Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 23

Die Aufgabensammlung erscheint periodisch auf Vorschlag des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR und enthält Aufgaben mit Lösungen, die im Rahmen der Vorbereitung auf die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR die Arbeit von mathematischen Arbeitsgemeinschaften und die individuelle Beschäftigung interessierter Schüler mit der Mathematik unterstützen sollen. Die veröffentlichten Aufgaben sind in der Regel aus Vorschlägen zu Internationalen Mathematik-Olympiaden (IMO), aus den Klausuren in mathematischen Vorbereitungslagern und Aufgaben des mathematischen Korrespondenzzirkels ausgewählt. Sie sind für fortgeschrittene Schüler der Klassenstufe 11/12 der Erweiterten Oberschule vorgesehen.

Die Aufgabe 2 des vorliegenden Heftes wird als Preisaufgabe gestellt. Die Leser der Aufgabensammlung werden aufgefordert, Lösungen zu dieser Aufgabe bis zum 31.10. 76 an

Dr. W. Harnau, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,
25 Rostock, Universitätsplatz 1, Sektion Mathematik,

einzusenden. Dabei geben die Schüler bitte ihren Namen, Vornamen, die Klasse, den Namen und die Adresse ihrer Schule an. Die Lösung der Preisaufgabe wird im nächsten Heft veröffentlicht. Für die besten Lösungen erhalten deren Einsender Anerkennungsschreiben.

Die Aufgabensammlung wird über die Bezirkskabinette für außerunterrichtliche Tätigkeit in beschränkter Anzahl kostenlos vertrieben.

Für die Mitteilung geeigneter Aufgaben (mit oder ohne Lösungen) oder Lösungsvarianten zu hier veröffentlichten Aufgaben sind wir dankbar. Sie sind zu richten an: Dr. Harnau, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock.

Die hier veröffentlichten Aufgaben und Lösungen wurden von einem Autorenkollektiv zusammengestellt.

Autoren: H.-D. Gronau
Dr. W. Harnau
Dr. M. Krüppel
W. Moldenhauer
Gutachter: Prof. Dr. habil. G. Burosch.
Bestell-Nr. 30 06 44-1 . Lizenz Nr. 203/1000/76 (E)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
Gesamtherstellung: (52) VOB Nationales Druckhaus Berlin

Aufgaben

Aufgabe 1

Sei d irgendeine positive ganze von 2, 5 und 13 verschiedene Zahl. Man zeige, daß man in der Menge $\{2, 5, 13, d\}$ verschiedene Elemente a und b finden kann, für die $a \cdot b - 1$ kein vollständiges Quadrat ist.

IMO 1986, Nr. 1 (BRD)

Aufgabe 2

In der Ebene sind ein Dreieck $A_1A_2A_3$ und ein Punkt P_o gegeben. Wir setzen $A_s = A_{s-3}$ für $s \geq 4$. Für die Folge $P_o, P_1, P_2, \ldots$ entstehe P_{k+1} aus P_k bei der Drehung um 120° im Uhrzeigersinn mit dem Zentrum A_{k+1}, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Beweise: Gilt $P_{1986} = P_o$, so ist das Dreieck $A_1A_2A_3$ gleichseitig.

IMO 1986, Nr. 2 (VR China)

Aufgabe 3

Jedem Eckpunkt eines regulären Fünfecks sei eine ganze Zahl derart zugeordnet, daß die Summe aller 5 Zahlen positiv ist.

Wenn drei aufeinanderfolgenden Ecken die Zahlen x, y bzw. z zugeordnet sind und $y < o$ ist, so ist die folgende Operation gestattet. Die Zahlen x, y bzw. z werden durch $x+y$, $-y$ bzw. $z+y$ ersetzt. Solche Operation wird sukzessive durchgeführt, solange mindestens eine der 5 Zahlen negativ ist. Man entscheide, ob die Folge dieser Operationen notwendig nach endlich vielen Schritten abbrechen muß.

IMO 1986, Nr. 3 (DDR)

Aufgabe 4

Es seien A, B zwei benachbarte Ecken eines regelmäßigen n-Ecks ($n \geq 5$) mit dem Mittelpunkt O. Es wird ein zu OAB kongruentes Dreieck XYZ zunächst mit dem Dreieck OAB zur Deckung gebracht und dann so bewegt, daß sich der Punkt X stets innerhalb des n-Ecks und die Punkte Y und Z stets auf den Seiten desselben befinden.

Man bestimme alle möglichen Lagen, die X einnehmen kann, wenn Y und Z gemeinsam den Rand des n-Ecks durchlaufen.

IMO 1986, Nr. 4 (Island)

Aufgabe 5

Man bestimme alle Funktionen f, die auf der Menge $\mathbb{R}^+_0$ der nicht negativen reellen Zahlen definiert sind, nur nichtnegative reelle Werte annehmen und die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

a) $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+_0$,

b) $f(2) > 0$,

c) $f(x) \neq 0$ für $0 \leqq x < 2$.

IMO 1986, Nr. 5 (Großbritannien)

Aufgabe 6

In der Ebene sei eine endliche Menge von Punkten gegeben, die bezüglich eines festen Koordinatensystems lauter ganzzahlige Koordinaten haben.

Man entscheide, ob es stets möglich ist, einige dieser Punkte rot und die übrigen dieser Punkte weiß zu färben, so daß sich für jede Gerade, die zu einer der Koordinatenachsen parallel verläuft, die Anzahl der auf ihr gelegenen roten Punkte von der Anzahl der auf ihr liegenden weißen Punkte um höchstens Eins unterscheidet.

IMO 1986, Nr. 6 (DDR)

Aufgabe 7

Es sei $k \geqq 2$ und $n_1 n_2, \ldots, n_k \geqq 1$ natürliche Zahlen mit der Eigenschaft

$$n_2 \mid (2^{n_1} - 1),\ n_3 \mid (2^{n_2} - 1), \ldots,\ n_k \mid (2^{n_{k-1}} - 1),\ n_1 \mid (2^{n_k} - 1).$$

Man zeige, daß $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$ ist.

IMO 1985 (SR Rumänien); IMO-Vorbereitungsklausur 1986

Aufgabe 8

Sei $d \geqq 1$ eine ganze Zahl, die nicht das Quadrat einer ganzen Zahl ist. Man beweise, daß für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ gilt:

$(n \cdot \sqrt{d} + 1) \cdot |\sin(n\pi\sqrt{d})| \geqq 1.$

IMO 1985 (Frankreich); IMO-Vorbereitungsklausur 1986

Aufgabe 9

Seien K und K' zwei Quadrate von gleicher Seitenlänge in der Ebene. Ist es möglich, K derart in endlich viele Dreiecke T_1, $T_2, \ldots, T_p$ zu zerlegen, die paarweise keinen inneren Punkt gemeinsam haben und für die es Translationen $t_1, t_2, \ldots, t_p$ gibt, so daß

$$K' = \bigcup_{i=1}^{p} t_i\,(T_i)$$

ist?

IMO 1985 (Frankreich); IMO-Vorbereitungsklausur 1986

Aufgabe 10

Sei $E = \{1,2,\ldots, 16\}$ und M die Menge aller 4 x 4 Schachbretter mit lauter weißen Feldern, deren 16 Felder mit jeweils einem Element aus E belegt sind (verschiedene Felder haben verschiedene Elemente aus E). Für ein zufällig aus M gewähltes Element

$$A = (a_{ij}) \quad \begin{array}{l} i = 1,2,3,4 \\ j = 1,2,3,4 \end{array}$$

berechne man die Wahrscheinlichkeit p (k) des Ereignisses

$$\max_i \ \min_j \ a_{ij} = k$$

für $k \in E$. Ferner bestimme man $l \in E$ so, daß

$$p(l) = \max\{p(k) \mid k \in E\}.$$

IMO 1985 (Türkei); IMO-Vorbereitungsklausur 1986

Aufgabe 11

Man bestimme 8 positive ganze Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_8$ mit folgender Eigenschaft:

Für jede ganze Zahl k, $-1985 \leq k \leq 1985$,

gibt es 8 Werte $d_1, d_2, \ldots, d_8 \in \{-1,0,+1\}$ mit

$$k = \sum_{i=1}^{8} d_i \cdot n_i.$$

IMO 1985 (Frankreich); IMO-Vorbereitungsklausur 1986

Aufgabe 12

Sei l die Länge einer kürzesten Diagonalen unter allen Diagonalen in dem einen Dreieck T einbeschriebenen Rechtecken. (Einbeschrieben bedeutet, daß alle 4 Rechtecke auf dem Rand des Dreiecks liegen.)

Man bestimme den maximalen Wert von $\frac{l^2}{\text{Fläche von } T}$, genommen über alle Dreiecke.

IMO 1985 (USA); IMO-Vorbereitungsklausur 1986

Aufgabe 13

Es sei T ein reguläres Tetraeder. Ein Kurvenstück C und den Endpunkten P und P' heißt kürzester P,P'-Weg auf der Oberfläche von T, wenn (einschließlich P und P') sämtliche Punkte von C auf der Oberfläche von T liegen und C unter allen Kurven und dieser Eigenschaft eine kleinste Länge hat.

a) Man beweise, daß es zu jedem Punkt P auf der Oberfläche von T genau einen Punkt P' auf der Oberfläche von T gibt, für den es mindestens drei verschiedene kürzeste P,P'-Wege auf der Oberfläche von T gibt.

b) Für welche Lagen von P erreicht die Länge d_p des kürzesten P,P'-Weges aus a) ein Minimum?

IMO 1985 (SR Vietnam); Vorbereitungsklausur 1986

Aufgabe 14

Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele natürliche Zahlen x gibt, für die der Term $2x^2 + 2x$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

(nach Alexander Kley, Berlin)

Aufgabe 15

An einer Jurysitzung einer IMO nahmen 60 Kollegen aus 30 Ländern teil, jeweils ein Leiter und ein Stellvertreter. Während der Sitzung begrüßen sich einige der Teilnehmer. Kein Delegationsleiter begrüßt seinen Stellvertreter und keine zwei Kollegen begrüßen sich mehrfach. Nach der Sitzung fragt der Leiter der mongolischen Mannschaft jeden Kollegen, wieviel letzterer begrüßt hat. Es erweist sich, daß jeder eine andere Zahl nennt. Wieviel Kollegen hat der mongolische Stellvertreter begrüßt?

(IMO 1985, Vorschlag UdSSR; Korrespondenzzirkel III - 85/86)

Lösungen

Aufgabe 1

Es genügt zu zeigen, daß mindestens eine der Zahlen $2d - 1$, $5d - 1$, $13d - 1$ kein vollständiges Quadrat ist. Angenommen, das ist nicht richtig. Dann ist für gewisse positive ganze Zahlen x, y, z : $2d = x^2 + 1$, $5d = y^2 + 1$, $13d = z^2 + 1$.
Daher ist x ungerade und $2d = x^2 + 1 \equiv 2 \bmod 8$, d. h., d ist ungerade. Folglich sind y und z gerade, $y = 2u$, $z = 2v$. Wegen $z^2 - y^2 = 8d$ gilt $(v-u)(v+u) = 2d$. Mithin sind u und v von gleicher Parität, und da d ungerade ist, erhalten wir einen Widerspruch.
Die DDR-Mannschaft erreichte bei dieser Aufgabe 66,7 % der Punkte (Ges.-Ø: 54,4 %)

Aufgabe 2

Für jedes endliche System von orientierten Winkeln, deren Summe ein Vielfaches von 360° ist, liefert die Hintereinanderausführung von Drehungen um diese Winkel (mit beliebigem Zentrum) eine Translation. Bezeichne r_i die Drehung um 120° (im Uhrzeigersinn) um A_i $(i = 1,2,3)$. Dann ist $f = r_3 \cdot r_2 \cdot r_1$ die Translation um einen gewissen Vektor $\underline{v}$. Da f^{662}, die 662fache Hintereinanderausführung von f, den Punkt P_o in $P_{1986} = P_o$ überführt, ist $\underline{v} = \underline{o}$ und folglich f die identische Abbildung. Daher gilt $A_1 = f(A_1) = r_3(B)$, wo $B = r_2 r_1(A_1) = r_2(A_1)$ ist. Die gleichschenkligen Dreiecke A_1A_2B und BA_3A_1 haben gleiche Winkel (bei A_2 und A_3 von jeweils 120°) und eine gemeinsame Seite A_1B, sind also kongruent. Folglich ist $A_1A_2BA_3$ ein Rhombus mit den Winkeln 60° und 120° und daher $A_1A_2A_3$ ein gleichseitiges Dreieck.
Die DDR-Mannschaft erreichte 100 % der Punkte (Ges.-Ø: 58,8 %)

Aufgabe 3

Seien $u_1, u_2, \ldots, u_5$, die in einem gewissen Moment den Eckpunkten des 5-Ecks zugeordneten Zahlen und möge mindestens eine von ihnen, etwa u_j, negativ sein.
Sei $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_5)$ der Vektor, der aus $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_5)$ durch die im Text genannte Operation, angewandt auf $x = u_{j-1}$, $y = u_j$, $z = u_{j+1}$ (bei zyklischer Numerierung : $u_o = u_5$, $u_6 = u_1$) hervorgeht. Man betrachte die Funktion $F(\underline{u}) = \sum (u_{i+1} - u_{i-1})^2$. Es ist

leicht zu sehen, daß $F(\underline{v}) - F(\underline{u}) = 2\,u_j \cdot S$ ist, wo
$S = \sum u_i = \sum v_i > o$ ist.
Folglich gilt $F(\underline{v}) \sim F(\underline{u}) < o$.
Daher bilden die Werte von F eine echt fallende monotone Folge von nichtnegativen Zahlen. Jede solche Folge ist notwendig endlich.

Eine andere Lösung, die mit einem Spezialpreis ausgezeichnet wurde, verläuft folgendermaßen. Mit den obigen Bezeichnungen setze man

$$G(\underline{u}) = \sum|u_i| + \sum|u_i + u_{i+1}| + \sum|u_i + u_{i+1} + u_{i+2}|$$
$$+ \sum|u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + u_{i+3}|$$

Durch Vergleich der 20 Summanden von $G(\underline{u})$ mit den 20 Summanden von $G(\underline{v})$ erkennt man, daß 19 von ihnen paarweise gleich sind und der übrige Summand in $G(\underline{u})$ größer als in $G(\underline{v})$ ist. Daraus schließt man wie bei der vorigen Lösung.

Nach der Olympiade fand Dr. J. M. Cambell aus Canberra noch folgende überraschende Lösung, die das gegebene Problem auf eine Sortieraufgabe zurückführt. Er betrachtet folgende nach links und rechts unendliche Folge

$\ldots, -u_2 -u_3 - u_4 - u_5, - u_3 - u_4 - u_5, - u_4 - u_5, - u_5, 0, u_1,$
$u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, u_1 + u_2 + u_3 + u_4, u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5,$
$2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5, \ldots$.

Sie ist dadurch charakterisiert, daß sie beidseitig unbeschränkt fortgesetzt wird und man ausgehend von irgendeinem Folgeglied sukzessive zyklisch nach rechts hin die Zahlen u_1, u_2, u_3, u_4 bzw. u_5 addiert. Sei t_j die ursprüngliche Operation der Addition von u_j zu den beiden Nachbarwerten auf dem 5-Eck und der Umkehrung des Vorzeichens von u_j. Man mache sich folgende drei Fakten klar:

1) t_j vertauscht in der obigen Folge zwei benachbarte Glieder v_i und v_{i+1} ($i \in \mathbb{R}$)
2) Vertauscht t_j die Glieder v_i und v_{i+1}, so werden bei t_j auch alle benachbarten Folgenglieder $v_{i \pm k \cdot 5}$, $v_{i+1 \pm k \cdot 5}$, k ganzzahlig, miteinander vertauscht.
3) t_j ist anwendbar bei der ursprünglichen Aufgabe (d. h., $a_j < o$) genau wenn $v_i > v_{i+1}$ ist.

So kann man die ursprüngliche Aufgabe zu folgender umformulieren: Läßt sich die obige beidseitig unendliche Folge durch eine endliche Folge von zulässigen Operationen t_j vollständig sortieren, d. h. ordnen?

Sei v_i irgendein Glied der obigen Folge und sei N_i die Anzahl der Folgeglieder rechts von v_i, die kleiner als v_i sind. N_i ist tatsächlich eine natürliche Zahl, da die Summe $s = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$ positiv ist.

Nun erkennt man, daß die Anzahl N der Operation t_j, die zum vollständigen Ordnen der obigen Folge ausreichen, nicht nur endlich, sondern gleich $L = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ ist, wo v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 irgendwelche 5 aufeinanderfolgende Glieder der obigen Summe sind. Denn jede Operation erniedrigt L um Eins und L = 0 ist gleichwertig mit der vollständigen Ordnung. Damit ist die ursprüngliche Aufgabe gelöst.

Campbell macht zwei weitere Bemerkungen:

a) Man kann L explizit bestimmen:

$$L = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} N_{ij},$$

$$N_{ij} := \begin{cases} \left\lceil \dfrac{|u_i + \dots + u_j|}{s} \right\rceil & \text{für } u_i + \dots + u_j \leq 0 \\ \left\lceil \dfrac{|a_i + \dots + a_j|}{s} \right\rceil - 1 & \text{für } u_i + \dots + u_j > 0 \end{cases}$$

b) Die endgültige Konfiguration von Werten auf den Ecken des 5-Ecks ist unabhängig von der speziellen Folge der verwendeten Operationen t_j und kann direkt von der Ausgangskonfiguration u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 ermittelt werden. Dazu berechne man die Reste von

$$u_1,\ u_1+u_2,\ u_1+u_2+u_3,\ u_1+u_2+u_3+u_4 \quad \text{modulo } s.$$

Das liefert vier Zahlen im Intervall $[0,s)$.

Geordnet mögen das

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4$$

sein.

Die endgültige Konfiguration ist dann

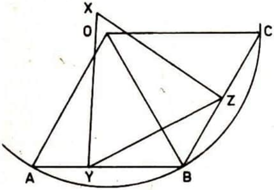
$$r_1,\ r_2 - r_1,\ r_3 - r_2,\ r_4 - r_3,\ s - r_4.$$

Die DDR-Mannschaft erreichte 28,6 % der Punkte (Gesamt-Ø: 12,0 %)

Aufgabe 4

1. Lösung (nach der Musterlösung)

Es seien A,B,C drei benachbarte Eckpunkte des regelmäßigen n-Ecks. Y liege auf AB, Z liege auf BC (siehe Abbildung).



Offenbar ist $\sphericalangle AOB + \sphericalangle OAB + \sphericalangle OBA = 180^\circ$

Wegen $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = \sphericalangle OBC$ ist folglich $\sphericalangle AOB + \sphericalangle ABC = 180^\circ$ und schließlich $\sphericalangle YXZ + \sphericalangle YBZ = 180^\circ$.

Also ist $\square$ XYBZ ein Sehnenviereck.

Wegen $\overline{XY} = \overline{XZ}$ sind $\sphericalangle$ YBX und $\sphericalangle$ ZBX Winkel über gleichen Sehnen.

Also ist $\sphericalangle YBX = \sphericalangle ZBX$, d. h. $X \in OB$.

Es sei $\varphi = \sphericalangle XYB$. Wegen $\sphericalangle OAB = \sphericalangle XYZ = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ ist

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} \tag{1}$$

Dann ist im $\triangle$ XYB nach dem Sinussatz

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XY}} = \frac{\sin \varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)},$$

also $$\overline{BX} = \overline{BO} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)}.$$

Wegen (1) ist $\sin \varphi \geqq \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right)$ und außerdem ist $\sin \varphi \leqq 1$. Also folgt

$$\overline{BO} \leqq \overline{BX} \leqq \overline{BO}\,\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)} = \overline{BO}\,\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}};\quad \overline{OX} \leqq \overline{BO}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} - 1\right)$$

Wegen $n \geqq 5$ ist $\cos\frac{\pi}{n} \geqq \cos\frac{\pi}{5} > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ und $\overline{BX} < 2 \cdot \overline{BO}$, d. h., die Punkte X liegen tatsächlich innerhalb des n-Ecks.

Die möglichen Lagen des Punktes X beschreiben einen Stern, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des n-Ecks zusammenfällt und dessen einzelne Strecken der Länge $\overline{BO}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} - 1\right)$ in Richtung der Eckpunkte verlaufen.

2. Lösung (nach I. Warnke)

Zunächst wird ähnlich wie in der 1. Lösung bewiesen, daß $X \in OB$ und daß $\square$ XYBZ ein Sehnenviereck ist.

Nun gilt nach dem Satz des Ptolemäus

$$\overline{BX} \cdot \overline{YZ} = \overline{XY} \cdot \overline{BZ} + \overline{XZ} \cdot \overline{BY}.$$

Führen wir abkürzend ein: $a = \overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{XY} = \overline{XZ}$ und
$b = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{YZ}$, so folgt

$$\overline{BX} = \frac{a}{b}(\overline{BZ} + \overline{BY}) \qquad (2)$$

Einerseits ist nach der Dreiecksungleichung $\overline{BZ} + \overline{BY} \geqq \overline{YZ} = b$, also

$$\overline{BX} \geqq a = \overline{BO}.$$

Andererseits ist (nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel)

$$\left[\frac{\overline{BZ} + \overline{BY}}{2}\right]^2 \geqq \overline{BZ} \cdot \overline{BY}.$$

Nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle YBZ$ gilt:

$$\overline{BZ}^2 + \overline{BY}^2 - 2 \cdot \overline{BZ} \cdot \overline{BY} \cdot \cos \sphericalangle YBZ = b^2.$$

Damit folgt weiter

$$b^2 = (\overline{BZ} + \overline{BY})^2 - 2\,\overline{BZ} \cdot \overline{BY}\left[1 + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)\right],$$

$$b^2 \geqq (\overline{BZ} + \overline{BY})^2 - 2 \cdot \left(\frac{\overline{BZ} + \overline{BY}}{2}\right)^2 \left[1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right],$$

$$b^2 \geqq (\overline{BZ} + \overline{BY})^2 \left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{n}\right\},$$

$$b^2 \geqq (\overline{BZ} + \overline{BY})^2 \cos^2\frac{\pi}{n},$$

$b \geqq (\overline{BZ} + \overline{BY}) \cdot \cos\frac{\pi}{n}$; letzte Ungleichung da alle Größen positiv sind.

Somit folgt aus (2)

$$\overline{BO} \leqq \overline{BX} \leqq \frac{\overline{BO}}{\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Die abschließenden Schlußfolgerungen ergeben sich nun wie in der 1. Lösung.

Bemerkung: Es wurden auch Lösungen angegeben, die vollständig auf der Koordinatengeometrie beruhen. Diese Lösungen waren sehr aufwendig und unübersichtlich.

Die DDR-Mannschaft erreichte 73,8 % der Punkte (Gesamt-Ø: 46,5 %)

Aufgabe 5

(Lösung nach der Musterlösung)

Angenommen, $f(x)$ ist eine Funktion, die sämtliche Bedingungen erfüllt.

Dann ist für alle $w > 2$ nach (a), wenn $x = w - 2$ und $y = 2$ gesetzt wird,

$$f((w-2) \cdot f(2)) \cdot f(2) = f(w).$$

Nach (b) ergibt sich $f(w) = 0$.

Nach (b) und (c) haben wir somit

$$f(x) = o \Longleftrightarrow x \geqq 2.$$

Es seien nun $o \leqq y < 2$ und $x \geqq o$.

Die linke Seite von (a) verschwindet genau dann, wenn

$$x \cdot f(y) \geqq 2.$$

Die rechte Seite von (a) verschwindet genau dann, wenn

$$x + y \geqq 2.$$

Also erhalten wir für $o \leqq y < 2$ und $x \geqq o$ die Äquivalenz:

$$x \cdot f(y) \geqq 2 \Longleftrightarrow x + y \geqq 2$$

und

$$x \geqq \frac{2}{f(y)} \Longleftrightarrow x \geqq 2 - y. \qquad (3)$$

Daraus folgt die Gleichung $\frac{2}{f(y)} = 2 - y$ (Man wähle ein festes y und betrachte in (3) alle möglichen x!).

Die einzige in Betracht kommende Funktion ist also

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2 - x} & \text{für } o \leqq x < 2, \\ o & \text{für } \quad x \geqq 2. \end{cases}$$

Diese Funktion erfüllt offenbar die Bedingungen bezüglich des Definitionsbereiches und des Wertevorrats sowie (b) und (c).

Wir weisen jetzt nach, daß auch die Bedingung (a) erfüllt ist.

Es seien $x, y \geqq o$.

1) $x + y < 2$. Dann ist $o \leqq y < 2$ und $x \cdot f(y) = \frac{2x}{2-y} < \frac{2(2-y)}{2-y} = 2$.

   Also ist $f(x\, f(y)) = \frac{2}{2-xf(y)} = \frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}}$ und

$$f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = \frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}} \cdot \frac{2}{2-y} = \frac{2}{2-x-y} = f(x+y).$$

2) $x + y \geqq 2$. Dann ist die rechte Seite von (a) Null.

   Ist $y \geqq 2$, so verschwindet offenbar auch die linke Seite.

   Ist $y < 2$, so ist $f(y) = \frac{2}{2-y}$ und $x \cdot f(y) = \frac{2x}{2-y} \geqq \frac{2(2-y)}{2-y} = 2$,

   d.h. $f(x \cdot f(y)) = o$ und die linke Seite von (a) verschwindet ebenfalls.

Die DDR-Mannschaft erreichte als einzige Mannschaft (!) 100 % der möglichen Punkte (Gesamt-Ø: 60,0 %)

Aufgabe 6

1. Lösung (von Dr. K. Engel)

Es ist möglich, die Punkte entsprechend zu färben.

Man betrachte eine beliebige, zu einer der Koordinatenachsen parallel verlaufende Gerade L, welche die gegebene Menge A

schneidet. Es seien $P_1, P_2, \ldots, P_r$ die im Sinne der freien Koordinate in aufsteigender Ordnung aufgelisteten Punkte von $A \cap L$. Wir verbinden P_1 mit P_2, P_3 mit P_4, ... usw. durch Strecken. Dasselbe machen wir für jede solche Gerade L. Auf diese Weise erhalten wir eine Menge von Strecken, so daß jeder Punkt aus A auf höchstens zwei dieser Strecken liegt.
Also zerfällt die Vereinigung dieser Strecken in Polygonzüge, von denen je zwei verschiedene keine gemeinsamen Punkte aus A haben, und sowohl offen als auch geschlossen sein können. Die abgeschlossenen enthalten eine gerade Anzahl von Strecken, da zwei aufeinanderfolgende Strecken jeweils in rechtem Winkel zueinander stehen.
Wir färben die Eckpunkte jedes Polygonzuges abwechselnd rot, weiß, rot, weiß, usw.; das ist möglich, da alle Zyklen gerade Länge haben.
Falls noch Punkte in A übrigbleiben, die zu keinem dieser Polygonzüge gehören, so färben wir diese auf beliebige Weise.
Die so erhaltene Färbung erfüllt die Bedingung, was sich aus der Konstruktion der Streckenzüge leicht ergibt.

2. Lösung (von einem polnischen Koordinator)
Wir geben einen Induktionsbeweis über die Mächtigkeit von A.
Für $|A| = 1$ ist alles klar. Wir betrachten eine Menge A und nehmen an, daß die Behauptung für jede Menge einer Mächtigkeit kleiner als $|A|$ gilt.
Wenn es eine vertikale oder horizontale Gerade gibt, die genau einen Punkt aus A enthält, dann kann die aus A durch Entfernen dieses Punktes entstehende Menge aufgrund der Induktionsvoraussetzung so gefärbt werden, daß die Bedingung unseres Problems erfüllt ist. Diesen speziellen Punkt färben wir entsprechend der Färbung der Punkte auf derjenigen vertikalen oder horizontalen Geraden, auf der er nicht einzeln liegt.
Wir nehmen nun an, daß auf jeder vertikalen oder horizontalen Geraden, die A schneidet, mindestens zwei Punkte aus A liegen.
Wir definieren durch Rekursion eine Folge von Punkten.
P_0 ist ein beliebiger Punkt aus A. Die horizontale Gerade, auf der P_0 liegt, enthält weitere Punkte aus A; wir wählen einen davon aus und bezeichnen ihn mit P_1. Die vertikale Gerade durch P_1 enthält weitere Punkte aus A; wir wählen einen anderen davon

aus und bezeichnen ihn mit P_2. In dieser Weise fortfahrend erhalten wir eine Folge $\{P_i\}$, so daß die P_{i-1} und P_i verbindende Gerade horizontal verläuft, wenn i gerade ist, und vertikal verläuft, wenn i ungerade ist.
Wir beenden die Konstruktion, sobald wir auf einen Punkt P_n treffen, der mit einem der bisher definierten Punkte P_i $(i < n-1)$ durch eine vertikale oder horizontale Gerade verbunden werden kann.
Wenn P_n, P_{m-1} und P_m auf einer Geraden liegen, so muß $m - 1 \equiv n \mod 2$ gelten.
Wenn P_o durch eine vertikale Gerade mit P_n verbunden ist, so muß n ungerade sein. In diesem Fall definieren wir m = o.
Wenn wir nun die Induktionsvoraussetzung für die Menge $A - \{P_m, P_{m+1}, \ldots, P_n\}$ anwenden und die Punkte $P_m, P_{m+1}, \ldots, P_n$ alternierend (sagen wir rot für gerade i und weiß für ungerade i) färben, so erhalten wir eine Färbung von A mit den geforderten Eigenschaften.
(In der Tat, jede Gerade L enthält entweder keinen dieser Punkte oder zwei aufeinanderfolgende.)

3. Lösung (nach einem bulgarischen Schüler)
Wir geben wieder einen induktiven Beweis nach $|A|$ und beschränken uns hier auf den Induktionsschritt.
Es tritt einer der folgenden Fälle ein:
a) Enthält A vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, die (in dieser Reihenfolge) die Eckpunkte eines Rechtecks sind, so färbe man $A - \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ nach Induktionsvoraussetzung und P_1 und P_3 rot sowie P_2 und P_4 weiß.
b) Enthält A drei Punkte P_1, P_2, P_3, die mit einem Punkt $P_4 \notin A$ (in dieser Reihenfolge) ein Rechteck bilden, so färbe man $A' = A - \{P_1, P_2, P_3\} \cup \{P_4\}$, was wegen $|A'| = |A| - 2 < |A|$ nach Induktionsvoraussetzung möglich ist. Ist nun P_4 (o.b.d.A.) rot gefärbt, so färbe man P_1 und P_3 rot sowie P_2 weiß.
c) Es gibt keine drei Punkte, die Eckpunkte eines Rechteckes sind. Denn alle Geraden, die zu einer Koordinatenachse parallel sind, und mindestens 2 Punkte von A enthalten sind "unabhängig" voneinander, d. h., man kann die Punkte, die auf solchen Geraden liegen, etwa alternierend färben. Eventuell sonst noch auftretende Punkte werden beliebig gefärbt.
Es ist in allen Fällen leicht zu überprüfen, daß die angegebene Färbung die geforderte Eigenschaft hat.

4. Lösung (nach J. Jahnel)

Auch hier geben wir nur den Induktionsschritt an.

Gibt es eine horizontale oder vertikale Gerade L, die eine ungerade Anzahl von Punkten von A enthält, so wähle man einen, etwa P, aus. $A - \{P\}$ läßt nach Induktionsvoraussetzung mit der gewünschten Eigenschaft färben.

Wegen $|L \cap (A - \{P\})|$ gerade, können wir P bezüglich L beliebig färben, d. h., wir können für P die, bezüglich der zweiten achsenparallelen Geraden durch P günstige Farbe wählen.

Gibt es eine solche Gerade L nicht, so enthält jede horizontale und jede vertikale Gerade eine gerade Anzahl von Punkten aus A.

Wir wählen einen beliebigen Punkt $P \in A$ aus und färben $A' = A - \{P\}$ mit geforderter Eigenschaft, was nach Induktionsvoraussetzung möglich ist. Sei h die horizontale und v die vertikale Gerade durch P und sei $\sigma(X)$ = (Anzahl der roten Punkte von X) - (Anzahl der weißen Punkte von X).

Offenbar gilt für jede horizontale Gerade $h' \neq h$: $\sigma(h' \cap A) = 0$ und für jede vertikale Gerade $v' \neq v$: $\sigma(v' \cap A) = 0$.

Also ist $\sigma(A') = \sigma(A - \{P\}) = \sigma(h \cap A')$, was man durch zeilenweise Betrachtung sofort sieht. Spaltenweise folgt analog

$$\sigma(A') = \sigma(A - \{P\}) = \sigma(v \cap A')$$

Also ist $\quad \sigma(h \cap A') = \sigma(v \cap A')$

wegen $|h \cap A'| = |v \cap A'|$ ungerade ist $|h \cap A'| = |v \cap A'| = 1$ oder -1.

Wir färben

$$P \begin{cases} \text{rot, falls } |h \cap A'| = v \quad A' = -1, \\ \text{weiß, falls } |h \cap A'| = v \quad A' = 1. \end{cases}$$

Auch hier sieht man sofort, daß diese Färbung die geforderten Eigenschaften hat.

<u>Bemerkung:</u> Für diese Aufgabe gab es mehrere elegante Schülerlösungen; siehe 3. und 4. Lösung. Da diese Zahl mit 9 (von 210 Schülern) relativ hoch war, konnte sich die Jury nicht entschließen, diese Lösungen mit einem Spezialpreis zu ehren.

Die DDR-Mannschaft erhielt 40,5 % der möglichen Punkte (Gesamt-Ø: 27,6 %).

Aufgabe 7

Angenommen, eine der Zahlen, etwa n_2, ist größer als 1.

Dann ist $n_k > 1, \ldots, n_2 > 1$.

Sei $m(n)$ der kleinste Primfaktor von n. Wir beweisen nun folgende Aussage:

Ist $n > 1$ und ist p eine Primzahl mit $p \mid 2^n - 1$, so ist $m(n) < p$.
Nach dem kleinen Satz des Fermat gilt $2^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.
Zum g.g.T. d von n und $p-1$, $d = (n,p-1)$, gibt es bekanntlich ganze Zahlen (z. B. nach dem Euklidischen Algorithmus) x und y mit
$d = x \cdot n + y\,(p-1)$.
Für $n \mid p-1$ bzw. $p-1 \mid n$ ist $y = 0$ bzw. $x = 0$.
Ansonsten ist genau eine der Zahlen x und y negativ und die andere ist positiv. Wir betrachten hier o.B.d.A. den Fall x ist negativ und y ist positiv.
Sei $2^d \equiv z \bmod p$, d. h. $2^{xn+y(p-1)} \equiv z \bmod p$.
Wegen $(-x) > 0$ ist $2^n \equiv 1 \bmod p$ und $2^{(-x)n} \equiv 1 \bmod p$,

also $\qquad 2^{y(p-1)} \equiv 2^{xn+y(p-1)} \cdot 2^{n(-x)} \equiv z \bmod p.$

Andererseits ist $\qquad 2^{y(p-1)} \equiv 1^y \equiv 1 \bmod p$, also

$$2^{y(p-1)} \cdot 1 \equiv 2^{y(p-1)} \cdot z \bmod p. \tag{4}$$

Da $p \mid 2^n-1$ ist $(2,p) = 1$, d. h., aus (4) folgt $2^d \equiv z \equiv 1 \bmod p$.
Mithin ist $d > 1$ und folglich $m(n) \leqq d$. Da d ein Faktor von $p-1$ ist, erhalten wir $m(n) \leqq p-1$ oder $m(n) < p$.
Damit ist die Aussage bewiesen.

Aus $n_2 \mid (2^{n_1-1})$ folgt $m(n_2) \mid 2^{n_1-1}$ und nach unserer Aussage $m(n_1) < m(n_2)$. Analog erhalten wir $m(n_2) < m(n_3)$, $m(n_3) < m(n_4)$, $\ldots$, $m(n_{k-1}) < m(n_k)$ und $m(n_k) < m(n_1)$.
Also ist $m(n_1) < m(n_1)$, d. h., unsere Annahme, mindestens ein $n_i > 1$, kann nicht wahr sein. Folglich ist

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1.$$

<u>Aufgabe 8</u>

Da d nicht Quadratzahl ist, gibt es eine ganze Zahl k mit

$$k < n\sqrt{d} < k+1.$$

Durch Quadrieren erhalten wir

$$k^2 + 1 \leqq n^2 d \leqq k^2 + 2k$$

unter Beachtung, daß $n^2 d$ und k^2 ganze Zahlen sind.
Wir werden die Ungleichung $\sin \frac{\pi x}{2} > x$ für $x \in (0,1)$ benutzen.
Sie folgt aus der Konkavität der Funktion $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2} - x$ für $x \in [0,1]$ z. B. nach der JENSENschen Ungleichung

$$\left(f'' = -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2} < 0\right)$$

$$\sin\frac{\pi x}{2} - x = \sin\frac{\pi}{2}\left[x\cdot 1 + (1-x)\cdot 0\right] - \left[x\cdot 1 + (1-x)\cdot 0\right]$$

$$\geqq x\left[\sin\frac{\pi}{2} - 1\right] + (1-x)\left[\sin\frac{\pi}{2}\cdot 0 - 0\right] = 0.$$

Für $k < n\sqrt{d} \leqq k + \frac{1}{2}$ ist

$$\left|\sin(\pi n\sqrt{d})\right| \geqq \left|\sin(\pi\sqrt{1+k^2})\right| = \sin(\pi(\sqrt{1+k^2} - k)) = \sin\frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}+k}$$

$$\geqq \sin\frac{\pi}{2(k+1)} \geqq \frac{1}{1+k} > \frac{1}{1+n\sqrt{d}}$$

Für $k + \frac{1}{2} < n\cdot\sqrt{d} < k + 1$ ist

$$\left|\sin(\pi n\sqrt{d})\right| \geqq \left|\sin(\pi\sqrt{k^2+2k})\right| = \left|\sin(\pi(k+1-\sqrt{k^2+2k})\right|$$

$$= \sin\frac{\pi}{k+1+\sqrt{k^2+2k}} > \sin\frac{\pi}{2(k+1)} > \frac{1}{k+1} > \frac{1}{1+n\sqrt{d}}$$

<u>Aufgabe 9</u> (nach J. Jahnel)

Sei K das Quadrat ABCD mit dem Mittelpunkt M und sei K' das Quadrat A'B'C'D' mit dem Mittelpunkt M'.

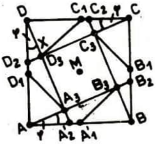
Wir werden im folgenden zeigen, daß es eine gewünschte Zerlegung von K stets gibt.

Sind die Quadrate seitenparallel, so ist nichts zu beweisen. Wir nehmen an, daß sich die Geraden AM und A'M' schneiden. O.B.d.A. können wir weiter annehmen, daß der Winkel 2φ, den die gerichtete Gerade MA mit der gerichteten Geraden M'A' einschließt, kleiner als 90° ist (ansonsten bezeichne man die Eckpunkte um).

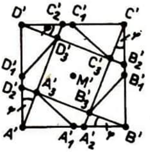
Wir können also K in K' überführen, indem wir zunächst eine Translation ausführen, die M in M' überführt, und anschließend eine Drehung um 2φ realisieren.

O.B.d.A. nehmen wir im folgenden an, daß φ mathematisch positiv orientiert ist. Man beachte stets $\varphi < 45^\circ$.

Wir zerlegen K und K' folgendermaßen:



K



K'

Es seien $A_1, B_1, C_1, D_1, A_1', B_1', C_1', D_1'$ die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'A'}$ (in dieser Reihenfolge).
Es seien $A_2, B_2, C_2, D_2, A_2', B_2', C_2', D_2'$ diejenigen Punkte auf $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'A'}$ mit $\varphi = \sphericalangle ADA_2 = \sphericalangle BAB_2 = \sphericalangle CBC_2 = \sphericalangle DCD_2$ und $\varphi = \sphericalangle A'B'D_2' = \sphericalangle B'C'A_2' = \sphericalangle C'D'B_2 = \sphericalangle D'A'C_2'$.

Schließlich seien $A_3, B_3, C_3, D_3, A_3', B_3', C_3', D_3'$ (in dieser Reihenfolge) die Schnittpunkte von AB_2 und DA_2, BC_2 und AB_2, CD_2 und BC_2, DA_2 und CD_2 sowie $A'C'_2$ und $B'D'_2$, $B'D'_2$ und $C'A'_2$, $C'A'_2$ und $D'B'_2$, $D'B'_2$ und $A'C'_2$.
Offenbar ist $AB_3 \parallel B'A'_3$, $BC_3 \parallel C'B'_3$, $CD_3 \parallel D'C'_3$, $DA_3 \parallel A'D'_3$.
Also kann man das Quadrat $A_3B_3C_3D_3$ durch eine Translation in das Quadrat $A'_3B'_3C'_3D'_3$ überführen, und das natürlich auch mittels einer Dreieckszerlegung, etwa $\Delta A_3B_3C_3$, $\Delta C_3D_3A_3$.
Die restlichen 8 Dreiecke von K (und K') sind sämtlich gleichschenklige Dreiecke mit der Schenkellänge, die der Hälfte der Quadratseitenlänge gleicht, und Basiswinkeln φ (4 Dreiecke) bzw. $90^\circ - \varphi$ (4 Dreiecke).
Es ist nun leicht zu sehen, daß sich folgende Dreiecke durch eine Translation ineinander überführen lassen:
$\triangle AA_1B_3 \to \triangle A'_3A'_1B'$, $\triangle BB_1C_3 \to \triangle B'_3B'_1C'$, $\triangle CC_1D_3 \to \triangle C_3C'_1D'$, $\triangle DD_1A_3 \to \triangle D'_3D'_1A'$,
$\triangle AA_3D_1 \to \triangle B'_3B'B'_1$, $\triangle BB_3A_1 \to \triangle C'_3C'C'_1$, $\triangle CC_3B_2 \to \triangle D'_3D'D'_1$, $\triangle DD_3C_2 \to \triangle A_3' A'A'_1$.

<u>Aufgabe 10</u> (nach I. Warnke)
Wir nehmen $a_{11} = k$ an. Das ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da ein Vertauschen von Zeilen und Spalten an p(k) nichts ändert.
Die Gesamtanzahl der belegten Schachbretter ist nun 15.
Wir berechnen jetzt die Anzahl derjenigen Schachbretterbelegungen, für die $\max_i \min_j a_{ij} = k$ ist.
Die anderen Elemente der ersten Zeile müssen alle $> k$ sein und jede andere Zeile muß mindestens eine Zahl $< k$ enthalten.
Es gibt also $(16-k)(15-k)(14-k)$ Möglichkeiten, die 1. Zeile zu komplettieren.
Es bleiben noch 12 freie Felder.

Die Gesamtanzahl, die k-1 Zahlen < k auf die 12 Felder verteilen, ist $\binom{12}{k-1}\cdot(k-1)!$ für $k \geqq 2$. Für k = 1 ist die Anzahl gleich Null.

Hier sind aber auch die Möglichkeiten enthalten, daß die k-1 Zahlen auf nur zwei bzw. eine Zeilen verteilt werden.

Die Anzahl, die k-1 Zahlen < k auf die 8 Felder von genau zwei Zeilen bzw. auf die 4 Felder nur einer Zeile zu verteilen, ist $\binom{8}{k-1}(k-1)!$ bzw. $\binom{4}{k-1}(k-1)!$

Man beachte, daß $\binom{x}{n} = o$ für $n > x$!

Nach der bekannten recontrè-Formel erhalten wir also für die Anzahl der Verteilungen der k-1 Zahlen < k derart, daß jede der drei Zeilen mindestens eine dieser Zahlen erhält.

$$\binom{12}{k-1}(k-1)! - 3\binom{8}{k-1}(k-1)! + 3\binom{4}{k-1}(k-1)!.$$

Schließlich sind nun 4 + (k-1) Felder belegt. Also gibt es $[16 - (4 + (k-1))]! = (13-k)!$ Möglichkeiten der Belegung der restlichen Felder. Insgesamt haben wir also

$$p(k) = \frac{1}{15!}(16-k)(15-k)(14-k)\left\{\binom{12}{k-1}(k-1)! - 3\binom{8}{k-1}(k-1)! + 3\binom{4}{k-1}(k-1)!\right\}(13-k)!$$

$$= \frac{(16-k)!(k-1)!}{15!}\left\{\binom{12}{k-1} - 3\binom{8}{k-1} + 3\binom{4}{k-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{\binom{15}{k-1}}\left\{\binom{12}{k-1} - 3\binom{8}{k-1} + 3\binom{4}{k-1}\right\}$$

Einfache Auswertung dieser Formel ergibt

$p(k) = o$ für $1 \leqq k \leqq 3$ oder $14 \leqq k \leqq 16$.

$p(4) = \frac{2^6}{5\cdot7\cdot13}$

$p(5) = \frac{3\cdot2^5}{5\cdot7\cdot13}$ $\qquad \frac{p(5)}{p(4)} = \frac{3}{2} > 1$

$p(6) = \frac{2^4}{7\cdot11}$ $\qquad \frac{p(6)}{p(5)} = \frac{5\cdot13}{2\cdot3\cdot11} = \frac{65}{66} < 1$

$p(7) = \frac{2^3\cdot3}{11\cdot13}$ $\qquad \frac{p(7)}{p(6)} = \frac{3\cdot7}{2\cdot13} < 1$

$p(8) = \frac{2^8}{3\cdot5\cdot11\cdot13}$ $\qquad \frac{p(8)}{p(7)} = \frac{2^5}{3^2\cdot5} < 1$

$p(9) = \frac{2^2\cdot41}{3\cdot5\cdot11\cdot13}$ $\qquad \frac{p(9)}{p(8)} = \frac{41}{2^6} < 1$

$p(10) = \frac{4}{7\cdot13}$ $\qquad \frac{p(10)}{p(9)} = \frac{3\cdot5\cdot11}{7\cdot41} < 1$

$p(11) = \frac{2}{7\cdot13}$ $\qquad \frac{p(11)}{p(10)} = \frac{1}{2} < 1$

$p(12) = \frac{4}{5\cdot 7\cdot 13}$ $\qquad \frac{p(12)}{p(11)} = \frac{2}{5} < 1$

$p(13) = \frac{1}{5\cdot 7\cdot 13}$ $\qquad \frac{p(13)}{p(12)} = \frac{1}{4} < 1$

Also ist $l = 5$.

Aufgabe 11

Die Zahlen $n_i = 3^{i-1}$, $i = 1,2,\dots,8$ haben die gewünschte Eigenschaft.

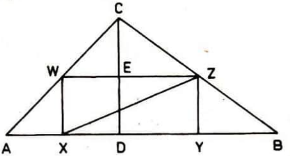
Bekanntlich kann man jede natürliche Zahl auch im Positionssystem, zur Basis 3 eindeutig darstellen. Wir betrachten höchstens 8stellige Zahlen, d. h., für jede natürliche Zahl n, $o \leqq n \leqq \sum_{i=1}^{8} 2 \cdot 3^{i-1} = 3^8 - 1 = 6560$, gibt es Zahlen $e_1, e_2, \dots, e_8 \in \{0,1,2\}$ mit $n = \sum_{i=1}^{8} e_i 3^{i-1}$.

Nun ist $n - 3280 = n - \sum_{i=1}^{8} 3^{i-1} = \sum_{i=1}^{8} (e_i - 1)3^{i-1}$.

Definieren wir $d_i = e_i - 1$, $i = 1,2,\dots,8$, so gibt es für jede natürliche Zahl k mit $k = n - 3280$ und $o \leqq n \leqq 6560$, d. h., $-3280 \leqq k \leqq 3280$, ganze Zahlen $d_1 d_2, \dots, d_8 \in \{-1,0,1\}$ mit

$$k = \sum_{i=1}^{8} d_i n_i.$$

Aufgabe 12



Wir bestimmen zunächst unter allen Rechtecken XYZW, die dem Dreieck ABC einbeschrieben sind und für die $X, Y \in AB$ ist, dasjenige, das eine minimale Diagonale hat.

Sei $x = \overline{XW} = \overline{YZ}$, $y = \overline{XY} = \overline{WZ}$, $c = \overline{AB}$
$h_c = \overline{CD}$, $k = \overline{XZ}$.

Dann ist $k^2 = x^2 + y^2$ und nach Strahlensatz $\frac{y}{c} = \frac{\overline{WZ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{h_c - x}{h_c}$,

also $k^2 = x^2 + \frac{c^2}{h_c^2}(h_c - x)^2$,

$$k^2 = (1 + \frac{c^2}{h_c^2})\, x^2 - 2\,\frac{c^2}{h_c}\, x + c^2,$$

$$k^2 = \left[\sqrt{1 + \frac{c^2}{h_c^2}}\; x - \frac{c^2}{h_c}\;\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{h_c^2}}}\right]^2 + c^2 - \frac{c^4}{h_c^2}\;\frac{1}{(1+\frac{c^2}{h_c^2})},$$

$$k^2 \geqq \frac{h_c^2 \cdot c^2}{h_c^2 + c^2}.$$

Gleichheit tritt genau für $x = \dfrac{c^2}{h_c\,(1+\frac{c^2}{h_c^2})} = \dfrac{c^2}{h_c^2 + c^2} \cdot h_c$ ein,

d. h., wegen $o < x < h_c$ gibt es tatsächlich ein Rechteck für das in (5) Gleichheit eintritt.

Ist $\triangle ABC$ gleichseitig, so haben wir $a = b = c$ und $h_a = h_b = h_c = \frac{1}{2}\sqrt{3c}$, also für jede Seite (!)

$$\min k^2 = \frac{2A\,\frac{1}{2}\sqrt{3}\,c^2}{(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 c^2 + c^2}, \text{ d. h., } \frac{l^2}{A} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}}{7}}}$$

Ist $\triangle ABC$ nichtgleichseitig, so ist mindestens ein Winkel, etwa $\sphericalangle ACB$, größer als 60°. Dann folgt aus dem Kosinussatz und durch elementare Umformungen, wenn $\gamma = \sphericalangle ACB$ sei,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \geqq 2ab - 2ab\cos\gamma = 2ab(1-\cos\gamma) =$$
$$\frac{ab}{2}\sin\gamma \cdot \frac{4(1-\cos\gamma)}{\sin\gamma} = A \cdot \frac{4\cdot 2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{c\cdot h_c}{2} \cdot 4 \cdot \tan\frac{\gamma}{2} > \frac{c\cdot h_c}{2} \cdot 4 \cdot \tan 30^\circ = 2c\cdot h_c \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},$$

also $h_c < \frac{\sqrt{3}}{2}\,c$.

Da die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{x^2+c^2}$ wegen $f'(x) = \dfrac{c^2-x^2}{(x^2+c^2)} > o$ für $x < c$

streng monoton wachsend ist, erhalten wir

$$\frac{h_c}{h_c^2+c^2} < \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{(\frac{\sqrt{3}}{2}\,c)^2+c^2} = \frac{1}{2c}\quad\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

und damit

$$\frac{k^2}{A} = \frac{2c\cdot h_c}{h_c^2+c^2} < \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

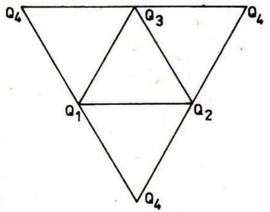
Da es eventuell noch Rechtecke gibt, deren eine Seite auf einer anderen Dreieckseite liegt, ist sicher

$$\frac{l^2}{A} < \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

d. h., das Maximum von $\frac{l^2}{A}$ wird für gleichseitige Dreiecke angenommen.

Aufgabe 13 (nach Martin Welk)

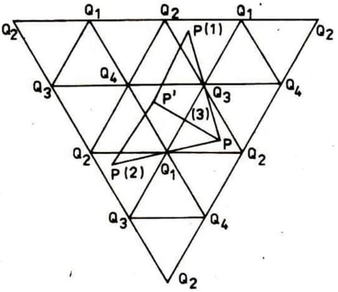
a) Die Eckpunkte des Tetraeders seien Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4. Das Netz des Tetraeders besitzt dann offensichtlich die Form:



Planfigur 1:

(Hier und im folgenden werden Punkte des Tetraeders wie die entsprechenden Punkte des Tetraeders bezeichnet; Punkte, die demselben Punkt der Tetraederoberfläche entsprechen, werden ebenfalls als gleich bezeichnet.)

Durch Aneinanderfügen mehrerer solcher Tetraedernetze erhält man folgende Figur, in der beliebige vier, der kleinsten auftretenden gleichseitigen Dreiecke, die ein gleichseitiges Dreieck der doppelten Kantenlänge bilden (Planfigur 1), als Netz von T betrachtet werden können.



Planfigur 2:

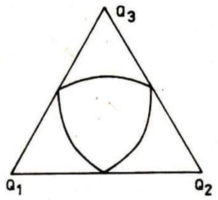
Eine Verbindung zwischen zwei Punkten der Tetraederoberfläche wird in dieser Figur stets als eine Strecke zwischen Bildern dieser Punkte abgebildet. Eine kürzeste Verbindung darf darüber hinaus höchstens zwei Kanten schneiden.
O.B.d.A. liege P im Innern oder auf dem Umfang des Dreiecks $\triangle Q_1Q_2Q_3$ und habe von Q_1Q_3 einen Abstand, der mindestens gleich einem Drittel der Höhe dieses Dreiecks sei. (Das ist stets möglich, da die Summe der Abstände eines Punktes des gleichseitigen Dreiecks zu den drei Seiten gleich der Höhe dieses Dreiecks ist.)

Konstruiert man nun zu drei Bildern von P (etwa den in Planfigur 2 gekennzeichneten) den Umkreismittelpunkt, der offenbar im Bild von $Q_1Q_3Q_4$ liegt, und bezeichnet man den diesem Bild entsprechenden Punkt der Oberfläche von T mit P', so besitzt jede der Verbindungen zwischen einem der drei Bilder von P und dem Bild von P' die gleiche Länge. Diese Verbindungen entsprechen den kürzesten P,P'-Wegen auf der Tetraederoberfläche, von denen folglich drei verschiedene existieren.
Damit ist gezeigt, daß für jeden Punkt P ein Punkt P' mit dieser Eigenschaft existiert. Da es für das aus den drei Bildern von P gebildete Dreieck (es handelt sich dabei um das kleinste von drei Bildern von P gebildete Dreieck) nur einen Umkreismittel-

punkt gibt, und für jeden anderen Punkt P' keine drei gleichlangen kürzeren Verbindungen vorhanden, d. h., es gibt genau einen Punkt mit der gewünschten Eigenschaft.

b) Offensichtlich ist der Abstand zwischen den in Planfigur 2 mit (1) und (2) bezeichneten Bildern von $Q_1Q_2Q_3$ liegenden Bildern des Punktes P gleich der doppelten Kantenlänge von T. Diese beiden Bilder von P bilden mit dem Bild von P' zusammen - wie unter a) bewiesen - ein gleichschenkliges Dreieck (ggf. entartet), so daß aufgrund der Dreiecksungleichung die Länge jeder der drei kürzesten Verbindungen mindestens gleich der Tetraederkantenlänge ist.
Gleichheit tritt genau dann ein, wenn das Dreieck entartet ist, wenn also der Umkreismittelpunkt des von den Bildern von P gebildeten Dreiecks auf der dem in (3) liegenden Bildpunkt gegenüberliegenden Seite liegt. Das tritt genau dann ein, wenn der bei letztgenanntem Bildpunkt liegende Innenwinkel ein rechter Winkel ist.
Da die Bilder von P in (1) und (3) zentralsymmetrisch bezüglich des dazwischenliegenden Bildes von Q_3 und die Bilder in (2) und (3) zentralsymmetrisch bezüglich des dazwischenliegenden Bildes von Q_1 liegen, folgt daraus, daß d_p genau dann minimal wird, wenn $\sphericalangle Q_1PQ_3 = 90^\circ$ gilt.

Nach dem Lehrsatz des Thales und dessen Umkehrung wird daher d_p genau dann minimal, wenn P zum einen auf einer Seitenfläche von T und zum anderen auf dem Thaleskreis über einer Kante dieser Seitenfläche liegt.
Alle Punkte P mit minimalem d_p liegen also auf einem "krummlinigen" Dreieck (jeder Seitenfläche)
(vgl. Planfigur 3, o.B.d.A. Seitenfläche $Q_1Q_2Q_3$ dargestellt).



Planfigur 3

Aufgabe 14

Durch Angabe einer Zahlenfolge wird nachgewiesen, daß es unendlich viele Paare (x,y) natürliche Zahlen gibt, für die
$2x^2 + 2x = y^2$ gilt.

Es sei $t_1 = \cancel{17}$, $t_{n+1} = 2\,t_n^2 - 1$ $(n \geq 1)$. Dann gibt es zu jedem

$$x_n = t_n^2 - 1 \text{ ein } y_n \in N \text{ mit } 2x_n^2 + 2x_n = y_n^2 \qquad (6)$$

Dann wird gezeigt: Zu jedem n gibt es natürliche Zahlen p und q so, daß

$$t_n - 1 = p^2 \text{ und } t_n + 1 = 2q^2 \qquad (7)$$

gilt.

Beweis: Für $n=1$ ist $p = 4$, $q = 3$. Es gelte für ein $n \in N$
$t_n - 1 = p^2$ und $t_n + 1 = 2q^2$. Dann ist
$t_{n+1} - 1 = 2t_n^2 - 2 = 2(t_n - 1)(t_n + 1) = (2pq)^2$ und
$t_{n+1} + 1 = 2t_n^2 = 2\,(t_n)^2$.

Mithin gibt es für alle Glieder der Folge (t_n) (von n abhängige) Zahlen p und q mit (7). Nun erfüllen die natürlichen Zahlen
$x_n = t_n^2 - 1$ und $y_n = 2pq\,t_n$ die Gleichung (6), denn es ist

$$2x_n^2 + 2x_n = 2x_n(x_n + 1) = 2(t_n-1)(t_n+1)\,t_n^2 = 2p^2 2q^2 t_n^2 = (2pqt_n)^2$$

$= y_n^2$ und folglich gibt es unendlich viele Paare (x,y) natürlicher Zahlen, für die $2x^2 + 2x = y^2$ gilt.

Aufgabe 15 (nach Ingo Warnke, Martin Welk, Stephan Werner)

Es wird durch vollständige Induktion nach n folgender allgemeiner Sachverhalt bewiesen.

Handelt es sich um n Länder, die jeweils durch einen Leiter und einen Stellvertreter vertreten sind und gelten obige Aussagen über die Begrüßung und Befragung, dann hat der mongolische Stellvertreter genau $(n-1)$ Kollegen begrüßt $(n \in N,\ n \geq 1)$.

Beweis:

Für $n=1$ nehmen an der Sitzung nur der mongolische Leiter und sein Stellvertreter teil. Da der mongolische Stellvertreter seinen Leiter nach Voraussetzung nicht begrüßt hat, hat er
$n - 1 = 1 - 1 = 0$ Kollegen begrüßt.

Induktionsvoraussetzung: Bei n anwesenden Ländern und den Voraussetzungen über die Begrüßung und Befragung hat der mongolische Stellvertreter genau n-1 Kollegen begrüßt.
Induktionsbeweis: Der mongolische Leiter befragt 2n+1 Kollegen.
Jeder Kollege hat höchstens 2n Kollegen begrüßt (sich selbst und den Kollegen aus seinem Land nicht).
Der mongolische Leiter bekommt also genau 2n+1 paarweise verschiedene Zahlen zwischen 0 und 2n genannt. Damit werden ihm die Zahlen 0,1,..., 2n jeweils genau einmal genannt. Es sei A der Kollege aus der Menge der Befragten, der genau 2n Kollegen begrüßt hat. A hat offenbar alle außer sich selbst und seinen Kollegen aus dem eigenen Land begrüßt. Demzufolge ist der Kollege aus der Menge der Befragten, der 0 Kollegen begrüßt hat, aus demselben Land wie A.
Diese beiden Kollegen werden aus der Sitzung entfernt.
Da der mongolische Leiter nicht der Menge der Befragten angehört, ist die mongolische Delegationsleitung noch bei der reduzierten Sitzung vorhanden.
Jetzt möge der mongolische Leiter seine Befragung wiederholen. Jeder würde jetzt eine Zahl nennen, die um 1 kleiner ist als die bei der vorigen Befragung, da jeder der Befragten von den beiden aus der Sitzung entfernten Kollegen genau A begrüßt hatte.

Da bei der ursprünglichen Befragung jeder und eine andere Zahl nannte, ist das auch jetzt wieder der Fall. Folglich ist die Induktionsvoraussetzung auf die reduzierte Sitzung anwendbar.
Der mongolische Stellvertreter hat n-1 jetzt anwesende Kollegen begrüßt.
Da er wirklich auch noch genau einen entfernten Kollegen (nämlich A) begrüßt hat, hatte er bei der ursprünglichen Befragung die Zahl (n-1)+1 = n angegeben.
Damit ist der Beweis geführt.

Für n = 30 hat also der mongolische Stellvertreter genau 29 Kollegen begrüßt.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 24

Aufgaben

Aufgabe 1

Sei $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geqq 1)$ und sei $p_n(k)$ die Anzahl der Permutationen von S mit genau k Fixpunkten. Man beweise:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$$

IMO 1987, Nr. 1 (BRD)

Aufgabe 2

ABC sei sei spitzwinkliges Dreieck. Die Halbierende des Innenwinkels bei A schneidet die Seite BC in L und den Umkreis des Dreiecks in N $(N \neq A)$. Seien K und M die Fußpunkte der Lote von L auf AB bzw. AC. Man beweise: Die Flächeninhalte des Vierecks AKNM und des Dreiecks ABC sind gleich.

IMO 1987, Nr. 2 (UdSSR)

Aufgabe 3

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reelle Zahlen mit $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

Man beweise:

Für jede natürliche Zahl $k \geqq 2$ gibt es ganze Zahlen a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, für die

$$|a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n| \leqq \frac{(k-1) \cdot \sqrt{n}}{k^n - 1}$$

gilt, wobei die Nebenbedingungen

- nicht alle a_i sind gleich Null,
- für alle i gilt $|a_i| \leqq k - 1$,

erfüllt sind.

IMO 1987, Nr. 3 (BRD)

Aufgabe 4

Es gibt keine Funktion $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, welche für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Eigenschaft

$$f(f(n)) = n + 1987$$

besitzt ($\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$).

IMO 1987, Nr. 4 (SR Vietnam)

Aufgabe 5

Es sei n eine natürliche Zahl ≥ 3.

Man beweise:

Es gibt eine Anordnung von n Punkten in der Ebene, für die je zwei beliebige Punkte einen irrationalen Abstand haben, und je drei beliebige Punkte ein nicht entartetes Dreieck mit rationalem Flächeninhalt bilden.

IMO 1987, Nr. 5 (DDR)

Aufgabe 6

Sei n eine ganze Zahl ≥ 2.

Man beweise:

Wenn $k^2 + k + n$ für alle ganzen Zahlen k mit $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$ eine Primzahl ist, dann ist auch $k^2 + k + n$ für alle ganzen Zahlen k mit $0 \leq k \leq n - 2$ eine Primzahl.

IMO 1987, Nr. 6 (UdSSR)

Aufgabe 7

In einem Schachturnier mit $n \geq 5$ Teilnehmern mögen $\left[\frac{n^2}{4}\right] + 2$ Partien gespielt sein.

a) Man beweise die Existenz von fünf Spielern a, b, c, d, e, für die mindestens die Partien ab, ac, bc, ad, ae, de bereits gespielt sind.

b) Gilt die Aussage auch für $\left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$ gespielte Partien?

Aufgabe 8

Man betrachte die Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

mit reellen Koeffizienten a, b und bestimmte die Anzahl von verschiedenen reellen Nullstellen und deren Vielfachheiten für die möglichen Werte von a und b.

Aufgabe 9

Man beweise die Ungleichung

$$(-a+b+c)^2 \cdot (a-b+c)^2 \cdot (a+b-c)^2 \geq$$
$$(-a^2+b^2+c^2) \cdot (a^2-b^2+c^2) \cdot (a^2+b^2-c^2).$$

Aufgabe 10

Seien $[A, B]$ ein Intervall der Länge 1 und C, D variable Punkte in diesem Intervall. Man bestimme den maximalen Wert, den das Produkt der Längen von den sechs verschiedenen Teilintervallen mit Endpunkten in der Menge A, B, C, D annimmt.

Aufgabe 11

Man bestimme sämtliche Lösungen des Gleichungssystems

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z = 8$$

in ganzen Zahlen x, y, z.

Aufgabe 12

Man bestimme für gegebene feste Zahl $n \geqq 2$ sämtliche n-stelligen Zahlen

$$M_0 = \overline{a_1a_2\ldots a_n} \quad (a_1 \neq 0,\ i = 1,\ldots n), \text{ die}$$

durch sämtliche n-1 Zahlen

$$M_1 = \overline{a_2a_3\ldots a_na_1}, = \overline{a_3a_4\ldots a_na_1a_2}, \ldots, M_{n-1} = \overline{a_na_1a_2\ldots a_{n-1}}$$

teilbar sind.

Aufgabe 13

Sei $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, die durch

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} + a_n \text{ für } n \geqq 0$$

definierte Folge von ganzen Zahlen. Man bestimme die gemeinsamen Teiler von a_{1986} und a_{6891}.

Aufgabe 14

Seien C_1 und C_2 zwei Kreise. A_1 bzw. A_2 sei ein fester Punkt auf C_1 bzw. C_2. Ferner seien A_1P_1 bzw. A_2P_2 parallele Sehnen von C_1 bzw. C_2. Man bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Strecken P_1P_2.

Aufgabe 15

Man bestimme die kleinste ganze Zahl $n \geq 3$, für die es ein n-Eck Q und einen Punkt A im Innern von Q gibt, so daß jede Seite von Q einen Punkt enthält, der von A aus nicht sichtbar ist. Man beweise, daß die so bestimmte Zahl n folgende Eigenschaft hat: Jedes nicht überschlagene n-Eck enthält zwei Punkte B und C, so daß jeder Punkt des n-Ecks von B oder von C aus sichtbar ist.

Aufgabe 16

In dem spitzwinkligen Dreieck ABC seien Höhen AA_1, BB_1 und CC_1 gezogen. Auf den Strecken A_1C_1 bzw. B_1C_1 seien Punkte K bzw. M gewählt, so daß $\sphericalangle MAK = \sphericalangle CAA_1$ ist. Man beweise, daß AK die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle C_1KM$ ist.

Lösungen

Aufgabe 1

Man ordne jeder Permutation f von S einen Vektor $\underline{f}$ zu, der aus Nullen und Einsen besteht, wobei die i-te Koordinate von $\underline{f}$ genau dann gleich Eins sei, falls f(i) = i gilt. Die n! 0,1-Vektoren schreibe man untereinander. Dabei entsteht ein Rechteck L. In L zähle man auf zwei Arten die Anzahl der Einsen.

Zeilenweise ergibt sich
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k).$$

In jeder j-ten Spalte stehen (n-1)! Einsen, da es (n-1)! Permutationen f mit f(j) = j gibt, j = 1, ..., n. Daher gibt das spaltenweise Abzählen $n \cdot (n-1)! = n!$ Einsen und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 2

O.B.d.A. habe der Umkreis um das Viereck AMLK neben L einen weiteren Schnittpunkt P $\neq$ L mit der Strecke BC. Dann ist $\sphericalangle BCN = \sphericalangle BAN$ (Peripheriewinkel über gleicher Sehne). Analog gilt $\sphericalangle MAL = \sphericalangle MPL$. Da AL Winkelhalbierende ist, gilt $\sphericalangle BCN = \sphericalangle BAL = \sphericalangle MAL$. Daher ist $\sphericalangle MPL = \sphericalangle BCN$ und folglich PM $\parallel$ NC. Analog beweist man KP $\parallel$ BN.

Für die Trapeze BKPN und NPMC gilt

$$S_{BKE} = S_{NPE} \text{ und } S_{PNF} = S_{CFM}$$

und folglich $S_{ABC} = S_{AKNM}$.

Aufgabe 3

Wegen $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ gilt nach der Cauchyschen Ungleichung

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}.$$

Folglich liegen alle Summen der Form $a_1 \cdot x_1 + \dots a_n x_n$ mit $a_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ in einem abgeschlossenen Intervall der Länge $(k-1) \cdot \sqrt{n}$. Dieses Intervall kann mit $k^n - 1$ abgeschlossenen Teilintervallen der Länge

$$\frac{(k-1) \cdot \sqrt{n}}{k^n - 1}$$

überdeckt werden. Nach dem Schubfachprinzip gibt es mindestens zwei Summen, die im gleichen Teilintervall liegen. Der Absolutbetrag ihrer Differenz darf die Länge dieses Teilintervalls nicht überschreiten. Mithin gibt es

$$a_1 \cdot \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (k-1)\} \quad \text{mit}$$

$$|a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n| \leq \frac{(k-1) \cdot \sqrt{n}}{k^n - 1}$$

__Aufgabe 4__

Angenommen, es gibt eine Funktion $f(n)$ mit den angegebenen Eigenschaften.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$f(n + 1987) = f(f(f(n))) = f(n) + 1987$$

und per Induktion

$$f(n + 1987 \cdot k) = f(n) + 1987 \cdot k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \qquad (*)$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ sei $M_n = \{n, f(n), f(f(n)), \ldots\}$.

Ist m M_n, so ist sicher $M_m \subseteq M_n$.

Es seien M_n^* diejenigen Mengen, die nicht erweiterbar sind.

Wir haben

$$M_n^* = \{n + 1987 \cdot k : k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{f(n) + 1987 \cdot k : k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Jede Menge M_n^* enthält Elemente aus höchstens zwei Restklassen modulo 1987.

Ferner ist $f(n) \neq f(m)$ für $n \neq m$, denn aus $f(n) = f(m)$ folgt $m + 1987 = f(f(m)) = f(f(n)) = n + 1987$.

Also ist $M_n^* \cap M_m^* = \emptyset$ für $n \neq m$.

Da sämtliche Restklassen modulo 1987 in den Mengen M_n^* vorkommen (man lasse nur n die Menge $\{0, 1, \ldots, 1986\}$ durchlaufen) und 1987 ungerade ist, kann eine der Mengen M_n^* nur Elemente einer Restklasse enthalten, d. h. für ein gewisses $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein $l \in \mathbb{N}_0$ mit

$$f(n_0) = n_0 + 1987 \cdot l.$$

Damit ist zusammen mit (*)

$$n_0 + 1987 = f\left(f(y)\right) = f(n_0 + 1987 \cdot 1) = f(n_0) + 1987 \cdot 1$$
$$= (n_0 + 1987 \cdot 1) + 1987 \cdot 1.$$

Es folgt $2\,l = 1$ im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von l.
Also gibt es keine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften.

Aufgabe 5

1. Lösung

Von den Punkten $P_i\ (i, i^2)$ mit $i = 1, 2, \ldots, n$ liegen offenbar keine drei auf einer Geraden.
Da $y = x^2$ konvex ist, läßt sich der Flächeninhalt vom $\triangle P_iP_jP_k$ $(i < j < k)$ als Summe von Trapezflächen darstellen und man erhält

$$A_{\triangle P_iP_jP_k} = \frac{k^2 - i^2}{2}(k-i) - \frac{k^2 - j^2}{2}(k-j) - \frac{j^2 - i^2}{2}(j-i),$$

also ist $A_{\triangle P_iP_jP_k}$ rational.

Schließlich ist $\overline{P_iP_j}^2 = (j^2-i^2)^2 + (j-i)^2 = (j-i)^2\left[(j+i)^2 + 1\right]$,

$$\overline{P_iP_j} = |j-i|\sqrt{(j+i)^2 + 1}\ .$$

Angenommen, $\overline{P_iP_j}$ ist rational. So ist auch $\sqrt{(j+i)^2 + 1}$ rational, d. h., es gibt $p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ (p,q) = 1$ mit

$$\sqrt{(i+j)^2 + 1} = \frac{p}{q},$$
$$(i+j)^2 + 1 = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Z}\,.$$

Mithin ist $q^2 \mid p^2$ und $q = 1$, also $(j+i)^2 + 1 = p^2$.
Nun ist aber

$$(j+i)^2 < (j+i)^2 + 1 = p^2 < (j+i+1)^2$$

d. h., p^2 liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen.
Aus diesem Widerspruch folgt, daß unsere Annahme falsch ist, d. h., $\overline{P_iP_j}$ ist irrational.

2. Lösung

Es sei m eine natürliche Zahl $\geqq 1$. Wir definieren einen Winkel φ durch

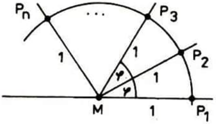
$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{2\,m}{m^2 + 1} \text{ und } \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}$$

was wegen $\left(\frac{2\,m}{m^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}\right)^2 = 1$ möglich ist. Da

$\lim\limits_{m \to \infty} \frac{2m}{m^2 + 1} = 0$ ist, können wir m derart groß wählen,

daß $n\,\varphi < \pi$ ausfällt.

Offenbar sind $\sin \frac{\varphi}{2}$ und $\cos \frac{\varphi}{2}$ rationale Zahlen.
Nach der Moivreschen Formel $[\cos K\alpha + i \sin K\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^K]$ läßt sich sowohl $\cos K\alpha$ als auch $\sin K\alpha$ als Polynom in $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen. Folglich ist sowohl $\cos K \frac{\varphi}{2}$ als auch $\sin K \frac{\varphi}{2}$ eine rationale Zahl.
Auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 1 wählen wir die n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ derart, daß $\sphericalangle P_i MP_{i+1} =$ ist (siehe Abb.).



Man beachte
$\sphericalangle P_1MP_n = (n-1)\,\varphi < \pi$.

Nun liegen offenbar keine drei Punkte auf einer Geraden.
Weiter gilt

$$\overline{P_1P_j}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1^2 \cos((j-i)\varphi) = 2(1 - \cos((j-i)\varphi))$$
$$= 2\left(2 \sin^2\left((j-i)\frac{\varphi}{2}\right)\right) = \left(2 \sin\left((j-i)\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2,$$

also wegen $0 < (j-i)\frac{\varphi}{2} < n\,\varphi < \pi$

$$\overline{P_1P_j} = \sqrt{2}\,\sin\left((j-i)\frac{\varphi}{2}\right).$$

Da $\sqrt{2}$ irrational und $\sin\left((j-i)\frac{\varphi}{2}\right)$ rational ist, ist $\overline{P_1P_j}$ irrational.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle P_iMP_j$ ergibt sich zu $\frac{1^2}{2}\sin((j-i)\varphi)$. Also ist für $i < j < k$

$$A_{\triangle P_iP_jP_k} = A_{\triangle P_iMP_j} + A_{\triangle P_jMP_k} - A_{\triangle P_iMP_k}$$

$$= \frac{1}{2}\sin((j-i)\varphi) + \frac{1}{2}\sin((k-j)\varphi) - \frac{1}{2}\sin((k-i)\varphi)$$

rational.

3. <u>Lösung</u>

Wir beweisen die Aussage mittels Induktion nach n.

Wir definieren Punkte vom Typ $P_i\ (i,\ y_i)$, $y_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \ldots,$ mit den geforderten Eigenschaften.

Da wir nur Gitterpunkte betrachten, sind alle Flächeninhalte rational, etwa nach

$$A_{\triangle P_iP_jP_k} = \begin{vmatrix} i & y_i & 1 \\ j & y_j & 1 \\ k & y_k & 1 \end{vmatrix} .$$

Für $n = 3$ wähle man z. B. $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$.

Wir nehmen an, wir haben schon n Punkte mit den gewünschten Eigenschaften.

Wir zeigen, daß es ein geeignetes $y_{n+1} \in \mathbb{Z}$, d. h. einen geeigneten $(n+1)$-ten Gitterpunkt mit der x-Koordinate $n+1$ gibt.

Die ersten n Punkte definieren genau $\binom{n}{2}$ Geraden, d. h., höchstens endlich viele Gitterpunkte mit der x-Koordinate liegen auf schon existierenden Geraden. Also gibt es ein $y^{(o)}_{n+1} \in \mathbb{Z}$, so daß keiner der Punkte $(n+1,\ y_{n+1})$ mit $y_{n+1} \geqq y^{(o)}_{n+1}$ mit zwei der ersten n Punkte auf einer Geraden liegt.

$$\overline{P_iP_{n+1}}^2 = (n+1-i)^2 + (y_{n+1} - y_i)^2.$$

Sei $y^{(i)}_{n+1} = (n+1-i)^2 + 1 + y_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

Für $y_{n+1} \geqq y^{(i)}_{n+1}$ ist

$$y_{n+1} > \frac{(n+1-i)^2 + 1}{2} + y_i,$$

$$(n+1-i)^2 < 2(y_{n+1} - y_i) - 1,$$

$$(n+1-i)^2 + (y_{n+1} - y_i)^2 < (y_{n+1} - y_i + 1)^2,$$

d. h.

$$(y_{n+1} - y_i)^2 < \overline{P_iP_{n+1}}^2 < (y_{n+1} - y_i + 1)^2.$$

Wie in der 1. Lösung zeigt man nun, daß $\overline{P_iP_{n+1}}$ nicht rational sein kann.
Nun wähle man sich eine beliebige Zahl

$$y_{n+1} \geqq \max_{i \in \{0, 1, \ldots, n\}} y_{n+1}^{(i)}.$$

Der Punkt P_{n+1} $(n+1;\ y_{n+1})$ ist nach Konstruktion ein geeigneter $(n+1)$-ter Punkt.

Bemerkung: Es gibt zahlreiche weitere Konstruktionsmöglichkeiten, z. B. n Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen im Gitter

- $\{(x, y) : x = \sqrt{2p} \cdot k, y = \sqrt{2p} \cdot l,\ k, l \in \{1, \ldots, n^2\}\}$,

wobei $p > 4n^4$ eine Primzahl sei, oder

- $\{\mathfrak{o} + \alpha \cdot \mathfrak{a} + y \cdot \mathfrak{b} : x, y \in\ \}$, wobei $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Vektoren mit $|\mathfrak{a}| = \sqrt{2}$, $|\mathfrak{b}| = \sqrt{3}$ $\sin \sphericalangle(a,b) = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Aufgabe 6

Wir beweisen die Behauptung indirekt.
Wir nehmen also an, es gibt eine natürliche Zahl l, so daß

$$l^2 + l + n$$

keine Primzahl ist. Gibt es mehrere solcher Zahlen, so bezeichne l die kleinste dieser.
Dann ist nach Voraussetzung

$$\sqrt{\frac{n}{3}} < l \leqq n - 2,$$

und für jede ganze Zahl k mit $0 \leqq k \leqq l - 1$ ist

$$k^2 + k + n$$

eine Primzahl.
Sei k eine beliebige ganze Zahl mit $0 \leqq k \leqq l - 1$.
Nun ist

$$(l^2+l+n) - (k^2+k+n) = l^2 - k^2 + l - k = (l-k)(l+k+1),$$

d. h., ist $l-k$ bzw. $l+k+1$ Teiler von l^2+l+n, so ist $l-k$ bzw. $l+k+1$ auch Teiler von k^2+k+n.

Wegen $\quad 1 \leqq l-k \leqq (n-2) - k < k^2+k+n$

und $\quad 1 < l+k+1 \leqq (n-2) + k+1 < k^2+k+n$

ist $l-k$ (außer für $l-k=1$) und auch $l+k+1$ kein Teiler von k^2+k+n und damit auch nicht von l^2+l+n.
Durchläuft k die Zahlen 0, 1, ..., $l-1$, so $(l-k)$ und $(l+k+1)$ die Zahlen l, $l-1$, ..., 1 und $l+1$, $l+2$, ... $2l$.

Folglich hat l^2+l+n keinen Teiler $\leqq 2l$. Für den kleinsten Primteiler p von l^2+l+n gilt also $p \geqq 2l + 1$.
Da l^2+l+n mindestens zwei Primteiler hat, gilt offenbar
$p^2 \leqq l^2+l+n$.

Wegen $\sqrt{\frac{n}{3}} < l$ folgt schließlich
$l^2+l+n \geqq p^2 \geqq (2l+1)^2 = 4l^2+4l+1 > l^2+l+(3l^2) > l^2+l+n.$

Wegen dieses Widerspruchs muß unsere Annahme falsch sein, d. h., die Behauptung ist bewiesen.

Bemerkung: Interessant ist die Frage nach den n, für die die Prämisse erfüllt ist. Man findet leicht $n = 3, 5, 11, 17, 41$.
Für die letzte ist die Aussage aus der Geschichte (Euler) wohlbekannt.
Eine Computersuche ergab, daß es keine weiteren geeigneten Zahlen n bis 100 000 gibt!
Ein Beweis dafür, daß tatsächlich nur 5 geeignete n's existieren, steht noch aus.

Aufgabe 7

Beweis durch Induktion über n.

a) Sei $n = 5$. Der Graph mit $\left[\frac{n^2}{4}\right] + 2 = 8$ Kanten entstehe durch Weglassen der Kanten k und k' aus dem vollständigen Graphen K_5 mit $\binom{5}{2} = 10$ Kanten. O.B.d.A. darf man $k = ce$, $k' = cd$ bzw. $k = ec$, $k' = db$ annehmen, und die Behauptung ist richtig.
Sei $n \geqq 6$. Bekanntlich gilt für die Gesamtzahl E der Kanten und den Grad d_i des Punktes i, $i = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot E = 2 \cdot \left(\left[\frac{n^2}{4}\right] + 2\right).$$

Daher gibt es ein j mit

$$d_j \leqq \frac{2\frac{n^2}{4} + 4}{n}.$$

Streicht man den Spieler j und betrachtet die E' bereits zwischen den restlichen n-1 Spielern gespielten Partien, so gilt für $n \geqq 6$, $n \neq 7$:

$$E' = \left[\frac{n^2}{4}\right] + 2 - d_j \geqq \left[\frac{n^2}{4}\right] + 2 - \left[\frac{2\left[\frac{n^2}{4}\right] + 4}{n}\right] \geqq \frac{(n-1)^2}{4} + 2, \quad (1)$$

und daher gibt es nach Induktionsvoraussetzung die behaupteten fünf Spieler bereits unter den restlichen n-1 Spielern. Die letzte Ungleichung in (1) erkennt man für $n \neq 7$ leicht durch eine Fallunterscheidung $n = 2p$ bzw. $n = 2p+1$.

Sei G ein Graph mit $n = 7$ Knoten und $E = \left[\frac{7^2}{4}\right] + 2 = 14$ Kanten. Gibt es in G einen Knoten x vom Grad $\leqq 3$, so hat G-x mindestens $11 = \left[\frac{6^2}{4}\right] + 2$ Kanten, enthält also die behaupteten fünf Knoten.

Hat in G jeder Knoten einen Grad $\geqq 4$, so ist wegen

$$\sum_{i=1}^{5} d_i = 2E = 28$$

$d_1 = \ldots = d_7 = 4$. Damit hat im komplementären Graphen $\bar{G}$ jeder Knoten den Grad 2, d. h., $\bar{G}$ besteht aus Kreisen mit jeweils $\geqq 3$ Knoten. Da $7 = 7$ und $7 = 4 + 3$ die einzigen Partitionen in Summanden $\geqq 3$ sind, hat o.B.d.A. $\bar{G}$ die Kantenmenge 12, 23, 34, 45, 56, 67, 71 bzw. 12, 26, 61, 34, 45, 57, 73 und in beiden Fällen ist 13, 35, 51, 14, 46, 61 die gesuchte Kantenmenge in G. Damit ist die Behauptung für alle $n \geqq 5$ richtig.

b) Möge G aus dem vollständigen bipartiten Graphen $K_{p,q}$, $p := \left[\frac{n}{2}\right] \cdot q = \left[\frac{n}{2}\right]$ durch Zufügen einer weiteren Kante k entstehen.
Dann hat G genau $\left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$ Kanten und sämtliche Dreiecke in G enthalten k. Also gibt es die oben genannten Knoten in G nicht.

Aufgabe 8

Wir formen die Gleichung äquivalent um ($x \neq 0$):

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0.$$

Für $z = x + \frac{1}{x}$ ($|z| \geq 2$) ergibt sich

$$z^2 + az + b - 2 = 0$$

mit den Nullstellen $z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2-4b+8}\right)$.

Mit der Unterscheidung der Fälle ($D = a^2-4b+8$)

1. $D < 0$, 2. $D = 0$, 3. $D > 0$ sowie für diesen Fall noch die Betrachtung der Werte o.B.d.A. $z_1 > z_2$ bezüglich des Intervalls $[-2;2]$ ergeben sich folgende reelle Lösungen:

1. Für $4b > a^2+8$		keine Lösung
2. Für $4b = a^2+8$,	$\lvert a\rvert = 4$	eine Vierfachlösung
	$\lvert a\rvert > 4$	zwei Doppellösungen
	$\lvert a\rvert < 4$	keine Lösung
3. Für $4b < a^2+8$,	$\lvert b+2\rvert < 2\lvert a\rvert$	zwei einfache Lösungen
	$b+2 = 2\lvert a\rvert$, $0 < \lvert a\rvert < 4$	eine Doppellösung
	$b+2 = 2\lvert a\rvert$, $\lvert a\rvert > 4$	eine Doppel-, zwei Einzellösungen
	$b+2 = -2\lvert a\rvert \neq 0$	eine Doppel-, zwei Einzellösungen
	$b+2 = -2\lvert a\rvert = 0$	zwei Doppellösungen
	$b+2 > 2\lvert a\rvert$, $\lvert a\rvert > 4$	vier Einfachlösungen
	$b+2 > 2\lvert a\rvert$, $\lvert a\rvert < 4$	keine Lösung
	$b+2 < -2\lvert a\rvert$	vier Einfachlösungen

Aufgabe 9 (nach A. Siebert)

Es sei $d = (b+c-a)$ $\qquad g = (b^2+c^2-a^2)$

$e = (a+c-b)$ $\qquad h = (a^2+c^2-b^2)$

$f = (a+b-c)$ $\qquad k = (a^2+b^2-c^2)$

$P_1 = (def)^2 \geq 0$ $\qquad P_2 = ghk$

Angenommen, von den Zahlen g,h,k sei o.B.d.A g nicht positiv.

1. $g = 0 \Rightarrow P_2 = 0 \Rightarrow P_1 \geqq P_2$.

2. $g < 0$ 2.1. Für $h,k \geqq 0$ gilt $P_2 \leqq 0 \Rightarrow P_1 \geqq P_2$.

2.2. Für o.B.d.A. $h < 0$ gilt

$$0 > g+h = 2c^2 \geqq 0 \quad \text{Wid.}$$

Bleibt der Fall, daß g,h,k positiv sind.

Wir zeigen, daß $(de)^2 \geqq gh \geqq 0$ gilt.

$$(de)^2 = ((c+(b-a))(c-(b-a)))^2 = (c^2 - (b-a)^2)^2,$$

$$gh = (c^2+(b^2-a^2))(c^2-(b^2-a^2))) = c^4-(b^2-a^2)^2. \qquad (1)$$

Aus $2k \geqq 0$ folgt

$$-2c^2+2(b^2+a^2) \geqq 0 \text{ und mit } (b+a)^2+(b-a)^2 = 2(b^2+a^2)$$

$$\Rightarrow -2c^2+(b-a)^2 \geqq -(b+a)^2 \qquad |\cdot(b-a)^2$$

$$\Rightarrow (-2c^2+(b-a)^2)(b-a)^2 \geqq -(b+a)^2(b-a)^2 \qquad |+c^4$$

$$\Rightarrow c^4-2c^2(b-a)^2+(b-a)^4 \geqq c^4-(b^2-a^2)$$

Mit (1) gilt die Behauptung.

Analog gilt $(df)^2 \geqq gk \geqq 0$ und

$$(ef)^2 \geqq hk \geqq 0.$$

$$\Rightarrow (def)^4 \geqq (ghk)^2$$

$$\Rightarrow (def)^2 \geqq ghk = ghk$$

$$\Rightarrow P_1 \geqq P_2.$$

<u>Aufgabe 10</u> (nach A. Hinrichs)

Es sei $\overline{AC} = x$, $\overline{CD} = y$, $\overline{DB} = z$.

$$\Rightarrow p = xyz(x+y)(y+z)(x+y+z) \quad \text{und wegen } x+y+z = 1$$

$$\Rightarrow p = xyz(x+y)(y+z).$$

$$\Rightarrow p = \frac{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})}{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})}\,x\,\frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}\,y\,\frac{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})}{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})}\,z\,(x+y)(y+z)$$

$$(1) \Rightarrow \tfrac{1}{8}(3+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{5})p = (\tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5})x)(\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})y)(\tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5})z)\;(x+y)(y+z).$$

Auf die rechte Seite wenden wir das geometrisch-arithmetische Mittel an und erhalten

$$\frac{1}{8}(3+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{5})P = \left(\frac{1}{10}(5+\sqrt{5})(x+y+z)\right)^5 = \left(\frac{1}{10}(5+\sqrt{5})\right)^5$$

$$P = \frac{\left(\frac{1}{10}(5+\sqrt{5})\right)^5}{\frac{1}{8}\ (3+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{5})} = \frac{1}{125}\sqrt{5}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn in (1) alle Faktoren der rechten Seite gleich sind, d. h.

$$\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})y = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})z = (x+y) = (y+z)$$

$$\Rightarrow x = z$$

$$\Rightarrow y = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x$$

und mit $x+y+z = 1$ ergibt sich

$$x = z = \frac{1}{10}(5-\sqrt{5})$$

$$y = \frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses.

<u>Aufgabe 11</u> (nach M. Welk)

Nach Beseitigung der Symmetrie lassen o.B.d.A. x und y den gleichen Rest modulo 2 und sei $x-y$ nichtnegativ.

$\Rightarrow a = \frac{x+y}{2}$ ist eine ganze Zahl und

$\Rightarrow k = \frac{x-y}{2}$ eine nichtnegative ganze Zahl.

$\Rightarrow x = a+k, \quad y = a-k$ und aus $x+y+z = 8$

$z = 8-2a$

$$\Rightarrow (a+k)^3 + (a-k)^3 + (8-2a)^3 = 8$$

$$\Rightarrow 6a(a^2-16a+64-k^2) = 504.$$

Da $a = 0$ keine Lösung von (1) ist, erhalten wir

$$a^2-16a+64-k^2 = \frac{84}{a}$$

Der linke Term ist offensichtlich ganzzahlig, folglich muß es der rechte Term auch sein. Wir setzen für a alle möglichen Teiler von 84 ein und untersuchen die Gleichung

$$k^2 = a^2 - 16a + 64 - \frac{84}{a}.$$

Nur ein Paar (a,k) ganzer Zahlen mit $k \geqq 0$ erfüllt die Bedingung (2), dies ist das Paar (12,3). Damit ergibt sich die Lösung

$$x = 15, \quad y = 9, \quad z = -16.$$

Berücksichtigen wir jetzt wieder die Symmetrie des gegebenen Gleichungssystems, so ergeben sich genau sechs Lösungen (x,y,z) als Permutation von (15,9,-16).

Die Probe bestätigt leicht die Richtigkeit der Aussage.

<u>Aufgabe 12</u>

Offensichtlich erfüllen alle Zahlen

$M_0 = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$ mit $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ die Bedingungen. (1)

Sei M_0 eine weitere solche Zahl, $M_0 = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$.

$$M_{n-1} = a_n\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}}$$

$$10\ M_{n-1} = a_n\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n} = 10^n + M_0$$

$$= a_n\ 10^n + k\ M_{n-1}$$

$$(10-k)\ M_{n-1} = a_n\ 10^n$$

$$M_{n-1} = \frac{a_n\ 10^n}{10-k}$$

Da a_n und k aus der Menge $\{1,2,\ldots,9\}$ sind und M_{n-1} eine n-stellige periodische Zahl ist, ist

$\frac{a_n}{10-k}$ eine Zahl < 1 und periodisch, ohne gewisse Vorziffern. $\Big\}$ (2)

Für $10-k \in \{1,2,4,5,8\}$ überzeugt man sich schnell, daß $\frac{a_n}{10-k}$ im Widerspruch zu (2) keine neuen Zahlen M_0 liefert.

Für $10-k \in \{3,9\}$ entstehen nur solche unter (1) genannten Zahlen M_0.

Für 10-k = 6 entstehen neben schon in (1) genannten Zahlen für $\frac{a_n}{10-k}$ noch die folgenden Brüche: $- 0{,}1\overline{666}\ldots$

$- 0{,}5$ und

$- 0{,}8\overline{333}\ldots$.

Diese stehen jedoch im Widerspruch zu (2).

Für 10-k = 7 entstehen für $a_n/10-k$ die Brüche

a) $0{,}\overline{142857} \rightarrow M_{n-1} = \overline{142857\ldots7} \Rightarrow M_0 = \overline{428571\ldots1}$

b) $0{,}\overline{285714} \rightarrow M_{n-1} = \overline{285714\ldots4} \Rightarrow M_0 = \overline{857142\ldots2}$

c) $0{,}\overline{428571} \rightarrow M_{n-1} = \overline{428571\ldots1} \Rightarrow M_0 = \overline{285714\ldots4}$

d) $0{,}\overline{571428} \rightarrow M_{n-1} = \overline{571428\ldots8} \Rightarrow M_0 = \overline{714285\ldots5}$

e) $0{,}\overline{714285} \Rightarrow M_{n-1} = \overline{714285\ldots5} \Rightarrow M_0 = \overline{142857\ldots7}$

f) $0{,}\overline{857142} \rightarrow M_{n-1} = \overline{857142\ldots2} \Rightarrow M_0 = \overline{571428\ldots8}$.

Für die Fälle a), c), d), e) und f) gibt es eine Zahl M_1, $1 \leq i \leq n-1$, mit $M_i = \overline{857142\ldots2} > M_0$. Damit ist M_i kein Teiler von M_0, Wid.

Für den Fall b), $M_{n-1} = \overline{285714\ldots4}$, $M_0 = \overline{857142\ldots2}$ ist

$M_2 = \overline{714285\ldots5}$.

$$\Rightarrow 1 < \frac{M_0}{M_2} < 2 \qquad \text{Wid.}$$

Damit erfüllen nur genau die unter (1) genannten Zahlen die geforderte Bedingung.

Aufgabe 13

Bezeichne (a,b) den ggT von a und b. So gilt:

(1) $(a_n, a_{n-1}) = 1$,

(2) $a_{n+k} = a_{k+1}a_n + a_k a_{n-1}$,

(3) $(a_{n+k}, a_n) = (a_k, a_n)$.

Beweis von (1): Es gilt $(a_2, a_1) = 1$ $(a_2 = 4)$.

Aus $(a_{n-1}, a_{n-2}) = 1$ folgt wegen

$a_n = 4a_{n-1} + a_{n-2}$ sofort

$(a_n, a_{n-1}) = 1$. qed.

Beweis von (2): (Induktion über k)

1. Für $k = 1$ ist die Behauptung klar.

2. Gelte $a_{n+k} = a_{k+1}a_n + a_k a_{n-1}$.

$$\begin{aligned} a_{n+k+1} &= 4a_{n+k} + a_{n+k+1} \\ &= 4\,(a_{k+1}a_n + a_k a_{n-1}) + a_k a_n + a_{k-1}a_{n-1} \\ &= (4a_{k+1} + a_k)a_n + (4a_k + a_{k-1})a_{n-1} \\ &= a_{k+2}a_n + a_{k+1}a_{n-1}. \qquad \text{qed.} \end{aligned}$$

Beweis von (3): $$\begin{aligned} (a_{n+k}, a_n) &= (a_{k+1}a_n + a_k a_{n-1}, a_n) \\ &= (a_k a_{n-1}, a_n) \\ &= (a_k, a_n) \qquad \text{(wegen (1))} \end{aligned}$$

qed.

Bei der Abarbeitung von (3) handelt es sich um den Euklidischen Algorithmus für die Bestimmung des ggT für die Indizes.

$\Longrightarrow$ $(a_{1986}, a_{6891}) = a_{(1986,6891)} = a_3 = 17.$

$\Longrightarrow$ Die gemeinsamen Teiler von a_{1986} und a_{6891} sind -17, -1, 1 und 17.

<u>Aufgabe 14</u> (nach A. Siebert)

Es sei stets $i \in \{1,2\}$.

Weiterhin sei M_i der Mittelpunkt des Kreises C_i, M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$, A der Mittelpunkt von $\overline{A_1A_2}$ und P der Mittelpunkt von $\overline{P_1P_2}$.

Der Kreis C_i wird um $\overrightarrow{M_iM}$ verschoben. Dabei sei bei dieser Verschiebung C_i' das Bild von C_i, M_i' das Bild von M_i, A_i' das Bild von A_i, P_i' das Bild von P_i, M das Bild von M, A' das Bild von A und P' das Bild von P.

Nach der Definition der Verschiebung bzw. wegen $\overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{M_2M} = \underline{0}$ (Nullvektor) gilt:

$M_1' = M_2' = M' = M$, $A' = A$ und $P' = P$.

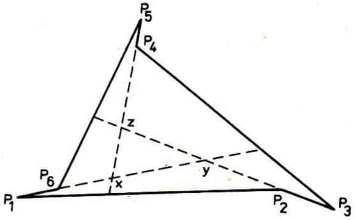
Es sei g die Mittelsenkrechte von $A_1'P_1'$. Da $\overline{MA_1'} = \overline{MP_1'}$ gilt, liegt M auf g. Da andererseits $\overline{MA_2'} = \overline{MP_2'}$ und $\overline{A_1'P_1'} \parallel \overline{A_2'P_2'}$ gilt, ist g senkrecht zu $A_2'P_2'$ und sogar Mittelsenkrechte von $\overline{A_2'P_2'}$. Die Drei-

ecke $MA'_1A'_2$ und $MP'_1P'_2$ sind kongruent (gespiegelt an g). Damit ist $|\overline{MP}| = |\overline{MA}|$. Damit liegen alle Punkte P auf einem Kreis K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $|\overline{MA}|$.
Zu jedem Punkt Q auf K existiert eine Gerade g durch M, so daß g Mittelsenkrechte von $\overline{AQ}$ ist (für A = Q sei g die Gerade durch A und M').
Q'_1 sei die Spiegelung von A'_1 an g. Dann liegt Q'_1 auf C'_1 und Q ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{Q'_1Q'_2}$, und es ist $A'_1Q'_1 \parallel A'_2Q'_2$.
Damit ergibt sich: Läßt man $P'_1 = A'_1$ zu und betrachtet man als $\overline{P'_2A'_2}$ die Sehne in C'_2 durch A'_2, die parallel zur Tangente A'_1 in C'_1 ist und umgekehrt, so sind alle Punkte des Kreises K der gesuchte geometrische Ort.

Aufgabe 15

Wir gehen von folgenden bekannten Aussagen aus:
(1) Jedes n-Eck (nichtüberschlagen) läßt sich durch (n-3) Diagonalen in (n-2) Dreiecke zerlegen (diese Zerlegung sei Triangulation genannt).
(2) Wenn F eine konvexe ebene Figur ist, so ist von jedem Punkt von F jeder Punkt von F sichtbar.

a) Wir zeigen zunächst, daß 6 das kleinste n ist, für das es ein nichtüberschlagenes n-Eck Q gibt, das einen Punkt A im Innern enthält, so daß jede Seite von Q einen Punkt enthält, der von A aus nicht sichtbar ist.
Wenn $n < 6$ ist, so ist $(n-3) < 3$. Damit hat wegen (1) jedes Dreieck einer Triangulation eines n-Ecks eine Seite des n-Ecks gemeinsam.
Da jedes Dreieck eine konvexe Figur ist, folgt aus (2), daß es für jeden inneren Punkt A eine Seite des n-Ecks gibt, die von diesem Punkt aus vollständig sichtbar ist. Damit muß dieses kleinste $n \geq 6$ sein.
Folgendes Beispiel zeigt, daß 6 das gesuchte kleinste n ist.



Jeder Punkt, der echt im Innern des Dreiecks XYZ liegt, ist ein solch gesuchter Punkt A.

b) Wir zeigen jetzt, daß man in jedem 6-Eck zwei Punkte B und C finden kann, so daß jeder Punkt des 6-Ecks von B oder C aus zu sehen ist.

Offenbar gelten die beiden folgenden Aussagen:

(3) In jeder Triangulation eines 6-Ecks (die wegen (1) existiert) gibt es ein Dreieck, das zwei Seiten des 6-Ecks enthält.

(4) In jeder Triangulation eines 5-Ecks (die wegen (1) existiert) gibt es einen Eckpunkt des 5-Ecks, der in jedem Dreieck der Triangulation enthalten ist.

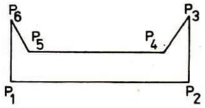
Aus (2) und (4) folgt, da ein Dreieck eine konvexe Figur ist:

(5) In jedem 5-Eck gibt es einen Punkt, von dem aus jeder Punkt des 5-Ecks sichtbar ist.

Aus (3) folgt: (6) Jedes 6-Eck läßt sich derart in ein Dreieck und ein 5-Eck zerlegen, daß das Dreieck und das 5-Eck nur eine Kante gemeinsam haben.

Da ein Dreieck eine konvexe Figur ist, folgt aus (2), (5) und (6) die zweite Teilbehauptung, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Anmerkung: Es gibt 6-Ecke, die keinen Punkt enthalten, von dem aus jeder Punkt des 6-Ecks sichtbar ist, wie folgendes Beispiel beweist:



Aufgabe 16 (nach A. Pönitz und G. Zenker)
Es ist $\sphericalangle CAA_1 + \sphericalangle ACA_1 + \sphericalangle CA_1A = 180^\circ$
(Innenwinkelsumme im rechtwinkligen Dreieck CAA_1 mit Hypotenuse AC).

Folglich $\sphericalangle CAA_1 = 90^\circ - \sphericalangle ACA_1$. (1)

Analog erhält man für das Dreieck BCB_1

$$\sphericalangle CBB_1 = 90^\circ - \sphericalangle BCB_1. \quad (2)$$

Da $\sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle BCB_1$, folgt aus (1) und (2)

$$\sphericalangle CAA_1 = \sphericalangle CBB_1. \quad (3)$$

Es sei H der Höhenschnittpunkt im Dreieck ABC. Dann liegen B_1 und C_1 auf dem Thaleskreis über $\overline{AH}$. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt (wie betrachten die Sehne $\overline{B_1H}$)

$$\sphericalangle CAA_1 = \sphericalangle CC_1B_1. \quad (4)$$

Analog zu (4) erhält man

$$\sphericalangle A_1C_1C = \sphericalangle CBB_1. \quad (5)$$

Es ist $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \sphericalangle A_1C_1C + \sphericalangle CC_1B_1$.

Aus (3), (4) und (5) folgt damit

$$\sphericalangle A_1C_1B_1 = 2 \cdot \sphericalangle CAA_1. \quad (6)$$

Da $\sphericalangle KC_1M = \sphericalangle A_1C_1B_1$ und nach Voraussetzung $\sphericalangle MAK = \sphericalangle CAA_1$ gilt, ist $\sphericalangle KC_1M = 2 \sphericalangle MAK$. (7)

Aus (7) und dem Sinussatz ergibt sich

$$\frac{|\overline{MK}|}{|\overline{MC_1}|} = \frac{\sin(2 \sphericalangle MAK)}{\sin(\sphericalangle C_1KM)} \quad . \quad (8)$$

Weiter folgt aus dem Sinussatz

$$\frac{|\overline{MK}|}{|\overline{AM}|} = \frac{\sin(\sphericalangle MAK)}{\sin(\sphericalangle MKA)} \tag{9}$$

und

$$\frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MC_1}|} = \frac{\sin(\sphericalangle AC_1M)}{\sin(\sphericalangle C_1AM)}. \tag{10}$$

Wegen (3), (5), $\sphericalangle MAK = \sphericalangle CAA$, liefert eine Betrachtung im Dreieck AC_1K

$$\sphericalangle C_1AK = 180^\circ - (90^\circ + \sphericalangle MAK) - \sphericalangle C_1KA. \tag{11}$$

Da $\sphericalangle C_1AM = \sphericalangle MAK + \sphericalangle C_1AK$ gilt, folgt aus (11)

$$\sphericalangle C_1AM = 90^\circ - \sphericalangle C_1KA. \tag{12}$$

Außerdem ist $\sphericalangle AC_1M = 90^\circ - \sphericalangle MAK$ ((3), Voraussetzung).

Aus (8), (9), (10) und (12) folgt,
da $\sphericalangle C_1KM = \sphericalangle C_1KA + \sphericalangle MKA$ gilt, somit

$$\frac{\sin(2\sphericalangle MAK)}{\sin(\sphericalangle C_1KA + \sphericalangle MKA)} = \frac{\sin(\sphericalangle MAK)\sin(90^\circ - \sphericalangle MAK)}{\sin(\sphericalangle MKA)\sin(90o - \sphericalangle C_1KA)}. \tag{13}$$

Wegen der Spitzwinkligkeit des Dreiecks ABC liegen alle auftretenden Winkel echt zwischen 0° und 180°. Damit folgt aus (13)

$$2\sin(\sphericalangle MAK)\cdot\cos(\sphericalangle MAK)\cdot\sin(\sphericalangle MKA)\cdot\cos(\sphericalangle C_1KA) =$$
$$= \sin(\sphericalangle MAK)\cos(\sphericalangle MAK)\sin(\sphericalangle C_1KA)\cos(\sphericalangle MKA) + \cos(\sphericalangle C_1KA)\sin(\sphericalangle MKA)$$

und schließlich

$$\sin(\sphericalangle MKA)\cdot\cos(\sphericalangle C_1KA) = \sin(\sphericalangle C_1KA)\cos(\sphericalangle MKA).$$

Da diese Winkel offenbar zwischen 0° und 90° liegen, gilt

$$\tan(\sphericalangle MKA) = \tan(\sphericalangle C_1KA),$$

woraus $\sphericalangle MKA = \sphericalangle C_1KA$ folgt, womit die Behauptung der Aufgabe bewiesen ist.
(Alle auftretenden Winkel $\leqq 180^\circ$ und nichtorientiert!)

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 25

Aufgaben

Aufgabe 1

Man beweise, daß jedes Element der Menge $\{1,2,\dots,1987\}$ derart mit jeweils einer von vier Farben gefärbt werden kann, daß jede aus zehn Elementen der Menge gebildete arithmetische Folge nicht monochromatisch ist.
(Korrespondenzzirkel 3.5 - 87/88)

Aufgabe 2

Ein Dreieck habe die Seiten a, b, c, den Inkreisradius r und die Ankreisradien r_a, r_b, r_c. Man beweise:

a) Das Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn gilt:
$r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$.

b) Das Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn gilt:
$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Aufgabe 3

Es sei d_n die letzte von 0 verschiedene Ziffer der Dezimaldarstellung von $n!$.
Man zeige, daß die Folge d_1, d_2, d_3, ... nicht periodisch ist.

Aufgabe 4

Gegeben seien die endliche Menge M mit m Elementen und 1986 weitere Mengen M_1, M_2, M_3, ..., M_{1986}, von denen jede mehr als $\frac{m}{2}$ Elemente aus M enthält.
Man zeige, daß nicht mehr als zehn Elemente von M markiert werden müssen, damit jede Menge M_i ($i = 1, 2, \dots, 1986$) mindestens ein markiertes Element enthält.

Aufgabe 5

Ein konvexes Polyeder habe zwölf Seitenflächen und die folgenden Eigenschaften:

a) alle Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke,
b) alle Kanten des Polyeders haben die Länge x oder y,
c) von jedem Eckpunkt des Polyeders gehen genau drei oder sechs Kanten aus und
d) alle Winkel zwischen zwei benachbarten Randflächen sind gleich.

Man ermittle alle Werte, die das Verhältnis $\frac{x}{y}$ annehmen kann.
(Vorbereitungsklausur auf die IMO 1985/86)

Aufgabe 6

Man ermittle alle Werte des Parameters a, so daß alle Wurzeln der Gleichung $x^6 + 3x^5 + (6-a)x^4 + (7-2a)x^3 + (6-a)x^2 + 3x + 1 = 0$ reelle Zahlen sind.
(Vorbereitungsklausur auf die IMO 1985/86)

Aufgabe 7

Es sei ABC ein Dreieck mit $\overline{AC} \neq \overline{BC}$ und M der Mittelpunkt von AB. Ferner sei $\gamma = \sphericalangle ACB$ ein spitzer Winkel.
Ein Punkt P ist derart auf der Strecke CM gewählt, daß sich die Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle PAC$ und $\sphericalangle PBC$ in einem Punkt Q auf CM schneiden. Man ermittle die Winkel $\sphericalangle APB$ und $\sphericalangle AQB$.
(Vorbereitungsklausur auf die IMO 1985/86)

Aufgabe 8

Gegeben seien sieben Punkte im Raum, von denen keine vier in einer Ebene liegen. Die Verbindungsstrecken dieser Punkte seien entweder blau oder rot gefärbt. Man beweise, daß es zwei einfarbige Dreiecke gibt, die keine gemeinsame Seite haben. (Ein Dreieck heißt einfarbig, wenn seine drei Seiten von gleicher Farbe sind.)
Ist eine analoge Aussage richtig für sechs Punkte?
(Vorbereitungsklausur auf die IMO 1985/86)

Aufgabe 9

Eine Einbahnstraße wird von einer nicht abbrechenden Folge von Autos durchfahren. Die Autos haben jeweils die Breite bzw. Länge a bzw. b und die Geschwindigkeit v. Sie fahren in jeweiligem Abstand c zueinander am rechten Straßenrand. Ein Fußgänger überquert die Straße senkrecht mit der Geschwindigkeit w, ohne auf den Verkehr zu achten.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p dafür, daß der Fußgänger die Straße unverletzt überquert?
b) Kann der Fußgänger diese Wahrscheinlichkeit vergrößern, indem er in anderer als senkrechter Richtung die Straße überquert?

Aufgabe 10

Es sei C eine Klasse von Funktionen $f : N \longrightarrow N$, die die Funktionen $S(x) = x+1$ und $E(x) = x - [\sqrt{x}]^2$ enthält. Ferner gelte: Gilt $f, g \in C$, so ist $f + g$, fg, $f \circ g = f(g) \in C$. Man zeige, daß für $f, g \in C$ auch die Funktion $\max\{f(x) - g(x), 0\}$ in C enthalten ist.

Aufgabe 11

Eine dem Tetraeder ABCD einbeschriebene Kugel wird von der Fläche ABC bzw. DBC im Punkt K bzw. M berührt. Man beweise: $\sphericalangle AKB = \sphericalangle DMC$.
(Vorbereitungsklausur 1985/86)

Aufgabe 12

Eine positive natürliche Zahl heißt speziell, wenn die Anzahl der Einsen in ihrer Binärdarstellung gerade ist (z. B. ist $18 = (10010)_2$ speziell).
Man bestimme die Summe der ersten 1985 speziellen natürlichen Zahlen.
(Korrespondenzzirkel III - 85/86)

Aufgabe 13

Aus einer Menge von $n \geq 4$ Ehepaaren werden nacheinander k Gesprächsrunden $C_1, \ldots, C_k$ gebildet. Dabei gehören niemals ein Ehemann und seine Frau zur gleichen Gesprächsrunde, während je zwei Personen, die kein Ehepaar bilden, genau einer Gesprächsrunde angehören. Man beweise, daß $k \geq 2n$ gilt.
(Klausur 1.1 - 87/88, Vorschlag Finnlands auf IMO 1987)

Aufgabe 14

Gibt es ein Polynom zweiten Grades $p(x,y)$ in zwei Veränderlichen, so daß es für jede natürliche Zahl n genau ein (geordnetes) Paar (k,m) natürlicher Zahlen k,m gibt, so daß $n = p(k,m)$ ist?

Aufgabe 15

ABCD sei ein Tetraeder mit der Umkugel K. Dem Tetraeder sei eine Kugel K' einbeschrieben, die jede Dreiecksfläche von T in einem inneren Punkt dieser Fläche berühre. K und K' haben den gleichen Mittelpunkt O.

H sei der Höhenschnittpunkt des $\triangle ABC$ und H' der Fußpunkt des Lotes von D auf dieses Dreieck.
Man beweise: $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{OH} = \overline{OH'}$.
(Korrespondenzzirkel III - 85/86)

Lösungen

Aufgabe 1

Es gibt 4^{1987} Färbungen der Menge M. Sei A die Anzahl der arithmetischen Folgen aus 10 Gliedern aus M. Wenn

$$A \cdot 4^{1987-9} < 4^{1987}, \text{ d. h.,}$$
$$A < 4^9$$

ist, ist die Aussage bewiesen.

Ist das erste Glied der Folge gleich k und ihre Differenz gleich d, so ist

$$1 \leqq k \leqq 1978 \text{ und } d \leqq \left[\frac{1987-k}{9}\right], \text{ also}$$

$$A = \sum_{k=1}^{1978} \left[\frac{1987-k}{9}\right] < \frac{1986+1985+\ldots+9}{9}$$

$$= \frac{997{,}5 \cdot 1978}{9} < \frac{2^{10} \cdot 2^{11}}{2^3} = 4^9.$$

Das war zu zeigen.

Aufgabe 2

a) Sei F der Flächeninhalt des Dreiecks, u der Umfang, $x = \frac{\alpha}{2}$, $y = \frac{\beta}{2}$ und $z = \frac{\gamma}{2}$. Dann gilt

$$r_a = \frac{F}{\frac{u}{2} - a}, \text{ analog } r_b, r_c, \qquad (1)$$

$$\tan x = \frac{r}{\frac{u}{2} - a}, \text{ analog } \tan y, \tan z \qquad (2)$$

$$\frac{F}{r} = \frac{u}{2} \qquad (3)$$

$$r = u\,(\tan x \cdot \tan y \cdot \tan z) \cdot \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Aus (1), (2) und (3) folgt

$$r_a = \tan x \cdot \frac{u}{2}, \text{ analog für } r_b, r_c. \qquad (5)$$

Mit (4) und (5) ergibt sich

$$T = r + r_a + r_b + r_c = u\,(\tan x + \tan y + \tan z + \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z)\,\frac{1}{2}$$

$$= u\left((\tan x - 1)(\tan y - 1)(\tan z - 1) + \tan x \cdot \tan y + \right.$$
$$\left. + \tan x \cdot \tan z + \tan y \cdot \tan z + 1\right) \cdot \frac{1}{2}. \qquad (6)$$

Da $\tan x = \sqrt{\dfrac{\left(\frac{u}{2} - b\right)\left(\frac{u}{2} - c\right)}{\frac{u}{2}\left(\frac{u}{2} - a\right)}}$ und analog $\tan y$, $\tan z$, folgt

mit

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\frac{u}{2} - c}{\frac{u}{2}} \text{ und analog } \tan x \cdot \tan z,\ \tan y \cdot \tan z \qquad (7)$$

$$T = u\left((\tan x-1)(\tan y-1)(\tan z-1) + \frac{\left(\frac{u}{2} - c\right) + \left(\frac{u}{2} - b\right) + \left(\frac{u}{2} - a\right)}{\frac{u}{2}} + 1\right)\frac{1}{2}$$
$$= u + u\left((\tan x - 1)(\tan y - 1)(\tan z - 1)\right) \cdot \frac{1}{2}.$$

Daher ist das Dreieck genau dann rechtwinklig, falls

$$r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$$

gilt.

b) Mit den Formeln (4), (5) und (7) folgt in Analogie zur Formel (6)

$$r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2 = a^2+b^2+c^2+u^2\ (\tan^2 x-1)\ (\tan^2 y-1)\ (\tan^2 z-1) \cdot \frac{1}{4}.$$

Also ist das Dreieck genau dann rechtwinklig, wenn

$$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

gilt.

<u>Aufgabe 3</u> (nach G. Zenker)

Sei (n) die letzte von 0 verschiedene Ziffer in der Dezimaldarstellung von n. Dann gilt für $5 \nmid (a)$ und $5 \nmid (b)$

$$(a \cdot b) \equiv (a) \cdot (b) \pmod 5. \qquad (8)$$

Nehmen wir an, d_n sei periodisch, d. h., für alle $n > n_o$ gilt $d_n = d_{n+p}$, p ist die Periode, $p > 0$, $p \in \mathbb{N}$.

Sei $p = 5^y \cdot k$, $5 \nmid k$, dann ist auch $q = 10^y \cdot k$ eine Periode.

Für $n = \{10\,x + k\} \cdot 10^y$, $n > n_o$ gilt dann

$$d_n = d_{n+q} \qquad (9)$$
$$d_{n-1} = d_{n+q-1} \qquad (10)$$

sowie

$(n) \quad = \left(\{10x + k\} \cdot 10^y\right) = (k) \qquad$ (wegen $5 \nmid k$),

$(n+q) = \left(\{10x + 2k\} \cdot 10^y\right) = 2 \cdot (k)$ (wegen $5 \nmid k$).

Sei m eine beliebige natürliche Zahl, dann erhalten wir

$m! = 2^{r+s} \cdot 5^s \cdot t,\ r,\ s,\ t \in \mathbb{N}$ und $5 \nmid t,\ 2 \nmid t.$

Also ist

$d_m = (m!) = \left(10^s \cdot 2^r \cdot t\right) = \left(2^r\right) \cdot (t)$ (wegen (8))

und $5 \nmid d_m$.

Weiter ergibt sich

$d_n = (n!) = \left(\{n-1\}!\, n\right) \equiv \left(\{n-1\}!\right)(n) \equiv d_{n-1} \cdot (k) \pmod 5$

und analog

$d_{n+q} \equiv d_{n+q-1} \cdot 2\,(k) \pmod 5.$

Setzen wir die letzten beiden Ergebnisse in (9) ein, so folgt

$d_{n-1} \cdot (k) \equiv d_{n+q-1} \cdot 2(k) \pmod 5$ und mit (10)

$d_{n-1} \cdot (k) \equiv d_{n-1} \quad \cdot 2(k) \pmod 5$

also $(k) \equiv 2 \cdot (k) \pmod 5$

und $(k) \equiv 0 \pmod 5$, d. h., $5 \mid k$, Widerspruch!

Daher ist d_n nicht periodisch.

<u>Aufgabe 4</u>

Es gilt $\sum\limits_{i=1}^{1986} |M_i| > \frac{m}{2} \cdot 1986 = 993\ m.$

Also gibt es ein x_1, das in mindestens 994 Mengen M_i, etwa in M_i, $i = 993, \ldots, 1986$, enthalten ist. Für die Mengen M_i, $i = 1, 2, \ldots, 992$, gilt

$$\sum_{i=1}^{992} |M_i| > \frac{m}{2} \cdot 992 = 496 \cdot m.$$

Also gibt es ein x_2 in mindestens 497 dieser Mengen, etwa in M_i, $i = 496, \ldots, 992.$

Für die Mengen M_i, $i = 1, \ldots, 495$, gilt

$$\sum_{i=1}^{495} |M_i| > \frac{m}{2} \cdot 495 > 247\ m.$$

Also gibt es ein x_3 in mindestens 248 dieser Mengen,

etwa in M_i, $i = 248, \ldots, 495$.

Analog schließt man auf die Existenz von

x_4 in M_i, $i = 124, \ldots, 247$,
x_5 in M_i, $i = 62, \ldots, 123$,
x_6 in M_i, $i = 31, \ldots, 61$,
x_7 in M_i, $i = 15, \ldots, 30$,
x_8 in M_i, $i = 7, \ldots, 14$,
x_9 in M_i, $i = 3, \ldots, 6$.

Wegen $|M_1| + |M_2| > \frac{m}{2} \cdot 2 = m$

besitzen M_1 und M_2 mindestens ein gemeinsames Element x_{10}.

Markieren wir nun die zehn Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, so hat jede der 1986 Mengen zumindest ein markiertes Element.

<u>Aufgabe 5</u>

Angenommen, es gibt ein Polyeder P mit obigen Eigenschaften. Da jede Seitenfläche genau drei Kanten hat, aber jede Kante zu zwei Seitenflächen gehört, hat P genau $\frac{3}{2} \cdot 12 = 18$ Kanten. Da P konvex ist, hat P nach dem Eulerschen Polyedersatz genau acht Ecken. Es mögen genau l bzw. k Ecken existieren, von denen genau sechs bzw. drei Kanten ausgehen. Dann gilt $l + k = 8$ und $6l + 3k = 2 \cdot 18 = 36$, da jede Kante doppelt gezählt wurde.
Es folgt $l = k = 4$.
Es seien a, b, c, d die Eckpunkte von denen genau drei Kanten und A, B, C, D die Eckpunkte von denen genau sechs Kanten ausgehen.
Da von jedem "großen" Punkt genau sechs Kanten ausgehen, aber nur sieben andere Punkte existieren, müssen wenigstens drei Kanten zu den "kleinen" Punkten gehen. Das heißt, es gibt insgesamt mindestens zwölf Kanten, die die "großen" mit den "kleinen" Punkten verbinden. Da von den "kleinen" Punkten aber höchstens $3 \cdot 4 = 12$ Punkte ausgehen, muß also jeder "große" Punkt mit genau drei "kleinen" verbunden sein. Weiter folgt hieraus, daß die Punkte a, b,

c, d untereinander nicht verbunden sind, während bei A, B, C, D alle Verbindungen ausgeschöpft sein müssen. Es sei nun jeweils A mit a, B mit b, C mit c und D mit d nicht verbunden. B und d sind untereinander und gemeinsam nur mit A und C verbunden. Da $\overline{dB}$ eine Kante von P ist, folgt daß AdB und CdB Seitenflächen sind. Analog zeigt man, daß AdC auch eine Seitenfläche ist. Man betrachtet nun die Pyramide ABCd.

Da nach Voraussetzung die Schnittwinkel zwischen den drei eben aufgeführten Seitenflächen gleich groß sind, gilt auch
$\sphericalangle AdB = \sphericalangle BdC = \sphericalangle CdA$. Da es mit x und y nur zwei verschiedene Streckenlängen gibt, sind von den drei Strecken $\overline{Ad}$, $\overline{Bd}$, $\overline{Cd}$ mindestens zwei gleichlang.

O.B.d.A. gelte $\overline{Ad} = \overline{Cd} = x$. Aus der Gleichschenkligkeit der Seitenflächen folgt $\overline{Bd} = x$. Damit sind die drei Seitenflächen kongruent und es gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$. Analog zeigt man, daß jede Seitenfläche der Pyramide ABCD ein gleichseitiges Dreieck ist. Also ist ABCD ein regelmäßiges Tetrader. d liegt offenbar senkrecht über dem Schwerpunkt von ABC. Analog folgt, daß a über dem Schwerpunkt von BCD, b über dem Schwerpunkt von ACD und c über dem Schwerpunkt von ABD liegt. Damit setzt sich P aus dem regelmäßigen Tetrader ABCD, auf dessen Flächen die Pyramiden ABCd, ABDc, ACDb, BCDa aufgesetzt sind, zusammen.

Angenommen, es gilt $\overline{AB} = x$, dann gibt es in der Doppelpyramide, die sich aus den regelmäßigen Pyramiden ABCD und ABCd zusammensetzt, zwei verschiedene Winkel zwischen benachbarten Flächen, nämlich den Winkel zwischen den Flächen ABD und ABd und den Winkel zwischen ABd und ACd. Der erste Winkel (der doppelt so groß ist, wie der zweite) wird durch Aufsetzen der Pyramide ABDc zum Winkel zwischen ABd und ABc bei P, der noch größer ist. Damit läßt sich Forderung d) also nicht erfüllen. Also gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = y$ und aus Analogieüberlegungen heraus $\overline{Ba} = \overline{Ca} = \overline{Da} = \overline{Ab} = \overline{Cb} = \overline{Db} = \overline{Ac} = \overline{Bc} = \overline{Dc} = x$. In dem bis auf Vertauschung von x und y eindeutig bestimmten Polyeder P gibt es genau zwei verschiedene Winkel zwischen zwei benachbarten Randflächen. Es sei α der Winkel zwischen ABd und CBd. Da Dreieck ABd gleichschenklig ist, folgt

$\cos(\sphericalangle ABd) = \frac{y}{2x}$, also $\sin(\sphericalangle ABd) = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2x}\right)^2}$.

Es sei P der Fußpunkt des Lotes von A auf die Gerade Bd. P ist aus Symmetriegründen zugleich Fußpunkt des Lotes von C auf die gleiche Gerade. Also gilt $\overline{AP} = \overline{CP} = \overline{AB} \cdot \sin(\sphericalangle ABP) = \overline{AB} \sin(\sphericalangle ABd) =$
$= y\sqrt{1 - \left(\frac{y}{2x}\right)^2}$.

Im gleichschenkligen Dreieck APC ist $\sphericalangle APC = \alpha$ und folglich
$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{2y\sqrt{1 - \left(\frac{y}{2x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}}$. Alle weiterhin auftretenden Radikanten sind infolge der Dreiecksungleichung positiv.

Es sei β der Winkel zwischen ABd und ABc, γ der Winkel zwischen ABd und ABC (dieser Winkel ist gleich dem Winkel zwischen ABD und ABc) und δ der Winkel zwischen ABC und ABD. Dann gilt $\beta = 2\gamma + \delta$.
Bekanntlich gilt, da ABCD ein regelmäßiges Tetraeder ist,
$\cos\delta = \frac{1}{3}$. Damit sind $\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ und $\cos\frac{\delta}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

Es sei d' der Schwerpunkt des Dreiecks ABC und Q der Fußpunkt des Lotes von d' auf AB. Aus Symmetriegründen ist Q zugleich der Fußpunkt des Lotes von d auf AB.

Nun gilt $\overline{d'Q} = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,y$, $\overline{dQ} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}$ und damit
$\overline{dd'} = \sqrt{\overline{dQ}^2 - \overline{d'Q}^2} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{3}y^2}$. Also ist $\sin\gamma = \sin(\sphericalangle dQd') =$
$= \sqrt{\frac{x^2 - \frac{1}{3}y^2}{x^2 - \frac{1}{4}y^2}}$ und $\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}\,y}{6\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}y^2}}$.

Da laut Forderung d) $\alpha = \beta$ gelten soll, muß $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2} =$
$= \sin\left(\gamma + \frac{\delta}{2}\right) = \sin\gamma\cos\frac{\delta}{2} + \cos\gamma\sin\frac{\delta}{2}$ gelten.

Durch Einsetzen der errechneten Werte ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} = \sqrt{\frac{x^2 - \frac{1}{3}y^2}{x^2 - \frac{1}{4}y^2}}\;\frac{1}{3}\sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}\,y}{6\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}y^2}}\;\frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{6}\sqrt{x^2 - \frac{1}{3}y^2} + \frac{1}{6}y,$$

$$3\frac{x}{y} = 2\sqrt{6}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{1}{3}} + 1 \quad \text{und mit } u = \frac{x}{y}$$

$2\sqrt{6}\,\sqrt{u^2 - \frac{1}{3}} = 3u - 1,$

$24\,u^2 - 8 = 9\,u^2 - 6\,u + 1,$

$15\,u^2 + 6u - 9 = 0,$

$u^2 + \frac{2}{5}\,u - \frac{3}{5} = 0$, also wegen $u > 0$,

$u = \frac{x}{y} = \frac{3}{5}.$

Tatsächlich hat das eindeutig (bis auf Vertauschen von x und y) ermittelte Polyeder P nach Konstruktion die geforderten Eigenschaften. Damit ist das gesuchte Verhältnis $\frac{3}{5}$ oder $\frac{5}{3}$.

(Die Lösung geht auf die Arbeiten von Ingo Warnke und Gunter Döge zurück.)

Aufgabe 6

1. Lösung:

Angenommen, es gibt reelle Zahlen a, so daß alle Wurzeln x_i ($i = 1, \ldots, 6$) reell sind. Da $x = 0$ keine Wurzel der Gleichung ist, sei im weiteren $x \neq 0$. Die Gleichung ist damit äquivalent zu

$$x^3 + 3x^2 + (6 - a)x + 7 - 2a + (6 - a)\frac{1}{x} + 3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0.$$

Nach der Substitution $t = x + \frac{1}{x}$ (11)

folgt $t^3 + 3t^2 + (3 - a)\,t + 1 - 2a = 0$ und mit $z = t + 1$ ergibt sich $p(z) = z^3 - az - a = 0.$ (12)

Wegen $x + \frac{1}{x} \geqq 2$ für $x > 0$ und $x + \frac{1}{x} \leqq -2$ für $x < 0$ gilt $|t| \geqq 2$.

Umgekehrt findet man zu jedem t mit $|t| \geqq 2$ aus (11) reelle x, denn die Diskriminante der Gleichung

$x^2 - tx + 1 = 0$ ist wegen $\frac{t^2}{4} - 1 \geqq 0$. Damit gilt:

Genau dann, wenn die drei Lösungen von (12) reell sind und $z \geqq 3$ oder $z \leqq -1$ gilt, gilt $|t| \geqq 2$ und damit gibt es zu jedem z-Wert zwei reelle x-Werte und damit sind alle x_i reell.

Es wird nun Gleichung (12) weiter untersucht.

Für $a < 0$ ist $p'(z) = 3z^2 - a > 0$ und daher ist $p(z)$ streng monoton wachsend und kann daher nicht drei reelle Nullstellen haben. Für $a = 0$ hat $p(z) = 0$ die dreifache Lösung $z = 0$, die aber den Ungleichungen $z \geqq 3$ oder $z \leqq -1$ widerspricht.
Sei $a > 0$. Dann hat $p(z) = 0$ nach der Lösungsformel für die kubische Gleichung genau dann drei reelle Nullstellen, wenn

$\frac{a^2}{4} - \frac{a^3}{27} \leqq 0$, $a \geqq \frac{27}{4}$ ist. Es verbleibt der Nachweis, daß für $a \geqq \frac{27}{4}$ die Ungleichungen $z \geqq 3$ oder $z \leqq -1$ erfüllt sind.

Angenommen, es gilt $z \in (-1,0]$. Dann ist $-1 < z^3 \leqq 0$ und $0 < a\,(z + 1) \leqq a$, d. h., die Gleichung (12) kann nicht bestehen.

Angenommen, es gilt $z \in (0,3)$. Dann ist

$$0 > (z - 3)\,(z + \tfrac{3}{2})^2 = z^3 - \tfrac{27}{4}z - \tfrac{27}{4} \geqq z^3 - az - a$$

und die Gleichung (12) kann ebenfalls nicht erfüllt sein.

Damit erfüllen genau alle reellen Zahlen a mit $a \geqq \frac{27}{4}$ die Aufgabenstellung.

<u>2. Lösung</u> (nach Jörg Jahnel und Jörg Wensch)

Mit x_i ist auch $\frac{1}{x_i}$ Wurzel der betrachteten Gleichung. Damit tritt zu jedem Linearfaktor $x - x_i$, der im betrachteten Polynom enthalten ist, auch der Linearfaktor $x - \frac{1}{x_i}$ auf.

Nun ist aber $(x - x_i)(x - \frac{1}{x_i}) = x^2 - (x_i + \frac{1}{x_i})\,x + 1$ und $|x_i| \geqq 2$.

Somit läßt sich das Ausgangspolynom als $(x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1)(x^2 + c_3x + 1)$ darstellen, wobei $|c_i| \geqq 2$ gelten muß, damit alle Wurzeln reell sind. Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$c_1 + c_2 + c_3 = 3$, $3 + c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 = 6 - a$,

$c_1c_2c_3 + 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 7 - 2a$ und weiter

$c_1 + c_2 + c_3 = 3$, $c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 = 3 - a$, $c_1c_2c_3 = 1 - 2a$.

Die Zahlen c_i sind nach Vieta Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + (3 - a)x - (1 - 2a) = 0.$$

Mit $t = x - 1$ folgt $p(t) = t^3 - at + a = 0$ und $t \leq -3$ oder $t \geq 1$. Die Diskussion der kubischen Gleichung verläuft für $a \leq 0$ wie in der 1. Lösung. Für $a > 0$ hat $p(t)$ an der Stelle $\sqrt{\frac{a}{3}}$ ein lokales Minimum und an der Stelle $-\sqrt{\frac{a}{3}}$ ein lokales Maximum. Damit $p(t) = 0$ drei reelle Wurzeln hat, muß $p\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \leq 0$ sein. Dies ist äquivalent zu $a \geq \frac{27}{4}$. Dieses lokale Minimum wird an der Stelle $\sqrt{\frac{a}{3}} \geq \sqrt{\frac{27}{12}} > 1$ angenommen, während $p(1) = 1 > 0$ ist. Also gibt es für $t \geq 1$ zwei reelle Nullstellen. Da $p(-3) = -27 + 4a \geq 0$ ist, gibt es für $t \leq -3$ eine reelle Nullstelle. Damit sind genau alle a mit $a \geq \frac{27}{4}$ die gesuchten.

<u>3. Lösung</u> (nach R. Stiebe und Gunter Döge)
Die Substitution $z = x(1 + x)$ überführt die Ausgangsgleichung in $p(z) = z^3 + (3 - a) z^2 + 3z + 1 = 0$, deren Wurzeln reell und wegen $(x + 1)x \geq -\frac{1}{4}$ auch größer gleich $-\frac{1}{4}$ sein müssen. Die Lösungsmenge gewinnt man aus der Bedingung $p\left(-\frac{1}{4}\right) \leq 0$. Ferner hat man $p(z_1) \geq 0$, $p(z_2) \leq 0$ zu zeigen, wobei $z_1 < z_2$ die Lösungen von $p'(z) = 0$ sind.

<u>4. Lösung</u> (nach Torsten Tok)
Mit x ist auch $\frac{1}{x}$ Nullstelle des Ausgangspolynoms $f(x)$. Also existieren im Intervall $[-1,1]$ mindestens drei Wurzeln. Es ist aber $f(-1) = 1$, $f(0) = 1$ und $f(1) = 27 - 4a$. Ist $27 - 4a > 0$, so liegen in den Intervallen $[-1,0]$ und $[0,1]$ geradzahlig viele Nullstellen und damit können nicht alle Wurzeln reell sein. Also ist $a \geq \frac{27}{4}$ notwendig und es ist noch die Hinlänglichkeit zu zeigen.

<u>Aufgabe 7</u>

<u>1. Lösung</u> (nach Torsten Tok)
Angenommen, es gibt einen Punkt P im Dreieck ABC mit obigen Eigenschaften. Ist $P \equiv C$, so gilt offenbar $\sphericalangle APB = \sphericalangle AQB = \gamma$. Im weiteren sei daher $P \neq C$.
Die Winkelhalbierende AQ_1 des Winkels $\sphericalangle CAP$ teilt die Strecke PC im Verhältnis der anliegenden Seiten, d. h., es ist

$\frac{\overline{PQ_1}}{\overline{Q_1C}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$. Analog ergibt sich mit der Winkelhalbierenden BQ_2 des

Winkels $\sphericalangle CBP$: $\frac{\overline{PB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{PQ_2}}{\overline{Q_2C}}$ (Q_1 und Q_2 liegen auf CM). Damit ist für die Existenz eines Punktes Q mit den geforderten Eigenschaften auf CM notwendig und hinreichend, daß Q_1 und Q_2 zusammenfallen.

Sie fallen genau dann zusammen, wenn (13) $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{BC}}$ gilt.

Es folgt der Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für P. Es sei nun P' der zweite Schnittpunkt von CM mit dem Umkreis des Dreiecks ABC. Dann gilt für die Flächen der Dreiecke AMC und BMC bzw. AMP' und BMP': F(AMC) = F(BMC) bzw. F(AMP') = F(BMP'), da die gleiche Grundseite $\overline{AM} = \overline{BM}$ und die gleiche Höhe auf AB auftritt. Durch Addition folgt F(AP'C) = F(BP'C), also

$\frac{1}{2}$ CA · AP' sin ($\sphericalangle$ P'AC) = $\frac{1}{2}$ BC · P'B sin ($\sphericalangle$ P'BC). Nun gilt im Sehnenviereck AP'BC: $\sphericalangle P'AC + \sphericalangle P'BC = 180^\circ$, also ist

sin ($\sphericalangle$ P'AC) = sin ($\sphericalangle$ P'BC) und mithin ist (14) $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BP'}}{\overline{AP'}}$.

Wird nun der Punkt P' um 180° um M gedreht, so gilt:
Das Bild von P' sei P und es ist $\overline{AP} = \overline{BP'}$ und $\overline{AP'} = \overline{BP}$.

Mit (14) folgt dann $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$. Somit ist dieser eben konstruierte Punkt P einer, der die Bedingung (13) erfüllt. Angenommen, es gibt einen weiteren Punkt P_1 mit

$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{BP_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ und $P_1 \neq C$, $P_1 \neq P$. P_1 wird nun um 180° um M gedreht; es entsteht P_1' mit $\overline{P_1'A} = \overline{P_1B}$, $\overline{P_1'B} = \overline{P_1A}$.

Analog zu oben gilt $F(AP_1'C) = F(BP_1'C)$, also $\frac{1}{2}$ AP_1' AC sin ($\sphericalangle P_1'AC$) = $\frac{1}{2}$ $P_1'B$ · BC sin ($\sphericalangle P_1'BC$) und damit sin ($\sphericalangle P_1'AC$) = sin ($\sphericalangle P_1'BC$). Da $0 < \sphericalangle P_1'AC$, $\sphericalangle P_1'BC < 180^\circ$ gilt, folgt $\sphericalangle P_1AC + \sphericalangle P_1BC = 180^\circ$. Also ist das Viereck P_1ACB ein Sehnenviereck und damit ist $P_1 = P$ im Widerspruch zur Annahme. Damit existiert genau ein Punkt P mit den geforderten Eigenschaften. Nun ist $\sphericalangle AP'B = \sphericalangle APB$, da P das Bild von P' bei Drehung um 180° ist und $\overline{MA} = \overline{MB}$ gilt. Im Sehnenviereck AP'BC gilt $\sphericalangle AP'B + \sphericalangle ACB = 180^\circ$. Damit ist

$\sphericalangle APB = \sphericalangle AP'B = 180^\circ - \sphericalangle ACB = 180^\circ - \gamma$.

Im Dreieck ABP ist $\sphericalangle ABP + \sphericalangle APB + \sphericalangle PAB = 180^\circ$, also ist $\sphericalangle ABP + \sphericalangle BAP = \gamma$. Es sei $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle CBA$, $\alpha_1 = \sphericalangle BAP$ und $\beta_1 = \sphericalangle ABP$. Dann gilt $\sphericalangle QAP = \frac{\alpha - \alpha_1}{2}$, $\sphericalangle QBP = \frac{\beta - \beta_1}{2}$ und im Dreieck ABQ:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle AQB &= 180^\circ - \sphericalangle QAB - \sphericalangle QBA \\
&= 180^\circ - (\sphericalangle PAB + \sphericalangle QAP) - (\sphericalangle PBA + \sphericalangle QBP) \\
&= 180^\circ - \gamma - \frac{\alpha - \alpha_1}{2} - \frac{\beta - \beta_1}{2} \\
&= 180^\circ - \gamma + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \\
&= 180^\circ - \gamma + \frac{\gamma}{2} - 90^\circ + \frac{\gamma}{2} \\
&= 90^\circ.
\end{aligned}$$

<u>2. Lösung</u> (nach Martin Welk und Harald Heidler)

Zunächst wird analog zur 1. Lösung die Bedingung (13) hergeleitet. Hieraus folgt $\overline{AP}^2 \cdot \overline{BC}^2 = \overline{BP}^2 \cdot \overline{AC}^2$ (15). Es sei $\delta = \sphericalangle AMC$. Dann ist $\cos(\sphericalangle BMC) = -\delta$. Nach dem Kosinussatz ist $\overline{AP}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MP}^2 - 2\,\overline{AM}\,\overline{MP}\cos\delta$, $\overline{BC}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MC}^2 + 2\,\overline{BM}\cdot\overline{MC}\cos\delta$, $\overline{BP}^2 = \overline{BM}^2 + 2\,\overline{BM}\cdot\overline{MP}\cos\delta$ und $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - 2\,\overline{AM}\cdot\overline{MC}\cos\delta$. Setzt man dies in (15) ein, so entsteht nach Vereinfachung

$$\overline{AM}\,(\overline{AM}^2 - \overline{MP}\cdot\overline{MC})\,(\overline{MC} - \overline{MP})\cos\delta = 0.$$

Angenommen, es gilt $\cos\delta = 0$. Dann folgt $\overline{AC} = \overline{CB}$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung.

Gilt $\overline{MC} - \overline{MP} = 0$, so folgt $P = C$ und damit $\sphericalangle APB = \sphericalangle AQB = \gamma$.

Damit verbleibt die Untersuchung von $\overline{AM}^2 - \overline{MP}\cdot\overline{MC} = 0$. Dies ist äquivalent zu $\frac{\overline{AM}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{AM}}$ und wegen $\overline{AM} = \overline{BM}$ auch zu $\frac{\overline{BM}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{BM}}$.

Da zudem $\sphericalangle AMC$ Innenwinkel der Dreiecke AMC und AMP und $\sphericalangle BMC$ Innenwinkel der Dreiecke BMC und BMP ist, gilt $\triangle AMP \sim \triangle AMC$ und $\triangle BMP \sim \triangle BMC$. Schließlich kann man hieraus durch elementare Rechnung (ähnlich der 1. Lösung) die gesuchten Winkel bestimmen. Zusätzlich ist noch der Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für P zu führen.

Aufgabe 8 (nach Jörg Jahnel und Jörg Wensch)

Da von den sieben Punkten keine vier in einer Ebene liegen, liegen auch keine drei auf einer Geraden. Damit existiert zu je drei der sieben Punkte tatsächlich ein Dreieck. Die sieben Punkte seien A, B, C, D, E, F, G. Zunächst wird folgende Aussage der Ramsey-Theorie bewiesen: Wenn sechs Punkte paarweise rot oder blau verbunden sind, dann existiert ein einfarbiges Dreieck. (16)

Beweis: Von A gehen genau fünf Verbindungsstrecken aus, die entweder rot oder blau sind. Nach dem Schubfachprinzip gibt es drei Punkte, o.B.d.A. B, C, D, die mit A durch rot verbunden sind. Ist eine der Strecken BC, CD, DB rot, so bilden die Endpunkte dieser Strecke mit A ein einfarbiges Dreieck. Anderenfalls sind BC, CD, DB blau, also bilden B, C, D ein einfarbiges Dreieck.

Die Behauptung der Aufgabe wird nun indirekt bewiesen. Angenommen, es existiert eine Färbung, die keine zwei einfarbigen Dreiecke ohne gemeinsame Seite enthält. Durch Weglassen eines Punktes erhält man nach (16) die Existenz eines einfarbigen Dreiecks. Dies sei o.B.d.A. das Dreieck ABC mit der Farbe blau. Nun läßt man Punkt A weg, nimmt den vorher weggelassenen Punkt wieder hinzu und erhält nach (16) ein weiteres einfarbiges Dreieck, das laut Annahme mit ABC eine Seite gemeinsam hat. Da A nicht Eckpunkt des neuen Dreiecks ist, muß diese Seite BC sein. O.B.d.A. ist also Dreieck BCD ebenfalls blau. Durch Hinzunehmen von A und Weglassen von B erhält man mittels (16) ein weiteres einfarbiges Dreieck, das mit den Dreiecken ABC und BCD eine Seite gemeinsam hat. Offenbar sind dies die Seiten AC bzw. CD. Also ist ACD ein weiteres blaues Dreieck.

Folglich ist ABCD ein Tetraeder, dessen Kanten blau gefärbt sind.

Angenommen, von einem der Punkte E, F, G, o.B.d.A. von E, gehen zwei blaue Strecken aus. O.B.d.A. mögen sie zu A, B führen. Dann wären die Dreiecke ABE und ACD blau gefärbt im Widerspruch zur Annahme.

Von jedem der Punkte E, F, G geht also höchstens eine blaue Strecke aus. Damit ist einer der vier Punkte A, B, C, D, o.B.d.A. sei es A, mit E, F und G rot verbunden. Wäre nun EF, FG oder GE rot, so wäre AEF, AFG oder AGE ein rot gefärbtes Dreieck, das mit den bereits bestehenden blau gefärbten Dreiecken offenbar keine Seite gemeinsam hat. Da dies der Annahme widerspricht, müssen EF, FG

und GE blau sein. Also ist EFG ein blau gefärbtes Dreieck, das mit den bereits bestehenden blau gefärbten Dreiecken offenbar keine Seite gemeinsam hat. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.
Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.
Eine analoge Aussage für sechs Punkte ist falsch. Es seien AB, AC, AE, BC, BD, CD, DF, EF blau und die restlichen Strecken rot gefärbt. Offenbar gibt es keine rot gefärbten Dreiecke. Die beiden blau gefärbten Dreiecke ABC und BCD haben aber die gemeinsame Seite BC. Damit ist ein Gegenbeispiel gefunden.

Aufgabe 9

a) In der Zeit t legt der Fußgänger einen Weg wt zurück. Für die Zeit, die er benötigt, um die "Gefahrenzone" der Breite a zu durchqueren, gilt daher $t = \frac{a}{w}$. In dieser Zeit legen die Autos jeweils einen Weg von $vt = \frac{av}{w}$ zurück. Da auch ein seitliches Hineinlaufen in ein Auto zum Unfall führt, decken die Autos eine Strecke der Länge $b + \frac{av}{w}$ von jedem der "repräsentativen Abschnitte" der Länge b + c ab. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Unfall auftritt, beträgt daher

$\frac{b + \frac{av}{w}}{b + c}$, falls dies kleiner gleich 1 ist

1 , sonst.

Es folgt

$$P = \begin{cases} \frac{c - \frac{av}{w}}{b + c}, & \text{falls} \quad c > \frac{av}{w} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} = \max. \left\{ \frac{c - \frac{av}{w}}{b + c}, 0 \right\}.$$

b) Es sei α der Winkel zwischen dem rechten Straßenrand und der Richtung des Fußgängers. Offenbar genügt es, alle α mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ zu betrachten. ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ führt auf Fall a)).

1. Fall: Es sei $w > v$. Der Fußgänger wählt α so, daß $\cos \alpha = \frac{v}{w}$ gilt. Seine Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Autobewegung beträgt dann $w \cdot \cos \alpha = w \cdot \frac{v}{w} = v$. Der Fußgänger kann damit im gesamten Bereich der Länge c losgehen, ohne daß es zu einem Unfall kommt, da die Autos immer konstanten Abstand zu ihm haben.

Die Wahrscheinlichkeit, die Straße unverletzt zu überqueren, beträgt daher $\frac{c}{b + c}$. Diese ist offenbar positiv und größer als $\frac{c - \frac{aw}{v}}{b + c}$.

Also kann in diesem Fall der Fußgänger die Wahrscheinlichkeit vergrößern.

2. Fall: Es sei $w \leq v$.

Die Geschwindigkeitskomponente des Fußgängers in Richtung der Autobewegung ist $w \cos\alpha$. Seine Ortskoordinate in Richtung der Autobewegung zum Zeitpunkt t ist $O + wt\cos\alpha$, wobei O den Startpunkt mit O in $[0, b+c]$ bezeichne. Da wegen $w \cos\alpha \leq v$ das nächste Auto nicht eingeholt werden kann, muß für alle t gelten: $O + wt \cos\alpha \geq b + vt$, also $O \geq b + t\,(v - w \cos\alpha)$.

t kann alle Werte von 0 bis $\frac{a}{w \sin\alpha}$ annehmen, da nach der Zeit $\frac{a}{w \sin\alpha}$ die "Gefahrenzone" der Breite a durchquert ist. Wegen $v-w \cos\alpha \geq 0$ folgt damit $O \geq b + \frac{a}{w \sin\alpha} \cdot (v-w \cos\alpha)$. Das Intervall aller erlaubten Startpunkte hat also die Länge $c - \frac{a}{w \sin\alpha}(v-w \cos\alpha)$. Die in diesem Fall vorliegende Wahrscheinlichkeit ist damit

$$\begin{cases} \dfrac{c - \frac{a}{w \sin\alpha}(v-w\cos\alpha)}{b + c}, & \text{falls dies positiv ist} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit kann der Fußgänger die Wahrscheinlichkeit genau dann verbessern, wenn es ein α gibt, so daß

(17) $\frac{a}{w \sin\alpha}(v-w \cos\alpha) < \frac{av}{w}$, falls $c > \frac{av}{w}$ gilt und

(18) $\frac{a}{w \sin\alpha}(v-w \cos\alpha) < c$, falls $c \leq \frac{av}{w}$ ist.

Es sei zunächst $c > \frac{av}{w}$. (17) ist äquivalent mit

(17') $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} > \frac{v}{w}$. Nun gilt $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$,

also kann der Term $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$ für $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ beliebig große Werte annehmen. Also gibt es Werte α, die (17') erfüllen und die damit (17) genügen. Also kann der Fußgänger in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit verbessern. Es sei nun $c \leqq \frac{av}{w}$. (18) ist äquivalent mit

(18') $\frac{v}{w} < \frac{c}{a} \sin \alpha + \cos \alpha$. Die Funktion $f(\alpha) = \frac{c}{a} \sin \alpha + \cos \alpha$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ hat für $\alpha = \operatorname{Arctan} \frac{c}{a}$ ein lokales Maximum. Also gilt

$f(\alpha) = \cos \alpha \ (1 + \frac{c}{a} \tan \alpha) \leqq \cos (\operatorname{Arctan} \frac{c}{a}) \ (1 + \frac{c^2}{a^2}) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}}} \ (1 + \frac{c^2}{a^2}) = \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}}.$$

Ist nun $\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}} > \frac{v}{w}$, so gibt es ein α , das (18') und damit auch (18) erfüllt. Also kann der Fußgänger seine Wahrscheinlichkeit verbessern.

Ist dagegen $\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}} \leqq \frac{v}{w}$, so gibt es kein α , das (18') und damit auch (18) erfüllt. In diesem Fall kann der Fußgänger seine Wahrscheinlichkeit nicht verbessern. (Sie ist in beiden Fällen gleich Null.)

(Die Lösung geht auf Jörg Jahnel und Stefan Günther zurück.)

<u>Aufgabe 10</u>

Diese Aufgabe bereitete unseren Schülern große Schwierigkeiten. Die beiden einzigen erbrachten Lösungen geben wir nachfolgend wieder.

<u>1. Lösung</u> (nach Sven Suska):

Es seien f und g beliebige Funktionen aus C. Dann gilt auch
$h = E\ [S\ (ff + gg + fg + fg + f + f + f + g)] \in C$ und weiter

$h = E\ (f^2 + g^2 + 2fg + 3f + g + 1) =: E\ (y)$

Ist nun $f \geqq g$, so folgt

$(f + g + 1)^2 \leqq y < f^2 + g^2 + 2fg + 4f + 4g + 4 = (f + g + 2)^2$

und damit $h = f - g$.

ist $f < g$, so gilt

$(f + g)^2 < y = (f + g + 1)^2 + f - g < (f + g + 1)^2$

und damit $h = \cancel{2fg} + 3f + g + 1$. Es gilt also

$$h(x) = \begin{cases} f(x) - g(x), & \text{falls } f \geq g \\ \cancel{2f(x)g(x)} + 3f(x) + g(x) + 1, & \text{falls } f < g. \end{cases}$$

Es sei nun $u = S(\cancel{fg + fg} + f + f + f + g)$. Dann gilt $u \in C$ und $u(x) = \cancel{2f(x)g(x)} + 3f(x) + g(x) + 1$. Offenbar gilt $h \leq u$, denn für $f < g$ gilt $u = h$ und für $f \geq g$ ist $\cancel{2fg} + 3f + g + 1 > f - g$.

Nun sei
$v = E\ [S\ (hh + uu + hu + hu + u + u + u + h)]$. Dann gilt $v \in C$ und da $h \leq u$ ist, folgt analog zur Untersuchung von h, daß $v\ (x) = u\ (x) - h\ (x)$ und damit

$$v(x) = \begin{cases} 0 & , \text{falls } f < g \\ \cancel{2f(x)g(x)} + 2f(x) + 2g(x) + 1, & \text{falls } f \geq g \end{cases}$$ gilt.

Wegen $v \in C$ ist auch $w = E\ [S\ (vv)] = E\ (v^2 + 1) \in C$.
Wenn $f \geq g$ ist, folgt $v = \cancel{2fg} + 2f + 2g + 1$ und damit $v \geq 1$.
Weiter ist $(v + 1)^2 = v^2 + 2v + 1 > v^2 + 1 > v^2$, also
$E\ (v^2 + 1) = v^2 + 1 - v^2 = 1$.

Ist $f < g$, so ist $v = 0$, $v^2 + 1 = 1$ und $E\ (v^2 + 1) = 0$.
Also ist

$$w(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } f < g \\ 1, & \text{falls } f \geq g. \end{cases}$$

Damit gilt für die zu C gehörende Funktion $z = hw$

$$z(x) = \begin{cases} f(x) - g(x), & \text{falls } f(x) \geq g(x) \\ 0 & , \text{falls } f(x) < g(x). \end{cases}$$

Also gibt es zu beliebigen Funktionen $f, g \in C$ eine Funktion $z \in C$ mit $z(x) = \max\{f(x) - g(x), 0\}$.

<u>2. Lösung</u> (nach Harald Heidler)
Es gilt $E(x) = 0$ genau dann, wenn x Quadratzahl ist und $E(x) > 0$ genau dann, wenn x keine Quadratzahl ist. Folglich

ist $\quad S\ [E(x)E(x)] = 1$, falls x Quadratzahl und
$\quad\quad S\ [E(x)E(x)] > 1$, falls x keine Quadratzahl.

Es sei $Q(x) := E\ \{S\ [E(x)E(x)]\}$. Wegen $E(1) = 0$ gilt $Q(x) = 0$ genau dann, wenn x Quadratzahl ist. Es sei nun x keine Quadratzahl. Dann ist mit $E(x) = a > 0$
$S\ [E(x)E(x)] = a^2 + 1$. Wegen $a^2 < a^2 + 1 < a^2 + 2a + 1 =$

$= (a+1)^2$ ist $a^2 + 1$ keine Quadratzahl und daher gilt $Q(x) = 1$ genau dann, wenn x keine Quadratzahl ist.
Sicher gilt $Q \in C$ und damit

$$Q(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ Quadratzahl} \\ 1, & \text{falls } x \text{ keine Quadratzahl.} \end{cases}$$

Es wird nun eine Funktion A_n konstruiert mit $A_n \in C$ und

$$A_n(x) = \begin{cases} 0, & x = n \\ 1, & x \neq n. \end{cases}$$

Die Konstruktion wird mittels vollständiger Induktion nach n durchgeführt. Benötigt wird dazu noch die Hilfsfunktion
$H(x) := Q(S(S(S(x)))) \in C$. Es ist $H(0) = Q(3) = 1$
und $H(1) = Q(4) = 0$.
Induktionsanfang:
Man betrachtet $A_o(x) = Q(S(Q(x) + Q(S(x)))) \in C$. Für $x = 0$ ist $Q(x) = 0$, $Q(S(x)) = 0$, $S(Q(x) + Q(S(x))) = 1$, also $A_o(x) = 0$.
Ist $x \neq 0$ eine Quadratzahl, so ist $Q(x) = 0$, $Q(S(x)) = 1$, $S(Q(x) + S(Q(x))) = 2$, also $A_o(x) = 1$. Ist schließlich x keine Quadratzahl, so folgt $Q(x) = 1$, $Q(S(x)) = 1$ oder 0, $S(Q(x) + Q(S(x))) = 3$ oder 2, also $A_o(x) = 1$. Damit gilt $A_o \in C$ und

$$A_o(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0. \end{cases}$$

Induktionsvoraussetzung:
Für alle $x' < n$ gebe es eine Funktion $A_{x'} \in C$ mit

$$A_{x'}(x) = \begin{cases} 0, & x = x' \\ 1, & x \neq x'. \end{cases}$$

Induktionsschritt:
k_n sei die Differenz aus der kleinsten Quadratzahl, die größer gleich n ist, und n. k_n' sei die Differenz aus der kleinsten Quadratzahl, die größer als $n + k_n$ ist, und n.

Es sei $B_n(x) = Q(S\ [Q(\underbrace{S(\ldots S}_{k_n \text{ mal } S}(x)\ldots)) + Q(\underbrace{S(\ldots S}_{k_n' \text{ mal } S}(x)\ldots))])$.

Offenbar ist $B_n \in C$.

Für $x = n$ ist $Q(S(\ldots S(x)\ldots)) = 0$ (k_n mal S), da $n + k_n$ nach Definition Quadratzahl ist. Ferner gilt auch $Q(S(\ldots S(x)\ldots)) =$ $= 0$ (k'_n mal S), da auch $n + k'_n$ nach Definition Quadratzahl ist. Also gilt in diesem Fall $B_n(x) = 0$. Für $x > n$ ist $Q(S(\ldots S(x)\ldots))$ (k_n mal S) oder $Q(S(\ldots S(x)\ldots))$ (k'_n mal S) ungleich 0. Da k_n bzw. k'_n nämlich jeweils die kleinsten Differenzen der entsprechenden Quadratzahlen zu n waren, ist $k'_x - k_x$ für $x > n$ entweder größer als $k'_n - k_n$ oder $k_x \neq k_n$ und $k'_x \neq k'_n$. Also ist für $x > n$ $B_n(x) = 1$.

Es kann noch sein, daß $B_n(x) = 0$ für $x < n$ ist. Ist dies für irgendein $x' < n$ der Fall, so wird $B'_n \in C$ durch $B'_n(x) = H(A_{x'}(x)) +$ $+ B_n(x)$ gebildet. Es ist

$$H(A_{x'}(x)) = \begin{cases} 1, & x = x' \\ 0, & x \neq x \end{cases}, \text{ da } A_{x'}(x) \begin{cases} 0, & x = x' \\ 1, & x \neq x' \end{cases} \text{ gilt.}$$

Damit ist $B'_n(x') = 1 + 0 = 1$. Führt man diesen Prozeß für alle (endlich vielen) $x' < n$ durch, so erhält man zuletzt

$$A_n(x) = \begin{cases} 0, & x = n \\ 1, & x \neq n \end{cases}.$$ Damit ist die Konstruktion der A_n durchgeführt.

Nun gilt

$$M_n(x) = H(A_n(x)) = \begin{cases} 1, & x = n \\ 0, & x \neq n \end{cases}.$$

Die Funktion $L(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \max\{f(i) - g(i), 0\}\, M_i(x)$ gehört offenbar zu C. Es gilt für $x = i$: $\max\{f(i)-g(i),0\}\ M_i(i) =$ $= \max\{f(x) - g(x),0\}$, da $M_i(i) = 1$. Für $x \neq i$ ist $\max\{f(i) - g(i), 0\}.\ M_i(x) = 0$, da $M_i(x) = 0$ ist. Damit gilt $L(x) = \max\{f(x) - g(x), 0\} \in C$.

Aufgabe 11

Es sei O der Mittelpunkt der Inkugel. L bzw. N sei der Berührungspunkt der Kugel mit der Fläche ABD bzw. CAD. Da es sich um die Inkugel handelt, liegen K, L, M und N innerhalb der entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders.

Es ist also (19) $\sphericalangle AKB + \sphericalangle BKC + \sphericalangle CKA = 360^\circ$

(20) $\sphericalangle ALB + \sphericalangle BLD + \sphericalangle DLA = 360^\circ$

(21) $\sphericalangle BMC + \sphericalangle CMD + \sphericalangle DMB = 360^\circ$ und

(22) $\sphericalangle CNA + \sphericalangle AND + \sphericalangle DNC = 360^\circ$.

Es wird nun die Beziehung $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$ bewiesen.
Es sei ε die Ebene, die senkrecht auf $\overline{AB}$ steht und auf der K liegt. Sie schneide $\overline{AB}$ in P. Da die Ebene durch A, B, C Tangentialebene an die Kugel in Punkt K ist, steht der Radius $\overline{OK}$ senkrecht auf dieser Ebene. Also gilt $O \in \varepsilon$.
Es sei η die Ebene, die senkrecht auf $\overline{AB}$ steht und auf der L liegt. Analog zu obigem folgt $O \in \eta$.
Also gilt $\varepsilon = \eta$ und $K, L, O, P \in \varepsilon$.
Nun ist nach dem Gesagten $\sphericalangle OKP = \sphericalangle OLP = 90^\circ$, ferner $\overline{OK} = \overline{OL}$, da $\overline{OK}$ und $\overline{OL}$ Radien der Inkugel sind und damit $\triangle PKO \cong \triangle PLO$.
Insbesondere folgt $\overline{PK} = \overline{PL}$. Da $\varepsilon \perp \overline{AB}$ und $\varepsilon \cap \overline{AB} = P$ ist, folgt $\sphericalangle KPA = \sphericalangle LPA = \sphericalangle KPB = \sphericalangle LPB = 90^\circ$. Zusammenfassend ergibt sich also $\triangle APK \cong \triangle APL$, $\triangle BPK \cong \triangle BPL$ (nach sws). Daraus folgt $\sphericalangle AKP = \sphericalangle ALP$, $\sphericalangle BKP = \sphericalangle BLP$ und damit $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB =: \gamma$.
Analog zeigt man $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BKC =: \alpha$, $\sphericalangle CNA = \sphericalangle CKA =: \beta$, $\sphericalangle DLA = \sphericalangle DNA =: \delta$, $\sphericalangle DLB = \sphericalangle DMB =: \varphi$, $\sphericalangle DMC = \sphericalangle DNC =: \varrho$.
Setzt man dies in (19) bis (22) ein, so folgt:
$\gamma + \alpha + \beta = 360^\circ$, $\gamma + \varphi + \delta = 360^\circ$, $\alpha + \varrho + \varphi = 360^\circ$, $\beta + \delta + \varrho = 360^\circ$.
Addition der ersten beiden und Subtraktion der letzten beiden Gleichungen liefert $2\gamma - 2\varrho = 0$, also $\sphericalangle AKB = \sphericalangle DMC$.

Aufgabe 12 (nach Sven Suska)

Es sei s(n) die Summe aller speziellen Zahlen, die nicht größer als n sind. a(n) sei die Anzahl der speziellen Zahlen (ohne Null), die kleiner oder gleich n sind.
Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen $k > 0$ gilt
$s(4k-1) = k(4k-1)$ (23) und $a(4k-1) = 2k-1$. (24)

Beweis: Für k=1 gilt (24), denn $3 = 11_2$ ist die einzige spezielle Zahl, die kleiner oder gleich 3 ist. ($2 = 10_2$ und $1 = 1_2$ haben genau eine 1 in ihrer Binärdarstellung.) Damit ist auch $s(4k-1) = 3 = 1(4.1-1)$ und (23) gilt ebenfalls.
Die Behauptung gelte für k = m.
Man betrachtet nun die Zahlen 4m, 4m+1, 4m+2 und 4m+3. Die beiden letzten Ziffern dieser Zahlen in der Dualdarstellung sind entsprechend 00, 01, 10 und 11. Damit ist 4m genau dann speziell, wenn 4m+3 es auch ist und dies ist äquivalent damit, daß 4m+1 und auch 4m+2 nicht speziell sind. Es sind also entweder 4m und 4m+3 oder 4m+1 und 4m+2 speziell. Dies sind in beiden Fällen zwei hinzukommende spezielle Zahlen, deren Summe in beiden Fällen 8m+3 beträgt.
Also ist
$s(4m+3) = s(4m-1) + 8m+3 = m(4m-1) + 8m+3 = (m+1)(4m+3)$ und
$a(4m+3) = a(4m-1) + 2 = 2m-1 + 2 = 2(m+1)-1$, womit (23) und (24) für alle $k > 1$ bewiesen ist.
Für k = 993 ist a (3971) = 1985 und
s(3971) = 3.943.203.
Die gesuchte Summe beträgt also 3.943.203.

Aufgabe 13

Insgesamt seien die Personen $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$, und d_i sei die Anzahl der Gesprächsrunden, zu denen P_i gehört, $i = 1, \ldots, 2n$. Offenbar ist $d_i \geqq 2$.

Fall 1: Es gibt ein i mit $d_i = 2$. Sei P_i in C_p und C_q enthalten. Dann ist $|C_p - \{P_i\}| = |C_q - \{P_i\}| = n - 1$, da für alle $n - 1$ Ehepaare, außer für P_i und seinen Ehepartner, je ein Partner zu C_p und der andere zu C_q gehört. Dann gibt es $(n-1)(n-2)$ Paare $\{r,s\}$ mit $r, s \neq i$ und $P_r \in C_p$, $P_s \in C_q$. Je zwei dieser Paare sind in verschiedenen Gesprächsrunden erfaßt. Sonst gibt es zwei Elemente aus C_p bzw. C_q, die noch in einer zweiten Gesprächsrunde erfaßt werden, was der Aufgabenstellung widerspricht. Also ist unter Beachtung von $n \geqq 4$:

$$k \geqq 2+ (n-1)(n-2) \geqq 2n.$$

Fall 2: Für alle i gilt $d_i \geqq 3$. Wir ordnen jeder Person P_i eine Variable x_i zu, $i = 1, \ldots, 2n$, und setzen

$$y_j = \sum_{P_i \in C_j} x_i.$$

Für das lineare Gleichungssystem $y_1 = \dots = y_k = 0$ aus k Gleichungen mit 2n Unbekannten gibt es für $k < 2n$ eine nichttriviale Lösung für $x_1, \dots, x_{2n}$. Also reicht der Nachweis von

$$y_1 = \dots = y_k = 0 \Longrightarrow x_1 = \dots = x_{2n} = 0, \tag{25}$$

um auf $k \geqq 2n$ schließen zu können.
Sei dazu $M = \{\{i, j\} \mid P_i, P_j \text{ bilden ein Ehepaar}\}$ und M' die Komplementmenge von M. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{k} y_i^2 = \sum_{i=1}^{2n} d_i \cdot x_i^2 + 2 \cdot \sum_{\{i,j\} \in M'} x_i x_j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{2n} (d_i - 1) \cdot x_i^2 - 2 \sum_{\{i,j\} \in M} x_i x_j.$$

Folglich ist wegen $\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 \geqq 2 \sum_M x_i x_j$:

$$\sum_{i=1}^{k} y_i^2 \geqq \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{2n} (d_i - 2) x_i^2 \geqq \sum_{i=1}^{2n} x_i^2.$$

Daraus ergibt sich (25).

Aufgabe 14

Ja, solch Polynom gibt es. Dazu zähle man die Punkte (k,m) mit nichtnegativen Koordinanten, die unterhalb der Geraden $x + y = k + m$ liegen. Ihre Anzahl ist

$$q(k,m) = 1 + 2 + \dots + (k+m) = (k+m)(k+m+1) \cdot \frac{1}{2}$$

und setze

$$p(k,m) = q(k,m) + k.$$

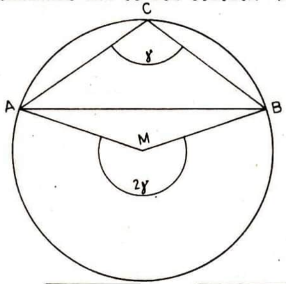
Dann ist $p(x,y) = ((x+y)^2 + 3x + y) \cdot \frac{1}{2}$ ein Polynom mit den gesuchten Eigenschaften.

Aufgabe 15 (nach Jörg Jahnel)

Die Lösung dieser Aufgabe gelang nur vier Schülern. Drei Schüler erbrachten Teilbeweise. Daher wird die Lösung ausführlich dargestellt.

I. Keines der $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ und $\triangle BCD$ enthält einen stumpfen Innenwinkel.

Beweis: Angenommen, eines dieser Dreiecke enthalte einen stumpfen Innenwinkel und es sei o.B.d.A $\sphericalangle BCA$ im $\triangle ABC$. M sei der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$. Nach dem Zentri-Peripheriewinkelsatz ist $\sphericalangle BMA = 2\gamma > 180^\circ$. Damit muß M außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$ liegen. O' sei der Fußpunkt des Lotes von O auf die Ebene durch A, B, C. R sei der Umkugelradius von T.



Dann gilt $OO' \perp AO'$, $OO' \perp BO'$, $OO' \perp CO'$ und nach dem Lehrsatz des Pythagoras folgt:

$$\overline{AO'} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{OO'}^2} = \sqrt{R^2 - \overline{OO'}^2},$$

$$\overline{BO'} = \sqrt{\overline{BO}^2 - \overline{OO'}^2} = \sqrt{R^2 - \overline{OO'}^2}$$ und

$$\overline{CO'} = \sqrt{\overline{CO}^2 - \overline{OO'}^2} = \sqrt{R^2 - \overline{OO'}^2}.$$ Also ist $\overline{AO'} = \overline{BO'} = \overline{CO'}$ und

damit ist O' der Umkreismittelpunkt vom $\triangle ABC$. Der Lotfußpunkt von O auf die Ebene durch A, B und C ist also M. Es sei nun N ein von M verschiedener Punkt dieser Ebene. Dann gilt $OM \perp MN$.

Nach Pythagoras folgt: $\overline{ON} = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{MN}^2} > \overline{OM}$. Daher kann eine Kugel mit dem Mittelpunkt O, die die Ebene durch A, B und C berührt, dies nur in M tun. Da M außerhalb des $\triangle ABC$ liegt, widerspricht dies der Voraussetzung, die Inkugel von T habe den Mittelpunkt O und berühre die Ebene durch A, B, C in einem inneren Punkt von $\triangle ABC$. Damit ist die Annahme widerlegt und der Beweis geführt.

II. Die Umkreisradien der Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ und $\triangle BCD$ sind paarweise gleich.

Beweis: r sei der Radius von K'. Wie in I. gezeigt, berührt K' die Ebene durch A, B und C im Umkreismittelpunkt M von $\triangle ABC$. Also gilt $\overline{OM} = r$.

In I. wurde ebenfalls gezeigt, daß M der Fußpunkt des Lotes von O auf die Ebene durch A, B, C ist. Also gilt $MA \perp OM$ und nach Pythagoras folgt $\overline{MA} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$. Der Umkreisradius von $\triangle ABC$ beträgt also $\sqrt{R^2 - r^2}$. Völlig analog kann man zeigen, daß auch die Umkreisradien von $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ und $\triangle BCD$ den gleichen Wert haben.

III. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle PQR$, ϱ sei sein Umkreisradius. Wenn $\triangle PQR$ nicht stumpfwinklig ist, dann gilt $\varrho = \frac{\overline{PQ}}{2 \sin (\sphericalangle QRP)}$.

Beweis: S sei der Umkreismittelpunkt von $\triangle PQR$. T sei der Fußpunkt des Lotes von S auf PQ. Nach dem Kongruenzsatz ssw folgt $\triangle STQ \cong \triangle STP$. Also ist $\overline{TP} = \frac{1}{2} \overline{QP}$. Nach dem Zentri-Peripheriewinkelsatz ist $\sphericalangle QSP = 2 \cdot \sphericalangle QRP$ und damit $\sphericalangle PST = \sphericalangle QRP$. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle PST$ ist damit $\overline{TP} = \frac{1}{2} \overline{QP} = \overline{SP} \cdot \sin (\sphericalangle PST) =$ $= \varrho \sin (\sphericalangle QRP)$ und die Behauptung ist bewiesen.

IV. in T gilt:

$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$,
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$.

Beweis: Es wird nur $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$ gezeigt. Die übrigen Gleichungen folgen nach Vertauschung der Variablen analog.
Nach II. sind die Umkreisradien von $\triangle ADB$ und $\triangle ACB$ gleich, nach I. sind beide Dreiecke nicht stumpfwinklig. Mit III. folgt

$$\frac{\overline{AB}}{2 \sin (\sphericalangle ADB)} = \frac{\overline{AB}}{2 \sin (\sphericalangle ACB)}, \quad \sin (\sphericalangle ADB) = \sin (\sphericalangle ACB)$$

und damit $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$, da beide nicht stumpf sind.

V. Es sei $\alpha_1 = \sphericalangle ADB$, $\alpha_2 = \sphericalangle ABC$, $\alpha_3 = \sphericalangle ABD$, $\alpha_4 = \sphericalangle BAC$, $\alpha_5 = \sphericalangle BAD$ und $\alpha_6 = \sphericalangle CAD$. Der Satz über die Innenwinkelsumme, angewendet auf die Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$, $\triangle BCD$, liefert (beachte IV.)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6 = \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 180^\circ.$$

Addiert man die beiden ersten Terme und subtrahiert die beiden letzten, so folgt $\alpha_1 = \alpha_6$. Analog erhält man $\alpha_2 = \alpha_5$ und $\alpha_3 = \alpha_4$.

Es muß also gelten: $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$,
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ und
$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$.

VI. Infolge dieser eben hergeleiteten Beziehungen folgt mittels Kongruenzsatz wsw:

$\triangle ABC \cong \triangle BAD$, also auch $\overline{BC} = \overline{AD}$ und $\overline{AC} = \overline{BD}$,
$\triangle ABD \cong \triangle CDB$, also auch $\overline{AB} = \overline{CD}$.

VII. Der Nachweis der vierten Gleichung erfolgt mit der Koordinatenmethode. O.B.d.A. gelte $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (x,y,0)$, $D = (a,b,c)$, wobei $y \neq 0$ sein muß. Nach Quadrieren der bereits bewiesenen drei Gleichungen und Einsetzen der Koordinaten ergibt sich:

$a^2 + b^2 + c^2 = (x-1)^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2$ und
$1 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + c^2$.

Die Addition der ersten und zweiten Gleichung führt auf

$$a = -x+1. \tag{26}$$

Die Subtraktion der dritten von der zweiten Gleichung ergibt

$b = \dfrac{a - ax - 1 + x^2 + y^2}{y} = \dfrac{y^2 + 2x^2 - 2x}{y}$ nach (26). Also gilt

$D = \left(-x+1, \dfrac{y^2 + 2x^2 - 2x}{y}, c\right)$ und daher $H' = \left(-x+1, \dfrac{y^2 + 2x^2 - 2x}{y}, 0\right)$.

Die Berechnung des Höhenschnittpunktes in $\triangle ABC$ ergibt

$H = \left(x, \dfrac{-x^2 + x}{y}, 0\right)$. Der Umkreismittelpunkt M des gleichen Dreiecks hat die Koordinaten

$$M = \left(\frac{1}{2}, \frac{x^2 - x + y^2}{2y}, 0\right).$$

Wie in I. gezeigt, ist M der Fußpunkt des Lotes von O auf die Ebene durch A, B, C.

Es folgt $O = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{x^2 - x + y^2}{2y}, d\right)$. Das Einsetzen der Koordinaten in die Abstandsformel ergibt sofort $\overline{OH} = \overline{OH'}$.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 26

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben seien 1000 Kugeln vom Gewicht $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 1000^2$. Man zeige, daß man aus ihnen zwei Gruppen aus jeweils 500 Kugeln bilden kann, so daß die Kugeln aus der ersten Gruppe und der zweiten Gruppe gleiches Gesamtgewicht haben.

Aufgabe 2

Die $19 \cdot 86$ Einheitsquadrate einer rechteckigen Tafel der Breite 19 und Länge 86 dürfen gefärbt werden. Zwei Spieler spielen folgendes Spiel. Sie ziehen abwechselnd. In jedem Zug darf der jeweilige Spieler ein Einheitsquadrat oder mehrere Einheitsquadrate, die insgesamt ein Quadrat bilden, färben. Kein Quadrat darf mehrfach gefärbt werden. Sieger ist derjenige, der den letzten Zug macht. Man beweise, daß der Spieler, der den ersten Zug macht, stets gewinnen kann (d. h.: es gibt eine Strategie, die ihm den Gewinn sichert).

Aufgabe 3

Man zeige, daß es in der Ebene mit einem gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinatensystem kein (nicht entartetes) konvexes Viereck gibt, das den folgenden drei Bedingungen genügt:

a) eine Diagonale ist doppelt so lang wie die andere,

b) der Winkel zwischen den Diagonalen ist 45°,

c) die Koordinaten jedes Eckpunktes des Vierecks sind ganzzahlig.

Aufgabe 4

Man bestimme ein Tripel (x, y, z) aus ganzen Zahlen x, y, z, von denen jede > 50 ist und so daß $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ gilt.

Aufgabe 5

Aus den Zahlen $1, \ldots, n$ sind $n + 1$ verschiedene Mengen aus jeweils 3 paarweise verschiedenen Zahlen gebildet. Man beweise, daß es 2 dieser Dreiermengen gibt, die genau ein Element gemeinsam haben.

Aufgabe 6

Durch einen Punkt im Innern eines $\triangle ABC$ sind die Geraden l, m und n jeweils senkrecht zu AP, BP und CP gezogen. Man beweise: falls die Schnittpunkte Q, R, S von l und g(B, C), m und g(C, A) bzw. n und g(A, B) existieren, so liegen sie auf einer Geraden.

Aufgabe 7

Für gegebene positive ganze Zahlen r, v, n sei S(r, v, n) die Anzahl von n-Tupeln $(x_1, \ldots, x_n)$ aus nichtnegativen ganzen Zahlen, die den Bedingungen

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r \quad \text{und} \quad x_i \leqq v, \quad i = 1, \ldots, n$$

genügen. Man beweise:

$$S(r,v,n) = \sum_{k=o}^{m} (-1)^k \cdot \binom{n}{k}\binom{r-(v+1)k+n-1}{n-1},$$

wo $m = \min \left\{n, \left\lfloor \frac{r}{v+1} \right\rfloor \right\}$ ist

($\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl y mit $y \leqq x$).

Aufgabe 8

Man bestimme die kleinste ganze Zahl n mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Menge V von 8 Punkten in der Ebene, von denen keine 3 auf einer Geraden liegen und für jede Menge E von n Strecken mit Endpunkten in V kann man eine Gerade finden, die mindestens 4 Strecken aus E in inneren Punkten schneidet.

Aufgabe 9

Die binäre Operation + in der Ebene sei folgendermaßen definiert. Für gegebene 2 Punkte A, B sei C = A + B der dritte Eckpunkt des gleichseitigen, positiv orientierten Dreiecks ABC. Was ist die gegenseitige Lage der 3 Punkte I, M, O in der Ebene, für die

$$I + (M + O) = (O + I) + M$$

gilt?

Aufgabe 10

P und Q seien verschiedene Punkte in der Ebene des Dreiecks ABC, so daß

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{BQ} = \frac{CP}{CQ}$$

gilt. Man beweise, daß PQ durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks verläuft.

Aufgabe 11

Seien AA', BB' und CC' die Winkelhalbierenden im Dreieck ABC ($A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$). Man beweise, daß jede der Geraden A'B', B'C', C'A' den Inkreis des Dreiecks ABC in 2 verschiedenen Punkten schneidet.

Aufgabe 12

Seien C_1 und C_2 Kreise vom Radius $\frac{1}{2}$ die einander berühren und beide einen Kreis C vom Radius 1 von innen berühren. Die Kreise C_1, C_2 sind die Anfangsglieder einer unendlichen Folge $\{c_n\}$ von verschiedenen Kreisen C_n, die folgendermaßen definiert ist: C_{n+2} berührt von außen C_n und C_{n+1} von innen C. Man zeige, daß der Radius von jedem C_n das Inverse einer ganzen Zahl ist.

Aufgabe 13

Sei $A_1A_2A_3A_4$ ein einem Kreis K einbeschriebenes konvexes Viereck. Man zeige, daß es einen Punkt M auf K gibt, für den

$$MA_1 - MA_2 + MA_3 - MA_4 = 0$$

ist.

Aufgabe 14

Für n gegebene reelle Zahlen $a_1 \leqq a_2 \leqq \dots \leqq a_n$ definiere man

$$M_1 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad M_2 := \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} a_i a_j$$

$$Q := \sqrt{M_1^2 - M_2}$$

und beweise

$$a_1 \leqq M_1 - Q \leqq M_1 + Q \leqq a_n.$$

Aufgabe 15

Die Folge U entstehe, indem man die ungerade Zahl 1 notiert, danach die nächsten 2 geraden Zahlen schreibt, danach die nächsten drei ungeraden Zahlen, danach die nächsten 4 geraden Zahlen, danach die nächsten 5 ungeraden Zahlen usw. hinschreibe:

U: 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, ...

Man gebe das n-te Glied der Folge durch einen expliziten Ausdruck an.

Aufgabe 16

Eine Permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der Zahlen 1, ..., n heiße zulässig, falls sie folgender Bedingung genügt:

Es ist für $i = 2, \ldots, n$ genau dann $a_i = k$ erlaubt, falls für einen gewissen Index $j < i$ $a_j \in \{k-1, k+1\}$ gilt. Wie viele solcher Folgen gibt es?

Lösungen

Aufgabe 1 (nach A. Mirle, M. Votja, D. Männel und T. Ehrhardt)
Es gilt für alle natürlichen Zahlen n

$$n^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+6)^2 = 4n^2+28n+70$$
$$= (n+1)^2+(n+2)^2+(n+4)^2+(n+7)^2.$$

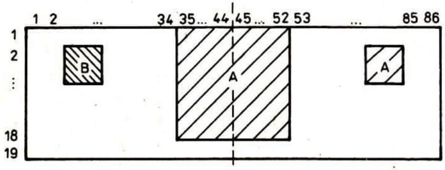
Summieren wir diese Gleichung über alle n = 1, 9, 17, ..., 993, so erhalten wir

$$\sum_{k=o}^{124} ((8k+1)^2 + (8k+4)^2 + (8k+6)^2 + (8k+7)^2) =$$

$$= \sum_{k=o}^{124} ((8k+2)^2 + (8k+3)^2 + (8k+5)^2 + (8k+8)^2)$$

Fassen wir also die Kugeln der Gewichte $(8k+1)^2$, $(8k+4)^2$, $(8k+6)^2$, $(8k+7)^2$ zur Gruppe 1 und die restlichen Kugeln zur Gruppe 2 zusammen, so enthalten beide Gruppen genau 500 Kugeln mit gleichem Gesamtgewicht.

Aufgabe 2 (nach R. Hemmecke)
Zunächst numerieren wir die Zeilen und Spalten der Tafel mit 1, ..., 19 bzw. 1, ..., 86, so daß (i, j) das Feld (Einheitsquadrat) in der i-ten Zeile und j-ten Spalte angibt. Den Spieler, der den ersten Zug macht, bezeichnen wir mit A, den anderen mit B. Wir geben eine Gewinnstrategie von A an: A färbt zunächst das Quadrat mit den Eckfeldern (1,35), (1,52), (18,35), (18,52).



Offenbar können bei allen folgenden Färbungen nicht gleichzeitig Felder mit einer Spaltennummer $\leqq 44$ und mit einer Spaltennummer $\geqq 45$ gefärbt werden. Färbt nun B ein Quadrat mit den Eckfeldern (i, j), $(i, j+k)$, $(i+k, j)$, $(i+k, j+k)$, $k = 0, 1, \ldots$, so gilt $j, j+k \leqq 44$ oder $j, j+k \geqq 45$, und A kann daraufhin das Quadrat mit den Eckfeldern $(i, 87-j-k)$, $(i, 87-j)$, $(i+k, 87-j-k)$, $(i+k, 87-j)$ färben. Allgemein kann A nach jeder Färbung eines Quadrates von B das dazu bezüglich der vertikalen Mittellinie symmetrisch liegende Quadrat färben, so daß A gewiß den letzten Zug macht (man beachte, daß der Prozeß enden muß, denn die Anzahl der gefärbten Felder wächst mit jedem Zug).

Aufgabe 3 (nach **A. Mirle**, T. Ehrhardt, H.-P. Störr)
Angenommen, es gäbe ein konvexes Viereck A, B, C, D mit den genannten Eigenschaften. Wir stellen die Eckpunkte als komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dar:

$$A \mathrel{\widehat{=}} a_1+a_2 i,\ B \mathrel{\widehat{=}} b_1+b_2 i,\ C \mathrel{\widehat{=}} c_1+c_2 i,\ D \mathrel{\widehat{=}} d_1+d_2 i,$$

wobei a_j, b_j, c_j, d_j ganzzahlig sind $(j = 1,2)$.
Nach eventueller Umbezeichnung gilt:
D-C entsteht aus B-A durch Streckung auf das Doppelte und Drehung um 45°. Mit bekannten Rechenregeln für komplexe Zahlen erhalten wir

$$(d_1-c_1)+(d_2-c_2)i = ((b_1-a_1)+(b_2-a_2)i) \cdot 2\,(\cos 45^\circ \pm i \sin 45^\circ),$$

also

$$\sqrt{2}\,(1\pm i) = \frac{(d_1-c_1)+(d_2-c_2)i}{(b_1-a_1)+(b_2-a_2)i} \qquad \text{(beachte } A \neq B\text{)}$$

$$= \frac{(d_1-c_1)(b_1-a_1)+(d_2-c_2)(b_2-a_2)+\big((d_2-c_2)(b_1-a_1)-(d_1-c_1)(b_2-a_2)\big)i}{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

Offenbar steht auf der linken Seite eine komplexe Zahl mit irrationalem Real- und Imaginärteil, während auf der rechten Seite Real- und Imaginärteil wegen der Voraussetzung rational sind. Dieser Widerspruch zeigt, daß die Annahme falsch war und es kein konvexes Viereck mit den genannten Eigenschaften gibt.

Aufgabe 4

Ist (x, y, z) eine Lösung, so sind auch

$$(y, z, 3yz - x)$$

und

$$(x, z, 3xz - y)$$

Lösungen. Nun ist $(1, 1, 1)$ eine Lösung und daher sind auch $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 5)$, $(1, 5, 13)$, $(1, 13, 34)$, $(1, 34, 89)$, $(1, 89, 233)$ und $(89, 233, 62\,210)$ Lösungen. Die letzte Lösung genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 5

Seien $A_1, \ldots, A_{n+1}$, $A_i = \{x_i, y_i, z_i\}$, $|A_i| = 3$, die gebildeten Teilmengen. Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann ist für $i \neq j$ stets $|A_i \cap A_j|$ gleich 0 oder 2. Wir definieren

$$A_i \equiv A_j :\Longleftrightarrow |A_i \cap A_j| \geqq 2.$$

Das ist eine Äquivalenzrelation. Denn die Reflexivität und Transitivität sind offenbar und aus $A_i \equiv A_j$, $A_j \equiv A_k$ und den Bezeichnungen $A_i = \{x, y, z\}$, $A_j = \{x, y, t\}$ ergibt sich $x \in A_k$ oder $y \in A_k$, also $A_i \cap A_k \neq \emptyset$ und damit $|A_i \cap A_k| \geqq 2$. Folglich ist auch die Transitivität gegeben.

Die Äquivalenzrelation $\equiv$ bestimmt eine Zerlegung der Menge M aller n+1 Dreiermengen in Äquivalenzklassen.

Für jede Klasse A sei $t(A)$ die Anzahl der in mindestens einem Tripel aus A vorkommenden Elemente.

Wir zeigen

$$|A| \leqq t(A) \qquad (1)$$

und erhalten damit einen Widerspruch, da es n Elemente, aber n+1 Tripel insgesamt gibt.

Für $t(A) = 3$ und $t(A) = 4$ ist die Aussage (1) trivial.

Sei $t(A) > 4$. Seien $A_i = \{x, y, z\}$ und $A_j = \{x, y, t\}$ aus A, $t \neq z$. Es gibt ein $u \neq x, y, z, t$ und ein A_k aus A mit $u \in A_k$. Wegen $A_i \equiv A_k$ und $A_j \equiv A_k$ muß $A_k = \{x, y, u\}$ sein. Für beliebiges A_q aus A muß nun $x, y \in A_q$ gelten. Also haben alle Elemente aus A die Elemente x und y gemeinsam und es ist

$$|A| = t(A) - 2 < t(A).$$

Aufgabe 6

Wir wählen die Koordinatenbezeichnungen

$$P = \binom{0}{0},\ A = \binom{a_1}{a_2},\ B = \binom{b_1}{b_2},\ C = \binom{c_1}{c_2}$$

und setzen

$$\underline{a} \cdot \underline{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2,$$
$$|\underline{a}, \underline{b}| := a_1 b_2 - a_2 b_1,$$
$$N(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) := \underline{a} \cdot (\underline{b} - \underline{c}).$$

Dann sind l, m bzw. n durch $\lambda \binom{a_2}{-a_1}$, $\lambda' \binom{b_2}{-b_1}$ bzw. $\lambda \binom{c_2}{-c_1}$ gegeben und die Gleichungen der Geraden sind:

$$g(B,C):\ X = \binom{b_1}{b_2} + \mu \binom{c_1 - b_1}{c_2 - b_2},$$

$$g(C,A):\ X = \binom{c_1}{c_2} + \mu \binom{a_1 - c_1}{a_2 - c_2},$$

$$g(A,B):\ X = \binom{a_1}{a_2} + \mu \binom{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}.$$

Aus $\lambda \binom{a_2}{-a_1} = \binom{b_1}{b_2} + \mu \binom{c_1 - b_1}{c_2 - b_2}$ ermittelt man $\mu = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{N(\underline{a},\underline{b},\underline{c})}$.

Das liefert nach einiger Zwischenrechnung für Q und analog für R, S die Ausdrücke

$$Q = \binom{q_1}{q_2} = \frac{|\underline{b}, \underline{c}|}{N(\underline{a},\underline{b},\underline{c})} \cdot \binom{-a_2}{a_1} \tag{2}$$

$$R = \binom{r_1}{r_2} = \frac{|\underline{c}, \underline{a}|}{N(\underline{b},\underline{c},\underline{a})} \cdot \binom{-b_2}{b_1} \tag{3}$$

$$S = \binom{s_1}{s_2} = \frac{|\underline{a}, \underline{b}|}{N(\underline{c},\underline{a},\underline{b})} \cdot \binom{-c_2}{c_1} \tag{4}$$

Man prüft leicht, daß Q, R, S genau dann auf einer Geraden liegen, falls $|\underline{q}, \underline{r}| + |\underline{r}, \underline{s}| + |\underline{s}, \underline{q}| = 0$ ist.

Aus (2) und (3) ergibt sich <u>ohne</u> weitere Rechnung

$$|\underline{q}, \underline{r}| = \frac{(-a_2 b_1 + a_1 b_2)}{N(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) \cdot N(\underline{b},\underline{c},\underline{a})} \cdot |\underline{b}, \underline{c}| \cdot |\underline{c}, \underline{a}|,$$

$$|\underline{q}, \underline{r}| = \frac{|\underline{a}, \underline{b}| \cdot |\underline{b}, \underline{c}| \cdot |\underline{c}, \underline{a}|}{N(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) \cdot N(\underline{b},\underline{c},\underline{a})}.$$

Analoge Ausdrücke erhält man für die beiden anderen Determinanten und schließt auf

$$|\underline{q}, \underline{r}| + |\underline{r}, \underline{s}| + |\underline{s}, \underline{q}| = \frac{|\underline{a}, \underline{b}| \cdot |\underline{b}, \underline{c}| \cdot |\underline{c}, \underline{a}|}{N(a,b,c)N(b,c,a)N(c,a,b)} \cdot W.$$

Dabei ist

$W := N(\underline{c},\underline{a},\underline{b}) + N(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) + N(\underline{b},\underline{c},\underline{a})$

Man prüft leicht, daß $W = 0$ ist und hat den Beweis beendet.

<u>Aufgabe 7</u> (nach G. Döge)

Es seien

$$T_o = \{ (x_1;x_2;\ldots;x_n) : x_1+x_2+\ldots+x_n = r,\ x_j \in N \}$$

$$T_i = \{ (x_1;x_2;\ldots;x_n) : x_1+x_2+\ldots+x_n = r,\ x_j \in N,\ x_1 < v+1 \}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Nach Aufgabenstellung gilt dann

$$S(r, v, n) = |T_o \setminus (T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n)|. \tag{5}$$

Unter Verwendung des Prinzips der Inklusion und Exklusion erhalten wir

$$S(r,v,n) = |T_o| - |T_1 \cup T_2 \ldots \cup T_n|$$

$$= |T_o| + \sum_{k=1}^{n} (-1)^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} |T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \ldots \cap T_{i_k}|. \tag{6}$$

Kommen wir deshalb nun zur Berechnung von $|T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \ldots \cap T_{i_k}|$:

$(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \ldots \cap T_{i_k} \Longleftrightarrow$

$x_1+x_2+\ldots+x_n = r$ und $x_{i_l} \geqq v+1$ $(l = 1, \ldots, k)$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_l}}^{n} x_j = r-k(v+1)-t \text{ und } \sum_{l=1}^{k} (x_{i_l}-(v+1)) = t$$

(wobei $t \in \{ 0, \ldots, r-k(v+1)\}$). (7)

Wir sehen zunächst, daß im Fall $k > \left\lfloor \frac{r}{v+1} \right\rfloor$ $|T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \ldots \cap T_{i_n}| = 0$.

Sei also $k \leq \left\lfloor \frac{r}{v+1} \right\rfloor$. Für ein festes t gibt es $\binom{k+t-1}{t}$ Möglichkeiten die Elemente $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ zu belegen.

Es gibt weiterhin $\binom{n-k+r-k(v+1)-t-1}{r-k(v+1)-t}$ Möglichkeiten die übrigen Stellen des n-Tupels zu belegen. Da t jeden Wert zwischen 0 und $r-k(v+1)$ annehmen kann, gilt somit:

$$|T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \ldots \cap T_{i_k}| = \sum_{t=0}^{r-k(v+1)} \binom{n-k-r-k(v+1)-t-1}{r-k(v+1)-t} \binom{k+t-1}{t}. \qquad (8)$$

Setzen wir $s = r-k(v+1)$, so kann man folgendes zeigen (Induktion über s):

$$\sum_{t=0}^{s} \binom{n-k+s-t-1}{s-t} \binom{k+t-1}{t} = \binom{n+s-1}{s}. \qquad (9)$$

Aus (8) und (9) erhalten wir schließlich

$$|T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \ldots \cap T_{i_k}| = \binom{n+s-1}{s} = \binom{n+s-1}{n-1} = \binom{n+r-k(v+1)-1}{n-1}.$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots\, i_k \leq n} |T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \ldots \cap T_{i_k}| = \binom{n}{k} \binom{n+r-k(v+1)-1}{n-1}$$

Verwenden wir noch die Tatsache, daß $|T_o| = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$ gilt, so ist $S(r,v,n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+r-k(v+1)-1}{n-1}$ mit $m = \min(n; \left\lfloor \frac{r}{v+1} \right\rfloor)$.

Aufgabe 8

G. Kunert geht von folgenden Aussagen aus, die leicht zu beweisen sind:

Hilfssatz 1. Wenn 2 Punkte A und B existieren, wobei von jedem dieser Punkte (mindestens) 3 von $\overline{AB}$ verschiedene Strecken ausgehen, so gibt es eine Gerade, die mindestens 4 Strecken in inneren Punkten schneidet.

Hilfssatz 2. Gegeben sind 2 Punkte, die miteinander durch eine Strecke verbunden sind und von denen zusammen mindestens 7 Strecken ausgehen (beachte keine 3 Punkte auf einer Geraden). Dann gibt es eine Gerade, die 4 Strecken in inneren Punkten schneidet.

Es wird nun gezeigt, daß 10 Strecken die Forderungen der Aufgabe erfüllen. Es seien also 8 Punkte und 10 Strecken gegeben. Von den Punkten gehen also insgesamt 20 Strecken aus. Damit gibt es mindestens einen Punkt, von dem mindestens 3 Strecken ausgehen.

<u>Fall 1:</u> Es gibt (mindestens) 4 Punkte, von denen jeweils (mindestens) 3 Strecken ausgehen.

a) 2 dieser Punkte sind nicht miteinander verbunden.
   Verwende Hilfssatz 1!

b) Alle diese Punkte sind miteinander verbunden.
   Eine Gerade wird so gelegt, daß in jeder Halbebene bezüglich der Geraden 2 Punkte liegen.

<u>Fall 2:</u> Es gibt genau 3 Punkte, von denen jeweils (mindestens) 3 Strecken ausgehen.

Von einem dieser Punkte müssen mindestens 4 Strecken ausgehen.

a) 2 dieser Punkte sind nicht miteinander verbunden.
   Verwende Hilfssatz 1!

b) Alle diese Punkte sind miteinander verbunden.
   Verwende Hilfssatz 2!

<u>Fall 3:</u> Es existieren genau 2 Punkte, von denen jeweils (mindestens) 3 Strecken ausgehen.

a) Sie sind nicht miteinander verbunden.
   Verwende Hilfssatz 1!

b) Sie sind verbunden.
   Insgesamt müssen von diesen Punkten mindestens 8 Strecken ausgehen.
   Verwende Hilfssatz 2!

<u>Fall 4:</u> Es gibt genau einen Punkt, von dem mindestens 3 Strecken ausgehen.

Dieser Punkt ist mit mindestens 6 weiteren Punkten durch eine Strecke verbunden, von denen wir einen auswählen. Von diesen beiden Punkten gehen insgesamt mindestens 7 Strecken aus.
Verwende Hilfssatz 2!

Es muß also $n = 10$ sein. Ein Gegenbeispiel für $n = 9$ reicht aus, um $n = 10$ als die gesuchte Zahl auszuweisen. Als Beispiel nehme man z. B. ein reguläres Achteck mit einer Diagonale (bei kleineren n lasse man noch mehr Strecken weg).

Aufgabe 9 (nach G. Hofmann)

In der Gaußschen Zahlenebene wird folgendes festgelegt:

- 0 falle mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen.
- Einem Punkt X entspreche die komplexe Zahl X'.
- $E' = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$.

Wenn nun $I + (M + 0) = (0 + I) + M$ gilt, so ist offenbar

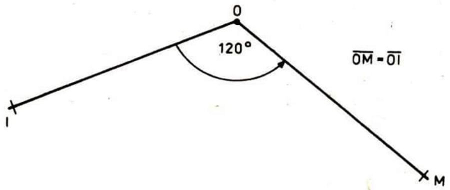
$$((M + 0)' - I')\, E' + I' = (M' - (0 + I)')\, E' + (0 + I)'$$

(Man beachte, daß aus $C = A + B$ $\quad C' = (B' - A')\, E' + A'$ folgt.)

Weitere Umformungen führen dann schließlich auf

$$M' = I' \cdot E' = I' (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ).$$

Daraus ergibt sich folgende Lage der Punkte (wie auch durch die Probe bestätigt wird).



Aufgabe 10

Es seien P und Q 2 verschiedene Punkte in der Ebene eines Dreiecks ABC.

Weiterhin sei $\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = k.$

Zunächst stellen wir fest, daß $k \neq 0$ und $k \neq 1$ ist. Für die weiteren Betrachtungen benutzen wir folgendes Resultat:

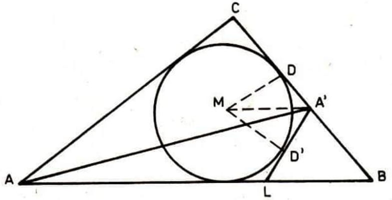
Der geometrische Ort der Eckpunkte X aller Dreiecke PQX, in denen eine Seite die gegebene Länge $\overline{PQ}$ hat und die Längen der anderen Seiten im konstanten Verhältnis $\frac{\overline{PK}}{\overline{QX}} = k$ stehen, ist der Thaleskreis über der Strecke LM als Durchmesser, deren Eckpunkte L und M die Strecke $\overline{PQ}$ innen und außen im Verhältnis $\pm k$ teilen.
(Satz von Appolonius)

Nach diesem Resultat liegen also die Eckpunkte des Dreiecks ABC auf dem Kreis des Appolonius. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt auf der Geraden durch P und Q, womit die Behauptung bewiesen wurde.

<u>Aufgabe 11</u> (nach F. Diekhoff)

Es werden zunächst der Punkt A' und die Geraden g(A'B'), g(A'C') betrachtet. Dazu folgende Fallunterscheidung:

1. Fall: A' = D (Berührungspunkt des Kreises mit $\overline{BC}$)
   Alle Geraden durch A', die von g(BC) verschieden sind, haben mit dem Kreis 2 Punkte gemeinsam. Offensichtlich ist g(A'B') $\neq$ g(BC) und g(A'C') $\neq$ g(BC).
2. Fall: A' = D
   Es sei o. B. d. A. AB > AC. Durch A' werden nun die beiden Tangenten an den Kreis gelegt. Eine dieser Tangenten ist g(BC), während die andere AB im inneren Punkt L schneidet.
   Dieser Sachverhalt ist in der folgenden Skizze dargestellt.



B' liegt auf $\overline{AC}$. Damit hat g(A'B') mit dem Kreis 2 Punkte gemeinsam.

Kommen wir nun zur zweiten Geraden:

Es ist $\triangle$ A'CA $\cong$ $\triangle$ A'LA (nach wsw - Hierzu betrachte man auch noch die Hilfsdreiecke MA'D und MA'D'). Danach ist das Dreieck ACL gleichschenklig ($\sphericalangle ACL = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$).

$$\sphericalangle LCB = \gamma - \sphericalangle ACL = \frac{180^\circ - \alpha}{2} - \beta .$$

Es ist also $\sphericalangle LCB < \sphericalangle ACL$. Hieraus folgt, daß der Punkt C' zwischen A und L liegt. Somit hat auch g(A'C') 2 gemeinsame Punkte mit dem Kreis.
In gleicher Weise läßt sich auch mit dem Punkt B' und den Geraden g(B'A') und g(B'C') verfahren.
Die Behauptung wurde damit bewiesen!

Aufgabe 12 (Idee von M. Welk)
Für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ sei r_n der Radius des Kreises C_n. Da alle C_n dem Kreis C vom Radius 1 einbeschrieben und nicht mit diesem identisch sind, gilt stets $0 < r_n < 1$.
Damit existiert auch für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ der Wert

$s_n = \frac{1 - r_n}{r_n}$ und ist positiv.

Weiterhin wird durch $u_o = 1$; $u_1 = 0$; $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ eine Folge $\{u_n\}$ definiert, deren Glieder ausnahmslos natürliche Zahlen sind.
Diese Folge besitzt auch die Eigenschaft $u_{2n}u_{2n+2}-1 = u^2_{2n+1}$,

was ausgenutzt wird, um $z_n = u_{2n-2}$ $(r_n = \frac{1}{u_{2n-2}+1})$ zu zeigen.

(Die Beweise werden durch vollständige Induktion geführt.)

Aufgabe 13 (nach F. Diekhoff)
Zur Lösung der Aufgabe wird der Kreis mit den Punkten A_1, A_2, A_3 und A_4 in ein kartesisches Koordinatensystem gelegt. Der Kreismittelpunkt sei der Koordinatenursprung und der Radius des Kreises 1. Ein Punkt Z des Kreises ist dann eineindeutig durch den Winkel $\varphi_Z = \sphericalangle E(1,0), O, Z$ bestimmt. Es ist dann auch
$x_Z = \cos \varphi_Z$ und $y_Z = \sin \varphi_Z$.

Für $0 \leqq \varphi_Z < 2\pi$ sei nun folgende Abstandsfunktion definiert

$$f_{A_1}(\varphi_Z) = \overline{ZA_1} = \sqrt{(\cos\varphi_Z - x_{A_1})^2 + (\sin\varphi_Z - y_{A_1})^2}.$$

Analog definiert man die Funktionen f_{A_2}, f_{A_3} und f_{A_4}. Alle diese Funktionen und die Funktion $f(\varphi_Z) = f_{A_1}(\varphi_Z) - f_{A_2}(\varphi_Z) + f_{A_3}(\varphi_Z) - f_{A_4}(\varphi_Z)$ sind stetig. Somit wäre die Behauptung bewiesen, wenn wir 2 Funktionswerte mit unterschiedlichem Vorzeichen gefunden hätten.

Wäre $f(\varphi_{A_1}) > 0$ und $f(A_3) > 0$, so müßte gelten:

$$\overline{A_1A_1} - \overline{A_1A_2} + \overline{A_1A_3} - \overline{A_1A_4} > 0 \quad \text{und}$$

$$\overline{A_1A_3} - \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_3} - \overline{A_3A_4} > 0.$$

Daraus ergäbe sich

$$2\overline{A_1A_3} > \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_1A_4}.$$

Im Viereck $A_1A_2A_3A_4$ gilt aber gerade

$$2\overline{A_1A_3} \leqq \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_1A_4}.$$

Es ist also $f(\varphi_{A_1}) \leqq 0$ oder $f(\varphi_{A_3}) \leqq 0$.

Völlig analog zeigt man $f(\varphi_{A_2}) \geqq 0$ oder $f(\varphi_{A_4}) \geqq 0$.

Die Aussage wurde damit bewiesen!

<u>Aufgabe 14</u> (nach G. Kunert)

Es seien $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ n reelle Zahlen $(n \geqq 2)$. (10)

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad M_2 = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} a_i a_j \tag{11}$$

$$Q = \sqrt{M_1^2 - M_2} \tag{12}$$

Aus (10) folgt $(a_n - a_i)(a_n - a_j) \geqq 0$

$$a_n^2 + a_i a_j \geqq a_i a_n + a_j a_n = a_n(a_i + a_j). \tag{13}$$

Wir summieren nun (13) über alle i und j mit $i \neq j$. Es sind also $\frac{n(n-1)}{2}$ Ungleichungen zu addieren.

$$(n-1)\, a_n \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \frac{n(n-1)}{2}\, a_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i\, a_j \quad \Big|\cdot \frac{2}{n(n-1)}$$

$$2a_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \leq a_n^2 + \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i\, a_j$$

$$2a_n\, M_1 \leq a_n^2 + M_2$$

$$M_1^2 - M_2 \leq M_1^2 - 2a_nM_1 + a_n^2 = (a_n - M_1)^2$$

$$Q \leq |a_n - M_1|$$

Da $M_1 \leq a_n$, gilt $Q \leq a_n - M_1$ bzw. $M_1 + Q \leq a_n$.

Ganz analog zeigt man $a_1 \leq M_1 - Q$. Wir erhalten also

$a_1 \leq M_1 - Q \leq M_1 + Q \leq a_n$ (mittlere Ungleichung wegen $Q \geq 0$).

Aufgabe 15

Wir notieren untereinander die Folge aller geraden positiven Zahlen, die Folge U und die Folge (d_n) der Differenzen aus den Gliedern der ersten beiden Folgen. Dabei beachten wir die durch die Konstruktionsvorschrift gegebene Klasseneinteilung.

$2 \cdot \mathbb{N}$	2	4,6	8,10,12	14,16,18,20	22,24,26,28,30	
$(u_n)=U$	1	2,4	5,7,9	10,12,14,16	17,19,21,23,25	...
(d_n)	1	2,2	3,3,3	4,4,4,4	5,5,5,5,5	

Dann besteht die k-te Klasse der Folge (d_n) aus k Elementen k. Das ergibt sich aus folgenden beiden Fakten:

a) In jeder Klasse von U wachsen die Elemente jeweils um zwei. Ebenso verhält sich die Folge $2 \cdot \mathbb{N}$. Also ist die Differenz in jeder Klasse konstant.

b) Beim Übergang zur nächsten Klasse wachsen die Glieder der Folge $2 \cdot \mathbb{N}$ um zwei, die der Folge U nur um eins. Dabei ist die Differenz in der nächsten Klasse jeweils um eins größer.

Offenbar gilt $u_n = 2n - d_n$. Wir bestimmen eine Formel für d_n.
Bis zum Ende der (k-1)-ten Klasse stehen in U genau

$$1 + 2 + \ldots + k-1 = \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

Elemente. Sei d_n in der k-ten Klasse, d. h., es ist $d_n = k$.
Das tritt genau für

$$\frac{(k-1)\cdot k}{2} + 1 \leqq n < \frac{((k+1)-1)(k+1)}{2} + 1$$

ein. Dabei gilt

$$d_n = \max l: \frac{(l-1)\cdot l}{2} + 1 \leqq n$$

oder

$$d_n = \max l: l^2 - l + 2(1-n) \leqq 0.$$

Aus der Ermittlung der Nullstellen der Parabel $y = x^2 - x + 2(1-n)$ resultiert

$$d_n = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor.$$

Das liefert

$$u_n = 2n - \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor.$$

Aufgabe 16

Für $n = 6$ sind die Folgen 435261 und 342156 zulässig.
Das Element a_1 kann beliebig gewählt werden, für $a_1 = r$ setze man

$$A := \{1, \ldots, r-1\}, \quad B := \{r+1, \ldots, n\}.$$

In jeder zulässigen Permutation müssen die Elemente aus A monoton fallend (von links nach rechts) stehen. Denn wenn der Anfang $(a_1, \ldots, a_i)$ der Permutation schon in den A-Werten monoton fallend ist, so diskutieren wir a_{i+1}. Für $a_{i+1} \notin A$ ist nichts zu zeigen. Für $a_{i+1} = k \in A$ steht irgendwo links davon schon k-1 oder k+1. Ist das k-1, so muß, da $(k-1) + 1 = k$ nicht vor k-1 steht, irgendwo vor k-1 bereits k-2 stehen. Das widerspricht der Monotonie in den A-Werten im Teil $a_1, \ldots, a_i$. Also steht k+1 vor k. Zwischen k+1 und k kann kein $l \in A$ stehen. Denn $l > k+1$ widerspricht der Monotonie und $l < k$ ist für das nach k+1 nächste

A-Element unmöglich, da weder $l+1$ ($< k+1$) noch $l-1$ ($< l$) vor l stehen würden. Also ist k nächstes A-Glied nach $k+1$. Mithin ist die Folge im Teil $a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}$ monoton fallend in A. Analog beweist man das monotone Wachstum in den B-Elementen. Außerdem ist die Wahl der A-Elemente unabhängig von der Wahl der B-Elemente, da für $k \in A$ weder $k-1$ noch $k+1$ in B liegen und umgekehrt. Folglich sind nach Wahl der A-Plätze die B-Elemente eindeutig einzusortieren und insgesamt ist die zulässige Permutation nach Wahl des Anfangselementes a_1 und der Plätze für die A-Elemente eindeutig bestimmt. Letztere kann man für $a_1 = r$, $1 \leq r \leq n$, auf $\binom{n-1}{r-1}$ Arten wählen. Folglich hat man insgesamt

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$$

Möglichkeiten, eine zulässige Permutation zu bilden.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 27

Aufgaben

Aufgabe 1

Man betrachte in einer Ebene zwei Kreise mit den Radien R und r ($R > r$) mit dem gleichen Mittelpunkt. Es sei P ein fester Punkt auf dem kleineren Kreis und B ein variabler Punkt auf dem größeren Kreis. Die Gerade BP schneide den größeren Kreis ein zweites Mal in C. Die Senkrechte l auf BP in P schneide den kleineren Kreis erneut in A (falls l eine Tangente in P ist, dann ist $A = P$).

(I) Man bestimme die Menge aller Werte von

$$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2.$$

(II) Man bestimme den geometrischen Ort aller Mittelpunkte von AB. (Kreis $\equiv$ Kreislinie)

IMO 1988 Nr. 1 (Luxemburg)

Aufgabe 2

Sei n eine positive ganze Zahl; es seien $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ Teilmengen einer Menge B und es gelte:

(a) Jede Menge A_i enthält genau 2n Elemente.

(b) Für alle Indizes i und j ($1 \leq i < j \leq 2n+1$) enthält die Menge $A_i \cap A_j$ genau ein Element.

(c) Jedes Element von B gehört zu mindestens zwei der Mengen A_i.

Für welche Werte n kann man für gegebene Menge B und ihre Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) jedem Element von B eine der Zahlen 0 oder 1 so zuordnen, daß genau n Elementen jeder Menge A_i die Zahl 0 zugeordnet wird?

IMO 1988 Nr. 2 (ČSSR)

Aufgabe 3

Es sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich $N = \{1,2,3,\ldots\}$.
Es gelte:

$f(1) = 1, \quad f(3) = 3,$

und für alle $n \in N$

$f(2n) = f(n),$

$f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n),$

$f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n).$

Man bestimme die Anzahl aller Elemente $n \in N$ mit $n \leq 1988$ und $f(n) = n$.
IMO 1988 Nr. 3 (Großbritannien)

Aufgabe 4
Man zeige, daß die Menge aller reellen Zahlen x, die der Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

genügen, eine Vereinigung von disjunkten Intervallen ist, wobei die Summe aller Intervallängen 1988 beträgt.
IMO 1988 Nr. 4 (Irland)

Aufgabe 5
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypothenuse BC; der Fußpunkt der Höhe auf BC sei D. Die Verbindungsgerade der Inkreismittelpunkte der Dreiecke ABD und ACD schneidet die Seiten AB, AC in den Punkten K bzw. L. Es seien S und T der Flächeninhalt von ABC bzw. AKL. Zeige, daß $S \geq 2T$ ist.
IMO 1988 Nr. 5 (Griechenland)

Aufgabe 6
Es seien a und b positive ganze Zahlen, so daß ab+1 ein Teiler von a^2+b^2 ist.
Man zeige, daß $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.
IMO 1988 Nr. 6 (BRD)

Aufgabe 7
Sei n eine natürliche Zahl. Man bestimme die ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^n + y^n = (x-y)^{n+1}$.
IMO-Vorschlag 1987

Aufgabe 8
Gegeben seien fünf reelle Zahlen u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. Man beweise, daß man stets fünf reelle Zahlen v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 finden kann, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$u_i - v_i$ ist eine ganze Zahl, $i=0,1,2,3,4.$ (1)

$$\sum_{0 \le i<j \le 4} (v_i - v_j)^2 < 4. \qquad (2)$$

IMO-Vorschlag 1987

Aufgabe 9

Fünf verschiedene Zahlen seien auf zufälligem Wege der Menge $\{1,2,\ldots,n\}$ entnommen und nacheinander aufgeschrieben. Man zeige, daß die Wahrscheinlichkeit einer Niederschrift, in welcher sowohl die ersten drei niedergeschriebenen Zahlen als auch sämtliche fünf Zahlen derart angeordnet werden können, daß sie jeweils eine arithmetische Folge bilden, größer als $\frac{6}{(n-2)^3}$ ist.

IMO-Vorschlag 1987

Aufgabe 10

Es sei $1 \le k < n$. Man betrachte alle endlichen Folgen natürlicher Zahlen mit der Summe n. Das Glied k kommt in allen diesen Folgen $T(n,k)$-mal vor.

Bestimme $T(n,k)$.

IMO-Vorschlag 1988 (BRD)

Aufgabe 11

Durchläuft n alle natürlichen Zahlen, dann durchläuft $f(n) = \left[n + \sqrt{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2}\right]$ alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Folgenglieder $a_n = 3n^2-2n$.

IMO-Vorschlag 1988 (BRD)

Aufgabe 12

Jede Kante eines konvexen Vielfachen ist mit einer Richtung versehen und darf nur in dieser Richtung durchlaufen werden. Dabei gibt es zu jeder Ecke mindestens eine Kante, die zu ihr hinführt, und mindestens eine Kante, die von ihr weg führt.

Man zeige, daß dann das Vielfache mindestens zwei Seitenflächen hat, die jeweils auf ihrem Rand umlaufen werden können.

Bundeswettbewerb für Mathematik 1987 (BRD)

Aufgabe 13

Sei $N = \{1,2,\ldots,n\}$, $n \geqq 2$. Eine Menge $F = \{A_1,\ldots, A_t\}$ von Teilmengen $A_i \subseteqq N$, $i = 1,\ldots, t$, heißt trennend, falls für jede Menge $\{x, y\}$, $x, y \in N$, $x \neq y$, eine Menge $A_i \in F$ existiert, so daß $A_i \cap \{x, y\}$ aus genau einem Element besteht. F heißt überdeckend, falls jedes Element aus N in mindestens einer Menge $A_i \in F$ enthalten ist. Welches ist der kleinste Wert f(n) von t, so daß es eine gleichzeitig trennende und überdeckende Menge $F = \{A_1,\ldots, A_t\}$ von N gibt?

IMO-Vorschlag 1988 (DDR)

Aufgabe 14

Eine ganzzahlige Folge ist definiert durch

$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n > 1)$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Man beweise, daß 2^k genau dann ein Teiler von a_n ist, falls 2^k ein Teiler von n ist.

IMO-Vorschlag 1988 (Bulgarien)

Aufgabe 15

Sei $Z_{m,n}$ die Menge aller Paare (i,j), für die $i \in \{1,\ldots,m\}$ und $j \in \{1,\ldots, n\}$ ist. Ferner sei $a_{m,n}$ die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von $Z_{m,n}$, die keine zwei Paare (i_1, j_1), (i_2, j_2) mit $|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1$ enthalten. Man zeige, daß für alle positiven ganzen Zahlen m und k

$$a^2_{m,2k} \leqq a_{m,2k-1} \cdot a_{m,2k+1}$$

gilt.

IMO-Vorschlag 1988 (DDR)

Aufgabe 16

Sei a die größte positive Wurzel der Gleichung $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Man beweise, daß

$$\left[a^{1788}\right] \text{ und } \left[a^{1988}\right]$$

beide durch 17 teilbar sind ($[x]$ bedeute den ganzen Teil von x).

IMO-Vorschlag 1988 (Frankreich)

Lösungen

Aufgabe 1

Sei O der Mittelpunkt und φ der Winkel $\sphericalangle$ OPA sowie GD der Durchmesser durch P. Möge M bzw. N den Mittelpunkt von PA bzw. BC bezeichnen.

Es gilt

$$S = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = (\overline{BP} + \overline{PC})^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PA}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{PA}^2$$
$$= 2(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{BP} \cdot \overline{PC}) \qquad (3)$$

und außerdem

$\overline{PA} = 2 \cdot r \cdot \cos\varphi,$

$\overline{BP} = \overline{BN} - \overline{PN} = \sqrt{R^2 - r^2 \cdot \cos^2\varphi} - r \sin\varphi,$

$\overline{PC} = \overline{PN} + \overline{NC} = \overline{PN} + \overline{BN} = \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2\varphi} + r \sin\varphi,$

$\overline{BP} \cdot \overline{PC} = \overline{GP} \cdot \overline{PD} = R^2 - r^2.$

Durch Substitution in (3) erhält man

$$S = 2\left[4 r^2 \cos^2\varphi + 2 (R^2 - r^2 \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\varphi) + R^2 - r^2\right]$$
$$= 6 R^2 + 2 r^2.$$

Die Summe ist konstant und daher unabhängig von φ.

Die Parallele zu BC durch A schneidet den größeren Kreis in B' und C'. Das sind Eckpunkte der Rechtecke BPAB' und CPAC'. Der Mittelpunkt U der Diagonalen BA ist auch der Mittelpunkt der Diagonalen PB' und es gilt $\overrightarrow{PU} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PB'}$.

Analog ergibt sich $\overrightarrow{PV} = \frac{1}{2} \overrightarrow{PC'}$.

Da B' und C' den gleichen Kreis (O, R) beschreiben, ist die Position von U und V eindeutig bestimmt. Diese Punkte beschreiben das Bild des Kreises (O, R) bei der Streckung mit dem Zentrum P um den Faktor $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 2

Zur Analyse der Situation nehmen wir eine Numerierung der Elemente durch Nullen und Einsen mit den genannten Eigenschaften an und definieren eine 2n x 2n Matrix wie folgt: im Schnitt der i-ten Zeile und j-ten Spalte stehe für $i \neq j$ das dem Element aus $A_i \cap A_j$ zugeordnete Element und für $i = j$ die dem Element aus $A_i \cap A_{2n+1}$ zugeordnete Nummer. Nach Voraussetzung enthält die Matrix, die symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale ist, $2 \cdot n^2$ Nullen. Das ist eine gerade Zahl. Wegen der Symmetrie enthält die Hauptdiagonale ebenfalls eine gerade Anzahl von Nullen. Da diese Anzahl gleich n ist, muß n durch 2 teilbar sein. Für $n = 2$ entspricht die Tabelle

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

einer Lösung. Im allgemeinen Fall $n = 2 \cdot k$, $k \geqq 1$, entspricht die Tabelle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} T & T & \dots & T \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ T & T & \dots & T \end{pmatrix}}_{k\text{ - fach}}$$

einer Lösung.

Daher ist die Antwort: Eine Lösung existiert genau für gerade ganze Zahlen $n > 0$. In der Tat kann man zu jeder der konstruierten Tabellen $(2n \times 2n)$ - Tabellen die $2n+1$ Mengen $A_1, \dots A_{2n+1}$ wie folgt konstruieren. A_1 bestehe aus allen Paaren (1,1), (2,1),... (2n,1), A_2 aus allen Paaren (2,1), (2,2), (3,2),...., (2n,2), A_3 aus allen Paaren (3,1), (3,2), (3,3), (4,3),..., (2n,3). Schließlich bestehe A_{2n+1} aus allen Paaren (1,1), (2,2),...., (2n,2n).

Bemerkung:

Man kann leicht beweisen, daß aus (a) - (c) die Verschärfung (c') von (c) folgt.

(c') Jedes Element von B gehört zu genau zwei Mengen A_i.

Dazu mache man sich zunächst

$$A_j = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2n+1} (A_i \cap A_j)\ , \ j = 1, \dots, 2n+1 \qquad (4)$$

klar. Die Teilaussage $\supseteq$ ist trivial und die Aussage $\subseteq$ folgt aus (c).

Falls nun (c') nicht richtig ist, so darf man $a \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$ annehmen und erhält $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3$ aus (b).

Da jedes $A_1 \cap A_i$, $i > 3$, nur ein Element enthält, ist wegen (4) $|A_1| \leq 2n - 1$. Das widerspricht (a). Also gilt (c').

Aufgabe 3

Man findet folgende Werte:

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17.
f(n):	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	13	3	11	7	15	1	17...

Die Beobachtung von $f(2^k) = 1$, $f(2^k - 1)$, $f(2^k + 1) = 2^k + 1$ führt auf die Vermutung eines Zusammenhangs mit Binärdarstellungen. Jetzt wird durch Induktion bewiesen, daß f(n) gleich der Zahl ist, deren Binärdarstellung sich durch Inversion der Binärdarstellung von n ergibt (wobei die eventuell auftretenden Anfangsnullen vernachlässigt werden).

Der Beweis verläuft durch Induktion. Wegen $f(2n) = f(n)$ braucht man nur ungerade Zahlen zu betrachten.

Ist n von der Form $4m + 1 = \sum_{j=v}^{k} a_j \cdot 2^j$, $a_o = 1$, $a_1 = 0$, dann

ist $m = \sum_{j=2}^{k} a_j 2^{j-2}$ und $2m + 1 = 1 + \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot 2^{j-1}$ und

daher nach Induktion

$$f(2m + 1) = 2^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} a_j \cdot 2^{k-1-(j-1)} =$$

$$= 2^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} a_j \cdot 2^{k-j}$$

und $f(m) = \sum_{j=2}^{k} a_j \cdot 2^{k-1}$

$$\text{also } 2 \cdot f(2m+1) - f(m) = 2^k + 2 \cdot \sum_{j=2}^{k} a_j \cdot 2^{k-j} - \sum_{j=2}^{k} a_j \cdot 2^{k-j}$$

$$= 2^k + \sum_{j=2}^{k} a_j \cdot 2^{k-j} = \sum_{j=o}^{k} a_j \cdot 2^{k-j}$$

wie gefordert.

Falls n von der Form $4m + 3 = \sum_{j=o}^{k} a_j \cdot 2^j$, $a_o = 1$, $a_1 = 1$, ist,

dann ist

$$m = \sum_{j=2}^{k} a_j \cdot 2^{j-2} \text{ und } 2m + 1 = 1 + \sum_{j=2}^{k} a_j \cdot 2^{j-1}$$

wie oben und daher

$$3 \cdot f(2m+1) - 2\, f(m) = 2^k + 2^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} a_j \cdot 2^{k-j}$$

durch die gleiche Rechnung wie oben. Das ist wiederum

$\sum_{j=o}^{k} a_j \cdot 2^{k-j}$ und die Vermutung ist bewiesen.

Dabei hat man die Anzahl der ganzen Zahlen n, $1 \leqq n \leqq 1988$, mit palindromischen Binärdarstellungen (inversionssymmetrisch) zu bestimmen.

Nun ist die Anzahl der palindromischen Binärdarstellungen mit 2m Bits gleich der Anzahl derjenigen mit (2m-1) Bits gleich 2^{m-1}. Man hat $2^{10} < 1988 < 2^{11} = 2048$ und die Anzahl der palindromischen Binärdarstellungen < 2048 ist

$$1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 8 + 8 + 16 + 16 + 32 = 94.$$

Wegen $1988 = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)_2$ gibt es nur zwei 11-Bit palindromische Darstellungen, die größer sind und daher ist die gesuchte Anzahl 92.

Aufgabe 4

Eine Skizze des Graphs der Funktion zeigt, daß die gesuchte Menge S die Vereinigung von Intervallen der Form (i, x_i), $i=1,2,\ldots,70$, ist mit $i < x_i < i+1$ $(i+1,2,\ldots,69)$, wobei die x_i die Nullstellen des Polynoms

$$5 \prod_{j=1}^{70} (x-j) - 4 \sum_{k=i}^{70} k \prod_{j \neq k}^{70} (x-j).$$

Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ist die Summe der Nullstellen dieses Polynoms gleich dem Koeffizienten von x^{69} durch den Koeffizienten von x^{70}, also

$$\sum_{j=i}^{70} j + (4/5) \sum_{k=1}^{70} k.$$

Damit ist die gesuchte Summe der Intervallängen

$$|S| = \sum_{i=1}^{70} (x_i - i) = (4/5) \sum_{i=i}^{70} k = 1988.$$

Aufgabe 5

Seien X und Y die Inkreiszentren der Dreiecke ABD und ADC, r, r_1 und r_2 die Inkreisradien von ΔABC, ΔABD und ΔADC und $s = \frac{a+b+c}{2}$. Dann ist

$$S = rs = \frac{bc}{2}. \tag{5}$$

Da weiter $\Delta ABD \sim \Delta CBA$, haben die entsprechenden Seiten das Verhältnis $c:a$, folglich ist

$$r_i = \frac{rc}{a}. \tag{6}$$

und analog

$$r_2 = \frac{rb}{a}. \tag{7}$$

Sei M der Schnittpunkt von XY und AD. Dann ist $\sphericalangle XDM = 45^\circ$, folglich

$$DX = r_i\sqrt{2} = \sqrt{2}\ \frac{rc}{a}, \tag{8}$$

analog

$$DY = \sqrt{2}\ \frac{rb}{a}, \tag{9}$$

wobei DX senkrecht zu DY ist. Aus (8) und (9) folgt $\Delta XDY \sim \Delta BAC$, folglich ist $\sphericalangle DYK = \sphericalangle BCA$ und $\sphericalangle DXL = \sphericalangle CBA$. Aus der Betrachtung des Vierecks DYKB folgt $\sphericalangle BKY = 135^\circ$, damit ist ΔLAK aber ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck. Sei Z der Fußpunkt des Lotes von X auf AB. Dann ist

$$XZ = r_i = ZK = \frac{rc}{a} = (s-a)\frac{c}{a} \tag{10}$$

($r = s - a$ gilt bekanntlich in allen rechtwinkligen Dreiecken). Aus der Ähnlichkeit von ΔABC und ΔDBA folgt weiter

$$AZ = (s-c)\frac{c}{a} \tag{11}$$

($s-c$ ist die Länge von C zum Berührungspunkt des Inkreises mit BC). Aus (10) und (11) folgt

$$AK = \frac{c(2s-a-c)}{a} = \frac{bc}{a} \quad \text{und } T = \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}\right)^2. \tag{12}$$

Aus (5) und (12) folgt $s/T = \frac{a^2}{bc}$. Wegen $a^2 = b^2 + c^2$ ist die Behauptung der Aufgabe damit äquivalent zu der bekannten Ungleichung

$$b^2 + c^2 \geq 2bc.$$

Aufgabe 6

Sei

$$k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$a^2+b^2-k(ab+1) = 0. \tag{13}$$

Sei nun o.B.d.A. $a \geq b$. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß k keine Quadratzahl ist.

Es kann nicht eine der Zahlen a und b positiv und eine negativ sein, sonst wäre $-kab \geq k$ und $a^2 + b^2 > 0$ im Widerspruch zu (13).

Wir betrachten nun diejenige Lösung von (13) mit $a \geq b > 0$, für die a minimal ist. Fassen wir (13) als quadratische Gleichung in a auf, so existieren zwei Lösungen a und a'.

Diese erfüllen $a+a' = kb$, folglich ist a' ebenfalls ganz. Da (a',b) Lösung von (13) ist, folgt wie oben aus $b > 0$ die Beziehung $a' \geq 0$. Weiter ist $aa' = b^2-k$, aber $b^2 \neq k$ da k kein Quadrat sein sollte, also $a' \neq 0$. Weiter ist

$$a' = \frac{b^2-k}{a} \leqq \frac{a^2-1}{a} < a.$$

Damit erfüllt (a',b) ebenfalls (13) und es gilt $a' > 0$, $b > 0$, $a' < a$ und $b < a$. Damit war das oben gewählte a nicht minimal, ein Widerspruch.

Aufgabe 7

(Nach einer Lösungsidee von Andreas Siebert)

Für $n = 0$ ergeben sich unmittelbar genau die Paare $(a, a-2)$ mit ganzem $a \neq 0;2$ als Lösungen.

Sei $n \geq 1$ und angenommen, (x,y) ist Lösung der Gleichung. Falls $x = y$, so folgt aus $2x^n = 0$ sofort $x = y = 0$, was tatsächlich Lösung ist.

Sei im weiteren $z := x-y \neq 0$. Für $u := \frac{x}{z}$ und $v := \frac{y}{z}$ $\quad$ (14)

gilt $(uz)^n + (vz)^n = z^{n+1}$, also $u^n+v^n = z$. $\quad$ (15)

Andererseits ist offenbar $u-v = \frac{x-y}{z} = 1$, das liefert in (15): $z=(v+1)^n+v^n$ und weiter die notwendige Darstellung:

$$x = (v+1)\left[v^n+(v+1)^n\right], \quad y = v\left[v^n+(v+1)^n\right]. \tag{16}$$

Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} x^n+y^n &= (v+1)^n \left[v^n+(v+1)^n\right]^n + v^n \left[v^n+(v+1)^n\right]^n \\ &= \left[v^n+(v+1)^n\right]\left[v^n+(v+1)^n\right]^n \\ &\ \left[v^n+(v+1)^n\right]^{n+1} = (x-y)^{n+1}, \end{aligned}$$

d.h. jedes dieser Paare aus (16) ist eine (zunächst nicht notwendig ganzzahlige) Lösung der gegebenen Gleichung.

Es bleibt zu untersuchen, für welche rationalen Zahlen v sich in (16) ganzzahlige x,y ergeben. Dazu sei $v := \frac{p}{q}$ mit ganzen p,q sowie $q > 0$, $(p,q) = 1$. Da $z = \frac{(p+q)^n + p^n}{q^n}$ ganzzahlig ist (17), gilt $(p+q)^n + p^n \equiv 0 \pmod q$. Aus dem binomischen Satz folgt $(p+q)^n \equiv p^n \pmod q$, also $2p^n \equiv 0 \pmod q$. Wegen $(p,q) = 1$ bedeutet das $q/2$ und $q \in \{1,2\}$.

Für $q = 1$ sind mit v auch x,y aus (16) ganz und folglich stellt (16) eine Lösung für beliebiges ganzes v dar.

Für $q = 2$ ist p ungerade. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: n gerade. Es ist $p^n \equiv (p+2)^n \equiv 1 \pmod 4$, also $(p+q)^n + p^n \equiv 2 \pmod 4$. Da andererseits $4 = q^2/q^n$, kann hier im Widerspruch zu (17) $z = \frac{(p+q)^n + p^n}{q^n}$ nicht ganzzahlig sein.

Folglich liefert dieser Fall keine weiteren Lösungen.

2. Fall: n ungerade. Nach (16) ist y genau dann ganzzahlig, wenn $p\left[p^n+(p+2)^n\right] \equiv 0 \pmod{2^{n+1}}$ bzw., da $2 \nmid p$,

$p^n+(p+2)^n \equiv 0 \pmod{2^{n+1}}$. Das ist genau dann der Fall, wenn auch

$(p+2)\left[p^n+(p+2)^n\right] \equiv 0 \pmod{2^{n+1}}$, d.h. x ganzzahlig ist, und weiter äquivalent zu $(p+2)^n \equiv (-p)^n \pmod{2^{n+1}}$, $(p+2)^n - (-p)^n \equiv 0 \pmod{2^{n+1}}$ und

$$(p+2)-(-p) \left[(p+2)^{n-1}+(p+2)^{n-2}(-p)+\ldots+(p+2)(-p)^{n-2}+(-p)^{n-1}\right] \equiv 0 \pmod{2^{n+1}} \qquad (18)$$

Da die eckige Klammer eine ungerade Anzahl ungerader Summanden enthält, ist der zweite Faktor zu 2^{n+1} teilerfremd, und (18) äquivalent zu $p+2-(-p) \equiv 2(p+1) \equiv 0 \pmod{2^{n+1}}$ und schließlich $p+1 \equiv 0 \pmod{2^n}$. Also werden y und x genau dann ganzzahlig, wenn $p = t\cdot 2^n-1$ für ganzzahliges t.

Damit ergeben sich für $n \equiv 1$ als Lösungen die Paare

$$((v+1)\left[v^n+(v+1)^n\right],\ v\left[v^n+(v+1)^n\right]) \qquad (v \text{ ganz})$$

und zusätzlich nur für ungerades n (t ganz)

$$\left(\frac{1}{2^{n+1}}(t2^n+1)\left[(t2^n-1)^n+(t2^n+1)^n\right],\ \frac{1}{2^{n+1}}(t2^n-1)\left[(t2^n-1)^n+(t2^n+1)^n\right]\right),$$

und es gibt keine weiteren Lösungen.

Aufgabe 8

Die in (2) auftretende Summe ist symmetrisch in den v_i, d.h., bei beliebiger Vertauschung der v_i verändert sich ihr Wert nicht. Daher können wir o.B.d.A. die u_i so numerieren, daß $u_o \leq u_1 \leq \ldots \leq u_4$. Für i = 0, ..., 4 sei $t_i := u_i - \lfloor u_i \rfloor - 1$ und $t_{i+5} := t_i + 1$, $t_{i+5} : u_i - \lfloor u_i \rfloor = t_i + 1$. Da

$$\sum_{i=0}^{4} (t_{i+1} - t_i) = t_5 - t_o = 1,$$

gibt es ein $i \in \{0,\ldots,4\}$ mit $t_{i+1} - t_i \geq \frac{1}{5}$, dies sei $t_{n+1} - t_n \geq \frac{1}{5}$.
Wir setzen $v_i := t_{i+n+1}$ für i=0, ..., 4. Offenbar erfüllen diese v_i die Bedingung (1). Weiter ist $v_o \leq \ldots \leq v_4$, da oben $t_o \leq \ldots \leq t_4 < 0 \leq t_5 \leq \ldots \leq t_9$, und

$$v_4 - v_o = t_{n+5} - t_{n+1} = t_n + 1 - t_{n+1} = 1 - (t_{n+1} - t_n) \leq \frac{4}{5}. \qquad (19)$$

Mit

$$\sum_{i=1}^{3} \left[(v_i - v_o)^2 + (v_4 - v_i)^2\right] \leq \sum_{i=1}^{3} (v_i - v_o + v_4 - v_i)^2 = 3(v_4 - v_o)^2$$

und $\quad (v_3 - v_2)^2 + (v_2 - v_1)^2 \leq (v_3 - v_1)^2 \leq (v_4 - v_o)^2$

folgt

$$\sum_{0 \leq i < j \leq 4} (v_i - v_j)^2 \leq 6(v_4 - v_o)^2 \leq 6 \cdot \frac{16}{25} = \frac{96}{25} < 4$$

unter Verwendung von (19), d.h., auch die Bedingung (2) ist für diese v_i erfüllt.

Aufgabe 9

(Nach einer Lösung von Jan Fricke)

Bekanntlich gibt es genau $\binom{n}{5}$ Möglichkeiten, die fünf verschiedenen Zahlen aus $\{1,2,\ldots,n\}$ auszuwählen. (20)

Wir bestimmen die Anzahl $p(n)$ aller solcher 5-Mengen, deren Elemente als arithmetische Folge angeordnet werden können. Jede solcher Folgen ist durch ihr Anfangsglied $a_1 \in \{1,2,\ldots,n\}$ und ihre Differenz d eindeutig bestimmt, wenn $a_5 = a_1 + 4d \leq n$ ist. Also gibt es solche Folgen für $1 \leq d \leq \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor$ und $a_1 = 1,2,\ldots,$ $n - 4d$. Daher erhalten wir

$$p(n) = \sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor} (n-4d) = n \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - 4 \cdot \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1 \right)$$

$$= (n-2) \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor^2 . \qquad (21)$$

Sei nun $a_1, \ldots, a_5$ eine feste arithmetische Folge obiger Art. Dann gibt es $\binom{5}{3} = 10$ verschiedene 3-Mengen aus den a_i, die die als erste niedergeschriebenen Zahlen enthalten können. (22)
Unter diesen sind aber nur genau 4, nämlich $\{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}\}$ für $i = 1,2,3$ sowie $\{a_1, a_3, a_5\}$, selbst wieder als arithmetische Folge anzuordnen. (23)
Aus (20) bis (23) ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$f(n) = \frac{4}{\binom{5}{3}} \cdot p(n) \cdot \frac{1}{\binom{n}{5}}.$$

$$= \frac{48}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \left[(n-2) \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor^2 \right] \qquad (24)$$

Wir setzen $n = 4k + 1 + t$ mit natürlichen k, t und $0 \leq t < 4$. Dann ist $\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{t}{4} \right\rfloor = k$ und

$$8 \left[(n-2) \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor^2 \right] = 8\left[(n-2)k - 2k^2\right] = 2(n-2)(4k) - (4k)^2$$

$$= 2(n-2)(n-1-t) - (n-1-t)^2$$

$$= (n-1-t)\,(n-3-t).$$

In (24) folgt damit

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{6}{n(n-2)\,(n-4)} & \text{falls } t = 0;2 \\[2ex] \dfrac{6(n-2)}{n(n-1)(n-3)(n-4)} & \text{falls } t = 1 \\[2ex] \dfrac{6}{(n-1)(n-2)(n-3)} & \text{falls } t = 3. \end{cases} \qquad (25)$$

Es ist aber
$n(n-4) = n^2-4n < (n-1)(n-3) = n^2-4n+3 < (n-2)^2 = n^2-4n+4$ und somit

$n(n-2)(n-4) < (n-1)(n-2)(n-3) < (n-2)^3$ sowie
$n(n-1)(n-3)(n-4) < (n-2)^4$.
In (25) folgt damit in allen Fällen $f(n) > \frac{6}{(n-2)^3}$.

Aufgabe 10

Man betrachte eine Reihe von n Punkten. Diese Punkte bilden n-1 Lücken. Man kann in diese Lücken senkrechte Trennbalken auf 2^{n-1} Arten einfügen. Auf diese Weise erhält man alle Folgen mit der Summe n. Um die Anzahl T(n,k) aller Glieder k in allen diesen Folgen zu bestimmen, zeichnen wir zuerst eine Reihe von n Punkten. Dann packen wir k aufeinanderfolgende Punkte in ein Rechteck und setzen links und rechts davon senkrechte Balken.

$$\cdot\;\cdot\;\cdot \mid \cdot \mid \cdot \mid \boxed{\cdot\;\cdot\;\cdot} \mid \cdot\;\cdot \Longleftrightarrow (3,1,1,\boxed{3},2)$$

1. Fall: Die verpackten Punkte enthalten keinen Endpunkt. Die Verpackung kann auf n-k-1 Arten erfolgen. Es verbleiben n-k-2 Lücken zwischen den nicht verpackten Punkten. Man kann in jede Lücke höchstens einen Trennbalken auf 2^{n-k-2} Arten einfügen. So entsteht eine Folge mit einem verpackten Glied k.

2. Fall: Die verpackten Punkte enthalten einen Endpunkt. Dies kann auf zwei Arten erfolgen, und es gibt nun n-k-1 Lücken, in die man Balken auf 2^{n-k-1} Arten einfügen kann.
Man erhält insgesamt

$$T(n,k) = (n-k-1) \cdot 2^{n-k-2} + 2 \cdot 2^{n-k-1} = (n-k+3) \cdot 2^{n-k-2}$$

Beispiel: Mit n=6, k=2 liefert die Formel T(6,2)=28. Alle Folgen mit der Summe 6, die mindestens eine 2 enthalten: (2,2,2), (4,2), (3,2,1) und Permutationen, (2,2,1,1) und Permuationen, (2,1,1,1,1) und Permutationen.
Die Anzahl der Zweien in diesen Folgen ist
$T(6,2)=3+2+6+2 \cdot 6+5=28$.

Aufgabe 11

Es sei m ein ausgelassener Wert, so daß $f(n) \neq m$ für $n=1,2,\ldots$.
Dann enthält das Intervall $[m,m+1]$ kein Glied der Folge $n+\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2}$. D.h., es gibt ein n, so daß

$$n+\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2} < m \text{ und } m+1 \leq n+1+\sqrt{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{2}$$

aber dann ist

$$\sqrt{\frac{n}{3}} < m-n-\frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{n+1}{3}} \Longrightarrow \frac{n}{3} < (m-n)^2-(m-n)+\frac{1}{4} \leq \frac{n+1}{3} \Longrightarrow$$

$n<3(m-n)^2-3(m-n)+\frac{3}{4} \leq n+1$ (addiere beiderseits m-n) $\Longrightarrow$

$m<3(m-n)^2-2(m-n)+\frac{3}{4} \leq m+1.$

Aus der letzten Ungleichungskette folgt

$m=3(m-n)^2-2(m-n).$

Die übersprungenen Werte liegen also in der Folge $3k^2-2k$.
Es gibt jedoch genau n Zahlen der Form $3k^2-2k$, die $3n^2-2n+n=3n^2$ nicht übertreffen und genau $3n^2-2n$ verschiedene natürliche Zahlen der Form f(k). In der Tat: Die Folge $f(1), f(2), \ldots, f(3n^2-2n) = 3n^2-n$ (dies wird noch bewiesen) ist eine steigende Folge von $3n^2-2n$ verschiedenen Zahlen aus $[1, 3n^2-n]$. Daher überspringt die Folge genau n Zahlen. Sie müssen die Form $3k^2-2k$ haben. Aber es gibt nur n Zahlen der Form $3k^2-2k$ in diesem Intervall. D.h., alle diese Zahlen werden übersprungen.

Beweis der Tatsache $f(3n^2-2n)=3n^2-n$:

$$f(3n^2-2n)=\left[3n^2 2n+\sqrt{n^2-\frac{2}{3}n}+\frac{1}{2}\right] = 3n^2-n, \text{ da}$$

$$\sqrt{n^2-\frac{2}{3}n}+\frac{1}{2} \quad n+\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{n^2-\frac{2}{3}n}+\frac{1}{2} > \sqrt{n^2-n+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=n.$$

Bemerkung: Man kann das Problem erschweren, indem man zeigen läßt, daß

$f(n)=\left[n+\sqrt{\frac{n}{k}}+0{,}5\right]$ mit $k \in \mathbb{N}$ die Glieder der Folge

$a_n=kn^2-(k-1)n+\left[\frac{k-1}{n}\right]$

überspringt.

Aufgabe 12

Lösung 1

Sind a, b Kanten des Vielflachs, so bezeichne man die Menge $\{a,b\}$ genau dann als Haken, wenn es eine Seitenfläche des Vielflachs gibt, zu deren Kanten a und b gehören, und wenn a und b aneinanderstoßen. Dabei heiße der Haken $\{a,b\}$ passierbar, wenn im Sinne der vorgegebenen Orientierung beide Kanten unmittelbar

hintereinander durchlaufen werden können. Offensichtlich kann der gleiche Haken nicht zu verschiedenen Ebenen, also auch nicht zu verschiedenen Seitenflächen des Vielflachs gehören.
Es sei h die Anzahl der Haken, k die Anzahl der Kanten des Vielflachs. Da zu jedem Haken zwei Kanten, zu jeder Kante vier Haken gehören, gibt es genau doppelt so viele Kanten wie Haken; es gilt also

$$h = 2k. \tag{26}$$

Umläuft man beginnend auf einer Kante eine Ecke über die angrenzenden Flächen, so trifft man nach den Voraussetzungen auf mindestens eine zu dieser Ecke hin und mindestens eine von dieser Ecke weg orientierte Kante. Von den Haken auf dem "Weg" zur Startkante sind daher mindestens zwei passierbar. Wird die Eckenzahl mit e bezeichnet, so hat man daher mindestens 2e passierbare Haken. Ist h_+ die Anzahl der passierbaren, h_- die Anzahl der nicht passierbaren Haken, ergibt sich daher

$$h_+ \geq 2e. \tag{27}$$

Wenn eine Seitenfläche des Vielflachs nicht (im Sinne der Kantenorientierung) umlaufbar ist, gibt es auf dem die Fläche umrandenden Kantenzug mindestens zwei Richtungswechsel, zu der Fläche gehören also mindestens zwei nicht passierbare Haken. Ist f die Anzahl der Seitenflächen des Vielflachs, f_+ dabei die Anzahl der umlaufbaren, f_- die Anzahl der nicht umlaufbaren Flächen, so folgt

$$h_- \geq 2f_-. \tag{28}$$

Unter Verwendung des Eulerschen Polyedersatzes

$$f = 2 + k - e \tag{29}$$

kann man nun abschätzen:

$$\begin{aligned} 2f_+ &= 2f - 2f_- \\ &= 4 + 2k - 2e - 2f_- && \text{(nach (29))} \\ &= 4 + h - 2e - 2f_- && \text{(nach (26))} \\ &\geq 4 + h - h_+ - 2f_- && \text{(nach (27))} \\ &= 4 + h_- - 2f_- \\ &\geq 4 && \text{(nach (28)).} \end{aligned}$$

Somit folgt $f_+ \geq 2$; das Vielflache hat also mindestens zwei Seitenflächen, die im Sinne der Kantenorientierung umlaufen werden können.

Lösung 2

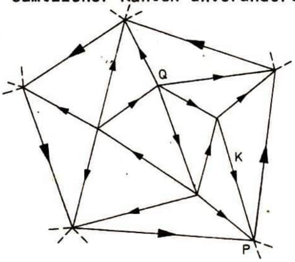
Da von jeder Ecke des Vielflachs mindestens eine Kante wegführt, also keine "Sackgassen" existieren, kann man nach einem Start bei einer beliebigen Ecke eine beliebig lange Kette von aneinandergereihten Kanten durchlaufen. Wegen der endlichen Anzahl aller Ecken trifft man hierbei irgendwann zum ersten Mal auf eine bereits durchlaufene Ecke E; dies muß nicht die Ausgangsecke sein.

Es gibt somit einen geschlossenen, doppelpunktfreien Kantenzug k (von E zu E), der in einer Richtung durchlaufen werden kann. Durch diesen einfach-geschlossenen Weg wird die Oberfläche des Vielflachs in zwei Gebiete G und H zerlegt, wobei der zerlegende Kantenzug beiden Gebieten zugerechnet wird.

Es genügt nun, die Existenz einer Fläche mit umlaufbarem Rand im Gebiet G nachzuweisen. Aus Symmetriegründen folgt daraus dann die Existenz einer zweiten auf dem Rand umlaufbaren Fläche in H.

Die Anzahl der zu G gehörenden Flächen sei mit f(G) bezeichnet.

a) Gilt f(G)=1, ist man bereits fertig, da der Rand von G durchlaufbar ist.
b) Enthält G mehr als eine Fläche, gibt es mindestens eine Kante K in G, die nicht auf dem umrandenden Kantenzug k liegt, aber mit k eine Ecke gemeinsam hat. Man darf annehmen, daß diese Kante K von einer Ecke P von k aus ins Innere von G führt (und nicht umgekehrt), andernfalls ändere man vorübergehend die Orientierung sämtlicher Kanten des Vielflachs. Dies ist bei der Lösung zulässig, da die Menge der auf dem Rand umlaufbaren Flächen bei Umkehrung der Durchlaufrichtung sämtlicher Kanten unverändert bleibt.



Startend bei P durchlaufe man nun mit K beginnend so lange eine Kette von Kanten, bis man erstmals auf eine bereits passierte oder zu k gehörende Ecke Q stößt.
Damit gewinnt man einen von Q zu Q führenden doppelpunktfreien, geschlossenen Kantenzug k', der die Oberfläche des

Vielflachs in zwei Gebiete G' und H' zerlegt, von denen eines, es sei G', ganz in G liegt.
Eine der beiden an K angrenzenden Flächen gehört nicht zu G'; es gilt also $f(G') < f(G)$.

Da sich das beschriebene Verfahren im Falle $f(G') > 1$ iterieren läßt, - G' rückt in der Überlegung dann an die Stelle von G - andererseits nach endlich vielen Wiederholungen wegen der Endlichkeit der Flächenanzahl des Vielflachs abbrechen muß, gelangt man schließlich zu einem Gebiet, das aus nur einer Fläche besteht und auf dem Rand umlaufen werden kann.

<u>Aufgabe 13</u>

$$F(n) = \begin{cases} \lceil \log_2 n \rceil + 1, & \text{falls } n = 2^r, \\ \lceil \log_2 n \rceil, & \text{falls } n \neq 2^r. \end{cases} \tag{29}$$

Eine Menge $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ ist nur für n-Mengen N mit $n \leq 2^t$ trennend. Das folgt durch Induktion über t. Der Fall $t = 1$ ist klar. Angenommen F $\{A_1, \ldots, A_t\}$ ist für eine n-Menge, $n \geq 2^t + 1$ trennend. Dann ist $F' = \{A_1, \ldots, A_{t-1}\}$ für $N' = A_t$ und für $N'' = N \setminus A_t$ trennend. Das ist ein Widerspruch, da $|N'| > 2^{t-1}$ oder $|N''| > 2^{t-1}$ ist.

Also hat jede trennende Menge $\geq \lceil \log_2 n \rceil$ Elemente, $n = |N|$. (30)
Für $t = r$ und $n = 2^r$ bleibt bei einer trennenden Menge $F = \{A_1, \ldots, A_t\}$ stets genau ein Element $y \in N$ nicht über- (31)
deckt. Da F trennend ist, bleibt höchstens ein Element nibht überdeckt. Dessen Existenz beweist man durch Induktion über $r \geq 1$. Der Fall $r = 1$ ist klar. Für $|A_1| > 2^{r-1}$ ist nach (30) $|F - \{A_1\}| \geq \lceil \log_2 (A_1) \rceil = r$, also $t = |F| \geq t + 1$. Für $|A_1| < 2^{r-1}$ muß $F - \{A_1\}$ noch $N - A_1$ trennen und es ist wieder $t = |F| \geq t + 1$. Beides ist unmöglich, und so ist $|A_1| = 2^{r-1}$. $F - \{A_1\}$ muß $N - A_1$ trennen. Dabei bleibt nach Induktion ein Element $y \in N - A_1$ nicht überdeckt. Es wird auch von A_1 nicht überdeckt.

Aus (30) und (31) folgt $\geq$ in (29).
Konstruktion von trennenden und überdeckenden Mengen $F = \{A_1, \ldots, A_r\}$ für N, $2^{r-1} < n \leq 2^r$, $r \geq 1$.
Für $r = 1$ wähle $A_1 = \{1\}$. Schluß von r auf r + 1.
Seien N', N" disjunkte Mengen, $|N'| = |N''| = 2^r$ und $A_1, \ldots, A_r$ bzw. $A_1, \ldots, A_r$ die trennenden Mengen für N' bzw. N".

Setze $A_i = A_i' \cup A_i''$, $i = 1,\dots,r$ und mit y bzw. y als den nicht überdeckten Elementen aus N' bzw. N" setze $A_{r+1} = \{y'\} \cup (N'' - \{y''\})$.

Man überprüft leicht, daß $F = \{A_1, \dots, A_{r+1}\}$ trennend für $N = N' \cup N''$ ist und genau y" nicht überdeckt. Damit gibt es für jede m- elementige Menge, $m < 2^{r+1}$, eine trennende und überdeckende Menge F, $|F| = r+1$. Für N selbst füge man zu F noch irgendeine Teilmenge $A \subsetneqq N' \cup N''$ mit $y'' \in A$ hinzu.

Aufgabe 14

Die Rekursion wird erfüllt durch

$$a_n = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right)$$

$$= \binom{n}{1} + 2\cdot\binom{n}{3} + 4\binom{n}{5} + 8\cdot\binom{n}{7} + \dots .$$

Sei $n = 2^k \cdot m$, m ungerade. Dann ist für $p > o$

$$2^p \binom{n}{2p+1} = 2^{k+p} \cdot m \cdot \frac{(n-1)\dots(n-2p)}{(2p+1)!}$$

$$= 2^{k+p} \cdot \frac{m}{2p+1} \cdot \binom{n-1}{2p}.$$

Aber

$$2^p \cdot \frac{m}{2p+1}\binom{n-1}{2p}$$

ist eine ganze Zahl und $2p + 1$ ist ein Teiler von $m \cdot \binom{n-1}{2p}$

und folglich ist $\frac{m}{2p+1}\binom{n-1}{2p}$

eine ganze Zahl und folglich ist $2^p \cdot \binom{n}{2p+1}$

durch 2^{k+p} teilbar.

Also ist $a_n = n + \sum\limits_{p>o} 2^p \cdot \binom{n}{2p+1} = 2^k \cdot m + 2^{k+1} \cdot N$

für eine gewisse ganze Zahl N. Mithin ist a_n durch genau die gleiche Potenz von 2 teilbar wie n.

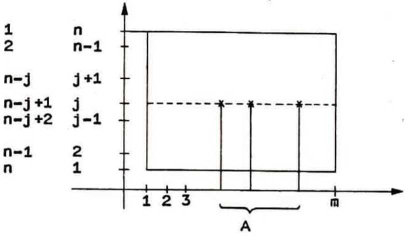
Aufgabe 15

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}_m$ die Menge aller derjenigen Teilmengen von $\{1,\ldots,m\}$, die keine zwei Elemente i_1, i_2 mit $|i_1-i_2| = 1$ enthalten. Für $A \in \mathfrak{A}_m$ sei ferner $a_{m,n,A}$ die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von $Z_{m,n}$, die erstens keine zwei Paare (i_1,j_1), (i_2,j_2) mit $|i_1-i_2| + |j_1-j_2| = 1$ enthalten und zu denen zweitens als Paare mit der zweiten Koordinate $j = n$ genau die Paare (i,n) mit $i \in A$ gehören.

Dann gilt offenbar für alle j mit $1 \leq j \leq n$

$$a_{m,n} = \sum_{A\in\mathfrak{A}_m} a_{m,j,A}\cdot a_{m,n-j+1,A}$$

(siehe Abbildung).



Insbesondere gilt

$$a_{m,2k} = \sum_{A\in\mathfrak{A}_m} a_{m,k,A}\cdot a_{m,k+1,A} \qquad (n = 2k,\ j = k),$$

$$a_{m,2k-1} = \sum_{A\in\mathfrak{A}_m} a_{m,k,A}\cdot a_{m,k,A} \qquad (n = 2k-1,\ j = k),$$

$$a_{m,2k+1} = \sum_{A\in\mathfrak{A}_m} a_{m,k+1,A}\cdot a_{m,k+1,A} \quad (n = 2k+1,\ j = k+1).$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$a^2_{m,2k} = \Big(\sum_{A\in\ _m} a_{m,k,A}\, a_{m,k+1,A}\Big)^2 \leq \Big(\sum_{A\in\mathfrak{A}_m} a^2_{m,k,A}\Big)\Big(\sum_{A\in\mathfrak{A}_m} a^2_{m,k+1,A}\Big)$$
$$= a_{m,2k-1}\cdot a_{m,2k+1}.$$

Aufgabe 16

Die algebraische Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

besitzt drei reelle Wurzeln α, β und a mit

$$-1 < \alpha < -\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} < \beta < 1,$$

$$2 \cdot \sqrt{2} < a.$$

Man prüft auch

$$(-\alpha)^3 - 3(-\alpha)^2 + 1 = -2\alpha^3 > 0. \qquad (32)$$

Daraus folgt $-\alpha < \beta$ und folglich $|\alpha| < \beta$.

Ferner gilt

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (3-a)^2 + \frac{2}{a} = 1 + (8 - a^2) < 1, \qquad (33)$$

da $8 - a^2 < 0$ ist.

Man definiere für alle natürlichen Zahlen n

$$u_n = \alpha^n + \beta^n + a^n.$$

Dann ist $u_0 = u_1 = 3$ und $u_2 = 9$. Aus $u_{n+3} = 3 \cdot u_{n+2} - u_n$ folgt, daß u_n eine natürliche Zahl ist.

Für alle $n \geq 1$ ergibt sich aus (32), daß $0 < \alpha^n + \beta^n$ ist.

Aus (33) folgt, daß $\alpha^n + \beta^n < 1$ ist (das ist klar für $n = 1$ und ergibt sich für $n \geq 2$ aus dem Vergleich mit $\alpha^2 + \beta^2$).

Man hat nun zu zeigen, daß $u_{1788}-1$ und $u_{1988}-1$ durch 17 teilbar sind.

Durch Rechnung mod 17 findet man sukzessive folgende Werte von u_n:

$u_0 = 3$, $u_1 = 3$, $u_2 = 9$, $u_3 = 7$, $u_4 = 1$, $u_5 = 11$, $u_6 = 9$, $u_7 = 9$, $u_8 = 16$, $u_9 = 5$, $u_{10} = 6$, $u_{11} = 2$, $u_{12} = 1$, $u_{13} = 14$, $u_{14} = 6$, $u_{15} = 0$, $u_{16} = 3$, $u_{17} = 3$, $u_{18} = 9$.

Daher erfüllt mod 17 die Folge $\{u_n\}$ die Beziehung

$$u_{n+16} = u_n.$$

Wegen $1788 = 16 \cdot 111 + 12$ und $1988 = 16 \cdot 124 + 4$ gilt

$u_{1788} = u_{12} = 1$ und $u_{1988} = u_4 = 1$. Daher ist

$u_{1788} - 1 = 0$ und $u_{1988} - 1 = 0$

und die Behauptung ist bewiesen.

IMO-Übungsaufgaben

Heft 28

Ministerium
für
Bildung

Pionierpalast
„Ernst Thälmann"

Aufgaben

Aufgabe 1

1. Man beweise, daß die Menge $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ derart in 117 paarweise elementfremde Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ zerlegt werden kann, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
   (1) für alle i enthält A_i genau 17 Elemente,
   (2) für alle i hat die Summe der Elemente in A_i denselben Wert

IMO 1989 Nr. 1 (Philippinen)

Aufgabe 2

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Die Winkelhalbierenden seiner Innenwinkel α, β und γ schneiden den Umkreis in den Punkten A_1, B_1 bzw. C_1. Die Halbierenden der Außenwinkel von β und γ schneiden sich auf den Geraden AA_1 im Punkt A_0; analog seien die Punkte B_0 und C_0 bestimmt. Die Flächeninhalte des Dreiecks $A_0B_0C_0$, des Sechsecks $AC_1BA_1CB_1$ und des Dreiecks ABC seien mit $|A_0B_0C_0|$, $|AC_1BA_1CB_1|$ bzw. $|ABC|$ bezeichnet.

Man zeige:

(1) $|A_0B_0C_0| = 2 \cdot |AC_1BA_1CB_1|$.

(2) $|A_0B_0C_0| \geqq 4 \cdot |ABC|$.

IMO 1989 Nr. 2 (Australien)

Aufgabe 3

Es seien k und n feste positive ganze Zahlen. In der Ebene sei eine Menge S von n verschiedenen Punkten mit folgenden Eigenschaften gegeben:

(1) keine drei Punkte von S sind kollinear,

(2) zu jedem Punkt P aus S gibt es mindestens k verschiedene Punkte aus S, die den selben Abstand von P haben.

Man beweise:

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

IMO 1989 Nr. 3 (Niederlande)

Aufgabe 4

In einem konvexen Viereck ABCD gelte für die Seiten AB, AD und BC, daß $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$ ist.

Im Innern dieses Vierecks liegt ein Punkt P, der von der Geraden CD den Abstand h und von den Punkten A und B den Abstand $h + \overline{AD}$ bzw. $h + \overline{BC}$ hat. Man beweise:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqq \frac{1}{\sqrt{\overline{AD}}} + \frac{1}{\sqrt{\overline{BC}}} \,.$$

IMO 1989, Nr. 4 (Island)

Aufgabe 5

Man zeige:

Für jede natürliche Zahl n gibt es n aufeinander folgende natürliche Zahlen, von denen keine eine Primzahlpotenz mit ganzzahligem Exponenten ist.

IMO 1989, Nr. 5 (Schweden)

Aufgabe 6

Die 20 Spieler eines lokalen Tennisklubs haben genau 14 (Zweipersonen-)Spiele untereinander durchgeführt, wobei jedes Mitglied an mindestens einem Spiel beteiligt war. Man beweise, daß es dabei 6 Spiele gab, an denen 12 verschiedene Spieler beteiligt waren.

18. USA-Mathematik-Olympiade 1989

Aufgabe 7

Eine Sportliga besteht aus 2n Mannschaften $M_1, M_2, \ldots, M_{2n}$. Für die Hinrunde ist ein Spielplan S ausgearbeitet, nach dem an $2n - 1$ Wochenenden jede Mannschaft genau ein Spiel an einem dieser Wochenenden gegen eine andere dieser 2n Mannschaften austrägt.

Für $1 \leqq 2 \leqq 2n$, $1 \leqq k \leqq 2n - 1$ sei

$f_{ik} = A$, wenn die Mannschaft M_1 am k-ten Wochenende ein Auswärtsspiel hat und

$f_{ik} = H$, wenn die Mannschaft M_1 am k-ten Wochenende ein Heimspiel hat.

Falls $f_{1k} = f_{1k+1}$ gilt, so sagen wir, die Mannschaft M_1 hat im Spielplan S am (k+1)-Spieltag ein "Break".

Man zeige, daß ein beliebiger Spielplan S mindestens 2m-2 "Breaks" enthält und diese Schranke nicht verbessert werden kann.

Aufgabe 8

Zwei Spieler A und B spielen auf dem schlichten Graphen G (keine Schleifen, keine doppelten Kanten) folgendes Spiel:
Abwechselnd entfernen die Spieler jeweils eine Kante. Durch die Entfernung einer Kante werden jeweils 0,1 oder 2 Knoten des Graphen isoliert (mit keinen anderen Knoten mehr durch eine Kante verbunden). Entsprechend der Anzahl der Knoten, die durch das Entfernen einer Kante isoliert werden, erhält dieser Spieler 0,1 oder 2 Punkte auf sein Konto. Das Spiel ist beendet, wenn in dem Graph G alle Kanten entfernt sind. Gewonnen hat der Spieler mit den meisten Punkten.

a) Man zeige, wenn G eine ungerade Anzahl von Kanten enthält, dann gibt es für den Spieler, welcher zuerst eine Kante entfernt, eine Gewinnstrategie. Man beschreibe eine solche Strategie.
b) Man zeige, wenn G eine gerade Anzahl von Kanten und keine Komponente, welche nur aus einer Kante besteht, enthält, dann gibt es für den Spieler, welcher nicht zuerst eine Kante entfernt, eine Gewinnstrategie.

Aufgabe 9

Die Spieler A und B spielen folgendes Spiel:
Gegeben sei ein rechteckiges Gitter der Größe $p \cdot q$

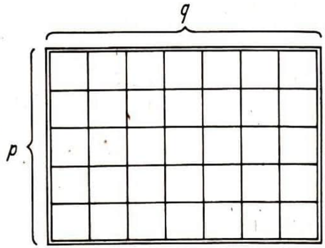


Abb. 9.1

Die Randkanten (doppelt gezeichnet) sind vor dem Beginn des Spieles markiert. Abwechselnd markieren die Spieler nun jeweils eine Kante (jede Kante kann nur einmal markiert werden). Ein Spieler

bekommt einen Punkt, wenn durch die Markierung einer Kante die vier Randkanten eines Quadrates (nur die kleinen Quadrate) vollständig markiert sind. Durch die Markierung einer Kante kann ein Spieler folglich 0,1 oder 2 Punkte erhalten. Das Spiel ist zu Ende, wenn alle Kanten markiert sind. Gewonnen hat der Spieler mit den meisten Punkten.
Man zeige, wenn p und q verschiedene Parität haben, so gibt es für den Spieler, der zuerst eine Kante markiert, eine Gewinnstrategie. Haben p und q verschiedene Parität, so gibt es für den Spieler, der nicht zuerst eine Kante markiert, eine Gewinnstrategie. Man gebe eine solche Strategie an.

Aufgabe 10

Man beweise für die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} s^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

wobei $2s = a + b + c$ ist.
(Korrespondenzzirkel III - 87/88)

Aufgabe 11

Gibt es im 3-dimensionalen euklidischen Raum eine Menge M, so daß für jede Ebene E der Durchschnitt $M \cap E$ endlich und nicht leer ist?
(Korrespondenzzirkel III - 87/88)

Aufgabe 12

Es sei ABC ein nicht gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte entgegen dem Uhrzeigersinn bezeichnet sind. Man ermittle den geometrischen Ort der Schwerpunkte der gleichseitigen Dreiecke A'B'C' (diese Eckpunkte sind auch entgegen dem Uhrzeigersinn bezeichnet), für die Punkte A, B', C' sowie A', B, C' und A', B', C kollinear sind.
(Korrespondenzzirkel III - 87/88)

Aufgabe 13

Man beweise, daß jedes Element der Menge $M = \{1, 2, \ldots, 1987\}$ derart mit je einer von 4 Farben gefärbt werden kann, daß jede aus 10 Elementen der Menge M gebildete arithmetische Folge nicht einfarbig ist.

(Korrespondenzzirkel III - 87/88)

Bemerkung:

Die Aufgabe ist schon in "IMO-Übungsaufgaben" Heft 25 als Aufgabe 1 enthalten. Die nachfolgende Lösung nach Martin Welk ist von der dortigen grundverschieden und sie enthält außerdem eine Verschärfung.

Aufgabe 14

Durch den Punkt A des Dreiecks ABC, in dem $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ gilt, werden verschiedene Geraden gezogen. Man zeige, daß jede dieser Geraden höchstens einen Punkt M enthält, der von den Eckpunkten des Dreiecks verschieden ist und $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$ erfüllt. Man bestimme, welche der betrachteten Geraden keinen solchen Punkt M enthalten.

(Korrespondenzzirkel III - 87/88)

Aufgabe 15

Ein Würfel mit der Kantenlänge n, $n \geqq 3$, besteht aus n^3 Einheitswürfeln. Man zeige, daß man in jeden der Einheitswürfel derart eine ganze Zahl eintragen kann, daß

a) sämtliche eingetragenen n^3 Zahlen verschieden sind und

b) die Summe der Zahlen in jeder zu einer Würfelkante parallelen Reihe gleich Null ist.

(Korrespondenzzirkel III - 87/88)

Aufgabe 16

Das Polynom p(x) heiße zulässig, falls alle seine Koeffizienten gleich 0, 1, 2 oder 3 sind. Für eine gegebene natürliche Zahl $n \geqq 1$ bestimme man die Anzahl derjenigen zulässigen Polynome, die $p(2) = n$ erfüllen.

(Korrespondenzzirkel III - 87/88)

Aufgabe 17

Es sei ABCDEFGH ein Parallelepiped mit AE ∥ BF ∥ CG ∥ DH. Man beweise die Ungleichung $\overline{AF} + \overline{AH} + \overline{AC} \leqq \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AG}$.

(Korrespondenzzirkel III - 87/88)

Lösungen

Aufgabe 1

Die Aufgabe bleibt richtig, falls die Zahl 117 durch irgendeinen Teiler k von $1989 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17$ ersetzt wird, der $1 < k < 1989$ erfüllt.

Sei k ein solcher Teiler. Dann ist $\frac{1989}{k} \geq 3$. Man kann die Menge $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ in $\{1, 2, \ldots, 3k\}$ und in $\{(3k + 2kj) + 1, \ldots, (3k + 2kj) + 2k\}$, $0 \leq j \leq L := \frac{1989 - 3k}{2k} - 1$ zerlegen. Es gilt

$$\{1, \ldots, 1989\} = X \cup \left(\bigcup_{j=1}^{L} Y_j \right), \text{ wo}$$

$$X = \{1, 2, \ldots, 3k\},$$
$$Y_j = \{(3k + 2k-j) + 1, \ldots, (3k+2kj) + 2k\} \text{ ist.}$$

Hilfssatz 1. Die Menge $X = \{1, 2, \ldots, 3k\}$ kann in k disjunkte Teilmengen aus jeweils 3 Elementen zerlegt werden, so daß jede dieser Teilmengen die gleiche Summe hat.

Beweis: Sei $k = 2t + 1$, dann gilt

$X = \{1, 2, \ldots 3k\} = \{1, 2, \ldots, 6t+3\}$. Für jedes i, $1 \leq i \leq t$,

sei $X_{2i-1} := \{i, 3t+1+i, 6t+5-2i\}$

$X_{2i} := \{t + i + 1, 2t + 1 + i, 6t + 4 - 2i\}$

und $X_{2t+1} := X_k := \{t+1, 4t+2, 4t+3\}$.

Man beachte, daß $X = \{1, \ldots, 3k\} = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$, $|X_i| = 3$ für $i = 1, \ldots, k$ und jedes X_i die Summe $9t+6$ hat. Fertig!

Hilfssatz 2. Die Menge $Y_j = \{(3k + 2kj) + 1, \ldots, (3k + 2kj) + 2k\}$ kann in k diejunkte Teilmengen aus jeweils 2 Elementen mit jeweils gleicher Summe zerlegt werden.

Beweis: Sei r eine beliebige positive ganze Zahl. Dann kann die Menge $\{r+1, r+2, \ldots, mr + 2k\}$ in k Teilmengen

$$\{r+1, r+2k\}, \{r+z, r+2k-1\}, \ldots, \{r+k, r+k+1\}$$

jeweils mit der Summe $2r + 2k+1$ zerlegt werden. Um die Zerlegung von Y_j zu erhalten, setze man $r = 3k+2kj$.

$$Y_j = \bigcup_{i=1}^{k} Y_{ji}, \text{ wo } \begin{aligned} Y_{j1} &= \{(3k+2kj)+1, \ldots, (3k+2kj)+2k\} \\ Y_{j2} &= \{(3k+2kj)+2, \ldots, (3k+2kj)+2k-1\} \\ &\ldots \\ Y_{jk} &= \{(3k+2kj)+k, \ldots, (3k+2kj)+k+1\} \end{aligned}$$

ist. Eine Zerlegung der Ausgangsmenge $\{1, \ldots, 1989\}$ entsprechend der Aufgabenstellung ist durch

$$A_i := X_i \cup \left(\bigcup_{j=1}^{L} Y_{ji} \right)$$

gegeben.

Aufgabe 2

Sei I der Schnittpunkt der drei inneren Winkelhalbierenden.
Dann gilt $\overline{IA_1} = \overline{A_1A_o}$. (1)

Man erkennt die Richtigkeit von (1) z. B. folgendermaßen.
Es seien A_oA, B_oB und C_oC Höhen im Dreieck $A_oB_oC_o$. Folglich ist der Umkreis des Dreiecks ABC der 9-Punkte-Kreis (Feuerbach-Kreis) des Dreiecks $A_oB_oC_o$ und halbiert folglich die Strecke IA_o.

Ohne Verwendung des Feuerbach-Kreises kann man auch so schließen:

$$\sphericalangle A_1IB = \frac{1}{2} \sphericalangle A + \frac{1}{2} \sphericalangle B \quad \text{(Außenwinkel von } \Delta\, AIB)$$

$$\sphericalangle IBA_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle B + \frac{1}{2} \sphericalangle A = \sphericalangle A_1IB.$$

Folglich ist $\overline{IA_1} = \overline{A_1B}$. (2)

Andererseits gilt

$$\sphericalangle A_1A_oB = 90^o - \sphericalangle A_1IB$$

$$\sphericalangle A_1BA_o = 90^o - \sphericalangle IBA_1$$

und folglich

$$\overline{A_1B} = \overline{A_1A_o}. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt auch (1).
Aus (1) ergibt sich für die Flächen $|\Delta IA_1B| = |\Delta A_oA_1B|$.
Wiederholte Anwendung dieser Oberlegung für die 6 Winkel in I und Addition liefert die behauptete Gleichung.
Zum Beweis der Ungleichung zeichne man die drei Höhen im Δ ABC, die sich im Punkt H schneiden mögen. Sei X das Spiegelbild von H

an der Seite BC, Y das Spiegelbild von H an der Seite AC und Z das Spiegelbild von H an AB. Dann ist $\sphericalangle CXB = \sphericalangle CHB = 180^\circ - \sphericalangle A$ und daher sind X, Y und Z auf dem Umkreis des Dreiecks ABC gelegen. Da A_1 der Mittelpunkt des Bogens BC ist, gilt $|\Delta BA_1C| \geqq |\Delta BXC|$. Das liefert

$$
\begin{aligned}
&|AC_1BA_1CB_1| \geqq |AZBXCY| \\
&= 2 \cdot \left(|\Delta BHC| + |\Delta CHA| + |\Delta AHB| \right) \\
&= 2 \cdot |ABC|.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Angenommen es gilt $k \geqq \frac{1}{2} + \sqrt{2}\, n$. Man betrachte einen Punkt $P \in S$. Es gibt mindestens k Punkte in S, die den gleichen Abstand zu P haben und folglich mindestens $\binom{k}{2}$ Paare $\{A, B\}$ aus Punkten in S mit $\overline{AP} = \overline{BP}$. Da das für jeden Punkt P in S gilt, gibt es mindestens $n \cdot \binom{k}{2}$ Paare $\{A, B\}$ von Punkten mit folgender Eigenschaft: auf der Mittelsenkrechten von AB liegt (mindestens) ein Punkt von von S. Nun ist

$$
n \cdot \binom{k}{2} = n \cdot \frac{k(k-1)}{2} \geqq \frac{n}{2}\left(\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2n} - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}\left(2n - \frac{1}{4}\right) =
$$

$$
= n\left(n - \frac{1}{8}\right) > n(n-1) = 2\binom{n}{2}.
$$

Da $\binom{n}{2}$ die Anzahl aller möglichen Paare $\{A,B\}$ mit $A,B \in S$ ist, muß es ein Paar von Punkten A,B und Punkte $P_1, \dots, P_m$, $m > z$ geben, so daß $\overline{AP_i} = \overline{BP_i}$, $i = 1, \dots, m$, ist. Aber dann sind $P_1, \dots, P_m \in S$ und kollinear. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 4

Wir betrachten Konstruktionen des Vierecks bei unterschiedlichen Werten von h. Sei $\overline{AD} = R$ und $\overline{BC} = r$. Zunächst konstruieren wir das Dreieck ABP mit Seitenlängen R + r, R + h und r + h. Als nächstes zeichnen wir den Kreis K_1 mit dem Zentrum A und dem Radius R sowie den Kreis K_2 mit dem Mittelpunkt B und dem Radius r und schließlich den Kreis K_3 mit dem Mittelpunkt P und dem Radius h. Die Punkte C und D liegen auf dem Kreis K_1 bzw. K_2 und CD ist Tangente an K_3. Daraus resultiert, daß der größte Wert von h, für den die Konstruktion möglich ist, dann auftritt, wenn CD auch Tangente an K_1 und K_2 ist. Das ist äquivalent dazu, daß die Winkel in C und D rechte Winkel sind. Wir werden zeigen, daß in diesem Fall die Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

gilt. Daraus ergibt sich dann unmittelbar die Behauptung. Sei M der Fußpunkt des Lotes von P auf CD. Nach dem Pythagoras gilt

$$\overline{CD} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} \quad \text{und}$$

$$\overline{CD} = \overline{CM} + \overline{MD} = \sqrt{(r+h)^2 - (r-h)^2} + \sqrt{(R+h)^2 - (R-h)^2}$$
$$= 2\sqrt{rh} + 2\sqrt{Rh}.$$

Daher ist $\sqrt{Rr} = \sqrt{rh} + \sqrt{Rh}$.

Das liefert $\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}$. Fertig!

Aufgabe 5

Für gegebenes n wähle man $N := \left((n+1)!\right)^2 + 1$. Dann ist $1 + j$ ein echter Teiler von $N + j$, $1 \leq j \leq n$. Angenommen es gibt eine Primzahl p mit $N + j = p^m$.
Dann gibt es eine Zahl r, $1 \leq r < m$, so daß $1 + j = p^r$ ist.
Aber das liefert $p^{r+1} \mid \left((n+1)!\right)^2$ und $p^{r+1} \mid p^m$
also $p^{r+1} \mid (N-1)$ und $p^{r+1} \mid (N+j)$ und folglich $p^{r+1} \mid (1+j)$, was einen Widerspruch bedeutet.

Aufgabe 6

Sei k die größte ganze Zahl, so daß es bei dem geschilderten Ablauf eine Menge von k Spielen mit 2k verschiedenen Teilnehmern gab. Keine zwei der anderen 20 - 2k Spieler können gegeneinander gespielt haben, da man sonst entgegen der Maximalität von k sogar k + 1 Spiele mit 2k + 2 verschiedenen Teilnehmern hätte. Da jeder dieser 20 - 2k Spieler an mindestens einem Spiel beteiligt war und keine zwei im gleichen Spiel, muß es mindestens 20 - 2k Spiele neben den k anfangs betrachteten Spielen gegeben haben. Folglich ist $14 \geq (20 - 2k) + k$ und damit $k \geq 6$.

Bemerkung:

Die Zahlen 14, 6 und 20 kann man allgemein durch m, n und m+n ersetzen.

Aufgabe 7

P_i sei die Folge (f_{ik}) der Mannschaft M_i.

Es gibt genau zwei verschiedene Folgen ohne "Breaks"

1. H - A - H - A - ... - A - H
2. A - H - A - H - ... - H - A

Es können nicht zwei verschiedene Mannschaften M_i und M_j ein gleiches Profil ohne "Breaks" enthalten, da an dem Wochenende t, wo M_i gegen M_j spielt $f_{it} \neq f_{jt}$ gilt. Damit gibt es höchstens 2 Mannschaften ohne "Break". Die restlichen Mannschaften haben alle mindestens ein "Break". Somit enthält mindestens (2n-2) "Breaks".

Wir geben nun einen Spielplan mit genau (2n-2) "Breaks" an.

Der Spielplan sieht wie folgt aus:

Am Spieltag S_i werden folgende Spiele gespielt, $i = 1, 2, \dots, 2n-1$

$S_i = \{(2n, i)\} \cup \{(i+k, i-k);\ k = 1, 2, \dots, n-1\}$,

wobei die Zahlen i+k und i-k modulo 2n-1 zwischen 1 und 2n-1 liegen sollen.

Für n = 6 sei der Spielplan unten angegeben.

$$S_1 = \{(6,1), (2,5), (34)\}$$
$$S_2 = \{(6,2), (3,1), (45)\}$$
$$S_3 = \{(6,3), (4,2), (51)\}$$
$$S_4 = \{(6,4), (5,3), (12)\}$$
$$S_5 = \{(6,5), (1,4), (23)\}$$

Es gelte nun

$$f_{2ni} = \begin{cases} H & \text{falls } i \text{ ungerade} \\ A & \text{falls } i \text{ gerade} \end{cases}$$

$$f_{(i+k)(i-k)} = \begin{cases} H & \text{falls } k \text{ gerade} \\ A & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

für den Spieltag i.

Aus $x = t + (x-t)$ für $1 \leq t < x$

$x = t$ für $t = x$

$$x = \begin{cases} t + 2n - (t-x) & \text{für } t > x \text{ und } n+1 \leq t-x \\ t - (t-x) & \text{für } t > x \text{ und } t-x \leq n \end{cases}$$

folgt, daß die Mannschaften M_1 und M_{2n} kein "Break" haben.

Mannschaft M_x $2 \leqq x \leqq 2n-1$ hat genau ein "Break" am Spieltag x, wenn x ungerade ist bzw. genau ein "Break" am Spieltag x+1, wenn x gerade ist.

<u>Aufgabe 8</u>

8a) Wir geben eine Gewinnstrategie für den Spieler A an. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies der Spieler welcher beginnt. $\tilde{G}$ sei der aus G entstandene Graph durch Entfernung gewisser Kanten.

Nach jedem Zug (A und B haben je k Kanten, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, entfernt) wird der Restgraph $\tilde{G}$ nach folgenden Fällen durchgemustert:

Fall α) $\tilde{G}$ hat eine Komponenten, die nur aus einer Kante besteht. Dann entfernt Spieler A diese Kante und erhält 2 Punkte. Danach kann Spieler B höchstens genau soviele Punkte erhalten.

Fall β) Fall α) ist nicht vorhanden. $\tilde{G}$ habe einen Knoten x, der nur mit genau einem Knoten y verbunden ist und nach Entfernung der Kante (x,y) hat $\tilde{G}$ keine Komponente, die nur aus einer Kante besteht. Spieler A entfernt die Kante (x,y) und erhält einen Punkt. Danach kann Spieler B höchstens genausoviele Punkte erhalten.

Fall γ) Fall α) und Fall β) sind nicht vorhanden. $\tilde{G}$ enthält einen Weg ungerader Länge $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ ($K \geqq 1$) (x_1 mit x_2, x_2 mit x_3, ..., x_{2k-1} mit x_{2k} verbunden) und x_1 und x_{2k} sind jeweils mit mindestens 3 anderen Knoten aus $\tilde{G}$ verbunden und x_i nur mit x_{i-1} und x_{i+1} für $2 \leqq i \leqq 2k-1$ verbunden.

Spieler A entfernt die Kante (x_1, x_2) und erhält keinen Punkt. Entfernt Spieler B nicht die Kante (x_2, x_3), so erhält er auch keinen Punkt und der nächste Zug folgt. Entfernt Spieler B die Kante (x_2, x_3), so erhält er einen Punkt. Dann entfernt Spieler A (x_3, x_4) usw. bis Spieler B

γ_1) einmal keinen Punkt erhält, dann folgt der nächste Zug;

γ_2) eine Kante aus einem Weg der Länge 2 entfernt. Dann entfernt Spieler A die andere Kante und egal welche Kante B nun entfernt, er kann nicht mehr Punkte als A erreichen. Es folgt der nächste Zug.

Fall δ) Fall α), Fall β) und Fall γ) sind nicht vorhanden. Da G eine ungerade Anzahl von Kanten hat, enthält $\tilde{G}$ einen Kreis ungerader Länge als Komponente (einen Weg, dessen End- und Anfangspunkt identisch sind). Dann entfernt A eine Kante aus diesem Kreis und wendet dann die Strategie aus den Fällen α) und β) an. Analog zu Fall γ) hat A nach einer gewissen Anzahl von Schritten (B hat zuletzt eine Kante entfernt) mindestens genausoviele Punkte wie B. Es folgt der nächste Zug.

Da andere Fälle nicht möglich sind, wird nach dieser Strategie so lange verfahren, bis nur noch eine Kante übrig ist. Diese entfernt Spieler A, erhält 2 Punkte und hat somit garantiert mehr Punkte als Spieler B.

8b) Der Spieler A kann im ersten Zug maximal einen Punkt erhalten. Dann läuft für Spieler B die Gewinnstrategie aus Aufgabe 8a) ab. Mit der Entfernung der letzten Kante erhält er 2 Punkte und gewinnt damit das Spiel.

Aufgabe 9

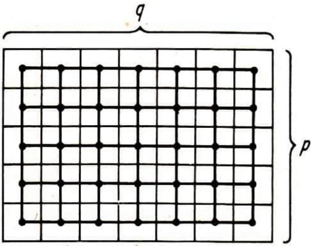


Abb. L 9.1

Das Spiel ist äquivalent zum Spiel der Aufgabe 8, wenn wir den "dick schwarzen Graphen" zugrunde legen. Die Anzahl der Kanten des "dick schwarzen Graphen" ist $K = (p-1)q + (q-1)p = 2pq - (p+q)$. Damit gilt die Aussage.

Aufgabe 10

Die Funktion $f(x) = \frac{x^n}{K - x}$, $K \in R^*$ ist im Intervall $0 \geqq x < K$ konvex, da f das Produkt der konvexen Funktionen $f_1(x) = \frac{1}{k - x}$ und $f_2(x) = x^n$ ist. Nach der Jensenschen Ungleichung ist nun für $0 \leqq a, b, c < K$

$$f(\frac{a+b+c}{3}) \leqq \frac{1}{3}\left[f(a) + f(b) + f(c)\right]$$

Setzt man $K = a+b+c$, so folgt

$$\frac{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n}{a+b+c - \frac{a+b+c}{3}} \leqq \frac{1}{3}\left(\frac{a^n}{a+b+c-a} + \frac{b^n}{a+b+c-b} + \frac{c^n}{a+b+c-c}\right) \text{ bzw.}$$

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \geqq \frac{3\ (a+b+c)^{n-1}}{3^{n-1}} = (\tfrac{2}{3})^{n-2}\ a^{n-1}$$

Aufgabe 11

Es sei $P(x,y,z)$ ein Punkt, der im 3-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten x,y,z hat.

Es sei $M := \{P = P(t,t^3,t^5),\ t \in R \text{ beliebig}\}$.

Eine beliebige Ebene E hat in diesem Raum die Ebenengleichung $ax + by + cz = d$, $a,b,c,d \in R$, wobei $|a| + |b| + |c| > 0$ gilt.

$M \cap E$ ist damit die Menge aller Punkte $P = P(t,t^3,t^5)$, für die $at + bt^3 + ct^5 - d = 0$ (1) mit $|a| + |b| + |c| > 0$ (2) ist.

Die Gleichung (1) hat wegen (2) immer einen ungeraden Grad. Sie hat also immer mindestens eine reelle Nullstelle und höchstens fünf reelle Nullstellen (Folgerung aus Fundamentalsatz der Algebra).

$M \cap E$ ist also nicht leer und endlich. Es gibt also eine Menge M mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 12

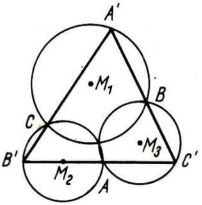


Abb. L 12.1

Offensichtlich muß A' auf dem Unkreis des über der Seite BC nach außen zu errichtenden gleichseitigen Breiecke liegen, B' auf dem des gleichseitigen Dreiecks über AC und C' auf dem des gleichseitigen Dreiecks über AB (liegt nämlich z. B. A' auf der Seite von BC, auf der A nicht liegt, so ist $\overline{\sphericalangle BA'C} = \overline{\sphericalangle C'A'B'}$, also muß wegen der Gleichseitigkeit von A'B'C' $\overline{\sphericalangle BA'C} = 60^\circ$ sein, und das Gesagte folgt nach dem Peripheriewinkelsatz; liegt A' aber auf derselben Seite von BC wie A, so ist $\sphericalangle BA'C$ Nebenwinkel von $\sphericalangle C'A'B'$, also $\overline{\sphericalangle C'A'B'} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle BA'C}$,a also $\overline{\sphericalangle BA'C} = 120^\circ$, so daß A' aufgrund des Satzes über die Summe gegenüberliegender Winkel im Sehnenviereck und des Peripheriewinkelsatzes auf besagtem Kreis liegt - das zu betrachtende Sehnenviereck ist A'A'BA''C, wobei A'' ein Punkt auf dem A' abgewandten Bogen $\overset{\frown}{BC}$ des Kreises ist). Man sieht leicht ein, daß bei einer Bewegung von A' auf dem Kreis, bei der der Strahl M_1A' sich um einen Winkel φ in einem gewissen Drehsinn dreht, M_2B' und M_3C' sich um denselben Winkel φ in demselben Drehsinn drehen (M_1, M_2, M_3 Mittelpunkte der drei betrachteten Kreise - siehe Planfigur). Die Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{M_1A'}$, $\overrightarrow{M_2B'}$, $\overrightarrow{M_3C'}$ und deren Beträge sind also konstant, mithin ist der Betrag ihres Summenvektors $(\overrightarrow{M_1A'} + \overrightarrow{M_2B'} + \overrightarrow{M_3C'})$ konstant, er durchläuft aber alle Richtungen, wenn A' den betrachteten Bogen über BC umläuft. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ des Schwerpunktes S von A'B'C' in einem gewissen Koordinatensystem mit Ursprung O ergibt sich aus den Ortsvektoren der Punkte A', B', C' als

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'})$$

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1A'} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{M_2B'} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM_3} + \overrightarrow{M_3C'})$$

(M Schwerpunkt des Dreiecks $M_1M_2M_3$; also gilt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3})$ bzw. $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{O}$)

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3}) + \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{M_1A'} + \overrightarrow{M_2B'} + \overrightarrow{M_3C'})$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\,\vec{r}$$

wobei $\vec{r} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{M_1A'} + \overrightarrow{M_2B'} + \overrightarrow{M_3C'})$ ein Vektor ist, dessen Betrag nach dem oben Gesagten konstant ist, dessen Richtung aber alle möglichen Richtungen durchläuft. Somit liegt S stets auf dem Kreis um M mit dem Radius $(\frac{1}{3}\vec{r})$. Der Radius $(\frac{1}{3}\vec{r})$ ergibt sich als Abstand des Punktes S von M für ein spezielles Dreieck A'B'C'. Der gesuchte geometrische Ort ist also ein Kreis um den Schwerpunkt des von den Umkreismittelpunkten der über den Seiten von ABC nach außen errichteten gleichseitigen Dreiecke gebildeten Dreiecks.

Aufgabe 13

(Die angegebene Lösung stammt von Martin Welk)

Ich führe den geforderten Beweis, indem ich eine Färbung von $\{1;\ 2;\ldots;\ 2916\}$ mit 4 Farben angebe, bei der es keine einfarbige arithmetische Folge der Länge 10 gibt:

Die Farben seien o.B.d.A. blau, rot, grün und schwarz. Die Zahlen 1 bis 9 werden sämtlich blau gefärbt; 10 bis 18 werden rot gefärbt. Nun werden nacheinander die Zahlen 19; 20; 21;...; 162 jeweils mit der Farbe der um 18 kleineren Zahl versehen, d. h., 19 bis 27 werden blau, 28 bis 36 rot, 37 bis 45 blau,..., 154 bis 162 rot gefärbt. Nun werden die Zahlen 163 bis 324 gefärbt: jede dieser Zahlen wird grün gefärbt, wenn die um 162 kleinere Zahl blau, schwarz, wenn die um 162 kleinere Zahl rot gefärbt ist. Im folgenden erhalten die Zahlen 325; 326;...; 2916 nacheinander jeweils die gleiche Farbe wie die jeweils um 324 niedrigere Zahl. Damit ergibt sich folgendes: Zuerst liegen ein blauer und ein roter Neunerblock vor; diese bilden einen Achtzehnerblock. Es folgen 8 weitere solche rot-blauen Achtzehnerblöcke, so daß ein 9 Achtzehnerblöcke umfassender 162er-Block entsteht. Dieser bildet zusammen mit einem völlig analog aufgebauten grün-schwarzen 162er-Block einen vierfarbigen 324er-Block; die Färbung von $\{1;\ 2;\ldots;\ 2916\}$ ergibt sich als Folge von 9 solchen 324er-Blöcken.

Ich beweise nun, daß bei dieser Färbung keine 10gliedrige arithmetische Folge in $\{1;\ 2;\ldots;\ 2916\}$ mit nur einer Farbe gefärbt ist:

Jede derartige arithmetische Folge läßt sich darstellen als

a; a+p; a+2p; a+3p; a+4p; a+5p; a+6p; a+7p; a+8p; a+9p mit natürlichen Zahlen $a \geqq 1$; $p \geqq 1$ mit $a + 9p \leqq 2916$. Aus $a \geqq 1$; $a + 9p \leqq 2916$ folgt $9p \leqq 2915$ wegen der Ganzzahligkeit von p $p \leqq 323$.

Ich unterscheide 4 Fälle:

(1) Es gilt $1 \leqq p \leqq 9$

Somit ist $(a + 9p) - a \geqq 9p = 9$; a und $(a+9p)$ liegen also nicht in ein und demselben der Neunerblöcke $\{1;\ 2;\dots;\ 9\}$; $\{10;\ 11;\dots;\ 18\}$, ...; $\{2908;\ 2909;\dots;\ 2916\}$. Andererseits ist die Differenz aufeinanderfolgender Glieder der arithmetischen Folge $p \leqq 9$, d. h., je zwei aufeinanderfolgende Glieder liegen in demselben oder in aufeinanderfolgenden Neunerblöcken. Mithin existieren zwei Folgenglieder, die in benachbarten Neunerblöcken liegen. Diese sind offensichtlich verschieden gefärbt.

(2) Es gilt $10 \leqq p \leqq 17$

Hier können offensichtlich keine zwei Folgenglieder in demselben Neunerblock liegen. Lägen zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder in keinem Falle in benachbarten Blöcken, so lägen zwischen dem Block, in dem a liegt, und dem, in dem $(a + 9p)$ liegt, mindestens 17 andere, d. h., zwischen a und $(a + 9p)$ lägen mindestens $17 \cdot 9 = 153$ andere natürliche Zahlen, also wäre $(a + 9p) - a \geqq 154$. Wegen $p \leqq 17$ ist aber $(a + 9p) - a \leqq 153$. Somit gibt es zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder, die in aufeinanderfolgenden Neunerblöcken liegen und somit verschieden gefärbt sind.

(3) Es gilt $18 \leqq p \leqq 162$

Hier ist $(a + 9) - a = 9p \geqq 162$; a und $(a + 9p)$ liegen demnach nicht in ein und demselben der 162er-Blöcke $\{1;\ 2;\dots;\ 162\}$; $\{163;\ 164;\dots;\ 324\}$ ...; $\{2755;\ 2758;\dots;2916\}$. Andererseits differieren aufeinanderfolgende Folgenglieder um $p \leqq 162$, d. h., aufeinanderfolgende Glieder liegen in demselben oder in benachbarten 162er-Blöcken. Somit existieren zwei Folgenglieder, die in benachbarten 162er-Blöcken liegen. Sie sind verschieden gefärbt.

(4) Es gilt $163 \leqq p \leqq 323$

Es gibt eine natürliche Zahl k; $0 \leqq k \leqq 8$, so daß $k \cdot 324 + 1 \leqq a + 9p \leqq (k+1) \cdot 324$ gilt. Da zwei Zahlen aus $\{1;\ 2;\dots;\ 2916\}$, die um ein ganzzahliges Vielfaches von 324 differieren, gleich gefärbt sind, sind $(a + 9p)$ und $(a + 9p - 324k)$; $(a + 8p)$ und $(a + 8p - 324k + 324)$; ...; a und $(a - 324k + 9 \cdot 324)$ jeweils gleich gefärbt. Wegen $1 \leqq a + 9p - 324k \leqq 324$; $1 \leqq 324 - p \leqq 161$ und $9 \cdot 161 < 2916 - 324$ liegen alle diese Zahlen tatsächlich in $\{1; 2; ...; 2916\}$, d. h., es gilt $1 \leqq a + 9p - 324k \leqq 2916$; $1 \leqq a + 8p - 324k + 324 = (a + 9p - 324k) + (324 - p) \leqq 2916$; ...; $1 \leqq a - 324k + 9 \cdot 324 = (a + 9p - 324k) + 9(324 - p) \leqq 2916$. Außerdem bilden die Zahlen $a + 9p - 324k$; $a + 8p - 324k + 324$; ...; $a - 324k + 9 \cdot 324$ eine arithmetische Folge, denn sie sind darstellbar als a'; $a' + p'$; $a' + 2p'$; ...; $a' + 9p'$ mit $a' = a + 9p - 324$; $p' = 324 - p$. Wäre die ursprüngliche Folge a; $a + p$; ...; $a + 9p$ einfarbig, so wäre auch a'; $a' + p'$; ...; $a' + 9p'$ einfarbig. Dies ist aber wegen $1 \leqq p' \leqq 161$ eine Folge, die bereits durch einen der Fälle (1) bis (3) erfaßt ist. Mithin existiert auch keine einfarbige 10gliedrige arithmetische Folge aus $\{1; 2; ...; 2916\}$ mit einer Differenz p mit $163 \leqq p \leqq 323$.

Aufgrund der Vollständigkeit der Fallunterscheidung ist hiermit bewiesen, daß die angegebene Färbung für $\{1; 2; ...; 2916\}$ den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt; insbesondere sind damit auch die Elemente von $\{1; 2; ...; 1987\} = M$ in der geforderten Weise gefärbt, womit die Existenz einer derartigen Färbung bewiesen ist.

Es sei noch eine alternative Lösung angegeben:
Zunächst zeige ich, daß es in $M^* = \{0, 1, ..., 2047\}$ so mit 4 Farben gefärbt werden kann, daß jede aus 9 Elementen gebildete arithmetische Folge nicht einfarbig ist. Für M als Teilmenge von M^* und jeder 10elementigen Menge als arithmetische Folge bleibt dann offenbar die Eigenschaft der Nichteinfarbigkeit erhalten.
Zum besseren Verständnis verwende ich im Folgenden die 4 Farben rot, blau, gelb und schwarz. Desweiteren denke man sich jede Zahl aus M^* im 8adischen Positionssystem geschrieben. Für jede Zahl z gilt dann $[0]_8 = [0000]_8 \leqq z \leqq [3999]_8$, wo man die vorderen Stellen mit Nullen bis zur 4. Stelle ausfüllt! Jede Zahl z der Form $z = \overline{abcd}$ $(a, b, c, d \in N;\ 0 \leqq a \leqq 3,\ 0 \leqq b,c,d \leqq 7)$ färbe man wie folgt:

(1) rot $b \in \{0,1,4,5\} \wedge c \in \{0,2,4,6\}$
(2) blau $b \in \{0,1,4,5\} \wedge c \in \{1,3,5,7\}$
(3) gelb $b \in \{2,3,6,7\} \wedge c \in \{0,2,4,6\}$ und
(4) schwarz $b \in \{2,3,6,7\} \wedge c \in \{1,3,5,7\}$.

Damit wird zunächst offenbar jede Zahl z gefärbt. Diese Färbung ist äquivalent damit, die ersten 128 Elemente abwechselnd 8mal rot und blau zu färben, dasselbe mit den nächsten 128 Elementen ebenfalls zu tun, nur mit gelb und schwarz, und dann diese Färbung noch 7mal in gleicher Weise zu wiederholen!

<u>Beweis:</u> Zunächst zeige ich, daß innerhalb der 128 Elemente keine arithmetische Folge mit 9 Elementen entsteht, die einfarbig ist. Genau 8 hintereinanderliegende Elemente einer Farbe können dies nicht erfüllen. Damit müssen mindestens 2 "Rot-Bereiche" (bzw. "Blau-", "Gelb-", "Schwarz-Bereiche") betroffen sein. Dabei muß ein andersfarbiger Bereich ebenfalls 8 Elemente überspringen, womit der Abstand der arithmetischen Folge $d \geq [10]_8$ wird. Damit liegt jedoch höchstens 1 Element je Bereich in einer solchen Folge. Da bei 128 jedoch nur 8 Farbbereiche gleicher Farbe vorkommen, können sich nicht mehr als 8 Elemente ergeben innerhalb eines Bereiches von 128 Zahlen. Da die nach oben angrenzenden 128 Zahlen jedoch die betreffende Farbe nicht haben können, müßte sogar $d > 128$ gelten. Analog wie oben kann dann nur jeweils eine Zahl eines 128er-Bereiches in einer solchen Folge liegen. Es gibt jedoch erneut nur 8 128er-Bereiche "rot-blau" bzw. "gelb-schwarz", womit sich insgesamt keine arithmetische Folge finden läßt, die einfarbig ist.

Wie beschrieben, wird die Eigenschaft der Nichteinfarbigkeit bei Vergrößerung der Teilmengen, die arithmetische Folgen bilden, und der Verkleinerung der Menge selbst erhalten.
Damit ist bei meiner Färbung jede aus 10 Elementen der Menge M gebildete Folge nicht einfarbig.

<u>Aufgabe 14</u>

(Die angegebene Lösung stammt von Martin Welk)
Ich unterscheide 4 Fälle für die Lage der Geraden durch A:
(1) Die Gerade hat außer A keinen Punkt mit dem Dreiecksumfang gemeinsam. (Abb. L 14.1)

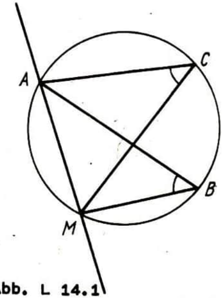


Abb. L 14.1

Aufgrund der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegt C auf dem Kreis durch A, M und B, d. h., A, B, C und M liegen auf einem Kreis. M ist also der von A verschiedene Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC mit der Geraden durch A. Ein solcher Punkt existiert genau dann, wenn die Gerade durch A nicht die Tangente an den Umkreis ist, in welchem Falle die notwendige Bedingung "A, B, C und M liegen auf einem Kreis" nicht erfüllbar ist, also kein solcher Punkt M existiert. Wenn aber die Gerade durch A keine Tangente an den Umkreis ist, existiert M als Schnittpunkt des Umkreises von ABC mit der Geraden und genügt nach dem Peripheriewinkelsatz auch den Forderungen der Aufgabe.

Für Fall (1) ist damit die Existens höchstens eines Punktes M bewiesen: für die Tangente in A an den Umkreis existiert M nicht.

(2) Die Gerade fällt mit AB oder AC zusammen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit falle die Gerade mit AB zusammen. Für jeden von A und B verschiedenen Punkt P der Geraden gilt aufgrund der Kollinearität von A, B und P entweder $\overline{\sphericalangle ABP} = 180^\circ$ oder $\overline{\sphericalangle ABP} = 0^\circ$, aufgrund der Nichtkollinearität von A, B und P kann $\overline{\sphericalangle ACP}$ aber weder 0° noch 180° werden. Mithin existiert im Fall (2) kein Punkt M mit der geforderten Eigenschaft.

(3) Die Gerade schneidet BC in einem inneren Punkt, ist aber nicht mit der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BAC$ identisch. (Abb. L 14.2)

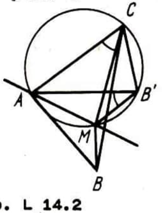


Abb. L 14.2

Es sei B' der bezüglich der Geraden durch A zu B symmetrisch gelegene Punkt. Ist M ein Punkt mit der geforderten Eigenschaft $\overline{\sphericalangle ABM} = \overline{\sphericalangle ACM}$, dann gilt auch $\overline{\sphericalangle AB'M} = \overline{\sphericalangle ACM}$; da $\overline{\sphericalangle BAM} \neq \overline{\sphericalangle CAM}$ ist.
(AM ist nicht die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$), ist AB'C ein Dreieck, mit dessen Umfang die Gerade durch A außer A selbst

keinen gemeinsamen Punkt besitzt, so liegt also bezüglich dieses Dreiecks Fall (1) vor. Damit ist bewiesen, daß auch im Fall (3) höchstens ein Punkt M mit den geforderten Eigenschaften existiert; kein solcher Punkt existiert genau dann, wenn die Gerade durch A Tangente an den Umkreis von AB'C ist.

(4) Die Gerade durch A ist die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ (Abb. L 14.3)

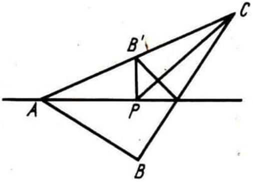


Abb. L 14.3

Wieder sei B' der bezüglich der Geraden durch A zu B symmetrisch gelegene Punkt. In diesem Falle liegt B' auf $\overline{AC}$, ist wegen $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ aber nicht mit C identisch. Ist P ein Punkt der Geraden durch A, der nicht mit A identisch ist, so liegt P nicht auf AC. Mithin ist $\overline{\sphericalangle B'PC} \neq 0$. Aufgrund des Satzes, wonach die Größe eines Außenwinkels eines ebenen Dreiecks gleich der Summe der Größen der nichtanliegenden Innenwinkel ist, gilt $\overline{\sphericalangle ABP} = \overline{\sphericalangle AB'P} = \overline{\sphericalangle ACP} + \overline{\sphericalangle B'PC}$ oder $\overline{\sphericalangle ABP} = \overline{\sphericalangle AB'P} = \overline{\sphericalangle ACP} - \overline{\sphericalangle B'PC}$ und damit stets $\overline{\sphericalangle ABP} \neq \overline{\sphericalangle ACP}$.
Somit ist für Fall (4) der geforderte Beweis geführt und gezeigt, daß in diesem Fall solch ein Punkt M nicht existiert.

Die Behauptung der Aufgabenstellung ist damit allgemein bewiesen: kein Punkt M existiert wenn

- die Gerade durch A Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC ist,
- die Grade durch A Tangente an den Umkreis des Dreiecks AB'C ist, wobei B' der bezüglich dieser Geraden zu B symmetrisch gelegene Punkt ist,
- die Gerade durch A mit einer der Dreiecksseiten AB und AC zusammenfällt oder
- die Gerade durch A den Winkel $\sphericalangle BAC$ halbiert.

<u>Aufgabe 15</u>

Jedem Einheitswürfel des gesamten Würfels mit der Kantenlänge n ($n \geqq 3$) kann ich bijektiv jeweils 3 ganzzahlige Koordinaten i,j,k mit $1 \leqq i,j,k \leqq n$ zuordnen.
Z(i,j,k) bezeichne dann die Zahl, welche in den Einheitswürfel

mit den entsprechenden Koordinaten i,j,k eingetragen werden soll. M sei die Menge $\{1,2,\dots,n-1\}$.
In die Einheitswürfel mit $i,j,k \in M$ trage ich nun $(n-1)^3$ sämtlich voneinander verschiedene Zweierpotenzen ein. (Gruppe I)
(2^m mit $m \in N$)

Sei nun weiter
$$\left.\begin{aligned} Z(n,j,k) &= -\sum_{i\in M} Z(i,j,k) && \forall j,k \in M \\ Z(i,n,k) &= -\sum_{j\in M} Z(i,j,k) && \forall i,k \in M \\ Z(i,j,n) &= -\sum_{k\in M} Z(i,j,k) && \forall i,j \in M \end{aligned}\right\} \text{(Gruppe II)}$$

und ferner:
$$\left.\begin{aligned} Z(n,n,k) &= \sum_{i\in M}\sum_{j\in M} Z(i,j,k) && \forall k \in M \\ Z(n,j,n) &= \sum_{i\in M}\sum_{k\in M} Z(i,j,k) && \forall j \in M \\ Z(i,n,n) &= \sum_{j\in M}\sum_{k\in M} Z(i,j,k) && \forall i \in M \end{aligned}\right\} \text{(Gruppe III)}$$

letztlich:
$$Z(n,n,n) = -\sum_{i\in M}\sum_{j\in M}\sum_{k\in M} Z(i,j,k) \qquad \text{(Gruppe IV)}$$

In den vier einzelnen Gruppen handelt es sich um vorzeichenbehaftete Summen von einer, $(n-1)$, $(n-1)^2$ und $(n-1)^3$ Zweierpotenzen. Da wegen $n \geq 3$ $\;1 < n-1 < (n-1)^2 < (n-1)^3$ gilt, folgt:
2 eingetragene Zahlen aus verschiedenen Gruppen sind stets verschieden, da die Summen von sämtlich voneinander verschiedenen Zweierpotenzen nur dann gleich sind, wenn die addierten Zweierpotenzen übereinstimmen und damit auch ihre Anzahl (Eindeutigkeit der Darstellung einer natürlichen Zahl in Basis 2), und da Zweierpotenzen immer positiv sind.
Innerhalb der Gruppe I sollten die Zahlen sämtlich voneinander verschieden gewählt werden.
Innerhalb der Gruppe II handelt es sich jeweils um die (negative) Summe von (n-1) Zweierpotenzen. Wären 2 Zahlen aus Gruppe II gleich, dann wären auch alle diese (n-1) Zweierpotenzen der 1. Zahl paarweise mit den (n-1) Zweierpotenzen der 2. Zahl gleich. Dies ist aber wegen der Definition in Gruppe II und aufgrund der paarweisen Ungleichheit aller $Z(i,j,k)$; $i,j,k \in M$ unmöglich. Auch in Gruppe II sind die Zahlen sämtlich voneinander verschieden.
Innerhalb der Gruppe III handelt es sich jeweils um die Summe von $(n-1)^2$ Zweierpotenzen. Wären 2 Zahlen aus Gruppe III gleich, dann wären auch alle diese $(n-1)^2$ Zweierpotenzen der 1. Zahl

paarweise mit den $(n-1)^2$ Zweierpotenzen der 2. Zahl gleich. Dies ist jedoch wegen der Definition in Gruppe III und aufgrund der paarweisen Ungleichheit aller $Z(i,j,k)$; $i,j,k \in M$ unmöglich. Auch in Gruppe III sind die Zahlen sämtlich voneinander verschieden. Da Gruppe IV nur aus einem Element besteht, sind alle n^3 eingetragenen Zahlen verschieden. (a))

b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachte ich die Summe der $Z(i,j,k)$ mit i,j konstant. (Wegen der Symmetrie der Definition der $Z(i,j,k)$ bzgl. der Koordinaten kann ich dies tun.)

1. Fall: $i,j \in M$
$$\sum_{k=1}^{n} Z(i,j,k) = \sum_{k\in M} Z(i,j,k) + Z(n,j,k)$$
$$= \sum_{k\in M} Z(i,j,k) - \sum_{k\in M} Z(i,j,k) = 0$$

2. Fall: $i \in M$, $j = n$
$$\sum_{k=1}^{n} Z(i,j,k) = \sum_{k\in M} Z(i,n,k) + Z(i,n,n)$$
$$= \sum_{k\in M}(-\sum_{j\in M} Z(i,j,k) + \sum_{j\in M}\sum_{k\in M} Z(i,j,k) = 0$$

3. Fall: $i = n$, $j \in M$ verläuft wegen obengenannter Symmetrie analog wie 2. Fall

4. Fall: $i=j=n$
$$\sum_{k=1}^{n} Z(i,j,k) = \sum_{k\in M} Z(n,n,k) + Z(n,n,n)$$
$$= \left(\sum_{k\in M}\sum_{i\in M}\sum_{j\in M} - \sum_{i\in M}\sum_{j\in M}\sum_{k\in M}\right) z(i,j,k) = 0$$

Die Summe der Zahlen in jeder zu einer Würfelkante ist gleich 0. (b))

Aufgabe 16

Das Polynom p habe die Gestalt $p(x) = \sum_{i=0} a_i\, x^i$. Es ist also

$p(2) = \sum_{i=0} a_i\, 2^i$. Nun kann man $p(2)$ additiv wie folgt aufspalten:

$$q = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2i}\; 4^i,\quad r = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} a_{2i+1}\; 4^i .$$

Es ist $n = p(2) = q+2r$. Nun ist aber $p(2)$ durch diese Aufspaltung im 4adischen Positionssystem dargestellt und die $a_i \in \{0,1,2,3\}$ werden eindeutig bestimmt. Die Anzahl z der zulässigen Polynome ist also gleich der Anzahl der Zerlegungen von n in eine gerade Zahl 2r und eine Zahl q. Im Intervall $[0,n]$ gibt es genau $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ gerade Zahlen. Somit ist $z = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Aufgabe 17

Neben zwei Lösungsansätzen gab es keinen Schüler, der diese Ungleichung bewältigte.

Durch Einführung der Vektoren $a = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{AD}$ und $c = \overrightarrow{AE}$ geht die zu beweisende Ungleichung äquivalent über in

$$|a| + |b| + |c| + |a + b + c| \geq |a + b| + |b + c| + |c + a|.$$

Nun gilt nach E. Hlawka (D. S. Mitrinovic: Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Heidelberg, 1970, p. 172) folgende Identität, die man durch Ausmultiplizieren leicht überprüft:

$$(|a| + |b| + |c| - |a + b| - |b + c| - |c + a| + |a + b + c|)$$
$$(|a| + |b| + |c| + |a + b + c|) = (|a| + |b| - |a + b|)$$
$$(|c| - |a + b| + |a + b + c|) +$$
$$+ (|b| + |c| - |b + c|)(|a| - |b + c| + |a + b + c|) +$$
$$+ (|c| + |a| - |a + c|)(|b| - |a + c| + |a + b + c|).$$

Nach der Dreiecksungleichung ist jeder Faktor der rechten Seite dieser Identität größer gleich 0 und daher ist die linke Seite nichtgegativ. Dies beendet den Beweis.

Autorenkollektiv: Prof. Dr. habil. G. Burosch
Dr. N. Grünwald
Dr. W. Moldenhauer

Leiter des Autorenkollektivs: Prof. Dr. habil. G. Burosch

Adresse der Autoren: Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock DDR
2500

Für die Mitteilung geeigneter Aufgaben (mit oder ohne Lösungen) oder Lösungsvarianten zu von uns veröffentlichten Aufgaben sind wir dankbar.

1. Auflage
Lizenz-Nr. 203/1000/90 (E)
Printed in the German Democratic Republic
Druck: (52) VOB Nationales Druckhaus Berlin
LSV 0600
Verlagstitelnummer 30 11 22-1

IMO-
Übungsaufgaben

Heft 29

Zentrales
Komitee
für die
Olympiaden
Junger
Mathematiker

Autorenkollektiv: Prof. Dr. habil. G. Burosch
Dr. W. Moldenhauer

Leiter des Autorenkollektivs: Prof. Dr. habil. G. Burosch

Adresse der Autoren: Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
2500
DDR

Für die Mitteilung geeigneter Aufgaben (mit oder ohne Lösungen) oder Lösungsvarianten zu den von uns veröffentlichten Aufgaben sind wir dankbar.

1. Auflage
Lizenz-Nr. 203/1000/90
Printed in the German Democratic Republic
Druck: (52) Nationales Druckhaus Berlin
LSV 0600
Verlagstitelnummer 30 11 96-1

Aufgaben

Aufgabe 1
Man zeige, daß für jede positive ganze Zahl n gilt:

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}}} < 2$$

Aufgabe 2
Es seien a, b, c drei ganze Zahlen, die ungleich Null und relativ prim zueinander sind. Man beweise, daß es zu allen ganzen Zahlen u, v, w, die relativ prim zueinander sind und $au + bv + cw = 0$ erfüllen, ganze Zahlen m, n, p gibt, so daß

$$a = nw - pv, \quad b = pu - mw, \quad c = mv - nu$$

gilt.

Aufgabe 3
Es sei ABCD ein Parallelogramm und keiner seiner Winkel sei größer als 120^o.

Man berechne

$\min\{d(M,A) + d(M,B) + d(M,N) + d(N,C) + d(N,D)\}$, wobei M und N in der durch A, B, C, D bestimmten Ebene liegen, in Abhängigkeit von den Seiten und Winkeln des Parallelogramms.

Hinweis: $d(X,Y)$ bezeichnet den Abstand der Punkte X; Y.

Aufgabe 4
In der Menge $S_n = \{1, \ldots, n\}$ ist eine neue Operation $a \circ b$ mit folgenden Eigenschaften eingeführt:

1. Für alle $a \in S_n$ und $b \in S_n$ ist $a \circ b \in S_n$.
2. Falls das gewöhnliche Produkt $a \cdot b$ nicht größer als n ist, so gilt $a \circ b = a \cdot b$.
3. Es gelten für alle $a, b, c \in S_n$ die Regeln:

3.1. $a \circ b = b \circ a$

3.2. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

3.3. Aus $a \circ b = a \circ b$ folgt $b = c$.

Man bestimme für N = 11 und n = 12 Tabellen für die neue Operation $\circ$.

(IMO-Vorschlag 1989, Australien)

Aufgabe 5

Die Folgen $(a_n)_{n \geqq 0}$ und $(b_n)_{n \geqq 0}$ seien durch die Festsetzungen

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - a_n^2}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

und

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{\sqrt{1 + b_n^2} - 1}{b_n} = 0, 1, \ldots$$

definiert. Man beweise für alle $n = 0, 1, \ldots$ die Ungleichungen

$$2^{n+2} \cdot a_n < \pi < 2^{n+2} \cdot b_n.$$

(IMO-Vorschlag 1989, VR Bulgarien)

Aufgabe 6

Man beweise, daß für keine ganze Zahl $n > 1$ die Gleichung

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1 = 0$$

eine rationale Lösung hat.

(IMO-Vorschlag 1989, VR Bulgarien)

Aufgabe 7

Möge das Polynom $p(x) = x^n + n \cdot x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ reelle oder komplexe Koeffizienten und die Nullstellen $r_1, \ldots, r_n$ haben. Unter der Voraussetzung

$$r_1^{16} + r_2^{16} + \ldots + r_n^{16} = n$$

bestimme man sämtliche Nullstellen.

(IMO-Vorschlag 1989, Kolumbien)

Aufgabe 8

Sei $P(x)$ ein Polynom, das folgende Bedingungen erfüllt:

a) $P(0) > 0$, $P(1) > P(0)$, $P(2) > 2P(1) - P(0)$
$P(3) > 3P(2) - 3P(1) + P(0)$,

b) für jede natürliche Zahl n gilt:
$P(n+4) > 4P(n+3) - 6P(n+2) + 4P(n+1) - P(n)$.

Man beweise, daß für jede natürliche Zahl n die Zahl $P(n)$ positiv ist.

(IMO-Vorschlag 1989, Kuba)

Aufgabe 9

Sei f eine Funktion von der Menge der reellen Zahlen in diese Menge mit $f(1) = 1$ und für alle a, b

$f(a+b) = f(a) + f(b)$ und $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ für $x \neq 0$.

Man beweise, daß für alle reellen Zahlen x gilt:

$f(x) = x$.

(IMO-Vorschlag 1989, Irland)

Aufgabe 10

Das Dreieck ABC ist der Kreislinie K mit dem Radius r einbeschrieben. Die Winkelhalbierenden der inneren Winkel des Dreiecks schneiden K außer in den Punkten A, B und C noch in den Punkten A', B', C'. Man beweise die Ungleichung

$$16 \cdot Q^3 \geqq 27 \cdot r^4 \cdot P,$$

wo Q bzw. P den Inhalt des Dreiecks A'B'C' bzw. ABC bezeichnet.

(IMO-Vorschlag 1989, CSSR)

Aufgabe 11

Sei a eine reelle Zahl $0 < a < 1$. Möge f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$ bezeichnen und sei

$$f(0) = 0, \ f(1) = 1$$

und

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)\ f(x) + a \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in [0,1]$ mit $x \leqq y$. Man bestimme $f\left(\frac{1}{7}\right)$.

(IMO-Vorschlag 1989, Finnland)

Aufgabe 12

Sei ABC ein Dreieck. Man beweise, daß es einen eindeutig bestimmten Punkt V in der Ebene von A, B, C gibt, der folgende Eigenschaften hat:

Es gibt reelle Zahlen λ, μ, ν und $\varkappa$, die nicht alle Null sind, so daß

$$\lambda \overline{PL}^2 + \mu \overline{PM}^2 + \nu \overline{PN}^2 - \varkappa \overline{VP}^2$$

konstant ist für alle Punkte P in der Ebene, wobei L, M und N die Fußpunkte der Lote von P auf BC, CA bzw. AB sind.

Man bestimme V!

(IMO-Vorschlag 1989, Großbritannien)

Aufgabe 13

Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Seien D, E, F, M, N und P die Mittelpunkte von BC, CA, AB, FD, FB bzw. DC.

a) Man beweise, daß die Strecken AM, EN und FP kongruent sind.

b) Sei O der Schnittpunkt von AM, EN und FP. Man bestimme $\overline{OM} : \overline{OF} : \overline{ON} : \overline{OE} : \overline{OP} : \overline{OA}$.

(IMO-Vorschlag 1989, Hongkong)

Aufgabe 14

Sei n eine positive ganze Zahl. Man beweise, daß es eine positive ganze Zahl m mit

$$(\sqrt{2} + 1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$$

gibt.

(IMO-Vorschlag 1989, Hongkong)

Aufgabe 15

Seien a, b, c, d, m und n positive ganze Zahlen und

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1989$$

$$a + b + c + d = m^2$$

und sei die größte der Zahlen a, b, c, d gleich n^2. Man bestimme m und n.

(IMO-Vorschlag 1989, Irland)

Aufgabe 16

Sei $n = 2k-1$, wo $k \geqq 6$ eine ganze Zahl ist. Sei T die Menge aller n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ aus $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \dots, n$. Für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$ aus T sei $d(\underline{x},\underline{y})$ die Anzahl derjenigen j mit $1 \leqq j \leqq n$ und $x_j \neq y_j$. Angenommen es gibt eineTeilmenge S von T aus 2^k Elementen mit der folgenden Eigenschaft: für jedes Element $\underline{x}$ aus T gibt es genau ein Element $\underline{y} \in S$ mit $d(\underline{x},\underline{y}) \leqq 3$. Man zeige, daß $n = 23$ ist.

(IMO-Vorschlag 1989, Irland)

Lösungen

Aufgabe 1

1. Lösung (nach Rüdiger Belch)

Die Folge (a_k) sei durch $a_1 = 2$, $a_{k+1} = a_k^2 - K$ definiert. Dann gilt für jedes n : $a_n > n$.

Beweis durch Vorwärtsinduktion:

Es ist $a_1 > 1$, $a_2 = 3 > 2$ und $a_3 = 7 > 3$.

Für $k \geqq 3$ gelte $a_K > K$. Da $k^2 - 2K + 1 = (K-1)^2 \geqq 2^2 > 2$ ist, folgt

$a_{K+1} = a_k^2 - K > K^2 - K > K + 1$.

Für jedes $n \geqq 1$ gilt: Aus $0 < K \leqq n$ folgt

$$\sqrt{K + \sqrt{K+1 + \ldots + \sqrt{n}}} < a_K.$$

Beweis durch Rückwärtsinduktion:

Für $k = n$ gilt offensichtlich $\sqrt{n} \leqq n < a_n$.

Es gelte $\sqrt{K+1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}} < a_{K+1}$. Dann ist

$K + \sqrt{K+1 + \ldots + \sqrt{n}} < a_{K+1} + K = a_K^2$ und damit

$\sqrt{K + \sqrt{K+1 \ldots + \sqrt{n}}} < a_K$.

Als Folgerung ergibt sich mit

$\sqrt{1 + \sqrt{2 \ldots + \sqrt{n}}} < a_1$ = die Behauptung.

2. Lösung (nach Michael Dreher)

Es sei $f(n) = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}}}$ für $n \in N$, $n \geqq 1$.

Aus $\sqrt{n + \sqrt{n+1}} > \sqrt{n}$ folgt $f(n+1) > f(n)$.

Es sei $a_n = f(n) - f(n-1) = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}}} - \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n-1}}}$

$$= \frac{\sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}} - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n-1}}}{\sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}}} + \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n-1}}}}$$

$$= \ldots = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n-1+\sqrt{n}} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n-2+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}+\sqrt{n-2+\sqrt{n-1}})\ldots[f(n)+f(n-1)]}$$

Für $n \geqq 4$ ist

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+1}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n-1+\sqrt{n}}+\sqrt{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n+1}}}+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}}{f(n)+f(n-1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{f(n+1)+f(n)}{1}$$

$$\geqq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \left[f(n+1)+f(n)\right]$$

$> \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, 2\, f(n) \geqq \frac{4}{5}\sqrt{5}\, f(4) > 3$ und damit $a_{n+1} < \frac{1}{3} a_n$.

Weiter ist $f(5) < 1.757$ und für $n \geqq 5$ gilt

$$\sum_{i=5}^{n} a_i < a_5 + \frac{1}{3} a_5 + \ldots + \frac{1}{3^{n-5}} a_n < a_5 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}^{i}\right) = \frac{3}{2} a_5 < 0.014,$$

da $a_5 = f(5) - f(4) < 1.757 - 1.748 = 0.009$. Damit ist für alle $n \geqq 5$

$$f(n) = \sum_{i=5}^{n} a_i + f(5) < 0.014 + 1.757 = 1.771 < 2$$

Aus der Monotonie von f und der Abschätzung für f(5) nach oben folgt schließlich noch $f(1) < f(2) < f(3) < f(4) < 2$.

Bemerkung: Ein BASIC-Programm auf dem A 5105 zeigt

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = 1.7579327\ldots,$$

so daß die obige Abschätzung recht gut ist.

<u>3. Lösung</u> (nach Thomas Gerlach, Raymond Hemmecke)

Es sei $a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}}$. Für $n \geqq 4$ ist dann

$$\left[(a_n^2-1)^2-2\right]^2-3 = \sqrt{4+\sqrt{5+\ldots+\sqrt{n}}}$$

$$\leqq \sqrt{2^2 \cdot 1 + \sqrt{2^4 \cdot 2 + \sqrt{2^8 \cdot 3 + \ldots + \sqrt{2^{2^{n-3}}(n-3)}}}} = 2a_{n-3},$$

da $i \leqq 2^{2^{i-3}}(i-3)$ für $i \geqq 4$ gilt.

Nun ist $a_1, a_2, a_3 < 2$. Gilt $a_{n-3} < 2$, so folgt aus der Abschätzung $\left[(a_n^2-1)^2-2\right]^2 - 3 \leqq 4$, also $a_n \leqq \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{7}}} < 2$ und damit nach dem Prinzip der vollständigen Induktion: $a_n < 2$ für alle $n \geqq 1$.

Bemerkung: Die Schranke ist verschärfbar. Aus $a_{n-3} < t$ folgt $a_n \leqq \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{2t+3}}}$. Gilt nun $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{2t+3}}} \leq t$, so folgt $a_n \leqq \max\{a_1, a_2, a_3, t\}$ für alle $n \geqq 1$.
Numerische Rechnung ergibt $t = 1.7705490\ldots$, so daß mit dieser Methode $a_n \leqq 1.770549\ldots$ gezeigt werden kann.

4. Lösung (nach Ingrid Voigt, Thomas Mautsch)
Die Folge (a_K) sei durch $a_o = 2$, $a_{K+1} = (a_k - k)^2$ für $0 \leqq k < n$ definiert. Weiter sei (S_K) definiert durch $s_n = n$, $s_K = K + \sqrt{s_{K+1}}$, $0 \leqq k < n$. Die zu beweisende Ungleichung lautet dann $s_o < a_o$.
Durch vollständige Induktion beweist man die Ungleichung

$$a_K \geqq \frac{2k + 1 + \sqrt{4k + 9}}{2} \text{ für } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Hieraus folgt insbesondere $a_K > k$ für $K = 0, 1, \ldots, n$. Ferner ist nach Definition der Folge (s_K): $s_K > K$ für $K = 0, 1, \ldots, n-1$.
Nun ist $s_K < a_K$ äquivalent zu $s_{K+1} < a_{K+1}$ für $K = 0, 1, \ldots, n-1$, denn es ist $s_K - K < a_k - K$, $(s_k - K)^2 < (a_k - K)^2$, $s_{K+1} < a_{k+1}$.
Also gilt auch $s_o < a_o$ genau dann, wenn $s_K < a_K$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ ist. Tatsächlich ist aber $s_n = n < a_n$ und daher auch $s_o < a_o$.

Aufgabe 2

1. Lösung
Es sei p so gewählt, daß $pu \equiv b(w)$ gilt. Dies ist möglich, da wegen $(u,w) = 1$ pu für $p = 0, 1, \ldots, w - 1$ alle Restklassen mod w durchläuft.

Dann ist $m = \frac{pu - b}{w}$ eine ganze Zahl. (1)

Nun gilt $-b + pu \equiv -bv + puv \equiv au + puv$ (es gilt $au + bv + cw = 0$)

$\equiv a + pv(w)$, da $(v, w) = (u, w) = 1$ vorausgesetzt war.

Mithin ist auch $n = \frac{a + pv}{w}$ eine ganze Zahl. (2)

Nun gilt
$nw - pv = pv + a - pv = a$ nach (2),
$pu - mw = pu - pu + b = b$ nach (1) und

$$mv - nu = \frac{puv - b}{m} - \frac{au + puv}{w} \text{ nach (1), (2)}$$

$$= - \frac{au + bv}{w} = + \frac{cw}{w} = C \text{ nach Voraussetzung.}$$

Damit erfüllen m, n, p die geforderten Bedingungen.

<u>2. Lösung</u> (nach Marco Schlichting)

Wegen $au + bv + cw = 0$ gilt $au + cw \equiv 0(v)$. (3)

Da u, v, w relativ prim zueinander sind, gilt

$$w^{(v)} = u^{(v)} = 1(v) \qquad (4)$$

nach dem Satz von Fermat. Mit (3) ist

$aw^{\varphi(v)-1}\ uw + cu^{\varphi(v)-1}\ uw \equiv 0(w)$ und wegen (4) gilt dann:

$$aw^{\varphi(v)-1} + cu^{\varphi(v)-1} \equiv 0(v),\ aw^{\varphi(v)-1} \equiv -cu^{\varphi(v)-1}\ (v). \qquad (5)$$

Damit existiert eine ganze Zahl x mit $x \equiv aw^{\varphi(v)1} \equiv -cu^{\varphi(v)-1}\ (v)$

und es ist $wx \equiv aw^{\varphi(v)} \equiv a(v)$ und $-ux \equiv + cu^{\varphi(v)} \equiv c(v)$.

Also gibt es ganze Zahlen y, z mit

$$wx - yv = a \text{ und } zv - ux = c. \qquad (6)$$

Hieraus ergibt sich nacheinander

$au = uwx - uyv,\ cw = wzv - uwx,$

$au + cw = wzv - uyv = bvv$ (nach Voraussetzung) und

$$b = uy - wz. \qquad (7)$$

Setzt man $x = n$, $y = p$, $z = m$, so folgt mit (6) und (7) die Behauptung.

Bemerkung: Beide Lösungen demonstrieren zwei typische Techniken für lineare diophantische Gleichungen. Man informiere sich z. B. bei A. O. Gelfond: Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (diophantische Gleichungen), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 (MSB Nr. 22) und in der dort angegebenen Literatur.

Aufgabe 3 (nach Rüdiger Belch, Jan Fricke)

1. Es wird folgender Hilfssatz benutzt (vgl. alpha 23 (1989) 5, S. 98 - 100):
Ist ABC ein Dreieck, dann gibt es genau einen Punkt P, so daß $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$ minimal wird. Für $\alpha, \beta, \gamma < 120^\circ$ liegt P so im Inneren des Dreiecks ABC, daß $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = 120^\circ$ gilt. Gilt $\alpha \geqq 120^\circ$ (entsprechend $\beta, \gamma \geqq 120^\circ$, so ist P = A (entsprechend P = B, C).

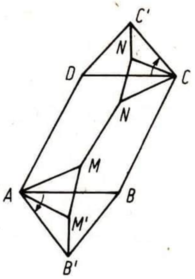
2. Obwohl durch die Aufgabenformulierung nahegelegt ist, daß die Existenz des Minimums vorausgesetzt ist, wird sie nachfolgend nachgewiesen.
Dazu werde r mit $r > \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}$ beliebig gewählt. Wir betrachten eine abgeschlossene Kreisscheibe K um A mit dem Radius r.
Die Funktion $f(M,N) = d(M,A) + d(M,B) + d(M,M) + d(N,C) + d(N,D)$ ist auf K stetig. Jede stetige Funktion nimmt aber auf einer abgeschlossenen, beschränkten Menge ihr Minimum an. Für dieses in M,N angenommene Minimum gilt dann $f(M,N) \leqq f(A,A) = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} < f(X,Y)$, falls X oder Y nicht zu K gehören. Damit ist f(M,N) das gesuchte Minimum.

3. Es seien nun M und N so gelegen, daß f(M,N) ein Minimum hat.
Fall 1: Es sei M = N. Dann gilt
$f(M,N) = \overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM} + \overline{DM} \geqq \overline{AC} + \overline{BD}$ nach der Dreiecksungleichung. Das Gleichheitszeichen steht nur dann, wenn M der Diagonalenschnittpunkt ist.
Jetzt denke man sich M fest. Dann ist
$f(M,N) = \overline{AM} + \overline{BM} + (\overline{MN} + \overline{CN} + \overline{DN})$, d. h., MN + CN + DN muß minimal sein. Da aber M = N ist, folgt nach dem Hilfssatz, daß $\sphericalangle DMC \geqq 120^\circ$ ist.
Es sei $e = \overline{AC}$ und $f = \overline{BD}$. Dann ist
$e = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$, $f = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$ und $f(M,N) = e+f$ unter der Bedingung, daß

$$\frac{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - a^2}{2\left(\frac{e}{2}\right)\left(\frac{f}{2}\right)} \leqq \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$ ist. Dies ist äquivalent

mit $e^2 + f^2 + ef \leqq 4a^2$.

Fall 2: Es sei $M \neq N$. Nach Fall 1 ergibt sich $4a^2 < e^2 + f^2 + ef$. Man betrachte wiederum M als fest. Man erhält, da $M \neq N$ ist, $\sphericalangle MNC = \sphericalangle CND = \sphericalangle DNM = 120^\circ$ und analog $\sphericalangle NMA = \sphericalangle AMB = \sphericalangle BMN = 120^\circ$. Man führe jeweils die in der Skizze angedeutete Drehung von 60° um A und C aus.



Es folgt
$\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{MN} + \overline{NC} + \overline{ND}$
$= \overline{BM'} + \overline{M'M} + \overline{MN} + \overline{NN'} + \overline{N'C'}$
und damit wird das Minimum gerade dann angenommen, wenn der Streckenzug B'M'M'B N'C' eine Strecke wird.

Zur Berechnung lege man ein rechtwinkliges Koordinatensystem so, daß $A\,(0,0)$, $B(a,0)$ und $D(b\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ gilt.
Es folgt **$c(b\cos\alpha + a,\ b\sin\alpha)$**. Da die Dreiecke ABB' und DCC' gleichseitig sind, gilt $B'\left(\frac{a}{2},\ -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$, $C'\left(b\cos\alpha + \frac{a}{2},\ b\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ und $\overline{B'C'} = \sqrt{3a^2 + b^2 + 2\sqrt{3}ab\sin\alpha}$.
Dies ist zugleich das gesuchte Minimum.

Aufgabe 4

Man betrachte zunächst $n = 12$ und interpretiere $a \circ b$ als Multiplikation $a \circ b = c$ modulo 13,

$a \cdot b = 13 \cdot k + c,\ k \geqq 0,\ 0 \leqq c < 13.$

Hier ist $c \neq 0$, da sonst $a \cdot b = 13 \cdot k$ ist, was wegen $1 \leqq a \leqq 12$ und $1 \leqq b \leqq 12$ für die Primzahl 13 nicht möglich ist. Wenn $a \cdot b \leqq 12$ ist, so ist $k = 0$ und $c = a \cdot b$, wie gefordert.
Die geforderten Rechenregeln gelten offenbar für 0.
Allgemein kann man analog schließen, falls $p = n + 1$ eine Primzahl ist.

Man betrachte jetzt $n = 11$ und definiere eine Abbildung f von $S = \{1, 2, \ldots, 11\}$ auf $T = \{0, 1, \ldots, 10\}$ durch die Tabelle

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(n)$	0	1	4	2	6	5	9	3	8	7	10

.

Dann definiere man $c = a \circ b$ folgendermaßen. Sei

$d = f(a) + f(b)$ falls $f(a) + f(b) \leqq 10$ ist,

$d = f(a) + f(b) - 11$, falls $f(a) + f(b) > 10$

ist. Sei $c = f^{-1}(d)$ gesetzt. Für jedes d gibt es genau eine solche Zahl c. (Die **Multiplikation** $\circ$ wurde auf die Addition modulo 11 zurückgeführt.)

Die Funktion f wurde folgendermaßen konstruiert:

$f(1) = 0$ sichert $1 \circ a = a$ für alle $a \in S$, da

$f(a) + f(1) = f(a) + 0 = f(a)$

ist. Wählt man etwa $f(2) = 1$, so hat man $f(4) = 2$ zu wählen, da man $2 \circ 2 = 4$ wünscht. Es ist dann $f(2) + f(2) = 1 + 1 = 2 = f(4)$. Analog muß man $f(8) = 1 + 2 = 3$ haben.

Als nächstes wählt man $f(3) = 4$, den kleinsten noch freien Wert, und hat $f(6) = f(2) + f(3) = 5$, $f(9) = f(3) + f(3) = 8$.

Für $f(5)$ muß man einen Wert k wählen, so daß sowohl k als auch $k+1$ (den Wert von $f(10)$) noch frei sind. In der Tat waren 6 und 7 noch nicht verbraucht. Dies erschöpft alle Paare $a \circ b$ mit $a, b \leqq 11$.

<u>Aufgabe 5</u>

Man erkennt leicht $0 < a_n < 1$ und $b_n > 0$ für alle n. Dann gibt es $\alpha_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\beta_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mit $a_n = \sin\alpha_n$ und $b_n = \tan\beta_n$.

Wegen $a_o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $b_o = 1$ ist $\alpha_o = \beta_o = \frac{\pi}{4}$. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\sin\alpha_{n+1} &= a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{a_n^2}}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 \cdot \sin^2\alpha_n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \cos\alpha_n}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha_n}{2}} = \sin\frac{\alpha_n}{2}.\end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\tan\beta_{n+1} = b_{n+1} = \frac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\beta_n}-1}{\tan\beta_n}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos\beta_n}-1}{\frac{\sin\beta_n}{\cos\beta_n}} = \tan\frac{\beta_n}{2}\,.$$

Dabei ist $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2}$ und $\beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2}$ und folglich gilt

$$a_n = \sin\frac{\alpha_0}{2^n} = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}} \quad \text{und}$$

$$b_n = \tan\frac{\beta_0}{2^n} = \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

Von den wohlbekannten Ungleichungen

$$\sin x < x < \tan x \quad (0 < x < \tfrac{\pi}{2})$$

folgt für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{2^{n+2}} < \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

oder $2^{n+2} \cdot a_n < \pi < 2^{n+2} \cdot b_n$.

<u>Aufgabe 6</u>

Zunächst mache man sich klar, daß für jede positive ganze Zahl k und für jede Primzahl p die Zahl p^k kein Teiler von $k!$ ist.
In der Tat, sei $s \geqq 0$ eine ganze Zahl und $p^s \leqq k < p^{s+1}$. Dann ist der größte Exponent r von p mit $p^r \mid k!$ gleich

$$r = \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{k}{p^s}\right]$$

$$\leqq \frac{k}{p} + \frac{k}{p^2} + \ldots + \frac{k}{p^s} = k \cdot \frac{1-\frac{1}{p^s}}{p-1} < k.$$

Folglich gilt $p^k \nmid k!$.
Sei nun α eine rationale Zahl und Lösung der gegebenen Gleichung. Dann gilt:

$$\alpha^n + n \cdot \alpha^{n-1} + \ldots + \frac{n!}{k!} \cdot \alpha^k + \ldots + \frac{n!}{2!} \cdot \alpha^2 + \frac{n!}{1!} \cdot \alpha + n! = 0. \qquad (8)$$

Daraus erkennt man unschwer, daß α eine ganze Zahl ist.

Sei p ein Primteiler von n. Dann ist $p \mid \alpha^n$ und daher $p \mid \alpha$.
Sei r die größte Zahl mit $p^r \mid n!$ Wegen $p^k \mid \alpha^k$ und $p^k \nmid k!$ ist

$$p^{r+1} \Bigm| \frac{n!\alpha^k}{k!} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Aus (8) ergibt sich der Widerspruch $p^{r+1} \mid n!$

Aufgabe 7

Zunächst sei an die Candy-Ungleichung für komplexe Zahlen erinnert: Für komplexe Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n$ gilt

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2,$$

wobei dann und nur dann das Gleichheitszeichen steht, falls es eine Konstante $k \in \mathbb{C}$ mit $a_i = k \cdot b_i$, $i = 1, \ldots, n$, gibt.
Diese Ungleichung wird nun mehrfach benutzt:

$$n^2 = |(r_1,\ldots,r_n) \cdot (1,\ldots,1)|^2 \leq n \cdot \left|r_1^2 + \ldots + r_n^2\right| \quad (9)$$

$$\begin{aligned} n^4 = |(r_1,\ldots,r_n) \cdot (1,\ldots,1)|^4 &\leq n^2 \cdot \left|(r_1^2,\ldots,r_n^2)\cdot(1,\ldots,1)\right|^2 \quad (10) \\ &\leq n \cdot n^2 \left|r_1^4 + \ldots + r_n^4\right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^8 = |(r_1,\ldots,r_n) \cdot (1,\ldots,1)|^8 &\leq n^6 \cdot \left|(r_1^4,\ldots,r_n^4)\cdot(1,\ldots,1)\right|^2 \\ &\leq n \cdot n^6 \left|r_1^8 + \ldots + r_n^8\right| \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^{16} = |(r_1,\ldots,r_n) \cdot (1,\ldots,1)|^{16} &\leq n^{14} \cdot \left|(r_1^8,\ldots,r_n^8)\cdot(1,\ldots,1)\right|^2 \\ &\leq n \cdot n^{14} \left|r_1^{16} + \ldots + r_n^{16}\right|. \quad (12) \end{aligned}$$

Wegen $r_1^{16} + \ldots + r_n^{16} = n$ ergibt sich aus (12)

$\left|r_1^8 + \ldots + r_n^8\right|^2 = n^2$ und damit $\left|r_1^8 + \ldots + r_n^8\right| = n$.

Einsetzen in (11) liefert

$\left|r_1^4 + \ldots + r_n^4\right|^2 = n^2$, also $\left|r_1^4 + \ldots + r_n^4\right| = n$.

Durch Einsetzen in (10) folgt

$\left|r_1^2 + \ldots + r_n^2\right|^2 = n^2$, also $\left|r_1^2 + \ldots + r_n^2\right| = n$.

Schließlich erhält man durch Einsetzen in (9):

$$|(r_1,\ldots,r_n)\cdot(1,\ldots,1)|^2 = n\cdot\left|r_1^2+\ldots+r_n^2\right| =$$
$$= \left|r_1^2+\ldots+r_n^2\right|\cdot\left|1^2+1^2+\ldots+1^2\right|.$$

Aus der Bemerkung über die Gleichheit bei der Candy-Ungleichung ergibt sich $r_1 = r_2 = \ldots = r_n$ und mit $r_1 + \ldots + r_n = n$ resultiert $r_i = -1$, $i = 1, \ldots, n$, und $p(x) = (x+1)^n$.

Aufgabe 8

Sei die m-te Differenz von P(n) folgendermaßen definiert:

$$\Delta^m P(n) = \sum_{k=v}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k} P(n+k),\ m = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Dann lauten die Bedingungen:

$\Delta^0 P(0) > 0, \Delta^1 P(0) > 0, \Delta^2 P(0) > 0, \Delta^3 P(0) > 0$ und $\Delta^4 P(n) > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $\Delta^1 P(n) = P(n+1) - P(n)$, $P(n) = \Delta^1 P(n-1) + P(n-1)$, $P(n-1) = \Delta^1 P(n-2) + P(n-2)$, ..., $P(1) = \Delta^1 P(0) + P(0)$ gilt $P(n) = \sum_{k=o}^{n-1} \Delta^1 P(k) + P(0)$.

Wenn man beachtet, daß $\Delta^{m+1}P(n) = \Delta\left(\Delta^m P(n)\right)$ ist, so gilt

$\Delta^{m-1}P(n) = \sum_{k=o}^{n-1} \Delta^m P(k) + \Delta^{m-1} P(0)$. Da $\Delta^4 P(k)$ für jedes k positiv ist und $\Delta^3 P(0)$ positiv ist, kann man darauf schließen, daß $\Delta^3 P(k)$ für jedes k positiv ist und schließlich $\Delta^2 P(k)$, $\Delta^1 P(k)$ und $\Delta^0 P(k) = P(k)$ positiv sind.

Aufgabe 9

Man erkennt leicht $f(0) = 0$ und $f(-x) = -f(x)$ für alle x. Durch Induktion gewinnt man $f(nx) = nf(x)$ für alle natürlichen Zahlen n und alle reellen x. Daher gilt $f(n) = n \cdot f(1) = n$ für alle ganzen Zahlen n. Ferner ist $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n}$ für alle ganzen Zahlen $n \neq 0$. Das liefert $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$ für alle rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$.

Offenbar ist $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$. So resultiert aus $f(a) = f(b)$ $f(a-b) = 0$ und $a = b$. Daher ist für $a^2 \neq a$.

$$\frac{1}{f(a) - f(a^2)} = \frac{1}{f(a(1-a))} = f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{1-a}\right) = \frac{1}{f(a)} + \frac{1}{1-f(a)} =$$

$$= \frac{1}{f(a) - f(a)^2} .$$

Folglich ist $f(a^2) = f(a)^2$ für alle reellen Zahlen a. Für $a < b$ ist $b - a = x^2$ für eine gewisse Zahl x. Man erhält $f(b) - f(a) = f(x)^2 > 0$. Das bedeutet $f(a) < f(b)$. Sei nun x eine reelle Zahl. Dann gibt es Folgen (a_n) und (b_n) aus rationalen Zahlen, so daß x die einzige reelle Zahl mit $a_n < x < b_n$ für alle positiven ganzen Zahlen n ist. Folglich gilt $a_n = f(a_n) < f(x) < f(b_n) = b_n$ für alle n. Mithin ist $f(x) = x$ für alle reellen Zahlen x.

Aufgabe 10

Mögen α, β und γ die Innenwinkel im Dreieck ABC bezeichnen. Dann ist (auch für den stumpfwinkligen Fall) $P = \frac{1}{2} r^2$ (sin 2 + sin 2β + sin 2γ). Die Innenwinkel im Dreieck A'B'C' sind $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\alpha+\gamma}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Folglich ist $Q = \frac{1}{2} r^2 \left(\sin(\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+\beta)\right)$.

Nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel der positiven Zahlen $\sin(\beta+\gamma)$, $\sin(\alpha+\gamma)$, $\sin(\alpha+\beta)$ ist

$$16\, Q^3 = 16 \cdot \frac{1}{8} r^6 \left(\sin(\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+\beta)\right)^3 \geqq$$

$$\geqq 2 \cdot r^6 \cdot 27 \sin(\beta+\gamma) \cdot \sin(\alpha+\gamma) \cdot \sin(\alpha+\beta)$$

$$= 27\, r^6 \left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta+2\gamma)\right] \cdot \sin(\alpha+\beta)$$

$$= 27\, r^6 \left[\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma\right] \cdot \sin(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{27}{2} \cdot r^6 \left[\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin 2\alpha + \sin 2\beta\right]$$

$$= 27 \cdot r^6 \cdot \frac{1}{2} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = 27\, r^4 P,$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 11

Die Funktion f ist durch die Bedingungen eindeutig bestimmt. In der Tat sind dieFunktionswerte fixiert für 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ usw., d. h. für alle $\frac{k}{2^n}$. Da f stetig ist. Da f stetig ist, muß es eindeutig in ganz $[0, 1]$ sein. Fener gilt $f(x) = f(y)$ nur für $x = y$, da aus $f(x) = f(y)$ und $x < y$ auch $f(z) = f(x)$ für alle $z \in [x, y]$ und schließlich für alle $z \in [0,1]$ folgen würde.

Sei $g(x) = \dfrac{f\left(\frac{1}{8}+\frac{x}{8}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)} \equiv A\ f\ (Bx + C) + D.$

Man erkennt $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ und

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = A \cdot f\left(B \cdot \frac{x+y}{2} + C\right) + D = Af\left(\frac{Bx+C}{2} + \frac{By+C}{2}\right) + D =$$
$$= (1-a) \cdot A \cdot f\ (Bx+C) + (1-a)D + a \cdot A \cdot f(By+C) + aD =$$
$$= (1-a)g(x) + a \cdot g(y).$$

Folglich ist $g = f$. Mithin ist

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = g\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{7}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)} \text{ oder } f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{8}\right)}{1 - f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{8}\right)}.$$

Unter Beachtung von $f\left(\frac{1}{2}\right) = a$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = a^2$, $f\left(\frac{1}{8}\right) = a^3$ resultiert

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{a^3}{1-a^2+a^3}.$$

Aufgabe 12

Man nehme o. B. d. A. den Nullpunkt als Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC und setze voraus, daß dieser Kreis den Radius 1 hat. Seien A, B, C die Punkte $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $(\cos\beta, \sin\beta)$, $(\cos\gamma, \sin\gamma)$ und sei $V = (p,q)$. Dann hat BC die Gleichung

$$x \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) + y \sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = \cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) \text{ und analog}$$

gewinnt man die Gleichungen für CA und AB.

Wenn die geforderte Eigenschaft gilt, so ist

$$\Sigma\lambda\left\{x \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) + y \sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) - \cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\right\}^2$$
$$- \varkappa\left\{(x-p)^2 + (y-q)^2\right\} = \text{const.}$$

Die Koeffizienten von x^2 und y^2 liefern

$$\Sigma\lambda \cos^2\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = \Sigma\lambda\sin^2\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = \varkappa \qquad (13)$$

und

$$\Sigma\lambda\cos(\beta+\gamma) = 0. \qquad (14)$$

Der Koeffizient von $x \cdot y$ liefert $\Sigma\lambda \cdot \sin(\beta+\gamma) = 0.$ (15)

Aus (14) und (15) erhält man unschwer

$$\frac{\lambda}{\sin(\beta-\gamma)} = \frac{\mu}{\sin(\gamma-\alpha)} = \frac{\nu}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Äquivalent dazu gilt:

$\lambda : \mu : v = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$.

Man darf $\lambda = \sin(\beta - \gamma)$, $\mu = \sin(\gamma - \alpha)$ und $v = \sin(\alpha - \beta)$ setzen und erhält aus (13) $2\varkappa = \sum \sin(\beta - \gamma)$. (16)

Ferner liefert der Koeffizient von x $2\varkappa p = 2 \sum \sin(\beta - \gamma) \cos \frac{1}{2} \cdot$
$\cdot (\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma) = \sum \sin(\beta - \gamma) (\cos\beta - \cos\gamma)$
$= (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \sum \sin(\beta - \gamma) - \sum \cos\alpha \sin(\beta - \gamma)$.

Aber es ist $2 \sum \cos\alpha \sin(\beta - \gamma) = \sum \{\sin(\alpha + \beta - \gamma) -$
$- \sin(\alpha + \gamma - \beta)\} = 0$ und unter Berücksichtigung von $\varkappa \neq 0$ ergibt sich $p = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, $q = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$.
Daher ist V der Höhenschnittpunkt und die obigen Rechnungen zeigen auch, daß dieser Punkt mit den oben genannten λ, μ, $\varkappa$, die geforderte Eigenschaft hat. Die Aussage $\varkappa \neq 0$ ergibt sich aus der leicht zu beweisenden Identität

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

Aufgabe 13

a) Mögen sich AM und EN in O schneiden. Es ist zu zeigen, daß O auf FP liegt. Dazu reicht es zu zeigen:

$\sphericalangle DFO = \sphericalangle DFP$.

Man sieht unschwer, daß $\triangle AMF \cong \triangle ENF \cong \triangle FPD$ ist (SWS). Folglich ist $\sphericalangle FAM = \sphericalangle FEN = \sphericalangle DFP$ und die Punkte A, E, O und F liegen gemeinsam auf einem Kreis und es ist $\sphericalangle EAO = \sphericalangle EFO$. Mit $\sphericalangle EAO + \sphericalangle FAM = \sphericalangle EFO + \sphericalangle DFO = 60^\circ$ und $\sphericalangle DFO = \sphericalangle FAM$ ist $\sphericalangle DFO = \sphericalangle DFP$.

b) Man mache sich $\triangle OMF \sim \triangle FMA$ klar. Das liefert $\overline{OM} : \overline{OF} =$
$= \overline{FM} : \overline{FA} = 1 : 2$ und $\sphericalangle MOF = \sphericalangle MFA = 120^\circ$. Nun betrachte man das $\triangle OMF$. Nach dem Kosinussatz ist
$\overline{FM}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OF}^2 - 2 \cdot \overline{OM} - \overline{OF} \cdot \cos 120^\circ = 7 \cdot OM^2$.
$\overline{FM} = \sqrt{7} \cdot \overline{OM}$. Folglich ist $\overline{EN} = \overline{FP} = \overline{AM} = 7 \cdot \overline{OM}$, $\overline{OA} = 6 \cdot \overline{OM}$ und $\overline{OP} = 5 \cdot \overline{OM}$. Schließlich beachte man $\triangle OFE \sim \triangle OMF$ und schließt auf $\overline{OF} : \overline{OE} = \overline{OM} : \overline{OF} = 1 : 2$ und auf $\overline{OE} = 4 \cdot \overline{OM}$.
Es ist $\overline{ON} = \overline{EN} - \overline{OE} = 3 \cdot \overline{OM}$ und damit $\overline{OM} : \overline{OF} : \overline{ON} : \overline{OE} : \overline{OP} :$
$: \overline{OA} = 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$.

Aufgabe 14

Durch Induktion über $n \geqq 1$ wird bewiesen, daß es Zahlen a und b

$$\left.\begin{array}{l} \text{mit } (\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{a^2} + \sqrt{2 \cdot b^2} \\ \quad a^2 - 2\, b^2 = (-1)^n \end{array}\right\}$$

gibt. Das gilt für $n = 1$, da

$$\left.\begin{array}{l} (\sqrt{2}+1)^1 = \sqrt{1^2} + \sqrt{2 \cdot 1^2} \\ 1^2 - 2 \cdot 1^2 = (-1)^1 \end{array}\right\}$$

ist. Angenommen für $k \geqq 1$ gibt es Zahlen a, b mit

$$(\sqrt{2}+1)^k = \sqrt{a^2} + \sqrt{2 \cdot b^2} \quad \text{und } a^2 - 2 \cdot b^2 = (-1)^k,$$

dann ist

$$(\sqrt{2}+1)^{k+1} = \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{2b^2}\right)\left(\sqrt{2}+1\right) = \sqrt{(a+2b)^2} + \sqrt{2(a+b)^2} =$$
$$= \sqrt{a_1^2} + \sqrt{2b_1^2}.$$

Offenbar sind die so festgelegten Zahlen a_1 und b_1 positiv ganz. Ferner ist

$$a_1^2 - 2b_1^2 = 2\, b^2 - a^2 = -(a^2 - 2b^2) = (-1)^{k+1}.$$

So gilt die oben getroffene Feststellung. Schließlich ist für gerades n $(\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{a^2} + \sqrt{2b^2}$ und $a^2 - 2b^2 = 1$ oder $2b^2 = a^2 - 1$ und $(\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{a^2} + \sqrt{a^2-1}$.

Und für ungerades n ist

$$(\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{a^2} + \sqrt{2b^2} \text{ und } a^2 - 2b^2 = -1 \text{ oder } a^2 = 2b^2 - 1$$

und $(\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{2b^2} + \sqrt{2b^2-1}$.

Aufgabe 15

Nach der Cauchyschen Ungleichung ist $a + b + c + d \leqq 2\sqrt{1989} < 90$. Da $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ungerade ist, gilt gleiches für $a + b + c + d$. So ist m^2 eine der Zahlen 1, 9, 25, 49, 81.

Aus $(a + b + c + d)^2 > a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ resultiert $m^2 = 49$ oder 81. Sei $d = \max \{a, b, c, d\}$. Angenommen es ist $m^2 = 49$. Dann ist $(49 - d)^2 = (a + b + c)^2 > a^2 + b^2 + c^2 = 1989 - d^2$. Folglich ist $d^2 - 49 \cdot d + 206 > 0$. Die Nullstellen dieses quadratischen Ausdrucks sind etwa 44,3 und 4,7. Daher ist $d > 44$ oder $d \leqq 4$. Andererseits ist $d < 45$, da $45^2 = 2025$ und $d \leqq 4$ impliziert $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leqq 4 \cdot 4^2 < 1989$. Folglich muß $m^2 = 81$ sein.

Es ist $n^2 = d > 16$, da sich aus $d \leqq 16$ $a + b + c + d \leqq 64$ ergibt. Aus $n^2 \leqq 44$ resultiert $n^2 = 25$ oder 36. Angenommen es ist $d = n^2 = 25$. Sei $a = 25-p$, $b = 25-q$, $c = 25-r$ mit $p, q, r \geqq 0$. Aus $a + b + c = 56$ resultiert $p + q + r = 19$. Aus $(25-p)^2 + (25-q)^2 + (25-r)^2 = 1364$ ergibt sich $p^2 + q^2 + r^2 = 439$. Dann liefert $(p + q + r)^2 > p^2 + q^2 + r^2$ einen Widerspruch. Mithin ist $n^2 = 36$.

Es sei bemerkt, daß mit $a \leqq b \leqq c \leqq d$ man aus $a = 15+p$, $b = 15+q$, $c = 15+r$ mit etwas weiterer Rechnung die eindeutige Lösung $a = 12$, $b = 15$, $c = 18$ und $d = 36$ ermittelt.

Aufgabe 16

Für jedes $\underline{s} \in S$ sei $[\underline{s}]$ die Menge aller $\underline{t} \in T$ mit $d(\underline{s}, \underline{t}) \leqq 3$. Dann ist $|[\underline{s}]| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$.

Aus den Voraussetzungen folgt:

für $\underline{t} \in T$ gibt es ein $\underline{s} \in S$ mit $\underline{t} \in [\underline{s}]$ (17)

und falls für $\underline{s}, \underline{s} \in S$ $[\underline{s}] \cap [\underline{s}'] \neq \emptyset$ ist, so ist $\underline{s} = \underline{s}'$ (18)

Daher ist $2^n = 2^k \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ (19)

Wegen $n = 2k-1$ ergibt sich $3 \cdot 2 = k(2k^2 - 3k + 4)$. (20)

Angenommen $k \not\equiv 0$ (3). Dann ist $k = 2^m$ für ein gewisses $m \geqq 3$ und $2k^2 - 3k + 4$ ist durch 4 aber nicht durch 8 teilbar. Wegen (20) ist $2k^2 - 3k + 4 = 12$ und das ist unmöglich. So ist $k = 3 \cdot l$ und $l = 2^q$ für gewisses $q \geqq 1$. Wegen (20) gilt

$2^{3l-2} = l(18\,l^2 - 9l + 4)$ (21)

Mithin ist $2^{3l} < 72 \cdot l^3$ und daher $2^l < 5 \cdot l$. Aber $2^l > 5 \cdot l$ für $l \geqq 5$ (wie man leicht durch Induktion bestätigt). Mithin ist $l \leqq 4$ und $l = 2$ oder 4. Aus (21) ergibt sich $l = 4$, $k = 12$ und $n = 23$.

Mathematische
Gesellschaft
der
Deutschen
Demokratischen
Republik

IMO-AUFGABEN

Zentrales
Komitee
für die
Olympiaden
Junger
Mathematiker

SONDERHEFT

1982

Autorenkollektiv: Dr. K. Engel
Dr. sc. H.-D. Gronau
Dipl.-Math. B. Klipps

Leiter des Autorenkollektivs: Prof. Dr. hab. G. Burosch

Adresse: Prof. Burosch, 25 Rostock, Wilhelm-Pieck-Universität,
Sektion Mathematik, Universitätsplatz 1

Die Lösungen zur Sonderaufgabe bitten wir an die obige Adresse zu senden. Wir korrigieren die Aufgaben, die uns im Verlauf von zwei Monaten nach dem Erscheinungstermin zugehen. Eine Lösung der Sonderaufgabe wird in einem späteren Heft veröffentlicht.

Wir bitten die beteiligten Schüler, ihren Namen, Vornamen, die Klasse, den Namen und die Adresse ihrer Schule anzugeben.

Für Mitteilungen geeigneter Aufgaben (mit oder ohne Lösung) oder Lösungsvarianten zu von uns veröffentlichten Aufgaben sind wir dankbar.

Mathematische Gesellschaft der DDR
BbG 052/17/82

Sonderaufgabe

Welcher der beiden Spieler A bzw. B ist in dem folgenden 2-Personenspiel Favorit? Verwendet werden regelmäßige r-seitige Würfel ($r \geq 2$), von denen jeder auf verschiedenen Seiten verschiedene Nummern trägt und diese Nummern die Zahlen 1,2, ...,r durchlaufen. A würfelt mit n+1 dieser Würfel und bildet die Summe W_A der n größten angezeigten Werte. B würfelt mit n dieser Würfel und bildet die Summe W_B der n angezeigten Werte. B gewinnt, wenn $W_B \geq W_A$ ist.

Aufgaben

Aufgabe 1

Man beweise für reelle Zahlen x_1, x_2, x_3 mit $x_i \geq 0$ und $x_i + x_{i+1} > 0$, $i = 1,2,3 \pmod 3$, die Ungleichung

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_1} + \frac{x_3}{x_1+x_2} \geq \frac{3}{2}\,. \tag{1}$$

Aufgabe 2

Man zeige, daß man unter 9 aufeinanderfolgenden, mit rot bzw. blau gefärbten Zahlen stets 3 gleichfarbige finden kann, die eine arithmetische Folge bilden. Ferner zeige man, daß die Aussage für 8 Zahlen nicht richtig ist.

Aufgabe 3

Es seien n und k positive ganze Zahlen mit $n \geq k$. Man beweise, daß der größte gemeinsame Teiler der Zahlen

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \dots, \binom{n+k}{k} \quad \text{gleich 1 ist.}$$

Aufgabe 4

Es sei

$$s := \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1} \quad , \; n > 0 \quad .$$

Man beweise, daß s keine ganze Zahl ist.

Aufgabe 5

Es sei n eine natürliche Zahl mit n=6 oder $n \geq 8$. Man zeige:

$$\binom{n}{\left[\frac{n-1}{3}\right]} \leq \binom{n-1}{\left[\frac{n-1}{3}\right]+1} + \binom{n-1}{n-2\left[\frac{n-1}{3}\right]-4} \quad , \qquad (2)$$

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichne, die nicht größer als x ist.

Aufgabe 6

Gesucht sind alle Tripel $(A; \omega, \varphi)$ reeller Zahlen, so daß für alle reellen x gilt:

$$\min(\sin x, \cos x) \leq A \sin(\omega x + \varphi) \leq \max(\sin x, \cos x) \qquad (3)$$

Aufgabe 7

Sei $\{a_n\}$ eine unendliche Zahlenfolge mit

$$a_n + a_{n+2} \geq 2\,a_{n+1} \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots \quad . \qquad (4)$$

Man zeige, daß für n= 1,2,3,... gilt:

$$\frac{a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n+1}}{n+1} \geq \frac{a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{2n}}{n} \quad . \qquad (5)$$

Aufgabe 8

Man bestimme alle Tripel nicht negativer ganzer Zahlen (a,b,c) mit

$$9 + 5^a = 3^b + 7^c \quad . \qquad (6)$$

Aufgabe 9

Eine Inselgruppe in einem See bestehe aus n Inseln $I_1, I_2, \ldots I_n$. Je zwei Inseln seien durch höchstens eine Brücke verbunden. Von den Inseln I_j mögen d_j Brücken abgehen, $j=1,2,\ldots,n$. Dabei gelte $d_1 \leqq d_2 \ldots \leqq d_n$ sowie $d_k \geqq k$ für alle $k \leqq n-d_n-1$. Man zeige, daß man zu Fuß (ohne Benutzung anderer Hilfsmittel) von einer beliebigen Insel zu einer beliebigen anderen gelangen kann.

Aufgabe 10

Es sei f(x) eine für alle reellen Zahlen x definierte reellwertige Funktion, die der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x)\, f(y) \text{ für alle } x,y \tag{7}$$

und der Ungleichung

$$f(x) \geqq 1+x \quad \text{für alle } x \tag{8}$$

genügt. Man zeige:

a) f(x) ist streng monoton wachsend,

b) für beliebiges $\varepsilon > 0$ und beliebiges x gibt es eine natürliche Zahl $n_0(x, \varepsilon)$, so daß aus $n > n_0(x, \varepsilon)$ stets

$$f(x + \tfrac{1}{n}) - f(x) < \varepsilon$$

folgt.

Aufgabe 11

Seien Vektoren $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der Länge n über den reellen Zahlen betrachtet und bezeichne $/\underline{a}/ := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$ den Betrag des Vektors $\underline{a}$. Man zeige, daß es unter $k \geqq 2$ Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$, von denen jeder einen Betrag $\geqq 1$ hat, stets zwei Vektoren $\underline{a}_i$ und $\underline{a}_j$ $(i \neq j)$ gibt, für die gilt:

$$/\underline{a}_i + \underline{a}_j/ \geqq \sqrt{\frac{2\,(k-2)}{k-1}}$$

Aufgabe 12

Aus der Menge $\{1,2,\ldots,n\}$, $n \geqq 3$, wird zufällig zunächst eine

Zahl x und dann eine Zahl y gewählt, wobei auch $x=y$ sein kann. Welches der Ereignisse "2 teilt x^2-y^2" und "3 teilt x^2-y^2" hat eine größere Wahrscheinlichkeit?
(Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird definiert als Quotient aus der Anzahl der günstigen Fälle und der Anzahl der der möglichen Fälle).

Aufgabe 13

Man zeige, daß es unter 6 Punkten, die sich in einem Rechteck der Größe 3cm x 4cm befinden, zwei gibt, deren Abstand $\leq \sqrt{5}$cm ist.

(XV. Allunionsolympiade der UdSSR)

Aufgabe 14

Man bestimme diejenigen reellen Zahlen m, für die das Polynom

$$f(x)= x^4+(m-4)\,x^3+(m+4)\,x^2+(m-4)\,x + 1$$

keine reellen Nullstellen besitzt.
(Hinweis: Man beweise zunächst, daß

$$f(x) = (x-y_1\cdot x+1)\,(x^2-y_2\cdot x+1) \qquad (9)$$

ist, wobei y_1, y_2 die Nullstellen von

$$y^2 + (m-4)\,y + m + 2$$

sind.

(Matematuka 8,81)

Aufgabe 15

Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Dann besitzt die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{n} \qquad (10)$$

genau dann eine Lösung (x,y) mit natürlichen Zahlen x,y, wenn n einen Teiler der Form 4k-1 besitzt.

(Ungarische Olympiadeaufgabe)

Lösungen

Aufgabe 1

Wir setzen $a_1 = x_2+x_3$, $a_2 = x_1+x_3$, $a_3 = x_1+x_2$. Dann gilt

$$\left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3}\right)\left(x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3\right)$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2\left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}\right) + x_1x_3\left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}\right) + x_2x_3\left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2}\right)$$
$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + \frac{x_1x_2}{a_1a_2}(a_1-a_2)^2 + \frac{x_1x_3}{a_1a_3}(a_1-a_3)^2 + \frac{x_2x_3}{a_2a_3}(a_2-a_3)^2$$

Es reicht also aus, zu zeigen, daß

$$(x_1+x_2+x_3)^2 \geqq \frac{3}{2}(x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3) = 3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

ist. Diese Ungleichung ist aber äquivalent zu

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1-x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + (x_2-x_3)^2\right\} \geqq 0,$$

die sicher richtig ist.
Gleichheit tritt genau für $x_1=x_2=x_3$ ein.

Bemerkung:
Es liegt nahe, folgende Ungleichung allgemein zu vermuten:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \dots + \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geq \frac{n}{2}\ .$$

Es ist sehr interessant, daß man diese Ungleichung in ähnlicher Weise wie oben für $n=4,5,6$ beweisen kann. Im allgemeinen ist die Ungleichung nicht richtig. Das kleinste Gegenbeispiel ist $n=14$. Für $n=9$ (und 10 andere Werte) ist es noch unbekannt, ob die Ungleichung wahr oder falsch ist.

Aufgabe 2

O.B.d.A. betrachten wir die Zahlen 1,2,...,9 bzw. 1,2,...,8. Wir geben zunächst ein Beispiel für eine Färbung der acht Zahlen an, die keine gleichfarbige arithmetische Folge aus drei Elementen enthält:

rot: 1,2, 5,6
blau: 3,4, 7,8

Jetzt beweisen wir den ersten Teil indirekt, d.h. wir nehmen an, es gibt eine Färbung der Zahlen 1,2,...,9 ohne einfarbige arithmetische Folge der Länge 3. O.B.d.A. sei 5 rot gefärbt. Dann sind 4 und 6 nicht beide rot. Falls 4 und 6 blau sind, so sind 2 und 8 rot, also im Widerspruch zur Annahme 2,5,8 rot. O.B.d.A. sei 4 rot und 6 blau. Da 4 und 5 rot sind ist 3 blau. Da 3 und 6 blau sind, ist 9 rot. Da 5 und 9 rot sind, ist 1 blau. Da 1 und 3 blau sind, ist 2 rot. Da 2 und 5 rot sind, ist 8 blau. Da 5 und 9 rot sind, ist 7 blau. Folglich sind 6,7 und 8 blau und das ergibt einen Widerspruch. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 3

Wir beweisen die Behauptung indirekt; nehmen also an, für den größten gemeinsamen Teiler d der Zahlen

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}$$

gilt: $\qquad d \geq 2.$

Insbesondere ist jede dieser Zahlen durch d teilbar.
Wir betrachten nun die Zahlen

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k},$$

$$\binom{n+1}{k-1} = \binom{n+2}{k} - \binom{n+1}{k},$$

$$\vdots$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k}.$$

Offenbar ist jede dieser Zahlen durch d teilbar. Weiter folgt (per Induktion) auch, daß die Zahlen $\binom{n}{i}, \binom{n+1}{i}, \ldots, \binom{n+i}{i}$, für $i=k,k-1,\ldots,1,0$, sämtlich durch d teilbar sind. Nun ist aber für $i=0$ $\binom{n}{0} = 1$. Also kann d kein Teiler von $\binom{n}{0}$ sein. Folglich muß unsere Annahme falsch sein.

Aufgabe 4

Es sei 3^p die höchste 3-Potenz, die in einer der Zahlen $3,5,\ldots,2n+1$ auftritt. 3^p ist dann die einzige Zahl unter

$3,5,\ldots,2n+1$, die durch 3^p teilbar ist. Sicher ist $3^p \in \{3,5,\ldots,2n+1\}$. Gäbe es nun eine Zahl $a \cdot 3^p \in \{3,5,\ldots,2n+1\}$, $a \in N$, $a > 1$, so ist sicher $a \geqq 3$, denn $a\,3^p$ kann nicht gerade sein. Also ist $3^{p+1} \leqq a\,3^p \leqq 2n+1$ und damit ist $3^{p+1} \in \{3,5,\ldots,2n+1\}$, im Widerspruch zur Maximalität von p.
Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $3,5,\ldots,2n+1$ sei m.
Dann ist

$$s = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{2i+1} \quad ,$$

wobei die Zahlen $\frac{m}{2i+1}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ natürliche Zahlen sind.
Offenbar ist $3 \mid m, 3 \mid \frac{m}{2i+1}$ für $2i+1 \neq 3^p$ und $3 \nmid \frac{m}{3^p}$.
Mithin ist der Zähler $\sum_{i=1}^{n} \frac{m}{2i+1}$ nicht durch 3 teilbar, während es der Nenner m ist. Also kann s keine ganze Zahl sein.

<u>Aufgabe 5</u>

Zunächst sei bemerkt, daß die Ungleichung (2) nur für n=6 und $n \geqq 8$ sinnvoll ist.
Wir unterscheiden drei Fälle.
Fall 1. $n=3a+1$, $a \geqq 3$. Dann ist (2) äquivalent mit

$$\frac{(3a+1)!}{a!(2a+1)!} \leqq \frac{(3a)!}{(a+1)!(2a-1)!} + \frac{(3a)!}{(a-3)!(2a+3)!}$$

bzw.

$$2(3a+1)(a+1)^2(2a+3) \leqq 4a(a+1)(2a+1)(2a+3) + (a+1)a(a-1)(a-2)$$

bzw.

$$5a^4 - 19a^2 - 20a - 6 \geqq 0 \; .$$

Letztere Ungleichung ist wegen

$$5a^4 \geqq 15a^3 \geqq 45a^2 \geqq 19a^2+26a^2 \geqq 19a^2+78a \geqq 19a^2+20a+58a > 19a^2+20+6$$

gewiß richtig.

Fall 2. $n=3a+2$, $a \geqq 2$. Dann ist (2) äquivalent mit

$$\frac{(3a+2)!}{a!(2a+2)!} \leqq \frac{(3a+1)!}{(a+1)!(2a)!} + \frac{(3a+1)!}{(a-2)!(2a+3)!}$$

bzw.

$$(3a+2)(a+1)(2a+3) \leqq (2a+3)(2a+2)(2a+1)+(a+1)a(a-1)$$

bzw.

$$3a^3 + 5a^2 + 2a \geqq 0 \; .$$

Offenbar ist die letzte Ungleichung richtig.

Fall 3. $n=3a+3$, $a \geqq 1$. Dann ist (2) äquivalent mit

$$\frac{(3a+3)!}{a!(2a+3)!} \leqq \frac{(3a+2)!}{(a+1)!(2a+1)!} + \frac{(3a+2)!}{(a-1)!(2a+3)!}$$

bzw.

$$(3a+3)(a+1) \leqq (2a+3)(2a+2) + (a+1)a$$

bzw.

$$2a^2 + 5a + 3 \geqq 0 \quad .$$

Offenbar ist die letzte Ungleichung richtig.

<u>Aufgabe 6</u> (Nach Bodo Heise)

Sei $f(x) := A.\sin(\omega x + \varphi)$. Wegen $\cos x = \sin x$ für $x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$ ist

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = A\,.\sin\left(\omega\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad (11)$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = A.\sin\left(\omega\frac{5\pi}{4} + \varphi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad (12)$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = A.\sin\left(\omega\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad (13)$$

Falls $\omega=0$ ist, so ist $f(x)$ eine Konstante und man erhält einen Widerspruch zu (11) und (12). Sei $z = \frac{\pi}{4} + \varphi$ gesetzt. Aus (11) und (13) ergibt sich

$$\sin Z = \sin(z + 2\omega\pi) \qquad (14)$$

Bekanntlich ist

$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\ \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

und damit erhält man aus (14)

$$\cos(z + \omega\cdot\pi).\ \sin(\omega,\pi) = 0 \qquad (15)$$

Aus (11) und (12) ergibt sich

$$\sin z = -\sin(z + \omega\cdot\pi).$$

Analog erhält man

$$\sin\left(z + \frac{\omega\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega\pi}{2}\right) = 0 \qquad (16)$$

Fall 1 $\omega = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$. Wegen $\cos\left(\frac{\omega\pi}{2}\right) = 0$ wird (16) erfüllt. Wegen $\sin(\omega\pi)=0$ wird (15 erfüllt.

Fall 2 $\omega=2k,\ k \in \mathbb{Z}$. Es ist $\cos\left(\frac{\omega\pi}{2}\right) \neq 0$. Aus (16) folgt damit $\sin\left(z + \frac{\omega\pi}{2}\right) = 0$, $\sin(z + k\pi)=0$, $\sin z=0$ im Widerspruch zu (11).

Fall 3 $\omega \notin \mathbb{Z}$. Es ist $\cos\left(\frac{\omega\pi}{2}\right) \neq 0$ und $\sin(\omega\pi) \neq 0$. Aus (15) folgt damit $\cos(z+\omega\pi)=0$ und

$$z + \omega\pi = \frac{\pi}{2} + k_1\pi\ ,\ k_1 \in \mathbb{Z} \qquad (17)$$

Aus(16) folgt

$$\sin\left(z + \frac{\omega\pi}{2}\right) = 0$$

also

$$z + \frac{\omega\pi}{2} = k_2 \cdot \pi\ ,\ k_2 \in \mathbb{Z}\ . \qquad (18)$$

Aus (17) und (18) ergibt sich durch Subtraktion

$$\frac{\omega\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + (k_1 - k_2)\cdot\pi\ ,$$

$$\omega = 1 + 2\,(k_1 - k_2)$$

im Widerspruch zu $\omega \notin \mathbb{Z}$.

Es können also nur im Fall 1 Lösungen auftreten. Für $|\omega| \geqq 3$ ist die Differenz zwischen zwei benachbarten Nullstellen von $f(x)$ nicht größer als $\frac{\pi}{|\omega|}$, also nicht größer als $\frac{\pi}{3}$. Mindestens eine dieser Nullstellen, etwa x_0, fällt also in das Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$. In diesem Intervall gilt jedoch $\min(\sin x, \cos x) > 0$, also $f(x_0) < \min(\sin x_0, \cos x_0)$.
Es können damit nur für $\omega=1$, $\omega=-1$ Lösungen auftreten.
Wir betrachten zunächst $\omega=1$.

$$f(x) = A \sin(x + \varphi)$$

Für alle φ mit $k\pi - \frac{\pi}{2} < \varphi < k\pi$ $k \in z$ liegt eine Nullstelle von $f(x)$, nämlich $x_0 = k\pi - \varphi$, im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$

und es wird wie oben $f(x_0) < \min(\sin x_0, \cos x_0)$.
Für alle φ mit $k\pi \leq \varphi \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ist $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \neq 0$ und es folgt als notwendige Bedingung aus (11)

$$A = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\varphi + \cos\frac{\pi}{4}\sin\varphi}$$

$$A = \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}$$

Man kann auch für alle φ aus $k\pi \leq \varphi \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$ A so wählen und erhält:

$$f(x) = A \sin(x+\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi} \quad \cos x + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi} \sin x$$

Sei $\lambda = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi}$. Dann gilt, da $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ das gleiche Vorzeichen haben oder höchstens eine von den beiden Funktionen gleich Null ist,

$$0 \leq \lambda \leq 1.$$

$$f(x) = \lambda \cdot \cos x + (1-\lambda) \sin x$$

f(x) ist ein gewichtetes arithmetisches Mittel von sin x und cos x. Für alle x liegt f(x) im abgeschlossenen Intervall $[\sin x, \cos x]$, gleichgültig, ob $\sin x > \cos x$, $\sin x = \cos x$ oder $\sin x < \cos x$.

Es gilt also: $\min(\sin x, \cos x) \leq f(x) \leq \max(\sin x, \cos x)$.

Wir betrachten nun den Fall $\omega = -1$.

Analog zu $\omega = 1$ erhält man für $k\pi < \varphi < k\pi + \frac{\pi}{2}$ keine Lösung.

Für $k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq k\pi$ folgt analog

$$A = \frac{1}{\sin\varphi - \cos\varphi}$$

und man erhält auch als Lösung

$$f(x) = A \sin(-x+\varphi) = \lambda \cdot \cos x + (1-\lambda) \sin x$$

$$\text{mit } \lambda = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi - \cos\varphi}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Als Lösungsmenge der Tripel $(A;\omega;\varphi)$ erhält man

$$L = L_1 \cup L_2 \,,$$

$$L_1 := \left\{ \left(\frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}\,;\, 1;\, \varphi \right) ;\, k\pi \leq \varphi \leq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$L_2 := \left\{ \left(\frac{1}{\sin\varphi - \cos\varphi}\,;\, -1;\, \varphi \right) ;\, k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Aufgabe 7 (Nach Harald Günzel)

Aus $a_n + a_{n+2} \geqq 2a_{n+1}$ folgt für alle n

$$a_n - a_{n+1} \geqq a_{n+1} - a_{n+2} \qquad \text{und}$$

$$\sum_{m=k}^{2n-k} (a_m - a_{m+2}) \geqq \sum_{m=k}^{2n-k} (a_{m+1} - a_{m+2}), \text{ also}$$

$$a_k + a_{2n+2-k} \geqq a_{k+1} + a_{2n+1-k} \quad , \text{ d.h.}$$

$$f(k) \geqq f(k+1) \text{ für } f(k) = a_k + a_{2n+2-k}$$

und per Induktion auch

$$f(k) \geqq f(j) \text{ für } j = k+1,\ k+2, \ldots,\ 2n-2k+1.$$

Mithin ist

$$\sum_{i=1}^{n} f(2i) \leqq n\, f(1) \qquad \text{und}$$

$$\frac{a_1 + a_{2n+1}}{2} \geqq \frac{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}}{n}$$

Weiter folgt

$$n\left(\frac{a_1 + a_{2n+1}}{2} + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}\right) \geqq (n+1)(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n})$$

$$\frac{n}{2}\,(a_1 + a_{2n+1} + 2a_2 + 2a_4 + \ldots + 2a_{2n}) \geqq (n+1)(a_2 + a_4 + \ldots, a_{2n})$$

und wegen $a_{2i-1} + a_{2i+1} \geqq 2a_{2i}$ schließlich

$$\frac{1}{n+1}\,(a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1}) \geqq \frac{1}{n}\,(a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n})$$

für $n = 1, 2, \ldots$.

Aufgabe 8

Man findet schnell die 3 Lösungstipel (0,1,1), (0,2,0) und (2,3,1). Wir zeigen, daß es keine weitere Lösung gibt. Wir nehmen indirekt an, es gibt noch eine weitere Lösung (a,b,c). Dann ist $a \neq 0$, d.h. $a \geqq 1$, also $9+5^a \equiv 14 (20)$, mithin auch

$$3^b + 7^c \equiv 14 \ (20) \qquad (19)$$

3^b und 7^c durchlaufen bzgl. 20 die Restklassen 1,3,9,7 und 1,7,9,3. Also muß wegen (19) $b \equiv 3\ (4)$ und $c \equiv 1\ (4)$ gelten. Für diese b und c gilt $3^b \equiv 11\ (16)$ und $7^c \equiv 7\ (16)$, also wegen (6) $5^a \equiv 9\ (16)$.
Analog zu oben ergibt sich $a \equiv 2\ (4)$.
Jetzt rechnen wir mod 13.
Für $a \equiv 2\ (4)$ ist $5^a + 9 \equiv 8\ (13)$. Außerdem ist für $b = 4k+3$

$$3^b = (81)^k\ 27 \equiv 1,3,9\ (13) \qquad \text{und}$$

für $c = 4m + 1$

$$7^c = (7^4)^m\ 7 \equiv 7,11,4\ (13) \quad .$$

Folglich kann (6) nur für $b = 3\ (12)$ und $c \equiv 1\ (12)$ erfüllt werden.
Also ist insbesondere $b \equiv 3\ (6)$.
Wegen $3^6 \equiv 1\ (7)$ folgt $3^b \equiv -1\ (7)$ und nach (6)

$$5^a = 3^b + 7^c - 9 \equiv -1 + 0 - 2 \equiv 4\ (7). \tag{20}$$

5^a durchläuft in folgender Weise die Restklassen mod 7: 1,5,4,6,2,3 .
Folglich ist nach (20)

$$a \equiv 2\ (6)\ .$$

Für $c > 1$ ist nach (6) $9 + 5^a \equiv 3^b\ (49)$.
Nach obigem Verfahren erhält man als notwendige Bedingung für a und b:

$$\begin{aligned}(a,b) \equiv\ & (2,9),\ (14,3),\ (26,39),\ (38,33)\\ & (8,27),\ (20,21),\ (32,15)\ \text{ mod } 42.\end{aligned}$$

Nun läßt sich leicht zeigen (das überlassen wir dem interessierten Leser), daß $9 + 5^a - 3^b$ für diese Paare (a,b) keine Potenz mod 43 ist, d,h, für $c > 1$ gibt es keine weiteren Lösungstripel.
Sei jetzt $c = 1$. Dann wird (6) zu :

$$2 + 5^a = 3^b\ . \tag{21}$$

Dann ist $b > 3$, d.h. $5^a \equiv -2\ (81)$ und beim Betrachten der Restklassen von 5^a mod 81 folgt $a = 20\ (54)$.

Nun prüft man leicht nach, daß für $a = 54k + 20$ ($k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$) $5^a = (5^{54})^k \cdot 5^{20} \equiv 5^{20} \equiv 35$ (109) gilt, also $2+5^a \equiv 37$ (109). Für $b=6l+3$ ($l \in G, l \geq 0$) ist $3^b = (3^6)^l \cdot 3^3 \equiv 75^l$ 27 (109) und damit durchläuft 3^b die Restklassen 27,63,38,16,1,75,66,45, 105.

Also gibt es keine weiteren Lösungen.

Aufgabe 9

Angenommen, es gibt zwischen zwei gewissen Inseln keinen Fußweg. Dann gibt es auch eine Menge von Inseln, von denen man nicht zu I_n gelangen kann. Seien dies die Inseln $I_{j_1}, I_{j_2}, \dots, I_{j_k}$ ($1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k < n$). Von allen anderen Inseln möge man zu I_n gelangen. Da I_n mit d_n anderen Inseln durch eine Brücke verbunden ist, gilt $k \leq n-1-d_n$. Nun ist I_{j_k} mit d_{j_k} Inseln, also wegen $j_k \geq k$ mit wenigstens d_k Inseln verbunden und nach Voraussetzung gilt $d_k \geq k$. Folglich ist I_{j_k} mit einer gewissen Insel $I_{j_{k+1}}$ ($j_{k+1} \notin \{j_1, \dots, j_k\}$) durch eine Brücke verbunden. Es gibt aber einen Fußweg von $I_{j_{k+1}}$ nach I_n, also auch einen von I_{j_k} nach I_n. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung.

Aufgabe 10

a) Aus (7) folgt $f(0+0)=f(0)\ f(0)$. Wegen (8) ist $f(0) \neq 0$, also

$$f(0) = 1. \tag{22}$$

Wegen $f(x)=f(\frac{x}{2})\ f(\frac{x}{2})$ ist $f(x) \geq 0$ für alle reellen x. Aus $1 = f(0) = f(x)\ f(-x)$ folgt $f(x) \neq 0$, also

$$f(x) > 0 \text{ für alle } x \tag{23}$$

Wegen (7), (8) und (23) gilt nun für $h > 0$

$$f(x+h) - f(x) = f(x) \cdot (f(h)-1) \geq f(x) \cdot h > 0.$$

Folglich ist f(x) streng monoton wachsend.

b) Wegen (8) ist $f(-\frac{1}{n}) \geq 1-\frac{1}{n}$ für jede natürliche Zahl $n \neq 0$, also wegen (7)

$$f(-1) = f\left(-\frac{n}{n}\right) = \left(f\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^n \geq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n . \qquad (24)$$

Aus (7) und (22) folgt $1 = f(0) = f(1)\ f(-1)$, also wegen (7) und (24)

$$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = f(1) = \frac{1}{f(-1)} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n , \text{ d.h.}$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1 + \frac{1}{n-1} . \qquad (25)$$

Nun ist wegen (7) und (25)

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x) = f(x)\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \leq \frac{f(x)}{n-1} . \qquad (26)$$

Wählen wir $n_0(x,\varepsilon) := \left[\frac{f(x)}{\varepsilon}\right] + 1$ ($[z]$ sei die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist), so gilt

für $n > n_0(x,\varepsilon)$

$n-1 \geq n_0(x,\varepsilon)\quad \frac{f(x)}{\varepsilon}$, d.h.

$$\frac{f(x)}{n-1} < \varepsilon . \qquad (27)$$

Aus (26) und (27) erhalten wir für $n > n_0(x,\varepsilon)$

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x) < \varepsilon .$$

<u>Bemerkung:</u> Man kann zeigen, daß die einzige Funktion, die den Bedingungen (7) und (8) genügt, die Funktion $f(x) = e^x$ ist.

<u>Aufgabe 11</u> (Nach G.O.H. Katona)

Für zwei Vektoren $\underline{a} = (a_1,\dots,a_n)$, $\underline{b} = (b_1,\dots,b_n)$ sei ihr Skalarprodukt definiert als $\underline{a}\ \underline{b} = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$. Dann gilt

$$|\underline{a}|^2 = \underline{a}\ \underline{a} = \underline{a}^2 .$$

Wir betrachten nun

$$\sum_{1\leq i<j\leq k} |\underline{a}_i + \underline{a}_j|^2 = \sum_{1\leq i<j\leq k} (\underline{a}_i + \underline{a}_j)^2$$

$$= \sum_{1\leq i<j\leq k} \underline{a}_i^2 + 2\,\underline{a}_i\ \underline{a}_j + \underline{a}_j^2$$

$$= (k-1) \sum_{i=1}^{k} \underline{a}_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq k} 2 \cdot \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j$$

$$= (k-2) \cdot \sum_{i=1}^{k} \underline{a}_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{k} \underline{a}_i \right)^2$$

$$= (k-2) \sum_{i=1}^{k} \cdot |\underline{a}_i|^2 + \left| \sum_{i=1}^{k} \underline{a}_i \right|^2$$

$$\geq (k-2) \cdot k \,.$$

Da unsere Ausgangssumme $\binom{k}{2}$ Summanden hat, muß es einen Summand und damit auch Indizes i,j $(i < j)$ derart geben, daß

$$|\underline{a}_i + \underline{a}_j|^2 \geq \frac{(k-2)\ k}{\binom{k}{2}} = \frac{2(k-2)}{k-1}$$

ist. Das beweist die Behauptung.

Aufgabe 12

Wir zeigen, daß das Ereignis "3 teilt x^2-y^2" eine größere Wahrscheinlichkeit hat. Die Zahlen x und y können auf n^2 Weisen gewählt werden. Es genügt zu zeigen, daß die Anzahl A_3 der Paare (x,y) mit $x,y \in \{1,\ldots,n\}$ und $3 | (x^2-y^2)$ größer ist als die Anzahl A_2 der Paare (x,y) mit $x,y \in \{1,\ldots,n\}$ und $2 | (x^2-y^2)$.
Damit $2 | (x^2-y^2)$ müssen x und y gleichzeitig gerade oder ungerade sein. In $\{1,\ldots,n\}$ gibt es $\left[\frac{n}{2}\right]$ gerade und $n- \left[\frac{n}{2}\right]$ ungerade Zahlen. ($[x]$ ist die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist) Also gibt es $A_2 = \left[\frac{n}{2}\right] + (n- \left[\frac{n}{2}\right])^2$ Paare (x,y), wo x,y beide gerade oder ungerade sind.
Damit $3 | (x^2-y^2)$ müssen x und y gleichzeitig durch 3 oder gleichzeitig nicht durch 3 teilbar sein.
In $\{1,\ldots,n\}$ gibt es $\left[\frac{n}{3}\right]$ und $n- \left[\frac{n}{3}\right]$ Zahlen, die durch 3 bzw. nicht durch 3 teilbar sind. Also gilt

$$A_3 = \left[\frac{n}{3}\right]^2 + (n- \left[\frac{n}{3}\right])^2$$

Es ist $A_3 - A_2 = 2n \left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{m}{3}\right] + 2 \left(\left[\frac{n}{3}\right]^2 - \left[\frac{n}{2}\right]^2 \right) \right.$

$$= 2n \left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] \right) \left(1 - \frac{1}{n} \left(\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] \right) \right)$$

Für $n > 3$ ist offenbar

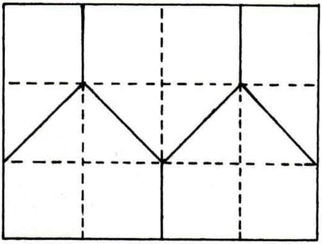
$$\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] \geq \frac{n-1}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n-3}{6} > 0 \qquad \text{und}$$

$$\frac{\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n} \leq \frac{\frac{n}{3} + \frac{n}{2}}{n} < 1.$$

Also gilt $A_3 - A_2 > 0$.

Aufgabe 13

Wir zerlegen das Rechteck wie folgt in Teilfiguren.



In einer der Teilfiguren (oder auf ihrem Rand) müssen sich demnach zwei dieser Punkte befinden. Ihr Abstand ist dann

$$\leqq \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad .$$

Aufgabe 14

Es ist

$$(x^2 - y_1 x + 1)(x^2 - y_2 x + 1) = \underbrace{x^4 + (-y_1 - y_2)x^3 + (y_1 y_2 + 2)x^2 + (-y_1 - y_2)x + 1}_{= f(x)}$$

nach dem Satz von VIETA, denn $y_1 + y_2 = -(m-4)$ und $y_1 \; y_2 = m+2$.

Bezüglich der Diskriminante $D = (m-4)^2 - 4(m+2)$ unterscheiden wir die Fälle:

$D<0$: Dann sind auch alle Nullstellen von $f(x)$ nichtreell. Andernfalls sei x_1 eine reelle Nullstelle von x^2-y_1x+1. Die zweite Nullstelle x_2 dieses Polynoms ist ebenfalls reell, da $x_1 \neq 0$ und $x_2={}^1/x_1$ ist. Dann ist aber auch $x_1+x_2=y_1$ reell, was im Widerspruch zu $D<0$ steht.

$D\geq 0$: Damit die Nullstellen nichtreell sein sollen müssen die Diskriminanten von x^2-y_1x+1, x^2-y_2x+1 negativ sein, d.h. $y_1^2-4<0$, $y_2^2-4<0$.

Damit erhalten wir vier nichtreelle Nullstellen, wenn $D<0$ oder $D\geq 0$ und $y_1^2-4<0$, $y_2^2-4<0$ gilt.
Es ist $D=m^2-12m+8=(m-(6-2\sqrt{7}))(m-(6+2\sqrt{7}))$, d.h.

$$D<0 \iff 6-2\sqrt{7}<m<6+2\sqrt{7} \tag{28}$$

Weiter gilt y_1^2-4, $y_2^2-4<0 \iff (y_1^2-4)(y_2^2-4)>0$ und $y_1^2+y_2^2<8$, sowie

$$y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=(m-4)^2-2(m+2)=m^2-10m+12$$

$$(y_1^2-4)(y_2^2-4)=(y_1y_2)^2-4(y_1^2+y_2^2)+16=(m+2)^2-4(m^2-10m+12)$$
$$+16=-3m^2+44m-28$$

Wir erhalten im Fall $D\geq 0$ also vier nichtreelle Nullstellen,

$$D\geq 0 \iff m\leq 6-2\sqrt{7} \text{ oder } m\geq 6+2\sqrt{7}$$

$$y_1^2+y_2^2<8 \iff 0<m^2-10m+4=(m-(5-\sqrt{21}))(m-(5+\sqrt{21}))$$
$$\iff 5-\sqrt{21}<m<5+\sqrt{21}$$

$$(y_1^2-4)(y_2^2-4)>0 \iff -3m^2+44m-28>0 \iff \tfrac{2}{3}<m<14.$$

Als zweiten Bereich erhalten wir folglich

$$\tfrac{2}{3}<m\leq 6-2\sqrt{7}\,. \tag{29}$$

$f(x)$ hat vier nichtreelle Nullstellen, wenn $\frac{2}{3}<m\leq 6-2\sqrt{7}$ ist.
Die gesuchten Bereiche sind durch (28) und (29) gegeben.

Aufgabe 15

Hat n einen Teiler der Form $t = 4k-1$, so gilt

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{kt} = \frac{t+1}{kt} = \frac{4k}{k\,t} = \frac{4}{t}$$

Ist $n = n' \ t$, so lösen $x = n'k$, $y = n'kt$ die Gleichung.

Sei nun (x,y) eine Lösung der Gleichung (10). Dann folgt

$$4xy = n(x+y)$$

d sei der g.g.T. von x und y, sowie $x=dx_1$, $y= dy_1$, wobei x_1 und y_1 teilerfremd sind. Wir erhalten:

$$4dx_1 \, y_1 = n(x_1+y_1)$$

Da n ungerade ist folgt $4 | (x_1 + y_1)$. Da weiter x_1 und y_1 teilerfremd sind, muß eine von ihnen die Form $4k-1$, die andere $4l+1$ besitzen. O.B.d.A. sei $x_1=4k-1$. Nun ist offenbar x_1 zu $x_1 + y_1$ teilerfremd, d.h. x_1 ist Teiler von n und damit $4k-1$ ein Teiler von n.

Lösung und Auswertung der Sonderaufgabe aus Heft 6

In Heft 6 wurde folgende Sonderaufgabe gestellt:

R sei eine Menge von genau 6 Elementen. Eine Menge F von Teilmengen von R wird S-Familie über R genau dann genannt, wenn sie die 3 Bedingungen,

(1) Für keine 2 Mengen X,Y aus F gilt : $X \subseteq Y$,

(2) Für je 3 Mengen X,Y,Z aus F gilt: $X \cup Y \cup Z \neq R$,

(3) Es gilt: $\bigcup_{X \in F} X = R$,

erfüllt. $|F|$ bezeichne die Anzahl der Elemente von F (d.h. Teilmengen von R, die in F enthalten sind). Man bestimme (falls existent) $n= \max |F|$, wobei das Maximum über alle S-Familien über R genommen wird.

Zu dieser Sonderaufgabe ging nur eine Lösung vom Schüler

Bodo H e i s e, EOS "F.I. Curie", Görlitz

ein. Seine Lösung ist im wesentlichen mit der folgenden Musterlösung identisch.

1.

Die Elemente von R seien mit x_1, $x_2, \ldots, x_6$ bezeichnet. Die Menge $G = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_6\}\}$ ist sicher eine S-Familie, d.h. es gibt S-Familien. Da jede S-Familie in der Potenzmenge von R enthalten ist, gibt es nur endlich viele S-Familien über R und die Mächtigkeit jeder dieser Familien ist durch die Mächtigkeit der Potenzmenge 2^6 beschränkt. Also existiert n.

Im folgenden bezeichne F eine S-Familie mit $|F| = n$. Dann ist $\emptyset \notin F$ und $R \notin F$. $\emptyset \notin F$ ($R \notin F$) impliziert $|F| = 1$ wegen (1), was aber $n \geq |G| = 6$ widerspricht.

2.

Für jedes $X \in F$ ist $|X| = 3$. Diese Aussage beweisen wir indirekt. Es sei $X \in F$ mit $|X| = 5$ bzw. $|X| = 4$. O.B.d.A. sei $R \setminus X = \{x_6\}$ bzw. $R \setminus X \{x_5, x_6\}$. Wegen (3) gibt es eine Menge $Y \in F$ mit $x_6 \in Y$ bzw. zwei (nicht notwendig verschiedene) Mengen $Y, Z \in F$ mit $x_5 \in Y$ und $x_6 \in Z$. Nun ist aber $X \cup Y = R$ bzw. $X \cup Y \cup Z = R$, was (2) widerspricht.

3.

Für jedes $X \in F$ ist $|X| \leq 2$. Auch diese Aussage beweisen wir indirekt. Wir nehmen an, daß $F' = \{X: \ X \in F, \ \ |X| = 3\}$ nicht leer ist. Wegen (2) liegt in F' mit X nicht das Komplement $R \setminus X$.

Ist $|X \cap Y| = 1$ für gewisse $X, Y, \in F'$, so ist o.B.d.A. $R \setminus \{X, Y\} = \{x_6\}$. Wegen (3) existiert eine Menge $Z \in F$ mit $x_6 \in Z$. $X \cup Y \cup Z = R$ widerspricht aber (2). Mithin ist $|X \cap Y| = 2$ für alle $X, Y, \in F'$. Wir unterscheiden die folgenden Fälle.

a) $|F'| \leq 2$, b) $|F'| = 3$ und c) $|F'| \geq 4$.

Im Fall a) enthält F' o.B.d.A. die Menge $\{x_1,x_2,x_3\}$.
Im Fall b) ist F' o.B.d.A. genau eine der beiden Familien

$b_1)$ $\{\{x_1,x_2,x_3\}, \{x_1,x_2,x_4\}, \{x_1,x_2,x_5\}\}$ und

$b_2)$ $\{\{x_1,x_2,x_3\}, \{x_1,x_2,x_4\}, \{x_1,x_3,x_4\}\}$.

Im Fall c) enthalten je 3 Mengen eine der Konstellationen $b_1)$ oder $b_2)$. Es folgt unmittelbar, daß $|F'| \leq 4$ ist, denn zu den 3 Mengen von $b_1)$ bzw. $b_2)$ lassen sich jeweils nur $\{x_1,x_2,x_6\}$ bzw. $\{x_2,x_3,x_4\}$ hinzufügen, so daß $|X \cap Y| = 2$ für je zwei $X,Y \in F'$ erhalten bleibt.
Wir betrachten nun $F'' = \{X\colon X \subset Y \in F', |X| = 2\}$. Es ist leicht zu überprüfen, daß $(F \setminus F') \cup F''$ wieder eine S'Familie ist.
Nun ist aber im Fall a)

$$|F'| \leq 2 < 3 = |\{\{x_1,x_2\}, \{x_1,x_3\}, \{x_2,x_3\}\}| \leq |F''|,$$

und in den Fällen b) und c)

$$|F'| \leq 4 < 5 = |\{\{x_1,x_2\}, \{x_1,x_3\}, \{x_2,x_3\}, \{x_1,x_4\}, \{x_2,x_4\}\}| \leq |F''| .$$

Damit ist $|(F \setminus F') \cup F''| > |F|$, was unserer Annahme, $|F|=n$, widerspricht.

4.
Aus 1., 2. und 3. folgt, daß für jedes $X \in F$: $|X| = 1$ oder $|X| = 2$ gilt. Es sei $F_1 = \{X\colon \in F, |X| = 1\}$ und $F_2 = \{X\colon X \in F, |X| = 2\}$. Dann ist $F = F_1 \cup F_2$. Wegen (1) ist offenbar außerdem $x_i \notin X \in F_2$ für alle $\{x_i\} \in F_1$, d.h. für alle $X \in F_2$ ist $X = R \setminus (\bigcup_{X \in F_1} X)$ und damit

$$|F_2| \leq \binom{6-|F_1|}{2} .$$

Für $|F_1| = 1$ folgt $|F| \leq 1 + \binom{5}{2} = 11$. Tatsächlich ist

$$H = \{\{x_1\}\} \bigcup_{2 \leq i < j \leq 6} \{\{x_i,x_j\}\}$$

eine S-Familie. Also $n \geq 11$.

Für $2 \le |F_1| \le 4$ folgt $|F| \le |F_1| + \binom{6-|F_1|}{2} \le |F_1| + \binom{4}{2} = 10$, was $|F| = n \ge 11$ widerspricht.
Für $5 \le F_1 \le 6$ ist $|F_2| = 0$ und $|F| = |F_1| \le 6$, was $n \ge 11$ widerspricht.
Schließlich betrachten wir den Fall $|F_1| = 0$, d.h. F besteht nur aus Mengen der Mächtigkeit 2. Wir zerlegen die Menge der 15 zweielementigen Teilmengen von R in die Mengen

$$\{\{x_1,x_2\}, \{x_3,x_4\}, \{x_5,x_6\}\},$$
$$\{\{x_1,x_3\}, \{x_2,x_5\}, \{x_4,x_6\}\},$$
$$\{\{x_1,x_4\}, \{x_2,x_6\}, \{x_3,x_5\}\},$$
$$\{\{x_1,x_5\}, \{x_2,x_4\}, \{x_3,x_6\}\},$$
$$\{\{x_1,x_6\}, \{x_2,x_3\}, \{x_4,x_5\}\}.$$

Wegen (2) kann F aus jeder dieser 5 Familien höchstens 2 Mengen besitzen, d.h. $|F| = 10$, was aber $|F| = n \ge 11$ widerspricht.

5.
Insgesamt haben wir bewiesen, daß F nur dann 11 Elemente hat, wenn F eine Menge $\{x_i\}$ und alle zweielementigen Mengen von $R \setminus \{x_i\}$ enthält. Da H und alle Familien, die man aus H durch Permutieren der Indices erhält, die Mächtigkeit 11 haben, ist $n = 11$.