis (3) folgt

$$x^2 + y^2 = a^2 + c^2 z^2,$$

$$x^2 + y^2 - c^2 z^2 = a^2$$

und mit der Einführung von $b=a/c$ die

$$\text{Gleichung } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

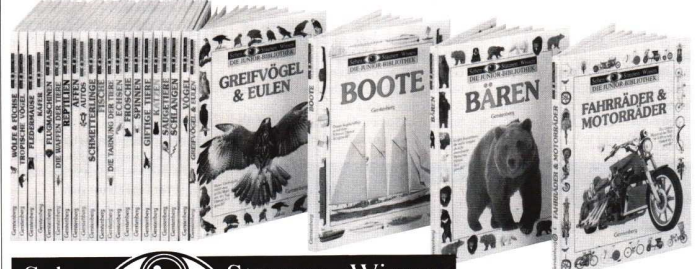
Die Rotationsfläche mit dieser Gleichung heißt (einschaliges) Rotationshyperboloid. Rotiert also ein Würfel um eine seiner Raumdiagonalen, so besteht die Rotationsfläche aus einem (einschaligen) Rotationshyperboloid mit beiderseitig angesetzten Kreiskegeln, wie Abb. 23 zeigt.

Literaturhinweise

- [1] Flachsmeier, J.: Zur räumlichen Geometrie – windschiefe Geraden. Math. in der Schule 27(1982), Heft 6, 375 – 387.
- [2] Hajós, G.: Einführung in die Geometrie. BSB B. G. Teubner, Leipzig 1970.
- [3] Quaisser, E. und H.-J. Sprengel: Geometrie in Ebene und Raum. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989.

Dr. B. Wernicke, PH Erfurt

Anzeige



Sehen Staunen · Wissen

DIE JUNIOR-BIBLIOTHEK

Folgende Titel sind lieferbar:
Affen · Autos · Bären · Boote ·
Fahrräder und Motorräder · Fische
Fledermäuse · Echsen ·
Flugmaschinen · Giftige Tiere ·
Frösche und Kröten · Reptilien ·
Greifvögel und Eulen · Katzen ·
Käfer · Säugetiere · Schlangen ·

Die besondere Sachbuchreihe für Kinder im Vor- und Grundschulalter. Attraktiv gestaltete Doppelseiten machen jeden der 24 Bände zu einem großartigen Lese- und Sehvergnügen.
Band für Band 34 farbige Seiten.
DM 16,80.

Schmetterlinge · Spinnen ·
Die Tarnung der Tiere · Vögel ·
Tropische Vögel · Die Waffen der
Tiere · Wölfe und Füchse.

***bei Gerstenberg**
Gerstenberg Verlag
Nachdruck: 19-20 3200 Hildesheim
Telefon: 05141 126-0

Ganz so einfach ist es mit dem Mond nicht!

Sehe ich doch neulich in einer Zeitschrift ein Bild, das den Zweck hat, die Menschen zur Frühgymnastik aufzufordern. Ein Mann macht im Schlafanzug fröhlich seine Übungen, durch das offene Fenster ist der Mond zu sehen. Dagegen ist gewiß nichts einzuwenden, doch es handelt sich um die Sichel des zunehmenden Mondes. – Hier handelt es sich ohne Zweifel um astronomischen Unsinn, denn am Morgen kann nur der abnehmende Mond am Himmel stehen!

Betrachtet man aufmerksam Gemälde, so kann man diese Fehler ebenfalls feststellen. Wenn ein Bild mit „Abendstimmung am Meer“ bezeichnet wird so kann nur der zunehmende Mond am Himmel stehen – falls der Künstler den Mond überhaupt darstellen wollte. Auch in der Literatur findet man derartige Fehler. Es ist völlig unmöglich, daß z. B. bei Sonnenuntergang der Vollmond hoch am Himmel stehen kann. Bei Gemälden mit historischem Inhalt lohnt es sich oft, nachzuprüfen, ob an dem betreffenden Tag auch wirklich diese Mondphase zu dieser Zeit am Himmel stehen konnte. Bei kritischer Überprüfung kann man zahlreiche derartige „astronomische Schnitzer“ entdecken. Wenden wir uns wieder dem Lauf und der Stellung bestimmter Mondphasen am Himmel zu. Was ist möglich und nicht? –

Betrachten wir zunächst den Lauf des Mondes am Himmel innerhalb eines Monats! Als Trabant unserer Erde läuft er in 27,3 Tagen um unseren Planeten. Das bedeutet, daß der Mond innerhalb dieser Zeit am Himmel sich von einem bestimmten Stern bis wieder zu demselben Stern bewegt. Dieser Zeitspanne wird als siderischer Monat bezeichnet. Da sich aber während dieser Zeit die Erde um die Sonne weiterbewegt, beträgt die Zeit z. B. von Vollmond bis zum nächsten Vollmond 29,5 Tage, was als synodischer Monat bezeichnet wird.

Die Bahn des Mondes ist gegenüber der Erdbahnebene um rund 5° geneigt. Am Himmel bewegt er sich in der Nähe der Ekliptik, der scheinbaren Jahresbahn der Sonne, von der um $\pm 5^\circ$ abweichen kann. Dieser Unterschied ist verhältnismäßig klein, so daß man etwas großzügig auch sagen kann: Die Mondbahn am Himmel fällt fast mit der Ekliptik zusammen. Ein scheinbarer Umlauf der Sonne am Himmel dauert 1 Jahr, der Mond bewältigt dies bereits in einem Monat. Das bedeutet, daß er der Sonne zeitlich vorausseilt: Sehen wir z. B. zum Frühlingsbeginn den zunehmenden Mond (Halbmond), so befindet sich dieser etwa an der Stelle, wo die Sonne zum Sommerbeginn sein wird. Das bedeutet, daß der Mond einen großen

Sichtbarkeitsbogen und damit große Höhen erreicht. Anders liegen die Verhältnisse zum Herbstbeginn. Der zunehmende Mond wird am Abend sehr tief stehen, da er die Stellung der Sonne zu Winterbeginn einnimmt. Wir müssen bei unseren Überlegungen den Sichtbarkeitsbogen (Tagbogen) der Sonne uns vorstellen. Die unterschiedlichsten Stellungen des Mond lassen sich am besten im Frühjahr und Herbst am Abendhimmel verdeutlichen:

Frühjahr: Die zunehmende Mondsichel steht hoch am westlichen Himmel, auffallend ist die „Rückenlage“ des Mondes. Er geht spät, zeitweise sogar erst nach Mitternacht, unter. Eine Bauernregel besagt: „Liegt der Mond auf dem Rücken, läuft das Wasser über die Brücken“, ein Hinweis auf das Tauwetter. Der Mond läuft zeitlich der Sonne voraus und befindet sich am Himmel, wo die Sonne in den Monaten Mai bis August sein wird.

Herbst: Die zunehmende Mondsichel steht tief am südwestlichen Himmel. Die Mondfigur steht gerade und weist nicht mehr die „Rückenlage“ auf. Der Mond ist nicht lange zu sehen und geht bald nach der Sonne unter. Im Volksmund spricht man „vom Mond, der das Wasser nicht halten kann“, ein Hinweis auf die Regenfälle im Herbst. Der Mond beschreibt nur einen kleinen Bogen und befindet sich dort, wo die Sonne von November bis Februar steht.

Die unterschiedliche Lage der Mondfigur ist darauf zurückzuführen, daß die scheinbare Jahresbahn der Sonne im Frühjahr sehr steil verläuft, im Herbst dagegen flach.

Für den abnehmenden Mond am Morgenhimmel gilt dies sinngemäß. So werden wir den hoch stehenden und auf dem Rücken liegenden Mond im Herbst sehen, während der tief stehende Mond, der nur kurze Zeit vor der Sonne aufgeht, im Frühjahr anzutreffen ist.

Zum Vollmond muß grundsätzlich folgendes erwähnt werden: Der Vollmond steht der Sonne gegenüber, was auch als Opposition bezeichnet wird. Von der Erde aus gesehen, beträgt der Winkelabstand 180° . Von ganz geringen Unterschieden abgesehen, geht der Vollmond

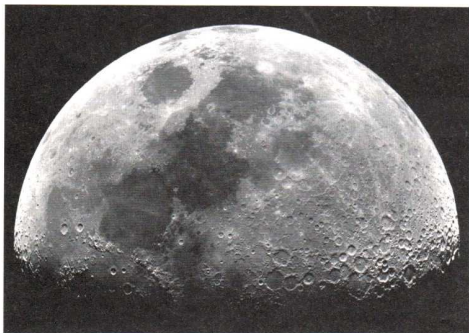
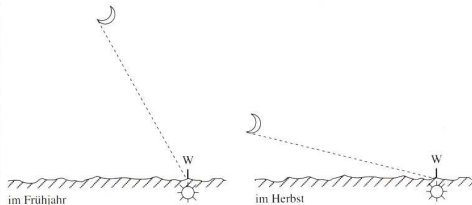


Foto: Hans Bernhardt

auf, wenn die Sonne untergeht, steht um Mitternacht im Süden (Kulmination) und geht unter bei Sonnenaufgang, eine Schilderung, wonach bei Sonnenuntergang der „Vollmond hoch am Himmel steht“ ist daher völlig unsinnig.

Vielen ist schon aufgefallen, daß der Vollmond im Sommer sehr tief steht, im Winter dagegen hoch am Himmel seine Bahn zieht. Dieser Unterschied ist leicht zu erklären: Im Sommer beschreibt die Sonne große Tagbögen und erreicht große Höhen. Da der Vollmond der Sonne stets gegenübersteht, muß er die Bahn der Sonne vom Winter beschreiben, die klein ist und geringe Höhen aufweist. Der Wintervollmond beschreibt den großen Bogen der Sonne im Sommer.

Von allen Gestirnen ist der Mond der schnellste Läufer am Himmel. Seine tägliche Bewegung am Himmel von West nach Ost (rechts nach links) beträgt stattliche 13° im Durchschnitt. In der Stunde bewegt sich der Mond am Himmel um seinen scheinbaren Durchmesser ($0,5^\circ$) weiter.



Die Lage der zunehmenden Mondsichel am Abendhimmel. Die Sonne befindet sich unterhalb des Horizontes.

— Scheinbare Jahresbahn der Sonne (Ekliptik)

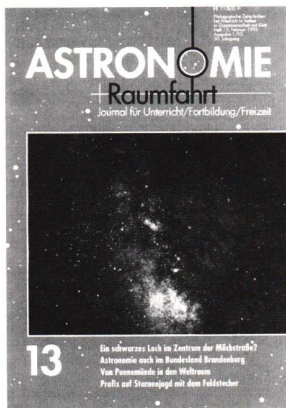
Neigung gegenüber dem Horizont: Im Frühjahr 61° , im Herbst 14° .

Bei der Sonne ist es nur 1° , bei den Planeten ist die Eigenbewegung bedeutend geringer und kann von Tag zu Tag nicht wahrgenommen werden. Beim Mond dagegen lohnen sich Beobachtungen, die deutlich zeigen, wie sich unser Trabant am Sternhimmel weiterbewegt. Bereits innerhalb von 24 Stunden ist zu erkennen, daß der Mond in der Nähe hellerer Sterne

oder eines Planeten seine Position verändert.

Schließlich entsprechen 13° immerhin 26 Vollmonddurchmessern – und das dürfte kaum zu übersehen sein. Für diese einfache Beobachtung wird nur ein Blatt Papier und ein Bleistift benötigt – und etwas Zeit für unseren treuen Erdbegleiter!

StR Arnold Zenkert



ASTRONOMIE+RAUMFAHRT

erscheint 6mal jährlich, Abonnement-Preis DM 39,00/43,20* für Studenten und Schüler DM 27,00/30,00* zuzüglich Versandkosten.

* Preise 1994

ASTRONOMIE+RAUMFAHRT

ist eine Zeitschrift, die Fragen der astronomischen und astronautischen Bildung besonders der Jugend, aus der Sicht der Fachwissenschaft, der Technik, der Didaktik und der Beobachtungspraxis publiziert. Astronomie+Raumfahrt ist in fünf Rubriken gegliedert:

Astronomie informiert die Leser über neue Ergebnisse und Methoden der Weltallforschung und gibt Einblick in die Geschichte der Astronomie.

Raumfahrt unterrichtet über Strategien und Entwicklungstendenzen der Weltraumfahrt, präsentiert Einsichten in das aktuelle Raumfahrtgeschehen und den damit verbundenen Nutzen für die Erdbevölkerung.

Lehren und Lernen gibt vielseitige Anregungen, wie Wissen über das Weltall und über ausgewählte Sachverhalte der Raumfahrt Schülern erfolgreich vermittelt werden kann.

Beobachtungen beschreibt ausführlich aktuelle Erscheinungen und Vorgänge am Sternenhimmel, stellt lohnende kosmische Beobachtungsobjekte vor und gibt interessante Anregungen für die Tätigkeit der Hobbyastronomen.

Das **Magazin** enthält Informationen rund um die Astronomie und Raumfahrt, berichtet u. a. über die Arbeit von Sternwarten und Planetarien, über Exkursionen, Tagungen und Ausstellungen.

Bitte richten Sie Ihre Bestellung an:

**Erhard Friedrich Verlag, Vertrieb,
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze**

Gedanken zum 75. Todestag von Georg Cantor (1845 - 1918)

„Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.“

Diese Worte David Hilberts (1862-1943), eines der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit, könnten als Leitmotiv über Leben und Werk Georg Cantors gestanden haben, dessen Todestag sich am 6. Januar 1993 zum 75. Male jährte. Cantor gilt als der Schöpfer der Mengenlehre, die heute unbestritten das Fundament der gesamten modernen Mathematik ist.

Hört man als Schüler das Wort Mengenlehre, so denkt man zunächst an das Arbeiten mit Begriffen wie Durchschnitt, Vereinigung oder Komplement von Mengen. Auch diese Begriffe hat Cantor eingeführt; allerdings gibt dieses elementare Operieren mit Mengen auch nicht annähernd eine Vorstellung davon, was Mengenlehre tatsächlich ist, was Cantor also tatsächlich geleistet hat. Bevor versucht werden soll, dies an einem Beispiel zu erläutern, seien einige biographische Angaben vorangestellt.

Der Lebensweg Georg Cantors

Georg Cantor wurde am 3. März 1845 in Petersburg als Sohn eines sehr erfolgreichen und vermögenden Kaufmanns geboren und besuchte dort auch die Elementarschule. 1856 siedelte die Familie nach Frankfurt/Main über.

Cantor besuchte das Gymnasium in Wiesbaden, wo bereits sein Wunsch entstand, Mathematik zu studieren. Der Vater hielt aber den Ingenieurberuf für wirtschaftlich sicherer und schickte den Sohn auf die Realschule, die der höheren Gewerbeschule Darmstadt angeschlossen war. Schließlich erlaubte er das Studium der Mathematik.

Das Studium der Mathematik

Cantor studierte ab 1862 ein Semester in Zürich und dann vor allem in Berlin. Die Berliner Universität war damals durch das Wirken von Karl Weierstraß, Ernst Eduard Kummer und Leopold Kronecker das bedeutendste mathematische Zentrum der Welt. Nach Promotion (1867) und Habilitation (1869) wurde Cantor Privatdozent an der Universität Halle/Saale. 1879 wurde er dort zum ordentlichen Professor berufen. Er wirkte als Hochschullehrer in Halle bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1913.

Revolutionäre mathematische Ideen

Den entscheidenden Anstoß für seine revolutionären Ideen empfing Cantor nicht aus abstrakten Spekulationen über das Unendliche, sondern aus einem konkreten mathematischen Problem, nämlich aus der Frage nach der Eindeutigkeit der Entwicklung einer Funktion in eine trigonometrische Reihe, welches z. B. auftritt, wenn man fragt, ob ein Ton eindeutig als Überlagerung von Grundton und Obertönen dargestellt werden kann. Bereits 1872 war Cantor im Besitz wesentlicher Grundgedanken seiner Theorie. Sein gesamtes Leben als mathematischer Forscher widmete er dann dem Ausbau und der weiteren Ausgestaltung der Mengenlehre. Dabei entbehrt es nicht einer gewissen Tragik, daß Cantor viele Jahre nur sehr wenig Anerkennung fand, ja daß sogar große Mathematiker wie sein ehemaliger Lehrer Kronecker die Mengenlehre für bedeutungslos oder gar für schädlich hielten. Erst gegen Ende seines Lebens war die Wichtigkeit der Mengenlehre für die gesamte Mathematik so offensichtlich geworden, daß Cantor nun die verdiente Anerkennung und zahlreiche akademische Ehrungen zuteil wurden.

Nachruf von Edmund Landau

Edmund Landau, Professor in Göttingen und damals schon ein sehr bekannter Gelehrter, gab den Gefühlen vieler Mathe-

matiker Ausdruck, als er anlässlich des Todes von Cantor an dessen Frau schrieb: „Mit tiefem Schmerz erfahre ich, daß Ihr Mann gestorben ist. Ihre Trauer teilt die ganze mathematische Welt. Er gehörte zu den größten und genialsten Mathematikern aller Länder und aller Zeiten.“

Gründung der DMV

Die Mathematiker verdanken Cantor aber nicht nur faszinierende und grundlegende Ideen. Er war auch ein glänzender Organisator: auf seine Initiative hin wurde 1890 die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) in Bremen gegründet. Auf ihrer Jahrestagung 1990, die an der Universität Bremen stattfand, konnte die DMV ihr einhundertjähriges Bestehen feierlich begehen. Auch am Zustandekommen einer internationalen Mathematikervereinigung hatte Cantor wesentlichen Anteil. Diese Internationale Mathematische Union (IMU) veranstaltet alle vier Jahre einen Weltkongreß der Mathematiker.

Weitere Interessen

Cantors Interessengebiete waren über die Mathematik hinaus weit gespannt. Er war bestens in der Philosophie und in der Philosophiegeschichte bewandert und kannte auch die Schriften der bedeutenden theologischen Denker vom heiligen Augustinus (4./5. Jahrhundert n. Chr.) bis in die frühe Neuzeit. Besonders interessierten ihn natürlich dabei die Ansichten der Philosophen und Theologen zur Unendlichkeitsproblematik. Cantor war der Meinung, daß er selbst mit seiner mathematischen Theorie des Unendlichen einen wichtigen Beitrag zur Philosophie geleistet habe, und dem kann man nur zustimmen, kommt doch kein philosophisches System an der Unendlichkeitsproblematik vorbei.

Cantors literarische Interessen und Aktivitäten bewegten sich auf einem schon damals sehr umstrittenen und heute als Fehlentwicklung betrachteten Gebiet: er war ein entschiedener Anhänger und aktiver Verfechter der sogenannten Bacon-Shakespeare-Theorie, nach der Shakespeare nicht der Verfasser der unter seinem Namen berühmten gewordenen Dramen gewesen sein könne. Diese mühten vielmehr von einer gesellschaftlich hochrangigen, mit allen Kenntnissen des Hoflebens im damaligen England ausgestatteten Persönlichkeit verfaßt sein. Als eine solche Persönlichkeit wurde Francis Bacon angesehen. Cantor hat zur Verteidigung



Georg Cantor

der Bacon-Shakespeare-Theorie sogar zwei kleine Schriften und einen Zeitschriftenartikel verfaßt. Die Beschäftigung mit der Bacon-Shakespeare-Theorie schrieb man gelegentlich, aber fälschlicherweise, Cantors Krankheit zu. Er litt seit 1884 an manisch-depressiven Zuständen, die immer wieder auftraten und seine Arbeit unterbrachen. Es wurde auch mehrfach behauptet, die Krankheit sei u. a. durch die hartnäckigen und erfolglosen Versuche Cantors ausgelöst worden, das sogenannte Kontinuumproblem zu lösen, ein Problem, das erst 1963 in gewissem Sinne gelöst werden konnte. Die archivalischen Quellen zeugen jedoch vom Gegenteil: sein Hausarzt rät dazu. Cantor während seiner Krankheitsphasen zur Wiederaufnahme seiner mathematischen Arbeit zu bewegen. Wenn das gelänge, wäre die Krankheitsphase bald überwunden.

Wie kann man nun mit dem Unendlichen Mathematik treiben? Kann es denn im Unendlichen noch Unterschiede geben, etwa in dem Sinne, daß eine Menge einen höheren Grad, eine höhere Stufe von Unendlichkeit hat als eine andere? Oder kann man gar über unsere natürlichen Zahlen „hinauszählen“, etwa so, daß man ein erstes, zweites, drittes, ... Objekt hat, und hinter allen diesen Objekten mit natürlicher Ordnungszahl ein Objekt mit der Ordnungszahl „Unendlich“ kommt (Cantor nannte diese erste unendliche Ordnungszahl ω), auf das dann wiederum Objekte mit den (unendlichen) Ordnungszahlen $\omega+1$, $\omega+2$, usw. folgen? Das scheinen doch zunächst ziemlich absurde Ideen zu sein. Cantor hat uns gezeigt, daß diese Ideen nicht nur nicht absurd sind,

sondern daß man sie exakt mathematisch fassen und begründen kann, und daß sie zudem für die Mathematik äußerst fruchtbar sind. Wir wollen uns das an dem Problem verschiedener Stufen der Unendlichkeit klarmachen.

Überlegungen zur Mengenlehre

Fassen wir zunächst endliche Mengen ins Auge. Ein Maß für die „Größe“ oder den „Umfang“ einer endlichen Menge ist die Anzahl ihrer Elemente (von der Art bzw. konkreten Bedeutung der Elemente sehen wir völlig ab). Wie kann man nun feststellen, ob zwei endliche Mengen gleich viele Elemente haben? Wir nennen zwei Mengen M und N gleichmächtig oder äquivalent, wenn man eine Zuordnungsvorschrift zwischen den Elementen von M und den Elementen von N derart angeben kann, daß bei dieser Zuordnung jedem Element von M genau ein Element von N zugeordnet wird und umgekehrt jedem Element von N genau ein Element von M. Man sagt auch, zwischen M und N ist eine eindeutige Abbildung möglich, oder M ist auf N bijektiv abgebildet. Hat man z. B. eine Menge M von Stühlen und eine Menge N von Personen, und stellt man nach dem Platznehmen der Personen fest, daß jede Person auf genau einem Stuhl sitzt und kein Stuhl übriggeblieben ist, so weiß man, daß die Anzahl der Personen gleich der Anzahl der Stühle ist. Das Platznehmen hat in diesem Falle der gleichen Anzahl von Stühlen und Personen eine eindeutige Zuordnung beider Mengen hergestellt. Wäre die Anzahl der Elemente in beiden Mengen verschieden, so wäre eine eindeutige Zuordnung der Elemente der einen Menge zu den Elementen der anderen Menge unmöglich: es würden entweder Personen oder Stühle übrigbleiben. Gleichmächtig zu sein, bedeutet also für endliche Mengen, daß sie dieselbe Anzahl von Elementen haben.

Die Untersuchung solcher eindeutiger Zuordnungen oder Bijektionen auch bei unendlichen Mengen lieferte Cantor den Schlüssel dafür, im Reiche des Unendlichen Abstufungen erkennen und mathematisch charakterisieren zu können. Das nächstliegende Beispiel einer unendlichen Menge ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Eine Menge M, die zu dieser Menge gleichmächtig ist, nennt man abzählbar. Die Elemente einer abzählbaren Menge M kann man demnach eindeutig den natürlichen Zahlen zuordnen, mit anderen Worten, man kann

M durchnummerieren bzw., was dasselbe ist, M läßt sich als Folge schreiben: $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$. Hier tritt uns bereits eine Besonderheit der unendlichen Mengen entgegen, die bei endlichen Mengen niemals auftreten kann: Eine echte Teilmenge einer unendlichen Menge kann zur Gesamtmenge gleichmächtig sein. So bilden die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, ... offenbar eine echte Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen; zwischen beiden Mengen ist aber eine eindeutige Zuordnung möglich, etwa so:

1	2	3	4	...	n	...
1	4	9	16	...	n^2	...

Man sieht, daß bei dieser Zuordnung jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge entspricht und umgekehrt, obwohl die eine Menge eine echte Teilmenge der anderen ist. Diese bemerkenswerten und scheinbar paradoxe Besonderheit unendlicher Mengen, die für unendliche Mengen geradezu charakteristisch ist, hatte schon G. Galilei bemerkt; er verfolgte das Problem aber nicht weiter.

Ebenso findet man abzählbare Mengen, von denen N eine echte Teilmenge ist. So ist die Menge der ganzen Zahlen $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ abzählbar; man erkennt das an folgender eindeutiger Zuordnung zu $\mathbb{N}$:

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...

Ferner hat bereits Cantor zeigen können, daß auch die Menge der rationalen Zahlen und sogar die noch viel „umfangreichere“ Menge der algebraischen Zahlen abzählbar sind. Sind am Ende vielleicht alle unendlichen Mengen abzählbar, d. h. zu $\mathbb{N}$ gleichmächtig? Dann gäbe es keine Abstufungen im Unendlichen im Sinne einer Verallgemeinerung des Anzahlbegriffs, denn M gleichmächtig zu N war ja für endliche Mengen gerade gleichbedeutend mit „M und N haben die gleichen Anzahl von Elementen!“

Den Durchbruch und damit eine grundlegend neue Auffassung vom Unendlichen in der Mathematik erzielte Cantor mit dem Beweis, daß es unendliche Mengen gibt, die nicht mehr abzählbar sind. 1874 zeigte er nämlich, daß die Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1, die wir abkürzend mit $(0, 1)$ bezeichnen wollen, nicht abzählbar ist. Um diesen Beweis zu verstehen, erinnern wir uns daran, daß jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 ein unendlicher Dezimalbruch der Form $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ ist, wobei b_1 die erste Ziffer nach dem Komma, b_2 die zweite Ziffer

usw. darstellt. Dabei vereinbaren wir, daß etwa 0,5 als 0,4999..., 0,732 als 0,731999..., usw. geschrieben wird. Diese Vereinbarung vorausgesetzt, ist jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig durch die Folge der Ziffern nach dem Komma bestimmt: Zwei Zahlen x , y mit $x, y \in (0, 1)$ sind genau dann gleich, wenn sie in allen entsprechenden Ziffern übereinstimmen. Der Beweis, daß $(0, 1)$ nicht abzählbar ist, wird indirekt geführt: Angenommen, die Menge $(0, 1)$ wäre abzählbar, müßte sie sich als Folge schreiben lassen: $(0, 1) = \{w_1, w_2, w_3, \dots\}$. Jede beliebige reelle Zahl zwischen Null und 1 müßte in dieser Folge vorkommen, d. h. gleich einem der w_i sein. Notieren wir zunächst die Dezimalbruchentwicklung der w_i :

$$\begin{aligned} w_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots \\ w_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \dots \\ w_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Wir haben uns hier zur Charakterisierung der Ziffern zweckmäßigerweise Doppelindices bedient: a_{ij} etwa ist die dritte Ziffer des ersten Dezimalbruchs w_i , a_{34} die vierte Ziffer von w_3 usw.; allgemein ist

a_{km} die n . te Ziffer von w_m . Wir konstruieren jetzt eine Zahl $\alpha = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ folgendermaßen: Wir setzen $b_1 = a_{11} \pm 1$, $b_2 = a_{22} \pm 1$, $b_3 = a_{33} \pm 1$, ..., $b_n = a_{nn} \pm 1$, Dabei ist das ± 1 so zu verstehen, daß man die „Diagonalelemente“ a_{ii} in dem Ziffernschema (1) ändert, indem man in der Regel 1 addiert; nur wenn die Ziffer $a_{ii} = 9$ ist, subtrahiert man 1. Die so abgeänderten Diagonalelemente verwendet man als die Ziffern der neuen Zahl α . α beginnt mit 0,....; gehört also zu $(0, 1)$. Nach unserer Annahme, $(0, 1)$ sei abzählbar, muß α also einem der Folgenglieder gleich sein, etwa $\alpha = w_k$. Diese Gleichung ist aber unmöglich für jedes k , denn die k .te Ziffer von α ($a_{kk} \pm 1$) unterscheidet sich gewiß von der k .ten Ziffer von w_k (a_{kk}). Unsere Annahme hat demnach auf einen Widerspruch geführt; sie ist also falsch und somit ist $(0, 1)$ nicht abzählbar. Da $(0, 1)$ aber in Gestalt der Folge $1/2, 1/3, 1/4$ eine abzählbare Teilmenge enthält, kann sie nur eine „höhere Mächtigkeit“ als die der abzählbaren Mengen haben. Wir haben damit bereits zwei we-

sentlich verschiedenen Stufen im Unendlichen gefunden, die abzählbaren Mengen einerseits und die Mengen, die zu $(0, 1)$ gleichmächtig sind (die sogenannten Mengen mit Kontinuumsmächtigkeit) andererseits. Cantor konnte sogar zeigen, daß man zu beliebig großen Mächtigkeiten aufsteigen kann, daß man also immer wieder Mengen findet, die eine höhere Mächtigkeit haben als bereits vorhandene Mengen. Cantor hat auch gelehrt, wie man mit diesen Mächtigkeiten ähnlich wie mit Zahlen rechnen kann.

Darauf und auf die großartige Theorie der unendlichen Ordnungszahlen (d. h. auf das „Zählen über die natürlichen Zahlen hinaus“) kann hier nicht eingegangen werden. Hilbert hat diese Theorien als „die bewundernswertesten Blüte mathematischen Geistes und eine der höchsten Leistungen rein verstandesmäßiger menschlicher Tätigkeit“ bezeichnet. Man kann sie sich nur durch ein eingehenderes Studium der Mathematik erschließen.

Prof. Dr. Walter Purkert

Interessante Aufgaben von Isaak Newton (1643-1727)

Vor 350 Jahren wurde Isaak Newton geboren. Zur Erinnerung einige Aufgaben. Sie stammen aus: „Universal Arithmetick; or a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution“. Writen in Latin by Sir Isaac Newton.

1 Drei Arbeiter können eine gewisse Arbeit in gewissen Zeiten erledigen, nämlich A einmal in drei Wochen, B dreimal in acht Wochen und C fünfmal in zwölf Wochen. Es wird verlangt zu wissen, in welcher Zeit sie die Arbeit gemeinsam beenden können.

2 Jemand kaufte 40 Bushel Weizen, 24 Bushel Gerste und 20 Bushel Hafer, zusammen für 15 Pfund und 12 Schilling. Er kaufte wiederum von demselben Getreide 26 Bushel Weizen, 30 Bushel Gerste und 50 Bushel Hafer, zusammen für 16 Pfund. Und ein drittes Mal kaufte er von derselben Art Getreide 24 Bushel Weizen, 120 Bushel Gerste und 100 Bushel Hafer, zusammen für 34

Pfund. Es wird gefragt, zu welchem Preis je ein Bushel der verschiedenen Getreidearten zu veranschlagen ist.

3 Drei Wiesen, die mit Gras gleicher Dichte bedeckt sind, das mit gleicher Geschwindigkeit wächst, besitzen die

Flächen $3\frac{1}{3}$, 10 und 24 ha.

Auf den Wiesen weiden Rinder und fressen das Gras, das während des Abnehmens nachwächst. Auf der ersten Wiese können 12 Rinder 4 Wochen lang weiden, auf der zweiten 24 Rinder 9 Wochen. Wie viele Rinder kann man auf die dritte Wiese lassen, damit diese sämtliches Gras in 18 Wochen fressen?

4 Eine geometrische Folge hat drei Glieder. Die Summe dieser Glieder ist 19, und die Summe ihrer Quadrate ist 133. Man bestimme die Glieder.

5 Eine geometrische Folge hat vier Glieder. Die Summe der beiden äußeren

Glieder ist 13, die Summe der beiden mittleren ist 4. Man bestimme die Glieder.

6 Gegeben sei der Inhalt A und der Umfang u eines rechtwinkligen Dreiecks. Es ist die Länge c der Hypotenuse zu bestimmen.

7 Aus den Seitenlängen a und b eines Parallelogramms und aus der Länge e einer seiner Diagonalen ist die Länge f der anderen Diagonale zu ermitteln.

8 Zwei Boten A und B, zwischen denen 59 Meilen liegen, fahren am Morgen aufeinander zu. Bote A legt in 2 Stunden 7 Meilen zurück, B in 3 Stunden 8 Meilen; dabei begibt sich B eine Stunde später als A auf die Reise. Wieviel Meilen legt A bis zum Treffen mit B zurück?

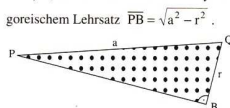
9 Einem Kreis mit dem Durchmesser d sei ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Basis b und dem Schenkel s eingezeichnet. Man stelle eine Gleichung auf, welche die Variablen d, b und s enthält und löse diese jeweils nach d, b bzw. s auf.

Johannes Lehmann

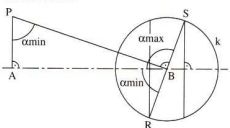
Lösungen

Auf zum Münchner Oktoberfest!; S. 4

Lösung: Laut Zusatzannahme gilt für $\alpha = 90^\circ$ $\nrightarrow$ QBP = 90° und damit laut Pythagoreischem Lehrsatz $\overline{PB} = \sqrt{a^2 - r^2}$.



O. B. d. A. kann für die weiteren Überlegungen neben A und B auch P als fester Punkt betrachtet werden. (Der Beobachter rotiert dann in gleicher Weise wie der Arm AP um die Achse AB). Wegen $\overline{PQ} = a$ liegt Q auf der Kugel mit Radius a und Mittelpunkt P und wegen $\overline{BQ} = r$ auf der Kugel mit Radius r und Mittelpunkt B. Q liegt also auf der Schnittlinie beider Kugeln, auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden PB liegt und dessen Ebene auf der Geraden PB senkrecht steht. Da für $\alpha = 90^\circ$ neben $BQ \perp AB$ auch $BQ \perp BP$ gilt, kann der Mittelpunkt dieses Schnittkreises nur der Punkt B sein. Die senkrechte Projektion dieses Schnittkreises in die Ebene durch A, B und P ist der auf PB senkrecht stehende Durchmesser RS des Kreises k mit Mittelpunkt B und Radius r dieser Ebene:



Könnte der Schwenkarm BQ mit konstantem Winkel α um die Achse AB rotieren, so würde sich Q dabei auf einem Kreis bewegen, dessen Mittelpunkt auf der Geraden AB liegt und dessen Ebene auf dieser Geraden senkrecht steht. Die senkrechte Projektion jedes solchen Kreises in die Ebene ABP ist eine auf AB senkrecht stehende Sehne des Kreises k. Somit ergibt sich aus maßstabtreuen Zeichnungen oder aus den Formeln

$$\cos \alpha_{\min} = \frac{r}{\overline{BP}} = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

$$\alpha_{\max} + \alpha_{\min} = 180^\circ$$

$$\alpha_{\min} = \nrightarrow ABR = \nrightarrow APB = 70^\circ$$

$$\text{und } \alpha_{\max} \approx 110^\circ.$$

Norwegische 50-Kronen-Silbermünze „Olympische Winterspiele 1994 Lillehammer“; Seite 5
Lösung: Familienskiwanderung

Bundesschatzbriefe; Seite 5

Lösungen:

1. Aufgabe: $(p_1 + p_2 + \dots + p_6) \% = 47,75 \%$

$$2. \text{ Aufgabe: } p = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_6}{6} = 7,96$$

Der gesuchte Zinssatz ist das arithmetische Mittel der sechs Zinssätze eines Bundesschatzbriefes 1992/11 vom Typ A.

3. Aufgabe:

$$100 \cdot \left[\left(1 + \frac{p_1}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{p_7}{100} \right) - 1 \right] \% = 71,76 \%$$

4. Aufgabe:

$$\text{Aus } N \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \right)^7 = N \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{p_7}{100} \right) \text{ folgt}$$

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[7]{\left(1 + \frac{p_1}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{p_7}{100} \right)}$$

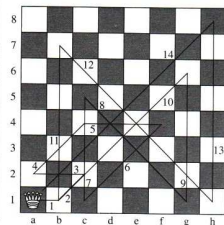
$$p = 100 \cdot \left[\sqrt[7]{\left(1 + \frac{p_1}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{p_7}{100} \right)} - 1 \right] = 8,034$$

Der gesuchte Zinsfaktor $1 + \frac{p}{100}$ ist das

geometrische Mittel der sieben Zinsfaktoren eines Bundesschatzbriefes 1992/11 vom Typ B.

Bemerkungen: Ein Erwerber von Bundesschatzbriefen kann sich nach dem ersten Laufzeitjahr jederzeit monatlich bis zu 10000 DM seines Guthabens zurückzahlen lassen.

Lösung zu „Sportliche Dame“; S. 10



Killeralge erstickt das Mittelmeer; S. 5

Lösung: Da seit der Entdeckung dieser Alge im Mittelmeer mindestens 7, vielleicht sogar 8 Jahre vergangen sind, war 1984 der Inhalt der überwucherten Fläche nicht größer als $400ha:6^7 = 4000000m^2/6^7 \approx 14,3 m^2$, vielleicht sogar nicht größer als $400ha:6^8 \approx 2,4 m^2$.

„Der Komet Swift-Tuttle und die Erde“, S. 8

$$1.) \text{ IAE} = a_E = \frac{147,1 + 152,1}{2} \cdot 10 \text{ km} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$2.) e_E = a_E - \pi_E = (149,6 - 147,1) \cdot 10^6 \text{ km} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$b_E = \sqrt{a_E^2 - e_E^2} = 149,58 \cdot 10^6 \text{ km (Pythagoreische Gleichung)}$$

$$b_E : a_E = 0,999$$

$$3.) \text{ Aus } \left(\frac{a_K}{a_E} \right)^3 = \left(\frac{U_K}{U_E} \right)^2 \text{ folgt mit } U_E = 1 \text{ Jahr, } a_E = 1 \text{ A}_E \text{ und } \frac{U_K}{U_E} = 135,01$$

$$a_K = \sqrt[3]{135,01^2} \cdot \text{IAE} = 26,32 \text{ AE}$$

$$4.) \text{ Wegen } \pi_K \leq \text{IAE gilt } a_K = 2a_K - \pi_K \geq 2 \cdot 26,32 \text{ AE} - \text{IAE} = 51,64 \text{ AE}$$

$$5.) e_K = a_K - \pi_K \geq 25,32 \text{ AE}$$

$$b_K = \sqrt{a_K^2 - e_K^2} \leq \sqrt{26,32^2 - 25,32^2} \text{ AE} = 7,2 \text{ AE}$$

$$b_K : a_K \leq 0,28$$

Lösungen zu „Telstar 2“

1.) Der Umfang der Kreisbahn mit Radius $r = a_T$ ist $2\pi r$. Da die Umlaufzeit auf dieser Kreisbahn T_T ist, ist die konstante Bahngeschwindigkeit auf dieser Kreisbahn gleich $\frac{2\pi r}{T_T}$. Die auf einen Satelliten auf dieser Kreisbahn wirkende Zentrifugalkraft ist

$$F_Z = \frac{m_S \cdot v^2}{r} = \frac{m_S \cdot (2\pi r)^2}{r \cdot T_T^2} = \frac{m_S \cdot 4\pi^2 \cdot r}{T_T^2}$$

Auf $F_Z = F_G$ folgt damit

$$G \cdot \frac{m_E}{r^2} = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T_T^2} \cdot m_S, r^3 = \frac{G \cdot m_E \cdot T_T^2}{4\pi^2}$$

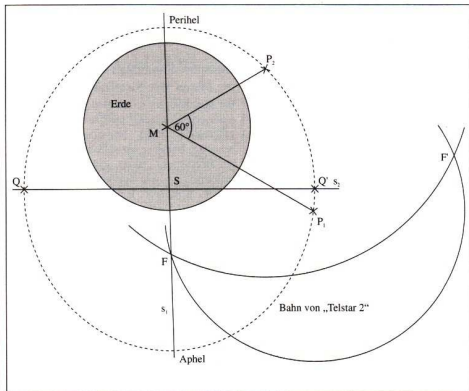
$$\text{und } r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_E \cdot T_T^2}{4\pi^2}} = 12260 \text{ km.}$$

Die große Halbachse der Bahn von „Telstar 2“ war $a_T = r = 12260 \text{ km}$.

2.) Eine Strecke von 2000 km Länge wird in der maßstäblichen Zeichnung durch eine Strecke von 1 cm Länge dargestellt.

Zuerst werden die Punkte M, P_1 und P_2 in der Zeichenebene in der angegebenen gegenseitigen Lage gezeichnet. Der zweite Brennpunkt F der Bahnellipse von „Telstar 2“ muß wegen $\overline{MP_1} + \overline{FP_1} = \overline{MP_2} + \overline{FP_2} = 2a_T$ einer der Schnittpunkte des Kreises mit Radius $2a_T - \overline{MP_1}$ und Mittelpunkt P_1 mit dem Kreis mit Radius $2a_T - \overline{MP_2}$ und Mittelpunkt P_2 sein. Der mit F' bezeichnete Schnittpunkt beider Kreise scheidet aus, weil dann das Perihel der zugehörigen Ellipse im Innern der Erde liegen würde. Der in der Zeichnung mit F bezeichnete Schnittpunkt ist der gesuchte zweite Brennpunkt. Die Gerade $MF = s_1$ und die Mittelsenkrechte s_2 der Strecke MF sind die Symmetrieachsen der Bahnellipse von „Telstar 2“. Perihel und Aphel der Lösungselipse sind die Punkte von s_1 , die vom Schnittpunkt S der Symmetrieachsen s_1 und s_2 den Abstand a_T haben. Die Punkte Q und Q' der Geraden s_2 , die von M den Abstand a_T haben, bestimmen die kleine Halbachse b_T der Bahnellipse: $b_T = \overline{SQ} = \overline{SQ'}$. Laut Zeichnung gilt $b_T \approx 5,6 \text{ cm}$.

Hieraus folgt $b_T = 11200 \text{ km}$. In der Zeichnung haben Perihel und Aphel von der Erdoberfläche die Abstände 0,4 cm und 3,6 cm, in Wirklichkeit sind damit diese Abstände gleich 1000 km und 10800 km.



Übersetzung und Lösung Sprachhecke; S. 10

Übersetzung:

Im Koordinatensystem werden Dreiecke mit den Eckpunkten A(0;0), B(1;1) und C(x;y) betrachtet. Bestimmt und stellt in einer Zeichnung die Menge der Punkte C dar, für die das Dreieck ABC spitzwinklig ist.

Lösung:

Damit ABC ein spitzwinkliges Dreieck ist, müssen die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein:

- 1) $x \neq y$; denn C darf nicht der Geraden AB angehören,
- 2) $-x < y < -x + 2$; denn C muß innerer Punkt des Streifens sein, welcher von den zu AB senkrechten Geraden durch A und B begrenzt wird.

$$3) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2};$$

denn C muß ein außerhalb des Kreises durch A und B mit dem Radius $r = \frac{1}{2} \overline{AB}$ liegender Punkt sein.

Strategische Brettspiele

Creepers

Nach den Lemmings begleiten wir bei Creepers lauter kleine Raupen auf ihrem Weg vom Schlüpfen bis zum Entpuppen als Schmetterlinge.

Die kleinen grünen Würmer sind etwas dummelig, sie klettern und krabbeln, und wir steuern sie. Da hilft ein Föhn, eine Leiter, ein Trampolin oder gar ein kleines Bömbchen. Diese und andere Werkzeuge stehen in einer Icon-Leiste zur Verfügung. Sie lassen sich beliebig oft auf- und abbauen. Ähnlich TIM, der Incredible Machine, kann man richtige "Wurm-Wegberei-tungs-Maschinen" konstruieren. Bei allen Aktionen gilt nur zu bedenken, daß jede Aktion Energie verbraucht – und die ist nun mal nicht endlos vorhanden.

In den einzelnen Levels stehen nicht immer alle Werkzeuge gleichzeitig zur Verfügung, das schreit geradezu nach überlegter Planung. Machen sich die kleinen Würmer zu einem hervorragendem Sound auf den Weg, hält sie nichts mehr auf. Deswegen sollte man zu Beginn jedes Levels die Pausentaste drücken, um sich erst einmal einen Level-Überblick zu verschaffen.

Der große Bildschirm kann durch Kamera-Optionen geteilt werden. So kann man immer auf Creeper-Höhe sein, oder schwierige Passagen im Auge behalten. Insgesamt sind vier unterschiedliche Schwierigkeitsgrade zu meistern, um alle Creepers durch die abwechslungsreichen Bildschirme zu begleiten. Dank flotter Musik, passabler Grafik und sehr guter Steuerung ist ein hoher Motivationsgrad schnell erreicht. Die stetig ansteigenden Problemstellungen entmutigen auch Wurm-Anfänger nicht. Ein Manko des Spieles darf nicht unerwähnt bleiben: Teilweise arbeiten sich die kleinen Raupen im Originaltempo über den Bildschirm. Bei einigen Bildern reicht das immerhin aus, die noch fehlenden Hausaufgaben fristgerecht zu erledigen.

Mit einem Paßwortsystem ausgerüstet, können die Creepers jederzeit wieder an beliebiger Stelle gestartet werden. Schade nur,

Colossus X

Die Spielesammlung Colossus X enthält die besten vier Strategie-Programmen für den PC.

Colossus Chess X bietet unter einer recht guten EGA-Gratik vier verschiedene Figurensätze, beliebig einstellbare Blickwinkel auf Brett und Figuren, sechs verschiedene Spielmodi, sowie hunderte unterschiedlicher Eröffnungen. Ein weiterer Vorteil ist, Partien abspeichern und bei Bedarf neu laden zu können. Zudem kann Chess X selbstlernend arbeiten.

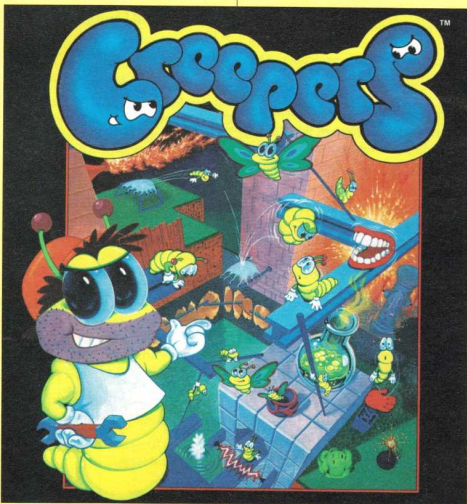
Backgammon, enthält das komplette Regelwerk des modernen Backgammon, u. a. das für andere Simulationen unübliche Verdoppeln. Auch bei diesem Spiel gibt es viele zusätzlich anwählbare Funktionen, z. B. Spielsicherung, Lernprogramm (Regeln) und frei wählbare Würfelzahlen.

Draughts (Dame) ist nach Chess eines der beliebtesten Strategiespiele dieser Serie. Nachteilig auf den Spielgenuß wirkt sich hier die EGA-Gratik aus, jedoch wird sich kein

Dame-Fan davon beeinflussen lassen, da letztlich die Spielstärke eines jeden Programmes entscheidend ist. C-Draughts gilt momentan als stärkstes Dame-Programm. Es sichert sogar auf bescheidenster Hardware hohes Spielniveau, was man an der Vielzahl der Eröffnungen (mehr als 4000 Varianten) merkt, die durch die Lernfähigkeit des Programmes noch ausbaufähig sind. Im Gegensatz zu den anderen Simulationen ist **Bridge** unter VGA lauffähig, sorgt aber deshalb noch lange nicht für mehr Spaß. Trotzdem muß man anerkennen, daß diese Simulation einzigartig ist, denn auch dieses Strategie-Programm enthält Funktionen, die sonst nirgendwo zu finden sind. Sehr vorteilhaft für Einsteiger ist der Spiellehrer, der anhand verschiedenen Blätter das Grundprinzip von Bridge erklärt.

COLOSSUS – COLLECTION OF STRATEGY GAMES, CDS Software, Muster von: Rushware, Hardware: 286+, 640 KB RAM, EGA/VGA, Übungsprogramm für Schach, Dame, Bridge, Backgammon. Preis: 79,95 DM

Christian Papel/-se



daß die Creepers gegen harte Lemmings-Konkurrenz anzukämpfen haben.

CREEPERS, Psygnosis 1993, Denk- & Tüftelspiel der Marken Incredible Machine

und Lemmings, Muster von: Sellings Points, Hardware: AT, 20 MHz, 256-VGA, Soundkarte, Maus, LW, Preis: 119,95 DM

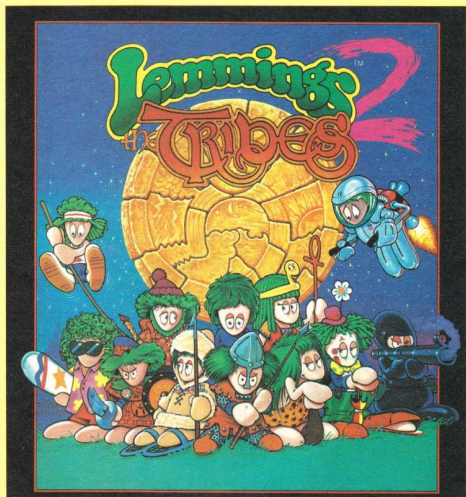
H. Seitz/-se

Lemming II – The Tribes

Sie sind wieder da. Zwölf neue Stämme von Lemmings haben eine Menge Ärger. Sie sind zwar sehr talentiert, aber immer noch ziemlich dummelig. Sie brauchen unsere Hilfe.

Die Lemmings durch die Level zu führen ist schwieriger, als man sich denkt, denn die kleinen Freunde der Selbstzerstörung scheuen sich nicht, bereits am Anfang eines Levels von der Klippe zu springen. Um die Lemmings zu zähmen, genügt ein Mausklick auf eine Palette von Eigenschaften, anschließend ein Klick auf einen der Lemmings, und schon widmet sich dieser eine seiner gerade ihm zugewiesenen Aufgabe. Seit der letzten Lemming-Manie haben sich die Tieren spezialisiert. Es gibt nun mehrere Arten, ein Loch zu graben, ein Hindernis zu überqueren, eine Lücke zu füllen oder sich durch die Luft zu bewegen. Beach-Lemmings können standesgemäß surfen, Polar-Lemmings werfen Schneebälle, Zirkus-Lemmings lieben die Ballons und die mittelalterlichen Lemmings können gut mit dem Bogen umgehen.

Wenn man alle 12 Stämme sicher durch die Levels bringt, winkt einem statt einer Bronzemedaille eine in Gold. Na, ist das kein Anreiz? Unbestritten bleibt, daß die Lemmings weiterhin viel Spaß machen. Für mich haben sie aber nicht mehr den Reiz der ersten Lemmings. Trotz über bis zu acht Bildschirmen scrollende Levels, trotz eine Vielzahl neuer Eigenschaften (die sich aber immer wieder auf das bekannte Minimum reduzieren lassen), trotz zwölf neuer Songs



stellt sich das erwartete Lemmings-Großfieber nicht in dem Maße ein, wie es damals war, als die grünhaarigen Dummköpfe zum ersten Mal über den Monitor trollten – schließlich haben wir damals schon genügend Lemmings gerettet. Wer die Vorgänger aber nicht kennt, der sollte sich LEM-

MINGS: THE TRIBES sofort besorgen. **LEMMINGS II**, Psygnosis 1993, Denk- und Tüftelspiel mit 120 scrollenden Levels, Muster von Selling Points; Hardware: 286+, 12 MHz+, 640 KB RAM, HD (3,8), Soundkarte, Maus, Preis: 119,95 DM.

H. Seitz/-se

Buchhinweis

Andrej G. Konforowitsch: Logischen Katastrophen auf der Spur - Mathematische Sophismen und Paradoxa 2. Aufl. 1992, 250 S., 122 Abb., 178 Aufgaben mit Lös., 19 cm x 12 cm, ISBN 3-343-00831-1, Broschur, DM 16,80; ÖS 131,-; sFr 17,80

Kurzbeschreibung:

- Aufgaben aus Arithmetik, Algebra und Analysis, Geometrie und Logik
- jede Aufgabe enthält einen versteckten logischen Fehler, der auf einer Stufe der Überlegungen entstand und widersinnige Ergebnisse bedingte
- die bekanntesten Paradoxa aus der Geschichte

– Illustrationen von Maurits Cornelis Escher

Es ist besonders zu empfehlen für Ober- schüler, Lehrer, Studenten, Mathematiker.

Auszüge aus einigen Rezensionen geben einen guten Einblick in das Buch: ... „eine originelle, aber auch anstrengende Reise auf den verschlungenen Wegen menschlichen Denkens.“ (Handelsblatt, Technische Linie, Düsseldorf und Frankfurt)

„Dies ist ein Buch von der Logik, dem folgerichtigen Denken also, und von den Seltsamkeiten, die einem dabei begegnen können. Mit Paradoxa und Antinomien hat man sich schon in der Antike beschäftigt, und das Interesse daran hat bis auf den heutigen Tag nicht abgenommen. Solche verwirrenden mathe-

mathematischen Sophismen und Paradoxa sind in diesem Band zusammengetragen und ausführlich behandelt. ... Wer sich gern mit mathematischen Aufgaben und Denkvermögen solcher Art befäßt,

findet hier viel Spaß, und zwar preiswert.“ (Technische Mitteilungen, Essen)



Lösungen

Lösung von Zuschnitt eines Glockenrocks; S. 15

Zunächst stellen wir Beziehungen zwischen den gegebenen Größen Stoffbreite, Rocklänge und Taillenumfang sowie den gesuchten Werten r und α auf, wobei wir entsprechend den Beziehungen aus Abb. 1 die Hilfsgrößen R , a , b , L verwenden:

$$R = r + 76 \quad (1)$$

$$a = 73 = R \sin \beta \quad (2)$$

$$2r\beta = 40 \quad (3)$$

$$b = r \cos \beta \quad (4)$$

$$\alpha = 2\beta \quad (5)$$

$$L = R - b \quad (6)$$

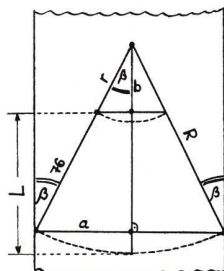


Abb. 2

Offenbar gilt $0 < \beta < \frac{\pi}{2} = 90^\circ$. Gleichung (3) ist ein Ausdruck für den Taillenumfang; hierbei tritt β im Bogenmaß auf. Die in (6) vorkommende Größe L entspricht der Stofflänge für einen halben Rock; zu kaufen ist demnach eine Länge von $2L$.

Aus den Gleichungen (1) – (3) ergibt sich nach einfachen Umformungen die Beziehung

$$\beta = \frac{20 \sin \beta}{73 - 76 \sin \beta} \quad (7)$$

eine goniometrische Gleichung, in der neben β im Bogenmaß auch $\sin \beta$ auftritt. Derartige Gleichungen – wie auch Polynomgleichungen höheren Grades – lassen sich i. allg. nicht in geschlossener Form lösen, d. h., es ist nicht möglich, (7) durch elementare Umformungen, Anwendung von Winkelbeziehungen usw. nach β aufzulösen. es mag für manchen eine neue Erkenntnis und vielleicht auch eine Enttäuschung sein, aber mit der Tatsache, daß nicht jede Bestimmungsgleichung geschlossen lösbar ist, muß man

sich einfach abfinden. Man kann jedoch Gleichung (7) mit beliebiger Genauigkeit näherungsweise lösen. Die numerische Mathematik stellt dafür eine Vielzahl effektiver Verfahren (wie etwa das Newtonverfahren) bereit.

Es gibt aber auch sehr einfache Methoden zur Lösung von (7), die jedermann – unter Zuhilfenahme eines Taschenrechners – leicht nachvollziehen kann. Eine davon soll jetzt kurz beschrieben werden.

Zunächst bezeichnen wir die rechte Seite in (7) mit $f(\beta)$ und stellen diese Funktion mit Hilfe einiger Wertepaare graphisch dar (s. Abb. 3). Aus Abb. 3 erkennt man, daß die für das vorliegende Problem sinnvolle Lösung von (7) bei etwa $\beta = 0,8$ (ca. 45°) liegt. Nun wenden wir die Methode des gezielten Probierens bzw. der linearen Interpolation an (vgl. Tab. 1). Dazu führen wir die Funktion $g(\beta) = f(\beta) - \beta$ ein und suchen in der Nähe von 0,8 eine Nullstelle von g , d. h. einen solchen Wert $\bar{\beta}$, für den $g(\bar{\beta}) = 0$, mithin $f(\bar{\beta}) = \bar{\beta}$ gilt (Abb. 3).

β	$f(\beta)$	$g(\beta)$
0,8	0,7763	-0,0237
0,9	1,1633	0,2633
0,81	0,8068	-0,0032
0,82	0,8388	0,0188

Tabelle 1: Funktionswerte

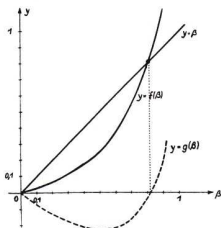


Abb. 3

Aus Abb. 3 erkennt man, daß $g(0,8) < 0$ und $g(0,9) > 0$ gilt. Die Funktion g besitzt im Intervall $[0,8;0,9]$ keine Sprünge oder nicht definierte Stellen (man spricht in diesem Fall von einer stetigen Funktion), denn sie ist Quotient aus der stetigen Zählerfunktion $g_1(\beta) = 20 \sin \beta$ und der ebenfalls stetigen Nennerfunktion $g_2(\beta) = 73 - 76 \sin \beta$, die im betrachteten Intervall nicht Null wird (Überprüf dies!). Damit gibt es tatsächlich mindestens einen Wert $\bar{\beta}$ mit $g(\bar{\beta}) = 0$. Um diesen zu finden, nähern wir im Intervall $[0,8;0,9]$ die Funktion g durch eine li-

neare Funktion an. Dies bedeutet, der Graph von g wird durch eine Gerade ersetzt, die durch die Punkte $P_1(0,8;g(0,8))$ und $P_2(0,9;g(0,9))$ verläuft und die β -Achse an der Stelle $\bar{\beta}$ schneidet (dieses Vorgehen nennt man lineare Interpolation). Unter Nutzung der Beziehungen zwischen ähnlichen Dreiecken (vgl. Abb. 4) erhält man

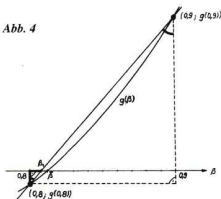
$$\frac{\bar{\beta}_1 - 0,8}{0,9 - 0,8} = \frac{0 - g(0,8)}{g(0,9) - g(0,8)}, \quad (8)$$

woraus sich

$$\bar{\beta}_1 = 0,8 - 0,1 \frac{g(0,8)}{g(0,9) - g(0,8)} = 0,8083 \approx 0,81$$

ergibt. Für diesen Wert gilt $g(\bar{\beta}_1) = -0,0032$, er stellt damit bereits eine sehr gute Näherung für $\bar{\beta}$ dar. Genügt einem die erzielte Genauigkeit aber noch nicht, muß man die Prozedur der linearen Interpolation wiederholen, indem man etwa eine neue Gerade durch die Punkte $P_3(0,81;g(0,81))$ und $P_4(0,82;g(0,82))$ legt. Deren Nullstelle lautet $\bar{\beta}_2 = 0,8115$ und besitzt einen Funktionswert von $g(0,8115) = -0,00008$ (Überprüf dies!). Somit ist $\bar{\beta}_2$ eine sehr gute Näherung für die gesuchte Größe $\bar{\beta}$, so daß wir das Verfahren an dieser Stelle abbrechen und $\alpha = 2\bar{\beta}_2 = 1,623 \approx 93^\circ$ als Lösung unseres Problems betrachten können.

Übrigens ist die beschriebene Vorgehensweise eng verwandt mit dem sog. Sekantenverfahren, das ebenfalls ein Iterationsverfahren zur näherungsweisen Nullstellenbestimmung darstellt.



Aus den Beziehungen (3), (4), (1), (6) kann man leicht die gesuchten Größen $r=24,65$, $b=16,97$, $R=100,65$ und $L=83,68$ ermitteln, Laura muß also 1,68 m Stoff kaufen. Aus Abb. 2 ist erkennbar, wie der Zuschnitt des Stoffs tatsächlich erfolgen kann, da der Winkel β nicht nur an der Spitze sondern auch am Stoffrand auftritt.

Prof. Dr. Bernd Luderer

$$v_B = \frac{8 \text{ Meilen}}{3 \text{ h}}, t_A = t_B + 1 \text{ folgt weiter}$$

$$\frac{7}{2} \cdot (t_B + 1) + \frac{8}{3} \cdot t_B = 59,$$

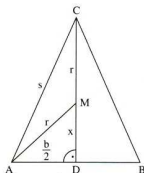
also $t_B = 9$ (h) und

$t_A = 10$ (h). Deshalb gilt

$$s_A = \frac{7}{2} \cdot 10 \text{ Meilen} = 35 \text{ Meilen}.$$

Bote A legt 35 Meilen bis zum Treffen mit B zurück.

9 Dem Bild sind folgende Beziehungen zu entnehmen:



$$\text{Es gilt } (x+r)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = s^2$$

$$\text{und } x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2.$$

Durch Subtraktion erhalten wir $2rx + r^2 = s^2 - r^2$,

$$x = \frac{s^2 - 2r^2}{2r},$$

$$x + r = \frac{s^2 - 2r^2}{2r} + \frac{2r^2}{2r} = \frac{s^2}{2r}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\frac{s^4}{4r^2} + \frac{b^2}{4} = s^2, s^4 + b^2 r^2 = 4r^2 s^2,$$

$$s^4 = r^2 \cdot (4s^2 - b^2),$$

$$r^2 = \frac{s^4}{4s^2 - b^2}; r = s \cdot \sqrt{\frac{1}{(2s-b)(2s+b)}},$$

$$d = 2s \cdot \sqrt{\frac{1}{(2s-b)(2s+b)}}.$$

Johannes Lehmann

Lösungen zur Problemecke aus Heft 3

Aufgabe 1

Lösung:

Durch Probieren findet man schnell für

$$n = 1: 1+1 < 1000$$

$$n = 2: (2+1) \cdot (2+2) = 3 \cdot 4 < 1000$$

$$n = 3: (3+1) \cdot (3+2) \cdot (3+3) = 4 \cdot 5 \cdot 6 < 1000$$

$$n = 4:$$

$$(4+1) \cdot (4+2) \cdot (4+3) \cdot (4+4) = 1680 > 1000$$

Damit ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \{1, 2, 3\}$$

Aufgabe 2

Lösung:

Wir vereinfachen algebraisch weiter:

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{30}{13} \quad x + \frac{z}{yz + 1} = \frac{30}{13}$$

$$\text{oder } x + \frac{z}{yz + 1} = 2 + \frac{4}{13}, \text{ also ist } x = 2.$$

Da z und $yz + 1$ teilerfremd sind (ihr ggT ist 1), muß weiter gelten: $z = 4$ und $yz + 1 = 13$.

Dies liefert $4y + 1 = 13$ oder $4y = 12$ und damit $y = 3$.

Aufgabe 3

Lösung:

Wir stellen die Ungleichung etwas um:

$$(T^2(x) - 4 \cdot T(x) + 4) + (S^2(x) - 6 \cdot S(x) + 9) \leq 0 \text{ (beachte: } 13 = 4 + 9)$$

$$\Leftrightarrow (T(x) - 2)^2 + (S(x) - 3)^2 \leq 0$$

Da die Summe zweier Quadratterme nicht negativ sein kann, tritt nur Gleichheit ein.

$$\text{Also gilt } T(x) - 2 = 0 \text{ und } S(x) - 3 = 0.$$

Somit erfüllen nur die konstanten Polynome $T(x) = 2$ und $S(x) = 3$ die geforderte Bedingung.

Aufgabe 4

Lösung:

a) AB||CD und CD liegt in der Dreiecksebene ODC.

MN ist Schnittgerade von Ebene ϵ mit der Dreiecksebene ODC.

Demnach gilt auch MN||AB, also ist ABMN ein Trapez.

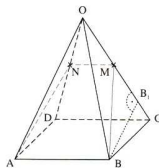
Weiter gilt:

OB $\equiv$ OA und $\angle BOM \equiv \angle AON$ da die Pyramide regulär ist.

Somit sind die Dreiecke OBM und OAN kongruent und damit auch die Seiten BM und AN.

Dies ergibt: Viereck ABMN ist ein gleichschenkeliges Trapez.

b) Wir kürzen die Flächeninhalte wie folgt ab:



$$A_1 = A_{\triangle OBM}, A_2 = A_{\triangle OMN}, A_3 = A_{\triangle OAB}, A_4 = A_{\triangle OBC}, A_5 = A_{\triangle ODC}.$$

Betrachte das Flächenverhältnis $\frac{A_1}{A_4}$:

$$\frac{A_1}{A_4} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{OM} \cdot \overline{BB_1}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{BB_1}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OC}},$$

wobei $\overline{BB_1}$ mit $B_1 \in OC$ gemeinsame Höhe der Dreiecke AOBM bzw. OBC ist.

$$\text{Also gilt: } A_1^2 = \left(\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}\right)^2 \cdot A_4^2 \quad (1)$$

Da MN||DC sind die Dreiecke ONM und ODC ähnlich. Nach einem Satz der Ähnlichkeitslehre verhalten sich ihre Flächeninhalte wie die Quadrate entsprechender Strecken.

$$\text{Somit gilt: } \frac{A_2}{A_5} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OC}^2},$$

da ähnliche Dreiecke in entsprechenden Seitenverhältnissen übereinstimmen.

$$\text{Also folgt: } A_2 = \left(\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}\right)^2 \cdot A_5 \quad (2)$$

Aus (1) ergibt sich nun mittels (2):

$$A_1^2 = \left(\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}\right)^2 \cdot A_4 \cdot A_4 =$$

$= A_2 \cdot A_5$, da $A_2 = A_1$ (aufgrund der Tatsache, daß eine regelmäßige Pyramide kongruente Seitenflächen besitzt).

Da auch $A_3 = A_1$ gilt, folgt schließlich $A_1 = A_2 \cdot A_3$ und daraus die Beziehung

$$A_1 = \sqrt{A_2 \cdot A_3}.$$